

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO DA VERSÃO  $p$  DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS  
PARA PROBLEMAS DA ELASTICIDADE E DE POTENCIAL

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

CARLOS ARMANDO MAGALHÃES DUARTE

FLORIANÓPOLIS, NOVEMBRO DE 1991

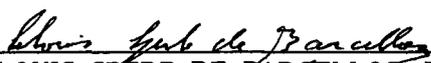
ESTUDO DA VERSÃO  $p$  DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS  
PARA PROBLEMAS DA ELASTICIDADE E DE POTENCIAL

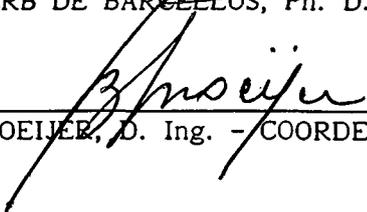
CARLOS ARMANDO MAGALHÃES DUARTE

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

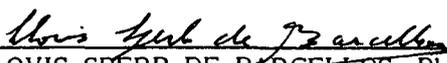
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO, APROVADA  
EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.

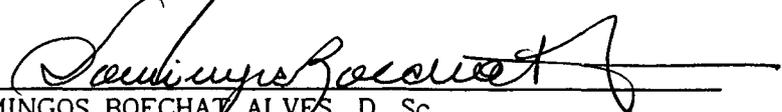
  
CLOVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph. D. - ORIENTADOR

  
BEREND SNOELKER, D. Ing. - COORDENADOR

BANCA EXAMINADORA:

  
CLOVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph. D. - PRESIDENTE

  
CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELK, Ph. D.

  
DOMINGOS BOECHAT ALVES, D. Sc.

  
PHILIPPE REMY BERNARD DEVLOO, Ph. D.

À todas as pessoas que me querem bem, em especial,  
à meus pais.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Clovis Sperb de Barcellos, meu orientador, pela formação, assistência e paciência demonstrada durante todo este trabalho.

Agradeço ao Prof. Félix C. G. Santos e ao Prof. Domingos Boechat Alves por terem despertado em mim o gosto pela pesquisa e investigação científica, pela atenção, estímulo e tratamento amigo sempre dispensado.

Estendo meus agradecimentos a todos os colegas do GRANTE, em especial ao André Noel, Paulo Linzmaier, Renato Barbieri e ao Roberto Dalledoni, pelas contribuições dadas a este trabalho e por terem me proporcionado um ambiente de trabalho agradável e enriquecedor.

Agradeço aos demais professores e funcionários da UFSC, em especial à Verinha e à Sula por terem tornado possível a realização deste trabalho.

Finalmente expresso meus agradecimentos à CAPES pelo suporte financeiro desta pesquisa.

## ÍNDICE

Resumo	ix
Abstract	x
1 INTRODUÇÃO	
1.1 Porque Utilizar Métodos Adaptativos .	1
1.2 Porque Utilizar a Versão $p$ Adaptativa do MEF .	1
1.3 Motivação para este Trabalho e Conteúdo dos Capítulos .	3
2 DEFINIÇÕES, TIPOS DE ERROS, ESTIMADORES DE ERROS E ESTRATÉGIAS ADAPTATIVAS	
2.1 Introdução .	5
2.2 Algumas Definições Necessárias .	5
2.3 Principais Tipos de Erros na Solução Obtida pelo Método de Elementos Finitos .	12
2.3.1 Introdução .	12
2.3.2 Erros na Modelagem Matemática .	12
2.3.3 Erros de Arredondamento .	13
2.3.4 Erros de Discretização e Erros da Solução .	14
2.4 Classificação das Técnicas de Estimativa <i>a posteriori</i> do Erro de Discretização .	15
2.4.1 Introdução .	15
2.4.2 Técnicas Baseadas na Estimativa do Resíduo .	16
2.4.2.1 Método dos Resíduos em Elementos .	16
2.4.2.2 Indicador de Erro de Babuska-Rheiboldt .	16
2.4.3 Método Dual .	17
2.4.4 Técnica Baseada na Estimativa do Erro de Interpolação .	18
2.4.5 Técnica Baseada no Pós-Processamento da solução .	19
2.4.6 Estimativa de Erro <i>a posteriori</i> Utilizando uma Análise Assintótica .	20
2.4.7 Técnica Baseada no Uso de Indicadores de Correção .	22
2.5 Procedimentos Adaptativos para o Método de Elementos Finitos .	23

2.5.1 Versão $h$ .	23
2.5.2 Versão $p$ .	23
2.5.3 Versão $r$ .	24
2.5.4 Versões Combinadas - Versão $h-p$ .	24

### 3 DISCRETIZAÇÃO DOS PROBLEMAS

3.1 Formulação Variacional dos Problemas .	25
3.1.1 Formulação Variacional do Problema de Poisson .	26
3.1.2 Formulação Variacional para Problemas da Elasticidade Linear Estática .	29
3.2 Aproximação por Elementos Finitos de Problemas de Valor no Contorno com Formulação Variacional .	31
3.3 Equações de Elementos Finitos para o Problema de Poisson .	34
3.4 Equações de Elementos Finitos para Problemas da Elasticidade Linear Estática .	36
3.4.1 Equações de Elementos Finitos para Problemas da Elasticidade Linear Estática Utilizando Notação Contraída .	38
3.4.1.1 Elementos para Problemas Axissimétricos .	39
3.4.1.2 Elementos para Estado Plano de Tensão e Estado Plano de Deformação .	42

### 4 BASES HIERÁRQUICAS NO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

4.1 Introdução .	44
4.1.1 Conseqüências do Uso de Funções de Interpolação Hierárquicas na Versão $p$ do MEF .	44
4.2 Funções de Interpolação Hierárquicas para Elementos Quadrangulares ..	47
4.3 Significado Físico dos Coeficientes das Funções Base Hierárquicas .	49
4.4 Implementação de um Elemento Hierárquico de Ordem $p$ .	51
4.4.1 Esquema de Numeração das Funções de Interpolação .	52
4.4.2 Construção das Funções de Interpolação Bidimensionais .	54
4.5 Patch-test e Análise Espectral dos Elementos Hierárquicos para Elasticidade 2D .	57

### 5 ESTIMATIVA A POSTERIORI DO ERRO DE DISCRETIZAÇÃO

5.1 Introdução .	62
------------------	----

5.2 O Método dos Resíduos em Elementos para Problemas da Elasticidade e de Potencial .	63
5.2.1 O Método dos Resíduos em Elementos para Problemas de Potencial .	63
5.2.2 O Método dos Resíduos em Elementos para Problemas da Elasticidade.	71
5.3 Estimativa de Erro Baseada no Pós-Processamento da Solução .	75

## 6 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

6.1 Introdução .	80
6.2 Estrutura de Dados do Módulo Processador .	80
6.3 Gerenciamento Dinâmico da Memória .	85
6.4 Algoritmo $p$ -Adaptativo para Equidistribuição do Erro .	85
6.5 Imposição de Continuidade no Contorno Inter-Elementos .	88
6.6 Módulo Pós-Processador .	88

## 7 RESULTADOS NUMÉRICOS

7.1 Introdução .	90
7.2 Problemas Regidos pela Equação de Poisson .	92
7.2.1 Problema 1: Torsão de uma Barra Retangular de Material Isotrópico.	92
7.2.2 Problema 2: Distribuição de Temperatura em Regime Permanente em uma Placa de Material Isotrópico .	97
7.2.3 Problema 3: Equação de Poisson .	103
7.2.4 Problema 4: Equação de Laplace .	109
7.3 Problemas da Elasticidade Plana .	117
7.3.1 Problema 5: Cisalhamento de um Domínio Quadrado .	117
7.3.2 Problema 6: Painel Fraturado .	121
7.4 Problemas da Elasticidade com Axissimetria geométrica, Material e de Carregamento .	129
7.4.1 Problema 7: Teste de MacNeal-Harder .	129
7.4.2 Problema 8: Anel sob Pressão Interna e Rotação Constante .	134
7.4.3 Problema 9: Placa Circular Simplesmente Apoiada .	139

## 8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA NOVOS ESTUDOS

8.1 Introdução .	144
------------------	-----

8.2 Conclusões .	144
8.3 Sugestões para Novos Estudos e Complementação deste Trabalho . .	146

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

. 148

## APÊNDICE: RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

. 157

## RESUMO

Nesta dissertação estuda-se o Método de Elementos Finitos  $p$  adaptativo com ênfase na solução de problemas potenciais e da elasticidade bidimensional. Uma atenção especial é dada aos problemas cuja solução apresenta um comportamento singular. O algoritmo empregado baseia-se no uso de estimativas *a posteriori* do erro de discretização e no aumento seletivo da ordem polinomial dos elementos de modo a equidistribuir o erro na malha. Três métodos de estimativa de erro *a posteriori* são analisados e implementados. O Método de Gradientes Conjugados preconditionado é usado na solução dos sistemas de equações. Problemas representativos são analisados e os resultados obtidos comparados com soluções analíticas.

## ABSTRACT

The  $p$  adaptive Finite Element Method is used to solve two dimensional Elasticity and Potential Problems. Special attention is given to axially symmetric problems and to problems with singular solutions. The algorithm employed is based on the use of a *posteriori* discretization error estimates. The elements polynomial degree are selectively increased in order to equidistribute the error on the finite element grid. Three *a posteriori* error estimation techniques are analysed and implemented. The Preconditioned Conjugate Gradient Method is used to solve the linear system of equations. Representative problems are solved and the results compared with available analytical and numerical solutions.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 Porque Utilizar Métodos Adaptativos.

O Método de Elementos Finitos (MEF) é atualmente a ferramenta numérica mais amplamente empregada na Mecânica Computacional. O método vem sendo empregado para se resolver uma grande classe de problemas estruturais, da mecânica dos fluidos, do eletromagnetismo, etc.. Apesar de significativos avanços feitos no desenvolvimento da teoria e de algoritmos para o método, a concepção de um modelo de elementos finitos, para a análise de um determinado problema, baseia-se, geralmente, no bom senso do analista e em experiências adquiridas com a solução de problemas similares. Se os resultados não são considerados coerentes a discretização deve ser refeita. É, no entanto, razoável supor que se a intuição do analista falhou na idealização do modelo, o mesmo pode acontecer no julgamento da validade dos resultados. Devido a estas incertezas nos últimos anos tem havido um crescente interesse em métodos adaptativos. Nestes métodos, modifica-se automaticamente o modelo nas regiões do domínio onde a precisão não é satisfatória. Para isto utiliza-se, de uma maneira ótima, as informações fornecidas por etapas anteriores do procedimento.

Idealmente, o uso de métodos adaptativos torna possível que o usuário necessite apenas fornecer uma malha representativa da geometria do problema e um limite superior para o erro. O computador, então, cria uma seqüência ótima de discretizações e modelos matemáticos até que o nível de precisão pré-estabelecido seja alcançado. Porém, no estágio atual da Mecânica Computacional, apesar do controle automático do erro de discretização já ser uma realidade, a adaptatividade de modelos matemáticos ainda se encontra em uma fase embrionária (Babuska, 1989).

#### 1.2 Porque utilizar a Versão $p$ Adaptativa do MEF.

O erro de discretização de uma solução aproximada,  $u_{ef}$ , obtida através do MEF, pode ser reduzido, por exemplo, através da mudança da localização dos nós, do refinamento da malha (extensão  $h$ ), do aumento do grau polinomial dos elementos (extensão

$p$ ) ou através de combinações (extensão  $h-p$ , por exemplo). O termo *versão* é geralmente utilizado em referência a implementação de algum tipo de extensão em um método numérico particular. Neste trabalho o termo *versão* sempre estará relacionado ao MEF.

A decisão de se usar a versão  $h$ , a versão  $p$  ou a versão  $h-p$ , para se resolver um determinado problema, depende do comportamento da solução exata. A solução,  $u$ , de um problema de valor no contorno é a seguir classificada levando-se em consideração a malha de elementos finitos utilizada na discretização do domínio (Szabó, 1990a,b):

*Categoria A.*  $u$  é analítica<sup>1</sup> em todos os elementos finitos, incluindo os respectivos contornos.

Para os problemas pertencentes à esta categoria, o método de controle mais eficaz do erro de discretização é através do aumento da ordem polinomial dos elementos, pois, neste caso, a energia de deformação da função erro decresce exponencialmente quando a versão  $p$  é usada.

*Categoria B.*  $u$  é analítica em cada elemento finito, incluindo os contornos de cada elemento, com a exceção de alguns dos vértices. Os pontos onde  $u$  não é analítica são chamados de pontos singulares.

Para os problemas nesta categoria a solução exata, na vizinhança dos pontos singulares, pode ser escrita como a soma de uma função suave e uma função na seguinte forma

$$u = \sum_{l=1}^{\infty} A_l r^{\lambda_l} \Phi_l(\theta) \quad , \quad r < r_0 \quad (1.1)$$

onde: •  $r, \theta$  são coordenadas polares centradas no ponto singular.

- $A_l$  são coeficientes que dependem do carregamento.
- $\lambda_l$  é um número racional maior que zero.
- $\Phi_l(\theta)$  é uma função suave ou suave por partes.
- $r_0$  é o raio de convergência, ou seja, define a região de validade da expressão (1.1)

<sup>1</sup> Uma função é analítica em um ponto se ela pode ser expandida em Série de Taylor em torno daquele ponto (Szabó, 1990a).

Diz-se que um problema está *fortemente* na categoria **B** se  $\lambda = \min \lambda_i$  ( $i=1,2,\dots$ ) for menor que 1, caso contrário, diz-se que o problema está *fracamente* na categoria **B**. Para os problemas fortemente na categoria **B** a tensão máxima é infinita no ponto singular, enquanto que para os problemas fracamente na categoria **B** a tensão é finita em todo o domínio (no entanto, grandezas relacionadas com derivadas de ordens superiores a 1 podem ser infinitas no ponto singular).

O uso da versão  $h-p$  é o método de controle mais eficiente dos erros de discretização para os problemas pertencentes à categoria **B**. A energia de deformação da função erro, também neste caso, diminuirá exponencialmente. Esta mesma taxa de convergência da solução pode ser obtida se a versão  $p$  for utilizada, desde que se utilize malhas que consigam isolar os pontos singulares (para detalhes veja o Capítulo 7).

*Categoria C.* Neste caso a malha não pode ser construída de modo que os pontos singulares coincidam com os vértices dos elementos ou que as regiões onde ocorrem mudanças abruptas nas derivadas de  $u$ , tais como interfaces entre materiais diferentes, coincidam com contornos inter-elementos. Neste caso a versão  $h$ , com o refinamento construído adaptativamente, é a melhor escolha.

Segundo Szabó, (1990a) todos os problemas da elastoestática linear e da elasto-dinâmica linear e vários problemas não lineares pertencem à categoria **A** ou **B**. Portanto as versões  $p$  e  $h-p$  são de substancial importância para a engenharia.

Apesar da versão  $h-p$  apresentar teoricamente uma taxa de convergência exponencial, para os problemas das categorias **A** e **B**, existem grandes dificuldades para a sua implementação de uma forma eficiente devido, principalmente, a necessidade de uma complexa estrutura de dados e a dificuldade em se decidir entre o refinamento  $h$  ou o enriquecimento  $p$  de um determinado elemento da malha. O fato de ainda hoje não existir nenhum programa comercial, e apenas alguns poucos de pesquisa, que utilize a versão  $h-p$  do MEF é um reflexo destas dificuldades práticas.

Devido a tudo isto neste trabalho utiliza-se a versão  $p$  adaptativa do Método de Elementos Finitos.

### 1.3 Motivação para este Trabalho e Conteúdo dos Capítulos.

A principal motivação para o estudo da versão  $p$  adaptativa do MEF é o fato de

que praticamente tudo o que for desenvolvido e implementado durante este trabalho, tal como, estrutura de dados, métodos de solução, estimadores de erro, etc., não tem a sua aplicabilidade limitada aos problemas estudados aqui, mas, são aplicáveis a uma ampla classe de problemas da Mecânica Computacional.

Nos capítulos subseqüentes, procurou-se não apenas descrever formalmente o trabalho desenvolvido, mas, também passar, sempre que possível, experiências adquiridas durante o seu desenvolvimento.

Os estudos desenvolvidos e os resultados obtidos estão organizados da seguinte forma:

No Capítulo 2 são apresentadas algumas definições que são necessárias nos capítulos seguintes. Neste capítulo também são revistos vários métodos encontrados na literatura para a estimativa *a posteriori* do erro de discretização no MEF. Uma revisão da formulação variacional do problema de Poisson e de problemas da elasticidade linear estática, faz parte do conteúdo do Capítulo 3. As equações de elementos finitos são deduzidas no Capítulo 3.

No Capítulo 4 são discutidos vários aspectos do uso de bases hierárquicas no MEF. A implementação de um elemento hierárquico de ordem polinomial  $p$  também é tratada.

Dois métodos para a estimativa *a posteriori* do erro de discretização no MEF, o Método dos Resíduos em Elementos e o método baseado em pós-processamento da solução, são tratados no Capítulo 5.

Algumas das técnicas computacionais, utilizadas no programa  $p$  adaptativo desenvolvido, são os assuntos do Capítulo 6 e do Apêndice A. Finalmente, no Capítulo 7, apresenta-se os resultados obtidos com este programa, e, no Capítulo 8, as principais conclusões deste estudo e sugestões para continuidade do mesmo.

## CAPÍTULO 2

### DEFINIÇÕES, TIPOS DE ERROS, ESTIMADORES DE ERROS E ESTRATÉGIAS ADAPTATIVAS

#### 2.1 Introdução.

O objetivo deste capítulo é fornecer ao leitor uma idéia geral das várias definições e conceitos envolvidos quando se utilizam técnicas adaptativas no Método de Elementos Finitos (MEF).

Além de algumas definições que são necessárias nos capítulos seguintes, na Seção 2.3 são revistos os principais tipos de erros existentes em uma solução aproximada obtida pelo MEF. A seguir são revistos sete métodos encontrados na literatura para a estimativa *a posteriori* do erro de discretização. Três destas técnicas são utilizadas neste trabalho e duas delas, o Método dos Resíduos em Elementos e a técnica baseada em pós-processamento da solução, são discutidas em detalhes no Capítulo 5.

#### 2.2 Algumas Definições Necessárias.

São definidos a seguir alguns termos que são utilizados nas seções e capítulos subseqüentes e que fazem parte do jargão da Mecânica Computacional. As definições se restringem, geralmente, ao caso de domínios bidimensionais discretizados por elementos finitos triangulares, quadrangulares ou por ambos.

*PARÂMETROS DE MALHA* (Oden & Reddy, 1976).

*Parâmetro de malha  $h$  e  $\hat{h}$ .* Define-se  $h$  como sendo

$$h = \max\{ h_1, h_2, \dots, h_e, \dots, h_E \} \quad (2.1)$$

onde  $E$  é o número de elementos finitos da malha e  $h_e$  é o diâmetro do elemento  $\Omega_e$  definido por

$$h_e = \max_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \\ \in \bar{\Omega}_e}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^n} = \max_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \\ \in \bar{\Omega}_e}} \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

Note que  $h_e$  é igual ao diâmetro do menor círculo que contém o elemento (vide Figura 2.1). O parâmetro de malha  $h$  fornece uma medida do grau de refino da malha.

Analogamente define-se

$$\hat{h} = \min\{ h_1, h_2, \dots, h_E \} \quad (2.3)$$

Parâmetro de Malha  $\rho$ .

$$\rho = \min\{ \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_e, \dots, \rho_E \} \quad (2.4)$$

onde  $\rho_e = \sup\{ \text{diâmetro de todos os círculos contidos em } \Omega_e \}$ , vide Figura 2.1.

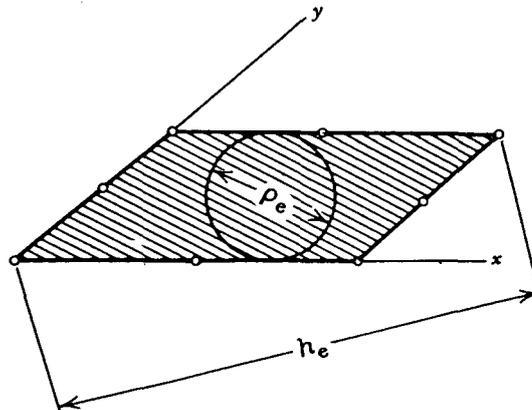


Fig. 2.1. Parâmetros  $h_e$  e  $\rho_e$  (Oden & Reddy, 1976).

Parâmetro de Malha  $\gamma$ . O número real  $\gamma$  é definido por

$$\gamma = h / \hat{h} \quad (2.5)$$

Quando  $\gamma = 1$  a malha é dita ser *h-uniforme* (vide Figura 2.2).

**SEQÜÊNCIA DE MALHAS QUASE-UNIFORMES** (Babuska & Szabó, 1982).

Uma seqüência de malhas  $\mathbb{M}$  é dita ser quase-uniforme se existe um número fixo  $k < \infty$ , tal que, para qualquer malha  $\mu \in \mathbb{M}$ , tem-se

$$\gamma(\mu) = \frac{h(\mu)}{\hat{h}(\mu)} \leq k \quad (2.6)$$

Grosseiramente, isto significa que a forma e o tamanho dos elementos não variam muito a medida que se refina a malha (Zienkiewicz & Craig, 1986).

#### SEQÜÊNCIA DE DISTRIBUIÇÕES $p$ QUASE-UNIFORMES (Babuska & Szabó, 1982).

Os parâmetros de malha  $p_{\max}$  e  $p_{\min}$  são definidos respectivamente por

$$p_{\max} = \max\{ p_1, p_2, \dots, p_E \} \quad (2.7)$$

$$p_{\min} = \min\{ p_1, p_2, \dots, p_E \} \quad (2.8)$$

onde  $E$  é o número de elementos finitos da malha e  $p_i$  é a ordem polinomial do  $i$ -ésimo elemento. Se  $p_{\max} = p_{\min}$  a distribuição é dita ser  $p$ -uniforme.

Uma seqüência de distribuições  $P$  é dita ser quase-uniforme se existe um número fixo  $k < \infty$ , tal que, para qualquer distribuição  $p$  pertencente a seqüência, tem-se

$$\frac{p_{\max}}{p_{\min}} \leq k \quad (2.9)$$

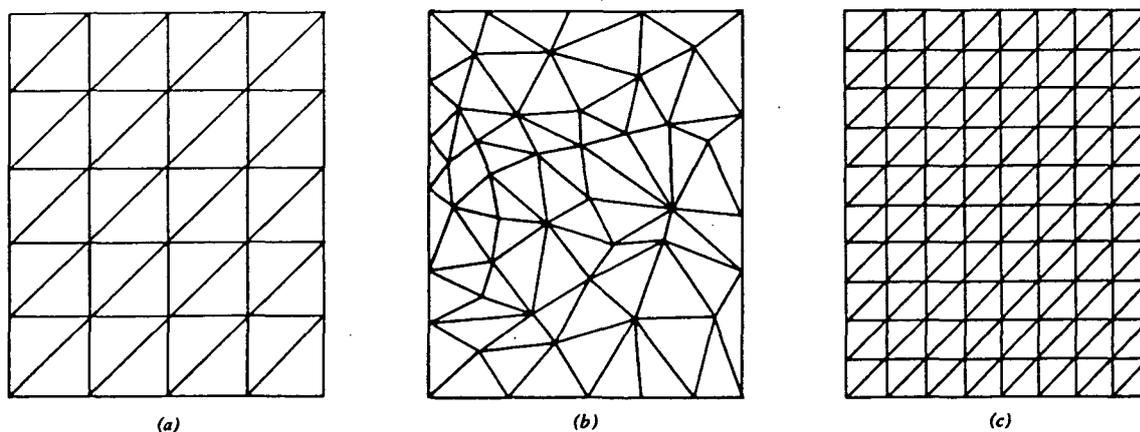


Fig. 2.2. (a) Malha  $h$ -uniforme. (b) Malha quase-uniforme.

(c) Malha  $h$ -uniforme (refinamento  $h$ -uniforme da malha (a) ) (Oden & Reddy, 1976).

#### ANINHAMENTO DE MALHAS (Demkowicz & Oden, 1988).

Uma nova malha resultante de um refinamento local ou global é dita estar *aninhada* ("nested") na malha antiga, se ela contém todos os nós pertencentes à malha

antiga. Matematicamente isto significa que os refinamentos consecutivos produzem uma seqüência crescente de espaços de elementos finitos

$$X_h^1 \subset X_h^2 \subset \dots \subset X_h^k \subset X_h^{k+1} \subset \dots \quad (2.10)$$

No caso de problemas elípticos autoadjuntos este aninhamento irá garantir (com a integração exata da rigidez e das cargas) um comportamento monotônico do funcional da energia potencial.

Esta propriedade é especialmente importante, pois permite o uso de Métodos Multinível para a solução dos sistemas de equações resultantes. Estes métodos iterativos utilizam uma seqüência aninhada de discretizações de uma região (Rivara, 1984).

#### REFINAMENTO $h$ , LOCAL E GLOBAL.

Uma malha pode ser refinada globalmente subdividindo-se simultaneamente cada um dos elementos da malha, em elementos menores. Se apenas alguns elementos são subdivididos o refinamento é dito ser *local*. Neste caso, geralmente, surgem nós irregulares. Em Demkowicz & Oden, (1988) podem ser encontrados alguns algoritmos para refinamento  $h$  local e suas correspondentes estruturas de dados.

#### MALHAS REGULARES E IRREGULARES.

Como resultado de um refinamento  $h$  local, podem surgir nós *irregulares*. Um nó é dito ser *regular* (Denkowitz et al., 1989) se ele é um vértice de cada um dos elementos vizinhos, de outro modo, ele é dito ser *irregular*. Se todos os nós em uma malha são regulares, então a malha é dita ser *regular*. Em malhas bidimensionais o número máximo de nós irregulares em um lado de um elemento é chamado de *índice de irregularidade*. Malhas com um índice de irregularidade igual a um são chamadas de *1-irregular*. Na Figura 2.3 são mostrados exemplos de malhas regulares e irregulares.

#### REFINAMENTO $h$ LOCAL REGULAR E IRREGULAR.

Se após completados os passos de um dado algoritmo de refinamento local não existirem nós irregulares, o método de refinamento é dito ser *regular* (Demkowicz & Oden, 1988). Neste caso, quando um elemento é subdividido, para eliminar-se os nós irregulares porventura criados, os seus vizinhos também devem ser refinados. A questão crucial no algoritmo é que os novos elementos não sejam distorcidos e que o re-

finamento permaneça local, ou seja, não se propague por todo o domínio. Se após o refinamento existirem nós irregulares, o método de refinamento é dito ser *irregular*, sendo que o índice de irregularidade permitido varia de método para método.

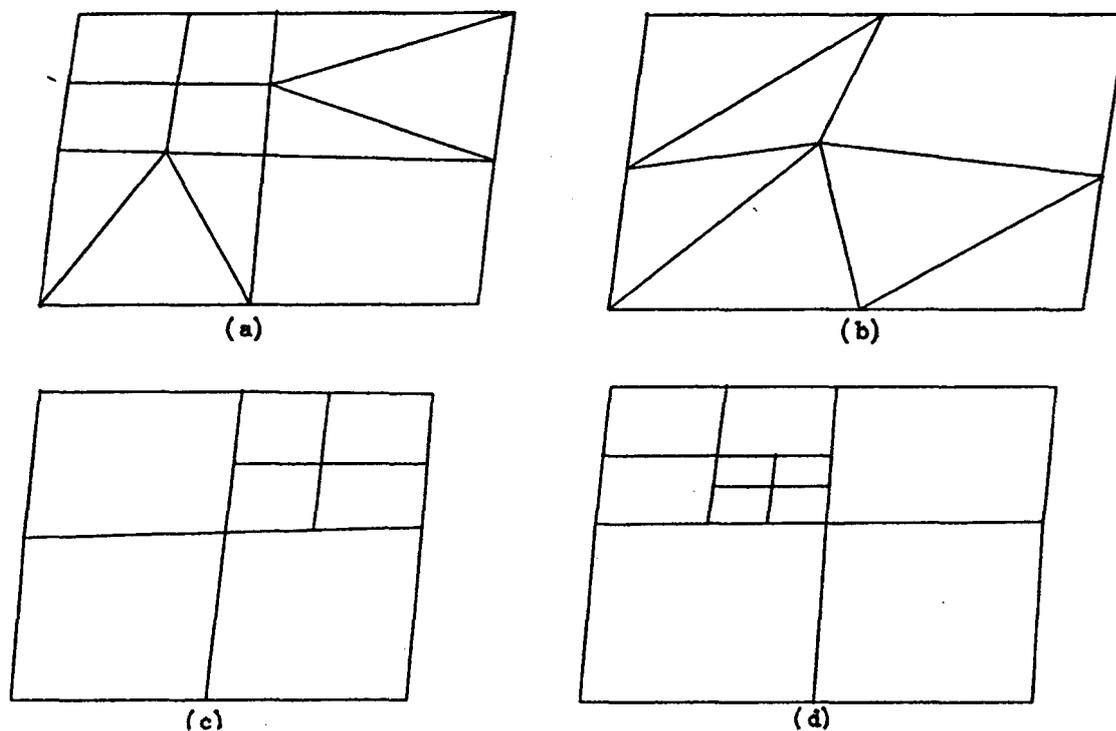


Fig. 2.3. Exemplos de malhas regulares e irregulares: (a) e (b) malhas regulares; (c) malha 1-irregular; (d) malha 2-irregular.

#### MALHA ÓTIMA.

Define-se malha ótima como sendo aquela que fornece o menor erro (erro ótimo), medido em uma determinada norma, para um dado número de graus de liberdade (Gago et al., 1983). Note que a malha ótima é dependente do tipo de elemento usado na discretização.

Pode-se provar, no caso de problemas unidimensionais, que o valor do erro ótimo é estável em relação a perturbações na malha (Babuska & Rheinboldt, 1979a). Portanto não é necessário se construir a malha ótima para se obter aproximadamente o erro ótimo.

Babuska & Rheinboldt, (1979a) demonstraram também que o erro, medido na norma da energia, é constante em todos os elementos da malha ótima (veja também Gago et al., 1983). Apesar desta demonstração ter sido feita no contexto de problemas unidi-

mensionais, a equidistribuição de erro entre os elementos da malha também é usada como idéia básica nos algoritmos adaptativos para problemas em duas e em três dimensões (Babuska & Rheinboldt, 1979b). O algoritmo apresentado no Capítulo 6 baseia-se nesta idéia.

#### "REMESHING" ADAPTATIVO DE ZIENKIEWICZ.

Segundo Zienkiewicz et al., (1989a) o processo de sucessivos refinamentos  $h$  locais, até que uma prescrita precisão seja obtida, não é eficiente. Como uma alternativa para este processo, Zienkiewicz & Zhu, (1987) propoem uma maneira de se obter uma malha quase ótima, na qual os erros nos elementos sejam quase iguais e o erro total seja menor que o limite permitido.

Isto pode ser feito (Zienkiewicz & Zhu, 1987; Zienkiewicz et al., 1989a; Zienkiewicz et al., 1989b) através da estimativa do tamanho dos elementos - de modo a equidistribuir o erro na malha - utilizando indicadores de erro  $\|e\|_i$  (veja a Seção 2.4):

Suponha-se que o erro relativo global permitido seja

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} \quad (2.11)$$

onde  $\|\cdot\|$  é uma norma apropriada.

Considerando-se que o erro nos elementos sejam iguais, o erro admissível em cada elemento é obtido da seguinte maneira:

Definindo-se

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^E \|e\|_i^2, \quad (2.12)$$

onde  $\|e\|_i$  é a norma da energia do erro no  $i$ -ésimo elemento e  $E$  é o número de elementos da malha, tem-se

$$\|e\|^2 \doteq E e_m^2 = \eta^2 \|u\|^2 \quad (2.13)$$

logo, o erro admissível em cada elemento é dado por:

$$e_m = \frac{\eta \|u\|}{E^{1/2}} \doteq \frac{\eta \|\hat{u}\|}{E^{1/2}} \quad (2.14)$$

onde  $\hat{u}$  é uma solução aproximada.

Sabendo-se que, sob certas condições (Zienkiewicz et al., 1989a)

$$\|e\| \leq C h^{\min(p,\lambda)}, \quad (2.15)$$

onde  $C$  não depende de  $h$ ,  $p$  é o grau polinomial das funções base utilizadas e  $\lambda$  é uma constante que depende da suavidade da solução, tem-se, aproximadamente, que

$$C \doteq \frac{\|e\|_1}{h_1^k} \doteq e_m / \bar{h}_1^k \quad \therefore \bar{h}_1 = \frac{h_1}{(\xi_1)^{1/k}} \quad (2.16)$$

onde  $\xi_1 = \frac{\|e\|_1}{e_m}$  e  $k = \lambda$  para elementos próximos à singularidades e  $k = p$  caso contrário.

A malha quase ótima pode ser construída utilizando-se os parâmetros  $\bar{h}_1$ , calculados em (2.16), para construir funções densidade de malha usadas por geradores automáticos. Um gerador que utiliza este tipo de função é apresentado em Peraire et al., (1987) e em Lo, (1985). Geradores deste tipo geralmente utilizam elementos triangulares. Um exemplo deste procedimento é apresentado na Figura 2.4.

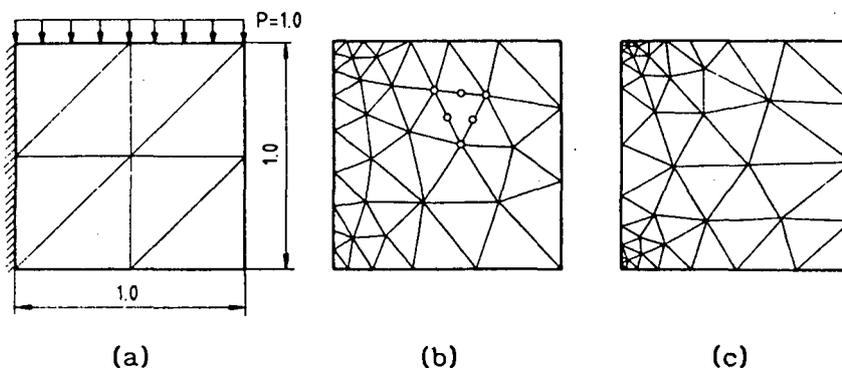


Fig. 2.4. Remeshing adaptativo de Zienkiewicz. (a) Malha inicial e carregamento imposto. (b) Remeshing adaptativo da malha (a). (c) Remeshing adaptativo da malha (b).

Note-se que como as malhas obtidas por este processo não estão aninhadas, não é

possível empregar Métodos Multinível para a solução dos sistemas de equações. Uma grande vantagem desta estratégia é que ela pode ser facilmente introduzida nos programas comerciais de elementos finitos já existentes.

## 2.3 Principais Tipos de Erros na Solução Obtida pelo Método de Elementos Finitos.

### 2.3.1 Introdução.

A aplicação do Método de Elementos Finitos (MEF) para a solução de um dado problema pode ser subdividida em quatro etapas (Gago, 1985)

- Etapa 1 - Escolha do modelo matemático.
- Etapa 2 - Escolha da discretização do domínio.
- Etapa 3 - Solução numérica do sistema de equações resultante.
- Etapa 4 - Análise e interpretação dos resultados.

Deve-se notar que cada uma destas etapas implica em aproximações cujos efeitos podem ser adicionados ou cancelados. Em geral o usuário do método desconhece a magnitude dos diferentes erros.

Além do possível erro na escolha do modelo matemático apropriado, outras fontes de erro são o uso de um número finito de graus de liberdade, uso de um conjunto finito de números reais representáveis por um computador e, em alguns problemas (propagação de ondas por exemplo), a aplicação do MEF não ao modelo matemático, mas a uma aproximação deste. Nas próximas seções são discutidos brevemente estas diversas fontes de erros com o intuito de identificar exatamente o tipo de erro que se estará estudando neste trabalho.

### 2.3.2 Erros na Modelagem Matemática.

O modelo matemático no qual uma dada análise se baseia é uma abstração do sistema físico real. Durante esta abstração, por conveniência, são realizadas várias simplificações com relação a geometria do domínio, parâmetros do sistema e a estrutura funcional da solução (Utku & Melosh, 1984).

O erro na modelagem matemática é definido como sendo a diferença entre a solução exata  $u(x)$  (resposta do modelo matemático) e os valores medidos no sistema físico nos pontos correspondentes (Utku & Melosh, 1984).

A mecânica Newtoniana, a teoria de vigas e a teoria de placas finas são exemplos de modelos matemáticos de sistemas físicos reais. Os erros na modelagem matemática serão pequenos se as hipóteses contidas no modelo forem razoáveis para o sistema real representado pelo mesmo. Por exemplo, para se usar a teoria de vigas de Euler-Bernoulli a relação entre a altura e o comprimento da viga deve ser suficientemente pequena.

Segundo Babuska, (1989) num dos artigos precursores sobre modelagem matemática adaptativa, com a tecnologia atual dos computadores e estado da arte da Mecânica Computacional, o erro na formulação matemática torna-se cada vez mais a fonte primária de incertezas dos resultados numéricos.

### 2.3.3 Erros de Arredondamento.

Estes erros são causados pela limitação dos computadores digitais na representação de números reais. Devido a limitação do comprimento das palavras utilizadas pelos computadores, apenas um subconjunto finito dos números reais podem ser representados nestas máquinas. Nenhum número irracional e apenas alguns números racionais podem ser representados.

Segundo Utku & Melosh, (1984) a magnitude do erro de arredondamento ao se executar o produto  $a^T b$  de dois vetores  $a$  e  $b$ , de ordem  $n$ , em uma máquina com uma mantissa de  $l$  bits, é dada por

$$|e| \leq n \|a\| \|b\| 2^{-l} \quad (2.17)$$

onde  $\|\cdot\|$  é uma norma apropriada.

Portanto, para se minimizar os erros de arredondamento, deve-se usar palavras com mantissas de grande comprimento, variáveis de pequena magnitude (norma pequena) e dimensões dos arranjos menores ( $n$ ). Porém isto nem sempre é possível.

Uma outra consequência de se utilizar máquinas com precisão finita é que sempre existe um limite para o refinamento da malha, além do qual os valores calculados estarão totalmente errados, sem relação alguma com o modelo.

### 2.3.4 Erros de Discretização e Erros da Solução.

O erro de discretização,  $e$ , representa a diferença entre a solução exata,  $u(\mathbf{x})$ , do modelo matemático e a solução aproximada,  $u_p(\mathbf{x})$ , obtida utilizando-se, por exemplo, o Método de Elementos Finitos (Babuska & Noor, 1986). Este erro é uma decorrência do particionamento do domínio e da escolha das funções de interpolação. Note que  $u_p(\mathbf{x})$  é diferente dos valores fornecidos pelo computador.

$$e = u - u_p \quad (2.18)$$

Estes erros são causados pelo uso de um número finito de graus de liberdade, no sistema discretizado, para representar os infinitos graus de liberdade do modelo matemático (Utku & Melosh, 1984).

Mesmo quando a solução exata não é conhecida é possível estimar quantitativamente o erro de discretização e determinar a taxa de mudança do erro a medida que o número de graus de liberdade do modelo discretizado é aumentado (Babuska & Noor, 1986).

Existem dois tipos de estimativas do erro de discretização: estimativa *a priori* e estimativa *a posteriori*.

A estimativa *a priori* é baseada (Babuska & Noor, 1986) no conhecimento de características da solução, como o seu grau de suavidade, e fornece uma informação qualitativa sobre a taxa de convergência assintótica.

Na estimativa *a posteriori* (Babuska & Noor, 1986) utiliza-se informações obtidas durante o processo de solução, além de algumas hipóteses feitas *a priori* sobre a solução. Diferentemente da análise *a priori*, as estimativas feitas *a posteriori* podem fornecer medidas precisas do erro de discretização. Na Seção 2.4 são apresentadas as principais técnicas utilizadas para este tipo de análise.

Um tipo de erro que muitas vezes é confundido com o erro de discretização é o *erro da solução*, definido por (Utku & Melosh, 1984)

$$e_s = u - u_c \quad (2.19)$$

onde  $u_c$  são os valores fornecidos pelo computador.

Na realidade este erro inclui, além do erro de discretização, erros de arredondamento, erros devido a subintegração das matrizes, erros causados pela representação polinomial do carregamento, erros na representação da geometria do domínio, etc. Porém é comum comparar-se o erro de discretização, estimado por algum método, com o erro da solução.

## 2.4 Classificação das Técnicas de Estimativa *a posteriori* do Erro de Discretização.

### 2.4.1 Introdução.

Atualmente uma questão crucial em Mecânica Computacional é a capacidade de se melhorar automaticamente a qualidade de uma solução numérica. Uma solução aproximada, obtida pelo Método de Elementos Finitos, pode ser melhorada, por exemplo; realocando-se os nós, aumentando-se localmente a ordem da aproximação, refinando-se a malha, etc. Implícito em cada um desses métodos, ditos adaptativos, está a capacidade de se avaliar localmente, de alguma maneira, a qualidade da aproximação. Esta qualidade é medida pelo erro de discretização em uma norma apropriada. Portanto, uma parte fundamental de um método adaptativo é a estimativa *a posteriori* do erro, local e global, da aproximação. Nas próximas seções são apresentadas sucintamente as principais técnicas utilizadas para a estimativa *a posteriori* do erro de discretização em problema elípticos lineares. Estes métodos, geralmente, estimam a norma da energia do erro de discretização, definida por (Babuska & Suri, 1990)

$$\|e\|_E = B(e,e)^{1/2} \quad (2.20)$$

onde  $B(.,.)$  é a forma bilinear associada ao problema em questão (vide Capítulo 3) e  $e = u - u_p$ . Esta medida está relacionada com a raiz média quadrática (RMS) do erro nas tensões em todo o domínio (Szabó, 1990a,b) e é equivalente à norma de  $H^1(\Omega)$  (Babuska & Szabó, 1982)

O termo *indicador de erro* é usado para denotar uma estimativa, geralmente grosseira, do erro em um determinado elemento da malha. Os indicadores de erro fornecem informações para o controle adaptativo do erro. O termo *estimador de erro* é usado para denotar estimativas do erro global.

## 2.4.2 Técnicas Baseadas na Estimativa do Resíduo.

### 2.4.2.1 Método dos Resíduos em Elementos.

Neste método (Oden et al., 1989) o resíduo da solução numérica (uma função que mede o quanto a solução aproximada,  $u_p$ , falha na satisfação das equações diferenciais que governam o problema e o quanto  $u_p$  falha na satisfação das condições de contorno) é calculado em cada elemento e usado como dado para um problema de Neumann definido localmente em cada elemento. Tal abordagem fornece uma aproximação local,  $\eta$ , da função erro,  $e$ , em cada elemento e não uma estimativa de  $\|e\|_E$  diretamente.

Apesar desta abordagem ser aparentemente simples, deve-se (Bank & Weiser, 1985) tomar alguns cuidados a fim de se garantir que os problemas de Neumann estejam bem postos, isto é (Oden & Reddy, 1976), que exista uma solução unívoca que dependa continuamente dos dados.

O Método dos Resíduos em Elementos (MRE) tem sido utilizado para a estimativa de erro não só no contexto de problemas elípticos lineares, mas também em problemas não lineares, parabólicos, etc. (veja por exemplo Oden et al., 1986). No Capítulo 5 este método é tratado detalhadamente.

### 2.4.2.2 Indicador de Erro de Babuska-Rheinboldt.

O estágio em que atualmente se encontra a análise de erro em Mecânica Computacional é devido em boa parte aos trabalhos de Babuska e seus colaboradores. Dentre estes trabalhos está a formulação de um indicador de erro para problemas elípticos lineares baseado no cálculo da norma do resíduo local da equação diferencial e do salto do fluxo normal no contorno inter-elementos (veja por exemplo Babuska & Rheinboldt, 1979b).

O indicador pode ser expresso da seguinte forma para um elemento genérico  $K$  (Zienkiewicz & Zhu, 1987)

$$\|e\|_E^2 \doteq C_1(K)h_K^2 \int_{\Omega_K} r^2 d\Omega + C_2(K)h_K \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} [\phi, n]_j^2 ds \quad (2.21)$$

onde: •  $\|e\|_E$  é a norma da energia do erro.

•  $r$  é o resíduo da equação diferencial que rege o problema.

- $[\phi, n]_J$  é o salto do fluxo normal no contorno inter-elementos.
- $\partial K \setminus \partial \Omega$  é o contorno inter-elementos.

As principais virtudes deste indicador de erro (Bank, 1986) são o seu baixo custo, a sua implementação é mais simples do que, por exemplo, o da seção anterior, e de funcionar bem como um guia para refinamentos locais de malha. A sua principal desvantagem segundo Bank, (1986) é a dependência das constantes  $C_1$  e  $C_2$  que são difíceis de serem calculadas, na prática, com precisão.

### 2.4.3 Método Dual.

Este método segundo Oden et al., (1989) é válido para problemas elípticos auto-adjuntos. Calculam-se duas soluções para o problema utilizando a formulação direta e a complementar, baseadas, no caso da elasticidade, no Princípio da Energia Potencial Mínima e Energia Complementar Mínima, respectivamente. Obtém-se, então, um limite superior para o erro *global*, medido na norma da energia. O procedimento é custoso mas (Babuska & Noor, 1986) garante-se um limite superior para o erro *global*.

Definindo-se:

- $J(v)$  o funcional da energia potencial total;
- $J^*(s)$  o funcional da energia complementar;
- $u$  e  $u^*$  as soluções exatas do problema primal e dual respectivamente;
- $u_p$  e  $u_p^*$  as soluções aproximadas por elementos finitos do problema primal e dual respectivamente;
- $\|\cdot\|_E$  e  $\|\cdot\|_{E^*}$  as normas da energia para o problema primal e dual respectivamente;

pode-se provar facilmente (veja Oden et al., 1989:137) que:

$$\|u - u_p\|_E^2 = 2J(u_p) - 2J(u) = 2J(u_p) - 2J^*(u^*) \leq 2J(u_p) - 2J^*(u_p^*) \quad (2.22)$$

$$\|u^* - u_p^*\|_{E^*}^2 = 2J^*(u^*) - 2J^*(u_p^*) = 2J(u) - 2J^*(u_p^*) \leq 2J(u_p) - 2J^*(u_p^*)$$

Portanto os erros, tanto no problema primal como no dual, são limitados, nas suas respectivas normas da energia, pela diferença das energias das soluções aproximadas primal e dual.

#### 2.4.4 Técnica Baseada na Estimativa do Erro de Interpolação.

Este método de estimativa de erro foi apresentado por Diaz et al., (1983) e usa a teoria de interpolação de elementos finitos em espaços de Sobolev para conseguir estimativas (muitas vezes grosseiras) do erro local em cada elemento. O método, resumidamente, baseia-se nas seguintes premissas:

Supondo que a solução exata  $u$  seja suficientemente suave, ela pode ser interpolada usando-se funções do espaço de elementos finitos,  $X_p$ , associado ao problema. Seja  $u_I$  tal função, então, para cada nó  $b_j$ ,  $u_I$  satisfaz

$$u_I(b_j) = u(b_j) \quad j = 1, \dots, \text{número de nós} \quad (2.23)$$

A função  $u_I$  é introduzida porque, para problemas bem postos, o erro associado a interpolação de  $u$  por  $u_I$  limita o erro da aproximação de  $u$  por  $u_p$  (Diaz et al., 1983), ou seja,

$$\|u - u_p\|_E \leq \|u - u_I\|_E \quad (2.24)$$

onde:

- $\|\cdot\|_E$  é a norma da energia.
- $u_p$  é uma solução aproximada obtida pelo MEF.

O próximo teorema fornece uma estimativa do erro de interpolação (Diaz et al., 1983 ou Ciarlet, 1978)

#### *Teorema 2.1 : Teorema da Interpolação para Elementos Finitos.*

Seja  $X_p$  um espaço de elementos finitos de ordem  $k \geq 1$ , e seja  $u \in H^{k+1}(\Omega)$ , o espaço de Sobolev de ordem  $k+1$ . Defina  $h_e$  como sendo o diâmetro do elemento  $\Omega_e$ . Então, existe uma constante positiva  $C$ , independente de  $\Omega_e$ , tal que, para todos os elementos finitos

$$\|u - u_I\|_{H^m(\Omega_e)} \leq Ch_e^{k+1-m} |u|_{H^{k+1}(\Omega_e)} \quad 0 \leq m \leq k \quad (2.25)$$

onde  $|\cdot|_{H^r(\Omega_e)}$ ,  $r = k+1$ , é a seminorma do espaço de Sobolev de ordem  $k+1$  dada por (em duas dimensões)

$$|u|_{H^r(\Omega_e)} = \left\{ \int_{\Omega_e} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = r} \left[ \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right]^2 dx_1 dx_2 \right\}^{1/2} \quad (2.26)$$

$\|\cdot\|_{H^m(\Omega_e)}$  é a norma do espaço de Sobolev de ordem  $m$  definida por

$$\|u\|_{H^m(\Omega_e)} = \left\{ \int_{\Omega_e} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \leq m} \left[ \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right]^2 dx_1 dx_2 \right\}^{1/2} \quad (2.27)$$

O problema básico do método (Oden et al., 1986) é a necessidade de se calcular (estimar) derivadas de ordem elevada, da solução exata, através da única informação acessível, ou seja, a solução aproximada por elementos finitos. Existem muitas técnicas para a estimativa das derivadas necessárias, porém, geralmente baseadas em argumentos heurísticos. Uma exceção é a técnica que utiliza as chamadas fórmulas de extração de Babuska & Miller, (1984a,b) que no entanto só existem para determinadas classes de problemas.

#### 2.4.5 Técnica Baseada no Pós-Processamento da solução.

Qualquer medida particular do erro de discretização  $e = u - u_p$  é uma função da solução de elementos finitos conhecida,  $u_p$ , da solução exata,  $u$ , e possivelmente de suas derivadas. Provavelmente a abordagem mais direta para a estimativa de erro *a posteriori* é substituir a solução exata  $u$  e suas derivadas por valores pós-processados. Estes valores podem ser obtidos através de fórmulas de extração, métodos de projeção, médias nodais, etc.

Um indicador de erro para o elemento  $K$ , baseado na norma da energia, apresentado por Zienkiewicz & Zhu, (1987) é, no caso da elasticidade, dado por

$$\|e\|_E = \left\{ \int_K (e_\sigma)^T D(e_\sigma) d\Omega_e \right\}^{1/2} \quad (2.28)$$

onde  $D$  é a matriz das constantes elásticas e  $e_\sigma = \{\sigma\} - \{\sigma_p\}$  é aproximado por

$$e_\sigma \doteq \{\sigma^*\} - \{\sigma_p\} \quad (2.29)$$

onde  $\{\sigma^*\}$  é um campo de tensões contínuo, calculado, por exemplo, pelo processo de projeção (vide Shephard et al., 1989 ou Capítulo 5).

