

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO EM PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO NUMÉRICO DA ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA
EM ESCOAMENTOS RADIAIS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

JÁUBER CAVALCANTE DE OLIVEIRA

FLORIANÓPOLIS, SETEMBRO DE 1992

ESTUDO NUMÉRICO DA ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA

EM ESCOAMENTOS RADIAIS

JÁUBER CAVALCANTE DE OLIVEIRA

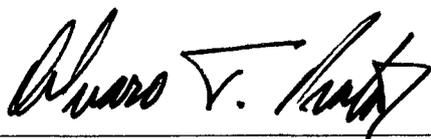
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA, MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO

CIÊNCIAS TÉRMICAS, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

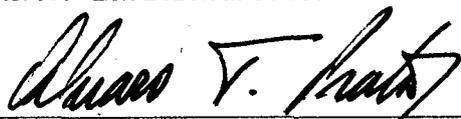


Prof. Alvaro T. Prata, Ph.D.
Orientador



Prof. Berend Snoeijer, Dr.-Ing.
Coordenador do Curso

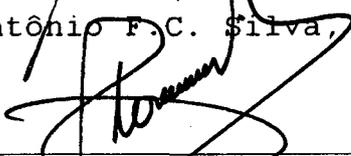
BANCA EXAMINADORA:



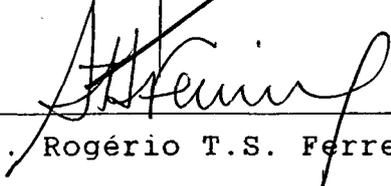
Prof. Alvaro T. Prata, Ph.D.
Presidente



Prof. Antônio F.C. Silva, Dr. Eng. Mec.



Prof. Clóvis R. Maliska, Ph.D.



Prof. Rogério T.S. Ferreira, Ph.D.

SUMÁRIO

Resumo, iii	
Abstract, v	
Nomenclatura, vii	
1. INTRODUÇÃO	1
2. A TEORIA DA ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA	8
2.1 OBJETIVOS	8
2.2 DEFINIÇÕES	8
2.2.1 ESCOAMENTO BÁSICO	8
2.2.2 TEORIA LINEAR VERSUS TEORIA NÃO-LINEAR	9
2.2.3 ESCOAMENTOS PARALELOS E QUASE PARALELOS	9
2.2.4 DEFINIÇÃO DE ESTABILIDADE	10
2.2.5 A TEORIA DE ESTABILIDADE GLOBAL.....	11
2.2.6 O MÉTODO DOS MODOS NORMAIS, AS CURVAS DE ESTABILIDADE NEUTRA E MARGINAL	12
2.2.7 INSTABILIDADES CONVECTIVA E ABSOLUTA	14
2.3 A TEORIA LINEAR	15
2.3.1 A EQUAÇÃO DE ORR-SOMMERFELD	15
2.3.2 A EQUAÇÃO DE RAYLEIGH E TEOREMAS PARA ESCOAMENTOS INVÍSCIDOS	18
2.3.3 A FORMULAÇÃO GERAL	21
2.4 A TEORIA GLOBAL	23
2.4.1 O MÉTODO DA ENERGIA	23
2.4.2 TEOREMAS DE ESTABILIDADE E UNICIDADE	28
2.5 O PROBLEMA ESPECTRAL DA TEORIA LINEAR	34
2.6 REVISÃO DA LITERATURA	37
2.7 SUMÁRIO	45
3. ESCOAMENTO EM DIFUSORES RADIAIS	46
4. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E METODOLOGIA DE SOLUÇÃO	52
4.1 A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	52
4.1.1 O ESCOAMENTO BÁSICO	52
4.1.2 AS PERTURBAÇÕES	55
4.1.3 O PROBLEMA DE AUTOVALOR (ESPECTRAL).....	59
4.2 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO	61
4.2.1 O PROBLEMA DE AUTOVALOR (ESPECTRAL).....	61
4.2.2 O PROBLEMA TRANSIENTE	63
4.2.3 DESCRIÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO E DETALHES DA DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES	65

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	77
5.1 INTRODUÇÃO	77
5.2 VALIDAÇÃO	77
5.3 O PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA O DIFUSOR RADIAL	86
5.4 O PROBLEMA TRANSIENTE PARA O DIFUSOR RADIAL	95
5.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	101
6. CONCLUSÕES	107
REFERÊNCIAS	111
APÊNDICES	118
A. DISCUSSÃO A RESPEITO DA OBTENÇÃO DO AUTOVALOR MAIS INSTÁVEL ...	118
B. DETALHES NA OBTENÇÃO DO AUTOVALOR MAIS INSTÁVEL EM COORDENADAS CILÍNDRICAS	124
C. OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE EVOLUÇÃO PARA A ENERGIA DAS PERTURBAÇÕES EM CLASSES DE FUNÇÕES CINEMATICAMENTE ADMISSÍVEIS	128
D. DETALHES DO CÁLCULO NUMÉRICO DE DERIVADAS COM PRECISÃO DE SEGUNDA ORDEM	130
E. A OBTENÇÃO DA FORMA CONSERVATIVA DAS EQUAÇÕES	131
F. AS SOLUÇÕES ESTACIONÁRIAS OBTIDAS POR LANGER (1991)	133

RESUMO

O problema de estabilidade linear em difusores radiais é abordado numericamente através do método dos volumes finitos, utilizando uma adaptação do esquema proposto por Patankar (1980). A investigação deste problema tem por finalidade analisar a estabilidade das soluções obtidas por Langer e co-autores (1990) e Langer (1991), que identificou a bifurcação de uma solução simétrica em três soluções, duas assimétricas e uma simétrica, a partir de um determinado número de Reynolds.

Consideram-se, neste trabalho, dois tipos de formulação. A primeira formulação está relacionada com a análise das equações transientes das pequenas perturbações, enquanto a outra formulação consiste em um problema de autovalor linear, denominado problema espectral. A dificuldade encontrada na prescrição de condições de contorno para as regiões da entrada do domínio pode ser comprovada no estudo de duas prescrições alternativas para a região de contorno anterior aos discos. Na primeira alternativa, prescrevem-se perturbações nulas em toda a região de contorno anterior aos discos. A segunda alternativa impõe irrotacionalidade do escoamento no contorno de entrada. Esta segunda escolha tem a desvantagem de misturar a influência da estabilidade no contorno de entrada com o objetivo deste trabalho, que é o estudo da estabilidade do escoamento no interior do difusor.

A formulação espectral apresentou boa concordância com os resultados de Langer (1991), principalmente quando prescreve-se perturbação nula na entrada do domínio. Pôde-se prever a perda da estabilidade (e soluções simétricas a partir de um número de Reynolds igual a 121. Em relação a esta mesma formulação, obteve-se um número de Reynolds crítico igual a 105 para a condição de derivada nula na entrada do domínio (associada à condição de irrotacionalidade). Tais valores devem ser comparados com o valor de 117 obtido por Langer. Adicionalmente, uma análise da estabilidade das soluções assimétricas para números de Reynolds acima de 300, mostrou que estas são instáveis, indicando que, a partir de então, as configurações assimétricas também já não são prováveis de serem

observadas na natureza. Tal fato sugere a ocorrência de uma nova bifurcação de soluções.

Na formulação transiente, foram obtidos os números de Reynolds críticos de 124 e 100, respectivamente para as condições de perturbações nulas e derivadas nulas na região de entrada do difusor.

As linhas de corrente e as isobáricas para as autofunções mostraram a presença de fortes recirculações e de acentuados gradientes de pressão próximos aos dois discos (em uma mesma posição radial). Tais efeitos decrescem à medida que se progride rumo à saída do difusor. As isobáricas indicaram a presença de máximos locais alternados nas paredes do difusor. Acredita-se que este desequilíbrio alternado de perturbações de pressão ao longo do canal (efeito Coanda) é o responsável pela assimetria do escoamento após o ponto de bifurcação.

ABSTRACT

Linear stability of flows in radial diffusers had been studied numerically through a finite volume methodology adapted from the scheme proposed by Patankar (1980). The main objective of this investigation is to study the stability of the solutions found by Langer (1991), who identified the loss of stability of symmetrical solutions after a critical Reynolds number, resulting in a pitchfork bifurcation of the numerical solutions.

Two kinds of formulation had been considered. The first formulation is related to the transient small perturbations, and the second one is the spectral eigenvalue problem corresponding to the transient equations. The difficulty in prescribing exact boundary conditions for the inlet is reflected in two possibilities for the perturbation values at the diffuser entrance. The first possibility assumes no perturbation at the inlet and the second one assumes irrotational flow of perturbations. This second choice had proved to be not so good, since the stability at the inlet boundary would damage any conclusions about the stability of the flow.

The spectral formulation yielded good agreement with Langer's work (Langer, 1991), mainly when values of the perturbations were prescribed at the inlet boundary. This formulation and boundary condition furnished loss of flow stability after a Reynolds number of 121. For irrotational condition, the critical Reynolds number obtained was 105. Those results are to be compared with the value of 117 obtained by Langer. The critical Reynolds numbers for the transient formulation were 124 and 100, respectively, for zero perturbations and irrotational flow of perturbations prescribed at the inlet boundary. In addition, the analysis of the stability of the asymmetrical solutions for Reynolds number above 300 showed unstable solutions. Such result indicates that, beyond that number, even the asymmetrical configurations are not likely to be observed in nature. This fact suggests the occurrence of a new bifurcation of the solutions.

The velocity eigenfunctions maps showed strong recirculations and high pressure eigenfunction gradients near the disks (at the same radial position). There is a decay in the intensity of these effects along the radial direction. The pressure eigenfunction field presented alternated local maxima at the diffuser walls. This configuration along the channel (Coanda effect) seems to be responsible for the asymmetrical behavior of the flow after the bifurcation point.

NOMENCLATURA

- c : Número complexo associado à evolução temporal das perturbações em um escoamento paralelo.
 c_r : Parte real do número complexo c .
 c_i : Parte imaginária do número complexo c .
 d : Altura do canal plano antes da expansão.
 D : Altura do canal plano após a expansão.
 D_m : Menor dentre os autovalores do tensor \mathcal{D} .
 \mathcal{D} : Tensor Deformação.
 $\bar{\epsilon}$: Energia média (global) das perturbações.
 F : Forças de campo.
 G : Máximo valor do funcional taxa de crescimento dentro do espaço das funções vetoriais solenoidais que anulam-se nos contornos.
 h : Espaço das funções escalares que anulam-se nos contornos do domínio.
 H : Espaço das funções vetoriais solenoidais que anulam-se nos contornos do domínio (funções cinematicamente admissíveis).
 K, K' : Constantes.
 l : Menor distância entre dois planos contendo o domínio do problema.
 L' : Parte linear principal de um funcional.
 L_1 : Dimensão longitudinal do canal plano antes da expansão.
 L_2 : Dimensão longitudinal do canal plano após a expansão.
 \mathcal{L} : Operador vetorial linear associado à equação espectral.
 \mathcal{L}^* : Operador vetorial linear adjunto do operador \mathcal{L} .
 P : Campo de pressões.
 p' : Campo de perturbações de pressões.
 \bar{p} : Campo de pressões relacionado ao escoamento básico.
 p_0 : Autofunção associada à parte espacial da perturbações de pressão na direção x (problema espectral).
 r : Coordenada radial adimensional.
 r_1 : Coordenada radial adimensional da seção de início dos discos, $r_1 = 1$.
 r_2 : Coordenada radial adimensional da seção de saída dos discos, $r_2 = 20$.

- r_e : Coordenada radial adimensional que determina o início do domínio do problema (difusor radial).
- R : Coordenada radial dimensional; número de Reynolds do escoamento.
- Re : Número de Reynolds do escoamento; parte real de um número complexo.
- R_e : Número de Reynolds da teoria da energia.
- R_G : Número de Reynolds limite da teoria global.
- R_L : Número de Reynolds limite da teoria linear.
- R_1 : Coordenada radial dimensional da seção de início dos discos.
- R_2 : Coordenada radial dimensional da seção de saída dos discos.
- S : Contorno do domínio; termo fonte nas equações discretizadas.
- t : Tempo adimensional.
- u : Componente do campo de perturbações na direção principal do escoamento (coordenadas cartesianas); Componente do campo de perturbações na direção axial (coordenadas cilíndricas); velocidade do escoamento na direção x .
- U_i : Velocidade do escoamento básico no ponto de inflexão.
- U_{max} : Máxima velocidade associada a um perfil básico.
- U_{min} : Mínima velocidade associada a um perfil básico.
- u_o : Autofunção associada à parte espacial das perturbações de velocidades na direção x (problema espectral).
- u : Perturbação aplicada ao campo básico U (vetor).
- u_o : Perturbação aplicada ao campo básico U_o (vetor).
- $u|_{t=0}$: Vetor perturbação da velocidade no instante inicial.
- $u|_S$: Vetor perturbação de velocidade no contorno.
- \bar{u} : Componentes do campo básico na direção x .
- U : Campo vetorial associado ao escoamento básico ou campo básico.
- U_o : Campo inicial de velocidades representativas do escoamento básico (vetor).
- v : Componente do campo de perturbações na direção transversal ao escoamento (coordenadas cartesianas); Componente do campo de perturbações na direção radial (coordenadas cilíndricas).
- v_o : Autofunção associada à parte espacial das perturbações de velocidades na direção y (sistema cartesiano) ou r (coordenadas cilíndricas) do problema espectral.

- \bar{v} : Componentes do campo básico na direção y (coordenadas cartesianas) ou r (coordenadas cilíndricas).
- $v(y)$: Parcela da perturbação de velocidade dependente apenas da coordenada transversal em um escoamento paralelo.
- V : Volume ocupado pelo domínio do problema.
- \mathcal{V} : Domínio do problema.
- w : Componente do vetor velocidade na direção z .
- WKB : Ver nota de rodapé da seção 2.5.
- WKBJ : Ver nota de rodapé da seção 2.5.
- x : Coordenada adimensional principal do escoamento no sistema cartesiano; coordenada axial adimensional do escoamento no difusor radial.
- X : Coordenada dimensional principal do escoamento no sistema cartesiano; coordenada axial dimensional do escoamento no difusor radial.
- y : Coordenada adimensional transversal ao escoamento no sistema cartesiano.

SÍMBOLOS GREGOS

- α : Número complexo relacionado à evolução das perturbações na direção do escoamento.
- β : Número complexo relacionado à evolução temporal das perturbações; autovalor presente no problema espectral.
- β_{mi} : Modo mais instável.
- β_n : Enésimo autovalor do espectro de autovalores.
- δ : Número positivo; símbolo que denota a variação de uma função ou funcional.
- Δ : Incremento dado a um funcional; variação finita de uma grandeza escalar.
- ϕ : Funcional taxa de crescimento; autofunção que descreve a dependência da função corrente com a coordenada transversal a um escoamento paralelo.
- γ : Número complexo dependente de α e β ($\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$).
- ψ : Perturbação da função corrente.
- λ : Comprimento de onda associado à variação espacial das perturbações; constante positiva (equação 2.47); funcional associado ao problema espectral.
- μ : Viscosidade absoluta.

- ν : Viscosidade cinemática.
- ν_e : Viscosidade cinemática da teoria da energia.
- ν_{eo} : Viscosidade cinemática crítica da teoria da energia.
- ν_g : Viscosidade cinemática limite da teoria global.
- ν_L : Viscosidade cinemática limite da teoria linear.
- θ : Função suave que se anula sobre o contorno S de um domínio \mathcal{V} .
- ξ : Função que mede o grau de assimetria de um escoamento.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Estabilidade, bifurcação e caos de sistemas dinâmicos são assuntos inter-relacionados que têm sido alvo de crescente e fértil estudo em diferentes áreas científicas. A análise de equações não-lineares, mesmo quando representam grandes simplificações de situações reais, tem mostrado uma riqueza de fenômenos, tais como dependência da solução com as condições iniciais, a perda da unicidade (intimamente relacionada à bifurcação) e a influência de repulsores e atratores (pontuais, periódicos e quase-periódicos e até os denominados atratores estranhos).

O estudo da estabilidade e bifurcação de equações diferenciais alcançou progressos tão rápidos que atualmente tais avanços já constituem-se teorias bem sedimentadas. O fenômeno da bifurcação está presente em problemas regidos por um parâmetro característico. Variações neste parâmetro podem provocar mudanças na estabilidade das soluções e, quando isso ocorre, um ponto de bifurcação pode ser identificado.

Em âmbito mais restrito, um ramo da Mecânica dos Fluidos preocupa-se com a estabilidade de soluções das equações que governam o movimento de um fluido, a fim de prever e explicar possíveis bifurcações de soluções, bem como sua evolução rumo à turbulência. O suporte necessário a este estudo originou-se na Física Matemática, através de pessoas como Helmholtz, Hopf, Kelvin, Landau, Rayleigh e Reynolds. Por ter surgido já no século dezenove, o número de contribuições importantes associadas à teoria da estabilidade hidrodinâmica já é bastante significativo.

A forte não-linearidade presente nas equações de Navier-Stokes possibilita que mais de uma solução possa ser obtida destas equações. O parâmetro que controla o surgimento de mais de uma solução é o número adimensional de Reynolds. Uma ilustração disto é

a bifurcação em forquilha identificada por Langer et al. (1990) e Langer (1991) no escoamento em difusores radiais (figura 1.1). A variável ζ mede o grau de assimetria do escoamento. Neste tipo de diagrama de bifurcação identifica-se a perda da estabilidade das soluções simétricas após o ponto de bifurcação. Embora as três soluções após o ponto de bifurcação satisfaçam as equações de Navier-Stokes, e de conservação da massa e as condições de contorno do problema, apenas as soluções assimétricas podem ocorrer na natureza.

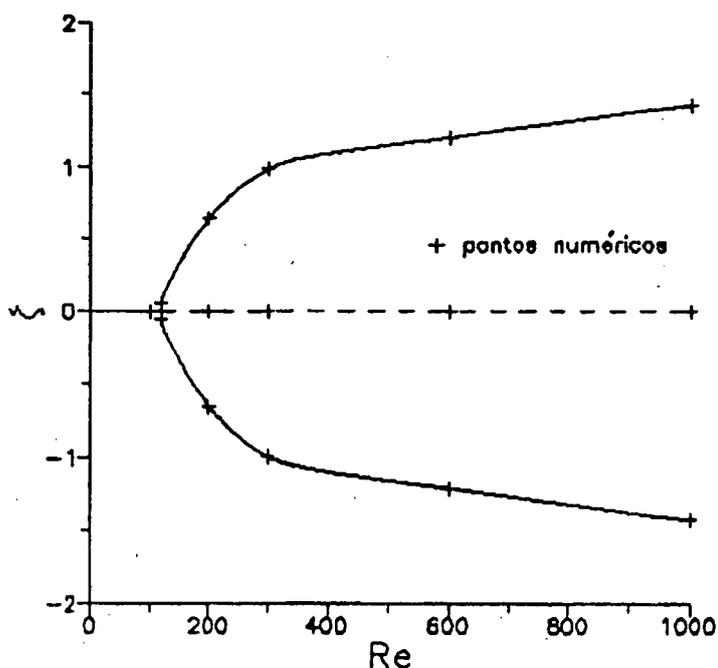


FIGURA 1.1 A bifurcação supercrítica em forquilha evidenciada em um diagrama de bifurcação (Langer, 1991).

A análise da estabilidade é denominada linear sempre que adota-se a hipótese de que as perturbações aplicadas ao escoamento são infinitesimais. A teoria linear assegura condições necessárias e suficientes para a previsão da instabilidade de um escoamento. Uma bifurcação é denominada supercrítica quando não contradiz a teoria linear. A bifurcação subcrítica (figura 1.2) ocorre em uma região onde a teoria linear prevê o amortecimento de qualquer perturbação imposta às soluções. Felizmente as soluções oriundas desta "anomalia" são instáveis (instabilidade subcrítica), portanto, não podem existir de forma contínua na natureza, ou seja, qualquer

destas soluções provocaria uma rápida mudança do escoamento rumo a outro campo básico estável. Em diagramas de bifurcação como os apresentados nas figuras 1.1 e 1.2, as linhas cheias representam soluções estáveis e as linhas tracejadas representam soluções instáveis.

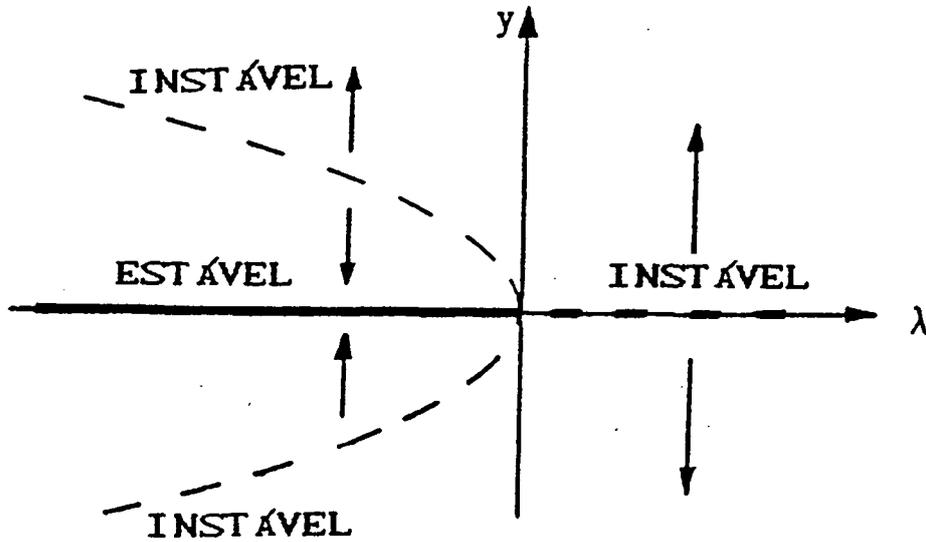


FIGURA 1.2 Bifurcação em forquilha subcrítica (Seydel, 1988).

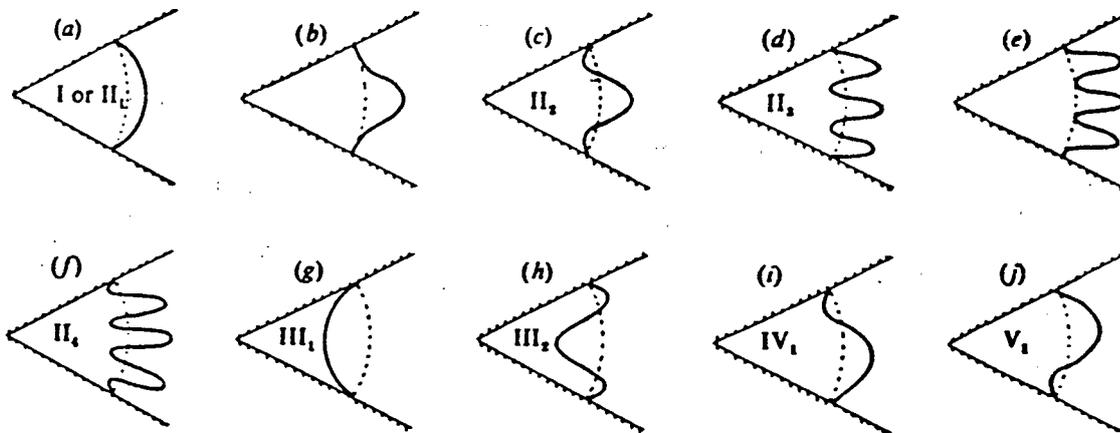


FIGURA 1.3 Geometria e algumas das soluções possíveis para o escoamento de Jeffery-Hamel (Sobey e Drazin, 1985).

Um exemplo de um escoamento que apresenta instabilidade subcrítica é o escoamento de Jeffery-Hamel. A figura 1.3 ilustra a geometria e algumas soluções desta classe de escoamentos. Trata-se de escoamentos entre dois planos que possuem uma expansão contínua bastante suave (pequeno ângulo de abertura) e a partir de uma fonte pontual. Estes escoamentos apresentam a interessante característica matemática de admitirem soluções através de "transformações por similaridade", permitindo a determinação de uma grande variedade de soluções (Fraenkel, 1962). Os algarismos romanos representam uma classificação morfológica desta classe de soluções.

Outro tipo de bifurcação importante para a Mecânica dos Fluidos é a bifurcação de Hopf. Ela ocorre quando uma solução estacionária perde sua estabilidade para uma solução periódica. O escoamento plano de Poiseuille é um exemplo clássico de escoamento que apresenta este tipo de bifurcação. A figura 1.4 apresenta um diagrama genérico típico de uma bifurcação de Hopf (Seydel, 1988). A instabilidade subcrítica e estabilidade supercrítica deste tipo de bifurcação foi mostrada por Hopf (1942) para equações diferenciais ordinárias e por Joseph e Sattinger (1972) para equações diferenciais parciais (Joseph, 1976).

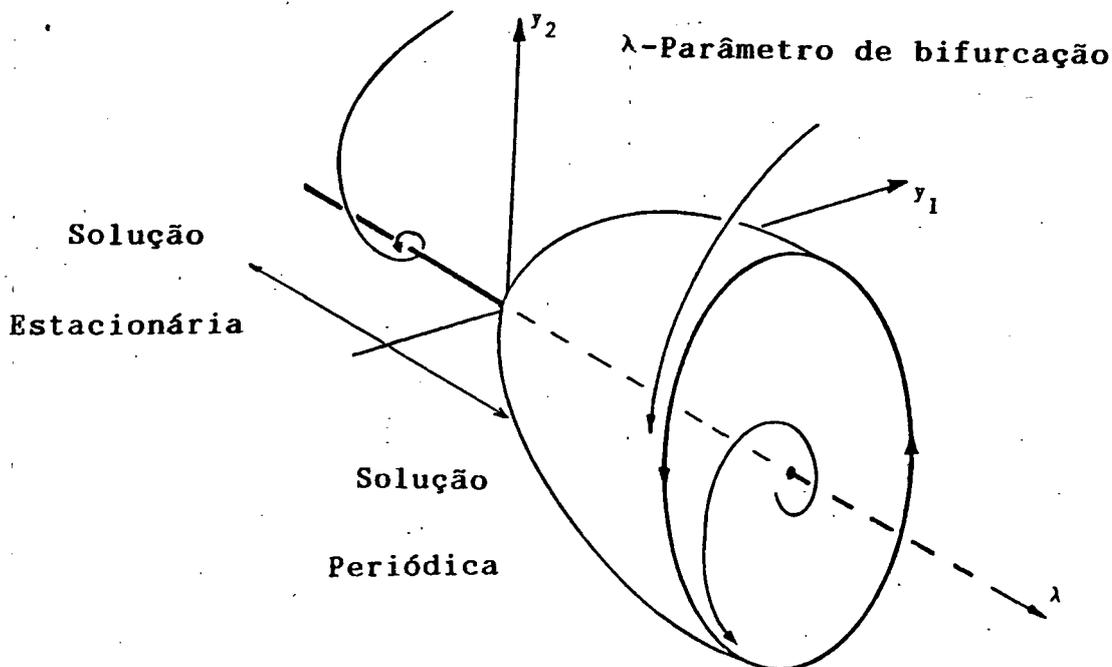


FIGURA 1.4 Diagrama de bifurcação esboçando o comportamento da solução antes e após a bifurcação de Hopf (Seydel, 1988).

Uma limitação da Teoria de Estabilidade Linear está em não fornecer condições necessárias e suficientes para prever a estabilidade de um escoamento. Isso é alcançado através do chamado método da energia, que não restringe-se apenas a perturbações infinitesimais e emprega princípios variacionais e uma equação de conservação: a equação de conservação da energia global das perturbações.

Para a elaboração da presente dissertação, considerável esforço foi dedicado ao estudo da literatura disponível sobre estabilidade hidrodinâmica. Tal estudo foi necessário para a compreensão e familiaridade com o caminho percorrido pela Teoria da Estabilidade Hidrodinâmica até os dias atuais. Uma breve revisão da vasta literatura sobre o assunto é apresentada a seguir.

Inicialmente resolviam-se problemas onde o campo de velocidades tinha apenas uma direção de escoamento e era função somente da coordenada transversal (escoamentos puramente paralelos), como é o caso do escoamento plano de Poiseuille. Isso conduziu a equação de Orr-Sommerfeld, uma equação diferencial ordinária caracterizada por um problema de autovalor. A ausência de métodos numéricos tornou necessária a simplificação desta equação. Assumindo a hipótese de escoamento invíscido, simplificam-se as equações à denominada equação de Rayleigh. Importantes teoremas de estabilidade foram então inferidos deste modelo invíscido (p.ex. os Teoremas de Rayleigh, 1880, Fjortoft, 1950, do Semi-círculo de Howard, 1961). Métodos de análise assintótica foram desenvolvidos para obter soluções, sob condições simplificadas, para a equação de Orr-Sommerfeld. O Teorema de Equivalência de Squire (1933) mostrou que, para escoamentos paralelos e na ausência de efeitos não lineares, as perturbações mais importantes são as bidimensionais. O desenvolvimento dos métodos numéricos permitiu uma solução bastante precisa da equação de Orr-Sommerfeld, a ponto de ser considerada "exata" (p.ex. Orszag, 1971). Esta metodologia originou uma "filosofia quase-paralela" para a investigação de escoamentos que apresentavam uma direção fortemente predominante de escoamento, de modo a permitir a aproximação quase-paralela para um grande número de problemas como, por exemplo, escoamento sobre uma placa plana,

atos e camadas cisalhantes.

Embora tenham sido obtidos importantes resultados com a teoria existente, a exigência tecnológica de uma perfeita concordância numérico-experimental culpou as formulações baseadas em estabilidade temporal pelas diferenças observadas (Gaster, 1962). Problemas formulados e resolvidos segundo modos de propagação espacial para as perturbações passaram a ser adotados com o argumento de que, no experimento, as perturbações se propagam espacialmente. As melhoras advindas deste procedimento não eliminaram os contrastes entre os resultados numéricos e experimentais. Efeitos não-paralelos foram, a partir de então, incorporados às equações, porém sempre apenas no limite em que tais equações continuassem permitindo a separação de variáveis. A solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias permitia a construção de séries que aproximavam as perturbações. Hoje, com a crescente capacidade dos computadores, já resolvem-se as equações completas, retirando-se a hipótese quase-paralela e incluindo-se os efeitos não-lineares.

Pretende-se, neste trabalho, utilizar as ferramentas da Teoria de Estabilidade Linear para estudar a estabilidade de escoamentos radiais entre discos paralelos. Esta classe de escoamentos apresenta grande interesse prático e teórico. A modelagem do escoamento em válvulas de compressores, impactores de aerossóis, mancais axiais e equipamentos de usinagem por eletroerosão são alguns exemplos de aplicações práticas do estudo desta classe de escoamentos. O interesse teórico nestes escoamentos diz respeito à presença de regiões de recirculação a partir de um número de Reynolds igual a 62 (Raaij, 1975), a resultados experimentais (Mochizuki e Yao, 1983) e numéricos (Mochizuki e Yang, 1985) que identificaram soluções periódicas, e à descoberta da bifurcação da solução simétrica em três soluções, duas assimétricas e uma simétrica (bifurcação em forquilha) a partir de um Reynolds de 117 (Langer, 1991). O presente trabalho tem por objetivo analisar a estabilidade das soluções obtidas nesta última referência, através da Teoria de Estabilidade Linear juntamente com o método da energia.

Por meio de perturbações arbitrariamente pequenas impostas à

solução estacionária, serão obtidas as equações linearizadas para as pequenas perturbações. A partir da observação de que este escoamento é marcadamente não-paralelo e, portanto, não admitindo a separação de variáveis para sua parte espacial, far-se-á necessária a construção de uma série composta de produtos de termos exponenciais no tempo por termos responsáveis pela evolução espacial das perturbações. Isso originará um problema de autovalor diferencial parcial, onde o interesse maior é a determinação da componente mais instável no tempo. Sabe-se que a solução numérica deste problema conduz ao autovalor mais instável (Shapira, Degani e Weihs, 1990). Se, dado um certo número de Reynolds, obtém-se um autovalor negativo, diz-se que o escoamento é estável a pequenas perturbações e em caso contrário, diz-se que a solução estacionária da equação de Navier-Stokes é instável a pequenas perturbações. A aplicação dos princípios variacionais do método da energia e a utilização da conservação da energia global das perturbações possibilita a determinação do modo mais instável, além de fornecer uma interpretação física do modo crítico como um balanço entre a produção e a dissipação de energia.

No segundo capítulo apresentar-se-á uma revisão de Teoria da Estabilidade Hidrodinâmica, exibindo os principais teoremas e outras ferramentas necessárias à formulação do problema. O terceiro capítulo apresentará os estudos já realizados em escoamentos em difusores radiais, bem como as questões e discussões mais importantes associadas a esta classe de escoamentos. A formulação do problema e o método de solução empregado serão analisados no quarto capítulo. No capítulo quinto serão expostos os resultados obtidos, discutindo-os à luz da teoria de estabilidade linear e do método da energia, e relacionando-os com outros resultados da literatura. O sexto e último capítulo apresentará as conclusões inferidas dos resultados apresentados. A discussão de determinados tópicos, além de materiais complementares julgados importantes para o trabalho, porém adequados apenas suplementarmente, serão apresentados em apêndices.

CAPÍTULO 2

A TEORIA DA ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA

2.1 OBJETIVOS

A Teoria da Estabilidade Hidrodinâmica (doravante referida como TEH) foi construída fundamentalmente devido à preocupação dos fluido-mecanicistas em estabelecer uma metodologia para a determinação da faixa a partir da qual determinada configuração do escoamento perde sua estabilidade e transita em direção a outras configurações (laminares) ou mesmo rumo à turbulência. A finalidade desta teoria repousa então na análise da estabilidade da solução de equações, em geral diferenciais, que descrevem determinado fenômeno hidrodinâmico. O desenvolvimento simultâneo desta e de outra teoria, a Teoria da Bifurcação, permitiu a identificação de ramificações em soluções, sempre associadas ao mecanismo de perda de estabilidade.

2.2 DEFINIÇÕES

A compreensão dos marcos principais estabelecidos pela TEH exige o conhecimento de alguma nomenclatura e conceitos. Apenas o fundamental será apresentado aqui, sendo deixado ao leitor a opção de consultar a vasta bibliografia disponível. Em especial, recomendam-se os livros de Joseph (1976) e Drazin e Reid (1981), dentre outros.

2.2.1 ESCOAMENTO BÁSICO

O problema hidrodinâmico é composto das equações de conservação da quantidade de movimento linear, sujeitas à restrição de que a massa seja conservada ao longo do domínio de interesse. Adicionalmente, exige-se que as condições impostas às fronteiras do domínio e no instante inicial sejam obedecidas. Denomina-se solução básica, campo básico ou escoamento básico, àquela solução que satisfaz às equações de conservação, condições inicial e de

contorno.

2.2.2 TEORIA LINEAR VERSUS TEORIA NÃO-LINEAR

Geralmente a teoria de estabilidade hidrodinâmica tem como primeiro passo a introdução de perturbações no escoamento básico. A posterior substituição desta composição nas equações governantes leva às equações para o cálculo das perturbações. Como uma primeira aproximação para a solução deste novo problema não-linear, costuma-se assumir perturbações tão pequenas, que termos de segunda ordem podem ser desprezados em relação aos demais. A equação resultante é conhecida como equação das pequenas perturbações. A linearidade desta equação permite que certos teoremas possam ser inferidos e aplicados, destacando-se o fato de que esta teoria linear assegura o estabelecimento de critérios de instabilidade. Em outras palavras, se um campo básico é instável a perturbações infinitesimais, então será instável a perturbações maiores. Entretanto, se este campo for estável a pequenas perturbações, então não se pode concluir que ele seja estável a perturbações maiores. Diz-se apenas que este campo é estável a pequenas perturbações. Pode ocorrer que um campo estável pela teoria linear possua um limite superior, a partir do qual o escoamento torne-se instável. Este é o papel de teoria não-linear. Considerando que esta segunda teoria não apresenta restrição quanto à magnitude da perturbação imposta, torna-se possível um estudo mais amplo dos efeitos de instabilidade.

2.2.3 ESCOAMENTOS PARALELOS E QUASE PARALELOS

Um escoamento é denominado paralelo quando ocorre em uma única direção e depende apenas da coordenada transversal à direção de escoamento. O escoamento plano de Poiseuille é um exemplo deste tipo de configuração. Se determinado campo de velocidades apresenta uma direção fortemente preferencial e o perfil de velocidades predominante varia pouco em relação à direção principal do escoamento, este é denominado quase paralelo.

Por que o interesse em escoamentos paralelos e quase paralelos? Na verdade o interesse aqui é puramente matemático.

Escoamentos incluídos em quaisquer das duas classificações permitem, após a obtenção do problema linear, a separação de variáveis e a solução de um problema de autovalor diferencial ordinário. Embora hoje em dia a inclusão de todos os efeitos não-paralelos e a solução de problemas de autovalor diferenciais parciais seja uma realidade, há algum tempo atrás mesmo a solução da equação de Orr-Sommerfeld era um desafio. Pode-se dizer que antes tinha-se uma ferramenta matemática e procurava-se o problema físico que se encaixava naquele método, enquanto que hoje os pesquisadores começam a tentar adequar a ferramenta ao problema físico de interesse no momento. Muito embora alguns pesquisadores ainda insistam na prática inicial.

