

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TRANSFERÊNCIA CONVECTIVA DE CALOR E MASSA EM UM DUTO  
PREENCHIDO COM ESFERAS COMPACTADAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

SIMONE TERESINHA SEBEN

FLORIANÓPOLIS, MAIO - 1990

TRANSFERÊNCIA CONVECTIVA DE CALOR E MASSA EM UM DUTO

PREENCHIDO COM ESFERAS COMPACTADAS

SIMONE TERESINHA SEBEN

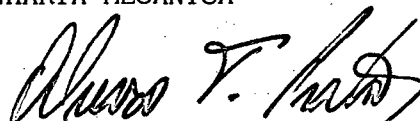
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

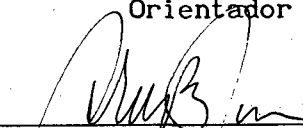
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO CIÊNCIAS

TÉRMICAS, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

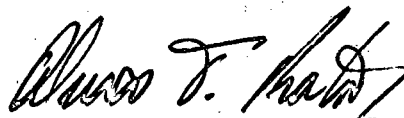


Prof. Alvaro Toubes Prata, Ph.D.  
Orientador



Prof. Arno Blass, Ph.D.  
Coordenador do Curso

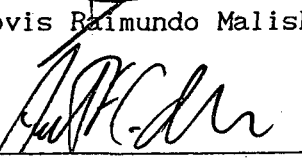
BANCA EXAMINADORA:



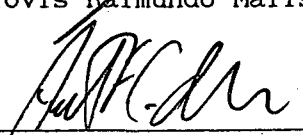
Prof. Alvaro Toubes Prata, Ph.D.  
Presidente



Prof. Paulo César Phillippi, Dr. Ing.



Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.



Prof. Antonio Fábio C. da Silva, M.Sc

## AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Alvaro Toubes Prata pela forma competente e dedicada com que conduziu este trabalho, também pelo estímulo, amizade e carinho.
- À amiga Lígia, pelo convite de vir à Florianópolis e pelas muitas rizadas durante este período.
- Ao colega Saulo, pela importante ajuda durante as disciplinas.
- Aos Professores Clóvis Raimundo Maliska e Paulo César Philippi pelo aprendizado e pela consideração que sempre me dedicaram.
- À minha família, pelo incentivo e carinho.
- A todos os amigos que fiz em Florianópolis, porque compartilharam deste importante período de minha vida.
- À querida Verinha, pela sua simpatia e dedicação.
- À CAPES, pelo apoio financeiro.

## ÍNDICE

	Pág.
RESUMO .....	vii
ABSTRACT .....	viii
LISTA DE FIGURAS .....	ix
LISTA DE TABELAS .....	xiii
NOMENCLATURA .....	xiv
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....	8
2.1 - Introdução .....	8
2.2 - Geometria do Problema .....	9
2.3 - Problema Hidrodinâmico .....	10
2.4 - Problema Térmico .....	14
2.4.1 - Equação da Energia .....	14
2.4.2 - Equação da Energia com Geração .....	15
2.5 - Problema Mássico .....	18
2.6 - Problema Térmico e Mássico Acoplado .....	20
CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA DE SOLUÇÃO .....	23
3.1 - Introdução .....	23
3.2 - Problema Hidrodinâmico .....	24
3.3 - Problema Térmico .....	26

	Pág.
3.3.1 - Equação da Energia .....	27
3.3.2 - Equação da Energia com Geração .....	34
3.4 - Problema Mássico .....	37
3.5 - Problema Térmico e Mássico Acoplado .....	39
CAPÍTULO 4 - RESULTADOS PARA O PROBLEMA TÉRMICO .....	43
4.1 - Introdução .....	43
4.2 - Resultados e Discussões para a Equação da Energia .....	44
4.2.1 - Perfis de Velocidade e Temperatura .....	44
4.2.2 - Variação do Número de Nusselt .....	49
4.2.3 - Comparação do Presente Trabalho com Resultados tados Experimentais e com Resultados de Outros Modelos .....	56
4.3 - Resultados e Discussões para a Equação da Energia com Geração .....	64
4.3.1 - Perfis de Temperatura .....	65
4.3.2 - Geração de Calor .....	70
4.3.3 - Variação do Número de Nusselt .....	73
CAPÍTULO 5 - RESULTADOS PARA O PROBLEMA MÁSSICO .....	78
5.1 - Introdução .....	78
5.2 - Perfis de conteúdo de umidade .....	79
5.3 - Massa Local Evaporada .....	86
5.4 - Variação do Número de Sherwood da matriz .....	89
CAPÍTULO 6 - RESULTADOS PARA O PROBLEMA TÉRMICO E MÁSSICO ACOPLADO .....	93
6.1 - Introdução .....	93

	Pag.
6.2 - Curvas de Umidade Relativa .....	96
6.3 - Perfis de Temperatura .....	106
6.4 - Variação do Número de Nusselt .....	110
6.5 - Variações dos Números de Nusselt e Sherwood da matriz	115
CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES .....	121
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	128
APÊNDICE A - MÉTODO DAS CAIXAS DE KELLER .....	131
APÊNDICE B - VALORES E EQUAÇÕES PARA AS PROPRIEDADES FÍSICAS RE- LATIVAS AO PROBLEMA TÉRMICO E MÁSSICO ACOPLADO .....	142

## RESUMO

O presente trabalho é uma investigação numérica do problema da transferência simultânea de calor e massa em um duto preenchido com um meio poroso saturado. O meio poroso é constituído de esferas compactas e é submetido a um escoamento com convecção forçada. As paredes do duto são impermeáveis ao fluxo de massa e são aquecidas sob duas condições: temperatura constante e fluxo de calor uniforme. O problema hidrodinâmico é modelado através da lei de Darcy modificada, a qual computa efeitos de inércia, atrito com as paredes sólidas, efeitos viscosos e porosidade variável. Inicialmente, o problema térmico na ausência de transferência de massa é analisado sob dois aspectos distintos. Numa primeira aproximação considera-se o fluido e o meio poroso em equilíbrio térmico local, isto é, ambos com a mesma temperatura. Após, analisa-se a situação na qual o fluido troca calor tanto com as partículas como com as paredes do duto. O problema isotérmico da transferência de massa é avaliado e discutido a seguir. Quando o fluido tem seu conteúdo de umidade aumentado pela evaporação da água líquida presente na superfície das partículas e a sua temperatura é modificada devido as exigências do calor latente, as equações do transporte de calor e massa são acopladas e precisam ser resolvidas simultaneamente. Para este caso mostrou-se que, para a evaporação d'água no ar, a posição onde o ar satura é virtualmente independente do seu conteúdo de umidade inicial. Os resultados obtidos para todos os casos investigados estão apresentados em termos de temperatura e conteúdo de umidade adimensional, bem como em termos dos números de Nusselt e de Sherwood.

## ABSTRACT

The present work is a numerical investigation of the simultaneous heat and mass transfer problem, in a channel filled with a saturated porous medium. The porous medium consists of spheres, and is submitted to a forced convection laminar flow. The walls of the channel are impermeable to mass, and are heated either at constant temperature or by uniform heat flux. The hydrodynamic problem is modeled by a modified Darcy's law which accounts for flow inertia, no-slip condition on solid boundaries, viscous effects and spacial variation of porosity. Inicially, the heat problem without mass transport is investigated, under two considerations. As a first approximation, the fluid and the solid matrix are considered to be in local thermal equilibrium, which means that both are at the same temperature. Next, the situation in which the fluid exchanges heat with the channel walls and with the particles, is considered. Subsequently, the isothermal mass transfer problem is investigated and discussed. When the fluid has its moisture content increased by the evaporation of the liquid water present in the surface of the particles and it has its temperature changed due to latent heat requirements, the heat and mass transfer equations are coupled and need to be solved simultaneously. For this case it was shown that for water evaporating into air, the position where the air saturates is virtually independent of the air moisture content at the channel entrance. The results for all cases investigated are presented in terms of dimensionless temperature and moisture content as well as Nusselt and Sherwood numbers.



## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Fig. 2.1 Meio poroso sujeito as condições: (a) temperatura constante; (b) fluxo de calor uniforme .....	9
Fig. 2.2 Perfil de velocidade típico em um leito de esferas compactadas .....	12
Fig. 2.3 Volume de controle do meio poroso .....	16
Fig. 3.1 Mudança das condições iniciais da parede de um duto aquecido a partir de $x = 0$ . Distribuição para os casos: (a) temperatura prescrita ; (b) fluxo de calor prescrito .....	33
Fig. 4.1 Perfis de velocidade característicos no meio poroso para vários valores de $D$ .....	45
Fig. 4.2 Distribuição de velocidade para os dois extremos do parâmetro $B$ .....	45
Fig. 4.3 Distribuição de temperatura com $X$ . — Temperatura prescrita ; ----- Fluxo prescrito .....	46
Fig. 4.4 Distribuição de temperatura ao longo do duto para o caso de fluxo prescrito .....	47
Fig. 4.5 Variação de temperatura ao longo do escoamento. — Temperatura prescrita ; ----- Fluxo prescrito .....	48
Fig. 4.6 Balanço de energia em uma posição arbitrária no duto ..	50
Fig. 4.7 Variação do número de Nusselt com $X$ . — Temperatura prescrita ; ----- Fluxo prescrito .....	53
Fig. 4.8 Razão entre a velocidade e a velocidade média do escoamento para dois valores de $B$ .....	55
Fig. 4.9 Número de Nusselt para escoamentos plenamente	

desenvolvidos .....	56
Fig. 4.10 Comparação de resultado para o número de Nusselt. (a) $B=1,91 \times 10^7$ , (b) $B=4,77 \times 10^7$ , (c) $B=8,16 \times 10^7$ .....	58
Fig. 4.11 Comprimento da região de entrada térmica .....	60
Fig. 4.12 Influência de $\lambda_2$ no número de Nusselt. (a) $B=1,91 \times 10^7$ , (b) $B=4,77 \times 10^7$ , (c) $B=8,16 \times 10^7$ .....	61
Fig. 4.13 Influência de A no número de Nusselt. (a) $B=1,91 \times 10^7$ , (b) $B=4,77 \times 10^7$ , (c) $B=8,16 \times 10^7$ .....	62
Fig. 4.14 Influência de K no número de Nusselt. (a) $B=1,91 \times 10^7$ , (b) $B=4,77 \times 10^7$ , (c) $B=8,16 \times 10^7$ .....	63
Fig. 4.15 Perfis de temperatura para $\theta_s = 1,1$ e para : (a) $T_w - T / T_w - T_e$ , (b) $T_w - T / T_w - T_m$ .....	68
Fig. 4.16 Perfis de temperatura para $\theta_s = 0,5$ e para : (a) $T_w - T / T_w - T_e$ , (b) $T_w - T / T_w - T_m$ .....	69
Fig. 4.17 Parcela referente à geração de calor na equação (4.16). (a) $\theta_s = 1,1$ , (b) $\theta_s = 0,5$ .....	72
Fig. 4.18 Variação do número de Nusselt ao longo do escoamento ..	74
Fig. 4.19 Variação do número de Nusselt da matriz ao longo do escoamento .....	76
Fig. 5.1 Desenvolvimento do conteúdo de umidade $\psi$ ao longo de X para: (a) $B = 10^5$ , (b) $B = 10^7$ .....	80
Fig. 5.2 Desenvolvimento do conteúdo de umidade $\psi^*$ com X para: (a) $B = 10^5$ , (b) $B = 10^7$ .....	81
Fig. 5.3 Desenvolvimento do conteúdo de umidade $\psi^*$ ao longo de X para : (a) $B = 10^5$ , (b) $B = 10^7$ .....	84
Fig. 5.4 Perfis do conteúdo de umidade $\psi^*$ para: (a) $B = 10^5$ (b) $B = 10^7$ .....	85
Fig. 5.5 Comportamento do produto entre a área evaporativa e a	

	Pag.
velocidade do fluido .....	87
Fig. 5.6 Geração local de massa para várias posições X no duto e para: (a) $B = 10^5$ , (b) $B = 10^7$ .....	88
Fig. 5.7 Balanço de massa em uma posição arbitrária no duto ....	90
Fig. 5.8 Variação do número de Sherwood da matriz ao longo do escoamento .....	91
Fig. 5.9 Variação de $Sh_m$ com B para a região plenamente desenvolvida .....	92
Fig. 6.1 Curvas de umidade relativa para $UR_e = 0$ .....	97
Fig. 6.2 Curvas de umidade relativa para $UR_e = 0,25$ .....	100
Fig. 6.3 Curvas de umidade relativa para $UR_e = 0,50$ .....	101
Fig. 6.4 Curvas de umidade relativa para $UR_e = 0,75$ .....	101
Fig. 6.5 Curvas de umidade relativa para $UR_e = 1,00$ .....	102
Fig. 6.6 Curvas de umidade relativa para $UR_e = 0,75$ $T_w = 40^\circ C$ ....	103
Fig. 6.7 Curvas de umidade relativa para $UR_e = 0,25$ e $B = 10^5$ ...	104
Fig. 6.8 Curvas de umidade relativa para $UR_e = 0,75$ e condição de fluxo prescrito na parede .....	105
Fig. 6.9 Distribuição de temperatura para $UR_e = 0$ .....	106
Fig. 6.10 Distribuição de temperatura para $UR_e = 0,25$ .....	107
Fig. 6.11 Distribuição de temperatura para $UR_e = 0,50$ .....	107
Fig. 6.12 Distribuição de temperatura para $UR_e = 0,75$ .....	108
Fig. 6.13 Distribuição de temperatura para $UR_e = 1,00$ .....	108
Fig. 6.14 Distribuição de temperatura para $UR_e = 0,25$ e $B = 10^5$ ..	110
Fig. 6.15 Variação do número de Nusselt para $B = 10^7$ .....	111
Fig. 6.16 Variação do número de Nusselt para $B = 10^7$ e várias $UR_e$	113
Fig. 6.17 Variação do número de Nusselt para $UR_e = 0,75$ e $T_w = 40^\circ C$	113
Fig. 6.18 Variação do número de Nusselt para $UR_e = 0,25$ e $B = 10^5$	114
Fig. 6.19 Variação do número de Nusselt com $T_w$ .....	114

	Pag.
Fig. 6.20 Variação do número de Nusselt com B .....	115
Fig. 6.21 Variação dos números de $Nu_m$ e $Sh_m$ para $B=10^7$ .....	117
Fig. 6.22 Variação do número de $Sh_m$ para $B = 10^7$ e para várias $UR_e$ .....	119
Fig. 6.23 Variação dos números de $Nu_m$ e $Sh_m$ para $UR_e=0,25$ e $B=10^5$ .....	119
Fig. A.1 Rede retangular arbitrária .....	132
Fig. A.2 Caixa de Keller .....	132

## LISTA DE TABELAS

	Pág.
Tabela 4.1 Comprimento da região de entrada térmica e número de Nusselt plenamente desenvolvido para temperatura prescrita na parede .....	51
Tabela 4.2 Comprimento da região de entrada térmica e número de Nusselt plenamente desenvolvido para fluxo prescrito na parede .....	52

## NOMENCLATURA

A	Coeficiente de Forchheimer, eq.(2.3)
$A_{\text{esf}}$	Área da esfera
B	Parâmetro adimensional da pressão, eq.(3.1)
$C_1, C_2$	Coeficientes adimensionais, eqs.(3.4) e (3.5)
$c_p$	Calor específico à pressão constante
D	Diâmetro adimensional da esfera = $d/H$
$D_f$	Coeficiente de difusão molecular do fluido
$D_{\text{ef}}$	Coeficiente de difusão efetivo do vapor d'água no ar, eq.(2.19)
d	Diâmetro da esfera
$G_c$	Fluxo de calor entre o fluido e as partículas sólidas por unidade de volume, eq.(2.13)
$G_m$	Taxa de evaporação por unidade de volume, eq.(2.18)
H	Metade da distância entre as placas, fig. 2.1
$H_{fg}$	Calor latente de vaporização da água à temperatura $T_s$
h	Coeficiente de transferência de calor
K	Permeabilidade, eq.(2.2)
k	Condutividade térmica, eq.(2.14)
k	Coeficiente de transferência de massa
Le	Número de Lewis = $Sc/Pr$
N	Número de esferas contidas em $V_{\text{total}}$
Nu	Número de Nusselt, eq.(4.1)
$Nu^*$	Número de Nusselt calculado através do balanço de energia, eq.(4.18)
$Nu_{fp}$	Número de Nusselt local da transferência de calor entre o fluido e as partículas, eqs.(3.22) e (3.27)
$Nu_m$	Número de Nusselt da matriz, associado à transferência de calor entre o fluido e a matriz sólida, eqs.(4.19) , (4.21) e (6.2)

P	Pressão
Pr	Número de Prandtl = $v_f/\alpha_f$ ou = $v_f/\alpha_{ef}$
q	Fluxo de calor
Re <sub>p</sub>	Número de Reynolds baseado no diâmetro da partícula e na velocidade local do fluido = $du/v_f$
Sc	Número de Schmidt = $v_f/D_f$
Sh <sub>fp</sub>	Número de Sherwood local da transferência de massa entre o fluido e as partículas, eqs. (3.29) e (3.34)
Sh <sub>m</sub>	Número de Sherwood da matriz, associado à transferência de massa entre o fluido e a matriz sólida, eqs. (5.5), (5.7) e (6.3)
T	Temperatura
U	Componente adimensional da velocidade na direção horizontal = $uH/v_f B$
UR	Umidade relativa
u	Componente da velocidade na direção horizontal
V <sub>esf</sub>	Volume da esfera
V <sub>total</sub>	Volume de controle do meio poroso
X	Coordenada horizontal adimensional = $x/HPr$ ou = $x/HSc$
x	Coordenada horizontal, fig. 2.1
Y	Coordenada vertical adimensional = $y/H$
( $\Delta Y$ ) <sub>j</sub>	Tamanho do $j^{\text{smo}}$ intervalo da malha em Y
y	Coordenada vertical, fig. 2.1
W	Derivada da fração mássica em relação a Y, eq. (3.31)
w	Fração mássica

## SÍMBOLOS GREGOS

$\alpha$	Difusividade térmica
$\gamma$	Constante de proporcionalidade da malha na direção vertical

$\epsilon$	Porosidade, eq.(2.4)
$\eta$	Coordenada vertical transformada, eq.(3.15)
$(\Delta\eta)_j$	Tamanho do $j^{\text{smo}}$ intervalo da malha em $\eta$
$\eta_{\text{edge}}$	Espessura da camada limite térmica transformada
$\Theta$	Derivada da temperatura em relação a $Y$ ou a $\eta$
$\theta$	Temperatura adimensional, eq.(3.6)
$\lambda_1, \lambda_2$	Constantes na equação (2.4)
$\nu$	Viscosidade cinemática
$\rho$	Massa específica
$\phi$	Função de $X$ , eqs.(3.10), (3.13)
$\psi$	Fração mássica adimensional, eq.(5.1)
$\psi^*$	Fração mássica adimensional, eq.(5.4)

## SUB-ÍNDICES

a	Atmosférica
e	Referente à entrada do duto
ef	Referente à uma quantidade efetiva do meio poroso
f	Fluido
fp	Fluido-partícula
m	Referente à uma quantidade de mistura
p	Partícula
s	Saturação (para os problemas mássico e acoplado), matriz sólida (para o problema térmico com geração)
v	Vapor d'água
w	Referente à parede do duto
$\infty$	Referente à uma região suficientemente afastada da parede
1,2	Posições arbitrárias ao longo do duto, fig. 4.6



## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Meios porosos são encontrados com frequência na natureza e em um grande número de aplicações industriais. Materiais porosos podem ser definidos como materiais constituídos de partículas sólidas e de espaços vazios, os quais podem estar preenchidos com um ou mais tipos de fluido em uma ou mais fases. Tal definição sugere a classificação de meios porosos como saturados ou insaturados, conforme os espaços vazios da matriz sólida estejam preenchidos com apenas uma fase ou um tipo de fluido, tal como o ar ou a água, ou então, com uma combinação dos mesmos.

No campo da mecânica dos fluidos, a dinâmica do escoamento de fluidos através de meios porosos é um tópico relativamente antigo, em vista da importância histórica deste assunto na engenharia de sistemas de irrigação e de fontes públicas. Os conceitos iniciais deste ramo da mecânica dos fluidos originaram-se no século XIX, com o trabalho de Henry Darcy.

Embora a mecânica dos fluidos através de meios porosos tenha atraído a atenção de engenheiros e cientistas por mais de um século, o fenômeno da transferência de calor e massa, por convecção forçada, alcançou o status de um ramo independente de pesquisa somente nas últimas duas décadas. O estudo da transferência de calor e massa através de meios porosos saturados representa um importante desenvolvimento em uma área de rápido crescimento dentro do campo de pesquisa atual das ciências térmicas.

A importância de estudos fundamentais na área de transferência de calor e massa em meios porosos deve-se ao fato de que tal fenômeno se encontra presente em um grande número de aplicações industriais. Estes estudos tem a finalidade não só de melhorar o desempenho de sistemas térmicos já existentes, como também de criar novas idéias e explorar novos caminhos relacionados ao uso de meios porosos em processos industriais. Alguns exemplos destas aplicações incluem trocadores de calor com matriz sólida, isolamentos térmicos, reatores químicos com leito compactado, sistemas de estocagem térmica, extração de óleos, sistemas geotérmicos etc.

Na modelagem do fenômeno, a complexidade da geometria da matriz sólida introduz nas equações governantes um número significativo de variáveis, que são características particulares de cada meio. Grande parte dos trabalhos existentes nesta área usam, fundamentalmente, as simplificações baseadas na lei de Darcy, que relaciona o gradiente de pressão com a velocidade em um meio não limitado por fronteiras sólidas [01]. No entanto, o modelo clássico de Darcy ignora alguns dos efeitos característicos de escoamentos em meios porosos. Algumas das limitações deste modelo são as seguintes:

(i) o modelo não é apropriado para escoamentos "rápidos", isto é, escoamentos para os quais o número de Reynolds, baseado na velocidade local e no diâmetro da partícula, é maior que  $O(1)$ .

(ii) o modelo não satisfaz a condição de não deslizamento em uma fronteira sólida. Em problemas de transferência de calor por convecção forçada, calor é frequentemente trocado pelo fluido através das paredes do duto. Em tais casos, os resultados previstos pela lei de Darcy não são confiáveis.

(iii) o modelo não considera a variação espacial da porosidade. A existência de regiões com maior porosidade, localizadas próximas às

paredes sólidas, provocam o surgimento de canais de escoamento de fluido com velocidades mais elevadas. Estes canais afetam significativamente o processo de transferência de calor do sistema.

Embora limitados, existem estudos sobre a transferência de calor em meios porosos, os quais fazem uso de modelos de escoamentos que procuram amenizar algumas ou todas as limitações impostas pelo modelo de Darcy. Alguns destes estudos serão discutidos a seguir.

No que se refere ao estudo de escoamentos em meios porosos na ausência de transferência de calor, existe o reconhecido trabalho de Ergun [02]. Neste trabalho Ergun desenvolveu uma fórmula empírica para o cálculo da dependência da permeabilidade com a porosidade da matriz sólida e com o diâmetro das esferas. No trabalho foi desenvolvido também, um fator para expressar as perdas de energia cinética do fluido. Ambas expressões são frequentemente utilizadas pela maioria dos autores que publicam nesta área.

O problema da transferência de calor em meios porosos considerando-se os efeitos de inércia e de uma fronteira sólida, foi analisado recentemente por Vafai e Tien [03], que no entanto, assumiram constante a porosidade do meio. Esta simplificação também foi assumida por Kaviany [04] que estudou o escoamento laminar em um meio poroso confinado por duas placas paralelas e isotérmicas.

Recentemente Vafai e Kim [05] resolveram analiticamente o problema de transferência de calor com convecção forçada em um duto submetido a condição de fluxo prescrito na parede. Na equação da quantidade de movimento foram incluídos os efeitos viscosos e de inércia. A porosidade, no entanto, foi assumida constante. Vafai e Kim concluíram que a espessura da camada limite hidrodinâmica depende do termo de inércia para escoamentos com alta permeabilidade. Esta dependência está refletida no número de Nusselt, que aumenta com um

aumento na permeabilidade do meio.

Recentes publicações enfatizam as regiões de porosidade mais alta que aparecem junto à parede, aumentando a permeabilidade do meio e provocando picos de velocidades ("fenômeno canal") [06]. Estes efeitos tornam-se importantes na região próxima à parede, onde as quantidades de interesse, tal como o fluxo de calor, são calculados.

White e Tien [07] mostraram que a variação espacial da porosidade afeta o perfil de velocidade de um valor máximo junto à parede, até o valor da velocidade de Darcy, à medida que se distância da mesma.

Renken e Poulikakos [08] investigaram os efeitos de inércia, porosidade variável e fricção de Brinkman na transferência de calor através de um meio poroso limitado por placas planas ou duto circular. Os autores observaram que os efeitos de inércia e da fronteira sólida diminuíam o número de Nusselt, enquanto que o efeito da porosidade variável aumentava o número de Nusselt.

Os estudos de Vafai [09] documentaram o efeito de canal em escoamentos com convecção forçada. Nestes estudos foi mostrado que o efeito de canal aumenta significativamente a transferência de calor entre a parede e o fluido, com relação aos resultados obtidos pelo modelo de Darcy.

Hunt e Tien [10] utilizaram um modelo de Darcy modificado e consideraram a porosidade variável para calcular as taxas de transferência de calor em leitos compactados em reatores nucleares. No trabalho de Georgiadis e Catton [11] o efeito da porosidade variável no transporte convectivo foi analisado analiticamente.

Whitaker [12] estudou o processo de transferência de calor em reatores contendo um leito poroso através de um método que utilizava médias aritméticas para pequenos volumes do meio. Neste trabalho foram

desenvolvidas equações para o fluido e para a matriz sólida.

Trabalhos experimentais na área de transferência de calor com convecção forçada foram realizados por Renken e Poulikakos em [13,14]. Em [13] foi investigado a transferência de calor convectiva em um leito de esferas através de uma placa aquecida. Em [14] foi estudado o mesmo fenômeno, porém as esferas que constituíam o meio poroso encontravam-se confinadas em um duto com paredes aquecidas à uma temperatura constante. Ambos os trabalhos atestaram que o modelo para a descrição do fluxo que considera a porosidade variável com o meio, forneceu resultados mais próximos aos obtidos experimentalmente.

Com referência à convecção natural, o estudo em [15] investigou o fenômeno da transferência de calor através de um cilindro horizontal imerso em um meio poroso. Georgiadis e Catton [16] reportaram resultados interessantes relevantes a instabilidade do escoamento em um leito poroso com o regime não Darcyniano.

No que se refere ao fenômeno conjugado da transferência de calor e massa em meios porosos, os trabalhos científicos disponíveis são poucos. Aplicações práticas deste tipo de problema podem ser encontradas em processos de secagem de grãos ou em problemas que envolvem transferência de calor em solos. Em [17] foi estudado a transferência conjunta de calor e massa em um canal contendo um meio poroso saturado. Neste trabalho foram desenvolvidas equações para o fluido e para a matriz sólida. Foram utilizadas, no entanto, as simplificações de Darcy para a descrição do escoamento.

O presente trabalho analisa numericamente o fenômeno da transferência de calor e massa em um duto contendo um meio poroso saturado. Para a descrição do escoamento valeu-se da lei de Darcy modificada, a qual computa alguns dos efeitos característicos de escoamentos através de meios porosos. No modelo utilizado neste

trabalho, foram incluídos os efeitos de inércia, a condição de não deslizamento em uma fronteira sólida, o atrito viscoso e a variação espacial da porosidade da matriz.

Antecedendo a solução do problema acoplado, analisam-se os fenômenos da transferência de calor e massa, separadamente. A formulação do problema térmico na ausência de transferência de massa é feita sob duas abordagens. Numa primeira análise, considera-se o fluido e o meio poroso em equilíbrio térmico local, isto é, ambos com a mesma temperatura. Nesta situação, as trocas de calor ocorrem apenas pelas fronteiras sólidas do duto. Após, considera-se a situação na qual o fluido troca calor tanto com as paredes do duto como com as partículas que constituem o meio. Para esta segunda formulação considera-se a condutividade térmica efetiva do meio variando com a porosidade.

A seguir analisa-se o problema isotérmico da transferência de massa entre as partículas e o fluido. Neste caso, o fluido entra no duto com um conteúdo de umidade inicial e ao escoar pela matriz sólida, tem o seu conteúdo de umidade aumentado devido à evaporação d'água presente nas partículas. As paredes do duto são impermeáveis ao fluxo de massa, de forma que o ganho de umidade do fluido é devido unicamente às partículas.

Após a solução dos problemas isolados, formula-se o problema de tal forma que os processos de transferência de calor e massa ocorrem simultaneamente. Nesta situação as equações da energia e da massa encontram-se acopladas através da relação entre o conteúdo de umidade e a temperatura de saturação. O problema torna-se, portanto, iterativo.

A metodologia de solução para os problemas consiste na adimensionalização das equações governantes e na utilização do método implícito das Caixas de Keller para as equações da energia e da massa. Para o problema conjugado, uma adimensionalização completa de todos os

parâmetros envolvidos não é possível. Isto ocorre porque as variáveis referentes tanto ao problema térmico quanto ao problema mássico estão presentes na relação que calcula o valor da temperatura de saturação na superfície das partículas (equação constitutiva).

Os resultados para as formulações referentes aos problemas térmico e mássico estão apresentados através de perfis de temperatura e do número de Nusselt, e de perfis de conteúdo de umidade e do número de Sherwood, respectivamente.

## CAPÍTULO 2

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

#### 2.1 INTRODUÇÃO

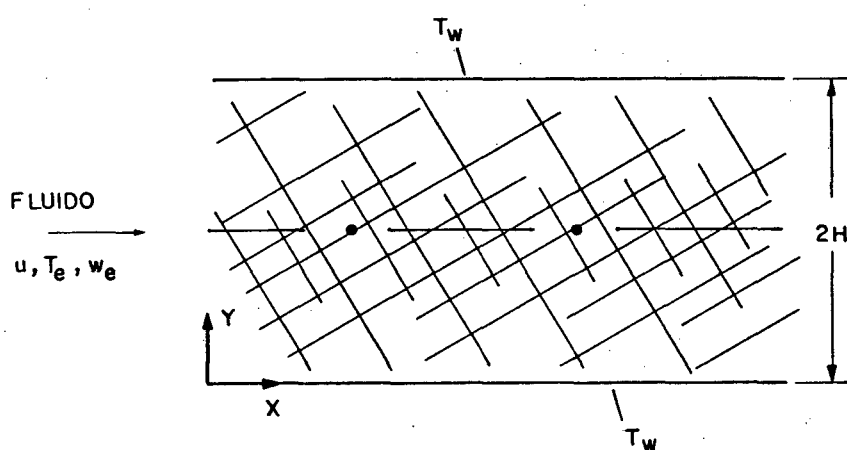
Neste capítulo são apresentadas as equações que governam o transporte de quantidade movimento, calor e massa em meios porosos saturados.

Inicialmente, descreve-se a geometria estudada e caracteriza-se o problema através de suas condições iniciais e de contorno. A seguir, formula-se o problema hidrodinâmico, o qual fornece o campo de velocidade necessário para o cálculo dos perfis de temperatura e umidade. O problema térmico é discutido sob dois aspectos distintos na ausência de transferência de massa. Numa primeira aproximação, considera-se o fluido e o meio poroso em equilíbrio térmico local, isto é, ambos com a mesma temperatura. Neste caso, as trocas de calor ocorrem apenas pelas paredes do duto. Após, considera-se a situação onde o fluido e o meio possuem temperaturas distintas, e atenta-se para as trocas simultâneas de calor entre o fluido, as partículas que constituem o meio e as paredes. Em seguida, avalia-se o problema isotérmico da transferência de massa entre o fluido e as partículas sólidas confinadas por duas paredes impermeáveis. Finalmente, acopla-se os problemas térmico e mássico para a obtenção conjunta dos campos de temperatura e umidade. Para todos os casos, o meio poroso será tratado como contínuo.

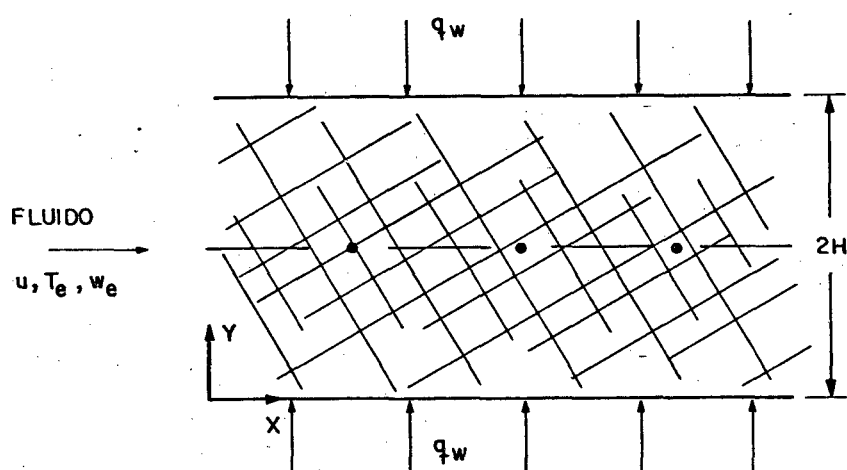


## 2.2 GEOMETRIA DO PROBLEMA

A configuração do problema e o sistema de coordenadas estão mostrados nas figuras 2.1(a) e 2.1(b). O meio poroso é formado por partículas esféricas compactas (não porosas) e está limitado por duas placas paralelas aquecidas. As placas são impermeáveis ao fluxo de massa e estão separadas por uma distância  $2H$ .



(a)



(b)

Fig. 2.1 Meio poroso sujeito as condições : (a) temperatura constante; (b) fluxo de calor uniforme.

O fluido entra no duto com umidade relativa  $UR_e$  e temperatura  $T_e$ . Em virtude do pequeno comprimento da região de entrada hidrodinâmica associada ao escoamento em meios porosos, a velocidade do fluido, já na entrada do duto, é função somente da coordenada normal às fronteiras sólidas, ou seja,  $u = u(y)$ .

Tendo em vista a simetria do escoamento e das condições de contorno, apenas a metade dos domínios indicados nas figuras 2.1(a) e 2.1(b) é considerada na solução numérica.

No caso mais geral a ser investigado, o fluido troca calor e massa com as partículas do meio poroso. Nas secções subsequentes os problemas hidrodinâmico, térmico e mássico serão detalhados separadamente.

### 2.3 PROBLEMA HIDRODINÂMICO

O problema em estudo é o de transferência de calor e massa com convecção forçada em um duto contendo um meio poroso saturado. O modelo clássico de Darcy, [01], para a descrição do fluxo, extensivamente usado no passado, é modificado com o objetivo de descrever o perfil de velocidade do meio poroso com maior fidelidade. O modelo do qual valeu-se este trabalho, computa alguns dos efeitos ignorados pela lei de Darcy como, por exemplo, os efeitos de inércia do escoamento, a condição de não deslizamento nas fronteiras sólidas e o atrito. Também são incluídos os efeitos causados pela porosidade variável da matriz sólida.

Em [03] mostrou-se que o desenvolvimento da camada limite hidrodinâmica ocorre a uma distância da ordem de  $(Ku/\nu_f)$ , onde  $K$  é a permeabilidade do meio, e  $\nu_f$  é a viscosidade cinemática do fluido. A consequência deste resultado é uma região de entrada muito pequena que pode ser desconsiderada na maioria dos casos práticos [08,09]. Sendo assim, o campo de velocidade é considerado plenamente desenvolvido já na

entrada do duto e é função única da coordenada normal às fronteiras sólidas. Desta forma, e assumindo também as propriedades físicas constantes, a equação diferencial que descreve o fenômeno do transporte de quantidade de movimento em meios porosos pode ser escrita da seguinte forma,

$$0 = -\frac{1}{\rho_f} \frac{dP}{dx} + \frac{\nu_f}{\varepsilon} \frac{d}{dy} \left[ \frac{du}{dy} \right] - \frac{\nu_f}{K} u - Au^2 \quad (2.1)$$

onde  $\varepsilon$  é a porosidade do meio,  $\rho_f$  é a massa específica do fluido,  $P$  é a pressão,  $u$  é a velocidade na direção  $x$ ,  $A$  é o coeficiente de Forchheimer e  $x$  e  $y$  são as coordenadas conforme mostradas nas figuras 2.1(a) e 2.1(b).

A expressão (2.1) representa a conservação da quantidade de movimento do fluido através do meio, na direção  $x$ . A equação contém termos similares aos encontrados na equação de Navier-Stokes e termos inerentes ao escoamento em meios porosos. A primeira e a terceira parcelas representam, respectivamente, a queda de pressão e o arraste viscoso causado pela matriz porosa. No caso destes dois termos serem isolados dos demais, a equação se reduz à lei clássica de Darcy. Efeitos de inércia do escoamento podem ser significativos e estão representados pelo último termo da expressão (2.1). Tais efeitos foram introduzidos heurísticamente por Forchheimer, [08]. O segundo termo da equação leva a informação para dentro do escoamento sobre a existência de uma parede sólida, [08]. Este termo foi empiricamente introduzido por Brinkman.

A permeabilidade  $K$  do termo de Darcy e o parâmetro  $A$  do termo de Forchheimer são funções da porosidade do meio e do diâmetro das esferas. Suas relações funcionais foram desenvolvidas por Ergun, [02], e são dadas por,

$$K = \frac{d^2 \varepsilon^3}{150 (1-\varepsilon)^2} \quad (2.2)$$

$$A = \frac{1,75 (1-\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \quad (2.3)$$

onde  $d$  é o diâmetro das partículas esféricas.

A porosidade do leito decresce exponencialmente com a distância normal às paredes, desde o valor máximo um, junto às fronteiras sólidas, até o valor  $\varepsilon_{\infty}$  após alguns diâmetros de partículas [10]. A figura 2.2 ilustra o empacotamento de esferas sob uma parede sólida e mostra o perfil de velocidade característico que surge com a variação da porosidade na equação.

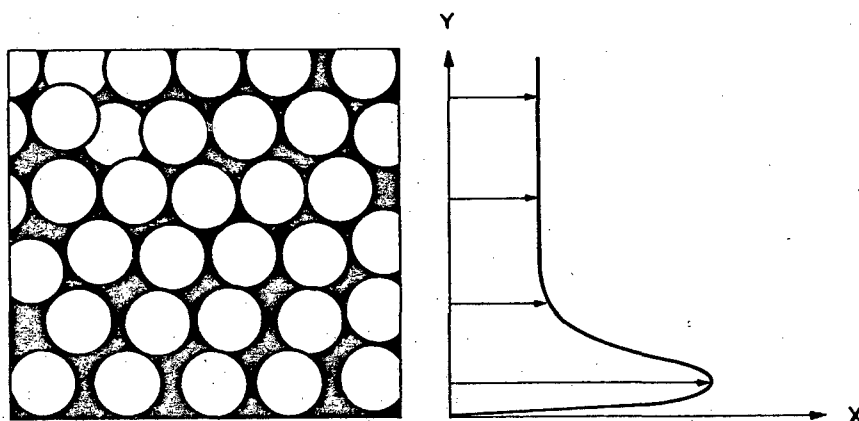


Fig. 2.2 Perfil de velocidade típico em um leito de esferas compactadas.

Em virtude da porosidade variável, observa-se um perfil para a velocidade do fluido bastante alterado com relação ao perfil uniforme proposto por Darcy, onde a porosidade do meio é considerada constante.

A porosidade varia notadamente perto da parede do duto, devido a interrupção da geometria do empacotamento [06]. Como consequência, há a formação de um canal preferencial para o escoamento do fluido, que opta por uma região de menor resistência. Este efeito é denominado de efeito canal, e influencia significativamente o processo de transferência de calor.

