

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTOS NA APLICAÇÃO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN
LOCAL MODIFICADO A PROBLEMAS DE PLACA DE MINDLIN

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
ENGENHARIA MECÂNICA

PABLO ANDRÉS MUÑOZ ROJAS

FLORIANÓPOLIS, JULHO DE 1994

DESENVOLVIMENTOS NA APLICAÇÃO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN
LOCAL MODIFICADO A PROBLEMAS DE PLACA DE MINDLIN

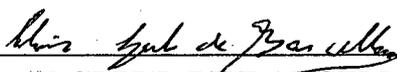
PABLO ANDRÉS MUÑOZ ROJAS

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE

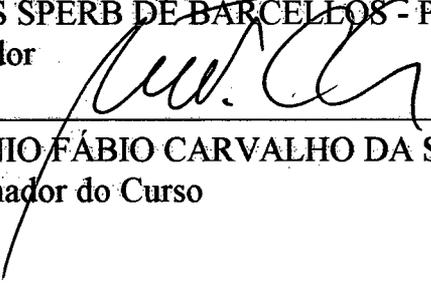
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO E ANÁLISE DE COMPONENTES
MECÂNICOS

E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO
CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

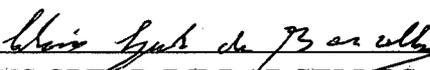


CLOVIS SPERB DE BARCELLOS - Ph. D.
Orientador



ANTÔNIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA - Dr. Eng.
Coordenador do Curso

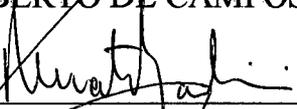
BANCA EXAMINADORA



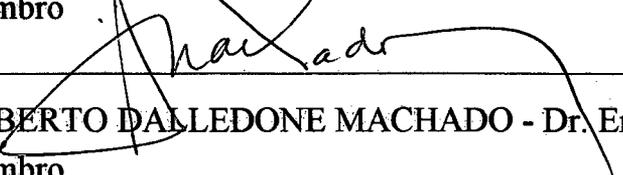
CLOVIS SPERB DE BARCELLOS - Ph. D.
Presidente



CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE - Ph. D.
Membro



RENATO BARBIERI - Dr. Eng.
Membro



ROBERTO DALLEDONE MACHADO - Dr. Eng.
Membro

*A meus pais, Héctor e Juana, que na
trajetória da minha formação, se constituíram num
modelo de valores que sempre me guiou;*

*A minhas irmãs Maria Verónica e Sandra,
com gratidão pela compreensão e tolerância;*

À Maike, com todo o carinho do mundo.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Clovis Sperb de Barcellos, pela valiosa orientação prestada, nos momentos de incertezas e dúvidas no desenvolvimento desta pesquisa;

Ao Prof. Domingos Boechat Alves por ter-me mostrado a importância dos alicerces matemáticos no estudo dos fenômenos físicos e dos métodos numéricos. Desejo agradecer-lhe, também, pelo incansável incentivo que sempre me proporcionou, e que certamente influenciou decisivamente para que eu enveredasse por este campo do conhecimento;

Ao Prof. Pedro Parreira, do Instituto Superior Técnico de Lisboa, que amavelmente cedeu uma cópia da sua tese de doutorado;

Aos integrantes do "Green Team" - Renato Barbieri, Roberto Dalledone Machado, Agenor Dias Meira Jr., Marcelo Maldaner e Carlo Giuseppe Filippin - pela amizade e suas contribuições no contexto do Método da Função de Green Local Modificado;

A todos os amigos e colegas de trabalho, particularmente, Marco Antônio Luersen, Armando Sá Ribeiro Jr., Geraldo Belmonte, Daniel Martins, Jucélio Tomás Pereira, Tancredo Westphal Jr., José Aguiomar Foggato, Antônio André Novotny e Eduardo Yuji Sakurada pelas conversas compartilhadas e agradável ambiente proporcionado;

A meu amigo Emílio Purnhagen, que gentilmente me proporcionou todas as ferramentas necessárias para a elaboração gráfica da versão final da dissertação aqui apresentada;

Ao CNPq pela bolsa de Iniciação Científica concedida durante o último ano da minha graduação, para trabalhar no GRANTE - Grupo de Análise de Tensões do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC, onde tive a oportunidade de estudar assuntos e desempenhar atividades que muito contribuíram para a minha formação acadêmica, sendo importantes para o sucesso deste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro a esta pesquisa através da bolsa de estudos concedida.

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações.....	x
Lista de Tabelas.....	xiv
Resumo	xv
Abstract.....	xvi
1. - Introdução.....	1
1.1. - Métodos Numéricos em Análise Estrutural.....	1
1.1.1. - O Método dos Resíduos Ponderados (WRM)	3
1.1.2. - O Método dos Elementos Finitos.....	5
1.1.3. - O Método dos Elementos de Contorno	7
1.1.4. - O Método da Função de Green Local Modificado	8
1.2. - Objetivos do Trabalho	10
1.3. - Descrição do Trabalho	11
2. - O Método da Função de Green Local Modificado.....	13
2.1. - Introdução e Revisão Bibliográfica.....	13
2.2. - Notações e Preliminares	20
2.3. - Relação Generalizada de Reciprocidade.....	22
2.4. - Particularização da Relação Generalizada de Reciprocidade para o MLGFM	27
2.5. - Formalismo do MLGFM.....	28
2.6. - Aproximação Numérica Convencional	33
2.7. - Aproximação Convencional das Projeções da Função de Green	37
2.8. - Determinação Direta Convencional das Matrizes de Green	42
2.9. - Aproximação Numérica Alternativa	43

2.10. - Aproximação Alternativa das Projeções da Função de Green	45
2.11. - Determinação Alternativa dos Sistemas Finais de Contorno e Domínio	47
2.12. - Multiplicadores de Lagrange	50
3. - Revisão e Aplicações Seleccionadas do MLGFM para o Problema de Placa de Reissner-Mindlin	52
3.1. - Introdução	52
3.2. - Modelo da Placa de Mindlin.....	56
3.3. - Identificação dos Operadores Matemáticos Envolvidos na Formulação do MLGFM para Flexão de Placa de Reissner-Mindlin ..	60
3.4. - Resultados Mediante a Formulação no Sistema de Referência Global	61
3.4.1. - Análise de Esforços	62
3.4.1.1. - Placa Simplesmente Apoiada (Hard) com Condições de Simetria	62
3.4.1.2. - Placa Simplesmente Apoiada (Soft) com Condições de Simetria	66
3.4.1.3. - Placa Engastada com Simetria.....	69
3.4.2. - Análise de Convergência Puntual Mediante Refino h	76
3.4.3. - Análise de Deslocamentos Transversais.....	79
3.4.3.1. - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada.....	79
3.4.3.2. - Placa Quadrada Engastada	80
3.4.3.3. - Placa Circular Engastada.....	83
3.5. - Uma Formulação no Sistema de Referência Local para o MLGFM...	85
3.6. - Aspectos de Condicionamento Numérico	89

4. - Desenvolvimento do MLGFM para o Problema de Vibração Livre de Placa de Reissner-Mindlin	97
4.1. - Introdução	97
4.2. - Equações de Movimento	102
4.3. - Formalismo do MLGFM para Problema Dinâmico de Placa de Mindlin	104
4.4. - Formulação Numérica	107
5. - Aplicações e Resultados Numéricos do MLGFM para Vibração Livre de Placa de Mindlin	110
5.1. - Introdução	110
5.2. - Casos Estudados.....	111
5.2.1. - Validação de Resultados - Placa Quadrada.....	112
5.2.2. - Análise do "Lumping"	127
5.2.3. - Estabilidade frente Variação do Coeficiente de Apoio Elástico do Problema Adjunto.....	134
5.2.4. - Placa Circular Engastada.....	136
6. - Conclusões e Sugestões	139
Referências Bibliográficas.....	142

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura	Página
Figura 1.1. O Método dos Resíduos Ponderados com suas particularizações relativas a este trabalho.....	2
Figura 2.1. Aproximação local da Função de Green.....	15
Figura 2.2. Relações entre espaços para que H possua a propriedade do traço.	21
Figura 2.3. Fórmula generalizada de Green para o operador A	23
Figura 2.4. Bilinear Global Concomitante de A	23
Figura 2.5. Forma bilinear - Descrição do operador $A: H \rightarrow F'$	25
Figura 2.6. Identificação dos espaços H_A e F_{A^*}	26
Figura 2.7. Efeito da aplicação do operador N' no problema original	31
Figura 2.8. Efeito da aplicação do operador N' no problema do operador adjunto.....	31
Figura 2.9. Nó duplo numa malha de contorno com correspondente nó simples numa malha de domínio	50
Figura 3.1. Elementos básicos de uma casca ou placa.....	53
Figura 3.2. Superfície média	56
Figura 3.3. Convenção para o sentido positivo dos esforços no sistema de referência global.	58
Figura 3.4. Placa simplesmente apoiada - quadrante modelado e condições de contorno.....	63
Figura 3.5 Perfil do esforço cortante Q_x na lateral direita da placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito).....	64

Figura 3.6. Perfil de momento normal M_{xx} ao longo do centro da placa (Lateral Esquerda do Quadrante Superior Direito)	65
Figura 3.7. Perfil de momento M_{xy} na lateral direita da placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito).....	66
Figura 3.8. Placa simplesmente apoiada "soft" - quadrante modelado e condições de contorno	67
Figura 3.9 Perfil do esforço cortante Q_x na lateral direita da placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito).....	68
Figura 3.10. Perfil de momento normal M_{xx} ao longo do centro da placa (Lateral Esquerda do Quadrante Superior Direito).....	69
Figura 3.11. Placa engastada - quadrante modelado e condições de contorno	69
Figura 3.12. Malha de domínio do quadrante modelado da placa engastada	70
Figura 3.13. Perfil de esforço cortante Q_x na lateral direita da placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito)	70
Figura 3.14. Perfil de momento normal M_{xx} ao longo do centro da placa (Lateral Esquerda do Quadrante Superior Esquerdo).....	71
Figura 3.15. Perfil de momento normal M_{xx} na lateral direita da placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito)	72
Figura 3.16. Perfil de momento M_{xy} ao longo da lateral direita da placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito)	73
Figura 3. 17. Malha 8 x 8 de domínio para reanálise do caso de placa Engastada	74
Figura 3.18. Perfil de esforço cortante Q_x na lateral direita da placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito)	75
Figura 3.19. Perfil de momento normal M_{xx} ao longo do centro da placa (Lateral Esquerda do Quadrante Superior Esquerdo).....	75

Figura 3.20. Perfil de momento M_{xy} ao longo da lateral direita da placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito)	76
Figura 3.21. Placa engastada - Convergência h do momento normal no centro do lado	77
Figura 3.22. Placa engastada - Convergência h do momento normal central	78
Figura 3.23. Placa simplesmente apoiada - Convergência h do momento normal central	78
Figura 3.24. Placa simplesmente apoiada - Convergência h do esforço cortante normal no centro do lado	79
Figura 3.25. Numeração dos nós da malha de elementos finitos.....	80
Figura 3.26. Análise do "locking" numa placa engastada - Elemento QSR..	82
Figura 3.27. Análise do "locking" numa placa engastada - Elemento QLR .	82
Figura 3.28. Discretização da placa circular engastada	83
Figura 3.29. Perfil de deslocamentos transversais para placa circular engastada com carregamento unitário uniforme.....	84
Figura 3.30. Sistema de referência local	86
Figura 3.31. Análise do condicionamento numérico - placa engastada Sistema Não Simplificado	91
Figura 3.32. Análise do condicionamento numérico - placa engastada Sistema Simplificado.....	92
Figura 3.33. Análise do condicionamento numérico - placa simplesmente apoiada - Sistema Não Simplificado.....	93
Figura 3.34. Análise do condicionamento numérico - placa simplesmente apoiada - Sistema Simplificado	94
Figura 3.35. Condicionamento numérico (apoio elástico simples)- placa simplesmente apoiada -	96
Figura 5.1. Condições de contorno	112

Figura 5.2. Caso CCCC: 6 primeiros modos de vibração	114
Figura 5.3. Caso CCCC: Modos 7 a 10.....	115
Figura 5.4. Caso SFSF: Primeiros 6 modos de vibração.....	117
Figura 5.5. Caso SFSF: Modos 7 a 10.....	118
Figura 5.6. Caso CFCF: Primeiros 6 modos de vibração.....	120
Figura 5.7. Caso CFCF: Modos 7 a 10.....	121
Figura 5.8. Caso CFSF: Primeiros 6 modos de vibração	123
Figura 5.9. Caso CFSF: Modos 7 a 10.....	124
Figura 5.10. Caso CFFF: Primeiros 6 modos de vibração	125
Figura 5.11. Caso CFFF: Modos 7 a 10.....	126
Figura 5.12. Caso SFFF: Primeiros 6 modos de vibração.....	128
Figura 5.13. Caso SFFF: Modos 7 a 10.....	129
Figura 5.14. Modo espúrio - Caso CFCF	133
Figura 5.15. Discretização da placa circular engastada	137

LISTA DE TABELAS

Tabela	Página
Tabela 1.1. Relação das funções peso que particularizam o WRM	4
Tabela 3.1. Esforço cortante adimensionalizado: MLGFM x FEM - placa simplesmente apoiada (hard).....	65
Tabela 3.2. Esforço cortante adimensionalizado: MLGFM x FEM - placa simplesmente apoiada (Soft)	68
Tabela 3.3. Esforço cortante adimensionalizado: MLGFM x FEM - placa engastada	71
Tabela 3.4. Deslocamentos transversais.....	81
Tabela 5.1. Caso 1 - CCCC	113
Tabela 5.2. Caso 2 - SFSF	116
Tabela 5.3. Caso 3 - CFCF	119
Tabela 5.4. Caso 4 - CFSF.....	122
Tabela 5.5. Caso 5 - CFFF.....	122
Tabela 5.6. Caso 6 - SFFF.....	127
Tabela 5.7. Análise do lumping: Caso 3 - CFCF.....	132
Tabela 5.8. Análise do lumping: Caso 4 - CFSF	134
Tabela 5.9. Sensibilidade ao coeficiente de apoio elástico Caso 2: SFSF	135
Tabela 5.10. Sensibilidade ao coeficiente de apoio elástico Caso 6: SFFF	136
Tabela 5.11. Frequências naturais da placa circular	138

RESUMO

O conteúdo deste trabalho trata da aplicação do Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) a problemas de flexão e vibração livre de placas de Reissner-Mindlin.

A abordagem convencional do MLGFM relaciona o mesmo com o Método dos Elementos de Contorno de Galerkin, estabelecendo que é realizada uma minimização de erro no contorno. Apresenta-se, aqui, além desta, uma formulação geral alternativa do método, demonstrando que o erro da solução aproximada é minimizado somente no domínio, dentro de cada célula de Green.

São estudados os problemas e a formulação propostos por Barbieri (1992) para o problema de flexão, apontando algumas dificuldades existentes. É o caso da imposição das condições de contorno, em algumas situações, nos nós duplos da malha de elementos de contorno. Dedicar-se especial atenção à análise da existência do fenômeno de travamento ou "locking" quando da aproximação da função de Green com elementos finitos baseados em deslocamentos. Adicionalmente, é feita uma comparação do desempenho do MLGFM com o Método dos Elementos Finitos, utilizando neste o mesmo elemento e discretização empregados pelo MLGFM na aproximação de domínio.

Desenvolve-se, em seguida, a formulação do MLGFM para problemas de vibração livre, empregando vários esquemas de diagonalização da matriz massa. Para tanto, analogamente ao Método dos Elementos de Contorno, emprega-se a função de Green correspondente à parte estática do operador diferencial envolvido. Os resultados são comparados com o Método dos Elementos Finitos, novamente com o mesmo elemento e discretização, e com resultados da bibliografia afim.

ABSTRACT

This work is concerned with the application of the Modified Local Green's Function Method (MLGFM) to the bending and free vibration problems of Reissner-Mindlin plates.

The usual approach of the MLGFM relates it with the Galerkin Boundary Element Method, stating that an error minimization is performed on the boundary. Apart from this one, an alternative approach in the method's formulation is presented here, showing that the error of the approximate solution is minimized only on the domain of the Green's cells.

The formulation and cases studied by Barbieri (1992), which dealt with the bending problem, are examined, and some difficulties are pointed out, such as the correct imposition of the boundary conditions, in some cases, at the double nodes of the boundary mesh. Special attention is dedicated to the analysis of the existence of the "locking" phenomenon, when the Green's function is approximated by finite elements based on displacements. Additionally, a performance comparison is done between the Modified Local Green's Function Method and the Finite Element Method, using always the same element and discretization of the domain, in both cases.

Next, the formulation of the MLGFM for free vibrations of Mindlin plates is presented. Several schemes of "HRZ" lumping of the mass matrices are employed. In this development, the Green's function employed is the one corresponding to the static part of the differential operator, in the same manner that can be done in the Boundary Element Method. The results are compared with the ones obtained by the Finite Element Method, with the same element and discretization, and with values available in the specialized literature.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. - MÉTODOS NUMÉRICOS EM ANÁLISE ESTRUTURAL

Os fenômenos físicos que ocorrem na natureza são regidos por leis complexas e uma infinidade de fatores - circunstanciais ou não - que, ao não poderem ser identificados em sua totalidade, impossibilitam uma representação matemática exata. A determinação de uma representação para estes fenômenos, de forma a poder reproduzir ou simular o comportamento dos mesmos, estabelece um problema de engenharia. Para possibilitar a definição e resolução de tais problemas, são adotadas hipóteses simplificativas, reduzindo o número de variáveis envolvidas e diminuindo a complexidade dos mesmos. Estabelece-se, assim, um modelo matemático, que representa uma aproximação do fenômeno físico. Este modelo pode ou não ter solução analítica.

Os problemas de análise estrutural, em particular, tiveram as suas bases lançadas no final do século XIX e diferenciaram-se dos problemas de elasticidade pela introdução de hipóteses *ad-hoc*, isto é, em vez de obedecer estritamente as equações que caracterizam o problema matematicamente, são efetuadas hipóteses em que se define *a priori* e com base na experiência, um certo comportamento para os campos a determinar.

Com o advento dos computadores digitais, a análise estrutural e a formulação matricial se uniram, passando a caminhar juntas em técnicas de solução aproximada para as equações governantes do modelo matemático. É importante salientar que a maioria dos modelos de problemas de engenharia só podem ser resolvidos desta

forma, uma vez que, tipicamente, a complexidade das condições de contorno, geometria, carregamento ou características do material empregado, inviabilizam uma solução exata.

Um dos primeiros métodos numéricos de solução aproximada que se difundiu de forma ampla foi o Método das Diferenças Finitas (FDM)¹, que aproxima as equações governantes do problema por expansões locais para as variáveis, sendo geralmente, séries de Taylor truncadas. Além deste, o Método dos Elementos Finitos (FEM)², o Método dos Elementos de Contorno (BEM)³ e o Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM)⁴ merecem especial atenção no contexto deste trabalho. Por outro lado, deve-se mencionar o Método dos Resíduos Ponderados (WRM)⁵, que engloba os demais métodos citados como particularizações (Fletcher, 1984). Sendo assim, será apresentado o WRM de forma genérica, particularizando-se o mesmo após, para o FDM, o FEM, o BEM e o MLGFM (Figura 1.1).

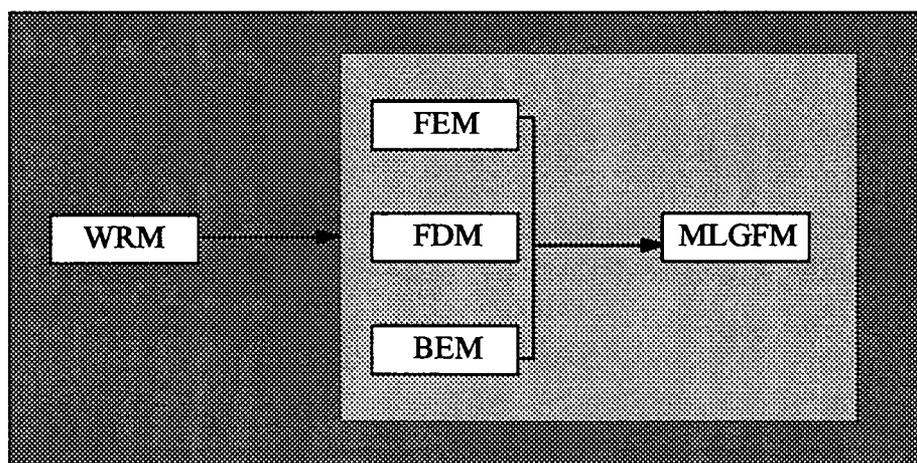


Figura 1.1. O Método dos Resíduos Ponderados com suas particularizações relativas a este trabalho.

¹Do inglês **Finite Difference Method**

²Do inglês **Finite Element Method**

³Do inglês **Boundary Element Method**

⁴Do inglês **Modified Local Green's Function Method**

⁵Do inglês **Weighed Residual Method**

1.1.1 - O Método dos Resíduos Ponderados (WRM)

O Método dos Resíduos Ponderados é um procedimento que serve como base para a determinação aproximada de soluções para problemas regidos por equações diferenciais ou integrais. Considere-se que se deseja determinar a função u , que pode ser uma quantidade escalar ou vetorial, no interior do domínio Ω , com contorno $\partial\Omega$, definida pela seguinte equação:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (1.1)$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{u}) &= \mathbf{f} && \text{em } \partial\Omega_1 \\ \mathbf{B}(\mathbf{u}) &= \mathbf{g} && \text{em } \partial\Omega_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

onde \mathbf{f} e \mathbf{g} são prescritos em $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ e $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$.

Os operadores \mathbf{L} , \mathbf{A} e \mathbf{B} podem ser diferenciais, integrais, lineares ou não-lineares.

Sendo a determinação de \mathbf{u} muito custosa ou inviável, deseja-se encontrar uma solução aproximada $\tilde{\mathbf{u}}$ para a equação (1.1). Nesse caso, ter-se-á (Fletcher, 1984),

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{u}}) &= \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{u}}) - \mathbf{f} &= \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{u}}) - \mathbf{g} &= \mathbf{R}_3. \end{aligned} \quad (1.3)$$

A idéia utilizada para obter uma aproximação $\tilde{\mathbf{u}}$ para \mathbf{u} está associada à imposição da condição de ortogonalidade dos resíduos \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 com uma função "peso" adequadamente escolhida (Zienkiewicz, 1989). Isto leva a uma expressão do tipo

$$\int_{\Omega} \mathbf{W} \mathbf{R}_1 d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} \overline{\mathbf{W}} \mathbf{R}_2 d\partial\Omega_1 + \int_{\partial\Omega_2} \overline{\overline{\mathbf{W}}} \mathbf{R}_3 d\partial\Omega_2 = 0 \quad (1.4)$$

onde \mathbf{W} , $\overline{\mathbf{W}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{W}}}$ são as funções "peso" correspondentes a cada um dos resíduos de tal forma que a projeção (1.4) seja nula. Estas funções peso são arbitrárias, e de sua escolha depende a qualidade dos resultados obtidos, bem como a obtenção do Método das Diferenças Finitas, dos Elementos Finitos, dos Elementos de Contorno, e no caso do operador \mathbf{L} ser auto-adjunto, inclusive, do Método da Função de Green Local Modificado.

Na Tabela 1.1, as funções peso para alguns métodos são apresentadas, sendo que as letras P e Q maiúsculas correspondem a pontos no domínio enquanto que p e q minúsculos correspondem ao contorno.

Tabela 1.1. Relação das Funções Peso que particularizam o WRM

MÉTODO	FUNÇÃO PESO
FEM	$\mathbf{W} = [\Psi(\mathbf{P})]^t$
BEM	$\mathbf{W} = [\mathbf{K}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})]^t$
GALERKIN-BEM	$\mathbf{W} = \int_{\partial\Omega} [\phi(\mathbf{q})]^t [\mathbf{K}(\mathbf{q}, \mathbf{p})]^t d\partial\Omega_q$
MLGFM	$\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{d}(\mathbf{P}) = [\Psi(\mathbf{P})][\mathbf{G}^{\text{DP}}]$ onde $\mathbf{G}\mathbf{d}(\mathbf{P}) = \int_{\Omega} [\Psi(\mathbf{Q})]^t [\mathbf{G}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})]^t d\Omega_Q$

Nesta tabela, $[\Psi(\mathbf{P})]$ são funções de interpolação de domínio, relativas a um ponto P; $[\phi(\mathbf{q})]$ são funções de interpolação de contorno relativas a um ponto q; $[\mathbf{K}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})]$ é um tensor solução fundamental⁶, onde P é o ponto fonte, em que é aplicada a excitação delta de Dirac e Q é um ponto campo; $[\mathbf{K}(\mathbf{q}, \mathbf{p})]$ é análogo a $[\mathbf{K}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})]$, porém com p e q

⁶ Uma solução fundamental é a resposta do operador diferencial do problema aplicado a um meio infinito sob uma excitação do tipo delta de Dirac (Brebbia, 1984).

pertencentes ao contorno, $[G(Q,P)]$ é uma função de Green⁷ com o ponto fonte em P e o ponto campo em Q, $Gd(P)$ é a projeção da função de Green $[G(Q,P)]$ sobre o espaço das funções de interpolação de elementos finitos $[\Psi(P)]$; e G^{DP} são valores nodais de uma aproximação de $Gd(P)$ via Método dos Elementos Finitos.

1.1.2 - O Método dos Elementos Finitos

Modelos matemáticos de problemas para um meio contínuo são geralmente baseados em equações diferenciais. As quantidades físicas a serem tratadas, como deslocamentos, tensões ou deformações, são consideradas contínuas no meio, e este é idealizado como sendo composto pela união de uma série de elementos infinitesimais.

No Método dos Elementos Finitos (FEM), o meio contínuo é considerado composto por uma união de segmentos ou elementos de dimensão finita. As funções contínuas que representam as quantidades físicas no modelo contínuo são substituídas por funções aproximadas e regulares dentro de cada elemento, sendo contínuas e regulares por partes no meio todo (Washizu, 1982). As funções aproximadas são construídas com o auxílio de parâmetros desconhecidos que podem ser valores pontuais das quantidades físicas a determinar. Os pontos onde estas grandezas são determinadas são denominados nós. Uma vez que os valores nodais são determinados, a distribuição das grandezas físicas ao longo do meio é determinada de forma unívoca. Este procedimento substitui, portanto, o problema diferencial por um conjunto de equações algébricas onde as incógnitas são os parâmetros desconhecidos mencionados.

Os primeiros trabalhos realizados com o FEM, na década de 50, montavam as equações algébricas de forma matricial, a partir de uma abordagem vetorial para a satisfação das equações de equilíbrio. Esta abordagem é denominada "direta" e permite

⁷ Uma função de Green é uma solução fundamental que satisfaz condições de contorno prescritas.

uma visualização física do problema bastante palpável, mas só é possível para problemas muito simples. Destaca-se, neste sentido, o trabalho pioneiro de Turner, Clough, Martin & Topp, publicado em 1956. Mais adiante, em 1960, Argyris & Kelsey apresentaram um trabalho semelhante, porém, fundamentado em princípios energéticos para a satisfação das equações de equilíbrio. Esta abordagem, de visualização física mais difícil, foi denominada "variacional" e estendeu a aplicabilidade do método a problemas mais complexos que os passíveis de solução pela abordagem direta. A partir da década de 60, o FEM conquistou espaço na indústria e passou a ser reconhecido amplamente como um método eficiente e confiável. Esse fato estimulou a pesquisa, que, a partir de então, se desenvolveu nas seguintes áreas (Dhatt & Touzot, 1985) :

- O Método foi reformulado como um caso especial do Método dos Resíduos Ponderados;
- Desenvolvimento de uma grande variedade de formulações para elementos, inclusive a formulação isoparamétrica;
- A aplicabilidade do método para a resolução de problemas não-lineares e dinâmicos foi amplamente demonstrada;
- Nas décadas de 70-80 a teoria matemática do FEM foi estabelecida, relacionando seu embasamento variacional com conceitos de análise funcional.

Este último ponto possibilitou o desenvolvimento de técnicas de obtenção automática de estimadores de erro no problema discretizado, possibilitando o aparecimento das chamadas "técnicas adaptativas" no FEM.

Como pode ser observado, na atualidade o FEM é um processo consagrado de obtenção de soluções aproximadas para modelos matemáticos, com suas bases muito bem postas. Em função disso, é o método mais amplamente utilizado em problemas de análise estrutural e da mecânica em geral.

1.1.3 - O Método dos Elementos de Contorno

O Método dos Elementos de Contorno (BEM) é uma técnica que tem os seus primórdios em métodos de equações integrais estabelecidos no início deste século. Estes métodos têm suas equações obtidas a partir de relações funcionais entre quantidades no domínio Ω e no contorno $\partial\Omega$. Através de limites estas relações ficam definidas somente no contorno $\partial\Omega$. Quando a relação funcional é obtida por meio de distribuições singulares em $\partial\Omega$, cujas intensidades são determinadas a fim de satisfazer as condições de contorno, o método é denominado indireto. Quando a representação integral emprega uma relação de reciprocidade ou de energia, o método é direto (Silva & Barcellos, 1985). Os métodos de equações integrais foram utilizados inicialmente por pesquisadores e matemáticos russos, mas seu sucesso entre engenheiros foi comprometido por apresentar um tratamento matemático demasiadamente abstrato e complexo. Posteriormente, a partir da popularização dos computadores digitais como instrumentos de pesquisa científica, e da consolidação das técnicas de discretização do Método dos Elementos Finitos, principalmente a partir da formulação isoparamétrica, estes avanços foram incorporados no tratamento dos métodos de equações integrais, dando origem ao Método dos Elementos de Contorno (BEM).

Uma grande vantagem resultante deste processo, e que diferencia o BEM de métodos de domínio tais como o FEM e o FDM é o fato de requerer, em geral, discretização apenas no contorno do corpo, enquanto estas outras técnicas o exigem em todo o domínio. Métodos de discretização no domínio, tipicamente, empregam funções que satisfazem as condições de contorno de Dirichlet e aproximam a solução no domínio. Por outro lado, técnicas de contorno satisfazem o operador diferencial governante no domínio, contendo distribuições incógnitas que, ao serem determinadas, satisfazem as condições de contorno de forma aproximada. Com isto, consegue-se que a solução no domínio seja dada por um processo de integração no contorno, o que resulta num sistema de equações algébricas bastante menor que no FEM e FDM. A matriz representativa deste

sistema normalmente apresenta uma distribuição cheia e não simétrica, enquanto que o FEM, tipicamente, apresenta distribuição em forma de banda e simétrica. Ainda assim, em função da diminuição da dimensão do problema, a quantidade de dados de entrada é, também, substancialmente reduzida. Adicionalmente, é marcante a mais rápida convergência deste método frente ao FEM. Apesar de todas essas vantagens, o BEM não está tão difundido quanto o FEM, já que seu desenvolvimento se deu mais tardiamente e ainda não está tão sedimentado quanto o do primeiro.

A principal desvantagem do BEM é a necessidade do conhecimento prévio de uma solução fundamental explícita para o problema, que satisfaz o operador diferencial no domínio, independentemente de condições de contorno. Outra desvantagem é o aparecimento de integrais singulares na formulação, que exigem técnicas numéricas especiais. Apesar de ambas as dificuldades estarem sendo progressivamente superadas, a exigência de uma solução fundamental para cada tipo de problema tratado não permite uma absoluta generalidade na aplicação deste método.

1.1.4 - O Método da Função de Green Local Modificado

O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) é uma técnica numérica concebida por Barcellos & Silva (1987) e Silva (1988), seguindo a linha de pesquisa de Burns (1975), Horak (1978), que em seus trabalhos apresentaram uma metodologia integral para solucionar problemas de difusão multidimensional de nêutrons, transmissão de calor e escoamentos incompressíveis. Esta metodologia integral estava fundamentada no conhecimento de uma função de Green definida localmente e com condições de contorno adequadamente escolhidas para o adjunto do operador diferencial do problema. Com base nessa função de Green eram estabelecidas matrizes que definiam completamente o problema discretizado. O método utilizado foi denominado "Local Green's Function Method" - LGFM. A formulação empregada era dependente de um parâmetro arbitrário, que apesar de indispensável, afetava a eficiência do método. Isto

fazia necessária uma procura experimental de um valor ótimo para tal parâmetro. Além disso, para problemas de difícil obtenção analítica da função de Green necessária, Horak empregava uma técnica especial de aproximação, que exigia discretização numa malha ortogonal.

Seguindo o esquema numérico apresentado por Burns, e introduzindo algumas modificações adicionais, Barcellos & Silva conseguiram aproximar as matrizes finais de forma direta, isto é, sem o conhecimento explícito da função de Green, mas aproximando-a com o Método dos Elementos Finitos como processo residual.

Baseada em princípios variacionais fundamentados em teoremas de análise funcional (Oden & Reddy, 1976), a formulação do Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) estabelece uma relação de reciprocidade do problema real com um problema auxiliar. Este problema auxiliar é, como no BEM, o que fornece uma solução fundamental para o operador adjunto do problema real. Porém, estabelecem-se condições de contorno escolhidas de forma a simplificar a formulação. Trata-se, portanto, de uma função de Green. O sucesso do método depende, então, da capacidade desta função ser obtida.

No MLGFM são empregadas duas malhas; uma para discretizar o domínio e outra para o contorno. As funções de interpolação de contorno para aproximação dos deslocamentos generalizados correspondem ao traço das funções de interpolação de domínio. Estabelecem-se, assim, dois espaços vetoriais, definidos por essas malhas. Com estes espaços definidos, calculam-se aproximações da função de Green, utilizando como processo residual o FEM. Estas aproximações são, mais especificamente, as projeções da função de Green nos espaços vetoriais gerados pelas funções de interpolação de elementos finitos e de contorno. Os valores nodais obtidos são, em seguida, substituídos num sistema integral de contorno, resolvido pelo Método Direto dos Elementos de Contorno de Galerkin (Pärreira & Guiggiani, 1988).

Como resultado, constatou-se que nos problemas estudados não houve dependência paramétrica, apesar do parâmetro continuar sendo introduzido de forma

arbitrária. Adicionalmente, eliminou-se a restrição relativa à ortogonalidade da malha empregada, existente no LGFM, uma vez que a discretização é feita com qualquer elemento finito.

A principal vantagem do MLGFM pode ser considerada como sendo a determinação automática da aproximação de uma função de Green. Isto permite a aplicação deste método em problemas onde não há solução possível pelo BEM convencional, por dificuldades na obtenção de uma solução fundamental analítica.

1.2. - OBJETIVOS DO TRABALHO

O presente trabalho pretende constituir-se numa contribuição para o desenvolvimento do MLGFM, que vem demonstrando grande potencialidade como técnica numérica para resolução de problemas da mecânica estrutural.

Pode-se considerar que este estudo representa uma extensão dos trabalhos desenvolvidos por Barbieri & Barcellos (1991,a) e Filippin (1992), que empregaram o MLGFM para analisar o problema de flexão de placa de Mindlin e o problema de vibração livre de membrana, respectivamente.

Assim sendo, objetiva-se analisar o comportamento deste método para a análise de flexão e vibração livre de placa de Mindlin, dedicando especial atenção à forma de imposição das condições de contorno e à influência desta questão na qualidade dos resultados obtidos, utilizando como parâmetro de comparação o Método dos Elementos Finitos. Para o cômputo da matriz massa, no caso dinâmico, aplicam-se os esquemas matriz massa consistente e "lumping" HRZ. Também é analisado o comportamento do método frente ao fenômeno do travamento ("locking").

1.3. - DESCRIÇÃO DO TRABALHO

A estrutura do trabalho está definida da seguinte forma:

- Capítulo 1 - Introdução: São apresentados resumidamente o Método dos Resíduos Ponderados, o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos de Contorno e o Método da Função de Green Local Modificado. A partir daí explicam-se os três últimos como particularizações do primeiro, e o último como uma junção dos seus dois antecessores. São, ainda, apresentados o objetivo do trabalho e sua descrição em termos de estrutura.

- Capítulo 2 - O Método da Função de Green Local Modificado: Neste capítulo, é feita uma revisão bibliográfica dos trabalhos realizados com este método, explica-se a forma da aproximação "local" da função de Green e repassa-se a fundamentação abstrata do mesmo, abordando particularmente, as questões da relação de reciprocidade em que se baseia o método, além do significado e motivo da introdução do operador auxiliar arbitrário N' na formulação. Nenhum conhecimento teórico é acrescentado aqui aos apresentados por Silva (1988), Barbieri (1992) e, mais recente e detalhadamente, por Machado (1992), objetivando-se, simplesmente, facilitar a compreensão destes tópicos. Apresenta-se em seguida o formalismo do MLGFM e o procedimento para a obtenção das projeções da função de Green.

- Capítulo 3 - Revisão e Aplicações Seleccionadas do Método da Função de Green Local Modificado para o Problema de Flexão de Placa de Mindlin: São aqui definidos, para o problema estático de placa de Mindlin, todos os operadores apresentados de forma abstrata no Capítulo 2, empregando-se o formalismo ali descrito, analisando suas implicações e resultados. Propõe-se um procedimento para efetuar uma mudança no sistema de referência, de forma a impor adequadamente a continuidade do tensor tensão

em pontos de descontinuidade do vetor normal. Algumas aplicações numéricas são realizadas, com o intuito de verificar o aparecimento do fenômeno de travamento ("locking") quando são modeladas placas finas e a estabilidade numérica na determinação de esforços.

- Capítulo 4 - Desenvolvimento do Método da Função de Green Local Modificado para o Problema de Vibração Livre de Placa de Mindlin: Utiliza-se uma aproximação da função de Green do adjunto do operador do problema estático, como estado auxiliar na relação de reciprocidade do MLGFM para o problema dinâmico. Desta forma, num procedimento análogo ao apresentado por Bézine (1980), obtém-se um problema de autovalores e auto-vetores algébrico, independente da frequência. São apresentadas diversas aplicações numéricas, onde os seguintes tópicos procuraram ser enfatizados: influência, nas frequências naturais, de problemas de modelagem nas condições de contorno em pontos de descontinuidade do vetor normal; efetividade de 4 esquemas de diagonalização HRZ para cômputo da matriz massa; estabilidade dos resultados frente a variação no parâmetro arbitrário da formulação e qualidade dos resultados para malhas distorcidas (mediante aplicação do método a uma placa circular).

- Capítulo 5 - Conclusões e Sugestões: Apresenta-se um parecer final relativo ao desempenho do MLGFM para problemas de placa de Reissner-Mindlin, apontando vantagens e desvantagens verificadas. Algumas das observações feitas são extensíveis a qualquer tipo de problema cujo modelo conte com mais de um grau de liberdade por nó. São, também, indicadas linhas de pesquisa que dariam continuidade a este trabalho e que seriam de interesse para expandir os horizontes do mesmo.

CAPÍTULO 2

O MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO

2.1 - INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As origens do Método da Função de Green Local Modificado remontam à década de 70, quando Burns (1975) e Horak (1978) apresentaram as suas teses de doutorado nas quais desenvolveram o "Método do Balanço Parcial de Corrente" (PCBM)¹ para problemas de difusão multi-dimensional de nêutrons e o "Método da Função de Green Local" (LGFM)² para problemas de condução de calor e escoamentos incompressíveis, respectivamente. Eles utilizaram um modelo integral, no qual faziam uso de uma função de Green definida localmente e com condições de contorno estabelecidas de forma a evitar o cômputo de termos adicionais na sua formulação. A dificuldade por eles encontrada foi a determinação da função de Green, que deveria ser disponível de forma explícita.

Burns, apesar de limitar-se a aplicar o método em casos onde conhecia a função de Green necessária, apresentou no seu trabalho uma metodologia para determinação direta das matrizes finais que representam o sistema discretizado, isto é, sem o conhecimento explícito da função de Green. O esquema por ele apresentado considerava uma discretização de domínio para aproximação via extremização de um funcional apropriado das projeções da função de Green sobre o espaço definido pelas

¹Do inglês **P**artial **C**urrent **B**alance **M**ethod

²Do inglês **L**ocal **G**reen's **F**unction **M**ethod

funções de interpolação do contorno e do domínio. Estas grandezas sofreriam posteriores pré ou pós multiplicações para formar as matrizes finais do sistema.

Horak, por outro lado, trabalhou com problemas para os quais não dispunha de função de Green adequada. Para isto, aplicou a técnica da integração transversa, com a qual transformava o operador diferencial parcial de segunda ordem existente, em dois operadores diferenciais ordinários desacoplados, para os quais havia meios mais simples de obtenção da função de Green. A aplicação desta técnica era restrita a malhas com linhas de coordenadas ortogonais. Tanto nos problemas de condução de calor, onde empregou funções de Green analíticas, como nos de escoamentos incompressíveis, Horak obteve dependência de seus resultados a um parâmetro arbitrário, introduzido na formulação devido ao tipo de condições de contorno impostas no problema adjunto. Para valores adequados deste parâmetro, os resultados obtidos foram excepcionais, chegando o método a apresentar, para problemas de condução de calor, eficiência da ordem de 1000 vezes maior que o FDM e FEM com discretização equivalente. Nos problemas de escoamentos incompressíveis, Horak aponta resultados ainda melhores, apresentando uma eficiência do LGFM de até 10000 vezes superior à do FDM com igual discretização. Como inconvenientes desta técnica, podem ser apontados a dependência paramétrica mencionada, bem como a necessidade de utilização de uma malha com linhas de coordenadas ortogonais para discretizar o problema.

Barcellos & Silva (1987) e Silva (1988) desenvolveram uma extensão dos trabalhos de Burns e Horak, que convencionaram chamar de Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM). Em seus trabalhos, após modificações no esquema proposto por Burns no que se refere à determinação dos esforços generalizados, que passaram a ser calculados de forma direta pelas funções de interpolação de contorno, eles conseguiram implementar um algoritmo capaz de aplicar o esquema de Horak sem a necessidade do conhecimento explícito da função de Green envolvida na formulação. A metodologia previa uma divisão do domínio em "células" de Green, que podem ser visualizadas na gravura A da Figura 2.1. Em cada uma delas eram impostas condições de

contorno de apoio elástico, estabelecendo uma função de Green definida localmente - gravura B da Figura 2.1. Nesta gravura, a linha grossa no contorno indica apoio elástico não desprezável, enquanto que a linha fina indica apoio elástico desprezável, imposto apenas para evitar a singularidade nas células que ficaram "livres". Cada "célula" era discretizada e sua função de Green calculada de forma aproximada com o FEM - gravura C da Figura 2.1. A abordagem aplicada em seus trabalhos foi que cada elemento finito coincidissem com uma célula. A aplicação do trabalho de Barcellos & Silva (1987) foi sobre o problema potencial. Em Silva (1988) está exposta uma detalhada análise dos espaços vetoriais envolvidos no procedimento, além de aplicações adicionais do método a problemas de hastes e vigas. Contudo, ainda não se sabia como seria o comportamento do método para problemas mais complexos da análise estrutural.

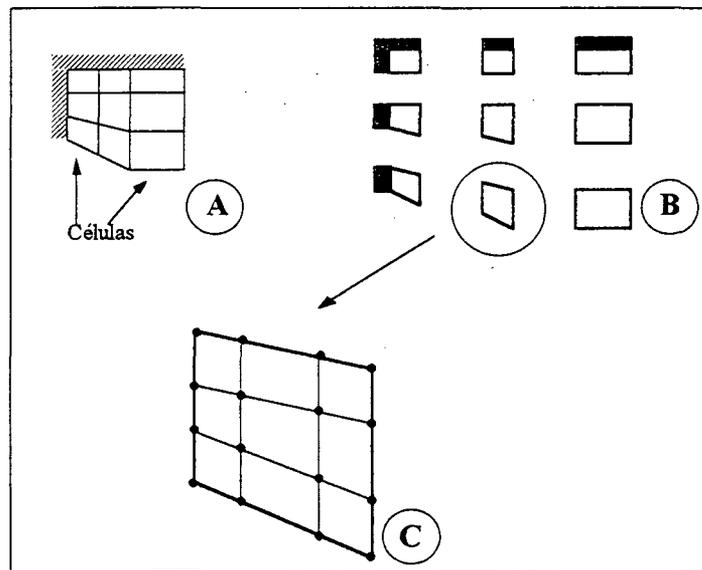


Figura 2.1. Aproximação Local da Função de Green

Barbieri & Barcellos (1991,a) apresentaram a aplicação do MLGFM ao problema de flexão de placa de Mindlin, utilizando elementos finitos lagrangeanos quadráticos e cúbicos para a aproximação das projeções da função de Green, obtendo resultados compatíveis com a solução analítica e com algumas soluções via BEM. Neste trabalho, apesar de não se apresentar resultados numéricos para a questão, ressaltou-se a

possibilidade de obter soluções para placas com espessura variável, sem nenhum custo adicional. Foi empregada uma abordagem unicelular, isto é, todos os elementos finitos aproximaram uma única função de Green, definida sobre o domínio todo. Esta abordagem passou a ser o padrão para o tratamento de problemas mais complexos, considerando que a extensão pluricelular poderia ser implementada numa etapa posterior.

Outro passo na verificação da potencialidade do método foi dado por Barcellos & Barbieri (1991), quando apresentaram soluções para problemas de potencial singulares, obtendo resultados concordantes com os analíticos. Em outro trabalho, Barbieri & Barcellos (1991,b) apresentaram a abordagem unicelular para o problema de potencial homogêneo.

