

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE PLACAS LAMINADAS ESPESSAS POR MODELOS  
DE ELEMENTOS FINITOS SÓLIDOS ORTOTRÓPICOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE  
SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

JOÃO JOSÉ EVANGELISTA RABELO

FLORIANÓPOLIS, ABRIL DE 1992

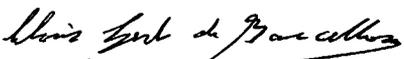
ANÁLISE DE PLACAS LAMINADAS ESPESSAS POR MODELOS  
DE ELEMENTOS FINITOS SÓLIDOS ORTOTRÓPICOS

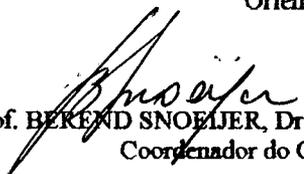
JOÃO JOSÉ EVANGELISTA RABELO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA  
PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

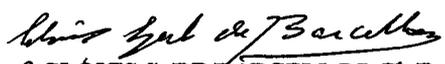
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO  
PROJETOS, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

  
Prof. CLÓVIS S. DE BARCELLOS, Ph.D.  
Orientador

  
Prof. BEREND SNOELJER, Dr.-Ing.  
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA

  
Prof. CLÓVIS S. DE BARCELLOS, Ph.D.  
Presidente

  
Prof. CARLOS ALBERTO DE C. SELKE, Ph.D.

  
Prof. DOMINGOS BOECHAT ALVES, Ph.D.

## AGRADECIMENTOS

---

Ao Professor Clóvis S. de Barcellos, pela orientação;

Aos colegas do curso pelo tão precioso apoio no dia-a-dia do mestrado;

Ao amigo Leirton pela força na reta final;

Aos técnicos do NPD pelo valioso suporte computacional;

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Este trabalho foi marcado pela descoberta de pessoas que se tornaram extremamente importantes por me despertarem para novas possibilidades de existência.

Iuri, Nádia, Ary, Rogério, Cristiano, Daniel, Tatiana, Gilberto, Fabian, Cláudia, Jorge, Carollna, Daniela, vocês proporcionaram descobertas fundamentais.

" Não importa o que foi feito do homem, mas o que ele faz do que dele foi feito "

Jean Paul Sartre

## ÍNDICE

---

<b>Resumo</b>	<i>i</i>
<b>Abstract</b>	<i>ii</i>
<b>Símbolos</b>	<i>iii</i>
<b>Lista de Figuras</b>	<i>vi</i>
<b>Lista de Tabelas</b>	<i>ix</i>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Materiais Compostos Laminados</b>	<b>3</b>
2.1. Introdução a Materiais Compostos	3
2.2. Revisão Bibliográfica	4
2.3. Motivação da Dissertação	10
<b>3 Fundamentos de Elasticidade</b>	<b>12</b>
3.1. Introdução	12
3.2. O Problema Elástico Linear	13
3.3. Relação Constitutiva na Elasticidade Linear	14
3.4. Transformações de Tensão e Deformação	20
<b>4 Formulação Analítica dos Modelos</b>	<b>21</b>
4.1. Introdução	21
4.2. Princípio dos Trabalhos Virtuais	22

4.3.	Equações Genéricas de Elementos Finitos	25
4.4.	Modelos Sólidos Ortotrópicos	32
4.4.1.	<i>Os Elementos Finitos Desenvolvidos</i>	32
4.4.2.	<i>Geometria dos Elementos</i>	33
4.4.3.	<i>Deslocamentos e Deformações Elementares</i>	34
4.4.4.	<i>Matriz de Rigidez Elementar</i>	37
4.4.5.	<i>Vetor Carregamento Elementar</i>	39
5	<b>Cálculo de Tensões</b>	41
5.1.	Introdução	41
5.2.	Cálculo de Tensões Através da Relação Constitutiva	42
5.3.	Integração das Equações Diferenciais de Equilíbrio	43
5.4.	Suavização do Campo de Tensões	45
5.4.1.	<i>Descontinuidade no Campo de Tensões</i>	45
5.4.2.	<i>Suavização de Funções por Mínimos Quadrados</i>	47
5.4.3.	<i>Formulação de Mínimos Quadrados para Elementos Finitos</i>	48
6	<b>Resultados, Comparações e Análises</b>	52
6.1.	Introdução	52
6.2.	Placa Isotrópica	53
6.2.1.	<i>Placa Isotrópica Simplesmente Apoiada</i>	55
6.2.2.	<i>Placa Isotrópica Engastada</i>	59
6.3.	Placa Ortotrópica	61
6.4.	Placa Laminada	69
6.5.	Comparação Entre o Elemento SL-64 e um elemento misto	79
7	<b>Conclusões e Sugestões</b>	80
Apêndice A	<b>Relações Para Transformação de Tensão e Deformação</b>	82

<b>Apêndice B Funções de Interpolação</b>	<b>85</b>
B.1. Construção das Funções de Interpolação	85
B.2. Polinômios de Lagrange	87
B.3. Elementos SL-18, SL-27 e SL-36	87
B.4. Elementos SL-32, SL-48 e SL-64	89
<b>Bibliografia</b>	<b>93</b>

## RESUMO

---

Modelos de elementos finitos sólidos ortotrópicos são formulados e aplicados à análise de placas espessas.

Seis elementos sólidos isoparamétricos são desenvolvidos a partir do método de deslocamentos, diferindo entre si quanto à ordem de suas funções de interpolação. Os elementos possuem funções de interpolação quadráticas ou cúbicas no plano e lineares, quadráticas ou cúbicas na espessura.

Os modelos são aplicados à análise estática de placas isotrópicas, ortotrópicas e laminadas, os resultados sendo comparados com soluções analíticas da teoria da elasticidade.

As tensões são calculadas diretamente da relação constitutiva ou através da integração das equações diferenciais de equilíbrio. Na suavização global do campo de tensões é utilizada a técnica de diferenças finitas.

## ABSTRACT

---

In this work, orthotropic solid finite elements are formulated and applied to the analysis of thick plates.

Six solid isoparametric elements based on the displacement method are proposed with elements differing on the order of their interpolation functions which are quadratic or cubic on the plane and linear, quadratic or cubic through the thickness.

The models are applied to the static analysis of isotropic, orthotropic and laminated thick plates. The results are compared with analytical solutions available in the theory of elasticity.

The stresses are determined directly from the constitutive relations or by integration of the equilibrium differential equations. The finite difference technique is used in the smoothing of the global stress field.

## SÍMBOLOS

## Latinos

$[B^e]$	matriz da relação vetor deformação no elemento - vetor dos graus de liberdade do elemento
$[B]$	matriz da relação vetor deformação no elemento - vetor dos graus de liberdade do corpo
$[C]$	matriz de rigidez do material
$\{f^B\}$	vetor dos componentes da força de corpo
$\{f^S\}$	vetor dos componentes da força de superfície
$\{f^{C_i}\}$	vetor dos componentes da força concentrada num ponto $i$
$\{F\}$	vetor carregamento global
$\{F^e\}$	vetor carregamento elementar
$\{F^B\}$	parcela do vetor carregamento relativa à força de corpo
$\{F^S\}$	parcela do vetor carregamento relativa à força de superfície
$\{F^C\}$	parcela do vetor carregamento relativa à força concentrada
$F_j$	função de interpolação associada ao nó $j$ de um elemento
$\{F_i\}$ e $\{F_{i,\xi}\}$	vetor das funções de interpolação associadas à direção $i$ e sua derivada em relação à coordenada natural $\xi$
$[F^e]$	matriz das funções de interpolação de um elemento associada aos graus de liberdade do elemento
$[F]$	matriz das funções de interpolação de um elemento associada aos graus de liberdade do corpo
$\{\bar{F}\}$	vetor das funções de interpolação nodais de um elemento
$\hat{\{F\}}$	vetor das funções de interpolação associadas aos pontos de recuperação de tensão de um elemento
$[J]$	matriz jacobiana
$[K^e]$	matriz de rigidez elementar

$[K]$	matriz de rigidez global
NNE	número de nós de um elemento
$[S]$	matriz de flexibilidade do material
$[s]$	matriz dos componentes nodais das forças de superfície num elemento
$[S^e]$	matriz de suavização elementar
$[S^g]$	matriz de suavização global
S	superfície do corpo
$[T_\epsilon]$	matriz de transformação de deformações
$[T_\sigma]$	matriz de transformação de tensões
$\langle T^e \rangle$	vetor elementar de suavização
$\langle T \rangle$	vetor global de suavização
U	função densidade de energia de deformação
$\langle u \rangle$	vetor dos componentes do campo de deslocamentos
$\langle \delta u \rangle$	vetor dos componentes do campo virtual de deslocamentos
$\langle u^e \rangle$	vetor dos componentes de deslocamento no domínio de um elemento
$\langle \delta u^e \rangle$	vetor dos componentes de deslocamento virtual no domínio de um elemento
V	volume do corpo
$u_1, u_2, u_3$	componentes globais de deslocamento
$x_1, x_2, x_3$	coordenadas cartesianas globais
$\langle x \rangle$	vetor das coordenadas globais nodais de um elemento

## Gregos

$\sigma_{ij}$	componente do tensor tensão de Cauchy
$\epsilon_{ij}$	componente do tensor de pequenas deformações
$\sigma_\alpha$	notação contraída para um componente de tensão
$\epsilon_\alpha$	notação contraída para um componente de deformação
$\langle \epsilon_c \rangle$	vetor dos componentes de deformação segundo a notação contraída
$\delta W_{ext}$	trabalho virtual das forças externas
$\delta u_i$	deslocamento virtual segundo a direção i
$\delta \epsilon_{ij}$	componente de deformação associada aos deslocamentos virtuais
$\langle \sigma \rangle$	vetor dos componentes do tensor tensão
$\langle \sigma^e \rangle$	vetor dos componentes de tensão no domínio do elemento elemento
$\langle \epsilon \rangle$	vetor dos componentes do tensor deformação

- v
- $\langle \varepsilon^e \rangle$       vetor dos componentes de deformação no domínio do elemento  
 $\langle \delta \varepsilon \rangle$       vetor dos componentes de deformações virtuais  
 $\langle \delta \rangle$           vetor dos graus de liberdade do corpo discretizado  
 $\langle \delta^e \rangle$         vetor dos graus de liberdade de um elemento  
 $\langle \delta_v \rangle$         vetor dos graus de liberdade virtuais do corpo discretizado  
 $\xi, \eta, \zeta$       coordenadas curvilíneas locais  
 $\langle \bar{\sigma} \rangle$         vetor dos valores nodais de um componente de tensão após a suavização  
 $\langle \bar{\sigma}^e \rangle$         vetor das tensões nodais suavizadas em um elemento  
 $\langle \hat{\sigma}^e \rangle$         vetor das tensões nos pontos de recuperação de tensão em um elemento

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 4.1.	Corpo tridimensional genérico	26
Figura 6.1.	Placa isotrópica quadrada: geometria e carregamento	54
Figura 6.2.	Placa isotrópica: domínio discretizado e condições de contorno	54
Figura 6.3.	Convergência para $w(a/2, a/2, 0)$ numa placa isotrópica quadrada simplesmente apoiada sob carregamento distribuído uniforme; $a/h = 5$ .	57
Figura 6.4.	Convergência para $w(a/2, a/2, 0)$ numa placa isotrópica quadrada simplesmente apoiada sob carregamento distribuído uniforme; $a/h = 20$ .	57
Figura 6.5.	Convergência para $\sigma_x(a/2, a/2, h/2)$ numa placa isotrópica quadrada simplesmente apoiada sob carregamento distribuído uniforme; $a/h = 5$ .	58
Figura 6.6.	Convergência para $\sigma_x(a/2, a/2, h/2)$ numa placa isotrópica quadrada simplesmente apoiada sob carregamento distribuído uniforme; $a/h = 20$ .	58
Figura 6.7.	Convergência para $w(a/2, a/2, 0)$ numa placa isotrópica quadrada engastada sob carregamento distribuído uniforme; $a/h = 5$ .	60
Figura 6.8.	Convergência para $\sigma_x(a/2, a/2, 0)$ numa placa isotrópica quadrada engastada sob carregamento distribuído uniforme; $a/h = 5$ .	60
Figura 6.9.	Placa ortotrópica quadrada: geometria e carregamento	62
Figura 6.10.	Placa simplesmente suportada: domínio discretizado e condições de contorno	62
Figura 6.11.	Convergência para $w(a/2, a/2, 0)$ numa placa ortotrópica quadrada simplesmente suportada sob carregamento distribuído uniforme; $E_x/E_y = 3$	65
Figura 6.12.	Convergência para $w(a/2, a/2, 0)$ numa placa ortotrópica quadrada simplesmente suportada sob carregamento distribuído uniforme; $E_x/E_y = 10$	65

Figura 6.13.	Convergência para $w(a/2, a/2, 0)$ numa placa ortotrópica quadrada simplesmente suportada sob carregamento distribuído uniforme; $E_x/E_y = 40$	65
Figura 6.14.	Convergência para $w(a/2, a/2, 0)$ numa placa ortotrópica quadrada simplesmente suportada sob carregamento distribuído uniforme; $a/h = 10$	66
Figura 6.15.	Convergência para $w(a/2, a/2, 0)$ numa placa ortotrópica quadrada simplesmente suportada sob carregamento distribuído uniforme; $a/h = 5$	67
Figura 6.16.	Convergência para $w(a/2, a/2, 0)$ numa placa ortotrópica quadrada simplesmente suportada sob carregamento distribuído uniforme; $a/h = 2,5$	68
Figura 6.17.	Placa laminada quadrada (0/90/90/0): geometria e carregamento	69
Figura 6.18.	Placa simplesmente suportada: domínio discretizado e condições de contorno	70
Figura 6.19.	Convergência para $w(a/2, a/2, 0)$ numa placa quadrada laminada (0/90/90/0) simplesmente suportada e sob carregamento senoidal; $a/h = 10$	71
Figura 6.20.	Convergência para $w(a/2, a/2, 0)$ numa placa quadrada laminada (0/90/90/0) simplesmente suportada e sob carregamento senoidal; $a/h = 4$	71
Figura 6.21.	Convergência para $\sigma_x(a/2, a/2, h/2)$ em uma placa quadrada laminada (0/90/90/0), simplesmente suportada e sob carregamento senoidal; $a/h = 10$	73
Figura 6.22.	Convergência para $\sigma_x(a/2, a/2, h/2)$ em uma placa quadrada laminada (0/90/90/0), simplesmente suportada e sob carregamento senoidal; $a/h = 4$	73
Figura 6.23.	Convergência para $\tau_{xy}(0, 0, h/2)$ numa placa quadrada laminada (0/90/90/0), simplesmente suportada e sob carregamento senoidal; $a/h = 10$	74
Figura 6.24.	Convergência para $\tau_{xy}(0, 0, h/2)$ numa placa quadrada laminada (0/90/90/0), simplesmente suportada e sob carregamento senoidal; $a/h = 4$	74
Figura 6.25.	Convergência para $\tau_{xz}(0, a/2, 0)$ numa placa quadrada laminada (0/90/90/0), simplesmente suportada e sob carregamento senoidal; $a/h = 10$	75
Figura 6.26.	Convergência para $\tau_{xz}(0, a/2, 0)$ numa placa quadrada laminada (0/90/90/0), simplesmente suportada e sob carregamento senoidal; $a/h = 4$	74

- Figura 6.27. Convergência para  $\tau_{xz}(0, a/2, 0)$ . Resultado da integração da equação diferencial de equilíbrio;  $a/h = 10$  78
- Figura 6.28. Convergência para  $\tau_{xz}(0, a/2, 0)$ . Resultado da integração da equação diferencial de equilíbrio;  $a/h = 4$  78
- Figura A.1. Sistemas de coordenadas global e local, com tabela de cossenos diretores 82
- Figura B.1. Geometria e enumeração nodal local para os elementos SL-18, SL-27 e SL-36 86
- Figura B.2. Geometria e enumeração nodal local para os elementos SL-32, SL-48 e SL-64 86

LISTA DE TABELAS

---

Tabela 3.1. Equivalência entre notações tensorial e contraída	15
Tabela 4.1. Número de pontos de integração dos elementos sólidos	33
Tabela 5.1. Número de pontos de recuperação de tensão	43
Tabela 6.1. Legenda e características básicas dos elementos	53
Tabela 6.2. Placa isotrópica simplesmente apoiada: erros percentuais em $w(a/2, a/2, 0)$ . Modelos com $13 \times 13 \times 7$ nós nas direções x-y-z; $a/h = 5$	59
Tabela 6.3. Placa isotrópica engastada: erros percentuais em $w(a/2, a/2, 0)$ e $\sigma_x(a/2, a/2, 0)$ . Modelos com $13 \times 13 \times 7$ nós nas direções x-y-z; $a/h = 5$ .	61
Tabela 6.4. Placa laminada (0/90/90/0): erros percentuais em $w$ , $\sigma_x$ e $\tau_{xz}$	76
Tabela 6.5. Placa laminada (0/90/90/0): comparação entre os elementos SL-64 e um elemento misto	79

## 1 INTRODUÇÃO

---

Diversos modelos de elementos finitos têm sido propostos visando a análise de tensões em materiais compostos laminados. Estes elementos são dos tipos híbridos, mistos ou, em grande parte, baseados em campos de deslocamentos de ordem superior. Esta dissertação compreende a formulação e avaliação de modelos de elementos finitos sólidos ortotrópicos isoparamétricos baseados no modelo de deslocamentos, sendo aplicados à análise de placas espessas e semi-espessas.

No capítulo 2 é apresentada a revisão bibliográfica sobre modelos de elementos finitos desenvolvidos para a análise de materiais compostos. A partir das características destes elementos define-se a área de trabalho: análise de placas laminadas espessas e semi-espessas por modelos de elementos finitos sólidos.

Os conceitos de elasticidade importantes para a formulação dos elementos e compreensão física dos problemas a serem analisados são apresentados no capítulo 3, onde define-se fisicamente o problema elástico linear para em seguida apresentar-se a relação constitutiva do material.

A formulação analítica dos modelos sólidos é desenvolvida no capítulo 4. Partindo-se do princípio dos trabalhos virtuais deduz-se as equações genéricas de elementos finitos, a partir das quais obtém-se as equações particularizadas para os modelos de elementos finitos propostos. Chega-se, assim, à matriz de rigidez e ao vetor carregamento dos modelos.

No capítulo 5 são apresentados os procedimentos para o cálculo de tensões: diretamente da relação constitutiva ou atra-

vés da integração das equações diferenciais de equilíbrio. Conclui-se o capítulo apresentando a técnica de suavização global de tensões por mínimos quadrados.

Os modelos de elementos finitos propostos são finalmente avaliados no capítulo 6, onde são apresentados os resultados para diversas aplicações. São analisadas placas isotrópicas, ortotrópicas e laminadas, todas elas espessas e semi-espessas, os resultados sendo apresentados sob a forma de curvas de convergências.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões acerca dos resultados obtidos e sugestões de outros trabalhos.

## 2 MATERIAIS COMPOSTOS LAMINADOS

---

### 2.1. Introdução a Materiais Compostos

Os materiais compostos são obtidos a partir da combinação de dois ou mais materiais em escala macroscópica. Uma de suas grandes vantagens consiste em se obter um material que reúne as melhores características dos materiais originais e, em muitos casos, qualidades que nenhum deles possui.

As estruturas construídas com estes materiais são tão resistentes quanto as metálicas mas, por apresentarem elevada relação resistência-peso, são bem mais leves. Além disso, apresentam elevada resistência à fadiga, ao desgaste e à corrosão, resultando num material com vasto potencial de utilização.

Os materiais compostos podem ser classificados, basicamente, em compostos fibrosos, laminados e particulados. Os compostos fibrosos consistem em fibras de certo material imersas numa matriz de outro material. Os compostos laminados são fabricados através da superposição de camadas de vários materiais, enquanto os compostos particulados consistem em partículas de um ou mais materiais imersas numa matriz de um outro material.

Este trabalho se detém ao estudo de materiais compostos fibrosos laminados, formados por lâminas de materiais compostos fibrosos unidas através de técnicas de laminação. Cada lâmina é formada por fibras unidirecionais imersas numa matriz. A este conjunto de lâminas justapostas e coladas entre si, passaremos a denominar simplesmente de material composto laminado.

Os primeiros periódicos sobre materiais compostos laminados surgiram no início dos anos sessenta. Desde então, inúmeros tra-

balhos teóricos e experimentais foram publicados. Através dos resultados experimentais constatou-se o comportamento mecânico destes materiais, fundamentando o desenvolvimento de modelos matemáticos que fossem capazes de descrevê-lo.

## 2.2. Revisão Bibliográfica

Na indústria moderna já é significativo o emprego de materiais compostos em componentes estruturais. Com a crescente complexidade das aplicações, surge a necessidade de métodos de análise capazes de prever, com segurança, o comportamento mecânico destas estruturas. Uma área crítica, por exemplo, consiste na análise de falhas em laminados, onde as distribuições de tensões devem ser determinadas com precisão.

Os métodos de análise de tensões em materiais compostos são recentes, e suas aplicações quase sempre limitadas ao estudo de placas e cascas.

Até o final dos anos setenta a análise de placas compostas consistia, basicamente, no emprego da Teoria Clássica da Laminação ou teorias de cisalhamento de primeira ordem.

A Teoria Clássica da Laminação admite as hipóteses de Kirchhoff na análise de uma placa. A normal à superfície média indeformada é suposta permanecer indeformada e normal à superfície média da placa deformada. Nas teorias de cisalhamento de primeira ordem, como os trabalhos de Whitney (1972), Medwadowski (1958) e Yang *et alli* (1966), relaxa-se a hipótese de perpendicularidade entre a normal e a superfície deformadas.

Estas teorias são, contudo, bastante limitadas na análise de placas laminadas. As restrições são tanto maiores quanto mais elevada for a relação  $E_1/E_2$  entre os módulos de elasticidade longitudinais e quanto mais baixa for a razão  $L/h$  entre o comprimento e a espessura da placa. Nestes casos, o efeito do cisalhamento transversal é muito mais pronunciado que em estruturas isotrópicas semelhantes e as teorias acima são então incapazes de modelar o empenamento da seção transversal, ou seja, a distorção da normal deformada.

Em aplicações críticas, a modelagem do efeito do cisalhamento exige o emprego de teorias que incorporem a possibilidade

da normal se distorcer. Diversas abordagens podem ser utilizadas no estudo do problema. Uma delas consiste na solução das equações da elasticidade tridimensional para o problema proposto. Trabalhos como os de Pagano (1969 e 1970) e Pagano & Hatfield (1972) apresentam soluções exatas para alguns problemas de flexão em placas laminadas. As aplicações práticas, entretanto, envolvem geometrias, condições de contorno e carregamentos complexos, inviabilizando a solução das equações da elasticidade, levando-se então ao emprego de métodos aproximados no estudo do efeito do cisalhamento em placas laminadas.

As teorias simplificadas empregadas na análise de placas laminadas podem ser divididas em duas grandes categorias: teorias de ordem superior e teorias de camadas discretas.

Nas teorias de ordem superior, a placa é considerada uma estrutura que possui uma única camada anisotrópica. Na obtenção das equações da elasticidade, as tensões e/ou deslocamentos são aproximados por expansões não lineares ao longo da espessura. Esta abordagem é utilizada, por exemplo, por Reissner (1975 e 1985), Lo *et alli* (1977a, 1977b e 1978) e Reddy (1984).

Nas teorias de camadas discretas, a placa é considerada um conjunto de lâminas superpostas. As tensões e/ou deslocamentos são interpolados ao longo da espessura da placa através de funções contínuas por partes. Os trabalhos de Di Sciuva (1987) e Toledano & Murakami (1987) são exemplos desta metodologia.

Embora as teorias bidimensionais constituam simplificações da teoria da elasticidade, suas soluções analíticas para as aplicações práticas são quase sempre de difícil obtenção. Surge, então, a necessidade de utilizarmos métodos numéricos na solução destas equações. O método de elementos finitos é hoje o mais desenvolvido na análise de materiais laminados.

Diversos elementos finitos têm sido desenvolvidos para a análise de placas laminadas. As formulações possuem características peculiares e, como resultado, os comportamentos dos elementos são também distintos. Alguns dos elementos finitos desenvolvidos nos últimos anos para a análise de placas laminadas serão agora analisados.

Barker *et alli* (1972) formularam um elemento sólido ortotrópico isoparamétrico de 24 nós, com funções de interpolação cúbicas no plano e lineares na espessura do elemen-

to. O artigo analisa placas espessas e semi-espessas com  $E_x/E_y = 25$ . Os resultados são comparados com soluções exatas, mostrando-se bons tanto para as tensões de membrana quanto para as transversais.

Noor & Mathers (1977) abordaram dois aspectos da análise por elementos finitos de placas simetricamente laminadas. Inicialmente, são apresentadas técnicas de exploração de simetrias visando a redução do custo computacional da análise. Em seguida, estudam o efeito da anisotropia e da deformação cisalhante na precisão e taxa de convergência de cinco elementos finitos bidimensionais. Os resultados mostram que os elementos de ordem superior são menos sensíveis a estes efeitos.

Kant *et alli* (1982) desenvolveram um elemento finito isoparamétrico de ordem superior para a análise de placas isotrópicas finas e espessas. Como nestas aplicações não há acoplamento entre flexão e extensão, os autores utilizaram uma simplificação do campo de deslocamentos proposto por Lo *et alli*, sendo empregadas apenas as parcelas de flexão. A formulação possibilita o emprego de elementos de classe  $C^0$ , sendo aplicada à análise de placas isotrópicas finas e espessas.

Posteriormente, Pandya & Kant (1988a) estenderam o trabalho anterior a placas ortotrópicas. Persistindo o desacoplamento entre flexão e extensão, o mesmo campo de deslocamentos foi utilizado, sendo o elemento também de classe  $C^0$ .

Em seguida, Pandya & Kant (1988b) desenvolveram um elemento para a análise de placas simetricamente laminadas. Como o desacoplamento entre flexão e extensão ainda persistia naquela aplicação, o mesmo campo de deslocamentos foi utilizado. Nesta formulação, tensão e deformação transversais normais não foram desprezadas.

Kant & Pandya (1988) desenvolveram um elemento lagrangeano de 9 nós a partir de um campo de deslocamentos de ordem superior. A condição de tensões transversais cisalhantes nulas na superfície da placa é imposta já na formulação. As tensões transversais são calculadas por integração das equações de equilíbrio. Os resultados são comparados com soluções de outros elementos, soluções simplificadas e soluções da elasticidade, mostrando-se bons tanto para tensões de membrana quanto para tensões transversais.

Engblom & Ochoa (1985) formularam um elemento finito cujos deslocamentos de membrana são interpolados quadraticamente na espessura e o deslocamento transversal é suposto constante na espessura da placa. As tensões transversais são calculadas integrando-se as equações diferenciais de equilíbrio. Os resultados são comparados com soluções da elasticidade. A formulação mostra-se superior à teoria clássica da laminação.

Phan & Reddy (1985) desenvolveram um elemento finito a partir da teoria proposta por Reddy (1984). Os deslocamentos de membrana são interpolados cubicamente e o deslocamento transversal é considerado constante ao longo da espessura da placa. Esta formulação fornece uma distribuição quadrática para as tensões cisalhantes transversais na espessura da placa, com valores nulos em suas superfícies inferior e superior. O elemento apresenta, contudo, características indesejáveis: sua formulação utiliza, implicitamente, uma relação constitutiva parcial, em que a relação entre o campo de tensões e o campo de deformações em cada lâmina não envolve todos os seis componentes de tensão em função dos seis componentes de deformação, o estado de tensões sendo considerado plano em cada lâmina; além disso, a formulação contém derivadas de segunda ordem no funcional da energia potencial total, levando ao emprego das ineficientes funções de interpolação de classe  $C^1$ .

Kwon & Akin (1987), partindo de um campo de deslocamentos de ordem superior, desenvolveram um elemento misto para a análise de placas finas e espessas. A formulação assegura uma distribuição quadrática para as tensões cisalhantes transversais ao longo da espessura, com valores nulos nas superfícies superior e inferior. O artigo limita-se a apresentar resultados para o deslocamento transversal.

Chaudhuri & Seide (1987) desenvolveram um elemento triangular de classe  $C^0$  para a análise de placas espessas arbitrariamente laminadas. Na formulação, o deslocamento transversal é constante na espessura do laminado, enquanto os deslocamentos de membrana variam linearmente na espessura de cada lâmina. Como resultado, o número de graus de liberdade em cada nó do elemento depende do número de lâminas do laminado. O artigo apresenta resultados para deslocamentos de membrana de uma placa espessa semi-infinita, mostrando-se superiores tanto aos fornecidos pela

teoria clássica da laminação quanto pela teoria de Whitney & Pagano (1970). Não são fornecidos, contudo, resultados para as tensões cisalhantes transversais.

