

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA ANÁLISE DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA  
DA CONDUÇÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL EM TUBOS DE CALOR

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE  
SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

SÉRGIO DALMAS

FLORIANÓPOLIS, MAIO DE 1993

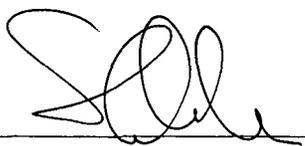
UMA ANÁLISE DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA  
DA CONDUÇÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL EM TUBOS DE CALOR

**SÉRGIO DALMAS**

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

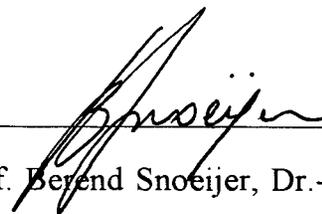
**MESTRE EM ENGENHARIA**

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA



Prof. Sérgio Colle, D. Sc.

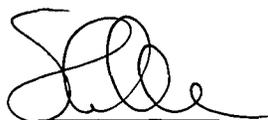
Orientador



Prof. Berend Snoeijer, Dr.-Ing.

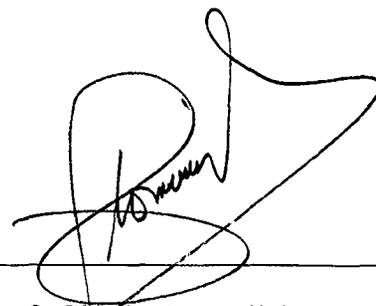
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Sérgio Colle, D. Sc.

Presidente



Prof. Clóvis R. Maliska, Ph. D.



Prof. Paulo C. Philippi, Dr.-Ing.



Prof. A. Fábio C. da Silva, D. Sc.

aos meus pais Olga e Aldacyr  
à Maria Inês

*Todo erro se apóia numa verdade  
da qual se tem abusado*

Bousset

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Colle, por uma orientação adulta que me deu liberdade de iniciativa estimulando minha responsabilidade, pelo entusiasmo que me fez sentir e reconhecimento de minhas vocações.

Ao Prof. Snoeijer, por vir, desde o início, me acompanhando, aconselhando e incentivando.

## ÍNDICE

	página
1. Introdução	01
1.1 Princípio de Funcionamento	01
1.2 Comportamento Dinâmico	03
2. Revisão Bibliográfica e Objetivos	05
3. Modelamento Matemático	16
4. Equacionamento da Temperatura do Vapor	25
5. Solução Analítica	28
6. Modelos Simplificados	42
6.1 Modelo Simplificado R	42
6.2 Modelo Simplificado S	45
7. Regime Permanente e Transiente	53
8. Resultados e Discussão	58
9. Conclusões	83
Referências Bibliográficas	85
Anexo - Implementação do Modelo	88

## RESUMO

Inicialmente as equações das temperaturas do regime transiente para um tubo de calor de um único componente são escritas. Elas levam em conta a distribuição bidimensional de temperatura no invólucro e na estrutura capilar.

Um coeficiente de transferência de calor efetivo para a estrutura capilar do evaporador efetivo e um coeficiente de condutividade térmica efetiva para a estrutura capilar da secção adiabática e do condensador é assumido.

A temperatura do vapor é assumida ser constante com respeito a posição e é calculada através de balanço de massa e energia sobre o espaço do vapor.

As soluções das equações são obtidas analiticamente pela transformada de Laplace e técnica da separação de variáveis.

Dois outros simples modelos são obtidos pela simplificação dessas equações.

O limite de regime permanente é obtido facilmente pelo teorema do valor final.

Os gráficos do método da resposta em frequência do tubo de calor são apresentados com a finalidade de ilustrar o comportamento dinâmico do tubo de calor.

Os modelos são comparados e os resultados mostram o efeito da condução de calor bidimensional no comportamento transiente da estrutura do tubo de calor para diferentes tubos de calor.

## ABSTRACT

Initially the equations of the unsteady state temperatures for a single component heat pipe are given. They take into account the two - dimensional distribution of the temperatures in the wall and in the wick.

An effective heat transfer coefficient for the effective evaporator's wick and an effective thermal conductivity for the wick of the adiabatic section and the condenser is assumed.

The vapor temperature is assumed to be constant with respect to the position and is evaluated through a mass and energy balance over the vapor space.

The solutions of the equations are obtained analytically by Laplace transform and the technique of separation of variables.

Two others simple models are obtained by simplification of these equations.

The steady-state limit is obtained easily by the final-value theorem.

The plots of the frequency-response of the heat pipe are presented in order to illustrate the dynamic behaviour of the heat pipe.

The models are compared and the results show the effect of the two-dimensional heat conduction on the transient behaviour of the heat pipe structure for different heat pipes designs.

## SIMBOLOGIA

- $A_i$  - coeficiente da solução geral da equação da temperatura da estrutura capilar do evaporador no modelo bidimensional e no modelo simplificado S
- $A_w$  - coeficiente da solução geral da equação da temperatura do invólucro no modelo bidimensional
- $A_n$  - coeficiente da solução geral de (5.4)
- $A_{im}$  - coeficiente do m-ésimo termo da expansão de  $\tilde{T}_{im}$
- $A_{wm}$  - coeficiente do m-ésimo termo da expansão de  $\tilde{T}_{wm}$
- $A_{qi}$  e  $A_{qv}$  - parâmetros definidos para simplificar (6.16)
- $B_i$  - coeficiente da solução geral da equação da temperatura da estrutura capilar do evaporador no modelo bidimensional e no modelo simplificado S
- $B_w$  - coeficiente da solução geral da equação da temperatura do invólucro no modelo bidimensional
- $B_n$  - coeficiente da solução geral de (5.4)
- $B_{im}$  - coeficiente do m-ésimo termo da expansão de  $\tilde{T}_{im}$
- $B_{wm}$  - coeficiente do m-ésimo termo da expansão de  $\tilde{T}_{wm}$
- $B_{qi}$  e  $B_{qv}$  - parâmetros definidos para simplificar (6.17)
- $Bi$  - número de Biot com respeito a estrutura capilar
- $c_w$  - calor específico do material do invólucro
- $c_l$  - calor específico do líquido
- $c_v$  - calor específico do vapor a volume constante

- d - diferencial
- dL - elemento de comprimento
- dS - elemento de superfície
- e - número de Neper
- f - função forçante
- $f_c$  - função forçante do condensador
- $f_e$  - função forçante do evaporador
- g - função arbitrária para a qual exista uma transformada de Laplace
- h - coeficiente de película da superfície do tubo
- $h_a$  - coeficiente de película da secção adiabática
- $h_c$  - coeficiente de película do condensador
- $h_e$  - coeficiente de película do evaporador
- $h_i$  - coeficiente de película efetivo da estrutura capilar do evaporador
- H - parâmetro que compara o coeficiente de película da estrutura capilar do evaporador com a condutividade térmica da estrutura capilar das demais regiões
- $H_v$  - entalpia específica do vapor
- $H_{lv}$  - calor latente de vaporização
- I - função identidade
- $I_0$  - função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem 0
- $I_1$  - função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem 1
- $k_i$  - condutividade térmica efetiva da estrutura capilar
- $k_w$  - condutividade térmica do material do invólucro
- $k_c, k_a, k_e$  - parâmetros que podem assumir o valor  $k_w$  ou o valor nulo dependendo da condição de contorno que se quer
- $K_0$  - função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem 0
- $K_1$  - função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem 1

- $L$  - comprimento do tubo  
 $L_a$  - comprimento da secção adiabática  
 $L_c$  - comprimento do condensador  
 $L_e$  - comprimento do evaporador  
 $L_i$  - comprimento do evaporador efetivo  
 $L_i^*$  - parâmetro cujo valor pode ser apenas 0 ou  $L_i$   
 $\mathcal{L}$  - operador de Laplace  
 $m$  - fluxo de massa  
 $M$  - contribuição relativa da condução radial através da estrutura capilar e axial através do invólucro  
 $M_v$  - massa de vapor no núcleo  
 $N$  - ordem do último termo das séries truncadas  
 $q_i$  - fluxo de calor por unidade de área  
 $q_w$  - fluxo de calor por unidade de área na estrutura capilar  
 $q$  - fluxo de calor por unidade de área no invólucro  
 $Q$  - fluxo de calor  
 $Q_c$  - fluxo de calor que sai pelo condensador  
 $Q_e$  - fluxo de calor que entra pelo evaporador  
 $r$  - eixo ou posição radial  
 $r_i$  - raio da interface estrutura capilar - núcleo  
 $r_s$  - raio da superfície  
 $r_v$  - raio do núcleo  
 $R_n$  -  $n$ -ésima função de  $r$   
 $R_{n,m}^I$  a  $R_{n,m}^{XVI}$  - coeficientes das equações algébricas lineares cujas incógnitas são  $A_{vm}$ ,  $B_{vm}$ ,  $A_{im}$ ,  $B_{im}$  e  $\tilde{T}_v$   
 $s$  - parâmetro introduzido pela transformada de Laplace

- S - superfície
- $S_n$  - termos independentes das equações algébricas lineares cujas incógnitas são  $A_{wm}$ ,  $B_{wm}$ ,  $A_{im}$ ,  $B_{im}$  e  $\tilde{T}_v$
- $S_{la}$  - parâmetro definido para simplificar as expressões de  $\gamma_{4e}$ ,  $\gamma_{4v}$ ,  $\gamma_{5e}$  e  $\gamma_{5v}$
- t - tempo
- T - temperatura
- $T_c$  - temperatura crítica ou temperatura média da superfície do tubo na região do condensador
- $T_i$  - temperatura da estrutura capilar
- $T_v$  - temperatura do vapor do núcleo
- $T_w$  - temperatura do invólucro
- $T_{ia}$  - temperatura da estrutura capilar da secção adiabática
- $T_{ic}$  - temperatura da estrutura capilar do condensador
- $T_{ie}$  - temperatura da estrutura capilar do evaporador
- $T_{wa}$  - temperatura do invólucro da secção adiabática
- $T_{wc}$  - temperatura do invólucro do condensador
- $T_{we}$  - temperatura do invólucro do evaporador
- $T_{-}$  - parâmetro definido para simplificar as expressões de  $\gamma_{4c}$ ,  $\gamma_{4v}$ ,  $\gamma_{5e}$  e  $\gamma_{5v}$  (admite os índices  $e$ ,  $a$  e  $c$ )
- $T_{\infty}$  - temperatura do meio
- $T_{\infty c}$  - temperatura do meio do condensador
- V - parâmetro definido para simplificar (4.5)
- $V_n^I$ ,  $V_n^{II}$  e  $V_n^{III}$  - termos independentes das equações algébricas lineares cujas incógnitas são  $A_{wm}$ ,  $B_{wm}$ ,  $A_{im}$ ,  $B_{im}$  e  $\tilde{T}_v$
- W - wronskiano
- x - entrada senoidal

- $x_0$  - amplitude de  $x$   
 $y$  - saída senoidal  
 $y_0$  - amplitude da saída  
 $z$  - eixo ou posição axial  
 $Z_n$  -  $n$ -ésima função de  $z$   
 $\alpha$  - difusividade  
 $\alpha_i$  - difusividade efetiva da estrutura capilar  
 $\alpha_w$  - difusividade do material do invólucro  
 $\alpha_n$  - autovalor  
 $\alpha_{in}$  - autovalor relacionado a  $\tilde{T}_i$   
 $\alpha_{wn}$  - autovalor relacionado a  $\tilde{T}_w$   
 $\delta_{ij}$  - delta de Kronecker  
 $\Delta_1$  - parâmetro definido para simplificar as expressões de  $A_{qi}$ ,  $A_{qv}$ ,  $B_{qi}$  e  $B_{qv}$   
 $\Delta_2$  - parâmetro definido para simplificar as expressões de  $\gamma_{4e}$ ,  $\gamma_{4c}$ ,  $\gamma_{4v}$ ,  $\gamma_{5e}$ ,  $\gamma_{5c}$  e  $\gamma_{5v}$   
 $\Delta_n$  - parâmetro definido para simplificar (5.19) e (5.20)  
 $\gamma_1$  a  $\gamma_6$  - parâmetros definidos ao longo do modelo simplificado S (os de número 4 a 6 admitem os índices  $e$ ,  $a$  e  $c$ )  
 $\lambda$  - constante arbitrária  
 $\lambda_n$  - autovalor  
 $\rho_w$  - densidade do material do invólucro  
 $\phi$  - diferença de fase  
 $\tilde{\Phi}_i$  -  $d/dz \tilde{T}_w(z_i, s)$  (o índice  $i$  pode assumir os valores 1 e 2, ou ainda ser substituído por  $e$ ,  $a$  e  $c$ )  
 $\omega$  - velocidade angular  
 $\partial$  - diferencial parcial  
 $\nabla^2$  - operador Laplaciano

## Índice

0 - condição inicial (válido para  $T$ ,  $T_w$ ,  $T_i$ ,  $T_v$ ,  $f$ ,  $f_a$ ,  $f_e$ ,  $f_c$ ,  $H_{lv}$ ,  $M_v$ ,  $q_i$  e  $c_v$ )

## Superíndices

~ - transformada de Laplace (válido para  $T$ ,  $T_w$ ,  $T_i$ ,  $T_v$ ,  $f$ ,  $f_a$ ,  $f_e$  e  $f_c$ )

\* - variável relativa, ou seja, valor da variável subtraído de seu valor inicial (válido para  $T$ ,  $T_w$ ,  $T_i$ ,  $f$ ,  $f_a$ ,  $f_e$ ,  $f_c$ ,  $q_i$  e  $g$ )

' - derivada (válido para  $I_0$  e  $K_0$ )

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 Princípio de Funcionamento de um Tubo de Calor

Basicamente um tubo de calor é composto por um invólucro fechado (um tubo ou uma câmara) e um enchimento poroso (estrutura capilar) saturado com um fluido de trabalho, como esquematicamente apresentado na figura 1.1.

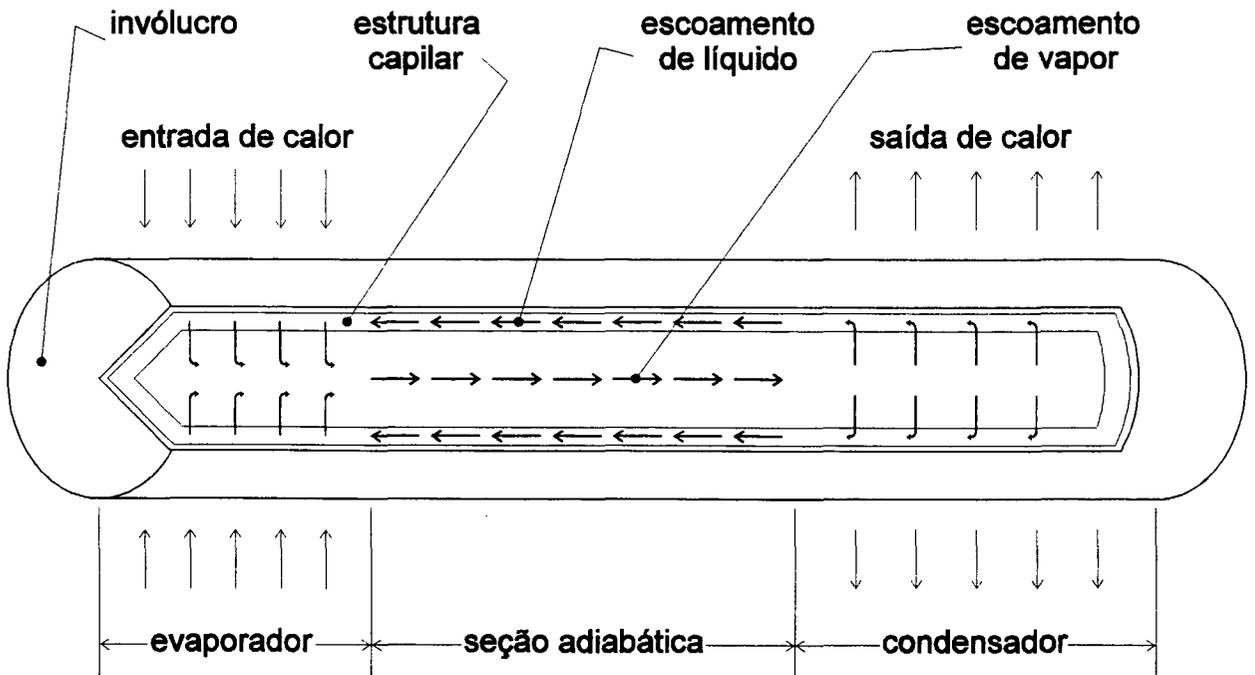


Figura 1.1: Esquema de um tubo de calor - funcionamento

Em um dos extremos do tubo - o evaporador, calor é aplicado provocando a vaporização do fluido de trabalho nesta região. No outro extremo - o condensador, calor é retirado, fazendo com que o vapor do fluido de trabalho se condense. A diferença de pressão resultante faz com que o vapor escoe do evaporador para o condensador. O retorno do líquido para o evaporador é promovido pelo meio poroso. Devido a diferença de curvatura do menisco (na interface líquido/vapor) entre os extremos (figura 1.2) o fluido é bombeado por capilaridade para o evaporador, onde é novamente vaporizado, fechando, assim, o ciclo.

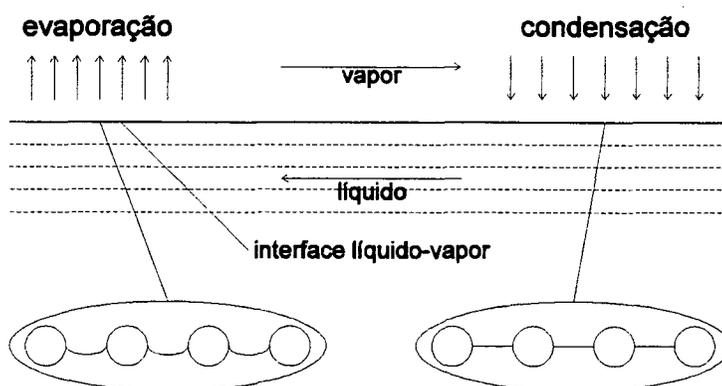


Figura 1.2: Representação do escoamento do líquido por capilaridade

Desta forma, o tubo de calor pode transportar continuamente o calor latente de vaporização do evaporador para o condensador sem ocorrer secagem do meio poroso, desde que a pressão de capilaridade seja capaz de bombear quantidade suficiente de líquido para ser vaporizado.

Além do evaporador e do condensador, o tubo de calor usualmente possui uma região adiabática entre eles, caracterizada por troca de calor nula com o exterior. Deve-se notar também que um tubo de calor não está limitado a apenas um evaporador e um condensador, podendo possuir uma série de áreas de absorção e de rejeição de calor distribuídas ao longo do tubo de calor.

A quantidade de calor que pode ser transportada como calor latente de vaporização é, usualmente, várias ordens de grandeza maior que o transportado como calor sensível em um sistema convectivo convencional. O tubo de calor pode, então, transportar grande quantidade de calor em uma unidade de dimensões reduzidas, por distâncias consideráveis.

A queda de temperatura ao longo de um tubo de calor, resultante da soma da queda de temperatura no evaporador, no escoamento do vapor e no condensador, é bastante reduzida. Isto o caracteriza como um dispositivo "super condutor", podendo possuir condutibilidade térmica equivalente milhares de vezes maior que a do cobre [1].

Além disto, métodos de controle foram desenvolvidos, modificando as características de um tubo de calor convencional, tornando-o capaz de controlar a temperatura ou de transferir calor em uma só direção. De acordo com o fluido de trabalho utilizado, é possível projetar tubos de calor para aplicações desde temperaturas criogênicas ( $\sim 20\text{K}$ ) até temperaturas consideradas altas tais como  $2000\text{K}$  [1].

## 1.2 Comportamento Dinâmico

O Tubo de Calor pode ser considerado como um sistema de controle cujas variáveis de entrada podem ser as temperaturas dos meios nos quais estão o evaporador e o condensador ou o fluxo de calor aplicado no evaporador ou mesmo os coeficientes de película das superfícies externas do tubo, enquanto que as variáveis de saída podem ser a temperatura numa posição qualquer do invólucro, da estrutura capilar ou do núcleo, ou, o fluxo de calor de ou para alguma das partes ou para alguma posição do tubo.

O comportamento dinâmico de um sistema de controle pode ser investigado através do método da transformada de Laplace ou do método da resposta em frequência. Com o método da transformada de Laplace, ênfase é dada à equação característica do

sistema. Com a técnica da resposta em frequência, não é necessário determinar as raízes da equação característica. A maior vantagem do método da resposta em frequência é indicar que tipo de mudança deve ser feita num sistema para se obter a resposta desejada.

Por resposta em frequência se entende a resposta de um sistema para uma entrada senoidal  $x = x_0 \text{ sen } \omega t$ . Após o efeito do transiente inicial ter desaparecido, a saída torna-se uma senoide com a frequência angular  $\omega$  da entrada. Em geral, a saída  $y = y_0 \text{ sen } (\omega t + \phi)$  é deslocada de algum ângulo de fase  $\phi$  da entrada, e a amplitude da saída,  $y_0$ , é diferente daquela de entrada,  $x_0$ , como é ilustrado na figura 1.3.

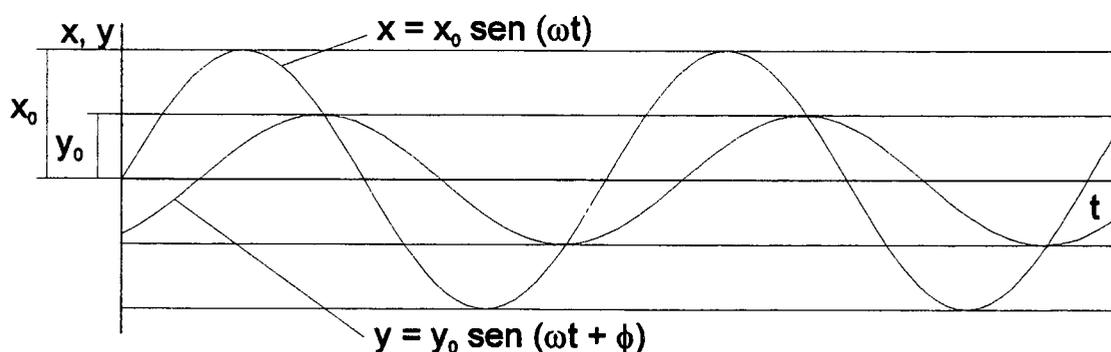


Figura 1.3: Resposta Senoidal

Tanto o ângulo de fase  $\phi$  quanto a razão da amplitude da saída para a de entrada,  $y_0/x_0$ , são funções da velocidade angular  $\omega$  do sinal de entrada. Os gráficos do ângulo de fase  $\phi$  e da razão  $y_0/x_0$  versus  $\omega$  formam a base do método da resposta em frequência.

Mostra-se [2] que  $\phi$  e  $y_0/x_0$  versus  $\omega$  podem ser determinados diretamente por substituição de  $s$  por  $j\omega$  na forma operacional da equação diferencial do sistema.  $\phi$  e  $y_0/x_0$  são obtidos do argumento e do módulo, respectivamente, da função de transferência.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E OBJETIVOS

Um modelo simples para o cálculo de temperaturas no regime permanente de um tubo de calor convencional submetido a um fluxo de calor conhecido é apresentado por Chi [3].

Considera-se, neste modelo, que a temperatura tanto do invólucro como da estrutura capilar são constantes na direção axial de cada secção longitudinal (secção adiabática, evaporador e condensador).

O perfil radial de temperaturas é obtido através da noção de resistência térmica e supondo que a estrutura capilar tem uma condutividade térmica efetiva.

A diferença de temperaturas entre o vapor e o líquido na interface líquido - vapor é desprezada. A queda de temperatura do vapor é obtida da queda de pressão através da equação de Clausius - Clapeyron, enquanto que a queda de pressão é a soma das quedas médias nas secções, que podem ser obtidas através do princípio da conservação da quantidade de movimento axial (desprezando a força gravitacional devido a baixa densidade do vapor) incluindo-se uma relação simples entre o fluxo axial de calor e de massa e definindo um coeficiente de fricção do vapor.

O escoamento de vapor é considerado laminar e incompressível com efeitos dinâmicos desprezíveis e, portanto, a distribuição do fluxo de calor ao longo do evaporador e do condensador são uniformes. Devido a relação de Clausius - Clapeyron, a qual requer uma pequena queda na temperatura para uma relativamente grande queda na pressão, pode-se desprezar a resistência térmica do vapor com pequenas conseqüências.

Chi [3] também apresenta um modelo que considera o gradiente axial de temperaturas no condensador. Isto é feito tomando-se um volume de controle elementar para a transferência de calor no invólucro do condensador. Considera-se que a distribuição de calor que vem do vapor é uniforme sobre esta parte do invólucro e despreza-se a condução axial no começo do condensador, e também o gradiente axial de temperatura no final de condensador. Para o sistema de equações ser determinado inclui-se a conservação da energia de maneira que todo o calor que vem do vapor saia pelo condensador.

Chi [3] considera também tubos de calor controlados, dentre os quais os carregados com gás e providos de reservatórios de vários tipos. Para estes é calculado o comprimento do condensador que é ocupado pelo gás através da lei dos gases ideais e subtraído do comprimento total do condensador.

Dunn e Reay [4] apresentam um modelo um pouco mais complexo. Este também faz uso da noção de resistência térmica considerando constantes as temperaturas ao longo do eixo axial dentro de cada seção. São consideradas as quedas de temperatura que ocorrem por condução através do invólucro e da estrutura capilar do evaporador e do condensador, bem como as quedas das temperaturas devido a resistência térmica da interface vapor - líquido e da coluna de vapor. Considera-se, ainda, a condução axial através da região adiabática.

Sun e Tien [5] desenvolveram um modelo analítico para a distribuição de temperatura estacionária em tubos de calor. É admitido que a região de vapor é isotérmica, que a estrutura capilar tem uma condutividade térmica efetiva e que a energia é transferida através da estrutura capilar apenas por condução. A vaporização e condensação ocorrem na interface estrutura capilar - núcleo e as perdas de calor nas extremidades são desprezíveis. A transferência de calor se dá apenas por condução axial no invólucro e radial na estrutura capilar. Os tubos de calor considerados são os de forma básica, com condutância constante, convecção no condensador e condução ou convecção

no evaporador. O equacionamento se dá através de simples balanços de energia em elementos cilíndricos do invólucro em cada secção do tubo de calor e através de uma condição de enclausuramento do vapor, que corresponde ao fato de que no regime estacionário o calor que entra no evaporador é igual ao que sai pelo condensador. A solução é obtida através de simples manipulações matemáticas e inclui o fluxo axial de massa. Conclui-se que a temperatura do vapor é uma função do número de Biot com respeito a estrutura capilar,  $Bi$ , e de um parâmetro,  $M$ , que caracteriza a contribuição relativa da condução radial através da estrutura capilar e axial através do invólucro. A temperatura do vapor depende fortemente de  $Bi$  quando este tem um valor baixo e de  $M$  quando  $Bi$  tem um valor alto. A temperatura do invólucro é considerada uniforme ao longo do evaporador e do condensador e igual a temperatura do vapor na região adiabática na medida em que  $M$  tende a infinito, ou seja, quando não há condução axial. Para  $M < 10$  não há região isotérmica até com 43% do comprimento total do tubo isolado. Em contraste com uma noção largamente aceita, a queda de temperatura entre as duas extremidades do tubo de calor é minimizada pela condução axial, e o fluxo de massa axial varia linearmente no evaporador e no condensador o qual permanece constante ao longo da secção adiabática quando  $M$  tende a infinito. Para  $M < 10$  o efeito da condução axial não pode ser desconsiderada e torna-se predominante na medida em que  $M$  diminui. Para um fluxo de calor constante, o fluxo de massa é inversamente proporcional ao calor latente de mudança de fase e a temperatura do vapor diminui com o aumento do coeficiente de transferência de calor externo do condensador. Para um meio externo e uma condutância da estrutura capilar constantes, o aumento da condução axial resulta numa diminuição da temperatura do vapor no caso condução - convecção. É feito, ainda, uma comparação com alguns dados experimentais e comentadas as dificuldades de se comparar com outros dados.