2.2.4 DEFINIÇÃO DE ESTABILIDADE

Existem várias definições de estabilidade, dependendo da abordagem empregada e dos parâmetros escolhidos.

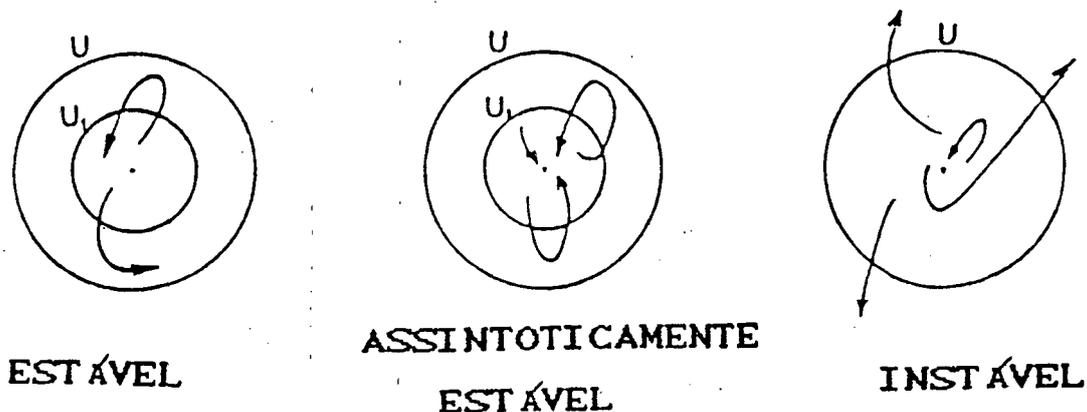


FIGURA 2.1 Ilustração dos critérios de estabilidade segundo Liapounov (adaptação de Thompson e Stewart, 1986).

Liapounov definiu formalmente um importante critério de estabilidade. Este critério estabelece que um escoamento é estável quando, para qualquer número positivo ϵ , existe algum número positivo δ , dependente de ϵ , de modo que, se a diferença entre uma variável do escoamento no instante inicial, satisfazendo as equações de conservação e condições de contorno, e a variável "básica" correspondente é menor que δ , então esta diferença permanecerá

sempre menor que ε ao longo do tempo. Caso esta diferença tenda a zero assintoticamente, diz-se que o escoamento é não só estável, mas assintoticamente estável. A figura 2.1 ilustra as três situações características de estabilidade segundo Liapounov. A primeira ilustração da figura mencionada apresenta a situação em que as variáveis do escoamento são limitadas por um raio atrator a um valor no instante inicial. Qualquer perturbação nesta configuração inicial permanecerá finita e restrita a um domínio de atração. Na situação seguinte, a perturbação não somente é limitada, mas decresce assintoticamente a zero. Na terceira situação, determinadas perturbações "fogem" do domínio de atração e levam a uma nova configuração, indicando que a configuração perturbada é instável.

Um escoamento é condicionalmente estável se a introdução de uma perturbação, limitada superiormente em relação à sua integral quadrática ao longo do domínio, causa um amortecimento assintótico em relação à mesma integral quadrática. Simbolicamente, $U(x,t,U_0)$ é estável se:

$$\langle |U(x,t;U_0) - U(x,t;U_0+u_0)|^2 \rangle \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

quando $t \rightarrow \infty$, sempre que

$$\langle |u_0|^2 \rangle < 2\delta, \quad (2.2)$$

onde $\langle \rangle$ simboliza a integral ao longo do volume, x é o vetor posição, t é o tempo, U_0 representa o campo inicial e u_0 é a perturbação inicial (Joseph, 1976). Outros critérios baseiam-se em desigualdades onde os limites de estabilidade são definidos em relação a viscosidades críticas. Esta discussão será adiada para um item subsequente onde se comentará o método da energia.

2.2.5 A TEORIA DE ESTABILIDADE GLOBAL.

A teoria de estabilidade global avalia os parâmetros de estabilidade geralmente através de uma integração ao longo de todo o domínio do problema. Deste modo sentem-se os efeitos globais e não apenas locais. A definição da energia média das perturbações exige o uso destas integrações ao longo do domínio. Ferramentas oriundas do

cálculo variacional também têm importância para esta teoria. Daqui emergem conceitos tais como estabilidade global, estabilidade condicional, escoamento globalmente estável, escoamento globalmente e monotonicamente estável.

2.2.6 O MÉTODO DOS MODOS NORMAIS, AS CURVAS DE ESTABILIDADE NEUTRA E MARGINAL.

O método dos modos normais pode ser considerado o ponto de partida para a solução de muitos problemas de estabilidade. As soluções das equações governantes, denominadas aqui de escoamento básico, são levemente perturbadas através da soma de um termo arbitrariamente pequeno. Assume-se que a composição satisfaz as equações governantes e a equação resultante é então linearizada. No método dos modos normais considera-se, para os casos mais simples, a decomposição das perturbações em modos independentes e procura-se a série de modos que as representam. Exemplificando, se o procedimento descrito for aplicado ao escoamento plano de Poiseuille, pode-se decompor a perturbação do vetor velocidade u da seguinte forma: $u = v(y).exp[i(\alpha x - \beta t)]$, onde α e β são em geral complexos. A parte real de α , $Re(\alpha)$, é o número de onda dado por $2\pi/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda associado à variação espacial da perturbação. A parte real de β , $Re(\beta)$ é a frequência associada à variação temporal da perturbação. As partes imaginárias, $Im(\alpha)$ e $Im(\beta)$ são as taxas de amplificação espacial e temporal da perturbação, respectivamente. Assim sendo, a teoria de amplificação temporal de uma perturbação está associada a um α real e β complexo enquanto que a teoria de amplificação espacial está associada a um α complexo e β real. A equação diferencial ordinária resultante constitui-se em um problema de autovalor para α e β em função do número de Reynolds. Tal equação é a celebrada equação de Orr-Sommerfeld.

A partir das equações de estabilidade linear (pequenas perturbações) e após aplicar-se o método dos modos normais, escoamentos paralelos ou quase paralelos conduzem a uma ou mais equações diferenciais ordinárias que caracterizam um problema de autovalor. Em geral esta separação em modos normais decompõe, por

exemplo, uma perturbação $u'(x,y,t)$ em uma série de termos da forma $u_0(y) \cdot \exp[i(\alpha x - \beta t)]$, onde y seria a direção transversal ao escoamento, u_0 é a autofunção, $\text{Re}(\alpha)$ é o número de onda e $\text{Re}(\beta)$ é a frequência. Considere a teoria de amplificação temporal, neste caso $\text{Im}(\alpha) = 0$, e o escoamento denomina-se temporalmente estável ou instável conforme, respectivamente, $\text{Im}(\beta)$ é menor ou maior que zero. Constrói-se a curva neutra de estabilidade a partir da relação $\text{Im}(\beta[\alpha, R]) = 0$, onde R é comumente o número de Reynolds. O nome deve-se ao fato de que sobre aquela curva as perturbações não crescem nem amortecem temporalmente. No caso do escoamento plano de Poiseuille, esta relação está implícita na equação de Orr-Sommerfeld. Caso alguma vizinhança da curva neutra admita $\text{Im}(\beta)$ maior que zero, esta curva é também denominada curva de estabilidade marginal. O mesmo se aplica para a teoria espacial. Um exemplo clássico de uma curva de estabilidade marginal obtida numericamente, juntamente com uma confrontação com resultados experimentais, pode ser observado na figura 2.2 (Betchov e Criminale, 1967).

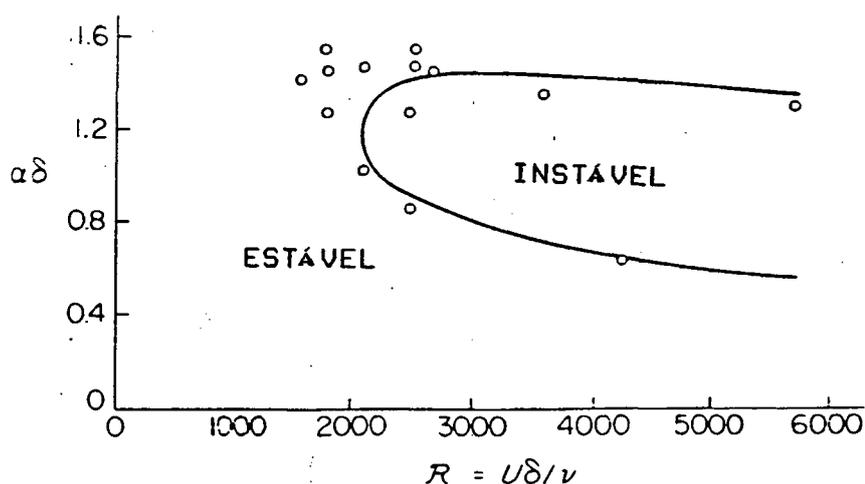


FIGURA 2.2 Diagrama de estabilidade destacando uma curva neutra típica (escoamento sobre uma placa plana) (Betchov e Criminale, 1967). Os círculos simbolizam resultados experimentais e a curva contínua representa resultados numéricos.

2.2.7 INSTABILIDADES CONVECTIVA E ABSOLUTA.

O conceito de instabilidade convectiva está fortemente relacionado à propagação espacial das perturbações. Pode-se imaginar uma situação em que uma perturbação "viajante" desestabiliza localmente uma região de um fluido. Esta alteração, entretanto, é localmente passageira, uma vez que o deslocamento desta onda leva consigo a excitação. A instabilidade é sempre "convectada" pelo fluido, daí seu nome. Pensando-se em um experimento, deve-se imaginar a introdução de algum tipo de gerador artificial de perturbações. Estas surgirão então naquela região e propagar-se-ão na direção do escoamento.

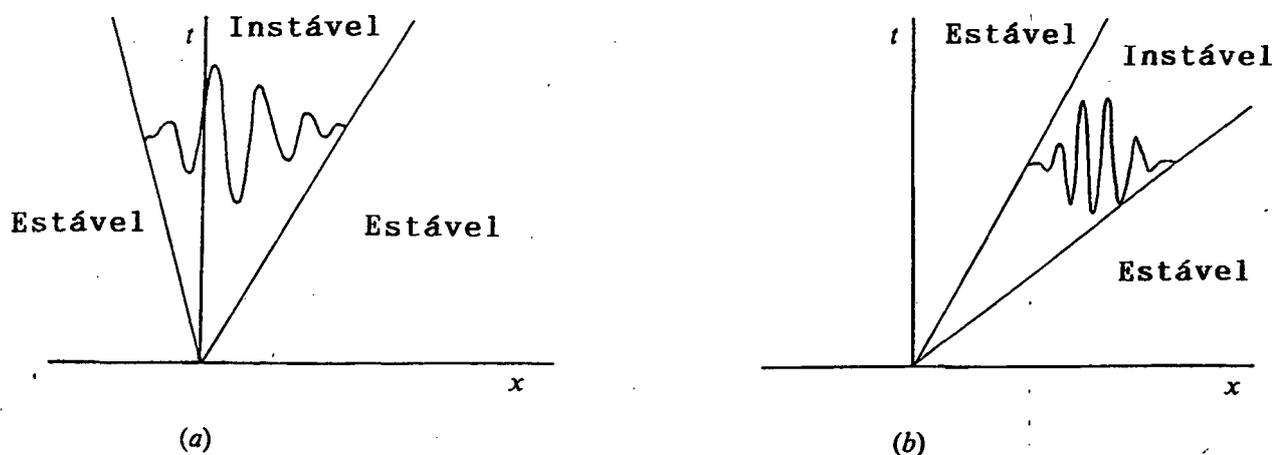


FIGURA 2.3 Ilustração da estabilidade absoluta (a) e convectiva (b) (Huerre e Monkewitz, 1985).

Pensar em instabilidade absoluta significa pensar em amplificação puramente temporal. Em outras palavras, a onda de perturbação não se propaga espacialmente, ela apenas evolui com o tempo em uma região fixa. Em termos experimentais isso equivale a dizer que tal instabilidade deve ser detectada sem introdução artificial de perturbação. Deve-se apenas esperar passivamente que as imperfeições experimentais se encarreguem de gerar a instabilidade. A figura 2.3 do trabalho de Huerre e Monkewitz (1985) é conhecida por simbolizar bem estas duas naturezas no modo de propagação de instabilidades.

2.3 A TEORIA LINEAR

2.3.1 A EQUAÇÃO DE ORR-SOMMERFELD

Apresenta-se a seguir a metodologia de estudo de estabilidade temporal a pequenas perturbações para o escoamento entre duas placas planas e paralelas. O objetivo aqui é apresentar os princípios da teoria linear na análise de escoamentos. Recomenda-se para um estudo mais profundo do assunto, Sherman (1990), Shivamoggi (1986), Drazin e Reid (1981) e Yih (1969), dentre outras obras. Assume-se, antecipadamente, que propriedades tais como a viscosidade e densidade são constantes, que o fluido é newtoniano e que as forças de corpo são desprezíveis quando comparadas com as demais. Uma análise de estabilidade linear para o caso de escoamentos compressíveis pode ser encontrada no livro de Shivamoggi (1986).

As equações associadas ao problema hidrodinâmico são,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \nabla^2 u \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \nabla^2 v \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \nabla^2 w \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

onde R é o número de Reynolds baseado em uma velocidade de referência U e em um comprimento característico L . Todas as variáveis apresentadas nas equações anteriores estão adimensionalizadas.

Uma vez que se pretende estudar a estabilidade das soluções conhecidas destas equações, introduz-se a cada variável básica uma perturbação. Tem-se então,

$$u = \bar{u} + u', \quad v = v', \quad w = w', \quad p = \bar{p} + p', \quad (2.7)$$

onde as variáveis sob barras representam a solução associada ao

escoamento básico e as variáveis assinaladas com um apóstrofo representam perturbações.

Substituindo as equações (2.7) nas equações (2.3) a (2.6) e observando que os termos associados unicamente ao escoamento básico se anulam, obtém-se equações não-lineares para as perturbações impostas. A fim de simplificar o problema matemático e também como uma primeira aproximação, pode-se desprezar os produtos de perturbações, linearizando assim as equações resultantes. O resultado destas operações é o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{d\bar{u}}{dy} = - \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{R} \nabla^2 u' \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} = - \frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{R} \nabla^2 v' \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial z} = - \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{R} \nabla^2 w' \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

Estas são as equações linearizadas para as perturbações infinitesimais. Considerando que o escoamento ocorre predominantemente ao longo de x e z e que y é perpendicular à direção do escoamento, as perturbações serão agora decompostas em modos normais da seguinte forma,

$$\{ u', v', w', p' \} = \{ u_0(y), v_0(y), w_0(y), p_0(y) \} \cdot \exp\{i(\alpha \cdot x + \beta \cdot z - \alpha \cdot c \cdot t)\} \quad (2.12)$$

onde α e β são reais e c é imaginário. A substituição destas expressões nas equações para as pequenas perturbações, seguido da eliminação das perturbações de pressão conduz a:

$$(\bar{u} - c) \cdot \left(\frac{d^2}{dy^2} - \gamma^2 \right) v_0 - v_0 \cdot \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} = - \frac{i}{\alpha R} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \gamma^2 \right)^2 v_0 \quad (2.13)$$

$$(\bar{u} - c) (\beta u_0 - \alpha w_0) - \frac{i\beta}{\alpha} v_0 \frac{d\bar{u}}{dy} = - \frac{i}{\alpha R} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \gamma^2 \right) (\beta u_0 - \alpha w_0) \quad (2.14)$$

$$i\alpha u_0 + i\beta w_0 + \frac{dv_0}{dy} = 0 \quad (2.15)$$

onde $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

As condições de contorno correspondentes são,

$$v_0 = 0 \text{ e } dv_0/dy = 0 \text{ para } y = 0 \text{ e } 1. \quad (2.16)$$

Através de uma transformação, Squire (1933) mostrou que, em um escoamento paralelo e na ausência de efeitos não-lineares, é possível reduzir o problema tridimensional a um problema bidimensional. Mais formalmente:

" Para obter o número de Reynolds crítico, abaixo do qual todas as perturbações infinitesimais decaem, é suficiente considerar-se apenas perturbações bidimensionais."

Uma forma equivalente de utilizar este resultado é fazer $\beta = 0$ nas equações anteriores.

Levando em conta que a decomposição em modos normais também afeta a perturbação da função corrente, tem-se,

$$\psi = \phi(y)\exp[i\alpha(x-ct)]. \quad (2.17)$$

Da definição de função corrente e utilizando a equação anterior tem-se que,

$$u_0 = \partial\phi/\partial y \text{ e } v_0 = -i\alpha\phi. \quad (2.18)$$

A aplicação do teorema de Squire e das equações (2.13-2.15) e (2.18) origina a seguinte equação:

$$(\bar{u} - c)(\phi'' - \alpha^2\phi) - \bar{u}''\phi = -\frac{i}{\alpha R}(\phi'''' - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi), \quad (2.19)$$

onde ϕ'' e ϕ'''' representam, respectivamente, d^2/dy^2 e d^4/dy^4 sobre ϕ . As condições de contorno associadas à equação anterior são:

$$\phi = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } y = 1 \text{ (impenetrabilidade)} \quad (2.20a)$$

$$\phi' = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } y = 1 \text{ (não-deslizamento)}. \quad (2.20b)$$

A equação (2.19) é a famosa equação de Orr-Sommerfeld, uma equação diferencial ordinária que se constitui em um problema de autovalor. Observe-se a relação (implícita) existente entre α , c e R . A partir da solução da equação (2.19) é possível levantar a curva de estabilidade neutra, ou seja, a curva formada pelo conjunto de pontos onde $\text{Im}(c) = 0$, onde $c = c(\alpha, R)$. Na teoria de amplificação temporal arbitram-se α e R e determinam-se c e ϕ .

2.3.2 A EQUAÇÃO DE RAYLEIGH E TEOREMAS PARA ESCOAMENTOS INVÍSCIDOS

Na época em que a equação de Orr-Sommerfeld foi obtida, os métodos de solução de problemas de autovalor deste tipo ainda não haviam se desenvolvido. Tendo em vista tais limitações e, ao mesmo tempo, objetivando uma primeira análise mais simplificada do problema, Rayleigh desprezou os efeitos viscosos e aproximou a equação (2.19) por,

$$(\bar{u} - c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \phi - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \cdot \phi = 0 \quad (2.21)$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\phi = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } y = 1. \quad (2.22)$$

A equação (2.21) é conhecida como equação de Rayleigh. É importante observar que esta equação exige apenas duas condições de contorno e, das quatro que haviam na equação de Orr-Sommerfeld, faz sentido retirar as condições de não-deslizamento.

Esta equação para escoamentos invíscidos gerou teoremas fundamentais que permitiram uma melhor compreensão física dos mecanismos desestabilizantes do escoamento. O primeiro deles é o teorema do ponto de inflexão, estabelecendo que perfis de velocidade contendo um ponto de inflexão são instáveis pela teoria invíscida. A figura 2.4 (Drazin e Reid, 1981) apresenta dois perfis que sempre

são empregados para exemplificar este teorema. Esta é uma condição necessária (Rayleigh, 1880), mas não suficiente.

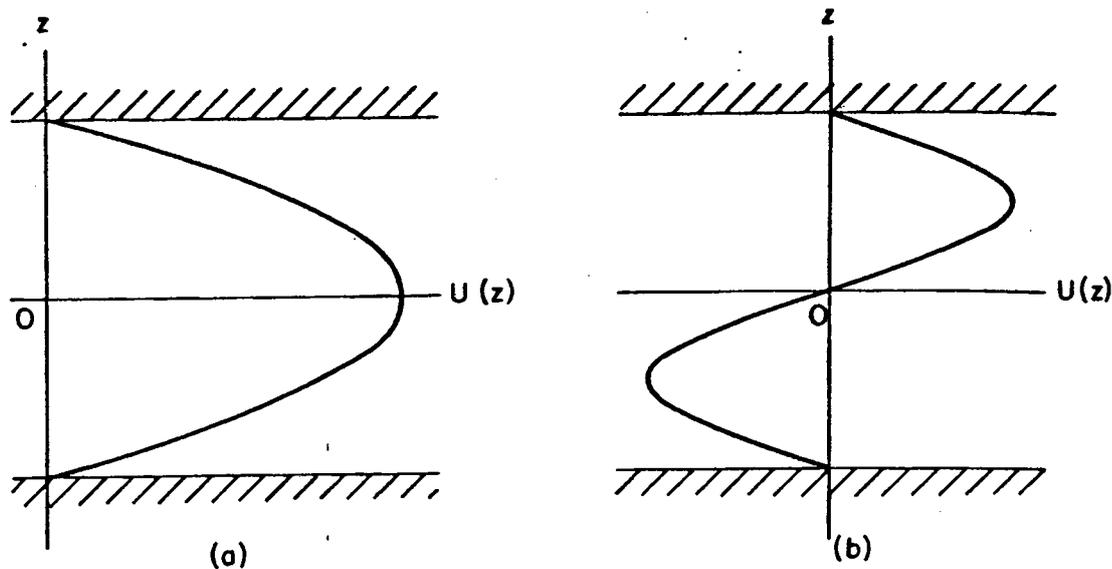


FIGURA 2.4 Exemplo de um perfil sem ponto de inflexão (estável) e outro com a existência de uma inflexão (instável) (Drazin e Reid, 1981).

Teorema do ponto de inflexão de Rayleigh

"Uma condição necessária para a instabilidade é que o perfil básico de velocidades apresente um ponto de inflexão."

Um segundo teorema, obtido bem mais tarde por Fjortoft (1950), estabelece que um perfil básico de velocidades somente é instável se, além da presença de um ponto de inflexão (exigido pelo teorema do ponto de inflexão), apresenta uma instabilidade INFLEXIONAL (Sherman, 1990).

Teorema de Fjortoft

"Um perfil com um ponto de inflexão, onde a velocidade básica é U_i , deve satisfazer a condição $U''(U - U_i) < 0$ em alguma parte da região $z_1 < z < z_2$. O intervalo $[z_1, z_2]$ corresponde ao domínio do problema na direção transversal ao escoamento, U'' simboliza a derivada segunda em relação a z de U e $U_i = U(z_i)$." A figura 2.5 apresenta exemplos

ilustrativos da aplicação deste teorema.

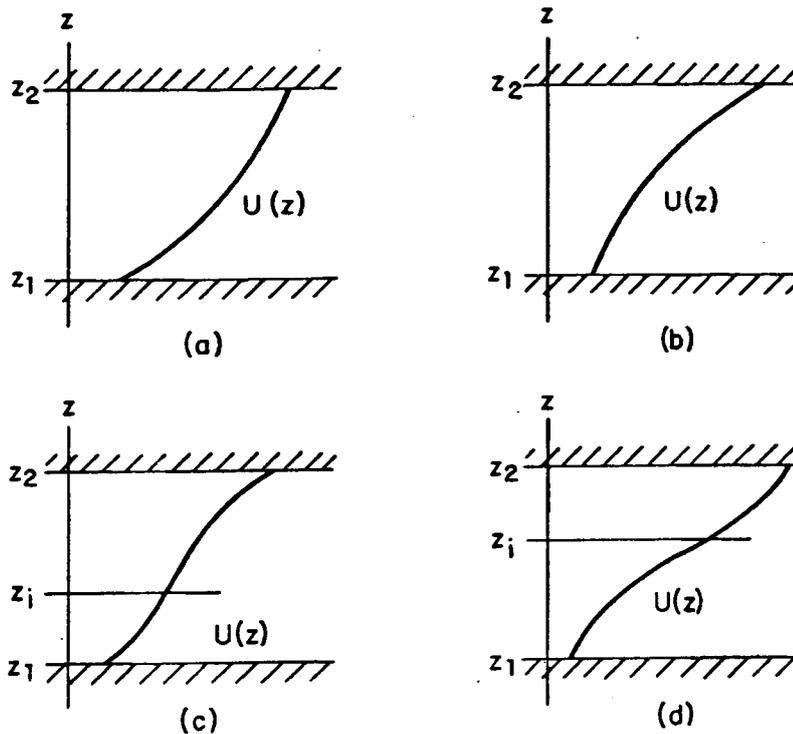


FIGURA 2.5 Perfis-exemplo da aplicação do teorema de Fjortoft. Em (a) e (b) os perfis são estáveis, pois não há ponto de inflexão. Em (c) o perfil também é estável, embora exista um ponto de inflexão, pois $U''(U-U_i) \geq 0$. Em (d) o escoamento possivelmente será instável, pois $U''(U-U_i) \leq 0$ (Drazin e Howard, 1966).

Um outro teorema importante para a instabilidade invíscida é o teorema do semi-círculo de Howard (1961). Este teorema mostra que modos instáveis apresentam velocidades de onda complexas dentro de uma região semi-circular definida na metade superior do plano complexo associado a este número de onda.

Teorema do semi-círculo de Howard

"Na presença de uma onda instável, qualquer velocidade de onda complexa, c , deve situar-se no semi-círculo definido pela desigualdade:

$$[c_r - 1/2(U_{max} + U_{min})]^2 + c_i^2 \leq [1/2(U_{max} - U_{min})]^2 \quad (c_i > 0) \quad (2.23)$$

onde $c_r = \text{Re}(c)$, $c_i = \text{Im}(c)$, e U_{max} e U_{min} simbolizam, respectivamente, a máxima e mínima velocidades associadas ao perfil básico."

2.3.3 A FORMULAÇÃO GERAL

Nas secções 2.3.1 e 2.3.2 a teoria da estabilidade linear foi considerada para escoamentos paralelos ou quase paralelos. Nesta secção será introduzida uma formulação para um problema de estabilidade de um escoamento não necessariamente paralelo. Tome-se por exemplo o problema de estabilidade para o escoamento no interior de um canal, formado por duas placas planas e paralelas, onde, a partir de um determinado ponto, ocorre uma expansão súbita para outro canal também entre placas paralelas. A figura 2.6 ilustra o problema físico em questão. As grandezas geométricas indicadas na figura estão adimensionalizadas pelo espaçamento entre as placas paralelas antes da expansão, denotado por d .

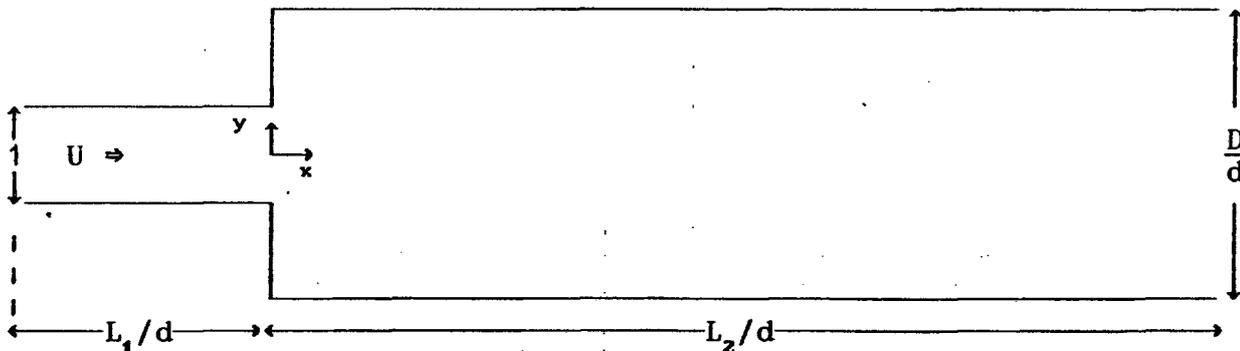


FIGURA 2.6 Geometria do problema associado à expansão súbita em um canal formado por placas planas paralelas; d é o espaçamento entre as placas antes da expansão.

A presença da expansão destrói as hipóteses de escoamento paralelo e, tendo em vista uma razão de expansão de 1:3, por exemplo, mesmo a hipótese de escoamento quase paralelo fica prejudicada. Admitindo que o escoamento básico é conhecido, investiga-se o problema de estabilidade bidimensional a perturbações infinitesimais. Considera-se antecipadamente um fluido newtoniano com densidade constante. As equações governantes do escoamento são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \nabla^2 u \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \nabla^2 v \quad (2.26)$$

onde u, v são velocidades adimensionais (em relação à velocidade máxima U_{\max}) nas direções x, y , respectivamente, enquanto que os comprimentos são adimensionalizados em relação à altura do canal antes da expansão, d . A pressão adimensional é denotada por p e ∇^2 é a versão adimensional do operador laplaciano em coordenadas cartesianas. As condições de contorno são:

$$u = v = 0 \text{ nas paredes.} \quad (2.27a)$$

$$u = \frac{4}{d} (d/2 - y)(d/2 + y) \text{ e } v = 0 \text{ em } x = -L_1/d. \quad (2.27b)$$

$$\partial u / \partial x = \partial v / \partial y = 0 \text{ para } x = L_2/d. \quad (2.27c)$$

Assumiu-se que o perfil de velocidades está plenamente desenvolvido na entrada do canal.

Representando-se o escoamento básico estacionário pelas variáveis \bar{u}, \bar{v} e \bar{p} e introduzindo-se pequenas perturbações a estas soluções, ou seja,

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad p = \bar{p} + p', \quad (2.28)$$

obté-m-se um sistema de equações diferenciais lineares para as perturbações u', v' e p' :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u'}{\partial y} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{R} \nabla^2 u' \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial y} + u' \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{R} \nabla^2 v' \quad (2.31)$$

As condições de contorno associadas às equações (2.29)-(2.31) são,

$$u' = v' = 0 \text{ nas paredes e em } x = -L_1/d, \quad (2.32a)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial v'}{\partial x} = 0 \text{ para } x = L_2/d. \quad (2.32b)$$

Para este sistema de equações não é possível a separação das variáveis espaciais, devido ao fato de que a hipótese de escoamento quase paralelo não pode ser adotada. Esta hipótese não pode ser usada devido à forte dependência da velocidade com ambas as coordenadas espaciais do problema e também porque a velocidade transversal não pode ser desprezada.

A complexidade dos efeitos não-paralelos presentes neste escoamento torna necessária a utilização de procedimentos numéricos a fim de que as equações diferenciais parciais (2.29)-(2.32) possam ser resolvidas.

2.4 A TEORIA GLOBAL

2.4.1 O MÉTODO DA ENERGIA

Dentro da Teoria da Estabilidade Hidrodinâmica, TEH, encontra-se a análise global de estabilidade. Após o conhecimento do comportamento do escoamento sujeito a pequenas perturbações, faz-se necessária uma análise mais detalhada do escoamento. A principal ferramenta desta teoria global é, sem dúvida, o método da energia. Neste método não se assume a condição de linearidade nas equações das perturbações. Serão apresentados aqui os fundamentos deste método, bem como suas vantagens e principais características. Uma discussão mais profunda pode ser encontrada em Joseph (1976).

Um conceito fundamental associado ao método da energia é o de energia média das perturbações (8). Seja $u(x,t;\nu,u_0)$ o campo vetorial aplicado a um escoamento básico U , onde x representa o vetor posição, t é o tempo, ν é a viscosidade cinemática e u_0 é o campo inicial de perturbações. A notação $u(x,t;\nu)$ indica que u tem dependência direta com x e t e implícita com ν . As equações não-lineares para as perturbações são,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = - \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.34)$$

considere-se ainda o seguinte tipo de condições iniciais e de contorno:

$$\mathbf{u}|_S = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (2.35)$$

onde S é a fronteira do domínio de solução.

Note-se que, diferentemente das equações (2.30) e (2.31), na equação (2.33) manteve-se o quarto termo do lado esquerdo da igualdade. Este termo representa a contribuição não-linear. A obtenção das equações (2.33) e (2.34) é feita da mesma forma que com as equações lineares, ou seja, compondo a solução básica com a perturbação nas equações de Navier-Stokes e conservação da massa.

Define-se a ENERGIA MÉDIA DAS PERTURBAÇÕES da seguinte forma:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle, \quad \text{onde} \quad \langle \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\) dV \quad (2.36)$$

o símbolo $|\mathbf{u}|$ denota o módulo do vetor e V simboliza o volume do domínio de solução.

O método da energia utiliza a energia média das perturbações como variável fundamental no estudo de estabilidade. Uma observação mais detalhada desta definição mostra que sua vantagem reside em depender apenas do tempo, sem, no entanto, perder as informações a respeito do que ocorre ao longo de todo o domínio do problema (colhidas de modo global pela integração ao longo do volume). A utilização do cálculo variacional para encontrar princípios e resultados globais em relação à estabilidade fornece critérios suficientes para garanti-la. Enquanto a teoria linear fornece condições suficientes para instabilidade, a teoria da energia tem as condições suficientes para a estabilidade de um escoamento. Conceitos novos de estabilidade global surgem a partir da equação (2.36). Mencionam-se a seguir os principais.

Estabilidade assintótica na média

Um escoamento é considerado assintoticamente estável na média se,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\delta}(t) / \bar{\delta}(0) \rightarrow 0. \quad (2.37)$$

Fisicamente, isso significa que, se introduzirmos perturbações iniciais de qualquer magnitude a um escoamento, este será assintoticamente estável na média se a energia global média das perturbações cair assintoticamente a zero.

Escoamento condicionalmente estável

Um escoamento é condicionalmente estável se sua estabilidade está "condicionada" a um limite superior inicial para a energia global de suas perturbações. Em outras palavras, caso a energia inicial ultrapasse determinado limite, esta classe de escoamento torna-se instável. Sua estabilidade está condicionada a este limite, denominado *raio atrator*, por causa de sua influência sobre a estabilidade.

Estabilidade incondicional ou global

Caso um campo básico apresente um raio atrator infinito, diz-se que sua estabilidade é global ou incondicional. Isso significa que não é necessária nenhuma restrição ao tamanho das perturbações iniciais para que se tenha estabilidade.

A principal característica desta classe de escoamentos está no fato de que a unicidade de soluções estacionárias das equações de Navier-Stokes e conservação da massa é garantida (Leray, 1933).

Escoamentos globalmente e monotonicamente estáveis

Escoamentos com esta característica não podem apresentar crescimento da energia média das perturbações, mesmo para perturbações de grande magnitude. Em termos simbólicos, $d\bar{\delta}/dt \leq 0$.

Viscosidades críticas e critérios de estabilidade

A teoria da energia é bastante detalhada em relação a critérios de estabilidade. Diferentes critérios permitem definir diferentes tipos de viscosidades críticas (ou números de Reynolds críticos). Abaixo descrevem-se as viscosidades críticas conhecidas da teoria global e, assim, critérios poderão ser inferidos.

i) Viscosidade crítica da teoria da energia (ν_e)

Esta viscosidade separa a região globalmente e monotonicamente estável da região onde apenas a estabilidade global pode ser assegurada. Fluidos com viscosidade superior a ν_e não apresentam acréscimo instantâneo da energia das perturbações, enquanto fluidos com viscosidade inferior podem apresentar elevações nos valores da energia das perturbações.

ii) Viscosidade limite da estabilidade global (ν_g)

Separa escoamentos, no mínimo globalmente estáveis, de escoamentos onde a influência do raio atrator determina ou não a estabilidade.

iii) Viscosidade limite da teoria linear (ν_L)

Delimita escoamentos condicionalmente estáveis de escoamentos instáveis. Relaciona-se diretamente ao Reynolds limite da teoria linear, a partir do qual a instabilidade do escoamento é assegurada.

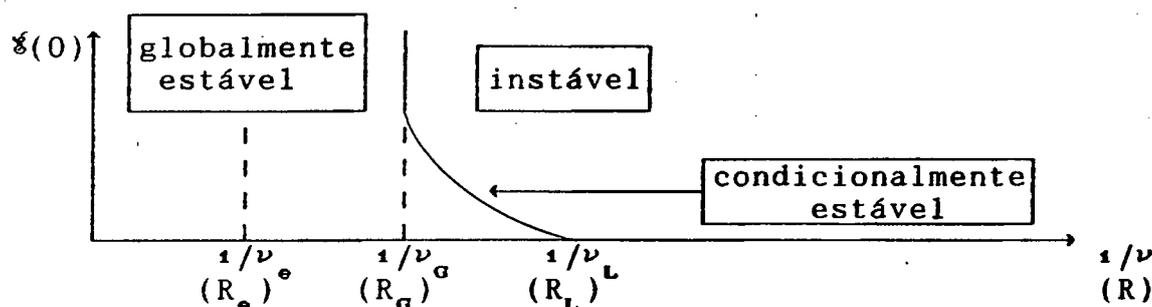


Figura 2.7 Limites de estabilidade do escoamento básico (Joseph, 1976).

