

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS PARA TRATAMENTO
DO ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

MOACIR FELIZARDO DE FRANÇA FILHO

FLORIANÓPOLIS, SETEMBRO DE 1991

**ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS PARA TRATAMENTO
DO ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE**

MOACIR FELIZARDO DE FRANÇA FILHO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO CIÊNCIAS
TÉRMICAS, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA



Prof. CLOVIS RAIMUNDO MALISKA, Ph.D. - ORIENTADOR



Prof. BEREND SNOEIJER, Dr. Ing. - COORDENADOR

BANCA EXAMINADORA



Prof. CLOVIS RAIMUNDO MALISKA, Ph.D. - PRESIDENTE



Prof. ÁLVARO TOUBES PRATA, Ph.D.



Prof. ANTÔNIO F. CARVALHO DA SILVA, Dr.



Prof. ANTÔNIO C. R. NOGUEIRA, Dr.

**Dedico este trabalho
à minha esposa,
aos meus pais e irmãos
e aos meus amigos.**

AGRADECIMENTOS

Ao fim deste trabalho, desejo agradecer a todos os que contribuíram para a sua existência, em especial:

Ao Prof. Maliska, pela orientação e amizade.

Ao Prof. Antônio Fábio, por sua ajuda na fase de elaboração dos programas computacionais.

Aos colegas do SINMEC, pela agradável convivência diária.

Aos colegas da Pós-Graduação, pela amizade e bons momentos que passamos juntos.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro e ao CPGEM, pela oportunidade que me foi dada para a realização deste trabalho.

À minha família, em especial minha irmã Irene, pelo apoio, estímulo e carinho.

À Laura, minha esposa e companheira, minha maior incentivadora.

ÍNDICE

	Página
LISTA DE FIGURAS	viii
SIMBOLOGIA	xiii
RESUMO	xviii
ABSTRACT	xix
CAPÍTULO 1	
INTRODUÇÃO	
1.1 Preliminares	01
CAPÍTULO 2	
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS GOVERNANTES, DISPOSIÇÃO DAS VARIÁVEIS NA MALHA E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS APROXIMADAS	
2.1 Introdução	07
2.2 Equações governantes	07
2.3 Disposição das variáveis na malha	11
2.4 Obtenção das equações algébricas aproximadas	12
2.5 Formulação - E - implícita	18
2.6 As equações discretizadas de quantidade de movimento para as componentes contravariantes	19

CAPÍTULO 3

OS MÉTODOS PARA TRATAMENTO DO ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE

3.1	Introdução	26
3.2	O método SIMPLE	26
3.2.1	Equações e sequência de cálculo	27
3.2.2	Observações	30
3.3	O método SIMPLER	31
3.3.1	Equações e sequência de cálculo	31
3.3.2	Observações	32
3.4	O método SIMPLEC	33
3.4.1	Equações e sequência de cálculo	33
3.5	O método PRIME	34
3.5.1	Equações e sequência de cálculo	34
3.5.2	Observações	34
3.6	O método CELS	35
3.6.1	Equações e sequência de cálculo	35
3.6.2	Observações	44

CAPÍTULO 4

DETALHES NUMÉRICOS

4.1	Introdução	47
4.2	Equações de p e p' para os volumes de fronteira	47
4.3	Equações de p e p' em pontos de pressão especificada	48
4.4	Solução dos sistemas lineares	49

CAPÍTULO 5**PROBLEMAS PARA VALIDAÇÃO E TESTES E CRITÉRIO DE COMPARAÇÃO**

5.1	Introdução	51
5.2	Problemas para validação e testes	51
5.3	Critérios de comparação	57

CAPÍTULO 6**RESULTADOS DAS ANÁLISES DE DESEMPENHO**

6.1	Introdução	60
6.2	Resultados obtidos com os coeficientes calculados com base nas soluções numéricas "exatas"	61
6.3	Resultados obtidos com os coeficientes atualizados a cada iteração	72
6.4	Resumo dos resultados das seções 6.2 e 6.3	74
6.5	Testes adicionais	75
6.6	Conclusões	81

CAPÍTULO 7**CONCLUSÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

7.1	Conclusões finais	83
7.2	Recomendações para trabalhos futuros	84

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	85
-----------------------------------	-----------

LISTA DE FIGURAS

Fig.(2.1) -	Geometria arbitrária de fronteiras não-ortogonais com discretização ortogonal	08
Fig.(2.2) -	Geometria arbitrária de fronteiras não-ortogonais com discretização coincidente com as fronteiras	08
Fig.(2.3) -	Arranjo das variáveis na malha computacional	11
Fig.(2.4) -	Discretização no plano transformado (ξ , η)	13
Fig.(3.1) -	Método CELS - Varredura na direção η	37
Fig.(3.2) -	Método CELS - Varredura na direção ξ	42
Fig.(4.1) -	Volume de controle para a conservação de massa situado sobre a fronteira leste	48
Fig.(5.1) -	Canal divergente - Geometria e condições de contorno	52
Fig.(5.2) -	Canal divergente - Malha computacional 20×20	52
Fig.(5.3) -	Canal divergente - Linhas de corrente para $Re_L = 10$	53
Fig.(5.4) -	Canal divergente - Pressão sobre a fronteira sul para $Re_L = 10$	53
Fig.(5.5) -	Canal divergente - Vorticidade sobre a fronteira sul para $Re_L = 10$	54
Fig.(5.6) -	Canal divergente/convergente - Geometria e condições de contorno	55
Fig.(5.7) -	Canal divergente/convergente - Malha 20×28	55

Fig.(5.8) -	Canal divergente/convergente - Malha 40×56	56
Fig.(5.9) -	Canal divergente/convergente - Linhas de corrente para $Re_L = 10$ Malha 20×28	56
Fig.(5.10) -	Canal divergente/convergente - Linhas de corrente para $Re_L = 10$ Malha 40×56	56
Fig.(5.11) -	Canal divergente/convergente - Linhas de corrente para $Re_L = 500$ Malha 20×28	57
Fig.(5.12) -	Canal divergente/convergente - Linhas de corrente para $Re_L = 500$ Malha 40×56	57
Fig.(5.13) -	Ciclo iterativo para as situações de (a) coeficientes fixos e (b) avanço conjunto de coeficientes e variáveis	59
Fig.(6.1) -	Curvas de tempo de CPU \times Parâmetro (E) para o escoamento através do canal divergente - Malha 20×20 - Reynolds 10	61
Fig.(6.2) -	Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente - Malha 20×20 Reynolds 10 - Coeficientes fixos - Resíduo \times Número de iterações	63
Fig.(6.3) -	Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente - Malha 20×20 Reynolds 10 - Coeficientes fixos - Resíduo \times Tempo de CPU	63
Fig.(6.4) -	Curvas de tempo de CPU \times Parâmetro (E) para o escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 - Reynolds 10	64

- Fig.(6.5) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 Reynolds 10 - Coeficientes fixos - Resíduo \times Números de iterações 65
- Fig.(6.6) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 Reynolds 10 - Coeficientes fixos - Resíduo \times Tempo de CPU 65
- Fig.(6.7) - Curvas de tempo de CPU \times Parâmetro (E) para o escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 40×56 - Reynolds 10 67
- Fig.(6.8) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 40×56 Reynolds 10 - Coeficientes fixos - Resíduo \times Número de iterações 68
- Fig.(6.9) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 40×56 Reynolds 10 - Coeficientes fixos - Resíduo \times Tempo de CPU 68
- Fig.(6.10) - Curvas de tempo de CPU \times Parâmetro (E) para o escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 - Reynolds 500 69
- Fig.(6.11) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 Reynolds 500 - Coeficientes fixos - Resíduo \times Número de iterações 70
- Fig.(6.12) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 Reynolds 500 - Coeficientes fixos - Resíduo \times Tempo de CPU 70

Fig.(6.13) -	Comportamento do método CELS na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 40×56 - Reynolds 500	
	Coefficientes fixos	71
Fig.(6.14) -	Comportamento do método CELS na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 - Reynolds 500	73
Fig.(6.15) -	Comportamento do método CELS na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 - Reynolds 500	73
Fig.(6.16) -	Comportamento desejável de um método para tratamento do acoplamento pressão-velocidade	74
Fig.(6.17) -	Cavidade retangular - Linhas de corrente - Reynolds 64000	76
Fig.(6.18) -	Cavidade retangular - Malha 20×20	76
Fig.(6.19) -	Comportamento do CELS na solução do escoamento através da cavidade retangular - Malha 20×20 - Reynolds 64000	
	Ciclos de atualização \times Parâmetro (E)	77
Fig.(6.20) -	Comportamento do CELS na solução do escoamento através da cavidade retangular - malha 20×20 - Reynolds 64000	
	Resíduo \times Ciclos de atualização	78
Fig.(6.21) -	Canal divergente/convergente - Malha 20×28 sem concentração das linhas η na fronteira sul	79
Fig.(6.22) -	Cavidade retangular - malha 40×10	79
Fig.(6.23) -	Comportamento do CELS na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 com igual espaçamento na direção η - Reynolds 500	80

- Fig.(6.24) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 com igual espaçamento na direção η - Reynolds 500 80
- fig.(6.25) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através da cavidade retangular - Malha 40×10 Reynolds 64000 81

SIMBOLOGIA

A	Coeficientes das equações algébricas
B^U, B^V	Termos-fontes das equações algébricas de quantidade de movimento para as componentes contravariantes
b^u, b^v	Termos definidos na obtenção das equações algébricas de quantidade de movimento para as componentes contravariantes e que contêm variações locais de métricas
D_i	Termos definidos na obtenção das equações em coordenadas generalizadas e que representam a difusão da propriedade em consideração
dV	Variação infinitesimal de volume
E	Parâmetro de avanço distorcido no tempo
e	Parâmetro de relaxação da solução - aplicável ao método CELS
J	Jacobiano da transformação de coordenadas
L	Comprimento de referência para avaliação do número de Reynolds
\dot{M}	Fluxo de massa
p	Pressão
Pe	Número de Peclet - usado no esquema de interpolação WUDS
R_p	Resíduo no campo de pressão, como definido na Eq.(5.1)

$R_{(\eta)}, R_{(\xi)}$	Resíduo na equação de quantidade de movimento nas direções η e ξ Aplicável ao método CELS
Re_L	Número de Reynolds baseado no comprimento L
S^u, S^v	Agrupamento dos termos de derivadas cruzadas que representam parcelas dos fluxos difusivos de u e v nas faces dos volumes de controle
S^U, S^V	Agrupamento dos termos S^u, S^v para obtenção das equações algébricas de quantidade de movimento para as componentes contravariantes
t	Tempo
u	Componente cartesiana do vetor velocidade, paralela ao eixo x
U	Componente contravariante do vetor velocidade, perpendicular ao eixo ξ
\hat{U}	Agrupamento de termos da equação de quantidade de movimento na direção ξ Aplicável aos métodos SIMPLER e PRIME
v	Componente cartesiana do vetor velocidade, paralela ao eixo y
V	Componente contravariante do vetor velocidade, perpendicular ao eixo η
\hat{V}	Agrupamento de termos da equação de quantidade de movimento na direção η Aplicável aos métodos SIMPLER e PRIME
x	Eixo coordenado do sistema ortogonal cartesiano
y	Eixo coordenado do sistema ortogonal cartesiano

SÍMBOLOS ESPECIAIS

α, β, γ	Coeficientes do tensor métrico
α_{CP}	Fator de cancelamento parcial na solução iterativa dos sistemas lineares via algoritmo SIP/PERIC
α_p	Parâmetro de relaxação na equação de correção da pressão - Método SIMPLE
$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$	Coeficientes definidos pelo esquema de interpolação WUDS
Γ_ϕ	Coeficiente de transporte difusivo para um escalar
$\delta()$	Indica variação da métrica entre parênteses
η	Eixo coordenado do plano transformado
μ	Viscosidade dinâmica
ξ	Eixo coordenado do plano transformado
ρ	Massa específica
ϕ	Propriedade genérica
$()^*$	Indica valores estimados da propriedade entre parênteses
$()'$	Indica flutuação da propriedade entre parênteses
$()^0$	O valor entre parênteses refere-se à iteração anterior
Σ	Indica somatório
ΔV	Elemento de volume

$\frac{\partial(\)}{\partial(\)}$ Derivada de uma grandeza em relação ao eixo de referência

$\nabla \cdot (\)$ Divergente

$\nabla(\)$ Gradiente

\int_t Representa integração da função de interesse no tempo

\int_v Representa integração da função de interesse no volume

SUBÍNDICES

E	Ponto central do volume de controle situado à leste do volume P
e	Face leste do volume de controle P
i	Indicador da posição (linha) de um volume de controle na malha computacional
j	Indicador da posição (coluna) de um volume de controle na malha computacional
N	Ponto central do volume de controle situado à norte do volume P
n	Face norte do volume de controle P
NB	Vizinhança do volume P
P	Ponto central de um volume de controle
S	Ponto central do volume de controle situado ao sul do volume P
s	Face sul do volume de controle P

- W Ponto central do volume de controle situado à oeste do volume P
- w Face oeste do volume de controle P
- 1 Indica que a propriedade ou grandeza ao qual está associado é avaliada em uma linha de η constante
- 2 Indica que a propriedade ou grandeza ao qual está associado é avaliada em uma linha de ξ constante

SUPERÍNDICES

- c Indica termo-fonte da equação de conservação de massa - Método CELS
- P Indica coeficiente e termo-fonte de uma equação para a pressão
- η Indica coeficiente e termo-fonte das equações para pressão e quantidade de movimento rearranjadas para uma varredura na direção η - Método CELS
- ξ Indica coeficiente e termo-fonte das equações para pressão e quantidade de movimento rearranjadas para uma varredura na direção ξ - Método CELS

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo comparativo entre alguns dos principais métodos, em volumes finitos, para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade na solução numérica de escoamentos laminares e incompressíveis em geometrias bidimensionais de fronteiras não-ortogonais.

O tratamento do acoplamento pressão-velocidade em escoamentos incompressíveis se constitui em um tópico de considerável relevância e o conhecimento de como cada um dos diversos métodos disponíveis se comporta em função da variação dos seus principais parâmetros de controle (parâmetro de avanço no tempo, fatores de relaxação), número e forma dos volumes de controle, além da própria natureza do escoamento sob investigação (condições de contorno) é um requisito importante para os pesquisadores da área.

Nos estudos ora desenvolvidos procura-se avaliar o desempenho dos métodos segregados SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC e PRIME, em comparação com um método de abordagem simultânea, o CELS, convenientemente estendido (a partir da definição das equações algébricas de conservação de quantidade de movimento para as componentes contravariantes) para a solução de escoamentos em geometrias de fronteiras não-ortogonais.

Como principal conclusão do trabalho, considerando-se os casos aqui analisados, verifica-se que quando a solução é obtida via método CELS, este apresenta a maior habilidade no tratamento dos acoplamentos, muito embora nem sempre esta habilidade se traduza em menores tempos de computação. Alguns testes adicionais, efetuados para permitir um maior entendimento das causas de falha do CELS, parecem indicar que o método é mais sensível que os demais em relação à anisotropia dos coeficientes das equações algébricas.

ABSTRACT

This work presents an assessment of several pressure-velocity coupling methods for the solution of elliptic two dimensional incompressible fluid flow problems using nonorthogonal grids.

It is important, for research purposes and for the potential users of numerical methods, to relate the performance of the pressure-velocity coupling methods with the significant solution parameters like, time step, relaxation factors, number and shape of elemental volumes, etc.

The SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC and PRIME methods are evaluated and compared with the simultaneous solution method CELS, adapted for the use of nonorthogonal grids, employing the contravariant velocity components.

It is seen that the CELS method performs better in treating the pressure-velocity coupling, although this feature not always means less computational effort. Additional tests have permitted to know better the drawbacks of the CELS method, specially related to the coefficients anisotropy.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - PRELIMINARES

Resolver um problema que envolva o escoamento incompressível e isotérmico de um fluido significa determinar distribuições de velocidade e pressão, as chamadas variáveis primitivas, que satisfaçam as equações diferenciais de conservação de massa e de quantidade de movimento sujeitas a determinadas condições de contorno.

A solução pode ser obtida de forma discreta, por meio de técnicas numéricas, tal como o método de volumes finitos [1], através do qual o domínio de cálculo é dividido em volumes de controle, formando uma malha, e os princípios de conservação são aplicados sobre cada um desses volumes. Um mesmo volume pode servir para aplicação de todos os princípios de conservação. Neste caso, tem-se o chamado arranjo co-localizado de variáveis, o qual é largamente empregado no método de diferenças finitas. Pode-se também ter volumes de controle específicos para cada variável, como é o caso do arranjo descontraído [2]. Em volumes finitos cada equação diferencial é integrada sobre cada um dos volumes, surgindo assim um sistema de equações algébricas não-lineares. No processo de integração é necessário que se definam valores das variáveis e valores dos fluxos nas faces dos volumes de controle. Para tanto utilizam-se funções de interpolação a partir dos valores das variáveis no centro dos volumes vizinhos. Exemplos e estudos acerca de funções de interpolação são fornecidos em [3]. Em seguida, as equações algébricas são linearizadas de modo que as características de não-linearidades e as relações inter-equações, ou acoplamentos, são transferidas para os coeficientes.

O problema, que inicialmente estava definido em termos da equação diferencial de conservação de massa e de uma equação diferencial de conservação de quantidade de movimento para cada direção coordenada, agora se constitui de vários sistemas lineares de equações algébricas, um

para cada um dos princípios de conservação que precisam ser respeitados. Assim, para uma situação bidimensional, existe a necessidade de se resolver três sistemas de equações algébricas acopladas.

Basicamente são duas as abordagens pelas quais pode-se obter a solução do problema proposto. A diferença entre elas está na forma como são conduzidos os acoplamentos. Definem-se então as abordagens segregadas e as simultâneas.

Quando se opta por uma abordagem segregada, cada uma das variáveis é avançada isoladamente, com base em valores fixos das demais. A defasagem, entretanto, não pode ser imposta à revelia, sob pena de se ter sérias dificuldades no processo iterativo para obtenção da solução convergida, podendo até acontecer que tal solução não seja alcançada. Em abordagens segregadas são necessárias iterações não só em função da relação coeficientes-solução (não-linearidades) mas também para restabelecer os acoplamentos entre os sistemas de equações.

Um dos primeiros trabalhos de abordagem segregada usando as variáveis primitivas (u , v e p) foi o método MAC proposto por Harlow e Welch em 1965 [2], o qual é considerado uma das principais contribuições no campo de dinâmica dos fluidos. Entretanto, por ser um método totalmente explícito, apresenta elevados custos de computação. Algumas variações desse método, como o SMAC (Simplified MAC) de Amsden e Harlow [4] e o SUMMAC (Stanford University Modified Mac) [5], foram propostas. Estas variações mantêm a natureza explícita do método original, não superando a limitação relativa ao custo computacional.

O método SIMPLE, de Patankar e Spalding [6] representou um grande avanço em relação aos métodos explícitos. Difundiu-se bastante e até hoje é largamente utilizado, servindo também de base para criação de novos métodos, dos quais os métodos SIMPLER (SIMPLE Revised) do próprio Patankar [1] e SIMPLEC (SIMPLE Consistent) proposto por Van Doormaal e Raithby [7] são os principais. Derivado direto do SIMPLER, o método PRIME (PRessure Implicit and Momentum Explicit) foi proposto por Maliska [8], apresentando como vantagem um custo computacional por iteração bem reduzido, se comparado com seu antecessor.

O SIMPLE, ou alguma de suas variações, novas ou não, tem sido empregado nos novos avanços da metodologia numérica, no que diz respeito ao uso de variáveis co-localizadas em escoamentos incompressíveis e/ou compressíveis. Prova disso são os trabalhos de Rhie e Chow [9], Peric [10], Majundar [11], Silva [12], Marchi et al. [13], De Bortoli [14], Acharya e Moukalled [15], este último apresentando o algoritmo SIMPLEM. Também podem ser citados os trabalhos de Kobayashi e Pereira [16], com o algoritmo SIMPLES e Thiart [17] com o SIMPLEN.

Quando uma abordagem simultânea é adotada, as variáveis u , v e p são avançadas todas ao mesmo tempo, de forma que o acoplamento entre as variáveis não é rompido na região do domínio onde ocorre o avanço simultâneo. Esta simultaneidade pode ser estabelecida sobre parte do domínio (por exemplo volume-a-volume) ou sobre o domínio completo. No primeiro caso são necessárias iterações para levar em conta as não-linearidades e para restabelecer os acoplamentos entre as diversas regiões nas quais se deu o avanço simultâneo. No último caso, ou seja, quando a simultaneidade abrange todo o domínio, necessita-se fazer iterações apenas para efeito de atualização de coeficientes, já que não há rompimento do acoplamento em nenhum ponto do domínio. Este último procedimento não é recomendado devido a custos de computação e de armazenamento e devido a problemas de truncamento, especialmente para grandes conjuntos de equações.

O algoritmo SIVA (Simultaneous Variable Adjustments), de Caretto et al. [18] e [19] foi a primeira tentativa de se resolver as três variáveis (u , v e p) simultaneamente, satisfazendo as equações de quantidade de movimento e de conservação de massa, ponto-a-ponto. O balanço conseguido em um volume, contudo, é destruído quando pontos vizinhos são calculados. A característica do procedimento, o qual avança as variáveis como em uma iteração do tipo Jacobi, resulta em uma convergência ainda mais lenta que a do SIMPLE. Esta pode ter sido a razão que, naquela época, levou Caretto et al. a recomendarem o uso do SIMPLE.

Watson [20], em 1981, propôs um algoritmo de solução direta e simultânea de velocidades e pressão. Este procedimento foi denominado DSVS (Direct Simultaneous Variable Solution).

Enquanto que em uma situação bidimensional o método direto tradicional requer a inversão de uma matriz de $3N \times 3N$ elementos, onde N é o número de equações para cada variável, o DSVS inverte 3 matrizes de $N \times N$ elementos. Como resultado tem-se um custo nove vezes menor.

Zedan [21] tomou o trabalho de Watson como ponto de partida para a proposição de um método iterativo aproximado, o AESVS (Approximate Effect Simultaneous Variable Solution), conseguindo uma significativa redução de custos quando comparado com o DSVS. Ainda em sua tese de doutoramento, Zedan fez extensões de alguns métodos de solução de sistemas lineares de uma simples variável, para a solução de problemas envolvendo sistemas acoplados de equações. Assim, a partir de métodos de decomposição $[L][U]$ aproximada, tal como o SIP [22], surgiu o CSIP (Coupled SIP), onde, para uma situação bidimensional, resolve-se um sistema cuja matriz dos coeficientes contém doze diagonais não-nulas, sendo cinco delas relativas a pontos de pressão e sete de velocidades. Da extensão do conceito de ADI (Alternating Direct Implicit procedure), Zedan propôs o CADI (Coupled ADI), que comparado com o método SLS de Van Doormaal e Raithby [23], também oriundo do conceito de ADI, apresenta um melhor desempenho. Por fim, da última extensão proposta por Zedan, surgiu o CSOR (Coupled Successive Overrelaxation procedure) para resolver u , v e p simultaneamente ponto-a-ponto.

Ao final de seu trabalho, Zedan observou que entre os métodos simultâneos por ele propostos, o CSOR é o que apresenta o melhor desempenho, para os casos testados, apesar da natureza mais implícita do CADI e do AESVS. A explicação para este comportamento foi atribuída às decomposições $[L][U]$ necessárias nestes dois últimos métodos, a cada atualização de coeficientes. Já em uma comparação, para diversos problemas, envolvendo as situações de melhor desempenho dos seus métodos e do método SIMPLE, Zedan verificou uma vantagem a favor do SIMPLE.

Posteriormente, em 1985, Galpin et al. [24] reformularam o método SLS [23], o qual apresentava várias deficiências, como por exemplo, complexidade de obtenção e codificação das

equações, e o relativo alto custo associado ao armazenamento de coeficientes, além da dificuldade em se trabalhar com pontos de pressão prescrita. Desta reformulação surgiu o CELS (Coupled Equation Line Solver), o qual resolve simultaneamente todas as equações de conservação em um processo que percorre o domínio linha-por-linha. A exemplo do SLS, o CELS sempre satisfaz a conservação de massa exatamente, enquanto que as equações de quantidade de movimento são progressivamente satisfeitas por meio de iterações.

Como se pode observar, trabalhos propondo novos métodos não faltam. Todavia, como que em um processo de seleção natural, determinado basicamente pelo próprio uso e divulgação de cada método, apenas alguns poucos se afirmaram, como o SIMPLE, SIMPLER e SIMPLEC, ou mostram condições para tal. Entre os métodos promissores, encontram-se o PRIME e o CELS. O primeiro por ser bastante compacto, e o segundo por ter sido mais rápido e mais estável que os métodos SIMPLER e SIMPLEC, nos testes realizados em [24].

O conhecimento de como cada um desses métodos se comporta em função da variação dos seus parâmetros de controle e da própria natureza do escoamento sob investigação é um requisito importante para os pesquisadores que os utilizam ou que procuram aprimorá-los. Os trabalhos de Raithby e Schneider [25], Zedan [21] e Van Doormaal [26] fornecem comparações de desempenho de métodos, limitando-se contudo, a casos em que discretizações ortogonais são empregadas. Assim sendo, e tendo em vista a já consagrada aplicação de sistemas coordenados coincidentes com as fronteiras do domínio de cálculo, um estudo comparativo baseado na solução de problemas em geometrias não-ortogonais mostra-se oportuno.

Um dos objetivos desta dissertação, portanto, é aumentar a base de conhecimento relativa ao tratamento do acoplamento pressão-velocidade (um acoplamento importante e particularmente problemático de ser assegurado em escoamentos incompressíveis) mediante a solução de alguns escoamentos em geometrias de fronteiras arbitrárias. A dificuldade extra na solução de escoamentos incompressíveis advém da impossibilidade de se utilizar a equação de estado como uma equação evolutiva para a pressão. Em compensação, uma vez que a massa específica é

assumida constante, pode-se dizer que a equação de conservação de massa toma o lugar da equação de estado, como uma equação evolutiva para a pressão, a fim de tornar o problema matematicamente bem-definido. Conseqüentemente, para a classe dos escoamentos incompressíveis, o acoplamento entre pressão e velocidade se dá de forma indireta, via conservação da massa. Em outras palavras, deve-se determinar um campo de pressão que ao ser introduzido nas equações de conservação de quantidade de movimento, sob a forma de gradientes, dê origem a campos de velocidade que respeitem o princípio de conservação de massa.

O estudo que se apresenta neste trabalho foi realizado a partir da implementação dos algoritmos SIMPLE [6], SIMPLER [1], SIMPLEC [7] e PRIME [8], tendo sido adotado um sistema generalizado de coordenadas.

