

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS SÓLIDOS PARA PROBLEMAS
COM NÃO-LINEARIDADES GEOMÉTRICA E MATERIAL.

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

JUN SÉRGIO ONO FONSECA

FLORIANÓPOLIS, OUTUBRO DE 1990

UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS SÓLIDOS PARA PROBLEMAS
COM NÃO-LINEARIDADES GEOMÉTRICA E MATERIAL

JUN SÉRGIO ONO FONSECA

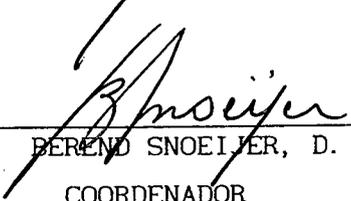
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO, APROVADA
EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.

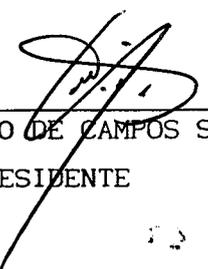

CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE, Ph. D.

ORIENTADOR


BEREND SNOEIJER, D. Ing.

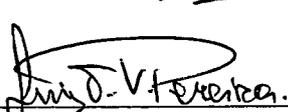
COORDENADOR

BANCA EXAMINADORA:


CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE, Ph. D.

PRESIDENTE


CLOVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph. D.


LUIZ TEIXEIRA DO VALE PEREIRA M. ENG. MEC.

AGRADECIMENTOS

- À CAPES, pelo apoio financeiro,
- ao professor Carlos A.C. Selke, pela amizade, formação e orientação,
- aos professores Clóvis S. de Barcellos e Paulo César Phillipi, pela formação,
- à Keiko, Ken, Juli, Esther e Alfredo, pelo apoio,
- ao Sabedotti e à Leila, pela motivação,
- ao Carlos, Tancredo, Jorge, Sueli, Vera, Nadir e Rita, pela amizade,
- à turma do "Mar de Lama", com Bosco, Resin, Eduardo, Amyr, Maurício, Jucélio e Forcellini, entre tantos outros, pela alegria e descontração,
- à Verinha, pela simpatia,
- aos amigos do GRANTE.

ÍNDICE

RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	ix
SIMBOLOGIA	x
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - ELASTICIDADE NÃO-LINEAR	1
1.2 - HISTÓRICO	3
1.3 - ELEMENTOS FINITOS APLICADOS À HIPERELASTICIDADE	5
1.4 - MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DA ELASTICIDADE FINITA	7
CAPÍTULO 2 - NOÇÕES DE ELASTICIDADE FINITA	9
2.1 - CINEMÁTICA E DEFORMAÇÕES DO PROCESSO INCREMENTAL	9
2.1.1 - INTRODUÇÃO	9
2.1.2 - DEFORMAÇÕES	11
2.1.3 - INVARIANTES DOS TENSORES DE DEFORMAÇÃO	14
2.2 - TENSÕES	15
2.3 - PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS	17
2.4 - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA	19
CAPÍTULO 3 - EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS	21
3.1 - TEORIAS CONSTITUTIVAS PARA A ELASTICIDADE FINITA	21
3.2 - INVARIÂNCIA COM MOVIMENTOS DE CORPO RÍGIDO	22
3.3 - ISOTROPIA	24
3.4 - INCOMPRESSIBILIDADE	24

3.5 - FORMAS PARA A FUNÇÃO ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	25
3.6 - APLICAÇÃO À FORMULAÇÃO INCREMENTAL	28
CAPÍTULO 4 - FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DO PROBLEMA DE HIPERELASTICIDADE	31
4.1 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	31
4.2 - APROXIMAÇÃO DE GALERKIN	34
4.3 - DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA DE HIPERELASTICIDADE	36
4.4 - HIPERELASTICIDADE INCOMPRESSÍVEL	39
4.5 - DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES PENALIZADAS	42
4.6 - ESCOLHA DE UM ELEMENTO FINITO	45
4.7 - ORDEM DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	47
CAPÍTULO 5 - RESULTADOS	48
5.1 - PROBLEMAS COM NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA	48
5.1.1 - FLEXÃO NÃO-LINEAR DE UMA VIGA	48
5.1.2 - FLEXÃO NÃO-LINEAR DE UM TUBO	52
5.2 - PROBLEMAS COM NÃO-LINEARIDADES GEOMÉTRICA E MATERIAL EM INCOMPRESSÍVEIS	56
5.2.1 - EXTENSÃO DE UMA BARRA HIPERELÁSTICA	57
5.2.2 - COMPRESSÃO DE UM BLOCO HIPERELÁSTICO	60
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	62
REFERÊNCIAS	65

RESUMO

Uma formulação incremental lagrangiana atualizada é usada na obtenção de elementos finitos sólidos isoparamétricos de 8 e 20 nós, para a resolução de problemas estáticos com não-linearidades geométrica e material. Os materiais hiperelásticos considerados são o de Mooney-Rivlin e o Neo-hookeano. A incompressibilidade inerente a estes materiais é relaxada através do método da penalização. Como aplicações são resolvidos os problemas de flexão de uma viga para o caso de grandes deslocamentos, de flexão de um tubo, onde investiga-se o efeito de Brazier, de tração de uma barra hiperelástica e de compressão de um bloco hiperelástico.

ABSTRACT

An updated lagrangian incremental formulation is used in developing an eight node and a twenty node isoparametric solid element, for modelling geometrical and material nonlinear static problems. The Neo-Hookean and the Mooney-Rivlin hyperelastic materials are considered. The problems arising from the inherent incompressibility of these materials are avoided by using the penalty method. The problems solved as examples are the bending of a beam undergoing large deflections, the bending of a tube, where the Brazier effect is investigated, the extension of a hyperelastic bar, and the compression of a hyperelastic block.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Cinemática do processo incremental	10
Figura 2 - Definição do problema	32
Figura 3 - Elementos Finitos Hexaédricos de 8 e 20 nós	46
Figura 4 - Flexão de uma viga em balanço	49
Figura 5 - Modelo de elementos finitos de uma viga	50
Figura 6 - Deflexões transversal e axial de uma viga em balanço com carga transversal P	51
Figura 7 - Flexão de um tubo	53
Figura 8 - Flexão de um tubo: configurações inicial e final	53
Figura 9 - Ovalização da seção transversal	54
Figura 10 - Flexão não-linear de um tubo	55
Figura 11 - Extensão de uma barra hiperelástica	57
Figura 12 - Modelo de barra hiperelástica: configurações inicial e final	58
Figura 13 - Tensão normal e pressão na extensão de uma barra hiperelástica	59
Figura 14 - Compressão de um bloco cilíndrico hiperelástico	60
Figura 15 - Bloco cilíndrico hiperelástico nas configurações inicial e final	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Deflexões transversal e axial de uma viga em balanço com carga transversal P	51
Tabela 2 - Tensão normal e pressão hidrostática (MPa) na extensão de uma barra neo-hookeana.	58

SIMBOLOGIA

1 - LETRAS LATINAS

- b** : Forças de corpo
- B** : Tensor deformação de Cauchy a esquerda.
- C** : Tensor deformação de Cauchy a direita.
- C** : Tensor constitutivo linearizado
- C*** : Tensor constitutivo linearizado e atualizado
- C₁, C₂** : Coeficientes da forma de Mooney-Rivlin
- D** : Tensor taxa de deformação
- e** : densidade de energia interna
- E** : Módulo de Young
- E** : Tensor deformação de Green total
- EC** : Energia cinética
- EI** : Energia interna
- F** : Tensor gradiente de deformação
- {F}** : Vetor carga
- g(I₃)** : função de restrição cinemática
- [G]** : Matriz de rigidez geométrica
- \mathcal{H}^m** : Espaço de Hilbert
- I₁, I₂, I₃** : invariantes de deformação
- J** : determinante de **F** (jacobiano)
- [K]** : Matriz de rigidez incremental
- \mathcal{K}** : Espaço das soluções restringidas cinematicamente.
- \mathcal{L}^m** : Conjunto das funções m-integráveis

- \mathbf{n} : vetor normal a uma superfície
 $[P]$: Matriz de Penalização
 p : Multiplicador de Lagrange da restrição (pressão)
 P : ponto da região R
 $[Q]$: matriz ortogonal de transformação de coordenadas
 $\{R\}$: Vetor resíduo
 R : Região do contínuo analisada
 S : Fronteira de R
 S_f : Fronteira de R com cargas impostas.
 S_u : Fronteira de R com deslocamentos impostos.
 S : Segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff total.
 t : tempo
 \mathbf{t} : trações superficiais
 T : Tensor tensão de Cauchy
 \mathbf{u} : deslocamento entre as configurações inicial e de referência
 v : volume inicial
 V : volume final
 \mathbf{v} : velocidade
 W : Função energia de deformação
 $W^{m,p}$: Espaço de Sobolev
 \mathbf{x} : coordenadas de um ponto na configuração inicial
 \mathbf{X} : coordenadas de um ponto na configuração de referência
 \mathbf{Y} : coordenadas de um ponto na configuração incremental

2 - LETRAS GREGAS

δ : operador variacional

δ_{ij} : delta de Kronecker

ΔE : incremento do tensor de deformação de Green

$\Delta^* E$: incremento atualizado do tensor de deformação de Green

ΔS : incremento do 2º tensor de Piola-Kirchhoff

$\Delta^* S$: incremento atualizado do 2º tensor de Piola-Kirchhoff

ΔT : incremento do tensor tensão de Cauchy

Δu : incremento de deslocamento

ρ : massa específica

γ : Tensor de deformação de Almansi

ε : Fator de Penalidade

ν : coeficiente de Poisson

Π : funcional da energia potencial

Ω : configuração

λ_1, λ_2 e λ_3 : Autovalores dos tensores de Cauchy-Green

ϕ : funções de interpolação locais

Φ : funções de interpolação globais

3 - ÍNDICES E EXPOENTES

a, b, c, \dots, x, y, z : variam de 1 a 3, indicando os eixos ortogonais

A, B, C, \dots, X, Y, Z : variam de 1 ao número de nós do elemento

$0, 1, \dots, n, n+1, \dots, f$: indicam a configuração a que a variável se refere, da inicial 0 à final f .

4 - NOTAÇÃO INDICIAL

Neste trabalho, adota-se a convenção de Einstein de soma implícita sobre índices repetidos.

Exemplos :

$$T_{11} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$T_{ij} u_j = T_{11} u_1 + T_{12} u_2 + T_{13} u_3$$

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

Há vários tipos de problemas com os quais um engenheiro de projetos lida que fogem à modelagem habitual da engenharia. Entre estes pode-se citar problemas de grandes deformações em materiais cujo comportamento não pode ser aproximado com as teorias clássicas da elasticidade, como a classe dos materiais hiperelásticos que possui grande importância para os engenheiros. Dentro da hiperelasticidade incluem-se vários modelos de borrachas compressíveis e incompressíveis que são usados amplamente para problemas de engenharia.

A importância da modelagem matemática de materiais hiperelásticos é bastante grande, uma vez que os estudos pioneiros da elasticidade não-hookeana foram realizados a partir desta classe de materiais, assim como a aplicação do método dos elementos finitos a problemas não lineares.

Neste trabalho, apresenta-se o desenvolvimento de elementos finitos sólidos isoparamétricos para problemas hiperelásticos estáticos. Entre os problemas estudados está o de grandes deformações em materiais tipo borracha, envolvendo não-linearidades geométrica e material.

1.1 - ELASTICIDADE NÃO-LINEAR

A elasticidade linear, também chamada de elasticidade hookeana ou infinitesimal, surgiu no século 17 com Hooke e teve grande desenvolvimento nos séculos 18 e 19 graças aos trabalhos de outros grandes pesquisadores da

área de Mecânica dos Sólidos como Cauchy, G. Green, Kirchhoff e Saint-Venant. A elasticidade linear fundamenta-se nas hipóteses de que os deslocamentos e deformações são muito pequenos em relação às dimensões do corpo analisado e que as tensões são diretamente proporcionais às deformações. As simplificações nas equações da mecânica do contínuo decorrentes destas hipóteses levam a um conjunto de aproximações para uma vasta gama de aplicações práticas, representando a grande maioria dos problemas encontrados pelos engenheiros.

Entretando, o uso destas simplificações podem levar a resultados incorretos quando utilizadas na resolução de problemas nos quais ocorram :

a) Grandes deslocamentos, caracterizando o que se chama normalmente de não-linearidade geométrica;

b) Comportamento elástico não-linear, quando as tensões não são proporcionais às deformações, por exemplo, em materiais tipo borracha. Esta condição caracteriza o que se chama de não-linearidade material;

c) Comportamento elasto-plástico, isto é, as deformações surgidas com a aplicação de uma carga não se anulam após a ação desta ter cessado. Isto ocorre no caso de grandes deformações, caracterizando também um caso de não-linearidade física ou material;

d) Comportamento visco-elástico ou visco-plástico, no qual o comportamento atual do material é dependente da velocidade de aplicação da carga ou do histórico do carregamento;

e) Combinações das condições anteriores, que são os casos mais comumente encontrados.

Para se enfrentar alguns destes problemas, desenvolveu-se a elasticidade finita (ou elasticidade não-linear), na qual os deslocamentos não são previamente definidos como infinitesimais. Para casos de não-linearidade material, foram propostos novos modelos de materiais cujas respostas às so-

licitações não são lineares, permitindo a obtenção de soluções para vários problemas estáticos e dinâmicos. Destes modelos, destaca-se a teoria da hiperelasticidade, cuja premissa básica é que todo o trabalho realizado pelas tensões é absorvido no processo de deformação, implicando a existência de uma função energia de deformação.

Infelizmente, a complexidade das equações da elasticidade finita dificulta muito a obtenção de soluções analíticas, a não ser para geometrias e condições de contorno muito simples. Como conseqüência, é imperativo o uso de métodos numéricos de solução. Dentre esses métodos, indubitavelmente, o mais popular é o método dos elementos finitos.

Neste trabalho, desenvolveu-se elementos finitos sólidos para a resolução de problemas hiperelásticos estáticos. Entre os problemas estudados está o de grandes deformações em materiais tipo borracha, que envolve não-linearidades geométrica e material.

1.2 - HISTÓRICO

As primeiras tentativas de se generalizar a teoria linear de elasticidade foram desenvolvidas no início deste século e entre elas cita-se o trabalho de von Mises de 1930. Entretanto, o grande desenvolvimento deste campo deu-se a partir da década de 1940 e teve como motivação o estudo do comportamento de borrachas, através, principalmente, das pesquisas teóricas e experimentais de Rivlin e Treloar. Enquanto Treloar tratou preferencialmente de modelos físicos para a deformação de borrachas, os trabalhos de Rivlin e seus colaboradores podem ser considerados como precursores da modelação matemática da elasticidade finita.

Entre os resultados significativos obtidos por estes pesquisadores es-

tão os modelos matemáticos de borrachas incompressíveis que levam seus nomes, definidos através de formas específicas para a função energia de deformação. Destaca-se entre as várias formas para a função energia de deformação a proposta por Mooney em 1940, que após os experimentos de Rivlin que comprovaram sua utilidade para modelos de borrachas incompressíveis, ficou conhecida como forma de Mooney-Rivlin. Entre outros modelos sugeridos para materiais incompressíveis, encontra-se a forma Neo-Hookeana, proposta por Treloar em 1943, baseada na teoria molecular não-Gaussiana para polímeros de cadeia longa e a forma de Rivlin-Saunders de 1950, utilizando termos quadráticos.

A teoria matemática da elasticidade finita consolidou-se e inseriu-se no contexto mais amplo da mecânica do contínuo a partir dos trabalhos de C. Truesdell e Noll [1] e de Truesdell e Toupin [2], e os livros de A.E. Green e Adkins [3] e A.E. Green e Zerna [4], sendo posteriormente desenvolvida por muitos outros autores, como Prager [5], Malvern [6], Spencer [7], etc. Os trabalhos de Truesdell et al. [1,2] contém uma extensa revisão histórica da elasticidade linear e finita, cuja leitura é recomendada ao leitor interessado.