Na figura 2.7 pode ser observado um gráfico que relaciona a magnitude das perturbações iniciais, aplicadas a um escoamento básico e representadas pela energia $\mathfrak{E}(0)$, com a viscosidade (número de Reynolds). Esta ilustração resume o que foi discutido a respeito de limites de estabilidade. A região onde $0 < R < R_g$ caracteriza os escoamentos globalmente e monotonicamente estáveis, pois qualquer que seja a magnitude da energia inicial, $\mathfrak{E}(0)$, haverá sempre decréscimos de energia (comportamento monotônico). Se $R_g < R < R_L$, então o escoamento pode apresentar crescimento das perturbações, mas estas finalmente decairão devido à estabilidade do escoamento a qualquer perturbação inicial. Uma região bastante singular é aquela onde o número de Reynolds situa-se entre o limite de estabilidade global e o limite previsto pela teoria linear, simbolizado por R_L . Neste caso a estabilidade ou não do escoamento básico em estudo depende (ou está condicionada) da magnitude das perturbações (energia) iniciais impostas. Após o limite de estabilidade linear, qualquer energia inicial "finita" provoca instabilidade.

Curva limite de estabilidade global

A curva indicada na figura 2.7 recebe o nome de curva limite de estabilidade segundo o método da energia, pois separa a região onde o escoamento básico é estável da região onde a instabilidade está assegurada. Esta curva define implicitamente um raio atrator quando perfeitamente delimitada. Quando $R < R_g$ pode-se também imaginar a influência de um raio atrator, mas neste caso ele é infinito.

O emprego das equações que descrevem a estabilidade global e o uso de princípios variacionais deveriam possibilitar que os limites de estabilidade introduzidos anteriormente pudessem ser inferidos. Este procedimento revela bons resultados apenas quando aplicado a escoamentos mais simples. Somente nestes casos é possível um cálculo direto de tais limites. As tentativas de obter limites globais em escoamentos não-paralelos tem esbarrado em grandes dificuldades matemáticas. A determinação destes limites tem sido possível através da solução numérica da equação não-linear que rege a evolução das perturbações. Uma análise linear deve preceder a complexidade da investigação do problema não-linear, pois a linearização das

equações permite a obtenção de informações fundamentais ao entendimento de fenômenos mais complexos presentes no escoamento, além de suportar os resultados em teoremas decorrentes da simplificação das equações.

Funções cinematicamente admissíveis

Esta classe de funções é importante para o método da energia. Campos escalares (h) e vetoriais (H) que se anulam nas fronteiras do domínio, restringindo o campo vetorial ao conjunto dos campos solenoidais (se $u \in H \Rightarrow \nabla \cdot u = 0$), são denominados funções cinematicamente admissíveis.

A equação de evolução para a energia das perturbações.

Uma vez que a energia cinética das perturbações é a grandeza de maior importância no método da energia, apresenta-se a seguir a equação que governa a evolução da energia cinética com o tempo.

Seja u a perturbação imposta ao escoamento básico $U(x,t;\nu)$, tal que $u \in H$. Se δ simboliza a energia média das perturbações, de acordo com (2.36), e seguindo o procedimento descrito no apêndice C, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{d\delta}{dt} = - \langle u \cdot \nabla U \cdot u \rangle - \nu \langle |\nabla u|^2 \rangle, \quad (2.38)$$

onde ν representa a viscosidade cinemática e $\langle \rangle$ simboliza a integração média ao longo do volume, conforme indicado em (2.36). O termo $\langle u \cdot \nabla U \cdot u \rangle$ deve ser interpretado como a produção de energia das perturbações, enquanto que $\nu \langle |\nabla u|^2 \rangle$ representa a dissipação da energia das perturbações. O significado físico desta equação fica então bem claro: o acréscimo ou decréscimo temporal da energia é resultado do balanço entre produção e dissipação.

2.4.2 TEOREMAS DE ESTABILIDADE E UNICIDADE (Joseph, 1976).

Certos teoremas da teoria de estabilidade global são importantes como ferramentas de apoio no entendimento de vários

conceitos, bem como para reforçar a base sobre a qual a presente teoria se sustenta. Inicialmente definiu-se uma energia que "sentisse" globalmente no espaço e instantaneamente no tempo o comportamento das perturbações. O fato de que a energia média depende somente do tempo, embora sem perder o vínculo com o que ocorre espacialmente, facilitou a construção de uma estrutura matematicamente consistente, erguida com os teoremas que serão apresentados a seguir.

Desigualdade de Poincaré e o lema da constante de decaimento

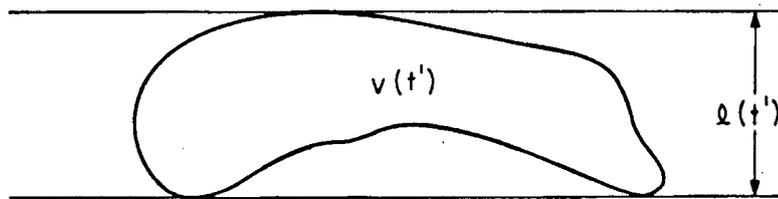


FIGURA 2.8 Esboço do domínio do problema e sua localização em relação aos planos limitantes (Joseph, 1976).

"Seja $\theta(x,y,z)$ uma função suave que se anula sobre o contorno S de um domínio \mathcal{V} . Seja l a menor distância entre dois planos que contêm \mathcal{V} exatamente, conforme esboçado na figura 2.8. Existe então uma constante $K > 2$, tal que:

$$\frac{l^2}{K} \langle |\nabla\theta|^2 \rangle \geq \langle |\theta|^2 \rangle \tag{2.39}$$

Analogamente, se $u(x,y,z)$ é qualquer campo vetorial suave, anulando-se no contorno, existe uma constante $K' > 2$, tal que:

$$\frac{l^2}{K'} \langle |\nabla u|^2 \rangle \geq \langle |u|^2 \rangle \tag{2.40}$$

Os teoremas anteriores são importantes porque informam, por exemplo, que a razão $\langle |\nabla u|^2 \rangle / \langle |u|^2 \rangle$ é inferiormente limitada, desde que u seja um campo cinematicamente admissível. Esta razão, associada à dissipação da energia das perturbações, garante que o número de Reynolds crítico da teoria da energia possui um limite inferior, conforme apresentado adiante.

Primeiro teorema de estabilidade da energia

"Seja $\mathcal{D} [U(x,t,\nu)] = \mathcal{D}$ o tensor de deformação para uma solução arbitrária do problema de valor inicial e de contorno, definido por:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U - \nu \nabla^2 U + \nabla p - F(x,t) = 0 \quad (2.41)$$

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (2.42)$$

$$U(x,t) = U_0(x,t) \text{ para } x \in S(t) \text{ e } t \geq 0 \quad (2.43)$$

$$U(x,0) = U_0(x) \text{ para } x \in \mathcal{V}(0) \quad (2.44)$$

onde p e $F(x,t)$ denotam, respectivamente, a pressão e as forças de campo.

Seja $\ell(t) = \max \ell(t')$ para $0 \leq t' \leq t$. Aqui $\ell(t')$ representa a distância mínima entre os planos paralelos contendo inteiramente $\mathcal{V}(t')$.

Existe uma constante de decaimento positiva K' e um limite de estabilidade finito dado por

$$\nu_0(\nu, t) = \max_H \frac{\langle u \cdot \mathcal{D} [U(x,t,\nu)] \cdot u \rangle}{\langle |\nabla u|^2 \rangle} \quad (2.45)$$

tal que quando $\nu > \nu_0$, para $0 < t' < t$, então:

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) \cdot \exp \left[- \frac{2 \cdot K' \cdot \nu}{t^2} \int_0^t \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu} \right) dt' \right] \quad (2.46)$$

Suponha também que $\nu > \nu_0(\nu) \equiv \sup \nu_0(\nu)$ vale para todo $t > 0$. Então a solução nula^(*) das equações (2.33) e (2.34) é globalmente e monotonicamente estável. Em contraste, se no instante inicial $\nu \leq \nu_0(\nu, 0)$, então uma condição inicial cinematicamente admissível ($u_0 \in H$) pode ser encontrada, onde $d\mathcal{E}(0)/dt \geq 0$."

(*) A solução dita nula se refere àquela associada ao escoamento estável, ou seja, a solução que tende a zero com o avanço do tempo no problema transiente das perturbações.

O teorema acima estabelece as condições necessárias e suficientes para que um campo básico seja globalmente e monotonicamente estável. A equação (2.46) descreve um decaimento monotônico exponencial na região globalmente e monotonicamente estável, assegurando, no mínimo, um aumento inicial da energia das perturbações quando a estabilidade monotônica não está presente. A equação (2.45) fornece uma maneira direta para calcular o limite crítico da teoria da energia, ν_0 , desde que o problema seja suficientemente simples de forma que este cálculo direto possa ser efetuado (o que raramente é o caso). É importante observar que este teorema aplica-se apenas para campos cinematicamente admissíveis.

O funcional taxa de crescimento

A um campo vetorial básico $U(x,t,\nu)$, ao qual foi imposta uma perturbação u , será associado um funcional $\phi(u,\nu,t,\lambda)$, onde λ é uma constante positiva, dado por:

$$\phi(u,\nu,t,\lambda) = -2. [\langle u, \mathcal{D} [U(x,t,\nu)] \cdot u \rangle + \lambda \langle |\nabla u|^2 \rangle] / \langle |u|^2 \rangle \quad (2.47)$$

O funcional ϕ , que tem sua importância na determinação do modo mais instável previsto pela teoria linear, apresenta duas propriedades decorrentes de sua definição: este funcional é limitado superiormente e aumenta em proporção direta com o número de Reynolds. Em termos mais precisos:

(a) $\phi < 2|Dm|$, onde $Dm < 0$ simboliza o menor dos autovalores do tensor \mathcal{D} .

(b) $\phi(u,\nu,t,\lambda) > \phi(u,\nu,t,\nu)$ quando $\nu > \lambda$.

Considere agora que,

$$G(\nu,t,\lambda) = \max_H \phi(u,\nu,t,\lambda). \quad (2.48)$$

Se $\mathcal{D} [U]$ é uma função suave, então G existe e é uma função suave dos parâmetros ν , t e λ . Adicionalmente, como uma consequência direta de sua definição, se $G(\nu,t,\lambda) > G(\nu,t,\nu)$, então $\nu > \lambda$. A equação de evolução (temporal) da energia, juntamente com a

definição de G , permite concluir que:

$$\text{quando } \nu \geq \lambda, \text{ então } d\mathfrak{E}(t)/dt \leq G(\nu, t, \lambda) \cdot \mathfrak{E}(t). \quad (2.49)$$

A equação (2.49) explicita $G(\nu, t, \lambda)$ como a maior taxa de crescimento associada à energia média das perturbações. A determinação desta função permite que se conheça, de forma mais exata, como evoluirá a energia das perturbações. Isto é descrito nos resultados apresentados a seguir.

Segundo teorema de estabilidade da energia

"Suponha $\nu \geq \lambda$. Então,

$$\mathfrak{E}(t) \leq \mathfrak{E}(0) \cdot \exp \left[\int_0^t G(\nu, t', \lambda) dt' \right]. \quad (2.50)$$

O escoamento básico é globalmente e assintoticamente estável, se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t G(\nu, t', \lambda) dt' \rightarrow -\infty. \quad (2.51)$$

Pode existir, no máximo, um valor $\lambda = \lambda_0$ onde $G(\nu, t, \lambda)$ é integrável. Se $\lambda \neq \lambda_0(\nu)$, então $G(\nu, t, \lambda)$ não é integrável."

COROLÁRIO: (RESTRIÇÃO AO ESCOAMENTO BÁSICO ESTACIONÁRIO)

"Escoamentos estacionários apresentam um único limite de viscosidade crítica da teoria da energia (ν_{eo}). Neste caso particular, a desigualdade (2.51) reduz-se a:

$$\mathfrak{E}(t) \leq \mathfrak{E}(0) \cdot \exp[G(\nu, \nu_{eo}) \cdot t] \quad (2.52)$$

Neste caso G é uma constante de decaimento e pode ser mostrado que:

$$G(\nu, \nu_{eo}) < - \frac{2K'}{t^2} \cdot (\nu - \nu_{eo}) \quad (2.53)$$

quando $\nu > \nu_{eo}$."

Do ponto de vista global, os teoremas anteriores são importantes, uma vez que respondem a questão de como calcular a viscosidade crítica associada à teoria da energia. O lema da constante de decaimento estabelece um limite inferior para a razão entre a dissipação média das perturbações e a média quadrática das perturbações. Este resultado é necessário para a obtenção do primeiro teorema, estabelecendo as condições necessárias e suficientes para que um escoamento seja globalmente e monotonicamente estável. Desta maneira o limite desta classe de escoamentos em relação aos globalmente estáveis está determinado. A maior importância do segundo teorema reside em sua particularização para o caso estacionário. É fundamental, e foi utilizado na formulação numérica deste trabalho, o fato de que a energia das perturbações apresenta uma constante de decaimento bem definida para o problema estacionário, quando $\nu > \nu_0$.

Embora neste trabalho o interesse se concentre na situação em que o escoamento básico é estacionário, os teoremas anteriores também são válidos para problemas periódicos e quase periódicos. Deve-se sempre ressaltar que tudo o que foi mostrado até aqui em relação à teoria da energia assegura apenas estabilidade. Os teoremas anteriores somente sugerem quando um escoamento básico pode ser instável, mas não podem garantir que isso ocorre.

Teorema de unicidade para o problema de valor inicial de contorno
(Foá, 1929).

(*) "A solução nula de (2.33)-(2.35) é única."

Pode-se interpretar este teorema com a propriedade de unicidade para as soluções das equações de Navier-Stokes:

"Existe apenas uma solução das equações de Navier-Stokes que partem de um dado campo inicial."

(*) Ver nota de rodapé na página 31.

Unicidade a valores pequenos no número de Reynolds.

"A solução das equações de Navier-Stokes é única para pequenos valores no número de Reynolds."

Unicidade de problemas globalmente e monotonicamente estáveis

"Considere $\nu > \nu_{c.c.}$. Então, dadas as equações de Navier-Stokes e conservação da massa, sujeitas a adequadas condições iniciais e de contorno, existe, no máximo, uma solução estacionária ou uma solução periódica, ou uma solução quase periódica."

Conclui-se, portanto, que, na região globalmente e monotonicamente estável, a unicidade de soluções, ou seja, a impossibilidade de bifurcação de soluções, está assegurada. Sabe-se que o fenômeno da bifurcação possui estreita relação com a instabilidade de certa classe de soluções básicas (uma leitura amena sobre o assunto pode ser encontrada nos livros de Bergé, Pomeau e Vidal, 1984 e Seydel, 1988, um estudo mais profundo em Iooss e Joseph, 1990 e um texto voltado para a Mecânica dos Fluidos em Joseph, 1976). Uma vez que a região globalmente, mas não monotonicamente, estável é extremamente difícil de localizar na maioria dos problemas de interesse prático, a preocupação com a identificação do limite crítico da teoria da estabilidade linear é uma necessidade natural. Este limite permite localizar a região onde, constatada a instabilidade de certo tipo de soluções básicas (por exemplo, as soluções simétricas após um ponto de bifurcação em forquilha), a evolução do campo básico em direção a outra configuração, ou mesmo rumo à turbulência, é garantida. Este é o papel da teoria linear das perturbações infinitesimais.

2.5 O PROBLEMA ESPECTRAL DA TEORIA LINEAR

Uma vez que se têm-se as condições suficientes para a estabilidade, inferidas do método da energia, o retorno à teoria linear fornecerá condições suficientes para a instabilidade. O problema espectral da teoria linear estabelece as condições para que um escoamento seja instável, embora às custas da restrição quanto à magnitude das perturbações impostas.

O escoamento não paralelo associado às equações (2.29)-(2.31) será agora revisitado (figura 2.6). Sabe-se que tal problema não possibilita uma separação espacial de suas variáveis independentes. A existência de um único termo contendo a derivada parcial temporal de primeira ordem sugere, entretanto, a separação de variáveis temporais em relação às espaciais. A solução deste problema de valor inicial, sujeito à restrição da conservação da massa, e obedecendo a condições iniciais e de contorno, requer a construção de séries infinitas da forma:

$$u'(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{on}(x,y) \cdot \exp(\beta_n t) \quad (2.54)$$

$$v'(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{on}(x,y) \cdot \exp(\beta_n t) \quad (2.55)$$

$$p'(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{on}(x,y) \cdot \exp(\beta_n t) \quad (2.56)$$

A substituição das expressões anteriores em (2.29)-(2.31) origina as equações que seguem;

$$\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{\partial v_o}{\partial y} = 0 \quad (2.57)$$

$$\beta u_o + \bar{u} \frac{\partial u_o}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u_o}{\partial y} + u_o \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v_o \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{\partial p_o}{\partial x} + \frac{1}{R} \nabla^2 u_o \quad (2.58)$$

$$\beta v_o + \bar{u} \frac{\partial v_o}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v_o}{\partial y} + u_o \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_o \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = - \frac{\partial p_o}{\partial y} + \frac{1}{R} \nabla^2 v_o \quad (2.59)$$

Para cada um dos β_n das equações (2.54)-(2.56) obtém-se um conjunto de equações idênticas às equações (2.57)-(2.59). Tais equações estão sujeitas às seguintes condições de contorno,

$$u_o = v_o = 0 \text{ nas paredes sólidas e em } x = -L_1/d, \quad (2.60a)$$

$$\frac{\partial u_o}{\partial x} = \frac{\partial v_o}{\partial x} = 0 \text{ para } x = L_2/d. \quad (2.60b)$$

A inspeção deste sistema de equações revela um problema de autovalor diferencial parcial, onde β é o autovalor e (u_0, v_0, p_0) são as autofunções. A conservação da massa para as autofunções permanece como restrição ao problema. O comportamento exponencial assumido anteriormente para o termo temporal pode ser obtido através da análise por separação de variáveis. O problema espectral (2.57)-(2.60) tem essa denominação devido ao espectro de autovalores que satisfazem estas equações.

As séries (2.54)-(2.56) explicam o significado matemático do autovalor β . Associa-se estabilidade a pequenas perturbações a escoamentos onde $\beta < 0$, instabilidade a $\beta > 0$ e estabilidade marginal ou neutra a $\beta = 0$. Se pelo menos um autovalor, dentre os existentes neste espectro, for positivo, a teoria linear assegura instabilidade. Isso porque o termo da série que contém este valor "explodirá" exponencialmente, enquanto os demais decairão, ficando claro que o efeito deste termo será preponderante e a perturbação se amplificará. Deve ser observado que já foi assumido implicitamente que β é um real puro, uma vez que o problema em questão é estacionário (se $\text{Im}(\beta) \neq 0$, a solução deve ser periódica no tempo).

A viscosidade crítica do problema linear encontra-se associada à situação em que $\beta = 0$ e seu maior valor é denominado de primeira viscosidade crítica da teoria espectral, ν_L . Em termos de número de Reynolds, denomina-se menor número de Reynolds crítico da teoria linear, R_L .

Teorema de comparação das viscosidades críticas (Joseph, 1976)

"A primeira viscosidade crítica do problema espectral, ν_L , não é maior que a primeira viscosidade crítica da teoria da energia, ν_0 : $\nu_0 \geq \nu_L$."

Este teorema estabelece a posição relativa destes limites de estabilidade. A utilização da teoria linear restringe o alcance de seus resultados ao limite ν_L , ou seja, mesmo que apliquemos a teoria da energia, a restrição a perturbações pequenas somente é capaz de assegurar instabilidade.

2.5 REVISÃO DA LITERATURA

Uma vez que os fundamentos da Teoria da Estabilidade Hidrodinâmica foram apresentados, convém encerrar este capítulo com um resumo a respeito dos trabalhos encontrados na literatura que mostraram as contribuições mais importantes à análise da estabilidade. Particular atenção foi dedicada aos trabalhos que investigavam escoamentos na presença de um aumento de área.

Em relação aos escoamentos paralelos bidimensionais, Gaster (1962) mostrou que a equivalência entre as frequências obtidas pelas teorias de amplificação temporal (α real e β complexo) e espacial (α complexo e β real) somente ocorre se as perturbações senoidais impostas possuem pequenas taxas de amplificação. Este resultado é importante, na medida em que se sabe que a teoria de amplificação espacial das perturbações é a mais próxima dos experimentos, uma vez que lá as perturbações geradas artificialmente são espacialmente amplificadas. Até então, preferia-se a teoria de amplificação temporal devido à maior facilidade em computar o comportamento das perturbações.

Orszag (1971) resolveu a equação de Orr-Sommerfeld com grande precisão numérica, usando expansões em polinômios de Chebyshev e o algoritmo QR para o cálculo dos autovalores. O número de Reynolds crítico de 5772,22 foi encontrado para o escoamento plano de Poiseuille.

(*) O método QR foi desenvolvido com o objetivo de permitir o cálculo dos autovalores e autovetores de uma matriz qualquer. Este método fundamenta-se em um processo de transformação de uma matriz qualquer, A , em outra matriz triangular ou quase triangular superior, R , através de uma matriz unitária, Q . Tal decomposição (denominada decomposição QR) preserva os autovalores e autovetores da nova matriz R em relação à matriz original A . Esta transformação é realizada devido à facilidade em calcular-se os autovalores e autovetores deste tipo mais simples de matriz.

Chen, Sparrow e Tsou (1971) estudaram a estabilidade de um escoamento sobre uma placa plana com injeção de massa em sua superfície. Eles consideraram a componente transversal do escoamento básico, normalmente desprezada em trabalhos anteriores (sem injeção de massa), e obtiveram uma equação similar à equação de Orr-Sommerfeld com termos adicionais envolvendo a velocidade transversal e sua derivada segunda. Embora a clássica hipótese de escoamento paralelo tenha sido retirada, a análise de ordem de magnitude dos termos da teoria de camada limite e uma transformação por similaridade reduziram o problema matemático a funções de apenas uma variável. O problema de autovalor resultante é, então, dependente da quantidade de massa injetada. Os resultados obtidos mostram que, apenas para grandes quantidades de massa injetada, tem-se diferenças significantes em relação à teoria convencional.

Eagles (1973) apresentou um interessante estudo de estabilidade a pequenas perturbações, usando uma análise não-linear, em um canal com pequeno ângulo de divergência. As soluções simétricas estacionárias do escoamento de Jeffery-Hamel, estudadas detalhadamente por Fraenkel (1962, 1963), foram escolhidas por serem soluções simples, paralelas e possibilitarem uma subsequente decomposição em modos normais. Restringiram-se os números de Reynolds estudados àqueles inversamente proporcionais ao ângulo de divergência do canal. A definição de um pequeno parâmetro se fazia necessária à utilização do método de expansões assintóticas. Um pequeno parâmetro era então definido a partir da comparação entre o inverso do número de Reynolds do escoamento e o inverso do número de Reynolds crítico previsto pela teoria linear, após fixado o comprimento de onda das perturbações. A expansão assintótica representava perturbações de um escoamento linearmente instável (supercrítico). Aplicou-se o método das variações lentas (ver p.ex. Nayfeh, 1981 e Bender e Orszag, 1978), que introduz o parâmetro pequeno na escala temporal, tornando-a mais lenta. A construção de uma série assintótica em potências deste pequeno parâmetro aproximava as perturbações da função de corrente por funções "lentas" com o tempo e ondas senoidais. Cada ordem da equação derivada desta expansão forneceu equações que possibilitaram o cálculo das funções "lentas" no tempo. Estas equações tem a

característica interessante de que são dependentes da solução das anteriores. O autor resolveu-as em seqüência, formando a série que as originou. A última equação impunha uma condição necessária à existência de uma solução para uma equação diferencial não-homogênea, a denominada condição de consistência, integrabilidade ou compatibilidade (pode-se encontrar uma boa apresentação deste assunto em Nayfeh, 1981) em relação ao seu termo independente. Landau (ver Landau e Lifschitz, 1959) propôs uma equação bastante simples para descrever a estabilidade não-linear. Uma equação, correspondente à equação de Landau para este problema, foi obtida a partir da análise de compatibilidade. Uma conclusão importante desta equação para a amplitude é que um problema instável pela teoria linear pode apresentar, se efeitos não-lineares para um Reynolds super-crítico forem considerados, perturbações com amplitude tendendo a um valor constante à medida que o tempo evolui. A função de corrente obtida por Eagles (1973) para o escoamento total apresenta uma corrente principal oscilando de lado a lado do canal, formando vórtices tais que a configuração total move-se lentamente a jusante.

Ling e Reynolds (1973) investigaram uma correção dos efeitos não-paralelos em escoamentos cisalhantes através de uma análise de estabilidade. Os autores assumiram variações lentas das perturbações da função corrente na direção principal do escoamento. Esta hipótese permitiu a expansão em série de Taylor em torno de um ponto genérico e a aplicação do método WKBJ* (veja, por exemplo em Nayfeh, 1981,

(*) —————
 Este método, também denominado WKBJ, foi desenvolvido por Wentzel, Kremers, Brillouin e Jeffreys e aplica-se satisfatoriamente a problemas modelados por equações diferenciais lineares onde a derivada de ordem mais elevada é multiplicada por um pequeno parâmetro ε . A aproximação assintótica do método WKB consiste em séries exponenciais de integrais elementares de funções algébricas, ou funções especiais bem conhecidas, em potências de ε . O método é desenvolvido a partir da seguinte série de potências exponencial:

$$y(x) \sim \exp \left[\frac{1}{\delta} \sum_0^{\infty} \delta^n S_n(x) \right], \quad \delta \rightarrow 0.$$

Bender e Orszag, 1978 e Drazin e Reid, 1981). Desta forma as perturbações foram separadas em modos normais, onde a parte espacial mantinha dependência com as duas coordenadas espaciais. Esta parte espacial foi ainda expandida em uma série de Taylor, cujo termo de ordem zero variava apenas com a coordenada transversal e o termo de ordem um levava em conta efeitos não-paralelos. Esta expansão foi repetida até a primeira ordem, não somente para a parte espacial da perturbação da função de corrente, mas também para o número de onda, a frequência, o inverso do número de Reynolds e para a velocidade de propagação das perturbações. A substituição de tais expansões na equação para as perturbações gerou equações diferenciais ordinárias para os termos da série espacial da perturbação. A solução da equação de maior complexidade exigiu a utilização de uma equação adjunta. A autofunção adjunta forneceu a condição de integrabilidade necessária à determinação de alguns termos de primeira ordem. Separou-se a solução da equação não-homogênea em uma solução particular, uma solução homogênea bem comportada e uma solução homogênea crescente. O termo independente foi então expandido em uma série de autofunções de uma equação homogênea de ordem zero, obtendo-se a condição de ortogonalidade. A solução das equações resultantes permitiu a construção da série proposta. As conclusões mais importantes deste trabalho baseiam-se em sua comparação com outros, onde a hipótese de paralelismo é adotada e nenhuma análise quanto a "termos não-paralelos" é realizada. Encontrou-se pouca diferença para o escoamento de Blasius em relação aos resultados da literatura, que não realizavam esta correção com os efeitos não-paralelos, entretanto para o jato bidimensional laminar e a onda laminar bidimensional sobre uma placa plana, observou-se instabilidade do escoamento a baixos Reynolds (influência dos efeitos não-paralelos) e ausência de influência não-paralela para números de Reynolds elevados.

Outro trabalho importante para o estudo de estabilidade sobre a placa plana foi realizado por Gaster (1974). O objetivo então era aplicar um método iterativo para desenvolver uma série assintótica de potências, variando com o inverso do quadrado do Reynolds, que representasse as perturbações da função de corrente. Um problema aproximado, desprezando os termos que não possibilitavam a separação

de variáveis, forneceu uma primeira solução para o problema completo. Objetivando a obtenção de uma solução mais precisa, adicionou-se uma correção à equação aproximada e o resultado foi substituído na equação completa. Obteve-se então uma equação diferencial, cuja condição de consistência gerou uma equação diferencial ordinária para a amplitude. A solução desta equação pôde ser usada para calcular a correção para a aproximação introduzida. Houve a preocupação importante de verificar possíveis alternativas para a avaliação da amplificação através da comparação das curvas neutras obtidas. O primeiro método descrito emprega a integral da energia, o segundo utiliza a integral do quadrado da componente longitudinal da velocidade, enquanto o terceiro método baseia-se na componente longitudinal da velocidade. Comparou-se também os resultados obtidos com outros resultados experimentais, mostrando um progresso na concordância numérico-experimental devido à correção para a amplificação.

Eagles e Weissman (1975) introduziram várias definições importantes relacionadas com a teoria de escoamentos quase paralelos em que se aplicam as idéias de aproximação por variações lentas na direção principal do escoamento (WKB). O fundamento deste método é bem discutido no artigo, assim como as hipóteses que diferenciam as diversas teorias aplicadas ao escoamento exatamente paralelo e utilizadas para o caso de considerar-se um escoamento quase paralelo. A contribuição deste trabalho ao estudo de estabilidade em um canal com pequeno ângulo de divergência está presente na proposta de uma modificação do método WKB. As soluções de Jeffery-Hamel com inflexão foram perturbadas e a equação resultante foi linearizada. Novamente a aproximação por variações lentas na direção principal do escoamento foi aplicada. O resultado é a obtenção de uma equação para a amplitude da perturbação da função corrente. A expansão desta amplitude, em uma série de potências em relação ao ângulo de divergência, originou um sistema de equações, uma em cada ordem da série. Os autores consideraram apenas os dois primeiros termos da série em suas análises, originando duas equações, uma para cada termo da expansão. Uma hipótese posterior de separação do primeiro termo da série, em uma amplitude dependente apenas da "variável lenta" e uma autofunção, criou a necessidade de resolver-se um

problema adjunto tal que sua solução originasse a condição de compatibilidade para a segunda equação diferencial. O uso deste operador adjunto originou novamente uma equação diferencial ordinária para esta segunda amplitude. A solução deste grupo de equações permitiu a construção da série proposta. Diferentes definições para o cálculo da taxa de crescimento espacial mostraram que o resultado obtido é dependente das grandezas utilizadas na definição. Adicionalmente foi observado que nas regiões instáveis o resultado obtido é bastante diferente do resultado previsto pela teoria quase paralela, e que a definição desta taxa de crescimento utilizando uma densidade de energia relativa ao escoamento básico possibilita uma melhor determinação dos efeitos não-lineares.

Platten, Luijckx e Flandroy (1981) realizaram um trabalho numérico, usando o método de Galerkin e os polinômios de Chebyshev como funções-tentativa, objetivando investigar o fenômeno de transição à turbulência no escoamento plano de Poiseuille. Eles resolveram a equação não-linear para a perturbação da função corrente e apresentaram resultados e discussões que dificilmente poderiam ser encontrados em estudos puramente analíticos. Para números de onda inferiores a um valor crítico (0,9), a influência da perturbação inicial foi caracterizada a ponto de ser encontrada a curva limite entre as soluções estáveis e instáveis. Observou-se, neste caso, uma concordância com a teoria linear e a presença de um ciclo limite instável. Já em número de onda acima de 0,9, constatou-se a presença de um ciclo limite estável acima do número de Reynolds crítico, embora tenha sido identificada instabilidade linear a partir de um número de Reynolds ainda mais elevado. No intervalo entre estes dois números foi encontrada uma instabilidade não-linear deste ciclo limite, com a possibilidade de uma instabilidade subcrítica e uma amplitude limite não-nula quando o número de Reynolds se aproxima do seu valor crítico.

Eagles e Smith (1980) preocuparam-se com o problema de um canal com variações lentas, mas finitas, em sua altura. O método das variações lentas foi aplicado na direção principal do escoamento. O modelo matemático simulou tais variações por uma função tangente hiperbólica cujo argumento era uma "escala lenta" da direção

principal do escoamento. Desta maneira pretendia-se estudar um escoamento com a ocorrência de separação e reatamento. Argumentou-se, também, que neste caso a realização de um experimento era facilitada em relação ao trabalho de Eagles e Weissman (1975). Novamente foi considerada a restrição de um elevado número de Reynolds, inversamente proporcional a um parâmetro arbitrariamente pequeno. A teoria das variações lentas foi aplicada na direção principal do escoamento. Pode-se concluir que a maior contribuição deste trabalho está em se aproximar mais um pouco da teoria do escoamento não-paralelo, desta vez permitindo pequenas variações na forma do canal. Este procedimento exigiu a solução de uma equação diferencial parcial para a função-corrente associada ao escoamento básico estacionário. Uma metodologia análoga àquela utilizada anteriormente por Eagles e Weissman (1975) foi repetida para a construção da série de autofunções para a perturbação da função corrente, também através de uma equação final para uma função amplitude, oriunda de uma condição necessária à solução de uma equação não-homogênea (também denominada de a alternativa de Fredholm; uma boa referência sobre o assunto é o livro de Iooss e Joseph, 1990). Avaliando a taxa de amplificação espacial com base na densidade de energia cinética, encontrou-se o número de Reynolds crítico, abaixo do qual a densidade de energia cinética sempre cai a jusante.

Allmen e Eagles (1984) resolveram o problema de estabilidade para as equações linearizadas das perturbações da função corrente como um problema de autovalor diferencial parcial. A solução numérica mais instável de Jeffery-Hamel foi computada e a equação para a perturbação foi resolvida através das equações usuais de diferenças centrais através do método de eliminação Gaussiana. Uma boa concordância dos resultados com os obtidos em trabalhos anteriores (Eagles e Weissman, 1975; Eagles e Smith, 1980) foi encontrada.

Sobey e Drazin (1985) preocuparam-se com os fenômenos de estabilidade e bifurcação presentes em escoamentos de Jeffery-Hamel e em canais contendo uma expansão seguida por uma redução. A primeira classe de escoamentos foi resolvida a partir da hipótese de

Fraenkel (1962,1963) que permite apenas pequenas curvaturas nas paredes. Os autores identificaram uma bifurcação subcrítica de sua solução simétrica em três soluções, duas assimétricas e uma simétrica (bifurcação em forquilha). O fato mais interessante neste trabalho é a ausência de soluções estáveis a partir de certo Reynolds, fixado o ângulo de divergência, ou a partir de certo ângulo, fixado o número de Reynolds. Este resultado entra em contraste com os de Eagles (1973) que, conforme comentado anteriormente, encontrou soluções oscilatórias, com vórtices movendo-se de lado a lado do canal e deslocando-se lentamente à jusante. A análise dos autores mostra que o modo mais instável, para o escoamento de Jeffery-Hamel, é o estacionário e que a bifurcação realmente presente é a do tipo forquilha. Os escoamentos em canais com expansão e redução apresentaram duas bifurcações tipo forquilha à medida que se elevava o número de Reynolds e, a partir de determinado Reynolds, o surgimento da conhecida bifurcação de Hopf. Um incremento posterior no valor deste parâmetro, conduzia à obtenção numérica de soluções periódicas. Resultados experimentais apresentados neste artigo exibem a simetria e assimetria do escoamento para dois Reynolds característicos. Constatou-se que efeitos tridimensionais tornam-se significantes à medida que o número de Reynolds atinge valores mais elevados.

Em relação ao problema de estabilidade do escoamento sobre uma placa plana, Fasel e Konzelmann (1990) apresentaram uma revisão importante dos trabalhos publicados sobre o assunto. Eles resolveram numericamente as equações completas para o estudo de estabilidade e compararam seus resultados com experimentos e modelos numéricos simplificados de trabalhos anteriores. Os autores retiveram todos os termos das equações com a finalidade de descobrir o motivo de diferentes aproximações para um mesmo problema (em geral tornando-o sempre separável e conduzindo a equações diferenciais ordinárias) fornecerem resultados diferentes entre si e discrepantes com observações experimentais. A comparação com outros modelos mostrou que alguns deles apresentavam casuais concordâncias com os experimentos, causadas por comparações incorretas, e outros apresentaram boa concordância com o modelo completo. Entretanto, a comparação com os experimentos não apresentou melhora significativa

em comparação com alguns trabalhos. Isto eliminou a hipótese de que efeitos não-paralelos, que não eram plenamente incorporados nos outros trabalhos, fossem a causa da diferença numérico-experimental.

2.7 SUMÁRIO

Neste capítulo procurou-se delinear de modo geral e bastante sucinto os aspectos da TEH que apresentam relação com o presente trabalho. Tanto na apresentação dos objetivos e definições básicas desta teoria, quanto na aplicação destes conceitos à exposição dos fundamentos das teorias linear e global da estabilidade, procurou-se sempre enfatizar as limitações da hipótese de escoamento paralelo ou quase paralelo quando se deseja investigar a complexidade de muitos escoamentos presentes na natureza, cujo entendimento interessa às aplicações em engenharia. No capítulo seguinte, apresentar-se-á o escoamento de interesse para este trabalho, bem como o caminho percorrido em investigações anteriores e questões relevantes levantadas por estes trabalhos. Observar-se-á que tal escoamento não pode ser enquadrado sequer entre os quase paralelos. Desta forma, fica patente que modificações serão necessárias para uma adaptação das ferramentas disponíveis na TEH à investigação desta classe de escoamentos não paralelos. Merecem destaque, a equação que governa a evolução da energia das perturbações (2.38), a definição do funcional taxa de crescimento e seu máximo valor (equações 2.47 e 2.48) e a aplicação da constante de decaimento em problemas estacionários (particularização do segundo teorema de estabilidade da energia), que, após algumas alterações causadas pela classe de funções admissíveis e complexidade das condições de contorno, serão importantes na análise de estabilidade linear.