Outro objetivo é estender o método CELS [24], a fim de torná-lo aplicável à solução de problemas que exijam o emprego de sistemas coordenados não-ortogonais. A maneira como isto foi feito levou à definição das equações algébricas de conservação de quantidade de movimento em termos das componentes contravariantes do vetor velocidade. O processo de obtenção das novas formas dessas equações, ou seja, diretamente a partir das equações algébricas para as componentes cartesianas, foi elaborado independentemente daquele proposto em [27] para as componentes covariantes e se constitui em uma contribuição adicional deste trabalho. É mostrado nos capítulos 2 e 3 que o uso das equações algébricas de quantidade de movimento em termos das componentes contravariantes permite que todos os métodos sob investigação cheguem a uma mesma resposta para um determinado problema, independentemente do quão refinada seja a malha adotada. Outro aspecto importante associado a tais equações é o de permitir que a extensão proposta seja aplicável a malhas onde se tenha métricas nulas. Por fim o método CELS é comparado com aqueles de abordagem segregada.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS GOVERNANTES, DISPOSIÇÃO DAS VARIÁVEIS NA MALHA E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS APROXIMADAS

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas as equações diferenciais que governam a classe de escoamentos sob investigação. Como já explicado no capítulo anterior, objetiva-se avaliar alguns métodos de tratamento do acoplamento pressão-velocidade, quando da solução de escoamentos em geometrias de fronteiras irregulares empregando-se discretizações não-ortogonais. Assim sendo, as equações governantes são escritas em um sistema de coordenadas generalizadas. Mostram-se também a disposição das variáveis na malha e o processo de obtenção das equações algébricas aproximadas.

2.2 - EQUAÇÕES GOVERNANTES

Escoamentos laminares, incompressíveis e isotérmicos que ocorrem em domínios bidimensionais são regidos por três equações diferenciais representando conservação de massa e de quantidade de movimento em duas direções coordenadas.

É interessante que as equações diferenciais estejam escritas em um sistema coordenado adequado ao problema que se vai resolver. A utilização de sistemas ortogonais como o cartesiano, polar, etc., na solução de escoamentos em geometrias de fronteiras irregulares como a mostrada na Fig.(2.1), leva à necessidade de interpolações das condições de contorno. Tais interpolações introduzem imprecisões que, para serem minimizadas, exigem que os volumes de controle sobre as fronteiras do domínio de cálculo tenham dimensões bastante reduzidas. As imprecisões, contudo, não são tão problemáticas quanto a própria falta de flexibilidade do código computacional elaborado a partir de equações escritas em um sistema coordenado inadequado.

Buscando-se a flexibilidade necessária para a solução de inúmeros problemas em geometrias arbitrárias, introduziu-se o conceito de coordenadas coincidentes com as fronteiras [28], ou coordenadas generalizadas. Assim, para a solução do escoamento através de uma geometria como aquela da Fig.(2.1), a definição de um sistema de coordenadas generalizadas, como mostrado na Fig.(2.2), é feita localmente a partir da discretização do domínio de cálculo.

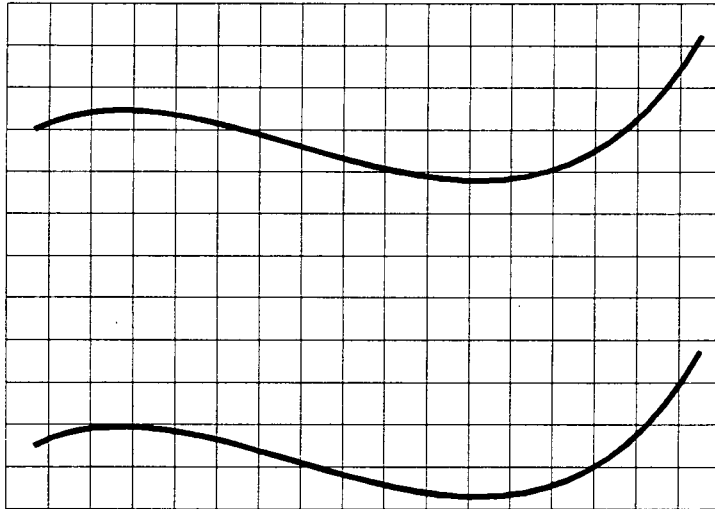


Fig.(2.1) - Geometria arbitrária de fronteiras não-ortogonais com discretização ortogonal

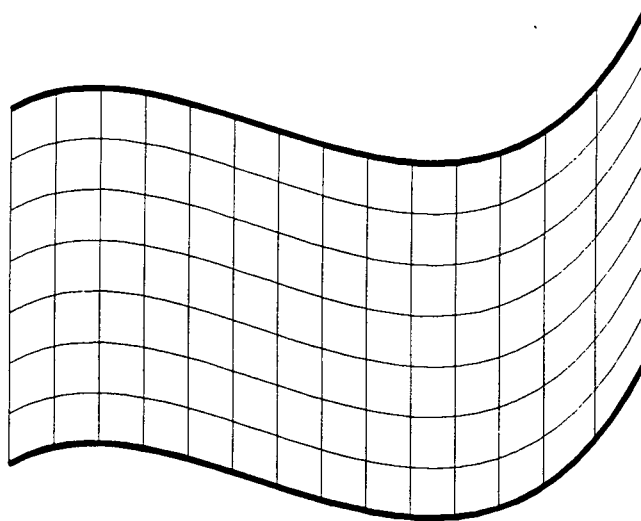


Fig.(2.2) - Geometria arbitrária de fronteiras não-ortogonais com discretização coincidente com as fronteiras

As equações diferenciais em coordenadas generalizadas podem ser obtidas por meio de balanços de conservação de massa e de quantidade de movimento, realizados sobre os volumes de controle irregulares da Fig.(2.2) ou, de forma muito mais simples, via aplicação da regra da cadeia, transformando-se as equações que originalmente estavam escritas em um sistema ortogonal. Detalhes do processo de transformação podem ser vistos em [29]. Tem-se então

Equação de conservação de massa

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V) = 0 \quad (2.1)$$

Equação de conservação de quantidade de movimento em x

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U u) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V u) = -\frac{\partial p}{\partial \xi} y_{\eta} + \frac{\partial p}{\partial \eta} y_{\xi} + \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\mu J \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \mu J \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu J \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \mu J \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Equação de conservação de quantidade de movimento em y

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U v) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V v) = -\frac{\partial p}{\partial \eta} x_{\xi} + \frac{\partial p}{\partial \xi} x_{\eta} + \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\mu J \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - \mu J \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu J \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - \mu J \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

A transformação imposta altera muito pouco a estrutura de cada equação em relação àquela do sistema cartesiano. As poucas diferenças introduzidas ficam por conta do aparecimento de termos com derivadas cruzadas e dos termos de pressão que passam a envolver derivadas nas duas direções coordenadas.

Nas Eqs. (2.1) a (2.3) as componentes contravariantes U e V do vetor velocidade são definidas em função das componentes cartesianas, por

$$U = uy_\eta - vx_\eta \quad (2.4.a)$$

$$V = vx_\xi - uy_\xi \quad (2.4.b)$$

e o Jacobiano da transformação inversa (J^{-1}) e as componentes do tensor métrico da transformação são dados por

$$J^{-1} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (2.4.c)$$

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad (2.4.d)$$

$$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \quad (2.4.e)$$

$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \quad (2.4.f)$$

Interpretações físicas para as componentes contravariantes e para as métricas da transformação podem ser vistas em [8].

É comum, na literatura, que as equações de conservação sejam representadas em termos de uma variável ϕ genérica, como mostrado a seguir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V \phi) + \hat{p}^\phi = \\ & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\Gamma^\phi J \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \Gamma^\phi J \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Gamma^\phi J \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \Gamma^\phi J \beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Os significados de ϕ , Γ^ϕ e \hat{p}^ϕ dependem da equação de conservação em questão

$$\text{Conservação de massa} \quad \phi = 1 \quad \Gamma^\phi = 0 \quad \hat{p}^\phi = 0$$

$$\text{Qtde de movimento em } x \quad \phi = u \quad \Gamma^\phi = \mu \quad \hat{p}^\phi = \frac{\partial p}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial p}{\partial \eta} y_\xi$$

$$\text{Qtde de movimento em } y \quad \phi = v \quad \Gamma^\phi = \mu \quad \hat{p}^\phi = \frac{\partial p}{\partial \eta} x_\xi - \frac{\partial p}{\partial \xi} x_\eta$$

2.3 - DISPOSIÇÃO DAS VARIÁVEIS NA MALHA

Na presente avaliação dos diferentes métodos para tratamento do acoplamento pressão-velocidade adotou-se o arranjo desencontrado das variáveis, o qual foi proposto inicialmente por Harlow e Welch [2]. A posição de cada variável em um arranjo desse tipo é mostrada na Fig.(2.3). Todas as componentes do vetor velocidade (cartesianas e contravariantes) são avaliadas nas faces dos volumes de controle de conservação de massa. Deve-se observar, ainda na Fig.(2.3), que as componentes situadas sobre linhas η recebem o índice 1 e aquelas sobre as linhas ξ recebem o índice 2.

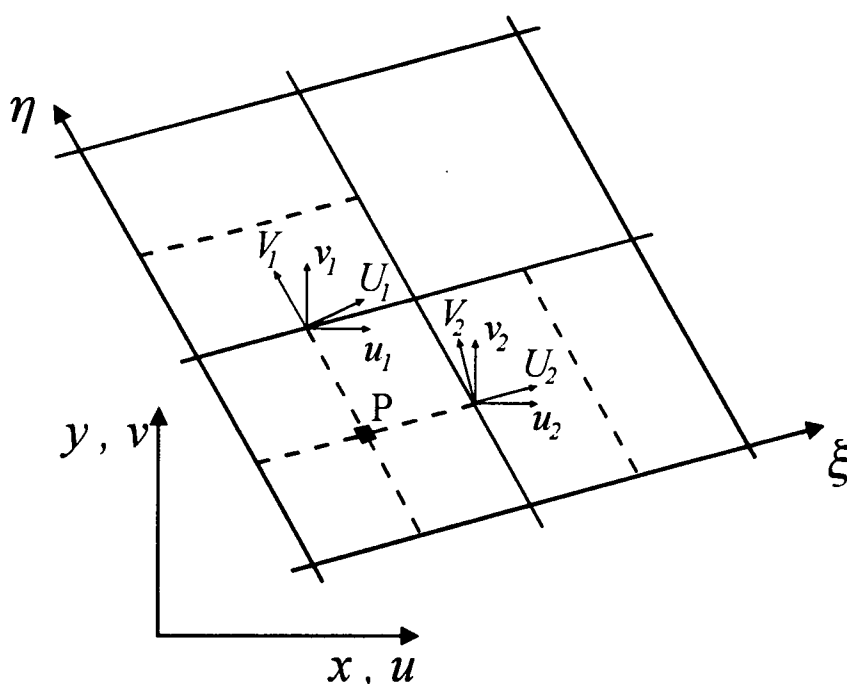


Fig.(2.3) - Arranjo das variáveis na malha computacional

Em se tratando de escoamentos incompressíveis, o arranjo desencontrado vem sendo o mais utilizado, a despeito da economia na implementação computacional possibilitada pelo colocalizado, como mostrado em [11] e [14]. Esta preferência pelo arranjo desencontrado é atribuída à forma mais consistente como são avaliados os gradientes de pressão [1]. Contudo, uma mudança de rumos pode ocorrer, graças aos recentes trabalhos desenvolvidos em [9] a

[17], onde o arranjo co-localizado é empregado com sucesso na solução de escoamentos incompressíveis e compressíveis. Esta, contudo, não é uma questão fundamental para os fins do presente trabalho, pois não há razões para se pensar que um determinado arranjo influencie, diferentemente, o desempenho de cada um dos métodos para tratamento do acoplamento pressão-velocidade. Assim sendo, em termos qualitativos, espera-se que as conclusões finais deste trabalho não sejam alteradas caso se utilize o arranjo co-localizado de variáveis.

2.4 - OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS APROXIMADAS

As equações algébricas aproximadas são obtidas por meio de integração das equações diferenciais, genericamente representadas pela Eq.(2.5), conforme mostrado na Eq.(2.6), a seguir.

$$\begin{aligned} \iint_{V_i} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dV dt + \iint_{V_i} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U \phi) dV dt + \iint_{V_i} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V \phi) dV dt = \\ \iint_{V_i} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\Gamma^\phi J \left[\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] \right] dV dt + \iint_{V_i} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Gamma^\phi J \left[\gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] \right] dV dt \\ - \iint_{V_i} \hat{p}^\phi dV dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

Uma vez que as equações governantes já estão escritas em termos das coordenadas (ξ, η) e que os volumes de controle neste novo plano coordenado são retangulares, a integração torna-se mais fácil se feita sobre estes volumes. A Fig.(2.4), a seguir, é útil para a compreensão da nomenclatura adotada no processo de obtenção das equações aproximadas. As letras maiúsculas indicam os pontos centrais dos volumes de controle para a variável ϕ , enquanto que as minúsculas representam as faces de um dado volume.

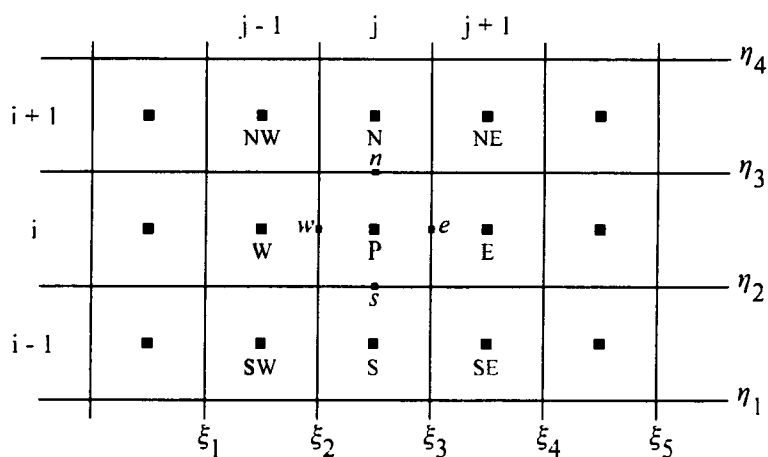


Fig.(2.4) - Discretização no plano transformado (ξ, η)

Algumas hipóteses simplificativas são impostas:

- O valor de ϕ no ponto "P" é representativo (valor médio) para todo o volume de controle, assim como o valor sobre o ponto "w" o é para a face oeste. O valor assumido por ϕ nas faces é calculado através de interpolações dos valores de ϕ no centro dos volumes adjacentes.
- Nas integrais do tipo $\int_r f(\xi, \eta, t) \phi dt$, assume-se para ϕ um valor médio no intervalo de tempo Δt , de modo que a integral se transforma em $\phi^{t+\theta\Delta t} \int_r f(\xi, \eta, t) dt$, onde $t + \theta\Delta t$ é o instante de tempo no qual ϕ é avaliado e $(0 \leq \theta \leq 1)$.

Efetuada-se as integrações indicadas pela Eq.(2.6), já levando-se em conta as simplificações estabelecidas anteriormente, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{(M_P \phi_P)^{n+1} - (M_P \phi_P)^n}{\Delta t} + [(\dot{\phi M})_e - (\dot{\phi M})_w + (\dot{\phi M})_n - (\dot{\phi M})_s]^{n+\theta} + \hat{p}^\phi \Delta V = \\
& \left[\left[D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e - \left[D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_w \right]^{n+\theta} + \\
& \left[\left[D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_n - \left[D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_s \right]^{n+\theta}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Na Eq.(2.7) foi introduzida a seguinte notação para os superíndices relativos ao tempo

$$n = t \tag{2.8.a}$$

$$n + \theta = t + \theta \Delta t \tag{2.8.b}$$

$$n + 1 = t + \Delta t \tag{2.8.c}$$

Ainda com relação à Eq.(2.7) tem-se

$$D_1 = +\Gamma^\phi \alpha J \Delta \eta \tag{2.9.a}$$

$$D_2 = -\Gamma^\phi \beta J \Delta \eta \tag{2.9.b}$$

$$D_3 = +\Gamma^\phi \gamma J \Delta \xi \tag{2.9.c}$$

$$D_4 = -\Gamma^\phi \beta J \Delta \xi \tag{2.9.d}$$

$$M_P = \rho_P \Delta \eta \Delta \xi J^{-1} \tag{2.9.e}$$

$$\dot{M}_e = (\rho U)_e \tag{2.9.f}$$

$$\dot{M}_w = (\rho U)_w \tag{2.9.g}$$

$$\dot{M}_n = (\rho V)_n \quad (2.9.h)$$

$$\dot{M}_s = (\rho V)_s \quad (2.9.i)$$

Nas faces dos volumes de controle, tanto os valores de ϕ quanto os valores dos fluxos difusivos são determinados por meio de funções de interpolação. Neste trabalho adotou-se o esquema unidimensional WUDS proposto por Raithby e Torrance [3]. Através desse esquema tem-se

$$\phi_e = [0.5 + \bar{\alpha}_e] \phi_P + [0.5 - \bar{\alpha}_e] \phi_E \quad (2.10.a)$$

$$\phi_w = [0.5 - \bar{\alpha}_w] \phi_P + [0.5 + \bar{\alpha}_w] \phi_W \quad (2.10.b)$$

$$\phi_n = [0.5 + \bar{\alpha}_n] \phi_P + [0.5 - \bar{\alpha}_n] \phi_N \quad (2.10.c)$$

$$\phi_s = [0.5 - \bar{\alpha}_s] \phi_P + [0.5 + \bar{\alpha}_s] \phi_S \quad (2.10.d)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_e = \bar{\beta}_e [\phi_E - \phi_P] (\Delta \xi)^{-1} \quad (2.10.e)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_w = \bar{\beta}_w [\phi_P - \phi_W] (\Delta \xi)^{-1} \quad (2.10.f)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_n = \bar{\beta}_n [\phi_N - \phi_P] (\Delta \eta)^{-1} \quad (2.10.g)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_s = \bar{\beta}_s [\phi_P - \phi_S] (\Delta \eta)^{-1} \quad (2.10.h)$$

onde

$$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{2} - \frac{\exp(Pe/2) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (2.11.a)$$

$$\bar{\beta}_i = Pe - \frac{\exp(Pe/2)}{\exp(Pe) - 1} \quad (2.11.b)$$

Os termos de derivadas cruzadas, que representam parcelas dos fluxos difusivos nas faces, são agrupados em um termo-fonte designado por S^ϕ , e a aproximação para este agrupamento depende do significado de ϕ . Assim, de acordo com a Fig.(2.3),

se $\phi = u_1$

$$S^\phi = D_{2e}[u_{2N} - u_{2P}] - D_{2w}[u_{2NW} - u_{2W}] + \\ D_{4n}[u_{2N} - u_{2NW}] - D_{4s}[u_{2P} - u_{2S}] \quad (2.12.a)$$

se $\phi = u_2$

$$S^\phi = D_{2e}[u_{1E} - u_{1SE}] - D_{2w}[u_{1P} - u_{1S}] + \\ D_{4n}[u_{1E} - u_{1P}] - D_{4s}[u_{1SE} - u_{1S}] \quad (2.12.b)$$

se $\phi = v_1$

$$S^\phi = D_{2e}[v_{2N} - v_{2P}] - D_{2w}[v_{2NW} - v_{2W}] + \\ D_{4n}[v_{2N} - v_{2NW}] - D_{4s}[v_{2P} - v_{2S}] \quad (2.12.c)$$

se $\phi = v_2$

$$S^\phi = D_{2e}[v_{1E} - v_{1SE}] - D_{2w}[v_{1P} - v_{1S}] + \\ D_{4n}[v_{1E} - v_{1P}] - D_{4s}[v_{1SE} - v_{1S}] \quad (2.12.d)$$

Substituindo-se as Eqs.(2.9), (2.10) e (2.12) na Eq.(2.7) e suprimindo-se o índice $n + \theta$, obtém-se após alguns procedimentos algébricos a Eq.(2.13) a seguir

$$\begin{aligned}
& \left[(0.5 + \bar{\alpha}_e) \dot{M}_e - (0.5 - \bar{\alpha}_w) \dot{M}_w + (0.5 + \bar{\alpha}_n) \dot{M}_n - (0.5 - \bar{\alpha}_s) \dot{M}_s \right] \phi_P + \\
& \quad \left[(D_{1e} \bar{\beta}_e + D_{1w} \bar{\beta}_w) (\Delta \xi)^{-1} + (D_{3n} \bar{\beta}_n + D_{3s} \bar{\beta}_s) (\Delta \eta)^{-1} \right] \phi_P + \\
& \quad \left[(M_P \phi_P)^{n+1} - (M_P \phi_P)^n \right] (\Delta t)^{-1} = S^\phi - \hat{p}^\phi \Delta V + \\
& \left[D_{1e} \bar{\beta}_e (\Delta \xi)^{-1} - (0.5 - \bar{\alpha}_e) \dot{M}_e \right] \phi_E + \left[D_{1w} \bar{\beta}_w (\Delta \xi)^{-1} + (0.5 + \bar{\alpha}_w) \dot{M}_w \right] \phi_W + \\
& \left[D_{3n} \bar{\beta}_n (\Delta \eta)^{-1} - (0.5 - \bar{\alpha}_n) \dot{M}_n \right] \phi_N + \left[D_{3s} \bar{\beta}_s (\Delta \eta)^{-1} + (0.5 + \bar{\alpha}_s) \dot{M}_s \right] \phi_S
\end{aligned} \tag{2.13}$$

A partir da Eq.(2.13) definem-se os coeficientes

$$A_E = \left[D_{1e} \bar{\beta}_e (\Delta \xi)^{-1} - (0.5 - \bar{\alpha}_e) \dot{M}_e \right] \tag{2.14.a}$$

$$A_W = \left[D_{1w} \bar{\beta}_w (\Delta \xi)^{-1} + (0.5 + \bar{\alpha}_w) \dot{M}_w \right] \tag{2.14.b}$$

$$A_N = \left[D_{3n} \bar{\beta}_n (\Delta \eta)^{-1} - (0.5 - \bar{\alpha}_n) \dot{M}_n \right] \tag{2.14.c}$$

$$A_S = \left[D_{3s} \bar{\beta}_s (\Delta \eta)^{-1} + (0.5 + \bar{\alpha}_s) \dot{M}_s \right] \tag{2.14.d}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s \tag{2.14.e}$$

Empregando-se a forma discretizada da equação de conservação de massa, tem-se

$$\dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = \left[M_P^{n+1} - M_P^n \right] (\Delta t)^{-1} \tag{2.15}$$

Mas para escoamentos incompressíveis, o lado direito da Eq.(2.15) é nulo. Então,

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \tag{2.16}$$

Substituindo-se os coeficientes das Eqs.(2.14) na Eq.(2.13) chega-se a

$$M_P \phi_P^{n+1} (\Delta t)^{-1} + A_P \phi_P = \sum_{NB} A_{NB} \phi_{NB} + S^\phi - \hat{p}^\phi \Delta V + M_P \phi_P^n (\Delta t)^{-1} \quad (2.17)$$

Observe-se que, coerentemente com o fato de se estar estudando escoamentos incompressíveis, tem-se $M_P^{n+1} = M_P^n$, ou simplesmente M_P .

2.5 - FORMULAÇÃO -E- IMPLÍCITA

O critério de positividade dos coeficientes [30] estabelece que para se alcançar a convergência quando da solução explícita ($\theta = 0$) do sistema linear representado pela Eq.(2.17) deve-se ter

$$\Delta t_{\max} \leq \frac{M_P}{A_P} \quad (2.18)$$

Muitas vezes está-se interessado apenas na solução de regime permanente de um determinado problema. Nestes casos é comum empregar-se um parâmetro de avanço distorcido no tempo, o parâmetro E , no lugar do avanço de tempo real. A relação existente entre os dois é dada por

$$E = \frac{\Delta t}{M_P} A_P \quad (2.19)$$

O parâmetro E representa a relação entre o avanço dado à variável ϕ de um certo volume, e o máximo avanço possível para que o critério de positividade seja respeitado.

Ocorre, porém, que o avanço de tempo possível em uma formulação explícita é quase sempre tão pequeno, que o tempo total a ser gasto na obtenção da solução final torna-se bastante elevado. A alternativa então é adotar uma formulação implícita, $\theta = 1$, na qual o critério de positividade é respeitado para qualquer valor do incremento do tempo [30].

Quando a formulação implícita é adotada, o parâmetro E passa a ser dado por

$$E = \frac{\Delta t A_P}{M_P} - 1 \quad (2.20)$$

onde o coeficiente A_P passa a ser definido como

$$A_P = M_P (\Delta t)^{-1} + \sum_{NB} A_{NB} \quad (2.21)$$

A expressão final na formulação implícita, empregando-se o multiplicador no tempo é, então,

$$A_P \phi_P^{n+1} = \sum_{NB} A_{NB} \phi_{NB}^{n+1} + S^\phi - \hat{p}^\phi \Delta V + \frac{A_P}{1+E} \phi_P^n \quad (2.22)$$

Para cada uma das quatro componentes cartesianas mostradas na Fig.(2.3), uma equação do tipo da Eq.(2.22) pode ser escrita. Já a equação discretizada de conservação de massa, Eq.(2.15), combinada com as Eq.(2.9.f) a (2.9.i) pode ser escrita na forma

$$(\rho U)_e - (\rho U)_w + (\rho V)_n - (\rho V)_s = 0 \quad (2.23)$$

2.6 - AS EQUAÇÕES DISCRETIZADAS DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO PARA AS COMPONENTES CONTRAVARIANTES

Um aspecto importante a ser observado nas Eqs.(2.22) e (2.23) é que enquanto na equação de conservação de massa as variáveis dependentes são as componentes contravariantes do vetor velocidade, nas equações de conservação de quantidade de movimento as variáveis dependentes são as componentes cartesianas. Esta é a forma mais comumente empregada nos métodos para solução de escoamentos em coordenadas generalizadas. A preferência pela utilização das componentes cartesianas como variáveis dependentes nas equações de quantidade de movimento tem se justificado pelo fato de se ter termos-fontes menos complexos que aqueles associados à utilização das componentes covariantes ou contravariantes, os quais envolvem termos adicionais de curvatura, em função destas componentes não terem uma direção fixa.

O fato de se dispor de uma equação do tipo da Eq.(2.22) para cada uma das quatro componentes cartesianas mostradas na Fig.(2.3) não implica na obrigatoriedade de se resolver um sistema de equações lineares para cada uma delas. Tal esquema é por demais dispendioso, não só pelo custo computacional associado à solução dos sistemas, mas também pela necessidade de armazenamento das quatro componentes sob a forma de variáveis indexadas. Uma maneira de reduzir os custos computacionais consiste em armazenar, sob a forma de variável indexada, apenas uma componente cartesiana em cada face do volume de controle. Por exemplo a componente u_2 em uma linha de ξ constante e a componente v_1 em uma linha de η constante. Para estas duas componentes garante-se a conservação de quantidade de movimento. Já as outras duas componentes, a saber u_1 e v_2 são calculadas através de médias aritméticas de u_2 e v_1 , respectivamente. Outra forma possível é aquela apresentada por Karki e Patankar [27], onde as equações algébricas de conservação de massa e de quantidade de movimento são reescritas em termos das componentes covariantes. A formulação apresentada em [27] permite a solução de problemas de escoamentos compressíveis e incompressíveis e o avanço das variáveis é feito segundo o método SIMPLER. A proposição de Karki e Patankar [27] não parece, contudo, ser a mais adequada possível, pois requer a manipulação de componentes cartesianas, covariantes e contravariantes ao longo do programa computacional. Além disso, a utilização das componentes covariantes na equação de conservação de massa, em substituição às contravariantes, faz com que o fluxo mássico através de cada uma das faces dos volumes de controle tenha que ser expresso em termos de duas componentes. Entretanto, apenas uma componente covariante é armazenada sobre cada face, segundo proposto em [27]. Conseqüentemente, o fluxo mássico não é perfeitamente definido no momento da avaliação dos resíduos de massa que irão constituir o termo-fonte da equação de Poisson para cálculo da variação de pressão, a qual por sua vez, será usada para definição de um campo de velocidades que satisfaça a conservação de massa. Assim, dado um certo conjunto fixo de coeficientes da referida equação de Poisson, o esquema de cálculo do campo de velocidades que satisfaz a conservação de massa torna-se iterativo, e, portanto, mais oneroso.

