

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**ALGUNS DESENVOLVIMENTOS DO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
APLICADO A PLACAS SEMI-ESPESAS**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE  
FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

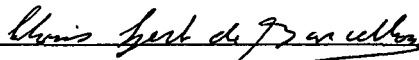
**ROGÉRIO JOSÉ MARCZAK**

FLORIANÓPOLIS, AGOSTO DE 1993

**ALGUNS DESENVOLVIMENTOS DO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
APLICADO A PLACAS SEMI-ESPESSAS**

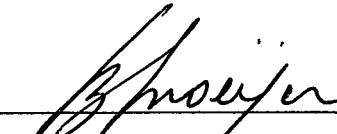
**ROGÉRIO JOSÉ MARCZAK**

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA, ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO ESTRUTURAL, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.



Prof. CLOVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph.D.

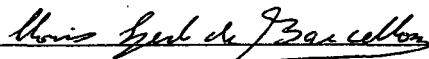
**ORIENTADOR**



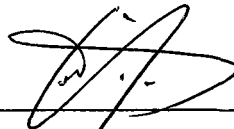
Prof. BEREND SNOEIJS, Dr. Ing.

**COORDENADOR DO CURSO**

BANCA EXAMINADORA:



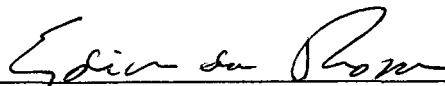
Prof. CLOVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph.D.



Prof. CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE, Ph.D.



Eng. TANCREDO WESTPHAL JÚNIOR, M. Eng. Mec.



Prof. EDISON DA ROSA, Dr. Eng. Mec.

Ao cético que existe em você,  
e que você insiste em enjaular naquela esperança  
de que talvez o ser humano saiba o que faz...  
Pois olhe, pode acreditar numa coisa: ele não sabe.

(Ruy Castro)

**ALGUNS DESENVOLVIMENTOS  
DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO APLICADO A  
PLACAS SEMI-ESPESSAS**

## Sumário

Sumário . . . . .	ii
Agradecimentos . . . . .	v
Resumo . . . . .	vii
Abstract . . . . .	viii
Simbologia . . . . .	ix
1. Introdução . . . . .	1
1.1. Considerações preliminares . . . . .	1
1.2. Revisão bibliográfica . . . . .	2
1.3. Objetivos do trabalho . . . . .	8
2. Os Modelos de Placa de Mindlin e Reissner . . . . .	10
2.1. Introdução . . . . .	10
2.2. Notas históricas . . . . .	10
2.3. Relações cinemáticas . . . . .	13
2.3.1. Campo de deslocamentos . . . . .	13
2.3.2. Relações deformação-deslocamento . . . . .	14
2.4. Relações constitutivas . . . . .	15
2.5. Equações de equilíbrio e condições de contorno . . . . .	17
2.6. Campo de tensões . . . . .	23
2.7. Equações para um estado de equilíbrio auxiliar . . . . .	26
2.8. Conclusões . . . . .	30
3. Formulação Integral . . . . .	31
3.1. Introdução . . . . .	31
3.2. Formalismo geral . . . . .	31
3.3. Formulação integral para o problema de membrana . . . . .	34

3.4. Formulação integral para o problema de flexão . . . . .	36
3.5. Equações integrais sobre o contorno . . . . .	40
3.6. Particularização das equações integrais para análise de estabilidade . . . . .	46
3.6.1. Generalidades . . . . .	46
3.6.2. Estabilidade linear elástica . . . . .	47
3.6.3. Equações integrais para análise de estabilidade elástica . . . . .	48
3.7. Conclusões . . . . .	51
4. Solução Numérica das Equações Integrais . . . . .	52
4.1. Introdução . . . . .	52
4.2. Equações discretizadas . . . . .	52
4.2.1. Interpolação da geometria, das variáveis e dos carregamentos . . . . .	53
4.2.2. Discretização das equações para flexão linear elástica . . . . .	57
4.2.3. Discretização das equações para estabilidade linearizada . . . . .	61
4.3. Procedimentos de integração . . . . .	65
4.4. Solução numérica dos sistemas matriciais . . . . .	73
4.5. Conclusões . . . . .	74
5. Aplicações Numéricas . . . . .	75
5.1. Introdução . . . . .	75
5.2. Aplicações a problemas de flexão linear elástica . . . . .	77
5.2.1. Placas quadradas . . . . .	77
5.2.2. Placas circulares . . . . .	84
5.2.3. Convergência $p$ . . . . .	87
5.2.4. Placa de Morley . . . . .	88
5.2.5. Esforços . . . . .	89
5.3. Aplicações a problemas de flambagem . . . . .	92
5.3.1. Flambagem de placas quadradas . . . . .	93
5.3.2. Placas retangulares . . . . .	100
5.3.3. Flambagem de placas circulares e triangulares . . . . .	103
5.3.4. Autovetores . . . . .	104
5.4. Conclusões . . . . .	108
6. Conclusões . . . . .	109
6.1. Introdução . . . . .	109
6.2. Conclusões . . . . .	109

6.3. Recomendações para continuidade da pesquisa . . . . .	110
Referências Bibliográficas . . . . .	113
Apêndice A - Tensores Fundamentais Simplificados . . . . .	131
A.1. Introdução . . . . .	131
A.2. Tensor deslocamento fundamental $\mathbf{U}$ . . . . .	132
A.3. Tensor tração fundamental $\mathbf{T}$ . . . . .	133
A.4. Tensores derivados . . . . .	133
A.4.1. Derivadas primeiras de $\mathbf{U}$ . . . . .	134
A.4.2. Derivadas primeiras de $\mathbf{T}$ . . . . .	134
A.4.3. Derivadas segundas de $\mathbf{U}$ . . . . .	134
A.5. Tensores envolvidos nos termos de carregamento . . . . .	135
A.5.1. Tensor $\mathbf{Y}$ . . . . .	135
Apêndice B - Diferenciação de Integrais com Núcleos Singulares . . . . .	136
B.1. Introdução . . . . .	136
B.2. Desenvolvimento . . . . .	136
Apêndice C - Transformação Cúbica dos Pontos de Integração . . . . .	142
C.1. Introdução . . . . .	142
C.2. Desenvolvimento . . . . .	142
Apêndice D - Imposição de Movimentos de Corpo Rígido . . . . .	147
D.1. Introdução . . . . .	147
D.2. Desenvolvimento . . . . .	147
Apêndice E - Quadratura para Integrais por Parte Finita . . . . .	151
E.1. Introdução . . . . .	151
E.2. Desenvolvimento . . . . .	151
Apêndice F - Formas de Cálculo da Matriz $[\mathbf{E}]$ no Caso Singular . . . . .	160
F.1. Introdução . . . . .	160
F.2. Utilização do teorema de Stokes . . . . .	161
F.3. Integração analítica . . . . .	163
F.4. Comparações . . . . .	169
Apêndice G - Cálculo Numérico de Números de Bernoulli . . . . .	172
G.1. Introdução . . . . .	172
G.2. Procedimentos para o cálculo numérico . . . . .	173

## Agradecimentos

- Ao professor Clovis Sperb de Barcellos, pela prestativa orientação.
- Ao professor Carlos Alberto de Campos Selke, pela formação, amizade e incentivo.
- Aos amigos do *mar-de-lama*, em especial Marco Antônio “Ipira” Luersen (*este cara é bom ...*), Tancredo “Tarsky” Westphal Jr. (*sem a ajuda do qual este trabalho não teria sido realizado - que porres, heim ?*), Jucélio Tomás “Jujuba” Pereira (*amigo, pegue esta carta ...*) e Prof. Lauro Cezar “Monstro” Nicolazzi (*mas dá de fazer ...*).
- À Liginha, pelo apoio.
- Ao CNPq, pelo patrocínio.
- Ah, e ao Mr. Jack Daniel’s, pela companhia ao longo desta jornada.



Aos meus pais.  
Aos meus irmãos.

## Resumo

O presente trabalho aborda a aplicação do método dos elementos de contorno para solução de problemas de flexão e estabilidade de placas semi-espessas. Os modelos de placa empregados consideraram a influência do cisalhamento através de teorias de primeira ordem, especificamente as de Mindlin e Reissner.

Inicialmente, uma formulação integral unificada dos modelos de placa utilizados é estendida para os operadores diferenciais das equações de von Kármán, a fim de considerar os efeitos geometricamente não-lineares. A formulação integral do problema de membrana acoplado ao de flexão é também desenvolvida, levando a um sistema de equações integrais que descreve completamente problemas de placas que envolvem grandes deslocamentos. A linearização dessas equações leva então a um problema de autovalores e autovetores que permite a análise de estabilidade linear elástica de placas com carregamento de membrana, enquanto que uma simplificação das mesmas leva a um sistema linear cuja solução corresponde ao problema de valores no contorno de uma placa sob flexão estática.

O método empregado para solução aproximada do sistema de equações integrais foi o método direto dos elementos de contorno. Tendo em vista os tipos de singularidade que aparecem nos núcleos de algumas das integrais, foram utilizados procedimentos especiais de integração, tanto para elementos de contorno quanto para células de domínio. A formulação proposta foi aplicada a problemas estáticos, incluindo um estudo das convergências  $h$  e  $p$  para elementos constantes, lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos, bem como problemas modais, para várias geometrias, condições de contorno e carregamentos.

## Abstract

The present work deals with the boundary element method applied to bending and stability analysis of moderately thick plates. The plate models used account for shear influence by using first order theories, specifically the Mindlin and Reissner plate theories.

An unified integral formulation for the plate models employed is extended to the differential operators found in von Kármán equations, in order to consider geometrically non linear effects. The integral formulation for membrane-bending coupling is also developed, leading to an integral equation system that describes large displacement plate problems. The linearization of these equations leads to an eigenproblem which can be used for the linear elastic stability analysis of plates. On the other hand, a particularization of the equations reduces to a linear system corresponding to the boundary value problem of static bending of plates.

The direct boundary element method was used to obtain an approximate solution of the integral equation system. In view of some kinds of singularities present in some kernels of the integrals, special quadrature rules were used for boundary elements and domain cells. The proposed formulation was tested for static bending problems, including a study of  $h$  and  $p$  convergence rates for constant, linear, quadratic, cubic and quartic elements. Stability problems were also solved using various geometry, boundary conditions and loading.

## Simbologia

### Índices:

- $i, j, k, a, b \dots$  - Índices que variam de 1 a 3.
- $I, J$  - Índices que variam de 1 a 3 vezes o número de nós de um elemento de contorno ou de domínio.
- $M, N$  - Índices que variam de 1 a 2 vezes o número de nós de um elemento de contorno ou de domínio.
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$  - Índices que variam de 1 a 2.
- $\omega$  - Índice que varia de 1 a 2 e não implica em somatório.

### Sobrescritos à direita:

- $l$  - Indica parcela linear.
- $n$  - Indica parcela não-linear. Indica parcela regular ou quase singular.
- $s$  - Indica parcela singular.

### Sobrescritos à esquerda:

- $m$  - Indica parcela correspondente ao problema de membrana.
- $f$  - Indica parcela correspondente ao problema de flexão.

### Letras arábicas:

- $a$  - Dimensão lateral de placas quadradas.
- $A(z)$  - Composição de funções de Bessel.
- $A$  - Matriz dos coeficientes do sistema linear do problema de flexão.

$b_i$	- Forças de corpo atuantes na direção $e_i$ .
$B_k$	- Número de Bernoulli de ordem $k$ .
$B(z)$	- Composição de funções de Bessel.
$\mathbf{B}$	- Matriz resultante da sobreposição de $\mathbf{B}_r$ .
$\mathbf{B}_r$	- Matriz resultante da integral de $\hat{\mathbf{U}}$ sobre as células de domínio.
$\mathbf{c}_t$	- Matriz de termos convectivos.
$C$	- Módulo de rigidez de membrana; $C = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ .
$\mathbf{C}$	- Matriz dos fatores geométricos do tensor $\mathbf{T}$ .
$D$	- Módulo de rigidez à flexão; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ .
$\mathbf{D}$	- Matriz resultante da sobreposição de $\mathbf{D}_n$ .
$\mathbf{D}_n$	- Matriz resultante da integral de $\bar{\mathbf{U}}$ sobre os elementos de contorno.
$e_i$	- Base canônica do sistema de coordenadas cartesiano global.
$E$	- Módulo de elasticidade.
$E_{\alpha\beta}$	- Deformações de membrana.
$\mathbf{E}$	- Matriz resultante da sobreposição de $\mathbf{E}_r$ .
$\mathbf{E}_r$	- Matriz resultante da integração de $\bar{\mathbf{U}}\mathbf{N}$ sobre as células de domínio adicionada de $\mathbf{C}_t$ , no caso singular.
$\hat{\mathbf{E}}_r$	- Matriz resultante da integração de $\bar{\mathbf{U}}\mathbf{N}$ sobre as células de domínio.
$F_3, F_6$	- Constantes arbitrárias da solução fundamental dos modelos de placa estudados.
$\mathbf{F}$	- Matriz resultante da sobreposição de $\hat{\mathbf{F}}_r$ .
$\mathbf{F}_n$	- Matriz resultante da integral de $\bar{\mathbf{T}}$ sobre os elementos de contorno.
$\hat{\mathbf{F}}_r$	- Matriz resultante da integral do carregamento sobre as células de domínio.
$G$	- Módulo de cisalhamento; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .
$\mathbf{G}_n$	- Matriz resultante da integral de $\bar{\mathbf{U}}$ sobre os elementos de contorno.
$h$	- Espessura da placa.
$\mathbf{H}$	- Matriz resultante da sobreposição de $\mathbf{H}_n$ .
$\mathbf{H}_n$	- Matriz resultante da integral de $\mathbf{T}$ sobre os elementos de contorno adicionada de $\mathbf{C}$ , no caso singular.
$\hat{\mathbf{H}}_n$	- Matriz resultante da integral de $\mathbf{T}$ sobre os elementos de contorno.
$I^1, I^2$	- Parcelas de um integral qualquer.
$I, I', I''$	- Integrais genéricas singulares.

$I^\epsilon$	- Integral definida sobre um círculo de raio $\epsilon$ .
$I_\Gamma$	- Integral unidimensional genérica.
$I_\Omega$	- Integral bidimensional genérica.
$j$	- Número de nós de um elemento de contorno ou célula de domínio.
$J^1, J^2, J^3$	- Parcelas de um integral qualquer.
$ J_n $	- Jacobiano referente ao elemento $\Gamma_n$ .
$ J_r $	- Jacobiano referente à célula $\Omega_r$ .
$k$	- Fator adimensional utilizado em soluções analíticas.
$K$	- Número de pontos de integração utilizados por quadraturas.
$K_0(z)$	- Função de Bessel de segunda espécie de ordem 0.
$K_1(z)$	- Função de Bessel de segunda espécie de ordem 1.
$K_{\alpha\beta}$	- Deformações de flexão.
$l$	- Comprimento de um elemento de contorno.
$L$	- Dimensão lateral de uma placa.
$m$	- Número de meios comprimentos de onda na direção $x$ .
$m_\alpha$	- Momentos distribuídos correspondentes à direção $e_i$ .
$m_f$	- Fator dependente do modelo de placa.
$M_{\alpha\beta}$	- Esforços generalizados de flexão (momentos resultantes).
$\overline{M}_{\alpha\beta}$	- Esforços generalizados de flexão prescritos.
$n$	- Número de meios comprimentos de onda na direção $y$ .
$\mathbf{n}$	- Vetor canônico normal do sistema de coordenadas local sobre o contorno da placa.
$N$	- Número de elementos de contorno.
$N_{\alpha\beta}$	- Esforços generalizados de membrana.
$N_{xx}$	- Esforço de membrana pré-flambagem na direção $x$ .
$N_{yy}$	- Esforço de membrana pré-flambagem na direção $y$ .
$N_{xy}$	- Esforço cisalhante de membrana pré-flambagem .
$\overline{N}_{\alpha\beta}$	- Esforços generalizados de membrana prescritos.
$\overline{N}_{cr}$	- Cargas críticas normalizadas.
$\mathbf{N}^*$	- Matriz de carregamentos críticos de membrana.
$p$	- Ponto fonte ou ponto carga sobre $\Gamma$ .
$P$	- Ponto fonte ou ponto carga sobre $\Gamma$ ou $\Omega$ .
$P_{ij}$	- Matriz de transformação de coordenadas.

$q$	- Ponto campo sobre $\Gamma$ .
$Q$	- Ponto campo sobre $\Omega$ .
$q_i$	- Carregamentos distribuídos atuantes na direção $e_i$ .
$\hat{q}_i$	- Pseudos-carregamentos distribuídos.
$\mathbf{q}$	- Vetor de carregamentos nodais.
$\mathbf{q}^j$	- Vetor de carregamentos nodais do do $j$ -ésimo elemento de contorno ou célula de domínio.
$Q_\alpha$	- Esforços generalizados de cisalhamento (esforços cortantes).
$\overline{Q}_\alpha$	- Esforços generalizados de cisalhamento prescritos.
$\mathbf{Q}$	- Matriz resultante da imposição de condições de contorno, no problema de flambagem.
$r$	- Distância do ponto fonte ao ponto campo; $r = \ Q - P\ $ .
$r(\theta)$	- Coordenada polar auxiliar utilizada em sub-células triangulares.
$r_{,n}$	- Derivada de $r$ segundo a direção normal.
$r_\alpha$	- Projeção de $r$ segundo a direção $x_\alpha$ .
$r_{,\alpha}$	- Derivada de $r$ segundo a direção $x_\alpha$ .
$R$	- Número de células de domínio. Raio de placas circulares.
$R_{IJ}$	- Matriz de transformação de coordenadas.
$s^i$	- Ponto sobre o qual atua uma carga concentrada.
$\mathbf{s}$	- Vetor canônico transversal do sistema de coordenadas local sobre o contorno da placa.
$t_i$	- Forças de corpo superfície atuantes na direção $e_i$ .
$\bar{t}_i$	- Componentes de tração prescritas.
$\mathbf{t}$	- Vetor canônico tangencial do sistema de coordenadas local sobre o contorno da placa. Vetor de trações nodais.
$\mathbf{t}^j$	- Vetor de trações nodais do $j$ -ésimo elemento de contorno ou célula de domínio.
$\mathbf{T}$	- Tensor representativo do campo de trações da solução fundamental.
$\bar{\mathbf{T}}$	- Matriz de derivadas primeiras do tensor $\mathbf{T}$ .
$u_i$	- Componentes de deslocamento translacionais generalizados da placa.
$\bar{u}_i$	- Componentes de deslocamento translacionais prescritas.
$\tilde{u}$	- Solução aproximada de um problema.
$\mathbf{u}$	- Vetor de deslocamentos nodais.

$u^j$	- Vetor de deslocamentos nodais do $j$ -ésimo elemento de contorno ou célula de domínio.
$U_i$	- Componentes de deslocamento em um ponto qualquer da placa.
$U$	- Tensor representativo do campo de deslocamentos da solução fundamental.
$\bar{U}$	- Matriz de derivadas primeiras do tensor $U$ .
$\hat{U}$	- Matriz de derivadas primeiras do tensor $U$ .
$\widehat{U}$	- Matriz de derivadas primeiras do tensor $U$ .
$\bar{\bar{U}}$	- Matriz de derivadas segundas do tensor $U$ .
$V$	- Volume compreendido pela placa.
$V$	- Tensor para transformação de integrais de carregamento de domínio em integrais sobre o contorno (modelo de Reissner).
$x_i$	- Coordenadas cartesianas.
$x_\alpha^i$	- Coordenada cartesiana referente à posição do $i$ -ésimo nó de $\Gamma_n$ ou $\Omega_r$ .
$x$	- Vetor de coordenadas cartesianas nodais.
$x^j$	- Vetor de coordenadas nodais do $j$ -ésimo elemento de contorno ou célula de domínio.
$y$	- Coordenada utilizada para definir $\xi$ .
$y_\alpha$	- Coordenadas utilizadas para definir $\eta_\alpha$ .
$Y$	- Tensor para transformação de integrais de carregamento de domínio em integrais sobre o contorno.
$z$	- Parâmetro característico; $z = \lambda r$ .
$z_\alpha$	- Coordenada cartesiana referente à um sistema de coordenadas auxiliar.
$\bar{w}$	- Deslocamento normalizado.
$w_{max}$	- Deslocamento máximo de uma placa.
$\bar{w}$	- Vetor das derivadas cartesianas do deslocamento transversal; $\frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha}$ .
$\bar{w}^j$	- Vetor das derivadas cartesianas nodais do deslocamento transversal do $j$ -ésimo elemento de contorno ou célula de domínio.
$W$	- Vetor proveniente dos carregamentos concentrados.

#### Letras gregas:

$\alpha$	- Ângulo de obliquidade em placas rômbricas.
----------	--



$\gamma_{\alpha i}$	- Componentes cisalhantes do tensor deformação.
$\Gamma$	- Contorno do domínio em estudo.
$\Gamma_n$	- Elemento de contorno.
$\Gamma_u$	- Parcela do contorno sobre a qual são prescritos deslocamentos generalizados.
$\Gamma_t$	- Parcela do contorno sobre a qual são prescritas trações generalizadas.
$\Gamma'_1$	- Circunferência de raio unitário centrada no ponto fonte.
$\delta_{ij}$	- Delta de Kronecker.
$\delta(P, Q)$	- Função delta de Dirac.
$\varepsilon_{ij}$	- Componentes do tensor deformação.
$\varepsilon, \varepsilon$	- Raios genéricos.
$\eta_\alpha$	- Coordenadas adimensionais de um elemento de domínio.
$\theta$	- Ângulo de rotação de uma placa rigidamente deslocada. Coordenada polar auxiliar utilizada em sub-células triangulares.
$\theta_i, \theta_f$	- Limites de integração de sub-células triangulares.
$\lambda$	- Fator de carga. Constante de Lamé; $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ .
$\lambda^2$	- Parâmetro característico dos modelos de placa estudados; $\lambda^2 = \frac{12\kappa^2}{h^2}$ .
$\lambda^{-1}$	- Autovetores do problema de flambagem.
$\kappa^2$	- Fator de correção das tensões cisalhantes.
$\nu$	- Coeficiente de Poisson.
$\xi$	- Coordenada adimensional de um elemento de contorno.
$\Pi$	- Funcional genérico. Energia potencial total.
$\sigma_{ij}$	- Componentes do tensor tensão.
$\hat{\sigma}_{\alpha 3}$	- Tensões cisalhantes corrigidas.
$\Sigma_1, \Sigma_2$	- Séries infinitas utilizadas em integração analítica.
$\phi_j$	- Função de interpolação associada ao $j$ -ésimo nó de $\Gamma_n$ ou $\Omega_r$ .
$\varphi_{kl}^j$	- Matriz de funções de interpolação associada ao $j$ -ésimo nó de $\Gamma_n$ ou $\Omega_r$ .
$\Phi$	- Matriz das funções de interpolação de um elemento de contorno ou célula de domínio.
$\psi_{\alpha\beta}$	- Componentes de deslocamento rotacionais generalizados da placa.
$\Omega$	- Domínio em estudo.

$\Omega_r$  - Célula de domínio.

### Símbolos matemáticos:

$ x $	- Módulo da variável $x$ .
$\ \mathbf{x}\ $	- Norma do vetor $\mathbf{x}$ .
$\ \mathbf{X}\ $	- Determinante da matriz $\mathbf{X}$ .
$(\cdot)_{,\alpha}$	- Indica diferenciação em relação a $x_\alpha$ ; $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_\alpha}$ .
$(\cdot)^*$	- Variável qualquer correspondente à um estado auxiliar.
$d(\cdot)$	- Operador diferencial ordinário aplicado sobre a variável $(\cdot)$ .
$\mathcal{D}(\cdot)$	- Operador traço generalizado de Dirichlet.
$\mathcal{N}(\cdot)$	- Operador traço generalizado de Neumann.
$\mathcal{R}$	- Resíduo de uma solução aproximada em relação à solução exata.
$\mathcal{H}, \mathcal{H}'$	- Espaço de Hilbert e seu dual.
$\mathcal{F}_{ij}(\partial_Q)$	- Operador diferencial em relação às coordenadas do ponto $Q$ .
$\mathcal{L}_{ij}(\partial_Q)$	- Operador diferencial em relação às coordenadas do ponto $Q$ .
$\delta(\cdot)$	- Operador variacional aplicado sobre a variável $(\cdot)$ .
$\partial(\cdot)$	- Operador diferencial parcial aplicado sobre a variável $(\cdot)$ .
$\Delta(\cdot)$	- Operador de Laplace; $\Delta(\cdot) = \nabla^2(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}$ .
$\Delta^2(\cdot)$	- Operador de bi-harmônico; $\Delta^2(\cdot) = \Delta\Delta(\cdot)$ .
$f$	- Indica uma integral por parte finita.

---

---

# CAPÍTULO UM

---

---

## Introdução

### 1.1. Considerações preliminares

Quando um engenheiro, um matemático ou um físico se depara com uma equação diferencial a ser resolvida, ele dispõe, atualmente, de diversas alternativas de solução, exatas ou aproximadas, analíticas ou numéricas. Uma destas alternativas é o método dos elementos de contorno (MEC), um método de solução aproximado, e que parte das equações do problema escritas na forma integral.

O MEC tem suas raízes matemáticas postuladas no final do século XIX, mas apenas no final da década de sessenta passou a receber atenção por parte da comunidade científica. Após intensa contribuição dos matemáticos soviéticos na primeira metade do século XX, quando os métodos integrais já eram utilizados para solucionar problemas do meio contínuo, sua utilização praticamente estagnou. Isto se deveu a dois motivos: sua formulação puramente matemática, distanciando-o do campo da engenharia, e o gigantesco desenvolvimento que ocorreu com o método dos elementos finitos (MEF) nas décadas de sessenta e setenta que, por sua abrangência, atraiu pesquisadores das mais diversas áreas, em todo o mundo.

Apenas na década de setenta, incorporando algumas características do MEF, o MEC tomou impulso e consolidou-se como uma alternativa viável para solução de problemas de engenharia. A principal característica do MEC reside na redução de uma dimensão do problema, o que diminui drasticamente a quantidade de dados necessários para solução computacional do mesmo. Em contrapartida, resulta geralmente matrizes cheias e não-simétricas, impedindo ou dificultando o uso de estratégias de solução desenvolvidas para o MEF.

Inicialmente, o MEC apresentava duas grandes dificuldades: a primeira diz respeito à integrais contendo núcleos singulares, que obrigam a utilização de quadraturas especiais, e a segunda reside na necessidade do conhecimento de uma solução fundamental, que nem sempre é disponível, dependendo da complexidade do problema. A primeira está atualmente superada, graças ao amplo esforço despendido nos últimos anos, resultando no surgimento de diversas quadraturas numéricas, para os diferentes graus de singularidade. Quanto à segunda dificuldade, desenvolvimentos mais recentes da matemática têm levado a soluções fundamentais de problemas mais complexos, haja visto algumas novas soluções fundamentais apresentadas nos últimos anos, para algumas áreas da mecânica computacional.

No âmbito da análise estrutural, interesse do presente trabalho, vale dizer que o MEC tem um ótimo desempenho na solução de problemas da elasticidade linear, levando inclusive a resultados melhores que o MEF, para discretizações equivalentes do domínio. Entretanto, para problemas não-lineares da mecânica, o MEC ainda não experimentou sua aplicação para uma ampla variedade de problemas, já resolvidos satisfatoriamente pelo MEF. A aplicação e validação do método para esses problemas é objeto de intensa pesquisa em toda a comunidade científica mundial, e disso depende, de certa forma, a aplicação geral do método, como ocorreu com o MEF. Além disso, as tendências mais modernas de elementos finitos determinam claramente o uso de filosofias adaptativas, a fim de reduzir de forma automática o erro da análise. A utilização de procedimentos adaptativos no MEC ainda se encontra em desenvolvimento, dependendo portanto de resultados para taxas de convergência e do comportamento assintótico de elementos de alta ordem (ainda muito escassos na literatura), para vários problemas práticos. São esses argumentos gerais que justificam, em parte, o presente trabalho.

## 1.2. Revisão bibliográfica

Provavelmente, a primeira aplicação de métodos integrais para solução do problema de flexão de placas se deveu a N. Muskhelishvili em 1933, na primeira edição de seu livro clássico (Muskhelishvili [1963]), utilizando o Teorema de Goursat para operadores

biharmônicos. A literatura entretanto atribui a Jaswon e Maiti, em 1968 (Jaswon e Maiti [1968], Jaswon *et alli* [1967]), a primeira formulação de elementos de contorno para solução do problema de flexão de placas finas. Com vistas ao objetivo principal deste trabalho, não serão aqui revisadas as literaturas referentes à utilização do MEC para flexão linear estática de placas finas. Informações a este respeito podem ser encontradas nas excelentes revisões de Beskos [1991], Monken e Silva e Barcellos [1985] e Westphal Jr. [1990]. Aqui serão abordadas as literaturas referentes à flexão geometricamente não-linear de placas (e problemas correlatos), finas ou semi-espessas, bem como problemas de flambagem e pós-flambagem em placas. Também será dada especial atenção à aplicação do MEC para solução de problemas de flexão linear, utilizando as teorias de R. D. Mindlin (Mindlin [1951]) e E. Reissner (Reissner [1944,1945]), referências ainda escassas na literatura.

Uma das primeiras aplicações do MEC a problemas de elasticidade envolvendo grandes deslocamentos foi publicada no final da década de setenta (Kompis [1978]). Mas apenas em 1982 foi publicado o que parece ser o primeiro artigo que trata da aplicação do MEC para flexão geometricamente não-linear de placas (Tanaka [1982]). Utilizando a versão direta do MEC, partindo da identidade de Rayleigh-Green, foi obtida a formulação para as equações de von Kármán do modelo de placa de Kirchhoff. Infelizmente, nenhum resultado numérico foi apresentado.

Na mesma época, N. Kamiya e Y. Sawaki publicaram dois artigos sobre o mesmo assunto. No primeiro (Kamiya e Sawaki [1982a]), foram analisados casos de flexão não-linear que podem ser reduzidos à equação de Berger. No segundo (Kamiya e Sawaki [1982b]), foi apresentada uma formulação baseada no método dos resíduos ponderados (MRP), correspondente às equações de von Kármán. Apesar de proporem uma solução iterativa, não foram mostrados resultados numéricos. Logo após, estes mesmos autores (Kamiya e Sawaki [1982c]) mostraram a aplicabilidade do MEC para solução de problemas de placas finas carregadas termicamente, envolvendo grandes deslocamentos. Foi utilizada uma solução aproximada baseada também na equação de Berger. Foram apresentados os resultados numéricos para um caso de placa circular engastada.

Nesse mesmo ano, G. Gospodinov e D. Ljutskanov publicaram um interessante artigo (Gospodinov e Ljutskanov [1982]), onde foi analisada flexão linear de placas finas pelo MEC direto e vibrações e flambagem pelo MEC indireto. Este artigo é relevante por utilizar, pela primeira vez, soluções fundamentais particulares para vibrações ou flambagem. Foram analisadas apenas placas retangulares, sendo o contorno e o domínio discretizados por

elementos e células constantes. Nos exemplos de flambagem, foram consideradas placas carregadas igualmente nas direções  $x$  e  $y$ , com bons resultados.

Ainda em 1982 surgiram dois trabalhos relacionados à aplicação do MEC para flambagem. H. Tai *et alli.* [1982] mostraram como calcular cargas de flambagem em placas utilizando métodos integrais, a partir da medição experimental das deformações de membrana. Y. Niwa *et alli.* [1982] publicaram um excelente compêndio de formulações diretas e indiretas que levam a problemas de autovalores e autovetores, e apresentaram exemplos numéricos para equação de Helmholtz, elastodinâmica e vibrações harmônicas de placas finas.

Foi no mesmo ano de 1982 que F. Van der Weeën publicou seus dois trabalhos pioneiros sobre aplicação do MEC para análise linear de placas usando o modelo de Reissner (Van der Weeën [1982a, 1982b]). As equações integrais do problema foram obtidas via MRP, e a versão direta do MEC foi adotada na discretização das mesmas, utilizando elementos isoparamétricos quadráticos. A solução fundamental do problema foi obtida através do método de Hörmander (Hörmander [1964]). A implementação numérica contou com vários aprimoramentos, entre eles a utilização de imposição de movimentos de corpo rígido para cálculo das integrais singulares, transformação das integrais de domínio para o contorno e utilização de subregiões, entre outros (Van der Weeën [1982b], Monken e Silva e Barcellos [1985]). Para tratamento numérico dos vértices, as trações foram calculadas em um dos lados e então utilizadas para cálculos no lado adjacente. Os resultados para o esforço cortante sobre o contorno foram ruins em alguns casos analisados.

Em 1984, M. Tanaka desenvolveu uma formulação incremental para análise de grandes deslocamentos em placas finas (Tanaka [1984]). Foi utilizado o MEC direto, com elementos de contorno constantes e células de domínio triangulares constantes. A formulação foi aplicada a casos com condições de contorno de tração, e o exemplo resolvido era fracamente não-linear.

T. Q. Ye e Y. Liu apresentaram, em 1985, uma formulação similar à citada acima, mas utilizando células de domínio quadrangulares (Ye e Liu [1985]). Um fator de relaxação foi introduzido no cálculo numérico para acelerar o processo iterativo, o que lhes permitiu um levantamento mais completo da curva carga *versus* deslocamento.

A seguir, J. A. Costa Jr. e C. A. Brebbia mostraram a aplicabilidade do MEC a problemas de flambagem de placas finas retangulares (Costa Jr. e Brebbia [1985a]), ilustrando diversos casos de carregamento e condições de contorno. Foi utilizada a versão direta do

método e deduzida uma solução fundamental para o operador diferencial de flambagem. A discretização do contorno e do domínio foi realizada com elementos constantes e os resultados foram, em geral, bons. Foi mostrada graficamente a convergência do método para placa engastada, mas foi comparada com um elemento finito de baixa taxa de convergência. Na mesma época, estes autores (Costa Jr. e Brebbia [1985b]) desenvolveram uma formulação do MEC direto aplicado à flexão de placas finas sobre fundações elásticas. Foi obtida uma solução fundamental para o problema, de modo similar ao apresentado no artigo anterior (Costa Jr. e Brebbia [1985a]). Os núcleos singulares foram isolados e integrados analiticamente, e alguns resultados foram mostrados.

Ainda em 1985, N. Kamiya e Y. Sawaki (Kamiya e Sawaki [1985]) mostraram uma alternativa para transformar termos não-homogêneos de uma equação diferencial biharmônica (termos de carregamento, em placas finas), expandindo tais termos em séries de potências e aplicando o Teorema de Gauss. Um caso de flexão foi resolvido com essa formulação, mostrando bons resultados.

No ano seguinte foi publicada o que parece ser a primeira aplicação do MEC à flexão não-linear de placas sanduíche (Kamiya e Sawaki [1986a]). Foi utilizado o modelo de placa de Kirchhoff que, após simplificações, levou a uma forma da equação de Berger. A formulação permitia carregamentos mecânicos ou térmicos, e também abrangia cascas rasas. Diversos exemplos foram ilustrados. Na mesma época, N. Tosaka e S. Miyake obtiveram uma formulação integral para cascas esféricas rasas com grandes deslocamentos, aplicando o MRP (Tosaka e Miyake [1986]). Foi derivada uma solução fundamental do problema e os exemplos numéricos ilustravam algumas bifurcações detectadas sobre a trajetória de equilíbrio.

A seguir, G. D. Manolis e seus colaboradores (Manolis *et alli* [1986]) aplicaram o MEC direto para problemas de flambagem em vigas e placas sem cisalhamento. Este trabalho é interessante porque seus autores compararam o uso de soluções fundamentais correspondentes aos operadores de flexão simples e de flambagem. No segundo caso não é necessária a discretização do domínio, como geralmente exige a integração do acoplamento flexão-membrana. Entretanto, poucas aplicações numéricas foram mostradas.

Utilizando o MEC, M. Tanaka estendeu, em 1986, uma formulação comum em elementos finitos para análise de flambagem de perfis de paredes finas planas (Tanaka [1986]). A metodologia consistiu em discretizar cada parede e escrever as matrizes correspondentes em relação a um sistema de coordenadas local. Então as matrizes são transformadas para o

sistema de coordenadas global e sobrepostas, de modo a garantir a continuidade dos deslocamentos nas interfaces. No mesmo ano N. Kamiya e Y. Sawaki (Kamiya e Sawaki [1986a]) apresentaram uma formulação alternativa do MEC para placas sobre fundações elásticas. Nesse trabalho as integrais correspondentes à influência da fundação foram transformadas para o contorno.

V. J. Karam (Karam [1986], Karam e Telles [1986, 1988]) reescreveu o trabalho de F. Van der Weeën (Van de Weeën [1982a, 1982b]) utilizando procedimentos de integração mais eficazes e elementos quadráticos descontínuos, obtendo resultados muito bons. Foram também analisadas placas infinitas.

Em 1987, J. A. Costa Jr. desenvolveu um algoritmo para análise de flexão linear simples, flexão sobre apoio elástico, vibrações e flambagem de placas finas em um único programa de computador (Costa Jr. [1987]). Utilizou suas formulações publicadas anteriormente (Costa Jr. e Brebbia [1985a, 1985b]). No mesmo ano, J. D. Zhang e S. N. Atluri apresentaram uma formulação integral para análise não-linear estática e dinâmica de cascas e denominaram a metodologia de método dos elementos de contorno-domínio, por ser obrigatória a discretização do domínio para integração dos termos não-lineares (Zhang e Atluri [1987]).

Ainda em 1987, C. S. Barcellos e L. H. Monken e Silva aplicaram o MEC direto para flexão linear de placas modeladas com a teoria de Mindlin (Barcellos e Monken e Silva [1987], Monken e Silva [1988]). A formulação integral do problema foi obtida a partir de uma relação de reciprocidade, e os tensores correspondentes ao estado fundamental auxiliar foram obtidos pelo método de Hörmander (Hörmander [1964]). Foram resolvidos problemas de placas circulares e quadradas engastadas, e constatou-se que o fenômeno do *locking* não ocorria (Monken e Silva [1988], Westphal Jr. [1990]).

Já em 1988, G. Bézine modificou algumas formulações anteriores para flexão de placas finas sobre apoio elástico (Bézine [1988]). As modificações na formulação parametrizavam as matrizes resultantes em relação à rigidez da fundação, eliminando novos cálculos quando esta fosse alterada. Permitia também a análise de fundações cujas rigidezes não eram constantes (Calderón e Venturini [1992]).

K. Ruotsalainen e J. Saranen estudaram, em 1989, o método da colocação para cálculo de soluções aproximadas de problemas potenciais com condições de contorno não-lineares. Além de analisarem a unicidade da solução, apresentaram interessantes estimativas de erro assintóticas para discretização do contorno por *splines* genéricas. Tais estimativas eram



baseadas na norma dos resíduos das equações diferenciais sobre o contorno, e portanto se mostravam aplicáveis a problemas de elasticidade, como é o caso de placas.

Somente em 1990, oito anos após os trabalhos de F. Van der Weeën (Van der Weeën [1982a, 1982b]), foi publicada a primeira formulação do MEC para flexão geometricamente não-linear de placas, utilizando a teoria de Reissner (Xiao-Yan *et alli* [1990]). Os autores, erroneamente, denominaram o modelo de placa utilizado de modelo de Reissner, quando as expressões para momentos mostravam que se tratava, efetivamente, do modelo de Mindlin. Foram analisados casos de placas circulares e retangulares sob carregamentos transversais, e os resultados foram comparados com soluções do MEF. A solução iterativa adota a mesma estratégia que Ye e Liu [1985] para acelerar a convergência.

T. Westphal Jr. apresentou em sua dissertação, em 1990, uma formulação integral para flexão linear estática de placas que unifica os modelos de Mindlin e Reissner. Foram também deduzidos todos os tensores fundamentais na sua forma mais geral, com a solução fundamental para os deslocamentos calculada através do método de Hörmander (Hörmander [1964]). Foram utilizados elementos constantes, lineares e quadráticos para resolver principalmente casos de placas circulares. A implementação numérica permitia carregamentos concentrados e carregamentos distribuídos parciais, e foram adotados procedimentos bastante eficazes para integração de núcleos singulares. No mesmo período, T. Westphal Jr. e C.S. Barcellos (Westphal Jr. e Barcellos [1990]) reestudaram a influência numérica das funções livres contidas na solução fundamental e demonstram experimentalmente a arbitrariedade das mesmas.

G. Shi desenvolveu, em 1990, o que parece ser a primeira formulação integral para flambagem de placas ortotrópicas (Shi [1990]). A formulação abrangia também o problema de vibrações, mas o modelo de placa empregado foi o de Kirchhoff. Vários exemplos foram resolvidos com resultados satisfatórios.

X. Wang, J. Qian e M. Huang apresentaram, em 1991, uma formulação integral para vibrações livres de placas finas com grandes deslocamentos (Wang *et alli* [1991]). Utilizando o método do balanço harmônico, obtiveram um problema de autovalores e autovetores dependente da amplitude do movimento.

G.O. Ribeiro e W.S. Venturini (Ribeiro e Venturini [1991a]) estenderam a formulação integral apresentada em Karam [1986] e Karam e Telles [1986, 1988] para considerarem cargas distribuídas em linha nos termos de carregamento. No mesmo ano, esses autores (Ribeiro e Venturini [1991b]) adicionaram aos termos de carregamento a ocorrência de

momentos iniciais no domínio, permitindo a consideração dos efeitos de temperatura e alguns problemas não-lineares correlatos.

Em 1992, C.S. Barcellos e T. Westphal Jr. voltaram a investigar os tensores fundamentais para placas de Mindlin e Reissner (Barcellos e Westphal Jr. [1992]), e mostraram como particularizar tais tensores para levar à uma solução fundamental de placas finas. Esse resultado é obtido mediante escolha apropriada das constantes livres. Foram resolvidos alguns exemplos com elementos constantes, lineares e quadráticos, cujos resultados são comparados com soluções analíticas.

Ainda em 1992, R. Barbieri (Barbieri [1992], Barbieri e Barcellos [1991]) aplicou o método da função de Green local modificado (MFGLM) para flexão estática de placas de Mindlin. É uma extensão do método desenvolvido por L. H. Monken e Silva (Monken e Silva [1988]). Os resultados apresentados são promissores. A seguir, R. D. Machado [1992] aplicou o MFGLM para placas sanduíche, obtendo também bons resultados.

Algumas referências complementares podem ser encontradas em Beskos [1991], para vários tipos de problemas envolvendo placas ou cascas. Adicionalmente, Aliabadi *et alii* [1991], pp. 134-137, traz um levantamento parcial do estado da arte em problemas geometricamente não-lineares resolvidos pelo MEC, entre os anos de 1978 e 1991.

### 1.3. Objetivos do trabalho

A revisão anterior mostra claramente que ainda são relativamente escassos os trabalhos que tratam da aplicação do MEC à solução de problemas de flexão linear de placas, considerando o efeito do cisalhamento. Os modelos de placa propostos por R. D. Mindlin (Mindlin [1951]) e E. Reissner (Reissner [1944,1945]) constituem um bom modelo para análise numérica de flexão de placas semi-espessas porque representam de modo mais realista o fenômeno real, em relação ao modelo clássico de Kirchhoff. Além disso, tais modelos permitem também a solução de problemas de flexão de placas finas, e não implicam aumento do custo computacional.

A maioria dos elementos finitos baseados em tais teorias possuem a inconveniente necessidade de manipulação de modos de deformação espúrios, decorrentes da eliminação

do fenômeno do *locking*. Em contrapartida, torna-se viável a utilização de funções de interpolação  $C^0$ , devido ao desacoplamento dos graus de liberdade translacionais dos rotacionais. No MEC, a ausência do *locking* (Westphal Jr. [1990], Monken e Silva [1988]) é uma característica particularmente atrativa, pois permite tanto a análise de placas moderadamente espessas quanto placas finas sem maiores problemas, do ponto de vista numérico. Entretanto, desde o trabalho de F. Van der Weeën (Van der Weeën [1982a, 1982b]), poucos foram os trabalhos publicados referentes ao assunto. E apesar dos modelos de Mindlin e Reissner terem sido inseridos no contexto dos problemas geometricamente não-lineares já no final da década de setenta, para elementos finitos (Pica e Wood [1980a, 1980b]), é insignificante o número de publicações correspondentes usando o MEC.

Assim, o presente trabalho procura estender a aplicação do MEC para problemas de flexão de placas com grandes deslocamentos. O trabalho de T. Westphal Jr. (Westphal Jr. [1990]) é revisado, e os termos não-lineares dos operadores diferenciais são incluídos, tanto para o problema de flexão quanto para o problema de membrana (ausentes na referência citada). As equações integrais são resolvidas numericamente utilizando a metodologia padrão do MEC, e são implementados elementos constantes, lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos. Devido aos diversos graus de singularidade dos tensores envolvidos, alguns procedimentos de integração são testados para elementos retos, como alternativa à tradicional imposição de movimentos de corpo rígido, buscando economia e eficiência no procedimento numérico. São ilustradas as curvas de convergência  $h$  e  $p$ , para diversos casos estáticos lineares, com vistas à implementação futura de filosofias adaptativas. Uma particularização das equações integrais permite a análise linearizada de flambagem de placas. No cálculo dos termos não-lineares, correspondentes ao acoplamento flexão-membrana, não foram utilizadas derivadas das funções de interpolação (como geralmente se faz no MEF). Em vez disso, desenvolve-se uma equação integral auxiliar, para cálculo das derivadas do deslocamento transversal, caracterizando, para flambagem apenas, uma formulação hipersingular. E a fim de evitar quadraturas para núcleos hipersingulares, a solução numérica do problema de flambagem utilizou apenas elementos constantes, apesar das precisas regras de integração já existentes. O desempenho da formulação proposta é mostrado através da solução de alguns casos típicos de flambagem de placas.

---

---

## CAPÍTULO DOIS

---

---

### Os Modelos de Placa de Mindlin e Reissner

#### 2.1. Introdução

Neste capítulo são desenvolvidas as equações básicas para flexão de placas utilizando-se os modelos de Mindlin (Mindlin [1951]) e Reissner (Reissner [1944, 1945]). No cálculo das componentes do tensor de deformação, foram mantidos alguns dos termos correspondentes ao gradiente do campo de deslocamentos de modo que, efetivamente, obtém-se uma forma das equações de von Kármán.

São também deduzidas as equações representativas do campo de tensões dos modelos empregados, bem como as equações gerais do problema para um estado de equilíbrio auxiliar.

#### 2.2. Notas históricas

Os modelos mais conhecidos para descrição do fenômeno de flexão de placas são, sem dúvida, o modelo clássico de Kirchhoff (Timoshenko e Woinowski-Krieger [1970]) e os de R. D. Mindlin (Mindlin [1951]) e E. Reissner (Reissner [1944, 1945]). O primeiro destes, devido às hipóteses sobre as deformações que atuam na direção transversal da placa, leva a uma equação diferencial biarmônica, cuja solução obriga a contração de duas das condições de contorno em uma única (Reissner [1944], Timoshenko e Woinowski-Krieger [1970]). Os outros dois modelos são geralmente chamados de teorias de primeira ordem para flexão de placas, por considerarem variação linear dos deslocamentos longitudinais da placa, ao longo da espessura. Assim, tais modelos implicam na consideração de deformações

cisalhantes constantes ao longo da espessura, o que resulta numa equação diferencial de sexta ordem, possibilitando então a satisfação de três condições de contorno.

O modelo de placa de Reissner foi introduzido em 1944 (Reissner [1944]), mas as equações governantes só foram publicadas na sua forma geral no ano seguinte (Reissner [1945]). Nestes artigos, Reissner partiu de uma variação linear das tensões  $\sigma_{\alpha\beta}$  ao longo da espessura da placa e obteve, a partir das equações de equilíbrio, um comportamento quadrático para as componentes de tensão  $\sigma_{\alpha 3}$  e cúbico para  $\sigma_{33}$ . Uma outra forma de se deduzir as equações para este modelo de placa foi publicada pelo mesmo autor em 1947 (Reissner [1947]). Apesar de Reissner ter obtido a lei de Hooke generalizada através do teorema de Castigliano, A. E. Green (Green [1949]) obteve, em 1949, as mesmas equações também através de métodos energéticos, mas sem utilizar tal teorema.

O modelo de placa de Mindlin surgiu em 1951 (Mindlin [1951]) e, ao contrário de Reissner, foram adotadas hipóteses sobre o campo de deslocamentos experimentados pela placa, o que permite uma dedução bem mais direta das equações governantes. Apesar do trabalho de Mindlin incluir os termos de inércia nas equações de equilíbrio, trata-se, efetivamente, de uma extensão dos trabalhos (pouco conhecidos, na época<sup>†</sup>) de H. Hencky e L. Bollé, ambos publicados em 1947 (Reissner [1985]).

Em 1957, P. M. Naghdi modificou o modelo de Reissner considerando carregamentos arbitrários, incluindo o efeito de compressão transversal (Naghdi [1957]). Essas equações foram deduzidas para cascas, mediante o uso do Princípio Variacional de Reissner (Reissner [1950]). No ano seguinte Goldenveizer apresentou uma generalização da teoria de Reissner para uma variação arbitrária das tensões  $\sigma_{\alpha\beta}$  com a espessura (Reissner [1980]). Em 1975, Reissner propôs uma modificação na sua teoria baseado em informações advindas de soluções tridimensionais de problemas de flexão de placas (Reissner [1975]).

Uma característica inerente de algumas das chamadas teorias de primeira ordem, como é o caso da teoria de Mindlin, é o fato de levarem a valores constantes para as deformações cisalhantes transversais determinando, nestes modelos de placa, tensões cisalhantes transversais constantes. Por outro lado, a elasticidade tridimensional mostra que tais tensões variam ao longo da espessura segundo uma função quadrática ou de ordem mais alta. Esta constatação obriga o emprego de fatores corretivos para o cômputo global dos efeitos destas componentes de tensão. Tipicamente, utiliza-se o fator  $\kappa^2 = \pi^2/12$  para o modelo de

---

<sup>†</sup> Na realidade, já no final do século XIX, M. Lévy e A. B. Basset se preocupavam com a necessidade de satisfação de três condições de contorno, motivo pelo qual alguns pesquisadores não denominam as teorias de Mindlin e Reissner pelos nomes de seus autores (Reddy [1984a]).

Mindlin<sup>†</sup> (o fator  $\kappa^2 = 5/6$  aparece naturalmente na dedução das equações do modelo de Reissner). As teorias de ordem superior desenvolvidas nas últimas décadas eliminaram tal inconveniente, por utilizarem campos de deslocamento baseados em polinômios de ordens mais altas, o que leva naturalmente à distribuições mais complexas para as tensões cisalhantes ao longo da espessura da placa (Reddy [1984a]). Em compensação, são modelos regidos por equações diferenciais de 10<sup>a</sup>, 12<sup>a</sup>, 14<sup>a</sup> ou 22<sup>a</sup> ordem (Reddy [1984a], Reissner [1983,1985]), e nem sempre podem ser facilmente reduzidas às equações correspondentes dos modelos de primeira ordem ou às do modelo clássico de Kirchhoff. Em geral, tais teorias confirmam o valor 5/6 para correção das tensões cisalhantes (ver, por exemplo, Voyiadjis e Baluch [1981]). Recentemente, alguma ênfase tem sido dada à solução de problemas de flexão de placas através do uso de soluções analíticas da teoria da elasticidade tridimensional (Cheng [1979], Wittrick [1987]).

No contexto geometricamente não linear, as equações para flexão de placas tornam-se um pouco mais complexas, devido à necessidade de se manter alguns termos de ordem superior correspondentes ao gradiente do campo de deslocamentos nas expressões para as componentes de deformação. Esta necessidade provém do abandono da tradicional hipótese segundo a qual os deslocamentos e as rotações são suficientemente pequenos a ponto de poder-se ignorar a magnitude dos produtos de derivadas na expressão geral do tensor deformação.

As equações para placas incorporando os termos de grandes deslocamentos são conhecidas como equações de von Kármán, e são indispensáveis para a adequada análise de problemas de flambagem e pós-flambagem. A literatura é extensa para os assuntos relativos ao desenvolvimento e aplicação das equações de von Kármán para placas e cascas baseadas nas hipóteses de Kirchhoff<sup>‡</sup>. No âmbito das equações de von Kármán para modelos de placa ou casca que consideram deformações cisalhantes, a literatura é bem mais escassa (Reddy [1984a]), e soluções analíticas somente são possíveis para casos extremamente simples de geometria, condições de contorno e carregamento. Ainda assim, tais soluções são geralmente apresentadas na forma de expansões assintóticas (por exemplo, Frakes e Simmonds [1985]).

---

<sup>†</sup> Se determinado como na formulação original (Mindlin [1951]), o fator de correção das tensões cisalhantes do modelo de Mindlin é uma função dependente do coeficiente de Poisson do material.

<sup>‡</sup> Teorias como a de W. T. Koiter (Koiter [1960,1967]) e W. Pietraszkiewicz (Pietraszkiewicz [1979,1992]) merecem ser destacadas, em particular a última, que formalmente não impõe qualquer limitação sobre a magnitude dos deslocamentos ou rotações.

### 2.3. Relações cinemáticas

O domínio de análise que será utilizado daqui em diante é definido por um volume material  $V = \Omega \times (\pm h/2) \subset \mathbb{R}^3$ , onde  $\Omega(x_\alpha)$  é a superfície de referência da placa, aberta e limitada, e com contorno  $\Gamma$  lipschitziano sobre o qual é localmente definido um sistema de coordenadas  $\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{s}$ , conforme ilustrado na figura 2.1. A espessura  $h$  da placa é considerada uniforme em  $\Omega$ , e o material que ocupa  $V$  é isotrópico linear.

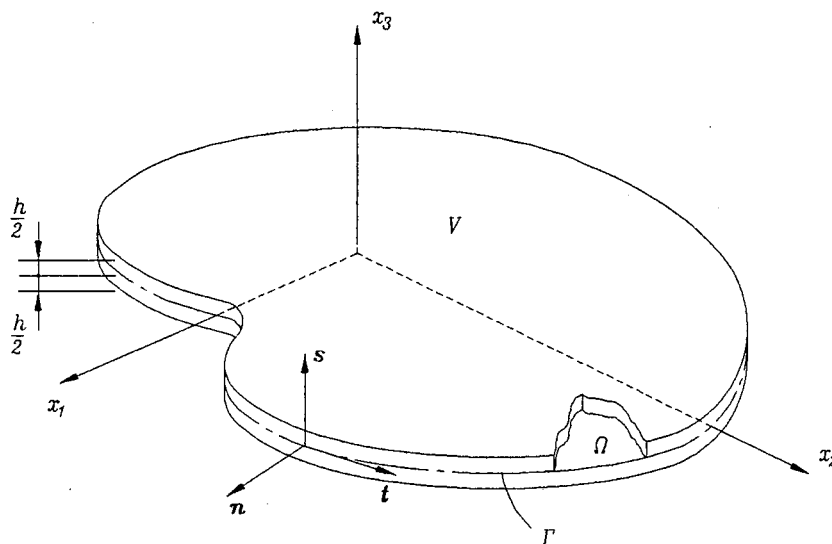


Figura 2.1 : Definição geométrica do domínio da placa.