A função utilizada neste trabalho para descrever a dependência da porosidade com o diâmetro da partícula e a coordenada normal às fronteiras, é [08 a 10],

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} \left[ 1 + \lambda_1 e^{-\lambda_2 y/d} \right] \quad (2.4)$$

onde  $\varepsilon_{\infty} = 0,37$ , [08],  $\lambda_2 = 6$ , [10], e  $\lambda_1$  é escolhido de maneira que a porosidade seja igual à unidade nas paredes, [10].

É conveniente salientar que, sendo o meio poroso em análise composto de partículas esféricas, a solução obtida torna-se restrita a este tipo de partículas. Para outras geometrias, as expressões da permeabilidade, coeficiente de Forchheimer e porosidade, expressões (2.2-2.4), devem ser substituídas por equações apropriadas às novas condições do meio.

Para concluir a formulação do problema hidrodinâmico, as seguintes condições de contorno são assumidas para a equação (2.1). Velocidade igual a zero na parede, e em vista da simetria, gradiente de velocidade igual a zero no centro do duto. Ou seja:

$$\begin{aligned} y = 0 & & ; & & u = 0 \\ y = H & & ; & & \frac{du}{dy} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

De posse do campo de velocidade, os demais problemas podem ser resolvidos para a obtenção dos perfis de temperatura e de umidade.

## 2.4 PROBLEMA TÉRMICO

O problema térmico é estudado sob dois aspectos distintos. Primeiramente, descreve-se a formulação na qual o fluido e o meio poroso possuem a mesma temperatura. A seguir, esta simplificação é eliminada para considerar as trocas de calor entre o fluido e as partículas. As equações propostas para estes modelos serão denominadas de equação da energia e equação da energia com geração, respectivamente.

### 2.4.1 EQUAÇÃO DA ENERGIA

Nesta primeira etapa, desenvolve-se a equação da energia na ausência de geração. Assume-se equilíbrio térmico entre as partículas e o fluido e considera-se constante as propriedades físicas. Deste modo, a conservação da energia do meio requer que,

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_{ef} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (2.6)$$

onde  $T$  é a temperatura do fluido e  $\alpha_{ef}$  é a difusividade térmica efetiva do meio poroso.

A equação, assim escrita, desconsidera a condução axial e a variação da difusividade térmica efetiva com a porosidade. A hipótese de que  $\alpha_{ef}$  permanece constante enquanto que a porosidade decresce exponencialmente à medida que se afasta da parede, é tanto mais válida quanto menores as diferenças entre as difusividades térmicas do fluido e

da matriz sólida. Tal aproximação é compartilhada por outros autores que estudam o fenômeno de transferência de calor em meios porosos (por exemplo, [08, 09]).

Para a equação (2.6) duas condições de contorno distintas são impostas nas paredes do duto e serão descritas a seguir. Temperatura constante e diferente da temperatura de entrada do fluido no duto,  $T_e \neq T_w$  e fluxo de calor uniforme. Para ambos os casos, a segunda condição de contorno necessária para completar o problema é, a exemplo do problema hidrodinâmico, gradiente de temperatura igual a zero na linha de simetria do duto,  $y = H$ . Resumindo, as condições descritas anteriormente, são:

$$\begin{array}{ll}
 x = 0 & ; \quad T = T_e \\
 y = 0 & ; \quad T = T_w \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{q_w}{k_{ef}} \\
 y = H & ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0
 \end{array} \quad (2.7)$$

#### 2.4.2 EQUAÇÃO DA ENERGIA COM GERAÇÃO

A equação da energia descrita a seguir leva em consideração algumas das simplificações assumidas anteriormente. No desenvolvimento desta equação, atenta-se para as trocas de calor entre o fluido e as partículas, isto é, fluido e meio não se encontram mais em equilíbrio térmico. Adicionalmente, no modelo descrito nesta secção computa-se a variação da condutividade térmica efetiva com a porosidade.

A figura 2.3 ilustra um volume de controle genérico,  $V_{total}$  do meio poroso.

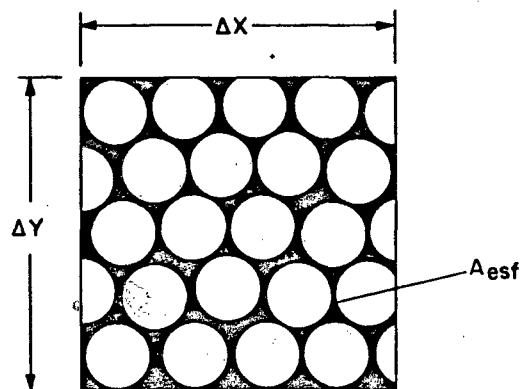


Fig. 2.3 Volume de controle do meio poroso.

Fazendo-se um balanço de energia em  $V_{total}$  e desconsiderando-se a condução axial, obtem-se,

$$\rho_f^{uc} c_{pf} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_{ef} \frac{\partial T}{\partial y} \right] + G_c \quad (2.8)$$

onde  $c_{pf}$  é o calor específico do fluido a pressão constante e  $k_{ef}$  é a condutividade térmica efetiva do meio poroso.  $G_c$  é o fluxo de calor entre as partículas sólidas e o fluido por unidade de volume.

Com o auxílio da figura 2.3, pode-se escrever o fluxo de calor  $G_c$  como sendo,

$$G_c = N \frac{A_{esf}}{V_{total}} h_{fp} (T_s - T) \quad (2.9)$$

onde  $A_{esf}$  é a área superficial de uma partícula,  $N$  é o número de partículas contidas em  $V_{total}$ ,  $h_{fp}$  é o coeficiente de transferência de calor entre o fluido e as partículas e  $T_s$  é a temperatura da matriz sólida.  $T_s$  é constante ao longo da matriz sólida e é um parâmetro do problema. A seguir, a equação (2.9) será escrita em uma forma mais



adequada para sua utilização.

A partir da porosidade  $\varepsilon$ , que representa a razão entre o volume dos vazios e o volume total, pode-se escrever,

$$(1 - \varepsilon) = N \frac{V_{\text{esf}}}{V_{\text{total}}} \quad (2.10)$$

onde  $V_{\text{esf}}$  é o volume de uma partícula.

A razão entre a área e o volume da partícula, no caso de partículas esféricas, é dada por:

$$\frac{A_{\text{esf}}}{V_{\text{esf}}} = \frac{6}{d} \quad (2.11)$$

Deste modo, tem-se:

$$N \frac{A_{\text{esf}}}{V_{\text{total}}} = \frac{6}{d} (1 - \varepsilon) \quad (2.12)$$

E a relação (2.9) resulta em:

$$G_c = \frac{6}{d} (1 - \varepsilon) h_{\text{fp}} (T_s - T) \quad (2.13)$$

Para concluir a formulação, resta apresentar uma expressão para o cálculo da condutividade térmica efetiva. Considerando-se condução unidimensional para o fluxo de calor, de [18] obtem-se uma expressão simplificada para  $k_{\text{ef}}$ ,

$$\frac{k_{\text{ef}}}{k_f} = \varepsilon + (1 - \varepsilon) \frac{k_p}{k_f} \quad (2.14)$$

onde  $k_f$  e  $k_p$  representam a condutividade térmica do fluido e da

partícula, respectivamente. A equação (2.14) leva em conta a variação da condutividade térmica com a porosidade e representa um avanço em termos de modelagem em relação a equação da energia da secção 2.4.1 onde  $k_{ef}$  foi assumido constante.

Finalmente, substituindo as expressões (2.13) e (2.14) na equação (2.8), e considerando constantes as magnitudes das propriedades físicas do fluido, tem-se:

$$\rho_f u_c \frac{\partial T}{\partial x} = k_f \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left[ \epsilon + (1-\epsilon)k_p/k_f \right] \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{6}{d} (1-\epsilon)h_{fp} (T_s - T) \quad (2.15)$$

Como no caso da equação da energia da secção 2.4.1, as condições de contorno que completam a formulação do problema são:

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad ; \quad T = T_e \\ y = 0 & \quad ; \quad T = T_w \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{q_w}{k_{ef}} \\ y = H & \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nas próximas secções, o problema da transferência de massa e o problema conjugado temperatura-massa serão apresentados.

## 2.5 PROBLEMA MÁSSICO

O problema da transferência de massa é semelhante ao da transferência de calor, a exceção das condições de contorno. Na formulação que se segue, o fluido em consideração é uma mistura de ar seco e vapor d'água, e as partículas que constituem o meio poroso estão saturadas de água. Desta forma, o ar ao escoar pela matriz sólida tem

seu conteúdo de umidade aumentado pela evaporação da água presente nas partículas.

Analogamente ao balanço de energia feito no volume de controle da figura 2.3, o balanço de vapor d'água no fluido resulta na equação,

$$u \frac{\partial \rho_v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ D_{ef} \frac{\partial \rho_v}{\partial y} \right] + G_m \quad (2.17)$$

onde  $\rho_v$  é a massa específica do vapor d'água,  $D_{ef}$  é a difusividade efetiva do vapor d'água no ar e  $G_m$  é a taxa de evaporação por unidade de volume.

A exemplo do fluxo de calor, equação (2.13), tem-se a seguinte expressão para a taxa de evaporação,

$$G_m = \frac{6}{d} (1-\epsilon) k_{fp} (\rho_s - \rho) \quad (2.18)$$

onde  $k_{fp}$  é o coeficiente de transferência de massa entre o fluido e as partículas e  $\rho_s$  é a massa específica do vapor d'água na superfície das partículas, ou seja, na temperatura de saturação. O vapor d'água na superfície das partículas está em equilíbrio termodinâmico com a água líquida e, assim sendo, seu estado é de saturação.

Para uma situação isotérmica, a equação do balanço de massa está desacoplada da equação da energia, bastando para sua solução que se conheça a temperatura do sistema. Na secção seguinte, analisar-se-á a situação acoplada onde cada partícula terá sua taxa de evaporação ocorrendo a uma temperatura particular, a ser determinada durante a solução do problema.

Para um meio de partículas não porosas, a relação entre o coeficiente de difusão efetivo,  $D_{ef}$ , e o coeficiente de difusão molecular,  $D_f$ , é dada por, [18]:

$$D_{ef} = \epsilon D_f \quad (2.19)$$

A fim de escrever a equação (2.17) em termos da fração mássica, tem-se:

$$w = \frac{\rho_v}{\rho_f} \quad ; \quad w_s = \frac{\rho_s}{\rho_f} \quad (2.20)$$

Substituindo-se as expressões (2.18-2.20) na equação (2.17), a equação do transporte de massa assume a forma:

$$u \frac{\partial w}{\partial x} = D_f \frac{\partial}{\partial y} \left[ \epsilon \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{6}{d} (1-\epsilon) k_{fp} (w_s - w) \quad (2.21)$$

O coeficiente de difusão molecular,  $D_f$ , assim como a massa específica do ar,  $\rho_f$ , são considerados constantes.

Para completar a formulação do problema, apresenta-se a seguir as condições de contorno. As paredes do duto são impermeáveis ao fluxo de massa e, pela simetria, o fluxo de massa na linha central do duto é zero. Resumindo:

$$\begin{array}{ll} x = 0 & ; \quad w = w_e \\ y = 0 & ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ y = H & ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{array} \quad (2.22)$$

Passa-se agora a descrição do problema acoplado.

## 2.6 PROBLEMA TÉRMICO E MÁSSICO ACOPLADO

Nesta formulação os problemas de transferência de calor e massa.

ocorrem simultaneamente. Ar é o fluido de trabalho que, ao escoar pelo canal, tem seu conteúdo de umidade aumentado pela evaporação da água líquida presente nas partículas sólidas. Nesta situação, os problemas térmico e mássico estão acoplados.

As equações da energia e da massa deduzidas nas secções precedentes, juntamente com as condições de contorno, estão reproduzidas abaixo:

$$\rho_f u c_{pf} \frac{\partial T}{\partial x} = k_f \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left[ \epsilon + (1-\epsilon) k_p / k_f \right] \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{6}{d} (1-\epsilon) h_{fp} (T_s - T) \quad (2.15)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} = D_f \frac{\partial}{\partial y} \left[ \epsilon \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{6}{d} (1-\epsilon) k_{fp} (w_s - w) \quad (2.21)$$

$$y = 0 \quad ; \quad T = T_w \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{q_w}{k_{ef}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$y = H \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2.16-2.22)$$

Considerando-se que, nesta formulação,  $T_s$  e  $w_s$  variam ao longo da matriz sólida, os mesmos aparecem como novas incógnitas do problema. Assim sendo, duas equações adicionais são necessárias para completar a presente formulação. A primeira das equações é obtida a partir do balanço de energia na interface fluido-partícula. Tal balanço reflete o fato de que calor é suprido do meio para a evaporação da água líquida na matriz sólida, e pode ser escrito como,

$$h_{fp} (T - T_s) = \rho_f k_{fp} (w_s - w) H_{fg} + \rho_f k_{fp} (w_s - w) c_{pv} (T - T_s) \quad (2.23)$$

onde  $H_{fg}$  é o calor latente de vaporização da água à temperatura  $T_s$  e  $c_{pv}$

é a capacidade calorífica do vapor d'água à pressão constante e à temperatura  $T_{se}$ .

O lado esquerdo da equação (2.23) representa o calor entregue pelo fluido à partícula. Esta quantidade deve igualar a soma dos calores latente e sensível, primeira e segunda parcelas do lado direito da equação, respectivamente. O termo que considera o calor latente representa o calor requerido para a evaporação da massa d'água e o segundo, o calor requerido para elevar a temperatura  $T_s$  da massa evaporada à temperatura  $T$ , na qual o fluido se encontra. Em geral, a parcela de calor sensível é muito menor do que a parcela de calor latente e pode ser desconsiderada.

Isolando-se a temperatura de saturação da equação (2.23), tem-se a seguinte expressão:

$$T_s = T - \frac{\rho_f k_{fp} (w_s - w) H_{fg}}{h_{fp} - \rho_f k_{fp} (w_s - w) c_{pv}} \quad (2.24)$$

Como  $w_s$  é função de  $T_s$ , a segunda equação necessária para completar a formulação do problema é a equação constitutiva do vapor d'água que relaciona sua fração mássica com sua temperatura no estado de saturação. De qualquer texto de termodinâmica (por exemplo [19]),

$$w_s = 0,62918 \frac{P_s(T_s)}{P_a - P_s(T_s)} \quad (2.25)$$

onde  $P_a$  é a pressão atmosférica e  $P_s$  é a pressão de saturação, cuja expressão está apresentada no apêndice B.

Substituindo-se a expressão da fração mássica de saturação, equação (2.25) na equação (2.24), obtém-se uma equação implícita para  $T_s$ .

A metodologia de solução será apresentada no próximo capítulo.

## CAPÍTULO 3

### MÉTODOLOGIA DE SOLUÇÃO

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta a metodologia de solução das equações diferenciais da transferência de quantidade de movimento, calor e massa em meios porosos saturados, conforme descritos no capítulo 2. Dois métodos computacionais são empregados na solução das equações adimensionalizadas. Em uma primeira etapa, calcula-se numericamente a equação hidrodinâmica por volumes finitos. Devido à simplicidade deste método, o procedimento de solução desta equação é exposto de maneira sucinta. De posse do campo de velocidade, parte-se para a obtenção dos campos de temperatura e umidade. Primeiramente, resolve-se a equação da energia para o caso no qual considera-se o fluido e as partículas na mesma temperatura. Nesta situação há a formação e desenvolvimento de uma camada limite térmica. Com a finalidade de otimizar o método computacional e capturar os altos gradientes de temperatura na camada limite, esta equação é resolvida utilizando-se uma transformação de coordenadas. Tanto para a equação da energia com geração de calor, como para a equação da conservação do conteúdo de umidade do fluido, tal transformação de coordenadas não se aplica, em virtude das camadas limites ocuparem todo o duto. Nestes casos, utiliza-se o método implícito das caixas de Keller. Devido à complexidade deste método, o seu desenvolvimento será mostrado no apêndice A. Na parte final do capítulo, estende-se a metodologia para a solução do problema acoplado.

### 3.2 PROBLEMA HIDRODINÂMICO

O problema em estudo é de convecção forçada e desta forma, a equação da quantidade de movimento está desacoplada das demais, podendo ser resolvida separadamente. Considera-se ainda que, na entrada do canal, o perfil de velocidade está plenamente desenvolvido conforme discutido na secção 2.3.

A equação da quantidade de movimento, juntamente com as condições de contorno apresentadas no capítulo anterior, são reproduzidas abaixo:

$$0 = -\frac{1}{\rho_f} \frac{dP}{dx} + \frac{\nu_f}{\varepsilon} \frac{d}{dy} \left[ \frac{du}{dy} \right] - \frac{\nu_f}{K} u - Au^2 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad ; \quad u = 0 \\ y = H & \quad ; \quad \frac{du}{dy} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por conveniência, as expressões acima são adimensionalizadas de acordo com as seguintes definições:

$$\begin{aligned} U = \frac{uH}{\nu_f B} & \quad ; \quad B = -\frac{dP}{dx} \frac{H^3}{\rho_f \nu_f^2} \\ Y = \frac{y}{H} & \quad ; \quad D = \frac{d}{H} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Como resultado, obtém-se para a equação da quantidade de movimento e para as condições de contorno:

$$U + BC_1 U^2 = C_2 + \frac{C_2}{\varepsilon} \frac{d}{dY} \left[ \frac{dU}{dY} \right] \quad (3.2)$$



$$\begin{aligned}
 Y = 0 & & ; & & U = 0 \\
 Y = 1 & & ; & & \frac{dU}{dY} = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Com as definições dos coeficientes C1 e C2 dadas por:

$$C_1 = \frac{1,75 D}{150(1-\varepsilon)} \quad ; \quad C_2 = \frac{D^2 \varepsilon^3}{150(1-\varepsilon)^2}
 \tag{3.4-3.5}$$

A equação (3.2) é, então, resolvida para fornecer o campo de velocidade. O procedimento de solução envolve a discretização dos termos pelo método dos volumes finitos e a linearização da equação seguida de um processo iterativo. Na discretização utiliza-se diferenças centrais para o termo de derivada segunda. A não linearidade da equação aparece com o quadrado da velocidade do termo de Forchheimer que computa os efeitos de inércia do escoamento. Este termo é escrito como o produto entre duas velocidades, a velocidade em uma dada iteração e a velocidade obtida na iteração anterior. O procedimento de cálculo consiste em arbitrar-se, inicialmente, valores de velocidade para todos os pontos da malha. A equação algébrica, juntamente com as condições de contorno é resolvida através do algoritmo TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm), [20], fornecendo o campo de velocidade. Este procedimento é repetido até que a convergência seja alcançada para o critério estabelecido. Em geral, não mais do que cinco iterações são necessárias para se obter uma solução convergida.

Com o objetivo de observar o importante efeito do canal que ocorre junto a parede, utilizou-se uma malha variável com 500 pontos na direção perpendicular ao fluxo, e mais concentrada na região próxima as fronteiras do duto. Cada intervalo é um múltiplo constante do intervalo anterior, isto é,  $(\Delta Y)_j = \gamma(\Delta Y)_{j-1}$ . O valor de  $\gamma$  foi escolhido

como sendo 1,05, fornecendo ótima resolução para valores próximos à parede.

### 3.3 PROBLEMA TÉRMICO

A solução do problema térmico é obtida através do método implícito das Caixas de Keller [21-23]. O desenvolvimento detalhado deste método é apresentado no apêndice A. Neste capítulo, cita-se apenas algumas das vantagens do método e descreve-se, sucintamente, os passos envolvidos no processo de solução.

Vários fatores tornam este método vantajoso na solução de equações diferenciais parabólicas de qualquer ordem: precisão de segunda ordem mesmo com os pontos da malha distribuídos de maneira não uniforme, possibilidade de realizar variações rápidas na direção do escoamento e simplicidade de programação na solução de um grande número de equações acopladas. A sequência do método envolve basicamente quatro etapas. Primeiramente, reduz-se as equações governantes a um sistema de primeira ordem e, após, utiliza-se diferenças centrais na discretização das equações diferenciais. Em seguida, lineariza-se as equações algébricas resultantes, caso as mesmas sejam não lineares, e as arranja de forma matricial. Finalmente, obtém-se a solução do sistema linear pelo método da eliminação por blocos.

A solução do problema térmico é apresentada separadamente para os dois casos mostrados no capítulo anterior, ou seja, equação da energia e equação da energia com geração de calor incluído. A razão pela qual as equações são apresentadas separadamente, deve-se à distinta transformação de variáveis que as mesmas requerem durante o processo de adimensionalização.

### 3.3.1 EQUAÇÃO DA ENERGIA

A equação da energia e suas condições de contorno, obtidas no capítulo anterior, são reescritas abaixo:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_{ef} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad ; \quad T = T_e \\ y = 0 & \quad ; \quad T = T_w \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{q_w}{k_{ef}} \\ y = H & \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para a adimensionalização, as definições utilizadas foram,

$$\begin{aligned} U = \frac{uH}{\nu_f B} & \quad ; \quad Y = \frac{y}{H} \\ X = \frac{x}{HPr} & \quad ; \quad \theta = 1 + \frac{T_e - T}{T_e \phi} \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde o número de Prandtl é definido como  $Pr = \nu_f / \alpha_{ef}$ , e a grandeza  $\phi$  é uma função da coordenada  $x$  definida convenientemente para que condições de contorno arbitrárias possam ser investigadas. Posteriormente tal função será explorada com mais detalhes.

A equação (2.6), adimensionalizada, assume a forma:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] - \frac{BU\theta}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} = BU \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{BU}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad (3.7)$$

De acordo com o método computacional, a equação acima deve ser reduzida de segunda para primeira ordem. Para isto, introduz-se uma nova incógnita, a derivada da temperatura, denominada  $\Theta$  e definida por:

$$\Theta = \frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad (3.8)$$

Substituindo-se  $\Theta$  na equação (3.7), tem-se,

$$\Theta' - \frac{BU\Theta}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} = BU \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{BU}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad (3.9)$$

onde  $\Theta'$  representa a derivada de  $\Theta$  com relação a  $Y$ .

As equações (3.8) e (3.9) formam um sistema de primeira ordem. Para completá-lo, as condições de contorno são adimensionalizadas definindo-se distintas expressões para a função  $\phi(X)$ . No caso específico de temperatura prescrita na parede, escolhe-se, por conveniência, o valor de  $\phi(X)$  como sendo:

$$\phi(X) = \frac{T_w - T_e}{T_e} \quad (3.10)$$

Substituindo-se a equação (3.10) na expressão da temperatura adimensional, obtém-se para  $\theta$  o valor,

$$\theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_e} \quad (3.11)$$

de maneira que, para a parede,  $\theta_w$  é sempre igual a zero.

No caso de fluxo prescrito, a definição (3.10) não é apropriada, uma vez que a temperatura na parede  $T_w$  não é conhecida. Para a obtenção de  $\phi(X)$ , escreve-se a condição de contorno  $\partial T / \partial y = -q_w / k_{ef}$  em termos adimensionais, obtendo-se:

$$\phi(X)\Theta = \frac{q_w H}{T_e k_{ef}} \quad (3.12)$$

Por simplicidade, arbitra-se o valor um para  $\Theta$  em  $Y = 0$  e, desta forma, tem-se:

$$\phi(X) = \frac{q_w H}{T_e k_{ef}} \quad (3.13)$$

Sendo as condições de contorno na parede de temperatura e fluxo uniformes, isto é,  $T_w \neq T_w(x)$  e  $q_w \neq q_w(x)$ , observa-se, pelas definições (3.10) e (3.13), que a função  $\phi$  torna-se independente da coordenada  $X$ . Pode-se concluir, deste modo, que as parcelas que envolvem esta função na equação (3.9) são nulas.

Finalmente, apresenta-se as condições de contorno para o problema térmico:

$$\begin{aligned} X = 0 & \quad ; \quad \theta = 1 \\ Y = 0 & \quad ; \quad \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \theta = 1 \\ Y = 1 & \quad ; \quad \theta = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Próximo à origem do duto, onde o processo de transferência de calor tem início, a espessura da camada limite térmica é muito pequena se comparada à distância  $H$  (meia altura do duto). Sendo assim, a escolha do parâmetro  $H$  para as adimensionalizações não é apropriada. Para manter-se precisão computacional, introduz-se na equação (3.7) uma nova variável, assim definida:

$$\eta = \frac{Y}{\sqrt{|X|}} \quad (3.15)$$

Esta variável tem a finalidade de tentar acompanhar o desenvolvimento da camada limite térmica, a qual, por análise de escala,

crece na ordem de  $\sqrt{X}$  [24].

A equação (3.9) é, então, transformada do domínio físico  $(X, Y)$  para o novo domínio  $(X, \eta)$ , valendo-se do uso da regra da cadeia, de acordo com:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial X} \right]_Y = \left[ \frac{\partial}{\partial X} \right]_\eta + \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \right]_X \frac{\partial \eta}{\partial X} \quad (3.16)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial Y} \right]_X = \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \right]_Y \frac{\partial \eta}{\partial Y}$$

Fazendo-se uso das expressões anteriores, a equação da energia e as condições iniciais e de contorno assumem a forma,

$$\Theta' + \frac{BU\eta}{2} \Theta - \frac{BUX\theta}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} = BUX \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{BUX}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad (3.17)$$

$$\Theta = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} X = 0 & \quad ; & \quad \theta = 1 & \quad \text{e} & \quad \Theta = 0 \\ \eta = 0 & \quad ; & \quad \theta = 0 & \quad \text{ou} & \quad \Theta = 1 \\ \eta = \eta_{\text{edge}} & \quad ; & \quad \theta = 1 & & \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde ' representa diferenciação em relação a  $\eta$ .

O ponto chave da transformação anterior é que o domínio de solução do sistema deixa de ser a região de  $y = 0$  a  $y = H$  e passa a abranger unicamente a espessura da camada limite térmica. Desta forma, os pontos nodais ficam todos distribuídos no interior da camada limite.

Para a condição de fluxo prescrito, o gradiente de temperatura  $\partial\theta/\partial\eta$ , na parede do duto, é escolhido por conveniência como sendo igual a um, podendo, no entanto, assumir qualquer outro valor. Certamente que, em realidade, cada valor de  $q$  corresponde a um e somente um valor de  $\Theta$ . Numericamente, ao arbitrar-se diferentes valores para  $\Theta$ , obtem-se

diferentes campos de  $\theta$  que estão associados a  $q_w$  através dos valores de  $\phi$  correspondentes. O parâmetro  $\eta_{\text{edge}}$  representa a espessura da camada limite térmica transformada, onde  $T = T_e$  e  $\theta = 1$ .

Em virtude da transformação de coordenadas, a função  $\phi$  deve ser reavaliada. Para o caso específico de temperatura constante imposta nas paredes do canal, a expressão (3.10) continua a ser válida. Da mesma forma, as parcelas da equação (3.17) que envolvem a derivada da função em relação à coordenada  $X$  são nulas. Para a condição de fluxo uniforme prescrito e  $\theta = 1$ , a função  $\phi(X)$ , definida de acordo com a equação (3.13), passa agora a variar com  $X$ . Assim sendo, reavaliando  $\partial T/\partial y = -q_w/k_{\text{ef}}$ , agora em termos de  $\eta$ , obtem-se:

$$\phi(X) = \frac{q_w H \sqrt{X}}{T_e k_{\text{ef}}} \quad (3.20)$$

Neste caso, o terceiro e o último termo na equação (3.17) não mais se anulam e precisam ser incluídos.

Além da pouca espessura da camada limite na entrada do duto, outro fator que dificulta a solução da equação de energia nesta região, é a mudança brusca das condições de contorno assim que o fluido encontra as paredes sólidas, local onde o processo de transferência de calor tem início. Desta forma, quando prescreve-se a condição de temperatura nas placas, a temperatura em  $Y = 0$  passa, repentinamente, do valor  $T_e$  para o valor  $T_w$ , ou em termos adimensionais, passa de  $\theta_w = 1$  para  $\theta_w = 0$ . Da mesma maneira, quando aplica-se fluxo de calor nas placas, o valor do gradiente de temperatura passa de  $\theta_w = 0$  para  $\theta_w = 1$ . A posição  $x = 0$  representa assim um ponto de descontinuidade para a temperatura e para sua derivada. Na prática, a temperatura e o gradiente de temperatura mudam de valor gradualmente nesta posição, como consequência da condução

através da placa. Para simular esta mudança de maneira gradual, representa-se a temperatura e a derivada da temperatura na parede através de uma função analítica simples:

$$\theta_w = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left[ \pi \frac{X}{X'} \right] \right]$$

$$0 \leq X \leq X' \quad (3.21)$$

$$\theta_w = 1 - \cos \left[ \frac{\pi X}{2 X'} \right]$$

Devido à rápida variação de  $\theta_w$  e  $\theta_w'$ , utilizou-se dez valores para  $X$  entre o intervalo  $0 \leq X \leq X'$ , onde  $X' = 3 \times 10^{-6}$ . Na realidade, o valor inicial para  $X$  não é zero, mas  $1 \times 10^{-6}$ . A razão pela qual  $X$  não pode assumir o valor zero na solução numérica da equação da energia, é a coordenada  $\eta$ , uma vez que a mesma foi definida como sendo  $\eta = Y/\sqrt{X}$ .

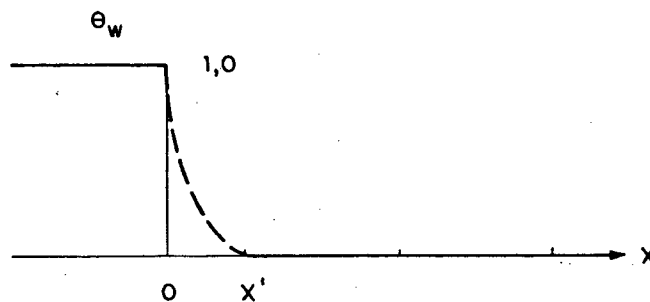
A figura 3.1 mostra a mudança gradativa dos valores de  $\theta_w$  e  $\theta_w'$ .

Finalmente, o sistema de equações (3.17-3.18), juntamente com as condições de contorno (3.19), é resolvido para fornecer o campo de temperaturas para cada posição  $X$ . O problema é parabólico, de maneira que necessita-se conhecer somente as condições da estação  $X$  anterior àquela que está sendo calculada.

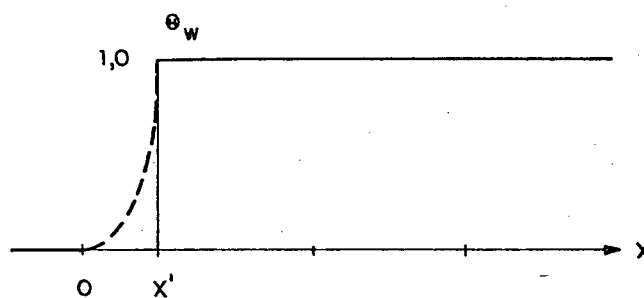
A seguir, apresenta-se o procedimento de solução para a equação da energia. A malha em  $\eta$  é variável, com maior número de pontos concentrados na região próxima à parede. Para cada estação em  $X$ ,  $\eta$  varia de zero na parede até  $\eta_{edge}$  no bordo da camada limite térmica. Escolheu-se um valor numérico para o parâmetro  $\eta_{edge}$  entre um mínimo de sete e um máximo de dez, de acordo com o recomendado em [08]. Cada intervalo da malha é um múltiplo constante do intervalo anterior, isto é,  $(\Delta\eta)_j = \gamma(\Delta\eta)_{j-1}$ . O número de pontos iniciais da camada limite variou



entre 75 e 145 para os valores de  $\Delta\eta_1 = 0,01$  e  $\gamma = 1,05$ , e  $\Delta\eta_1 = 0,001$  e  $\gamma = 1,04$ , respectivamente. A malha na direção X é não uniforme, sendo mais refinada na entrada do canal, onde a espessura da camada limite é muito pequena, e mais espaçada à medida que se avança no duto. Nenhuma alteração significativa foi observada nos resultados quando o número de pontos em  $\eta$  ou o número de estações em X era aumentado.



(a)



(b)

Fig. 3.1 Mudança das condições iniciais da parede de um duto aquecido à partir de  $x = 0$ . (a) temperatura prescrita; (b) fluxo prescrita.

Para cada estação em X, a solução da equação (3.17) tem início na parede, onde  $\eta = 0$  e continua até a posição onde se supõe que seja o bordo da camada limite, ou seja,  $\eta = \eta_{\text{edge}}$ . Neste ponto, o gradiente de

temperatura é checado, a fim de verificar se a condição de derivada nula é satisfeita. Se o valor encontrado for menor que  $10^{-4}$  a solução é avançada para a próxima estação X. Caso contrário, aumenta-se o valor de  $\eta_{\text{edge}}$  até que o critério acima estabelecido seja satisfeito. O valor para a temperatura na região de entrada térmica e em  $\eta_{\text{edge}}$  é mantido constante em  $\theta = 1$ , de acordo com a condição em (3.19).

Embora a variável  $\eta$  forneça uma ótima vantagem computacional nos primeiros estágios, em virtude da espessura da camada limite térmica transformada ter um valor aproximadamente constante,  $\eta_{\text{edge}} = 8$ , o sistema de coordenadas  $(X, \eta)$  é abandonado em favor do plano físico  $(X, Y)$  em um ponto X um pouco antes da camada limite calculada atingir a metade do duto,  $Y = 1$ . A partir desta estação, a equação passa a ser calculada com as variáveis primitivas, ou seja, através do sistema de equações (3.8-3.9). O gradiente na linha central do duto é zero e a temperatura neste ponto passa a ser avaliada numericamente como a temperatura em qualquer outro ponto da malha. Note-se que quando um fluxo de calor é aplicado nas paredes do duto, a condição de contorno em  $Y = 0$ , para as variáveis primitivas, passa a ser  $\theta = 1/\sqrt{X}$ , onde X é a posição onde a troca de variáveis acontece.

A seguir, será apresentada a solução da equação da energia com o termo de geração incluído.

### 3.3.2 EQUAÇÃO DA ENERGIA COM GERAÇÃO

A equação e as condições de contorno, obtidas no capítulo anterior, estão reproduzidas abaixo:

$$\rho_f u_{c, pf} \frac{\partial T}{\partial x} = k_f \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left[ \epsilon + (1-\epsilon) \frac{k_p}{k_f} \right] \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{6}{d} (1-\epsilon) h_{fp} (T_s - T)$$

(2.15)

$$\begin{aligned}
 x = 0 & \quad ; \quad T = T_e \\
 y = 0 & \quad ; \quad T = T_w \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{q_w}{k_{ef}} \\
 y = H & \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

O último termo na equação (2.15) representa a geração de calor por unidade de volume no meio poroso. Para a adimensionalização destas expressões, além das definições (3.6) da secção anterior, inclui-se a definição de  $Nu_{fp}$ , o Nusselt local da transferência de calor entre o fluido e as partículas:

$$Nu_{fp} = \frac{h_{fp} d}{k_f}
 \tag{3.22}$$

O número de Prandtl utilizado na adimensionalização da coordenada  $x$  passa agora a ser dado por  $Pr = \nu_f / \alpha_f$ .

A equação da energia, para esta adimensionalização, toma a forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left[ \epsilon + (1-\epsilon) \frac{k_p}{k_f} \right] \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] - \frac{BU\theta}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} = BU \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{BU}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} + \\
 \frac{6}{D^2} (1-\epsilon) Nu_{fp} (\theta - \theta_s)
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

Novamente, de acordo com o método, reduz-se a equação acima para uma equação diferencial de primeira ordem, definindo a variável  $\Theta$  como na expressão (3.8). Desta forma, a equação final da energia é escrita como;

$$\left[ \left[ \varepsilon + (1-\varepsilon) \frac{k_p}{k_f} \right] \Theta \right]' - \frac{BU\theta}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} = BU \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{BU}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{6}{D^2} (1-\varepsilon) Nu_{fp} (\theta - \theta_s) \quad (3.24)$$

onde ' representa diferenciação com relação a Y.

As expressões para  $\phi$  definidas pelas equações (3.10) e (3.13) permanecem válidas. Da mesma forma, as parcelas da equação acima que contém este termo são nulas para as condições de contorno uniformes do problema.

As condições iniciais e de contorno são as mesmas da situação onde não havia geração de calor, ou seja:

$$\begin{aligned} X = 0 & \quad ; \quad \theta = 1 \quad \text{e} \quad \Theta = 0 \\ Y = 0 & \quad ; \quad \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \Theta = 1 \\ Y = 1 & \quad ; \quad \Theta = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para o cálculo do Nusselt local associado à transferência de calor entre o fluido e as partículas, utilizou-se a expressão abaixo, [18],

$$Nu_{fp} = 2 + 1,1 Pr^{1/3} Re_p^{0,6} \quad (3.26)$$

onde  $Re_p$  é o número de Reynolds baseado no diâmetro da partícula e na velocidade local do fluido.

O número  $Nu_{fp}$  será referenciado, doravante, como o Nusselt da partícula.

Em termos das grandezas adimensionais, pode-se reescrever a equação (3.26) de acordo com:

$$Nu_{fp} = 2 + 1,1 Pr^{1/3} (BUD)^{0,6} \quad (3.27)$$

Pela equação anterior, pode-se observar que o número de Nusselt decresce a um valor limite à medida que o número de Reynolds diminui. Para uma taxa de escoamento igual a zero, este valor limite é devido a condução de calor entre as partículas e o fluido.

A transformação do sistema de coordenadas  $(X, Y)$  para  $(X, \eta)$ , feita na secção anterior, não procede nesta formulação. Neste caso, a posição  $x=0$  também representa um ponto de descontinuidade para  $\theta_w$  e  $\Theta_w$ . Desta forma, as funções analíticas (3.21) são novamente utilizadas para amenizar a variação das condições na parede de  $\theta_w = 1$  para  $\theta_w = 0$ , no caso de temperatura prescrita, e de  $\Theta_w = 0$  para  $\Theta_w = 1$ , no caso de fluxo prescrito.

Passa-se agora à solução do problema da massa.

#### 3.4 PROBLEMA MÁSSICO

A equação da conservação do conteúdo de umidade do fluido e as condições de contorno, deduzidas anteriormente, estão reescritas abaixo:

$$u \frac{\partial w}{\partial x} = D_f \frac{\partial}{\partial y} \left[ \varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{6}{d} (1-\varepsilon) k_{fp} (w_s - w) \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad ; \quad w = w_e \\ y = 0 & \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ y = H & \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Novamente, as definições (3.6) foram utilizadas na

adimensionalização das equações, à exceção de  $X$ , que passa a ser escrito por,

$$X = \frac{x}{HSc} \quad (3.28)$$

onde  $Sc$  é o número de Schmidt associado à difusão do vapor do vapor d'água no fluido, definido por  $Sc = \nu_f/D_f$ .

Inclue-se também nas adimensionalizações o número de Sherwood local da transferência de massa entre o fluido e as partículas,  $Sh_{fp}$ . Este número será denominado, doravante, de Sherwood da partícula.

$$Sh_{fp} = \frac{k_{fp} d}{D_f} \quad (3.29)$$

Substituindo-se as definições adimensionais anteriores na equação (2.21), encontra-se:

$$BU \frac{\partial w}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \epsilon \frac{\partial w}{\partial Y} \right] + \frac{6}{D^2} (1-\epsilon) Sh_{fp} (w_s - w) \quad (3.30)$$

A equação (3.30) é então reduzida para uma equação diferencial de primeira ordem, através da inclusão de:

$$W = \frac{\partial w}{\partial Y} \quad (3.31)$$

Finalmente, tem-se a equação da conservação de vapor d'água, as condições iniciais e de contorno do problema,

$$BU \frac{\partial w}{\partial X} = (\epsilon W)' + \frac{6}{D^2} (1-\epsilon) Sh_{fp} (w_s - w) \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
 X = 0 & \quad ; \quad w = w_e \quad e \quad W = 0 \\
 Y = 0 & \quad ; \quad W = 0 \\
 Y = 1 & \quad ; \quad W = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

Para expressar o número de Sherwood local, valeu-se da analogia entre a transferência de calor e de massa. Em termos das quantidades adimensionais e considerando a equação (3.27), tem-se:

$$Sh_{fp} = 2 + 1,1 Sc^{1/3} (BUD)^{0,6}
 \tag{3.34}$$

À medida que o número de Reynolds diminui, o número de Sherwood decresce a um valor limite correspondente ao transporte difusivo entre o fluido e as partículas do meio.