A partir destes trabalhos, foram sugeridas novas formas para a energia de deformação de borrachas, entre as quais a de Hart-Smith (1966), Alexander (1968), Vallanis-Landel (1967) e Ogden (1972), algumas das quais serão apresentadas com maiores detalhes no capítulo 3 desta dissertação. Uma revisão de pesquisas recentes em formas para a energia de deformação e soluções para elasticidade finita pode ser encontrada nos artigos de L.R.G. Treloar [8] e de R.T. Shield [9] e nos livros de Oden [10] e de Ogden [11].

1.3 - ELEMENTOS FINITOS APLICADOS A HIPERELASTICIDADE

A aplicação do método dos elementos finitos à resolução de problemas de elasticidade finita tem sido uma meta desde os primeiros passos de seu desenvolvimento.

Problemas de não-linearidade geométrica foram inicialmente resolvidos por Martin(1966), Becker(1966), Argyris (1966). A aplicação do método à elasto-plasticidade foi desenvolvida, entre outros, por Rice, McMeeking, Hibbit, Marçal [10].

A aplicação do método dos elementos finitos aos problemas de equilíbrio em materiais tipo borracha teve seu início com os trabalhos de Oden e colaboradores como Key e Kubitza entre 1967 e 1971. Um livro essencial para o entendimento da aplicação do método dos elementos finitos a problemas não-lineares foi escrito por Oden em 1971 [10], estabelecendo o embasamento teórico para os desenvolvimentos nesta área.

Ao se formular problemas utilizando modelos incompressíveis para borrachas, o tratamento da restrição da incompressibilidade apresenta grandes dificuldades quando da resolução dos problemas através de métodos numéricos. Nos trabalhos iniciais de Oden, estudou-se problemas unidimensionais e bidimensionais, utilizando-se uma formulação mista, na qual a reação à restrição era considerada uma incógnita do problema, neste caso uma pressão hidrostática. Uma forma alternativa de se formular o problema, utilizando o método da penalização, elimina a necessidade da inclusão explícita desta variável no problema, poupando processamento numérico. Os trabalhos pioneiros na utilização do método da penalidade na elasticidade incompressível devem-se a Bercovier (1978) e Malkus e Hughes (1980) [12]. Kikuchi e Song (1980) estabeleceram a formulação matemática precisa do método da penalidade para escoamentos incompressíveis, demonstrando as condições necessárias

para sua convergência, e Oden e Kikuchi [13] estenderam esta metodologia para outros problemas de restrições cinemáticas.

Mais recentemente, vários desenvolvimentos têm sido feitos na área e, a seguir, destacam-se alguns destes trabalhos.

Jankovich, Leblanc, Durand e Bercovier, (1981) [14], desenvolveram um elemento finito plano e sólido axissimétrico utilizando as formas de Mooney-Rivlin e de Rivlin-Saunders para a energia de deformação, sendo que a incompressibilidade é relaxada através de penalização. Os resultados numéricos obtidos são comparados com dados experimentais, com uma boa concordância.

Häggblad e Sundberg (1983) [15] utilizaram abordagem semelhante ao trabalho de Jankovich et al., para um problema modelado bidimensionalmente utilizando a forma de Mooney-Rivlin, sendo também os resultados comparados com dados experimentais com boa concordância.

Swanson, Christensen e Ensign (1985) [16] utilizaram uma forma para a energia de deformação derivada da forma proposta por Ogden, com compressibilidade limitada e que tem como caso especial a forma de Mooney-Rivlin, implementando-a no programa computacional científico de elementos finitos ADINA, programa este desenvolvido por Bathe et al.. Obtiveram-se resultados para modelos bidimensionais.

César de Sá e Owen (1986) [17] desenvolveram um elemento de casca utilizando a forma de Mooney-Rivlin, adicionando ainda a possibilidade de se modelar reforços com fibras. Uma formulação mista é utilizada para o tratamento da incompressibilidade.

LeTallec e Glowinski (1984) [18] utilizaram uma nova metodologia para se considerar a incompressibilidade do material, qual seja, a formulação lagrangiana aumentada. A partir desta formulação desenvolveu-se um elemento sólido para a forma de Mooney-Rivlin para a energia de deformação.

1.4 - MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE FINITA

Apresentam-se nesta seção os principais métodos de resolução para os problemas de elasticidade finita através da utilização do método dos elementos finitos.

Um problema não-linear de equilíbrio pode ser resolvido basicamente de duas maneiras: por meio da resolução direta das equações não-lineares com a aplicação total do carregamento, através de métodos iterativos, ou através de uma formulação incremental, dividindo-se a aplicação das condições de contorno em parcelas e linearizando-se o processo de deformação entre os estados de equilíbrio seqüenciais (Gadala e Oravas [19]).

Dentre os trabalhos que seguem a metodologia de resolução direta podem-se citar os desenvolvimentos iniciais de Oden et al. [10], e Jankovich et al. [14], utilizando normalmente algoritmos iterativos de solução, como o de Newton-Raphson. Mais recentemente, no entanto, na maioria dos trabalhos são utilizadas formulações incrementais pelo fato de apresentarem os resultados intermediários, permitindo acompanhar a evolução do processo de deformação, o que não é possível em uma formulação não-linear direta.

As formulações incrementais classificam-se, conforme a referência adotada, como formulação lagrangiana total, lagrangiana atualizada (ou relativa) e euleriana [19], sendo que esta classificação depende do posicionamento do referencial no início do processo de deformação, no início do incremento de deformação ou acompanhando a configuração deformada, respectivamente. Do ponto de vista matemático as três formulações estão corretas, mas normalmente as formulações lagrangianas são mais utilizadas na mecânica dos sólidos. Os trabalhos de César de Sá e Owen [17] e de Häggblad e Sundberg [15] utilizam formulação incremental lagrangiana total. A formulação la-

grangiana total é mais simples para os casos em que a função energia de deformação é definida neste referencial, como por exemplo as formas utilizadas comumente na hiperelasticidade, enquanto a formulação atualizada permite maior facilidade na obtenção dos resultados intermediários e economia de processamento numérico.

A restrição cinemática da incompressibilidade é introduzida no problema através de, basicamente, três metodologias de formulação do método dos elementos finitos:

a) Método dos multiplicadores de Lagrange, na qual a reação à restrição é uma das variáveis aproximadas pelo método dos elementos finitos;

b) método da penalização, no qual a restrição da incompressibilidade é relaxada por um fator de penalização;

c) formulação lagrangiana aumentada, na qual o funcional é simultaneamente penalizado e dualizado.

Entre as várias abordagens possíveis para o problema, neste trabalho adotou-se uma formulação lagrangiana atualizada, com o tratamento da restrição cinemática através do método da penalização e pela simplicidade da formulação.

CAPÍTULO 2 - NOÇÕES DE ELASTICIDADE FINITA

Neste capítulo apresentam-se as noções de elasticidade finita essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. São abordados a cinemática e as deformações de um processo incremental, as medidas de tensão utilizadas neste texto, as equações de equilíbrio e os princípios dos trabalhos virtuais e da conservação da energia.

2.1 CINEMÁTICA E DEFORMAÇÕES NO PROCESSO INCREMENTAL

2.1.1 - INTRODUÇÃO

Nesta seção apresentam-se os conceitos sobre os movimentos e deformações relacionados com o processo incremental. Abordam-se apenas os tópicos essenciais neste estudo e maiores detalhes podem ser encontrados na literatura especializada como os livros de Prager [5], Malvern [6] e Spencer [7].

Inicialmente, são apresentadas as definições relativas à cinemática da formulação incremental em um processo de deformação, tomando como base Washizu [20].

Seja, em um instante inicial t^0 , uma região R^0 de um meio contínuo delimitando um corpo. Identifica-se um ponto particular P^0 por um vetor posição x em relação a um sistema de referência cartesiano. Esta situação caracteriza a configuração inicial Ω^0 . (Ver Fig. 1)

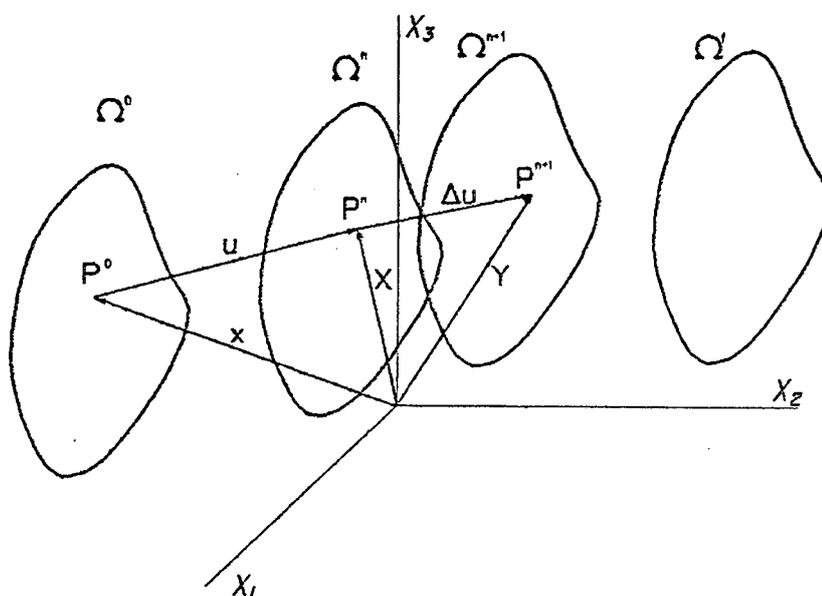


Figura 1 - Cinemática do processo incremental.

Em um outro momento do processo de deformação, no instante t , os pontos do corpo observado ocupam a região R^n , e em especial a partícula que ocupava P^0 agora está no ponto P^n , posicionado pelo vetor X . Esta configuração é denominada de configuração corrente Ω^n .

A seguir definem-se as grandezas características do processo incremental. Primeiramente, define-se uma nova configuração Ω^{n+1} , bastante próxima de Ω^n . A necessidade desta proximidade se deve à linearização que será feita em todas as variáveis incrementais. Assim sendo, tem-se nesta configuração o ponto P^{n+1} , cujo vetor posição será designado por Y . Define-se então o deslocamento u como

$$u = X - x, \quad (1)$$

e o incremento de deslocamento Δu como

$$\Delta u = Y - X \quad (2)$$

Neste trabalho é adotada a formulação lagrangiana atualizada. Por ser lagrangiana, a referência adotada é o início do movimento analisado, sendo as variáveis desta posição tomadas como independentes. Isto equivale a dizer que a descrição do movimento é material, analisando as trajetórias seguidas pelas partículas; em contraposição, ter-se-ia a descrição espacial ou euleriana se as variáveis independentes fossem as da posição atual do movimento, onde analisar-se-iam as partículas passando por um ponto.

O fato da formulação ser atualizada significa que se analisa cada incremento tomando-se como referência sua configuração inicial. Assim sendo, o incremento de Ω^n até Ω^{n+1} terá as variáveis da configuração corrente Ω^n tomadas como independentes. Se a formulação total fosse adotada, a referência sempre seria o início do processo de deformação, a configuração inicial Ω^0 .

Ambas as formulações, a lagrangiana total e a lagrangiana atualizada são corretas do ponto de vista matemático. A formulação atualizada foi escolhida apenas pela maior facilidade de obtenção de resultados intermediários.

2.1.2 - DEFORMAÇÕES

Apresentam-se nesta seção algumas medidas de deformação que serão utilizadas no decorrer do trabalho. Inicialmente define-se os componentes do tensor gradiente de deformações F como

$$F_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad (3)$$

Apesar da simplicidade de sua definição, o tensor F tem seu uso restringido

por não ser simétrico para a maioria dos movimentos e por não ser invariante com os movimentos de corpo rígido.

Os tensores de Cauchy-Green são extensivamente usados em elasticidade finita. As características que os tornam vantajosos em relação ao tensor F são a simetria e o fato de serem unitários para os movimentos de corpo rígido. O tensor de Cauchy-Green à direita é definido por

$$C = F^T F \quad \text{ou} \quad C_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \quad , \quad (4)$$

e o tensor de Cauchy-Green à esquerda por

$$B = F F^T \quad \text{ou} \quad B_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \quad . \quad (5)$$

Normalmente, em trabalhos de engenharia são utilizados os tensores de Green e de Almansi, dependendo se a descrição do movimento seja material ou espacial, respectivamente. Ambos são simétricos, e se anulam para movimentos de corpo rígido. O tensor de Green é definido por

$$E = \frac{1}{2} (C - I) \quad , \quad (6)$$

e o tensor de Almansi por

$$\gamma = \frac{1}{2} (I - B^{-1}) \quad . \quad (7)$$

Uma vez que este trabalho adota uma formulação lagrangiana, será utilizado o tensor de deformação de Green, cujas componentes podem ser escritas como

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right) \quad (8)$$

ou, em termos de deslocamentos,

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (9)$$

Aplicando um incremento de deslocamento ao tensor de Green, obtém-se a parcela de deformação relativa ao incremento, dada por

$$2 \Delta E_{ij} = (\delta_{kj} + u_{k,j}) \Delta u_{k,i} + (\delta_{ki} + u_{k,i}) \Delta u_{k,j} + \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} \quad (10)$$

Esta expressão define o tensor incremento de deformação de Green. Adotando-se a configuração Ω^n como referência, define-se o tensor incremento de deformações de Green atualizado pela expressão

$$\Delta^* E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial X_j} + \frac{\partial(\Delta u_j)}{\partial X_i} + \frac{\partial(\Delta u_k)}{\partial X_j} \frac{\partial(\Delta u_k)}{\partial X_i} \right) \quad (11)$$

A relação entre os incrementos total e atualizado do tensor deformação de Green é dada pela expressão abaixo :

$$\Delta E_{ij} = \Delta^* E_{kl} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_l}{\partial x_j} \quad (12)$$

Se os incrementos forem suficientemente pequenos, pode-se linearizar este tensor em relação a Δu , desprezando os produtos de ordem superior, resultando em

$$\Delta^* E_{ij} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial X_j} + \frac{\partial(\Delta u_j)}{\partial X_i} \right) \quad (13)$$

As duas formas para o incremento atualizado do tensor de Green serão utilizadas neste trabalho.

2.1.3 - INVARIANTES DOS TENSORES DE DEFORMAÇÃO

Como comumente utilizados nos estudos da elasticidade finita, também neste trabalho adotam-se as seguintes definições dos invariantes de deformação, que são os invariantes dos tensores deformação de Cauchy-Green \mathbf{C} e \mathbf{B} :

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{C} = C_{ii} \quad , \quad (14)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr } \mathbf{C})^2 - \text{tr } \mathbf{C}^2 \right] = \frac{1}{2} \left(C_{ij} C_{ji} - C_{ii} C_{jj} \right) \quad (15)$$

$$I_3 = \det \mathbf{C} \quad . \quad (16)$$

Usando a expressão (4), pode-se concluir que

$$I_3 = (\det \mathbf{F})^2 \quad . \quad (17)$$

A partir da definição de \mathbf{F} , é possível verificar-se que seu determinante é o jacobiano do processo de deformação e que

$$\det \mathbf{F} = \frac{dv}{dV} \quad , \quad (18)$$

onde dv e dV são elementos de volume nas configurações deformada e indeformada, respectivamente.

Conclui-se, portanto que em uma deformação isócora, isto é, a volume constante,

$$I_3 = 1 \quad . \quad (19)$$

Este resultado é utilizado nos capítulos seguintes quando abordam-se os materiais incompressíveis.

2.2 - TENSÕES

Nesta seção serão definidas as medidas de tensão utilizadas neste trabalho, quais sejam, os tensores de tensão de Cauchy e de Piola-Kirchhoff.

O tensor de tensão de Cauchy (neste trabalho representado por T) é o tensor habitualmente usado em Mecânica dos Sólidos, e está associado a uma descrição espacial, pois referencia-se a configuração final do processo de deformação. Para o caso de deformações infinitesimais, a escolha do referencial é irrelevante.

Uma vez que uma descrição material (lagrangiana) do processo de deformação é usada, é conveniente adotar uma medida de tensão coerente com esta formulação, apresentada a seguir.