CAPÍTULO 3*ESCOAMENTO EM DIFUSORES RADIAIS*

O escoamento radial entre discos paralelos tem despertado crescente interesse, tanto científico, quanto tecnológico. A modelagem de escoamentos em válvulas de compressores, impactores de aerossóis, máquinas de usinagem por eletroerosão e mancais axiais são alguns dos exemplos de aplicações tecnológicas do estudo desta classe de escoamentos. O interesse científico nestes escoamentos diz respeito à descoberta recente de vários fenômenos físicos que têm contribuído para um melhor entendimento dos mecanismos associados à estabilidade hidrodinâmica.

Uma primeira aproximação para a solução das equações governantes em escoamentos entre discos paralelos utiliza a hipótese simplificativa de que a velocidade transversal ao escoamento é desprezível quando comparada com a velocidade na direção radial. Esta situação descreve apenas os casos em que o número de Reynolds é pequeno. A solução analítica deste modelo particular exige que os termos inerciais sejam abandonados (Bird, Steward e Lightfoot, 1960). Desta forma pode-se obter uma primeira aproximação para o campo de velocidades (inversamente proporcional à coordenada radial) e para a distribuição de pressões (decrecente com o logaritmo da coordenada radial). Li, Mirza e Lin (1989) resolveram as equações governantes, incluindo os efeitos de inércia, através do método clássico de diferenças finitas. Vatistas (1988,1990) considerou analiticamente os efeitos inerciais, evitando as inconsistências causadas pela parcela não-linear através de simplificações na avaliação destes termos.

Jackson e Symmons (1965) investigaram teórica e experimentalmente a distribuição de pressão estática sujeita aos efeitos inerciais. Eles detectaram instabilidade do escoamento para números de Reynolds elevados, quando fortes gradientes de pressão adversos atuam na região central dos discos. Note-se, no entanto, que os autores não enfatizaram esta instabilidade, detectada através

de flutuações da pressão medida experimentalmente. Devido às elevadas vazões, grandes gradientes de pressão ocasionaram a separação do escoamento. Além disso, a distribuição de pressão tornou-se assimétrica e transitória. Destaca-se neste trabalho um interessante método iterativo-analítico para a avaliação da distribuição de pressão, quando efeitos não-lineares, causados pela inércia, eram incluídos. A comparação teórico-experimental mostrou que os efeitos inerciais ainda eram sub-avaliados nos modelos teóricos.

Raal (1975), impondo um perfil de velocidades na entrada recuado em relação à entrada dos discos, e utilizando a hipótese de simetria em relação a um plano paralelo equidistante dos discos, resolveu numericamente este problema através do método das diferenças finitas. Escoamentos com números de Reynolds inferiores a 62 apresentavam linhas de corrente paralelas. A partir deste valor ocorria a formação de uma recirculação em cada disco. À medida que se elevava o número de Reynolds estas recirculações cresciam e deslocavam-se em direção à entrada dos discos.

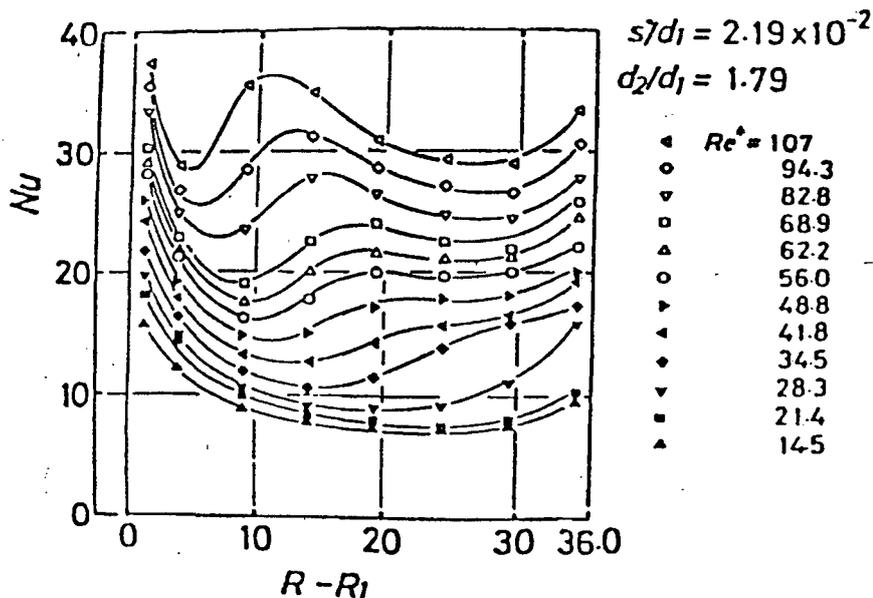


FIGURA 3.1 Distribuição radial do Número de Nusselt local (Mochizuki e Yao, 1983).

Mochizuki e Yao (1983) realizaram experimentos com o objetivo de medir o número de Nusselt local para o escoamento entre dois

discos aquecidos. Técnicas especiais de visualização do escoamento foram utilizadas neste trabalho. O comportamento oscilatório das curvas que descrevem a distribuição radial do número de Nusselt local surpreendeu os autores (figura 3.1). Os experimentos atestaram a formação de vórtices periódicos e alternados, deslocando-se à jusante com o escoamento. A ocorrência da oscilação no escoamento causou um grande aumento na transferência de calor das paredes aquecidas para o fluido. Tal fato levou Mochizuki e Yang (1985) a resolver numericamente o problema hidrodinâmico, sem adotar a clássica hipótese de simetria utilizada no trabalho de Raal (1975). A aparente concordância entre os resultados hidrodinâmicos numéricos e experimentais sugeriu que a separação e o reatamento ocorrem periodicamente com a formação de vórtices auto-induzidos e auto-mantidos pelo escoamento.

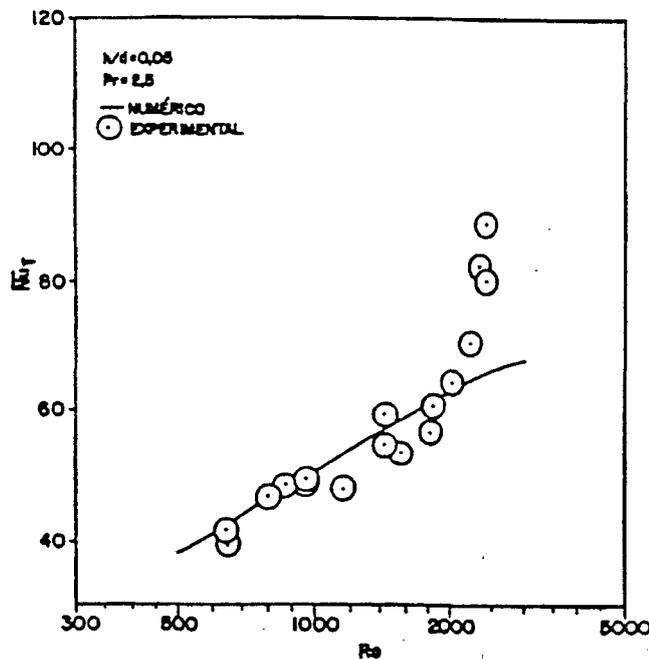


FIGURA 3.2 Evolução dos valores numéricos e experimentais do número de Nusselt médio em relação ao número de Reynolds (Todescat, 1988).

Deschamps (1987) realizou uma pesquisa numérico-experimental em escoamentos radiais com alimentação axial. No seu trabalho ele mostrou a influência do afastamento, do número de Reynolds e do comprimento do orifício de passagem principalmente sobre a distribuição de pressão ao longo das paredes do difusor. Uma grande dependência da distribuição de pressão em relação aos afastamentos

foi observada para pequenos afastamentos entre os discos. Em certos casos, pressões negativas foram constatadas. Esta tendência intensificava-se em proporção direta com o afastamentos entre os discos. Não foi encontrada influência significativa do comprimento do orifício de passagem no escoamento.

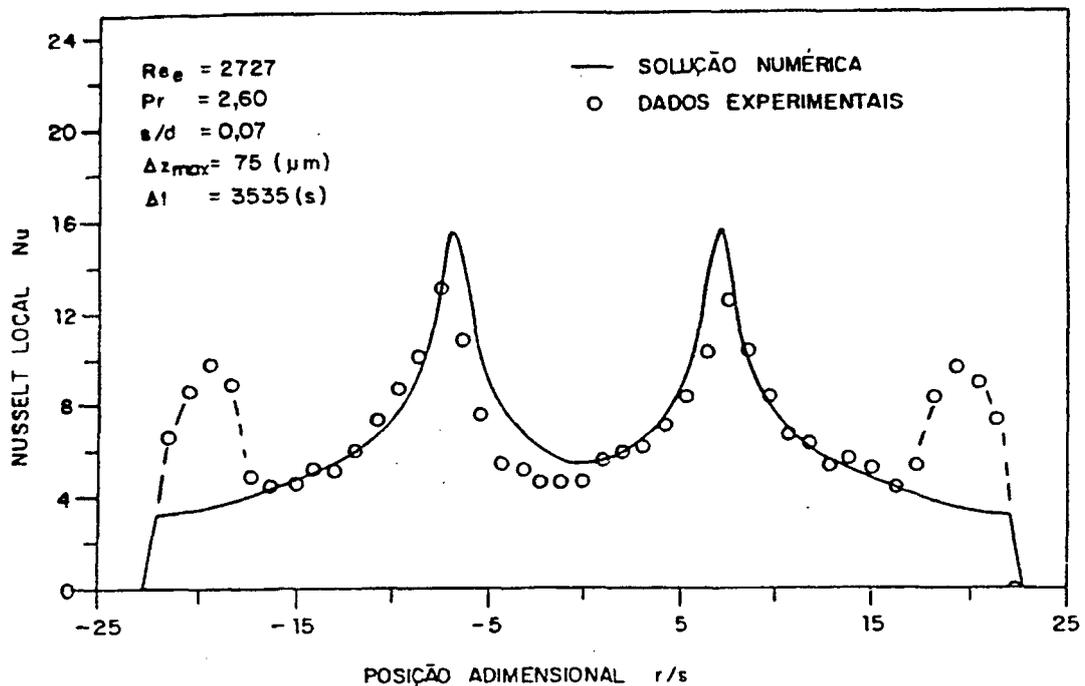


FIGURA 3.3 Comparação dos valores de Número de Nusselt local numéricos e experimentais com a posição radial (Pilichi, 1990).

Pilichi (1990) estudou a transferência de calor em difusores radiais com alimentação axial, através da medição do número de Nusselt local. Esta análise mostrou-se necessária devido a discordâncias numérico-experimentais ocorridas no trabalho anterior de Todescat (1988). Este verificou que, a partir de determinado número de Reynolds, a distribuição do número de Nusselt médio, obtida experimentalmente, apresentava valores bem acima dos previstos numericamente (figura 3.2). Pilichi (1990) empregou a técnica de sublimação do naftaleno para, através da analogia entre a transferência de calor e massa, determinar o perfil do número de Nusselt local. Isso exigiu medidas de elevada precisão para a quantidade local de naftaleno sublimada. A presença de dois picos para o número de Nusselt local foi detectada para elevados números de Reynolds. Acredita-se que as oscilações auto-induzidas pelo

escoamento foram responsáveis pela presença da segunda elevação (Prata e co-autores, 1992). Pilichi (1990) também resolveu o problema numericamente, através do método dos volumes finitos. Sua solução, obtida a partir da hipótese de regime permanente, não conseguiu captar o segundo pico da curva representativa da distribuição do número de Nusselt com a posição radial (figura 3.3). Até determinado número de Reynolds foi obtida boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais. A partir deste limite, os resultados numéricos não conseguiram captar o aumento observado experimentalmente no número de Nusselt local, a exemplo do ocorrido no trabalho de Todescat (1988).

Motivado pelas discordâncias numérico-experimentais dos trabalhos de Todescat (1988) e Pilichi (1990), Langer (1991) investigou os problemas hidrodinâmico e térmico do escoamento radial com alimentação radial. Para validar sua metodologia numérica, Langer (1991) pretendia inicialmente reproduzir os trabalhos de Raal (1975) e Mochizuki e co-autores (1983, 1985), antes de investigar o problema hidrodinâmico do trabalho de Pilichi (1990). Esta "etapa preliminar" em escoamentos com alimentação radial motivou a descoberta por Langer (1991) da bifurcação da solução simétrica encontrada por Raal em três soluções, duas assimétricas e uma simétrica (bifurcação em forquilha), a partir de um Reynolds crítico de 115. A retirada da hipótese "usual" de simetria possibilitou o aparecimento deste fenômeno, suprimido involuntariamente por Raal (1975) em sua formulação. Paralelamente ao estudo hidrodinâmico, Langer (1991) investigou também o problema térmico, onde o fluido frio troca calor com os discos mantidos a uma temperatura mais alta, uniforme e constante. Observou-se um substancial aumento na troca de calor para configurações assimétricas. As soluções periódicas de Mochizuki e co-autores (1983, 1985) não foram observadas por Langer (1991).

O escoamento radial caracteriza-se por um aumento gradual de área. A fim de que a massa seja conservada, ocorre um decréscimo da velocidade do fluido. Conseqüentemente, nos casos em que o número de Reynolds é elevado, surgem fortes gradientes de pressão adversos. Os diferentes regimes de escoamento se sucedem primeiramente com a formação progressiva (em tamanho) de regiões de recirculação, onde

pontos de separação e reatamento são bem definidos (Raai, 1975). Nestas condições apenas soluções simétricas seriam observáveis experimentalmente. Em seguida, sucede-se uma perda da estabilidade destas soluções para soluções assimétricas (Langer, 1991). Outra possibilidade é a formação de vórtices periódicos, movendo-se lentamente a jusante (Mochizuki e co-autores, 1983, 1985). Sabe-se que expansões súbitas causam soluções oscilatórias; expansões progressivas, pode-se dizer até "contínuas", como as encontradas em escoamentos radiais, causarão também este tipo de soluções? Uma questão semelhante surgiu, conforme mencionado na introdução da presente dissertação, entre os trabalhos de Eagles (1973) e Sobey e Drazin (1985). Em relação ao escoamento de Jeffery-Hamel, onde ocorre uma expansão gradual em uma cunha, a partir de uma fonte pontual, a análise de estabilidade de Eagles (1973) encontrou bifurcações de Hopf, não verificadas na investigação feita por Sobey e Drazin (1985), que detectaram apenas bifurcações de soluções simétricas em soluções assimétricas, a exemplo do que ocorreu com Langer e co-autores (1990) e Langer (1991).

O comportamento do escoamento em difusores radiais permanece uma caixa de surpresas. Neste contexto, o objetivo do presente trabalho é estudar a estabilidade das soluções estacionárias obtidas por Langer (1991) e desta forma trazer mais luz para o entendimento do problema.

CAPÍTULO 4

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

4.1 A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Dividiu-se a formulação do problema em duas etapas. Inicialmente discutem-se as hipóteses, equações governantes e condições de contorno associadas ao escoamento básico do difusor radial. A seguir comentam-se os mesmos aspectos em relação às equações que governam o problema linear para o cálculo das perturbações, bem como sua redução ao problema espectral. A presente análise restringe-se a perturbações infinitesimais. Conforme explorado no capítulo anterior, uma solução linearmente instável não poderá ocorrer na natureza, enquanto que soluções linearmente estáveis podem tornar-se instáveis a perturbações maiores.

4.1.1 O ESCOAMENTO BÁSICO

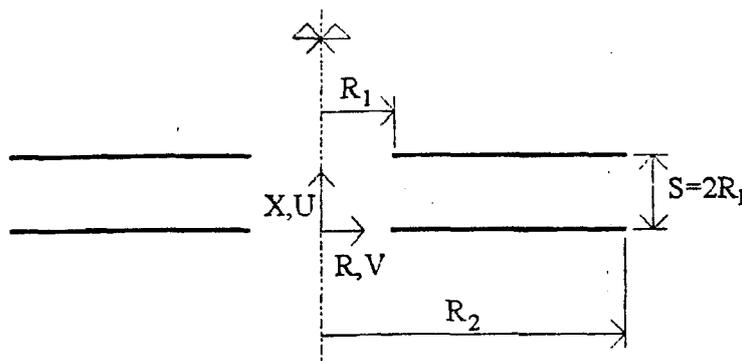


FIGURA 4.1 Esboço ilustrativo do difusor radial.

Considere um difusor radial, como o esboçado na figura 4.1, e as equações governantes do problema hidrodinâmico, após adotadas as hipóteses de propriedades constantes, ausência de forças de campo e fluido newtoniano. Adicionalmente, considera-se a hipótese de simetria axial.

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{V}{R} + \frac{\partial V}{\partial R} = 0 \quad (4.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial R} \right] = - \frac{\partial P}{\partial X} + \mu \left[\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \right] \quad (4.2)$$

$$\rho \left[\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial R} \right] = - \frac{\partial P}{\partial R} + \mu \left[\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} \right] \quad (4.3)$$

Nas equações anteriores, τ é o tempo, X é a coordenada transversal à direção principal do escoamento, R é a coordenada radial, P denota a pressão, as componentes do vetor velocidade são representadas por U (transversal) e V (radial), ρ é a massa específica e μ é a viscosidade.

As equações (4.1) a (4.3) serão agora adimensionalizadas utilizando as seguintes variáveis,

$$u = \frac{U}{V_e} \quad v = \frac{V}{V_e} \quad p = \frac{P}{\rho V_e^2} \quad t = \frac{V_e \cdot \tau}{R_1} \quad x = \frac{X}{R_1} \quad r = \frac{R}{R_1} \quad (4.4a)$$

$$Re = \frac{V_e \cdot R_1}{\nu} \quad (4.4b)$$

onde V_e , R_1 e Re são, respectivamente, a velocidade (prescrita) na entrada do domínio de solução em uma posição $R < R_1$, a coordenada radial na entrada dos discos e o número de Reynolds.

As equações de conservação da massa e quantidade de movimento, quando escritas em notação vetorial, adquirem a seguinte forma adimensional:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.5b)$$

onde \mathbf{u} representa o vetor velocidade adimensional, cujas componentes são u e v .

As equações (4.5) estão sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ e } v = \frac{1}{r_e} \text{ em } r = r_e \text{ e } 0 < x < 2, \quad (4.6a)$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ em } r_e < r < 1 \text{ e } x = 0 \text{ ou } x = 2, \quad (4.6b)$$

$$u = v = 0 \text{ em } 1 \leq r \leq 20 \text{ e } x = 0 \text{ ou } x = 2, \quad (4.6c)$$

$$u = \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0 \text{ em } r = 20 \text{ e } 0 < x < 2, \quad (4.6d)$$

onde $r_e = 2/3$ é a coordenada adimensional que determina o início do domínio do problema, $r_2 = 20$ é a coordenada radial (adimensional) da seção de saída dos discos e $r_1 = 1$ marca o início dos discos. Note-se que o afastamento adimensional dos discos é constante e igual a 2.

Uma vez que se pretende estudar a estabilidade das soluções obtidas por Langer (1991), adotou-se o mesmo perfil de entrada e parâmetros geométricos (r_e , r_1 , r_2 , etc.) daquele trabalho. Langer (1991) inspirou-se no trabalho numérico e argumentos apresentados por Raal (1975) para utilizar a condição de contorno que deu origem à equação (4.6b). Raal (1975) argumentou que assim evitava-se a singularidade da fronteira de entrada e, ao mesmo tempo, permitia-se que o escoamento "sentisse" a presença dos discos através dos efeitos elípticos. Quando prescreve-se um perfil plano na entrada dos discos, em $r = 1$ para $x = 0$ e $x = 2$ tem-se velocidade nula, devido à presença dos discos, e, para $x = x + \delta$ (δ positivo e tão pequeno quanto se queira), tem-se o perfil prescrito gerando uma descontinuidade na velocidade. Tal descontinuidade é evitada recuando-se o perfil básico prescrito para uma região anterior à entrada dos discos. A equação (4.6b) é uma consequência deste

procedimento para as perturbações de velocidade. A distância entre o eixo de simetria e o início do domínio utilizada aqui também é idêntica à que Raal (1975) e Langer (1991) utilizaram.

Nas condições de contorno da saída do domínio, também seguindo Langer (1991), prescreve-se escoamento localmente parabólico. A região escolhida para final do domínio computacional apresenta efeitos desprezíveis de propagação difusiva de informação à montante, conforme atesta o cuidadoso estudo feito por Langer (1991).

Maiores detalhes com relação à discussão das condições de contorno podem ser encontradas no trabalho de Langer (1991).

A solução das equações (4.5) e (4.6) fornece o escoamento básico estacionário do problema. A seguir esta solução será perturbada a fim de investigar sua estabilidade.

4.1.2 AS PERTURBAÇÕES

Objetivando uma análise de estabilidade linear, introduz-se pequenas perturbações às soluções estacionárias (campo básico) \bar{u} , \bar{v} e \bar{p} .

$$u = \bar{u} + u' \quad v = \bar{v} + v' \quad p = \bar{p} + p' \quad (4.7)$$

onde os símbolos u' , v' e p' denotam as perturbações impostas ao campo básico estacionário.

Admitindo que esta composição obedece às equações de Navier-Stokes, obtém-se as seguintes equações para as pequenas perturbações:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{v'}{r} + \frac{\partial v'}{\partial r} = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u'}{\partial r} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = - \frac{\partial p'}{\partial x} +$$

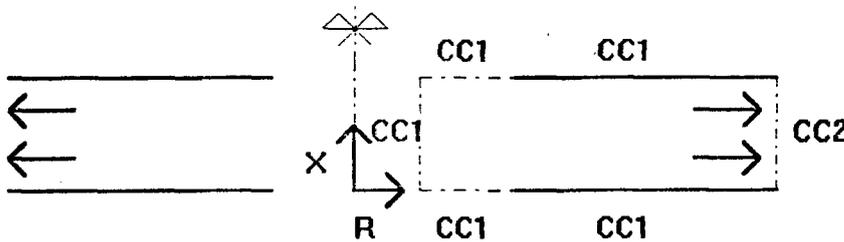
$$\frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\partial^2 u'}{\partial r^2} \right] \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial r} + v' \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} = - \frac{\partial p'}{\partial r} +$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial r} - \frac{v'}{r^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} \right] \quad (4.10)$$

Nas equações anteriores, em conformidade com a análise linear, desprezaram-se os termos que apresentavam produtos de perturbações.

Condição de contorno do tipo PNE



$$CC1: u' = 0, v' = 0$$

$$CC2: u' = 0, \frac{\partial(v'r)}{\partial r} = 0$$

FIGURA 4.2 (a) Descrição esquemática dos dois tipos de condições de contorno de interesse: PNE.

Em relação à prescrição das condições de contorno para as equações (4.8)-(4.10), duas alternativas são viáveis e, devido à dificuldade em estabelecer conclusivamente qual a mais adequada, ambas foram empregadas. Os dois tipos de condição de contorno diferem apenas na fronteira de entrada do domínio ($r=2/3$ e $0 < x < 2$) e nas fronteiras coplanares aos discos ocupadas por fluido ($2/3 < r < 1$ e $x=0$ ou $x=2$), sendo estas segundas denominadas de fronteiras livres. O problema está na prescrição de uma condição de contorno para as componentes de velocidade paralelas às fronteiras mencionadas. A primeira possibilidade, mais simples e imediata, é prescrever perturbações nulas nestes contornos da região de entrada do domínio,

por isso denominadas PNE. Outra possibilidade, que será comentada com mais detalhes em breve, está na prescrição de derivada nula na região de entrada, abreviada por DNE. As figuras 4.2 (a) e (b) ilustram cada uma das condições de contorno impostas em cada caso.

Condição de contorno do tipo DNE

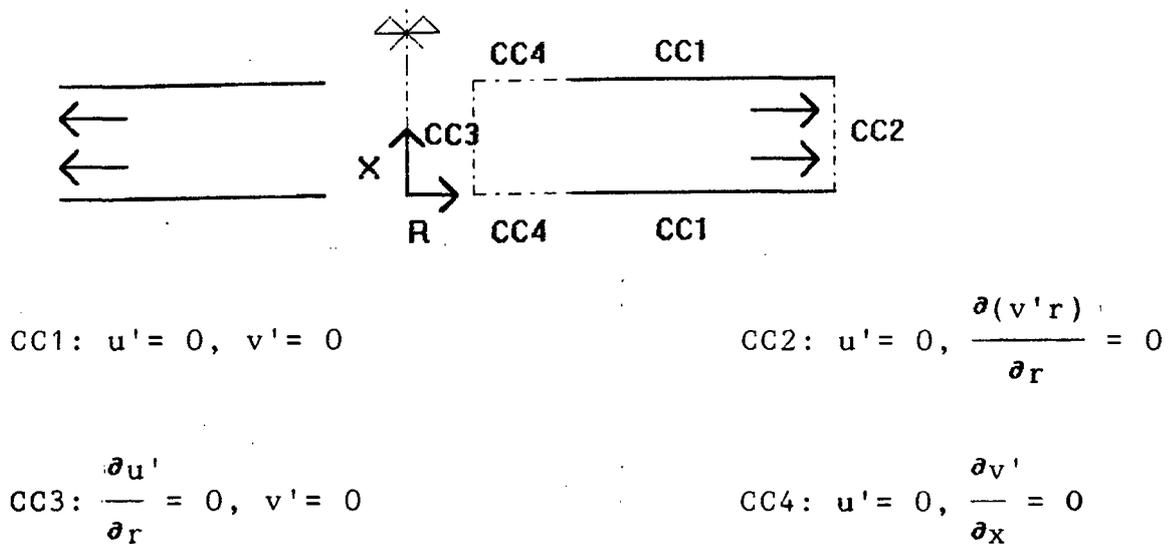


FIGURA 4.2 (b) Descrição esquemática dos dois tipos de condições de contorno de interesse: DNE.

As condições de contorno indicadas na figura 4.2 são resumidas a seguir,

TIPO PNE

$u' = 0$ na entrada do domínio. (4.11a)

$u' = 0$ nas fronteiras livres. (4.11b)

$u' = 0$ nas paredes do difusor. (4.11c)

$u' = \frac{\partial(rv')}{\partial r} = 0$ na saída do domínio. (4.11d)

TIPO DNE

$\frac{\partial u'}{\partial r} = v' = 0$ para $0 \leq x \leq 2$ e $r = 2/3$. (4.12a)

$$.u' = \frac{\partial v'}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0 \text{ ou } 2 \text{ e } 2/3 < r < 1. \quad (4.12b)$$

$$.v' = 0 \text{ nas paredes do difusor.} \quad (4.12c)$$

$$.u' = \frac{\partial(rv')}{\partial r} = 0 \text{ na saída do domínio.} \quad (4.12d)$$

onde $r_e = 2/3$ é a coordenada radial que determina o início do domínio do problema. Conforme discutido anteriormente, r_e encontra-se recuado em relação ao início dos discos ($r_1 = 1$).

Mais alguns comentários são necessários quanto a esses dois tipos de condições de contorno para as equações das perturbações. A utilização da condição de contorno tipo PNE pode ser justificada com o argumento de que o interesse deste trabalho é estudar a estabilidade do escoamento contido no domínio do problema e não a estabilidade no contorno, isto é, objetiva-se analisar a estabilidade do escoamento no domínio do problema quando os contornos são livres de perturbações.

Assumir derivada nula, seguindo a prescrição dada ao campo básico, significa raciocinar em termos puramente matemáticos na decomposição $u = U + u'$, por exemplo:

$$u = U + u' \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \boxed{\frac{\partial U}{\partial r}} + \frac{\partial u'}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial r} = 0 \quad \text{em } r = 2/3.$$

(=0)

Estes dois tipos de condição de contorno na entrada do domínio de solução, PNE e DNE, foram considerados na análise numérica. Tal análise normalmente é evitada nos trabalhos existentes na literatura através de grandes recuos no perfil de entrada (que tornam desnecessária a condição de derivada nula), por exemplo Shapira e co-autores (1990). A influência das diferentes condições de contorno na solução do problema será discutida quando da apresentação dos resultados.

As condições de impenetrabilidade e não-deslizamento são responsáveis pelas prescrições restantes de ausência de perturbação nas fronteiras sólidas. Na saída do domínio repetem-se as aproximações de escoamento localmente parabólico.

Neste ponto é oportuno ressaltar as hipóteses utilizadas neste trabalho. Tendo em vista uma primeira aproximação para o problema e a complexidade da dependência espacial das equações, preocupou-se apenas em estudar a estabilidade temporal de perturbações impostas ao escoamento. A idéia de ordenação por complexidade (primeiro uma análise linear e somente depois análises de estabilidade não-linear) e o desejo de empregar os resultados da teoria linear, ou mesmo da teoria da energia quando reduzida ao problema linear, motivaram a opção de que toda perturbação imposta seja bastante pequena quando comparada ao campo básico. Estas simplificações permitem que a linearidade das equações resultantes possa ser explorada conforme descrito a seguir.

4.1.3 O PROBLEMA DE AUTOVALOR (ESPECTRAL)

Inicialmente deve ser lembrada a forte dependência do escoamento com o inverso da coordenada radial (Jackson e Symmons, 1965), o que impossibilita a separação espacial de variáveis. Embora as equações sejam espacialmente inseparáveis, pode ser mostrado pelo método de separação de variáveis que o comportamento temporal pode ser isolado do espacial. A separação de apenas um termo mostra-se insuficiente para satisfazer as condições inicial e dos contornos, sendo necessária a formação de uma série. A forma exponencial no tempo surge como consequência da derivada, $\partial/\partial t$. Uma proposta para a descrição das equações, tanto em relação à evolução com o tempo, quanto em relação à configuração espacial é a seguinte,

$$\{u', v', p'\}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\beta_n t) \{u_{0n}(x), v_{0n}(x), p_{0n}(x)\} \quad (4.13)$$

onde x representa o vetor posição.

Enquanto as variáveis u_0 , v_0 e p_0 representam a parte espacial das perturbações correspondentes, o número real β representa sua

taxa de crescimento temporal.

A substituição de (4.13) em (4.8)-(4.12) origina o seguinte problema de autovalor diferencial parcial, onde u_0, v_0, p_0 são as autofunções às quais está associado um autovalor β :

$$\nabla \cdot u_0 = 0 \quad (4.14a)$$

$$\beta u_0 + U \cdot \nabla u_0 + u_0 \cdot \nabla U = -\nabla p_0 + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_0 \quad (4.14b)$$

Apenas valores particulares de β (os autovalores) conduzem a valores não-nulos para u_0 e p_0 (as autofunções) que satisfazem as equações diferenciais parciais (4.14a e b). Cada autovalor obtido destas equações, e cada correspondente autofunção, identifica um termo da série apresentada em (4.13). A rigor, seria necessário obter todos os autovalores e autofunções deste problema para que se conhecesse o comportamento das perturbações. Felizmente a característica exponencial do comportamento das perturbações com o tempo torna necessária a determinação apenas do componente mais instável dentre os modos possíveis. A maneira de calcular este modo mais instável será discutida mais adiante; primeiramente faz-se necessário apresentar as condições de contorno do problema de autovalor. Repete-se a nomenclatura anterior para as duas alternativas adotadas na prescrição da condição de contorno na região anterior aos discos.

TIPO PNE

$$u_0 = 0 \text{ na entrada do domínio.} \quad (4.15a)$$

$$u_0 = 0 \text{ nas fronteiras livres.} \quad (4.15b)$$

$$u_0 = 0 \text{ nas paredes do difusor.} \quad (4.15c)$$

$$u_0 = \frac{\partial(rv_0)}{\partial r} = 0 \text{ na saída do domínio.} \quad (4.15d)$$

TIPO DNE

$$\frac{\partial u_0}{\partial r} = v_0 = 0 \text{ para } 0 \leq x \leq 2 \text{ e } r = 2/3. \quad (4.16a)$$

$$u_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0 \text{ ou } 2 \text{ e } 2/3 < r < 1. \quad (4.16b)$$

$$u_0 = 0 \text{ nas paredes do difusor.} \quad (4.16c)$$

$$u_0 = \frac{\partial(rv_0)}{\partial r} = 0 \text{ na saída do domínio.} \quad (4.16d)$$

Tudo o que foi discutido anteriormente em relação às condições de contorno das equações diferenciais para o cálculo das perturbações se aplicam às equações anteriores.

Uma vez que os problemas relevantes à análise de estabilidade foram formulados, a metodologia utilizada na solução destes problemas será agora descrita.

4.2 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

A descrição da metodologia de solução foi dividida em três partes. Na primeira parte apresenta-se o método baseado na análise de estabilidade linear através da solução do problema de autovalor, auxiliado por princípios variacionais. Na segunda parte discute-se um método alternativo de análise de estabilidade, onde o mecanismo de solução das próprias equações das pequenas perturbações em sua forma transiente é comentado. Na terceira etapa apresenta-se o método numérico, procedimento de discretização das equações governantes e mais algumas informações gerais sobre o procedimento numérico.

4.2.1 O PROBLEMA DE AUTOVALOR (ESPECTRAL)

A solução numérica do problema de autovalor apresentado anteriormente seguiu o procedimento utilizado por Shapira, Degani e Weihs (1990). A aplicação de princípios variacionais estabelece que, para este problema, o autovalor mais instável (β_{mi}) pode ser calculado por:

$$\beta_{mi} = - \frac{\left[\int_D (\mathbf{u}_o \cdot \nabla U) \cdot \mathbf{u}_o \, dA + \frac{1}{Re} \int_D |\nabla \mathbf{u}_o|^2 \, dA + \Sigma R \right]}{\int_D |\mathbf{u}_o|^2 \, dA}, \quad (4.17)$$

onde ΣR simboliza a soma dos resíduos, integrados ao longo das fronteiras que apresentam prescrição de condições de contorno fracas, como consequência da aplicação do Teorema da Divergência (para maiores detalhes, ver Apêndices A e B).

O problema numérico foi resolvido a partir das equações (4.14)-(4.15) ou (4.16). Inicialmente é necessário que se conheça o escoamento básico, pois suas variáveis são os coeficientes das equações das perturbações e do problema de autovalor. Arbitram-se valores ao campo \mathbf{u}_o , estima-se um valor inicial ao escalar β , e resolvem-se (4.14)-(4.15 ou 4.16) para \mathbf{u}_o e p_o , através do método de volumes finitos conforme Patankar (1980). Com \mathbf{u}_o e p_o conhecidos, recalcula-se β através de (4.17). O valor obtido é então substituído no termo fonte (descrito no próximo item) de (4.14) e o processo é repetido até a convergência.

A equação (4.17) deve ser interpretada como uma medida da relação entre produção e dissipação da energia das perturbações. Se o autovalor β é positivo, então a produção de energia das perturbações é superior a sua dissipação e por isso o escoamento é instável. Caso encontrem-se valores negativos, a energia das perturbações é predominantemente dissipada e o escoamento é estável a pequenas perturbações. Recordando a equação (2.38), verifica-se que a equação (4.17) guarda estreita relação com a taxa de variação da energia das perturbações com o tempo. Uma diferença significativa é que neste caso o campo de perturbações não pode ser considerado um campo cinematicamente admissível, devido à complexidade das condições de contorno no difusor. O funcional taxa de crescimento ϕ [equação (2.47)] e o seu máximo G [equação (2.48)] possuem estreita relação com a equação (4.17). Em ambos os casos (o campo cinematicamente admissível discutido no Capítulo 2 e o campo de perturbações no difusor) a descrição do decaimento exponencial da energia das perturbações com o tempo é verificada para pequenas perturbações.

4.2.2 O PROBLEMA TRANSIENTE

Os conceitos da teoria linear e do método da energia serão agora revisitados usando a hipótese de perturbações arbitrariamente pequenas como denominador comum. A substituição da equação (4.13) na definição de energia média das perturbações, conforme equação (2.36), fornece,

$$\bar{\epsilon} = \int_V \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{u}_{on} \cdot \mathbf{u}_{on}) \cdot \exp(2\beta_n \cdot t) dV, \quad (4.18a)$$

uma vez que a exponencial não depende do volume, a integração deve ser feita apenas nas autofunções. A aplicação da derivada em relação ao tempo nos dois membros de (4.18a), notando que cada \mathbf{u}_{on} independe do tempo, conduz a,

$$\frac{d\bar{\epsilon}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot \exp(2\beta_n \cdot t) \int_V (\mathbf{u}_{on} \cdot \mathbf{u}_{on}) dV, \quad (4.18b)$$

observando que, após certo tempo $t > t_0$, o termo no somatório que contiver o modo mais instável, β_{mi} , será "exponencialmente" mais representativo que todos os outros, conclui-se que após este intervalo de tempo os demais termos do somatório podem ser desconsiderados. Desta forma:

$$\frac{d\bar{\epsilon}}{dt} = 2 \cdot \beta_{mi} \cdot (1/2) \cdot \int_V (\mathbf{u}_{omi} \cdot \mathbf{u}_{omi}) \cdot \exp(2\beta_{mi} \cdot t) dV \quad (t > t_0), \quad (4.18c)$$

O termo dentro do sinal de integração na equação anterior nada mais é que o produto das parcelas mais significativas de $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'$, para $t > t_0$, ou seja, $[\mathbf{u}_{omi} \cdot \exp(\beta_{mi} t)] \cdot [\mathbf{u}_{omi} \cdot \exp(\beta_{mi} t)]$. Desta forma, quando $t > t_0$, e novamente utilizando a definição (2.36), obtém-se:

$$\frac{d\bar{\epsilon}}{dt} = 2 \cdot \beta_{mi} \cdot \bar{\epsilon} \quad \text{para } t > t_0 \quad (4.18d)$$

Alternativamente,

$$\beta_{mi} = \frac{1}{2 \cdot \bar{\epsilon}} \cdot d\bar{\epsilon}/dt = (1/2) \cdot \frac{d}{dt} (\ln \bar{\epsilon}) \quad \text{para } t > t_0. \quad (4.18e)$$

A equação (4.18e) pode ser empregada para se obter o modo mais instável através do cálculo transiente da taxa de crescimento da energia das perturbações. À medida que o escoamento evolui no tempo, o modo mais instável domina o comportamento da série proposta (4.13), constituindo-se, após certo tempo ($t > t_0$), no único termo representativo da série. Diz-se, então, que o modo mais instável foi isolado.