Posteriormente, Chaudhuri (1986) propôs uma formulação semelhante à anterior, as tensões cisalhantes transversais sendo calculadas por integração das equações diferenciais de equilíbrio. Os resultados são comparados com soluções da elasticidade, sendo muito boa a concordância. O autor adverte, contudo, que em placas laminadas assimétricas o sucesso do método empregado é incerto. Visando superar esta deficiência, Chaudhuri & Seide (1987) desenvolveram um elemento semi-analítico para a análise de placas anisotrópicas arbitrariamente laminadas. Os resultados são comparados com soluções da elasticidade para casos de placas laminadas espessas arbitrariamente laminadas, sendo bons os resultados apresentados pelo modelo.

Owen & Li (1987) desenvolveram um modelo local empregando uma técnica de subestruturação. Os resultados são fornecidos apenas para placas simetricamente laminadas.

Di Sciuva (1985) desenvolveu um elemento com deslocamentos de membrana variando linearmente ao longo da espessura de cada lâmina. A formulação utiliza funções de interpolação de classe  $C^1$  e uma relação constitutiva parcial, apresentando, portanto, limitações semelhantes às do modelo proposto por Phan & Reddy (1985). Posteriormente, o autor (Di Sciuva, 1986) comparou os resultados deste elemento com os de outros formulados a partir da teoria de Whitney & Pagano (1970). As tensões cisalhantes transversais não são analisadas em nenhum destes artigos.

Os elementos finitos até agora apresentados foram formulados a partir do modelo de deslocamentos, sendo utilizado o princípio da energia potencial total. Outros modelos, como os híbridos, têm sido desenvolvidos.

Os modelos de elementos finitos híbridos têm sido propostos com o objetivo de descrever com maior precisão o efeito do cisalhamento transversal em placas laminadas. Nestas formulações, propõe-se um campo de deslocamentos compatível no contorno do elemento e, independentemente, um campo de tensões em seu domínio que satisfaça exatamente as equações diferenciais de equilíbrio homogêneas.

Mau *et alli* (1972) desenvolveram um elemento híbrido qua-

drilateral para a análise de placas espessas multilaminadas. A tensão normal transversal é admitida nula. São apresentados resultados para placas simetricamente laminadas, sendo ótima a concordância com a solução da elasticidade. Entretanto, constata-se um desvio em relação à solução exata para as tensões cisalhantes transversais nas regiões interlaminares. Chaudhuri (1986) sugere que este erro ocorre "provavelmente porque a condição de contorno de tensão normal nula nas bordas livres é satisfeita apenas aproximadamente".

Spilker *et alli* (1977) formularam um elemento híbrido cujo número de graus de liberdade independe do número de lâminas do laminado. O elemento é comparado com um outro formulado segundo a metodologia de Mau *et alli* (1972), mostrando-se econômico quanto à memória e tempo de processamento necessários. Os resultados apresentados para placas espessas e semi-espessas não são satisfatórios.

Posteriormente, Spilker (1980) propôs um elemento híbrido com interpolações cúbicas e quadráticas para os deslocamentos de membrana e transversal, respectivamente, ao longo da espessura do elemento. Dado o elevado número de graus de liberdade envolvidos na formulação, o autor desenvolve o elemento para o caso particular de um estado plano de deformação, apresentando resultados numéricos para a flexão cilíndrica de placas espessas. Os resultados apresentam excelente concordância com a solução exata, mesmo para laminados espessos. Espera-se uma precisão semelhante quando a formulação deste autor for estendida à análise tridimensional de placas laminadas. Neste caso, contudo, o número de graus de liberdade e parâmetros de tensão crescerá com o número de lâminas, e a capacidade computacional poderá ser um fator limitante do número de lâminas a serem analisadas.

Spilker e Engelmann (1986) apresentaram, mais tarde, um elemento finito híbrido para placas laminadas finas e semi-espessas. O número de graus de liberdade de deslocamento e parâmetros de tensão independem do número de lâminas do laminado. O elemento possui 8 nós, é invariante, de posto correto e não apresenta o fenômeno de "locking" quando aplicado a placas finas. O artigo fornece resultados apenas para deslocamentos e resultantes de momento.

Alguns elementos híbridos incorporam em suas formulações

uma das seguintes hipóteses: tensão normal transversal nula ou deslocamento transversal constante ao longo da espessura do laminado. Acreditando que estas hipóteses são injustificáveis diante do comportamento previsto pelas soluções fornecidas pela teoria da elasticidade, Liou & Sun (1987) propuseram um elemento finito híbrido isoparamétrico cuja formulação não anula o componente  $\sigma_z$  do tensor tensão. Alguns resultados são comparados com soluções da elasticidade, verificando-se grandes erros para as tensões cisalhantes transversais nas regiões interlaminares.

Estes são apenas alguns dos diversos modelos propostos para a análise de placas laminadas, considerados os mais significativos dentre os publicados nos periódicos disponíveis nas bibliotecas nacionais. Cada um destes modelos, ainda que tenha se mostrado simples ou ineficiente, representa uma contribuição para a compreensão do desempenho do método de elementos finitos quando aplicado à análise de placas laminadas.

Apesar das inúmeras pesquisas desenvolvidas, ainda é bastante limitado o conhecimento nesta área. A anisotropia do material laminado exige formulações mais sofisticadas que as empregadas com sucesso na análise de estruturas isotrópicas semelhantes. Além disso, são poucas as soluções exatas disponíveis, o que dificulta a avaliação dos elementos em aplicações complexas. Assim, esta área se constitui num campo de pesquisa fértil, muito podendo ser desenvolvido e descoberto.

### 2.3. Motivação da Dissertação

O projeto de estruturas compostas envolve o estudo dos problemas de delaminação e fratura. A delaminação consiste na ruptura da matriz por cisalhamento nas regiões interlaminares e seu estudo requer precisão no cálculo das tensões cisalhantes transversais. A fratura ou ruptura da estrutura está associada ao crescimento de falhas existentes em seu interior e seu controle exige uma descrição detalhada e precisa de todos os componentes do tensor tensão. Assim, estudos de delaminação e fratura em materiais compostos requerem um método de análise que seja capaz de descrever com precisão o estado tridimensional de tensões no domínio da estrutura.

Diversos trabalhos foram desenvolvidos visando a análise de tensões em materiais compostos. A revisão bibliográfica mostrou que eles se classificam, basicamente, como trabalhos analíticos ou numéricos. Os resultados por eles apresentados indicam que a análise de tensões é mais complexa em laminados críticos: aqueles com pequeno número de lâminas, baixa razão  $L/h$  e elevada razão  $E_x/E_y$ . Nestas aplicações, o efeito do cisalhamento transversal mostrou-se pronunciado, exigindo o emprego de modelos capazes de representar a distorção da normal.

Contudo, são limitadas e dispersas as informações sobre o comportamento de modelos numéricos aplicados à análise de laminados críticos. É desta lacuna existente no conhecimento sobre materiais compostos que surge a proposta e o desenvolvimento deste trabalho, que detém-se, portanto, ao estudo de laminados críticos.

Toma-se como tópico de trabalho a formulação de elementos finitos sólidos visando a análise de placas laminadas espessas. Por não conter simplificações da teoria da elasticidade, representando tão somente sua discretização, esta formulação é capaz de modelar a forte distorção da normal, fornecendo, ainda, resultados para todos os seis componentes do tensor tensão. Os elementos sólidos podem ser, portanto, de grande utilidade no estudo de delaminação e fratura de materiais compostos.

Neste trabalho são formulados seis elementos sólidos ortotrópicos isoparamétricos. Os elementos diferem, basicamente, quanto ao número de nós, ou seja, quanto à ordem de suas funções de interpolação: são utilizados polinômios de Lagrange quadráticos ou cúbicos no plano e lineares, quadráticos ou cúbicos na espessura do elemento. As tensões cisalhantes transversais são calculadas de duas formas distintas: diretamente da relação constitutiva ou por integração das equações diferenciais de equilíbrio. Os resultados são então comparados com soluções exatas da teoria da elasticidade.

### 3 FUNDAMENTOS DE ELASTICIDADE

---

#### 3.1. Introdução

A Mecânica dos Sólidos é uma área do conhecimento que tem por objetivo estudar o comportamento de sólidos deformáveis sob ação de cargas externas. O comportamento mecânico é descrito, fundamentalmente, através dos conceitos de deformação e tensão. As deformações nos informam acerca dos movimentos relativos entre as partículas do corpo deformado, enquanto as tensões determinam como os esforços se distribuem em seu interior.

A teoria que compõe a Mecânica dos Sólidos aborda problemas com pequenos ou grandes deslocamentos e materiais com diversas relações constitutivas. Como este trabalho limita-se ao estudo de materiais elásticos lineares submetidos a pequenos deslocamentos, a formulação do problema será descrita em termos da Teoria da Elasticidade Linear, que constitui uma das áreas da Mecânica dos Sólidos.

Neste capítulo são apresentados os conceitos fundamentais à compreensão física dos problemas a serem estudados e à formulação analítica dos modelos de elementos finitos. É feita uma compreensão física do problema elástico linear para em seguida ser discutida sua relação constitutiva. Conclui-se o capítulo apresentando os conceitos de transformação de tensão e deformação.

### 3.2. O Problema Elástico Linear

Os modelos de elementos finitos propostos serão aplicados a problemas situados no âmbito da Teoria da Elasticidade Linear, limitando-se, portanto, ao estudo de tensões e deformações em corpos idealmente elásticos, com relação constitutiva linear e submetidos a pequenos deslocamentos.

Um material é considerado idealmente elástico quando, removidas as cargas que lhe causaram deformações, recupera totalmente sua configuração inicial. Este material deve ainda apresentar, numa dada temperatura, uma relação biunívoca entre tensões e deformações. Assim, para cada estado de tensões existe um único estado de deformações associado. Embora não existam, de fato, materiais idealmente elásticos, muitos se aproximam deste modelo quando as deformações são suficientemente pequenas.

A relação biunívoca entre tensões e deformações permite excluir da teoria fenômenos como fluência sob carregamento constante e relaxação de tensão sob deformação constante. Se, além disso, as tensões variarem linearmente com as deformações, teremos um material elástico linear. Chega-se, assim, a uma material com relação constitutiva simplificada, as tensões sendo calculadas como uma combinação linear das deformações.

Os coeficientes da relação constitutiva de um material elástico linear são também denominados coeficientes elásticos e são determinados experimentalmente. Embora dependam da temperatura, admite-se desprezável esta dependência ou, então, que as variações de temperatura serão suficientemente pequenas, de forma que os coeficientes elásticos possam ser considerados constantes durante a deformação do corpo.

Embora seja desprezada a variação dos coeficientes elásticos com a temperatura, pode-se ser forçado a considerar a expansão térmica do material, muitas vezes responsável por deformações e/ou tensões térmicas tão grandes quanto as produzidas pelas cargas externas. Neste trabalho, entretanto, não são considerados estes efeitos térmicos. Os problemas analisados não envolvem, portanto, variação de temperatura.

Convém explicitar, também, as hipóteses cinemáticas que simplificam a formulação do problema elástico.

Admite-se que os gradientes dos deslocamentos serão peque-

nos se comparados à unidade. Esta condição é mais rígida do que simplesmente requerer pequenas deformações pois implica, também, em pequenas rotações, excluindo, portanto, alguns casos de pequenas deformações com grandes deslocamentos em estruturas esbeltas. Com isso, os deslocamentos em um corpo finito serão suficientemente pequenos (se não considerarmos as parcelas de translação de corpo rígido, que podem ser removidas), e então não haverá distinção entre as configurações deformada e indeformada do corpo ao serem escritas as equações da elasticidade.

Feitas estas restrições aos deslocamentos, pode-se descrever o problema em termos do tensor de pequenas deformações e do tensor tensão de Cauchy.

As condições acima apresentadas delimitam fisicamente o problema elástico linear. Sua completa formulação matemática inclui, além da relação constitutiva linear, equações diferenciais de equilíbrio, equações de compatibilidade para as deformações e as condições de contorno do problema. Em seguida é apresentada a relação constitutiva para a elasticidade linear.

### 3.3. Relação Constitutiva na Elasticidade Linear

A relação constitutiva para a Elasticidade Linear, geralmente denominada lei de Hooke generalizada, é dada por nove equações expressando cada componente do tensor tensão como uma combinação linear dos componentes do tensor deformação,

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs} \epsilon_{rs} \quad , \quad i, j, r, s = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

$\sigma_{ij}$  = tensor tensão de Cauchy

$\epsilon_{rs}$  = tensor de deformações infinitesimais

As nove equações em (3.1) contêm 81 constantes elásticas. Entretanto, como o tensor tensão de Cauchy é simétrico, tem-se que  $C_{ijrs} = C_{jirs}$ . O tensor de pequenas deformações é também simétrico nos índices mudos "rs". Não haverá, portanto, perda de generalidade ao se supor os coeficientes  $C_{ijrs}$  simétricos também em "rs", quando então  $C_{ijrs} = C_{ijer}$ .

Desta forma, as relações constitutivas são reduzidas a apenas seis equações independentes, cada qual contendo seis termos, num total de 36 constantes elásticas ao invés de 81. Estas relações são convenientemente representadas sob a forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Na expressão acima utilizou-se uma notação contraída para os componentes dos tensores tensão e deformação, permitindo obter relações mais compactas. A equivalência entre as duas notações é apresentada na *Tabela 3.1*.

*Tabela 3.1* Equivalência entre as notações tensorial e contraída (Jones, 1975).

Tensões		Deformações *	
notação tensorial	notação contraída	notação tensorial	notação contraída
$\sigma_{11}$	$\sigma_1$	$\epsilon_{11}$	$\epsilon_1$
$\sigma_{22}$	$\sigma_2$	$\epsilon_{22}$	$\epsilon_2$
$\sigma_{33}$	$\sigma_3$	$\epsilon_{33}$	$\epsilon_3$
$\sigma_{12}$	$\sigma_4$	$\gamma_{12} = 2\epsilon_{12}$	$\epsilon_4$
$\sigma_{13}$	$\sigma_5$	$\gamma_{13} = 2\epsilon_{13}$	$\epsilon_5$
$\sigma_{23}$	$\sigma_6$	$\gamma_{23} = 2\epsilon_{23}$	$\epsilon_6$

\* Note que  $\gamma_{ij}$ , com  $i \neq j$ , representa a deformação cisalhante de engenharia.

As relações (3.2) mostram que se deve conhecer 36 constantes elásticas para calcular as tensões a partir das deformações. O número de coeficientes elásticos pode, contudo, ser reduzido com base no conceito de energia de deformação.

Na teoria da elasticidade linear, a energia potencial elástica armazenada por unidade de volume do corpo pode ser calculada através de uma função denominada densidade de energia de deformação,

$$U = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha} \epsilon_{\beta} \quad (3.3)$$

Esta função é tal que as tensões são calculadas a partir de suas derivadas,

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{\alpha}} \quad (3.4)$$

Das equações (3.3) e (3.4) obtém-se

$$\frac{\partial U}{\partial \epsilon_1} = \sigma_1 = C_{1j} \epsilon_j \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \epsilon_2} = \sigma_2 = C_{2j} \epsilon_j$$

Diferenciando parcialmente as equações (3.5), chega-se à seguinte identidade:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_1 \partial \epsilon_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_2 \partial \epsilon_1}, \quad \text{logo} \quad C_{12} = C_{21}$$

Cálculos análogos mostrarão que a matriz [C] é simétrica. Assim, um material anisotrópico linearmente elástico possuirá, no máximo, 21 coeficientes elásticos, sua relação constitutiva sendo dada por

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

simétrica

Os coeficientes elásticos  $C_{ij}$  relacionam os componentes cartesianos dos tensores tensão e deformação num dado sistema de coordenadas e, em geral, dependem da orientação deste sistema. Há contudo, materiais cujos coeficientes elásticos são os mesmos segundo sistemas de coordenadas simétricos com relação a certos planos particulares, denominados planos de simetria elástica.

A existência de planos de simetria elástica num dado material implica em redução no seu número de coeficientes elásticos. Em materiais que possuem um plano de simetria elástica, o número de coeficientes é reduzido de 21 para 13. Se o material possui dois planos de simetria, conseqüentemente haverá simetria com relação ao terceiro plano, estes três planos sendo mutuamente ortogonais. Neste caso, o material é denominado ortotrópico, possuindo apenas 9 coeficientes elásticos.

Há, ainda, materiais que possuem infinitos planos de simetria: são os materiais isotrópicos, com apenas dois coeficientes elásticos.

Os modelos de elementos finitos a serem formulados serão aplicados à análise de materiais compostos, que possuem três planos de simetria material. Suas relações constitutivas são, portanto, ortotrópicas, sendo dadas por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{simétrica} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\text{ou} \quad [\sigma] = [C] [\epsilon]$$

As deformações são obtidas invertendo-se a expressão (3.7),

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & \text{simétrica} & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\text{ou} \quad [\epsilon] = [S] [\sigma]$$

Os coeficientes de rigidez na matriz [C] e os de flexibilidade na matriz [S] possuem significados físicos relativamente abstratos. No estudo de materiais ortotrópicos, estes coeficientes são descritos em termos de constantes de engenharia, que são generalizações dos módulos de elasticidade longitudinal, transversal e do coeficiente de Poisson. Estas novas constantes possuem um claro significado físico e podem ser obtidas em ensaios de tração e de cisalhamento puros.

Para um material ortotrópico, a matriz de flexibilidade é dada, em termos das constantes de engenharia, por:

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$E_1, E_2$  e  $E_3$  = módulos de elasticidade longitudinais segundo as direções materiais principais ;

$$\nu_{ij} = - \varepsilon_j / \varepsilon_i ;$$

$G_{12}, G_{13}$  e  $G_{23}$  = módulos de elasticidade transversais segundo os planos 1-2, 1-3, e 2-3 ;

Como as matrizes [C] e [S] são mutuamente inversas, são obtidas as seguintes relações indiretas entre os coeficientes  $C_{ij}$  e as constantes de engenharia:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22} S_{99} - S_{29}^2}{S} & C_{12} &= \frac{S_{19} S_{29} - S_{12} S_{99}}{S} \\ C_{22} &= \frac{S_{99} S_{11} - S_{19}^2}{S} & C_{19} &= \frac{S_{12} S_{29} - S_{19} S_{22}}{S} \\ C_{33} &= \frac{S_{11} S_{22} - S_{12}^2}{S} & C_{29} &= \frac{S_{12} S_{19} - S_{29} S_{11}}{S} \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}} & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}} & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$S = S_{11} S_{22} S_{99} - S_{11} S_{29}^2 - S_{22} S_{19}^2 - S_{99} S_{12}^2 + 2S_{12} S_{19} S_{29}$$

### 3.4. Transformações de Tensão e Deformação

Na seção anterior, tensões e deformações foram definidas em relação a um sistema de coordenadas alinhado com as direções materiais principais de uma lâmina. Neste caso, as matrizes [C] e [S] são calculadas diretamente a partir das constantes de engenharia.

Há ocasiões, entretanto, em que é de interesse determinar o campo de tensões segundo um sistema de coordenadas ortogonais arbitrariamente orientado. É o que ocorre, por exemplo, em modelos de elementos finitos para a análise de placas ou cascas laminadas, quando se conhece a matriz dos coeficientes elásticos segundo um sistema local e deseja-se transformá-la para um sistema global de coordenadas.

Como tensão, deformação e relação constitutiva são grandezas tensoriais, seus componentes num dado sistema de coordenadas podem ser transformados para um sistema de coordenadas arbitrário. As expressões para a transformação, apresentadas no Apêndice A, são obtidas a partir da definição de deformação e do conceito de relação constitutiva (Cook,1981).

Conhecidos os estados de tensão e deformação no sistema global de coordenadas (x,y,z), os componentes destes tensores num sistema local ( $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ ) serão dados por:

$$\{\bar{\epsilon}\} = [T_{\epsilon}] \{\epsilon\} \quad (3.11)$$

$$\{\bar{\sigma}\} = [T_{\sigma}] \{\sigma\} \quad (3.12)$$

A matriz dos coeficientes elásticos no sistema global pode ser calculada a partir de sua correspondente no sistema local,

$$[C] = [T_{\epsilon}]^t [\bar{C}] [T_{\epsilon}] \quad (3.13)$$

## 4 FORMULAÇÃO ANALÍTICA DOS MODELOS

---

### 4.1. Introdução

A solução de um problema de análise de tensões exige, além de uma teoria que represente matematicamente o modelo físico, um método de solução das equações que descrevem o problema. O procedimento de solução tanto pode ser analítico quanto numérico.

Dentre os métodos numéricos disponíveis, o método de elementos finitos se constitui, hoje, numa das principais técnicas de solução de problemas da Mecânica dos Sólidos.

Este método consiste, basicamente, na discretização do domínio global, o qual é dividido em subdomínios menores que, reunidos, representarão o domínio do problema que se deseja analisar. Com a discretização, o problema, que inicialmente possuía infinitos graus de liberdade, passa a ser descrito em termos de um número finito de graus de liberdade. O desenvolvimento deste método fundamenta-se no *princípio dos trabalhos virtuais*.

O *princípio dos trabalhos virtuais* será apresentado e em seguida são deduzidas as equações genéricas de elementos finitos. Posteriormente, as equações de um modelo particular são obtidas a partir das equações genéricas.

Conclui-se o capítulo apresentando o cálculo da matriz de rigidez e do vetor carregamento dos modelos de elementos finitos sólidos propostos. Destas matrizes chega-se ao sistema global de equações, cujas incógnitas são os graus de liberdade do modelo discretizado, a partir dos quais obtém-se uma solução aproximada do problema.

## 4.2. Princípio dos Trabalhos Virtuais

Há, na matemática, uma área denominada *cálculo variacional* que se ocupa com as propriedades estacionárias dos funcionais, que são funções que têm outras funções como argumentos. Este ramo da matemática tem por objetivo determinar, dentre todas as funções possíveis, aquela que torna certo funcional estacionário.

O cálculo variacional tem encontrado ampla aplicação na física matemática. Isto se deve ao fato de que são vários os problemas cujas equações que os descrevem são obtidas das condições de extremo de um funcional. Na Mecânica dos Sólidos, por exemplo, as equações diferenciais da elasticidade podem ser obtidas da extremização de funcionais como o da energia potencial total, o da energia complementar total e seus derivados.

O emprego dos métodos variacionais requer, portanto, a existência de um funcional cuja condição de extremo nos forneça as equações diferenciais que regem o problema em estudo. Em muitos problemas o funcional é de difícil obtenção, em outros é inexistente.

Na mecânica dos Sólidos, foi o surgimento do *princípio dos trabalhos virtuais* que possibilitou a obtenção de funcionais e, portanto, o desenvolvimento dos princípios variacionais, hoje extensivamente utilizados em conjunto com o método de elementos finitos na solução aproximada de problemas do *continuum*.

As equações de elementos finitos para modelos de deslocamentos podem ser obtidas diretamente da extremização do funcional da energia potencial total, que deriva do *princípio dos trabalhos virtuais*. Entretanto, a compreensão física do método variacional exige a compreensão dos conceitos envolvidos na formulação do *princípio dos trabalhos virtuais* (PTV).

O PTV pressupõe a existência de um corpo deformável em equilíbrio sob a ação de um carregamento externo e sob condições de contorno conhecidas. Sua formulação envolve dois conceitos básicos: o de campo de tensões estaticamente admissível e o de campo de deslocamentos virtuais cinematicamente admissível.

Um campo de tensões é estaticamente admissível quando satisfaz as equações diferenciais de equilíbrio no interior do corpo e as condições de contorno de tensão em sua superfície.

Este campo de tensões não precisa ser o campo real de tensões existente no corpo deformado. Afinal, a distribuição de tensões num corpo não é completamente determinada pelas condições de equilíbrio e condições de contorno de tensão, mas depende também da relação constitutiva do material. Assim, normalmente há mais de um campo de tensões estaticamente admissível, todos satisfazendo os requisitos de equilíbrio.

Os deslocamentos virtuais, por sua vez, são deslocamentos infinitesimais hipotéticos e cinematicamente admissíveis. Um campo de deslocamentos é cinematicamente admissível quando satisfaz as condições de contorno de deslocamento e é de classe  $C^1$  no interior do corpo. Portanto, os deslocamentos virtuais, aplicados ao corpo a partir de sua configuração de equilíbrio, devem ser nulos nas superfícies onde os deslocamentos reais forem prescritos.

Estes campos de tensões e de deslocamentos fisicamente virtuais são utilizados no cálculo de um trabalho virtual de deformação a partir da configuração de equilíbrio. Admitindo que durante a aplicação dos deslocamentos virtuais as cargas externas permanecem inalteradas, o trabalho virtual das forças externas (forças de corpo e de contato) é dado por (Malvern, 1969)

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_S t_i(\delta u_i) dS + \int_V b_i(\delta u_i) dV \quad (4.1)$$

Escrevendo os componentes do vetor carregamento superficial em termos dos componentes de tensão e do vetor normal à superfície, pode-se, através do teorema de Green, transformar a integral de superfície da equação (4.1) numa integral de volume. Obtém-se, como resultado,

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_V \left[ \sigma_{ij} \delta u_{i,j} + (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i \right] dV \quad (4.2)$$

Como o campo de tensões satisfaz as equações diferenciais de equilíbrio no interior do corpo, o termo entre parênteses se anula, resultando

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_V (\sigma_{ij} \delta u_{i,j}) dV \quad (4.3)$$

Considerando que o tensor tensão é simétrico e que os deslocamentos virtuais são infinitesimais, da equação (4.3) chega-se a

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_V (\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}) dV, \quad (4.4)$$

onde  $\delta \epsilon_{ij}$  é um componente de deformação associado ao campo de deslocamentos virtual  $\delta u$ . O lado direito da equação representa o trabalho interno.

Da equação (4.4) podemos fazer a seguinte afirmação:

*Se o campo de tensões é estaticamente admissível, então o trabalho das forças externas durante um deslocamento virtual cinematicamente admissível (a partir da configuração de equilíbrio) é dado por*

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_V (\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}) dV \quad (4.4)$$

Pode-se, ainda, demonstrar a afirmação inversa (Malvern, 1969):

*Se, para um certo campo de tensões  $\sigma_{ij}$ , o trabalho das forças externas é igual a  $\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV$  para qualquer campo de deslocamentos virtual cinematicamente admissível, então o campo de tensões é estaticamente admissível.*

As duas afirmativas acima formam o *princípio dos trabalhos virtuais*, que pode ser enunciado na seguinte forma:

*Durante um deslocamento virtual cinematicamente admissível tomado a partir da configuração de equilíbrio, o trabalho virtual das forças externas é igual a  $\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV$  se e somente se o campo de tensões for estaticamente admissível.*

A importância deste princípio deve-se ao fato de continuar válido em aplicações com relações constitutivas e deformações quaisquer. De fato, os campos de tensões e deslocamentos utilizados foram supostos independentes. Além disso, enquanto os deslocamentos virtuais eram supostos infinitesimais, nenhuma restrição foi feita quanto à grandeza dos deslocamentos ou deformações reais.

Na Teoria da Elasticidade Linear, que limita-se a problemas com pequenas deformações e pequenas rotações, diversos princípios variacionais foram propostos tomando por base o PTV. Nestes princípios, as equações diferenciais que governam um problema elástico linear são obtidas da extremização de um funcional descrito em termos de deslocamentos, tensões, deformações ou uma combinação destas variáveis.

Os modelos de elementos finitos propostos neste trabalho são formulados a partir do método de deslocamentos. As equações podem, então, ser obtidas da extremização do funcional da energia potencial total. Entretanto, visando preservar o significado físico do método variacional, as equações de elementos finitos serão deduzidas diretamente do PTV.

### 4.3. Equações Genéricas de Elementos Finitos

O princípio dos trabalhos virtuais pode ser utilizado com o objetivo de calcular a resposta de um corpo a certo carregamento. Partindo da expressão matemática deste princípio, pode-se chegar à solução de um problema de elasticidade linear.