Sun e Tien [6] estendem o modelo de [5] de modo a incluir o efeito de mudança de fase dentro da estrutura capilar do evaporador (efetivo) e o efeito da presença de gases não condensáveis no condensador e determinam experimentalmente os efeitos dos vários parâmetros para comparação com previsões teóricas. Assumindo que a transferência de calor radial na estrutura capilar do evaporador possa ser caracterizada por um coeficiente de película efetivo, o modelo de [5] é modificado para incluir um parâmetro,  $H$ , que compara o coeficiente de película da estrutura capilar do evaporador com o de condução pura. As equações de [5] passam a ser um caso particular das do presente modelo com  $H = 1$ . Para  $H > 1$  a resistência térmica da estrutura capilar do evaporador é menor que a resistência de condução, e, então, a eficiência térmica global é mais alta. Um sistema com um tubo de calor bem instrumentado foi projetado e construído para prover evidências experimentais para assistir e confirmar a análise apresentada pelos autores. A condutância térmica da estrutura capilar saturada foi determinada a partir da performance do condensador pela equação da condução levando-se em conta a diferença entre a temperatura média do invólucro na região do condensador e a temperatura do vapor. Observa-se que para tubos de calor com evaporadores curtos, o efeito de condução axial pronunciado quando  $H = 1$  é largamente dominado pela existência de mudança de fase. Isto é devido ao fato de que a mudança de fase dentro da estrutura capilar aumenta substancialmente a contribuição do fluxo de calor radial através da estrutura capilar em comparação com a condução axial ao longo do invólucro. O parâmetro  $M$  é aumentado por um fator de  $H$  para o evaporador. Observa-se tanto pelo modelo teórico como pelos resultados experimentais que a mudança de fase dentro do evaporador não exerce praticamente nenhum efeito na temperatura do invólucro na região do condensador e na seção adiabática. Para tubos de calor com seções adiabáticas mais curtas o efeito de condução axial quando  $H = 1$  indica que há direta transferência de calor do evaporador para o ambiente através do invólucro. No entanto, esta transferência de calor direta é

eliminada a medida que o efeito de condução axial é dominada pela existência de mudança de fase da estrutura capilar do evaporador. Para tubos de calor com seções adiabáticas muito curtas, o efeito da condução axial é tão pronunciado que uma "seção adiabática" essencialmente não existe. Neste caso, a mudança de fase no evaporador diminui a quantidade de energia conduzida axialmente ao longo do invólucro aumentando, então, a temperatura do vapor e a queda de temperatura através da estrutura capilar do condensador. É difícil apurar a causa da vaporização na estrutura capilar. Entretanto, os resultados evidenciam que a ebulição por nucleação e a saturação parcial existem nos presentes tubos de calor. Conclui-se que o tubo de calor é capaz de operar normalmente com mudança de fase ocorrendo dentro da estrutura capilar do evaporador. As características de vaporização podem ser representadas por um coeficiente de filme efetivo. Enquanto que vários mecanismos de transferência de calor existem na estrutura capilar do evaporador, o mecanismo de transferência de calor na estrutura capilar do condensador é governado por condução térmica e o efeito de condução axial torna-se menos pronunciado com a mudança de fase da estrutura capilar do evaporador, devido ao fato de esta aumentar substancialmente a contribuição relativa do fluxo de calor radial através da estrutura capilar quando comparada a condução axial ao longo do invólucro.

Fagotti [7] determina analiticamente os perfis de temperatura e fluxo de calor bidimensionais em todo o tubo de calor em regime permanente, para quaisquer condutividades térmicas e dimensões das partes constituintes, ou seja, não existem aproximações que consideram estes parâmetros com grandes ou pequenos valores. Os tubos de calor considerados são de forma básica, com condutância constante e fluxo de calor constante ao longo do evaporador e convecção ou radiação no condensador e, também, com convecção tanto no evaporador como no condensador. É admitido nesse trabalho que a temperatura do vapor e da interface líquido-vapor é a temperatura de saturação do fluido e que a estrutura capilar tem uma condutividade térmica efetiva

constante. A transferência de calor entre a estrutura capilar e o vapor ocorre com um coeficiente de filme infinito e, assim como [6], a transferência de calor através da estrutura capilar do evaporador efetivo é caracterizada, ora por um coeficiente de filme efetivo, ora pela condutividade térmica efetiva. A suposição da existência do coeficiente de filme efetivo é incompatível com a distribuição bidimensional de temperaturas, por que o fluxo de calor para tal distribuição também é bidimensional, em contrapartida ao fluxo unicamente radial que se obtém através da utilização de tal coeficiente. Este problema é contornado, nos casos em que este coeficiente é utilizado, isolando-se a região restante da estrutura capilar desta região, e considerando-se condução radial e bi-dimensional, respectivamente, em cada uma das regiões. O equacionamento se dá através de uma equação de Laplace para a temperatura do invólucro, outra para a da estrutura capilar, uma equação de conservação de energia para o núcleo e mais as condições de contorno. Obtém-se a solução de cada região através de funções de Green que por sua vez foram obtidas por expansão parcial em auto-funções. Supondo-se conhecidos as variáveis (temperatura ou fluxo de calor) das fronteiras de cada região o acoplamento das soluções é feito de maneira muito interessante, expandindo-as nas mesmas auto-funções das funções de Green e truncando-as estas, obtendo-se um sistema linear de equações algébricas cujas incógnitas são os coeficientes dos termos das expansões. Comparações com dados experimentais foi possível apenas para o caso condução-convecção. Na maioria das vezes boa convergência foi obtida ao se truncar as séries em 20 termos. Parâmetros que não constavam na referência de origem foram avaliados pela minimização dos desvios quadráticos em relação aos dados experimentais. Em alguns casos a avaliação do coeficiente de filme efetivo por este procedimento levou ao mesmo valor que utilizando-se equações obtidas por outros autores o que mostra uma boa concordância de métodos bem diferentes. Os resultados de [6] foram os únicos que puderam ser comparados com os deste que, naturalmente, foram melhores, o que é atestado por dados experimentais.

Concluiu-se que o comprimento do evaporador efetivo tem influência bastante diferenciada sobre os resultados e que a solução unidimensional se aproxima da realidade quando o coeficiente de película do condensador aumenta. As hipóteses de não haver transferência de calor internamente a seção adiabática e fluxo de calor constante nas interfaces das seções do evaporador e do condensador como é admitido por outros autores não se justificam. O caso condução - convecção é mais vantajoso que o caso convecção - convecção, por transferir mais calor para a mesma temperatura no evaporador e por ter uma diferença menor de temperaturas entre os extremos do tubo para o mesmo calor transportado. O caso condução - radiação pode ser obtido do caso condução - convecção relacionando-se o coeficiente de película do evaporador com a emissividade média da superfície como apresentado por Chi [2]. O fluxo de calor na parte correspondente à seção adiabática da interface vapor - estrutura capilar invalida as hipóteses de equivalência das dimensões das seções internas e externas do tubo de calor e de não haver calor conduzido axialmente na estrutura capilar. A condutividade térmica do invólucro tem fraca influência no desempenho do tubo de calor ao contrário da condutividade da estrutura capilar para a qual pequenos acréscimos induzem a sensíveis melhoras no desempenho do tubo. A solução unidimensional se aproxima da realidade quando a razão entre os coeficientes de condutividade da estrutura capilar e do invólucro diminui. O aumento do coeficiente de película interno aproxima o tubo da condição de isoterma e que a variação do coeficiente de condutividade da estrutura capilar tem fraca influência no condensador apenas para altos coeficientes de película do condensador enquanto que o coeficiente de película interno sempre tem fraca influência fora do evaporador.

Rajakumar [8] descreve as características dinâmicas de tubos de calor através do método da resposta em frequência com um modelo não estacionário validado por dados experimentais obtidos da resposta para funções degrau, que é reduzida para a forma de frequência através de um método desenvolvido na primeira parte do trabalho. É

investigada a influência dos parâmetros do sistema na resposta do tubo de calor. Para o modelo teórico supõe-se que a temperatura do invólucro e da estrutura capilar varia apenas radialmente dentro de cada secção do tubo; que a convecção tanto axial como radial é desprezível; que o núcleo e a interface estão na temperatura de saturação e que as paredes do tubo são planas. A formulação resulta em seis equações diferenciais parciais, uma para cada região do tubo, uma equação para a temperatura do vapor e mais as condições de contorno e iniciais. As equações são baseadas em diferenças da temperatura em relação a temperatura inicial que por sua vez é a distribuição estacionária quando o tubo é submetido à outras condições de contorno. Os tubos de calor considerados são de forma básica com condutância constante e condições de contorno do terceiro tipo no evaporador e no condensador. A temperatura do vapor é calculada através de um balanço de massa e energia do núcleo, com o uso da relação de Watson e com algumas linearizações. A solução das equações é obtida no domínio da frequência através da transformada de Laplace. Da solução obteve-se as funções de transferência que relacionam a temperatura do vapor e a transferência de calor para o condensador com as funções forçantes. Estas funções são particularizadas para os casos condução - convecção e convecção - convecção, sendo que a função forçante na condução é o fluxo de calor e na convecção é a temperatura do meio. Das funções de transferência obteve-se as curvas teóricas estudando-se a variação de vários parâmetros para o caso condução - convecção. Conclui-se que a temperatura do vapor responde mais rapidamente ao fluxo de calor no evaporador quando se toma maiores áreas do condensador, ou seja, maiores razões de magnitude e menores ângulos de defasagem entre a temperatura do vapor e o fluxo de calor no evaporador são obtidos, apesar de que a variação da defasagem seja desprezível a altas frequências. A baixas frequências a dinâmica pode ser descrita por comportamentos de primeira ordem com frequência de canto proporcionais ao comprimento do condensador e correspondendo a ângulos de defasagem típicos de  $45^{\circ}$ . A altas

freqüências, a dinâmica pode ser descrita por comportamentos de parâmetros distribuídos. Essa diferença de comportamento é devida a diferença que existe entre a resistência interna distribuída (governada pela espessura da estrutura capilar e pela condutividade térmica) e a resistência externa concentrada (devido ao arranjo de rejeição de calor). Desde que a resistência externa é de maior ordem de magnitude, a região de baixa freqüência é caracterizada por parâmetros concentrados. Em contraste, a variação do comprimento do evaporador não produz qualquer mudança na resposta. Isto é devido às condições de contorno. A resposta para altas freqüências é determinada pela condução radial no invólucro e na estrutura capilar e desde que a resistência e a capacidade térmica são distribuídas radialmente, a dimensão axial não tem influência. Variando-se o coeficiente de película do condensador obtém-se diferentes temperaturas de operação. Neste caso, a resposta em freqüência da temperatura de vapor para o fluxo de calor no evaporador tem constantes de tempo inversamente proporcionais aos coeficientes de transferência de calor. Na região de altas freqüências a curva de fase não é afetada pela mudança da temperatura de operação, a menos que as propriedades térmicas e físicas dos materiais sejam afetadas. A espessura da estrutura capilar exerce considerável efeito em altas freqüências. O ângulo de defasagem aumenta e a curva da razão de magnitude apresenta declividade aumentando a altas freqüências com o aumento da espessura da estrutura capilar. A baixas freqüências, as freqüências de esquina diminuem com o aumento da espessura da estrutura capilar. Esse efeitos são devidos ao aumento da capacidade e resistência térmica dentro do tubo. Mudanças na espessura do invólucro produzem idênticos resultados. Condutividade térmicas maiores e capacidades caloríficas menores do material da estrutura capilar permitem o uso de espessuras da estrutura capilar maiores e podem ser obtidos através da variação dos mesmos no fluido que preenche a estrutura capilar. O tamanho dos poros do material da estrutura capilar determina a porosidade, permeabilidade e força capilar e é um importante parâmetro. Como os efeitos

da dinâmica do escoamento do líquido foram considerados pequenos em comparação com os efeitos dinâmicos da transferência de calor, o efeito do tamanho dos poros é sentido somente através de variação da condutividade térmica equivalente e capacidade da estrutura capilar preenchida por fluido. O calor que sai pelo condensador responde ao calor que entra pelo evaporador de maneira similar a da temperatura de vapor a baixas frequências e mais lentamente a altas frequências. O calor que sai pelo condensador responde a temperatura do ambiente do condensador de maneira oposta a todas as anteriores no que tange à razão de magnitude. A baixas frequências a curva da razão de magnitude mostra que o calor que sai não muda em relação ao valor estacionário e, a altas frequências, o calor que sai segue a temperatura do ambiente do condensador com um atraso de  $180^\circ$ . Nota-se, ainda, que o atraso é de  $90^\circ$  a baixas frequências. Os resultados experimentais confirmam todas as tendências acima. Conclui-se que as características da resposta a altas frequências são inteiramente determinadas pelos parâmetros da estrutura capilar enquanto que, a baixas frequências, são determinadas pelos parâmetros do condensador e temperatura de operação.

Existem publicados na literatura técnica muito mais modelos de tubos de calor. Uma boa coletânea é apresentada por Chen e Faghri [26] e por Faghri [27].

É importante o conhecimento do comportamento dinâmico de tubos de calor que operam sob condições variáveis por motivos exemplificados a seguir.

Um tubo que opere próximo a algum limite e esteja submetido a uma carga sujeita a oscilações, ou que tenha seu condensador num ambiente que esteja sujeito a variações de temperatura, ou de alguma condição da qual dependa o coeficiente de película deve ser projetado ou implantado de maneira a ser suficientemente invulnerável a tais variações.

De maneira oposta, um tubo usado para resfriar ou aquecer objetos ou ambientes que não possam ultrapassar certos limites de temperatura, ou que devem ficar pouco

tempo fora destes limites, deve ser projetado ou implantado de maneira a produzir respostas suficientemente rápidas e eficazes.

O objetivo do presente trabalho é o de se construir um modelo para o tubo de calor que abranja todos os modelos de [5] a [8] e que considere os efeitos bidimensionais transientes. O modelo aqui desenvolvido considera a condução axial pelo invólucro, cuja importância é mostrada em [5], considera o fenômeno de mudança de fase que ocorre na região da estrutura capilar do evaporador, cuja importância é mostrada em [6] e representada por um coeficiente de película efetivo, e considera os efeitos bidimensionais da distribuição da temperatura e do fluxo de calor, cuja importância é mostrada em [7]. As hipóteses de condutividade térmica alta do invólucro, considerada em [5] e [6], espessuras do invólucro e da estrutura capilar pequenas, considerada em [8], fluxos de calor baixos, considerada em [5] e [8], e regime permanente, consideradas em [5], [6] e [7], são dispensadas. O modelo aqui desenvolvido dá a liberdade para que se considere quaisquer combinações de condições de contorno no evaporador e no condensador, para que se distingua a região do evaporador da região do evaporador efetivo, e para que se considere a região da estrutura capilar do evaporador ora com condutividade térmica efetiva, ora com coeficiente de película efetivo. As funções de transferência e a resposta em frequência obtidas por [8] também são obtidas no presente trabalho e o comportamento dinâmico é reestudado através do modelo aqui desenvolvido.

### 3. MODELO MATEMÁTICO

O sistema de coordenadas utilizado é o cilíndrico e a sua posição, bem como a denominação dos vários comprimentos e espessuras do tubo de calor, estão esquematizados na figura 3.1.

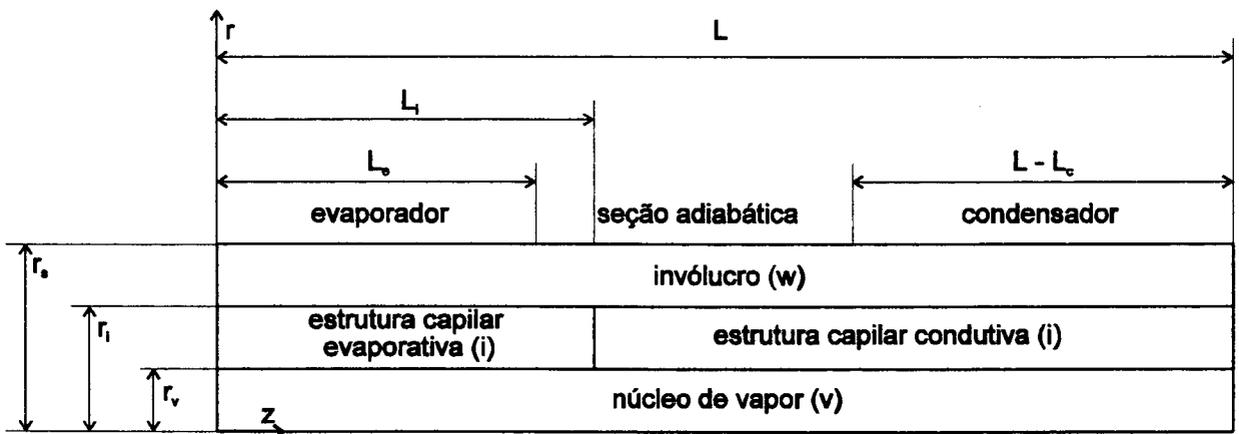


Figura 3.1: Sistema de coordenadas e dimensões do tubo

As hipóteses admitidas até aqui (espessura da parede e da estrutura capilar constantes, extremidades do tubo planas, etc.) são claras pela figura.

Admitindo-se que o material do invólucro é homogêneo, isotrópico e estacionário, e sabendo-se que não existe geração de calor, a equação diferencial da condução de calor se reduz à equação de Fourier [11]

$$\nabla^2 T_w(r, z, t) = \frac{1}{\alpha_w} \frac{\partial}{\partial t} T_w(r, z, t) ;$$

$$r_i < r < r_s ; 0 < z < L ; t > 0 \quad (3.1)$$

onde o operador laplaciano  $\nabla^2$  no sistema de coordenadas utilizado, considerando-se a axissimetria do problema é dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Vamos admitir que o material da estrutura capilar é homogêneo, o que é razoável por que as dimensões da estrutura capilar como um todo são bem maiores do que as dimensões dos poros. Supor que o material da estrutura capilar é isotrópico não parece ser muito razoável para certos tipos desta estrutura como, por exemplo, a que tem as ranhuras longitudinais, mas devido a axissimetria da geometria do problema esta hipótese torna-se viável. Devido a baixa velocidade do fluxo líquido, a convecção axial na estrutura capilar contribui com uma parte muito pequena do calor total transferido. Ainda que a convecção radial já tenha sido considerada, o tamanho dos poros de tubos de calor típicos são muito pequenos para qualquer corrente convectiva significativa se desenvolver [5,8]. Assim, é considerado que o calor é transferido através da estrutura capilar apenas por condução com uma condutividade térmica efetiva e a equação para a estrutura capilar se escreve como

$$\nabla^2 T_i(r, z, t) = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial}{\partial t} T_i(r, z, t) ;$$

$$r_v < r < r_i ; 0 < z < L ; t > 0 \quad (3.2)$$

Portanto, temos um sistema de duas equações diferenciais parciais com duas incógnitas que dependem de duas variáveis de posição e uma de tempo e, portanto, precisamos de quatro condições de contorno e uma condição inicial para cada incógnita.

As condições iniciais serão denotadas por

$$T_w(r, z, 0) = T_{w0}(r, z) ; r_i < r < r_s ; 0 < z < L \quad (3.3)$$

$$T_i(r, z, 0) = T_{i0}(r, z) ; r_v < r < r_i ; 0 < z < L \quad (3.4)$$

Para as condições de contorno vamos tomar a lei de Fourier e a lei de Newton de resfriamento. Desprezando-se a transferência de calor através das extremidades do tubo e, portanto, supondo-se superfícies adiabáticas, podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial z} T_w(r, 0, t) = \frac{\partial}{\partial z} T_w(r, L, t) = 0 ; r_i < r < r_s ; t > 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} T_i(r, 0, t) = \frac{\partial}{\partial z} T_i(r, L, t) = 0 ; r_v < r < r_i ; t > 0 \quad (3.6)$$

As condições de contorno da superfície externa de tubos de calor são, geralmente, do segundo ou terceiro tipo, isto é, fluxo de calor prescrito ou convecção, respectivamente, dependendo do tubo e da parte do tubo que se considera. As de terceiro tipo englobam as demais condições e, assim, podemos escrever

$$k_w \frac{\partial}{\partial r} T_w(r_s, z, t) + h(z) T_w(r_s, z, t) = f(z, t) ;$$

$$0 < z < L ; t > 0 \quad (3.7)$$

onde

$$h(z) = h_e ; f(z, t) = f_e(z, t) ; 0 < z < L_e ; t > 0$$

$$h(z) = 0 ; f(z, t) = 0 ; L_e < z < L - L_c ; t > 0$$

$$h(z) = h_c ; f(z, t) = f_c(z, t) ; L - L_c < z < L ; t > 0$$

Observe-se que:

(i) - Poderíamos tomar  $k = k(z)$  para que esta condição incluisse a do primeiro tipo, isto é, a de temperatura prescrita, mas isto também pode ser feito escolhendo-se grandes valores para  $h$ ;

(ii) - O método de solução admite que  $h_e$  e  $h_c$  variem com  $z$ ;

(iii) - Nas condições de segundo tipo  $f = q$  e  $h = 0$  enquanto que nas de terceiro tipo  $f = h T_\infty$ .

(iv) - Estas condições ainda incluem a radiação, pois a equação da radiação pode ser linearizada e transformada numa condição de contorno do terceiro tipo [7].

Desconsiderando a resistência térmica de contacto entre a parede e a estrutura capilar escreve-se

$$T_w(r_i, z, t) = T_i(r_i, z, t) ; 0 < z < L ; t > 0 \quad (3.8)$$

O fluxo de calor que passa por esta interface obedece a lei da conservação de energia.

Desta forma

$$k_w \frac{\partial}{\partial x} T_w(r_i, z, t) = k_i \frac{\partial}{\partial x} T_i(r_i, z, t) ;$$

$$0 < z < L ; t > 0 \quad (3.9)$$

Vamos escolher tubos que operem com apenas um fluido de trabalho. Neste caso, podemos considerar que a temperatura no espaço de vapor é uniforme igual a temperatura da interface líquido - vapor a qual é igual a temperatura de saturação [8].

Quando o fluxo de calor é baixo, a interface líquido - vapor praticamente coincide com a interface estrutura capilar - núcleo e a última condição de contorno é escrita como segue

$$T_i(r_v, z, t) = T_v(t) ; 0 < z < L ; t > 0 \quad (3.10)$$

Porém quando o fluxo de calor não é baixo, esta equação não é válida na região do evaporador efetivo, ou seja, em  $0 < z < L_i$ , onde

$$-k_i \frac{\partial}{\partial r} T_i(r_v, z, t) < 0$$

e a hipótese de condução pura que foi admitida para esta região fica comprometida [6]. Neste caso é melhor caracterizar esta região por um coeficiente de película efetivo  $h_i$ . Este coeficiente é definido em termos de fluxo radial de calor e desprezamos, então, o fluxo axial nesta região.

Deste modo as equações (3.2) e (3.10) passam a valer apenas no intervalo  $L_i < z < L$ . A equação (3.6) é substituída por

$$\frac{\partial}{\partial z} T_i(r, L_i, t) = \frac{\partial}{\partial z} T_i(r, L, t) = 0 ; r_v < r < r_i ; t > 0 \quad (3.11)$$

e complementando (3.10) tem-se

$$k_w \frac{\partial}{\partial r} T_w(r_i, z, t) = h_i (T_w(r_i, z, t) - T_v(t)) ;$$

$$0 < z < L_i ; t > 0 \quad (3.12)$$

Uma grande simplificação do trabalho será feita observando-se que este modelo, que considera o efeito de mudança de fase, reduz-se ao modelo inicialmente proposto se consideramos  $L_i = 0$ . Assim, resolve-se apenas as equações deste modelo tendo-se automaticamente os resultados para o modelo inicial.

A temperatura inicial é o valor estacionário com relação a uma dada condição de contorno e, então, obedece as equações anteriores sem a dependência do tempo, ou seja,

$$\nabla^2 T_{w0}(r, z) = 0 ; r_i < r < r_s ; 0 < z < L$$

$$\nabla^2 T_{i0}(r, z) = 0 ; r_v < r < r_i ; L_i < z < L$$

$$\frac{\partial}{\partial z} T_{w0}(r, 0) = \frac{\partial}{\partial z} T_{w0}(r, L) = 0 ; r_i < r < r_s$$

$$\frac{\partial}{\partial z} T_{i0}(r, L_i) = \frac{\partial}{\partial z} T_{i0}(r, L) = 0 ; r_v < r < r_i$$

$$k_w \frac{\partial}{\partial r} T_{w0}(r_s, z) + h(z) T_{w0}(r_s, z) = f_0(z) ; 0 < z < L$$

$$T_{w0}(r_i, z) = T_{i0}(r_i, z) ; 0 < z < L$$

$$k_w \frac{\partial}{\partial r} T_{w0}(r_i, z) = k_i \frac{\partial}{\partial r} T_{i0}(r_i, z) ; 0 < z < L$$

$$T_{i0}(r_v, z) = T_{v0} ; L_i < z < L$$

$$k_w \frac{\partial}{\partial r} T_{w0}(r_i, z) = h_i (T_{w0}(r_i, z) - T_{v0}) ; 0 < z < L_i$$

Vamos definir as temperaturas em relação a temperatura inicial para simplificar equações que vem mais adiante. Definindo como uma nova variável a temperatura relativa

$$T^*(r, z, t) = T(r, z, t) - T_0(r, z)$$

as equações transformam-se em

$$\nabla^2 T_w^*(r, z, t) = \frac{1}{\alpha_w} \frac{\partial}{\partial t} T_w^*(r, z, t) ;$$

$$r_i < r < r_s ; 0 < z < L ; t > 0$$

(3.13)

$$\nabla^2 T_i^*(r, z, t) = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial}{\partial t} T_i^*(r, z, t) ;$$

$$r_v < r < r_i ; 0 < z < L ; t > 0 \quad (3.14)$$

$$T_w^*(r, z, 0) = 0 ; r_i < r < r_s ; 0 < z < L \quad (3.15)$$

$$T_i^*(r, z, 0) = 0 ; r_v < r < r_i ; 0 < z < L \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} T_w^*(r, 0, t) = \frac{\partial}{\partial z} T_w^*(r, L, t) = 0 ; r_i < r < r_s ; t > 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} T_i^*(r, L_i, t) = \frac{\partial}{\partial z} T_i^*(r, L, t) = 0 ; r_v < r < r_i ; t > 0 \quad (3.18)$$

$$k_w \frac{\partial}{\partial r} T_w^*(r_s, z, t) + h(z) T_w^*(r_s, z, t) = f^*(z, t) ;$$

$$0 < z < L ; t > 0 \quad (3.19)$$

$$T_w^*(r_i, z, t) = T_i^*(r_i, z, t) ; 0 < z < L ; t > 0 \quad (3.20)$$

$$k_w \frac{\partial}{\partial r} T_w^*(r_i, z, t) = k_i \frac{\partial}{\partial r} T_i^*(r_i, z, t) ;$$

$$0 < z < L ; t > 0 \quad (3.21)$$

$$T_i^*(r_v, z, t) = T_v^*(t) ; L_i < z < L ; t > 0 \quad (3.22)$$

$$k_w \frac{\partial}{\partial x} T_w^*(r_i, z, t) = h_i (T_w^*(r_i, z, t) - T_v^*(t)) ;$$

$$0 < z < L_i ; t > 0 \quad (3.23)$$

Observe-se que em (3.19) define-se

$$f^*(z, t) = f(z, t) - f_0(z)$$

e que a temperatura  $T$  é a temperatura verdadeira correspondente a  $f(z,t)$ , enquanto que  $T_0$  é a temperatura inicial do tubo de calor correspondente ao valor estacionário  $f_0(z)$  e, finalmente, a temperatura  $T^*$  é o desvio da verdadeira temperatura em relação à temperatura inicial.