Nas equações apresentadas a seguir, os índices latinos  $i, j, k$  etc. variam de um até três, enquanto os índices gregos  $\alpha, \beta, \gamma$  etc. variam de um até dois. A notação de Einstein é extensivamente utilizada e, a menos que indicado, o índice  $\omega$  varia de um até dois e não implica em somatório.

#### 2.3.1. Campo de deslocamentos

Como citado anteriormente, o modelo de Mindlin permite um desenvolvimento mais natural das equações do problema. Este será o modelo usado para obtenção das equações diferenciais governantes sendo que, quando pertinente, será indicada a modificação que leva às equações do modelo de Reissner. Por generalidade, é possível partir-se do campo

de deslocamentos postulado pela teoria generalizada de terceira ordem de Reddy (Reddy [1984a,1992]), da qual vários modelos de placas podem ser obtidos por particularização. Esse campo de deslocamentos é baseado nos seguintes polinômios:

$$\begin{aligned} U_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= u_\alpha + a_1 x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} + a_2 x_3 \psi_\alpha + a_3 x_3^2 \phi_\alpha + a_4 x_3^3 \theta_\alpha \\ U_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3 + a_5 x_3 \phi_3 + a_6 x_3^3 \theta_3 \quad , \end{aligned} \quad (2.1)$$

com

$$u_i = u_i(x_1, x_2)$$

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha(x_1, x_2)$$

sendo os cinco deslocamentos generalizados da placa. Os deslocamentos  $\psi_\alpha$  representam a rotação de uma linha inicialmente normal à superfície de referência sobre os eixos  $x_\alpha$ . A partir de valores apropriados para os coeficientes  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  e  $a_6$  obtém-se os campos de deslocamento de diversos modelos. São apresentados abaixo três exemplos:

- modelo clássico de Kirchhoff  $\rightarrow a_1 = -1, a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$
- teorias de 1<sup>a</sup> ordem  $\rightarrow a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$
- teorias de 2<sup>a</sup> ordem  $\rightarrow a_1 = 0, a_2 = a_3 = 1, a_4 = 0$

Nas equações (2.1),  $\phi_i$  e  $\theta_i$  são funções a serem determinadas. A substituição, nas equações (2.1), das constantes referentes às teorias de 1<sup>a</sup> ordem, leva às expressões:

$$U_\alpha(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha + x_3 \psi_\alpha \quad , \quad (2.2.a)$$

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = u_3 \quad , \quad (2.2.b)$$

que é o campo de deslocamentos efetivamente utilizado neste trabalho.

### 2.3.2. Relações deformação-deslocamento

A inserção do campo de deslocamentos (2.2) nas componentes do tensor deformação finita (Malvern [1969]):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,i} U_{k,j}) \quad , \quad (2.3)$$



fornece expressões que podem ser simplificadas da seguinte maneira: nas deformações  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , pode-se negligenciar os quadrados das derivadas dos deslocamentos longitudinais. A deformação transversal  $\varepsilon_{33}$  é desprezada, tendo em vista a hipótese de inextensibilidade transversal da placa. Nas expressões para deformações cisalhantes, desprezam-se os termos quadráticos em  $U_{\alpha,\beta}$  pelo mesmo motivo. Este procedimento leva a:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} \doteq U_{\alpha,\beta} + U_{\beta,\alpha} + U_{3,\alpha} U_{3,\beta} \quad (2.4.a)$$

$$\varepsilon_{33} \doteq 0 \quad (2.4.b)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = \gamma_{\alpha 3} = \gamma_{3\alpha} \doteq U_{\alpha,3} + U_{3,\alpha} \quad (2.4.c)$$

Reescrevendo-se estas expressões para identificar as contribuições de membrana e flexão separadamente, obtém-se:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} + x_3 K_{\alpha\beta} \quad (2.5.a)$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad (2.5.b)$$

$$\gamma_{\alpha 3} = \psi_{\alpha} + u_{3,\alpha} \quad (2.5.c)$$

onde:

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{3,\alpha} u_{3,\beta}) \quad (2.6.a)$$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha}) \quad (2.6.b)$$

As relações deformação-deslocamento são similares àquelas do problema de flexão linear de placas, apresentando no entanto, como fator de fundamental diferença, a presença dos termos dependentes das derivadas do deslocamento transversal no cálculo das deformações de membrana  $E_{\alpha\beta}$ . Estes termos são responsáveis, em parte, pelo acoplamento do problema de membrana com o problema de flexão.

## 2.4. Relações constitutivas

Fazendo-se uso da lei de Hooke generalizada (Boresi e Lynn [1974]),

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (2.7)$$

obtém-se as equações constitutivas para o problema:

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2G \left[ E_{\alpha\beta} + x_3 K_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} (E_{\gamma\gamma} + x_3 K_{\gamma\gamma}) \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.8.a)$$

$$\sigma_{33} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (E_{11} + E_{22}) + x_3 (K_{11} + K_{22}) \right] \quad (2.8.b)$$

$$\sigma_{\alpha 3} = G(\psi_\alpha + u_{3,\alpha}) \quad (2.8.c)$$

Observando-se então as definições de tensões resultantes (tensões de placa), dadas por

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \quad (2.9.a)$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \quad (2.9.b)$$

$$Q_\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad (2.9.c)$$

e substituindo-se as expressões (2.8) nas mesmas vem, após a integração na espessura:

$$N_{\alpha\beta} = C \left[ (1-\nu) E_{\alpha\beta} + \nu E_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.10.a)$$

$$M_{\alpha\beta} = D \left[ (1-\nu) K_{\alpha\beta} + \nu K_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.10.b)$$

onde

$$C = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Lembrando que o modelo de Mindlin leva a tensões cisalhantes transversais constantes ao longo da espessura, o que não condiz com o fenômeno real, deve-se ponderar o valor de  $\sigma_{\alpha 3}$  através da seguinte expressão, antes da integração das equações (2.9.c):

$$\hat{\sigma}_{\alpha 3} = \kappa^2 \sigma_{\alpha 3} \quad .$$

Deste modo tem-se, após a integração,

$$Q_\alpha = \kappa^2 Gh (\psi_\alpha + u_{3,\alpha}) \quad . \quad (2.11)$$

## 2.5. Equações de equilíbrio e condições de contorno

Conhecendo-se as relações deformação-deslocamento, bem como as relações constitutivas, e ainda as condições de contorno de deslocamento sobre uma parcela  $\Gamma_u$  do contorno da placa, é possível a aplicação imediata do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para a obtenção das equações de equilíbrio e das condições de contorno essenciais do problema. A forma geral do PTV é escrita (Washizu [1982]):

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V b_i \delta U_i dV + \int_\Gamma t_i \delta U_i d\Gamma \quad , \quad \forall \delta U_i, \quad (2.12)$$

onde  $b_i$  e  $t_i$  são forças de campo e forças de superfície atuantes em direções paralelas aos eixos  $x_i$ , respectivamente.

Variando-se as componentes de deformação e deslocamento conforme a forma a seguir

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \delta E_{\alpha\beta} + x_3 \delta K_{\alpha\beta} \quad (2.13.a)$$

$$\delta \gamma_{\alpha 3} = \delta \psi_\alpha + \delta u_{3,\alpha} \quad (2.13.b)$$

$$\delta U_\alpha = \delta u_\alpha + x_3 \delta \psi_\alpha \quad (2.13.c)$$

$$\delta U_3 = \delta u_3 \quad , \quad (2.13.d)$$

e substituindo as mesmas na expressão (2.12) resulta:

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \int_{-h/2}^{+h/2} \left[ \sigma_{\alpha\beta} (\delta E_{\alpha\beta} + x_3 \delta K_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha 3} (\delta \psi_\alpha + \delta u_{3,\alpha}) \right] dx_3 d\Omega = \\ & = \int_\Omega \int_{-h/2}^{+h/2} \left[ b_\alpha (\delta u_\alpha + x_3 \delta \psi_\alpha) + b_3 \delta u_3 \right] dx_3 d\Omega + \\ & + \int_\Gamma \left[ t_\alpha (\delta u_\alpha + x_3 \delta \psi_\alpha) + t_3 \delta u_3 \right] d\Gamma \quad . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Utilizando as definições (2.9) e integrando por partes, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (-N_{\alpha\beta,\beta} \delta u_{\alpha} - N_{\alpha\beta,\beta} u_{3,\alpha} \delta u_3 - N_{\alpha\beta} u_{3,\alpha\beta} \delta u_3 - M_{\alpha\beta,\beta} \delta \psi_{\alpha} + \\
& \quad - Q_{\alpha,\alpha} \delta u_3 + Q_{\alpha} \delta \psi_{\alpha}) d\Omega + \\
& \quad + \oint_{\Gamma} (N_{\alpha\beta} n_{\beta} \delta u_{\alpha} + N_{\alpha\beta} u_{3,\alpha} n_{\beta} \delta u_3 + M_{\alpha\beta} n_{\beta} \delta \psi_{\alpha} + Q_{\alpha} n_{\alpha} \delta u_3) d\Gamma = \quad (2.15) \\
& = \int_{\Omega} (q_i \delta u_i + m_{\alpha} \delta \psi_{\alpha}) d\Omega + \int_{\Gamma} (t_i \delta u_i + x_3 t_{\alpha} \delta \psi_{\alpha}) d\Gamma \quad ,
\end{aligned}$$

sendo  $q_i$  os carregamentos distribuídos atuantes nas direções paralelas aos eixos  $x_i$ ,  $m_{\alpha}$  são momentos distribuídos correspondentes aos eixos  $x_{\alpha}$ , e  $n_{\alpha}$  são os cossenos diretores de  $\mathbf{n}$  sobre o contorno  $\Gamma$  da placa. Igualando-se os coeficientes das quantidades variadas, obtém-se prontamente as equações de equilíbrio, dadas a seguir. Cabe salientar que tais equações são independentes de quaisquer hipóteses cinemáticas adotadas.

$$N_{\alpha\beta,\beta} + q_{\alpha} = 0 \quad (2.16.a)$$

$$(N_{\alpha\beta} u_{3,\alpha})_{,\beta} + Q_{\alpha,\alpha} + q_3 = 0 \quad (2.16.b)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} + m_{\alpha} = 0 \quad (2.16.c)$$

As condições de contorno são obtidas de modo idêntico. Antes de escrevê-las, porém, destaque-se que, em um problema bem posto, é necessária a prescrição ou do deslocamento ou da força de superfície correspondente a cada uma das cinco direções generalizadas. Sejam então

$$u_i = \bar{u}_i, \quad \text{conhecido sobre } \Gamma_u, \quad \text{e} \quad (2.17.a)$$

$$t_i = \bar{t}_i, \quad \text{conhecido sobre } \Gamma_t, \quad (2.17.b)$$

sendo  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_t$  regiões complementares de  $\Gamma$  para cada par dual de variáveis. Assim, retira-se dos coeficientes das variações nas integrais sobre o contorno de (2.15) as condições de contorno:

$$t_{\alpha} = N_{\alpha\beta} n_{\beta} \quad \text{sobre } \Gamma_u, \quad \text{ou} \quad \bar{t}_{\alpha} = \bar{N}_{\alpha\beta} n_{\beta} \quad \text{sobre } \Gamma_t \quad (2.18.a)$$

$$t_3 = N_{\alpha\beta} \bar{u}_{3,\alpha} n_{\beta} + Q_{\alpha} n_{\alpha} \quad \text{sobre } \Gamma_u, \quad \text{ou} \quad (2.18.b)$$

$$\bar{t}_3 = \bar{N}_{\alpha\beta} u_{3,\alpha} n_{\beta} + \bar{Q}_{\alpha} n_{\alpha} \quad \text{sobre } \Gamma_t,$$

$$l_{\alpha} = M_{\alpha\beta} n_{\beta} \quad \text{sobre } \Gamma_u, \quad \text{ou} \quad \bar{l}_{\alpha} = \bar{M}_{\alpha\beta} n_{\beta} \quad \text{sobre } \Gamma_t \quad (2.18.c)$$

onde as variáveis prescritas estão indicadas com uma barra sobreposta e  $l_\alpha = x_3 t_\alpha$ . A equação (2.18.b) mostra claramente que as condições de contorno do problema variam com a geometria. Cabe destacar ainda que  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_t$  estão associados a cada uma das variáveis (prescritas ou não) de (2.18), e podem não coincidir para duas variáveis distintas, isto é, podem corresponder a regiões diferentes para cada uma das eqs.(2.18).

A substituição das relações deformação-deslocamento (2.5) nas expressões para tensões resultantes (2.10) e (2.11), leva a relações para esforços em termos dos deslocamentos:

$$N_{\alpha\beta} = C \frac{1-\nu}{2} \left[ u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{3,\alpha} u_{3,\beta} + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( u_{\gamma,\gamma} + \frac{1}{2} u_{3,\gamma} u_{3,\gamma} \right) \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.19.a)$$

$$M_{\alpha\beta} = D \frac{1-\nu}{2} \left[ \psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.19.b.1)$$

$$Q_\alpha = D \lambda^2 \frac{1-\nu}{2} \left[ \psi_\alpha + u_{3,\alpha} \right] \quad , \quad (2.19.c)$$

onde

$$\lambda^2 = \frac{12\kappa^2}{h^2} \quad . \quad (2.20)$$

Pelo procedimento de Reissner,  $M_{\alpha\beta}$  é dado por

$$M_{\alpha\beta} = D \frac{1-\nu}{2} \left[ \psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q_3 \delta_{\alpha\beta} \quad (2.19.b.2)$$

De forma mais convenientemente, distingue-se as parcelas lineares e não-lineares da seguinte maneira:

$$N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}^l + N_{\alpha\beta}^n \quad (2.21.a)$$

$$Q_\alpha = Q_\alpha^l + Q_\alpha^n \quad (2.21.b)$$

com

$$N_{\alpha\beta}^l = C \frac{1-\nu}{2} \left[ u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.22.a)$$

$$N_{\alpha\beta}^n = C \frac{1-\nu}{2} \left[ u_{3,\alpha} u_{3,\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} u_{3,\gamma} u_{3,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.22.b)$$

$$Q_\alpha^l = D \lambda^2 \frac{1-\nu}{2} (\psi_\alpha + u_{3,\alpha}) \quad (2.22.c)$$

$$Q_\alpha^n = N_{\alpha\beta} u_{3,\beta} \quad , \quad (2.22.d)$$

onde  $Q_\alpha^n$  foi reconhecido comparando-se as eqs.(2.16.b) com as eqs.(2.19) <sup>†</sup>. Agora, torna-se direto reescrever as equações de equilíbrio (2.16) na conhecida forma:

$$N_{\alpha\beta,\beta} + q_\alpha = 0 \quad (2.23.a)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} + q_3 = 0 \quad (2.23.b)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha^l + m_\alpha = 0 \quad (2.23.c)$$

onde valem as igualdades (2.21).

A diferenciação das expressões (2.22) e a inserção dos resultados em (2.23) fornece as equações de equilíbrio do problema em termos de deslocamentos. Nesta forma, são conhecidas como equações de von Kármán. A diferença fundamental em relação ao sistema de equações de equilíbrio para pequenos deslocamentos reside nos esforços de membrana, presentes na equação de equilíbrio de esforços transversais, eq.(2.23.b), os quais também são responsáveis pelo acoplamento do problema de flexão com o problema de membrana. Estas equações, na forma como estão apresentadas, valem para quaisquer configurações de equilíbrio, antes ou após qualquer ponto de bifurcação ser encontrado sobre a trajetória de equilíbrio.

Desta maneira, as equações de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta,\beta} + q_\alpha &= N_{\alpha\beta,\beta}^l + N_{\alpha\beta,\beta}^n + q_\alpha = \\ &= C \frac{1-\nu}{2} \left[ \Delta u_\alpha + \frac{1+\nu}{1-\nu} u_{\beta,\alpha\beta} + (u_{3,\alpha} u_{3,\beta})_{,\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{1-\nu} (u_{3,\beta} u_{3,\beta})_{,\alpha} \right] + q_\alpha = 0 \end{aligned} \quad (2.24.a)$$

$$\begin{aligned} Q_{\alpha,\alpha} + q_3 &= Q_{\alpha,\alpha}^l + Q_{\alpha,\alpha}^n + q_3 = \\ &= D \lambda^2 \frac{1-\nu}{2} (\psi_{\alpha,\alpha} + \Delta u_3) + \\ &\quad + (N_{\alpha\beta} u_{3,\beta})_{,\alpha} + q_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.24.b)$$

---

<sup>†</sup> Xiao-Yan *et alli* [1990] obtiveram o termo não linear  $Q_\alpha^n$  diretamente em (2.19.c) utilizando a definição  $Q_\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{\alpha 3} + \sigma_{\alpha\beta} u_{3,\beta}) dx_3$ , que já inclui o acoplamento flexão-membrana, ao invés de (2.9.c).

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha}^l + m_{\alpha} &= M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha}^l + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q_{3,\alpha} + m_{\alpha} = \\
&= D \frac{1-\nu}{2} \left[ (\Delta - \lambda^2) \psi_{\alpha} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \psi_{\beta,\alpha\beta} - \lambda^2 u_{3,\alpha} \right] + \\
&+ \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q_{3,\alpha} + m_{\alpha} = 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{2.24.c}$$

que são as cinco equações de Navier do problema, onde  $\Delta = \partial^2/(\partial x_{\alpha}\partial x_{\alpha})$ . Os termos destacados nas equações acima, correspondentes à parcela não-linear, impossibilitam que se escreva as equações de Navier na forma como geralmente é feito para a teoria linear (Westphal Jr. [1990a]):

$$\mathcal{L}_{ij}(\partial_Q)u_j(Q) = -\mathcal{F}_{ij}(\partial_Q)q_j(Q) \quad , \quad Q \equiv (x_1, x_2) \in \Omega. \tag{2.25}$$

Entretanto, é possível utilizar a forma geral acima se os termos não-lineares das equações de equilíbrio forem incorporados aos termos de carregamento. Esse procedimento leva a um sistema do tipo

$$\begin{bmatrix} {}^m\mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^f\mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^m\mathbf{u} \\ {}^f\mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^m\hat{\mathbf{q}} \\ {}^f\hat{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \tag{2.26}$$

onde  ${}^m\mathbf{L}$  é o operador diferencial da parte linear das equações de equilíbrio do problema de membrana,  ${}^f\mathbf{L}$  é o operador equivalente do problema de flexão,  ${}^m\mathbf{u} = \{u_1 \ u_2\}^T$  são os deslocamentos longitudinais e  ${}^f\mathbf{u} = \{\psi_1 \ \psi_2 \ u_3\}^T$  são os deslocamentos de placa. O acoplamento flexão-membrana está assim implícito nos pseudo-carregamentos correspondentes,  ${}^m\hat{\mathbf{q}}$  e  ${}^f\hat{\mathbf{q}}$ :

$${}^m\hat{q}_{\alpha} = - {}^m\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\partial_Q) {}^mq_{\beta}^l(Q) + {}^mq_{\alpha}^n(Q) \tag{2.27.a}$$

$${}^f\hat{q}_i = - {}^f\mathcal{F}_{ij}(\partial_Q) {}^fq_j^l(Q) + {}^fq_i^n(Q) \tag{2.27.b}$$

As formas explícitas dos termos usados em (2.26) e (2.27) são dadas a seguir.

$${}^m\mathbf{L}(\partial_Q) = C \frac{1-\nu}{2} \begin{bmatrix} \Delta + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \Delta + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \tag{2.28.a}$$

$${}^f\mathbf{L}(\partial_Q) = D \frac{1-\nu}{2} \begin{bmatrix} \Delta - \lambda^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & -\lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \Delta - \lambda^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -\lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_1} & \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_2} & \lambda^2 \Delta \end{bmatrix} \tag{2.28.b}$$

$${}^m\mathbf{F}(\partial_Q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28.c)$$

$${}^f\mathbf{F}(\partial_Q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & m_f \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 1 & 0 & m_f \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28.d)$$

$${}^m\mathbf{q}^l(Q) = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (2.28.e)$$

$${}^m\mathbf{q}^n(Q) = C \frac{1-\nu}{2} \begin{Bmatrix} (u_{3,1}u_{3,\alpha})_{,\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu}(u_{3,\gamma}u_{3,\gamma})_{,1} \\ (u_{3,2}u_{3,\beta})_{,\beta} + \frac{\nu}{1-\nu}(u_{3,\gamma}u_{3,\gamma})_{,2} \end{Bmatrix} \quad (2.28.f)$$

$${}^f\mathbf{q}^l(Q) = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (2.28.g)$$

$${}^f\mathbf{q}^n(Q) = D \frac{1-\nu}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (N_{\alpha\beta}u_{3,\beta})_{,\alpha} \end{Bmatrix}, \quad (2.28.h)$$

onde  $m_f$  é o fator de modelo, que permite a unificação dos modelos de placa de Mindlin e de Reissner, conforme proposto por Westphal Jr. [1990a, 1990b]. O fator de modelo é dado por:

$$m_f = \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}, \quad \text{para o modelo de Reissner} \quad (2.29.a)$$

$$m_f = 0, \quad \text{para o modelo de Mindlin.} \quad (2.29.b)$$

A solução de (2.26) é iterativa. Por outro lado, os operadores  ${}^m\mathbf{L}$  e  ${}^f\mathbf{L}$  são os mesmos da teoria linear.



## 2.6. Campo de tensões

As equações até aqui desenvolvidas são suficientes para descrever completamente o problema de flexão geometricamente não-linear de placas semi-espessas. No entanto, do ponto de vista da análise estrutural, torna-se importante o conhecimento das tensões locais que atuam nas regiões de interesse da estrutura. Assim, serão aqui desenvolvidas expressões para as tensões locais em termos dos deslocamentos e em termos dos carregamentos e tensões resultantes.

A inserção das relações (2.6) nas relações constitutivas (2.8) leva às seguintes expressões para tensões em termos dos deslocamentos:

$$\sigma_{\alpha\beta} = {}^m\sigma_{\alpha\beta} + {}^f\sigma_{\alpha\beta} \quad (2.30)$$

onde

$${}^m\sigma_{\alpha\beta} = {}^m\sigma_{\alpha\beta}^l + {}^m\sigma_{\alpha\beta}^n \quad (2.31)$$

e

$${}^m\sigma_{\alpha\beta}^l = G \left[ u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.32.a)$$

$${}^m\sigma_{\alpha\beta}^n = G \left[ u_{3,\alpha} u_{3,\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} u_{3,\gamma} u_{3,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.32.b)$$

$${}^f\sigma_{\alpha\beta} = G \left[ \psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] x_3 \quad (2.32.c)$$

com as parcelas lineares e não-lineares das tensões de membrana já identificadas. As componentes  $\sigma_{\alpha 3}$  dadas por (2.8.c) permanecem válidas, pois já estão escritas em termos de deslocamentos:

$$\sigma_{\alpha 3} = G(\psi_{\alpha} + u_{3,\alpha}) \quad (2.32.d)$$

A tensão normal transversal é obtida substituindo-se (2.6) em (2.8.b), o que fornece

$$\sigma_{33} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ u_{\alpha,\alpha} + \frac{1}{2}(u_{3,\alpha} u_{3,\alpha}) - x_3 \psi_{\alpha,\alpha} \right] \quad (2.32.e)$$

A comparação entre as expressões (2.32) com as relações tensão-deslocamento (2.19) ou (2.22) permite escrever

$${}^m\sigma_{\alpha\beta}^l = \frac{N_{\alpha\beta}^l}{h} \quad (2.33.a)$$

$$m\sigma_{\alpha\beta}^n = \frac{N_{\alpha\beta}^n}{h} \quad (2.33.b)$$

ou, genericamente:

$$m\sigma_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{h} \quad (2.34)$$

que não variam ao longo da espessura, como é de se esperar. Ainda:

$$f\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12}{h^3} M_{\alpha\beta} x_3 \quad (2.35)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^l = \frac{Q_\alpha}{\kappa^2 h} \quad (2.36.a)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^n = \frac{Gh^3}{12} N_{\alpha\beta} u_{3,\beta} \quad (2.36.b)$$

As expressões (2.30) a (2.36) dadas acima devem ser utilizadas com alguma cautela, dependendo do modelo de placa utilizado. Na realidade, os deslocamentos  $\psi_\alpha$  e  $u_3$  representam uma ponderação do que ocorre ao longo da espessura quando o problema de flexão de placas é analisado do ponto de vista tridimensional. Assim, se as componentes dos deslocamentos sofridos pela placa em pontos sobre o eixo  $x_3$ , nas direções  $x_i$ , são denominadas  $v_i$ , uma definição mais abrangente dos deslocamentos generalizados pode ser escrita (Westphal Jr. [1990a]):

$$\psi_\alpha = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} v_\alpha(x_i) dx_3 \quad ,$$

$$u_3 = \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} v_3(x_i) \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3 \quad .$$

Assim, os deslocamentos  $\psi_\alpha$  e  $u_3$  são, na verdade, médias ponderadas dos deslocamentos realmente sofridos pela placa, e são definidos sobre a superfície média da mesma. Com efeito, se  $v_\alpha$  é linear em  $x_3$  e  $v_3$  é constante, então (Westphal Jr. [1990a]):

$$v_\alpha(x_i) = x_3 \psi_\alpha(x_\beta) \quad ,$$

$$v_3(x_i) = u_3(x_\beta) \quad ,$$

e os dois modelos de placa aqui abordados se identificam. Neste caso, e somente neste caso, poder-se-ia utilizar as expressões (2.30) a (2.36) independentemente do modelo adotado.

Este fato pode ser demonstrado variacionalmente utilizando médias ponderadas também para as componentes de deformação. Por simplicidade, o desenvolvimento a seguir segue o modelo de Reissner, que utiliza tensões cisalhantes transversais variáveis com a espessura, sem o conhecimento explícito das funções que regem o comportamento dos deslocamentos  $v_i$  (Reissner [1944, 1945]).

Posto isto, a parcela linear das tensões cisalhantes transversais, eqs.(2.36.a), deve ser interpretada como uma tensão média ao longo da espessura, e a princípio válida apenas para o modelo de Mindlin. Para obter-se o seu comportamento em função da espessura, parte-se das equações de equilíbrio de tensão, na ausência de forças de corpo (Malvern [1969]):

$$\sigma_{ji,i} = 0 \quad (2.37)$$

bem como das equações de equilíbrio em termos das tensões resultantes, eqs.(2.23). Das duas primeiras equações de equilíbrio (2.37), e usando (2.23.c), obtém-se uma expressão para  $\sigma_{\alpha 3,3}$  que pode ser integrada em  $x_3$ . Lembrando-se que  $q_\alpha$ ,  $m_\alpha$  e  $Q_\alpha$  são funções de  $(x_1, x_2)$ , este procedimento leva a:

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{q_\alpha}{h} x_3 + \frac{6x_3^2}{h^3} (m_\alpha - Q_\alpha) + C_\alpha, \quad (2.38)$$

onde as constantes de integração  $C_\alpha$  são obtidas através das seguintes condições de contorno:

$$\sigma_{\alpha 3}(\pm h/2) = 0, \quad (2.39)$$

que fornece

$$\sigma_{\omega 3} = q_\omega \left[ \frac{(-1)^{\omega-1}}{2} + \frac{x_3}{h} \right] + \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] (Q_\omega - m_\omega), \quad (2.40)$$

Substituindo-se então (2.40) na terceira equação de equilíbrio (2.37) e usando (2.23.b), obtém-se uma expressão para  $\sigma_{33,3}$  que também é integrada na espessura. A constante de integração correspondente é obtida impondo-se a seguinte condição de contorno †:

$$\sigma_{33}(-h/2) = 0. \quad (2.41)$$

---

† A condição de contorno (2.41) parece mais prática do ponto de vista da engenharia, pois pressupõe todo o carregamento transversal aplicado sobre a superfície superior da placa, estando a superfície inferior livre de qualquer carregamento.

Este procedimento resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = \frac{1}{2} \left\{ \{ q_{\alpha, \alpha} \left[ (-1)^\omega \left( x_3 + \frac{h}{2} \right) + \frac{x_3^2}{h} - \frac{h}{4} \right] + \right. \\ \left. + 3(q_3 + m_{\alpha, \alpha}) \left[ \frac{x_3}{h} - \frac{4}{3} \left( \frac{x_3}{h} \right)^3 + \frac{1}{3} \right] \right\}, \quad \omega = \alpha. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Note-se que  $\sigma_{\alpha 3}$  varia quadraticamente com  $x_3$  enquanto  $\sigma_{33}$  varia cubicamente. No entanto, foi imposta apenas uma condição de contorno sobre  $\sigma_{33}$ . A fim de investigar o que ocorre com  $\sigma_{33}$  na superfície superior da placa, substitui-se  $x_3 = +h/2$  em (2.42), resultando

$$\sigma_{33} (+h/2) = q_{\alpha, \alpha} (-1)^\omega \frac{h}{2} + q_3 + m_{\alpha, \alpha}, \quad \omega = \alpha. \quad (2.43)$$

O termo  $m_{\alpha, \alpha}$  corresponde à carga distribuída equivalente, provocada por momentos distribuídos (a exemplo do que ocorre na teoria de vigas). O carregamento transversal é dado por  $q_3$ , e o termo  $q_{\alpha, \alpha}$  é não-nulo apenas se houver forças paralelas à superfície de referência da placa, atuando na parte superior ou inferior da mesma. É conveniente salientar que (2.43) se reduz aos resultados obtidos por Mindlin [1951] e Reissner [1945], se  $m_\alpha = q_\alpha = 0$ .

## 2.7. Equações para um estado de equilíbrio auxiliar

O uso de relações de reciprocidade envolve, via de regra, a utilização de quantidades duais correspondentes a dois estados de equilíbrio distintos. Em geral, um deles se refere ao problema que se está interessado em resolver e o outro corresponde a um estado conhecido, denominado auxiliar. Nas formulações integrais, é comum serem utilizadas algumas relações para um estado auxiliar correspondente a uma solução fundamental do problema. A seguir são apresentadas algumas destas relações, sendo identificadas pelo sobre-índice asterisco. Tais equações não incluem quaisquer efeitos não-lineares, e são obtidas a partir da suposição de que as forças de corpo  $f_i^*$  variam segundo uma distribuição de esforços concentrados  $F_i^*$ ,  $G_\alpha^*$  que possuem a mesma forma operacional que a distribuição de tensões do modelo de Reissner (Westphal Jr. [1990a]). Levando-se em conta as eqs.(2.34), (2.35)

e (2.36) define-se assim:

$$f_{\alpha}^* = {}^m f_{\alpha}^* + {}^f f_{\alpha}^* = \frac{F_{\alpha}^*}{h} + \frac{12}{h^3} x_3 G_{\alpha}^* \quad (2.44.a)$$

$$f_3^* = \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] F_3^* , \quad (2.44.b)$$

onde  $F_i^*$  representa uma carga concentrada unitária generalizada na direção  $x_i$ , enquanto  $G_{\alpha}^*$  representa um momento concentrado generalizado na direção  $x_{\alpha}$ .

Para tal estado auxiliar as equações de equilíbrio são:

$$\sigma_{ij,j}^* + f_i^* = 0 \quad (2.45)$$

e, pressupondo-se que apenas forças de corpo são consideradas, pode-se utilizar as eqs.(2.34), (2.35), (2.38) e (2.43) para escrever,

$$\sigma_{\alpha\beta}^* = {}^m \sigma_{\alpha\beta}^* + {}^f \sigma_{\alpha\beta}^* = \frac{N_{\alpha\beta}^*}{h} + \frac{12}{h^3} x_3 M_{\alpha\beta}^* \quad (2.46.a)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^* = \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] Q_{\alpha}^* \quad (2.46.b)$$

$$\sigma_{33}^* = 0 . \quad (2.46.c)$$

A substituição de (2.46.a), (2.46.b) e (2.44.a) nas duas primeiras equações de equilíbrio resulta:

$$N_{\alpha\beta,\beta}^* + F_{\alpha}^* = 0 \quad (2.47.a)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_{\alpha}^* + G_{\alpha}^* = 0 , \quad (2.47.b)$$

enquanto que a inserção de (2.46.b) e (2.46.c) na equação de equilíbrio remanescente fornece:

$$Q_{\alpha,\alpha}^* + F_3^* = 0 . \quad (2.47.c)$$

As variáveis envolvidas nas eqs.(2.46) estão relacionadas com o campo de deslocamentos do estado auxiliar da forma linear. Então, de forma similar às eqs.(2.19.b.1), (2.22.a) e (2.22.c), tem-se:

$$N_{\alpha\beta}^* = C \frac{1-\nu}{2} \left[ u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right] , \quad (2.48.a)$$

$$M_{\alpha\beta}^* = D \frac{1-\nu}{2} \left[ \psi_{\alpha,\beta}^* + \psi_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} \psi_{\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right] , \quad (2.48.b)$$

$$Q_{\alpha}^* = D \lambda^2 \frac{1-\nu}{2} \left( \psi_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^* \right) . \quad (2.48.c)$$

Resumindo-se então as quantidades relativas aos dois estados, tem-se:

- Equações de equilíbrio:

$$N_{\alpha\beta,\beta} + q_\alpha = 0 \quad (2.49.a)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} + q_3 = 0 \quad (2.49.b)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha^l + m_\alpha = 0, \quad \text{para o problema original} \quad (2.49.c)$$

e

$$N_{\alpha\beta,\beta}^* + F_\alpha^* = 0 \quad (2.49.d)$$

$$Q_{\alpha,\alpha}^* + F_3^* = 0 \quad (2.49.e)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_\alpha^* + G_\alpha^* = 0, \quad \text{para o estado auxiliar.} \quad (2.49.f)$$

- Deslocamentos:

$$u_i, \quad \psi_\alpha, \quad \text{para o problema original, e} \quad (2.50.a)$$

$$u_i^*, \quad \psi_\alpha^*, \quad \text{para o estado auxiliar.} \quad (2.50.b)$$

- Forças de superfície:

$$t_\alpha = N_{\alpha\beta}n_\beta \quad (2.51.a)$$

$$t_3 = N_{\alpha\beta}u_{3,\alpha}n_\beta + Q_\alpha n_\alpha \quad (2.51.b)$$

$$l_\alpha = M_{\alpha\beta}n_\beta, \quad \text{para o problema original} \quad (2.51.c)$$

e

$$t_\alpha^* = N_{\alpha\beta}^*n_\beta \quad (2.51.d)$$

$$t_3^* = Q_\alpha^*n_\alpha \quad (2.51.e)$$

$$l_\alpha^* = M_{\alpha\beta}^*n_\beta, \quad \text{para o estado auxiliar.} \quad (2.51.f)$$

- Deformações:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} + x_3 K_{\alpha\beta} \quad (2.52.a)$$

$$\gamma_{\alpha 3} = \psi_\alpha + u_{3,\alpha} \quad (2.52.b)$$

onde

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{3,\alpha} u_{3,\beta}) \quad (2.52.c)$$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha}) \text{ , para o problema original} \quad (2.52.d)$$

e

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^* = E_{\alpha\beta}^* + x_3 K_{\alpha\beta}^* \quad (2.52.e)$$

$$\gamma_{\alpha 3}^* = \psi_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^* \quad (2.52.f)$$

onde

$$E_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^*) \quad (2.52.g)$$

$$K_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2}(\psi_{\alpha,\beta}^* + \psi_{\beta,\alpha}^*) \text{ , para o estado auxiliar.} \quad (2.52.h)$$

• Tensões resultantes:

$$N_{\alpha\beta} = C \frac{1-\nu}{2} \left[ u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{3,\alpha} u_{3,\beta} + \frac{2\nu}{1-\nu} \left( u_{\gamma,\gamma} + \frac{1}{2} u_{3,\gamma} u_{3,\gamma} \right) \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.53.a)$$

$$M_{\alpha\beta} = D \frac{1-\nu}{2} \left[ \psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + m_f q_3 \delta_{\alpha\beta} \quad (2.53.b)$$

$$Q_{\alpha} = D \lambda^2 \frac{1-\nu}{2} (\psi_{\alpha} + u_{3,\alpha}) \text{ ,} \quad (2.53.c)$$

para o problema original, e

$$N_{\alpha\beta}^* = C \frac{1-\nu}{2} \left[ u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.53.d)$$

$$M_{\alpha\beta}^* = D \frac{1-\nu}{2} \left[ \psi_{\alpha,\beta}^* + \psi_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} \psi_{\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.53.e)$$

$$Q_{\alpha}^* = D \lambda^2 \frac{1-\nu}{2} (\psi_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) \quad (2.53.f)$$

para o estado auxiliar.

## 2.8. Conclusões

Foram apresentadas neste capítulo as equações necessárias para a completa descrição do fenômeno de flexão de placas semi-espessas, incluindo os efeitos geométricos não-lineares, utilizando-se as teorias de Mindlin e de Reissner. Incluiu-se uma breve análise do comportamento das tensões transversais ao longo da espessura. Foram também desenvolvidas as equações para um estado de equilíbrio correspondente à uma solução fundamental do problema, com vistas à formulação integral desenvolvida no próximo capítulo.



---

---

## CAPÍTULO TRÊS

### Formulação Integral

#### 3.1. Introdução

Neste capítulo são desenvolvidas as equações integrais para os modelos de placa empregados, incluindo os termos não-lineares. Inicialmente é apresentado o procedimento para um operador diferencial  $\mathcal{L}(\partial_Q)$  genérico. Seguindo-se então tal procedimento são obtidas as formulações integrais correspondentes aos operadores  ${}^m\mathcal{L}(\partial_Q)$  e  ${}^f\mathcal{L}(\partial_Q)$  dados pelas equações (2.28.a) e (2.28.b). Em ambos os casos o tratamento leva às identidades de Somigliana para os problemas de membrana e flexão, sobre as quais é aplicada a propriedade do traço, obtendo-se os problemas de valores sobre o contorno correspondentes. Uma particularização dessas equações leva à formulação integral representativa do problema de estabilidade linear elástica de placas.

#### 3.2. Formalismo geral

O formalismo algébrico de uma formulação integral data de meados do século XIX, quando o matemático inglês G. Green mostrou como transformar uma formulação diferencial de domínio para uma descrição integral definida sobre o contorno (Stein e Wendland [1988]). Já no início do século XX, I. Fredholm aplicou a idéia a problemas do meio contínuo, e postulou os requisitos para existência e unicidade de soluções de equações integrais (Beskos [1991]). As formas integrais de problemas de valores sobre o contorno podem ser obtidas de diversas maneiras. Por exemplo, para problemas lineares, a aplicação imediata da terceira identidade de Green, ou dos teoremas de reciprocidade de Betti e Castigliano ou ainda uma forma geral da identidade de Somigliana fornecem resultados idênticos.

Entretanto, a utilização de tais métodos não permite facilmente a extensão da formulação a problemas mais complexos, como os que envolvem algum tipo de não-linearidade (Stein e Wendland [1988]). No caso geral, a utilização de uma forma do método dos resíduos ponderados (MRP) é mais direta e abrangente, permitindo, inclusive, uma unificação das relações funcionais que determinam a origem de vários métodos de solução, aproximados ou não (Brebbia [1984], Brebbia e Walker [1980], Banerjee e Butterfield [1981]).

Seja então um problema qualquer dado pela sua equação diferencial:

$$\mathcal{L}(\partial_Q)u(Q) = q(Q) \quad Q \in \mathcal{H} \quad , \quad (3.1)$$

onde  $\mathcal{L}$  é um operador diferencial de ordem  $m$ . Seja também o produto dual

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{H}} uv \, dx \quad , \quad (3.2)$$

entre as variáveis  $u$  e  $v$ , definidas sobre os espaços de Hilbert  $\mathcal{H}$  e seu dual  $\mathcal{H}'$ , respectivamente. Admita-se que  $v$  seja  $k$ -vezes diferenciável<sup>†</sup>. A inserção de (3.1) na definição (3.2) gera:

$$\int_{\mathcal{H}} (\mathcal{L}u - q)v \, dx = 0. \quad (3.3)$$

A integração de (3.3)  $k$ -vezes, por partes, leva à fórmula de Green generalizada:

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle_{\mathcal{H}} - \langle \mathcal{L}v, u \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{N}v, \mathcal{D}u \rangle_{\partial\mathcal{H}} - \langle \mathcal{N}u, \mathcal{D}v \rangle_{\partial\mathcal{H}} \quad , \quad (3.4)$$

onde  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{D}$  são os operadores traço generalizados de Neumann e Dirichlet, respectivamente. A partir da prescrição de  $\mathcal{N}u$  sobre  $\partial\mathcal{H}_t$  e de  $\mathcal{D}u$  sobre  $\partial\mathcal{H}_u$ , define-se as condições de contorno essenciais e naturais do problema. Uma nova integração de (3.4) por partes  $k$ -vezes, agora aplicando o operador diferencial sobre  $u$ , leva ao chamado *problema direto*:

$$\langle (\mathcal{L}u - q), v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle (\mathcal{D}u - \overline{\mathcal{D}u}), \mathcal{N}v \rangle_{\partial\mathcal{H}_u} + \langle (\overline{\mathcal{N}u} - \mathcal{N}u), \mathcal{D}v \rangle_{\partial\mathcal{H}_t} \quad , \quad (3.5)$$

onde o sobretraço indica uma quantidade prescrita. Se agora  $u$  é substituído por uma solução aproximada  $\tilde{u}$ , (3.5) passa a representar, na realidade, uma ponderação dos resíduos

$$\mathcal{R} = \mathcal{L}\tilde{u} - q \quad \text{em } \mathcal{H} \quad (3.6.a)$$

$$\mathcal{R}_t = \mathcal{N}\tilde{u} - \overline{\mathcal{N}u} \quad \text{sobre } \partial\mathcal{H}_t \quad (3.6.b)$$

$$\mathcal{R}_u = \mathcal{D}\tilde{u} - \overline{\mathcal{D}u} \quad \text{sobre } \partial\mathcal{H}_u \quad , \quad (3.6.c)$$

<sup>†</sup> No sentido distributivo,  $v$  é uma função infinitamente diferenciável, o que é obtido com  $k \rightarrow \infty$ . Portanto, não há perda de generalidade.

que permitem reescrever (3.5) na forma como é conhecido o MRP:

$$\langle \mathcal{R}, v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{R}_u, \mathcal{N}v \rangle_{\partial\mathcal{H}_u} - \langle \mathcal{R}_t, \mathcal{D}v \rangle_{\partial\mathcal{H}_t} . \quad (3.7)$$

Se (3.7) é integrada por partes um número de vezes qualquer, menor que  $k$ , a fim de transferir uma parte da ordem de  $\mathcal{L}$  para  $v$ , obtém-se a chamada *forma fraca* do problema. A partir da forma fraca, ou de um funcional equivalente, são obtidos outros métodos de solução aproximada, como o MEF e o MDF, dependendo das propriedades da função peso  $v$  (Reddy [1984b], Oden e Reddy [1976]). Por outro lado, pode-se integrar novamente (3.7) por partes  $k$ -vezes, aplicando novamente toda ordem de  $\mathcal{L}$  sobre a variável  $v$ , o que leva a:

$$\langle \mathcal{L}v, u \rangle_{\mathcal{H}} - \langle q, v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{N}u, \mathcal{D}v \rangle_{\partial\mathcal{H}_t} - \langle \mathcal{N}v, \mathcal{D}u \rangle_{\partial\mathcal{H}_u} , \quad (3.8)$$

que vem a ser o chamado *problema inverso*, o ponto de partida para métodos integrais como o MEC, MFG e MFGLM. As funções  $u$  e  $v$  são geralmente associadas a dois estados distintos: o das incógnitas a serem determinadas e um outro auxiliar. No caso do MEC direto, o estado auxiliar geralmente corresponde a uma solução fundamental do problema, e é usado diretamente no problema inverso ou em relações de reciprocidade energéticas. A versão indireta do método é obtida através da superposição de produtos duais entre soluções auxiliares singulares unitárias e funções densidade definidas sobre o contorno  $\partial\mathcal{H}$ , cujas amplitudes são determinadas a fim de garantir a unicidade da solução (Beskos [1991], Monken e Silva e Barcellos [1985]). O MEC direto relaciona, portanto, as variáveis físicas definidas sobre o domínio e sobre o contorno, enquanto na versão indireta do método não há uma relação imediata entre as funções densidade e as variáveis no contorno (Brebbia [1984], Brebbia e Dominguez [1988]). Além disso, o MEC indireto não se comporta bem na solução numérica de problemas definidos por contornos que possuem vértices, ou seja, pontos onde existe descontinuidade da normal exterior (Stein e Wendland [1988]). Claramente, tais aspectos têm favorecido sobremaneira o desenvolvimento e aplicação da versão direta do MEC para solução de problemas práticos.

A seguir, partindo-se da expressão geral do MRP, equação (3.7), é obtido o problema inverso para os operadores diferenciais de membrana e de flexão, utilizando como estado auxiliar o apresentado no final do capítulo dois.

### 3.3. Formulação integral para o problema de membrana

Pela forma geral do MRP, equação (3.7), as equações integrais para ponderação dos resíduos do problema de membrana são escritas utilizando as equações de equilíbrio (2.16.a) e as condições de contorno (2.17):

$$\int_{\Omega} {}^m\mathcal{R}^\alpha u^\alpha d\Omega = \int_{\Gamma_t} {}^m\mathcal{R}_t^\alpha u^\alpha d\Gamma - \int_{\Gamma_u} {}^m\mathcal{R}_u^\alpha q^\alpha d\Gamma \quad (3.9)$$

onde os resíduos produzidos por uma solução aproximada são dados por:

$${}^m\mathcal{R}^\alpha = N_{\alpha\beta,\beta} + q_\alpha \neq 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (3.10.a)$$

$${}^m\mathcal{R}_u^\alpha = u_\alpha - \bar{u}_\alpha \neq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_u, \quad (3.10.b)$$

$${}^m\mathcal{R}_t^\alpha = t_\alpha - \bar{t}_\alpha \neq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_t. \quad (3.10.c)$$

E as funções peso adotadas, segundo as quais os erros são minimizados, são:

$$u^\alpha = u_\alpha^* \quad (3.11.a)$$

$$q^\alpha = t_\alpha^* \quad (3.11.b)$$

A substituição das expressões (3.10) e (3.11) na eq.(3.9) e uma integração por partes da integral em  $\Omega$  fornece:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} N_{\alpha\beta} n_\beta u_\alpha^* d\Gamma - \int_{\Omega} N_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega &= \int_{\Gamma_t} (t_\alpha - \bar{t}_\alpha) u_\alpha^* d\Gamma + \\ &- \int_{\Gamma_u} (u_\alpha - \bar{u}_\alpha) t_\alpha^* d\Gamma - \int_{\Omega} q_\alpha u_\alpha^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.12)$$

Utilizando (2.18.a), (2.21.a) e lembrando que  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_t$  são regiões complementares de  $\Gamma$ , com  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \mathbf{0}$ , reescreve-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_{\alpha\beta}^l u_{\alpha,\beta}^* d\Omega &= \int_{\Omega} q_\alpha u_\alpha^* d\Omega - \int_{\Omega} N_{\alpha\beta}^n u_{\alpha,\beta}^* d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_\alpha u_\alpha^* d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma_u} t_\alpha u_\alpha^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (u_\alpha - \bar{u}_\alpha) t_\alpha^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dos teoremas de reciprocidade<sup>†</sup>,

$$N_{\alpha\beta}^l E_{\alpha\beta}^* = N_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} \quad ,$$

<sup>†</sup> Tal resultado é obtido com qualquer medida variacionalmente consistente de deformação, isto é, tanto com  $E_{\alpha\beta}^l = u_{\alpha,\beta}$  quanto com a medida usual  $E_{\alpha\beta}^l = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})$ .

e como  $E_{\alpha\beta}^*$  tem a mesma forma operacional da parte linear de  $E_{\alpha\beta}$ , eqs.(2.6.a) e (2.52.g), vem

$$N_{\alpha\beta}^l u_{\alpha,\beta}^* = N_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} \quad .$$

Assim, é correto escrever, para a integral à esquerda de (3.13):

$$\int_{\Omega} N_{\alpha\beta}^l E_{\alpha\beta}^* d\Omega = \int_{\Omega} N_{\alpha\beta}^l u_{\alpha,\beta}^* d\Omega = \int_{\Omega} N_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} d\Omega \quad ,$$

que, quando integrada por partes e substituída em (3.13) leva a:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} N_{\alpha\beta,\beta}^* u_{\alpha} d\Omega &= - \int_{\Omega} N_{\alpha\beta}^n u_{\alpha,\beta}^* d\Omega + \int_{\Omega} q_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_u} t_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (u_{\alpha} - \bar{u}_{\alpha}) t_{\alpha}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} N_{\alpha\beta}^* n_{\beta} u_{\alpha} d\Gamma \quad . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Usando agora (2.49.d) e (2.51.d), vem

$$\int_{\Omega} F_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Gamma} u_{\alpha} t_{\alpha}^* d\Gamma = \int_{\Omega} q_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Gamma} t_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Gamma - \int_{\Omega} N_{\alpha\beta}^n u_{\alpha,\beta}^* d\Omega \quad . \quad (3.15)$$

Da definição de solução fundamental de um problema,  $F_{\alpha}^*$  corresponde à excitação gerada por uma carga generalizada unitária na direção  $e_{\alpha}$ , isto é:

$$F_{\alpha}^* = \delta(Q, P) e_{\alpha}(P) \quad , \quad P, Q \in \Omega \quad , \quad (3.16)$$

sendo que a distribuição  $\delta(Q, P)$ , função generalizada delta de Dirac, possui a propriedade

$$\int_{\mathcal{H}} g(Q) \delta(Q, P) dx = g(P) \quad , \quad (3.17)$$

para um ponto  $P$  onde é aplicada a excitação (*ponto fonte*) e um ponto  $Q$  onde são medidos os efeitos da excitação (*ponto campo*). As excitações  $F_{\alpha}^*$  representam, portanto, forças concentradas generalizadas unitárias nas direções  $e_{\alpha}$  (Westphal Jr. [1990a]). Considerando cada uma dessas cargas atuando independentemente, resulta (Banerjee e Butterfield [1981], Brebbia e Dominguez [1989]):

$$u_{\alpha}^* = {}^m U_{\beta\alpha}(Q, P) e_{\beta}(P) \quad (3.18.a)$$

$$t_{\alpha}^* = {}^m T_{\beta\alpha}(Q, P) e_{\beta}(P) \quad , \quad (3.18.b)$$

que são os deslocamentos e trações do estado auxiliar, dados pelos tensores fundamentais de membrana,  ${}^m\mathbf{U}$  e  ${}^m\mathbf{T}$ . A substituição de (3.18) em (3.15) resulta, considerando (3.16) e (3.17) para  $g(Q) = u_\alpha(Q)$ :

$$\begin{aligned} u_\alpha(P) + \int_\Gamma {}^m T_{\alpha\beta}(Q, P) u_\beta(Q) d\Gamma_Q &= \int_\Gamma {}^m U_{\alpha\beta}(Q, P) t_\beta(Q) d\Gamma_Q + \\ &+ \int_\Omega {}^m U_{\alpha\beta}(Q, P) q_\beta(Q) d\Omega_Q - \int_\Omega {}^m U_{\alpha\beta,\gamma}(Q, P) N_{\beta\gamma}^n(Q) d\Omega_Q \quad , \end{aligned} \quad (3.19)$$

que é a identidade de Somigliana para os deslocamentos  $u_\alpha$  (Brebbia, Telles e Wrobel [1984]). O termo  ${}^m U_{\alpha\beta,\gamma}$  representa uma derivada do tensor  ${}^m\mathbf{U}$  em relação a  $x_\gamma(Q)$ . A eq.(3.15) é a contrapartida, para o problema de membrana, da relação geral (3.8).

### 3.4. Formulação integral para o problema de flexão

Para o problema de flexão, utiliza-se as equações de equilíbrio (2.16.b) e (2.16.c) para escrever o MRP na forma

$$\int_\Omega ({}^f\mathcal{R}^3 u^3 + {}^f\mathcal{R}^\alpha \psi^\alpha) d\Omega = \int_{\Gamma_t} ({}^f\mathcal{R}_t^3 u^3 + {}^f\mathcal{R}_t^\alpha \psi^\alpha) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} ({}^f\mathcal{R}_u^3 q^3 + {}^f\mathcal{R}_u^\alpha m^\alpha) d\Gamma \quad , \quad (3.20)$$

onde os resíduos de uma solução aproximada são dados por:

$${}^f\mathcal{R}^3 = (N_{\alpha\beta} u_{3,\alpha})_{,\beta} + Q_{\alpha,\alpha}^l + q_3 \neq 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (3.21.a)$$

$${}^f\mathcal{R}^\alpha = M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha^l + m_\alpha \neq 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (3.21.b)$$

$${}^f\mathcal{R}_t^3 = t_3^l - \bar{t}_3 \neq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_t, \quad (3.21.c)$$

$${}^f\mathcal{R}_t^\alpha = l_\alpha - \bar{l}_\alpha \neq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_t, \quad (3.21.d)$$

$${}^f\mathcal{R}_u^3 = u_3 - \bar{u}_3 \neq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_u, \quad (3.21.e)$$

$${}^f\mathcal{R}_u^\alpha = \psi_\alpha - \bar{\psi}_\alpha \neq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_u; \quad (3.21.f)$$

e as funções peso são:

$$u^3 = u_3^* \quad (3.22.a)$$

$$\psi^\alpha = \psi_\alpha^* \quad (3.22.b)$$

$$q^3 = t_3^* \quad (3.22.c)$$

$$m^\alpha = l_\alpha^* \quad , \quad (3.22.d)$$

e então reescreve-se (3.20) na forma:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ (N_{\alpha\beta} u_{3,\alpha})_{,\beta} + Q_{\alpha,\alpha}^l + q_3 \right] u_3^* d\Omega + \int_{\Omega} (M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha^l + m_\alpha) \psi_\alpha^* d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma_t} \left[ (t_3^l - \bar{t}_3) u_3^* + (l_\alpha - \bar{l}_\alpha) \psi_\alpha^* \right] d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \left[ (u_3 - \bar{u}_3) t_3^* + (\psi_\alpha - \bar{\psi}_\alpha) l_\alpha^* \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (3.23)$$

Os termos não-lineares da primeira integral em  $\Omega$  podem ser incorporados ao carregamento transversal  $q_3$ , definindo-se assim um *pseudo-carregamento* transversal<sup>†</sup>:

$$\hat{q} = q_3 + (N_{\alpha\beta} u_{3,\alpha})_{,\beta} \quad . \quad (3.24)$$

Utilizando (3.24) e integrando os termos em  $Q_{\alpha,\alpha}^l$  e  $M_{\alpha\beta,\beta}$  por partes, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( -Q_{\alpha,\alpha}^l u_{3,\alpha}^* - M_{\alpha\beta,\beta} \psi_{\alpha,\beta}^* \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \hat{q} u_3^* - Q_\alpha^l \psi_\alpha^* + m_\alpha \psi_\alpha^* \right) d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma_t} \left[ (t_3^l - \bar{t}_3) u_3^* + (l_\alpha - \bar{l}_\alpha) \psi_\alpha^* \right] d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma_u} \left[ (u_3 - \bar{u}_3) t_3^* + (\psi_\alpha - \bar{\psi}_\alpha) l_\alpha^* \right] d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma} \left( Q_\alpha^l n_\alpha u_3^* + M_{\alpha\beta} n_\beta \psi_\alpha^* \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.25)$$

Observando, das eqs.(2.18.b) e (2.18.c), que  $t_3^l = Q_\alpha^l n_\alpha$  e  $l_\alpha = M_{\alpha\beta} n_\beta$ , e salientando que  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ , reescreve-se (3.25):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ M_{\alpha\beta} \psi_{\alpha,\beta}^* + Q_\alpha (\psi_\alpha^* + u_{3,\alpha}^*) \right] d\Omega = \int_{\Omega} (\hat{q} u_3^* + m_\alpha \psi_\alpha^*) d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} \left( t_3^l u_3^* + l_\alpha \psi_\alpha^* \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \left[ (u_3 - \bar{u}_3) t_3^* + (\psi_\alpha - \bar{\psi}_\alpha) l_\alpha^* \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (3.26)$$

<sup>†</sup> Que vem a ser a soma do carregamento transversal com a componente paralela a  $x_3$ , proveniente do carregamento de membrana, após a deformação da placa.