Será considerado o equilíbrio de um corpo genérico, conforme representado na Figura 4.1, sob a ação de forças externas de superfície  $f^S$ , de corpo  $f^B$  e concentradas  $f^C$ . Seus componentes, segundo o sistema global de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ , são representados na forma matricial,

$$\{f^B\} = \begin{Bmatrix} f_1^B \\ f_2^B \\ f_3^B \end{Bmatrix}; \quad \{f^S\} = \begin{Bmatrix} f_1^S \\ f_2^S \\ f_3^S \end{Bmatrix}; \quad \{f^{C_i}\} = \begin{Bmatrix} f_1^{C_i} \\ f_2^{C_i} \\ f_3^{C_i} \end{Bmatrix}. \quad (4.5)$$

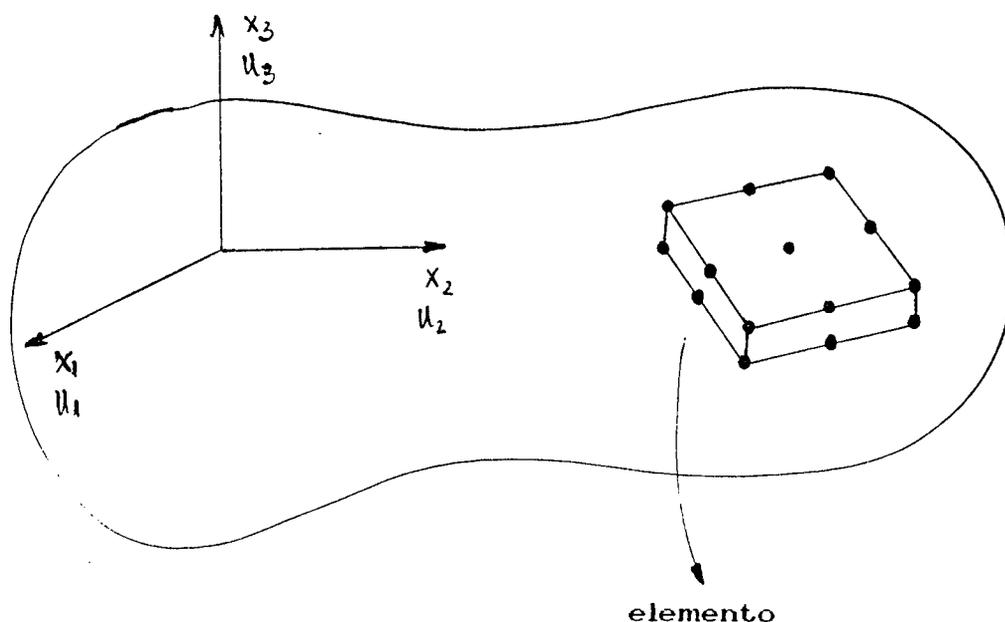


Figura 4.1 Corpo tridimensional genérico (Bathe, 1982, p.120)

Após a aplicação das forças de corpo, de superfície e concentradas, o corpo passa à configuração de equilíbrio. O campo de deslocamentos é descrito pelo vetor

$$\{u\} = \{u_1 \ u_2 \ u_3\}^t \quad (4.6)$$

As cargas externas deformam o corpo e induzem esforços internos. Os campos de tensão e deformação no interior do sólido são dados por

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \tau_{12} \ \tau_{13} \ \tau_{23}\}^t \quad (4.7)$$

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \gamma_{12} \ \gamma_{13} \ \gamma_{23}\}^t \quad (4.8)$$

A partir da configuração de equilíbrio, pode-se impor ao corpo um campo de deslocamentos virtual, descrito pelo vetor

$$\{\delta u\} = \{\delta u_1 \ \delta u_2 \ \delta u_3\}^t \quad , \quad (4.9)$$

responsável por deformações também virtuais dadas por

$$\{\delta \epsilon\} = \{\delta \epsilon_{11} \ \delta \epsilon_{22} \ \delta \epsilon_{33} \ \delta \gamma_{12} \ \delta \gamma_{13} \ \delta \gamma_{23}\}^t \quad , \quad (4.10)$$

onde  $\delta \epsilon_{ij} = 1/2(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$  e  $\delta \gamma_{ij} = 2 \delta \epsilon_{ij}$ .

Feitas estas definições, pode-se agora recorrer à expressão do PTV, segundo o qual

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_V (\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}) dV \Leftrightarrow \sigma_{ij} \text{ é} \quad (4.11)$$

estaticamente admissível

A partir das equações (4.5), (4.7) e (4.10), pode-se reescrever (4.11) sob a forma matricial,

$$\int_S \{f^S\}^t \{\delta u\} dS + \int_V \{f^B\}^t \{\delta u\} dV + \sum_{i=1}^p \{F^{C_i}\}^t \{\delta u_i\} = \int_V \{\sigma\}^t \{\delta \epsilon\} dV, \quad (4.12)$$

onde  $p$  é o número de pontos onde são aplicadas as forças concentradas.

A equação (4.12) expressa uma condição de equilíbrio do corpo deformado. Expressa, em síntese, a condição necessária e suficiente para que um campo de tensões seja estaticamente admissível. Assim, o campo real de tensões é apenas um dentre os que a satisfazem.

Contudo, o PTV, sob a forma da equação (4.12), é incapaz de fornecer a solução para um problema de Mecânica dos Sólidos. De fato, a completa formulação de um problema exige considerações acerca da relação constitutiva do material, condições de contorno e compatibilidade dos deslocamentos. Devemos, portanto, incluir estas condições naquela equação para que o PTV passe a incorporar todos os requisitos envolvidos na análise de um problema de Mecânica dos Sólidos.

Como resultado, será obtida uma equação integral que representa as condições de equilíbrio de um corpo. Descrita agora em termos do campo de tensões real, a equação deve ser válida para qualquer deslocamento virtual cinematicamente admissível.

Pode-se obter uma solução aproximada para o problema, posto sob a forma do PTV, recorrendo ao método de Rayleigh-Ritz. Em sua forma convencional, este método consiste na aproximação da solução por funções, em geral polinômios, definidas no domínio do corpo e descritas em termos de um número finito de coeficientes ou graus de liberdade. Impondo ao corpo um conjunto específico de deslocamentos virtuais, chega-se a um conjunto de equações lineares cujas variáveis são os graus de liberdade utilizados em sua modelagem.

Evidentemente, incorre-se em erros ao se aproximar uma solução com infinitos graus de liberdade por uma solução discreta, com um número finito de graus de liberdade. Contudo, a solução obtida estará tanto mais próxima da solução real quanto maior for o número de graus de liberdade utilizados em sua modelagem. O aumento no número de graus de liberdade do modelo discretizado pode dar-se com o emprego de funções de interpolação de diversas ordens (lineares, quadráticas, cúbicas ou de ordens mais elevadas), ficando os resultados vinculados ao grau da função de interpolação utilizada. Isto se deve ao fato de que a capacidade de um polinômio modelar determinado campo de deslocamentos e/ou tensões aumenta com a elevação do grau deste polinômio.

Entretanto, como normalmente se desconhece as características da solução de um problema genérico, funções suficientemente complexas devem ser empregadas na aproximação da solução real. Em situações práticas, contudo, esta técnica torna-se inviável.

Convém, neste caso, utilizar o Método de Rayleigh-Ritz em sua forma discretizada: o Método de Elementos Finitos. Soluções mais simples são aproximadas em sub-domínios tão pequenos quanto desejados (os elementos finitos) e posteriormente superpostas para então obtermos a solução em todo o domínio.

No método de elementos finitos, as variáveis envolvidas no PTV são aproximadas por polinômios de baixa ordem, cujos coeficientes são graus de liberdade definidos em pontos específicos de seus contornos, os nós. Como resultado, o PTV se transforma num somatório de integrais definidas em cada um dos elementos. Assegurados os requisitos de compatibilidade de deslocamentos e intruduzida a relação constitutiva do material, a equação

(4.12), agora em sua forma discretizada, fornece um sistema de equações lineares em termos dos graus de liberdade nodais. Introduzidas as condições de contorno do problema e resolvido o sistema de equações, os graus de liberdade são determinados, podendo então ser utilizados no cálculo de deformações e tensões.

Será abordado, agora, o procedimento para a obtenção das equações de elementos finitos em um corpo tridimensional em equilíbrio, como representado na *Figura 4.1*. Inicialmente apresentadas de forma genérica, as equações serão particularizadas no item 4.4 conforme as características dos elementos sólidos propostos.

Para se chegar à expressão discretizada do PTV deve-se admitir o corpo da *Figura 4.1* como sendo formado pela montagem de elementos finitos interconectados nos nós.

O campo de deslocamentos no domínio de cada elemento é aproximado pela interpolação dos graus de liberdade, que são deslocamentos nodais. Descrito em termos de coordenadas naturais definidas localmente no elemento, o campo de deslocamentos é dado por

$$\langle u^e(\xi, \eta, \zeta) \rangle = [F(\xi, \eta, \zeta)] \langle \delta \rangle, \quad (4.13)$$

e o campo de deslocamentos virtual representado por

$$\langle \delta u^e(\xi, \eta, \zeta) \rangle = [F(\xi, \eta, \zeta)] \langle \delta_v \rangle, \quad (4.14)$$

onde  $[F]$  é a matriz das funções de interpolação dos graus de liberdade nodais.

Partindo do campo de deslocamentos elementar, dado pela expressão (4.13), obtém-se, da relação deformação-deslocamento, o campo de deformações no interior do elemento,

$$\langle \epsilon^e(\xi, \eta, \zeta) \rangle = [B(\xi, \eta, \zeta)] \langle \delta \rangle. \quad (4.15)$$

Analogamente, o campo de deformações virtual é dado por

$$\langle \delta \epsilon^e(\xi, \eta, \zeta) \rangle = [B(\xi, \eta, \zeta)] \langle \delta_v \rangle, \quad (4.16)$$

onde  $[B^e]$  é a matriz que relaciona o campo elementar de deslocamentos ao vetor dos graus de liberdade de todo o domínio.

As tensões estão associadas às deformações através da relação constitutiva,

$$\langle \sigma^e \rangle = [C] \langle \epsilon^e \rangle \quad , \quad (4.17)$$

que, juntamente com a relação (4.15), fornece a distribuição de tensões em termos dos graus de liberdade nodais:

$$\langle \sigma^e \rangle = [C] [B(\xi, \eta, \zeta)] \langle \delta \rangle \quad . \quad (4.18)$$

Nas equações (4.13) a (4.18) os deslocamentos, deformações e tensões elementares poderiam ter sido escritas em termos apenas dos graus de liberdade nodais do elemento. Contudo, o emprego do vetor dos graus de liberdade do modelo permitirá escrever o PTV sob a forma de um sistema global de equações. Do contrário, ter-se-ia a equação deste princípio escrita como um somatório de sistemas locais de equações que deveriam ser resolvidos simultaneamente.

As integrais da equação (4.12) podem, agora, ser desmembradas em integrais no volume e superfície dos elementos. Tem-se, então,

$$\sum_e \int_{S^e} \langle f^{S^e} \rangle^t \langle \delta u^e \rangle dS^e + \int_{V^e} \langle f^{B^e} \rangle^t \langle \delta u^e \rangle dV^e + \quad (4.19)$$

$$\sum_{i=1}^p \langle f^{C_i} \rangle^t \langle \delta u_i \rangle = \sum_e \int_{V^e} \langle \sigma^e \rangle^t \langle \delta \epsilon^e \rangle dV^e \quad .$$

As integrações em (4.19) são efetuadas no volume ou superfície de cada elemento; por conveniência, pode-se utilizar diferentes sistemas de coordenadas nos cálculos.

Substituindo as expressões (4.14), (4.16) e (4.18) na equação discretizada do PTV obtém-se como resultado a expressão variacional

$$\langle \delta_v \rangle^t \left\{ \sum_{\circ} \int_{V^{\circ}} [B]^t [C] [B] dV^{\circ} \right\} \langle \delta \rangle = \quad (4.20)$$

$$\langle \delta_v \rangle^t \left\{ \sum_{\circ} \int_{V^{\circ}} [F]^t \langle f^{B^{\circ}} \rangle dV^{\circ} + \sum_{\circ} \int_{S^{\circ}} [F]^t \langle f^{S^{\circ}} \rangle dS^{\circ} + \langle F^C \rangle \right\}$$

onde  $\langle F^C \rangle$  é o vetor das forças concentradas correspondentes aos graus de liberdade nodais.

A equação (4.20) pode, ainda, ser escrita na seguinte forma:

$$\langle \delta_v \rangle^t \left\{ [K] \langle \delta \rangle - \langle F \rangle \right\} = 0 \quad , \quad (4.21)$$

$$\text{onde } [K] = \sum_{\circ} \int_{V^{\circ}} [B]^t [C] [B] dV^{\circ} = \sum_{\circ} [K^{\circ}] \text{ e}$$

$$\langle F \rangle = \langle F^B \rangle + \langle F^S \rangle + \langle F^C \rangle = \sum_{\circ} \langle F^{\circ} \rangle .$$

A igualdade em (4.21) deve ser verificada para qualquer deslocamento virtual cinematicamente admissível. Para isso, deve-se ter

$$[K] \langle \delta \rangle = \langle F \rangle \quad (4.22)$$

Os deslocamentos nodais  $\langle \delta \rangle$  não podem ser quaisquer, mas devem satisfazer as condições de contorno de deslocamento. Assim, o campo de deslocamentos do corpo é obtido da solução do sistema linear de equações (4.22) respeitadas as condições contorno do problema.

A matriz de rigidez  $[K]$  e o vetor carregamento  $\langle F \rangle$  globais incorporam as contribuições de todos os elementos. Na prática, contudo, calcula-se as parcelas associadas a cada elemento para em seguida, respeitando suas conectividades, superpô-las. Como resultado, são obtidas as matrizes globais.

## 4.4. Modelos Sólidos Ortotrópicos

### 4.4.1. Os Elementos Finitos Desenvolvidos

As equações de elementos finitos foram obtidas em sua forma genérica. Conhecidas as características de um elemento específico, as matrizes do sistema de equações podem então ser particularizadas.

A partir de características como geometria do elemento, número de nós, graus de liberdade nodais e funções de interpolação, pode-se desenvolver as expressões para o cálculo da matriz de rigidez e do vetor carregamento elementares.

Os modelos propostos neste trabalho constituem uma família de elementos sólidos ortotrópicos isoparamétricos que diferem, basicamente, quanto ao número de nós e ordem das funções de interpolação. Baseados no método de deslocamentos, os elementos têm o campo de deslocamentos aproximado pela interpolação de três graus de liberdade ( $u, v$  e  $w$ ) definidos em cada nó. Na interpolação dos graus de liberdade são utilizadas funções obtidas a partir da combinação de polinômios de Lagrange de primeiro, segundo e terceiro grau.

A geometria quadrangular é descrita por interpolação das coordenadas nodais, sendo utilizadas as mesmas funções de interpolação empregadas na interpolação dos graus de liberdade nodais.

Os elementos da família são obtidos da combinação de nove ou dezesseis nós no plano, com dois, três ou quatro nós na espessura do elemento. Tem-se, como resultado, seis modelos cujas funções de interpolação serão quadráticas ou cúbicas nas coordenadas locais  $\xi$  e  $\eta$  e lineares, quadráticas ou cúbicas na coordenada local  $\zeta$  do elemento. As características básicas de cada um dos elementos da família são apresentadas na *Tabela 4.1*.

Inicia-se a formulação analítica dos modelos descrevendo a geometria e o calculando o campo de deformações no domínio do elemento. O campo de tensões é obtido das deformações através da relação constitutiva do material, que é admitido ser ortotrópico.

Descritos em termos de coordenadas naturais  $(\xi, \eta, \zeta)$  e dos

graus de liberdade nodais, os campos de tensões e deformações são representados em forma matricial e posteriormente utilizados na determinação da matriz de rigidez elementar.

A semelhança entre os elementos da família permite o desenvolvimento de uma formulação analítica genérica que pode facilmente particularizada para cada um dos seis modelos.

Tabela 4.1. Número de pontos de integração dos elementos sólidos

Número de nós		elemento sólido	pontos de integração $(\xi, \eta, \zeta)$	
$\xi$ e $\eta$	$\zeta$		matriz [K]	vetor {F}
3	2	SL-18	3x3x2	3x3
	3	SL-27	3x3x3	3x3
	4	SL-36	3x3x4	3x3
4	2	SL-32	4x4x2	4x4
	3	SL-48	4x4x3	4x4
	4	SL-64	4x4x4	4x4

#### 4.4.2. Geometria dos Elementos

No método de elementos finitos, as derivadas e integrais, embora avaliadas no sistema global de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ , são calculadas, indiretamente, em termos das coordenadas naturais  $(\xi, \eta, \zeta)$ .

A transformação de derivadas e integrais, no sistema global, em operações equivalentes no sistema natural de coordenadas exige a determinação da matriz jacobiana associada à transformação de coordenadas correspondente:  $T(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (x, y, z)$ .

A matriz jacobiana da transformação  $T$  contém as derivadas naturais das coordenadas globais no domínio do elemento:  $x_{i,\xi}$ ,  $x_{i,\eta}$  e  $x_{i,\zeta}$ , com  $i=1,3$ . Conhecidas as coordenadas globais nodais, pode-se interpolá-las no domínio do elemento para, em seguida, serem calculadas suas derivadas naturais.

A partir das funções de interpolação apresentadas no

Apêndice B, as coordenadas globais interpoladas no domínio de um elemento são dadas por

$$x_i = x_{ij} F_j = \{F_i\}^t \{x_i\}, \text{ com } i=1,3, \quad (4.23)$$

onde  $x_{ij}$  = coordenada global do nó  $j$  na direção  $i$ .

As derivadas locais das coordenadas globais são obtidas diferenciando-se as equações (4.23),

$$\begin{aligned} x_{i,\xi} &= x_{ij} F_{j,\xi} = \{F_{i,\xi}\}^t \{x\} \\ x_{i,\eta} &= x_{ij} F_{j,\eta} = \{F_{i,\eta}\}^t \{x\} \\ x_{i,\zeta} &= x_{ij} F_{j,\zeta} = \{F_{i,\zeta}\}^t \{x\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Através das equações (4.24), pode-se avaliar a matriz jacobiana num ponto genérico do elemento,

$$J = \begin{bmatrix} x_{1,\xi} & x_{2,\xi} & x_{3,\xi} \\ x_{1,\eta} & x_{2,\eta} & x_{3,\eta} \\ x_{1,\zeta} & x_{2,\zeta} & x_{3,\zeta} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

#### 4.4.3. Deslocamentos e Deformações Elementares

Nos modelos de deslocamentos, os graus de liberdade são deslocamentos nodais que, interpolados, fornecem uma aproximação para os campos de deslocamentos e deformações no domínio de um elemento. Como nossos elementos são isoparamétricos, utilizaremos as mesmas funções empregadas na interpolação de suas geometrias. Obtém-se então, por interpolação dos graus de liberdade nodais, o campo de deslocamentos elementar,

$$u_i = u_{ij} F_j = \{F_i\}^t \{\delta^e\}, \quad (4.26)$$

onde  $u_{ij}$  = deslocamento do nó  $j$  na direção  $i$ .

O campo de deslocamentos elementar pode ainda ser escrito sob a forma matricial,

$$\{u^e\} = [F^e] \{\delta^e\} \quad (4.27)$$

O campo global de deformações é obtido, conforme a definição matemática de deformação, diferenciando-se o campo global de deslocamentos,

$$\epsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}), \text{ com } i,j,k = 1,3. \quad (4.28)$$

Como a formulação está restrita a problemas com pequenos deslocamentos, os termos não lineares da equação (4.28), por serem de ordem superior, podem ser desprezados. A relação deformação-deslocamento linearizada é dada por

$$\{\epsilon^e\} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^e \\ \epsilon_{22}^e \\ \epsilon_{33}^e \\ \gamma_{12}^e \\ \gamma_{13}^e \\ \gamma_{23}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

As derivadas globais dos deslocamentos são obtidas aplicando-se a regra da cadeia às expressões (4.26). A princípio, tem-se que

$$\begin{bmatrix} u_{1,\xi} & u_{2,\xi} & u_{3,\xi} \\ u_{1,\eta} & u_{2,\eta} & u_{3,\eta} \\ u_{1,\zeta} & u_{2,\zeta} & u_{3,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,\xi} & x_{2,\xi} & x_{3,\xi} \\ x_{1,\eta} & x_{2,\eta} & x_{3,\eta} \\ x_{1,\zeta} & x_{2,\zeta} & x_{3,\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & u_{3,1} \\ u_{1,2} & u_{2,2} & u_{3,2} \\ u_{1,3} & u_{2,3} & u_{3,3} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (4.30) por  $[J]^{-1}$  obtém-se a expressão para as derivadas globais das componentes

de deslocamento,

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & u_{3,1} \\ u_{1,2} & u_{2,2} & u_{3,2} \\ u_{1,3} & u_{2,3} & u_{3,3} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} u_{1,\xi} & u_{2,\xi} & u_{3,\xi} \\ u_{1,\eta} & u_{2,\eta} & u_{3,\eta} \\ u_{1,\zeta} & u_{2,\zeta} & u_{3,\zeta} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Os componentes do tensor deformação podem agora ser obtidos a partir das equações (4.29) e (4.31):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{\circ} = u_{1,1} &= [ J_{11}^{-1} \quad J_{12}^{-1} \quad J_{13}^{-1} ] \begin{bmatrix} u_{1,\xi} \\ u_{1,\eta} \\ u_{1,\zeta} \end{bmatrix} \\ \varepsilon_{22}^{\circ} = u_{2,2} &= [ J_{21}^{-1} \quad J_{22}^{-1} \quad J_{23}^{-1} ] \begin{bmatrix} u_{2,\xi} \\ u_{2,\eta} \\ u_{2,\zeta} \end{bmatrix} \\ \varepsilon_{33}^{\circ} = u_{3,3} &= [ J_{31}^{-1} \quad J_{32}^{-1} \quad J_{33}^{-1} ] \begin{bmatrix} u_{3,\xi} \\ u_{3,\eta} \\ u_{3,\zeta} \end{bmatrix} \\ \gamma_{12}^{\circ} = u_{1,2} + u_{2,1} &= [ J_{21}^{-1} \quad J_{22}^{-1} \quad J_{23}^{-1} ] \begin{bmatrix} u_{1,\xi} \\ u_{1,\eta} \\ u_{1,\zeta} \end{bmatrix} \\ &+ [ J_{11}^{-1} \quad J_{12}^{-1} \quad J_{13}^{-1} ] \begin{bmatrix} u_{2,\xi} \\ u_{2,\eta} \\ u_{2,\zeta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\gamma_{13}^e = u_{1,3} + u_{3,1} = \begin{bmatrix} J_{31}^{-1} & J_{32}^{-1} & J_{33}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,\xi} \\ u_{1,\eta} \\ u_{1,\zeta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} & J_{13}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{3,\xi} \\ u_{3,\eta} \\ u_{3,\zeta} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\gamma_{23} = u_{2,3} + u_{3,2} = \begin{bmatrix} J_{31}^{-1} & J_{32}^{-1} & J_{33}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,\xi} \\ u_{2,\eta} \\ u_{2,\zeta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} & J_{23}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{3,\xi} \\ u_{3,\eta} \\ u_{3,\zeta} \end{bmatrix}$$

onde  $J_{ij}$  é o elemento  $ij$  da matriz  $[J]^{-1}$ .

Nas equações (4.32), as derivadas naturais dos deslocamentos são calculadas a partir das expressões (4.26) ou (4.27). Obtém-se então, destas três equações, a relação deformação-deslocamento:

$$\langle \epsilon^e \rangle = [B^e] \langle \delta^e \rangle, \quad (4.33)$$

que descreve o campo elementar de deformações em termos dos graus de liberdade do elemento. A equação (4.33) é fundamental para o cálculo da matriz de rigidez dos elementos, assunto este a ser abordado no item seguinte.

#### 4.4.4. Matriz de Rigidez Elementar

A partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais foram deduzidas, no item 4.3., as equações genéricas de elementos finitos,

$$[K] \langle \delta \rangle = \langle F \rangle, \quad (4.22)$$

onde a matriz de rigidez global  $[K]$  e o vetor carregamento global  $\{F\}$  são obtidos somando-se as contribuições de cada um dos elementos do domínio. Na prática, entretanto, as matrizes de rigidez elementares e os vetores carregamentos elementares são calculados e posteriormente superpostos.

Na dedução da equação (4.22), tensões e deformações no domínio de um elemento foram descritas em termos dos graus de liberdade do domínio  $(\delta)$ . Chegou-se, contudo, a uma soma de formas quadráticas, cada uma relativa a certo elemento, cujos valores dependiam apenas dos graus de liberdade do respectivo elemento. Assim, cada uma destas formas quadráticas globais possuía uma equivalente de ordem inferior, escrita apenas em termos dos graus de liberdade do elemento  $(\delta^e)$  e de uma matriz de rigidez elementar  $[K^e]$ .

Vê-se, portanto, que a equação global (4.22) pode ser escrita em termos de equações elementares. E isto é o que, na prática, é feito. Calcula-se matrizes de rigidez e vetores carregamentos elementares que, adequadamente superpostos, fornecem, respectivamente, a matriz  $[K]$  e o vetor  $\{F\}$ .

A parcela da matriz de rigidez global  $[K]$  associada a certo elemento pode ser obtida diretamente da matriz de rigidez elementar  $[K^e]$ . Para tanto, deve-se respeitar a conectividade ou correspondência entre nós globais (do domínio) e locais (do elemento) para cada elemento. Analogamente à equação (4.21), a matriz de rigidez elementar é dada por

$$[K^e] = \int_V [B^e]^t [C] [B^e] dV \quad (4.34)$$

Embora o integrando da equação (4.34) seja escrito em termos das coordenadas naturais do elemento, a integral deve ser calculada no sistema global de coordenadas. Deve-se, portanto, proceder a uma transformação de coordenadas. Como resultado, a integral acima será dada por

$$[K^e] = \int_{\xi} \int_{\eta} \int_{\zeta} [B^e]^t [C] [B^e] |\det J| d\xi d\eta d\zeta \quad (4.35)$$

A integral da equação (4.35) é avaliada através do método de integração de Gauss-Legendre. O número de pontos de integração necessários à integração numérica é fornecido na Tabela 4.1 para cada um dos modelos de elementos finitos.

#### 4.4.5. Vetor Carregamento Elementar

Nas equações genéricas de elementos finitos (4.22), o vetor carregamento global  $\{F\}$  incorpora a contribuição dos esforços externos aplicados em cada um dos elementos do domínio. Como a matriz de rigidez global, ele será determinado através da superposição dos vetores elementares, calculados separadamente para cada elemento.

Da discretização do PTV chegou-se à seguinte expressão para o vetor carregamento global,

$$\{F\} = \{F^B\} + \{F^S\} + \{F^C\} \quad (4.21)$$

Neste trabalho desprezaremos o efeito das forças de corpo. Como resultado,

$$\{F\} = \{F^S\} + \{F^C\} \quad (4.36)$$

O vetor carregamento concentrado,  $\{F^C\}$ , é obtido diretamente dos dados do problema, enquanto a parcela do carregamento associada às cargas distribuídas,  $\{F^S\}$ , é dada por

$$\{F^S\} = \sum_e \left[ \int_{S^e} [F^e]^t \{f^{S^e}\} dS^e \right] \quad (4.37)$$

Na prática, os vetores carregamento elementares serão calculados,

$$\{F^{S^e}\} = \left[ \int_{S^e} [F^e]^t \{f^{S^e}\} dS^e \right] \quad , \quad (4.38)$$

para então, por superposição, determinar-se o vetor global  $\{F^S\}$ .

Na equação (4.38) as forças de superfície em um elemento genérico podem ser interpoladas a partir dos valores nodais,

$$f_i^{S_e} = S_{ij} F_j \quad (\text{com } i=1,3 \text{ e } j=1,nne), \quad (4.39)$$

ou ainda

$$\{f_i^{S_e}\} = [S] \{\bar{F}\}, \quad (4.40)$$

onde  $S_{ij}$  = componente da força no nó  $j$  segundo a direção  $i$ .

A integral em (4.38) deve ser avaliada no sistema global de coordenadas. Convém, entretanto, realizar uma transformação de coordenadas para então serem efetuados os cálculos em termos das coordenadas naturais. Como resultado, tem-se que

$$\{F^{S^e}\} = \int_{S^e} [F^e]^t \{f^{S^e}\} |\det J| dS^e \quad (4.41)$$

O integrando da equação (4.41) contém funções em  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ . A integral é calculada através do método numérico de Gauss-Legendre de integração. O número de pontos de integração utilizados na integração é apresentado na *Tabela 4.1*.

## 5 CÁLCULO DE TENSÕES

---

### 5.1. Introdução

Como os modelos de elementos finitos apresentados foram formulados a partir do método de deslocamentos, todas as variáveis foram descritas em termos de graus de liberdade de deslocamento definidos nos nós do elemento. Chegou-se, assim, a um sistema linear de equações cuja solução nos fornece os graus de liberdade nodais e, portanto, o campo de deslocamentos no domínio do corpo.

Conhecido o campo de deslocamentos no domínio de cada elemento, tensões e deformações podem então ser calculadas. Os componentes do tensor deformação estão associados ao campo de deslocamentos através da relação deformação-deslocamento, enquanto os componentes do tensor tensão podem ser calculados através da relação constitutiva do material.

O método de deslocamentos, entretanto, assegura continuidade interelementar apenas para a distribuição de deslocamentos. A continuidade interelementar para os campos de tensão e deformação deve ser obtida através de algum método de suavização.

Inicia-se este capítulo apresentando o procedimento de cálculo de tensões a partir do campo de deslocamentos. Duas técnicas serão apresentadas: o cálculo de tensões através da relação constitutiva e o cálculo através da integração das equações diferenciais de equilíbrio.