Os tensores de Piola-Kirchhoff são medidas lagrangianas de tensão, e conseqüentemente referem-se às áreas da configuração de referência. O primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, também denominado de tensão nominal, tem interpretação física direta, sendo definido de modo similar ao tensor de Cauchy, mas referindo-se à superfície indeformada. Seu uso é restrito pelo fato de ser assimétrico.

O segundo tensor de Piola-Kirchhoff, utilizado neste trabalho, é simétrico, o que traz vantagens operacionais são evidentes, mas obtidas a custo da dificuldade de interpretação física. A relação entre o 2^o tensor de Piola-Kirchhoff e o tensor de Cauchy é dada pela expressão

$$S = \det(F) F^{-1} T (F^{-1})^T, \quad (20)$$

ou, em termos de componentes,

$$S_{ij} = (\det F) \frac{\partial x_i}{\partial X_k} T_{k1} \frac{\partial x_1}{\partial X_j}, \quad (21)$$

onde $\det F = J^n$, é o jacobiano da transformação, definido como

$$J^n = \frac{\partial(X_1, X_2, X_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \quad (22)$$

A formulação incremental requer a definição de incrementos do tensor de Piola-Kirchhoff, e dois tipos de incrementos podem ser definidos: o incremento total (ΔS) e o atualizado ($\Delta^* S$), conforme a referência esteja no início do movimento ou no início do incremento, respectivamente. A relação entre estes incrementos é dada por

$$\Delta^* S_{ij} = \frac{1}{J^n} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \Delta S_{kl} \quad (23)$$

A tensão ao final de um incremento de Ω^n a Ω^{n+1} pode ser medida por diversos tipos de tensores, como

$$\begin{aligned} \mathbf{T} + \Delta \mathbf{T} & \quad , \text{ para uma formulação euleriana,} \\ \mathbf{S} + \Delta \mathbf{S} & \quad , \text{ para uma formulação lagrangiana total e} \\ \mathbf{T} + \Delta^* \mathbf{S} & \quad , \text{ para uma formulação lagrangiana atualizada.} \end{aligned} \quad (24)$$

Para a formulação lagrangiana atualizada aqui adotada, o tensor tensão de Cauchy deve ser conhecido ao início de cada incremento. Esta operação, denominada de atualização das tensões, é realizada utilizando-se a expressão

$$T_{ij} + \Delta T_{ij} = \frac{1}{\Delta J} \frac{\partial Y_i}{\partial X_k} \frac{\partial Y_j}{\partial X_l} \left(T_{kl} + \Delta^* S_{kl} \right) \quad (25)$$

onde $\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}$ será o novo tensor \mathbf{T} para a configuração Ω^{n+1} e

$$\Delta J = \frac{J^{n+1}}{J^n} \quad (26)$$

Será necessário também obter as equações de equilíbrio em função do 2^o tensor de Piola-Kirchhoff, o que é feito partindo da forma usual destas equações para o tensor de tensão de Cauchy, dada por

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_i} + \rho b_j = 0 \quad , \quad (27)$$

onde ρ é a massa específica e \mathbf{b} é o vetor das forças de corpo.

A partir das equações (27), utilizando as expressões (20), e redefinindo alguns termos para a configuração indeformada, pode-se chegar a

$$\frac{\partial}{\partial X_k} \left(S_{ki} \frac{\partial X_i}{\partial X_1} \right) + \rho^0 b_i^0 = 0 \quad , \quad (28)$$

onde ρ^0 e b_i^0 se referem às áreas e volumes de referência.

Para uma formulação lagrangiana atualizada, as equações de equilíbrio são expressas para a configuração Ω^{n+1} , tendo como variáveis independentes as variáveis da configuração Ω^n , resultando em

$$\frac{\partial}{\partial X_k} \left(\left(T_{ki} + \Delta^* S_{ki} \right) \frac{\partial Y_i}{\partial X_1} \right) + \rho^n b_i^n = 0 \quad . \quad (29)$$

2.3 - PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Uma forma alternativa de se estabelecer as condições de equilíbrio de um meio contínuo é dada pelo princípio dos trabalhos virtuais, também conhecido como a forma variacional ou forma fraca do problema de equilíbrio. Esta forma é utilizada no capítulo 4 para a aproximação numérica do problema.

Considerando as equações de equilíbrio na configuração de referência, dada pela expressão (28)

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(S_{k1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right) + \rho^0 b_i^0 = 0 \quad ,$$

e integrando no domínio de referência com um deslocamento virtual como peso, obtém-se

$$- \int_{R^0} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(S_{k1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right) \delta u_i \, dR^0 = \int_{R^0} \rho^0 b_i^0 \delta u_i \, dR^0 \quad . \quad (30)$$

Integrando por partes o lado esquerdo da igualdade, obtem-se

$$\begin{aligned} - \int_{S^0} S_{k1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} n_k \delta u_i \, dS^0 + \int_{R^0} S_{k1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \, dR^0 &= \\ &= \int_{R^0} \rho^0 b_i^0 \delta u_i \, dR^0 \quad . \end{aligned} \quad (31)$$

Utilizando a igualdade

$$\delta u_i = \delta X_i \quad , \quad (32)$$

a expressão

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial \delta X_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) \quad (33)$$

e definindo

$$t_i^0 = S_{k1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} n_k \quad (34)$$

como sendo a tração superficial relativa às áreas da configuração de referência, obtem-se o princípio dos trabalhos virtuais para uma formulação lagrangiana, isto é,

$$\int_{R^0} S_{ij} \delta E_{ij} dR^0 - \int_{S^0} t_i^0 \delta u_i dS^0 - \int_{R^0} \rho^0 b_i^0 \delta u_i dR^0 = 0 \quad , \quad (35)$$

o qual é a forma fraca das equações de equilíbrio.

Aplicando a equação (35) a uma formulação incremental, utilizando a configuração Ω^n como referência, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{R^n} (T_{ij} + \Delta^* S_{ij}) \delta \Delta^* E_{ij} dR^n &= \int_{R^n} (\rho^n b_i^n + \rho^n \Delta b_i^n) \delta \Delta u_i dR^n + \\ &+ \int_{S^n} (t_i^n + \Delta t_i^n) \delta \Delta u_i dS^n \quad , \end{aligned} \quad (36)$$

que expressa o princípio dos trabalhos virtuais para uma formulação lagrangiana atualizada.

2.4 - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Nesta seção, são apresentadas as expressões para o princípio da conservação da energia, as quais se farão necessárias no desenvolvimento das equações constitutivas.

Inicialmente define-se a energia cinética "EC" de um corpo que ocupa uma região R em um dado instante como :

$$EC = \frac{1}{2} \int_R \rho v_i v_i dR \quad , \quad (37)$$

onde \mathbf{v} é o vetor velocidade.

A energia cinética é apenas uma parcela da energia total deste corpo. A parcela restante será chamada de energia interna "EI", expressa em função de sua densidade "e", pela expressão abaixo:

$$EI = \int_R \rho e \, dR \quad . \quad (38)$$

O enunciado adotado para o princípio da conservação da energia é (Spencer [7]):

"A derivada temporal da energia de um corpo é igual à soma entre a taxa do trabalho mecânico realizado pelas forças de corpo e de superfície e a taxa com que outras energias (química e térmica, por exemplo) entram no domínio."

Esta definição pode ser equacionada por

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho \left(\frac{1}{2} v_i v_i + e \right) dR = \int_R \rho b_i v_i dR + \int_S (T_{ij} v_i - q_j) n_j dS \quad , \quad (39)$$

onde q é um fluxo de energia passando pela fronteira.

Utilizando o teorema de Green, obtem-se

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho \left(\frac{1}{2} v_i v_i + e \right) dR = \int_R \left[\rho b_i v_i + \frac{\partial}{\partial X_j} (T_{ij} v_i - q_j) \right] dR \quad . \quad (40)$$

Lembrando que a aceleração $a = dv/dt$, e utilizando a equação do movimento, obtém-se

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho e \, dR = \int_R \left(T_{ij} D_{ij} - \frac{\partial q_j}{\partial X_j} \right) dR \quad . \quad (41)$$

onde D_{ij} são as componentes do tensor taxa de deformação, definidas por

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j}{\partial X_i} \right) \quad . \quad (42)$$

A equação (41) expressa a conservação da energia, que é melhor caracterizada no capítulo seguinte, onde se relaciona a energia interna com a energia absorvida no processo de deformação.

CAPÍTULO 3 - EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

As equações utilizadas no capítulo anterior são, por sua generalidade, aplicáveis a todo meio contínuo, mas são insuficientes para descrever o comportamento de qualquer um deles. Para se completar a caracterização do problema, são requeridas relações constitutivas, que representam a forma como as tensões se relacionam com as deformações.

Estas relações podem levar em consideração as variáveis termodinâmicas, mas estes efeitos não serão considerados neste trabalho.

3.1 - TEORIAS CONSTITUTIVAS PARA A ELASTICIDADE FINITA

Nesta seção, discutem-se as hipóteses mais utilizadas para as relações entre tensão e deformação em elasticidade finita, a partir das definições das elasticidades de Cauchy e de Green (Atkin e Fox [21]).

Um ponto conveniente de partida para se modelar as relações constitutivas na elasticidade finita é admitir que a tensão em um ponto é determinada exclusivamente pelas deformações nele existentes. Considera-se que exista um conjunto de funções unívocas f tais que

$$\mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{F}) \quad , \quad (43)$$

ou na forma de componentes,

$$T_{ij} = f_{ij}(F_{kl}) \quad ,$$

onde $f_{ij} = f_{ji}$.

A existência destas funções caracteriza o que se convencionou chamar

de Elasticidade de Cauchy.

Admitindo a hipótese adicional de que todo o trabalho realizado pelas tensões é absorvido no processo de deformação, tem-se o que se convencionou chamar de Elasticidade de Green ou Hiperelasticidade. Esta hipótese pode ser expressa através da existência de uma função energia de deformação W , dependente apenas do gradiente de deformações F . Esta é uma premissa básica adotada neste trabalho.

Em um material hiperelástico, a função energia de deformação W representa toda a energia interna do meio. Estas considerações, somadas à inexistência de fluxos de calor, permite que equação da energia (41) possa ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \int_R \frac{\rho}{\rho_0} W \, dR = \int_R \bar{T}_{ij} D_{ij} \, dR \quad (44)$$

A equação acima é válida para toda a região R do corpo e uma vez que o integrando é contínuo pode-se escrever

$$\frac{\rho}{\rho_0} \frac{DW}{Dt} = T_{ij} D_{ij} \quad (45)$$

lembrando que $\frac{D}{Dt}$ é a derivada material e que D é o tensor taxa de deformação.

3.2 - INVARIÂNCIA COM OS MOVIMENTOS DE CORPO RÍGIDO

Em um material hiperelástico, a função energia de deformação W deve ser independente dos movimentos de corpo rígido. Desta forma, é conveniente que W seja expresso como função de um tensor invariante em relação a estes movimentos, como os tensores de Cauchy-Green à direita, isto é,

$$W = W(C) = W \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) \quad (46)$$

A derivada material de W pode ser escrita como

$$\frac{DW}{Dt} = \left(\frac{\partial W}{\partial C_{k1}} + \frac{\partial W}{\partial C_{1k}} \right) \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_1} D_{ij} \quad (47)$$

e substituindo-se a expressão acima na equação (45), pode-se isolar o tensor tensão de Cauchy \bar{T} e obter a expressão

$$T_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{k1}} + \frac{\partial W}{\partial C_{1k}} \right) \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_1} \quad (48)$$

Neste trabalho, a medida de deformação adotada é o tensor de deformação de Green, que também é invariante em relação aos movimentos de corpo rígido e que pode ser definido como função do tensor de Cauchy-Green à direita. Reescrevendo a expressão (48) em função do tensor deformação de Green obtém-se

$$T_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial E_{k1}} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_1} \quad (49)$$

que pode ser escrita em termos do 2- tensor de Piola-Kirchhoff, utilizando a transformação dada por (21), resultando em

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \quad (50)$$

Esta é a expressão geral das equações constitutivas para um material hiperelástico, de fundamental importância para este trabalho.

3.3 - ISOTROPIA

Em um material isotrópico, a energia de deformação deve permanecer inalterada com a rotação do sistema de referência (Spencer [7]).

Esta propriedade pode ser expressa através de uma operação de mudança de base, pré e pós-multiplicando o tensor de deformação de Green C por uma matriz ortogonal Q , isto é,

$$W(C) = W(Q^T C Q) \quad , \quad (51)$$

equivalendo em afirmar que a energia de deformação é invariante com C e, conseqüentemente, pode ser escrita como uma função dos invariantes I_1 , I_2 e I_3 de C , definidos pelas equações (14), (15) e (16), isto é,

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad . \quad (52)$$

A substituição de (52) em (50) leva a

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial E_{ij}} \quad , \quad (53)$$

sendo que esta equação pode ser aplicada a qualquer material elástico isotrópico.

3.4 - INCOMPRESSIBILIDADE

Certos modelos de hiperelasticidade para borrachas maciças e de plasticidade utilizam a aproximação da incompressibilidade, isto é, impõe-se que somente as deformações isócoras são possíveis. Esta condição conduz à restrição segundo a qual o terceiro invariante de deformação é unitário, como foi descrito no capítulo anterior pela expressão (19).

A imposição do valor de I_3 permite considerar W como sendo uma função apenas de I_1 e de I_2 , isto é,

$$W = W(I_1, I_2) \quad . \quad (54)$$

Considerando-se que na posição indeformada os invariantes I_1 e I_2 assumem o valor 3, torna-se mais conveniente reescrever (54) como

$$W = W(I_1 - 3, I_2 - 3) \quad . \quad (55)$$

A equação (54) representa a forma geral de uma função energia de deformação para qualquer material hiperelástico, isotrópico e incompressível.

3.5 - FORMAS PARA A FUNÇÃO ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Como visto nas seções anteriores, a forma da energia de deformação W depende basicamente das propriedades de simetria que o material possua. Este trabalho focaliza especialmente as formas para a função energia de deformação para materiais tipo borracha, com as propriedades de isotropia e incompressibilidade. O desenvolvimento de funções que representem satisfatoriamente o comportamento desta classe de materiais desempenhou um papel fundamental no progresso do estudo da elasticidade finita [8,9,10,11,21].

A primeira forma da função energia de deformação para materiais tipo borracha deve-se a Mooney, que em 1940 propôs a seguinte expressão, conhecida como forma de Mooney-Rivlin :

$$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) \quad . \quad (56)$$

A expressão acima é obtida da linearização da equação (55) e pode ser encarada como o primeiro termo de sua expansão em série de potências. A forma de Mooney-Rivlin leva a uma teoria completa para uma elasticidade de

2ª ordem e se tem comprovado eficaz para deformações planas e tridimensionais até a faixa de 450% a 500%, considerando-se testes de extensão uniaxial.

Baseando-se na teoria molecular estatística, considerando a borracha composta de moléculas de cadeia longa, Treloar propôs em 1943 a seguinte expressão para a energia de deformação :

$$W = C_1 (I_1 - 3) \quad . \quad (57)$$

Os materiais com comportamento descrito por (57) são ditos neo-hookeanos. A forma neo-hookeana fornece um bom ajuste aos dados experimentais apenas para deformações da ordem de 100%, considerando testes de extensão uniaxial.

A partir destes estudos pioneiros, desenvolveram-se pesquisas experimentais, destacando-se as de Treloar, as de Rivlin e Saunders, as de Klosner e Segal e as de Ogden, que levaram ao aperfeiçoamento das equações constitutivas para materiais não-lineares e à proposição de novas formas para a função energia de deformação.

Rivlin e Saunders realizaram uma série de experimentos no início da década de 50, chegando à conclusão que para faixas de extensão até 10 vezes o comprimento inicial do corpo de prova, o coeficiente C_2 da forma de Mooney-Rivlin pode ser considerado constante, mas a variação de C_2 não pode ser desprezada após este valor limite. Com base nestes dados, Rivlin e Saunders propuseram a seguinte forma para a energia de deformação :

$$W = C_1 (I_1 - 3) + f (I_2 - 3) \quad , \quad (58)$$

onde f é uma função monotonicamente decrescente.