Objetivando verificar a viabilidade da aplicação do MLGFM para um problema vetorial sem solução fundamental existente numa forma explícita, Machado & Barcellos (1992) apresentaram a formulação e resultados numéricos para o problema de flexão de placas laminadas ortotrópicas, mediante teoria de primeira ordem (FSDT)³. Nesse trabalho utilizaram a abordagem unicelular, empregando elementos finitos lagrangeanos quadráticos para aproximação da função de Green.

Barbieri (1992) apresenta, em sua tese de doutorado, uma revisão do trabalho de Silva (1987), estendendo os conceitos por este apresentados a uma ampla gama de problemas da mecânica do contínuo. Sua contribuição ao meio científico pode ser vista como a demonstração da generalização do MLGFM a problemas da mecânica estrutural. Para tanto, apresentou problemas de potencial homogêneo e não-homogêneo, elasticidade bidimensional, incluindo problemas de fratura, e flexão de placa de Mindlin. Sua abordagem é sempre unicelular.

Filippin et al. (1992,a) desenvolvem a primeira aplicação do MLGFM para análise dinâmica, onde estudam o problema da equação de Helmholtz. Ainda neste trabalho é apresentada uma análise experimental da convergência h e p do MLGFM para

³FSDT- First Order Shear Deformation Theory

problemas estáticos e dinâmicos de potencial. Como conclusão indicam que a taxa de convergência h neste método é semelhante à do FEM, porém a convergência p tem características bem mais favoráveis no MLGFM do que no FEM.

Barbieri et al. (1992), aplicam o MLGFM a problemas de elastoestática bidimensional.

Machado et al. (1992), apresentam o mesmo método aplicado ao problema de flexão de placas ortotrópicas laminadas, utilizando uma teoria de ordem superior (Kant & Pandya, 1988). No artigo, os resultados obtidos são comparados com os fornecidos por estes últimos autores.

Filippin et al. (1992,c) apresentaram resultados numéricos para a equação de Helmholtz, considerando os casos de membrana retangular, membrana em L, membrana elíptica e cavidade retangular.

Filippin (1992), em sua dissertação de mestrado, apresenta maiores detalhes e casos para problemas de vibração livre de membrana e cavidades acústicas. A formulação apresentada leva a um problema de auto-valores e auto-vetores simétrico, resolvido pelo Método da Iteração Subespacial. Excelentes resultados para frequências são obtidos, inclusive para valores bem altos destas, o que contrasta com a progressiva perda de qualidade dos resultados das soluções obtidas mediante o FEM.

Em Filippin et al. (1992,b) os autores fazem uma exposição do MLGFM, apresentando-o como uma ferramenta computacional, utilizando, para exemplificar, problemas de vibração livre de membrana. Sugere-se a utilização de técnicas adaptativas para extrair o máximo proveito da potencialidade do método.

Na mesma época, Machado (1992) apresenta a sua tese de doutorado, onde analisa vários problemas de placas laminadas com teorias de primeira ordem e ordem superior, empregando o MLGFM e comparando seus resultados com valores obtidos da bibliografia.

Maldaner & Barcellos (1992) dão continuidade às investigações na aplicação do MLGFM em problemas singulares, desta vez na mecânica da fratura

bidimensional. São obtidos os valores do fator de intensidade de tensão (K_I) para casos de trinca central e lateral. Nesta investigação, fazem uso dos valores de deslocamentos obtidos. Junto ao vértice da trinca é empregado refino de malha em progressão geométrica de razão igual a 0.17. Os erros obtidos nos resultados são considerados bastante pequenos.

Uma apresentação, unificando várias aplicações, é exposta em duas partes por Barcellos et al. (1992a e 1992b). Na primeira descreve-se a formulação do MLGFM. Na segunda apresentam-se novas aplicações numéricas, envolvendo problemas de potencial, elastoestática, placas laminadas e frequências naturais de membranas elásticas e cavidades acústicas.

Uma nova aplicação do MLGFM é apresentada por Barbieri et al. (1993), onde é tratado o problema de cascas de dupla curvatura. A abordagem é unicelular. Objetiva-se, mais uma vez, analisar o comportamento de um caso onde há falta de solução fundamental. Os resultados obtidos são concordantes com os proporcionados pelo FEM.

Barbieri & Barcellos (1993,a) prosseguem na análise de placas de Mindlin. Desta vez, a ênfase é dada a aplicações numéricas, e são abordados, entre outros, o problema de placa de Morley engastada e de placa circular com espessura variável.

Mais uma aplicação do MLGFM para problema sem solução fundamental é apresentada por Barbieri & Barcellos (1993,a), onde tratam de problemas de potencial nos quais as propriedades do meio variam continuamente ou continuamente por partes.

Maldaner et al. (1993) desenvolvem a aplicação do MLGFM ao problema de fratura bidimensional, aplicando o elemento quarter-point para modelar a singularidade. O domínio é modelado pelo elemento serendipity quadrático e o fator de intensidade de tensões é determinado fazendo uso dos resultados de deslocamentos. Os resultados são considerados excelentes.

Prosseguindo com as investigações no campo da mecânica da fratura, Maldaner & Barcellos (1993) apresentam uma comparação do desempenho dos elementos

especiais de fratura da família de Akin e de Stern, no MLGFM. São utilizados na análise o elemento de Akin de 9 nós, o elemento quadrático de Stern, e os resultados são comparados com o elemento lagrangeano quadrático. Conclui-se que a família de Akin fornece os melhores resultados.

Machado et al. (1993) comparam o desempenho do MLGFM com algumas formulações de Elementos Finitos para solucionar o problema de placas ortotrópicas laminadas. É concluído que os resultados revelam precisão comparável aos determinados pelo FEM, baixa sensibilidade à distorção, e taxa de convergência mais acentuada. Deve ser notado que a comparação é realizada utilizando no modelo de FEM elementos finitos diferentes daqueles utilizados para discretizar o domínio no MLGFM.

Filippin et al. (1993) apresentam mais resultados para problemas de vibração livre de membrana e cavidades acústicas. Nesta oportunidade é enfatizada a excelente convergência de resultados para as altas frequências, e são apresentados casos com condições de contorno mistas.

Barbieri et al. (1993) retomam o problema de placa de Mindlin, apresentando aspectos de convergência puntual e sensibilidade à distorção de malha.

Muñoz R. et al. (1993) apresentam uma primeira análise do problema de vibração livre de placa de Mindlin. A formulação é descrita e resultados numéricos preliminares e ilustrativos são apresentados para o problema de placa simplesmente apoiada modelada com simetria. São empregados elementos lagrangeanos de 9 nós com subintegração seletiva para discretização do domínio. São utilizados nós simples nos vértices. Os resultados são comparados com a solução pela teoria de Mindlin e com os obtidos pelo FEM utilizando a mesma malha e o mesmo elemento finito, mostrando concordância.

Maldaner (1993), em sua dissertação de mestrado, estudou o MLGFM, implementando elementos especiais de fratura não isoparamétricos, comparando os seus desempenhos com os de elementos convencionais.

2.2. - NOTAÇÕES E PRELIMINARES

Seja Ω um domínio aberto, contido no espaço \mathfrak{R}^n , limitado por um contorno $\partial\Omega$, suficientemente regular, no sentido de admitir a existência de um vetor normal em quase todo lugar, exceto, possivelmente, em conjuntos de medida nula.

Seja um espaço de Hilbert $H^m(\Omega)$, de funções que possuem valores no contorno, e que são utilizadas para determinar valores no domínio. Deseja-se estabelecer as condições que permitem ao $H^m(\Omega)$ ter extensões ao contorno, isto é, que lhe conferem a propriedade do traço.

Um espaço de Hilbert $H^m(\Omega)$ tem a propriedade do traço se satisfizer as seguintes condições, (Oden & Reddy, 1976):

1. $H^m(\Omega)$ estiver densamente embutido em $U(\Omega)$ e $U(\Omega)$ for de topologia mais fraca que $H^m(\Omega)$, $H^m(\Omega) \subset U(\Omega)$;
2. $U(\Omega)$ for um espaço pivotal, ou seja,

$$H(\Omega) \subset U(\Omega) = U'(\Omega) \subset H'(\Omega) \quad (2.1)$$

onde $U'(\Omega)$ e $H'(\Omega)$ são os espaços duais topológicos de $U(\Omega)$ e $H(\Omega)$, respectivamente, isto é, o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre $U(\Omega)$ e $H(\Omega)$;

3. Existir um mapeamento linear $\gamma: H(\Omega) \rightarrow \partial H(\Omega)$ onde o operador linear γ mapeia o espaço $H(\Omega)$ sobre outro espaço de Hilbert $\partial H(\Omega)$, tal que o núcleo de γ , H_0 , seja denso em U , ou seja,

$$H_0 = \ker(\gamma) \quad (2.2)$$

$$H_0 \subset U = U' \subset H_0' \quad (2.3)$$

sendo as inclusões densas e contínuas.

Estas relações entre espaços são apresentadas na Figura 2.2.

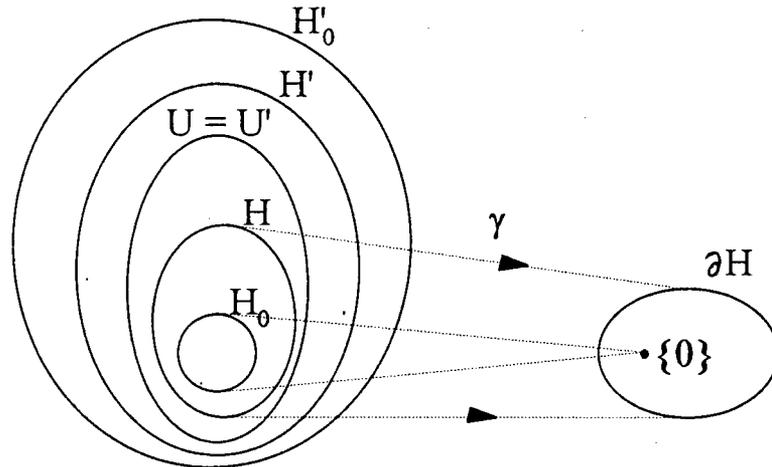


Figura 2.2. Relações entre espaços para que H possua a propriedade do traço.

O espaço $\partial H(\Omega)$ corresponde a um espaço de valores de contorno, com o operador γ levando os elementos de $H(\Omega)$, definidos em Ω , para $\partial\Omega$. O operador γ é chamado "operador traço". Para uma função $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ definida num espaço de Hilbert $H^m(\Omega)$, o operador traço é definido por, (Oden & Reddy, 1976)

$$\gamma_j \mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial^j \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}^j} \Big|_{\partial\Omega}; \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, 0 \leq j \leq m-1 \quad (2.4)$$

$$\gamma \equiv (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-2}, \gamma_{m-1}) \quad (2.5)$$

e esses componentes são as derivadas normais em $\partial\Omega$ de ordem menor que m , onde \mathbf{n} é a normal ao contorno $\partial\Omega$ no ponto \mathbf{x} . Então, γ_j é um mapeamento linear e contínuo de $H^m(\Omega)$ em $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

$$\gamma_j: H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad (2.6)$$

com m podendo assumir valores inteiros ou fracionários (Oden & Reddy, 1976).

2.3. - RELAÇÃO GENERALIZADA DE RECIPROCIDADE

Seja U um espaço de Hilbert de funções definidas num domínio aberto e limitado $\Omega \in \mathbb{R}^n$, com contorno regular $\partial\Omega$, e seja U' seu espaço dual. Considere-se o operador A que mapeia U continuamente em outro espaço de Hilbert F , este pivotal, i. e., $F = F'$. O operador A' , transposto de A , mapeia F' continuamente em U' . Se $\langle \bullet, \bullet \rangle_U$ e $\langle \bullet, \bullet \rangle_{F'}$ denotam produto dual em $U' \times U$ e $F' \times F$, respectivamente, então, os operadores A e A' satisfazem a relação

$$\langle A'g, u \rangle_U = \langle g, Au \rangle_{F'} \quad \forall u \in U, g \in F' \quad (2.7)$$

Esta expressão é chamada "Fórmula de Green Generalizada", e sua visualização é possível na Figura 2.3.

Suponha-se, agora, que U esteja densamente embutido num espaço pivotal $H = H'$, e defina-se o adjunto formal \tilde{A}^* de A , como a restrição de A' ao espaço $W \equiv \{g \in F' \ni A'g \in H'\}$. Então,

$$\left(\tilde{A}^*g, u \right)_H = (g, Au)_{F'} + \Gamma_{\partial\Omega} \langle u, g \rangle \quad \forall u \in U, g \in W \quad (2.8)$$

onde $\Gamma_{\partial\Omega} \langle u, g \rangle$ é a forma bilinear das extensões de u e g ao contorno $\partial\Omega$. A forma $\Gamma_{\partial\Omega} \langle u, g \rangle$ é chamada "Bilinear Global Concomitante de A ". Uma visualização esquemática desta relação pode ser apreciada na Figura 2.4. Se as condições de contorno forem do tipo Dirichlet homogêneas, o termo $\Gamma_{\partial\Omega} \langle u, g \rangle$ é nulo.

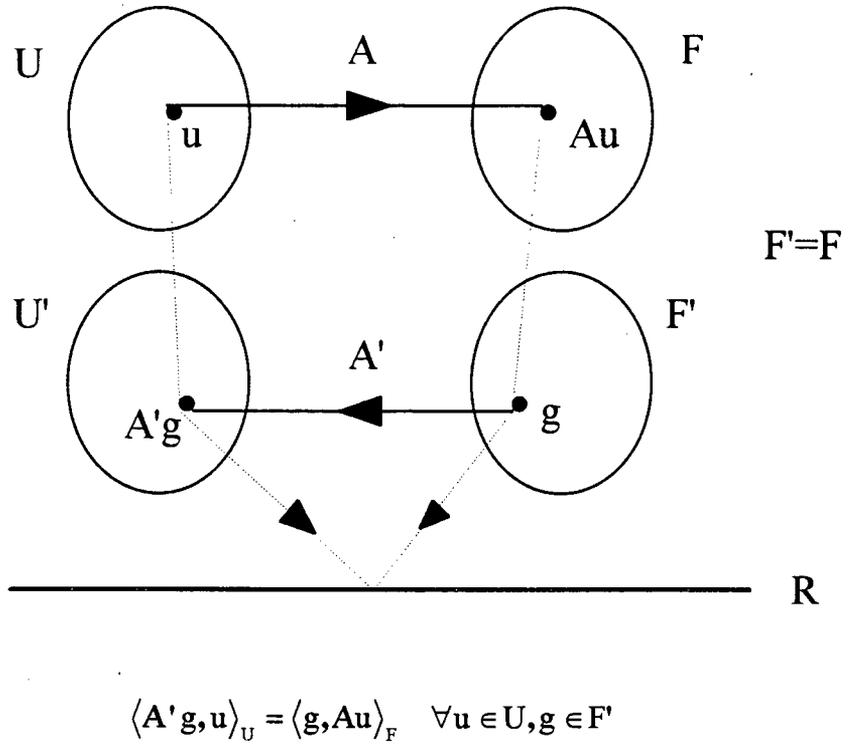


Figura 2.3. Fórmula generalizada de Green para o operador A

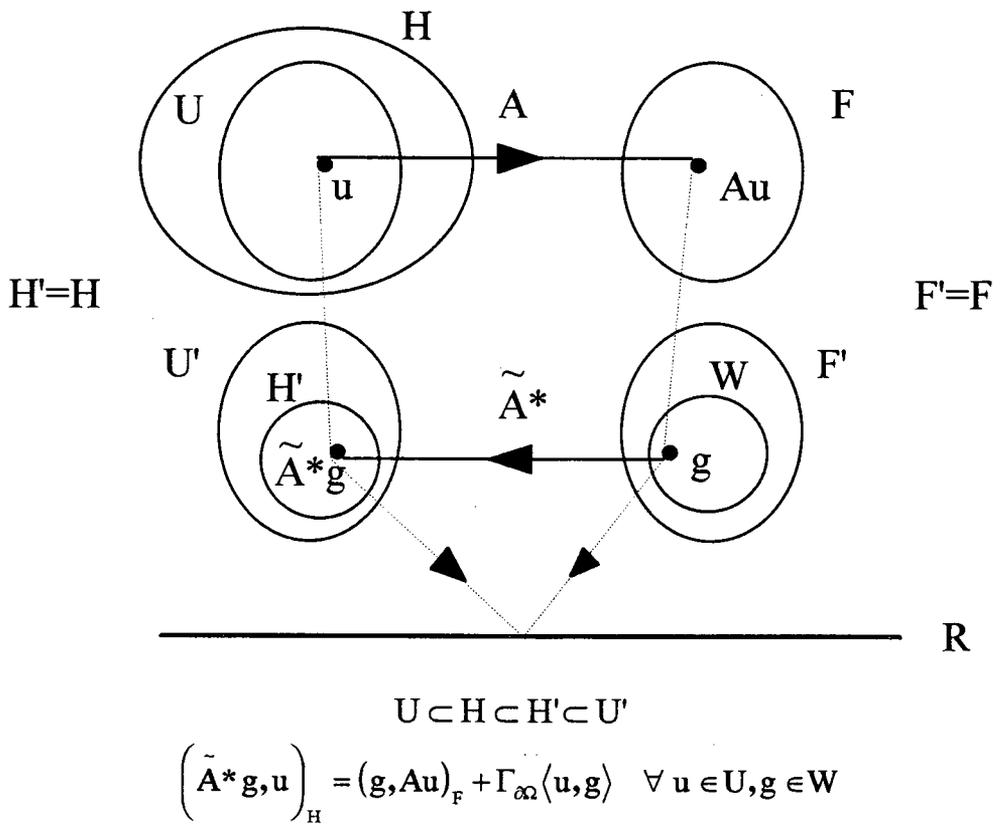


Figura 2.4. Bilinear Global Concomitante de A

Doravante o adjunto formal será chamado simplesmente de adjunto e será representado por A^* .

Considere-se uma forma bilinear contínua, B , definida em $H \times F$

$$B: H \times F \rightarrow \mathfrak{R} \quad (2.9)$$

Os valores de B em \mathfrak{R} são denotados por $B(u, v)$, $u \in H$, $v \in F$. Considere-se, também, uma forma bilinear contínua de contorno, b , definida em $H \times F$, no sentido do traço:

$$b: H \times F \rightarrow \mathfrak{R} \quad (2.10)$$

sendo seus valores em \mathfrak{R} denotados por $b(\gamma u, \gamma^* v)$, onde γ e γ^* são operadores traço.

Defina-se ainda a forma bilinear

$$\bar{B}: H \times F \rightarrow \mathfrak{R} \quad \ni \quad \bar{B}: B(u, v) + b(\gamma u, \gamma^* v) \quad (2.11)$$

Seja um $u \in H$, fixo, e seja $v \in F$. Assim, a forma bilinear $\bar{B}(u, \bullet)$ descreve um funcional linear contínuo em F , que depende de $u \in H$, ou seja, $\bar{B}(u, \bullet) \equiv l_u(\bullet)$. A dependência é linear e contínua, podendo ser escrita em termos de um operador A , definindo uma transformação linear $A: H \rightarrow F \ni Au = l_u$. Estas relações estão esquematizadas na Figura 2.5.

Tem-se, portanto,

$$\bar{B}(u, v) = \langle Au, v \rangle_F \quad \forall v \in F \quad (2.12)$$

Analogamente, fixando-se $v \in F$ e percorrendo $u \in H$, tem-se que $\bar{B}(\bullet, v)$ define um operador linear contínuo A^* , através de

$$\overline{B}(u,v) = \langle A^*v, u \rangle_H \quad \forall u \in H \quad (2.13)$$

onde A^* é o operador adjunto formal associado a B .

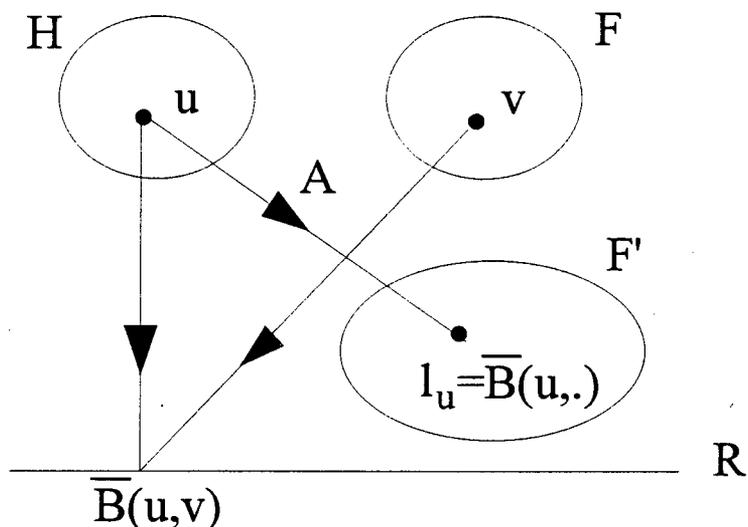


Figura 2.5. Forma bilinear - Descrição do operador $A: H \rightarrow F'$

Considere-se, agora, um subespaço F de V , tal que V esteja densamente embutido em F , de modo que H e F possuam, ambos, a propriedade do traço, i. e.,

$$\begin{array}{ll} H \subset U = U' \subset H' & F \subset V = V' \subset F' \\ \gamma: H \rightarrow \partial H & \gamma^*: F \rightarrow \partial F \\ \ker(\gamma) = H_0 & \ker(\gamma^*) = F_0 \\ H_0 \subset U = U' \subset H_0' & F_0 \subset V = V' \subset F_0' \end{array} \quad (2.14)$$

e definam-se os subespaços $H_A = \{u \in H, Au \in V\}$ e $F_{A^*} = \{v \in F, A^*v \in U\}$, como mostrado na Figura 2.6.

Com estas definições, é possível mostrar, como pode ser observado no trabalho de Silva (1988), que existem operadores $N \in L[H_A, \partial F']$ e $N^* \in L[F_{A^*}, \partial H']$, unívocos, tais que as seguintes relações são válidas:

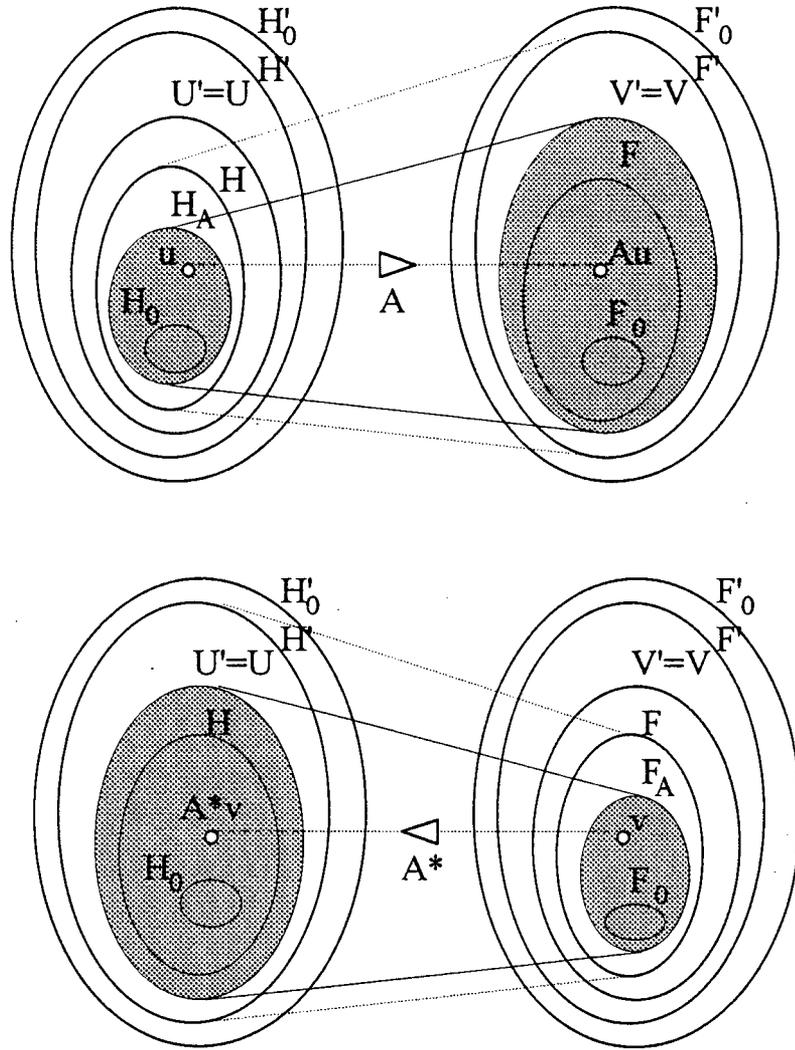


Figura 2.6. Identificação dos espaços H_A e F_{A^*} .

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\gamma \mathbf{u}, \gamma^* \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{u})_{\mathbf{V}} + \langle N\mathbf{u}, \gamma^* \mathbf{v} \rangle_{\partial \mathbf{F}} \quad \forall \mathbf{u} \in H_A, \mathbf{v} \in \mathbf{F} \quad (2.15)$$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\gamma \mathbf{u}, \gamma^* \mathbf{v}) = (\mathbf{A}^* \mathbf{v}, \mathbf{u})_{\mathbf{U}} + \langle N^* \mathbf{v}, \gamma \mathbf{u} \rangle_{\partial \mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{u} \in H, \mathbf{v} \in F_{A^*} \quad (2.16)$$

Igualando-se o lado direito de ambas as expressões, estabelece-se uma relação de reciprocidade entre os estados $\{\mathbf{u}, \gamma \mathbf{u}, N\mathbf{u}\} \in H_A \times \partial H \times \partial F'$ e $\{\mathbf{v}, \gamma^* \mathbf{v}, N^* \mathbf{v}\} \in F_{A^*} \times \partial F \times \partial H'$ associados aos operadores A e A^* , respectivamente, da seguinte forma:

$$(\mathbf{A}^* \mathbf{v}, \mathbf{u})_{\mathbf{U}} = (\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{u})_{\mathbf{V}} + \langle N\mathbf{u}, \gamma^* \mathbf{v} \rangle_{\partial \mathbf{F}} - \langle N^* \mathbf{v}, \gamma \mathbf{u} \rangle_{\partial \mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{u} \in H_A, \mathbf{v} \in F_{A^*} \quad (2.17)$$

onde pode ser reconhecida uma expressão do tipo definida em (2.8) e na Figura 2.4, com

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{A}}^* \mathbf{g}, \mathbf{u} \right)_H &= (\mathbf{A}^* \mathbf{v}, \mathbf{u})_U \\ (\mathbf{g}, \mathbf{A} \mathbf{u})_F &= (\mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{u})_V \\ \Gamma_{\partial\Omega} \langle \mathbf{u}, \mathbf{g} \rangle &= \langle N \mathbf{u}, \gamma^* \mathbf{v} \rangle_{\partial F} - \langle N^* \mathbf{v}, \gamma \mathbf{u} \rangle_{\partial H} \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.4. - PARTICULARIZAÇÃO DA RELAÇÃO GENERALIZADA DE RECIPROCIDADE PARA O MLGFM

No caso particular do MLGFM, a expressão (2.17) sofre ainda um pequeno ajuste para se tornar adequada à formulação do método. Para tanto, define-se um operador N' tal que:

$$\langle N' \mathbf{v}, \gamma \mathbf{u} \rangle_{\partial H} \equiv \langle N' \mathbf{u}, \gamma^* \mathbf{v} \rangle_{\partial F} \quad (2.19)$$

Adiciona-se e subtrai-se a grandeza definida por (2.19) em (2.17), obtendo

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^* \mathbf{v}, \mathbf{u})_U &= (\mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{u})_V + \langle (N + N') \mathbf{u}, \gamma^* \mathbf{v} \rangle_{\partial F} - \langle (N^* + N') \mathbf{v}, \gamma \mathbf{u} \rangle_{\partial H} \\ \forall \mathbf{u} \in H_A, \mathbf{v} \in F_{A^*} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Desta forma, a expressão (2.20) é equivalente à (2.17), podendo ser colocada no seguinte formato:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{A}}^* \mathbf{g}, \mathbf{u} \right)_H &= (\mathbf{A}^* \mathbf{v}, \mathbf{u})_U \\ (\mathbf{g}, \mathbf{A} \mathbf{u})_F &= (\mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{u})_V \\ \Gamma_{\partial\Omega} \langle \mathbf{u}, \mathbf{g} \rangle &= \langle (N + N') \mathbf{u}, \gamma^* \mathbf{v} \rangle_{\partial F} - \langle (N^* + N') \mathbf{v}, \gamma \mathbf{u} \rangle_{\partial H} \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.5. - FORMALISMO DO MLGFM

Deseja-se solucionar o problema diferencial representado pelo sistema matricial

$$A\mathbf{u}(Q) = \mathbf{b}(Q) \quad \text{em } \Omega \quad (2.22)$$

com condições de contorno prescritas sobre $\partial\Omega$, onde A é o operador diferencial do problema, \mathbf{u} é o vetor deslocamento generalizado e \mathbf{b} o vetor carregamento generalizado.

Considere-se o operador adjunto A^* de A e o problema associado

$$A^*G(Q,P) = \delta(Q,P)I \quad (2.23)$$

onde $G(Q,P)$ é o tensor solução fundamental⁴, $\delta(Q,P)$ é a função generalizada delta de Dirac⁵ e I é o tensor identidade. Q é um ponto "campo" pertencente ao domínio e P é um ponto fonte, onde é aplicada a excitação delta de Dirac, também pertencente ao domínio.

Pré-multiplicando a equação (2.22) por $G(Q,P)^t$ e a equação (2.23) por $\mathbf{u}(Q)^t$, vem

$$G(Q,P)^t A\mathbf{u}(Q) = G(Q,P)^t \mathbf{b}(Q) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{u}(Q)^t A^*G(Q,P) = \mathbf{u}(Q)^t \delta(Q,P)$$

Subtraindo-se a equação (2.24) do transposto da equação (2.25), resulta

⁴ G_{ij} representa o deslocamento generalizado na direção i de qualquer ponto $Q \in \Omega$, provocado por uma força generalizada unitária aplicada na direção j no ponto $P \in \Omega$.

⁵ $\delta(x,\xi) = 0, \forall x \neq \xi$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x,\xi) dx = 1$

$$\mathbf{u}(Q)\delta(Q,P) = [\mathbf{A}'\mathbf{G}(Q,P)]^t \mathbf{u}(Q) - \mathbf{G}(Q,P)' \mathbf{A}\mathbf{u}(Q) + \mathbf{G}(Q,P)' \mathbf{b}(Q) \quad (2.26)$$

Integrando a equação (2.26) no domínio Ω_Q com relação a um sistema de coordenadas localizado no ponto $P \in \Omega$, tem-se como solução para $\mathbf{u}(P)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(P) = & \int_{\Omega} [\mathbf{A}'\mathbf{G}(Q,P)]^t \mathbf{u}(Q) d\Omega_Q - \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q,P)' \mathbf{A}\mathbf{u}(Q) d\Omega_Q + \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q,P)' \mathbf{b}(Q) d\Omega_Q \end{aligned} \quad (2.27)$$

Aplicando integração por partes às duas primeiras parcelas da equação (2.27), vem

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(P) = & - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{N}'\mathbf{G}(q,P)]^t \mathbf{u}(q) d\partial\Omega_q + \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q,P)' \mathbf{N}\mathbf{u}(q) d\partial\Omega_q + \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q,P)' \mathbf{b}(Q) d\Omega_Q \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde \mathbf{N} e \mathbf{N}' são os operadores de Neumann associados aos operadores diferenciais \mathbf{A} e \mathbf{A}' , respectivamente.

Neste ponto é conveniente introduzir um operador auxiliar diagonal \mathbf{N}' , tal que

$$\mathbf{G}(q,P)' \mathbf{N}' \mathbf{u}(q) \equiv \mathbf{N}' \mathbf{G}(q,P)' \mathbf{u}(q) \quad (2.29)$$

de forma que essa quantidade seja adicionada e subtraída na equação (2.28), resultando

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(P) = & - \int_{\partial\Omega} [(\mathbf{N}' + \mathbf{N}')\mathbf{G}(q,P)]^t \mathbf{u}(q) d\partial\Omega_q + \\ & + \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q,P)' (\mathbf{N} + \mathbf{N}') \mathbf{u}(q) d\partial\Omega_q + \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q,P)' \mathbf{b}(Q) d\Omega_Q \end{aligned} \quad (2.30)$$

E adota-se, por conveniência, como condição de contorno para o problema estabelecido pela equação (2.23), a expressão

$$(N^* + N')\mathbf{G}(q, P) = \{0\} \quad (2.31)$$

de modo a anular a primeira integral da expressão (2.27), estabelecendo desta maneira, uma função de Green com condições de contorno do tipo Cauchy.

Note-se que o operador N' pode ser adotado como sendo um apoio elástico que, de certa forma, vincula o contorno do problema auxiliar, impedindo a obtenção de um sistema singular, que resultaria da imposição da condição $N^*\mathbf{G}(q, P) = \mathbf{0}$. Contudo, o operador N' passa a afetar diretamente o problema original também, pois na segunda integral da expressão (2.30) fica-se com $(N + N')\mathbf{u}(q)$. Portanto, o operador N' deve ser convenientemente escolhido. Uma escolha apropriada é da forma:

$$N'_i = \mu k_i \quad (2.32)$$

$$\text{onde } \mu = \begin{cases} 1 & \text{para } q \in \partial\Omega_1 \\ 0 & \text{para } q \in \partial\Omega_2 \end{cases}$$

sendo k_i uma constante real não nula, com i correspondendo a cada grau de liberdade, $\partial\Omega_1$ a parcela do contorno do problema original onde é imposta condição de contorno de Dirichlet e $\partial\Omega_2$ a parcela do contorno onde é imposta condição de contorno de Neumann. A visualização do efeito do operador N' pode ser observada nas Figuras 2.7 e 2.8.

A solução procurada fica sendo

$$\mathbf{u}(P) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q, P)^t (N + N')\mathbf{u}(q) d\partial\Omega_q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, P)^t \mathbf{b}(Q) d\Omega_Q \quad (2.33)$$

com $P \in \Omega$.

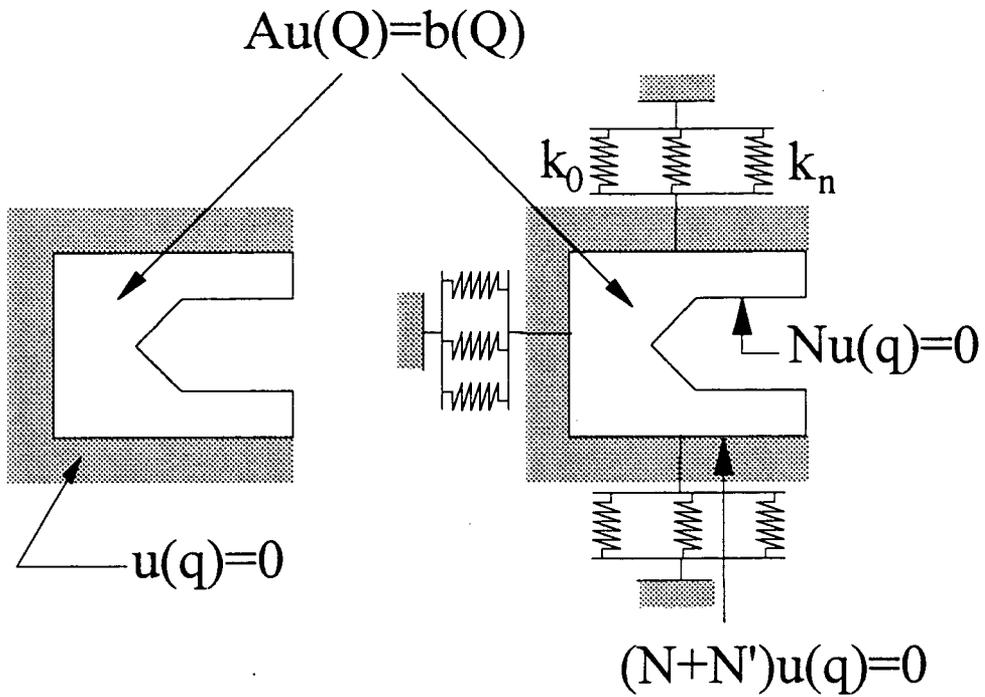


Figura 2.7. Efeito da aplicação do operador N' no problema original

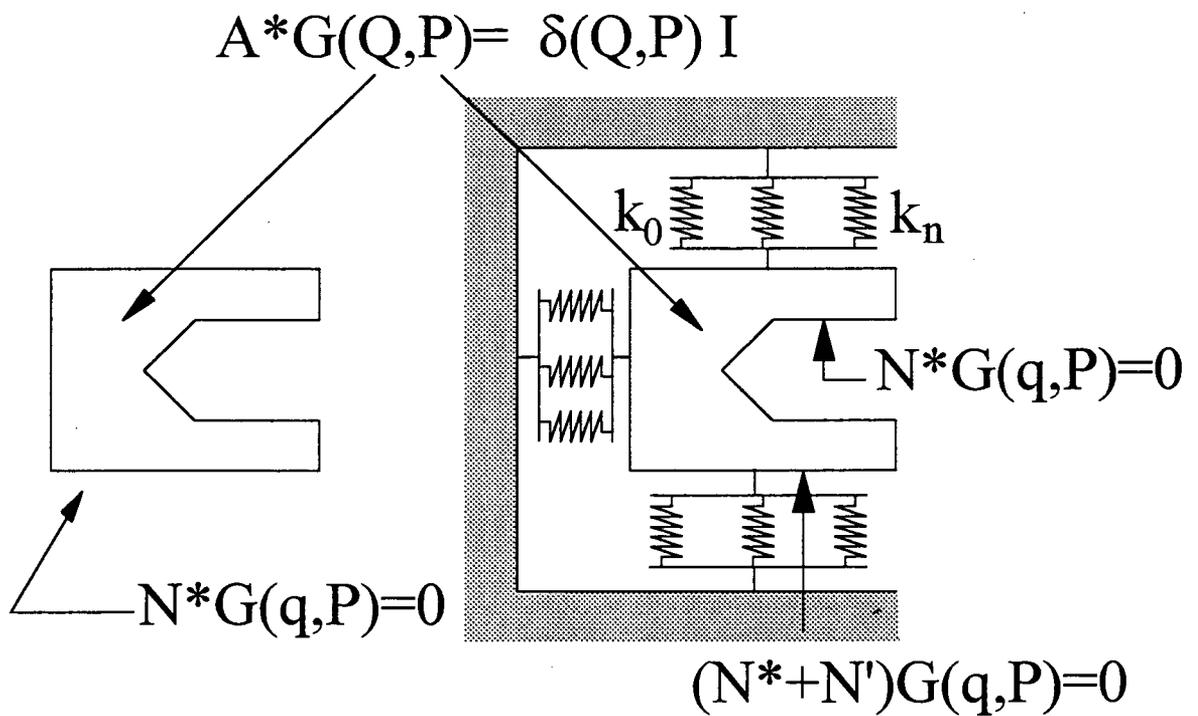


Figura 2.8. Efeito da aplicação do operador N' no problema do operador adjunto

A primeira parcela do lado direito da igualdade contém a expressão $(N + N')\mathbf{u}(q)$, que envolve derivadas de $\mathbf{u}(Q)$ no sentido do traço, indesejáveis para a análise numérica por exigir deste vetor uma maior regularidade. Define-se, então, a quantidade

$$\mathbf{F}(q) = (N + N')\mathbf{u}(q) \quad (2.34)$$

que nada mais é que o vetor das reações generalizadas. A definição desta grandeza é de grande importância pois, além de exigir uma menor regularidade do vetor deslocamento generalizado, possibilita uma aproximação direta das reações no contorno, o que lhes confere maior precisão.

Finalmente, o valor de $\mathbf{u}(P)$ pode ser expresso como sendo

$$\mathbf{u}(P) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q, P)^t \mathbf{F}(q) d\partial\Omega_q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, P)^t \mathbf{b}(Q) d\Omega_Q \quad (2.35)$$

Aplicando o teorema do traço (Oden & Reddy, 1976), que estabelece que

$$\mathbf{u}(p) = \lim_{P \rightarrow p} \mathbf{u}(P) \quad P \in \Omega; p \in \partial\Omega \quad (2.36)$$

tem-se

$$\mathbf{u}(p) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q, p)^t \mathbf{F}(q) d\partial\Omega_q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, p)^t \mathbf{b}(Q) d\Omega_Q \quad (2.37)$$

As equações integrais (2.35) e (2.37) são as expressões finais do problema contínuo abordado, definindo-o completamente. O próximo passo é a discretização destas equações.

2.6. - APROXIMAÇÃO NUMÉRICA CONVENCIONAL

Mostrar-se-á nesta seção, a prática de discretização que vem sendo feita até o momento em todos os trabalhos sobre o Método da Função de Green Local Modificado. Mais adiante será apresentada uma interessante abordagem alternativa, que terá importante papel na interpretação dos resultados obtidos com este método. É, contudo, vantajoso utilizar a abordagem convencional de discretização como a padrão, uma vez que devido à presença de uma matriz de inércia $[\mathbf{P}]$, o problema de análise modal, só pode ser resolvido dessa forma (pág. 102). Além disso, a particularização do Método dos Resíduos Ponderados para o MLGFM, apresentada no capítulo 1, corresponde a esta alternativa.

Para resolver as equações (2.35) e (2.37) de forma aproximada, é necessário discretizá-las. São empregados, para esse fim, dois tipos de funções de interpolação. Para as grandezas definidas no domínio Ω , são definidas funções interpoladoras globais construídas da mesma maneira que no FEM. O contorno $\partial\Omega$, por sua vez, é discretizado com funções de interpolação que são o traço das funções interpoladoras de domínio.

Particularizando para o problema de placa de Mindlin, no domínio tem-se

$$\mathbf{u}(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} \Psi_1 & & |\cdots| & \Psi_{ntn} \\ & \Psi_1 & & | \cdots | & \Psi_{ntn} \\ & & \Psi_1 & & | \cdots | & \Psi_{ntn} \end{bmatrix} \{\mathbf{u}\}^D = [\Psi(\mathbf{P})]\{\mathbf{u}\}^D \quad (2.38)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} \Psi_1 & & |\cdots| & \Psi_{ntn} \\ & \Psi_1 & & | \cdots | & \Psi_{ntn} \\ & & \Psi_1 & & | \cdots | & \Psi_{ntn} \end{bmatrix} \{\mathbf{b}\} = [\Psi(\mathbf{P})]\{\mathbf{b}\} \quad (2.39)$$

onde Ψ_i são as funções de interpolação globais usuais, $\{\mathbf{u}\}^D = [\dots, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \dots]^t$, $(w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi})^t$ é o valor do deslocamento generalizado do nó i com origem no ponto $\mathbf{P} \in \Omega$.

Analogamente, no contorno tem-se

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_{ntnc} \\ \phi_1 & \dots & \phi_{ntnc} \\ \phi_1 & \dots & \phi_{ntnc} \\ \phi_1 & \dots & \phi_{ntnc} \end{bmatrix} \{\mathbf{u}\}^c = [\phi(\mathbf{p})]\{\mathbf{u}\}^c$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_{ntnc} \\ \phi_1 & \dots & \phi_{ntnc} \\ \phi_1 & \dots & \phi_{ntnc} \\ \phi_1 & \dots & \phi_{ntnc} \end{bmatrix} \{\mathbf{f}\} = [\phi(\mathbf{p})]\{\mathbf{f}\} \quad (2.41)$$

Substituindo estas interpolações na equação (2.35), obtém-se

$$[\Psi(\mathbf{P})]\{\mathbf{u}\}^D = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{P})' [\phi(\mathbf{q})]\{\mathbf{f}\} d\partial\Omega_q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})' [\Psi(\mathbf{Q})]\{\mathbf{b}\} d\Omega_Q \quad (2.42)$$

e utilizando o Método de Galerkin relativo ao domínio Ω para minimização do resíduo, i. e., pré-multiplicando por $[\Psi(\mathbf{P})]'$ e integrando no domínio Ω com origem no ponto \mathbf{Q} , resulta

$$\int_{\Omega} [\Psi(\mathbf{P})]' [\Psi(\mathbf{P})]\{\mathbf{u}\}^D d\Omega_P = \int_{\Omega} [\Psi(\mathbf{P})]' \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{P})' [\phi(\mathbf{q})]\{\mathbf{f}\} d\partial\Omega_q d\Omega_P +$$

$$+ \int_{\Omega} [\Psi(\mathbf{P})]' \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})' [\Psi(\mathbf{Q})]\{\mathbf{b}\} d\Omega_Q d\Omega_P \quad (2.43)$$

que pode ser melhor representado por

$$\mathbf{A}\{\mathbf{u}\}^D = \mathbf{B}\{\mathbf{f}\} + \mathbf{C}\{\mathbf{b}\} \quad (2.44)$$

onde

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} [\Psi(\mathbf{P})]' [\Psi(\mathbf{P})] d\Omega_P \quad (2.45)$$

$$\mathbf{B} = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{G}(\mathbf{q})]' [\phi(\mathbf{q})] d\partial\Omega_q \quad (2.46)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} [\mathbf{G}(\mathbf{Q})]' [\Psi(\mathbf{Q})] d\Omega_Q \quad (2.47)$$

com

$$[\mathbf{Gd}(q)] = \int_{\Omega} [\mathbf{G}(q, P)] [\Psi(P)] d\Omega_p \quad (2.48)$$

$$[\mathbf{Gd}(Q)] = \int_{\Omega} [\mathbf{G}(Q, P)] [\Psi(P)] d\Omega_p \quad (2.49)$$

onde estas duas últimas expressões são projeções da função de Green nos espaços das funções de interpolação de domínio.