Vamos nos utilizar da transformada de Laplace nas equações do modelo matemático. As equações (3.13) e (3.14) são da forma

$$\nabla^2 T^*(r, z, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} T^*(r, z, t)$$

Aplicando-se o operador de Laplace em cada membro obtém-se

$$\int_0^\infty e^{-st} \nabla^2 T^*(r, z, t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} T^*(r, z, t) dt$$

Invertendo-se o laplaciano com a integral no primeiro membro da equação e integrando-se por partes o segundo membro, obtém-se

$$\nabla^2 \int_0^\infty e^{-st} T^*(r, z, t) dt = \frac{1}{\alpha} \left( e^{-st} T^*(r, z, t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} T^*(r, z, t) dt \right)$$

Usando-se o símbolo  $\tilde{f}$  para a transformada de Laplace de uma função  $f^*$ , a equação anterior resulta em

$$\nabla^2 \tilde{T}(r, z, s) = \frac{s}{\alpha} \tilde{T}(r, z, s) - \frac{1}{\alpha} T^*(r, z, 0)$$

Então as equações (3.13) e (3.14) são transformadas no que segue

$$\nabla^2 \tilde{T}_w(r, z, s) - \frac{s}{\alpha_w} \tilde{T}_w(r, z, s) = 0 ;$$

$$r_v < r < r_i ; 0 < z < L \quad (3.24)$$

$$\nabla^2 \tilde{T}_i(r, z, s) - \frac{s}{\alpha_i} \tilde{T}_i(r, z, s) = 0 ;$$

$$r_i < r < r_s ; L_i < z < L \quad (3.25)$$

sendo que as equações (3.15) e (3.16) já estão implícitas nestas.

Operando-se as demais equações, (3.17) a (3.23), obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_w(r, 0, s) = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_w(r, L, s) = 0 ; r_i < r < r_s \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_i(r, L_i, s) = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_i(r, L, s) = 0 ; r_v < r < r_i \quad (3.27)$$

$$k_w \frac{\partial}{\partial r} \tilde{T}_w(r_s, z, s) + h(z) \tilde{T}_w(r_s, z, s) = \tilde{f}(z, s) ; 0 < z < L \quad (3.28)$$

$$\tilde{T}_w(r_i, z, s) = \tilde{T}_i(r_i, z, s) ; 0 < z < L \quad (3.29)$$

$$k_w \frac{\partial}{\partial r} \tilde{T}_w(r_i, z, s) = k_i \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_i(r_i, z, s) ; 0 < z < L \quad (3.30)$$

$$\tilde{T}_i(r_v, z, s) = \tilde{T}_v(s) ; L_i < z < L \quad (3.31)$$

$$k_w \frac{\partial}{\partial r} \tilde{T}_w(r_i, z, s) = h_i (\tilde{T}_w(r_i, z, s) - \tilde{T}_v(s)) ; 0 < z < L_i \quad (3.32)$$

#### 4. EQUACIONAMENTO DA TEMPERATURA DO VAPOR

A temperatura do vapor pode ser equacionada através de balanços de massa e energia no núcleo do tubo de calor conforme Rajakumar [8].

A variação da energia no vapor se dá pelo fluxo de calor que atravessa a interface estrutura capilar - núcleo. O balanço de energia na interface do vapor resulta no que segue

$$\frac{d}{dt} (c_v M_v T_v) = \int_S -q_i (r_v, z, t) dS \quad (4.1)$$

A variação da massa do núcleo é uma consequência da evaporação ou condensação do fluido que ocorre na interface estrutura capilar - núcleo. O balanço de massa é escrito como segue

$$\frac{d}{dt} M_v = \int_S m(t) dS = \int_S -\frac{1}{H_v} q_i (r_v, z, t) dS \quad (4.2)$$

A entalpia específica do vapor é uma função da temperatura do vapor conforme a seguinte equação:

$$H_v(T_v) = H_{1v}(T_v) + C_1 T_v$$

Como  $T_v$  é constante em relação a  $r$  e  $z$  podemos tirar  $H_v$  da integral da equação (4.2) e substituí-la na equação (4.1) obtendo

$$(H_{1v} + C_1 T_v) \frac{d}{dt} M_v = \frac{d}{dt} (C_v M_v T_v)$$

Utilizando cálculos algébricos elementares, obtém-se

$$\frac{d}{dt} M_v = \frac{C_v M_v}{H_{1v} + (C_1 - C_v) T_v} T_v \frac{d}{dt} T_v \quad (4.3)$$

Substituindo o primeiro membro desta equação em (4.2) obtém-se

$$\int_S -q_i(r_v, z, t) dS = \frac{H_{1v} + C_1 T_v}{H_{1v} + (C_1 - C_v) T_v} C_v M_v \frac{d}{dt} T_v$$

O fluxo axial  $q_{i0}$  é um valor estacionário então obedece esta equação sem a dependência do tempo, portanto

$$\int_S -q_i(r_v, z, 0) dS = 0$$

Introduzindo as variáveis relativas, obtemos

$$\int_S -q_i^*(r_v, z, t) dS = \frac{H_{1v} + C_1 (T_{v0} + T_v^*)}{H_{1v} + (C_1 - C_v) (T_{v0} + T_v^*)} C_{v0} M_v \frac{d}{dt} T_v^*$$

Para se calcular a transformada de Laplace esta equação deve ser linearizada. Podemos fazer isto de muitas maneiras; linearizando cada termo ou grupos de dois ou mais termos do produto do segundo membro com expansões em série de Taylor até ordem um em relação a cada uma das variáveis  $t$ ,  $T_v^*$ ,  $dT_v^*/dt$ , ou grupos de duas ou mais destas (considerando os termos como funções de múltiplas variáveis).

Uma linearização mais simples se consegue desconsiderando-se  $T_v^*/T_{v0}$  e a variação de  $H_{1v}$  e  $M_v$  obtendo-se

$$\int_S -q_i(r_v, z, t) dS = \frac{H_{1v0} + C_1 T_{v0}}{H_{1v0} + (C_1 - C_v) T_{v0}} C_v M_{v0} \frac{d}{dt} T_v^*$$

Para uma linearização mais precisa podemos resolver (4.3) obtendo

$$M_v(t) = M_{v0} \exp \int_{T_{v0}}^{T_v} \frac{C_v}{H_{lv} + (C_l - C_v) T_v} dT_v$$

e utilizar uma relação encontrada por Watson entre o calor latente de vaporização de duas temperaturas [9], as quais tomamos como sendo  $T_{v0}$  e  $T_v$ , resultando

$$H_{lv} = H_{lv0} \left( \frac{T_c - T_v}{T_c - T_{v0}} \right)^{0,38}$$

A diferença porém se mostrou pequena quando calculada para alguns casos.

Rajakumar [8] obteve uma equação para  $T_v$  tentando incluir as variações de  $M_v$  e  $H_{lv}$  através de um procedimento desnecessariamente complicado. Se manipularmos o resultado obtido vemos que este é idêntico a equação (4.4) e que as sucessivas linearizações fizeram desaparecer os parâmetros introduzidos pela relação de Watson a saber  $T_c$  e 0,38, fato este mascarado pela introdução de outros parâmetros.

Sabendo-se que

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} T_v \right\} = s \tilde{T}_v(s) - T_v(0) = s \tilde{T}_v(s)$$

e aplicando a transformada de Laplace em (4.4), obtemos

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}_i(x_v, z, t) dz = \frac{sV}{2\pi r_v k_i} \tilde{T}_v(s) \quad (4.5)$$

onde

$$V = \frac{H_{lv0} + C_l T_v}{H_{lv0} + (C_l - C_v) T_{v0}} C_v M_{v0}$$

## 5. SOLUÇÃO ANALÍTICA

Para resolver o sistema de equações (3.24) a (3.32) e (4.5) pode-se seguir um procedimento semelhante ao de [7] como se descreve a seguir.

Desacoplando-se o sub-sistema de equações (3.25) e (3.27) e supondo-se conhecido  $\tilde{T}_v$  e  $\tilde{q}_i(r_v, z, s)$  este subsistema torna-se determinado.

Utilizando-se das propriedades da distribuição delta de Dirac, da simetria das funções de Green e da segunda identidade de Green,  $\tilde{T}_i$  é equacionado em termos de funções de Green. A diferença para [7] é que aqui o operador laplaciano é substituído pelo operador de Helmholtz  $\nabla^2 - \lambda I$  como descrito em [10].

A função de Green é calculada expandindo-a em relação ao conjunto de auto-funções relativo a uma das variáveis que aparece através do método da separação de variáveis, de maneira que os coeficientes da expansão satisfaçam a equação não homogênea da outra variável. Esta equação não-homogênea é, na verdade, um outro problema de funções de Green, mas unidimensional e pode ser resolvido dividindo-se a região da solução em duas sub-regiões e utilizando-se da continuidade e do salto da derivada na intersecção destas sub-regiões [14]. Assim obtém-se  $\tilde{T}_i$  em termos de  $\tilde{q}_i(r_v, z, s)$  e  $\tilde{T}_v$ .

Desacoplando-se o sub-sistema de equações (3.24) e (3.26) e supondo-se conhecido além de  $\tilde{q}_i(r_v, z, s)$ ,  $\tilde{q}_w(r_s, z, s)$  este subsistema torna-se determinado e pode ser resolvido da mesma maneira acima obtendo-se  $\tilde{T}_w$  em termos de  $\tilde{q}_i(r_v, z, s)$  e  $\tilde{q}_w(r_s, z, s)$ .

Faz-se mister notar que na solução deste subsistema não aparece uma constante arbitrária como em [7] apesar das condições de contorno serem todas do segundo tipo. Ocorre que o uso da transformada de Laplace faz aparecer  $s$  nas equações que advêm da equação de Fourier, e estas deixam de ser homogêneas. Fisicamente falando, um problema com fluxos de calor prescrito nas fronteiras admite várias soluções por que o gradiente da temperatura não especifica a que nível esta esteja. Porém, a transformada de Laplace embute a condição inicial e esta fixa o nível de temperatura.

Verifica-se, também, que o fenômeno de Gibbs não ocorre em nenhuma das soluções dos subsistemas [15].

Devido as equações (3.26) e (3.27),  $\tilde{T}_w$  e  $\tilde{T}_i$  são dadas através de expansões em cossenos. Expandindo-se  $\tilde{q}_i(r_v, z, s)$  e  $\tilde{q}_w(r_s, z, s)$  também em cossenos, obtém-se tais funções (ditas incógnitas) em termos de coeficientes a serem determinados.

Utilizando-se da equação (3.28) com  $\tilde{T}_w$  dado pela solução do segundo subsistema obtém-se um conjunto de  $N + 1$  equações algébricas lineares para os  $N + 1$  coeficientes de cada expansão das funções incógnitas que são truncadas no termo  $N$ .

Utilizando-se das equações (3.29) e (3.32) com  $\tilde{T}_w$  e  $\tilde{T}_i$  dados pelas soluções dos subsistemas obtém-se mais  $N + 1$  equações algébricas lineares cujas incógnitas são os  $2N + 2$  coeficientes das funções incógnitas e a temperatura do vapor.

Note-se que a equação(3.30) fica implícita com o uso do mesmo  $\tilde{q}_i$  para ambos subsistemas e que a equação (3.31) já foi usada.

A equação adicional para termos um sistema determinado vem da substituição de  $\tilde{T}_i$  na equação (4.5).

Resolvendo-se o sistema obtém-se os coeficientes das expansões das funções incógnitas e  $\tilde{T}_v$  que substituídos nas soluções dos subsistemas levam a solução do problema.

Poderíamos considerar como funções incógnitas  $\tilde{T}_w(r_s, z, s)$  e  $\tilde{T}_i(r_i, z, s)$  ao invés de  $\tilde{q}_w(r_s, z, s)$  e  $\tilde{q}_i(r_i, z, s)$  ou combinações destas opções sem diferenças fundamentais.

O procedimento descrito acima foi feito, mas não será aqui apresentado por ter-se descoberto uma seqüência de sucessivas melhoras do mesmo.

Primeiramente verifica-se que o método não requer o uso de funções de Green e podemos nos utilizar de outros métodos que para este problema são mais simples para se resolver cada subsistema.

Um desses meios é o da superposição de outros problemas nos quais as condições de contorno são não homogêneas apenas num dos contornos. Outro meio, ainda mais simples, é se resolver diretamente cada subsistema, isto é, não dividí-los em outros para então se utilizar a superposição. Isto é possível devido ao fato de que as duas condições de contorno não homogêneas estão relacionadas à mesma variável (a variável  $r$ ).

Finalmente, verifica-se que o desacoplamento do sistema inicial não é necessário e podemos resolvê-lo de maneira bem mais simples (algebraica e teoricamente falando) se o atacarmos diretamente, eliminando-se, por exemplo, a necessidade de se incluir funções incógnitas.

Todas as maneiras acima foram usadas (devido ao fato de se descobrir cada melhoria só quando se havia terminado de usar a anterior) e levaram a idênticos resultados. A seguir apresenta-se apenas a melhor maneira de modo a não estender esta descrição.

Tanto  $\tilde{T}_w$  como  $\tilde{T}_i$  podem ser consideradas como funções de apenas duas variáveis ( $r$  e  $z$ ) pois não aparecem no sistema diferenciações em relação a  $s$ , que pode, portanto, ser considerado como um parâmetro. Tomando-se valores arbitrários para uma delas podemos expandir  $\tilde{T}_w$  e  $\tilde{T}_i$  em termos de um conjunto completo de funções ortogonais da outra variável. Os coeficientes da expansão vão depender da primeira variável e são, portanto, funções desta.

Assim, qualquer que seja  $\tilde{T}$  podemos expandi-la em

$$\tilde{T}(r, z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r, s) Z_n(z, s) \quad (5.1)$$

onde, ou  $R_n$  ou  $Z_n$  formam uma base para o espaço de autofunções no qual esteja  $\tilde{T}(r, z, s)$ .

As equações (3.24) e (3.25) são da forma

$$\nabla^2 \tilde{T}(r, z, s) - \frac{s}{\alpha} \tilde{T}(r, z, s) = 0 \quad (5.2)$$

As equações (3.26) e (3.27) são da forma

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}(r, L_i^*, s) = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}(r, L, s) = 0 \quad (5.3)$$

Substituindo  $\tilde{T}$  da equação (5.1) na equação (5.2) obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{R_n} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR_n}{dr} \right) + \frac{1}{Z_n} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} - \frac{s}{\alpha} \right) R_n(r, s) Z_n(z, s) = 0$$

Uma das maneiras desta equação ser satisfeita é tomarmos cada termo da série como sendo zero, e, neste caso, como cada parcela de cada termo depende de uma variável distinta, devemos ter que cada uma delas é constante, então

$$\frac{1}{R_n} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR_n}{dr} \right) - \frac{s}{\alpha} = \lambda_n^2 \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{Z_n} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} = -\lambda_n^2 \quad (5.5)$$

Substituindo  $\tilde{T}$  da equação (5.1) na equação (5.3) obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n(r, s) \frac{d}{dz} Z_n(L_i^*, s) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r, s) \frac{d}{dz} Z_n(L, s) = 0 \quad (5.6)$$

Se  $\{R_n\}$  é um conjunto ortogonal de funções, a única maneira da equação (5.6) ser satisfeita não levando a solução trivial para  $\tilde{T}$ , é quando

$$\frac{d}{dz} Z_n(L_i^*, s) = \frac{d}{dz} Z_n(L, s) = 0 \quad (5.7)$$

A equação (5.5) com (5.7) leva a

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L - L_i^*}$$

$$Z_n(z, s) = \cos \frac{n\pi(z - L_i^*)}{L - L_i^*} \quad (5.8)$$

A equação (5.4) é uma equação diferencial de Bessel [11], que com a equação (5.8) leva a

$$R_n(r, s) = A_n(s) I_0(\alpha_n r) + B_n(s) K_0(\alpha_n r)$$

onde

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{(L - L_i^*)^2} + \frac{s}{\alpha}}$$

Note-se que como  $\alpha_n$  não é, necessariamente, imaginário puro ( $s$  é complexo), não seria desvantajoso utilizarmos funções de Bessel ao invés de funções de Bessel modificadas.

Substituindo  $Z_n$  da equação (5.8) e  $R_n$  desta equação na equação (5.1) obtém-se

$$\tilde{T}(r, z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n I_0(\alpha_n r) + B_n K_0(\alpha_n r)] \cos \frac{n\pi(z - L_i^*)}{L - L_i^*}$$

Assim, as soluções da equação (3.24) com a equação (3.26) e da equação (3.25) com a equação (3.27) são dadas por

$$\tilde{T}_w(r, z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{wn}(s) I_0(\alpha_{wn} r) + B_{wn}(s) K_0(\alpha_{wn} r)] \cos \frac{n\pi z}{L} ;$$

$$r_i < r < r_s ; 0 < z < L \quad (5.9)$$

$$\tilde{T}_i(r, z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{in}(s) I_0(\alpha_{in}r) + B_{in}(s) K_0(\alpha_{in}r)] \cos \frac{n\pi(z - L_i)}{L - L_i} ;$$

$$r_v < r < r_i ; L_i < z < L \quad (5.10)$$

Substituindo  $\tilde{T}_w$  da equação (5.9) na equação (3.28) obtém-se

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} [(h(z) I_0(\alpha_{wm}r_s) + k_w \alpha_{wm} I_1(\alpha_{wm}r_s)] A_{wm}(s) + \\ & + [h(z) K_0(\alpha_{wm}r_s) - k_w \alpha_{wm} K_1(\alpha_{wm}r_s)] B_{wm}(s) \cos \frac{n\pi z}{L} = \\ & = \tilde{F}(z, s) ; 0 < z < L \end{aligned}$$

Consideremos o espaço vetorial das funções  $f$  definidas sobre o intervalo  $[0, L]$  cujas derivadas nos pontos extremos do intervalo sejam nulas. O conjunto de funções  $\{\cos(n\pi z/L)\}$  é uma base para este espaço vetorial. As projeções ortogonais de um vetor sobre os elementos da base são dadas pelo produto escalar do vetor por cada um dos tais elementos. Para este espaço vetorial o produto escalar de duas funções é dado pela integral sobre  $[0, L]$  do produto das funções.

Se considerarmos cada lado desta equação como um vetor, obrigatoriamente as projeções ortogonais destes vetores em relação a  $\{\cos(n\pi z/L)\}$  devem ser iguais, isto é

$$\begin{aligned} & \int_0^L \sum_{m=0}^{\infty} [(h(z) I_0(\alpha_{wm}r_s) + k_w \alpha_{wm} I_1(\alpha_{wm}r_s)] A_{wm}(s) + \\ & + [h(z) K_0(\alpha_{wm}r_s) - k_w \alpha_{wm} K_1(\alpha_{wm}r_s)] B_{wm}(s) \cos \frac{n\pi z}{L} \cos \frac{n\pi z}{L} dz = \\ & \int_0^L \tilde{F}(z, s) \cos \frac{n\pi z}{L} dz ; 0 < z < L \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [R_{n,m}^I A_{wm}(s) + R_{n,m}^{II} B_{wm}(s)] = S_n ; n = 0, 1, \dots \quad (5.11)$$

onde

$$R_{n,m}^I = I_0(\alpha_{wm} r_s) \int_0^L h(z) \cos \frac{m\pi z}{L} \cos \frac{n\pi z}{L} dz + k_w \alpha_{wm} I_1(\alpha_{wm} r_s) \frac{\delta_{mn}}{2 - \delta_{0n}} L$$

$$R_{n,m}^{II} = K_0(\alpha_{wm} r_s) \int_0^L h(z) \cos \frac{m\pi z}{L} \cos \frac{n\pi z}{L} dz - k_w \alpha_{wm} K_1(\alpha_{wm} r_s) \frac{\delta_{mn}}{2 - \delta_{0n}} L$$

$$S_n = \int_0^L \tilde{f}(z, s) \cos \frac{n\pi z}{L} dz$$

já que

$$\int_0^L \cos \frac{m\pi z}{L} \cos \frac{n\pi z}{L} dz = \frac{\delta_{mn}}{2 - \delta_{0n}} L$$

Substituindo  $\tilde{T}_w$  da equação (5.9) e  $\tilde{T}_i$  da equação (5.10) na equação (3.29) obtém-se

se

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} [A_{wm}(s) I_0(\alpha_{wm} r_i) + B_{wm}(s) K_0(\alpha_{wm} r_i)] \cos \frac{m\pi z}{L} = \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} [A_{im}(s) I_0(\alpha_{im} r_i) + B_{im}(s) K_0(\alpha_{im} r_i)] \cos \frac{m\pi (z - L_i)}{L - L_i} \end{aligned}$$

Tomando as projeções ortogonais em relação à base  $\{\cos [n\pi(z-L_i)/(L-L_i)]\}$ ,

obtem-se

$$\sum_{m=0}^{\infty} [A_{wm}(s) I_0(\alpha_{wm} r_i) + B_{wm}(s) K_0(\alpha_{wm} r_i)] \int_{L_i}^L \cos \frac{m\pi z}{L} \cos \frac{n\pi(z-L_i)}{L-L_i} dz =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} [A_{im}(s) I_0(\alpha_{im} r_i) + B_{im}(s) K_0(\alpha_{im} r_i)] \int_{L_i}^L \cos \frac{m\pi(z-L_i)}{L-L_i} \cos \frac{n\pi(z-L_i)}{L-L_i} dz$$

que pode ser escrita como segue

$$\sum_{n=0}^N [R_{n,m}^{III} A_{wm}(s) + R_{n,m}^{IV} B_{wm}(s)] -$$

$$- I_0(\alpha_{in} r_i) A_{in}(s) - K_0(\alpha_{in} r_i) B_{in}(s) = 0 ; n = 0, 1, \dots \quad (5.12)$$

onde

$$R_{n,m}^{III} = I_0(\alpha_{wm} r_i) \frac{2 - \delta_{0n}}{L - L_i} \int_{L_i}^L \cos \frac{m\pi z}{L} \cos \frac{n\pi(z-L_i)}{L-L_i} dz$$

$$R_{n,m}^{IV} = K_0(\alpha_{wm} r_i) \frac{2 - \delta_{0n}}{L - L_i} \int_{L_i}^L \cos \frac{m\pi z}{L} \cos \frac{n\pi(z-L_i)}{L-L_i} dz$$

Unindo-se a equação (3.32) com a equação (3.30) (poderíamos tê-lo feito com a equação (3.29)) obtém-se

$$k_w \frac{\partial \tilde{T}_w}{\partial r}(r_i, z, s) = \begin{cases} k_i \frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial r}(r_i, z, s) & ; L_i < z < L \\ h_i (\tilde{T}_w(r_i, z, s) - \tilde{T}_v(s)) & ; 0 < z < L_i \end{cases}$$

Substituindo-se  $\tilde{T}_w$  da equação (5.9) e  $\tilde{T}_i$  da equação (5.10) nesta equação e tomando as projeções ortogonais relativas a  $\{\cos(n\pi z/L)\}$  obtém-se

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} k_w \alpha_{wm} [A_{wm}(s) I_1(\alpha_{wm} r_i) - B_{wm}(s) K_1(\alpha_{wm} r_i)] \int_0^L \cos \frac{m\pi z}{L} \cos \frac{n\pi z}{L} dz = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} k_i \alpha_{im} [A_{im}(s) I_1(\alpha_{im} r_i) - B_{im}(s) K_1(\alpha_{im} r_i)] \int_{L_i}^L \cos \frac{m\pi(z - L_i)}{L - L_i} \cos \frac{n\pi z}{L} dz + \\
& \quad + h_i \left( \sum_{n=0}^{\infty} [A_{wm}(s) I_0(\alpha_{wm} r_i) + B_{wm}(s) K_0(\alpha_{wm} r_i)] \cdot \right. \\
& \quad \left. \int_0^{L_i} \cos \frac{m\pi z}{L} \cos \frac{n\pi z}{L} dz - \tilde{T}_v(s) \int_0^{L_i} \cos \frac{n\pi z}{L} dz \right)
\end{aligned}$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} R_{n,m}^V A_{wm}(s) + R_{n,m}^{VI} B_{wm}(s) + R_{n,m}^{VII} A_{im}(s) + R_{n,m}^{VIII} B_{im}(s) - \\
& \quad - V_n^I \tilde{T}_v(s) = 0 ; n = 0, 1, \dots
\end{aligned} \tag{5.13}$$

onde

$$R_{n,m}^V = h_i I_0(\alpha_{wm} r_i) \int_0^{L_i} \cos \frac{m\pi z}{L} \cos \frac{n\pi z}{L} dz - k_w \alpha_{wm} I_1(\alpha_{wm} r_i) \frac{\delta_{mn}}{2 - \delta_{0n}} L$$

$$R_{n,m}^{VI} = h_i K_0(\alpha_{wm} r_i) \int_0^{L_i} \cos \frac{m\pi z}{L} \cos \frac{n\pi z}{L} dz - k_w \alpha_{wm} K_1(\alpha_{wm} r_i) \frac{\delta_{mn}}{2 - \delta_{0n}} L$$

$$R_{n,m}^{VII} = k_i \alpha_{im} I_1(\alpha_{im} r_i) \int_{L_i}^L \cos \frac{m\pi(z - L_i)}{L - L_i} \cos \frac{n\pi z}{L} dz$$

$$R_{n,m}^{VIII} = k_i \alpha_{im} K_1(\alpha_{im} r_i) \int_{L_i}^L \cos \frac{m\pi(z - L_i)}{L - L_i} \cos \frac{n\pi z}{L} dz$$

$$V_n^I = \int_0^{L_i} \cos \frac{n\pi z}{L} dz$$

Substituindo  $\tilde{T}_i$  da equação (5.10) na equação (3.38) obtém-se

$$\sum_{m=0}^{\infty} [A_{im}(s) I_0(\alpha_{im} r_v) + B_{im}(s) K_0(\alpha_{im} r_v)] \cos \frac{m\pi(z - L_i)}{L - L_i} = \tilde{T}_v(s)$$

Utilizando-se novamente de álgebra linear, obtém-se

$$A_{in} I_0(\alpha_{in} r_v) + B_{in} K_0(\alpha_{in} r_v) - \delta_{0n} \tilde{T}_v(s) = 0 ; n = 0, 1, \dots \quad (5.14)$$

Resta a equação (4.5), mas ainda não dispomos de  $\tilde{T}_i$  para o evaporador. Nesta região supomos que o fluxo de calor é radial e este caso a equação de Fourier leva ao que segue

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{s}{\alpha_i} \right) \tilde{T}_i(r, z, s) = 0 ; r_v < r < r_i ; 0 < z < L_i$$

cuja solução geral é a seguinte

$$\tilde{T}_i(r, z, s) = A_i I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r) + B_i K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r)$$

As constantes são calculadas acoplando esta equação ao sistema. Fazendo uso das partes ainda não utilizadas das equações (3.29) e (3.30), ou seja, as igualdades no intervalo  $0 < z < L_i$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(r, z, s) &= \\ &= \frac{I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r) K_0'(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) - I_0'(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r)}{I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) K_0'(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) - I_0'(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i)} \tilde{T}_w(r_i, z, s) + \\ &+ \frac{I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r) - I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i)}{I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) K_0'(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) - I_0'(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i)} \frac{k_w}{k_i} \frac{\partial \tilde{T}_w}{\partial r}(r_i, z, s) \end{aligned}$$