A principal desvantagem deste método segundo Oden et al., (1989) é o custo. Porém, outros autores argumentam que a maioria dos programas comerciais de elementos finitos já calculam os valores de tensão suavizados.

#### 2.4.6 Estimativa de Erro *a posteriori* Utilizando uma Análise Assintótica.

Uma abordagem clássica para a estimativa do erro de discretização baseia-se na utilização de várias soluções obtidas através de uma seqüência de malhas com refinamento  $h$  uniforme crescente (extensão  $h$ ) ou com aumento uniforme do grau polinomial de todos os elementos (extensão  $p$ ).

Esta abordagem é mais conveniente para a extensão  $p$  na qual se utilizam funções de interpolação hierárquicas. Neste caso as soluções correspondentes a  $p = 1, 2, \dots, p_{\max}$  podem ser obtidas de uma maneira econômica (Szabó, 1986a).

O procedimento baseia-se na utilização de uma estimativa *a priori* para o erro, em uma seqüência de malhas com enriquecimento  $p$  uniforme (Dunavant & Szabó, 1983).

Da teoria matemática para a versão  $p$  do Método de Elementos Finitos (Babuska et al., 1981) tem-se

$$\|u - u_p\|_E^2 \leq Cp^{-2\beta} \|u\|_{H^k(\Omega)}^2 \quad (2.30)$$

onde: •  $\|\cdot\|_E$  é a norma da energia (vide Equação 2.20) dada por

$$\|u\|_E^2 = B(u, u) = 2 U(u) \quad (2.31)$$

onde  $U(u)$  é a energia de deformação.

- $u$  é a solução exata do problema.
- $u_p$  é a solução obtida pelo MEF utilizando-se uma distribuição  $p$  uniforme.
- $C$  é uma constante que depende do domínio, do carregamento, da malha e de  $\beta$ .
- $\beta$  é uma constante positiva chamada taxa de convergência assintótica (Szabó, 1986a) dada por  $\beta = k - 1$ , onde  $k$  é a ordem do espaço de Sobolev ao qual  $u$  pertence.

Note que na Equação (2.30) se utilizou a propriedade de equivalência entre a norma da energia e a norma  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  (Babuska & Szabó, 1982).

Utilizando-se a definição da norma da energia tem-se

$$U(u) - U(u_p) \leq C_1 p^{-2\beta} \quad (2.32)$$

$$U(u) - U(u_{p-1}) \leq C_2 (p-1)^{-2\beta}$$

Para  $p$  suficientemente grande, tal que o sinal de menor ou igual nas Equações (2.32) possa ser trocado por uma igualdade, diz-se que a solução aproximada está na faixa assintótica. Para  $p \geq 4$  a extensão  $p$  está na faixa assintótica para a maioria dos problemas práticos (Dunavant & Szabó, 1983). Supondo-se  $\beta$  conhecida e que  $C_1=C_2$ ,  $U(u)$  pode ser determinada por

$$U(u) = \frac{U(u_{p-1})p^{-2\beta} - U(u_p)(p-1)^{-2\beta}}{p^{-2\beta} - (p-1)^{-2\beta}} \quad (2.33)$$

Um polinômio de grau  $p$  possui  $N$  graus de liberdade, onde  $N \cong p^2$  (Babuska et al., 1981), portanto, a equação anterior pode ser reescrita na forma

$$U(u) = \frac{U(u_{p-1})N_p^{-\beta} - U(u_p)N_{p-1}^{-\beta}}{N_p^{-\beta} - N_{p-1}^{-\beta}} \quad (2.34)$$

Caso não se conheça  $\beta$  são necessárias 3 soluções aproximadas para se poder estimar  $U(u)$ . A partir das Equações (2.32) tem-se

$$\log[ (U(u) - U(u_{p-1})) / (U(u) - U(u_p)) ] = 2\beta \log[ p / (p-1) ] \quad (2.35a)$$

Similarmente

$$\log[ (U(u) - U(u_{p-2})) / (U(u) - U(u_{p-1})) ] = 2\beta \log[ (p-1) / (p-2) ] \quad (2.35b)$$

Portanto

$$\frac{\log[ (U(u) - U(u_{p-1})) / (U(u) - U(u_p)) ]}{\log[ (U(u) - U(u_{p-2})) / (U(u) - U(u_{p-1})) ]} = \frac{\log[ p / (p-1) ]}{\log[ (p-1) / (p-2) ]} = Q \quad (2.36)$$

Finalmente tem-se

$$\frac{U(u) - U(u_{p-1})}{U(u) - U(u_p)} = \left( \frac{U(u) - U(u_{p-2})}{U(u) - U(u_{p-1})} \right)^Q \quad (2.37)$$

Sabendo-se que  $p \cong N^{1/2}$ ,  $Q$  também pode ser escrita como

$$Q = \frac{\log(N_p/N_{p-1})}{\log(N_{p-1}/N_{p-2})} \quad (2.38)$$

Para se obter uma estimativa da energia de deformação  $U(u)$  a Equação (2.37) deve ser resolvida. No Capítulo 7 são feitas algumas estimativas de erro utilizando este procedimento. As raízes da Equação (2.37) foram calculadas utilizando-se a sub-rotina NBOIA/AD da biblioteca matemática Harwell.

Este procedimento é preciso, porém só fornece uma estimativa do erro global. Não se pode, por exemplo, usá-lo para guiar o enriquecimento  $p$  adaptativo de uma malha, já que o método não fornece estimativas do erro local.

#### 2.4.7 Técnica Baseada no Uso de Indicadores de Correção.

Um programa auto-adaptativo procura criar uma seqüência de malhas que produza uma elevada taxa de convergência, até que um nível aceitável de erro seja alcançado. Porém este procedimento, quando baseado exclusivamente em *indicadores de erro*, pode não ser o mais eficiente. O problema principal segundo Zienkiewicz & Craig, (1986) é que mesmo que o erro seja grande, ele pode ser ortogonal ou aproximadamente ortogonal à mudança na malha proposta. Ou seja, o refino  $h$  (ou enriquecimento  $p$ ) de uma malha poderá não proporcionar nenhuma melhora significativa nos resultados.

Pode-se tentar contornar este problema com o uso de *indicadores de correção*, que medem o decréscimo do erro na solução ao se adicionar um novo grau de liberdade específico (Zienkiewicz & Craig, 1986).

Um indicador de correção proposto por Kelly et al., (1983) é da forma

$$\eta_{n,1}^2 = \frac{1}{K_{n+1,n+1}} \left( \int_{\Omega} r \psi_{n+1} d\Omega \right)^2 \quad (2.39)$$

onde:

- $r$  é o resíduo da equação diferencial.

- $\psi_{n+1}$  é a função de interpolação hierárquica associada ao novo grau de liberdade  $n+1$ .
- $K_{n+1,n+1}$  é o termo da diagonal da matriz de rigidez associado à função  $\psi_{n+1}$ .

O indicador  $\eta_{n,1}$  diz aproximadamente quanto da energia do erro vai ser absorvida pela adição da correspondente função hierárquica à base do espaço de elementos finitos.

Em princípio somando-se os indicadores de correção, relativos a todos os novos graus de liberdade possíveis de serem adicionados ao atual nível de refinamento, obtem-se uma estimativa da energia total do erro (Ribeiro, 1986:41). No entanto isto é viável, segundo Zienkiewicz & Craig, (1986), apenas para os primeiros próximos níveis de refinamento, além dos quais os custos crescem fora de proporção.

## 2.5 Procedimentos Adaptativos para o Método de Elementos Finitos.

Diz-se que uma solução obtida pelo Método de Elementos Finitos está sendo enriquecida adaptativamente se a solução aproximada for melhorada de tal forma a se obter a melhor solução para um dado esforço computacional.

Os procedimentos adaptativos possuem em comum com os "retro-alimentados" o fato de que a informação processada é usada para guiar o próximo passo do procedimento. Porém um procedimento retro-alimentado só é dito ser adaptativo se ele utiliza, de alguma forma ótima, a informação fornecida pelo passo anterior (Babuska & Noor, 1986).

Nas seções seguintes são apresentados resumidamente as principais estratégias adaptativas utilizadas para melhorar uma solução aproximada obtida pelo Método de Elementos Finitos.

### 2.5.1 Versão *h*.

Nesta estratégia a ordem das funções de interpolação em todos os elementos é mantida constante. As informações da solução obtida são usadas para aumentar o número de elementos de modo que o parâmetro de malha  $h$  tenda a zero nas regiões onde o erro da solução neste passo for elevado. Em problemas transientes um desrefinamento em algumas regiões da malha também é utilizado.

### 2.5.2 Versão *p*.

Este procedimento baseia-se num aumento sucessivo da ordem polinomial das funções de interpolação em cada elemento.

A versão *p* é particularmente atraente quando são utilizadas funções de interpolação hierárquicas, pois, neste caso, a matriz de rigidez e os vetores carregamento correspondentes a um grau polinomial  $p$  estarão embutidos nas matrizes e vetores cor-

respondentes aos graus polinomiais maiores ou igual a  $p + 1$  (vide Capítulo 4).

Uma outra vantagem da versão  $p$  é que o número de pontos de integração, por grau de liberdade, nos elementos de ordem elevada é menor do que nos elementos de baixa ordem. A principal desvantagem da versão  $p$  é que, em problemas cuja solução não é suave, a aproximação obtida pelo MEF pode oscilar nas regiões onde a solução é singular.

### 2.5.3 Versão $r$ .

Na versão  $r$  a qualidade da solução de elementos finitos é melhorada através de uma otimização da localização dos nós. Mantém-se constante o número de graus de liberdade e a ordem das funções de interpolação em cada elemento.

Os resultados possíveis de serem obtidos utilizando-se esta estratégia dependem diretamente do número de graus de liberdade utilizados na discretização inicial. Além disto, problemas com a distorção excessiva dos elementos e instabilidade da malha ótima, também existem (Babuska & Rheinboldt, 1979). Babuska, (1986) demonstrou que se a posição ótima dos pontos nodais não forem obtidas em no máximo duas iterações, é mais eficiente aumentar-se o número de graus de liberdade do que continuar buscando as posições ótimas.

Este procedimento é bastante utilizado em conjunção com a técnica de estimativa de erro baseada no erro de interpolação (Seção 2.4.4).

### 2.5.4 Versões Combinadas - Versão $h-p$ .

Neste caso tem-se uma combinação das estratégias anteriores, sendo a mais comum a baseada na seleção simultânea da malha e da ordem local da aproximação, ou seja, a versão  $h-p$ . Para uma grande classe de problemas da engenharia, a versão  $h-p$  possui uma taxa de convergência exponencial com relação ao número de graus de liberdade, enquanto que as versões  $h$  ou  $p$  possuem apenas uma taxa de convergência polinomial (Babuska & Noor, 1986).

A principal dificuldade na versão  $h-p$  é decidir quando se deve refinar a malha e quando se deve aumentar a ordem das funções. Além disto as estruturas de dados necessárias para suportar versões combinadas são bastante complexas.

## CAPÍTULO 3

### DISCRETIZAÇÃO DOS PROBLEMAS

#### 3.1 Formulação Variacional dos Problemas.

Neste trabalho serão abordados dois problemas: O problema de Poisson no plano e o problema da elasticidade linear estática com ênfase à problemas singulares e problemas com axissimetria. No primeiro a solução é uma função escalar e no outro vetorial.

Será suposto que os problemas podem ser formulados na seguinte forma abstrata:

Encontre  $u \in X$ , tal que

$$B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in X \quad (3.1)$$

sendo

$$X = X \times X \times \dots \times X \text{ (m vezes)} \quad (3.2)$$

onde:

(i)  $X$  é um subespaço de  $H^1(\Omega)$ , o espaço de Sobolev de primeira ordem.  $\Omega$  denota um domínio aberto, limitado, no espaço  $\mathbb{R}^n$ , com contorno suficientemente regular  $\partial\Omega$ , ou seja, admite a existência do vetor normal em quase todos os pontos (exceto possivelmente em um conjunto de medida nula).

(ii)  $B(.,.)$  é uma forma bilinear sobre  $X \times X$  da seguinte forma

$$B(u, v) = \sum_{i, j=1}^m B_{ij}(u_i, v_j) \quad (3.3)$$

onde  $B_{ij}(.,.)$  são formas bilineares de argumentos escalares do tipo

$$B_{IJ}(u,v) = \int_{\Omega} \left( a_{IJ}^{kl} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_l} + b_{IJ}^k \frac{\partial u}{\partial x_k} v + c_{IJ} uv \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} d_{IJ} uv ds \quad k,l = 1,n \quad (3.4)$$

(iii)  $L(\cdot)$  é uma forma linear sobre  $X$  da seguinte forma

$$L(v) = \sum_{j=1}^m L_j(v_j) \quad (3.5)$$

Com as formas lineares  $L_j(\cdot)$  atuando em funções escalares

$$L_j(v) = \int_{\Omega} f_j v d\Omega + \int_{\partial\Omega} h_j v ds \quad k = 1,n \quad (3.6)$$

Nas expressões acima  $a_{IJ}^{kl}$ ,  $b_{IJ}^k$ ,  $c_{IJ}$ ,  $f_j$  e  $d_{IJ}$ ,  $h_j$  são funções suficientemente regulares definidas em  $\Omega$  e em  $\partial\Omega$  respectivamente.

Uma ampla gama de problemas podem ser descritos pela formulação abstrata (3.1) segundo Demkowicz et al., (1989). Nas seções seguintes serão deduzidas as formulações na forma (3.1) para o problema de Poisson e para problemas da elasticidade linear estática.

### 3.1.1 Formulação Variacional do Problema de Poisson.

A Equação de Poisson em duas dimensões é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f_v = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.7a)$$

Esta equação governa, por exemplo, a condução de calor em regime permanente de uma região bidimensional constituída de material homogêneo e isotrópico. Diversas aplicações podem ser encontradas em Lyra, (1988).

A solução torna-se unívoca quando um dos dois tipos de condição de contorno são aplicados em cada ponto do contorno  $\partial\Omega$  (Dhatt & Touzot, 1984). Vide Figura 3.1.

(i) Condição em  $u$  (Dirichlet ou essencial)

$$u = \hat{u} \quad \text{em } \Gamma_D \quad (3.7b)$$

(ii) Condição em  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1$  ou condição de fluxo

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = f_s \quad \text{em } \Gamma_N \quad (3.7c)$$

Se  $\alpha \neq 0$  tem-se condição de contorno de Cauchy. Se  $\alpha = 0$  tem-se condição de contorno de Neumann ou natural e, neste caso, um valor de  $u$  deve ser imposto em algum ponto do contorno para que haja garantia da unicidade da solução.

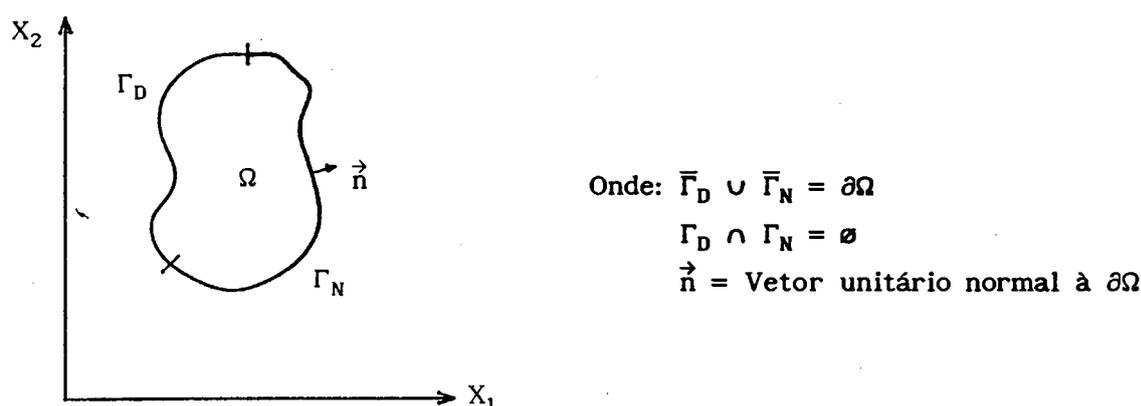


Fig. 3.1. Representação do domínio e do contorno para o Problema de Poisson.

O primeiro passo para se encontrar uma solução aproximada para o problema (3.7) utilizando o Método de Elementos Finitos é colocá-lo na sua forma variacional (Kikuchi, 1986).

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados

$$W(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f_v \right) v d\Omega = 0 \quad (3.8)$$

Note-se que nesta forma as funções de interpolação  $u$  devem ser duas vezes diferenciáveis e satisfazerem às condições de contorno em  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$ . Enquanto que as funções teste (funções peso),  $v$ , precisam apenas ser suficientemente regulares para que a integral em (3.8) tenha sentido (Dhatt & Touzot, 1984:143).

A forma integral (3.8) pode ser transformada na conhecida forma fraca através de integrações por partes

$$W(u) = \int_{\partial\Omega} v \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} - v f_v \right) d\Omega \quad (3.9)$$

Impondo-se que as funções teste  $v$  sejam nulas em  $\Gamma_D$  e que as funções de interpolação  $u$  satisfaçam às condições de contorno (3.7b), ou seja

$$\begin{aligned} v &\in H_{\gamma}^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ em } \Gamma_D \} \\ u &\in \hat{H}_{\gamma}^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \mid u = \hat{u} \text{ em } \Gamma_D \} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Note-se que  $\hat{H}_{\gamma}^1(\Omega)$  não é um espaço vetorial, devido a imposição de que  $u = \hat{u}$  em  $\Gamma_D$ . Por simplicidade será suposto que tanto a solução  $u$  como as funções teste  $v$  são membros do espaço  $H_{\gamma}^1(\Omega)$ , ou seja,  $\hat{u} = 0$ . As condições de Dirichlet não homogêneas poderão ser tratadas através do método da penalidade (Demkowicz et al., 1989). Portanto na sua formulação variacional o problema (3.7) é dado por:

Encontre  $u \in H_{\gamma}^1(\Omega)$  tal que

$$B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_{\gamma}^1(\Omega) \quad (3.11)$$

onde

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega \quad (3.12)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f_v v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} (f_s - \alpha u) v \, d\Gamma \quad (3.13)$$

É importante notar que o problema variacional (3.11) contém as condições de contorno (3.7c) explicitamente, e que as condições de contorno essenciais estão embutidas na imposição que  $u \in H_{\gamma}^1(\Omega)$  e na definição de  $H_{\gamma}^1(\Omega)$ .

A questão da equivalência entre as formulações diferenciais (clássicas) e variacionais é tratada, por exemplo, por Oden & Carey, (1983:30) no Teorema 1.4.2 ou por Oden & Reddy, (1976:292) no Teorema 7.1. O problema da existência e unicidade da solução dos problemas variacionais é tratado pelo Teorema Generalizado de Lax-Milgram também apresentado nas citadas referências.

### 3.1.2 Formulação Variacional para Problemas da Elasticidade Linear Estática.

Seja  $\Omega$  um domínio limitado aberto no espaço  $\mathbb{R}^3$ , com um contorno  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ ,  $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ .

O problema da elasticidade com uma formulação de deslocamentos pode ser posto na seguinte forma (Demkowicz et al., 1989 ou Kikuchi, 1986:191):

Encontre um campo de deslocamento  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ , tal que

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u})_{,j} + f_i = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (3.14a)$$

sujeita às condições de contorno,

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{em } \Gamma_D \quad (3.14b)$$

$$t_i(\mathbf{u}) = g_i \quad \text{em } \Gamma_N \quad (3.14c)$$

onde a seguinte notação foi utilizada

(i)  $f_i$  é uma força de corpo, por unidade de volume, na direção  $i$ .

(ii) O tensor tensão correspondente à  $\mathbf{u}$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \quad (3.15)$$

onde o tensor deformação é definido por

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{k',l} + u_{l',k}) \quad (3.16)$$

e  $E_{ijkl}$  é o tensor das constantes elásticas satisfazendo às seguintes condições de simetria

$$E_{ijkl} = E_{jilk} = E_{jikl} = E_{jilk} \quad (3.17)$$

(iii) O vetor tração no contorno  $\partial\Omega$

$$t_i(\mathbf{u}) = \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j \quad (3.18)$$

Novamente, buscar-se-á a formulação variacional do problema. Aplicando-se o método dos resíduos ponderados

$$W(u) = \int_{\Omega} [\sigma_{1j}(u)_{,j} + f_1] v_1 \, d\Omega = 0 \quad (3.19)$$

onde  $v_1$  são funções teste (deslocamentos virtuais) suficientemente diferenciáveis.

Para obter-se a forma integral fraca faz-se

$$W(u) = \int_{\partial\Omega} \sigma_{1j}(u) n_j v_1 \, d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{1j}(u) v_{1,j} \, d\Omega + \int_{\Omega} f_1 v_1 \, d\Omega \quad (3.20)$$

Utilizando-se a simetria das tensões e as relações deformação-deslocamento (3.16) tem-se

$$\begin{aligned} \sigma_{1j}(u) v_{1,j} &= \frac{1}{2} [\sigma_{1j}(u) + \sigma_{j1}(u)] v_{1,j} \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{1j}(u) v_{1,j} + \frac{1}{2} \sigma_{j1}(u) v_{j,1} \\ &= \sigma_{1j}(u) \varepsilon_{1j}(v) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Impondo-se que as funções de interpolação  $u$  satisfaçam às condições de contorno (3.14b) e que as funções teste  $v$  sejam nulas em  $\Gamma_D$ , ou seja

$$u \in \hat{H}^1(\Omega) = \{u = (u_1, u_2, u_3) \mid u_i \in H^1(\Omega), u_i = \hat{u}_i \text{ em } \Gamma_D\} \quad (3.22)$$

$$v \in H^1(\Omega) = \{v = (v_1, v_2, v_3) \mid v_i \in H^1(\Omega), v_i = 0 \text{ em } \Gamma_D\} \quad (3.23)$$

Por simplicidade, será suposto que  $\hat{u}_i = 0$ , ou seja, a solução  $u$  também pertence ao espaço  $H^1(\Omega)$ , visto que, um problema com condições de contorno não homogêneas pode sempre ser transformado em outro com condições de contorno homogêneas.

Na sua forma fraca o problema (3.14) é dado por:

Encontre  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} \sigma_{1j}(u) \varepsilon_{1j}(v) \, d\Omega = \int_{\Omega} f_1 v_1 \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_1 v_1 \, d\Gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.24)$$

Note-se que a forma fraca (3.24) nada mais é que o Princípio dos Trabalhos Virtuais (Kikuchi, 1986 ou Becker et al., 1981:244).

Utilizando-se as relações constitutivas (3.15), as relações de deformação-deslocamento (3.16) e as propriedades de simetria (3.17) do tensor  $E_{ijkl}$ , o problema (3.24) pode ser escrito na seguinte forma:

Encontre  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.25)$$

onde

$$B(u, v) = \int_{\Omega} E_{ijkl} u_{i,j} v_{k,l} \, d\Omega \quad (3.26)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f_1 v_1 \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_1 v_1 \, d\Gamma \quad (3.27)$$

### 3.2 Aproximação por Elementos Finitos de Problemas de Valor no Contorno com Formulação Variacional.

Na seção anterior os problemas foram transformados a partir de uma forma diferencial para uma forma variacional equivalente, ou seja:

Encontre  $u \in X(\Omega)$  tal que

$$B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in X(\Omega) \quad (3.28)$$

onde  $L(\cdot) \in (X(\Omega))'$  e  $B(\cdot, \cdot)$  é uma forma bilinear sobre  $X(\Omega) \times X(\Omega)$  que satisfaz às devidas condições de continuidade e coercividade de modo que o problema tenha solução única. A definição do espaço  $X(\Omega)$  depende do problema em questão.

Todos os métodos de busca de soluções aproximadas para problemas de valor no contorno baseiam-se na seguinte idéia (Oden & Carey, 1983): Reconstrua o problema de modo a que a solução aproximada pertença a uma classe restrita de funções. O método de Galerkin consiste simplesmente em resolver o problema (3.28) em subespaços  $X_h(\Omega) \subset X(\Omega)$  ao invés de em  $X(\Omega)$ .

A aproximação de Galerkin do problema (3.28) é obtida resolvendo-se o seguinte problema:

Encontre  $u_h \in X_h(\Omega)$  tal que

$$B(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in X_h(\Omega) \quad (3.29)$$

Como  $v_h \in X_h(\Omega) \subset X(\Omega)$ , de (3.28)

$$B(u, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in X_h(\Omega) \quad (3.30)$$

De (3.29) tem-se

$$B(u, v_h) - B(u_h, v_h) = B(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in X_h(\Omega) \quad (3.31)$$

Portanto o erro

$$e = u - u_h \quad (3.32)$$

da aproximação de Galerkin  $u_h$  da solução de (3.28) é ortogonal ao subespaço  $X_h(\Omega)$  no sentido de que

$$B(e, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in X_h(\Omega) \quad (3.33)$$

Por esta razão se diz que a aproximação de Galerkin  $u_h$  é a melhor aproximação de  $u$  em  $X_h(\Omega)$  (Oden & Carey, 1983).

A qualidade da aproximação dependerá de quão bem  $X_h(\Omega)$  aproxima  $X(\Omega)$ . Uma questão de grande interesse é a estimativa *a priori* do erro  $e$ . O Teorema da Aproximação fornece uma estimativa deste erro (Oden & Reddy, 1976:328 ou Oden & Carey, 1983:36).

**Teorema 3.1: Teorema da Aproximação**

Seja  $X(\Omega)$  um espaço de Hilbert real e seja  $B(.,.)$  uma forma bilinear sobre  $X(\Omega) \times X(\Omega)$  satisfazendo às seguintes condições:

(i)  $B(.,.)$  é contínua, ou seja, existe uma constante  $M > 0$  tal que

$$|B(u,v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u,v \in X(\Omega) \quad (3.34)$$

onde  $\|\cdot\|_X$  denota a norma em  $X(\Omega)$ .

(ii)  $B(.,.)$  é fracamente coerciva, ou seja

$$\bullet \inf_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X = 1}} \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\|_X \leq 1}} |B(u,v)| \geq \alpha > 0 \quad (3.35)$$

• Para todo  $v \neq 0$  em  $X(\Omega)$

$$\sup_{u \in X} |B(u,v)| > 0 \quad (3.36)$$

(iii) Além disto,

$$\bullet \inf_{\substack{u_h \in X_h \\ \|u_h\|_X = 1}} \sup_{\substack{v_h \in X_h \\ \|v_h\|_X \leq 1}} |B(u_h, v_h)| \geq \alpha_h > 0 \quad (3.37)$$

• Para todo  $v_h \neq 0$  em  $X_h(\Omega)$

$$\sup_{u_h \in X_h} |B(u_h, v_h)| > 0 \quad (3.38)$$

Seja o erro de discretização,  $e$ , definido por

$$e = u^* - u_h^* \quad (3.39)$$

onde  $u^*$  e  $u_h^*$  são as soluções de (3.28) e de (3.29) respectivamente.

Tem-se então a seguinte estimativa *a-priori*

$$\|e\|_X \leq \left(1 + \frac{M}{\alpha_h}\right) \|u^* - u_h\|_X \quad \forall u_h \in X_h(\Omega) \quad (3.40)$$

Para prova deste teorema veja as citadas referências.

A desigualdade (3.40) indica que o erro da aproximação é limitado superiormente por um termo  $\|u^* - u_h\|_X$  cuja magnitude depende de quão bem os elementos de  $X_h(\Omega)$  podem aproximar os elementos de  $X(\Omega)$ .

O Método de Elementos Finitos fornece uma maneira sistemática e geral de se construir famílias de subespaços  $X_h(\Omega)$  (Oden & Reddy, 1976:330). Considera-se que o domínio  $\Omega$  possa ser representado por uma união de elementos finitos  $K_e$ ,  $e = 1, \dots, N$ , ou seja

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1, N} \bar{K}_e \quad (3.41)$$

e

$$\text{int } K_e \cap \text{int } K_f = \emptyset \quad \text{para } e \neq f \quad (3.42)$$

A cada elemento  $K$  está associado um espaço de dimensão finita denotado por  $X_h(K)$ ; por exemplo o espaço dos polinômios de ordem menor ou igual a  $p$ . O espaço de elementos finitos global,  $X_h(\Omega)$ , consiste de funções que, quando restritas ao elemento  $K$ , pertencem ao espaço local de funções de interpolação  $X_h(K)$ . Portanto, a aproximação global é construída a partir das aproximações locais colocando-se estas funções "lado a lado". Com isto tem-se que

$$X_h(K) = \{ w_h = v_h|_K \ni v_h \in X_h(\Omega) \} \quad (3.43)$$

No Capítulo 4 é discutida a construção dos espaços locais  $X_h(K)$ , utilizando-se polinômios, de uma maneira hierárquica.

### 3.3 Equações de Elementos Finitos para o Problema de Poisson.

Na Seção 3.1, verificou-se que o problema de Poisson na sua formulação variacional é dado por (fazendo  $\alpha = 0$  em 3.13):

Encontre  $u \in H_\gamma^1(\Omega)$ , tal que  $\forall v \in H_\gamma^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} f_v v dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_N} f_s v ds \quad (3.44)$$

O domínio  $\Omega$  será representado por  $\Omega_h$  que consiste de uma coleção de  $E$  elementos finitos e  $N$  pontos nodais. Define-se um subespaço  $H_\gamma^h(\Omega_h)$  de  $H_\gamma^1(\Omega_h)$ , de dimensão  $M$ , construindo-se um conjunto apropriado de funções base globais  $\phi_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , utilizando-se elementos adequados. Uma típica função teste em  $H_\gamma^h$  é da forma

$$v_h(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^M v_j \phi_j(x_1, x_2) \quad (3.45)$$

Nos elementos convencionais  $v_j = v_h(x_1^j, x_2^j)$ . O caso dos elementos hierárquicos é discutido no Capítulo 4.

A aproximação por elementos finitos do problema (3.44) consiste em procurar uma função  $u_h$  em  $H_\gamma^h(\Omega_h)$

$$u_h(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^M u_j \phi_j(x_1, x_2) \quad (3.46)$$

tal que

$$\int_{\Omega_h} \left( \frac{\partial v_h}{\partial x_1} \frac{\partial u_h}{\partial x_1} + \frac{\partial v_h}{\partial x_2} \frac{\partial u_h}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega_h} f_v v_h dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_N^h} f_s v_h ds \quad \forall v_h \in H_\gamma^h(\Omega_h) \quad (3.47)$$

onde  $\Gamma_N^h$  é uma aproximação de  $\Gamma_N$ .

Substituindo-se (3.45) e (3.46) em (3.47) e simplificando-se os termos, chega-se às equações de elementos finitos globais

$$\sum_{j=1}^M K_{ij} u_j = F_i \quad i = 1, \dots, M \quad (3.48)$$

onde  $K_{ij}$  são os termos da matriz de rigidez do problema

$$K_{ij} = \int \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (3.49)$$

e  $F_1$  são as componentes do vetor de carregamento

$$F_1 = \int_{\Omega_h} f_v \phi_1 \, dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_N^h} f_s \phi_1 \, ds \quad (3.50)$$

Similarmente, a aproximação a nível local pode ser construída utilizando-se  $u_h^e$  e  $v_h^e$  que são as restrições das aproximações  $u_h$  e  $v_h$  à  $\Omega_e$ , onde  $\Omega_e$  denota um elemento finito da malha.

$$u_h^e(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{M_e} u_j^e \psi_j^e(x_1, x_2) \quad (3.51)$$

$$v_h^e(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{M_e} v_j^e \psi_j^e(x_1, x_2) \quad (3.52)$$

onde  $\psi_j^e$  são as funções de interpolação locais para o elemento  $\Omega_e$  e  $M_e$  é o número de graus de liberdade do elemento.

Chega-se então às componentes da matriz de rigidez e do vetor carregamento do elemento, dadas respectivamente por

$$K_{1j}^e = \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial \psi_1^e}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1^e}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (3.53)$$

$$F_1^e = \int_{\Omega_e} f_v \psi_1^e \, dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_N^h} f_s \psi_1^e \, ds \quad (3.54)$$

onde  $\Gamma_N^h$  denota a porção de  $\partial\Omega_e$  interseccionando  $\Gamma_N^h$ .

Na Seção 4.4 é discutido o uso de funções de interpolação hierárquicas para o cálculo de  $K_{1j}^e$  e  $F_1^e$ .

### 3.4 Equações de Elementos Finitos para Problemas da Elasticidade Linear Estática.

O problema da elasticidade linear estática na sua forma fraca é dado por (vide Seção 3.1):

Encontre  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} E_{ijkl} u_{j,i} v_{1,k} d\Omega = \int_{\Omega} f_1 v_1 d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_1 v_1 d\Gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.55)$$

A aproximação por elementos finitos deste problema é obtida seguindo-se o mesmo procedimento utilizado na seção anterior para o problema de Poisson, exceto que agora deve-se construir aproximações para cada componente de  $u$  e  $v$ .

Mais uma vez discretiza-se o domínio  $\Omega$  em uma coleção de  $E$  elementos finitos e  $N$  pontos nodais. O espaço de elementos finitos  $H^h(\Omega_h)$  é definido por

$$H^h(\Omega_h) = \{ u_h = (u_1^h, u_2^h, u_3^h) \mid u_i^h \in H^h(\Omega_h) \} \quad (3.56)$$

onde  $H^h(\Omega_h)$  foi definido na seção anterior (note-se que agora  $\Omega_h \subset \mathbb{R}^3$ ).

As componentes das funções teste  $v_h$  e das funções de interpolação  $u_h$ , em  $H^h(\Omega_h)$ , são dadas respectivamente por

$$v_1^h(x) = \sum_{\alpha=1}^M v_{1\alpha} \phi_{\alpha}(x) \quad i = 1,3 \quad (3.57)$$

$$u_1^h(x) = \sum_{\alpha=1}^M u_{1\alpha} \phi_{\alpha}(x) \quad i = 1,3 \quad (3.58)$$

onde  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

A aproximação de (3.55) é então dada por:

Encontre  $u_h \in H^h(\Omega_h)$  tal que

$$\int_{\Omega_h} E_{ijkl} u_{j,i}^h v_{1,k}^h d\Omega = \int_{\Omega_h} f_1 v_1^h d\Omega + \int_{\Gamma_N^h} g_1 v_1^h d\Gamma \quad \forall v_h \in H^h(\Omega_h) \quad (3.59)$$

Substituindo-se (3.57) e (3.58) em (3.59) tem-se

$$v_{1\alpha} \int_{\Omega_h} \phi_{\alpha,k} E_{ijkl} \phi_{\beta,l} d\Omega u_{j\beta} = v_{1\alpha} \left( \int_{\Omega_h} f_1 \phi_{\alpha} d\Omega + \int_{\Gamma_N^h} g_1 \phi_{\alpha} d\Gamma \right) \quad (3.60)$$

Simplificando-se os termos, chega-se às equações de elementos finitos globais

$$K_{i\alpha j\beta} u_{j\beta} = F_{i\alpha} \quad i, j = 1, 3 \quad \alpha, \beta = 1, M \quad (3.61)$$

onde as componentes da matriz de rigidez e do vetor carregamento são dadas respectivamente por

$$K_{i\alpha j\beta} = \int_{\Omega_h} \phi_{\alpha, k} E_{ijkl} \phi_{\beta, l} d\Omega \quad (3.62)$$

$$F_{i\alpha} = \int_{\Omega_h} f_i \phi_{\alpha} d\Omega + \int_{\Gamma_N^h} g_i \phi_{\alpha} d\Gamma \quad (3.63)$$

A aproximação a nível local é construída utilizando-se as restrições  $u_h^e$  e  $v_h^e$  de  $u_h$  e  $v_h$ , respectivamente, à  $\Omega_e$ . Chega-se então às componentes da matriz de rigidez do elemento e do vetor carregamento, dadas respectivamente por

$$K_{i\alpha j\beta}^e = \int_{\Omega_e} \psi_{\alpha, k}^e E_{ijkl} \psi_{\beta, l}^e d\Omega \quad (3.64)$$

$$i, j = 1, 3 \quad \alpha, \beta = 1, M_e$$

$$F_{i\alpha}^e = \int_{\Omega_e} f_i \psi_{\alpha}^e d\Omega + \int_{\Gamma_N^h} g_i \psi_{\alpha}^e d\Gamma \quad (3.65)$$

onde  $\psi_{\alpha}^e(x)$  são as funções de interpolação locais para o elemento  $\Omega_e$  e  $M_e$  é o número de graus de liberdade do elemento em cada direção.

### 3.4.1 Equações de Elementos Finitos para Problemas da Elasticidade Linear Estática Utilizando Notação Contraída.

Na seção anterior foi utilizada a notação indicial para a dedução da matriz de rigidez e do vetor carregamento de um elemento finito para problemas da elasticidade linear estática. Uma maneira de melhor se visualizar as expressões é através do uso da notação dita contraída (Kikuchi, 1986). Define-se então

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} \\ 2\varepsilon_{31} = \gamma_{31} \\ 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

O equivalente contraído do tensor E para o caso de materiais isotrópicos, é dado por (Kikuchi, 1986):

$$C = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & E_{1111} & E_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(E_{1111} - E_{1122}) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(E_{1111} - E_{1122}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(E_{1111} - E_{1122}) \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

onde

$$E_{1111} = \lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (3.68)$$

$$E_{1122} = \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé, E é o módulo de Young e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Correspondendo a equação constitutiva (3.15) tem-se

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (3.69)$$

Utilizando-se a forma fraca (3.24) chega-se então a

$$\int_{\Omega} \{\varepsilon(v)\}^T C \{\varepsilon(u)\} d\Omega = \int_{\Omega} v^T f d\Omega + \int_{\Gamma_N} v^T g d\Gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.70)$$

#### 3.4.1.1 Elementos para Problemas Axissimétricos.

Um sólido de revolução é axialmente simétrico se sua geometria e propriedades materiais são independentes da coordenada circunferencial  $\theta$ . Fisicamente tem-se um problema tridimensional porém, existindo axissimetria, ele pode ser tratado como um problema bidimensional, sendo a abordagem similar a utilizada em problemas de estado plano de tensão ou de deformação. Se o sólido é axialmente simétrico, em forma e propriedades mecânicas, mas o carregamento não é, são feitas expansões em série de Fourier do carregamento e do campo de deslocamentos, e a análise é feita para cada componente da série.

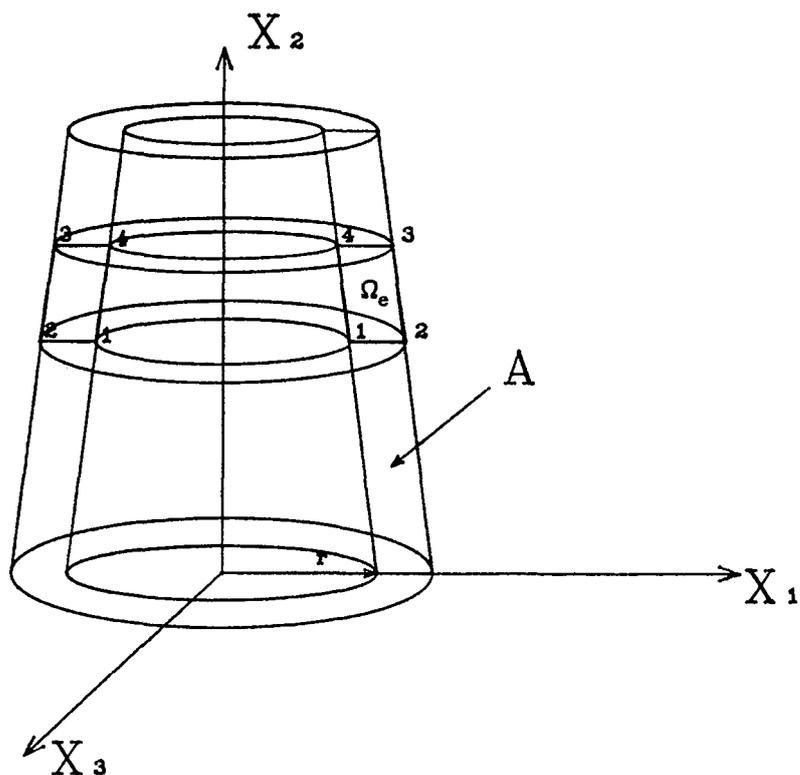


Fig. 3.2. Axissimetria em relação ao eixo  $X_2$ .

Antes de se deduzir as equações de elementos finitos para um problema axissimétrico necessita-se das relações deformação-deslocamento para este tipo de comportamento. Supondo-se então axissimetria em relação ao eixo  $X_2$  (vide Fig. 3.2) tal que todas as funções sejam independentes da coordenada  $\theta$ , obtém-se, a partir das relações deformação-deslocamento em coordenadas cilíndricas (Kikuchi, 1986), que

$$\{\epsilon_a\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \epsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = L u \quad (3.71a)$$

$$C_a = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.71b)$$

$$\{\sigma_a\} = C_a \{\varepsilon_a\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \quad (3.71c)$$

Note-se que no caso de problemas axissimétricos  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$ . Para calcular  $\varepsilon_{33}$  em  $r = 0$  utiliza-se de que

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \text{em } r = 0 \quad (3.72)$$

Devido à axissimetria geométrica, material e de carga, necessita-se analisar apenas um radiano da estrutura. Utilizando-se as definições (3.71) a forma fraca (3.70) fica

$$\int_A \int_0^1 (Lv)^T C_a (Lu) \, d\theta r dr dx_2 = \int_A \int_0^1 v^T f \, d\theta r dr dx_2 + \int_{S_N} \int_0^1 v^T g \, d\theta r ds \quad (3.73)$$

$$\int_A (Lv)^T C_a (Lu) \, r dr dx_2 = \int_A v^T f \, r dr dx_2 + \int_{S_N} v^T g \, r ds \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.74)$$

onde  $A$  está indicado na Figura 3.2 e  $S_N$  é a porção do contorno de  $A$  em que foram aplicadas condições de contorno de Neumann.

A aproximação por elementos finitos deste problema é obtida da mesma maneira descrita na Seção 3.4. Para um elemento genérico  $\Omega_e$  tem-se

$$\int_{\Omega_e} (Lv_h^e)^T C_a (Lu_h^e) \, r dr dx_2 = \int_{\Omega_e} v_h^e \cdot f \, r dr dx_2 + \int_{\partial\Omega_e} v_h^e \cdot (N_a \sigma_a) \, r ds \quad (3.75)$$

onde  $N_a$  é uma matriz contendo as componentes do vetor unitário normal ao contorno do elemento

$$N_a = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 & 0 \\ 0 & n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

e  $N_a \{\sigma_a\} = g$  na porção do contorno do elemento que secciona  $S_N$ .

Definindo-se

$$u_h^e(x_1, x_2) = \Psi^e(x_1, x_2) u^e \quad (3.77)$$

$$\Psi^e(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \psi_1^e & 0 & \psi_2^e & \dots & 0 \\ 0 & \psi_1^e & 0 & \dots & \psi_{M_e}^e \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$(u^e)^T = \{u_{11}^e \ u_{21}^e \ u_{12}^e \ u_{22}^e \ \dots \ u_{1M_e}^e \ u_{2M_e}^e\} \quad (3.79)$$

onde  $M_e$  é o número de graus de liberdade do elemento em cada direção.

As equações de elementos finitos para um problema axialmente simétrico em forma, propriedades mecânicas e carregamento, são dadas por

$$K^e u^e = F^e \quad (3.80)$$

onde

$$K^e = \int_{\Omega_e} B_a^T C_a B_a \ r dr dx_2 \quad (3.81)$$

$$F^e = \int_{\Omega_e} (\Psi^e)^T f \ r dr dx_2 + \int_{\partial\Omega_e} (\Psi^e)^T N_a \sigma_a \ r ds \quad (3.82)$$

onde

$$B_a = L \Psi^e = \begin{bmatrix} \psi_{1,1}^e & 0 & \psi_{2,1}^e & 0 & \dots & \psi_{M_e,1}^e & 0 \\ 0 & \psi_{1,2}^e & 0 & \psi_{2,2}^e & \dots & 0 & \psi_{M_e,2}^e \\ \psi_{1,2}^e & \psi_{1,1}^e & \psi_{2,2}^e & \psi_{2,1}^e & \dots & \psi_{M_e,2}^e & \psi_{M_e,1}^e \\ \frac{\psi_1^e}{r} & 0 & \frac{\psi_2^e}{r} & 0 & \dots & \frac{\psi_{M_e}^e}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

### 3.4.1.2 Elementos para Estado Plano de Tensão e Estado Plano de Deformação.

As matrizes de rigidez e os vetores de carregamento para os elementos finitos de estado plano de deformação ou de tensão podem ser obtidos a partir das expressões deduzidas anteriormente simplesmente fazendo-se

(i) Elimina-se a quarta linha da matriz deformação-deslocamento  $L$

$$\langle \epsilon \rangle = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = L u \quad (3.84)$$

(ii) Para estado plano de tensão a matriz das constantes elásticas passa a ser

$$C_{PT} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

e, para estado plano de deformação, tem-se

$$C_{PD} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1 - \nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1 - \nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

(iii) As integrais de volume são transformadas em

$$\int_{\Omega_e} f(x_1, x_2) d\Omega = \int_{A_e} \int_0^h f(x_1, x_2) dx_3 dx_1 dx_2 = \int_{A_e} f(x_1, x_2) h dx_1 dx_2 \quad (3.87)$$

onde  $h$  é a espessura do elemento (tomada igual a 1 para o caso de estado plano de deformação).

Portanto elementos para análise axissimétrica e de estado plano de tensão ou deformação, podem ser implementados eficientemente em uma única rotina.

## CAPÍTULO 4

### BASES HIERÁRQUICAS NO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

#### 4.1 Introdução.

Quando a aproximação por elementos finitos é construída na sua forma padrão, uma variável de interesse é expressa na seguinte forma,

$$u_p(\mathbf{x}) = u_j \phi_j(\mathbf{x}) \quad j = 1, \dots, M \quad (4.1)$$

onde  $M$  é o número de funções base globais e os parâmetros  $u_j$  são identificados com os valores (ou derivadas) nodais da aproximação  $u_p$ . Este procedimento possui a vantagem de atribuir um significado físico, facilmente interpretável, aos parâmetros  $u_j$ . Um inconveniente nesta definição é que as funções relativas a cada ordem de aproximação diferem completamente entre si e, como consequência, as matrizes e os vetores resultantes. Portanto, em um processo  $p$ -adaptativo, se a ordem  $p$  das funções de interpolação é aumentada, todo processamento anterior é perdido.

Este inconveniente pode ser resolvido se as funções de interpolação forem definidas de uma forma hierárquica, ou seja, cada conjunto de funções, relativo a uma ordem de aproximação, está contido nos conjuntos subseqüentes. Este aninhamento das funções de interpolação é similar ao dos termos de uma série de Fourier, e é geralmente utilizado em conjunção com a versão  $p$  do Método de Elementos Finitos (MEF).

#### 4.1.1 Conseqüências do Uso de Funções de Interpolação Hierárquicas na Versão $p$ do MEF.

Existem várias conseqüências importantes do uso de funções de interpolação hierárquicas, dentre elas se destacam:

(i) O aninhamento dos conjuntos de funções de interpolação resulta em um aninhamento da matriz de rigidez e do vetor carregamento .

Suponha que foram utilizadas inicialmente  $n$  funções base para gerar o espaço de elementos finitos, chegando-se ao seguinte sistema de equações

$$\mathbf{K}_{nn} \mathbf{u}_n = \mathbf{f}_n \quad (4.2)$$

Se a base do espaço é aumentada hierarquicamente, adicionando-se às  $n$  funções pré-existentes outras  $m$  funções, o sistema de equações resultante será dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{nn} & \mathbf{K}_{nm} \\ \mathbf{K}_{mn} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_n \\ \mathbf{f}_m \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Note-se que a matriz e os vetores de (4.2) estão contidos em (4.3).

(ii) A propriedade anterior pode ser utilizada vantajosamente, quando um problema deve ser analisado várias vezes, a fim de que se tenha certeza que a solução convergiu. Resolve-se o problema utilizando a maior ordem polinomial que se julgar *a priori* necessária, e, a partir desta solução pode-se facilmente obter as correspondentes a  $p = 1, \dots, p_{\max-1}$ .

(iii) As duas propriedades anteriores podem ser utilizadas para se obter uma estimativa *a posteriori* do erro de discretização utilizando a técnica da Seção 2.4.6.

(iv) O uso de funções hierárquicas resulta em sistemas de equações bem condicionados. Isto se deve a maior ortogonalidade das funções, resultando em matrizes predominantemente diagonais (Ribeiro, 1986). Em Zienkiewicz & Craig (1986), encontram-se exemplos onde são comparados os números de condição de matrizes construídas utilizando-se funções hierárquicas ou não (veja também a Seção 4.5). Em Mandel (1990), e em Babuska et al., (1989) está questão é discutida exaustivamente.

(v) Uma vantagem fundamental das funções de interpolação hierárquicas é a facilidade com que elas permitem que se construa uma aproximação contínua (conforme), na qual a ordem das funções de interpolação varia localmente. Uma situação típica é ilustrada na Figura 4.1. Se os elementos  $K_1$  e  $K_2$  são, por exemplo, linear e quadrático respectivamente, então existem pelo menos duas maneiras de forçar a continuidade no contorno inter-elementos.

Uma maneira é se adicionar uma função de interpolação quadrática correspondente

ao lado  $L$  do elemento  $K_1$ . Alternativamente, poder-se-ia eliminar a função quadrática correspondente ao lado  $L$  do elemento  $K_2$ . Em ambos os casos se obtém uma ordem de aproximação comum ao longo do contorno inter-elementos. A primeira estratégia, também chamada Regra do Máximo, é utilizada por Demkowicz et al. (1989).

