

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

O USO DE VARIÁVEIS CO-LOCALIZADAS NA SOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS  
SUPERSÔNICOS SOBRE CORPOS DE GEOMETRIAS ARBITRÁRIAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

ÁLVARO LUIZ DE BORTOLI

FLORIANÓPOLIS, SETEMBRO - 1990

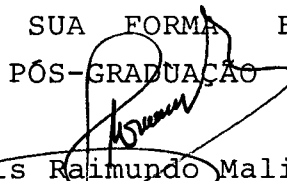
O USO DE VARIÁVEIS CO-LOCALIZADAS NA SOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS  
SUPERSÔNICOS SOBRE CORPOS DE GEOMETRIAS ARBITRÁRIAS

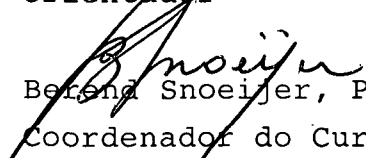
ÁLVARO LUIZ DE BORTOLI

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

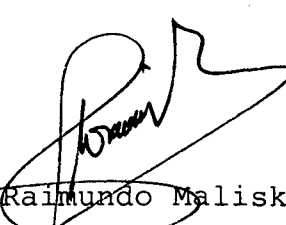
MESTRE EM ENGENHARIA

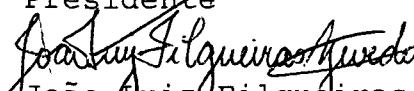
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONHECIMENTO CIÊNCIAS  
TÉRMICAS E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO

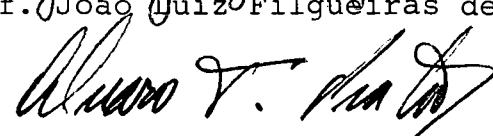
  
Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.  
Orientador

  
Prof. Berend Snoeijer, Ph.D.  
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA:

  
Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.  
Presidente

  
Prof. João Luiz Filgueiras de Azevedo, Ph.D.

  
Prof. Álvaro Toubes Prata, Ph.D.

  
Prof. Paulo Cesar da Silva Jucá, M.Sc.

### AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Clóvis Raimundo Maliska, pelos conhecimentos transmitidos, pela amizade e orientação efetiva.

- Pela oportunidade oferecida de integrar o Projeto de Desenvolvimento de Códigos Computacionais para Escoamentos a Alta Velocidade, Projeto de Consultoria para o Instituto de Atividades Espaciais IAE do Centro Técnico Aeroespacial CTA.

- Aos estagiários do SINMEC e ao mestrando Axel Dihlmann pela colaboração na utilização dos aplicativos gráficos e por conhecimentos transmitidos.

- Ao Prof. Antonio Fábio Carvalho da Silva, pelos conhecimentos transmitidos.

- Aos demais integrantes do Grupo de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor SINMEC, pela colaboração no desenvolvimento do trabalho.

- A minha família pelo incentivo e colaboração sempre prestados.

- E a todos aqueles que, das mais variadas formas, colaboraram para a realização deste trabalho.

## ÍNDICE

página

LISTA DE FIGURAS	.....	viii
LISTA DE TABELAS	.....	xiv
SIMBOLOGIA	.....	xv
RESUMO	.....	xix
ABSTRACT	.....	xx

## Capítulos

<b>1 - INTRODUÇÃO</b>	.....	1
1.1 - Introdução	...	1
1.2 - Delineamento da Dissertação	...	3
<b>2 - EQUAÇÕES GOVERNANTES E TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS EMPREGADA</b>	.....	5
2.1 - Equações governantes	...	5
2.2 - Transformação de coordenadas	...	7
<b>3 - DISPOSIÇÃO DAS VARIÁVEIS NA MALHA</b>	.....	10
3.1 - Introdução	...	10

3.2 - Disposição desencontrada das variáveis na malha ...	11
3.3 - Disposição co-localizada das variáveis na malha ...	12
3.4 - Resumo e Conclusões ...	13
<b>4 - PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO .....</b>	<b>14</b>
4.1 - Introdução ...	14
4.2 - Obtenção das equações aproximadas ...	14
4.3 - Aproximações para os termos fontes ...	18
4.3.1 - Aproximação para o termo fonte em u ...	18
4.3.2 - Aproximação para o termo fonte em v ...	19
4.3.3 - Aproximação para o termo fonte em T ...	19
4.4 - A formulação incompressível, a formulação compressível e a formulação para escoamentos a qualquer velocidade ...	20
4.5 - Obtenção da equação para a pressão usando o método de acoplamento SIMPLEC ...	21
4.6 - Cálculo das velocidades nas faces do volume de controle ...	26
4.7 - Condições de contorno ...	29
4.7.1 - Uso de pontos fictícios para as velocidades e temperaturas ...	29
4.7.2 - Extrapolação linear para a pressão para os volumes da fronteira ...	31

4.7.3 - Aplicação das condições de contorno para as equações de Euler	...	32
4.8 - Detalhes numéricos	...	32
4.9 - Resumo e conclusões	...	34
<b>5 - RESULTADOS NUMÉRICOS PARA ESCOAMENTOS BI-DIMENSIONAIS EM COORDENADAS CARTESIANAS</b>	<b>.....</b>	<b>35</b>
5.1 - Introdução	...	35
5.2 - Geometria, malhas utilizadas, condições de contorno e iniciais	...	35
5.3 - Resultados obtidos para escoamento no interior de um duto	...	37
5.4 - Resultados obtidos para o escoamento sobre um anteparo	...	38
5.5 - Resumo e conclusões	...	43
<b>6 - RESULTADOS NUMÉRICOS PARA ESCOAMENTOS BI-DIMENSIONAIS EM COORDENADAS GENERALIZADAS</b>	<b>.....</b>	<b>44</b>
6.1 - Introdução	...	44
6.2 - Resultados para o escoamento sobre o perfil NACA 0012	...	44
6.3 - Resultados para o escoamento sobre a parte frontal do VLS	...	48
6.4 - Resultados para o escoamento sobre um cone	...	55

6.5 - Resultados do escoamento sobre um perfil cunha	...	59
6.6 - Resultados obtidos do escoamento sobre um booster...		67
6.7 - Resumo e conclusões	...	75
<b>7 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	.....	<b>77</b>
7.1 - Conclusões	...	77
7.2 - Recomendações para futuros trabalhos	...	78
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	.....	<b>79</b>

## LISTA DE FIGURAS

	página
Fig. 2.1 - Geometria adequada ao sistema cartesiano ..	6
Fig. 2.2 - Geometria típica de forma não cartesiana ..	7
Fig. 3.1 - Disposição desencontrada das variáveis na malha para problemas bi-dimensionais em coordenadas generalizadas ..	11
Fig. 3.2 - Disposição co-localizada de variáveis na malha para problemas bi-dimensionais em coordenadas generalizadas ..	12
Fig. 4.1 - Volume de controle genérico para integração ..	15
Fig. 4.2 - Disposição das velocidades cartesianas e contravariantes nas faces do volume de controle para volumes vizinhos ..	27
Fig. 4.3 - Volume fictício para aplicação das condições de contorno para as velocidades e temperaturas na face oeste ..	30
Fig. 4.4 - Extrapolação linear para a pressão para a fronteira leste do volume de controle ..	31
Fig. 4.5 - Armazenamento das métricas e do raio para problemas bi-dimensionais em coordenadas generalizadas ..	33
Fig. 5.1 - Geometria e condições de contorno para o problema do duto constituído de placas paralelas ..	36



Fig. 5.2 - Geometria e condições de contorno para o problema do anteparo ..	36
Fig. 5.3 - Malha 36x44 utilizada para a solução do problema do anteparo ..	37
Fig. 5.4 - Perfis de velocidades para o problema do duto de placas paralelas para malha 22x18 e Mach 5 E-05 usando variáveis desencontradas e co-localizadas ..	38
Fig. 5.5 - Linhas de pressão constante para o problema do anteparo para malha 22x18, Mach 2.0 usando variáveis co-localizadas e desencontradas ..	39
Fig. 5.6 - Linhas de pressão constante para o problema do anteparo para malha 44x36, Mach 2.0 usando variáveis co-localizadas e desencontradas ..	39
Fig. 5.7 - Curvas de CPUxDTAD para o problema do anteparo para malha 22x18 e Mach 2.0 ..	40
Fig. 5.8 - Curvas de CPUxDTAD para o problema do anteparo para malha 44x36 e Mach 2.0 ..	41
Fig. 5.9 - Linhas de massa específica constante para o problema do anteparo para malha 44x36 e Mach 2.0 usando variáveis co-localizadas ..	42
Fig. 5.10 - Linhas de temperatura constante para o problema do anteparo para malha 44x36 e Mach 2.0 usando variáveis co-localizadas ..	42
Fig. 5.11 - Linhas de Mach constante para o problema do anteparo para malha 44x36 e Mach da corrente livre 2.0 usando variáveis co-localizadas ..	43
Fig. 6.1 - Geometria e condições de contorno para o	

problema do NACA 0012	..	45
Fig. 6.2 - Malha 38x82 utilizada na obtenção da solução do escoamento sobre o NACA 0012	..	45
Fig. 6.3 - Curvas de massa específica constante para Mach 2.0 sobre o perfil NACA 0012 para malha 38x82 usando variáveis co-localizadas	..	46
Fig. 6.4 - Curvas de massa específica constante para Mach 2.0 sobre o perfil NACA 0012 da referência [23]	..	47
Fig. 6.5 - Curvas de pressão constante para Mach 2.0 sobre o perfil NACA 0012 para malha 38x82 usando variáveis co-localizadas	..	47
Fig. 6.6 - Curvas de temperatura constante para Mach 2.0 sobre o perfil NACA 0012 para malha 38x82 usando variáveis co-localizadas	..	48
Fig. 6.7 - Geometria e condições de contorno para o problema do VLS parte frontal ( axissimétrico)..	..	49
Fig. 6.8 - Malha 26x62 utilizada na solução do escoamento sobre o perfil do VLS parte frontal	..	49
Fig. 6.9 - Linhas de massa específica constante usando-se variáveis co-localizadas e desencontradas para Mach 3.75 e malha 26x62 volumes para a parte frontal do VLS	..	50
Fig. 6.10 - Curvas do coeficiente de pressão usando-se variáveis co-localizadas e desencontradas para malha 26x62 volumes e dados experimentais para Mach 3.75 para a parte frontal do VLS	..	51

- Fig. 6.11 - Linhas de Euler usando-se de variáveis co-localizadas e desencontradas para Mach 3.75 e malha 26x62 volumes para a parte frontal do VLS .. 52
- Fig. 6.12 - Linhas de temperatura constante usando-se variáveis co-localizadas e desencontradas para Mach 3.75 e malha 26x62 volumes para a parte frontal do VLS .. 52
- Fig. 6.13 - Linhas de Mach constante usando-se variáveis co-localizadas e desencontradas para Mach 3.75 e malha 26x62 volumes para a parte frontal do VLS .. 53
- Fig. 6.14 - Curvas de desempenho para malha 26x62 volumes para Mach 3.75 usando variáveis co-localizadas e desencontradas para a parte frontal do VLS .. 54
- Fig. 6.15 - Geometria e condições de contorno para o problema do cone ( axissimétrico) .. 55
- Fig. 6.16 - Malha 97x58 volumes utilizada na solução do escoamento sobre o cone .. 56
- Fig. 6.17 - Linhas de Mach constante para o cone usando variáveis co-localizadas para Mach 1.401 para malhas 50x30, 97x58 volumes .. 57
- Fig. 6.18 - Linhas de Mach constante para o cone para os dados da referência [24] .. 57
- Fig. 6.19 - Linhas de temperatura constante para o cone usando variáveis co-localizadas para Mach 1.401 e malha 97x58 volumes .. 58
- Fig. 6.20 - Linhas de massa específica constante para o cone usando variáveis co-localizadas para Mach 1.401

e malha 97x58 volumes	..	59
Fig. 6.21 - Geometria e condições de contorno para o problema da cunha	..	60
Fig. 6.22 - Malha 123x71 utilizada na solução do escoamento sobre a cunha	..	60
Fig. 6.23 - Linhas de massa específica constante para o problema da cunha usando variáveis co-localizadas para Mach 2.0 e malha 123x71 volumes	..	61
Fig. 6.24 - Linhas de massa específica constante para o problema da cunha para Mach 2.0 da referência [25]	..	62
Fig. 6.25 - Linhas de massa específica constante para o problema da cunha usando variáveis co-localizadas para Mach 2.0 para malhas 123x51 e 123x71 volumes	..	62
Fig. 6.26 - Linhas de Mach constante do problema da cunha usando variáveis co-localizadas para Mach 2.0 para malha 123x71 volumes	..	63
Fig. 6.27 - Curvas de pressão constante para a parte inferior da cunha para malha 123x71 e da referência [25] para Mach igual a 2.0	..	64
Fig. 6.28 - Linhas de Mach constante usando variáveis co-localizadas para Mach 2.0 para malha 123x71 volumes do problema da cunha deslocada 0.75m	..	65
Fig. 6.29 - Foto dos campos de Mach constante obtida da tela de uma InterPro 240 para o problema da cunha	..	66
Fig. 6.30 - Geometria para o problema real do VLS	..	67

Fig. 6.31 - Geometria e condições de contorno para o problema do booster ..	68
Fig. 6.32 - Malha 139x38 volumes utilizada para resolver o problema do booster ..	69
Fig. 6.33 - Linhas de Mach constante para malhas 139x32 e 139x38 para Mach 3.75 usando variáveis co-localizadas para o booster ..	69
Fig. 6.34 - Linhas de temperatura constante para malhas 139x32 e 139x38 para Mach 3.75 para o booster ..	70
Fig. 6.35 - Linhas de massa específica constante para malhas 139x32 e 139x38 para Mach 3.75 para o booster ..	71
Fig. 6.36 - Curva de $C_p^*$ sobre a superfície do booster para Mach 3.75 ..	71
Fig. 6.37 - Linhas de Mach constante para malha 139x32 para Mach 3.75 e deslocamento 0.75 m usando variáveis co-localizadas para o problema do booster ..	72
Fig. 6.38 - Linhas de Mach constante para Mach da corrente livre 2.0 e malha 139x32 volumes para o booster ..	73
Fig. 6.39 - Linhas de Mach constante para Mach da corrente livre 2.5 e malha 139x32 volumes para o booster ..	73
Fig. 6.40 - Linhas de Mach constante para Mach da corrente livre 3.0 e malha 139x32 volumes para o booster ..	74
Fig. 6.41 - Foto dos campos de Mach obtidos da tela de uma InterPro 240 para o problema do booster ..	75

## LISTA DE TABELAS

página

Tab. 2.1 - Valores de $\phi$ , $\Gamma^\phi$ , $S^\phi$ , e $p^\phi$ para as equações de conservação em coordenadas generalizadas ..	9
--	---

## SIMBOLOGIA

- $a^\phi$  - coeficiente para o termo  $\phi$
- $b^u$  - termo fonte para as velocidades
- $b^p$  - termo fonte para a equação da pressão
- $B$  - termo fonte para a equação discretizada genérica
- $C_p$  - calor específico à pressão constante
- $C_p^*$  - coeficiente de pressão
- $c_i^\rho$  - coeficiente obtido na linearização da equação de estado
- $\bar{d}_i^u$  - coeficiente para a equação de correção das velocidades relativo ao acoplamento pressão-velocidades
- $dV$  - variação infinitesimal de volume
- $D_1, D_2, D_3, D_4$  - termos definidos na obtenção das equações em coordenadas generalizadas que representam a difusão da propriedade em consideração
- $e, w, n, s$  - indicadores das faces do volume de controle
- $Eu$  - número de Euler
- $f_x$  - derivada de uma função  $f$  qualquer em relação a  $x$
- $J$  - jacobiano da transformação de coordenadas
- $K$  - coeficiente de condutibilidade térmica
- $L$  - comprimento

$L( )$  - aproximação em diferenças finitas para o termo entre parênteses

$m_i^\rho$  - coeficiente para o termo da densidade na equação relativa a pressão

$m_i^u$  - coeficiente para o termo da velocidade na equação relativa a pressão

$\dot{M}$  - fluxo de massa

$\vec{n}$  - vetor unitário normal a uma superfície

$p$  - termo de pressão nas equações de conservação

P, E, N, S,

W, NE, SE,

NW, SW

- referem-se aos pontos onde as variáveis são avaliadas

$Pe$  - número de Peclet

$Pr$  - número de Prandtl

$Re$  - número de Reynolds

$S^\phi$  - termo fonte para a equação de conservação em  $\phi$

$t$  - tempo

$T$  - temperatura

$u, v$  - velocidades cartesianas

$v_i$  - velocidade média ponderada na face do volume de controle



$U, V$  - componentes contravariantes do vetor velocidade

$\vec{V}$  - vetor velocidades

$x_1, x_2$  - sistema cartesiano de coordenadas

$x_2^j$  - raio relativo a transformação de coordenadas para problemas axissimétricos

### Símbolos especiais

$\alpha, \beta$  e  $\gamma$  - componentes do tensor métrico

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  e  $\bar{\gamma}$  - coeficientes utilizados na aproximação WUDS

$(\nabla \cdot H)$  - divergente da propriedade H qualquer

$\phi$  - variável qualquer

$\Gamma^\phi$  - coeficiente do transporte difusivo para um escalar

$\mu$  - viscosidade dinâmica

$\int_v$  - representa integral da função de interesse no volume

$\int_{v,t}$  - representa integral da função de interesse no volume e tempo

$\nabla ( )$  - gradiente

$\nabla^2 ( )$  - laplaciano

$\rho$  - massa específica

- $\sum_{nb}$  - representa o somatório dos elementos vizinhos a determinado volume de controle
- $\xi, \eta$  - sistema generalizado de coordenadas
- $\xi_x$  - derivada primeira de  $\xi$  em relação a  $x$
- $\xi_{xx}$  - derivada segunda de  $\xi$  em relação a  $x$
- $( )'$  - representa flutuação da propriedade de referência
- $( )^*$  - valor da iteração anterior da propriedade de referência
- $( )_\infty$  - valor da propriedade na corrente livre
- $( )^0$  - o valor entre parênteses refere-se a iteração anterior ou estado de referência
- $\Delta ( )$  - variação da quantidade entre parênteses
- $\frac{\partial ( )}{\partial ( )}$  - derivada da propriedade em relação ao eixo de referência
- $\frac{D( )}{D( )}$  - derivada material da propriedade física de interesse em relação ao eixo de referência
- $\Delta V$  - elemento de volume

## RESUMO

O presente trabalho apresenta uma metodologia para a solução de escoamentos bi-dimensionais sobre corpos de geometrias arbitrárias, em coordenadas generalizadas usando variáveis co-localizadas.