Utilizando a seguinte identidade do Wronskiano

$$W(I_0, K_0) = I_0'(x) K_0(x) - I_0(x) K_0'(x) = 1/x$$

podemos simplificar a equação acima para

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(r, z, s) = & \\ = & [I_0(\sqrt{s/\alpha_i}r) K_0'(\sqrt{s/\alpha_i}r_i) - I_0'(\sqrt{s/\alpha_i}r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i}r)] r_i \tilde{T}_w(r_i, z, s) + \\ + & [I_0(\sqrt{s/\alpha_i}r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i}r) - I_0(\sqrt{s/\alpha_i}r) K_0(\sqrt{s/\alpha_i}r_i)] r_i \frac{k_w}{k_i} \frac{\partial \tilde{T}_w}{\partial r}(r_i, z, s) \end{aligned}$$

Substituindo  $\tilde{T}_w$  da equação (5.9) nesta equação obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(r, z, s) = & \sum_{m=0}^{\infty} r_i \cos \frac{m\pi z}{L} \cdot \\ & \cdot \{ [I_0(\sqrt{s/\alpha_i}r) K_0'(\sqrt{s/\alpha_i}r_i) - I_0'(\sqrt{s/\alpha_i}r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i}r)] I_0(\alpha_{wm}r_i) + \\ + & \frac{k_w}{k_i} [I_0(\sqrt{s/\alpha_i}r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i}r) - I_0(\sqrt{s/\alpha_i}r) K_0(\sqrt{s/\alpha_i}r_i)] I_0'(\alpha_{wm}r_i) A_{wm}(s) + \\ & + [I_0(\sqrt{s/\alpha_i}r) K_0'(\sqrt{s/\alpha_i}r_i) - I_0'(\sqrt{s/\alpha_i}r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i}r)] K_0(\alpha_{wm}r_i) + \\ + & \frac{k_w}{k_i} [I_0(\sqrt{s/\alpha_i}r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i}r) - I_0(\sqrt{s/\alpha_i}r) K_0(\sqrt{s/\alpha_i}r_i)] K_0'(\alpha_{wm}r_i) B_{wm}(s) \} \\ & 0 < z < L \end{aligned} \quad (5.15)$$

Retornando a seqüência e substituído  $\tilde{T}_i$  das equações (5.10) e (5.15) na equação (4.5) resulta

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} [R_m^{IX} A_{wm}(s) + R_m^X B_{wm}(s) + R_m^{XI} A_{im}(s) + R_m^{XII} B_{im}(s)] - \\ - \frac{sV}{2\pi r_v k_i} \tilde{T}_v(s) = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde

$$R_m^{IX} = \int_0^{L_i} r_i \cos \frac{m\pi z}{L} dz \cdot$$

$$\cdot \{ [I_0'(\alpha_{wm}r_v) K_0'(\alpha_{wm}r_i) - I_0'(\alpha_{wm}r_i) K_0'(\alpha_{wm}r_v)] I_0(\alpha_{wm}r_i) +$$

$$+ \frac{k_w}{k_i} [I_0(\alpha_{wm}r_i) K_0'(\alpha_{wm}r_v) - I_0'(\alpha_{wm}r_v) K_0(\alpha_{wm}r_i)] I_0'(\alpha_{wm}r_i) \}$$

$$R_m^X = \int_0^{L_i} r_i \cos \frac{m\pi z}{L} dz \cdot$$

$$\cdot \{ [I_0'(\alpha_{wm}r_v) K_0'(\alpha_{wm}r_i) - I_0'(\alpha_{wm}r_i) K_0'(\alpha_{wm}r_v)] K_0(\alpha_{wm}r_i) +$$

$$- \frac{k_w}{k_i} [I_0(\alpha_{wm}r_i) K_0'(\alpha_{wm}r_v) - I_0'(\alpha_{wm}r_v) K_0(\alpha_{wm}r_i)] K_0'(\alpha_{wm}r_i) \}$$

$$R_m^{XI} = I_0'(\alpha_{im}r_v) \int_{L_i}^L \cos \frac{m\pi(z - L_i)}{L - L_i} dz$$

$$R_m^{XII} = K_0'(\alpha_{im}r_v) \int_{L_i}^L \cos \frac{m\pi(z - L_i)}{L - L_i} dz$$

As equações (5.11) a (5.14) e (5.16) formam um sistema algébrico linear de incógnitas  $\tilde{T}_v, A_{wn}, B_{wn}, A_{in}, B_{in}, n = 0, 1, \dots$  Podemos resolver este sistema algebricamente ou numericamente. Vamos fazer uma combinação destes métodos de maneiras a evitar complicações matemáticas e reduzir tempo computacional.

Explicitando-se  $A_{in}$  e  $B_{in}$  das equações (5.12) e (5.14) obtém-se

$$A_{in} = \{ K_0(\alpha_{in}r_v) \sum_{m=0}^{\infty} [R_{n,m}^{III} A_{wm}(s) + R_{n,m}^{IV} B_{wm}(s)] -$$

$$- K_0(\alpha_{in}r_i) \delta_{0n} \tilde{T}_v(s) \} / \Delta_n \quad (5.17)$$

$$B_{in} = \{-I_0(\alpha_{in}r_v) \sum_{m=0}^{\infty} [R_{n,m}^{III} A_{wm}(s) + R_{n,m}^{IV} B_{wm}(s)] + I_0(\alpha_{in}r_i) \delta_{0n} \tilde{T}_v(s)\} / \Delta_n \quad (5.18)$$

onde

$$\Delta_n = I_0(\alpha_{in}r_i) K_0(\alpha_{in}r_v) - I_0(\alpha_{in}r_v) K_0(\alpha_{in}r_i)$$

Substituindo-se  $A_{in}$  e  $B_{in}$  destas equações nas equações (5.13) e (5.16) resultam

$$\sum_{m=0}^{\infty} R_{n,m}^{XIII} A_{wm}(s) + R_{n,m}^{XIV} B_{wm}(s) + V_n^{II} \tilde{T}_v(s) = 0 ; n = 0, 1, \dots \quad (5.19)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} R_m^{XV} A_{wm}(s) + R_m^{XVI} B_{wm}(s) + V^{III} \tilde{T}_v(s) = 0 \quad (5.20)$$

onde

$$R_{n,m}^{XIII} = R_{n,m}^V + \sum_{p=0}^{\infty} R_{p,m}^{III} [K_0(\alpha_{ip}r_v) R_{n,p}^{VII} - I_0(\alpha_{ip}r_v) R_{n,p}^{VIII}] / \Delta_p$$

$$R_{n,m}^{XIV} = R_{n,m}^{VI} + \sum_{p=0}^{\infty} R_{p,m}^{IV} [K_0(\alpha_{ip}r_v) R_{n,p}^{VII} - I_0(\alpha_{ip}r_v) R_{n,p}^{VIII}] / \Delta_p$$

$$V_n^{II} = [I_0(\alpha_{i0}r_i) R_{n,0}^{VIII} - K_0(\alpha_{i0}r_i) R_{n,0}^{VII}] / \Delta_0 - V_n^I$$

$$R_m^{XV} = R_m^{IX} + \sum_{p=0}^{\infty} R_{p,m}^{III} [K_0(\alpha_{ip}r_v) R_p^{XI} - I_0(\alpha_{ip}r_v) R_p^{XII}] / \Delta_p$$

$$R_m^{XVI} = R_m^X + \sum_{p=0}^{\infty} R_{p,m}^{IV} [K_0(\alpha_{ip}r_v) R_p^{XI} - I_0(\alpha_{ip}r_v) R_p^{XII}] / \Delta_p$$

$$V^{III} = [I_0(\alpha_{i0}r_i) R_0^{XII} - K_0(\alpha_{i0}r_i) R_0^{XI}] / \Delta_0 - 1/k_i V(s)$$

Substituindo-se  $\tilde{T}_v$  da equação (5.20) na equação (6.21) resultam

$$\sum_{m=0}^{\infty} (V^{III}R_{n,m}^{XIII} - V_n^{II}R_m^{XV})A_{wm}(s) +$$

$$+ (V^{III}R_{n,m}^{XIV} - V_n^{II}R_m^{XVI})B_{wm}(s) = 0 ; n = 0, 1, \dots \quad (5.21)$$

Assim, o sistema reduz-se as equações (5.11) e (5.21) com incógnitas  $A_{wm}$  e  $B_{wm}$  que será resolvido numericamente.

## 6. MODELOS SIMPLIFICADOS

Neste capítulo serão desenvolvidos dois outros modelos simplificando o equacionamento do tubo de calor.

O primeiro é uma versão aprimorada do modelo de Rajakumar [8] no qual incluiremos o coeficiente de película efetivo da estrutura capilar do evaporador e não desprezaremos a curvatura das paredes.

O segundo é uma versão transiente do modelo de Sun & Tien [6], ou seja, as hipóteses serão as mesmas exceto no que tange ao tipo de regime.

### 6.1 Modelo Simplificado R

Dividindo o tubo segundo suas secções e desprezando o fluxo axial de calor dentro de cada secção, as equações (3.24) a (3.32) e (4.5) reduzem-se ao que segue,

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{s}{\alpha_{w/i}} \right) \tilde{T}_{w/i,e/a/c}(r, s) = 0 \quad (6.1)$$

$$\left( k_{e/a/c} \frac{d}{dr} + h_{e/a/c} \right) \tilde{T}_{w/i,e/a/c}(r_s, s) = \tilde{f}_{e/a/c}(s) \quad (6.2)$$

$$\tilde{T}_{w,e/a/c}(r_i, s) = \tilde{T}_{i,e/a/c}(r_i, s) \quad (6.3)$$

$$k_w \frac{d}{dr} \tilde{T}_{w,e/a/c}(r_i, s) = k_i \frac{d}{dr} \tilde{T}_{i,e/a/c}(r_i, s) \quad (6.4)$$

$$\tilde{T}_{i,e/a/c}(r_v, s) = \tilde{T}_v(s) \quad (6.5)$$

$$k_w \frac{d}{dr} \tilde{T}_{w,e}(r_i, s) = h_i (\tilde{T}_w(r_i, s) - \tilde{T}_v(s)) \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} L_e \frac{d}{dr} \tilde{T}_{i,e}(r_v, s) + L_a \frac{d}{dr} \tilde{T}_{i,a}(r_v, s) + L_c \frac{d}{dr} \tilde{T}_{i,c}(r_v, s) &= \\ &= \frac{sV}{2\pi r_v k_i} \tilde{T}_v(s) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Nas equações acima, as barras nos subscritos foram utilizados para se evitar repetições de equações, assim, por exemplo, (6.1) corresponde a seis equações relativas a  $\tilde{T}_{w,e}$ ,  $\tilde{T}_{w,a}$ ,  $\tilde{T}_{w,c}$ ,  $\tilde{T}_{i,e}$ ,  $\tilde{T}_{i,a}$  e  $\tilde{T}_{i,c}$ .

É oportuno observar que,

- (i) As equações (3.26) e (3.27) estão implícitas nas hipóteses deste modelo;
- (ii) O comprimento do evaporador efetivo só pode ser tomado como sendo igual ao comprimento do evaporador;
- (iii) A primeira equação de (6.5) é substituída pela equação (6.6) no caso de se considerar o coeficiente de película efetivo da estrutura capilar do evaporador;
- (iv) A primeira vista a derivada  $d\tilde{T}_{i,a}/dr$  seria nula neste modelo, mas isto só é verdade no regime permanente;

(v) Na equação (6.2) tomamos  $k_{e/a/c}$  ao invés de  $k_w$  por que neste modelo não há restrições em se fazer  $k = 0$ . Isto é preferível a se fazer  $h \rightarrow \infty$ .

A solução geral da equação (6.1) é expressa por

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{w/i,e/a/c}(r,s) &= A_{w/i,e/a/c}(s) I_0(\sqrt{s/\alpha_w}r) + \\ &+ B_{w/i,e/a/c}(s) K_0(\sqrt{s/\alpha_w}r) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Substituindo  $\tilde{T}$  da equação (6.8) nas equações (6.2) a (6.7) obtém-se, respectivamente,

$$\begin{aligned} &[h_{e/a/c} I_0(\sqrt{s/\alpha_w}r_s) + k_{e/a/c} \sqrt{s/\alpha_w} I_1(\sqrt{s/\alpha_w}r_s)] A_{w,e/a/c}(s) + \\ &+ [h_{e/a/c} K_0(\sqrt{s/\alpha_w}r_s) - k_{e/a/c} \sqrt{s/\alpha_w} K_1(\sqrt{s/\alpha_w}r_s)] B_{w,e/a/c}(s) = \\ &= \tilde{f}_{e/a/c}(s) \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} &I_0(\sqrt{s/\alpha_w}r_i) A_{w,e/a/c}(s) + K_0(\sqrt{s/\alpha_w}r_i) B_{w,e/a/c}(s) - \\ &- I_0(\sqrt{s/\alpha_i}r_i) A_{i,e/a/c}(s) - K_0(\sqrt{s/\alpha_i}r_i) B_{i,e/a/c}(s) = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} &k_w \sqrt{s/\alpha_w} I_1(\sqrt{s/\alpha_w}r_i)] A_{w,e/a/c}(s) - \\ &- k_w \sqrt{s/\alpha_w} K_1(\sqrt{s/\alpha_w}r_i)] B_{w,e/a/c}(s) - \\ &- k_i \sqrt{s/\alpha_i} I_1(\sqrt{s/\alpha_i}r_i)] A_{i,e/a/c}(s) + \\ &+ k_i \sqrt{s/\alpha_i} K_1(\sqrt{s/\alpha_i}r_i)] B_{i,e/a/c}(s) = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned}
& I_0(\sqrt{s/\alpha_i}r_v) A_{i,e/a/c}(s) + \\
& + K_0(\sqrt{s/\alpha_i}r_v) B_{i,e/a/c}(s) - \tilde{T}_v(s) = 0
\end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
& [h_i I_0(\sqrt{s/\alpha_w}r_i) + k_w \sqrt{s/\alpha_w} I_1(\sqrt{s/\alpha_w}r_i)] A_{we}(s) + \\
& + [h_i K_0(\sqrt{s/\alpha_w}r_i) - k_w \sqrt{s/\alpha_w} K_1(\sqrt{s/\alpha_w}r_i)] B_{we}(s) - \\
& - h_i \tilde{T}_v(s) = 0
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
& L_e I_1(\sqrt{s/\alpha_i}r_v) A_{i,e}(s) - L_e K_1(\sqrt{s/\alpha_i}r_v) B_{i,e}(s) + \\
& + L_a I_1(\sqrt{s/\alpha_v}r_v) A_{i,a}(s) - L_a K_1(\sqrt{s/\alpha_i}r_v) B_{i,a}(s) + \\
& + L_c I_1(\sqrt{s/\alpha_v}r_v) A_{i,c}(s) - L_c K_1(\sqrt{s/\alpha_i}r_v) B_{i,c}(s) -
\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{s/\alpha_i}}{2\pi r_v k_i} v \tilde{T}_v(s) = 0 \tag{6.14}$$

Resulta por conseguinte um sistema de equações algébricas lineares de ordem 13 nas incógnitas  $A_{w/i,e/a/c}$ ,  $B_{w/i,e/a/c}$  e  $\tilde{T}_v$  que resolvido leva, com auxílio da equação (6.8), a transformada da temperatura relativa de todo o tubo.

## 6.2 Modelo Simplificado S

Desprezando-se o fluxo de calor axial que ocorre na estrutura capilar a equação (3.27) fica automaticamente satisfeita e a equação (3.25) é reduzida a equação que segue

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{s}{\alpha_i} \right) \tilde{T}_i(r, z, s) = 0 ; r_v < r < r_i ; L_i < z < L$$

cuja solução geral é dada por

$$\tilde{T}_i(r, z, s) = A_i(z, s) I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r) + B_i(z, s) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r) ;$$

$$r_v < r < r_i ; L_i < z < L$$

Calculando-se as constantes através da substituição de  $\tilde{T}_i$  desta equação nas equações (3.29) e (3.31) obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(r, z, s) = & \\ = & \frac{I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_v) - I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_v) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r)}{I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_v) - I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_v) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i)} \tilde{T}_w(z, s) + \\ & + \frac{I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r) - I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i)}{I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_v) - I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_v) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i)} \tilde{T}_v(s) \\ & r_v < r < r_i ; L_i < z < L \end{aligned} \quad (6.15)$$

de onde resulta

$$\tilde{Q}_i(r_i, z, s) = A_{q_i}(z, s) \tilde{T}_w(z, s) + B_{q_i}(z, s) \tilde{T}_v(s) \quad (6.16)$$

$$\tilde{Q}_i(r_v, z, s) = A_{q_v}(z, s) \tilde{T}_w(z, s) + B_{q_v}(z, s) \tilde{T}_v(s) \quad (6.17)$$

onde, em  $L_i < z < L$ ,

$$A_{q_i}(z, s) = -k_i [I_0'(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_v) - I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_v) K_0'(\sqrt{s/\alpha_i} r_i)] / \Delta_1$$

$$B_{q_i}(z, s) = k_i / (r_i \Delta_1)$$

$$A_{q_v}(z, s) = k_i / (r_v \Delta_1)$$

$$B_{q_v}(z, s) = -k_i [I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) K_0'(\sqrt{s/\alpha_i} r_v) - I_0'(\sqrt{s/\alpha_i} r_v) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i)] / \Delta_1$$

$$\Delta_1 = I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_v) - I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_v) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i)$$

Observe-se que neste modelo, novamente, o caso de não se considerar o  $h_i$  é obtido fazendo  $L_i = 0$ .

A equação (3.32) conduz a seguinte

$$\tilde{q}_i(r_i, z, s) = h_i (\tilde{T}_v(s) - \tilde{T}_w(z, s))$$

Então, em  $0 < z < L_i$ , a equação (6.16) continua válida com  $A_{q_i}(z, s) = -B_{q_i}(z, s) = -h_i$ .

Para o cálculo de  $\tilde{q}_i(r_v, z, s)$  podemos nos utilizar de um procedimento semelhante ao adotado na dedução da equação (5.15). Considerando a equação (3.32) tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(r, z, s) &= [I_0'(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r) - I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r) K_0'(\sqrt{s/\alpha_i} r_i)] r_i \tilde{T}_w(z, s) + \\ &+ [I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) - I_0(\sqrt{s/\alpha_i} r_i) K_0(\sqrt{s/\alpha_i} r)] r_i \cdot \\ &\cdot h_i / k_i (\tilde{T}_w(z, s) - \tilde{T}_v(s)) \end{aligned} \quad (6.18)$$

A equação acima já leva em conta a parte restante da equação (3.29) de onde se conclui que, em  $0 < z < L_i$ , a equação (6.17) continua válida com as expressões abaixo.

$$A_{q_v}(z, s) = [I_0'(\sqrt{s/\alpha_i}r_v)K_0'(\sqrt{s/\alpha_i}r_i) - I_0'(\sqrt{s/\alpha_i}r_i)K_0'(\sqrt{s/\alpha_i}r_i)]r_ik_i +$$

$$+ [I_0(\sqrt{s/\alpha_i}r_i)K_0'(\sqrt{s/\alpha_i}r_v) - I_0'(\sqrt{s/\alpha_i}r_v)K_0(\sqrt{s/\alpha_i}r_i)]r_ih_i$$

$$B_{q_v}(z, s) = [I_0'(\sqrt{s/\alpha_i}r_v)K_0(\sqrt{s/\alpha_i}r_i) - I_0(\sqrt{s/\alpha_i}r_i)K_0'(\sqrt{s/\alpha_i}r_i)]r_ih_i$$

Desprezando-se o gradiente radial de temperaturas no invólucro, tomando-se do mesmo uma secção de comprimento  $dz$ , fazendo-se um balanço de energia nesta e aplicando-se a transformada de Laplace resulta

$$\tilde{q}_w(r_i, z, s) 2\pi r_i dz - \tilde{q}_w(r_s, z, s) 2\pi r_s dz +$$

$$+ \pi(r_s^2 - r_i^2)k_w \frac{d^2}{dz^2} \tilde{T}_w(z, s) dz = \pi(r_s^2 - r_i^2) \rho_w c_w s \tilde{T}_w(z, s) dz$$

A equação acima substitui a equação (3.24).

Substituindo-se  $\tilde{q}_w$  das equações (3.28) e (3.30) nesta equação e levando-se em conta a equação (6.16) obtém-se

$$\frac{d^2}{dz^2} \tilde{T}_w(z, s) dz - \gamma_1^2 \tilde{T}_w(z, s) + \gamma_2 \tilde{T}_v(s) + \gamma_3 \tilde{f}(s) = 0$$

onde

$$\gamma_1^2 = \frac{s}{\alpha_w} + \frac{2(r_s h - r_i A_{q_i})}{k_w(r_s^2 - r_i^2)}$$

$$\gamma_2 = \frac{2r_i B_{q_i}}{k_w(r_s^2 - r_i^2)}$$

$$\gamma_3 = \frac{2r_s}{k_w(r_s^2 - r_i^2)}$$

A solução geral da equação anterior é expressa por

$$\tilde{T}_w(z, s) = \frac{C_1}{\gamma_1} \cosh(\gamma_1 z) + \frac{C_2}{\gamma_1} \sinh(\gamma_1 z) + \frac{\gamma_2 \tilde{T}_v(s) + \gamma_3 \tilde{f}(s)}{\gamma_1^2}$$

Definindo-se

$$\tilde{\Phi}_i = \frac{d}{dz} \tilde{T}_w(z_i, s) ; i = 1, 2, e, a, c$$

calculando-se as constantes em termos de  $\tilde{\Phi}_1$  e  $\tilde{\Phi}_2$ , e substituindo-se seus valores na própria equação obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{T}_w(z, s) = & \frac{\cosh(\gamma_1(z-z_1))\tilde{\Phi}_2 - \cosh(\gamma_1(z_2-z))\tilde{\Phi}_1}{\gamma_1 \sinh(\gamma_1(z_2-z_1))} + \\ & + \frac{\gamma_2 \tilde{T}_v(s) + \gamma_3 \tilde{f}(s)}{\gamma_1^2} \end{aligned}$$

Na região do evaporador  $z_1 = 0$  e  $z_2 = L_e$ . Considerando-se a equação (3.26) segue-se que  $\tilde{\Phi}_1 = 0$  e em consequência

$$\tilde{T}_{we}(z, s) = \frac{\cosh(\gamma_{1e}z)}{\gamma_{1e} \sinh(\gamma_{1e}L_e)} \tilde{\Phi}_e + \frac{\gamma_{2e} \tilde{T}_v(s) + \gamma_{3e} \tilde{f}_e(s)}{\gamma_{1e}^2} \quad (6.19)$$

Na região adiabática  $z_1 = L_e$  e  $z_2 = L - L_e$  e  $\tilde{T}_{wa}$  é expressa por

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{wa}(z, s) = \\ = \frac{\cosh(\gamma_{1a}(z-L_e))\tilde{\Phi}_c - \cosh(\gamma_{1a}(L-L_e-z))\tilde{\Phi}_e}{\gamma_{1a} \sinh(\gamma_{1a}L_a)} + \frac{\gamma_{2a} \tilde{T}_v(s)}{\gamma_{1a}^2} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Na região do condensador  $z_1 = L - L_e$  e  $z_2 = L$ . Considerando-se a igualdade restante da equação (3.26) segue-se que  $\tilde{\Phi}_2 = 0$  e que

$$\tilde{T}_{wc}(z, s) = \frac{\cosh(\gamma_{1c}(L-z))}{\gamma_{1c} \sinh(\gamma_{1c}L_c)} \tilde{\Phi}_c + \frac{\gamma_{2c} \tilde{T}_v(s) + \gamma_{3c} \tilde{f}_c(s)}{\gamma_{1c}^2} \quad (6.21)$$

Ainda que fosse possível se incluir um comprimento efetivo que pudesse ser diferente do comprimento real do evaporador, fez-se como em [6], que fosse igual, simplificando-se bastante a solução. Também, como em [6], não foi incluído o caso de  $\tilde{f}$  variável ao longo de  $z$ .

Considerando-se a continuidade da temperatura do invólucro ao longo de  $z$ , pode-se escrever

$$\tilde{T}_{we}(L_e, s) = \tilde{T}_{wa}(L_e, s)$$

$$\tilde{T}_{wa}(L-L_c, s) = \tilde{T}_{wc}(L-L_c, s)$$

de onde obtém-se

$$\check{\Phi}_c = \gamma_{4e}\check{f}_e(s) + \gamma_{4c}\check{f}_c(s) + \gamma_{4v}\check{T}_v(s)$$

$$\check{\Phi}_e = \gamma_{5e}\check{f}_e(s) + \gamma_{5c}\check{f}_c(s) + \gamma_{5v}\check{T}_v(s)$$

onde

$$\gamma_{4e} = -\frac{S_{1a}\gamma_{3e}}{\gamma_{1e}^2\Delta_2}$$

$$\gamma_{4c} = \frac{(T_{1e} + T_{1a})\gamma_{3c}}{\gamma_{1c}^2\Delta_2}$$

$$\gamma_{4v} = -\frac{S_{1a}}{\Delta_2}\left(\frac{\gamma_{2e}}{\gamma_{1e}^2} - \frac{\gamma_{2a}}{\gamma_{1a}^2}\right) + \frac{T_{1e} + T_{1a}}{\Delta_2}\left(\frac{\gamma_{2c}}{\gamma_{1c}^2} - \frac{\gamma_{2a}}{\gamma_{1a}^2}\right)$$

$$\gamma_{5e} = -\frac{(T_{1c} + T_{1a})\gamma_{3e}}{\gamma_{1e}^2\Delta_2}$$

$$\gamma_{5c} = -\frac{S_{1a}\gamma_{3c}}{\gamma_{1c}^2\Delta_2}$$

$$\gamma_{5v} = -\frac{S_{1a}(\gamma_{2c} - \frac{\gamma_{2a}}{\gamma_{1a}})}{\Delta_2} + \frac{T_{1c} + T_{1a}}{\Delta_2} \left( \frac{\gamma_{2e}}{\gamma_{1e}} - \frac{\gamma_{2a}}{\gamma_{1a}} \right)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{(T_{1e} + T_{1a})(T_{1c} + T_{1a}) - S_{1a}^2}$$

$$S_{1a} = \frac{1}{\gamma_{1a} \sinh(\gamma_{1a} L_a)}$$

$$T_{1i} = \frac{1}{\gamma_{1i} \sinh(\gamma_{1i} L_i)} ; i = e, a, c$$

Utilizando-se das equações (6.19) a (6.21) obtém-se

$$\int_0^L A_{qv} \tilde{T}_w(z, s) dz = \gamma_{6e} \tilde{I}_e(s) + \gamma_{6c} \tilde{I}_c(s) + \gamma_{6v} \tilde{I}_v(s) \quad (6.22)$$

onde

$$\gamma_{6e} = \frac{\gamma_{3e} L_e A_{qve}}{\gamma_{1e}^2} + \gamma_{5e} \left( \frac{A_{qve}}{\gamma_{1e}^2} - \frac{A_{qva}}{\gamma_{1a}^2} \right) + \gamma_{4e} \left( \frac{A_{qva}}{\gamma_{1a}^2} - \frac{A_{qvc}}{\gamma_{1c}^2} \right)$$

$$\gamma_{6c} = \frac{\gamma_{3c} L_c A_{qvc}}{\gamma_{1c}^2} + \gamma_{5c} \left( \frac{A_{qve}}{\gamma_{1e}^2} - \frac{A_{qva}}{\gamma_{1a}^2} \right) + \gamma_{4c} \left( \frac{A_{qva}}{\gamma_{1a}^2} - \frac{A_{qvc}}{\gamma_{1c}^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{6v} = & \frac{\gamma_{2e} L_e A_{qve}}{\gamma_{1e}^2} + \frac{\gamma_{2a} L_a A_{qva}}{\gamma_{1a}^2} + \frac{\gamma_{2c} L_c A_{qvc}}{\gamma_{1c}^2} + \\ & + \gamma_{5v} \left( \frac{A_{qve}}{\gamma_{1e}^2} - \frac{A_{qva}}{\gamma_{1a}^2} \right) + \gamma_{4v} \left( \frac{A_{qva}}{\gamma_{1a}^2} - \frac{A_{qvc}}{\gamma_{1c}^2} \right) \end{aligned}$$

Aplicando a equação (6.17) na equação (4.5) obtém-se

$$\int_0^L A_{qv} \tilde{T}_w(z, s) dz + (B_{qve} L_e + B_{qvc} L_c + B_{qva} L_a) \tilde{I}_v(s) + \frac{SV}{2\pi r_v} \tilde{I}_v(s) = 0$$

Substituindo-se o lado esquerdo da equação (6.22) nesta equação obtém-se

$$\tilde{T}_v(s) = - \frac{\gamma_{6e} \tilde{f}_e(s) + \gamma_{6c} \tilde{f}_c(s)}{\frac{sV}{2\pi r_v} + B_{q_{ve}} L_e + B_{q_{vc}} L_c + B_{q_{va}} L_a + \gamma_{6v}} \quad (6.23)$$

Conclui-se a solução, com a temperatura do núcleo sendo dada pela equação (6.23), a temperatura do invólucro sendo dada pela substituição de  $\tilde{T}_v$  da equação (6.23) nas expressões de  $\tilde{\Phi}_c$  e  $\tilde{\Phi}_e$  e estas nas equações (6.18) a (6.20) e finalmente a temperatura da estrutura capilar sendo dada pelas equações (6.15) e (6.18), nas quais substituí-se  $\tilde{T}_w$  e  $\tilde{T}_v$  pelos valores calculados.