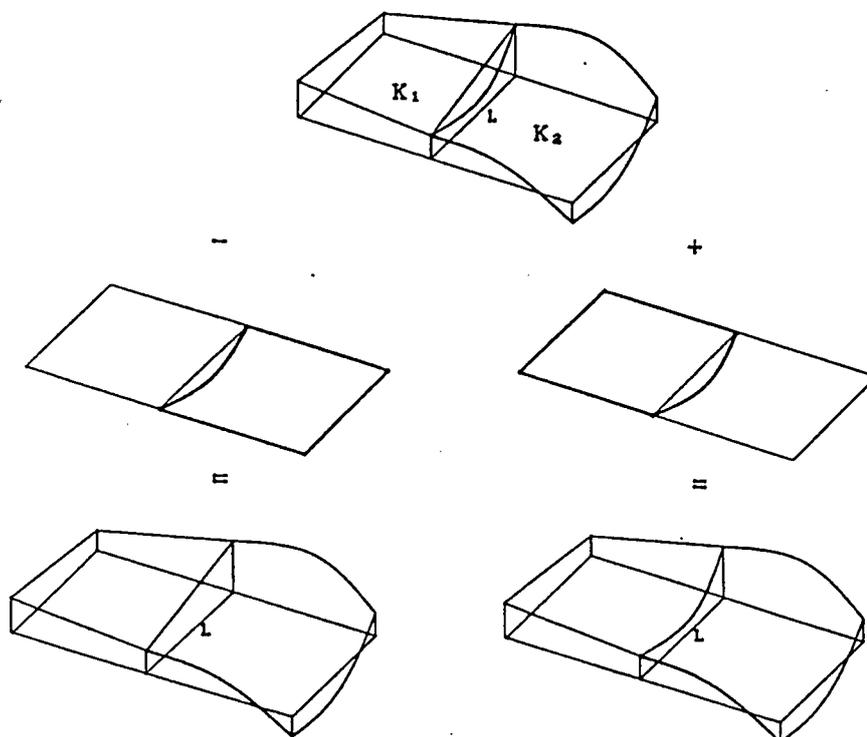


Fig.4.1 Imposição de continuidade entre elementos (Denkowitz et al., 1989).

A segunda abordagem ("Regra do Mínimo"), devido a sua maior facilidade de implementação, é mais utilizada. Veja por exemplo Rossow & Katz (1978); Devloo, (1987a) ou o Capítulo 6.

(vi) A qualidade de uma aproximação por elementos finitos depende da malha utilizada e da ordem das funções de interpolação. Como as funções base, hierárquicas ou não, de mesma ordem, podem gerar o mesmo espaço (Zienkiewicz & Craig, 1986), o uso de qualquer um dos dois conjuntos resulta na mesma aproximação (Babuska & Noor, 1986).

(vii) O principal inconveniente do uso da versão  $p$  hierárquica é que os coeficientes das funções base não representam deslocamentos nodais e, geralmente, não possuem um significado físico claro, dificultando a imposição das condições de contorno.

#### 4.2 Funções de Interpolação Hierárquicas para Elementos Quadrangulares.

As funções de interpolação hierárquicas, utilizadas neste trabalho, são construídas a partir da integral de polinômios de Legendre. Antes de apresentá-las são necessárias algumas definições.

Considere o elemento de referência  $\hat{\Omega}$  mostrado na Figura 4.2, com vértices  $A_1$  e lados  $L_j$ . Existem três tipos de funções de interpolação hierárquicas:

1- Funções nodais associadas aos vértices  $A_i$  do elemento  $\hat{\Omega}$ . Elas são nulas nos lados opostos ao vértice que estão associadas.

2- Funções associadas aos lados  $L_j$  do elemento  $\hat{\Omega}$ . São nulas em todos os outros três lados do elemento.

3- Funções "bolhas". São nulas em todos os quatro lados do elemento.

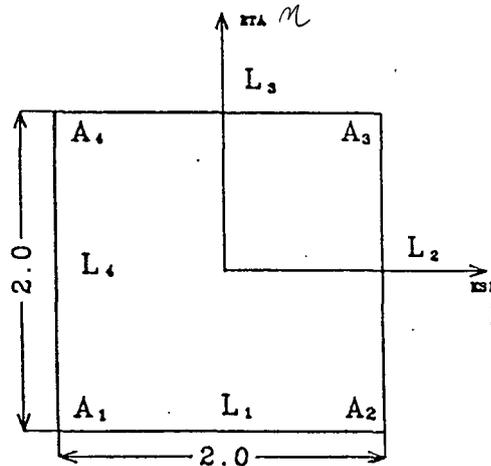


Fig.4.2. Elemento de referência  $\hat{\Omega}$ .

O conjunto Hierárquico  $Q_p'$  para a versão  $p$ , é definido por (Szabó & Sahrman, 1988)

FUNÇÕES NODAIS. São as funções bilineares usuais.

$$\hat{\psi}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)$$

(4.4)

$$\hat{\psi}_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$\hat{\psi}_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) \quad (4.4)$$

$$\hat{\psi}_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)$$

FUNÇÕES ASSOCIADAS AOS LADOS. Existem  $(p - 1)$  funções de interpolação associadas com cada lado  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . São definidas por

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1^{L1}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \eta) \phi_1(\xi) \\ \hat{\psi}_1^{L2}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 + \xi) \phi_1(\eta) \\ \hat{\psi}_1^{L3}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 + \eta) \phi_1(\xi) \\ \hat{\psi}_1^{L4}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \xi) \phi_1(\eta) \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde

$$\phi_1(\xi) = \sqrt{\frac{2i+1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_i(t) dt \quad i = 1, \dots, (p - 1) \quad (4.6)$$

e  $P_i(t)$  é um polinômio de Legendre de grau  $i$ . As integrais que aparecem em (4.6) podem ser encontradas em Bardell, (1989).

FUNÇÕES BOLHA. Para  $p < 4$  não existem funções bolha. Para  $p \geq 4$  existem  $(p - 2)(p - 3)/2$  funções de interpolação internas definidas por

$$\hat{\psi}_{i,j}(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) P_i(\xi)P_j(\eta) \quad 0 \leq i + j \leq p - 4 \quad (4.7)$$

Por exemplo, se  $p = 8$ , existem 47 funções de interpolação, sendo 4 nodais, 28 associadas aos lados e 15 funções bolha.

O conjunto  $Q'_p$  é utilizado segundo Babuska & Noor, (1986) no programa PROBE, e goza das seguintes propriedades:

(i) O conjunto é obviamente hierárquico em relação ao parâmetro  $p$ .

(ii) O conjunto  $Q'_p$  é o menor conjunto que inclui todos os polinômios até o grau  $p$  (Babuska et al., 1989) e é gerado pelos monômios

$$\xi^i \eta^j, \quad i, j = 0, 1, \dots, p, \quad i+j \leq p \quad (4.8)$$

mais os termos  $\xi^p \eta$  e  $\xi^p \eta$  (Szabó et al., 1989). Sendo portanto equivalente ao conjunto utilizado na formulação dos elementos Serendipity (Babuska et al., 1989).

(iii) As funções do conjunto  $Q_p'$  são, segundo Babuska et al. (1989), suficientemente ortogonais para aplicações práticas, de modo que, a utilização de métodos diretos para a solução do sistema de equações resultante, não trará problemas de erros de truncamento.

(iv) Segundo Szabó (1986b), experiências computacionais demonstram que, mesmo quando os elementos estão bastante distorcidos, o número de condição da matriz de rigidez cresce lentamente com relação ao grau  $p$  dos elementos.

#### 4.3 Significado Físico dos Coeficientes das Funções Base Hierárquicas.

Como mencionado na Seção 4.1 os coeficientes das funções base hierárquicas não representam deslocamentos nodais, o que dificulta a imposição de condições de contorno. Nesta seção este assunto será abordado.

A questão pode ser tratada mais facilmente examinando-se o caso de um elemento quadrático unidimensional. Para este tipo de elemento pode-se escrever

$$u_p(\xi) = u_1 N_1(\xi) + u_2 N_2(\xi) + u_3 N_3(\xi) \quad (4.9)$$

onde  $N_1$  e  $N_2$  são as funções lagrangeanas usuais

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.10)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.11)$$

e  $N_3$  é igual a  $\phi_1(\xi)$  definida pela Equação (4.6) (a menos da constante multiplicativa  $-\sqrt{3/2}/2$ ), isto é,

$$N_3(\xi) = (1 - \xi^2) \quad (4.12)$$

Note-se que  $N_3 = 0$  em  $\xi = \pm 1$ , e  $N_3 = 1$  em  $\xi = 0$ , portanto

$$u_1 = u_p(-1) \quad (4.13)$$

$$u_2 = u_p(+1) \quad (4.14)$$

$$u_3 = u_p(0) - (u_1 + u_2)/2 \quad (4.15)$$

logo,  $u_3$  é o desvio da linearidade da parábola  $u_p(\xi)$  em  $\xi = 0$ . Isto pode ser visualizado na figura seguinte.

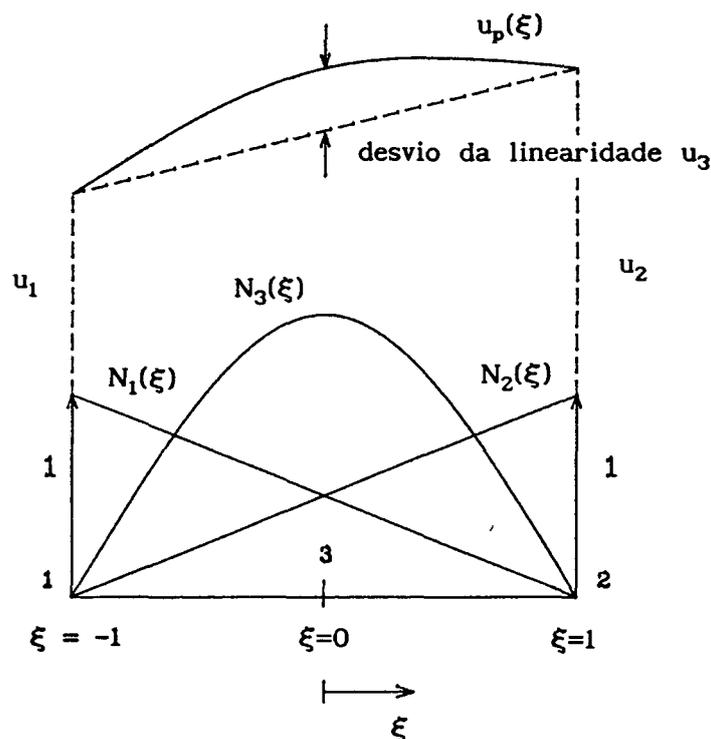


Fig. 4.3. Significado físico de  $u_3$ .

Uma outra interpretação para  $u_3$  pode ser obtida diferenciando-se (4.9) duas vezes

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial \xi^2} = -2u_3 \quad (4.16)$$

de modo que o grau de liberdade no nó hierárquico pode também ser interpretado em termos da curvatura em  $\xi = 0$ . Se  $N_3$  for definida por

$$N_3(\xi) = -\frac{1}{2}(1 - \xi^2) \quad (4.17)$$

então  $u_3 = u_{p, \xi\xi}(0)$ .

No caso bidimensional a situação é análoga. Define-se os graus de liberdade do elemento de referência  $\hat{\Omega} = \{ \mathbf{x} = (\xi, \eta) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; -1 \leq \xi, \eta \leq 1 \}$ , para um problema escalar, como sendo (Demkowicz et al., 1989):

- Valores da função nos quatro vértices

$$u(-1,-1); \quad u(1,-1); \quad u(1,1); \quad u(-1,1) \quad (4.18)$$

- Derivadas tangenciais (a menos de constantes multiplicativas,  $\lambda_k$ ), até a  $p$ -ésima ordem, associada aos pontos médios dos quatro lados

$$\begin{aligned} \lambda_k^{-1} \frac{\partial^k u}{\partial \xi^k} (0, -1) & \quad k = 2, 3, \dots, p \\ \lambda_k^{-1} \frac{\partial^k u}{\partial \eta^k} (1, 0) & \quad k = 2, 3, \dots, p \\ \lambda_k^{-1} \frac{\partial^k u}{\partial \xi^k} (0, 1) & \quad k = 2, 3, \dots, p \\ \lambda_k^{-1} \frac{\partial^k u}{\partial \eta^k} (-1, 0) & \quad k = 2, 3, \dots, p \end{aligned} \quad (4.19)$$

- Derivadas associadas ao nó central

$$\lambda_k^{-1} \lambda_1^{-1} \frac{\partial^{k+1} u}{\partial \xi^k \partial \eta} (0, 0) \quad 1, k = 2, 3, \dots, p-2; \quad 1+k \leq p \quad (4.20)$$

Pelas definições anteriores um elemento com ordem  $p = 5$ , por exemplo, terá 23 graus de liberdade, sendo

- O valor da função nos quatro vértices.
- Derivadas tangenciais  $u^{(2)}$ ,  $u^{(3)}$ ,  $u^{(4)}$  e  $u^{(5)}$  associadas com os nós de cada um dos lados.
- Derivadas cruzadas  $u^{(2,2)}$ ,  $u^{(3,2)}$ ,  $u^{(2,3)}$  associadas ao nó central.

#### 4.4 Implementação de um Elemento Hierárquico de Ordem $p$ .

Nesta seção serão enfocados os principais aspectos da implementação de um elemento quadrangular, de ordem  $p$  arbitrária, utilizando o conjunto  $Q_p'$  definido na Seção 4.2. As funções de interpolação são construídas a partir do produto de

polinômios unidimensionais. O algoritmo utilizado é uma modificação do apresentado por Devloo (1987a), e é aplicável tanto para o problema de Poisson como para problemas da elasticidade bidimensional.

A subrotina que se tem em mente deve, além de calcular a matriz de rigidez de um elemento de ordem  $p$ , ser capaz de calcular apenas os termos da matriz referentes a um determinado grau, IGRAU. Isto é necessário durante um processamento  $p$ -adaptativo, quando se deseja aumentar a ordem das funções de interpolação de um elemento específico.

#### 4.4.1 Esquema de Numeração das Funções de Interpolação.

Como a ordem polinomial de um elemento pode ser arbitrária, é necessário se estabelecer uma convenção para a numeração das funções de interpolação utilizadas, e conseqüentemente dos graus de liberdade do elemento. A seguinte convenção é adotada:

I As funções de 1 a 4 são as funções bilineares (4.4) associadas aos vértices do elemento.

II Para elementos de grau maior ou igual a 2 tem-se:

- As primeiras quatro funções estão associadas aos lados do elemento, ordenadas no sentido anti-horário (funções de interpolação 4.5).

- As demais funções relativas a este grau, se existirem, estão associadas ao nó central (funções de interpolação 4.7).

Por exemplo, um elemento do 4º grau tem a seguinte numeração para as funções de interpolação

- Funções 1-4 associadas aos vértices 1-4.
- Funções 5,9 e 13 associadas ao lado 1.
- Funções 6,10 e 14 associadas ao lado 2.
- Funções 7,11 e 15 associadas ao lado 3.
- Funções 8,12 e 16 associadas ao lado 4.
- Função 17 associada ao nó central.

Como comentado anteriormente, as funções bidimensionais são construídas a par-

tir do produto de funções unidimensionais. A conexão entre os dois conjuntos (de modo a se ter a seqüência de numeração definida anteriormente) é estabelecida através de dois arranjos bidimensionais, INDES e INDEB, definidos por

INDES(I,J) = Número da função de interpolação (associada a um vértice ou a um lado) correspondente ao produto da I-ésima função de interpolação (1-D) na direção KSI, pela J-ésima função de interpolação (1-D) na direção ETA.

INDEB(I,J) = Análogo de INDES, só que é usado para construir funções bo-lhas.

Estes arranjos são construídos através dos seguintes códigos:

*Código para construção de INDES:*

```

INDES(1,1) = 1
INDES(2,1) = 2
INDES(2,2) = 3
INDES(1,2) = 4
NBANT = 0
PARA LC = 3, (MXPL + 1) FAÇA
  SE (LC ≥ 6) NBANT = (LC - 4)*(LC - 5)/2
  NFANT = 4*(LC - 2) + NBANT
  INDES(LC,1) = NFANT + 1
  INDES(2,LC) = NFANT + 2
  INDES(LC,2) = NFANT + 3
  INDES(1,LC) = NFANT + 4
-- FIM DO FAÇA

```

onde MXPL é igual a maior ordem polinomial usada.

Código para construção de INDEB:

```

NUMB = 1
II = 0
PARA IGR = 4, MXPL FAÇA
  II = II + 1
  I = II + 1
  PARA J = 1, II FAÇA
    I = I - 1
    INDEB(I, J) = 4*IGR + NUMB
    NUMB = NUMB + 1
  FIM DO FAÇA
FIM DO FAÇA

```

$\eta \rightarrow$		1	2	3	4	5
$\xi \downarrow$	1	1	4	8	12	16
	2	2	3	6	10	14
	3	5	7			
	4	9	11			
	5	13	15			

$\eta \rightarrow$		1	2	3	4	5
$\xi \downarrow$	1	17	23	30	38	47
	2	22	29	37	46	
	3	28	36	45		
	4	35	44			
	5	43				

Fig.4.4. Arranjo INDES para elementos com  $p \leq 4$ ,  
e INDEB para elementos com  $4 \leq p \leq 8$ .

#### 4.4.2 Construção das Funções de Interpolação Bidimensionais.

O cálculo das funções de interpolação e de suas derivadas em um ponto de integração (KSI,ETA), é feito utilizando-se os arranjos INDES e INDEB. Para efeito de ilustração é mostrado o cálculo dos valores das funções de interpolação. O cálculo das derivadas é feito simultaneamente e de maneira análoga.

FILK(I) = I-ésima função de interpolação 1-D, na direção KSI, associada a vértices ou lados.

FILET(J) = Idêntico a FILK, só que na direção ETA.

BKP(L) = L-ésima função de interpolação 1-D, na direção KSI, associada a funções bolha.

BETP(K) = Idêntico a BKP, só que na direção ETA.

FUNCID = Subrotina que calcula os valores das funções unidimensionais

auxiliares no ponto de integração unidimensional EK.

IGRAU = Grau  $p$  das funções de interpolação.

DPSIR(I) = Valor da  $i$ -ésima função de interpolação bidimensional.

CALL FUNCID(KSI,IGRAU,FILK,BKP)

CALL FUNCID(ETA,IGRAU,FILET,BETP)

C Valores das funções associadas aos vértices

PARA I = 1,2 FAÇA

PARA J = 1,2 FAÇA

DPSIR(INDES(I,J)) = FILK(I) \* FILET(J)

FIM DO FAÇA

FIM DO FAÇA

C Valores das funções associadas aos lados

PARA N = 3,(IGRAU+1) FAÇA

DPSIR(INDES(N,1)) = FILK(N) \* FILET(1)

DPSIR(INDES(2,N)) = FILK(2) \* FILET(N)

DPSIR(INDES(N,2)) = FILK(N) \* FILET(2)

DPSIR(INDES(1,N)) = FILK(1) \* FILET(N)

FIM DO FAÇA

C Valores das funções bolhas

PARA L = 1,(IGRAU - 3) FAÇA

PARA K = 1,(IGRAU - 3) FAÇA

SE (L + K ≤ IGRAU - 2) ENTÃO

DPSIR(INDEB(L,K)) = BKP(L) \* BETP(K)

FIM DO SE

FIM DO FAÇA

FIM DO FAÇA

Portanto, para se construir a matriz de rigidez de um elemento de ordem IGRAU, basta fazer os produtos das funções 1-D mostrados acima, percorrendo os arranjos INDES e INDEB até a linha/coluna (IGRAU+1) e (IGRAU-3) respectivamente.

## OBSERVAÇÕES:

(I) Ao se utilizar o esquema de numeração das funções de interpolação, definido na Seção 4.4.1, as colunas, relativas aos graus de liberdade de um determinado nó, não ocuparão posições contíguas dentro da matriz de um elemento. Os graus de liberdade estarão agrupados segundo a ordem das funções de interpolação às quais estão associados. Ou seja, os primeiros graus de liberdade são os associados às funções lineares, depois virão os associados às funções quadráticas, e assim sucessivamente, como esquematizado na Figura 4.5.

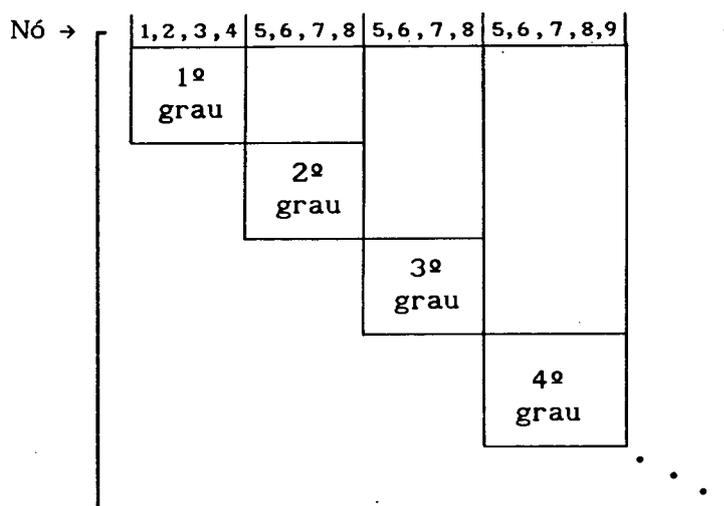


Fig. 4.5 Ordem das funções de interpolação utilizadas para a construção de algumas parcelas da matriz de um elemento  $p$ -hierárquico.

Note-se que esta ordenação dos graus de liberdade é diferente da normalmente utilizada, porém, é a mais adequada para um processamento  $p$ -adaptativo. No Capítulo 6 é apresentada uma estrutura de dados capaz de lidar com esta situação.

(II) Pela Figura 4.5 nota-se que não é necessário se utilizar a mesma ordem de integração numérica para as diversas parcelas da matriz de um elemento. Neste trabalho adotou-se a seguinte regra para uma dada parcela (elementos com  $1 \leq p \leq 8$ ):

$$\text{ORDEM} = \text{MIN}(10, \text{IGRAU} + K) \quad (4.21)$$

onde IGRAU é a ordem das funções relativas a esta parcela da matriz e  $K$  depende principalmente do grau de distorção do elemento. Usou-se  $K = 2$  para malhas não distorcidas.

#### 4.5 Patch-test e Análise Espectral dos Elementos Hierárquicos para Elasticidade 2D.

Uma fase de suma importância na implementação de um novo elemento é a realização de patch-tests e a determinação de seu espectro. Através do primeiro é verificado se a solução exata é obtida quando se utiliza elementos de ordem  $p$  sendo a solução exata é um polinômio de ordem menor ou igual a  $p$  (Zienkiewicz & Morgan, 1983). Através da análise espectral é verificado se os modos de corpo rígido são bem representados pelo elemento e se o elemento é invariante em relação à rotações dos sistemas de coordenadas (naturais por exemplo).

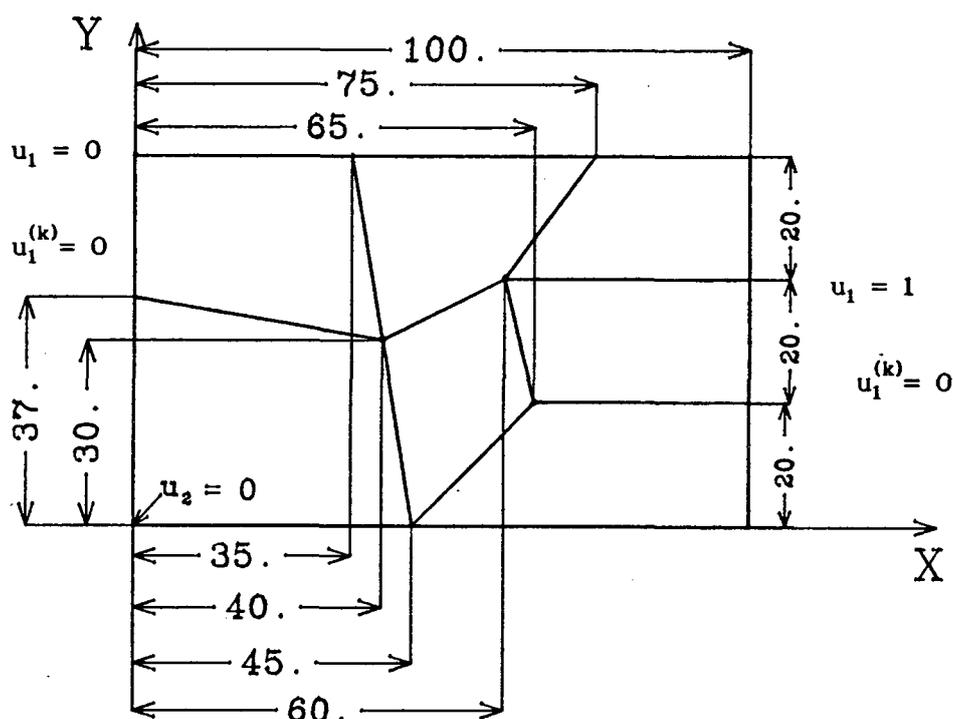


Fig. 4.6. Malha e condições de contorno para o primeiro patch-test (unidades em mm).  $u_n^{(k)}$  são os graus de liberdade das funções hierárquicas associadas aos nós dos lados dos elementos.

Na Figura 4.6 é mostrado o primeiro patch de elementos utilizado assim como as condições de contorno impostas. Adotou-se, para este problema, estado plano de tensão, módulo de elasticidade  $E = 2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e a espessura da membrana igual a 1,0 mm. A solução exata é

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= 0.01 \\ \epsilon_{yy} &= -0.003 \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

$$U(u) = 6,3 \times 10^4 \text{ N.mm}$$

onde  $U(u)$  é a energia de deformação.

O segundo patch de elementos utilizado é mostrado na Figura 4.7. Desta vez foram impostas condições de contorno correspondentes a um estado de cisalhamento puro, ou seja

$$\gamma_{xy} = 0.04$$

$$\epsilon_{yy} = 0$$

$$\epsilon_{xx} = 0$$

$$(4.23)$$

Considerou-se existir um estado plano de deformação,  $E = 2,6 \times 10^9 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0,3$  e espessura unitária.

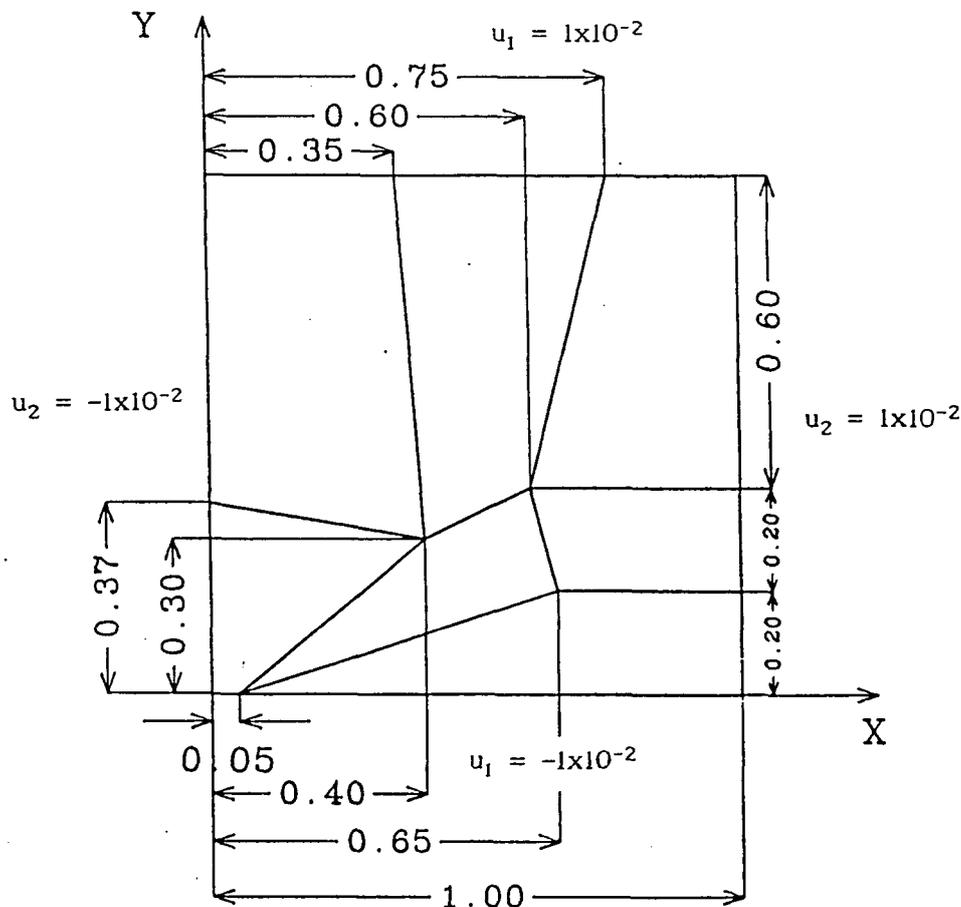


Fig. 4.7. Malha e condições de contorno para o patch-test de cisalhamento puro (unidades em mm). Além das condições de contorno mostradas acima foi imposto que  $u_n^{(k)} = 0$  em  $\partial\Omega$ .

Ao se utilizar o conjunto de funções hierárquicas,  $Q'_p$ , da Seção 4.2 obteve-se para o primeiro patch-test, em todos os pontos calculados, deformações concordantes com os valores exatos até pelo menos os 13 primeiros algarismos significativos. Como para este patch (elementos com  $p = 8$ ) o logaritmo do número de condição da matriz de rigidez vale 2,711, conclui-se que o elemento passa no patch-test.

Para o patch-test da Figura 4.7 o conjunto  $Q'_p$  também forneceu os resultados esperados. Neste caso houve concordância, entre as soluções exata e aproximada, até pelo menos os 15 primeiros algarismos significativos. O logaritmo do número de condição da matriz de rigidez para este patch (elementos com  $p = 8$ ) vale 1,3059.

A análise espectral dos elementos hierárquicos, construídos a partir do conjunto  $Q'_p$ , mostrou como esperado três autovalores nulos. Para testar a invariância deste conjunto em relação a rotação dos sistemas naturais dos elementos, utilizou-se o patch da Figura 4.6 e várias configurações de sistemas naturais, ora deixando-se todos os sistemas paralelos, ora não. Obteve-se diferentes autovalores para as diferentes configurações de sistemas naturais, o que demonstra que o conjunto  $Q'_p$  não é invariante em relação à rotação dos sistemas naturais. Isto pode ser visualizado na Figura 4.8, a qual mostra a distribuição de sinais das funções  $\hat{\psi}_2^{Ln}$ ,  $n = 1-4$ , ao longo dos lados de um elemento para rotações de  $k \cdot 90^\circ$ ,  $k=0-3$ , dos sistemas naturais.

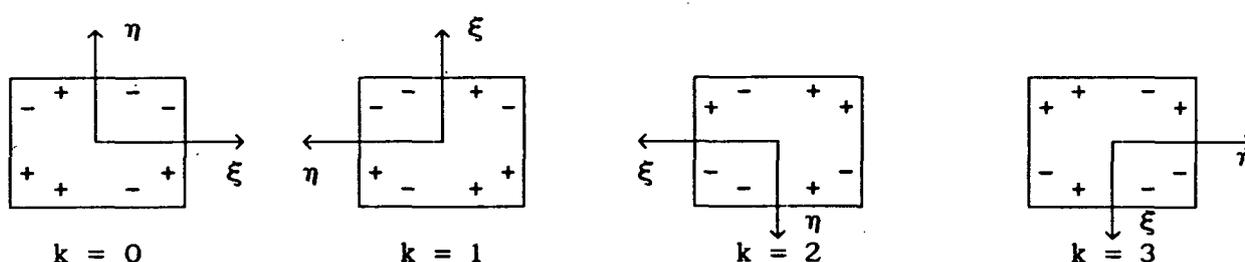


Fig. 4.8. Distribuição de sinais das funções  $\hat{\psi}_2^{Ln}$ ,  $n = 1-4$ , do conjunto  $Q'_p$  ao longo dos lados de um elemento.

A Figura 4.8 mostra que, dependendo da posição relativa dos sistemas naturais de dois elementos vizinhos, haverá uma incompatibilidade de sinais das funções ímpares ao longo do lado comum. Na Figura 4.9 foi representada uma destas configurações incompatíveis. Nesta configuração o lado 2 do elemento  $K_1$  coincide com o lado 2 do elemento  $K_2$ . Nota-se que ao longo do lado em comum a função  $\hat{\psi}_2^{L2}$  do elemento  $K_1$  terá um sinal conflitante com o da função  $\hat{\psi}_2^{L2}$  do elemento  $K_2$ .

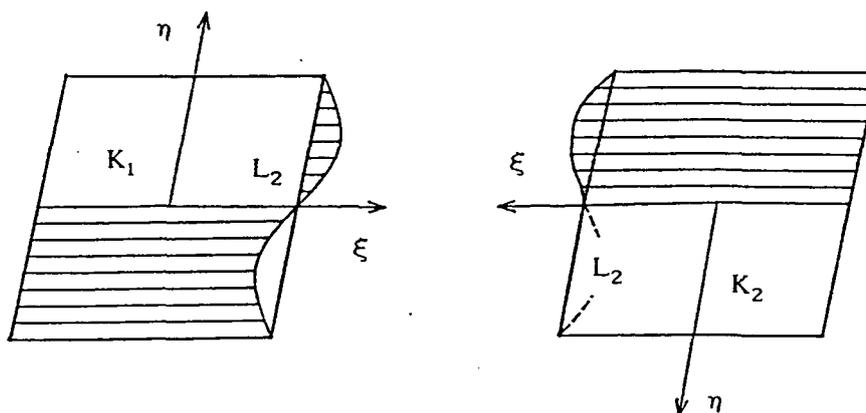


Fig. 4.9. Configuração de sistemas naturais incompatível para as funções ímpares do conjunto  $Q'_p$ .

Existem pelo menos três soluções para este problema de incompatibilidade de sinais:

(I) A solução mais óbvia e simples é sempre utilizar configurações, de sistemas naturais, compatíveis. Neste caso o programa deve ser capaz de detectar uma configuração incompatível. Neste trabalho adotou-se esta solução .

(II) Um aperfeiçoamento da solução I é, sempre que se detectar dois elementos com sistemas naturais em posições incompatíveis, multiplicar por  $-1$  as devidas linhas e colunas da matriz de rigidez de *um* dos elementos.

(III) Uma forma de evitar os testes de compatibilidade é fazer com que inicialmente haja incompatibilidade de sinais das funções ímpares ao longo de todo o contorno inter-elementos. Isto pode ser conseguido multiplicando-se as funções  $\hat{\psi}_1^{L3}$  e  $\hat{\psi}_1^{L4}$ , do conjunto  $Q'_p$ , por  $(-1)^{l+1}$ . Ou seja, multiplicar por  $-1$  as funções ímpares associadas aos lados 3 e 4 dos elementos. Feito isto, antes de sobrepor a matriz de um elemento, verifique, para cada lado L do elemento, se a matriz do elemento vizinho ao lado L já foi sobreposta. Caso não tenha sido multiplique por  $-1$  as devidas linhas e colunas, da matriz deste elemento, relativas as funções ímpares associadas ao lado L.

Como comentado na Seção 4.1.1 o uso de funções hierárquicas resulta em sistemas de equações bem condicionados. Na Figura 4.10 foi traçado o logaritmo do número de condição das matrizes referentes ao patch de Figura 4.6 versus o número de graus de

liberdade. O número de condição é definido por (Babuska et al., 1989).

$$\text{NCOND} = \lambda_{\max} / \lambda_{\min} \quad (4.22)$$

onde  $\lambda_{\max}$  e  $\lambda_{\min}$  são o maior e o menor autovalores respectivamente.

Os números de condição foram calculados após um pré-condicionamento trivial, ou seja, os termos da matriz de rigidez são reescalados de modo a se ter  $K_{II} = 1$  (Babuska et al., 1989). Nota-se um crescimento bastante lento do logaritmo do número de condição apesar dos elementos do patch estarem bastante distorcidos.

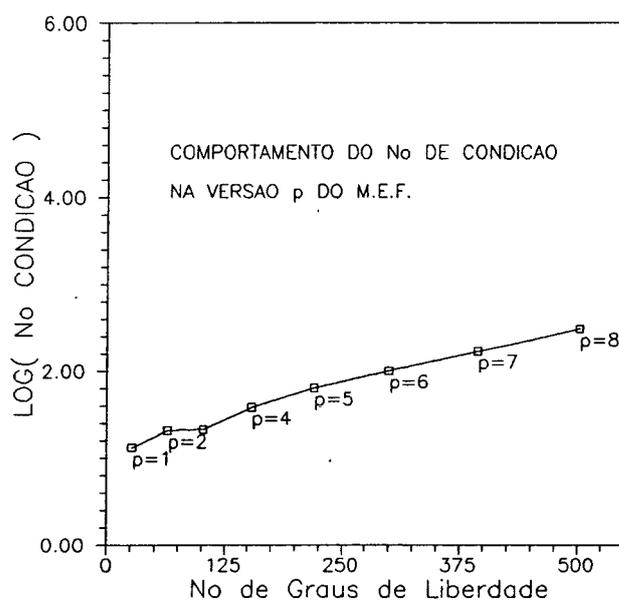


Fig. 4.10. Comportamento do número de condição utilizando o conjunto  $Q'_p$ .

## CAPÍTULO 5

### ESTIMATIVA A POSTERIORI DO ERRO DE DISCRETIZAÇÃO

#### 5.1 Introdução.

Como visto no Capítulo 2 uma estimativa *a priori* do erro de discretização fornece informações como a taxa de convergência assintótica da solução aproximada quando  $h \rightarrow 0$  ou  $p \rightarrow \infty$ . Porém, apenas através de uma análise *a posteriori*, ou seja, após uma aproximação  $u_p$  da solução ter sido obtida, é possível se estimar quantitativamente o erro  $e = u - u_p$ , para uma particular discretização utilizada.

Existem vários critérios que um particular estimador de erro *a posteriori* deve satisfazer. Os principais são:

(1) Fornecer uma boa estimativa do erro independentemente do uso de extensão  $h$ ,  $p$  ou  $h-p$  para aumentar a dimensão do espaço solução. Ou seja, o índice de efetividade

$$\gamma = \Theta / \|e\|, \tag{5.1}$$

onde  $\Theta$  é a estimativa do erro global, deve se aproximar de 1 quando  $h \rightarrow 0$  ou  $p \rightarrow \infty$ .

(2) O estimador de erro deve preferencialmente requerer apenas informações locais ao invés de globais.

(3) O custo computacional do estimador deve representar apenas uma pequena parcela do custo total da análise.

(4) O estimador deve estar matematicamente bem fundamentado a fim de se garantir que a estimativa do erro global se comporte como o erro global.

(5) O estimador deve ser aplicável a uma vasta classe de elementos finitos e de problemas.

(6) O estimador deve ser simples de implementar em programas já existentes.

Vários são os estimadores de erro existentes na literatura para o Método de Elementos Finitos (MEF). Porém poucos satisfazem os critérios listados acima. Em Oden et al., (1989) é apresentado um amplo estudo de várias técnicas de estimativa *a posteriori* do erro de discretização para a versão *h-p* do MEF no contexto de problemas elípticos escalares. O Método dos Resíduos em Elementos (MRE) e o método baseado em pós-processamento da solução aproximada (MPP), mostraram-se bastante precisos. Neste capítulo são apresentados os formalismos matemático dos métodos MRE e MPP assim como algumas modificações introduzidas a fim de torná-los mais precisos e de menor custo. No Capítulo 7 a performance dos estimadores é testada numericamente.

## 5.2 O Método dos Resíduos em Elementos para Problemas da Elasticidade e de Potencial

Como visto na Seção 2.4.2.1, no Método dos Resíduos em Elementos resolve-se, para cada elemento finito  $K$ , um problema local a fim de estimar o erro de uma dada solução aproximada. Antes de apresentar o problema a ser resolvido são necessárias as definições dadas a seguir no contexto do Problema de Poisson.

### 5.2.1 O Método dos Resíduos em Elementos para Problemas de Potencial.

Na Seção 3.3 mostrou-se que a aproximação de elementos finitos para o Problema de Poisson (3.7) pode ser obtida resolvendo-se o seguinte problema:

Encontre  $u_p \in X_p(\Omega_h)$ , tal que

$$B(u_p, v_p) = L(v_p) \quad \forall v_p \in X_p(\Omega_h) \quad (5.2)$$

onde

$$B(u_p, v_p) = \int_{\Omega_h} \left( \frac{\partial v_p}{\partial x_1} \frac{\partial u_p}{\partial x_1} + \frac{\partial v_p}{\partial x_2} \frac{\partial u_p}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (5.3)$$

$$L(v_p) = \int_{\Omega_h} f_v v_p dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_N^h} f_s v_p ds \quad (5.4)$$

e o espaço de elementos finitos  $X_p$  é definido usando-se o conjunto de funções de interpolação *p*-hierárquicas  $Q'_p(K)$  definido na Seção 4.2

$$X_p = \{ v_p \in H^1(\Omega_h) \ni v_p|_K \in Q'_p(K), K \in L_H, v_p = 0 \text{ em } \Gamma_D \} \quad (5.5)$$

onde  $v_p|_K$  indica a restrição da função  $v_p$  ao elemento  $K$  e  $L_H$  é uma partição do domínio  $\Omega$  (vide Seção 3.2).

O erro de discretização, da aproximação  $u_p$ ,

$$e_p = u - u_p \quad (5.6)$$

satisfaz a seguinte condição de ortogonalidade (vide Seção 3.2)

$$B(e_p, v_p) = 0 \quad \forall v_p \in X_p \quad (5.7)$$

Define-se também o espaço enriquecido  $X_{p+1}$  que satisfaz a

$$X_p \subset X_{p+1} \subset H^1_{\gamma}(\Omega) \quad (5.8)$$

onde  $H^1_{\gamma}(\Omega)$  foi definido em (3.10).

A solução enriquecida  $u_{p+1} \in X_{p+1}$  satisfaz a

$$B(u_{p+1}, v_{p+1}) = L(v_{p+1}) \quad \forall v_{p+1} \in X_{p+1} \quad (5.9)$$

e o erro relativo

$$E_p = u_{p+1} - u_p = e_p - e_{p+1} \quad (5.10)$$

onde  $e_{p+1} = u - u_{p+1}$ , satisfaz a condição de ortogonalidade

$$B(E_p, v_p) = B(e_p, v_p) - B(e_{p+1}, v_p) = 0 \quad \forall v_p \in X_p \quad (5.11)$$

**Lema 5.1** (Oden et al., 1989)

Seja  $u$  a solução exata do Problema (3.11) e  $u_{p+1}$  a solução aproximada correspondente ao espaço enriquecido  $X_{p+1}$ . Então, para um elemento arbitrário  $u_p \in X_p$ , tem-se

$$\|e_p\|_E^2 = \|e_{p+1}\|_E^2 + \|E_p\|_E^2 \quad (5.12)$$

Se o espaço  $X_{p+1}$  for substancialmente maior que o espaço  $X_p$ , então,  $\|e_{p+1}\|_E$  deve ser bem menor que  $\|E_p\|_E$ . Neste caso, será justificável estimar  $\|E_p\|_E$  em vez de  $\|e_p\|_E$ . Esta será uma hipótese severa, ou não, dependendo do valor de  $\|e_{p+1}\|_E$ . No MRE, como será visto mais adiante, estima-se a projeção de  $E_p$ , num espaço apropriado, em vez de  $e_p$ .

*Mais Algumas Definições:*

Seja a restrição, ao espaço  $X_{p+1}$ , do operador interpolação- $p$  global, definida por

$$\begin{aligned} I_p : X_{p+1} &\rightarrow X_p \\ (I_p v_{p+1})|_K &= \Pi_p(v_{p+1}|_K) \quad \forall K \in L_H \text{ e } \forall v_{p+1} \in X_{p+1} \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde  $\Pi_p : X_{p+1}(K) \rightarrow X_p(K)$  é a restrição do operador interpolação- $p$  local (Oden & Carey, 1983).

Seja, por exemplo, o espaço  $X_p$  gerado pelas funções bilineares usuais e o espaço  $X_{p+1}$  por funções bilineares e por funções hierárquicas do 2º grau. Se o operador  $\Pi_p$  for o operador projeção de Lagrange  $(I_p v_{p+1})|_K$  será,  $\forall K \in L_H$  e  $\forall v_{p+1} \in X_{p+1}$ , uma função bilinear.

Considere agora o espaço  $X_{p+1}(K)$  de restrições de funções pertencentes a  $X_{p+1}$ , ao elemento  $K \in L_H$

$$X_{p+1}(K) = \{ w_{p+1} = v_{p+1}|_K \ni v_{p+1} \in X_{p+1} \} \quad (5.14)$$

Do fato que o espaço  $X_{p+1}(K)$  é de dimensão finita e de  $\Pi_p$  ser um operador projeção tem-se (Oden et al., 1989)

$$\|v_{p+1} - \Pi_p v_{p+1}\|_E^K \leq C_K \|v_{p+1}\|_E \quad \forall v_{p+1} \in X_{p+1}(K) \quad (5.15)$$

onde  $C_K$  depende dos parâmetros  $h_K$  e  $p_K$  do elemento e  $\|\cdot\|_E^K$  é calculada sobre o domínio do elemento  $K$ .

Pode-se agora definir o subespaço  $X_{p+1}^0$  de  $X_{p+1}$ , ou seja

$$X_{p+1}^0 = \{ v_{p+1} \in X_{p+1} \ni I_p v_{p+1} = 0 \} \quad (5.16)$$

Pela definição de  $I_p$ ,  $X_{p+1}^0$  pode também ser definido por

$$X_{p+1}^0 = \{ v_{p+1} \in X_{p+1} \ni v_{p+1}|_K \in X_{p+1}^0(K), K \in L_H \} \quad (5.17)$$

onde

$$X_{p+1}^0(K) = \{ v_{p+1} \in X_{p+1}(K) \ni \Pi_p(v_{p+1}) = 0 \} \quad (5.18)$$

$X_{p+1}^0(K)$  nada mais é que o núcleo do operador interpolação  $\Pi_p$  (Oden et al., 1990).

Se forem usados  $X_p$ ,  $X_{p+1}$  e  $I_p$  do exemplo anterior, o espaço  $X_{p+1}^0(K)$  é simplesmente o gerado pelas funções de interpolação hierárquicas do 2º grau (vide Figura 5.1). No final desta seção são discutidos mais alguns detalhes da construção do espaço  $X_{p+1}^0(K)$ .

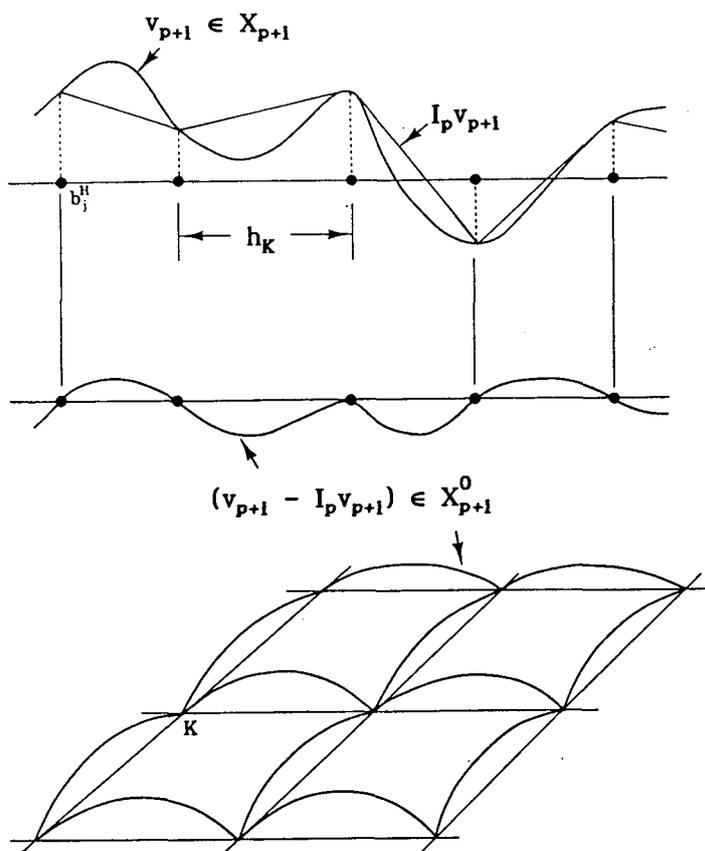


Fig. 5.1. Exemplos de funções no espaço  $X_{p+1}^0$  para malhas uni- e bi-dimensionais (Oden et al., 1989).

Introduz-se agora o operador projeção global  $P_p$  definido por

$$P_p : H_\gamma^1 \rightarrow X_{p+1}^0, \quad (5.19)$$

$$B(v_{p+1} - P_p v_{p+1}, w_{p+1}) = 0 \quad \forall w_{p+1} \in X_{p+1}^0$$

Pode-se mostrar que (Oden et al., 1989)

$$\|P_p E_p\|_E \leq \|E_p\|_E \leq C \|P_p E_p\|_E \quad (5.20)$$

onde  $C = \max_{K \in L_H} C_K$  e  $C_K$  foi definida em (5.15).

Sabe-se que  $B(e_{p+1}, v_{p+1}) = 0 \quad \forall v_{p+1} \in X_{p+1}^0$ , logo

$$B(e_{p+1}, v_{p+1}) = 0 \quad \forall v_{p+1} \in X_{p+1}^0 \quad (5.21)$$

Portanto  $P_p e_{p+1} = 0$ . Sendo  $E_p = e_p - e_{p+1}$ , tem-se

$$P_p E_p = P_p e_p \quad (5.22)$$

ou seja, a projeção do erro relativo,  $P_p E_p$ , no espaço  $X_{p+1}^0$  é igual a projeção do erro,  $P_p e_p$ , no mesmo espaço. Isto, juntamente com (5.20), justifica que se use a projeção  $P_p E_p$  no espaço  $X_{p+1}^0$  como uma estimativa do erro  $e_p$  desde que a constante  $C$  mantenha-se dentro de valores aceitáveis. Em Oden et al., (1989) o valor de  $C_K$  (no caso do operador de Laplace, elemento não distorcido, etc.) foi estimado em 1.25, o que indica uma possível subestimação do erro ao se usar  $\|P_p E_p\|_E$  em vez de  $\|E_p\|_E$ .