Vários pesquisadores têm sugerido formas para a função f com relativo sucesso como, por exemplo, Klosner e Segal, que propuseram a forma

$$W = C_1(I_1-3) + C_2(I_2-3) + C_3(I_2-3)^2 + C_4(I_2-3)^3 \quad (59)$$

A partir da hipótese proposta por Gent e Thomas (1958), de que a derivada parcial de $f(I_2-3)$ em relação a I_2 deveria ser igual a C/I_2 , onde C é uma constante do material, que é baseada na teoria molecular não Gaussiana, alguns autores propuseram formas logarítmicas para W , como as formas de Hart-Smith (1966) e Alexander (1968). Esta última forma é apresentada a seguir como exemplo :

$$W = K_1 e^{[k(I_1-3)^2]} + K_2/I_2 \quad (60)$$

Mais recentemente, Valanis e Landel (1967) propuseram que a a energia de deformação deveria ser separável em termos de funções de cada um dos autovalores de B , conforme a expressão abaixo, que engloba as formas de Mooney-Rivlin e Neo-Hookeana como casos especiais :

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3) \quad (61)$$

Baseado nesta hipótese, e justificando-a como uma boa aproximação em série de potências, Ogden propôs em 1972 uma forma para a energia de deformação em função dos autovalores de B , que segundo a literatura disponível, leva a melhor concordância com os dados experimentais disponíveis, escrevendo esta forma como

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left(\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3 \right) \quad (62)$$

Na equação acima, as constantes μ_p e α_p são reais, podendo assumir valores fracionários.

Menor atenção tem sido dada às formas para borrachas compressíveis, para as quais ainda não se estabeleceu uma teoria de ampla aceitação. Pode-se citar a extensão feita por Ogden em sua forma da energia de deformação

para materiais quase incompressíveis, adicionando a W uma função de I_3 , isto é

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left(\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3 \right) + F(I_3) . \quad (63)$$

Blatz e Ko, utilizando uma combinação de argumentos teóricos e resultados experimentais, sugeriram a seguinte expressão para espumas de borra-cha :

$$W = \frac{1}{2} \mu f \left\{ J_1 - 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1 - 2\nu}{\nu} J_3^{-2\nu/(1-2\nu)} \right\} + \frac{1}{2} \mu (1 - f) \left\{ J_2 - 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1 - 2\nu}{\nu} J_3^{2\nu/(1-2\nu)} \right\} , \quad (64)$$

onde μ , f e ν são constantes. e

$$J_1 = I_1 , \quad J_2 = \frac{I_2}{I_3} , \quad J_3 = I_3^{1/2} . \quad (65)$$

Esta expressão reduz-se à forma de Mooney-Rivlin para o caso em que o material é incompressível, isto é, quando I_3 é unitário.

3.6 - APLICAÇÃO À FORMULAÇÃO INCREMENTAL

A aproximação que é feita para a formulação incremental adotada é a linearização das relações constitutivas para o incremento, isto é, considera-se que a lei de Hooke generalizada seja válida dentro do incremento (Washizu [20]).

Inicialmente, considera-se um processo incremental de deformação. Na configuração Ω^n , tem-se um tensor tensão S^n e um tensor deformação de Green E^n . As componentes de tensão S_{ij} , para o incremento de Ω^n a Ω^{n+1} , são aproximadas pelo primeiro termo de sua expansão em série de Taylor em Ω^n , qual

seja

$$S_{ij} = S_{ij}^n + (E_{kl}^{n+1} - E_{kl}^n) \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} (E^n) \quad , \quad (66)$$

sendo que a partir desta expressão pode-se obter o incremento de tensão total de Piola-Kirchhoff, escrito como

$$\Delta S_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} (E^n) \Delta E_{kl} \quad . \quad (67)$$

Definindo o tensor de Hooke generalizado instantâneo como

$$C_{ijkl} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} (E^n) \quad , \quad (68)$$

pode-se escrever a equação (67) como

$$\Delta S_{ij} = C_{ijkl} \Delta E_{kl} \quad , \quad (69)$$

onde os elementos do tensor constitutivo C são constantes dentro do incremento. Uma forma alternativa de se chegar à expressão (69) é considerar que a energia de deformação é aproximada dentro do incremento pela forma quadrática

$$W^n = \Delta E_{ij} C_{ijkl} \Delta E_{kl} \quad . \quad (70)$$

Para uma relação constitutiva hiperelástica, os elementos do tensor C são calculados através da expressão (68), isto é

$$C_{ijkl} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} (E^n) = \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} (E^n) \quad , \quad (71)$$

onde a equação (50) foi utilizada.

A expressão acima refere-se a uma formulação lagrangiana total. Para adaptá-la a uma formulação atualizada, usa-se em lugar de (69) a expressão

$$\Delta^* S_{ij} = C_{ijkl}^* \Delta^* E_{kl} \quad , \quad (72)$$

onde C_{ijkl}^* é determinado através da transformação de coordenadas dada por (Washizu [20])

$$C_{ijkl}^* = \frac{1}{J} \frac{\partial X_i}{\partial x_p} \frac{\partial X_j}{\partial x_q} \frac{\partial X_k}{\partial x_r} \frac{\partial X_l}{\partial x_s} C_{pqrs} \quad (73)$$

onde J é o jacobiano da transformação do sistema de coordenadas inicial para o de Ω^n , definido por (22).

O tensor constitutivo C^* é atualizado para cada incremento no caso de materiais não-lineares, e para materiais hookeanos não se altera ao longo do processo de deformação.

O procedimento de linearização das relações constitutivas só apresenta bons resultados se os incrementos forem pequenos, principalmente para o caso de materiais cuja função energia de deformação é muito irregular. Apesar desta limitação, que se traduz em grande esforço computacional, o método é geral o suficiente para qualquer tipo de material hiperelástico.

CAPÍTULO 4 - FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS
DO PROBLEMA DE HIPERELASTICIDADE

Nos capítulos anteriores, o problema de equilíbrio de um meio contínuo hiperelástico foi apresentado. Nesta capítulo, discute-se as técnicas para a abordagem deste problema pelo método dos elementos finitos e procede-se a discretização do princípio dos trabalhos virtuais.

Esta discretização é realizada para dois casos distintos; para materiais hiperelásticos compressíveis e incompressíveis. Especial atenção é dada à restrição advinda da imposição da incompressibilidade, devido às dificuldades numéricas adicionais por ela causadas, discutindo-se vários métodos para o seu equacionamento.

4.1 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O objetivo deste trabalho é determinar a posição final de equilíbrio de um corpo hiperelástico sujeito a um conjunto de forças externas atuando sobre uma superfície S_f da fronteira deste corpo e deslocamentos impostos a uma superfície S_u , conforme a Figura 2.

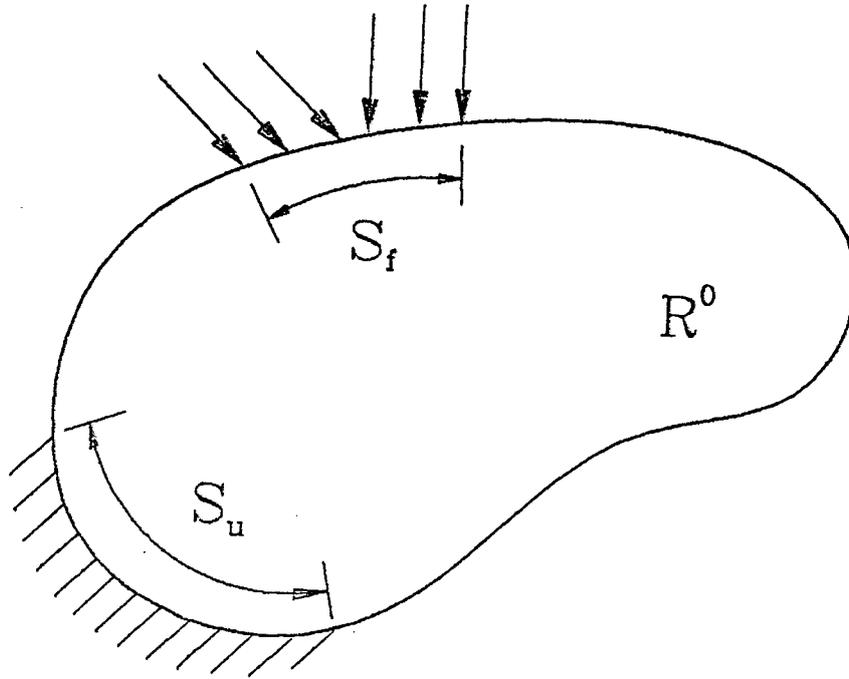


Figura 2 - Definição do problema

Este problema pode ser representado matematicamente como determinar um campo de deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ em um espaço das funções admissíveis \mathcal{H} que seja a solução do problema de valores no contorno representado em sua forma local pelas equações de equilíbrio (28), pelas relações constitutivas (50) e pelas condições de contorno (carregamento e vinculação), ou seja, a busca de uma solução $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ para o conjunto de equações abaixo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(S_{k1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right) + \rho^0 b_i^0 = 0 \quad \text{em } R^0, \\ S_{k1} = \frac{\partial W}{\partial E_{k1}} \quad \text{em } R^0, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \quad \text{em } S_u \\ t_i^0 = S_{k1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \quad \text{em } S_f \end{array} \right. \quad (74)$$

onde S_u é a parte da fronteira de R com deslocamentos prescritos e S_f é a parte da fronteira de R com carregamento prescrito.

Um modo alternativo de se apresentar o problema acima é considerar (74) como as equações de Euler-Lagrange associadas a um problema de minimi-

zação de um funcional. Considerando-se a hipótese do carregamento que atua sobre o corpo R ser conservativo, isto é, o trabalho realizado pelas forças que atuam sobre o corpo independa da história do processo de deformação, este funcional, chamado de funcional da energia potencial total, pode ser escrito em um referencial lagrangiano total como

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{R^0} W \, dR^0 - \int_{R^0} \rho^0 b_i^0 u_i \, dR^0 - \int_{S_f^0} t_i^0 u_i \, dS^0 . \quad (75)$$

A solução $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ que minimiza o funcional da energia potencial total é solução do conjunto de equações (74). Esta solução é procurada sobre o espaço das funções admissíveis \mathcal{H} de modo que

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \quad \text{em } S_u . \quad (76)$$

A primeira variação do funcional da energia potencial pode ser escrita como

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = \int_{R^0} \delta W \, dR^0 - \int_{R^0} \rho^0 b_i^0 \delta u_i \, dR^0 - \int_{S^0} t_i^0 \delta u_i \, dS^0 , \quad (77)$$

onde a primeira variação de W , para uma material hiperelástico, pode ser expressa por

$$\delta W = \int_{R^0} \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} \, dR^0 = \int_{R^0} S_{ij} \delta E_{ij} \, dR^0 , \quad (78)$$

onde a expressão (50) foi utilizada. Estes resultados permitem que se escreva (76) como

$$\int_{R^0} S_{ij} \delta E_{ij} \, dR^0 - \int_{R^0} \rho^0 b_i^0 \delta u_i \, dR^0 - \int_{S^0} t_i^0 \delta u_i \, dS^0 = 0 ,$$

$$\text{para todo } \delta u = 0 \quad \text{em } S^u . \quad (79)$$

A primeira variação de Π representa o princípio dos trabalhos virtuais apresentado na equação (35), e é a chamada forma fraca do problema, em contraposição à forma local dada pelas expressões (74).

A solução $u(\mathbf{x})$ deve ser contínua, e observando-se a ordem de derivação dos termos em u do princípio dos trabalhos virtuais (79) pode-se concluir que

$$u \in \mathcal{C}^0(R) \quad \text{e} \quad u \in W^{1,2}(R) \quad , \quad (80)$$

onde $\mathcal{C}^n(R)$ é o espaço das funções cujas derivadas parciais de ordem igual ou inferior a n sejam contínuas no domínio R e $W^{m,p}(R)$ é o espaço das funções cujas derivadas de ordem igual ou inferior a m sejam pertencentes ao espaço das funções p -integráveis $\mathcal{L}^p(R)$. O espaço $\mathcal{L}^p(R)$ é, por sua vez, definido como

$$\mathcal{L}^p(R) = \left\{ f \text{ tal que } \left(\int_R f^p \, dR \right)^{1/p} < \infty \right\} \quad . \quad (81)$$

Os espaços $\mathcal{C}^n(R)$ e $W^{m,p}(R)$ são espaços de Hilbert, sendo portanto espaços vetoriais lineares, normados e métricos, com produto interno e dualidade (Carey e Oden [22]).

Se a solução de (79) for suficientemente regular, isto é, pertencer a $W^{1,2}(R)$, pode-se demonstrar que é solução também de (74). Por outro lado, toda solução de (74) é um minimizador do funcional da energia potencial.

O espaço das soluções admissíveis \mathcal{H} é definido como sendo o espaço das funções suficientemente regulares $W^{1,2}(R)$ que satisfaçam as condições de contorno essenciais (condições de Dirichlet).

4.2 - APROXIMAÇÃO DE GALERKIN

O problema dado pelas equações (74), (76) e (79) só possui solução analítica para geometrias muito simples. Para os casos normalmente encontrados na engenharia, muitas hipóteses simplificativas são feitas para tornar possível a obtenção de uma solução aproximada, seja esta analítica ou

numérica. Uma das metodologias para se aproximar a solução de um problema de valores no contorno é o método de Galerkin, que é um dos fundamentos do método dos elementos finitos utilizado neste trabalho.

Pela aproximação de Galerkin, procura-se uma solução aproximada u^h em um sub-espaço de dimensão finita \mathcal{H}^h de $\mathcal{H}(R)$, de tal modo que a distância a u seja mínima. A aproximação u^h é expressa como uma combinação linear das funções ϕ^h da base de \mathcal{H}^h , as funções de interpolação, ou seja

$$u^h = a_i \phi_i^h, \quad (82)$$

e procura-se os coeficientes constantes a_i que minimizem a distância de u a u^h .

O método dos elementos finitos fornece uma metodologia racional para a construção da base de \mathcal{H}^h . Esta metodologia se baseia em uma discretização geométrica, ou seja, na aproximação do domínio R por uma coleção de domínios geométricamente simples R^e , os elementos finitos, de modo que

$$R \approx \bigcup_{e=1}^E R^e, \quad (83)$$

onde E é o número de elementos finitos.

A base de \mathcal{H}^h é construída com funções de interpolação com suporte local em cada elemento. Estas funções locais de interpolação ϕ_I são polinômios de x com os coeficientes sendo os deslocamentos dos pontos nodais, que são os pontos para os quais a resposta é obtida. Usualmente faz-se os nós de um elemento coincidirem com os dos elementos adjacentes para se garantir a continuidade \mathcal{C}^0 para u . Desta forma, para o método dos elementos finitos, a equação (82) é escrita como

$$u = \sum_{e=1}^E u_I \phi_I, \quad (84)$$

onde I varia entre 1 e N , o número de nós de cada elemento.

Substituindo u por estas funções e aproximando as condições de contor-

no para os pontos nodais, o problema de valores no contorno é resolvido de forma aproximada por um sistemas de equações algébricas simultâneas, que fornece como resposta o valor de u para os pontos nodais.

4.3 - DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA DE HIPERELASTICIDADE

Nesta seção, descreve-se o método utilizado neste trabalho para solução do problema não-linear de equilíbrio, na ausência de restrições cinemáticas.

O problema é discretizado a partir do princípio dos trabalhos virtuais escrito para o incremento de carga entre as configurações Ω^n e Ω^{n+1} , dado por (36)

$$\int_{R^n} (T_{ij} + \Delta^* S_{ij}) \delta \Delta^* E_{ij} dR^n = \int_{R^n} (\rho^n b_i^n + \rho^n \Delta b_i^n) \delta \Delta u_i dR^n + \int_{S^n} (t_i^n + \Delta t_i^n) \delta \Delta u_i dS^n ,$$

para qualquer $\delta u_i = 0$ em S_u , sendo esta a formulação do problema a partir da qual será aplicado o processo de discretização utilizando o método dos elementos finitos.