### 3.5 PROBLEMA TÉRMICO E MÁSSICO ACOPLADO

Para a solução do problema conjugado, as equações adimensionais são as seguintes,

$$\left[ \left[ \epsilon + (1-\epsilon) k_p/k_f \right] \theta \right] - \frac{BU\theta}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} = BU \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{BU}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} + \frac{6}{D^2} (1-\epsilon) Nu_{fp} (\theta - \theta_s)
 \tag{3.24}$$

$$BU Le \frac{\partial w}{\partial X} = (\epsilon W)' + \frac{6}{D^2} (1-\epsilon) Sh_{fp} (w_s - w)
 \tag{3.35}$$

$$\theta_s = \theta + \frac{Sh_{fp} H_{fg} (w_s - w)}{Le Te \phi c_{pf} \left[ Nu_{fp} - \frac{Sh_{fp} c_{pv}}{Le c_{pf}} (w_s - w) \right]}
 \tag{3.36}$$

$$w_s = 0,62198 \frac{P_s(\theta_s)}{P_a - P_s(\theta_s)} \quad (2.25)$$

e as respectivas condições iniciais e de contorno são:

$$\begin{aligned}
 X = 0 & \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = 1 \\ w = w_e \\ \theta_s = \theta_{se} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = 0 \\ W = 0 \\ w_s = w_s(\theta_{se}) \end{array} \right. \\
 Y = 0 & \quad ; \quad \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \theta = 1 \\
 & \quad \quad \quad W = 0 \\
 Y = 1 & \quad ; \quad \theta = 0 \\
 & \quad \quad \quad W = 0
 \end{aligned} \quad (3.25)-(3.33)$$

Neste problema, a equação da energia permanece a mesma da situação com geração de calor, enquanto que a equação da concentração de vapor sofre uma pequena alteração, conforme discutido a seguir. Na solução dos casos isolados de transferência de calor ou de massa, a coordenada  $x$  era adimensionalizada, convenientemente, pelos números de Prandtl e de Schmidt, respectivamente. Para o problema conjugado, padroniza-se a adimensionalização desta coordenada escolhendo-se, arbitrariamente, o número de Prandtl. Desta forma, o número de Lewis definido por  $Le = Sc/Pr$ , aparece multiplicando o termo convectivo na equação (3.35).

Para a obtenção da equação adimensional da temperatura de saturação, valeu-se das mesmas definições dos números de Nusselt e Sherwood da partícula e das variáveis adimensionais de temperatura e umidade utilizadas nas equações da temperatura e da concentração de vapor d'água descritas nas secções 3.3.2 e 3.4, respectivamente. No entanto, como a dedução desta equação envolve, simultaneamente,



variáveis referentes ao transporte de massa e variáveis referentes ao transporte de calor, a mesma não pode ser escrita em termos de parâmetros ou números adimensionais. Portanto, para a solução do problema acoplado, é necessário que se forneçam valores para as quantidades envolvidas no problema. Os valores do calor latente e capacidade calorífica do vapor d'água, bem como as expressões para o cálculo da capacidade calorífica do ar e da pressão de saturação, estão mostrados no apêndice B.

O problema conjugado é iterativo, pois as equações da temperatura e da massa estão acopladas através da relação entre temperatura e umidade de saturação. O procedimento de solução passa por duas etapas iterativas, as quais serão descritas a seguir. Para uma dada estação X a ser calculada, arbitra-se valores iniciais para a temperatura de saturação, e através de (2.25) calcula-se os valores de  $w_s$  correspondentes. Em uma dada estação, estes valores arbitrados são os valores de  $\theta_s$  obtidos na estação anterior. A partir destes valores arbitrados, calculam-se os campos de temperatura e de umidade do fluido através das equações (3.24) e (3.35). De posse destes campos verifica-se, através da equação (3.36), a validade do campo de  $\theta_s$  arbitrado inicialmente. A verificação é feita para todos os valores de Y. Os valores calculados com a equação (3.36) e os valores arbitrados são comparados e devem obedecer a seguinte tolerância para a convergência,

$$\left[ \frac{\theta_{sj}^i - \theta_{sa_j}^i}{\left[ \theta_{sa_j}^i \right]_{\max}} \right] \leq 10^{-3} \quad (3.37)$$

onde  $\theta_{sj}^i$  representa valores de temperatura de saturação calculados pela equação (3.36) e  $\theta_{sa_j}^i$  representam valores arbitrados para a temperatura

de saturação.

Note-se que, uma vez que valores de  $\theta_s$  satisfaçam o critério de convergência, os valores de  $w_s$  também o farão, tendo em vista que  $w_s = w_s(\theta_s)$ .

Caso todos os pontos da malha obedeçam este critério, a solução é avançada para a próxima estação X. Caso contrário, emprega-se a equação (2.25) para calcular os valores de  $w_s$  associados a este novo campo de  $\theta_s$ . Com este campo de  $\theta_s$  recalcula-se o campo de  $w_s$  e assim sucessivamente até que a convergência estabelecida seja respeitada. Neste momento tem-se os campos de  $\theta_s$  e  $w_s$  correspondentes aos campos de temperatura e umidade do fluido. Note-se, no entanto, que tais campos de  $\theta$  e  $w$  no fluido, foram calculados a partir de valores arbitrários de  $\theta_s$  e  $w_s$ . É preciso, portanto, que os campos de  $\theta$  e  $w$  sejam reavaliados para os novos valores de  $\theta_s$  e  $w_s$ . Feita esta reavaliação, os novos campos de  $\theta$  e  $w$  são usados para atualizar novamente  $\theta_s$  e  $w_s$  através do processo iterativo recém descrito. Procede-se desta forma até que se obtenha os campos corretos para  $\theta$ ,  $w$ ,  $\theta_s$ ,  $w_s$ . Neste momento avança-se a solução para uma nova estação.

Resumindo, existem dois processos iterativos na solução do problema. O primeiro deles é o que converge as temperaturas e umidades de saturação para os campos de temperatura e umidade do fluido que foram obtidos a partir de valores de  $\theta_s$  e  $w_s$  arbitrados. O segundo processo utiliza estes valores de  $\theta_s$  e  $w_s$  convergidos para recalcular os campos de temperatura e umidade do fluido.

Devido à forte não linearidade das equações, o uso de subrelaxação se faz necessário. Os valores de  $\theta_s$  e  $w_s$  usados em cada iteração eram uma média entre os valores atuais e os anteriores. Em geral a convergência é atingida em poucas iterações para as primeiras iterações em X.

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS PARA O PROBLEMA TÉRMICO

#### 4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados e discutidos os principais resultados obtidos para os casos simulados do problema térmico. De acordo com a formulação desenvolvida no capítulo 2, o problema térmico é estudado sob dois aspectos: fluido e matriz sólida ambos na mesma temperatura, e geração de calor nas partículas sólidas.

Para o caso onde fluido e matriz sólida estão na mesma temperatura, curvas de temperatura e de número de Nusselt são mostradas para ambas condições de contorno estudadas, temperatura e fluxo de calor uniforme na parede. São apresentados, também, perfis de velocidade do meio poroso, e é discutida a influência do gradiente de pressão e da relação entre o diâmetro da partícula e a distância entre as placas sobre a região de entrada térmica e sobre o valor do número de Nusselt da região plenamente desenvolvida. Os resultados obtidos para o número de Nusselt e comprimento da região de entrada térmica são comparados com os resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura.

Avalia-se, também, a sensibilidade dos resultados do número de Nusselt com algumas das expressões utilizadas na equação que fornece o perfil de velocidade, as quais são introduzidas de maneira empírica.

Para o caso da equação da energia com geração de calor são apresentadas curvas de temperatura e de número de Nusselt para a condição de temperatura prescrita na parede. Uma única combinação do

parâmetro da pressão que caracteriza a vazão do fluido, bem como um único valor do diâmetro da partícula são investigados. A tais grandezas são atribuídos os valores  $B=10^5$  e  $D=0,1$ , respectivamente. No caso em que há geração a ênfase é dada na relação entre a temperatura da matriz sólida e a temperatura de entrada do fluido no canal.

## 4.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES PARA A EQUAÇÃO DA ENERGIA

### 4.2.1 PERFIS DE VELOCIDADE E TEMPERATURA

Na figura 4.1 estão mostrados os resultados numéricos de perfis característicos da velocidade do fluido no meio poroso. Claramente observa-se que regiões de velocidade mais altas aparecem junto à fronteira sólida ( $Y=0$ ), onde a influência da porosidade variável está caracterizada pelo surgimento de canais preferenciais de escoamento de fluido. Tais canais se estendem a uma altura em torno de 5 a 10% da distância  $H$ , onde, então, a velocidade se aproxima do valor da velocidade de Darcy. Para um mesmo valor de  $H$ , um aumento no diâmetro da partícula causa um aumento na permeabilidade do meio, equação (2.2), o que resulta em valores de velocidades mais elevados. A influência deste resultado na transferência de calor será discutida mais adiante. Para uma discussão física a respeito destes canais preferenciais de escoamento, deve-se reportar à secção 2.3.

O perfil de velocidade para os dois extremos do parâmetro  $B$  estão comparados na figura 4.2, para  $D=0,1$ . Como esperado, gradientes de pressão mais elevados causam velocidades mais altas. É importante notar que as velocidades estão apresentadas de forma adimensional. Para se obter a velocidade real,  $U$  deve ser multiplicado pelo parâmetro  $B$ .

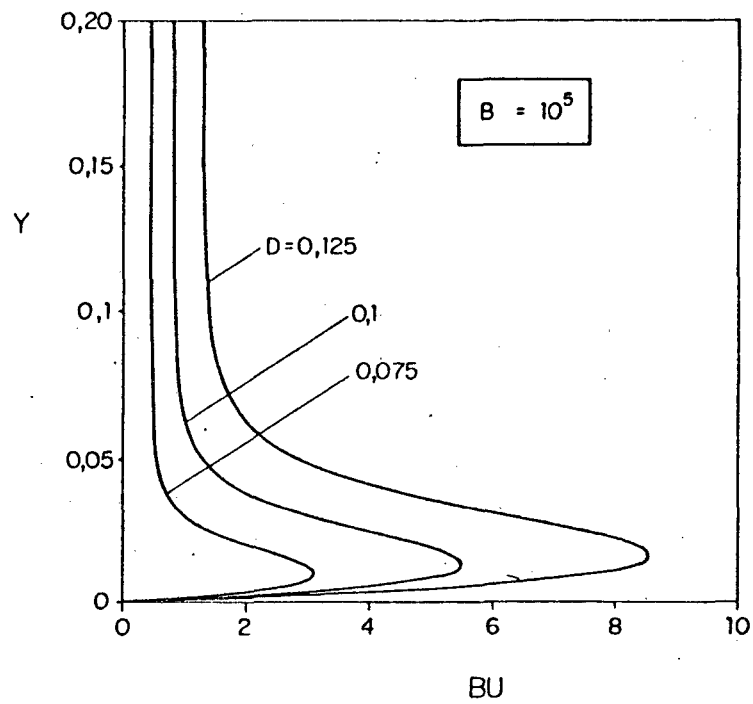


Fig. 4.1 Perfis de velocidade caracteristicos no meio poroso para vários valores de D.

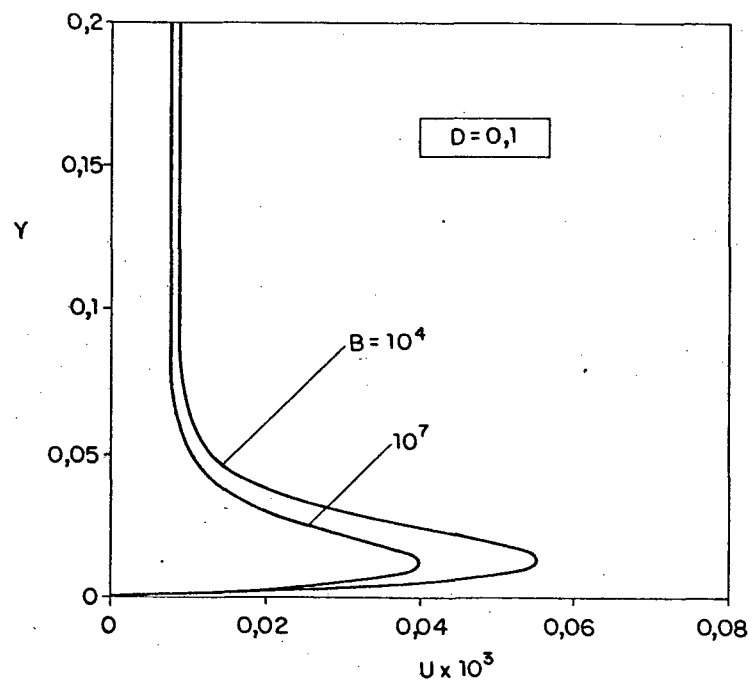


Fig. 4.2 Distribuição de velocidade para os dois extremos do parâmetro B.

A figura 4.3 mostra, para  $B=10^5$ , a variação da temperatura adimensional ao longo da secção transversal do canal (coordenada Y) para várias posições na direção do escoamento (coordenada X) e para as duas condições de contorno estudadas.

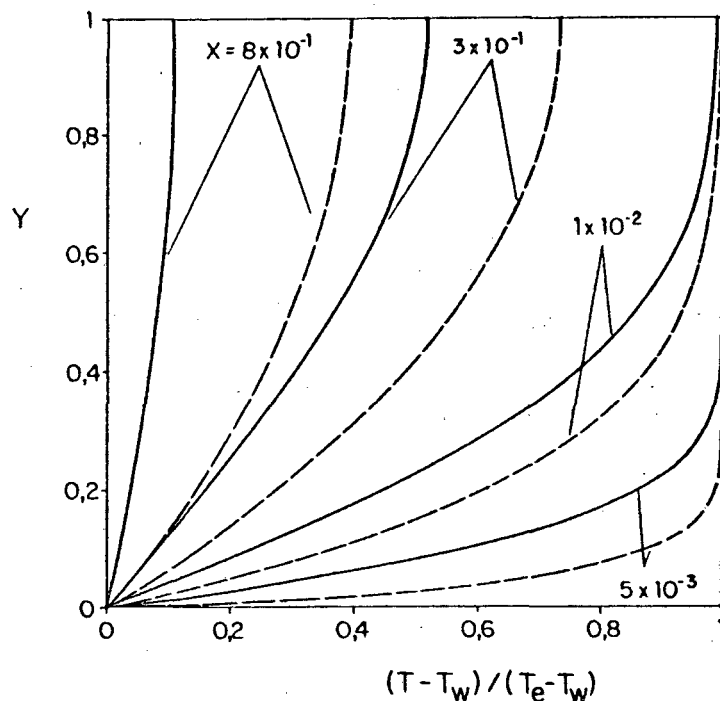


Fig. 4.3 Distribuição de temperatura com X. — temperatura prescrita, ---- fluxo prescrita.

No caso de temperatura prescrita, observa-se que quando X tende à  $\infty$ , a temperatura em todos os pontos ao longo de Y será igual à temperatura da parede. Para um mesmo valor de Y, os valores de temperatura obtidos para o caso de fluxo prescrita são sempre maiores que para o caso de temperatura prescrita, indicando gradientes de temperatura mais acentuados. As curvas correspondentes a  $X=0,8$  representam perfis plenamente desenvolvidos tanto para a temperatura como para fluxo prescrita.

Na figura 4.4 estão registradas as variações da temperatura de mistura, temperatura da parede ( $Y=0$ ), e temperatura da linha central do

canal ( $Y=1$ ), para o caso de fluxo prescrito. Note-se que, conforme o esperado, para a região plenamente desenvolvida, a temperatura em qualquer ponto da secção transversal do canal varia linearmente com  $X$ .

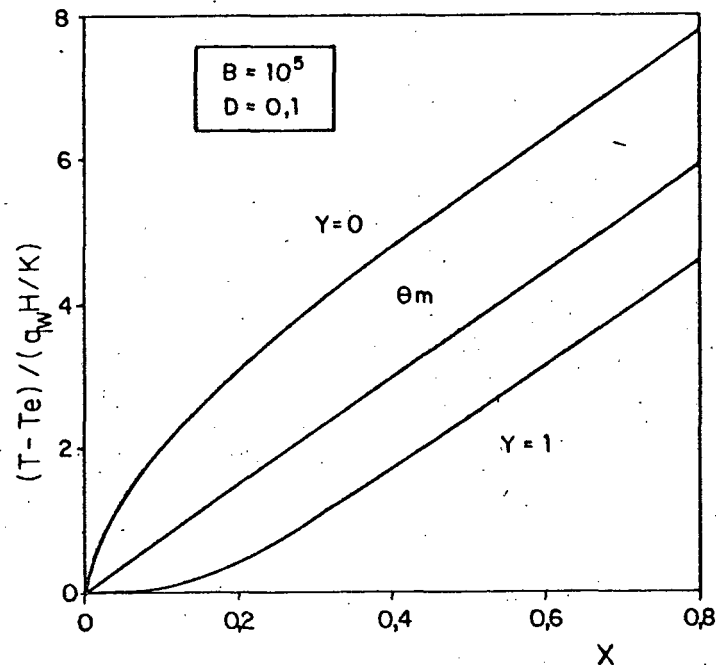
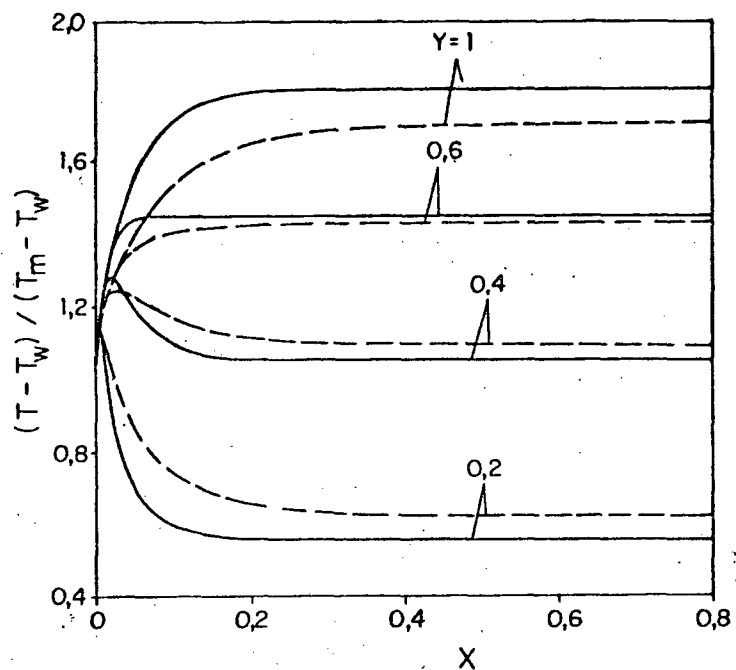


Fig. 4.4 Distribuição de temperatura ao longo do duto para o caso de fluxo prescrito.

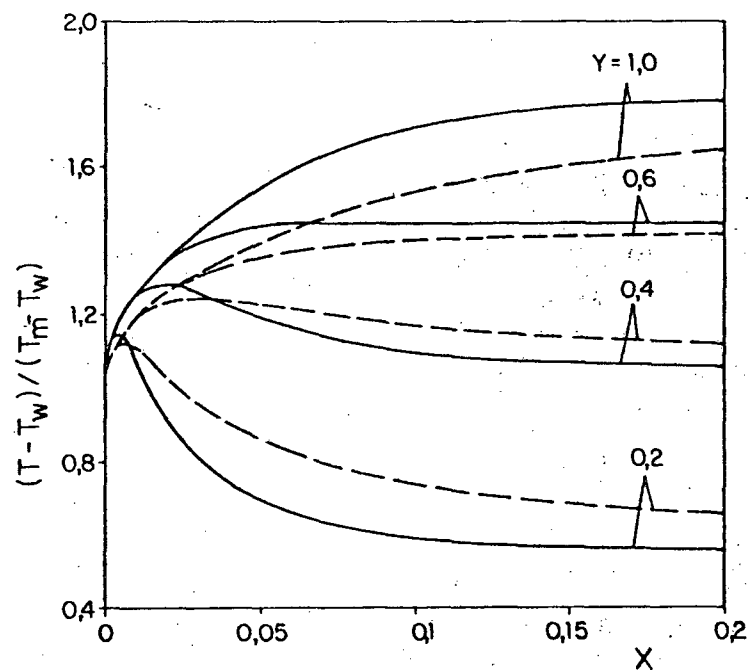
As figuras 4.5 (a) e 4.5 (b) mostram, para  $B=10^5$  e para  $D=0,1$ , a variação da temperatura ao longo de  $X$  para várias posições  $Y$  e para as duas condições de contorno estudadas.

Para baixos valores de  $Y$ , os valores da temperatura adimensional no caso de fluxo prescrito são sempre maiores do que aqueles para temperatura prescrita, indicando a existência de gradientes mais acentuados. Adicionalmente, as curvas das figuras 4.5 (a) e 4.5 (b) confirmam a expectativa de que, em escoamentos confinados, a região de entrada térmica desenvolve-se mais lentamente quando aplica-se um

fluxo de calor na parede.



(a)



(b)

Fig. 4.5 Variação de temperatura ao longo do escoamento.

— temperatura prescrita, ----fluxo prescrita.



#### 4.2.2 VARIAÇÃO DO NÚMERO DE NUSSOLT

Os resultados para o fluxo de calor na parede são fornecidos em termos adimensionais através do número de Nusselt, o qual é baseado na distância entre as placas,  $2H$ ,

$$\text{Nu} = - \frac{2H}{T_w - T_m} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (4.1)$$

onde  $T_m$  é a temperatura de mistura definida na forma convencional como se faz em problemas clássicos de transferência de calor. Em termos das expressões utilizadas na adimensionalização das equações do capítulo 3, o número de Nusselt passa a ser escrito sob duas formas,

$$\text{Nu} = \frac{2}{\left[ \theta_m - \theta_w \right] \sqrt{X}} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (4.2)$$

$$\text{Nu} = \frac{2}{\left[ \theta_m - \theta_w \right]} \left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0} \quad (4.3)$$

onde a primeira das expressões é utilizada para o cálculo do número de Nusselt nos primeiros estágios, onde a espessura da camada limite térmica não atingiu a metade do canal e a variável  $\eta$  é utilizada, conforme já foi discutido no capítulo anterior. Para os estágios subsequentes, onde a camada limite atinge a metade do canal, a variável  $\eta$  é abandonada em favor da coordenada  $Y$  e o número de Nusselt passa a ser calculado através da expressão (4.3).

A confirmação dos resultados para o número de Nusselt foi obtida fazendo-se um balanço de energia para o volume mostrado na figura 4.6.

O balanço de energia na figura, para o caso onde o fluxo de calor  $G_c$  é igual a zero, é,

$$q_w = h \Delta x \left[ \bar{T}_w - \bar{T}_m \right] = \rho_f \bar{u} c_{pf} H \left[ T_{m2} - T_{m1} \right] \quad (4.4)$$

onde  $\bar{T}_w$  e  $\bar{T}_m$  são médias aritméticas das temperaturas da parede e das temperaturas de mistura nas posições 1 e 2 indicadas na figura, e  $\bar{u}$  é a velocidade média do escoamento.

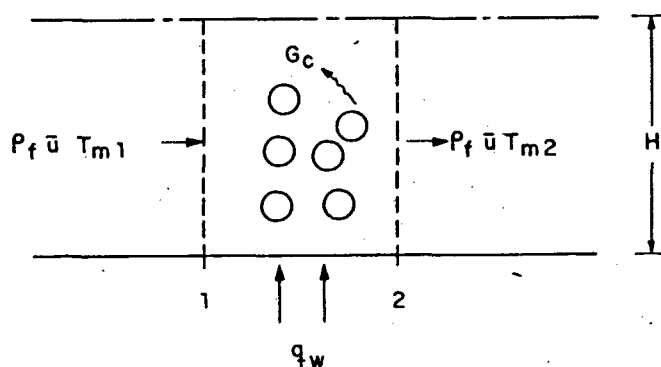


Fig. 4.6 Balanço de energia em uma posição arbitrária no duto.

Isolando-se  $h$  da equação (4.4) e substituindo-se na definição do número de Nusselt, fica-se com:

$$Nu = \frac{2H\rho_f \bar{u} c_{pf} \left[ T_{m2} - T_{m1} \right]}{k_{ef} \Delta X \left[ \bar{T}_w - \bar{T}_m \right]} \quad (4.5)$$

Em termos das expressões adimensionais (3.6), o número de Nusselt pode ser escrito como sendo:

$$Nu = \frac{2B\bar{U} \left[ \theta_{m1} - \theta_{m2} \right]}{\Delta X \left[ \bar{\theta}_m - \bar{\theta}_w \right]} \quad (4.6)$$

Os valores de Nusselt calculados pelas equações (4.1) e (4.5) concordam plenamente, o que serve como um teste adicional para a solução numérica.

As tabelas 4.1 e 4.2 registram a dependência dos valores do número de Nusselt plenamente desenvolvido e do comprimento da região de entrada térmica com os parâmetros do problema. A região de entrada foi definida como sendo a distância entre a entrada do duto e o ponto onde o número de Nusselt torna-se 99.5% do valor correspondente ao escoamento plenamente desenvolvido. A tabela 4.1 mostra ainda os resultados obtidos em [08]. Para o caso de fluxo prescrito não existem valores na literatura que possam ser comparados com o presente trabalho.

Tabela 4.1. Comprimento da região de entrada térmica e número de Nusselt plenamente desenvolvido, para temperatura prescrita na parede.

B	D	$X/B \times 10^6$		Nu	
		Pres. Trab.	[08]	Pres. Trab.	[08]
$10^4$	0,1	2,1	1,9	5,68	5,67
$5 \times 10^4$	0,1	2,2	2,0	5,68	5,67
$10^5$	0,1	2,1	2,0	5,68	5,67
$5 \times 10^5$	0,1	2,1	1,7	5,67	5,67
$10^6$	0,1	2,1	1,8	5,65	5,67
$5 \times 10^6$	0,1	2,0	1,7	5,56	5,67
$10^7$	0,1	1,9	1,7	5,50	5,67
$10^5$	0,05	0,54	---	5,31	---
$10^5$	0,125	3,5	---	5,86	---

Observa-se da tabela 4.1 uma boa concordância entre os resultados obtidos no presente trabalho e aqueles obtidos em [08]. A concordância é melhor para os valores do número de Nusselt do que para o

comprimento da região de entrada.

Tanto na tabela 4.1 como na tabela 4.2, verifica-se uma influência do parâmetro B no número de Nusselt somente para altos valores de B, onde efeitos de inércia começam a ser significativos. Ainda mostrado nas tabelas 4.1 e 4.2 é a dependência do número de Nusselt com o diâmetro da partícula. Tanto para o caso de temperatura como fluxo prescrito, um aumento no diâmetro da partícula conduz a um aumento no número de Nusselt. Tal fato pode ser racionalizado ao se considerar que para partículas maiores mais acentuado é o efeito de canal.

Tabela 4.2. Comprimento da região de entrada térmica e número de Nusselt plenamente desenvolvido para fluxo prescrito na parede.

B	D	$X/B \times 10^6$	Nu
$10^4$	0,1	5,6	7,79
$5 \times 10^4$	0,1	5,5	7,79
$10^5$	0,1	5,5	7,79
$5 \times 10^5$	0,1	5,6	7,74
$10^6$	0,1	5,5	7,70
$5 \times 10^6$	0,1	4,8	7,48
$10^7$	0,1	4,5	7,33
$10^5$	0,05	1,3	6,90
$10^5$	0,125	9,3	8,20

A influência do parâmetro B (gradiente de pressão adimensional) nos valores de Nusselt ao longo da entrada do canal, região de desenvolvimento do perfil de temperatura, é um resultado importante e

será apresentado a seguir. O parâmetro  $B$  está associado ao termo de inércia da equação (3.2), e sua influência torna-se significativa a medida que velocidades mais altas são consideradas.

Mostradas na figura 4.7 estão as variações do número de Nusselt local ao longo do duto para os dois casos estudados e para uma variedade de parâmetros  $B$ . A exemplo do observado na literatura para camadas limites, no caso de fluxo prescrito, a camada limite térmica demora mais para se desenvolver, como confirmam os resultados apresentados na figura 4.7. Relativamente aos valores encontrados com o uso do modelo de Darcy para a região de escoamento plenamente desenvolvido, observa-se que a inclusão dos efeitos de inércia, fricção de Brinkman e porosidade variável, aumentam a transferência de calor em torno de 13 a 26% para os casos de temperatura e fluxo prescrito, respectivamente.

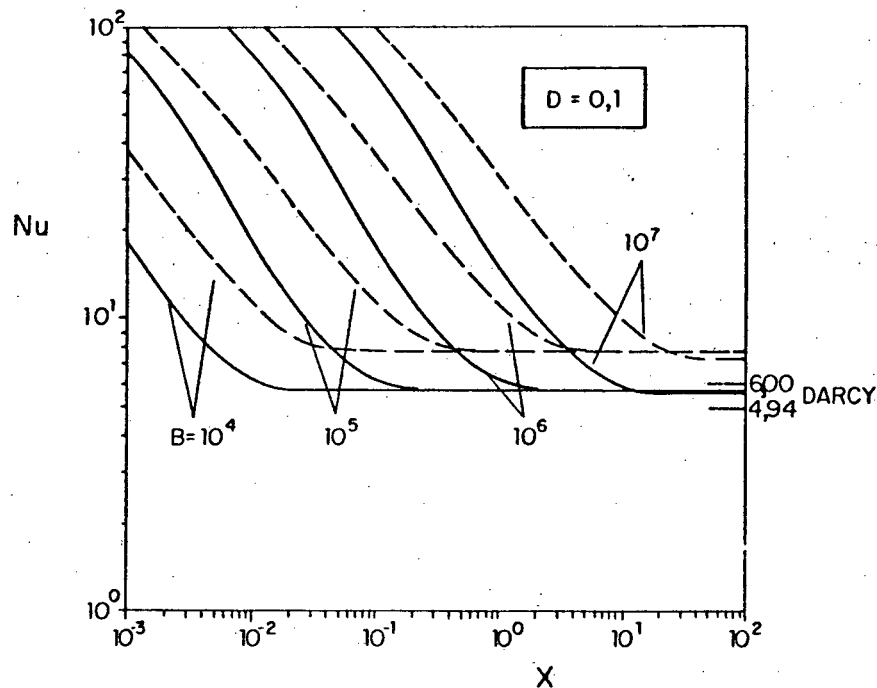


Fig. 4.7. Variação do número de Nusselt com  $X$ . — temperatura prescrita, ---- fluxo prescrito.

Um fato importante registrado na figura 4.7 e tabelas 1 e 2, é a queda do valor do número de Nusselt na região do escoamento plenamente desenvolvido com o aumento do parâmetro B. A razão desta queda será racionalizada a seguir. Inicialmente deve-se notar que no regime plenamente desenvolvido, a derivada segunda da temperatura em relação à coordenada vertical é proporcional à razão entre a velocidade e a velocidade média do escoamento. Esta afirmação será provada para o caso de fluxo prescrito.

Na parede, pode-se escrever o fluxo de calor como sendo:

$$p_f \bar{u}_c p_f H \frac{dT_m}{dx} = k_{ef} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (4.7)$$

Em termos adimensionais, tem-se:

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial X} = \frac{1}{B\bar{U}} \left[ \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{Y=0} \right] \quad (4.8)$$

Na região plenamente desenvolvida, para o caso de fluxo prescrito,  $\partial \theta / \partial X = \partial \theta_m / \partial X$ . Tomando-se o fluxo de calor na parede como sendo um, tem-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{B\bar{U}} \quad (4.9)$$

Substituindo-se a expressão (4.9) na da equação da energia, equação (3.7), e anulando-se as parcelas que envolvem o parâmetro  $\phi(X)$ , obtém-se a equação da energia para a região de escoamento plenamente desenvolvido,

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] = \frac{U}{\bar{U}} \quad (4.10)$$

Note-se que na equação (4.10) a parcela  $U/\bar{U}$  representa na realidade um termo fonte negativo (sumidouro) para o campo de temperatura.

A distribuição do termo fonte  $U/\bar{U}$  ao longo da secção transversal do duto pode ser vista na figura 4.8. Como este termo, para regiões próximas da parede aquecida, é menor para o caso onde  $B$  é mais alto, o termo fonte da equação da energia para escoamentos plenamente desenvolvidos, diminui com o aumento de  $B$  para estas regiões. A existência de termos fonte maiores em regiões de maiores gradientes de temperatura conduz a valores mais altos do número de Nusselt.

Raciocínio semelhante pode ser aplicado para o caso de temperatura prescrita.

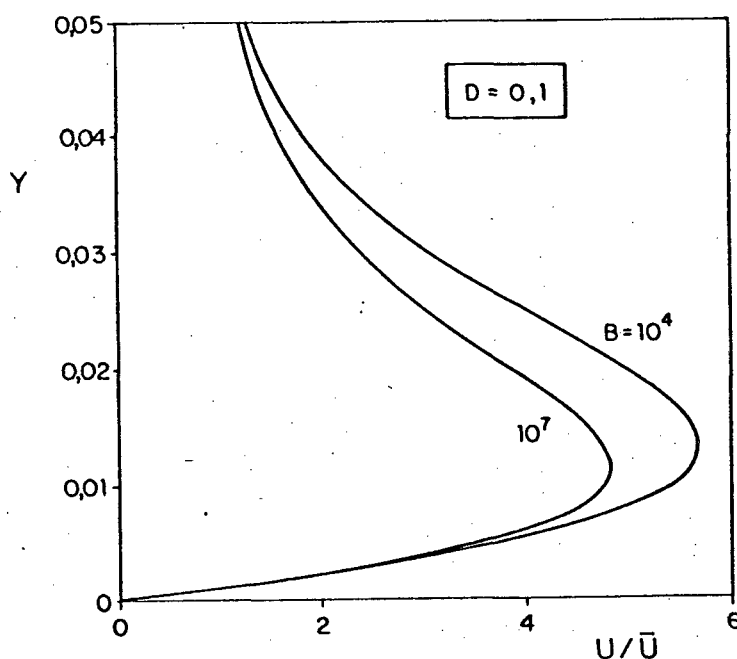


Fig. 4.8 Razão entre a velocidade e a velocidade média do escoamento para dois valores de  $B$ .

Na figura 4.9 são apresentados os valores do número de Nusselt na região de escoamento plenamente desenvolvido para vários diâmetros de partículas. Diâmetros de partículas maiores implicam em maiores permeabilidades e causam velocidades maiores (figura 4.1). Estas

velocidades mais altas, por sua vez, aumentam o gradiente de calor na fronteira e, portanto, levam a números de Nusselt mais elevados.

Na figura 4.9 plotou-se o número de Nusselt para uma faixa do parâmetro  $B$  na qual Nusselt é independente de tal parâmetro. Também verificado na figura 4.9 é que, a exemplo do que ocorre em escoamentos confinados sem a presença de uma matriz sólida, no presente trabalho o número de Nusselt para a condição de fluxo prescrito é sempre maior do que aquele para temperatura prescrita.

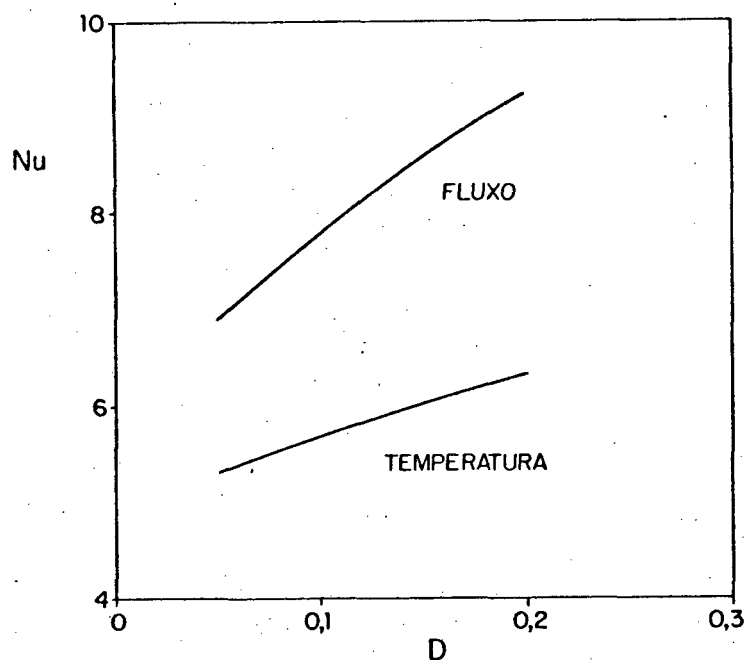


Fig. 4.9 Número de Nusselt para escoamentos plenamente desenvolvidos.

#### 4.2.3 COMPARAÇÃO DO PRESENTE TRABALHO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS E COM RESULTADOS DE OUTROS MODELOS

Os resultados do presente trabalho foram comparados com os resultados experimentais obtidos em [14]. As figuras 4.10 (a), 4.10 (b) e 4.10 (c) mostram esta comparação para diferentes valores do parâmetro



B. Aparecem também nas figuras os resultados obtidos por três outros modelos; o modelo clássico de Darcy, o modelo recomendado em [08] e um novo modelo proposto. Este novo modelo tem como alterações com relação aquele apresentado no capítulo 2, o valor da constante  $\lambda_2$  utilizada na expressão do cálculo da porosidade ( $\lambda_2=12$ ) e a variação da condutividade térmica efetiva com a porosidade, anteriormente considerada constante. Para computar esta variação, na tentativa de reproduzir com maior fidelidade os resultados experimentais, a equação da energia foi assim escrita,

$$\rho_f u c_{pf} \frac{\partial T}{\partial x} = k_{ef\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k_{ef}}{k_{ef\infty}} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4.11)$$

onde  $k_{ef\infty}$  é a condutividade térmica efetiva proposta pelo trabalho experimental, e cuja expressão é:

$$k_{ef\infty} = \varepsilon_{\infty} k_f + (1-\varepsilon_{\infty}) k_p \quad (4.12)$$

e  $k_{ef}$  é a condutividade térmica efetiva onde os efeitos de porosidade são incluídos de acordo com a equação (2.14).

Substituindo-se as equações (4.12) e (2.14) na equação (4.11) adimensionalizada, vem,

$$BU \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \frac{\varepsilon k_f/k_p + (1-\varepsilon)}{\varepsilon_{\infty} k_f/k_p + (1-\varepsilon_{\infty})} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] \quad (4.13)$$

A fim de comparar os resultados numéricos e experimentais é preciso que se introduza na equação (4.13) os valores de  $k_f/k_p$  e  $\varepsilon_{\infty}$  correspondentes ao experimento. No experimento, trabalhou-se com esferas de vidro e água como fluido de trabalho. Desta forma adotou-se

$k_f/k_p = 0,7314$  [25,26] e  $\varepsilon_\infty = 0,37$  [08].