A partir das expressões para o estado auxiliar  $\Omega^*$ , verifica-se a seguinte identidade<sup>†</sup>:

$$(M_{\alpha\beta} - m_f q_3 \delta_{\alpha\beta}) K_{\alpha\beta}^* + Q_\alpha \gamma_{\alpha 3}^* = M_{\alpha\beta}^* K_{\alpha\beta} + Q_\alpha^* \gamma_{\alpha 3} \quad , \quad (3.27)$$

e como  $M_{\alpha\beta}$  é simétrico, outra igualdade é verificada, no sentido variacional:

$$M_{\alpha\beta}^* K_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^* \psi_{\alpha,\beta} \quad . \quad (3.28)$$

Substituindo (3.27), (3.28) e (2.52.b) em (3.26) resulta, após uma integração por partes dos termos envolvendo  $\psi_{\alpha,\beta}^*$  e  $u_{3,\alpha}^*$ :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_\alpha^*) \psi_\alpha d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}^* u_3 d\Omega = \int_{\Omega} (\hat{q}u_3^* + m_\alpha \psi_\alpha^*) d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} (t_3^l u_3^* + l_\alpha \psi_\alpha^*) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} [(u_3 - \bar{u}_3)t_3^* + (\psi_\alpha - \bar{\psi}_\alpha)l_\alpha^*] d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma_u} (M_{\alpha\beta}^* n_\beta \psi_\alpha + Q_\alpha^* n_\alpha u_3) d\Gamma - \int_{\Gamma_t} (M_{\alpha\beta}^* n_\beta \psi_\alpha + Q_\alpha^* n_\alpha u_3) d\Gamma + \\ & \quad - m_f \int_{\Omega} q_3 \psi_{\alpha,\alpha}^* d\Gamma \quad , \end{aligned} \quad (3.29)$$

que é reescrita, usando (2.51.e) e (2.51.f), na forma

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_\alpha^*) \psi_\alpha d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}^* u_3 d\Omega = \int_{\Omega} (\hat{q}u_3^* + m_\alpha \psi_\alpha^*) d\Omega + \\ & - m_f \int_{\Omega} q_3 \psi_{\alpha,\alpha}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} (t_3^l u_3^* + l_\alpha \psi_\alpha^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_3 t_3^* + \psi_\alpha l_\alpha^*) d\Gamma \quad . \end{aligned} \quad (3.30)$$

A substituição das equações de equilíbrio do estado auxiliar, eqs.(2.49.e) e (2.49.f) leva finalmente ao problema inverso:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} G_\alpha^* \psi_\alpha d\Omega + \int_{\Omega} F_3^* u_3 d\Omega = \int_{\Omega} (\hat{q}u_3^* + m_\alpha \psi_\alpha^*) d\Omega + \\ & - m_f \int_{\Omega} q_3 \psi_{\alpha,\alpha}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} (t_3^l u_3^* + l_\alpha \psi_\alpha^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_3 t_3^* + \psi_\alpha l_\alpha^*) d\Gamma \quad . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Da mesma forma que  $F_\alpha^*$ ,

$$F_3^* = \delta(Q, P) e_3(P) \quad , \quad P, Q \in \Omega \quad , \quad (3.32.a)$$

$$G_\alpha^* = \delta(Q, P) e_\alpha(P) \quad , \quad P, Q \in \Omega \quad , \quad (3.32.b)$$

<sup>†</sup> A demonstração formal pode ser encontrada em Westphal Jr. [1990a], apêndice B.



onde agora  $F_3^*$  representa uma carga concentrada generalizada unitária na direção  $e_3$  enquanto  $G_\alpha^*$  são momentos generalizados unitários correspondentes às direções  $e_\alpha$ . Considerando cada carga atuando independentemente, tem-se

$$u_3^* = {}^f U_{i3}(Q, P) e_i(P) \quad (3.33.a)$$

$$\psi_\alpha^* = {}^f U_{i\alpha}(Q, P) e_i(P) \quad (3.33.b)$$

e

$$t_3^* = {}^f T_{i3}(Q, P) e_i(P) \quad (3.33.c)$$

$$l_\alpha^* = {}^f T_{i\alpha}(Q, P) e_i(P) \quad , \quad (3.33.d)$$

que inseridas em (3.31) fornecem as identidades de Somigliana para os deslocamentos de flexão:

$$\begin{aligned} u_3(P) + \int_\Gamma \left[ {}^f T_{33}(Q, P) u_3(Q) + {}^f T_{3\alpha}(Q, P) \psi_\alpha(Q) \right] d\Gamma_Q = \\ = \int_\Gamma \left[ {}^f U_{33}(Q, P) t_3^l(Q) + {}^f U_{3\alpha}(Q, P) l_\alpha(Q) \right] d\Gamma_Q + \\ + \int_\Omega \left[ {}^f U_{33}(Q, P) \hat{q}(Q) + {}^f U_{3\alpha}(Q, P) m_\alpha(Q) \right] d\Omega_Q + \\ - m_f \int_\Omega \left[ {}^f U_{3\alpha, \alpha}(Q, P) q_3(Q) \right] d\Omega_Q \end{aligned} \quad (3.34.a)$$

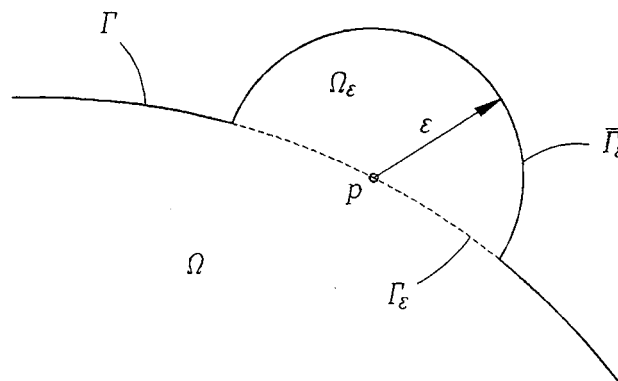
e

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(P) + \int_\Gamma \left[ {}^f T_{\alpha 3}(Q, P) u_3(Q) + {}^f T_{\alpha\beta}(Q, P) \psi_\beta(Q) \right] d\Gamma_Q = \\ = \int_\Gamma \left[ {}^f U_{\alpha 3}(Q, P) t_3^l(Q) + {}^f U_{\alpha\beta}(Q, P) l_\beta(Q) \right] d\Gamma_Q + \\ + \int_\Omega \left[ {}^f U_{\alpha 3}(Q, P) \hat{q}(Q) + {}^f U_{\alpha\beta}(Q, P) m_\beta(Q) \right] d\Omega_Q + \\ - m_f \int_\Omega \left[ {}^f U_{\alpha\beta, \beta}(Q, P) q_3(Q) \right] d\Omega_Q \quad , \end{aligned} \quad (3.34.b)$$

onde as derivadas presentes nas últimas integrais do lado direito são tomadas em relação a  $x(Q)$ .

### 3.5. Equações integrais sobre o contorno

As equações integrais (3.19) e (3.34) são definidas para pontos  $P$  exclusivamente pertencentes a  $\Omega$ , isto é, pontos internos. Por outro lado, a solução das mesmas requer o conhecimento dos deslocamentos e trações sobre o contorno  $\Gamma$ . A fim de obter tais relações válidas para pontos  $p$  sobre o contorno, e possibilitar assim a solução prévia do problema de valores sobre o contorno, torna-se necessária a aplicação de um mapeamento linear e contínuo de  $P \in \Omega \rightarrow p \in \Gamma$ , especificamente a aplicação da propriedade do traço. Isso é realizado mediante um procedimento de limite, modificando o contorno próximo a  $p$  por um arco circular de raio  $\varepsilon$ , centrado em  $p$  (figura 3.1).



**Figura 3.1 :** Modificação do contorno  $\Gamma$  para aplicação da propriedade do traço.

Realizando-se o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtém-se as identidades desejadas. Antes de mais nada, deve-se salientar que os tensores fundamentais  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{T}$ , bem como suas derivadas, são funções de dois pontos, o ponto fonte  $P$ , sobre o qual tem-se a singularidade da função generalizada delta de Dirac, e o ponto campo  $Q$ , onde estão definidas as variáveis envolvidas nas equações. Assim, tais equações são funções somente da distância  $r$  entre  $P$  e  $Q$ , sendo esta expressa por (Brebbia [1984], Banerjee e Butterfield [1981]):

$$r = \|Q - P\| \quad .$$

As expressões analíticas de todos os tensores utilizados constituem o conteúdo do apêndice A. Todas as derivadas dos tensores fundamentais utilizados neste trabalho são convencionadas em relação ao ponto campo  $Q$ , e portanto vale a notação:

$$U_{ij,\alpha} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_\alpha(Q)} .$$

Assim, quando houver alguma derivada em relação ao ponto fonte  $P$ , é feito uso da relação:

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_\alpha(P)} = - \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_\alpha(Q)} ,$$

e então permanece válida a notação citada, sendo apenas um sinal negativo colocado à frente do termo que envolve tal derivada. Por esta razão, todas as derivadas de tensores fundamentais apresentados no apêndice A são em relação ao ponto campo  $Q$ .

A inspeção das expressões analíticas dos tensores fundamentais leva a alguns comentários a respeito das singularidades envolvidas (quando  $r \rightarrow 0$ ). Para o problema de membrana, eq.(3.19), verificam-se as singularidades  $\ln(r)$  para o tensor  ${}^m\mathbf{U}$ ,  $(1/r)$  para o tensor  ${}^m\mathbf{T}$  e  $(1/r)$  para as derivadas cartesianas primeiras de  ${}^m\mathbf{U}$ . No problema de flexão, as singularidades são as mesmas, para os tensores  ${}^f\mathbf{U}$  e  ${}^f\mathbf{T}$ , respectivamente. Devido a essas características, apenas as integrais no contorno que envolvem  ${}^m\mathbf{T}$  ou  ${}^f\mathbf{T}$  originam novos termos quando substitui-se  $\Gamma$  por  $\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon$  e procede-se o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  (Westphal Jr. [1990a], Banerjee e Butterfield [1981], Van der Weeën [1982a]). Assim, o traço será aplicado apenas aos termos  $\int_\Gamma \mathbf{T} \mathbf{u} d\Gamma$ , nas equações (3.19) e (3.34).

Então, para o problema de membrana, eq.(3.19), reescreve-se a primeira integral à esquerda como:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma {}^m T_{\alpha\beta}(q,p) u_\beta(q) d\Gamma_q &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} {}^m T_{\alpha\beta}(q,p) u_\beta(q) d\Gamma_q = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} {}^m T_{\alpha\beta}(q,p) u_\beta(q) d\Gamma_q + \\ &\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} {}^m T_{\alpha\beta}(q,p) u_\beta(q) d\Gamma_q = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} {}^m T_{\alpha\beta}(q,p) u_\beta(q) d\Gamma_q + \\ &\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} {}^m T_{\alpha\beta}(q,p) [u_\beta(q) - u_\beta(p)] d\Gamma_q + \\ &\quad + u_\beta(p) \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} {}^m T_{\alpha\beta}(q,p) d\Gamma_q \right] \end{aligned}$$

Como os deslocamentos são contínuos, a segunda integral à direita da igualdade acima se anula. Então, reescreve-se o lado esquerdo de (3.19) na forma:

$$u_\alpha(p) + \int_\Gamma {}^m T_{\alpha\beta}(q,p) u_\beta(q) d\Gamma_q = u_\alpha(p) + u_\beta(p) \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} {}^m T_{\alpha\beta}(q,p) d\Gamma_q \right] + \int_\Gamma {}^m T_{\alpha\beta}(q,p) u_\beta(q) d\Gamma_q, \quad (3.35)$$

sendo que o último termo à direita deve ser interpretado no sentido do valor principal de Cauchy, pois possui singularidade  $(1/r)$  sobre um domínio de integração unidimensional. Substituindo (3.35) em (3.19) e definindo:

$${}^m C_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} {}^m T_{\alpha\beta}(q,p) d\Gamma_q, \quad (3.36)$$

reescreve-se a identidade de Somigliana para um ponto  $P \in \Omega \cup \Gamma$  na forma:

$$\begin{aligned} {}^m C_{\alpha\beta}(P) u_\beta(P) + \int_\Gamma {}^m T_{\alpha\beta}(q,P) u_\beta(q) d\Gamma_q &= \int_\Gamma {}^m U_{\alpha\beta}(q,P) t_\beta(q) d\Gamma_q + \\ &+ \int_\Omega {}^m U_{\alpha\beta}(Q,P) q_\beta(Q) d\Omega_Q - \int_\Omega {}^m U_{\alpha\beta,\gamma}(Q,P) N_{\beta\gamma}^n(Q) d\Omega_Q, \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde

$${}^m C_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{para } P \in \Omega \quad (3.38.a)$$

$${}^m C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \quad \text{para } P \in \Gamma \text{ suave.} \quad (3.38.b)$$

Para contornos que possuem vértices (descontinuidade da normal exterior), (3.38.b) assume valores dependentes do ângulo sólido (ver, por exemplo, Brebbia e Dominguez [1989]).

Chamando,

$${}^m \mathbf{u} = \{u_1 \quad u_2\}^T \quad (3.39.a)$$

$${}^m \mathbf{t} = \{t_1 \quad t_2\}^T \quad (3.39.b)$$

$${}^m \mathbf{q} = \{q_1 \quad q_2\}^T \quad (3.39.c)$$

reescreve-se (3.37) matricialmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(P) \mathbf{u}(P) + \int_\Gamma \mathbf{T}(q,P) \mathbf{u}(q) d\Gamma_q &= \int_\Gamma \mathbf{U}(q,P) \mathbf{t}(q) d\Gamma_q + \\ &+ \int_\Omega \mathbf{U}(Q,P) \mathbf{q}(Q) d\Omega_Q - \int_\Omega \bar{\mathbf{U}}(Q,P) \mathbf{N}^n(Q) d\Omega_Q, \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde o sobre-índice  $m$  foi omitido, por clareza. Na expressão (3.40), a integral à esquerda deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy. São usados ainda:

$${}^m\bar{U}(Q, P) = {}^mU_{\alpha\beta,\gamma}(Q, P) = \frac{\partial U_{\alpha\beta}(Q, P)}{\partial x_\gamma(Q)} \quad (3.41)$$

e

$$N^n(Q) = N_{\alpha\beta}^n(Q) = \begin{bmatrix} N_{11}^n(Q) & N_{12}^n(Q) \\ N_{21}^n(Q) & N_{22}^n(Q) \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

que são as parcelas não-lineares das tensões de membrana.

Através de um procedimento algébrico idêntico ao desenvolvido acima, obtém-se, para as eqs.(3.34):

$$\begin{aligned} & {}^fC_{33}(P)u_3(P) + {}^fC_{3\alpha}(P)\psi_\alpha(P) + \int_\Gamma \left[ {}^fT_{33}(q, P)u_3(q) + {}^fT_{3\alpha}(q, P)\psi_\alpha(q) \right] d\Gamma_q = \\ & = \int_\Gamma \left[ {}^fU_{33}(q, P)t_3^l(q) + {}^fU_{3\alpha}(q, P)l_\alpha(q) \right] d\Gamma_q + \\ & + \int_\Omega \left[ {}^fU_{33}(Q, P)\hat{q}(Q) + {}^fU_{3\alpha}(Q, P)m_\alpha(Q) \right] d\Omega_Q + \\ & - m_f \int_\Omega \left[ {}^fU_{3\alpha,\alpha}(Q, P)q_3(Q) \right] d\Omega_Q \end{aligned} \quad (3.43.a)$$

e

$$\begin{aligned} & {}^fC_{\alpha 3}(P)u_3(P) + {}^fC_{\alpha\beta}(P)\psi_\beta(P) + \int_\Gamma \left[ {}^fT_{\alpha 3}(q, P)u_3(q) + {}^fT_{\alpha\beta}(q, P)\psi_\beta(q) \right] d\Gamma_q = \\ & = \int_\Gamma \left[ {}^fU_{\alpha 3}(q, P)t_3^l(q) + {}^fU_{\alpha\beta}(q, P)l_\beta(q) \right] d\Gamma_q + \\ & + \int_\Omega \left[ {}^fU_{\alpha 3}(Q, P)\hat{q}(Q) + {}^fU_{\alpha\beta}(Q, P)m_\beta(Q) \right] d\Omega_Q + \\ & - m_f \int_\Omega \left[ {}^fU_{\alpha\beta,\beta}(Q, P)q_3(Q) \right] d\Omega_Q \end{aligned} \quad (3.43.b)$$

onde:

$${}^fC_{ij} = \delta_{ij} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} {}^fT_{ij}(q, p) d\Gamma_q, \quad (3.44)$$

sendo dado por:

$${}^fC_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{para } P \in \Omega \quad (3.45.a)$$

$${}^fC_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} \quad \text{para } P \in \Gamma \text{ suave} \quad (3.45.b)$$

Para pontos sobre vértices de  $\Gamma$ , as expressões de  ${}^f C_{ij}$  podem ser encontradas em Westphal Jr. [1990a]. Antes de escrever (3.43) em notação matricial, deve-se observar que os termos que envolvem as trações sobre o contorno consideram apenas a parcela linear das mesmas. Este fato pode ser explorado integrando-se por partes o termo que envolve  $\hat{q}$ , o que resulta na identidade abaixo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} {}^f U_{i3}(Q, P) \hat{q}(Q) d\Omega &= \int_{\Omega} {}^f U_{i3}(Q, P) q_3(Q) d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma} {}^f U_{i3}(q, P) t_3^n(q) d\Gamma - \int_{\Omega} {}^f U_{i3,\beta}(Q, P) N_{\alpha\beta} u_{3,\alpha}(Q) d\Omega \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde foi utilizada a eq.(2.51.b). Substituindo (3.46) em (3.43) e chamando:

$${}^f \mathbf{u} = \{\psi_1 \quad \psi_2 \quad u_3\}^T \quad (3.47.a)$$

$${}^f \mathbf{t} = \{l_1 \quad l_2 \quad t_3\}^T \quad (3.47.b)$$

$${}^f \mathbf{q} = \{m_1 \quad m_2 \quad q_3\}^T \quad , \quad (3.47.c)$$

reescreve-se (3.43.a) e (3.43.b) em uma única equação, usando a identidade (3.46) e a relação  $t_3 = t_3^l + t_3^n$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(P)\mathbf{u}(P) + \int_{\Gamma} \mathbf{T}(q, P)\mathbf{u}(q) d\Gamma_q &= \int_{\Gamma} \mathbf{U}(q, P)\mathbf{t}(q) d\Gamma_q + \\ + \int_{\Omega} \left[ \mathbf{U}(Q, P) - m_f \hat{\mathbf{U}}(Q, P) \right] \mathbf{q}(Q) d\Omega &- \int_{\Omega} \hat{\mathbf{U}}(Q, P) \mathbf{N}(Q) \bar{\mathbf{w}}(Q) d\Omega_Q \quad , \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde o sobre-índice  $f$  foi omitido e valem as relações abaixo:

$${}^f \hat{\mathbf{U}}(Q, P) = {}^f U_{i3,\alpha}(Q, P) = \frac{\partial U_{i3}(Q, P)}{\partial x_{\alpha}(Q)} \quad , \quad (3.49)$$

$$\mathbf{N}(Q) = N_{\alpha\beta}(Q) = \begin{bmatrix} N_{11}(Q) & N_{12}(Q) \\ N_{21}(Q) & N_{22}(Q) \end{bmatrix} \quad , \quad (3.50)$$

$$\hat{\mathbf{U}}(Q, P) = {}^f U_{i\alpha,\alpha}(Q, P) = \frac{\partial U_{i\alpha}(Q, P)}{\partial x_{\alpha}(Q)} \quad (3.51)$$

$$\bar{\mathbf{w}}(Q) = \frac{\partial u_3(Q)}{\partial x_\alpha(Q)} = \{ u_{3,1}(Q) \quad u_{3,2}(Q) \}^T \quad . \quad (3.52)$$

Note-se que os termos lineares da componente de tração  $t_3$  da primeira integral à direita de (3.43.a) e (3.43.b) foram adicionados à parcela não-linear desta componente, presente no segundo termo à direita de (3.46).

A segunda integral à direita da equação (3.48), definidas sobre  $\Omega$ , pode ser transformada para o contorno no caso de carregamentos distribuídos constantes. Tal transformação é encontradas na bibliografia (Westphal Jr. [1990a], Van der Weeën [1982a]), e leva à seguinte identidade:

$$\int_{\Omega} \left[ \mathbf{U}(Q, P) - m_f \widehat{\mathbf{U}}(Q, P) \right] \mathbf{q}(Q) d\Omega = q_3 \int_{\Gamma} [\mathbf{Y}(q, p) - m_f \mathbf{V}(q, p)] \mathbf{n}(q) d\Gamma \quad , \quad (3.53)$$

para  $\mathbf{q}(Q)$  constante. Na equação (3.54) valem:

$$\mathbf{V}(q, p) = {}^f U_{i\alpha}(q, p) \quad , \quad (3.54)$$

e

$$\mathbf{n}(q) = \{ n_1(q) \quad n_2(q) \}^T \quad , \quad (3.55)$$

onde  $\mathbf{Y}$  é encontrado no apêndice A.

Por último, deve-se citar o caso de carregamentos concentrados. Sejam  $f$  cargas concentradas aplicadas em pontos  $Q = s^i$ , tem-se (Kamiya e Sawaki [1985]):

$$q(Q) = \sum_{j=1}^f q(s^j) \delta(Q, s^j) \quad .$$

E então, se existem cargas concentradas, deve-se adicionar o termo

$$\mathbf{W}(s^j, P) = \sum_{j=1}^f q(s^j) \left[ \mathbf{U}(s^j, P) - m_f \widehat{\mathbf{U}}(s^j, P) \right] \quad , \quad (3.56)$$

que não requer integração, ao lado direito da eq.(3.48). Assim, reescreve-se, para um ponto  $P \in \Omega \cup \Gamma$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(P)\mathbf{u}(P) + \int_{\Gamma} \mathbf{T}(q, P)\mathbf{u}(q) d\Gamma_q &= \int_{\Gamma} \mathbf{U}(q, P)\mathbf{t}(q) d\Gamma_q + \\
&+ \int_{\Omega} \left[ \mathbf{U}(Q, P) - m_f \hat{\mathbf{U}}(Q, P) \right] \mathbf{q}(Q) d\Omega_Q + \\
&- \int_{\Omega} \hat{\mathbf{U}}(Q, P)\mathbf{N}(Q)\bar{\mathbf{w}}(Q) d\Omega_Q + \mathbf{W}(s^j, P) \quad ,
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Na equação geral (3.57), a primeira integral à esquerda deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy. A primeira e a segunda integrais à direita são fracamente singular e regular, respectivamente. A última integral à direita possui singularidade  $(1/r)$ , mas como é definida sobre  $\Omega$ , também é fracamente singular.

### 3.6. Particularização das equações integrais para análise de estabilidade

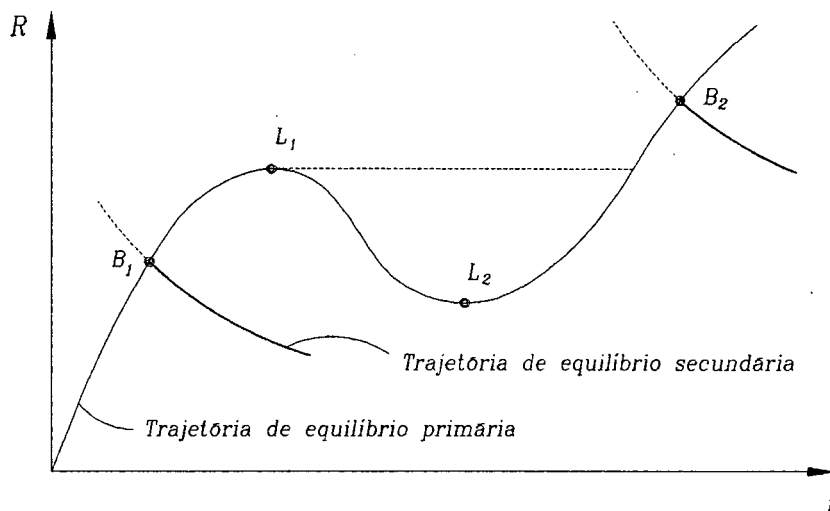
A análise do fenômeno de estabilidade de estruturas é fartamente documentada na literatura, tanto para obtenção de soluções aproximadas e analíticas como para a formalização dos conceitos físicos e matemáticos envolvidos no assunto (Potier-Ferry [1981]). Para maior clareza, serão citados aqui alguns desses conceitos.

#### 3.6.1. Generalidades

O comportamento não-linear de uma estrutura típica, carregada estaticamente, é ilustrado na figura 3.2. Esse comportamento é caracterizado por um parâmetro  $R$  dependente do carregamento externo, e uma medida adequada de deslocamento,  $r$ . A trajetória  $R \times r$  é geralmente chamada *trajetória de equilíbrio* da estrutura. Os pontos  $B_1$  e  $B_2$  exemplificam os *pontos de bifurcação*, que levam a trajetórias de equilíbrio secundárias. Os pontos  $L_1$  e  $L_2$  ilustram os chamados *pontos limite*. Os pontos de bifurcação são localizações, sobre a trajetória de equilíbrio, de mais de uma solução, enquanto um ponto limite indica uma configuração instável, e é meramente um caso patológico da trajetória de equilíbrio, onde a derivada de  $R$  em relação a  $r$  se anula (Ramm e Stegmüller [1982], Kleiber [1989]).



Os estados de equilíbrio são sempre enquadrados em uma das três possibilidades: estável, neutro ou instável. Em formulações variacionais (obtidas a partir de um funcional), como o MEF (ou em casos extremamente simples, que possuem solução analítica), a estabilidade do equilíbrio pode ser numericamente analisada a partir do sinal da derivada segunda do potencial total da estrutura ( $\Pi$ ) em relação aos deslocamentos,  $\partial^2\Pi/\partial r^2$ . Em formulações integrais já não é tão simples a avaliação numérica de quantidades energéticas.

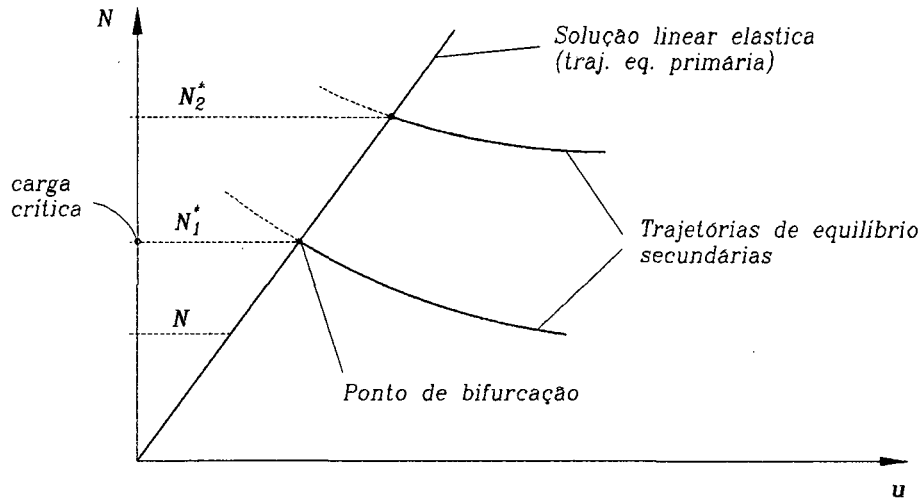


**Figura 3.2 :** Comportamento não-linear típico de uma estrutura.

### 3.6.2. Estabilidade linear elástica

O levantamento completo da trajetória de equilíbrio é, em geral, realizado numericamente pelo uso de formulações incrementais. Mas para uma grande parcela dos casos práticos requer-se apenas o nível de carregamento correspondente ao primeiro ponto de bifurcação. Tendo ainda em vista o alto custo computacional envolvido na solução de problemas postos de forma incremental, é muitas vezes satisfatório apenas o conhecimento de informações parciais do problema. Tais informações são obtidas a partir da linearização das equações do problema, levando a uma simples análise de perturbação em torno do ponto de bifurcação. Esta abordagem é chamada, na mecânica dos sólidos, de análise clássica de estabilidade linear, e geralmente leva a um problema de autovalores e autovetores que representa o problema de flambagem (Ramm e Stegmüller [1982]).

Para a análise de estabilidade de placas, serão aqui consideradas placas perfeitamente planas, submetidas a um estado de tensões de membrana, antes da flambagem ocorrer. O objetivo é obter a menor carga  $N^*$  (carga crítica) que provoca a flambagem quando a placa é ligeiramente perturbada (figura 3.3).



**Figura 3.3 :** Análise linearizada de flambagem.

Fazendo uso do comportamento linear da estrutura, é imediato escrever as cargas de flambagem em função de um estado de tensões qualquer  $N$  sobre a trajetória de equilíbrio primária:

$$N^* = \lambda N \quad , \quad (3.58)$$

onde  $\lambda$  é um fator de carga a ser determinado.

### 3.6.3. Equações integrais para análise de estabilidade elástica

As equações (3.40) e (3.57) são o ponto de partida para qualquer formulação incremental, seja lagrangiana atualizada ou lagrangeana total. É a partir dessas equações que se pode descrever o comportamento de flambagem e pós-flambagem por métodos integrais. Aqui, essas equações serão particularizadas para a análise de estabilidade linear elástica de placas<sup>†</sup>.

<sup>†</sup> É oportuno salientar que isso pode ser realizado de duas formas: ou se lineariza as equações de von Kármán e se repete a dedução das equações integrais, ou simplesmente se particulariza as equações integrais não-lineares. Este último será o procedimento adotado.

Devido à inexistência de carregamentos transversais, reescreve-se (3.57) na forma (o sobre-índice  $f$  foi omitido):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(P)\mathbf{u}(P) + \int_{\Gamma} \mathbf{T}(q, P)\mathbf{u}(q) d\Gamma_q = \int_{\Gamma} \mathbf{U}(q, P)\mathbf{t}(q) d\Gamma_q + \\ - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{U}}(Q, P)\mathbf{N}(Q)\bar{\mathbf{w}}(Q) d\Omega_Q \end{aligned} \quad (3.59)$$

A presença das derivadas cartesianas do deslocamento transversal ( $\bar{\mathbf{w}}$ ) mantém a não-linearidade na equação. Para substituir este termo, é possível derivar a terceira das eqs.(3.59) em relação às coordenadas  $x_{\alpha}(P)$ . A diferenciação das integrais definidas sobre  $\Gamma$  é direta, pois os respectivos núcleos são regulares em pontos internos. No entanto, a diferenciação da última integral à direita de (3.59) não o é, pois  $\hat{\mathbf{U}}$  possui singularidade fraca, como já detectado, quando  $Q \equiv P$ . Infelizmente, a diferenciação de integrais com núcleos singulares não obedece às regras clássicas de diferenciação, merecendo um tratamento especial mediante a aplicação da fórmula de Leibnitz (Bui [1978], Brebbia, Telles e Wrobel [1984]). Este fato foi ignorado na literatura até o final da década de setenta, quando H.D. Bui apresentou as equações integrais corrigidas para problemas de plasticidade (Bui [1978]). O desenvolvimento formal para a diferenciação da integral em  $\Omega$  de (3.59) é apresentado no apêndice B, e origina o aparecimento de um termo convectivo (Brebbia, Telles e Wrobel [1984], Perez e Wrobel [1991]), que é adicionado à expressão final para  $u_{3,\alpha}(P)$ , escrita a seguir:

$$\begin{aligned} u_{3,\alpha}(P) - \int_{\Gamma} {}^f T_{3i,\alpha}(q, P)u_i(q) d\Gamma_q = - \int_{\Gamma} {}^f U_{3i,\alpha}(q, P)t_i(q) d\Gamma_q + \\ + \lambda \int_{\Omega} {}^f U_{33,\alpha\gamma}(Q, P)N_{\gamma\beta}(Q)u_{3,\beta}(Q) d\Omega_Q + \\ + \lambda N_{\gamma\beta}(P)u_{3,\beta}(P) \int_{\Gamma'_1} {}^f U_{33,\gamma}(Q, P)r_{,\alpha}(P) d\Gamma_{Q_1} \quad , \quad P \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.60)$$

O último termo de (3.60) é o referido termo convectivo. Na equação acima,  $\Gamma'_1$  é uma circunferência de raio unitário centrada em  $P$ , e substituiu-se  $\mathbf{N}$  pela equação (3.58), com vistas ao cálculo das cargas de flambagem. Além disso, pressupõe-se a utilização da equação (3.60) para cálculo de  $u_{3,\alpha}$  apenas em pontos internos, e então  $C_{ij} = \delta_{ij}$ . Assim tem-se, em notação matricial:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}(P) - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{T}}(q, P) \mathbf{u}(q) d\Gamma_q = - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{U}}(q, P) \mathbf{t}(q) d\Gamma_q + \\ + \lambda \int_{\Omega} \bar{\bar{\mathbf{U}}}(\mathbf{Q}, P) \mathbf{N}(\mathbf{Q}) \bar{\mathbf{w}}(\mathbf{Q}) d\Omega_{\mathbf{Q}} + \lambda \mathbf{c}_t(P) \bar{\mathbf{w}}(P) \quad , \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde  $\mathbf{c}_t$  representa o termo convectivo, dado por

$$c_{t\alpha\beta} = - \frac{\delta_{\alpha\gamma}}{D(1-\nu)\lambda^2} N_{\gamma\beta}(P) \quad (3.62)$$

e

$$\bar{\mathbf{T}}(q, P) = {}^f T_{3i,\alpha}(q, P) = \frac{\partial T_{3i}(q, P)}{\partial x_{\alpha}(q)} \quad , \quad (3.63)$$

$$\bar{\mathbf{U}}(q, P) = {}^f U_{3i,\alpha}(q, P) = \frac{\partial U_{3i}(q, P)}{\partial x_{\alpha}(q)} \quad , \quad (3.64)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{U}}}(\mathbf{Q}, P) = {}^f U_{33,\alpha\beta}(\mathbf{Q}, P) = \frac{\partial U_{33}(\mathbf{Q}, P)}{\partial x_{\alpha}(\mathbf{Q}) x_{\beta}(\mathbf{Q})} \quad , \quad (3.65)$$

sendo o sinal negativo incorporado a todas as integrais, conforme a convenção adotada, pois as derivadas foram agora tomadas em relação a  $x_{\alpha}(P)$ .

Observam-se as singularidades  $(1/r^2)$  para  $\bar{\mathbf{T}}$ ,  $(1/r)$  para  $\bar{\mathbf{U}}$  e  $(1/r^2)$  para  $\bar{\bar{\mathbf{U}}}$ . Devido à dimensão dos domínios sobre os quais estão definidas as integrais destes núcleos, a integral à esquerda de (3.61) deve ser interpretada no sentido do valor principal de Haddamard, o que demonstra o caráter hipersingular desta equação. As demais integrais devem ser todas interpretadas no sentido do valor principal de Cauchy. Observe-se novamente que a eq.(3.61) é válida para pontos exclusivamente interiores, caso contrário, o traço deve ser aplicado sobre a mesma, como para as equações definidas sobre o contorno, ou ainda utilizar-se uma outra alternativa para cálculo das derivadas de  $u_3$  para pontos sobre  $\Gamma$ .

As equações (3.59) e (3.61) são discretizadas no capítulo seguinte, através da metodologia padrão do MEC. Após poucos algebrismos, estas equações levam a um problema de autovalores e autovetores que representa o problema de flambagem. Após a solução do mesmo, obtém-se, a partir dos autovalores  $\lambda$ , o valor das cargas de flambagem via equação (3.58). As equações referentes ao problema de membrana não serão utilizadas, pois não será implementada numericamente qualquer formulação incremental.

### 3.7. Conclusões

Neste capítulo foi apresentado inicialmente o formalismo geral para obtenção do problema inverso governado por uma dada equação diferencial. Tal formalismo permite a clara identificação do método dos resíduos ponderados (MRP), que foi então aplicado aos operadores diferenciais da elasticidade bidimensional e dos modelos de placa descritos no capítulo dois. Foram obtidas assim as identidades de Somigliana para os deslocamentos do problema de membrana e do problema de flexão. A aplicação da propriedade do traço sobre essas equações levou aos problemas de valores sobre o contorno correspondentes. Finalmente, as equações integrais foram particularizadas para a análise linearizada de estabilidade elástica de placas.

---

---

## CAPÍTULO QUATRO

---

---

### Solução Numérica das Equações Integrais

#### 4.1. Introdução

Este capítulo apresenta o procedimento de solução numérica das equações integrais desenvolvidas no capítulo três, através do uso da metodologia padrão do método dos elementos de contorno (Brebbia e Walker [1980], Brebbia e Dominguez [1989], Banerjee e Butterfield [1981]). Inicialmente, as equações são escritas na forma discretizada, utilizando o conceito de interpolação paramétrica para a geometria e as variáveis do problema. São enfatizados os procedimentos de integração adotados para os vários graus de singularidade presentes nos tensores envolvidos. Também são abordados alguns aspectos relativos à solução numérica de sistemas lineares e problemas de autovalores e autovetores.

#### 4.2. Equações discretizadas

As equações integrais desenvolvidas no capítulo anterior são reduzidas a equações algébricas mediante a discretização do contorno e do domínio. Será utilizado o mesmo procedimento delineado em Brebbia e Dominguez [1989] e Banerjee e Butterfield [1981], e adotadas as seguintes convenções (Westphal Jr. [1990a]), ilustradas na figura 4.1:

a.) O contorno  $\Gamma$  é dividido em  $N$  elementos unidimensionais  $\Gamma_n$ , tal que  $\cup_{n=1}^N \Gamma_n = \Gamma$ . Cada elemento  $\Gamma_n$  é definido por  $j$  nós, sendo que a geometria dos mesmos é mapeada por um polinômio de grau  $j - 1$  (exceção feita ao elemento de um nó, cuja geometria é mapeada da mesma forma que o elemento de dois nós). Esse mesmo polinômio será utilizado para interpolar as variáveis sobre  $\Gamma_n$ .

b.) O domínio  $\Omega$  é dividido em  $R$  células bidimensionais  $\Omega_r$ , tal que  $\cup_{r=1}^R \Omega_r = \Omega$ . Valem as mesmas regras de interpolação citadas acima, mas sendo os polinômios obtidos por produto tensorial de funções de grau  $j - 1$ , definidas sobre eixos ortogonais.

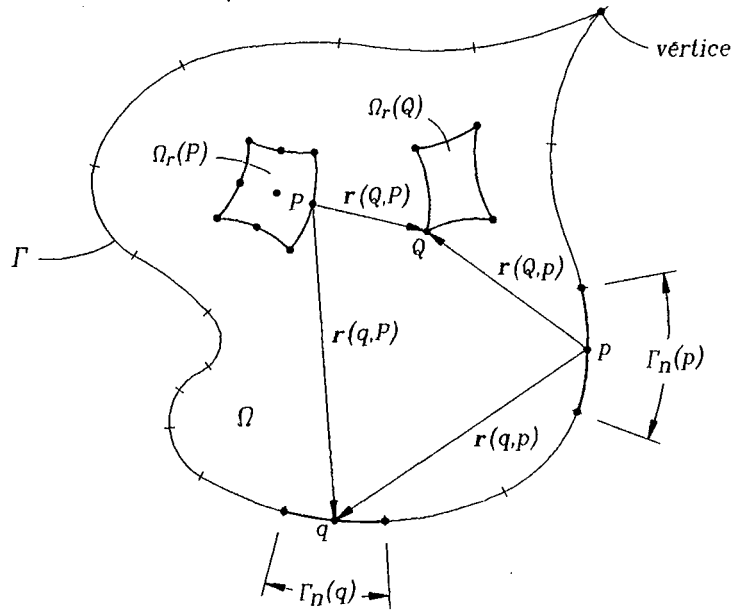


Figura 4.1 : Discretização de  $\Gamma$  e  $\Omega$ .

#### 4.2.1. Interpolação da geometria, das variáveis e dos carregamentos

As coordenadas  $x_\alpha$  de um ponto  $p \in \Gamma_n$  são interpoladas a partir das coordenadas nodais  $x_\alpha^j$  de  $\Gamma_n$ . Sendo então  $\phi_j$  o polinômio lagrangeano interpolador, válido para um domínio normalizado correspondente à variável adimensional  $\xi$  (figura 4.2), escreve-se:

$$x_\alpha(p) = \phi_j(\xi(p))x_\alpha(\xi^j) = \phi_j x_\alpha^j \quad , \quad (4.1)$$

onde o polinômio de Lagrange associado ao  $k$ -ésimo nó é dado por (Dhatt e Touzot [1984]):

$$\phi_k(\xi) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^j \frac{(2i - j - 1) - (j - 1)\xi}{2(i - k)} \quad , \quad j > 1 \quad (4.2.a)$$

e

$$\phi_k(\xi) = 1 \quad , \quad j = 1 \quad (4.2.b)$$

onde valem as variáveis de placa definidas por (3.47.a) e (3.47.b), sem o sobre-índice  $f$ , isto é,  $u_i$  e  $t_i$  representam os valores de  $\psi_1, \psi_2, u_3$  e  $l_1, l_2, t_3$  sobre o nó  $j$ . A figura 4.2 ilustra os elementos previstos na implementação numérica,  $1 \leq j \leq 5$ , sendo que a variável  $\xi$  é dada por (Westphal Jr. [1990a]):

$$\xi = \frac{2}{l}y \quad , \quad (4.4)$$

onde  $l$  é o comprimento total do elemento, medido sobre o eixo  $y$ .

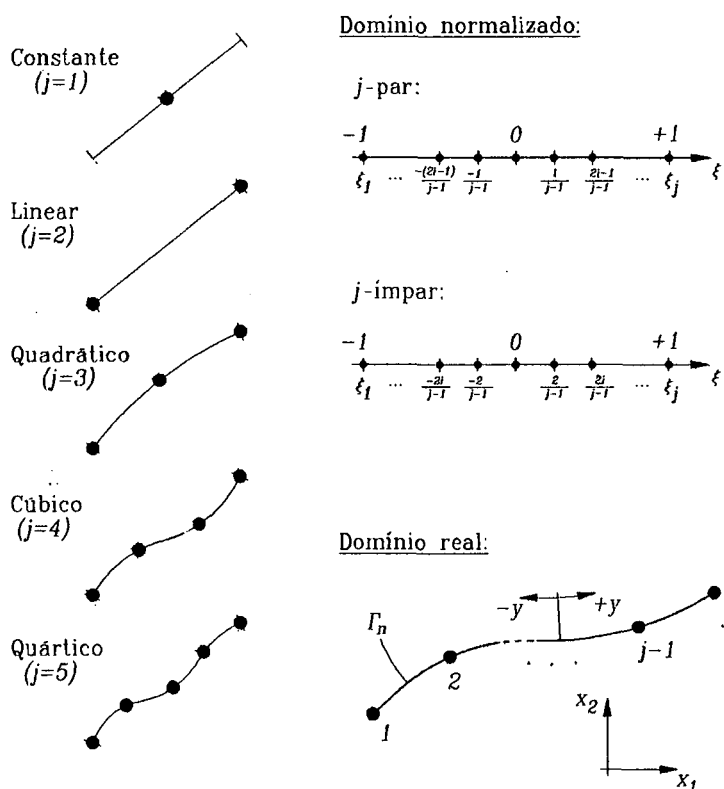


Figura 4.2 : Elementos utilizados na discretização de  $\Gamma$ .

Em notação matricial, escreve-se:

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{x}^j \quad (4.5.a)$$

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{u}^j \quad (4.5.b)$$

$$\mathbf{t} = \Phi \mathbf{t}^j \quad (4.5.c)$$



onde:

$$\Phi = [[\varphi^1][\varphi^2] \cdots [\varphi^j]] \quad , \quad (4.6)$$

com

$$\varphi_{kl}^i = \phi^i(\xi) \delta_{kl} \quad , \quad \xi \in \Gamma_n \quad , \quad (4.7.a)$$

para as variáveis de placa e

$$\varphi_{\alpha\beta}^i = \phi^i(\xi) \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \xi \in \Gamma_n \quad , \quad (4.7.b)$$

para as coordenadas.

Para  $x_\alpha(P) \in \Omega_r$ , o procedimento é idêntico, sendo os polinômios interpoladores obtidos por produto tensorial de  $\phi_k(\eta_1)$  e  $\phi_l(\eta_2)$ , com  $m$  nós em cada direção do plano normalizado  $\eta_\alpha$  (figura 4.3). Assim, os mesmos graus de interpolação usados nos elementos unidimensionais valem para os bidimensionais, sendo os polinômios obtidos por:

$$\begin{aligned} \zeta_{kl}(\eta_1, \eta_2) &= \phi_k(\eta_1) \times \phi_l(\eta_2) = \\ &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \frac{(2i - m - 1) - (m - 1)\eta_1}{2(i - k)} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq l}}^m \frac{(2t - m - 1) - (m - 1)\eta_2}{2(t - l)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

e como  $j = m^2$ , é direto associar a cada função  $\zeta_{kl}$  um nó específico de  $\Omega_r$ , a fim de manter a notação usada em (4.6) e (4.7):

$$\phi^i(\eta_1, \eta_2) = \zeta_{kl}(\eta_1, \eta_2) \quad \eta_1, \eta_2 \in \Omega_r \quad (4.9)$$

onde os índices  $k$  e  $l$  determinam o  $i$ -ésimo nó de  $\Omega_r$ . Ainda:

$$\eta_\omega = \frac{2}{l_\omega} y_\omega \quad (4.10)$$

A fim de expressar as integrais em  $\Gamma_n$  e  $\Omega_r$  em termos das coordenadas adimensionais  $\xi$  e  $\eta_\alpha$  é necessário ainda o cálculo dos Jacobianos (Westphal Jr. [1990a], Banerjee e Butterfield [1981]):

$$|J_n| = \sqrt{\frac{dx_\alpha}{d\xi} \frac{dx_\alpha}{d\xi}} \quad (4.11.a)$$

e

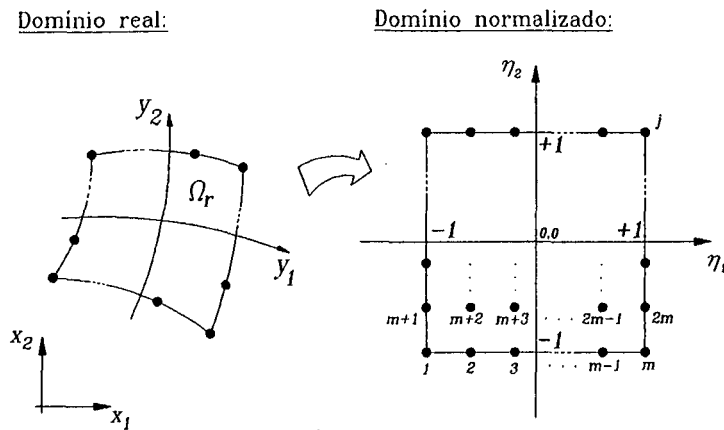


Figura 4.3 : Mapeamento dos elementos  $\Omega_r \rightarrow \eta_1, \eta_2$ .

$$|J_r| = \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} \quad , \quad (4.11.b)$$

de forma que:

$$d\Gamma_n = |J_n| d\xi \quad (4.12.a)$$

$$d\Omega_r = |J_r| d\eta_1 d\eta_2 \quad . \quad (4.12.b)$$

Na implementação numérica, são válidas as equações matriciais (4.5) e (4.6), sendo os vetores envolvidos reescritos na forma abaixo, por clareza (Westphal Jr. [1990a]):

$$\mathbf{x} = \{ x_1 \quad x_2 \}^T \quad (4.13.a)$$

$$\mathbf{u} = \{ \psi_1 \quad \psi_2 \quad u_3 \}^T \quad (4.13.b)$$

$$\mathbf{t} = \{ l_1 \quad l_2 \quad t_3 \}^T \quad (4.13.c)$$

e

$$\mathbf{x}^j = \left\{ x_1^1 \quad x_2^1 \quad \vdots \quad x_1^2 \quad x_2^2 \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad x_1^j \quad x_2^j \right\}^T \quad (4.14.a)$$

$$\mathbf{u}^j = \left\{ \psi_1^1 \quad \psi_2^1 \quad u_3^1 \quad \vdots \quad \psi_1^2 \quad \psi_2^2 \quad u_3^2 \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \psi_1^j \quad \psi_2^j \quad u_3^j \right\}^T \quad (4.14.b)$$

$$\mathbf{t}^j = \left\{ l_1^1 \quad l_2^1 \quad t_3^1 \quad \vdots \quad l_1^2 \quad l_2^2 \quad t_3^2 \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad l_1^j \quad l_2^j \quad t_3^j \right\}^T \quad . \quad (4.14.c)$$

Serão utilizados também:

$$\bar{\mathbf{w}} = \Phi \bar{\mathbf{w}}^j \quad (4.5.d)$$

$$\mathbf{q} = \Phi \mathbf{q}^j \quad (4.5.e)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{w}} = \{ u_{3,1} \quad u_{3,2} \}^T \quad (4.13.d)$$

$$\mathbf{q} = \{ m_1 \quad m_2 \quad q_3 \}^T \quad (4.13.e)$$

e

$$\bar{\mathbf{w}}^j = \left\{ u_{3,1}^1 \quad u_{3,2}^1 \quad : \quad u_{3,1}^2 \quad u_{3,2}^2 \quad : \quad \dots \quad : \quad u_{3,1}^j \quad u_{3,2}^j \right\}^T \quad (4.14.d)$$

$$\mathbf{q}^j = \left\{ m_1^1 \quad m_2^1 \quad q_3^1 \quad : \quad m_1^2 \quad m_2^2 \quad q_3^2 \quad : \quad \dots \quad : \quad m_1^j \quad m_2^j \quad q_3^j \right\}^T \quad (4.14.e)$$

#### 4.2.2. Discretização das equações para flexão linear elástica

A substituição das equações (4.5), (4.6), (4.13) e (4.14) em (3.57) resulta na seguinte equação algébrica:

$$\begin{aligned} C_{ik}(P)\Phi_{kI}u_I^j(P) + \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} T_{ik}\Phi_{kI} d\Gamma_n \right\} u_I^j(q) = \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} U_{ik}\Phi_{kI} d\Gamma_n \right\} t_I^j(q) + \\ + \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} \left[ U_{ik} - m_f \widehat{U}_{ik} \right] \Phi_{kJ} d\Omega_r \right\} q_J^j(Q) + W_i^j(s^l)\delta_{jl} \quad , \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde considera-se apenas o problema de flexão, isto é, inexistem quaisquer estados de tensão de membrana, e portanto  $\mathbf{N} = \mathbf{0}$  em (3.57). Na eq.(4.15),  $I$  e  $J$  variam de 1 a  $3j$ , sendo  $j$  o número de nós do elemento  $\Gamma_n$  ou célula  $\Omega_r$ . Em notação matricial, as equações discretizadas são expressas:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(P)\Phi \mathbf{u}^j(P) + \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma} \mathbf{T}(q, P)\Phi d\Gamma_n \right\} \mathbf{u}^i(q) = \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma} \mathbf{U}(q, P)\Phi d\Gamma_n \right\} \mathbf{t}^i(q) + \\ + \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} \left[ \mathbf{U}(Q, P) - m_f \widehat{\mathbf{U}}(Q, P) \right] \Phi d\Omega_r \right\} \mathbf{q}^i(Q) + \mathbf{W}(s^j, P) \quad . \end{aligned} \quad (4.16)$$

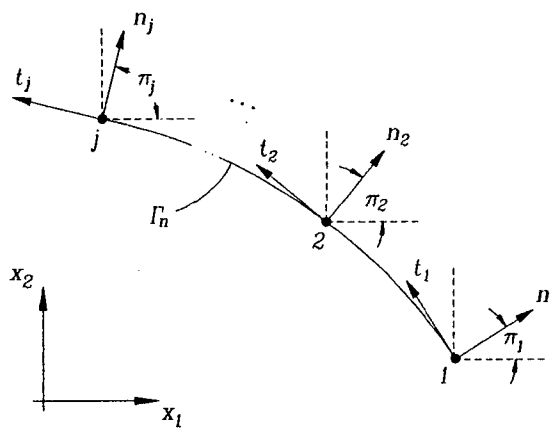
As equações (4.15) ou (4.16) relacionam seis variáveis (três deslocamentos e três esforços) para cada ponto nodal sobre  $\Gamma$ . Através do processo de colocação destas equações sobre cada um dos  $n_c$  pontos nodais do contorno, obtém-se um sistema linear a  $3n_c$  equações e  $3n_c$  incógnitas (já que três das seis variáveis são prescritas como condições de contorno, em cada ponto), para um contorno sem vértices (Westphal Jr. [1990]). No caso de contorno com vértices, a implementação numérica contou com a técnica do nó duplo (Brebbia e Dominguez [1989], Banerjee e Butterfield [1981]) e, nestes casos, o sistema é aumentado em  $3v$  incógnitas e  $3v$  equações, onde  $v$  é o número de vértices.

A imposição de condições de contorno para geometrias irregulares é facilitada se as variáveis nodais  $\mathbf{u}^j$  e  $\mathbf{t}^j$  são referenciadas em relação ao sistema local de coordenadas  $\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{s}$ . Com esse intuito, os vetores  $\mathbf{u}^j$  e  $\mathbf{t}^j$  são redefinidos como segue:

$$\mathbf{u}^j(q) = \left\{ \psi_{nn}^1 \quad \psi_{tt}^1 \quad w^1 \quad : \quad \psi_{nn}^2 \quad \psi_{tt}^2 \quad w^2 \quad : \quad \dots \quad : \quad \psi_{nn}^j \quad \psi_{tt}^j \quad w^j \right\}^T, \quad (4.17.a)$$

$$\mathbf{t}^j(q) = \left\{ M_{nn}^1 \quad M_{nt}^1 \quad Q_n^1 \quad : \quad M_{nn}^2 \quad M_{nt}^2 \quad Q_n^2 \quad : \quad \dots \quad : \quad M_{nn}^j \quad M_{nt}^j \quad Q_n^j \right\}^T. \quad (4.17.b)$$

Seja agora  $\pi_p$  o ângulo entre o eixo  $\mathbf{n}$  e o eixo  $\mathbf{x}_1$ , sobre o ponto nodal  $p$ , como ilustrado na figura 4.4.