Inserindo na expressão anterior as expressões para o incremento atualizado de deformação dadas por (11)

$$\Delta^* E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial X_j} + \frac{\partial(\Delta u_j)}{\partial X_i} + \frac{\partial(\Delta u_k)}{\partial X_i} \frac{\partial(\Delta u_k)}{\partial X_j} \right)$$

e as relações constitutivas linearizadas para o incremento dadas por (72)

$$\Delta^* S_{ij} = C_{ijkl}^* \Delta^* E_{kl} ,$$

obtem-se, após desprezar os termos de ordem superior,

$$\begin{aligned}
& \int_{R^n} C_{ijkl}^* \frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial X_j} \frac{\partial(\delta \Delta u_k)}{\partial X_l} dR^n + \int_{R^n} T_{ij} \frac{\partial(\Delta u_m)}{\partial X_i} \frac{\partial(\delta \Delta u_m)}{\partial X_j} dR^n - \\
& - \int_{R^n} \left(\rho^n b_i^n + \Delta \rho^n \Delta b_i^n \right) \delta(\Delta u_i) dR^n - \int_{S^n} \left(t_i^n + \Delta t_i^n \right) \delta(\Delta u_i) dS^n + \\
& + \int_{R^n} T_{ij} \frac{\partial(\delta \Delta u_i)}{\partial X_j} dR^n = 0 \quad , \quad (85)
\end{aligned}$$

e reagrupando-se os termos de (85), chega-se à expressão

$$\begin{aligned}
& \int_{R^n} C_{ijkl}^* \frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial X_j} \frac{\partial(\delta \Delta u_k)}{\partial X_l} dR^n + \int_{R^n} T_{ij} \frac{\partial(\Delta u_m)}{\partial X_i} \frac{\partial(\delta \Delta u_m)}{\partial X_j} dR^n - \\
& - \int_{R^n} \Delta \rho^n \Delta b_i^n \delta(\Delta u_i) dR^n - \int_{S^n} \Delta t_i^n \delta(\Delta u_i) dS^n + \\
& + \int_{R^n} \left(T_{ij} \frac{\partial(\delta \Delta u_i)}{\partial X_j} - \rho^n b_i^n \right) \delta(\Delta u_i) dR^n - \int_{S^n} t_i^n \delta(\Delta u_i) dS^n = 0 \quad . \quad (86)
\end{aligned}$$

Aplica-se agora o método de elementos finitos, discretizando-se a expressão (86) e dividindo-se o domínio em vários elementos. O campo de incrementos de deslocamento Δu_i^e dentro de cada elemento é aproximado por funções de interpolação locais ϕ_I , as quais são dependentes dos incrementos de deslocamento nodais Δu_{iI} , onde o índice maiúsculo refere-se aos nós, podendo variar de 1 até o número de nós do elemento, isto é,

$$\Delta u_i^e = \phi_I \Delta u_{iI} \quad . \quad (87)$$

Obtem-se, finalmente, a versão discretizada da equação (86) dada por :

$$\sum_{e=1}^E \delta \Delta u_{iI}^e \left(K_{IJij}^n + \delta_{ij} G_{IJ}^n \right) \Delta u_{jJ}^e = \sum_{e=1}^E \delta \Delta u_{iI}^e \left(F_{iI}^n - R_{iI} \right) \quad , \quad (88)$$

onde E é o número de elementos e

$$K_e^n_{IJij} = \int_{Re^n} C_{ikjl}^* \frac{\partial \phi_I}{\partial X_k} \frac{\partial \phi_J}{\partial X_l} dRe^n \quad (89)$$

é a matriz de rigidez incremental,

$$G_e^n_{IJ} = \int_{Re^n} T_{kl} \frac{\partial \phi_I}{\partial X_k} \frac{\partial \phi_J}{\partial X_l} dRe^n \quad (90)$$

é a matriz de rigidez geométrica,

$$Re_{iI} = \int_{Re^n} \left(T_{ik} \frac{\partial \phi_I}{\partial X_k} - \rho^n b_i^n \phi_I \right) dRe^n - \int_{S_f^n} t_i^n \phi_I dS_f^n \quad (91)$$

é o vetor resíduo e

$$F_e^n_{iI} = \int_{Re^n} \Delta \rho^n \Delta b_i^n \phi_I dRe^n + \int_{S_f^n} \Delta t_i^n \phi_I dS_f^n \quad (92)$$

é o vetor incremento de carga, sendo que Re é o domínio de integração do elemento "e" e S_f é a fronteira de um elemento com carga imposta.

Através da equação (91), é possível verificar-se que o vetor resíduo representa o carregamento necessário para que a solução numérica satisfaça as equações de equilíbrio, podendo ser usado como uma medida da qualidade da solução obtida.

A matriz de rigidez global $[K]$ é obtida através da superposição das matrizes $[K_e^n]$ e $[G_e^n]$ de todos os elementos, o vetor incremento de deslocamento global $\{\Delta u\}$ através da superposição dos vetores $\{\Delta u^e\}$, o vetor incremento de carga global através da superposição dos vetores $\{F_e^n\}$ e o vetor resíduo global através da superposição dos vetores $\{Re\}$. As equações (88) podem ser escritas na forma matricial como

$$[K] \{\Delta u\} = \{F-R\} \quad (93)$$

O sistema de equações (93) é resolvido em cada incremento usando o mé-

todo de Newton-Raphson modificado, através do seguinte algoritmo iterativo,

$$\{\Delta u^{K+1}\} = \{\Delta u^K\} + [K]^{-1}\{F-R^K\} \quad , \quad (94)$$

onde os índices K indicam a iteração dentro do incremento de carga, começando com zero na primeira solução de (93) e sendo incrementados até que a diferença $\{F-R\}$ esteja dentro da tolerância especificada para o problema, quando então passa-se para a solução do próximo incremento de carga, e assim sucessivamente até que toda a carga esteja aplicada.

4.4 - HIPERELASTICIDADE INCOMPRESSÍVEL

O problema de minimização discutido nas seções precedentes pode ser considerado como a busca de uma solução para o problema de valores no contorno em todo o espaço \mathcal{H} das soluções admissíveis. Nesta seção, apresenta-se um caso mais complexo, no qual o minimizador do funcional da energia potencial deve ser procurado em um subconjunto de \mathcal{H} , para satisfazer certas condições adicionais. Neste trabalho, a restrição imposta é a da incompressibilidade, que pode ser representada como

$$g(u) = 0 \quad , \quad (95)$$

onde g é uma função de restrição que se anula quando a deformação é isocórica, ou seja, quando I_3 assume o valor unitário (ver eq. (15)), de modo que

$$g(I_3=1) = 0 \quad . \quad (96)$$

O problema pode ser entendido então como a busca do minimizador de Π em um subconjunto \mathcal{K} de \mathcal{H} definido por

$$\mathcal{K} = \left\{ u \text{ tal que } u \in \mathcal{H} \mid g(I_3) = 0 \right\} \quad . \quad (97)$$

A solução de (96) é muito mais difícil de ser obtida do que em um espaço sem restrições, uma vez que os elementos deste conjunto \mathcal{K} não são facilmente aproximados.

Uma alternativa para se procurar a solução em um espaço sem restrições é o método dos multiplicadores de Lagrange. Neste método, introduz-se um novo espaço Q' , o espaço dos multiplicadores de Lagrange. O espaço Q' é o espaço dual do espaço Q , que por sua vez é definido como o mapeamento de \mathcal{H} por g , isto é, Q contém os elementos $g(u)$. Introduce-se neste ponto o funcional \mathcal{L} em $\mathcal{H} \times Q'$ definido por

$$\mathcal{L}(u, p) = \Pi(u) + \int_R p g(u) dR \quad , \quad p \in Q' \quad , \quad (98)$$

onde o efeito da adição da última integral é nulo, pois a deformação é incompressível. O funcional (98) equivale a definir-se a função energia de deformação de um material hiperelástico incompressível como

$$W = W(I_1-3, I_2-3) - p g(u) \quad . \quad (99)$$

Fazendo-se a primeira variação de $\mathcal{L}(u, p)$, obtém-se

$$\delta \mathcal{L}(u, p) = \delta \Pi(u) + \int_R p \delta g dR + \int_R \delta p g dR \quad , \quad (100)$$

de onde se conclui que um ponto estacionário de $\mathcal{L}(u, p)$ é dado por

$$\begin{cases} \delta \Pi(u) + \int_R p \delta g dR = 0 \\ \int_R \delta p g dR = 0 \end{cases} \quad . \quad (101)$$

O conjunto de equações (101) leva a uma formulação de elementos finitos, com a variável p sendo adicionada ao problema e aproximada por funções de interpolação de modo similar aos deslocamentos. Fisicamente, a variável p representa um tipo de pressão hidrostrática de reação à restrição da incompressibilidade.

O problema de se encontrar u e p nos espaços \mathcal{H} e Q é conhecido como

um problema de ponto de sela, pois pode-se provar que u é o minimizador de Π em \mathcal{H} e p é um ponto de máximo em Q .

Outra forma de se resolver o problema em questão, e que é adotada neste trabalho, é o método da perturbação do lagrangiano. Seja o lagrangiano perturbado definido por

$$\mathcal{L}^\varepsilon(u, p) = \mathcal{L}(u, p) - \frac{\varepsilon}{2} \|p\|_Q^2, \quad (102)$$

onde ε é uma constante arbitrária, denominada de fator de penalização e

$$\|p\|_Q = \left(\int_R p^2 dR \right)^{1/2}, \quad (103)$$

a norma do espaço Q' .

A primeira variação do lagrangiano perturbado (102) é dada por

$$\delta\mathcal{L}(u, p) = \delta\Pi(u) + \int_R p \delta g dR + \int_R \delta p g dR - \varepsilon \int_R p \delta p dR, \quad (104)$$

e seu mínimo é alcançado quando

$$\begin{cases} \delta\Pi(u) + \int_R p \delta g dR = 0 \\ \int_R \delta p (g - \varepsilon p) dR = 0 \end{cases} \quad (105)$$

Da segunda equação de (105) pode-se obter o valor de p , expresso pela equação

$$p = \frac{1}{\varepsilon} g, \quad (106)$$

o que permite eliminar p da primeira equação de (105) e procurar a solução u , independentemente de p , através do variacional

$$\delta\Pi(u) + \frac{1}{2\varepsilon} \int_R \delta(g^2) dR = 0 \quad (107)$$

A equação (107) permite chegar-se ao método da penalização para a resolução de problemas de equilíbrio com restrições, e é equivalente ao variacional obtido de um material cuja energia de deformação é dada por

$$W = W(I_1-3, I_2-3) - \frac{1}{2\varepsilon} g^2(\mathbf{u}) \quad (108)$$

Pode-se provar que a solução \mathbf{u} do variacional perturbado (108) tende à solução da expressão (101) quando o fator de penalização tende a zero (Carey e Oden [22]).

A comparação entre as equações (101) e a equação (107) evidencia as vantagens de se utilizar o método da penalização ao invés da formulação mista: a eliminação da pressão hidrostática como variável a ser aproximada pelo método de Galerkin. Por consequência, o número de equações algébricas simultâneas a serem resolvidas diminui de modo significativo; porém o fator de penalidade ε deve ser cuidadosamente escolhido para que os resultados não sejam excessivamente compressíveis.

Há várias possibilidades de escolha para a função g de restrição da compressibilidade. Como exemplo, as funções logarítmicas foram usadas em Jankovich et al. [14] e Häggblad e Sundberg [15] por penalizarem progressivamente a compressibilidade, tendendo a infinito quando I_3 tende a zero. Neste trabalho utiliza-se dois tipos de função de restrição :

$$g(\mathbf{u}) = I_3 - 1 \quad (109)$$

$$e \quad g(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \ln(I_3) \quad (110)$$

Uma discussão mais detalhada a respeito desta escolha é desenvolvida no capítulo seguinte.

4.5 - DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES PENALIZADAS

Para o caso específico dos materiais hiperelásticos incompressíveis, o princípio dos trabalhos virtuais na forma incremental é modificado para a

relaxação da incompressibilidade através do método da penalização. Desta forma, obtem-se uma expressão similar a (36) a partir da primeira variação do lagrangiano perturbado (107) escrita para o incremento entre as configurações Ω^n e Ω^{n+1}

$$\begin{aligned} & \int_{R^n} (T_{ij} + \Delta^* S_{ij}) \delta \Delta^* E_{ij} dR^n - \int_{R^n} (\rho^n b_i^n + \rho^n \Delta b_i^n) \delta \Delta u_i dR^n - \\ & - \int_{S^n} (t_i^n + \Delta t_i^n) \delta \Delta u_i dS^n + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{R^0} \delta [g^2(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})] dR^0 = 0 \end{aligned} \quad (111)$$

Desenvolvendo o último termo da expressão (111) obtem-se

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{R^0} \delta (g^2) dR^0 = \frac{1}{\varepsilon} \int_{R^n} g \frac{\partial g}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} \frac{1}{J^n} R^n, \quad (112)$$

onde J^n é dado por (22). Aplicando a expressão (112) ao processo incremental, através da aproximação pelo termo linear da série de Taylor, obtem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\varepsilon} \int_{R^0} \delta (g^2) dR^0 = \int_{R^n} p \frac{\partial g}{\partial E_{mn}} \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial X_j}{\partial x_n} \delta \Delta^* E_{ij} \frac{1}{J^n} R^n + \\ & + \int_{R^n} p \frac{\partial^2 g}{\partial E_{mn} \partial E_{op}} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \frac{\partial X_l}{\partial x_n} \frac{\partial X_i}{\partial x_o} \frac{\partial X_j}{\partial x_p} \Delta^* E_{kl} \delta \Delta^* E_{ij} \frac{1}{J^n} dR^n + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{R^n} \frac{\partial g}{\partial E_{mn}} \frac{\partial g}{\partial E_{op}} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \frac{\partial X_l}{\partial x_n} \frac{\partial X_i}{\partial x_o} \frac{\partial X_j}{\partial x_p} \Delta E_{kl} \delta \Delta E_{ij} \frac{1}{J^n} R^n, \end{aligned} \quad (113)$$

onde a expressão (106) foi utilizada.