Fazendo as substituições relativas à discretização de contorno, agora na equação (2.37), obtém-se

$$[\phi(p)] \{u\}^c = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q, p)^t [\phi(q)] \{f\} d\partial\Omega_q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, p)^t [\Psi(Q)] \{b\} d\Omega_Q \quad (2.50)$$

Aplicando o Método de Galerkin relativo ao contorno $\partial\Omega$, i.e., pré-multiplicando por $[\phi(p)]^t$ e integrando em $\partial\Omega$ com origem em q , resulta

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} [\phi(p)]^t [\phi(p)] \{u\}^c d\partial\Omega_p &= \int_{\partial\Omega} [\phi(p)]^t \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q, p)^t [\phi(q)] \{f\} d\partial\Omega_q d\partial\Omega_p + \\ &+ \int_{\partial\Omega} [\phi(p)]^t \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, p)^t [\Psi(Q)] \{b\} d\Omega_Q d\partial\Omega_p \end{aligned} \quad (2.51)$$

que pode-se expressar como

$$\mathbf{D}\{u\}^c = \mathbf{E}\{f\} + \mathbf{F}\{b\} \quad (2.52)$$

onde

$$\mathbf{D} = \int_{\partial\Omega} [\phi(p)]^t [\phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.53)$$

$$\mathbf{E} = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{Gd}(q)]^t [\phi(q)] d\partial\Omega_q \quad (2.54)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} [\mathbf{Gd}(Q)]^t [\Psi(Q)] d\Omega_Q \quad (2.55)$$

com

$$[\mathbf{G}\mathbf{c}(q)] = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{G}(q, p)][\phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.56)$$

$$[\mathbf{G}\mathbf{c}(Q)] = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{G}(Q, p)][\phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.57)$$

onde, agora, estas duas últimas expressões correspondem a projeções da função de Green no espaço das funções de interpolação de contorno.

As matrizes **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** são denominadas matrizes de Green, e através dos sistemas de equações (2.44) e (2.52) definem completamente o problema. As matrizes gramianas⁶ **A** e **D** são de fácil obtenção, pois envolvem apenas as funções de interpolação, podendo a primeira ser vista como matriz massa com densidade unitária. As matrizes **B**, **C**, **E** e **F**, por outro lado, dependem do conhecimento das projeções da função de Green. Portanto, resta determinar o procedimento para calcular estas grandezas.

A equação (2.52) é análoga ao sistema que surge na aplicação do Método Direto dos Elementos de Contorno. Da mesma forma que no BEM, aqui são prescritos os valores dos deslocamentos $\{\mathbf{u}_p\}$ ou dos esforços $\{\mathbf{f}_p\}$, dependendo das condições de contorno existentes no problema. Obtém-se, separando as variáveis desconhecidas das conhecidas, o seguinte

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{dd} & \mathbf{D}_{dn} \\ \mathbf{D}_{nd} & \mathbf{D}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{dd} & \mathbf{E}_{dn} \\ \mathbf{E}_{nd} & \mathbf{E}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_d \\ \mathbf{f}_p \end{Bmatrix} + \mathbf{F}\{\mathbf{b}\} \quad (2.58)$$

ou, remanejando,

⁶Estas são matrizes gramianas ou matrizes de Gramm de categoria zero. Uma matriz de Gramm de categoria s é definida por:

$$(\phi_i, \phi_j)^s = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq s} D^\alpha \phi_i \overline{D^\alpha \phi_j} dx \quad ; i, j = 1, 2, \dots, Q \quad \text{e} \quad s \leq m$$

onde D^α é o operador derivada de ordem α da função ϕ_i e o conjunto $\{\phi_i\}_{i=1}^Q$ é linearmente independente e forma a base de um subespaço $S_h(\Omega)$ de $H^m(\Omega)$, (Oden & Reddy, 1976).

ou, remanejando,

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{E}_{dd} & \mathbf{D}_{dn} \\ -\mathbf{E}_{nd} & \mathbf{D}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_d \\ \mathbf{u}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{dd} & \mathbf{E}_{dn} \\ -\mathbf{D}_{nd} & \mathbf{E}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_p \\ \mathbf{f}_p \end{Bmatrix} + \mathbf{F}\{\mathbf{b}\} \quad (2.59)$$

que pode ser representada mais simplesmente por

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{Y}\} \quad (2.60)$$

onde $\{\mathbf{Y}\}$ corresponde aos valores conhecidos dados pelo lado direito da igualdade em (2.59), $[\mathbf{H}]$ é a matriz do lado esquerdo da igualdade em (2.59), e $\{\mathbf{X}\}$ é o vetor de valores desconhecidos na mesma equação.

2.7. - APROXIMAÇÃO CONVENCIONAL DAS PROJEÇÕES DA FUNÇÃO DE GREEN

Para completar a determinação das matrizes de Green \mathbf{A} , \mathbf{B} , e \mathbf{C} no sistema de domínio e \mathbf{D} , \mathbf{E} e \mathbf{F} no sistema de contorno, resta obter as aproximações para as projeções da função de Green que, aliás, é o cerne da formulação do MLGFM. Assim, o procedimento para obter, de forma aproximada, $\mathbf{G}_d(Q)$, $\mathbf{G}_d(q)$, $\mathbf{G}_c(Q)$ e $\mathbf{G}_c(q)$, é apresentado abaixo.

São definidos dois problemas associados:

Problema 1:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{G}(P, Q) = \delta(P, Q) \mathbf{I} \quad (2.61)$$

$$(\mathbf{N}^* + \mathbf{N}') \mathbf{G}(p, Q) = \{0\} \quad \forall P, Q \in \Omega; p \in \partial\Omega \quad (2.62)$$

$$A^* \mathbf{G}(\mathbf{P}, \mathbf{q}) = \{0\} \quad (2.63)$$

$$(N^* + N') \mathbf{G}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mathbf{I} \quad \forall \mathbf{Q} \in \Omega; \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \partial\Omega \quad (2.64)$$

Note que o problema 1 corresponde à determinação da resposta num ponto P do domínio quando aplicada uma excitação do tipo delta de Dirac num ponto Q, também do domínio, para condições de contorno do tipo de Cauchy homogêneas. O problema 2, por sua vez, representa determinar a resposta num ponto P do domínio, quando aplicadas condições de contorno de Cauchy representadas pela função generalizada delta de Dirac num ponto q do contorno, sendo que todo o domínio permanece livre da ação de qualquer carregamento.

Considere-se, inicialmente, o problema 1. Pós-multiplicando as equações (2.61) e (2.62) por $[\Psi(\mathbf{P})]$ e integrando no domínio Ω , mantendo o ponto Q fixo, tem-se:

$$A^* \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) [\Psi(\mathbf{P})] d\Omega_p = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) [\Psi(\mathbf{P})] d\Omega_p = [\Psi(\mathbf{Q})] \quad (2.65)$$

$$(N^* + N') \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) [\Psi(\mathbf{P})] d\Omega_p = \{0\} \quad \forall \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \Omega; \mathbf{p} \in \partial\Omega \quad (2.66)$$

Na expressão (2.66) o tensor de Green $\mathbf{G}(\mathbf{p}, \mathbf{Q})$ representa qualquer ponto p do contorno e qualquer ponto Q do domínio. Portanto, pode-se fazer p coincidir com q e Q coincidir com P. Dessa forma, (2.66) pode ser particularizada como

$$(N^* + N') \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) [\Psi(\mathbf{P})] d\Omega_p = \{0\} \quad \forall \mathbf{P} \in \Omega; \mathbf{q} \in \partial\Omega \quad (2.67)$$

e tem-se,

$$A^* \mathbf{Gd}(\mathbf{Q}) = [\Psi(\mathbf{Q})] \quad (2.68)$$

$$(N^* + N') \mathbf{Gd}(\mathbf{q}) = \{0\} \quad \forall \mathbf{Q} \in \Omega; \mathbf{q} \in \partial\Omega \quad (2.69)$$

onde identifica-se de imediato a projeção $\mathbf{Gd}(\mathbf{Q})$ desejada.

Considere-se, agora, o problema 2, onde procedimento análogo é aplicado. Desta vez, porém, pós-multiplicam-se as equações (2.63) e (2.64) por $[\phi(p)]$, integrando-as no contorno $\partial\Omega$, mantendo o ponto q fixo. Tem-se, assim,

$$A^* \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(P, q) [\phi(p)] d\partial\Omega_p = \{0\} \quad (2.70)$$

$$(N^* + N') \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q, p) [\phi(q)] d\partial\Omega_q = [\phi(p)] \quad \forall P \in \Omega; p, q \in \partial\Omega \quad (2.71)$$

Semelhantemente ao raciocínio efetuado na expressão (2.66), verifica-se que no tensor de Green da expressão (2.70) pode-se fazer coincidir P com Q e q com p .

Portanto,

$$A^* \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(Q, p) [\phi(p)] d\partial\Omega_p = \{0\} \quad (2.72)$$

e tem-se

$$A^* \mathbf{Gc}(Q) = \{0\} \quad (2.73)$$

$$(N^* + N') \mathbf{Gc}(q) = [\phi(q)] \quad \forall Q \in \Omega; q \in \partial\Omega \quad (2.74)$$

Tem-se, portanto, 2 novos problemas, chamados 1* e 2*. O primeiro definido pelas equações (2.68) e (2.69), e o segundo por (2.73) e (2.74). Estes problemas são resolvidos utilizando como técnica residual o Método dos Elementos Finitos. Este procedimento leva à obtenção de valores nodais das projeções da função de Green, que são posteriormente aplicados para a obtenção direta das matrizes $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}$ e \mathbf{F} . Consequentemente, aplicam-se as seguintes expansões:

$$\begin{aligned} \mathbf{Gd}(Q) &= [\Psi(Q)] \mathbf{G}^{DP} & \mathbf{Gc}(Q) &= [\Psi(Q)] \mathbf{G}^{CP} \\ \mathbf{Gd}(q) &= [\phi(q)] \mathbf{G}^{DP} & \mathbf{Gc}(q) &= [\phi(q)] \mathbf{G}^{CP} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Definindo, assim, os problemas 1* e 2*, obtidos a partir de 1 e 2, estes podem ser resolvidos pelos procedimentos usuais do FEM. Portanto, quando existir um

funcional associado, este é minimizado. Na falta do mesmo, pode ser empregada como técnica residual o Método de Galerkin.

Para problemas auto-adjuntos, os operadores A^* e N^* são automaticamente definidos uma vez que neste caso $A^* = A$ e $N^* = N$. Caso exista um funcional associado, este pode ser expresso de forma genérica como (Machado, 1992):

$$\mathcal{F}(\mathbf{Gd}, \mathbf{Gc}) = \mathbf{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) - \alpha \mathbf{B}_1(\mathbf{Gd}, [\Psi(Q)]) - \beta \mathbf{B}_2(\mathbf{Gc}, [\phi(q)]) + \mathbf{B}_3(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \quad (2.76)$$

onde

α e β são constantes tais que $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ se, com a minimização do funcional desejar-se calcular \mathbf{Gd} , e $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ se a projeção desejada for \mathbf{Gc} ;

\mathcal{Y} corresponde a \mathbf{Gd} ou \mathbf{Gc} de acordo com o caso desejado;

$\mathbf{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ é a forma bilinear em estudo, desenvolvida para \mathbf{Gd} ou \mathbf{Gc} ,

conforme \mathcal{Y} ;

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{Gd}, \Psi(Q)) = \int_{\Omega} [\mathbf{Gd}(Q)][\Psi(Q)] d\Omega_Q$$

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{Gc}, \phi(q)) = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{Gc}(q)][\phi(q)] d\partial\Omega_q \quad (2.77)$$

$$\mathbf{B}_3(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} [N' \mathcal{Y}(q)][\mathcal{Y}(q)] d\partial\Omega_q$$

Da minimização do funcional \mathcal{F} , resulta o sistema de equações

$$[\mathbf{K}][\mathbf{G}^{\text{DP}}(Q); \mathbf{G}^{\text{CP}}(Q)] = [\mathbf{A}; \mathbf{D}] \quad (2.78)$$

onde

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_{\text{FEM}}] + [\mathbf{K}'] \quad (2.79)$$

sendo

$[\mathbf{K}_{\text{FEM}}]$ matriz rigidez convencional de elementos finitos;

$[\mathbf{K}']$ matriz que surge devido à presença do operador auxiliar N' no funcional a extremizar. Rigorosamente, sua forma é

$$[\mathbf{K}'] = \int_{\Omega} [\phi(q)]' [N'] [\phi(q)] d\Omega_q \quad (2.80)$$

que pode ser interpretado como um apoio elástico distribuído. Apesar da dedução teórica apresentar este resultado, investigações numéricas em trabalhos anteriores (Barbieri, 1992), (Machado, 1992), (Filippin, 1992) e mais detalhadamente em Maldaner (1992), indicam que é conveniente considerar este apoio elástico de forma concentrada. Isto conduz a uma matriz diagonal do seguinte tipo:

$$[\mathbf{K}'] = \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_m \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

onde o sub-índice m é igual ao número total de nós vezes o número o número de graus de liberdade por nó. Note-se que a matriz $[\mathbf{K}']$ é proveniente do operador N' , portanto, ela tem dimensão associada à malha de contorno. A expressão acima considera já, o preenchimento de linhas e colunas com termos nulos nessa matriz, de forma a que ela possa ser somada com $[\mathbf{K}_{FEM}]$, que é definida em todo o domínio. Os coeficientes k_i , $i = 1, \dots, m$, assumem um valor constante, não nulo, se aplicados sobre um grau de liberdade onde está especificada condição de contorno de Dirichlet homogênea, e nulo caso contrário. Este cuidado é tomado para evitar a necessidade de realizar um pós processamento na avaliação dos resultados. Outra alternativa é prescrever, em todos os graus de liberdade do contorno, um valor para a constante de apoio elástico que seja suficientemente pequeno de modo a não afetar os resultados de esforços e que, contudo, não provoque mal-condicionamento do sistema linear a resolver.

2.8. - DETERMINAÇÃO DIRETA CONVENCIONAL DAS MATRIZES DE GREEN

Como foi destacado anteriormente, as matrizes **A** e **D** são de determinação imediata, pois só envolvem o produto entre funções de interpolação. Verificar-se-á, que com estas matrizes e de posse dos valores nodais das aproximações das projeções da função de Green, as restantes matrizes de Green podem ser calculadas de forma simples e direta.

As expressões para as matrizes **B**, **C**, **E** e **F** já foram apresentadas, sendo dadas por:

$$\mathbf{B} = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{Gd}(q)]^t [\phi(q)] d\partial\Omega_q \quad (2.82)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} [\mathbf{Gd}(Q)]^t [\Psi(Q)] d\Omega_Q \quad (2.83)$$

$$\mathbf{E} = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{Gc}(q)]^t [\phi(q)] d\partial\Omega_q \quad (2.84)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} [\mathbf{Gc}(Q)]^t [\Psi(Q)] d\Omega_Q \quad (2.85)$$

com as projeções da função de Green podendo ser aproximadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{Gd}(Q) &= [\Psi(Q)] \mathbf{G}^{DP} & \text{e} & \quad \mathbf{Gd}(q) = [\phi(q)] \mathbf{G}^{DP} \\ \mathbf{Gc}(Q) &= [\Psi(Q)] \mathbf{G}^{CP} & \text{e} & \quad \mathbf{Gc}(q) = [\phi(q)] \mathbf{G}^{CP} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Portanto,

$$\mathbf{B} = [\mathbf{G}^{DP}]^t \int_{\partial\Omega} [\phi(q)]^t [\phi(q)] d\partial\Omega_q \Rightarrow \mathbf{B} = [\mathbf{G}^{DP}]^t [\mathbf{D}] \quad (2.87)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{G}^{DP}]^t \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t [\Psi(Q)] d\Omega_Q \Rightarrow \mathbf{C} = [\mathbf{G}^{DP}]^t [\mathbf{A}] \quad (2.88)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{G}^{CP}]^t \int_{\partial\Omega} [\phi(q)]^t [\phi(q)] d\partial\Omega_q \Rightarrow \mathbf{E} = [\mathbf{G}^{CP}]^t [\mathbf{D}] \quad (2.89)$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{G}^{CP}]^t \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t [\Psi(Q)] d\Omega_Q \Rightarrow \mathbf{F} = [\mathbf{G}^{CP}]^t [\mathbf{A}] \quad (2.90)$$

Após estas deduções, se forem retomadas as expressões que definem os sistemas de contorno e de domínio, verificar-se-á que estes ficam:

$$[\mathbf{D}]\{\mathbf{u}\}^C = [\mathbf{G}^{CP}]^t [\mathbf{D}]\{\mathbf{f}\} + [\mathbf{G}^{CP}]^t [\mathbf{A}]\{\mathbf{b}\} \quad (2.91)$$

e

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\}^D = [\mathbf{G}^{DP}]^t [\mathbf{D}]\{\mathbf{f}\} + [\mathbf{G}^{DP}]^t [\mathbf{A}]\{\mathbf{b}\} \quad (2.92)$$

que são os sistemas finais, completamente definidos.

2.9. - APROXIMAÇÃO NUMÉRICA ALTERNATIVA

Da mesma forma que na aproximação convencional, as grandezas de domínio são dadas por

$$\mathbf{u}(\mathbf{P}) = [\Psi(\mathbf{P})]\{\mathbf{u}\}^D \quad (2.93)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{P}) = [\Psi(\mathbf{P})]\{\mathbf{b}\} \quad (2.94)$$

e as grandezas de contorno são dadas por

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}) = [\phi(\mathbf{p})]\{\mathbf{u}\}^C \quad (2.95)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = [\phi(\mathbf{q})]\{\mathbf{f}\} \quad (2.96)$$

A diferença nesta abordagem alternativa de aproximação numérica será dada pela definição da projeção da função de Green.

Substituem-se as expansões acima nas equações (2.35) e (2.37), de onde são obtidas as expressões (2.42) e (2.50), ou seja,

$$[\Psi(\mathbf{P})]\{\mathbf{u}\}^D = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{P})' [\phi(\mathbf{q})]\{\mathbf{f}\} d\partial\Omega_q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})' [\Psi(\mathbf{Q})]\{\mathbf{b}\} d\Omega_Q \quad (2.97)$$

$$[\phi(\mathbf{p})]\{\mathbf{u}\}^C = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{p})' [\phi(\mathbf{q})]\{\mathbf{f}\} d\partial\Omega_q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{Q}, \mathbf{p})' [\Psi(\mathbf{Q})]\{\mathbf{b}\} d\Omega_Q \quad (2.98)$$

Desta vez, porém, as projeções da função de Green não são feitas sobre as funções peso, como no caso convencional, mas sobre as funções de interpolação à direita do tensor de Green. Portanto, definem-se:

$$[\mathbf{Gd}(\mathbf{p})] = \int_{\Omega} [\mathbf{G}(\mathbf{Q}, \mathbf{p})]^\dagger [\Psi(\mathbf{Q})] d\Omega_Q \quad (2.99)$$

$$[\mathbf{Gd}(\mathbf{P})] = \int_{\Omega} [\mathbf{G}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})]^\dagger [\Psi(\mathbf{Q})] d\Omega_Q \quad (2.100)$$

$$[\mathbf{Gc}(\mathbf{p})] = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{p})]^\dagger [\phi(\mathbf{q})] d\partial\Omega_q \quad (2.101)$$

$$[\mathbf{Gc}(\mathbf{P})] = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{P})]^\dagger [\phi(\mathbf{q})] d\partial\Omega_q \quad (2.102)$$

como as projeções da função de Green nos espaços gerados pelas funções de interpolação de domínio e de contorno, respectivamente.

Substituindo as expressões acima nas equações (2.97) e (2.98) obtêm-se, respectivamente,

$$[\Psi(\mathbf{P})]\{\mathbf{u}\}^D = [\mathbf{Gd}(\mathbf{P})]\{\mathbf{f}\} + [\mathbf{Gd}(\mathbf{P})]\{\mathbf{b}\} \quad (2.103)$$

$$[\phi(\mathbf{p})]\{\mathbf{u}\}^C = [\mathbf{Gd}(\mathbf{p})]\{\mathbf{f}\} + [\mathbf{Gd}(\mathbf{p})]\{\mathbf{b}\} \quad (2.104)$$

Se, na abordagem convencional, as funções peso forem as mesmas funções de interpolação utilizadas na discretização, as projeções da função de Green a ser aproximadas na abordagem alternativa são as mesmas do caso convencional. Portanto, o procedimento de obtenção das mesmas é idêntico ao apresentado em 2.5, desde que sejam considerados alguns aspectos de simetria, como será apresentado a seguir.

2.10. - APROXIMAÇÃO ALTERNATIVA DAS PROJEÇÕES DA FUNÇÃO DE GREEN

Nesta abordagem, é necessário garantir, a priori, que o tensor de Green envolvido seja simétrico. Como é sabido, isto não ocorre na forma usual da solução fundamental de placas. Nessa forma, o próprio operador de Navier de placa de Mindlin não é simétrico. A aproximação do tensor de Green mediante um princípio variacional, contudo, simetriza o mesmo, de forma que a condição de simetria do tensor de Green é satisfeita, possibilitando as deduções abaixo apresentadas.

Definam-se os mesmos dois problemas associados utilizados na aproximação convencional

Problema 1:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{G}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \delta(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \mathbf{I} \quad (2.105)$$

$$(\mathbf{N}^* + \mathbf{N}') \mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \{0\} \quad \forall \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \Omega; \mathbf{q} \in \partial\Omega$$

Problema 2:

$$A^* \mathbf{G}(Q, p) = \{0\} \quad (2.106)$$

$$(N^* + N') \mathbf{G}(q, p) = \delta(q, p) \mathbf{I} \quad \forall Q \in \Omega; p, q \in \partial\Omega$$

Pós-multiplicando as equações (2.105) por $[\Psi(Q)]$ e integrando no domínio Ω , mantendo o ponto P fixo, tem-se:

$$A^* \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, P) [\Psi(Q)] d\Omega_Q = \int_{\Omega} \delta(Q, P) [\Psi(Q)] d\Omega_Q = [\Psi(P)] \quad (2.107)$$

$$(N^* + N') \int_{\Omega} \mathbf{G}(q, P) [\Psi(Q)] d\Omega_Q = \{0\} \quad \forall P, Q \in \Omega; p \in \partial\Omega$$

Verificando que $\mathbf{G}(q, P) = [\mathbf{G}(Q, p)]^t$, e que $\mathbf{G}(Q, P) = [\mathbf{G}(Q, P)]^t$, observa-se que a última expressão pode ser re-escrita como

$$(N^* + N') \int_{\Omega} [\mathbf{G}(Q, p)]^t [\Psi(Q)] d\Omega_Q = \{0\} \quad \forall Q \in \Omega; p \in \partial\Omega \quad (2.108)$$

e tem-se,

$$A^* \mathbf{Gd}(P) = [\Psi(P)] \quad (2.109)$$

$$(N^* + N') \mathbf{Gd}(p) = \{0\} \quad \forall P \in \Omega; p \in \partial\Omega$$

onde identifica-se de imediato a projeção $\mathbf{Gd}(P)$ desejada.

Considerando, por outro lado, o problema 2, aplica-se procedimento semelhante. Desta vez, porém, pós-multiplicam-se as equações (2.106) por $[\phi(q)]$, integrando-as no contorno $\partial\Omega$, mantendo o ponto p fixo. Tem-se, assim,

$$A^* \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(Q, p) [\phi(q)] d\partial\Omega_q = \{0\} \quad (2.110)$$

$$(N^* + N') \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q, p) [\phi(q)] d\partial\Omega_q = [\phi(p)] \quad \forall Q \in \Omega; p, q \in \partial\Omega$$

Verificando, desta vez, que $\mathbf{G}(Q,p) = [\mathbf{G}(q,P)]^t$ e que $\mathbf{G}(q,p) = [\mathbf{G}(q,p)]^t$, a primeira equação pode ser re-escrita como

$$A^* \int_{\Omega} [\mathbf{G}(q,P)]^t [\phi(q)] d\Omega_q = \{0\} \quad (2.111)$$

e tem-se

$$A^* \mathbf{G} \mathbf{c}(P) = \{0\} \quad (2.112)$$

$$(N^* + N') \mathbf{G} \mathbf{c}(p) = [\phi(p)] \quad \forall P \in \Omega; p, q \in \partial\Omega \quad (2.113)$$

Os dois novos problemas, como pode ser facilmente notado, são os mesmos da aproximação convencional, e sua solução é levada a cabo de forma similar ao já apresentado.

2.11. - DETERMINAÇÃO ALTERNATIVA DOS SISTEMAS FINAIS DE CONTORNO E DOMÍNIO

Retomando as equações (2.103) e (2.104) e substituindo nestas as expansões via funções de interpolação de elementos finitos e contorno, dadas por (2.75), fica-se com

$$[\Psi(P)]\{\mathbf{u}\}^D = [\Psi(P)][\mathbf{G}^{CP}]\{\mathbf{f}\} + [\Psi(P)][\mathbf{G}^{DP}]\{\mathbf{b}\} \quad (2.114)$$

$$[\phi(p)]\{\mathbf{u}\}^C = [\phi(p)][\mathbf{G}^{CP}]\{\mathbf{f}\} + [\phi(p)][\mathbf{G}^{DP}]\{\mathbf{b}\} \quad (2.115)$$

Ambos os sistemas têm todos os seus termos pré-multiplicados por uma matriz de funções de interpolação, podendo ser simplificados. Fica-se, conseqüentemente, com

$$[\mathbf{I}]\{\mathbf{u}\}^D = [\mathbf{G}^{CP}]\{\mathbf{f}\} + [\mathbf{G}^{DP}]\{\mathbf{b}\} \quad (2.116)$$

$$[I]\{\mathbf{u}\}^c = [\mathbf{G}^{cp}]\{\mathbf{f}\} + [\mathbf{G}^{dp}]\{\mathbf{b}\} \quad (2.117)$$

Resolve-se primeiro o sistema de contorno, obtendo todos os valores do vetor $\{\mathbf{f}\}$, que em seguida, é substituído no sistema de domínio, definindo-o completamente.

Deve-se notar, contudo, que em virtude da simplificação feita sobre as equações (2.114) e (2.115), não foi aplicado processo de minimização de erro de Galerkin no problema real. A única minimização de erro realizada é a do problema auxiliar, que é feita a nível de domínio, por elementos finitos, em cada célula de Green. Não há minimização de erro no contorno! Esta constatação jogará um papel importante na interpretação dos resultados obtidos com o MLGFM, quando comparados com os do FEM.

O sistema obtido,

$$I\{\mathbf{u}\}^c = \mathbf{G}^{cp}\{\mathbf{f}\} + \mathbf{G}^{dp}\{\mathbf{b}\} \quad (2.118)$$

permite, ainda, simplificações adicionais. Isolando as incógnitas do lado esquerdo, de forma semelhante ao efetuado em (2.59), fica-se com

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{nn} & -\mathbf{G}_{nd}^{cp} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{dd}^{cp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_d\}_n \\ \{\mathbf{f}_d\}_d \end{Bmatrix}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{nn}^{cp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{dn}^{cp} & -\mathbf{I}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{f}_p\}_n \\ \{\mathbf{u}_p\}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_d^{dp} \\ \mathbf{G}_d^{dp} \end{bmatrix} \{\mathbf{b}\} \quad (2.119)$$

Do sub-sistema inferior obtém-se

$$[\mathbf{G}_{dd}^{cp}]\{\mathbf{f}_d\}_d = -[\mathbf{G}_{dn}^{cp}]\{\mathbf{f}_p\}_n + \{\mathbf{u}_p\}_d - [\mathbf{G}_d^{dp}]\{\mathbf{b}\} \quad (2.120)$$

ou,

$$[\mathbf{G}_{dd}^{cp}]\{\mathbf{f}_d\}_d = \{\mathbf{c}\} \quad (2.121)$$

onde

$$\{c\} = -[G_{dn}^{cp}]\{f_p\}_n + \{u_p\}_d - [G_d^{dp}]\{b\} \quad (2.122)$$

No caso particular onde se têm condições de contorno homogêneas a expressão (2.122) resume-se a

$$\{c\} = -[G_d^{dp}]\{b\} \quad (2.123)$$

A equação (2.121) é o sistema linear final a ser resolvido. Note-se que efetuando este procedimento, várias multiplicações matriciais são evitadas e a dimensão do sistema fica substancialmente reduzida quando comparada com a dimensão do sistema dado por (2.60), com conseqüente economia computacional. Paralelamente, o condicionamento numérico tende a melhorar pois as incógnitas são todas da mesma ordem de grandeza.

Após a determinação de $\{f_d\}_d$ os deslocamentos generalizados incógnitos podem ser facilmente obtidos através da relação dada pelo sub-sistema superior na equação (2.119).

Assim,

$$\{u_d\}_n = [G_{nn}^{cp}]\{f_p\}_n + [G_{nd}^{cp}]\{f_d\}_d + [G_n^{dp}]\{b\} \quad (2.124)$$

o que completa a determinação das incógnitas no contorno.

Por outro lado, uma vez determinado o vetor $\{f\}$, o sistema de domínio

$$\{u\}^D = G^{cp}\{f\} + G^{dp}\{b\} \quad (2.125)$$

é de solução direta.

2.12 - MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Como foi apresentado nas seções 2.5 e 2.6, as matrizes \mathbf{G}^{CP} e \mathbf{G}^{DP} correspondem a valores nodais das projeções da função de Green expandidas por funções de interpolação de domínio numa malha de elementos finitos. O MLGFM trabalha, contudo, com dois tipos de malha: a de domínio e a de contorno. No Método dos Elementos de Contorno, é frequente utilizar artifícios para impor adequadamente as condições de contorno em pontos de discontinuidade do vetor normal. As técnicas mais comumente empregadas são a utilização de elementos descontínuos, a utilização de nós duplos e a utilização de nós duplos com relações adicionais (Banerjee & Butterfield, 1981). Neste trabalho e em todos os seus antecessores relativos ao MLGFM, a idéia utilizada foi a de aplicar o conceito de nó duplo com relação adicional, a qual tem sido imposta via Multiplicadores de Lagrange.

Na Figura 2.9 é apresentado um nó duplo de uma malha de contorno com seu correspondente numa malha de domínio

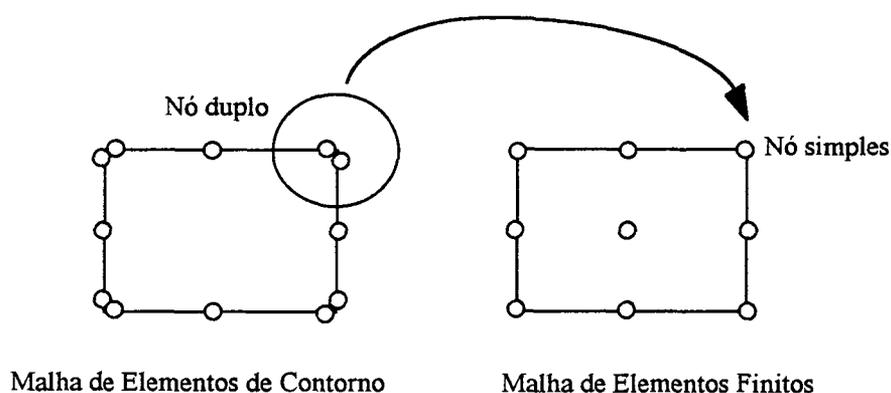


Figura 2.9. Nó duplo numa malha de contorno com correspondente nó simples numa malha de domínio

Observe-se que as matrizes \mathbf{G}^{CP} e \mathbf{G}^{DP} correspondem às linhas de \mathbf{G}^{CP} e \mathbf{G}^{DP} relativas aos graus de liberdade de contorno, sem alteração das colunas, o que é garantido pelo teorema do traço, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{Gd}(P) &= [\Psi(P)]\mathbf{G}^{DP} \quad \text{e} \quad \mathbf{Gd}(p) = [\phi(p)]\mathbf{G}^{Dp} \\ \mathbf{Gc}(P) &= [\Psi(P)]\mathbf{G}^{CP} \quad \text{e} \quad \mathbf{Gc}(p) = [\phi(p)]\mathbf{G}^{Cp} \end{aligned} \quad (2.126)$$

Porém isto implica na existência de nó simples na malha de contorno, visto que o nó do vértice na mesma possui apenas uma equação. O que tem sido feito até o momento é a duplicação da linha que representa esta equação nas matrizes \mathbf{G}^{Cp} e \mathbf{G}^{Dp} quando existe nó duplo, e solucionado diretamente o sistema (2.60) de dimensão mc , onde mc é igual ao número total de nós da malha de contorno vezes o número de graus de liberdade por nó. Neste caso, analisando o sistema (2.117) que corresponde ao (2.52) simplificado, verifica-se que se no caso de num determinado grau de liberdade de um nó duplo, forem impostos em ambos os nós deslocamentos prescritos (de igual valor) e o carregamento externo introduzido pelo vetor $\{\mathbf{b}\}$ for o mesmo, ficar-se-á com duas linhas iguais, correspondentes à duplicação de \mathbf{G}^{Cp} e \mathbf{G}^{Dp} . O sistema ficará, então, singular e não será possível determinar os esforços desejados.

Para superar essa dificuldade entram as relações adicionais. Estas podem ser introduzidas da seguinte forma no sistema dado por (2.60) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \Lambda^T \\ \Lambda & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.127)$$

onde a sub-matriz $[\Lambda]$ é a matriz das relações a incluir e $\{\lambda\}$ são os Multiplicadores de Lagrange.

CAPÍTULO 3

REVISÃO E APLICAÇÕES SELECIONADAS DO MLGFM PARA O PROBLEMA DE FLEXÃO DE PLACA DE REISSNER-MINDLIN

3.1. - INTRODUÇÃO

Placas e cascas são entes estruturais caracterizados geometricamente por ter uma das suas dimensões, a espessura "h", muito menor que as outras duas. Além disso, caracteriza-as o fato de possuir uma superfície de referência que, em geral, é definida pela superfície média, como pode ser observado na Figura 3.1.

As placas, no entanto, não possuem curvatura na superfície de referência, fato que, estruturalmente, desacopla o comportamento relativo à flexão e o relativo ao efeito de membrana das mesmas, quando submetidas a pequenos deslocamentos e deformações.

Na análise tri-dimensional pela teoria da elasticidade, as placas não apresentam dificuldades teóricas, mas em função da grande diferença entre a espessura e as suas outras dimensões, problemas de condicionamento podem ocorrer na tentativa de fazer uma modelagem numérica sólida das mesmas (Zienkiewicz, 1989).

Com o objetivo de simplificar o problema de flexão de placa, em 1850, Kirchhoff desenvolveu uma teoria estrutural (incluindo hipóteses ad-hoc), levando a um modelo bi-dimensional. Este modelo, apesar de ter sido desenvolvido muito antes do desenvolvimento do computador, é muito mais adequado para a análise numérica, face à eliminação de grandes variações nas dimensões do corpo. Contudo, as hipóteses

introduzidas por Kirchhoff limitam a aplicação da teoria a placas finas, uma vez que através da imposição de restrição à rotação das normais à superfície de referência, os efeitos da deformação de cisalhamento transversal são negligenciados. Esta teoria foi chamada Teoria Clássica de Placas - CPT, Teoria de Placa Fina, ou ainda, Teoria de Placa de Kirchhoff.

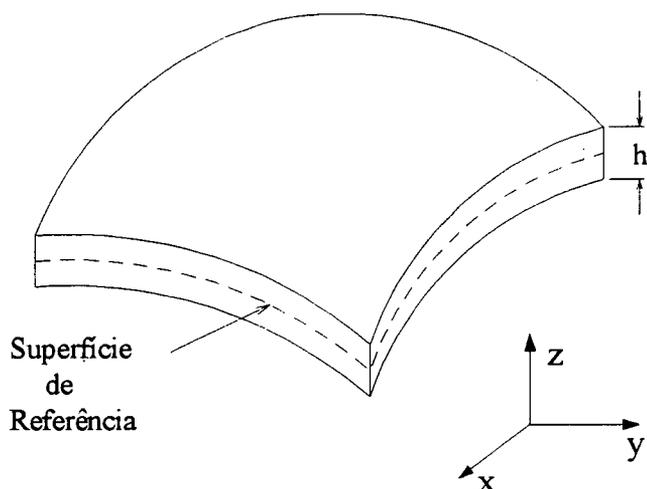


Figura 3.1. Elementos básicos de uma casca ou placa

Reissner (1945, 1947) propôs um novo modelo, válido para problemas estáticos de placa, onde era levada em consideração a influência da deformação cisalhante transversal. Como consequência, a teoria possibilitava aplicação a placas moderadamente espessas. A dedução de seu modelo partia de um campo de tensões pré-definido.

Posteriormente, partindo do campo de deslocamentos, Mindlin (1951) desenvolveu formulação semelhante para o caso dinâmico. Mindlin, ao contrário de Reissner, negligenciou a tensão normal transversal na formulação. Por outro lado, considerou o efeito da inércia rotacional. À teoria advinda da contribuição destes dois pesquisadores é dado o nome de Teoria de Reissner-Mindlin ou Teoria de Placa Semi-Espessa.

Apesar das teorias de Kirchhoff e Reissner-Mindlin serem bi-dimensionais e lineares, problemas de placa envolvendo geometrias, carregamentos e condições de

contorno complexas tiveram que esperar o desenvolvimento dos sistemas computacionais para poder ser resolvidos, através de técnicas de solução aproximada.

O problema de flexão de placa vem sendo analisado pelo Método dos Elementos Finitos desde o começo dos anos 60, sendo que um "review" pode ser visto em Hrabok & Hrudey (1984). Resumidamente, iniciou-se a pesquisa de elementos de placa utilizando a teoria de Kirchhoff, que exigia continuidade C^1 das funções de interpolação. Posteriormente, foram desenvolvidos códigos computacionais correspondentes à teoria de Reissner-Mindlin, expandindo a abrangência da aplicabilidade do método dos elementos finitos a placas de maior espessura, onde o efeito da deformação de cisalhamento transversal não pode ser desprezado. Nestas formulações, as funções de interpolação exigem apenas continuidade C^0 , pois o deslocamento transversal e as rotações são aproximados independentemente.

A simplicidade de implementação deste último esquema teve suas desvantagens, aparecendo estas, na aplicação dos elementos de placa de Reissner-Mindlin para modelar placas finas, onde surgiu o fenômeno do "locking" ou travamento de cisalhamento. Este fenômeno é caracterizado por uma sobre-avaliação da contribuição energética da parcela de deformação de cisalhamento transversal frente à da deformação de flexão, na expressão da energia potencial do sistema.

Para avaliar adequadamente a influência de cada parcela na energia potencial, foi desenvolvida a técnica da integração reduzida. Este procedimento soluciona o problema do "locking", porém, em geral, produz o aparecimento de modos espúrios de deformação. Estes são modos de deformação associados a energia zero, e em consequência, fisicamente impossíveis. Contudo, por não requerer de energia para existir, a minimização da energia potencial não impede o seu aparecimento, e estes modos passam a constituir um sério problema.

As tendências atuais de desenvolvimento de elementos de placa semi-espessa se concentram, então, em três linhas: a primeira busca uma maneira ótima de interpolação para evitar o problema do "locking" e a necessidade da subintegração; a

segunda, por sua vez, procura identificar e eliminar os modos espúrios após o seu aparecimento quando utilizada a regra de integração reduzida; e a terceira trabalha com formulações mistas, onde o campo de deformações é aproximado diretamente pelas funções de interpolação, da mesma forma que os deslocamentos.

Mais recentemente, o Método dos Elementos de Contorno também vem tratando problemas de placa, tanto através da formulação direta quanto da indireta. Para placa fina, utilizando o método direto, os artigos de Bézine (1978) e Stern (1979) são relevantes. Por outro lado, para placa semi-espessa, pelo método direto, Van der Weeën (1982,a) aplicou pela primeira vez com êxito a teoria de Reissner. Contudo, seus resultados para esforços cortantes não foram muito satisfatórios. Num segundo artigo, Van der Weeën (1982,b) utilizando o conceito de nó duplo melhorou consideravelmente os esforços cortantes.

Karam & Telles (1986, 1988) apresentaram resultados pela formulação de Van der Weeën, utilizando elementos quadráticos isoparamétricos contínuos e descontínuos, incluindo o cálculo nos pontos internos e a análise de placas infinitas. Todos os seus resultados foram satisfatórios.

Barcellos & Silva (1987), desenvolveram a solução fundamental para placa de Mindlin, e Westphal Jr. (1990) em sua dissertação de mestrado apresentou uma formulação integral unificada para os modelos de placa de Mindlin e Reissner, apresentando os tensores fundamentais na forma mais geral possível. A formulação do modelo específico dependia apenas da consideração de um "fator de modelo" que possuía um valor apropriado para cada um dos casos.

Recentemente, Barbieri & Barcellos (1991,a) e Barbieri (1992) apresentaram uma formulação para tratar o problema de flexão de placa de Mindlin pelo Método da Função de Green Local Modificado - MLGFM. A formulação por eles empregada e os resultados obtidos são aqui discutidos e uma nova maneira de tratar o problema é proposta, objetivando aplicar adequadamente a continuidade do tensor tensão

em pontos de discontinuidade do vetor normal. De passagem, avalia-se qualitativamente o condicionamento das matrizes do problema de contorno obtido.

São apresentadas aplicações numéricas selecionadas que procurarão elucidar o comportamento deste método numérico em relação ao fenômeno do "locking" e ao aparecimento de modos espúrios quando for aplicada subintegração seletiva. Os resultados apresentados não pretendem esgotar o tema, mas apenas constituir uma colaboração para o estudo deste assunto.

O conteúdo deste capítulo é de grande valia para o posterior estudo do problema dinâmico, visto que a formulação empregada nesse caso faz uso da função de Green associada ao problema estático.

3.2 MODELO DA PLACA DE MINDLIN

Seja uma placa moderadamente espessa, isotrópica, homogênea, com espessura h e caracterizada pela sua superfície média, como apresentado na Figura 3.2.

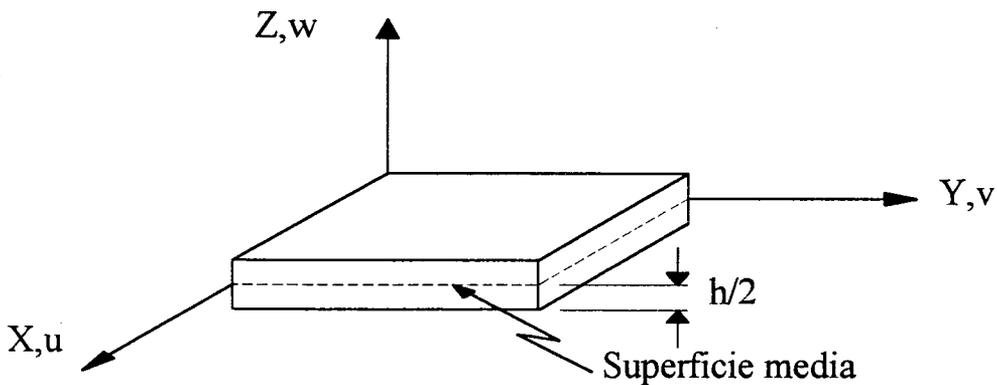


Figura 3.2. Superfície média .

A superfície média representa um domínio aberto Ω , contido no \mathfrak{R}^2 e limitado por um contorno contínuo $\partial\Omega$. O modelo de placa de Mindlin pressupõe as seguintes hipóteses básicas:

- 1) As deflexões da placa são pequenas comparadas com a espessura da mesma;
- 2) A tensão normal transversal é desprezada;
- 3) As normais à superfície de referência indeformada da placa não permanecem normais à superfície de referência deformada, permanecendo, no entanto, retas e não sofrendo variação de comprimento.

Note-se que a hipótese (2) contradiz a hipótese (3). A justificativa para tal "crime" conceitual é que não há teoria de placa que seja completamente consistente com a elasticidade tridimensional e ao mesmo tempo simples e útil.

As hipóteses efetuadas levam a definir o seguinte campo de deslocamento:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &\doteq z\theta_x(x, y) \\ u_y(x, y, z) &\doteq z\theta_y(x, y) \\ u_z(x, y, z) &\doteq w(x, y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde (u_x, u_y, u_z) são os deslocamentos nas direções x , y e z de um ponto genérico da placa e (θ_x, θ_y) são as rotações em torno do eixo y e x , respectivamente, conforme a Figura 3.3.

Pode-se, portanto, caracterizar os deslocamentos (u_x, u_y, u_z) pelo deslocamento transversal w e pelas duas rotações θ_x e θ_y . Assim, definindo $\mathbf{u}(x)$ como

$$\mathbf{u}(x) = \{w(x, y), \theta_x(x, y), \theta_y(x, y)\}^t \quad (3.2)$$

podem-se definir, da teoria da elasticidade, os tensores curvatura κ e distorção transversal γ , como sendo

$$\kappa = \begin{bmatrix} 0 & \bullet, x & 0 \\ 0 & 0 & \bullet, y \\ 0 & \bullet, y & \bullet, x \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{A}_F \mathbf{u} \quad (3.3)$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \bullet, x & 1 & 0 \\ \bullet, y & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{A}_s \mathbf{u} \quad (3.4)$$

O vetor de momentos $\mathbf{M} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^t$ e o vetor das tensões de cisalhamento transversal resultantes $\mathbf{Q} = \{Q_x, Q_y\}^t$ estão relacionados com κ e γ por

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_F \kappa \quad \text{e} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{D}_S \gamma \quad (3.5)$$

onde

$$\mathbf{D}_F = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_S = \frac{Eh}{2\alpha(1+\nu)} \mathbf{I} \quad (3.6)$$

sendo que E , ν , α e \mathbf{I} representam respectivamente, Módulo de Young, coeficiente de Poisson, fator de Mindlin para correção das tensões de cisalhamento e matriz identidade. Neste trabalho é adotado $\alpha = \frac{6}{5}$ (Fator de Reissner).