Cabe lembrar que os fluxos de massa têm participação na definição dos coeficientes das equações de conservação de quantidade de movimento e, portanto, a correta avaliação dos mesmos, em cada iteração, é uma prática que deve ser observada para garantir estabilidade ao processo iterativo. Este fato reforça a conveniência de se manter as componentes contravariantes na equação de conservação de massa. Assim, a utilização das componentes contravariantes como variáveis dependentes nas equações algébricas de quantidade de movimento permite uma economia de armazenamento das variáveis, sem apresentar o ponto negativo detectado no emprego das componentes covariantes, uma vez que apenas uma componente contravariante é necessária para definir o fluxo total de massa através de uma face de um volume de controle.

A princípio, dois caminhos podem ser seguidos para a obtenção das equações algébricas de quantidade de movimento em termos das componentes contravariantes. Transformar as equações diferenciais, Eqs.(2.2) e (2.3), em equações onde apareçam apenas as componentes U e V resulta em uma equação muito complicada, na qual perde-se o significado físico dos termos envolvidos. O outro caminho é partir das equações algébricas para as componentes cartesianas, como mostrado a seguir. Apesar da semelhança, o processo aqui apresentado foi elaborado independentemente daquele proposto por Karki e Patankar em [27].

Considerem-se as equações discretizadas para as componentes u_1 e v_1 , situadas em uma face de η constante, conforme mostrado na Fig.(2.3).

$$A_P^1 u_{1P} = \sum_{NB} A_{NB} u_{NB}^1 + \frac{A_P^1 u_{1P}^n}{1+E} - \frac{\Delta p}{\Delta \xi} y_\eta \Big|_P^1 + \frac{\Delta p}{\Delta \eta} y_\xi \Big|_P^1 + S^{u1} \quad (2.24)$$

$$A_P^1 v_{1P} = \sum_{NB} A_{NB} v_{NB}^1 + \frac{A_P^1 v_{1P}^n}{1+E} - \frac{\Delta p}{\Delta \eta} x_\xi \Big|_P^1 + \frac{\Delta p}{\Delta \xi} x_\eta \Big|_P^1 + S^{v1} \quad (2.25)$$

A relação entre as componentes contravariantes e cartesianas, dada pela Eq.(2.4.b), sugere que se faça

$$[Eq.(2.25)]x_\xi \Big|_P^1 - [Eq.(2.24)]y_\xi \Big|_P^1$$

o que leva a

$$A_P^1 V_{1P} = \sum_{NB} A_{NB}^1 \left[v_{NB} x_\xi - u_{NB} y_\xi \right]_P^1 - \left[\gamma \frac{\Delta p}{\Delta \eta} + \beta \frac{\Delta p}{\Delta \xi} \right]_P^1 + S^{V1} \quad (2.26)$$

onde

$$S^{V1} = S^{v1} x_\xi \Big|_P^1 - S^{u1} y_\xi \Big|_P^1 + \frac{A_P^1 V_{1P}^n}{1+E} \quad (2.27)$$

A Eq.(2.26) foi empregada por Maliska [8] em sua tese de doutoramento, onde o método adotado para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade foi o PRIME. Como pode ser visto no capítulo 3, no método PRIME as equações de conservação de quantidade de movimento são resolvidas de forma explícita. Assim, o fato da Eq.(2.26) não poder ser implicitamente resolvida não causou dificuldades ou limitações. Na presente dissertação a Eq.(2.26) é trabalhada com o objetivo de torná-la aplicável aos demais métodos em estudo. A equação resultante representa um passo importante para a obtenção de uma extensão do CELS, para emprego em coordenadas generalizadas, que não seja limitada a malhas onde não se tenha y_η ou x_ξ nulos, conforme mostrado no próximo capítulo.

O somatório da Eq.(2.26) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\sum_{NB} A_{NB}^1 \left[v_{NB} x_\xi - u_{NB} y_\xi \right]_P^1 = \sum_{NB} A_{NB}^1 V_{1NB} - b_P^{v1} \quad (2.28)$$

onde

$$b_P^{v1} = A_E^1 \left[v \delta(x_\xi) - u \delta(y_\xi) \right]_E^1 + A_W^1 \left[v \delta(x_\xi) - u \delta(y_\xi) \right]_W^1 + \quad (2.29)$$

$$A_N^1 \left[v \delta(x_\xi) - u \delta(y_\xi) \right]_N^1 + A_S^1 \left[v \delta(x_\xi) - u \delta(y_\xi) \right]_S^1$$

Na Eq.(2.29) tem-se

$$\mathcal{D}(x_\xi)|_E^1 = (x_\xi)|_E^1 - (x_\xi)|_P^1 \quad (2.30.a)$$

$$\mathcal{D}(x_\xi)|_W^1 = (x_\xi)|_W^1 - (x_\xi)|_P^1 \quad (2.30.b)$$

$$\mathcal{D}(x_\xi)|_N^1 = (x_\xi)|_N^1 - (x_\xi)|_P^1 \quad (2.30.c)$$

$$\mathcal{D}(x_\xi)|_S^1 = (x_\xi)|_S^1 - (x_\xi)|_P^1 \quad (2.30.d)$$

$$\mathcal{D}(y_\xi)|_E^1 = (y_\xi)|_E^1 - (y_\xi)|_P^1 \quad (2.30.e)$$

$$\mathcal{D}(y_\xi)|_W^1 = (y_\xi)|_W^1 - (y_\xi)|_P^1 \quad (2.30.f)$$

$$\mathcal{D}(y_\xi)|_N^1 = (y_\xi)|_N^1 - (y_\xi)|_P^1 \quad (2.30.g)$$

$$\mathcal{D}(y_\xi)|_S^1 = (y_\xi)|_S^1 - (y_\xi)|_P^1 \quad (2.30.h)$$

Então a Eq.(2.26) toma a forma

$$A_P^1 V_{1P} = \sum_{NB} A_{NB}^1 V_{1NB} - \gamma_{1P} \left. \frac{\Delta p}{\Delta \eta} \right|_P^1 + B_P^{V1} \quad (2.31)$$

onde

$$B_P^{V1} = \beta_{1P} \left. \frac{\Delta p}{\Delta \xi} \right|_P^1 + S_P^{V1} - b_P^{v1} \quad (2.32)$$

De forma semelhante, relacionando-se as equações de conservação de quantidade de movimento para as componentes cartesianas u_2 e v_2 situadas em uma face ξ constante, de acordo com a Eq.(2.4.a) tem-se

$$A_P^2 U_{2P} = \sum_{NB} A_{NB}^2 U_{2NB} - \alpha_{2P} \left. \frac{\Delta p}{\Delta \xi} \right|_P^2 + B_P^{U^2} \quad (2.33)$$

onde

$$B_P^{U^2} = \beta_{2P} \left. \frac{\Delta p}{\Delta \eta} \right|_P^2 + S_P^{U^2} - b_P^{u^2} \quad (2.34)$$

Resumindo, o conjunto completo de equações fica composto pela equação de conservação de massa e pelas Eqs.(2.31) e (2.33), as quais podem, agora, ser resolvidas por qualquer método de solução de sistemas lineares.

Outra motivação para o emprego das equações discretizadas de conservação de quantidade de movimento em termos das componentes contravariantes está associada à necessidade de obtenção de uma solução única para um dado escoamento através de um domínio de fronteiras não-ortogonais, independente do método usado para tratamento do acoplamento pressão-velocidade.

Note-se que se o conjunto de equações definido pelas Eqs.(2.22) e (2.23) for empregado em coordenadas não-ortogonais, chegar-se-á a soluções diferentes que dependem da forma de manipulação das equações discretizadas em cada um dos métodos de tratamento do acoplamento pressão-velocidade.

Considerando-se o arranjo de variáveis mostrado na Fig.(2.3), tem-se que nos métodos SIMPLE, SIMPLER e SIMPLEC (em suas formas originais) resolvem-se as equações de conservação de quantidade de movimento para as componentes cartesianas u_2 e v_1 avaliadas sobre as linhas ξ e η respectivamente. As outras duas componentes cartesianas são obtidas, em um momento posterior, a partir das contravariantes calculadas para satisfazer a conservação de massa, sem contudo, respeitarem a conservação de quantidade de movimento.

No método PRIME, ocorre conservação de quantidade de movimento para as duas componentes contravariantes responsáveis pelos fluxos de massa através das faces dos volumes de controle, e as cartesianas são calculadas por meio das Eqs.(2.4.a) e (2.4.b).

Um terceiro resultado diferente é alcançado pelo CELS, em coordenadas não-ortogonais, caso se empregue uma extensão baseada no cálculo das componentes cartesianas, diretamente via equações de conservação de quantidade de movimento.

Do exposto, conclui-se que o conjunto de equações resolvido em cada um dos métodos torna-se diferente daqueles resolvidos nos demais, quando da passagem de um sistema coordenado ortogonal para um não-ortogonal. Em termos práticos, contudo, a análise de escoamentos por meio de qualquer um desses métodos, considerando-se o uso das Eqs.(2.22) e (2.23), apresentará resultados praticamente idênticos, desde que malhas bem refinadas sejam empregadas. Por outro lado, ao se utilizar as equações de conservação de quantidade de movimento definidas em termos das componentes contravariantes, garante-se que todos os métodos sob investigação estão resolvendo exatamente o mesmo conjunto de equações, em qualquer tipo de discretização do domínio, mesmo para malhas pouco refinadas.

CAPÍTULO 3

OS MÉTODOS PARA TRATAMENTO DO ACOPLAMENTO PRESSÃO - VELOCIDADE

3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas as formas como as equações governantes discretizadas são trabalhadas em cada um dos métodos para tratamento do acoplamento pressão-velocidade em estudo.

Os métodos SIMPLE e seus derivados SIMPLER, SIMPLEC e PRIME avançam cada uma das variáveis U , V e p separadamente. Nos três primeiros a sequência de cálculo envolve dois passos distintos. Inicialmente as velocidades são calculadas com base em um campo estimado de pressões, denotado por p^* . Em seguida esse campo de pressões é avançado e as velocidades são corrigidas objetivando a conservação de massa. No PRIME resolve-se uma equação para a pressão, construída de uma forma tal que o campo de velocidade resultante desse campo de pressão satisfaça a conservação de massa. No CELS as variáveis U , V e p de uma dada linha são avançadas simultaneamente, satisfazendo as três equações de conservação.

3.2 - O MÉTODO SIMPLE

Um dos métodos segregados mais utilizados e do qual derivam muitos outros é o método SIMPLE - Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equations - desenvolvido em 1972 por Patankar e Spalding [6]. O aparecimento deste método revolucionou as técnicas de solução de escoamentos incompressíveis.

3.2.1 - EQUAÇÕES E SEQUÊNCIA DE CÁLCULO

No método SIMPLE, um campo estimado de pressão, p^* , é substituído nas equações de conservação de quantidade de movimento, resultando em campos de velocidades U^* e V^* . A menos que se tenha muita sorte na estimativa desse campo de pressão, o campo de velocidades calculado não satisfaz a conservação de massa. Para que tal conservação ocorra, é necessário, portanto, proceder-se a uma correção no campo p^* . Para tanto, considerem-se as Eqs.(2.31) e (2.33) escritas para o campo correto p e as Eqs.(3.1) e (3.2), a seguir, escritas para o campo estimado p^* .

$$A_P^2 U_{2P}^* = \sum_{NB} A_{NB}^2 U_{2NB}^* - \alpha_{2P} \left. \frac{\Delta p^*}{\Delta \xi} \right|_P^2 + B_P^{U/2} \quad (3.1)$$

$$A_P^1 V_{1P}^* = \sum_{NB} A_{NB}^1 V_{1NB}^* - \gamma_{1P} \left. \frac{\Delta p^*}{\Delta \eta} \right|_P + B_P^{V/1} \quad (3.2)$$

Pode-se dizer que o campo correto de pressão, p , é dado por

$$p = p^* + p' \quad (3.3)$$

onde p' é a correção de pressão, por enquanto desconhecida. Da mesma forma, as componentes do vetor velocidade que resultam na conservação de massa podem ser escritas em termos daquelas estimadas, fazendo-se

$$U = U^* + U' \quad (3.4)$$

$$V = V^* + V' \quad (3.5)$$

Subtraindo-se a Eq.(3.1) da Eq.(2.33) tem-se

$$A_P^2 [U_{2P} - U_{2P}^*] = \sum_{NB} A_{NB}^2 [U_{2NB} - U_{2NB}^*] - \alpha_{2P} \left[\left. \frac{\Delta p}{\Delta \xi} - \frac{\Delta p^*}{\Delta \xi} \right] \right|_P^2 \quad (3.6)$$

E aplicando-se as Eqs.(3.3) e (3.4) chega-se a

$$A_P^2 U'_{2P} = \sum_{NB} A_{NB}^2 U'_{2NB} - \alpha_{2P} \left. \frac{\Delta p'}{\Delta \xi} \right|_P^2 \quad (3.7)$$

Observe-se que nas Eqs.(3.1) e (3.2) os termos de derivadas cruzadas do gradiente de pressão não aparecem na correção de U e V , o que resulta em uma equação de cinco pontos para a determinação de p' .

No método SIMPLE, o somatório da variação de velocidade nos volumes vizinhos a um dado ponto P é retirado da equação. Esta simplificação, ao mesmo tempo em que é necessária, não afeta o resultado final do processo iterativo, visto que quando a solução estiver convergida ter-se-á, de fato, $U' = 0$ em todos os volumes do domínio de cálculo. Assim, pode-se escrever que

$$U'_{2P} = -\alpha_{2P} [A_P^2]^{-1} \left. \frac{\Delta p'}{\Delta \xi} \right|_P^2 \quad (3.8)$$

Substituindo-se a Eq.(3.8) na Eq.(3.4) tem-se

$$U_{2P} = U_{2P}^* - \alpha_{2P} [A_P^2]^{-1} \left. \frac{\Delta p'}{\Delta \xi} \right|_P^2 \quad (3.9)$$

Na Eq.(3.9), a correção de pressão p' e a componente de velocidade U que satisfaz a conservação de massa estão relacionadas através da componente estimada U^* .

Este mesmo procedimento aplicado para a componente V leva a

$$V_{1P} = V_{1P}^* - \gamma_{1P} [A_P^1]^{-1} \left. \frac{\Delta p'}{\Delta \eta} \right|_P^1 \quad (3.10)$$

As Eqs.(3.9) e (3.10) são aplicadas às quatro faces de um volume para conservação de massa e substituídas na equação discretizada apropriada, obtendo-se uma expressão para a determinação de p' , cuja forma é

$$A_P^P p'_P = A_E^P p'_E + A_W^P p'_W + A_N^P p'_N + A_S^P p'_S - \nabla \cdot (\vec{V}^*) \quad (3.11)$$

onde

$$A_E^P = \alpha_{2P} [A_{P(i,j+1)}^2]^{-1} \quad (3.11.a)$$

$$A_W^P = \alpha_{2P} [A_{P(i,j-1)}^2]^{-1} \quad (3.11.b)$$

$$A_N^P = \gamma_{1P} [A_{P(i+1,j)}^1]^{-1} \quad (3.11.c)$$

$$A_S^P = \gamma_{1P} [A_{P(i-1,j)}^1]^{-1} \quad (3.11.d)$$

$$A_P^P = A_E^P + A_W^P + A_N^P + A_S^P \quad (3.11.e)$$

$$\nabla \cdot (\vec{V}^*) = -U_{2e}^* + U_{2w}^* - V_{1n}^* + V_{1s}^* \quad (3.11.f)$$

As expressões anteriores são válidas apenas para os volumes internos. Expressões especiais devem ser deduzidas para os volumes de fronteira, levando-se em conta a condição de contorno. Isto é apresentado no capítulo 4.

Obtido p' , as Eqs.(3.9) e (3.10) são utilizadas para o cálculo do campo de velocidades que satisfaz a conservação de massa e a pressão é corrigida via Eq.(3.3).

O ciclo iterativo completo para resolver o acoplamento pressão-velocidade usando-se o método SIMPLE é o seguinte:

- a - Estimar os campos de velocidade e de pressão (U^* , V^* e p)
- b - Calcular os coeficientes das equações de quantidade de movimento
- c - Resolver as Eqs.(3.1) e (3.2), usando p^* , obtendo-se U^* e V^*
- d - Resolver a Eq.(3.11) para p'
- e - Calcular U e V via equações de correção, Eqs.(3.9) e (3.10)
- f - Calcular p através da Eq.(3.3)
- g - Considerando p como o novo p^* , voltar ao item b e iterar até a convergência

3.2.2 - OBSERVAÇÕES

O termo $\sum_{NB} A_{NB}^2 U'_{2NB}$, responsável pela característica semi-implícita do presente método, se mantido na Eq.(3.7), leva à definição de uma complexa equação para p' , tal que a p' em um dado ponto fica associada diretamente a todos os outros pontos do domínio de cálculo. Uma equação dessa forma é de difícil manipulação, devendo, portanto, ser evitada. É importante lembrar que a forma da equação de correção da pressão tem influência sobre a taxa de convergência do método, não alterando, contudo, a solução final.

O método SIMPLE é bastante susceptível à divergência, a menos que alguma sub-relaxação seja introduzida. Em [25], Raithby e Schneider mostram alguns resultados comparando três maneiras possíveis de avançar a solução no SIMPLE. Em tal trabalho estas alternativas são denominadas PS1, PS2 e PS3.

No esquema PS1, forma original do método SIMPLE, o termo transiente não está presente nas equações discretizadas (situação equivalente a se fazer E infinito). Assim, apenas uma parcela de p' é somada ao campo p^* para a definição do novo p . O campo de p' obtido deve ser, portanto, fortemente relaxado, na forma

$$p = p^* + \alpha_p p' \quad (3.12)$$

onde $\alpha_p \ll 1$

No esquema PS2, proposto por Patankar [31], as velocidades são sub-relaxadas enquanto a pressão volta a ser dada pela Eq.(3.3). A sub-relaxação nas velocidades é feita adotando-se valores finitos para o parâmetro E .

No esquema PS3, proposto em [25], pressão e velocidades são, ambas, sub-relaxadas. Adotam-se valores finitos para E enquanto que o fator de sub-relaxação na equação de correção da pressão, Eq.(3.12), passa a ser dado por

$$\alpha_P = \frac{1}{1+E} \quad (3.12.a)$$

Os resultados obtidos em [25] indicam um melhor desempenho do esquema PS3, devido à consistência entre o avanço das componentes U^* , V^* e aquele imposto às componentes U e V , obtidas via equações de correção. Com base nestas observações relativas à sub-relaxação, optou-se pelo uso do esquema PS3 no presente trabalho.

3.3 - O MÉTODO SIMPLER

Neste método, que é o SIMPLE Revisado, desenvolvido em 1979 por Patankar [1], objetiva-se um aumento na taxa de convergência através de uma nova maneira de calcular o campo de pressões em cada iteração. Procura-se atribuir um significado físico ao avanço de pressões, conectando-o às equações governantes, em lugar da utilização da Eq.(3.3). A correção do campo de velocidades continua idêntica àquela feita no método SIMPLE.

3.3.1 - EQUAÇÕES E SEQUÊNCIA DE CÁLCULO

Para a correção da pressão, considerem-se as equações de quantidade de movimento para as componentes U_2 e V_1 , já corrigidas pelas Eqs.(3.9) e (3.10), escritas na seguinte forma

$$U_{2P} = \hat{U}_{2P} - \alpha_{2P} [A_P^2]^{-1} \frac{\Delta p}{\Delta \xi} \Big|_P \quad (3.13)$$

$$V_{1P} = \hat{V}_{1P} - \gamma_{1P} [A_P^1]^{-1} \frac{\Delta p}{\Delta \eta} \Big|_P \quad (3.14)$$

Nestas equações os termos \hat{U}_{2P} e \hat{V}_{1P} agrupam todos os termos das Eqs.(2.31) e (2.33) que aqui não aparecem explicitamente.

Similarmente ao processo de obtenção da equação para p' , Eq.(3.11), chega-se a uma equação que relaciona as pressões de pontos vizinhos, cuja forma é

$$A_P^P p_P = A_E^P p_E + A_W^P p_W + A_N^P p_N + A_S^P p_S - \nabla \cdot (\hat{V}) \quad (3.15)$$

A sequência de cálculo para o método SIMPLER é, então,

- a - Estimar campos de velocidade e de pressão
- b - Calcular os coeficientes das equações de quantidade de movimento
- c - Resolver as Eqs.(3.1) e (3.2), usando p^* , obtendo U^* e V^*
- d - Resolver a Eq.(3.11) para p'
- e - Calcular U e V via equações de correção, Eqs.(3.9) e (3.10)
- f - Calcular p através da Eq.(3.15)
- g - Considerando p como o novo p^* , voltar ao item b e iterar até a convergência

3.3.2 - OBSERVAÇÕES

A equação para cálculo da pressão, Eq.(3.15), tem os mesmos coeficientes da Eq.(3.11) para o cálculo de p' . A única diferença fica por conta do termo-fonte.

Espera-se que o método SIMPLER permita uma taxa de convergência mais rápida que aquela possível com o SIMPLE. Por outro lado, deve ser notado que uma iteração no SIMPLER envolve um custo computacional extra, associado ao cálculo dos termos \hat{U} e \hat{V} e à própria solução da equação para a pressão. Para que o uso do SIMPLER seja compensador, a economia obtida com uma taxa de convergência melhor deve superar o maior gasto de cada iteração.

3.4 - O MÉTODO SIMPLEC

Uma sutil modificação do método SIMPLE foi proposta em 1984 por Van Doormaal e Raithby [7], na qual as aproximações impostas para a definição da equação para p' são melhoradas. Como consequência, o novo método, denominado SIMPLE Consistente, não mais necessita da sub-relaxação na equação de correção da pressão e apresenta maior taxa de convergência.

3.4.1 - EQUAÇÕES E SEQUÊNCIA DE CÁLCULO

Na obtenção da Eq.(3.8), desprezou-se o termo $\sum_{NB} A_{NB}^2 U'_{2NB}$ em favor de uma forma simples para a equação de p' , visto que o resultado final não era modificado. Van Doormaal e Raithby [7] consideram que tal aproximação é inconsistente, uma vez que um termo de similar magnitude, $\sum_{NB} A_{NB}^2 U'_{2P}$ é implicitamente mantido no lado esquerdo da Eq.(3.7).

Para introduzir uma modificação consistente que também conduza a uma forma simples para a equação para p' , subtrai-se o termo $\sum_{NB} A_{NB}^2 U'_{2P}$ de ambos os lados da Eq.(3.7)

$$\left[A_P^2 - \sum_{NB} A_{NB}^2 \right] U'_{2P} = \sum_{NB} A_{NB}^2 [U'_{2NB} - U'_{2P}] - \alpha_{2P} \left. \frac{\Delta p'}{\Delta \xi} \right|_P \quad (3.16)$$

Na aproximação adotada no SIMPLEC, o somatório do lado direito da Eq.(3.16) é desprezado, passando a variação de U a ser dada por

$$U'_{2P} = \alpha_{2P} \left[A_P^2 - \sum_{NB} A_{NB}^2 \right]^{-1} \left. \frac{\Delta p'}{\Delta \xi} \right|_P \quad (3.17)$$

Um procedimento análogo é aplicado para a definição da variação de V , e os coeficientes da Eq.(3.11) são alterados em função da nova aproximação. A sequência de cálculo permanece exatamente como no método SIMPLE. Relembrando, a correção da pressão não deve ser sub-relaxada, ou seja, α_P igual à unidade deve ser usado na Eq.(3.12).

3.5 - O MÉTODO PRIME

O método PRIME - PResure Implicit and Momentum Explicit - foi apresentado em 1981 por Maliska [8], o qual contou com uma colaboração de Hackman, a nível de comunicação pessoal. A principal motivação para este método foi a eliminação da solução de duas equações de Poisson, necessárias no método SIMPLER, procurando realizar as etapas de correção de velocidades e cálculo de pressão, de uma só vez. Isto foi conseguido utilizando-se as Eqs.(3.13) e (3.14) não só para o cálculo da pressão, via Eq.(3.15), mas também para a correção das componentes do vetor velocidade, tornando desnecessária a obtenção do campo de p' .

3.5.1 - SEQUÊNCIA DE CÁLCULO

O algoritmo do método PRIME apresenta os seguintes passos

- a - Estimar os campos de velocidade e de pressão
- b - Calcular os coeficientes das equações de quantidade de movimento
- c - Calcular, volume a volume, as grandezas \hat{U} e \hat{V} (procedimento algébrico explícito)
- d - Calcular coeficientes e termo-fonte da Eq.(3.15)
- e - Calcular p , resolvendo a Eq.(3.15)
- f - Corrigir as velocidades, usando as Eqs.(3.13) e (3.14)
- g - Voltar ao item b e iterar até a convergência.

3.5.2 - OBSERVAÇÕES

O método PRIME, ao contrário dos anteriores, não exige que simplificações sejam introduzidas nas equações discretizadas. Este fato, aliado a uma menor quantidade de cálculos necessários em cada uma de suas iterações, permite esperar que o seu desempenho seja superior àqueles apresentados pelos métodos SIMPLE, SIMPLER e SIMPLEC.

3.6 - O MÉTODO CELS

O método CELS - Coupled Equations Line Solver - foi proposto em 1985 por Galpin et al. [24], como uma reformulação ao SLS [23], tendo como atributos e características

- a - Garantir a conservação de massa exatamente, em cada iteração. Promover o avanço das variáveis com base na solução direta das equações de conservação de massa e de quantidade de movimento sobre linhas e colunas.
- b - Ser um método simples de deduzir e permitir uma codificação mais fácil do que muitos dos procedimentos de solução segregada comumente usados.
- c - Permitir a especificação direta da pressão onde for necessário.
- d - Ser robusto (estável).

Os três primeiros pontos são verificados neste capítulo. O quarto ponto, relativo à robustez do método é analisado no capítulo 6, onde são apresentados os resultados dos testes realizados.

3.6.1 - EQUAÇÕES E SEQUÊNCIA DE CÁLCULO

O procedimento iterativo do CELS consiste em varrer o domínio linha-por-linha, resolvendo de forma acoplada as variáveis U_2 , V_1 e p sobre uma dada linha, com base nas melhores estimativas das variáveis situadas nas linhas vizinhas. Isto é feito alternadamente nas duas direções coordenadas (ξ e η).