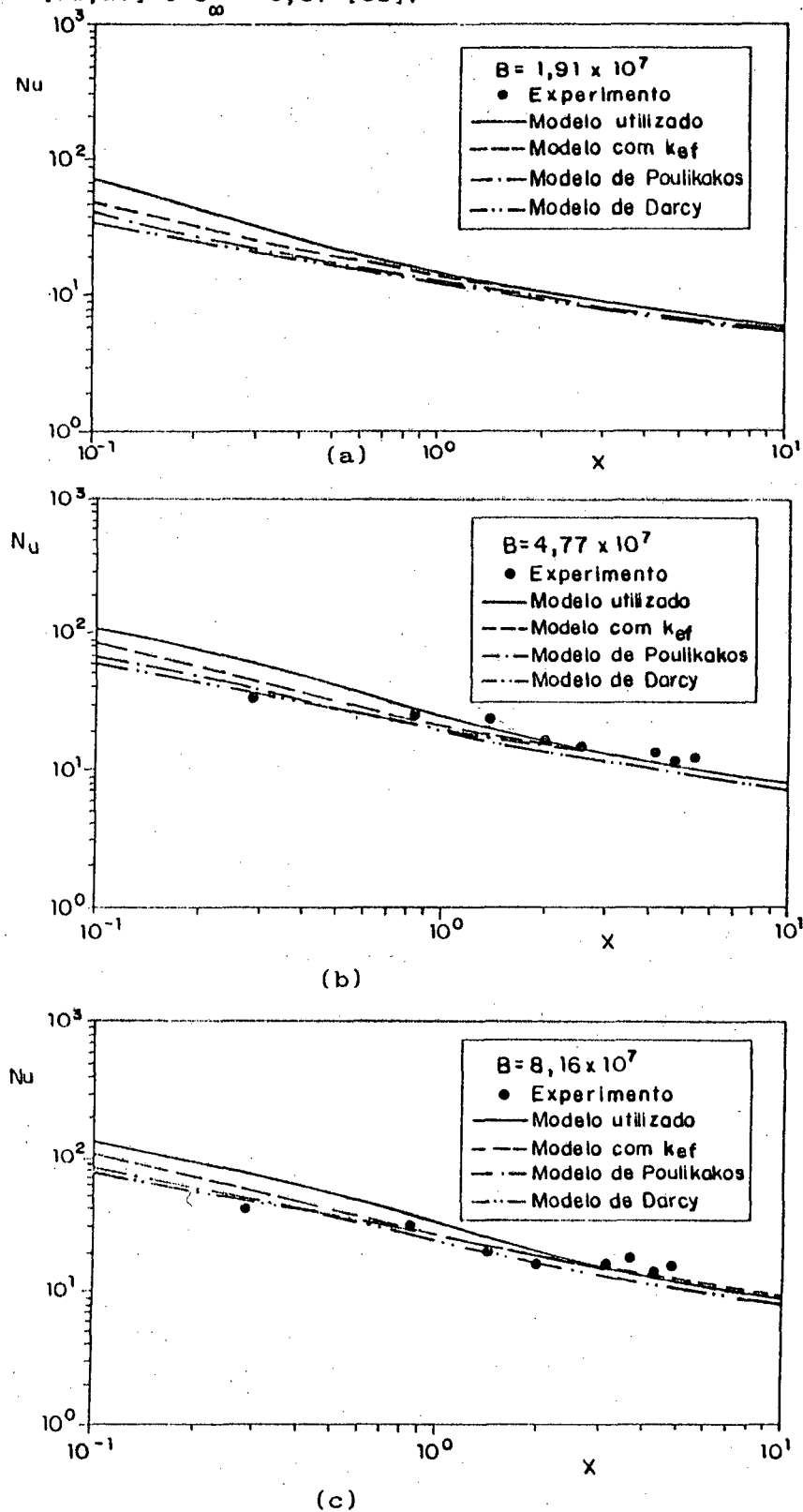


Fig. 4.10 Comparação de resultados para o número de Nusselt:

(a)  $B = 1,91 \times 10^7$ , (b)  $B = 4,77 \times 10^7$ , (c)  $B = 8,16 \times 10^7$ .

Pelas figuras 4.10 pode-se observar que o modelo que utiliza a variação de  $k_{ef}$  com a porosidade apresenta a melhor tendência para representar os resultados experimentais.

Os modelos de Darcy e de [08] calculam valores de número de Nusselt abaixo dos previstos experimentalmente e dos encontrados no presente trabalho. À medida que se avança no duto em direção da região plenamente desenvolvida, os valores para o número de Nusselt encontrados neste trabalho e no modelo que utiliza o  $k_{ef}$  estão mais próximos dos resultados experimentais do que os demais, muito embora os resultados experimentais estejam acima dos resultados numéricos.

Os resultados correspondentes ao modelo de Renken e Poulikakos foram reproduzidos a partir de computações que incorporam a formulação proposta pelos autores em [08]. Tais resultados não coincidem com aqueles apresentados pelos próprios autores em [14], muito embora o modelo tenha sido reproduzido integralmente e o método de solução tenha sido o mesmo.

A figura 4.11 mostra a variação do comprimento de entrada térmico com B para os casos mencionados anteriormente.

Todos os modelos tem uma boa concordância com o resultado experimental. No entanto, o modelo proposto neste trabalho é o que apresenta melhores resultados. O modelo proposto na referência [08] calcula comprimentos de região de entrada menores que os experimentais, enquanto que no modelo de Darcy e no modelo com a condutividade térmica variável acontece o oposto.

A influência do valor de  $\lambda_2$  utilizado na equação (2.4) no valor do número de Nusselt é avaliada a seguir, e os resultados estão mostrados nas figuras 4.12 (a), 4.12 (b) e 4.12 (c) para diferentes valores de B.

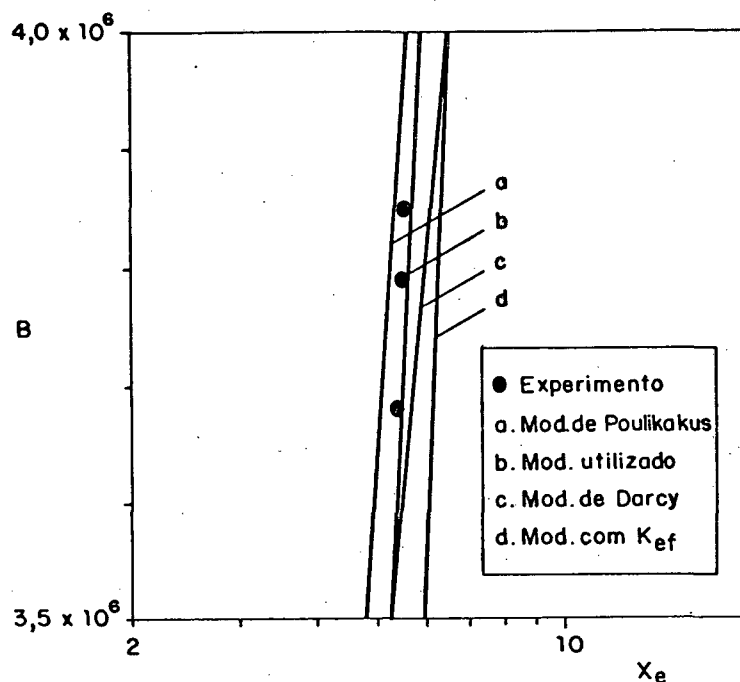


Fig. 4.11 Comprimento da região de entrada térmica .

Observa-se a importância do parâmetro  $\lambda_2$  nos primeiros estágios onde as diferenças na inclinação da curva são bastante significativas. Para valores de  $X$  maiores, estas diferenças diminuem consideravelmente. O valor de  $\lambda_2 = 6$  parece ter a melhor concordância com os resultados experimentais, pelo menos para vazões mais baixas.

O coeficiente de Forchheimer é um termo que aparece de forma empírica na equação que calcula o perfil de velocidade , e cuja expressão foi apresentada no capítulo 2.

Na figura 4.13 apresentam-se curvas do número de Nusselt para variações deste parâmetro. Além do valor original da equação (2.3), testou-se os valores 1,50 e 2,00.

Pela figura pode-se concluir que o número de Nusselt é pouco influenciado por variações deste parâmetro.

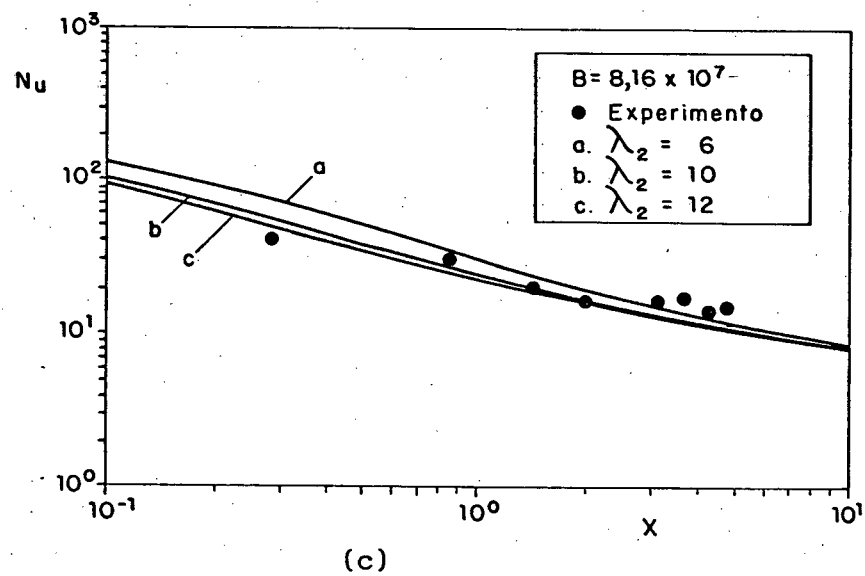
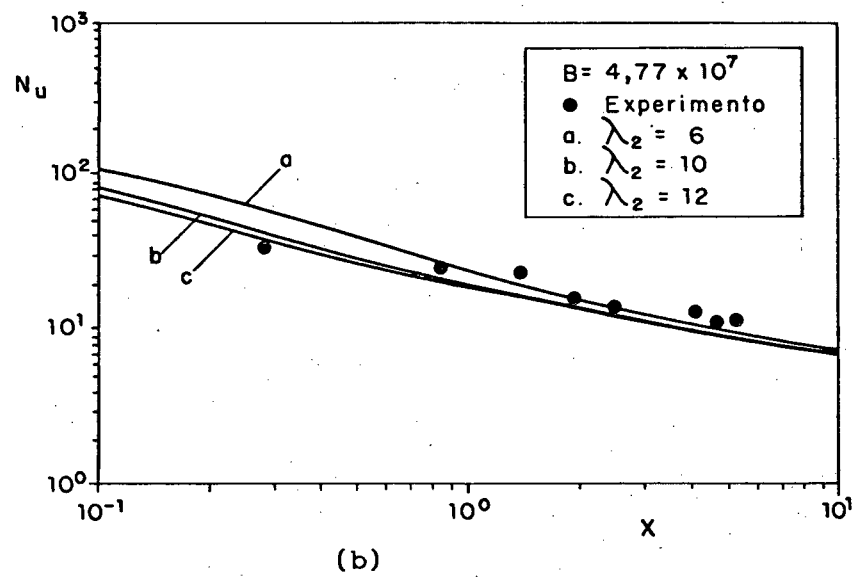
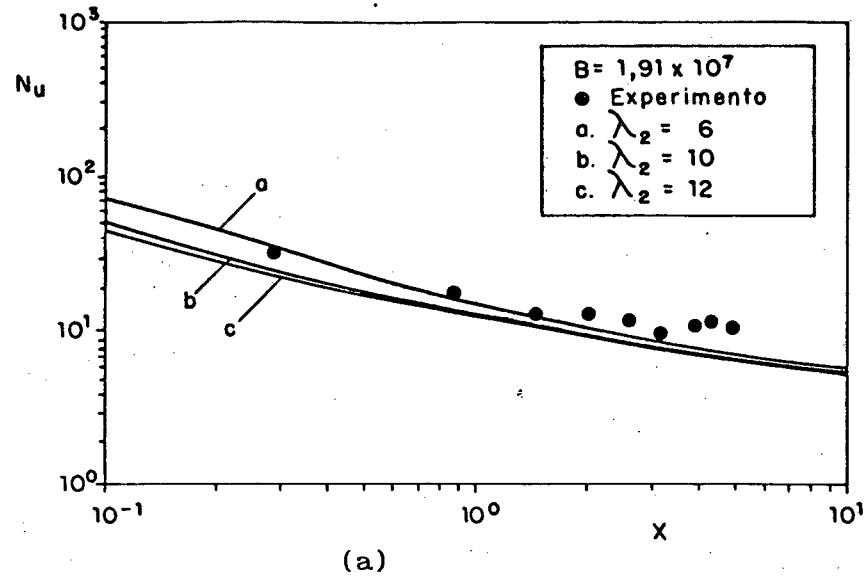
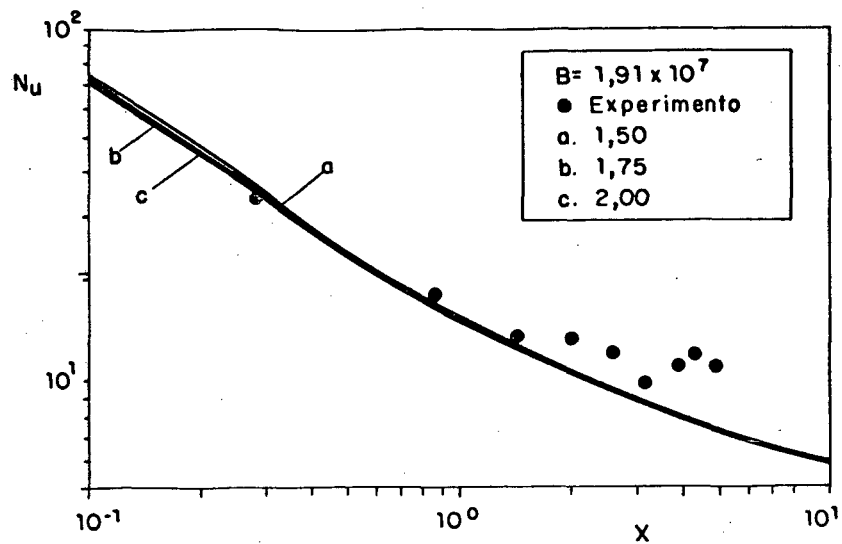
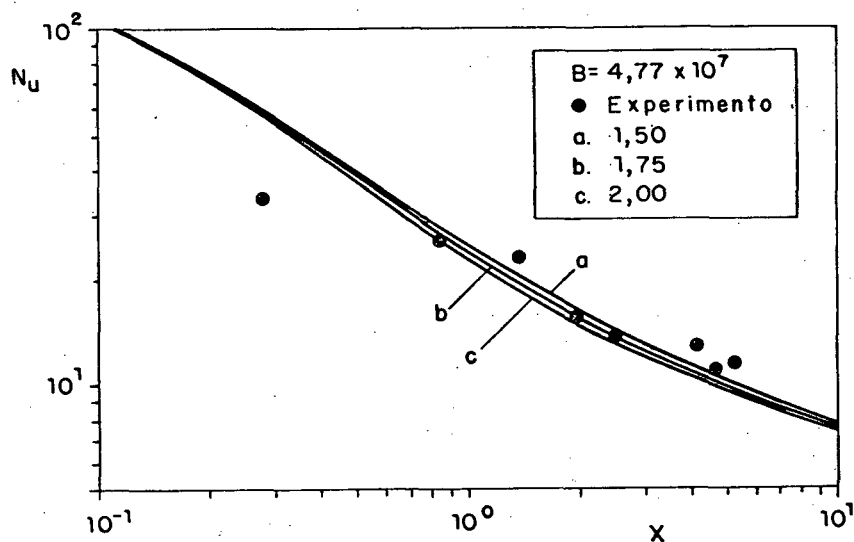


Fig. 4.12 Influência de  $\lambda_2$  no número de Nusselt.

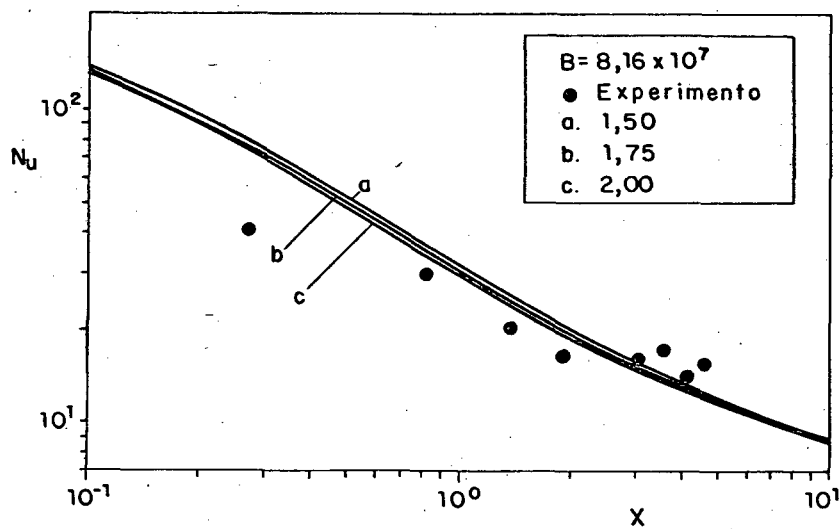
(a)  $B = 1,91 \times 10^7$ , (b)  $B = 4,77 \times 10^7$ , (c)  $B = 8,16 \times 10^7$



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.13 Influência de A no número de Nusselt.

(a)  $B=1,19 \times 10^7$ , (b)  $B=4,77 \times 10^7$ , (c)  $B=8,16 \times 10^7$

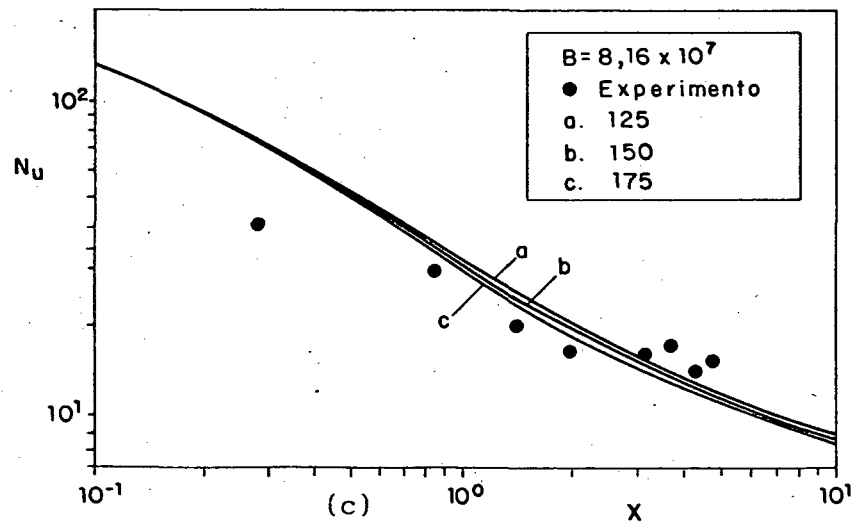
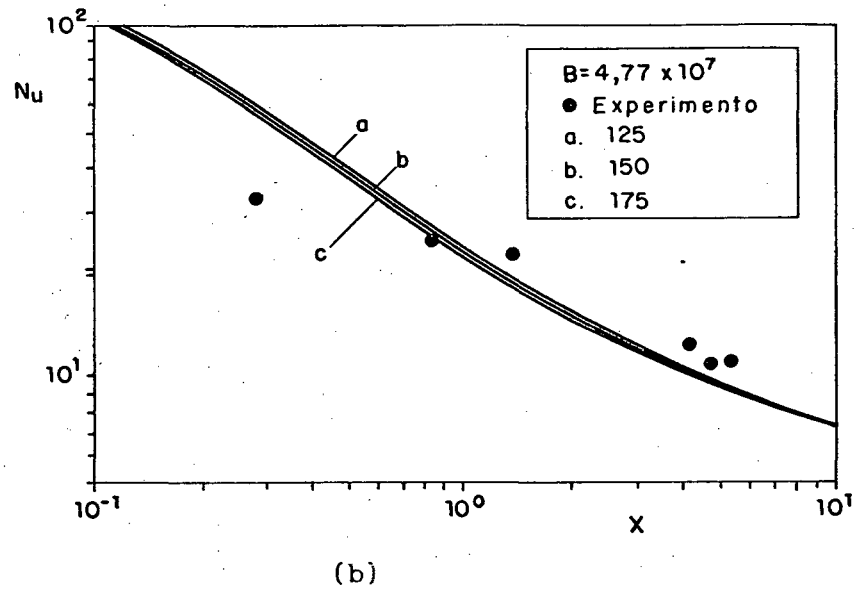
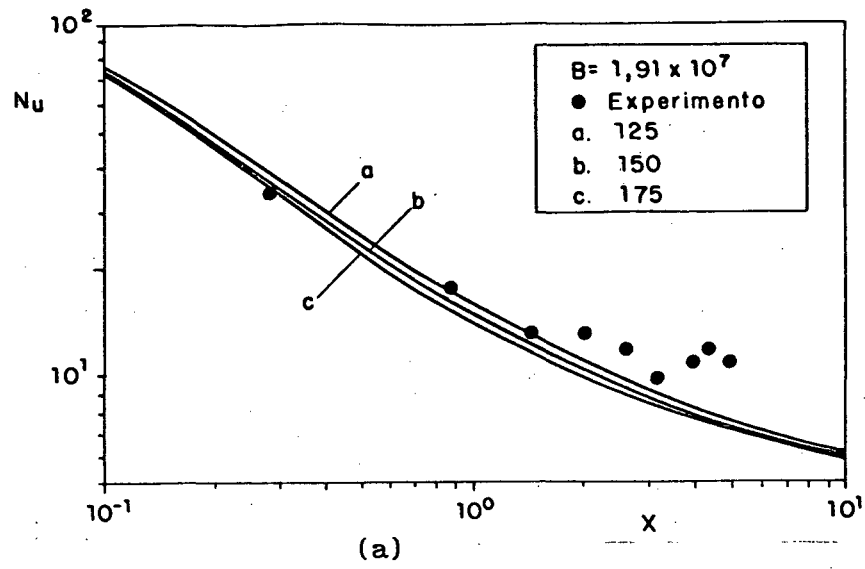


Fig. 4.14 Influência de K no número de Nusselt.

(a)  $B=1,91 \times 10^7$ , (b)  $B=4,77 \times 10^7$ , (c)  $B=8,16 \times 10^7$

Variações do número de Nusselt com a permeabilidade do meio também foram testadas e os resultados estão mostrados nas figuras 4.14 (a), 4.14 (b) e 4.14(c). Este parâmetro, dado pela equação (2.2), influencia o número de Nusselt mais significativamente que o termo de Forchheimer. Pelas figuras, aparentemente o valor de 150 é o mais adequado para constar na expressão da permeabilidade. Este valor foi utilizado no presente trabalho.

#### 4.3 RESULTADOS E DISCUSSÕES PARA A EQUAÇÃO DA ENERGIA COM GERAÇÃO

Nesta secção são apresentadas curvas de temperatura e de número de Nusselt para o caso de temperatura prescrita na parede, e considerando-se a presença de geração de energia na matriz sólida. Duas definições para o número de Nusselt foram utilizadas para representar as trocas de calor que ocorrem no processo. Estas definições serão mostradas e discutidas mais adiante nesta secção. Como foi apresentado no capítulo 2, a temperatura da matriz sólida,  $T_s$ , é um parâmetro do problema, sendo assim dois casos foram estudados para diferentes valores de  $T_s$ . Em termos adimensionais, os valores utilizados na equação (3.24) foram  $\theta_s=1,1$  e  $\theta_s=0,5$ . Tais valores correspondem, respectivamente, as seguintes temperatura dimensionais:  $T_e=25$  °C,  $T_w=100$  °C e  $T_s=18$  °C;  $T_e=50$  °C,  $T_w=20$  °C e  $T_s=35$  °C. Desta forma pretende-se simular um processo onde o fluido é aquecido pela parede e perde calor para as partículas e outro processo onde o fluido tem sua temperatura diminuída pelas trocas de calor tanto com a parede como com as partículas.

Com a finalidade de avaliar-se a influência da variação da condutividade térmica efetiva com a porosidade, compararam-se resultados obtidos, tanto para a temperatura como para o número de Nusselt, considerando-se duas situações. A primeira delas considera a



condutividade térmica do fluido muito maior do que a condutividade térmica do sólido. Sendo assim, a equação da condutividade térmica efetiva, equação (2.14), fica simplificada,

$$k_{ef} = \epsilon k_f \quad (4.14)$$

e a equação da energia com geração se reduz a:

$$(\epsilon\theta)' - \frac{BU\theta}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial X} = BU \frac{\partial\theta}{\partial X} - \frac{BU}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial X} + \frac{6}{D^2} (1-\epsilon) Nu_{fp} (\theta - \theta_s) \quad (4.15)$$

A outra situação investigada considera, a exemplo da equação da energia da secção anterior, a condutividade térmica efetiva constante. Assim, a equação da energia (3.24) fica escrita:

$$\theta' - \frac{BU\theta}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial X} = BU \frac{\partial\theta}{\partial X} - \frac{BU}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial X} + \frac{6}{D^2} (1-\epsilon) Nu_{fp} (\theta - \theta_s) \quad (4.16)$$

#### 4.3.1 PERFIS DE TEMPERATURA

Nas figuras 4.15 (a) e 4.15 (b) estão registradas curvas de temperatura em função da coordenada Y para várias posições ao longo do escoamento e para  $\theta_s = 1,1$ . Na figura 4.15 (a) a temperatura do fluido é adimensionalizada em função da temperatura de entrada, ao passo que na figura 4.15 (b) utilizou-se a temperatura de mistura na adimensionalização da temperatura do fluido. Em ambas as figuras a linha cheia corresponde à situação onde  $k_{ef} = \epsilon k_f$  (equação (4.15)) e a linha tracejada corresponde à situação onde  $k_{ef} = k_f$  (equação (4.16)). Para a posição mais próxima da entrada do duto observa-se que a

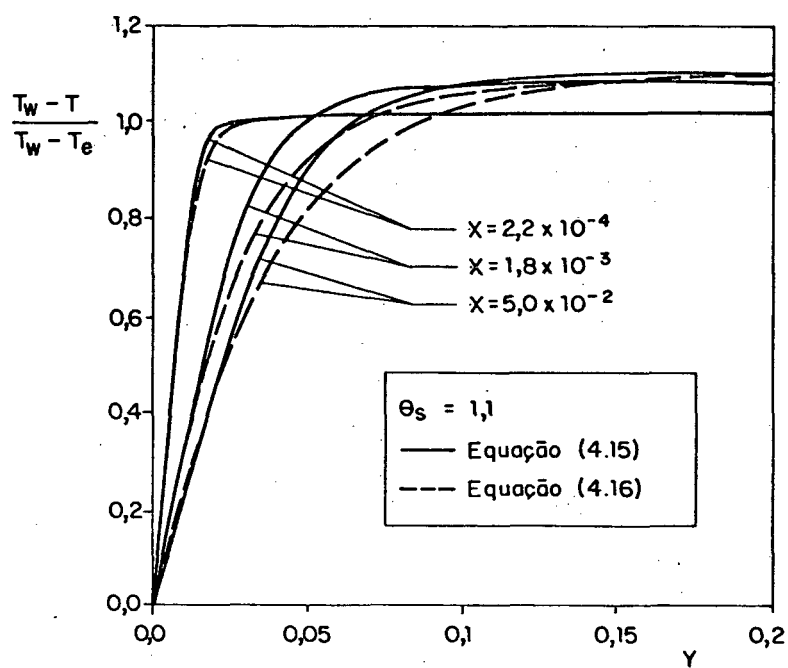
temperatura é praticamente igual à unidade, ou seja, igual a temperatura de entrada do fluido. Neste estágio, somente o fluido localizado junto à parede é que sente o efeito desta. Ainda considerando-se regiões próximas da entrada do duto, para as posições em Y mais afastadas da parede, as trocas de calor devem-se unicamente a diferença de temperatura entre o fluido e as partículas. À medida que X cresce (o maior valor de X na figura representa uma posição onde o escoamento já se encontra plenamente desenvolvido), a temperatura, para valores de Y pequenos, também cresce em decorrência da influência da parede. Para valores de Y maiores, a temperatura da matriz sólida tem mais influência sobre o fluido, desta forma, para estas posições, o fluido tem a sua temperatura diminuída. É conveniente salientar que nas figuras 4.15 (a) e 4.15 (b) as temperaturas estão adimensionalizadas, e para obter-se os valores reais de temperatura, os valores adimensionais devem ser transformados de acordo com a definição (3.11) e com os valores das temperaturas dimensionais fornecidos anteriormente. Nesta situação, um aumento nas quantidades adimensionais representa uma diminuição nos valores reais da temperatura.

Observa-se, em ambas as figuras, que para o caso onde considerou-se a condutividade térmica efetiva constante, a temperatura em todos os pontos do escoamento é sempre maior do que a temperatura para o caso onde a condutividade térmica variava com a porosidade. Este fato é explicável uma vez que considerar a condutividade térmica constante equivale a assumir a porosidade do meio igual à unidade. Em consequência, a contribuição do termo difusivo na transferência total de calor é maior para este caso, assim os valores para a temperatura são maiores. Um fato a ser observado na figura 4.15 (a) é que a temperatura adimensional definida em função da temperatura de entrada, tende ao valor da temperatura da matriz sólida,  $\theta_s = 1,1$ , para a região plenamente

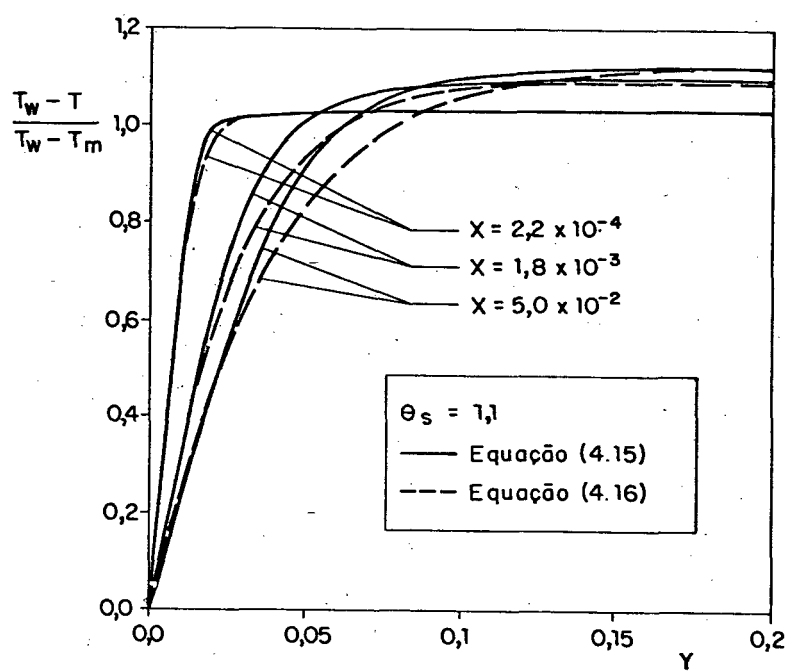
desenvolvida e para os valores de  $Y$  mais afastados da parede. Na verdade, o problema pode ser entendido como tendo duas paredes, uma delas a própria parede do duto mantida à temperatura  $\theta_w$  e a outra, constituída de partículas mantidas à temperatura  $\theta_s$ . Desta forma, a temperatura do fluido próximo a parede do duto tende à  $\theta_w$ , enquanto que a temperatura do fluido nas regiões mais afastadas tende à  $\theta_s$ .

A figura 4.16 (a) mostra curvas de temperatura adimensional para  $\theta_s=0,5$ . Neste caso, o fluido perde calor tanto para a parede como para as partículas. Assim, um aumento no valor da temperatura adimensional representa um aumento real da temperatura, fato que pode ser observado através da equação (3.11) e dos valores dimensionais admitidos para este caso. À medida que se avança no duto, a temperatura do fluido em todos os pontos é diminuída em função das perdas de calor para a parede e para as partículas.

Os picos de temperatura que ocorrem nos estágios iniciais estão localizados nas mesma altura dos picos de velocidade registrados na figura 4.1. Este resultado pode ser explicado de duas formas diferentes. Uma delas seria o fato de que nesta região a concentração de partículas é muito menor (a porosidade é alta nesta região), sendo assim, as trocas de calor entre o fluido e as partículas não são tão intensas como nas áreas mais afastadas da parede, resultando em temperaturas mais elevadas. Outra maneira de se explicar estas temperaturas maiores, é o fato de que, para os primeiros estágios, a convecção é predominante na região próxima à parede, tendendo a manter o fluido na temperatura de entrada,  $\theta_e=1$ . Relativamente à inclusão da variação da condutividade térmica efetiva com a porosidade, verificam-se temperaturas mais elevadas do que para o caso onde ela foi considerada constante. Este fato é explicável em função da diminuição da contribuição do termo difusivo nas trocas totais de calor.

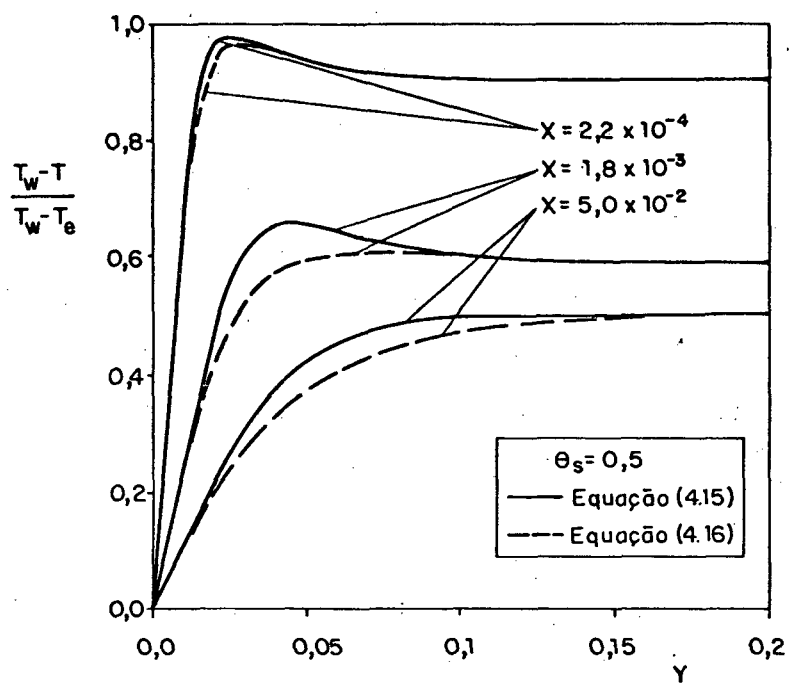


(a)

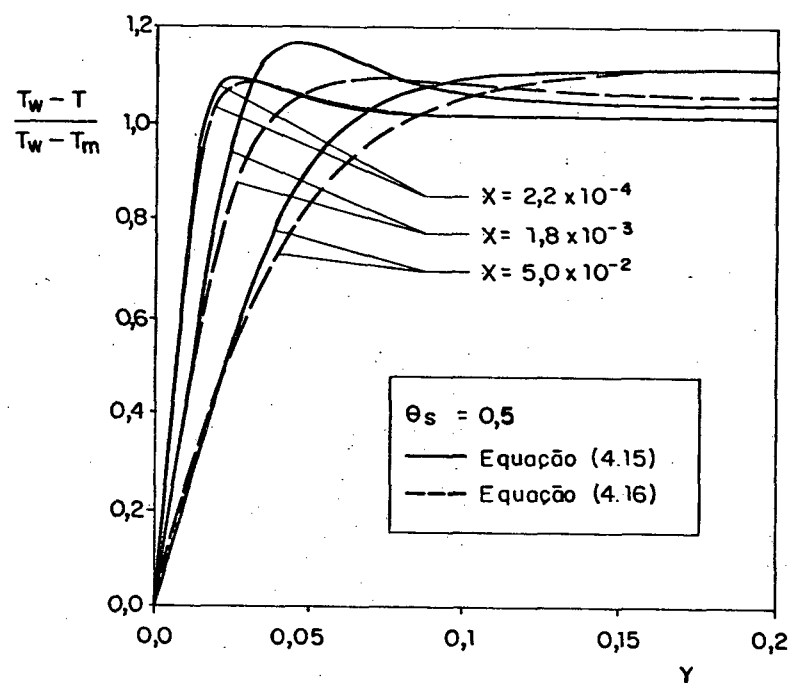


(b)

Fig. 4.15 Perfis de temperatura para  $\theta_s = 1,1$  e para:(a)  $\frac{T_w - T}{T_w - T_e}$  ; (b)  $\frac{T_w - T}{T_w - T_m}$



(a)



(b)

Fig. 4.16 Perfis de temperatura para  $\theta_s = 0,5$  para:(a)  $T_w - T / T_w - T_e$  ; (b)  $T_w - T / T_w - T_m$ .

Como já foi observado anteriormente, a temperatura do fluido próximo à parede tende a  $\theta_w = 0$  e afastado desta, tende a  $\theta_s$ .

As curvas de temperatura mostradas na figura 4.16 (b) foram adimensionalizadas em termos da temperatura de mistura. Para valores baixos de  $Y$ , a temperatura do fluido diminui à medida que  $X$  cresce, como consequência das perdas de calor para a parede. Para valores de  $Y$  mais afastados da parede a situação é inversa. À medida que o regime se desenvolve, estes pontos aproximam-se da temperatura da saturação, aumentando a diferença  $T_w - T$ . Ao mesmo tempo, a diferença  $T_w - T_m$  diminui, em função da temperatura de mistura do fluido baixar continuamente.

Um fato a ser observado é que nas figuras 4.15 (b) e 4.16 (b) quando o regime se torna termicamente desenvolvido, o perfil de temperatura para  $\theta_s = 0,5$  e  $1,1$  são absolutamente idênticos. Tal resultado confirma o fato de que em escoamentos confinados o perfil de temperatura adimensional na região termicamente desenvolvida não depende dos níveis de temperatura envolvidos.

#### 4.3.2 GERAÇÃO DE CALOR

Nas figuras 4.17 (a) e 4.17 (b) plotou-se a geração local de calor,  $G_c$ , tendo como parâmetro de curva a coordenada  $X$ .  $G_c$  está adimensionalizado de forma a representar exatamente o termo correspondente à geração de calor na equação (4.16). A figura 4.17 (a) representa as seguintes temperaturas dimensionais:  $T_e = 25^\circ\text{C}$ ,  $T_w = 100^\circ\text{C}$  e  $T_s = 18^\circ\text{C}$ ; enquanto que a figura 4.17 (b) representa as temperaturas:  $T_e = 50^\circ\text{C}$ ,  $T_w = 20^\circ\text{C}$  e  $T_s = 35^\circ\text{C}$ .