O uso de variáveis co-localizadas não tem recebido a adequada atenção dos analistas numéricos que usam volumes finitos devido as dificuldades inerentes ao acoplamento pressão-velocidades presente nas equações de Navier-Stokes. Se por um lado o uso de variáveis desencontradas introduz o adequado acoplamento entre a pressão e a velocidade para escoamentos incompressíveis, introduz também a necessidade de diferentes volumes de controle para as variáveis dependentes. Para situações tridimensionais, empregando-se coordenadas generalizadas, isto acarreta o armazenamento de um grande número de informações geométricas para cada volume de controle, o que torna inviável o uso de variáveis desencontradas. Associada ao maior armazenamento está a necessidade de um número maior de operações algébricas, como por exemplo, no cálculo dos fluxos mássicos nas interfaces do volume de controle, ocasionando um maior tempo de computação.

Neste trabalho é desenvolvido um modelo numérico empregando variáveis co-localizadas que apresenta excelente desempenho quando comparado com o modelo que emprega variáveis desencontradas. O modelo emprega uma linearização do tipo Newton-Raphson para o fluxo de massa, o que permite resolver problemas para escoamentos de alta e baixa velocidades. Para a validação do modelo são analisados problemas bi-dimensionais em coordenadas cartesianas e generalizadas. Em coordenadas cartesianas são analisados os problemas do escoamento a baixa velocidade na região de entrada de um duto constituído de placas paralelas e o problema do escoamento supersônico sobre um anteparo plano, enquanto que em coordenadas generalizadas são analisados os problemas de escoamento sobre o perfil NACA 0012, sobre a parte frontal do VLS, sobre um cone, sobre uma cunha e sobre a região do VLS onde se encontram os boosters, admitindo uma situação bi-dimensional.

**ABSTRACT**

This work presents a numerical methodology for the solution of two-dimensional flows using co-located variables.

The use of co-located variables has received little attention from the numerical analysts involved with finite volume methods due to the strong coupling between velocity and pressure, especially in incompressible flows. If, as claimed, the staggered grid introduces the adequate coupling between pressure and velocity, it also introduces the need of different control volumes for the dependent variables. For 3D situations, using generalized coordinates, this means the need of storing a large number of geometric informations for each control volume, making the use of staggered grids unfeasible.

In this work it is developed a numerical methodology using co-located variables which demonstrated excellent performance when compared with the staggered grid methodology. The model employs a Newton-Raphson-like linearization which allows for the solution of all speed flows.

To validate the model problems defined in cartesian grids as well as in nonorthogonal grids are solved. Using cartesian grids the entrance flow in a parallel plate duct and the supersonic flow against a plate are solved. With boundary-fitted grids the supersonic flow problems over the NACA 0012 airfoil, over a cone, in an inlet and over the forebody of the VLS (Brazilian Launch Vehicle) are solved. The supersonic flow over the booster of the VLS, considering a two-dimensional situation, is also solved.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 - INTRODUÇÃO

A solução de escoamentos compressíveis de alta velocidade, envolvendo ondas de choque, são, na totalidade, obtidos utilizando-se o método de diferenças finitas onde esquemas de alta ordem são empregados. Ao contrário do que é predominantemente feito na solução de escoamentos a baixa velocidade, o arranjo das variáveis é co-localizado, isto é, todas as variáveis são armazenadas no mesmo ponto e a equação de conservação da massa é empregada para determinar a massa específica enquanto que a equação de estado é utilizada para determinar a pressão. Estes métodos [1] são de grande eficiência e resolvem, atualmente, uma gama bastante grande de problemas bi e tridimensionais compressíveis supersônicos. Em razão dos mesmos terem sido concebidos para a solução de escoamentos de alta velocidade os mesmos falham para a solução de escoamentos a baixa velocidade, quando então a equação de estado não pode mais ser empregada para calcular a pressão.

Seguindo os trabalhos de [2] página 136 e [3], aparentemente esquecidos, recentemente foi apresentado em [4] uma extensão dos métodos segregados, empregados na solução de problemas incompressíveis, para resolver problemas de alta velocidade com ondas de choque. A metodologia foi testada para problemas bi-dimensionais em coordenadas cartesianas. Mais recentemente ainda, em trabalhos independentes, [5] e [6] estenderam a metodologia para coordenadas generalizadas para a solução de problemas sobre corpos arbitrários. Extensos estudos foram realizados com a metodologia desconhecida em [5], cujos resultados podem ser vistos em [7], [8], [9], [10] e [11].

Tanto em [4], como em [5] e [6], a metodologia desenvolvida emprega o arranjo de variáveis desencontrada para promover o adequado acoplamento entre pressão e velocidade. O uso de variáveis desencontradas, entretanto, requer diferentes volumes de controle para as variáveis, necessitando-se do cálculo de fluxos convectivos e difusivos em diferentes faces dos diferentes volumes de controle. Para problemas bi-dimensionais este fato não acarreta maiores dificuldades, entretanto, torna-se crucial na solução de problemas tridimensionais utilizando-se coordenadas generalizadas. Nestes casos o uso de variáveis desencontradas dá origem a extensivos e complexos códigos computacionais [12].

Para eliminar a necessidade do uso de variáveis desencontradas, um assunto que ficou um longo tempo adormecido, provavelmente devido a forte influência exercida por [2], estudos foram conduzidos em [13], [14] e [15] para se fazer uso do arranjo de variáveis co-localizado e ao mesmo tempo promover um adequado acoplamento entre a pressão e a velocidade. Estes estudos foram desenvolvidos considerando-se a solução de problemas de escoamentos incompressíveis.

A presente dissertação apresenta uma metodologia numérica desenvolvida usando-se variáveis co-localizadas para a solução de problemas de escoamentos compressíveis e incompressíveis com onda de choque sobre geometrias arbitrárias.

São analisados escoamentos no interior de um duto e escoamento sobre um anteparo, em coordenadas cartesianas [16]. Em coordenadas generalizadas são apresentadas soluções do escoamento sobre o perfil NACA 0012, sobre a parte frontal do VLS, sobre um cone, sobre um perfil cunha e sobre a região de VLS onde se encontram os boosters, admitindo-se uma situação bi-dimensional.

## 1.2 - DELINEAMENTO DA DISSERTAÇÃO

Objetivando uma visão global do que será apresentado neste trabalho, aqui são apresentados os capítulos de forma suscinta com os objetivos correspondentes.

**CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO** - Neste capítulo é apresentada a introdução deste trabalho, relacionando o que foi estudado, as metodologias empregadas e os problemas analisados. Esta introdução é acompanhada de uma revisão bibliográfica relacionando problemas similares tomados como referências no desenvolvimento deste trabalho, assim como um delineamento da dissertação.

**CAPÍTULO 2 - EQUAÇÕES GOVERNANTES E TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS EMPREGADA-** Neste capítulo são apresentadas as equações governantes para problemas bi-dimensionais em coordenadas generalizadas. As equações em coordenadas cartesianas são um caso particular destas e são apresentadas em [16]. Estas são as equações de Navier-Stokes onde não é considerada a dissipação viscosa. Além disso, para maior parte dos problemas, foram empregadas as equações de Euler.

**CAPÍTULO 3 - DISPOSIÇÃO DAS VARIÁVEIS NA MALHA** - Existem várias alternativas para a disposição das variáveis na malha, como a disposição desencontrada, a colocada e outras. Neste capítulo são apresentadas as disposições desencontradas e colocadas com o objetivo de comparação entre as mesmas, onde são apresentadas as vantagens e desvantagens de cada disposição.

**CAPÍTULO 4 - PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO** - Neste capítulo são comentadas as formulações compressível e incompressível, assim como a formulação para escoamentos a qualquer velocidade. É

apresentada a obtenção da equação para a pressão utilizando o método de acoplamento SIMPLEC. São apresentadas as condições de contorno para a velocidade, temperatura e pressão e detalhes numéricos relativos a critérios de convergência e disposição das características geométricas na malha.

**CAPÍTULO 5 - RESULTADOS NUMÉRICOS PARA ESCOAMENTO BI-DIMENSIONAL EM COORDENADAS CARTESIANAS** - São duas as soluções apresentadas para problemas bi-dimensionais em coordenadas cartesianas. A primeira solução trata do escoamento no interior de um duto a  $Re = 5.0$  enquanto que a segunda trata do escoamento sobre um anteparo a Mach 2.0.

**CAPÍTULO 6 - RESULTADOS NUMÉRICOS PARA ESCOAMENTO BI-DIMENSIONAL EM COORDENADAS GENERALIZADAS** - Neste capítulo são apresentadas soluções para cinco problemas. O primeiro problema trata-se do escoamento sobre o perfil NACA 0012 para Mach 2.0. O segundo problema trata do escoamento sobre a parte frontal do VLS. Os resultados para este caso são comparados através do uso de variáveis desencontradas e do uso de variáveis co-localizadas assim como com resultados experimentais. O terceiro problema trata do escoamento sobre um cone bi-dimensional axissimétrico submetido a Mach 1.401 para comparação com resultados teóricos. O quarto problema analisado é o de uma cunha nas proximidades de uma superfície submetida a Mach 2.0 e o último problema analisado apresenta o escoamento bi-dimensional axissimétrico para a região do VLS onde se encontram os boosters, admitindo-se uma situação bi-dimensional.

**CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES** - Este capítulo visa apresentar conclusões gerais sobre o trabalho desenvolvido, assim como algumas sugestões para futuros trabalhos nesta linha de pesquisa.



## CAPÍTULO 2

### EQUAÇÕES GOVERNANTES E TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS EMPREGADA

#### 2.1 - EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações governantes que modelam os fenômenos físicos em estudo neste trabalho são as equações de conservação da massa, conservação da quantidade de movimento e energia. Em forma diferencial cartesiana estas equações podem ser expressas por

Equação de conservação da massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho x_2^j v) = 0 \quad (2.1)$$

Equação da quantidade de movimento em x,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u u) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho x_2^j v u) = \mu \nabla^2 u - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla \cdot \vec{V}) \quad (2.2)$$

Equação da quantidade de movimento em y,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u v) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho x_2^j v v) = \mu \nabla^2 v - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla \cdot \vec{V}) - \frac{j \mu v}{x_2^2} \quad (2.3)$$

Equação da energia

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u T) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho x_2^j v T) = \frac{k}{C_p} \nabla^2 T + \frac{1}{C_p} \frac{Dp}{Dt} \quad (2.4)$$

onde

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( x_2^j \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)$$

$$\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2^j v)$$

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(p\vec{V}) - p(\nabla \cdot \vec{V})$$

Estas equações e a equação de estado para um gás ideal formam um conjunto de cinco equações a cinco incógnitas -  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $T$  e  $\rho$ , que quando submetidas as condições de contorno e condições iniciais, completam a formulação do problema. Elas são adequadas para resolver problemas definidos em geometrias do tipo mostrado na Fig. 2.1

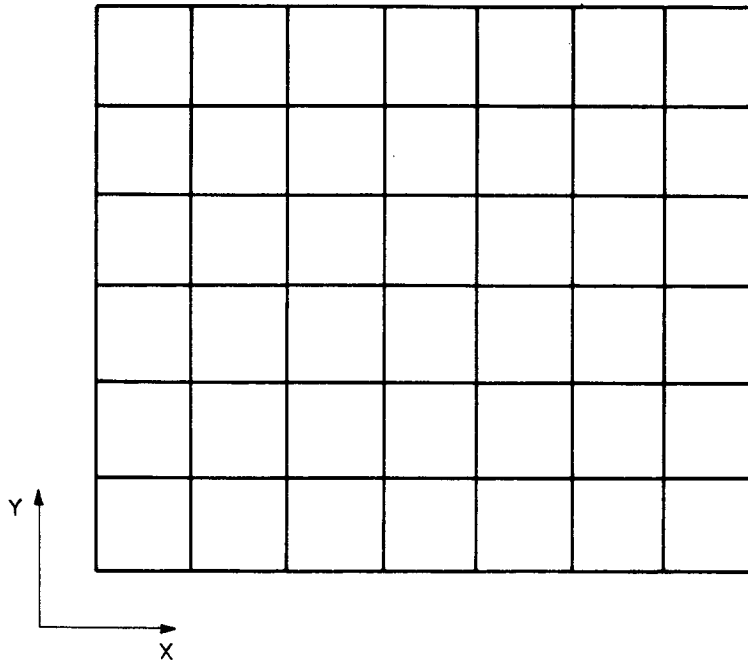


Fig. 2.1 - Geometria adequada ao sistema cartesiano

## 2.2 - TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Devido a necessidade de resolver problemas sobre geometrias mais complexas do que a apresentada na Fig. 2.1, surge a necessidade de transformar as equações de forma a serem adequadas para resolver problemas com geometrias semelhantes a mostrada na Fig. 2.2

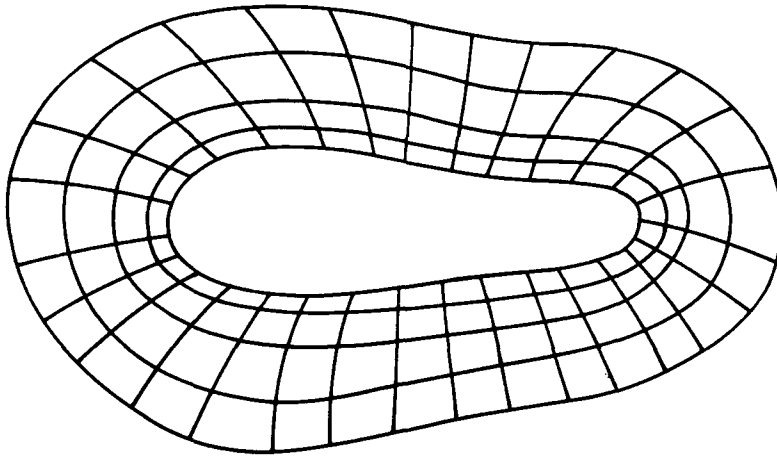


Fig. 2.2 - Geometria típica de forma não cartesiana

A transformação das equações do sistema cartesiano para o sistema generalizado é feita utilizando-se a regra da cadeia. Para uma função  $\phi$  qualquer, temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}$$

Empregando esta transformação nas Eqs. (2.1) a (2.4) e executando as simplificações e agrupamentos necessários são obtidas as equações bi-dimensionais em coordenadas generalizadas, que, de forma genérica, podem ser expressas por, conforme [10].

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho x_2^j U \phi) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho x_2^j V \phi) + \frac{p^\phi}{J} = \quad (2.5)$$

$$+ \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ x_2^j \Gamma^j \phi_J \left[ \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] \right\} + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ x_2^j \Gamma^j \phi_J \left[ \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] \right\} + \frac{S}{J} \phi$$

onde as velocidades contravariantes  $U$  e  $V$  são representadas, em função das velocidades cartesianas, por

$$U = uy_\eta - vx_\eta \quad (2.6)$$

$$V = vx_\xi - uy_\xi$$

e as métricas de transformação são representadas por

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad (2.7)$$

$$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$$

$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$$

O divergente do vetor velocidade expresso no sistema generalizado de coordenados é dado por isto

$$(\nabla \cdot \vec{V}) = \frac{J}{x_2^j} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (U x_2^j) + \frac{\partial}{\partial \eta} (V x_2^j) \right] \quad (2.8)$$

Interpretações físicas para as componentes contravariantes das velocidades e métricas da transformação podem ser vistas em [17]. As quantidades  $\phi$ ,  $\Gamma^\phi$ ,  $S^\phi$  e  $p^\phi$  são apresentadas na Tab. 2.1.