## 7. REGIME PERMANENTE E TRANSIENTE

Para resolver o modelamento proposto, utilizou-se a transformada de Laplace obtendo-se soluções no domínio de  $s$ .

Para a resposta em frequência deseja-se a transformada direta das variáveis. Para uma solução no domínio do tempo, deve-se em princípio calcular a transformada inversa.

A transformada para o domínio do tempo não foi objeto de investigação deste trabalho. Estamos interessados apenas na resposta em frequência e no regime permanente.

A solução de regime estacionário pode ser obtida como segue

Seja

$$\tilde{g}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} g^*(t) dt \quad (7.1)$$

Através de integração por partes, ou da regra da transformada da derivada obtém-se

$$s\tilde{g}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} g^*(t) dt + g^*(0) \quad (7.2)$$

Fazendo  $s$  tender a zero e tomando o limite tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} (s\tilde{g}(s)) &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} g^*(t) dt + g^*(0) = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} \frac{d}{dt} g^*(t) dt + g^*(0) = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\tau} e^{-st} \frac{d}{dt} g^*(t) dt + g^*(0) = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} \frac{d}{dt} g^*(t) dt + g^*(0) = \\
&= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} g^*(t) dt + g^*(0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} g^*(\tau)
\end{aligned}$$

Obteve-se desta forma o valor estacionário de uma função  $g^*(t)$  a partir de sua transformada de Laplace  $\tilde{g}(s)$ . Este resultado é conhecido como o Teorema do Valor Final. Para obtermos por exemplo a temperatura no regime permanente devemos calcular o limite

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s\tilde{T}(s)) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} T^*(\tau) \quad (7.3)$$

Note-se que o que se obtém, na verdade, é o acréscimo de temperatura  $T^*(\infty) = T(\infty) - T_0$  que ocorre quando se aumenta o valor da condição de contorno em  $f^*(z, \infty) = f(z, \infty) - f_0(z)$ . Devido a linearidade do problema, qualquer que seja a condição inicial, o acréscimo de temperatura será o mesmo quando for especificado o acréscimo da condição de contorno. Podem-se considerar portanto que  $f_0(z)$  e conseqüentemente  $T_0$  sejam nulos. Por conseguinte o acréscimo se confunde com a própria temperatura.

Quando se aplica a teoria de controle é comum ao invés de se tomar  $s$  tendendo a zero fazer  $s$  igual a zero na equação acima, por que geralmente  $\tilde{g}(s)$  tem um polo simples em  $s$ . Isto não será possível no presente caso como se pode ver a seguir.

Na solução principal, a equação (5.4) deixa de ser uma equação de Bessel quando  $\lambda_n$  e  $s$  são ao mesmo tempo nulos. Por conseguinte as soluções deixam de ser funções de Bessel, tornando inválidas as equações (5.9) e (5.10).

Uma maneira de se contornar este problema seria a de se recalculer os primeiros termos das equações (5.9) e (5.10), já que  $n$  precisa ser nulo para que  $\lambda_n$  o seja. Ao invés de se obter funções de Bessel obteríamos a função constante e função logarítmica e seguiríamos do mesmo modo. Esta maneira não é muito interessante por que teríamos duas soluções, para o caso de  $s$  ser nulo ou não e além do evidente trabalho algébrico, não poderíamos nos utilizar do regime permanente para validar as soluções antes de usá-las na resposta em frequência.

No modelo simplificado R o problema persistiria por que a equação (6.1) deixaria de ser uma equação de Bessel tornando inválida a equação (6.8). Deveríamos, portanto, refazer todas as demais equações. O mesmo pode-se dizer do modelo simplificado S a partir da equação (6.19). Assim, ter-se-á de trabalhar com o limite de  $s$  ao invés de especificar o seu valor.

O sistema obtido na solução principal fornece as constantes  $A_{wm}$  e  $B_{wm}$ . Através das equações (5.19), (5.20) e (5.22) resultam as constantes  $A_{im}$ ,  $B_{im}$  e a temperatura  $\tilde{T}_v$ . Das constantes  $A_{wm}$ ,  $A_{im}$ ,  $B_{wm}$  e  $B_{im}$  resultam através das equações (5.9) e (5.10) as temperaturas  $\tilde{T}_w$  e  $\tilde{T}_i$  que por sua vez resultam nos fluxos  $\tilde{q}_w$  e  $\tilde{q}_i$ . Todas estas relações são lineares em  $A_{wm}$ ,  $A_{im}$ ,  $B_{wm}$ ,  $B_{im}$  e  $T$ . Multiplicando-se por  $s$  o lado direito da equação matricial obtém-se  $sA_{wm}$  e  $sB_{im}$  e conseqüentemente obtém-se diretamente  $s\tilde{T}$  e  $s\tilde{q}$ .

A única mudança que ocorre no sistema é em  $S_n$  que é substituído por

$$sS_n = \int_0^L s\tilde{f}(z, s) \cos \frac{n\pi z}{L} dz$$

Como  $f$  será considerada constante ao longo do tempo para o regime permanente,  $\tilde{f}$  será inversamente proporcional a  $s$  e portanto  $s\tilde{f}$  independará de  $s$ . Desta forma não haverá problemas de precisão numérica quando fizermos  $s$  pequeno.

Quanto a resposta em frequência, as variáveis de saída de maior interesse são a temperatura do núcleo  $\tilde{T}_v$ , o fluxo de calor que entra pelo evaporador  $Q_e$  e o fluxo de

calor que sai pelo condensador  $Q_c$ . As variáveis de entrada são  $f_e$  e  $f_c$ , que são proporcionais às temperaturas do meio, do evaporador e do condensador, respectivamente, exceto no caso em que o coeficiente de película do evaporador é nulo, por que neste caso  $f_e$  denota o fluxo de calor prescrito nessa parte do tubo.

Tome-se um tubo em regime permanente com um certo fluxo de calor entrando pelo evaporador, uma certa temperatura do núcleo e um certo fluxo de calor saindo pelo condensador e oscilemos senoidalmente uma das variáveis de entrada em torno do valor em que estava inicialmente. Quando o regime estacionário é alcançado com a oscilação senoidal de uma das variáveis de entrada, as variáveis de saída também estarão oscilando senoidalmente e com a mesma velocidade angular da entrada. No entanto, cada uma das variáveis de saída vai apresentar uma variação senoidal defasada de um certo ângulo  $\phi$  em relação a de entrada. Esta defasagem depende da velocidade angular da entrada e naturalmente se anula na medida em que a velocidade angular tende a zero. Da mesma forma, a amplitude das saídas também dependem da velocidade angular da entrada e naturalmente diminuem, na medida em que se aumenta a referida velocidade.

A maneira como variam o ângulo de defasagem e a amplitude das saídas com a velocidade angular caracteriza o comportamento dinâmico do tubo de calor.

Observe-se que o sistema obtido no Capítulo 5 necessita de  $\tilde{f}(s)$  para calcular  $A_{wm}$  e  $B_{wm}$ . Todavia podemos modificá-lo para obtermos diretamente  $A_{wm}/\tilde{f}_e(s)$ ,  $A_{wm}/\tilde{f}_c(s)$ ,  $B_{wm}/\tilde{f}_e(s)$  e  $B_{wm}/\tilde{f}_c(s)$  que são os parâmetros necessários para se calcular as funções de transferência. Isto é feito dividindo o lado direito da equação matricial por  $\tilde{f}_e(s)$  e  $\tilde{f}_c(s)$ . A única modificação é feita nos elementos da matriz [S] que passam a ser expressos por

$$\frac{S_m}{\tilde{f}_e(s)} = \frac{\text{sen}(m\pi L_e)}{m\pi/L} \quad (7.5)$$

no primeiro caso e por

$$\frac{S_m}{\tilde{I}_c(s)} = \frac{\text{sen}(m\pi(L-L_e))/L}{m\pi/L} \quad (7.6)$$

no segundo caso.

Operações semelhantes são utilizadas para se obter as funções de transferência dos modelos simplificados.

## 8. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os modelos aqui apresentados foram implementados (vide anexo) e testados para tubos cujas características estão especificadas nas tabelas 8.1 a 8.3. Os valores das constantes físicas foram estimadas a partir das referências [20] a [25]. Os resultados estão apresentados nas figuras 8.1 a 8.22.

Observe-se que os valores estimados para  $c_1$ ,  $c_v$ ,  $M_{v0}$  e  $H_{lv0}$  não influem no resultado da equação (4.5) quando  $s$  tende a zero. Também os valores de  $\alpha_w$  e  $\alpha_i$  não influem no resultado de  $\alpha_{wm}$  e  $\alpha_{im}$  neste caso. Assim, pode-se arbitrar tais valores para se obter os resultados no regime permanente.

Numericamente isto se confirma. Teoricamente isto era esperado já que tais parâmetros não constam de um modelo permanente.

O modelo de [7] deveria levar a resultados idênticos aos resultados obtidos do modelo aqui apresentado para casos idênticos analisados. Os resultados, entretanto, foram bem diferentes conforme pode ser visto nas figuras 8.1 a 8.12. Refazendo-se os cálculos que aparecem em [7] observamos que na equação linear advinda da equação (3.20) foi considerado que o produto interno de duas autofunções é nulo, quando na verdade apareciam equações que não expressavam produtos internos. Mais especificamente a integral

$$\int \cos \frac{m\pi z}{L} \cos \frac{n\pi z}{L} dz ; m \neq n$$

só é um produto interno e portanto só tem valor nulo quando definida no intervalo  $[0, L]$  e não em sub-intervalos deste intervalo. Apenas este pequeno erro já é o suficiente para comprometer os resultados. Os demais cálculos não foram refeitos, apesar de se observar que as matrizes obtidas em [7] são por demais esparsas, indicando que este erro foi cometido mais vezes.

No regime permanente, todo calor que entra no evaporador sai pelo condensador e então

$$Q_e = h_c (T_\infty - T_c) 2\pi r_s L_c$$

de onde se obtém

$$T_c = T_\infty + \frac{Q_e}{2\pi r_s L_c h_c}$$

Esta equação fornece uma maneira de se testar os resultados. O tubo (iv) de [7] apresenta  $T_c = 52^\circ\text{C}$  que é bem diferente do valor correto de  $39^\circ\text{C}$ . O modelo de [6] também leva a este valor médio  $T_c$ , o que nos leva a concluir que o erro está nos dados da tabela.

No regime permanente, o modelo simplificado S leva aos mesmos resultados que o modelo de [6]. Vemos que este se aproxima bastante do modelo bidimensional quando a condutividade térmica do invólucro é grande, conforme pode ser visto nas figuras 8.1 a 8.3 e 8.10. Os próprios tubos construídos pelos autores referenciados são os que levam aos melhores resultados (figuras 8.1 a 8.3).

O modelo simplificado R, ao contrário, levou a bons resultados, quando comparados com o modelo bidimensional, para os tubos 4 a 6, conforme pode ser visto nas figuras 8.4 a 8.6. Os resultados de ambos os modelos simplificados não foram bons

para os tubos 11 e 12 conforme pode ser visto nas figuras 8.11 e 8.12. Quanto aos tubos 7 a 9 os modelos simplificados levaram a bons ou maus resultados dependendo do ponto de vista de quem analisa as figuras 8.7 a 8.9. Finalmente para o tubo 10 os três modelos se aproximaram conforme pode ser visto na figura 8.10.

Observe-se que o modelo simplificado R não reproduz a distribuição de temperaturas nas regiões próximas às interfaces das secções, pois prevê saltos que ocorrem nas temperaturas ao se passar de uma secção para outra conforme pode ser visto nas figuras 8.1 a 8.12. Já o modelo de [6] vai acumulando um erro ao passar de uma secção a outra a partir do condensador, devido a desconsideração da queda de temperatura que ocorre radialmente através do invólucro conforme pode ser visto nas figuras 8.4 a 8.10.

O modelo simplificado R apresentou temperaturas médias da superfície do evaporador e da secção adiabática sempre maiores que as temperaturas dos demais modelos, porque impõe fluxo de calor radialmente em cada secção. Em outras palavras, a imposição do fluxo radialmente faz com que a queda de temperatura ao longo do tubo seja maior.

No regime permanente, quando o fluxo de calor para o evaporador é prescrito, a temperatura de todo o tubo varia linearmente com a temperatura do meio do condensador, isto é, aumento (ou diminuição) desta, em certo valor, acarreta em aumento (ou diminuição) da temperatura de todo o tubo precisamente neste mesmo valor.

Notou-se que o coeficiente de película do condensador tem influência semelhante sobre a temperatura do tubo: Se o variarmos, obtém-se uma variação da temperatura de cada ponto do tubo, de maneira que o produto do coeficiente de película pela diferença entre esta e a temperatura do meio permanece constante.

A diferença entre a temperatura média da superfície adiabática (ou do vapor) e do condensador é devida as condutividades térmicas do invólucro e da estrutura capilar.

Como a condutividade do invólucro é conhecida, pode-se estimar a condutância efetiva da estrutura capilar por esta diferença. Esta estimativa é mais precisa nos tubos para os quais o modelo simplificado S leva a bons resultados.

Da mesma maneira, a diferença entre a temperatura média do evaporador e da secção adiabática (ou do vapor) serve para estimar o coeficiente de película efetivo da estrutura capilar do evaporador.

A diferença de resultados do modelo bidimensional para os modelos simplificados não foi de maneira alguma devida a condução axial na estrutura capilar. Um modelo que considerou apenas condução radial na estrutura capilar foi obtido e levou a resultados idênticos aos do modelo bidimensional. A idéia inicial para se obter tal modelo foi a de se truncar a série da temperatura da estrutura capilar no primeiro termo para que não houvesse condução axial nesta. Porém esta idéia é incorreta porque com isso esta temperatura não pode variar ao longo do tubo. Conseguiu-se os resultados, expandindo o evaporador efetivo até este tomar todo o tubo e substituindo o valor do coeficiente de película efetivo por um correspondente a condutividade da estrutura capilar. Com isso pode-se relaxar a condição de condução pura radial na estrutura capilar do evaporador. Fica como sugestão para um futuro trabalho a consideração de fluxo apenas radial em toda a estrutura capilar.

Na resposta em frequência contudo, as diferenças entre os modelos foram mais significativas.

Os gráficos do regime transiente devem ser interpretados da seguinte maneira. Suponhamos que o tubo tenha um fluxo de calor prescrito no evaporador  $q_0$  e esteja em regime permanente com uma temperatura do vapor  $T_{v0}$ . Se aumentarmos o fluxo para  $q_1$ , a temperatura de vapor varia e atinge quando em regime permanente um valor  $T_{v1}$ . A razão entre o aumento da temperatura e o aumento do fluxo independe dos valores escolhidos para  $q_0$  e  $q_1$  por que os modelos são lineares. Se ao invés de aumentarmos o

fluxo para  $q_1$  o variarmos senoidalmente com uma amplitude  $\Delta q_0$  e velocidade angular  $\omega$ , a temperatura de vapor irá variar senoidalmente, quando alcançado o regime estacionário na frequência, com amplitude  $\Delta T_{v0}$ , na mesma velocidade angular  $\omega$  e com uma defasagem. Os gráficos apresentam a relação entre as amplitudes, isto é,  $\Delta T_{v0}/\Delta q_0$ , adimensionalizada em relação a mesma quando as frequências tendem a zero, que denotaremos por  $\Lambda$ , e a defasagem que denotaremos por  $\Psi$ , em função da frequência  $\omega$ . Pela teoria de controle [2] tais variáveis são dadas por

$$\Lambda = \left| \frac{\tilde{T}_v(j\omega) / \tilde{I}_e(j\omega)}{\tilde{T}_v(0) / \tilde{I}_e(0)} \right|$$

$$\Psi = \angle \frac{\tilde{T}_v(j\omega) / \tilde{I}_e(j\omega)}{\tilde{T}_v(0) / \tilde{I}_e(0)}$$

Em baixas frequências os modelos levaram a resultados bem próximos, o que não pode ser verificado através dos gráficos devido a adimensionalização usada, mas pôde ser verificado pelo autor quando obteve os resultados dimensionais. Esta convergência em baixas frequências corresponde a temperaturas de vapor próximas as temperaturas do regime permanente. Isto foi verificado quando se obteve os resultados deste regime.

Observando-se as figuras 8.13 a 8.22 vemos que as diferenças entre o modelo bidimensional e o modelo simplificado R, que por sua vez é uma versão aprimorada do modelo de [8], justificaram as complicações incluídas no modelo bidimensional.

O modelo simplificado S levou a resultados bem próximos aos do modelo bidimensional, exceto no caso do ângulo de defasagem para os tubos 4 a 6 em frequências mais altas, figuras 16 a 18. Não seria exágero se admitir que esse modelo é melhor que o bidimensional, já que os resultados foram semelhantes com menos complicações algébricas. No entanto, para dados que não tiveram problemas numéricos em altas frequências verificou-se grandes discrepâncias entre esse modelo e os demais.

O modelo de [8] está apoiado em experimentos. Porém um dos tubos usado nesse trabalho, e simulado aqui, mostrou não haver grandes diferenças entre os modelos, o que provavelmente se deve a utilização de cobre como material para o invólucro dos tubos naquele trabalho.

Observando-se os gráficos, principalmente os das figuras 8.13, 8.14 e 8.19 a 8.21, vemos que para baixas frequências o modelo simplificado R apresentou resposta mais rápidas (amplitude maior e defasagem menor) que os modelos B e S, os quais apresentaram valores bastante próximos nesta faixa de frequências. Esta resposta do modelo simplificado R pode ser explicada imaginando que uma situação física que representasse este modelo seria uma em que se isolasse termicamente as regiões dos tubos umas das outras fazendo com que o calor aplicado ao evaporador fosse toda dirigida ao vapor.

Já para altas frequências a situação se inverteu no caso dos tubos 1 a 3, conforme pode ser visto nas figuras 8.13 a 8.15. Note-se que esta inversão se fez sentir primeiramente no ângulo de defasagem e depois na razão de amplitude. No caso dos tubos 7 a 9 a inversão pôde ser vista para o ângulo de defasagem, figuras 8.19 a 8.21, mas o domínio apresentado não inclui frequências mais altas (por problemas numéricos) para que se possa observar se também ocorreria com a razão de amplitude.

No caso do tubo 10, figura 8.22, devido a alta condutividade do invólucro (cobre) os resultados foram muito próximos enquanto que nos tubos 4 a 6 o modelo bidimensional mostrou que as respostas são mais lentas em todo o espectro de frequência, conforme pode ser visto nas figuras 8.16 a 8.18.

tubo	refer.	L (m)	$L_c$ (m)	$L_e$ (m)	$L_i$ (m)	$r_s$ (mm)	$r_i$ (mm)	$r_v$ (mm)
1	[6]	0,610	0,290	0,122	0,122	11,11	9,460	7,620
2	[6]	0,610	0,290	0,122	0,122	11,11	9,460	7,620
3	[6]	0,610	0,320	0,198	0,198	11,11	9,460	7,620
4	[16]	0,600	0,300	0,150	0,150	30,00	20,00	18,43
5	[16]	0,600	0,300	0,150	0,150	30,00	20,00	18,43
6	[16]	0,600	0,300	0,150	0,150	30,00	20,00	18,43
7	[17]	0,480	0,068	0,048	0,048	16,00	14,00	11,20
8	[17]	0,480	0,068	0,048	0,048	16,00	14,00	10,95
9	[18]	0,500	0,189	0,048	0,048	16,00	14,00	12,15
10	[4]	0,420	0,210	0,100	-	10,015	8,450	8,200
11	[19]	0,406	0,102	0,089	0,310	30,16	24,55	12,70
12	[19]	0,406	0,102	0,089	0,310	30,16	24,55	12,00

Tabela 8.1: Parâmetros geométricos dos tubos de calor

tubo	$k_w$ (W/mK)	$k_i$ (W/mK)	$\alpha_w$ (mm <sup>2</sup> /s)	$\alpha_i$ (mm <sup>2</sup> /s)
1	375	2,180	107,2	0,2489
2	375	0,929	107,2	0,1062
3	375	0,929	107,2	0,1062
4	16,7	1,0	4,64	0,1041
5	16,7	5,0	4,64	0,5205
6	16,7	5,0	4,64	0,5203
7	21,0	6,38	4,64	0,6077
8	21,0	5,81	4,64	1,006
9	21,0	1,40	4,64	0,1440
10	369	1,017	113,6	0,0975
11	113	13		
12	113	13		

Tabela 8.2: Parâmetros físicos dos tubos de calor

tubo	$h_c$ (W/m <sup>2</sup> K)	$h_i$ (W/m <sup>2</sup> K)	Q (W)	$T_{\infty}$ (K)	V (J/K)
1	7504,3	755,7	436,7	373,15	0,2441
2	1730,3	2404,2	131,9	337,59	0,06223
3	2101,1	2404,2	71,8	337,59	0,04219
4	71,7	1000	129	293,15	0,1346
5	116	2000	248	293,15	0,1673
6	120	2400	308	293,15	0,2327
7	630	7200	181,3	273,15	0,03776
8	434	1750	67,4	273,15	0,5758
9	325	1860	120,0	278,15	0,01463
10	21,2	-	13,7	293,15	0,02746
11	585	22000	302,4	337,59	
12	525	46000	668,0	337,59	