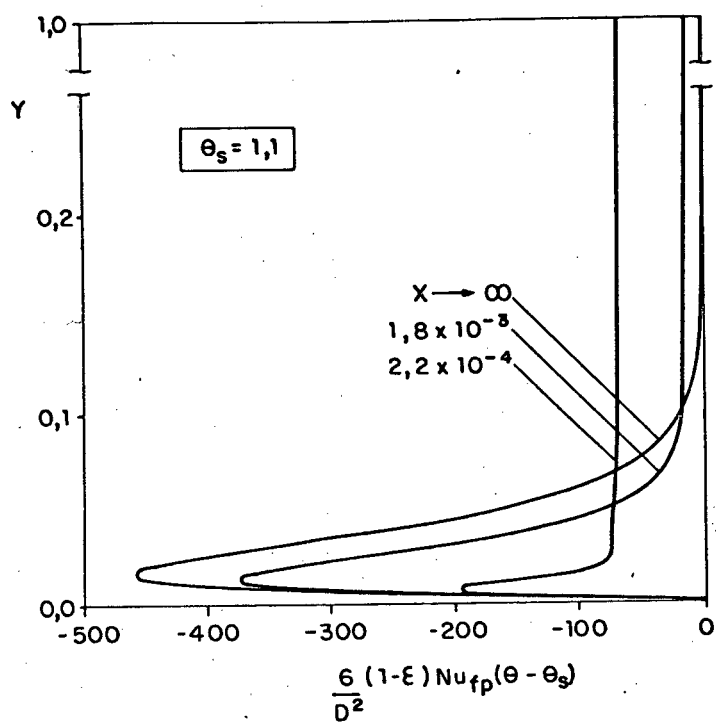
O termo de geração de calor da equação (4.16) é proporcional à área efetiva de troca de calor entre o fluido e a matriz sólida, representada por  $6(1-\epsilon)/D^2$ , à velocidade do fluido através do número de

Nusselt da partícula,  $Nu_{fp}$  e ao gradiente de temperatura,  $(\theta - \theta_s)$ . Para uma dada posição  $Y$ , todas as curvas mostradas nas figuras 4.17 (a) e 4.17 (b) possuem o mesmo valor de  $[6(1-\epsilon)/D^2]Nu_{fp}$ , uma vez que  $\epsilon$  e  $Nu_{fp}$  são função unicamente da coordenada  $Y$ . Como  $[6(1-\epsilon)/D^2]Nu_{fp}$  não varia com  $X$ , o gradiente de temperatura  $(\theta - \theta_s)$  é o fator que distingue as curvas nas figuras.

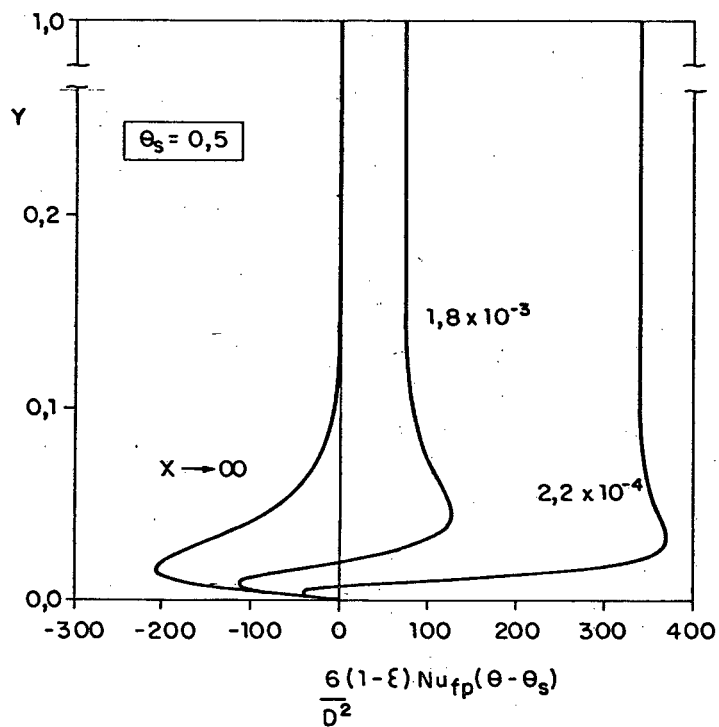
Para a discussão física das figuras 4.17 (a) e 4.17 (b) deve-se lembrar que o fluido, para a região térmica plenamente desenvolvida, tende a  $\theta_s$  fora da zona do canal, e tende a  $\theta_w$  próximo da parede (ver figuras 4.15 (a) e 4.16 (a)). Desta forma, os maiores gradientes entre  $(\theta - \theta_s)$  estão localizados junto à parede do duto. Por esta razão os picos máximos e mínimos de  $G_c$  são encontrados naquela região. Estes picos refletem a alta taxa de transferência de calor que ocorre próximo da parede.

Na figura 4.17 (a), as curvas de  $G_c$  correspondem ao caso no qual  $\theta_s = 1,1$ . Nesta situação, o fluido recebe calor através da parede e perde calor para a matriz sólida. Desta forma, a diferença de temperatura  $(\theta - \theta_s)$  é sempre negativa, refletindo em uma geração negativa de calor (sumidouro de energia para o fluido). É conveniente lembrar que, neste caso, um aumento real de temperatura representa uma diminuição no valor de  $\theta$ .

Embora a maior diferença entre as temperaturas esteja localizada na parede,  $G_c$  é igual a zero, pois não existe área de transferência de calor ( $\epsilon=1$  na parede). À medida que se avança no duto em direção a  $X \rightarrow \infty$ , os picos das curvas se acentuam indicando a máxima diferença de temperatura, a qual corresponde a  $(\theta_w - \theta_s)$ . Fora da região do canal, o fluido atinge a temperatura da matriz sólida e o termo de geração se anula.



(a)



(b)

Fig. 4.17 Parcela referente a geração de calor da equação(4.16). (a)  $\theta_s = 1,1$  , (b)  $\theta_s = 0,5$ .



Na figura 4.17 (b) está representado o caso para  $\theta_s = 0,5$ . Nesta situação, o fluido perde calor para a parede do duto e perde calor para a matriz sólida nos estágios iniciais. À medida que a temperatura do fluido, localizado junto às fronteiras sólidas, se aproxima de  $\theta_w$ , as trocas de calor se invertem no sentido da matriz sólida para o fluido. Para este caso, um aumento real de temperatura representa um aumento em  $\theta$ .

Para as primeiras estações  $X$ , a diferença de temperatura  $(\theta - \theta_s)$  é positiva, e portanto, a geração de calor também o é, uma vez que o fluido entrega calor às partículas. Em  $X \rightarrow \infty$ , o fluido, localizado fora da região do canal, atinge a temperatura  $\theta_s$  e o termo de geração é nulo. Também para  $X \rightarrow \infty$ , mas para a região do canal, o fluido atinge a temperatura da parede e passa a receber calor da matriz sólida, a qual se encontra à uma temperatura mais elevada.  $G_c = [6(1-\varepsilon)Nu_{fp}(\theta - \theta_s)]/D^2$  é, então, negativo.

#### 4.3.3 VARIACÃO DO NÚMERO DE NUSSELT

Conforme foi discutido no início desta secção, o número de Nusselt é definido de duas formas distintas com a finalidade de se analisar as trocas de calor que ocorrem entre o fluido e a parede e entre o fluido e a matriz sólida.

O número de Nusselt associado à transferência de calor entre o fluido e a parede é calculado através da expressão definida na secção anterior, equação (4.3). Da mesma forma, os valores para Nusselt foram confirmados fazendo-se um balanço de energia no volume mostrado na figura 4.6. O balanço de energia neste volume genérico requer que:

$$\rho_f \bar{u} c_{pf} H \left[ T_{m2} - T_{m1} \right] = h \Delta x \left[ \bar{T}_w - \bar{T}_m \right] + \int_0^H \frac{6(1-\varepsilon)}{d} \Delta x h_{fp} \left[ T_s - T \right] dy \quad (4.17)$$

Substituindo-se a equação 4.17 na expressão do número de Nusselt e fazendo-se as adimensionalizações definidas anteriormente, obtém-se:

$$Nu^* = \frac{2}{\bar{\theta}_m - \bar{\theta}_w} \left[ \frac{B\bar{U}}{\Delta X} (\theta_{m1} - \theta_{m2}) + \int_0^1 \frac{6(1-\epsilon)}{D} Nu_p (\theta_s - \bar{\theta}) dY \right] \quad (4.18)$$

Na figura 4.18 estão apresentados os valores do número de Nusselt, calculados através da expressão (4.3), para os dois valores de  $\theta_s$  e para as duas condições assumidas para a condutividade térmica efetiva.

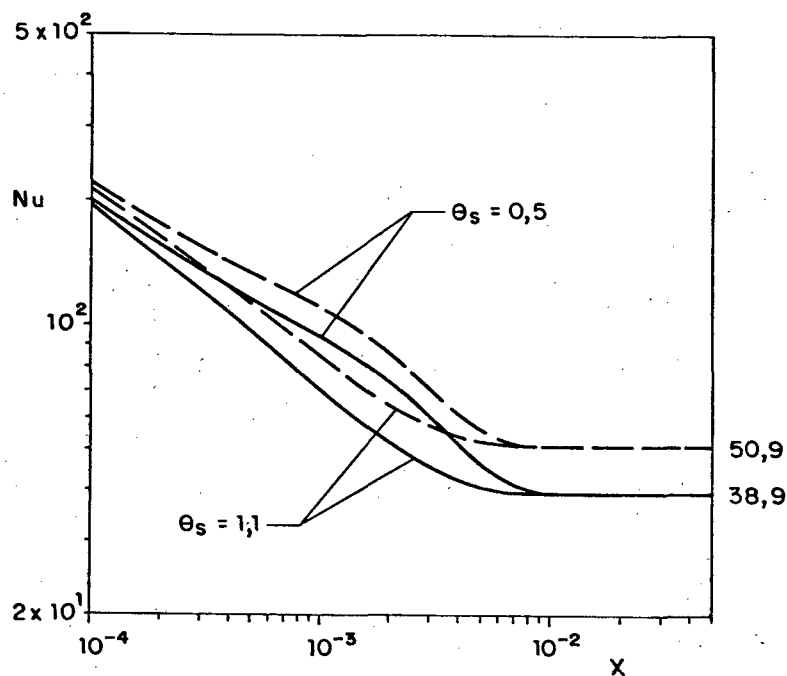


Fig. 4.18 Variação do número de Nusselt ao longo do escoamento.

A inclusão da variação da condutividade térmica efetiva com a porosidade do meio diminui significativamente a transferência de calor (em torno de 24%). Tal fato era esperado em função dos perfis de temperatura observados nas figuras anteriores. Observa-se, também, que o valor do número de Nusselt desenvolvido é independente dos valores da temperatura da parede e da matriz sólida. Este resultado é consequência da mesma tendência observada nas curvas de temperatura, adimensionalizadas em função da temperatura de mistura, e mostradas nas figuras 4.15 (b) e 4.16 (b). A exemplo dos problemas clássicos de transmissão de calor, o valor do número de Nusselt para a região plenamente desenvolvida deve ser independente da temperatura imposta na parede. Neste caso, imagina-se a temperatura da matriz sólida como sendo a temperatura de uma parede formada de partículas.

Para o cálculo do número de Nusselt associado à transferência de calor entre o fluido e a matriz sólida, doravante denominado de número de Nusselt da matriz, definiu-se a seguinte expressão,

$$Nu_m = \frac{2H \bar{h}_{fp}}{k_f} \quad (4.19)$$

onde  $\bar{h}_{fp}$  é o coeficiente médio de transferência de calor entre o fluido e as partículas sólidas. A definição de  $\bar{h}_{fp}$  é obtida fazendo-se um balanço de energia na figura 4.6 e assumindo-se constantes os parâmetros do termo de geração de calor:

$$\rho_f \bar{u}_c p_f H \left[ T_{m2} - T_{m1} \right] = k_f \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} + \frac{6}{d} (1 - \epsilon_\infty) \bar{h}_{fp} \Delta x \left[ T_s - \bar{T}_m \right] H \quad (4.20)$$

onde  $(\partial T / \partial y)_{y=0}$  é avaliado como uma média aritmética entre os valores na

estação 1 e 2 conforme mostrado na figura 4.6.

Substituindo-se  $\bar{h}_{fp}$  na expressão 4.19 e fazendo-se uso das definições adimensionais (3.6), encontra-se:

$$Nu_m = \frac{D}{3\Delta X} \left[ \frac{B\bar{U} (\theta_{m2} - \theta_{m1}) + \Delta X \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{Y=0}}{(1-\varepsilon_\infty) (\theta_s - \bar{\theta}_m)} \right] \quad (4.21)$$

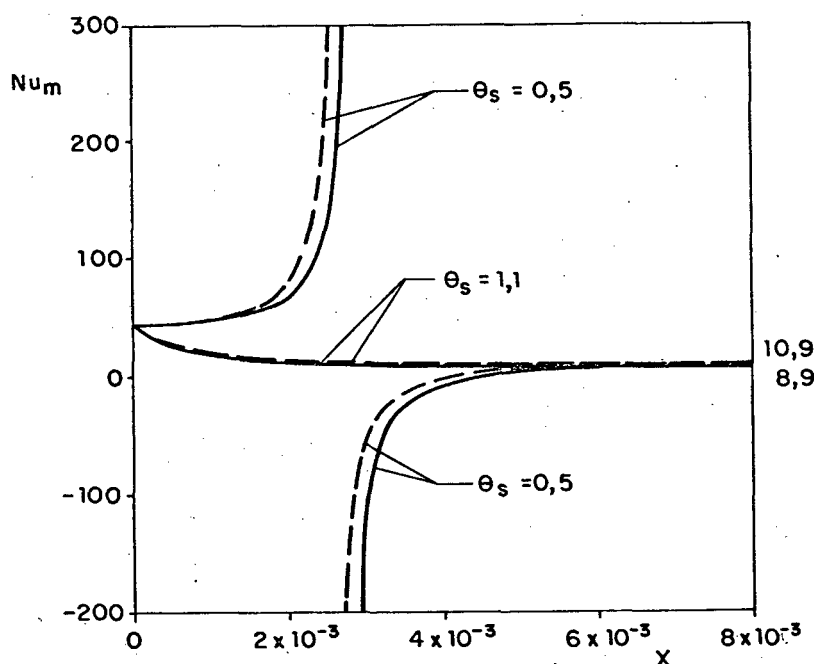


Fig. 4.19 Variação do número de Nusselt da matriz ao longo do escoamento.

A figura 4.19 mostra o desenvolvimento do número de Nusselt da matriz para os dois valores do parâmetro  $\theta_s$  e para as duas condições de condutividade térmica estudadas. Para o caso onde  $\theta_s = 1,1$ , o número de Nusselt é praticamente invariante, enquanto que para o caso onde  $\theta_s = 0,5$ , ele cresce em direção ao infinito, muda abruptamente de sinal se tornando infinitamente negativo e cresce até o valor que corresponde ao

regime termicamente desenvolvido. Este fato é previsto, uma vez que nos estágios iniciais, a temperatura de mistura é maior do que a temperatura da matriz sólida e, portanto, o Nusselt é um valor positivo. À medida que se avança no duto, a temperatura de mistura diminui a valores menores do que a temperatura da matriz sólida devido ao resfriamento imposto pela parede. Em consequência, o número de Nusselt troca de sinal e seu valor é sempre crescente até atingir o regime desenvolvido. Para a região plenamente desenvolvida, o número de Nusselt para o caso em que a condutividade térmica é constante é 18% maior do que aquele associado à condutividade térmica variável com a porosidade. Ao atingir o regime termicamente desenvolvido o número de Nusselt da matriz passa a independender do valor de  $\theta_s$ .

## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS PARA O PROBLEMA MÁSSICO

#### 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos para a equação (3.32) que corresponde ao problema da transferência de massa entre o fluido e a matriz sólida. O problema da transferência de massa é isotérmico e as partículas sólidas encontram-se confinadas em um duto cujas paredes são impermeáveis. Para a solução desta equação definiu-se, por conveniência, a seguinte variável adimensional:

$$\psi = \frac{w - w_s}{w_e - w_s} \quad (5.1)$$

Através desta nova variável a equação para o problema da massa passa a ser escrita da maneira seguinte,

$$B U \frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right] - \frac{6}{D^2} Sh_{fp} (1-\epsilon) \psi \quad (5.2)$$

onde X e Y são as coordenadas adimensionais ao longo e perpendicular ao escoamento, respectivamente.

As condições iniciais e de contorno para a equação (5.2) são as seguintes:

$$\begin{aligned} X = 0 & \quad , & \quad \psi = 1 \\ Y = 0 & \quad , & \quad \frac{\partial \psi}{\partial Y} = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$Y = 1 \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial Y} = 0 \quad (5.3)$$

Com as adimensionalizações introduzidas, os parâmetros do problema se reduzem a apenas três: o parâmetro adimensional da pressão que controla a vazão no duto,  $B$ , o número de Schmidt,  $Sc$ , e o diâmetro adimensional da partícula,  $D$ . Note que parâmetros como temperatura (para a avaliação da umidade de saturação) e umidade na entrada do duto se tornam irrelevantes.

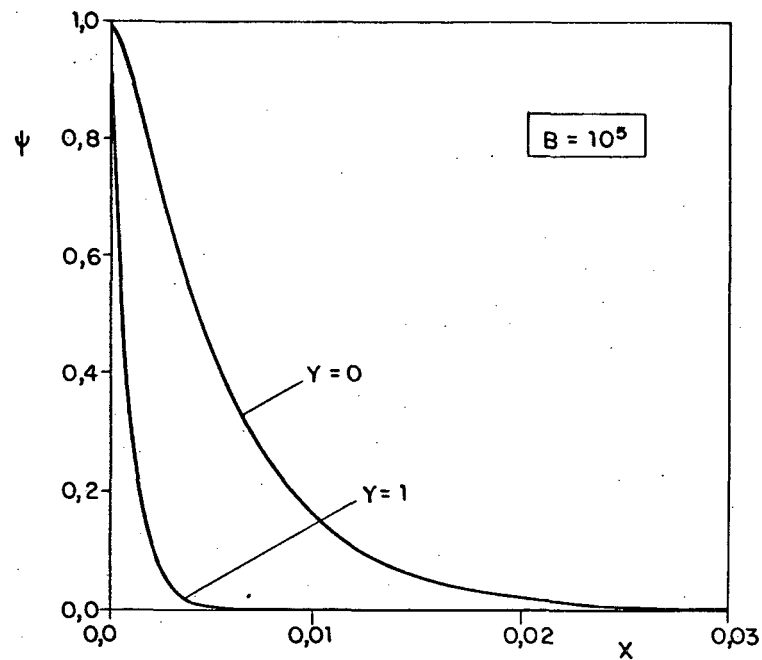
## 5.2 PERFIS DE CONTEÚDO DE UMIDADE

Para a discussão dos resultados, perfis de conteúdo de umidade ao longo das coordenadas perpendicular e paralela ao escoamento são apresentados para dois valores do parâmetro  $B$ ,  $B=10^5$  e  $B=10^7$ , e para uma única relação entre o diâmetro da partícula e a distância  $H$ ,  $D = 0,1$ . Também para estes valores plotou-se a quantidade local de massa evaporada em várias posições  $X$ .

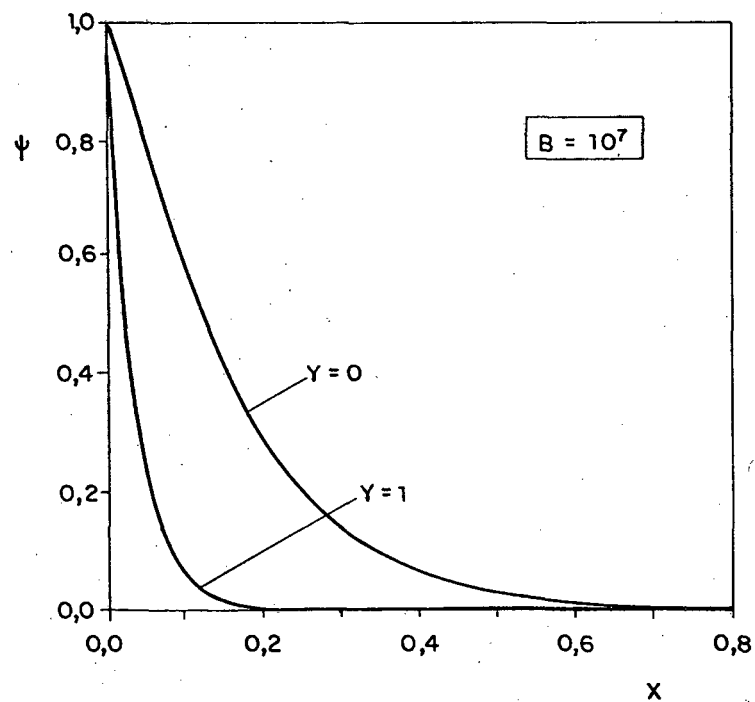
As figuras 5.1 (a) e 5.1 (b) apresentam, respectivamente para  $B = 10^5$  e  $B = 10^7$ , a variação do conteúdo de umidade  $\psi$  ao longo do duto para as posições  $Y = 0$  (parede do duto) e  $Y = 1$  (centro do duto). Conforme observado nas figuras,  $\psi$  diminui ao longo de  $X$ , tanto para  $Y = 0$  como para  $Y = 1$ , em virtude do crescimento de  $w$  em direção a  $w_s$ , o que reflete o ganho de umidade com a evaporação.

Outro fato evidenciado nas figuras 5.1 (a) e 5.1 (b) é o decréscimo mais lento de  $\psi$  para a posição  $Y = 0$ , o que será racionalizado a seguir. Nesta posição a taxa de massa evaporada é zero. Vale notar que na parede a porosidade do meio,  $\epsilon$ , é igual a unidade, significando a não existência de uma área evaporativa. O transporte de massa por convec-

ção em  $Y = 0$  também é nulo, uma vez que a velocidade é zero na parede. Desta forma, o ganho de umidade nesta posição é devido unicamente à difusão de massa. Tal fato explica o decréscimo mais lento de  $\psi$  para  $Y=0$ .



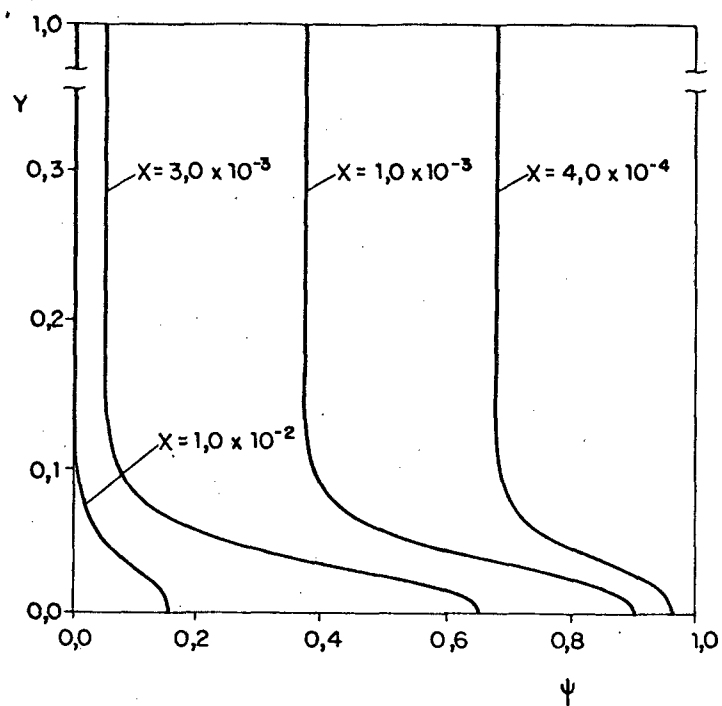
(a)



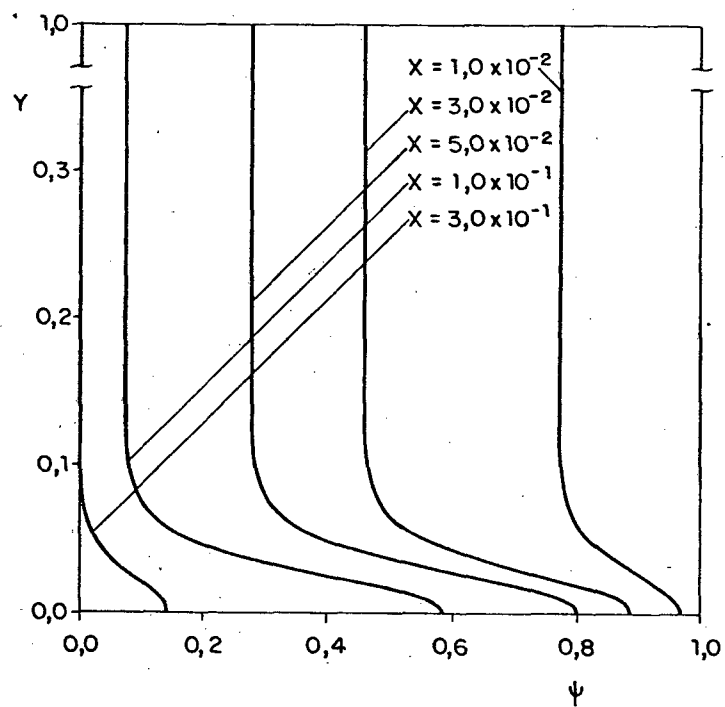
(b)

Fig. 5.1 Desenvolvimento do conteúdo de umidade  $\psi$  ao longo de  $X$  para: (a)  $B = 10^5$ , (b)  $B = 10^7$ .





(a)



(b)

Fig. 5.2 Perfis do conteúdo de unidade  $\psi$  para : (a)  $B = 10^5$ ,(b)  $B = 10^7$ .

Comparando-se as figuras 5.1 (a) e 5.1 (b), observa-se que o fluido atinge o conteúdo de umidade de saturação em uma posição X mais avançada no duto para o valor  $B = 10^7$ . A este valor está associada uma vazão de fluido mais elevada do que aquela para o valor  $B = 10^5$ . Esta vazão mais elevada requer uma quantidade de massa evaporada maior para se tornar saturada. Desta forma, à medida que B aumenta, aumentam os valores de X correspondentes à posição na qual o fluido satura.

Nas figuras 5.2 (a) e 5.2 (b) estão apresentados perfis do conteúdo de umidade  $\psi$  ao longo da coordenada Y, para várias posições X no duto e para  $B = 10^5$  e  $B = 10^7$ , respectivamente. Nestas figuras observa-se que o fluido nas posições fora da região do canal atinge a saturação,  $\psi = 0$ , mais rapidamente do que o fluido que se encontra junto à parede. Este fato será discutido mais detalhadamente em parágrafos posteriores. Também pelas figuras confirma-se o resultado que para  $B = 10^7$  o fluido torna-se saturado em uma posição X mais avançada no duto. Em um processo de secagem de grãos, por exemplo, este resultado equivale a dizer que vazões mais maiores de fluido secam maiores quantidades de grãos, uma vez que o fluido satura em uma posição mais distante da entrada do duto.

Outra forma de adimensionalizar o conteúdo de umidade é,

$$\psi^* = \frac{w - w_s}{w_m - w_s} \quad (5.4)$$

onde o índice m representa valores de conteúdo de umidade de mistura, definidos da maneira convencional conforme encontrado nos livros textos.

As figuras 5.3 (a) e 5.3 (b) mostram o desenvolvimento do conteúdo de umidade  $\psi^*$  ao longo do escoamento (coordenada X), para o centro do duto ( $Y = 1$ ) e para várias posições em Y próximas à parede,

onde o efeito de porosidade variada (efeito canal) deforma o perfil de velocidade. A região de efeito canal estende-se a uma altura em torno de  $0,05 < Y < 0,1$ , conforme ilustrado na figura 4.1.

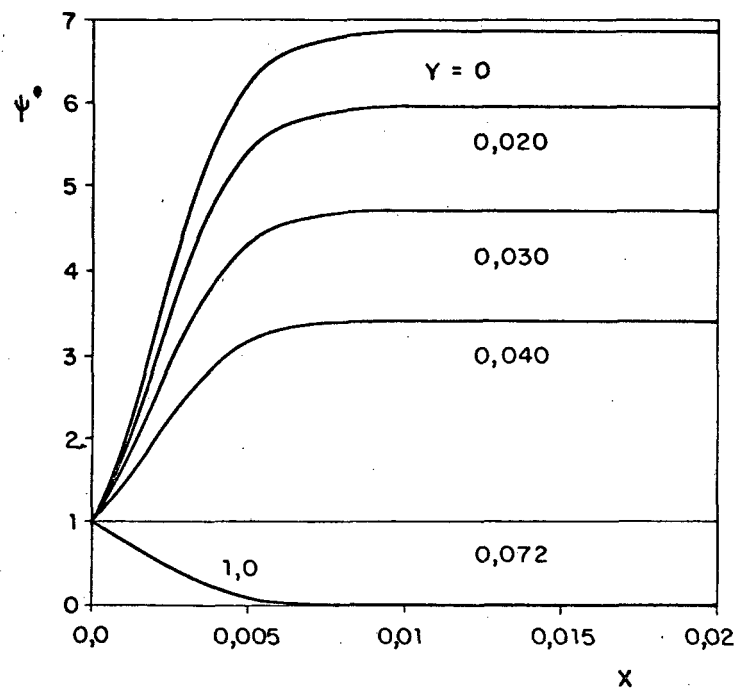
As curvas apresentadas na figura 5.3 (a) são para  $B = 10^5$ , enquanto que aquelas da figura 5.3 (b) são para  $B = 10^7$ . O primeiro fato observado na figura 5.3 (a) é que para valores de  $Y \leq 0,072$  (valores aproximadamente dentro da região do efeito canal), o conteúdo de umidade adimensional cresce continuamente até atingir o valor correspondente à região plenamente desenvolvida, a partir da qual  $\psi^*$  não mais se altera. Já para  $Y \geq 0,072$ , o conteúdo de umidade  $\psi^*$  decresce com  $X$  até atingir o valor zero.

A razão pela qual as curvas crescem com  $X$  para  $Y \leq 0,072$  está no fato do conteúdo de umidade de mistura,  $w_m$ , aumentar mais rapidamente do que o conteúdo de umidade local,  $w$ , o que faz com que na equação (5.4) o denominador decresça mais rapidamente do que o numerador.

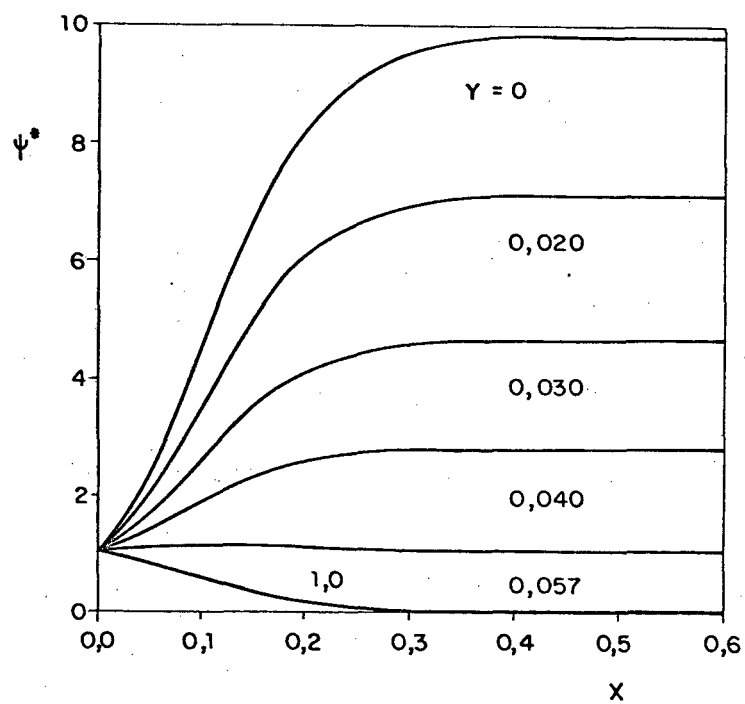
Para as posições  $Y$  fora desta região observa-se o oposto, isto é, o conteúdo de umidade local aproxima-se mais rapidamente de  $w_s$  do que o conteúdo de umidade de mistura. A razão deste fato será discutida a seguir. Na região do canal a velocidade do escoamento é mais elevada devido ao efeito da porosidade. Como consequência tem-se uma alta vazão de fluido que necessita de uma quantidade grande de massa para ter o seu conteúdo de umidade aumentado. Já para a região fora do canal, onde a vazão é mais baixa, o fluido atinge o conteúdo de umidade de saturação,  $w_s$ , mais rápido.

As mesmas observações podem ser feitas para a figura 5.3 (b). Neste caso, a posição que limita o aumento de  $\psi^*$  com  $X$  está em torno de  $Y \cong 0,057$ .

Os perfis de  $\psi^*$  em função da coordenada  $Y$  estão mostrados nas figuras 5.4 (a) e 5.4 (b), tendo  $X$  como parâmetro de curva.



(a)



(b)

Fig. 5.3 Desenvolvimento do conteúdo de umidade  $\psi^*$  ao longo de  $X$  para: (a)  $B = 10^5$ , (b)  $B = 10^7$ .

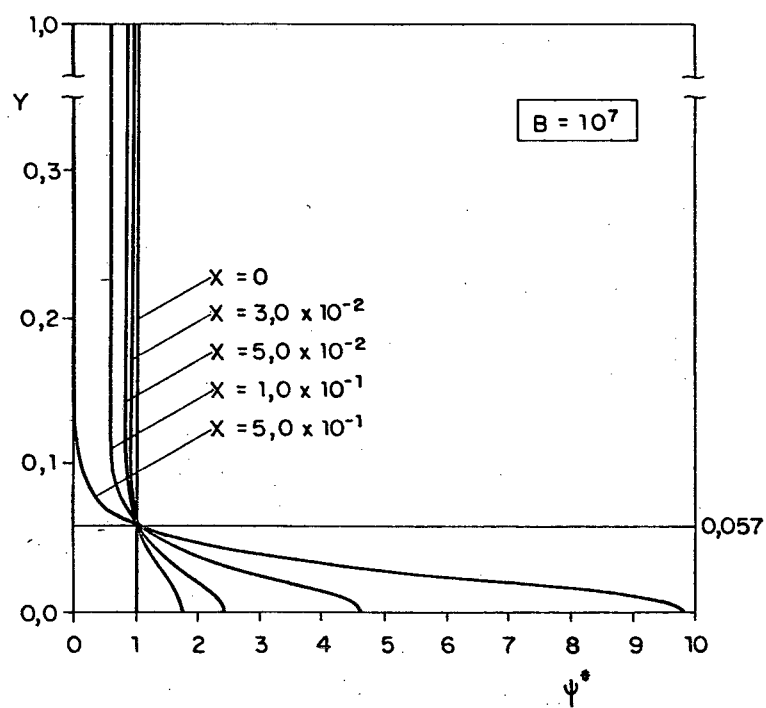
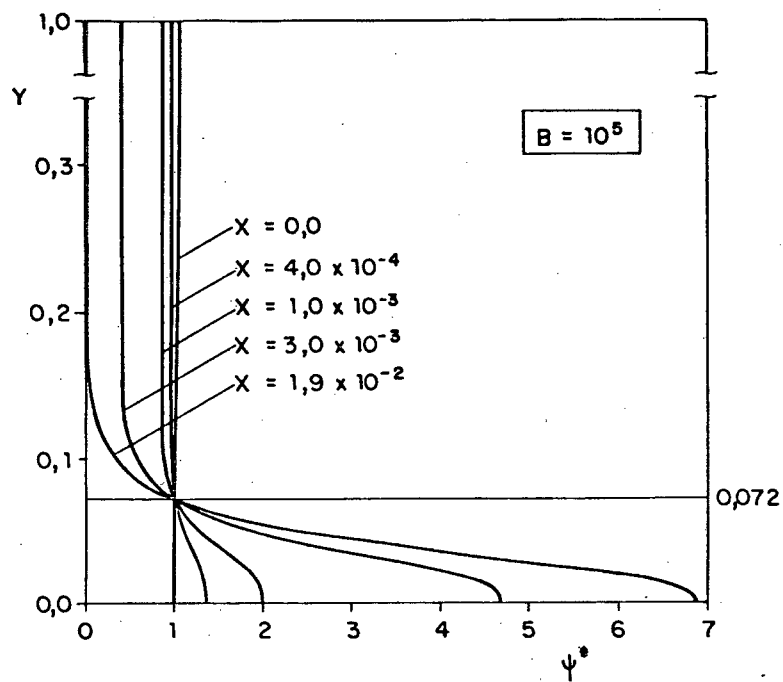


Fig. 5.4 Perfis do conteúdo de umidade  $\psi^*$  para : (a)  $B = 10^5$   
 (b)  $B = 10^7$ .

Para a figura 5.4 (a) que corresponde a  $B = 10^5$ , o ponto que delimita o aumento ou a diminuição de  $\psi^*$  está bem caracterizado ( $Y = 0,072$ ). Valores de  $Y$  acima de  $0,072$  tem o seu conteúdo de umidade local,  $w$ , aumentado com maior rapidez com relação ao conteúdo de umidade de mistura,  $w_m$ . Para valores abaixo deste acontece o oposto. Este fato deve-se a região do canal, onde os picos de velocidade ocorrem, e a alta vazão de fluido requer uma quantidade maior de massa evaporada para saturar. Na entrada do duto ( $X = 0$ )  $\psi^*$  é igual a unidade e a medida que  $X$  cresce em direção a posição plenamente desenvolvida, seu valor aumenta ou diminui relativamente ao ponto  $Y = 0,072$ .

Para a figura 5.4 (b), o ponto que delimita o aumento ou o decréscimo de  $\psi^*$  está em torno de  $Y = 0,057$ . Para valores de  $Y$  acima de  $0,057$  e a medida que se avança no duto,  $\psi^*$  diminui a zero. Abaixo deste valor de  $Y$ , o denominador da equação (5.4) diminui mais em relação ao numerador pois  $w_m$  tende a  $w_s$ , e  $\psi^*$  aumenta.

### 5.3 MASSA LOCAL EVAPORADA

A fim de explorar fisicamente as curvas representativas do conteúdo de massa evaporado, deve-se notar que o termo de geração de massa,  $G_m$ , é proporcional à área efetiva de evaporação representada por  $6(1-\epsilon)/D^2$ , à velocidade do fluido que está embutida no número de Sherwood,  $Sh_{fp}$ , e ao conteúdo de umidade do fluido,  $\psi$ . Para a compreensão deste termo, discutir-se-á, primeiramente, a figura 5.5.

A figura 5.5 mostra a relação do produto entre a área evaporativa e a velocidade do fluido com a coordenada  $Y$ . Conforme pode-se observar, a grandeza  $[6(1-\epsilon)/D^2]Sh_{fp}$  cresce monotonicamente com  $Y$  para  $B=10^5$ , indicando que o aumento da área evaporativa com  $Y$  se sobrepõe às altas velocidades encontradas na região do canal.