Ao final do capítulo apresenta-se o método de suavização do campo de tensões no domínio do corpo.

## 5.2. Cálculo de Tensões Através da Relação Constitutiva

Resolvendo-se o sistema global de equações de elementos finitos obtém-se os deslocamentos nodais do modelo. A partir destes e da relação deformação-deslocamento, o campo de deformações pode ser calculado. As tensões são então obtidas em cada elemento através da relação tensão-deformação. É este o procedimento de cálculo de tensões através da relação constitutiva, em que o campo de tensões é calculado indiretamente a partir do campo de deslocamentos.

O campo de tensões num elemento finito está associado ao campo de deformações através da relação constitutiva do material,

$$\langle \sigma^e \rangle = [C] \langle \epsilon^e \rangle \quad (5.1)$$

O campo de deformações é descrito em termos dos graus de liberdade nodais a partir da relação deformação-deslocamento,

$$\langle \epsilon^e \rangle = [B^e] \langle \delta^e \rangle \quad (4.33)$$

Das equações (5.1) e (4.33) obtém-se o campo elementar de tensões relativamente ao sistema global de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ ,

$$\langle \sigma^e \rangle = [C] [B^e] \langle \delta^e \rangle \quad (5.2)$$

Na expressão (5.2) o campo de tensões é uma função das coordenadas locais  $(\xi, \eta, \zeta)$ , o que permite calcular os componentes de tensão em qualquer ponto no domínio do elemento. Há, contudo, conforme demonstrou Barlow (1976), pontos ótimos em que as tensões são calculadas com maior precisão. Sua metodologia foi aplicada a alguns modelos clássicos e constatou-se que os pontos ótimos são os pontos de Gauss em uma ordem inferior aos utilizados na integração numérica da matriz de rigidez. Na *Tabela 5.1* encontra-se o número de pontos utilizados na recuperação de tensões em cada um dos modelos desenvolvidos.

As tensões calculadas nos pontos ótimos são extrapoladas para o restante do domínio do elemento. Não se pode assegurar,

contudo, a continuidade do campo de tensões nas interfaces dos elementos. No entanto, há procedimentos para suavização das tensões que consistem, basicamente, em aproximar os campos elementares descontínuos por um campo contínuo em todo o domínio do corpo.

O procedimento de suavização será estudado no item 5.4. Antes, porém, será apresentada uma metodologia alternativa de cálculo das tensões cisalhantes transversais, que consiste na integração das equações diferenciais de equilíbrio ao longo da espessura do elemento.

*Tabela 5.1* Número de pontos de recuperação de tensão

Interpolação na espessura	Modelo Sólido Isoparamétrico	Número de Pontos nas Direções $\xi, \eta$ e $\zeta$
Linear*	SL-18	2x2x2
	SL-32	3x3x2
Quadrática	SL-27	2x2x2
	SL-48	3x3x2
Cúbica	SL-36	2x2x3
	SL-64	3x3x3

\* O número de pontos de recuperação de tensão na espessura destes elementos não foi reduzido, sob a pena de inviabilizar a integração das equações diferenciais de equilíbrio na espessura dos elementos.

### 5.3. Integração das Equações Diferenciais de Equilíbrio

No item anterior mostrou-se como calcular o campo de tensões através da relação constitutiva. Há, ainda, um procedimento alternativo de cálculo dos componentes transversais de

tensão:  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\sigma_{zz}$ . A técnica, que consiste na integração das equações diferenciais de equilíbrio, foi introduzida no método de elementos finitos por Pryor & Barker (1971). Esta técnica consiste, em outras palavras, na imposição das condições de equilíbrio ao longo da espessura da estrutura.

Sabe-se, da Mecânica dos Sólidos, que num corpo em equilíbrio estático as equações abaixo são satisfeitas em todo o domínio,

$$\begin{aligned}\sigma_{11,1} + \tau_{12,2} + \tau_{13,3} + b_1 &= 0 \\ \tau_{21,1} + \sigma_{22,2} + \tau_{23,3} + b_2 &= 0 \\ \tau_{31,1} + \tau_{32,2} + \sigma_{33,3} + b_3 &= 0\end{aligned}\tag{5.3}$$

onde as tensões e as derivadas parciais são relativas a um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais  $(x_1, x_2, x_3)$  arbitrariamente orientado.

Considerando desprezável o efeito da força de corpo e admitindo conhecidas as distribuições das tensões de membrana ( $\sigma_{11}$ ,  $\tau_{12}$  e  $\sigma_{22}$ ), da integração das duas primeiras equações em (5.3) obtém-se as tensões  $\tau_{13}$  e  $\tau_{23}$  em termos da coordenada local  $x_3$ ,

$$\tau_{13} = - \int_a^b \left[ \sigma_{11,1} + \tau_{12,2} \right] dx_3 + C_1\tag{5.4}$$

$$\tau_{23} = - \int_a^b \left[ \tau_{21,1} + \sigma_{22,2} \right] dx_3 + C_2$$

onde as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$  representam, respectivamente, as tensões  $\tau_{13}$  e  $\tau_{23}$  no ponto com coordenada  $x_3=a$ .

Na aplicação destas equações aos modelos de elementos finitos, o sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  será definido localmente em cada ponto de recuperação de tensão, sendo o eixo  $x_3$  normal à superfície inferior do elemento, que é tomada como superfície de referência.

Embora conceitualmente simples, a integração numérica das equações diferenciais de equilíbrio envolve muitos cálculos.

Derivadas locais de componentes locais de tensão devem ser calculadas a partir de componentes globais de tensão; posteriormente, uma integração numérica deve ser efetuada. A quantidade de cálculos é, portanto, em muito superior à exigida no cálculo de tensões a partir da relação constitutiva.

Quanto à precisão da técnica de integração numérica, nada se pode afirmar, podendo ser vantajosa em elementos lineares na espessura. Em elementos quadráticos ou cúbicos na espessura poderá ser mais vantajoso o emprego direto da relação constitutiva no cálculo das tensões.

Além disso, este método envolve derivadas das tensões de membrana que, por sua vez, são calculadas a partir de derivadas do campo de deslocamentos. Assim, o cálculo das tensões transversais através do método de integração envolve derivadas de segunda ordem do campo de deslocamentos. E como os modelos desenvolvidos são de deslocamentos, pode-se apenas afirmar que a solução para os deslocamentos deve convergir com o refino da malha. Nada se pode afirmar, contudo, quanto à convergência das derivadas dos deslocamentos.

Vê-se, portanto, que o cálculo de tensões transversais através da integração das equações diferenciais de equilíbrio, além de dispendioso é, em grande parte, imprevisível. Aplicando esta metodologia a problemas com soluções conhecidas pode-se comparar seus resultados com os obtidos diretamente da relação constitutiva.

## 5.4. Suavização do Campo de Tensões

### 5.4.1. Descontinuidade no Campo de Tensões

As formulações dos modelos de elementos finitos sólidos não asseguram continuidade no campo de tensões nas interfaces dos elementos. Valores distintos são obtidos quando calculamos as tensões em um nó a partir de cada um dos elementos que o compartilham. O cálculo das tensões nodais exige a suavização do campo de tensões, quando então o campo descontínuo é aproximado por um

campo de tensões contínuo no domínio do corpo.

Os elementos finitos propostos foram formulados, indiretamente, a partir do Princípio da Energia Potencial Total, cujo funcional é escrito em termos dos deslocamentos nodais. Como em elementos sólidos os graus de liberdade são independentes, a expressão do funcional contém, no máximo, derivadas de primeira ordem, o que permite o emprego de funções de interpolação de classe  $C^0$ . Embora mais eficientes, estas funções asseguram continuidade interelementar somente para o campo de deslocamentos.

As tensões calculadas em pontos internos do elemento e extrapoladas para os nós são descontínuas nas interfaces de elementos adjacentes. Como normalmente deseja-se determinar as tensões nodais, deve-se utilizar um procedimento para a suavização do campo de tensões descontínuo.

Diversas técnicas de suavização de tensões têm sido propostas, como as apresentadas por Hinton & Campbell (1974) e Hinton *et alli* (1975). Um procedimento bastante simples consiste na aproximação da tensão em cada nó pela média aritmética das tensões nodais de todos os elementos que compartilham aquele nó. Há aplicações, entretanto, conforme resultados apresentadas por estes autores, em que esta técnica leva a erros intoleráveis. Um outro procedimento de suavização consiste no emprego do método de mínimos quadrados: o campo de tensões contínuo é obtido minimizando-se o somatório dos quadrados dos erros no domínio.

A suavização por mínimos quadrados pode ser aplicada a cada elemento isoladamente (suavização local) ou estendida a todo o domínio da estrutura (suavização global).

Na suavização local, o quadrado do erro é minimizado no domínio de cada elemento tomado isoladamente e as tensões em cada nó são calculadas por média aritmética dos diferentes valores nodais. Na suavização global, o erro é minimizado em todo o domínio da estrutura. Apesar de seu maior custo computacional, a suavização global tem a vantagem de levar em consideração as dimensões relativas de elementos adjacentes, favorecendo o cálculo de valores nodais mais representativos.

Considerando prioritária a precisão dos resultados à economia de cálculos, optou-se pelo emprego da técnica de suavização global das tensões.

Os fundamentos do método de mínimos quadrados serão apre-

sentados e em seguida aplicados à suavização de um campo de tensões descontínuo.

#### 5.4.2. Suavização de Funções por Mínimos Quadrados

A avaliação das tensões nodais nos modelos de deslocamentos exige o emprego de algum método de suavização. Embora contínuo no interior de cada elemento, o campo de tensões é descontínuo em suas interfaces.

A técnica de suavização consiste em, partindo-se de uma função seccionalmente contínua em certo domínio, aproximá-la por uma função contínua neste domínio. Dentre as técnicas de suavização, o método convencional de mínimos quadrados propõe uma função suavizante, em geral um polinômio, cujos coeficientes devem ser determinados,

$$g(x,y) = a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + \dots = a_{ij} (x)^i (y)^j \quad (5.5)$$

com  $i=1,q$  e  $j=0,q$ . A ordem do polinômio suavizante é dada pelos valores de  $p$  e  $q$ .

Sendo  $\hat{\sigma}(x,y)$  a função seccionalmente contínua, o polinômio suavizante deve minimizar o funcional

$$\psi = \iint_A \left[ \hat{\sigma}(x,y) - g(x,y) \right]^2 dx dy \quad (5.6)$$

Os coeficientes  $a_{ij}$  são, portanto, aqueles que minimizam o quadrado do erro entre as funções  $\hat{\sigma}(x,y)$  e  $g(x,y)$  no domínio. Seus valores são calculados a partir do sistema linear de equações obtido das condições de mínimo de uma função de múltiplas variáveis,

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_{ij}} = 0 \quad , \text{ com } i=0,p \text{ e } j=0,q \quad (5.7)$$

### 5.4.3. Formulação de Mínimos Quadrados para Elementos Finitos

Em problemas de elasticidade, o procedimento convencional de suavização de tensões por mínimos quadrados não é considerado adequado. A imprevisibilidade das funções a serem suavizadas exigiria o emprego de polinômios suavizantes de grau elevado, tornando dispendioso o procedimento de suavização.

Um procedimento alternativo consiste na associação do método de mínimos quadrados à principal característica do método de elementos finitos: a técnica de discretização.

No método de mínimos quadrados discretizado, a função suavizante  $g(x,y)$  é representada por uma função seccionalmente contínua no domínio global. Utiliza-se, para tanto, funções de interpolação definidas no domínio de cada elemento.

No caso em que a função a ser suavizada é um campo de tensões, a função suavizante elementar é dada por

$$g(\xi, \eta, \zeta) = \bar{\sigma}_i F_i = \langle \bar{\sigma}^e \rangle^t \langle \bar{F} \rangle \quad , \quad (5.8)$$

onde  $\bar{\sigma}_i$  e  $F_i$  são, respectivamente, a tensão suavizada e a função de interpolação associadas ao nó  $i$ , com  $i=1, NNE$ .

O campo de tensões a ser suavizado, que é descontínuo nas interfaces dos elementos, é obtido por extrapolação dos valores calculados nos pontos de recuperação de tensão,

$$\hat{\sigma}(\xi, \eta, \zeta) = \hat{\sigma}_i \hat{F}_i = \langle \hat{\sigma}^e \rangle \langle \hat{F} \rangle \quad , \quad (5.9)$$

onde  $\hat{\sigma}_i$  e  $\hat{F}_i$  são, respectivamente, a tensão e a função de interpolação associadas ao ponto de recuperação de tensão  $i$ .

O erro entre os campos de tensões contínuo e descontínuo é dado por

$$e(\xi, \eta, \zeta) = \hat{\sigma}(\xi, \eta, \zeta) - g(\xi, \eta, \zeta) \quad , \quad (5.10)$$

e a suavização do campo de tensões reduz-se à minimização do funcional  $\psi$ , agora em sua forma discretizada:

$$\psi = \sum_{\sigma} \int_{V^{\sigma}} e^2(x,y,z) dx dy dz = \quad (5.11)$$

$$\sum_{\sigma} \int_{V^{\sigma}} e^2(\xi,\eta,\zeta) |\det J| d\xi d\eta d\zeta$$

Das equações (5.10) e (5.11) obtém-se, após algumas simplificações, a parcela do funcional relativa a apenas um elemento,

$$\psi^{\sigma} = \int_{V^{\sigma}} g^2(\xi,\eta,\zeta) |\det J| d\xi d\eta d\zeta - \quad (5.12)$$

$$2 \int_{V^{\sigma}} g(\xi,\eta,\zeta) \hat{\sigma}(\xi,\eta,\zeta) |\det J| d\xi d\eta d\zeta + C, \quad ,$$

onde C é uma constante.

O funcional acima pode ser escrito sob a forma matricial,

$$\psi^{\sigma} = \langle \bar{\sigma}^{\sigma} \rangle^t \left[ \int_{V^{\sigma}} \langle F \rangle \langle F \rangle^t |\det J| d\xi d\eta d\zeta \right] \langle \bar{\sigma}^{\sigma} \rangle - \quad (5.13)$$

$$2 \langle \bar{\sigma}^{\sigma} \rangle^t \left[ \int_{V^{\sigma}} \langle F \rangle \langle \hat{F} \rangle^t \langle \hat{\sigma} \rangle |\det J| d\xi d\eta d\zeta \right] + C$$

Efetuada as integrações em (5.13), chega-se à seguinte expressão matricial para  $\psi^{\sigma}$ :

$$\psi^{\sigma} = \langle \bar{\sigma}^{\sigma} \rangle^t [S^{\sigma}] \langle \bar{\sigma} \rangle - 2 \langle \bar{\sigma}^{\sigma} \rangle^t \langle T^{\sigma} \rangle + C \quad (5.14)$$

Na equação (5.14) a matriz  $[S^{\sigma}]$  é denominada matriz de sua-  
vização e  $\langle T^{\sigma} \rangle$  é o vetor de coeficientes, com

$$[S^e] = \int_{V^e} \langle \bar{F} \rangle \langle \bar{F} \rangle^t |\det J| d\xi d\eta d\zeta \quad (5.15)$$

$$\langle T^e \rangle = \int_{V^e} \langle \bar{F} \rangle \langle \hat{F} \rangle^t \langle \hat{\sigma}^e \rangle |\det J| d\xi d\eta d\zeta \quad (5.16)$$

As tensões nodais são calculadas a partir da extremização da expressão (5.14), obtidas das condições de extremo de uma função de múltiplas variáveis,

$$\partial\psi/\partial\bar{\sigma}_i = 0 \quad (5.17)$$

Das equações (5.14) a (5.16) chega-se ao sistema de equações lineares,

$$[S^e] \langle \bar{\sigma}^e \rangle = \langle T^e \rangle \quad (5.18)$$

Tomada isoladamente, a equação (5.18) não possui qualquer significado físico. Como a suavização deve ser feita em todo o domínio da estrutura, o funcional global  $\psi$  é que deveria ser extremizado. De fato, é o funcional global que deve ser determinado. Contudo, pode-se calculá-lo, a exemplo do que foi feito com o *princípio dos trabalhos virtuais*, através da soma dos funcionais definidos no domínio de cada elemento. As matrizes globais resultantes de sua extremização poderão ser obtidas superpondo-se as matrizes elementares  $[S^e]$  e  $\langle T^e \rangle$  da equação (5.18), desde que seja respeitada a conectividade dos elementos.

Da superposição das equações elementares resulta o sistema global de equações lineares

$$[S^g] \langle \bar{\sigma} \rangle = \langle T \rangle \quad (5.19)$$

cuja solução fornece as tensões nodais suavizadas.

As matrizes do sistema de equações (5.19) são calculadas por integração numérica.

Cada termo da matriz de suavização  $[S]$  é o produto de duas funções de interpolação do elemento. Sua integração exata é

obtida com o mesmo número de pontos de Gauss utilizados no cálculo da matriz de rigidez.

A matriz de coeficientes  $\langle T \rangle$ , cujos termos são produtos de uma função de interpolação com um polinômio um grau inferior, é integrada de forma exata com quadratura gaussiana em uma ordem inferior à utilizada no cálculo da matriz de suavização [S].

Na avaliação da quadratura gaussiana, admitiu-se que os elementos não seriam distorcidos. Neste caso, a matriz jacobiana será constante em cada elemento. Em malhas distorcidas, convém rever o esquema de integração utilizado na cálculo do vetor  $\langle T \rangle$ , de forma a se obter precisão na integração numérica.

## 6 RESULTADOS, COMPARAÇÕES E ANÁLISES

---

### 6.1. Introdução

Neste capítulo, apresenta-se e discute-se o desempenho dos elementos sólidos quando aplicados à análise estática de placas isotrópicas, ortotrópicas e laminadas. Como os modelos de elementos finitos são tridimensionais, os resultados numéricos podem ser comparados com os da teoria da elasticidade.

Os casos analisados consistem em placas espessas ou semi-espessas. Esta restrição é justificada pelo elevado custo computacional destes elementos quando comparados a outros, mais simples e eficientes, desenvolvidos especificamente para a análise de placas finas.

Como quaisquer outros, estes elementos possuem características próprias que, dependendo das condições de uso, podem traduzir-se em vantagens ou desvantagens comparativamente a outros elementos. Algumas de suas características já podem ser identificadas durante a formulação; outras, entretanto, só serão conhecidas após uma avaliação criteriosa do desempenho de cada um destes elementos em diferentes aplicações.

Dada a inexistência de informações disponíveis sobre os elementos finitos propostos, escolheu-se, na fase de qualificação, um conjunto de casos julgados necessários à determinação de suas características básicas.

Inicia-se a análise com aplicações em placas isotrópicas engastadas e simplesmente apoiadas, apresentando-se curvas de convergência para tensões e deslocamentos. Em seguida, faz-se uma abordagem semelhante em placas ortotrópicas simplesmente su-

portadas, sendo analisados modelos com diversos valores para  $a/h$  e  $E_x/E_y$ . Conclui-se o capítulo com a análise de placas simetricamente laminadas e simplesmente suportadas.

Na apresentação dos resultados recorre-se com frequência à expressão *refino de malha*, que deve ser entendido como aumento no número de nós do domínio discretizado. Cabe ressaltar que em todos os casos analisados utilizou-se um refino uniforme da malha.

Algumas das características de cada elemento e a legenda utilizada na apresentação dos resultados encontram-se na *tabela 6.1*.

*Tabela 6.1* Legenda e características básicas dos elementos

Elemento	Legenda	Funções de Interpolação	N <sup>o</sup> de Nós
SL-18		lineares na espessura quadráticas no plano	18
SL-32		lineares na espessura cúbicas no plano	32
SL-27		quadráticas na espessura quadráticas no plano	27
SL-48		quadráticas na espessura cúbicas no plano	48
SL-36		cúbicas na espessura quadráticas no plano	36
SL-64		cúbicas na espessura cúbicas no plano	64

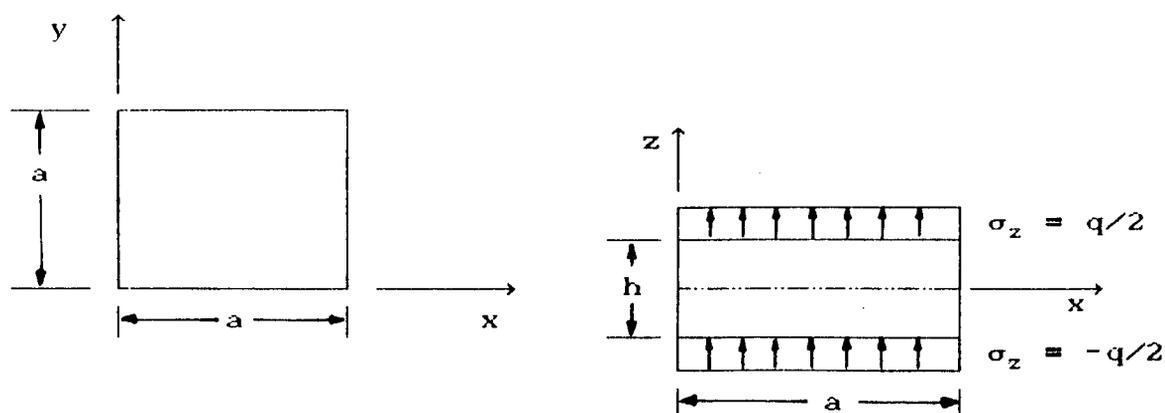
## 6.2. Placa Isotrópica

Inicialmente, será avaliado o comportamento dos elementos quando aplicados à análise de placas isotrópicas quadradas sob carregamento uniformemente distribuído. Os resultados numéricos são então comparados com a solução analítica da elasticidade apresentada por Srinivas & Rao (1973). A geometria e o carregamento dos casos analisados são apresentados na *figura 6.1*.

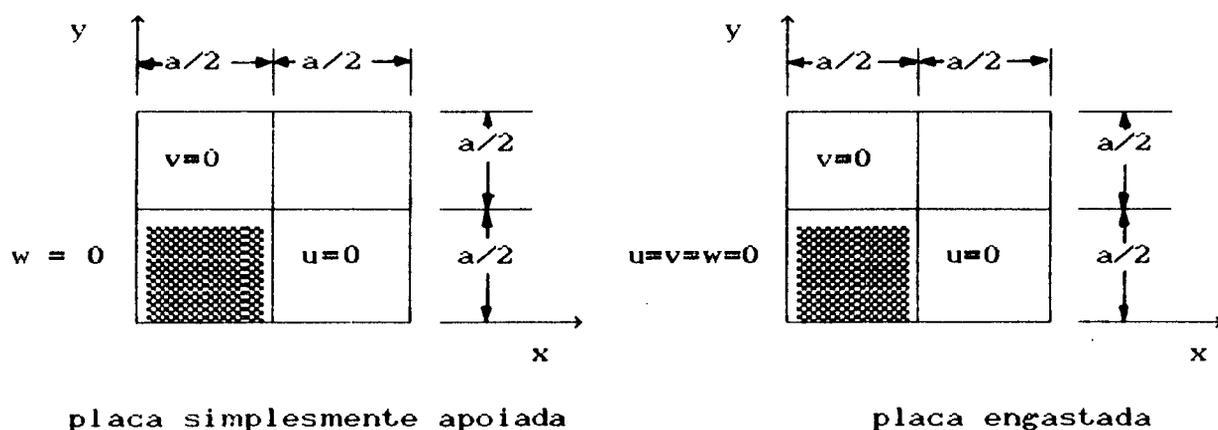
Como a estrutura apresenta dois planos verticais de simetria para a geometria, carregamento e condições de contorno, apenas um quarto da placa é analisado.

Na *figura 6.2* são apresentadas as condições de contorno e a geometria do domínio discretizado. As malhas utilizadas são regulares: não há distorção nos elementos, que são iguais entre si.

Na análise de placas isotrópicas, parte-se de placas simplesmente apoiados para, em seguida, abordar alguns casos de placas engastadas.



*Figura 6.1* Placa isotrópica quadrada: geometria e carregamento;  $\nu = 0,30$ .



placa simplesmente apoiada

placa engastada

*Figura 6.2.* Placa isotrópica: domínio discretizado e condições de contorno.

### 6.2.1. Placa Isotrópica Simplesmente Apoiada

Nos casos analisados, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e para a tensão  $\sigma_x$  são apresentados sob a forma de curvas de convergência.

Em cada uma das figuras que seguem, o número de nós no plano  $x$ - $y$  é constante, variando apenas o número de nós na espessura do domínio. Obtem-se, com isso, curvas para o erro percentual da solução numérica relativamente à solução analítica.

A *figura 6.3* mostra que, para uma malha grosseira no plano  $x$ - $y$ , o erro no cálculo do deslocamento transversal  $w$  decresce à medida que crescem os graus dos polinômios de interpolação utilizados.

Com o aumento do número de nós no plano, esta observação somente continua válida quando se aumenta a ordem das função de interpolação na espessura do elemento. Portanto, para um dado número de nós na espessura do elemento, os resultados obtidos com polinômios quadráticos ou cúbicos no plano tendem a igualar-se em malhas suficientemente refinadas no plano.

A *figura 6.4* nos mostra que, com o aumento da relação  $a/h$ , cresce o erro percentual em  $w$ . O fenômeno de travamento por cisalhamento pode estar ocorrendo neste caso: com a superestimação das tensões cisalhantes transversais, a estrutura apresenta deslocamentos transversais inferiores aos valores esperados. Este fenômeno poderá ser avaliado com profundidade em trabalhos que se proponham a analisar especificidades dos elementos sólidos propostos.

As curvas de convergência para a tensão  $\sigma_x$  são apresentadas na *figura 6.5*. Neste caso, o refino na espessura do modelo é uma condição necessária para a convergência dos resultados. Pode-se observar, ainda, que os elementos com funções de interpolação cúbicas no plano são pouco sensíveis ao refino da modelo no plano  $x$ - $y$ , apresentando bons resultados com malhas razoavelmente grosseiras naquele plano. Os elementos com funções quadráticas no plano  $x$ - $y$  exigem, entretanto, um maior refino da malha neste plano.

Com o aumento da relação  $a/h$ , o refino na espessura da placa já não é uma condição imprescindível à obtenção de bons resultados para a tensão  $\sigma_x$ . Pode-se constatar, da *figura 6.6*,

que os resultados permanecem praticamente inalterados com o refino na espessura, exceção feita aos elementos lineares na espessura, para os quais este refino implica numa diminuição significativa do erro.

Todos estes resultados mostram que são inúmeras as variáveis envolvidas nos casos analisados. Isto sugere a importância de se reunir, numa síntese, as informações anteriores.

### *Síntese dos Resultados*

Em placas isotrópicas espessas simplesmente apoiadas, os resultados para  $w$  e  $\sigma_x$  convergem para a solução exata à medida que o domínio é refinado tanto no plano quanto na espessura. As curvas de convergência, contudo, apresentam características que dependem da ordem das funções de interpolação do elemento bem como da variável analisada.

Das curvas de convergência para o deslocamento transversal  $w$  (*figuras 6.3 e 6.4*), observa-se que quanto maior a ordem das funções de interpolação, menor o refino necessário à convergência dos resultados, ou seja, menor a sensibilidade do elemento ao refino. Assim, os elementos cúbicos na espessura são praticamente insensíveis ao refino na espessura da placa. Analogamente, os elementos com polinômios cúbicos no plano apresentam pequena sensibilidade ao refino do domínio no plano  $x-y$ .

Com o aumento da relação  $a/h$  há uma redução na intensidade das tensões cisalhantes transversais. Entretanto, os modelos de deslocamentos geralmente superavaliam estes valores. Este fenômeno, denominado "locking" ou travamento por cisalhamento, pode ser a explicação para a excessiva rigidez transversal demonstrada pelos resultados da *figura 6.4* quando comparados aos da *figura 6.3*.