As equações governantes em coordenadas generalizadas mantêm a mesma estrutura que as equações em coordenadas cartesianas, conforme [8] e [16]. Aparecem termos adicionais como derivadas cruzadas que poderão fazer com que a equação,

após discretizada, passe a ser uma equação de nove pontos. Deve-se notar também que os termos de pressão em uma mesma equação envolvem derivadas nas duas direções coordenadas.

Na Tab. 2.1  $\hat{S} = \frac{S}{J} \phi$

Tab. 2.1 - Valores de  $\phi$ ,  $\Gamma^\phi$ ,  $S^\phi$ , e  $p^\phi$  para as equações de conservação em coordenadas generalizadas.

Equação de conservação	$\phi$	$\Gamma^\phi$	$\hat{S} \phi$	$\bar{p}^\phi$
Conservação da massa	1	0	0	0
Quantidade de movimento em x	u	$\mu$	$\frac{\mu}{3} \left[ y_{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \cdot \vec{v}) - y_{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$	$y_{\eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} - y_{\xi} \frac{\partial p}{\partial \eta}$
Quantidade de movimento em y	v	$\mu$	$\frac{\mu}{3} \left[ x_{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \cdot \vec{v}) - x_{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] - \frac{j\mu v}{Jx_2^2}$	$x_{\xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} - x_{\eta} \frac{\partial p}{\partial \xi}$
Conservação da energia	T	$\frac{k}{C_p}$	$\frac{1}{JC_p} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p\vec{v}) - p (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$	0

## CAPÍTULO 3

### DISPOSIÇÃO DAS VARIÁVEIS NA MALHA

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

A preferência dos analistas numéricos pelo uso de variáveis desencontradas é devido ao forte acoplamento que o mesmo proporciona, uma vez que as velocidades são geradas por gradientes de pressões fisicamente consistentes quando da discretização das equações governantes. Devido às dificuldades de solucionar problemas tridimensionais usando-se variáveis desencontradas, dado a necessidade do cálculo de métricas e coeficientes distintos para todas as velocidades, o que implica em utilização de mais espaço para memória, assim como gasto de tempo adicional de computação, os analistas numéricos voltaram-se ao estudo da disposição co-localizada das variáveis na malha. A disposição co-localizada calcula coeficientes e métricas que são as mesmas para todas as velocidades, o que permite economia de espaço de memória e tempo computacional, embora haja a necessidade de cálculo das velocidades cartesianas médias nas faces do volume de controle para o cálculo das velocidades contravariantes e execução do balanço de massa.

A crescente complexidade dos problemas a serem estudados e das geometrias correspondentes recomendam fortemente que novos métodos, de mais fácil implementação computacional, sejam desenvolvidos.

### 3.2 - DISPOSIÇÃO DESENCONTRADA DAS VARIÁVEIS NA MALHA

A disposição desencontrada das variáveis na malha proposta por Harlow e Welch [18] encontra justificativa no forte acoplamento entre pressão e velocidades para a solução numérica das equações governantes. Esta disposição de variáveis pode ser vista na Fig. 3.1, [9]

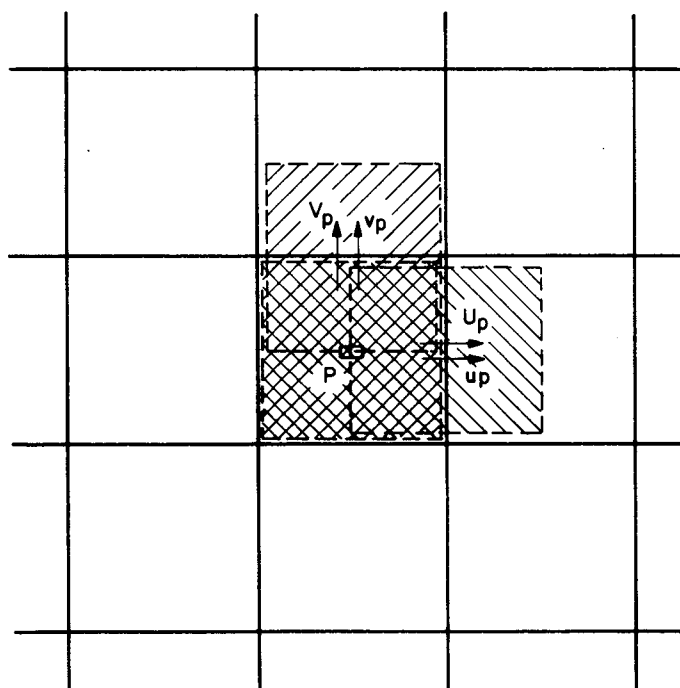


Fig. 3.1 - Disposição desencontrada das variáveis na malha para problemas bi-dimensionais em coordenadas generalizadas

Para esta disposição certas precauções são tomadas relativas ao acoplamento pressão-velocidade para evitar que se tenha o aparecimento de velocidades cartesianas irreais, mas que satisfaçam a equação de conservação da massa, conforme [26].

### 3.3 - DISPOSIÇÃO CO-LOCALIZADA DAS VARIÁVEIS NA MALHA

Usando variáveis co-localizadas, as velocidades nas faces do volume de controle devem ser de alguma forma calculadas para realizar o balanço de massa, criando-se esquemas numéricos que promovam a convergência do processo. Para problemas em coordenadas generalizadas as velocidades necessárias no balanço de massa são as contravariantes, por serem as componentes ortogonais as faces do volume de controle [17]. Para problemas em coordenadas cartesianas as velocidades contravariantes se confundem com as velocidades cartesianas.

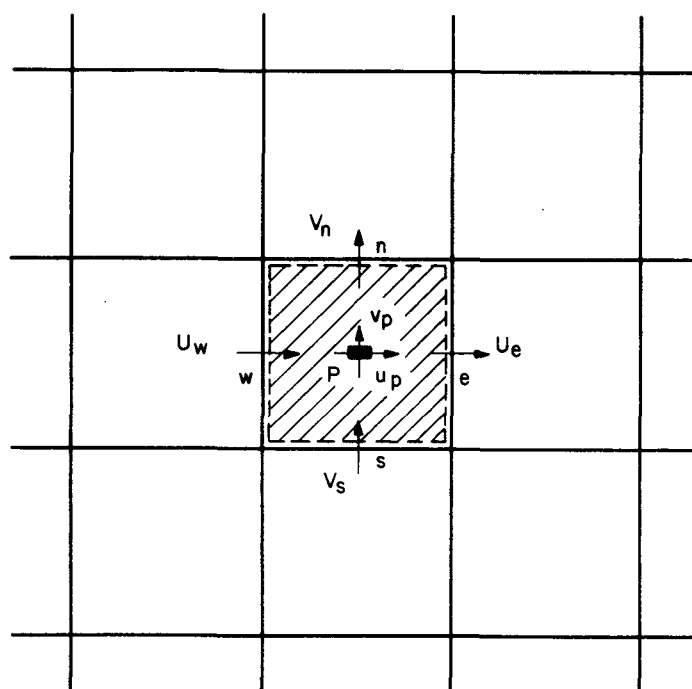


Fig. 3.2 - Disposição co-localizada de variáveis na malha para problemas bi-dimensionais em coordenadas generalizadas

Para o cálculo das velocidades contravariantes  $U$  e  $V$  são necessárias as velocidades cartesianas  $u$  e  $v$ . Como as velocidades cartesianas são armazenadas nos centros dos volumes de controle, deve-se utilizar médias afim de obter velocidades cartesianas coerentes nas faces, que satisfaçam a equação de conservação da massa. Então procura-se uma forma de estabelecer



velocidades cartesianas coerentes nas faces, dependentes das velocidades cartesianas vizinhas e de gradientes de pressão fisicamente consistentes. A idéia central é o uso da própria equação da quantidade de movimento, empregando o gradiente de pressões mais próximo. Este procedimento será demonstrado no Cap. 4.

#### 3.4 - RESUMO E CONCLUSÕES

A escolha da disposição das variáveis na malha pode facilitar grandemente a obtenção da solução do problema físico. Dentre as hipóteses da disposição das variáveis na malha, existem algumas mais adequadas e dentre elas encontra-se o arranjo colocalizado que permite simplicidade na implementação computacional.

## CAPÍTULO 4

### PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

#### 4.1 - INTRODUÇÃO

Para se obter a aproximação numérica das equações governantes há a necessidade da integração destas equações para os diversos volumes elementares, obtendo-se, assim, uma equação para cada elemento. A integração das equações para problemas em coordenadas generalizadas torna-se simples pois o plano transformado assume a forma retangular. Apenas aparecem, originadas da transformação, mais termos que são devidos a não ortogonalidade do sistema generalizado de coordenadas e devem ser, a exemplo de qualquer outro termo, também aproximados. A integração também pode ser feita no plano físico, se desejado, logicamente trabalhando-se com um volume de integração irregular. A integração no plano transformado é apresentada a seguir.

#### 4.2 - OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES APROXIMADAS

Integrando a Eq. (2.5) no volume e no tempo para o volume de controle genérico mostrado na Fig. 4.1, com as seguintes hipóteses de integração:

- $\phi$  e  $\rho\phi$  são constantes no volume de controle
- todos os termos, exceto  $\rho\phi$  são constantes ao longo de  $\Delta t$  e são avaliados em  $t + \Delta t$ , o que implica em uma formulação totalmente implícita
- os fluxos de massa nas faces e, w, n e s são uniformes ao longo de cada face
- $\phi$  e sua derivada normal a face variam linearmente naquela face

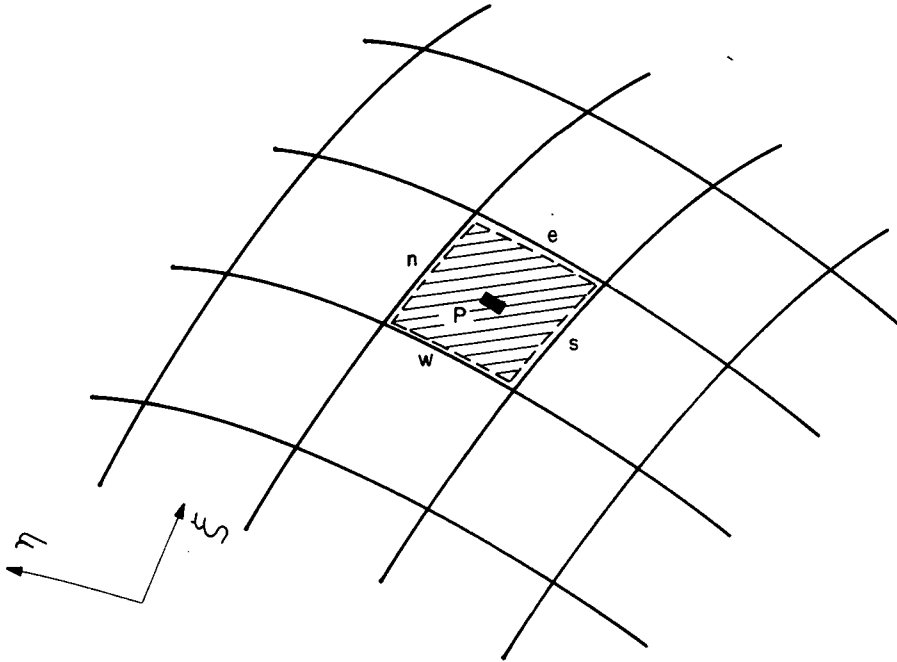


Fig. 4.1 - Volume de controle genérico para integração

obtém-se,

$$\begin{aligned}
 & \int_{v,t} \frac{x_2^j}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dV dt + \int_{v,t} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho x_2^j U \phi) dV dt + \int_{v,t} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho x_2^j V \phi) dV dt = \\
 & \int_{v,t} \Gamma^\phi \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ x_2^j \left( \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] dV dt + \int_{v,t} \Gamma^\phi \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ x_2^j \left( \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right] dV dt - \\
 & - \int_{v,t} \frac{x_2^j}{J} p^\phi dV dt + \int_{v,t} \frac{x_2^j}{J} S^\phi dV dt
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

que resulta em

$$\begin{aligned}
 & \frac{M_P \phi_P - M_P^\circ \phi_P^\circ}{\Delta t} + M_e \phi_e - M_w \phi_w + M_n \phi_n - M_s \phi_s = \left[ D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e \\
 & - \left[ D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_w + \left[ D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_n - \left[ D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_s \\
 & - x_2^j L[p^\phi] \frac{\Delta V}{J} + x_2^j L[S^\phi] \frac{\Delta V}{J}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Usando aproximações do tipo WUDS [19] e [9], que

representa uma ponderação da propriedade na face do volume de controle segundo a importância da difusão e convecção no problema, temos, para os valores de  $\phi$  e  $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}$

$$\phi_w = (1/2 + \bar{\alpha}_w)\phi_w + (1/2 - \bar{\alpha}_w)\phi_P$$

$$\phi_n = (1/2 + \bar{\alpha}_n)\phi_P + (1/2 - \bar{\alpha}_n)\phi_N$$

$$\phi_s = (1/2 + \bar{\alpha}_s)\phi_S + (1/2 - \bar{\alpha}_s)\phi_P$$

$$\phi_e = (1/2 + \bar{\alpha}_e)\phi_P + (1/2 - \bar{\alpha}_e)\phi_E$$

$$\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e \cong \Gamma \bar{\beta}_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta \xi}$$

$$\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_w \cong \Gamma \bar{\beta}_w \frac{\phi_P - \phi_w}{\Delta \xi}$$

$$\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_n \cong \Gamma \bar{\beta}_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta \eta}$$

$$\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_s \cong \Gamma \bar{\beta}_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta \eta}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_n \cong \frac{\phi_{NE} + \phi_E - \phi_{NW} - \phi_w}{4 \Delta \xi}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_s \cong \frac{\phi_{SE} + \phi_E - \phi_{SW} - \phi_w}{4 \Delta \xi}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_e \cong \frac{\phi_{NE} + \phi_N - \phi_{SE} - \phi_S}{4 \Delta \eta}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_w \cong \frac{\phi_{NW} + \phi_N - \phi_{SW} - \phi_S}{4 \Delta \eta}$$

(4.3)

onde os termos  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  são dados, conforme [19],

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{e^{Pe/2} - 1}{e^{Pe} - 1}$$

(4.4)

$$\bar{\beta} = Pe - \frac{e^{Pe/2}}{e^{Pe} - 1}$$

Observa-se que as derivadas cruzadas não estão recebendo nenhum tipo de ponderação e são tratadas com diferenças centrais puras. Outras maneiras de aproximar as derivadas cruzadas podem ser empregadas [27].