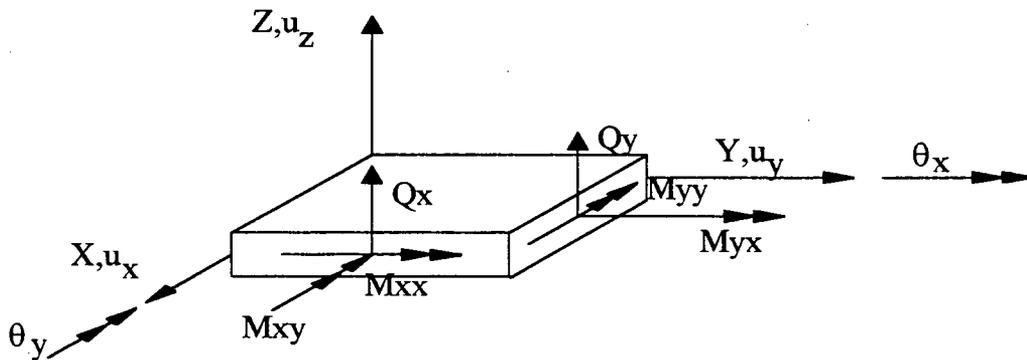


Figura 3.3. Convenção para o sentido positivo dos esforços no sistema de referência global.

Pode-se, com as definições acima, apresentar a expressão para a energia potencial total da placa,

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} [\kappa^t \mathbf{D}_F \kappa + \gamma^t \mathbf{D}_S \gamma] - q(x, y) w(x, y) \right\} d\Omega \quad (3.7)$$

A parcela da integral que se encontra dentro de colchetes, corresponde à energia de deformação elástica da placa, sendo que o termo da esquerda conta com a influência dos momentos generalizados e o termo da direita com a influência das forças de cisalhamento transversal generalizadas. Por outro lado, a parcela que se encontra fora dos colchetes, na integral, corresponde ao trabalho realizado pelo carregamento externo $q(x,y)$.

A extremização do funcional energia potencial total $\Pi(\mathbf{u})$, fornece o valor do vetor deslocamento generalizado \mathbf{u} que estabelece uma condição de equilíbrio para o problema. As equações de equilíbrio resultantes podem ser expressas na forma matricial

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (3.8)$$

onde $\mathbf{b} = \{q(x,y), 0, 0\}^t$ e A é o operador diferencial do problema, apresentado abaixo

$$A = \begin{bmatrix} C(\bullet, xx + \bullet, yy) & C \bullet, x & C \bullet, y \\ C \bullet, x & D(\bullet, xx + a \bullet, yy) + C & Db \bullet, yx \\ C \bullet, y & Db \bullet, xy & D(\bullet, yy + a \bullet, xx) + C \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

sendo $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, $C = Eh/2\alpha(1+\nu)$, $a = (1-\nu)/2$, $b = (1+\nu)/2$ e " \bullet ," indicando derivada parcial.

As condições de contorno para este problema podem ser do tipo *Dirichlet* - deslocamentos generalizados prescritos - ou *Neumann* - esforços generalizados prescritos. As condições de contorno de Neumann são resultantes do processo de extremização e valem

$$\mathbf{T} = \{Q_n, M_{xn}, M_{yn}\}^t \quad (3.10)$$

sendo

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_x n_x + Q_y n_y \\ M_{xn} &= M_{xx} n_x + M_{xy} n_y \\ M_{yn} &= M_{xy} n_x + M_{yy} n_y \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde (n_x, n_y) são os cossenos diretores do vetor normal ao contorno com relação aos eixos x e y . Define-se o operador de Neumann, N , como sendo

$$Nu = T \quad (3.12)$$

e fazendo uso das equações (3.11), este é identificado, valendo

$$N = \begin{bmatrix} C(n_x \bullet, x + n_y \bullet, y) & Cn_x & Cn_y \\ 0 & D(n_x \bullet, x + an_y \bullet, y) & D(vn_x \bullet, y + an_y \bullet, x) \\ 0 & D(an_x \bullet, y + vn_y \bullet, y) & D(n_y \bullet, x + an_x \bullet, x) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

3.3 - IDENTIFICAÇÃO DOS OPERADORES MATEMÁTICOS ENVOLVIDOS NA FORMULAÇÃO DO MLGFM PARA FLEXÃO DE PLACA DE REISSNER-MINDLIN

Como foi visto no capítulo 2, o MLGFM parte de uma relação de reciprocidade que envolve o estado real - incógnito - e um auxiliar - proveniente da solução fundamental do operador adjunto associado ao problema em análise, com condições de contorno apropriadas.

$Au = b$ $Nu = T$	$A^*G(Q, P) = \delta(Q, P)$ $(N^* + N')G(q, P) = 0$
Problema Original	Problema Adjunto

Necessita-se, portanto, conhecer os operadores matemáticos envolvidos nos dois estados. No caso de flexão de placa de Mindlin, o operador diferencial do problema, A , é auto-adjunto, de maneira que $A^* = A$ e $N^* = N$ (Oden & Reddy, 1976). Assim, os operadores matemáticos envolvidos na formulação estão todos determinados, e o formalismo consiste na aplicação direta do exposto no item 2.3.

3.4 - RESULTADOS MEDIANTE A FORMULAÇÃO NO SISTEMA DE REFERÊNCIA GLOBAL

Analisam-se aqui, de forma objetiva, os resultados numéricos tanto para deslocamentos quanto para esforços na resolução do problema de flexão de placa de Mindlin, utilizando a forma de tratamento até agora descrita. São apresentados alguns dos casos estudados por Barbieri (1992), além de outros adicionais. A ênfase é dada à forma de imposição das condições de contorno em pontos de descontinuidade do vetor normal; à detecção do fenômeno do "locking" e à análise das características de convergência de deslocamentos e esforços, do MLGFM frente ao FEM. Para tanto, comparam-se ambos os métodos, sendo que nos dois casos a discretização de domínio é feita com a mesma malha e mesmo elemento. São empregados elementos lagrangeanos e serendipity.

Para a avaliação de esforços com o FEM, foi desenvolvido um programa específico, aplicando-se dois esquemas. No primeiro, determinou-se, a nível de elemento, a matriz B - derivada das funções de interpolação - nos pontos de integração, com a regra da integração reduzida. Através da relação $\varepsilon = Bu$, obtiveram-se valores de deformação nesses pontos, que após multiplicados pela matriz constitutiva, definiram um campo de tensões, extrapolado para os pontos nodais. Como é sabido, os resultados para esforços são descontínuos na interface entre dois elementos, sendo uma alternativa aceitável calcular a média aritmética dos resultados para um dado nó (Cook et al., 1984). Este procedimento, contudo, não foi realizado, de forma a deixar nítida a diferença entre os campos de tensão obtidos por cada um dos métodos.

No segundo esquema, as tensões foram avaliadas diretamente nos nós. É de conhecimento comum que esta alternativa, na maioria dos casos, fornece resultados muito pobres, principalmente para esforços cortantes. Contudo, como o MLGFM calcula as tensões diretamente nos nós, é interessante compará-lo com esta alternativa.

Considere-se que as variáveis de domínio, valores nodais das projeções da função de Green, tenham já sido determinadas e seja agora o momento de determinar as variáveis de contorno através do procedimento de elementos de contorno de Galerkin.

Existem três graus de liberdade por nó, onde as variáveis primais são w , θ_x e θ_y , e as duais, Q_n , M_{nx} e M_{ny} , uma vez que o problema está sendo tratado no sistema de referência global.

Considerando as expressões (3.11) e observando o valor dos cossenos diretores em cada aresta da placa, será feita, primeiramente, uma análise dos esforços calculados.

3.4.1. - Análise de Esforços

Na análise a ser efetuada a seguir, devido a considerações de simetria, todos os casos foram modelados pelo quadrante superior direito da placa. O carregamento aplicado foi transversal unitário uniforme. As características da placa foram as seguintes: lado = $a = 20.0$, $h = 0.2$, $E = 2.1 \times 10^6$ e $\nu = 0.3$. Os esforços foram adimensionalizados segundo as seguintes regras: $Q^* = 10 Q/a$ e $M^* = 100 M/a^2$.

3.4.1.1 - Placa Simplesmente Apoiada (Hard) com Condições de Simetria

Neste caso, o quadrante superior direito é modelado com 8 elementos de contorno quadráticos, utilizando nós duplos nos vértices, e 4 elementos finitos lagrangeanos de 9 nós com subintegração seletiva (QLR). A Figura 3.4 representa esta situação e as chaves correspondem ao vetor incógnita em cada aresta da placa modelada.

O tratamento dos nós duplos no MLGFM é um pouco diferente do procedimento no Método dos Elementos de Contorno. No presente método não é necessário acrescentar equações para assegurar igualdade de deslocamentos generalizados em pontos de descontinuidade da normal. Esta igualdade é automaticamente satisfeita,

por construção. Por outro lado, para evitar singularidade, é necessário acrescentar uma equação que estabeleça uma relação adicional quando num nó duplo o mesmo grau de liberdade possui, em ambos nós, condição de contorno de Dirichlet com igual valor. A relação utilizada nos trabalhos anteriores (Silva, 1988), (Barbieri, 1992), (Machado, 1992) e (Filippin, 1992) simplesmente iguala as incógnitas, isto é, os esforços generalizados, seja mediante a aplicação de um nó simples no vértice no caso de um grau de liberdade por nó, seja através de multiplicadores de Lagrange nos demais casos.

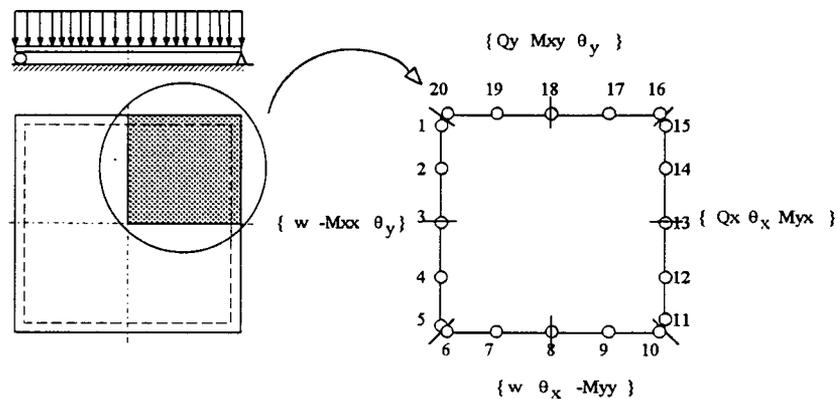


Figura 3.4. Placa Simplesmente Apoiada - Quadrante Modelado e Condições de Contorno

Note-se que no exemplo em questão, essa situação aparece nos cantos superior esquerdo e direito e no canto inferior direito.

Analisando essa situação, percebe-se que no canto superior direito, apesar de não ser sempre correto assumir esta igualdade, está se tratando com grandezas de mesma natureza, esforços cortantes normais. A situação é mais delicada nos cantos superior esquerdo e inferior direito, onde além de serem igualadas grandezas de natureza diferente - momentos fletores com momentos torçores - estes têm sinal invertido pela influência dos cossenos diretores, como pode ser visto inspecionando a equação (3.11). A imposição da igualdade, portanto, geralmente está errada, salvo quando as incógnitas são nulas.

Efetivamente, para placa fina, no caso da mesma ser quadrada, simplesmente apoiada e com carregamento simétrico, tem-se no canto inferior direito, correspondente aos nós 10 e 11 da malha de elementos de contorno, a condição $M_{yy} = M_{xy} = 0$ e, portanto, a imposição da igualdade destas grandezas está de acordo com a realidade. Esta coincidência não pode, porém, ser tomada como regra geral, pois apesar de neste caso particular serem obtidos bons resultados para esforços, o mesmo não ocorre quando uma placa engastada é modelada, como será visto em seguida.

A seguir são apresentados os gráficos que apresentam a comparação de esforços do MLGFM versus FEM para este caso.

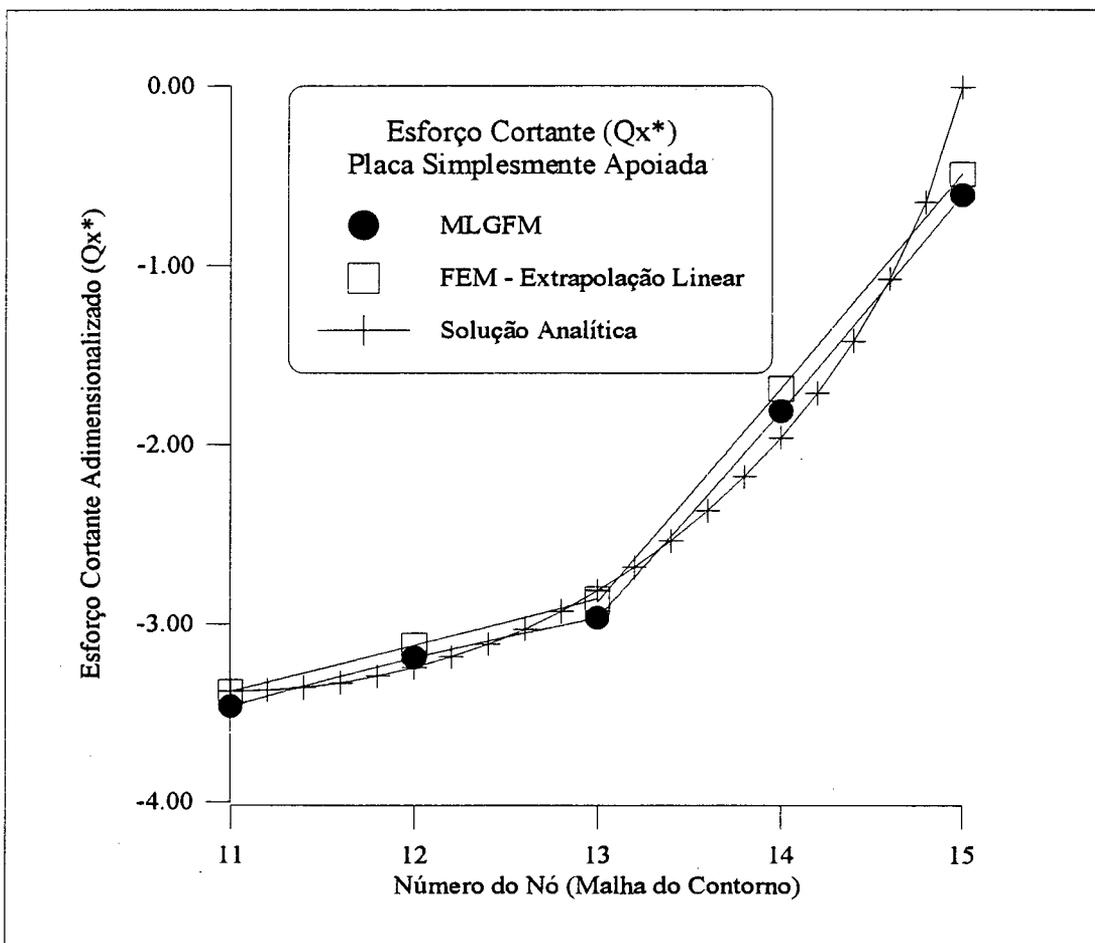


Figura 3.5 Perfil do Esforço Cortante Q_x na Lateral Direita da Placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito)

Tabela 3.1. Esforço Cortante Adimensionalizado: MLGFM X FEM
Placa Simplesmente Apoiada (Hard)

	Nó				
	11	12	13	14	15
MLGFM	-3.4640	-3.1880	-2.9665	-1.8120	-0.6025
FEM - Extrap. Linear	-3.3777	-3.1180	-2.8582	-1.6832	-0.4900
FEM - Cômput. Nodal	-228.1937	-213.3527	-166.7685	-92.0402	0.0000

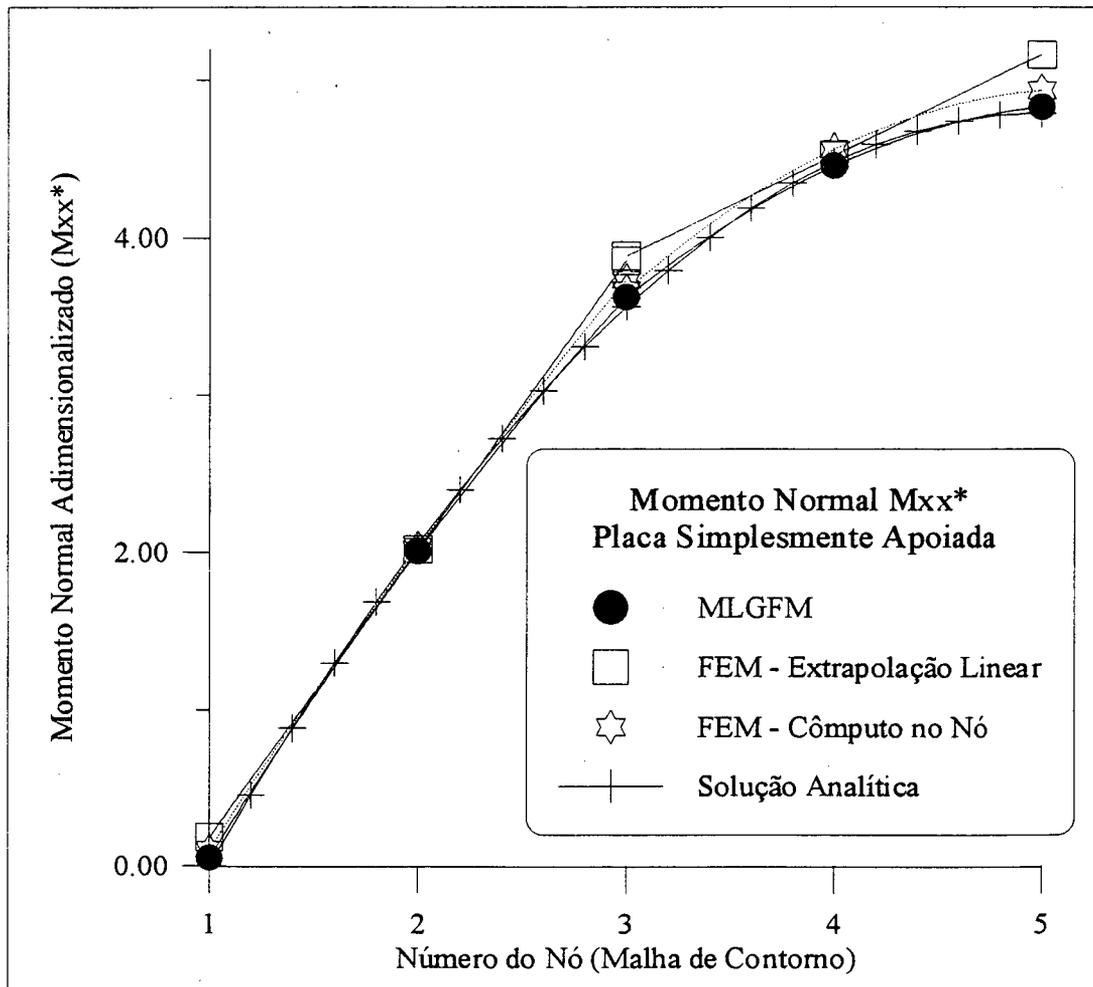


Figura 3.6. Perfil de Momento Normal M_{xx} ao Longo do Centro da Placa
(Lateral Esquerda do Quadrante Superior Direito)

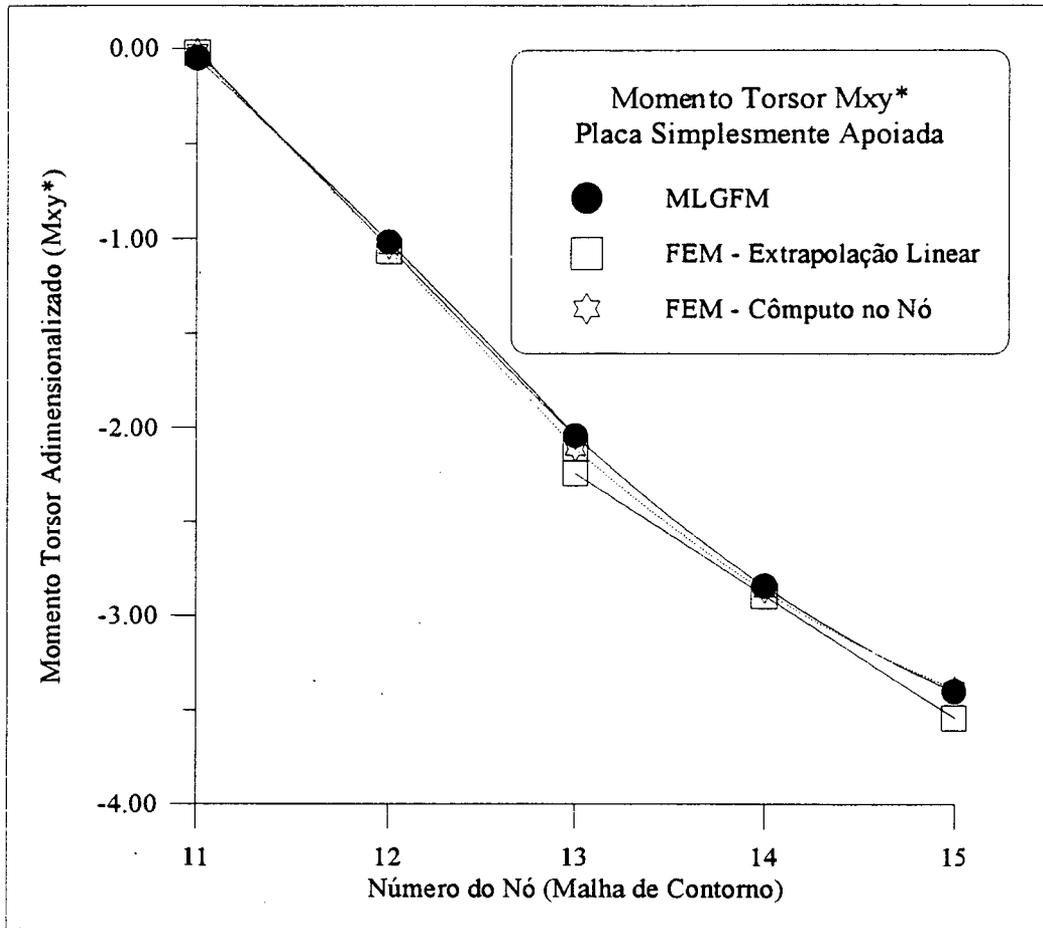


Figura 3.7. Perfil de Momentos Torçores M_{xy} na Lateral Direita da Placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito)

Os gráficos apresentados acima demonstram claramente que se, na formulação do Método dos Elementos Finitos, os resultados obtidos nos nós pertencentes a mais de um elemento forem mediados, os resultados via MLGFM e FEM com extrapolação linear de tensões a partir dos pontos de quadratura são compatíveis, guardando uma ligeira diferença entre si.

3.4.1.2 - Placa Simplesmente Apoiada (Soft) com Condições de Simetria

Outro caso a ser estudado é o de Placa Simplesmente Apoiada com condições de contorno do tipo "Soft", isto é, sem restrição nas condições de contorno do tipo rotação tangencial. A discretização do contorno é realizada com 8 elementos de

contorno quadráticos, utilizando nós duplos nos vértices. No domínio são empregados 4 elementos finitos do tipo QLR. Esta situação é apresentada na Figura 3.8, onde as colunas em chaves são o vetor incógnita em cada aresta da placa.

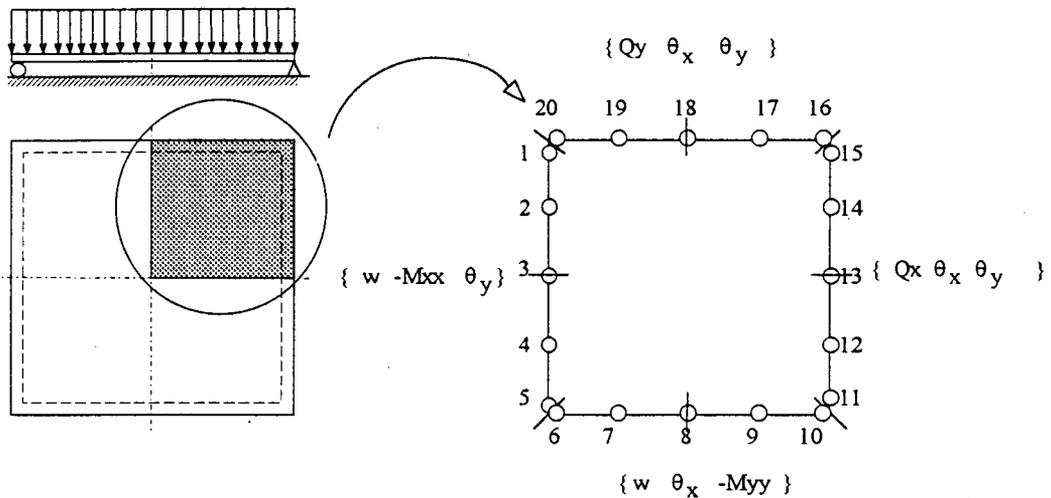


Figura 3.8. Placa Simplesmente Apoiada "Soft" - Quadrante Modelado e Condições de Contorno

Neste caso, a única igualdade que seria equivocada é a do canto superior direito, $Q_x = Q_y$. Porém, devido à placa ser quadrada, e que as condições de contorno e carregamento são simétricas, esta igualdade é verdadeira. Assim, os nós duplos não estão sendo um fator de introdução de erro.

Alguns perfis de esforços ao longo da placa são apresentados, a seguir, em forma de gráficos.

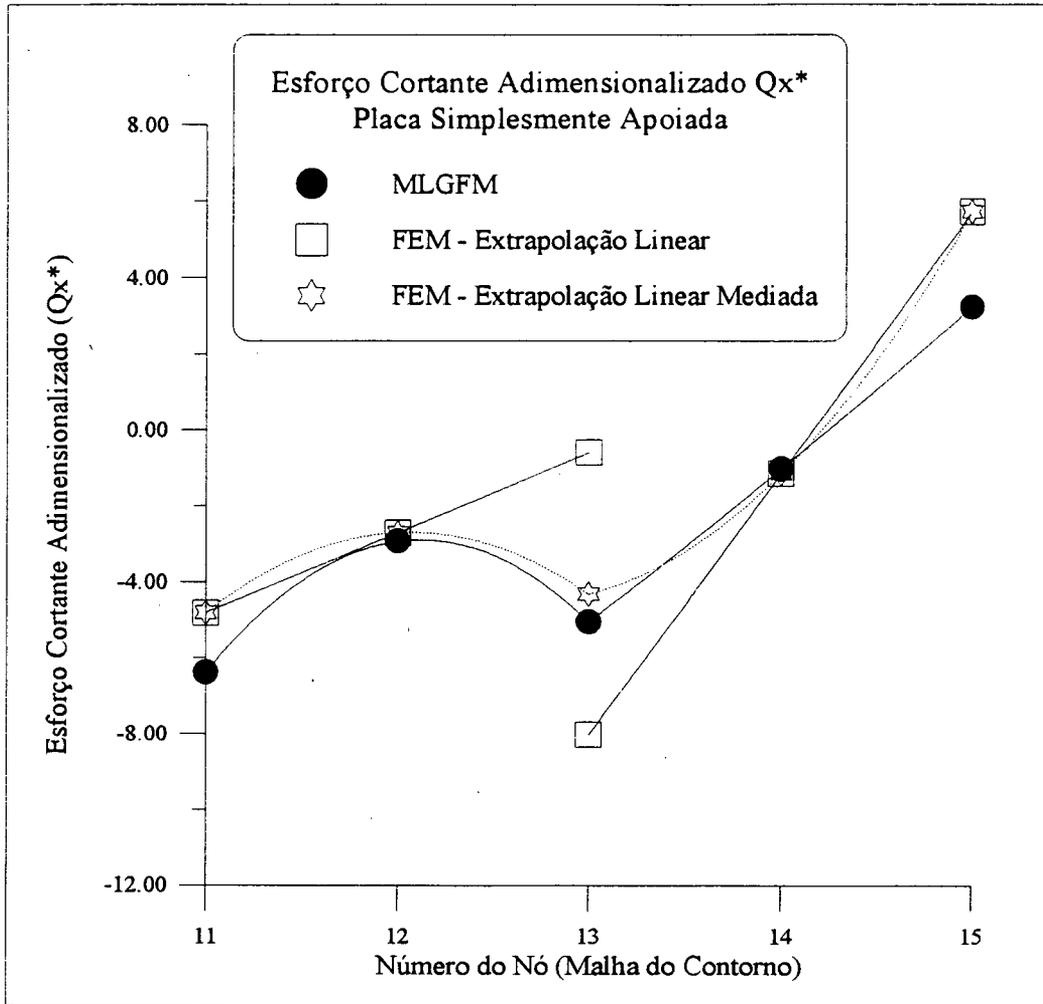


Figura 3.9. Perfil do Esforço Cortante Q_x na Lateral Direita da Placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito)

Tabela 3.2. Esforço Cortante Adimensionalizado: MLGFM X FEM Placa Simplesmente Apoiada (Soft)

	Nó				
	11	12	13	14	15
MLGFM	-6.3800	-2.9365	-5.0500	-1.0317	3.2375
FEM - Extrap. Linear	-4.7982	-2.7037	-0.6092 -8.0233	-1.1509	5.7215
FEM - Cômput. Nodal	72.2626	-356.0708	136.5976 136.5976	-240.0355	257.7405

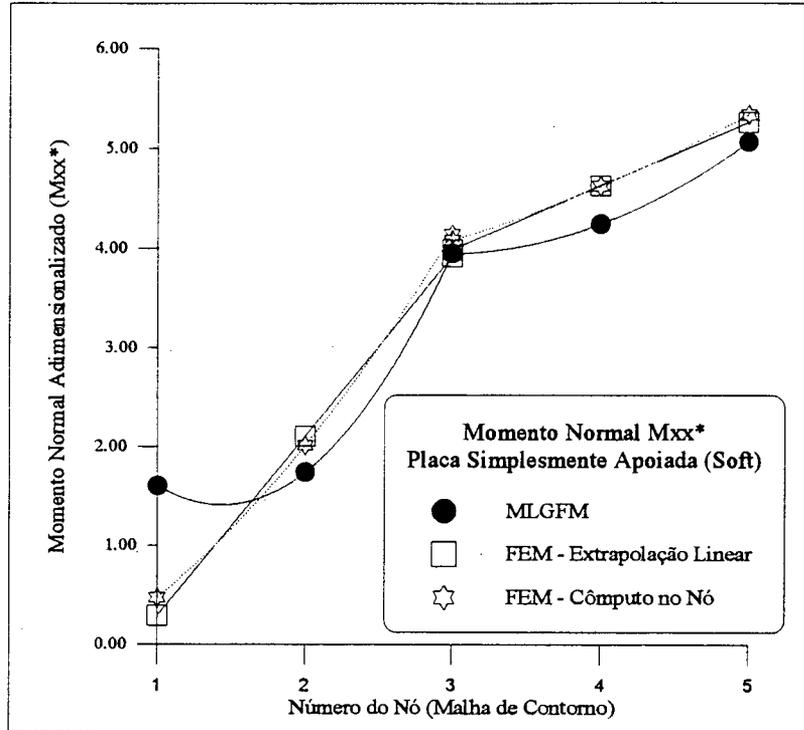


Figura 3.10. Perfil do Momento Normal M_{xx} ao Longo do Centro da Placa (Lateral Esquerda do Quadrante Superior Direito)

3.4.1.3 - Placa engastada com simetria

Note-se que o raciocínio exposto anteriormente é válido aqui também, sendo que mais igualdades equivocadas são realizadas, principalmente nos vértices superior esquerdo e inferior direito, onde $M_{xx} \neq M_{yy} = 0$ e $M_{yy} \neq M_{yx} = 0$, respectivamente. A representação deste caso é dada nas Figuras 3.11 e 3.12.

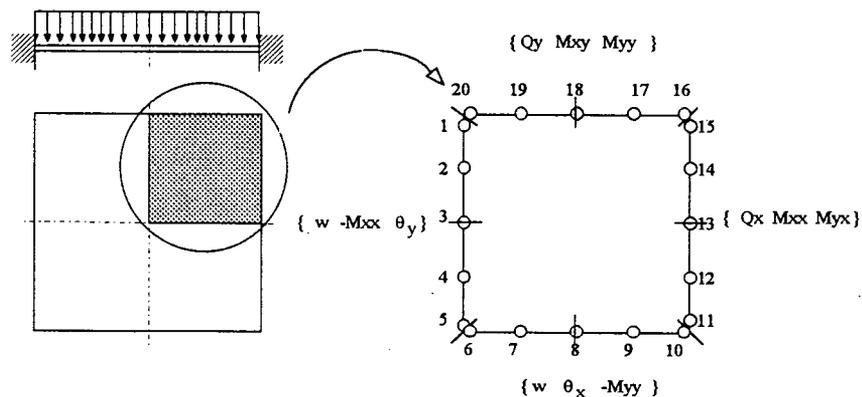


Figura 3.11. Placa Engastada - Quadrante Modelado e Condições de Contorno.

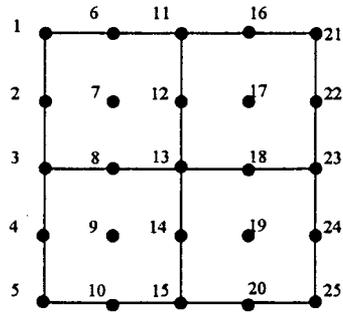


Figura 3.12. Malha de Domínio do Quadrante Modelado da Placa Engastada

O efeito desta imposição errônea pode ser visto nas Figuras 3.14 e 3.16.

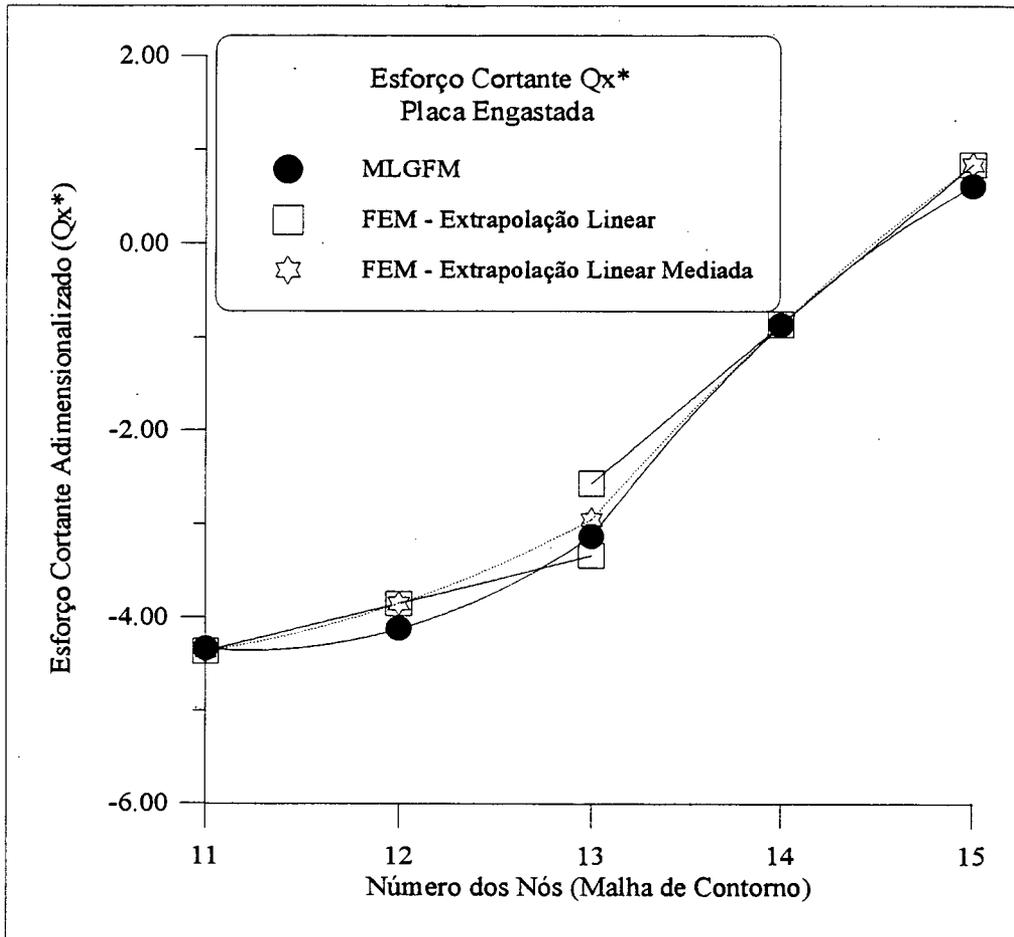


Figura 3.13. Perfil de Esforço Cortante Q_x na lateral direita da placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito)

Tabela 3.3. Esforço Cortante Adimensionalizado: MLGFM X FEM
Placa Engastada

	Nó				
	11	12	13	14	15
MLGFM	-4.3445	-4.1220	-3.1250	-0.8780	0.5945
FEM - Linear	-4.3714	-3.8552	-3.3389	-0.8607	0.8441
FEM - Nodal	-434.9218	-393.9438	-277.3466	-100.7280	0.0000

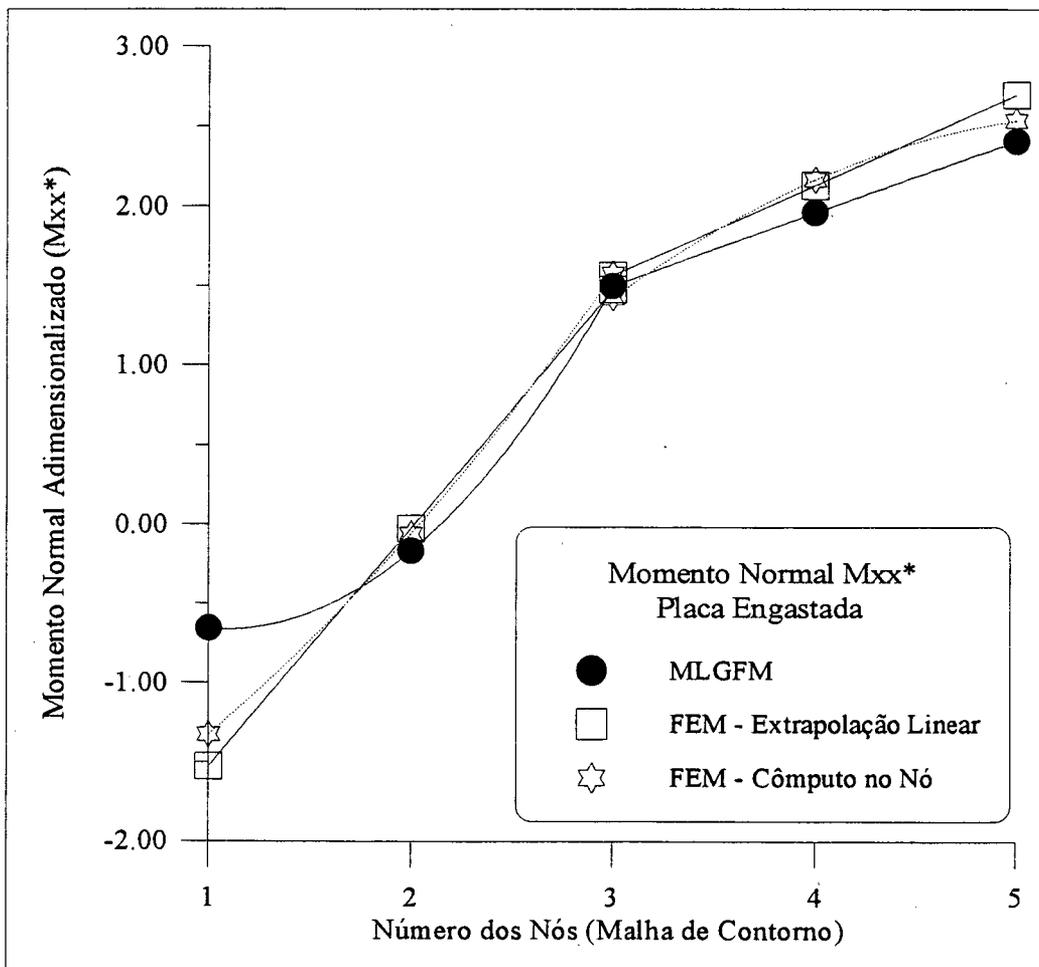


Figura 3.14. Perfil de Momento Normal M_{xx} ao Longo do Centro da Placa
(Lateral Esquerda do Quadrante Superior Esquerdo)

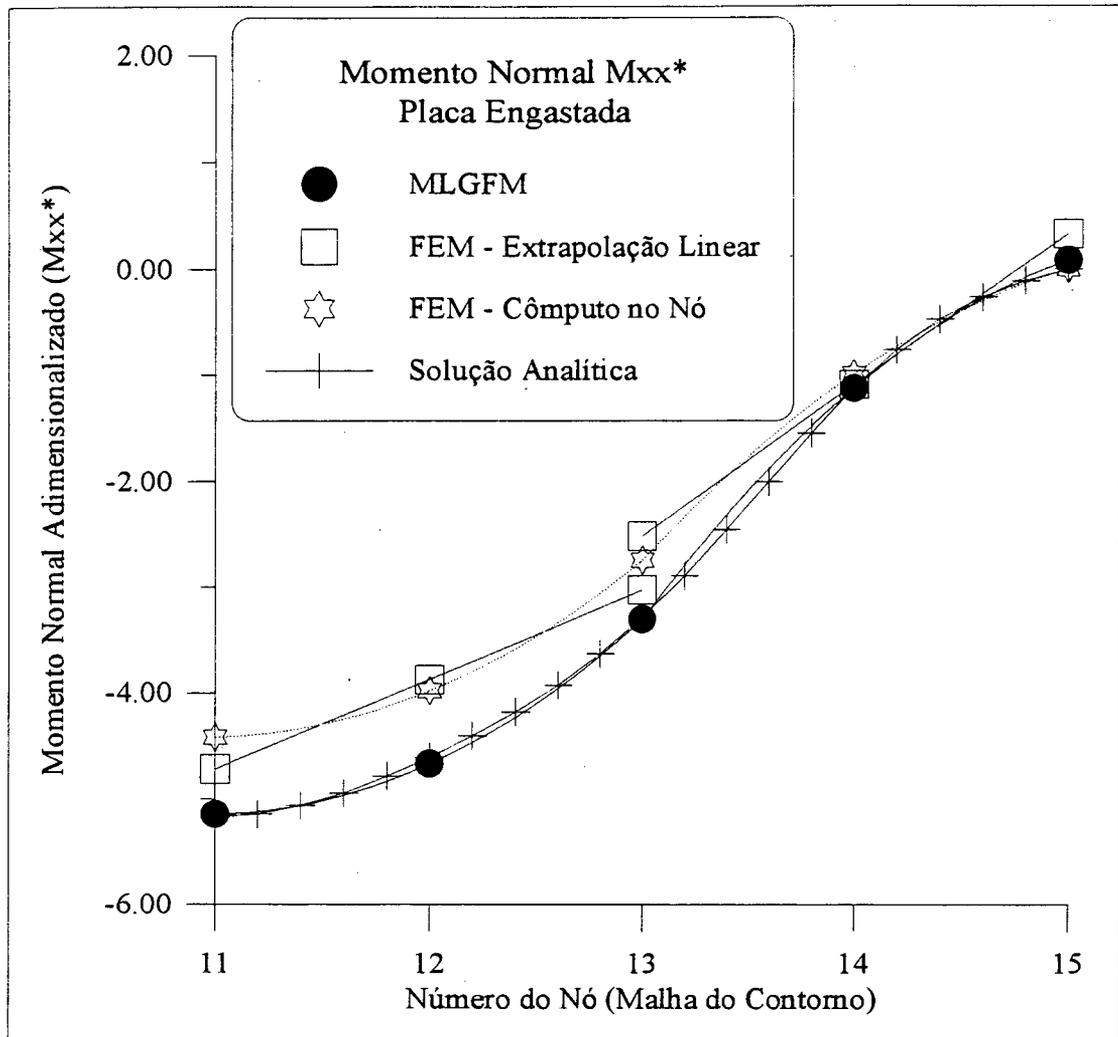


Figura 3.15. Perfil de Momento Normal M_{xx} na Lateral Direita da Placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito)

Nota-se na Figura 3.14 que uma distorção significativa ocorre no MLGFM devido à imposição do multiplicador de Lagrange no nó 1. Como pode ser apreciado na Figura 3.16, abaixo, existe uma distorção ainda maior sobre os resultados de momentos torçores, provocada pelo mesmo motivo.