**Figura 4.4 :** Definição dos sistemas de coordenadas locais.

A matriz de mudança de base do sistema  $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$  para  $\mathbf{n} \times \mathbf{t}$  é:

$$P_{ij}(p) = \begin{bmatrix} \cos(\pi_p) & \text{sen}(\pi_p) & 0 \\ -\text{sen}(\pi_p) & \cos(\pi_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

e portanto, as matrizes de transformação de todos os nós de  $\Gamma_n$  podem ser agrupadas na forma:

$$R_{IJ}(p) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(q_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}(q_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{P}(q_j) \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

A eq.(4.15) é então reescrita<sup>†</sup>:

$$\begin{aligned} & P_{ai}(p)C_{ak}(p)\Phi_{kJ}R_{JI}(p)u_I^j(p) + \\ & + P_{ai}(p) \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} T_{ak}(q,p)\Phi_{kJ}(q) d\Gamma_n \right\} R_{JI}(q)u_I^j(q) = \\ = & P_{ai}(p) \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} U_{ak}(q,p)\Phi_{kJ}(q) d\Gamma_n \right\} R_{JI}(q)t_I^j(q) + \\ & + P_{ai}(p) \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} \left[ U_{ak}(Q,p) - m_f \widehat{U}_{ak}(Q,p) \right] \Phi_{kJ}(Q) d\Omega_r \right\} q_I^j(Q) + \\ & + P_{ai}(p)W_i^j(s^a)\delta_{ja}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

ou, matricialmente:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^T(p)\mathbf{C}(p)\Phi(p)\mathbf{R}(p)\mathbf{u}^j(p) + \\ & + \mathbf{P}^T(p) \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \mathbf{T}(q,p)\Phi(q) d\Gamma_n \right\} \mathbf{R}(q)\mathbf{u}^j(q) = \\ = & \mathbf{P}^T(p) \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \mathbf{U}(q,p)\Phi(q) d\Gamma_n \right\} \mathbf{R}(q)\mathbf{t}^j(q) + \\ & + \mathbf{P}^T(p) \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} \left[ \mathbf{U}(Q,p) - m_f \widehat{\mathbf{U}}(Q,p) \right] \Phi(Q) d\Omega_r \right\} \mathbf{q}^j(Q) + \\ & + \mathbf{P}^T(p)\mathbf{W}(s^j,p), \end{aligned} \quad (4.21)$$

<sup>†</sup> A eq.(4.20) é válida para  $\mathbf{u}^j$  e  $\mathbf{t}^j$  definidos no sistema  $\mathbf{n} \times \mathbf{t}$  ou  $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ . No segundo caso, basta alterar (4.18) para  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$  ( $\pi_p = 0$ ).

onde  $\mathbf{q}^j$  e  $\mathbf{W}^j$  são definidas no sistema global, como em (4.14.e).

Para facilitar a implementação de quadraturas numéricas, as integrais em  $\Gamma_n$  e  $\Omega_r$  são mapeadas para os domínios normalizados através da substituição dos diferenciais dados pelas equações (4.12). Assim, utilizando as convenções de Westphal Jr. [1990a] e Brebbia e Dominguez [1989], denomina-se as submatrizes:

$$\hat{\mathbf{H}}_n = \mathbf{P}^T(p) \left\{ \int_{-1}^{+1} \mathbf{T}(q, p) \Phi(q) |J_n| d\xi \right\} \mathbf{R}(q) \quad , \quad (4.22)$$

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{P}^T(p) \left\{ \int_{-1}^{+1} \mathbf{U}(q, p) \Phi(q) |J_n| d\xi \right\} \mathbf{R}(q) \quad , \quad (4.23)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_r = \mathbf{P}^T(p) \left\{ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ \mathbf{U}(Q, p) - m_f \hat{\mathbf{U}}(Q, p) \right] \Phi(Q) |J_r| d\eta_1 d\eta_2 \right\} \quad , \quad (4.24)$$

de forma que (4.21) é reescrita:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{CIR} \mathbf{u}^j(p) + \sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{H}}_n \mathbf{u}^j(q) = \sum_{n=1}^N \mathbf{G}_n \mathbf{t}^j(q) + \sum_{r=1}^R \hat{\mathbf{F}}_r \mathbf{q}^j(q) + \mathbf{P}^T \mathbf{W}^j \quad . \quad (4.25)$$

Convencionando ainda:

$$\mathbf{H}_n = \begin{cases} \hat{\mathbf{H}}_n & \text{para } p \neq q \\ \hat{\mathbf{H}}_n + \mathbf{P}^T \mathbf{CIR} & \text{para } p \equiv q \end{cases} \quad , \quad (4.26)$$

e sobrepondo as matrizes obtidas após o processo de colocação, resulta o seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} + \hat{\mathbf{F}}\mathbf{q} + \mathbf{W} \quad . \quad (4.27)$$

Agrupando as variáveis desconhecidas  $\mathbf{u}(p \in \Gamma_t)$  e  $\mathbf{t}(p \in \Gamma_u)$  em um único vetor  $\mathbf{x}$ , e realizando as multiplicações implícitas, obtém-se o sistema linear:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad . \quad (4.28)$$

Uma vez obtidas as variáveis remanescentes sobre o contorno, através da solução numérica de (4.28), obtém-se os deslocamentos em qualquer ponto interno  $P \in \Omega$  particularizando (4.21) com  $\mathbf{C}(P) = \mathbf{P}(P) = \mathbf{I}$ , o que resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^j(P) = & - \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \mathbf{T}(q, P) \Phi(q) d\Gamma_n \right\} \mathbf{R}(q) \mathbf{u}^j(q) + \\ & + \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \mathbf{U}(q, P) \Phi(q) d\Gamma_n \right\} \mathbf{R}(q) \mathbf{t}^j(q) + \\ & + \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} \left[ \mathbf{U}(Q, P) - m_f \widehat{\mathbf{U}}(Q, P) \right] \Phi(Q) d\Omega_r \right\} \mathbf{q}^j(Q) + \\ & + \mathbf{W}(s^j, P) . \end{aligned} \tag{4.29}$$

Para o cômputo de esforços em pontos internos, Westphal Jr. [1990a] apresenta o procedimento detalhado, que não será repetido aqui.

### 4.2.3. Discretização das equações para estabilidade linearizada

Aplicando o mesmo procedimento de discretização à equação (3.59), obtém-se:

$$\begin{aligned} & P_{ai}(p) C_{ak}(p) \Phi_{kJ} R_{JI}(p) u_I^j(p) + \\ & + P_{ai}(p) \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} T_{ak}(q, p) \Phi_{kJ}(q) d\Gamma_n \right\} R_{JI}(p) u_I^j(q) = \\ = & P_{ai}(p) \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} U_{ak}(q, p) \Phi_{kJ}(q) d\Gamma_n \right\} R_{JI}(p) t_I^j(q) + \\ & - \lambda P_{ai}(p) \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} U_{3a,\alpha}(Q, p) N_{\alpha\beta}(Q) \Phi_{\beta M}(Q) d\Omega_r \right\} \bar{w}_M^j(Q) , \end{aligned} \tag{4.30}$$

onde  $M$  varia de 1 a  $2j$ , sendo  $j$  o número de nós da célula  $\Omega_r$ , como antes. Note-se que o vetor  $\bar{\mathbf{w}}^j$  não sofreu mudança de base, pois são variáveis auxiliares definidas sobre  $P \in \Omega$  e portanto podem permanecer no sistema de coordenadas global  $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ . De forma similar,

a equação (3.60) fornece:

$$\begin{aligned}
 \bar{w}_\alpha^j(P) - \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} T_{3i,\alpha}(q, P) \Phi_{iJ}(q) d\Gamma_n \right\} R_{JI}(q) u_I^j(q) &= \\
 = - \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} U_{3i,\alpha}(q, P) \Phi_{iJ}(q) d\Gamma_n \right\} R_{JI}(q) t_I^j(q) + & \quad (4.31) \\
 + \lambda \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} U_{33,\alpha\beta}(Q, P) N_{\beta\gamma}(Q) \Phi_{\gamma M}(Q) d\Omega_r \right\} \bar{w}_M^j(Q) + \lambda c_{t\alpha\beta}(P) \bar{w}_\beta^j(P) .
 \end{aligned}$$

Escrevendo (4.30) e (4.31) em notação matricial, vem:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}^T(p) \mathbf{C}(p) \Phi(p) \mathbf{R}(p) \mathbf{u}^j(p) + \\
 & + \mathbf{P}^T(p) \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \mathbf{T}(q, p) \Phi(q) d\Gamma_n \right\} \mathbf{R}(q) \mathbf{u}^j(q) = \\
 = & \mathbf{P}^T(p) \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \mathbf{U}(q, p) \Phi(q) d\Gamma_n \right\} \mathbf{R}(q) \mathbf{t}^j(q) + & \quad (4.32) \\
 - \lambda \mathbf{P}^T(p) \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} \hat{\mathbf{U}}(Q, p) \mathbf{N}(Q) \Phi(Q) d\Omega_r \right\} \bar{\mathbf{w}}^j(Q) ,
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{w}}(P) + \sum_{n=1}^N \left\{ - \int_{\Gamma_n} \bar{\mathbf{T}}(q, P) \Phi(q) d\Gamma_n \right\} \mathbf{R}(q) \mathbf{u}^j(q) &= \\
 = \sum_{n=1}^N \left\{ - \int_{\Gamma_n} \bar{\mathbf{U}}(q, P) \Phi(q) d\Gamma_n \right\} \mathbf{R}(q) \mathbf{t}^j(q) + & \quad (4.33) \\
 + \lambda \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} \bar{\mathbf{U}}(Q, P) \mathbf{N}(Q) \Phi(Q) d\Omega_r \right\} \bar{\mathbf{w}}^j(Q) + \lambda \mathbf{c}_t(P) \bar{\mathbf{w}}^j(P) .
 \end{aligned}$$

Parametrizando (4.32) através das submatrizes (4.22) e (4.23) e convencionando ainda:

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{P}^T(p) \left\{ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \hat{\mathbf{U}}(Q, p) \mathbf{N}(Q) \Phi(Q) |J_r| d\eta_1 d\eta_2 \right\} , \quad (4.34)$$

tem-se



$$\mathbf{P}^T \mathbf{CIR} \mathbf{u}^j(p) + \sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{H}}_n \mathbf{u}^j(q) = \sum_{n=1}^N \mathbf{G}_n \mathbf{t}^j(q) - \lambda \sum_{r=1}^R \mathbf{B}_r \bar{\mathbf{w}}^j(Q) \quad . \quad (4.35)$$

Sejam também as submatrizes adicionais, referentes à parametrização de (4.33):

$$\mathbf{F}_n = \left\{ - \int_{-1}^{+1} \bar{\mathbf{T}}(q, P) \Phi(q) |J_n| d\xi \right\} \mathbf{R}(q) \quad , \quad (4.36)$$

$$\mathbf{D}_n = \left\{ - \int_{-1}^{+1} \bar{\mathbf{U}}(q, P) \Phi(q) |J_n| d\xi \right\} \mathbf{R}(q) \quad , \quad (4.37)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_r = \left\{ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \bar{\mathbf{U}}(Q, P) \mathbf{N}(Q) \Phi(Q) |J_r| d\eta_1 d\eta_2 \right\} \quad , \quad (4.38)$$

então

$$\bar{\mathbf{w}}^j(P) + \sum_{n=1}^N \mathbf{F}_n \mathbf{u}^j(q) = \sum_{n=1}^N \mathbf{D}_n \mathbf{t}^j(q) + \lambda \sum_{r=1}^R \hat{\mathbf{E}}_r \bar{\mathbf{w}}^j(Q) + \lambda \mathbf{c}_t(P) \bar{\mathbf{w}}^j(P) \quad , \quad (4.39)$$

lembrando que o termo convectivo  $\mathbf{c}_t$  só é considerado quando  $P \equiv Q$ . Utilizando (4.26) e a convenção:

$$\mathbf{E}_r = \begin{cases} \hat{\mathbf{E}}_r & \text{para } P \neq Q \\ \hat{\mathbf{E}}_r + \mathbf{c}_t & \text{para } P \equiv Q \end{cases} \quad , \quad (4.40)$$

a sobreposição das submatrizes elementares resulta, para (4.35) e (4.39), respectivamente:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} - \lambda\mathbf{B}\bar{\mathbf{w}} \quad (4.41)$$

e

$$\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{F}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{t} + \lambda\mathbf{E}\bar{\mathbf{w}} \quad . \quad (4.42)$$

Para análise de estabilidade, considere-se aqui apenas condições de contorno homogêneas  $\mathbf{u}(p \in \Gamma_t) = \mathbf{t}(p \in \Gamma_u) = 0$ . Então, as variáveis são, como em flexão linear, agrupadas em um único vetor  $\mathbf{x}$ , fornecendo:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = -\lambda\mathbf{B}\bar{\mathbf{w}} \quad (4.43)$$

e

$$\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{Q}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{E}\bar{\mathbf{w}} \quad . \quad (4.44)$$

Isolando  $\mathbf{x}$  em (4.43):

$$\mathbf{x} = -\lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\bar{\mathbf{w}} \quad , \quad (4.45)$$

que pode ser substituída em (4.44), resultando:

$$\bar{\mathbf{w}} - \lambda\mathbf{Q}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\bar{\mathbf{w}} - \lambda\mathbf{E}\bar{\mathbf{w}} = 0 \quad . \quad (4.46)$$

Dividindo (4.46) por  $\lambda$ , vem:

$$[\mathbf{Q}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{E}] \bar{\mathbf{w}} = \frac{1}{\lambda} \bar{\mathbf{w}} \quad , \quad (4.47)$$

que é a conhecida forma de um problema clássico de autovalores e autovetores. O menor autovalor  $1/\lambda$  é usado em (3.58) para fornecer a carga crítica, enquanto os autovetores  $\bar{\mathbf{w}}$  podem ser substituídos em (4.45). As extensões dos autovetores assim obtidas ( $\mathbf{x}$ ) representam o padrão de deslocamentos e esforços sobre o contorno, para cada modo de flambagem. Para cálculo dos deslocamentos correspondentes a cada modo, em pontos internos, substitui-se  $\bar{\mathbf{w}}$  e  $\mathbf{x}$  em (4.32), particularizada com  $\mathbf{C}(p) = \mathbf{P}(p) = \mathbf{I}$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^j(P) = & \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \mathbf{U}(q, P) \Phi(q) d\Gamma_n \right\} \mathbf{R}(q) \mathbf{t}^j(q) + \\ & - \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \mathbf{T}(q, P) \Phi(q) d\Gamma_n \right\} \mathbf{R}(q) \mathbf{u}^j(q) + \\ & - \lambda \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} \hat{\mathbf{U}}(Q, p) \mathbf{N}(Q) \Phi(Q) d\Omega_r \right\} \bar{\mathbf{w}}^j(Q) \quad , \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde  $\mathbf{x}$  já está devidamente desmembrado em  $\mathbf{u}^j$  e  $\mathbf{t}^j$ .

### 4.3. Procedimentos de integração

Como citado anteriormente, as matrizes correspondentes ao problema de flexão estática, bem como as correspondentes ao problema de flambagem, são obtidas após um processo de colocação. Durante esta fase, as submatrizes  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$ ,  $\hat{\mathbf{F}}$ ,  $\mathbf{E}$  são calculadas através da integração de regiões unidimensionais e bidimensionais, respectivamente. Quando o ponto fonte  $p$  ou  $P$  não pertence ao elemento  $\Gamma_n$  ou  $\Omega_r$  que está sendo integrado, todas as integrais referentes às submatrizes acima citadas são regulares e, por estarem definidas em domínios normalizados, podem ser integradas numericamente através do processo de quadratura de Gauss (Brebbia [1980], Zienkiewicz [1977], Bathe [1982]):

$$I_{\Gamma} = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^K f(\xi_i) w_i \quad , \quad (4.49.a)$$

$$I_{\Omega} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K f(\eta_{1i}, \eta_{2j}) w_i w_j \quad , \quad (4.49.b)$$

onde  $K$  é o número de pontos de integração  $\xi_i$  necessários para integrar de maneira exata um função polinomial  $f(\xi)$  de grau  $p = 2K - 1$ , e  $w_i$  são os respectivos pesos. Infelizmente, as integrais em questão não envolvem apenas polinômios, de modo que o número de pontos de integração necessários para o cálculo das referidas submatrizes, com precisão suficiente, deve ser determinado experimentalmente. Na implementação do código numérico dispôs-se, com este objetivo, de 2(1)10, 20 e 40 pontos de integração de Gauss, sendo utilizados apenas para  $p, P \notin \Gamma_n, \Omega_r$ .

Quando  $p, P \in \Gamma_n, \Omega_r$ , as integrais das submatrizes citadas acima se tornam impróprias, devido à presença de núcleos singulares nos tensores envolvidos (Westphal Jr. [1990a], Brebbia e Dominguez [1989]). Nestes casos, as singularidades presentes são sumariadas na tabela 4.1.

A terminologia adotada na tabela 4.1, bem como ao longo deste trabalho, a fim de distinguir a severidade das singularidades, é a seguinte: integrais fracamente singulares são integrais contendo núcleo logarítmico em um domínio de integração unidimensional ou núcleo  $1/r$  em um domínio de integração bidimensional. Integrais fortemente singulares, ou interpretadas no sentido do valor principal de Cauchy são aquelas que contém núcleos de Cauchy ( $1/r$ ) ou  $1/r^2$  em domínios de integração unidimensionais e bidimensionais,

respectivamente. As integrais chamadas hipersingulares, ou integrais de Hadamard, são integrais contendo núcleos  $1/r^m$ , onde  $m$  é maior que a dimensão do domínio de integração. Adicionalmente, denomina-se de integrais quase-singulares aquelas cujo pólo singular não se encontra dentro do domínio de integração, mas suficientemente próximo deste a ponto de dificultar sua integração por quadratura gaussiana padrão, devido ao alto gradiente do integrando nas vizinhanças do ponto singular.

Submatriz	Equação	Núcleo	Domínio	Singularidade	Ocorrência
$\hat{H}_n$	4.22	$1/r$	1-D	Forte	$p \equiv q$
$G_n$	4.23	$\ln(r)$	1-D	Fraca	$p \equiv q$
$\hat{F}_r$	4.24	$1/r^2$	2-D	Forte	$p, P \equiv Q^*$
$B_r$	4.34	$1/r$	2-D	Fraca	$p, P \equiv Q$
$F_n$	4.36	$1/r^2$	1-D	Hipersingular	$P \equiv q$
$D_n$	4.37	$1/r$	1-D	Forte	$P \equiv q$
$\hat{E}_r$	4.38	$1/r^2$	2-D	Forte	$P \equiv Q$

\* (Reissner, apenas).

**Tabela 4.1:** Singularidades presentes na formulação.

O cálculo numérico de integrais contendo núcleos singulares é objeto de intensa pesquisa a pelo menos vinte anos. O número de quadraturas numéricas propostas na literatura é bastante significativo, mas são aplicáveis a integrais contendo núcleos com um tipo específico de singularidade, em geral. Apesar dos esforços no sentido de desenvolver uma quadratura genérica, que permita a integração tanto de núcleos regulares como singulares (Dumont [1992]), tal objetivo ainda não foi satisfatoriamente alcançado. Assim, torna-se conveniente, pelo menos para integrais no sentido do valor principal de Cauchy ou de singularidades mais severas, o isolamento dos termos singulares dos integrandos e aplicação de quadraturas especiais a cada parcela. Utilizando uma classificação similar à proposta por Rosen e Cormack [1992], é possível enquadrar a maioria dos métodos de integração em uma (ou uma combinação) das técnicas gerais apresentadas na tabela 4.2, que exemplifica algumas referências correspondentes.

Grupo	Técnica utilizada	Referências
i	Integração analítica ou semi-analítica sobre domínios de geometria simples.	Banerjee e Butterfield [1981], Brebbia e Dominguez [1989], Davey e Hinduja [1989].
ii	Integração sobre o contorno da célula, usando variações do teorema de Green.	Burgess e Mahajerin [1985], Li <i>et alli</i> [1985], Zhang e Xu [1989], Krishnasamy <i>et alli</i> [1990], Lu e Ye [1991].
iii	Quadraturas desenvolvidas para tipos específicos de singularidade.	Kutt [1975a, 1975b], Paget [1981], Nahlik e Bialecki [1983], Guiggiani e Casalini [1987], Ioakimidis e Pitta [1988], Tsamasphyros e Dimou [1990], Borggaard <i>et alli</i> [1991], Kaw [1991].
iv	Transformação de coordenadas.	Lachat e Watson [1976], Mustoe [1984], Telles [1987], Cerrolaza e Alarcón [1989], Cruse [1993].
v	Troca de variáveis.	Pogorzelski [1966], Zabreyko <i>et alli</i> [1975], Jun <i>et alli</i> [1985].
vi	Expansão dos núcleos em séries.	Aliabadi <i>et alli</i> [1985], Rudolphi e Muci-Küchler [1991], Matsumoto <i>et alli</i> [1991], Dumont [1992].
vii	Embutimento invariante, integração escalada e métodos de continuação.	Vijayakumar e Cormack [1988], Vijayakumar e Cormack [1989], Rosen e Cormack [1992].
viii	Regularização analítica ou semi-analítica dos núcleos.	Guiggiani e Casalini [1987], Guiggiani e Gigante [1990], Lutz <i>et alli</i> [1991], Rudolphi e Muci-Küchler [1991], Sládek e Sládek [1992], Guiggiani <i>et alli</i> [1992].

Tabela 4.2: Classificação geral das técnicas de integração.

Para a integração de núcleos contendo singularidades logarítmicas, o método mais eficiente é a utilização de quadraturas cujos pontos de integração são determinados por funções-peso logarítmicas (Brebbia e Walker [1980], Brebbia e Dominguez [1989]). Entretanto, a quadratura é válida para o intervalo normalizado  $[0, 1]$ , com o pólo da singularidade localizado na origem do sistema de coordenadas, o que obriga alguns algebrismos para integrar funções sobre intervalos  $[-1, +1]$ . Além disso, o isolamento da parcela logarítmica

do integrando é mandatório. Nahlik e Bialecki [1983] desenvolveram uma quadratura especial para integração de núcleos logarítmicos definidos sobre  $[-1, +1]$ , sendo a origem desse intervalo a posição do pólo e, portanto, bastante apropriada para integração de elementos constantes no MEC. Técnicas de subdivisão progressiva do intervalo de integração com utilização de quadratura gaussiana a cada subintervalo ou aplicação de troca de variáveis não exigem isolamento dos termos logarítmicos (Lachat e Watson [1976], Jun *et alli* [1985]). No entanto, implicam em um esforço computacional intenso, pois o número total de pontos de integração cresce abruptamente. As técnicas de transformação de coordenadas são boas alternativas para integrações deste tipo, pois não exigem o isolamento da singularidade, permitindo assim a utilização do mesmo algoritmo de integrais regulares para o cálculo dos núcleos. A severidade da transformação é auto-adaptativa, perdendo o efeito à medida que o ponto fonte se distancia do domínio de integração, o que torna o método diretamente aplicável à casos quase-singulares (Telles [1987]). A extensão para domínios bi ou tridimensionais é imediata. A figura 4.5 ilustra uma comparação entre as quadraturas de Gauss-Legendre padrão e com função-peso logarítmica, a quadratura de Nahlik e Bialecki [1983] e a transformação de Telles [1987]. Desta comparação fica claro que a integração de núcleos logarítmicos através de quadraturas com função-peso logarítmicas é imbatível quando o núcleo pode ser isolado.

Apesar das quadraturas gaussianas com função-peso logarítmica e de Nahlik e Bialecki serem muito precisas, mesmo para poucos pontos de integração, deve-se lembrar que os tensores utilizados neste trabalho possuem, quase todos, funções de Bessel de primeira e segunda espécies. As funções de Bessel foram implementadas numericamente através de expansões polinomiais assintóticas (Abramowitz e Stegun [1972]) e utilizando bibliotecas numéricas (Harwell Subroutine Library Specification [1978]). Tais expansões dificultam sobremaneira o isolamento das singularidades nos tensores. Além disso, a utilização das duas quadraturas citadas em elementos curvos não é direta, motivos pelos quais adotou-se o procedimento de Telles [1987] para cálculo de integrais fracamente singulares ( $\ln(r)$  sobre  $\Gamma_n$  e  $1/r$  em  $\Omega_r$ ), com 2(2)10,20 e 40 pontos de integração. O apêndice C fornece os detalhes da implementação deste procedimento a elementos de contorno e células de domínio. Esta mesma estratégia foi adotada para a integração de elementos quase-singulares, a fim de diminuir o número de pontos de integração necessários, quando da utilização da quadratura de Gauss-Legendre. Em essência, o procedimento de Telles é uma transformação de coordenadas cujo Jacobiano se anula no ponto singular.

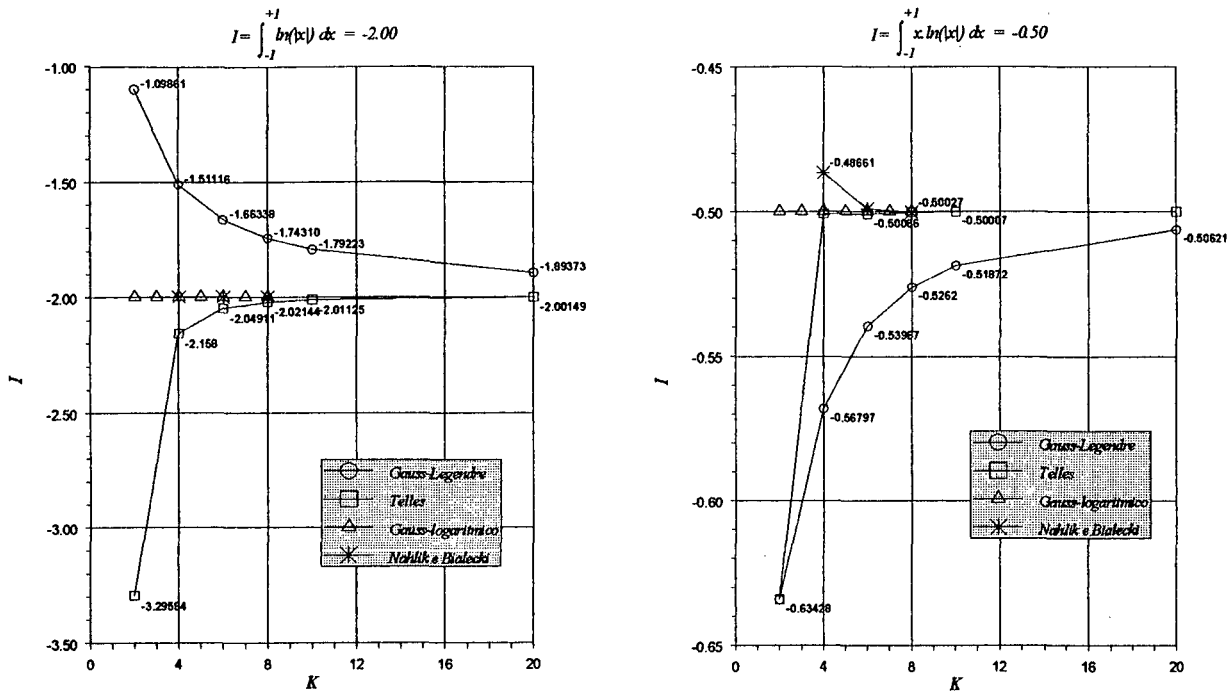


Figura 4.5 : Desempenho de algumas quadraturas para integrais contendo núcleos logarítmicos.

Para integrais no sentido do valor principal de Cauchy, vários procedimentos de integração estão disponíveis na literatura, sendo que a grande maioria deles exige isolamento da singularidade. A estratégia mais comum, entretanto, é a imposição de movimentos arbitrários de corpo rígido (Westphal Jr. [1990a], Brebbia e Dominguez [1989], Banerjee e Butterfield [1981]). A imposição de movimentos de corpo rígido permite o cálculo indireto das submatrizes que multiplicam os deslocamentos nodais nos pontos fonte, já acrescidas dos fatores geométricos  $C$ , a segunda das equações (4.26). Ou seja, as submatrizes  $H$  associadas aos pontos singulares que compõem o termo à esquerda de (4.27) são calculadas indiretamente. Esta técnica, não enquadrada na tabela 4.2, garante o equilíbrio do corpo, mas depende diretamente da discretização e da qualidade da integração da parcela complementar à região que está sendo integrada (integrações regulares e quase-singulares). Do ponto de vista numérico, isto pode aumentar também os erros de arredondamento e truncamento (Guiggiani e Gigante [1990]). Adicionalmente, o esforço computacional é bem superior ao gasto pelo uso de quadraturas especiais, resultando em um tempo de análise

substancialmente maior. Por outro lado, não exige isolamento das singularidades, depende da dimensão do problema e é aplicável a quaisquer graus das funções de interpolação, com relativa simplicidade.

Uma quadratura especialmente desenvolvida para integrais por parte finita foi proposta por H.R. Kutt, em 1975 (Kutt [1975a, 1975b, 1975c]), para várias ordens de singularidade  $1/r^n$ . Por ser aplicável a integrais por parte finita, o resultado não vem acrescido da matriz  $C$ , a segunda das equações (4.26). É necessário adicionar tal termo após o processo de integração. Para singularidades isoladas, constitui a melhor quadratura já desenvolvida (Dumont [1992]). Algoritmos recentemente publicados (Guiggiani e Casalini [1987], Guiggiani e Gigante [1990], Dumont [1992]) utilizam os pontos de integração de Gauss-Legendre para integrais deste tipo, ou decompõem o problema em uma soma de integrais regulares. Apesar de promissores, ainda não foram suficientemente testados para aplicação geral. Mesmo exigindo o isolamento da singularidade, a quadratura de Kutt (válida para o intervalo  $[0, +1]$ ) não envolve outros cálculos e exige poucos pontos de integração<sup>†</sup>, resultando em um tempo de computação bastante modesto, em comparação com outros métodos. A inconveniência desta técnica reside no fato de uma integral por parte finita não permitir escalamento do intervalo de integração. Isto significa que a aplicação da quadratura a intervalos de integração mapeados para domínios normalizados é direta apenas se o Jacobiano da transformação for constante. Caso contrário, a ordem do Jacobiano pode mascarar o real grau de singularidade da função núcleo. Apesar desta quadratura ser aplicável a elementos curvos, sua implementação não é direta como para elementos retos (Guiggiani/Telles [1988]). Para domínios bi ou tridimensionais, torna-se necessário escrever as integrais segundo um sistema de coordenadas polar ou esférico, e aplicar a quadratura de Kutt na direção radial, motivo pelo qual é geralmente utilizada apenas para elementos de contorno unidimensionais.

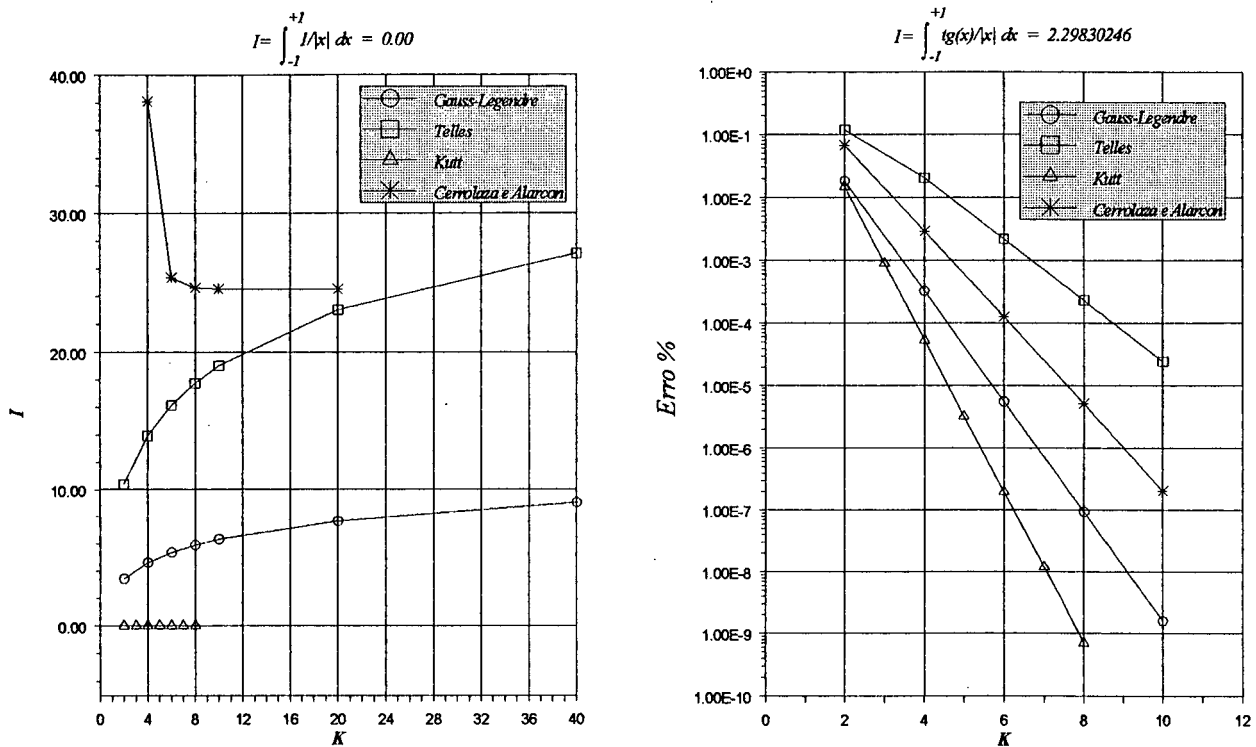
Uma transformação interessante foi recentemente desenvolvida por Cerrolaza e Alarcón [1989], que consiste em aplicar a transformação cúbica de Telles [1987] para cada lado da singularidade, fazendo uso de uma propriedade de integrais por parte finita. Esta transformação, denominada bi-cúbica, foi proposta para integrar núcleos de Cauchy sendo que, como na quadratura de Kutt, deve-se adicionar a matriz  $C$  ao resultado da integral por parte finita. Entretanto, é mais simples de ser implementada, inclusive para elementos

---

<sup>†</sup> O número de pontos de integração necessários para o cálculo exato é dado pela mesma regra da quadratura gaussiana,  $p = 2K - 1$ , sendo  $p$  a ordem de uma função densidade polinomial.



curvos. A figura 4.6 mostra uma comparação entre alguns destes procedimentos para cálculo de integrais de Cauchy.

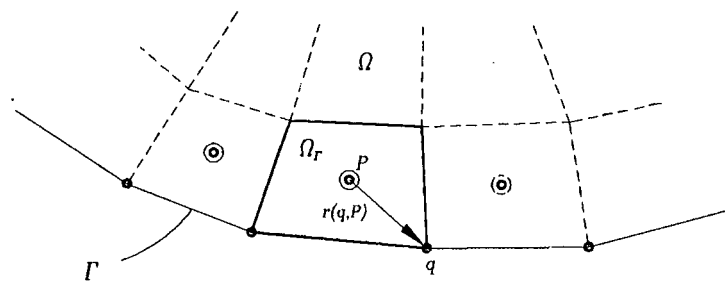


**Figura 4.6 :** Desempenho de algumas quadraturas para integrais contendo núcleos de Cauchy.

Da figura 4.6 à esquerda, conclui-se que a quadratura de Kutt é realmente efetiva. A quadratura gaussiana padrão e com a transformação de Telles obviamente falham, pois não são apropriadas para núcleos de Cauchy, e estão incluídas na figura apenas a título de comparação. Na figura 4.6 à direita utilizou-se um núcleo de Cauchy e uma função densidade que tende a zero no ponto singular, o que permite uma comparação entre as quadraturas citadas. Entretanto, mesmo neste caso a transformação de Cerrolaza e Alarcón não forneceu o resultado esperado. Isto pode ser explicado pelo fato de uma transformação de coordenadas não ser capaz de regularizar uma integral imprópria, como ocorre com integrais fracamente singulares, ao menos para domínios de integração finitos. Huang e Cruse [1993] demonstram isto e afirmam que "... Se existe uma transformação que nos permite mapear um intervalo finito em um outro intervalo finito e remover qualquer ordem

de singularidade, então nós podemos obter um resultado numérico finito de uma integral que é divergente. Aparentemente, isto vai contra a lógica dos matemáticos ... ” .

No âmbito das integrais com singularidades mais fortes, ou integrais no sentido do valor principal de Hadamard (Kutt [1975a]), geralmente se faz uso do fato da mesma se originar da diferenciação de uma integral no sentido do valor principal de Cauchy (Paget [1981], Guiggiani *et alli* [1992], Kaw [1992]). Apesar dos bons resultados obtidos por procedimentos propostos na literatura, não serão utilizadas neste trabalho por pressupor-se apenas a utilização de elementos e células constantes na solução de problemas de estabilidade, onde tais integrais ocorrem. Assim, as submatrizes  $F_n$  e  $D_n$  serão, no máximo, quase-singulares. Isso é justificado pelo fato dos pontos de colocação do domínio serem os nós físicos (nós onde são calculadas as variáveis) da malha do domínio que, para células constantes, não coincidem com pontos sobre o contorno (figura 4.7). De qualquer forma, deve-se evitar células de domínio cujos nós físicos estejam muito próximos do contorno, o que pode prejudicar a qualidade da integração.



**Figura 4.7 :** Localização dos nós físicos em relação aos nós do contorno, quando da utilização de células constantes.

Na implementação numérica da presente formulação foram utilizadas as seguintes técnicas para integração de núcleos de Cauchy: imposição de movimentos de corpo rígido (para todos os graus das funções de interpolação), quadratura de Kutt (elementos de contorno constantes e lineares, com 2(1)18 pontos de integração), e a transformação de Cerrolaza e Alarcón (elementos de contorno constantes e lineares, com 2(2)10,20 e 40 pontos de integração). Na análise de estabilidade, as integrais da submatriz  $\hat{E}_r$ , equação (4.38),

foram integradas semi-analiticamente, aproveitando a simplicidade de células constantes. O apêndice D detalha a técnica de imposição de movimentos de corpo rígido. A quadratura de Kutt é abordada no apêndice E, onde são esclarecidos alguns pontos relativos à implementação da mesma para integração de elementos de contorno retos, devido à paridade dos núcleos  $1/r$ . Algumas formas de integração semi-analítica de (4.38), são realizadas no apêndice F, aproveitando a simplicidade dos elementos e células constantes.

Finalmente, convém destacar que, em experimentos numéricos preliminares, a influência numérica da matriz  $\mathbf{E}_r$ , eq.(4.40), tanto no caso singular quanto no regular, se revelou bastante pequena no cômputo da matriz dos coeficientes do problema de autovalores e autovetores, equação (4.47). Myerson [1991] discute sob quais condições é possível ignorar a singularidade, quando do uso de quadraturas numéricas. Este trabalho demonstra que, quando uma integral singular é escrita na forma de uma soma de Riemann, como é o caso das quadraturas, a magnitude do resíduo da soma está diretamente relacionada com a magnitude do valor principal da integral que, dependendo da função densidade, pode ser numericamente desprezável. Isso pode explicar também uma outra característica numérica detectada no cômputo das submatrizes  $\mathbf{E}_r$ , no caso singular: integrada analiticamente ou com quadratura gaussiana padrão, os resultados são praticamente idênticos (para seis ou mais pontos de integração em cada direção).

#### 4.4. Solução numérica dos sistemas matriciais

O processo de colocação e subsequente sobreposição das matrizes elementares resulta, para a análise de flexão linear estática, no sistema linear (4.28) e, para análise de estabilidade, no problema de autovalores e autovetores (4.47). As matrizes envolvidas são, em ambos os casos, cheias, não-simétricas e não positivas-definidas.

Para solução do sistema (4.28), a implementação numérica contou com dois métodos de eliminação de Gauss: com condensação pivotal (Golub e Van Loan [1989]) e com retrosubstituição direta (Dahlquist e Bjorck [1974]). A análise dos resíduos da solução em alguns casos típicos comprovou a eficiência de ambas as variações do método.

Na solução da equação (4.47) foram utilizados três métodos, a título de comparação do desempenho, que foram retirados de bibliotecas numéricas: Press *et alli* [1986], Harwell Subroutine Library Specification [1978] e EISPACK [1987]. Em todos os casos, o método QR foi utilizado, após redução das matrizes à forma de Hessenberg superior, através de transformações de similaridade que, acumuladas multiplicativamente, fornecem os autovetores. No caso da biblioteca de Press *et alli* [1986], foi utilizada eliminação de Gauss (que não é uma transformação de similaridade) para redução à forma de Hessenberg, de modo que apenas os autovalores são obtidos.

Em ambos os problemas, o condicionamento numérico é um fator a ser considerado, principalmente na análise de flambagem de placas modeladas com malhas muito irregulares. Estimativas de números de condição para equações integrais são apresentadas por Linz [1991], mas não foram implementadas. Em casos críticos, um balanço da matriz dos coeficientes do problema de autovalores e autovetores foi suficiente, através do escalamento da norma de colunas da matriz. Como regra geral, não se detectou o progressivo erro nos autovalores, à medida que é incrementado o modo de flambagem, característica da análise modal através do MEF. Os resíduos numéricos foram, via de regra, desprezáveis. A única inconveniência da formulação está na necessidade de inverter a matriz  $\mathbf{A}$ , que pode se tornar uma fonte de erro caso a dimensão desta matriz seja muito grande. Além disso, os métodos utilizados se mostraram eficientes na detecção de autovalores duplos, como é o caso de placas quadradas com compressão biaxial e condições de contorno iguais em todos os lados, e alguns casos de salto de modo (Marczak *et alli* [1991]).

#### 4.5. Conclusões

Foram apresentadas as equações integrais em sua forma discretizada, utilizando a metodologia padrão do MEC. Foram destacados também algumas características importantes dos procedimentos de integração envolvidos, bem como da solução numérica dos sistemas matriciais resultantes. No capítulo seguinte serão apresentadas algumas aplicações resolvidas com a formulação proposta.

---

---

# CAPÍTULO CINCO

---

---

## Aplicações Numéricas

### 5.1. Introdução

Este capítulo apresenta alguns resultados numéricos obtidos a partir da implementação da formulação apresentada. Tanto nas aplicações a problemas de flexão linear quanto nos problemas de flambagem, foi dada ênfase a placas quadradas, visto que possuem apenas soluções analíticas por séries, quando da utilização dos modelos de placa aqui empregados. Adicionalmente, Westphal Jr. [1990a] explorou bastante as aplicações da formulação a placas circulares.

Os resultados numéricos apresentados a seguir têm dois objetivos básicos:

a.) Em problemas de flexão linear elástica, são apresentadas as curvas de convergência para os elementos constante, linear, quadrático, cúbico e quártico. Vale lembrar a escassez deste tipo de informação na literatura do MEC. A maioria dos casos analisados utilizaram como parâmetro de comparação o deslocamento máximo da placa. Serão apenas apresentados alguns resultados para esforços em pontos definidos sobre o contorno, Além disso, na grande maioria dos métodos integrais as taxas de convergência para esforços são idênticas às dos deslocamentos e, como já citado anteriormente, Westphal Jr. [1990a] apresentou resultados de ótima qualidade para os esforços em pontos internos, e não serão repetidos aqui.

b.) Os problemas de estabilidade foram resolvidos, na maioria, para placas de espessura reduzida, a fim de permitir comparações com soluções analíticas de placas finas (Timoshenko e Woinowski-Krieger [1970]). Para placas moderadamente espessas, os resultados são comparados com outras soluções numéricas. O objetivo maior é apresentar o desempenho da formulação na solução de problemas de flambagem, com vistas a melhoramentos posteriores.

Devido às diferentes características inerentes ao MEC e ao MEF, a comparação de resultados entre estes dois métodos não é direta. Por exemplo: nas curvas de convergência, geralmente se utiliza número de nós, de elementos ou de graus de liberdade do modelo nas abscissas. Se for utilizado o número de nós ou de graus de liberdade, é claro que os resultados do MEF parecerão muito piores, ao menos em problemas lineares, do que os correspondentes ao MEC. Em problemas de estabilidade, que na presente formulação obriga a discretização do domínio, qualquer desses critérios pode ser utilizado na comparação, com uma ressalva: não foi utilizada simetria nos modelos apresentados, a fim de evitar imprecisões numéricas devido a utilização de nós duplos e levar em conta o desempenho do método para solução de problemas cuja geometria não possui simetria. Assim, em problemas de placas quadradas, a variável adotada para comparar a discretização foi o número de elementos por lado inteiro da placa, tanto na análise estática quanto na análise modal. O número de pontos de integração utilizado para os diferentes graus de singularidade está mostrado na tabela 5.1, e é válido para todo este capítulo, a menos que especificado (na tabela 5.1, o número de pontos de integração correspondente à imposição de movimentos de corpo rígido refere-se à ordem da quadratura utilizada para integração da parcela do contorno complementar ao elemento que está sendo integrado).

Elemento	Singularidade			
	Regular	Fraca	Forte	
			Corpo rígido	Kutt
Constante	8	10	10	4
Linear	8	10	10	6
Quadrático	10	20	20	-
Cúbico	10	40	20	-
Quártico	10	40	20	-

**Tabela 5.1 :** Número de pontos de integração utilizado nas quadraturas para elementos unidimensionais.

## 5.2. Aplicações a problemas de flexão linear elástica

### 5.2.1. Placas quadradas

A menos que especificado em contrário, os problemas de placa quadrada utilizaram os seguintes dados:

$$E = 2.0 \times 10^6$$

$$\nu = 0.30$$

$$\kappa^2 = 5/6$$

$$h/a = 0.0010 \quad (\text{sendo } a \text{ a dimensão lateral da placa})$$

$$q_3 = 1.00$$

$$m_f = 0$$

As discretizações estão ilustradas na figura 5.1, para elementos lineares. Na utilização de elementos quadráticos ou de ordem mais alta, o maior refino empregado corresponde à discretização  $3 \times 3$ . A variável adotada para comparação na maioria dos resultados apresentados foi o deslocamento central da placa, que foi normalizado com as soluções apresentadas por Timoshenko e Woinowski-Krieger [1970]. Em problemas envolvendo carregamento concentrado, este é aplicado no ponto central da placa e tem valor unitário.

A figura 5.2 ilustra as curvas de convergência para placas quadradas apoiadas sob carregamento transversal uniformemente distribuído. Os resultados para elementos constantes e lineares estão mostrados na figura 5.2.a, onde é possível comparar o desempenho dos dois procedimentos de integração implementados para estes elementos. Apesar dos grandes erros para malhas muito grosseiras, o que é de se esperar devido à simplicidade destes elementos, todas as curvas apresentam erros inferiores a 5% a partir de cinco elementos por lado. A figura 5.2.b mostra o excelente desempenho dos elementos de ordem superior, todos eles apresentando erros aceitáveis com um único elemento por lado.

O desempenho da presente formulação para placas quadradas engastadas é apresentado na figura 5.3, para dois tipos de carregamento. A figura 5.3.a ilustra as curvas de convergência do elemento constante e a figura 5.3.b mostra o comportamento do elemento linear. Observe-se a boa taxa de convergência destes casos.

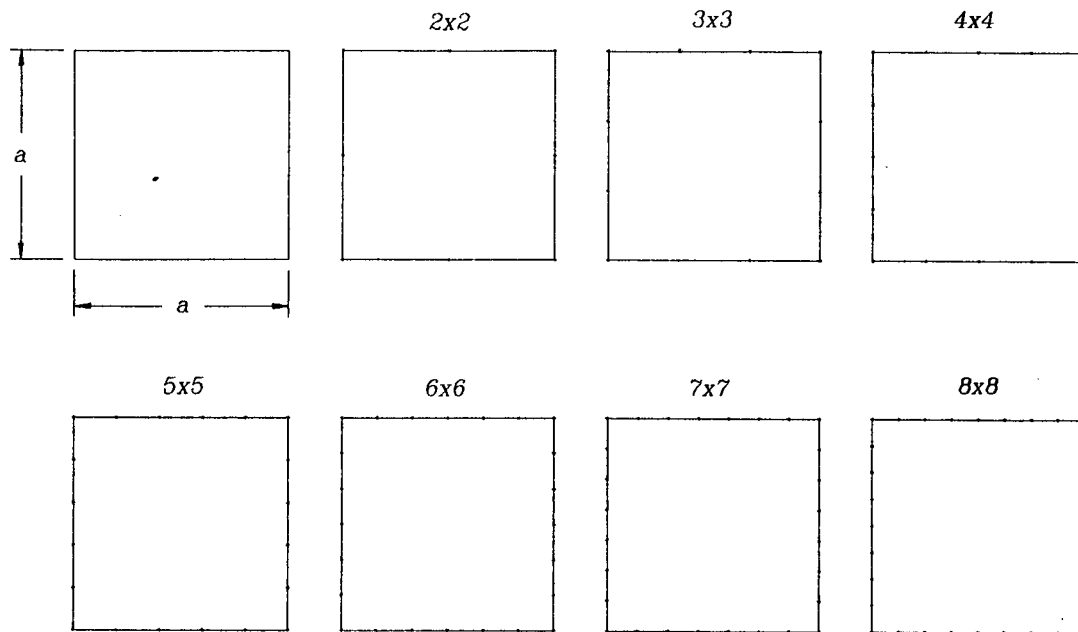
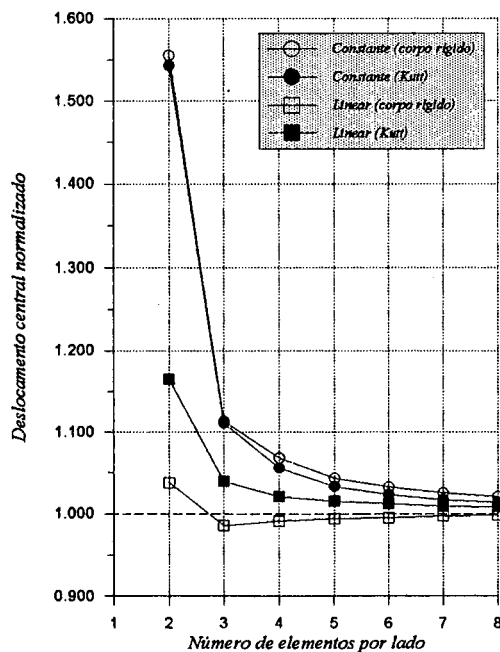
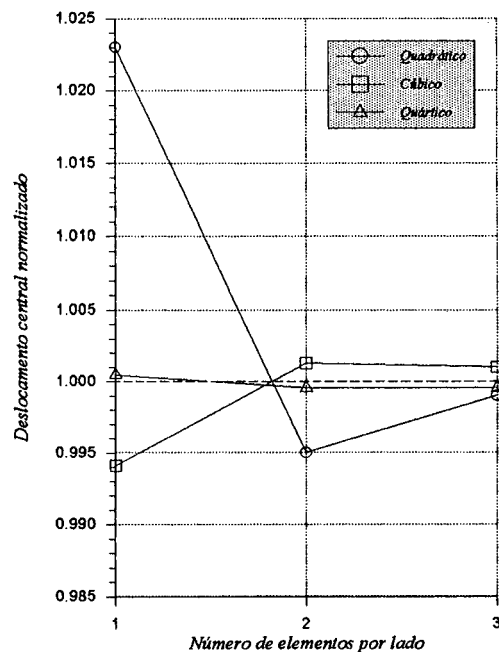


Figura 5.1 : Discretizações utilizadas para flexão linear estática de placas quadradas.



(a)



(b)

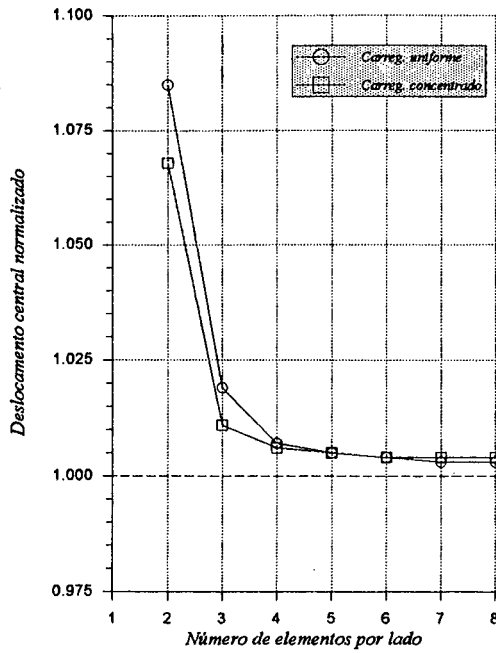
Figura 5.2 : Convergência  $h$  para placa quadrada apoiada sob carregamento uniforme: (a) Elementos constante e linear. (b) Elementos de alta ordem.



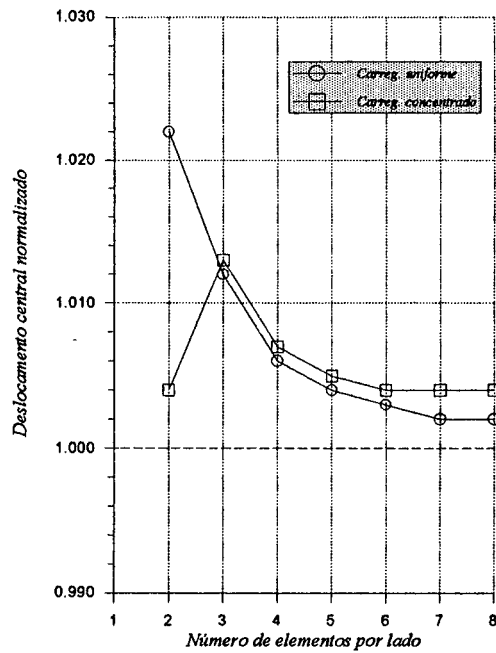
Uma comparação da presente formulação com outras formulações de elementos de contorno é apresentada nas figuras 5.4.a e 5.4.b, para placa quadrada apoiada e engastada, respectivamente, ambas sob carregamento transversal uniforme. A comparação com alguns elementos finitos populares e com outros métodos é mostrada na figura 5.5 para placa quadrada apoiada sob carregamento transversal uniforme, e na figura 5.6 para placa quadrada engastada sob carregamento uniforme.

A ausência do fenômeno de *locking*, já reportada por Monken e Silva [1988], é demonstrada na figura 5.7 para diversas razões  $h/a$ , e comparada com elementos quadráticos de 8 e 9 nós com integração reduzida (QSR e QLR). Note-se a estabilidade numérica do MEC, enquanto o elemento lagrangeano QLR oscila ligeiramente e o elemento *serendipity* QSR falha completamente. A não ocorrência do *locking* se deve à utilização das expressões analíticas dos tensores, de forma que não se está superestimando qualquer efeito correspondente ao cisalhamento, a exemplo do que ocorre no MEF. Os resultados estão adimensionalizados na forma  $\bar{w} = wD/qa^4$ , para uma placa engastada uniformemente carregada.

O aumento da espessura, que inviabiliza a utilização de soluções de placa fina, é investigado e comparado com outras soluções numéricas na tabela 5.2, para placas engastadas uniformemente carregadas. Foram comparados os elementos linear e quadrático, com discretizações  $6 \times 6$  e  $3 \times 3$ , respectivamente. Essas mesmas discretizações são utilizadas para placas apoiadas uniformemente carregadas e comparadas com outras soluções na tabela 5.3. Os resultados estão normalizados na forma  $\bar{w} = wEh^3/pa^4$ . Observe-se que, para placas engastadas, a presente formulação levou a resultados muito próximos da solução numérica das equações de Reissner proposta por Deshmukh e Archer [1974]. Para placas apoiadas, os resultados obtidos com a presente formulação se aproximam bastante daqueles obtidos por Yuan e Miller [1988], que têm sido referenciados como um dos melhores resultados numéricos para placas semi-espessas disponíveis na literatura.