Para a varredura na direção η , uma solução direta ao longo de uma linha ($i = \text{cte.}$), conforme Fig.(3.1), resulta em novos valores para todas as variáveis destacadas pelo retângulo tracejado em tal figura. As pressões e velocidades fora da linha, não indicadas por letras, são transferidas para os termos-fontes de cada uma das Eqs. (2.23), (2.31) e (2.33), as quais passam a ser escritas nas formas mostradas a seguir

Conservação de quantidade de movimento em y

$$A_P^1 V_{1P} = A_E^1 V_{1E} + A_W^1 V_{1W} + \gamma_{1P} \frac{P_P}{\Delta \eta} + B_P^{V1\eta} \quad (3.18)$$

onde

$$B_P^{V1\eta} = A_N^1 V_{1N} + A_S^1 V_{1S} - \gamma_{1P} \frac{P_N}{\Delta \eta} + B_P^{V1} \quad (3.19)$$

Conservação de quantidade de movimento em x

$$A_P^2 U_{2P} = A_E^2 U_{2E} + A_W^2 U_{2W} - \alpha_{2P} \frac{P_E - P_P}{\Delta \xi} + B_P^{U2\eta} \quad (3.20)$$

onde

$$B_P^{U2\eta} = A_N^2 U_{2N} + A_S^2 U_{2S} + B_P^{U2} \quad (3.21)$$

Conservação de massa

$$U_{2e} - U_{2w} + V_{1n} + B_P^{c\eta} = 0 \quad (3.22)$$

onde

$$B_P^{c\eta} = -V_{1s} \quad (3.23)$$

Explicitando-se a Eq.(3.22) em termos de V_{1n} tem-se

$$V_{1n} = -B_P^{c\eta} - U_{2e} + U_{2w} \quad (3.24)$$

A Eq.(3.24) é aplicada aos volumes das posições (j-1) e (j+1) e as expressões resultantes são aplicadas na Eq.(3.18) obtendo-se

$$A_P^{p\eta} p_P = A_E^{p\eta} U_{2P} + A_W^{p\eta} U_{2W} + A_{WW}^{p\eta} U_{2WW} + A_{EE}^{p\eta} U_{2E} + B_P^{p\eta} \quad (3.25)$$

$$A_P^{U\eta} U_{2P} = A_E^{U\eta} U_{2E} + A_W^{U\eta} U_{2W} + A_{WW}^{U\eta} U_{2WW} + A_{EE}^{U\eta} U_{2EE} + B_P^{U\eta} \quad (3.27)$$

onde

$$A_P^{U\eta} = \left[A_P^2 - \alpha_{2P} (A_E^{p\eta} - A_{W(j+1)}^{p\eta}) \right] \quad (3.28.a)$$

$$A_E^{U\eta} = \left[A_E^2 + \alpha_{2P} (A_{EE}^{p\eta} - A_{E(j+1)}^{p\eta}) \right] \quad (3.28.b)$$

$$A_W^{U\eta} = \left[A_W^2 + \alpha_{2P} (A_W^{p\eta} - A_{WW(j+1)}^{p\eta}) \right] \quad (3.28.c)$$

$$A_{WW}^{U\eta} = A_{WW}^{p\eta} \alpha_{2P} \quad (3.28.d)$$

$$A_{EE}^{U\eta} = -A_{EE(j+1)}^{p\eta} \alpha_{2P} \quad (3.28.e)$$

$$B_P^{U\eta} = B_P^{U2\eta} + \alpha_{2P} [B_P^{p\eta} - B_{P(j+1)}^{p\eta}] \quad (3.28.f)$$

Nas equações anteriores, o índice (j+1) indica que os coeficientes aos quais estão ligados referem-se ao volume de controle para conservação de quantidade de movimento para a componente V_1 , posicionado em (j+1).

A seqüência de cálculo para a solução sobre uma linha (i = cte.) é, então

- a - Calcular $B_P^{V1\eta}$
- b - Calcular $B_P^{U2\eta}$
- c - Calcular coeficientes $A_E^{p\eta}, A_W^{p\eta}, A_{EE}^{p\eta}, A_{WW}^{p\eta}$
- d - Calcular $B_P^{p\eta}$
- e - Calcular coeficientes $A_P^{U\eta}, A_E^{U\eta}, A_W^{U\eta}, A_{WW}^{U\eta}, A_{EE}^{U\eta}$
- f - Calcular $B_P^{U\eta}$
- g - Resolver o sistema linear representado pela Eq.(3.27), através do algoritmo PDMA, obtendo-se novos valores para todas as componentes U_2 sobre a linha em questão
- h - Calcular p explicitamente, via Eq.(3.25)
- i - Calcular V_{1n} , também explicitamente, pela Eq.(3.24)

Após a solução sobre a linha (i) ter sido obtida, todas as variáveis sobre esta linha são mantidas fixas e então toda a sequência é repetida para a linha (i+1).

Ao se calcular as variáveis sobre a linha (i+1), as pressões sobre a linha (i), recém-calculadas, não são requeridas. Isto significa que não há um acoplamento entre as pressões destas duas linhas, ou seja, o nível de pressão sobre a linha (i+1) será determinado apenas a partir das pressões sobre a linha (i+2). Como consequência, tem-se uma diminuição na taxa de convergência do método, que pode, entretanto, ser parcialmente evitada ajustando-se os níveis de pressão sobre cada linha, após cada varrida ter sido completada. Em [24], onde se tem o CELS em coordenadas ortogonais (x,y), é sugerido que o ajuste seja tal que as equações de conservação de quantidade de movimento na direção da varredura sejam satisfeitas, na média, sobre cada linha (para a varredura na direção y) ou coluna (para a varredura na direção x). Este procedimento de correção é aplicado em sentido contrário ao sentido de varredura, tendo a última linha ou coluna como referência. O incremento de pressão (δp) que irá fornecer a conservação média, para o caso da presente extensão do método CELS para coordenadas generalizadas é determinado a seguir.

Considere-se a equação de conservação de quantidade de movimento para a componente V_1 da Eq.(2.31), escrita para um volume qualquer sobre a linha (i+1). Enquanto a solução convergida não for alcançada ter-se-á um resíduo dado por

$$R_{(j)} = A_P^1 V_{1P} - \sum_{NB} A_{NB}^1 V_{1NB} + \gamma_{1P} \left. \frac{\Delta p}{\Delta \eta} \right|_P - B_P^{V1} \quad (3.29)$$

Deseja-se que o somatório de $R_{(j)}$, ao longo de toda a linha (i+1) seja nulo. Logo,

$$\sum_j \gamma_{1P} \left. \frac{p_P}{\Delta \eta} \right|_P = \sum_j \left[A_P^1 V_{1P} - \sum_{NB} A_{NB}^1 V_{1NB} - B_P^{V1} \right] + \sum_j \gamma_{1P} \left. \frac{p_N}{\Delta \eta} \right|_P - \sum_j R_{(j)} \quad (3.30)$$

Designando por $p_{(j)}^*$ os novos valores de pressão sobre a linha (i+1) que irão fornecer um somatório de resíduo nulo, tem-se

$$\sum_j \gamma_{1P} \left. \frac{p_P^*}{\Delta \eta} \right|^1 = \sum_j \left[A_P^1 V_{1P} - \sum_{NB} A_{NB}^1 V_{1NB} - B_P^{V1} \right] + \sum_j \gamma_{1P} \left. \frac{p_N}{\Delta \eta} \right|^1 \quad (3.31)$$

Subtraindo-se a Eq.(3.31) da Eq.(3.30) , tem-se

$$\sum_j \gamma_{1P} \left[\left. \frac{p_P^*}{\Delta \eta} - \frac{p_P}{\Delta \eta} \right]^1 = - \sum_j R_{(j)} \quad (3.32)$$

Definindo $p_P^* - p_P = -\delta p$ então,

$$\sum_j \gamma_{1P} \left[\left. \frac{\delta p}{\Delta \eta} \right]^1 = \sum_j R_{(j)} \quad (3.33)$$

Substituindo-se a Eq.(3.33) na Eq.(3.30),

$$\delta p \sum_j \gamma_{1P} = \sum_j \left[A_P^1 V_{1P} - \sum_{NB} A_{NB}^1 V_{1NB} - B_P^{V1} \right] + \sum_j \left[\gamma_{1P} \frac{\Delta p}{\Delta \eta} \right] \quad (3.34)$$

A partir da Eq.(3.34) calcula-se δp , começando-se com a linha ($i=M-1$), corrigem-se as pressões sobre esta linha, somando-se o δp e repete-se o processo até a linha ($i=2$). Corrigido todo o campo de pressões, continua-se o processo de varredura na direção η , com explicado anteriormente. A última linha ($i=M$), contudo, recebe um tratamento especial em virtude das componentes V_{1n} , neste caso, não serem dadas pela Eq.(3.24). Estas componentes são grandezas já conhecidas. São condições de contorno do problema. Desta forma, a conservação de massa aplicada explicitamente a cada um dos volumes de controle desta última linha fornece a componente U_2 . A pressão é então calculada através da equação de conservação de quantidade de movimento para a componente V_1 , aplicada novamente sobre a penúltima linha ($i=m-1$). Logo em seguida procede-se à correção do campo de pressões conforme já mostrado.

À varredura na direção η , segue-se uma varredura na direção ξ , onde então calculam-se, de forma acoplada, todas as variáveis sobre uma coluna ($j=cte.$). Na Fig.(3.2) essas variáveis estão

destacadas pelo retângulo tracejado. As componentes V_1 são obtidas via solução de um sistema linear pentadiagonal e as componentes U_2 e a pressão são calculadas explicitamente.

Segundo o mesmo procedimento já descrito, na nova direção de varredura os termos-fontes das equações de conservação passam a ser dados pelas Eq.(3.35), (3.36) e (3.37).

$$B_P^{c\eta} = -U_{2w} \quad (3.35)$$

$$B_P^{U2\xi} = A_E^2 U_{2E} + A_W^2 U_{2W} - \alpha_{2P} p_P + B_P^{U2} \quad (3.36)$$

$$B_P^{V1\xi} = A_E^1 V_{1E} + A_W^1 V_{1W} + B_P^{V1} \quad (3.37)$$

A equação para o cálculo da pressão então é

$$A_P^{p\xi} p_P = A_N^{p\xi} V_{1P} + A_S^{p\xi} V_{1S} + A_{SS}^{p\xi} V_{1SS} + A_{NN}^{p\xi} V_{1N} + B_P^{p\xi} \quad (3.38)$$

onde

$$A_P^{p\xi} = 1 \quad (3.39.a)$$

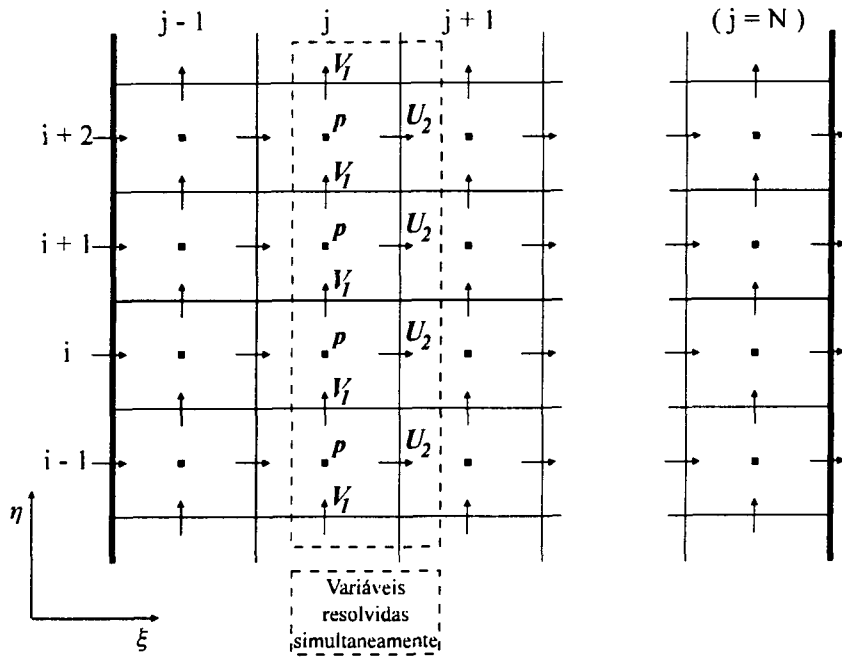
$$A_N^{p\xi} = -\frac{1}{\alpha_{2P}} [A_P^2 + A_N^2] \quad (3.39.b)$$

$$A_S^{p\xi} = +\frac{1}{\alpha_{2P}} [A_P^2 + A_S^2] \quad (3.39.c)$$

$$A_{NN}^{p\xi} = +\frac{A_N^2}{\alpha_{2P}} \quad (3.39.d)$$

$$A_{SS}^{p\xi} = -\frac{A_S^2}{\alpha_{2P}} \quad (3.39.e)$$

$$B_P^{p\xi} = \frac{1}{\alpha_{2P}} [A_P^2 U_{2w} - A_N^2 U_{2wn} - A_S^2 U_{2ws} - B_P^{U2\xi}] \quad (3.39.f)$$



Fig(3.2) - Método CELS - Varredura na direção ξ

Já a equação de determinação de V_i na varredura na direção ξ fica assim

$$A_P^{V\xi} V_{1P} = A_N^{V\xi} V_{1N} + A_S^{V\xi} V_{1S} + A_{SS}^{V\xi} V_{1SS} + A_{NN}^{V\xi} V_{1NN} + B_P^{V\xi} \quad (3.40)$$

onde

$$A_P^{V\xi} = \left[A_P^1 - \gamma_{1P} (A_N^{p\xi} - A_{S(i+1)}^{p\xi}) \right] \quad (3.41.a)$$

$$A_N^{V\xi} = \left[A_N^1 + \gamma_{1P} (A_{NN}^{p\xi} - A_{N(i+1)}^{p\xi}) \right] \quad (3.41.b)$$

$$A_S^{V\xi} = \left[A_S^1 + \gamma_{1P} (A_S^{p\xi} - A_{SS(i+1)}^{p\xi}) \right] \quad (3.41.c)$$

$$A_{SS}^{V\xi} = +A_{SS}^{p\xi} \gamma_{1P} \quad (3.41.d)$$

$$A_{NN}^{V\xi} = -A_{NN(i+1)}^{p\xi} \gamma_{1P} \quad (3.41.e)$$

$$B_P^{V\xi} = B_P^{V1\xi} + \gamma_{1P} [B_P^{p\xi} - B_{P(i+1)}^{p\xi}] \quad (3.41.f)$$

A sequência de cálculo para a solução sobre uma coluna ($j = \text{cte.}$) é, então

- a - Calcular $B_P^{U2\xi}$
- b - Calcular $B_P^{V1\xi}$
- c - Calcular coeficientes $A_N^{p\xi}, A_S^{p\xi}, A_{NN}^{p\xi}, A_{SS}^{p\xi}$
- d - Calcular $B_P^{p\xi}$
- e - Calcular coeficientes $A_P^{V\xi}, A_N^{V\xi}, A_S^{V\xi}, A_{NN}^{V\xi}, A_{SS}^{V\xi}$
- f - Calcular $B_P^{V\xi}$
- g - Resolver o sistema linear para V_1
- h - Calcular p explicitamente, via Eq.(3.38)
- i - Calcular U_{2w} , também explicitamente

A correção da pressão, será, agora, para promover a conservação média de quantidade de movimento para a componente U_2 sobre cada coluna, iniciando-se na coluna ($j=N-1$) até a coluna ($j=2$), tendo as pressões em ($j=N$) como referência. O incremento de pressão é então dado por

$$\delta p \sum_i \alpha_{2P} = \sum_i \left[A_P^2 U_{2P} - \sum_{NB} A_{NB}^2 U_{2NB} - B_P^{U2} \right] + \sum_i \left[\alpha_{2P} \frac{\Delta p}{\Delta \xi} \right] \quad (3.42)$$

Na última coluna ($j=N$) as componentes U_{2e} são condições de contorno do problema. Assim, as componentes V_1 são dadas diretamente pela conservação de massa, enquanto que a pressão vem da solução da equação de conservação de quantidade de movimento para a componente U_2 , aplicada novamente sobre a penúltima coluna. Mais uma vez o ciclo de correção de pressão é executado.

O ciclo iterativo completo do CELS resume-se em

- a - Estimar os campos de velocidade e de pressão
- b - Calcular os coeficientes das equações do movimento
- c - Varrer o domínio na direção η , corrigindo o campo de pressão após a solução de U, V e p sobre cada linha
- d - Varrer o domínio na direção ξ , corrigindo o campo de pressão após a solução de U, V e p sobre cada coluna
- e - Voltar ao item b e iterar até que algum critério de convergência seja satisfeito

3.6.2 - OBSERVAÇÕES

Uma análise do processo de cálculo do método CELS permite verificar que, de fato, a conservação de massa é respeitada, exatamente, em cada iteração. Isto ocorre porque a equação de conservação de massa é resolvida explicitamente na etapa final de cada varredura em um linha ou coluna. A afirmação de que a pressão pode ser facilmente especificada de forma direta em um determinado ponto deve-se, também à natureza explícita como esta variável é avançada. A dedução das equações e a codificação, entretanto, não são mais fáceis do que aquelas dos métodos segregados, como sugerem os autores do CELS, haja vista o grande número de coeficientes que precisam ser definidos.

Deve ser observado que com a utilização das equações algébricas de quantidade de movimento em termos das componentes contravariantes, os coeficientes definidos pelas Eq.(3.26) e (3.39) nunca serão indeterminados, uma vez que as componentes do tensor métrico γ_{1P} e α_{2P} nunca se anulam. Por outro lado, se a extensão fosse tentada em termos das equações algébricas para as componentes cartesianas u_2 e v_1 , ter-se-ia os coeficientes anteriormente mencionados divididos por y_η e x_ξ , as quais podem ser nulas, dependendo da malha empregada. Além disso, uma extensão com base nas componentes cartesianas conduz a resultados diferentes daqueles encontrados através dos outros métodos, quando discretizações não-ortogonais são empregadas.

Os resultados são tão mais diferentes quanto menos refinada for a malha. Estes aspectos foram os preponderantes na definição das equações algébricas de quantidade de movimento em termos das componentes contravariantes, apresentadas no capítulo anterior.

Quando um pequeno valor é atribuído ao parâmetro E para o cálculo dos coeficientes das equações lineares, uma significativa sub-relaxação é introduzida, e assim o efeito de um determinado ponto de pressão sobre o campo de velocidade é bastante local, como discutido por Zedan e Schneider [32]. Nesse caso, as aproximações introduzidas na obtenção das equações para cada linha, isto é, a fixação dos valores das linhas vizinhas em valores estimados, é fisicamente consistente, fazendo com que o CELS convirja monotônica e rapidamente.

Quando grandes valores de E são empregados, tem-se um aumento da influência de um ponto de pressão sobre o campo de velocidade. Tal situação reflete-se na taxa de convergência do CELS, tornando-o mais lento, uma vez que a solução iterativa passa a ser muito sensível aos valores estimados das linhas vizinhas. Para contornar esta deficiência, Galpin et al. [24] sugerem a introdução de uma relaxação que melhora consideravelmente a taxa de convergência do método quando elevados valores são atribuídos ao parâmetro E . A relaxação é introduzida modificando as equações linearizadas de quantidade de movimento, Eqs.(3.18) e (3.20) que, para uma linha de $i=cte$, passam a ser

$$A_P^1 V_{1P} \left[\frac{e+1}{e} \right] = A_E^1 V_{1E} + A_W^1 V_{1W} + \gamma_{1P} \frac{p_P}{\Delta \eta} + B_P^{V1\eta} + \frac{A_P^1 V_{1P}^*}{e} \quad (3.43)$$

$$A_P^2 U_{2P} \left[\frac{e+1}{e} \right] = A_E^2 U_{2E} + A_W^2 U_{2W} + \alpha_{2P} \frac{p_E - p_P}{\Delta \xi} + B_P^{U2\eta} + \frac{A_P^2 U_{2P}^*}{e} \quad (3.44)$$

Os valores de V_{1P}^* e U_{2P}^* são aqueles calculados na varredura anterior do domínio de cálculo e o parâmetro " e " é o parâmetro de relaxação da solução das equações lineares, análogo ao parâmetro E usado na definição dos coeficientes. Quando a solução convergida é alcançada, $V_{1P}^* = V_{1P}$ e $U_{2P}^* = U_{2P}$, e o termo de relaxação desaparece.

Nos testes realizados por Galpin et al. [24], foi observado que o desempenho do CELS é melhor sem relaxação ($e \rightarrow \infty$) se $E \leq 20$ e com relaxação ($e = 5$) se $E \geq 20$. Foi observado também, que o método é insensível ao valor exato atribuído ao parâmetro "e".

Nos testes apresentados no capítulo 6 do presente trabalho, a relação entre os valores desses dois parâmetros segue a recomendação de Galpin et al. [24].

Em decorrência da introdução do fator de relaxação "e", os coeficientes das equações para solução de U , V e p sobre uma dada linha ou coluna devem ser modificados. Para a varredura na direção η , por exemplo, passa-se a ter

$$A_E^{p\eta} = -\frac{1}{\gamma_{1P}} \left[A_P^1 \frac{e+1}{e} + A_E^1 \right] \quad (3.45)$$

$$A_W^{p\eta} = +\frac{1}{\gamma_{1P}} \left[A_P^1 \frac{e+1}{e} + A_W^1 \right] \quad (3.46)$$

$$B_P^{p\eta} = \frac{1}{\gamma_{1P}} \left[A_P^1 \frac{e+1}{e} V_{1s} - A_E^1 V_{1se} - A_W^1 V_{1sw} - B_P^{V1\eta} - \frac{A_P^1 V_{1P}^*}{e} \right] \quad (3.47)$$

$$A_P^{U\eta} = \left[A_P^2 \frac{e+1}{e} - \alpha_{2P} (A_E^{p\eta} - A_W^{p\eta(j+1)}) \right] \quad (3.48)$$

$$B_P^{U\eta} = B_P^{U2\eta} + \frac{A_P^2 U_{2P}^*}{e} + \alpha_{2P} [B_P^{p\eta} - B_P^{p\eta(j+1)}] \quad (3.49)$$

De forma similar alteram-se os coeficientes para uma varredura na direção ξ e os blocos de correção de pressão.

Desta forma, ou seja, empregando-se as componentes contravariantes, desenvolveu-se uma extensão do CELS que possui as características do método original [24]. Estas características não são conseguidas se as componentes cartesianas ou covariantes são empregadas como variáveis dependentes no contexto de coordenadas generalizadas.

CAPÍTULO 4

DETALHES NUMÉRICOS

4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo tratam-se algumas questões de ordem numérica como as equações de p e p' para os volumes de fronteira e para os volumes onde a pressão é especificada. Outra questão abordada é a que diz respeito à solução dos sistemas lineares. As duas primeiras são específicas dos métodos SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC e PRIME. A última se aplica também ao CELS, devendo ser notado, contudo, que os métodos de solução de sistemas lineares foram adequadamente escolhidos em função da estrutura dos sistemas em questão. Outros detalhes numéricos, como a aplicação das condições de contorno para a velocidade e avaliação dos gradientes de pressão nas fronteiras podem ser vistos em [29], uma vez que os esquemas aqui adotados são os mesmos.

4.2 - EQUAÇÕES DE p E p' PARA OS VOLUMES DE FRONTEIRA

No capítulo 3 foram apresentados os coeficientes das equações para p e p' , aplicáveis aos métodos de abordagem segregada. Aqueles coeficientes são válidos apenas para os volumes centrais. Para os volumes que formam o contorno do domínio de cálculo, os coeficientes dessas equações devem levar em conta as condições de contorno para as velocidades [8], evitando-se trabalhar com condições de contorno de Newmann para a pressão. Assim, por exemplo, nas equações $U_e = U_e^* + U_e'$ ou $U_e = \hat{U}_e + U_e'$, a variação U_e' é nula, caso o volume de controle em questão esteja situado na fronteira leste, como o mostrado na Fig.(4.1). Esta informação, quando levada à equação de conservação de massa para a obtenção das respectivas equações para p ou p' , resulta em

$$A_E^P = 0 \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{V}^* = U_E - U_W^* + V_N^* - V_S^* \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \hat{V} = U_E - \hat{U}_W + \hat{V}_N - \hat{V}_S \quad (4.3)$$

Raciocínio similar conduz aos coeficientes e termos-fontes dos volumes das demais fronteiras.

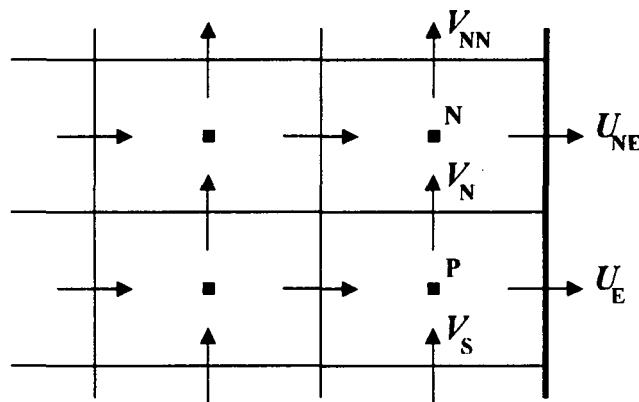


Fig.(4.1) - Volume de controle para a conservação de massa situado sobre a fronteira leste

4.3 - EQUAÇÕES DE p E p' EM PONTOS DE PRESSÃO ESPECIFICADA

Em escoamentos incompressíveis, apenas diferenças de pressão entre pontos vizinhos aparecem nas equações do movimento. Esta natureza relativa da pressão [1] resulta em uma indeterminação nos sistemas lineares representados pelas Eqs.(3.11) e (3.15). Assim, quando se deseja uma solução única para tais sistemas ou quando se está resolvendo um problema onde o escoamento está sujeito a uma diferença de pressão imposta externamente, deve-se especificar a pressão em um ou mais pontos do domínio. Da mesma forma como assumido para os pontos de

Esta restrição reflete-se nos coeficientes desses pontos que passam a ser dados por

$$A_P^P = 1 \quad (4.4)$$

$$A_E^P = A_W^P = A_N^P = A_S^P = 0 \quad (4.5)$$

Algumas vezes, contudo, este artifício pode dar origem a erros de máquina, tornando difícil a obtenção da solução. Segundo [7] isto ocorre quando os coeficientes A_P^P dos volumes vizinhos são significativamente diferentes da unidade. A saída então é manter A_P^P na Eq.(4.4) da mesma ordem de grandeza daqueles dos volumes vizinhos.

4.4 - SOLUÇÃO DOS SISTEMAS LINEARES

Um ponto importante no desempenho dos métodos para tratamento do acoplamento pressão-velocidade diz respeito à solução dos sistemas lineares. Normalmente o número de equações é muito grande, tornando desaconselhável o uso de métodos diretos para a solução dos sistemas. Mesmo quando o número de equações é pequeno, a solução direta de tais sistemas não é recomendada, pois os seus coeficientes são aproximados e devem ser atualizados em um ciclo de cálculo posterior. Além disso, no caso específico de p e p' existe, ainda, o fato de que estes sistemas podem ser indeterminados, reforçando a necessidade do uso de métodos iterativos. Métodos como o SOR, SIP [22] e MSI [34] são mais apropriados para estas aplicações.

No presente trabalho adotou-se para a solução dos sistemas lineares encontrados nos métodos SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC e PRIME uma variação do SIP, proposta por [33], e aqui referenciada como SIP/PERIC. A escolha deste método levou em conta o seu menor custo de armazenamento de coeficientes e seu melhor desempenho, para os casos apresentados em [33], em comparação com o MSI.

O desempenho do algoritmo SIP/PERIC, assim como o do MSI, depende do valor atribuído ao fator de cancelamento parcial, α_{CP} , empregado em tais métodos, devido ao fato da decomposição da matriz dos coeficientes em um produto $[L][U]$ ser aproximada. Nos resultados apresentados por Peric [33] observa-se que o valor ótimo de α_{CP} encontra-se entre 0.8 e 0.9. Em função disso, nos testes efetuados no presente trabalho, fixou-se o valor de α_{CP} em 0.85.