Substituindo-se a Eq. (4.3) na Eq. (4.2) e usando a equação de conservação da massa discretizada, obtém-se,

$$\begin{aligned} a_p^\phi \phi_P &= a_e^\phi \phi_E + a_w^\phi \phi_W + a_n^\phi \phi_N + a_s^\phi \phi_S + a_{ne}^\phi \phi_{NE} + a_{se}^\phi \phi_{SE} + a_{nw}^\phi \phi_{NW} + \\ &+ a_{sw}^\phi \phi_{SW} + B \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde

$$\begin{aligned} a_p^\phi &= \frac{M_P^\circ}{\Delta t} + a_e^\phi + a_w^\phi + a_n^\phi + a_s^\phi \\ a_w^\phi &= (1/2 + \bar{\alpha}_w) M_w + D1 \frac{\bar{\beta}_w}{\Delta \xi} + \frac{D4}{4\Delta \xi} \Big|_n - \frac{D4}{4\Delta \xi} \Big|_s \\ a_e^\phi &= - (1/2 - \bar{\alpha}_e) M_e + D1 \frac{\bar{\beta}_e}{\Delta \xi} + \frac{D4}{4\Delta \xi} \Big|_n - \frac{D4}{4\Delta \xi} \Big|_s \\ a_n^\phi &= - (1/2 - \bar{\alpha}_n) M_n + D3 \frac{\bar{\beta}_n}{\Delta \eta} + \frac{D2}{4\Delta \eta} \Big|_e - \frac{D2}{4\Delta \eta} \Big|_w \\ a_s^\phi &= (1/2 + \bar{\alpha}_s) M_s + D3 \frac{\bar{\beta}_s}{\Delta \eta} - \frac{D2}{4\Delta \eta} \Big|_e + \frac{D2}{4\Delta \eta} \Big|_w \\ a_{ne}^\phi &= \frac{D2}{4\Delta \eta} \Big|_e + \frac{D4}{4\Delta \xi} \Big|_n \\ a_{nw}^\phi &= - \frac{D2}{4\Delta \eta} \Big|_w - \frac{D4}{4\Delta \xi} \Big|_n \\ a_{se}^\phi &= - \frac{D2}{4\Delta \eta} \Big|_e - \frac{D4}{4\Delta \xi} \Big|_s \\ a_{sw}^\phi &= \frac{D2}{4\Delta \eta} \Big|_w + \frac{D4}{4\Delta \xi} \Big|_s \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$B = -x_2^j \Big|_P \frac{\Delta V}{J} L[p^\phi] + x_2^j \Big|_P \frac{\Delta V}{J} L[S^\phi] + \frac{M_P^\circ u_P^\circ}{\Delta t}$$

### 4.3 - APROXIMAÇÕES PARA OS TERMOS FONTES

#### 4.3.1 - APROXIMAÇÃO PARA O TERMO FONTE EM U

A equação para o termo  $L[\tilde{S}^u]$  é dada por

$$L[\tilde{S}^u]_P \Delta V = \int_V \frac{\mu}{3} \left[ y_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \cdot \vec{V}) - y_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \cdot \vec{V}) \right] d\xi d\eta \quad (4.7)$$

Executando a integração no volume, obtêm-se

$$L[\tilde{S}^u]_P \Delta V = \frac{\mu}{3} \left[ y_\eta \frac{(\nabla \cdot \vec{V})_e - (\nabla \cdot \vec{V})_w}{\Delta \xi} - y_\xi \frac{(\nabla \cdot \vec{V})_n - (\nabla \cdot \vec{V})_s}{\Delta \eta} \right] \quad (4.8)$$

onde

$$(\nabla \cdot \vec{V}) = J \left[ \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right] + \frac{v_j}{2x_2} \quad (4.9)$$

que quando aproximado, para a face leste, resulta em

$$(\nabla \cdot \vec{V})_e = J_e \left[ \frac{U_E - U_P}{\Delta \xi} + \frac{V_{ne} + V_n - V_s - V_{se}}{2\Delta \eta} \right] + \frac{v_j}{2x_2} \Big|_e$$

A expressão para  $L[\tilde{p}^u]$  é dada por

$$L[\tilde{p}^u]_P = \text{aprox.} \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial p}{\partial \xi} y_\xi \right]_P \quad (4.10)$$

obtêm-se

$$L[\tilde{p}^u]_P = \frac{p_E - p_W}{2\Delta \xi} y_\eta \Big|_P - \frac{p_N - p_S}{2\Delta \eta} y_\xi \Big|_P \quad (4.11)$$

#### 4.3.2 - APROXIMAÇÃO PARA O TERMO FONTE EM V

Da mesma forma que para o termo  $L[\hat{S}^u]$  a equação obtida para  $L[\hat{S}^v]$  é

$$L[\hat{S}^v]_P \Delta V = \frac{\mu}{3} \left[ x_\xi \frac{(\nabla \cdot \hat{V})_n - (\nabla \cdot \hat{V})_s}{\Delta \eta} - x_\eta \frac{(\nabla \cdot \hat{V})_e - (\nabla \cdot \hat{V})_w}{\Delta \xi} \right] - \frac{j\mu v}{Jx_2^2} \Big|_P \quad (4.12)$$

De forma semelhante a equação obtida para o termo  $L[\hat{p}^v]$  é

$$L[\hat{p}^v]_P = \frac{p_N - p_S}{2\Delta \eta} x_\xi \Big|_P - \frac{p_E - p_W}{2\Delta \xi} x_\eta \Big|_P \quad (4.13)$$

Os divergentes que aparecem na Eq. (4.12) são os mesmos que aparecem na Eq. (4.8). Para a metodologia desconstruída teríamos que calcular divergentes para as direções  $\xi$  e  $\eta$  que seriam diferentes entre si pois os volumes para  $u$  e  $v$  não seriam coincidentes. Da mesma forma, os coeficientes seriam diferentes provocando maior necessidade de memória e maior tempo de computação nos cálculos.

#### 4.3.3 - APROXIMAÇÃO PARA O TERMO FONTE EM T

A partir da equação para  $L[\hat{S}^T]$ ,

$$x_2^j L[\hat{S}^T] \Big|_P \Delta V = \int_V \frac{1}{C_P} \left\{ \frac{\partial p}{J \partial t} + \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (x_2^j U_p) + \frac{\partial}{\partial \eta} (x_2^j V_p) \right] - p \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (x_2^j U) + \frac{\partial}{\partial \eta} (x_2^j V) \right] \right\} dV \quad (4.14)$$

obtem-se,

$$x_2^j L[\hat{S}^T] \Big|_P \Delta V = \frac{1}{C_P} \left\{ - \frac{p x_2^j}{J \Delta t} \Big|_P + p_P \left[ \frac{1}{J_P \Delta t} - \frac{x_2^j U}{2\Delta \xi} \Big|_e + \frac{x_2^j U}{2\Delta \xi} \Big|_w - \frac{x_2^j V}{2\Delta \eta} \Big|_n + \frac{x_2^j V}{2\Delta \eta} \Big|_s \right] + p_E \frac{x_2^j U}{2\Delta \xi} \Big|_e - p_W \frac{x_2^j U}{2\Delta \xi} \Big|_w + p_N \frac{x_2^j V}{2\Delta \eta} \Big|_n - p_S \frac{x_2^j V}{2\Delta \eta} \Big|_s \right\} \quad (4.15)$$

#### 4.4 - A FORMULAÇÃO INCOMPRESSÍVEL, A FORMULAÇÃO COMPRESSÍVEL E A FORMULAÇÃO PARA ESCOAMENTOS A QUALQUER VELOCIDADE

Os métodos de solução das equações governantes são voltadas para dois tipos básicos de escoamentos: O escoamento chamado compressível e o escoamento incompressível. No escoamento incompressível não há variação de massa específica, o que quer dizer que o volume de fluido apenas sofre variação de forma durante o escoamento, enquanto que no escoamento compressível ocorrem variações tanto de forma quanto de volume.

Quando a massa específica não varia significativamente com a pressão o desafio é determinar um campo de pressões que, quando inserido nas equações do movimento, originam um campo de velocidades que satisfaça a equação de conservação da massa. Torna-se então necessário tratar o acoplamento pressão-velocidades uma vez que não existe uma equação para a pressão, e o sistema é resolvido segregadamente. A solução do sistema de equações, por sua vez, não é obtido diretamente devido ao tamanho do sistema linear de equações que se originam quando as equações diferenciais são aproximadas numericamente. Se a massa específica tem variação considerável no domínio, então a equação de estado, relacionando a massa específica com a temperatura e a pressão é a relação empregada para o fechamento do problema onde as equações da quantidade de movimento são empregadas para o cálculo das velocidades, a equação da energia para o cálculo da temperatura, a equação de conservação da massa para o cálculo da massa específica e a equação de estado para o cálculo da pressão. Esta formulação onde todas as variáveis dependentes possuem uma equação de evolução é chamada de formulação compressível.

Para se obter uma formulação que seja adequada tanto para escoamentos a alta velocidade como para escoamentos a baixa velocidade ou escoamentos com regiões mistas, faz-se necessário que tanto as velocidades como a massa específica sejam mantidas ativas na linearização da equação de conservação da massa conforme [2], [4], [7] e [10]. A estratégia empregada nestes trabalhos é continuar usando a equação da conservação da massa



para determinar a pressão, introduzindo também a variação de  $\rho$  com  $p$  nesta equação. Este detalhamento é apresentado na obtenção da equação para a pressão.

#### 4.5 - OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO PARA A PRESSÃO USANDO O MÉTODO DE ACOPLAMENTO SIMPLEC

O método de acoplamento pressão-velocidades SIMPLEC [20] é aqui empregado considerando o problema bi-dimensional em coordenadas generalizadas. Os métodos de acoplamento visam a obtenção de uma equação para a pressão. A dedução da equação da pressão será realizada imaginando-se que o arranjo de variáveis é desencontrado, pois sabe-se que este arranjo confere estabilidade ao processo iterativo. Assim fazendo, a determinação das velocidades que serão necessárias nas faces do volume de controle de conservação da massa, constitui-se num detalhe importante do uso variáveis co-localizadas.

Partindo da equação da conservação da massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho x_2^j v) = 0 \quad (4.16)$$

Executando a integração no volume e no tempo obtem-se a forma discretizada desta equação

$$\frac{M_P - M_P^0}{\Delta t} + \dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \quad (4.17)$$

onde

$$\dot{M}_e = \rho U \Delta_\eta x_2^j \Big|_e$$

$$\dot{M}_n = \rho V \Delta_\xi x_2^j \Big|_n$$

$$(4.18)$$

$$M_P = \frac{\rho \Delta V}{J} x_2^j \Big|_P$$

A linearização do fluxo de massa que aparece na equação de conservação da massa é feita de tal forma a manter  $\rho$ ,  $u$  e  $v$  ativos, obtendo-se, [4]

$$\dot{M}_e = (\rho^* U + \rho U^* - \rho^* U^*) \Delta_\eta x_2^j \Big|_e \quad (4.19)$$

Expressões semelhantes podem ser escritas para as outras faces do volume de controle. Aproximando as densidades nas faces do volume de controle por expressões, como por exemplo, para a face leste,

$$\rho_e = (1/2 + \bar{\gamma}_e) \rho_P + (1/2 - \bar{\gamma}_e) \rho_E \quad (4.20)$$

onde  $\bar{\gamma}$  vale +0.5 ou -0.5, conforme a velocidade seja positiva ou negativa, respectivamente.

Substituindo-se as Eqs. (4.20) e (4.19) na Eq. (4.17), obtém-se:

$$\begin{aligned} m_P^\rho \rho_P + m_e^\rho \rho_E + m_w^\rho \rho_w + m_n^\rho \rho_n + m_s^\rho \rho_s + m_e^u U_e + m_w^u U_w + m_n^v U_n + \\ + m_s^v U_s = b^c \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde

$$\begin{aligned} m_P^\rho &= \frac{x_2^j \Delta V}{J_P \Delta t} + (1/2 + \bar{\gamma}) x_2^j U \Delta \eta \Big|_e - (1/2 - \bar{\gamma}) x_2^j U \Delta \eta \Big|_w + \\ &\quad + (1/2 + \bar{\gamma}) x_2^j V \Delta \xi \Big|_n - (1/2 - \bar{\gamma}) x_2^j V \Delta \xi \Big|_s \\ m_e^\rho &= + (1/2 - \bar{\gamma}) x_2^j U \Delta \eta \Big|_e & m_n^\rho &= + (1/2 - \bar{\gamma}) x_2^j V \Delta \xi \Big|_n \\ m_w^\rho &= - (1/2 + \bar{\gamma}) x_2^j U \Delta \eta \Big|_w & m_s^\rho &= - (1/2 + \bar{\gamma}) x_2^j V \Delta \xi \Big|_s \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
m_w^u &= - \left[ (1/2 + \bar{\gamma})\rho_w^* + (1/2 - \bar{\gamma})\rho_p^* \right] \Delta\eta x_2^j \Big|_w \\
m_e^u &= + \left[ (1/2 + \bar{\gamma})\rho_p^* + (1/2 - \bar{\gamma})\rho_e^* \right] \Delta\eta x_2^j \Big|_e \\
m_n^v &= + \left[ (1/2 + \bar{\gamma})\rho_p^* + (1/2 - \bar{\gamma})\rho_n^* \right] \Delta\xi x_2^j \Big|_n \\
m_s^v &= - \left[ (1/2 + \bar{\gamma})\rho_s^* + (1/2 - \bar{\gamma})\rho_p^* \right] \Delta\xi x_2^j \Big|_s \\
b^c &= - \frac{x_2^j \rho^{\circ} \Delta V}{J \Delta t} \Big|_p + m^u U^* \Big|_e + m^u U^* \Big|_w + m^v V^* \Big|_n + m^v V^* \Big|_s
\end{aligned}$$

Para avançar as variáveis escreve-se as mesmas em função de uma correção sobre o valor estimado da propriedade como abaixo

$$\begin{aligned}
u &= u^* + u' \\
v &= v^* + v' \\
\rho &= \rho^* + \rho' \\
p &= p^* + p'
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Para obter uma equação para  $p$ ;  $u$ ,  $v$  e  $\rho$  devem ser escritos como função de  $p$ .

Apartir da equação da quantidade de movimento pode-se escrever

$$a_p u_p = \sum_{nb} a_{nb} u_{NB} - L[p^u] \frac{\Delta V}{J} x_2^j + b^u \tag{4.24}$$

que para o valor estimado pode ser escrita por

$$a_p u_p^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{NB}^* - L[p^u] \frac{\Delta V}{J} x_2^j + b^u \tag{4.25}$$

Subtraindo-se a Eq. (4.25) da Eq. (4.24) obtêm-se

$$u_p = u_p^* - \bar{d}_p^u L[\hat{p}', u] \Delta \xi \quad (4.26)$$

Na Eq. (4.26) o produto da variação das propriedades foi desconsiderado conforme o método de acoplamento SIMPLEC [20].

De mesma forma pode ser escrita expressão para  $v$  como

$$v_p = v_p^* - \bar{d}_p^v L[\hat{p}', v] \Delta \xi \quad (4.27)$$

onde  $\bar{d}_p^u$  será o mesmo que para a velocidade  $u$  pois está-se trabalhando sobre o mesmo volume de controle. De forma semelhante pode-se encontrar a relação de  $\rho$  e  $p$ . Usando a equação de estado

$$\rho = C^p p + b^p \quad (4.28)$$

ou

$$\rho = \rho^* + C^p p' \quad (4.29)$$

Da definição de velocidades contravariantes tem-se

$$\begin{aligned} U &= u y_\eta - v x_\eta \\ V &= v x_\xi - u y_\xi \end{aligned} \quad (4.30)$$

Podem ser escritas as velocidades contravariantes corrigidas para o ponto  $P$  do volume de controle, que para a direção  $\xi$ , resulta em

$$U_P = U_P^* - \bar{d}_P^u \left[ L[\hat{p}'^u] y_\eta - L[\hat{p}'^v] x_\eta \right]_P \Delta \xi \quad (4.31)$$

Nesta equação, por exemplo para a face leste, são necessários os termos fontes para as pressões em u e v que são dadas pelas equações (4.32) e (4.33)

$$L[\hat{p}'^u] = \frac{p'_E - p'_P}{\Delta \xi} y_\eta - \frac{p'_{NE} + p'_N - p'_S - p'_{SE}}{4\Delta \eta} y_\xi \quad (4.32)$$

$$L[\hat{p}'^v] = -\frac{p'_E - p'_P}{\Delta \xi} x_\eta + \frac{p'_{NE} + p'_N - p'_S - p'_{SE}}{4\Delta \eta} x_\xi \quad (4.33)$$

As Eqs. (4.32) e (4.33) quando inseridas na Eq. (4.31) produzem, para a face leste do volume de controle

$$U_e = U_e^* - \bar{d}_e^u \left\{ \alpha_e \frac{p'_E - p'_P}{\Delta \xi} - \beta_e \frac{p'_{NE} + p'_N - p'_S - p'_{SE}}{4\Delta \eta} \right\} \Delta \xi \quad (4.34)$$

De forma semelhante são obtidas as velocidades contravariantes V, conforme abaixo, para a face norte

$$V_n = V_n^* - \bar{d}_n^v \left\{ \gamma_n \frac{p'_N - p'_S}{\Delta \eta} - \beta_n \frac{p'_{NE} + p'_E - p'_W - p'_{NW}}{4\Delta \xi} \right\} \Delta \eta \quad (4.35)$$

Expressões para as outras faces são similares as Eqs. (4.34) e (4.35). Substituindo-se as Eqs. (4.34), (4.35) e aquelas para as velocidades  $U_w$  e  $V_s$  na Eq. (4.21), obtém-se a equação para a pressão .