Tabela 8.3: Parâmetros físicos dos tubos de calor

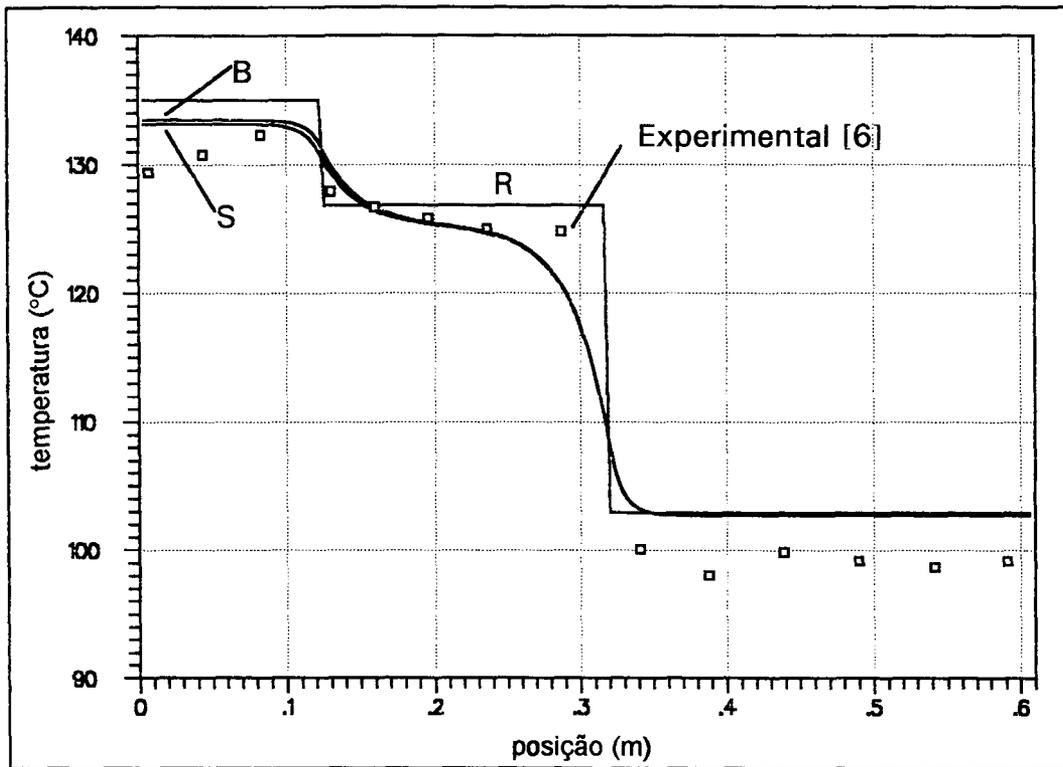


Figura 8.1: Temperatura da superfície do tubo 1

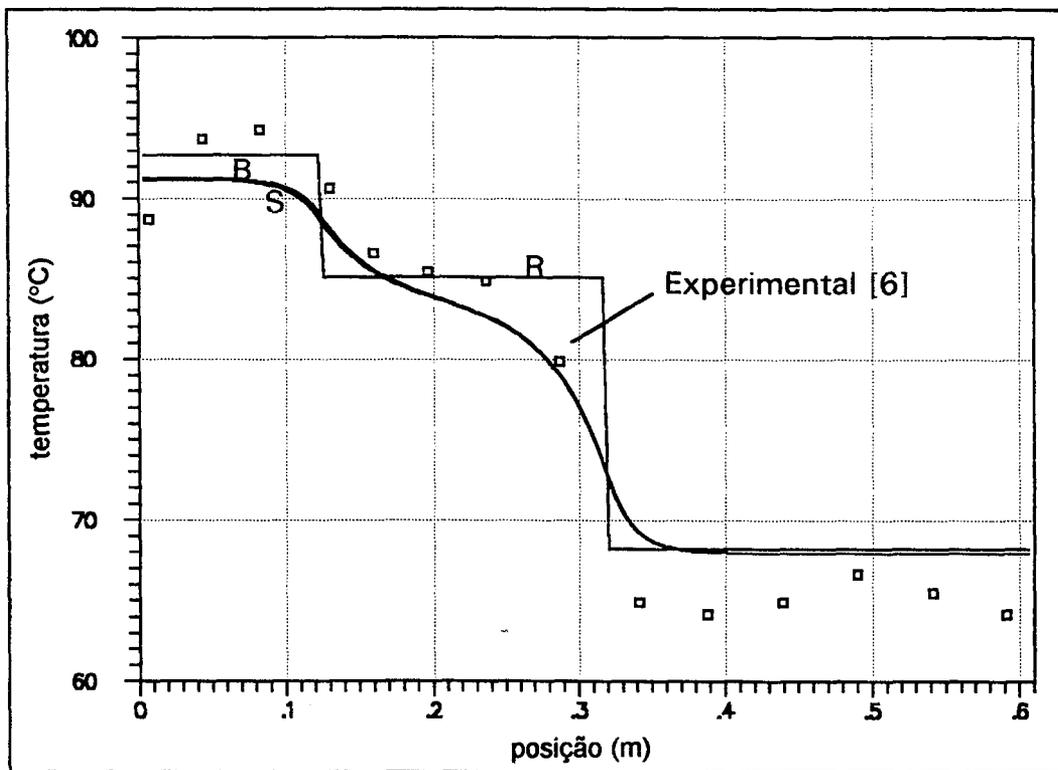


Figura 8.2: Temperatura da superfície do tubo 2

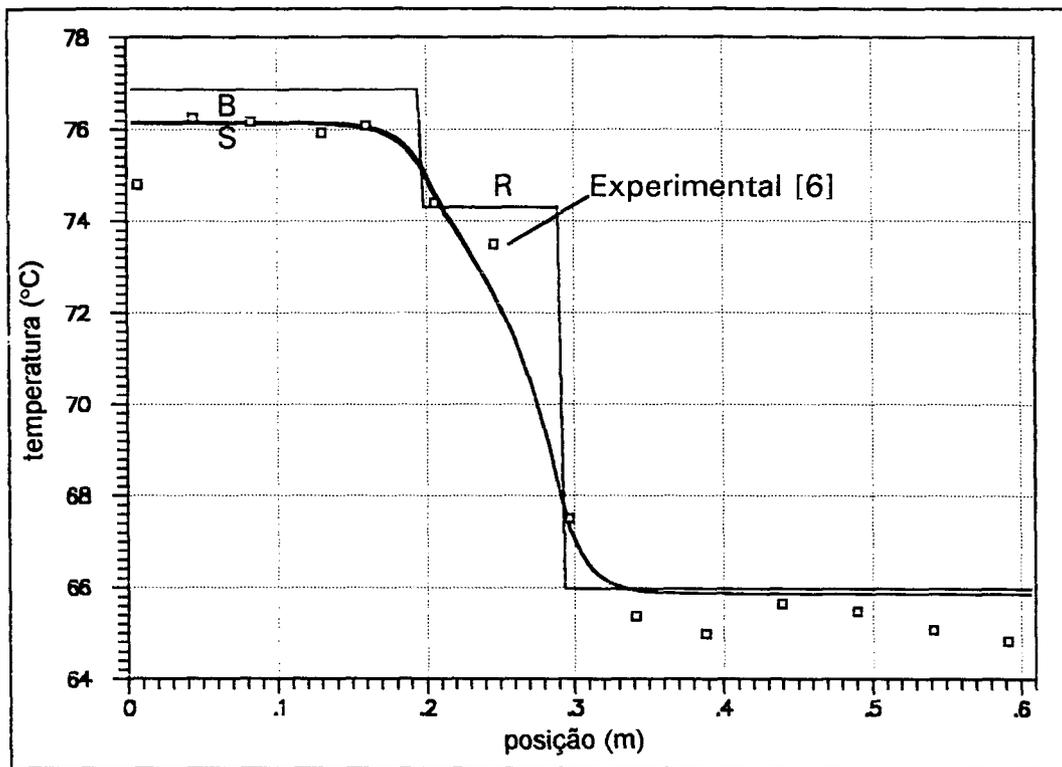


Figura 8.3: Temperatura da superfície do tubo 3

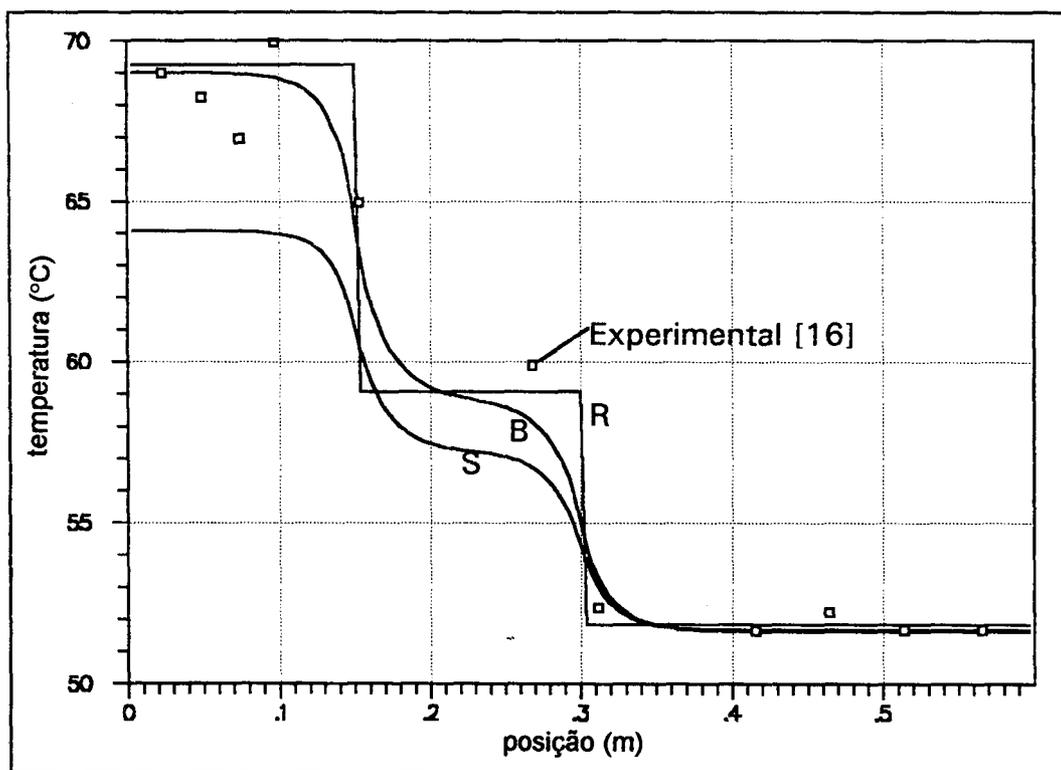


Figura 8.4: Temperatura da superfície do tubo 4

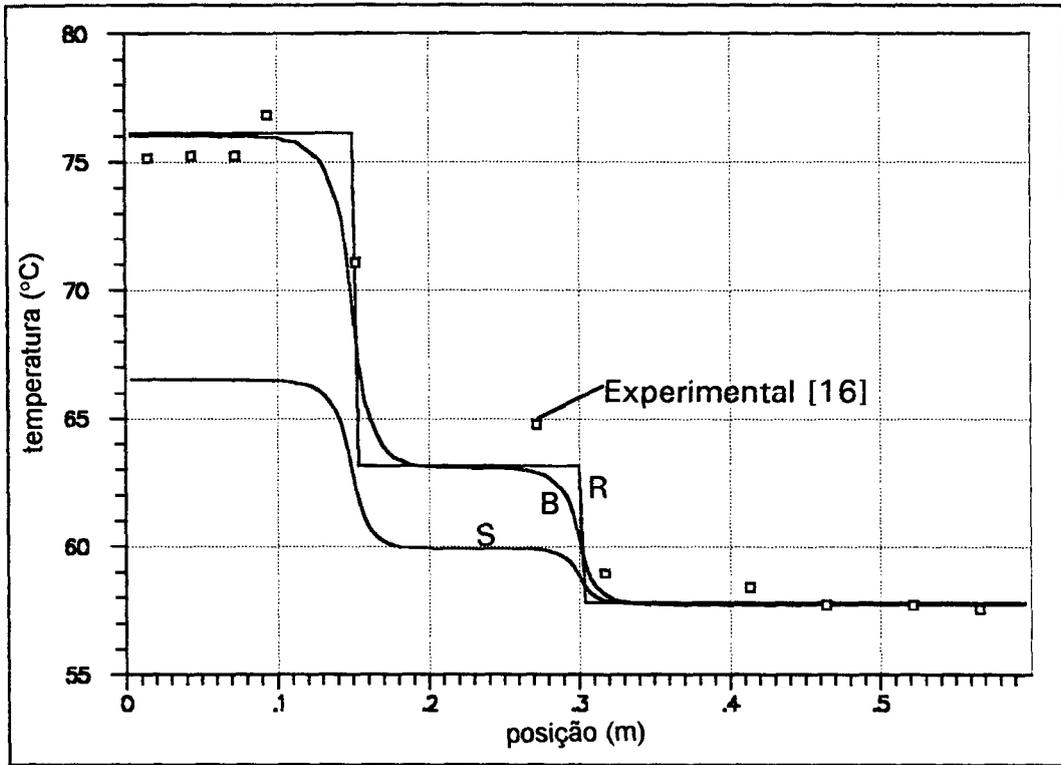


Figura 8.5: Temperatura da superfície do tubo 5

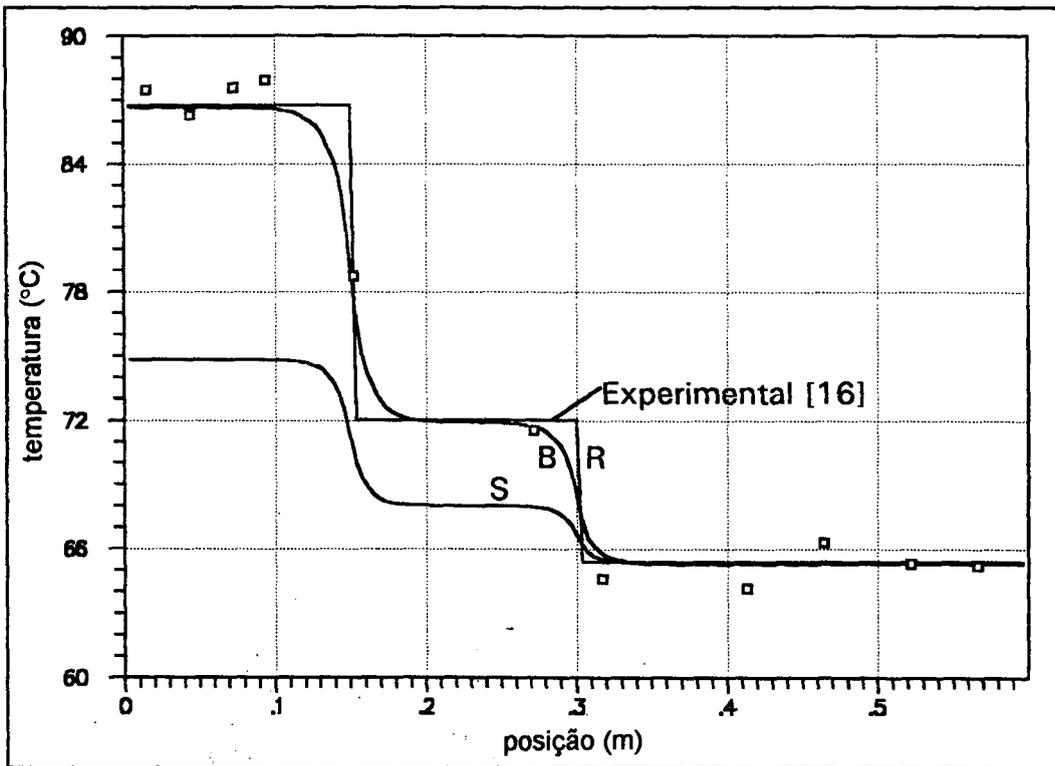


Figura 8.6: Temperatura da superfície do tubo 6

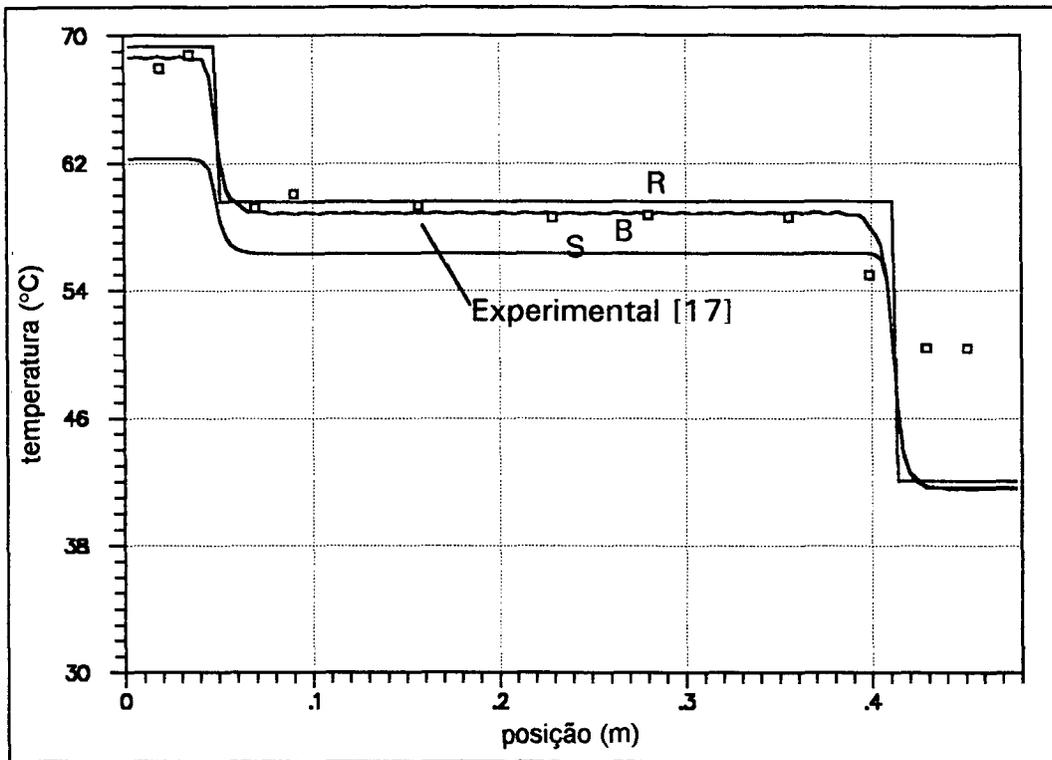


Figura 8.7: Temperatura da superfície do tubo 7

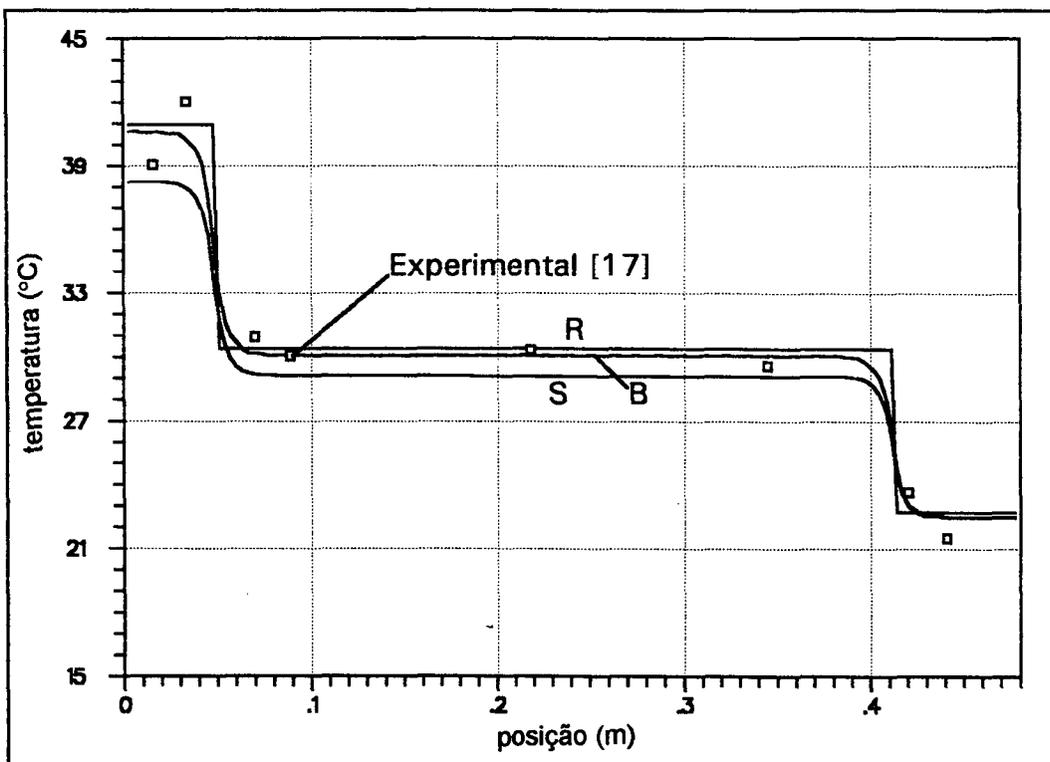


Figura 8.8: Temperatura da superfície do tubo 8

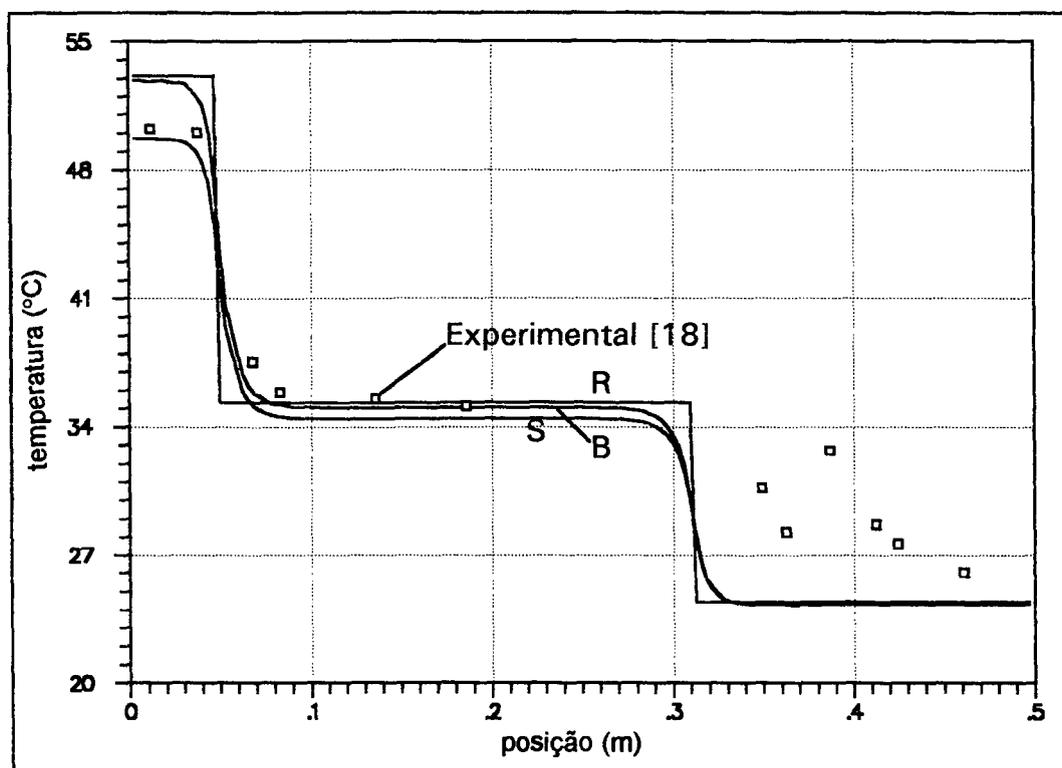


Figura 8.9: Temperatura da superfície do tubo 9

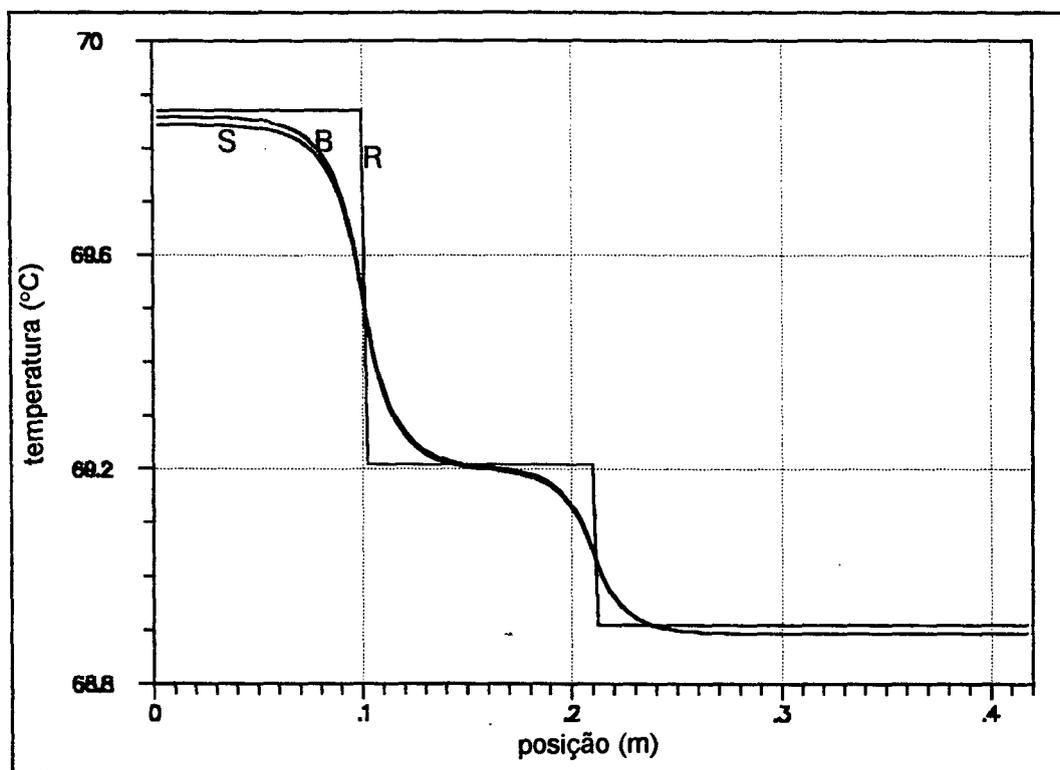


Figura 8.10: Temperatura da superfície do tubo 10

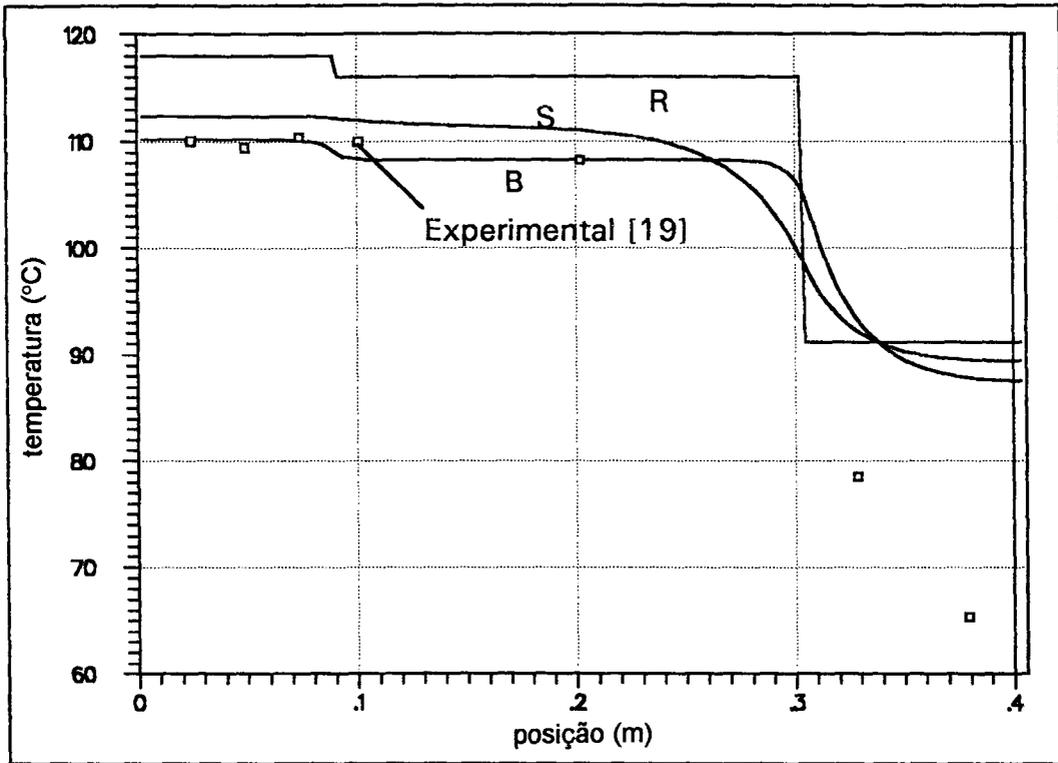


Figura 8.11: Temperatura da superfície do tubo 11

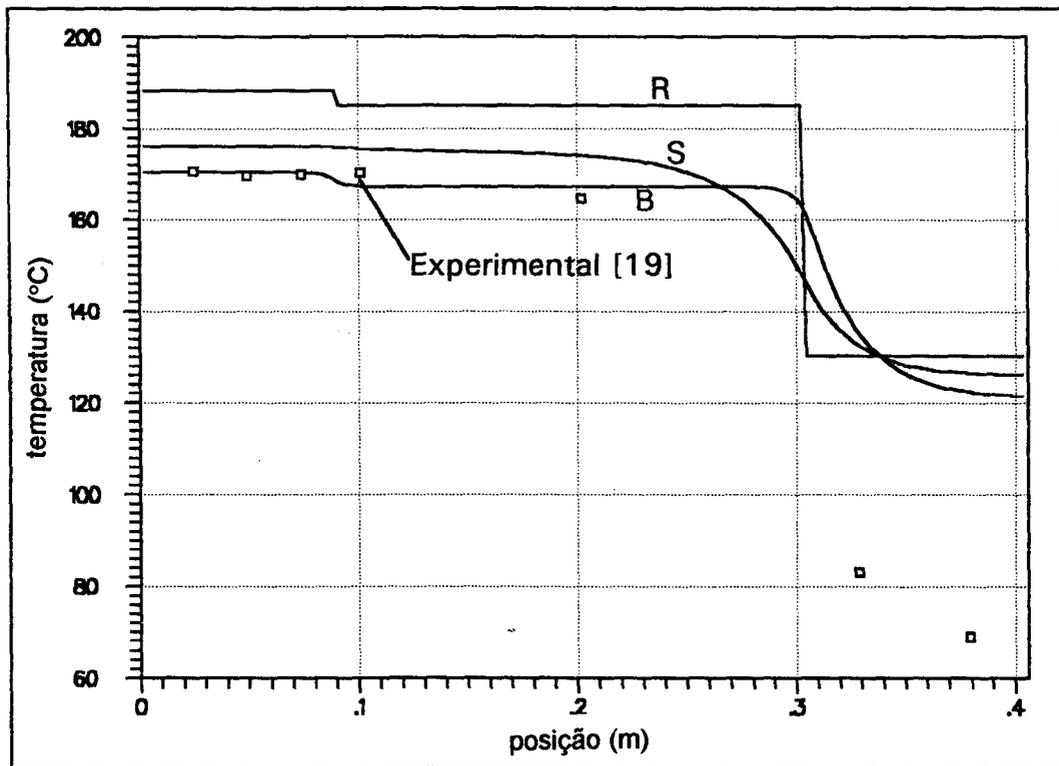


Figura 8.12: Temperatura da superfície do tubo 12

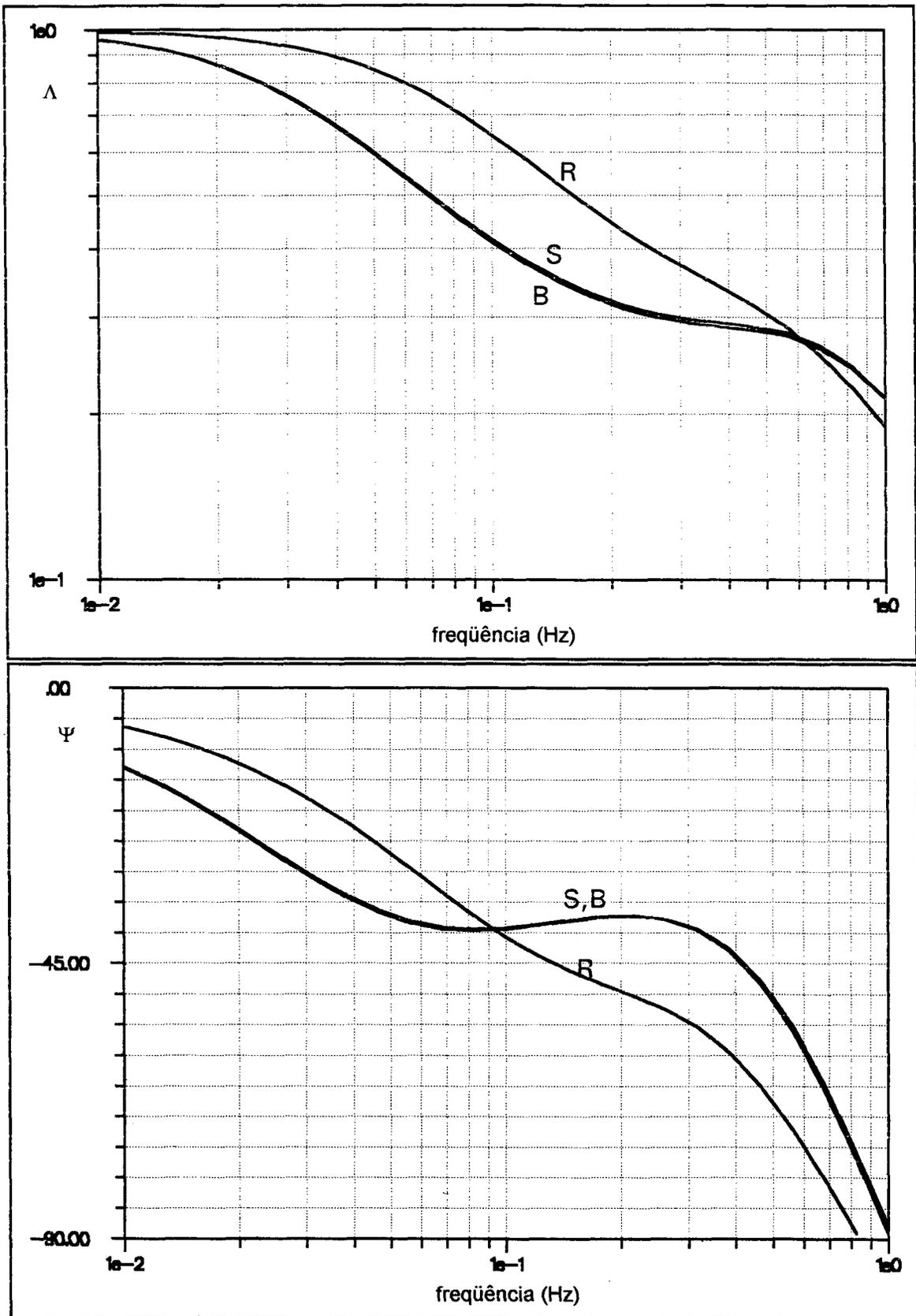


Figura 8.13: Resposta em frequência do tubo 1

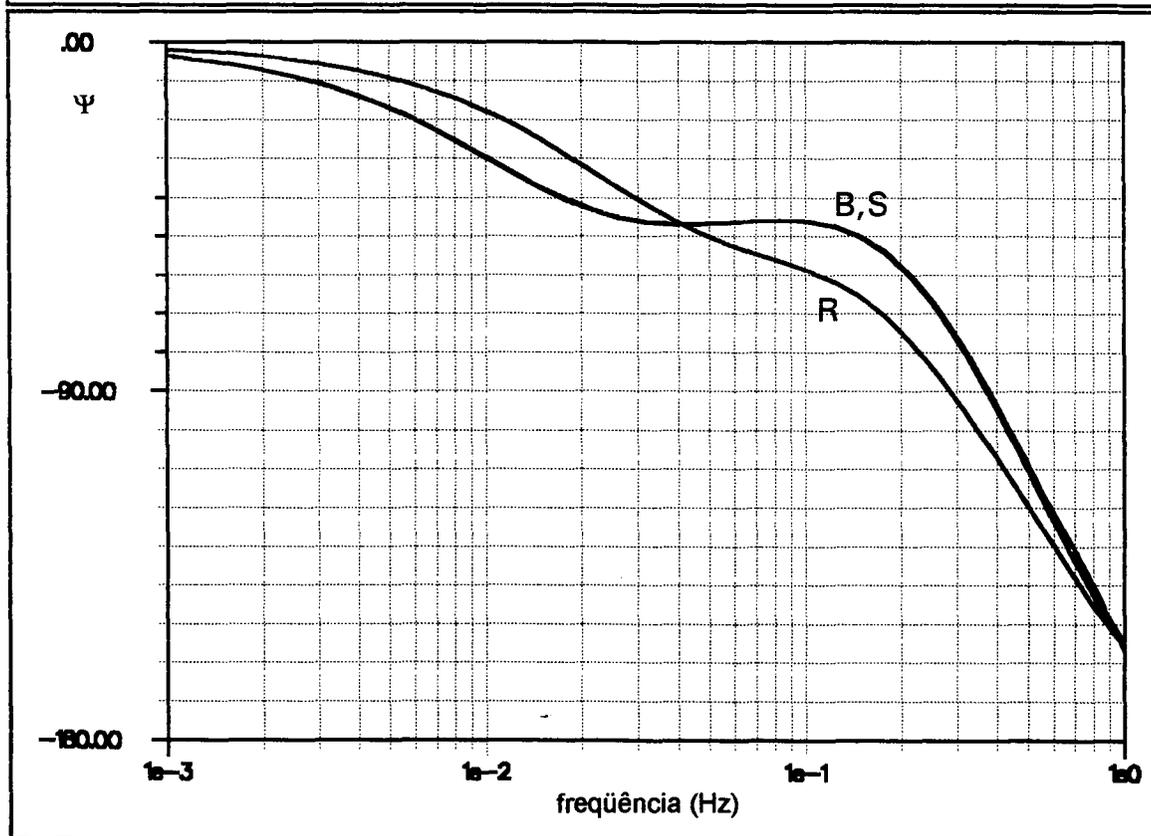
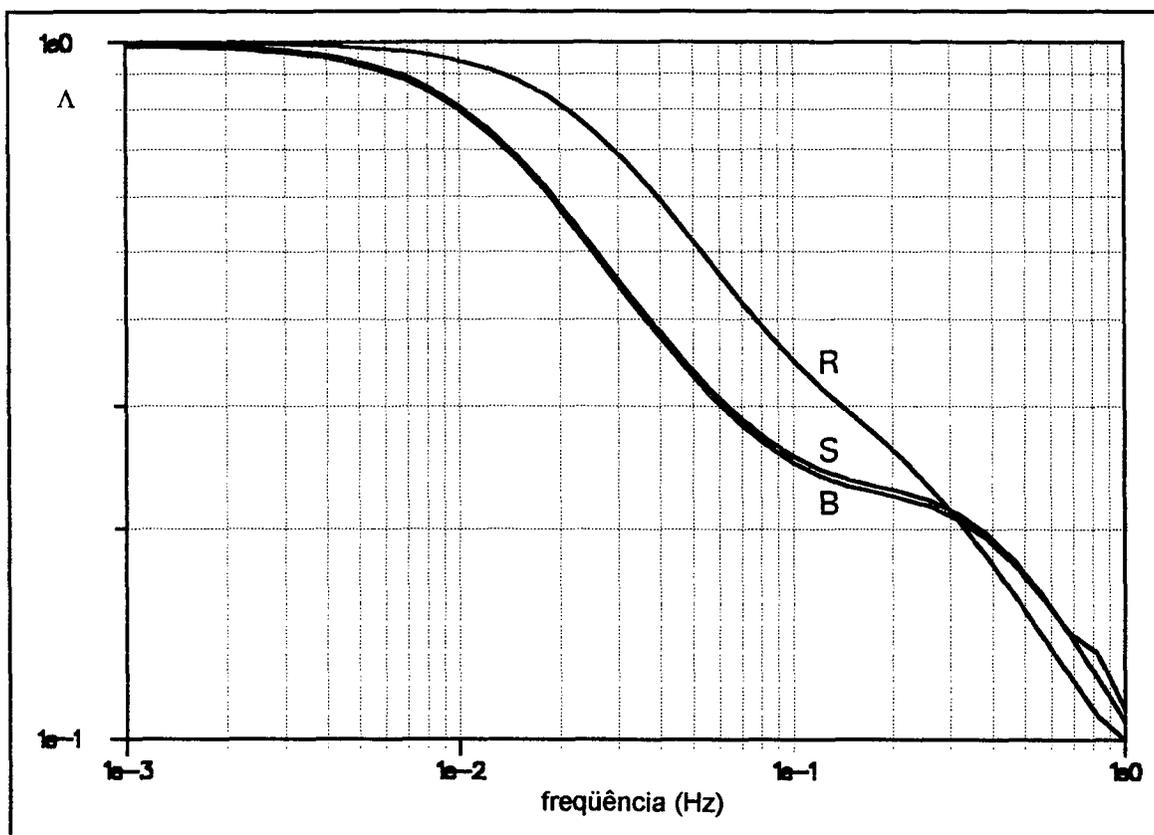