Os sistemas lineares a serem resolvidos no CELS possuem apenas cinco diagonais não-nulas e não-esparsas, o que permite a utilização eficiente do algoritmo PDMA, derivado a partir do método de eliminação de Gauss, de forma semelhante à obtenção do algoritmo de Thomas para matrizes tridiagonais.

CAPÍTULO 5

PROBLEMAS PARA VALIDAÇÃO E TESTES E CRITÉRIO DE COMPARAÇÃO

5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo definem-se as geometrias, as condições de contorno e as malhas (formas e números de volumes) para cada problema usado para averiguação da exatidão dos códigos implementados e para os testes de avaliação dos métodos para tratamento do acoplamento pressão-velocidade. O critério de comparação para a avaliação também é definido neste capítulo.

5.2 - PROBLEMAS PARA VALIDAÇÃO E TESTES

A validação dos códigos implementados foi feita com base na solução do escoamento em um canal divergente, conforme geometria e condições de contorno mostradas na Fig.(5.1).

Os resultados obtidos para uma malha de 20×20 volumes internos gerada algebricamente, Fig.(5.2), apresentam uma boa concordância quando comparados com aqueles obtidos por Perez [29], indicando que os códigos foram corretamente implementados. Nas Figs.(5.3), (5.4) e (5.5) mostram-se, respectivamente, linhas de corrente, curva de pressão e de vorticidade (as duas últimas avaliadas sobre a fronteira sul).

Os testes realizados procuram determinar o desempenho de cada um dos métodos para tratamento do acoplamento pressão-velocidade diante da variação de seus principais parâmetros de controle e também em função das condições de contorno e da malha utilizada.

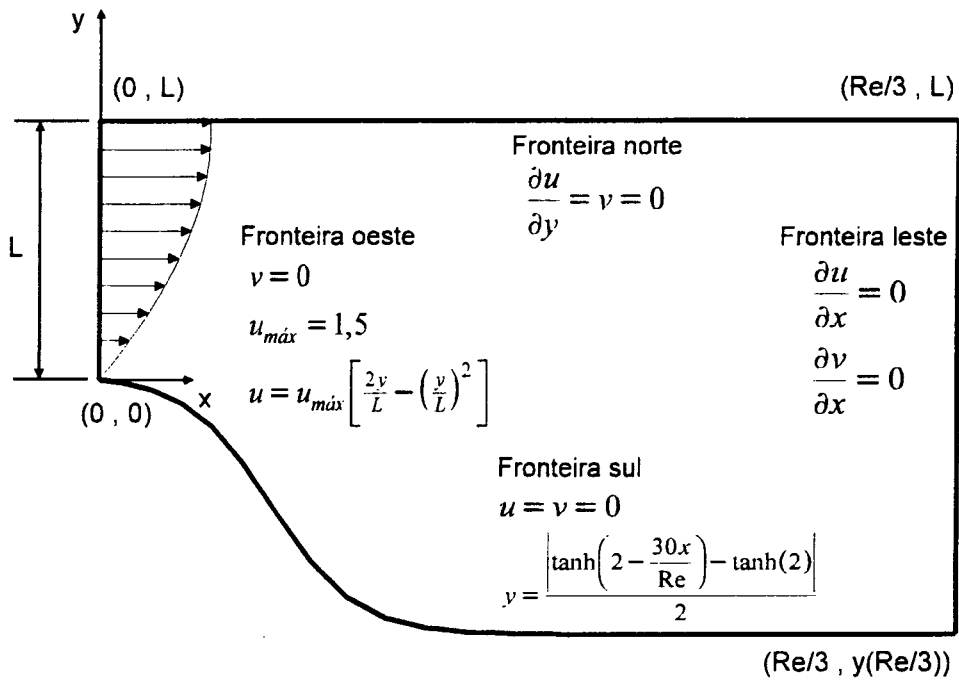


Fig.(5.1) - Canal divergente - Geometria e condições de contorno

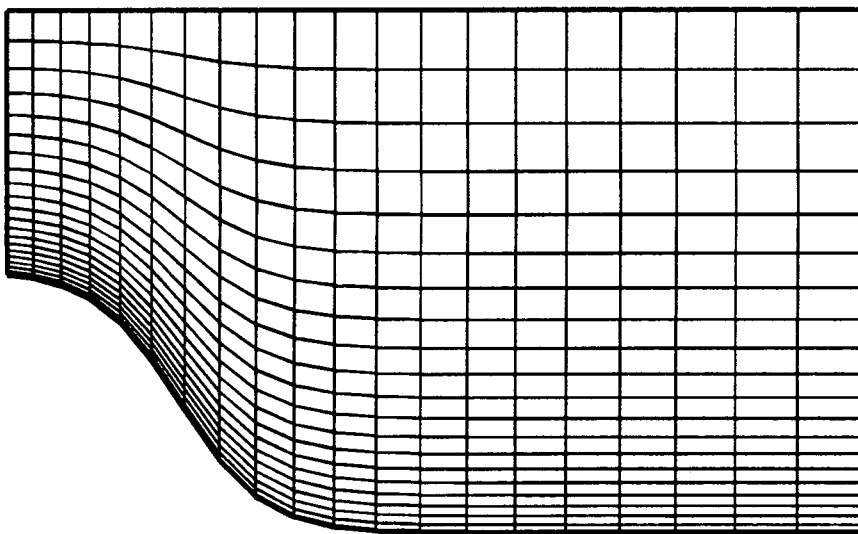


Fig.(5.2) - Canal divergente - Malha computacional 20 × 20

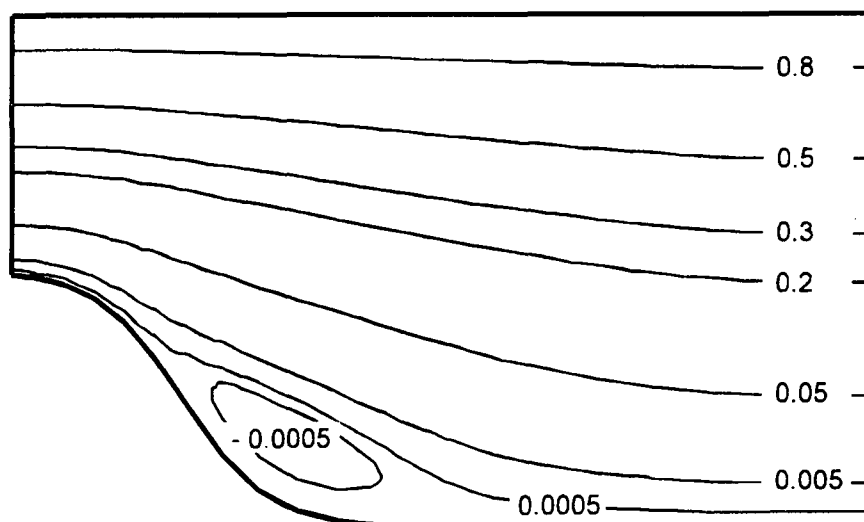


Fig.(5.3) - Canal divergente - Linhas de corrente para $Re_L = 10$
Malha 20×20

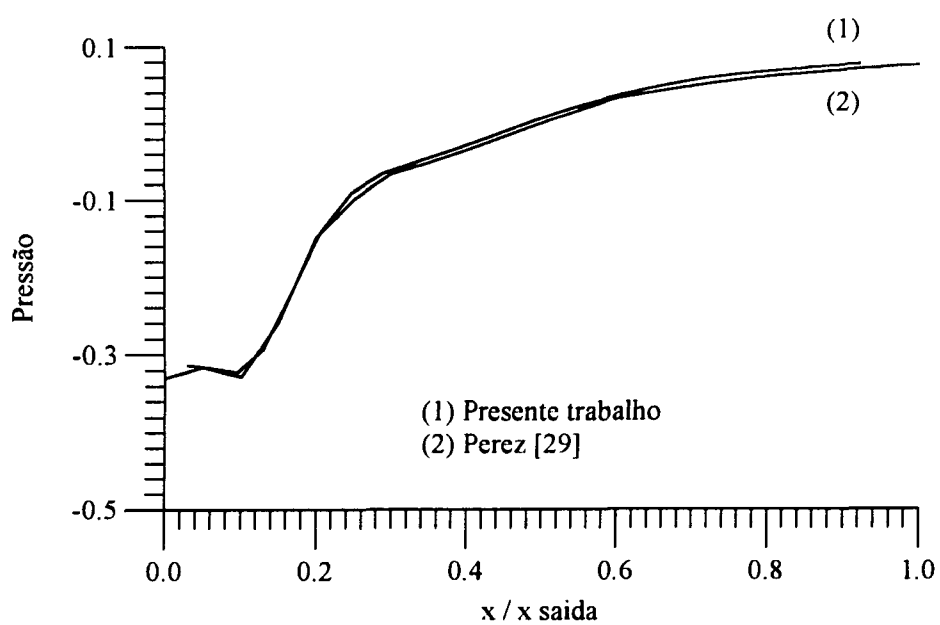


Fig.(5.4) - Canal divergente - Pressão sobre a fronteira sul para $Re_L = 10$

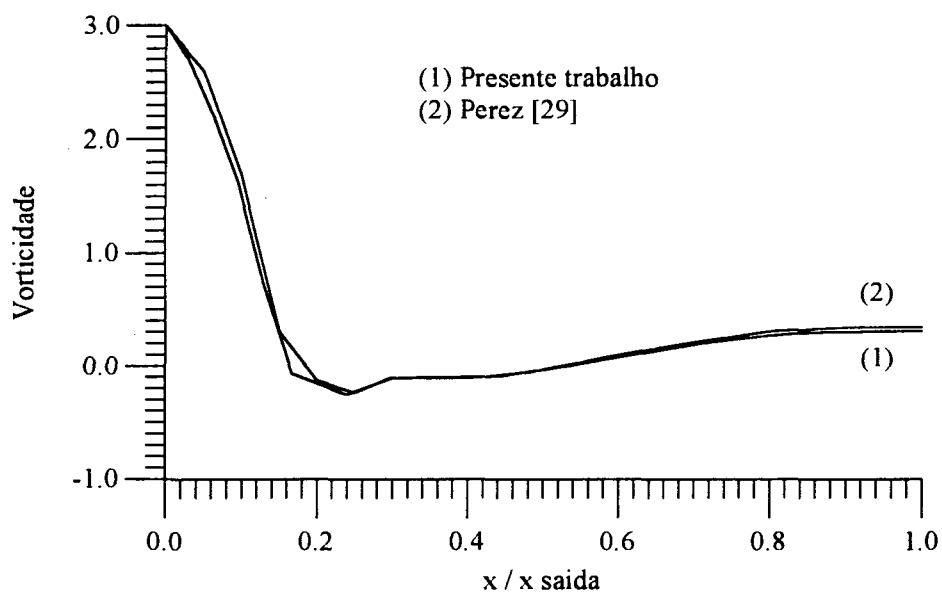
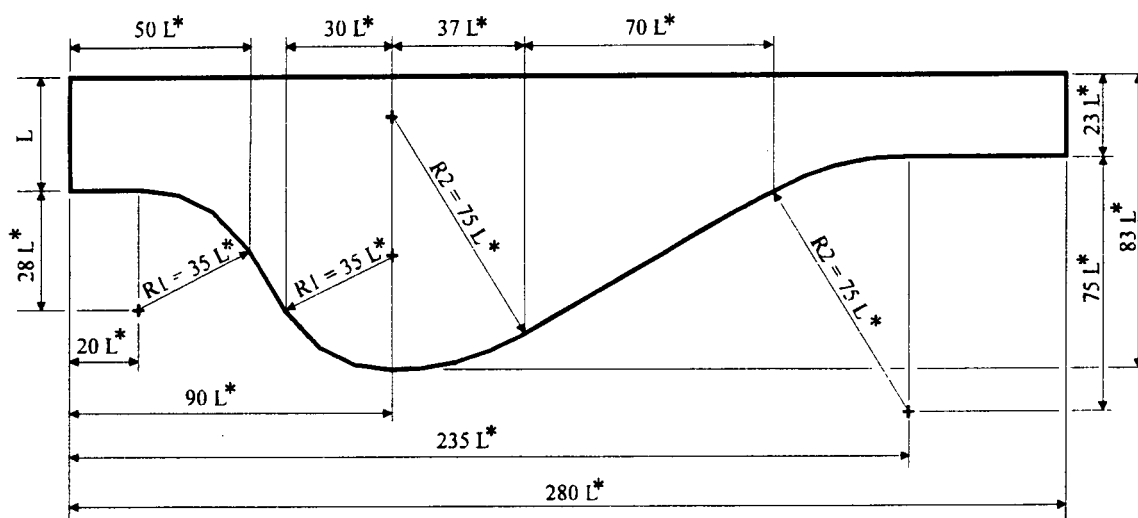


Fig.(5.5) - Canal divergente - Vorticidade sobre a fronteira sul para $Re_L = 10$

O problema anterior permite a execução da maioria dos testes, exceto aqueles para elevados valores do número de Reynolds. Para tais casos a região de recirculação é consideravelmente maior e exige um aumento do domínio de cálculo para que a fronteira leste não fique em uma posição praticamente dominada pela recirculação. Este aumento de domínio limita a não-ortogonalidade da malha a uma pequena região, fato que vai contra o objetivo do presente trabalho que é, exatamente, o de avaliar os métodos para tratamento do acoplamento pressão-velocidade na solução de problemas em coordenadas não-ortogonais. Uma segunda geometria foi então imaginada, surgindo um canal divergente na entrada e convergente na saída, conforme Fig.(5.6). Esta geometria possui uma região de recirculação confinada em uma fronteira não-ortogonal, o que é adequado para os objetivos do trabalho. Para esta nova geometria foram utilizadas malhas de 20×28 volumes - Fig.(5.7) - e de 40×56 volumes - Fig.(5.8). O número de Reynolds assumiu os valores de 10 e 500 para cada uma das malhas, obtendo-se os campos de linhas de corrente mostrados nas Figs.(5.9) a (5.12). Os padrões do escoamento são aqui mostrados para efeito de ilustração da solução. As comparações de desempenho dos métodos são feitas no próximo capítulo.



Fronteira oeste

$$v = 0$$

$$u_{\max} = 1,5$$

$$u = u_{\max} \left[\frac{2y}{L} - \left(\frac{y}{L} \right)^2 \right]$$

Fronteira leste

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Fronteira norte

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v = 0$$

Fronteira sul

$$u = v = 0$$

Fig.(5.6) - Canal divergente / convergente - Geometria e condições de contorno

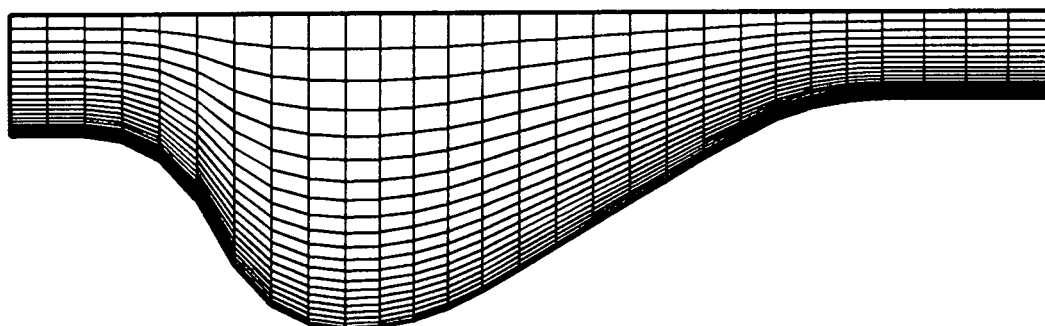


Fig.(5.7) - Canal divergente / convergente - Malha 20 × 28

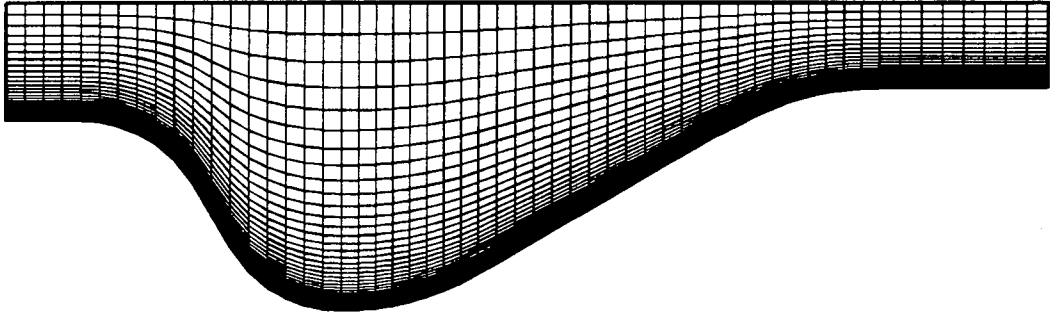


Fig.(5.8) - Canal divergente / convergente - Malha 40×56

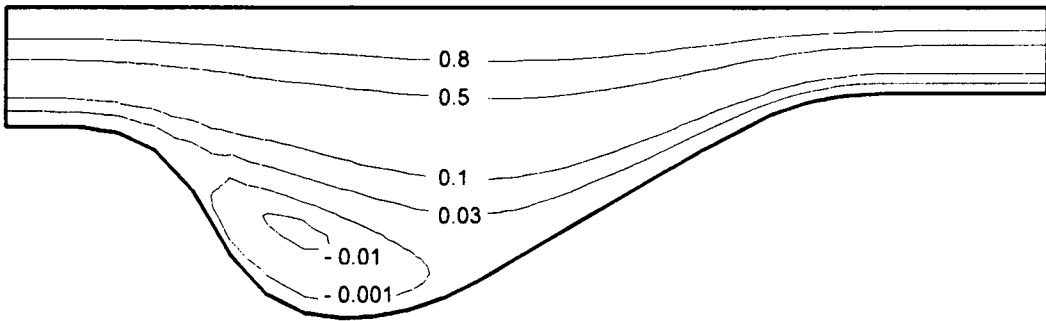


Fig.(5.9) - Canal divergente / convergente - Linhas de corrente para $Re_L = 10$
Malha 20×28

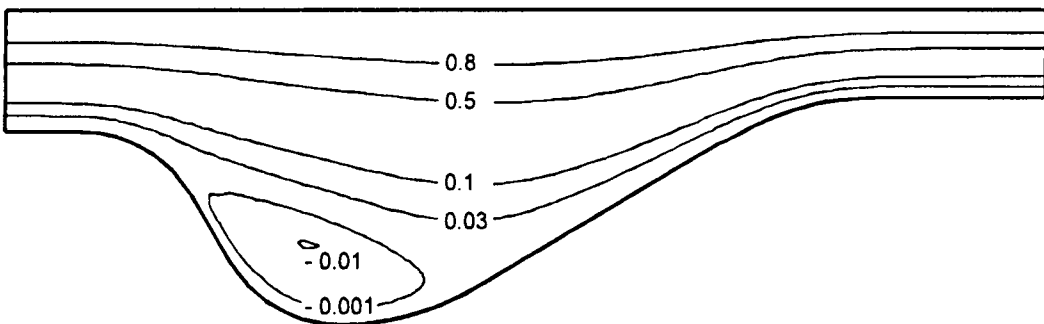


Fig.(5.10) - Canal divergente / convergente - Linhas de corrente para $Re_L = 10$
Malha 40×56

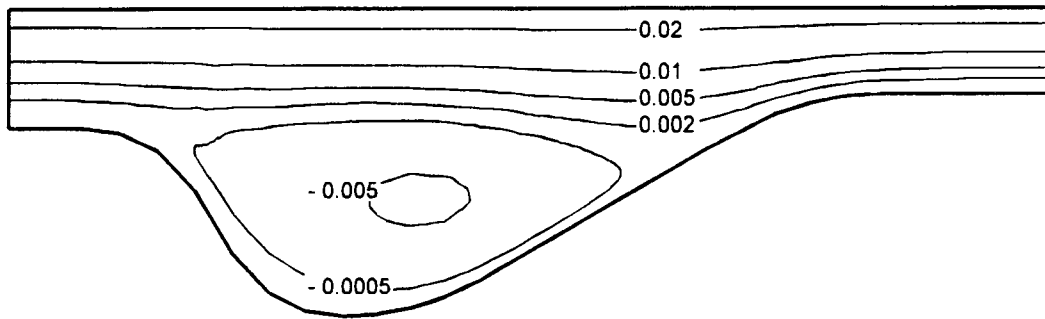


Fig.(5.11) - Canal divergente / convergente - Linhas de corrente para $Re_L = 500$
Malha 20×28

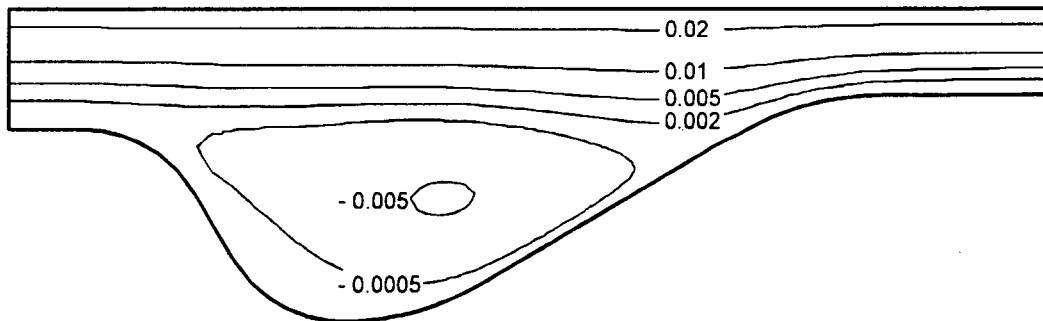


Fig.(5.12) - Canal divergente / convergente - Linhas de corrente para $Re_L = 500$
Malha 40×56

5.3 - CRITÉRIOS DE COMPARAÇÃO

Para cada uma das quatro situações de escoamento no canal divergente/convergente (2 tamanhos de malha \times 2 valores para o número de Reynolds) e também para o canal divergente (malha 20×20 - $Re_L = 10$), a solução numérica "exata" para o conjunto de equações discretizadas foi encontrada. Por solução numérica "exata" entenda-se aquela obtida quando a mudança de uma variável ϕ , dentro do processo iterativo de cálculo, é da mesma ordem de grandeza dos erros de truncamento do computador. No presente trabalho, esta definição não está associada à solução independente da malha.

As comparações efetuadas mostram como cada um dos métodos promove a convergência em direção às soluções numéricas "exatas", a partir de determinados campos iniciais ($p = 0$, $v = 0$, $u = u$ médio de entrada). Dois parâmetros de comparação podem ser estabelecidos, ou seja, tempo de CPU e número de ciclos de cálculo (iterações). Segundo tais parâmetros, o desempenho de um método é medido em termos de custo (tempo de CPU) e habilidade em tratar os acoplamentos (número de ciclos de cálculo).

Duas situações são investigadas no capítulo 6. Na primeira os coeficientes das equações são calculados com base na solução numérica "exata", e em cada iteração, Fig.(5.13.a), calculam-se novos valores para as variáveis, calcula-se o resíduo e verifica-se a convergência. Na segunda situação os coeficientes e as variáveis são avançados em conjunto e cada iteração passa a englobar o cálculo dos coeficientes, como mostrado na Fig.(5.13.b). Observe-se nesta figura, que um ciclo interno pode ser estabelecido, no qual as variáveis são avançadas mantendo-se os coeficientes temporariamente fixos, até que algum critério de convergência interno seja satisfeito. Nos testes efetuados no presente trabalho, atribuiu-se um valor elevado à variável de controle do ciclo interno, TOLUV, de modo que apenas uma iteração interna fosse executada em cada ciclo de atualização de coeficientes.

A diferença máxima entre o campo de pressão de uma dada iteração e aquele da solução "exata" foi tomada como parâmetro para avaliação do comportamento de cada método.

Denominando por p_{ref} a pressão de referência (da solução exata) e por p^n a pressão na n-ésima iteração, define-se um erro R_p^n , cujo valor máximo no domínio é dado por

$$R_p = \frac{2}{\rho u_{in}^2} \left[(p_{ref} - \bar{p}_{ref}) - (p^n - \bar{p}^n) \right] \Big|_{máx} \quad (5.1)$$

onde

$$u = Re_L \mu(\rho L)^{-1} \quad (5.2.a)$$

$$\bar{p}_{ref} = \frac{\sum p_{ref}}{N. \text{ Volumes}} \quad \text{e} \quad \bar{p}^n = \frac{\sum p^n}{N. \text{ Volumes}} \quad (5.2.b)$$

\bar{p}_{ref} = média das pressões no campo "exato"

\bar{p}^n = média das pressões na n-ésima iteração

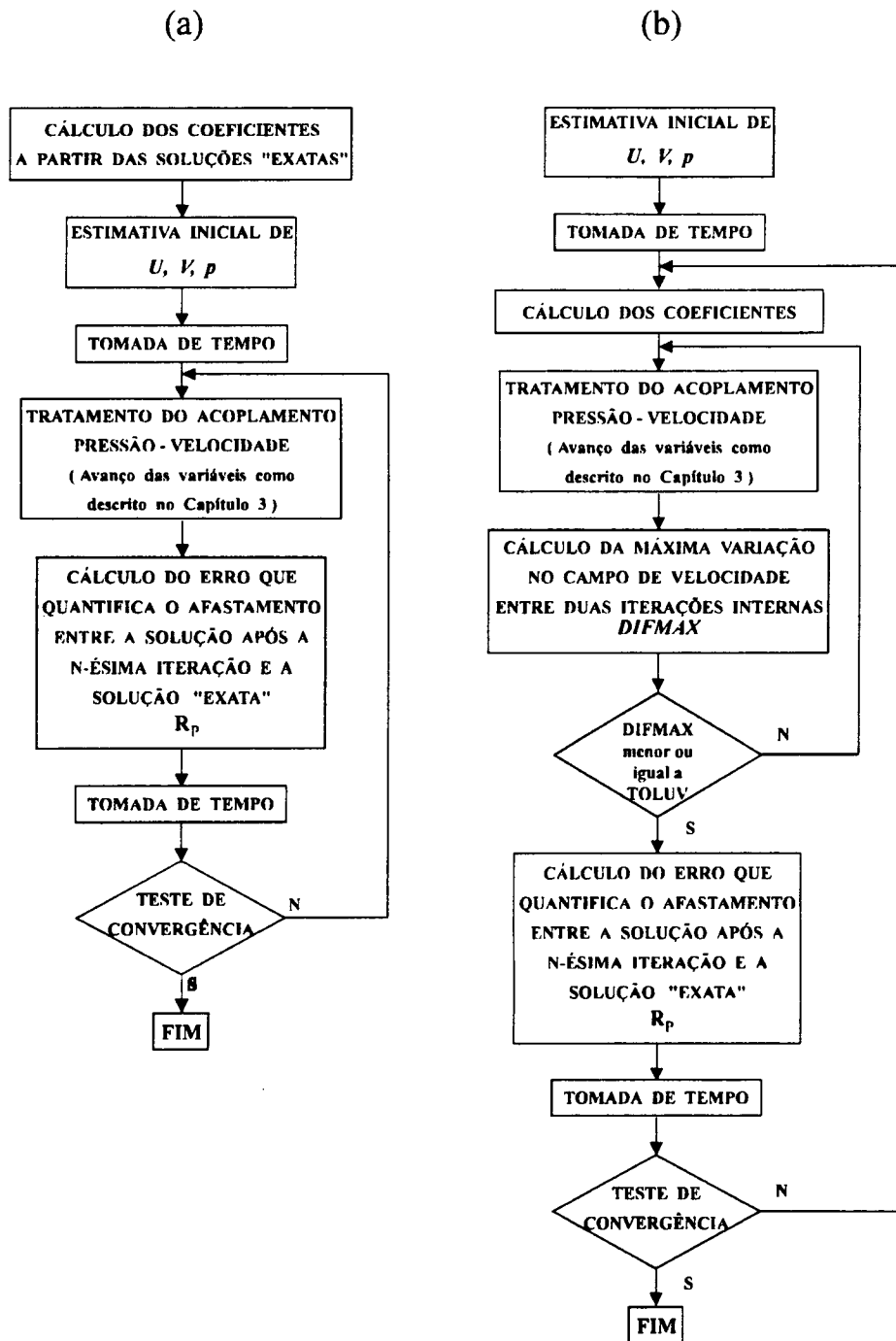


Fig.(5.13) - Ciclo iterativo para as situações de (a) coeficientes fixos e (b) avanço conjunto de coeficientes e variáveis

CAPÍTULO 6

RESULTADOS DAS ANÁLISES DE DESEMPENHO

6.1 - INTRODUÇÃO

Como mencionado no capítulo primeiro, o processo iterativo para a solução de escoamentos incompressíveis é devido às não-linearidades das equações e aos acoplamentos entre as variáveis.