Substituindo a expressão (113) em (111) e escrevendo ΔE_{ij} em função de deslocamentos (8), obtem-se, após desprezar-se os termos de ordem superior, a expressão

$$\begin{aligned}
& \int_{R^n} C_{ijkl}^* \frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial X_j} \frac{\partial(\delta \Delta u_k)}{\partial X_l} dR^n + \int_{R^n} T_{ij} \frac{\partial(\Delta u_m)}{\partial X_i} \frac{\partial(\delta \Delta u_m)}{\partial X_j} dR^n - \\
& - \int_{R^n} \left(\rho^n b_i^n + \Delta \rho^n \Delta b_i^n \right) \delta(\Delta u_i) dR^n - \int_{S^n} \left(t_i^n + \Delta t_i^n \right) \delta(\Delta u_i) dS^n + \\
& + \int_{R^n} T_{ij} \frac{\partial(\delta \Delta u_i)}{\partial X_j} dR^n + \int_{R^n} p \frac{\partial g}{\partial E_{mn}} \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial X_j}{\partial x_n} \frac{\partial(\Delta u_m)}{\partial X_i} \frac{\partial(\delta \Delta u_m)}{\partial X_j} \frac{1}{J^n} R^n + \\
& + \int_{R^n} p \frac{\partial g}{\partial E_{mn}} \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial X_j}{\partial x_n} \frac{\partial(\delta \Delta u_i)}{\partial X_j} \frac{1}{J^n} R^n + \\
& + \int_{R^n} p \frac{\partial^2 g}{\partial E_{mn} \partial E_{op}} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \frac{\partial X_l}{\partial x_n} \frac{\partial X_i}{\partial x_o} \frac{\partial X_j}{\partial x_p} \frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial X_j} \frac{\partial(\delta \Delta u_k)}{\partial X_l} \frac{1}{J^n} dR^n + \\
& + \frac{1}{\epsilon} \int_{R^n} \frac{\partial g}{\partial E_{mn}} \frac{\partial g}{\partial E_{op}} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \frac{\partial X_l}{\partial x_n} \frac{\partial X_i}{\partial x_o} \frac{\partial X_j}{\partial x_p} \frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial X_j} \frac{\partial(\delta \Delta u_k)}{\partial X_l} \frac{1}{J^n} R^n = 0 \quad (114)
\end{aligned}$$

Do mesmo modo que no problema sem restrição, aplica-se agora o método de elementos finitos, discretizando-se a expressão (117), dividindo-se o domínio em vários elementos e aproximando o campo de incrementos de deslocamento Δu_i^e dentro de cada elemento por funções de interpolação locais ϕ_I dependentes dos incrementos de deslocamento nodais Δu_{iI} , o mesmo processo já descrito nas equações (86) a (88). A versão discretizada da equação (114) é dada por :

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta \Delta u_{iI}^e \left(K_{IJij}^n + \delta_{ij} G_{IJ}^n + P_{IJij}^n \right) \Delta u_{jJ}^e = \sum_{e=1}^{ne} \delta \Delta u_{iI}^e \left(F_{iI}^n - R_{iI}^n \right) \quad (115)$$

onde E é o número de elementos e

$$K_{IJij}^n = \int_{R_e^n} \left(C_{ijkl}^* + p \frac{\partial^2 g}{\partial E_{mn} \partial E_{op}} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \frac{\partial X_l}{\partial x_n} \frac{\partial X_i}{\partial x_o} \frac{\partial X_j}{\partial x_p} \right) \frac{\partial \phi_I}{\partial X_k} \frac{\partial \phi_J}{\partial X_l} dR_e^n \quad (116)$$

é a matriz de rigidez incremental,

$$G_{IJ}^n = \int_{Re^n} \left(T_{kl} + p \frac{\partial g}{\partial E_{mn}} \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial X_j}{\partial x_n} \right) \frac{\partial \phi_I}{\partial X_k} \frac{\partial \phi_J}{\partial X_l} dRe^n \quad (117)$$

é a matriz de rigidez geométrica,

$$P_{IJIJ}^n = \frac{1}{\epsilon} \int_{R^n} \frac{\partial g}{\partial E_{mn}} \frac{\partial g}{\partial E_{op}} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \frac{\partial X_l}{\partial x_n} \frac{\partial X_i}{\partial x_o} \frac{\partial X_j}{\partial x_p} \frac{\partial \phi_I}{\partial X_k} \frac{\partial \phi_J}{\partial X_l} dRe^n \quad (118)$$

é a matriz de penalidade,

$$Re_{iI} = \int_{Re^n} \left[\left(T_{ik} + p \frac{\partial g}{\partial E_{mn}} \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial X_j}{\partial x_n} \right) \frac{\partial \phi_I}{\partial X_k} - \rho^n b_i^n \phi_I \right] dRe^n - \int_{S_f^n} t_i^n \phi_I dS_f^n \quad (119)$$

é o vetor resíduo e

$$Fe_{iI}^n = \int_{Re^n} \Delta \rho^n \Delta b_i^n \phi_I dRe^n + \int_{S_f^n} \Delta t_i^n \phi_I dS_f^n \quad (120)$$

é o vetor carga, sendo que Re é o domínio de integração do elemento "e" e S_f é a fronteira de um elemento com carga imposta.

Procede-se a solução do sistema de equações obtido de (115) pelo mesmo método de Newton-Raphson utilizado para a resolução do problema sem restrições. A determinação da pressão hidrostática p é feita posteriormente à solução dos deslocamentos a cada iteração através da expressão (106).

4.6 - ESCOLHA DOS ELEMENTOS

A literatura de elementos para formulações penalizadas é bastante restrita. Pode-se citar como exemplos importantes de escolha de um elemento finito para problemas de hiperelasticidade os trabalhos de Häggblad e Sundberg [15] e de Oden e Kikuchi [13]. Häggblad e Sundberg compararam o desempenho dos elementos quadriláteros isoparamétricos de 4, 8 e 9 nós em pro-

blemas bidimensionais, obtendo bons resultados para os três, embora o elemento bilinear tenha se mostrado impreciso para problemas com grandes gradientes de deformação, como em cargas pontuais e contornos reentrantes. Oden e Kikuchi estabeleceram as condições matemáticas para a convergência de formulações penalizadas através da condição discreta de Ladizhenskaya, Babuska e Brezzi, apresentando uma lista de elementos bidimensionais de convergência estável para estas formulações, a qual excluía os elementos quadriláteros de interpolação bilinear para integração por quadratura de Gauss.

No processo de escolha do elemento finito, levou-se em consideração que os elementos sólidos tridimensionais mais utilizados para a elasticidade de linear são os hexaedros (cubos) isoparamétricos de 8 e 20 nós, com funções de interpolação trilineares e triquadráticas, respectivamente. Para estes elementos a maioria dos programas de pré e pós-processamento possui geração e visualização gráfica interativa de malhas. Neste trabalho optou-se por elementos finitos para elasticidade não-linear tomando como base os cubos isoparamétricos de 8 e 20 nós (Fig. 3).

A escolha destes elementos hexaédricos permite estabelecer que os índices i e j assumem valores de 1 a 8 ou de 1 a 20 nas equações (87) a (92) e nas equações (115) e (120).

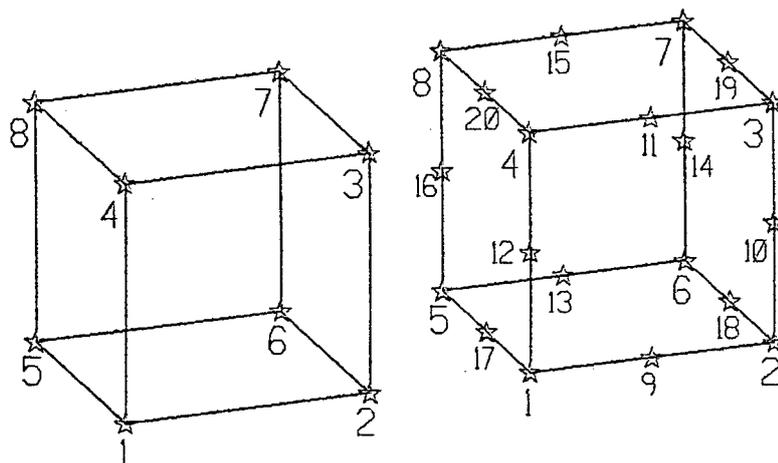


Figura 3 - Elementos Finitos Hexaédricos de 8 e 20 nós.

4.7 - ORDEM DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

As integrais (116), (117), (118), (119) e (120) são resolvidas numericamente através da quadratura gaussiana. A ordem da quadratura necessária para a avaliação correta das expressões dentro da integral é dois para o elemento trilinear e três para o quadrático.

Segundo Oden e Kikuchi [13], Jankovich et al. [14] e Häggblad e Sundberg [15], a relaxação da restrição cinemática da incompressibilidade através da penalização deve ser feita elemento a elemento, isto é, a pressão hidrostática é descontínua na fronteira entre os elementos. Para se conseguir esta descontinuidade, reduz-se a ordem da integração numérica dos termos de penalidade. Desta forma, pode-se usar a quadratura gaussiana de ordem dois ou um no caso do elemento quadrático ou com um ponto no elemento trilinear. Uma vez que a quadratura de Gauss de ordem 1 é bastante imprecisa para as funções de interpolação trilineares, o método de Newton-Cotes de ordem um foi utilizado para a integração da equação (118) com um ponto de integração central, caracterizando dois trapézios.

O cálculo das tensões é feito nos pontos de integração do elemento e extrapolado para os nós pelo método dos mínimos quadrados. Para o elemento quadrático, as tensões são calculadas em 8 pontos por elemento, enquanto no elemento trilinear apenas o ponto central é considerado.

O cálculo das pressões hidrostáticas é feito no centro do elemento e extrapolado para os nós pelo método dos mínimos quadrados, para os dois tipos elementos. Segue-se assim a recomendação de Oden e Kikuchi [13] de se tirar uma média das pressões de elementos adjacentes para elementos de interpolação bilinear.

CAPÍTULO 5 - RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção apresenta-se a utilização da formulação desenvolvida e os resultados obtidos. A implementação computacional da formulação resultou no programa HIPERMAT, que foi elaborado a partir das equações discretizadas (88) a (94) e (115) a (120), tendo sido codificado na linguagem FORTRAN-77. Os exemplos escolhidos para a validação do programa foram problemas com não-linearidade geométrica somente ou com não-linearidades geométrica e material.

5.1 - PROBLEMAS COM NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Dois problemas clássicos envolvendo não-linearidade geométrica foram escolhidos para se validar o programa HIPERMAT : o caso da flexão de uma viga para grandes deslocamentos e o caso de flexão de um tubo. Em ambos os casos considerou-se um material isotrópico, elástico e linear com as constantes elásticas $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ e $\nu = 0,3$.

5.1.1 - FLEXÃO NÃO-LINEAR DE UMA VIGA

O problema da flexão elástica de uma viga em balanço de rigidez à flexão EI com uma carga em sua extremidade livre, mostrado na figura 4, é apresentado em Ashwell [23], onde as deflexões axiais u_x e transversais u_y da extremidade livre da viga, considerando-se grandes deslocamentos, são

dadas em termos de integrais elípticas por

$$u_y = \sqrt{\frac{EI}{P}} \left[F(k) - F(k, \theta_1) - 2E(k) + 2E(k, \theta_1) \right] \quad (121)$$

$$u_x = 1 - \sqrt{\frac{2EI \operatorname{sen} \phi}{P}} \quad (122)$$

onde $F(k)$, $F(k, \theta_1)$, $E(k)$ e $E(k, \theta_1)$ são integrais elípticas de 1ª ordem completa e incompleta e integrais elípticas de 2ª ordem completa e incompleta, respectivamente. Os valores destas integrais podem ser encontrados em Abramowitz e Stegun [24]. O valor de k é dado por

$$k = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} \phi}{2}} \quad (123)$$

onde ϕ é o valor da rotação do extremo da viga.

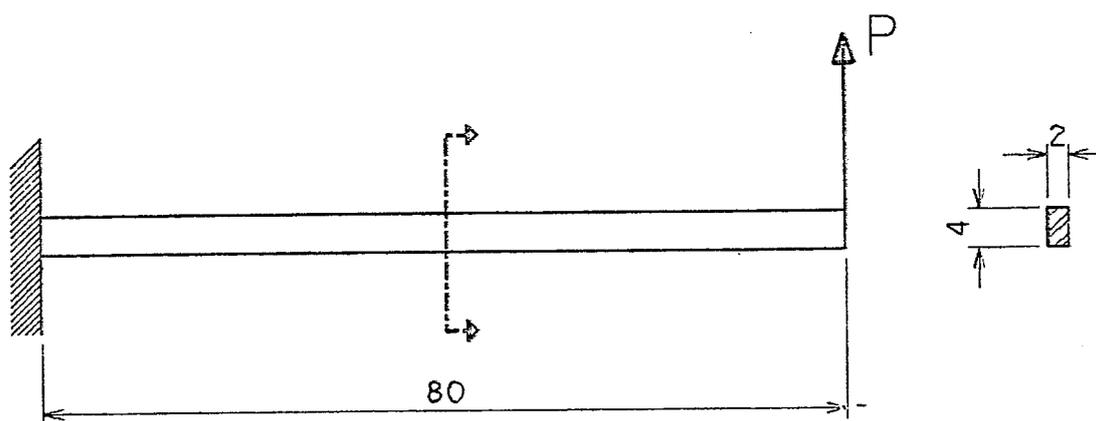


Figura 4 - Flexão de uma viga em balanço.

Um modelo de elementos finitos sólidos tridimensionais foi feito para esta viga, com 40 elementos quadráticos e 393 nós, de forma a apresentar 20 seções de 2 elementos na direção de aplicação da carga, como pode ser visto

na figura 5 nas configurações inicial e final. A carga foi dividida em 20 passos, sendo aplicado o método iterativo de Newton-Raphson modificado dentro de cada passo até que o resíduo alcançasse a tolerância especificada ou que a taxa de convergência fosse demasiadamente pequena. Os resultados obtidos estão apresentados na tabela 1, e foram usados na confecção do gráfico da figura 6, que compara os deslocamentos verticais e horizontais da viga em função da carga aplicada com a curva apresentada por Ashwell [23].

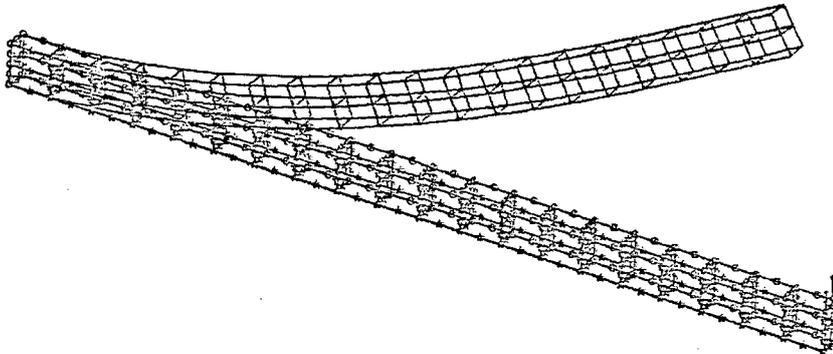


Figura 5 - Modelo de elementos finitos de uma viga.

Tabela 1 - Deflexões axial e transversal de uma viga em balanço com carga transversal P.

Carga P (N)	DEFLEXÕES (mm)			
	Modelo numérico		Solução Analítica	
	axial	transversal	axial	transversal
27,5	$4,10^{-5}$	2,0972	0,0328	2,094
55,0	0,0656	4,1808	0,1311	4,179
82,5	0,1974	6,2865	0,2932	6,245
110,0	0,3914	8,3426	0,5171	8,288
137,5	0,6407	10,327	0,7998	10,30
165,0	0,9476	12,297	1,138	12,27
192,5	1,3060	14,225	1,527	14,19
220,0	1,7000	16,052	1,963	16,06
247,5	2,1290	17,809	2,440	17,88
275,0	2,5887	19,502	2,956	19,64
302,5	3,0701	21,115	3,504	21,34
330,0	3,5676	22,651	4,080	22,98
357,5	4,0763	24,109	4,685	24,56
385,0	4,5920	25,492	5,300	26,08
412,5	5,1112	26,802	5,936	27,53
440,0	5,6318	28,044	6,585	28,93
467,5	6,1525	29,222	7,242	30,26
495,0	6,6733	30,341	7,907	31,56
522,5	7,1950	31,410	8,575	32,77
550,0	7,7193	32,432	9,244	33,94

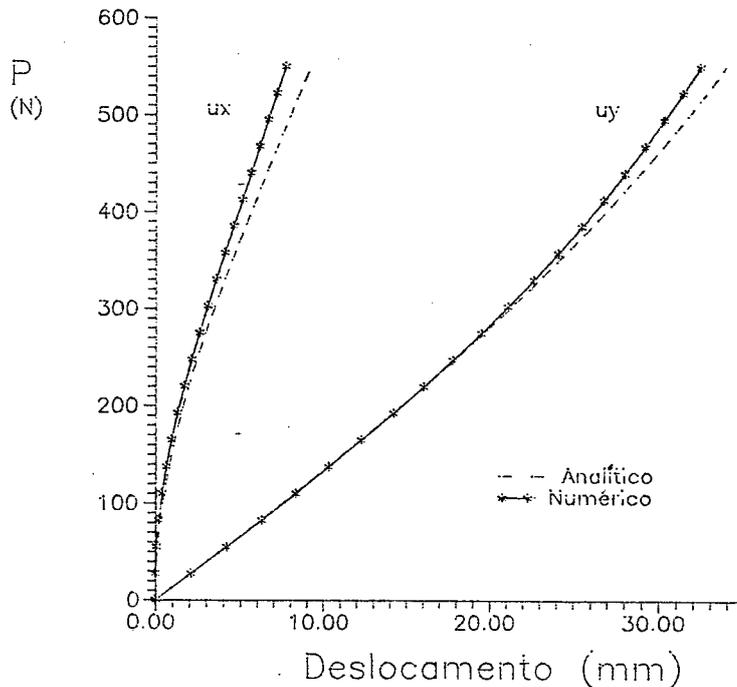


Figura 6 - Deflexões transversal e axial de uma viga em balanço com carga transversal P.