Após estes comentários pode-se delinear os passos seguidos nesta formulação transiente para obter-se as informações desejadas sobre a estabilidade ou não do escoamento básico em estudo. O processo numérico requer a determinação, a cada instante de tempo, do campo de perturbações. A partir deste campo determina-se a energia média das perturbações e calcula-se β .

O campo de perturbações é obtido resolvendo-se as equações (4.8) a (4.10), sujeitas às respectivas condições inicial e de contorno, através do método dos volumes finitos, conforme proposto por Patankar (1980). O procedimento adotado para obter uma condição inicial consistente será descrito a seguir.

Durante as primeiras iterações, calcula-se o campo de perturbações, partindo de uma condição inicial arbitrária e assimétrica, utilizando um intervalo de tempo bastante refinado. O cuidado em empregar esta "pré-condição" inicial assimétrica justifica-se com o argumento de que, para estudar a estabilidade de soluções simétricas, é necessário partir de um campo assimétrico de perturbações. Ao final destas iterações, consegue-se uma condição inicial que conserva a massa, além de obedecer as condições de contorno e ser uma solução das equações governantes para a evolução de pequenas perturbações. Eleva-se então o intervalo no tempo para o valor adequado ao compromisso entre precisão nos resultados e tempo de CPU. A partir deste ponto, o processo transiente é iniciado.

O balanço entre produção e dissipação no problema transiente

A evolução temporal das perturbações, bem como sua configuração espacial, pode ser representada pelas séries apresentadas nas equações (4.13). É importante observar que, após

determinado tempo ($t > t_0$), cada perturbação pode ser bem descrita por apenas um termo da série que a representa. Deve sempre ser recordado que isso ocorre devido à existência de um valor exponencialmente preponderante do modo mais instável. Considerando o exposto, uma pergunta que surge é a seguinte: seria possível calcular, para a formulação transiente, o autovalor mais instável através de uma equação semelhante à equação (4.17)? A resposta é afirmativa. Uma vez que o campo de perturbações é bem descrito por apenas uma componente (a mais instável) da série, a equação (4.17) pode ser utilizada para calcular o autovalor crítico, substituindo-se as autofunções pelas perturbações na equação citada. Ou seja:

$$\beta_{mi} = - \frac{(\int_D (u' \cdot \nabla v_b) \cdot u' dA + \frac{1}{R_e} \int_D |\nabla u'|^2 dA + \Sigma R')}{\int_D |u'|^2 dA}, \quad (4.19)$$

onde $\Sigma R'$ simboliza a soma dos resíduos oriundos de integrações nas fronteiras onde impôs-se condições de contorno fracas (ver Apêndices A e B para maiores detalhes).

A equação (4.19) fornecerá o modo mais instável quando os outros termos tornarem-se exponencialmente bem menores que a parcela preponderante. Do ponto de vista computacional, a obtenção de β_{mi} através da equação (4.19) é desvantajosa, quando comparada com a equação (4.17), uma vez que o problema numérico passa a depender tanto de variáveis espaciais como temporais. Adicionalmente, deve-se notar que β_{mi} é facilmente obtido pela equação (4.18e), não havendo necessidade de se recorrer à equação (4.19).

4.2.3 DESCRIÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO E DETALHES DA DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES.

Completada a formulação do problema de estabilidade linear, deve-se detalhar o processo numérico de discretização das equações que compõem os dois métodos de análise de estabilidade (o problema de autovalor e as equações que governam a evolução temporal das perturbações infinitesimais). Este assunto, juntamente com os detalhes mais relevantes do método numérico empregado, compõe os

objetivos da discussão que segue.

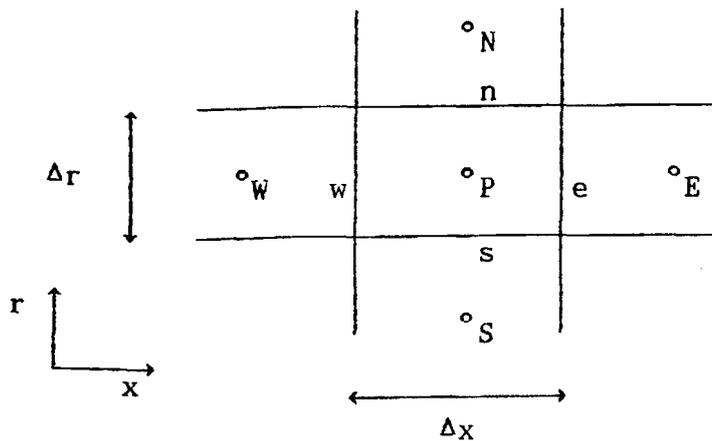


FIGURA 4.3 Esboço de um volume de controle típico, juntamente com seus vizinhos, detalhando suas faces.

O método dos volumes finitos é empregado neste trabalho para a solução das equações do problema espectral da teoria linear. A figura 4.3 esboça um volume de controle típico que será utilizado para ilustrar o processo de integração das equações governantes. Com esta finalidade apresentam-se a seguir as equações governantes do problema transiente para o cálculo das perturbações. O procedimento de discretização para o problema espectral não será detalhado, pois suas equações são bastante parecidas com as equações das perturbações infinitesimais.

Considere u , v e p , respectivamente, a perturbação das componentes axial e radial da velocidade, e a perturbação de pressão do campo básico dado por U (axial), V (radial) e P .

Uma das características do método dos volumes finitos é o cuidado em obter equações discretizadas a partir de balanços de conservação. Esta preocupação está presente principalmente na discretização dos termos convectivos das equações governantes. É importante para o método que tais termos estejam expressos em forma de fluxo. A equação que possui os termos convectivos em forma de fluxo é comumente denominada equação em forma conservativa. Em relação ao difusor radial, a forma conservativa das equações governantes são explicitadas a seguir.

Forma conservativa das equações das perturbações infinitesimais

(i) Equação para u

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r.V.u) + \frac{\partial}{\partial x} (r.U.u) \right] &= \frac{1}{r.Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r.U.v) + \frac{\partial}{\partial x} (r.U.u) \right] \quad (4.20) \end{aligned}$$

onde Re é o número de Reynolds dado pela equação (4.4b).

(ii) Equação para v

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r.V.v) + \frac{\partial}{\partial x} (r.U.v) \right] &= \frac{1}{r.Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(r \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{v}{Re.r^2} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r.V.v) + \frac{\partial}{\partial x} (r.V.u) \right] \quad (4.21) \end{aligned}$$

(iii) Equação de conservação da massa

$$\frac{\partial}{\partial x} (r.u) + \frac{\partial}{\partial r} (r.v) = 0 \quad (4.22)$$

Os passos seguidos para a obtenção das equações discretizadas serão mostrados em detalhe para a direção radial. Na direção axial será apresentada apenas a forma final das equações.

As equações (4.20)-(4.22) são integradas ao longo do volume de controle típico indicado na figura 4.3 e ao longo do tempo. Desta integração resulta,

$$\begin{aligned}
& \int_V \frac{\partial v}{\partial t} dVdt + \int_V \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r.V.v) + \frac{\partial}{\partial x} (r.U.v) \right] dVdt = \\
& \int_V \frac{1}{r.Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dVdt - \int_V \frac{\partial p}{\partial r} dVdt \\
& - \int_V \frac{v}{Re.r^2} dVdt - \int_V \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r.V.v) + \frac{\partial}{\partial x} (r.V.u) \right] dVdt, \quad (4.23)
\end{aligned}$$

onde $dV = r.\Delta r.\Delta x$ e Re é o número de Reynolds.

Denotando as variáveis do tempo t com um super-índice minúsculo "o" e as do tempo $t+\Delta t$ sem super-índice, obtém-se o seguinte resultado da integração espacial e temporal.

$$\begin{aligned}
& (v_p - v_p^o).r_p.\Delta r.\Delta x + \alpha \cdot \left[(r.V.v)_n - (r.V.v)_s \right] \cdot \Delta x.\Delta t + \\
& (1-\alpha) \cdot \left[(r.V.v^o)_n - (r.V.v^o)_s \right] \cdot \Delta x.\Delta t + \left\{ \alpha \cdot \left[(r.U.v)_e - (r.U.v)_v \right] \right. \\
& \left. + (1-\alpha) \cdot \left[(r.U.v^o)_e - (r.U.v^o)_v \right] \right\} \cdot \Delta r.\Delta t = \frac{1}{Re} \left\{ \alpha \cdot \left[r \frac{\partial v}{\partial r} \right]_n - \right. \\
& \left. r \frac{\partial v}{\partial r} \right]_s \cdot \Delta x.\Delta t + (1-\alpha) \cdot \left[r \frac{\partial v^o}{\partial r} \right]_n - r \frac{\partial v^o}{\partial r} \right]_s \cdot \Delta x.\Delta t + \alpha \cdot \left[r \frac{\partial v}{\partial x} \right]_e \\
& - r \frac{\partial v}{\partial x} \right]_v \cdot \Delta r.\Delta t + (1-\alpha) \cdot \left[r \frac{\partial v^o}{\partial x} \right]_e - r \frac{\partial v^o}{\partial x} \right]_v \cdot \Delta r.\Delta t \left\} - \\
& \frac{p_n - p_s}{\Delta r} \cdot r_p.\Delta r.\Delta x.\Delta t - \frac{\alpha}{Re} \cdot \frac{v_p}{r_p^2} \cdot r_p.\Delta r.\Delta x.\Delta t -
\end{aligned}$$

$$\alpha \left[u_P \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_P + v_P \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_P \right]^{(*)} \cdot r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta x \cdot \Delta t - (1-\alpha) \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{v_P^0}{r_P^2} \cdot r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta x \cdot \Delta t - (1-\alpha) \cdot \left[u_P \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_P + v_P \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_P \right] \cdot r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta x \cdot \Delta t \quad (4.24)$$

O fator α pode assumir valores entre 0 e 1. Sua finalidade é permitir a avaliação da integral temporal de uma variável entre dois instantes, t e $t + \Delta t$. Se $\alpha = 0$ (esquema explícito), as variáveis são avaliadas no instante anterior, t . Se $\alpha = 1$ (esquema completamente implícito), as variáveis são avaliadas no instante posterior, $t + \Delta t$. Caso α não seja zero nem um, o esquema é denominado implícito, pois a variável será avaliada em um instante de tempo intermediário, $t + \alpha \cdot \Delta t$. No presente trabalho será adotado o esquema de Crank-Nicolson onde $\alpha = 0,5$.

A equação (4.24) apresenta alguns termos, situados à direita do sinal de igualdade, que são avaliados no centro do volume de controle. Um procedimento mais exato seria não considerar a uniformidade destes termos no volume de controle e integrá-los de forma semelhante à que foi adotada nos demais termos.

Nas equações que se seguem utiliza-se o esquema denominado lei da potência (conforme Patankar, 1980) para a avaliação das variáveis

(*) _____

Este termo é obtido através da utilização da equação da conservação da massa da seguinte maneira:

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V \cdot v) + \frac{\partial}{\partial x} (r \cdot V \cdot u) \right\} = \frac{1}{r} \left\{ v \cdot r \cdot \frac{\partial V}{\partial r} + u \cdot r \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v) + V \frac{\partial}{\partial x} (r \cdot u) \right\} = v \frac{\partial V}{\partial r} + u \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{V}{r} \left\{ \frac{\partial (vr)}{\partial r} + \frac{\partial (ur)}{\partial x} \right\} = v \frac{\partial V}{\partial r} + u \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{zero})$$

e propriedades nas interfaces. Este esquema de interpolação conduz às seguintes equações discretizadas,

$$\begin{aligned}
& (v_P - v_P^\circ) \cdot \frac{r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta x}{\Delta t} + \alpha \left[v_P \left[\left[r_n \cdot \Delta x \cdot v_n, 0 \right] - \right. \right. \\
& v_n \left[\left[- r_n \cdot \Delta x \cdot v_n, 0 \right] - v_s \left[\left[r_s \cdot \Delta x \cdot v_s, 0 \right] + \right. \right. \\
& v_P \left[\left[- r_s \cdot \Delta x \cdot v_s, 0 \right] + v_P \left[\left[r_e \cdot \Delta r \cdot U_e, 0 \right] \right. \right. \\
& \left. \left. - v_E \left[\left[- r_e \cdot \Delta r \cdot U_e, 0 \right] - v_w \left[\left[r_v \cdot \Delta r \cdot U_v, 0 \right] + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. v_P \left[\left[- r_v \cdot \Delta r \cdot U_v, 0 \right] \right] \right] + (1-\alpha) \cdot \left[v_P^\circ \left[\left[r_n \cdot \Delta x \cdot v_n, 0 \right] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - v_n^\circ \left[\left[- r_n \cdot \Delta x \cdot v_n, 0 \right] - v_s^\circ \left[\left[r_s \cdot \Delta x \cdot v_s, 0 \right] + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. v_P^\circ \left[\left[- r_s \cdot \Delta x \cdot v_s, 0 \right] + v_P^\circ \left[\left[r_e \cdot \Delta r \cdot U_e, 0 \right] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - v_E^\circ \left[\left[- r_e \cdot \Delta r \cdot U_e, 0 \right] - v_w^\circ \left[\left[r_v \cdot \Delta r \cdot U_v, 0 \right] + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. v_P^\circ \left[\left[- r_v \cdot \Delta r \cdot U_v, 0 \right] \right] \right] \right] = \frac{1}{Re} \left\{ \alpha \cdot \left[r_n \cdot \Delta x \cdot \frac{(v_n - v_P)}{\delta r_n} \cdot A(|P_n|) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - r_s \cdot \Delta x \cdot \frac{(v_P - v_s)}{\delta r_s} \cdot A(|P_s|) + r_e \cdot \Delta r \cdot \frac{(v_E - v_P)}{\delta e_e} \cdot A(|P_e|) \right. \right. \\
& \left. \left. - r_v \cdot \Delta r \cdot \frac{(v_P - v_v)}{\delta x_v} \cdot A(|P_v|) \right] \right\} - \frac{p_n - p_s}{\Delta r} r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta x - \frac{\alpha}{Re} \cdot \frac{v_P}{r_P^2} \cdot r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta x \\
& - \frac{(1-\alpha)}{Re} \cdot \frac{v_P^\circ}{r_P^2} \cdot r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta x - \alpha \left[u_P \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_P + v_P \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_P \right] \cdot r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta x
\end{aligned}$$

$$- (1-\alpha) \left[u_P^o \frac{\partial V}{\partial X} \Big|_P + v_P^o \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_P \right] \cdot r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta x, \quad (4.25)$$

onde,

$$A(|P|) = \left[\left[0, (1 - 0,1 \cdot |P|)^5 \right] \right], \quad (4.26)$$

representa que $A(|P|)$ assumirá o valor do maior dos dois termos no interior das duas barras.

Agrupando os termos da equação (4.25) obtém-se a seguinte equação discretizada:

$$a_{PP} v_P = a_{EE} v_E + a_{WW} v_W + a_{NN} v_N + a_{SS} v_S + b, \quad (4.27)$$

onde:

$$a_{EE} = \alpha \left\{ D_e \cdot A(|P_e|) + \left[\left[-F_e, 0 \right] \right] \right\} \quad (4.28)$$

$$a_{WW} = \alpha \left\{ D_w \cdot A(|P_w|) + \left[\left[F_w, 0 \right] \right] \right\} \quad (4.29)$$

$$a_{NN} = \alpha \left\{ D_n \cdot A(|P_n|) + \left[\left[-F_n, 0 \right] \right] \right\} \quad (4.30)$$

$$a_{SS} = \alpha \left\{ D_s \cdot A(|P_s|) + \left[\left[F_s, 0 \right] \right] \right\} \quad (4.31)$$

e,

$$D_e = \frac{\Gamma_e \cdot r_e \cdot \Delta r}{\delta x_e}; \quad F_e = r_e \Delta r U_e \quad (4.32)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \cdot r_w \cdot \Delta r}{\delta x_w}; \quad F_w = r_w \Delta r U_w \quad (4.33)$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \cdot r_n \cdot \Delta r}{\delta r_n} ; F_n = r_n \Delta x V_n \quad (4.34)$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \cdot r_s \cdot \Delta r}{\delta r_s} ; F_s = r_s \Delta x V_s \quad (4.35)$$

$$\Gamma_e = \Gamma_v = \Gamma_n = \Gamma_s = \Gamma = \frac{1}{Re} \quad (4.36)$$

O termo constante denotado por b na equação (4.27) é dado por,

$$b = a_p^o v_p^o + S_c \cdot \Delta V, \text{ onde } \Delta V = r_p \Delta r \Delta x \text{ e } a_p^o = \Delta V / \Delta t \quad (4.37)$$

Ainda,

$$\begin{aligned} S_c = & - \frac{P_n - P_s}{\Delta r} - \alpha \left[u_p \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_p + v_p \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_p \right] + \\ & (1-\alpha) \left\{ \frac{1}{\Delta V} \left[-v_p^o \left[F_n, 0 \right] - v_n^o \left[-F_n, 0 \right] + \right. \right. \\ & v_s^o \left[F_s, 0 \right] - v_p^o \left[-F_s, 0 \right] - v_p^o \left[F_e, 0 \right] + \\ & \left. \left. + v_e^o \left[-F_e, 0 \right] + v_w^o \left[F_v, 0 \right] - v_p^o \left[-F_v, 0 \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + D_n A(|P_n|) \cdot (v_n^o - v_p^o) - D_s A(|P_s|) \cdot (v_p^o - v_s^o) + D_e A(|P_e|) \cdot (v_e^o - v_p^o) \right. \right. \\ & \left. \left. - D_v A(|P_v|) \cdot (v_p^o - v_v^o) \right] - \Gamma \frac{v_p^o}{r_p} - \left[u_p^o \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_p + v_p^o \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_p \right] \right\} \quad (4.38) \end{aligned}$$

O coeficiente a_p na equação (4.27) é dado pela seguinte expressão:

$$a_p = a_p^o + a_e + a_w + a_n + a_s - S_p \Delta V, \quad (4.39)$$

$$\text{onde, } S_p = -\frac{\alpha}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{r_p^2}, \quad (4.40)$$

$$\text{e } P_e = \frac{F_e}{D_e}, \quad P_v = \frac{F_v}{D_v}, \quad P_n = \frac{F_n}{D_n}, \quad P_s = \frac{F_s}{D_s}. \quad (4.41)$$

Os símbolos D , F e P denotam, respectivamente, a condutância difusiva, o fluxo de massa na interface e o número de Peclet. O termo fonte $S = S_p v_p + S_c$ satisfaz a regra 3 apresentada por Patankar (1980), ou seja, S_p não é positivo.

O procedimento descrito acima permite que se obtenha, de forma idêntica, a equação discretizada para a equação na direção axial,

$$a_p u_p = a_e u_e + a_w u_w + a_n u_n + a_s u_s + b. \quad (4.42)$$

A única diferença em relação às equações anteriores está no termo fonte $S = S_p u_p + S_c$, pois neste caso S_p é nulo e S_c é composto dos seguintes termos,

$$\begin{aligned} S_c = & -\frac{P_e - P_v}{\Delta x} - \alpha \left[v_p \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_p + u_p \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_p \right] + \\ & (1-\alpha) \left\{ \frac{1}{\Delta V} \left[-u_p^o \left[F_n, 0 \right] - u_n^o \left[-F_n, 0 \right] + \right. \right. \\ & u_s^o \left[F_s, 0 \right] - u_p^o \left[-F_s, 0 \right] - u_p^o \left[F_e, 0 \right] + \\ & \left. \left. + u_e^o \left[-F_e, 0 \right] + u_w^o \left[F_v, 0 \right] - u_p^o \left[-F_v, 0 \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + D_n A(|P_n|) \cdot (u_n^o - u_p^o) - D_s A(|P_s|) \cdot (u_p^o - u_s^o) + D_e A(|P_e|) \cdot (u_e^o - u_p^o) \right. \right. \\ & \left. \left. - D_v A(|P_v|) \cdot (u_p^o - u_v^o) \right] - \left[v_p^o \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_p + u_p^o \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_p \right] \right\} \quad (4.43) \end{aligned}$$

Após apresentadas as equações discretizadas, alguns comentários adicionais são necessários. Embora as equações discretizadas tenham sido apresentadas, apenas em relação ao problema transiente para o cálculo das perturbações, as equações discretizadas do problema espectral apresentam semelhança bastante acentuada. As diferenças mais marcantes são comentadas a seguir.

O problema espectral é resolvido numericamente como um problema estacionário ($a_p^o \rightarrow \infty$), uma vez que as equações independem do tempo. O termo βu_o , que aparece no lugar da típica derivada parcial em relação ao tempo, é incorporado no termo fonte. Um pequeno problema deve ser contornado: caso o autovalor β seja incluído integralmente ao termo fonte S_p , a condição de que S_p não seja positivo é violada quando o autovalor for menor que zero. A maneira encontrada para resolver esta dificuldade é adotar,

$$S_p = -\frac{1}{\text{Re } r} - \frac{1}{r^2} - \text{máx}(0, \beta) \quad \text{e} \quad S_c = \dots + v. \text{máx}(0, -\beta), \quad (4.44)$$

Note-se que, se $\beta > 0$, este aparece no S_p , caso contrário, β aparece no S_c ; os demais termos de S_c foram omitidos na equação (4.44) devido à semelhança com aqueles descritos na equação (4.38).

Em relação ao problema transiente, sabe-se que o método implícito de avaliação temporal das perturbações apresenta um amortecimento artificial, para intervalos de tempo não suficientemente pequenos (Kelkar, 1988). Duas soluções são possíveis de serem adotadas: ou diminui-se o intervalo de tempo, atenuando o problema, ou utiliza-se o esquema Crank-Nicolson de discretização. Esta segunda alternativa foi escolhida, tendo em vista sua precisão de segunda ordem no tempo e sua vantagem em relação ao tempo de CPU. Para maiores discussões ver Kelkar (1988).

Tanto o problema transiente como o espectral foram resolvidos através do arranjo desconstruído para as velocidades e pressão. As equações discretizadas foram resolvidas através do algoritmo da matriz tri-diagonal, ou TDMA (Patankar, 1980). O método SIMPLEC (Van Doormaal e Raithby, 1984) foi adotado no acoplamento perturbação de pressão-perturbação de velocidade. A convergência do processo

iterativo foi acelerada com o algoritmo de correção em bloco de Settari e Aziz (1973).

Complementando os comentários sobre o procedimento numérico, é necessário apontar os critérios de convergência adotados. Em um cálculo transiente deve-se realizar um controle interno das iterações através do seguinte procedimento. Todos os volumes finitos são "visitados", computando-se o máximo resíduo na equação da continuidade. Em um intervalo de tempo real, se a solução encontrada apresenta um resíduo máximo superior a determinado limite, exige-se que outra iteração seja realizada, e assim por diante até a convergência (resíduo máximo inferior ao limite estabelecido) naquele intervalo de tempo. Este processo é repetido para todos os outros "instantes" de tempo. Desta forma cada passo real de cálculo é um transiente distorcido, cuja solução final caracteriza a solução naquele instante de tempo.

A solução do transiente para as perturbações exige uma modificação neste critério. Esta necessidade existe como consequência das pequenas grandezas presentes no problema. O procedimento anterior não pode ser empregado, ou seja, é inadequado adotar este resíduo como parâmetro de controle. O fato é que para perturbações infinitesimais, "pequeno" passa a ser um conceito relativo. Muitas vezes tem-se um aparentemente "pequeno" resíduo, em termos absolutos, mas um valor elevado, em termos relativos. Algebricamente pode-se afirmar que este resíduo é função das velocidades e, quando estas são amortecidas, este resíduo aparenta um valor pequeno.

Este problema foi contornado através de uma normalização do resíduo na equação da continuidade. Define-se um resíduo normalizado como a razão entre o máximo resíduo da equação da continuidade e a quantidade mássica que entra no volume onde o máximo resíduo foi encontrado. Desta maneira força-se que o máximo resíduo da continuidade para as perturbações seja inferior a uma pequena porcentagem de perturbações da quantidade de massa que entra naquele volume.

A escolha do limite superior para o resíduo normalizado é

resolvida da seguinte maneira: após escolhido o passo ideal no tempo, realiza-se um cálculo preliminar, imprimindo toda a evolução interna de determinada perturbação de velocidade característica. Este novo resíduo é então calculado juntamente com estas velocidades. Nesta etapa utiliza-se um critério bastante rigoroso. A observação da evolução iterativa da perturbação escolhida, unida ao resíduo calculado, informa que valor obedece ao compromisso entre precisão de resultados e tempo de CPU.

Quando parar o programa como um todo? A resposta a esta pergunta deve considerar até onde interessa computar a evolução das perturbações. Escolheu-se a taxa de crescimento como parâmetro importante de controle externo do programa. Quando sua variação relativa $[(\beta_{\text{novo}} - \beta_{\text{antigo}}) / \beta_{\text{novo}}]$ é bem pequena, decide-se que o método numérico captou o que interessava e que o programa pode ser parado. Na maioria dos casos computados exigiu-se que o resíduo normalizado fosse inferior a 10^{-4} e que a variação relativa em β fosse inferior a 10^{-8} .

A descrição anterior aplica-se ao problema transiente. O problema espectral, resolvido como a metodologia de um problema estacionário, é bem mais simples em relação ao critério de convergência. Uma vez que, neste, caso apenas a solução final é relevante, exige-se apenas que o segundo critério mencionado seja satisfeito, também com limite superior de 10^{-8} .

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1 INTRODUÇÃO

Uma vez que o problema de estabilidade foi formulado e a metodologia de solução foi descrita, neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos, juntamente com a discussão das principais questões advindas da obtenção destas soluções. O presente capítulo está dividido em quatro partes principais. Na primeira parte, apresenta-se a validação da metodologia de solução através da análise da estabilidade de um problema físico similar, ao estudado aqui, seguida da comparação com resultados numéricos e experimentais da literatura. A partir da segunda parte deste capítulo, os resultados apresentados referem-se à análise de estabilidade linear em difusores radiais, objetivo deste trabalho. A segunda parte descreve os resultados obtidos na análise de estabilidade através da formulação espectral. Os resultados obtidos com a formulação transiente são detalhados na terceira parte. A quarta e última parte deste capítulo apresenta as comparações e discussões mais relevantes em relação aos resultados obtidos.

5.2 VALIDAÇÃO

A fim de obter confiabilidade na metodologia de cálculo, resultados numéricos precisam ser validados com soluções analíticas, outras soluções numéricas e, posteriormente, com resultados experimentais. Escoamentos não-paralelos, como o escoamento radial estudado, impossibilitam soluções analíticas. Uma alternativa é a solução de um problema com características físicas semelhantes ao difusor radial. O estudo numérico realizado por Shapira e co-autores (1990) pareceu adequado para validar a presente metodologia. Trata-se de um escoamento entre duas placas paralelas com uma súbita expansão simétrica. A presença da expansão súbita gera regiões de

recirculações que aumentam de tamanho com o número de Reynolds. Neste escoamento também foi verificada a perda da estabilidade das soluções simétricas (bifurcação em forquilha), a partir de um certo número de Reynolds. A figura abaixo ilustra as características da geometria do problema.

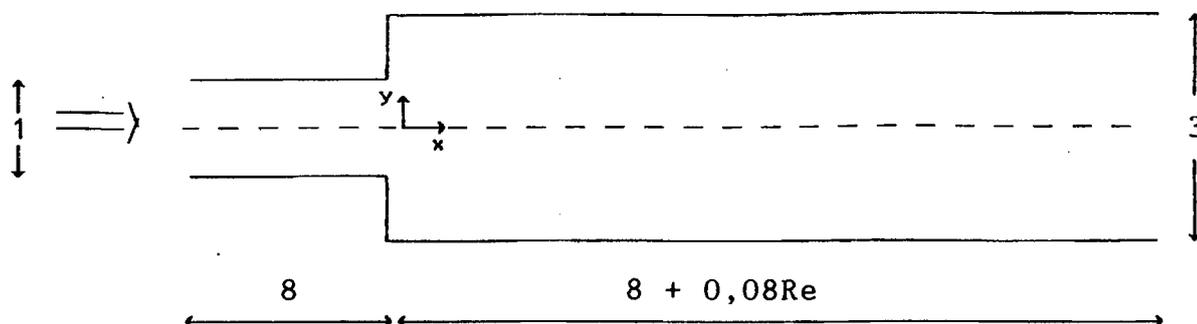


FIGURA 5.1 Esboço do canal com expansão súbita considerado.

A geometria apresentada acima é um caso particular dentre os analisados no trabalho de Shapira e co-autores (1990). No artigo mencionado, os autores estudam a estabilidade de escoamentos em canais com ângulos de expansão variando entre 10 e 90 graus. O caso particular de 90 graus para o ângulo de expansão no canal foi escolhido devido aos benefícios associados à utilização de um sistema de coordenadas cartesiano.

As equações governantes do escoamento, reescritas por questão de conveniência, são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v \quad (5.3)$$

onde u , v são velocidades adimensionais nas direções (adimensionais) x , y , respectivamente. As adimensionalizações foram realizadas em relação à velocidade máxima na entrada do canal U_{max} e em relação à altura do canal antes da expansão, d . A pressão adimensional é denotada por p , ∇^2 é o operador laplaciano em coordenadas

cartesianas e o número de Reynolds é definido por $\rho U_{\max} d/\mu$, onde μ é a viscosidade absoluta. As condições de contorno associadas ao problema do canal com expansão súbita são,

$$u = v = 0 \text{ nas paredes.} \quad (5.4a)$$

$$u = \frac{4}{d^2}(d/2-y)(d/2+y) \text{ e } v = 0 \text{ em } x = -8. \quad (5.4b)$$

$$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y = 0 \text{ para } x = 8 + 0,08Re. \quad (5.4c)$$

A representação do escoamento básico estacionário por:

$$\bar{u}, \bar{v} \text{ e } \bar{p}$$

e a introdução de pequenas perturbações a estas soluções,

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad p = \bar{p} + p', \quad (5.5)$$

fornece o seguinte sistema de equações diferenciais lineares para as perturbações u' , v' e p' :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u'}{\partial y} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{R} \nabla^2 u' \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial y} + u' \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = - \frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{R} \nabla^2 v'. \quad (5.8)$$

As condições de contorno para as perturbações são,

$$u' = v' = 0 \text{ nas paredes e em } x = -8, \quad (5.9a)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \text{ para } x = 8 + 0,08Re. \quad (5.9b)$$

Conforme explorado no capítulo 4, para a utilização do método de separação de variáveis, a complexidade do problema requer a construção de séries para representar as perturbações,

$$u'(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{on}(x,y) \cdot \exp(\beta_n t) \quad (5.10)$$

$$v'(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{on}(x, y) \cdot \exp(\beta_n t) \quad (5.11)$$

$$p'(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{on}(x, y) \cdot \exp(\beta_n t) \quad (5.12)$$

A substituição destas equações em (5.6)-(5.9) origina as seguintes equações:

$$\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{\partial v_o}{\partial y} = 0 \quad (5.13)$$

$$\beta u_o + \bar{u} \frac{\partial u_o}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u_o}{\partial y} + u_o \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v_o \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{\partial p_o}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_o \quad (5.14)$$

$$\beta v_o + \bar{u} \frac{\partial v_o}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v_o}{\partial y} + u_o \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_o \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = - \frac{\partial p_o}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v_o \quad (5.15)$$

Nestas equações estão contidos todos os autovalores e autofunções que descrevem as séries 5.10-5.12, que representam o campo de perturbações.

As condições de contorno deste problema spectral são,

$$u_o = v_o = 0 \text{ nas paredes e em } x = -8. \quad (5.16a)$$

$$\frac{\partial u_o}{\partial x} = \frac{\partial v_o}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 8 + 0,08Re. \quad (5.16b)$$

Pretende-se validar o procedimento de cálculo discutido anteriormente através deste problema de autovalor. Na solução do problema spectral seguiram-se os passos já descritos no Capítulo 4, ou seja, um processo iterativo foi executado entre as equações (5.13)-(5.16) e a equação (4.17), que fornece o valor de β para o

modo mais instável.

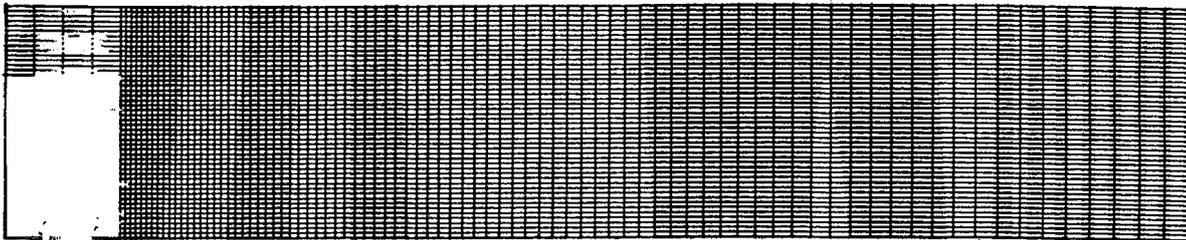


FIGURA 5.2 Detalhe da malha após o degrau, $Re = 75$.

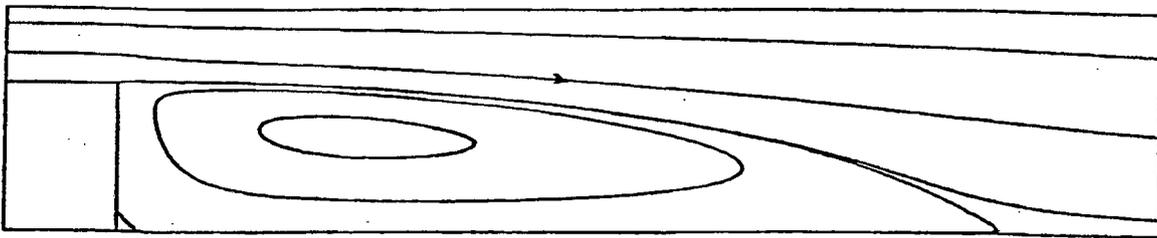


FIGURA 5.3 Detalhe da recirculação após o degrau, $Re = 75$.

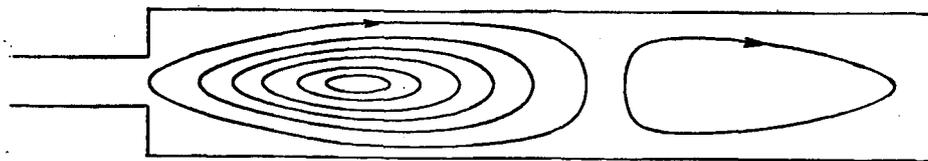
QUADRO 5.1 Tabela ilustrativa da dependência de β com a malha para o escoamento em um canal com expansão súbita de 1:3.

$Re = 75$	UNIFORME		
MALHA	90x59	112x77	156x92
β_{mi}	-0.6645E-3	-1.7366E-3	-3.3804E-3
$Re = 75$	NÃO UNIFORME (P.G.)		
MALHA	112x77	172x98	252x98
β_{mi}	-5.3154E-3	-5.7049E-3	-6.0831E-3

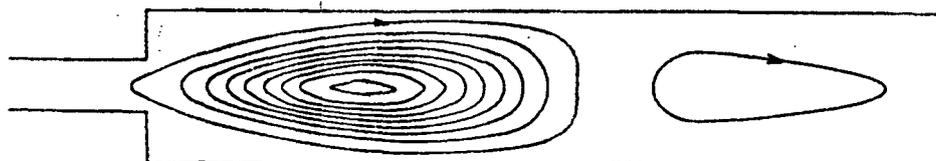
A disposição da malha é um aspecto importante em qualquer

trabalho numérico. Como pode ser observado no quadro 5.1, inicialmente partiu-se de malhas uniformes e, em consequência da necessidade de maior precisão, malhas não-uniformes na direção x foram empregadas. Na disposição das malhas não uniformes, utilizou-se uma progressão geométrica, geralmente com razão 1,02. Tal progressão iniciava-se exatamente após a expansão e escolhia-se um número de volumes de controle na direção x após a expansão de forma que 60% dos volumes de controle estivessem na região de recirculação do escoamento básico. A figura 5.2 caracteriza uma malha típica e mostra a região do domínio próxima à expansão para $Re = 75$. Tal malha possui 112×77 pontos nodais (x versus y , respectivamente). Na figura 5.3 são mostradas algumas linhas de corrente do escoamento básico para que se observe a distribuição dos volumes de controle ao longo da região de recirculação.