*Estimativa da Projeção  $P_p e_p$ .*

Oden et al., (1989) sugeriram que uma estimativa de  $\|P_p e_p\|_E^2$  pode ser obtida somando-se as parcelas  $(\|\varphi_K\|_E^K)^2$ ,  $K \in L_H$ , onde  $\varphi_K$  são denominadas funções indicadoras de erro. As funções  $\varphi_K$  podem ser obtidas resolvendo-se, para cada elemento finito  $K$ , um problema local cujo vetor do lado direito leva em consideração além do resíduo da equação diferencial que rege o problema, a violação das condições de contorno naturais e a descontinuidade do fluxo normal nos contornos inter-elementos. No caso do Problema de Poisson (3.7) este problema local é definido por (Oden et al., 1986 ou Oden et al., 1989):

Encontre  $\varphi_K \in X_{p+1}^0(K)$ , tal que

$$B_K(\varphi_K, v_{p+1}) = \int_K r_p v_{p+1} d\Omega + \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_p^*}{\partial n_K} - \frac{\partial u_p}{\partial n_K} \right) v_{p+1} ds + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} \left( f_s - \frac{\partial u_p}{\partial n_K} \right) v_{p+1} ds \quad \forall v_{p+1} \in X_{p+1}^0(K) \quad (5.23)$$

onde:

- $r_p = f_v + \nabla^2 u_p$  é o resíduo da Equação de Poisson no elemento  $K$ .
- $u_p^*$  é a solução aproximada nos elementos vizinhos ao elemento  $K$ . Portanto

$$\left( \frac{\partial u_p^*}{\partial n_K} - \frac{\partial u_p}{\partial n_K} \right) = - \left( \frac{\partial u_p}{\partial n_K^*} + \frac{\partial u_p}{\partial n_K} \right) \quad \text{em } \partial K \setminus \partial\Omega \quad (5.24)$$

representa o salto do fluxo normal no contorno inter-elementos.  $n_K^*$  são as componentes do vetor normal a um elemento vizinho.

- A parcela

$$\left( f_s - \frac{\partial u_p}{\partial n_K} \right) \quad \text{em } \partial K \cap \Gamma_N \quad (5.25)$$

representa a violação das condições de contorno naturais na parcela do contorno do elemento  $K$  que coincide com  $\Gamma_N$ .

A estimativa de  $\|P_p e_p\|_E$ , ou seja, a estimativa da norma da energia do erro global  $e_p$ , no MRE, é então dada por

$$\begin{aligned} \|e_p\|_E &\doteq \|E_p\|_E \doteq \|P_p E_p\|_E = \|P_p e_p\|_E \doteq \Theta_{\text{MRE}} = \left[ \sum_{K \in L_H} B_K(\varphi_K, \varphi_K) \right]^{1/2} \\ &= \left[ \sum_{K \in L_H} \|\varphi_K\|_E^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde  $\Theta_{\text{MRE}}$  denota a estimativa do erro global utilizando-se o método MRE.

Pode-se mostrar que (Oden et al., 1989)

$$\|P_p e_p\|_E \leq \Theta_{\text{MRE}} \quad (5.27)$$

Note-se que em vista de (5.20)  $\Theta_{\text{MRE}}$  pode ser vista também como a estimativa de  $\|E_p\|_E$ , e, apesar desta estimativa ter um caráter global, as parcelas  $\|\varphi_K\|_E^K$  (indicadores de erro locais) podem ser usadas como base de um algoritmo adaptativo de enriquecimento dos elementos (vide Capítulo 6).

#### Modificação do Problema Local (5.23).

A implementação do estimador MRE pode ser simplificada se o problema local (5.23) for modificado através da integração por partes da parcela que leva em consideração o resíduo da equação diferencial, ou seja

$$\begin{aligned}
 B_K(\varphi_K, v_{p+1}) &= \int_{\partial K} \frac{\partial u_p}{\partial n_K} v_{p+1} ds - \int_K \left( \nabla u_p \cdot \nabla v_{p+1} - v_{p+1} f_v \right) d\Omega + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \left( \frac{\partial u_p^*}{\partial n_K} - \frac{\partial u_p}{\partial n_K} \right) v_{p+1} ds + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} \left( f_s - \frac{\partial u_p}{\partial n_K} \right) v_{p+1} ds \\
 &= \int_K f_v v_{p+1} d\Omega + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} f_s v_{p+1} ds - \int_K \nabla u_p \cdot \nabla v_{p+1} d\Omega + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \left( \frac{\partial u_p^*}{\partial n_K} + \frac{\partial u_p}{\partial n_K} \right) v_{p+1} ds
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

onde usou-se o fato de que

$$v_{p+1} \in X_{p+1}^0(K) \text{ e } X_{p+1}^0(K) \subset X_{p+1} \rightarrow v_{p+1} = 0 \text{ em } \Gamma_D \tag{5.29}$$

Note-se também que  $\varphi_K \in X_{p+1}^0(K)$  o que implica que  $\varphi_K = 0$  em  $\Gamma_D$ .

Portanto o problema local (5.23) fica:

Encontre  $\varphi_K \in X_{p+1}^0(K)$ , tal que  $\forall v_{p+1} \in X_{p+1}^0(K)$

$$B_K(\varphi_K, v_{p+1}) = L_K(v_{p+1}) - B_K(u_p, v_{p+1}) + \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \left[ \frac{\partial u_p}{\partial n_K} \right]_M v_{p+1} ds \tag{5.30}$$

onde

$$L_K(v_{p+1}) = \int_K f_v v_{p+1} d\Omega + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} f_s v_{p+1} ds, \tag{5.31}$$

$$B_K(u_p, v_{p+1}) = \int_K \nabla u_p \cdot \nabla v_{p+1} \, d\Omega \quad (5.32)$$

e

$$\left[ \frac{\partial u_p}{\partial n_K} \right]_M = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_p}{\partial n_K} + \frac{\partial u_p}{\partial n_K} \right) \quad (5.33)$$

é o fluxo normal médio ao longo do contorno inter-elementos.

Note-se que, desta forma, a construção do problema local (5.30) torna-se bastante semelhante à construção da matriz de rigidez e do vetor carregamento para um elemento qualquer.

Escrevendo-se  $\varphi_K$ ,  $v_{p+1}$  e  $u_p$  em termos das funções base tem-se:

$$\varphi_K(\mathbf{x}) = \varphi_\beta^K \psi_\beta(\mathbf{x}) \quad \beta = 1, \dots, \dim(X_{p+1}^0(K)) \quad (5.34)$$

$$v_{p+1}(\mathbf{x}) = v_\alpha^{p+1} \psi_\alpha(\mathbf{x}) \quad \alpha = 1, \dots, \dim(X_{p+1}^0(K)) \quad (5.35)$$

$$u_p(\mathbf{x}) = u_\gamma^p \bar{\psi}_\gamma(\mathbf{x}) \quad \gamma = 1, \dots, \dim(X_p(K)) \quad (5.36)$$

onde  $\{\psi_\alpha\}$  forma a base de  $X_{p+1}^0(K)$  e  $\{\bar{\psi}_\gamma\}$  forma a base de  $X_p(K)$ . A solução do Problema (5.30) pode ser encontrada resolvendo-se, após a imposição das condições de contorno em  $\partial K \cap \Gamma_D$ , o seguinte sistema de equações (não há soma em  $\kappa$ ):

$$B_K(\psi_\alpha, \psi_\beta) \varphi_\beta^K = L_K(\psi_\alpha) - B_K(\bar{\psi}_\gamma, \psi_\alpha) u_\gamma^p + \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \left[ \frac{\partial u_p}{\partial n_K} \right]_M \psi_\alpha \, ds \quad (5.37)$$

*Mais Alguns Detalhes Sobre o Espaço  $X_{p+1}^0(K)$ .*

O espaço enriquecido  $X_{p+1}$  é geralmente construído aumentando-se uniformemente, em cada elemento finito  $K \in L_H$ , a ordem da aproximação de  $p$  para  $p + 1$  ( $i = 1$ ) (Oden et al., 1989). Neste caso  $X_{p+1}$  é denotado por  $X_{p+1}$ .

Como visto anteriormente, no MRE estima-se a projeção  $P_p E_p$  em vez de  $e_p$  e esta aproximação será tão menos severa quanto melhor  $u_{p+1} \in X_{p+1}$  representar a solução  $u$  (Lema 5.1). Devido a esta constatação, neste trabalho são analisados os casos em que  $i = 1$  e  $i = 2$ , ou seja, são feitos experimentos numéricos utilizando-se os

espaços  $X_{p+1}$  e  $X_{p+2}$ . Conseqüentemente se estará estimando a projeção  $P_p E_p$ , ora no espaço  $X_{p+1}^0(K)$ , ora no espaço  $X_{p+2}^0(K)$ . Os índices "1" e "2" indicarão, no Capítulo 7, o uso da primeira e da segunda abordagem, respectivamente. Por exemplo, a estimativa da norma da energia do erro global, dada pela Equação (5.26), é denotada por  $\Theta_{MRE1}$  ou por  $\Theta_{MRE2}$ .

No caso da versão  $p$  do Método de Elementos Finitos, se forem utilizadas funções de interpolação  $p$  hierárquicas, a base do espaço  $X_{p+1}^0(K)$  é constituída apenas das funções que são adicionadas hierárquicamente à base do espaço  $X_p(K)$ , quando a ordem da aproximação passa de  $p$  para  $p + 1$ . Portanto a dimensão de  $X_{p+1}^0(K)$  é de apenas (Bank & Weiser, 1985)

$$\dim(X_{p+1}^0(K)) = \dim(X_{p+1}(K)) - \dim(X_p(K)) \quad (5.38)$$

o que torna a solução dos problemas locais (5.30) bastante econômica.

As dimensões dos conjuntos de funções de interpolação hierárquicos, utilizados neste trabalho, são dadas por

$$\dim(Q_p^i(K)) = p_K^2 / 2 + 3p_K / 2 + 3 \quad (5.39)$$

Conseqüentemente a dimensão dos problemas locais (para o caso de a solução ser uma função escalar) será igual a

$$i = 1 \begin{cases} \dim = p + 2, & p \neq 1 \\ \dim = 4, & p = 1 \end{cases} \quad i = 2 \begin{cases} \dim = 2p + 5, & p \neq 1 \\ \dim = 8, & p = 1 \end{cases} \quad (5.40)$$

Uma conseqüência, de importância óbvia, do uso dos conjuntos  $X_{p+1}^0(K)$  na formulação dos problemas locais associados ao MRE, é a de garantir que o sistema de equações (5.37) seja positivo-definido. Isto ocorre mesmo quando  $\partial K \cap \Gamma_D = \emptyset$ , ou seja, quando o problema local for um problema de Neumann (Bank & Weiser, 1985).

### 5.2.2 O Método dos Resíduos em Elementos para Problemas da Elasticidade.

O MRE para problemas da elasticidade é conceitualmente idêntico ao desenvolvido na seção anterior para o Problema de Poisson. Portanto, nesta seção o método será apresentado de uma maneira mais sucinta.

*Estimativa da Projeção  $P_p E_p$ .*

A estimativa da projeção  $P_p E_p$ , no caso da elasticidade, é obtida resolvendo-se, para cada elemento finito  $K \in L_H$ , o seguinte problema local (Oden et al., 1986):

Encontre  $\{\varphi_K\} \in X_{p+1}^0(K)$ , tal que

$$B_K(\varphi_K, \mathbf{v}_{p+1}) = \int_K \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{v}_{p+1} \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} \left( \mathbf{t}(\mathbf{u}_p^*) - \mathbf{t}(\mathbf{u}_p) \right) \cdot \mathbf{v}_{p+1} \, ds + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} \left( \mathbf{g} - \mathbf{t}(\mathbf{u}_p) \right) \cdot \mathbf{v}_{p+1} \, ds \quad \forall \mathbf{v}_{p+1} \in X_{p+1}^0(K) \quad (5.41)$$

onde (vide Seção 3.1.2):

$$\bullet B_K(\varphi_K, \mathbf{v}_{p+1}) = \int_K \sigma_{IJ}(\varphi_K) \varepsilon_{IJ}(\mathbf{v}_{p+1}) \, d\Omega \quad (5.42)$$

$$\bullet \mathbf{r}_p = \{\mathbf{r}_1^p\} = \{\sigma_{IJ}(\mathbf{u}_p),_j + f_1\} \quad (5.43)$$

é o resíduo da equação de equilíbrio no elemento  $K$ .

•  $\mathbf{u}_p^*$  é a solução aproximada nos elementos vizinhos ao elemento  $K$ .

$$\bullet \mathbf{t}(\mathbf{u}_p) = \{t_1(\mathbf{u}_p)\} = \{\sigma_{IJ}(\mathbf{u}_p) n_j\}, \quad (5.44)$$

portanto,  $\mathbf{t}(\mathbf{u}_p^*) - \mathbf{t}(\mathbf{u}_p)$  representa o salto das trações no contorno inter-elementos.

•  $(\mathbf{g} - \mathbf{t}(\mathbf{u}_p))$  representa a violação das condições de contorno naturais em  $\partial K \cap \Gamma_N$ .

• O espaço  $X_{p+1}^0(K)$  é definido por

$$X_{p+1}^0(K) = \{ \mathbf{v}_{p+1} = (v_1, v_2, v_3) \ni v_i \in X_{p+1}^0(K) \} \quad (5.45)$$

onde  $X_{p+1}^0(K)$  foi definido em (5.18).

Modificação do Problema local (5.41).

Pelos mesmos motivos discutidos na seção anterior, a parcela do resíduo em (5.41) será modificada. Fica-se então com

$$\begin{aligned}
 B_K(\varphi_K, \mathbf{v}_{p+1}) &= \oint_{\partial K} \sigma_{kj}(\mathbf{u}_p) n_j v_k^{p+1} ds - \int_K \sigma_{kj}(\mathbf{u}_p) v_{k,j}^{p+1} d\Omega + \int_K f_k v_k^{p+1} d\Omega + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \left( \sigma_{kj}(\mathbf{u}_p^*) n_j - \sigma_{kj}(\mathbf{u}_p) n_j \right) v_k^{p+1} ds + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} \left( g_k - \sigma_{kj}(\mathbf{u}_p) n_j \right) v_k^{p+1} ds \\
 &= \int_K f_k v_k^{p+1} d\Omega + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} g_k v_k^{p+1} ds - \int_K \sigma_{kj}(\mathbf{u}_p) \varepsilon_{kj}(\mathbf{v}_{p+1}) d\Omega + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \left( \sigma_{kj}(\mathbf{u}_p^*) n_j + \sigma_{kj}(\mathbf{u}_p) n_j \right) v_k^{p+1} ds \quad j, k = 1, 3 \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

onde usou-se o fato que

$$\mathbf{v}_{p+1} \in X_{p+1}^0(K) \text{ e } X_{p+1}^0(K) \subset X_{p+1} \rightarrow \mathbf{v}_{p+1} = 0 \text{ em } \Gamma_D \quad (5.47)$$

e  $n_j$  são as componentes de  $\mathbf{n}_K$  (vetor unitário normal ao contorno do elemento  $K$ ).

O problema local (5.41) fica:

Encontre  $\{\varphi_K\} \in X_{p+1}^0(K)$ , tal que  $\forall \mathbf{v}_{p+1} \in X_{p+1}^0(K)$

$$B_K(\varphi_K, \mathbf{v}_{p+1}) = L_K(\mathbf{v}_{p+1}) - B_K(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_{p+1}) + \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \left[ \mathbf{t}(\mathbf{u}_p) \right]_M \cdot \mathbf{v}_{p+1} ds \quad (5.48)$$

onde

$$L_K(\mathbf{v}_{p+1}) = \int_K f_k v_k^{p+1} d\Omega + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} g_k v_k^{p+1} ds \quad (5.49)$$

$$B_K(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_{p+1}) = \int_K \sigma_{kj}(\mathbf{u}_p) \varepsilon_{kj}(\mathbf{v}_{p+1}) d\Omega \quad (5.50)$$

e

$$\left[ \mathbf{t}(\mathbf{u}_p) \right]_M = \frac{1}{2} \left( \mathbf{t}(\mathbf{u}_p^*) - \mathbf{t}(\mathbf{u}_p) \right) \quad (5.51)$$

é a tração média no contorno inter-elementos.

Escrevendo-se as funções  $\{\varphi_K\}$ ,  $v_{p+1}$  e  $u_p$  em termos das componentes das bases de  $X_{p+1}^0(K)$  e  $X_p(K)$ , respectivamente,

$$\varphi_J^K = \varphi_{J\alpha}^K \psi_\alpha(\mathbf{x}) \quad \alpha = 1, \dots, \dim(X_{p+1}^0(K)) \quad (5.52)$$

$$v_k^{p+1} = v_{k\beta}^{p+1} \psi_\beta(\mathbf{x}) \quad \beta = 1, \dots, \dim(X_{p+1}^0(K)) \quad (5.53)$$

$$u_l^p = u_{l\gamma}^p \bar{\psi}_\gamma(\mathbf{x}) \quad \gamma = 1, \dots, \dim(X_p(K)) \quad (5.54)$$

$j, k, l = 1, 3$

e utilizando-se as definições dadas na Seção 3.4.1 tem-se:

$$\bullet B_K(\varphi_K, v_{p+1}) = \{v_{k\beta}^{p+1}\}^T \int_K (B_{p+1}^0)^T C(B_{p+1}^0) d\Omega \{\varphi_{j\alpha}^K\} \quad (5.55)$$

onde  $B_{p+1}^0$ , para elementos axissimétricos, é a matriz (3.83) construída utilizando as funções da base de  $X_{p+1}^0(K)$  e  $C$ , também para elementos axissimétricos, é dada por (3.71).

$$\bullet L_K(v_{p+1}) = \left( \int_K f_k \psi_\beta d\Omega + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} g_k \psi_\beta ds \right) v_{k\beta}^{p+1} \quad (5.56)$$

$$\bullet B_K(u_p, v_{p+1}) = \{u_{l\gamma}^p\}^T \int_K (B_p)^T C(B_{p+1}^0) d\Omega \{v_{k\beta}^{p+1}\} \quad (5.57)$$

onde  $B_p$  é construída utilizando-se as funções da base de  $X_p(K)$ .

$$\bullet \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} \left[ t(u_p) \right]_M \cdot v_{p+1} ds = \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} \left[ t_k(u_p) \right]_M \psi_\beta ds v_{k\beta}^{p+1} \quad (5.58)$$

A solução do problema local (5.48) pode ser encontrada resolvendo-se, após a imposição das condições de contorno em  $\partial K \cap \Gamma_D$ , o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\int_K (\mathbf{B}_{p+1}^0)^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_{p+1}^0) d\Omega \{ \varphi_{j\alpha}^K \} &= \int_K f_k \psi_\beta d\Omega + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} g_k \psi_\beta ds - \{ u_{1\gamma}^p \}^T \int_K (\mathbf{B}_p)^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_{p+1}^0) d\Omega + \\
&+ \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \left[ t_k(u_p) \right]_{M^\beta} \psi_\beta ds \quad \text{(5.59)}
\end{aligned}$$

$$\alpha, \beta = 1, \dots, \dim(X_{p+1}^0(K))$$

$$\gamma = 1, \dots, \dim(X_p(K))$$

$$j, k, l = 1, 3 \text{ (elasticidade tri-dimensional)}$$

### 5.3 Estimativa de Erro Baseada no Pós-Processamento da Solução.

Na Seção 3.4.1 mostrou-se que a forma bilinear associada aos problemas da elasticidade linear estática pode ser escrita na forma abaixo (vide Equação 3.70)

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \{ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \}^T \mathbf{C} \{ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \} d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{v})^T \mathbf{C} (\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega \quad (5.60)$$

onde  $\{ \boldsymbol{\varepsilon} \}$  é dado por (3.66),  $\mathbf{C}$  por (3.67) e  $\mathbf{L}$ , para o caso de problemas axissimétricos, é dado por (3.71).

Definindo o erro nas deformações,  $\mathbf{e}_\varepsilon$ , e nas tensões,  $\mathbf{e}_\sigma$ , por

$$\mathbf{e}_\varepsilon = \{ \boldsymbol{\varepsilon} \} - \{ \boldsymbol{\varepsilon}_p \} = \mathbf{L}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) = \mathbf{L} \mathbf{e} \quad (5.61)$$

$$\mathbf{e}_\sigma = \{ \boldsymbol{\sigma} \} - \{ \boldsymbol{\sigma}_p \} = \mathbf{C}\mathbf{L}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) = \mathbf{C} \mathbf{e}_\varepsilon \quad (5.62)$$

tem-se

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{e}, \mathbf{e}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{e})^T \mathbf{C} (\mathbf{L}\mathbf{e}) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{e}_\varepsilon)^T \mathbf{C} (\mathbf{e}_\varepsilon) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{e}_\sigma)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{e}_\sigma) d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} (\{ \boldsymbol{\sigma} \} - \{ \boldsymbol{\sigma}_p \})^T \mathbf{C}^{-1} (\{ \boldsymbol{\sigma} \} - \{ \boldsymbol{\sigma}_p \}) d\Omega \quad (5.63)
\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_p$ .

O cálculo da norma da energia do erro utilizando a expressão anterior é obviamente ainda impossível, desde que não se conhece  $\{\sigma\}$ . Porém, uma estimativa do erro pode ser obtida se em (5.63)  $\{\sigma\}$  for substituído por  $\{\sigma^*\}$ , obtido a partir do pós-processamento de  $\{\sigma_p\}$  (Zienkeiwicz & Zhu, 1987). A estimativa da norma da energia do erro é então dada por

$$\|e\|_E \doteq \Theta_{MPP} = \left\{ \int_{\Omega} (\{\sigma^*\} - \{\sigma_p\})^T C^{-1} (\{\sigma^*\} - \{\sigma_p\}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (5.64)$$

A expressão correspondente a (5.63) para o Problema de Poisson é

$$\begin{aligned} B(e, e) &= \int_{\Omega} k \mathbf{e}_g \cdot \mathbf{e}_g d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{k} (\{\phi\} - \{\phi_p\}) \cdot (\{\phi\} - \{\phi_p\}) d\Omega \end{aligned} \quad (5.65)$$

onde o erro no gradiente e no fluxo são definidos respectivamente por

$$\mathbf{e}_g = \nabla u - \nabla u_p = \nabla e \quad (5.66)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \{\phi\} - \{\phi_p\} = k \nabla (u - u_p) = k \mathbf{e}_g \quad (5.67)$$

onde  $k$  é, por exemplo, a condutividade térmica do meio.

Dentre os métodos existentes na literatura para o cálculo de  $\{\sigma^*\}$  destacam-se:

(i) *Técnicas de Extração.*

Esta técnica é baseada no uso de expressões analíticas de funções que aproximam o núcleo do funcional de interesse (Babuska & Noor, 1986). Apesar de precisa, esta técnica é bastante custosa. Outro inconveniente é que nem sempre se conhecem as expressões analíticas das funções de extração. Um estudo extensivo deste método é apresentado em Babuska & Miller, (1984a,b,c).

(ii) *Métodos Iterativos.*

São métodos, como o de Loubignac, que constroem um campo de tensão que é

contínuo no contorno inter-elementos (Cantin et al., 1978; Cook, 1982).

(iii) *Técnicas de Projeção.*

Este método baseia-se no fato de que apesar da solução de elementos finitos,  $u_p$ , possuir continuidade  $C^0$ , o campo de tensões  $\{\sigma_p\}$ , obtido diretamente de  $u_p$ , é descontínuo no contorno inter-elementos. Um campo de tensões contínuo (suavizado)  $\{\sigma^*\}$  pode no entanto ser obtido através da projeção de  $\{\sigma_p\}$  nas funções base globais.

Cada componente do fluxo (tensão) suavizado é expresso da seguinte forma

$$\sigma_i^*(\mathbf{x}) = \sigma_i^* \psi_i(\mathbf{x}) \quad i = 1, \dots, M \quad (5.68)$$

onde  $\psi_i(\mathbf{x})$  são as funções de interpolação globais com continuidade  $C^0$  e  $\sigma_i^*$  são os valores nodais do fluxo suavizado.

As componentes  $\sigma_i^*$  são determinadas impondo que as projeções de  $\sigma_i^*(\mathbf{x})$  e  $\sigma_p(\mathbf{x})$  coincidam, isto é

$$\int_{\Omega'} \psi_j [\sigma_i^*(\mathbf{x}) - \sigma_p(\mathbf{x})] d\Omega = 0 \quad j = 1, \dots, M \quad (5.69)$$

onde  $\Omega'$  é geralmente igual ao domínio global  $\Omega$ .

Como a integral (5.69) é calculada numericamente, a ordem de integração pode ser escolhida de modo que os pontos de integração coincidam com os pontos onde há superconvergência dos valores de  $\sigma_p(\mathbf{x})$  (Hinton & Campbell, 1974). Porém, na versão  $p$ -hierárquica, onde geralmente cada porção da matriz de rigidez é calculada usando-se uma ordem de integração específica (vide Capítulo 4), esta ordem de integração ótima não é bem definida.

Os valores de  $\sigma_j^*$  são obtidos resolvendo-se o seguinte sistema de equações (substituindo-se 5.68 em 5.69)

$$[\Psi_{ij}] \{\sigma_j^*\} = \{\kappa_i\} \quad i, j = 1, \dots, M \quad (5.70)$$

onde

$$\Psi_{ij} = \int_{\Omega'} \psi_i \psi_j \, d\Omega \quad (5.71)$$

$$\kappa_i = \int_{\Omega'} \psi_i \sigma_p \, d\Omega \quad (5.72)$$

Note-se que  $\sigma_p$ , no caso da elasticidade, é uma das componentes de tensão e no caso do Problema de Poisson  $\sigma_p$  é uma das componentes do fluxo  $\{\phi_p\}$ .

Se  $\Omega'$  for igual ao domínio global  $\Omega$ ,  $[\Psi_{ij}]$  e  $\{\kappa_i\}$  são construídas a partir das contribuições dos elementos  $[\Psi_{ij}^K]$  e  $\{\kappa_i^K\}$  respectivamente. Deve-se neste caso resolver, para cada componente de tensão, um sistema de equações de dimensão  $M$  ( $M$  é igual ao número de funções globais). Uma alternativa para diminuir o custo deste processo é desenvolver uma forma diagonal para a matriz  $[\Psi_{ij}]$  (Shephard et al., 1989).

Outra alternativa para diminuir o custo do cálculo de  $\sigma_j^*$  é não usar todo o domínio  $\Omega$ , mas realizar a suavização a nível de elemento. Deve-se neste caso resolver, para cada elemento finito  $K \in L_H$ , um pequeno sistema de equações dado por

$$[\Psi_{ij}^K] \{\kappa_j^*\} = \{\kappa_i^K\} \quad i, j = 1, \dots, m \quad (5.73)$$

onde

$$\Psi_{ij}^K = \int_{\Omega_K} \psi_i^K \psi_j^K \, d\Omega \quad (5.74)$$

$$\kappa_i^K = \int_{\Omega_K} \psi_i^K \sigma_p \, d\Omega \quad (5.75)$$

e  $\psi_i^K$ ,  $i = 1, \dots, m$  são as funções de interpolação locais.

Apesar de seu baixo custo, o inconveniente desta alternativa é que cada elemento que compartilha um determinado nó fornece um valor de  $\sigma^*(\mathbf{x})$  diferente neste nó. Uma solução para isto é calcular, em cada nó, a média aritmética dos valores fornecidos. Embora isto possa parecer o mesmo que calcular a média de  $\sigma_p$ , calculado diretamente nos nós, este processo geralmente fornece resultados bem melhores (Shephard et al., 1989). Neste trabalho adotou-se esta alternativa já que se estava interessado

no uso desta técnica para o cálculo de indicadores de erro locais e não propriamente para a estimativa do erro global. No Capítulo 7 esta abordagem é denominada de MPP1.

As componentes da matriz  $[\Psi_{ij}^K]$  e do vetor  $\{\kappa_i^K\}$ , para o elemento  $K \in L_H$ , são calculadas, no elemento de referência  $\hat{\Omega}$ , da seguinte forma

$$\Psi_{ij}^K = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j |J| \, d\xi d\eta \quad (5.76)$$

$$\kappa_i^K = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_i \sigma_p |J| \, d\xi d\eta \quad (5.77)$$

onde  $|J|$  é o jacobiano para o  $K$ -ésimo elemento e  $\hat{\psi}_i$  são as funções de interpolação definidas no elemento mestre  $\hat{\Omega}$ .

Se os elementos não forem distorcidos  $|J|$  será constante em cada elemento e o sistema de Equações (5.73) será dado por

$$\int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j \, d\xi d\eta \, \kappa_{\sigma_j}^* = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_i \sigma_p \, d\xi d\eta \quad i, j = 1, \dots, m \quad (5.78)$$

Neste caso, a matriz  $[\Psi_{ij}^K]$  só precisa ser triangularizada uma vez e pode ser usada em todos elementos que possuam a mesma ordem polinomial. Em cada elemento, é preciso apenas calcular as integrais do lado direito do sistema (5.78). Este procedimento foi experimentado mesmo em malhas que apresentavam elementos bastante distorcidos. No Capítulo 7 esta abordagem é denominada de MPP2.

### Observações Finais.

Um aspecto interessante do método MPP é que ao se calcular  $\sigma_p^*$ , utilizando-se um dos métodos de pós-processamento listados anteriormente, o usuário obtém também uma estimativa do erro no fluxo, o que para boa parte dos engenheiros é preferível do que uma estimativa da norma da energia do erro.

Zienkiewicz et al., (1989) e Zienkiewicz & Zhu, (1990) ressaltam que este tipo de estimador de erro não funciona bem para elementos de ordem elevada, sendo neste caso mais indicado o uso de métodos como o MRE desenvolvido no início deste capítulo.

## CAPÍTULO 6

### ASPECTOS COMPUTACIONAIS

#### 6.1 Introdução.

Neste capítulo são apresentados alguns detalhes relativos à implementação do programa computacional utilizado para a resolução dos problemas formulados no Capítulo 3. O módulo processador utiliza a versão  $p$  do Método de Elementos Finitos para obter soluções aproximadas para os problemas. A estrutura de dados utilizada neste módulo é apresentada na Seção 6.2. Na Seção 6.3 é discutida a técnica empregada para o gerenciamento da utilização da memória do computador. O algoritmo de enriquecimento adaptativo dos elementos da malha é apresentado na Seção 6.4.. Na Seção 6.5 é discutida a implementação da "Regra do Mínimo". No Apêndice A é apresentado o método de solução de equações lineares empregado.

#### 6.2 Estrutura de Dados do Módulo Processador.

A eficiência de qualquer uma das versões do MEF, em aplicações práticas, depende grandemente de como foram implementadas computacionalmente. No caso da versão  $p$ , por exemplo, isto inclui a escolha de uma estrutura de dados capaz de gerenciar, durante o processamento adaptativo, o aumento do número de graus de liberdade associado com cada nó e conseqüente aumento do tamanho das matrizes e vetores globais, a compatibilização das funções de interpolação entre elementos de diferentes ordens, a imposição automática de condições de contorno, etc. A implementação de uma estrutura de dados, com os atributos necessários para um processamento adaptativo, utilizando linguagens tradicionais, como FORTRAN, é extremamente difícil (Devloo, 1991).

Segundo Babuska & Noor, (1986) a implementação computacional eficiente de métodos adaptativos ainda não atingiu a maturidade. Provavelmente, o uso de linguagens que permitam o uso da filosofia de programação orientada para objetos, venha a mudar esta realidade.

Um processamento auto-adaptativo requer muito mais informações do que normal-

mente se necessita. Além dos dados tradicionalmente lidos e gerados, o módulo processador implementado utiliza as seguintes variáveis:

*Principais variáveis escalares:*

NELEM = Número de elementos do modelo.

NNOS = Número de nós do modelo.

ISTEP = Número do passo do processamento auto-adaptativo.

NGRL = Número de graus de liberdade em um determinado ISTEP. É igual a soma de todos os graus de liberdade associados a cada nó do problema.

NEQU = Número de equações em um determinado ISTEP. É igual a NGRL menos o número de graus de liberdade restringidos por condições de contorno ou pela imposição da Regra do Mínimo (vide Seção 6.5).

MAXDOF= Maior valor que NGRL pode atingir.

NUTIL = Número de termos não nulos da matriz do sistema em um determinado ISTEP.

MAXNUT= Maior valor que NUTIL pode atingir. É dado, empiricamente, por

$$\text{MAXNUT} = \text{MAXDOF} * \text{MAXDOF} * 4 / 100 \quad (6.1)$$

NNCCH = Número de nós onde existem condições de contorno hierárquicas, ou seja, nós cujos graus de liberdade hierárquicos devem ser restringidos para que as condições de contorno de Dirichlet, impostas pelo usuário, sejam satisfeitas.

MAXPOL= Maior ordem polinomial que um elemento pode alcançar.

*Principais arranjos:*

KDLNC(1:NNOS):

Tabela que armazena, de forma acumulativa, os graus de liberdade de cada nó. KDLNC(I+1) representa a soma do número de graus de liberdade dos nós





qualquer é dada pela ordem do seu nó número 9.

ICCH(1:3,1:NNCCH):

- a) ICCH(1,I) = J. Número de um nó onde há condição de contorno hierárquica.
- b) ICCH(2,I) = Número do primeiro grau de liberdade, do nó J, na direção U, a ser restringido.
- c) ICCH(3,I) = Número do primeiro grau de liberdade, do nó J, na direção V, a ser restringido.

EKEL(1:NELEM):

Estimativa do erro, na norma da energia, para os elementos.

Antes do início de um novo ISTEP (etapa 8 do algoritmo da Seção 6.4) as estruturas definidas anteriormente devem ser atualizadas para que os elementos indicados por LISTA(.) possam ser enriquecidos e uma nova aproximação calculada.

*Algoritmo para Atualização dos Dados:*

- 1• Atualize KDLNC utilizando LISTA e ORDNO do ISTEP anterior
- 2• Aloque mais espaço para KNEQ, utilizando o novo valor de NGRL.
- 3• Coloque as novas condições de contorno em KNEQ utilizando ICCH.
  - Atualize ICCH para o próximo ISTEP.
  - Atualize KNEQ e ORDNO para este ISTEP: Endereçe as novas equações para este ISTEP respeitando a Regra do Mínimo.
- 4• Atualize PONT e INDIC utilizando KNEQ e KDLNC.
- 5• Calcule as devidas parcelas das matrizes e vetores carregamento, para os elementos indicados em LISTA.
  - Sobreponha estas parcelas.
  - Sobreponha as equações necessárias para manter a malha conforme (vide Seção 6.5).

### 6.3 Gerenciamento Dinâmico da Memória.

A necessidade de dimensionamento dos arranjos de dados, em tempo de execução, em um programa auto-adaptativo, é de importância óbvia. Pois, a cada passo do processamento *p*-adaptativo, por exemplo, a dimensão dos vários arranjos tem que ser modificada devido às novas equações que surgem com o enriquecimento hierárquico dos elementos.

A linguagem FORTRAN, porém, não permite isto. Como o dimensionamento antecipado de todos os arranjos tornaria o programa extremamente ineficiente, neste trabalho utilizou-se a alocação "pseudo-dinâmica" da memória (Dhatt & Touzot, 1984; Mesquita, 1990), apresentada a seguir:

- 1• Todos os arranjos volumosos, inteiros ou reais, são armazenados seqüencialmente em uma tabela real\*4 única: VA(1:KORE).
- 2• Cada tabela, 'tttt', é referenciada pela posição Ltttt de seu primeiro elemento em VA. Por exemplo, o primeiro elemento da Tabela KDLNC se encontra na posição VA(LKDLNC).
- 3• O ponteiro IVA aponta para a última posição *ocupada* na Tabela VA.
- 4• A Criação de uma nova tabela (cálculo do ponteiro Ltttt e modificação do ponteiro IVA) é efetuada por uma subrotina denominada ESPACE. Um dos parâmetros desta subrotina é o tamanho (em bytes) de cada elemento da tabela e outro é o número de posições da tabela. A supressão de uma tabela (mudança de posição das tabelas que a seguem, modificação dos apontadores destas tabelas e do apontador IVA) é efetuada por uma subrotina denominada VIDE.

Este esquema de alocação permite, em alguns computadores, o aumento da dimensão do arranjo VA, em tempo de execução, desde que este tenha sido definido no BLANK COMMON (Dhatt & Touzot, 1984:368).

### 6.4 Algoritmo *p*-Adaptativo para Equidistribuição do Erro.

Como comentado no Capítulo 2, a maioria dos algoritmos adaptativos baseia-se na equidistribuição do erro, medido na norma da energia, entre os elementos da malha.

O Algoritmo para a versão  $p$ -adaptativa do MEF, utilizado neste trabalho, pode ser expresso esquematicamente da seguinte forma:

1• ISTEP = 1

2• LEIA:

- Discretização inicial.
- Limite superior para o erro global na norma da energia (UPBD).
- Parâmetro  $\alpha$  = Parâmetro controlador do enriquecimento dos elementos.

3• Inicialize os arranjos KDLNC, KNEQ, ICCH, PONT, INDIC, SS, VDR, etc.

4• Resolva o sistema de equações, utilizando a solução do ISTEP anterior (se ISTEP > 1) como aproximação inicial para o Método dos Gradientes Conjugados.

5• Estime o erro em cada elemento,  $\theta_k$ , e o erro global,  $\theta$ , utilizando uma das técnicas do Capítulo 5.

6• SE (  $\theta < \text{UPBD}$  ) ENTÃO

Vá pós-processar a solução.

CASO CONTRÁRIO

6.1 Calcule  $\theta_{\max} = \max_{k \in L_H} \theta_k$

6.2 Construa LISTA, com os elementos a serem enriquecidos:

ICOUNT = 0

10 ICMAXP = 0

PARA K = 1, NELEM FAÇA

SE (EKEL(K)  $\geq \alpha \cdot \theta_{\max}$ ) ENTÃO

SE (ORDEL(K) < MAXPOL) ENTÃO

ICOUNT = ICOUNT + 1

LISTA(K) = ORDEL(K) + 1

CASO CONTRÁRIO

ICMAXP = ICMAXP + 1

FIM DO SE

FIM DO SE

FIM DO FAÇA

```

SE (ICMAXP = NELEM) ENTÃO
    Não é possível alcançar UPBD com esta malha, PARE.
CASO CONTRÁRIO
    SE (ICOUNT = 0) ENTÃO
         $\alpha = 0.5 * \alpha$ 
        VÁ PARA 10
    FIM DO SE
FIM DO SE
FIM DO SE

```

7• ISTEP = ISTEP + 1

8• Atualize os arranjos KDLNC, KNEQ, ICCH, PONT, INDIC, SS, VDR, etc.

9• Vá para a etapa 4.

*Observações:*

ORDEL(K) = Ordem do K-ésimo elemento.

A solução do sistema de equações na etapa 4 é feita utilizando-se o Método de Gradientes Conjugados com Pré-Condicionamento por Decomposição Incompleta de Cholesky Deslocada (SICCG). No Apêndice A o método é revisto sucintamente.

Com o algoritmo acima, garante-se um limite superior para NGRL, já que a ordem polinomial de um elemento não pode aumentar indefinidamente. Além do mais, se  $\theta_K > \theta_{\max}$  então  $\text{ORDEL}(K) = \text{MAXPOL}$ .

*Possíveis Modificações:*

-Incremento da ordem polinomial dos elementos diferente de um. Desta forma poder-se-ia estimar a nova ordem de um elemento, de modo a equidistribuir o erro, utilizando-se a estimativa da taxa de convergência local e um procedimento análogo ao "remeshing" adaptativo de Zienkiewicz descrito no Capítulo 2.

-Experimentos numéricos com outros valores do parâmetro controlador do enriquecimento (parâmetro  $\alpha$ ). Se o número de elementos enriquecidos em cada ISTEP for pequeno ( $\alpha$  grande), a discretização obtida será mais próxima da ótima, porém serão

necessários mais ISTEPs para se alcançar a tolerância estabelecida. Lyra, (1988) observou, para o caso de um problema de potencial, que a taxa de convergência se estabilizava para valores de  $\alpha$  maiores que 0.4. Zienkiewicz & Craig, (1986) também apresentam resultados de experimentos numéricos com o parâmetro  $\alpha$ .

### 6.5 Imposição de Continuidade no Contorno Inter-Elementos.

A "Regra do Mínimo", definida no Capítulo 2, implica na seguinte restrição: A ordem polinomial, da solução aproximada, ao longo do lado de qualquer elemento é dada por

$$\text{ORD}(L) = \text{MIN}( \text{ORDEL}(K_1), \text{ORDEL}(K_j) ) \quad (6.2)$$

onde  $K_1$  e  $K_j$  são os elementos que compartilham o lado L e  $\text{ORDEL}(K_1)$ ,  $\text{ORDEL}(K_j)$  são suas respectivas ordens polinomiais.

Portanto, se a ordem polinomial no lado L de um elemento for menor que a própria ordem do elemento, os graus de liberdade de maior ordem, neste lado, devem ser restringidos. Devido a natureza hierárquica das funções de interpolação, a continuidade no contorno inter-elementos é obtida simplesmente fazendo-se com que estes graus de liberdade sejam nulos (Devloo, 1987a). Isto pode ser conseguido, pelo menos, de duas maneiras:

I- Faça os apontadores em KNEQ, associados aos graus de liberdade que devem ser restringidos, iguais a zero. Durante a sobreposição, da matriz e vetor força de um elemento, ignore as linhas e colunas associadas a esses apontadores. Neste trabalho adotou-se esta alternativa.

II- Uma outra maneira de se impor estas restrições é utilizar a técnica de projeção desenvolvida por Devloo, (1987b). Neste caso as equações associadas aos graus de liberdade, que devem ser restringidos, são sobrepostas normalmente na matriz global. Desta forma estas equações nunca necessitarão ser recalculadas em ISTEPs posteriores (como no caso da abordagem I). A desvantagem desta técnica é que ela só pode ser usada em conjunção com métodos de solução iterativos.

### 6.6 Módulo Pós-Processador.

A importância do pós-processamento gráfico dos dados, em análises auto-

adaptativas, é óbvia. Pois, durante a fase de processamento, a discretização inicial, fornecida pelo usuário, é modificada a fim de se alcançar os limites de erro pré-estabelecidos. Desenvolveu-se então um programa, em linguagem C, que permite a representação da ordem polinomial dos elementos e da distribuição de erros estimada, após cada ISTEP. No Capítulo 7 a análise dos problemas é feita com o auxílio deste programa.

## CAPÍTULO 7

### RESULTADOS NUMÉRICOS

#### 7.1 Introdução.

Neste capítulo alguns problemas representativos são analisados e os resultados obtidos comparados com soluções analíticas. Os problemas apresentados são da elasticidade plana, elasticidade com axissimetria geométrica, material e de carregamento, e problemas de potencial.

A eficiência dos indicadores de erro, apresentados no Capítulo 5, é testada no contexto da versão  $p$  do MEF. Esta eficiência é avaliada em termos da taxa de convergência obtida com cada um dos métodos. É também analisada a qualidade das estimativas do erro de discretização global. Para isto, define-se o índice de efetividade global

$$\Gamma = \Theta / \|\epsilon\|_E \quad (7.1)$$

onde  $\Theta$  é uma estimativa do erro de discretização medido na norma da energia (vide Equações 5.26 e 5.64). Note-se que  $\Gamma$  deve se manter dentro de certos limites para que o estimador seja aceitável, ou melhor ainda, deve convergir para 1,0. O desvio do índice  $\Gamma$  em relação à unidade, para um método particular de estimativa de erro, é medido por

$$D\Gamma = \left[ \sum_1^{NIST} (\Gamma_1 - 1)^2 / NIST \right]^{1/2} \quad (7.2)$$

onde  $\Gamma_1$  são os índices de efetividade globais para os NIST passos necessários para a solução de um determinado problema.

Neste capítulo as seguintes abreviações serão adotadas para denotar os métodos de estimativa de erro usados:

MAA = Método baseado em análise assintótica (Seção 2.4.6).

MRE1 = Método dos Resíduos em Elementos utilizando os espaços  $X_{p+1}^0(K)$  para a solução dos problemas locais (Seção 5.2).

MRE2 = Método dos Resíduos em Elementos utilizando os espaços  $X_{p+2}^0(K)$  para a solução dos problemas locais (Seção 5.2).

MPP1 = Método baseado no pós-processamento da solução (Seção 5.3)

MPP2 = Método baseado no pós-processamento da solução. Neste caso a suavização a nível de elemento é feita resolvendo-se o sistema de equações simplificado (5.78).

O erro relativo na norma da energia, definido por

$$\|\text{er}\|_E = \|\text{er}\|_E / \|u\|_E \quad (7.3)$$

foi estimado, no caso dos métodos MRE e MPP, por

$$\eta = \Theta / \left( B(u_p, u_p) + \Theta^2 \right)^{1/2} \quad (7.4)$$

e no caso do método baseado em análise assintótica  $\|\text{er}\|_E^{\text{er}}$  foi estimado por

$$\bar{\eta} = \eta_{\text{MAA}} = \left( \frac{U(u) - U(u_p)}{U(u)} \right)^{1/2} \quad (7.5)$$

onde a energia de deformação,  $U(u)$ , foi estimada resolvendo-se a Equação (2.37).

No Capítulo 1, a solução  $u$  de um problema foi classificada levando-se em consideração a malha de elementos finitos usada e a suavidade de  $u$ . Para problemas pertencentes à categoria A, o erro na norma da energia decresce exponencialmente quando a versão  $p$  é utilizada. Ou seja,

$$\|u - u_p\|_E^{\text{er}} \leq C \exp(\gamma N^\vartheta) \quad (7.6)$$

onde  $C$  e  $\gamma$  são maiores que zero e  $\vartheta \geq 1/3$  (Szabó, 1986a).

Se a versão  $p$  ou  $h$  forem usadas para se resolver problemas pertencentes à categoria B, então, a taxa de convergência *assintótica*,  $\beta$ , será algébrica (Szabó, 1990a) e é prevista pelo seguinte teorema:

**Teorema 7.1.** (Babuska & Suri, 1990) Seja  $u \in H^k(\Omega)$ ,  $k > 1$ . Então, se os espaços de elementos finitos  $X = X(h,p)$  são construídos a partir de uma família de malhas uniformes (ou quase-uniformes)

$$\|u - u_{ef}\|_E \leq C h^{\beta_h} p^{-\beta_p} \|u\|_{H^k} \quad (7.7)$$

onde:

- $u_{ef}$  é a solução de elementos finitos.
- $\beta_h = \min(p, k-1) = \min(p, \lambda)$ ,  $\lambda$  definido no Capítulo 1.
- Se os pontos singulares coincidem com os nós da malha  $\beta_p = 2(k-1) = 2\lambda$ . Caso contrário  $\beta_p = \lambda$ . Note-se que no primeiro caso  $\beta_p$  é pelo menos o dobro de  $\beta_h$ .
- $C$  é independente de  $u$ ,  $h$  e  $p$ .

Para problemas pertencentes à categoria B pode-se obter, com a versão  $p$ , elevadas taxas de convergência, na faixa pré-assintótica, se forem utilizadas malhas não-uniformes que consigam isolar os pontos singulares. São utilizadas então as malhas ditas "geométricas", nas quais os tamanhos dos elementos decrescem em progressão geométrica na direção da singularidade com um fator de geralmente  $s = 0.15$  (Szabó, 1986a). Na Figura 7.15 tem-se uma malha geométrica com  $n = 5$  camadas e 18 elementos.

Em todos os problemas analisados os fluxos foram calculados utilizando-se a técnica de suavização, a nível de elemento, apresentada na Seção 5.3.

## 7.2 Problemas Regidos pela Equação de Poisson.

### 7.2.1 Problema 1: Torsão de uma Barra Retangular de Material Isotrópico.

Este problema pode ser posto na seguinte forma:

Encontre  $u(x_1, x_2)$  tal que

$$\nabla^2 u + 2G\beta = 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \quad (7.8)$$

O domínio  $\Omega$  é o retângulo  $\Omega = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1, x_2 \leq 1 \}$  ilustrado na Figura 7.1. O potencial  $u(x_1, x_2)$  é a função torção de Prandtl,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal do material e  $\beta$  é o ângulo de torsão (Boresi & Lynn, 1974). Foi adotado  $G\beta = 0,5 \text{ MPa}\cdot\text{rad}$ .

A solução analítica para este problema é dada pela série (Boresi & Lynn, 1974)

$$u(x_1, x_2) = G\beta(1 - x_1^2) - \frac{32G\beta}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \frac{\cos(n\pi x_1/2) \cosh(n\pi x_2/2)}{n^3 \cosh(n\pi/2)} \quad (7.9)$$

Portanto  $u(0,0) = 0,294.685.413$  e o fluxo normal  $u_{,n}(1,0) = -0,615.312.389$ . A energia de deformação

$$U(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla u) dx_1 dx_2 \quad (7.10)$$

foi estimada em  $U(u) = 0,281.154.023.289$  utilizando-se integração numérica e os 500 primeiros termos da série.

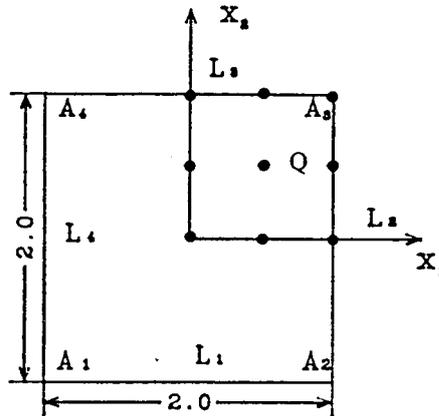


Fig. 7.1. Domínio e discretização para o Problema 1.

Devido à simetria do problema apenas o quadrante  $Q = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1 \}$  foi modelado utilizando-se apenas um elemento (vide Figura 7.1).

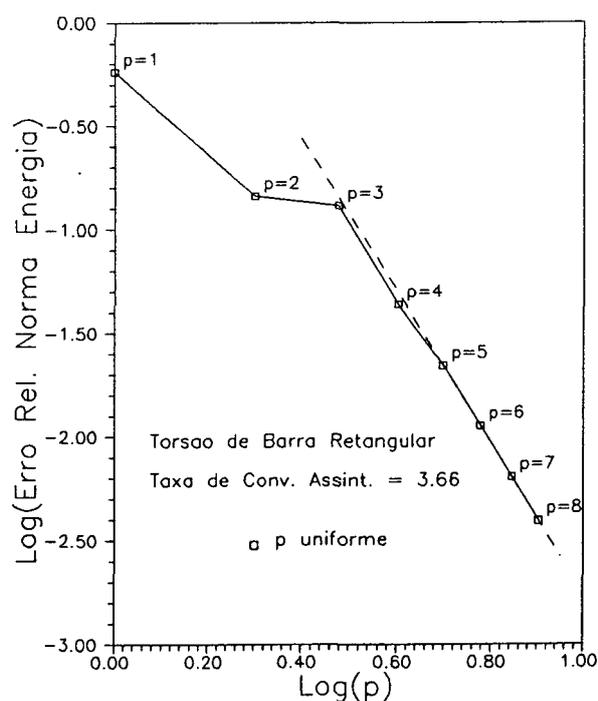
A solução  $u(x_1, x_2)$  pertence à categoria B definida no Capítulo 1 e possui um comportamento singular nos vértices  $A_1$ .  $u(x_1, x_2)$  pertence ao espaço de Sobolev  $H^{3-\epsilon}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,  $0 < \epsilon \ll 1$  (Carey & Oden, 1983). Portanto ao se utilizar a versão  $p$  para se resolver este problema o Teorema 7.1 prevê uma taxa de convergência assintótica  $\beta_p = 4 - \epsilon$ . No caso da versão  $h$  tem-se  $\beta_h = \min(p, 2 - \epsilon)$ .