Uma análise dos resultados da tabela 1 permite verificar que o erro nas deflexões transversais é bastante pequeno (5%), mesmo para deflexões da ordem de 25% do comprimento. Cabe ressaltar que o modelo de viga apresentado por Ashwell [23] não leva em consideração os efeitos de engaste, a rotação da seção transversal e as deformações normais transversais, cuja influência é melhor considerada no modelo sólido que no modelo analítico estrutural. Desta forma, pode-se considerar os resultados obtidos para este caso como sendo de precisão satisfatória.

5.1.2 - FLEXÃO NÃO-LINEAR DE UM TUBO

O problema da flexão não-linear de um tubo de rigidez EI, onde

$$I = \pi \cdot e \cdot r^3 \quad , \quad (124)$$

submetido a um momento fletor puro, apresentado na figura 7, difere da flexão de uma viga devido a ocorrência do efeito de Brazier, isto é, a ovalização que ocorre na seção transversal do tubo, causando um aumento em sua flexibilidade (Brush e Almroth [25], Emmerling [26], Axelrad e Emmerling [27]). Esta perda de resistência gradativa leva o tubo a um ponto crítico, a partir do qual o momento fletor necessário para se manter a deformação diminui, com a conseqüente perda de estabilidade.

Para se verificar a capacidade da formulação desenvolvida neste trabalho de representar este efeito, modelou-se, aproveitando as simetrias do problema, um quarto do tubo com a utilização de 3600 elementos finitos de interpolação trilinear, totalizando 5124 nós. Sobre este modelo foi imposto um momento fletor total de 8×10^6 N.mm dividido em quatorze incrementos, utilizando o mesmo método iterativo do caso anterior, com o cuidado de se determinar o incremento no qual os resultados deixam de ter significado fí-

sico, indicando a que o ponto crítico foi atingido e, conseqüentemente, a estrutura tornou-se instável.

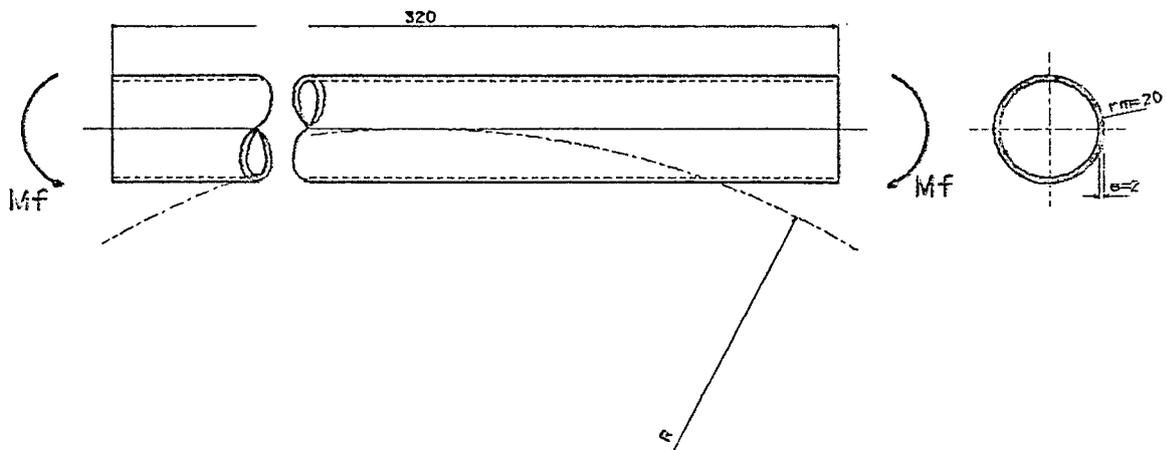


Figura 7 - Flexão de um tubo.

O resultados obtidos podem ser observados nas figuras 8 e 9, que mostram o modelo de elementos finitos em sua configuração deformada e a ovalização da seção transversal na seção média, respectivamente.

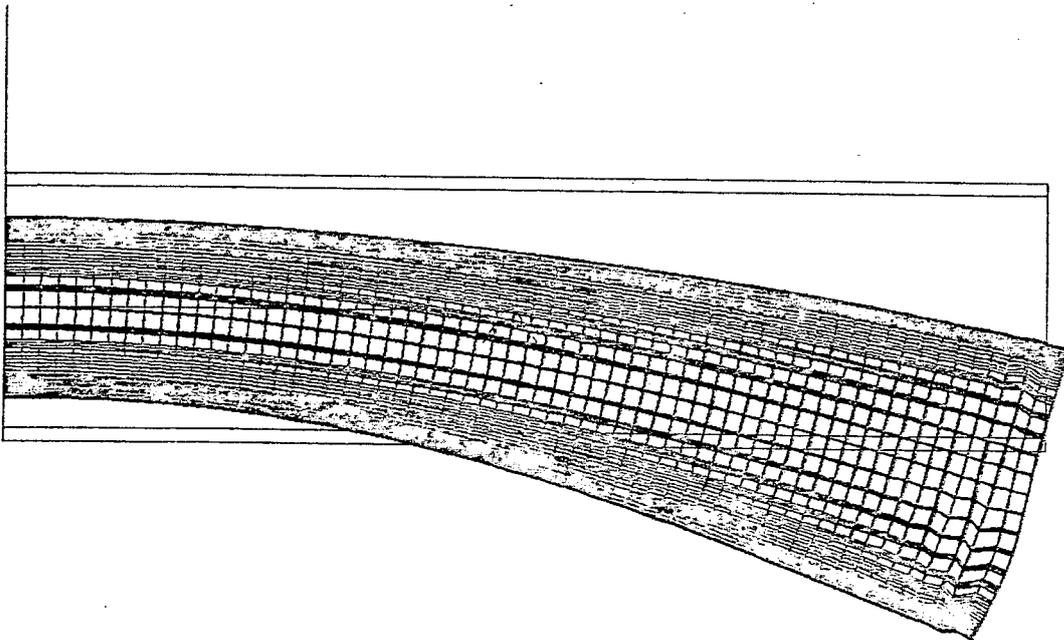


Figura 8 - Flexão de um tubo : configurações inicial e final.

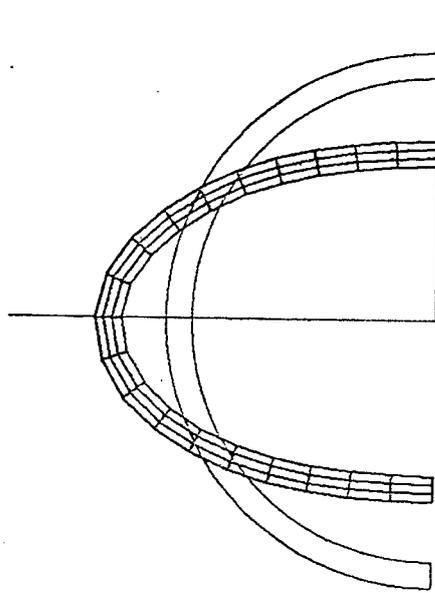


Figura 9 - Ovalização da seção transversal.

O gráfico da figura 10 mostra a relação entre o momento fletor aplicado em uma forma adimensional M_0 e a curvatura resultante no tubo, também em uma forma adimensional μ , verificando-se a flexibilização do tubo pelo efeito de ovalização. O momento fletor adimensional é dado por

$$M_0 = \frac{M_f \cdot r^2 \cdot \sqrt{12(1-\nu^2)}}{E \cdot I \cdot e} \quad , \quad (125)$$

e a curvatura adimensional por

$$\mu = \frac{r^2 \cdot \sqrt{12(1-\nu^2)}}{R \cdot e} \quad . \quad (126)$$

O processo de deformação pode ser acompanhado apenas até as proximidades do momento crítico, pois a formulação adotada neste trabalho não é adequada para a solução de problemas de estabilidade. Para ser possível o acompanhamento do processo de deformação após o momento crítico, é necessá-

ria a implementação de métodos de solução de equações não-lineares que controlem a aplicação do carregamento através de uma verificação do gradiente de tensões. Neste gráfico também é mostrado o valor do momento crítico de ovalização apresentado por Emmerling [26], $M_{ocr} = 1,089$ e $\mu_{cr} = 1,633$, obtido através de uma formulação que utiliza a teoria de cascas finas. Apesar do modelo do HIPERMAT constituir-se de elementos sólidos e da solução analítica ser obtida através de uma teoria de cascas finas, uma comparação entre o momento crítico de ovalização e o último momento obtido antes do colapso do modelo de elementos finitos mostra uma diferença de 7%. Esta diferença é devida ao uso, no modelo numérico, de forças trativas e compressivas na extremidade do tubo, ao invés de um momento puro, e a um anel de elevada rigidez colocado no modelo na extremidade de aplicação da carga, para evitar a excessiva deformação local.

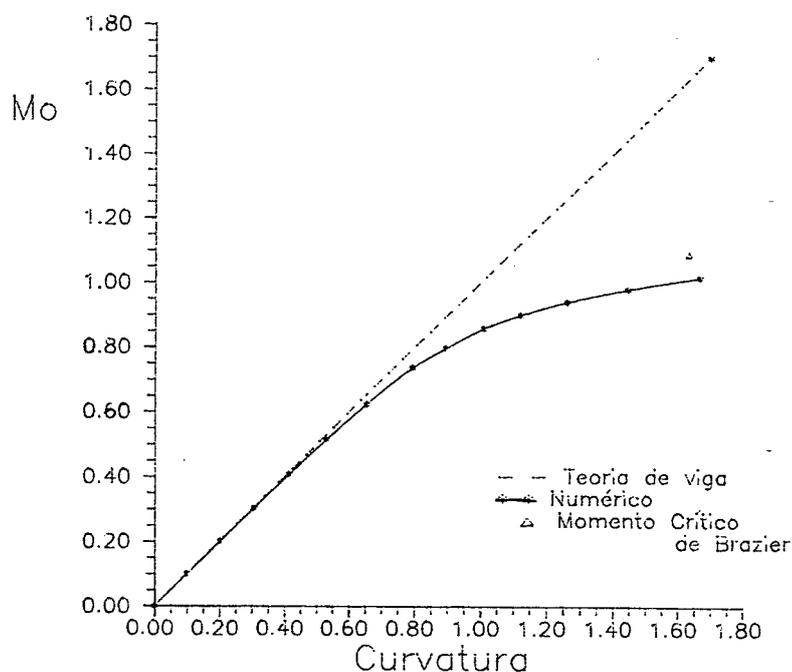


Figura 10 - Flexão não-linear de um tubo.

5.2 - PROBLEMAS COM NÃO-LINEARIDADES GEOMÉTRICA E MATERIAL EM MATERIAIS INCOMPRESSÍVEIS

Alguns problemas com não-linearidades geométrica e material em materiais incompressíveis foram modelados e resolvidos utilizando o programa HIPERMAT. Para isto foram selecionados casos cujo resultado analítico é conhecido, tais como o problema de extensão de uma barra hiperelástica incompressível e o problema de compressão de um bloco hiperelástico incompressível. Os dois exemplos são comparados com resultados da elasticidade finita para deformações homogêneas disponíveis em Atkin e Fox [21].

O elemento finito de interpolação bilinear se demonstrou bastante instável durante o processo iterativo, apresentando na maioria dos casos modos de deformação de ampulheta e uma flutuação bastante grande das pressões, o que de certo modo era esperado com base nos resultados apresentadas por Oden e Kikuchi [13] para os elementos bidimensionais de interpolação bilinear. Deste modo, os exemplos aqui apresentados utilizam elementos finitos de 20 nós com funções de interpolação quadráticas. Seguindo a recomendação de Jankovich et al. [14], um procedimento de relaxação numérica foi adotado para garantir a convergência, que torna-se mais lenta, porém estável. Durante o processo iterativo, o vetor resíduo é multiplicado por um coeficiente de relaxação de 0,5, reduzindo as oscilações do método de Newton-Raphson modificado. Este procedimento é diferente do apresentado em [14], que considera a cada iteração apenas a metade dos incrementos de deslocamentos e de pressão obtidos.

Quanto ao fator de penalidade definido no capítulo anterior, adotou-se neste trabalho ϵ da ordem de 10^{-2} a 10^{-4} ; isto levou a variações de volume da ordem de 2% a 5%, uma vez que este fator relaxa a restrição cinemática de incompressibilidade.

5.2.1 - EXTENSÃO DE UMA BARRA HIPERELÁSTICA

A extensão de uma barra hiperelástica é um dos problemas mais comumente utilizados para a validação de elementos finitos para a hiperelasticidade. A barra de seção quadrada de um material neo-hookeano com coeficiente $C_1 = 1\text{MPa}$, mostrada na figura 11, foi modelada com 10 elementos e 128 nós e submetida a uma extensão de 100% em 10 incrementos.

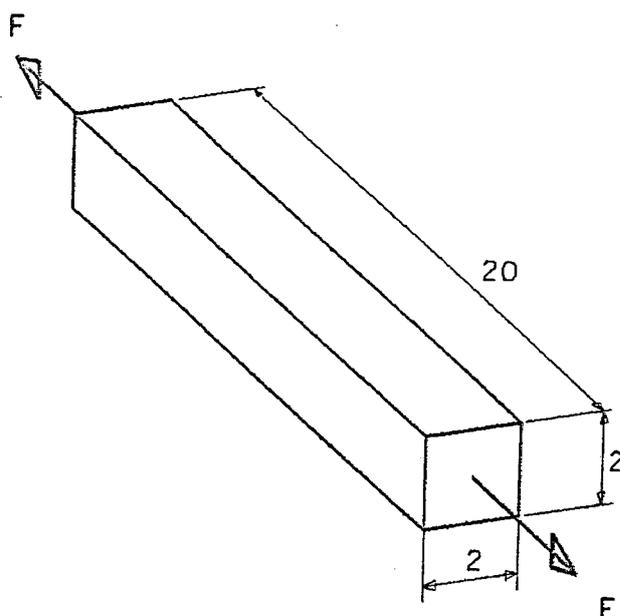


Figura 11 - Extensão de uma barra hiperelástica.

A figura 12 mostra as configurações inicial e final do modelo do HIPERMAT. Os resultados de tensão e pressão estão mostrados na tabela 2 e na figura 13. A solução analítica para pressão hidrostática e a tensão normal na extensão homogênea de uma barra de um material de Mooney-Rivlin, de forma que $Y_1 = a \cdot x_1$, é dada por (Atkin e Fox [21]) :

$$p = 2 (-C_1 a^{-1} + C_2 a) \quad (126)$$

$$T_{11} = 2 (C_1 a^2 - 2 C_2 a^{-2}) + p \quad (127)$$

A discrepância entre os resultados numéricos e analíticos para as pressões e tensões é menor que 2%.

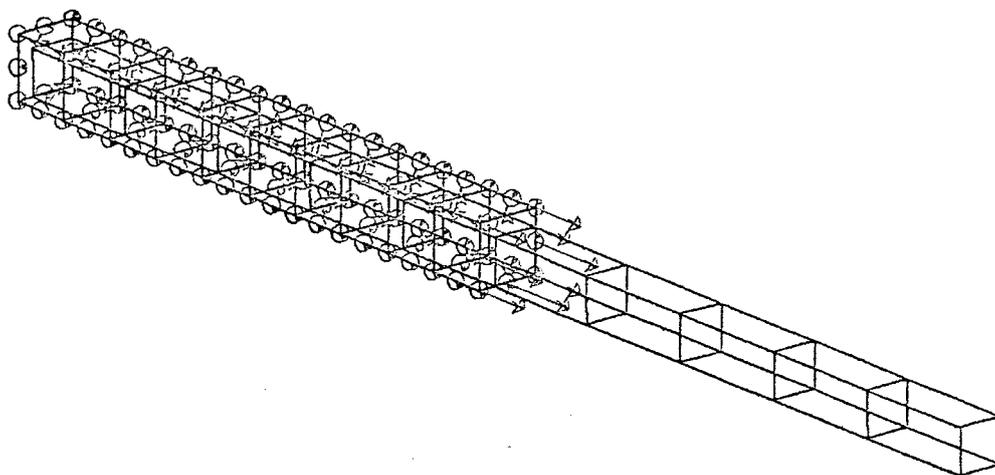


Figura 12 - Modelo de barra hiperelástica. Configurações inicial e final.