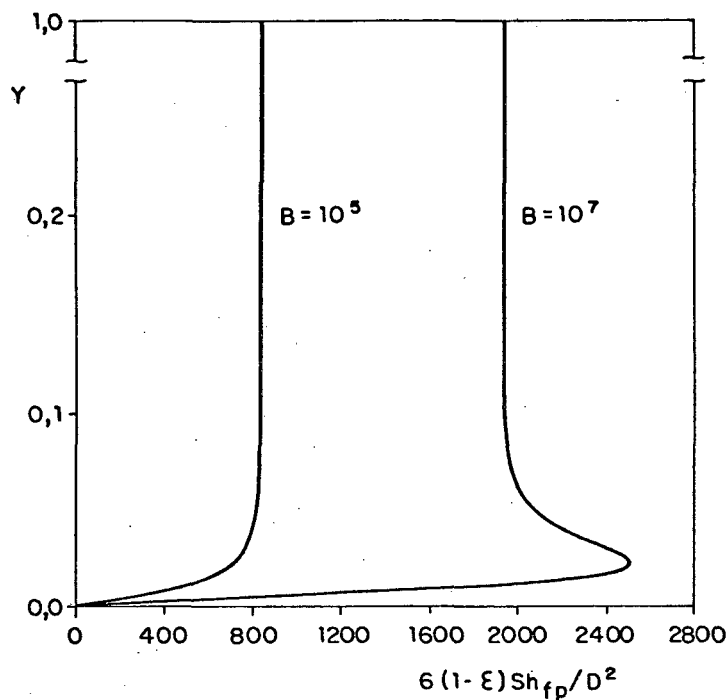
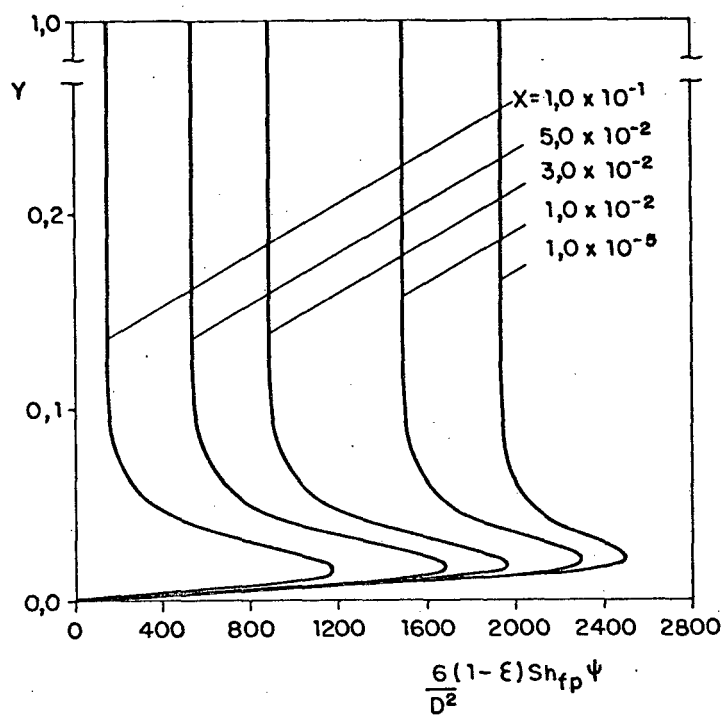


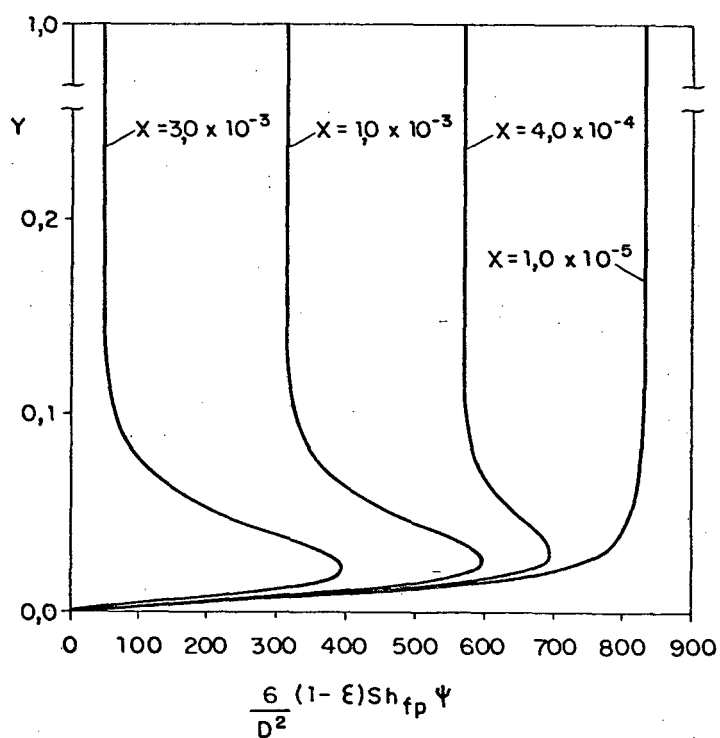
Fig. 5.5 Comportamento do produto entre a área evaporativa e a velocidade do fluido.

O mesmo comportamento não é observado para a curva de  $B=10^7$ . Neste caso, as altas velocidades correspondentes a vazão maior de fluido se sobrepõe ao fato da pequena área evaporativa existente na região do canal.

Nas figuras 5.6 (a) e 5.6 (b) plotou-se a massa local evaporada,  $G_m$ , tendo como parâmetro de curva a coordenada  $X$ . Esta massa está adimensionalizada de forma a representar exatamente o termo de geração que aparece na equação (5.2). Em ambas as figuras observa-se curvas semelhantes àquelas representativas de perfis de velocidade no meio poroso (figura 4.1). A região do canal está representada pelos picos das curvas, os quais refletem a alta taxa de evaporação que aí ocorre.



(a)



(b)

Fig. 5.6 Geração local de massa para várias posições  $X$  do duto e para: (a)  $B = 10^5$ , (b)  $B = 10^7$ .



Para uma dada posição  $Y$ , todas as curvas apresentadas nas figuras 5.6 (a) e 5.6 (b) possuem os mesmos valores de  $[6(1-\varepsilon)/D^2]Sh_{fp}$ , uma vez que  $\varepsilon$  e  $Sh_{fp}$  não variam com  $X$ . Sendo assim, o que distingue as curvas destas figuras é unicamente o conteúdo de umidade  $\psi$ . Note-se que tanto para  $B=10^5$  como  $10^7$ , quanto maior a variação de  $\psi$  com  $Y$  para um determinado  $X$  (ver figuras 5.2), mais acentuada é a variação de  $G_m$  com  $Y$ .

Vale notar que a maior variação de  $\psi$  com  $Y$  se encontra junto à parede do duto. No entanto, a porosidade nesta região é igual a unidade, e o termo de geração de massa é nulo.

Junto à entrada do duto ( $X = 1,0 \times 10^{-5}$ ), tanto para  $B=10^5$  como para  $B=10^7$ , como  $\psi$  é virtualmente constante e próximo da unidade, uma vez que  $w \approx w_e$ , a curva de  $G_m$  versus  $Y$  é bastante semelhante à curva de  $[6(1-\varepsilon)/D^2]Sh_{fp}$  versus  $Y$ , mostrada na figura 5.5.

À medida que se avança no duto, o fluido tem o seu conteúdo de umidade aumentado e o termo de geração diminui até atingir o valor zero para todas as posições  $Y$ , quando então não existem mais gradientes de umidade.

A figura 5.6 (b) mostra valores de  $G_m$  maiores em relação a figura 5.6 (a), uma vez que o escoamento do fluido se dá a velocidades mais altas ( $B$  é maior), e portanto, a quantidade de massa evaporada é elevada.

#### 5.4 VARIAÇÃO DO NÚMERO DE SHERWOOD DA MATRIZ

Nesta secção será mostrado o desenvolvimento do número de Sherwood ao longo de  $X$  para vários valores de  $B$ . Para o cálculo do número de Sherwood da matriz definiu-se uma expressão análoga à do número de Nusselt da matriz utilizado na secção 4.3,

$$Sh_m = \frac{2H\bar{k}_{fp}}{D_f} \quad (5.5)$$

onde  $D_f$  é a difusividade molecular do vapor d'água no ar e  $\bar{k}_{fp}$  é o coeficiente médio de transferência de massa entre o fluido e a matriz sólida. A definição de  $\bar{k}_{fp}$  é obtida através de um balanço material feito em um volume de controle genérico mostrado na figura 5.7.

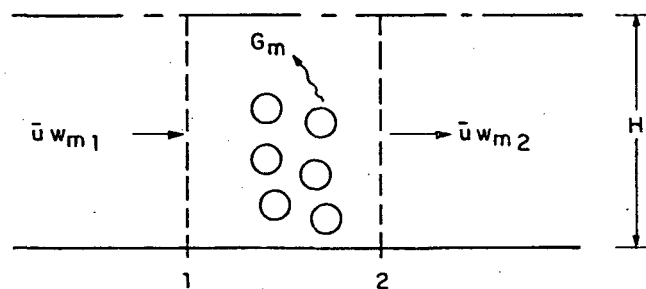


Fig. 5.7 Balanço de massa em uma posição arbitrária no duto.

Assumindo-se constantes os parâmetros do termo que representa a taxa de evaporação d'água, o balanço material na figura 5.7 requer,

$$\bar{u}H(w_{m2} - w_{m1}) = \frac{6}{d} (1 - \epsilon_\infty) \bar{k}_{fp} (w_s - \bar{w}_m) H \Delta x \quad (5.6)$$

onde  $\bar{w}_m$  é uma média aritmética dos conteúdos de umidade de mistura das posições 1 e 2 mostradas na figura 5.7.

Substituindo-se  $\bar{k}_{fp}$  na equação (5.5) e fazendo-se uso das definições das quantidades adimensionais para o problema da massa, obtém-se:

$$Sh_m = \frac{B \bar{U} D (\psi_{m1} - \psi_{m2})}{3\Delta X (1 - \epsilon_\infty) \bar{\psi}_m} \quad (5.7)$$

A equação (5.7) fornece o valor médio do número de Sherwood da matriz para a região limitada pelas posições 1 e 2.

A seguir serão apresentados os resultados de  $Sh_m$  versus  $X$  para diferentes vazões de fluido. O valor de  $X$  correspondente ao valor de  $Sh_m$  calculado pela equação (5.7) é dado por  $(X_1+X_2)/2$ .

Conforme observado na figura 5.8, à medida que  $B$  aumenta os valores de  $Sh_m$  também aumentam. Tal fato era esperado, uma vez que velocidades maiores intensificam o processo de evaporação levando a valores mais elevados do número de Sherwood da matriz. Observa-se também pela figura 5.8 que para os primeiros estágios, onde as taxas de transferência de massa são elevadas,  $Sh_m$  varia pouco com  $X$ . O número de Sherwood decresce, então, bruscamente e atinge um valor limite correspondente ao da região plenamente desenvolvida. Esta região é mais afastada da entrada do duto para valores de  $B$  maiores, conforme já foi comentado em figuras anteriores.

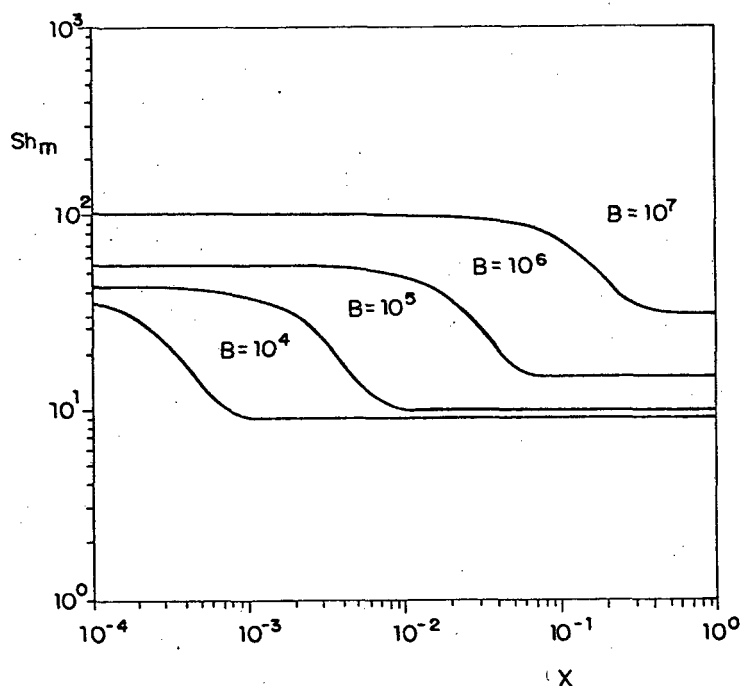


Fig. 5.8 Variação do número de Sherwood da matriz ao longo do escoamento.

Na figura 5.9 plotou-se  $Sh_m$  versus  $B$  para a região plenamente desenvolvida. Vazões maiores de fluido aumentam a taxa de evaporação, conforme pode ser observado pelo aumento do número de Sherwood da matriz, com o aumento do parâmetro  $B$ .

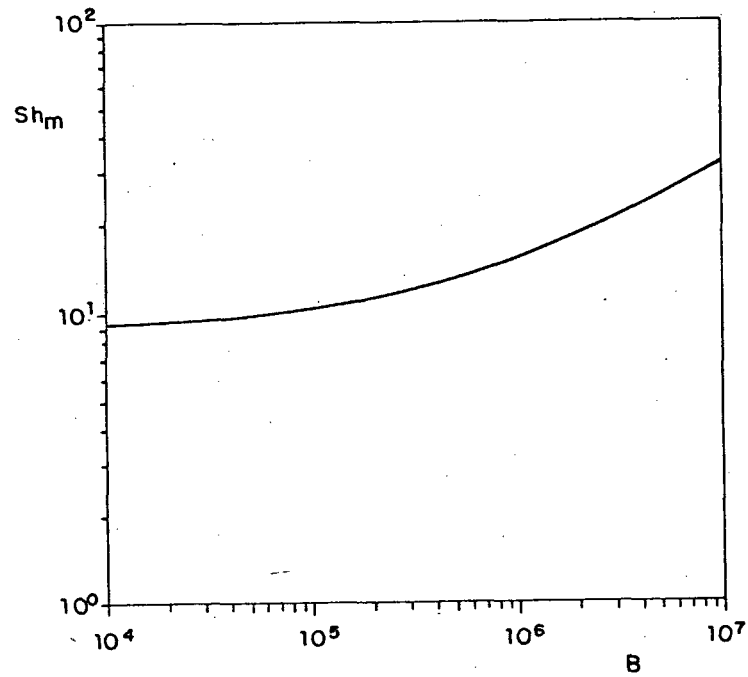


Fig. 5.9 Variação de  $Sh_m$  com  $B$  para a região desenvolvida.

## CAPÍTULO 6

### RESULTADOS PARA O PROBLEMA TÉRMICO E MÁSSICO ACOPLADO

#### 6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos para o problema térmico e mássico acoplado. Para esta situação, as transferências de calor e massa ocorrem simultaneamente e as equações da energia e da massa encontram-se acopladas através da relação entre o conteúdo de umidade e a temperatura de saturação.

O fluido é uma mistura de ar seco e vapor d'água que ao escoar pela matriz sólida tem o seu conteúdo de umidade alterado pela evaporação da água líquida presente nas partículas.

As paredes do duto são impermeáveis ao vapor d'água e são aquecidas sob duas condições: temperatura constante e fluxo de calor uniforme.

As equações para o problema conjugado são aquelas apresentadas na secção 3.5,

$$BU \frac{\partial \theta}{\partial X} = (\varepsilon \theta)' + \frac{6}{D^2} (1-\varepsilon) \text{Nu}_{fp} (\theta_s - \theta) \quad (6.1)$$

$$BU \frac{\partial w}{\partial X} = (\varepsilon w)' + \frac{6}{D^2} (1-\varepsilon) \text{Sh}_{fp} (w_s - w) \quad (3.35)$$

onde,

$$\theta_s = \theta + \frac{Sh_{fp} H_{fg} (w_s - w)}{Le T_e \phi c_{pf} \left[ Nu_{fp} - \frac{Sh_{fp} c_{pv} (w_s - w)}{Le c_{pf}} \right]} \quad (3.36)$$

$$w_s = 0,62198 \frac{P_s(\theta_s)}{P_a - P_s(\theta_s)} \quad (2.25)$$

Note-se que na equação da energia, equação (6.1), foram eliminados da equação (3.24) os termos referentes à variação do parâmetro  $\phi$  com a coordenada  $X$ . No problema investigado aqui,  $\phi$  é um valor constante que depende unicamente da temperatura de entrada do fluido e do fluxo de calor ou da temperatura aplicada nas paredes do duto. O valor assumido para a constante  $\phi$ , conforme definido nas equações (3.10) para temperatura prescrita e (3.13) para fluxo prescrito, será discutido em parágrafos seguintes. Também na equação (6.1) assumiu-se  $k_f \gg k_p$ , de maneira que a parcela  $(1-\varepsilon)k_p/k_f$  existente na equação (3.24) é nula.

Conforme foi discutido no capítulo 3, a formulação do problema acoplado não pode ser totalmente escrita através de parâmetros adimensionais, uma vez que relações termodinâmicas envolvendo equações de estado se fazem necessárias (equações (3.36) e (2.25)). Adicionalmente, muitas são as variáveis que devem ser fornecidas para a solução do problema, conforme verificado nas equações anteriores. Tais variáveis são apresentadas a seguir.

Os valores para o calor latente de vaporização,  $H_{fg}$ , calor específico do ar,  $c_{pf}$ , e calor específico do vapor d'água,  $c_{pv}$ , estão fornecidos no apêndice B. Os números de Prandtl e de Schmidt, necessários para o cálculo dos números de  $Le$ ,  $Nu_{fp}$  e  $Sh_{fp}$ , valem 0,7 e 0,6, respectivamente.

Além dos valores supracitados, foram fixados os valores da temperatura de entrada do fluido,  $T_e = 25^\circ\text{C}$  e do diâmetro adimensional da partícula,  $D = 0,1$ .

Os parâmetros variáveis do problema são a umidade relativa do ar de entrada,  $UR_e$ , o parâmetro que regula a vazão de fluido,  $B$ , e a constante  $\phi$ . Os resultados apresentados neste capítulo dizem respeito aos seguintes valores investigados para a umidade relativa: 0, 0,25, 0,50, 0,75 e 1, e aos seguintes valores de  $B$ :  $10^5$  e  $10^7$ . Relativamente ao valor da constante  $\phi$ , é necessário que se considere as expressões (3.10) e (3.13). Para a condição de temperatura prescrita na parede, atribui-se  $T_w = 30^\circ\text{C}$ , de forma que  $\phi$  é calculada de acordo com:

$$\phi = \frac{T_w - T_e}{T_e} \quad (3.10)$$

Para a condição de fluxo prescrito arbitrou-se o valor 1 para a função  $\phi$  dada pela expressão abaixo:

$$\phi = \frac{q_w H}{T_e k_{ef}} \quad (3.13)$$

Para a solução deste problema utilizou-se uma malha variável com 200 pontos na direção  $Y$ . A malha mais refinada, com 500 pontos nodais, utilizada na solução dos problemas isolados de transferência de calor e massa, aumentava em muitas vezes o número de iterações em cada posição. Em virtude do tempo computacional ser bem maior, não era possível alcançar a saturação completa do fluido e tal malha foi, então, abandonada. Foi observado que o número de iterações necessárias para respeitar o critério de convergência estabelecido, aumentava à medida que se avançava no duto e o fluido tornava-se saturado. Testes adicio-

do fluido deve-se unicamente à difusão de massa proveniente do núcleo do rapidamente do que aquele junto da parede. Na parede, o ganho de unidade isotérmico, o fluido que se encontra fora da região do canal satura mais anterior, no qual estudou-se a transferência de massa em um processo de duto totalmente seco,  $UR^e = 0$ . Conforme já foi observado no capítulo A figura 6.1 representa a situação na qual o fluido entra no virtude da porosidade variável.

canal ( $Y < 0,05$ ). Nesta região, o perfil de velocidade é deformado em centro do duto ( $Y=1$ ), à parede ( $Y=0$ ) e à região onde ocorre o efeito As posições em Y apresentadas nas figuras são relativas ao valor de  $UR^e$ .

duto,  $UR^e$ , varia entre 0 e 100%, cada figura correspondendo a um dado valor de B é igual a  $10^7$ . A umidade relativa do fluido na entrada do condição de contorno na parede do duto é de temperatura prescrita e o ao longo do escoamento para várias posições em Y. Nestas figuras a As figuras 6.1 à 6.5 apresentam perfis de conteúdo de umidade

## 6.2 CURVAS DE UMIDADE RELATIVA

paredes do duto e para um valor de temperatura de parede igual a  $40^\circ C$ . Figuras para o valor de  $B = 10^5$ , para a condição de fluxo prescrito nas condição de temperatura prescrita na parede. São mostradas algumas A maioria dos casos investigados são para  $B=10^7$  e para a dos números de Nusselt e Sherwood com a coordenada X.

através de curvas de umidade relativa, perfis de temperatura e variações Os resultados obtidos para o problema serão apresentados a 5% foram observadas nos valores calculados para o número de Nusselt). Influenciada pelo uso da malha menos refinada (alterações em torno de 4 mais indicaram que a precisão dos resultados não foi significativamente



duto, uma vez que em  $Y=0$  a área evaporativa é nula, pois  $\varepsilon=1$ , e a velocidade é igual a zero, não havendo, portanto, transporte de massa por convecção. Somado a isto, existe o fato de que, na parede, o conteúdo de umidade de saturação é máximo pois a temperatura é máxima ( $30^{\circ}\text{C}$ ).

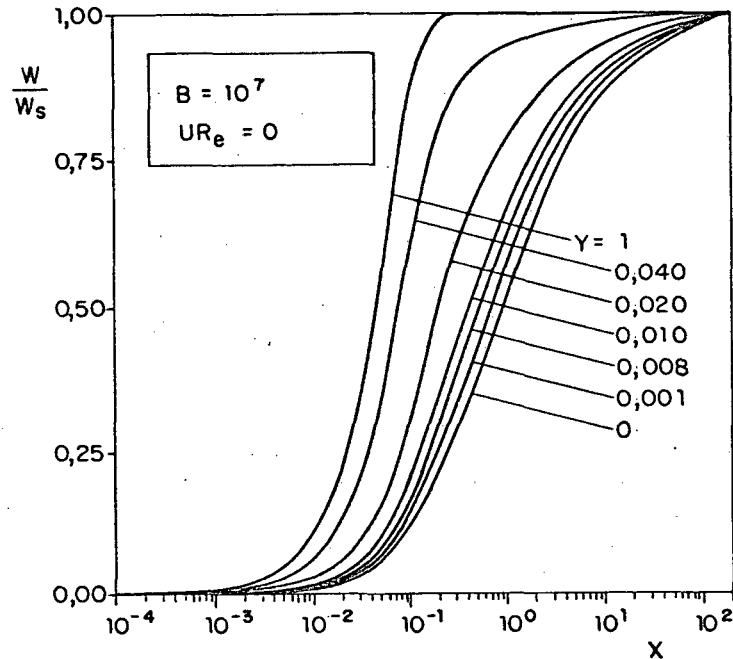


Fig. 6.1 Curvas de umidade relativa para  $UR_e=0$ .

Embora na região do canal a velocidade do escoamento seja mais elevada, o que favorece o processo de evaporação, a saturação do fluido acontece de forma mais lenta com relação às posições fora desta região. A razão deste fato é consequência de uma alta vazão de fluido que necessita de uma maior quantidade de água evaporada para ter o seu conteúdo de umidade aumentado. Além disto, a temperatura do fluido aumenta continuamente devido às trocas de calor com a parede. Conforme foi apresentado na seção anterior, a temperatura de entrada do fluido ( $T_e=25^{\circ}\text{C}$ ) é sempre mais baixa do que a temperatura da parede ( $T_w=30^{\circ}\text{C}$ ). Assim, o fluido que se encontra em posições próximas à parede, tem a sua temperatura aumentada mais rapidamente do que o fluido que se encontra afastado dela. Esta elevação de temperatura provoca um aumento na temperatura de saturação relativa às novas condições do fluido. Como

consequência, o conteúdo de umidade de saturação também aumenta, o que dificulta ainda mais a saturação nesta região.

Os casos para  $UR_e = 0,25, 0,50$  e  $0,75$  são apresentados nas figuras 6.2, 6.3 e 6.4, respectivamente.

Como pode-se observar nas figuras 6.2 à 6.4, a umidade relativa na parede, já no primeiro estágio em  $X$ , é menor do que o valor correspondente ao de entrada. Este fato é racionalizado lembrando que no primeiro estágio ( $X=0$ ) a temperatura na parede é imposta como sendo  $30^\circ\text{C}$ . Desta forma, a temperatura utilizada no cálculo de  $w_s$  é maior para a parede do que para os demais pontos que permanecem à  $25^\circ\text{C}$ . Sendo assim, o conteúdo de umidade de saturação é maior na parede, resultando em uma umidade relativa mais baixa. A curva permanece constante para os estágios iniciais, indicando que não houve ganho significativo de umidade. Para um valor de  $X$  aproximadamente igual a  $0,01$ , a curva passa a crescer até atingir o valor equivalente à saturação. O valor de  $w_s$  para  $Y=0$  é constante e máximo, pois corresponde à temperatura de  $30^\circ\text{C}$ , que é a temperatura máxima que o sistema pode atingir ( $w_s = w_s(30^\circ\text{C})$ ).

O segundo ponto da malha está representado nas figuras e equivale a  $Y=0,001$ . Como pode-se observar, a umidade relativa neste ponto é igual a de entrada para o primeiro estágio pois os efeitos da aquecimento da parede ainda não foram sentidos e a temperatura de cálculo de  $w_s$  permanece igual a de entrada. Para os estágios seguintes a curva de umidade relativa começa a baixar indicando que  $w_s$  aumenta mais rapidamente do que  $w$ ; subseqüentemente a curva  $w/w_s$  cresce até atingir o valor correspondente à saturação. Nos primeiros estágios, embora  $w$  cresça como consequência da evaporação d'água, a temperatura na qual  $w_s$  é calculada aumenta devido ao aquecimento da parede. Este aumento de temperatura, e conseqüente aumento de  $w_s$ , se sobrepõe ao aumento do conteúdo de umidade e provoca um decréscimo na curva.

Para os estágios posteriores, observa-se um efeito contrário aquele mencionado no parágrafo anterior. A quantidade  $w$  aumenta mais do que  $w_s$ , indicando que o ganho de umidade se sobrepõe ao aumento de temperatura causado pelo aquecimento da parede.

Para as posições em  $Y$  mais afastadas da parede, a curva cresce continuamente até atingir a saturação. Este fato ocorre por diferentes razões para os estágios iniciais e finais do duto, conforme será racionalizado a seguir. Após algumas estações onde a umidade relativa permanece constante, a curva de  $w/w_s$  começa a crescer como consequência da diminuição do valor de  $w_s$ . Ao contrário do que ocorre para valores de  $Y$  pequenos, o fluido em posições afastadas da parede tem a sua temperatura diminuída. Isto ocorre porque a quantidade de calor entregue pelo fluido para a evaporação d'água é maior do que a quantidade de calor recebida devido ao aquecimento da parede. Analogamente ao que foi observado na secção 4.3, na qual apresentou-se os resultados para o problema térmico com geração, porém na ausência de transferência de massa, o fluido tende à temperatura  $T_s$  nas regiões afastadas da parede. Somado a isto, existe o fato do conteúdo de umidade aumentar devido a evaporação d'água presente nas partículas. Para os estágios seguintes a temperatura do fluido passa a aumentar, uma vez que os efeitos da parede começam a ser sentidos nestas posições e o valor de  $w_s$  aumenta, muito embora a curva continue a crescer. Nestas estações, o ganho de umidade e consequente aumento da quantidade  $w$  supera o aumento de  $w_s$ .

Resumindo, tem-se as seguintes justificativas para o processo de saturação do fluido:

(i) a parede é a posição a saturar mais lentamente, em virtude do ganho de umidade acontecer somente pela difusão da massa proveniente do núcleo do duto, uma vez que em  $Y=0$  não existe área evaporativa e nem transporte de massa por convecção. Além disto, o conteúdo de umidade de

saturação é sempre o máximo e igual a  $w_s = w_s(30^\circ\text{C})$ .

(ii) a linha central do duto é a primeira posição a saturar. Nas regiões próximas ao centro do duto a vazão de fluido é menor pois o efeito da porosidade variável não é mais observado. Sendo assim, o fluido necessita de uma menor quantidade de massa evaporada para ter o seu conteúdo de umidade significativamente aumentado. Além disto, estas posições são as últimas a sentirem o efeito da parede aquecida. Isto ocorre de tal forma que, para os estágios iniciais, o fluido chega a baixar de temperatura em virtude do calor cedido para a evaporação d'água das partículas. Com isto, o valor do conteúdo de umidade de saturação é menor em relação aos valores mais baixos de  $Y$ .

(iii) a região do canal tem a sua umidade relativa inicialmente diminuída pelo aumento de  $w_s$  (como consequência da parede aquecida). Mas nesta região ocorrem as maiores taxas de evaporação devido as altas velocidades. Para estações mais afastadas da entrada do duto a quantidade de massa evaporada aumenta o conteúdo de umidade mais rapidamente do que o conteúdo de umidade de saturação, e então a curva de umidade relativa passa a crescer.

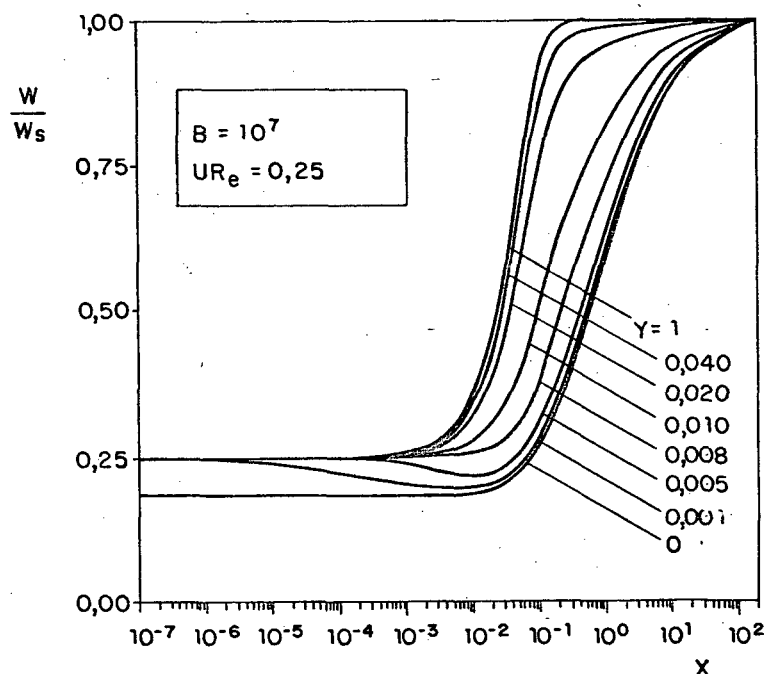


Fig. 6.2 Curvas de umidade relativa para  $UR_e = 0,25$ .

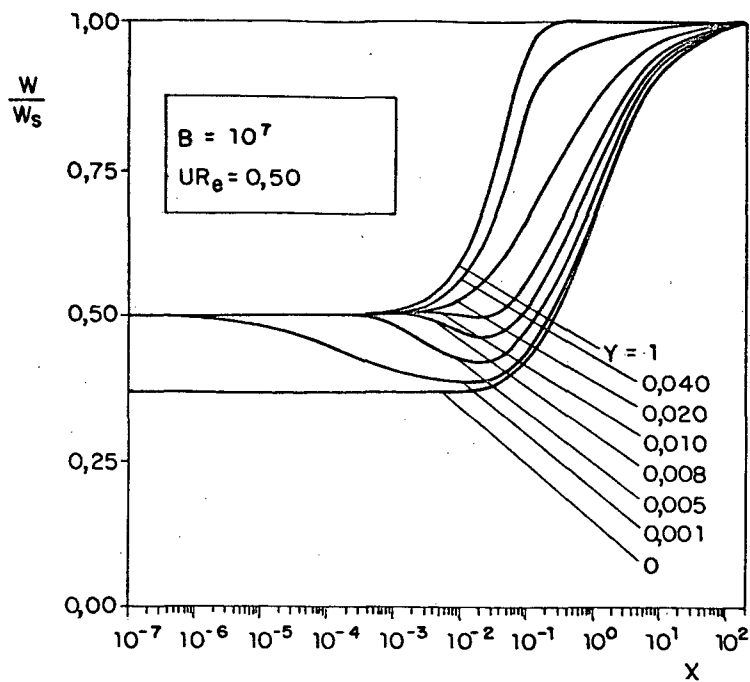


Fig. 6.3 Curvas de umidade relativa para  $UR_e = 0,50$ .

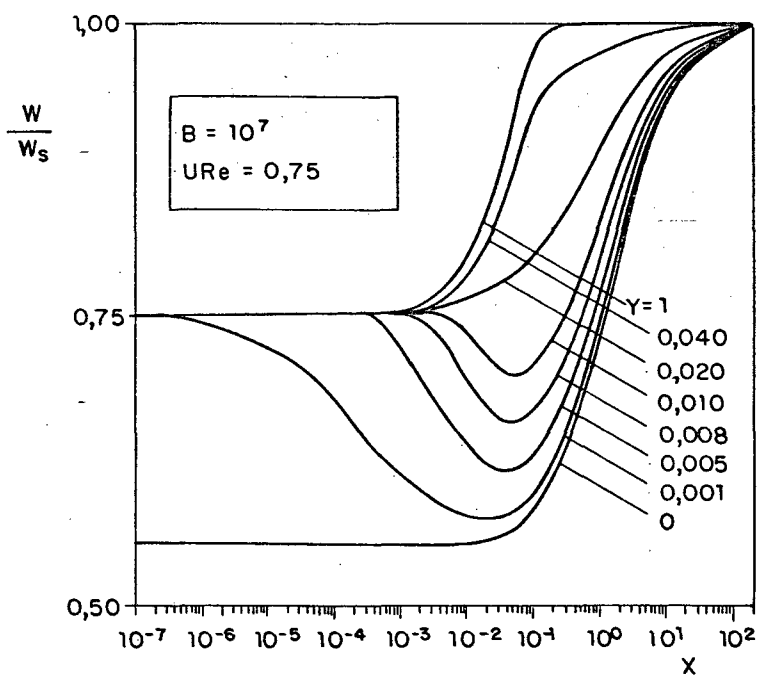


Fig. 6.4 Curvas de umidade relativa para  $UR_e = 0,75$ .

A figura 6.5 representa a situação na qual o fluido entra no duto totalmente saturado. Novamente neste caso, a umidade relativa em  $Y=0$  para a primeira estação em  $X$  é menor do que as outras posições devido a condição de contorno na parede.

Para esta situação, as posições fora da região do canal não se alteram, permanecendo sempre saturadas, muito embora a temperatura do fluido aumente até atingir os  $30^{\circ}\text{C}$ . Tanto  $w$  quanto  $w_s$  aumentam devido à evaporação d'água e devido ao aumento de temperatura, mas a sua relação permanece igual a um. O conteúdo de umidade  $w$  aumenta devido a uma diferença no conteúdo de saturação que é causada pelo aumento de temperatura.

Para valores baixos de  $Y$  que correspondem à região do canal, a umidade relativa diminui nos primeiros estágios em virtude da condição de aquecimento da parede. Quando as altas taxas de evaporação se sobrepõem ao aumento de temperatura, as curvas começam a aumentar e o fluido satura novamente.

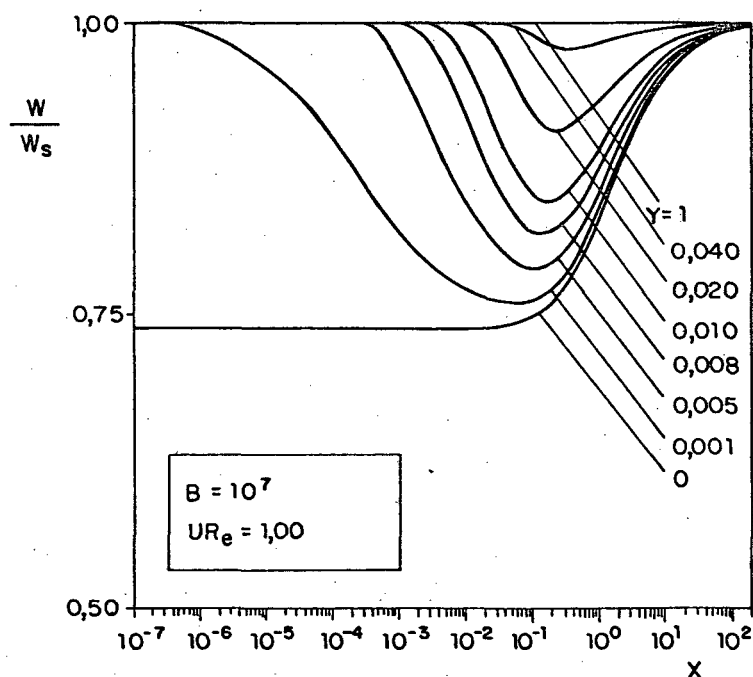


Fig. 6.5 Curvas de umidade relativa para  $UR_e = 1,00$ .

Um fato interessante a ser observado nas figuras 6.1 à 6.5 é que a saturação completa do fluido se dá em torno de  $X=200$ , não importando a umidade relativa de entrada do fluido. Embora o primeiro sentimento físico leve a acreditar que o fluido que entra no duto com um conteúdo de umidade mais elevado deva saturar primeiro, tal fato não ocorre.

Testes adicionais mostraram que a saturação completa do fluido ocorre em  $X \approx 200$  mesmo quando a temperatura da parede é aumentada.

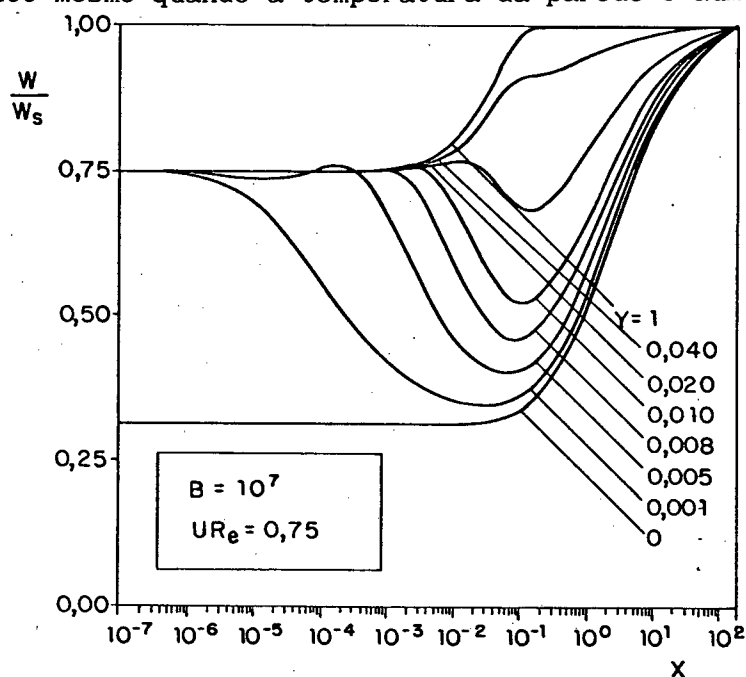


Fig. 6.6 Curvas de umidade relativa para  $UR_e=0,75$  e  $T_w=40^\circ\text{C}$ .

A figura 6.6 mostra a situação para a qual o fluido entra com  $UR_e=0,75$  e  $T_e=25^\circ\text{C}$ , mas as paredes do duto se encontram agora a  $40^\circ\text{C}$  e não mais a  $30^\circ\text{C}$ . Como pode-se observar na figura, a saturação do fluido ocorre em  $X$  aproximadamente igual a 200. Como nas figuras 6.1 à 6.5, a curva correspondente a  $Y=0$  (parede) apresenta umidade relativa bem abaixo das demais curvas, em torno de 30%. A razão deste fato já foi explicada anteriormente. Para as mesmas condições de entrada do fluido, porém com  $T_w=30^\circ\text{C}$ , figura 6.4, a curva referente a  $Y=0$  possui umidade relativa maior (aproximadamente 55%). Tal resultado era esperado, uma

vez que quanto mais elevada a temperatura da parede, maior é o conteúdo de umidade de saturação correspondente e, conseqüentemente, mais baixa é a umidade relativa. Observa-se ainda na figura 6.6, pequenas oscilações de umidade relativa para  $Y=0,005$ .

A próxima figura a ser discutida corresponde as curvas de saturação para o fluido com umidade relativa inicial igual a 25% e para  $B=10^5$ . A temperatura de entrada do fluido é igual a  $25^\circ\text{C}$  e a temperatura nas paredes do duto é constante e vale  $30^\circ\text{C}$ .

A figura 6.7 corresponde a uma situação em que a vazão de fluido é relativamente menor do que aquela para os casos analisados anteriormente. Desta forma, o fluido satura em uma posição mais próxima à entrada do duto, uma vez que a quantidade de massa evaporada requerida para a saturação completa é menor. Enquanto que para  $B=10^7$  o valor de  $X$  correspondente à saturação está em torno de 200, para  $B=10^5$  o fluido satura em  $X \approx 4$ .