Na Tabela 1 encontram-se os valores do erro na norma da energia, e de sua estimativa, para elementos de ordem  $1 \leq p \leq 8$ . A estimativa de  $\|e\|_E$  foi calculada utilizando-se o método baseado em análise assintótica (MAA) tratado na Seção 2.4.6. As estimativas obtidas tornam-se mais precisas a medida que a solução aproximada entra

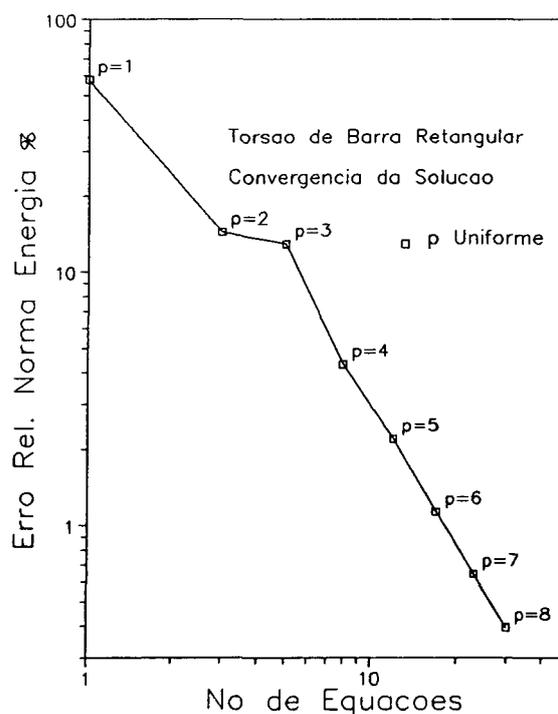
na faixa assintótica da versão  $p$ . Este comportamento está de acordo com o descrito em Szabó, (1986a). Na Tabela 1,  $N$  indica o número de equações do problema. Nota-se que com 30 equações obteve-se um erro relativo, medido na norma da energia, de apenas 0,395%.

Tabela 1 Resultados para o Problema 1 utilizando-se a versão  $p$  do MEF.

MAA						
P	N	$\ e\ _E$	$\Theta_{MAA}$	$\Gamma_{MAA}$	$\ e\ _E^{er} \%$	$\bar{\eta} \%$
1	1	2,16395E-1	-	-	57,715	-
2	3	5,41901E-2	-	-	14,453	-
3	5	4,86123E-2	1,51632E-1	3,119	12,966	44,671
4	8	1,62961E-2	5,25308E-2	3,224	4,346	14,164
5	12	8,26236E-3	6,35550E-3	0,769	2,204	1,695
6	17	4,24514E-3	1,30292E-2	3,069	1,132	3,477
7	23	2,41011E-3	2,42570E-3	1,006	0,643	0,647
8	30	1,47995E-3	1,47003E-3	0,993	0,395	0,392
$D\Gamma = 1,515$						



(a)



(b)

Fig. 7.2. Taxa de convergência para o Problema 1.

Tabela 2. Energia, potencial e fluxo para o Problema 1.

P	$U(u_p) \times 10$	$u(0,0)$	$e_r(u) \times$	$u_{,n}(1,0)$	$e_r(u_{,n}) \times$
1	0,468.750.000	0,37500	-27,254E+0	-0,37500	44,470E+0
2	0,688.202.247	0,26966	8,491E+0	-0,69101	-2,325E+0
3	0,691.069.259	0,27339	7,226E+0	-0,75638	-12,004E+0
4	0,701.557.238	0,29954	-1,648E+0	-0,70053	-3,733E+0
5	0,702.543.725	0,29243	7,664E-1	-0,67465	9,751E-2
6	0,702.794.952	0,29568	-3,370E-1	-0,67183	5,156E-1
7	0,702.856.015	0,29420	1,659E-1	-0,67529	2,763E-3
8	0,702.874.107	0,29495	-9,032E-2	-0,67604	-1,073E-1
$\infty$	0,702.885.058	0,29469	0,0	-0,67531	0,0

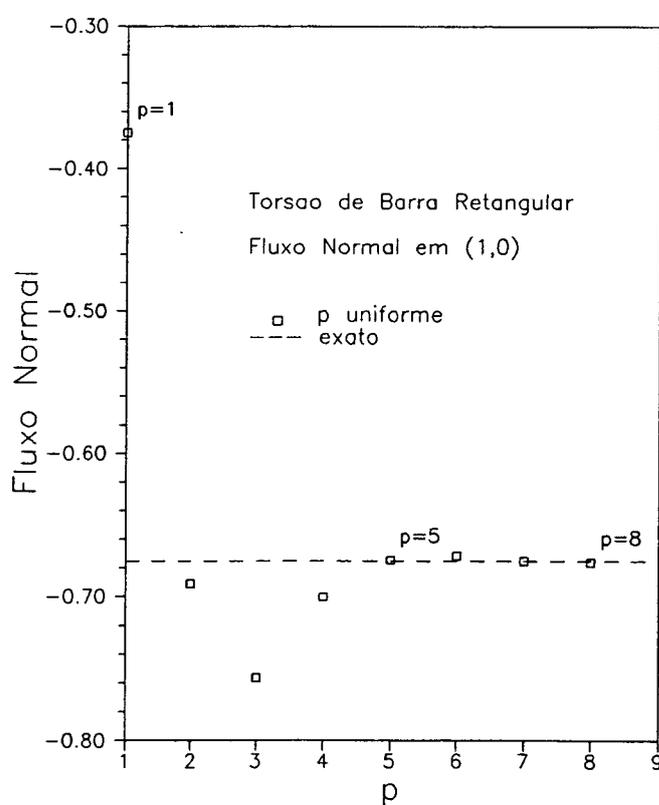


Fig. 7.3. Convergência do fluxo normal em (1,0).

O logaritmo de  $\|e_r\|_E$  versus o logaritmo de  $p$  foi traçado na Figura 7.2 (a) para  $1 \leq p \leq 8$ . A inclinação da curva na faixa assintótica ( $p > 4$ ) é a taxa de

convergência  $\beta_p$ . O valor obtido,  $\beta_p = 3,66$ , está próximo do previsto pelo Teorema 7.1. Na Figura 7.2 (b) tem-se, em escala log-log, o número de equações,  $N$ , versus o erro relativo na norma da energia.

Na Tabela 2, encontram-se os valores obtidos da energia,  $U(u_p)$ , do potencial em  $(0,0)$  e do fluxo normal em  $(1,0)$ .  $e_r(u)$  e  $e_r(u_n)$  indicam o erro relativo no potencial e no fluxo normal, respectivamente. Note-se que foram obtidos bons resultados não só para o valor do potencial, mas também para os fluxos calculados. O gráfico da Figura 7.3 foi traçado a partir dos valores da Tabela 2.

### 7.2.2 Problema 2: Distribuição de Temperatura em Regime Permanente em uma Placa de Material Isotrópico.

Este problema servirá para se avaliar a qualidade dos indicadores e das estimativas de erro dos métodos MRE1, MRE2, MPP1 e MPP2 quando a solução,  $u(\mathbf{x})$ , do problema pertencer à categoria A definida no Capítulo 1 e na Seção 7.1. O problema analisado é definido por:

Encontre  $u(x_1, x_2)$  tal que

$$\nabla^2 u + f_v = 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \quad (7.11)$$

Na Figura 7.4 tem-se a representação do domínio  $\Omega$  e das condições de contorno impostas.  $u^{(k)}$  são os graus de liberdade das funções hierárquicas associadas aos lados dos elementos.

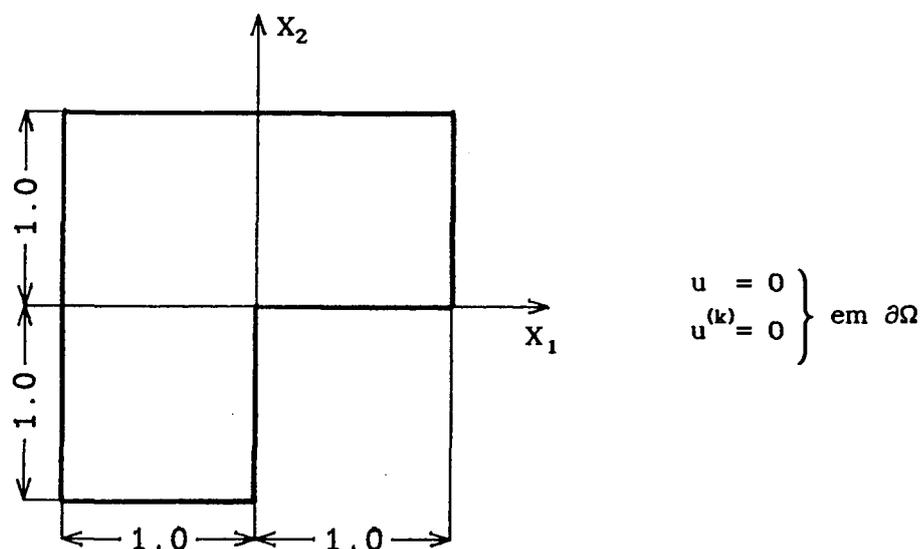


Fig. 7.4. Domínio e condições de contorno para o Problema 2.

Escolheu-se uma solução  $u(\mathbf{x})$  que permitisse o cálculo, sem maiores dificuldades, da energia  $U(u)$  e que não fosse facilmente representada por polinômios de baixa ordem. Adotou-se

$$u(x_1, x_2) = (x_1 - x_1^3)(x_2 - x_2^3) \cosh(\pi x_2) \quad (7.12)$$

Deve-se portanto aplicar uma fonte de calor distribuída dada por

$$f_v = -\cosh(\pi x_2) \{ (x_1 - x_1^3) [-6x_2 + \pi^2(x_2 - x_2^3)] - 6x_1(x_2 - x_2^3) \} - 2\pi(x_1 - x_1^3)(1 - 3x_2^2)\sinh(\pi x_2) \quad (7.13)$$

A energia,  $U(u)$ , foi calculada numericamente e será adotado como exato o valor  $U(u) = 4,703.598.203.12$ .

O domínio  $\Omega$  foi discretizado utilizando-se uma malha uniforme de 27 elementos (vide Figura 7.6).

A solução  $u(x)$  pertence à categoria A. Deve-se portanto obter uma taxa de convergência exponencial ao se utilizar a versão  $p$  do MEF para resolver este problema. Esta expectativa é confirmada na Figura 7.5 (a). Nesta, foi traçado, em escala log-log, o número de equações,  $N$ , versus  $\|ell_E^{er} * 100\%$  para os casos de aumento uniforme e adaptativo da ordem polinomial dos elementos. Nota-se que as inclinações das curvas (taxas de convergência) estão aumentando a medida que  $N$  cresce. Isto caracteriza uma convergência exponencial do tipo descrito pela Equação (7.6) (Szabó, 1986a). Na Figura 7.5 (b) foi traçado, em escala mono-log,  $N^{2/3}$  versus  $\|ell_E^{er} * 100\%$ , para o caso de enriquecimento uniforme dos elementos.

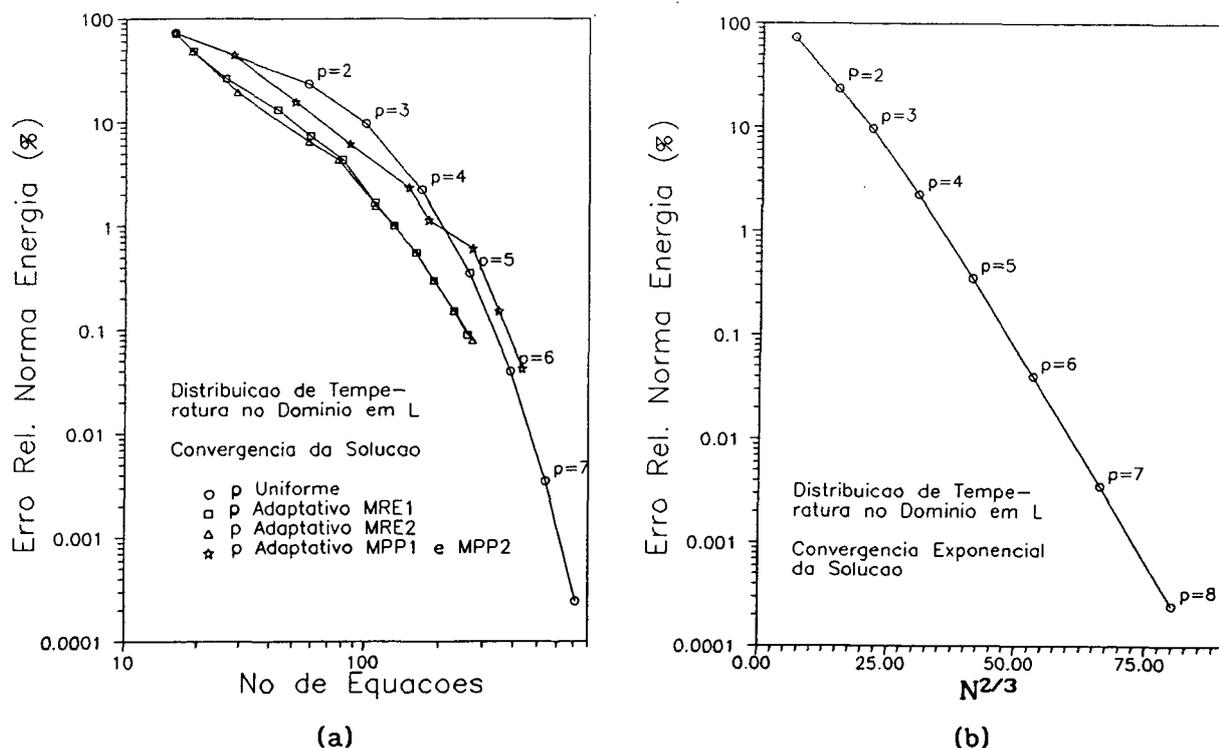


Fig. 7.5. (a) Convergência da solução. Enriquecimento  $p$ -uniforme e  $p$ -adaptativo (b) Curva  $N^{2/3}$  versus  $\|ell_E^{er} * 100\%$  para o Problema 2.

Tabela 3. Resultados para o Problema 2 utilizando-se o método MRE1.

MRE1						
IST	N	$\ e\ _E$	$\Theta_{MRE1}$	$\Gamma_{MRE1}$	$\ e\ _E^{er} \times$	$\eta \times$
1	16	2,21788E+0	2,23500E+0	1,048	72,312	73,916
2	19	1,49008E+0	1,18352E+0	0,794	48,582	40,387
3	26	8,09891E-1	8,56572E-1	1,058	26,406	27,813
4	43	4,04034E-1	4,36567E-1	1,081	13,173	14,213
5	59	2,27363E-1	2,23060E-1	0,981	7,413	7,273
6	80	1,32944E-1	1,25120E-1	0,941	4,334	4,080
7	109	5,13713E-2	4,76754E-2	0,928	1,675	1,554
8	131	3,07448E-2	2,81475E-2	0,916	1,002	0,918
9	161	1,70774E-2	1,29325E-2	0,757	0,557	0,422
10	189	9,16864E-3	7,20792E-3	0,786	0,299	0,235
11	229	4,69894E-3	3,76297E-3	0,801	0,153	0,123
12	259	2,75173E-3	2,09522E-3	0,761	0,090	0,068
$D\Gamma = 0,151$						

Tabela 4. Resultados para o Problema 2 utilizando-se o método MRE2.

MRE2						
IST	N	$\ e\ _E$	$\Theta_{MRE2}$	$\Gamma_{MRE2}$	$\ e\ _E^{er} \times$	$\eta \times$
1	16	2,21788E+0	2,42285E+0	1,092	72,312	75,280
2	19	1,49008E+0	1,38937E+0	0,932	48,582	46,014
3	29	5,96207E-1	7,32862E-1	1,229	19,439	23,667
4	58	2,01274E-1	2,51707E-1	1,251	6,562	8,197
5	77	1,33458E-1	1,44812E-1	1,077	4,384	4,721
6	110	4,78729E-2	5,12955E-2	1,072	1,561	1,672
7	131	3,07448E-2	2,88330E-2	0,938	1,002	0,940
8	161	1,70774E-2	1,38600E-2	0,812	0,557	0,452
9	189	9,16864E-3	7,45853E-3	0,814	0,299	0,243
10	229	4,69894E-3	3,98108E-3	0,847	0,153	0,130
11	271	2,45846E-3	2,00975E-3	0,818	0,080	0,066
$D\Gamma = 0,157$						

Os indicadores de erro associados aos métodos MPPi e MREi,  $i = 1,2$ , foram uti-

lizados para controlar o enriquecimento  $p$  adaptativo dos elementos. Em todos os casos foi imposto que  $\eta < 0,1 \%$ .

Nas Tabelas 3 e 4 tem-se as estimativas obtidas com os métodos MRE1 e MRE2, respectivamente. Nas tabelas, "IST" indica o passo do processamento  $p$ -adaptativo. Os índices de efetividade,  $\Gamma_{MRE1}$  e  $\Gamma_{MRE2}$ , mantiveram-se consistentemente próximos a 1,0 para uma ampla faixa de valores do erro de discretização. As taxas de convergência obtidas, quando se utilizou os indicadores MRE1 ou MRE2, são praticamente as mesmas (vide Figura 7.5 (a)).

Os métodos MPP1 e MPP2 forneceram, para este problema, os mesmos resultados, já que a malha utilizada é constituída apenas de elementos retangulares. Na Tabela 5 encontram-se os resultados obtidos com estes métodos. Nota-se um aumento do índice de efetividade,  $\Gamma_{MPP}$ , com a diminuição do erro de discretização. A taxa de convergência obtida com o uso dos indicadores MPP foi inferior às obtidas com os indicadores MRE1 e MRE2 (vide Figura 7.5 (a)).

Tabela 5. Resultados para o Problema 2 utilizando-se o método MPP1 ou o MPP2.

MPP1 e MPP2						
IST	N	$\ e\ _E$	$\Theta_{MPP}$	$\Gamma_{MPP}$	$\ e\ _E^{er} \%$	$\eta \%$
1	16	2,21788E+0	1,12230E+0	0,506	72,312	46,812
2	28	1,36968E+0	7,74658E-1	0,566	44,657	27,166
3	51	4,86777E-1	3,80698E-1	0,782	15,871	12,473
4	86	1,90515E-1	1,55681E-1	0,817	6,212	5,079
5	150	7,25862E-2	6,20678E-2	0,855	2,367	2,024
6	181	3,50540E-2	3,44183E-2	0,982	1,143	1,122
7	272	1,86902E-2	1,80148E-2	0,964	0,609	0,587
8	346	4,68466E-3	5,62529E-3	1,201	0,153	0,183
9	433	1,31225E-3	1,62878E-3	1,241	0,043	0,053
$D\Gamma = 0,266$						

Na Figura 7.7 tem-se a malha utilizada e as linhas de isotenciais obtidas. Nota-se que mesmo em  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  a solução (e suas derivadas) é bem comportada, não sendo afetada pela mudança brusca no contorno.

Na Tabela 6 encontram-se os valores da energia,  $U(u)$ , e da temperatura em  $(1/3, 1/3)$  obtidos com o enriquecimento  $p$ -uniforme dos elementos da malha. A precisão obtida mostra que podia-se ter utilizado uma malha ainda mais grosseira.

Tabela 6. Resultados obtidos utilizando-se enriquecimento  $p$ -uniforme dos elementos.

P	N	$U(u_p)$	$\ e\ _E^{e_r} \%$	$u(1/3, 1/3)$	$e_r(u) \%$
1	16	2,244.096.840	7,231E+1	0,152.645	-8,650E+0
2	58	4,444.611.731	2,347E+1	0,141.889	-9,946E-1
3	100	4,658.402.138	9,803E+0	0,143.157	-1,187E+0
4	169	4,701.219.969	2,249E+0	0,140.755	-1,873E-1
5	265	4,703.539.527	3,532E-1	0,140.480	8,074E-3
6	388	4,703.597.443	4,020E-2	0,140.492	-6,148E-4
7	538	4,703.598.197	3,511E-3	0,140.492	1,674E-5
8	715	4,703.598.203	2,451E-4	0,140.492	-4,934E-7
$\infty$	$\infty$	4,703.598.203	0,0	0,140.492	0,0

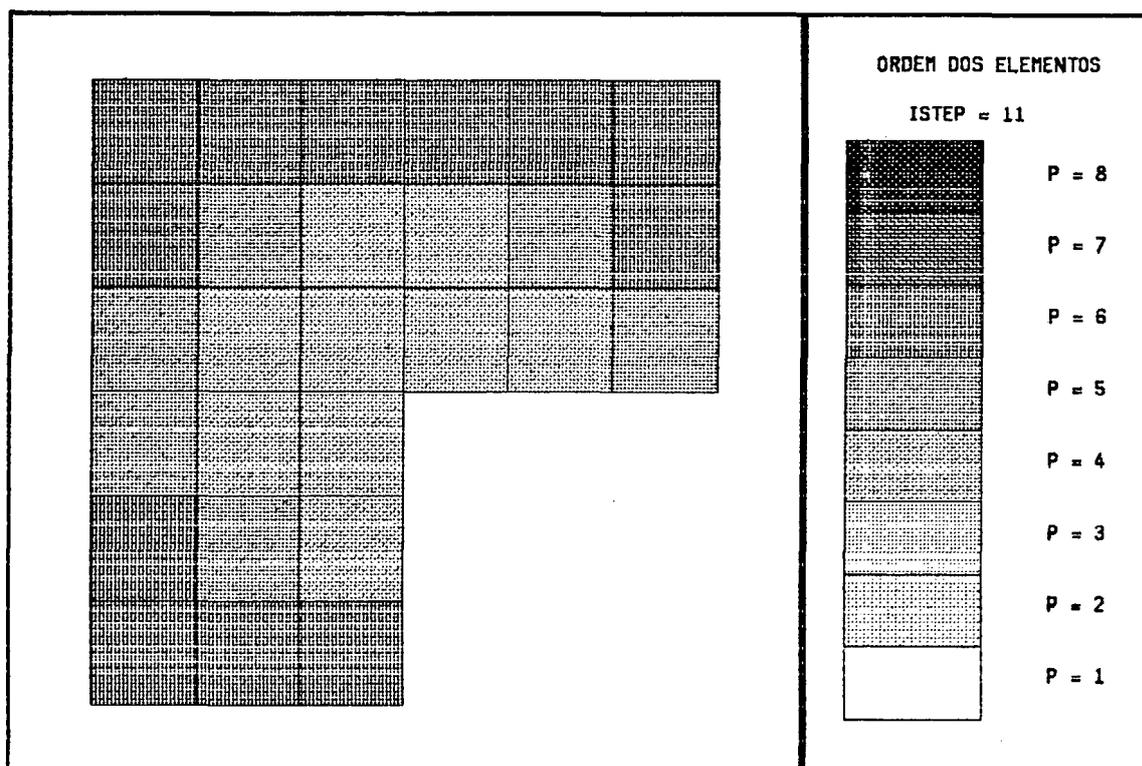


Fig. 7.6 Ordens polinomiais dos elementos utilizando-se os indicadores MRE2.

Nas Figuras 7.6 e 7.8 tem-se a ordem polinomial dos elementos no último passo do processamento  $p$ -adaptativo utilizando-se os indicadores MRE2 e MPP, respectivamente. Nota-se que as duas discretizações são bastante diferentes.

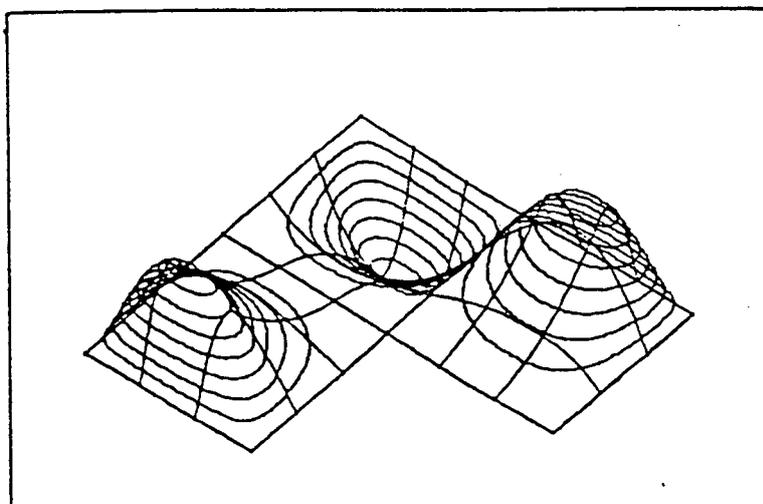


Fig. 7.7. Curvas de isoterma para o Problema 2

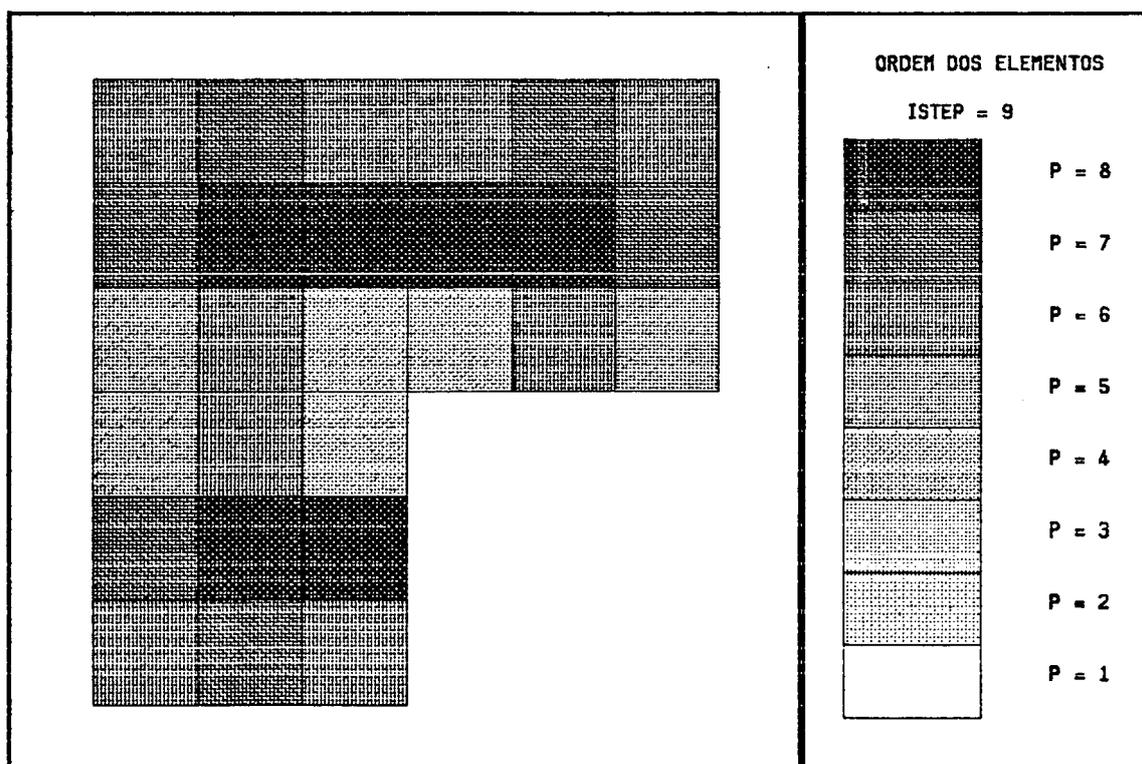


Fig. 7.8. Ordens polinomiais dos elementos utilizando-se os indicadores MPP.

### 7.2.3 Problema 3: Equação de Poisson

Encontre  $u(x_1, x_2)$  tal que

$$\nabla^2 u + f_v = 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \quad (7.14)$$

O domínio  $\Omega$  é o quadrado  $(0,1) \times (0,1)$ . Aplicou-se uma fonte distribuída dada por

$$f_v = (x_2 - x_2^2) \left\{ 2 \tan^{-1}(F_1) - \frac{20}{2^{1/2}} \left[ 2(1 - 2x_1)F_2 + (x_1 - x_1^2)F_3 \right] \right\} + \\ (x_1 - x_1^2) \left\{ 2 \tan^{-1}(F_1) - \frac{20}{2^{1/2}} \left[ 2(1 - 2x_2)F_2 + (x_2 - x_2^2)F_3 \right] \right\} \quad (7.15)$$

onde:

$$F_1 = 20 \left( \frac{x_1 + x_2}{2^{1/2}} - 0,80 \right) \quad (7.16a)$$

$$F_2 = 1 / (1 + F_1^2) \quad (7.16b)$$

$$F_3 = -40 F_1 F_2^2 / \sqrt{2} \quad (7.16c)$$

A solução,  $u(x)$ , para este problema é dada por

$$u(x_1, x_2) = (x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^2) \tan^{-1}(F_1) \quad (7.17)$$

A energia,  $U(u)$ , foi calculada numericamente e será adotado como exato o valor  $U(u) = 4,670.867.438.044 \times 10^{-2}$ .

Este problema foi proposto e analisado por Oden et al., (1989) para testar o desempenho de estimadores de erro para o MEF. A solução,  $u(x)$ , apresenta uma região de forte gradiente como pode ser observado na Figura 7.10 porém, não apresenta nenhum ponto singular ( $u(x)$  pertence à categoria A). Na Figura 7.10 foram traçadas as curvas de isotenciais da solução obtida com elementos do 8º grau.

Na Figura 7.9 foi traçado, em escala log-log, as curvas  $\|e\|_E^{er*} 100\%$  versus o número de equações  $N$ . As curvas referem-se ao enriquecimento  $p$ -uniforme e  $p$ -adaptativo dos elementos. Utilizou-se os indicadores  $MRE_i$  e  $MPP_i$ ,  $i = 1, 2$ , para selecionar os elementos a serem enriquecidos. Como no Problema 2, os indicadores

MPP1 e MPP2 forneceram exatamente os mesmos resultados. Nota-se que o uso do indicador MRE2 é a escolha mais econômica em termos de número de equações. O desempenho dos indicadores MRE1 foi afetado pelo fato da solução,  $u(x)$ , ter predominantemente um comportamento de uma função ímpar.

Nas Tabelas 7 e 8 tem-se as estimativas obtidas com os métodos MRE1 e MRE2, respectivamente. Foi imposto que  $\eta < 2\%$ . Nota-se que as estimativas obtidas pela abordagem MRE2, são, com a exceção do primeiro passo, sempre melhores que as obtidas com os estimadores MRE1. O desvio do índice  $\Gamma_{MRE2}$  em relação à unidade,  $D\Gamma_{MRE2}$ , de foi de 0,205 contra  $D\Gamma_{MRE1} = 0,350$ . Isto explica-se pelo fato da projeção do erro de discretização,  $e_p$ , no espaço  $X_{p+1}^0(K)$ , ser uma representação pobre de  $e_p$  quando a solução  $u(x)$  for uma função ímpar e  $p+1$  for um número par.

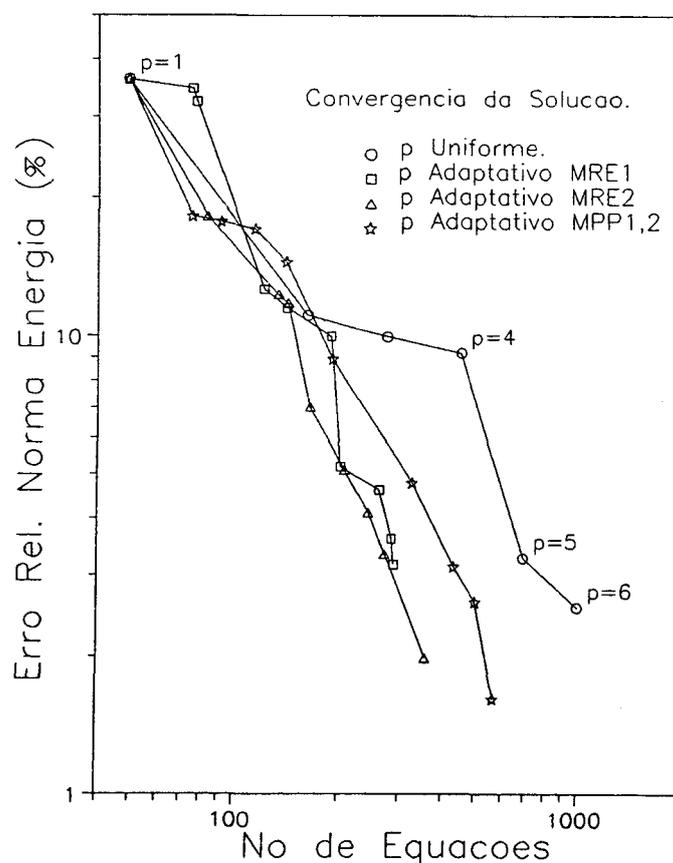


Fig. 7.9. Convergência da solução para os casos de enriquecimento  $p$ -uniforme e  $p$ -adaptativo dos elementos. Problema 3.

As melhores estimativas de  $\|e\|_E$  foram obtidas, neste problema, com o método MPP. O desvio de  $\Gamma_{MPP}$  em relação à unidade,  $D\Gamma_{MPP}$ , foi de apenas 0,089. No entanto

os indicadores de erro MPP foram menos eficientes que os MRE2 (vide Figura 7.9). Os resultados obtidos com o método MPP encontram-se na Tabela 9.

Tabela 7. Comportamento dos estimadores MRE1 para o Problema 3.

MRE1						
IST	N	$\ ell_E$	$\Theta_{MRE1}$	$\Gamma_{MRE1}$	$\ ell_E^{er} \%$	$\eta \%$
1	49	1,10655E-1	1,54407E-1	1,395	36,204	47,648
2	49	1,10655E-1	8,80386E-2	0,796	36,204	29,523
3	75	1,05537E-1	5,76183E-2	0,546	34,530	19,648
4	77	9,86332E-2	5,64176E-2	0,572	32,271	19,142
5	121	3,85444E-2	3,66569E-2	0,951	12,611	12,003
6	141	3,51767E-2	3,11314E-2	0,885	11,509	10,200
7	188	3,04888E-2	2,22279E-2	0,729	9,975	7,290
8	202	1,58578E-2	1,00116E-2	0,631	5,188	3,278
9	261	1,41096E-2	8,66303E-3	0,614	4,616	2,836
10	283	1,10399E-2	6,69204E-3	0,606	3,612	2,190
11	287	9,69632E-3	5,01802E-3	0,518	3,172	1,642
$D\Gamma = 0,350$						

Tabela 8. Comportamento dos estimadores MRE2 para o Problema 3.

MRE2						
IST	N	$\ ell_E$	$\Theta_{MRE2}$	$\Gamma_{MRE2}$	$\ ell_E^{er} \%$	$\eta \%$
1	49	1,10655E-1	1,61111E-1	1,456	36,204	49,223
2	49	1,10655E-1	1,08931E-1	0,984	36,204	35,712
3	83	5,55210E-2	5,95652E-2	1,070	18,165	19,440
4	133	3,75703E-2	4,10712E-2	1,092	12,292	13,418
5	142	3,60046E-2	3,75509E-2	1,042	11,780	12,278
6	164	2,13944E-2	2,66622E-2	1,245	7,000	8,712
7	207	1,56048E-2	1,41037E-2	0,904	5,106	4,616
8	243	1,25843E-2	1,09999E-2	0,874	4,117	3,600
9	271	1,01876E-2	7,55237E-3	0,742	3,333	2,472
10	356	6,06306E-3	4,79167E-3	0,790	1,984	1,568
$D\Gamma = 0,205$						

Tabela 9. Comportamento dos estimadores MPP para o Problema 3.

MPP1 e MPP2						
IST	N	$\ ell_E$	$\Theta_{MPP}$	$\Gamma_{MPP}$	$\ ell_E^{er} x$	$\eta x$
1	49	1,10655E-1	9,77456E-2	0,883	36,204	32,451
2	75	5,54967E-2	5,94125E-2	1,071	18,157	19,392
3	91	5,40801E-2	5,92094E-2	1,095	17,694	19,312
4	114	5,20893E-2	5,70625E-2	1,095	17,043	18,616
5	140	4,42464E-2	4,19504E-2	0,948	14,477	13,740
6	190	2,72563E-2	2,60300E-2	0,955	8,918	8,519
7	325	1,46282E-2	1,38611E-2	0,948	4,786	4,536
8	430	9,59239E-3	9,39093E-3	0,979	3,138	3,073
9	499	8,04312E-3	6,86662E-3	0,854	2,632	2,247
10	567	4,94337E-3	5,52306E-3	1,117	1,617	1,807
$D\Gamma = 0,089$						

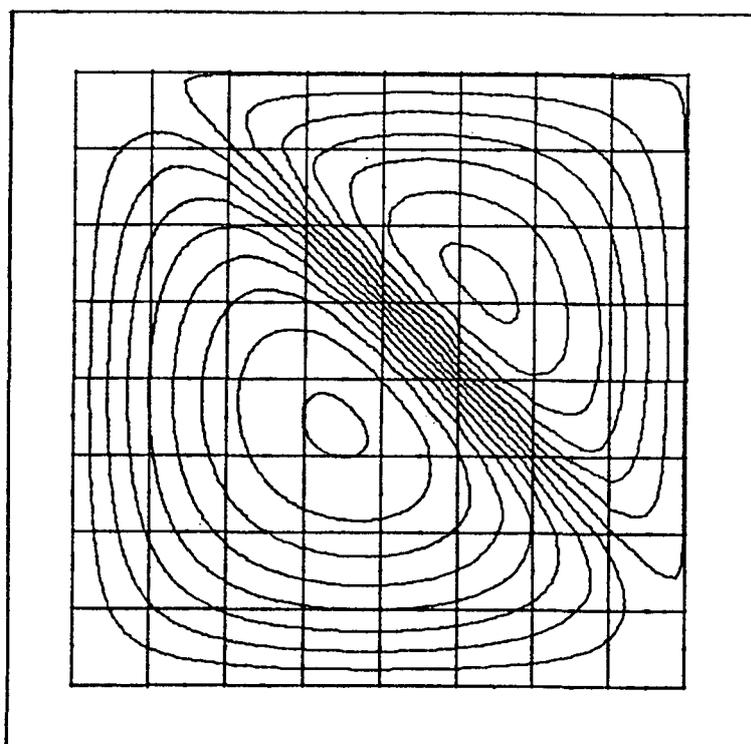


Fig. 7.10. Curvas de isopotenciais para o Problema 3.

Oden et al., (1989) também resolveu este problema utilizando a versão  $p$  do MEF e a malha da Figura 7.10. Os índices de efetividade global obtidos com três métodos

de estimativa do erro de discretização foram:

- Método dos Resíduos em Elementos -  $\Gamma = 0,723$ .
- Método baseado na estimativa do erro de interpolação -  $\Gamma = 60,749$ .
- Método dos Resíduos em Subdomínios -  $\Gamma = 1,520$ .

Na Figura 7.11 tem-se a ordem polinomial dos elementos no último passo do processamento  $p$ -adaptativo utilizando-se os indicadores MRE2. Nas Figuras 7.12 e 7.13 está representada a distribuição dos indicadores de erro MRE2 no primeiro e no último passo do processamento, respectivamente. Note-se que os limites nas escalas das figuras variam e correspondem ao menor e ao maior valor dos indicadores de erro para cada passo.

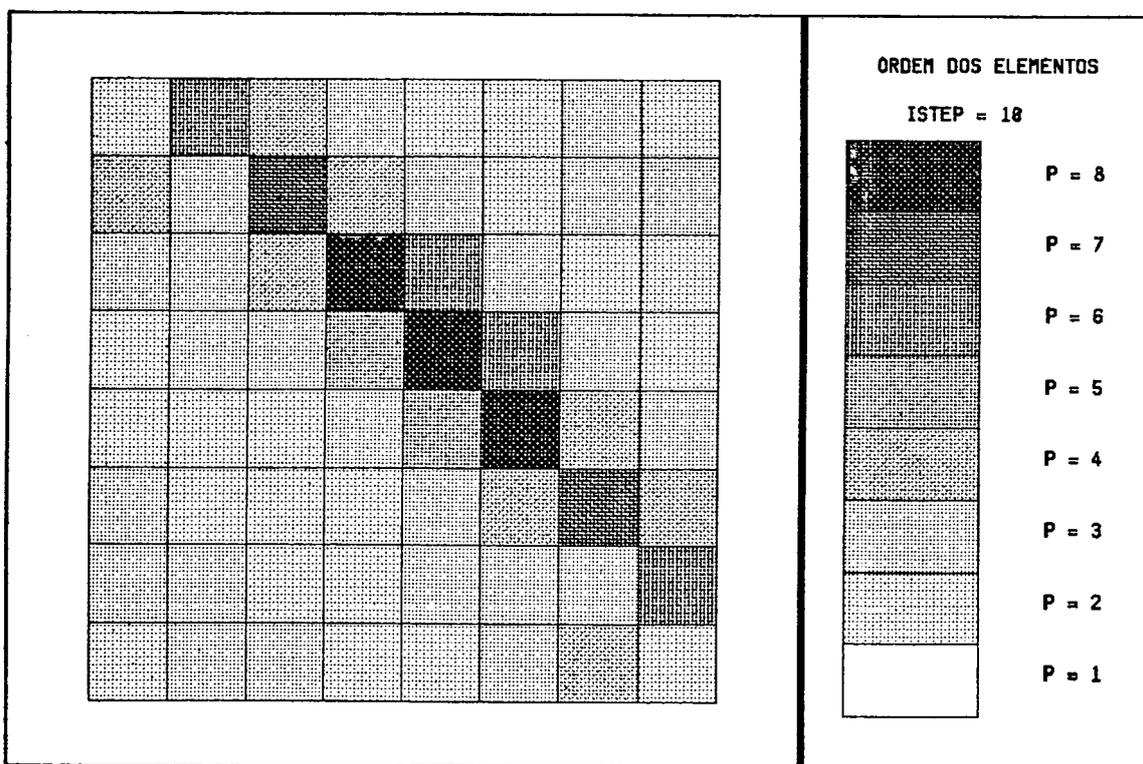


Fig. 7.11. Ordem polinomial dos elementos no último passo do processamento  $p$ -adaptativo do Problema 3 (utilizando-se os indicadores MRE2).

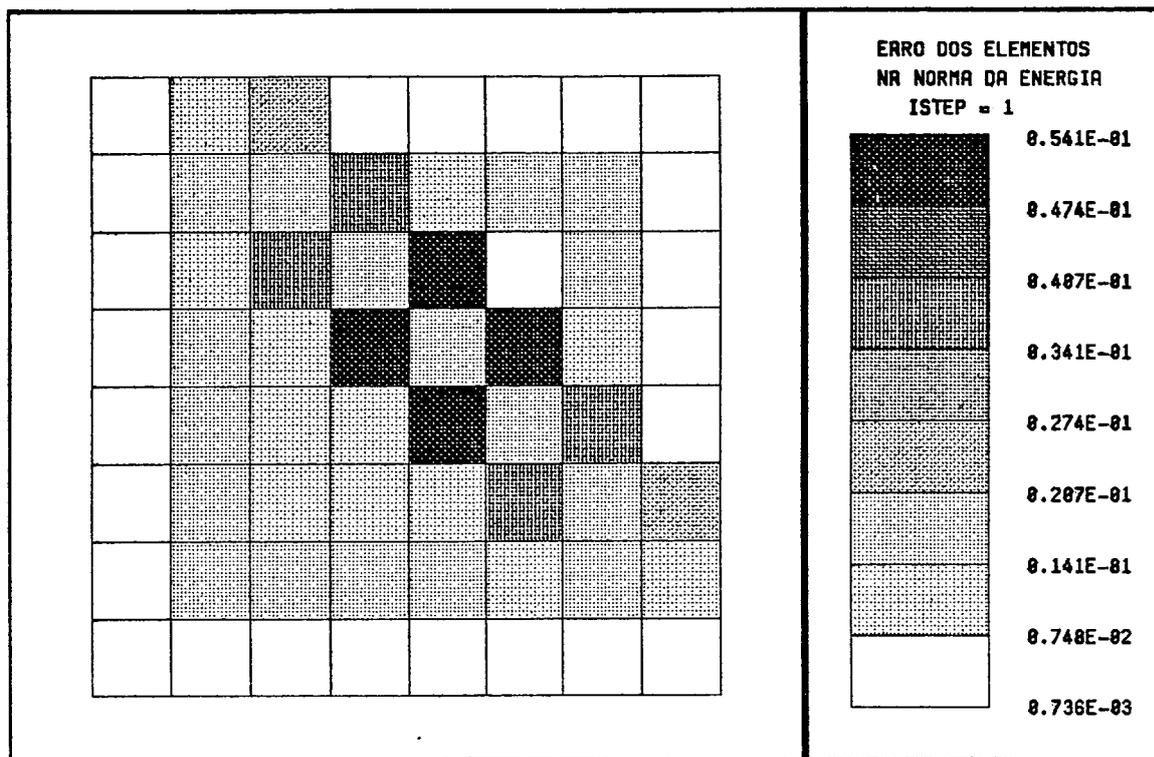


Fig. 7.12. Distribuição dos indicadores de erro MRE2 no primeiro passo do processamento  $p$ -adaptativo do Problema 3.

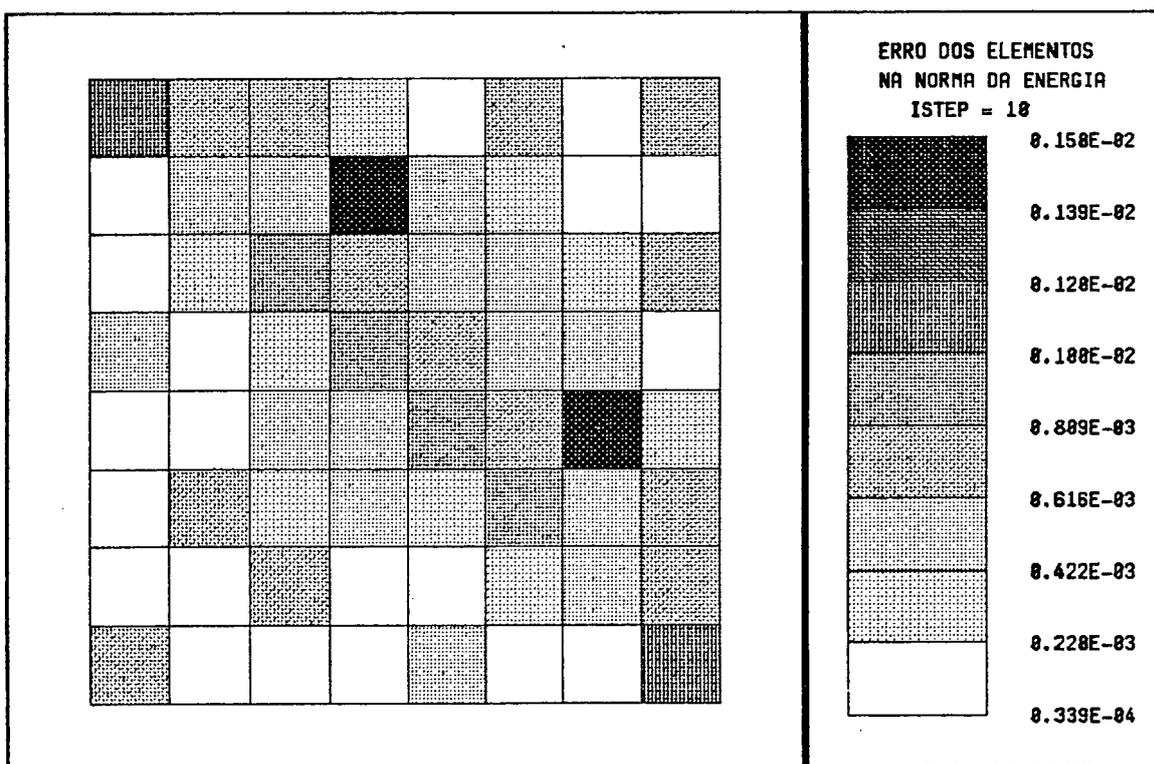


Fig. 7.13. Distribuição dos indicadores de erro MRE2 no último passo do processamento  $p$ -adaptativo do Problema 3.

## 7.2.4. Problema 4: Equação de Laplace.

Encontre  $u(x_1, x_2)$  tal que

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad (7.18)$$

$$u = 0 \quad \text{em } L_2$$

$$u_{,n} = 0 \quad \text{em } L_1$$

$$u_{,n} = \frac{-1}{2r^{1/2}} \left( \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) \quad \text{em } L_3$$

$$u_{,n} = \frac{1}{2r^{1/2}} \left( \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta - \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \right) \quad \text{em } L_4$$

$$u_{,n} = \frac{1}{2r^{1/2}} \left( \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) \quad \text{em } L_5$$

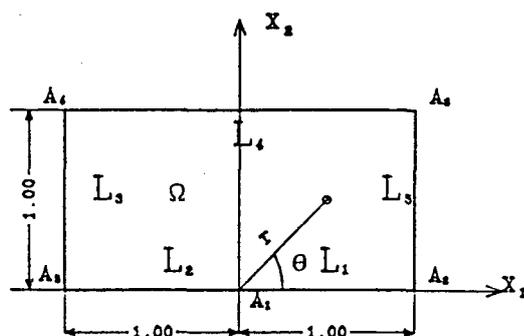


Fig. 7.14. Domínio e condições de contorno para o Problema 4.

A solução para este problema,

$$u(x_1, x_2) = r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (7.19)$$

possui uma singularidade da ordem de  $r^{1/2}$  na origem e pertence à categoria B. A energia,  $U(u)$ , foi calculada numericamente e será adotado como exato o valor  $U(u) = 0,440.686.768$ .