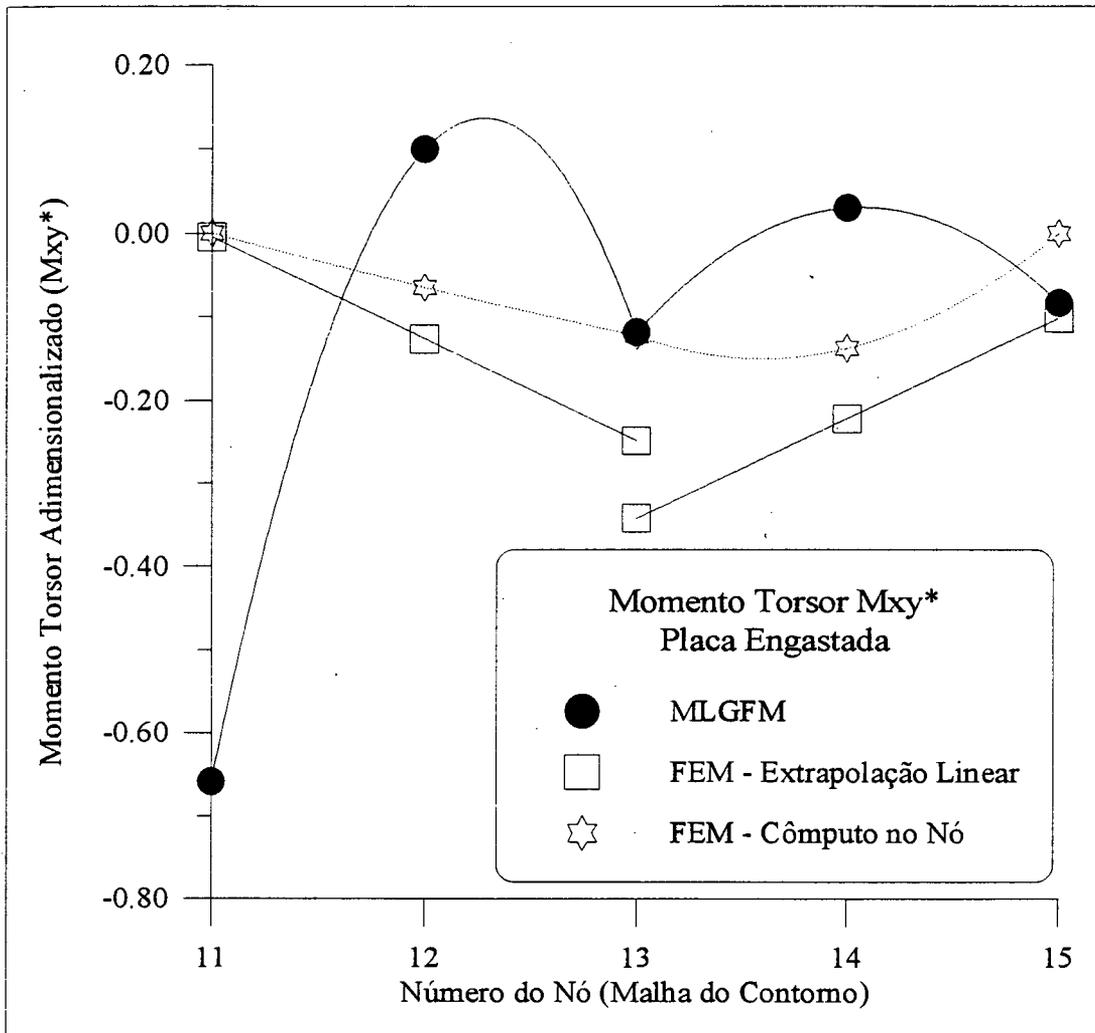


Figura 3.16. Perfil de Momento M_{xy} ao longo da lateral Direita da Placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito)

No gráfico da Figura 3.16 percebe-se que o erro não ficou confinado a uma pequena vizinhança do nó, invadindo o elemento adjacente, comprometendo todos os resultados numéricos obtidos para momentos torçores. Isto, aparentemente, devido à malha extremamente grosseira utilizada. É importante, porém, salientar que para que o MLGFM seja competitivo com o FEM, é necessário que para uma dada precisão, a discretização no primeiro seja bem mais grosseira que no segundo. É isto que justifica as análises com estas discretizações tão pobres.

Para avaliar melhor o efeito verificado neste último caso, é realizada uma reanálise, desta vez utilizando uma malha de 8×8 elementos no domínio, que pode ser

visualizada na Figura 3.17. O tipo dos elementos de contorno e domínio é o mesmo do caso anterior. Na malha de contorno são empregados nós duplos.

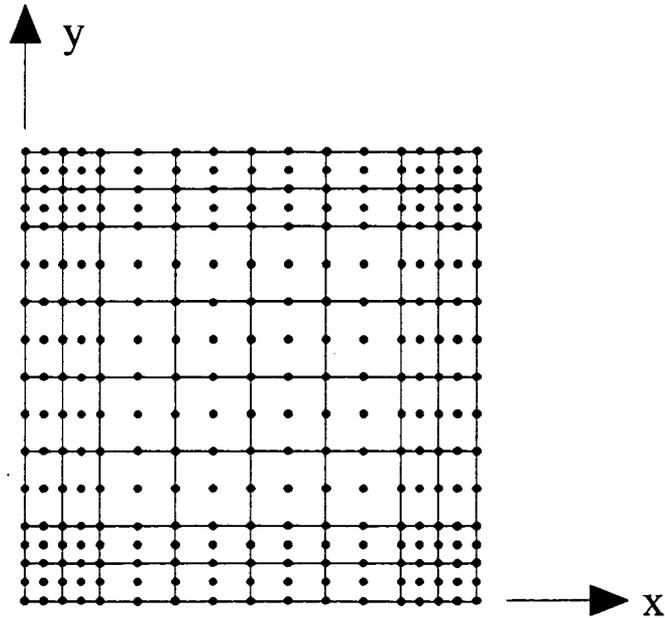


Figura 3.17. Malha 8 x 8 de domínio para re-análise do caso da placa engastada.

Os resultados são apresentados nas Figuras 3.18 a 3.20 e, como pode ser constatado, com esta discretização os resultados obtidos com ambos métodos são muito próximos, salvo pela introdução do erro na modelagem do vértice, com nó duplo, no MLGFM. O efeito deste erro é notado, principalmente, no elemento que contém o nó duplo e no seu adjacente, que é contaminado.

A Figura 3.18 mostra que, mesmo onde há nó duplo, se as condições de contorno não forem de Dirichlet nos graus de liberdade de ambos os nós, os resultados são bons e concordantes com o FEM. Isto ocorre porque não é imposta condição de igualdade de esforços via multiplicadores de Lagrange. Nas Figuras 3.19 e 3.20, por outro lado, verifica-se a influência distorsiva que o nó duplo provoca - só onde há condição de contorno de Dirichlet em ambos os nós.

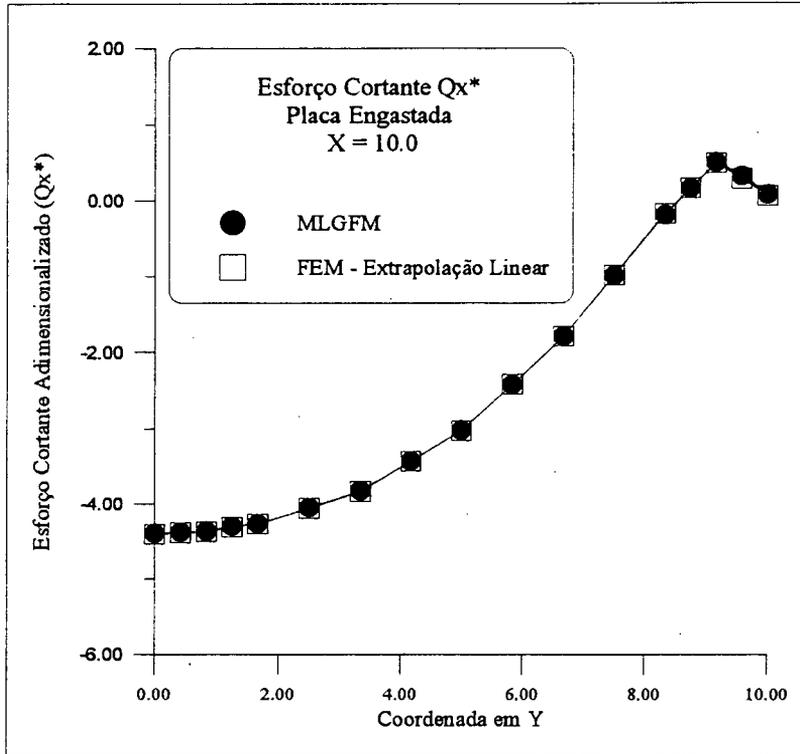


Figura 3.18. Perfil de Esforço Cortante Q_x na Lateral Direita da Placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito)

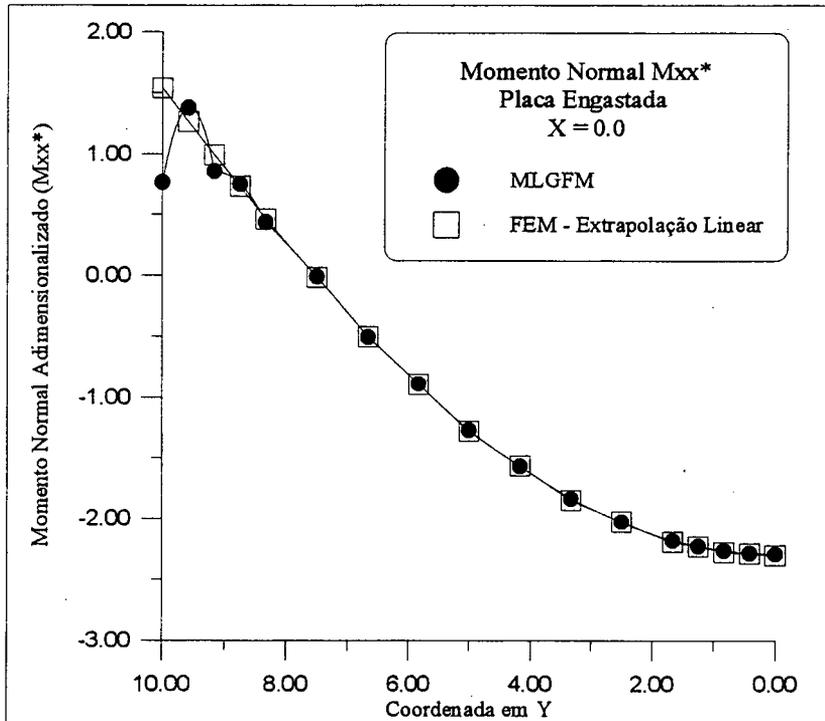


Figura 3.19. Perfil de Momento Normal M_{xx} ao Longo do Centro da Placa (Lateral Esquerda do Quadrante Superior Direito)

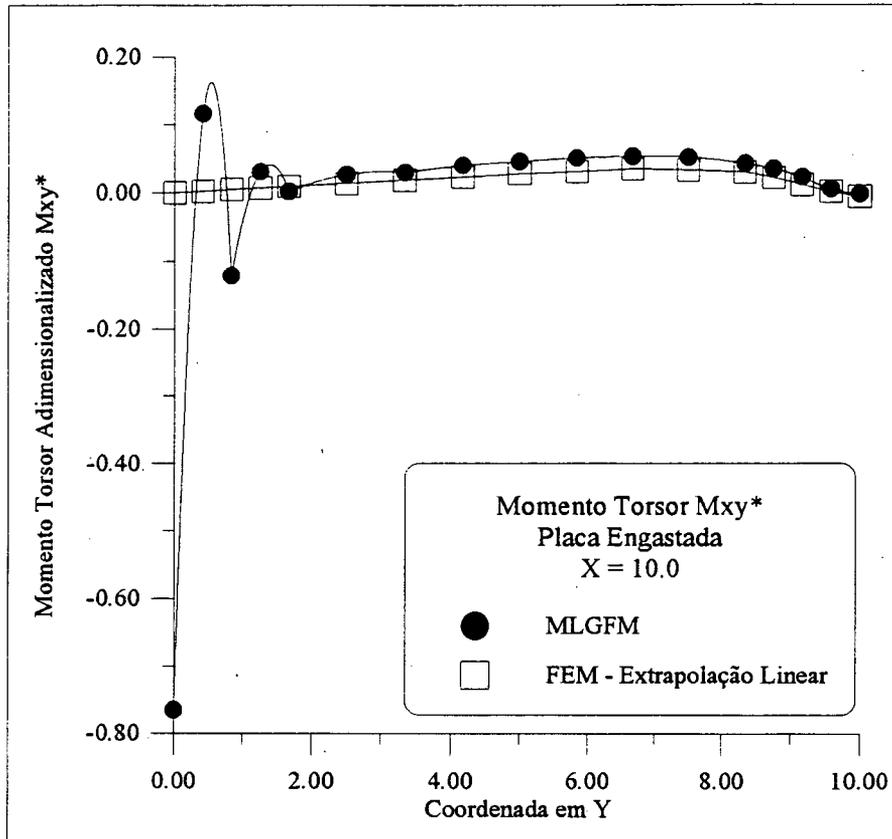


Figura 3.20. Perfil do Momento Torçor M_{xy} ao Longo da Lateral Direita da Placa (Lateral Direita do Quadrante Superior Direito)

3.4.2 - Análise de Convergência Puntual Mediante Refino h

Procura-se, neste item, apresentar as tendências de convergência do MLGFM, mediante o refino da discretização empregada, em pontos selecionados. A mesma análise é feita com o Método dos Elementos Finitos, e os comportamentos são comparados. Estudam-se os casos de placa engastada e simplesmente apoiada, ambas quadradas, e com todas as características idênticas às dos casos previamente abordados.

Os problemas referem-se a placas finas, sendo que os pontos escolhidos para análise são aqueles que dispõem de solução tabelada em Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1970).

As Figuras 3.21 e 3.22 apresentam as curvas referentes à placa engastada. Nota-se que os momentos convergem mais rapidamente no MLGFM. Por outro lado, nas

Figuras 3.23 e 3.24 estão os resultados para placa simplesmente apoiada, onde são apreciadas as tendências de convergência de momento normal e de esforço cortante. É interessante observar que, neste caso, os resultados para momentos normais continuam convergindo mais rapidamente com o MLGFM, porém, os esforços cortantes apresentam melhor convergência pela formulação do FEM. Deve-se, contudo, ressaltar que isto ocorre quando, no Método dos Elementos Finitos, as tensões são computadas nos pontos de integração com a regra reduzida, e extrapoladas para os nós. Caso contrário, se os esforços cortantes forem avaliados diretamente nos nós, os resultados obtidos são absurdos. Por isso, esta última alternativa não aparece no gráfico da Figura 3.24.

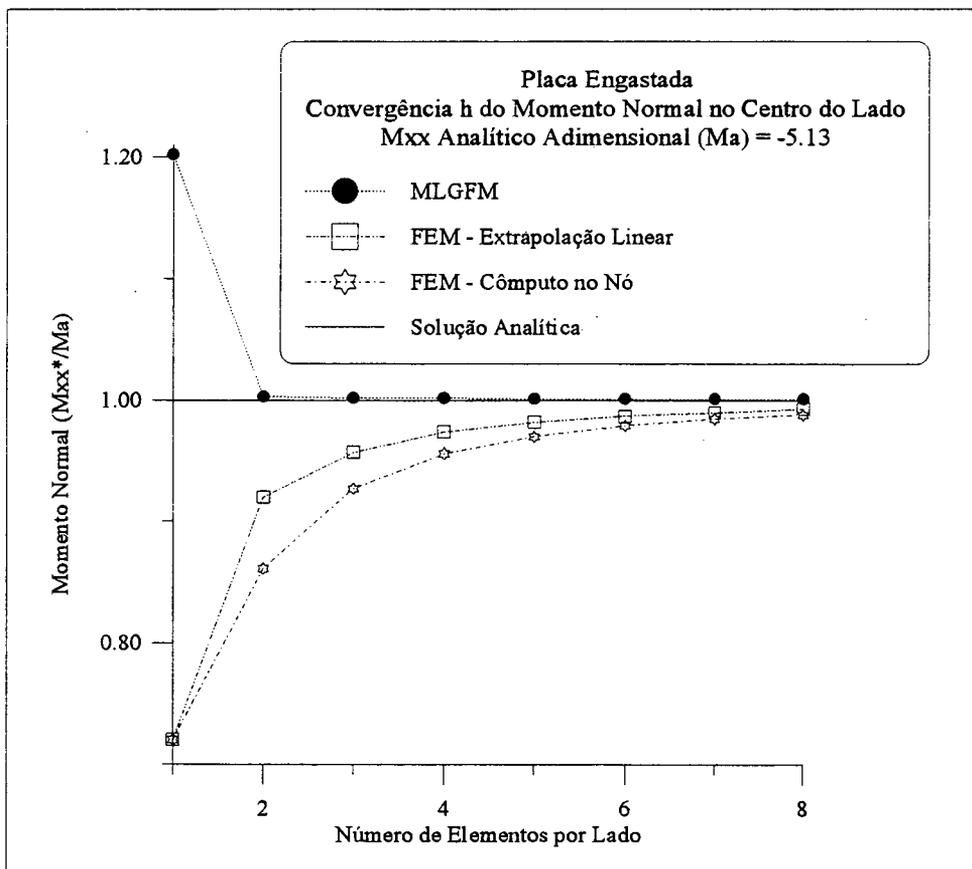


Figura 3.21. Placa Engastada - Convergência h do Momento Normal no Centro do Lado

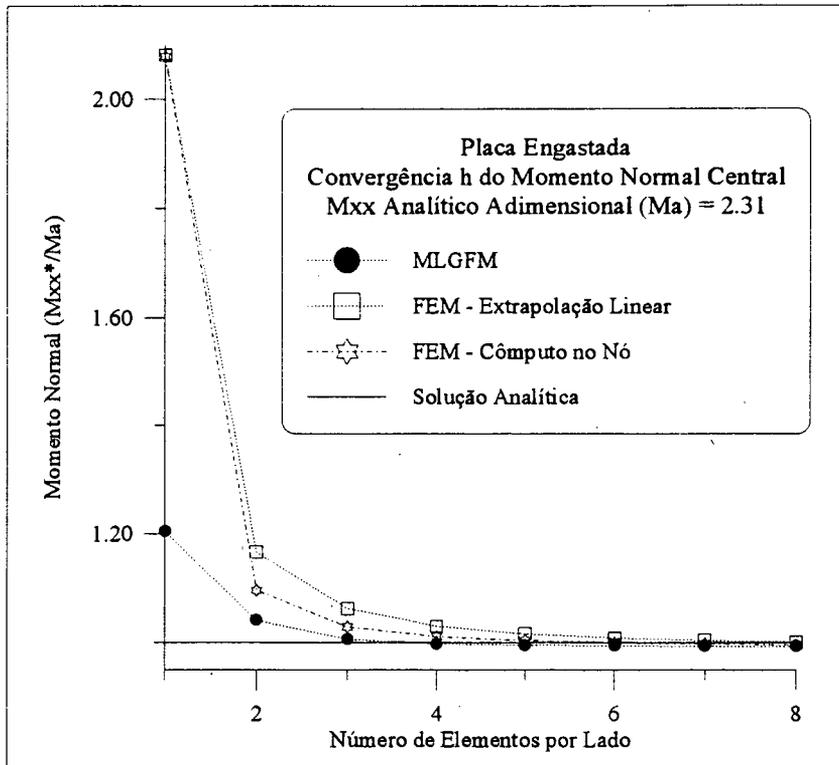


Figura 3.22. Placa Engastada - Convergência h do Momento Normal Central

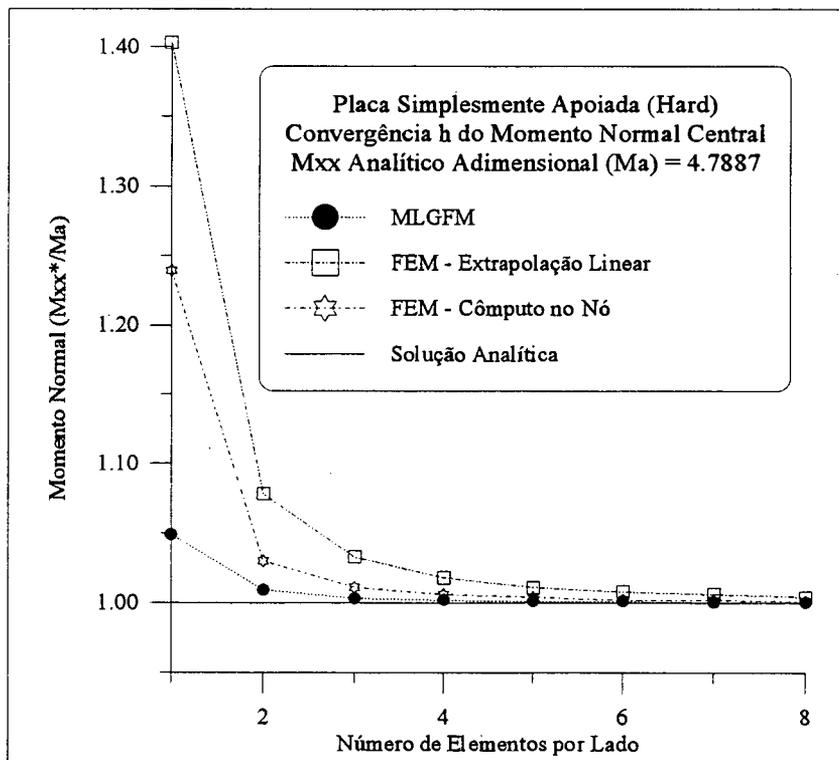


Figura 3.23. Placa Simplesmente Apoiada - Convergência h do Momento Normal Central

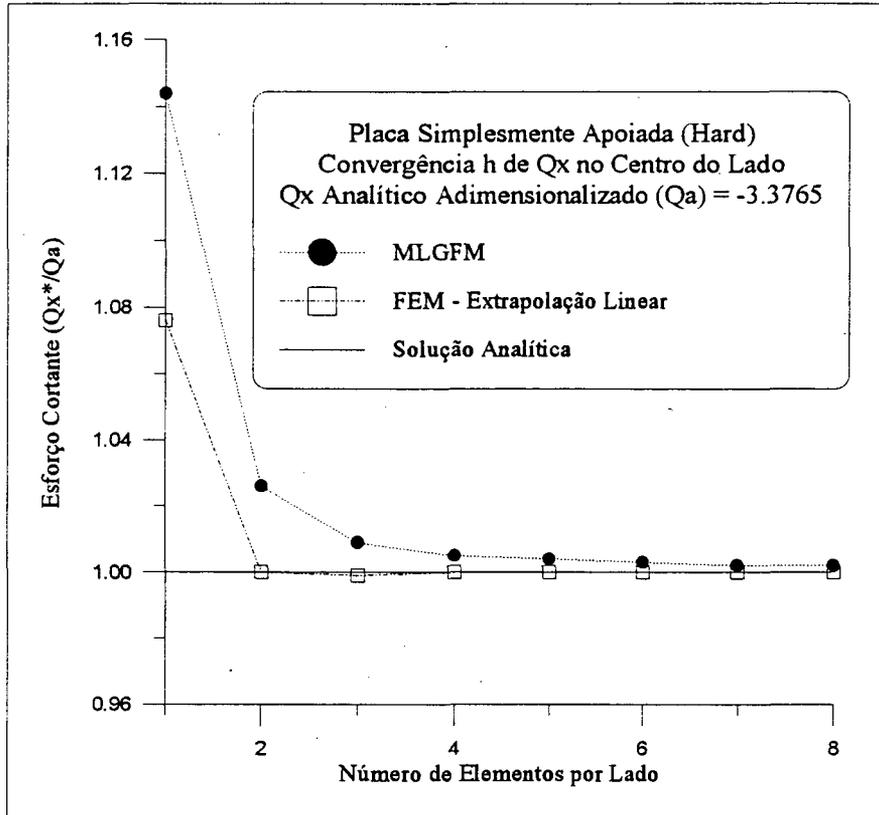


Figura 3.24. Placa Simplesmente Apoiada - Convergência h do Esforço Cortante Normal no Centro do Lado

3.4.3 - Análise de Deslocamentos Transversais

Para avaliação da qualidade dos deslocamentos transversais obtidos com o MLGFM são estudados três casos: placa quadrada simplesmente apoiada e engastada e placa circular engastada. As características destas placas são semelhantes às definidas na análise de esforços, salvo quando expressamente mencionado.

3.4.3.1. - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada

Inicialmente é feita uma comparação simples onde são registrados os valores dos deslocamentos transversais, utilizando uma mesma malha com o MLGFM e com o FEM. É utilizada uma discretização de 2×2 elementos lagrangeanos de 9 nós e a relação

lado/espessura é definida como 100 (Placa Fina). O valor adotado para a constante elástica k_0 é $(1.0 \times 10^{-8}) * K_{ii}$, onde K_{ii} é o valor da diagonal principal da linha i da matriz de rigidez do FEM, associada a um grau de liberdade com condição de contorno de Dirichlet homogênea, e o carregamento é unitário uniformemente distribuído.

Na Tabela 3.4 estão apresentados os resultados obtidos. Como pode ser notado, os mesmos são idênticos no MLGFM e no FEM. Portanto, fica comprovado que para deslocamentos, a formulação unicelular não confere maior taxa de convergência nodal ao MLGFM em relação ao FEM. Os nós referenciados na Tabela dizem respeito à malha da Figura 3.21.

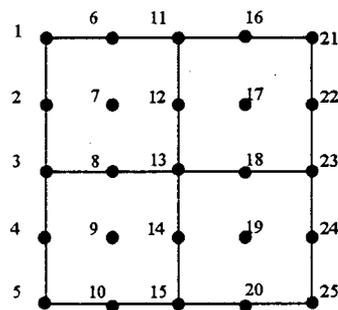


Figura 3.25. Numeração dos Nós da Malha de Elementos Finitos

3.4.3.2 - Placa Quadrada Engastada

Com o objetivo de avaliar se o comportamento demonstrado pela Tabela 3.4 persiste em outros casos, e para analisar a existência ou não do fenômeno do "locking", é apresentado o gráfico "Deslocamento Central x Relação Lado/Espessura", de uma placa engastada, utilizando uma discretização de 4×4 elementos com os elementos quadráticos Serendipity e Lagrangeano, ambos subintegrados seletivamente (QSR e QLR). Os valores são adimensionalizados de acordo com a seguinte regra: $w^* = \frac{1000wD}{qa^4}$.

Uma análise das Figuras 3.26 e 3.27 mostra que é compreensível Barbieri (1992) e Machado (1992) não terem detectado o "locking" em seus trabalhos, já que eles só utilizaram elementos lagrangeanos, que não sofrem o fenômeno (Zienkiewicz, 1989).

Tabela 3.4. Deslocamentos Transversais

Nó (Malha de FEM)	MLGFM	FEM
1	0.32600D-08	0.0000D+00
2	0.1685D+00	0.1685D+00
3	0.3063D+00	0.3063D+00
4	0.3933D+00	0.3933D+00
5	0.4234D+00	0.4234D+00
6	0.2328D-09	0.0000D+00
7	0.1568D+00	0.1568D+00
8	0.2848D+00	0.2848D+00
9	0.3655D+00	0.3655D+00
10	0.3933D+00	0.3933D+00
11	-0.1746D-09	0.0000D+00
12	0.1228D+00	0.1228D+00
13	0.2224D+00	0.2224D+00
14	0.2848D+00	0.2848D+00
15	0.3063D+00	0.3063D+00
16	0.1921D-08	0.0000D+00
17	0.6808D-01	0.6808D-01
18	0.1228D+00	0.1228D+00
19	0.1568D+00	0.1568D+00
20	0.1685D+00	0.1685D+00
21	-0.2794D-08	0.0000D+00
22	0.1179D-08	0.0000D+00
23	-0.1048D-08	0.0000D+00
24	-0.1630D-08	0.0000D+00
25	0.6985D-09	0.0000D+00

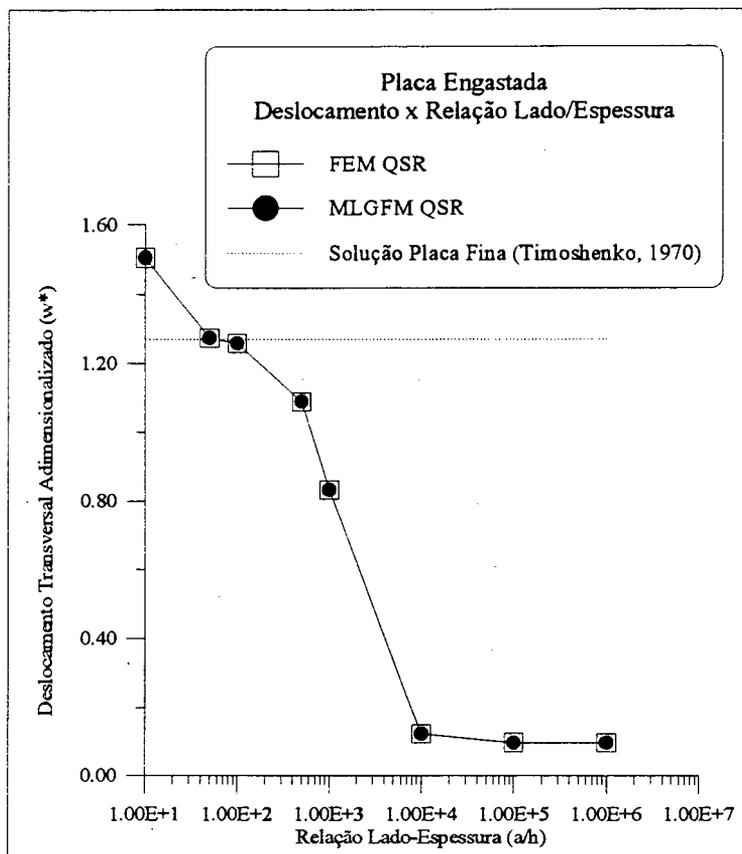


Figura 3.26. Análise do "locking" numa placa engastada
Elemento QSR

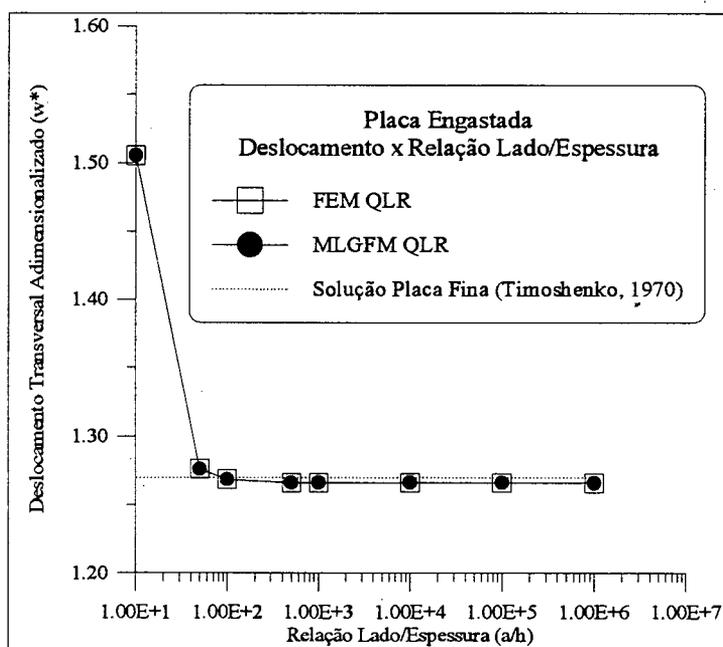


Figura 3.27. Análise do "locking" numa placa engastada
Elemento QLR

O problema de placa engastada foi escolhido para evidenciar esta situação porque o travamento é mais crítico neste caso. Contudo, Barbieri e Machado observaram o "enrijecimento" numérico sofrido pela placa ao aplicar integração cheia, o que os levou a utilizar a regra da subintegração seletiva.

É interessante notar que em todos os casos testados, houve igualdade de resultados para deslocamentos com o MLGFM e com o FEM. O motivo aparente está relacionado com a determinação alternativa dos sistemas finais de contorno e domínio, apresentada no item 2.4. Pode-se, a partir daí, supor que o MLGFM na sua versão unicelular oferece, para deslocamentos, apenas uma aproximação de domínio mascarada, já que não há minimização de erro no contorno.

3.4.3.3 - Placa Circular Engastada

O terceiro exemplo numérico analisado corresponde a uma placa circular engastada em todo o seu contorno, sujeita a um carregamento transversal unitário uniformemente distribuído. A discretização foi feita sobre a placa inteira, de forma que não houve necessidade de utilizar nós duplos na modelagem. A malha utilizada está exposta na Figura 3.28. Foram empregados 48 elementos finitos QLR no domínio e 16 elementos de contorno quadráticos no contorno.

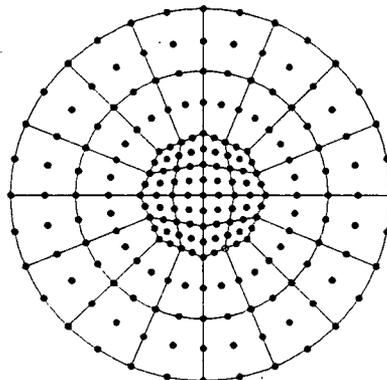


Figura 3.28. Discretização da Placa Circular Engastada

A placa possui as seguintes características: Módulo de Young (E) = 1.0, Coeficiente de Poisson (ν) = 0.3, Raio (R) = 0.5 e Espessura (h) = 0.2.

A Figura 3.29 mostra o perfil de deslocamentos transversais da placa em função do raio da mesma. Nesta Figura os valores obtidos com o MLGFM são comparados com os dados pelo FEM com igual discretização, e com a solução analítica pela teoria de Reissner.

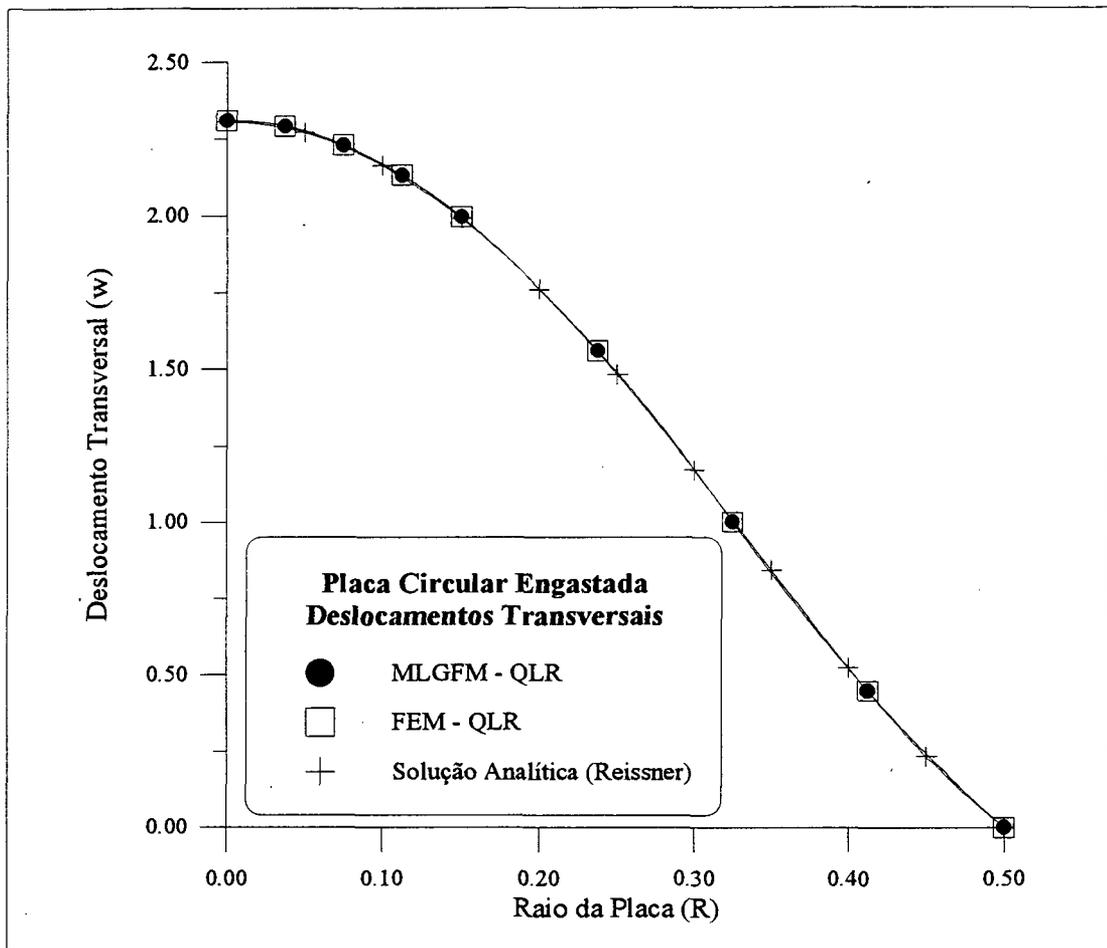


Figura 3.29. Perfil de deslocamentos transversais para placa circular engastada com carregamento unitário uniforme.

A curva apresentada na Figura 3.29 confirma o comportamento similar do MLGFM e do FEM para determinação de deslocamentos, fato constatado anteriormente através da exposição dos exemplos de placas quadradas.

3.5. - UMA FORMULAÇÃO NO SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL PARA O MLGFM

Pelos fatores apresentados até o momento, observa-se que é conveniente trabalhar num sistema de referência local, o que possibilita uma correta imposição de condições de contorno nos vértices. Este procedimento é prática comum nos desenvolvimentos com o Método dos Elementos de Contorno (Lachat (1975), Silva (1988), Rudolphi (1983), Watson (1979)). Isto é possível efetuando rotações, que nada mais são que multiplicações das componentes no sistema global pelos cossenos diretores (Washizu, 1982).

O sistema que representa o problema de contorno de forma completa, isto é, incluindo todos os graus de liberdade, no sistema de referência global, é aquele dado pela equação (2.48), ou seja,

$$[\mathbf{D}]\{\mathbf{u}\}^c = [\mathbf{E}]\{\mathbf{f}\} + [\mathbf{F}]\{\mathbf{b}\} \quad (3.14)$$

Este sistema pode ser rotacionado para um sistema local definido pela Figura 3.30, através de uma matriz de rotação $[\mathbf{T}]$, resultando na expressão (Watson, 1979),

$$[\mathbf{T}]^t[\mathbf{D}][\mathbf{T}]\{\mathbf{u}'\}^c = [\mathbf{T}]^t[\mathbf{E}][\mathbf{T}]\{\mathbf{f}'\} + [\mathbf{T}]^t[\mathbf{F}]\{\mathbf{b}\} \quad (3.15)$$

onde

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}_1] & & & & \\ & [\cdot \cdot] & & & \\ & & [\mathbf{T}_1] & & \\ & & & [\cdot \cdot] & \\ & & & & [\mathbf{T}_{nec}] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{T}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_{xi} & -n_{yi} \\ 0 & n_{yi} & n_{xi} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

sendo $[T]$ matriz ortogonal, n_{xi} e n_{yi} os cossenos diretores da normal à superfície de referência no nó i , em relação aos eixos x e y , e o índice primo correspondente a grandezas no sistema local.

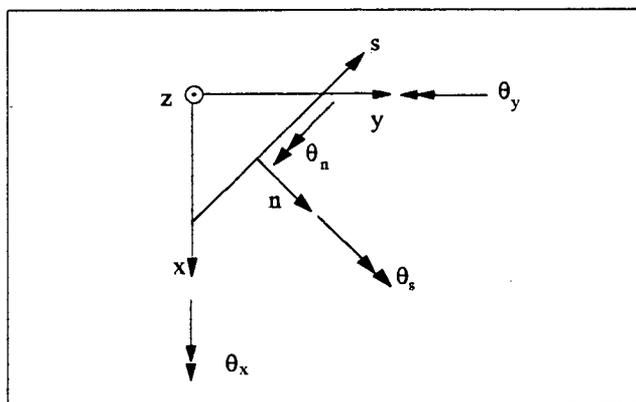


Figura 3.30. Sistema de Referência Local

Consequentemente fica-se com

$$[D']\{u'\}^e = [E']\{f'\} + [F']\{b\} \quad (3.17)$$

onde

$$[D'] = [T]'[D][T] \quad (3.18)$$

$$[E'] = [T]'[E][T] \quad (3.19)$$

$$[F'] = [T]'[F] \quad (3.20)$$

Note-se que as condições de contorno são agora aplicadas no sistema local. Como descrito na Seção 2.3, deve ser aplicado um apoio elástico no problema associado de elementos finitos, seguindo a mesma direção em que foi aplicada condição de contorno

de Dirichlet homogênea no problema de elementos de contorno. A malha de elementos finitos, no entanto, está no sistema de referência global.

A alternativa mais simples para contornar esse problema é aplicar o apoio elástico em todos os graus de liberdade do contorno, sendo o mesmo de dimensão bastante reduzida. Infelizmente, tal procedimento conduz a severos problemas de condicionamento numérico, já que o problema de elementos finitos fica quase-singular.

Uma segunda alternativa, um tanto mais trabalhosa, porém mais consistente, consiste em rotacionar os graus de liberdade do contorno da matriz de rigidez do problema de elementos finitos, para aplicar-lhes o apoio elástico no sistema local (após a rotação). Nesta metodologia, o apoio elástico é aplicado apenas nos graus de liberdade onde há condição de contorno de Dirichlet homogênea. Os graus de liberdade existentes em pontos de descontinuidade do vetor normal não são rotacionados, já que para fazê-lo é necessário que o vetor normal seja definido de forma única. Estes graus de liberdade, portanto, são deixados livres da atuação do apoio elástico mesmo que tenham deslocamentos nulos prescritos.

Para melhor visualizar o procedimento acima descrito, observe-se que das equações (2.85) e (2.86),

$$[\mathbf{E}] = [\mathbf{G}^{\text{CP}}]^t [\mathbf{D}] \qquad [\mathbf{B}] = [\mathbf{G}^{\text{DP}}]^t [\mathbf{D}] \qquad (3.21)$$

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{G}^{\text{CP}}]^t [\mathbf{A}] \qquad [\mathbf{C}] = [\mathbf{G}^{\text{DP}}]^t [\mathbf{A}] \qquad (3.22)$$

$$\begin{array}{c} [\mathbf{K}'] \\ \downarrow \\ e \quad [\mathbf{K} +] [\mathbf{G}^{\text{DP}} : \mathbf{G}^{\text{CP}}] = [\mathbf{A} : \mathbf{D}] \end{array} \qquad (3.23)$$

onde $[\mathbf{K}']$ é a matriz de apoio elástico a ser aplicado após a rotação.

A matriz $[\mathbf{G}^{\text{DP}} : \mathbf{G}^{\text{CP}}]$ deve ser levada ao sistema local antes de aplicar o apoio elástico, de forma que este seja imposto na mesma direção das condições de contorno de Dirichlet. Isto é facilmente realizado mediante a relação

$$[\mathbf{G}^{\text{DP}'} : \mathbf{G}^{\text{CP}'}] = [\mathbf{T}^*][\mathbf{G}^{\text{DP}} : \mathbf{G}^{\text{CP}}] \quad (3.24)$$

onde

$[\mathbf{T}^*]$ representa a matriz rotação sobre os graus de liberdade de contorno, à exceção dos relativos aos nós situados nos vértices, na matriz $[\mathbf{G}^{\text{DP}} : \mathbf{G}^{\text{CP}}]$;

$$[\mathbf{T}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Assim, notando que a matriz $[\mathbf{T}^*]$ é ortogonal, tem-se

$$[\mathbf{G}^{\text{DP}} : \mathbf{G}^{\text{CP}}] = [\mathbf{T}^*]^t [\mathbf{G}^{\text{DP}'} : \mathbf{G}^{\text{CP}'}] \quad (3.26)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}'' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ & \quad \downarrow \\ & \left[\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{cd} \\ \mathbf{K}_{dc} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{\text{DP}'_c} & \mathbf{G}^{\text{CP}'_c} \\ \mathbf{G}^{\text{DP}'_d} & \mathbf{G}^{\text{CP}'_d} \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{D}_c \\ \mathbf{A}_d & \mathbf{D}_d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde o índice c corresponde aos graus de liberdade do contorno menos os que estão situados num vértice, e o índice d corresponde aos graus de liberdade de domínio menos os de contorno e mais os que estão situados nos vértices. A matriz $[\mathbf{K}'']$ corresponde à submatriz de $[\mathbf{K}']$ referente aos graus de liberdade a rotacionar.

A expressão acima pode ser re-escrita de forma mais compacta como:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{T}^*]^t + [\mathbf{K}'] \left[[\mathbf{G}^{\text{DP}'} : \mathbf{G}^{\text{CP}'}] \right] = [\mathbf{A} : \mathbf{D}] \quad (3.28)$$

onde

$$[\mathbf{K}'] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Retomando (3.21), (3.22) e (3.26) tem-se:

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{G}^{DP}]^t [\mathbf{D}] = [\mathbf{G}^{DP}]^t [\mathbf{T}^*] [\mathbf{D}] \quad (3.30)$$

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{G}^{DP}]^t [\mathbf{A}] = [\mathbf{G}^{DP}]^t [\mathbf{T}^*] [\mathbf{A}] \quad (3.31)$$

$$[\mathbf{E}] = [\mathbf{G}^{CP}]^t [\mathbf{D}] = [\mathbf{G}^{CP}]^t [\mathbf{T}^*] [\mathbf{D}] \quad (3.32)$$

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{G}^{CP}]^t [\mathbf{A}] = [\mathbf{G}^{CP}]^t [\mathbf{T}^*] [\mathbf{A}] \quad (3.33)$$

Definindo este sistema de referência local, as incógnitas tratadas ficam sendo w , θ_n e θ_s , e os esforços, Q_n , M_{nn} e M_{ns} . Conseqüentemente, se forem igualados os esforços referentes ao mesmo grau de liberdade, num nó duplo, tratar-se-á com grandezas da mesma natureza. Dessa forma fica mais simples estabelecer, corretamente, relações adicionais que levantem a singularidade do sistema linear a resolver, do que se estivesse sendo utilizado um sistema de referência global.