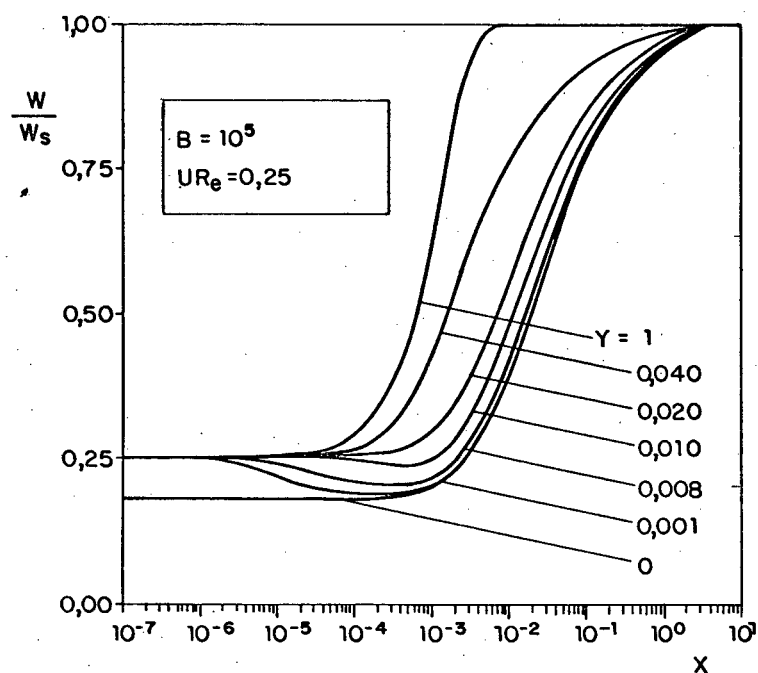


Fig. 6.7 Curvas de umidade relativa para  $UR_e=0,25$  e  $B=10^5$ .

Estes resultados sugerem que  $B$  é o único parâmetro de interesse



para a saturação do fluido. Parâmetros como a umidade relativa de entrada e temperatura da parede do duto não são relevantes na determinação da posição  $X$  correspondente à saturação do fluido.

A figura 6.8 corresponde à condição de fluxo prescrito nas paredes. Neste exemplo, o fluido entra no duto com temperatura de  $25^{\circ}\text{C}$  e umidade relativa igual a 75%. Nestas condições, calor é fornecido continuamente ao fluido pelas paredes do duto. Em virtude da temperatura aumentar continuamente, não ocorre saturação do fluido localizado próximo às fronteiras sólidas.

Para  $Y=1$  as quantidades de massa evaporada compensam o aquecimento do fluido e este satura. Observa-se também na figura 6.8 que a razão entre  $w/w_s$  permanece contante para todos os pontos no canal a partir de  $X=1$ , indicando o estabelecimento de um regime plenamente desenvolvido. Embora  $w$  e  $w_s$  cresçam continuamente ao longo do escoamento, para  $X>1$  o aumento de  $w$  associado a uma quantidade maior de massa evaporada é compensado pelo aumento de  $w_s$  associado ao aumento de temperatura do fluido.

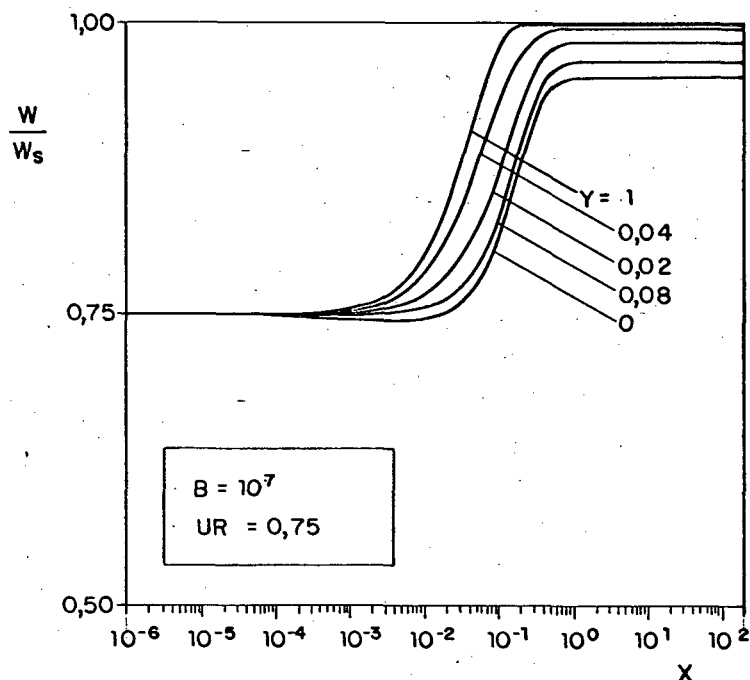


Fig. 6.8 Curvas de unidade relativa para  $UR_e = 0,75$  e condição de fluxo prescrito na parede.

### 6.3 PERFIS DE TEMPERATURA

As figuras 6.9 à 6.13 apresentam os perfis de temperatura plotados em função da coordenada X, para várias posições Y. Nestas figuras, a condição de contorno aplicada na parede é de temperatura constante igual a 30°C e o parâmetro B que regula a vazão no duto é igual a 10<sup>7</sup>.

Todos os gráficos apresentam curvas bastante semelhantes, muito embora os conteúdos de umidade de entrada sejam diferentes.

Pelas figuras podemos observar que as curvas representativas da região do canal (Y=0,01 e 0,08) diminuem continuamente até atingir um valor constante, correspondente à região térmica plenamente desenvolvida. A razão pela qual as curvas diminuem nesta região está no fato da temperatura do fluido, para valores baixos de Y, se aproximar mais rapidamente de T<sub>w</sub> do que a temperatura de mistura, fazendo com que o numerador (T-T<sub>w</sub>) decresça mais rápido do que o denominador (T<sub>m</sub>-T<sub>w</sub>). Isto ocorre porque o fluido nestas posições sente os efeitos da parede aquecida com mais intensidade.

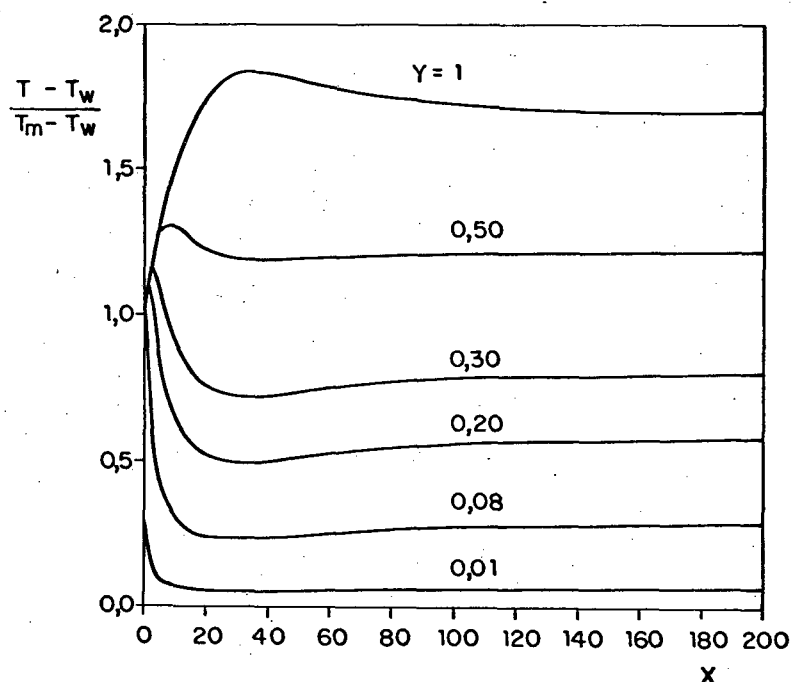


Fig. 6.9 Distribuição de temperatura para UR<sub>e</sub>=0.

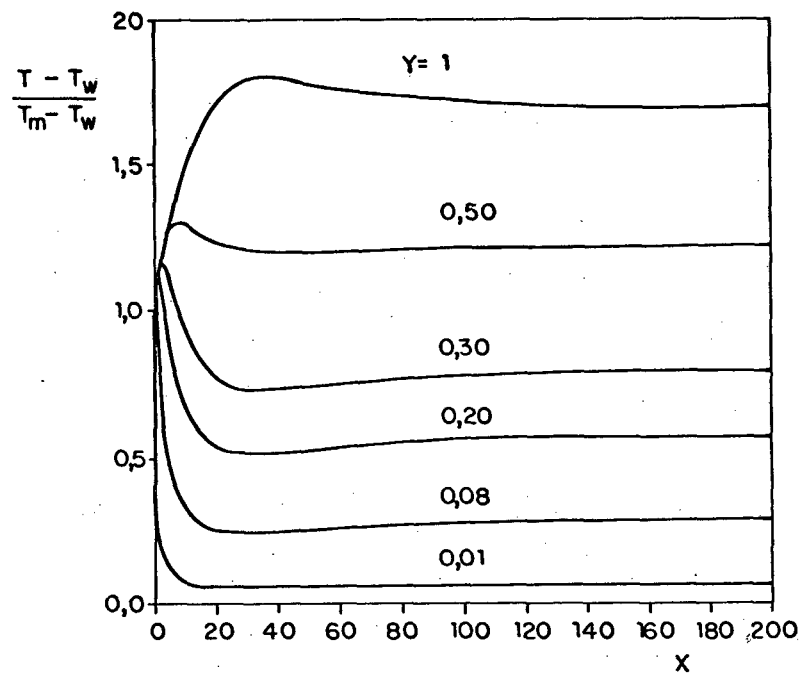


Fig. 6.10 Distribuição de temperatura para  $UR_e = 0,25$ .

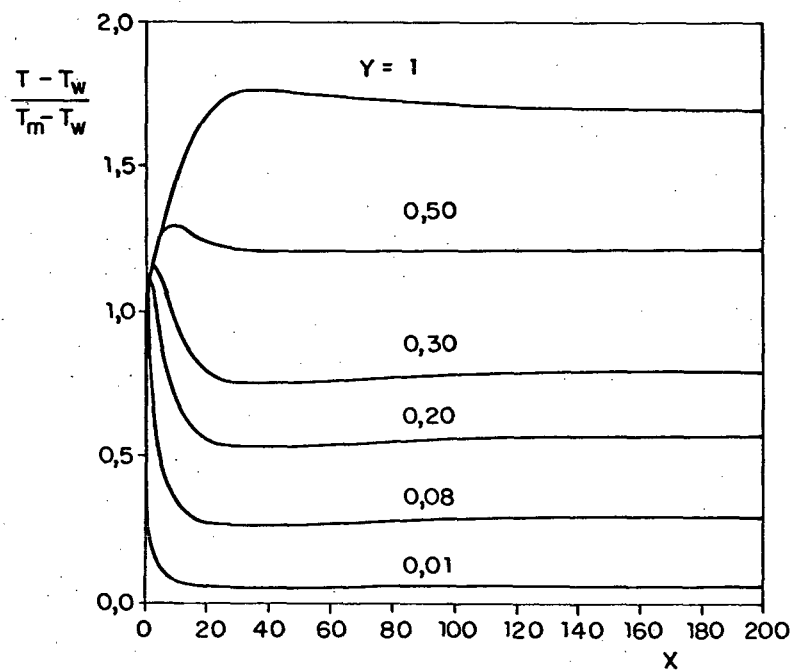


Fig. 6.11 Distribuição de temperatura para  $UR_e = 0,50$ .

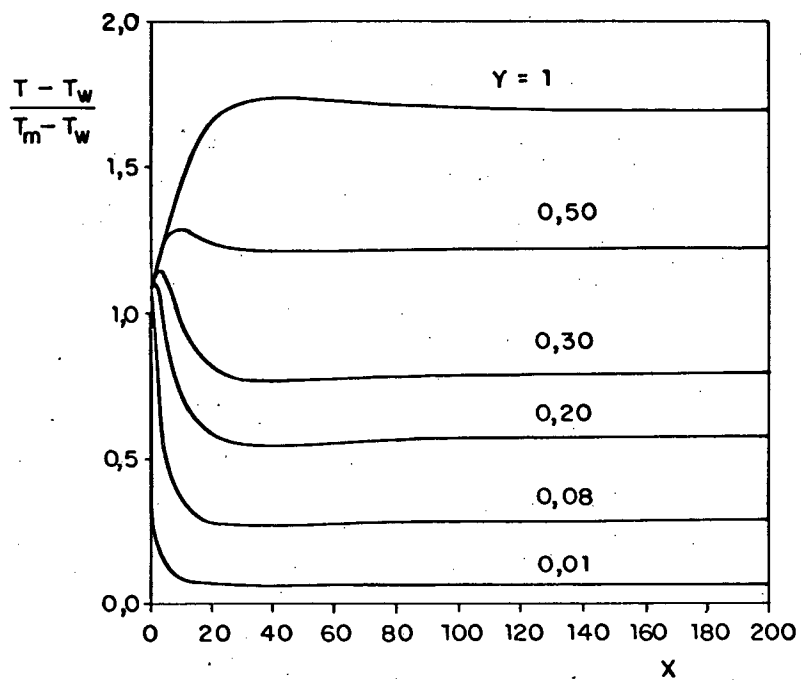


Fig. 6.12 Distribuição de temperatura para  $UR_e = 0,75$ .

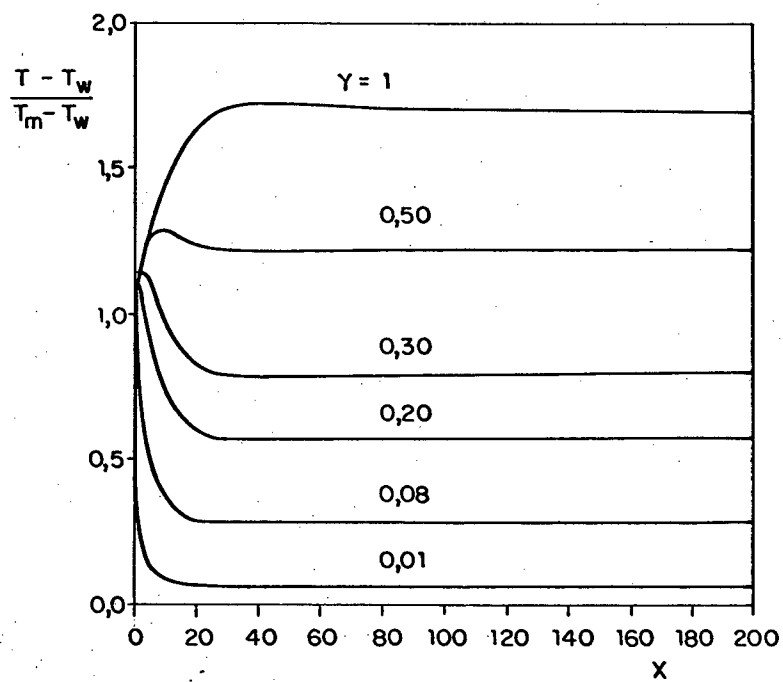


Fig. 6.13 Distribuição de temperatura para  $UR_e = 1,00$ .

Para as posições Y fora desta região observa-se o efeito contrário para as estações iniciais do duto. As curvas de temperatura nestes estágios aumentam, indicando que a diferença  $(T_m - T_w)$  é menor do que a diferença  $(T - T_w)$ . Tal observação foi comentada na secção anterior, quando foi discutido o crescimento da curva de umidade relativa, em virtude da diminuição do valor de  $w_s$ . Próximo à entrada do duto, o fluido localizado junto a linha central do canal não sente o efeito do aquecimento da parede. Desta forma, a quantidade de calor entregue pelo fluido para a evaporação d'água é maior do que a quantidade de calor recebida através da parede. Isto faz com que a temperatura do fluido baixe, aumentando a diferença  $(T - T_w)$ . À medida que se avança no duto, os efeitos da parede aquecida começam a ser sentidos em todas as posições Y. A temperatura do fluido passa, então, a diminuir e estabiliza em um valor correspondente à região térmica plenamente desenvolvida.

Para os valores mais altos de X, todo o fluido se encontra à temperatura de parede.

Testes adicionais mostraram que o desenvolvimento da região térmica, para a situação na qual as paredes do duto se encontram à  $40^\circ\text{C}$ , acontece na mesma distância da entrada do duto. Para um fluido com as seguintes condições de entrada:  $UR_e = 0,75$  e  $T_e = 25^\circ\text{C}$ , os perfis de temperatura obtidos com  $T_w = 30^\circ\text{C}$  e  $40^\circ\text{C}$  são bastante semelhantes. No entanto, para  $T_w = 40^\circ\text{C}$ , os valores da temperatura adimensional para a região próxima à parede (valores de Y pequenos) são sempre maiores do que aqueles para  $T_w = 30^\circ\text{C}$ . Tal fato indica a existência de gradientes de temperatura mais acentuados junto à parede. A diferença  $(T - T_w)$  é maior para  $T_w$  maior, uma vez que a temperatura de entrada do fluido é a mesma em ambos os casos. Este resultado está refletido no valor do número de Nusselt, como será visto na secção seguinte.

A figura 6.14 apresenta os perfis de temperatura para o fluido

que entra no duto com umidade relativa igual a 25% e com  $B=10^5$ . As curvas de temperatura para este caso se assemelham bastante com as curvas anteriores, para  $B=10^7$ . No entanto, sendo a vazão de fluido menor, os perfis de temperatura convergem a um valor correspondente à região térmica desenvolvida para um valor de  $X$  bem mais próximo à entrada do duto (em torno de  $X=3$ ).

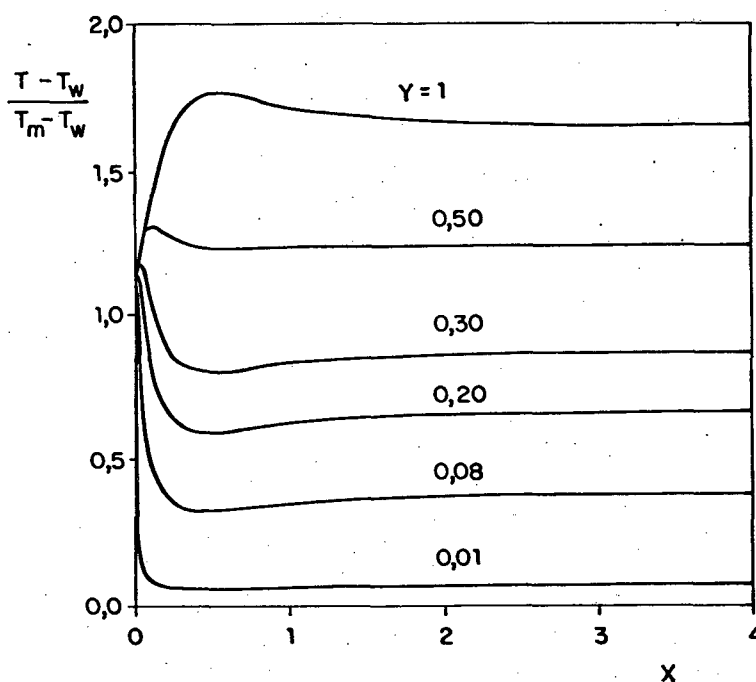


Fig. 6.14 Distribuição de temperatura para  $UR_e=0,25$  e  $B=10^5$ .

#### 6.4 VARIAÇÃO DO NÚMERO DE NUSSELT

O desenvolvimento do número de Nusselt associado à transferência de calor na parede do duto para  $B=10^7$  e para várias umidades relativas de entrada está mostrado na figura 6.15.

Para os casos apresentados nesta figura, a condição de contorno nas paredes do duto é temperatura prescrita. Os valores para o número de Nusselt foram calculados de acordo com a equação definida no capítulo 4, equação 4.3.

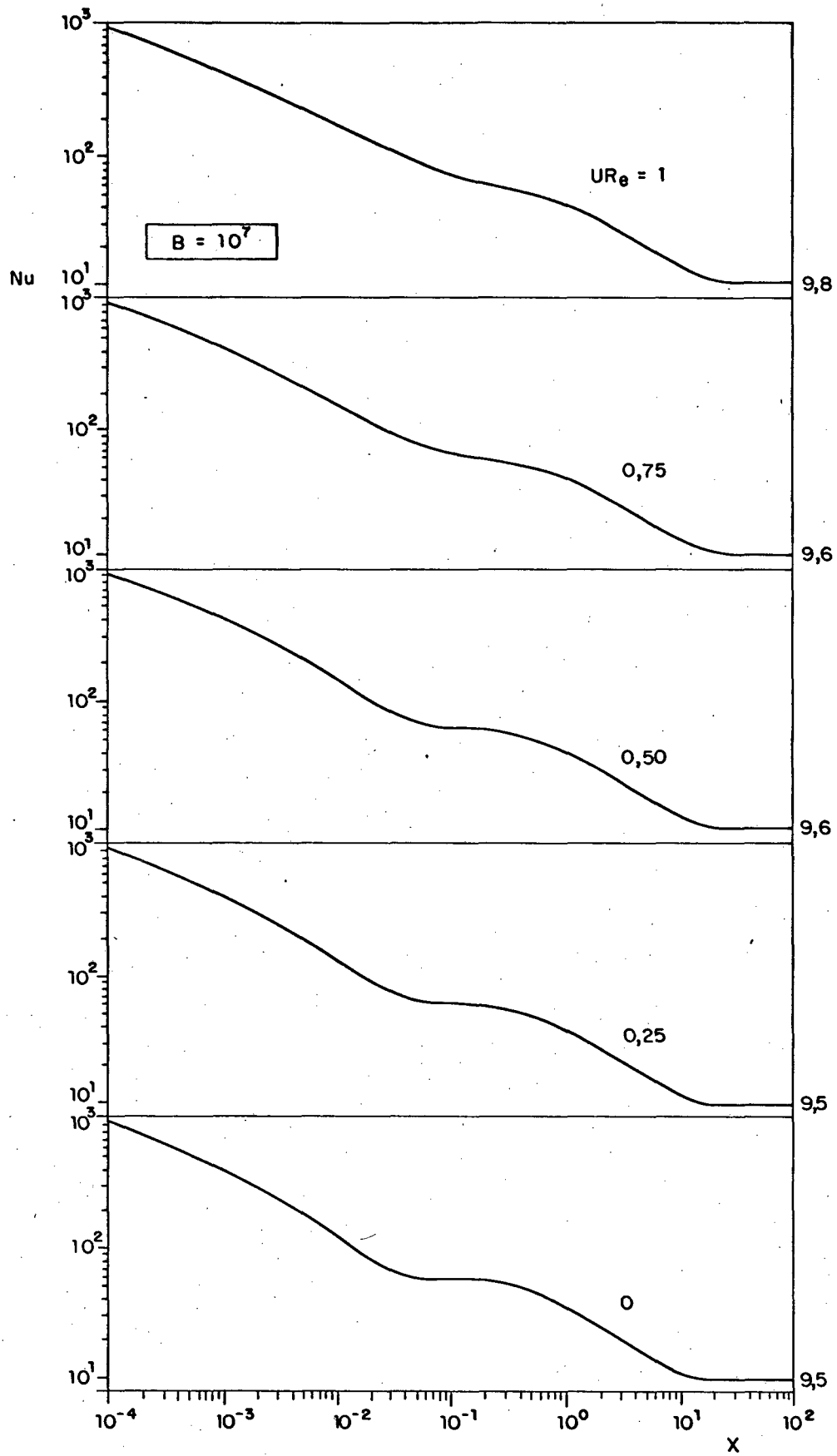


Fig. 6.15 Variação do número de Nusselt para  $B=10^7$ .

Comparando-se as curvas da figura 6.15, observa-se que o valor para o número de Nusselt correspondente à região plenamente desenvolvida é virtualmente o mesmo para todos os casos apresentados. Embora as unidades relativas de entrada do fluido sejam diferentes, as curvas apresentam o mesmo comportamento, indicando que o conteúdo de umidade inicial é um parâmetro de pouca importância para o problema.

Próximo à  $X=0,1$ , as curvas formam um patamar e depois voltam a cair até atingir o valor correspondente à região plenamente desenvolvida. Presentemente não se tem explicação física para a existência deste patamar na curva do número de Nusselt. Quando os mesmos valores são plotados em escala milimétrica, tal fato não é mais observado.

Para a região térmica plenamente desenvolvida, o método numérico apresenta alguma instabilidade e os números de Nusselt calculados começam a oscilar em torno de um valor. Desta forma, o valor de Nusselt correspondente à região térmica plenamente desenvolvida foi estimado como sendo a média dos valores de Nusselt calculados nesta região.

Para uma melhor visualização dos resultados obtidos, a figura 6.16 mostra todas as curvas do número de Nusselt, para diferentes umidades relativas de entrada e para  $B=10^7$ .

A figura 6.17 mostra a variação do número de Nusselt para os seguintes parâmetros:  $B=10^7$ ,  $UR_e=0,75$ ,  $T_e=25^\circ\text{C}$  e  $T_w=40^\circ\text{C}$ . Conforme foi discutido na secção anterior, o comprimento da região de entrada térmica não é visivelmente afetado pelo aumento da temperatura da parede do duto de 30 para  $40^\circ\text{C}$ . No entanto, devido aos maiores gradientes de temperatura que ocorrem junto à parede, o valor do número de Nusselt plenamente desenvolvido é maior para o caso de temperatura de parede maior.



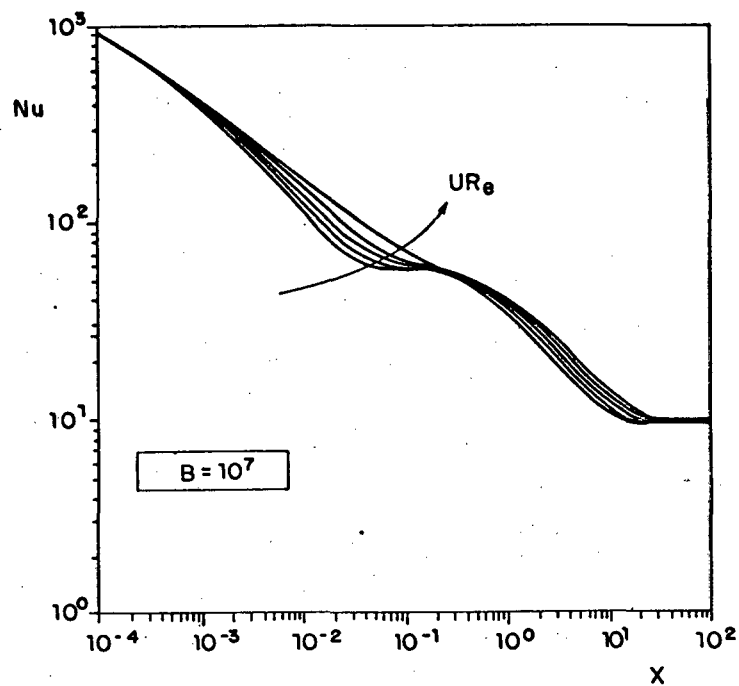


Fig. 6.16 Variação do número de Nusselt para  $B=10^7$  e para várias  $UR_e$ .

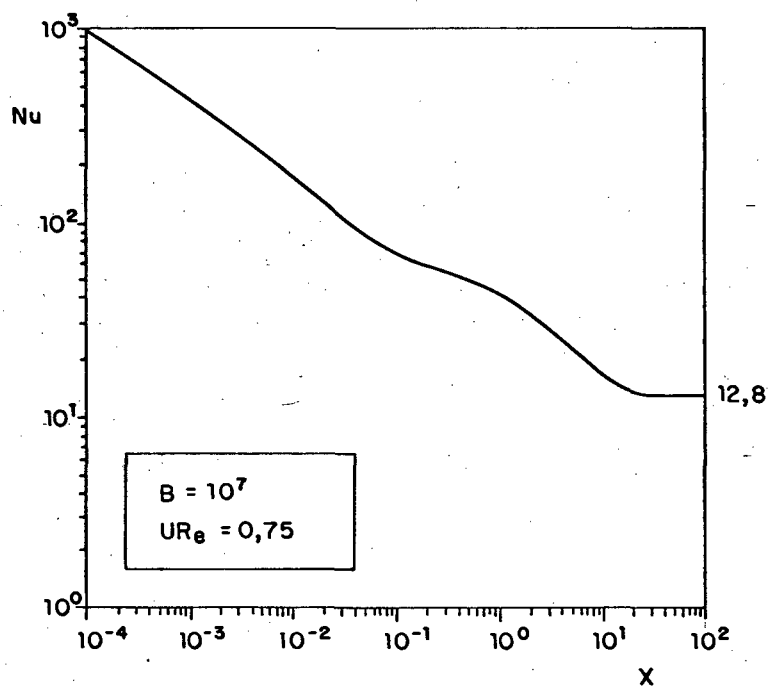


Fig. 6.17 Variação do número de Nusselt para  $UR_e=0,75$  e  $T_w=40^\circ\text{C}$ .

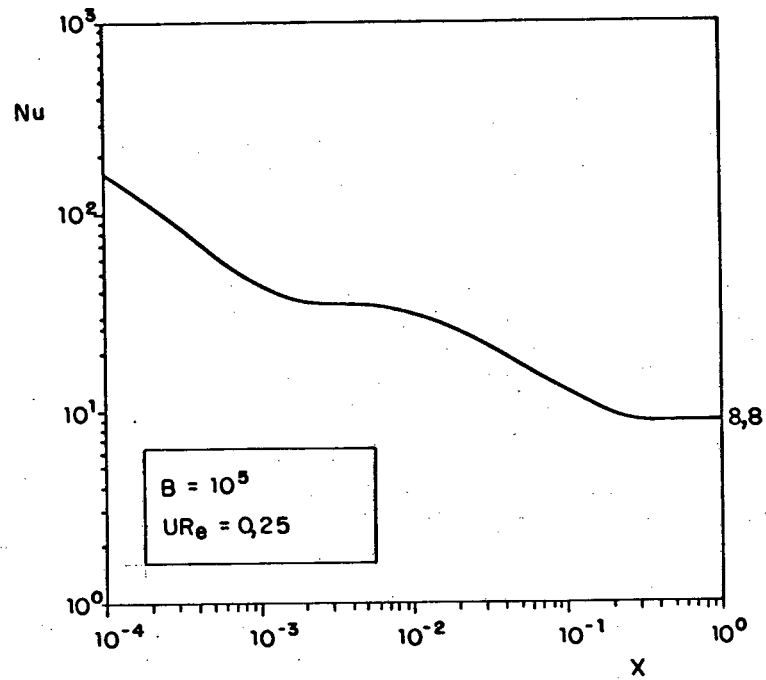


Fig. 6.18 Variação do número de Nusselt para  $UR_e = 0,25$  e  $B = 10^5$ .

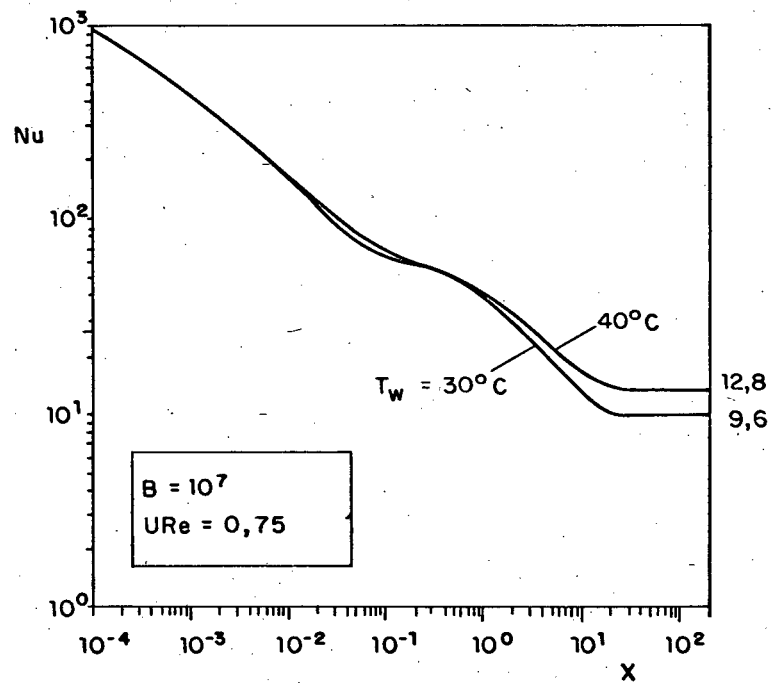


Fig. 6.19 Variação do número de Nusselt com  $T_w$ .

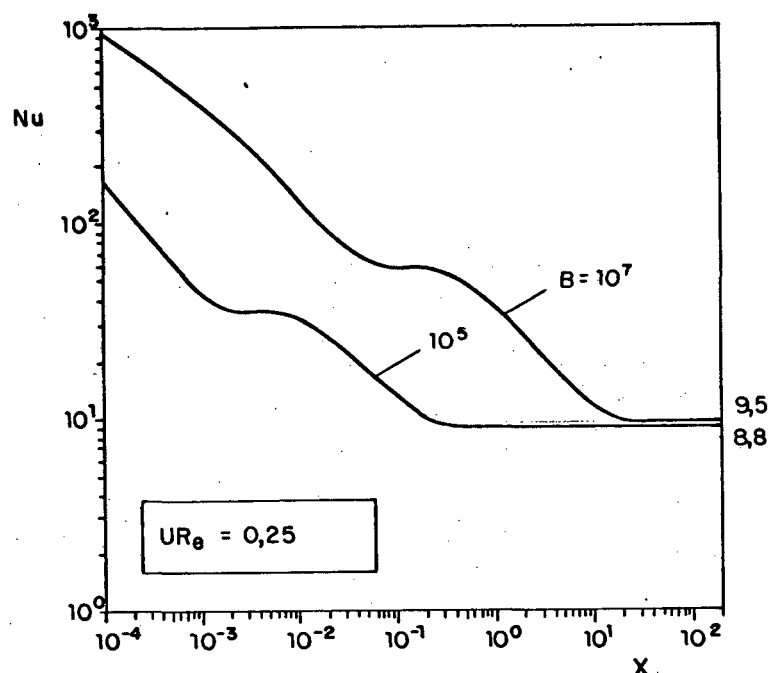


Fig. 6.20 Variação do número de Nusselt com  $B$ .

A figura 6.18 apresenta a variação do número de Nusselt para a umidade relativa de entrada igual a 25% e para o parâmetro que regula a vazão igual a  $10^5$ . Para este caso, o desenvolvimento térmico acontece em uma posição bem mais próxima à entrada do duto com relação aos casos anteriores. Tal fato era esperado, uma vez que a vazão de fluido é bem mais baixa.

As figuras 6.19 e 6.20 fornecem uma comparação do desenvolvimento do número de Nusselt para dois valores da temperatura da parede e do parâmetro  $B$ , respectivamente.

## 6.5 VARIAÇÕES DOS NÚMEROS DE NUSSOLT E SHERWOOD DA MATRIZ

Na figura 6.21 estão mostradas as variações dos números de Nusselt e Sherwood da matriz para vários conteúdos de umidade inicial e

para uma mesma vazão de fluido,  $B=10^7$ . A condição de contorno nas paredes do duto é temperatura prescrita para todos os casos.

As equações utilizadas para o cálculo dos números de Nusselt e Sherwood da matriz são as seguintes,

$$Nu_m = \frac{2H\bar{h}_{fp}}{k_f} = \frac{D}{3\Delta X} \left[ \frac{B\bar{U}(\theta_{m2} - \theta_{m1}) + \Delta X(\partial\theta/\partial Y)|_{Y=0}}{(1-\epsilon_\infty)(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_m)} \right] \quad (6.2)$$

$$Sh_m = \frac{2H\bar{k}_{fp}}{D_f} = \frac{B\bar{U}DLe(w_{m2} - w_{m1})}{3\Delta X(1-\epsilon_\infty)(\bar{w}_s - \bar{w}_m)} \quad (6.3)$$

onde  $\bar{h}_{fp}$  e  $\bar{k}_{fp}$  são coeficientes médios de transferência de calor e massa entre o fluido e a matriz sólida,  $\bar{\theta}_s$ ,  $\bar{\theta}_m$ ,  $\bar{w}_s$  e  $\bar{w}_m$  são uma média aritmética da temperatura de saturação, temperatura de mistura, conteúdo de umidade de saturação e conteúdo de umidade de mistura nas posições 1 e 2. O gradiente de temperatura  $(\partial\theta/\partial Y)|_{Y=0}$  também é avaliado como uma média aritmética entre os valores calculados nas estações 1 e 2. Estas posições representam posições em X arbitrárias no duto e podem ser vistas nas figuras 4.6 ou 5.6.

As equações anteriores fornecem os valores médios dos números de Nusselt e Sherwood da matriz para a região limitada pelas posições 1 e 2 e representam as transferências de calor e umidade entre o fluido e a matriz sólida. Deve-se notar que valores positivos de Nu representam transferência de calor do fluido para a matriz sólida ao passo que valores positivos de Sh representam transferência de massa da matriz para o fluido.

Para os gráficos desta secção, o valor de X correspondente aos valores de  $Nu_m$  e  $Sh_m$  calculados pelas equações (6.2) e (6.3) é dado por  $(X_1 + X_2)/2$ .

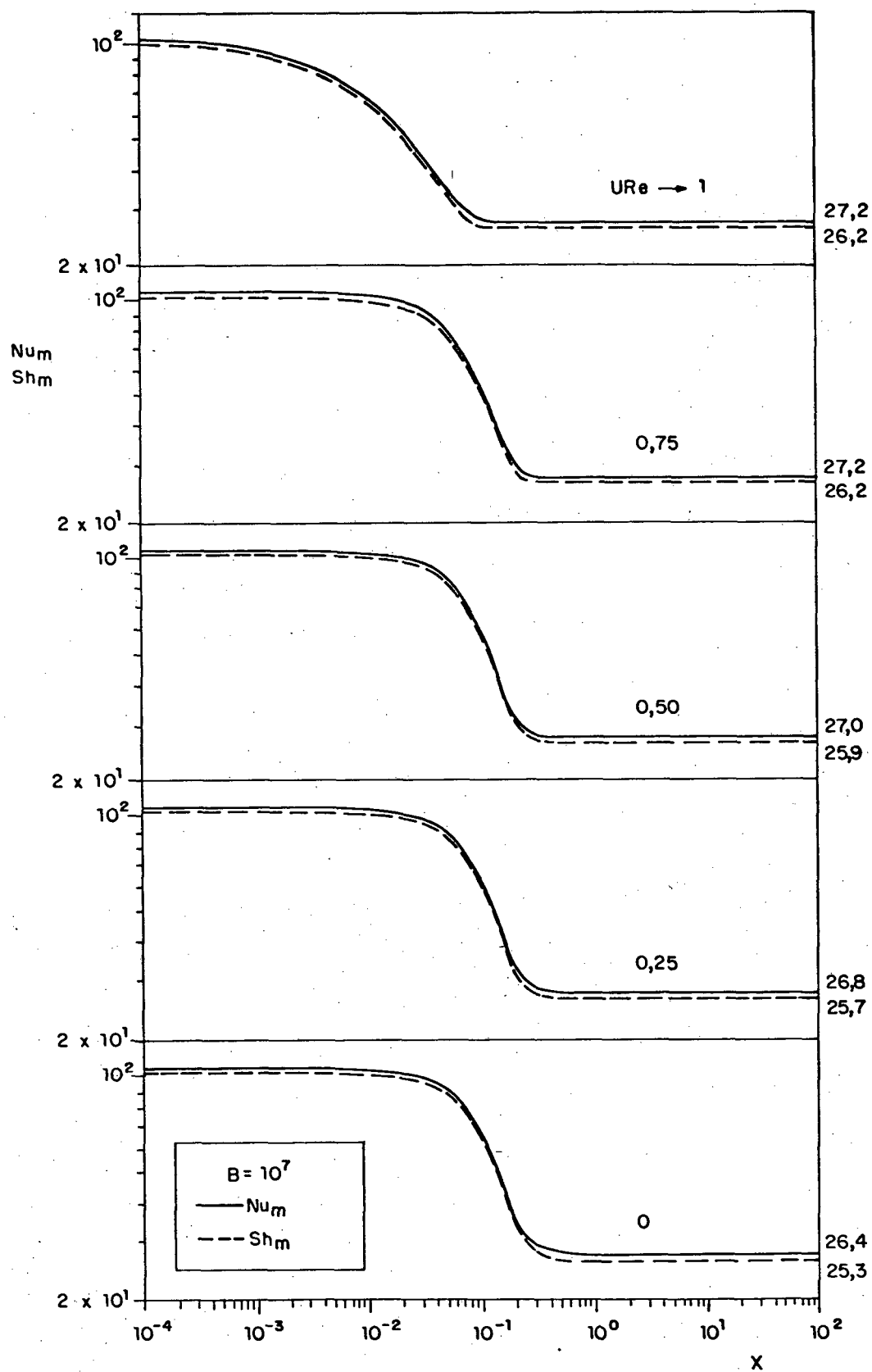


Fig. 6.21 Variação dos números de  $Nu_m$  e  $Sh_m$  para  $B=10^7$ .