Utilizou-se duas discretizações para o domínio  $\Omega$ . Na primeira usou-se uma malha uniforme de  $8 \times 4$  elementos. Sendo  $u(\mathbf{x}) \in H^{3/2-\epsilon}(\Omega)$ ,  $0 < \epsilon \ll 1$ , o Teorema 7.1 prevê, neste caso, para a versão  $p$ , uma taxa de convergência assintótica de apenas  $\beta_p = 1-\epsilon$  (vide Figura 7.16). Na segunda discretização utilizou-se uma malha geométrica com 18 elementos e razão  $s = 0,15$  de modo a isolar a singularidade presente na origem (vide Figura 7.15).

Os indicadores MRE $_i$  e MPPI $_i$ ,  $i = 1, 2$ , foram utilizados para controlar o enriquecimento  $p$ -adaptativo dos elementos da malha geométrica. Na Figura 7.16 tem-se, em escala log-log, as curvas  $\|e\|_E^{cr*} 100\%$  versus  $N$  para os quatro casos. Apesar dos elementos da malha estarem bastante distorcidos o uso dos indicadores MPPI ou MPP2 resultou na mesma seqüência de distribuições  $p$ . As taxas de convergência, obtidas

quando se utilizou os indicadores MRE1 ou MRE2, são praticamente idênticas. Pela Figura 7.16 nota-se, também neste problema, a superioridade dos indicadores MREi em relação aos MPPi.

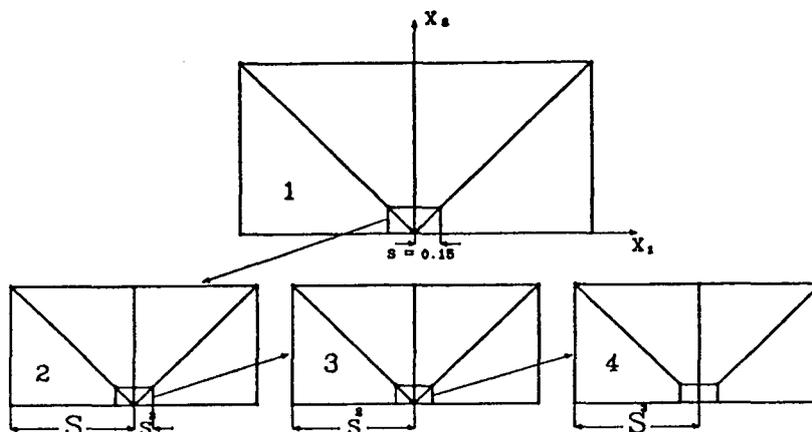


Fig. 7.15. Malha geométrica com 18 elementos e  $n = 5$  camadas em direção à singularidade ( $s = 0,15$ ).

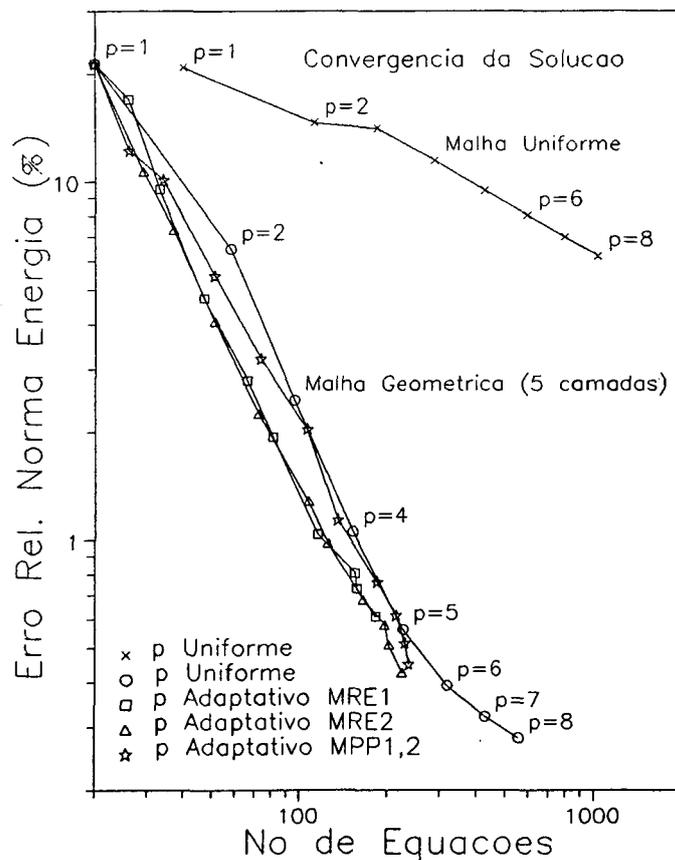


Fig. 7.16. Convergência da solução para os casos de enriquecimento  $p$ -uniforme e  $p$ -adaptativo dos elementos. Problema 4.

Tabela 10. Estimativas de  $\|ell_E$  obtidas com os métodos MRE1 e MRE2.

MRE1 e MRE2						
IST	N	$\ ell_E$	$\Theta_{MRE1}$	$\Gamma_{MRE1}$	$\Theta_{MRE2}$	$\Gamma_{MRE2}$
1	20	2,00614E-1	4,29210E-1	2,139	4,51120E-1	2,249
2	29	1,00143E-1	1,69566E-1	1,693	1,78174E-1	1,779
3	37	6,87743E-2	9,15041E-2	1,330	9,87790E-2	1,436
4	51	3,82767E-2	4,20749E-2	1,099	4,72280E-2	1,234
5	72	2,11616E-2	1,93084E-2	0,912	2,21068E-2	1,045
6	107	1,20667E-2	8,30093E-3	0,688	9,85633E-3	0,817
7	125	9,20163E-3	5,99608E-3	0,652	7,22575E-3	0,785
8	165	6,39953E-3	3,04318E-3	0,476	3,90340E-3	0,610
9	195	5,44481E-3	2,79048E-3	0,513	3,37981E-3	0,621
10	202	4,78686E-3	2,49935E-3	0,522	2,98440E-3	0,623
11	224	4,00674E-3	1,91631E-3	0,478	2,32721E-3	0,581
				$D\Gamma = 0,534$	$D\Gamma = 0,531$	

Tabela 11. Estimativas de  $\|ell_E$  obtidas com os métodos MPP1 e MPP2.

MPP1 e MPP2						
IST	N	$\ ell_E$	$\Theta_{MPP1}$	$\Gamma_{MPP1}$	$\Theta_{MPP2}$	$\Gamma_{MPP2}$
1	20	2,00614E-1	2,62333E-1	1,308	2,62333E-1	1,308
2	29	1,00143E-1	1,79690E-1	1,794	1,79520E-1	1,793
3	37	6,87743E-2	1,03025E-1	1,498	1,02965E-1	1,497
4	51	3,82767E-2	6,23138E-2	1,628	6,23900E-2	1,630
5	72	2,11616E-2	4,61421E-2	2,180	4,62740E-2	2,187
6	107	1,20667E-2	2,31097E-2	1,915	2,32323E-2	1,925
7	125	9,20163E-3	1,80292E-2	1,959	1,81744E-2	1,975
8	165	6,39953E-3	1,35566E-2	2,118	1,36462E-2	2,132
9	195	5,44481E-3	1,18550E-2	2,177	1,19206E-2	2,189
10	202	4,78686E-3	1,20245E-2	2,512	1,20866E-2	2,525
11	224	4,00674E-3	1,05001E-2	2,621	1,05864E-2	2,642
				$D\Gamma = 1,047$	$D\Gamma = 1,057$	

Durante o enriquecimento  $p$ -adaptativo dos elementos, controlado pelos indicadores MRE2, utilizou-se também os métodos MRE1, MPP1 e MPP2 para se calcular estimati-

vas de  $\|ell_E$  e  $\|ell_E^{er}$ . Nas Tabelas 10 e 11 tem-se as estimativas de  $\|ell_E$  obtidas com os métodos MREi,  $i=1,2$ , e com os métodos MPPi,  $i=1,2$ , respectivamente. Foi imposto que  $\eta_{MRE2} < 0,3 \%$ . Nota-se que  $\Gamma_{MRE2}$  é sempre maior do que  $\Gamma_{MRE1}$ . Na Tabela 11 observa-se uma surpreendente semelhança entre as estimativas obtidas com os métodos MPP1 e MPP2, apesar da elevada distorção dos elementos da malha geométrica.

A superestimação de  $\|ell_E$  pelos métodos MPPi,  $i=1,2$ , observada neste problema, foi uma constante em todos os problemas analisados nos quais a solução possuía alguma singularidade. Neste problema, por exemplo,  $\Theta_{MPPi}$ ,  $i=1,2$ , convergiu para um valor próximo de 0,01 independentemente de quanto se enriquecesse os elementos da malha.

Na Tabela 12 tem-se as estimativas de  $\|ell_E^{er*}$  100% obtidas com os métodos MREi e MPPi,  $i=1,2$ .

Tabela 12. Estimativas de  $\|ell_E^{er}$ .

IST	N	$\ ell_E^{er} \%$	$\eta_{MRE1} \%$	$\eta_{MRE2} \%$	$\eta_{MPP1} \%$	$\eta_{MPP2} \%$
1	20	21,369	42,387	44,138	27,501	27,501
2	29	10,667	17,873	18,749	18,903	18,886
3	37	7,326	9,727	10,492	10,928	10,931
4	51	4,077	4,481	5,028	6,628	6,636
5	72	2,254	2,057	2,355	4,910	4,924
6	107	1,285	0,884	1,050	2,461	2,474
7	125	0,980	0,639	0,770	1,920	1,936
8	165	0,682	0,324	0,416	1,444	1,453
9	195	0,580	0,297	0,360	1,263	1,270
10	202	0,510	0,266	0,318	1,281	1,287
11	224	0,427	0,204	0,248	1,118	1,128

Este problema também foi analisado por Kelly et al., (1983) e por Bank & Weiser, (1985) utilizando a versão  $h$  do MEF. Kelly et al., no entanto, impuseram condições de contorno de Dirichlet em  $L_3$ ,  $L_4$  e  $L_5$ . Numa malha com 89 elementos quadrangulares lineares obtiveram  $\|ell_E^{er*} 100\% = 7,919\%$ . No caso de Bank & Weiser o domínio  $\Omega$  analisado foi o semi-círculo  $\Omega = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ . Em uma

malha com 1363 vértices de elementos triangulares lineares Bank & Weiser obtiveram  $\|ell_E^{er} * 100\% = 2,397\%$ . Na Tabela 12 nota-se que já no passo 5, com apenas 72 equações, obteve-se  $\|ell_E^{er} * 100\% = 2,254\%$  e no passo 11, com 224 equações,  $\|ell_E^{er} * 100\% = 0,427\%$ .

Na Tabela 13 tem-se os valores do potencial e do fluxo normal, obtidos no passo 11, ao longo dos lados  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente. Nota-se que, apesar de calculados ao longo da região crítica do contorno  $\partial\Omega$ , os resultados obtidos são muito bons. As Figuras 7.19 e 7.20 representam os valores da Tabela 13 e a Figura 7.18 mostra a convergência do fluxo normal em  $r = 0 \theta = \pi$  ao longo da seqüência de distribuições  $p$  construída utilizando-se os indicadores MRE2.

Tabela 13. Potencial e Fluxos obtidos no último passo do processamento  $p$ -adaptativo.

MRE2		IST = 11			
$r \ (\theta=0)$	$u$	$e_r(u) \times$	$r \ (\theta=\pi)$	$u_n$	$e_r(u_n) \times$
0,0	0,0	0,0	0,0	85,55959	-
5,0625E-4	2,22480E-2	1,120E+0	5,0625E-4	22,01292	0,942
3,3750E-3	5,79725E-2	2,105E-1	3,3750E-3	8,41683	2,205
2,2500E-2	1,49934E-1	4,400E-2	2,2500E-2	3,29346	1,196
1,5000E-1	3,87282E-1	4,105E-3	1,5000E-1	1,28864	0,183
1,0000E+0	9,99980E-1	2,020E-3	1,0000E+0	0,49702	0,597

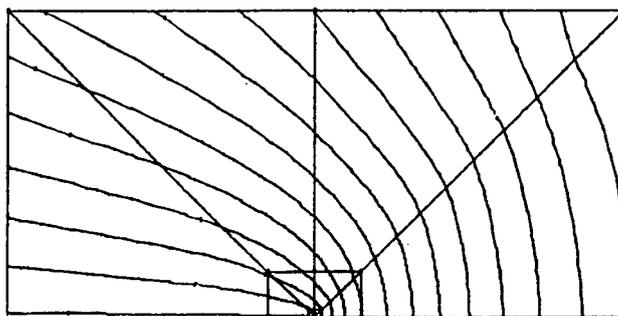


Fig. 7.17. Curvas de isotenciais para o Problema 4.

Na Figura 7.17 foram traçadas as curvas de isopotenciais da solução obtida com elementos do 8º grau.

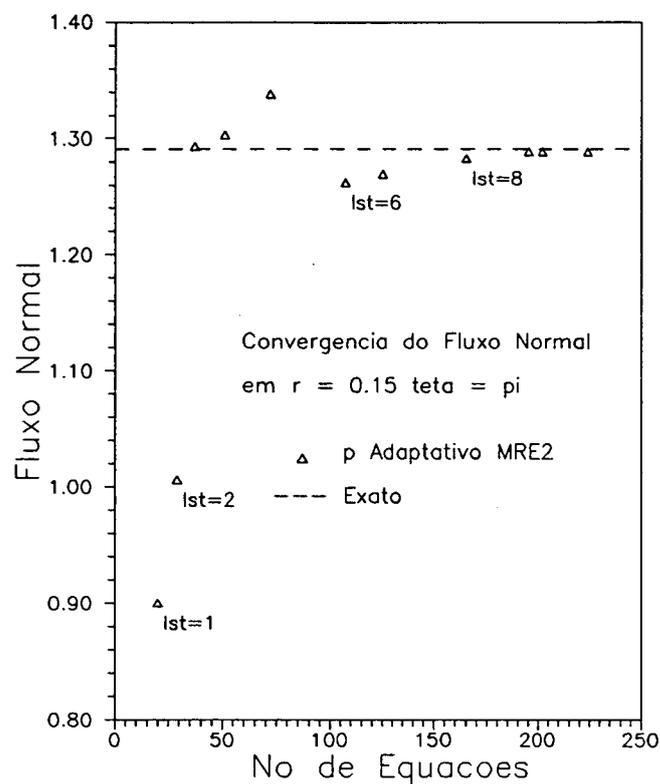


Fig. 7.18. Convergência do fluxo normal em  $r = 0,15$   $\theta = \pi$ , utilizando-se os indicadores MRE2.

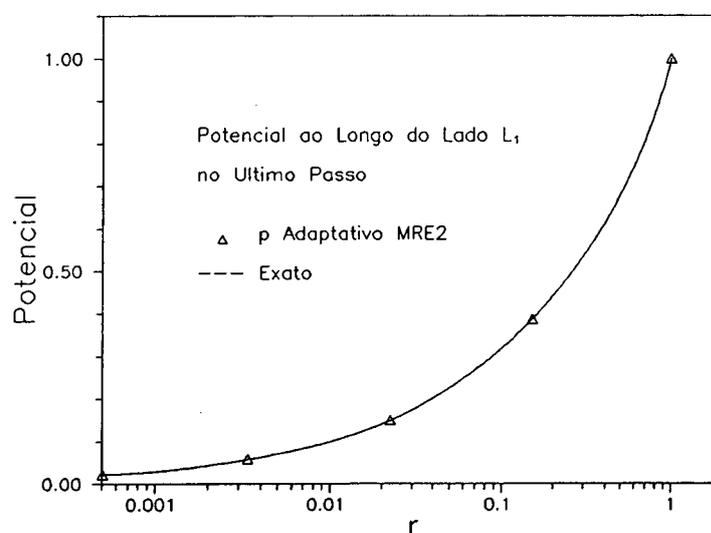


Fig. 7.19. Potencial ao longo do lado  $L_1$  no último passo, utilizando-se os indicadores MRE2.

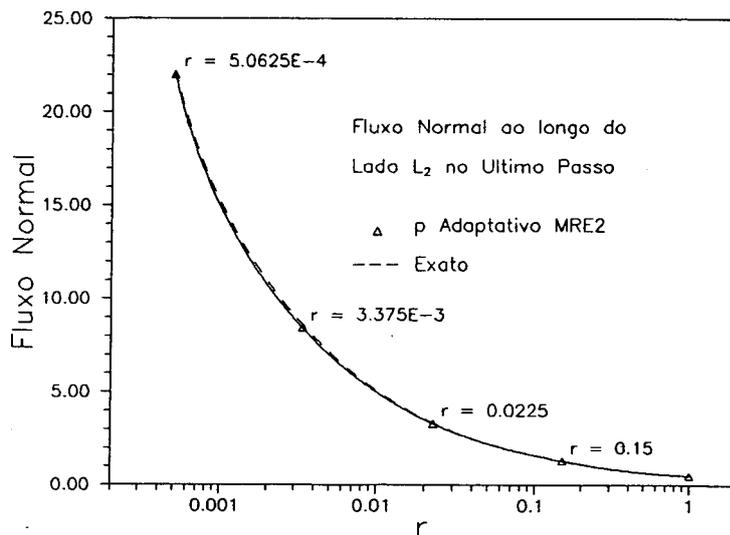


Fig. 7.20. Fluxo normal ao longo do lado  $L_2$  no último passo, utilizando-se os indicadores MRE2.

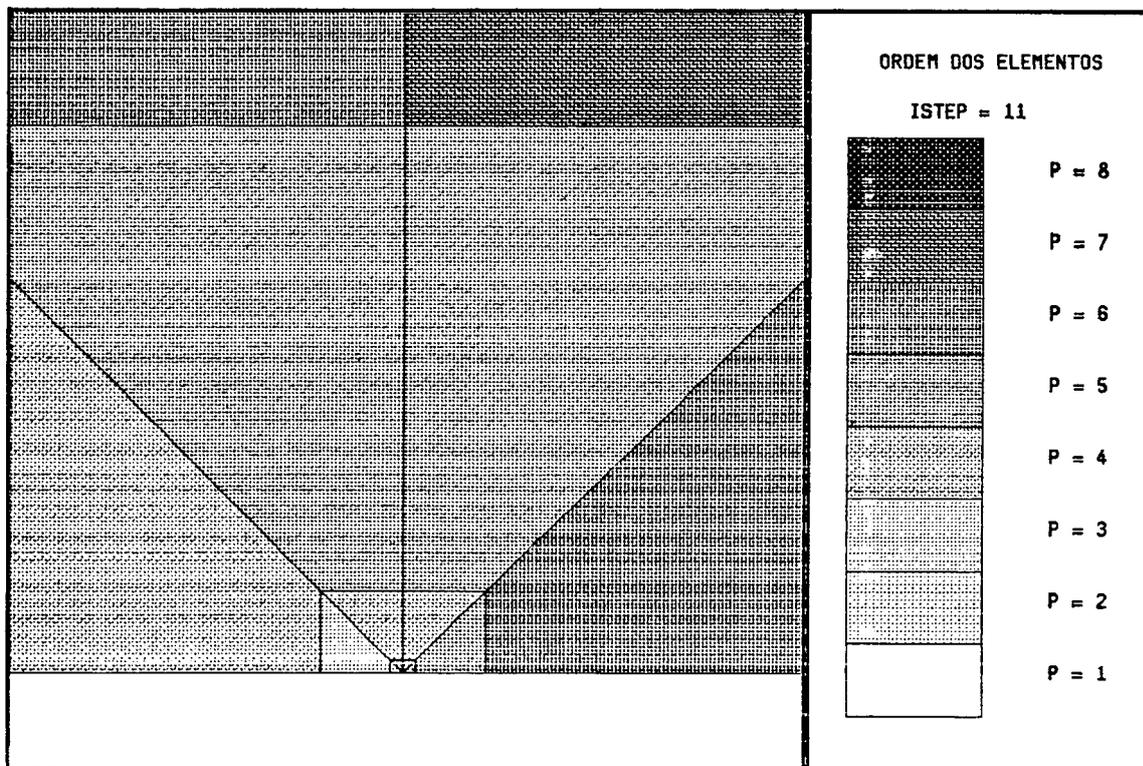


Fig. 7.21. Ordem dos elementos na região da singularidade. Enriquecimento controlado pelos indicadores MRE2.

Na Figura 7.21 tem-se um "zoom" na região próxima à origem mostrando a ordem dos elementos no passo 11 do processamento  $p$ -adaptativo, quando se utilizou os indi-

cadores MRE2. Note-se que a ordem dos elementos, na direção da singularidade, está diminuindo. Segundo Babuska & Suri, (1990) uma malha geométrica, na qual a ordem dos elementos diminua linearmente em direção à singularidade, é a discretização ótima para este tipo de problema. A Figura 7.22 é análoga à 7.21, só que utilizando-se os indicadores MPP1 ou MPP2.

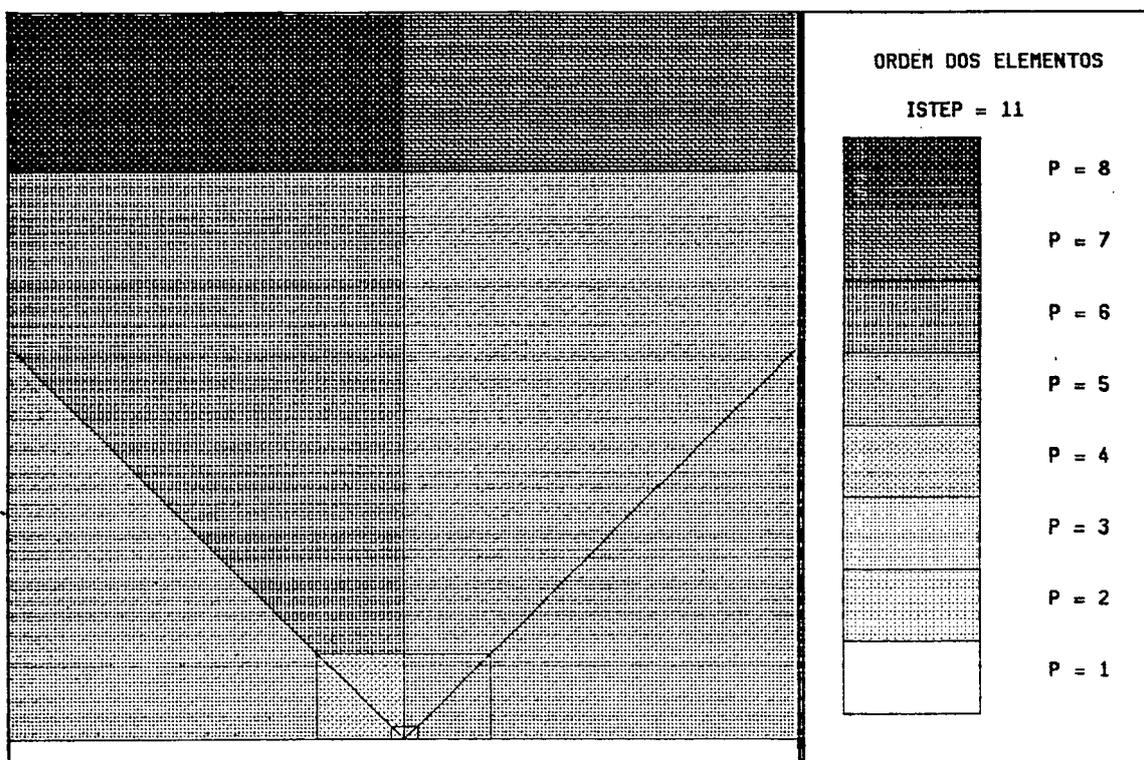


Fig. 7.22. Ordem dos elementos na região da singularidade. Enriquecimento controlado pelos indicadores MPP1 ou MPP2.

### 7.3 Problemas da Elasticidade Plana.

#### 7.3.1 Problema 5: Cisalhamento de Um Domínio Quadrado.

Encontre um campo de deslocamentos,  $u(x)$ , tal que

$$\sigma_{ij,j}(u) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (7.20)$$

sujeito às seguintes condições de contorno

$$u_2 = 0 \quad \text{em } \Gamma_D = L_1 \cup L_3$$

$$u_1 = -1 \quad \text{em } L_4$$

$$u_1 = 1 \quad \text{em } L_2$$

$$t(u) = 0 \quad \text{em } \Gamma_N = L_2 \cup L_4$$

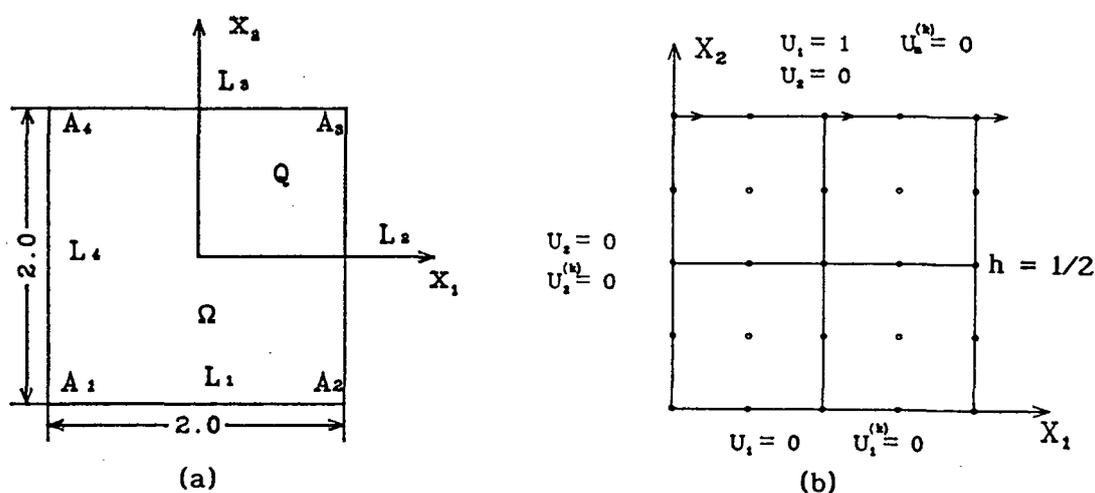


Fig. 7.23. (a) Domínio analisado. (b) Discretização do quadrante  $Q$  e condições de contorno impostas ( $u_n^{(k)}$  são graus de liberdade das funções hierárquicas)

O domínio  $\Omega$  é o quadrado  $\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1, x_2 \leq 1 \}$ . Devido a  $X_1$  e  $X_2$  serem eixos de anti-simetria foi modelado apenas o quadrante  $Q = (0,1) \times (0,1)$  e impostas condições de contorno adequadas (vide Figura 7.23 (b)).

Será suposto que existe um estado plano de deformação, que o módulo de elasticidade longitudinal  $E = 1$  MPa, e que o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  ou  $\nu = 0,4999$ . Os valores da energia de deformação, para o quadrante  $Q$ , foram estimados em  $U(u) = 0,130680$  N.mm, para  $\nu = 0,3$ , e  $U(u) = 0,127035$  N.mm, para  $\nu = 0,4999$ , (Babuska & Szabó 1982).

Este problema foi resolvido utilizando-se a versão  $p$  de MEF, com enriquecimento uniforme dos elementos, e a versão  $h$ , com refinamento uniforme da malha. A solução,  $u(x)$ , possui um comportamento singular nos vértices  $A_1$  e pertence à categoria B definida no Capítulo 1. Pode-se então verificar numericamente o comportamento assintótico, das versões  $p$  e  $h$ , previsto pelo Teorema 7.1. Segundo Babuska & Szabó, (1982)  $u_1(x) \in H^k(\Omega)$ ,  $k < 1.76$  para  $\nu = 0,3$  e  $k < 1.69$  quando  $\nu = 0,4999$ . Tem-se, então, que

$$\left. \begin{array}{l} \beta_h = \min(p ; 0,76) \\ \beta_p = 1,52 \end{array} \right\} \nu = 0,3 \qquad \left. \begin{array}{l} \beta_h = \min(p ; 0,69) \\ \beta_p = 1,38 \end{array} \right\} \nu = 0,4999$$

Os resultados obtidos com o uso da versão  $p$  e a malha da Figura 7.23 (b) estão representados na Figura 7.24 (a). Nesta, foi traçado o logaritmo de  $\|e\|_E^{er}$  versus o logaritmo de  $p$  para os casos de  $\nu = 0,3$  e  $\nu = 0,4999$ . Os valores obtidos para as taxas de convergência assintótica ( $\beta_p = 1,31$  e  $\beta_p = 1,28$ ) são um pouco menores do que os previstos pelo Teorema 7.1. A Figura 7.24 (a) demonstra também que a versão  $p$  é insensível ao travamento ("locking") de Poisson e que o ponto de entrada na faixa assintótica não depende do valor do coeficiente de Poisson ( Szabó et al. 1989).

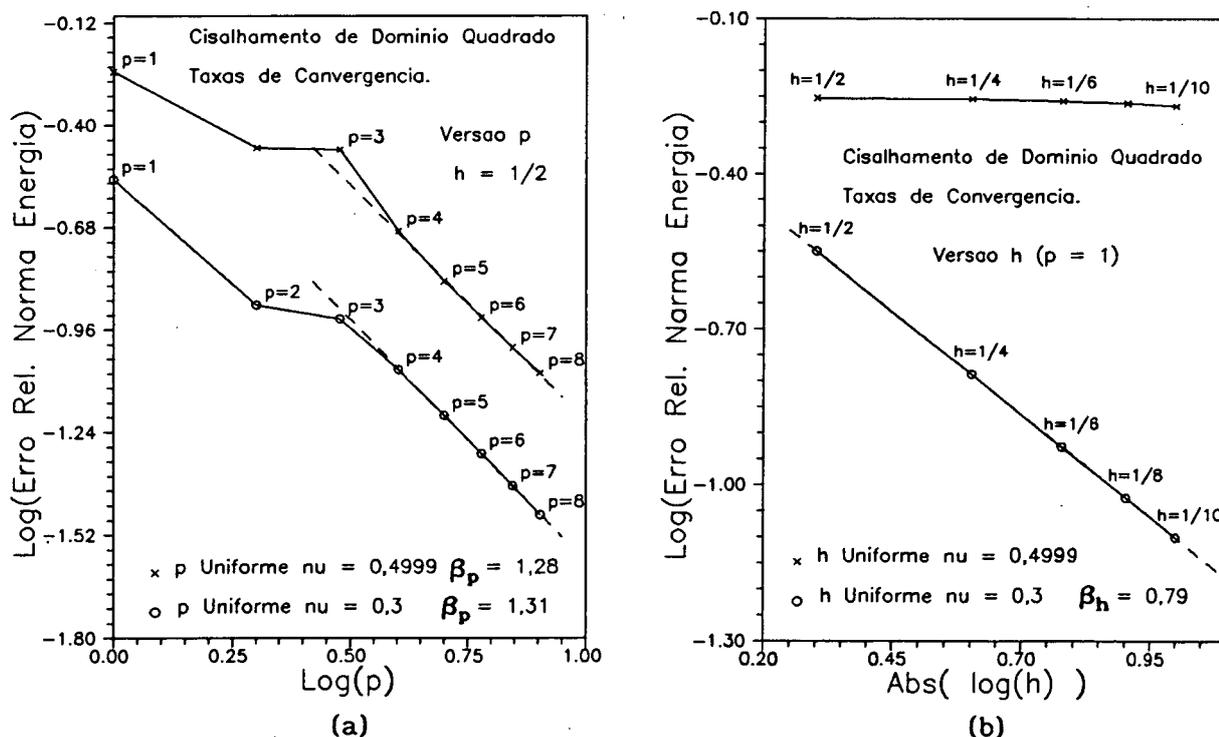


Fig. 7.24. (a) Taxas de convergência para a versão  $p$ .  
(b) Taxas de convergência para a versão  $h$ . Problema 5.

Na Figura 7.24 (b) foi traçado o logaritmo de  $\|ell_E^{er}$  correspondente a diversas discretizações do quadrante Q utilizando-se elementos lineares. No caso em que o coeficiente de Poisson vale  $\nu = 0,3$  obteve-se uma taxa de convergência,  $\beta_h = 0,79$ , um pouco superior a prevista pelo Teorema 7.1 A Figura 7.24 (b) demonstra também que o refinamento da malha não reduz o erro quando  $\nu = 0,4999$  e  $p = 1$ . O efeito do travamento de Poisson na versão  $h$  pode ser eliminado, por exemplo, com o uso de elementos de ordem maior ou igual a quatro (Babuska & Suri, 1990).

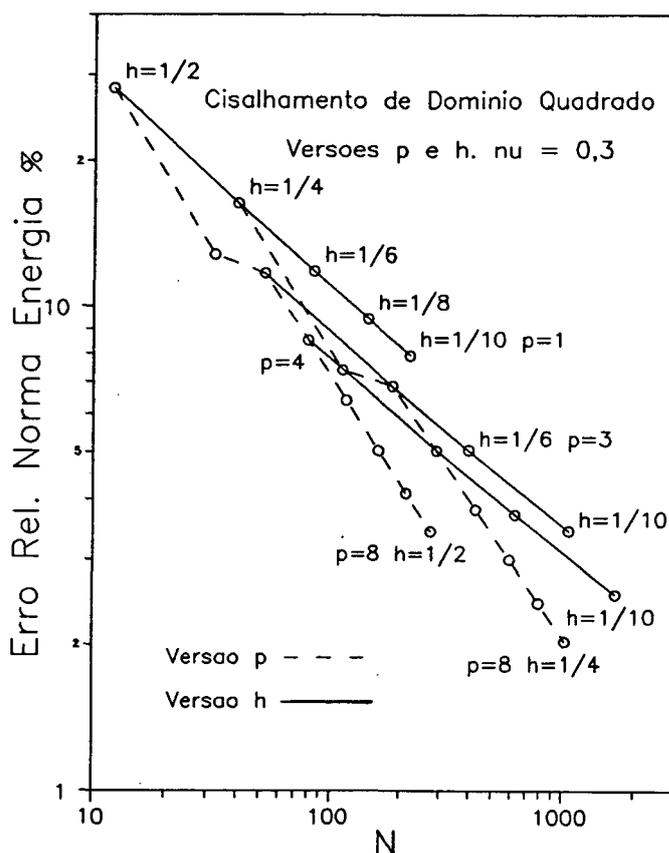


Fig. 7.25. Comparação das versões  $p$  e  $h$  do MEF para o Problema 5.

Para se poder comparar as versões  $p$  e  $h$  em termos do número de graus de liberdade, foi traçado na Figura 7.25, em escala log-log,  $\|ell_E^{er} * 100\%$  versus  $N$ . Onde  $N$  é o número de graus de liberdade após a imposição das condições de contorno de Dirichlet. Observa-se que, no caso de refino uniforme, a taxa de convergência da versão  $h$  é independente da ordem polinomial dos elementos. Nota-se ainda que a taxa de convergência da versão  $p$  é nitidamente superior a da versão  $h$  ( $\beta_p = 1,7 \beta_h$ ). Como consequência, para este problema, qualquer que seja o nível de erro desejável para a

solução aproximada, a versão  $p$  é sempre mais econômica em termos de número de graus de liberdade. O desempenho da versão  $p$  poderia ser ainda melhor se o efeito da singularidade presente no vértice  $A_3$  fosse atenuado utilizando-se uma malha adequada.

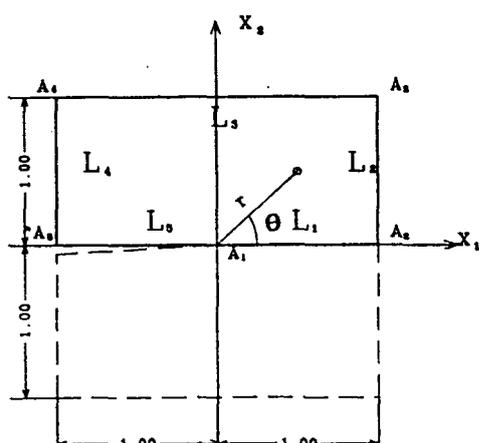
Na Tabela 14 encontram-se os valores do erro na norma da energia, e de sua estimativa, relativos a malha da Figura 7.23 (b),  $\nu = 0,3$  e  $1 \leq p \leq 8$ . A estimativa de  $\|e\|_E$  foi calculada utilizando-se o método baseado em análise assintótica (MAA). Nota-se que as estimativas obtidas foram bastante precisas, principalmente na faixa assintótica da versão  $p$ . Na tabela,  $N$  indica o número de equações após a imposição das condições de contorno de Dirichlet.

Tabela 14. Resultados para o Problema 5 utilizando-se a versão  $p$  do MEF.

MAA $h = 1/2$ $\nu = 0,3$						
P	N	$\ e\ _E$	$\Theta_{MAA}$	$\Gamma_{MAA}$	$\ e\ _E^{e_r} \%$	$\bar{\eta} \%$
1	12	1,44343E-1	-	-	28,234	-
2	32	6,54669E-2	-	-	12,806	-
3	52	5,99593E-2	9,74609E-2	1,625	11,728	18,604
4	80	4,36164E-2	5,08045E-2	1,165	8,532	9,853
5	116	3,27174E-2	4,14508E-2	1,267	6,400	8,118
6	160	2,57754E-2	2,63865E-2	1,024	5,042	5,162
7	212	2,10137E-2	2,14853E-2	1,022	4,110	4,203
8	272	1,75707E-2	1,79507E-2	1,022	3,437	3,511
$D\Gamma = 0,286$						

### 7.3.2 Problema 6: Painel Fraturado.

Analisa-se agora o comportamento da versão  $p$  quando a solução exata é singular em um ponto do domínio, devido a existência de uma trinca. Supõe-se que exista um estado plano de deformação, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , módulo de Young  $E = 1$  MPa e espessura unitária. Na Figura 7.26 tem-se o domínio analisado. Foram aplicadas condições de contorno de Neumann de tal forma que as trações correspondem ao primeiro termo simétrico da expansão assintótica da solução. As componentes do tensor tensão, correspondentes a este termo da expansão, são dadas pela Equação (7.21) (Babuska & Guo, 1988).



$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0 && \text{em } A_1 \\
 u_2 &= 0 && \text{em } L_1 \\
 t_1 &= \sigma_{11} & t_2 &= \sigma_{21} && \text{em } L_2 \\
 t_1 &= \sigma_{12} & t_2 &= \sigma_{22} && \text{em } L_3 \\
 t_1 &= -\sigma_{11} & t_2 &= -\sigma_{21} && \text{em } L_4
 \end{aligned}$$

$t_i$  são as componentes do vetor tração e  $\sigma_{ij}$  são dadas pela Equação (7.21).

Fig. 7.26. Domínio e condições de contorno para o Problema 6.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \\
 f_{11} &= \cos\frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} \right) \\
 f_{22} &= \cos\frac{\theta}{2} \left( 1 + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} \right) \\
 f_{12} &= \cos\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

$K_I$  é o primeiro fator de intensidade de tensão e o par  $(r, \theta)$  refere-se ao sistema polar mostrado na Figura 7.26.

A solução é simétrica em relação ao eixo  $X_1$ , portanto foi modelado apenas a

metade superior do domínio e impostas condições de contorno adequadas no lado  $L_1$ . O valor exato da energia de deformação, para o domínio modelado, é de  $U(u) = 0,23706469 (K_I)^2/E \text{ N.mm}$  (Szabó, 1986c).

Assim como no Problema 4, a solução possui uma singularidade da ordem de  $r^{1/2}$  na origem e pertence à categoria B, definida no Capítulo 1. Sendo  $u_1(x) \in H^{3/2-\epsilon}(\Omega)$ ,  $0 < \epsilon \ll 1$ , o Teorema 7.1 prevê, para a versão  $p$ , uma taxa de convergência assintótica de apenas  $\beta_p = 1-\epsilon$ . Na primeira discretização do domínio utilizou-se uma malha uniforme de  $8 \times 4$  elementos. Pela Figura 7.27 nota-se que é impraticável alcançar um erro relativo, na norma da energia, da ordem de 1 por cento, com uma taxa de convergência tão baixa. Utilizou-se, então, uma malha geométrica com 3 e uma com 5 camadas de elementos (vide Figura 7.15). Em ambos os casos a razão da progressão foi de  $s = 0,15$ . Pela Figura 7.27 observa-se que a entrada na faixa assintótica é retardada com o aumento do número de camadas da malha geométrica. Deve-se portanto selecionar uma malha com um número de camadas tal que o nível de precisão desejado seja alcançado antes que a taxa de convergência diminua (Szabó & Babuska, 1991). Neste problema desejava-se obter um erro relativo, medido na norma da energia, menor que um por cento, portanto, uma malha geométrica com 5 camadas é suficiente, como pode ser observado na Figura 7.27. Para  $p = 8$  e  $n = 5$  camadas obteve-se  $\|e\|_E^{er} = 0,439\%$ .

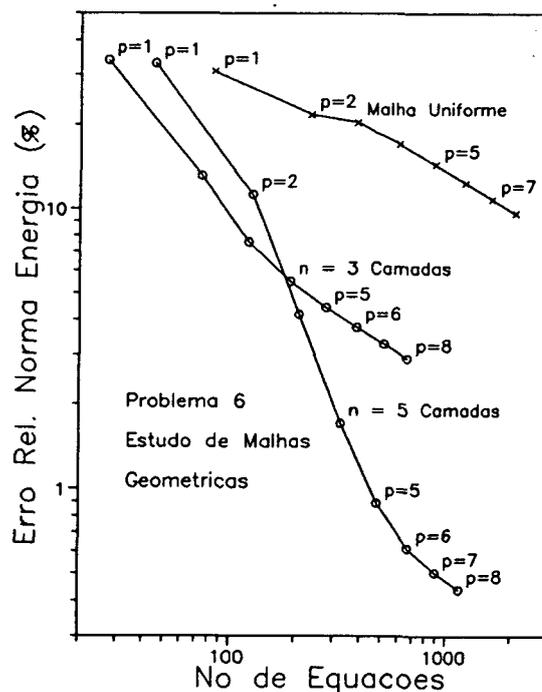


Fig. 7.27. Aumento da taxa de convergência pré-assintótica quando são utilizadas malhas geométricas.

Os indicadores  $MRE_i$  e  $MPP_i$ ,  $i = 1,2$ , foram utilizados para controlar o enriquecimento  $p$ -adaptativo dos elementos da malha geométrica com 5 camadas de elementos (Figura 7.15). Na Figura 7.28 tem-se, em escala log-log, as curvas  $\|e\|_E^{er} * 100\%$  versus o número de equações,  $N$ , obtidas. As seqüências de distribuições  $p$ , construídas utilizando-se os indicadores  $MRE1$  e  $MRE2$ , são bastante semelhantes. Diferentemente do Problema 4, neste, devido à distorção dos elementos da malha, o uso dos indicadores  $MPP1$  e  $MPP2$  resultou em diferentes seqüências de distribuições  $p$ . Mais uma vez nota-se uma maior taxa de convergência associada ao uso dos indicadores  $MRE1$  e  $MRE2$ .

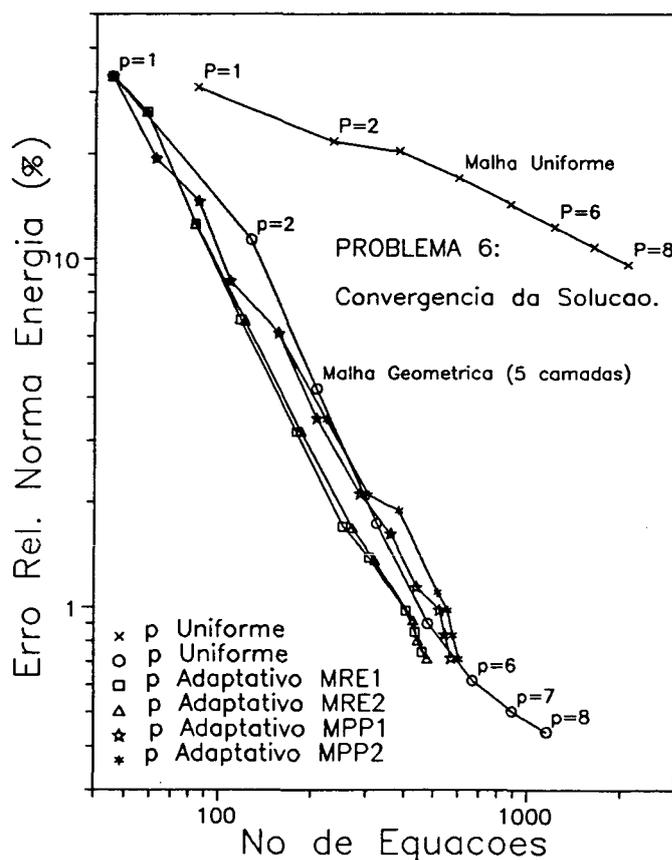


Fig. 7.28. Convergência da solução para os casos de enriquecimento  $p$ -uniforme e  $p$ -adaptativo dos elementos. Problema 6.

Assim como no Problema 4, durante o enriquecimento  $p$ -adaptativo dos elementos, controlado pelos indicadores  $MRE2$ , utilizou-se também os métodos  $MRE1$ ,  $MPP1$  e  $MPP2$  para se calcular estimativas de  $\|e\|_E$  e  $\|e\|_E^{er}$ . Nas Tabelas 15 e 16 tem-se as estimativas de  $\|e\|_E$  obtidas com os métodos  $MRE_i$ ,  $i = 1,2$ , e com os métodos  $MPP_i$ ,  $i = 1,2$ , respectivamente. O método  $MRE2$  apresentou o menor desvio em relação à unidade para o índice de efetividade ( $DI = 0,381$ ). Também neste problema, apesar da elevada distorção dos elementos, as estimativas obtidas com os métodos  $MPP1$  e  $MPP2$  foram

bastante semelhantes. Na Tabela 17 tem-se as estimativas de  $\|ell_E^{er*}$  100% obtidas com os métodos MRE1 e MPPi,  $i = 1,2$ .

Tabela 15. Estimativas de  $\|ell_E$  obtidas com os métodos MRE1 e MRE2.

MRE1 e MRE2						
IST	N	$\ ell_E$	$\Theta_{MRE1}$	$\Gamma_{MRE1}$	$\Theta_{MRE2}$	$\Gamma_{MRE2}$
1	45	2,29205E-1	3,85635E-1	1,682	4,18978E-1	1,828
2	58	1,81119E-1	2,15589E-1	1,190	2,41937E-1	1,336
3	83	8,66142E-2	8,99377E-2	1,038	1,03030E-1	1,190
4	121	4,56232E-2	4,00307E-2	0,877	4,73567E-2	1,038
5	184	2,19958E-2	1,76483E-2	0,802	2,11882E-2	0,963
6	269	1,16207E-2	8,21510E-3	0,707	1,01114E-2	0,870
7	320	9,36837E-3	5,00094E-3	0,534	6,51056E-3	0,695
8	428	6,30928E-3	2,96546E-3	0,470	3,74185E-3	0,593
9	441	5,52911E-3	2,55942E-3	0,463	3,30023E-3	0,597
10	474	4,89603E-3	2,19856E-3	0,449	2,83374E-3	0,579
				$D\Gamma = 0,416$	$D\Gamma = 0,381$	

Tabela 16. Estimativas de  $\|ell_E$  obtidas com os métodos MPP1 e MPP2.

MPP1 e MPP2						
IST	N	$\ ell_E$	$\Theta_{MPP1}$	$\Gamma_{MPP1}$	$\Theta_{MPP2}$	$\Gamma_{MPP2}$
1	45	2,29205E-1	2,89215E-1	1,262	2,89215E-1	1,262
2	58	1,81119E-1	2,86438E-1	1,581	2,86120E-1	1,580
3	83	8,66142E-2	1,23840E-1	1,430	1,23450E-1	1,425
4	121	4,56232E-2	6,21899E-2	1,363	6,22066E-2	1,364
5	184	2,19958E-2	4,23717E-2	1,926	4,44849E-2	2,022
6	269	1,16207E-2	2,13181E-2	1,835	2,21757E-2	1,908
7	320	9,36837E-3	1,74139E-2	1,859	1,79041E-2	1,911
8	428	6,30928E-3	1,29209E-2	2,048	1,30772E-2	2,073
9	441	5,52911E-3	1,18610E-2	2,145	1,20368E-2	2,177
10	474	4,89603E-3	1,14114E-2	2,331	1,15914E-2	2,368
				$D\Gamma = 0,848$	$D\Gamma = 0,885$	

Como era de se esperar o comportamento da versão  $p$  neste problema foi semelhante ao do Problema 4 já que, sob vários aspectos, os dois problemas são matematicamente equivalentes. Compare-se, por exemplo, a Figura 7.16, relativa ao Problema 4, com a Figura 7.28.

Tabela 17. Estimativas de  $\|ell_E^{er}$ .

IST	N	$\ ell_E^{er} \times$	$\eta_{MRE1} \times$	$\eta_{MRE2} \times$	$\eta_{MPP1} \times$	$\eta_{MPP2} \times$
1	45	33,287	51,065	54,219	40,689	40,689
2	58	26,304	30,868	34,220	39,594	39,557
3	83	12,579	13,053	14,914	17,838	17,784
4	121	6,625	5,813	6,876	9,015	9,017
5	184	3,194	2,563	3,077	6,145	6,450
6	269	1,688	1,193	1,469	3,095	3,219
7	320	1,361	0,726	0,946	2,528	2,600
8	428	0,916	0,431	0,543	1,876	1,899
9	441	0,803	0,372	0,479	1,722	1,748
10	474	0,711	0,319	0,412	1,657	1,683

Na Tabela 18 tem-se os valores das componentes do tensor tensão, ao longo da direção  $\theta = \pi/2$ , obtidas no passo 10. A Figura 7.29 (a) representa os valores da tabela.

Tabela 18. Tensões ao longo da direção  $\theta = \pi/2$  no passo 10 (indicadores MRE2).