A fim de separar a influência conjunta desses dois fatores sobre o comportamento de cada um dos métodos em estudo, adotou-se um esquema, Fig.(5.13.a), onde os coeficientes das equações discretizadas assumem, desde o início do processo iterativo, os valores calculados com base nas soluções numéricas "exatas" referenciadas no capítulo anterior. Os problemas passam a ser lineares e o comportamento de convergência de cada método pode ser associado exclusivamente à forma de tratamento do acoplamento pressão-velocidade. Este é o objetivo dos resultados mostrados na seção 6.2.

Na seção 6.3 mostram-se os resultados para uma condição de tratamento conjunto das não-linearidades e acoplamentos, onde os coeficientes das equações algébricas são avançados a cada iteração interna nos campos de velocidade e pressão, como esquematizado na Fig.(5.13.b).

Tanto na seção 6.2 como na 6.3, o comportamento de cada método é avaliado com base nas variações do parâmetro E , do número de volumes de controle (tamanho da malha) e do número de Reynolds, Re_L , baseado no comprimento L da fronteira oeste.

O parâmetro E assume os valores 1, 5, 10, 20, 50 e 100. Estes valores foram escolhidos a fim de que a influência do valor da variável ϕ_p^n , Eq.(2.22), sobre o novo valor que esta mesma variável vai assumir na próxima iteração, ϕ_p^{n+1} , cubra de forma bem dividida, uma faixa de 100% a 1%. Para os métodos SIMPLEC, PRIME e CELS, estudaram-se, também, casos nos quais a influência de ϕ_p^n foi completamente retirada, atribuindo-se ao parâmetro E o valor 1.0E+07.

6.2 - RESULTADOS OBTIDOS COM OS COEFICIENTES CALCULADOS COM BASE NAS SOLUÇÕES NUMÉRICAS "EXATAS"

Nos itens **a**, **b**, **c**, **d** e **e**, a seguir, analisa-se o comportamento de cada método para tratamento do acoplamento pressão-velocidade, quando os coeficientes assumem, desde o início do processo iterativo, os valores calculados com base nas soluções numéricas "exatas".

a) Escoamento através do canal divergente - malha 20×20 - Reynolds 10

Na Fig.(6.1) mostram-se curvas de tempo de CPU \times parâmetro de avanço no tempo (E), para que o residuo no campo de pressões, como definido no capítulo 5, atinja o valor de $1.0E-04$.

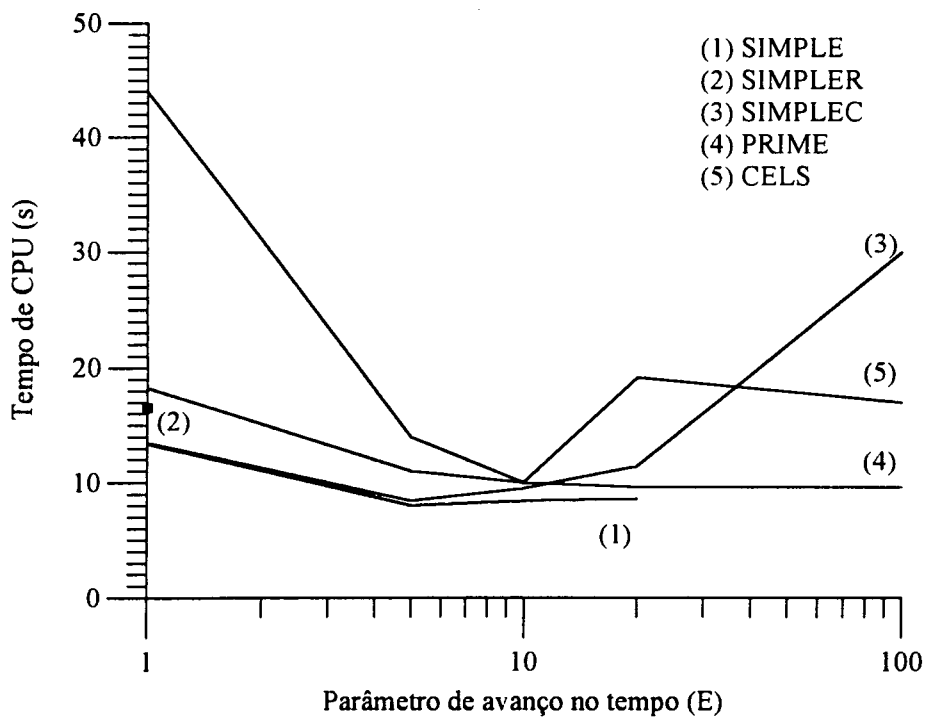


Fig.(6.1) - Curvas de tempo de CPU \times Parâmetro (E) para o escoamento através do canal divergente - Malha 20×20 - Reynolds 10

Vê-se nesta figura que o método SIMPLE converge para valores de E entre 1 e 20, sendo que o menor custo é obtido quando se faz $E = 5$. Observa-se ainda que até $E = 20$ o tempo de CPU sofre um pequeno acréscimo. Para $E \geq 20$ o processo diverge. O SIMPLER não apresenta bom comportamento, uma vez que a solução convergida é alcançada somente quando $E = 1$.

Para todos os valores de E entre 1 e 100, o método SIMPLEC converge, apresentando um comportamento semelhante ao do SIMPLE, para valores de E na faixa de 1 a 20.

Embora não esteja mostrado na Fig.(6.1), o PRIME converge até mesmo para $E = 1.0E+07$, ainda que mais lentamente do que para $E = 1$. Na faixa de $E = 5$ a $E = 100$, o tempo gasto para baixar o resíduo até o valor anteriormente estabelecido é praticamente constante.

Assim como o PRIME, o CELS converge para todos os valores de E . Contudo, quando $E=1$, o tempo gasto é excessivamente elevado. Entre os valores de $E = 10$ e $E = 20$ ocorre uma drástica mudança no comportamento do método. A explicação para tal pode estar associada à mudança de valor do parâmetro de relaxação "e". No caso em que $E \leq 10$, um valor elevado ($1.0E+07$) é atribuído ao parâmetro "e", enquanto que para $E \geq 20$, tem-se "e" = 4. Esta combinação de parâmetros (e , E) segue as recomendações feitas por Galpin et al. [24], como já explicado no capítulo 3, seção 3.6.2.

Uma comparação entre o melhor tempo de cada método (pontos de mínimo em cada curva da Fig.(6.1)) é mostrada na Fig.(6.2) - curvas de resíduo \times iterações - e na Fig.(6.3) - curvas de resíduo \times tempo de CPU. Pela Fig.(6.2) vê-se que o CELS é o mais hábil no tratamento do acoplamento pressão-velocidade, uma vez que o número de iterações por ele gasto é menor que o dos outros métodos. Já o PRIME e o SIMPLER não tratam o acoplamento tão eficientemente, exigindo um maior número de iterações. Porém, quando a base de comparação passa a ser o tempo, como na Fig.(6.3), observa-se que os métodos, a exceção do SIMPLER, que é o mais lento, apresentam tempos equivalentes.

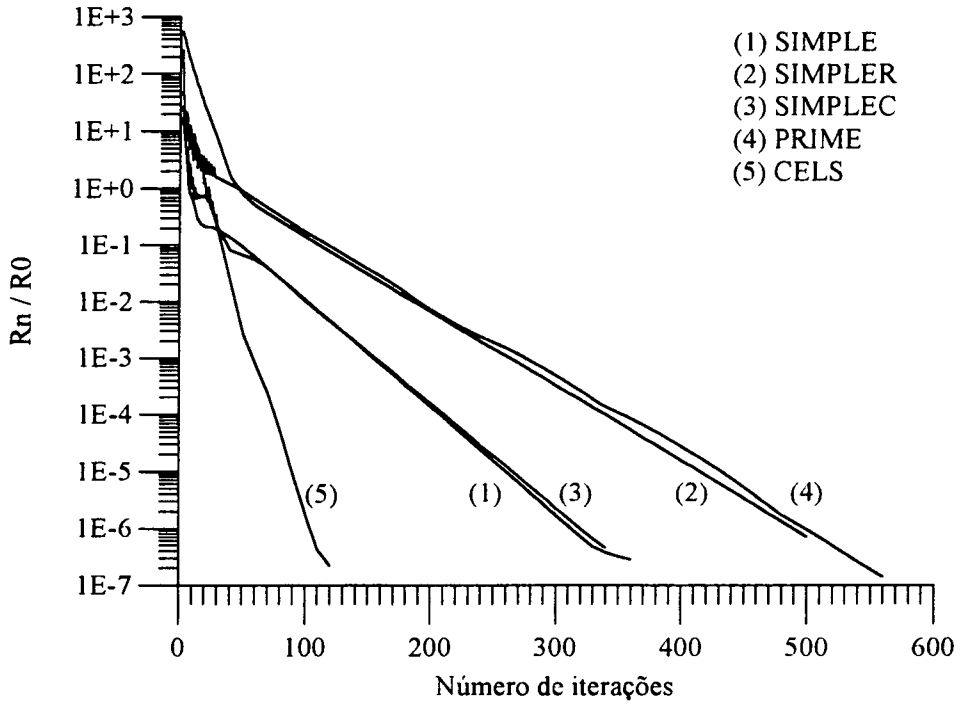


Fig.(6.2) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente - Malha 20×20 - Reynolds 10 Coeficientes fixos - Resíduo \times Número de iterações

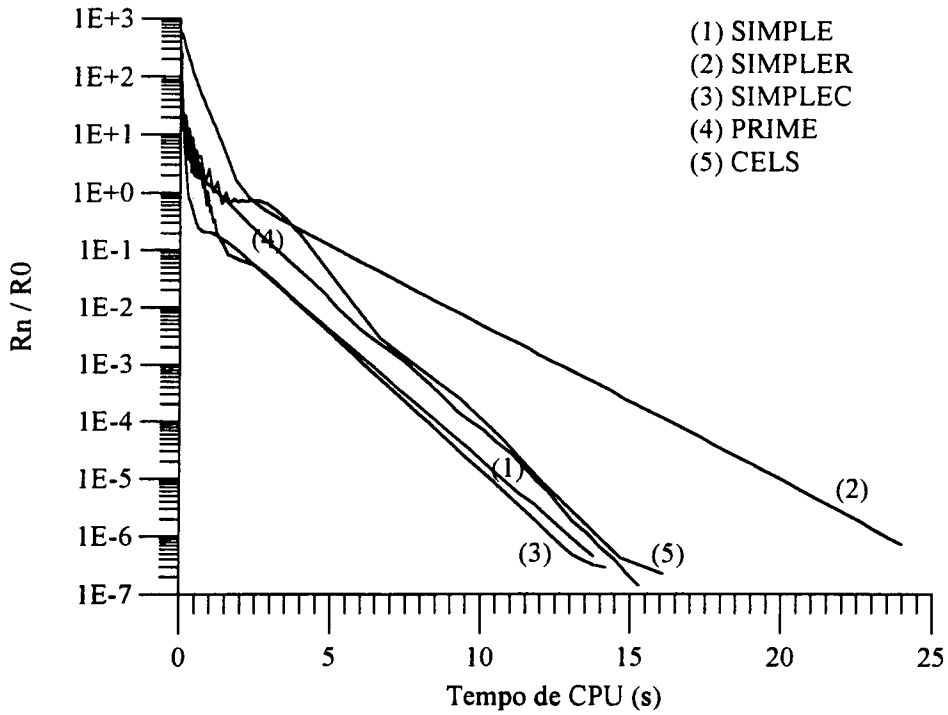


Fig.(6.3) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente - Malha 20×20 - Reynolds 10 Coeficientes fixos - Resíduo \times Tempo de CPU

b) Escoamento através do canal divergente/convergente - malha 20×28 - Reynolds 10

As curvas de tempo de CPU \times parâmetro E mostradas na Fig.(6.4) a seguir, revelam que em termos qualitativos existem apenas duas diferenças, não significativas, nos comportamentos dos métodos para tratamento do acoplamento pressão-velocidade, quando esses são comparados àqueles apresentados na solução do problema do canal divergente, Fig.(6.1). As mudanças ocorridas foram com o SIMPLE, que converge neste teste, para E até 100 e com o PRIME, que passa a apresentar um custo praticamente constante na faixa de $E = 1$ a 100 e quando $E = 1.0E+07$, tem-se divergência no processo através desse método.

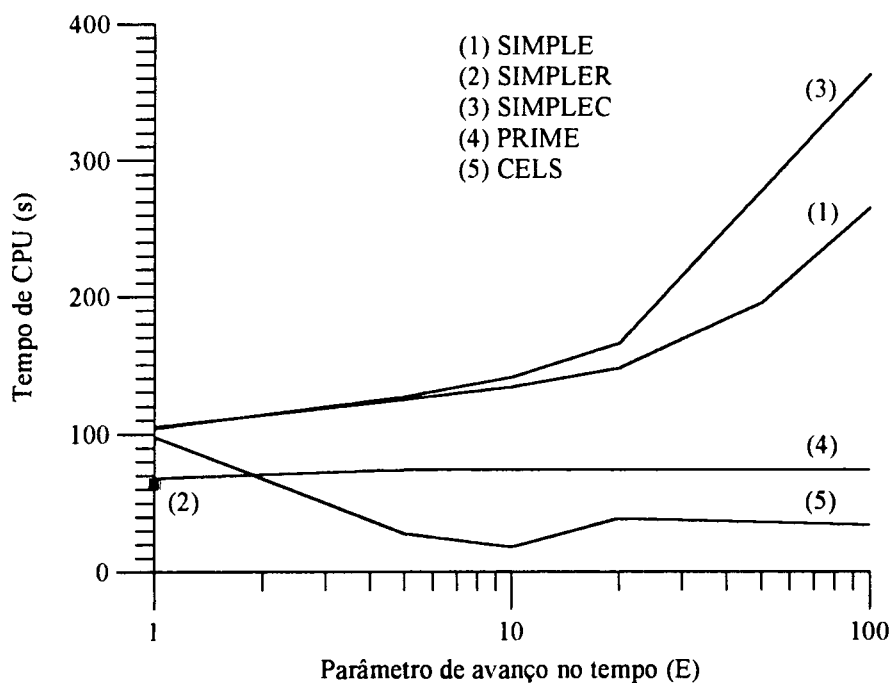


Fig.(6.4) - Curvas de tempo de CPU \times Parâmetro (E) para o escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 - Reynolds 10

Na comparação entre os melhores desempenhos na solução desse segundo problema, observa-se na Fig.(6.5) e na Fig.(6.6) uma considerável vantagem a favor do CELS, não só em termos de número de iterações, mas também em termos de tempo de CPU.

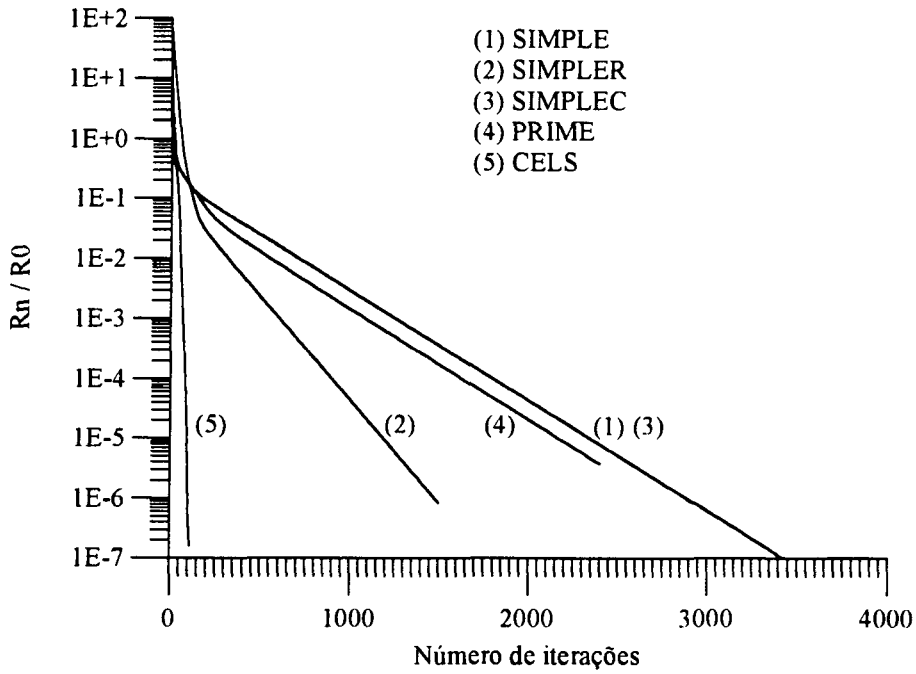


Fig.(6.5) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 Reynolds 10 - Coeficientes fixos - Resíduo \times Número de iterações

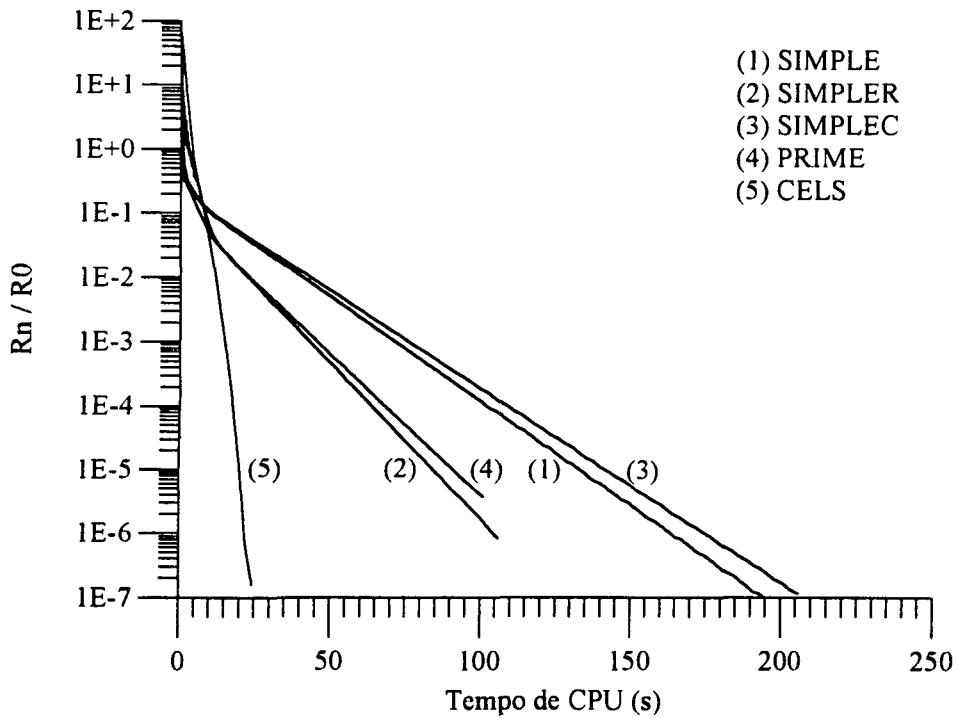


Fig.(6.6) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 Reynolds 10 - Coeficientes fixos - Resíduo \times Tempo de CPU

Esta vantagem pode ser atribuída, na verdade, a uma diminuição da capacidade dos métodos segregados em alcançar a solução do novo problema. Assim, enquanto que o CELS necessita de aproximadamente 75 iterações para atingir o resíduo de $1.0E-04$, tanto no primeiro como no segundo problema, o PRIME passa de 350 para 1600 iterações, o SIMPLE e o SIMPLEC sobem de 210 para 1800 iterações e o SIMPLER de 340 para 890 iterações.

c) Escoamento através do canal divergente/convergente - malha 40×56 - Reynolds 10

Na situação agora investigada mantém-se a mesma geometria e o mesmo número de Reynolds do item b. O número de volumes, contudo, é aumentado para 40×56 .

As faixas de valores de E para os quais a solução convergida é alcançada em cada método, Fig.(6.7), não são alteradas quando comparadas com os resultados da Fig.(6.4), onde uma malha de 20×20 volumes é empregada.

Os métodos SIMPLE e SIMPLEC continuam sofrendo um aumento no tempo de CPU, na medida em que se aumenta o parâmetro E .

O PRIME mantém-se bastante estável até $E = 100$, divergindo para $E = 1.0E+07$.

O ponto ótimo do CELS é, novamente, $E = 10$, e a súbita elevação de tempo quando se passa de $E = 10$ para $E = 20$ persiste. Quando $E = 1$ o CELS é excessivamente lento; razão pela qual este ponto não aparece na Fig.(6.7).

Comparando-se as Figs.(6.8) e (6.5), que mostram curvas de resíduo \times iterações para as malhas 40×56 e 20×28 , respectivamente, observa-se que todos os métodos, sem exceção, necessitam de um maior número de iterações para alcançar o resíduo $1.0E-04$, quando ocorre um refinamento de malha. Esta é uma questão sempre observada quando, ao se resolver um problema, procura-se a solução independente da malha. Contudo, os aumentos são

diferenciados. Nos métodos segregados precisa-se de no máximo, duas vezes mais iterações. Por outro lado, o CELS, que atingia tal resíduo em 75 iterações, como pode ser visto na Fig.(6.5), passa a fazê-lo em 520 iterações, Fig.(6.8), num aumento de quase sete vezes. Juntando-se a isso, o fato de uma iteração no CELS (para a malha 40×56) ser aproximadamente nove vezes mais lenta que uma iteração no PRIME, tem-se como resultado final um gasto total de CPU, via CELS, cerca de duas vezes maior que aquele requerido pelo PRIME, como se vê na Fig.(6.9).

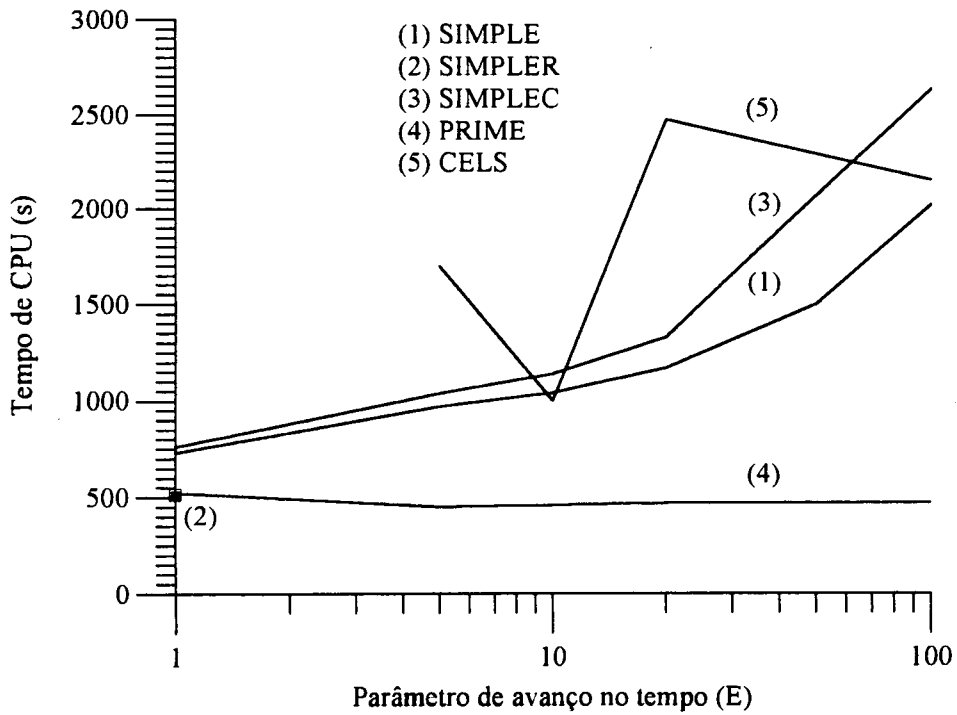


Fig.(6.7) - Curvas de tempo de CPU \times Parâmetro (E) para o escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 40×56 - Reynolds 10

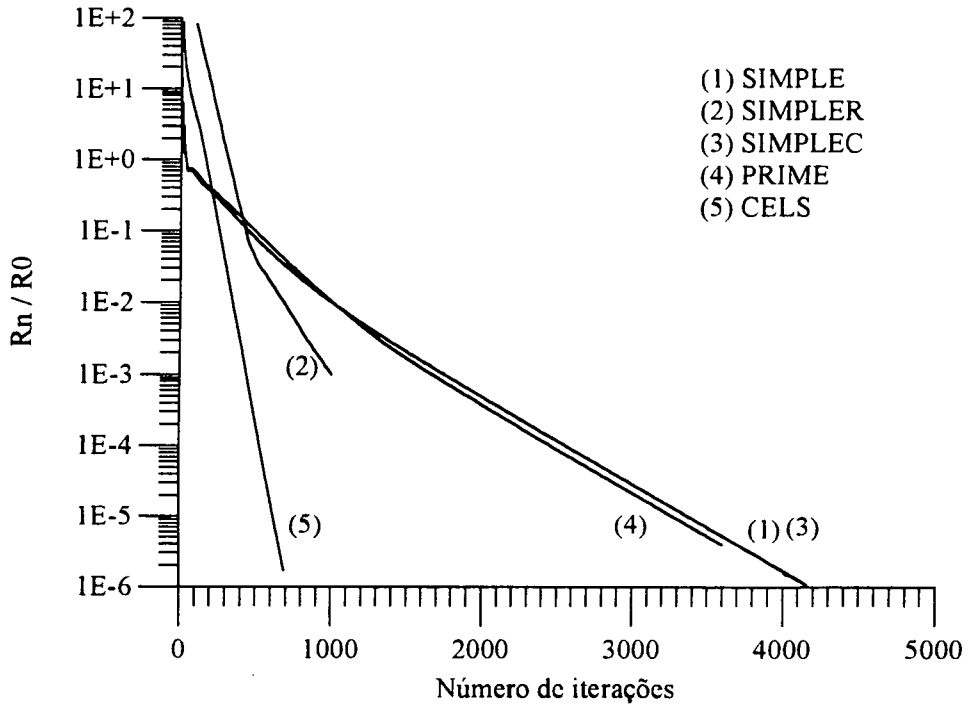


Fig.(6.8) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 40×56 Reynolds 10 - Coeficientes fixos - Resíduo \times Número de iterações

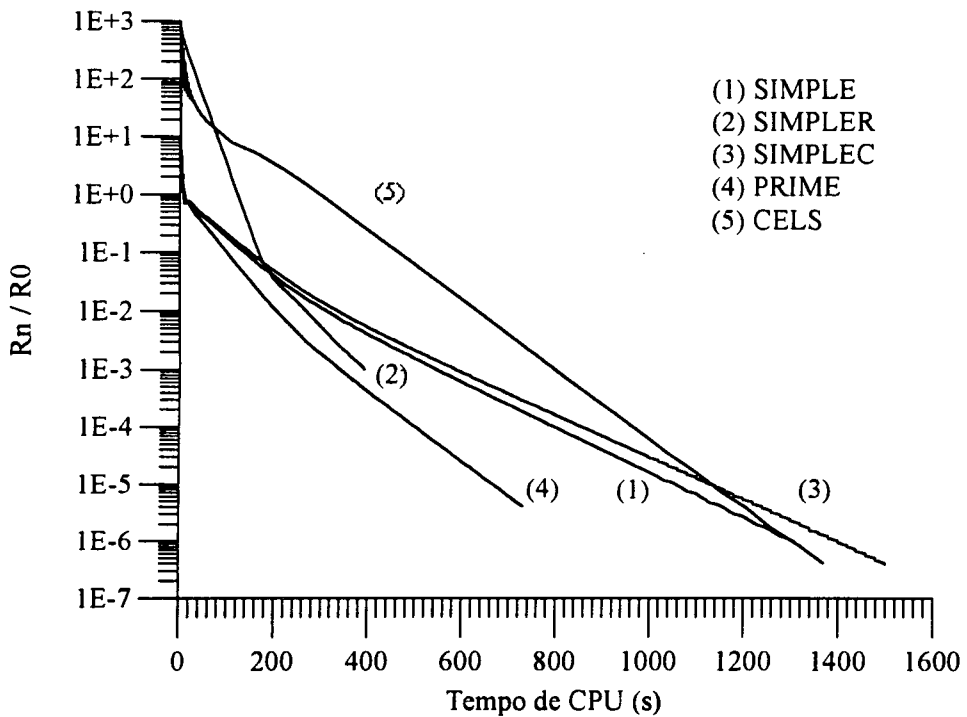


Fig.(6.9) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 40×56 Reynolds 10 - Coeficientes fixos - Resíduo \times Tempo de CPU

d) Escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 - Reynolds 500

Na solução deste quarto problema, observa-se mediante uma comparação entre a Fig.(6.10) e a Fig.(6.4), $Re_L = 10$, que os métodos SIMPLE e SIMPLEX são tanto mais sensíveis ao aumento de Re_L , quanto maior é o parâmetro E adotado. Assim, por exemplo, o método SIMPLE tem seu tempo de CPU aumentado de 17% quando $E = 1$, enquanto que para $E = 50$ esse aumento chega a 100%. Também o CELS demonstra-se muito sensível à mudança ocorrida, podendo ser observado um aumento médio de 200% no tempo total gasto. Já os métodos SIMPLER e PRIME mostram-se bem pouco sensíveis ao aumento do número de Reynolds.