$$\begin{aligned} a_P p'_P = & a_e p'_E + a_w p'_W + a_n p'_N + a_s p'_S + a_{ne} p'_{NE} + a_{se} p'_{SE} + a_{nw} p'_{NW} + \\ & + a_{sw} p'_{SW} + b^{p'} \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde

$$a_P = m_P^\rho C_P^\rho + m_e^u \bar{d}_e^u \alpha \Big|_e - m_w^u \bar{d}_w^u \alpha \Big|_w + m_n^v \bar{d}_n^v \gamma \Big|_n - m_s^v \bar{d}_s^v \gamma \Big|_s$$

$$\begin{aligned}
a_e &= m_e^{\rho} C_E^{\rho} - m^{\bar{u}} d^{\bar{u}} \alpha \Big|_e + m^{\bar{v}} d^{\bar{v}} \beta^{\bar{v}} \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi} \Big|_n + m^{\bar{v}} d^{\bar{v}} \beta^{\bar{v}} \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi} \Big|_s \\
a_w &= m_w^{\rho} C_W^{\rho} + m^{\bar{u}} d^{\bar{u}} \alpha \Big|_w - m^{\bar{v}} d^{\bar{v}} \beta^{\bar{v}} \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi} \Big|_n - m^{\bar{v}} d^{\bar{v}} \beta^{\bar{v}} \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi} \Big|_s \\
a_n &= m_n^{\rho} C_N^{\rho} - m^{\bar{v}} d^{\bar{v}} \gamma \Big|_n + m^{\bar{u}} d^{\bar{u}} \beta^{\bar{u}} \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} \Big|_e + m^{\bar{u}} d^{\bar{u}} \beta^{\bar{u}} \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} \Big|_w \\
a_s &= m_s^{\rho} C_S^{\rho} + m^{\bar{v}} d^{\bar{v}} \gamma \Big|_s - m^{\bar{u}} d^{\bar{u}} \beta^{\bar{u}} \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} \Big|_e - m^{\bar{u}} d^{\bar{u}} \beta^{\bar{u}} \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} \Big|_w \\
a_{ne} &= + m^{\bar{u}} d^{\bar{u}} \beta^{\bar{u}} \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} \Big|_e + m^{\bar{v}} d^{\bar{v}} \beta^{\bar{v}} \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi} \Big|_n \\
a_{se} &= - m^{\bar{u}} d^{\bar{u}} \beta^{\bar{u}} \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} \Big|_e + m^{\bar{v}} d^{\bar{v}} \beta^{\bar{v}} \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi} \Big|_s \\
a_{nw} &= + m^{\bar{u}} d^{\bar{u}} \beta^{\bar{u}} \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} \Big|_w - m^{\bar{v}} d^{\bar{v}} \beta^{\bar{v}} \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi} \Big|_n \\
a_{sw} &= - m^{\bar{u}} d^{\bar{u}} \beta^{\bar{u}} \frac{\Delta \xi}{4 \Delta \eta} \Big|_w - m^{\bar{v}} d^{\bar{v}} \beta^{\bar{v}} \frac{\Delta \eta}{4 \Delta \xi} \Big|_s \\
b^{\rho} &= \frac{x_2^j \rho^{\circ} \Delta V}{J \Delta t} \Big|_p - m_p^{\rho} \rho_p^* - m_e^{\rho} \rho_e^* - m_w^{\rho} \rho_w^* - m_n^{\rho} \rho_n^* - m_s^{\rho} \rho_s^*
\end{aligned} \tag{4.37}$$

As componentes contravariantes estimadas do vetor velocidade nas faces  $V_n^*$ ,  $V_s^*$ ,  $U_e^*$ ,  $U_w^*$ , devem ser determinadas a partir de  $u_p^*$ ,  $v_p^*$  nos centros do volume de controle. Isto é mostrado na seção a seguir.

#### 4.6 - CÁLCULO DAS VELOCIDADES NAS FACES DO VOLUME DE CONTROLE

Usando variáveis co-localizadas há a necessidade do cálculo das velocidades nas faces do volume de controle para realizar os balanços de conservação, já que as velocidades resultantes das equações do movimento estarão armazenadas nos centros dos volumes. As velocidades que aparecem na equação da conservação da massa devem ser substituídas por expressões onde as velocidades estimadas e os gradientes da correção da pressão tomam parte. É exatamente o estabelecimento deste gradiente de correção que confere ao método de acoplamento pressão/velocidade as características de estabilidade. Desta forma procura-se uma maneira de aproximar as velocidades nas faces do volume de

controle para que as velocidades e gradientes de pressões resultantes sejam fisicamente consistentes. Com este objetivo, Peric et all [15], na solução de escoamentos incompressíveis no sistema cartesiano, criou expressões para as velocidades nas faces, que envolvem os coeficientes das velocidades armazenadas em P e E, Fig. 4.2, e emprega o gradiente de pressões entre P e E. Para coordenadas generalizadas, segue-se o mesmo raciocínio adotado em [15]. Diferentes alternativas foram analisadas e são apresentadas em [16]. Abaixo é descrita a maneira que se apresenta mais eficiente.

As equações do movimento para a direção x escritas para os volumes P e E são

$$a_{P P}^P u_P = \sum_{nb} a_{nb} u_{NB} \Big|_P - L[p^u] \frac{\Delta V}{J} x_2^j \Big|_P + b^u \Big|_P \quad (4.38)$$

$$a_{P E}^E u_E = \sum_{nb} a_{nb} u_{NB} \Big|_E - L[p^u] \frac{\Delta V}{J} x_2^j \Big|_E + b^u \Big|_E \quad (4.39)$$

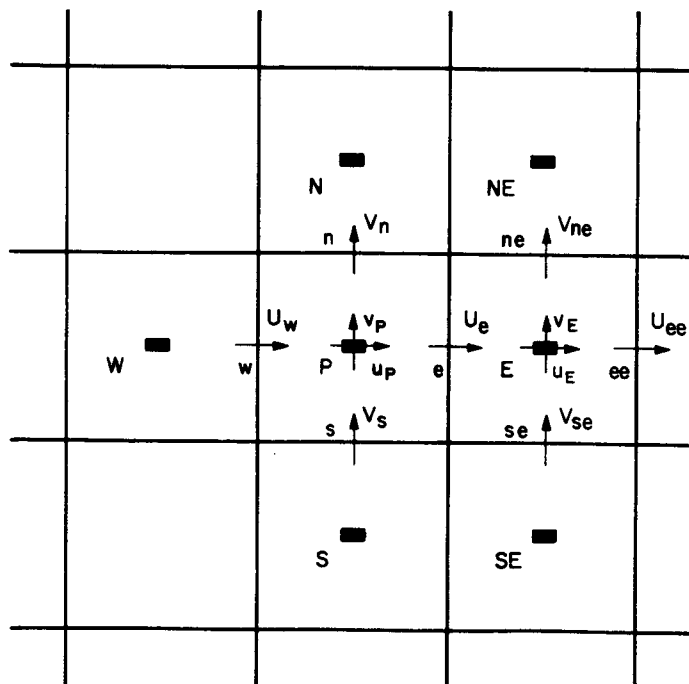


Fig 4.2 - Disposição das velocidades cartesianas e contra-variantes nas faces do volume de controle para volumes vizinhos

Para determinar a velocidade  $u$  na face leste do volume de controle, faz-se

$$u_e = \frac{1}{2} \left[ \left[ \frac{2}{a_p^P + a_p^E} \right] \left[ \sum_{nb} a_{nb} u_{NB} \Big|_P + \sum_{nb} a_{nb} u_{NB} \Big|_E + b^u \Big|_P + b^u \Big|_E \right] - \frac{4}{a_p^P + a_p^E} \left[ \frac{p_E^- - p_P}{\Delta \xi} y_\eta - \frac{p_{NE} + p_N^- - p_S^- - p_{SE}}{4\Delta \eta} y_\xi \right] \Delta V x_2^j \Big|_e \right] \quad (4.40)$$

Da mesma forma pode ser obtida a velocidade  $v$  média na face leste

$$v_e = \frac{1}{2} \left[ \left[ \frac{2}{a_p^P + a_p^E} \right] \left[ \sum_{nb} a_{nb} v_{NB} \Big|_P + \sum_{nb} a_{nb} v_{NB} \Big|_E + b^v \Big|_P + b^v \Big|_E \right] - \frac{4}{a_p^P + a_p^E} \left[ -\frac{p_E^- - p_P}{\Delta \xi} x_\eta - \frac{p_{NE} + p_N^- - p_S^- - p_{SE}}{4\Delta \eta} x_\xi \right] \Delta V x_2^j \Big|_e \right] \quad (4.41)$$

Na Eq. (4.40) verifica-se que são adicionadas as Eqs. (4.38) e (4.39) com excessão dos termos para a pressão onde o gradiente entre P e E, Eq. (4.32), é aplicado.

Os coeficientes para  $u$  e  $v$  são os mesmos, o que implica em cálculo somente uma vez dos coeficientes para cada intervalo de tempo adimensional utilizado.

Com  $u$  e  $v$  pode ser calculada a velocidade contravariante na face do volume de controle, que é a velocidade necessária para o balanço de massa.

$$\begin{aligned} U_e &= uy_\eta \Big|_e - vx_\eta \Big|_e \\ V_n &= vx_\xi \Big|_n - uy_\xi \Big|_n \end{aligned} \quad (4.42)$$

De forma semelhante são determinadas as componentes contravariantes da velocidade nas outras faces.



As velocidades estimadas que aparecem no termo fonte da equação para  $p$  são calculadas utilizando-se a Eq. (4.40)

#### 4.7 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

A aplicação das condições de contorno é, talvez, a tarefa mais importante a ser realizada com vistas ao estabelecimento da solução, uma vez que são as condições de contorno que avançam a solução em um processo iterativo. O processo de aplicação das condições de contorno está intimamente ligado a localização das variáveis na malha. Neste ítem é apresentada a aplicação das condições de contorno, usando-se variáveis co-localizadas, para as velocidades e temperaturas, através do uso de volumes fictícios, e a extrapolação linear para os volumes da fronteira, no caso da pressão. Será apresentada também a mudança na condições de contorno quando da aplicação das equações de Euler.

##### 4.7.1 - USO DE PONTOS FICTÍCIOS PARA AS VELOCIDADES E PARA AS TEMPERATURAS

Objetivando-se o uso da mesma forma para todas as equações no domínio de análise, embora ocorra um adicional de armazenamento de variáveis, são utilizados volumes fictícios para as condições de contorno das velocidades e temperaturas. Estas condições de contorno, que podem ser vistas na Fig. 4.3, produzem, para o caso da propriedade prescrita no contorno,

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \quad (4.43)$$

que assume a forma

$$\phi_P = 2\phi_e - \phi_E \quad (4.44)$$

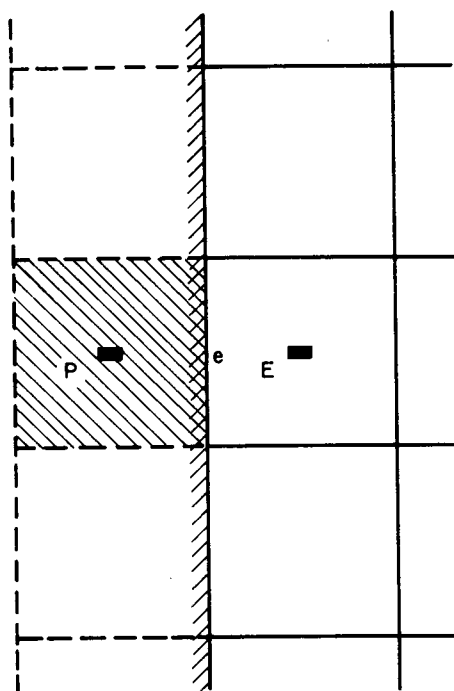


Fig. 4.3 - Volume fictício para aplicação das condições de contorno para as velocidades e temperaturas na face oeste

Se o gradiente de velocidades é prescrito na fronteira, que se constitui em condições de contorno do tipo Neumann, tem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = 0 \quad (4.45)$$

onde  $\vec{n}$  representa a normal a face do volume de controle.

Utilizando diferenças centrais, obtém-se

$$\phi_P = \phi_E \quad (4.46)$$

#### 4.7.2 - EXTRAPOLAÇÃO LINEAR PARA A PRESSÃO PARA VOLUMES DA FRONTEIRA

A extrapolação linear é uma forma simples de aproximar-se um termo, pois consiste em obter-se termos sobre uma reta cuja equação é conhecida através dos pontos vizinhos. A precisão desta extrapolação é tanto melhor quanto mais refinada for a malha. A Eq. (4.47) apresenta um exemplo desta extrapolação para a face e da Fig. 4.4,

$$p_e = \frac{1}{2}(3p_P - p_W) \quad (4.47)$$

Outras formas para avaliação do gradiente de pressão para volumes da fronteira não foram testados embora haja outras possibilidades, como o uso da equação da quantidade de movimento, o uso da equação para fluido inviscido, o uso de pontos fictícios e o extrapolação quadrática, dentre outras.

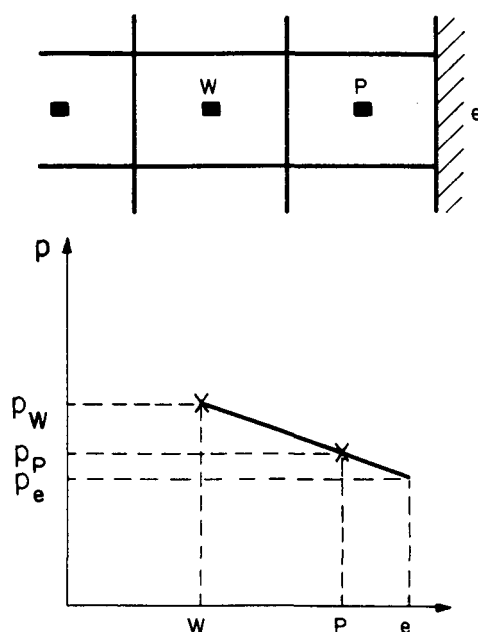


Fig. 4.4 - Extrapolação linear da pressão para a fronteira leste do volume de controle

#### 4.7.3 - APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA AS EQUAÇÕES DE EULER

Quando da aplicação das condições de contorno para as equações de Euler, para problemas onde não há fluxo de massa através da superfície, a velocidade contravariante normal à superfície é forçada nula, impedindo que haja fluxo de massa através da superfície do corpo, e deixando livre o valor da componente tangencial na parede.

#### 4.8 - DETALHES NUMÉRICOS

A solução do sistema de equações diferenciais governantes foi obtida através do método denominado MSI conforme [21] e [5], que se constitui num método fortemente implícito.

A solução numérica de um problema físico, quando obtida, possui um grau de precisão estabelecido pelo critério de convergência. Pode-se obter solução cujos resíduos sejam extremamente pequenos, o que causa gastos elevados de tempo de computação. É prática, então, estabelecer-se critérios de convergência pequenos o suficiente para ter-se variações desprezíveis dos resultados obtidos para os problemas de interesse.

Os critérios de convergência utilizados foram de  $1 \text{ E-}05$  ou  $1\text{E-}04$  dependendo do problema. Este critério de convergência utilizado [17] é expresso por

$$\epsilon \geq \left[ \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\phi^{\max} - \phi^{\min}} \right] \quad (4.49)$$

onde  $\epsilon$  é a tolerância determinada. Para os casos em estudo a tolerância foi aplicada sobre a pressão.

Outro detalhe importante é a escolha da posição do armazenamento das velocidades cartesianas ou contravariantes nas

faces do volume de controle. Observando-se as Eqs. (4.5), (4.8), (4.9), (4.12), (4.15), (4.17), (4.21) e (4.36) verifica-se que o uso das velocidades cartesianas nas faces do volume de controle somente é necessário para os divergentes, que se constituem em termos de ordem de grandeza muito menor quando comparados com os termos convectivos para os problemas em estudo. Por este motivo os termos relativos aos divergentes foram aproximados, como por exemplo, para a velocidade  $v$  na face leste do volume de controle, por

$$v_e = \frac{v_E + v_P}{2}$$

de maneira que somente as velocidades contravariantes foram armazenadas nas faces do volume de controle. Isto possibilita grande economia de memória, pois em termos de velocidades tem-se a mesma quantidade de variáveis armazenadas que para problemas bi-dimensionais em coordenadas cartesianas, como pode ser comparado com [16].

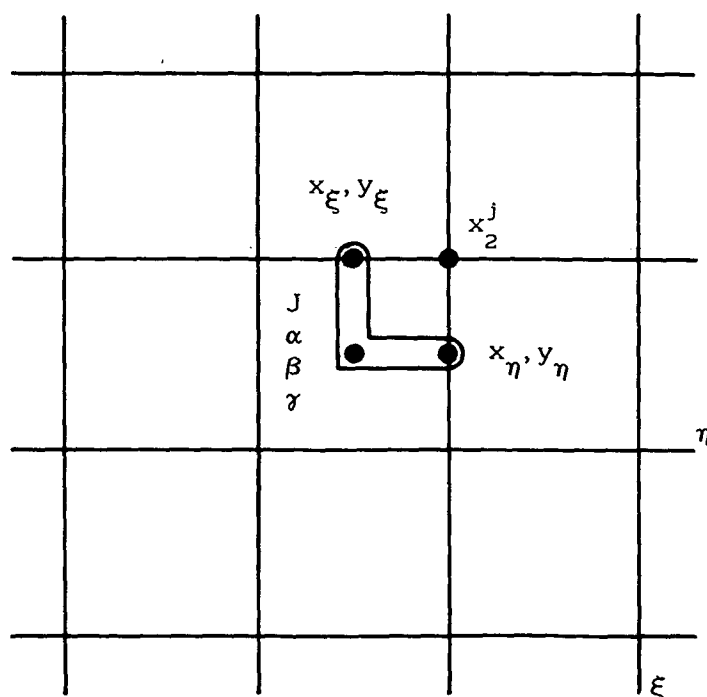


Fig. 4.5 - Armazenamento das métricas e do raio para problemas bi-dimensionais em coordenadas generalizadas

Com relação a escolha da posição do armazenamento das métricas e do raio  $x$ , a forma considerada mais adequada neste trabalho é a disposição conforme Fig. 4.5.