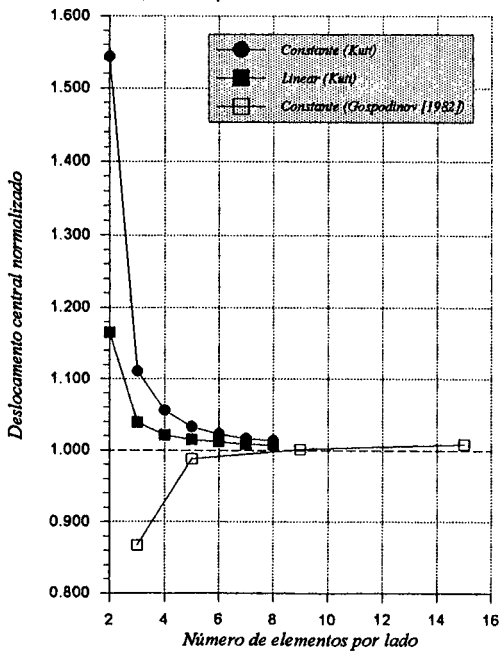


(a)

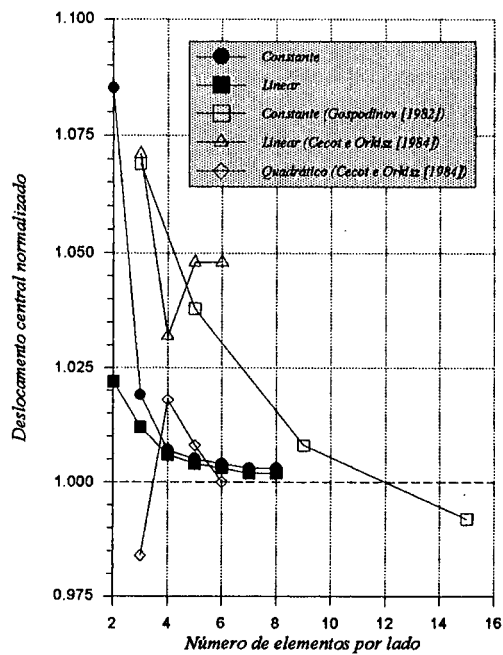


(b)

Figura 5.3 : Convergência  $h$  para placa quadrada engastada sob carregamento uniforme: (a) Elemento constante. (b) Elemento linear.

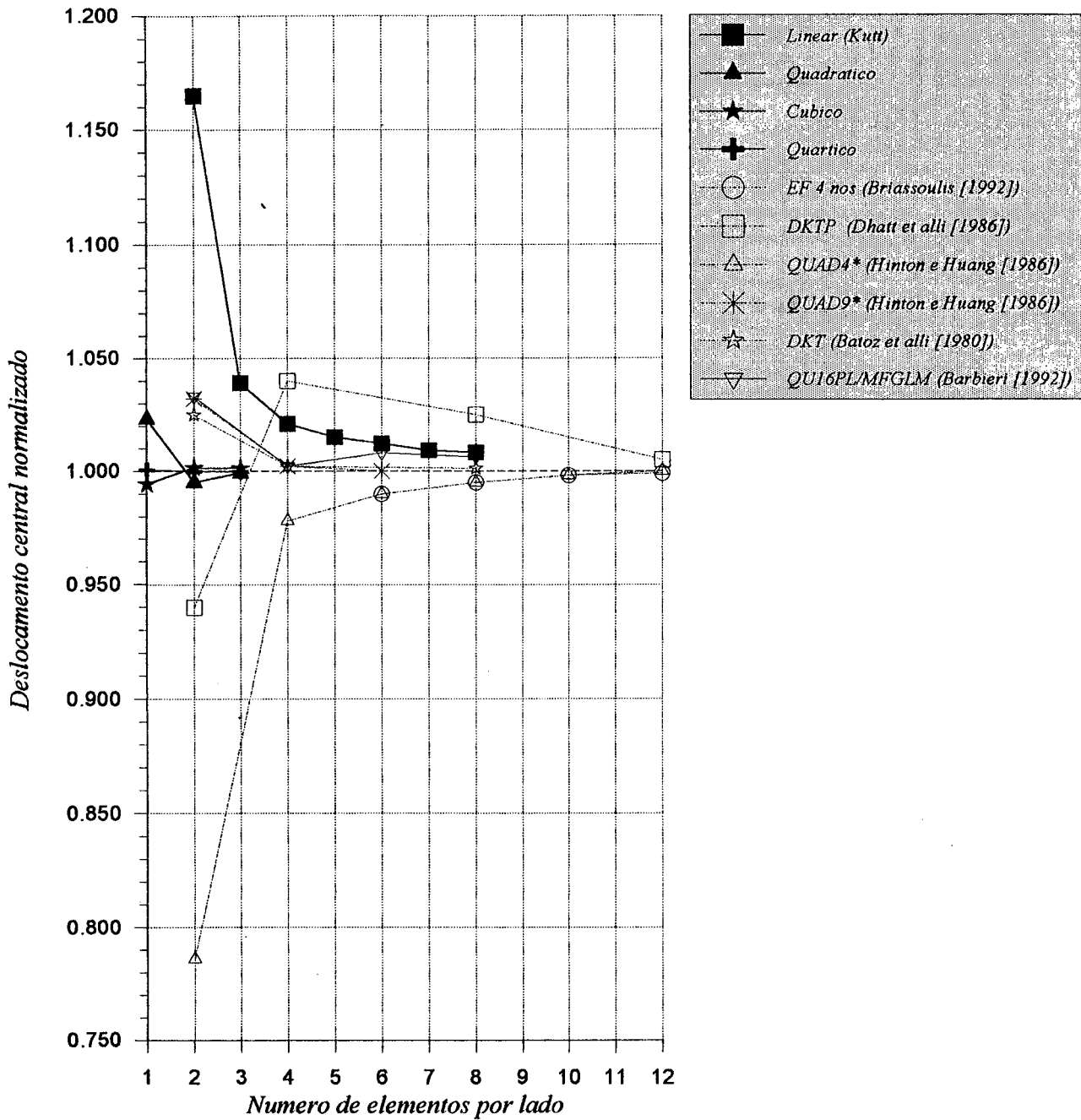


(a)

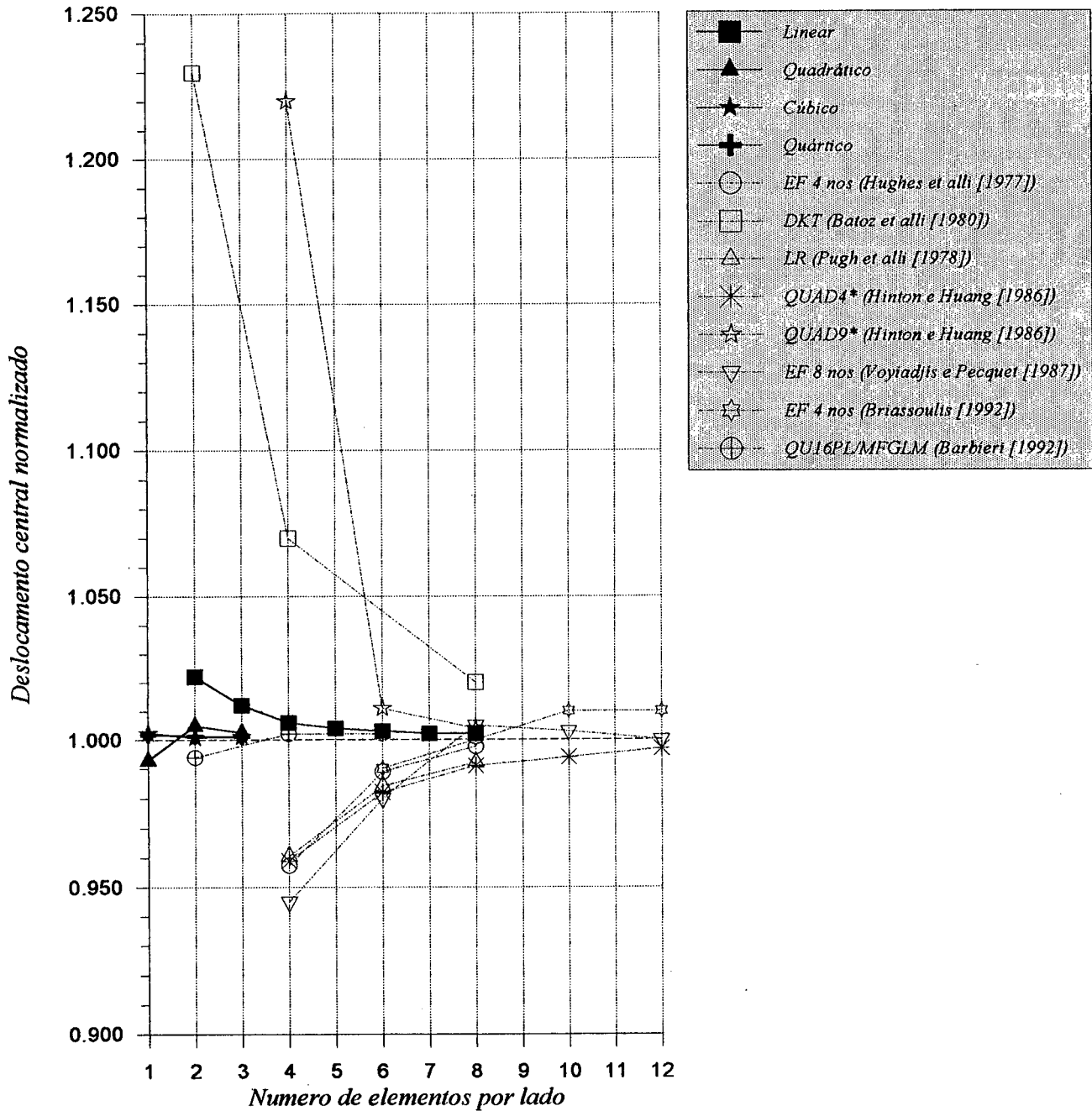


(b)

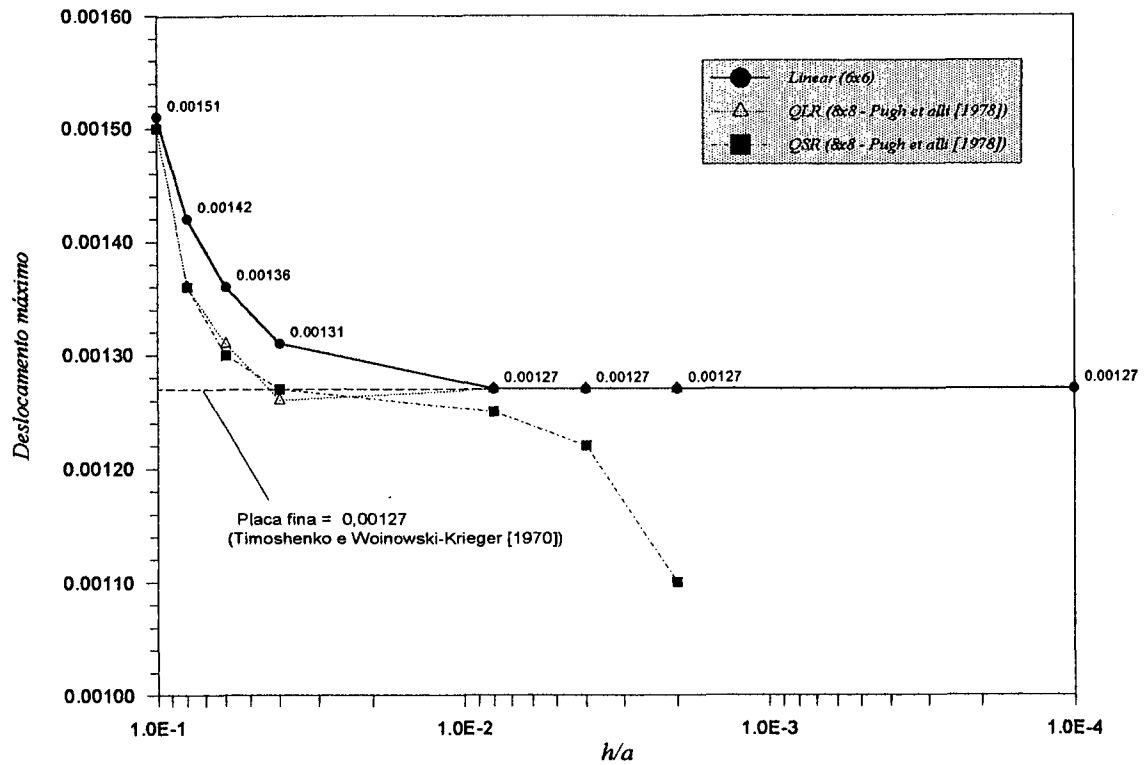
Figura 5.4 : Comparação do desempenho da presente formulação com outras formulações do MEC: (a) Placa quadrada apoiada. (b) Placa quadrada engastada.



**Figura 5.5 :** Comparação do desempenho da presente formulação com com alguns elementos finitos. Placa quadrada apoiada sob carregamento uniforme.



**Figura 5.6 :** Comparação do desempenho da presente formulação com com alguns elementos finitos. Placa quadrada engastada sob carregamento uniforme.



**Figura 5.7 :** Demonstração da ausência de *locking* em uma placa engastada sob carregamento uniforme.

Formulação	h/a				
	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
Yuan e Miller [1988]	0.01417	0.01618	0.01939	0.02371	0.02913
Deshmukh e Archer [1974]	0.01451	0.01643	-	0.02366	-
Linear (6×6)	0.01453	0.01648	0.01957	0.02378	0.02909
Quadrático (3×3)	0.01451	0.01645	0.01953	0.02373	0.02904

**Tabela 5.2 :** Resultados numéricos para placa semi-espessa engastada sob carregamento uniforme.

Formulação	h/a				
	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
Yuan e Miller [1988]	0.04650	0.05019	0.05480	0.06018	0.06683
Srinivas e Rao [1973]*	0.04677	0.05010	-	0.05912	-
Salerno e Goldberg [1968]*	0.04486	0.04632	0.04676	0.05360	0.05656
Pryor <i>et alli</i> [1970]*	0.04469	0.04612	0.04852	0.05186	0.05617
Rao <i>et alli</i> [1974]*	0.04483	0.04627	0.04866	0.05201	0.05631
Voyiadjis <i>et alli</i> [1985]*	0.04481	0.04625	-	0.05194	-
Bhashyam e Gallagher [1984]*	0.0451	0.0476	-	0.0569	-
Bergan e Wang [1984]*	-	0.04663	-	0.05296	-
Voyiadjis e Pecquet [1987]	0.0449	0.0464	-	0.0522	-
Deshmukh e Archer [1974]	0.04677	0.05009	-	0.05900	-
Craig [1987]	0.04492	0.04683	0.05183	0.05353	0.06344
Linear (6×6)	0.04535	0.04882	0.05367	0.05954	0.06631
Quadrático (3×3)	0.04578	0.04942	0.05432	0.06014	0.06684

\* (Resultados retirados de Yuan e Miller [1988]).

**Tabela 5.3 :** Resultados numéricos para placa semi-espessa apoiada sob carregamento uniforme.

### 5.2.2. Placas circulares

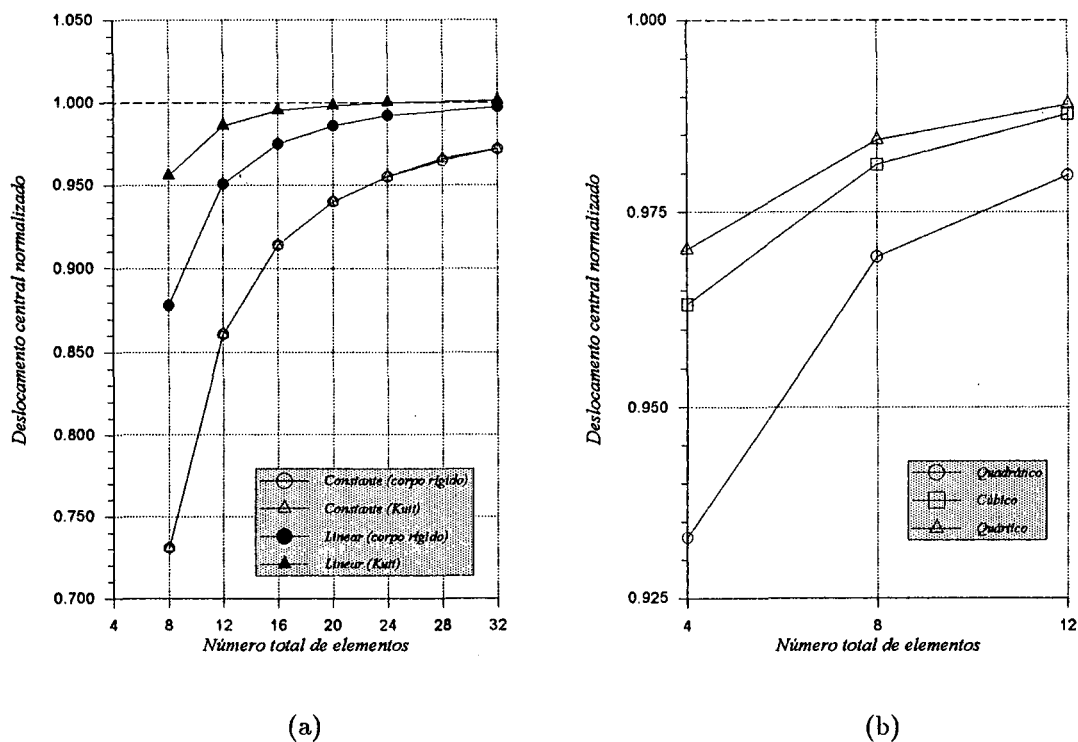
O trabalho de Westphal Jr. [1990a] explora bastante a análise de placas semi-espessas circulares engastadas, pois alguns casos possuem solução analítica fechada. Em função disso, são aqui apresentados poucos resultados, objetivando o levantamento das curvas de convergência  $h$ . Os resultados ilustrados utilizam os mesmos dados dos casos de placa quadrada, mas com o raio da placa  $R = 0.50$  e  $h/R = 0.0020$ . Os resultados são normalizados

pela solução de Reissner (Westphal Jr. [1990a]) para placas engastadas e pela solução de placas finas (Timoshenko e Woinowski-Krieger [1970]) para placas apoiadas.

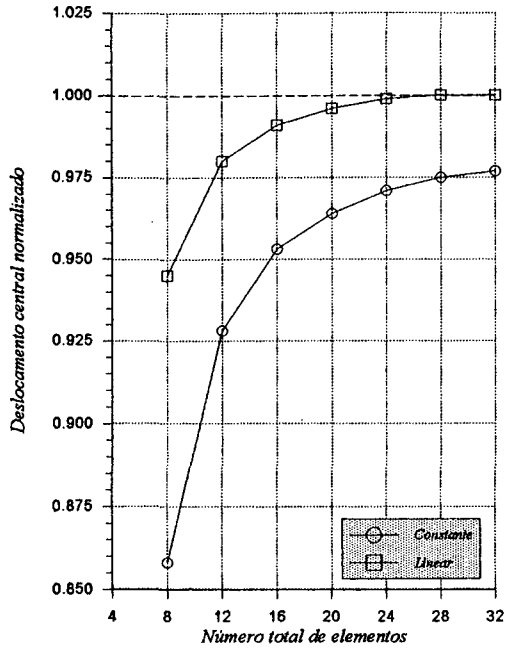
A figura 5.8 ilustra a convergência  $h$  para placas circulares apoiadas sob carregamento distribuído, para todos os elementos implementados. Note-se as boas taxas de convergência obtidas para esta geometria.

A figura 5.9.a reproduz o desempenho dos elementos de contorno constante e linear na solução de placas circulares engastadas sob carregamento concentrado unitário. A figura 5.9.b compara o elemento constante da presente formulação com o elemento constante de placa fina desenvolvido por Costa Jr. [1987], para placa circular engastada sob carregamento uniforme.

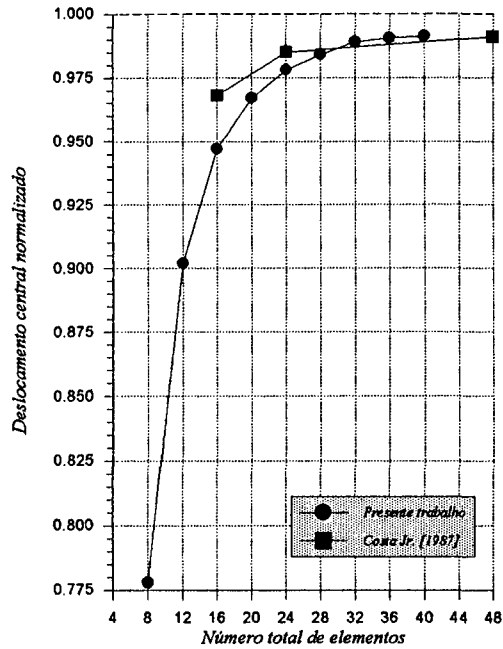
A figura 5.10 fornece uma comparação dos resultados obtidos com elementos quadráticos e quárticos para placas circulares engastadas sob carregamento uniformemente distribuído. Os resultados estão sobrepostos à solução analítica das equações de Reissner (Westphal Jr. [1990a]) para diversas espessuras.



**Figura 5.8 :** Convergência  $h$  para placa circular apoiada sob carregamento uniforme. (a) Elementos constante e linear. (b) Elementos de alta ordem.

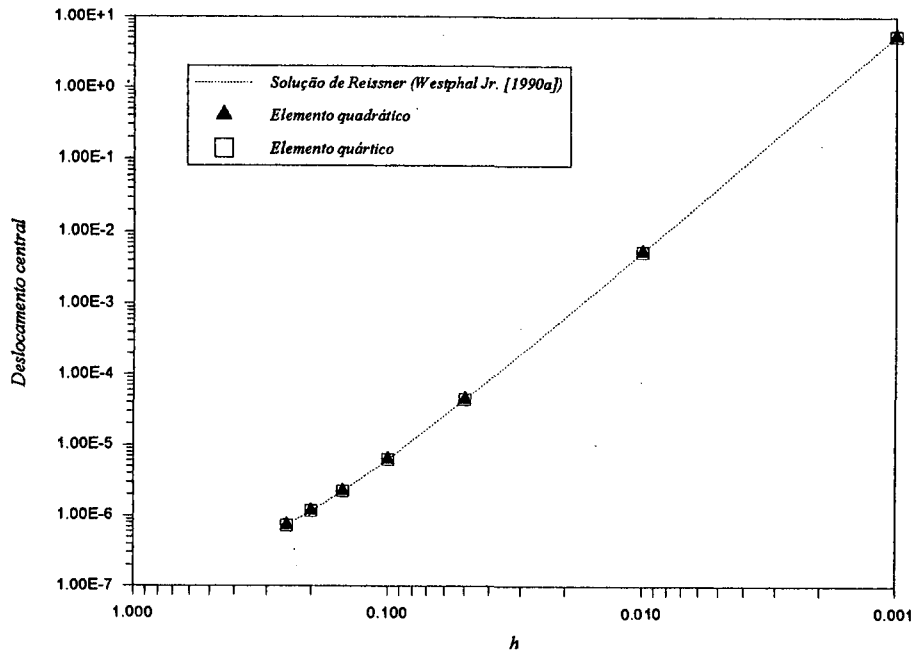


(a)



(b)

**Figura 5.9 :** Convergência  $h$  para placa circular engastada. (a) Carga concentrada unitária. (b) Carregamento transversal uniforme.

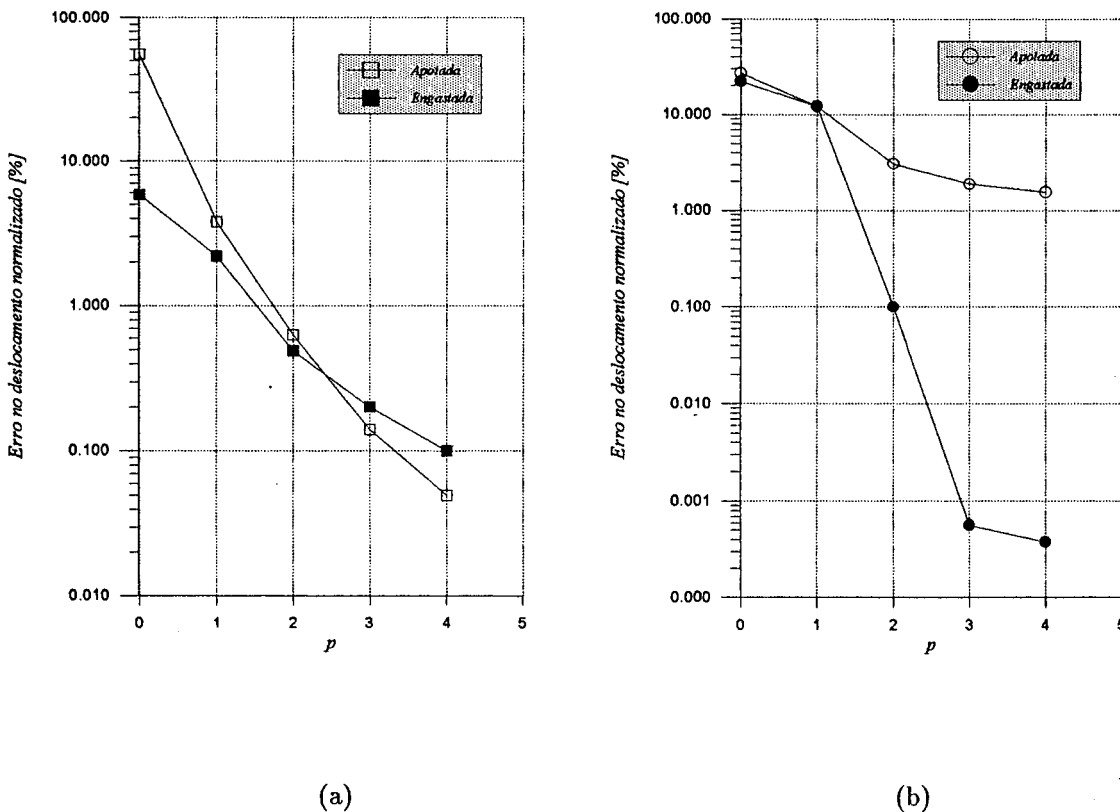


**Figura 5.10 :** Comparação dos resultados numéricos obtidos através da presente formulação com a solução das equações de Reissner.



### 5.2.3. Convergência $p$

A implementação dos elementos citados e a análise do desempenho dos mesmos é o primeiro passo para o uso de filosofias adaptativas com a presente formulação. Com os resultados apresentados em 5.2.1 e 5.2.2, foram construídas as curvas de convergência  $p$  para placas quadradas apoiadas e engastadas sob carregamento uniforme. Essas curvas estão ilustradas nas figuras 5.11.a e 5.11.b, para geometrias quadrada e circular, respectivamente, sob carregamento uniforme.



**Figura 5.11 :** Curvas de convergência  $p$  para placas sob carregamento uniforme. (a) Quadrada. (b) Circular.

Para placas quadradas foi utilizada uma malha  $2 \times 2$ , para todos os elementos. Para placas circulares os resultados correspondem a uma malha de 8 elementos de contorno sobre todo o perímetro da mesma. Assim, as curvas se referem a um total de 8 elementos de

contorno, tanto para a figura 5.11.a como para a figura 5.11.b, o que justifica os grandes erros para os elementos constante e linear, em ambos os casos. A grande disparidade entre os resultados para placas circulares (figura 5.11.b) pode ser explicada pelo fato de não haver, no caso de placa engastada, núcleos fortemente singulares, o que permite uma melhor integração dos tensores envolvidos, através dos procedimentos descritos no capítulo quatro.

Apesar das altas taxas de convergência detectadas, cabe salientar que os resultados estão apresentados a título de ilustração, pois não foi adotado qualquer critério para otimizar o número de pontos de integração necessários para o melhor desempenho de cada elemento. Efetivamente, experimentos numéricos demonstraram que os erros percentuais ilustrados nas figuras 5.11.a e 5.11.b podem ser reduzidos sensivelmente.

#### 5.2.4. Placa de Morley

Esta aplicação é comumente encontrada na literatura para análise de desempenho de elementos finitos de placa por exigir, em geral, malhas bastante refinadas para se obter bons resultados. O deslocamento máximo deste caso é geralmente expresso por um fator adimensional  $k$  dado por:

$$k = \frac{w_{max} D}{q L^4} \times 10^3 \quad , \quad (5.1)$$

onde  $q$  é o carregamento distribuído e  $L$  é o comprimento dos lados da placa (figura 5.12). O fator  $k$ , para  $\alpha = 30^\circ$ , foi obtido para três malhas diferentes de  $N$  elementos lineares, sendo o deslocamento utilizado na equação 5.1 calculado no centróide da placa, ponto  $A$  da figura 5.12. Os resultados são comparados com dois elementos finitos de bom desempenho na tabela 5.4. O erro percentual apresentado foi calculado em relação à solução analítica de placas finas (Zienkiewicz *et alli* [1993]), que fornece  $k = 0.408$ . Entretanto, a solução deste problema através das equações da elasticidade tridimensional fornece  $k = 0.423$  (Babška e Scapolla [1989]<sup>†</sup>), o que corrobora ainda mais os resultados obtidos.

Deve ser destacada a boa performance da presente formulação, mesmo utilizando malhas grosseiras de elementos lineares. Note-se adicionalmente que o elemento Q4BL necessita de quase 300 elementos para se aproximar satisfatoriamente da solução tridimensional.

<sup>†</sup> Retirado de Zienkiewicz *et alli* [1993].

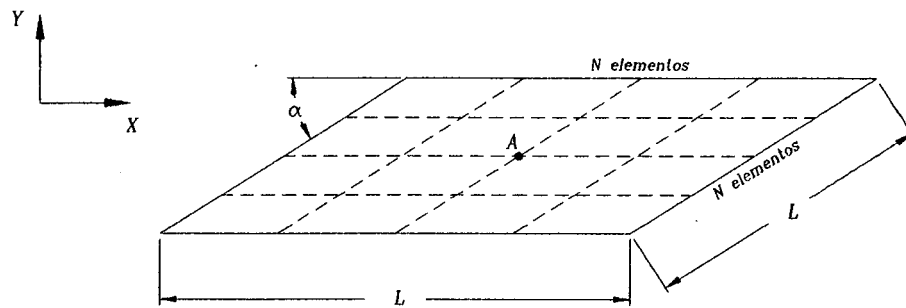


Figura 5.12 : Placa de Morley (placa rômbrica).

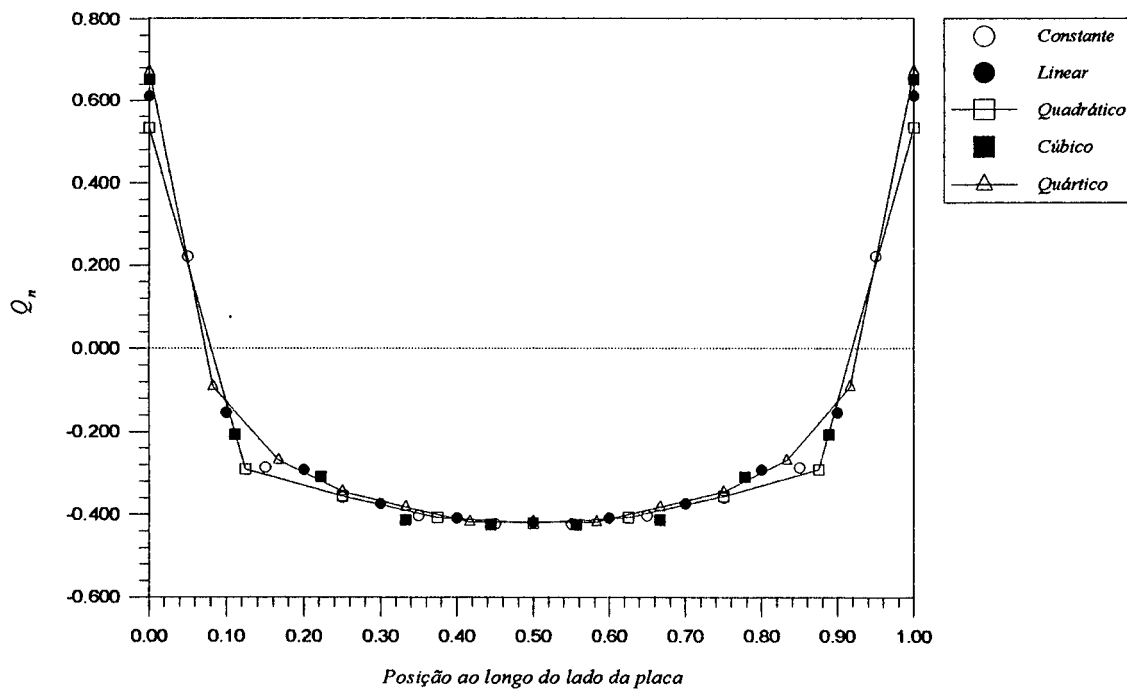
Malha	QUAD9*	Erro %	Q4BL	Erro %	Linear	Erro %
4x4	0.381	-6.62	0.511922	25.5	0.4270	4.66
5x5	-	-	-	-	0.4261	4.44
6x6	0.361	-11.5	-	-	0.4253	4.24
8x8	-	-	0.438756	7.54	-	-
16x16	0.370	-9.31	0.428818	5.10	-	-
32x32	-	-	0.423520	3.80	-	-

Tabela 5.4 : Resultados para placa de Morley,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $L = 1.0$  com  $L/h = 1000$ . Elemento QUAD9\* (Hinton e Huang [1986]): elemento de 9 nós com campo de deformação substituto. Elemento Q4BL (Zienkiewicz *et alli* [1993]): elemento de 4 nós com interpolação especial para o deslocamento transversal.

### 5.2.5. Esforços

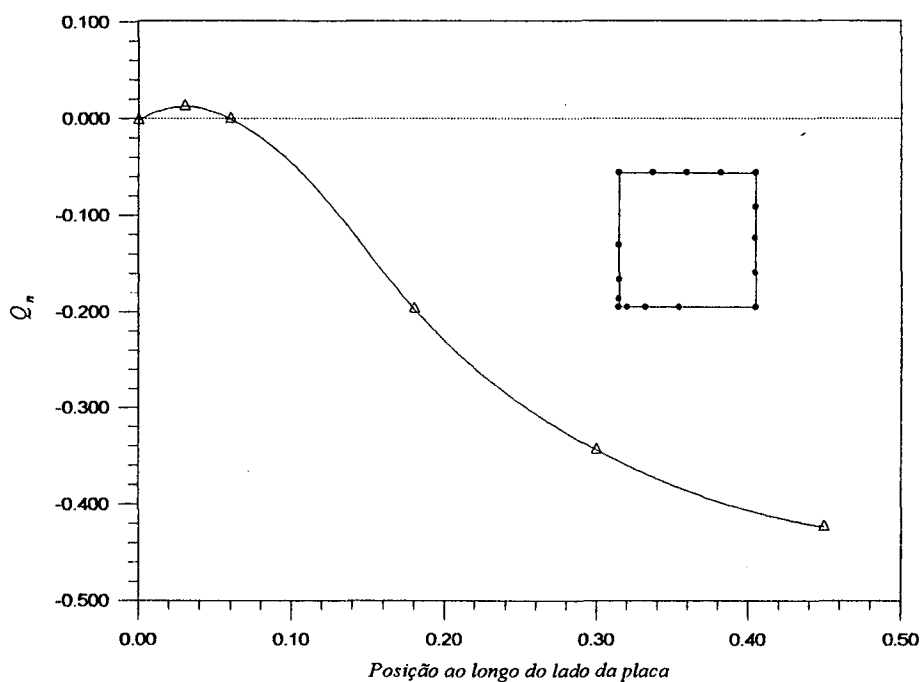
Como já citado, serão aqui apresentados apenas alguns resultados para esforços, com o objetivo principal de destacar certos aspectos relacionados ao cálculo numérico de tensões resultantes. Comparações mais detalhadas podem ser encontradas em Westphal Jr. [1990a].

Para placas quadradas apoiadas sob carregamento uniforme, a teoria clássica de placas finas (Timoshenko e Woinowski-Krieger [1970]) leva a reações concentradas nos vértices, para garantir o equilíbrio da placa. Nos modelos aqui empregados não ocorre a contração de duas condições de contorno, e portanto o esforço cortante que atua no contorno da placa equilibra completamente o carregamento aplicado. É possível, portanto, verificar a oscilação que o esforço cortante sofre na vizinhança de um vértice, à medida que a espessura da placa diminui. Esta oscilação está representada graficamente na figura 5.13, que ilustra o comportamento de  $Q_n$  ao longo de um lado de uma placa quadrada, para todos os elementos implementados. A figura 5.14 ilustra o comportamento do esforço cortante ao longo de um lado de uma placa quadrada engastada, mostrando a oscilação característica de  $Q_n$  para esta condição de contorno. Neste caso, foram utilizados 16 elementos quadráticos dispostos como esquematizado na figura, a fim de captar tal efeito.



**Figura 5.13 :** Esforço cortante ao longo de um lado de uma placa quadrada apoiada uniformemente carregada ( $h = 0.05$ ). As malhas utilizadas foram  $40 \times 40$ ,  $32 \times 32$ ,  $20 \times 20$ ,  $12 \times 12$  e  $12 \times 12$  para os elementos constante, linear, quadrático, cúbico e quártico, respectivamente.

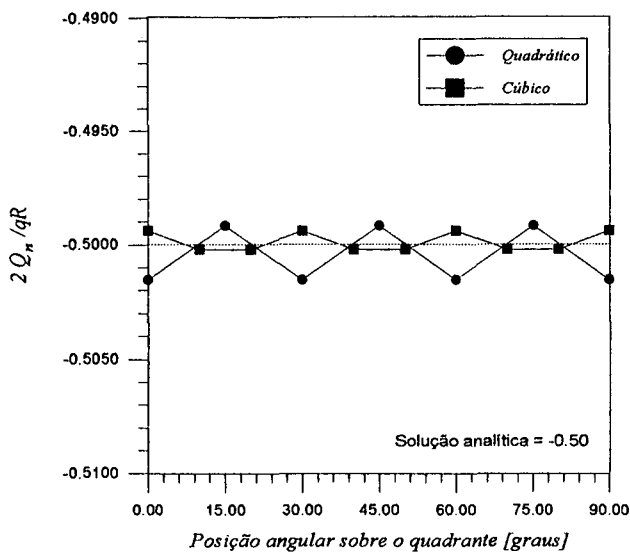
Um outro aspecto numérico que pode ser ressaltado diz respeito aos casos em que os esforços são constantes sobre todo o contorno ou uma parte dele. Nestes casos, os elementos



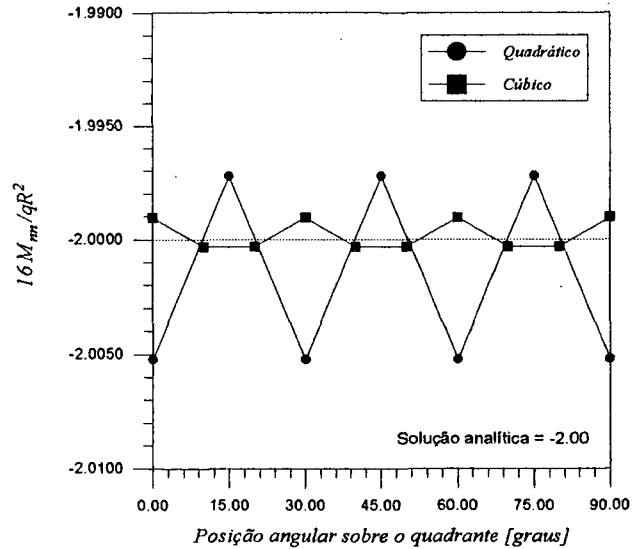
**Figura 5.14 :** Esforço cortante ao longo de um lado de uma placa quadrada engastada uniformemente carregada ( $h = 0.05$ ).

interpolados por funções de segundo grau ou de ordem mais alta não fornecem resultados numéricos iguais para todos os nós do elemento. A fim de ilustrar isto, foram analisadas placas circulares engastadas sob carregamento uniforme, utilizando os elementos quadrático e cúbico, com 12 elementos de contorno. Os resultados estão mostrados nas figuras 5.15. A figura 5.15.a ilustra o comportamento do esforço cortante sobre um quadrante do contorno na placa, normalizado da forma  $2Q_n/qR$ . Note-se que o nó central do elemento quadrático não fornece o mesmo valor que os nós da extremidade do elemento, o mesmo ocorrendo com o segundo e terceiro nós do elemento cúbico. A magnitude da oscilação em torno da solução analítica é, entretanto, bastante pequena. A figura 5.15.b mostra que o mesmo ocorre com os momentos, mostrados na forma normalizada  $16M_{nn}/qR^2$ . Deve-se salientar

que a magnitude de tal oscilação diminui à medida que a ordem do elemento é aumentada, para todos os esforços.



(a)



(b)

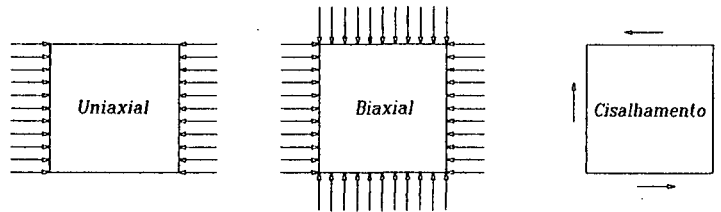
**Figura 5.15 :** Oscilação dos esforços ao longo do contorno de uma placa circular engastada sob carregamento uniforme ( $h = 0.05$ ). (a) Esforço cortante. (b) Momento fletor.

### 5.3. Aplicações a problemas de flambagem

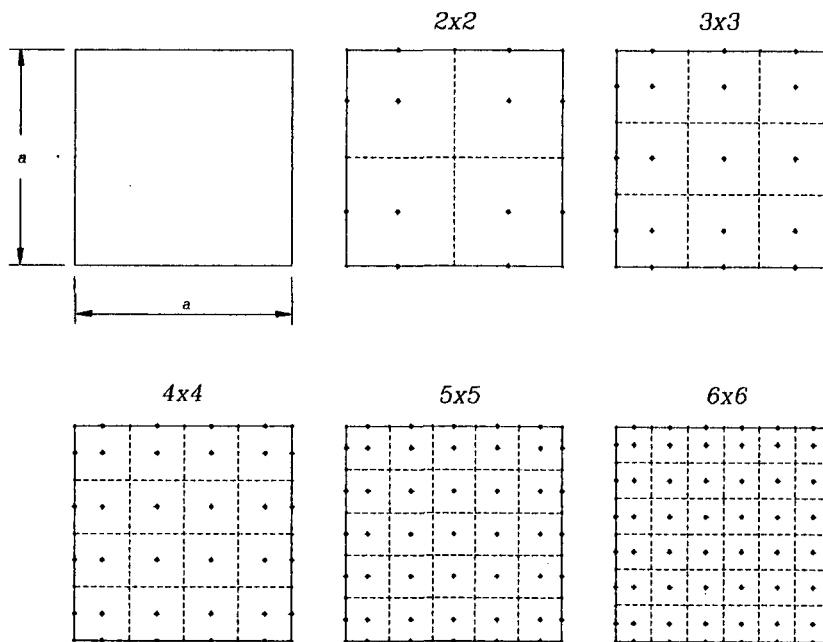
Por se tratar de uma das primeiras formulações do MEC para flambagem de placas semi-espessas, os resultados apresentados a seguir foram obtidos, por simplicidade, através da utilização de elementos de contorno e células de domínio constantes, a fim de validar a formulação. A menos que especificado, as propriedades do material são as mesmas dos problemas de flexão linear elástica e os elementos de contorno foram integrados com dez pontos de integração enquanto as células de domínio foram integradas com oito pontos em cada direção.

### 5.3.1. Flambagem de placas quadradas

Foram analisados alguns casos típicos, para razão  $h/a = 0.010$ . Os carregamentos de membrana são os representados na figura 5.16, e as malhas utilizadas variam de dois a oito elementos por lado inteiro da placa. A figura 5.17 ilustra algumas das malhas utilizadas.



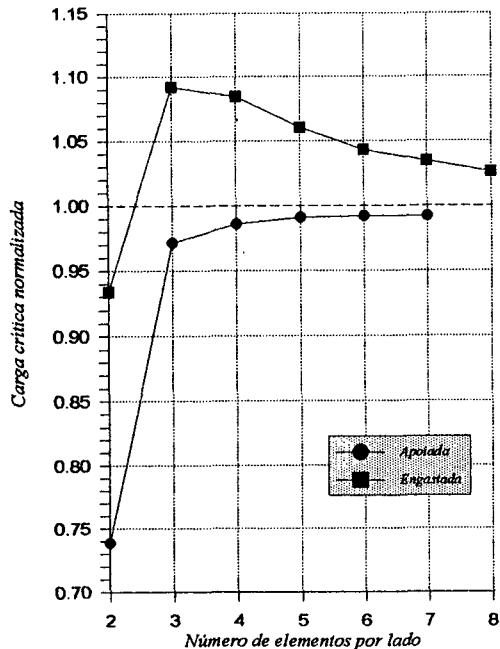
**Figura 5.16 :** Tipos de carregamento considerados: Uniaxial:  $N_{xx} = 1$ ,  $N_{yy} = 0$ ,  $N_{xy} = 0$ . Biaxial:  $N_{xx} = 1$ ,  $N_{yy} = 1$ ,  $N_{xy} = 0$ . Cisalhamento:  $N_{xx} = 0$ ,  $N_{yy} = 0$ ,  $N_{xy} = 1$ .



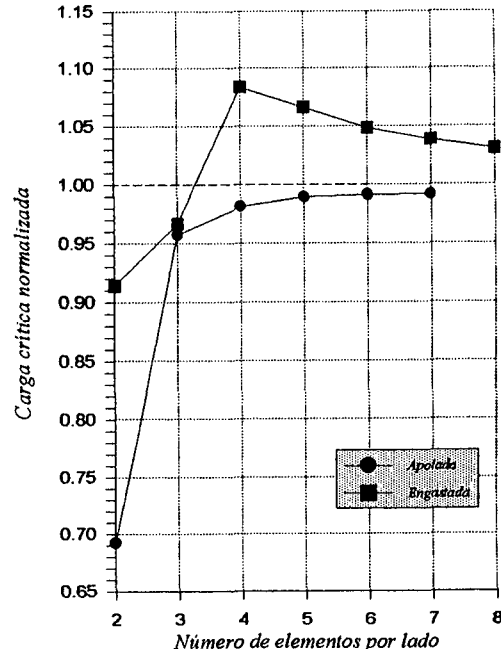
**Figura 5.17 :** Discretizações utilizadas para análise de estabilidade.

Inicialmente, são apresentados os resultados para convergência  $h$  da presente formulação aplicada aos problemas de flambagem, normalizando a carga crítica com as soluções de placa fina encontradas em Brush e Almroth [1975] e Timoshenko e Gere [1961].

Na figura 5.18.a está ilustrada a curva de convergência para placas quadradas sob compressão uniaxial. Os resultados para compressão biaxial estão mostrados na figura 5.18.b. Para placas submetidas a cisalhamento, os resultados são os ilustrados na figura 5.19. Destas figuras é possível verificar que, se por um lado as curvas apresentam boas taxas de convergência até a malha  $6 \times 6$ , verifica-se que a partir daí a diminuição do erro é muito lenta. Este fato é explicado por dois motivos: em primeiro lugar, lembre-se a própria deficiência do elemento constante na representação de um campo real de deslocamentos ou esforços. Em segundo lugar, malhas muito refinadas implicam em pontos de colocação do domínio muito próximos do contorno da placa, o que pode tornar imprecisas as integrações dos tensores (como o que ocorreria se fossem calculados deslocamentos ou esforços em pontos internos muito próximos do contorno).



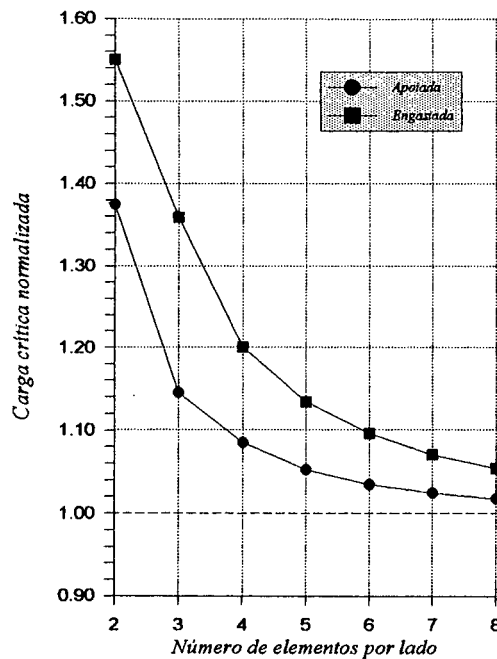
(a)



(b)

**Figura 5.18 :** Convergência  $h$  para placas quadradas sob (a) compressão uniaxial e (b) compressão biaxial.





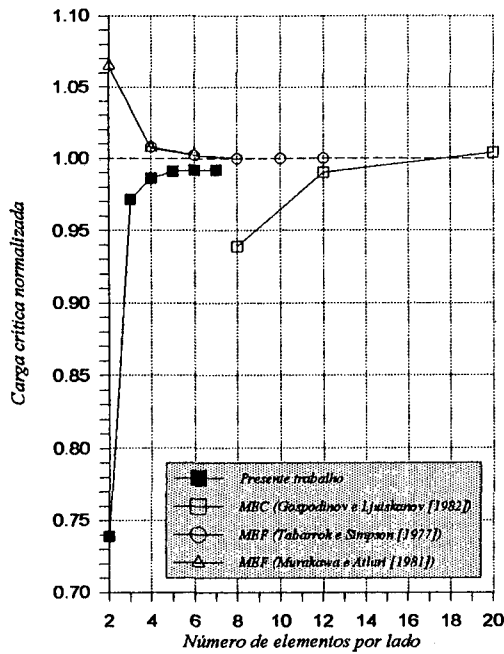
**Figura 5.19 :** Convergência  $h$  para placas quadradas sob cisalhamento.

Uma comparação dos resultados da presente formulação com outras soluções do MEC e com alguns elementos finitos especialmente desenvolvidos para problemas de flambagem é apresentada nas figuras 5.20 e 5.21. Observe-se que, apesar das deficiências inerentes ao elemento constante, ainda assim os resultados são superiores a algumas das formulações comparadas. Em especial, deve-se ressaltar o bom desempenho da formulação proposta na solução de problemas de flambagem de placas sob cisalhamento (figura 5.21.b), caso que geralmente não pode ser resolvido com elementos de integração reduzida ou seletiva (Cheung *et alii* [1986]), que constituem a grande maioria dos elementos finitos para placas semi-espessas.

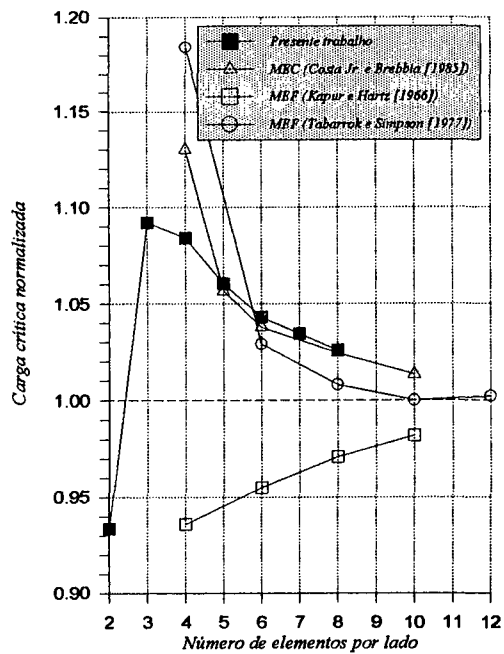
As tabelas 5.6 e 5.7 comparam os resultados obtidos com a malha  $6 \times 6$  e outras soluções de placa fina, para placas quadradas apoiadas e engastadas, respectivamente. Os resultados estão normalizados na forma:

$$\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{D} \quad (5.2)$$

O bom desempenho da formulação proposta é observado nestes casos em que  $h \ll a$ , se aproximando satisfatoriamente da solução clássica de placas finas (Timoshenko e Gere [1961]).

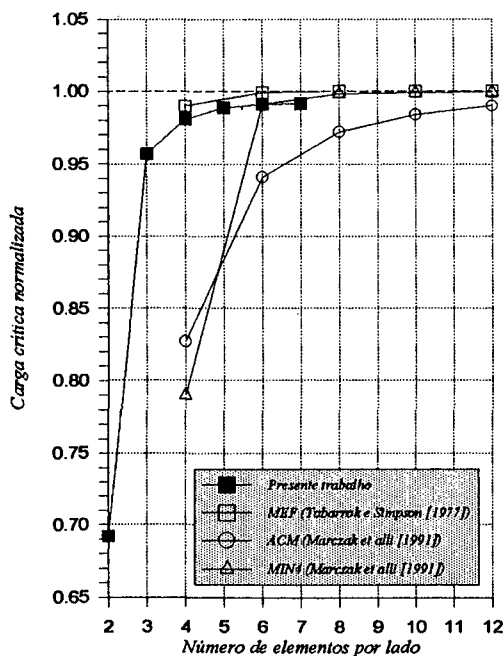


(a)

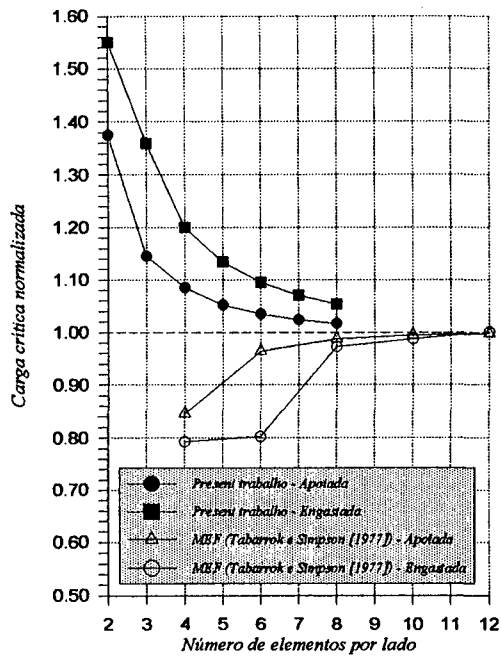


(b)

Figura 5.20 : Desempenho de algumas formulações para placas quadradas sob compressão biaxial. (a) Placa apoiada. (b) Placa engastada.



(a)



(b)

Figura 5.21 : Desempenho de algumas formulações para placas quadradas. (a) Placa apoiada sob compressão biaxial. (b) Placa sob cisalhamento.