MRE2 IST = 10 (valores em MPa)						
$r (\theta = \pi/2)$	$\sigma_{xx}/K_I$	$e_r \times$	$\sigma_{yy}/K_I$	$e_r \times$	$\tau_{xy}/K_I$	$e_r \times$
0,0000	55,33994	-	87,13729	-	-9,30934	-
5,0625E-4	6,03391	3,747	19,68667	-4,681	-6,63778	-5,886
3,3750E-3	2,29421	5,506	6,92289	4,953	-2,51637	-3,645
2,2500E-2	0,93081	1,011	2,76632	1,937	-0,96079	-2,177
1,5000E-1	0,36589	-0,468	1,09178	0,071	-0,36280	0,380
1,0000E+0	0,13991	0,809	0,42106	0,492	-0,14145	-0,283

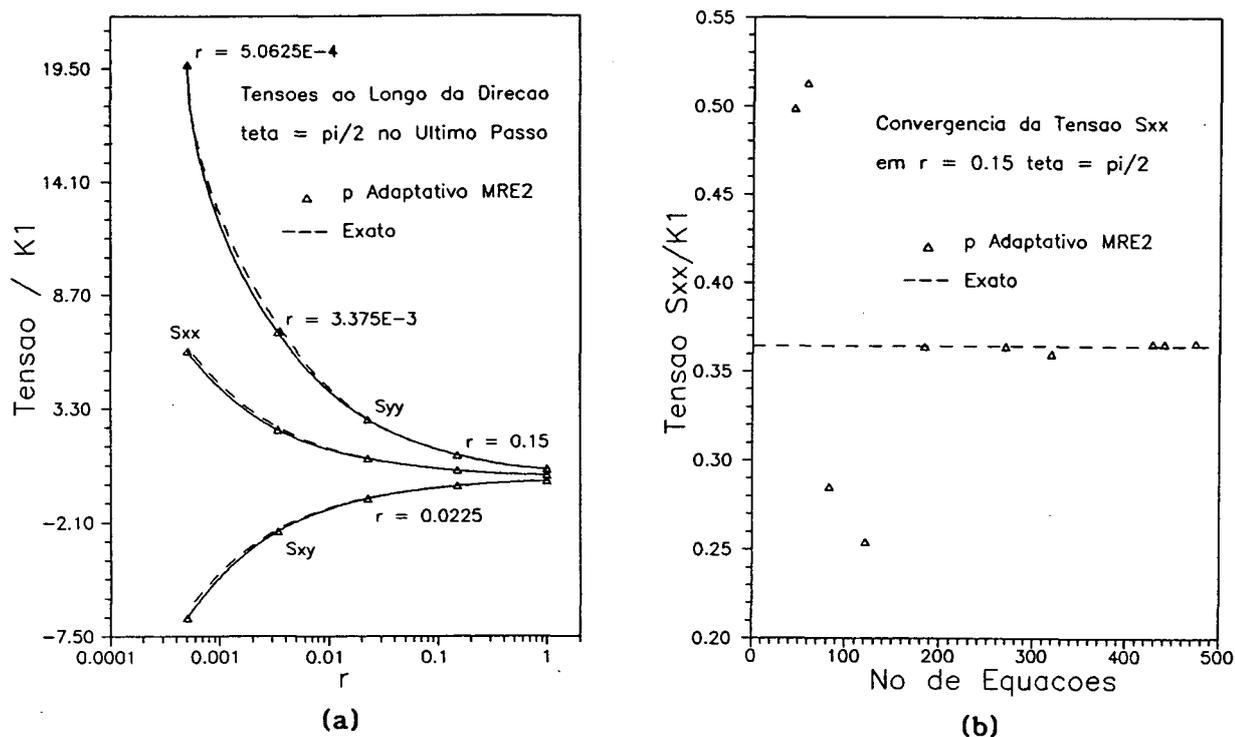


Fig. 7.29. (a) Tensões ao longo da direção  $\theta = \pi/2$  no passo 10.

(b) Convergência da componente  $\sigma_{xx}$  em  $r = 0,15$   $\theta = \pi/2$ .

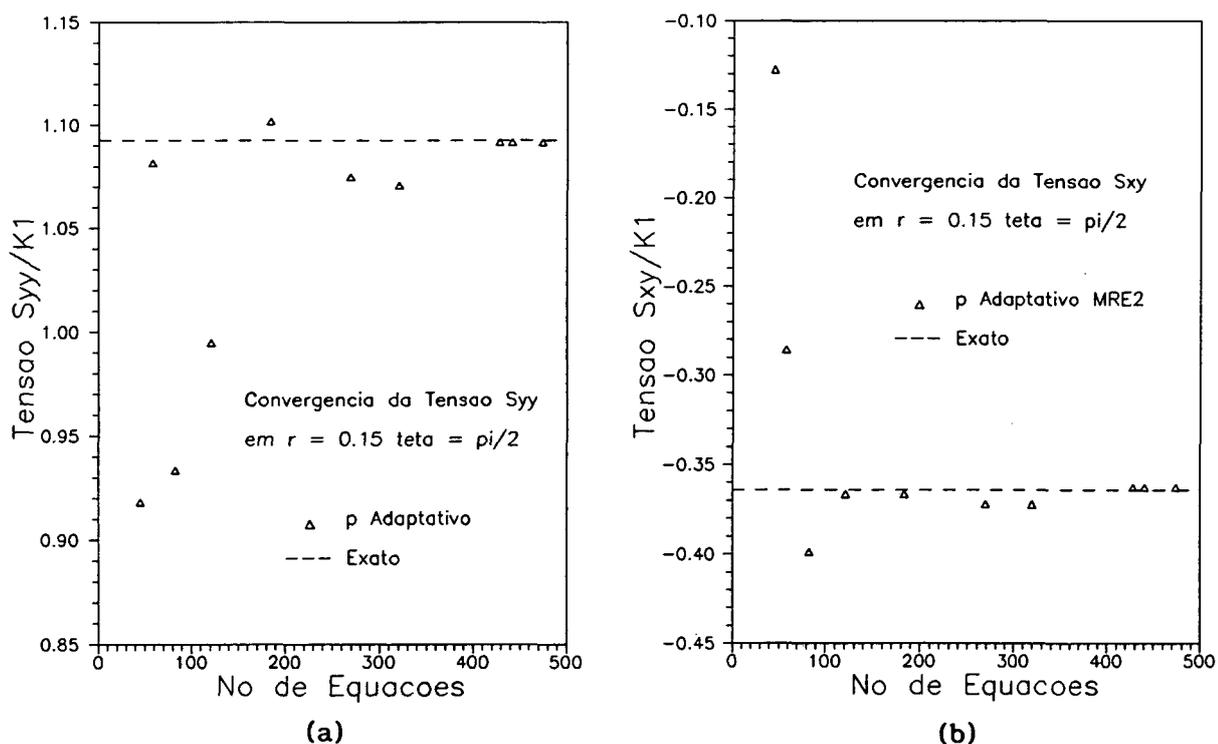


Fig. 7.30. (a) Convergência da componente  $\sigma_{yy}$  em  $r = 0,15$   $\theta = \pi/2$ .

(b) Convergência da componente  $\tau_{xy}$  em  $r = 0,15$   $\theta = \pi/2$ .

Nas Figuras 7.29(b), 7.30(a) e (b) tem-se a convergência de  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$ , respectivamente, em  $r = 0,15$   $\theta = \pi/2$  ao longo da seqüência de distribuições  $p$  construída utilizando-se os indicadores MRE2. Nota-se uma convergência bastante oscilatória principalmente nos primeiros passos do processamento  $p$  adaptativo. Porém, já a partir do passo 5, a amplitude das oscilações diminui bastante e a convergência para os valores exatos é evidente.

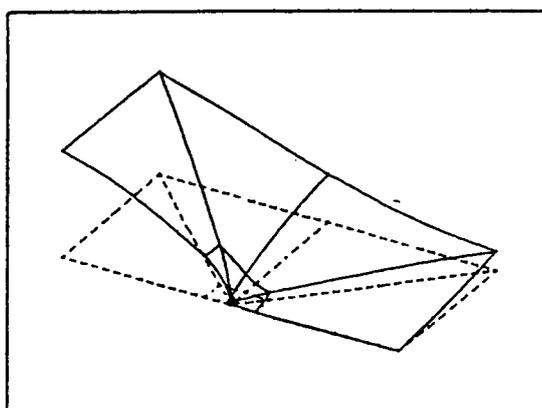


Fig. 7.31. Componente  $X_2$  do vetor deslocamento para o Problema 6 ( $p = 8$ ).

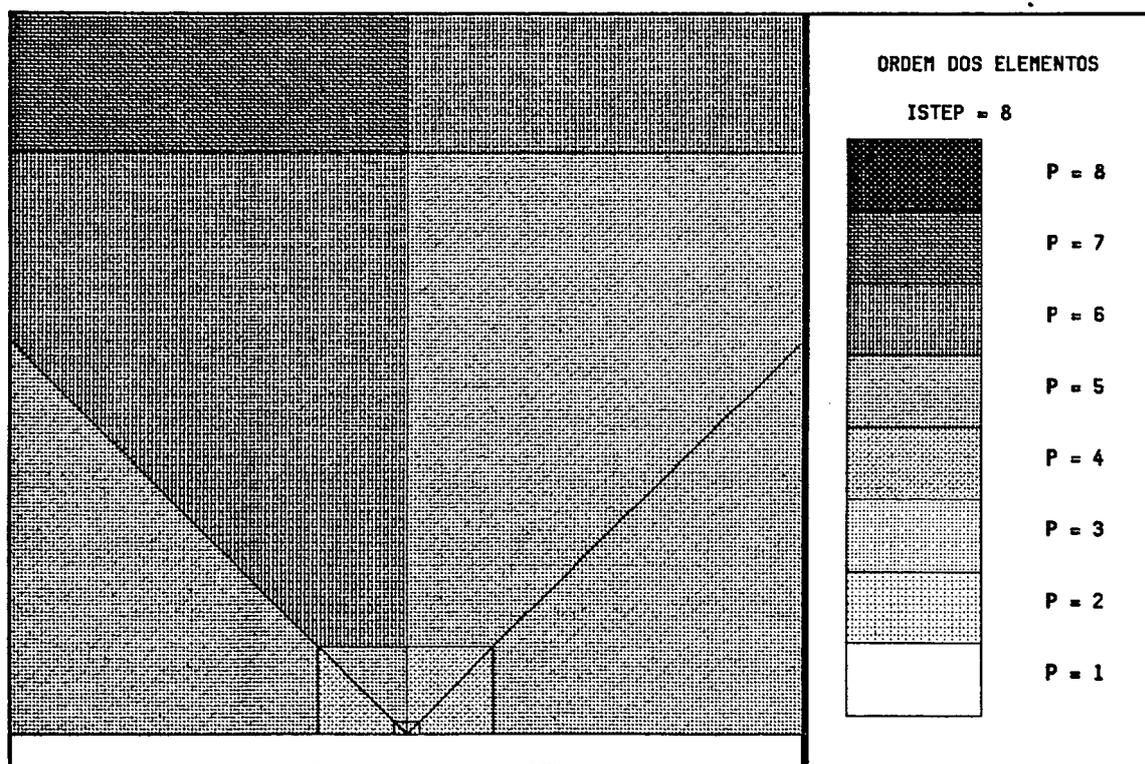


Fig. 7.32. Ordem dos elementos no passo 8 (utilizando-se os indicadores MRE2).

Na Figura 7.31 foi traçada a componente  $X_2$  do vetor deslocamento para o Problema 6. As Figuras 7.32 e 7.33 mostram a ordem dos elementos na região próxima à singularidade, quando se utilizou os indicadores MRE2 e MPP1, respectivamente.

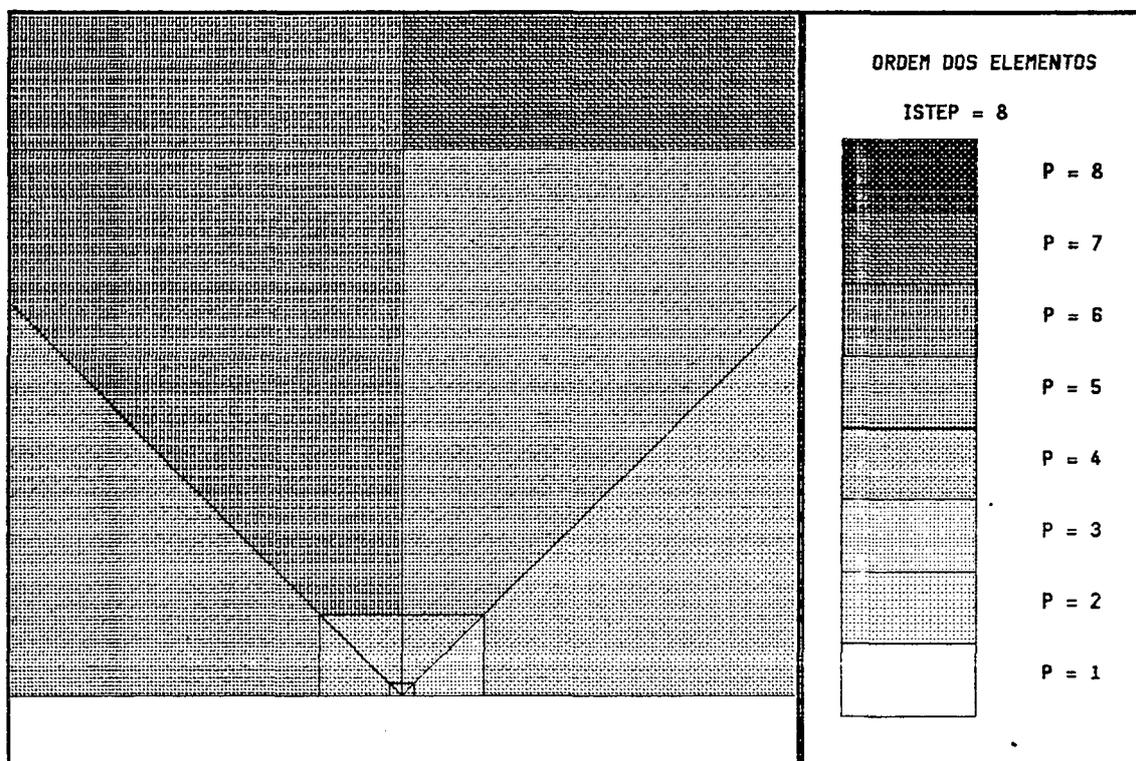


Fig. 7.33. Ordem dos elementos no passo 8. Enriquecimento controlado pelos indicadores MPP1.

## 7.4 Problemas da Elasticidade com Axissimetria Geométrica e de Carregamento.

### 7.4.1 Problema 7: Teste de MacNeal-Harder.

O problema de um cilindro de parede espessa submetido a uma pressão interna foi proposto por MacNeal & Harder, (1985) como um problema padrão para testar o efeito de materiais quase incompressíveis. A malha utilizada e as condições de contorno impostas estão ilustradas na Figura 7.34. Nesta, tem-se o raio interno,  $R_i = 3,0$  mm, o raio externo,  $R_e = 9,0$  mm, a cota da base,  $Z_b = 0,0$  e a cota do topo,  $Z_t = 1,0$  mm, para o cilindro analisado. Adotou-se também módulo de Young  $E = 1000$  MPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,4999$  e pressão interna  $P = 1,0$  MPa. Note-se que as condições de contorno de estado plano de deformação impostas em  $z = Z_b$  e em  $z = Z_t$ , juntamente com a axissimetria do problema, confinam o material em todas as direções, com a exceção da radial, o que provoca um aumento das dificuldades numéricas causadas pela quase incompressibilidade do material (MacNeal & Harder, 1985).

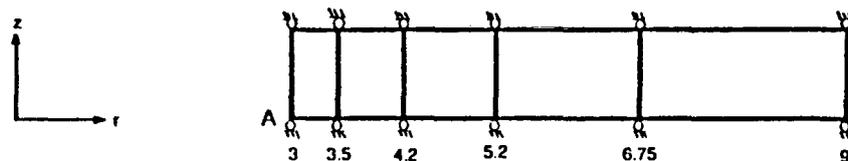


Fig. 7.34. Cilindro de parede espessa, malha utilizada e condições de contorno impostas.

A solução deste problema é analítica em todos os elementos finitos, incluindo os respectivos contornos, e portanto pertence à categoria A definida no Capítulo 1. A sua expressão analítica é dada pela Equação (7.22) (Féodosiev, 1977). O valor exato da energia de deformação, para um radiano do cilindro, foi estimado em  $U(u) = 0,759.341.248.882$  N.mm utilizando-se uma malha de 20 elementos na direção radial e 2 na direção longitudinal.

$$\sigma_r = \frac{R_i^2 P}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 - \frac{R_e^2}{r^2} \right) \quad (7.22a)$$

$$\sigma_t = \frac{R_1^2 P}{R_e^2 - R_1^2} \left( 1 + \frac{R_e^2}{r^2} \right) \quad (7.22b)$$

$$\sigma_z = \frac{2 \nu P R_1^2}{R_e^2 - R_1^2} \quad (7.22c)$$

$$u = \frac{P R_1^2}{E(R_e^2 - R_1^2)} \left[ (1 - \nu)r + (1 + \nu)R_e^2 \frac{1}{r} - 2\nu^2 r \right] \quad (7.22d)$$

Os deslocamentos no ponto A, para várias formulações analisadas por MacNeal & Harder, (1985) e para a versão *p* do MEF, estão na Tabela 19. MacNeal & Harder, no entanto, utilizaram elementos para estado plano de deformação ou elementos sólidos e não elementos axissimétricos. Os elementos utilizados foram os seguintes (para maiores detalhes veja MacNeal & Harder, 1985):

- QUAD2 -- Composto de dois pares de triângulos CST (Constant Strain Triangle) sobrepostos.
- QUAD4 -- Elemento bilinear isoparamétrico com integração reduzida seletiva.
- QUAD8 -- Elemento quadrático isoparamétrico de 8 nós com integração reduzida seletiva.
- HEXA(8) -- Elemento sólido isoparamétrico de 8 nós com integração reduzida seletiva.
- HEX20 -- Elemento sólido isoparamétrico de 20 nós.
- HEX20(R) -- Elemento sólido isoparamétrico de 20 nós com integração reduzida seletiva.

Tabela 19. Deslocamentos adimensionalizados na superfície interna ( $r = R_1$ ).

MacNeal	$u_h / u$
QUAD2	0,018
QUAD4	0,053
QUAD8	0,967
HEXA(8)	0,986
HEX20	0,879
HEX20(R)	1,000

P	$u_p / u$
1	0,052.960
2	0,878.884
3	0,999.052
4	0,999.994
5	1,000.000
6	1,000.000
7	1,000.000
8	1,000.000

Os valores obtidos foram adimensionalizados em relação a solução exata,  $u = 5,062.274.993 \times 10^{-3}$  mm. Os p\u00e9ssimos resultados obtidos com os elementos QUAD2, QUAD4 e  $P = 1$  indicam que houve travamento ("locking") desses elementos.

Na Tabela 20 tem-se os valores das tens\u00f5es radial,  $\sigma_r$ , circunferencial,  $\sigma_t$ , e longitudinal,  $\sigma_z$ , no ponto A, obtidos com os elementos  $p$ -hier\u00e1rquicos. Note-se que apesar dos valores dos deslocamentos, obtidos com elementos do 3\u00b0 e do 4\u00b0 grau, j\u00e1 serem excelentes, as tens\u00f5es ainda apresentam elevado erro. MacNeal & Harder, (1985) n\u00e3o apresentam os valores de tens\u00f5es obtidos. A Tabela 20 revela tamb\u00e9m a elevad\u00edssima taxa de converg\u00eancia dos valores das tens\u00f5es obtidos com a vers\u00e3o  $p$ , neste problema. As Figuras 7.35 (a)-(b) e 7.36 (a)-(b) representam os resultados das Tabelas 19 e 20.

Durante o enriquecimento  $p$ -uniforme dos elementos utilizou-se o m\u00e9todo MRE2 para se calcular estimativas de  $\|ell_E$  e de  $\|ell_E^{er}$ . Os resultados obtidos est\u00e3o na Tabela 21. Nota-se que as estimativas obtidas foram muito precisas, com um desvio em rela\u00e7\u00e3o \u00e0 unidade do \u00edndice de efetividade de apenas  $DI = 0,0895$ . Os valores de  $\|ell_E$  e de  $\|ell_E^{er}$  s\u00f3 est\u00e3o tabelados para  $1 \leq p \leq 6$  pois como  $U(u)$  foi estimado com apenas 12 algarismos significativos n\u00e3o tem sentido calcular-se valores de  $\|ell_E$  menores do que  $10^{-6}$ .

Tabela 20. Tens\u00f5es (MPa) obtidas com a vers\u00e3o  $p$  do MEF no ponto A do cilindro.

TENS\u00d5ES NA SUPERF\u00cdCIE INTERNA						
P	$\sigma_r$	$e_r(\sigma_r)\%$	$\sigma_t$	$e_r(\sigma_t)\%$	$\sigma_z$	$e_r(\sigma_z)\%$
1	19,80438	2,080E+3	19,91473	-1,493E+3	19,85558	-1,579E+4
2	25,33357	2,633E+3	27,29957	-2,084E+3	26,31131	-2,095E+4
3	0,84002	1,840E+2	3,08709	-1,470E+2	1,96316	-1,471E+3
4	-0,89880	1,012E+1	1,35115	-8,092E+0	0,22613	-8,094E+1
5	-0,99481	5,193E-1	1,25519	-4,153E-1	0,13017	-4,154E+0
6	-0,99975	2,544E-2	1,25025	-2,035E-2	0,12523	-2,035E-1
7	-0,99999	1,206E-3	1,25001	-9,641E-4	0,12499	-9,643E-3
8	-1,00000	5,570E-5	1,25000	-4,456E-5	0,12498	-4,457E-4
$\infty$	-1,0	0	1,25	0	0,12498	0

Na Figura 7.37 foi tra\u00e7ado, em escala log-log, o n\u00famero de equa\u00e7\u00f5es versus

$\eta_{MRE2} * 100 \%$ . A curva obtida demonstra, mais uma vez, a insensibilidade da versão  $p$  do MEF em relação ao travamento de Poisson e a sua elevada taxa de convergência para problemas pertencentes à categoria A.

Tabela 21. Estimativas obtidas com o método MRE2.

MRE2						
P	N	$\ e\ _E$	$\Theta_{MRE2}$	$\Gamma_{MRE2}$	$\ e\ _E^{e_r} \%$	$\eta \%$
1	12	1,19927E-1	9,47315E-2	0,7899	97,316	95,799
2	32	4,28879E-2	4,02027E-2	0,9374	34,802	32,865
3	52	3,79419E-3	3,79188E-3	0,9994	3,079	3,077
4	82	3,09210E-4	3,09102E-4	0,9997	2,509E-1	2,508E-1
5	122	2,49037E-5	2,48900E-5	0,9995	2,021E-2	2,020E-2
6	172	1,99858E-6	1,98434E-6	0,9929	1,622E-3	1,610E-3
7	238	< 1,0E-6	1,56777E-7	-	< 1,0E-3	1,272E-4
8	302	< 1,0E-6	1,22895E-8	-	< 1,0E-3	9,972E-6
$D\Gamma = 0,0895$						

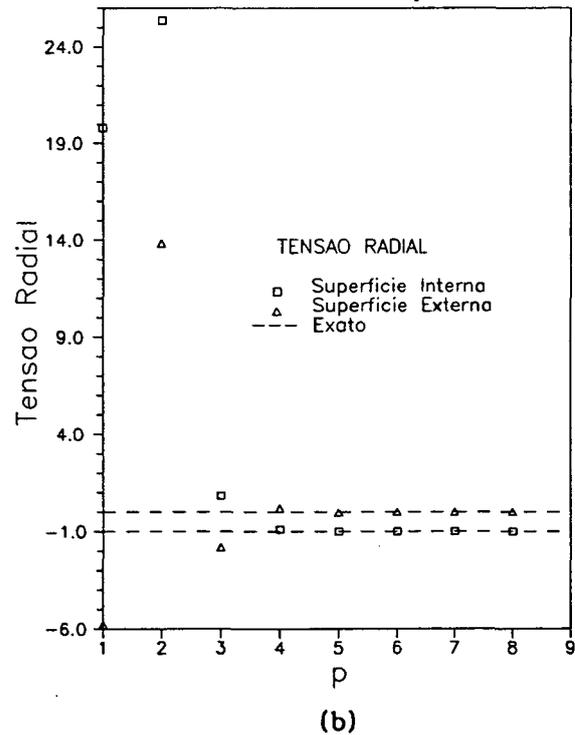
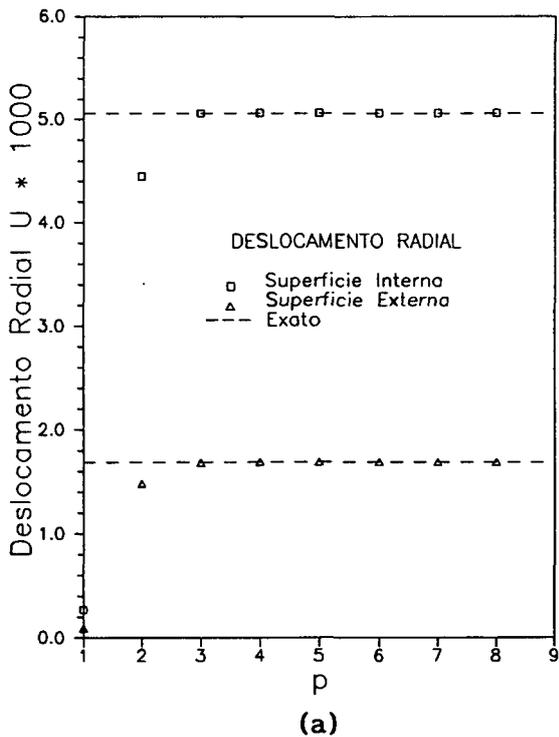


Fig. 7.35. (a) Convergência dos deslocamentos. (b) Convergência da tensão radial. Enriquecimento  $p$ -uniforme dos elementos.

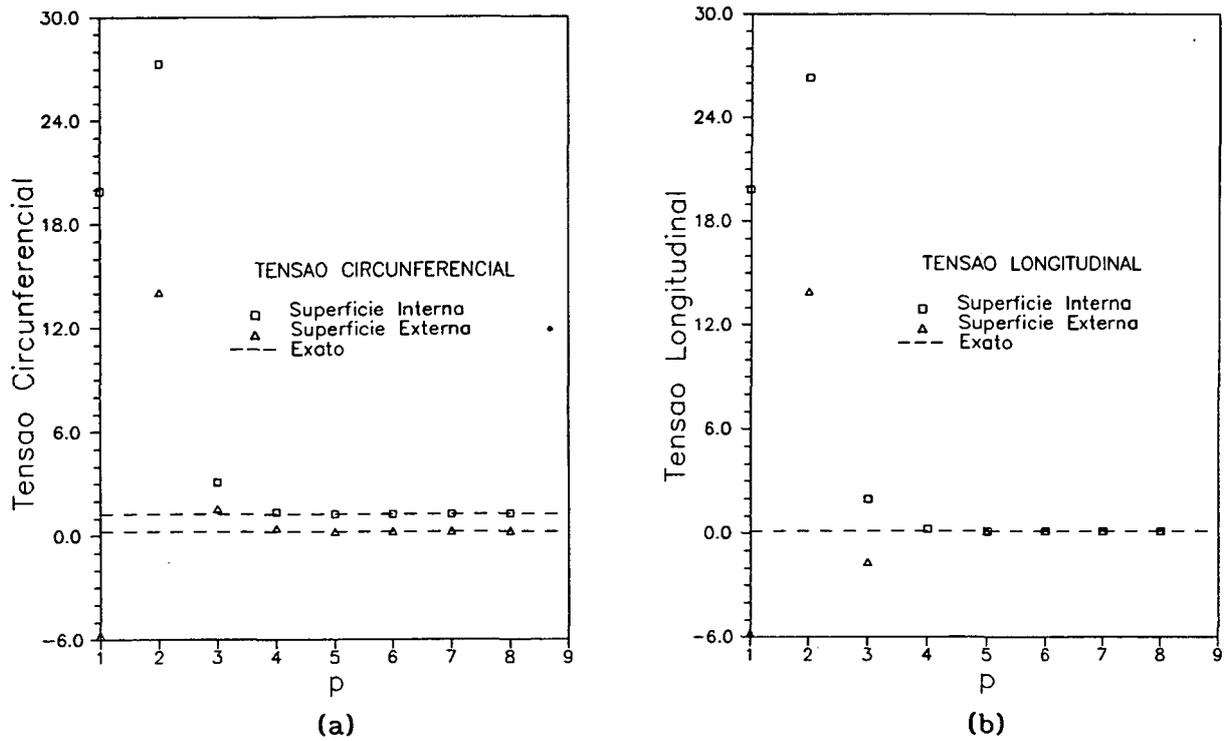


Fig. 7.36. (a) Convergência da tensão circunferencial. (b) Convergência da tensão longitudinal. Enriquecimento  $p$ -uniforme dos elementos.

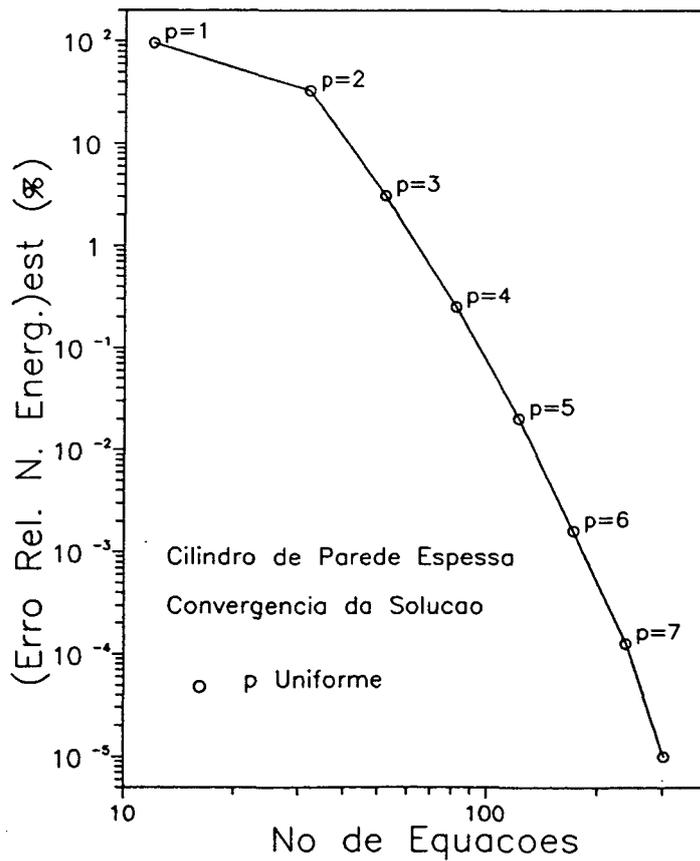


Fig. 7.37. Convergência da solução com o enriquecimento  $p$ -uniforme dos elementos.

### 7.4.2 Problema 8: Anel Sob Pressão Interna e Rotação Constante.

Analisa-se agora o caso de um anel submetido a uma pressão,  $P$ , na sua superfície interna e a uma rotação constante,  $\omega$ , em torno de seu eixo. Assim como no problema anterior, a solução deste problema pertence à categoria A. Devido à rotação do anel existirá uma força de corpo por unidade de volume, na direção radial, dada por

$$f_r = \frac{W}{g} \omega^2 r \quad (7.23)$$

onde  $W$  é o peso por unidade de volume,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\omega$  a velocidade angular. Será suposto que a espessura do anel se mantém constante e que as deformações não variam ao longo da direção  $z$ , ou seja, que existe um estado plano de deformação. A Figura 7.38 ilustra a geometria do problema, as condições de contorno impostas e a malha utilizada (apenas um elemento). Nesta, tem-se o raio interno,  $R_i = 4,0$  mm, o raio externo,  $R_e = 6,0$  mm, a cota da base,  $Z_b = 0,0$  e a cota do topo,  $Z_t = 0,5$  mm, para o anel analisado. Adotou-se também:

- Pressão interna,  $P = 500$  MPa.
- Velocidade angular,  $\omega = 200$  rad/s.
- Massa por unidade de volume,  $W/g = 7,9 \times 10^{-5}$  N.s<sup>2</sup>/mm<sup>4</sup>.
- Módulo de Young,  $E = 2,1 \times 10^6$  MPa.
- Coeficiente de Poisson,  $\nu = 0,3$ .

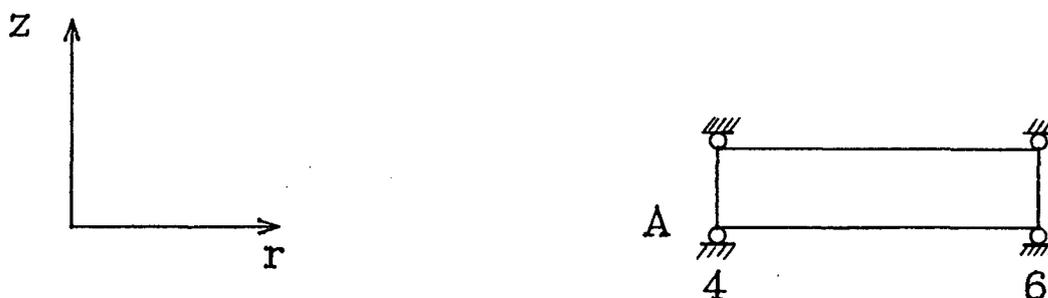


Fig. 7.38. Problema 8. Malha utilizada e condições de contorno impostas.

Com este problema pretende-se verificar o comportamento da versão  $p$  e do método MRE quando existem, simultaneamente, solicitações devido a forças de corpo e a con-

dições de contorno de Neumann não homogêneas.

Devido à linearidade do problema, a sua solução analítica é dada pela soma dos respectivos valores obtidos com a Equação (7.22) (resposta devido à pressão interna) com os dados pela equação seguinte (resposta devido à rotação do anel) (Branco, 1985).

$$\sigma_r = \frac{(3 + C)}{8} \frac{W}{g} \omega^2 \left[ R_1^2 + R_e^2 - \frac{R_1^2 R_e^2}{r^2} - r^2 \right] \quad (7.24a)$$

$$\sigma_t = \frac{(3 + C)}{8} \frac{W}{g} \omega^2 \left[ R_1^2 + R_e^2 + \frac{R_1^2 R_e^2}{r^2} - \frac{(1 + 3C)}{(3 + C)} r^2 \right] \quad (7.24b)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_t) \quad (7.24c)$$

$$u = \frac{r}{E} \left[ \sigma_t(1 - \nu^2) - \sigma_r(\nu + \nu^2) \right] \quad (7.24d)$$

onde  $C = \frac{(\nu + \nu^2)}{(1 - \nu^2)}$ .

O valor exato da energia de deformação, para um radiano do anel, foi estimado em  $U(u) = 1,500.529.111.09$  N.mm utilizando-se uma malha com 20 elementos na direção radial e 2 na direção z.

Na Tabela 22 tem-se os deslocamentos no ponto A obtidos aumentando-se a ordem do elemento de  $p = 1$  até  $p = 8$ . Os valores foram adimensionalizados em relação a solução exata,  $u = 2,806.296.381 \times 10^{-3}$  mm.

Tabela 22. Deslocamentos adimensionalizados na superfície interna ( $r = R_1$ ).

P	$u_p / u$
1	0,962.798
2	0,999.037
3	0,999.982
4	1,000.000
5	1,000.000
6	1,000.000
7	1,000.000
8	1,000.000

Tabela 23. Tensões (MPa) na superfície interna do anel (ponto A).

P	$\sigma_r$	$e_r(\sigma_r) \times$	$\sigma_t$	$e_r(\sigma_t) \times$	$\sigma_z$	$e_r(\sigma_z) \times$
1	29,0447	1,058E+2	1512,372	-7,663	462,4250	-7,037E+1
2	-389,7518	2,205E+1	1439,533	-2,477	314,9344	-1,603E+1
3	-482,5097	3,498E+0	1410,517	-4,119E-1	278,4023	-2,573E+0
4	-497,4913	5,017E-1	1405,570	-5,972E-2	272,4237	-3,700E-1
5	-499,6634	6,732E-2	1404,845	-8,051E-3	271,5543	-4,971E-2
6	-499,9568	8,633E-3	1404,746	-1,035E-3	271,4367	-6,379E-3
7	-499,9946	1,071E-3	1404,733	-1,288E-4	271,4216	-7,920E-4
8	-499,9994	1,297E-4	1404,732	-1,561E-5	271,4197	-9,590E-5
$\infty$	-500,0	0	1404,731	0	271,4194	0

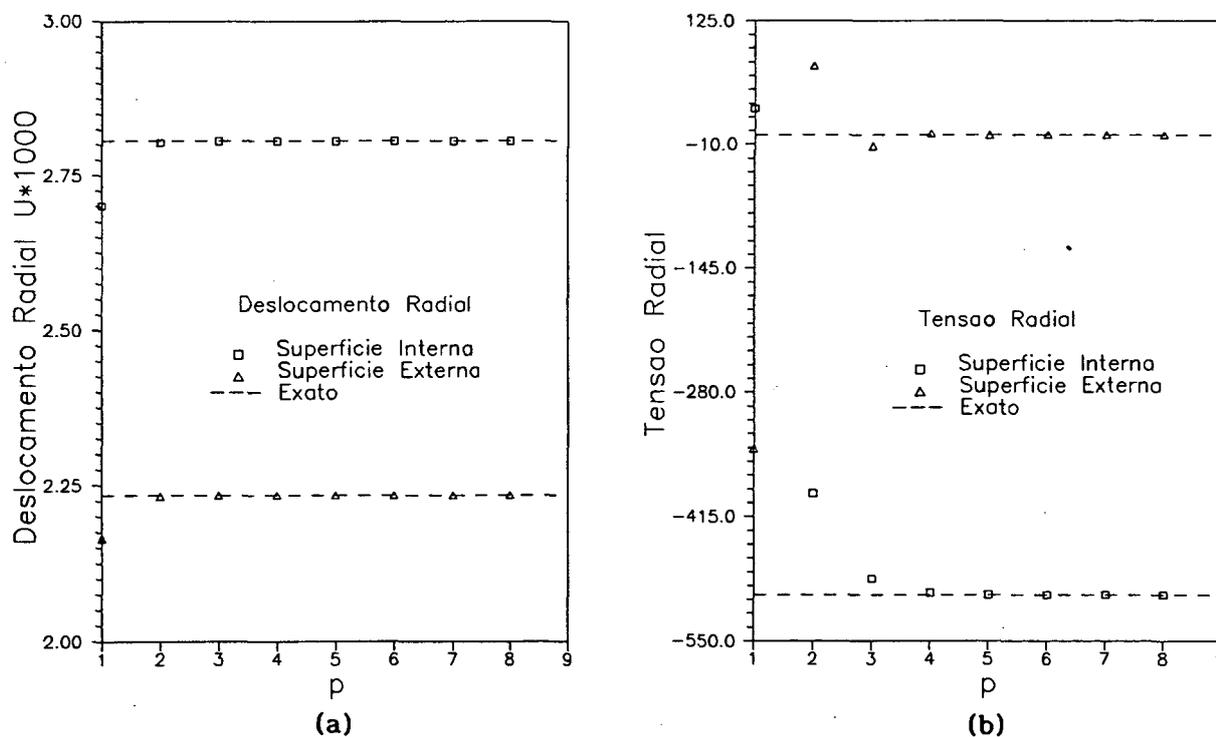


Fig. 7.39. (a) Convergência dos deslocamentos. (b) Convergência da tensão radial. Malha com apenas um elemento.

Na Tabela 23 encontram-se os valores das tensões radial,  $\sigma_r$ , circunferencial,  $\sigma_t$ , e longitudinal,  $\sigma_z$ , na superfície interna do anel. Note-se que para  $p = 4$  os resultados já são muito bons. As Figuras 7.39 (a)-(b) e 7.40 (a)-(b) representam os resultados das Tabelas 22 e 23. Pelas figuras, nota-se que para este problema, devi-

do a suavidade da solução, a convergência das componentes do tensor tensão ocorre com pequenas ou com nenhuma oscilação.

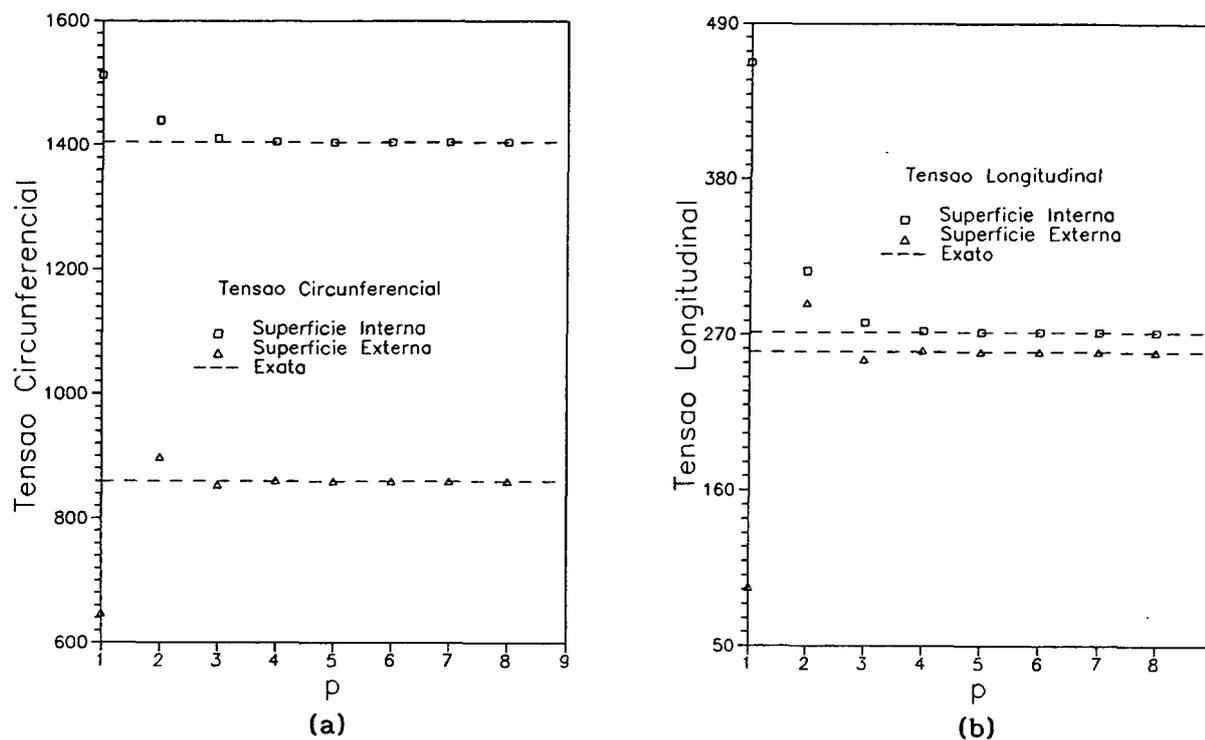


Fig. 7.40. (a) Convergência da tensão circunferencial. (b) Convergência da tensão longitudinal. Malha com apenas um elemento.

Tabela 24. Estimativas obtidas com o método MRE2.

MRE2						
P	N	$\ ell_E$	$\Theta_{MRE2}$	$\Gamma_{MRE2}$	$\ ell_E^{e_r} x$	$\eta x$
1	4	3,27367E-1	3,20136E-1	0,9779	18,837	18,494
2	8	5,35996E-2	5,33223E-2	0,9948	3,094	3,078
3	12	7,25014E-3	7,22631E-3	0,9967	4,185E-1	4,171E-1
4	18	9,22095E-4	9,19147E-4	0,9968	5,323E-2	5,306E-2
5	26	1,12302E-4	1,11983E-4	0,9972	6,483E-3	6,464E-3
6	36	1,33266E-5	1,32430E-5	0,9937	7,693E-4	7,644E-4
7	48	< 1,0E-5	1,53274E-6	-	< 1,0E-4	8,848E-5
8	62	< 1,0E-5	1,74521E-7	-	< 1,0E-4	1,007E-5
$D\Gamma = 0,009.867$						

Na Tabela 24 tem-se as estimativas de  $\|e\|_E$  e de  $\|e\|_E^{er}$  obtidas com o método MRE2. Nota-se que o índice de efetividade,  $\Gamma_{MRE2}$ , mantém-se consistentemente próximo a 1,0 atestando, mais uma vez, o ótimo desempenho do método MRE quando a solução é suave. Também neste problema, devido a limitação do número de algarismos significativos de  $U(u)$ ,  $\|e\|_E$  e  $\|e\|_E^{er}$  só foram tabelados para  $1 \leq p \leq 6$ .

### 7.4.3 Problema 9: Placa Circular Simplesmente Apoiada.

O desempenho dos elementos  $p$ -hierárquicos na solução de problemas de flexão é testado a seguir. Analisa-se uma placa circular simplesmente apoiada nos bordos sujeita a um carregamento transversal uniformemente distribuído. Os parâmetros do problema são:

- Raio da placa,  $R = 20,0$  mm.
- Espessura da placa,  $h = 1,0$  mm.
- Carga distribuída,  $q = - 5,0$  MPa.
- Módulo de Young,  $E = 2,1 \times 10^6$  MPa.
- Coeficiente de Poisson,  $\nu = 0,3$ .

Na Figura 7.41 tem-se uma representação da discretização adotada e das condições de contorno impostas. Na região hachurada foi utilizada a malha em progressão geométrica ilustrada na Figura 7.15.

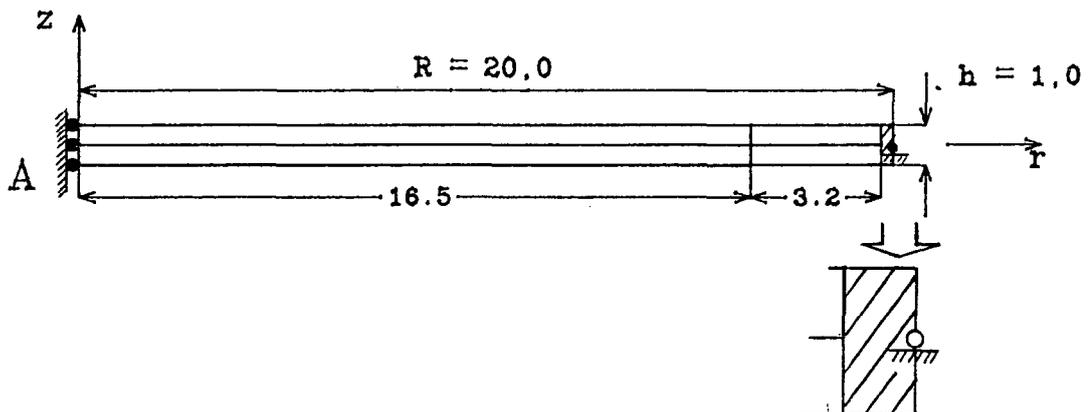


Fig. 7.41. Malha utilizada e condições de contorno impostas.

Os valores fornecidos pela Equação (7.25) (Timoshenko & Goodier, 1982), para as componentes do tensor tensão, serão adotados como referência. Note-se que a Equação (7.25a) só é válida longe dos apoios, pois, esta fornece um valor diferente de zero para  $\sigma_r$  em  $r = R$ . Para o deslocamento transversal,  $w$ , e para a energia de deformação  $U(u)$ , serão usados como referência os valores fornecidos pela teoria de placas semi-espessas dados, respectivamente, pelas Equações (7.26) e (7.27) (Weissman & Taylor, 1990).

$$\sigma_r = -q \left[ \frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{(2 + \nu)}{5} \frac{z}{c} + \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{R^2 z}{c^3} \right] \quad (7.25a)$$

$$\sigma_z = q \left[ \frac{z^3}{4c^3} - \frac{3}{4} \frac{z}{c} - \frac{1}{2} \right] \quad (7.25b)$$

$$\tau_{rz} = -\frac{3qr}{8c^3} (c^2 - z^2) \quad (7.25c)$$

$$w_{(r=0)} = \frac{qR^4}{64D} \left[ \frac{5 + \nu}{1 + \nu} + \frac{8}{3k(1 - \nu)} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \quad (7.26)$$

$$U(w) = \frac{q^2 R^6 \varphi}{768D} \left[ \frac{7 + \nu}{1 + \nu} + \frac{4}{k(1 - \nu)} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \quad (7.27)$$

onde

- $c = h/2$
- $\varphi$  é o setor de círculo analisado. Na formulação do elemento usou-se  $\varphi = 1$  rad (vide Capítulo 3).
- $k$  é o fator de correção do cisalhamento. Adotou-se  $k = 5/6$ .
- $D$  é a constante de rigidez da placa.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (7.28)$$

Tabela 25. Convergência dos deslocamentos (mm) e da tensão radial (MPa) no centro da placa. Enriquecimento  $p$ -adaptativo.

MRE2 $r = 0$				
IST	$w_p (z=0)$	$e_r (w_p) \times$	$\sigma_r (z=-h/2)$	$e_r (\sigma_r)$
1	-0,013.596	94,884	91,724	96,295
2	-0.232.633	12,459	1660,246	32,935
3	-0,266.687	-3,553E-1	2781,269	- 12,348
4	-0,265.342	1,508E-1	2456,753	0,760
5	-0,265.494	9,363E-2	2479,748	- 0,169
6	-0,265.667	2,853E-2	2475,209	0,015
7	-0,265.691	1,950E-2	2475,100	0,019
$\infty$	-0,265.743	0,0	2475,575	0,0

Neste problema se utilizou os indicadores MRE2 para controlar o enriquecimento  $p$ -adaptativo dos elementos. Na Tabela 25 tem-se os valores do deslocamento transversal,  $w_p$ , em  $r = 0$   $z = 0$ , e da tensão radial,  $\sigma_r$ , em  $r = 0$   $z = -h/2$ , obtidos ao longo do processamento  $p$ -adaptativo. Observa-se que já no passo 4 o erro, tanto em  $w_p$  como em  $\sigma_r$ , está abaixo de um por cento. As Figuras 7.42 (a)-(b) e 7.43 (a)-(b) representam o comportamento de  $w_p$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$  e  $\tau_{rz}$ , respectivamente, ao longo do processamento.