Esta disposição permite economia de memória pois as velocidades contravariantes são utilizadas nas faces do volume de controle e, além disso, não ocorre superposição de informações conforme pode ser facilmente visualizado na Fig. 4.5.

#### 4.9 - RESUMO E CONCLUSÕES

Neste trabalho utilizou-se extrapolação linear para a pressão nas fronteiras no volume de controle que demonstrou ser boa aproximação para os problemas analisados que serão vistos nos capítulos 5 e 6. A obtenção das equações demonstrou simplificações referentes aos cálculos dos divergentes, no cálculo dos coeficientes das velocidades e no cálculo das métricas que serão as mesmas para todas as velocidades devido ao uso da disposição co-localizada das variáveis na malha.

As equações obtidas para variáveis co-localizadas guardam grande semelhança as equações obtidas para a disposição das variáveis na malha desencontrada [9] e [10], onde apenas algumas aproximações variam em função das células vizinhas a célula de interesse.

Nos próximos capítulos são apresentados os resultados obtidos para escoamentos bi-dimensionais sobre geometrias em coordenadas cartesianas e generalizadas.

## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS NUMÉRICOS PARA ESCOAMENTOS BI-DIMENSIONAIS EM COORDENADAS CARTESIANAS

#### 5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas as soluções dos problemas do escoamento incompressível de ar em um duto formado por placas paralelas e do escoamento supersônico com Mach 2.0 sobre um anteparo plano. As duas geometrias em estudo permitem o uso de malhas cartesianas e se constituem nos primeiros testes [16] para comparação das metodologias que empregam variáveis co-localizadas e desencontradas. Para o caso do escoamento de ar entre placas paralelas o número de Mach é feito igual a  $5 \cdot 10^{-5}$ , reproduzindo a situação do escoamento incompressível, o que permite verificar o limite incompressível da metodologia empregando variáveis co-localizadas.

#### 5.2 - GEOMETRIA, MALHAS UTILIZADAS, CONDIÇÕES DE CONTORNO E INICIAIS

A geometria, malhas, condições de contorno e iniciais são bastante similares para ambos os problemas em estudo. No caso do duto, a malha utilizada é de  $18 \times 22$ , enquanto que para o problema do anteparo, é de  $36 \times 44$  volumes. As Fig. 5.1 e 5.2 apresentam a geometria e as condições de contorno para o problema do duto constituído de placas paralelas e o problema do anteparo, respectivamente.

As condições iniciais são de velocidades, pressões e temperaturas iguais as da corrente livre. A solução de interesse é a de regime permanente, mas a mesma é obtida através de um

transiente distorcido. As dimensões físicas do problema também são indicadas nas Fig. 5.1 e 5.2.

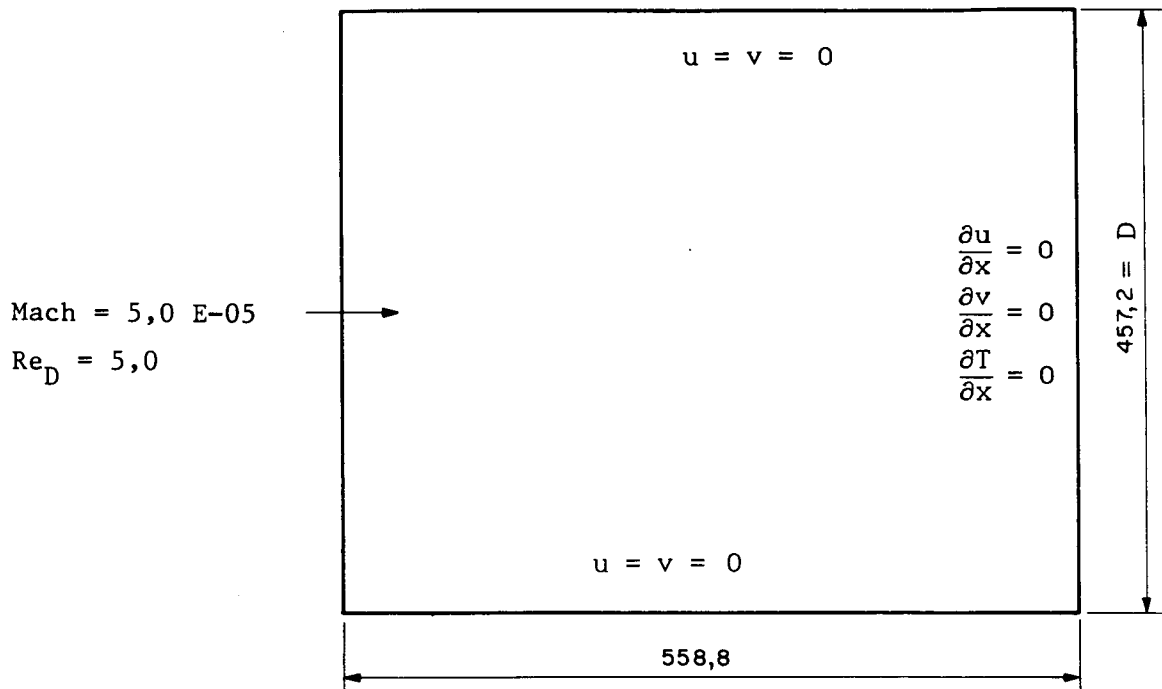


Fig. 5.1 - Geometria e condições de contorno para o problema do duto constituído de placas paralelas

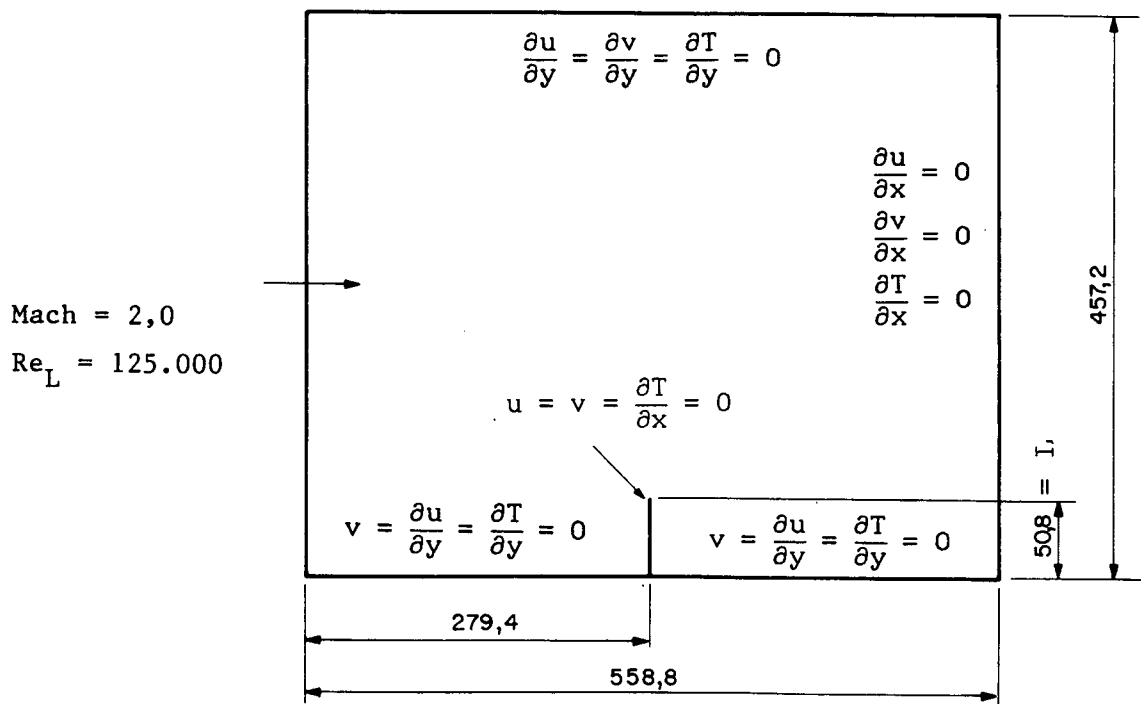


Fig. 5.2 - Geometria e condições de contorno para o problema do anteparo



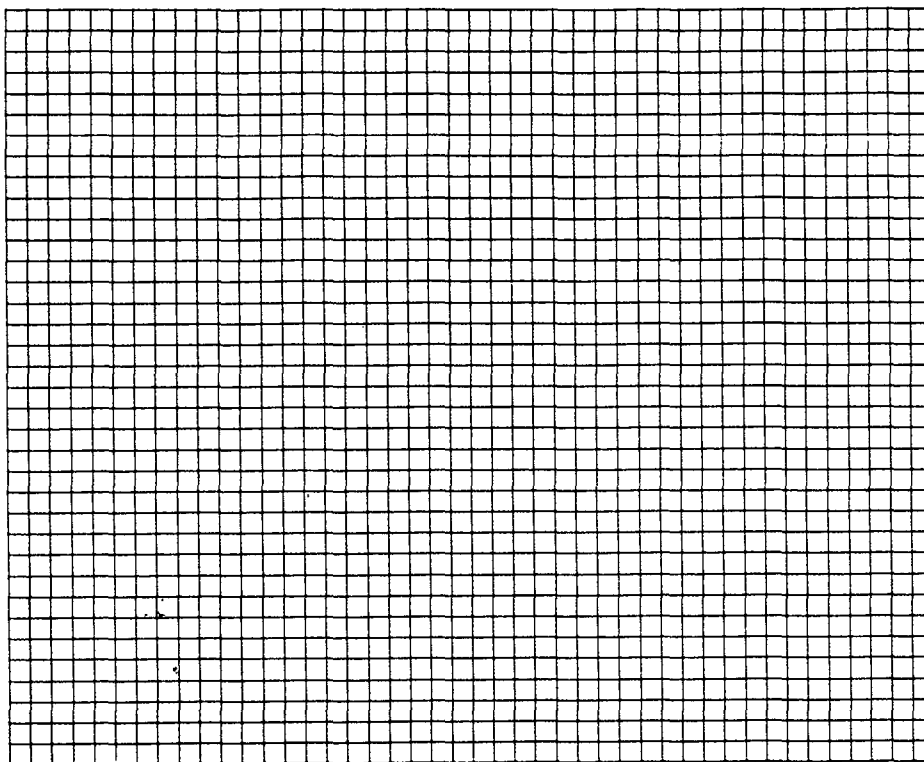


Fig. 5.3 - Malha 36x44 utilizada para a solução do problema do anteparo

Apenas a malha 36x44 do problema do anteparo é apresentada na Fig. 5.3 pois a outra malha é também cartesiana e, portanto, similar.

### 5.3 - RESULTADOS OBTIDOS PARA ESCOAMENTO NO INTERIOR DE UM DUTO

Os resultados obtidos para o escoamento no interior do duto são para Mach 5 E-05 que se constitui num escoamento incompressível. A solução para este tipo de escoamento é bastante conhecida e apresenta comprimento característico de entrada igual a 1,5 vezes a altura do duto [22].

Os resultados obtidos através do uso de variáveis colocalizadas demonstram perfeita concordância com os resultados obtidos através do uso de variáveis desencontradas. Estes resultados, mostrados na Fig. 5.4, indicam que a solução pode ser

obtida através do emprego de ambas as metodologias. Nos próximos casos também serão apresentadas curvas de comparação de desempenho entre metodologias.

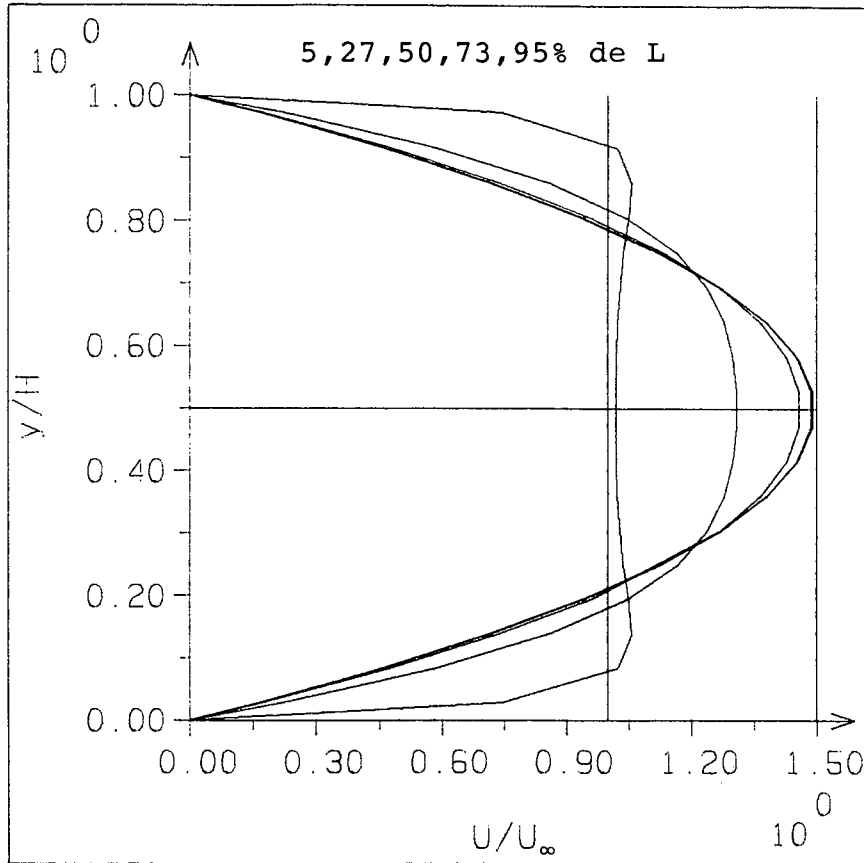


Fig. 5.4 - Perfis de velocidades para o problema do duto de placas paralelas para malha 22x18 e Mach 5 E-05 usando variáveis desencontradas e co-localizadas

#### 5.4 - RESULTADOS OBTIDOS PARA O ESCOAMENTO SOBRE UM ANTEPARO

Neste problema tem-se uma diferença básica em termos de escoamento quando comparado com o problema do duto. Agora estuda-se um escoamento externo compressível enquanto que o problema do duto era de escoamento interno incompressível. Os resultados obtidos para a malha 22x18 demonstram a existência de

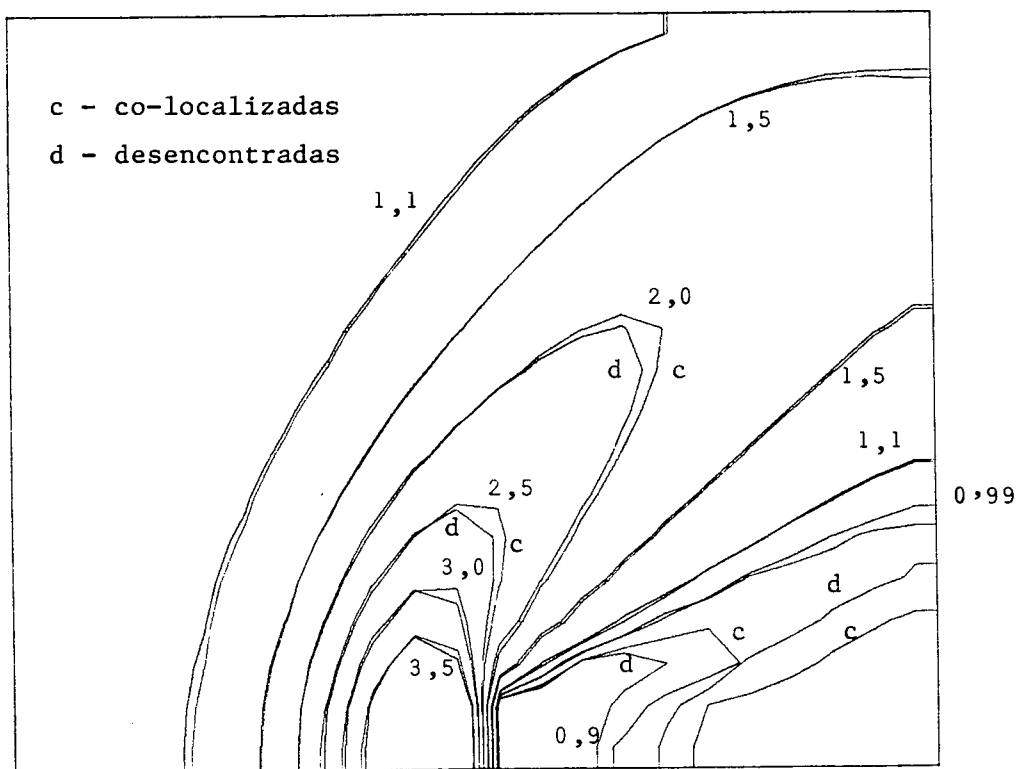


Fig. 5.5 - Linhas de pressão constante para o problema do anteparo para malha 22x18, Mach 2.0, usando variáveis co-localizadas e desencontradas