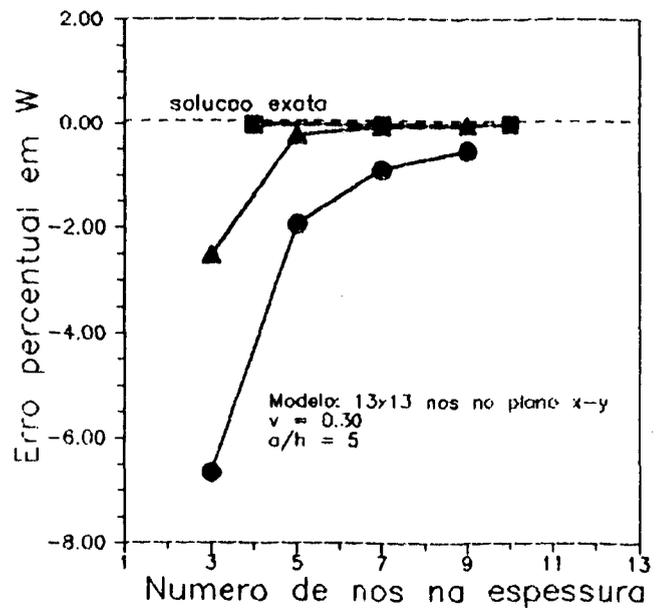
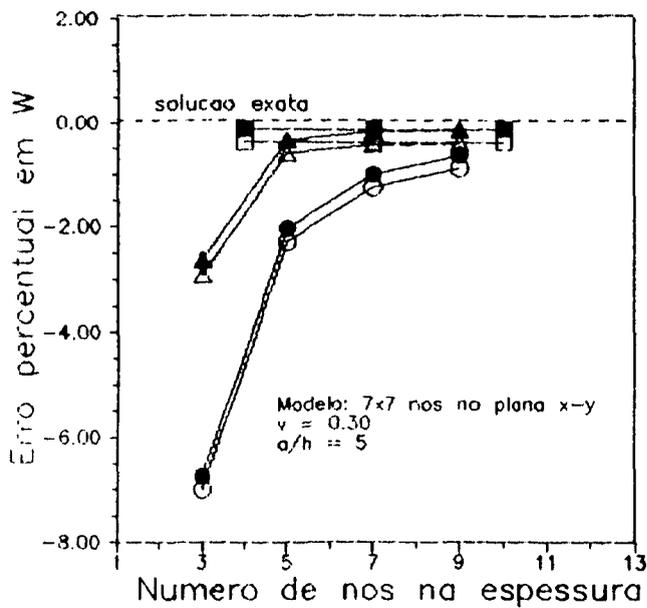


Figura 6.3 Convergência para  $w(a/2, a/2, 0)$  numa placa isotrópica quadrada simplesmente apoiada sob carregamento distribuído uniforme;  $a/h = 5$ .

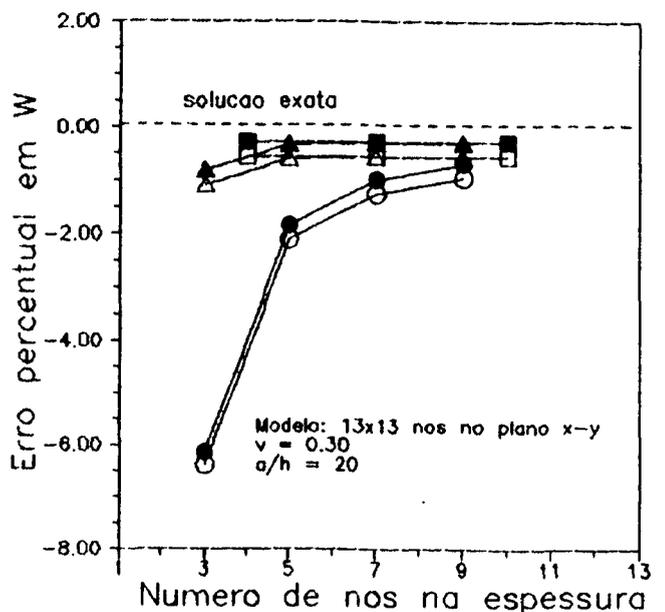
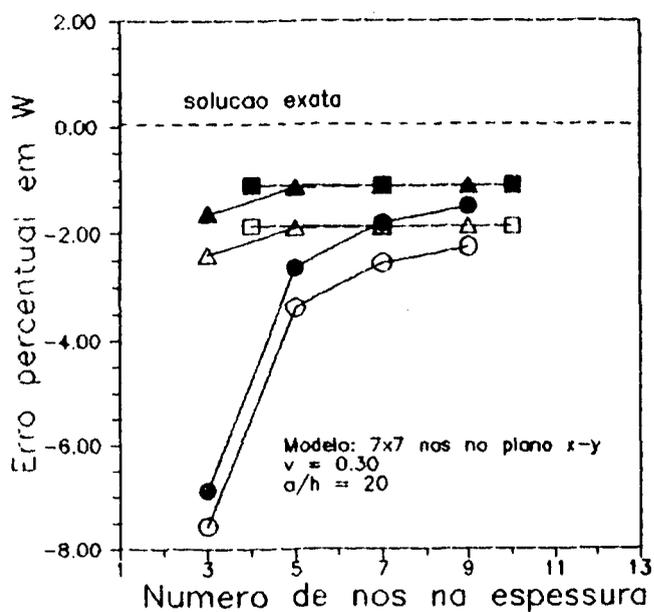


Figura 6.4 Convergência para  $w(a/2, a/2, 0)$  numa placa isotrópica quadrada simplesmente apoiada sob carregamento distribuído uniforme;  $a/h = 20$ .

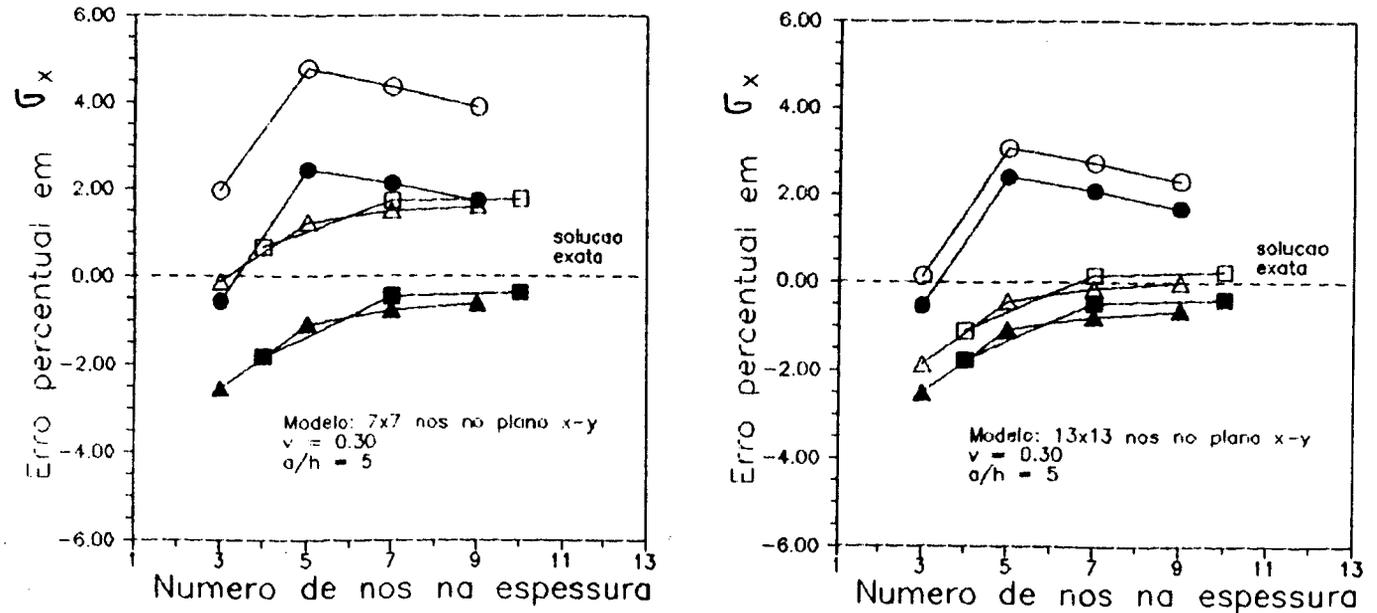


Figura 6.5 Convergência para  $\sigma_x(a/2, a/2, h/2)$  numa placa isotrópica quadrada simplesmente apoiada sob carregamento distribuído uniforme;  $a/h = 5$ .

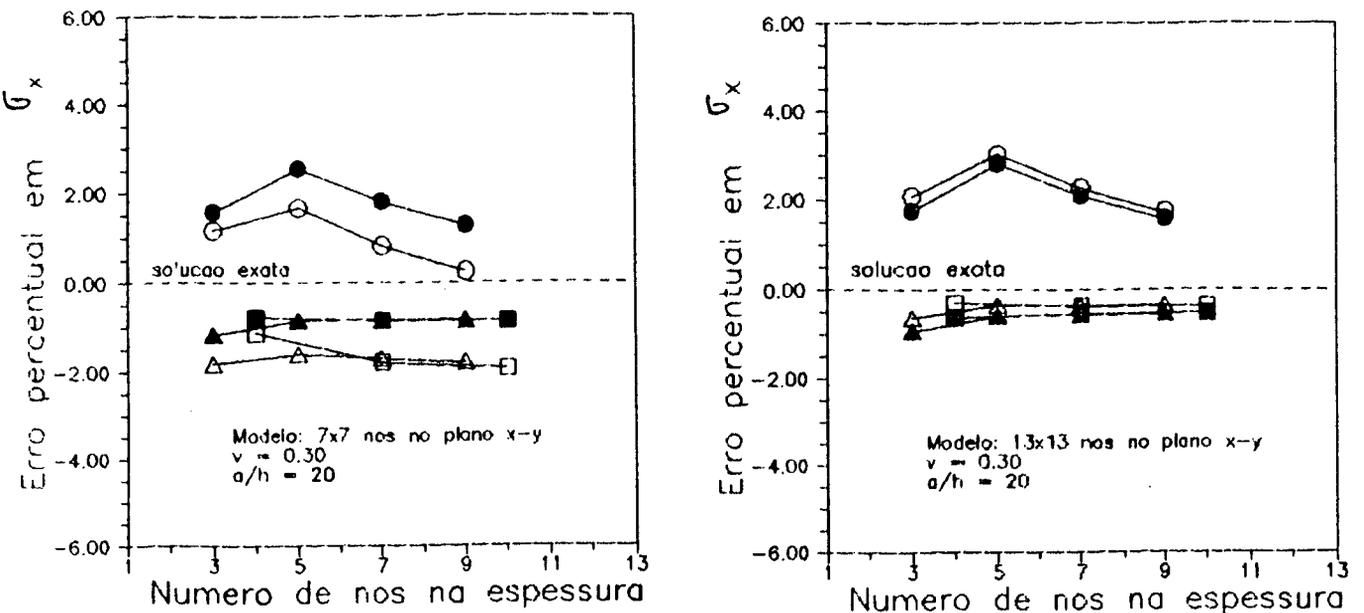


Figura 6.6 Convergência para  $\sigma_x(a/2, a/2, h/2)$  numa placa isotrópica quadrada simplesmente apoiada sob carregamento distribuído uniforme;  $a/h = 20$ .

Os resultados para a tensão  $\sigma_x$  apresentados nas *figuras* 6.5 e 6.6 mostram que os elementos com funções de interpolação cúbicas no plano são praticamente insensíveis ao refino no plano, fornecendo erros pequenos mesmo para malhas grosseiras no plano da placa. Os elementos quadráticos no plano, por outro lado, são extremamente sensíveis ao refino no plano da placa, que é uma condição necessária de convergência para a solução exata.

Na tabela 6.2 são apresentados os erros percentuais para a placa com  $a/h=5$ . O erro percentual é definido como:

$$\text{Erro percentual} = 100 \left[ \frac{\text{solução numérica}}{\text{solução da elasticidade}} - 1 \right]$$

Tabela 6.2. Placa isotrópica simplesmente apoiada: erros percentuais em  $w(a/2, a/2, 0)$  e  $\sigma_x(a/2, a/2, h/2)$ . Modelos com  $13 \times 13 \times 7$  nós nas direções x-y-z;  $a/h=5$ .

Legenda						
Erro percentual em						
w	-0,919	-0,883	-0,092	-0,055	-0,051	-0,015
$\sigma_x$	2,729	2,079	-0,152	-0,792	0,154	-0,478

### 6.2.2. Placa Isotrópica Engastada

As curvas de convergência para o deslocamento transversal  $w$  em placas engastadas (*figura* 6.7) são semelhantes às obtidas para placas simplesmente apoiadas (*figura* 6.3). Observa-se, entretanto, um aumento dos erros. Isto mostra a necessidade de maior refino do modelo no plano x-y ao se aumentar as restrições a deslocamentos no contorno da placa.

As curvas de convergência para a tensão  $\sigma_x$  são apresentadas na *figura* 6.8, mostrando a influência do refino no plano x-y. Embora não se tenha a solução analítica para comparação, é grande a variação dos erros com o refino da malha no plano x-y.

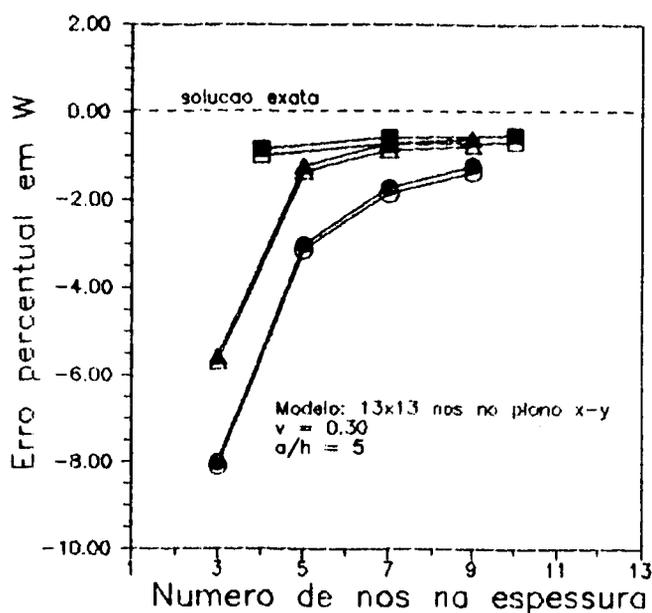
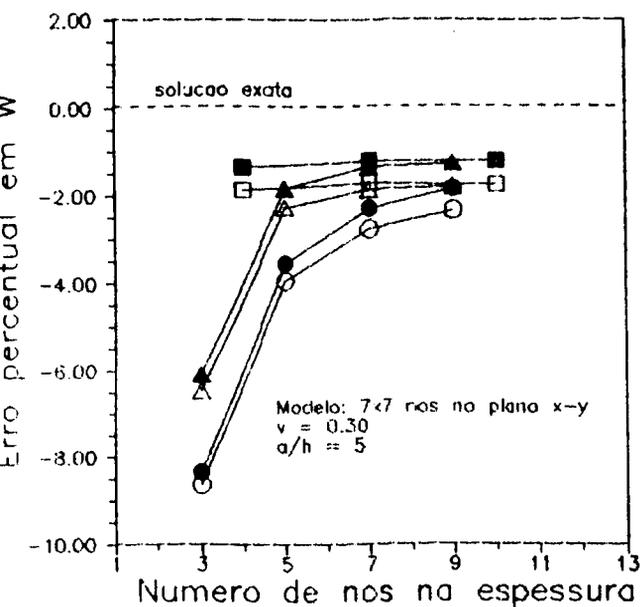


Figura 6.7 Convergência para  $w(a/2, a/2, 0)$  numa placa isotrópica quadrada engastada sob carregamento distribuído uniforme;  $a/h = 5$ .

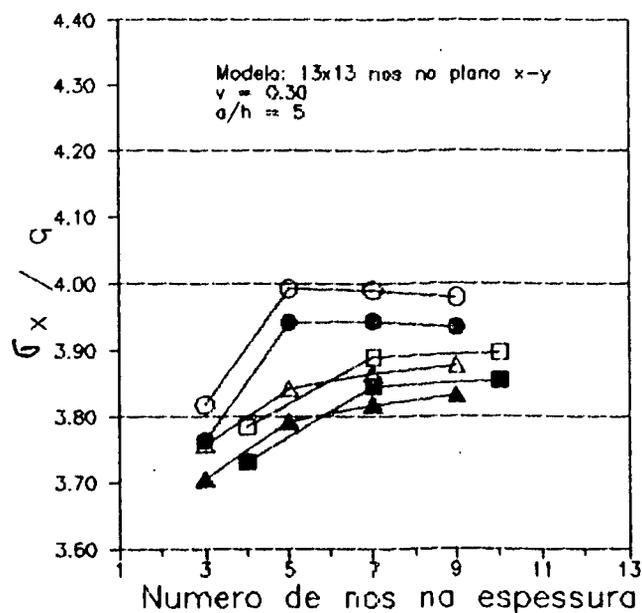
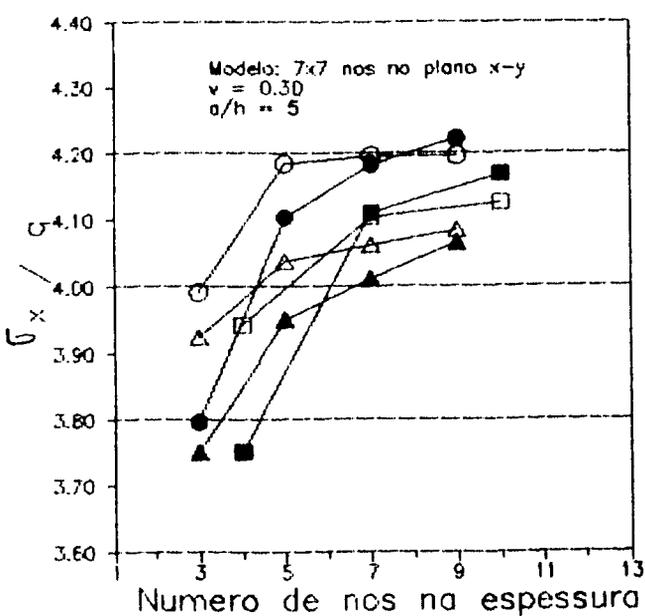


Figura 6.8 Convergência para  $\sigma_x(a/2, a/2, 0)$  numa placa isotrópica quadrada engastada sob carregamento distribuído uniforme;  $a/h = 5$ .

Mesmo os elementos com funções de interpolação cúbicas no plano exigem, como condição de convergência, o refino da malha no plano da placa.

Estes resultados confirmam um fato conhecido: o aumento na complexidade de uma solução ao se aumentar as restrições à deformação da estrutura. Foi o que ocorreu, neste caso, ao se empregar condições de contorno mais rigorosas. Em consequência, tornou-se necessário um maior refino da malha.

Na tabela 6.3 são apresentados os erros percentuais para a placa com  $a/h = 5$ .

Tabela 6.3. Placa isotrópica engastada: erros percentuais em  $w(a/2, a/2, 0)$  e  $\sigma_x(a/2, a/2, 0)$ . Modelos com  $13 \times 13 \times 7$  nós nas direções x-y-z;  $a/h=5$ .

Legenda						
Erro percentual em						
w	-1,854	-1,715	-0,864	-0,711	-0,724	-0,563
$\sigma_x$	3,991	3,994	3,865	3,818	3,890	3,846

### 6.3. Placa Ortotrópica

Será avaliado, agora, o desempenho dos modelos de elementos finitos quando aplicados à análise de placas ortotrópicas quadradas simplesmente suportadas e sob carregamento uniformemente distribuído. Placas com diversos valores para  $a/h$  e  $E_x/E_y$  são analisadas e os resultados comparados com diversas soluções analíticas fornecidas por Iyengar & Pandya (1983). A geometria e o carregamento das placas são apresentados na figura 6.9.

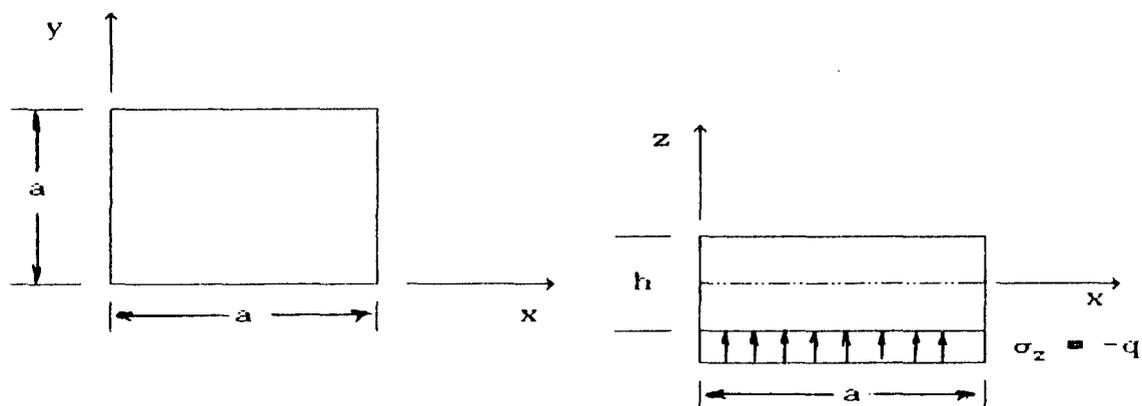
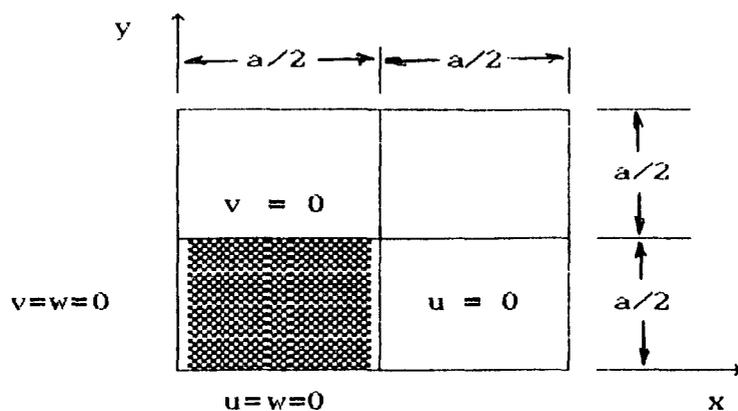


Figura 6.9 Placa ortotrópica quadrada: geometria e carregamento

$$E_3 = E_2; G_{23} = 0,5 E; G_{12} = G_{13} = 0,6 E_2; \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,25$$

A existência de dois planos verticais de simetria para a geometria, carregamento, propriedades elásticas e condições e contorno permite a modelagem de apenas um quarto da placa. O domínio discretizado é apresentado na figura 6.10 juntamente com as condições de contorno.

Os resultados, apresentados sob a forma de curvas de convergência, fornecem o erro percentual da solução numérica relativamente à solução da elasticidade.



placa simplesmente suportada

Figura 6.10 Domínio discretizado e condições de contorno.

Nas figuras 6.11 a 6.13 o número de nós na espessura da placa é mantido constante, variando apenas o número de nós em

nas figuras 6.11(a), 6.12(a) e 6.13(a) as placas modeladas com elementos cúbicos na espessura possuem 4 e não 5 nós na espessura.

seu plano.

As curvas de todos os elementos apresentam uma característica marcante: os erros para o deslocamento transversal  $w$  permanecem inalterados ao refinarmos a malha no plano  $x-y$ . Melhores resultados são obtidos, contudo, com o refino da malha na espessura da placa, o que indica a necessidade de uma melhor descrição das deformações ao longo da espessura de uma placa ortotrópica.

As curvas para elementos *equivalentes na espessura* são praticamente coincidentes. Os gráficos mostram, ainda, que para um dado número de nós na espessura da placa, os resultados serão tanto melhores quanto mais elevada for a ordem dos polinômios de interpolação utilizados na espessura do elemento. Por outro lado, quanto menor for a ordem das funções de interpolação na espessura do elemento, maior é a sensibilidade deste elemento ao refino na espessura da placa. Verifica-se, ainda, que os erros crescem com o aumento da relação  $E_x/E_y$ .

Em síntese, os resultados mostram que a análise de placas ortotrópicas espessas depende, fundamentalmente, de uma boa representação dos deslocamentos ao longo da espessura, ou seja, de uma boa descrição da distorção de um filamento inicialmente normal à superfície média da placa.

Constatada a necessidade de modelagem da normal distorcida, curvas de convergência foram construídas visando identificar a influência do refino na espessura. Placas com diversos valores para  $a/h$  e  $E_x/E_y$  foram modeladas com dois dos elementos que se mostraram mais promissores. Os resultados são apresentados nas figuras 6.14 a 6.16, sendo comparados com os de outras teorias.

As curvas de convergência mostram que o elemento cúbico na espessura é insensível ao refino da placa na espessura, ao passo que o elemento quadrático na espessura converge rapidamente para a solução do elemento cúbico. Para valores baixos de  $h/a$  e  $E_x/E_y$ , a solução numérica é superior às obtidas pelas teorias de Reissner e Ambartsumyan. Com o aumento daquelas relações, os erros crescem, tornando-se superiores aos fornecidos pelas soluções analíticas.

A degradação dos resultados numéricos com o aumento das relações  $h/a$  e  $E_x/E_y$  é uma consequência da crescente complexidade da solução exata associada ao aumento da espessura e da

anisotropia da placa.

Modelos com refino localizado na espessura foram também analisados para diferentes valores de  $a/h$  e  $E_x/E_y$ . Em todos os casos, os erros percentuais foram inferiores aos obtidos com refino uniforme na espessura, aos fornecidos pela Teoria de Reissner e em muitos casos aos da teoria de Ambartsumyan. Estes resultados mostram a necessidade de refino da malha em certas regiões na espessura do modelo.

Os casos analisados revelam, contudo, que as regiões que exigem maior refino são bastante pequenas e suas posições dependem dos valores de  $a/h$  e  $E_x/E_y$ . O refino manual mostrou-se extremamente laborioso, sugerindo a necessidade do emprego de métodos adaptativos.

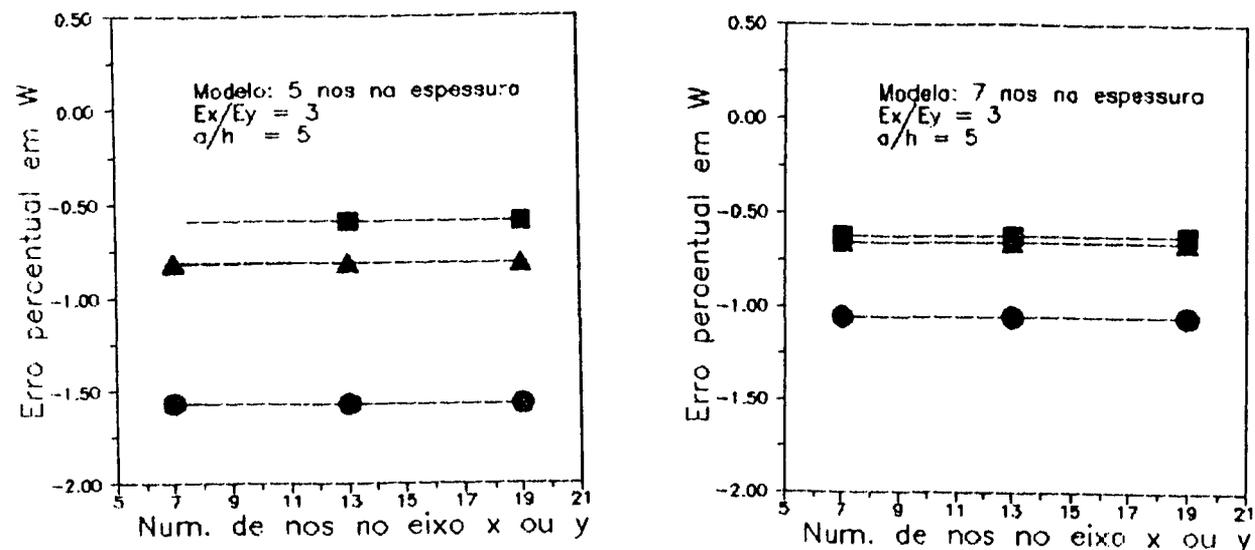


Figura 6.11 Convergência para  $w(a/2, a/2, 0)$  numa placa ortotrópica quadrada simplesmente suportada sob carregamento distribuído uniforme;  $E_x/E_y = 3$ .

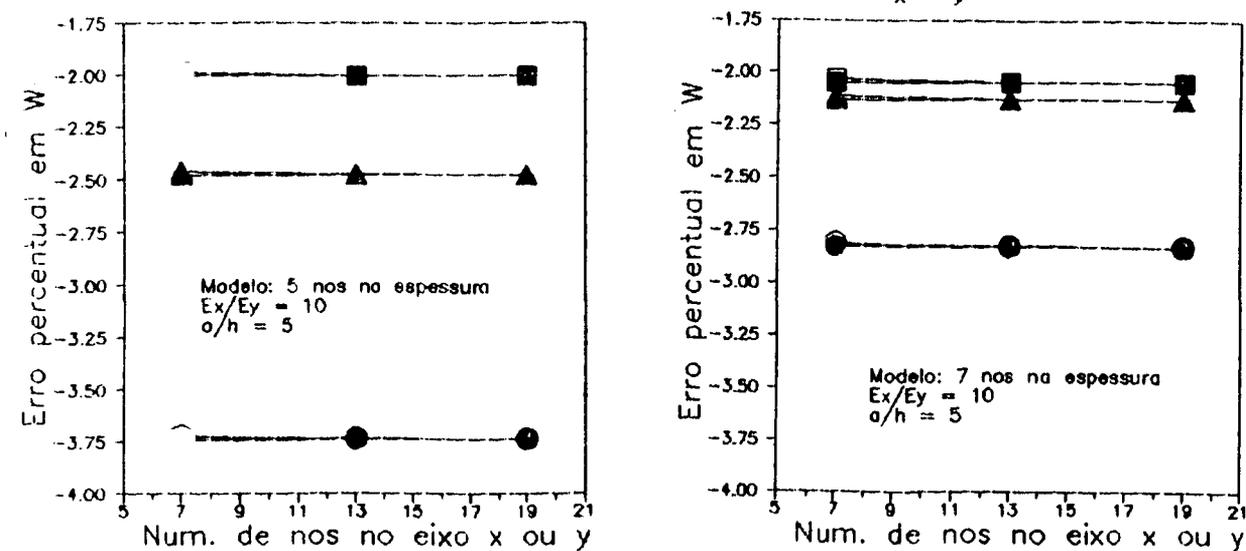


Figura 6.12 Convergência para  $w(a/2, a/2, 0)$  numa placa ortotrópica quadrada simplesmente suportada sob carregamento distribuído uniforme;  $E_x/E_y = 10$ .