Shapira e co-autores definiram a dimensão do canal após a expansão como uma função do número de Reynolds. Isso exigiu malhas mais refinadas a medida que aumentava-se o valor deste parâmetro adimensional.



a) Presente trabalho.



b) Shapira e co-autores (1990)

FIGURA 5.4 Linhas de corrente das autofunções, $Re = 100$.

A comparação entre linhas de corrente das autofunções associadas ao modo mais instável, para $Re = 100$, revela boa concordância entre os resultados do presente trabalho e aqueles obtidos por Shapira e co-autores (figura 5.4). Uma vez que Shapira e co-autores (1990) não fornecem os valores numéricos para as linhas de corrente, a comparação entre as figuras 5.4 a) e b) só pode ser feita em termos qualitativos.

O cálculo do autovalor mostrou-se bastante dependente da malha computacional. Uma análise de refino de malha espacial revelou-se de importância fundamental à interpretação dos resultados computados. Apresenta-se, no quadro 5.1, os autovalores mais instáveis para diferentes malhas espaciais, todos para um número de Reynolds igual a 75.

Embora um erro relativo de aproximadamente 6,2% persista entre os dois últimos valores de β_{mi} , o erro absoluto entre ambos valores é suficientemente pequeno. Note-se que o valor de $Re = 75$ está próximo do número de Reynolds crítico onde β_{mi} é zero. Desta forma no quadro 5.1 estão sendo comparados valores próximos a zero. Tentativas foram feitas com uma malha mais refinada (262x152), mas, embora o escoamento tenha sido obtido, não foi possível convergir o problema de autovalor em virtude do elevado tempo computacional requerido. A título de ilustração, foram gastas 38 horas para convergir o programa espectral para a malha de 252x98 pontos nodais e número de Reynolds igual a 75.

O autovalor mais instável foi calculado para certos valores característicos do número de Reynolds, Re . Estes valores permitiram a construção de uma curva que possibilitasse a avaliação do ponto crítico para a estabilidade das soluções simétricas (figura 5.5). O número de Reynolds crítico de aproximadamente 80, inferido da figura, aproxima-se daquele obtido por Shapira e co-autores ($Re_{cr} = 82,6$). No quadro 5.2, apresentam-se os valores computados neste trabalho, juntamente com a malha espacial empregada. Ainda neste quadro são mostrados os valores de β_{mi} correspondentes obtidos por Shapira e co-autores. Para valores de β_{mi} positivos as perturbações tendem a se amplificar com o avanço do tempo, indicando que o

escoamento básico é instável. Para β_{mi} negativos as perturbações se amortecem indicando que o escoamento básico é estável.

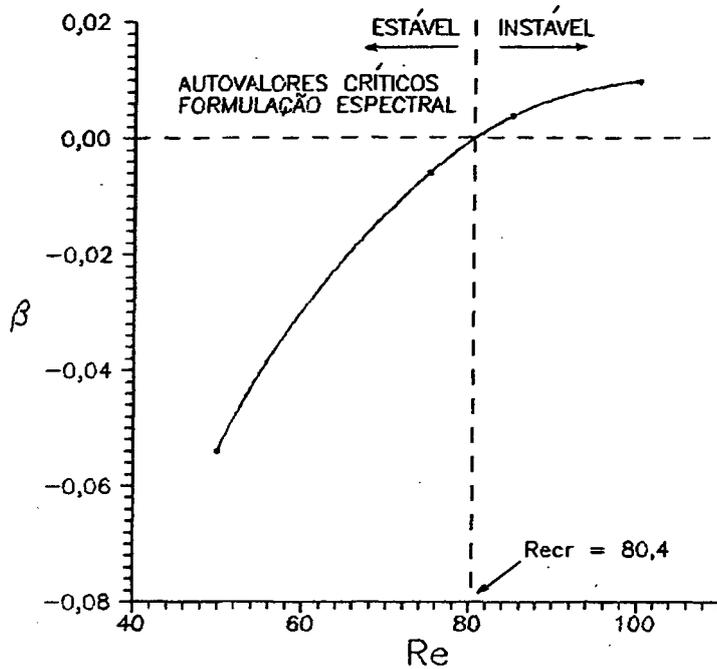


FIGURA 5.5 Variação do autovalor mais instável com o número de Reynolds, destacando o ponto crítico ($\beta_{mi} = 0$), para um canal plano com expansão súbita de 1:3.

QUADRO 5.2 Valores mais instáveis de β , malhas e números de Reynolds correspondentes.

MALHA [Presente trabalho]	150x98	252x98	190x98	200x98
β_{mi} [Presente trabalho]	-5,40E-2	-6,08E-3	+3,79E-3	+0,98E-2
$\beta_{mi} (*)$ [Shapira et al (1990)]	-5,34E-2	-6,87E-3	+2,32E-3	+1,12E-2
Número de Reynolds	50	75	85	100

(*) Todos os resultados de Shapira e co-autores (1990) foram computados pelo método dos elementos finitos com uma malha de 328 elementos. Shapira e co-autores (1990) empregam um esquema de nove

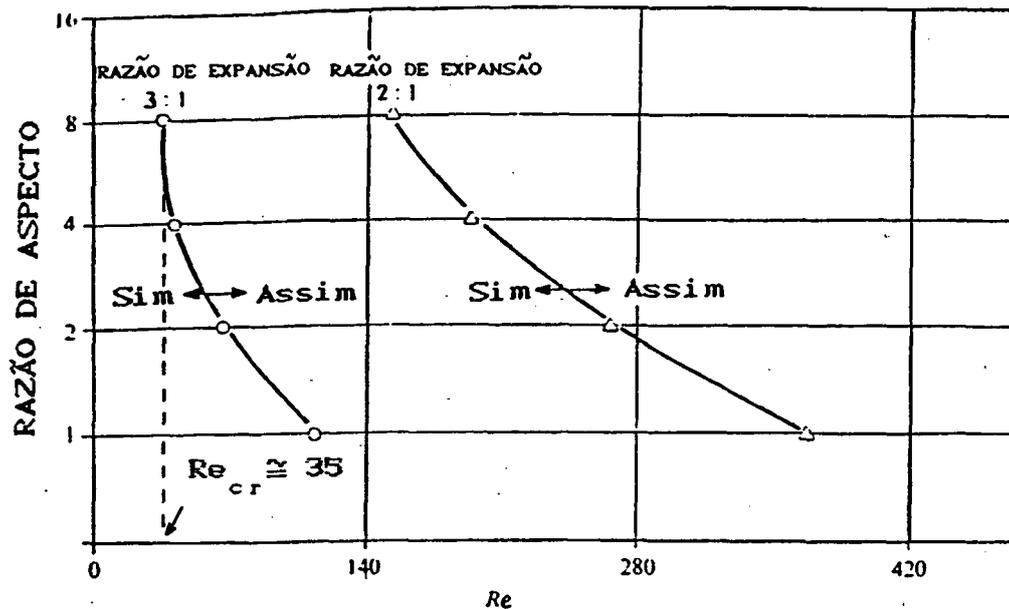


FIGURA 5.6 Gráfico representativo da simetria ou assimetria do escoamento em dutos simétricos com expansão súbita em função da razão de aspecto e número de Reynolds do canal para duas razões de expansão características (Cherdron, Durst e Whitelaw, 1978).

É importante destacar que para um canal com expansão súbita de 90 graus e razão de expansão de 1:3, Sobey (1985) observou, em trabalho experimental, o início da assimetria do escoamento a partir de $Re = 75$. Embora não seja mencionada explicitamente a razão de aspecto lateral do canal, o artigo cita 15:1 e 5:1 como limites extremos, isto é, pode-se garantir que nos experimentos foram utilizadas razões de aspecto não inferiores a 5:1. Esta observação tem importância quando compara-se este experimento com aquele realizado por Cherdron, Durst e Whitelaw (1978). Este último trabalho apresenta uma curva limite entre soluções simétricas e assimétricas em relação à razão de aspecto lateral, com o objetivo de investigar os efeitos tridimensionais. Aproximadamente, a partir da razão de aspecto de 5:1, os autores observaram a independência da curva com este parâmetro, porém a um número de Reynolds bem inferior ao citado por Sobey (1985). Tal resultado pode ser observado na pontos e aproximações biquadráticas para as velocidades juntamente com uma aproximação bilinear em nós de quatro cantos para as pressões.

figura 5.6, onde é reproduzida a figura 6 de Cherdron, Durst e Whitelaw (1978). Mesmo que a curva mencionada indique o limite inferior de 5:1 como adequado para comparações com resultados numéricos "bidimensionais", a diferença entre os resultados experimentais de Sobey (1985) e Cherdron, Durst e Whitelaw (1978) é bastante significativa: $Re_{c,r} = 75$ e 35 , respectivamente. Tais resultados mostram que o valor correto para o número de Reynolds crítico em escoamentos com expansão súbita permanece associado a uma grande incerteza.

Concluída a etapa de validação, a apresentação dos resultados da análise de estabilidade linear em escoamentos radiais será iniciada com o problema espectral.

5.3 O PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA O DIFUSOR RADIAL.

A variação do modo mais instável do espectro de autovalores com a malha espacial empregada para o escoamento no difusor radial é apresentada no quadro 5.3. Na descrição da malha computacional o primeiro número representa a quantidade de pontos na direção x e o segundo número representa a quantidade de pontos na direção r .

QUADRO 5.3 Refino de malha espacial para o cálculo de β no escoamento radial; condição de contorno do tipo PNE e $Re = 100$.

MALHA	50x46	70x70	100x200
β	-1,0998E-2	-1,9966E-2	-1,9200E-2

A malha espacial de 70x70 volumes de controle foi considerada satisfatória em relação ao compromisso entre a precisão computacional e o tempo de CPU. Embora Langer e co-autores (1990) tenham apresentado resultados com malhas de 50x46 e 70x70, Langer (1991) identifica a segunda malha como mais adequada na descrição daqueles fenômenos físicos. Para a primeira malha, Langer (1991) obteve $Re_{c,r} = 113$ enquanto que para a segunda malha, $Re_{c,r} = 117$. Tais valores devem ser lembrados na apresentação dos resultados que se seguem. Na exposição dos resultados do presente trabalho, utilizar-se-á a malha espacial de 50x46 na exploração de aspectos

qualitativos (comparação de configurações de linhas de corrente e isobáricas) e, quando a precisão for o requisito mais importante, a malha de 70x70 pontos nodais será empregada.

Na apresentação dos resultados obtidos da solução do problema de autovalor, merece destaque a distinção quanto ao tipo de condição de contorno adotada na região de entrada do domínio. Conforme discutido no item 4.1.2 do Capítulo 4, duas possibilidades foram exploradas para a condição de contorno na entrada do difusor: condição de perturbação nula (condição do tipo PNE) e condição de derivada nula (condição do tipo DNE).

O processo iterativo para o problema de autovalor dado pela equação (4.14), juntamente com a equação (4.17) para o cálculo de β a cada iteração, fornece o autovalor mais instável, ou seja, o termo correspondente à exponencial que comanda a série apresentada na equação (4.13). Se existirem apenas autovalores negativos, o método fornecerá o modo menos amortecido. Se existirem autovalores positivos, então será computada a maior taxa de amplificação. Esta metodologia de cálculo permite que se obtenha os valores críticos para o número de Reynolds previstos pela formulação espectral.

Na figura 5.7 apresenta-se a curva que descreve o comportamento do autovalor mais instável em relação ao número de Reynolds quando prescreve-se perturbação nula na entrada do difusor (PNE). Os pontos assinalados referem-se aos resultados computados. Um número de Reynolds crítico igual a 111,2 foi encontrado através desta curva. Este valor está em concordância com o trabalho de Langer (1991), que obteve soluções simétricas e assimétricas a partir de um número de Reynolds de 113. Empregou-se aqui a mesma malha espacial do trabalho numérico de Langer (50x46). O máximo tempo de CPU necessário para se isolar o autovalor crítico foi cerca de 18 minutos em um IBM 3090. Deve-se observar que os resultados da figura 5.7 referem-se a campos básicos simétricos. Esta restrição objetiva a identificação da evolução da estabilidade desta classe de soluções com o número de Reynolds. Deve-se associar β a uma espécie de "termômetro" de estabilidade.

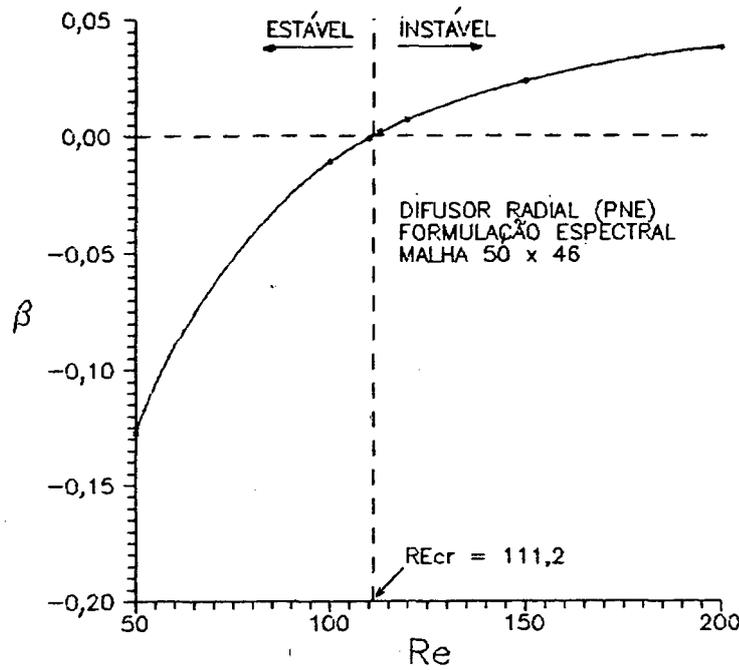


FIGURA 5.7 Variação do autovalor mais instável com o número de Reynolds (malha 50x46), destacando o ponto crítico ($\beta_{mi} = 0$); difusor radial com perturbação nula na entrada (PNE).

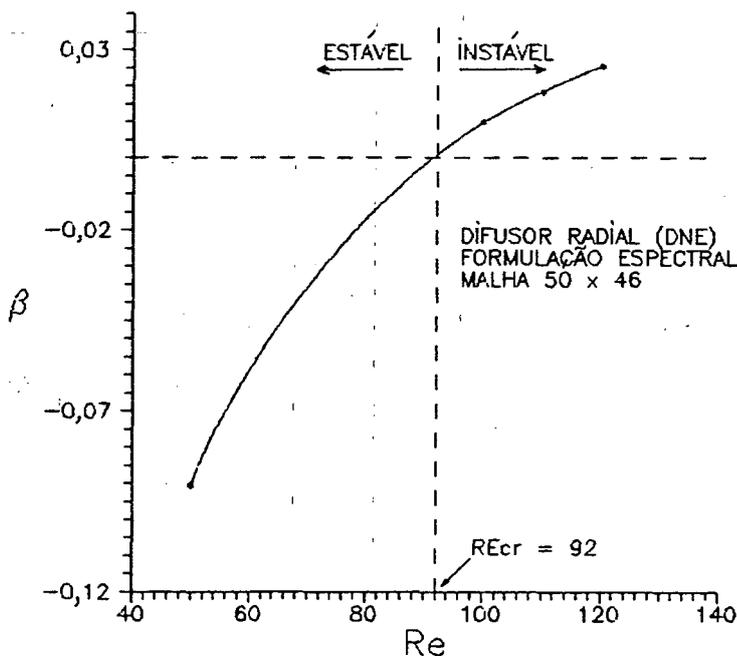


FIGURA 5.8 Variação do autovalor mais instável com o número de Reynolds (malha 50x46), destacando o ponto crítico ($\beta_{mi} = 0$); difusor radial com derivada nula na entrada (DNE).

A figura 5.8 descreve o comportamento de β em relação ao número de Reynolds com a condição de contorno de derivada nula (DNE) para as perturbações na entrada do difusor. Um número de Reynolds crítico de 92 pôde ser inferido, a partir do gráfico. O valor $Re_{cr} = 92$ difere daquele obtido por Langer (1991) para a mesma malha computacional, $Re_{cr} = 113$.

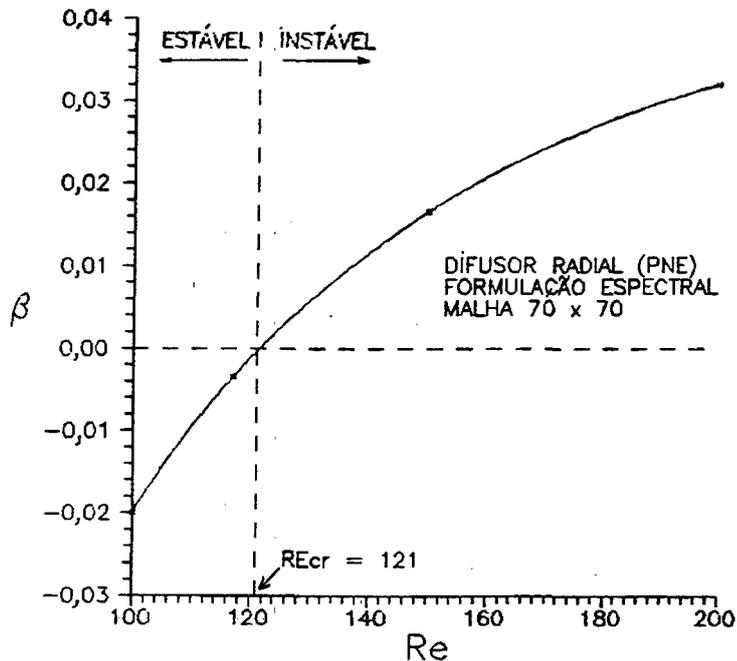


Figura 5.9 Variação do autovalor mais instável com o número de Reynolds (malha 70 x 70), destacando o ponto crítico ($\beta_{mi} = 0$); difusor radial com perturbação nula na entrada (PNE).

As figuras 5.9 e 5.10 mostram o comportamento do autovalor em relação ao número de Reynolds para a malha de 70x70 pontos nodais. A figura 5.9 refere-se a análise de estabilidade em que se prescreve perturbação nula na região de entrada (PNE), enquanto que a figura 5.10 descreve a situação em que a prescrição de derivada nula na entrada (DNE) é adotada para as autofunções. Um número de Reynolds crítico de aproximadamente 121 é obtido da curva apresentada na figura 5.9 (PNE), novamente em concordância com Langer (1991), que obteve soluções assimétricas a partir de um número de Reynolds igual a 117. A diferença entre os número de Reynolds críticos obtidos da curva plotada na figura 5.10, com a condição de contorno do tipo DNE

(aproximadamente 105), em relação aos resultados do trabalho de Langer (1991), repete-se nesta malha mais refinada e é da ordem de 10%. Nota-se assim que os resultados obtidos com a condição de contorno do tipo PNE concordam mais favoravelmente com os resultados encontrados por Langer (1991). Neste caso obtém-se uma concordância entre 3 e 4%.

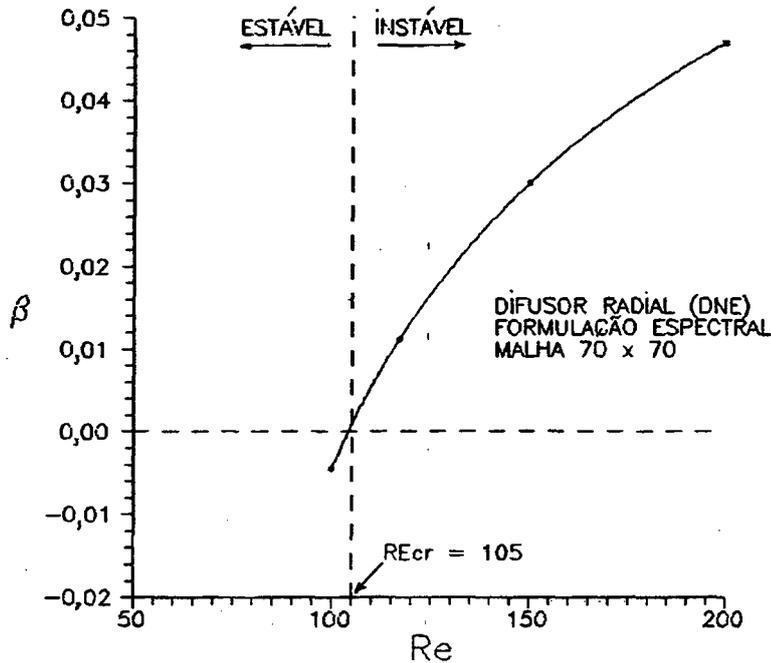


Figura 5.10 Variação do autovalor mais instável com o número de Reynolds (malha 70 x 70), destacando o ponto crítico ($\beta_{mi} = 0$); difusor radial com derivada nula na entrada (DNE).

As figuras 5.11 a 5.13 apresentam as linhas de corrente associadas às autofunções para números de Reynolds, respectivamente, iguais a 100, 110 e 120 quando prescreve-se perturbação nula na entrada do domínio. Pretende-se, com estas figuras, mostrar a evolução das autofunções antes e após o ponto de bifurcação do escoamento ($Re_{cr} = 111,2$). Observa-se que, à medida que o número de Reynolds é aumentado, ocorre uma compressão progressiva da maior região de recirculação, juntamente com uma penetração a montante e ampliação das outras duas recirculações. Os valores apresentados mostram que o efeito das velocidades na primeira recirculação é mais intenso do que nas demais regiões. Mais adiante este efeito

revelar-se-á importante na compreensão da causa da perda de estabilidade das soluções simétricas.

1	$-1,2 \times 10^{-9}$	4	$5,0 \times 10^{-12}$	7	$1,0 \times 10^{-8}$	10	$1,2 \times 10^{-6}$
2	$-5,0 \times 10^{-10}$	5	$1,0 \times 10^{-11}$	8	$1,7 \times 10^{-7}$	11	$1,9 \times 10^{-6}$
3	$-5,0 \times 10^{-11}$	6	$1,3 \times 10^{-11}$	9	$6,5 \times 10^{-7}$		

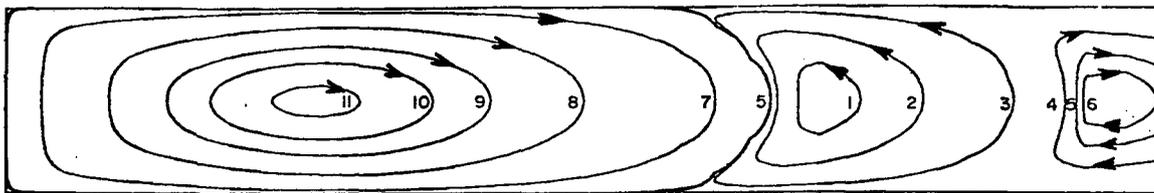


FIGURA 5.11 Linhas de corrente para as autofunções mais instáveis das perturbações de velocidades, $Re = 100$. Difusor radial com prescrição de perturbação nula na entrada (PNE) e malha de 50×46 pontos.

1	$-7,0 \times 10^{-10}$	4	$5,0 \times 10^{-12}$	7	$2,0 \times 10^{-8}$
2	$-2,0 \times 10^{-10}$	5	$8,0 \times 10^{-12}$	8	$3,0 \times 10^{-7}$
3	$-2,0 \times 10^{-11}$	6	$3,0 \times 10^{-10}$	9	$9,4 \times 10^{-7}$

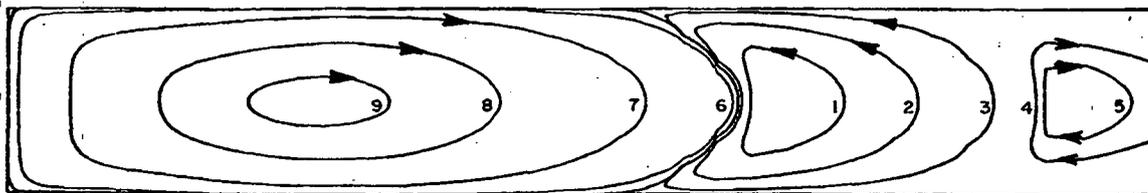


FIGURA 5.12 Linhas de corrente para as autofunções mais instáveis das perturbações de velocidades, $Re = 110$. Difusor radial com prescrição de perturbação nula na entrada (PNE) e malha de 50×46 pontos.

1	$-2,0 \times 10^{-9}$	4	$5,0 \times 10^{-12}$	7	$1,8 \times 10^{-7}$	10	$1,1 \times 10^{-6}$
2	$-5,0 \times 10^{-10}$	5	$1,3 \times 10^{-11}$	8	$4,5 \times 10^{-7}$		
3	$-1,0 \times 10^{-11}$	6	$2,0 \times 10^{-8}$	9	$8,4 \times 10^{-7}$		

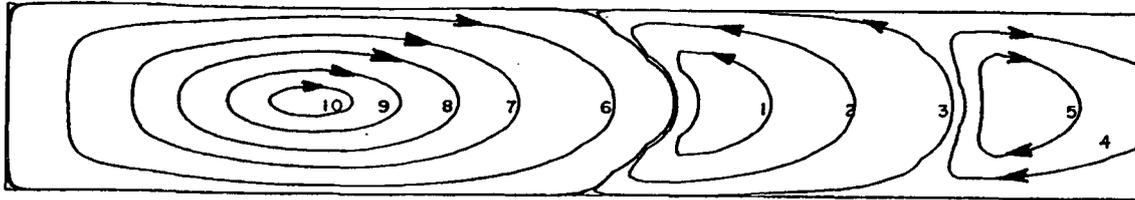


FIGURA 5.13 Linhas de corrente para as autofunções mais instáveis das perturbações de velocidades, $Re = 120$. Difusor Radial com prescrição de perturbação nula na entrada e malha de 50×46 pontos.

1	$-1,4 \times 10^{-8}$	4	$-5,0 \times 10^{-11}$	7	$1,5 \times 10^{-11}$	10	$4,0 \times 10^{-7}$
2	$-5,0 \times 10^{-9}$	5	$6,5 \times 10^{-13}$	8	$6,5 \times 10^{-11}$	11	$7,7 \times 10^{-7}$
3	$-8,0 \times 10^{-10}$	6	$2,5 \times 10^{-12}$	9	$7,0 \times 10^{-8}$		

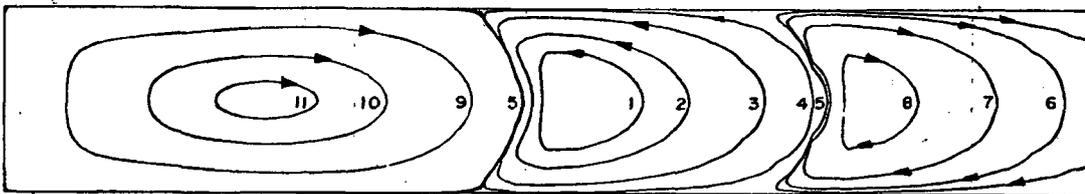


FIGURA 5.14 Linhas de corrente para as autofunções mais instáveis das perturbações de velocidades, $Re = 120$. Difusor Radial com derivada nula na entrada (DNE) e malha de 50×46 pontos.

A figura 5.14 apresenta as linhas de corrente das autofunções mais instáveis para $Re = 120$ quando prescreve-se derivada nula na entrada (DNE). A comparação desta figura com a anterior (figura 5.13) não parece mostrar diferenças significativas na configuração

das autofunções, embora diferentes condições de contorno tenham sido usadas. Observa-se que na figura 5.14 a maior região de recirculação está mais comprimida a montante do que sua correspondente na figura 5.13.

Na apresentação das linhas de corrente, exclui-se a região da saída onde tais linhas sofrem distorções ocasionadas pela condição de derivada nula imposta na saída do domínio. Presentemente, Peters (1992) tem estudado tais efeitos com maior profundidade.

a	$-59,382 \times 10^{-9}$	f	$-29,425 \times 10^{-9}$	k	$-27,194 \times 10^{-9}$
b	$-51,007 \times 10^{-9}$	g	$-29,294 \times 10^{-9}$	l	$-16,887 \times 10^{-9}$
c	$-41,700 \times 10^{-9}$	h	$-29,293 \times 10^{-9}$	m	$-7,5806 \times 10^{-9}$
d	$-31,585 \times 10^{-9}$	i	$-29,161 \times 10^{-9}$	n	$+0,7947 \times 10^{-9}$
e	$-30,006 \times 10^{-9}$	j	$-28,524 \times 10^{-9}$		

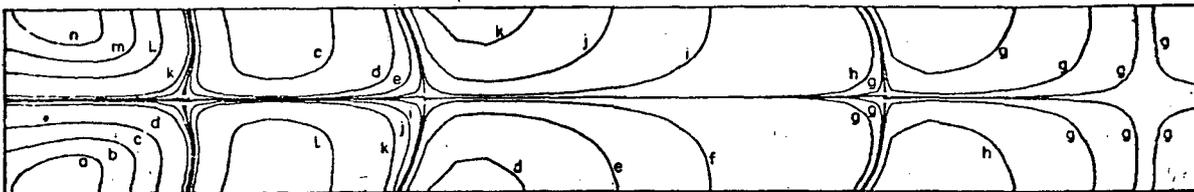


FIGURA 5.15 Linhas isobáricas para as autofunções ($Re = 100$ e malha de 50×46 pontos). Prescreve-se perturbação nula na entrada (PNE).

A fim de extrair informações adicionais do escoamento, linhas isobáricas são apresentadas nas figuras 5.15 ($Re = 100$) e 5.16 ($Re = 120$) para as autofunções associadas à parte espacial das perturbações de pressão. Um valor máximo, logo no início dos discos, entra em contraste com um mínimo simetricamente disposto (curvas "a" e "n" na figura 5.15 e curvas "a" e "r" na figura 5.16). Esta relação de simetria em forma e anti-simetria em intensidade mantém-se até o final dos discos, embora uma interessante alternância seja verificada com relação às correspondentes posições

entre máximos e mínimos locais. Na figura 5.15, por exemplo, enquanto "a" é mínimo e "n" é máximo, "l" é máximo e "c" é mínimo. A comparação entre estas curvas e as correspondentes para linhas de corrente, por exemplo, as figuras 5.11 e 5.15, permite a visualização do efeito causador da perda de estabilidade das soluções simétricas. O aumento das velocidades próximo a um disco, conseqüência, principalmente, da forte região de recirculação presente na entrada dos discos, para o escoamento básico, provoca um decréscimo da pressão que mantém a assimetria do escoamento quando este efeito adquire determinada intensidade crítica. Este é o denominado efeito Coanda.

a	$-34,113 \times 10^{-9}$	g	$-16,973 \times 10^{-9}$	m	$-16,540 \times 10^{-9}$
b	$-31,318 \times 10^{-9}$	h	$-16,902 \times 10^{-9}$	n	$-15,805 \times 10^{-9}$
c	$-26,124 \times 10^{-9}$	i	$-16,899 \times 10^{-9}$	o	$-13,079 \times 10^{-9}$
d	$-20,718 \times 10^{-9}$	j	$-16,898 \times 10^{-9}$	p	$-7,6727 \times 10^{-9}$
e	$-18,087 \times 10^{-9}$	k	$-16,895 \times 10^{-9}$	q	$-2,4785 \times 10^{-9}$
f	$-17,257 \times 10^{-9}$	l	$-16,823 \times 10^{-9}$	r	$+0,3164 \times 10^{-9}$

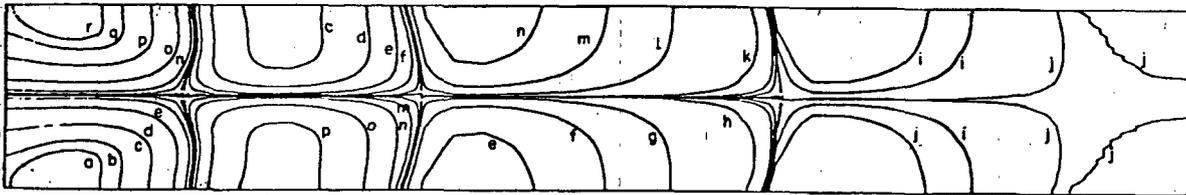


FIGURA 5.16 Linhas isobáricas para as autofunções ($Re = 120$ e malha de 50×46 pontos). Prescreve-se perturbação nula na entrada (PNE).

Na figura 5.17 observam-se as linhas isobáricas obtidas por Shapira e co-autores (1990) para o canal plano com expansão localizada. A semelhança morfológica desta figura com as figuras 5.15 e 5.16 não é ocasional (embora não tenha sido comentado pelos autores, acredita-se que os centros das linhas isobáricas da figura 5.17 correspondam a um máximo e mínimo simetricamente opostos). Por

que existe uma maior intensidade deste efeito de desequilíbrio de pressões no difusor radial ? Acredita-se que esta diferença seja causada pelo contraste físico entre as expansões, ou seja, o difusor radial apresenta uma expansão gradual, enquanto o difusor plano apresenta expansão local. A imagem ilustrativa de uma seqüência de expansões planas representando a expansão radial parece reforçar esta interpretação. A comparação entre as figuras 5.15 e 5.16 evidencia que o deslocamento progressivo das recirculações, observado nas linhas de corrente, repete-se para as isobáricas. A perda de estabilidade das soluções simétricas é, portanto, uma conseqüência da propagação a montante e do aumento, em intensidade, do desequilíbrio das perturbações de pressão. Desta forma a pressão tem uma importância fundamental na estabilidade de escoamentos.

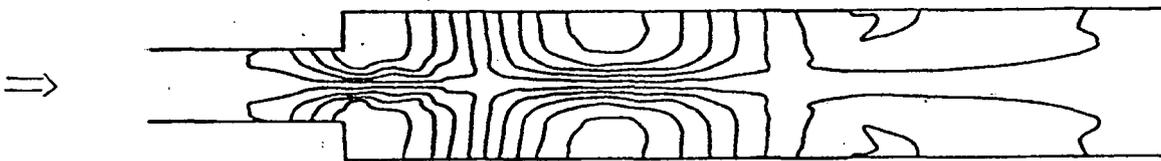


FIGURA 5.17 Linhas isobáricas para as autofunções (Shapira e co-autores, 1990).

Uma vez obtidos os resultados do problema espectral, onde a perturbação é separada em sua parte espacial (a autofunção) e temporal (exponencialmente crescente ou decrescente, dependendo do sinal do autovalor β), apresentar-se-ão a seguir os resultados associados ao problema transiente onde obtém-se as próprias perturbações.

5.3 O PROBLEMA TRANSIENTE PARA O DIFUSOR RADIAL

O problema transiente, composto das equações (4.8)-(4.10) e sujeito às condições de contorno (4.11) (PNE) ou (4.12) (DNE), foi resolvido com as mesmas malhas espaciais adotadas na análise espectral. A análise da dependência da solução em relação ao intervalo de tempo adotado mostrou que um intervalo adimensional de tempo igual a 0,1 é suficiente para garantir a independência dos

resultados com a malha temporal e evitar o problema de amortecimento artificial mencionado no item 4.2.3 do Capítulo 4 (página 75). Acredita-se que a forte dependência de β com a malha espacial também está presente nas computações transientes. Elevados tempos de execução foram necessários nos cálculos em regime transiente. Por exemplo, foram necessários 263 minutos para realizar a análise linear transiente do escoamento básico para $Re = 150$, malha de 50×46 pontos nodais e condição de contorno de derivada nula na entrada (DNE); a mesma metodologia exigiu 441 minutos para $Re = 150$, malha de 50×46 pontos e condição de contorno de perturbação nula na entrada (PNE); 369 minutos foram necessários na computação da análise transiente para $Re = 100$, malha de 50×46 volumes de controle e imposição de perturbação nula na entrada (PNE). Os tempos anteriores estão associados à utilização de um IBM 3090. Estes exemplos mostram que não é viável um refino maior na malha espacial no programa transiente. A dificuldade em realizar refinamentos maiores na malha espacial impossibilita que se assegure a independência de β com a malha espacial.

O método da energia é importante para se estabelecer um parâmetro capaz de medir "globalmente" a estabilidade do escoamento a pequenas perturbações. O desenvolvimento que culminou com a equação (4.18e) mostra a maneira de computar o autovalor mais instável pelo processo transiente. É mais conveniente, neste caso, associar β à taxa de crescimento da energia das perturbações. Após determinado tempo, a tendência de amortecimento ou amplificação das perturbações assume um valor quantitativo característico, β_{mi} , representativo da taxa exponencial "selecionada" para o desenvolvimento temporal da energia das perturbações. Embora um valor positivo deste parâmetro descreva a amplificação das perturbações, a comparação de tais perturbações com os valores do escoamento básico mostram que a hipótese linear ainda é válida. Em outras palavras, mesmo que as perturbações estejam aumentando, o procedimento numérico convergirá para uma taxa mais instável de evolução temporal antes que a magnitude das perturbações torne o termo $u' \cdot \nabla u'$, que foi desprezado nas equações (4.8)-(4.10), significativo.