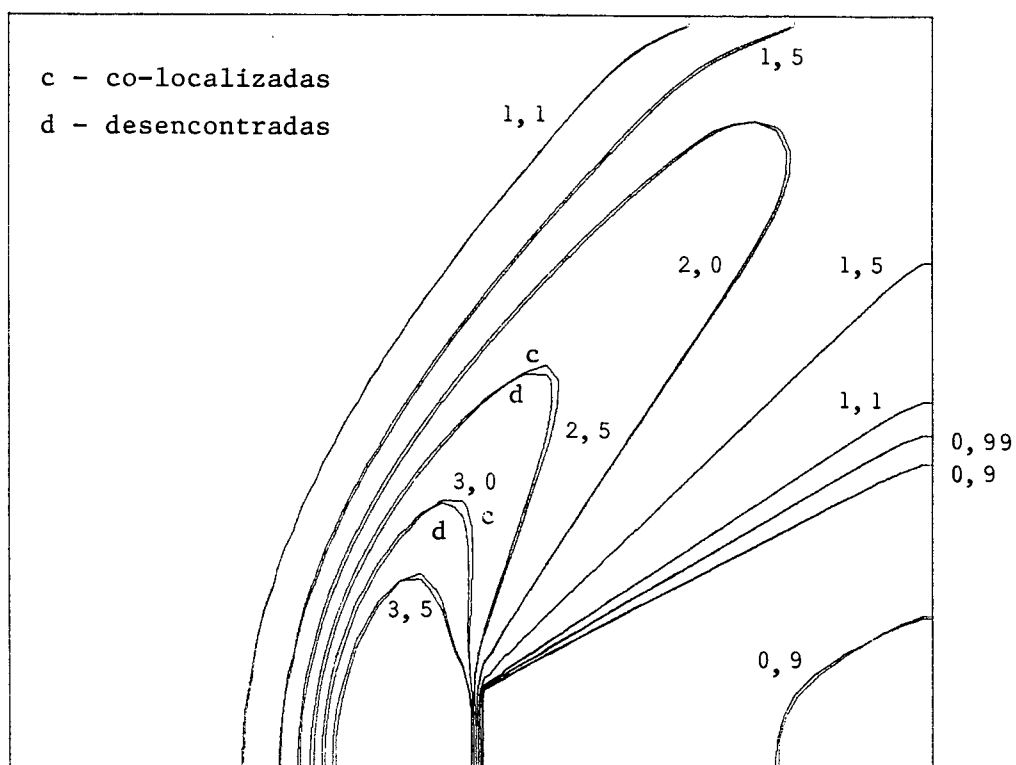


Fig. 5.6 - Linhas de pressão constante para o problema do anteparo para malha 44x36, Mach 2.0, usando variáveis co-localizadas e desencontradas

diferenças entre o uso de variáveis desencontradas e co-localizadas conforme apresentado na Fig. 5.5. As diferenças existentes entre as curvas de pressão mostradas na Fig. 5.5 tendem a desaparecer quando do refinamento da malha para 44x36 volumes, conforme Fig. 5.6

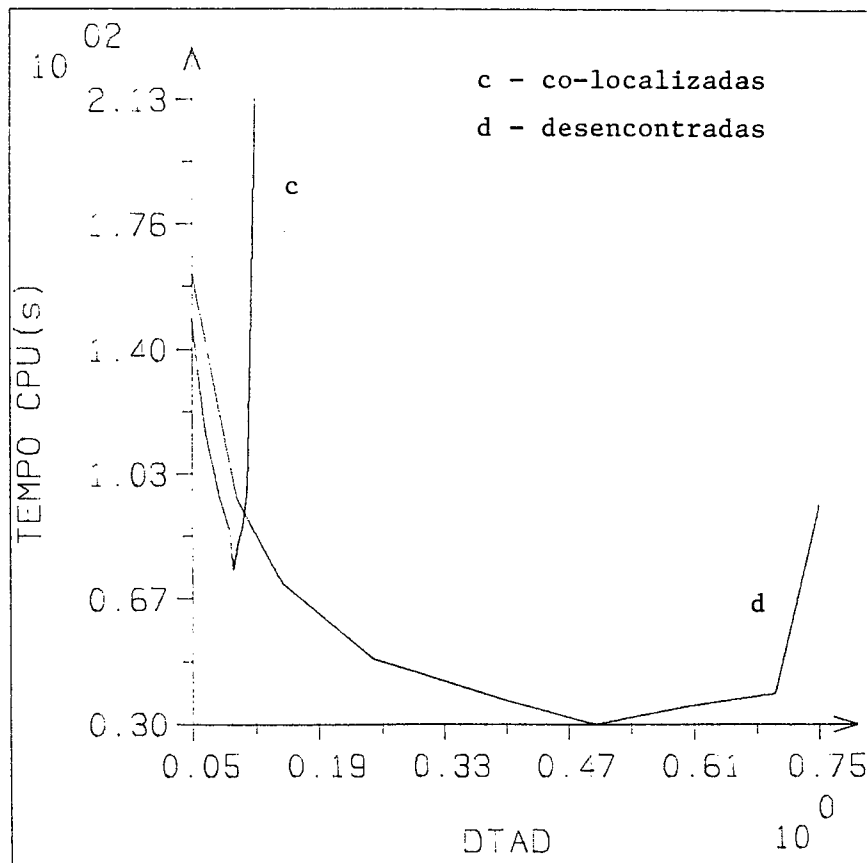


Fig. 5.7 - Curvas de CPUxDTAD para o problema do anteparo para malha 22x18 e Mach 2.0 no IBM 4381 modelo Q13

Curvas de desempenho são apresentadas nas Figs. 5.7 e 5.8. A Fig. 5.8 mostra que o uso de variáveis desencontradas é levemente superior ao uso de variáveis co-localizadas tanto pela economia de tempo computacional assim como pela faixa de tempo adimensional utilizada, para resultados equivalentes.

Nos gráficos apresentados, DTAD é um passo de tempo

adimensional definido por

$$DTAD = \frac{t U_{\infty}}{L}$$

onde L representa a dimensão característica do corpo e  $U_{\infty}$  a velocidade da corrente livre.

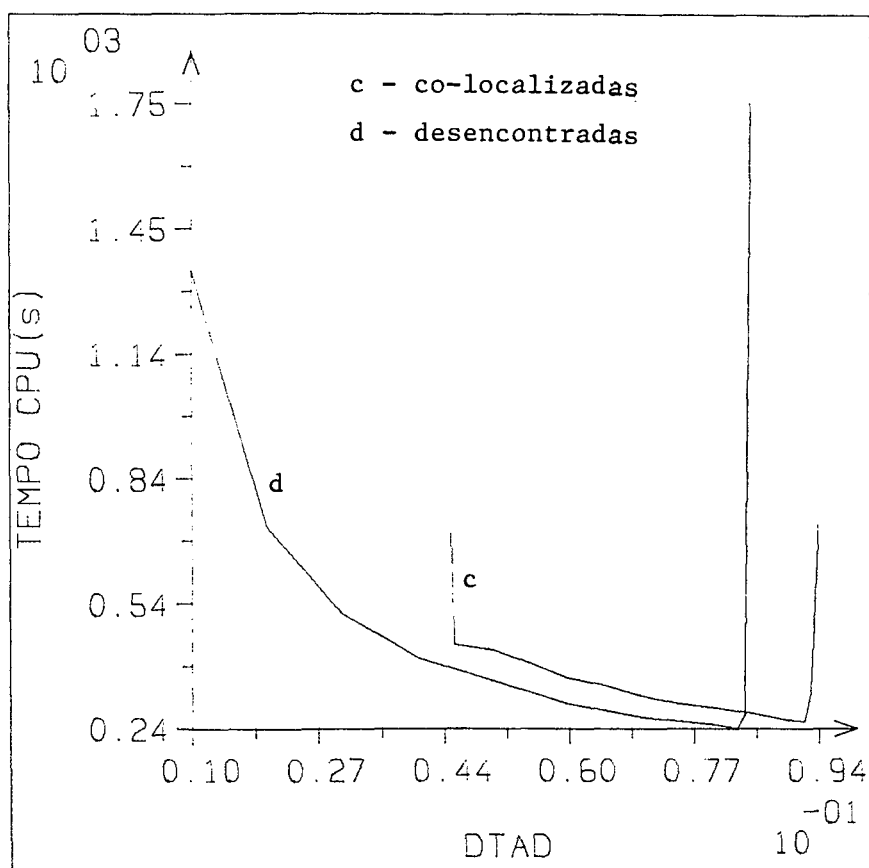


Fig. 5.8 - Curvas de CPUxDTAD para o problema do anteparo para malha 44x36 e Mach 2.0 no IBM 4381 modelo Q 13

Resultados da massa específica, temperatura e número de Mach são apresentados nas Fig. 5.9 a 5.11 respectivamente, usando variáveis co-localizadas.

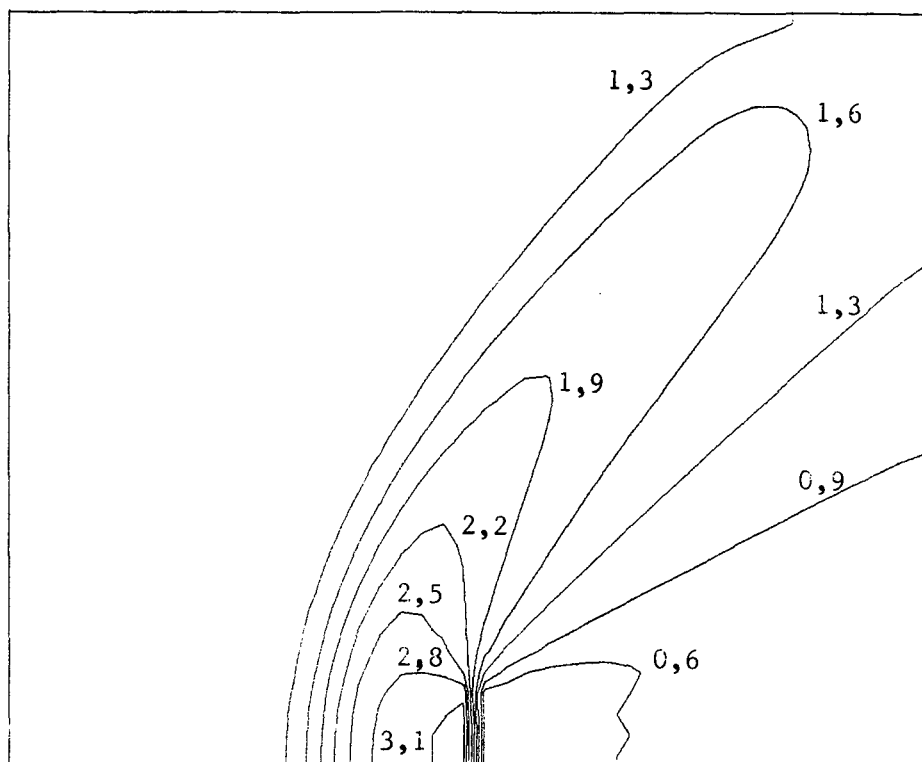


Fig. 5.9 - Linhas de massa específica constante para o problema do anteparo para malha  $44 \times 36$  e Mach 2.0 usando variáveis co-localizadas

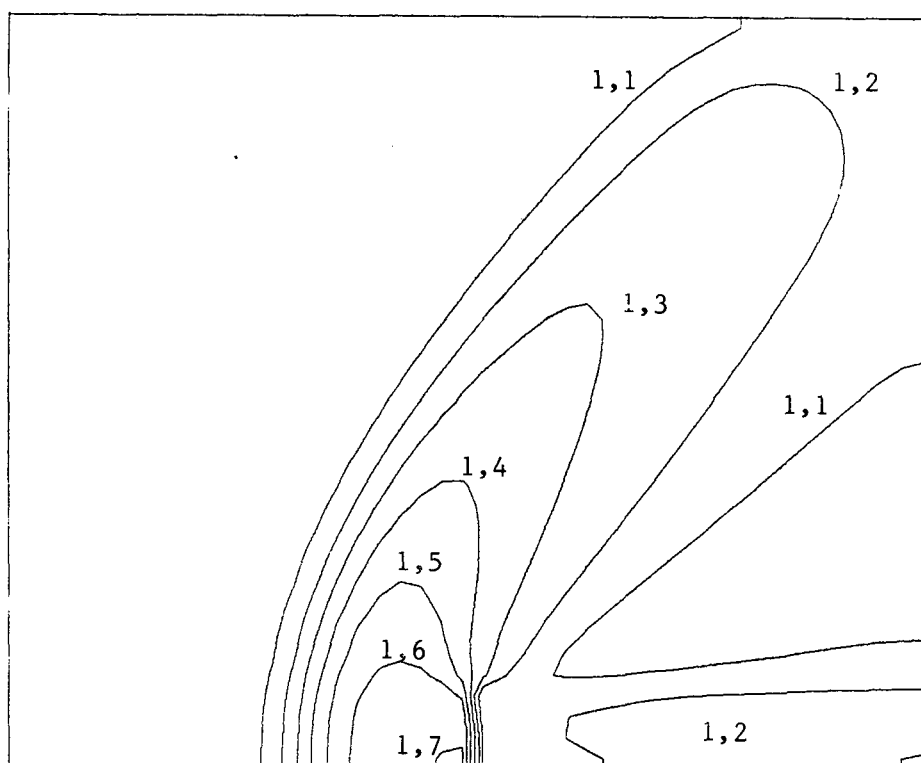


Fig. 5.10 - Linhas de temperatura constante para o problema do anteparo para malha  $44 \times 36$  e Mach 2.0, usando variáveis co-localizadas

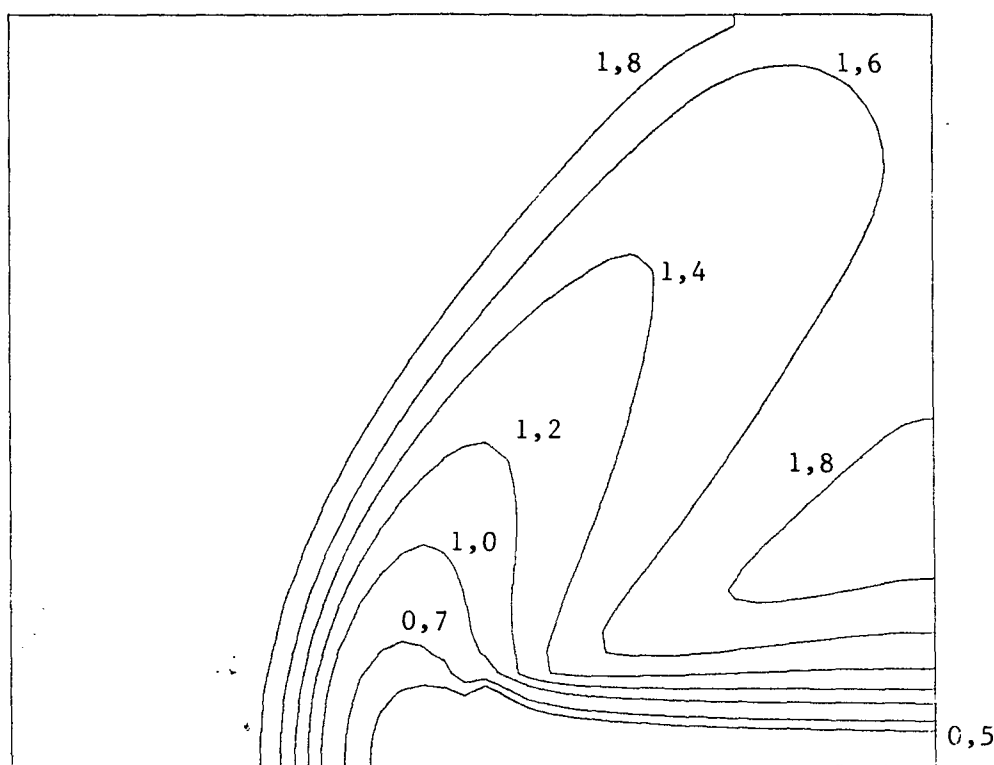


Fig. 5.11 - Linhas de Mach constante para o problema do anteparo para malha 44x36 e Mach da corrente livre 2.0 usando variáveis co-localizadas

## 5.5 - RESUMO E CONCLUSÕES

Os resultados obtidos através do uso de variáveis co-localizadas, na solução de problemas usando coordenadas cartesianas, mostraram boa concordância com os resultados obtidos pelo uso de variáveis desencontradas. Pequenas diferenças aparecem entre os resultados das metodologias e são provenientes do não refinamento da malha. Verifica-se que a característica de rendimento similar entre o uso variáveis co-localizadas e desencontradas, observada por Peric [15] nos escoamentos incompressíveis, tem sido observada para escoamentos compressíveis em coordenadas cartesianas, reforçando a expectativa de obter-se também bons resultados para escoamentos bi e tridimensionais em coordenadas generalizadas. Nos casos estudados é verificada pequena superioridade através do uso de variáveis desencontradas.