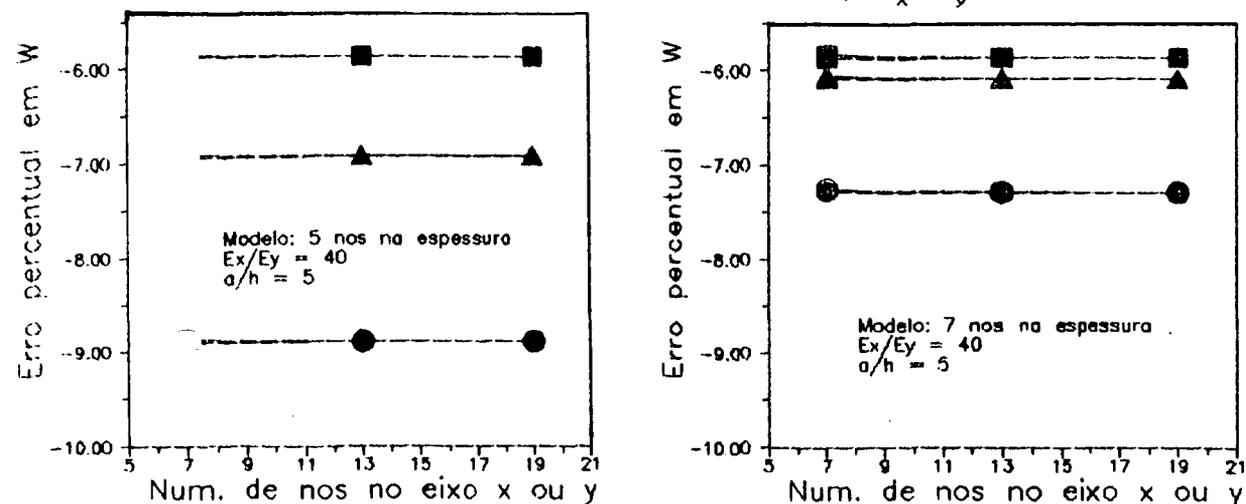


Figura 6.13 Convergência para  $w(a/2, a/2, 0)$  numa placa ortotrópica quadrada simplesmente suportada sob carregamento distribuído uniforme;  $E_x/E_y = 40$ .

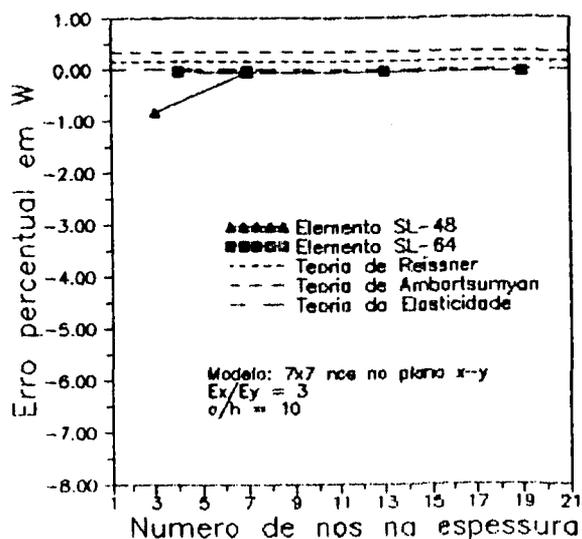
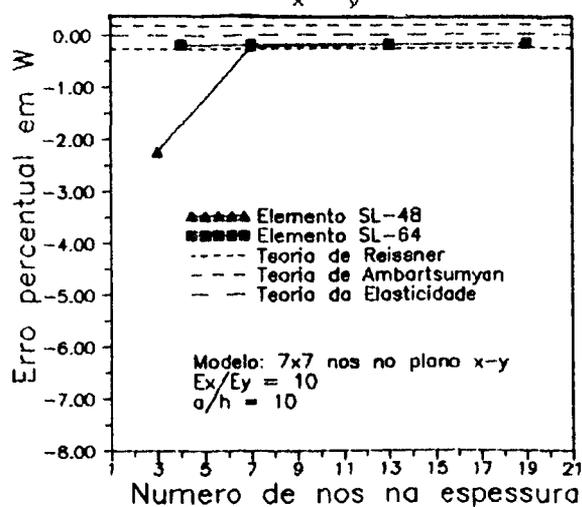
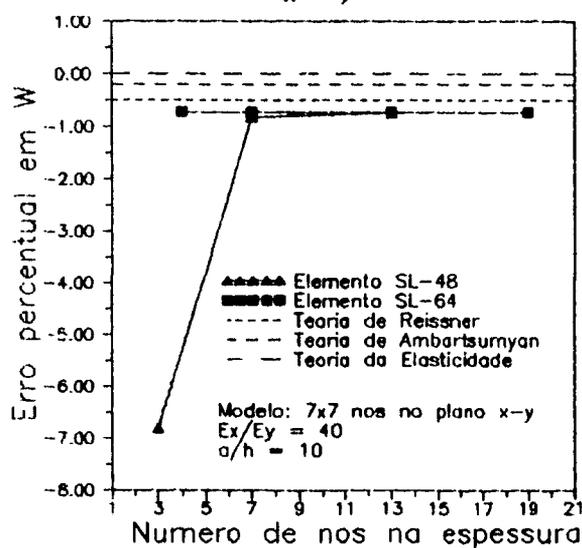
(a)  $E_x/E_y = 3$ (b)  $E_x/E_y = 10$ (c)  $E_x/E_y = 40$ 

Figura 6.14 Convergência para  $w(a/2, a/2, 0)$  numa placa ortotrópica quadrada simplesmente suportada sob carregamento distribuído uniforme;  $a/h = 10$ .

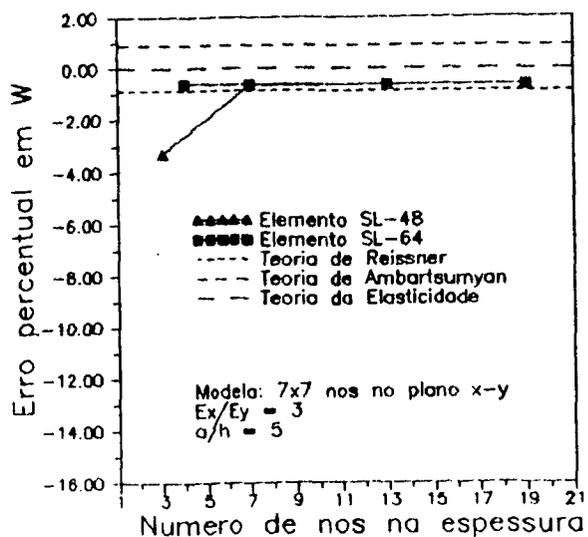
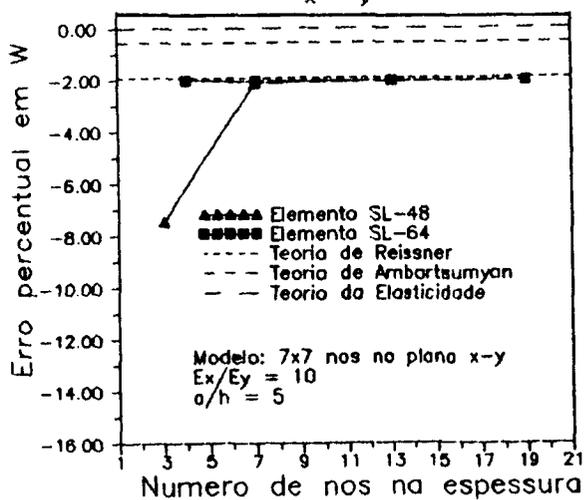
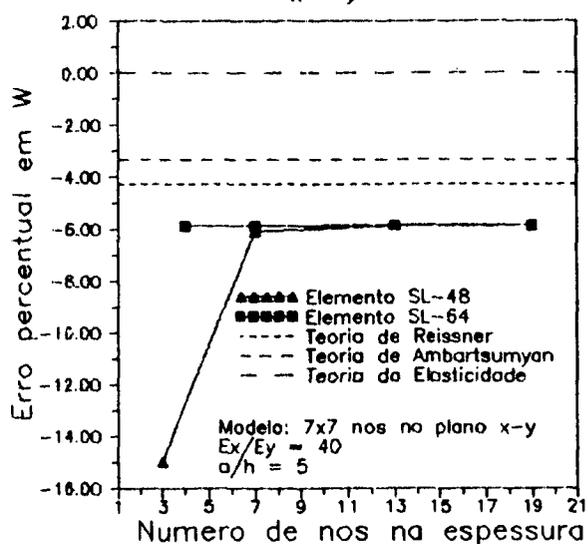
(a)  $E_x/E_y = 3$ (b)  $E_x/E_y = 10$ (c)  $E_x/E_y = 40$ 

Figura 6.15 Convergência para  $w(a/2, a/2, 0)$  numa placa ortotrópica quadrada simplesmente suportada sob carregamento distribuído uniforme;  $a/h = 5$ .

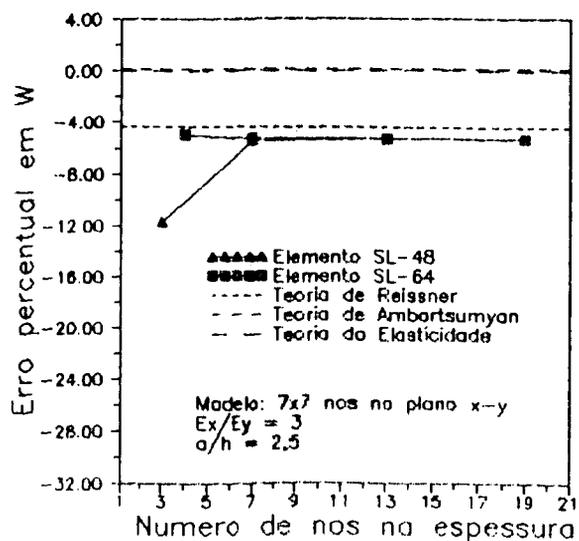
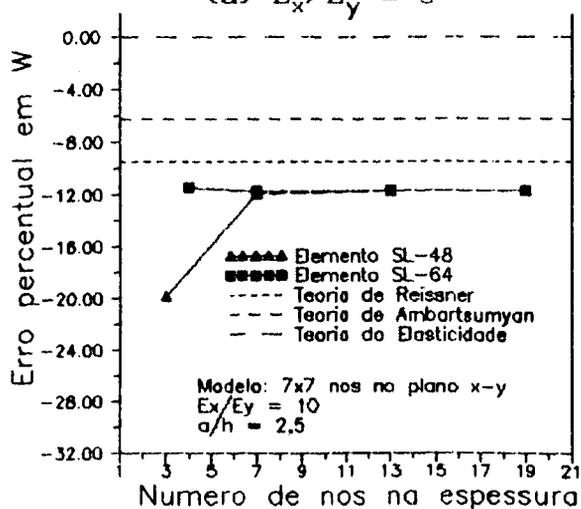
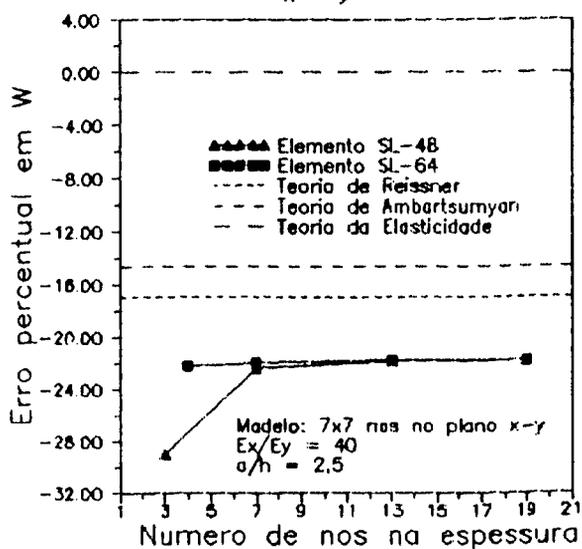
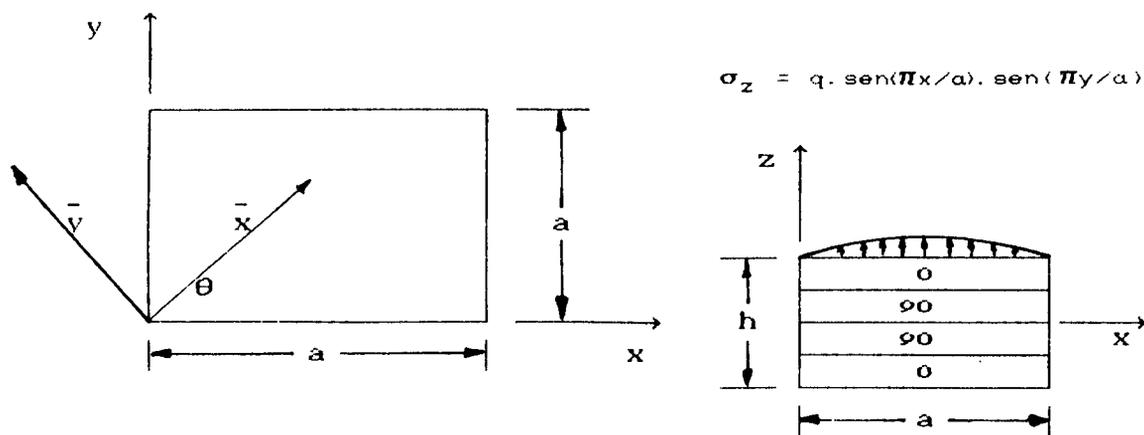
(a)  $E_x/E_y = 3$ (b)  $E_x/E_y = 10$ (c)  $E_x/E_y = 40$ 

Figura 6.16 Convergência para  $w(a/2, a/2, 0)$  numa placa ortotrópica quadrada simplesmente suportada sob carregamento distribuído uniforme;  $a/h = 2,5$ .

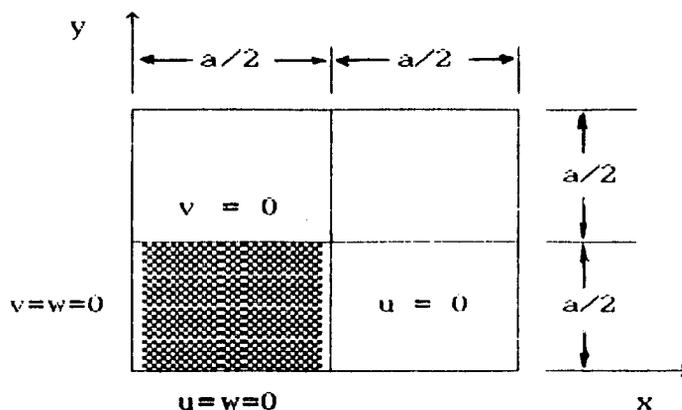
#### 6.4. Placa Laminada

Conclui-se a avaliação dos elementos sólidos com a análise de uma placa simetricamente laminada sob carregamento distribuído senoidal. Os resultados para tensões e deslocamentos são comparados com a solução analítica da elasticidade fornecida por Pagano & Hatfield (1972).

A geometria e o carregamento são apresentados na *figura 6.17*, enquanto o domínio discretizado e as respectivas condições de contorno são apresentados na *figura 6.18*. Como o problema possui dois planos verticais de simetria para a geometria, carregamento e condições e contorno, apenas um quarto da placa foi modelado.



*Figura 6.17* Placa laminada quadrada ( $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ): geometria e carregamento.  $E_x=25$  MPa;  $E_y=1$  MPa;  $G_{xy} = 0,5$  MPa;  $G_{yz} = 0,2$  MPa;  $\nu_{xy} = \nu_{yz} = 0,25$ .



placa simplesmente suportada

Figura 6.18 Domínio discretizado e condições de contorno.

Na *figura 6.19* são apresentadas as curvas de convergência para o deslocamento transversal  $w$  numa placa semi-espessa ( $a/h = 10$ ).

Os resultados mostram que os elementos cúbicos no plano são praticamente insensíveis ao refino da malha no plano  $x$ - $y$ . Para este tipo de refino, os elementos quadráticos no plano apresentam uma pequena queda nos erros, suas curvas de convergência tornando-se praticamente idênticas às de seus elementos equivalentes na espessura.

Os resultados mostram, ainda, que quanto menor for a ordem das funções de interpolação na espessura do elemento, maior é a sensibilidade deste elemento ao refino na espessura da placa: os elementos lineares na espessura apresentam as maiores taxas de convergência, enquanto os elementos cúbicos na espessura são praticamente insensíveis ao refino da malha na espessura da placa.

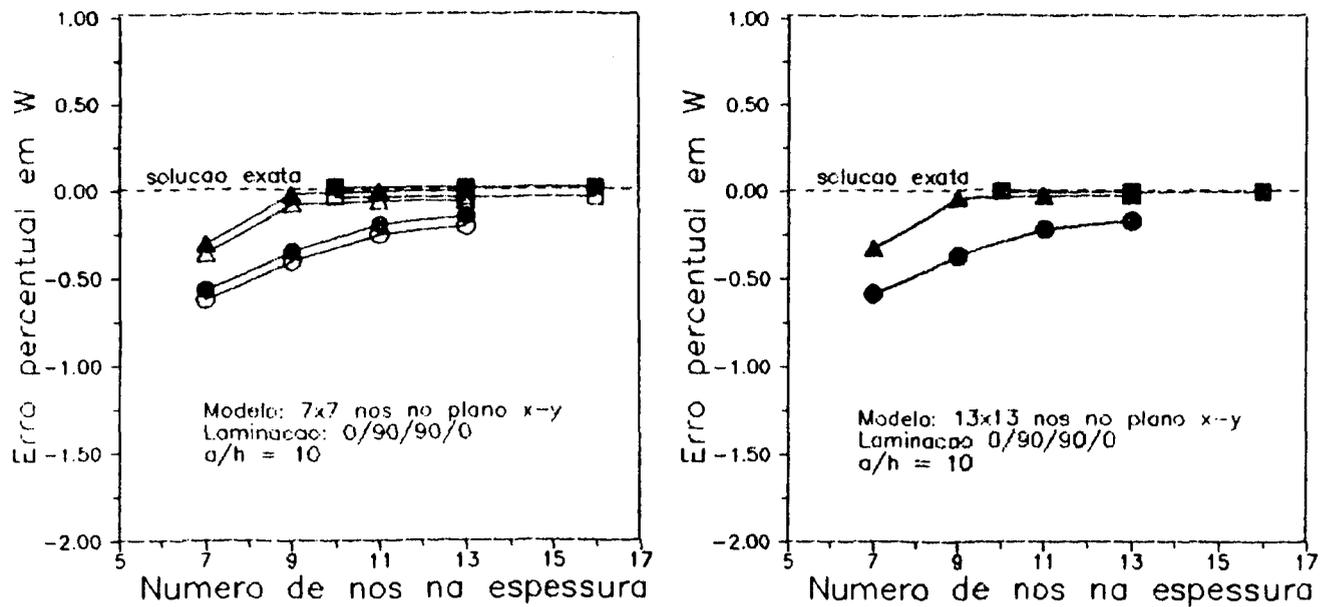


Figura 6.19 Convergência para  $w(a/2, a/2, 0)$  numa placa quadrada laminada ( $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ), simplesmente suportada e sob carregamento senoidal;  $a/h = 10$ .

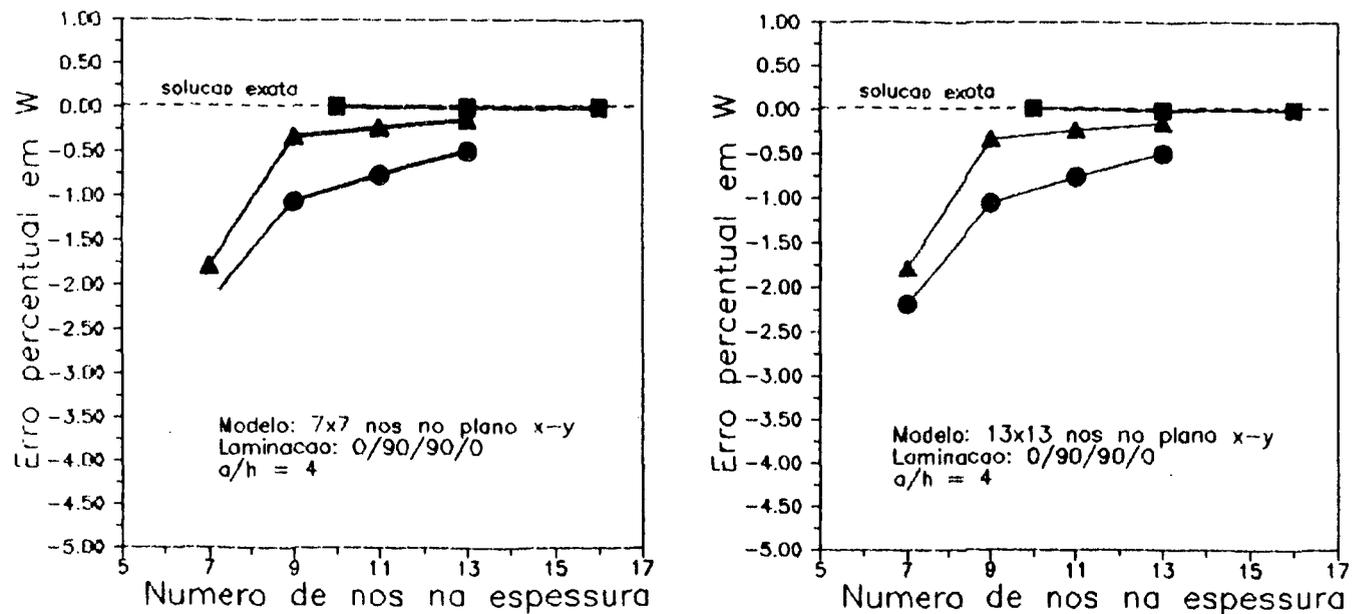


Figura 6.20 Convergência para  $w(a/2, a/2, 0)$  numa placa quadrada laminada ( $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ), simplesmente suportada e sob carregamento senoidal;  $a/h = 4$ .

Os resultados para o deslocamento transversal  $w$  em uma placa espessa ( $a/h = 4$ ) são apresentados na *figura 6.19*.

Os erros crescem com o aumento da espessura da placa. As curvas de convergência de elementos *equivalentes na espessura* tornam-se coincidentes, mostrando-se, ainda, insensíveis ao refino da malha no plano  $x$ - $y$ .

Estas curvas mostram que a convergência para a solução exata praticamente independe da ordem das funções de interpolação no plano do elemento e do refino da malha no plano  $x$ - $y$ .

Por outro lado, pode-se constatar uma grande influência da ordem das funções de interpolação na espessura e do refino da malha na espessura da placa. Assim, o resultado depende, fundamentalmente, de uma boa descrição dos deslocamentos ao longo da espessura da placa, ou seja, da distorção da normal.

Nas *figuras 6.21 a 6.26* são apresentadas as curvas de convergência para os componentes de tensão  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$ .

A convergência não monotônica para as tensões deve-se ao tipo de formulação empregada. Como os elementos são desenvolvidos a partir do método de deslocamentos (princípio da energia potencial total), nada se pode garantir quanto ao padrão de convergência das tensões, que são obtidas por derivação do campo de deslocamentos.

A despeito da imprevisibilidade do padrão de convergência para as tensões, as *figuras 6.21 a 6.26* apresentam várias características em comum.

Com o refino da malha na espessura da placa, os elementos *equivalentes no plano* convergem para valores próximos. Como os elementos cúbicos na espessura mostram-se insensíveis ao refino da malha na espessura da placa, os correspondentes elementos *equivalentes no plano* convergem para sua solução.

Com o refino da malha no plano  $x$ - $y$  pode-se verificar que os resultados dos elementos cúbicos no plano permanecem praticamente inalterados, mostrando-se, portanto, insensíveis a este tipo de refino na malha. Os elementos quadráticos no plano, entretanto, apresentam resultados significativamente melhores com o refino no plano  $x$ - $y$ ; com o aumento do refino espera-se que as curvas de convergência dos elementos *equivalentes na espessura* se superponham.

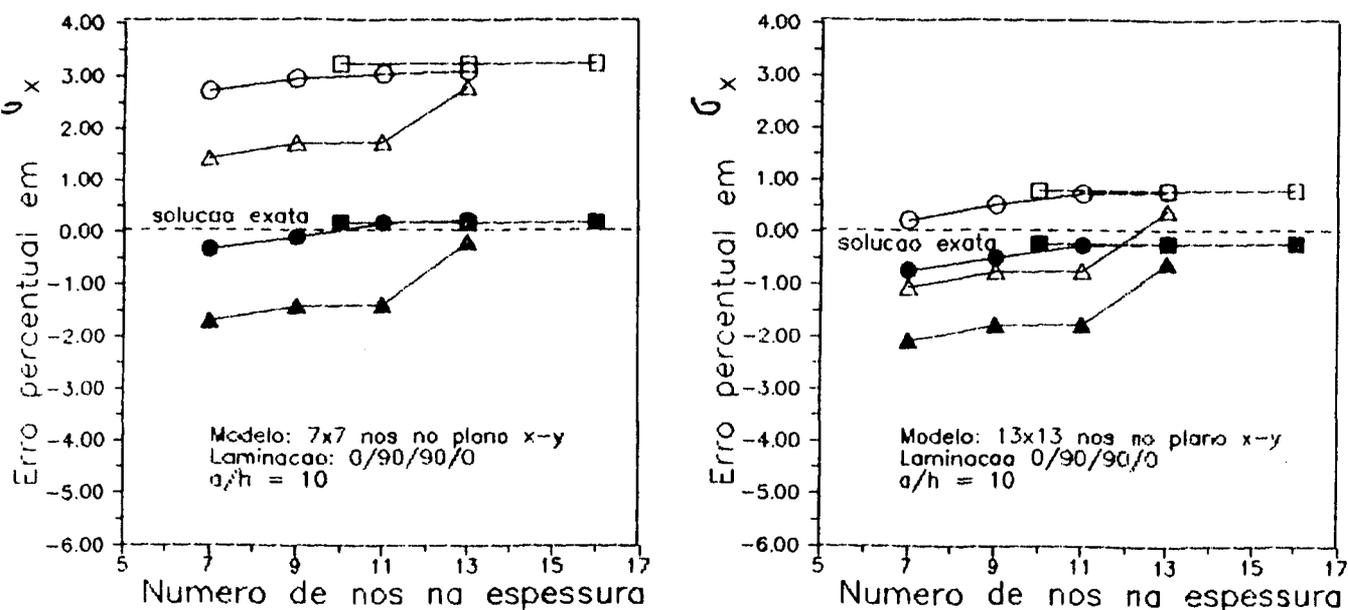


Figura 6.21 Convergência para  $\sigma_x(a/2, a/2, h/2)$  em uma placa quadrada laminada ( $0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ$ ), simplesmente suportada e sob carregamento senoidal;  $a/h = 10$ .