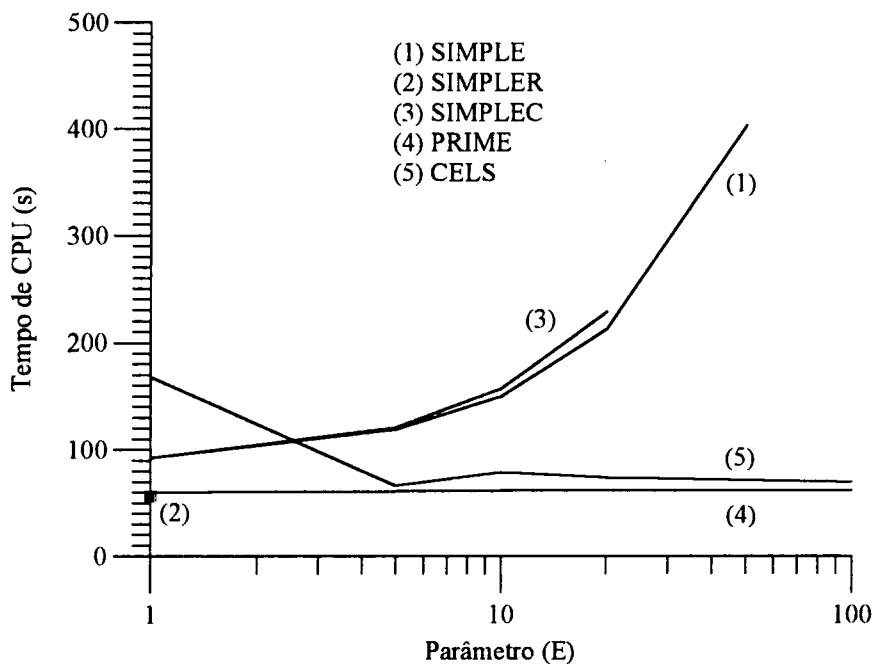


Fig.(6.10) - Curvas de tempo de CPU \times Parâmetro (E) para o escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 - Reynolds 500

Uma vez que o tempo de CPU por iteração de cada método, quando da solução deste novo problema é exatamente igual àquele gasto na solução do problema do item b (houve apenas um aumento no número de Reynolds), conclui-se que o aumento do tempo total de CPU é devido unicamente ao aumento do número de iterações, decorrente da menor habilidade dos métodos em resolverem os acoplamentos. Comparando-se a Fig.(6.11) com a Fig.(6.5), nota-se que o CELS é o único (para os valores de E envolvidos nessas duas figuras) que tem sua habilidade deteriorada, verificando-se, ainda, um comportamento não muito estável, com pequenas

oscilações ao longo do processo iterativo. Em termos de tempo de CPU, é mostrado na Fig.(6.12) que SIMPLER e PRIME passam a ser os métodos mais rápidos.

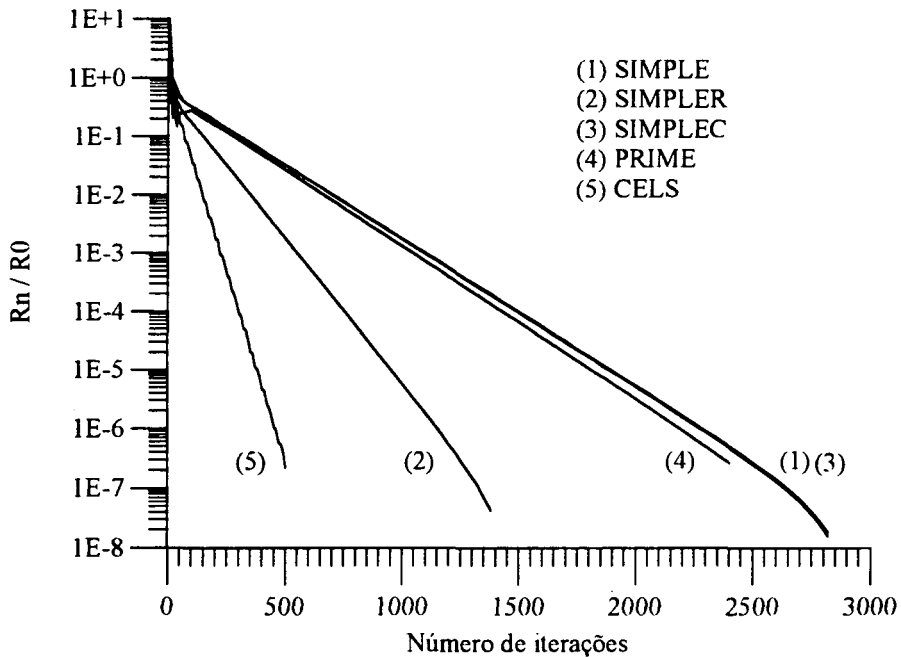


Fig.(6.11) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 - Reynolds 500 Coeficientes fixos - Resíduo \times Número de iterações

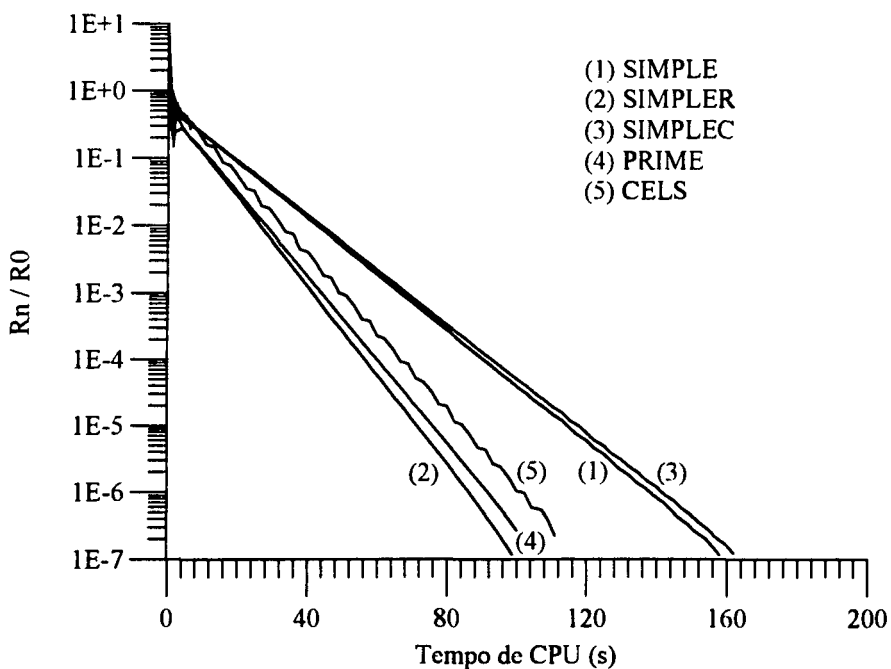


Fig.(6.12) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 - Reynolds 500 Coeficientes fixos - Resíduo \times Tempo de CPU

e) Escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 40×56 - Reynolds 500

No último teste desta seção 6.2, os métodos segregados experimentam uma diminuição da capacidade de tratamento dos acoplamentos, em relação à situação de $Re_L = 10$, malha 40×56 , da mesma forma como descrito na comparação feita entre as situações de $Re_L = 10$ e $Re_L = 500$, malha 20×28 .

Um comportamento estranho e não esperado é, no entanto, apresentado pelo CELS. O processo iterativo não converge, nem mesmo para valores baixos do parâmetro E , como mostrado na Fig.(6.13), a qual contém curvas de variação de residuo \times avanço de tempo (E).

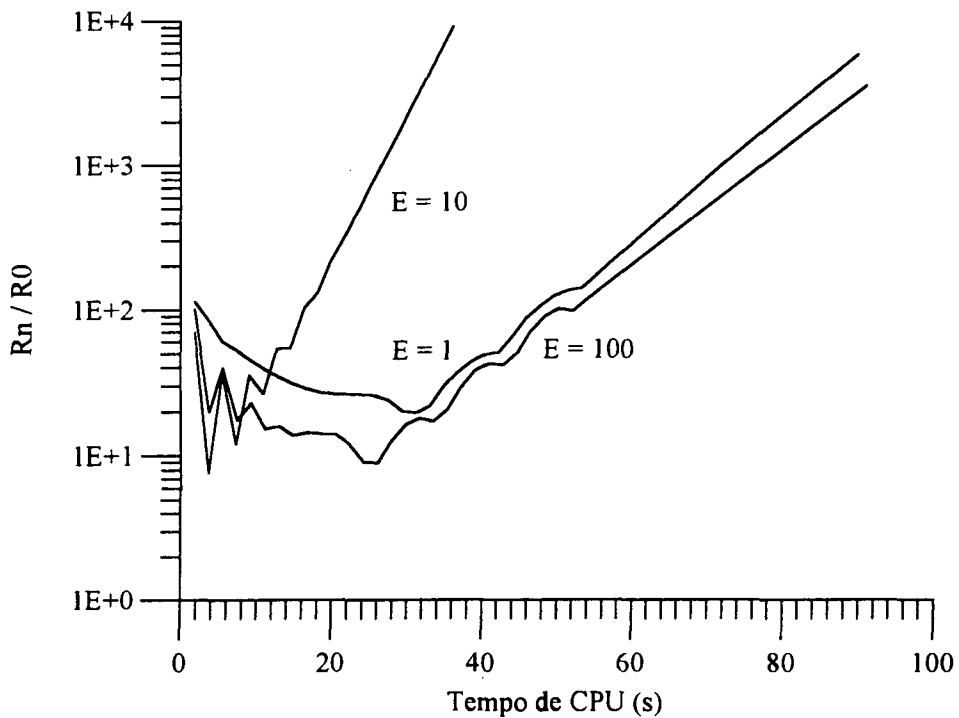


Fig.(6.13) - Comportamento do método CELS na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 40×56 - Reynolds 500 - Coeficientes fixos

6.3 - RESULTADOS OBTIDOS COM OS COEFICIENTES ATUALIZADOS A CADA ITERAÇÃO

Todos os casos estudados na seção 6.2 são reexaminados, considerando, agora, o tratamento conjunto das não-linearidades e acoplamentos. No esquema aqui utilizado os coeficientes das equações algébricas são atualizados a cada iteração interna nos campos de velocidade e pressão.

Comparando-se caso-a-caso os resultados obtidos com ou sem tratamento das não-linearidades, as seguintes diferenças são observadas.

1. Menores taxas de convergência quando do tratamento conjunto de não-linearidades e acoplamentos, em decorrência do fato de que os coeficientes corretos desde o início do processo iterativo, como nos resultados da seção 6.2, favorecem o avanço das variáveis.
2. O método SIMPLER passa a convergir também para $E = 5$, com um desempenho bem próximo ao de $E = 1$. Para valores mais elevados de E o método continua divergindo.
3. Ocorre um estreitamento da faixa de E para a qual os métodos SIMPLE e SIMPLEC convergem quando $Re_L = 500$. Nos testes realizados tem-se divergência para $E \geq 20$.
4. Como mostrado na Fig.(6.14), o CELS converge apenas para $E = 1$, também de maneira instável, quando da solução do escoamento no canal divergente/convergente - malha 20×28 - $Re_L = 500$. Quando a malha é refinada para 40×56 volumes, a solução não é alcançada pelo CELS, com nenhum valor de E . O resíduo fica oscilando entre 1 e 10, como pode ser visto na Fig.(6.15).

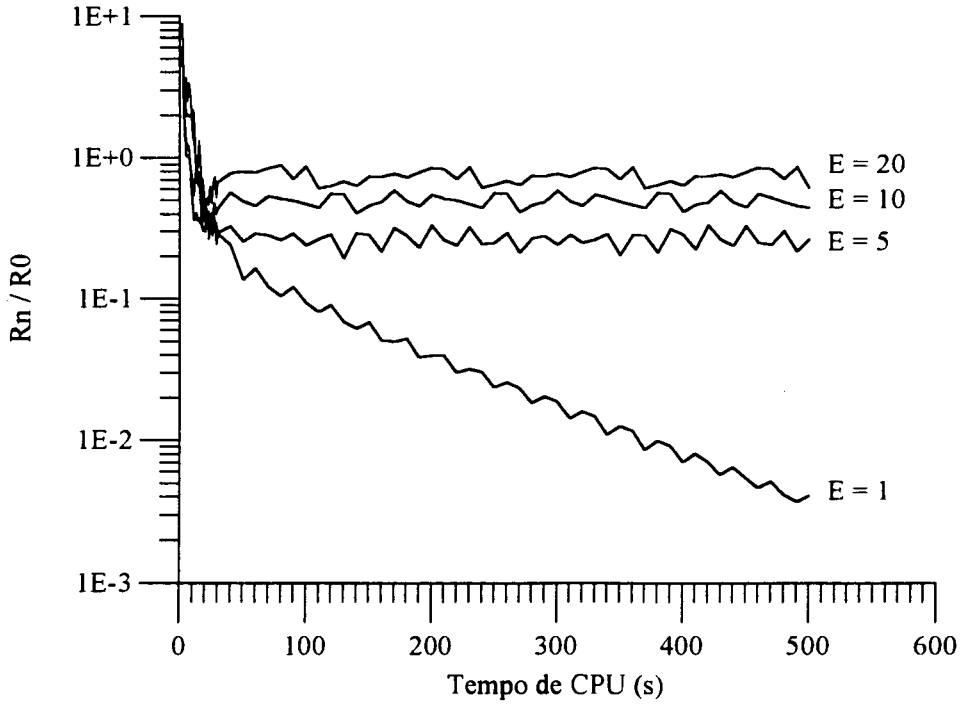


Fig.(6.14) - Comportamento do método CELS na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 - Reynolds 500

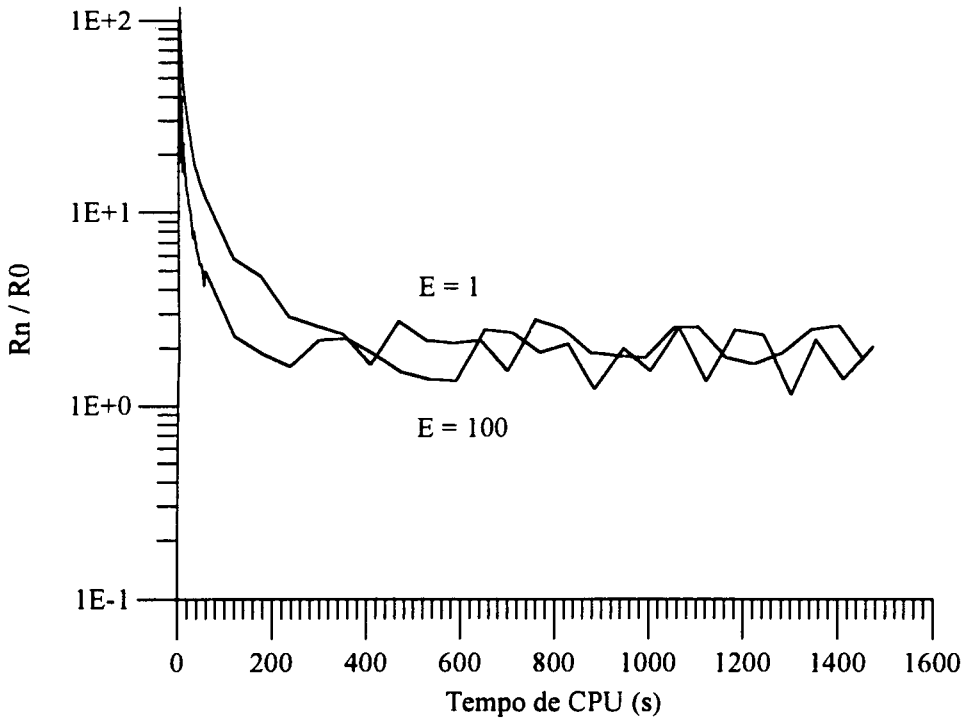


Fig.(6.15) - Comportamento do método CELS na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 40×56 - Reynolds 500

6.4 - RESUMO DOS RESULTADOS DAS SEÇÕES 6.2 E 6.3

Em termos gerais, as análises efetuadas mostram que os comportamentos dos métodos SIMPLE, SIMPLER e SIMPLEC são fortemente dependentes do avanço de tempo imposto, sendo que na maioria das vezes os melhores resultados são alcançados para baixos valores do parâmetro E . Também o método CELS é afetado por este parâmetro. Contudo, observa-se uma situação mais satisfatória, na qual um aumento no avanço de tempo não se traduz em divergência do processo iterativo. Nos casos analisados, observa-se, também, uma drástica alteração no comportamento deste método, quando da mudança no valor do parâmetro " e ". Tal fato é um indicativo de que a relação ótima entre os parâmetros (e , E) depende das características do problema sob investigação. O método PRIME, ao contrário dos anteriores, mostra-se pouco sensível às variações de E dentro da faixa de 1 a 100.

A Fig.(6.16) mostra, de forma qualitativa, a forma desejável para a curva $CPU \times E$. Para o usuário é interessante poder empregar grandes avanços no tempo (no caso da procura pela solução de regime permanente) a fim de reduzir os custos computacionais, sem se preocupar com possíveis divergências do processo. Neste sentido, e considerando os resultados alcançados no presente trabalho, o comportamento do método PRIME foi o que mais se aproximou daquele mostrado na Fig.(6.16).

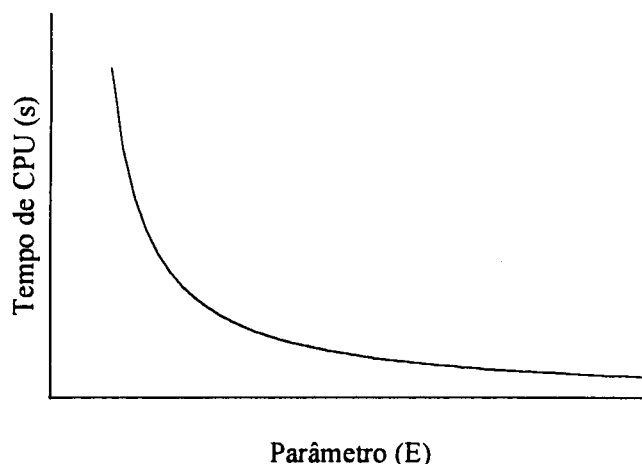


Fig.(6.16) - Comportamento desejável de um método para tratamento do acoplamento pressão-velocidade

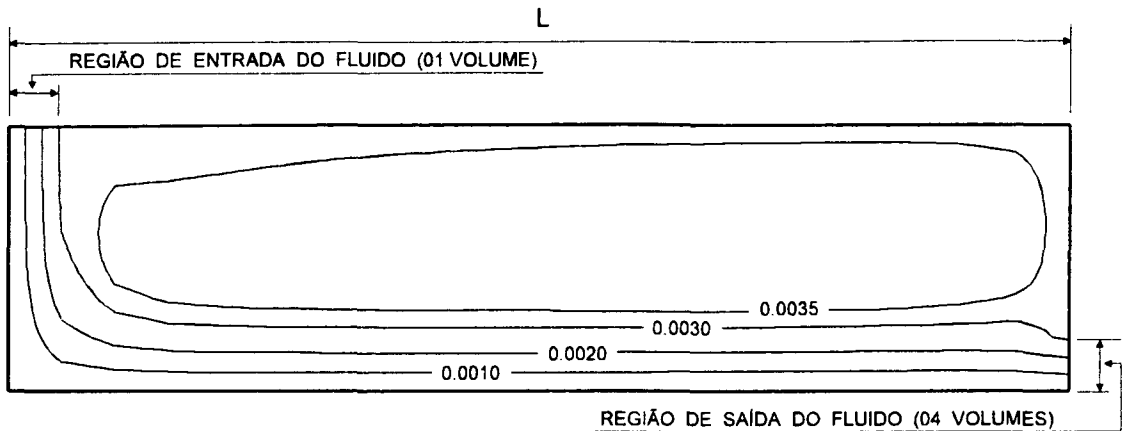
Para as situações de baixos valores de Re_L observa-se uma maior habilidade do CELS em garantir os acoplamentos. Isto é constatado a partir do fato dele requerer menos iterações que os demais métodos. Entretanto, o custo de cada iteração do CELS é o que mais se eleva com o aumento do número de volumes de controle (os blocos de correção de pressão são os principais responsáveis por essa elevação de custo), de sorte que para malhas mais refinadas o seu desempenho piora consideravelmente, tornando o seu emprego desaconselhável em tais casos.

Os métodos segregados, apesar de terem a sua capacidade reduzida nas situações de elevados valores de Re_L , conseguem alcançar a solução convergida por meio de processos iterativos estáveis, isto é, sem oscilações.

Nas situações de $Re_L = 500$, o CELS tem a sua habilidade bastante deteriorada (processo iterativo com oscilações), tanto para a malha de 20×28 volumes, quanto para a de 40×56 volumes. Para esta última malha a solução não é alcançada com nenhum dos valores de E definidos anteriormente.

6.5 - TESTES ADICIONAIS

As expectativas criadas por Galpin et al. [24] em torno das potencialidades do método CELS não foram plenamente confirmadas nos casos aqui estudados, uma vez que se verificou uma limitada capacidade do método na solução de escoamentos com elevado número de Reynolds. Em função disso, alguns testes adicionais foram efetuados com o propósito de verificar os resultados apresentados em [24] e de permitir um melhor entendimento das razões que levaram à limitação observada. Para satisfazer o primeiro objetivo, de verificação de resultados, o escoamento em uma cavidade retangular, com $Re_L = 64000$, como mostrado na Fig.(6.17) foi resolvido. Empregou-se uma malha ortogonal de 20×20 volumes, Fig.(6.18), da mesma forma como feito em [24].



$$Re_L = \rho \frac{u_{in} L}{\mu} \quad L = 0,16 \quad u_{in} = 0,4 \quad \rho = 10 \quad \mu = 1,0 \times 10^{-5}$$

Fig.(6.17) - Cavidade retangular - Linhas de corrente para $Re_L = 64000$

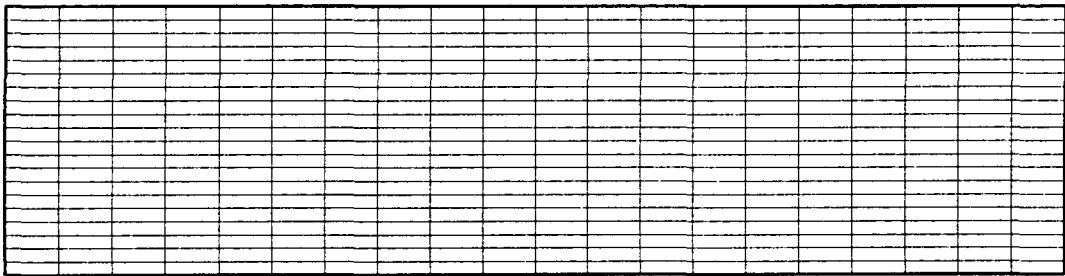


Fig.(6.18) - Cavidade retangular - malha 20×20

Em [24] apresenta-se uma curva de ciclos de atualização de coeficientes \times parâmetro E , para que o residuo na pressão seja reduzido a 0,5%. Essa curva é mostrada na Fig.(6.19), em comparação com os resultados aqui obtidos na solução deste mesmo problema.

Os resultados mostrados em [24], curva (b), foram conseguidos através da utilização de valores ótimos da variável de controle de iterações internas, a fim de se ter o menor número de ciclos de atualização de coeficientes para cada valor de E . Como tais valores ótimos não são informados em [24], uma reprodução daqueles resultados não foi possível. Isso explica as diferenças entre a curva (b) e a curva (a), obtida nos mesmos moldes dos problemas anteriores, ou seja, com atualização de coeficientes a cada ciclo de cálculo nos campos de pressão e velocidade.