Figura 8.14: Resposta em frequência do tubo 2

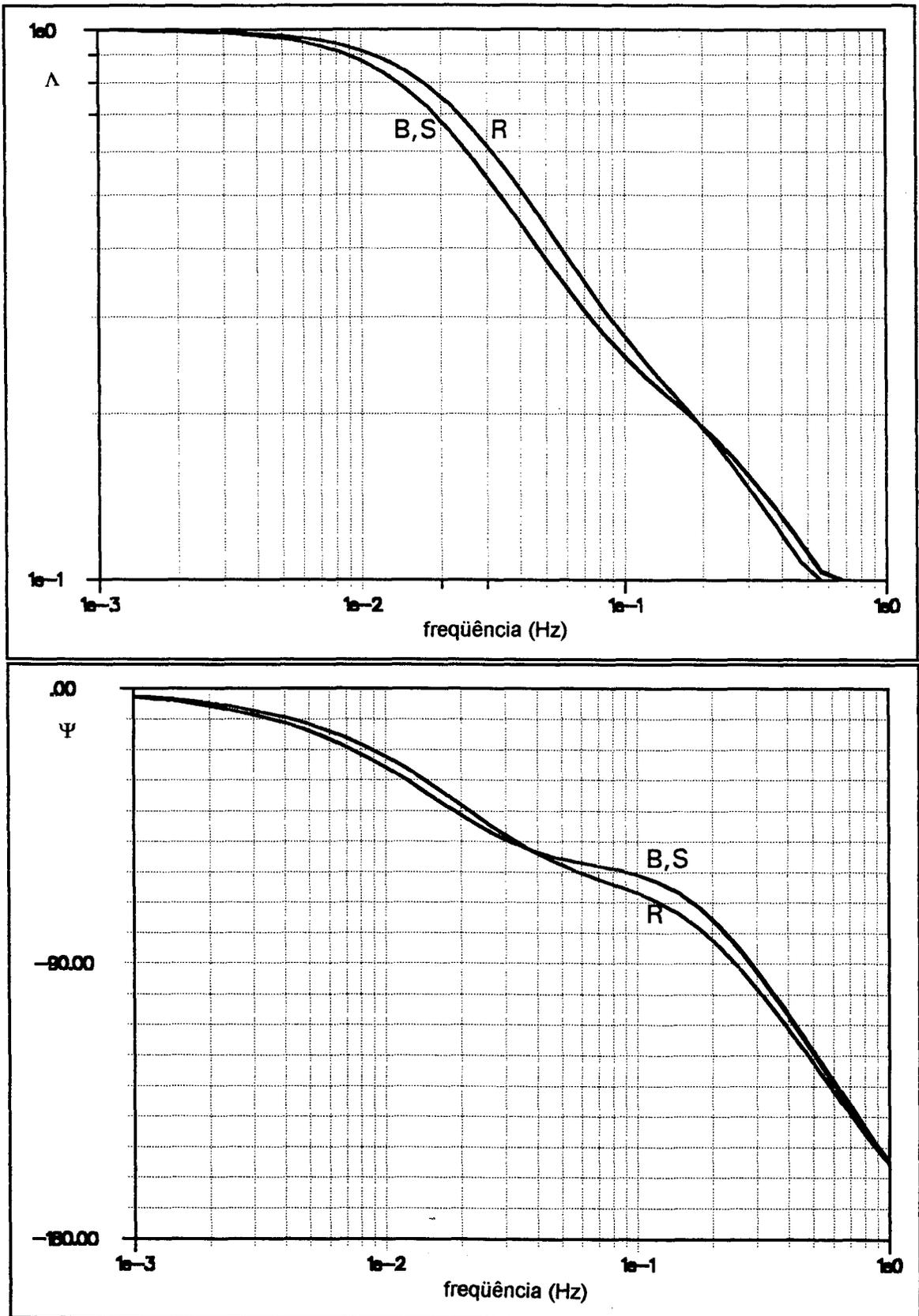


Figura 8.15: Resposta em frequência do tubo 3

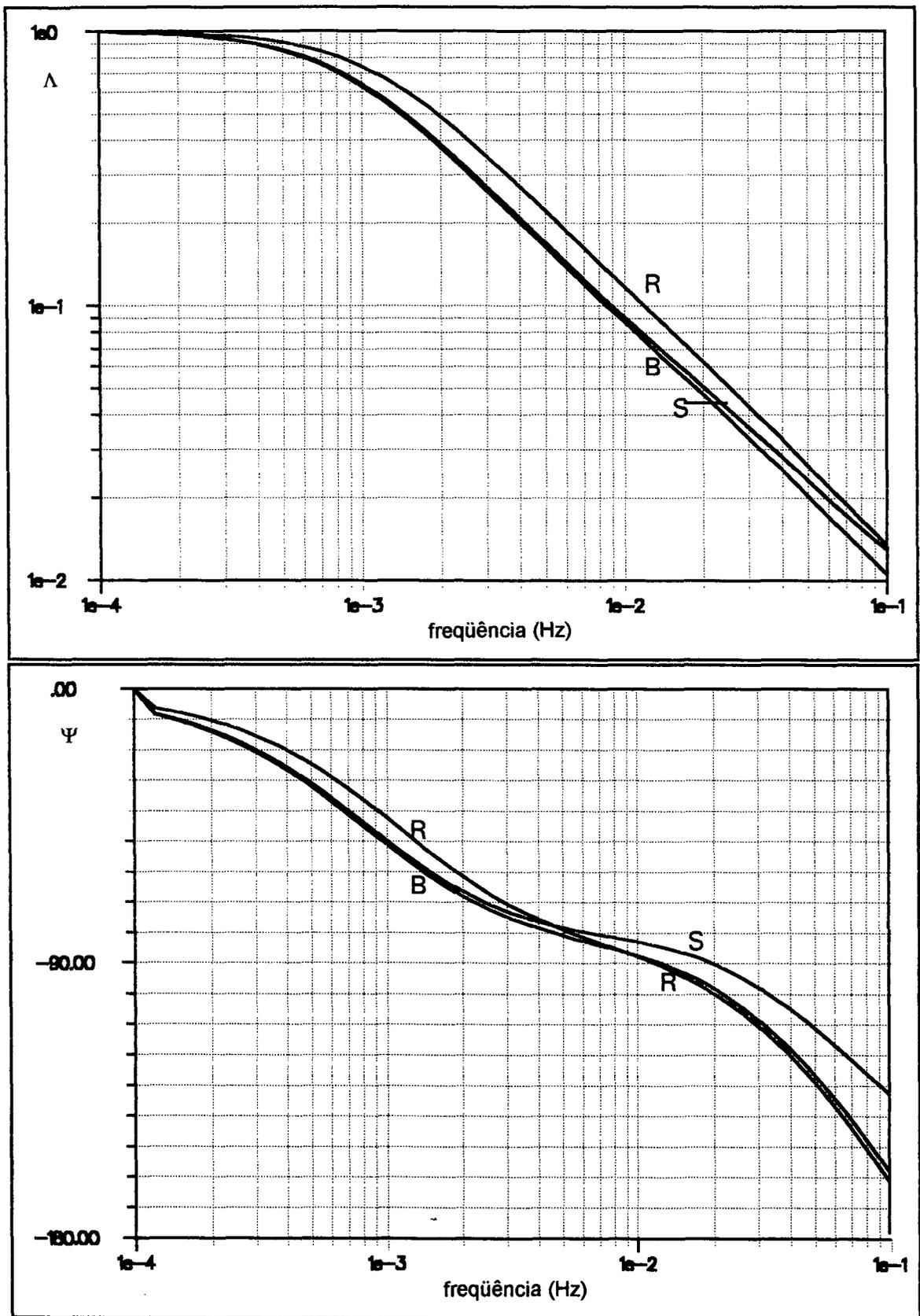


Figura 8.16: Resposta em frequência do tubo 4

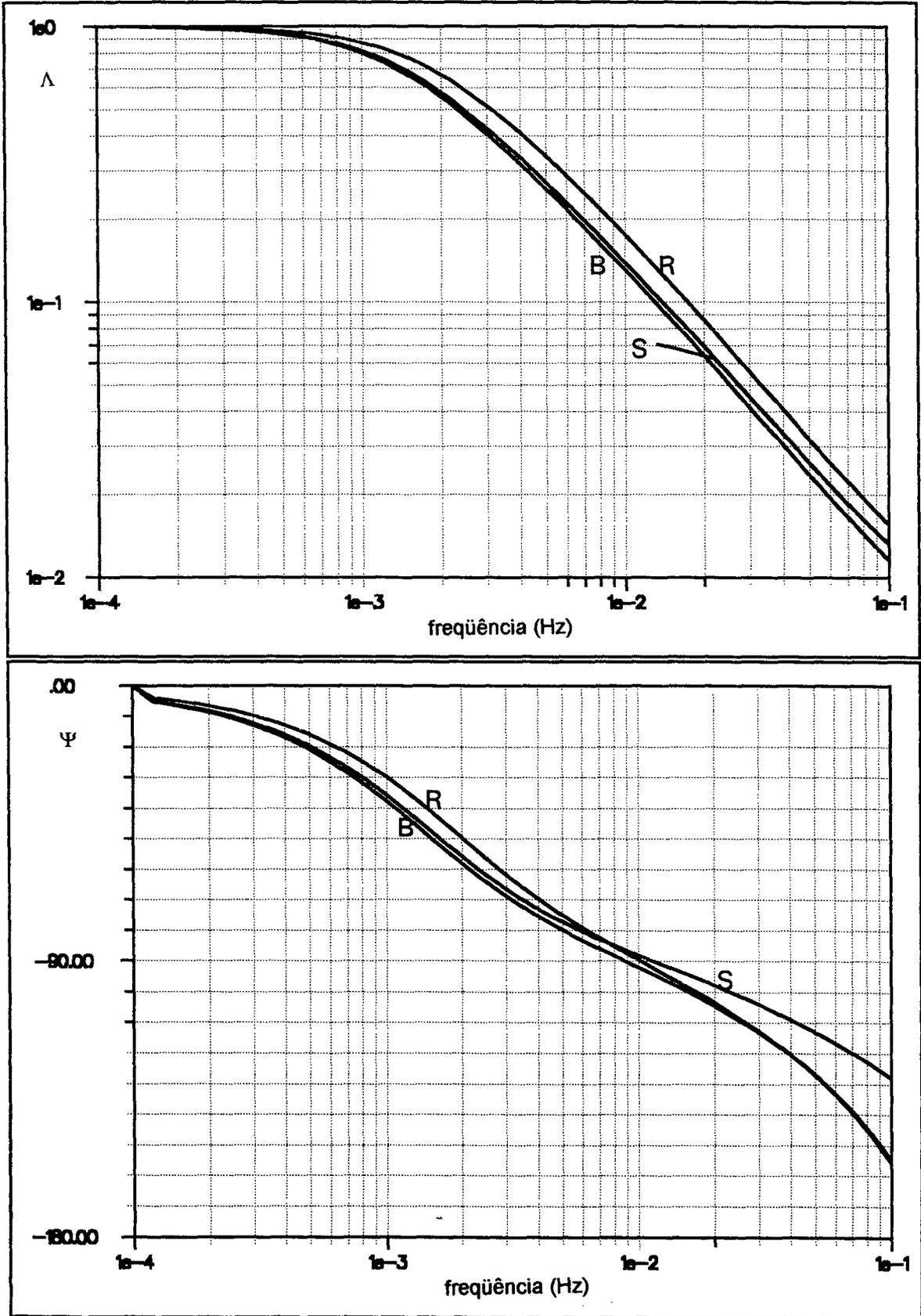


Figura 8.17: Resposta em frequência do tubo 5

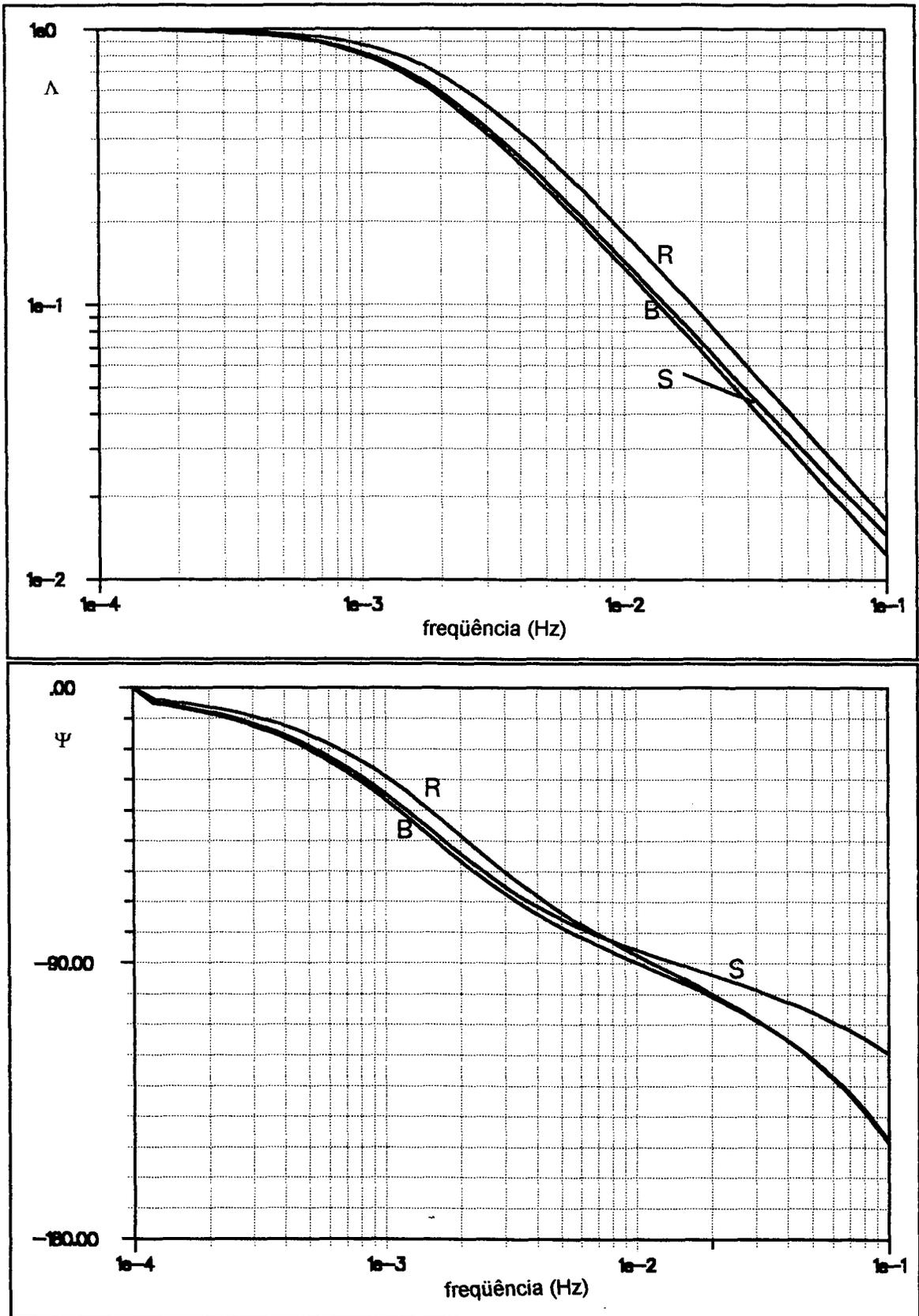


Figura 8.18: Resposta em frequência do tubo 6

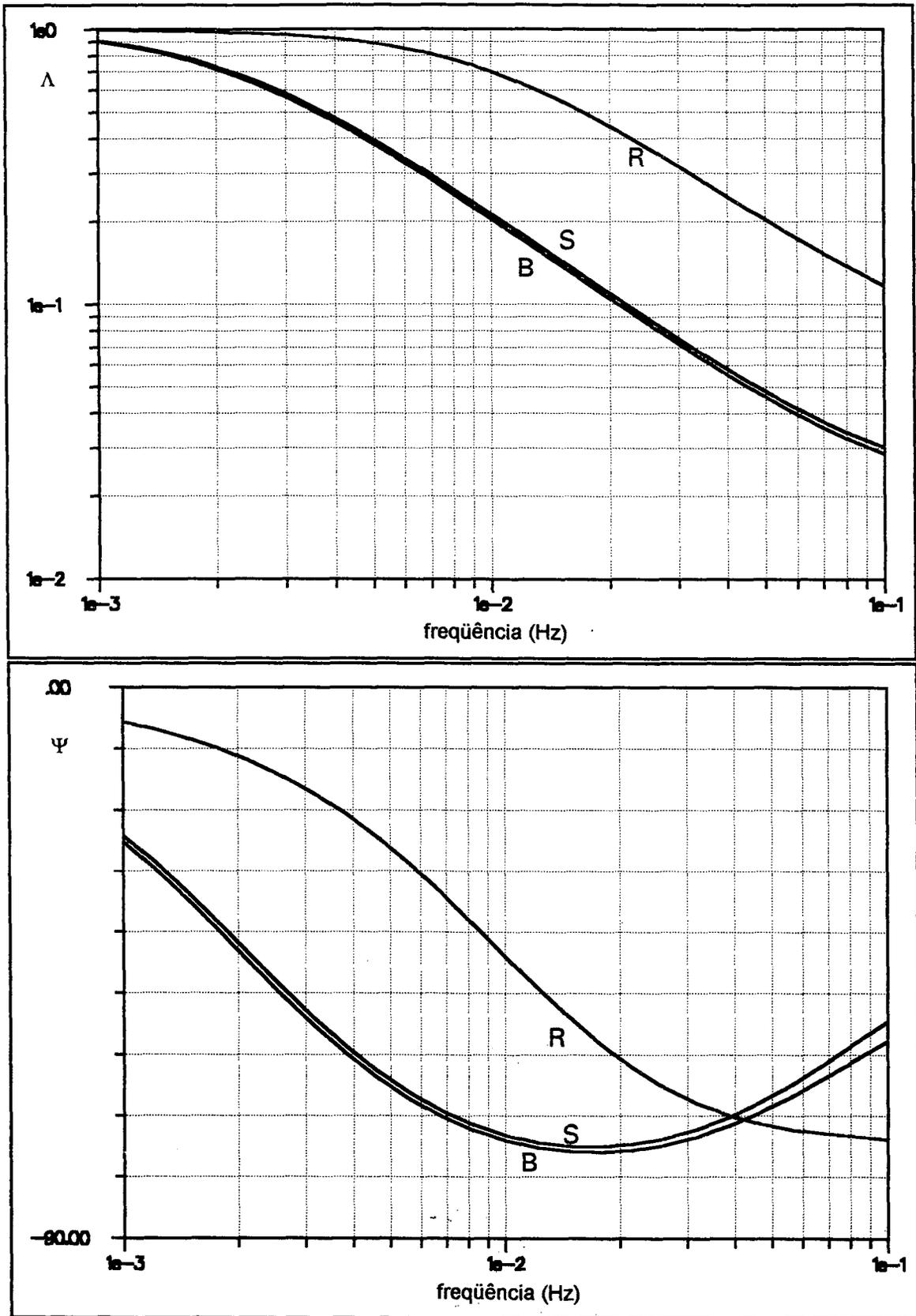


Figura 8.19: Resposta em frequência do tubo 7

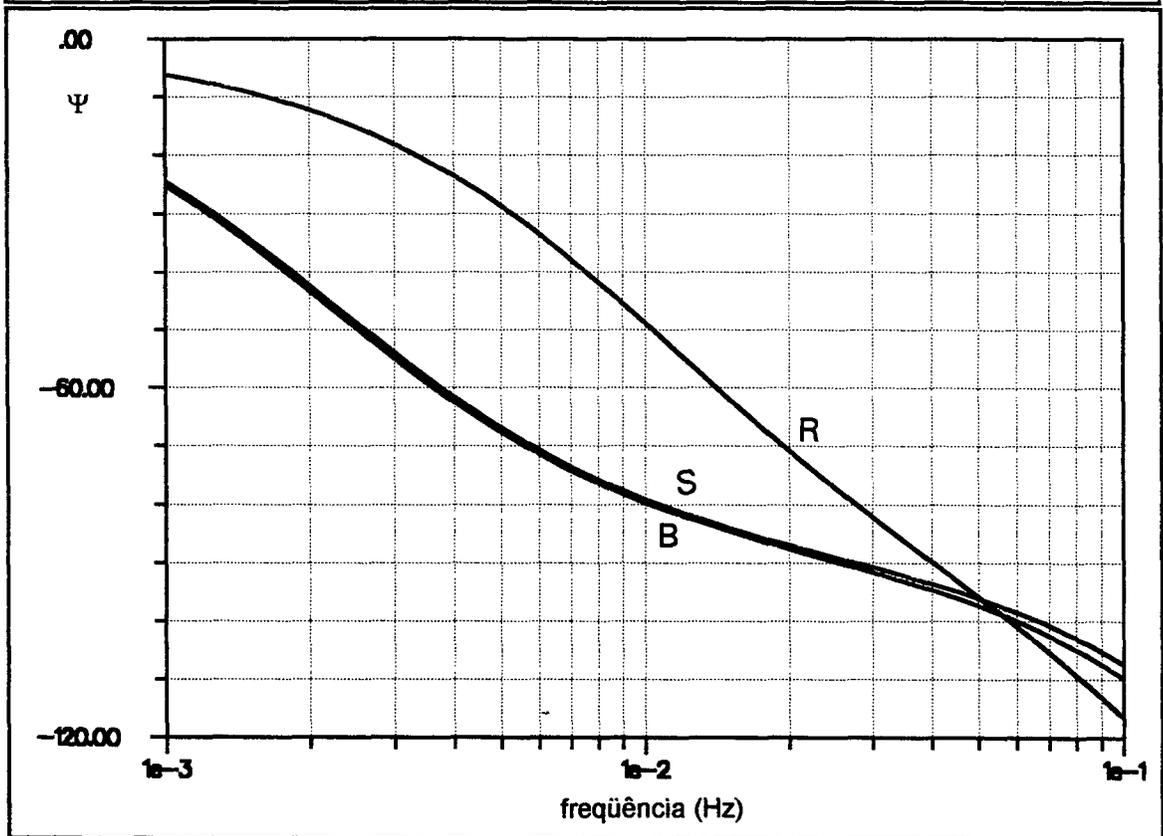
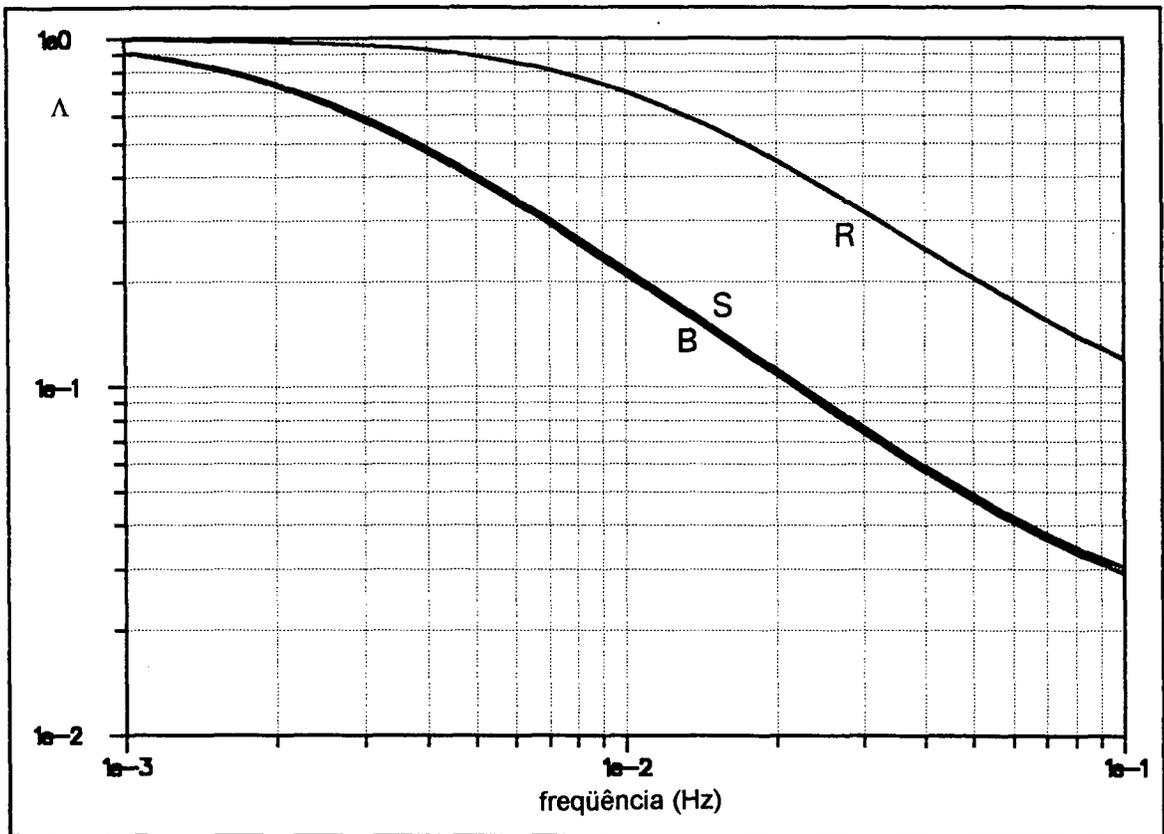


Figura 8.20: Resposta em frequência do tubo 8

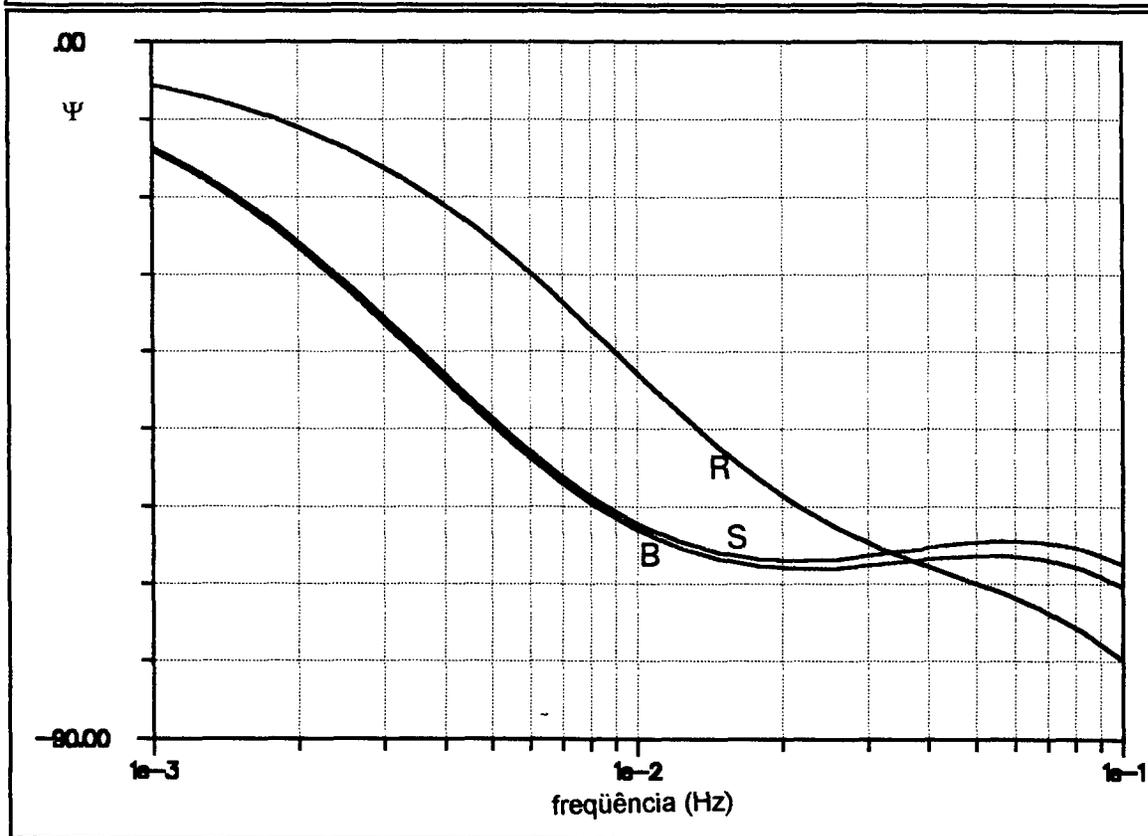
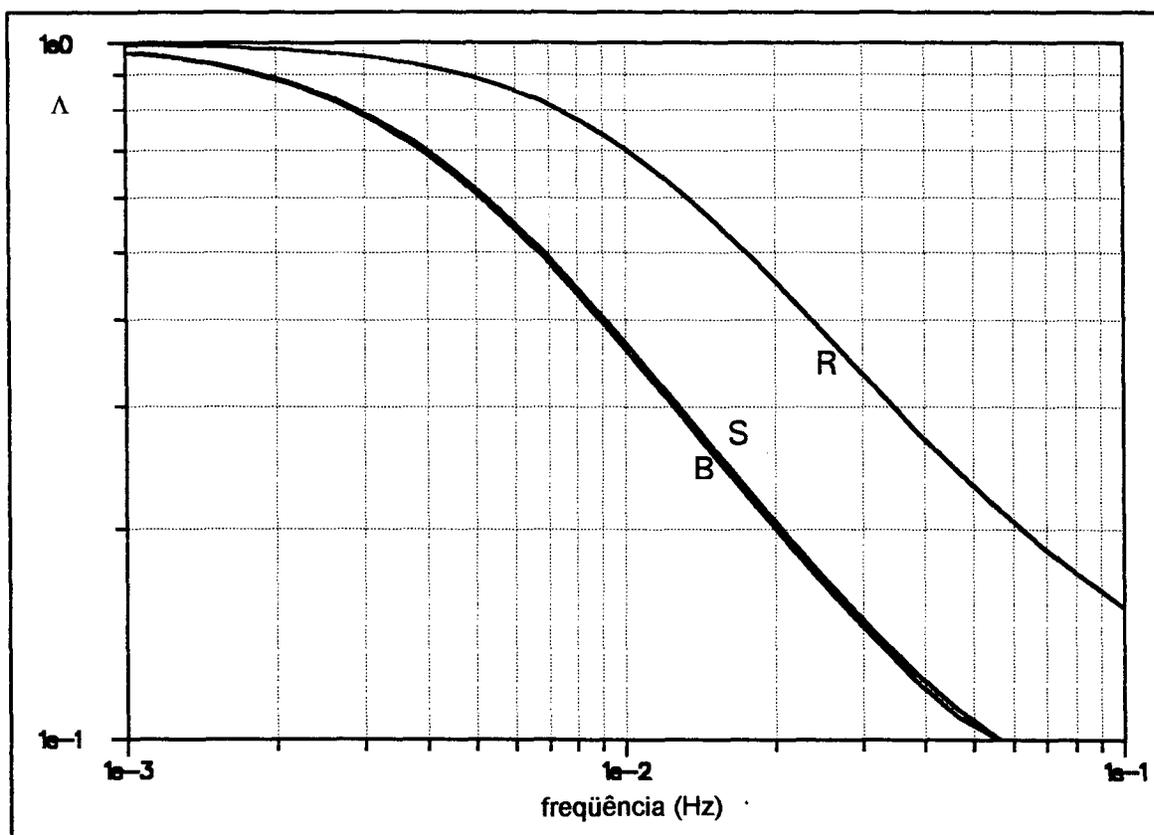


Figura 8.21: Resposta em frequência do tubo 9

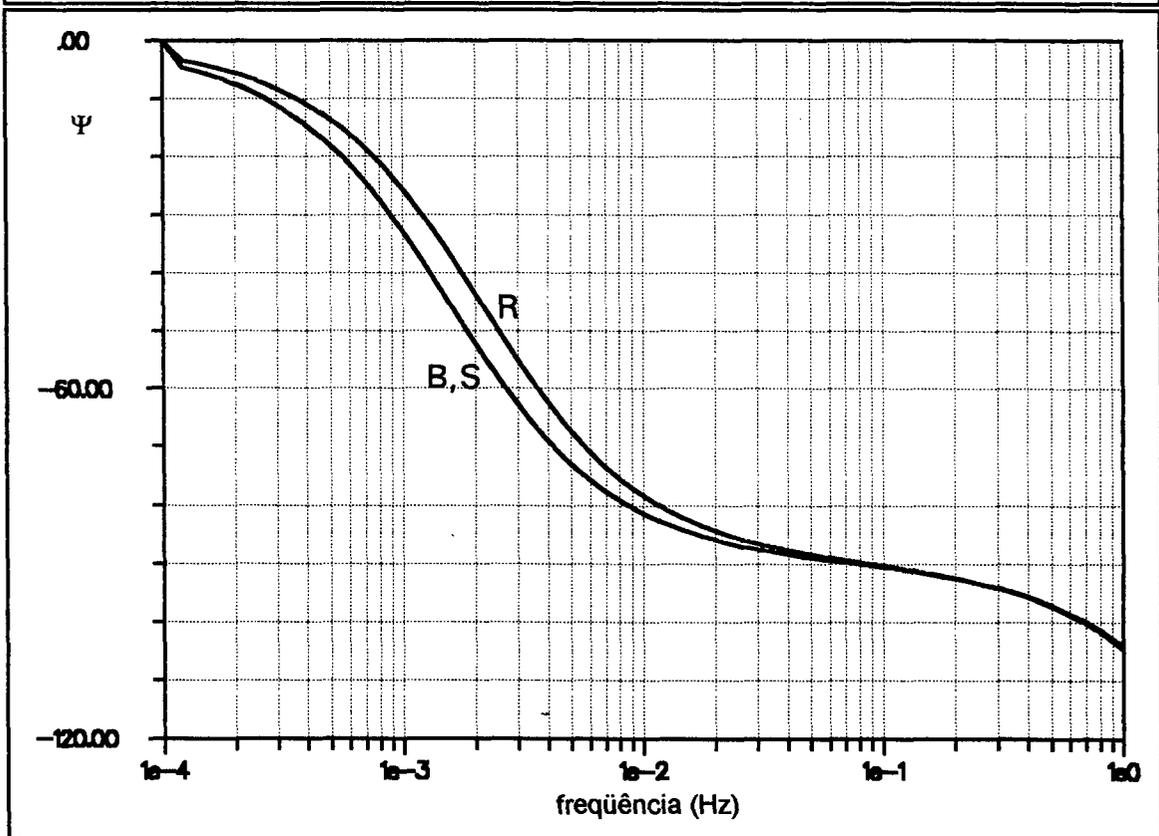
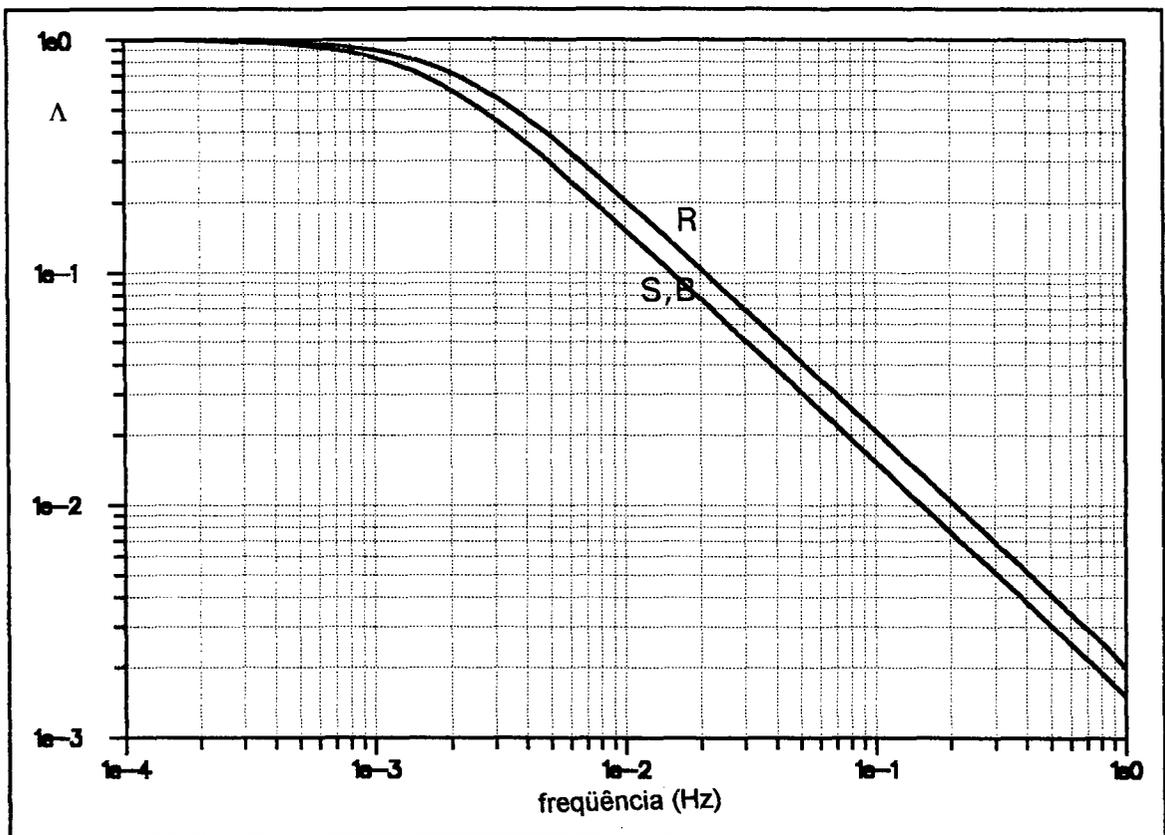


Figura 8.22: Resposta em frequência do tubo 10

## 9. CONCLUSÕES

A modelação transiente de tubos de calor é de interesse prático para a compreensão da resposta dinâmica de sistemas com tubos de calor integrados tais como os que aparecem em satélites.

Neste trabalho foram apresentadas três soluções para o modelamento do campo de temperatura de tubos de calor convencionais de condutância constante.

Estas soluções se distinguiram pelo equacionamento da temperatura do invólucro para o qual foi suposto fluxo de calor ora bidimensional, ora unidimensional (radial ou axial).

Nos três modelos foi utilizado um coeficiente de película efetivo para a estrutura capilar do evaporador, o qual torna viável a modelação dessa região no caso de mudança de fase na estrutura capilar.

As soluções apresentadas permitem que se determine o valor de parâmetros desconhecidos através do ajuste dos resultados de simulações numéricas com os de ensaios experimentais. Nestes experimentos o tubo de calor é submetido a fluxo do tipo degrau e os resultados são apresentados em forma de resposta em frequência através de técnicas já desenvolvidas [2, 8].

As soluções apresentadas permitem, também, que se determine, no regime permanente, a temperatura e o fluxo de calor em qualquer posição do tubo, seus perfis radiais e axiais, a potência absorvida pelo evaporador ou dissipada pelo condensador e o comportamento dinâmico das referidas variáveis.

O modelo bidimensional tem boa concordância com resultados experimentais no caso estacionário de tubos construídos e testados por outros autores. Os modelos unidimensionais não tiveram uma concordância tão boa mas apresentaram soluções mais simples.

As principais discordâncias dos modelos simplificados foram no caso da temperatura do evaporador, onde o modelo simplificado R superestimou e o modelo simplificado S subestimou seus valores.

Quanto a resposta em frequência, o modelo simplificado S acompanhou bem o modelo bidimensional, exceto para o ângulo de defasagem dos tubos da referência [16] que tem um invólucro bem mais espesso. Já o modelo simplificado R geralmente superestimou a resposta da temperatura do vapor em baixas frequências e subestimou em altas.

Esse resultado pode ser explicado pelo fato de que este modelo dirige todo o fluxo de calor aplicado ao evaporador diretamente ao vapor, ou seja, não permite que parte do calor se conduza axialmente através do invólucro e da estrutura capilar. No entanto, a inversão que ocorre dos resultados deste modelo em relação aos demais em frequências mais altas não pôde ser explicada pelo autor.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - Maliska, C. R., Colle, S., Weingaertner, W., Fagotti, F. & Santiago, R. C., "Estudo para o Desenvolvimento de Tubos de Calor para Aplicações em Satélites Brasileiros", Relatório Preparado para o Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE, Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC, 1989.
- [2] - Raven, F. H., "Automatic Control Engineering", McGraw - Hill Book Company, Inc., Tokyo, 1961.
- [3] - Chi, S. W., "Heat Pipe Theory and Practice, A Sourcebook", Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1976.
- [4] - Dunn, P. & Reay, D. A. "Heat Pipes", Pergamon Press, Oxford, 1976.
- [5] - Sun, K. H. & Tien, C. L., "Simple Conduction Model for Theoretical Steady - State Heat Pipe Performance", *AIAA Journal*, Vol. 10, nº 8, pp. 1051 - 1057, 1972.
- [6] - Sun, K. H. & Tien, C. L., "Thermal Performance Characteristics of Heat Pipes", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 18, pp. 363-380, 1975.
- [7] - Fagotti, F. & Colle, S., "Método Analítico para Análise dos Efeitos da Condução do Calor em Tubos de Calor", *Anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, Vol. 2, pp. 637 a 642, Itapema, SC, 1991.