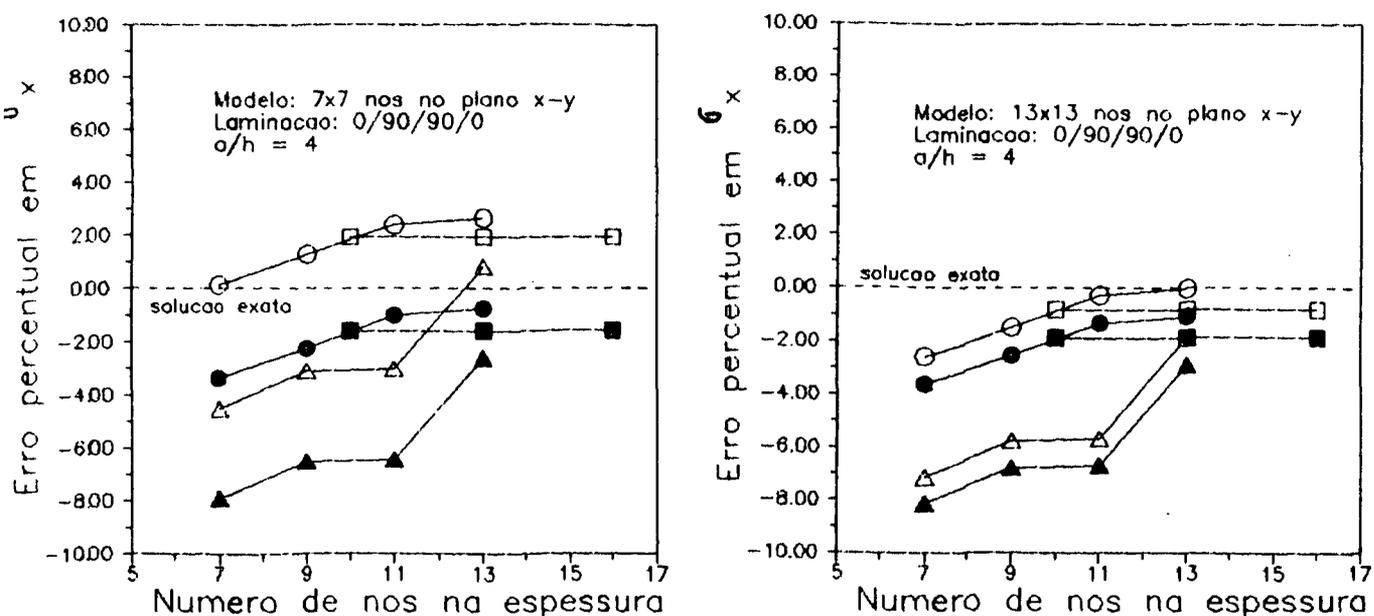


Figura 6.22 Convergência para  $\sigma_x(a/2, a/2, h/2)$  em uma placa quadrada laminada ( $0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ$ ), simplesmente suportada e sob carregamento senoidal;  $a/h = 4$ .

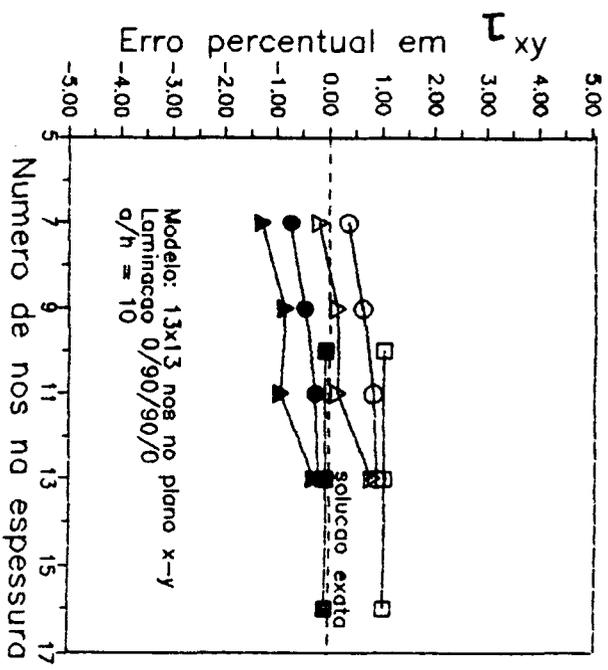
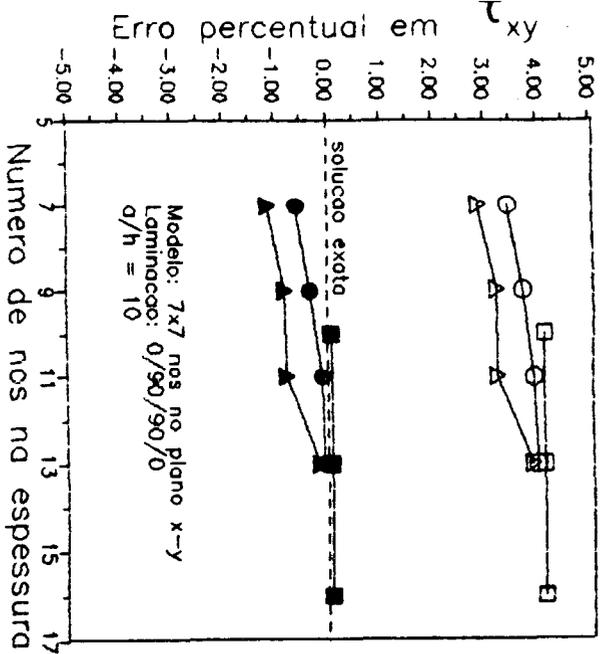


Figura 6.23 Convergência para  $\tau_{xy}$  (0,0,h/2) numa placa quadrada laminada (0°,90°,90°,0°), simplesmente suportada e sob carregamento senoidal; a/h = 10.

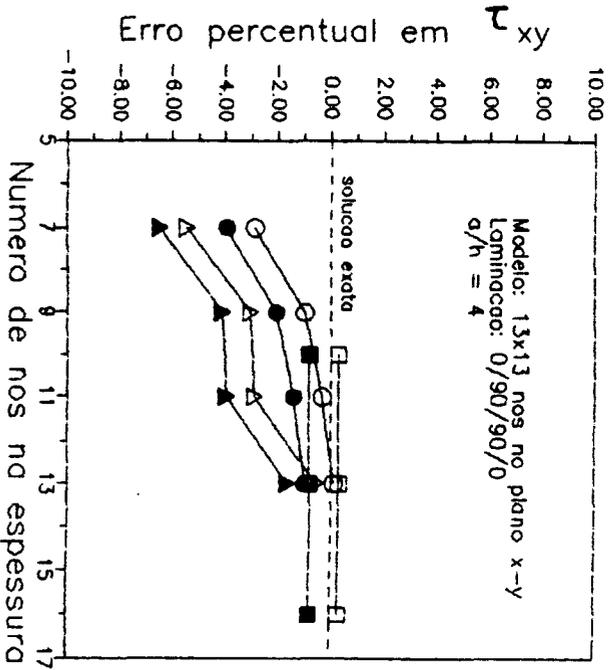
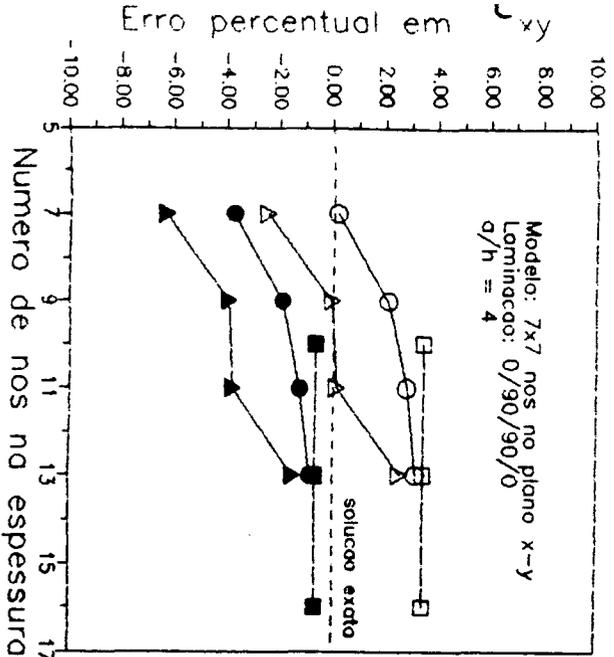


Figura 6.24 Convergência para  $\tau_{xy}$  (0,0,h/2) numa placa quadrada laminada (0°,90°,90°,0°), simplesmente suportada e sob carregamento senoidal; a/h = 4.

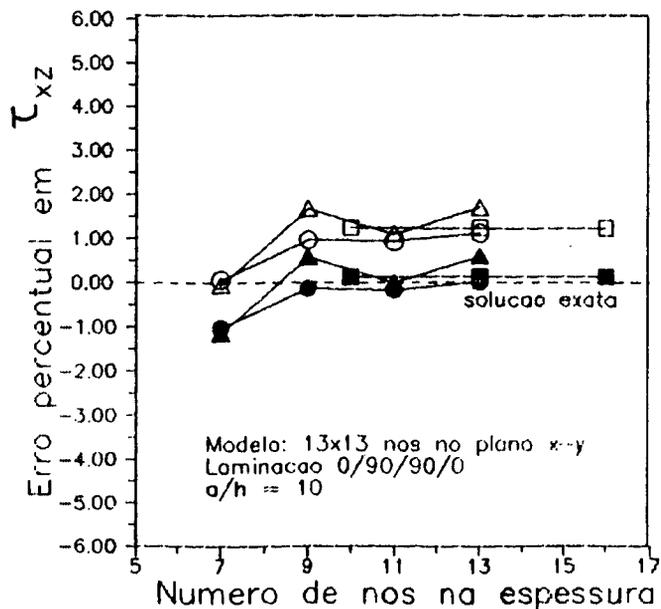
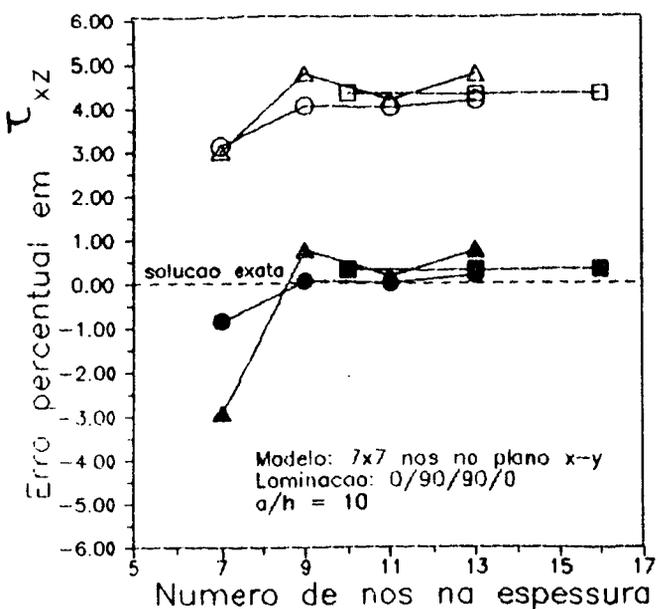


Figura 6.25 Convergência para  $\tau_{xz}(0, a/2, 0)$  numa placa quadrada laminada  $(0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ , simplesmente suportada e sob carregamento senoidal;  $a/h = 10$ .

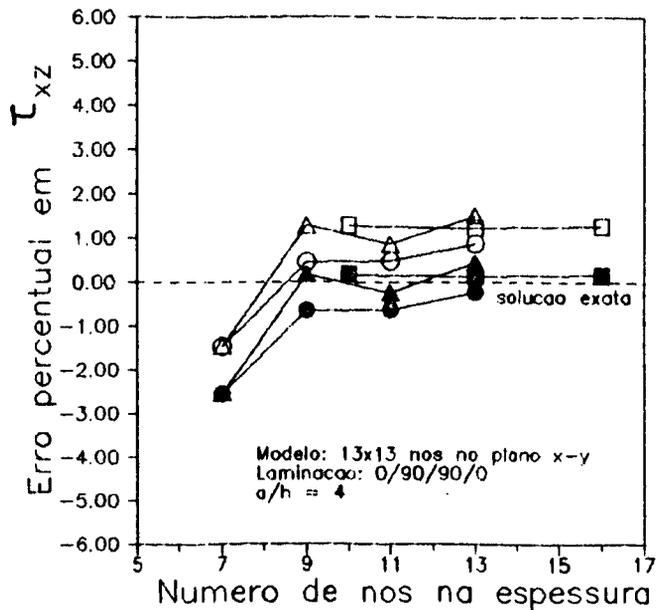
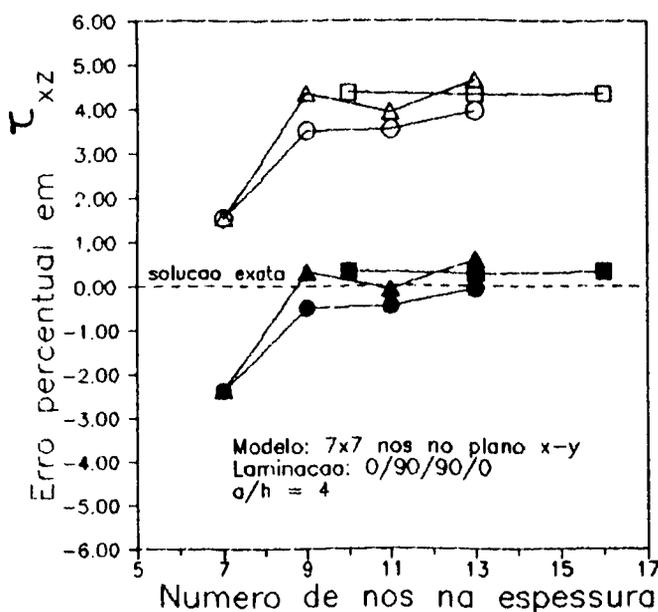


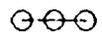
Figura 6.26 Convergência para  $\tau_{xz}(0, a/2, 0)$  numa placa quadrada laminada  $(0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ , simplesmente suportada e sob carregamento senoidal;  $a/h = 4$ .

Os erros crescem com o aumento da espessura da placa, exceção feita às curvas de convergência para a tensão  $\tau_{xz}$ , que permanecem praticamente inalteradas. As demais características qualitativas de convergência são mantidas. As taxas de convergência mais elevadas indicam a necessidade de maior refino na espessura de placa espessas, ocasião em que é considerável o efeito do cisalhamento transversal.

Em síntese, os resultados para as tensões indicam a necessidade de uma boa modelagem dos deslocamentos tanto no plano quanto na espessura da placa simetricamente laminada. Os elementos cúbicos no plano mostram-se os mais eficientes, sendo capazes de fornecer bons resultados com malhas grosseiras no plano, desde que suficientemente refinadas na espessura. Dentre todos os elementos, o modelo SL-64 distingue-se por apresentar resultados praticamente insensíveis a refinamentos no plano ou na espessura da placa.

Na tabela 6.4 são apresentados os erros percentuais para deslocamento e tensões na placa laminada 0/90/90/0.

Tabela 6.4. Placa laminada 0/90/90/0: erros percentuais em  $w(a/2, a/2, 0)$ ,  $\sigma_x(a/2, a/2, h/2)$  e  $\tau_{xz}(0, a/2, 0)$ . Modelos com  $13 \times 13 \times 7$  nós nas direções x-y-z;  $a/h=5$ .

Legenda						
Erro percentual em						
w	-0,754	-0,752	-0,226	-0,224	-0,003	-0,001
$\sigma_x$	-0,269	-1,311	-5,677	-6,684	-0,807	-1,858
$\tau_{xy}$	-0,321	-1,419	-2,892	-3,959	0,297	-0,806
$\tau_{xz}$	0,481	-0,619	0,870	-0,234	1,232	0,135

Uma outra abordagem para o cálculo das tensões cisalhantes transversais foi apresentada na seção 5.3 e consistia na integração das equações diferenciais de equilíbrio. Os resultados obtidos com esta abordagem são apresentados nas *figuras 6.27 e 6.28*.

Todos os elementos mostram-se praticamente indiferentes ao refino na espessura da placa.

Com o refino da malha no plano  $x-y$ , os elementos quadráticos no plano têm seus resultados melhorados, ao passo que os elementos cúbicos no plano têm seus resultados degradados.

Com o aumento da espessura da placa ( $a/h = 4$ ), o padrão de convergência é mantido mas os erros tornam-se maiores.

Os resultados mostram uma certa imprevisibilidade do método de cálculo de tensões através da integração das equações diferenciais de equilíbrio. Afinal, como explicar a degradação de alguns resultados ao refinarmos a malha?

Uma das possíveis explicações está no fato do procedimento de integração das equações diferenciais de equilíbrio envolver derivadas do campo de tensões e, em consequência, derivadas de segunda ordem do campo de deslocamentos.

Como os elementos finitos foram formulados a partir do modelo de deslocamentos, pode-se garantir que se as condições de convergência forem satisfeitas, os deslocamentos convergem para a solução exata ao refinarmos a malha. Nada se pode afirmar, contudo, acerca do padrão de convergência de funções que dependem de derivadas de segunda ordem destes deslocamentos.

É provável que, com um refino de malha suficientemente grande, estes resultados convirjam para a solução exata. No entanto, para malhas apenas razoavelmente refinadas, os resultados obtidos através das relações constitutivas são superiores, com a vantagem adicional de requerer menor tempo de processamento no cálculo das tensões.

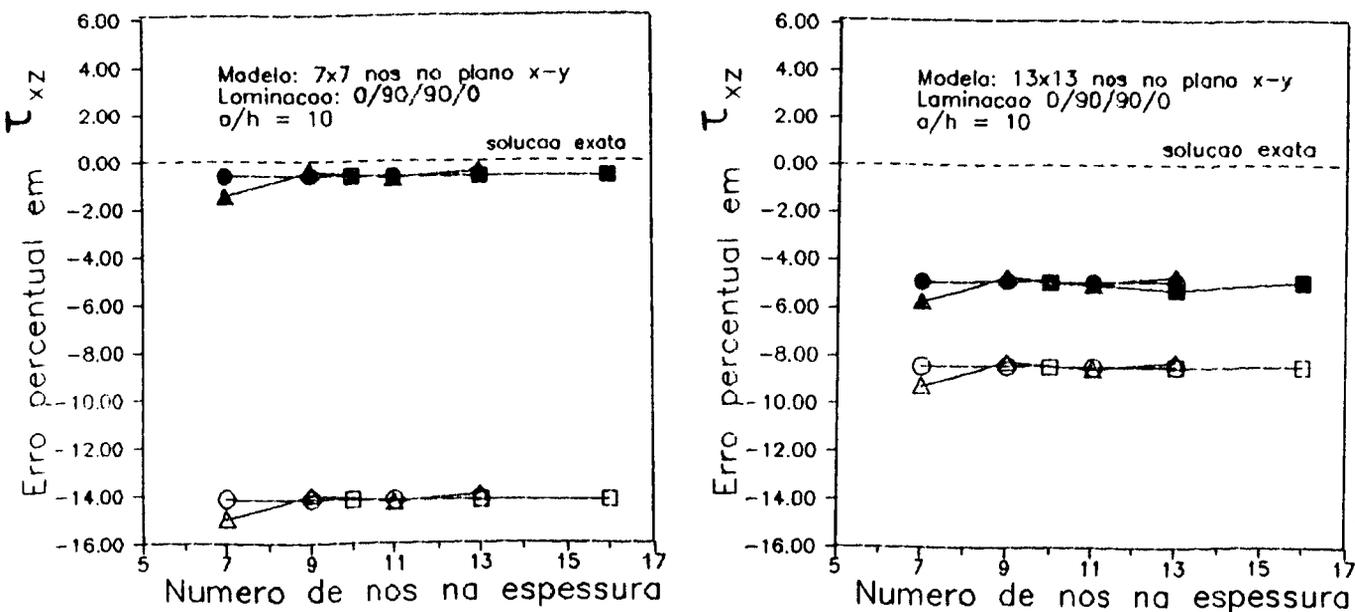


Figura 6.27 Convergência para  $\tau_{xz}(0, a/2, 0)$ . Resultado da integração da equação diferencial de equilíbrio;  $a/h=10$ .

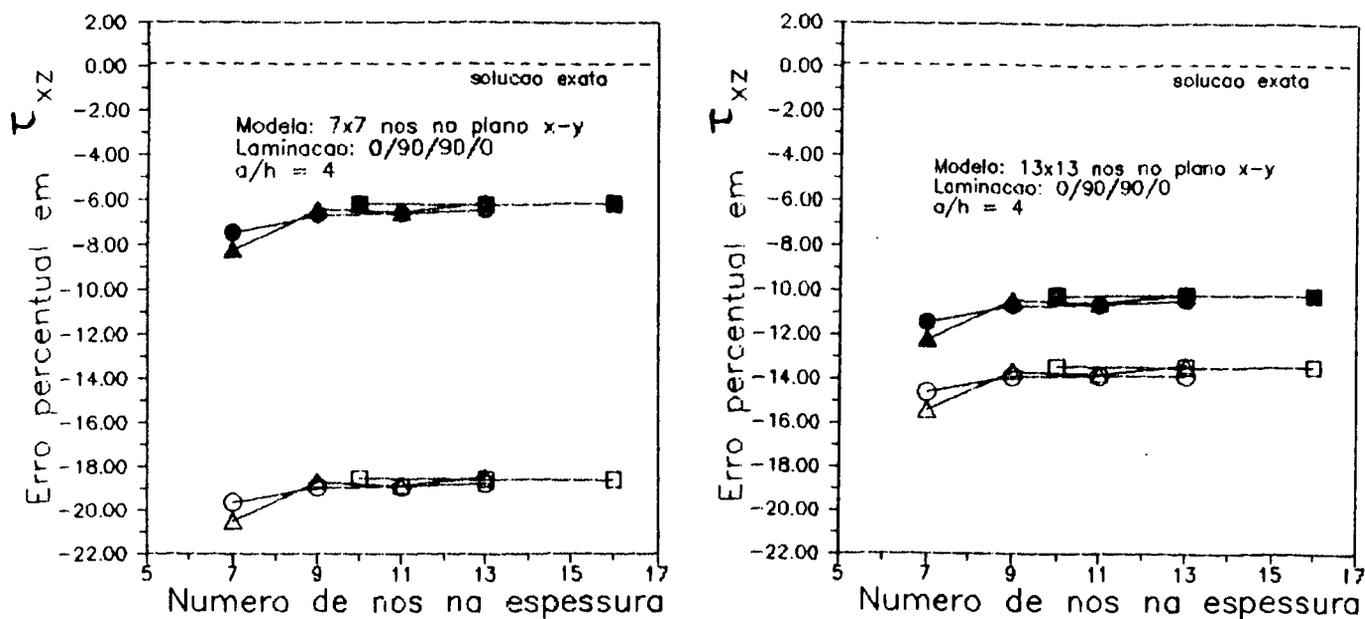


Figura 6.28 Convergência para  $\tau_{xz}(0, a/2, 0)$ . Resultado da integração da equação diferencial de equilíbrio;  $a/h=4$ .

### 6.5. Comparação entre o elemento SL-64 e um elemento misto

Como se pode depreender dos problemas analisados, os elementos sólidos fornecem excelente concordância com os resultados da teoria da elasticidade. Em aplicações críticas, contudo, bem como em laminados com um grande número de lâminas, será necessário o refino da malha ao longo da espessura da placa. Consequentemente, a quantidade de graus de liberdade de um modelo poderá ser tão grande que inviabilizará a solução. Convém, portanto, delimitar o campo de aplicação destes elementos. Para tanto, é apresentada na tabela 6.5 uma comparação entre o elemento sólido SL-64, o qual apresentou o melhor desempenho, e o elemento misto de 9 nós proposto por NOEL (1991), o qual é indicado para a análise de placas e cascas semi-espessas.

Tabela 6.5. Placa laminada 0/90/90/0 simplesmente apoiada sob carregamento senoidal: comparação entre o elemento sólido SL-64 e um elemento semi-espesso.

L/h	Elemento	Malha(x-y-z)	Erro percentual (%)				
			w	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\tau_{yz}$
4	SL-64	4x4x3	0,030	-1,588	-0,673	0,341	0,991
	Misto	6x6	-12,495	-43,333	-33,405	-1,852	-4,794
10	SL-64	4X4X3	0,017	0,179	0,076	0,314	0,372
	Misto	6x6	-10,855	-10,197	-11,594	4,319	-8,673
20	Misto	6x6	-5,046	-2,394	-3,043	0,305	-4,487
50	Misto	6x6	-1,694	0,185	0,000	-0,890	-1,418
100	Misto	6x6	-1,095	0,371	0,467	-1,180	-1,439

Os resultados para uma placa laminada 0/90/90/0 mostram que para placas espessas (  $L/h = 4$  e  $L/h = 10$  ), o elemento sólido é extremamante superior ao elemento misto.

Com o aumento da relação  $L/h$  o elemento misto passa a fornecer soluções cada vez mais próximas às da teoria da elasticidade. Nestas aplicações, torna-se vantajoso o emprego da formulação mista em detrimento da sólida se considerarmos a relação entre esforço computacional despendido e precisão obtida.

## 7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

---

Os modelos de elementos finitos sólidos propostos foram aplicados na análise de placas isotrópicas, ortotrópicas e laminadas, todas elas espessas ou semi-espessas. Os casos analisados consistiram em problemas com soluções analíticas conhecidas, o que possibilitou a comparação dos resultados numéricos com os da teoria da elasticidade.

Na análise de placas isotrópicas verificou-se que com o refino da malha no plano e espessura da placa, tanto os resultados para tensão quanto para o deslocamento transversal convergem para a solução da elasticidade. Nestas aplicações, os elementos de ordem superior apresentam os melhores resultados.

Na análise de placas ortotrópicas verificou-se que a convergência dos resultados depende exclusivamente do refino da malha na espessura, sendo portanto indiferente ao refino no plano  $x-y$  da placa. Os resultados mostram que os erros variam com as relações  $a/h$  e  $E_x/E_y$ . Foi constatada, ainda, a importância do refino localizado na espessura da malha, implicando numa queda considerável dos erros.

Na análise de placas laminadas os resultados para tensões e deslocamentos transversais convergem para a solução exata ao se refinar a malha no plano e na espessura da placa. No cálculo das tensões cisalhantes os elementos cúbicos no plano mostraram-se em muito superiores aos quadráticos no plano.

As tensões cisalhantes transversais nas placas laminadas foram calculadas de duas formas: diretamente da relação constitutiva e através da integração das equações diferenciais de

equilíbrio. Os resultados obtidos diretamente da relação constitutiva, além de exigirem menor tempo de processamento, mostraram-se superiores aos obtidos por integração das equações diferenciais de equilíbrio.

Dos resultados apresentados no capítulo anterior, verifica-se que as soluções de todos os elementos convergem para a solução analítica desde que se refine suficientemente a malha no plano e na espessura da placa.

A grande limitação dos modelos sólidos, entretanto, consiste na necessidade de emprego de elevada quantidade de elementos na análise de laminados espessos ou com muitas lâminas. Assim, aconselha-se o emprego desta formulação apenas em regiões críticas do laminado, onde se deseja grande precisão nos resultados. Formulações computacionalmente mais baratas devem ser utilizadas nas demais regiões do laminado.

Alguns trabalhos podem ser desenvolvidos a partir desta dissertação. Como todos os resultados apresentados no capítulo 6 foram obtidos com malhas não distorcidas, pode-se, por exemplo, avaliar o efeito da distorção dos elementos na convergência dos resultados, podendo ser analisadas placas não retangulares. Uma outra sugestão de trabalho seria a extensão da análise a cascas espessas e semi-espessas.

Pode-se, ainda:

- a) avaliar o efeito da subintegração no "locking" de cisalhamento;
- b) fazer um estudo mais detalhado das tensões cisalhantes transversais em laminados;
- c) formular elementos mistos e híbridos;
- d) reunir elementos sólidos e degenerados, através de elementos de transição, na análise de placas e/ou cascas laminadas.

## APÊNDICE A

## RELAÇÕES PARA TRANSFORMAÇÃO DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Os campos de tensão e deformação em um corpo são calculados relativamente a um sistema de coordenadas que pode ser curvilíneo ou retilíneo, ortogonal ou oblíquo. Neste trabalho, todos os sistemas de coordenadas empregados são cartesianos ortogonais.

Há ocasiões em que, conhecido o campo de tensões num dado sistema, deseja-se determinar o seu equivalente relativamente a um outro sistema de coordenadas. Este cálculo torna-se possível através do conceito de transformação tensorial. Como tensão e deformação são tensores, seus componentes podem ser transformados de um sistema de coordenadas para outro e mesmo assim continuam descrevendo o mesmo fenômeno físico.

Sejam  $(x_1, x_2, x_3)$  e  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  dois sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais com origem comum, conforme a figura A.1. Conhecidos os cossenos diretores entre seus respectivos eixos, podemos determinar as matrizes que relacionam os campos de tensão e deformação segundo os dois sistemas. Cook (1981) e Borelli (1974) trazem as deduções destas expressões.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$\bar{x}_1$	$l_1$	$m_1$	$n_1$
$\bar{x}_2$	$l_2$	$m_2$	$n_2$
$\bar{x}_3$	$l_3$	$m_3$	$n_3$

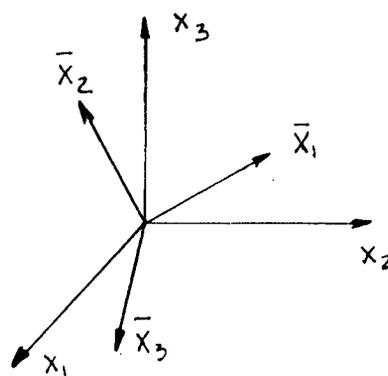


Figura A.1 Sistemas de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  e  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ , com tabela de cossenos diretores entre semi-eixos.