3.6 ASPECTOS DE CONDICIONAMENTO NUMÉRICO

O Método da Função de Green Local Modificado necessita, em sua formulação, da imposição de uma constante arbitrária, que assume o papel de um apoio elástico no problema adjunto. Foi demonstrado em trabalhos anteriores, notadamente em Maldaner (1993), que os resultados de deslocamentos e esforços são insensíveis a variações na constante de apoio elástico até um determinado limite, que supôs-se estar associado ao condicionamento numérico do sistema linear de contorno a ser resolvido.

Para se ter uma idéia mais precisa deste comportamento e, principalmente, para analisar a alteração do condicionamento numérico do sistema final de contorno quando utilizado um sistema de referência local, apresentam-se a seguir alguns gráficos

que ajudam a visualizar a questão. São analisados os casos de placa engastada e simplesmente apoiada, ambos com carregamento distribuído unitário. Modela-se apenas um quadrante da placa, com uma malha de 4 x 4 elementos finitos do tipo QLR no domínio e com elementos quadráticos no contorno.

O número condição foi calculado de duas formas. A primeira, como sugerido por Fletcher (1984), Vable (1987) e Parreira (1987), sendo definido por:

$$\text{Número Condição 1: } \quad \text{NC}_1(\mathbf{A}) = \log(\|\mathbf{A}\| \times \|\mathbf{A}^{-1}\|) \quad (3.34)$$

onde a norma é dada por

$$\|\mathbf{A}\| = \max_i \sum_{j=1}^N |A_{ij}| \quad (3.35)$$

A segunda forma de cálculo do número condição é a usualmente encontrada na bibliografia referente ao FEM. A definição do número condição é, então, dada por (Cook et al, 1984):

$$\text{Número Condição 2: } \quad \text{NC}_2(\mathbf{A}) = \log \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (3.36)$$

Segundo Fletcher (1984), pode-se considerar que adotando a definição dada por (3.34) e (3.35), o número condição corresponde ao número de casas decimais perdidas em precisão. Comparando, nos gráficos abaixo, estes valores com o número condição dado por (3.36), verifica-se que esta afirmação é válida, dada a proximidade dos resultados obtidos por ambas as definições.

Foi analisado o comportamento dos sistemas correspondentes às equações (2.88), (2.105) e (3.17). O primeiro foi chamado sistema não simplificado, e é resultado da aproximação numérica dita "convencional". O segundo, chamado sistema

simplificado, é proveniente da aproximação numérica "alternativa", e o terceiro, corresponde ao sistema (2.88) após rotação para o sistema local.

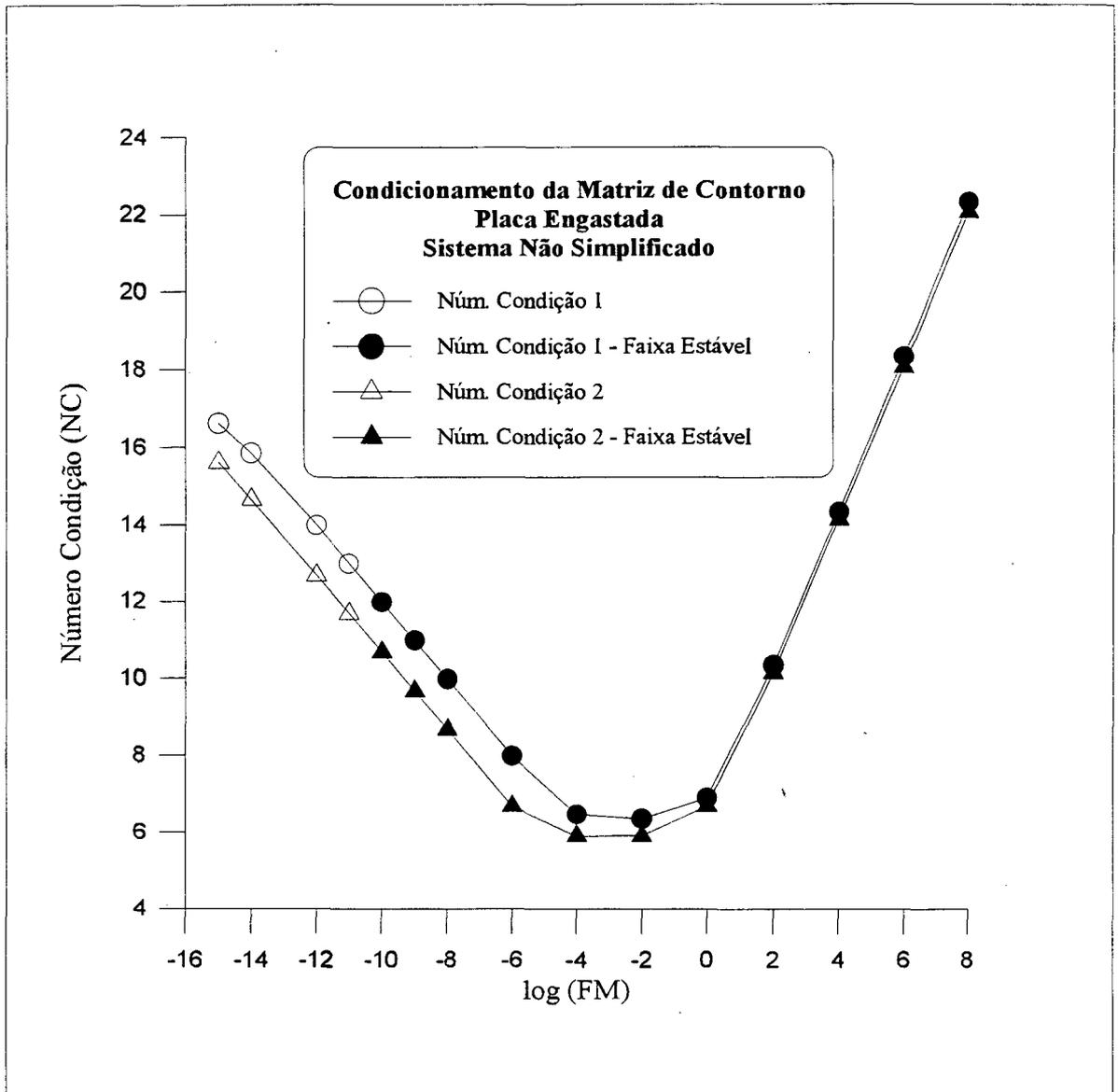


Figura 3.31. Análise do Condicionamento Numérico
Placa Engastada - Sistema Não Simplificado

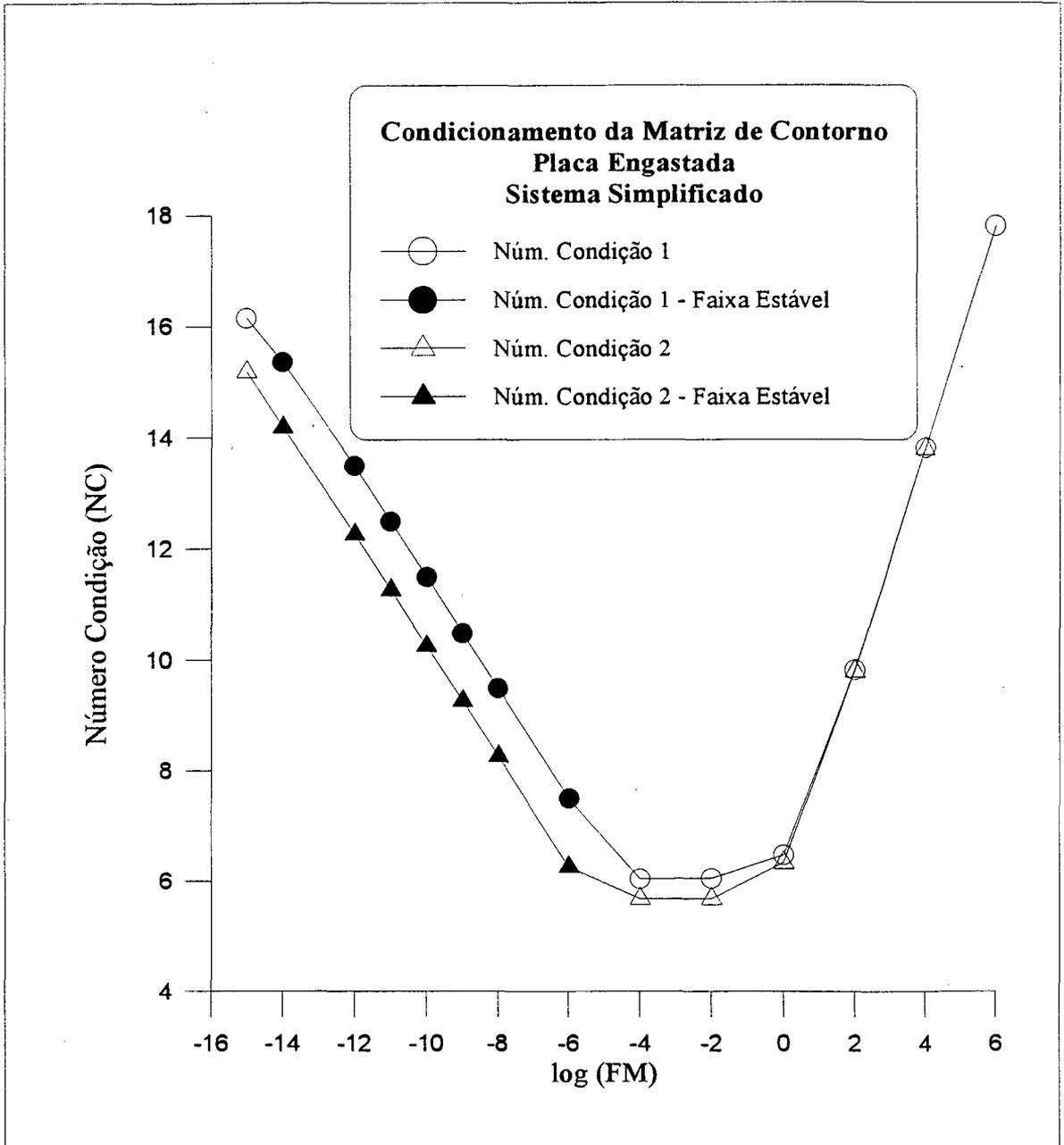


Figura 3.32. Análise do Condicionamento Numérico
Placa Engastada - Sistema Simplificado

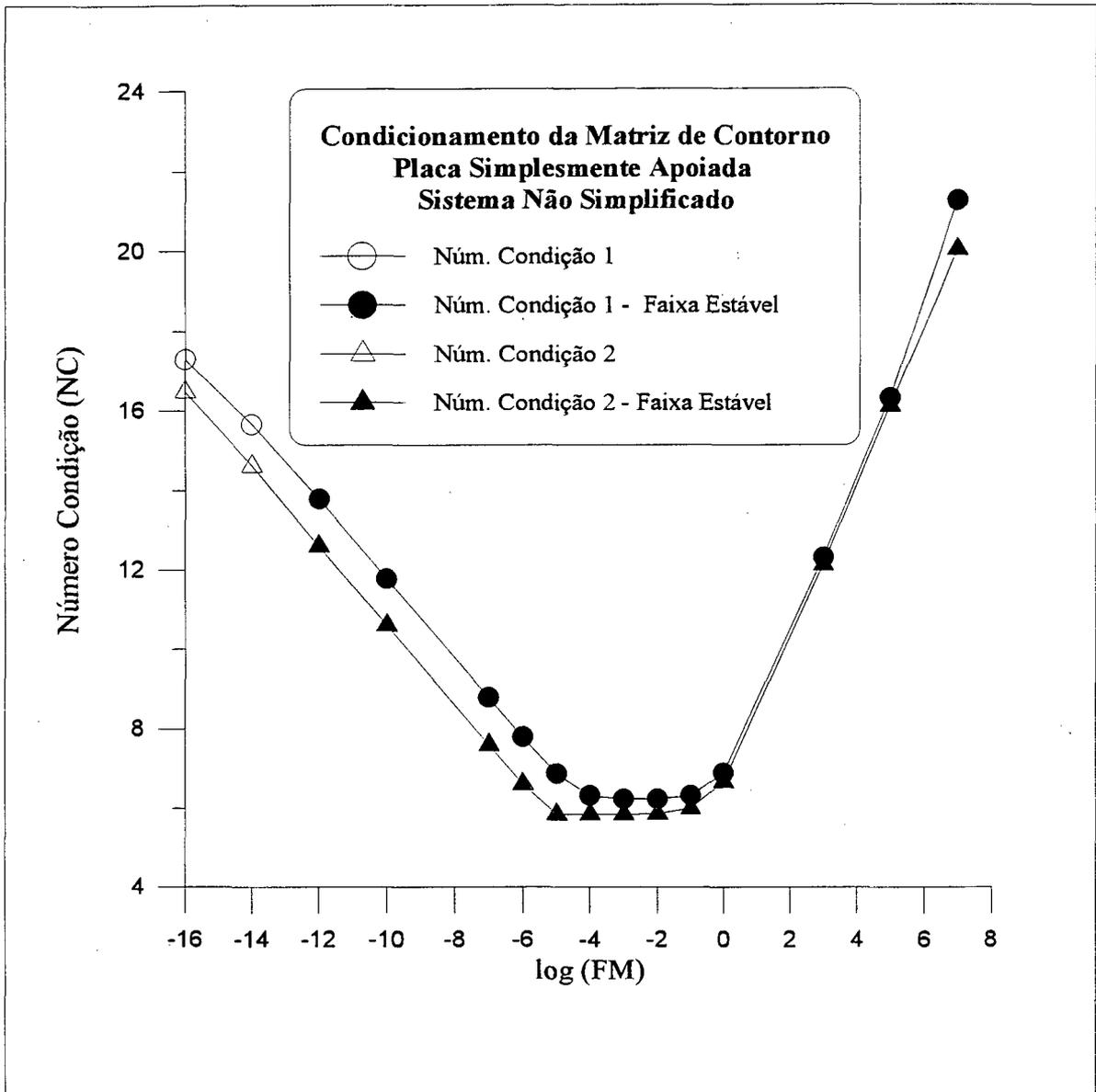


Figura 3.33. Análise de Condicionamento Numérico
Placa Simplesmente Apoiada - Sistema Não Simplificado

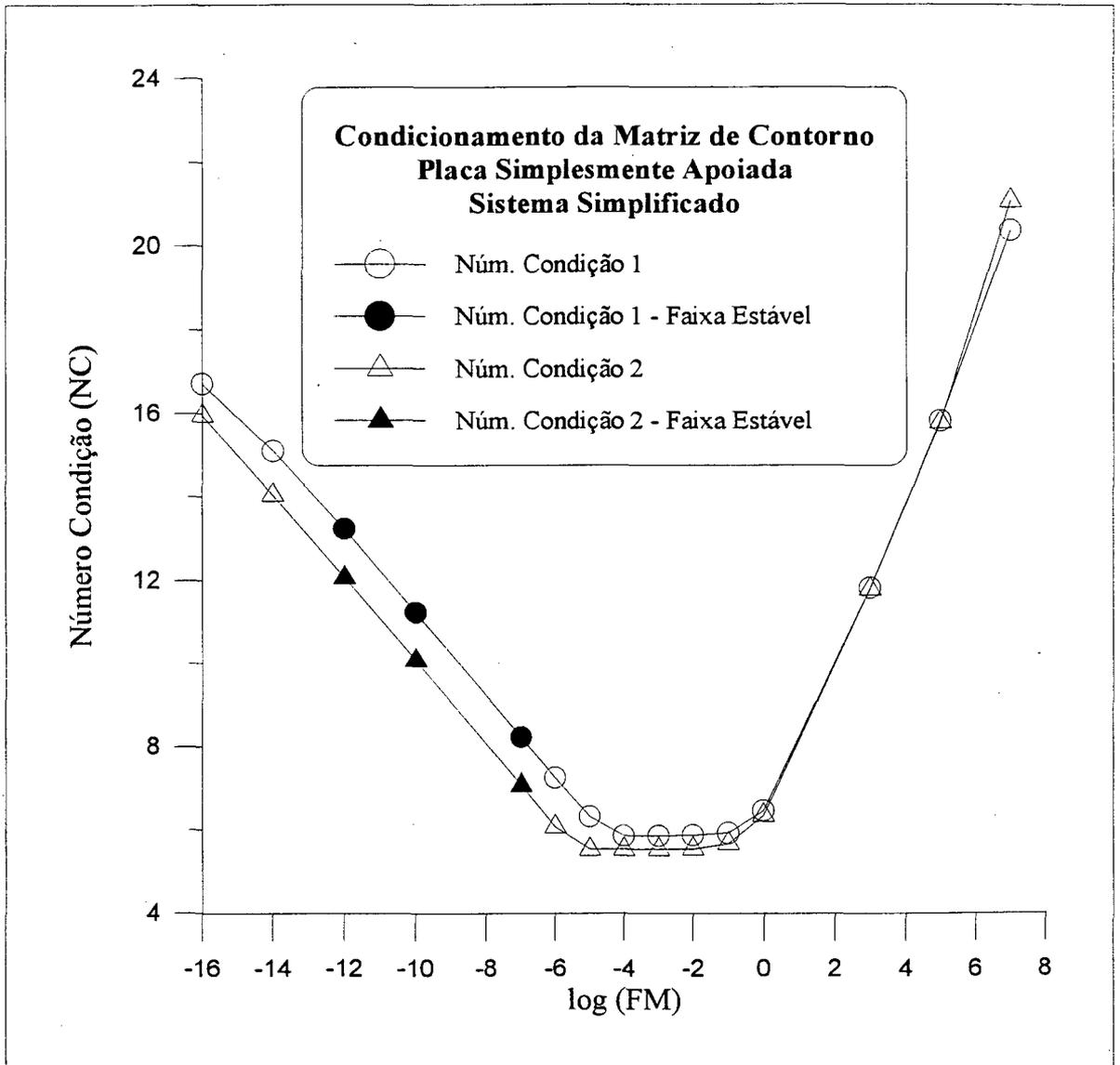


Figura 3.34. Análise do Condicionamento Numérico
Placa Simplesmente Apoiada - Sistema Simplificado

É interessante salientar que tanto para placa engastada quanto para placa simplesmente apoiada, a formulação não simplificada confere uma maior estabilidade ao sistema de equações a resolver. Isto leva a pensar que apesar de ser um pouco mais caro computacionalmente, talvez valha a pena manter esta forma de tratar o problema.

Para analisar o sistema de equações de contorno rotacionado, é aplicado "apoio elástico simples", que consiste em fazer K_0 igual a um valor constante, independente do valor do elemento da diagonal principal da matriz de rigidez. Este procedimento simplifica a implementação numérica. Nota-se, na Figura 3.31, que o sistema de equações rotacionado torna-se muito pior condicionado do que no sistema de referência global. Isso compromete os resultados obtidos mediante esta formulação, apesar das condições de contorno estarem sendo aplicadas adequadamente nos vértices, onde há descontinuidade do vetor normal. Devido à estabilidade conferida ao sistema mediante a formulação não-simplificada, somente esta foi aplicada na formulação local. Mesmo assim, os deslocamentos generalizados foram corretamente determinados apenas numa faixa muito estreita de coeficiente de apoio elástico (10^{-2} a 10^2). Os valores obtidos para esforços generalizados foram, em todos os casos, instáveis e sem significado. Como suspeita-se que o motivo esteja associado a mal-condicionamento numérico, seria interessante aplicar o esquema proposto por Vable (1990) para obter um sistema melhor comportado. Por outro lado, uma projeção local da função de Green geraria uma aproximação mais precisa da mesma, podendo ser que isto bastasse para que resultados coerentes fossem obtidos do sistema rotacionado.

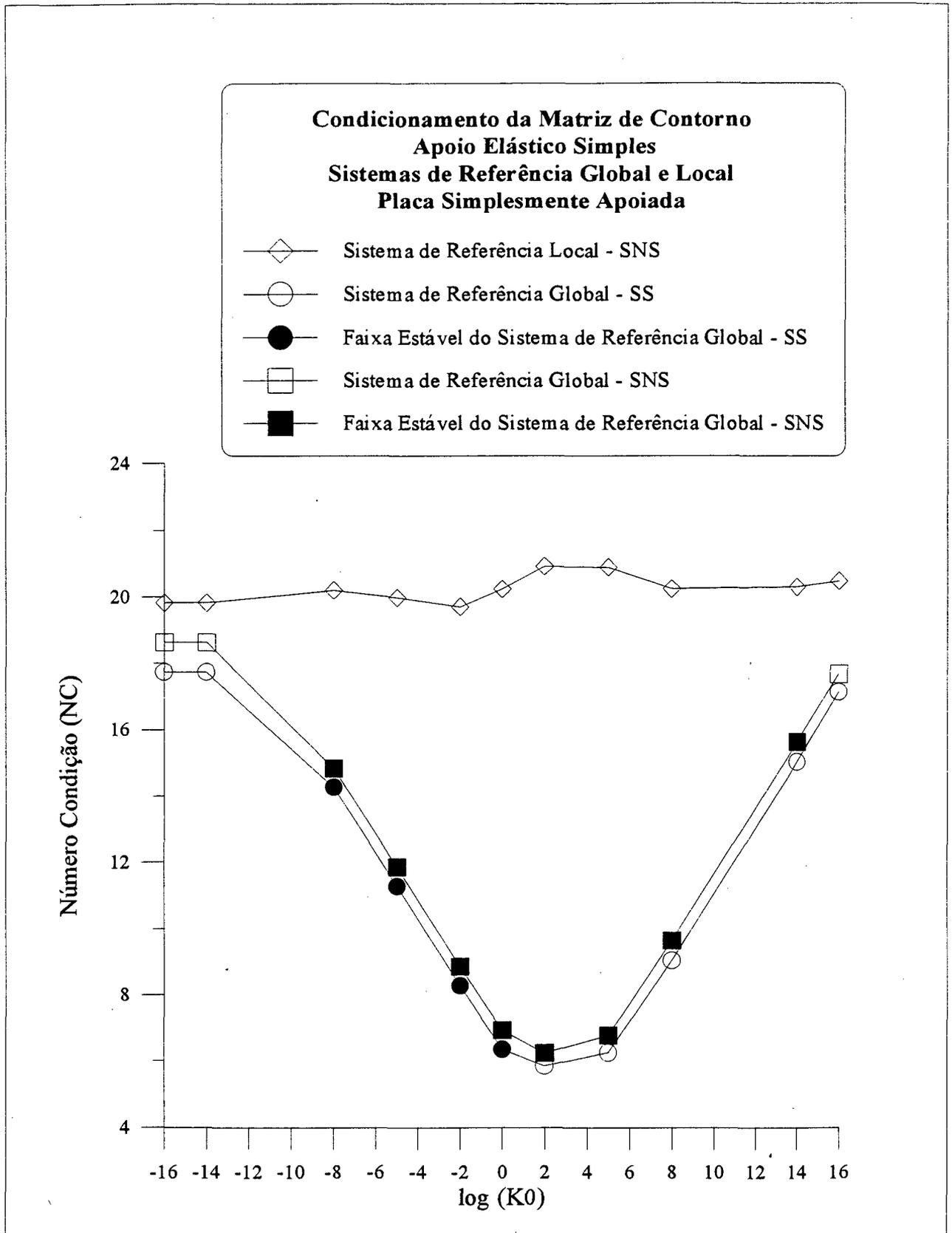


Figura 3.35. Condicionamento Numérico (Apoio Elástico Simples)
 - Placa Simplesmente Apoiada -

CAPÍTULO 4

DESENVOLVIMENTO DO MLGFM PARA O PROBLEMA DE VIBRAÇÃO LIVRE DE PLACA DE REISSNER-MINDLIN

4.1. - INTRODUÇÃO

Problemas de vibração de placa sempre foram de grande interesse em engenharia. No entanto, face às dificuldades que estes problemas apresentam para modelagem e solução, foi somente após o desenvolvimento dos computadores que eles passaram a ser tratados de forma generalizada.

Os métodos numéricos têm sido utilizados largamente na obtenção de soluções aproximadas para problemas de placa, que têm sido modeladas segundo várias teorias simplificativas. Para citar os métodos mais diretamente relacionados com o trabalho aqui desenvolvido, devem ser mencionados pelo menos o Método dos Elementos Finitos (FEM) e o Método dos Elementos de Contorno (BEM).

O problema de vibração de placa, modelado pela teoria clássica, considera que a velocidade de onda é inversamente proporcional ao comprimento da mesma. A teoria da elasticidade, no entanto, atesta que este comportamento só ocorre para ondas longas em relação à espessura da placa. À medida em que o comprimento de onda diminui, a velocidade da mesma tem o seu limite superior na velocidade de Rayleigh, que é a velocidade de onda numa placa infinita. Como consequência, o modelo de placa fina só representa adequadamente o comportamento da placa para baixas frequências de vibração.

No caso de vigas, Rayleigh acrescentou à teoria de Euler-Bernoulli o efeito da inércia rotacional, o que conferiu um limite superior à velocidade de onda. Este limite, porém, era de magnitude muito grande. Timoshenko, posteriormente, acrescentou o efeito da deformação cisalhante transversal, obtendo resultados satisfatórios para modos altos de vibração.

No caso de placas, Uflyand apresentou equações análogas às de Timoshenko. Mindlin (1951) obteve as mesmas equações a partir das equações de equilíbrio, modificando-as depois, para ajustar o valor de uma constante de correção da tensão cisalhante transversal. Enquanto Uflyand determinou o valor de $2/3$ para esta constante, Reissner chegou a um valor de $5/6$, e Mindlin propôs uma fórmula dependente do coeficiente de Poisson para seu cálculo. Após algumas considerações Mindlin definiu o valor mais apropriado como $\pi^2/12$, que está muito próximo do valor determinado por Reissner. Algum tempo depois, Mindlin & Deresiewicz (1954), apresentaram um estudo particularizando as conclusões de 1951 para a análise das vibrações transversais e de cisalhamento transversal ("thickness-shear") de um disco circular. Em seguida, Mindlin et al. (1956), analisaram as frequências transversais de placas retangulares. Seus estudos deram atenção à existência de três famílias independentes de modos de vibração e a questões de acoplamento entre eles.

Srinivas et al. (1970), expuseram resultados para vibração de placas retangulares espessas, homogêneas e laminadas, com condições de contorno de apoio simples, segundo um modelo tridimensional da teoria da elasticidade considerando pequenas deformações. Num segundo artigo, no mesmo ano, Srinivas & Rao. (1970) apresentaram uma análise exata unificada para o caso estático e dinâmico de placas laminadas espessas retangulares e simplesmente apoiadas. O modelo novamente foi tridimensional, baseado na teoria da elasticidade para pequenas deformações, e foi desenvolvido para problemas de flexão, vibração e flambagem.

Uma formulação numérica foi apresentada por Cheung & Chakrabarti (1972), na qual desenvolveram o problema de vibração livre de placa semi-espessa

utilizando um modelo tridimensional linear resolvido pelo "Finite Layer Method". Neste método, dividiam a placa em várias camadas e as matrizes de rigidez e massa eram formadas para cada uma. Posteriormente eram montadas as matrizes massa e rigidez globais, gerando o problema de auto-valores e auto-vetores a resolver. Desta forma, puderam analisar de forma simples, problemas envolvendo materiais anisotrópicos e laminados.

Leissa (1973) desenvolveu um extenso trabalho no que se refere à análise de vibração livre de placas finas retangulares. Ele apresentou resultados precisos para as 21 combinações de condições de contorno envolvendo lados engastados, livres e simplesmente apoiados. Os casos com 2 lados opostos simplesmente apoiados foram resolvidos de forma exata, enquanto que os demais, aproximados pelo método de Ritz, com séries envolvendo 36 termos.

Nair & Durvasula (1973), obtiveram frequências naturais e modos de vibração de placas finas rômbricas, com combinações de condições de contorno de engaste e apoio simples. O método empregado foi o de Ritz, utilizando funções características de vigas apropriadas para a combinação das condições de contorno de cada caso, em termos de séries com um máximo de 36 termos.

O elemento finito serendipity de 8 nós foi utilizado por Rock & Hinton (1976), na análise de vibração livre de placa de Mindlin. Seus estudos incluíram placas retangulares e ortotrópicas, além de esquemas de diagonalização (lumping) e a apresentação de um "economizador de autovalores" baseado na redução de Guyan.

Nelson (1978), obteve frequências naturais para vigas de Timoshenko e placas de Mindlin, empregando a técnica de ajuste de Bolotin. Seus resultados mostraram excelente concordância com algumas soluções analíticas conhecidas.

Uma interessante comparação quanto ao desempenho de elementos finitos lagrangeanos e serendipity para vibração de placa de Mindlin foi apresentada por Hinton & Bicanic (1979), favorecendo os primeiros. Posteriormente, Raju & Hinton (1980)

utilizaram o elemento lagrangeano de 9 nós com subintegração seletiva para estudar as frequências naturais e modos de vibração de placas rômbricas finas e semi-espessas.

Negm & Armanios (1983) apresentaram um elemento finito denominado "paramétrico" com 12 graus de liberdade, para placa fina, que gerava uma resposta num espaço vetorial intermediário entre o do elemento ACM e o elemento Papenfuss dependendo do valor de um parâmetro definido no intervalo $[0,2]$. O elemento tem um desempenho melhor que os elementos ACM e Papenfuss para análise dinâmica.

Algum tempo depois, Levinson (1985) apresentou soluções exatas, desenvolvidas por um modelo tridimensional da elastodinâmica linear, para o problema de vibração livre de placa simplesmente apoiada com espessura arbitrária. Concluiu que os resultados obtidos por Mindlin para frequências transversais foram excelentes, mas suas estimativas para frequências de cisalhamento transversal ("thickness-twist") não foram tão boas.

Também há estudos de vibração livre de placas semi-espessas desenvolvidos pelo método das diferenças finitas. Al-Kaabi & Aksu (1989), estudaram este problema pelo modelo de Mindlin, para placas com espessura variando parabolicamente.

Downs (1991), desenvolveu um elemento finito retangular para análise, com alta precisão, de frequências transversais de vibração. O elemento é fruto de uma combinação do Método dos Elementos Dinâmicos, que envolve o uso de matrizes com coeficientes dependentes dos autovalores, e o Método dos Elementos Finitos tradicional.

Harik et al. (1992) aplicaram o "Analytic Strip Method" para problemas de vibração livre de placas retangulares com suportes intermediários e várias condições de contorno. A análise incluiu placas ortotrópicas e placas com uma ou mais descontinuidades em forma de degrau na espessura. O modelo de placa utilizado foi o de Kirchhoff.

A análise de vibração de placa pelo Método dos Elementos de Contorno é de pesquisa relativamente recente. Ao parecer, o primeiro a tratar este problema foi Vivoli (1972), que abordou o problema pela teoria de placas finas, desenvolvendo uma solução

fundamental dinâmica baseada em funções de Hankel. Apesar desta metodologia ser extremamente precisa, a formulação proposta é demasiadamente complexa e leva a um problema de autovalores e autovetores dependente da frequência, cuja solução exige um alto custo computacional.

Uma alternativa para a formulação apresentada por Vivoli foi exposta por Bézine (1980), e mais tarde por Costa Jr. (1988). Esta alternativa consiste em determinar as frequências naturais pela utilização da solução fundamental do problema estático. Neste caso, requer-se uma discretização de domínio, porém, o processo é extremamente econômico quando comparado com a técnica de Vivoli, uma vez que o problema fica independente da frequência, e as integrais envolvidas só precisam ser resolvidas uma única vez.

Para placa semi-espessa, Lei & Huang (1986) aplicaram um método especial que utilizava a solução fundamental da parte estática das equações de domínio de Reissner. Provavelmente não desenvolveram uma formulação com a solução fundamental dinâmica por esta não se encontrar disponível na época.

Antes (1991) apresentou a solução para o problema estático de placa de Reissner-Mindlin pelos métodos direto e indireto de elementos de contorno. Além disso, estendeu o estudo ao caso dinâmico, onde analisou os problemas de vibração livre e forçada pelos casos direto e indireto. No caso direto, empregou tanto a solução fundamental estática quanto a dinâmica, que na altura já tinha sido desenvolvida por Cheung & Antes.

Como é facilmente notado, todas as formulações desenvolvidas por elementos de contorno exigem a utilização de uma ou outra solução fundamental. O Método da Função de Green Local Modificado, como exposto no capítulo 2, foi concebido de forma a solucionar um problema de contorno, sem precisar conhecer explicitamente essa função. O restante da metodologia é análoga à do BEM convencional. Dessa forma, para problemas de vibração, também podem ser empregadas as abordagens que utilizam a solução fundamental estática ou a dinâmica, sendo que elas serão

calculadas de forma aproximada. Neste trabalho será estudado o primeiro caso, aquele que considera a solução fundamental do problema estático.

4.2. - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

No capítulo 3 foi exposta a teoria de placa de Mindlin para o problema de flexão de placa. Aqui, as hipóteses adotadas para aquele problema continuam sendo válidas, porém, o problema é dependente do tempo. Como consequência, o campo de deslocamentos fica

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &\doteq z\theta_x(x, y, t) \\ u_y(x, y, z, t) &\doteq z\theta_y(x, y, t) \\ u_z(x, y, z, t) &\doteq w(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Define-se um vetor deslocamento generalizado como

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \{w(x, y, t), \theta_x(x, y, t), \theta_y(x, y, t)\}^t \quad (4.2)$$

e adotando procedimento análogo ao apresentado para o caso estático, chega-se à expressão para a energia potencial total

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} [\boldsymbol{\kappa}^t \mathbf{D}_F \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\gamma}^t \mathbf{D}_S \boldsymbol{\gamma}] - q(x, y, t)w(x, y, t) \right\} d\Omega \quad (4.3)$$

Para a energia cinética total, por outro lado, tem-se:

$$T(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{P}] \{\dot{\mathbf{u}}^2\} d\Omega \quad (4.4)$$

onde

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

e

$$\{\dot{\mathbf{u}}^2\} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^2 \\ \dot{\theta}_x^2 \\ \dot{\theta}_y^2 \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

De posse das expressões para energia potencial total e energia cinética total, as equações de movimento podem ser obtidas pela aplicação do princípio de Hamilton¹. O funcional a ser extremizado é, portanto,

$$F = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt \quad (4.7)$$

resultando este procedimento no sistema matricial

$$\mathbf{A} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} + \mathbf{P} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

onde \mathbf{A} é o operador do problema estático.

Como o presente trabalho aborda problemas de vibração livre, o carregamento transversal q é nulo.

¹O princípio de Hamilton estabelece que: "De todos os caminhos de configurações admissíveis que o corpo pode tomar quando migra da configuração 1 no instante t_1 para a configuração 2 no instante t_2 , o caminho que satisfaz a lei de Newton a cada instante durante o intervalo (e é, conseqüentemente, a configuração real do problema) é o caminho que extremiza a integral temporal do Lagrangiano durante o intervalo." (Dym & Shames, 1973)

Assim, considerando que não há amortecimento nem carregamentos externos aplicados, pode-se obter uma solução geral para a expressão (4.8) como

$$\begin{Bmatrix} w(x, y, t) \\ \theta_x(x, y, t) \\ \theta_y(x, y, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{w}(x, y) \\ \bar{\theta}_x(x, y) \\ \bar{\theta}_y(x, y) \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (4.9)$$

Substituindo esta expressão em (4.8), resulta

$$A\bar{u}(Q) - \omega^2 P\bar{u}(Q) = 0 \quad (4.10)$$

onde

$$\bar{u} = \{ \bar{w}(x, y) \quad \bar{\theta}_x(x, y) \quad \bar{\theta}_y(x, y) \}^t \quad (4.11)$$

4.3. - FORMALISMO DO MLGFM PARA PROBLEMA DINÂMICO DE PLACA DE MINDLIN

Da mesma forma que proposto por Bézine (1980), é utilizada para solucionar o problema, a solução fundamental estática, que é independente da frequência. Neste caso, determina-se na verdade a projeção da função de Green do problema estático de flexão de placa de Mindlin, cujo detalhamento é abordado no capítulo 3.

Considere-se o operador adjunto A^* de A e o problema associado

$$A^*G(Q, P) = \delta(Q, P)I \quad (4.12)$$

Multiplicando a equação (4.10) por $G(Q, P)^t$ e a equação (4.12) por $\bar{u}(Q)^t$, vem

$$G(Q, P)^t A\bar{u}(P) - G(Q, P)^t \omega^2 [P]\bar{u}(Q) = 0 \quad (4.13)$$

$$\bar{u}(Q)' A^* G(Q, P) = \bar{u}(Q)' \delta(Q, P) \quad (4.14)$$

Subtraindo-se a equação (4.13) do transposto da equação (4.14), resulta

$$\begin{aligned} \bar{u}(Q) \delta(Q, P) = A^* G(Q, P)' \bar{u}(Q) - G(Q, P)' A \bar{u}(Q) + \\ + G(Q, P)' \omega^2 [P] \bar{u}(Q) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Integrando a equação (4.15) no domínio Ω_p com relação a um sistema de coordenadas localizado no ponto $P \in \Omega$, tem-se como solução para $\bar{u}(P)$,

$$\begin{aligned} \bar{u}(P) = \int_{\Omega} A^* G(Q, P)' \bar{u}(Q) d\Omega_Q - \int_{\Omega} G(Q, P)' A \bar{u}(Q) d\Omega_Q + \\ + \int_{\Omega} G(Q, P)' \omega^2 [P] \bar{u}(Q) d\Omega_Q \end{aligned} \quad (4.16)$$

Aplicando integração por partes às duas primeiras parcelas da equação (4.16), vem

$$\begin{aligned} \bar{u}(P) = - \int_{\partial\Omega} N^* G(q, P)' \bar{u}(q) d\partial\Omega_q + \int_{\partial\Omega} G(q, P)' N \bar{u}(q) d\partial\Omega_q + \\ + \int_{\Omega} G(Q, P)' \omega^2 [P] \bar{u}(Q) d\Omega_Q \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde N e N^* são os operadores de Neumann associados aos operadores diferenciais A e A^* , respectivamente.

Devem-se estabelecer condições de contorno para que $G(P, Q)$ passe além de solução fundamental, a representar uma função de Green. Para isso, adiciona-se e subtrai-se a quantidade

$$G(q, P)' N' \bar{u}(q) \equiv N' G(q, P)' \bar{u}(q) \quad (4.18)$$

na equação (4.17), resultando

$$\begin{aligned} \bar{u}(P) = & -\int_{\partial\Omega} (N^* + N') \mathbf{G}(q, P)^t \bar{u}(q) d\partial\Omega_q + \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q, P)^t (N + N') \bar{u}(q) d\partial\Omega_q + \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, P)^t \omega^2 [\mathbf{P}] \bar{u}(Q) d\Omega_Q \end{aligned} \quad (4.19)$$

Como condição de contorno é admitida

$$(N^* + N') \mathbf{G}(q, P)^t = 0 \quad (4.20)$$

e a solução procurada fica sendo

$$\bar{u}(P) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q, P)^t (N + N') \bar{u}(q) d\partial\Omega_q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, P)^t \omega^2 [\mathbf{P}] \bar{u}(Q) d\Omega_Q \quad (4.21)$$

com $Q \in \Omega$.

A primeira parcela do lado direito da igualdade contém a expressão $(N + N') \bar{u}(q)$ que envolve derivadas de $\bar{u}(Q)$ no sentido do traço, altamente indesejáveis para a análise numérica. Para contornar esse problema, define-se a quantidade

$$\mathbf{F}(q) = (N + N') \bar{u}(q) \quad (4.22)$$

Finalmente, o valor de $\bar{u}(P)$ pode ser expresso como sendo

$$\bar{u}(P) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q, P)^t \mathbf{F}(q) d\partial\Omega_q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, P)^t \omega^2 [\mathbf{P}] \bar{u}(Q) d\Omega_Q \quad (4.23)$$

Aplicando o teorema do traço, tem-se

$$\bar{u}(p) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q, p)^t \mathbf{F}(q) d\partial\Omega_q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, p)^t \omega^2 [\mathbf{P}] \bar{u}(Q) d\Omega_Q \quad (4.24)$$

4.4. - FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Para resolver as equações (4.23) e (4.24) de forma aproximada, o vetor deslocamento generalizado é interpolado dentro do domínio da mesma maneira que no FEM, i. e.,

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} \Psi_1 & & \dots & \Psi_{nm} \\ & \Psi_1 & & \dots & \Psi_{nm} \\ & & \Psi_1 & & \dots & \Psi_{nm} \end{bmatrix} \{\bar{\mathbf{u}}\}^D = [\Psi(\mathbf{P})] \{\bar{\mathbf{u}}\}^D \quad (4.25)$$

onde Ψ_i são as funções de interpolação usuais, $\bar{\mathbf{u}}^D = [\dots, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \dots]^t$, $(w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi})^t$ é o valor do deslocamento generalizado do nó i .

De forma similar, no contorno, as grandezas $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{p})$ e $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ são aproximadas utilizando funções de interpolação $\phi_i(\mathbf{p})$ que são o traço de Ψ_i .

Assim, tem-se

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{p}) = [\phi(\mathbf{p})] \{\bar{\mathbf{u}}\}^C \quad (4.26)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = [\phi(\mathbf{q})] \{\mathbf{f}\} \quad (4.27)$$

Substituindo estas interpolações na equação (4.25) e utilizando o Método de Galerkin relativo ao domínio Ω , i. e., utilizando Ψ_j como funções peso de domínio, resulta

$$\int_{\Omega} [\Psi(\mathbf{P})]^t [\Psi(\mathbf{P})] d\Omega_p \{\bar{\mathbf{u}}\}^D = \int_{\Omega} [\Psi(\mathbf{P})]^t \int_{\partial\Omega} [\mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{P})]^t [\phi(\mathbf{q})] d\partial\Omega_q d\Omega_p \{\mathbf{f}\} + \int_{\Omega} [\Psi(\mathbf{P})]^t \int_{\Omega} [\mathbf{G}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})]^t \omega^2 [\mathbf{P}] [\Psi(\mathbf{Q})] d\Omega_Q d\Omega_p \{\bar{\mathbf{u}}\}^D \quad (4.28)$$

que pode ser compactamente re-escrito como

$$[\mathbf{A}]\{\bar{\mathbf{u}}\}^D = [\mathbf{B}]\{\mathbf{f}\} + \omega^2[\mathbf{C}]\{\bar{\mathbf{u}}\}^D \quad (4.29)$$

onde

$$[\mathbf{A}] = \int_{\Omega} [\Psi(\mathbf{P})]^t [\Psi(\mathbf{P})] d\Omega_p \quad (4.30)$$

$$[\mathbf{B}] = \int_{\infty} [\mathbf{Gd}(\mathbf{q})]^t [\phi(\mathbf{q})] d\partial\Omega_q \quad (4.31)$$

$$[\mathbf{C}] = \int_{\Omega} [\mathbf{Gd}(\mathbf{Q})]^t [\mathbf{P}][\Psi(\mathbf{Q})] d\Omega_Q \quad (4.32)$$

$$[\mathbf{Gd}(\mathbf{q})]^t = \int_{\Omega} [\Psi(\mathbf{P})]^t [\mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{P})]^t d\Omega_p \quad (4.33)$$

$$[\mathbf{Gd}(\mathbf{Q})]^t = \int_{\Omega} [\Psi(\mathbf{P})]^t [\mathbf{G}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})]^t d\Omega_p \quad (4.34)$$

Repetindo este procedimento na equação (4.24), ponderando, agora, com ϕ_j , obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\phi(\mathbf{p})]^t [\phi(\mathbf{p})] d\Omega_p \{\bar{\mathbf{u}}\}^C = \\ \int_{\Omega} [\phi(\mathbf{p})]^t \int_{\infty} [\mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{p})]^t [\phi(\mathbf{q})] d\partial\Omega_q d\Omega_p \{\mathbf{f}\} + \\ + \int_{\Omega} [\phi(\mathbf{p})]^t \int_{\Omega} [\mathbf{G}(\mathbf{Q}, \mathbf{p})]^t \omega^2 [\mathbf{P}][\Psi(\mathbf{Q})] d\Omega_Q d\Omega_p \{\bar{\mathbf{u}}\}^D \end{aligned} \quad (4.35)$$

que compactamente resulta em

$$[\mathbf{D}]\{\bar{\mathbf{u}}\}^C = [\mathbf{E}]\{\mathbf{f}\} + \omega^2[\mathbf{F}]\{\bar{\mathbf{u}}\}^D \quad (4.36)$$

onde

$$[\mathbf{D}] = \int_{\infty} [\phi(\mathbf{p})]^t [\phi(\mathbf{p})] d\partial\Omega_p \quad (4.36)$$

$$[\mathbf{E}] = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{G}\alpha(q)]^t [\phi(q)] d\partial\Omega_q \quad (4.37)$$

$$[\mathbf{F}] = \int_{\Omega} [\mathbf{G}\alpha(Q)]^t [\mathbf{P}][\Psi(Q)] d\Omega_Q \quad (4.38)$$

$$[\mathbf{G}\alpha(Q)]^t = \int_{\partial\Omega} [\phi(p)]^t [\mathbf{G}(Q, p)]^t d\partial\Omega_p \quad (4.39)$$

$$[\mathbf{G}\alpha(q)]^t = \int_{\partial\Omega} [\phi(p)]^t [\mathbf{G}(q, p)]^t d\partial\Omega_p \quad (4.40)$$

Diferentemente do problema estático, onde as incógnitas de contorno podem ser obtidas desacopladamente do problema de domínio, no problema dinâmico é preciso resolver os problemas de contorno e domínio de forma acoplada, isolando o vetor $\{\mathbf{f}\}$ em (4.36), substituindo-o em (4.29). Chega-se, assim, ao problema de autovalores e autovetores a ser resolvido, faltando para isso apenas o cômputo das projeções da função de Green.