Formulação	Carregamento		
	Uniaxial	Biaxial	Cisalhamento
Presente 6×6	39.1537	19.5959	95.2333
Placa fina (Timoshenko e Gere [1961])	39.478	19.739	92.182
Tabarrok e Simpson [1977]	39.481	19.743	91.000
Kapur e Hartz [1966]*	37.208	-	-
Dawe [1969]*	39.261	19.631	93.573
Carson e Newton [1969]*	39.488	-	92.951
Allman [1971]*	39.784	19.897	99.989
MEF 9LE (8×8 - Cheung <i>et alli</i> [1986])	40.465	19.739	101.074
MEF 36LE (2×2 - Cheung <i>et alli</i> [1986])	39.458	19.739	96.732
MEF ACM (8×8 - Marczak <i>et alli</i> [1991])	37.1492	-	88.0467
MEF STIF63 (8×8 - Ansys [1989])	38.3039	-	98.9230

\* (Resultados retirados de Tabarrok e Simpson [1977]).

**Tabela 5.6:** Resultados numéricos para placa quadrada apoiada.

Formulação	Carregamento		
	Uniaxial	Biaxial	Cisalhamento
Presente 6×6	104.5208	55.1296	159.3173
Placa fina (Timoshenko e Gere [1961])	99.387	52.605	145.182
Tabarrok e Simpson [1977]	99.090	52.605	141.220
Kapur e Hartz [1966]*	91.629	49.101	-
Carson e Newton [1969]*	-	52.575	148.468
Allman [1971]*	108.467	55.289	171.553
MEF ACM (8×8 - Marczak <i>et alli</i> [1991])	-	-	135.31

\* (Resultados retirados de Tabarrok e Simpson [1977]).

**Tabela 5.7:** Resultados numéricos para placa quadrada engastada.

A influência da espessura sobre o valor das cargas críticas é examinada nas tabelas 5.8 a 5.11, para os três casos de carregamento analisados. Estas tabelas apresentam o valor do coeficiente

$$k = \frac{N_{cr} a}{\pi^2 D} \quad , \quad (5.3)$$

calculados com a formulação proposta e estes valores são comparados com alguns resultados obtidos na bibliografia. Foi utilizada a malha  $6 \times 6$ .

Formulação	$h/a$				
	0.001	0.010	0.050	0.100	0.200
Presente ( $6 \times 6$ )	3.9671	3.9646	3.8977	3.7694	3.5766
Elasticidade Tridimensional*	4.000	-	3.911	3.741	3.150
Rayleigh-Ritz*	4.000	-	3.929	3.731	3.125
Finite Strip*	4.000	-	3.929	3.731	3.126
MEF 9LE ( $8 \times 8$ - Cheung <i>et alli</i> [1986])	-	4.100	-	3.758	-
MEF 36LE ( $2 \times 2$ - Cheung <i>et alli</i> [1986])	-	3.998	-	3.732	-

\* (Resultados retirados de Dawe e Roufaeil [1982]).

**Tabela 5.8:** Coeficiente  $k$  para placas quadradas apoiadas sob compressão uniaxial.

Formulação	$h/a$	
	0.010	0.100
Presente ( $6 \times 6$ )	1.9841	1.8818
MEF 8SE ( $8 \times 8$ - Cheung <i>et alli</i> [1986])	2.030	1.880
MEF 17SE ( $3 \times 3$ - Cheung <i>et alli</i> [1986])	2.000	1.870

**Tabela 5.9:** Coeficiente  $k$  para placas quadradas apoiadas sob compressão biaxial.

Formulação	$h/a$			
	0.010	0.050	0.100	0.200
Presente (6×6)	10.5690	10.4290	10.0194	8.3339
Rayleigh-Ritz (Dawe e Roufaeil [1982])	10.080	9.515	8.084	5.002
Finite Strip (Dawe e Roufaeil [1982])	10.076	-	8.043	-

**Tabela 5.10:** Coeficiente  $k$  para placas quadradas engastada sob compressão uniaxial.

Formulação	$h/a$	
	0.010	0.100
Presente (6×6)	5.5799	5.5138
Rayleigh-Ritz (Dawe e Roufaeil [1982])	5.539	4.456
Finite Strip (Dawe e Roufaeil [1982])	5.297	4.420

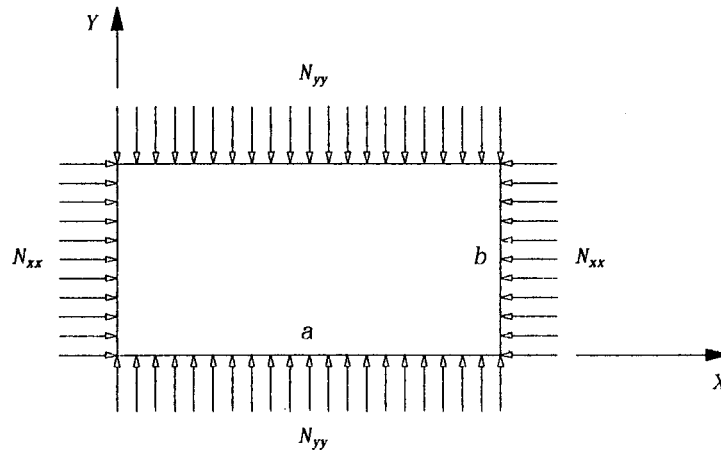
**Tabela 5.11:** Coeficiente  $k$  para placas quadradas engastada sob compressão biaxial.

Das tabelas 5.8 a 5.11, percebe-se que a formulação proposta começa a divergir das outras soluções a partir de razões  $h/a = 0.10$ . Para justificar este comportamento, deve-se citar dois aspectos. Primeiro, quando da utilização do elemento constante, a malha 6×6 não é muito adequada para solução de placas semi-espessas. Relembre-se que os tensores fundamentais são função de  $z = \lambda r$ , sendo  $\lambda = 10k^2/h^2$ . Então um aumento da espessura diminui  $z$ , tornando a integração dos tensores envolvidos mais difícil. Isto torna-se mais acentuado quando o problema envolve algum tipo de não-linearidade, como é o caso. Segundo, um refino maior da malha não solucionaria o problema porque originaria pontos de colocação muito próximos do contorno. Neste caso, a natureza hipersingular da formulação exigiria procedimentos especiais para integração de elementos quase singulares.

### 5.3.2. Placas retangulares

Três casos de placas retangulares são aqui apresentados, com o objetivo de verificar o desempenho da formulação para esta geometria, bem como analisar a precisão dos autovalores correspondentes a modos de flambagem mais altos.

O primeiro caso trata de uma placa apoiada, com razão entre os lados  $a/b = 2.0$  (figura 5.22). Foram utilizados oito pontos de integração para os elementos de contorno e seis pontos de integração em cada direção para as células de domínio. A espessura utilizada foi  $h = 0.030$ .



**Figura 5.22 :** Geometria de uma placa retangular.

A solução analítica, retirada de Brush e Almroth [1975], é dada por um fator  $k$  segundo a equação:

$$N_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b} \quad , \quad (5.4)$$

onde

$$k = \frac{\left[ (mb/a)^2 + n^2 \right]^2}{(mb/a)^2 + Rn^2} \quad , \quad (5.5)$$

para compressão biaxial, sendo  $R = N_{yy}/N_{xx}$ .  $m$  e  $n$  são o número de meios comprimentos de onda nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Para compressão uniaxial, tem-se (Brush e Almroth [1975]):

$$k = \left( \frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (5.6)$$

Os resultados obtidos estão mostrados nas tabelas 5.12 e 5.13 , para compressão biaxial e uniaxial, respectivamente. São comparadas três malhas, para o cálculo das primeiras cargas de flambagem. O erro percentual é obtido em relação à solução dada pela equação (5.4) . As malhas anotadas referem-se a  $n_x \times n_y$  elementos.

$m \times n$	Malha						
	12×5	Erro %	15×5	Erro %	16×4	Erro %	Analítico
1×1	61.174	-4.50	61.270	-4.35	61.875	-3.41	64.057
2×1	97.373	-4.99	97.416	-4.95	98.325	-4.07	102.492
3×1	160.96	-3.36	160.25	-3.78	161.67	-2.93	166.550
1×2	219.81	0.92	219.97	1.00	224.96	-3.29	217.796

**Tabela 5.12 :** Resultados obtidos para os primeiros autovalores de uma placa retangular apoiada comprimida biaxialmente:  $a/b = 2.0$ ,  $a = 2.00$ ,  $h = 0.03$ .

$m \times n$	Malha						
	12×5	Erro %	15×5	Erro %	16×4	Erro %	Analítico
1×1	194.50	-0.37	194.82	0.99	196.63	0.77	195.223
2×1	231.38	-0.20	230.64	0.67	232.69	0.73	229.116
3×1	307.40	0.72	307.28	1.56	311.17	2.01	305.036

**Tabela 5.13 :** Resultados obtidos para os primeiros autovalores de uma placa retangular apoiada comprimida uniaxialmente:  $a/b = 2.0$ ,  $a = 2.00$ ,  $h = 0.03$ .

Deve ser salientado que não ocorre um aumento sistemático do erro dos autovalores, à medida que o modo de flambagem é incrementado, característica marcante na grande maioria dos elementos finitos utilizados em análise modal.

O segundo caso analisado trata de uma placa retangular apoiada sob compressão biaxial, razão  $a/b = 3.0$ ,  $h = 0.01$ . Foi utilizada uma malha  $15 \times 4$  para cálculo dos coeficientes  $k$  da equação (5.4) correspondentes aos primeiros modos de flambagem. Estes resultados estão mostrados na tabela 5.14 e comparados com a solução analítica (Brush e Almroth [1975]). Note-se que, para  $n = 2$ , os erros se tornam maiores devido ao fato da malha utilizada não representar corretamente dois meios comprimentos de onda na direção  $y$ .

$m$	$n$	Analítico	Calculado	Erro %
1	1	1.111111	1.1320	1.880
2	1	1.444444	1.4592	1.021
3	1	2.000000	2.0278	1.390
4	1	2.777778	2.8425	2.330
1	2	4.111111	3.9211	-4.622
2	2	4.444444	4.4430	0.032
3	2	5.000000	4.7950	-4.100
4	2	5.777778	5.2661	-8.850

**Tabela 5.14:** Resultados obtidos para os primeiros coeficientes  $k$  de uma placa retangular apoiada comprimida biaxialmente:  $a/b = 3.0$ ,  $a = 3.00$ ,  $h = 0.01$ .

A terceira aplicação para placas retangulares procurou reproduzir um caso de salto de modo (Marczak *et alli* [1991]). Trata-se de uma placa com razão de aspecto  $a/b = 5.916$ ,  $b = 1.000$ , apoiada em  $y = 0, b$  e engastada em  $x = 0, a$ , sob compressão uniaxial paralela ao eixo  $x$ . Teoricamente, os dois menores autovalores são iguais, mas correspondem a 5 e 6 meios comprimentos de onda na direção  $x$ . Utilizando uma malha  $16 \times 3$  e  $h = 0.03$  obteve-se, através da presente formulação,  $N_{xx}^1 = 208.235$  e  $N_{xx}^2 = 208.526$ , o que indica



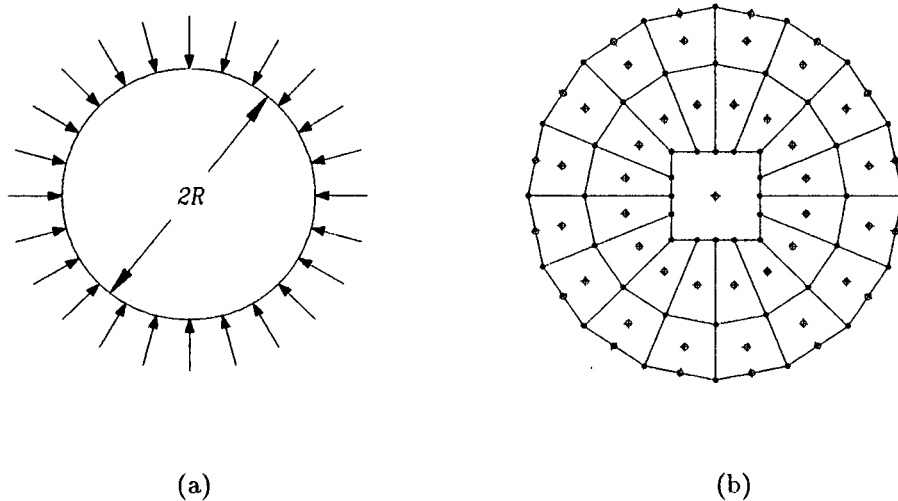
uma diferença de 0.14% entre estes dois valores. O erro em relação à solução analítica,  $N_{xx} = 212.671$ , está em torno de 2%. Esta aplicação demonstra boa confiabilidade da formulação na solução de problemas de flambagem com autovalores duplos.

### 5.3.3. Flambagem de placas circulares e triangulares

A fim de validar a formulação para placas de geometrias diversas, foram analisadas ainda placas circulares e triangulares. No caso de placa circular, foi analisada uma placa simplesmente apoiada em todo o seu perímetro e submetida a compressão radial (figura 5.23.a). A geometria da placa é dada por um raio  $R = 0.5$  e uma relação  $h/2R = 0.001$ . A carga radial uniforme que provoca a flambagem é calculada pela equação (Brush e Almroth [1975]) :

$$N_{cr} = k \frac{D}{R^2} , \quad (5.7)$$

onde  $k = 4.20$  para o primeiro modo. Utilizando oito pontos de integração para os elementos de contorno e seis pontos em cada direção para as células de domínio, a malha ilustrada na figura 5.23.b forneceu  $k = 4.49$ , que indica um erro de aproximadamente 6.9%.

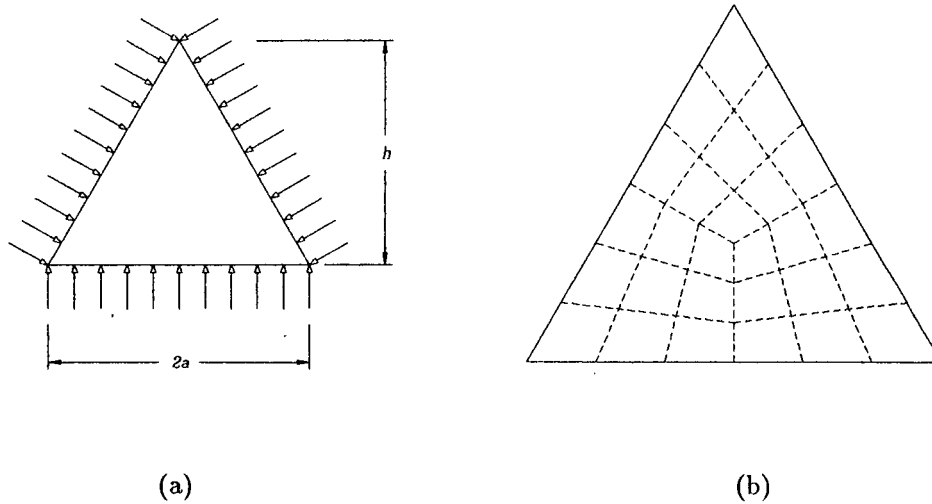


**Figura 5.23 :** Placa circular apoiada. (a) Geometria. (b) Discretização utilizada.

O caso de placa triangular analisado está ilustrado na figura 5.24.a, tendo todos os lados o mesmo comprimento  $2a = 10.0$  e  $h/2a = 5.0 \times 10^{-3}$ . A solução analítica deste caso, com todos os lados simplesmente apoiados, é geralmente escrita (Tan *et alli* [1983]):

$$N_{cr} = \frac{3kD}{a^2} \quad , \quad (5.5)$$

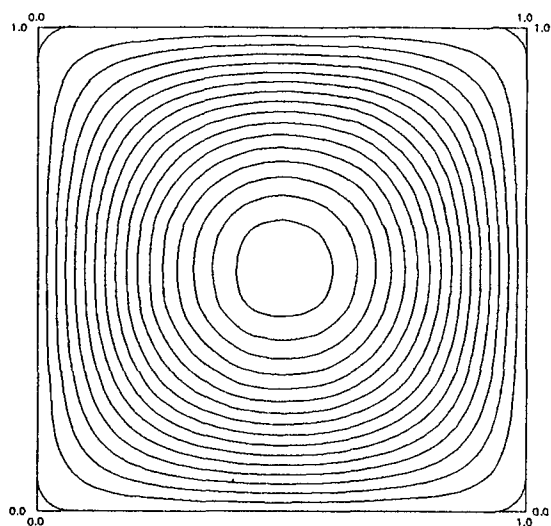
onde  $k = 4.393$ , para a menor carga de flambagem. A presente formulação forneceu, com a malha mostrada na figura 5.24.b,  $k = 4.450$ , que representa um erro de 1.3%. Foi utilizado o mesmo número de pontos de integração da placa circular descrita acima. Por se tratar de uma discretização grosseira, este erro pode ser considerado satisfatório, tendo em vista a utilização do elemento constante.



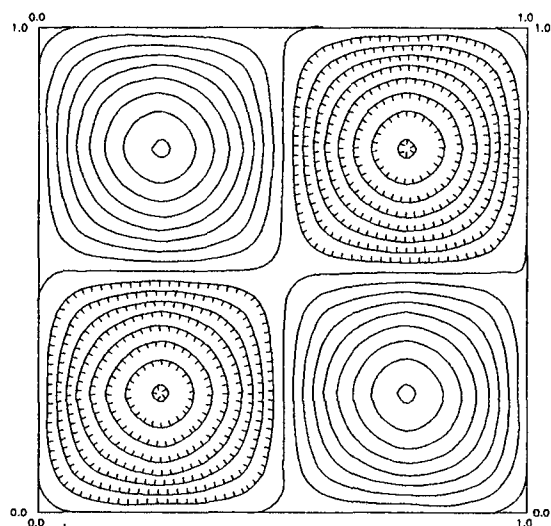
**Figura 5.24 :** Placa triangular apoiada. (a) Geometria. (b) Discretização utilizada.

#### 5.3.4. Autovetores

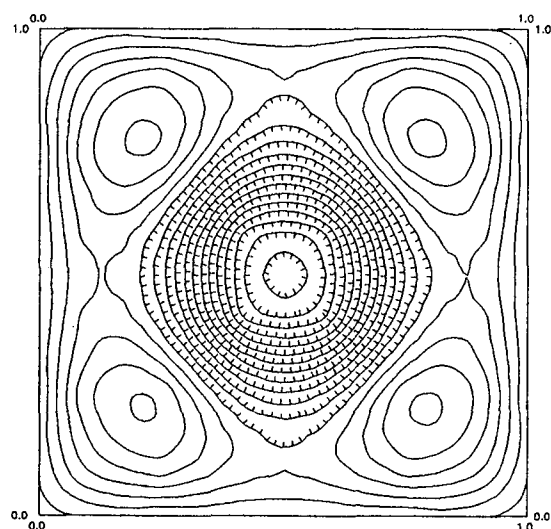
A qualidade dos autovetores obtidos com a formulação proposta é muito boa. Para ilustrar isto, são apresentados alguns autovetores nas figuras 5.25 a 5.27 (as malhas ilustradas foram utilizadas apenas para interpolar os deslocamentos, não tendo nenhuma relação com a discretização utilizada).



(a) 1º modo (malha 6 × 6)

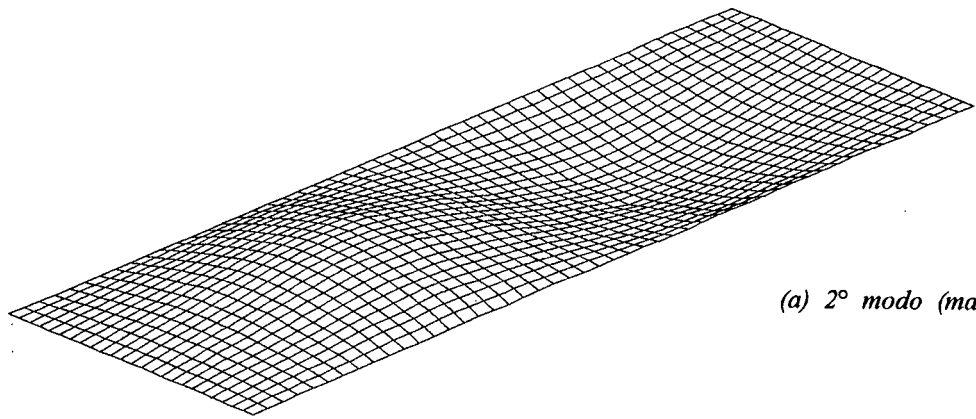


(b) 2º modo (malha 6 × 6)

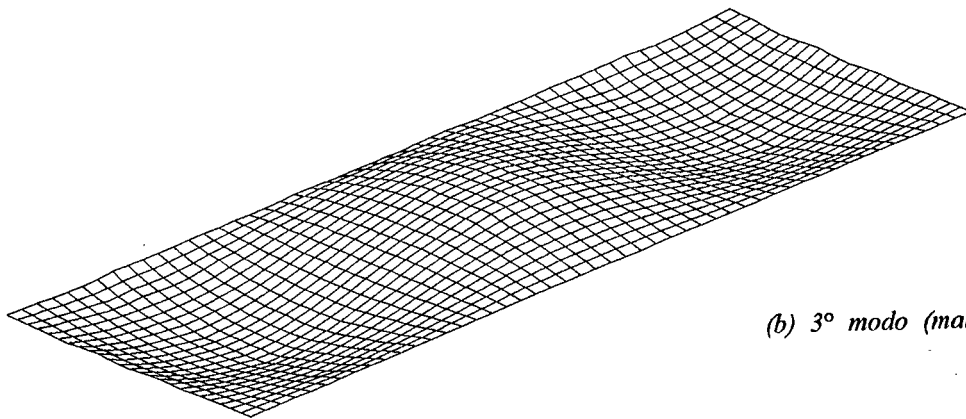


(c) 3º modo (malha 6 × 6)

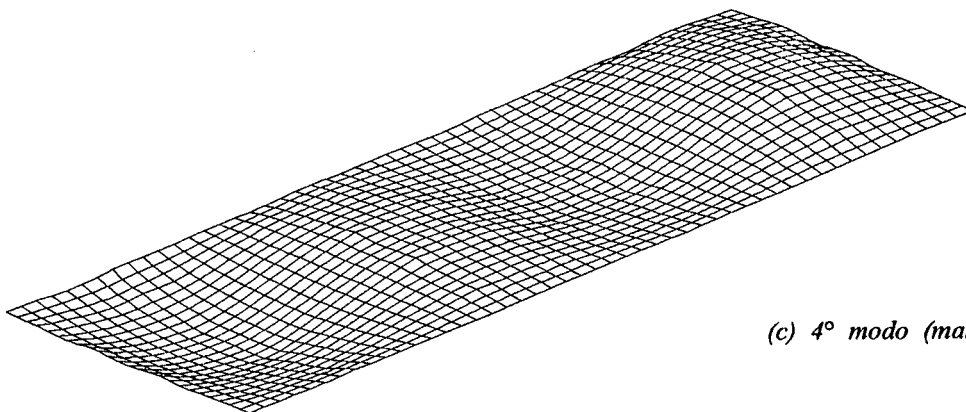
**Figura 5.25 :** Os três primeiros modos de flambagem de uma placa quadrada comprimida biaxialmente ( $h = 0.01$ ).



(a) 2º modo (malha  $12 \times 4$ )

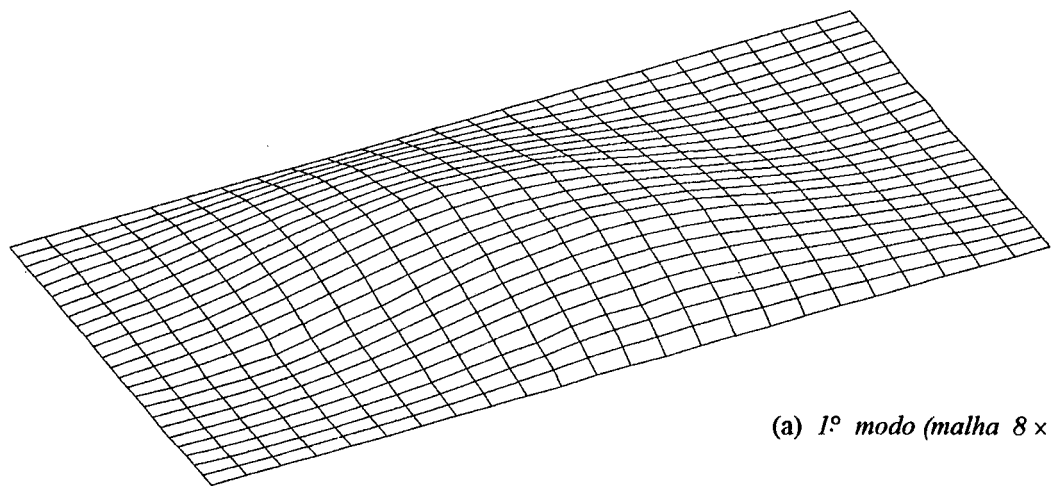


(b) 3º modo (malha  $12 \times 4$ )

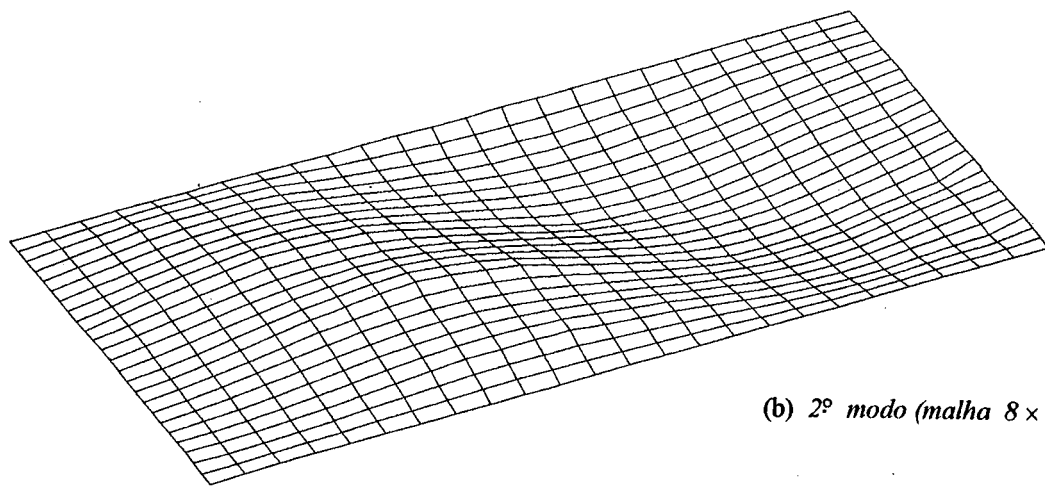


(c) 4º modo (malha  $12 \times 4$ )

**Figura 5.26 :** O segundo, terceiro e quarto modos de flambagem de uma placa retangular apoiada comprimida uniaxialmente ( $a/b = 3.0$ ,  $a = 3.0$ ,  $h = 0.01$ ).



(a) 1º modo (malha  $8 \times 4$ )



(b) 2º modo (malha  $8 \times 4$ )

**Figura 5.27 :** O primeiro e segundo modos de flambagem de uma placa retangular apoiada sob cisalhamento ( $a/b = 2.0$ ,  $a = 2.0$ ,  $h = 0.01$ ).

#### 5.4. Conclusões

Este capítulo apresentou os resultados numéricos obtidos com a implementação numérica da formulação proposta. Foram analisados problemas de flexão linear elástica e de flambagem, para diversas geometrias, condições de contorno e carregamentos. Os resultados foram comparados com outras soluções disponíveis na literatura e alguns comentários a respeito do desempenho da formulação foram destacados.

### 6.1. Introdução

O presente trabalho apresentou basicamente uma formulação integral para análise de flexão linear e estabilidade de placas modeladas pelas teorias de Mindlin e Reissner. A utilização do MEC para solução destas equações, contando com funções de interpolação de cinco graus diferentes, permitiu a solução numérica de problemas estáticos, enquanto para estabilidade foi utilizado o elemento constante. Foram testadas também algumas quadraturas para integrais singulares. Com base nestes resultados são possíveis algumas conclusões, bem como uma série de sugestões para continuidade da pesquisa nesta área.

### 6.2. Conclusões

A formulação aqui desenvolvida mostrou-se bastante satisfatória na solução de problemas de flexão de placas. Os resultados para casos estáticos lineares revelaram-se mais precisos que os obtidos com o método dos elementos finitos. A comparação com outras soluções de elementos de contorno revelou também que a presente formulação é perfeitamente aplicável a placas finas levando, mesmo nesses casos, a resultados melhores que muitas formulações que utilizam o modelo de placa de Kirchhoff.

Quanto aos procedimentos de integração utilizados, pode-se dizer que a transformação cúbica de Telles é uma excelente ferramenta para integração de quaisquer núcleos fracamente ou quase singulares, com a grande vantagem de não exigir o isolamento das singularidades. No caso das integrais fortemente singulares a quadratura de Kutt leva, em

diversos casos, a resultados ligeiramente melhores que a imposição de movimentos de corpo rígido, além de exigir poucos pontos de integração. Disso resulta uma grande diferença no tempo consumido no cálculo computacional, a favor da quadratura citada.

No que diz respeito à análise de estabilidade, deve-se lembrar, antes de mais nada, que foi utilizado o elemento mais pobre que se pode conceber (constante), e ainda assim foram obtidos resultados melhores que diversos elementos finitos. A obtenção de margens de erro abaixo de 1% implica em discretizações  $6 \times 6$  ou maiores, no caso de placas quadradas. No entanto, as taxas de convergência se reduzem bruscamente à medida que o refino de malha prossegue. Um refino de malha muito grande pode acarretar imprecisões na integração dos tensores devido à proximidade dos pontos de colocação em relação ao contorno da placa. A implementação de elementos lineares ou quadráticos deve levar a resultados muito superiores, mas neste caso a formulação passa a ser, efetivamente, hipersingular.

### 6.3. Recomendações para continuidade da pesquisa

As curvas de convergência  $p$  para problemas estáticos lineares revelam, em alguns casos, uma redução da taxa de convergência. Em primeiro lugar, é preciso destacar que a utilização de funções de interpolação de ordens mais altas implica em um aumento no número de pontos de integração. Em segundo lugar, sabe-se que a integração de funções de Bessel através do procedimento de Telles pode exigir trinta ou mais pontos de integração (Mansur [1992]). Assim, a determinação criteriosa da ordem das quadraturas para o melhor desempenho dos elementos quadráticos, cúbicos e quárticos deve ser investigada e um procedimento de seleção automática do número de pontos de integração deve ser utilizado. Quando o número de pontos de integração é suficiente, a presente formulação leva a resultados melhores até mesmo que o método da função de Green local modificado (MFGLM) (Barbieri [1992], Machado [1992]). Da mesma forma, a implementação de procedimentos de integração mais gerais, que não exijam isolamento das singularidades, deve ser considerada.

A família de elementos implementada pode ser expandida, como a implementação de elementos de arco de círculo, o que favoreceria a análise de geometrias circulares. Da



mesma forma, o uso de elementos de contorno constantes integrados analiticamente deve melhorar os resultados, não apenas em problemas lineares mas também nos não lineares.

Um outro aspecto que pode ser explorado é a utilização de simetrias, atualmente prejudicada pelo uso da técnica do nó duplo em vértices. Esta técnica soa mais como um truque numérico, e parece perturbar sensivelmente os resultados na vizinhança dos vértices. O desenvolvimento de uma ferramenta alternativa para tratamento de cantos pode melhorar ainda mais o desempenho da formulação.

A extensão da formulação aqui apresentada a problemas não lineares pode ser realizada escrevendo-se as equações gerais apresentadas no capítulo três na forma incremental. O levantamento de trajetórias de equilíbrio (pós-flambagem) com esta formulação depende fundamentalmente disso. Adicionalmente, a inclusão de carregamentos térmicos nas equações amplia bastante a variedade de problemas que podem ser resolvidos com a presente formulação.

Para problemas de estabilidade, a implementação de elementos lineares ou quadráticos é a continuidade natural da abordagem apresentada, mas depende também da implementação de quadraturas para núcleos hipersingulares. Espera-se que o uso de elementos lineares ou quadráticos torne a presente formulação imbatível para solução de problemas não lineares. A extensão da formulação apresentada neste trabalho a problemas de vibrações livres parece direta, bem como para problemas de flexão sobre apoio elástico.

Assim, pode-se resumir algumas das possibilidades para continuidade do presente trabalho nos seguintes itens:

- Implementação de procedimentos de integração mais gerais e seleção automática do número de pontos de integração.
- Ampliação da família de elementos de contorno e células de domínio.
- Análise do desempenho da formulação para placas com geometrias, condições de contorno e carregamentos mais complexos.
- Implementação de condições de contorno em pontos internos.
- Desenvolvimento de uma alternativa à técnica do nó duplo para pontos com descontinuidade da normal.
- Implementação de elementos lineares, quadráticos etc. para análise de estabilidade.
- Extensão da formulação para problemas de vibrações, flexão sobre apoio elástico, flexão com grandes deslocamentos e problemas de contato.

- Extensão da formulação para problemas de flexão elasto-plástica.
- Inclusão dos efeitos de variação de temperatura para análise de problemas termo-elásticos.
- Obtenção de soluções fundamentais para placas com variação de espessura e implementação das mesmas.

Finalmente, a utilização de filosofias adaptativas baseadas na norma dos resíduos das condições de contorno calculadas, como estimativa de erro *a posteriori*, bem como a implementação de funções de interpolação hierárquicas, deve levar a uma utilização mais racional dos diversos elementos aqui apresentados.

---

---

## Referências Bibliográficas

---

---

- [01] - Abramowitz, M. e Stegun, I. A. (editors), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, xiv+1046p. (1972).
- [02] - Aliabadi, M. H., Brebbia, C. A. e Mackerle, J. (editors), *Boundary Elements Abstracts* **2**, 134-137 (1991).
- [03] - Aliabadi, M. H., Hall, W. S. e Plemister, T. G., *Taylor Expansions for Singular Kernels in the Boundary Element Method*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **21**, 2221-2236 (1985).
- [04] - *ANSYS Engineering Analysis System - Theoretical Manual*, rev. 4.4a, Swanson Analysis Systems Inc. (1989).
- [05] - Averill, R. C. e Reddy, J. N., *An Assessment of Four-Noded Plate Finite Elements Based on a Generalized Third-Order Theory*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **33**, 1553-1572 (1992).
- [06] - Banerjee, P. K. e Butterfield, R., *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, xv+452p. (1981).
- [07] - Barbieri, R., *Desenvolvimento e Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) para Problemas do Meio Contínuo*, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 206p. (1992).
- [08] - Barbieri, R. e Barcellos, C. S., *A Modified Local Green's Function Technique for the Mindlin's Plate Problem*, em: Brebbia, C. A. e Gipson, G. S. (editors), *Boundary Elements XIII - Proc. 13th Int. Conf.*, Tulsa, Comp. Mech. Publ./Elsevier Appl. Science (1991).

- [09] - Barcellos, C. S. e Monken e Silva, L. H., *A Boundary Element Formulation for the Mindlin's Plate Model*, em: Brebbia, C. A. e Venturini, W. S. (editors), *Proc. III Int. Conf. on Boundary Element Technology - BETECH 87*, Comp. Mech. Publ., Southampton, 123-130 (1987).
- [10] - Barcellos, C. S. e Westphal Jr., T., *Reissner/Mindlin's Plate Models and the Boundary Element Method*, em: Brebbia, C. A. e Ingber, M. S. (editors), *Proc. 7th. Int. Conf. on Boundary Element Technology - BETECH 92*, Albuquerque, USA, Comp. Mech. Publ., 589-604 (1992).
- [11] - Bathe, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, xiii+695p. (1982).
- [12] - Batoz, J. L., Bathe, K. J. e Ho, L. W., *A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **15**, 1771-1812 (1980).
- [13] - Belytschko, T. e Bathe, K. J., *Computational Methods in Mechanics*, Vol. 3: Beskos, D. E. (editor), *Boundary Element Methods in Mechanics*, Elsevier, ix+598p. (1987).
- [14] - Beskos, D. E. (editor), *Boundary Element Analysis of Plates and Shells*, Springer-Verlag, vii+368p. (1991).
- [15] - Bezine, G., *A New Boundary Element Method for Bending of Plates on Elastic Foundation*, *Int. J. Solids & Structures* **24**, 557-565 (1988).
- [16] - Boresi, A. P. e Lynn, P. P., *Elasticity in Engineering Mechanics*, Prentice-Hall, xv+475p. (1974).
- [17] - Borggaard, J. T.; Kane, J. H. e Turi, J., *Highly Accurate Evaluation of System Matrices for Curved Boundary Elements*, *Computers & Structures* **40**, 885-892 (1991).
- [18] - Brebbia, C. A., *The Boundary Element Method for Engineers*, 2nd ed., Pentech Press, London, v+189p. (1984).
- [19] - Brebbia, C. A. e Dominguez, J., *Boundary Elements, An Introductory Course*, Computational Mechanics Publ., Southampton, 293p. (1989).
- [20] - Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. e Wrobel, L. C., *Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, xiv+464p. (1984).

- [21] - Brebbia, C. A. e Walker, S., *Boundary Element Method in Engineering*, Butterworth, London, 210p. (1980).
- [22] - Briassoulis, D., *The  $C^0$  Structural Elements Reformulated*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **35**, 541-561 (1992).
- [23] - Bronstein, I. e Semendiaev, K., *Manual de Matemática para Engenheiros e Estudantes*, Mir (1979).
- [24] - Brush, D. O. e Almroth, B. O., *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, McGraw-Hill, Tokyo, xviii+379p. (1975).
- [25] - Bui, H. D., *Some Remarks about the Formulation of Three-Dimensional Thermoelastoplastic Problems by Integral Equations*, *Int. J. Solids & Structures* **14**, 935-939 (1978).
- [26] - Burgess, G. e Mahajerin, E., *An Analytical Contour Integration Method for Handling Body Forces in Elasticity*, *Appl. Math. Modelling* **9**, 27-32 (1985).
- [27] - Calderón, E. T. e Venturini, W. S., *Análise de Placas sobre Fundação de Comportamento Não-Linear Através do Método dos Elementos de Contorno*, em: *Anais do XIII Congresso Ibero Latino-Americano de Met. Comp. em Engenharia - CILAMCE*, Vol. 2, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 137-146 (1992).
- [28] - Cecot, W. e Orkisz, J., *Approximation of Boundary Values in the Boundary Element Method*, *Appl. Math. Modelling* **8**, 23-26 (1984).
- [29] - Cerrolaza, M. e Alarcón, E., *A Bi-Cubic Transformation for the Numerical Evaluation of the Cauchy Principal Value Integrals in Boundary Methods*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **28**, 987-999 (1989).
- [30] - Cheng, S., *Elasticity Theory of Plates and a Refined Theory*, *Journal of Applied Mechanics* **46**, 644-650 (1979).
- [31] - Cheung, Y. K., Chan, A. H. C. e Tham, L. G., *A Study on the Linear Elastic Stability of Mindlin Plates*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **22**, 117-132 (1986).

- [32] - Costa Jr, J. A. e Brebbia, C. A., *Elastic Buckling of Plates Using the Boundary Element Method*, em: Brebbia, C. A. e Maier, G. (editors), *Boundary Elements VII - Proc. 7th Int. Conf.*, Villa Olmo, Italy, Springer-Verlag, 4-29 – 4-42 (1985a).
- [33] - Costa Jr., J. A. e Brebbia, C. A., *The Boundary Element Method Applied to Plates on Elastic Foundations*, *Engineering Analysis* **2**, 174-183 (1985b).
- [34] - Costa Jr., J. A., *A Boundary Element Algorithm for Plate Problems*, *Rev. Bras. Ciências Mec.* **IX**, 157-171 (1987).
- [35] - Craig, R. J., *Finite Difference Solutions of Reissner's Plate Equations*, *Journal of Engineering Mechanics* **113**, 31-48 (1987).
- [36] - Dahlquist, G. e Bjorck, Å., *Numerical Methods*, Prentice-Hall (1974).
- [37] - Davey, K. e Hinduja, S., *Analytical Integration of Linear Three-Dimensional Triangular Elements in BEM*, *Appl. Math. Modelling* **13**, 450-461 (1989).
- [38] - Dawe, D. J. e Roufaeil, O. L., *Buckling of Rectangular Mindlin Plates*, *Computers & Structures* **15**, 461-471 (1982).
- [39] - Deshmukh, R. S. e Archer, R. R., *Numerical Solution of Moderately Thick Plates*, *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division* **100**, 903-917 (1973).
- [40] - Dhatt, G. e Touzot, G., *The Finite Element Method Displayed*, John Wiley & Sons, xv+509p. (1984).
- [41] - Dhatt, G.; Marcotte, L. e Matte, Y., *A New Triangular Kirchhoff Plate/Shell Element*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **23**, 453-470 (1986).
- [42] - Dias, A. T., *Funções Circulares*, Editora da Universidade Federal de Ouro Preto, iii+153p. (1993).
- [43] - Dumont, N. A., *A Unified Technique for the Evaluation of General Singular Integrals*, em: *Anais do XIII Congresso Ibero Latino-Americano de Met. Comput. Eng. - CILAMCE*, Vol. 2, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 194-203 (1992).
- [44] - *EISPACK Index*, John Hopkins University Press, Baltimore (1987).

- [45] - Faria, L. M. O., Soares, C. A. M., Pereira, M. F. S. e Brebbia, C. A., *Boundary Elements in 2D Plasticity Using Quadratic Shape Functions*, *Appl. Math. Modelling* **5**, 371-375 (1981).
- [46] - Frakes, J. P. e Simmonds, J. G., *Asymptotic Solutions of the von Kármán Equations for a Circular Plate Under a Concentrated Load*, *J. Appl. Mech.* **52**, 326-330 (1985).
- [47] - Gakhov, F. D., *Boundary Value Problems*, Pergamon Press, xix+561p. (1966).
- [48] - Gel'fand, J. M. e Shilov, G. E., *Generalized Functions*, Vol. 1, Academic Press, New York, xviii+423p. (1964).
- [49] - Gel'fand, J. M. e Shilov, G. E., *Generalized Functions*, Vol. 2, Academic Press, New York, x+271p. (1964).
- [50] - Golub, G. e Van Loan, C. F., *Matrix Computations*, 2nd ed., John Hopkins University Press, Baltimore, xix+642p. (1989).
- [51] - Gospodinov, G. e Ljutskanov, D., *The Boundary Element Method Applied to Plates*, *Appl. Math. Modelling* **6**, 237-244 (1982).
- [52] - Gray, L. J. e Lütz, E., *On the Treatment of Corners in the Boundary Element Method*, *J. Comp. & Appl. Math.* **32**, 369-386 (1990).
- [53] - Green, A. E., *On Reissner's Theory of Bending of Elastic Plates*, *Quarterly of Applied Mathematics* **VII**, 223-228 (1949).
- [54] - Grigolyuk, E. e Tolkachev, V., *Contact Problems in the Theory of Plates and Shells*, Mir, 423p. (1987).
- [55] - Guiggiani, M. e Casalini, P., *Direct Computation of Cauchy Principal Value Integrals in Advanced Boundary Elements*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **24**, 1711-1720 (1987).
- [56] - Guiggiani, M. e Casalini, P., *Rigid-Body Translation With Curved Boundary Elements*, *Appl. Math. Modelling* **13**, 365-368 (1989).
- [57] - Guiggiani, M. e Gigante, A., *A General Algorithm for Multidimensional Cauchy Principal Integrals in the Boundary Element Method*, *J. Appl. Mech.* **57**, 906-915 (1990).

- [58] - Guiggiani, M., Krishnasamy, G., Rudolphi, J. T. e Rizzo, F. J., *A General Algorithm for the Numerical Solution of Hypersingular Boundary Integral Equations*, *J. Appl. Mech.* **59**, 605-614 (1992).
- [59] - Guiggiani, M./Telles, J. C. F., *Int. J. Numer. Methods Eng.* **26**, Letters to the Editor, 1683-1684 (1988).
- [60] - *HARWELL Subroutine Library Specification: EB06A* (1978).
- [61] - Hinton, E. e Huang, H. C., *A Family of Quadrilateral Mindlin Plate Elements with Substitute Shear Strain Fields*, *Computers & Structures* **23**, 409-431 (1986).
- [62] - Holzer, S., Rank, E. e Werner, H., *An Implementation of the hp-Version of the Finite Element Method for Reissner-Mindlin Plate Problems*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **30**, 459-471 (1990).
- [63] - Hong, H. K. e Chen, J. T., *Derivations of Integral Equations of Elasticity*, *Journal of Engineering Mechanics* **114**, 1028-1044 (1988).
- [64] - Hörmander, L., *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin, vii+287p. (1964).
- [65] - Huang, Q. e Cruse, T. A., *Some Notes on Singular Integral Techniques in Boundary Element Analysis*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **36**, 2643-2659 (1993).
- [66] - Hughes, T. J. R., Taylor, R. L. e Kanokukulchai, W., *A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **11**, 1529-1543 (1977).
- [67] - *IMSL Library Routines*, University of Waterloo Computing Services (1982).
- [68] - Ioakimidis, N. I. e Pitta, M. S., *Remarks on the Gaussian Quadrature Rule for Finite-Part Integrals with a Second Order Singularity*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **69**, 325-343 (1988).
- [69] - Jaswon, M. A. e Maiti, M., *An Integral Equation Formulation of Plate Bending Problems*, *J. Eng. Math.* **2**, 83-93 (1968).
- [70] - Jaswon, M. A., Maiti, M. e Symm, G. T., *Numerical Biharmonic Analysis and Some Applications*, *Int. J. Solids & Structures* **3**, 309-332 (1967).



- [71] - Jun, L., Beer, G. e Meek, J. L., *The Application of Double Exponential Formulas in the Boundary Element Method*, em: Brebbia, C. A. e Maier, G. (editors), *Boundary Elements VII - Proc. 7th Int. Conference*, Vol. II, Vila Olmo, Italy, Springer-Verlag (1985).
- [72] - Kamiya, N. e Sawaki, Y., *An Integral Equation Approach to Finite Deflection of Elastic Plates*, *Int. J. Non-Lin. Mech.* **17**, 187-194 (1982a).
- [73] - Kamiya, N. e Sawaki, Y., *Integral Equations Formulation for Non-Linear Bending of Plates - Formulation by Weighted Residual Method*, *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)* **62**, 651-655 (1982b).
- [74] - Kamiya, N. e Sawaki, Y., *An Approximate Finite Deflection Analysis of a Heated Elastic Plate by the Boundary Element Method*, *Appl. Math. Modelling* **6**, 23-27 (1982c).
- [75] - Kamiya, N. e Sawaki, Y., *An Efficient BEM for Some Inhomogeneous and Nonlinear Problems*, em: Brebbia, C. A. e Maier, G. (editors), *Proc. 7th. Int. Sem. BEM Eng.*, Villa Olmo, Italy, 13-59 – 13-68 (1985).
- [76] - Kamiya, N. e Sawaki, Y., *An Alternative Boundary Element Analysis of Plates Resting on Elastic Foundation*, em: Brebbia, C. A. e Tanaka, M. (editors), *Boundary Elements VIII - Proc. 8th Int. Conf.*, Vol. II, Tokyo, Japan, Springer-Verlag, 561-570 (1986a).
- [77] - Kamiya, N. e Sawaki, Y., *Boundary Element Analysis of Non-Linear Bending of Sandwich Plates and Shallow Shells*, em: Benerjee, P. K. e Watson, P. O. (editors), *Developments in Boundary Element Methods*, Vol. 4, Elsevier Applied Science Publ. (1986b).
- [78] - Kapur, K. K. e Hartz, B. O., *Stability of Plates Using the Finite Element Method*, *ASCE J. Eng. Mechanics Division* **92**, 177-195 (1966).
- [79] - Karam, V. J., *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas*, Dissertação de Mestrado, COPPE, Rio de Janeiro, xvi+142p. (1986).
- [80] - Karam, V. J. e Telles, J. C. F., *O Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Teoria de Reissner para Flexão de Placas*, em: *Anais do VIII Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, São Carlos, 29-42 (1986).

- [81] - Karam, V. J. e Telles, J. C. F., *On Boundary Elements for Reissner's Plate Theory*, *Engineering Analysis* **5**, 21-27 (1988).
- [82] - Kaw, A.K., *On Evaluating Integrals with Strongly Singular Integrands*, *Adv. Eng. Software* **13**, 84-103 (1991).
- [83] - Kaw, A.K., *Numerical Solutions of Strong Integrals in Hadamard's Sense*, *IMSL Directions* **9**, 08-09 (1992).
- [84] - Kleiber, M., *Incremental Finite Element Modelling in Non-Linear Solid Mechanics*, Ellis Horwood, Chichester, 187p. (1989).
- [85] - Koiter, W. T., *A Consistent First Approximation in the General Theory of Thin Elastic Shells*, em: Koiter, W. T. (editor), *Theory of Thin Shells*, 19-23, North-Holland (1960).
- [86] - Koiter, W. T., *General Equations of Elastic Stability for Thin Shells*, *Proc. Symp. Theory of Shells*, 187-228, University of Houston (1967).
- [87] - Kompis, V., *Boundary Integral Equation Method for Three Dimensional Elastostatic Problems and a Formulation for the Problem for Large Displacements*, em: *Proc. 14th Jugoslavian Congr. Rac. Mech.*, 113-120 (1978).
- [88] - Krishnasamy, G., Schmerr, L. W., Rudolphi, T. J. e Rizzo, F. J., *Hypersingular Boundary Integral Equations: Some Applications in Acoustic and Elastic Wave Scattering*, *J. Appl. Mech.* **57**, 404-414 (1990).
- [89] - Kutt, H. R., *Quadrature Formulas for Finite-Part Integrals*, WISK 178, National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretória, 156 p. (1975a).
- [90] - Kutt, H. R., *On the Numerical Evaluation of Finite-Part Integrals Involving an Algebraic Singularity*, WISK 179, National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretória, vii+169 p. (1975b).
- [91] - Kutt, H. R., *The Numerical Evaluation of Principal Value Integrals by Finite-Part Integration*, *Numer. Math.* **24**, 205-210 (1975c).
- [92] - Lachat, J. C. e Watson, J. O., *Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: Formulation of Three-Dimensional Elastostatics*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **10**, 991-1005 (1976).

- [93] - Lee, S. W. e Pian, T. H. H., *Improvement of Plate and Shell Finite Element by Mixed Formulations*, *AIAA Journal* **16**, 29-34 (1978).
- [94] - Li, H. B., Han, G. M. e Mang, H. A., *A New Method for Evaluating Singular Integrals in Stress Analysis of Solids by the Direct Boundary Element Method*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **21**, 2071-2098 (1985).
- [95] - Linz, P., *Bounds and Estimates for Conditions Numbers of Integral Equations*, *SIAM J. Numer. Anal.* **28**, 227-235 (1991).
- [96] - Lu, S. e Ye, T. Q., *Direct Evaluation of Singular Integrals in Elastoplastic Analysis by the Boundary Element Method*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **32**, 295-311 (1991).
- [97] - Lutz, E., Gray, L. J. e Ingraffea, A. R., *An Overview of Integration Methods for Hipersingular Boundary Integrals*, em: Brebbia, C. A. e Gipson, G. S. (editors), *Boundary Elements XIII - Proc. 13th Int. Conference*, Tulsa, Comp. Mech. Publ./Elsevier Applied Science, 913-925 (1991).
- [98] - Machado, R. D., *Desenvolvimento do Método da Função de Green Local para a Solução de Placas Laminadas de Materiais Compostos*, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 262p. (1992).
- [99] - Malvern, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, xii+713p. (1969).
- [100] - Manolis, G. D., Beskos, D. E. e Pineros, M. F., *Beam and Plate Stability by Boundary Elements*, *Computers & Structures* **22**, 917-923 (1986).
- [101] - Mansur, W. J., Comunicação pessoal, novembro (1992).
- [102] - Marczak, R. J., Luersen, M. A. e Selke, C. A. C., *Um Estudo de Estabilidade Elástica, Utilizando Elementos Finitos de Placas Finas e Semi-Espessas, Com Ênfase no Fenômeno do Salto de Modo*, em: *Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM 91*, Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, São Paulo, 77-80 (1991).

- [103] - Matsumoto, T., Tanaka, M. e Handoh, K., *A New Regularized Boundary Integral Formulation for Thin-Elastic Plate Bending Analysis*, em: Brebbia, C. A. e Gipson, G. S. (editors), *Boundary Elements XIII - Proc. 13th Int. Conference*, Tulsa, Comp. Mech. Publ./Elsevier Applied Science, 523-533 (1991).
- [104] - Mikhlin, S. G., *Singular Integral Equations*, Amer. Math. Soc. Transl., Series I, **10**, 84-198 (1962).
- [105] - Mindlin, R. D., *Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates*, *Journal of Applied Mechanics* **18**, 31-38 (1951).
- [106] - Monken e Silva, L. H., *Novas Formulações Integrais para Problemas da Mecânica*, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, ix+192p. (1988).
- [107] - Monken e Silva, L. H. e Barcellos, C. S., "Review" sobre o Método de Elementos de Contorno Aplicado para Solução de Problemas de Placas Elásticas, em: *Anais do VIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM*, São José dos Campos, 457-460 (1985).
- [108] - Murakawa, H. e Atluri, S.N., *Finite Deformations, Finite Rotations, and Stability of Plates: A Complementary Energy - Finite Element Analysis*, em: *Proc. 22nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conf.*, Part 1, Atlanta, pp. 7-15 (1981).
- [109] - Muskhelishvili, N.I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff (1963).
- [110] - Mustoe, G. G. W., *Advanced Integration Schemes Over Boundary Elements and Volume Cells for Two and Three Dimensional Non-Linear Analysis*, em: Banerjee, P. K. e Mukherjee, S. (editors), *Developments in Boundary Element Methods*, Vol. 3, Elsevier Applied Science Publ. (1984).
- [111] - Myerson, G., *On Ignoring the Singularity*, *SIAM J. Numer. Anal.* **28**, 1803-1807 (1991).
- [112] - Naghdi, P. M., *On the Theory of Thin Elastic Shells*, *Quarterly of Applied Mathematics* **XIV**, 369-380 (1957).
- [113] - Nahlik, R. e Bialecki, R., *A New Method of Numerical Evaluation of Singular Integrals Occuring in Two-Dimensional BIEM*, *Appl. Math. Modelling* **7**, 169-172 (1983).

- [114] - Niwa, Y., Kabayashi, M. e Kitahara, M., *Determination of Eigenvalues by Boundary Element Methods*, em: Banerjee, P. K. e Shaw, R. P. (editors), *Developments in Boundary Element Methods*, Vol. 2, Elsevier Applied Science, 143-176 (1982).
- [115] - Oden, J. T. e Carey, G. F., *Finite Elements*, Vol. IV: *Mathematical Aspects*, Prentice-Hall, New Jersey (1983).
- [116] - Oden, J. T. e Reddy, J. N., *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, John Wiley & Sons (1976).
- [117] - Oñate, E., Zienkiewicz, O. C., Suarez, B. e Taylor, R. L., *A General Methodology for Deriving Shear Constrained Reissner-Mindlin Plate Elements*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **33**, 345-367 (1992).
- [118] - Paget, D. F., *The Numerical Evaluation of Hadamard Finite-Part Integrals*, *Numer. Math.* **36**, 447-453 (1981).
- [119] - Parreira, P. e Guiggiani, M., *On the Implementation of the Galerkin Approach in the Boundary Element Method*, *Computers & Structures* **33**, 269-279 (1989).
- [120] - Parton, V. e Perline, P., *Équations Intégrales de la Théorie de L'Élasticité*, Mir, 323p. (1983).
- [121] - Perez, M. M. e Wrobel, L. C., *Aplicação de Soluções Fundamentais Isotrópicas na Análise de Problemas Potenciais Ortotrópicos*, em: *Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM 91*, Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, São Paulo, 145-148 (1991).
- [122] - Pica, A. e Wood, R. D., *Postbuckling Behaviour of Plates and Shells Using Mindlin Shallow Shell Formulation*, *Computers & Structures* **12**, 759-768 (1980a).
- [123] - Pica, A., Wood, R. D. e Hinton, E., *Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Plate Behaviour Using a Mindlin Formulation*, *Computers & Structures* **11**, 203-215 (1980b).
- [124] - Pietraszkiewicz, W., *Finite Rotation and Lagrangian Description in the Non-Linear Theory of Shells*, Polish Scientific, 103p. (1979).