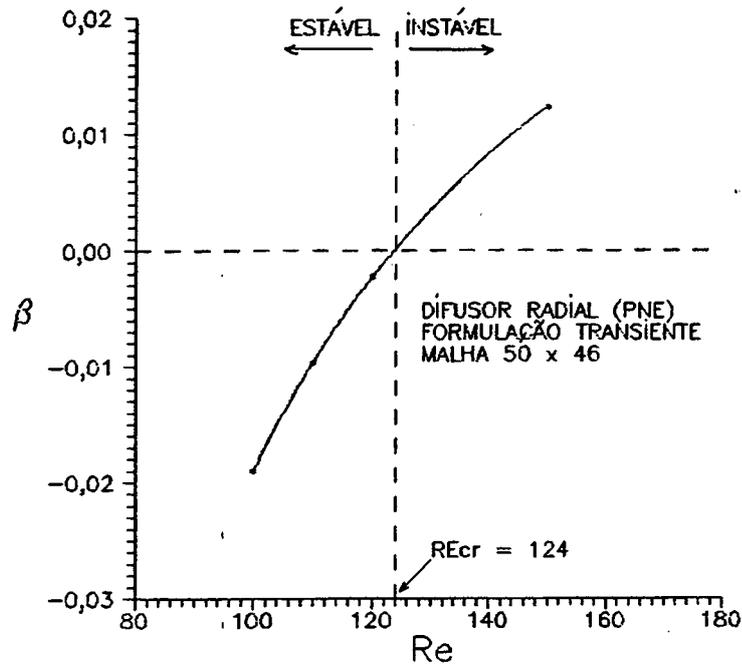


FIGURA 5.18 Variação do modo mais instável com o número de Reynolds. Formulação transiente com PNE. Difusor Radial. Destaque para o ponto crítico ($\beta_{mi} = 0$), onde $Re_{cr} \cong 124$.

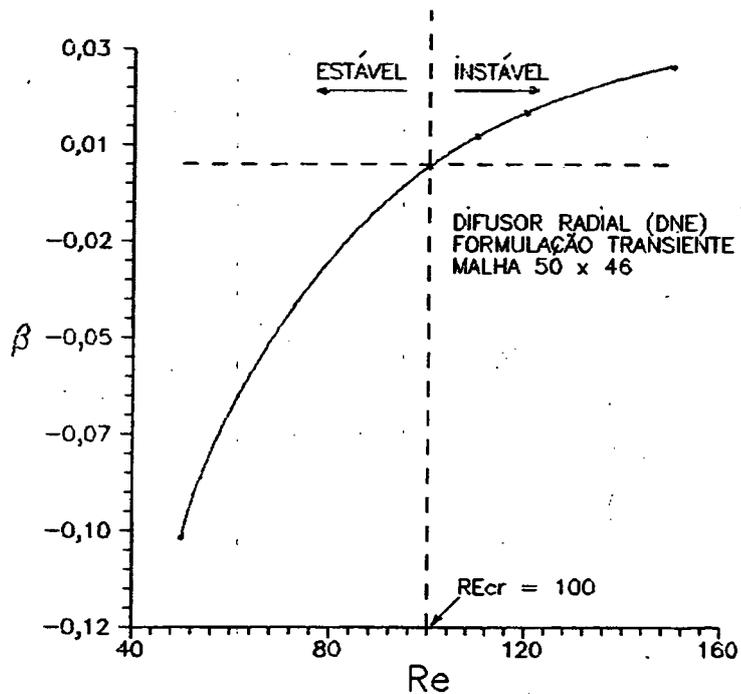


FIGURA 5.19 Variação do modo mais instável com o número de Reynolds. Formulação transiente com DNE. Difusor Radial. Destaque para o ponto crítico ($\beta_{mi} = 0$), onde $Re_{cr} \cong 100$.

As figuras 5.18 e 5.19 mostram o comportamento do modo mais instável computado através da formulação transiente (equação 4.18e) em relação ao número de Reynolds com as prescrições de perturbação nula na entrada (PNE) e derivada nula na entrada (DNE), respectivamente. Na figura 5.18, observa-se um número de Reynolds crítico de 124, enquanto que na figura 5.19 obtém-se um valor crítico aproximadamente igual a 100. Esses resultados revelam discordâncias da ordem de 10% quando comparados com os resultados anteriores e com o trabalho de Langer (1991).

Gráficos representativos do comportamento local da perturbação em uma posição característica ($x = 1,48$ e $r = 6,15$) são apresentados nas figuras 5.20 a 5.23 para valores típicos do número de Reynolds. Conforme esperado, uma tendência de amortecimento ou amplificação exponencial pode ser observada, dependendo, respectivamente, se Re é menor ou maior que o valor crítico calculado. Os dois tipos de condições de contorno estão presentes nesta figuras (PNE e DNE). Todos esses gráficos referem-se a perturbações impostas a campos básicos simétricos.

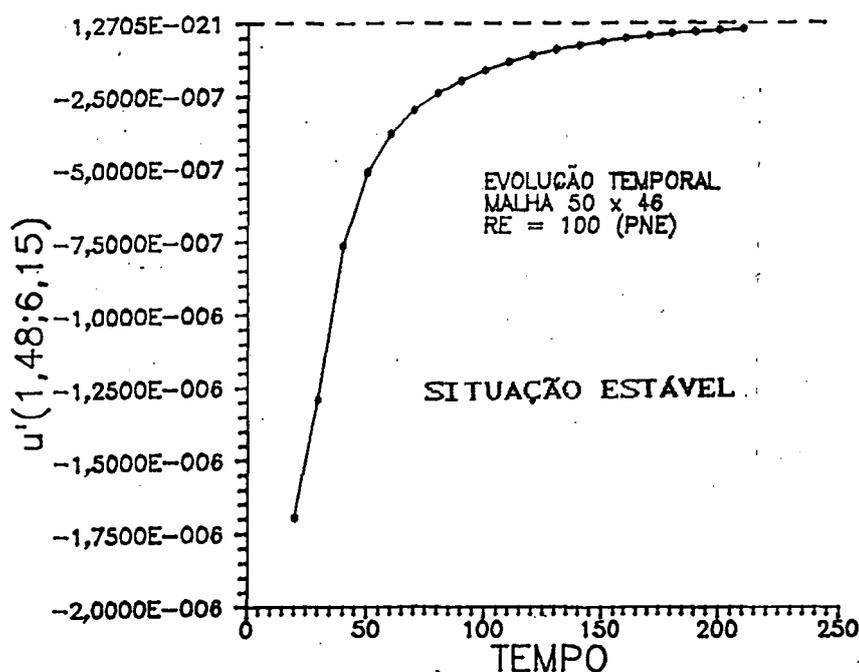


FIGURA 5.20 Evolução temporal de uma perturbação característica $u'(x = 1,48; r = 6,15)$ para a condição de perturbação nula na entrada do difusor (PNE), $Re = 100$ e $Re_{cr} = 124$.

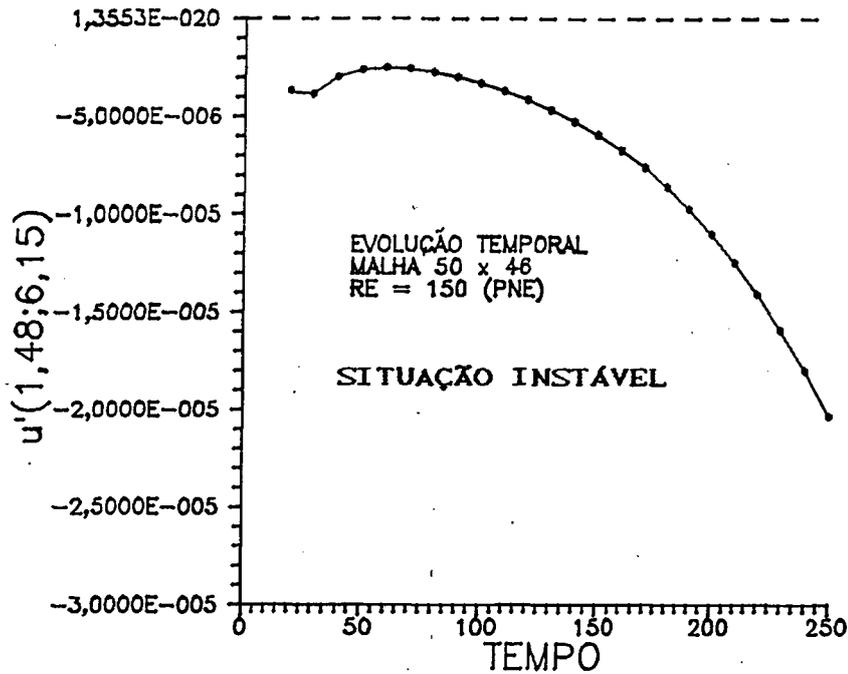


FIGURA 5.21 Evolução temporal de uma perturbação característica $u'(x = 1,48; r = 6,15)$ para a condição de perturbação nula na entrada do difusor (PNE), $Re = 150$ e $Re_{cr} = 124$.

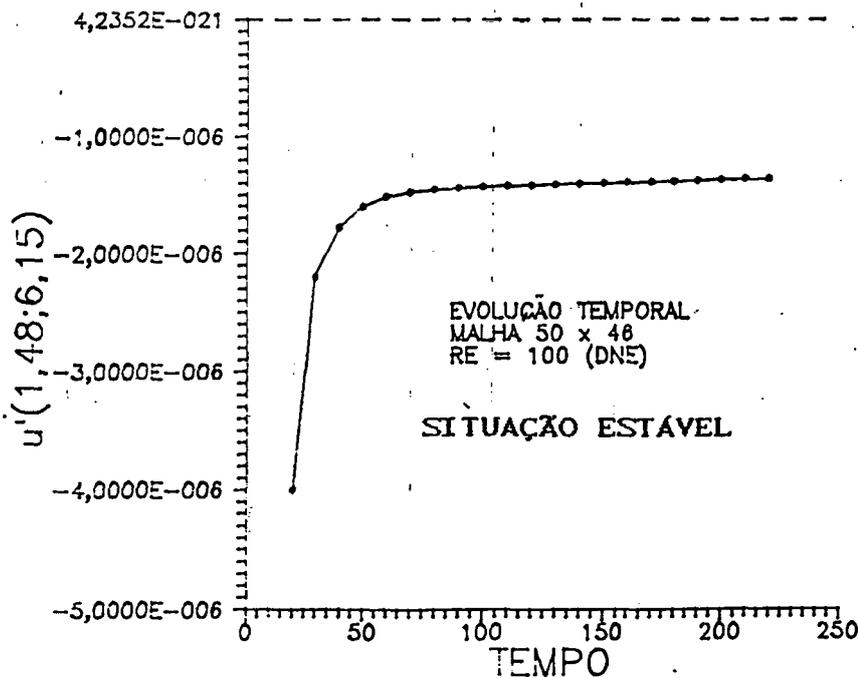


FIGURA 5.22 Evolução temporal de uma perturbação característica $u'(x = 1,48; r = 6,15)$ para a condição de derivada nula na entrada do difusor (DNE), $Re = 100$ e $Re_{cr} = 100$.

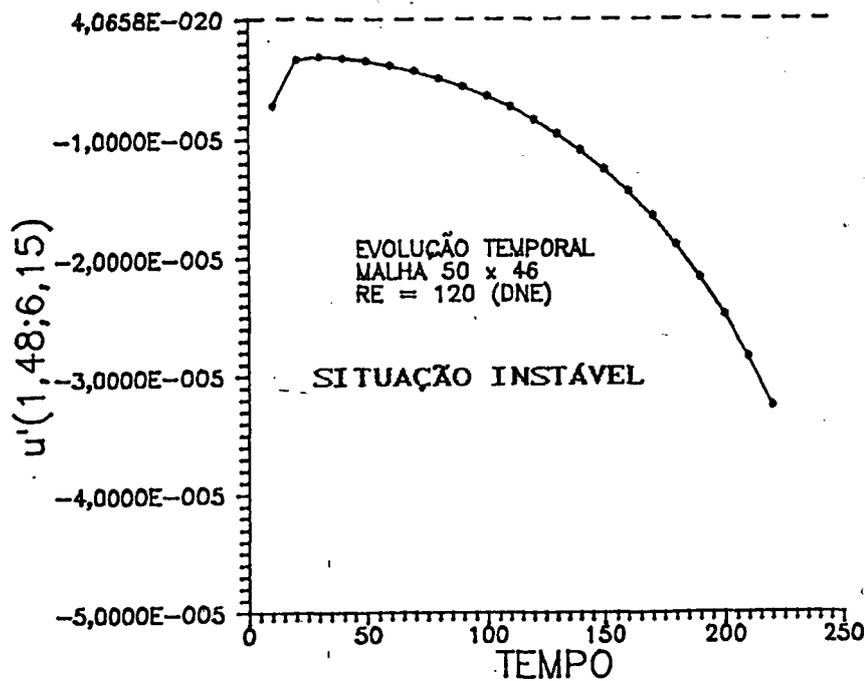


FIGURA 5.23 Evolução temporal de uma perturbação característica $u'(x = 1,48; r = 6,15)$ para a condição de derivada nula nula na entrada do difusor (DNE), $Re = 120$ e $Re_{cr} = 100$.

1	$-4,0 \times 10^{-8}$	4	0,0	7	$2,5 \times 10^{-10}$	10	$1,0 \times 10^{-5}$
2	$-2,0 \times 10^{-8}$	5	$3,0 \times 10^{-11}$	8	$5,0 \times 10^{-7}$	11	$2,0 \times 10^{-5}$
3	$-4,0 \times 10^{-9}$	6	$1,0 \times 10^{-10}$	9	$3,0 \times 10^{-6}$		

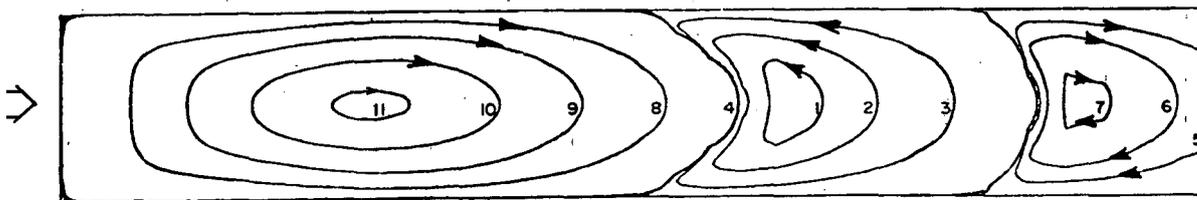


FIGURA 5.24 Linhas de corrente para as perturbações de velocidade. Difusor Radial com prescrição de perturbação nula na entrada do difusor (PNE); $Re = 120$.

1	$-1,9 \times 10^{-5}$	4	$-5,0 \times 10^{-10}$	7	$9,0 \times 10^{-8}$	10	$6,9 \times 10^{-4}$
2	$-8,5 \times 10^{-6}$	5	$2,0 \times 10^{-9}$	8	$6,4 \times 10^{-5}$	11	$1,1 \times 10^{-3}$
3	$-7,6 \times 10^{-7}$	6	$2,0 \times 10^{-8}$	9	$3,0 \times 10^{-4}$		

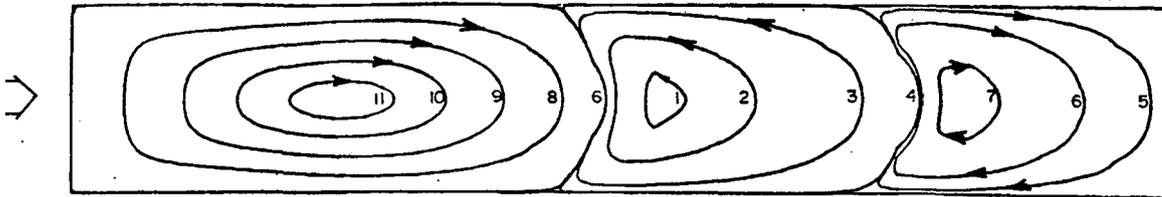


FIGURA 5.25 Linhas de corrente para as perturbações de velocidade. Difusor Radial com prescrição de derivada nula na entrada do difusor (DNE), $Re = 120$.

As linhas de corrente das perturbações de velocidades são apresentadas nas figuras 5.24 e 5.25, respectivamente, para as condições de perturbação nula na entrada (PNE) e derivada nula na entrada (DNE). Em ambas as figuras, o número de Reynolds é igual a 120. A comparação destas figuras com as linhas de corrente das autofunções, figuras 5.13 e 5.14, mostra razoável semelhança entre as correspondentes configurações.

Nos itens, 5.2 e 5.3, restringiu-se a apresentação de resultados e comentários, separadamente, a cada formulação. É interessante efetuar comparações diretas entre as duas formulações, procedimento realizado no item seguinte.

5.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, reapresentam-se nas figuras 5.26 e 5.27 os autovalores obtidos pela formulação espectral e pela formulação transiente para diferentes números de Reynolds obtidos com a malha de 50×46 . A figura 5.26 refere-se a resultados obtidos sob a condição de perturbação nula na entrada do difusor (PNE), enquanto a figura 5.27 apresenta resultados sob a imposição de derivada nula na

entrada do difusor (DNE). Considerando a grande diferença entre as duas formulações, bem como a existência de uma possível dependência dos resultados com a malha computacional, pode-se afirmar que existe uma boa concordância entre as duas curvas apresentadas em cada uma das figuras 5.26 e 5.27. Acredita-se que a condição de contorno de derivada nula na entrada do difusor (DNE) superpõe a influência das perturbações presentes dentro do domínio de interesse ao efeito das perturbações aplicadas ao contorno. Por outro lado, com a imposição de perturbação nula na entrada do difusor (PNE), o escoamento será ou não estável a perturbações infinitesimais devido a suas características intrínsecas e não por causa de influências (indesejáveis) de instabilidades no contorno.

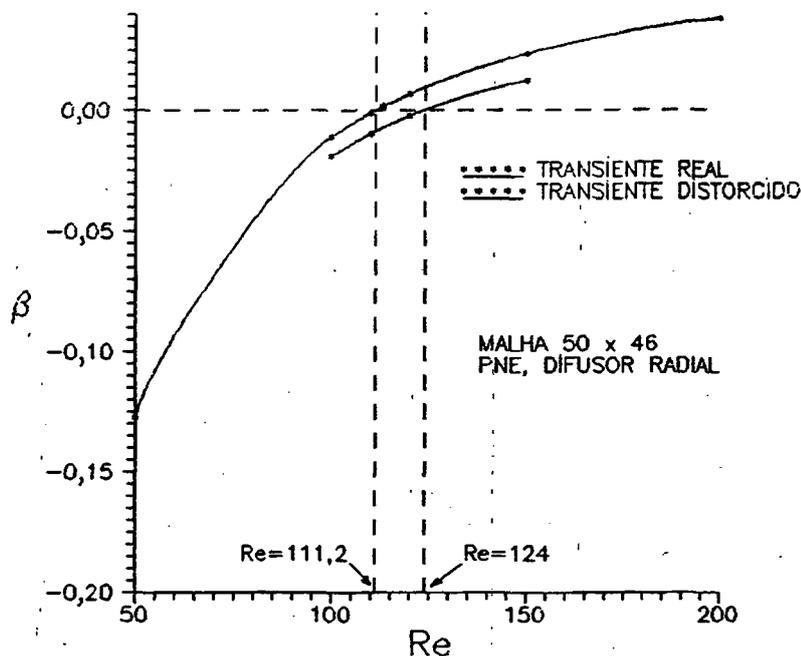


Figura 5.26 Curvas de comparação entre os autovalores obtidos pela formulação espectral e a formulação transiente; condição de contorno de perturbação nula na entrada (PNE) e malha de 50x46 pontos nodais.

Conforme mencionado anteriormente, todos os resultados apresentados até então estão associados ao escoamento básico simétrico. Como resultado adicional, investigou-se também a instabilidade linear associada ao escoamento básico assimétrico do

trabalho de Langer (1991). A curva do autovalor versus o número de Reynolds para esta situação obtida com a formulação espectral e condição de perturbação nula na entrada do difusor (PNE) é apresentada na figura 5.28. Conforme observado na figura, a solução assimétrica deixa de ser estável para $Re = 300$. Tal fato sugere a possível ocorrência de novos pontos de bifurcação para estes novos valores de Re . A investigação destes novos pontos de bifurcação foge ao escopo da presente dissertação.

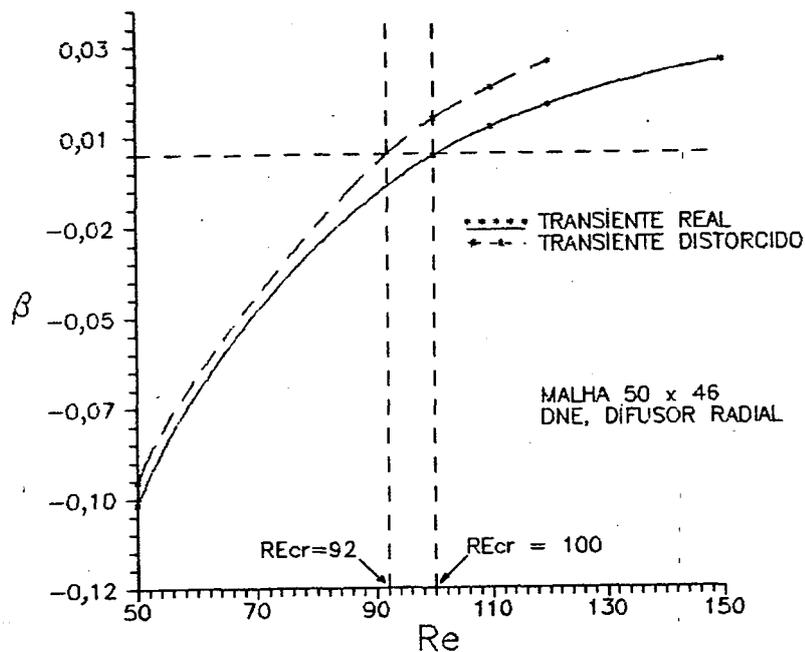


Figura 5.27 Curvas de comparação entre os autovalores obtidos pela formulação espectral e a formulação transiente; condição de contorno de derivada nula na entrada (DNE) e malha de 50x46 pontos nodais.

O quadro 5.4 permite que se observe a dependência do autovalor mais instável com a malha espacial, com a condição de contorno e com o esquema utilizado (formulação espectral ou transiente) quando $Re = 150$. No quadro 5.5, comparações semelhantes são apresentadas para $Re = 100$. Nos quadros 5.4 e 5.5, TR indica o cálculo transiente e ES o cálculo através do problema espectral.

QUADRO 5.4 Dependência do modo mais instável com a malha espacial, condição de contorno e esquema adotado (Re = 150).

β_{mi}	2,5587E-2	2,3645E-2	2,0216E-2	1,6589E-2
caso	50x46 TR(DNE)	50x46 ES(PNE)	70x70 TR(DNE)	70x70 ES(PNE)

QUADRO 5.5 Dependência do modo mais instável com a malha espacial, condição de contorno e esquema adotado (Re = 100).

β_{mi}	-0,018998	-0,024120	-0,019966
caso	50x46 TR(PNE)	70x70 TR(PNE)	70x70 ES(PNE)

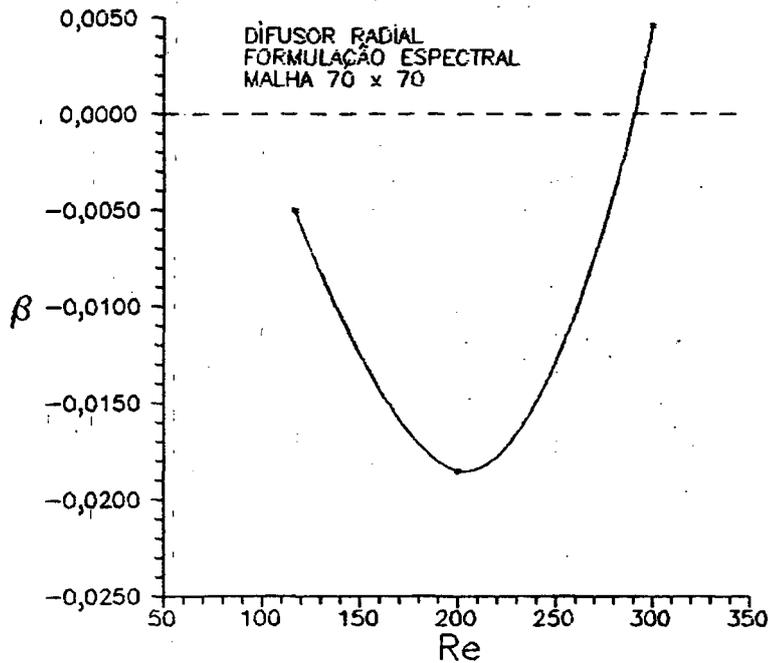


FIGURA 5.28 Variação do autovalor mais instável com o número de Reynolds (malha 70 x 70); resultados da análise espectral das soluções assimétricas de Langer (1991) com a condição de contorno de perturbação nula na entrada (PNE) no difusor radial.

Conforme observado na seção 4.2.2, página 65, o autovalor mais instável pode ser calculado tanto através das autofunções, equação (4.17), como através das perturbações, equação (4.19). Em ambos os casos a fórmula matemática para o cálculo de β é a mesma. A fim de verificar numericamente tal fato, o quadro 5.6 foi preparado. Neste quadro β_{mi} é calculado para $Re = 100$ e 120 . Conforme observado, os valores de β_{mi} apresentam boa concordância quando calculados pelas autofunções e pelas perturbações.

QUADRO 5.6 Comparação entre os β_{mi} calculados através da equação (4.19) na formulação transiente (*) e através da equação (4.17) na formulação espectral (**) para dois valores do número de Reynolds. Em ambos os casos impõe-se perturbação nula na entrada (PNE).

PNE	$\beta_{mi} (*)$	$\beta_{mi} (**)$
Re = 100	-1,1074E-2	-1,0998E-2
Re = 120	+6,9292E-3	+6,9975E-3

Em uma outra verificação realizada, recalculou-se o autovalor mais instável através da equação (4.17), efetuando as integrações presentes nesta equação de duas maneiras. A primeira alternativa implementada excluiu as regiões de entrada e saída do difusor. Não houve alteração em relação aos resultados calculados com integrações sobre todo o domínio. Implementou-se então a segunda alternativa, que consistia em realizar a integração apenas em um volume de controle! Não houve, novamente, mudança significativa no resultado. Desta forma, verificou-se que o autovalor obtido através da solução do problema de autovalor é realmente um valor constante ao longo de todo o domínio de interesse.

A curva que relaciona a evolução temporal da energia cinética das perturbações com o tempo é apresentada na figura 5.29 para um número de Reynolds característico. É importante recordar que as computações são efetuadas até o instante em que as perturbações de velocidades, e, conseqüentemente, as energias associadas a elas,

pudessem ser plenamente descritas por um único termo, aquele representativo do modo mais instável. Portanto estas curvas representam uma "competição" entre modos diferentes, onde apenas o mais instável se sobressai. A partir deste instante, ou seja, após um dos modos ter-se destacado bastante em relação aos demais, a curva de evolução da energia das perturbações com o tempo apresenta um comportamento definido. Note-se na figura 5.29 que a partir de um determinado tempo (em torno de 75) a variação com o tempo do logaritmo natural da energia das perturbações fica constante. De acordo com a equação (4.18e) esta variação é duas vezes o autovalor associado ao modo mais instável.

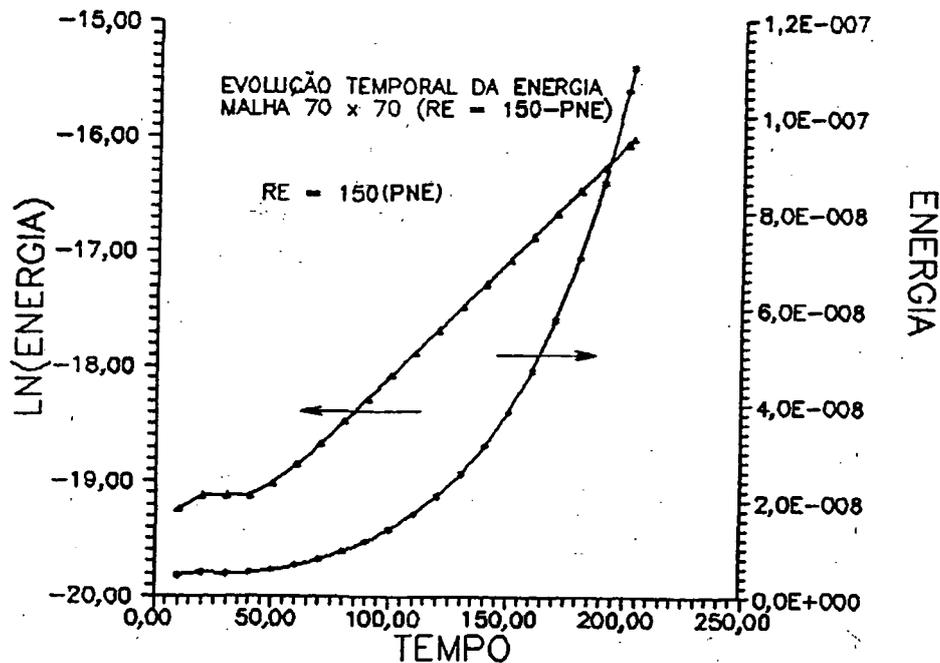


Figura 5.29 Evolução temporal da energia das perturbações em relação ao tempo para a condição de perturbação nula na entrada do difusor (PNE), $Re = 150$.

CAPÍTULO 6*CONCLUSÕES*

A solução numérica do problema da estabilidade linear de escoamentos em difusores radiais foi obtida através do método dos volumes finitos. Na análise de estabilidade duas classes de formulações foram empregadas.

Na primeira formulação, denominada formulação transiente, investigou-se diretamente as equações que governam a evolução temporal de perturbações infinitesimais. Adicionalmente, aplicou-se o conceito de energia global das perturbações para obter um critério de estabilidade para o escoamento básico. Quando um campo básico era instável, a energia das perturbações amplificava-se. Caso contrário, esta energia sofria um decaimento exponencial. O critério de estabilidade definido relaciona-se a esta taxa temporal de crescimento (condição necessária e suficiente para uma previsão de instabilidade) ou amortecimento (condição apenas necessária a uma previsão de estabilidade) da energia média das perturbações.

Na obtenção das soluções para a formulação transiente, cuidados foram tomados para assegurar que o campo inicial de pequenas perturbações, além de conservar a massa, satisfizesse também as equações governantes e condições de contorno. Em cada avanço temporal, calculava-se o campo de perturbações, e, a partir deste, a energia média associada a este campo. O procedimento de cálculo era finalizado, em um intervalo de tempo, através da medição da taxa de variação desta energia em relação ao intervalo de tempo considerado. Desta forma, captava-se a evolução temporal da energia e perturbações até o instante em que o crescimento ou decaimento exponencial da energia adquirisse um comportamento bem definido. Neste momento o método fornece a previsão de estabilidade ou instabilidade a perturbações infinitesimais. O método de Crank-Nicolson foi utilizado na integração temporal das equações governantes.

A segunda formulação, denominada espectral, relaciona diretamente o método da energia com a teoria de estabilidade linear. Desta forma, explora-se matematicamente a linearidade das equações governantes. Através do método de separação de variáveis, construiu-se uma série composta de produtos de funções dependentes apenas da posição por funções exponencialmente temporais. A obtenção de todos os termos da série descreve o campo de perturbações do escoamento. Este procedimento origina um sistema de equações diferenciais parciais que constituem um problema de autovalor, o problema espectral. A constante de separação do método de separação de variáveis indica o amortecimento ou amplificação das exponenciais que descrevem as parcelas temporais da série. A vantagem numérica deste segundo método está em sua independência com a coordenada temporal. Isto permite que a metodologia numérica adotada na obtenção de soluções estacionárias possa ser empregada neste problema. A aplicação de certos princípios variacionais possibilitou a construção de um procedimento de retro-alimentação para a solução do problema, que consiste na interação entre as equações diferenciais do problema de autovalor e um funcional associado à obtenção do modo mais instável.

A interpretação de cada uma das expressões, tanto da taxa de crescimento/decaimento, quanto do funcional associado ao autovalor, mostra que ambas são membros de uma mesma identidade: a equação de conservação da energia das perturbações. Isso levou à conclusão de que a expressão de definição do funcional, que contém um balanço entre produção e dissipação de energia, podia ser aplicada para a própria perturbação. Os valores numéricos obtidos, e sua concordância com os resultados computados na formulação espectral, confirmaram o acerto deste raciocínio. A garantia de que o modo mais instável estava efetivamente coincidindo com o calculado advinha da observação de que este modo sempre será exponencialmente maior que os demais, tornando-os desprezíveis após certo tempo. Novamente, valores positivos deste parâmetro associam-se a, no mínimo, uma exponencial positiva no termo temporal, ou seja, "explosão" das perturbações, enquanto valores negativos significam apenas uma previsão de estabilidade a perturbações infinitesimais.

Dois tipos de condições de contorno para a região anterior aos discos foram investigadas. A primeira delas impõe condição de perturbação nula na entrada (PNE), enquanto a segunda prescreve derivada nula para a perturbação da velocidade paralela ao contorno (DNE). Em todos os resultados mostrados, a imposição da condição de perturbação nula na entrada (PNE) apresentou resultados melhores que a imposição de derivada nula na entrada (DNE) em relação ao trabalho de Langer (1991). Isto provavelmente se deve ao fato de que a primeira prescrição permite que a análise de estabilidade do escoamento seja efetuada sem a influência da estabilidade ou não do escoamento no contorno. Este primeiro tipo de condição quando utilizado com a formulação espectral, prevê números de Reynolds críticos de 111,2 para uma malha de 50x46 volumes e 121 para a malha de 70x70 pontos nodais, enquanto Langer obteve, respectivamente, 113 e 117 para as malhas de 50x46 e 70x70. A condição de contorno de derivada nula para o problema espectral prevê um número de Reynolds crítico igual a 92. Os números de Reynolds críticos previstos pela formulação transiente foram, respectivamente, 124 e 100, com as prescrições de perturbação nula na entrada (PNE) e derivada nula na entrada (DNE). Os elevados tempos de execução demandados inviabilizaram um refino espacial da malha, a fim de captar com precisão os modos mais instáveis e, assim, permitir que se obtivessem resultados quantitativamente precisos para os números de Reynolds críticos segundo esta formulação transiente.

A observação das linhas de corrente de perturbações e linhas isobáricas evidencia a presença de fortes recirculações na região próxima à entrada dos discos. À medida que o escoamento progride em direção à saída do canal, a intensidade deste efeito diminui, tanto para as velocidades quanto para as perturbações de pressão. Estas recirculações provocam o deslocamento de fluido em direção a uma das paredes, causando uma diferença de pressão entre elas. Este gradiente mantém a assimetria do escoamento quando ultrapassa determinada intensidade. As isobáricas mostram máximos locais alternados nas paredes do difusor, também com intensidades decrescentes à medida que o escoamento progride em direção à saída do difusor. Acredita-se que este desequilíbrio alternado de pressões ao longo do canal é o responsável pela assimetria do escoamento após o ponto de bifurcação, o denominado efeito Coanda em escala mais

intensa que, por exemplo, o encontrado numa expansão local (por exemplo, Shapira e co-autores, 1990).

A validação do programa espectral com o problema estudado por Shapira e co-autores (1990) mostrou boa concordância de resultados e a necessidade de funções de interpolação de mais alta ordem para que se atinjam precisões mais elevadas. Um exemplo desta necessidade é a constatação de que, nas melhores comparações, não foi alcançado uma precisão absoluta superior a 10^{-2} . A utilização de funções de interpolação unidimensionais dificultou consideravelmente a obtenção de resultados precisos no problema de estabilidade linear no difusor radial. Certamente funções de interpolação de ordem mais elevada captariam mais fielmente as recirculações existentes no difusor, permitindo que se obtenham aproximações mais consistentes para a energia das perturbações, sem que para isto malhas extremamente refinadas se façam necessárias. Algumas parcelas do termo fonte foram representadas por seu valor em cada ponto nodal, a integração destes termos e sua avaliação nas faces do volume de controle seguramente melhoraria a precisão dos resultados.