Sejam  $\{\sigma\}$  e  $\{\epsilon\}$  os vetores que representam, respectivamente, os componentes de tensão e deformação relativamente ao sistema  $(x_1, x_2, x_3)$ ,

$$\{\sigma\}^t = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \tau_{12} \ \tau_{13} \ \tau_{23}\}$$

$$\{\epsilon\}^t = \{\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \gamma_{12} \ \gamma_{13} \ \gamma_{23}\} \quad ,$$

com notação semelhante para o sistema  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ .

Os componentes de tensão e deformação segundo os sistemas  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  e  $(x_1, x_2, x_3)$  estão relacionados da seguinte forma:

$$\{\bar{\sigma}\} = [T_{\sigma}] \{\sigma\}$$

(A1)

$$\{\bar{\epsilon}\} = [T_{\epsilon}] \{\epsilon\}$$

onde:

$$[T_{\sigma}] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2m_1l_1 & 2l_1n_1 & 2n_1m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2m_2l_2 & 2l_2n_2 & 2n_2m_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2m_3l_3 & 2l_3n_3 & 2n_3m_3 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & m_1l_2 + m_2l_1 & n_1l_2 + n_2l_1 & n_1m_2 + n_2m_1 \\ l_1l_3 & m_1m_3 & n_1n_3 & m_1l_3 + m_3l_1 & n_1l_3 + n_3l_1 & n_1m_3 + n_3m_1 \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & m_2l_3 + m_3l_2 & n_2l_3 + n_3l_2 & n_2m_3 + n_3m_2 \end{bmatrix}$$

$$[T_{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 2m_1l_1 & l_1n_1 & n_1m_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 2m_2l_2 & l_2n_2 & n_2m_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 & 2m_3l_3 & l_3n_3 & n_3m_3 \\ 2l_1l_2 & 2m_1m_2 & 2n_1n_2 & m_1l_2 + m_2l_1 & n_2l_1 + n_1l_2 & n_1m_2 + n_2m_1 \\ 2l_1l_3 & 2m_1m_3 & 2n_1n_3 & m_1l_3 + m_3l_1 & n_1l_3 + n_3l_1 & n_1m_3 + n_3m_1 \\ 2l_2l_3 & 2m_2m_3 & 2n_2n_3 & m_2l_3 + m_3l_2 & n_2l_3 + n_3l_2 & n_2m_3 + n_3m_2 \end{bmatrix}$$

Pode-se, ainda, mostrar que as seguintes relações são válidas para sistemas de coordenadas ortogonais (Cook, 1981):

$$[T_{\varepsilon}]^{-1} = [T_{\sigma}]^t \quad \text{e} \quad [T_{\sigma}] = [T_{\varepsilon}]^t \quad (\text{A2})$$

APÊNDICE B

---

## FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

## B.1) Construção das Funções de Interpolação

As funções de interpolação para elementos sólidos isoparamétricos podem ser facilmente obtidas a partir das funções de interpolação de elementos de casca equivalentes. Assim, as funções para os elementos sólidos de 18, 27 e 36 nós são obtidas a partir das funções do elemento de casca isoparamétrico de 9 nós. Analogamente, as funções dos elementos sólidos de 32, 48 e 64 nós são obtidas a partir das funções de interpolação do elemento de casca isoparamétrico de 16 nós.

Apresentamos, na *figura B.1*, a geometria e numeração local dos nós para o elemento de casca de 9 nós e os sólidos dele derivados: SL-18, SL-27 e SL-36.

Na *figura B.2* são apresentadas a geometria e a numeração local dos nós para o elemento de casca de 16 nós e os sólidos dele derivados: SL-32, SL-48 e SL-64.

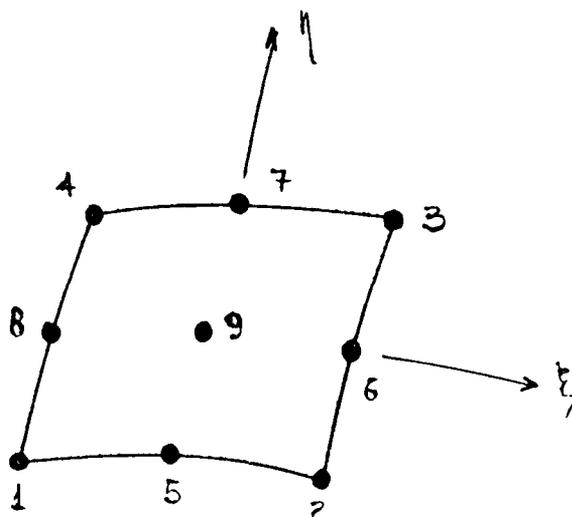


Figura B.1 Geometria e enumeração nodal local para o elemento de casca de 9 nós. A enumeração nodal dos elementos isoparamétricos SL-18, SL-27 e SL-36 é obtida adicionando-se o valor 9 para cada camada de nós que é incluída na construção do elemento. Assim, o nó 10 estará acima do nó 1 no elemento de 18 nós e o nó 19 acima do nó 10 no elemento de 27 nós.

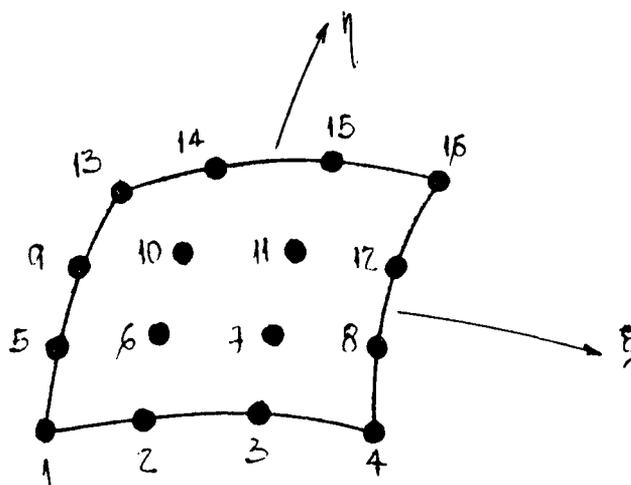


Figura B.2 Geometria e enumeração nodal local para o elemento de casca de 16 nós. A enumeração nodal dos elementos isoparamétricos SL-32, SL-48 e SL-64 é obtida adicionando-se o valor 16 para cada camada de nós que é incluída na construção do elemento. Assim, o nó 17 estará acima do nó 1 no elemento de 32 nós e o nó 33 acima do nó 17 no elemento de 48 nós.

## B.2) Polinômios de Lagrange

As funções de interpolação dos elementos desenvolvidos são construídas a partir da combinação dos polinômios de Lagrange apresentados na *tabela B.1*.

*Tabela B.1* Polinômios de Lagrange lineares, quadráticos e cúbicos

Grau do polinômio	Polinômios de Lagrange	raízes				
		-1	-1/3	0	1/3	1
LINEAR	$q_1(x) = (1-x)/2$	■	□	□	□	□
	$q_2(x) = (1+x)/2$	□	□	□	□	■
QUADRÁTICO	$p_1(x) = x(x-1)/2$	■	□	□	□	□
	$p_2(x) = (1-x^2)$	□	■	□	□	□
	$p_3(x) = x(x+1)/2$	□	□	□	■	□
CÚBICO	$h_1(x) = (-9x^3 + 9x^2 + x - 1)/16$	■	□	□	□	□
	$h_2(x) = 9(3x^3 - x^2 - 3x + 1)/16$	□	■	□	□	□
	$h_3(x) = 9(-3x^3 - x^2 + 3x + 1)/16$	□	□	□	■	□
	$h_4(x) = (9x^3 + 9x^2 - x - 1)/16$	□	□	□	□	■

## B.3) Elementos SL-18, SL-27 e SL-36

As funções de interpolação dos elementos sólidos de 18, 27 e 36 nós podem ser obtidas a partir das funções de interpolação do elemento de casca de 9 nós.

Sendo  $G_i$  as funções de interpolação do elemento de 9 nós, as funções de interpolação para os elementos sólidos SL-18, SL-27 e SL-36 são as apresentadas nas *tabelas B.2, B.3 e B.4*, respectivamente.

Tabela B.2 Funções de Interpolação para o Elemento SL-18

Elemento de 9 nós	Elemento de 18 Nós
$G_1 = p_1(\xi) \cdot p_1(\eta)$	$F_1 = G_1 \cdot q_1(\zeta) ; F_{10} = G_1 \cdot q_2(\zeta)$
$G_2 = p_3(\xi) \cdot p_1(\eta)$	$F_2 = G_2 \cdot q_1(\zeta) ; F_{11} = G_2 \cdot q_2(\zeta)$
$G_3 = p_3(\xi) \cdot p_3(\eta)$	$F_3 = G_3 \cdot q_1(\zeta) ; F_{12} = G_3 \cdot q_2(\zeta)$
$G_4 = p_1(\xi) \cdot p_3(\eta)$	$F_4 = G_4 \cdot q_1(\zeta) ; F_{13} = G_4 \cdot q_2(\zeta)$
$G_5 = p_2(\xi) \cdot p_1(\eta)$	$F_5 = G_5 \cdot q_1(\zeta) ; F_{14} = G_5 \cdot q_2(\zeta)$
$G_6 = p_3(\xi) \cdot p_2(\eta)$	$F_6 = G_6 \cdot q_1(\zeta) ; F_{15} = G_6 \cdot q_2(\zeta)$
$G_7 = p_2(\xi) \cdot p_3(\eta)$	$F_7 = G_7 \cdot q_1(\zeta) ; F_{16} = G_7 \cdot q_2(\zeta)$
$G_8 = p_1(\xi) \cdot p_2(\eta)$	$F_8 = G_8 \cdot q_1(\zeta) ; F_{17} = G_8 \cdot q_2(\zeta)$
$G_9 = p_2(\xi) \cdot p_2(\eta)$	$F_9 = G_9 \cdot q_1(\zeta) ; F_{18} = G_9 \cdot q_2(\zeta)$

Tabela B.3 Funções de Interpolação para o Elemento SL-27

Elemento de 27 nós		
$F_1 = G_1 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{10} = G_1 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{19} = G_1 \cdot p_3(\zeta)$
$F_2 = G_2 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{11} = G_2 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{20} = G_2 \cdot p_3(\zeta)$
$F_3 = G_3 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{12} = G_3 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{21} = G_3 \cdot p_3(\zeta)$
$F_4 = G_4 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{13} = G_4 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{22} = G_4 \cdot p_3(\zeta)$
$F_5 = G_5 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{14} = G_5 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{23} = G_5 \cdot p_3(\zeta)$
$F_6 = G_6 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{15} = G_6 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{24} = G_6 \cdot p_3(\zeta)$
$F_7 = G_7 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{16} = G_7 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{25} = G_7 \cdot p_3(\zeta)$
$F_8 = G_8 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{17} = G_8 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{26} = G_8 \cdot p_3(\zeta)$
$F_9 = G_9 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{18} = G_9 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{27} = G_9 \cdot p_3(\zeta)$

Tabela B.4 Funções de interpolação para o Elemento SL-36

Elemento de 36 nós			
$F_1 = G_1 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{10} = G_1 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{19} = G_1 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{28} = G_1 \cdot h_4(\zeta)$
$F_2 = G_2 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{11} = G_2 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{20} = G_2 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{29} = G_2 \cdot h_4(\zeta)$
$F_3 = G_3 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{12} = G_3 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{21} = G_3 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{30} = G_3 \cdot h_4(\zeta)$
$F_4 = G_4 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{13} = G_4 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{22} = G_4 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{31} = G_4 \cdot h_4(\zeta)$
$F_5 = G_5 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{14} = G_5 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{23} = G_5 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{32} = G_5 \cdot h_4(\zeta)$
$F_6 = G_6 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{15} = G_6 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{24} = G_6 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{33} = G_6 \cdot h_4(\zeta)$
$F_7 = G_7 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{16} = G_7 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{25} = G_7 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{34} = G_7 \cdot h_4(\zeta)$
$F_8 = G_8 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{17} = G_8 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{26} = G_8 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{35} = G_8 \cdot h_4(\zeta)$
$F_9 = G_9 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{18} = G_9 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{27} = G_9 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{36} = G_9 \cdot h_4(\zeta)$

## B.4) Elementos SL-32, SL-48 e SL-64

Partindo das funções de interpolação do elemento de casca de 16 nós, podemos determinar as funções de interpolação dos elementos sólidos de 32, 48 e 64 nós.

Sendo  $G_i$  as funções de interpolação do elemento de casca de 16 nós, as funções de interpolação dos elementos sólidos SL-32, SL-48 e SL-64 são apresentadas nas tabelas B.5 a B.7, respectivamente.

Tabela B.5 Funções de Interpolação para o elemento SL-32

Elemento de 16 nós	Elemento de 32 nós
$G_1 = h_1(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_1 = G_1 \cdot q_1(\zeta) ; F_{17} = G_1 \cdot q_2(\zeta)$
$G_2 = h_2(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_2 = G_2 \cdot q_1(\zeta) ; F_{18} = G_2 \cdot q_2(\zeta)$
$G_3 = h_3(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_3 = G_3 \cdot q_1(\zeta) ; F_{19} = G_3 \cdot q_2(\zeta)$
$G_4 = h_4(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_4 = G_4 \cdot q_1(\zeta) ; F_{20} = G_4 \cdot q_2(\zeta)$
$G_5 = h_1(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_5 = G_5 \cdot q_1(\zeta) ; F_{21} = G_5 \cdot q_2(\zeta)$
$G_6 = h_2(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_6 = G_6 \cdot q_1(\zeta) ; F_{22} = G_6 \cdot q_2(\zeta)$
$G_7 = h_3(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_7 = G_7 \cdot q_1(\zeta) ; F_{23} = G_7 \cdot q_2(\zeta)$
$G_8 = h_4(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_8 = G_8 \cdot q_1(\zeta) ; F_{24} = G_8 \cdot q_2(\zeta)$
$G_9 = h_1(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_9 = G_9 \cdot q_1(\zeta) ; F_{25} = G_9 \cdot q_2(\zeta)$
$G_{10} = h_2(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_{10} = G_{10} \cdot q_1(\zeta) ; F_{26} = G_{10} \cdot q_2(\zeta)$
$G_{11} = h_3(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_{11} = G_{11} \cdot q_1(\zeta) ; F_{27} = G_{11} \cdot q_2(\zeta)$
$G_{12} = h_4(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_{12} = G_{12} \cdot q_1(\zeta) ; F_{28} = G_{12} \cdot q_2(\zeta)$
$G_{13} = h_1(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_{13} = G_{13} \cdot q_1(\zeta) ; F_{29} = G_{13} \cdot q_2(\zeta)$
$G_{14} = h_2(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_{14} = G_{14} \cdot q_1(\zeta) ; F_{30} = G_{14} \cdot q_2(\zeta)$
$G_{15} = h_3(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_{15} = G_{15} \cdot q_1(\zeta) ; F_{31} = G_{15} \cdot q_2(\zeta)$
$G_{16} = h_4(\xi) \cdot h_1(\eta)$	$F_{16} = G_{16} \cdot q_1(\zeta) ; F_{32} = G_{16} \cdot q_2(\zeta)$

Tabela B.6 Funções de Interpolação para o elemento SL-48

Elemento de 48 nós		
$F_1 = G_1 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{17} = G_1 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{33} = G_1 \cdot p_3(\zeta)$
$F_2 = G_2 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{18} = G_2 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{34} = G_2 \cdot p_3(\zeta)$
$F_3 = G_3 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{19} = G_3 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{35} = G_3 \cdot p_3(\zeta)$
$F_4 = G_4 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{20} = G_4 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{36} = G_4 \cdot p_3(\zeta)$
$F_5 = G_5 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{21} = G_5 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{37} = G_5 \cdot p_3(\zeta)$
$F_6 = G_6 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{22} = G_6 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{38} = G_6 \cdot p_3(\zeta)$
$F_7 = G_7 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{23} = G_7 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{39} = G_7 \cdot p_3(\zeta)$
$F_8 = G_8 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{24} = G_8 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{40} = G_8 \cdot p_3(\zeta)$
$F_9 = G_9 \cdot p_1(\zeta)$	$F_{25} = G_9 \cdot p_2(\zeta)$	$F_{41} = G_9 \cdot p_3(\zeta)$
$F_{10} = G_{10} \cdot p_1(\zeta)$	$F_{26} = G_{10} \cdot p_2(\zeta)$	$F_{42} = G_{10} \cdot p_3(\zeta)$
$F_{11} = G_{11} \cdot p_1(\zeta)$	$F_{27} = G_{11} \cdot p_2(\zeta)$	$F_{43} = G_{11} \cdot p_3(\zeta)$
$F_{12} = G_{12} \cdot p_1(\zeta)$	$F_{28} = G_{12} \cdot p_2(\zeta)$	$F_{44} = G_{12} \cdot p_3(\zeta)$
$F_{13} = G_{13} \cdot p_1(\zeta)$	$F_{29} = G_{13} \cdot p_2(\zeta)$	$F_{45} = G_{13} \cdot p_3(\zeta)$
$F_{14} = G_{14} \cdot p_1(\zeta)$	$F_{30} = G_{14} \cdot p_2(\zeta)$	$F_{46} = G_{14} \cdot p_3(\zeta)$
$F_{15} = G_{15} \cdot p_1(\zeta)$	$F_{31} = G_{15} \cdot p_2(\zeta)$	$F_{47} = G_{15} \cdot p_3(\zeta)$
$F_{16} = G_{16} \cdot p_1(\zeta)$	$F_{32} = G_{16} \cdot p_2(\zeta)$	$F_{48} = G_{16} \cdot p_3(\zeta)$

Tabela B.7 Funções de Interpolação para o elemento SL-64

Elemento de 64 nós			
$F_1 = G_1 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{17} = G_1 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{33} = G_1 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{49} = G_1 \cdot h_4(\zeta)$
$F_2 = G_2 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{18} = G_2 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{34} = G_2 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{50} = G_2 \cdot h_4(\zeta)$
$F_3 = G_3 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{19} = G_3 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{35} = G_3 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{51} = G_3 \cdot h_4(\zeta)$
$F_4 = G_4 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{20} = G_4 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{36} = G_4 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{52} = G_4 \cdot h_4(\zeta)$
$F_5 = G_5 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{21} = G_5 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{37} = G_5 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{53} = G_5 \cdot h_4(\zeta)$
$F_6 = G_6 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{22} = G_6 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{38} = G_6 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{54} = G_6 \cdot h_4(\zeta)$
$F_7 = G_7 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{23} = G_7 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{39} = G_7 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{55} = G_7 \cdot h_4(\zeta)$
$F_8 = G_8 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{24} = G_8 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{40} = G_8 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{56} = G_8 \cdot h_4(\zeta)$
$F_9 = G_9 \cdot h_1(\zeta)$	$F_{25} = G_9 \cdot h_2(\zeta)$	$F_{41} = G_9 \cdot h_3(\zeta)$	$F_{57} = G_9 \cdot h_4(\zeta)$
$F_{10} = G_{10} \cdot h_1(\zeta)$	$F_{26} = G_{10} \cdot h_2(\zeta)$	$F_{42} = G_{10} \cdot h_3(\zeta)$	$F_{58} = G_{10} \cdot h_4(\zeta)$
$F_{11} = G_{11} \cdot h_1(\zeta)$	$F_{27} = G_{11} \cdot h_2(\zeta)$	$F_{43} = G_{11} \cdot h_3(\zeta)$	$F_{59} = G_{11} \cdot h_4(\zeta)$
$F_{12} = G_{12} \cdot h_1(\zeta)$	$F_{28} = G_{12} \cdot h_2(\zeta)$	$F_{44} = G_{12} \cdot h_3(\zeta)$	$F_{60} = G_{12} \cdot h_4(\zeta)$
$F_{13} = G_{13} \cdot h_1(\zeta)$	$F_{29} = G_{13} \cdot h_2(\zeta)$	$F_{45} = G_{13} \cdot h_3(\zeta)$	$F_{61} = G_{13} \cdot h_4(\zeta)$
$F_{14} = G_{14} \cdot h_1(\zeta)$	$F_{30} = G_{14} \cdot h_2(\zeta)$	$F_{46} = G_{14} \cdot h_3(\zeta)$	$F_{62} = G_{14} \cdot h_4(\zeta)$
$F_{15} = G_{15} \cdot h_1(\zeta)$	$F_{31} = G_{15} \cdot h_2(\zeta)$	$F_{47} = G_{15} \cdot h_3(\zeta)$	$F_{63} = G_{15} \cdot h_4(\zeta)$
$F_{16} = G_{16} \cdot h_1(\zeta)$	$F_{32} = G_{16} \cdot h_2(\zeta)$	$F_{48} = G_{16} \cdot h_3(\zeta)$	$F_{64} = G_{16} \cdot h_4(\zeta)$

BIBLIOGRAFIA

---

BARLOW, John

1976 "Optimal stress location in finite element models", IJNME, vol.10. pp. 243-251.

BARKER, R.M., LIN., F.T. and DANA, J.R.

1972 "Three dimensional finite element analysis of laminated composites", Computers & Structures, vol.2, pp.1013-1029.

BATHE, K.J.

1982 *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*.  
Prentice-Hall Inc., New Jersey.

BORESI, A.P. and LYNN, P.P.

1974 *Elasticity in Engineering Mechanics*. Prentice-Hall Inc.,  
New Jersey.

COOK, R.D.

1981 *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John  
Wiley & Sons, New York.

CHAUDHURI, R.A. and SEIDE, P.

1987 "Triangular finite element for analysis of thick laminated plates", IJNME, vol.24, pp.1203-1224.

CHAUDHURI, R.A.

1986 "An equilibrium method for prediction of transverse shear stresses in a thick laminated plate", Computers & Structures, vol.23, n<sup>o</sup> 2, pp.139-146.

CHAUDHURI, R.A. and SEIDE, P.

1987 "An approximate semi-analytical method for prediction of interlaminar shear stresses in an arbitrarily laminated thick plate", Computers & Structures, vol.25, n<sup>o</sup> 4, pp.627-636.

DI SCIUVA, M.

1985 "Development of an anisotropic multilayered, shear-deformable rectangular plate element", Computers & Structures, vol.21, n<sup>o</sup> 4, pp.789-796.

1986 "Evaluation of some multilayered, shear-deformable plate elements", Computers & Structures, vol.24, n<sup>o</sup> 6, pp.845-854.

1987 "An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates", Journal of Applied Mechanics, vol.54, pp.589-596.

ENGBLOM, J.J. and OCHOA, O.O.

1985 "Through-the-thickness stress predictions for laminated plates of advanced composite materials", IJNME, vol.21, pp.1759-1776.

EPSTEIN, M. and HUTTELMAIER, H.P.

1983 "A finite element formulation for multilayered thick plates", Computers & Structures, vol.16, n<sup>o</sup> 5, pp.645-650.

HINTON, E. and CAMPBELL, J.S.

1974 "Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method", IJNME, vol.8, pp.461-480.

HINTON, E., SCOTT, F.C. and RICKETTS, R.E.

1975 "Local least squares stress smoothing for parabolic isoparametric elements", *IJNME*, pp.235-256.

IYENGAR, K.T. and PANDYA, S.K.

1983 "Analysis of orthotropic rectangular thick plates", *Fibre Science Technology*, vol.18, pp.19-36.

JONES, R.M.

1975 *Mechanics of Composite Materials*. Scripta Book Company, Washington.

KANT, T.

1982 "A refined higher-order C plate bending element", *Computers & Structures*, vol.15, n<sup>o</sup> 2, pp.177-183.

KANT, T. and PANDYA B.N.

1988 "A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates", *Composite Structures*, vol.9, pp.215-246.

KWON, Y.W. and AKIN, J.E.

1987 "Analysis of layered composite plates using a high-order deformation theory", *Computers & Structures*, vol.27, n<sup>o</sup> 5, pp.619-623.

LIU, W.J. and SUN, C.T.

1987 "A three-dimensional hybrid stress isoparametric element for the analysis of laminated composite plates", *Computers & Structures*, vol.25, n<sup>o</sup> 2, pp.241-249.

LO, K.H., CHRISTENSEN, R.M. and WU, E.M.

1977a "A high-order theory of plate deformation. Part 1: homoge-

neous plates", Journal of Appl. Mechanics, vol.44, n<sup>o</sup> 4, pp.663-668.

1977b "A high-order theory of plate deformation. Part 2: laminated plates", Journal of Appl. Mechanics, vol.44, n<sup>o</sup> 4, pp.669-676.

1978 "Stress solution determination for high order plate theory", Int. J. of Solids and Structures, vol.14, pp.655-662.

MALVERN, L.E.

1969 *Introduction to the mechanics of a continuous medium.*  
Prentice-Hall Inc.

MAU, S.T., TONG, P. and PIAN, T.H.H.

1972 "Finite element solutions for laminated thick plates",  
Journal of Composite Materials, vol.6, pp.304-311.

MEDWADOWSKI, S.J.

1958 "A refined theory of elastic orthotropic plates", ASME  
Journal of Appl. Mechanics, vol.25, pp.437-443.

MINDLIN, R.D.

1951 "Influence of rotatory inertia and shear on flexural  
elastic plates", Journal of Applied Mechanics, vol.18,  
pp.31-38.

NOEL, A.T.

1991 "Desenvolvimento de um elemento misto de casca de dupla  
curvatura para a análise de materiais multilaminados";  
Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Santa Catarina;  
Florianópolis, Santa Catarina.

NOOR, A.K. and MATHERS, M.D.

1977 "Finite element analysis of anisotropic plates", IJNME,

vol.11, pp.289-307.

NOOR, A. and BURTON, W.S.

1989 "Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates", Applied Mechanics Reviews, vol.42., n<sup>o</sup> 1, pp.1-13.

OWEN, D.R. and LI, Z.H.

1987 "A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods I. Fundamentals and static analysis", Computers & Structures, vol.26, n<sup>o</sup> 6, pp.907-914.

PAGANO, N.J.

1969 "Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending", Journal of Composite Materials, vol.3, pp.398-411.

1970 "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", Journal of Composite Materials, vol.4, pp.20-34.

PAGANO, N.J. and HATFIELD, S.J.

1972 "Elastic behavior of multilayered bidirectional composites", AIAA Journal, vol.10, n<sup>o</sup> 7, pp.931-933.

PANDYA, B.N. and KANT, T.

1988a "A refined higher-order generally orthotropic C plate bending element", Computers & Structures, vol.28, n<sup>o</sup> 2, pp.119-133.

1988b "Flexural analysis of laminated composites using higher-order C plate bending elements", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.66, pp.173-198.

PHAN, N.D. and REDDY, J.N.

1985 "Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory", IJNME, VOL.21, pp.

2201-2219.

PRYOR, C.W. Jr. and BARKER, R.M.

- 1971 "A finite element analysis including transverse shear effects for applications to laminated plates", AIAA Journal, vol.9, pp.912-917.

REDDY, J.N.

- 1984 "A simple higher-order theory for laminated composite plates", Journal of Applied Mechanics, vol.51, pp.745-752.

REHFELD, L.W. and VALISETTY, R.R.

- 1983 "A comprehensive theory for planar bending of composite laminates", Computers & Structures, vol.16, pp.441-447.

REISSNER, E.

- 1945 "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", Journal of Applied Mechanics, vol.12, pp.69-77.
- 1975 "On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation", Int. Journal of Solids Structures, vol.11, pp.569-573.
- 1985 "Reflections on the theory of elastic plates", Appl. Mechanics Reviews, vol.38, pp.1453-1464.

SPILKER, R.L.

- 1980 "A hybrid-stress finite element formulation for thick multilayer laminates", Computers & Structures, vol.11, pp.507-514.
- 1984 "An invariant eight-node hybrid-stress element for thin and thick multilayer laminated plates", IJNME, VOL.20, pp.573-582.

SPILKER, R.L., CHOU, S.C. and ORRINGER, O.

- 1977 "Alternate hybrid-stress elements for analysis of multi-

layer composite plates", Journal of Composite Materials, vol.11, pp.51-70.

SPIPKER, R.L. and ENGELMANN, B.E.

1986 "Hybrid-stress isoparametric elements for moderately thick and thin multilayer plates", Computer Methods in Appl. Mechanics and Engng., vol.56, pp.339-361.

SRINIVAS, S. and RAO, A.K.

1973 "Flexure of thick rectangular plates", Journal of Applied Mechanics, pp.298-299.

TOLEDANO, A. and MURAKAMI, H.

1987 "A composite plate theory for arbitrary laminate configurations", Journal of Applied Mechanics, vol.54, pp.181-189.

VALISETTY, R.R. and REHFELD, L.W.

1985 "A theory for stress analysis of composite laminates", AIAA Journal, vol.23, n<sup>o</sup>7, pp.1111-1117.

WHITNEY, J.M. and PAGANO, N.J.

1970 "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates", Journal of Appl. Mechanics, pp.1031-1036.

WHITNEY, J.M.

1972 "Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates", Journal of Composite Materials, vol.6, pp.426-440.

YANG, P.C., NORRIS, C.H. and STAVSKY, Y.

1966 "Elastic wave propagation in heterogeneous plates", Int. Journal of Solids and Structures, vol.2, pp.665-684.