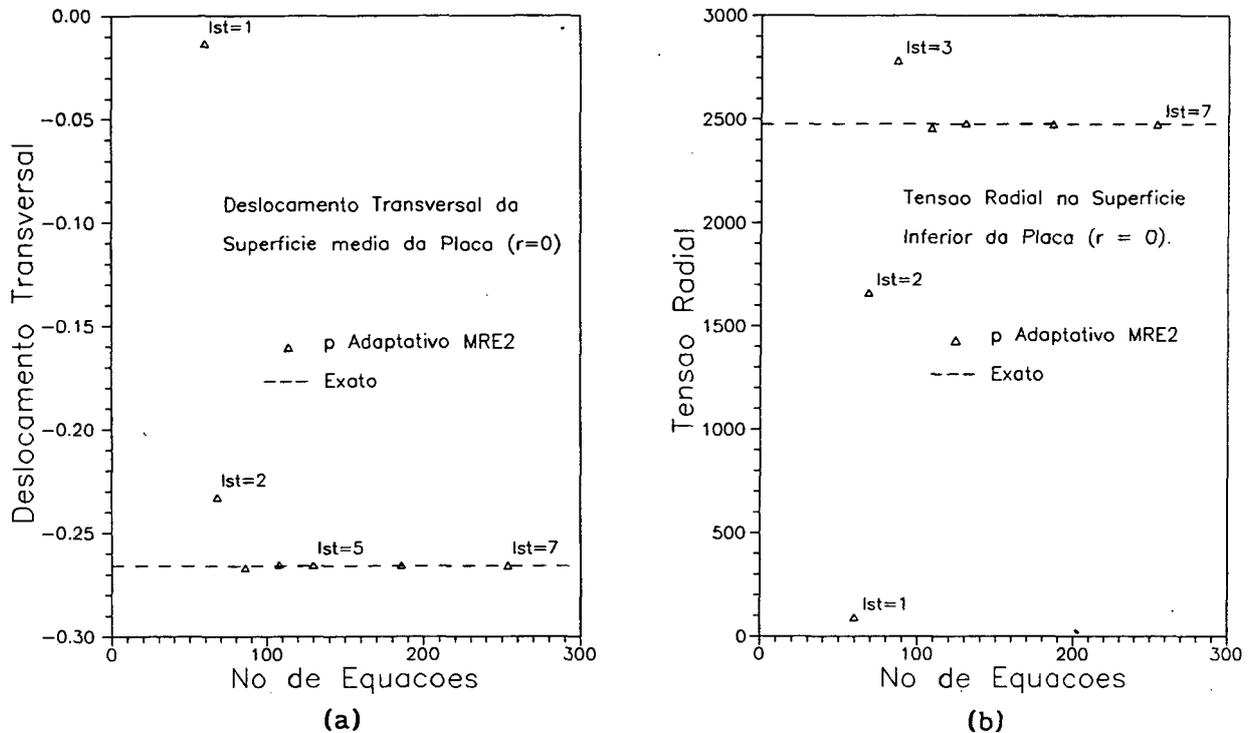
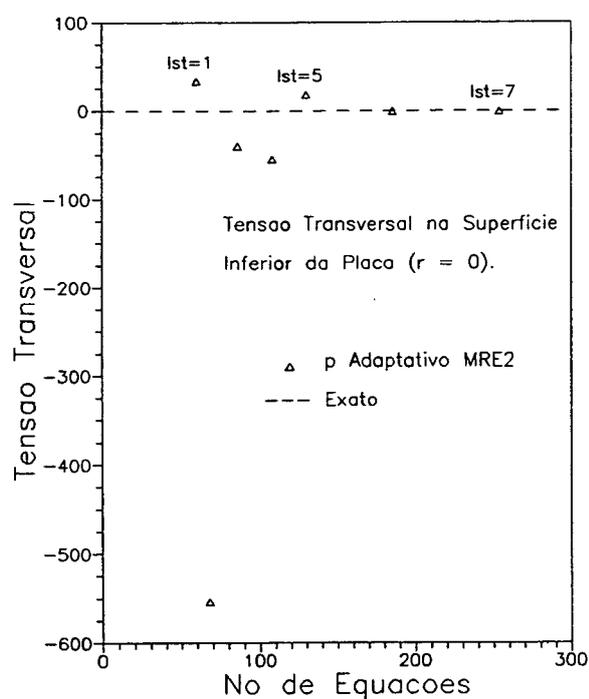


Fig. 7.42. (a) Convergência do deslocamento transversal  $w_p$  em  $r = 0$   $z = 0$ .  
(b) Convergência da tensão radial  $\sigma_r$  em  $r = 0$   $z = -h/2$ .

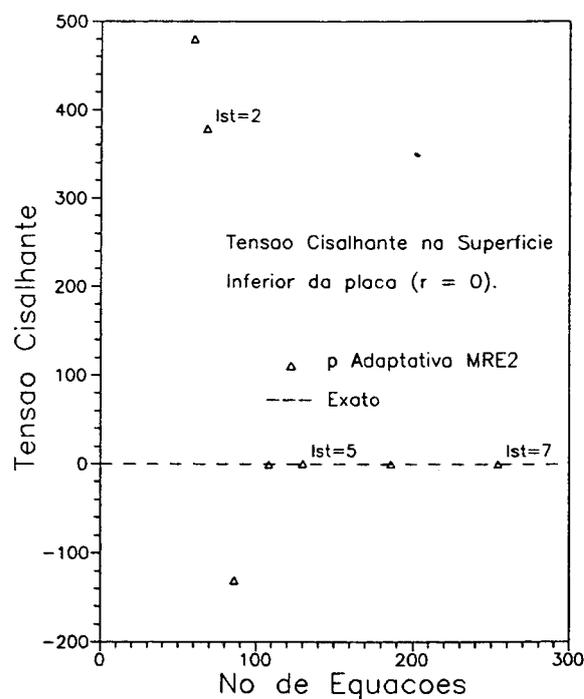
Este problema foi também resolvido utilizando-se uma malha uniforme com quatro elementos na direção radial e enriquecimento  $p$ -uniforme. Os resultados foram similares ao do caso  $p$ -adaptativo e com praticamente o mesmo esforço computacional (vide Tabela 26). Porém, o enriquecimento  $p$ -adaptativo foi enfocado com o intuito de ilustrar uma consequência de um "erro de idealização". Ou seja, ao se impor a restrição dos deslocamentos na direção  $z$  em  $r = R$ , quando na realidade nenhum apoio é infinitamente rígido, faz-se com que o enriquecimento dos elementos se concentre em torno deste ponto. O uso de uma malha em progressão geométrica fez com que os elementos em torno de  $z = 0$   $r = R$  permanecessem lineares até o passo 5, porém, a partir deste, o enriquecimento se concentrou apenas em torno deste ponto. A Figura 44 mostra um "zoom" desta região no passo 7. Na Tabela 27 tem-se as estimativas de  $\|ell_E$  e de  $\|ell_E^{er}$  obtidas com o método MRE2. Foi imposto que  $\eta_{MRE2} < 1\%$ .

Tabela 26. Resultados obtidos com uma malha uniforme e com enriquecimento  $p$ -uniforme (deslocamentos em mm e tensões em MPa).

r = 0 Malha 4x1					
P	N	$w_p$	$e_r(w_p) \%$	$\sigma_r (z=-h/2)$	$e_r(\sigma_r)$
1	17	-0,114.342	56,97271	1972,010	20,241
2	42	-0.264.049	0,63746	2491,019	- 0,624
3	67	-0,265.541	0,07601	2483,529	- 0,321
4	100	-0,265.549	0,07300	2476,257	- 0,028
5	141	-0,265.562	0,06811	2476,327	- 0,030
6	190	-0,265.575	0,06322	2476,320	- 0,030
7	247	-0,265.585	0,05946	2476,310	- 0,030
8	312	-0,265.595	0,05569	2476,310	- 0,030
$\infty$	$\infty$	-0,265.743	0,0	2475,575	0,0



(a)



(b)

Fig. 7.43. (a) Convergência da tensão transversal  $\sigma_z$  em  $r = 0$   $z = -h/2$ .

(b) Convergência da tensão cisalhante  $\tau_{rz}$  em  $r = 0$   $z = -h/2$ .

Tabela 27. Estimativas de  $\|e\|_E$  e de  $\|e\|_E^{er}$ , método MRE2.  
Enriquecimento  $p$ -adaptativo.

MRE2				
IST	N	$U(u_p)$	$\theta_{MRE2}$	$\eta_{MRE2} \%$
1	60	2,705.011	6,86477E+0	94,711
2	68	55,895.238	2,71097E+0	24,837
3	86	60,683.967	6,24202E-1	5,657
4	108	60,871.221	4,27426E-1	3,871
5	130	60,920.439	3,06388E-1	2,775
6	186	60,968.087	1,80519E-1	1,635
7	254	60,979.986	9,87127E-2	0,894
$\infty$	$\infty$	61,019.048	(placa semi-espessa)	

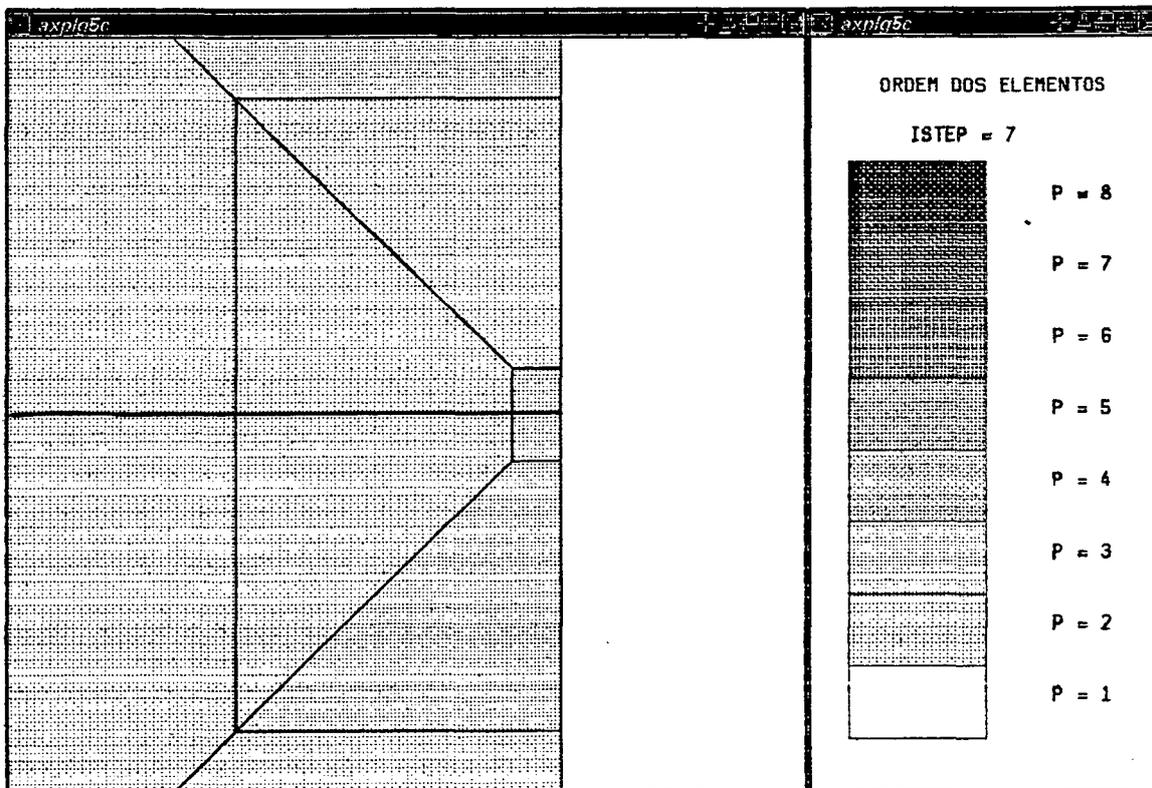


Fig. 7.44. Zoom mostrando a ordem dos elementos próximos ao apoio.

## CAPÍTULO 8

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA NOVOS ESTUDOS

#### 8.1 Introdução.

Nesta dissertação vários aspectos relacionados com o uso de técnicas adaptativas para o MEF foram investigados. A versão  $p$  do método foi utilizada para controlar o erro de discretização de soluções aproximadas para problemas da elasticidade e de potencial. A dimensão do espaço solução foi aumentada utilizando-se funções de interpolação  $p$ -hierárquicas. Utilizou-se um algoritmo que permite a construção de matrizes de rigidez para elementos de qualquer ordem polinomial.

Outro importante aspecto focado foi a estimativa *a posteriori* do erro de discretização. Várias técnicas foram estudadas. Foram propostas e implementadas algumas modificações nos métodos de estimativa encontrados na literatura.

Uma estrutura de dados foi desenvolvida para a implementação do algoritmo  $p$ -adaptativo. O algoritmo baseia-se na equidistribuição do erro de discretização para a construção de uma malha quase ótima.

O Método de Gradientes Conjugados Precondicionado foi utilizado na solução do sistema de equações. Vários problemas representativos foram analisados permitindo-se comparar criteriosamente os diversos métodos de estimativa de erro implementados. Pode-se também comprovar numericamente o comportamento previsto pela teoria do MEF para as versões  $p$  e  $h$ .

#### 8.2 Conclusões.

Com relação a versão  $p$  do MEF e a outros aspectos de caráter geral as principais conclusões deste trabalho foram:

- Quando a solução exata é suave podem ser usadas malhas extremamente grosseiras. A escolha da malha é controlada basicamente pela geometria do domínio e dos

elementos. A energia de deformação do erro decresce exponencialmente, para problemas pertencentes a esta categoria, quando a versão  $p$  é utilizada.

- Mesmo quando a solução exata não é suave, é possível, sem o uso de funções especiais ou outro artifício qualquer, atingir elevada precisão com a versão  $p$  do MEF. Neste caso os pontos singulares devem ser isolados com um número adequado de camadas de pequenos elementos. São usadas, então, as malhas ditas "geométricas" nas quais os tamanhos dos elementos decrescem, a uma razão de geralmente 0,15, em direção à singularidade. Obtém-se desta forma elevadas taxas de convergência na faixa pré-assintótica e retarda-se a entrada na faixa assintótica. O uso destas malhas também atenua bastante as oscilações dos campos de tensões, obtidos com a versão  $p$ , próximos aos pontos singulares.

- O uso do enriquecimento  $p$ -adaptativo evita que haja aumento desnecessário da ordem polinomial dos elementos em regiões do domínio onde o erro é pequeno.

- A utilização dos resultados obtidos em um passo do processamento para acelerar a convergência do Método de Gradientes Conjugados forneceu bons resultados. O número de iterações aumentou muito lentamente ao longo dos passos (ISTEPs) do processamento.

- A eficiência do método ICCG foi bastante sofrível nos problemas com materiais quase incompressíveis. Nestes, o número de condição da matriz de rigidez global foi, geralmente, da ordem de  $10^5$ .

Em relação as várias técnicas de estimativa *a posteriori* do erro de discretização estudadas, as principais conclusões foram:

- Os melhores resultados (maior taxa de convergência e menor desvio em relação à unidade do índice de efetividade) foram obtidos com o Método dos Resíduos em Elementos. O índice de efetividade global,  $\Gamma_{MRE}$ , nem sempre convergiu para 1,0, mas manteve-se consistentemente limitado, mesmo em problemas com solução singular. A pequena subestimação do erro poderia ser eliminada, ou pelo menos atenuada, se a constante  $C_K$  (definida na equação 5.15), que depende do parâmetro  $p_K$ , tivesse sido considerada.

- Os resultados obtidos com os métodos MRE1 e MRE2 foram semelhantes, com pequena vantagem para o segundo. Porém, o método MRE2 mostrou-se mais robusto. Ou se-

ja, menos suscetível de falhar nas situações em que a solução exata for uma função par ou ímpar.

- O método baseado no pós-processamento da solução aproximada (MPP), mesmo com a suavização feita a nível local, forneceu estimativas razoáveis para o erro de discretização, em problemas cuja solução exata era suave. Seu desempenho foi, no entanto, muito afetado pela presença de pontos singulares. Os indicadores de erro associados ao método MPP tiveram um desempenho bastante inferior aos associados ao método MRE, atestando a baixa qualidade das estimativas de erro locais feitas por este método.

- As abordagens MPP1 e MPP2 forneceram, mesmo em discretizações com elementos bastante distorcidos, resultados praticamente idênticos.

### 8.3 Sugestões para Novos Estudos e Complementação deste Trabalho.

O método  $p$  adaptativo tratado nesta dissertação possui um campo de aplicação que se estende muito além dos problemas abordados. As ferramentas foram desenvolvidas e estão prontas para serem usadas na solução de uma ampla gama de problemas. Como forma de complementar este trabalho, aumentando-se a sua abrangência e possivelmente melhorando-se a eficiência do código computacional desenvolvido, sugere-se o estudo ou a implementação do seguinte:

- O algoritmo  $p$ -adaptativo, apresentado no Capítulo 6, permite o aumento da ordem polinomial de um elemento apenas de um em um. Com incrementos diferentes de um, provavelmente, se conseguirá maiores taxas de convergência.

- Uso da técnica de projeção (Devloo, 1987b) para impor continuidade entre elementos de diferentes ordens polinomiais. O uso desta técnica facilitaria a implementação da suavização global dos fluxos, aumentando, provavelmente, a eficiência dos métodos de estimativa MPP.

- Uma melhor representação de domínios complexos, com contornos curvos por exemplo, pode ser obtida através do mapeamento, entre o elemento real e o de referência, com funções ajustadas ("blending functions") (Szabó & Babuska, 1991). Na versão  $p$  o uso desta técnica é muito importante, pois, permite que se utilize poucos elementos para representar o domínio.

- Variação do valor requerido para a norma do resíduo,  $\|r\|$ , na solução do sistema de equações pelo Método de Gradientes Conjugados (equação A.32f). É razoável impor um limite máximo para  $\|r\|$  em função do valor da norma do erro de discretização,  $\|e\|_E$ , em um dado passo do processamento. Não interessa uma elevadíssima precisão da solução do sistema de equações enquanto o erro de discretização for inaceitável.

- O uso de outras técnicas de condicionamento para o Método de Gradientes Conjugados. O método de Jacobi, por exemplo, tem sido bastante empregado (Demkowicz et al., 1985). Outra alternativa para melhorar a eficiência do método em problemas mal condicionados é o uso de um método direto para a solução do sistema de equações no primeiro passo do processamento. Nos passos seguintes o Método de Gradientes Conjugados seria usado para corrigir a solução obtida em passos anteriores.

- Neste trabalho utilizou-se a norma da energia para medir o erro de discretização. Apesar de esta ser a escolha natural, devido a sua equivalência com a norma de  $H^1(\Omega)$ , o uso de outras normas também seria interessante.

- Implementação das estratégias adaptativas desenvolvidas em um sistema de computação interativo. Desta forma se permitirá uma maior participação do usuário nas tomadas de decisão durante o processamento adaptativo de um problema.

- Finalmente propoe-se a abordagem, utilizando-se técnicas adaptativas, de outros problemas da mecânica. No campo da mecânica dos sólidos, por exemplo, sugere-se a implementação de elementos que permitam o uso de modelos hierárquicos para problemas de placas e cascas (Szabó & Sahrman, 1988, Surana & Sorem, 1990).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BABUSKA, Ivo & RHEINBOLDT, W. C.

1979a " Analysis of Optimal Finite-Element Meshes in  $R^1$  ". *Math. comput.*, vol. 33, n 146, 1979, pp. 435-463.

BABUSKA, Ivo & RHEINBOLDT, W. C.

1979b " Adaptive Approaches and Reliability Estimations in Finite Element Analysis ". *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 17/18, 1979, pp. 519-540.

BABUSKA, I., SZABÓ, B. A. & KATZ, N. I.

1981 " The  $p$ -Version of the Finite Element Method ". *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 18 n3, 1981, pp. 515-545.

BABUSKA, I. & SZABÓ, B. A.

1982 " On the Rates of Convergence of the Finite Element Method ". *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 18, pp. 323-341.

BABUSKA, Ivo & MILLER, A.

1984a " The Post-Processing Approach in the Finite Element Method - Part 1: Calculation of Displacements, Stresses and Other Higher Derivatives of the Displacements ". *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 20, 1984, pp. 1085-1109.

BABUSKA, Ivo & MILLER, A.

1984b " The Post-Processing Approach in the Finite Element Method - Part 2: The Calculation of Stress Intesity Factors ". *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 20, 1984, pp. 1111-1129.

BABUSKA, Ivo & MILLER, A.

1984c " The Post-Processing Approach in the Finite Element Method - Part 3: A Posteriori Error Estimates and Adaptive Mesh Selection ". *Int J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 20, 1984, pp. 2311-2324.

BABUSKA, Ivo

1986 " Feedback Adaptivity, and a posteriori Estimates in Finite Elements: Aims, Theory and Experience ". In : VVAA, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, eds. Ivo Babuska et alli, New York, John Wiley & Sons, 1986, pp. 3-23.

BABUSKA, Ivo & NOOR, A. K.

1986 " Quality Assessment and Control of Finite Element Solutions ". Technical note BN-104, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, College Park, Maryland 20742. pp. 47.

BABUSKA, Ivo

1989 " Adaptive Mathematical Modeling ". In : VVAA, Adaptive Methods for Partial Differential Equations. Proceedings of the workshop on Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, october 13-15, 1988, eds. Joseph E. Flaherty et alli, SIAM publications, Philadelphia, 1989, pp. 1-14.

BABUSKA, I., GRIEBEL, M, & PITKÄRANTA, J.

1989 " The Problem of Selecting the Shape Functions for a  $p$ -type Finite Element ". Int. J. Numer. Meth. Engrg., vol. 28, 1989, pp. 1891-1908.

BABUSKA, I. & SURI, M.

1990 " The  $p$ - and  $h$ - $p$  Versions of the Finite Element Method, an Overview ". Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., vol. 80, pp. 5-26.

BANK, Randolph E. & WEISER, A.

1985 " Some a posteriori Error Estimates for Elliptic Partial Differential Equations ". Math. Comput., vol. 44 n 170, 1985, pp. 283-301.

BANK, Randolph E.

1986 " Analysis of Local a posteriori Error Estimates for Elliptic Equations ". In: VVAA, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, eds. Ivo Babuska et alli, New York, John Wiley & Sons, 1986, pp. 119-128.

BARDEL, N. S.

1989 " The Application of Symbolic Computing to the Hierarchical Finite Element Method ". Int. J. Numer. Meth. Engrg., vol. 28, 1989, pp. 1181-1204.

BECKER, E. B., CAREY, G. F. & ODEN, J. T.

1981 " Finite Elements: An Introduction ", vol. 1 in the Texas Finite Element Series. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1981, pp. 258.

BORESI, A. P. & LYNN, P. P.

1974 " Elasticity in Engineering Mechanics ". New Jersey, Englewood Cliffs, 1974, pp. 475.

BRANCO, C. A. G. M.

1985 " Mecânica dos Materiais ". Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 1985, pp. 1098.

CANTIN, G., LOUBIGNAC, G. & TOUZOT, G.

1978 " An iterative Algorithm to Build Continuous Stress and Displacement Solutions ". Int. J. Numer. Meth. Engrg., vol. 12, 1978, pp. 1493-1506.

CIARLET, Ph. G.

1978 " The Finite Element Method for Elliptic Problems ". North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978, pp. 530.

COOK, R. D.

1982 " Loubignac's Iterative Method in Finite Element Elastostatics ". Int. J. Numer. Meth. Engrg., vol. 18, 1982, pp. 67-75.

DEMKOWICZ, L., DEVLOO, Ph. & ODEN, J. T.

1985 " On an  $h$ -Type Mesh-Refinement Strategy Based on Minimization of Interpolation Errors ". Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., vol. 53, 1985, pp. 67-89.

DEMKOWICZ, L. & ODEN, J. T.

1988 " A Review of Local Mesh Refinement Techniques and Corresponding Data Structures in  $h$ -Type Adaptive Finite Element Methods ". TICOM Report 88-02, The Texas Institute for Computational Mechanics, The University of Texas at Austin, Texas 78712.

DEMKOWICZ, L., ODEN, J. T., RACHOWICZ, W. & HARDY, O.

1989 " Toward a Universal  $h$ - $p$  Adaptive Finite Element Strategy, Part 1. Constrained Approximation and Data Structure ". Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., vol. 77, 1989, pp. 79-112.

DEVLOO, Philippe

1987a " An  $h$ - $p$  Adaptive Finite Element Method for Steady Compressible Flow ". Ph. D. Thesis, University of Texas at Austin, Austin, 1987.

DEVLOO, Philippe

1987b " The Implementation of Directional Boundary Conditions for Finite Element Computations with Iterative Solvers ". Commun. Appl. Numer. Meth., vol. 3, 1987, pp. 259-264.

DEVLOO, Philippe

1991 Comunicação Pessoal.

DHATT, Gouri & TOUZOT, Gilbert

1984 " The Finite Element Method Displayed ". New York, John Wiley & Sons, 1984, pp. 509.

DIAZ, A. R., KIKUCHI, N. & TAYLOR, J. E.

1983 " A Method of Grid Optimization for Finite Element Methods ". Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., vol. 41, 1983, pp. 29-45.

DUARTE, C. A. M. & BARCELLOS, C. S. de

1991 " Comportamento Assintótico do Método dos Elementos Finitos ", Proceedings of the 11<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering, São Paulo, Brasil, 1991, pp. 141-144.

DUARTE, C. A. M. & BARCELLOS, C. S. de

1991 " O Método dos Resíduos em Elementos para Problemas da Elasticidade e de Potencial ", Anais do Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, Belo Horizonte, Brasil, 1991, pp. 328-335.

DUNAVANT, D. A. & SZABÓ, B. A.

1983 " A posteriori Error Indicators for the  $p$ -version of the Finite Element Method ". Int. j. Numer. Meth. Engrg., vol. 19, 1983, pp. 1851-1870.

FÉODOSIEV, V.

1977 " Resistência dos Materiais ". Porto, Lopes da Silva Editora, 1977, pp.591.

GAGO, J. P. de S. R., KELLY, D. W., ZIENKIEWICZ, O. C. & BABUSKA, I.

1983 " A posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part II - Adaptive Mesh Refinement ". Int. J. Numer. Meth. Engrg., vol. 19, 1983, pp. 1621-1656.

GAGO, J. P. de S. R.

- 1985 " Importance of Self Adaptive Finite Elements and a posteriori Error Analysis ". Proceedings of the International Conference on Finite Elements in Computational Mechanics, Bombay, India, 2-6 December 1985, Pergamon Press, pp. 15-21.

HESTENES, M. R. & STIEFEL, E.

- 1952 " Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems ". J. Res. Nat. Bur. Standards, 49, 1952, pp. 404-436.

HINTON, E. & CAMPBELL, J. S.

- 1974 " Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method ". Int. J. Numer. Meth. Engrg., vol. 8, 1974, pp. 461-480.

JACOBS, D.A.H.

- 1980 " Generalizations of the Conjugate Gradient Method for Solving Non-Symmetric and Complex Systems of Algebraic Equations ". Central Electricity Generating Board, RD/L/N/70/80, 1980.

KELLY, D. W., GAGO, J. P. de S. R., ZIENKIEWICZ, O. C. & BABUSKA, I.

- 1983 " A posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I - Error Analysis ". Int. J. Numer. Meth. Engrg., vol. 19, 1983, pp. 1593-1619.

KIKUCHI, N.

- 1986 " Finite Element Methods in Mechanics ". Cambridge, Cambridge University Press, 1986, pp. 418.

LO, S. H.

- 1985 " A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains ". Int. J. Numer. Meth. Engrg., vol. 21, 1985, pp. 1403-1426.

LUENBERGER, D. G.

- 1966 " Optimization by Vector Space Methods ". New York, John Wiley & Sons, 1969, pp. 325.

LYRA, Paulo R. M.

- 1988 " Uma Estratégia de Refinamento Auto-Adaptativo Versão  $h$  do Método dos Elementos Finitos Aplicada a Problemas Bi-dimensionais Regidos pela Equação

de Campo ". M. sc. Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1988, pp. 104.

MACNEAL, R. H. & HARDER, R. L.

1985 " A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy ". *Fin. Elem. Anal. Design.*, vol. 1, 1985, pp. 3-20.

MANDEL, J.

1990 " Iterative Solvers by Substructuring for the  $p$ -Version Finite Element Method ". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 80, 1990, pp. 117-128.

MEIJERINK, J. A. & Van der VORST, H. A.

1977 " An Iterative Solution Method for Linear Systems of Which the Coefficient Matrix is a Symmetric M-Matrix ". *Math. Comput.*, vol. 31, n 137, 1977, pp. 148-162.

MESQUITA, Renato C.

1990 " Cálculo de Campos Eletromagnéticos Tridimensionais Utilizando Elementos Finitos: Magnetostática, Quase-Estática e Aquecimento Indutivo ". D. Sc. Thesis, UFSC, Florianópolis, 1990, pp. 236.

ODEN, J. T. & REDDY, J. N.

1976 " An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements ". New York, John Wiley & Sons, 1976, pp. 429.

ODEN, J. T. & CAREY, G. F.

1983 " Finite Elements: Mathematical Aspects ". Vol. 4 in the Texas Finite Element Series. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1983, pp. 195.

ODEN, J. T., DEMKOWICZ, L., STROUBOULIS, T. & DEVLOO, P.

1986 " Adaptive Methods for Problems in Solid and Fluid Mechanics ". In: *VVAA, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, eds. Ivo Babuska et alli, New York, John Wiley & Sons, 1986, pp. 249-280.

ODEN, J. T., DEMKOWICZ, L., RACHOWICZ, W. & WESTERMANN, T. A.

1989 " Toward a Universal  $h$ - $p$  Adaptive Finite Element Strategy, Part 2. A posteriori Error Estimation ". *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 77, 1989, pp. 113-180.

ODEN, J. T., DEMKOWICZ, L., RACHOWICZ, W. & WESTERMANN, T. A.

1990 " A Posteriori Error Analysis in Finite Elements: The Element Residual Method for Symmetrizable Problems with Applications to Compressible Euler and

- Navier-Stokes Equations ". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 82, 1990, pp. 183-203.
- PERAIRE, J., VAHDATI, M., MORGAN, K. & ZIENKIEWICZ, O. C.  
 1987 " Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations ". *J. Comp. Phys.*, vol. 72, 1987, pp. 449-466.
- RIBEIRO, F. L. B.  
 1986 " Formulação Hierárquica do Método dos Elementos Finitos: Refinamento Auto-Adaptativo Versão  $p$  Aplicado a Problemas da Elasticidade ". M. Sc. Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1986. pp. 86.
- RIVARA Maria-C.  
 1984 " Algorithms for Refining Triangular Grids Suitable for Adaptive and Multigrid Techniques ". *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 20, 1984, pp. 745-756.
- ROSSOW, M. P. & KATZ, I. N.  
 1978 " Hierarchical Finite Elements and Precomputed Arrays ". *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 12, 1978, pp. 977-999.
- SHEPHARD, M. S., NIU, Q. & BAEHMANN, P. L.  
 1989 " Some Results Using Stress Projectors for Error Indication and Estimation ". In : *VVAA, Adaptive Methods for Partial Differential Equations. Proceedings of the workshop on Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, october 13-15, 1988*, eds. Joseph E. Flaherty et alli, SIAM publications, Philadelphia, 1989, pp. 83-99.
- SURANA, K. S. & SOREM, R. M.  
 1990 " Curved Shell Elements Based on Hierarchical  $p$ -Approximation in the Thickness Direction for Linear Analysis of Laminated Composites ". *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 29, 1990, pp. 1393-1420.
- SZABÓ, B. A.  
 1986a " Mesh Design for the  $p$ -Version of the Finite Element Method ". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 55, 1986, pp. 181-197.

SZABÓ, B. A.

1986b " Implementation of a Finite Element Software System with  $h$  and  $p$  Extension Capabilities ". *Finite Elem. Anal. Design*, vol. 12, 1986, pp. 177-194.

SZABÓ, B. A.

1986c " Estimation and Control of Error Based on  $p$  Convergence ". In: *VVAA, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, eds. Ivo Babuska et alli, New York, John Wiley & Sons, 1986, pp. 61-78.

SZABÓ, B. A. & SAHRMANN, G. J

1988 " Hierarquic Plate and Shell Models Based on  $p$ -Extension ". *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 26, pp. 1855-1881.

SZABÓ, B. A., BABUSKA, I. & BIDAR, K. C.

1989 " Stress Computations for Nearly Incompressible Materials by the  $p$ -Version of the Finite Element Method ". *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 18, 1989, pp. 2175-2190.

SZABÓ, B. A.

1990a " The  $p$ - and  $h$ - $p$  Versions of the Finite Element Method in Solid Mechanics ". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 80, 1990, pp. 185-195.

SZABÓ, B. A.

1990b " The Use of a priori Estimates in Engineering Computations ". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 82, 1990, 139-154.

SZABÓ, B. A. & BABUSKA, I.

1991 " Finite Element Analysis ". New York, John Wiley and Sons, 1991, pp. 368.

TIMOSHENKO, S. P. & GOODIER, J. N.

1970 " Theory of Elasticity ". 3. ed., Singapore, Mcgraw-Hill Book Co., 1970, pp. 567.

UTKU, S. & MELOSH, R. J.

1984 " Solution Errors in Finite Element Analysis ". *Comp. Struct.*, vol. 18 n 3, 1984, pp. 379-393.

WEISSMAN, S. L. & TAYLOR, R. L.

1990 " Resultant Fields for Mixed Plate Bending Experiments ". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 79, 1990, pp. 321-355.

ZIENKEIWICZ, O. C. & MORGAN, K.

1983 " Finite Elements and Approximation ". New York, John Wiley & Sons, 1983, pp. 329.

ZIENKIEWICZ, O. C. & CRAIG, A. W.

1986 " Adaptive Refinement, Error Estimates, Multigrid Solution, and Hierarquic Finite Element Method Concepts ". In: VVAA, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, eds. Ivo Babuska et alli, New York, John Wiley & Sons, 1986, pp. 25-59.

ZIENKIEWICZ, O. C. & ZHU, J. Z.

1987 " A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis ". Int. J. Numer. Meth. Engrg., vol. 24, 1987, pp. 337-357.

ZIENKIEWICZ, O. C., ZHU, J. Z., CRAIG, A. W. & AINSWORTH, M.

1989a " Simple and Practical Error Estimation and Adaptivity:  $h$  and  $h-p$  Version Procedures ".In : VVAA, Adaptive Methods for Partial Differential Equations. Proceedings of the workshop on Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, october 13-15, 1988, eds. Joseph E. Flaherty et alli, SIAM publications, Philadelphia, 1989, pp. 100-114.

ZIENKIEWICZ, O. C., ZHU, J. Z. & GONG, N. G.

1989b " Effective and Practical  $h-p$  Version Adaptive Analysis Procedures for the Finite Element Method ". Int. J. Numer. Meth. Engrg., vol. 28, 1989, pp. 879-891.

ZIENKIEWICZ, O. C. & ZHU, J. Z.

1990 " The Three R's of Engineering Analysis and Error Estimation and Adaptivity ". Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., vol. 82, 1990, pp. 95-113.

## APÊNDICE A

## RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

## Introdução.

Existem pelo menos três razões para se resolver o sistema de equações

$$A \mathbf{x}^* = \mathbf{b} \tag{A.1}$$

utilizando-se métodos iterativos, no caso de versões adaptativas:

(a) A solução do passo (ISTEP) anterior é uma aproximação,  $\mathbf{x}_0$ , muito boa para  $\mathbf{x}^*$ . Portanto  $\mathbf{x}_0$  pode ser utilizada como uma aproximação inicial num procedimento iterativo, acelerando a velocidade de convergência do método.

(b) Devido a perda da característica de banda da matriz global, ao longo do processamento adaptativo, o uso de métodos diretos, como a eliminação de Gauss, torna-se ineficiente (Demkowicz et al., 1985).

(c) O uso de funções hierárquicas, nas versões  $p$  ou  $h-p$ , resulta em sistemas de equações bem condicionados, favorecendo portanto o uso de métodos iterativos.

Neste trabalho utiliza-se o Método dos Gradientes Conjugados com pré-condicionamento por decomposição incompleta de Cholesky deslocada (SICCG-Shifted Incomplet Cholesky Conjugated Gradients) para resolver o sistema (A.1). As rotinas utilizadas foram gentilmente cedidas pelo Dr. Renato C. Mesquita.

O método dos gradientes conjugados tem sido largamente empregado em conjunção com métodos adaptativos. Este método foi apresentado por Hestenes & Stieffel, (1952). Na teoria, ele é um método direto que resolve (A.1) em, no máximo,  $N$  etapas (iterações), onde  $N$  é a ordem do sistema. Na prática os erros de truncamento computacional destroem esta propriedade, e, de qualquer maneira,  $N$  etapas é um número excessivamente alto. Portanto, ele é um método iterativo.

Este método não era muito usado até meados da década de 70, quando o desenvolvimento de estratégias de pré-condicionamento (Meijerink & Van Vorst, 1977) tornaram possível a modificação do sistema (A.1) para um sistema onde o método de gradientes conjugados funciona melhor. O pré-condicionamento é efetuado por uma matriz que se aproxima de  $A^{-1}$  e assim, a matriz do sistema se aproxima da identidade, para a qual o método converge em uma única iteração.

A seguir é apresentado, resumidamente, o método SICCG para matrizes reais simétricas positivas definidas. Para maiores detalhes deve-se procurar, por exemplo, Jacobs, (1980) ou Mesquita, (1990).

**O Método de Gradientes Conjugados para Matrizes Reais, Simétricas, Positivas Definidas.**

Seja  $x_1$  uma aproximação para a solução do sistema de equações (A.1). Define-se o resíduo do sistema para o vetor  $x_1$  por

$$r_1 = b - Ax_1 \quad (\text{A.2})$$

Deseja-se obter um novo valor  $x_{1+1}$  para o qual  $r_{1+1} = 0$ . Para isto, no método dos gradientes conjugados, minimiza-se a forma quadrática

$$h^2 = r^T A^{-1} r \quad (\text{A.3})$$

onde  $r = b - Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , que é equivalente a

$$h^2 = x^T Ax - 2x^T b + b^T A^{-1} b \quad (\text{A.4})$$

Para que o mínimo de  $h^2$  ocorra em  $r = 0$ , é necessário que  $A^{-1}$  seja positiva definida, isto é, que  $A$  seja positiva definida. Seja  $p_1$  uma direção no espaço  $\mathbb{R}^n$ , então

$$x_1 + \alpha p_1 \quad (\text{A.5})$$

define uma reta que passa por  $x_1$  e tem a direção  $p_1$ . Procura-se um ponto sobre esta linha para o qual  $h^2$  atinge um mínimo. Isto ocorre para

$$\frac{\partial(h^2)}{\partial\alpha} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Sendo

$$r = b - A(x_1 + \alpha p_1) = r_1 - \alpha A p_1 \quad (\text{A.7})$$

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h^2)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial(h^2)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \alpha} = 2r^T A^{-1} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \\ &= -2r^T \underbrace{A^{-1} A}_{I} p_1 \\ &= 2p_1^T \underbrace{(\alpha A p_1 - r_1)}_{\lambda} \end{aligned}$$

onde  $\frac{\partial(h^2)}{\partial r}$  simboliza  $\frac{\partial(h^2)}{\partial r_k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Portanto, o mínimo ocorre em

$$\alpha p_1^T A p_1 - p_1^T r_1 = 0 \quad (\text{A.8})$$

isto é

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{p_1^T r_1}{p_1^T A p_1} \quad (\text{A.9})$$

Portanto, o ponto

$$x_{1+1} = x_1 + \alpha_1 p_1 \quad (\text{A.10})$$

com  $\alpha_1$  escolhido por (A.9), minimiza o erro  $h^2$  ao longo da direção  $p_1$ .

Resta o problema de escolher  $p_1$ . No método gradiente (Steepest Descent),  $p_1$  é tomado na direção negativa do gradiente da medida de erro  $h^2$  (dada por A.4), no ponto  $x_1$ , isto é

$$p_1 = - \nabla(h^2)|_{x=x_1} = - (2Ax - 2b) = 2r \quad (\text{A.11})$$

logo,  $p_1$  é paralelo a  $r_1$ . Portanto, pode-se adotar

$$p_1 = r_1 \quad (\text{A.12})$$

No método de gradientes conjugados  $p_i$  é feito tão próximo quanto possível da direção  $r_i$ , porém, sujeito à restrição adicional de ser A-conjugado (A-ortogonal) a todas as direções de busca precedentes, isto é (Luenberger, 1969)

$$p_i^T A p_{i-1} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Dai decorre a propriedade teórica de término do processo de busca em N iterações: procura-se o mínimo de  $h^2$  em um espaço N-dimensional.  $h^2$  é uma função quadrática das coordenadas do espaço e, portanto, se direções mutuamente ortogonais são escolhidas, ao longo das quais  $h^2$  é minimizado, N destas direções (ou destes vetores) formam uma base do espaço e, portanto, após no máximo N passos,  $h^2 = 0$ , o que implica em  $r = 0$ .

Suponha que se calculou  $x_{i+1}$  a partir de  $x_i$  utilizando a Equação (A.10). A direção  $p_{i+1}$  é selecionada de modo que

$$p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i p_i \quad (\text{A.14})$$

onde  $\beta_i$  é escolhido de maneira que  $p_{i+1}$  seja A-conjugado a  $p_i$ , isto é

$$p_{i+1}^T A p_i = 0 \quad (\text{A.15})$$

Substituindo-se a expressão (A.14) em (A.15), obtém-se

$$\beta_i = \frac{-r_{i+1}^T A p_i}{p_i^T A p_i} \quad (\text{A.16})$$

Pode-se mostrar (Jacobs, 1980) que esta escolha de  $\beta_i$  força, não somente a condição (A.15), mas também

$$p_i^T A p_j = 0 \quad \forall i \neq j \quad (\text{A.17})$$

A prova de (A.17) exige que A seja simétrica. Se a matriz não for simétrica, os vetores de direção de busca não serão necessariamente mutuamente A-conjugados e o método pode não convergir em N iterações.

Pode-se mostrar também (Jacobs, 1980) que:

$$r_i^T p_j = 0 \quad \text{para } i > j \quad (\text{A.18})$$

$$r_i^T r_j = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad (\text{A.19})$$

Para se obter o algoritmo final do método, utilizam-se formas alternativas para (A.2), (A.9) e (A.16). Substituindo-se (A.10) em (A.2), tem-se

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A p_i \quad (\text{A.20})$$

De (A.9), (A.14) e (A.18) obtém-se

$$\alpha_i = \frac{(r_i + \beta_{i-1} p_{i-1})^T r_i}{p_i^T A p_i} = \frac{r_i^T r_i}{p_i^T A p_i} \quad (\text{A.21})$$

De (A.16), (A.20), (A.14), (A.19) e (A.18) obtém-se

$$\beta_i = \frac{-r_{i+1}^T (r_i - r_{i+1}) / \alpha_i}{(r_i + \beta_{i-1} p_{i-1})^T (r_i - r_{i+1}) / \alpha_i} = \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i} \quad (\text{A.22})$$

O algoritmo do método de gradientes conjugados é então dado por:

$$1. \quad (a) \quad r_0 = b - Ax_0 \quad (\text{A.23a})$$

$$(b) \quad p_0 = r_0 \quad , i = 0 \quad (\text{A.23b})$$

$$2. \quad \alpha_i = \frac{r_i^T r_i}{p_i^T A p_i} \quad (\text{A.23c})$$

$$3. \quad x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i \quad (\text{A.23d})$$

$$4. \quad r_{i+1} = r_i - \alpha_i A p_i \quad (\text{A.23e})$$

$$5. \quad \text{SE } (r_{i+1}^T r_{i+1}) < \varepsilon \quad \text{Houve convergência, PARE.}$$

$$6. \quad \beta_i = \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i} \quad (\text{A.23f})$$

$$7. \quad p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i p_i \quad (\text{A.23g})$$

$$8. \quad i = i + 1 \quad \text{VÁ PARA O PASSO 2.}$$

A velocidade de convergência do método de gradientes conjugados depende forte-

mente do condicionamento da matriz, e, portanto é natural aplicar-se um pré-condicionamento ao sistema de equações original, isto é, em vez de se resolver (A.1), resolve-se

$$C^{-1}A x^* = C^{-1}b \quad (A.24)$$

onde o número de condição de  $C^{-1}A$  é melhor do que o de  $A$ . Se  $C^{-1} = A^{-1}$ , então o condicionamento do sistema é 1. Na prática, acha-se  $C^{-1}$  o mais próximo possível de  $A^{-1}$ , sem que o cálculo de  $C^{-1}$  seja muito custoso. Note-se que não se pode aplicar o algoritmo de gradientes conjugados diretamente sobre o sistema (A.24) pois, mesmo que  $C^{-1}$  seja simétrica,  $C^{-1}A$  não o é necessariamente. Supondo-se que  $C^{-1}$  seja positiva definida, pode-se definir  $C^{-1/2}$  simétrica e positiva definida tal que

$$C^{-1/2}C^{-1/2} = C^{-1} \quad (A.25)$$

Então

$$C^{1/2} (C^{-1}A) C^{-1/2} = C^{-1/2} A C^{-1/2} \quad (A.26)$$

é uma matriz simétrica e positiva definida. Portanto, ao invés de considerar o sistema (A.24), considera-se o sistema

$$C^{-1/2}A x = (C^{-1/2} A C^{-1/2})(C^{1/2}x) = (C^{-1/2}b) \quad (A.27)$$

ou

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b} \quad (A.28)$$

o método de gradientes conjugados é, então, aplicado ao sistema (A.28). A Equação (A.2) torna-se

$$\underline{r}_1 = C^{-1/2}b - (C^{-1/2} A C^{-1/2})(C^{1/2}x_1) = C^{-1/2}(b - Ax_1) = C^{-1/2}r_1 \quad (A.29)$$

Define-se

$$\underline{p}_1 = C^{1/2}p_1 \quad (A.30)$$

Em paralelo, pode-se escrever as equações para as diversas variáveis utilizadas

pelo algoritmo (A.23), levando-se em consideração as igualdades anteriores:

$$\underline{\alpha}_1 = \frac{\underline{r}_1^T \underline{r}_1}{\underline{p}_1^T \underline{A} \underline{p}_1} \qquad \underline{\alpha}_1 = \frac{(\underline{r}_1^T \underline{C}^{-1} \underline{r}_1)}{\underline{p}_1^T \underline{A} \underline{p}_1} \quad (\text{A.31a})$$

$$\underline{x}_{1+1} = \underline{x}_1 + \underline{\alpha}_1 \underline{p}_1 \qquad \underline{x}_{1+1} = \underline{x}_1 + \underline{\alpha}_1 \underline{p}_1 \quad (\text{A.31b})$$

$$\underline{r}_{1+1} = \underline{r}_1 - \underline{\alpha}_1 \underline{A} \underline{p}_1 \qquad \underline{r}_{1+1} = \underline{r}_1 - \underline{\alpha}_1 \underline{A} \underline{p}_1 \quad (\text{A.31c})$$

$$\underline{\beta}_1 = \frac{\underline{r}_{1+1}^T \underline{r}_{1+1}}{\underline{r}_1^T \underline{r}_1} \qquad \underline{\beta}_1 = \frac{(\underline{r}_{1+1}^T \underline{C}^{-1} \underline{r}_{1+1})}{\underline{r}_1^T \underline{C}^{-1} \underline{r}_1} \quad (\text{A.31d})$$

$$\underline{p}_{1+1} = \underline{r}_{1+1} + \underline{\beta}_1 \underline{p}_1 \qquad \underline{p}_{1+1} = \underline{C}^{-1} \underline{r}_{1+1} + \underline{\beta}_1 \underline{p}_1 \quad (\text{A.31e})$$

Portanto, o algoritmo (A.23) transforma-se no seguinte algoritmo, quando o pré-condicionamento por  $\underline{C}^{-1}$  é efetuado:

$$1. \quad (\text{a}) \quad \underline{r}_0 = \underline{b} - \underline{A} \underline{x}_0 \quad (\text{A.32a})$$

$$(\text{b}) \quad \underline{C} \underline{z}_0 = \underline{r}_0 \quad \therefore \underline{z}_0 = \underline{C}^{-1} \underline{r}_0 \quad (\text{A.32b})$$

$$(\text{b}) \quad \underline{p}_0 = \underline{z}_0 \qquad , i = 0 \quad (\text{A.32c})$$

$$2. \quad \underline{\alpha}_1 = \frac{\underline{r}_1^T \underline{z}_1}{\underline{p}_1^T \underline{A} \underline{p}_1} \quad (\text{A.32d})$$

$$3. \quad \underline{x}_{1+1} = \underline{x}_1 + \underline{\alpha}_1 \underline{p}_1 \quad (\text{A.32e})$$

$$4. \quad \underline{r}_{1+1} = \underline{r}_1 - \underline{\alpha}_1 \underline{A} \underline{p}_1 \quad (\text{A.32f})$$

$$5. \quad \text{SE } (\underline{r}_{1+1}^T \underline{r}_{1+1}) < \epsilon \qquad \text{Houve convergência, PARE.}$$

$$6. \quad (\text{a}) \quad \underline{C} \underline{z}_{1+1} = \underline{r}_{1+1} \quad \therefore \underline{z}_{1+1} = \underline{C}^{-1} \underline{r}_{1+1} \quad (\text{A.32g})$$

$$(\text{b}) \quad \underline{\beta}_1 = \frac{\underline{r}_{1+1}^T \underline{z}_{1+1}}{\underline{r}_1^T \underline{z}_1} \quad (\text{A.32h})$$

$$7. \quad \underline{p}_{1+1} = \underline{z}_{1+1} + \underline{\beta}_1 \underline{p}_1 \quad (\text{A.32i})$$

$$8. \quad i = i + 1 \qquad \text{VÁ PARA O PASSO 2.}$$

Note-se que, a cada iteração, além das operações habituais, é necessário resolver um sistema de equações da forma

$$Cz = r \quad (A.33)$$

Portanto, é essencial que esta resolução seja a mais simples possível. Quando se utiliza a fatorização incompleta de Cholesky,  $C$  é decomposta no produto de uma matriz triangular inferior por sua transposta, ou seja

$$C = T T^T \quad (A.34)$$

Com isto, a resolução do sistema (A.33) é feita em duas etapas:

$$T w = r \quad (A.35)$$

$$T^T z = w \quad (A.36)$$

A fatorização incompleta de Cholesky é semelhante à fatorização completa, exceto pelo fato de que os únicos elementos que serão calculados na matriz  $T$  são os que ocupam posições em que existem elementos não nulos na matriz  $A$  original, isto é

$$t_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad a_{ij} = 0 \quad (A.37)$$

Supondo-se calculados todos os elementos da matriz  $T$  até a linha  $i-1$ , os elementos da linha  $i$  são obtidos por

$$t_{ij} = \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{ik} t_{jk} \right) / t_{jj} \quad , \quad j \leq i - 1 \quad (A.38a)$$

$$t_{ii}^2 = \left( a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik}^2 \right) \quad (A.38b)$$

Uma modificação do procedimento acima consiste em utilizar um fator de deslocamento,  $\alpha_s$ , para escalonar os elementos fora da diagonal por  $1/(1+\alpha_s)$ . A fatorização incompleta padrão é efetuada, então, sobre a matriz modificada. Este procedimento, denominado Fatorização Incompleta Deslocada ("Shifted Incomplete Factorization") mostra-se bastante efetivo, mesmo para pequenos valores de  $\alpha_s$ , em problemas que apresentam convergência ruim com a fatorização incompleta padrão (Mesquita, 1990).