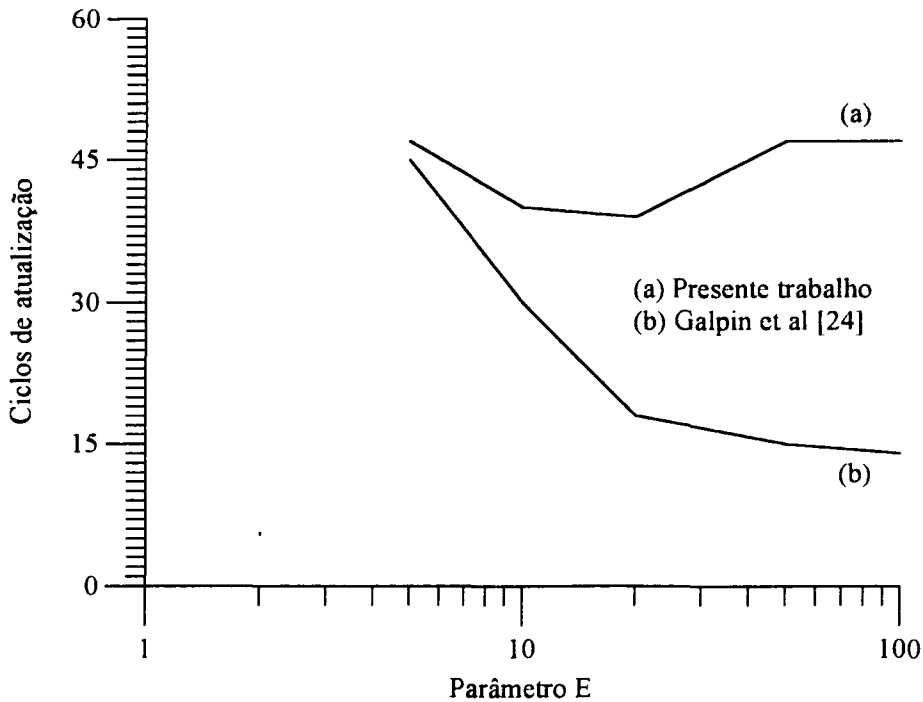


Fig.(6.19) - Comportamento do CELS na solução do escoamento através da cavidade retangular - Malha 20×20 - Reynolds 64000
Ciclos de atualização \times Parâmetro E

Um outro aspecto, muito importante, observado na solução deste problema, refere-se às curvas resíduo \times ciclos que originaram a curva (a) anteriormente mencionada. Tal aspecto é mostrado na Fig.(6.20). Observe-se nesta figura que, para determinados valores de E , o método CELS converge apenas para resíduos da ordem de 0.5%. Se resíduos menores, por exemplo 0.1% forem pretendidos, a faixa de valores de E possíveis de serem empregados fica bastante reduzida. Em [24], um resíduo de 0.5% é considerado satisfatório sem que os autores façam qualquer comentário a respeito do comportamento do CELS durante o processo iterativo. Fica a dúvida, portanto, se um comportamento semelhante ao mostrado na Fig.(6.20) foi ou não observado em [24].

Na solução deste mesmo problema através do PRIME, para valores de $E > 5$, foi necessário a atribuição de um valor reduzido à variável TOLUV, cujo significado foi explicado no capítulo 5, de modo que mais iterações internas fossem executadas em cada ciclo de atualização de coeficientes.

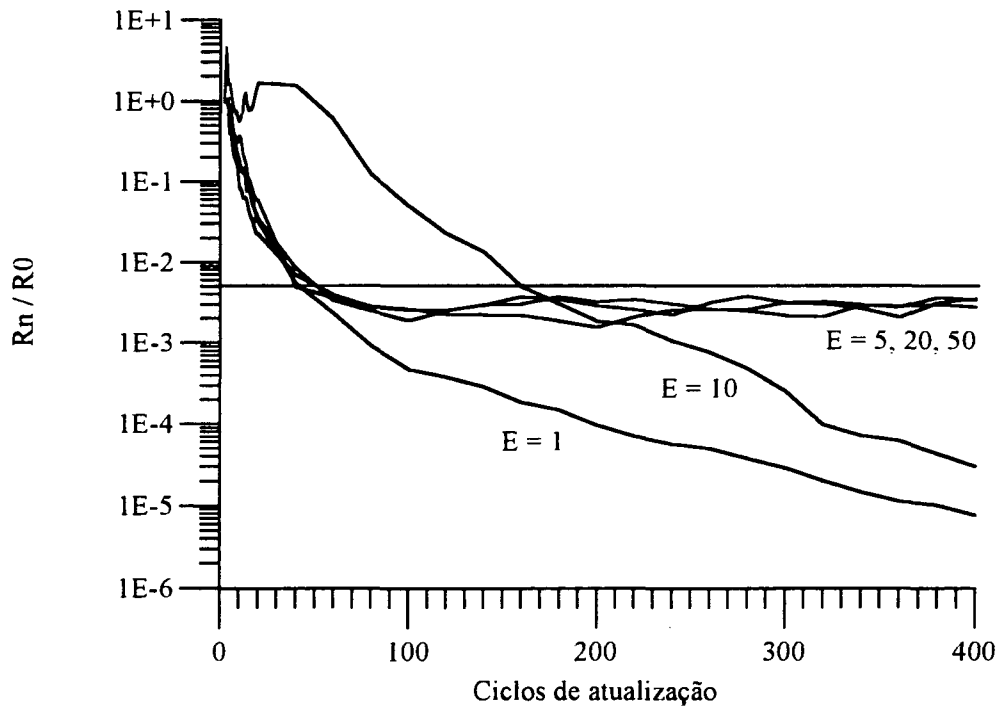


Fig.(6.20) - Comportamento do CELS na solução do escoamento através da cavidade retangular - Malha 20×20 Reynolds 64000 - Resíduo \times Ciclos de atualização

Através dos métodos SIMPLE e SIMPLEC a solução convergida foi alcançada por meio de processos estáveis, para valores de E na faixa de 1 a 10, e em tempos menores que aqueles requeridos pelos métodos CELS e PRIME.

Para cumprir o segundo objetivo, de aprofundamento da investigação do comportamento do CELS nos casos de elevados números de Reynolds, revolveram-se os escoamentos através do canal divergente/convergente, malha 20×28 , sem concentração das linhas η junto à fronteira sul, Fig.(6.21) e através da cavidade retangular anterior, com uma malha 40×10 , como mostrado na Fig.(6.22). Os números de Reynolds adotados foram iguais a 500 e 64000, respectivamente.

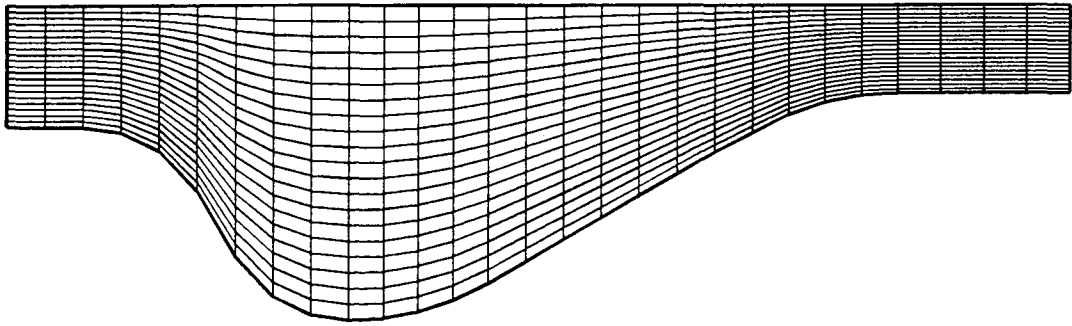


Fig.(6.21) - Canal divergente/convergente - malha 20×28 sem concentração das linhas η na fronteira sul

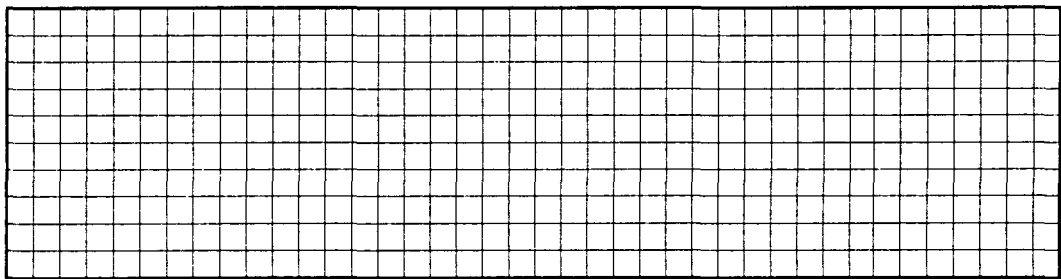


Fig.(6.22) - Cavidade retangular - malha 40×10

Na solução do escoamento a $Re_L = 500$ através do canal com a malha da Fig.(6.21), uma significativa melhora de comportamento do CELS foi observada, Fig.(6.23), em comparação com a Fig.(6.14), onde os resultados para a malha com concentração das linhas η são mostrados. Uma comparação entre os melhores desempenhos dos diversos métodos na solução deste problema é apresentada na Fig.(6.24) e revela que o emprego do CELS volta a ser atrativo.

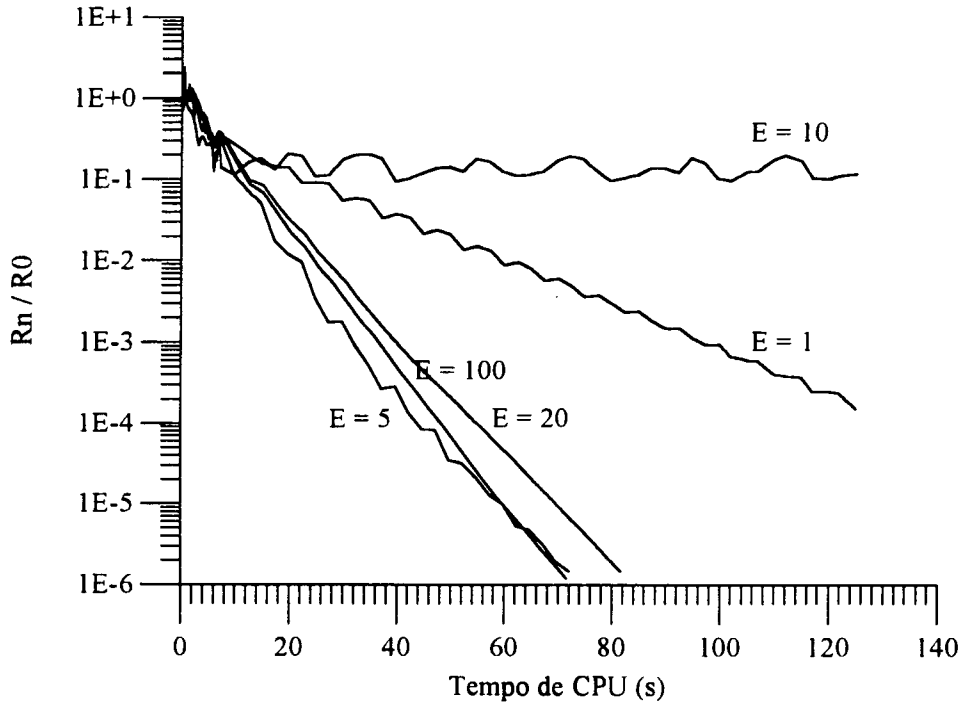


Fig.(6.23) - Comportamento do CELS na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - malha 20×28 com igual espaçamento na direção η Reynolds 500

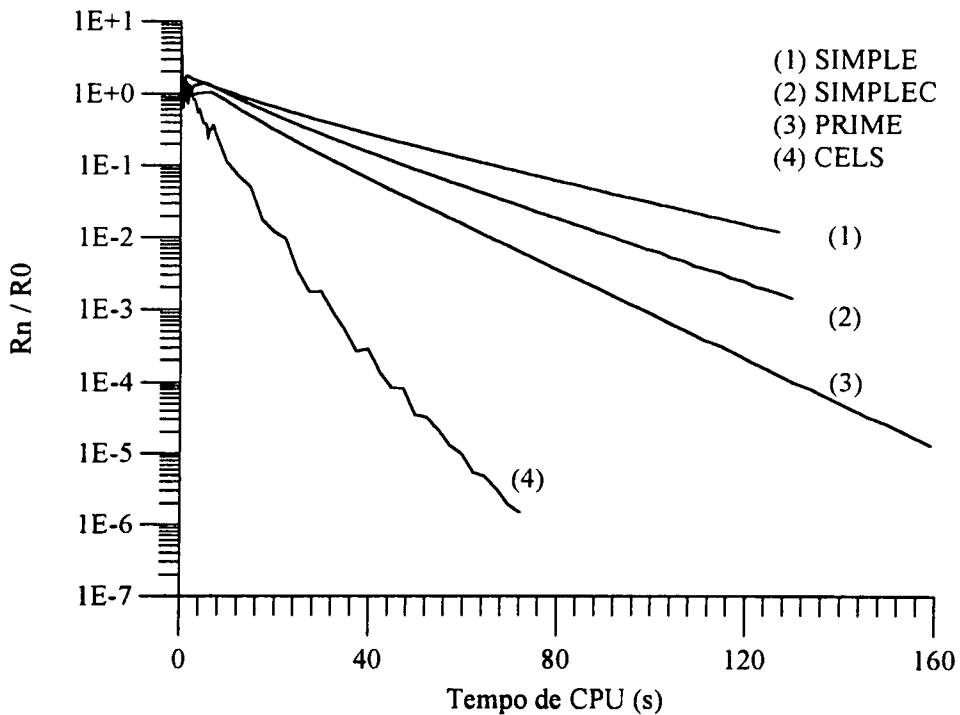


Fig.(6.24) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através do canal divergente/convergente - Malha 20×28 com igual espaçamento na direção η - Reynolds 500

Por fim, na solução do escoamento através da cavidade retangular com malha 40×10 e $Re_L = 64000$, observou-se que o CELS passou a convergir por meio de processos estáveis, com o parâmetro E variando de 1 a 100. O método PRIME apresentou um bom comportamento para uma ampla faixa de valores de E , sem a necessidade de execução de mais de uma iteração nos campos de velocidade e pressão para cada novo conjunto de coeficientes. E mais uma vez, os métodos SIMPLE e SIMPLEC não tiveram dificuldades na solução deste último problema, tendo sido empregados valores de E na faixa de 1 a 100. Na Fig. (6.25) uma comparação entre os diversos métodos na solução deste problema é mostrada.

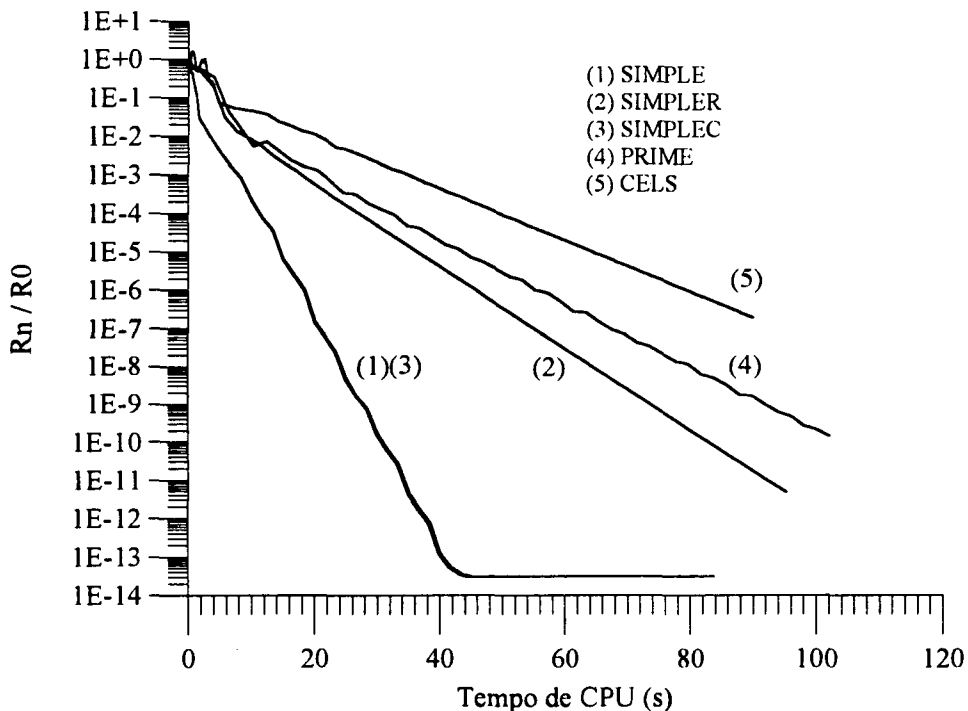


Fig.(6.25) - Comparação entre o melhor desempenho de cada método na solução do escoamento através da cavidade retangular - Malha 40×10 - Reynolds 64000

6.6 - CONCLUSÕES

Reverendo-se os resultados obtidos quando da solução do escoamento através da cavidade retangular, verifica-se que bastou uma alteração na razão de aspecto dos volumes de controle para que o método CELS passasse a apresentar um bom comportamento durante o processo

iterativo. Fato semelhante aconteceu quando empregaram-se linhas de η igualmente espaçadas na discretização do canal divergente/convergente.

A razão de aspecto dos volumes de controle, em associação com a magnitude dos fluxos convectivos, define a relação entre os coeficientes das equações algébricas. Quando ocorre dos coeficientes em uma direção serem muito maiores que os da outra, situação definida como anisotropia dos coeficientes, pode-se ter dificuldades na condução dos processos iterativos, como mostrado em [35], entre outros. Esta parece ser a explicação para as deficiências observadas em relação ao CELS.

Da mesma forma, a necessidade de execução de mais de uma iteração interna para cada novo conjunto de coeficientes quando da solução, via PRIME, do escoamento através da cavidade retangular com malha 20×20 , pode estar ligada à anisotropia dos coeficientes.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

7.1 - CONCLUSÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo principal o estudo do comportamento dos métodos SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC, PRIME e CELS, quando da solução de alguns escoamentos laminares e incompressíveis em geometrias bidimensionais de fronteiras não-ortogonais. Uma extensão do método CELS para permitir o seu uso em geometrias não-ortogonais foi proposta, com base na definição das equações algébricas de conservação de quantidade de movimento em termos das componentes contravariantes do vetor velocidade. Essas "novas" equações, introduzidas em todos os métodos investigados, além de permitirem a aplicação da extensão do CELS até mesmo em casos onde existam pontos de y_{η} e x_{ξ} nulos, garantem a obtenção de uma mesma solução pelos diversos métodos, inclusive para malhas pouco refinadas.

Quanto às comparações efetuadas, verificou-se, para os casos estudados, que a maior habilidade no tratamento do acoplamento pressão-velocidade foi demonstrada pelo método CELS, sempre que a solução convergida foi alcançada por este método. Entretanto, nem sempre a habilidade do CELS foi tão superior a ponto de compensar o seu elevado custo por iteração. Esta observação é particularmente válida para os casos de maior anisotropia dos coeficientes e de malhas mais refinadas.

O método PRIME mostrou-se, ao lado dos métodos SIMPLE e SIMPLEC, o menos hábil no tratamento dos acoplamentos nos problemas estudados, mas por ser um método bastante compacto, de baixo custo por iteração, apresentou custos totais bem inferiores àqueles dos outros dois métodos. Apenas em uma situação, (cavidade retangular - 20×20 - $Re_L = 64000$) o

custo de obtenção da solução através do PRIME superou o dos métodos SIMPLE e SIMPLEC. Como já discutido no capítulo anterior, tal fato parece estar associado à anisotropia dos coeficientes das equações algébricas.

Os desempenhos dos métodos SIMPLE, SIMPLER e SIMPLEC não representaram nenhuma surpresa. Dos três métodos, o SIMPLER é o que promove o melhor tratamento do acoplamento pressão-velocidade. Mas por outro lado, a possibilidade de emprego do parâmetro E em uma faixa mais ampla é um aspecto bastante positivo a favor dos métodos SIMPLE e SIMPLEC.

A enorme variedade de parâmetros que influenciam o desempenho de cada um dos métodos para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade não permite uma opinião definitiva sobre qual deles é o melhor. Contudo, espera-se que os resultados aqui mostrados sejam úteis a outros pesquisadores, na medida em que servem de alerta sobre as deficiências de cada um dos métodos e indicam alguns pontos que podem ser atacados na tentativa de superá-las.

7.2 - RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como recomendação para um trabalho futuro, seria interessante investir um pouco mais no método CELS, a fim de torná-lo menos sensível à anisotropia dos coeficientes e baixar o seu custo por iteração. Para contornar os problemas associados aos coeficientes, o emprego de linearizações mais elaboradas, do tipo Newton-Raphson, ou o emprego de técnicas "multigrid", como descrito em [35] e [36], respectivamente, podem dar bons resultados. Com relação ao custo por iteração, os blocos de correção de pressão, introduzidos para aumentar a taxa de convergência do método, se constituem em pontos de elevado consumo de tempo. Assim, reduções mais significativas no custo por iteração poderão ser conseguidas diminuindo-se a frequência de aplicação desses blocos, procurando-se otimizar a relação entre taxa de convergência e custo por iteração.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] PATANKAR, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill, New York, 1980
- [2] HARLOW, F.H. and WELCH, J.E., "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface", *Physics of Fluids*, vol. 8, pp 2182-2189, 1965
- [3] RAITHBY, G.D. and TORRANCE, K.E., "Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", *Computers and Fluids*, vol. 2, pp 191-206, 1974
- [4] AMSDEN, A.A. and HARLOW, F.H., "The SMAC Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows", LA-4370, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico
- [5] CHAN, R.K.C. and STREET, R.L., "A Computer Study of Finite-Amplitude Water Waves", *Journal of Comput. Phys.* vol. 6, pp 68-94, 1970
- [6] PATANKAR, S.V. and SPALDING, D.B., "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows", *Journal Heat Mass Transfer* vol.15, pp 1787-1806, 1972
- [7] VAN DOORMAAL, J.P. and RAITHBY, G.D., "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows", *Numerical Heat Transfer*, vol. 7, pp 147-163, 1984
- [8] MALISKA, C.R., "A Solution Method for Three-Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates", Ph.D. thesis, University of Waterloo, 1981

- [9] RHIE, C.M. and CHOW, W.L., "A Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Isolated Airfoil with Trailing Edge Separation", *AIAA Journal*, vol.21, pp 1525-1532, 1983
- [10] PERIC, M., "A Finite Volume Method for the Prediction of Three-Dimensional Fluid Flow in Complex Ducts", Ph.D. thesis, University of London, 1985
- [11] MAJUNDAR, S., "Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Nonstaggered Grids", *Numerical Heat Transfer*, vol. 13, pp 125-132, 1988
- [12] SILVA, A.F.C., "Proposta de Tese submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção da condição de candidato ao título de Doutor", Florianópolis, 1988
- [13] MARCHI, C.H., DE BORTOLI, A.L. and MALISKA, C.R., "The Use of Colocated Variables in the Solution of Supersonic Flows". Tenth Brazilian Congress of Mechanical Engineering, December 1989
- [14] DE BORTOLI, A.L. "O Uso de Variáveis Co-localizadas na Solução de Escoamentos Supersônicos Sobre Corpos de Geometrias Arbitrárias", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1990
- [15] ACHARYA, S. and MOUKALLED, F.H., "Improvements to Incompressible Flow Calculation on a Nonstaggered Curvilinear Grid", *Numerical Heat Transfer, Part B*, vol. 15, pp 131-152, 1989
- [16] KOBAYASHI, M.H. e PEREIRA, J.C.F., "Cálculo de Escoamentos Laminares e Turbulentos em Geometrias Complexas Usando Malhas Não Desfasadas", III ENCIT, Itapema - SC, pp 345-350, 1990
- [17] THIART, G.D., "Finite Differencing Scheme for the Numerical Solution of Fluid Flow and Heat Transfer on Nonstaggered Grids", *Numerical Heat Transfer, Part B*, vol. 17, pp 43-62, 1990

- [18] CARETTO, L.S., CURR, R.M. and SPALDING, D.B., "Two Numerical Methods for Three-Dimensional Boundary Layers", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp 39-57, 1972
- [19] CARETTO, L.S., GOSMAN, A.D. PATANKAR, S.V. and SPALDING, D.B., "Two Calculation Procedures for Steady, Three-Dimensional Flow With Recirculation", *Proc. 3rd Int. Conf. Num. Methods Fluid Dyn., Paris, Vol II*, pp 60-86
- [20] WATSON, P.C., "A Solution Method for the Finite Difference Form of the Steady-State Navier-Stokes Equations Using Computer Program Nases", M.A.Sc. Technical Project, University of Waterloo, 1981
- [21] ZEDAN, M.G., "Simultaneous Variable Solution Procedures for Velocity and Pressure in Incompressible Fluid Flow Problems", Ph.D. thesis, University of Waterloo, 1983
- [22] STONE, H.L., "Iterative Solution of Implicit Approximation of Multi-Dimensional Partial Differential Equations", *SIAM J. Num. Anal.* vol. 5, pp 530-558, 1968
- [23] VAN DOORMAAL, J.P. and RAITHBY, G.D., "The Simultaneous Solution Along Lines of the Continuity and Momentum Equations", 10th IMACS World Congress, Montreal, 1982
- [24] GALPIN, P.F., VAN DOORMAAL, J.P. and RAITHBY, G.D., "Solution of Incompressible Mass and Momentum Equations by Application of a Coupled Equation Line Solver", *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, vol. 5, pp 615-625, 1985
- [25] RAITHBY, G.D. and SCHNEIDER, G.E., "Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow: Treatment of the Velocity-Pressure Coupling", *Numerical Heat Transfer*, vol. 2, pp 417-440, 1979
- [26] VAN DOORMAAL, J.F., "Numerical Methods for the Solution of Incompressible and Compressible Fluid Flows", Ph.D. thesis, University of Waterloo, 1985

- [27] KARKI, K.C. and PATANKAR, S.V., "Pressure Based Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations", AIAA Journal, vol. 27, nº 9, pp 1167-1174, 1989
- [28] THOMPSON, J.F., WARSI, Z.U.A. and MASTIN, C.W., "Numerical Grid Generation - Foundations and Applications", Nort Holland, New York, 1985
- [29] PEREZ, J.P., "Simulação Numérica de Descargas Térmicas em Corpos D'agua Rasos de Geometria e Profundidade Arbitrárias", Dissertação de Mestrado, UFSC, 1987
- [30] ANDERSON, D.A., TANNEHILL, J.C. and PLETCHER, R.H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", McGraw-Hill, 1984
- [31] PATANKAR, S.V., "Numerical Prediction of Three-Dimensional Flow in Studies of Convection", B.E. Launder (ed.), vol.1, 1975
- [32] ZEDAN, M. and SCHNEIDER, G.E., "Investigation of the Simultaneous Variable Solution for Velocity and Pressure in Incompressible Fluid Flow Problems", AIAA 18th Thermo. Conference, Montreal, June, 1983
- [33] PERIC, M., "Efficient Semi-Implicit Solving Algorithm for Nine-Diagonal Coefficient Matrix", Numerical Heat Transfer, vol. 11, pp 251-279, 1987
- [34] SCHNEIDER, G.E. and ZEDAN, M., "A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems", Numerical Heat Transfer, vol.4, pp 1-19, 1981
- [35] HUTCHINSON, B.R. and RAITHBY, G.D., "A Multigrid Method Based on the Aditive Correction Strategy", Numerical Heat Transfer, vol.9, pp 511-537, 1986
- [36] GALPIN, P.F. and RAITHBY, G.D., "Treatment of Non-Linearities in the Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations", Int. Journal for Num. Methods in Fluids, vol. 6, pp 409-426, 1986