REFERÊNCIAS

- ALLMEN, M.J., EAGLES, S.M. (1984): Stability of Divergent Channel Flows: A Numerical Approach. Proc.R.Soc.Lond.A, Vol.392, pp.359-372.
- BANKS, W.H.H., DRAZIN, P.G., ZATURSKA, M.B. (1976): On the Normal Modes of Parallel Flow of Inviscid Stratified Fluid. J. Fluid Mech., Vol.75, pp.149-171.
- BENDER, C.M., ORSZAG, S.A. (1978): Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill, Inc.
- BERGÉ, P., POMEAU, Y., VIDAL, C. (1984): Order Within Chaos. Towards a Deterministic Approach to Turbulence. John Wiley & Sons.
- BETCHOV, R., CRIMINALE, W.O. (1967): Stability of Parallel Flows. New York: Academic Press.
- BIRD, R.B., STEWART, W.E., LIGHTFOOT, E.N. (1960): Transport Phenomena. John Wiley & Sons, Inc.
- BUTKOV, E. (1988): Física Matemática. Editora Guanabara S.A.
- CHEN, T.S., SPARROW, E.M., TSOU, F.K. (1971): The Effect of Mainflow Transverse Velocities in Linear Stability Theory. J. Fluid Mech., Vol.50, part4, pp.741-750.
- CHERDRON, W., DURST, F., WHITELOW, J.H. (1978): Asymmetric Flows and Instabilities in Symmetric Ducts with Sudden Expansions. J. Fluid Mech., Vol.84, part 1, pp.13-31.
- CRIGHTON, D.G., GASTER, M. (1976): Stability of Slowly Diverging Jet Flow. J. Fluid Mech., Vol.77, part 2, pp.397-413.
- DESCHAMPS, J.C. (1987): Escoamento Laminar Através de Válvulas de Compressores. Dissertação de Mestrado, Depto. Eng. Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina.

- DRAZIN, P.G., REID, W.H. (1981): Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press.
- DRAZIN, P.G., HOWARD, L.N. (1966): Hydrodynamic Stability of Parallel Flow of Inviscid Fluid. Advances in Applied Mechanics, Vol.7, ed. G. Kuerti, pp.1-89. New York: Academic Press.
- EAGLES, P.M. (1973): Supercritical Flow in a Divergent Channel. J. Fluid Mech., Vol.57, part 1, pp.149-160.
- EAGLES, P.M., SMITH, F.T. (1980): The Influence of Nonparallelism in Channel Flow Stability. Journal of Engineering Mathematics, Vol.14, No.3, pp.219-237.
- EAGLES, P.M., WEISSMAN, M.A. (1975): On the Stability of Slowly Varying Flow: The Divergent Channel. J. Fluid Mech., Vol.69, part 2, pp.241-262.
- FASEL, H., KONZELMANN, U. (1990): Non-Parallel Stability of a Flat-Plate Boundary Layer Using the Complete Navier-Stokes Equations. J. Fluid Mech., Vol.221, pp.311-347.
- FJORTOFT, R. (1950): Applications of Integral Theorems in Deriving Criteria of Stability for Laminar Flows and for the Baroclinic Circular Vortex. Geofys. Publ., Oslo. Vol.17, No.6, pp.1-52.
- FOA, E. (1929): Sull'impiego dell'Analisi Dimensionale nello Studio del Moto Turbolento. L'Industria (Milan), Vol.43, p.426.
- FRAENKEL, L.E. (1962): Laminar Flow in Symmetrical Channels with Slightly Curved Walls I. On the Jeffery-Hamel Solutions for Flow Between Plane Walls. Proc. Roy. Soc. A. Vol.267, pp.119-138.
- FRAENKEL, L.E. (1963): Laminar Flow in Symmetrical Channels with Slightly Curved Walls II. An Asymptotic Series for the Stream Function. Proc. Roy. Soc. A. Vol.272, pp.406-428.

- GASTER, M. (1962): A Note on the Relation Between Temporally-Increasing and Spatially-Increasing Disturbances in Hydrodynamic Stability. J. Fluid Mech., Vol.14, pp.222-224.
- GASTER, M. (1974): On the Effects of Boundary-Layer Growth on Flow Stability. J. Fluid Mech., Vol.66, pp.465-480.
- GELFAND, I.M., FOMIN, S.V. (1963): Calculus of Variations. Prentice-Hall, Inc.
- GEORGIU, G.A., EAGLES, P.M. (1985): The Stability of Flows in Channels with Small Wall Curvature. J. Fluid Mech., Vol.159, pp.259-287.
- GOULD, S.H. (1957): Variational Methods for Eigenvalue Problems. Toronto: University of Toronto Press.
- HOPF, E. (1942): Abzweigung einer Periodischen Lösung eines Differentialsystems. Berichte der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig XCIV.
- HQWARD, L.N. (1961): Note on a Paper of John W. Miles. J. Fluid Mech. Vol.10, pp.509-12.
- HUERRE, P., MONKEWITZ, P.A. (1985): Absolute and Convective Instabilities in Free Shear Layers, J. Fluid Mech., Vol.159, pp.151-168.
- IOOSS, G., JOSEPH, D.D. (1981): Elementary Stability and Bifurcation Theory. New York: Springer.
- JACKSON, J.D., SYMMONS, G.R. (1965): An Investigation of Laminar Radial Flow Between Two Parallel Discs. J. Appl. Sci. Res., Section A, Vol.15, pp.59-74.
- JOSEPH, D.D. (1976): Stability of Fluid Motions I. Berlin: Springer.

- JOSEPH, D.D., SATTINGER, D.H. (1972): Bifurcating Time Periodic Solutions and their Stability. Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 45, p. 79.
- KELKAR, K.M. (1988): Numerical Study of Stability of Fluid Motion. Ph.D. Thesis, University of Minnesota.
- LANDAU, L.D., LIFSCHITZ, E.M. (1959): Fluid Mechanics. Oxford: Pergamon Press.
- LANGER, C.A. (1991): Separação, Bifurcação e Transferência de Calor em Escoamentos Radiais. Dissertação de Mestrado, Depto. Eng. Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina.
- LANGER, C.A., PRATA, A.T., FERREIRA, R.T.S. (1990): Separação e Bifurcação de Escoamentos em Difusores Radiais. Anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT), Itapema-SC, Vol. 1, pp.357-362.
- LERAY, J. (1933): Etude de Diverses Équations Intégrales non Linéaires et de quelques problèmes que pose L'Hydrodynamique. Jour. de Math. Pures et Appl., Vol.12, p.1.
- LI, P.M., MIRZA, S.A., LIN, S. (1989): Pressure Distribution in Radial Flow Between Disks. J. of Eng. Mech., Vol.115, No.1, pp.210-215.
- LING, C., REYNOLDS, W.C. (1973): Non-Parallel Flow Corrections for the Stability of Shear Flows. J. Fluid Mech., Vol.59, pp.571-591.
- MOCHIZUKI, S., YAO, M. (1983): Flow Separation and Heat Transfer in Radial Flows Between Two Parallel Disks. Trans. of Japan Society of Mechanical Engineers, Vol.49, pp.426-432.
- MOCHIZUKI, S., YANG, W. (1985): Self-Sustained Radial Oscillating Flows Between Parallel Disks. J. Fluid Mech., Vol.154, pp.377-397.

- NAYFEH, A.H. (1981): Introduction to Perturbation Techniques. John Wiley & Sons, Inc.
- ORSZAG, S.A. (1971): Accurate Solution of the Orr-Sommerfeld Stability Equation. J. Fluid Mech., Vol.50, part4, pp.689-703.
- PARLETT, B.N. (1974): The Rayleigh Quotient Iteration and Some Generalizations for Nonnormal Matrices. Mathematics of Computation, Vol.28, Número 127, pp.679-693.
- PATANKAR, S.V. (1980): Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere Publishing Co.
- PETERS, S. (1992): Tese de doutorado em andamento na Universidade Federal de Santa Catarina, Depto Eng. Mecânica, sobre estabilidade hidrodinâmica em escoamentos em difusores radiais.
- PILICHI, C.D.M. (1990): Determinação Numérica e Experimental de Coeficientes de Transferência de Calor Locais em Difusores Radiais. Dissertação de Mestrado, Depto. Eng. Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina.
- PLATTEN, J.K., LUIJKX, J.M., FLANDROY, P. (1981): On the Transition to Turbulence. Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow. Proceedings of the Second International Conference held at Venice, 13th-16th July, 1981. Editors: C. Taylor and B.A. Scheffler. Pineridge Press.
- PRATA, A.T., FERREIRA, R.T.S., PILICHI, C.D.M., TODESCAT, M.L. (1992): Heat Transfer Enhancements due to Self-sustained Flow Oscillations in Radial Diffusers. International Journal of Experimental Heat Transfer, Thermodynamics and Fluid Mechanics; aceito para publicação.
- RAAL, J.D. (1978): Radial Source Flow Between Parallel Disks. J. Fluid Mech. Vol.85(3), pp.401-16.
- RAYLEIGH, LORD (1880): On the Stability, or Instability, of Certain Fluid Motions. Proc. London Math. Soc. Vol.11, 57-70.

- SETTARI, A., AZIZ, K. (1973): A Generalization of the Additive Correction Methods for the Solution of Matrix Equations. SIAM J. Numer. Analysis, Vol.10, pp.506-21.
- SEYDEL, R. (1988): From Equilibrium to Chaos. Practical Bifurcation and Stability Analysis. Elsevier Science Publishing Co, Inc.
- SHAPIRA, M., DEGANI, D., WEIHS, D. (1990): Stability and Existence of Multiple Solutions for Viscous Flow in Suddenly Enlarged Channels. Computers & Fluids, Vol.18, No.3, pp.239-258.
- SHERMAN, (1990): Viscous Flow. McGraw-Hill Book Company.
- SHIVAMOGGI, B.K. (1986): Stability of Parallel Gas Flows. Ellis Horwood Limited.
- SOBEY, I.J. (1985): Observation of Waves During Oscillatory Channel Flow. J. Fluid Mech., Vol.151, pp.395-426.
- SOBEY, I.J., DRAZIN, P.G. (1985): Bifurcations of Two-Dimensional Channel Flows. J. Fluid Mech., vol.171, pp.263-287.
- SQUIRE, H.B. (1933): On the Stability for Three-Dimensional Disturbances of Viscous Fluid Flow Between Parallel Walls. Proc. Roy. Soc. A. Vol.142, p.621.
- THOMPSON, J.M.T., STEWART, H.B. (1986): Nonlinear Dynamics and Chaos. Geometrical Methods for Engineers and Scientists. John Wiley & Sons Ltd.
- TODESCAT, M.L. (1988): Transferência de Calor Laminar em Válvulas de Compressores. Dissertação de Mestrado, Depto. Eng. Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina.
- VAN DOORMAAL, J.P., RAITHBY, G.D. (1984): Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flow. Numerical Heat Transfer, Vol.7, pp.147-163.

- VATISTAS, G.H. (1988): Radial Flow Between Two Closely Placed Disks. AIAA Journal, Vol.26, No.7, pp.887-889.
- VATISTAS, G.H. (1990): Radial Inflow Within Two Flat Disks. AIAA Journal, Vol.28, No.7, pp.1308-1310.
- YIH, C.S. (1969): Fluid Mechanics. A Concise Introduction to the Theory. McGraw-Hill Book Company.

APÊNDICE A

DISCUSSÃO A RESPEITO DA OBTENÇÃO DO AUTOVALOR MAIS INSTÁVEL

Neste apêndice, discutir-se-á a relação existente entre o problema de autovalor e o funcional, cujo extremo (máximo) conduz ao modo mais instável dentre todos os que existem no espectro de autovalores.

Conforme explorado no texto, se u_o e p_o representam a parte espacial das perturbações u' e p' e U e P representam as variáveis associadas ao escoamento básico, então a equação diferencial parcial representando o problema espectral pode ser escrita da seguinte forma:

$$\beta u_o + u_o \cdot \nabla U + U \cdot \nabla u_o = -\nabla p_o + \frac{1}{R} \nabla^2 u_o \quad (A1)$$

Define-se o seguinte produto interno com relação ao campo vetorial u_o :

$$\langle u_{o1}, u_{o2} \rangle = \frac{1}{V} \int_V (u_{o1} \cdot u_{o2}) dV, \quad (A2)$$

onde V simboliza o domínio do problema e u_o, u_{o1}, u_{o2} representam campos vetoriais solenoidais, sujeitos às condições de contorno do problema. Estes campos vetoriais não podem ser considerados como "funções" cinematicamente admissíveis (pois não impõe-se a condição de contorno de perturbação nula ao longo de todo o contorno), mas, aliviando-se a restrição quanto ao tipo de condição de contorno imposta na definição desta classe de funções, estes campos podem ser incluídos.

Tomando o produto interno de (A1) por u_o e isolando-se β , obtém-se:

$$\lambda = - \frac{\langle u_o, \nabla p_o \rangle + \langle u_o, U \cdot \nabla u_o \rangle + \langle u_o, u_o \cdot \nabla U \rangle - (1/R) \langle u_o, \nabla^2 u_o \rangle}{\langle u_o, u_o \rangle} \quad (A3)$$

O objetivo é mostrar que λ é um valor estacionário, quando sujeito a pequenas variações em u_0 e p_0 , denotadas, respectivamente, por δu_0 e δp_0 . A aplicação das operações com variações justifica-se na caracterização de λ como um funcional, uma vez que pode-se escrever: $\lambda = \lambda(u_0, p_0, R; V)$; ou seja, λ é uma função de funções, restritas a determinadas condições impostas (classes de funções). Rigorosamente, pode-se afirmar que (A3) é uma "forma fraca" para possibilitar a obtenção de β , uma vez que este não está sendo calculado diretamente da equação diferencial e a precisão diferencial é prejudicada pelo procedimento integral. É importante comentar que λ aparece em (A3) devido ao fato de que na mencionada equação considera-se u_0 e p_0 não mais como autofunções, mas como qualquer função admissível em relação às restrições impostas. Pretende-se conservar estes símbolos para lembrar que a origem da equação (A3) está no problema espectral.

Denominando por λ_0 o valor assumido por λ quando este é dado por $\lambda [u_0 + \delta u_0, p_0 + \delta p_0, R; V]$ e denotando por A e B, respectivamente, ao numerador e denominador de λ_0 , após desprezar produtos de variações, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 A = & - [\langle u_0, \nabla p_0 \rangle + \langle \delta u_0, \nabla p_0 \rangle + \langle u_0, \nabla \delta p_0 \rangle - \frac{1}{R} (\langle u_0, \nabla^2 u_0 \rangle + \\
 & + \langle \delta u_0, \nabla^2 u_0 \rangle + \langle u_0, \nabla^2 \delta u \rangle) + \langle u_0, U \cdot \nabla u_0 \rangle + \langle \delta u_0, U \cdot \nabla u \rangle \\
 & + \langle u_0, U \cdot \nabla \delta u_0 \rangle + \langle u_0, u_0 \cdot \nabla U \rangle + \langle \delta u_0, u_0 \cdot \nabla U \rangle + \\
 & + \langle u_0, \delta u_0 \cdot \nabla U \rangle] \tag{A4}
 \end{aligned}$$

$$B = \langle u_0, u_0 \rangle + 2\langle u_0, \delta u_0 \rangle \tag{A5}$$

Uma definição análoga pode ser aplicada a $\lambda [u_0, p_0, R; V]$, ou seja, assume-se que as letras C e D representam, respectivamente, o numerador e o denominador de λ . A variação em λ , causada por variações em u_0 e p_0 , pode ser descrita por:

$$\delta \lambda = L(\lambda_0) - L(\lambda) = L \left(\frac{AD - CB}{BD} \right) , \tag{A6}$$

onde $L ()$ simboliza a parte linear principal do funcional avaliado, enquanto $\lambda_0 - \lambda$ representa o incremento do funcional, comumente denotado por $\Delta\lambda$. Simbologicamente,

$$\Delta\lambda = \delta\lambda + 0 (|\delta u|^2, \delta p. |\delta u|). \tag{A7}$$

Analisando inicialmente o numerador AD - CB, obtém-se, após alguns rearranjos e a aplicação das propriedades elementares das variações (por exemplo: $\nabla\delta p_0 = \delta\nabla p_0$):

$$\begin{aligned} AD - CB &= \langle u_0, U.\nabla u_0 + u_0.\nabla U + \nabla p_0 - (1/R)\nabla^2 u_0 \rangle . \langle 2u_0, \delta u_0 \rangle \\ &- \langle \delta u_0, U.\nabla u_0 + u_0.\nabla U + \nabla p_0 - (1/R)\nabla^2 u_0 \rangle . \langle u_0, u_0 \rangle \\ &- \langle u_0, (U.\nabla\delta u_0 + \delta u_0.\nabla U + \nabla\delta p_0 - (1/R)\nabla^2\delta u_0) \rangle . \langle u_0, u_0 \rangle \end{aligned} \tag{A8}$$

Definindo-se o operador $\mathfrak{L} = U.\nabla() + () .\nabla U - (1/R)\nabla^2()$, pode-se reescrever a equação (A8) de uma maneira mais conveniente:

$$\begin{aligned} AD - CB &= \langle u_0, -\beta u_0 \rangle . \langle 2u_0, \delta u_0 \rangle - \langle \delta u_0, -\beta u_0 \rangle . \langle u_0, u_0 \rangle \\ &- \langle u_0, \mathfrak{L}(\delta u_0) + \nabla\delta p_0 \rangle . \langle u_0, u_0 \rangle \end{aligned} \tag{A9}$$

Embora evidente, deve ser observado, conforme utilizado em (A8), que β não varia ao longo do volume e do tempo, propriedade comum a todos os autovalores. β e λ apresentam, portanto, naturezas bem distintas. Da equação (A9), segue ainda,

$$AD - CB = [\langle \delta u_0, -\beta u_0 \rangle - \langle u_0, \mathfrak{L}(\delta u_0) + \nabla\delta p_0 \rangle] . \langle u_0, u_0 \rangle \tag{A10}$$

A equação (A10) mostra que para que $\delta\lambda = 0$, é necessário que o termo entre colchetes seja identicamente nulo, uma vez que autofunções nulas não interessam ao problema. Esta condição é possível apenas empregando o operador adjunto de \mathfrak{L} , denotado neste texto por \mathfrak{L}^* . Da definição de operador adjunto,

$$\langle u_0, \mathfrak{L}(\delta u_0) \rangle = \langle \mathfrak{L}^* u_0, \delta u_0 \rangle \tag{A11}$$

O que ocorre quando $\delta\lambda$ se anula ? Neste caso $\lambda = A/B$ e obtém-se:

$$L(A) = \lambda \cdot L(B) \Rightarrow \langle \delta u_0, \lambda u_0 + U \cdot \nabla u_0 + u_0 \cdot \nabla U + \nabla p_0 - (1/R) \nabla^2 u_0 \rangle + \langle u_0, (\lambda \delta u_0 + U \cdot \nabla \delta u_0 + \delta u_0 \cdot \nabla U + \nabla \delta p_0 - (1/R) \nabla^2 \delta u_0) \rangle = 0 \quad (A12)$$

A fim de que a soma destes termos se anule em relação a variações arbitrárias (mas pequenas), faz-se necessário novamente considerar o operador adjunto de \mathfrak{L} . A equação (A12) é reescrita na seguinte forma:

$$\langle \delta u_0, \lambda u_0 + \mathfrak{L}(u_0) + \nabla p_0 \rangle + \langle u_0, \lambda \delta u_0 + \mathfrak{L}^*(\delta u_0) + \nabla \delta p_0 \rangle = 0 \quad (A13)$$

Em conseqüência de (A11), (A13) pode ser rearranjada como,

$$\langle \delta u_0, [\lambda u_0 + \mathfrak{L}(u_0) + \nabla p_0] + [\lambda u_0 + \mathfrak{L}^*(u_0) + \nabla p_0^*] \rangle = 0 \quad (A14)$$

Portanto, a condição necessária para que λ seja um valor estacionário é que u_0 seja um autovetor de $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}^*$ (resultado idêntico foi obtido por Parlett (1974) em um problema análogo em espaços de dimensão finita, embora com outra metodologia. Destaca-se que se \mathfrak{L} fosse auto-adjunto ($\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^*$), a condição necessária se simplificaria apenas à condição de que λ seja um autovalor da equação (A1). Uma discussão mais abrangente a respeito da utilização dos princípios variacionais para o cálculo de autovalores pode ser encontrada nos livros de Butkov (1988), que apresenta uma leitura leve e agradável sobre os princípios fundamentais do cálculo variacional, ilustrados por exemplos simples, e Gould (1957), que trata com grande profundidade a utilização dos princípios e métodos variacionais a problemas de autovalor. Uma exposição objetiva, formal e bastante organizada deste assunto pode ser encontrada no livro escrito pelos russos Gelfand e Fomin (1963). As dificuldades encontradas na análise de métodos iterativos que empregam o Quociente de Rayleigh concentram-se principalmente em problemas com operadores não auto-adjuntos. Parlett (1974) investigou tais dificuldades em relação às matrizes não-normais. Sattinger (1970) realizou uma importante análise matemática do problema transiente da estabilidade hidrodinâmica linearizado. Dentre outras contribuições do autor está seu estudo a respeito do espectro do operador \mathfrak{L} , mostrando que trata-se de um espectro discreto de autovalores e que o correspondente conjunto de autovetores é completo no espaço das

perturbações mensuráveis e integráveis na norma induzida pela definição (A2). Tal análise restringe-se, entretanto a perturbações "fracamente livres de divergência" ($\langle u, \nabla p \rangle = 0$) e esta hipótese simplificativa não pode ser usada no presente trabalho, constituindo-se em uma barreira adicional na análise do problema espectral.

Um problema importante, que permanece, é o seguinte: conforme já discutido, as perturbações de velocidade e pressão da teoria de estabilidade linear são representadas por séries exponenciais no tempo e descritas espacialmente pelo campo de autofunções e o autovalor correspondente é exatamente a constante multiplicativa da exponencial temporal. Ocorre que o maior interesse é obter apenas o modo mais instável, justamente aquele que identifica o termo que comanda a série. Os demais termos serão cada vez exponencialmente menores, tornando-se desprezíveis a partir de determinado instante t_0 . A utilização da equação (A3), e o emprego de um procedimento iterativo entre as equações (A1), (A3) e a conservação da massa, permite que se obtenha um autovalor. Mas os argumentos acima evidenciam que não necessariamente este valor obtido será o mais instável. Qualquer autovalor satisfaz as três equações mencionadas. A condição $\delta\lambda = 0$ é apenas necessária para que um extremo possa ser calculado. Esta questão torna necessária a utilização de algum método adicional que possa assegurar a obtenção do modo mais instável.

Dois métodos clássicos na solução de problemas variacionais são os métodos de Ritz e de diferenças finitas, quer com o objetivo de utilizar princípios variacionais para provar a existência da solução da equação diferencial associada ao funcional (conhecida como a equação de Euler), quer para obter sua solução com bastante controle dos erros de precisão associados. O primeiro método utiliza funções capazes de gerar espaços completos, minimizando o funcional através do cálculo das constantes associadas à combinação linear destas funções. O método de diferenças finitas discretiza as variáveis independentes (em relação ao funcional) e procura, dentre as linhas poligonais unindo os pontos discretos, aquela seqüência de pontos que minimizam o funcional em questão.

Um caminho alternativo na solução deste problema está na utilização de (A3) para as próprias perturbações. Embora exigindo um procedimento transiente nas computações, as comparações efetuadas entre os resultados obtidos pelos dois métodos mostrou diferenças tão aceitáveis do ponto de vista numérico, que serviram de prova para as computações "atemporais". Tal coincidência provavelmente deve-se a um grande raio atrator, visto que testes com diferentes valores iniciais para β no procedimento iterativo conduziram a um mesmo resultado na formulação "atemporal", e esta sempre coincidia com as computações transientes. O procedimento transiente garante que o valor computado será sempre o mais instável, uma vez que para $t > t_0$ apenas um termo, e justamente o que leva este modo mais instável, é significativo.

APÊNDICE B

DETALHES NA OBTENÇÃO DO AUTOVALOR MAIS INSTÁVEL EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

Neste apêndice apresentar-se-á alguns detalhes específicos da formulação das equações em coordenadas cilíndricas que foram empregadas na análise de estabilidade do escoamento em difusores radiais.

Considere o problema de autovalor diferencial parcial (o problema espectral) oriundo da teoria da estabilidade linear e regido pelas equações de conservação da massa e pela equação vetorial (A1). Conforme já discutido, o cálculo do autovalor β em sua "forma fraca" fornece a expressão (A3). É interessante, para fins de clareza, explicitar com maior detalhe como foi avaliado cada termo da expressão mencionada.

Avaliando inicialmente a integração do termo contendo o gradiente de pressão, tem-se:

$$T1 = \int_V \nabla p_o \cdot u_o \, dV = \int_V \left[\nabla \cdot (p_o u_o) - \underbrace{p_o \nabla \cdot u_o}_{(\text{zero})} \right] dV = \int_{\Gamma} p_o u_o \cdot n \, dS =$$

$$\int_{\Gamma_s} p_{os} u_{os} \, dS - \int_{\Gamma_e} p_{oe} u_{oe} \, dS, \quad (B1)$$

onde V , Γ e n denotam, respectivamente, o volume ocupado pelo domínio, o contorno desta região e o vetor normal à superfície de contorno. A aplicação do teorema da divergência na redução das integrais de volume a integrais ao longo do contorno de entrada (*) e saída (e) do domínio de cálculo eliminou os termos correspondentes aos contornos restantes, onde as paredes e prescrições impostas foram perturbações nulas (nesta discussão considera-se PNE, por simplicidade.)

O segundo termo a ser analisado é o seguinte produto interno: $\langle U \cdot \nabla u_0, u_0 \rangle$. Em coordenadas curvilíneas ortogonais tem-se (Malvern, 1969):

$$\nabla \cdot u = \sum_n \frac{1}{h_n} \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial x_n} + \sum_n \left[\sum_{m \langle n \rangle} \frac{u_{\langle m \rangle}}{h_m h_n} \frac{\partial h_n}{\partial x_m} \right] \quad (B2)$$

As relações seguintes também tem importância no que será apresentado (Malvern, 1969):

$$\nabla = \sum_n \frac{e_n}{h_n} \frac{\partial}{\partial x_n} \quad e \quad \frac{\partial e_m}{\partial x_m} = - \frac{1}{h_n} \frac{\partial h_m}{\partial x_n} e_n - \frac{1}{h_r} \frac{\partial h_m}{\partial x_r} e_r \quad (B3)$$

$$\text{se } m \neq n: \quad \frac{\partial e_m}{\partial x_n} = - \frac{1}{h_m} \frac{\partial h_n}{\partial x_m} e_n, \quad (B4)$$

onde e_i denota um vetor de base de um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal e h_i simboliza os coeficientes métricos no sistema coordenado.

O objetivo agora é encontrar uma relação vetorial entre a expressão vetorial $(U \cdot \nabla u) \cdot u$ e o operador vetorial divergente. Isso possibilitaria a simplificação da expressão a ser implementada no programa numérico. Visando isso, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} U \cdot \nabla u &= U_r e_r \cdot \frac{e_n}{h_n} \frac{\partial (e_p u_p)}{\partial x_n} = \frac{U_n}{h_n} \frac{\partial (e_p u_p)}{\partial x_n} = \frac{U_n}{h_n} \left[e_p \frac{\partial u_p}{\partial x_n} + \left[\frac{u_p}{h_p} \frac{\partial h_n}{\partial x_p} e_n \right]_{(n \neq p)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_p}{h_s} \frac{\partial h_p}{\partial x_s} e_s - \frac{u_p}{h_r} \frac{\partial h_p}{\partial x_r} e_r \right] = \frac{U_n}{h_n} \frac{\partial u_p}{\partial x_n} e_p + \left[\frac{U_n u_p}{h_p h_p} \frac{\partial h_n}{\partial x_p} e_n \right]_{(zero) (n \neq p)} \\ &\quad - \left[\frac{U_n u_p}{h_p h_s} \frac{\partial h_p}{\partial x_s} e_s \right]_{(zero) (p \neq s)} - \left[\frac{U_n u_p}{h_n h_r} \frac{\partial h_p}{\partial x_r} e_r \right]_{(zero) (r \neq p)}, \text{ pois quando } h_i \neq 1 \Rightarrow v_i \text{ ou } \\ &\quad U_i \text{ são nulos } (i=2). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (U \cdot \nabla u) \cdot u = \frac{U_n}{h_n} \frac{\partial u_p}{\partial x_n} u_p = (1/2) \frac{U_n}{h_n} \frac{\partial (u_p u_p)}{\partial x_n} +$$

$$(1/2)u_s u_s \left[\frac{1}{h_n} \frac{\partial U_n}{\partial x_n} + \frac{U_m}{h_m h_n} \frac{\partial h_n}{\partial x_m} \right]$$

(∇.U)

$$\begin{aligned} \Rightarrow (U.\nabla u).u &= (1/2) \left[\frac{\partial (U_n u_p u_p)}{\partial x_n} + u_s u_s \frac{U_m}{h_m h_n} \frac{\partial h_n}{\partial x_m} \right] \\ &= (1/2) \nabla.[U(u.u)] \end{aligned} \tag{B5}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T2 &= \int_V (U.\nabla u).u \, dV = (1/2) \int_V \nabla.[U(u.u)] \, dV = \\ &= (1/2) \int_{\Gamma} U(u.u).n \, dS, \end{aligned} \tag{B6}$$

onde Γ denota o contorno do problema. No caso de PNE, apenas a integração na saída do domínio é efetuada, uma vez que todas as demais se anulam.

O termo envolvendo a integração de $(u.\nabla U).u$ foi aproximado numericamente de forma direta, ou seja, não foram empregadas técnicas semelhantes ao termo T2, por exemplo.

O quarto e último termo a ser analisado representa a parcela "viscosa" da equação (A3). É aconselhável uma formulação especial para este caso. Esta necessidade surge devido às dificuldades associadas ao desenvolvimento do vetor $\nabla^2 u$ em notação indicial, em um sistema de coordenadas curvilíneas qualquer. Estas dificuldades são destacadas por Malvern (1969,pags.59, 500, 654 e 655), que mostra o caminho que teoricamente conduziria a solução deste problema. As operações indiciais se complicam devido a variação dos vetores de base com a posição. Face a esta limitação, preferiu-se operar com componentes, particularizando o resultado para o sistema de coordenadas cilíndricas.

Após alguma álgebra foi encontrada a seguinte equação para o quarto termo T4:

$$\begin{aligned}
 T_4 &= \int_V \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, dV = \int_V \left[\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - |\nabla \mathbf{u}|^2 \right] dV \\
 &= \int_{\Gamma} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, dS - \int_V |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dV \quad , \quad (B7)
 \end{aligned}$$

onde Γ simboliza o contorno do domínio V e

$$|\nabla \mathbf{u}|^2 = \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_z}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_z}{\partial r} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{u_r}{r} \right]^2 \quad (B8)$$

APÊNDICE C

OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE EVOLUÇÃO PARA A ENERGIA CINÉTICA DAS PERTURBAÇÕES EM CAMPOS CINEMATICAMENTE ADMISSÍVEIS

O objetivo desta seção suplementar é apresentar a obtenção da equação que descreve a evolução da energia das perturbações com o tempo em um sistema cartesiano de coordenadas. Restringe-se o campo de perturbações à classe de funções cinematicamente admissíveis, conforme descrito na seção 2.4.1 do capítulo 2 deste trabalho.

Considere a definição apresentada na equação (2.36) para a energia média das perturbações. Esta equação é reescrita a seguir para facilitar a exposição que a sucede.

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \langle |u|^2 \rangle, \text{ onde } \langle \rangle = \frac{1}{V} \int_V () dV. \quad (C1)$$

Derivando $\bar{\epsilon}(t)$ em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{d\bar{\epsilon}}{dt} = \langle u \cdot \frac{du}{dt} \rangle = \langle u \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + U \cdot \nabla u \right) \rangle. \quad (C2)$$

O termo entre parênteses em (C2) representa uma parte do lado esquerdo da equação das perturbações (equação 2.33). Substituindo-se este termo pelo correspondente na equação mencionada,

$$\frac{d\bar{\epsilon}}{dt} = \langle -u \cdot (u \cdot \nabla U + u \cdot \nabla u - \nu \nabla^2 u + \nabla p) \rangle. \quad (C3)$$

Utilizando o teorema da divergência e a hipótese de que as perturbações u e p são funções cinematicamente admissíveis, pode-se mostrar que,

$$\langle u \cdot \nabla^2 u \rangle = - \langle |\nabla u|^2 \rangle, \quad (C4)$$

$$\langle u \cdot \nabla u \cdot u \rangle = 0 \text{ e também que,} \quad (C5)$$

$$\langle u \cdot \nabla p \rangle = 0. \quad (C6)$$

Desta forma, substituindo (C4), C5 e (C6) em (C3), obtém-se a equação desejada, ou seja,

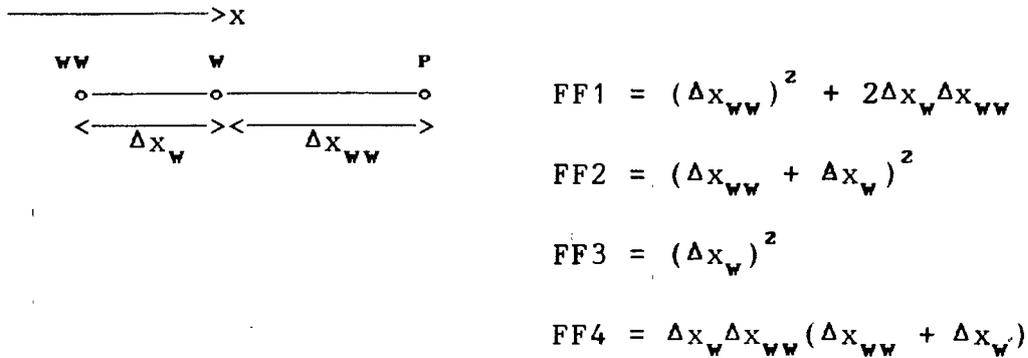
$$\frac{d\delta}{dt} = - \langle \mathbf{u} \cdot \nabla U \cdot \mathbf{u} \rangle - \nu \langle |\nabla \mathbf{u}|^2 \rangle \quad (C7)$$

Esta é a equação (2.38), apresentada no capítulo 2 deste trabalho. Conforme já mencionado, esta equação representa um balanço entre duas formas de energia, uma parcela associada à produção de perturbações e uma parcela associada à energia de dissipação das perturbações. O balanço entre elas define o amortecimento ou amplificação temporal da energia das perturbações.

APÊNDICE D

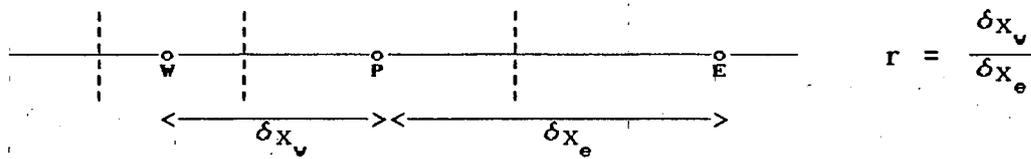
DETALHES DO CÁLCULO NUMÉRICO DE DERIVADAS
COM PRECISÃO DE SEGUNDA ORDEM.

D1) O CÁLCULO DE $(\partial f / \partial x)_P$ CONHECIDOS f_P , f_W e f_{WW} .



$$(\partial f / \partial x)_P = \frac{\text{FF1} \cdot f_P - \text{FF2} \cdot f_W + \text{FF3} \cdot f_{WW}}{\text{FF4}} \quad (D1)$$

D2) CÁLCULO DA DERIVADA CENTRAL CONHECIDOS TRÊS PONTOS.



$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P = \frac{(f_E - f_P) \cdot r^2 + f_P - f_W}{\delta x_v \cdot (1 + r)} \quad (D2)$$

APÊNDICE E

A OBTENÇÃO DA FORMA CONSERVATIVA DAS EQUAÇÕES

Considere as equações de Navier-Stokes e de conservação da massa adimensionalizadas em um sistema de coordenadas cilíndricas, apresentadas a seguir,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] \quad (\text{E1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right] \quad (\text{E2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (\text{E3})$$

Nestas equações Re denota o número de Reynolds, u é a velocidade axial (adimensional) e v é a velocidade radial (adimensional). x representa a coordenada axial, enquanto r denota a coordenada radial.

Somando, $\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right]$ u ao membro esquerdo da equação

(E1), obtém-se,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{uv}{r} + \frac{\partial(uv)}{\partial r} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u \quad (\text{E4})$$

De modo análogo, somando $\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right]$ v ao membro

esquerdo da equação (E2), obtém-se,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{vv}{r} + \frac{\partial(vv)}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right] \quad (\text{E5})$$

Portanto, as equações de Navier-Stokes em forma conservativa para o sistema de coordenadas cilíndricas são as seguintes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(ruu)}{\partial x} + \frac{\partial(ruv)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r \cdot \text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[r \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u}{\partial r} \right] \right\} \quad (\text{E6})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(ruv)}{\partial x} + \frac{\partial(rv v)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot \text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[r \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \frac{v}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial v}{\partial r} \right] \right\} \quad (\text{E7})$$

APÊNDICE F

AS SOLUÇÕES ESTACIONÁRIAS OBTIDAS POR LANGER (1991)

Tendo em vista a importância das soluções estacionárias obtidas por Langer (1991) para o presente trabalho, reproduz-se abaixo os mapas de linhas de corrente para diferentes números de Reynolds, obtidos por Langer (1991).