- [125] - Pietraszkiewicz, W., *On the General Lagrangian Displacement Formulation of the Non-Linear Theory of Thin Shells*, em: Selke, C. A. C. e Barcellos, C. S. (editores), *Anais do 7º Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão - SIBRAT* Vol. I, 15-29, Florianópolis (1992).
- [126] - Pogorzelski, W., *Integral Equations and their Applications*, Vol. 1, Pergamon Press, London, xiii+714p. (1966).
- [127] - Potier-Ferry, M., *On the Mathematical Foundations of Elastic Stability Theory - I*, *Archive for Rational Mechanics & Analysis*, 55-72 (1981).
- [128] - Press, W., Flannery, B., Teukolsky, S. e Vetterling, W., *Numerical Recipes*, Cambridge Press (1986).
- [129] - Pugh, E. D. L., Hinton, E. e Zienkiewicz, O. C., *A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements With Reduced Integration*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **12**, 1059-1079 (1978).
- [130] - Puttré, M., *The Boundary Element Method Extends the Limit of Analysis*, *Mechanical Engineering*, January, 42-45 (1993).
- [131] - Ramm, E. e Stegmüller, H., *The Displacement Finite Element Method in Nonlinear Buckling Analysis of Shells*, em: Ramm, E. (editor), *Buckling of Shells - Proceedings of a State-of-the-Art Colloquium*, Springer-Verlag, Berlin, 201-235 (1982).
- [132] - Reddy, J. N., *A Refined Nonlinear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation*, *Int. J. Solids & Structures* **20**, 881-896 (1984a).
- [133] - Reddy, J. N., *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons, xiii+546p. (1984b).
- [134] - Reddy, J. N., *Analysis of Composite Laminates Using Variable Kinematic Finite Elements*, em: Selke, C. A. C. e Barcellos, C. S. (editores), *Anais do 7º Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão - SIBRAT* Vol. I, 47-68, Florianópolis (1992).
- [135] - Reissner, E., *On the Theory of Bending of Elastic Plates*, *Journal of Mathematical Physics* **23**, 184-191 (1944).

- [136] - Reissner, E., *The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates*, *Journal of Applied Mechanics* **12**, A69-A77 (1945).
- [137] - Reissner, E., *On Bending of Elastic Plates*, *Quarterly of Applied Mathematics* **V**, 55-68 (1947).
- [138] - Reissner, E., *On a Variational Theorem in Elasticity*, *Journal of Mathematical Physics* **29**, 90-95 (1950).
- [139] - Reissner, E., *On Transverse Bending of Plates Including the Effect of Transverse Shear Deformation*, *Int. J. Solids & Structures* **11**, 569-573 (1975).
- [140] - Reissner, E., *On the Analysis of First and Second-Order Shear Deformation Effects for Isotropic Elastic Plates*, *Journal of Applied Mechanics* **47**, 939-961 (1980).
- [141] - Reissner, E., *A Twelvth Order Theory of Transverse Bending of Transversely Isotropic Plates*, *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)* **63**, 285-289 (1983).
- [142] - Reissner, E., *Reflections on the Theory of Elastic Plates*, *Applied Mechanics Review* **38**, 1453-1464 (1985).
- [143] - Rencis, J. J. e Mullen, R. L., *Solution of Elasticity Problems by a Self-Adaptive Mesh Refinement Technique for Boundary Element Computation*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **23**, 1509-1527 (1986).
- [144] - Ribeiro, G. O. e Venturini, W. S., *Consideração de Cargas Distribuídas em Linha e Concentradas no Cálculo de Placas pelo Método dos Elementos de Contorno*, em: de Las Casas, E. B. e Paulo, F. A. (editores), *Anais do Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional*, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 123-133 (1991a).
- [145] - Ribeiro, G. O. e Venturini, W. S., *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Placas Submetidas a Variação de Temperatura*, em: de Las Casas, E. B. e Paulo, F. A. (editores), *Anais do Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional*, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, pp. 134-144 (1991b).
- [146] - Roark, R. e Young, W. C., *Formulas for Stress and Strain*, 5th ed., McGraw-Hill, Singapore, xvi+624p. (1976).

- [147] - Rosen, D. e Cormack, D.E., *Analysis and Evaluation of Singular Integrals by the Invariant Imbedding Approach*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **35**, 563-587 (1992).
- [148] - Rudolphi, T. J. e Muci-Küchler, K. H., *Consistent Regularization of Both Kernels in Hypersingular Integral Equations*, em: Brebbia, C. A. e Gipson, G. S. (editors), *Boundary Elements XIII - Proc. 13th Int. Conference*, Tulsa, Comp. Mech. Publ./Elsevier Applied Science, 875-887 (1991).
- [149] - Ruotsalainen, K. e Saranen, J., *On the Collocation Method for a Nonlinear Boundary Integral Equation*, *Journal of Computational & Applied Math.* **28**, 339-348 (1989).
- [150] - Salleb, A. F. e Chang, T. Y., *An Efficient Quadrilateral Element for Plate Bending Analysis*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **24**, 1123-1155 (1987).
- [151] - Sapountzakis, E. J. e Katsikadelis, J. T., *Unilaterally Supported Plates on Elastic Foundations by the Boundary Element Method*, *J. Appl. Mech.* **59**, 580-586 (1992).
- [152] - Shi, G., *Flexural Vibration and Buckling Analysis of Orthotropic Plates by the Boundary Element Method*, *Int. J. Solids & Structures* **26**, 1351-1370 (1990).
- [153] - Shi, G. e Bézine, G., *Buckling Analysis of Orthotropic Plates by Boundary Element Method*, *Mech. Res. Commun.* **17**, 1-8 (1990).
- [154] - Sládek, V. e Sládek, J., *Non-Singular Boundary Integral Representation of Potential Field Gradients*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **33**, 1181-1195 (1992).
- [155] - Sokolnikoff, I. S. e Redheffer, R. M., *Mathematical of Physics & Modern Engineering*, McGraw-Hill, (1958).
- [156] - Stakgold, I., *Green's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, xi+638p. (1979).
- [157] - Stein, E. e Wendland, W. (editors), *Finite Element and Boundary Element Techniques From Mathematical and Engineering Point of View*, Springer-Verlag, Udine, 333p. (1988).
- [158] - Szabó, B. e Babüska, I., *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, xv+368p. (1991).



- [159] - Tabarrok, B. e Simpson, A., *An Equilibrium Finite Element Model for Buckling Analysis of Plates*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **11**, 1733-1757 (1977).
- [160] - Tai, H., Katayama, T. e Sekyia, T., *Buckling Analysis by Influence Function*, *Mech. Res. Commun.* **9**, 139-144 (1982).
- [161] - Tan, H. K. V., Bettess, P. e Bettess, J. A., *Elastic Buckling of Isotropic Triangular Flat Plates by Finite Elements*, *Appl. Math. Modelling* **7**, 311-316 (1983).
- [162] - Tanaka, M., *Integral Equation Approach to Small and Large Displacement of Thin Elastic Plates*, em: Brebbia, C. A. (editor), *Boundary Element Method in Eng. - Proc. 4th. Int. Seminar*, Springer-Verlag, 526-539 (1982).
- [163] - Tanaka, M., *Large Deflection Analysis of Thin Elastic Plates*, em: Banerjee, P. K. e Mukherjee, S. (editors), *Developments in Boundary Element Methods*, Vol. 3, Elsevier Applied Science, 115-136 (1984).
- [164] - Tanaka, M., *Elastic Buckling Analysis of Assembled Plate Structures by Boundary Element Method*, em: Brebbia, C. A. e Tanaka, M. (editors), *Boundary Elements VIII - Proc. 8th Int. Conf.*, Vol. II, Tokyo, Japan, Springer-Verlag, 547-559 (1986).
- [165] - Telles, J. C. F., *A Self-Adaptive Co-Ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **24**, 959-973 (1987).
- [166] - Tereshchenko, V. Y., *On Certain Formulations of the Boundary-Elements Method*, *PMM U.S.S.R.* **51**, 479-488 (1987).
- [167] - Tessler, A. e Hughes, T. J. R., *An Improved Treatment of Transverse Shear in the Mindlin Type Four-Node Quadrilateral Element*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **39**, 311-335 (1983).
- [168] - Theocaris, P. S., Ioakimidis, N. I. e Kazantzakis, J. G., *On the Numerical Evaluation of Two-Dimensional Principal Value Integrals*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **15**, 629-634 (1980).
- [169] - Timoshenko, S. P. e Woinowski-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., McGraw-Hill, xiv+580p. (1970).

- [170] - Timoshenko, S. P. e Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, xvi+541p. (1961).
- [171] - Tosaka N. e Miyake, S., *Geometrically Nonlinear Analysis of Shallow Spherical Shell Using an Integral Equation Method*, em: Brebbia, C. A. e Tanaka, M., *Boundary Elements VIII - Proc. 8th Int. Conf.*, Vol. II, Tokyo, Japan, Springer-Verlag, 537-546 (1986).
- [172] - Tsamasphyros, G. e Dimou, G., *Gauss Quadrature Rules for Finite Part Integrals*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **30**, 13-26 (1990).
- [173] - Vable, M., *Importance and Use of Rigid Body Mode in Boundary Element Method*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **29**, 453-472 (1990).
- [174] - Van der Weeën, F., *Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **18**, 1-10 (1982a).
- [175] - Van der Weeën, F., *Application of the Direct Boundary Element Method to Reissner's Plate Model*, em: Brebbia, C. A. (editor) *Proc. 4th. Int. Sem. BEM Eng.*, Southampton, 487-499 (1982b).
- [176] - Vijayakumar, S. e Cormack, D.E., *An Invariant Imbedding Method for Singular Integral Evaluation on Finite Domains*, *SIAM J. Appl. Math.* **48**, 1335-1349 (1988).
- [177] - Vijayakumar, S. e Cormack, D.E., *A New Concept in Near-Singular Integral Evaluation: The Continuation Approach*, *SIAM J. Appl. Math.* **49**, 1285-1295 (1989).
- [178] - Voyiadjis, G. Z. e Baluch, M. H., *Refined Theory for Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates*, *Journal of Sound & Vibration* **76**, 57-64 (1981).
- [179] - Voyiadjis, G. Z. e Pecquet Jr., R. W., *Isotropic Plate Elements with Shear and Normal Strain Deformations*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **24**, 1671-1695 (1987).
- [180] - Wang, X., Qian, J. e Huang, M., *A Boundary Integral Equation Formulation for Large Amplitude Nonlinear Vibration of Thin Elastic Plates*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **86**, 73-86 (1991).

- [181] - Wang, Z. e Wu, Q., *A New Approach Treating Corners in Boundary Element Method*, em: Brebbia, C. A. e Gipson, G. S. (editors), *Boundary Elements XIII - Proc. 13th Int. Conference*, Tulsa, Comp. Mech. Publ./Elsevier Applied Science, 901-911 (1991).
- [182] - Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 3rd ed., Pergamon, xv+630p. (1982).
- [183] - Watson, J. O., *Advanced Implementation of the Boundary Element Method to Two and Three-Dimensional Elastostatics*, em: Banerjee, P. K. e Butterfield, R., *Developments in Boundary Element Methods*, Vol. 1, London, Elsevier Applied Science Publ., 31-63 (1979).
- [184] - Westphal Jr., T., *Abordagem Direta dos Modelos de Placa de Reissner e Mindlin pelo Método dos Elementos de Contorno*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, xiii+90p. (1990a).
- [185] - Westphal Jr., T. e Barcellos, C. S., *Applications of the Boundary Element Method to Reissner's and Mindlin's Plate Models*, em: Tanaka, M., Brebbia, C. A. e Honma, T. (editors), *Proc. 12th Int. Conf. BEM - BEM 12*, Vol. 1, Sapporo, Japan, 467-477 (1990b).
- [186] - Wittrick, W. H., *Analytical, Three-Dimensional Elasticity Solutions to Some Plate Problems, and Some Observations on Mindlin's Plate Theory*, *Int. J. Solids & Structures* **23**, 441-464 (1987).
- [187] - Xiao-Yan, L., Mao-Kwang, H. e Xiuxi, W., *Geometrically Nonlinear Analysis of a Reissner Type Plate by the Boundary Element Method*, *Computers & Structures* **37**, 911-916 (1990).
- [188] - Ye, T. Q. e Liu, Y., *Finite Deflection Analysis of Elastic Plate by the Boundary Element Method*, *Appl. Math. Modelling* **9**, 183-188 (1985).
- [189] - Yuan, F. G. e Miller, R. E., *A Rectangular Finite Element for Moderately Thick Flat Plates*, *Computers & Structures* **30**, 1375-1387 (1988).
- [190] - Zabreyko, P. P., Koshelev, A. I., Krasnosel'skii, M. A., Mikhlin, S. G., Rakovshchik, L. S. e Stet'senko, V. Ya., *Integral Equations - A Reference Text*, Noordhoff International Publ., Leyden, xix+443p. (1975).

- [191] - Zhang, J. D. e Atluri, S. N., *Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Shells by a Field-Boundary Element Method*, em: *Proc. of 28th Str. Dynam. Mater. Conf.*, Monterey, United States, 488-495 (1987).
- [192] - Zhang, W. e Xu, H. R., *A General and Effective Way for Evaluating the Integrals with Various Orders of Singularity in the Direct Boundary Element Method*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **28**, 2059-2064 (1989).
- [193] - Zienkiewicz, O. G., *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, xv+787p. (1977).
- [194] - Zienkiewicz, O. G., Xu, Z., Zeng, L. F., Samuelsson, A. e Wiberg, N., *Linked Interpolation for Reissner-Mindlin Plate Elements - Part I - A Simple Quadrilateral*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **36**, 3043-3056 (1993).

# Tensores Fundamentais Simplificados

## A.1 Introdução

Como foi descrito no capítulo três, todas as equações integrais utilizadas no presente trabalho fazem uso de tensores fundamentais. Estes tensores descrevem basicamente deslocamentos e trações generalizadas que ocorrem em um problema fundamental, que em geral corresponde ao estado auxiliar utilizado nas relações de reciprocidade. Cabe salientar que pode existir mais de uma solução fundamental para um operador diferencial, mas comumente utiliza-se aquela correspondente à resposta de um domínio infinito submetido a excitações unitárias concentradas generalizadas, paralelas às direções coordenadas. Não será aqui desenvolvido o processo de obtenção da solução fundamental. Serão apenas destacados alguns aspectos e apresentadas as expressões analíticas dos tensores fundamentais implementados no código computacional utilizado neste trabalho.

A determinação da solução fundamental correspondente ao operador diferencial das equações de placa de Mindlin e Reissner, o operador  ${}^f\mathcal{L}$  da equação (2.26), é detalhadamente apresentada em Monken e Silva [1988] e Westphal Jr. [1990a]. Nestas referências, foi utilizado o método de Hörmander (Hörmander [1964]), que reduz o problema de encontrar uma solução fundamental para um operador  $\mathbf{L}$  no de encontrar uma solução escalar para o operador  $\|\mathbf{L}\|$  (Monken e Silva [1988]). Assim, é obtido o tensor deslocamento fundamental  $\mathbf{U}$ , composto por uma combinação linear de seis funções, apropriadamente multiplicadas por seis constantes. Algumas destas constantes são obtidas através da aplicação da teoria das distribuições (Stakgold [1979]) e de condições de regularidade (Brebbia *et alii* [1984]). Duas destas constantes não possuem quaisquer condições impostas, caracterizando a solução fundamental do problema como composta por funções essenciais e funções livres. Então é possível estipular para estas constantes valores tais que simplifiquem as expressões dos tensores. Uma destas formas simplificadas da solução fundamental foi adotada no

presente trabalho. O tensor fundamental  $\mathbf{T}$  é obtido por relações tração-deslocamento, envolvendo uma combinação de derivadas do tensor  $\mathbf{U}$  (Westphal Jr. [1990a]).

A seguir são apresentadas as expressões de todos os tensores utilizados neste trabalho. Estão incluídos apenas os tensores relativos ao problema de flexão (o índice  $f$  foi omitido). Nestas expressões, vale a seguinte notação:

$$\begin{aligned}
 z &= \lambda r \\
 r_\alpha &= x_\alpha(Q) - x_\alpha(P) \\
 r &= \|Q - P\| = \sqrt{r_\alpha r_\alpha} \\
 r_{,\alpha} &= \frac{\partial r}{\partial x_\alpha(Q)} = \frac{1}{r} r_\alpha \\
 A(z) &= K_0(z) + \frac{2}{z} \left( K_1(z) - \frac{1}{z} \right) \\
 B(z) &= K_0(z) + \frac{1}{z} \left( K_1(z) - \frac{1}{z} \right) \quad ,
 \end{aligned}$$

onde  $K_0$  e  $K_1$  são funções modificadas de Bessel de segunda espécie, de ordem zero e um, respectivamente (Abramowitz e Stegun [1972]).  $F_3$  e  $F_6$  são as funções livres citadas (Barcellos e Westphal Jr. [1992]).

## A.2 Tensor deslocamento fundamental $\mathbf{U}$

$$\begin{aligned}
 U_{\alpha\beta} &= \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \left\{ \left[ 8B - (1-\nu)(2\ln z + 1 + 8F_3) \right] \delta_{\alpha\beta} + \right. \\
 &\quad \left. - \left[ 8A + 2(1-\nu) \right] r_{,\alpha} r_{,\beta} \right\} \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

$$U_{\alpha 3} = \frac{1}{8\pi D} (2\ln z + 1 + 8F_3) r r_{,\alpha} \quad (A.2)$$

$$U_{3\alpha} = -U_{\alpha 3} \quad (A.3)$$

$$U_{33} = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} \left\{ z^2(1-\nu)(\ln z + 4F_3) - 8\ln z + \right. \\ \left. - 4[(3-\nu)(4F_3 + 1) - (1-\nu)F_6] \right\} \quad (A.4)$$

### A.3 Tensor tração fundamental $\mathbf{T}$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{-1}{4\pi r} \left[ (4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(r_{,\beta}n_\alpha + r_{,n}\delta_{\alpha\beta}) + \right. \\ \left. + (4A + 1 + \nu)r_{,\alpha}n_\beta - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,n} \right] \quad (A.5)$$

$$T_{\alpha 3} = \frac{\lambda^2}{2\pi} (B n_\alpha - A r_{,\alpha}r_{,n}) \quad (A.6)$$

$$T_{3\alpha} = \frac{-1}{8\pi} \left\{ [2(1+\nu)\ln z + (1+8F_3) + (3+8F_3)\nu] n_\alpha + 2(1-\nu)r_{,\alpha}r_{,n} \right\} \quad (A.7)$$

$$T_{33} = \frac{-1}{2\pi r} r_{,n} \quad (A.8)$$

### A.4 Tensores derivados

As expressões (A.9) a (A.14) a seguir apresentam as derivadas de todas as componentes dos tensores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{T}$ , que possuem dimensão  $3 \times 3$ . Entretanto, os tensores  $\bar{\mathbf{U}}$ ,  $\bar{\mathbf{T}}$ ,  $\hat{\mathbf{U}}$  e  $\bar{\bar{\mathbf{U}}}$  são tensores  $3 \times 2$ ,  $2 \times 3$  ou  $2 \times 2$  e então apenas algumas das componentes abaixo são utilizadas. As equações (3.49), (3.63), (3.64) e (3.65) esclarecem quais componentes devem

ser consideradas em cada caso. Todas as derivadas estão calculadas em relação ao ponto campo  $Q$ .

#### A.4.1 Derivadas primeiras de U

$$U_{\alpha 3, \beta} = \frac{1}{8\pi D} \left[ (2 \ln z + 1 + 8F_3) \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (A.9)$$

$$U_{3\alpha, \beta} = -U_{\alpha 3, \beta} \quad (A.10)$$

$$U_{33, \alpha} = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)z^2} \left[ z^2(1-\nu)(8F_3 + 2 \ln z + 1) - 8 \right] r r_{,\alpha} \quad (A.11)$$

#### A.4.2 Derivadas primeiras de T

$$T_{3\alpha, \beta} = \frac{-(1-\nu)}{4\pi r} \left[ r_{,\alpha} n_{\beta} + r_{,n} \delta_{\alpha\beta} + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} r_{,\beta} n_{\alpha} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} \right] \quad (A.12)$$

$$T_{33, \alpha} = \frac{-1}{2\pi r^2} (n_{,\alpha} - 2r_{,\alpha} r_{,n}) \quad (A.13)$$

#### A.4.3 Derivadas segundas de U

$$U_{33, \alpha\beta} = \frac{1}{2\pi D} \left\{ \frac{-2(\delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta})}{(1-\nu)z^2} + 2F_3 \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \left[ (2 \ln z + 1) \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \right\} \quad (A.14)$$



## A.5 Tensores envolvidos nos termos de carregamento

Os tensores utilizados nos termos de carregamento são o tensor  $\mathbf{U}$  e suas derivadas. O tensor  $\hat{\hat{\mathbf{U}}}$  pode ser obtido diretamente das expressões (A.9) a (A.11), como indica a equação (3.51). Para carregamentos uniformemente distribuídos, as integrais dos termos de carregamento podem ser convertidas para o contorno, de acordo com o que foi descrito no capítulo três. Neste caso, é feito uso do tensor  $\mathbf{V}$  que utiliza componentes de  $\mathbf{U}$  conforme a equação (3.54), e também do tensor  $\mathbf{Y}$ , dado a seguir.

### A.5.1 Tensor $\mathbf{Y}$

$$Y_{\alpha\beta} = \frac{r^2}{32\pi D} \left\{ \left( 4F_3 - \frac{1}{4} \right) (2r_{,\alpha} r_{,\beta} + \delta_{\alpha\beta}) + \left[ r_{,\alpha} r_{,\beta} (2 \ln z + 1) + \ln z \delta_{\alpha\beta} \right] \right\} \quad (\text{A.15})$$

$$Y_{3\alpha} = \frac{r r_{,\alpha}}{8\pi D \lambda^2} \left[ \frac{-2}{(1-\nu)} (2 \ln z - 1) + F_3 z^2 + \frac{z^2}{16} (4 \ln z - 1) + \right. \\ \left. - \frac{2(3-\nu)}{(1-\nu)} (4F_3 + 1) + 2F_6 \right] \quad (\text{A.16})$$

# Diferenciação de Integrais com Núcleos Singulares

## B.1 Introdução

Como descrito no capítulo três, a obtenção das equações integrais para as derivadas do deslocamento transversal, utilizadas na formulação integral do problema de estabilidade, são obtidas mediante diferenciação em relação às coordenadas  $x_\alpha$  de uma das identidades de Somigliana. Especificamente, é necessário diferenciar a terceira das equações (3.59), originando as relações (3.60). Sob a condição de que as derivadas são tomadas com referência ao ponto campo  $Q$ , é possível diferenciar todos os termos de (3.59), porque estes serão no máximo quase singulares. Entretanto, em pontos internos o último termo à direita de (3.59) é singular quando  $P \equiv Q$ . Este fato impede que esta diferenciação seja realizada da maneira usual. Quando se diferencia uma integral singular, deve-se fazer uso do conceito originalmente proposto por Mikhlin (Mikhlin [1962], Bui [1978]), através da aplicação da fórmula de Leibnitz (Sokolnikoff e Redheffer [1958]), pois os limites de integração dependem da variável segundo a qual se está integrando.

Este apêndice mostra o desenvolvimento formal para obtenção da equação (3.61). Seguindo o descrito em Brebbia *et alli* [1984], obtém-se as equações integrais para as derivadas do deslocamento transversal em relação a dois eixos coordenados. O desenvolvimento aqui descrito leva ao aparecimento de um termo adicional, chamado termo convectivo ou termo livre (Bui [1978]).

## B.2 Desenvolvimento

Sejam as equações integrais (3.59) definidas sobre pontos internos:

$$\mathbf{u}(P) + \int_{\Gamma} \mathbf{T}(q, P) \mathbf{u}(q) d\Gamma_q = \int_{\Gamma} \mathbf{U}(q, P) \mathbf{t}(q) d\Gamma_q - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{U}}(Q, P) \mathbf{N}(Q) \bar{\mathbf{w}}(Q) d\Omega_Q \quad . \quad (B.1)$$

Como citado acima, todas as integrais de (B.1) podem ser diferenciadas diretamente sob o sinal de integração, com exceção da última à direita, que pode ser reescrita (Brebbia *et alli* [1984]):

$$V_i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} U_{i3,\alpha}(Q, P) M_\alpha(Q) d\Omega_Q \quad , \quad (B.2)$$

onde

$$M_\alpha(Q) = N_{\alpha\beta}(Q) u_{3,\beta}(Q) \quad , \quad (B.3)$$

que corresponde ao acoplamento flexão-membrana. Na equação (B.2),  $\Omega_\epsilon$  é um círculo de raio  $\epsilon$  centrado em  $P$ , com contorno  $\bar{\Gamma}_\epsilon$ . Para diferenciar (B.2) em relação às coordenadas  $x_\alpha$  deve-se então proceder:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} U_{i3,\alpha}(Q, P) M_\alpha(Q) d\Omega_Q \right) \quad . \quad (B.4)$$

Definindo-se um sistema de coordenadas polar  $(\bar{r}, \bar{\theta})$  centrado na origem  $P \equiv o$ , como ilustrado na figura B.1, reescreve-se  $U_{i3,\alpha}$  na forma (apenas as parcelas singulares do tensor  $U_{i3,\alpha}$  devem ser consideradas) :

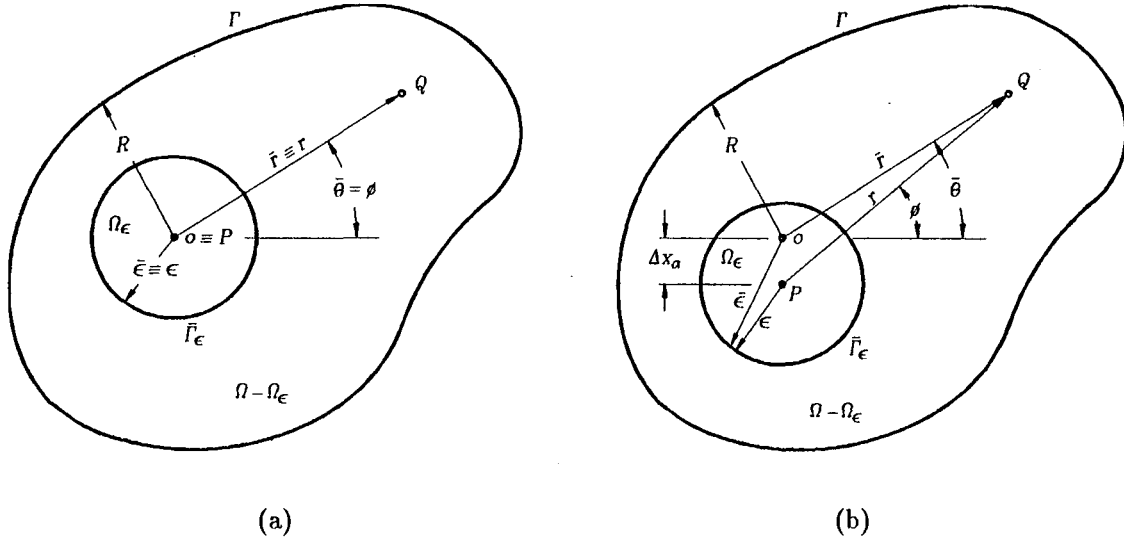
$$U_{i3,\alpha} = \frac{1}{r(\bar{r}, \bar{\theta})} \Lambda_{i3,\alpha}(\phi) \quad . \quad (B.5)$$

A figura B.1.a mostra que  $r(\bar{r}, \bar{\theta}) = \bar{r}$  e  $\phi(\bar{r}, \bar{\theta}) = \bar{\theta}$ . Entretanto, se o ponto carga  $P$  se move um incremento  $\Delta x_\alpha$ , em coordenadas cartesianas,  $r$  e  $\phi$  tornam-se diferentes de  $\bar{r}$  e  $\bar{\theta}$  e o contorno  $\bar{\Gamma}_\epsilon$  também é alterado. Isto indica a dependência de  $\bar{\Gamma}_\epsilon$  da posição do ponto carga. No sistema de coordenadas polar, a equação (B.4) é reescrita:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} = \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \int_{\bar{\epsilon}}^{R(\bar{\theta})} \frac{\Lambda_{i3,\alpha}(\phi)}{r} M_\alpha(Q) \bar{r} d\bar{r} \right) d\bar{\theta} \quad . \quad (B.6)$$

Note-se que na equação (B.6) os limites de integração dependem das variáveis segundo a qual se está integrando. Quando isto acontece, deve-se recorrer à fórmula de Leibnitz (Sokolnikoff e Redheffer [1958]):

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx - f(\phi_1, \alpha) \frac{d\phi_1}{d\alpha} + f(\phi_2, \alpha) \frac{d\phi_2}{d\alpha} \quad (B.7)$$



**Figura B.1 :** Definição do contorno  $\bar{\Gamma}_\epsilon$  em torno do ponto fonte. (a) Configuração inicial. (b) Efeito de um incremento  $\Delta x_\gamma$  aplicado às coordenadas do ponto fonte.

Na forma como (B.6) está escrita, é possível aplicar diretamente (B.7) ao termo entre parênteses, o que leva a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \int_{\bar{\epsilon}}^{R(\bar{\theta})} \frac{\Lambda_{i3,\alpha}(\phi)}{r} M_\alpha(Q) \bar{r} d\bar{r} &= \int_{\bar{\epsilon}}^{R(\bar{\theta})} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \frac{\Lambda_{i3,\alpha}(\phi)}{r} \right) M_\alpha(Q) \bar{r} d\bar{r} + \\ &- \frac{\Lambda_{i3,\alpha}(\phi)}{r(\bar{\epsilon}, \theta)} M_\alpha(P) \bar{\epsilon} \frac{d\bar{\epsilon}}{dx_\gamma} + \frac{\Lambda_{i3,\alpha}(\phi)}{r(R, \theta)} M_\alpha(P) R \frac{dR}{dx_\gamma} \quad (B.8) \end{aligned}$$

Como a origem do sistema de coordenadas está sobre o ponto fonte  $P$  antes da aplicação do incremento  $\Delta x_\alpha$ , e ali permanece após este incremento, apenas  $\epsilon$  muda com  $x_\alpha$ , enquanto  $R$  não. Por isto o último termo à direita de (B.8) se anula. Assim, (B.6) é reescrita:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} = & \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_\epsilon^{R(\phi)} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \frac{\Lambda_{i3,\alpha}(\phi)}{r} \right) M_\alpha(Q) r dr \right] d\phi + \\ & - M_\alpha(P) \int_0^{2\pi} \Lambda_{i3,\alpha}(\phi) \cos(r, x_\gamma) d\phi \quad , \end{aligned} \quad (B.9)$$

onde foi levado em consideração que se  $P \equiv o$ ,  $r(\bar{\epsilon}, \bar{\theta}) = \epsilon = \bar{\epsilon}$ .

Resta agora verificar a existência da primeira integral do lado direito de (B.9). Para isto, reescreve-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_\epsilon^R \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \frac{\Lambda_{i3,\alpha}(\phi)}{r} \right) M_\alpha(Q) r dr \right] d\phi = \\ & = \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_\epsilon^R r^2 \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \frac{\Lambda_{i3,\alpha}(\phi)}{r} \right) M_\alpha(Q) \frac{1}{r} dr \right] d\phi \quad . \end{aligned} \quad (B.10)$$

Chamando:

$$\bar{\Lambda}_{i3,\alpha\gamma}(\phi) = r^2 \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \frac{\Lambda_{i3,\alpha}(\phi)}{r} \right) \quad , \quad (B.11)$$

e somando e subtraindo o termo

$$\int_\theta^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_\theta^R \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \frac{\Lambda_{i3,\alpha}(\phi)}{r} \right) M_\alpha(P) r dr \right] d\phi \quad ,$$

na equação (B.10), vem:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_\epsilon^R \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \frac{\Lambda_{i3,\alpha}(\phi)}{r} \right) M_\alpha(Q) r dr \right] d\phi = \\ & = \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \bar{\Lambda}_{i3,\alpha\gamma}(\phi) \int_\epsilon^R [M_\alpha(Q) - M_\alpha(P)] \frac{1}{r} dr \right\} d\phi + \\ & + M_\alpha(P) \int_0^{2\pi} \bar{\Lambda}_{i3,\alpha\gamma}(\phi) \ln(R) d\phi - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ M_\alpha(P) \ln(\epsilon) \int_0^{2\pi} \bar{\Lambda}_{i3,\alpha\gamma}(\phi) d\phi \right] \quad . \end{aligned} \quad (B.12)$$

As integrais da equação (B.12) são todas limitadas, desde que o acoplamento flexão membrana satisfaça a condição de Hölder em  $P$ , isto é (Brebbia *et alli* [1984]):

$$\|M_\alpha(Q) - M_\alpha(P)\| \leq Ar^\alpha \quad , \quad (B.13)$$

onde  $A$  e  $\alpha$  são constantes positivas. O tensor  $\bar{A}_{i3,\alpha m}$  satisfaz a propriedade

$$\int_0^{2\pi} \bar{A}_{i3,\alpha\gamma}(\phi) d\phi = 0 \quad , \quad (B.14)$$

e por isso o último termo à direita de (B.12) é nulo. As duas primeiras integrais do lado direito de (B.12) são convergentes pois:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \bar{A}_{i3,\alpha m}(\phi) \int_\epsilon^R \frac{Ar^\alpha}{r} dr \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{Ar^{\alpha+2}}{\alpha-1} \ln(r) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left( \frac{A_{i3,\alpha}}{r} \right) \right]_\epsilon^R < \infty \quad , \quad (B.15)$$

e a segunda se anula devido à equação (B.14), o que completa a demonstração.

Agora  $\partial V_i / \partial x_\gamma$ , equação (B.9) pode ser reescrito novamente em coordenadas retangulares:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_\gamma} = - \int_\Omega \frac{\partial U_{i3,\alpha}(Q,P)}{\partial x_\gamma} N_{\alpha\beta}(Q) u_{3,\beta}(Q) d\Omega_Q - N_{\alpha\beta}(P) u_{3,\beta}(P) \int_{\Gamma'_1} U_{i3,\alpha} r_{,\gamma} d\Gamma' \quad (B.16)$$

onde a primeira integral deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy (Brebba *et alli* [1984]). Note-se que o sinal negativo foi adicionado à primeira integral de (B.16), pois a derivada está sendo tomada em relação ao ponto carga.  $\Gamma'_1$  é definido por uma circunferência de raio unitário centrada em  $P$  e  $r_{,\gamma}$  é a derivada de  $r$  em relação às coordenadas do ponto campo. A segunda integral do lado direito da equação (B.16) é a chamada parcela convectiva, porque aparece de uma alteração da posição do ponto  $P$ .

No presente trabalho, é necessário desenvolver o segundo termo à direita de (B.16) para  $i = 3$ , pois são utilizadas apenas as derivadas cartesianas do deslocamento transversal.

Como a normal exterior de  $\Gamma'_1$  aponta para o centro do círculo, tem-se:

$$r_{,\alpha} = -n_\alpha \quad . \quad (B.17)$$

Assim, pode-se escrever o termo convectivo como:

$$\mathbf{c}_t(P) = N_{\alpha\beta}(P) \int_{\Gamma'_1} U_{33,\alpha}^s r_{,\gamma} d\Gamma' = -N_{\alpha\beta}(P) \int_{\Gamma'_1} U_{33,\alpha}^s n_\gamma d\Gamma' \quad , \quad (B.18)$$

onde  $U_{33,\alpha}^s$  contém apenas a parcela singular do tensor  $U_{33,\alpha}$  (ver equações (A.9)), tendo em vista que as parcelas regulares e fracamente singulares não originam qualquer contribuição convectiva.

Como

$$U_{33,\alpha}^s = \frac{-1}{\pi D(1-\nu)z^2} r r_{,\alpha} = \frac{-1}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} \frac{r_{,\alpha}}{r} \quad ,$$

(o que valida a representação (B.5) ) e  $d\Gamma = r d\phi$ , então a equação (B.18) é analiticamente definida por:

$$\mathbf{c}_t(P) = \frac{-1}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} \left[ \int_{2\pi}^0 n_\gamma n_\alpha d\phi \right] N_{\gamma\beta}(P) \quad . \quad (B.19)$$

Lembrando, da figura B.1, que  $n_1 = -\cos \phi$ ,  $n_2 = -\sin \phi$  e usando as relações:

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^0 \cos^2 \phi d\phi &= \int_{2\pi}^0 \sin^2 \phi d\phi = -\pi \\ \int_{2\pi}^0 \cos \phi \sin \phi d\phi &= 0 \quad , \end{aligned}$$

obtém-se, levando em conta o sinal do último termo à direita de de (B.16):

$$\mathbf{c}_{t\alpha\beta}(P) = \frac{-N_{\alpha\beta}(P)}{D(1-\nu)\lambda^2} \quad . \quad (B.20)$$

Assim, a matriz de acoplamento flexão membrana é obtida através da adição de (B.20), conio termo não integral, à matriz  $\hat{\mathbf{E}}_r$  dada pela equação (4.38). Esta operação deve ser realizada apenas no caso singular  $P \equiv Q$ . Destaque-se que (B.20) está de acordo com o termo convectivo obtido por Xiao-Yan *et alli* [1990].

A rigor, o mesmo procedimento aqui desenvolvido deveria ser aplicado para as integrais de (B.1) definidas sobre  $\Gamma$ , mas o cálculo das derivadas do deslocamento transversal é necessário apenas em pontos internos, quando da utilização de células constantes. Para o cálculo das derivadas do deslocamento transversal em pontos sobre o contorno da placa (o que ocorreria se fossem utilizados células bilineares ou biquadráticas) seria possível abrir mão de outras alternativas, como diferenças finitas ou elementos finitos. Entretanto, fatalmente seriam necessários procedimentos de integração hipersingulares.

## Transformação Cúbica dos Pontos de Integração

### C.1 Introdução

De acordo com o que foi descrito no capítulo quatro, existem diversos procedimentos de integração numérica para núcleos fracamente singulares e quase singulares. O procedimento efetivamente utilizado na implementação numérica do presente trabalho foi a transformação de coordenadas proposta por Telles [1987] para integração destes núcleos. Trata-se de uma transformação de coordenadas baseada em um polinômio cúbico, que provoca uma migração dos pontos de integração de Gauss-Legendre em direção ao ponto singular. A vantagem deste método está no fato de não exigir isolamento da singularidade e ser aplicável diretamente no domínio normalizado, o que facilita sua implementação para quaisquer graus de funções de interpolação. além disso, é de aplicação imediata para integrais quase singulares.

Este apêndice detalha esta transformação para integração de elementos de contorno e células de domínio singulares ou quase singulares, baseado no trabalho original de Telles [1987].

### C.2 Desenvolvimento

Seja a integral unidimensional:

$$I_{\Gamma} = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \quad , \quad (C.1)$$

que possui singularidade fraca no ponto  $\bar{\xi}$ . De acordo como a equação (4.49), a utilização de quadratura de Gauss-Legendre com  $K$  pontos de integração fornece:



$$I_T = \sum_{i=1}^K f(\xi_i) w_i \quad , \quad (C.2)$$

onde  $\xi_i$  e  $w_i$  são os pontos de integração e os respectivos pesos. Então, é possível utilizar uma transformação de coordenadas baseada no seguinte polinômio (Telles [1987]):

$$\xi(\gamma) = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \quad , \quad (C.3)$$

onde as constantes são determinadas pelas condições:

$$\left. \frac{d\xi}{d\gamma} \right|_{\bar{\xi}} = 0 \quad (C.4.a)$$

$$\left. \frac{d^2\xi}{d\gamma^2} \right|_{\bar{\xi}} = 0 \quad (C.4.b)$$

$$\xi(1) = 1 \quad (C.4.c)$$

$$\xi(-1) = -1 \quad (C.4.d)$$

As condições (C.4) garantem que os pontos de integração transformados permanecem dentro do intervalo de integração. Adicionalmente, o Jacobiano da transformação se anula e é mínimo no ponto singular. Isto leva a:

$$a = \frac{1}{Q} \quad (C.5.a)$$

$$b = \frac{-3\bar{\gamma}}{Q} \quad (C.5.b)$$

$$c = \frac{3\bar{\gamma}^2}{Q} \quad (C.5.c)$$

$$d = -b \quad (C.5.d)$$

onde

$$Q = 1 + 3\bar{\gamma}^2 \quad , \quad (C.6)$$

e  $\bar{\gamma}$  é o valor tal que  $\xi(\bar{\gamma}) = \bar{\xi}$ , sendo dado por (Telles [1987]):

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{[\bar{\xi}(\bar{\xi}^2 - 1) + |\bar{\xi}^2 - 1|]} + \sqrt[3]{[\bar{\xi}(\bar{\xi}^2 - 1) - |\bar{\xi}^2 - 1|]} + \bar{\xi} \quad . \quad (C.7)$$

Assim, basta aplicar a transformação (C.3) com as constantes (C.5) à equação (C.1), o que fornece (Westphal Jr. [1990a]):

$$I_{\Gamma} = \int_{-1}^{+1} f \left[ \frac{(\gamma - \bar{\gamma})^3}{1 + 3\bar{\gamma}^2} + \bar{\xi} \right] \frac{3(\gamma - \bar{\gamma})^2}{1 + 3\bar{\gamma}^2} d\gamma \quad . \quad (C.8)$$

No caso de integrais bidimensionais ou tridimensionais, aplica-se a transformação (C.3) em cada direção do domínio normalizado.

Para integrais quase singulares,  $\bar{\xi} \notin [-1, +1]$  (figura C.1), e portanto não há mais necessidade do Jacobiano da transformação se anular no ponto singular. Então, pode-se estipular (Telles [1987]):

$$J(\bar{\gamma}) = \left. \frac{d\xi}{d\gamma} \right|_{\bar{\xi}} = \bar{r} \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1 \quad , \quad (C.9)$$

com  $\bar{r} = \bar{r}(D)$  , onde  $D$  é a menor distância euclidiana do ponto singular até o elemento que está sendo integrado (ver figura C.1). Assim obtém-se:

$$a = \frac{1 - \bar{r}}{Q} \quad (C.10.a)$$

$$b = \frac{-3(1 - \bar{r})\bar{\gamma}}{Q} \quad (C.10.b)$$

$$c = \frac{\bar{r} + 3\bar{\gamma}^2}{Q} \quad (C.10.c)$$

$$d = -b \quad (C.10.d)$$

onde

$$Q = 1 + 3\bar{\gamma}^2 \quad , \quad (C.11)$$

e

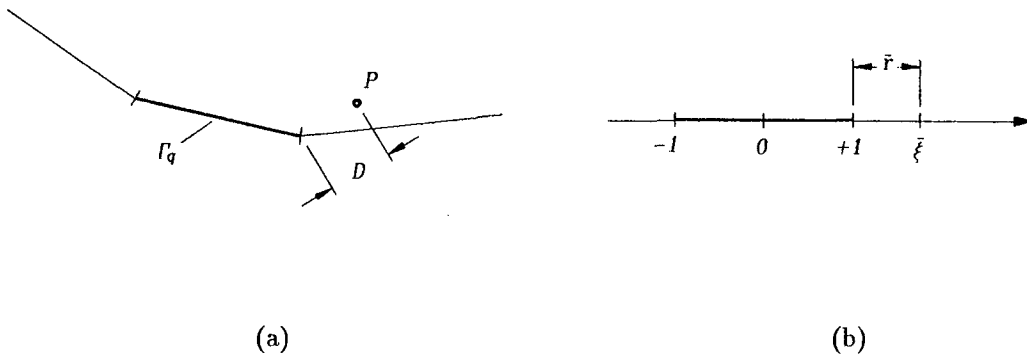
$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} + \frac{\bar{\xi}}{1 + 2\bar{r}} \quad , \quad (C.12)$$

com

$$q = \frac{1}{2(1+2\bar{r})} \left[ \left( \bar{\xi}(3-2\bar{r}) - \frac{2\bar{\xi}^3}{1+2\bar{r}} \right) \frac{1}{1+2\bar{r}} - \bar{\xi} \right] \quad (C.13.a)$$

$$p = \frac{1}{3(1+2\bar{r})^2} [(4\bar{r}(1-\bar{r}) + 3(1-\bar{\xi}^2))] \quad (C.13.b)$$

Assim, se  $\bar{r} = 1$  a transformação não tem qualquer efeito.



**Figura C.1 :** Um elemento de contorno quase singular. (a) Domínio real. (b) Domínio normalizado.

Para se obter uma relação entre  $\bar{r}$  e  $D$  deve-se achar uma função  $\bar{r} = \bar{r}(D)$  tal que o erro de integração seja mínimo no sentido dos mínimos quadrados. Seja um valor  $D$ , um número de pontos de integração  $K$  e  $\bar{\xi}$  conhecido. É possível definir o erro de integração  $\epsilon$ , para a integração em uma direção, como (Telles [1987]):

$$\epsilon(D, \bar{\xi}, K, \bar{r}) = \sum_{i=1}^K \left( \frac{J_i}{r_i^\alpha} w_i \right) - I_\Gamma \quad , \quad (C.14)$$

onde  $I_\Gamma = \int_{-1}^{+1} 1/r^\alpha d\xi$  é calculado analiticamente. Telles [1987] realizou esta análise para  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 2$ , e propôs as seguintes relações para problemas de elasticidade tridimensional:

$$\bar{r} = 0.85 + 0.24 \ln(D) \quad 0.05 \leq D \leq 1.30 \quad (C.15.a)$$

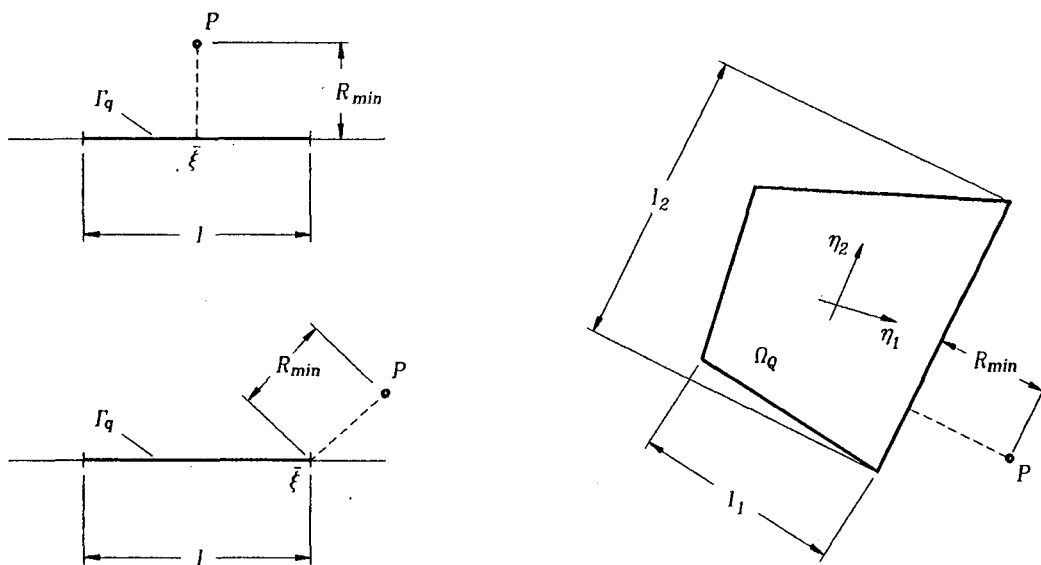
$$\bar{r} = 0.893 + 0.0832 \ln(D) \quad 1.30 \leq D \leq 3.618 \quad (C.15.b)$$

$$\bar{r} = 1 \quad 3.618 \leq D \quad (C.15.c)$$

No presente trabalho, substituiu-se  $D$  por um parâmetro  $\bar{D}$ , calculado por:

$$\bar{D} = \frac{2R_{min}}{l} \quad , \quad (C.16)$$

sendo  $R_{min}$  a menor distância do ponto fonte até o elemento que está sendo integrado. A variável  $l$  representa o comprimento do elemento de contorno. Para integração de células de domínio, a equação (C.16) deve ser aplicada em cada direção do domínio normalizado. Neste caso,  $l$  representa o comprimento dos lados mais próximos ao ponto singular, correspondentes a cada direção do domínio normalizado. Em ambos os casos,  $R_{min}$  e  $l$  são calculados no domínio real. A figura C.2 esclarece algumas das possibilidades.



**Figura C.2 :** Representação das variáveis  $R_{min}$  e  $l$  usadas pela equação (C.16).

## Imposição de Movimentos de Corpo Rígido

### D.1 Introdução

Este apêndice apresenta a técnica de imposição de movimentos arbitrários de corpo rígido, para cômputo das submatrizes da diagonal principal da matriz  $\mathbf{H}$ , as matrizes  $\hat{\mathbf{H}}_n$  dadas pela segunda das equações (4.26).

Deve-se salientar que este procedimento, comum no MEC, é aqui aplicado à formulação de placas, que difere dos procedimentos similares utilizados para elasticidade bi ou tridimensional porque nestes os deslocamentos são puramente translacionais. Os problemas de flexão de placas lidam com deslocamentos generalizados, de forma que um deslocamento generalizado imposto pode provocar também deslocamentos em uma outra direção generalizada.

### D.2 Desenvolvimento

Seja uma placa submetida a um deslocamento arbitrário de corpo rígido dado por um vetor  $A_i$  (a figura D.1 ilustra uma rotação de corpo rígido em torno do eixo  $x_2$ ). Então:

$${}^J u_i(p) = A_i(p) \quad . \quad (D.1)$$

Como um deslocamento de corpo rígido não provoca deformações, a equação (2.5.c) fornece:

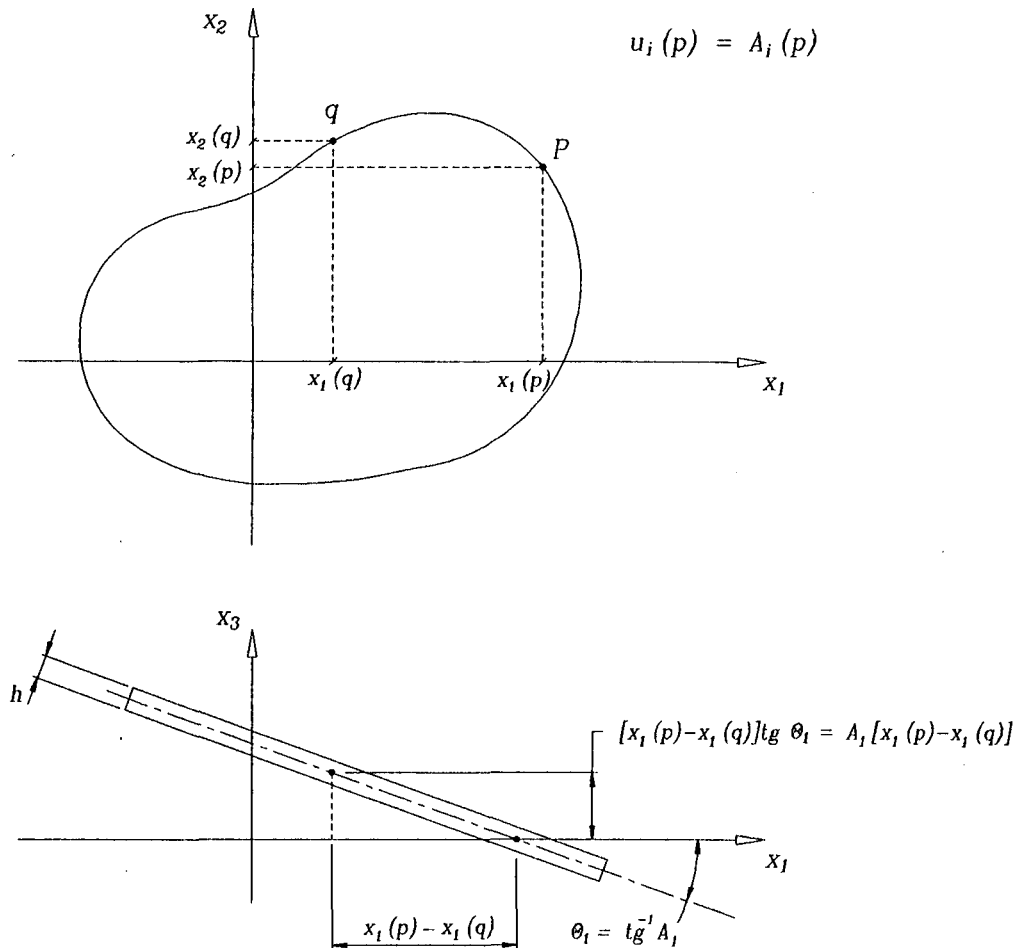
$$\gamma_{\alpha 3} = \psi_\alpha + u_{3,\alpha} = 0 \quad . \quad (D.2)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &= -u_{3,\alpha} = A_\alpha \\ u_{3,\alpha} &= -A_\alpha \quad , \end{aligned}$$

e conseqüentemente:

$$\theta_\alpha = \tan^{-1}(-A_\alpha) \quad . \quad (D.3)$$



**Figura D.1 :** Configuração geométrica de uma placa submetida a um deslocamento de corpo rígido.

Assim, o exemplo ilustrado na figura D.1 define um deslocamento generalizado correspondente à direção  $e_1$  por:

$$f_{\mathbf{u}^1} = \left\{ \begin{array}{l} A_1 \\ 0 \\ A_1[x_1(p) - x_1(q)] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{relativo a } \psi_1 \\ \longrightarrow \text{relativo a } \psi_2 \\ \longrightarrow \text{relativo a } w \end{array} \quad (D.4)$$

Repetindo o mesmo procedimento para os três deslocamentos generalizados de placa, obtém-se (Barcellos e Westphal Jr. [1992]):

$$f_{\mathbf{u}^1} = A_1 \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ x_1(p) - x_1(q) \end{array} \right\} \quad (D.5.a)$$

$$f_{\mathbf{u}^2} = A_2 \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ x_2(p) - x_2(q) \end{array} \right\} \quad (D.5.b)$$

$$f_{\mathbf{u}^3} = A_3 \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} \quad (D.5.c)$$

Considerando agora que os deslocamentos  $A_i$  são impostos independentemente, pode-se escrever:

$$u_i(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1(p) - x_1(q) & x_2(p) - x_2(q) & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right\} \quad (D.6)$$

ou

$$u_i(q) = D_{ij}(q, p) A_j(p) \quad (D.7)$$

A expressão (D.7) mostra que :

$$u_i(p) = I_{ij} A_j(p) \quad , \quad (D.8)$$

porque  $x_\alpha(p) - x_\alpha(p) = 0$ . Portanto, aplicando-se deslocamentos generalizados  $\hat{u}_i$ , representando a aplicação de movimentos de corpo rígido, é possível escrever as equações integrais (3.57) como :

$$C_{ij}(p) \hat{u}_j(p) + \int_{\Gamma} T_{ij}(q, p) \hat{u}_j(q) d\Gamma_q = 0 \quad , \quad (D.9)$$

já que, neste caso, as trações sobre o contorno e os autovalores são nulos. Então, de (D.8):

$$C_{ij}(p)I_{jk}A_k(p) + \int_{\Gamma} T_{ij}(q,p)D_{jk}(q,p)A_k(p) d\Gamma_q = 0 \quad (D.10)$$

$$C_{ij}(p) + \int_{\substack{\Gamma_q \\ q=p}} T_{ij}(q,p) d\Gamma_q = - \int_{\substack{\Gamma_q \\ q \neq p}} T_{ij}(q,p)D_{jk}(q,p) d\Gamma_q \quad , \quad (D.11)$$

o que caracteriza a arbitrariedade de  $\mathbf{A}$ .