Pela figura 6.21 pode-se observar a mesma tendência das curvas de  $Nu_m$  e  $Sh_m$  para umidades relativas variando entre 0 e 75%. Para estes casos,  $Nu_m$  e  $Sh_m$  variam muito pouco com  $X$  nos primeiros estágios, onde as taxas de transferência de calor e massa são elevadas. Os números de Nusselt e Sherwood decrescem então bruscamente e atingem o valor correspondente à região plenamente desenvolvida.

Como era esperado, os valores de  $Nu_m$  são sempre maiores que os valores de  $Sh_m$ . Este fato é decorrente do fluido de trabalho ser o ar, cujos valores para os números de Prandtl e Schmidt são 0,7 e 0,6, respectivamente. Um fato a ser destacado é que independentemente dos problemas térmicos e mássicos serem distintos, uma vez que há transferência de calor e não há transferência de massa das paredes do duto, os mecanismos de transporte associados à matriz sólida são análogos conforme observado pelo comportamento idêntico de  $Nu_m$  e  $Sh_m$ .

À exemplo do que foi observado na secção anterior, para o número de Nusselt representativo das trocas de calor entre o fluido e a parede, para a região térmica plenamente desenvolvida, a umidade relativa de entrada não é um parâmetro importante para o problema.

Para as curvas representativas do conteúdo de umidade relativa igual a 100%, a queda nos valores de  $Nu_m$  e  $Sh_m$  não é tão acentuada quanto nos demais casos, com umidade relativa menor. Para a região plenamente desenvolvida, os valores de  $Nu_m$  e  $Sh_m$  calculados são virtualmente os mesmos. É conveniente esclarecer que a umidade relativa fornecida ao programa é, em realidade, igual a 99%. Quando o valor 100% era fornecido ao programa, as curvas de  $Nu_m$  e  $Sh_m$  apresentavam uma tendência diversa das demais, muito embora os valores para a região plenamente desenvolvida fossem os mesmos.

A figura 6.22 apresenta as curvas de  $Sh_m$  para todas as umidades relativas e para  $B=10^7$ .

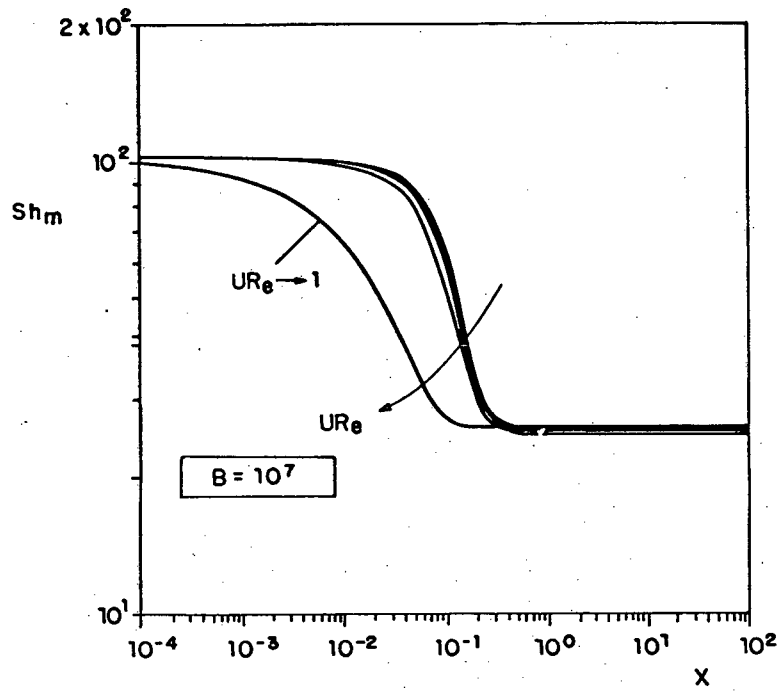


Fig. 6.22 Variação do número de  $Sh_m$  para  $B=10^7$  e para várias  $UR_e$ .

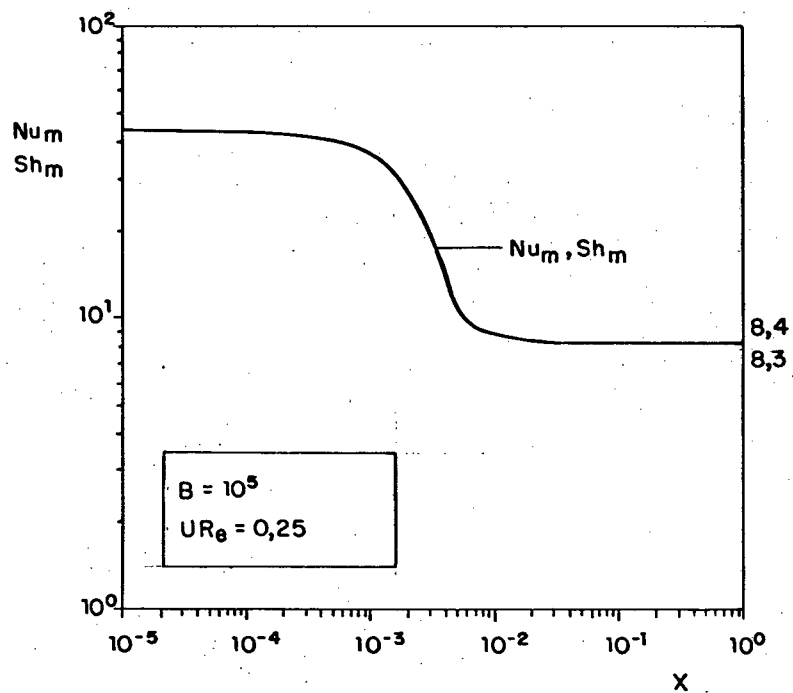


Fig. 6.23 Variação dos números de  $Nu_m$  e  $Sh_m$  para  $UR_e=0,25$  e  $B=10^5$ .

A figura 6.23 apresenta a situação para a qual o fluido possui  $UR_e = 25\%$  e o parâmetro que regula a vazão vale  $10^5$ . Neste caso as curvas de  $Nu_m$  e  $Sh_m$  atingem o valor plenamente desenvolvido em uma posição mais próxima à entrada do duto, uma vez que a vazão de fluido é mais baixa. De acordo com o esperado, os valores de Nusselt e Sherwood são menores do que os valores para o caso de  $B=10^7$ . As velocidades maiores desta situação intensificam o processo evaporativo e as trocas de calor entre o fluido, a parede e as partículas. Sendo assim, os números de  $Nu_m$  e  $Sh_m$  aumentam com o aumento do parâmetro B.

Fato a ser destacado na figura 6.23 diz respeito à coincidência das curvas de  $Nu_m$  e  $Sh_m$ , muito embora para a situação em questão  $Pr$  seja diferente de  $Sc$ .



## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado uma análise do fenômeno da transferência de calor e massa, por convecção forçada, em um duto contendo um meio poroso saturado. O meio poroso em estudo é constituído de partículas esféricas compactas (não porosas) e encontra-se confinado por duas placas paralelas aquecidas e impermeáveis ao fluxo de massa.

Antecedendo o estudo do problema conjugado da transferência de calor e massa, desenvolveu-se a análise individual dos problemas hidrodinâmico, térmico e mássico. Para a obtenção do campo de velocidade, necessário para o cálculo das grandezas de interesse, fêz-se uso da lei de Darcy modificada. O modelo utilizado para a descrição do fluxo computa os efeitos de inércia do escoamento, a condição de não deslizamento nas fronteiras sólidas, o atrito e a variação da porosidade do meio.

O problema térmico, na ausência de transferência de massa, foi analisado sob dois aspectos. Numa primeira etapa, desenvolveu-se a equação da energia considerando-se equilíbrio térmico entre o fluido e as partículas. Nas paredes do duto, duas condições de contorno foram impostas: temperatura e fluxo de calor uniformes.

Da análise dos resultados deste modelo, as seguintes conclusões puderam ser obtidas:

- a inclusão da porosidade variável na equação da quantidade de movimento altera significativamente o perfil de velocidade, com relação àquele previsto por Darcy. Tal alteração está caracterizada pelo surgimento de canais preferenciais de escoamento de fluido, próximo às

paredes do duto. As velocidades mais altas desta região aumentam o gradiente de calor na fronteira e, desta forma, levam a valores de número de Nusselt mais elevados.

- relativamente aos valores encontrados com o uso da equação de Darcy, observou-se que o modelo que atenta para os efeitos de inércia, porosidade variável e fricção de Brinkman aumenta a transferência de calor em torno de 13 a 26% para os casos de temperatura e fluxo de calor, respectivamente.

- verificou-se que o termo de inércia da equação da quantidade de movimento só é importante para escoamentos à altas velocidades, quando então observam-se alterações nas quantidades calculadas. Tal termo está associado ao parâmetro B, o qual regula a vazão de fluido no duto.

- a dependência dos valores do número de Nusselt, correspondentes à região plenamente desenvolvida, com o parâmetro B mostrou que à medida que B aumenta o número de Nusselt diminui.

- observou-se que um aumento na relação entre o diâmetro das partículas e a distância H, leva a valores do número de Nusselt mais elevados em consequência do aumento da permeabilidade do meio.

- a exemplo do que ocorre em escoamentos confinados sem a presença de uma matriz sólida, verificou-se que a transferência de calor junto à parede é maior para o caso onde a condição de fluxo é aplicada, relativamente ao caso onde tem-se uma temperatura prescrita nas placas do duto.

- os resultados para o comprimento da região de entrada térmica e para o número de Nusselt tem boa concordância com os apresentados em [08]. O presente modelo, no entanto, calcula valores para o número de Nusselt abaixo dos resultados experimentais obtidos em [14].

- concluiu-se que variações nos valores dos parâmetros de Forchheimer, A, permeabilidade, K, e constante  $\lambda_2$  são pouco significativas no cálculo do número de Nusselt.

Num segundo aspecto, analisou-se o problema térmico considerando-se a presença de geração de energia na matriz sólida. Neste caso, o fluido trocava calor tanto com as partículas como com as paredes do duto. Foram comparados resultados considerando-se duas situações para a condutividade térmica efetiva: a condutividade térmica é constante e a condutividade térmica é variável com a porosidade. Definiu-se um número de Nusselt associado às trocas de calor entre o fluido e as partículas, o qual denominou-se de número de Nusselt da matriz. As principais conclusões obtidas com este modelo foram:

- a inclusão da variação da condutividade térmica com a porosidade diminui a transferência de calor em torno de 24% relativamente aos valores encontrados no número de Nusselt para o caso no qual considerou-se a condutividade térmica efetiva constante.

- os resultados dos perfis de temperatura mostraram que o problema pode ser entendido como o de um duto cujas paredes encontram-se submetidas à temperaturas distintas. Neste caso, uma das paredes é a própria parede do duto mantida a  $\theta_w$  e a outra é uma parede constituída de partículas mantidas a  $\theta_s$ . O fluido próximo às fronteiras sólidas tende a  $\theta_w$  e afastado destas, tende a  $\theta_s$ .

- observou-se que os perfis de temperatura e o valor do número de Nusselt, quando o regime se torna plenamente desenvolvido, são independentes dos níveis de temperatura envolvidos (temperaturas da parede e matriz sólida), tal como era esperado.

- relativamente aos valores obtidos para o número de Nusselt da matriz, observou-se que os resultados encontrados para a equação que considerou a condutividade térmica efetiva constante, foram 18% maiores que aqueles obtidos com a condutividade térmica variável com a porosidade. Ao atingir o regime térmicamente desenvolvido, o número de Nusselt da matriz passa a depender do valor de  $\theta_s$ .

Na formulação do problema da transferência de massa, o fluido era uma mistura de ar e vapor d'água e as partículas que constituíam o meio encontravam-se úmidas em sua superfície. Desta forma, o ar ao escoar pela matriz sólida tinha o seu conteúdo de umidade aumentado pela evaporação d'água presente nas partículas. Nesta formulação considerou-se o problema isotérmico.

Da análise dos resultados, concluiu-se o seguinte:

- a saturação do fluido ocorre mais lentamente nas áreas próximas à parede do duto (região do canal), muito embora nesta região a velocidade do escoamento seja mais elevada, o que favorece a evaporação d'água. Na região do canal a vazão de fluido é maior em consequência das altas velocidades e, desta forma, o fluido necessita de uma quantidade de massa d'água maior para ter o seu conteúdo de umidade aumentado até a saturação.

- observou-se que para vazões maiores (valores de B mais elevados), a saturação do fluido ocorre em posições mais avançadas no duto. Tal fato era esperado, uma vez que vazões maiores de fluido requerem mais massa evaporada e assim, saturaram em posições mais distantes da entrada do duto.

- o número de Sherwood da matriz cresce com o aumento do parâmetro B, significando que a transferência de massa entre as partículas e o fluido é maior para vazões mais elevadas, uma vez que as altas velocidades intensificam o processo evaporativo.

- observou-se que para  $B=10^5$ , a área efetiva de evaporação d'água se sobrepõe às altas velocidades encontradas na região do canal, visto que a grandeza  $[6(1-\epsilon)/D^2]Sh_{fp}$  cresce monotonicamente com Y. Para  $B=10^7$ , as altas velocidades correspondentes a maior vazão de fluido se sobrepõe a pequena área evaporativa existente na região próxima à parede.

Para o problema térmico e mássico acoplado, as transferências

de calor e massa ocorrem simultaneamente. O fluido é uma mistura de ar seco e vapor d'água que ao escoar pela matriz sólida tem o seu conteúdo de umidade alterado pela evaporação d'água líquida presente nas partículas. As paredes do duto encontram-se aquecidas e são impermeáveis ao fluxo de vapor d'água.

Do estudo do problema térmico e mássico acoplado, as seguintes conclusões puderam ser obtidas:

- à exemplo do problema isotérmico da transferência de massa, o fluido fora da região do canal satura mais rapidamente, em virtude da velocidade ser menor nesta região. Desta forma, a vazão mais baixa de fluido destas posições requer uma quantidade menor de vapor d'água para ter o seu conteúdo de umidade aumentado até a saturação. Somado a isto, existe o fato da temperatura do fluido diminuir nos estágios iniciais. Para valores de  $Y$  elevados, o fluido demora a sentir o efeito da parede aquecida, de modo que o calor entregue para a evaporação d'água é maior do que o calor recebido da parede, e o fluido tem a sua temperatura diminuída. Em consequência desta temperatura mais baixa, o valor do conteúdo de umidade de saturação diminui, facilitando o aumento da umidade relativa do fluido.

- a região do canal tem a sua umidade relativa inicialmente diminuída pelo aumento de  $w_s$ , em consequência do aumento de temperatura através do aquecimento da parede. Adicionalmente, a vazão de fluido desta região é maior devido à alta porosidade, exigindo uma grande quantidade de água evaporada para ter o seu conteúdo de umidade aumentado. Sendo assim, a saturação do fluido nestas posições ocorre de forma mais lenta.

- a umidade relativa na parede, já no primeiro estágio em  $X$ , é menor do que o valor correspondente ao de entrada. Ocorre que a temperatura na parede é prescrita e o seu valor é maior do que o valor

da temperatura de entrada. Assim, o conteúdo de umidade de saturação na parede é sempre o valor máximo,  $w_s = w_s(T_w)$ . Esta posição é a última a saturar pois o ganho de umidade é devido unicamente à difusão de vapor d'água.

- observou-se que alterações no conteúdo de umidade de entrada e na temperatura da parede do duto não tiveram consequências no cálculo da posição X correspondente à saturação completa do fluido. Somente quando a vazão do fluido era alterada é que observou-se modificações no valor de X. Para vazões menores (B menores), o fluido satura em uma posição mais próxima à entrada do duto. Estes resultados sugerem que B é o único parâmetro relevante para a saturação do fluido.

- quando a condição de fluxo prescrito é imposta nas paredes do duto, a saturação do fluido próximo às paredes não chega a acontecer. A razão  $w/w_s$  permanece constante, indicando o estabelecimento de um regime desenvolvido, no entanto, esta razão é diferente de um. Isto ocorre devido a temperatura do fluido aumentar continuamente em virtude do fluxo de calor imposto nas paredes.

- para diferentes umidades relativas, as curvas obtidas para o número de Nusselt da transferência de calor entre o fluido e a parede forneceram, virtualmente, os mesmos resultados para a região desenvolvida. Muito embora os conteúdos de umidade inicial variem, o valor de Nusselt desenvolvido está em torno de 9,6.

- observou-se que quando a temperatura da parede é aumentada, o resultado obtido para o número de Nusselt é um valor maior, em consequência dos gradientes de temperatura próximos à região da parede serem mais elevados.

- quando a vazão do fluido é diminuída, a região de entrada térmica e o valor do número de Nusselt também diminuem. Tal fato era esperado, uma vez que velocidades menores diminuem os gradientes de temperatura

junto à parede.

- conforme o esperado, os resultados para  $Nu_m$  são sempre maiores que  $Sh_m$ . Tal fato é decorrente do fluido de trabalho ser o ar, cujo valor para o número de Lewis é igual a 0,86.

- observou-se que a umidade relativa não é um parâmetro importante para o problema, pois a região de entrada térmica e os valores de  $Nu_m$  e  $Sh_m$  desenvolvidos pouco se alteram quando este parâmetro é variado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] - H. DARCY, "Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon", Dalmont, Paris, 1856.
- [02] - S. ERGUN, "Fluid Flow Through Packed Columns", Chem. Eng. Progress, vol. 48, n. 2, pp. 89-94, 1952.
- [03] - K. VAFAI e C.L. TIEN, "Boundary and Inertia Effects on Flow and Heat Transfer in Porous Media", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 24, pp. 195-203, 1984.
- [04] - M. KAVIANY, "Laminar Flow Through a Porous Channel Bounded by Isothermal Parallel Plates", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 28, n. 4, pp. 851-858, 1985.
- [05] - K. VAFAI e S.J. KIM, "Forced Convection in a Channel Filled with a Porous Medium: an Exact Solution", Journal of Heat Transfer, vol. 111, pp. 1103-1106, 1989.
- [06] - D. VORTMEYER e J. SCHUSTER, "Evaluation of Steady Flow Profiles in Rectangular and Circular Packed Beds by a Variational Method", Chemical Eng. Science, vol. 38, pp. 851-858, 1985.
- [07] - S.M. WHITE e C.L. TIEN, "Analysis of Flow Channeling Near the Wall in Packed Beds", Wärme- und Stoffübertragung, vol. 21, pp. 291-296, 1987.
- [08] - D. POULIKAKOS e K. RENKEN, "Forced Convection in a Channel Filled with Porous Medium, Including the Effects of Flow Inertia, Variable Porosity, and Brinkman Friction", Journal of Heat Transfer, vol. 109, pp. 880-888, 1987.
- [09] - K. VAFAI, "Convective Flow and Heat Transfer in Variable Porosity Media", Journal of Fluid Mechanics, vol. 147, pp. 233-259, 1984.



- [10] - M.L. HUNT e C.L. TIEN, "Non-Darcian Convection in Cylindrical Packed Beds", Journal of Heat Transfer, vol 110, pp. 378-384, 1988.
- [11] - J.G. GEORGIADIS e I. CATTON, "An Effective Equation Governing Convective Transport in Porous Media", Journal of Heat Transfer, vol. 110, pp. 635-641, 1988.
- [12] - S. WHITAKER, "Local Thermal Equilibrium: an Application to Packed Bed Catalytic Reactor Design", Chemical Engineering Science, vol 41, n. 8, pp. 2029-2039, 1986.
- [13] - K.J. RENKEN e D. POULIKAKOS, "Experiments on Forced Convection from a Horizontal Heated Plate in a Packed Bed of Glass Spheres", Journal of Heat Transfer, vol. 111, pp. 59-65, 1989.
- [14] - K.J. RENKEN e D. POULIKAKOS, "Experiment and Analysis of Forced Convective Heat Transport in a Packed Bed of Spheres", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 31, n. 7, pp. 1399-1408, 1988.
- [15] - R.M. FAND, T.E. STEINBERGER e P. CHENG, "Natural Convection Heat Transfer from a Horizontal Cylinder Embedded in a Porous Medium", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 29, n. 1, pp. 119-133, 1986.
- [16] - J. GEORGIADIS e I. CATTON, "Prandtl Number Effect on Benard Convection in Porous Media", ASME Paper No.84-HT-115, 1984.
- [17] - B. WEI e W. CHONGGI, "Heat Transfer for Laminar Flow Through a Porous Channel with Moisture Vaporization", 1988 ASME Winter Annual Meeting.
- [18] - N. WAKAO e S. KAGUEI, "Heat and Mass Transfer in Packed Beds", Gordon and Breach Publishers Inc., New York, 1982.
- [19] - G.J. VAN WYLEN e R.E. SONNTAG, "Fundamentos da Termodinâmica Clássica", Editora Edgard Blücher Ltda, 1976.
- [20] - S.V. PATANKAR, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Co., New York, 1980.

- [21] - T. CEBECI e P. BRADSHAW, "Physical and Computacional Aspects of Convective Heat Transfer", Springer-Verlag, New York, 1984.
- [22] - T. CEBECI e P. BRADSHAW, "Momentum Transfer in Boundary Layers", Hemisphere Publishing Co., New York, 1977.
- [23] - T. CEBECI, P. BRADSHAW e J.H. WHITELAW, "Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow", Academic Press Inc., New York, 1981.
- [24] - A. BEJAN, "Convection Heat Transfer", Wiley Interscience, 1984.
- [25] - F. KREITH, "Princípios da Transmissão de Calor", Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1977.
- [26] - D.Q. KERN, "Processos de Transmissão de Calor", Editora Guanabara dois S.A., Rio de Janeiro, 1980.
- [27] - J.H. KEENAN, F.G. KEYES, P.G. HILL e J.G. MOORE, "Steam Tables", John Wiley and Sons Inc., New York, 1969.
- [28] - S. ASTAM, M. CHARMCHI e R.A. GAGGIOLI, "Pscyrometric Analysis for Arbitrary Dry-Gas Mixtures and Pressures Using Microcomputers", Ashrae Transactions, 1986, Part 1B, vol. 92.

## APÊNDICE A

### MÉTODO DAS CAIXAS DE KELLER

No capítulo 3 foram apresentadas algumas vantagens computacionais do método das caixas de Keller na solução de equações diferenciais de qualquer ordem. Neste apêndice, serão mostrados os passos envolvidos no processo de solução e a forma de discretização das equações. A equação da energia obtida na secção 3.3.1, equação (3.9), foi escolhida para mostrar o desenvolvimento do método. O procedimento de solução das demais equações é feito de forma análoga.

A idéia básica do método é reduzir as equações governantes em um sistema de primeira ordem. Em seguida, escreve-se as equações resultantes usando-se diferenças centrais para o termos de derivada e médias aritméticas para os demais parâmetros. Após, o método requer que se linearize as equações, caso as mesmas sejam não lineares, e que estas sejam escritas na forma de uma matriz tridiagonal. Finalmente, resolve-se o sistema linear pelo método da eliminação por blocos.

As equações resultantes do sistema linear são escritas para uma rede retangular arbitrária mostrada na figura A.1. Nesta figura as cruces (X) representam pontos conhecidos da solução, os quadrados (■) denotam a solução desconhecida e os círculos (O) mostram o local onde as equações diferenciais são posicionadas. O sistema de equações escolhido para representar o método é o seguinte:

$$\Theta = \frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad (3.8)$$

$$\theta' - \frac{BU\theta}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} = BU \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{BU}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad (3.9)$$

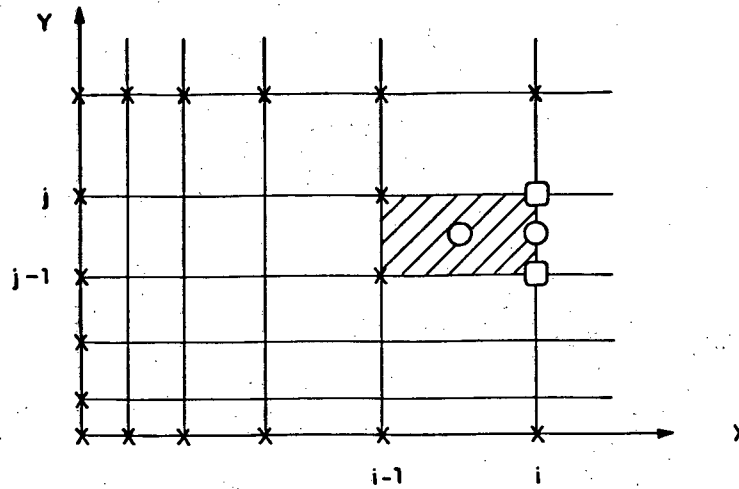


Fig. A.1 Rede retangular arbitrária

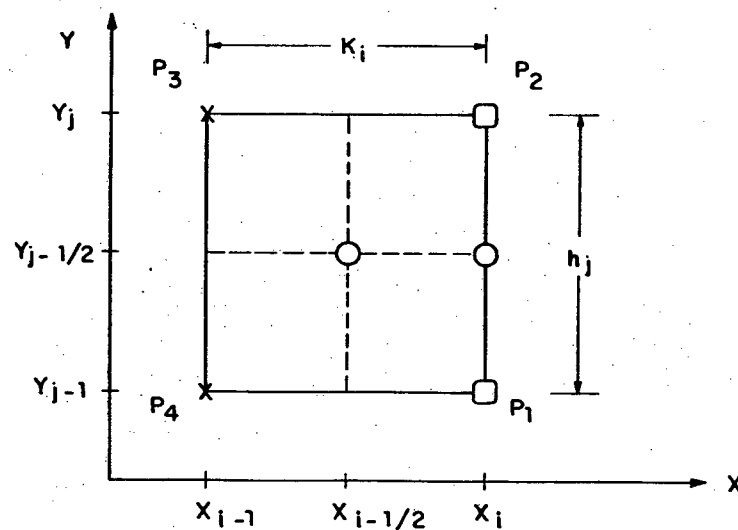


Fig. A.2 Caixa de Keller.

Sendo o sistema anterior um sistema de primeira ordem, o procedimento a ser seguido é escrever as equações diferenciais para o

retângulo desenhado na figura A.2.

A equação (3.8) é centrada no segmento P1P2( $X_1, Y_{j-1/2}$ ), e a equação (3.9) é centrada no ponto médio do retângulo P1P2P3P4( $X_{i-1/2}, Y_{j-1/2}$ ).

Tomando-se como exemplo a quantidade  $\theta$ , utiliza-se a seguinte notação:

$$\begin{aligned}\theta_j^{i-1/2} &= \frac{1}{2} \left[ \theta_j^i + \theta_j^{i-1} \right] \\ \theta_{j-1/2}^i &= \frac{1}{2} \left[ \theta_j^i + \theta_{j-1}^i \right]\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\left[ \theta \right]_{j-1/2}^{i-1/2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\theta_j^i - \theta_{j-1}^i}{h_{j-1}} + \frac{\theta_j^{i-1} - \theta_{j-1}^{i-1}}{h_{j-1}} \right]$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial X} \right]_{j-1/2}^{i-1/2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\theta_j^i - \theta_j^{i-1}}{k_i} + \frac{\theta_{j-1}^i - \theta_{j-1}^{i-1}}{k_i} \right]$$

De acordo com esta notação, a equação (3.8) discretizada em ( $X_1, Y_{j-1/2}$ ) assume a forma:

$$\theta_j^i - \theta_{j-1}^i - \frac{h_{j-1}}{2} \left[ P_j^i + P_{j-1}^i \right] = 0\tag{A.2}$$

E para a equação da energia (3.9), o qual foi centrada no ponto ( $X_{i-1/2}, Y_{j-1/2}$ ) escreve-se:

$$(S_1)_j P_j^i + (S_2)_j P_{j-1}^i + (S_3)_j \theta_j^i + (S_4)_j \theta_{j-1}^i = R_{j-1/2}^{i-1}\tag{A.3}$$

onde,

$$\begin{aligned}
(S_1)_j &= 1/h_{j-1} \\
(S_2)_j &= -1/h_{j-1} \\
(S_3)_j &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k_i} (U_j + U_{j-1/2}) \right] \\
(S_4)_j &= -\frac{1}{2} \left[ (U_{j-1} + U_{j-1/2}) \right] \\
R_{j-1/2}^{i-1} &= \frac{P_j^i - P_{j-1}^i}{h_{j-1}} - \frac{1}{k_i} \left[ (U\theta)_{j-1/2}^{i-1} + U_{j-1/2} \theta_{j-1/2}^{i-1} \right]
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Como já discutido na secção 3.3.1, os termos que envolvem a derivada de  $\phi$  em relação a  $X$ , na equação (3.9), são nulos para as condições uniformes de temperatura e de fluxo do problema. Tais termos foram, portanto, aqui omitidos.

É importante observar que o lado esquerdo da equação (A.3) representa as quantidades  $P$  e  $\theta$  desconhecidas, localizadas na posição  $X_i$ , enquanto que o lado direito representa os valores já calculados em  $X_{i-1}$ .

A velocidade adimensional,  $U$ , é escrita somente em termos dos pontos  $j$ , ou seja, somente em termos da coordenada  $Y$ . O campo de velocidade foi considerado plenamente desenvolvido na entrada do canal, de maneira que  $U$  não depende da posição  $i$ .

O sistema composto pelas equações (3.8) e (3.9) e pelas condições de contorno (3.14) é linear, portanto, o procedimento de linearização exigido pelo método não é necessário. Deste modo, pode-se escrever diretamente as equações na forma matricial,

$$\begin{array}{l}
 \text{C.C.} \\
 \text{(A.2)} \\
 \text{(A.3)}
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{cccccc}
 \theta_1 & \theta_1 & \theta_j & \theta_j & \theta_J & \theta_J \\
 \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & & \\
 -1 & -h_{1/2} & 1 & -h_{1/2} & & \\
 (S_4)_j & (S_2)_j & (S_3)_j & (S_1)_j & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & -h_{j/2} & 1 & -h_{j/2} \\
 & & (S_4)_J & (S_2)_J & (S_3)_J & (S_1)_J \\
 & & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2
 \end{array} \right] x$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ P \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}_1 \\
 \begin{bmatrix} \theta \\ P \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}_j \\
 \begin{bmatrix} \theta \\ P \end{bmatrix}_J = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}_J$$

(A.5)

onde,

$$\begin{array}{l}
 (r_1)_1 = \gamma_1 \quad , \quad (r_1)_j = R_{j-1/2}^{i-1} \quad \text{para } 2 \leq j \leq J \\
 (r_2)_j = 0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq J-1 \\
 (r_2)_J = \gamma_2
 \end{array}
 \tag{A.6}$$

As condições de contorno na matriz na parede e na linha central do canal, isto é, em  $j=1$  e em  $j=J$ , são escritas de maneira a tornar possível a escolha entre temperatura e fluxo de calor prescrito. Assim, para  $j=1$ , tem-se:





$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \delta_j \\ \cdot \\ \delta_{j-1} \\ \delta_j \end{bmatrix} ; \quad r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ r_j \\ \cdot \\ r_{j-1} \\ r_j \end{bmatrix}$$

As matrizes quadradas 2x2  $A_j$ ,  $B_j$ , e  $C_j$  são assim definidas:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -1 & -h_{1/2} \end{bmatrix} ; \quad A_j = \begin{bmatrix} (S_3)_j & (S_1)_j \\ -1 & -h_{1/2} \end{bmatrix} \quad 2 \leq j \leq J-1$$

$$A_J = \begin{bmatrix} (S_3)_J & (S_1)_J \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} ; \quad B_j = \begin{bmatrix} (S_4)_j & (S_2)_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2 \leq j \leq J-1$$

$$C_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -h_{1/2} \end{bmatrix} \quad (A.11)$$

As matrizes  $\delta$  e  $r$  são escritas como:

$$r_1 = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ (r_2)_1 \end{bmatrix} ; \quad r_j = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} \theta \\ P \end{array} \right] \end{bmatrix} \quad 2 \leq j \leq J \quad (A.12)$$



onde  $I$  é a matriz identidade de ordem 2.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

e  $\Gamma_j$  e  $A_j$  são matrizes  $2 \times 2$  definidas da forma descrita a seguir. A matriz  $\Gamma_j$  tem a mesma estrutura de  $B_j$ , isto é,

$$\Gamma_j = \begin{bmatrix} (\gamma_{11})_j & (\gamma_{12})_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

e a segunda linha de  $A_j$  tem a mesma estrutura da segunda linha de  $A_j$ ,

$$A_j = \begin{bmatrix} (\alpha_{11})_j & (\alpha_{12})_j \\ -1 & -h_{j/2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Ainda, para  $j=J$ , a última linha da matriz  $A_j$  corresponde as condições de contorno,  $(\beta_1, \beta_2)$ .

Procedendo-se formalmente com a operação de multiplicação de matrizes, de (A.14) obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= A_1 \\ \Gamma_j \Delta_{j-1} &= B_j \quad 2 \leq j \leq J \\ \Delta_j &= A_j - \Gamma_j C_{j-1} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo a equação (A.13) na equação (A.9):

$$L U \delta = r \quad (\text{A.19})$$



$$\begin{bmatrix} \Delta_1 & C_1 & & & & \\ & \Delta_2 & C_2 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \Delta_j & C_j & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \Delta_{j-1} & C_{j-1} \\ & & & & & & \Delta_j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \delta_j \\ \cdot \\ \delta_{j-1} \\ \delta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ w_2 \\ \cdot \\ w_j \\ \cdot \\ w_{j-1} \\ w_j \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

Procedendo-se o cálculo proposto pela equação (A.25), obtem-se:

$$\Delta_j \delta_j = w_j \quad (\text{A.26})$$

$$\Delta_j \delta_j = w_j - C_j \delta_{j+1} \quad J = J - 1 ; J-2, \dots, 1$$

Os valores desconhecidos  $\delta_j$ , podem, então, ser calculados.

Resumindo, o método da eliminação por blocos consiste em duas etapas. Na primeira etapa computam-se as matrizes  $\Gamma_j$ ,  $\Delta_j$ , e  $w_j$  através das fórmulas de recorrência dadas por:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 = A_1 \\ \Gamma_j \Delta_{j-1} = B_j \\ \Delta_j = A_j - \Gamma_j C_{j-1} \end{array} \right\} \quad 2 \leq j \leq J \quad (\text{A.27})$$

$$w_1 = \Gamma_1$$

$$w_j = \Gamma_j - \Gamma_j w_{j-1} \quad 2 \leq j \leq J$$

Na segunda etapa,  $\delta_j$  é computado através das seguintes fórmulas de recorrência:

$$\Delta_j \delta_j = w_j \quad (\text{A.24})$$

$$\Delta_j \delta_j = w_j - C_j \delta_{j+1} \quad J = J-1, J-2, \dots, 1 \quad (\text{A.28})$$

## APÊNDICE B

### VALORES E EQUAÇÕES PARA AS PROPRIEDADES FÍSICAS RELATIVAS AO PROBLEMA TÉRMICO E MÁSSICO ACOPLADO

Conforme foi visto no capítulo 3, quando os problemas térmico e mássico são resolvidos simultaneamente, a equação que fornece a temperatura de saturação não pode ser escrita em função de variáveis ou números adimensionais. Desta forma, é necessário que se forneçam os valores e as expressões para o cálculo dos parâmetros dimensionais.

As equações da temperatura e da umidade de saturação são repetidas abaixo:

$$\theta_s = \theta + \frac{Sh_{fp} H_{fg} (w_s - w)}{Le T_e \phi c_{pf} \left[ Nu_{fp} - \frac{Sh_{fp} c_{pv}}{Le c_{pf}} (w_s - w) \right]} \quad (3.36)$$

$$w_s = 0,62198 \frac{P_s(\theta_s)}{P_a - P_s(\theta_s)} \quad (2.25)$$

Para a solução destas equações, os valores do calor latente de vaporização,  $H_{fg}$ , da capacidade calorífica do ar,  $c_p$ , e da capacidade calorífica do vapor,  $c_{pv}$ , são considerados constantes e estão fornecidos abaixo, [27],

$$H_{fg} = 2440 \quad (\text{KJ/Kg})$$

$$c_{pf} = 1,005298 + (1,54554 \times 10^{-5}) T_e + (4,083734 \times 10^{-7}) T_e^2 \quad (\text{kJ/kg } ^\circ\text{C})$$

$$c_{pv} = 1,95 \quad (\text{KJ/Kg } ^\circ\text{C}) \quad (\text{B.1})$$

onde  $T_e$  é dada em  $^\circ\text{C}$ .

Para o cálculo da pressão de saturação necessária na equação (2.25), a seguinte expressão foi utilizada [28],

$$\beta = \exp \left[ \frac{1}{T_*} \frac{\sum_{n=1}^5 C_n (1 - T_*)^n}{1 + C_9(1 - T_*) + C_7(1 - T_*)^2} - \frac{(1 - T_*)}{C_8(1 - T_*)^2 + C_9} \right] \quad (\text{B.2})$$

onde os valores das constantes  $C_n$  são,

$$\begin{aligned} C_1 &= - 7,691234564 \\ C_2 &= - 26,08023696 \\ C_3 &= - 168,1706546 \\ C_4 &= 64,23285505 \\ C_5 &= - 118,9646225 \\ C_6 &= 4,167117320 \\ C_7 &= 20,9750676 \\ C_8 &= 10^9 \\ C_9 &= 6,0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

e a temperatura adimensional  $T_*$ , e pressão adimensional  $\beta$ , são respectivamente,

$$T_* = \frac{T_s}{T_c} \quad ; \quad \beta = \frac{P_s}{P_c} \quad (\text{B.4})$$

e  $T_c = 647,3 \text{ K}$  e  $P_c = 22120,0 \text{ KPa}$ .

A umidade de saturação  $w_s$ , e a pressão de saturação  $P_s$ , estão relacionadas através da expressão:

$$w_s = \frac{M_v}{M_{ar}} \frac{P_s}{P_a - P_s} \quad (\text{B.5})$$

onde  $M_v$  é a massa molecular do vapor d'água,  $M_{ar}$  é a massa molecular do ar e  $P_a$  é a pressão atmosférica. Os valores para a expressão acima são os que seguem [19,28],

$$\begin{aligned} M_v &= 18,01534 && (\text{kg/kg mol}) \\ M_{ar} &= 28,9645 && (\text{kg/kg mol}) \\ P_a &= 101,42 && (\text{kPa}) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Desta forma, a equação da umidade de saturação fica:

$$w_s = 0,62198 \frac{P_s}{101,42 - P_s} \quad (\text{B.7})$$