Tabela 2 - Tensão normal e pressão hidrostática (MPa) na extensão de uma barra neo-hookeana.

Extensão %	Solução analítica		Modelo numérico	
	Tensão	Pressão	Tensão	Pressão
0	0	-2	0	-2
10	0,6018	-1,818	0,593	-1,827
20	1,213	-1,666	1,200	-1,679
30	1,842	-1,538	1,828	-1,552
40	2,491	-1,429	2,477	-1,443
50	3,167	-1,333	3,153	-1,347
60	3,870	-1,250	3,859	-1,261
70	4,604	-1,176	4,594	-1,186
80	5,369	-1,111	5,365	-1,115
90	6,167	-1,052	6,170	-1,050
100	7,000	-1,000	7,011	-0,989

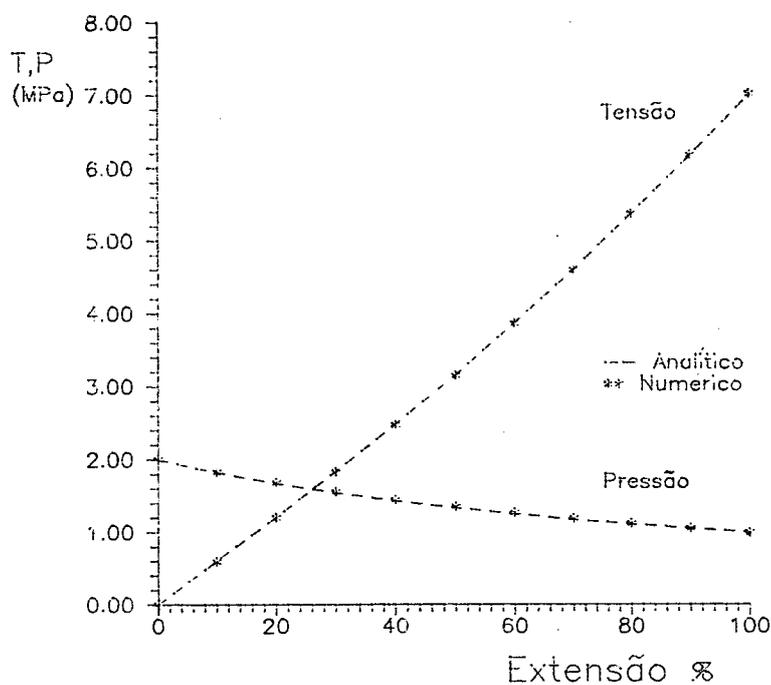


Figura 13 - Tensão normal e pressão na extensão de uma barra hiperelástica.

Neste modelo foram testados a integração reduzida e total dos termos envolvendo a penalidade, sendo que os melhores resultados foram alcançados com a integração total e com a avaliação das pressões no ponto central de cada elemento. O fator de penalidade adotado foi de 10^{-3} em todos os incrementos, o que permitiu uma variação de volume da ordem de 2%. Não foi possível seguir as recomendações de Häggblad e Sundberg [15] de utilizar fatores de penalidade mais baixos devido à instabilidade que estes trazem ao processo iterativo, sem que tragam melhoras significativas na precisão dos resultados.

5.2.2 - COMPRESSÃO DE UM BLOCO HIPERELÁSTICO

O problema de compressão de um bloco cilíndrico hiperelástico, mostrado na figura 14, foi selecionado como um dos problemas de teste do HIPERMAT devido à grande dificuldade que têm as formulações de elementos finitos para a hiperelasticidade incompressível em apresentar resultados aceitáveis. Na literatura pesquisada, apenas LeTallec e Glowinski [18] apresentam resultados qualitativos aceitáveis para este problema através de uma formulação lagrangiana aumentada. Modelou-se um bloco de um material de Mooney-Rivlin com coeficientes $C_1 = 1.5$ MPa e $C_2 = 0.5$ MPa com 78 elementos, totalizando 439 nós (Fig. 15), submetido a uma compressão imposta em sua face superior de 50%.

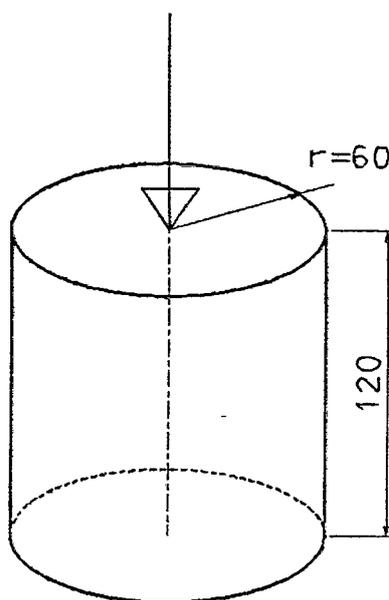


Figura 14 - Compressão de um bloco cilíndrico hiperelástico.

Um dos resultados esperados é um recalque do material pelas laterais, ficando acima do nível da face superior. A solução analítica de tensão normal para o problema de compressão homogênea é dada pela equação (128), resultando em $T_{11} = -7$ MPa para 50% de compressão. O resultado obtido pelo Hipermat no centro do modelo foi de $T_{11} = 6,78$ MPa.

A formulação utilizada no HIPERMAT não foi capaz de representar este comportamento. O fator de penalidade alto leva a uma excessiva compressibilidade do modelo, que não se recalca acima da face superior, enquanto um fator de penalidade muito baixo resulta em modos de deformação de energia zero, conhecidos como modo de ampulheta, existentes devido a sub-integração dos termos de incompressibilidade para evitar o travamento do modelo. Neste modelo a formulação adotada só é efetiva para faixas de deformações pequenas (até 30%), sendo os modos espúrios de deformação eliminados através da integração total de todos os termos da equação (118). Uma das causas desta limitação é a excessiva distorção da malha de elementos finitos deste modelo para deformações maiores do que 30%. Para este problema a solução é implementar a realocação e o refino automático da malha de elementos finitos onde a distorção dos elementos seja muito grande.

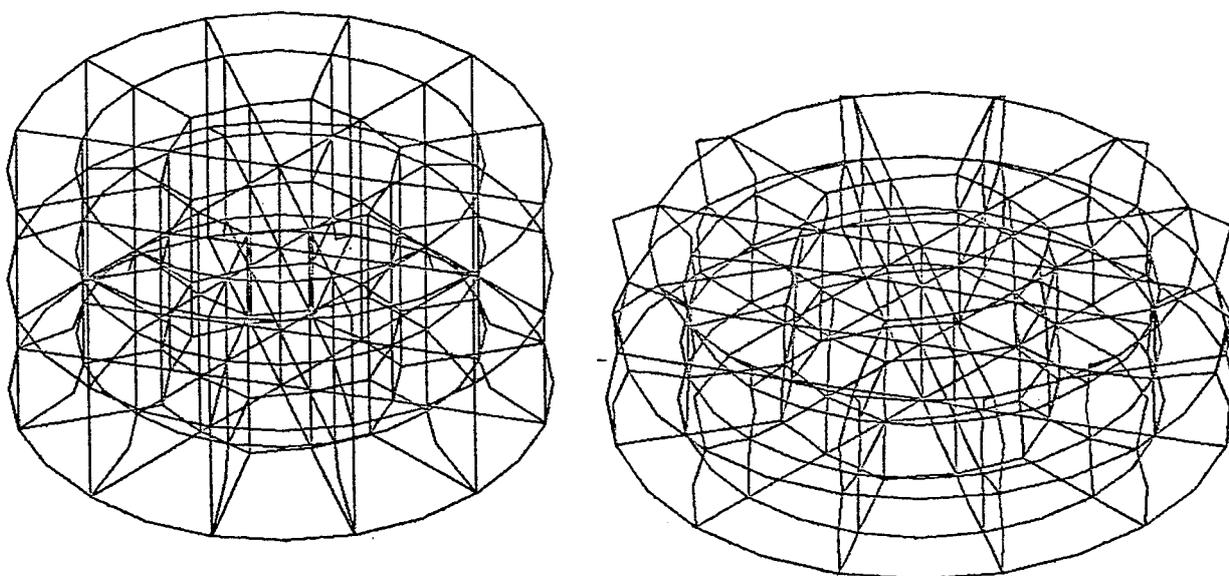


Figura 15 - Bloco cilíndrico nas configurações final e inicial.

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES

Neste capítulo são apresentadas as conclusões obtidas no desenvolvimento deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros nesta área.

- A formulação lagrangiana perturbada utilizada neste trabalho demonstrou-se viável para a solução de problemas de hiperelasticidade estática com restrições cinemáticas. A formulação perturbada apresenta a vantagem significativa de reduzir o número de equações simultâneas a serem resolvidas em relação às formulações mistas.

- O método iterativo de Newton-Raphson modificado para a solução de problemas não-lineares é bem adequado à esta formulação incremental, uma vez que não há não-linearidades fortes se os incrementos de carga forem pequenos, desde que não hajam pontos de instabilidade ou bifurcação.

- A função de restrição

$$g = I_3 - 1$$

não se revelou eficaz em nenhum caso, sendo usada a função logarítmica

$$g = \frac{1}{2} \ln (I_3).$$

- O elemento finito de interpolação bilinear revelou-se eficiente para problemas de não-linearidade geométrica, mas exige muita discretização para casos incompressíveis para que o valor da pressão hidrostática não flutue em demasia.

- O elemento finito de interpolação quadrática revelou-se eficiente para não-linearidades geométricas e materiais.

- A integração reduzida dos termos oriundos da incompressibilidade leva ao aparecimento de modos de deformação espúrios (de energia zero) para

problemas de compressão, se o fator de penalidade for muito alto. Para casos de compressão, obtem-se melhores resultados com integração total dos termos de incompressibilidade.

- A formulação é muito sensível à escolha do fator de penalidade, o que torna necessário um estudo mais aprofundado da teoria matemática da formulação para automatizar esta escolha.

6.1 - SUGESTÕES PARA A EXTENSÃO DA PESQUISA

A solução de problemas de elasticidade não linear através do método dos elementos finitos é um campo bastante fértil para pesquisas futuras na instituição e no país, tanto pelo aumento do interesse da indústria pelos materiais não lineares quanto pela amplitude da área. Entre as perspectivas mais imediatas para o prosseguimento da pesquisa podem ser destacadas as seguintes :

- Implementação e teste de um elemento finito de interpolação quadrática de 21 nós, que poderia fornecer um campo bilinear de pressões, ao invés do campo constante do elemento de 20 nós.
- Implementação de um elemento finito com controle de modos de deformação de energia zero (modos de ampulheta).
- Utilização de outras formas para a energia de deformação para materiais hiperelásticos incompressíveis, por exemplo, as formas sugeridas por Ogden e por Rivlin e Saunders.
- Implementação de modelos para borrachas compressíveis ou quase incompressíveis, que apresentam menores dificuldades numéricas, como as formas para a energia de deformação de Blatz e Ko e de Ogden.
- Implementação de uma formulação totalmente incremental, calculando-se a pressão em um referencial atualizado.

- Implementação de métodos adaptativos para a realocação automática dos nós e elementos ao longo do processo incremental de deformação, fundamental para a obtenção de resultados em problemas com grandes deformações.

- Desenvolvimento de outros elementos finitos para estruturas diversas como placas e cascas.

REFERÊNCIAS

- [1] TRUESDELL, C. e NOLL, W., "The Non-linear Field Theories of Mechanics", em "Handbuch der Physik", FLÜGGE, S., ed., Springer-Verlag, 1965.
- [2] TRUESDELL, C. e TOUPIN, R.A., "The Classical Field Theories", em "Handbuch der Physik", FLÜGGE, S., ed., Springer-Verlag, 1961.
- [3] GREEN, A.E. e ADKINS, J.E., "Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics", 2^a ed., Oxford University Press, 1970.
- [4] GREEN, A.E. e ZERNA, W., "Theoretical Elasticity", 2^a ed., Oxford University Press, 1968.
- [5] PRAGER, W., "Introduction to Mechanics of Continua", Ginn & Co., 1961.
- [6] MALVERN, L.E., "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall, 1969
- [7] SPENCER, A. J. M., "Continuum Mechanics", Longman, 1980.
- [8] TRELOAR, L.G.R., "The Elasticity and Related Properties of Rubbers", Rep. Prog. Phys., vol. 36, pág. 755-826, 1973.
- [9] SHIELD, R.T., "Equilibrium Solutions in Finite Elasticity", J. Applied Mechanics, vol.50, pág. 1171-1180, 1983.
- [10] ODEN, J.T., "Finite Elements of Nonlinear Continua", McGraw-Hill, 1972.
- [11] OGDEN, R.W., "Non-linear Elastic Deformations", Ellis Horwood, 1984.
- [12] MALKUS, D.S. e HUGHES, T.J.R., "Mixed Finite Element Methods - Reduced and Selective Integration Techniques : a Unification of Concepts", J. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng, vol. 15, pág. 63-81, 1978.

- [13] ODEN, J.T. e KIKUCHI, N., "*Finite Element Methods for Constrained Problems in Elasticity*", Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 18, pág. 710-725, 1982.
- [14] JANKOVICH, E., LEBLANC, F., DURAND, M. e BERCOVIER, M., "*A Finite Element Method for the Analysis of Rubber Parts, Experimental and Analytical Assessment*", Computers & Structures, vol.14, pág. 385-391, 1981.
- [15] HÄGGBLAD, B. e SUNDBERG, J.A., "*Large Strain Solutions of Rubber Components*", Computers & Structures, vol.17, pág. 835-843, 1983.
- [16] SWANSON, S.R., CHRISTENSEN, L.W. e ENSIGN, M., "*Large Deformation Finite Element Calculations for Slightly Compressible Hyperelastic Materials*", Computers & Structures, vol.21, pág. 81-88, 1985.
- [17] CÉSAR DE SÁ, J.M.A. e OWEN, D.R.J., "*The Finite Element Analysis of Reinforced Rubber Shells*", em "*Comput. Methods for Non-linear Problems*", OWEN, D.R.J., TAYLOR, e HINTON, ed., Pineridge Press, 1987.
- [18] GLOWINSKI, R. e LE TALLEC, P., "*Finite Elements in Nonlinear Incompressible Elasticity*", em "*Finite Elements : Special Problems in Solid Mechanics*", vol.5, ODEN, J.T. e CAREY, G.F., ed. , Prentice-Hall, 1984.
- [19] GADALA, M.S., e ORAVAS, G. AE., "*Numerical Solutions of Nonlinear Problems of Continua-I*", Computers & Structures, vol.19, pág. 865-877, 1984.
- [20] WASHIZU, K., "*Variational Methods in Elasticity and Plasticity*", 3^a ed., Pergamon Press, 1982.
- [21] ATKIN, R.J. e FOX, N., "*An Introduction to the Theory of Elasticity*", Longman, 1980.
- [22] CAREY, G.F. e ODEN, J.T., "*Finite Elements : a Second Course*", vol. II, Prentice-Hall, 1982.
- [23] ASHWELL, D.G., "*Nonlinear Problems*", em "*Handbook of Engineering Mechanics*", FLÜGGE, W., ed., McGraw-Hill, 1962.

- [24] ABRAMOWITZ, M. E STEGUN, I.A., "*Handbook of Mathematical Functions*", Dover, 1965.
- [25] BRUSH, D. e ALMROTH, B., "*Buckling of Bars, Plates, and Shells*", McGraw-Hill, 1975.
- [26] EMMERLING, F.A., "*Nonlinear bending of curved tubes*", em "*Flexible Shells, Theory and Applications*", AXELRAD, E.L. e EMMERLING, F.A. ed., Springer Verlag, 1984.
- [27] AXELRAD, E.L. e EMMERLING, F.A., "*Intrinsic Shell-Theory Formulation Effective for Large Rotations and an Application*", em "*Finite Rotations in Structural Mechanics*", PIETRASZKIEWICZ, W. ed., Springer Verlag, 1986.