A expressão (D.11) define assim o cálculo das submatrizes da diagonal principal de  $\mathbf{H}$ , na forma (Westphal Jr. [1990a]):

$$C_{ij}(p) + \int_{\substack{\Gamma_q \\ q=p}} T_{ij}(q,p) d\Gamma_q = -P_{ki}(p) \int_{\substack{\Gamma_q \\ q \neq p}} T_{kl}(q,p)D_{lj}(q,p) d\Gamma_q = 0 \quad (D.12)$$

Logo:

$$\hat{\mathbf{H}}_n = -P_{ki}(p) \int_{\substack{\Gamma_q \\ q \neq p}} T_{kl}(q,p)D_{lj}(q,p) d\Gamma_q = 0 \quad , \quad (D.13)$$

no sistema de coordenadas do ponto fonte  $p$ .

Vale dizer, no entanto, que o método descrito não garante, *a priori*, bons resultados. Isto fica claro através de uma inspeção da equação (D.13): os termos de  $\hat{\mathbf{H}}$  vão depender diretamente da qualidade da integração dos outros elementos. Além disso, a discretização do modelo influirá sobremaneira, já que também determina, ainda que indiretamente, a qualidade da integração do contorno como um todo. Por outro lado garante sem restrições o equilíbrio da estrutura, o que pode vir a não ocorrer quando da utilização de quadraturas especiais. Finalmente, deve-se destacar que o procedimento aqui descrito não é genérico o suficiente para garantir sua aplicação irrestrita a certas classes de problemas.



## Quadratura para Integrais por Parte Finita

### E.1 Introdução

Este apêndice trata da integração numérica de núcleos fortemente singulares sobre elementos de contorno constantes e lineares unidimensionais, através da quadratura para integrais por parte finita proposta por H. R. Kutt (Kutt [1975a], [1975b], [1975c]). Serão adotados estes elementos porque possuem Jacobiano constante, quando mapeados do domínio real para o domínio normalizado. Assim, de acordo com o que foi descrito no capítulo quatro, fica garantida a condição de que o grau original da singularidade não é modificado por um Jacobiano não-constante. Nada impede, entretanto, a utilização direta do procedimento de integração aqui descrito para elementos quadráticos ou de ordens mais altas, desde que sejam retos. Na realidade, a quadratura aqui apresentada pode ser utilizada para elementos curvos, mas neste caso a integração é realizada sobre um contorno fictício reto, tangente ao contorno original no ponto singular (Guiggiani/Telles [1988]).

No desenvolvimento apresentado a seguir, esta quadratura é adaptada para os elementos citados, e verifica-se que a paridade do núcleo que está sendo integrado pode levar a resultados diferentes. A quadratura proposta por Kutt é aplicável ao intervalo de integração  $[0, 1]$ , e por isto alguns algebrismos são necessários para utilizá-la sobre os domínios normalizados dos elementos de contorno unidimensionais  $[-1, 1]$ .

### E.2 Desenvolvimento

A quadratura proposta por Kutt permite a integração por parte finita de núcleos singulares de forma similar à clássica quadratura gaussiana:

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^\alpha} dt = \sum_{i=1}^K f(t_i)w_i \quad ,$$

onde  $t_i$  e  $w_i$  são os pontos e os respectivos pesos da quadratura, específicos para cada valor de  $\alpha$ . O símbolo  $f$  indica uma integral por parte finita. A utilização de  $K$  pontos de integração permite o cálculo exato da integral, desde que  $f(t)$  seja uma função polinomial de grau máximo  $2K - 1$ . Kutt desenvolveu tais quadraturas para diversos valores de  $\alpha$ , inteiros ou fracionários (Kutt [1975a], [1975b]). Vale destacar que o intervalo de integração é definido por  $[0, 1]$ , estando o pólo singular da função núcleo no ponto  $t = 0$ . No presente trabalho, o interesse é o cálculo das integrais singulares para elementos unidimensionais, e portanto  $\alpha = 1$ . Os valores de  $t_i$  e  $w_i$  podem ser encontrados em Kutt [1975a].

Como anotado por Kutt (Kutt [1975a], [1975b]), as integrais por parte finita não possuem as mesmas propriedades das integrais interpretadas no sentido usual. Segundo estas propriedades, as integrais por parte finita permitem reflexão e translação do intervalo de integração, mas não permitem o escalamento do mesmo. Neste caso, a seguinte expressão deve ser utilizada (Kutt [1975b]):

$$\int_s^b \frac{f(x)}{x-s} dx = \int_0^1 \frac{f[(b-s)t+s]}{t} dt + f(s) \ln |b-s| \quad . \quad (E.1)$$

Com vistas à aplicação no MEC será considerado, em primeiro lugar, um elemento constante geral. No caso singular, este é expresso:

$$I = \int_a^b \frac{f(x)}{x-s} dx \quad , \quad a < s < b \quad , \quad (E.2)$$

onde  $s$  denota a posição da singularidade. Dividindo-se  $I$  em duas integrais por parte finita (Brebbia *et alli* [1984]):

$$I = I' + I'' \quad , \quad (E.3)$$

onde

$$I' = \int_a^s \frac{f(x)}{x-s} dx \quad (E.4.a)$$

$$I'' = \int_s^b \frac{f(x)}{x-s} dx \quad . \quad (E.4.b)$$

É possível agora aplicar diretamente (E.1) a cada uma das expressões (E.4) sem a preocupação, por enquanto, com a paridade do núcleo  $1/(x-s)$ . Assim, obtém-se (Brebbia *et alli* [1984]):

$$I' = - \sum_{i=1}^n f [(a-s)t_i + s] w_i - f(s) \ln |a-s| \quad (E.5.a)$$

$$I'' = \sum_{i=1}^n f [(b-s)t_i + s] w_i + f(s) \ln |b-s| \quad (E.5.b)$$

Como os pontos de integração da quadratura de Kutt são válidos para um intervalo normalizado  $t = [0, 1]$ , e a utilização de elementos isoparamétricos mapeia um elemento de comprimento  $l$  para um domínio normalizado definido por  $\xi = [-1, 1]$ , é possível a adoção de dois procedimentos idênticos, detalhados a seguir.

No primeiro caso, seja a integral do elemento singular definida no domínio real (dora-vante o símbolo  $f$  não será mais utilizado):

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{f(x)}{x} dx \quad , \quad (E.6)$$

ou  $I = I' + I''$ , onde

$$I' = \int_{-l/2}^0 \frac{f(x)}{x} dx \quad (E.7.a)$$

$$I'' = \int_0^{l/2} \frac{f(x)}{x} dx \quad (E.7.b)$$

Então, aplicando-se (E.5.a) e (E.5.b) diretamente vem:

$$I' = - \sum_{i=1}^n f \left( \frac{-l}{2} t_i \right) w_i - f(0) \ln \left| \frac{l}{2} \right| \quad (E.8.a)$$

$$I'' = \sum_{i=1}^n f \left( \frac{l}{2} t_i \right) w_i + f(0) \ln \left| \frac{l}{2} \right| \quad (E.8.b)$$

Deste modo, (E.6) é calculada diretamente no domínio real por:

$$I = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ f\left(\frac{l}{2} t_i\right) - f\left(\frac{-l}{2} t_i\right) \right] w_i \right. \quad (E.9)$$

Para o segundo caso, considera-se a integral já mapeada para o domínio normalizado, isto é, após a utilização das funções de interpolação:

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{f\left(\frac{l}{2} \xi\right)}{\xi} d\xi \quad , \quad (E.10)$$

onde, neste caso:

$$I' = \int_{-1}^0 \frac{f\left(\frac{l}{2} \xi\right)}{\xi} d\xi \quad (E.11.a)$$

$$I'' = \int_0^{+1} \frac{f\left(\frac{l}{2} \xi\right)}{\xi} d\xi \quad (E.11.b)$$

obtendo-se assim as expressões

$$I' = - \sum_{i=1}^n f\left(\frac{-l}{2} t_i\right) w_i \quad (E.12.a)$$

$$I'' = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{l}{2} t_i\right) w_i \quad , \quad (E.12.a)$$

ou

$$I = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ f\left(\frac{l}{2} t_i\right) - f\left(\frac{-l}{2} t_i\right) \right] w_i \right. \quad , \quad (E.13)$$

que é idêntica à expressão (E.9).

Assim, tanto a expressão (E.9) quanto a (E.13) poderiam ser utilizadas para integração de elementos de contorno unidimensionais constantes, no caso singular, utilizando-se os pontos e pesos determinados por Kutt (Kutt [1975a]). Entretanto, um importante aspecto deve ser salientado: na grande maioria dos códigos computacionais implementados, os elementos constantes são na realidade subparamétricos, isto é, as funções de interpolação utilizadas para as variáveis são unitárias (um único nó físico), enquanto as funções de interpolação utilizadas para a geometria são lineares (dois nós geométricos). Deste modo, os sinais negativos de (E.13) devem ser interpretados com algum cuidado. O sinal negativo

no argumento da função núcleo  $f$  se refere ao espelhamento de um intervalo de integração  $[-1, 0]$  em relação à origem, enquanto o sinal negativo da subtração dos termos entre colchetes se refere à troca de variáveis. Isto é plenamente válido para uma variável de integração ( $x$ , no domínio original) que é positiva em todo o intervalo  $[s, b]$ . No caso dos tensores fundamentais utilizados em elasticidade, o argumento dos núcleos é sempre positivo ( $r = |x|$ ), já que é igual à distância do ponto fonte ao ponto campo (ponto de integração, no caso das quadraturas). Agora, quanto ao argumento da função densidade, este deve ir de  $[-1, 1]$ , no caso normalizado, ou  $[-l/2, l/2]$ , se a integração é realizada diretamente no domínio real, já que as variáveis contidas na função densidade ( $r, r_\alpha$ , etc.) são calculadas utilizando as funções de interpolação lineares padrão. Deste modo, a expressão (E.6) deve ser reescrita da seguinte forma, quando da implementação numérica:

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{f(x)}{|x|} dx = I' + I'' \quad , \quad (E.14)$$

onde

$$I' = \int_{-l/2}^0 \frac{f(x)}{|x|} dx \quad (E.15.a)$$

$$I'' = \int_0^{l/2} \frac{f(x)}{|x|} dx \quad (E.15.b)$$

Como os pontos da quadratura de Kutt são válidos para  $[0, 1]$ , faz-se  $x = \xi l/2$  e obtém-se:

$$I' = \int_{-1}^0 \frac{f(\frac{l}{2}\xi)}{|\xi|} d\xi \quad (E.16.a)$$

$$I'' = \int_0^{+1} \frac{f(\frac{l}{2}\xi)}{|\xi|} d\xi \quad (E.16.b)$$

Trocando-se os limites de  $I'$ :

$$I' = - \int_0^{-1} \frac{f(\frac{l}{2}\xi)}{|\xi|} d\xi \quad ,$$

e fazendo a troca de variáveis  $\xi = -\xi$  vem:

$$I' = \int_0^1 \frac{f\left(\frac{-l}{2}\xi\right)}{|\xi|} d\xi \quad . \quad (E.17)$$

E finalmente (E.16.b) e (E.17) definem a quadratura na forma:

$$I = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ f\left(\frac{l}{2}t_i\right) + f\left(\frac{-l}{2}t_i\right) \right] w_i \right\} \quad , \quad (E.18)$$

e observe-se a diferença entre (E.13) e (E.18).

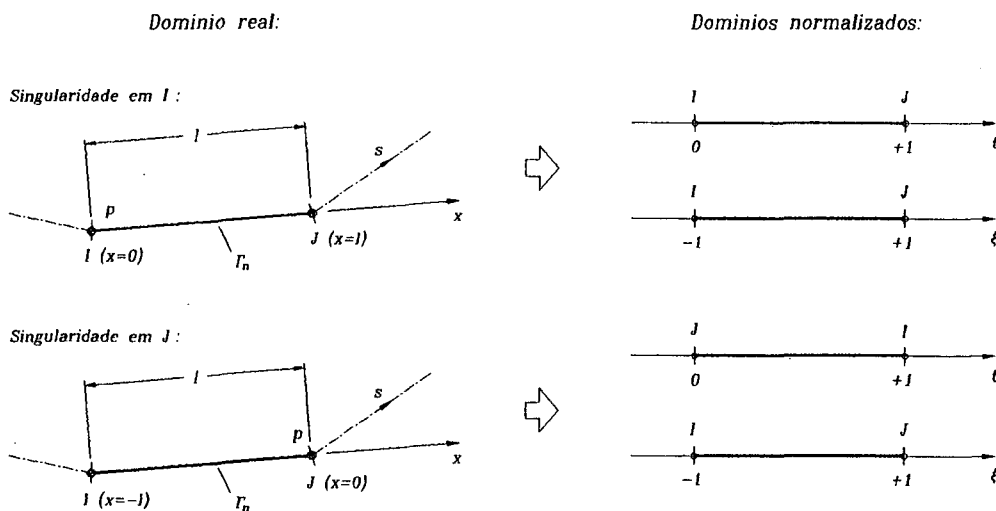
Por último, é oportuno salientar que as quadraturas expressas por (E.9) ou (E.13) permanecem válidas se, e somente se, as funções que mapeiam a geometria o fizerem para um intervalo normalizado  $[0, 1]$ , onde o ponto  $x = 0$  é o nó singular. Mas este seria o caso apenas no elemento linear, pois a singularidade do elemento constante está sempre sobre seu comprimento médio. Entretanto, as expressões citadas ainda permanecem válidas se forem utilizados subelementos lineares para mapear cada metade do elemento constante. Eventuais simplificações podem ser feitas sobre (E.13) e (E.18) se for conhecida a paridade da função densidade  $f(x)$ .

A partir daqui será analisado, como segundo caso, o elemento linear. Alguns dos algebrismos utilizados para o elemento constante serão igualmente aqui empregados. Como fundamental diferença dos algebrismos apresentados a seguir, em relação aos realizados com o elementos constante, está o fato do elementos linear ser realmente isoparamétrico e, portanto, a singularidade sempre estará sobre um dos seus nós físicos (suas extremidades).

Seja um elemento linear  $\Gamma_n$ , limitado pelos nós  $I$  e  $J$  nesta ordem, quando se segue o sentido de integração  $s$  (figura E.1). Com vistas à implementação numérica, serão utilizadas aqui basicamente três variáveis, de acordo com o ilustrado na figura E.1:

- $x$  - Variável de integração no domínio real. É orientada sobre o elemento, no mesmo sentido que o da direção de integração  $s$ . Sua origem está situada sobre o nó singular e vai até o comprimento do elemento:  $x = [0, l]$  ou  $x = [-l, 0]$ .
- $t$  - Variável correspondente a um domínio normalizado coincidente com o domínio de integração da quadratura de Kutt. A origem é coincidente com o nó singular:  $t = [0, +1]$ .
- $\xi$  - Variável correspondente a um domínio normalizado coincidente com o domínio de integração da quadratura de Gauss-Legendre. A origem está situada sobre o meio

comprimento do elemento ( $\xi = 0 ; t = 1/2 ; x = l/2$ ). É utilizada para as funções de interpolação padrão ( $\xi = [-1, +1]$ ).



**Figura E.1 :** Correspondência entre as variáveis utilizadas para aplicação da quadratura de Kutt a elementos lineares.

Como o elemento linear possui dois nós, serão analisados cada um dos casos.

- Singularidade sobre o nó I:

Neste caso, podemos aplicar a transformação (E.1) diretamente à equação integral original, ou:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^l \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{f(lt)}{t} dt + f(0) \ln |l| = \\
 &= \int_0^1 \frac{f[\xi(lt)]}{t} dt + f(0) \ln |l| \quad , \quad (E.19)
 \end{aligned}$$

ou

$$I = \sum_{i=1}^n f[\xi(lt_i)] w_i + f(0) \ln |l| \quad , \quad (E.20)$$

com

$$\xi(x) = \frac{2}{l}x - 1 \quad ; \quad \xi(t) = 2t - 1 \quad . \quad (E.21)$$

Note-se que, como a variável de integração original  $x$  é positiva sobre todo o domínio, não há necessidade alguma de considerar o módulo na função núcleo ( $x \equiv r$ ).

- Singularidade sobre o nó  $J$ :

Com o procedimento padrão, define-se:

$$I = \int_{-l}^0 \frac{f(x)}{x} dx \quad ,$$

ou

$$I = - \int_0^{-l} \frac{f(x)}{x} dx = - \int_0^l \frac{f(-x)}{x} dx \quad . \quad (E.22)$$

Aplicando-se o escalamento, vem:

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^{+1} \frac{f(-lt)}{t} dt - f(0) \ln |l| = \\ &= \int_0^{+1} \frac{-f[\xi(-lt)]}{t} dt - f(0) \ln |l| \quad , \end{aligned} \quad (E.23)$$

ou, numericamente:

$$I = - \sum_{i=1}^n f[\xi(-lt_i)] w_i - f(0) \ln |l| \quad , \quad (E.24)$$

onde

$$\xi(x) = \frac{2}{l}x + 1 \quad . \quad (E.25)$$

Entretanto, neste caso a variável de integração  $x$  não é positiva sobre o intervalo de integração. Então, deve-se reescrever (E.22) na forma a seguir, já que (E.24) não pode ser usada:

$$I = \int_{-l}^0 \frac{f(x)}{|x|} dx = - \int_0^{-l} \frac{f(x)}{|x|} dx = \int_0^l \frac{f(-x)}{|x|} dx \quad . \quad (E.26)$$



E, pelo escalamento:

$$I = \int_0^1 \frac{f(-lt)}{|t|} dt + f(0) \ln |l| \quad (E.27)$$

Assim:

$$I = \sum_{i=1}^n f[\xi(-lt_i)] w_i + f(0) \ln |l| \quad , \quad (E.28)$$

sendo que (E.25) permanece válida.

Efetivamente, são as expressões (E.20) e (E.28) que devem ser utilizadas nos elementos lineares, quando sua geometria for mapeada com funções isoparamétricas válidas para o intervalo  $\xi = [-1, +1]$ .

Finalmente, cabe lembrar que a quadratura aqui descrita calcula o valor principal da integral, e portanto só é aplicável a integrais interpretadas no sentido do valor principal de Cauchy.

## Formas de Cálculo da Matriz [E] no Caso Singular

### F.1. Introdução

As equações (3.60) mostram claramente a influência do acoplamento flexão-membrana no cálculo das derivadas do deslocamento transversal. Esta influência é dada pelos dois últimos termos à direita de (3.60), que podem ser escritos na forma:

$$E_{\alpha\beta}(P) = \int_{\Omega} U_{33,\alpha\gamma}(Q, P) N_{\gamma\beta}(Q) d\Omega_Q + N_{\gamma\beta}(P) \int_{\Gamma'_1} U_{33,\gamma}(Q, P) r_{,\alpha}(P) d\Gamma'_P \quad , \quad (F.1)$$

que são apropriadamente multiplicados pelo fator de carga  $\lambda$  e pelas derivadas do deslocamento transversal  $u_{3,\beta}$ .

Utilizando os resultados do apêndice B, reescreve-se (F.1) como:

$$E_{\alpha\beta}(P) = \int_{\Omega} U_{33,\alpha\gamma}(Q, P) N_{\gamma\beta}(Q) d\Omega_Q - \frac{N_{\alpha\beta}(P)}{D(1-\nu)\lambda^2} \quad , \quad (F.2)$$

sendo que, de acordo com a convenção (4.40), o último termo à direita (termo convectivo) só deve ser considerado caso  $P \equiv Q$ . Quando  $P \neq Q$ , a matriz  $E(P)$  pode ser calculada por quadratura gaussiana (regular) ou com o procedimento descrito no apêndice C (quase singular). Entretanto, quando  $P \equiv Q$ , a integral em  $\Omega$  de (F.2) deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy, pois se torna singular. Uma inspeção ao tensor  $\bar{\bar{U}}$ , equação (A.14), deixa claro que existem singularidades fracas ( $\ln r$ ) e singularidades fortes ( $1/r^2$ ) atuando como núcleos das integrais de (F.2). Como já comentado, o procedimento de Telles (Telles [1987]) pode ser utilizado quando  $P \equiv Q$  para integração de núcleos fracamente singulares ou nos casos quase singulares, e este foi o procedimento efetivamente adotado no código computacional do presente trabalho. Entretanto, não foi implementada qualquer quadratura especial para singularidades fortes em domínios bidimensionais.

Assim sendo, este apêndice trata da integração analítica da parcela fortemente singular do núcleo da integral de (F.2) que, juntamente com o procedimento de Telles aplicado à parcela fracamente singular, resulta um método semi-analítico de integração da matriz **E**. A integração analítica é bastante atrativa quando da utilização de células constantes, devido à simplicidade das mesmas.

A seguir, serão investigados dois procedimentos possíveis para integração de

$$\hat{E}_{\alpha\beta}^s(Q) = \int_{\Omega} U_{33,\alpha\gamma}^s(Q, P) N_{\gamma\beta}(Q) d\Omega_Q \quad , \quad (F.3)$$

onde  $U_{33,\alpha\gamma}^s$  contém apenas a parcela singular do tensor  $U_{33,\alpha\gamma}$ . Isto é:

$$U_{33,\alpha\beta}^s = \frac{-1}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} (\delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha}r_{,\beta}) \frac{1}{r^2} \quad . \quad (F.4)$$

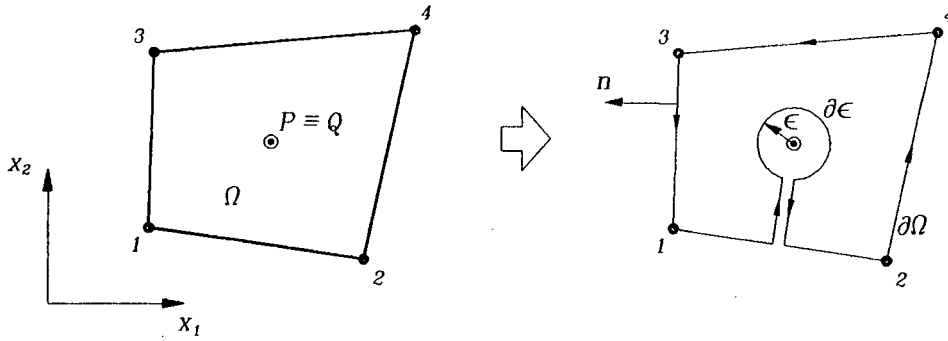
## F.2. Utilização do teorema de Stokes

A fim de regularizar as equações (F.3), será aqui empregada uma forma do teorema de Stokes. Vale lembrar que o ponto de colocação de uma célula constante não se encontra sobre seu centróide. Assim, se existir uma forma de se aplicar o teorema da divergência, de modo a converter uma integral definida sobre uma célula  $\Omega$  para o contorno  $\partial\Omega$  desta célula, então a integral será, no máximo, quase singular.

Deve-se porém realizar tal transformação através de um procedimento de limite, seguindo o caminho de integração ilustrado na figura F.1 .

Assim, as equações (F.3) são transformadas nas integrais de linha:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\alpha\beta}^s(Q) = & \oint_{\partial\Omega} U_{33,\alpha}^s(Q, P) n_{\gamma}(Q) N_{\gamma\beta}(Q) d\partial\Omega + \\ & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial\epsilon} U_{33,\alpha}^s(Q, P) n_{\gamma}(Q) N_{\gamma\beta}(Q) d\partial\epsilon \quad , \end{aligned} \quad (F.5)$$



**Figura F.1 :** Caminho de integração quando da utilização do teorema de Stokes.

onde, das equações (A.11):

$$U_{33,\alpha}^s = \frac{-1}{\pi D(1-\nu)z^2} r r_{,\alpha} = \frac{-1}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} \frac{r_{,\alpha}}{r} \quad , \quad (F.6)$$

que é a parcela de  $U_{33,\alpha}$  que quando diferenciada em relação a  $x_\beta(Q)$  fornece (F.4). Desmembrando (F.5) nas parcelas:

$$\hat{E}_{\alpha\beta}^s(Q) = I_{\alpha\beta}^\Omega(Q) + I_{\alpha\beta}^\epsilon(Q) \quad , \quad (F.7)$$

e verificando que, sobre  $\partial\epsilon$  (figura F.1):

$$\begin{aligned} d\Gamma_\epsilon &= \epsilon d\theta \\ r_{,\alpha} &= -n_\alpha \quad , \end{aligned}$$

já que a normal aponta para  $P$ , então:

$$I_{\alpha\beta}^\epsilon(Q) = \oint_{2\pi}^0 \frac{n_\alpha(Q)n_\gamma(Q)}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} d\theta N_{\gamma\beta}(Q) \quad . \quad (F.8)$$

Portanto:

$$I_{\alpha\beta}^\epsilon(Q) = \frac{N_{\alpha\beta}(Q)}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} = -c_t(Q) \quad . \quad (F.9)$$

Deste modo, a matriz  $\hat{E}$  pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\alpha\beta}(P) = & \int_{\Omega} U_{33,\alpha\gamma}^n(Q, P) N_{\gamma\beta}(Q) d\Omega_Q + \oint_{\partial\Omega} U_{33,\alpha}^s(Q, P) n_{\gamma}(Q) N_{\gamma\beta}(Q) d\Gamma_Q + \\ & + \frac{1}{D(1-\nu)\lambda^2} [N_{\alpha\beta}(Q) - N_{\alpha\beta}(P)] \quad , \end{aligned} \quad (F.10)$$

onde o sobre-índice  $n$  indica a consideração apenas das parcelas regulares e quase singulares, e o termo convectivo está considerado, como em (F.2) .

Da expressão (F.10), conclui-se que a utilização do teorema de Stokes provoca o cancelamento do termo convectivo. Além disso, a segunda integral à direita é no máximo quase singular, dispensando assim a utilização de procedimentos de integração mais sofisticados. O procedimento numérico para implementação da segunda integral à direita de (F.10) consiste basicamente em mapear cada um dos lados da célula em elementos unidimensionais, através de funções de interpolação lineares, e aplicar a quadratura gaussiana, alternativamente com a transformação descrita no apêndice C.

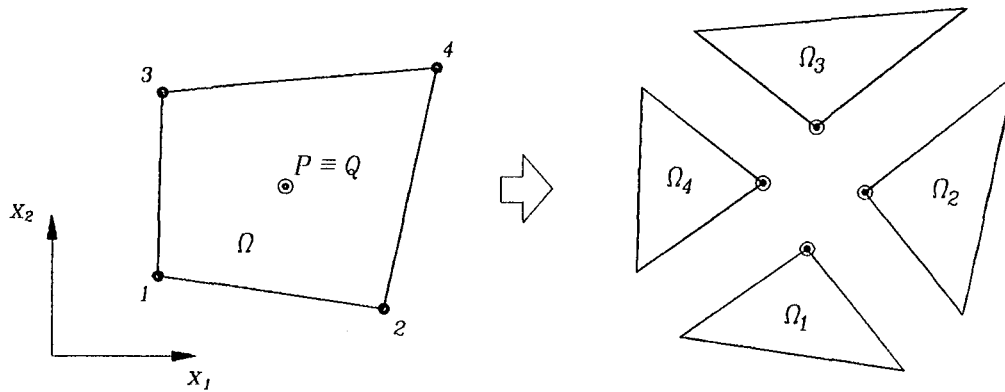
### F.3. Integração analítica

A integração analítica aqui realizada foi utilizada no presente trabalho para células de domínio constantes. Entretanto, este desenvolvimento é diretamente aplicável a células lineares. Uma célula de domínio constante quadrilateral  $\Omega$  pode ser dividida em quatro sub-células triangulares  $\Omega_j$  ( $j = 1, 4$ ), como ilustrado na figura F.2 .

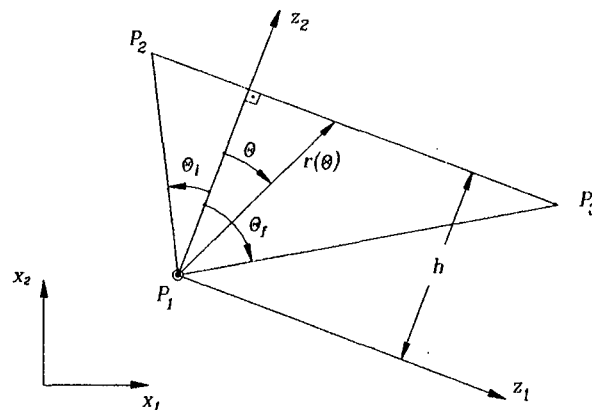
Para cada elemento  $\Omega_j$  é possível definir um sistema de coordenadas  $z_1, z_2$  com origem sobre o ponto fonte  $P_1$ , e com o eixo  $z_2$  perpendicular ao lado da sub-célula que não intercepta este ponto, como ilustrado na figura F.3 (Banerjee e Butterfield [1981], Cruse [1969]). O ponto  $P_1$  corresponde à posição original do ponto singular  $P$ , para quaisquer das quatro sub-células  $\Omega_j$ .

No sistema de coordenadas  $z_1, z_2$ , valem as relações:

$$r_{,\alpha} = \frac{r_{\alpha}}{r} = \frac{\partial r}{\partial x_{\alpha}} = \sin \theta \frac{\partial z_1}{\partial x_{\alpha}} + \cos \theta \frac{\partial z_2}{\partial x_{\alpha}} \quad , \quad (F.11)$$



**Figura F.2 :** Sub-divisão de uma célula quadrangular em quatro sub-células triangulares.



**Figura F.3 :** Definição do sistema de coordenadas  $z_1, z_2$  para uma sub-célula.

sendo  $e_{1\alpha}$  e  $e_{2\alpha}$  os cossenos diretores dos eixos  $z_1$  e  $z_2$  em relação ao eixo  $x_\alpha$  do sistema de coordenadas global. Assim resulta:

$$r_{,\alpha} = \text{sen } \theta e_{1\alpha} + \text{cos } \theta e_{2\alpha} \tag{F.12}$$

$$r(\theta) = \frac{h}{\text{cos } \theta} \tag{F.13}$$

Por simplicidade, reescreve-se (F.3) na forma:

$$\hat{E}_{\alpha\beta}^s(Q) = \int_{\Omega} U_{33,\alpha\gamma}^s(Q,P) N_{\gamma\beta}(Q) d\Omega_Q = I_{\alpha\beta}^1 + I_{\alpha\beta}^2 \quad , \quad (F.14)$$

e  $I_{\alpha\beta}^1$  e  $I_{\alpha\beta}^2$  são escritos no sistema de coordenadas polar  $r, \theta$  da figura F.3, isto é:

$$I_{\alpha\beta}^1 = \sum_{j=1}^4 \left[ \int_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} \int_0^{r(\theta)} \frac{-C N_{\alpha\beta}(Q)}{r^2(Q,P)} r(Q,P) dr d\theta \right] \quad (F.15)$$

$$I_{\alpha\beta}^2 = \sum_{j=1}^4 \left[ \int_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} \int_0^{r(\theta)} \frac{2C r_{,\alpha} r_{,\gamma} N_{\gamma\beta}(Q)}{r^2(Q,P)} r(Q,P) dr d\theta \right] \quad , \quad (F.16)$$

sendo

$$C = \frac{1}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} \quad . \quad (F.17)$$

Voltando-se primeiramente para a integração de  $I_{\alpha\beta}^1$ , reescreve-se (F.15) como:

$$I_{\alpha\beta}^1 = \sum_{j=1}^4 \left( \int_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} -C N_{\alpha\beta}(Q) \int_0^{r(\theta)} \frac{1}{r} dr d\theta \right) \quad (F.18)$$

e assim é possível fazer uso da seguinte relação, válida para integrais por parte finita (Kutt [1975b]):

$$\int_0^r \frac{f(x)}{x^\lambda} dx = r^{1-\lambda} \int_0^1 \frac{f(rt)}{t^\lambda} dt + \frac{f^{(\lambda-1)}(0) \ln|r|}{(\lambda-1)!} \quad (F.19)$$

onde  $f^{(\lambda-1)}$  indica a  $(\lambda-1)$ -ésima derivada de  $f(x)$ . Como no presente caso  $\lambda = 1$ , a expressão (F.19) se reduz a:

$$\int_0^r \frac{f(x)}{x^\lambda} dx = \int_0^1 \frac{1}{t} dt + \ln|r(\theta)| \quad , \quad (F.20)$$

já que  $f(x) = 1$ . Além disso (Kutt [1975b]),

$$\int_0^1 \frac{1}{t} dt = 0 \quad , \quad (F.21)$$

resultando a seguinte expressão para a equação (F.18):

$$I_{\alpha\beta}^1 = \sum_{j=1}^4 \left( \int_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} -C N_{\alpha\beta}(Q) \ln |r(\theta)| d\theta \right) \quad . \quad (F.22)$$

A substituição de (F.13) em (F.22) leva a:

$$I_{\alpha\beta}^1 = \sum_{j=1}^4 \left( \int_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} -C N_{\alpha\beta}(Q) \ln |h| d\theta + \int_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} C N_{\alpha\beta}(Q) \ln |\cos \theta| d\theta \right) \quad , \quad (F.23)$$

que pode ser integrada analiticamente pela expressão:

$$I_{\alpha\beta}^1 = \sum_{j=1}^4 \left\{ C N_{\alpha\beta}(Q) \left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)}{k(2k+1)!} B_{2k} \theta^{2k+1} \right)_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} - \ln |h| (\theta_f^j + \theta_i^j) \right] \right\} \quad , \quad (F.24)$$

onde  $B_{2n}$  são números de Bernoulli de ordem par<sup>†</sup> (Dias [1993]).

Para integração de  $I_{\alpha\beta}^2$ , reescreve-se (F.16):

$$I_{\alpha\beta}^2 = \sum_{j=1}^4 \left( \int_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} 2C r_{,\alpha} r_{,\gamma} N_{\gamma\beta}(Q) \int_0^{r(\theta)} \frac{dr}{r} d\theta \right) \quad . \quad (F.25)$$

Utilizando (F.12), (F.13), (F.20) e (F.21), obtém-se:

$$I_{\alpha\beta}^2 = \sum_{j=1}^4 \left[ \int_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} 2C (\sin \theta e_{1\alpha} + \cos \theta e_{2\alpha}) (\sin \theta e_{1\gamma} + \cos \theta e_{2\gamma}) \ln \left| \frac{h}{\cos \theta} \right| d\theta \right] N_{\gamma\beta}(Q) \quad . \quad (F.26)$$

Definindo:

$$a_{\alpha\gamma} = e_{1\alpha} e_{1\gamma} \quad (F.27.a)$$

$$b_{\alpha\gamma} = e_{1\alpha} e_{2\gamma} + e_{1\gamma} e_{2\alpha} \quad (F.27.b)$$

$$c_{\alpha\gamma} = e_{2\alpha} e_{2\gamma} \quad , \quad (F.27.c)$$

a expressão (F.26) é reescrita :

---

<sup>†</sup> Ver apêndice G.



$$\begin{aligned}
 I_{\alpha\beta}^2 = & \sum_{j=1}^4 \left\{ 2C \ln |h| \left[ \frac{\theta}{2} (a_{\alpha\gamma} + c_{\alpha\gamma}) + \frac{\text{sen } 2\theta}{4} (c_{\alpha\gamma} - a_{\alpha\gamma}) + \frac{\text{sen}^2 \theta}{2} b_{\alpha\gamma} \right]_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} N_{\gamma\beta}(Q) + \right. \\
 & \left. - \int_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} 2C \ln |\cos \theta| (\text{sen}^2 \theta a_{\alpha\gamma} + \text{sen } \theta \cos \theta b_{\alpha\gamma} + \cos^2 \theta c_{\alpha\gamma}) d\theta N_{\gamma\beta}(Q) \right\} .
 \end{aligned} \tag{F.28}$$

Sendo que a última integral à direita é limitada, pois  $\cos \theta < 0$ , quando a sub-célula é triangular. Deste modo, substituindo (F.24) e (F.28) em (F.14) a expressão analítica para a integração de  $\hat{E}_{\alpha\beta}^s$  resulta:

$$\begin{aligned}
 \hat{E}_{\alpha\beta}^s = & \sum_{j=1}^4 \left\{ C N_{\alpha\gamma}(Q) \left[ \left( \Sigma_1(\theta) + 2 \ln |h| \left( \frac{\theta}{2} (a_{\gamma\beta} + c_{\gamma\beta} + 1) + \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{\text{sen } 2\theta}{4} (c_{\gamma\beta} - a_{\gamma\beta}) + \frac{\text{sen}^2 \theta}{2} b_{\gamma\beta} \right) \right]_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} + \right. \\
 & \left. \left. - \int_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} 2 \ln |\cos \theta| (\text{sen}^2 \theta a_{\gamma\beta} + \text{sen } \theta \cos \theta b_{\gamma\beta} + \cos^2 \theta c_{\gamma\beta}) d\theta \right] \right\} ,
 \end{aligned} \tag{F.29}$$

onde (Dias [1993]):

$$\Sigma_1(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1} (2^{2k} - 1)}{k(2k+1)!} |B_{2k}| \theta^{2k+1} . \tag{F.30}$$

Os termos envolvidos na última integral à direita podem ser integrados por partes, originando as integrais indefinidas:

$$\begin{aligned}
 J_{\alpha\beta}^1 &= a_{\alpha\beta} \int \ln |\cos \theta| \text{sen}^2 \theta d\theta = \\
 &= a_{\alpha\beta} \left[ \ln |\cos \theta| \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen } 2\theta}{4} \right) + \frac{1}{2} \Sigma_2(\theta) + \frac{1}{8} \tan \theta (\cos 2\theta + 1) - \frac{\theta}{4} \right]
 \end{aligned}$$

$$J_{\alpha\beta}^2 = b_{\alpha\beta} \int \ln |\cos \theta| \text{sen } \theta \cos \theta d\theta = b_{\alpha\beta} \left[ \frac{-1}{2} \ln |\cos \theta| \cos^2 \theta - \frac{1}{4} \text{sen}^2 \theta \right]$$

$$\begin{aligned}
 J_{\alpha\beta}^3 &= c_{\alpha\beta} \int \ln |\cos \theta| \cos^2 \theta \, d\theta = \\
 &= c_{\alpha\beta} \left[ \ln |\cos \theta| \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen } 2\theta}{4} \right) + \frac{1}{2} \Sigma_2(\theta) - \frac{1}{8} \tan \theta (\cos 2\theta + 1) + \frac{\theta}{4} \right] ,
 \end{aligned}$$

sendo<sup>†</sup> (Dias [1993]):

$$\Sigma_2(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1)}{(2k + 1)!} |B_{2k}| \theta^{2k+1} \quad . \quad (F.31)$$

Efetuando:

$$J_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}^1 + J_{\alpha\beta}^2 + J_{\alpha\beta}^3 \quad , \quad (F.32)$$

resulta:

$$\begin{aligned}
 J_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left\{ (a_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta}) [\theta \ln |\cos \theta| + \Sigma_2(\theta)] + \right. \\
 &\quad + (a_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}) \left[ \frac{1}{4} \tan \theta (\cos 2\theta + 1) - \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \ln |\cos \theta| \text{sen } 2\theta \right] + \\
 &\quad \left. - b_{\alpha\beta} \left[ \ln |\cos \theta| \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \text{sen}^2 \theta \right] \right\} . \quad (F.33)
 \end{aligned}$$

Assim, reescreve-se (F.29):

$$\begin{aligned}
 \hat{E}_{\alpha\beta}^s &= \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{1}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} N_{\alpha\gamma}(Q) \left[ \Sigma_1(\theta) + 2 \ln |h| \left( \frac{\theta}{2} (a_{\gamma\beta} + c_{\gamma\beta} + 1) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\text{sen } 2\theta}{4} (c_{\gamma\beta} - a_{\gamma\beta}) + \frac{\text{sen}^2 \theta}{2} b_{\gamma\beta} \right) + 2J_{\gamma\beta}(\theta) \right] \begin{matrix} \theta_j^j \\ -\theta_j^j \end{matrix} \right\} , \quad (F.34)
 \end{aligned}$$

que corresponde à integração analítica da parcela fortemente singular da matriz  $\hat{\mathbf{E}}$ .

---

<sup>†</sup> Ver apêndice G.

#### F.4. Comparações

Infelizmente a comparação das expressões aqui desenvolvidas com outros resultados da literatura não é possível, tendo em vista estarem aqui já particularizadas para os tensores de placa semi-espessa.

Com o objetivo de validar as equações obtidas com a técnica da subdivisão celular, é apresentada a seguir uma comparação dos resultados obtidos para integração de:

$$I = \int_{\Omega} \frac{r_{,1}}{r^2} d\Omega \quad , \quad \Omega \equiv -1 \leq x_1, x_2 \leq +1 \quad . \quad (F.35)$$

Pela simplicidade do domínio de integração (quadrado), existem algumas soluções analíticas e numéricas para (F.35), com o ponto singular situado em diversas posições em  $\Omega$ .

Aplicando (F.12) e (F.13) a (F.35) resulta:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^4 \int_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} \int_0^{r\theta} \frac{\text{sen } \theta e_{11} + \text{cos } \theta e_{21}}{r} dr d\theta = \\ &= \sum_{j=1}^4 \int_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} (\text{sen } \theta e_{11} + \text{cos } \theta e_{21}) \ln \left| \frac{h}{\text{cos } \theta} \right| d\theta \quad , \end{aligned} \quad (F.36)$$

ou

$$I = I_1 + I_2$$

sendo:

$$I_1 = \sum_{j=1}^4 \int_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} \ln |h| (\text{sen } \theta e_{11} + \text{cos } \theta e_{21}) d\theta \quad (F.37.a)$$

$$I_2 = \sum_{j=1}^4 \int_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} (-\ln |\text{cos } \theta| \text{sen } \theta e_{11} - \ln |\text{cos } \theta| \text{cos } \theta e_{21}) d\theta \quad . \quad (F.37.b)$$

A integração indefinida de (F.37.a) e (F.37.b) resulta:

$$I_1 = \sum_{j=1}^4 \left[ \ln |h| (\text{sen } \theta e_{21} - \text{cos } \theta e_{11}) \right]_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} \quad (F.38.a)$$

$$I_2 = \sum_{j=1}^4 \left[ \cos \theta (1 - \ln |\cos \theta|) e_{11} + \sin \theta (1 - \ln |\cos \theta|) e_{21} + \right. \\ \left. - \ln \left| \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right| e_{21} \right]_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} \quad (F.38.b)$$

Logo:

$$I = \sum_{j=1}^4 \left[ \ln |h| (\sin \theta e_{21} - \cos \theta e_{11}) - \cos \theta (1 - \ln |\cos \theta|) e_{11} + \right. \\ \left. + \sin \theta (1 - \ln |\cos \theta|) e_{21} - \ln \left| \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right| e_{21} \right]_{-\theta_i^j}^{\theta_f^j} \quad (F.39)$$

A tabela (F.1) ilustra os resultados obtidos pela técnica da subdivisão celular com outras soluções disponíveis na literatura. Os resultados analíticos foram calculados com a solução fechada (Theocaris *et alli* [1980]) :

$$I = \ln \left\{ \frac{[1-x_2(P_1)+\sqrt{(1+x_1(P_1))^2+(1+x_2(P_1))^2}][ -1-x_2(P_1)+\sqrt{(1-x_1(P_1))^2+(1+x_2(P_1))^2} ]}{[-1-x_2(P_1)+\sqrt{(1+x_1(P_1))^2+(1+x_2(P_1))^2}][ -1-x_2(P_1)+\sqrt{(1-x_1(P_1))^2+(1-x_2(P_1))^2} ]} \right\} \quad (F.40)$$

Os resultados numéricos de Theocaris (Theocaris *et alli* [1980]) foram obtidos através da aplicação da regra do trapézio na direção circunferencial e uma transformação dos pontos de Gauss-Legendre para a direção radial (são mostrados os resultados para 72 abscissas na direção circunferencial e 20 pontos de integração modificados na direção radial).

A tabela F.2 demonstra a qualidade dos resultados obtidos, mesmo para as situações em que o ponto singular se encontra muito próximo do contorno da célula.

Estes resultados não validam plenamente a equação (F.34), mas demonstram a eficiência da técnica da subdivisão celular com posterior integração em um sistema de coordenadas polar. Evidentemente, alguns outros procedimentos têm sido propostos na literatura. A utilização de quadratura gaussiana na direção circunferencial e da quadratura de Kutt (Kutt [1975a]) na direção radial parece levar a bons resultados (Faria *et alli* [1981]). Alguns trabalhos têm utilizado uma transformação de coordenadas polares triangulares (Li *et alli* [1985], Lu e Ye [1991]), mas como demonstrado por Huang e Cruse [1993], tal técnica não garante a convergência para o resultado correto.

$x_1(P_1)$	$x_2(P_1)$	Equação (F.39)	Equação (F.40)	Theocaris <i>et alli</i> [1980]
0.60	0.00	-2.11417492	-2.11417492	-
0.60	0.50	-1.93571070	-1.93571070	-
-0.30	0.20	0.87901789	0.87901789	-
0.40	0.10	-1.23457868	-1.23457868	-1.234 <u>133</u>
0.60	0.20	-2.08772293	-2.08772293	-2.0877 <u>00</u>
0.80	0.40	-3.41989565	-3.41989565	-3.4199 <u>19</u>

**Tabela F.1 :** Comparação dos resultados obtidos para integração da equação (F.35). As casas decimais que diferiram são sublinhadas.

$x_1(P_1)$	$x_2(P_1)$	Equação (F.39)	Equação (F.40)
0.200000	0.200000	-0.569618100036693	-0.569618100036693
0.400000	0.400000	-0.167058231705192	-0.167058231705192
0.600000	0.600000	-1.847246085713838	-1.847246085713838
0.800000	0.800000	-2.7825602375845 <u>87</u>	-2.782560237584586
0.900000	0.900000	-3.58567065201702 <u>7</u>	-3.585670652017023
0.950000	0.950000	-4.3312349349248 <u>62</u>	-4.331234934924857
0.990000	0.990000	-5.9814332137171 <u>43</u>	-5.981433213717152
0.999900	0.999900	-10.5965347299742 <u>70</u>	-10.596534729965539
0.999999	0.999999	-15.201803919391 <u>898</u>	-15.201803989427697

**Tabela F.2 :** Comparação dos resultados obtidos para integração da equação (F.35) quando o ponto fonte se aproxima do contorno da célula. As casas decimais que diferem do resultado obtido pela equação (F.40) estão sublinhadas.

## Cálculo Numérico de Números de Bernoulli

### G.1. Introdução

De acordo com o descrito no apêndice F, a integração analítica da matriz **E** envolve séries que contêm números de Bernoulli. Especificamente, deve-se calcular as séries  $\Sigma_1(x)$  e  $\Sigma_2(x)$ , dadas por:

$$\Sigma_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}(2^{2k} - 1)}{k(2k + 1)!} |B_{2k}| x^{2k+1} \quad (G.1)$$

$$\Sigma_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1)}{(2k + 1)!} |B_{2k}| x^{2k+1} \quad , \quad (G.2)$$

onde  $B_k$  são os referidos números de Bernoulli. Tais séries infinitas são particularmente úteis para o cálculo de certas integrais, como por exemplo (Bronstein e Semendiaev [1979]):

$$\int \ln |\cos x| dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{315} - \dots - \frac{2^{2k-1}(2^{2k} - 1)}{k(2k + 1)!} B_{2k} x^{2k+1} - \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2} \quad (G.3)$$

$$\int x \tan x dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \frac{2x^7}{105} + \dots + \frac{2^{2k-1}(2^{2k} - 1)}{(2k + 1)!} B_{2k} x^{2k+1} - \dots \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}, \quad (G.4)$$

que são utilizadas para o cômputo de (F.34). Entretanto, como ficará claro a seguir, o cálculo numérico de (G.1) e (G.2) pode trazer algumas dificuldades devido à capacidade limitada de armazenamento de números em computadores, mesmo quando da utilização de códigos de precisão dupla. Além disso, existe mais de uma definição para os números de Bernoulli, analiticamente equivalentes, mas que levam a resultados diferentes quando calculados numericamente, devido aos erros de arredondamento e truncamento. Assim,

este apêndice explora sucintamente algumas possibilidades para cálculo dos números de Bernoulli e a estratégia adotada para cálculo das séries  $\Sigma_1(x)$  e  $\Sigma_2(x)$ .

## G.2. Procedimentos para o cálculo numérico

Dada a função  $y = \frac{x}{e^x - 1}$ , chama-se número de Bernoulli de ordem  $k$  o valor da  $k$ -ésima derivada de  $y$  no ponto  $x = 0$  (Dias [1993]):

$$B_k = \frac{d^k}{dx^k} \left( \frac{x}{e^x - 1} \right)_{x=0} \quad (G.5)$$

Pode-se demonstrar que a partir de  $B_2$ , todos os números de Bernoulli de ordem ímpar são nulos (Dias [1993]). A definição acima leva a algumas expressões possíveis para  $B_k$ , três das quais apresentadas abaixo (Bronstein e Semendiaev [1979]):

$$B_{2k} = \frac{(2k)!}{\pi^{2k} 2^{2k-1}} \left( 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots + \frac{1}{k^{2k}} + \dots \right) \quad (G.6)$$

$$B_{2k} = \frac{(2k)!}{\pi^{2k} (2^{2k-1} - 1)} \left( 1 - \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{4^{2k}} + \dots \pm \frac{1}{k^{2k}} \mp \dots \right) \quad (G.7)$$

$$B_{2k} = \frac{2(2k)!}{\pi^{2k} (2^{2k-1} - 1)} \left( 1 + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \frac{1}{7^{2k}} + \dots + \frac{1}{(2k-1)^{2k}} + \dots \right) \quad (G.8)$$

sendo  $k = 2 \dots \infty$  e  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -\frac{1}{2}$ . As séries acima permitem a determinação dos primeiros números de Bernoulli na forma de números racionais. A tabela G.1 fornece os 24 primeiros números de Bernoulli.

A fim de facilitar o cálculo de  $B_k$  para grandes valores de  $k$ , Bronstein e Semendiaev (Bronstein e Semendiaev [1979]) apresentam a seguinte expansão assintótica:

$$B_k \doteq 4k^{2k} (\pi e)^{-2k} \sqrt{\pi n} \quad (G.9)$$

A expressão (G.9) é útil para cálculo numérico de números de Bernoulli de alta ordem, tendo em vista a dificuldade de se armazenar os numeradores e os denominadores que resultam da utilização de (G.6), (G.7) e (G.8). A dificuldade é ainda maior no cálculo de

$\Sigma_1(x)$  e  $\Sigma_2(x)$ , devido aos fatoriais envolvidos. Uma possibilidade é a utilização de um algoritmo que realize uma divisão progressiva dos numeradores até atingir o resultado da divisão pelo fatorial todo. Com esta técnica é possível calcular números de Bernoulli de ordens relativamente altas, sem aumentar de forma muito significativa o tempo de cálculo. Entretanto, para grandes valores de  $k$  os problemas permanecem, e a utilização da expansão (G.9) se torna atrativa.

Assim, com o objetivo de se obter uma forma rápida e precisa para cálculo dos números de Bernoulli, para posterior utilização em (G.1) e (G.2), foram realizados alguns experimentos numéricos.

$k$	$B_k$
0	1
1	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$
4	$-\frac{1}{30}$
6	$\frac{1}{42}$
8	$-\frac{1}{30}$
10	$\frac{5}{66}$
12	$-\frac{691}{2\,370}$
14	$\frac{7}{6}$
16	$-\frac{3\,617}{510}$
18	$\frac{43\,867}{798}$
20	$-\frac{174\,611}{330}$
22	$\frac{854\,513}{138}$
24	$-\frac{236\,364\,091}{2\,730}$

**Tabela G.1 :** Primeiros números de Bernoulli (além de  $n = 0$  e  $n = 1$ , são mostrados apenas os valores para  $n$ -par, pois  $B_n = 0$ ,  $n$ -ímpar  $> 2$ ).

Em primeiro lugar, analisou-se como a expansão (G.9) se ajusta à definição de  $B_k$ , tendo como base os valores exatos da tabela (G.1). Como conclusão, detectou-se que a



expressão (G.9) não fornece valores corretos para os primeiros  $B_k$ . Entretanto, os erros para  $k \geq 18$  são pequenos, não superando 0.5%.

A seguir foram comparados os valores de  $B_k$  obtidos com as expressões (G.6), (G.7) e (G.8), tendo como base de comparação a tabela G.1 para  $n \leq 24$ , e a expansão assintótica (G.9) para  $n > 24$ . Disto concluiu-se que os resultados obtidos com as expressões (G.6), (G.7) e (G.8) diferem muito pouco entre si, sendo que a equação (G.8) fornece melhores valores para  $B_1$  e  $B_2$  (foram utilizados 300 termos para as séries).

Como próximo passo, estudou-se algumas estratégias de cálculo para as séries dadas por (G.1) e (G.2). Como critério de comparação, foi verificado qual dos métodos apresentados abaixo converge mais rápido (ou seja, comparou-se o valor das séries  $\Sigma_1(x)$  e  $\Sigma_2(x)$  para dois valores consecutivos de número de termos das séries), limitando-se em 100 termos para as séries. Os métodos usados foram:

- 1 -  $B_k$  dado pela tabela G.1 (e portanto aplicável apenas até  $k = 24$ ).
- 2 -  $B_k$  dado pelas expressões (G.6), (G.7) e (G.8).
- 3 -  $B_k$  dado pela expansão (G.9).
- 4 -  $B_k$  dado pela tabela G.1 até  $B_{24}$  e pela expansão (G.9) para  $k > 24$ .
- 5 -  $B_k$  dado pela tabela G.1 até  $B_{24}$  e pela expressão (G.8) para  $k > 24$ .

Dos resultados desta análise, concluiu-se que:

- a. Para argumentos  $|x| < \frac{\pi}{2}$ , são suficientes 15 termos para convergência, utilizando-se códigos de precisão dupla, sendo que este número de termos se reduz à medida que  $|x| \rightarrow 0$ .
- b. O método 5 apresentou as mesmas características de convergência dos demais. Entretanto, parece mais confiável nos resultados fornecidos por utilizar valores exatos para os primeiros números de Bernoulli e a expressão para  $B_k$  que apresentou melhor desempenho numérico, sem incorrer nos possíveis erros da expansão assintótica (G.9).

De acordo com as conclusões acima, o método 5 foi o efetivamente utilizado na implementação computacional do presente trabalho.

Este texto foi editado com o sistema T<sub>E</sub>X.