De forma semelhante à apresentada no item 2.6, aplicam-se as expansões (2.72) para aproximar as projeções da função de Green, obtendo-se:

$$[\mathbf{E}] = [\mathbf{G}^{Cq}]^t [\mathbf{D}] \quad (4.41)$$

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{G}^{CQ}]^t [\mathbf{G}] \quad (4.42)$$

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{G}^{Dq}]^t [\mathbf{D}] \quad (4.43)$$

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{G}^{DQ}]^t [\mathbf{G}] \quad (4.44)$$

onde

$$[\mathbf{G}] = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t [\mathbf{P}][\Psi(Q)] d\Omega_Q \quad (4.45)$$

Este procedimento é idêntico ao apresentado no capítulo 3, visto que a função de Green a ser utilizada é a do problema estático.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES E RESULTADOS NUMÉRICOS DO MLGFM PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE PLACA DE MINDLIN

5.1. - INTRODUÇÃO

No capítulo 3 foram expostas, através de exemplos numéricos, algumas dificuldades que o Método da Função de Green Local Modificado apresenta no tratamento do problema de flexão de placa de Reissner-Mindlin, onde há 3 graus de liberdade por nó. No capítulo 4 foi apresentada a formulação deste método para a solução do problema de vibração livre de placa de Reissner-Mindlin. Como a percepção das dificuldades encontradas no caso estático foi feita durante a presente pesquisa, não existe, ainda, uma solução para as mesmas. Assim sendo, em virtude da formulação aqui empregada para o caso dinâmico ser diretamente dependente do operador do problema estático, tais problemas também são intrínsecos a esta formulação. Todavia, demonstra-se com um exemplo de placa quadrada engastada em todo o contorno, que parece não haver comprometimento nos resultados de frequências naturais e modos de vibração por efeito de falha de modelagem nos nós duplos, mesmo em placas onde o efeito do cisalhamento transversal não pode ser desprezado.

É o objetivo deste capítulo apresentar resultados numéricos para frequências naturais e modos de vibração para placa semi-espessa, comparando os valores obtidos via MLGFM com informações existentes na bibliografia especializada.

São feitos, ainda, experimentos quanto às diversas alternativas de "lumping" que o método permite, isto é, sobre a matriz massa e a matriz gramiana de domínio.

Também é analisada a estabilidade dos resultados em função da variação da constante de apoio elástico do problema adjunto.

5.2 - CASOS ESTUDADOS

Numa primeira parte são estudados os casos resumidos na Figura 5.1. Todos, com exceção do problema de placa engastada nos quatro lados (CCCC), intercalam um lado livre com outro com engaste ou apoio "hard". Isto é feito para evitar a existência de condição de contorno de Dirichlet homogênea no mesmo grau de liberdade num nó duplo. O caso CCCC é analisado justamente para observar as consequências da situação indesejada. A discretização é feita sobre a placa inteira, de modo a captar todos os modos de vibração, com uma malha de domínio de 6 x 6 elementos finitos lagrangeanos quadráticos e 24 elementos de contorno do mesmo grau. Em todos os casos, menos o CCCC, são empregados nós duplos na malha do contorno para modelar os vértices.

Numa segunda parte, a mesma placa quadrada é modelada, com condições de contorno CFSF e CFCE. Neste problema são adotadas 4 diferentes alternativas de "lumping" e os resultados são comparados. A discretização utilizada neste caso é novamente de 6 x 6 elementos finitos lagrangeanos de 9 nós para o domínio e 24 elementos de contorno quadráticos para o contorno. Empregam-se nós duplos nos vértices na malha de contorno. Apresenta-se o aspecto de um modo espúrio que aparece nestes casos.

Por último, analisam-se as frequências naturais de uma placa circular engastada em todo o contorno. A placa é modelada por 48 elementos finitos QLR e 36 elementos de contorno quadráticos. Por ter todo o contorno suave, não são empregados nós duplos na malha de contorno.

5.2.1. - Validação de Resultados - Placa Quadrada

As frequências naturais foram expressas em termos de um parâmetro dado por

$$\lambda = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D} \quad (5.1)$$

onde ω é a frequência natural em rad/s, b é a dimensão lateral na direção y da placa, ρ é a massa específica do material, h é a espessura e D é a constante de rigidez à flexão da placa, dada por $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$. Os valores adotados para os casos de placa quadrada são:

$b = 1.0$, $\rho = 1.0$, $E = 1.0$, $\nu = 0.3$. A constante elástica do problema adjunto é tomada, em todos os casos, como $k_0 = 10^3 K_{ii}$, onde K_{ii} deve ser entendido da mesma forma que explicado no item 3.4.3.1.

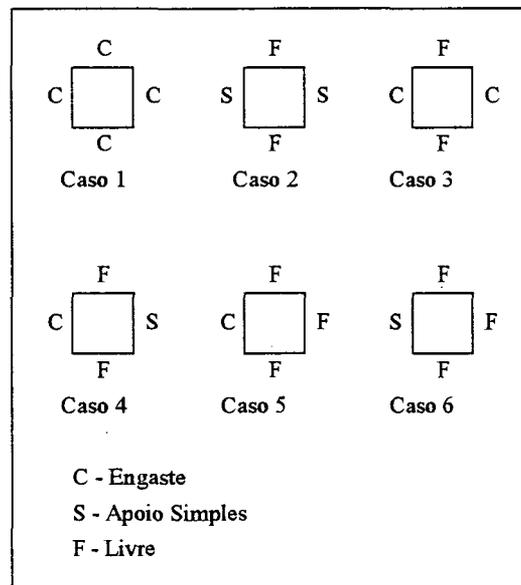


Figura 5.1. Condições de Contorno

Os resultados obtidos via MLGFM são comparados com os apresentados por Raju & Hinton (1980), que empregou elementos lagrangeanos quadráticos com

semelhante desenvolvido nesta pesquisa, onde porém, foram empregados exatamente os mesmos "solvers" que os utilizados para o MLGFM (FEM 2); com os resultados apresentados por Leissa (1973), que desenvolveu pelo método de Rayleigh-Ritz, com 36 termos, a solução para flexão de placas finas retangulares com várias condições de contorno; e com os resultados expostos por Liew et al. (1993), com 13 termos, no Método de Rayleigh-Ritz PB-2, onde estuda os mesmos casos que Leissa no seu trabalho.

Deve-se observar, ainda, que tanto os resultados pelo MLGFM quanto pelo FEM2 foram obtidos empregando dupla precisão. Os sistemas lineares foram resolvidos por eliminação de Gauss com pivotamento, as inversões por decomposição LU, e o auto-problema generalizado foi transformado no problema clássico de auto-valores e auto-vetores, sendo este resolvido pelo método QR, já que a matriz resultante no MLGFM não possui simetria.

Tabela 5.1. Caso 1 - CCCC

h/b	Método	Parâmetro de Frequência $\lambda = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$ para placa de Mindlin									
		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
0.001	FEM1 (◆)	3.6481	7.4692	7.4692	11.0159	13.5879	-	-	-	-	-
	FEM2 (□)	3.6481	7.4692	7.4692	11.0160	13.5877	13.6521	16.9719	16.9719	22.4971	22.4971
	MLGFM	3.6481	7.4692	7.4692	11.0160	13.5877	13.6521	16.9719	16.9719	22.4971	22.4971
	(■)	3.6463	7.4364	7.4364	10.9647	13.3315	13.3951	16.7177	16.7177	21.3296	21.3296
	(◆)	3.6468	7.4383	7.4383	10.970	13.338	13.339	-	-	-	-
0.20	FEM1 (◆)	2.6883	4.7004	4.7004	6.3099	7.2315	-	-	-	-	-
	FEM2 (□)	2.6883	4.7005	4.7005	6.3096	7.2309	7.3327	8.5581	8.5581	10.2016	10.2016
	MLGFM	2.6883	4.7005	4.7005	6.3096	7.2309	7.3327	8.5581	8.5581	10.2016	10.2016
	(■)	2.6875	4.6907	4.6907	6.2985	7.1767	7.2759	8.5155	8.5155	10.0126	10.0126

(◆) Raju & Hinton, 1980

(□) Esta Pesquisa com mesmo elemento e "solver" que utilizado no MLGFM

(■) Liew et al., 1993

(◆) Leissa, 1973

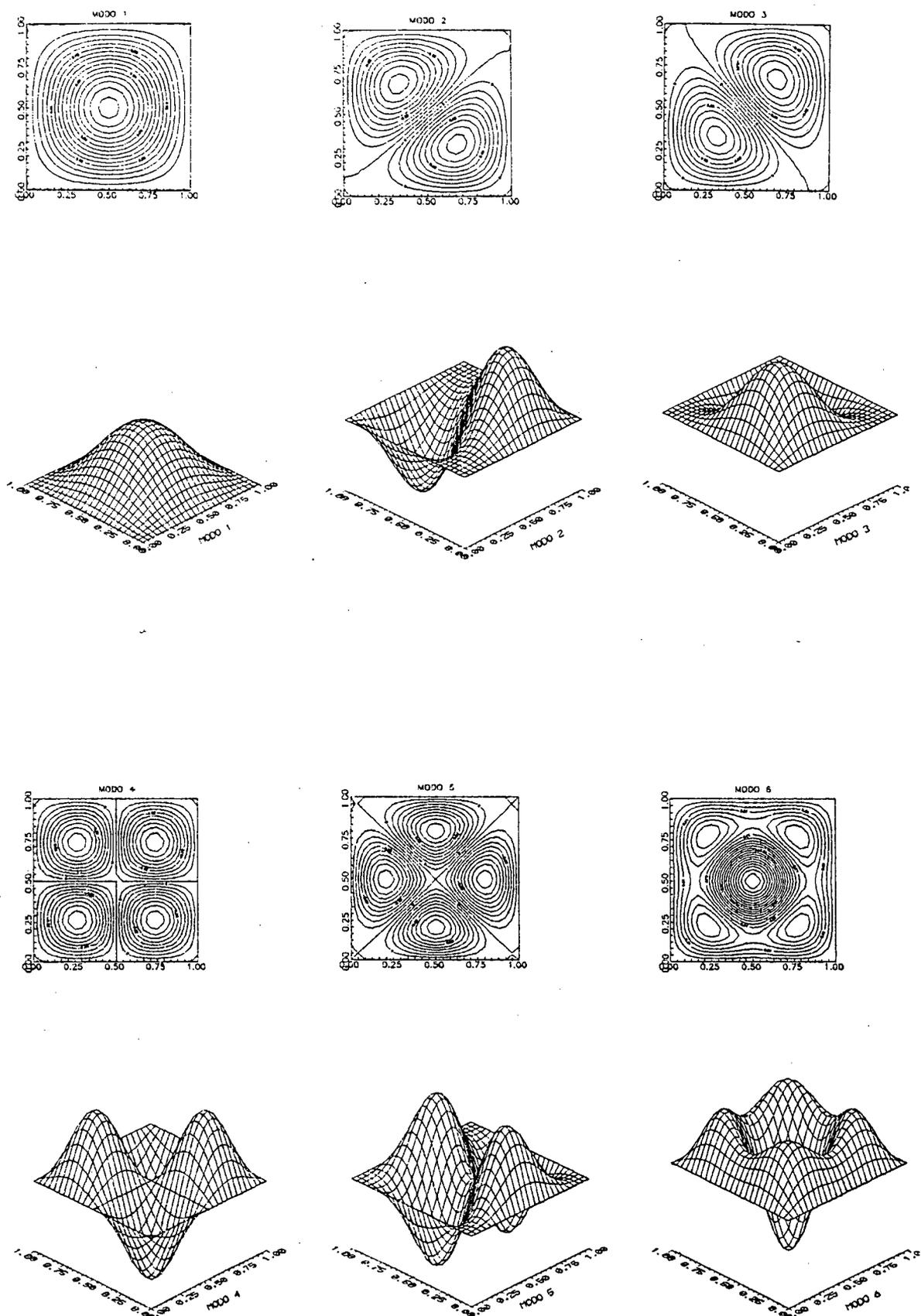


Figura 5.2. Caso CCCC: 6 Primeiros Modos de Vibração

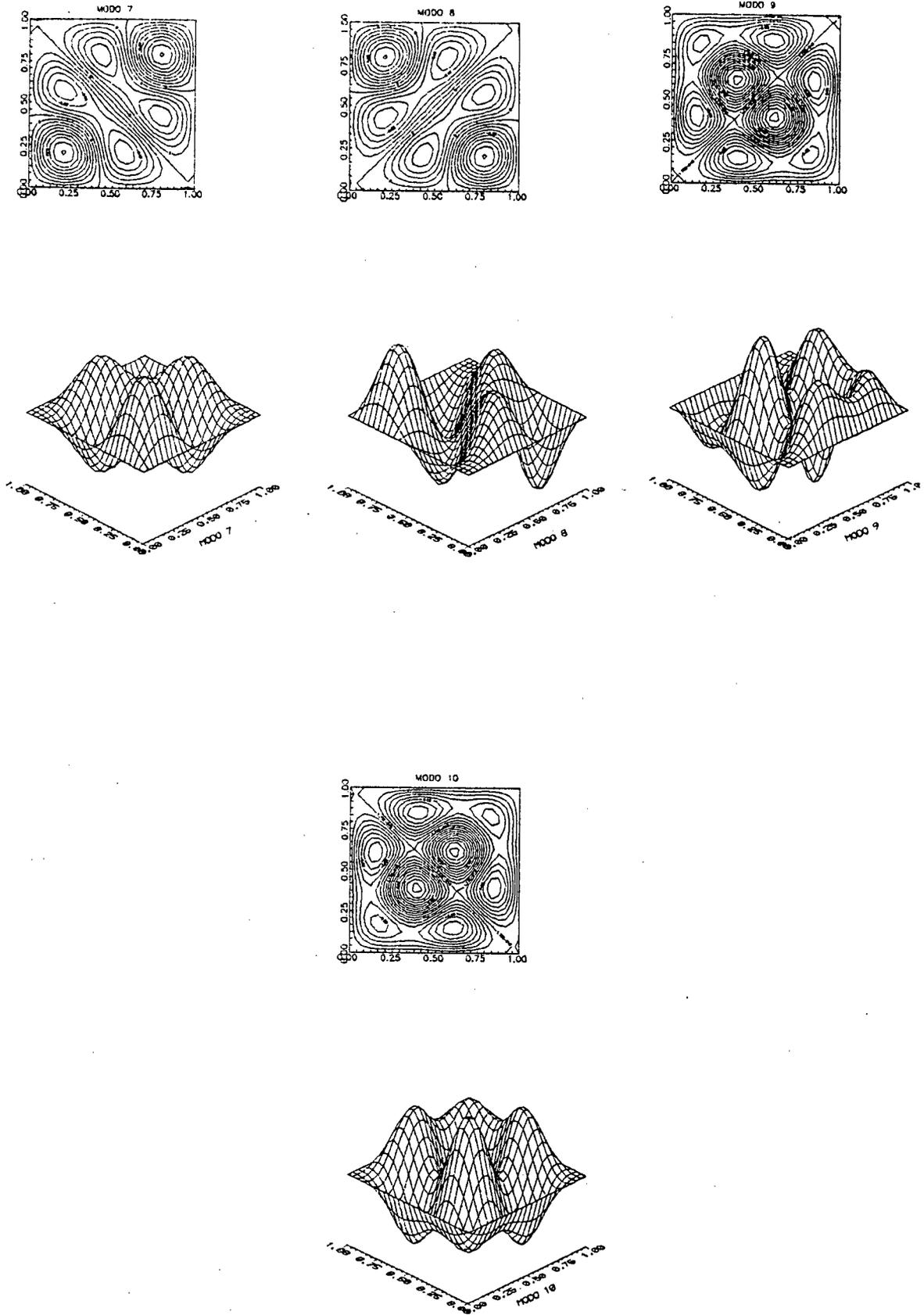


Figura 5.3. Caso CCCC: Modos 7 a 10

Na Tabela 5.1 observam-se os resultados obtidos para uma placa quadrada engastada em todo o contorno. Como detalhado no capítulo 3, isto leva a uma modelagem errada nos nós duplos dos vértices, pela imposição de igualdade entre os momentos normais e torçores, localmente. Pela teoria de placa fina, ambos momentos são nulos nos vértices, mas à medida em que a espessura da placa aumenta, o momento normal assume um valor diferente de zero. Assim, em função da falsa restrição aplicada, poderia-se esperar um enrijecimento da placa que elevasse os valores obtidos para as frequências naturais. Isto, porém, não ocorre, mesmo para uma relação espessura/lado bastante pequena. Ainda mais: Os valores obtidos mediante o MLGFM são idênticos aos obtidos pelo FEM2. Nas Figuras 5.2 e 5.3 são apresentados os primeiros 10 modos de vibração para o caso CCCC. Nestas figuras, bem como em todas as representações de modos de vibração seguintes, o caso avaliado é o da placa com relação espessura/lado = 0.2.

Na Tabela 5.2 apresentam-se os parâmetros de frequência correspondentes aos 10 primeiros modos de vibração do caso SFSF, sendo os modos mostrados em seguida, nas Figuras 5.4 e 5.5.

Tabela 5.2. Caso 2 - SFSF

h/b	Método	Parâmetro de Frequência $\lambda = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$ para placa de Mindlin									
		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
0.001	FEM2 (□)	0.9756	1.6350	3.7097	3.9533	4.7450	7.1546	7.6668	9.0121	9.8325	11.3068
	MLGFM	0.9756	1.6350	3.7097	3.9533	4.7450	7.1546	7.6668	9.0121	9,8325	11.3068
	(■)	0.9768	1.6355	3.7215	3.9462	4.7357	7.1674	7.6278	8.9149	9.7309	11.2489
	[◆]	0.9759	1.6348	3.7211	3.9459	4.7355	7.1675	7.6278	8.9149	9.7309	-
0.20	FEM2 (□)	0.9103	1.4283	2.9540	3.1745	3.6498	5.0296	5.3358	6.0871	6.4557	7.0542
	MLGFM	0.9103	1.4283	2.9540	3.1745	3.6498	5.0296	5.3358	6.0871	6.4557	7.0542
	(■)	0.9102	1.4280	2.9521	3.1684	3.6435	5.0216	5.3173	6.0404	6.4104	7.0337

(□) Esta Pesquisa com mesmo elemento e "solver" que utilizado no MLGFM

(■) Liew et al., 1993

(◆) Leissa, 1973

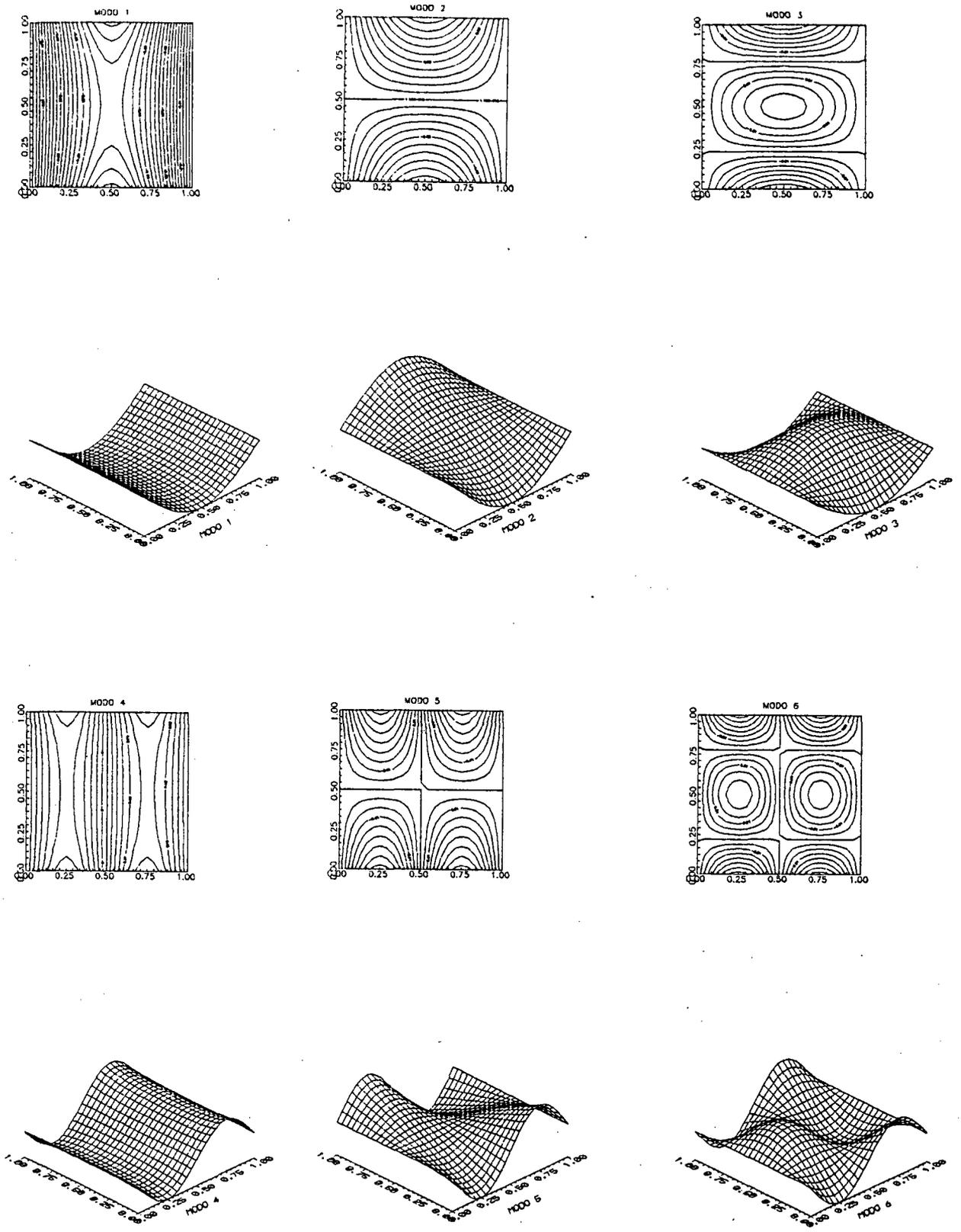


Figura 5.4. Caso SFSF: Primeiros 6 Modos de Vibração

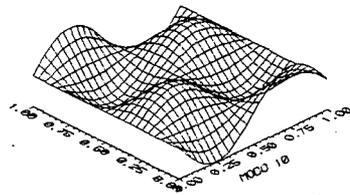
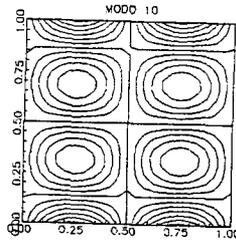
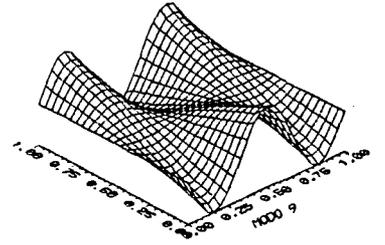
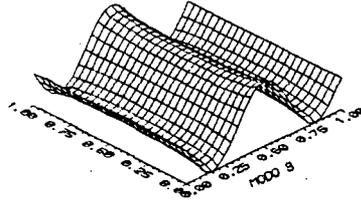
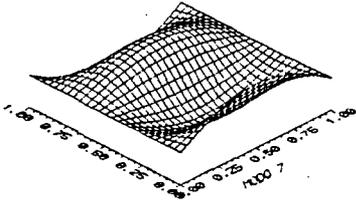
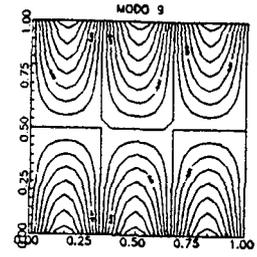
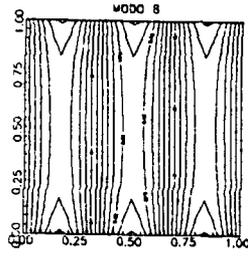
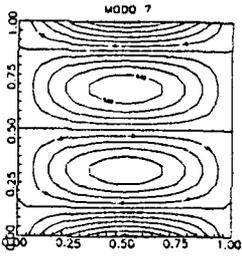


Figura 5.5. Caso SFSF: Modos 7 a 10

Na sequência apresentam-se, na Tabela 5.3, os parâmetros de frequência relativos ao caso CFCF, seguidos de seus modos de vibração correspondentes, nas Figuras 5.6 e 5.7.

Tabela 5.3. Caso 3 - CFCF

h/b	Método	Parâmetro de Frequência $\lambda = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$ para placa de Mindlin									
		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
0.001	FEM2 (□)	2.2476	2.6780	4.4067	6.2336	6.8434	8.1273	8.8850	12.4323	12.6873	13.1055
	MLGFM	2.2476	2.6780	4.4067	6.2336	6.8434	8.1273	8.8850	12.4323	12.6873	13.1055
	(■)	2.2474	2.6776	4.4190	6.2004	6.8111	8.0880	8.8785	12.1727	12.6128	12.8449
	[◆]	2.2566	2.6879	4.4241	6.2278	6.8441	8.0960	-	-	-	-
0.20	FEM2 (□)	1.7786	2.0169	3.1684	4.0544	4.3604	5.4003	5.4069	6.7805	7.0593	7.2114
	MLGFM	1.7786	2.0169	3.1684	4.0544	4.3604	5.4003	5.4069	6.7805	7.0593	7.2114
	(■)	1.7772	2.0151	3.1652	4.0413	4.3472	5.3813	5.3939	6.7166	6.9971	7.1884

(□) Esta Pesquisa com mesmo elemento e "solver" que utilizado no MLGFM

(■) Liew et al., 1993

(◆) Leissa, 1973

Nos três casos seguintes, CFSF, CFFF e SFFF, são apresentados resultados unicamente para placa semi-espessa. Aparentemente, para placa fina, houve contaminação nos resultados pelos modos espúrios, o que levou a problemas com a rotina de extração de auto-valores e auto-vetores. Os mesmos casos foram rodados com integração cheia, sendo que nessa situação houve enrijecimento numérico, elevando os valores das frequências obtidas, as quais ficaram concordantes com o FEM.

A Tabela 5.4 e as Figuras 5.8 e 5.9 apresentam parâmetros de frequência e modos de vibração para o caso CFSF.

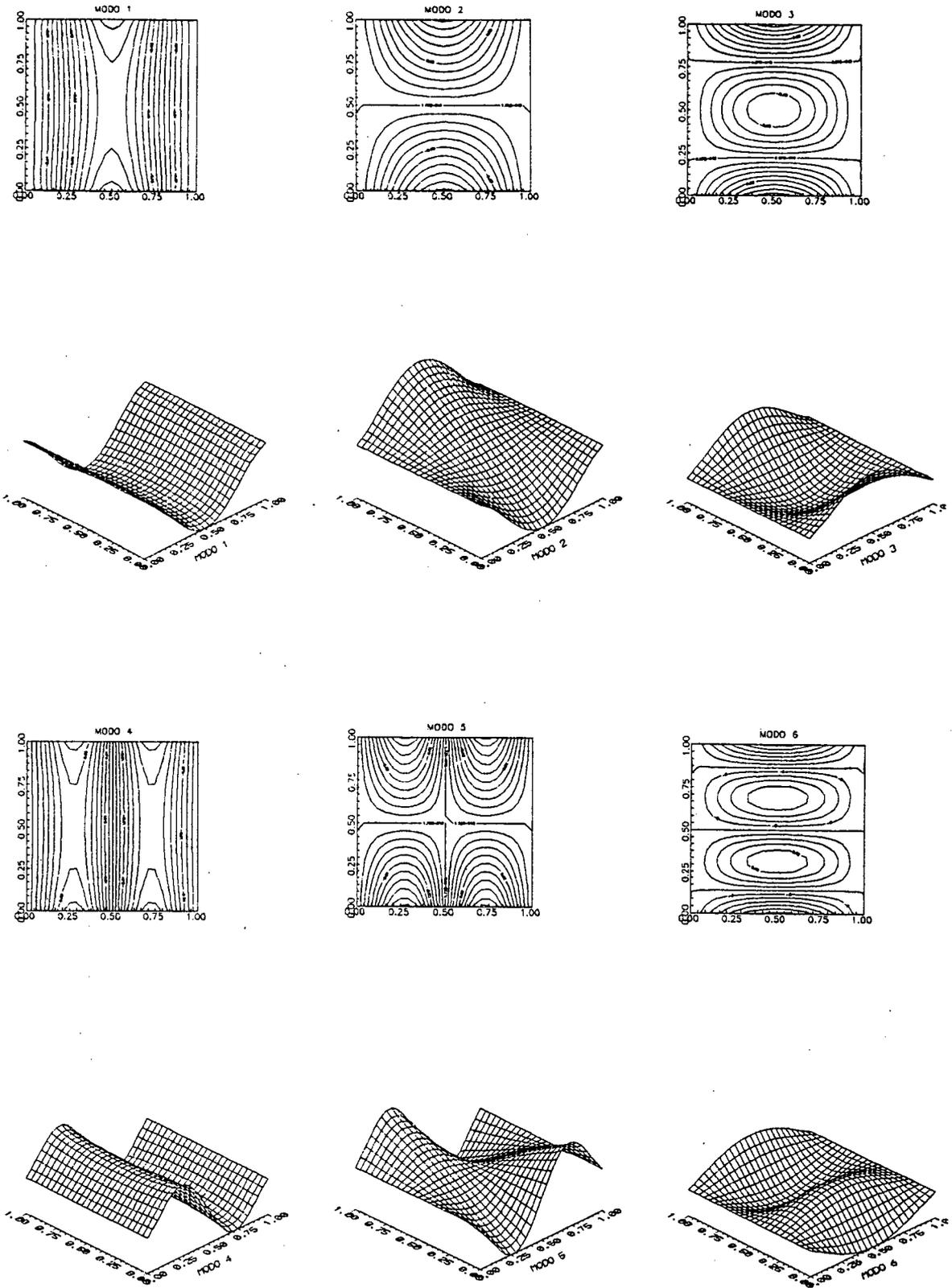


Figura 5.6. Caso CFCF: Primeiros 6 Modos de Vibração

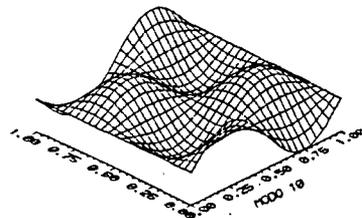
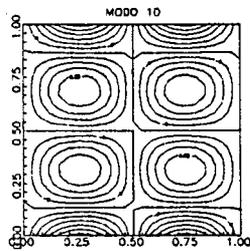
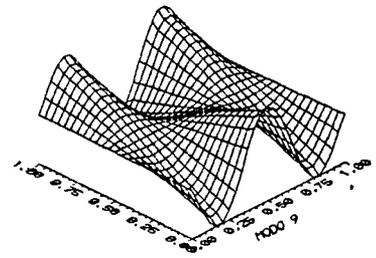
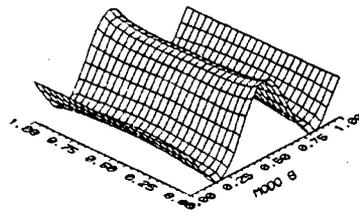
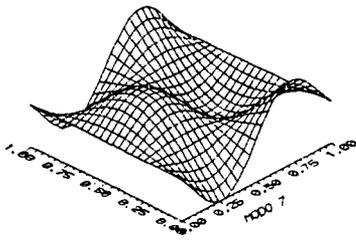
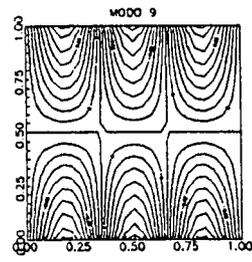
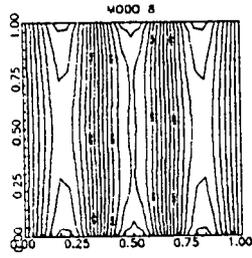
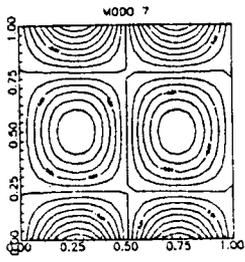


Figura 5.7. Caso CFCF: Modos 7 a 10

Tabela 5.4. Caso 4 - CFSF

h/b	Método	Parâmetro de Frequência $\lambda = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$ para placa de Mindlin									
		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
0.20	FEM2 (□)	1.3260	1.7028	3.0551	3.6356	4.0126	5.2168	5.3671	6.4477	6.7668	7.1319
	MLGFM	1.3260	1.7028	3.0551	3.6356	4.0126	5.2168	5.3671	6.4477	6.7668	7.1319
	(■)	1.3254	1.7019	3.0526	3.6262	4.0031	5.2064	5.3484	6.3925	6.7129	7.1103

(□) Esta Pesquisa com mesmo elemento e "solver" que utilizado no MLGFM

(■) Liew et al., 1993

Na Tabela 5.5 e Figuras 5.10 e 5.11 são apresentados parâmetros de frequência e modos de vibração para o caso CFFF, e finalizando esta primeira parte, na Tabela 5.6 expõem-se os parâmetros de frequência para o caso SFFF, com os respectivos modos de vibração nas Figuras 5.12 e 5.13. Note-se que este último caso possui um autovalor matematicamente nulo, correspondente à rotação sobre o eixo de apoio simples. Este auto-valor, numericamente diferente de zero, não é apresentado nos resultados.

Tabela 5.5. Caso 5 - CFFF

h/b	Método	Parâmetro de Frequência $\lambda = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$ para placa de Mindlin									
		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
0.20	FEM2 (□)	0.3384	0.7448	1.7818	2.2783	2.4224	3.8902	4.3325	4.6154	4.9167	6.0541
	MLGFM	0.3384	0.7448	1.7818	2.2783	2.4224	3.8902	4.3325	4.6154	4.9167	6.0541
	(■)	0.3384	0.7445	1.7806	2.2765	2.4205	3.8851	4.3168	4.5996	4.8966	6.0333

(□) Esta Pesquisa com mesmo elemento e "solver" que utilizado no MLGFM

(■) Liew et al., 1993

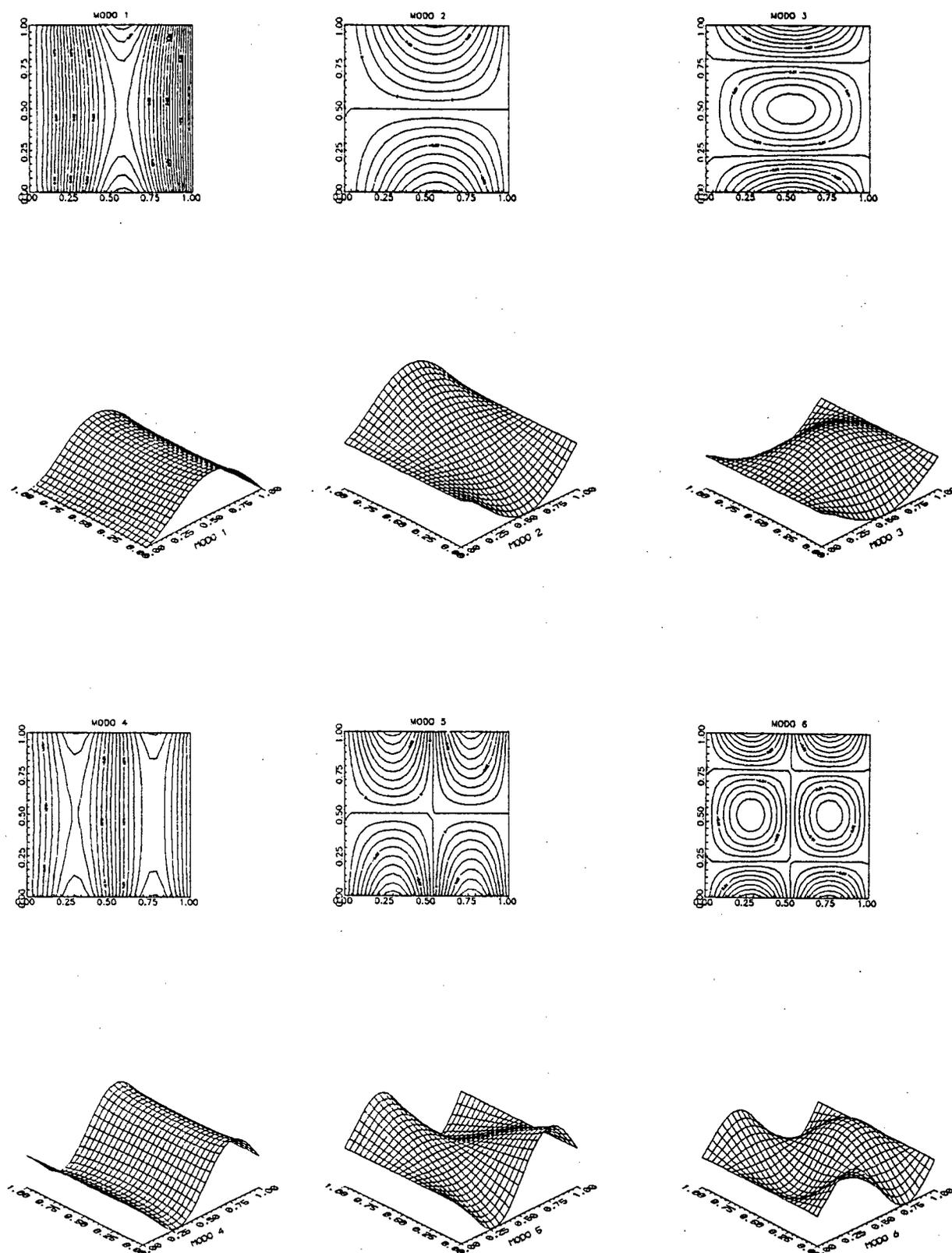


Figura 5.8. Caso CFSF: Primeiros 6 Modos de Vibração

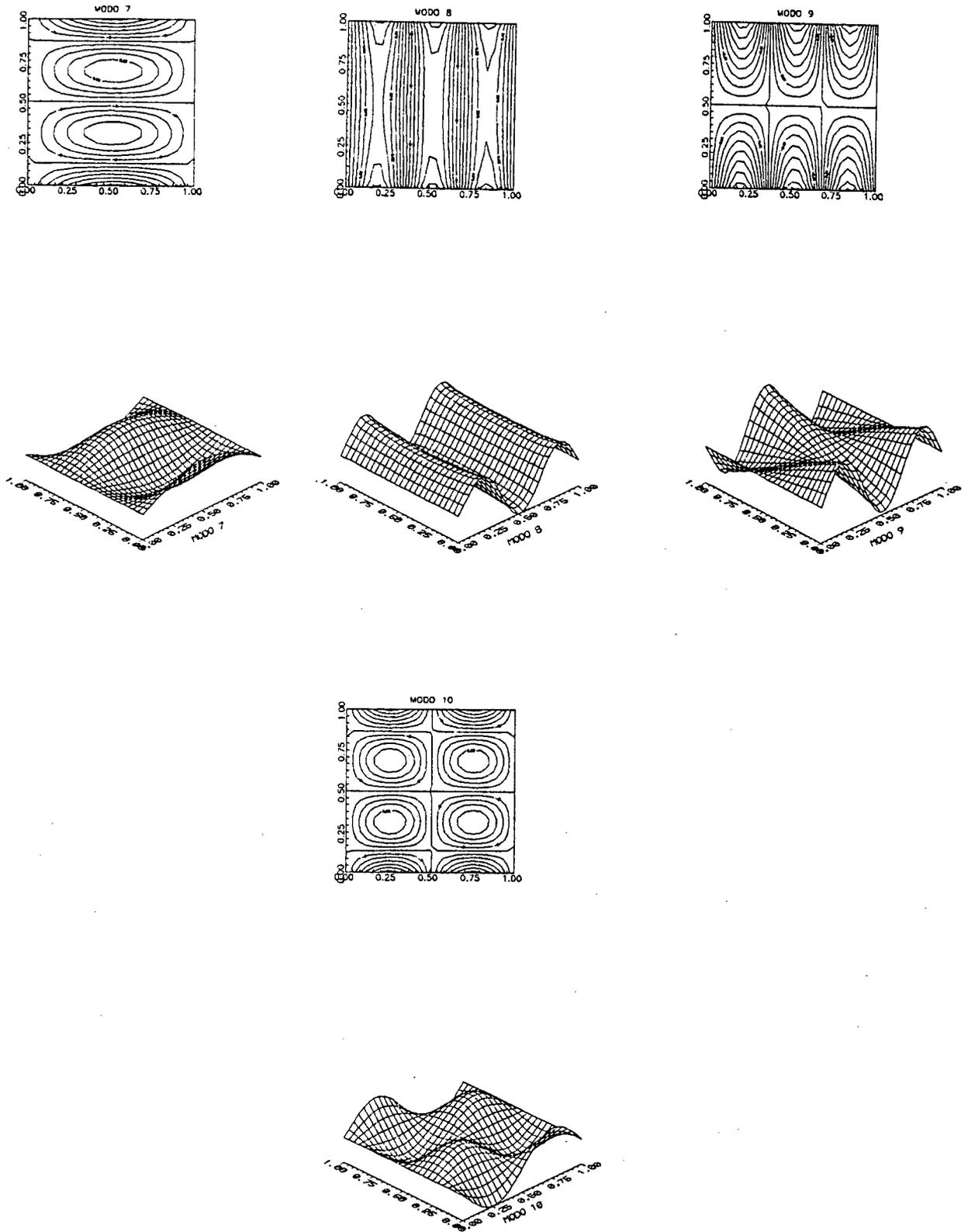


Figura 5.9. Caso CFSF: Modos 7 a 10

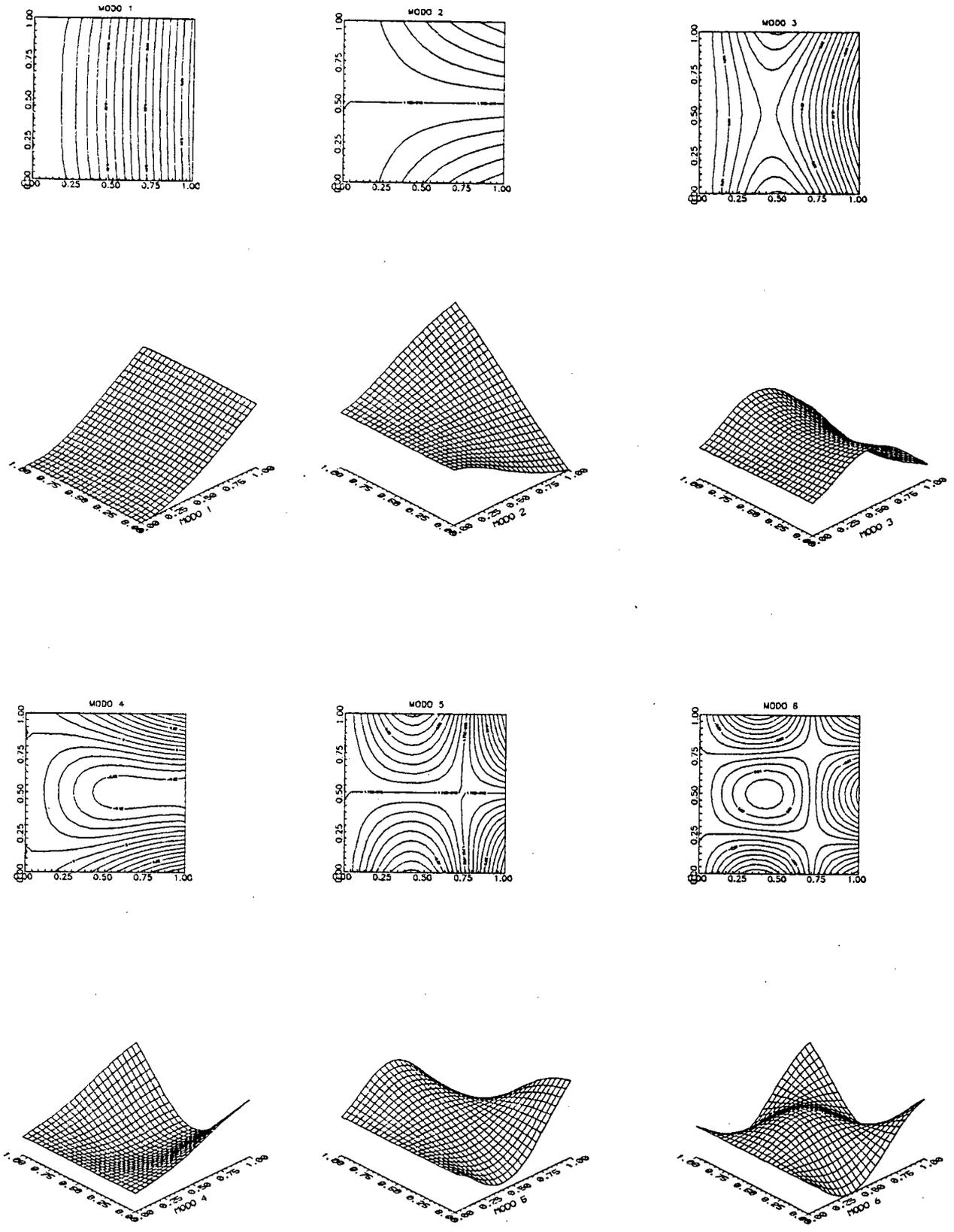


Figura 5.10. Caso CFFF: Primeiros 6 Modos de Vibração

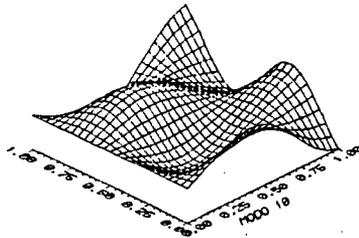
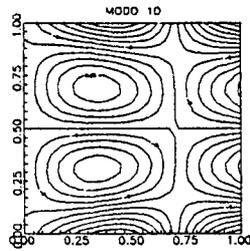
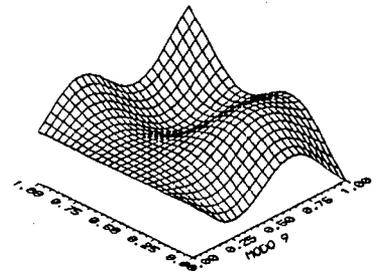
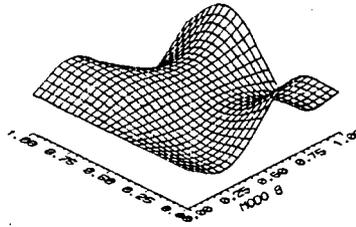
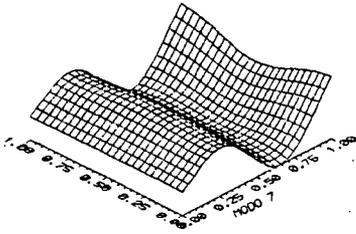
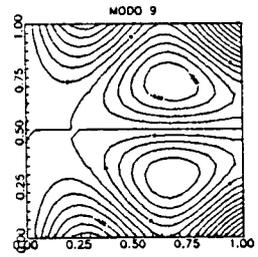
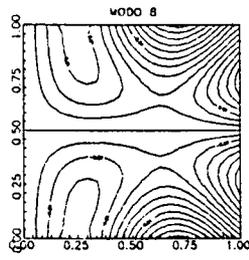
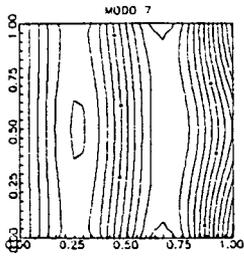


Figura 5.11. Caso CFFF: Modos 7 a 10

Tabela 5.6. Caso 6 - SFFF

h/b	Método	Parâmetro de Frequência $\lambda = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$ para placa de Mindlin									
		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
0.20	FEM2 (□)	0.6080	1.3668	2.1344	2.2302	3.7197	3.9166	4.3569	4.8205	5.9216	5.9950
	MLGFM	0.6074	1.3652	2.1293	2.2235	3.7182	3.9096	4.3511	4.8041	5.8915	5.9685
	(■)	0.6080	1.3663	2.1334	2.2286	3.7146	3.9064	4.3453	4.8008	5.9060	5.9745

(□) Esta Pesquisa com mesmo elemento e "solver" que utilizado no MLGFM

(■) Liew et al., 1993

Observa-se que em todos os casos, exceto no Caso 6, os resultados obtidos pelo MLGFM são idênticos aos fornecidos pelo Método dos Elementos Finitos. Este comportamento é análogo ao visto no problema estático em relação aos valores de deslocamento. Supõe-se, então, que tanto no caso estático como no de vibração, a projeção da função de Green numa única célula compromete os resultados obtidos.