- [8] - Rajakumar, A., "Step Temp em Tubos de Calor", sting of Heat Pipes, Ph.D. Thesis, Indian Institute of Technology, Madras, 1975.

- [9] - Perry, J. H., Ed., "Chemical Engineers' Hand Book", 4<sup>th</sup> Edition, Kogakusha - McGraw Hill, Tokyo, 1963.
- [10] - Bulkov, E., "Física Matemática", Editora Guanabara S.A., Rio de Janeiro, 1988.
- [11] - Ozisik, M. N., "Heat Conduction", A Wiley - Interscience Publication, New York, 1980.
- [12] - Spiegel, M. R., Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas, Coleção Schawm, 1<sup>a</sup> Edição, McGraw Hill, São Paulo, 1973.
- [13] - Abramowitz, M. & Stegun, I. A., Handbook of Mathematical Functions, 5<sup>th</sup> Edition, Dover Publications, New York, 1968.
- [14] - Stakgold, I., "Boundary Value Problems of Mathematical Physics", Vols. I & II, The MacMillan Company, New York, 1967.
- [15] - Kreider, D. et al, Introdução à Análise Linear, Vol. II, Ao Livro Técnico S. A., Rio de Janeiro, 1972.
- [16] - Virto, L. & Codina, E., "Heat Transfer in Metallic Screen Wicks with Phase Change at the Boundary", *Proceedings of Euromech*, pp. 183 - 188, 1981.
- [17] - Shibayama, S. & Morooka, S., "Study on a Heat Pipe, 2<sup>nd</sup> Report", *Bulletin of the JSME*, Vol. 22, n° 171, pp. 1243 - 1250, 1979.
- [18] - Morooka, S., Kuroki, T. & Waki, T., "Study on a Heat Pipe, 3<sup>rd</sup> Report", *Bulletin of the JSME*, Vol. 24, n° 196, pp. 1811 - 1819, 1981.
- [19] - Ferrel, J. K., Cosgrove, J. H. & Carnesale, A., "An Analytical Model for the Prediction of Operating Limits of Heat Pipes", ORO-3411-12, North Carolina State University, 1969.
- [20] - Miner, D. F. & Seastone, J. B., "Handbook of Engineering Materials", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1955.
- [21] - Chapman, A. J., "Heat Transfer", MacMillan Publishing Co., Inc., New York, 1974.

- [22] - Keenan, J. H., Chao, J. & Kaye, J., "Gas Tables", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980.
- [23] - Raznjevic, K., "Handbook of Thermodynamics Tables and Charts", Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1976.
- [24] - Van Wylen, G. J. & Sonntag, R. E., "Fundamentos da Termodinâmica Clássica", Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1976.
- [25] - Holman, J. P., "Transferência de Calor", McGraw - Hill, São Paulo, 1983.
- [26] - Chen, M. M. & Faghri, A., "An Analysis of the Vapor Flow and the Heat Conduction Through the Liquid-Wick and Pipe Wall in a Heat Pipe With Single or Multiple Heat Sources", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.33, nº 9, pp. 1945 - 1955, 1990.
- [27] - Faghri, A. "State of the Art in Numerical Analysis of Heat Pipes", 8<sup>th</sup> *International Heat Pipe Conference*, Beijing, China.

## ANEXO: IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO

Foi utilizado o IBM 3090 e a linguagem Fortran. A solução da equação matricial foi obtida através de um método de alta precisão disponível no IMSLIB (Subrotina LEQ2C do NPD - Núcleo de Processamento de Dados da UFSC). As integrais que aparecem nos coeficientes da equação matricial foram todas resolvidas analiticamente [12].

Ocorreram problemas computacionais no uso do modelo de [6] para o qual a precisão dupla do IBM não foi suficiente em alguns casos. Isto decorre do fato de as fórmulas apresentarem subtrações de termos cujas diferenças relativas eram muito pequenas. Os gráficos foram feitos com o Super-Calc 5.

As funções de Bessel foram calculadas com subrotinas do IMSLIB, com exceção das funções modificadas de segunda classe por que estas não estavam disponíveis para argumentos complexos. Assim, a de ordem zero foi calculada com duas expansões, para baixos e altos valores do argumento e com uma forma integral para valores intermediários [13]:

$$K_0(z) = -\left(\ln \frac{z}{2} + \gamma\right) I_0(z) + \frac{(z/2)^2}{(1!)^2} + (1 + 1/2) \frac{(z/2)^4}{(2!)^2} + (1 + 1/2 + 1/3) \frac{(z/2)^6}{(3!)^2} + \dots$$

$$K_0(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z} \left(1 - \frac{1}{(8z)^1} + \frac{1 \cdot 9}{2! (8z)^2} - \frac{1 \cdot 9 \cdot 25}{3! (8z)^3} + \dots\right)$$

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh(vt)} \cosh(vt) dt$$

A integral foi calculada dividindo o argumento em partes real e complexa e usando a subrotina DCADRE do IMSLIB. Esta subrotina é feita para funções reais, mas pôde ser usada devido ao fato de que a variável muda de integração é real. Os truncamentos nas séries e nas integrais (que são impróprias) foram feitos com garantia de um grande número de dígitos significativos. A função de ordem 1 pôde ser calculada a partir do Wroskiano de funções de Bessel juntamente com os resultados das outras funções.