5.2.2. - Análise do "Lumping".

A utilização de esquemas de diagonalização da matriz massa é reconhecidamente vantajosa por propiciar uma maior eficiência ao algoritmo de extração de auto-valores e auto-vetores. Isto, porque a inversão da matriz massa se torna direta, eliminando problemas de tempo e armazenamento. Além disso, a matriz massa diagonal é essencial na análise transiente dinâmica quando utilizada uma formulação explícita de diferença central. Por isso, é prática comum no Método dos Elementos Finitos (Hinton et al. (1976), Rock & Hinton (1976), Hinton & Bicanic (1979)).

A formulação do Método da Função de Green Local Modificado, seja para problemas estáticos ou dinâmicos, trabalha com uma matriz gramiana de domínio, que pode ser vista como uma matriz massa com densidade unitária. Além desta, nos problemas dinâmicos, também está presente a matriz massa convencional.

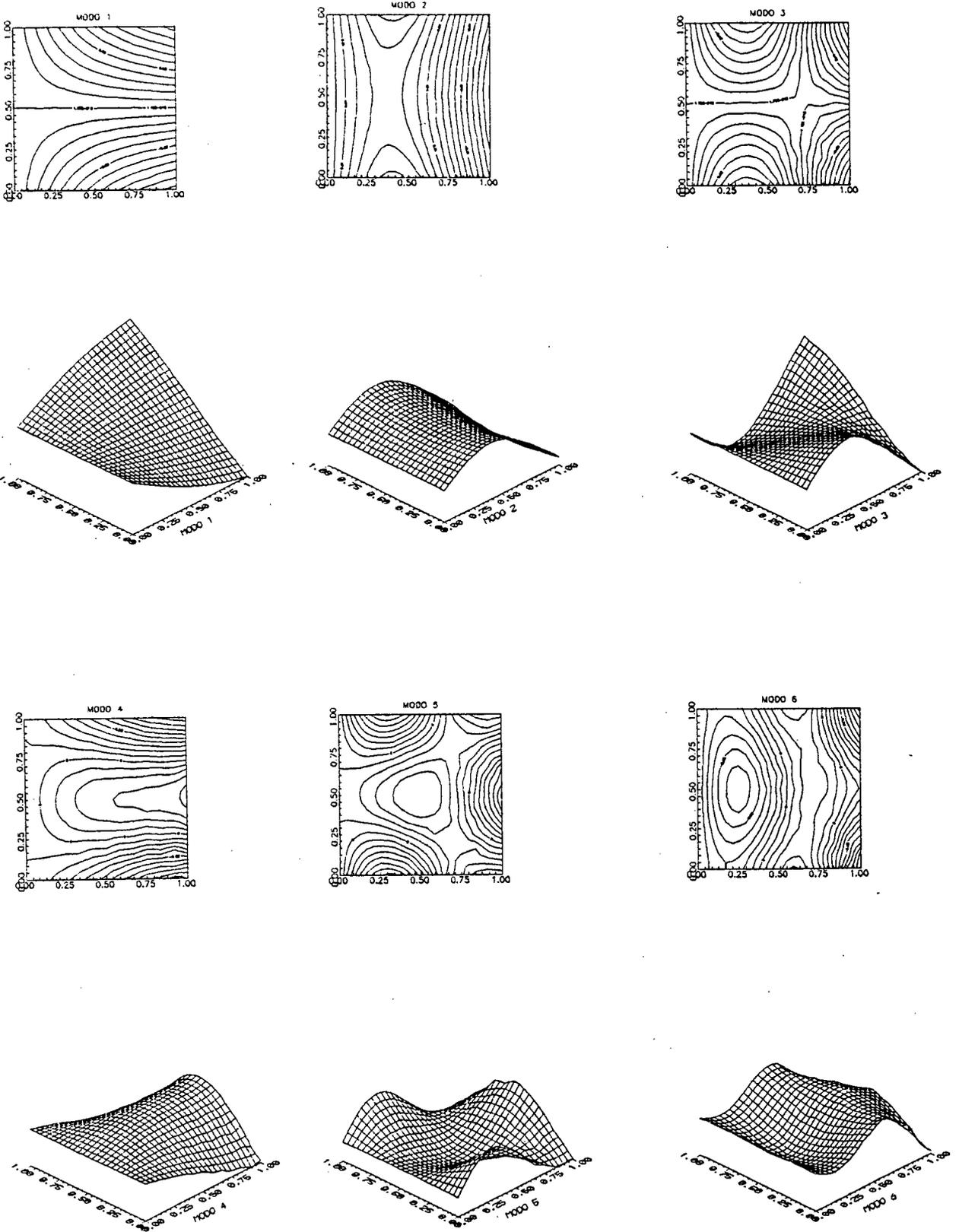


Figura 5.12. Caso SFFF: Primeiros 6 Modos de Vibração

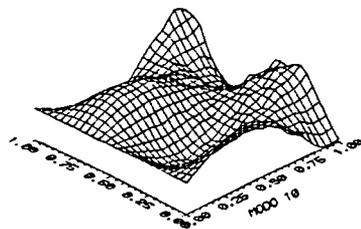
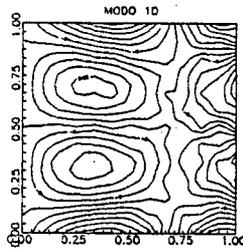
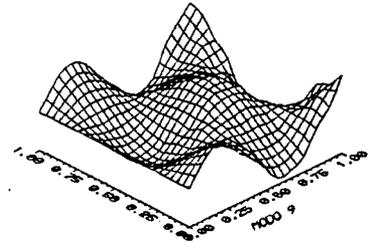
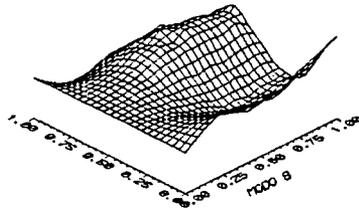
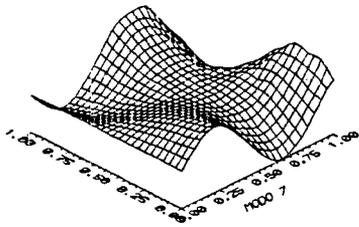
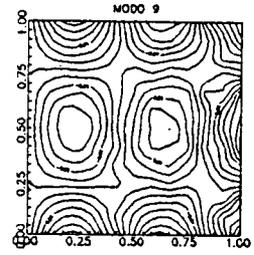
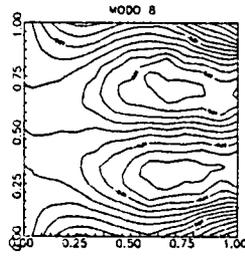
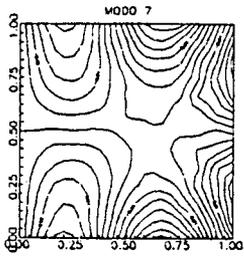


Figura 5.13. Caso SFFF: Modos 7 a 10

Barbieri (1992), apresentou alguns resultados empregando lumping HRZ na matriz gramiana de domínio, para problemas estáticos de potencial. Foi escolhido o esquema de diagonalização HRZ, porque a convergência demonstrada pelo método apresenta boas características, como pode ser confirmado em Hinton et al. (1976) e Cook et al. (1989).

Este esquema de diagonalização pode ser resumido da seguinte forma:

- i) Computam-se somente os valores da diagonal principal da matriz massa consistente;
- ii) Computa-se a massa total do elemento, m ;
- iii) Computa-se um número s mediante a adição dos valores da diagonal principal, m_{ii} associados a graus de liberdade translacionais paralelos e na mesma direção;
- iv) Escalonam-se todos os elementos da diagonal principal mediante a sua multiplicação pela razão m/s , de forma a preservar a massa do elemento.

Os resultados que Barbieri encontrou foram idênticos aos obtidos utilizando a matriz consistente.

Esses fatores determinaram que seria interessante observar o comportamento do MLGFM utilizando 4 esquemas de lumping HRZ. Isto é feito, a seguir, para uma placa quadrada com condições de contorno CFSF e CFCF, com as mesmas características apresentadas nos casos anteriormente expostos. A discretização é feita com 6 x 6 elementos finitos lagrangeanos de 9 nós e os elementos de contorno são quadráticos. A razão espessura/lado é tomada como 0.2 e a integração da matriz rigidez é reduzida seletiva, salvo quando expressamente mencionado.

As quatro opções de lumping HRZ implementadas no MLGFM são:

- (1) Opção 1: Matrizes grammiana e massa consistentes;
- (2) Opção 2: Matriz grammiana lumped e massa consistente;
- (3) Opção 3: Matriz grammiana consistente e massa lumped;
- (4) Opção 4: Matrizes grammiana e massa lumped.
- (5) Opção 5: Igual à opção 3, com integração cheia na matriz rigidez.

Para efeitos de comparação, foram também analisados os resultados de um modelo de elementos finitos com e sem lumping na matriz massa. Tem-se, nesse caso,

- (1) Opção 1: Matriz massa consistente;
- (2) Opção 2: Matriz massa lumped;
- (3) Opção 3: Igual à opção 2, com integração cheia na matriz rigidez.

Os resultados obtidos são expostos a seguir, nas Tabelas 5.7 e 5.8. Observa-se que nos dois tipos de condição de contorno, quando a matriz rigidez é subintegrada seletivamente e é feito lumping na matriz massa, surge um modo espúrio entre o 7º e 8º modos. Verifica-se que, como era de se esperar, ao utilizar integração cheia, este modo não aparece. O fenômeno ocorre tanto no FEM como no MLGFM, como pode ser notado, e uma possível explicação é que ao diagonalizar a matriz massa, as inércias são desacopladas, e este modo espúrio que talvez estivesse associado a um modo de vibração mais alto, cai para se posicionar entre o 7º e 8º modos. O aspecto do modo espúrio correspondente ao caso CFCF é apresentado na Figura 5.14.

Das Tabelas apresentadas, é notório que no MLGFM a diagonalização da matriz grammiana não afeta os resultados obtidos. Por outro lado, a diagonalização da matriz massa tem efeito semelhante ao observado no FEM.

Para que os resultados obtidos mediante o MLGFM sejam confiáveis, é importante que os mesmos não sejam sensíveis a variações no valor arbitrado para o coeficiente de apoio elástico do problema adjunto. Este coeficiente, também chamado no

presente trabalho de "parâmetro arbitrário" na formulação, é introduzido com o único objetivo de evitar a singularidade do problema auxiliar (adjunto), a ser resolvido pelo método dos elementos finitos, como já foi descrito no capítulo 2.

Tabela 5.7. Análise do Lumping: Caso 3 - CFCF

		Parâmetro de Frequência $\lambda = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$ para placa de Mindlin									
Método	Opção	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
	1	1.7786	2.0169	3.1684	4.0543	4.3604	5.4003	5.4069	6.7805	7.0593	7.2114
MLGFM	2	1.7786	2.0169	3.1684	4.0543	4.3604	5.4003	5.4069	6.7805	7.0593	7.2114
	3	1.7782	2.0165	3.1666	4.0483	4.3539	5.3853	5.3967 5.8828	6.7408	7.0175	7.1805
	4	1.7782	2.0165	3.1666	4.0483	4.3539	5.3853	5.3967 5.8828	6.7408	7.0175	7.1805
	5	1.7810	2.0203	3.1707	4.0579	4.3639	5.3940	5.4063	6.7594	7.0364	7.1958
	1	1.7786	2.0169	3.1684	4.0543	4.3604	5.4003	5.4069	6.7805	7.0593	7.2114
FEM2 (□)	2	1.7782	2.0165	3.1666	4.0483	4.3539	5.3853	5.3967 5.8828	6.7408	7.0175	7.1805
	3	1.7810	2.0203	3.1707	4.0579	4.3639	5.3940	5.4063	6.7594	7.0364	7.1958
	■	1.7772	2.0151	3.1652	4.0413	4.3472	5.3813	5.3939	6.7166	6.9971	7.1884

(□) Esta Pesquisa com mesmo elemento e "solver" que utilizado no MLGFM

(■) Liew et al., 1993

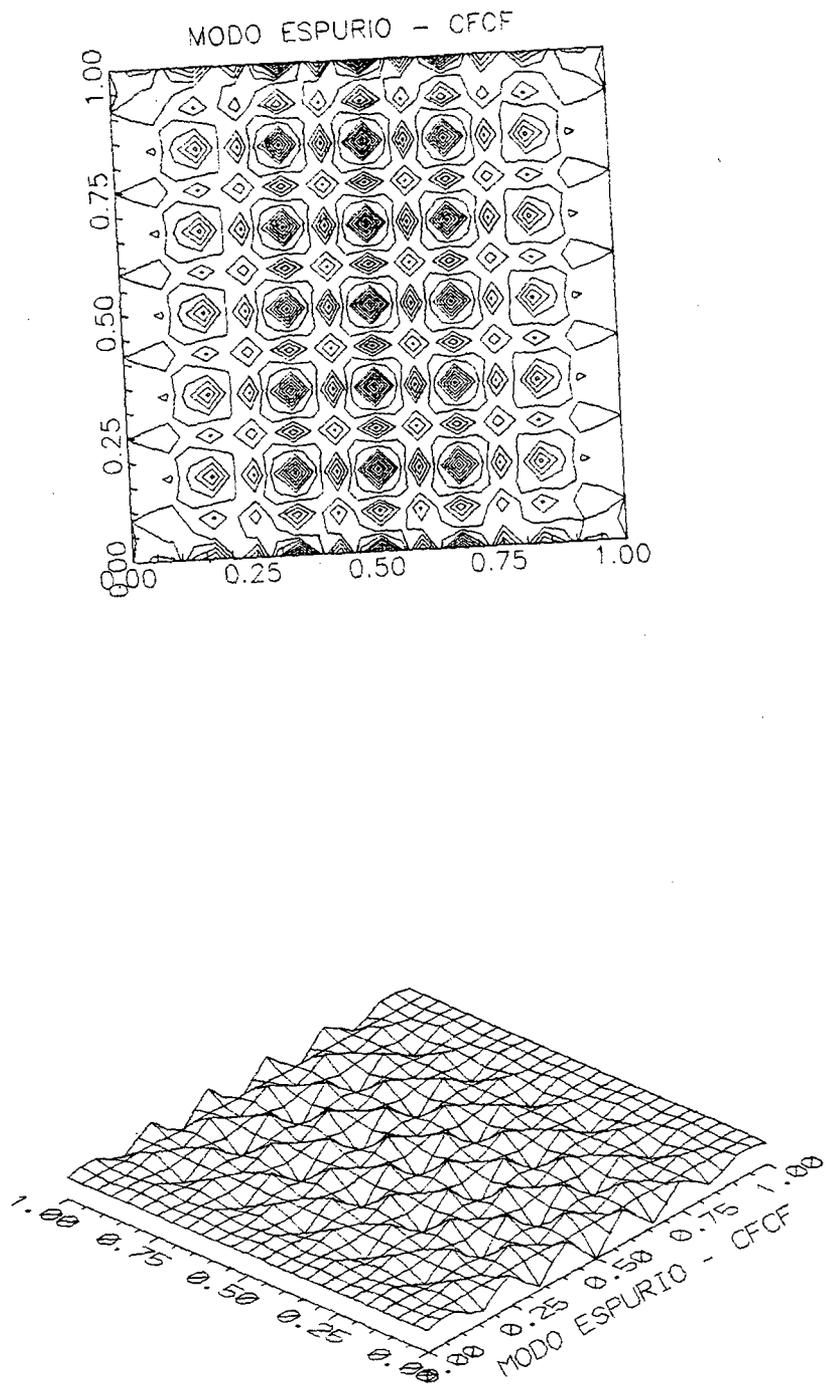


Figura 5.14. Modo Espúrio - Caso CFCF.

O fator multiplicativo FM foi variado de $-1.0e18$ a $1.0e18$ e os resultados estão expostos na Tabela 5.9. Nota-se que os resultados são estáveis até a quarta casa decimal para FM na faixa $\pm(1.0e-6$ a $1.0e18)$. Fora desta faixa de FM o algoritmo de autovalores e autovetores não conseguiu resolver o sistema matricial, provavelmente em virtude de problemas de condicionamento numérico. Para valores abaixo desta faixa, isto é, mais próximos de zero, os resultados deterioraram gradativamente. Para FM igual a zero, os resultados foram absurdos, todos próximos de zero, correspondendo a lixo numérico causado pela singularidade obtida.

Tabela 5.9. Sensibilidade ao Coeficiente de Apoio Elástico - Caso 2: SFSF

FM	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
-1.0e-6 a -1.0e18	0.2363	0.6360	0.9193	1.4470	2.0092	2.3594	2.5362	3.0470	3.4222	3.8619
-1.0e-7	0.2363	0.6360	0.9193	1.4470	2.0091	2.3594	2.5362	3.0470	3.4227	3.8619
-1.0e-8	0.2364	0.6360	0.9216	1.4470	2.0062	2.3596	2.5367	3.0471	3.3794	3.8619
0.0e0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1.0e-8	0.2364	0.6359	0.9222	1.4470	2.0153	2.3597	2.5358	3.0474	3.5053	3.8619
1.0e-7	0.2363	0.6360	0.9193	1.4470	2.0092	2.3594	2.5362	3.0470	3.4217	3.8619
1.0e-6 a 1.0e18	0.2363	0.6360	0.9193	1.4470	2.0092	2.3594	2.5362	3.0470	3.4222	3.8619
FEM2[□]	0.2363	0.6360	0.9193	1.4470	2.0092	2.3594	2.5362	3.0470	3.4222	3.8619
[■]	0.2362	0.6314	0.9102	1.4280	1.9238	2.2634	2.4422	2.9521	3.1685	3.6437

A segunda aplicação corresponde ao caso 6 - SFFF, com as mesmas características empregadas no item 5.2.1. Note-se que neste caso há oscilação dos resultados e não se alcança a estabilidade. O motivo, aparentemente, é que há pouco vínculo no problema adjunto. Filippin (1992), utilizou precisão quádrupla para modelar o problema de Neumann na equação de Helmholtz. É possível que se este procedimento fosse aqui adotado, seria alcançada a estabilidade dos resultados.

5.2.4. - Placa Circular Engastada

Com o objetivo de modelar geometrias mais complexas, onde os elementos discretizados ficam distorcidos, é analisado o caso de uma placa circular engastada em todo o seu contorno. Estas condições de contorno são escolhidas porque permitem que o caso seja tratado no sistema de referência global, uma vez que a proposta de sistema local apresentada no capítulo 3 não se mostrou eficiente.

Tabela 5.10. Sensibilidade ao Coeficiente de Apoio Elástico - Caso 6: SFFF

FM	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
-1.0e12	0.6085	1.3671	2.1350	2.2273	3.7341	3.9099	4.3423	4.7916	5.8767	5.9730
-1.0e8	0.6089	1.3702	2.1275	2.3238	3.5933	3.9190	4.4508	-	6.4259	6.8917
-1.0e4	0.6082	1.3008	2.1112	2.2116	3.6979	3.8902	4.5219	5.0180	6.4012	7.2649
-1.0e2	0.6080	1.3668	2.1384	2.2240	3.7161	3.9091	4.3612	4.8303	5.9100	6.0211
-1.0e-2	0.6105	1.3555	2.2162	2.1228	3.7091	3.9032	4.3675	4.8713	5.8961	6.0124
-1.0e-8	0.6075	1.3669	2.1364	2.2242	3.7233	3.9173	4.3689	4.7502	5.8489	5.9543
0.0e0										
1.0e-8	0.6078	1.3622	2.1342	2.2327	3.7151	3.8916	4.3656	4.8276	5.9356	5.9897
1.0e-2	0.6079	1.3671	2.1335	2.2291	3.7169	3.9167	4.3578	4.8329	5.9206	5.9805
1.0e2	0.6080	1.3664	2.1349	2.2294	3.7205	3.9172	4.3614	4.8295	5.9226	5.9830
1.0e4	0.6078	1.3675	2.1351	2.2276	3.7236	3.9180	4.3520	4.8250	5.9180	5.9810
1.0e8	0.5999	1.3639	2.1668	2.2950	3.7186	3.8330	4.3277	4.8266	5.9063	6.0553
1.0e12	0.6075	1.3676	2.1418	2.2254	3.7107	3.9077	4.3685	4.8004	5.9124	5.9916
1.0e18	0.6087	1.4508	2.1632	2.2561	3.1912	4.1071	4.7544	5.2047	5.8564	7.9607
FEM2[□]	0.6080	1.3668	2.1344	2.2302	3.7197	3.9166	4.3569	4.8205	5.9216	5.9950
[■]	0.6080	1.3663	2.1334	2.2286	3.7146	3.9064	4.3511	4.8008	5.9060	5.9745

A malha empregada, exposta na Figura 5.15, utiliza 48 elementos lagrangeanos de 9 nós, com subintegração seletiva na matriz de rigidez, e 16 elementos de contorno quadráticos.

Na Tabela 5.11 estão expostos os primeiros 7 parâmetros de frequências, associados com as primeiras 7 frequências naturais da placa circular. Estes parâmetros são dados por:

$$\lambda_c = \omega R^2 \sqrt{\rho h / D} \quad (5.2)$$

onde R é o raio da placa, D é a constante de rigidez à flexão, h é a espessura, ρ é a massa específica e ω são as frequências naturais da placa.

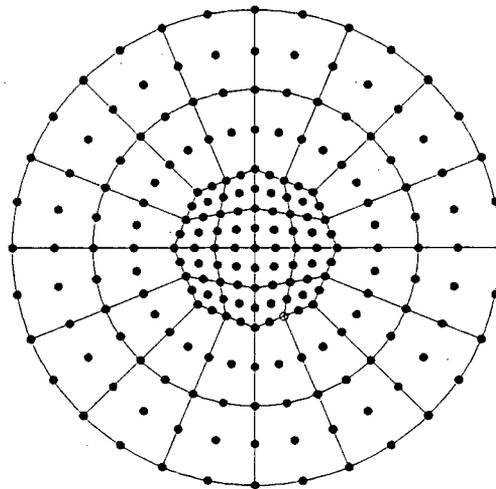


Figura 5.15. Discretização da Placa Circular Engastada

Com estas aplicações termina a exposição dos resultados numéricos do Método da Função de Green Local Modificado para problemas de Placa de Mindlin. É inquestionável que tais resultados foram surpreendentes e merecem uma boa análise. Isto será feito a seguir, no próximo capítulo.

Tabela 5.11. Frequências Naturais da Placa Circular

		Parâmetro de Frequência $\lambda = \omega R^2 \sqrt{\rho h / D}$ para placa de Mindlin						
h/b	Método	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
0.20	FEM2 (□)	9.5226	17.8587	27.2560	32.2958	37.2793	43.5521	47.7459
	MLGFM	9.2581	17.8587	27.2560	30.7566	37.2793	43.5521	47.7589
	[■]	9.240	17.834	27.214	30.211	37.109	42.409	47.340

(□) Esta Pesquisa com mesmo elemento e "solver" que utilizado no MLGFM

(■) Irie et al, 1980

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Os resultados apresentados neste trabalho são em muitos aspectos inesperados, e em alguns pontos, inclusive, vão em contra a conclusões obtidas em trabalhos anteriores, nos quais foi estudado o desempenho do MLGFM. É o caso, por exemplo, do comportamento do MLGFM em relação ao fenômeno do "locking", da distorção de resultados na vizinhança de nós duplos, da semelhança de resultados de deslocamentos com o FEM, etc. Alguns tópicos merecem uma análise que, pelo menos, tente fornecer uma explicação para as dúvidas surgidas.

A primeira questão importante que aparece no contexto desta pesquisa, é a dificuldade existente na aplicação das condições de contorno em pontos de descontinuidade do vetor normal à superfície. Nesse aspecto, urge desenvolver alguma metodologia que permita aplicar corretamente as condições de contorno nos nós duplos. Caso contrário, o comprometimento dos resultados é inevitável. A tentativa feita neste trabalho não foi frutífera, sendo provável que o motivo esteja relacionado com condicionamento numérico. Se esse for o caso, o procedimento indicado por Vable (1987, 1990) pode ser uma solução que merece ser estudada e é deixada como sugestão.

Em segundo lugar deve-se observar que tanto para o problema de flexão quanto para o de vibração livre, o MLGFM apresentou resultados se não iguais, muito próximos dos obtidos via Método dos Elementos Finitos. Isso pode ser atribuído à aproximação unicelular das projeções da função de Green. Como apresentado no item 2.5, na verdade, o MLGFM não minimiza o erro no contorno, mas apenas dentro de cada célula de Green. Quando a célula se confunde com o domínio todo, tem-se uma

aproximação de domínio, que utiliza a mesma base que o correspondente problema de elementos finitos.

Os argumentos apresentados levam a considerar que seria possível haver uma melhoria na qualidade dos resultados fornecidos pelo MLGFM se fosse efetuada uma aproximação pluricelular, sendo a situação ideal se cada elemento finito fosse uma célula. Isso permitiria a existência de descontinuidades nas projeções da função de Green. Contudo, deve ser notado que, nesse caso, cada célula teria seus vértices e conseqüentemente, o problema dos nós duplos teria que estar dominado de antemão.

Quanto às questões de "locking" e modos espúrios, fica comprovado que o MLGFM também sofre desses problemas. Se for considerado que a solução fundamental nada mais é do que a resposta em termos de deslocamento para uma excitação do tipo delta de Dirac, e que esta resposta é calculada via FEM, que sofre de "locking" e modos espúrios, é natural induzir que estes deslocamentos contaminarão o MLGFM.

Conclui-se, portanto, que para o cálculo de deslocamentos generalizados e frequências naturais de vibração, a formulação do MLGFM baseada na aproximação unicelular das projeções da função de Green, pelo menos no caso de placa de Mindlin, não é vantajosa frente ao Método dos Elementos Finitos. Isto porque os resultados obtidos são semelhantes e o custo computacional é bem maior. A grande vantagem obtida com o MLGFM é a da obtenção de reações mais precisas sem ter de efetuar os pós-processamentos necessários no FEM.

Pelo exposto anteriormente, constata-se que a grande potencialidade do MLGFM repousa na determinação de esforços, que são, em geral, a maior preocupação em engenharia. Com a atual formulação - unicelular - os esforços são obtidos apenas no contorno do meio analisado. Por esse motivo, existe grande expectativa quanto ao desenvolvimento da formulação pluricelular, que permitiria determinar esforços no domínio. É nessa direção, portanto, que a pesquisa com o MLGFM deve continuar e sugere-se que em futuros trabalhos seja enfatizado o estudo dessa formulação. Para tanto

a primeira atenção deve ser dada ao tratamento de pontos onde há descontinuidade do vetor normal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alarcón, E., Martín, A., & París, F., "Boundary Elements in Potential and Elasticity Theory", *Computers & Structures*, Vol. 10, pp. 351-362, 1979.
- Al-Kaabi, S.A. & Aksu, G., "Free Vibration Analysis of Mindlin Plates with Parabolically varying Thickness", *Computers & Structures*, Vol. 33, no 6, pp. 1417-1421, 1989.
- Antes, H., "Static and Dynamic Analysis of Reissner-Mindlin Plates", in *Boundary Element Analysis of Plates and Shells*, Ed. D. E. Beskos, Springer-Verlag, 1991.
- Banerjee, P. K. & Butterfield, R., "Boundary Element Methods in Engineering Science", Mc Graw - Hill, 1981.
- Barbieri, R., "Desenvolvimento e Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) para Problemas do Meio Contínuo", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1992.
- Barbieri, R. & Barcellos, C. S., "A Modified Local Green's Function Technique for the Mindlin's Plate Model", in *Proceedings of the 13th Conference on Boundary Element Technology*, Ed. Brebbia, C. A. and Gipson C., 1991a.
- Barbieri, R. & Barcellos, C. S., "Solução do Problema Potencial pelo Método da Função de Green Local Modificado", in *COBEM XI, Anais do 11o Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, 1991b.
- Barbieri, R. & Barcellos, C. S., "Non-Homogeneous Field Potential Problems Solution by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM)", in *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 11, pp. 9-15, 1993a.
- Barbieri, R. & Barcellos, C. S., "Mindlin's Plate Solutions by the MLGFM", in *BEM XV, Proceedings of the 15th Int. Conf. on Boundary Elem. Meth.*, Vol. 2, pp. 149-164, 1993b.
- Barbieri, R., Barcellos C. S., Machado, R. D. & Filippin, C. G., "O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) aplicado Placa de Mindlin", in *XV COBEM, Anais do 15o Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, 1993.
- Barbieri, R., Machado, R. D., Filippin, C. G. & Barcellos, C. S., "O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) Aplicado a Problemas da Mecânica do Contínuo: Parte I - Elastoestática", in *XIII CILAMCE, Anais do 13o Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia*, 1992.

- Barbieri, R., Noel, C. S. & Barcellos, C. S., "A Green's Function Method Approach to Shell Analysis", in BEM XV, Proceedings of the 15th Int. Conf. on Boundary Element Meth., Vol. 2, pp. 179-194, 1993.
- Barcellos, C. S. & Barbieri, R., "Solution of Singular Potential Problems by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM)", in Proceedings of the 13th Conf. on Boundary Element Technology, Ed. Brebbia, C. A. and Gipson, G., 1991.
- Barcellos, C.S., Barbieri, R., Machado, R.D. & Filippin, C.G., "Método Modificado da Função de Green Local (MLGFM). Uma Nova Alternativa para a Solução de Problemas da Mecânica. Parte I - Descrição do Método", in: 7o SIBRAT - Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, pp. 161-170, 1992a.
- Barcellos, C.S., Barbieri, R., Machado, R.D. & Filippin, C.G., "Método Modificado da Função de Green Local (MLGFM). Uma Nova Alternativa para a Solução de Problemas da Mecânica. Parte II - Aplicações", in: 7o SIBRAT - Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, pp. 171-180, 1992b.
- Barcellos, C. S. & Silva, L. H. M., "Elastic Membrane Solution by a Modified Local Green's Function Method", in Proceedings of the Int. Conf. on Boundary Element Technology 1987, Ed. Brebbia, C. A. and Venturini, W. S., Comp. Mech. Publ., Southampton, 1987.
- Bézine, G., "Boundary Integral Formulation for Plate Flexure with Arbitrary Boundary Conditions", Mech. Res. Comm., 5, pp. 197-206, 1978.
- Bézine, G., "A Mixed Boundary Integral-Finite Element Approach to Plate Vibration Problems", Mech. Res. Comm., Vol. 7 (3), pp. 141-150, 1980.
- Brebbia, C. A., "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, 2a ed. revis., 1984.
- Burns, T., J., "The Partial Current Balance Method: A Local Green's Function Technique for the Numerical Solution of Multidimensional Neutron Diffusion Problems", Tese de Doutorado, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1975.
- Chaudonneret, M., "On the Discontinuity of the Stress Vector in the Boundary Integral Equation Method for Elastic Analysis", in Recent Advances in Boundary Element Methods, Ed. C. A. Brebbia, Pentech Press, London, 1978.
- Cheung, Y. K. & Chakrabarti, S., "Free Vibration of Thick, Layered Rectangular Plates by a Finite Layer Method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 3, nº 21, pp. 277-284, 1972.
- Cook, R. D., Malkus & D. S., Plesha, M. E., "Concepts and Applications of the Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, 3a Edição, 1984.

- Costa Jr., J. A., "Plate Vibrations using B. E. M.", *Appl. Math. Modelling*, Vol. 12, pp. 78-85, 1988.
 - Dhatt, G. & Touzot, G., "The Finite Element Method Displayed", John Wiley & Sons, 1985.
 - Downs, B., "A Frequency Dependent Rectangular Plate Finite Dynamic Element for High Precision Transverse Vibration Analysis of Simply Supported Plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 31, pp. 927-947, 1991.
- Dym, C.L. & Shames, I.H., "Solid Mechanics. A Variational Approach.", New York, Mc Graw-Hill, Inc., 1973.
- Filippin, C. G., "Desenvolvimento e Aplicações do Método da Função de Green Local Modificado Equação de Helmholtz", *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis*, 1992.
 - Filippin, C. G., Barbieri, R. & Barcellos C. S., "Numerical Results for h- and p-Convergences for the Modified Local Green's Function Method", in *Proceedings of the 14th Int. Conf. on Boundary Element Technology*, 1992a
 - Filippin, C. G., Barbieri, R., Machado, R. D. & Barcellos, C. S., "O Método da Função de Green Local Modificado como Ferramenta Computacional na Solução do Problema de Vibração Livre", *Revista Brasileira de Acústica - SOBRAC - Acústica e Vibrações*, Vol. 11, 1992b.
 - Filippin, C. G., Barbieri, R., Machado, R. D. & Barcellos, C. S., "O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) Aplicado a Problemas da Mecânica do Contínuo: Parte III - Problemas Regidos pela Equação de Helmholtz", in *XIII CILAMCE, Anais do 13o Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia*, 1992c.
 - Filippin, C. G., Machado, R. D., Barbieri, R., Muñoz R., P. A. & Barcellos, C. S., "Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado em Problemas de Vibração Livre de Membranas e Cavidades Acústicas", in *XV COBEM, Anais do 15o Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, 1993.
 - Fletcher, C. A. J., "Computational Galerkin Methods", Springer, New York, 1984.
 - Fried, I. & Malkus, D. S., "Finite Element Mass Matrix Lumping by Numerical Integration with No Convergence Rate Loss", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 11, pp. 461-466, 1975.

- Harik, I.E., Liew, X. & Balakrishnan, N., "Analytic Solution to Free Vibration of Rectangular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, 153 (1), pp. 51-62, 1992.
- Hinton, E., Rock, T. & Zienkiewicz, O. C., "A Note on Mass Lumping and Related Processes in the Finite Element Method", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 4, pp. 245-249, 1976.
- Hinton, E. & Bicanic, N., "A Comparison of Lagrangian and Serendipity Mindlin Plate Elements for Free Vibration Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 10, pp. 483-493, 1979.
- Horak, W. C., "Local Green's Function Techniques for the Solution of Heat Conduction and Incompressible Fluid Flow Problems", *Tese de Doutorado, University of Illinois at Urbana-Champaign*, 1980.
- Hrabok, M. M. & Houdey, T. M., "A Review and Catalogue of Plate Bending Finite Elements", *Computers & Structures*, Vol. 19., nº 3, pp. 479-495, 1984.
- Irie, T., Yamada, G. & Kitipornchai, S., "Natural Frequencies of Mindlin Circular Plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 652-655, 1980.
- Kant, T. & Pandya, B. N., "A Simple Finite Element Formulation of Higher Order Theory for Unsymmetrically Laminated Composite Plates", *Compos. Struct.*, 9, pp. 215-246, 1988
- Karam, V.J. & Telles, J.C.F., "O Método dos Elementos de Contorno Aplicado Teoria de Reissner para Flexão de Placas", in: VII CILAMCE, pp. 29-42, 1986.
- Karam, V.J. & Telles, J.C.F., "On Boundary Elements for Reissner's Plate Theory", *Engineering Analysis*, Vol. 5, no 1, pp. 21-27, 1988.
- Komkov, V., "Variational Principles of Continuum Mechanics with Engineering Applications", Vol. 1, D. Reidel Publishing Company, 1986.
- Lachat, J. C., "A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics", *Tese de Doutorado, University of Southampton*, 1975.
- Leissa, A. W., "The Free Vibration of Rectangular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 3, nº 31, pp. 257-293, 1973.
- Levinson, M., "Free Vibrations of a Simply Supported, Rectangular Plate: An Exact Elasticity Solution", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 2, nº 98, pp. 289-298, 1985.
- Liew, K. M., Xiang, Y. & Kitipornchai, S., "Transverse Vibration of Thick Rectangular Plates - I. Comprehensive Sets of Boundary Conditions", *Computers & Structures*, Vol. 49, nº 1, pp. 1-29, 1993.

- Machado, R. D., "Desenvolvimento do Método Modificado da Função de Green Local para a Solução de Placas Ortotrópicas Laminadas", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1992.
- Machado, R. D. & Barcellos, C. S., "A First Modified Local Green's Function Method Approach to Orthotropic Laminated Plates", in Proceedings of CADCOMP 92 - Computer Aided Design for Composite Materials Conference. Ed. Brebbia, C. A., Newark, U. S. A., 1992.
- Machado, R. D., Barbieri, R., Barcellos, C. S. & Filippin, C. G., "O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) Aplicado a Problemas da Mecânica do Contínuo: Parte II - Placas Ortotrópicas Laminadas", in XIII CILAMCE, Anais do 13o Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, 1992.
- Machado, R. D., Barbieri, R., Filippin, C. G. & Barcellos, C. S., "Análise Comparativa entre o MEF e o MMFGL para a Solução de Placas Laminadas de Materiais Compostos", in XV COBEM, Anais do 15o Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1993.
- Maldaner, M., "O Fator Intensidade de Tensões Obtido pelo Método da Função de Green Local Modificado", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1993.
- Maldaner, M. & Barcellos, C. S., "Análise de Problemas da Mecânica da Fratura Bidimensional com o Uso do Método da Função de Green Local Modificado", in XIII CILAMCE, Anais do 13o Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, 1992.
- Maldaner, M., Barbieri, R. & Barcellos, C. S., "Quarter-Point e o Método da Função de Green Local Modificado", in IEV 93, Anais da Conferência Internacional sobre Avaliação de Integridade e Extensão de Vida de Equipamentos Industriais, 1993.
- Maldaner, M. & Barcellos, C. S., "O Fator Intensidade de Tensão Obtido pelo Método da Função de Green Local Modificado Utilizando Elementos de Trinca", in XIV CILAMCE, Anais do 14o Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, 1993.
- Mindlin, R. D., "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 31-38, 1951.
- Mindlin, R. D. & Deresiewicz, H., "Thickness-Shear and Flexural Vibrations of a Circular Disk", Journal of Applied Physics, Vol. 25, nº 10, pp. 1329-1332, 1954.

- Mindlin, R. D., Schacknow, A. & Deresiewicz, H., "Flexural Vibrations of Rectangular Plates", *Journal of Applied Mechanics*, 1956
- Muñoz R., P. A., Filippin, C. G., & Barcellos, C. S., "O Método da Função de Green Local Modificado Aplicado ao Problema de Vibração Livre de Placa de Mindlin", in XV COBEM, Anais do 15o Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1993.
- Nair, P.S. & Durvasula, S., "Vibration of Skew Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 1, nº 26, pp. 1-19, 1973.
- Negm, H.M. & Armanios, E.A., "Calculation of the Natural Frequencies and Steady Response of Thin Plates in Bending by an Improved Rectangular Element", *Computers & Structures*, Vol. 17, no 1, pp. 139-147, 1983.
- Nelson, H. M., "High Frequency Flexural Vibration of Thick Rectangular Bars and Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 1, nº 60, pp. 101-118, 1978.
- Oden, J. T. & Reddy, J. N., "An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements", John Wiley & Sons, 1976.
- Parreira, P., "Análise do Erro no Método dos Elementos de Fronteira em Elasticidade", Tese de Doutorado, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1987.
- Parreira, P. & Guiggiani, M., "On the Implementation of the Galerkin Approach in the Boundary Element Method", *Computers & Structures*, Vol. 33, nº 1, pp. 269-279, 1989.
- Raju, K. K. & Hinton, E., "Natural Frequencies and Modes of Rhombic Mindlin Plates", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 8, pp. 55-62, 1980.
- Reissner, E., "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates", *J. Appl. Mech.*, 12, pp. 69-77, 1945.
- Reissner, E. "On Bending of Elastic Plates", *Quarterly Appl. Math.*, Vol. 5, nº 1, pp. 55-68, 1947.
- Rock, T. A. & Hinton, E., "A Finite Element Method for the Free Vibration of Plates Allowing for Transverse Shear Deformation", *Computers & Structures*, Vol. 6, pp. 37-44, 1976.
- Rudolphi, T. J., "An Implementation of the Boundary Element Method for Zoned Media with Stress Discontinuities", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 19, pp. 1-15, 1983.
- Silva, L. H. M., "Novas Formulações Integrais para Problemas da Mecânica", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1988.

- Silva, L. H. M. & Barcellos, C. S., "Review sobre o Método de Elementos de Contorno Aplicado para Solução de Problemas de Placas Elásticas", in COBEM VIII, Anais do 8º Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1985.
- Srinivas, S., Joga Rao, C. V. & Rao, A. K., "An Exact Analysis for Vibration of Simply Supported Homogeneous and Laminated Thick Rectangular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 2, nº 12, pp. 187-199, 1970.
- Srinivas, S. & Rao, A. K., "Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 6, pp. 1463-1481, 1970.
- Stern, M., "A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Plate Bending Problems", *Int. J. Solids Structures*, 15, pp. 769-782, 1979.
- Timoshenko, S. P. & Woinowsky-Krieger, S., "Theory of Plates and Shells", Mc Graw-Hill, 2a edição, 1970.
- Van der Weeën, F., "Application of the Boundary Element Equation Method to Reissner's Plate Model", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 18, pp. 1-10, 1982a.
- Van der Weeën, F., "Application of the Direct Boundary Element Method to Reissner's Plate Model", in: *Proceedings of the 4th International Seminar on BEM in Engineering*, Ed. Brebbia, C.A., pp. 487-499, Southampton, 1982b.
- Vable, M., "Making the Boundary Element Method Less Sensitive to Changes or Errors in the Input Data", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 24, pp. 1533-1540, 1987.
- Vable, M., "Importance and Use of Rigid Body Mode in Boundary Element Method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 29, pp. 453-472, 1990.
- Vable, M. & Zhang, Y., "A Boundary Element Method for Plate Bending Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 29, pp. 345-361, 1992.
- Vivoli, J., "Vibrations de Plaques et Potentiels de Couches", *Acustica*, Vol. 26, pp. 305-314, 1972.
- Walker, S. P. & Fenner, R. T., "Treatment of Corners in BIE Analysis of Potential Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 28, pp. 2564-2581, 1989.
- Washizu, K., "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, 3a Edição, 1982.
- Watson, J. O., "Advanced Implementation of the Boundary Element Method for Two- and Three-Dimensional Elastostatics", in *Developments in Boundary Element*

Methods-1, Ed. P. K. Banerjee and R. Butterfield, Applied Science Publishers Ltd., London, 1979.

- Westphal Jr., T., "Abordagem Direta dos Modelos de Placa de Reissner e Mindlin pelo Método dos Elementos de Contorno", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1990.
- Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L., "The Finite Element Method", Vol. 1, Mc Graw-Hill, 4a Edição, 1989.
- Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L., "The Finite Element Method", Vol. 2, Mc Graw-Hill, 4a Edição, 1991.