## CAPÍTULO 6

### RESULTADOS NUMÉRICOS PARA ESCOAMENTO BI-DIMENSIONAL EM COORDENADAS GENERALIZADAS

#### 6.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas soluções para escoamentos compressíveis de ar sobre um perfil NACA 0012, sobre a parte frontal do VLS, sobre um perfil cone, sobre um perfil cunha e sobre a região do VLS onde encontram-se os boosters, admitindo-se escoamento bi-dimensional. Este estudo serve para comparação dos resultados obtidos através do uso de variáveis colocalizadas com os obtidos através de variáveis desencontradas em volumes finitos, ou com os resultados em diferenças finitas, ou através de dados experimentais, para problemas bi-dimensionais em coordenadas generalizadas.

#### 6.2 - RESULTADOS DO ESCOAMENTO SOBRE O PERFIL NACA 0012

O perfil NACA 0012 constitui-se num perfil de aerofólio que será analisado através das equações de Navier-Stokes. A geometria e as condições de contorno, para este problema, são apresentadas na Fig. 6.1.

Para estudar este problema são utilizadas duas malhas. A primeira com 19x41 volumes e a segunda com 38x82 volumes. Apenas a malha mais refinada é apresentada na Fig. 6.2.



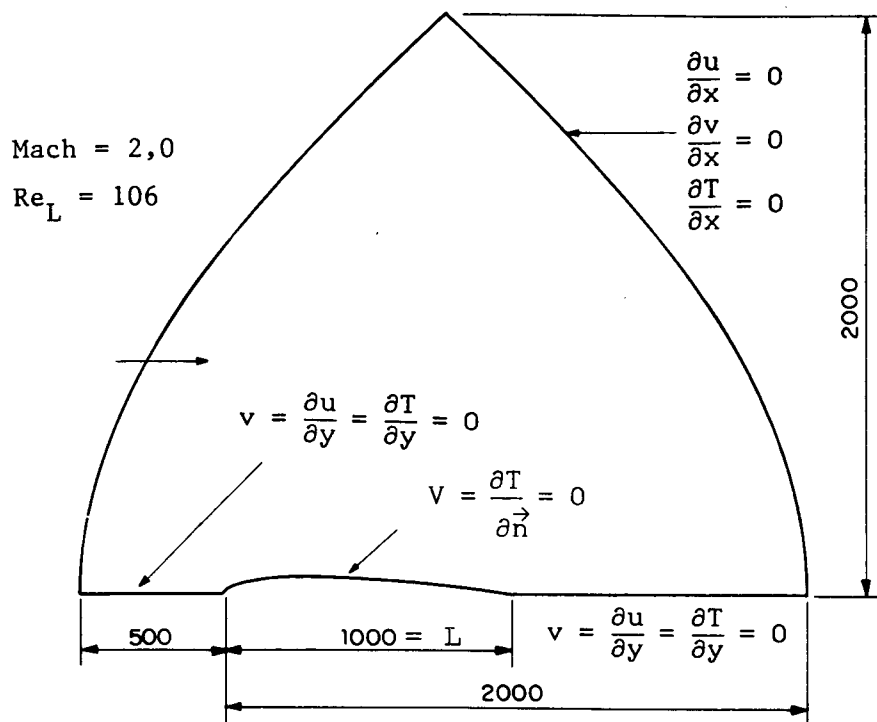


Fig. 6.1 - Geometria e condições de contorno para o problema do NACA 0012

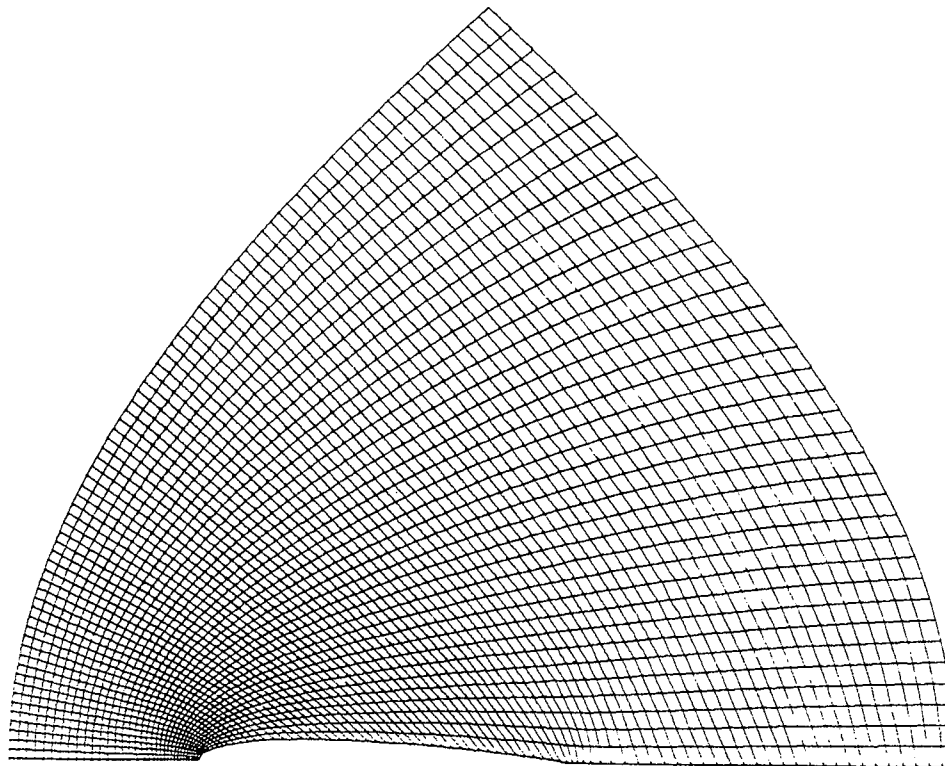


Fig. 6.2 - Malha 38x82 utilizada na obtenção da solução do escoamento sobre o NACA 0012

Os resultados obtidos são comparados com os da referência [23], que apresenta resultados experimentais e numéricos. Observa-se, na Fig. 6.3, que os resultados obtidos no presente trabalho concordam com os experimentais e numéricos mostrados em [23], conforme Fig. 6.4. Os resultados não estão superpostos em uma única figura devido ao aumento de linhas que isto causaria. Observando cuidadosamente, o leitor poderá verificar o comportamento da solução obtida neste trabalho em relação aos resultados de [23].

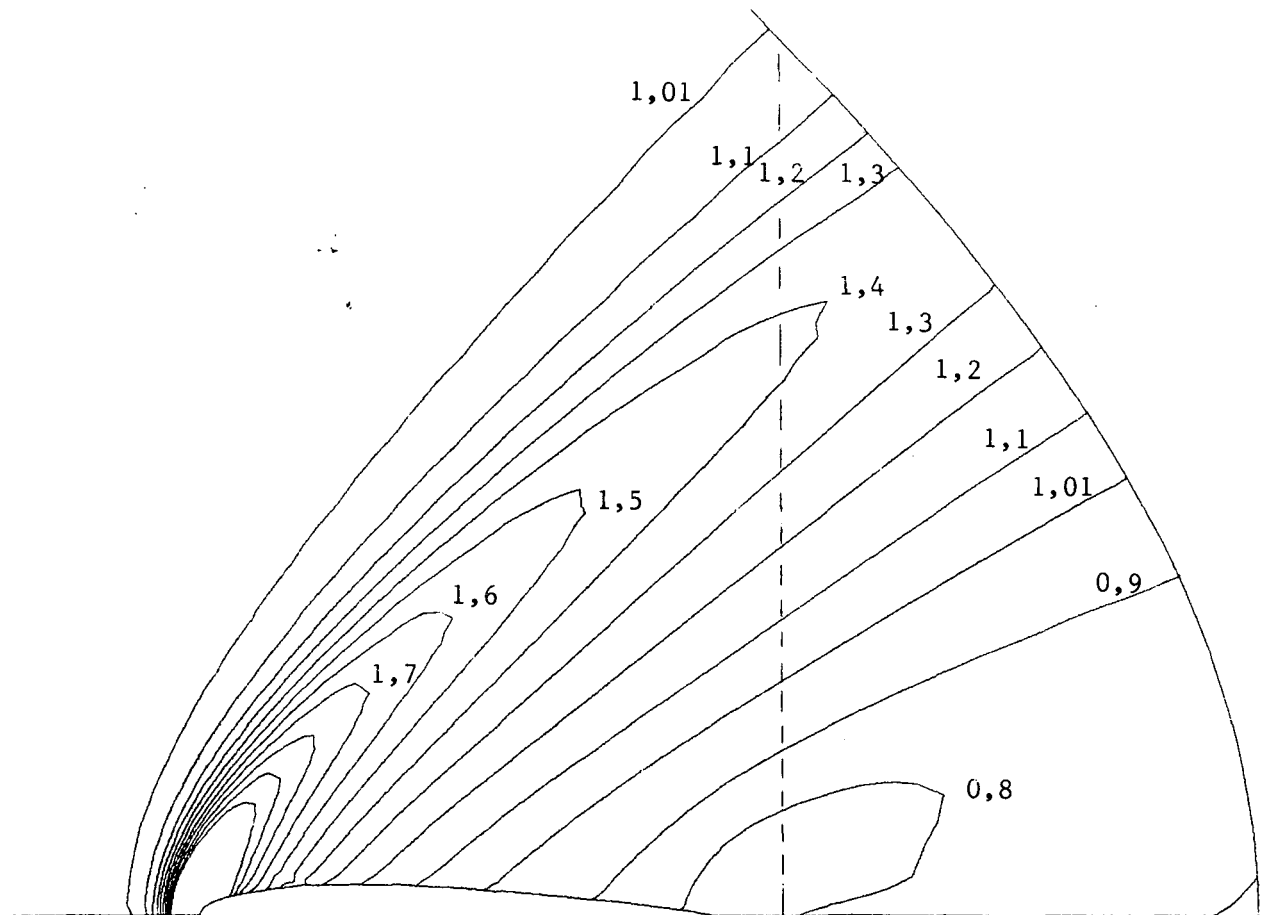


Fig. 6.3 - Curvas de massa específica constante para Mach 2.0 sobre o perfil NACA 0012 para malha 38x82 usando variáveis co-localizadas

As Figs. 6.5 e 6.6 apresentam curvas de pressão e temperatura constantes para a malha 38x82 respectivamente. Os resultados para malha 19x41 são concordantes com os apresentados para malha 38x82, não sendo apresentados.

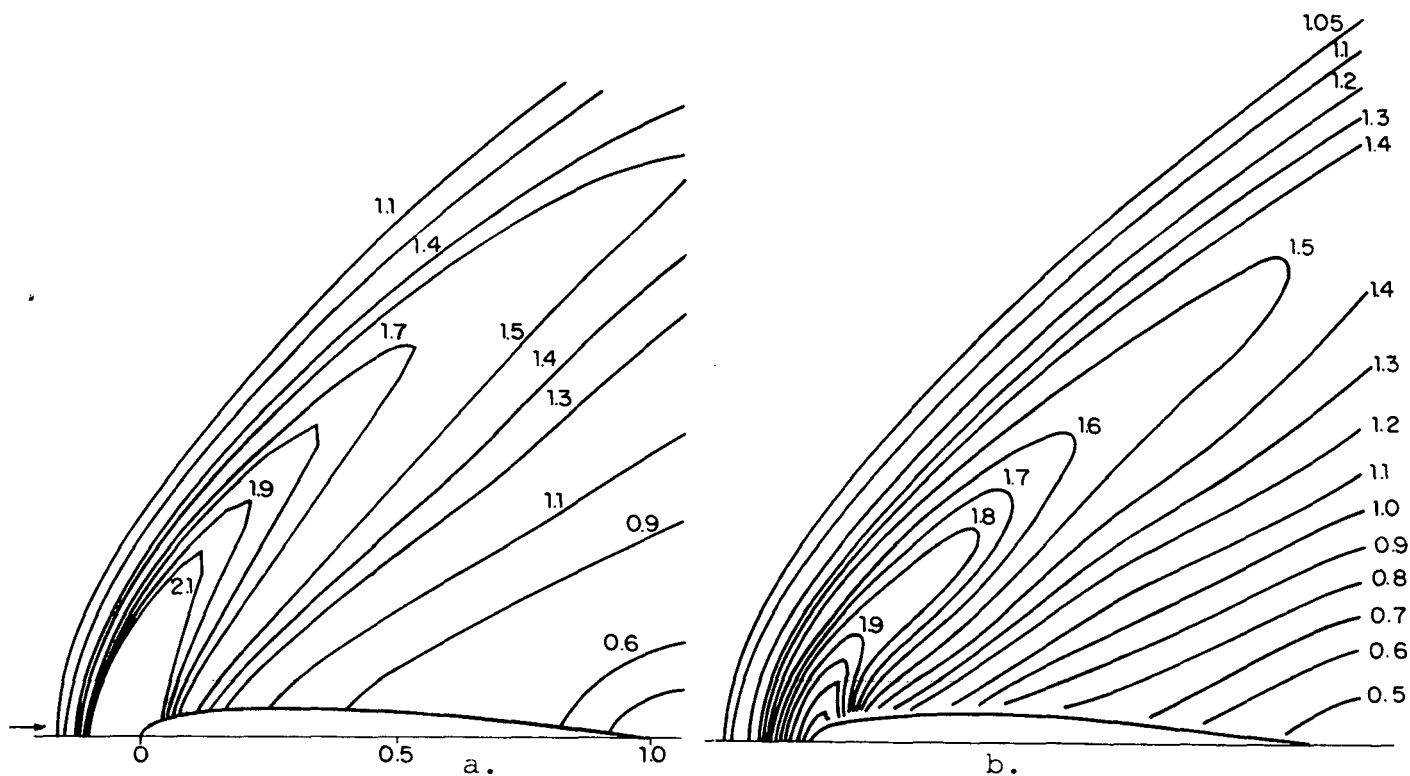


Fig. 6.4 - Curvas de massa específica constante para Mach 2.0 sobre o perfil NACA 0012 da referência [23] (a.numérico, b. experimental)

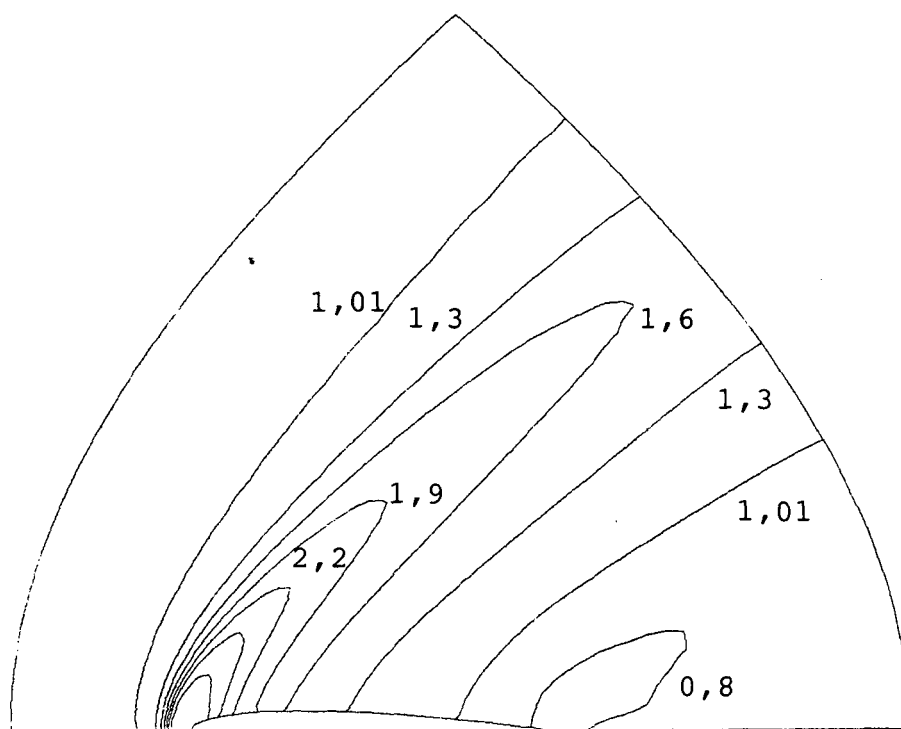


Fig. 6.5 - Curvas de pressão constante para Mach 2.0 sobre o perfil NACA 0012 para malha 38x82 usando variáveis colocalizadas

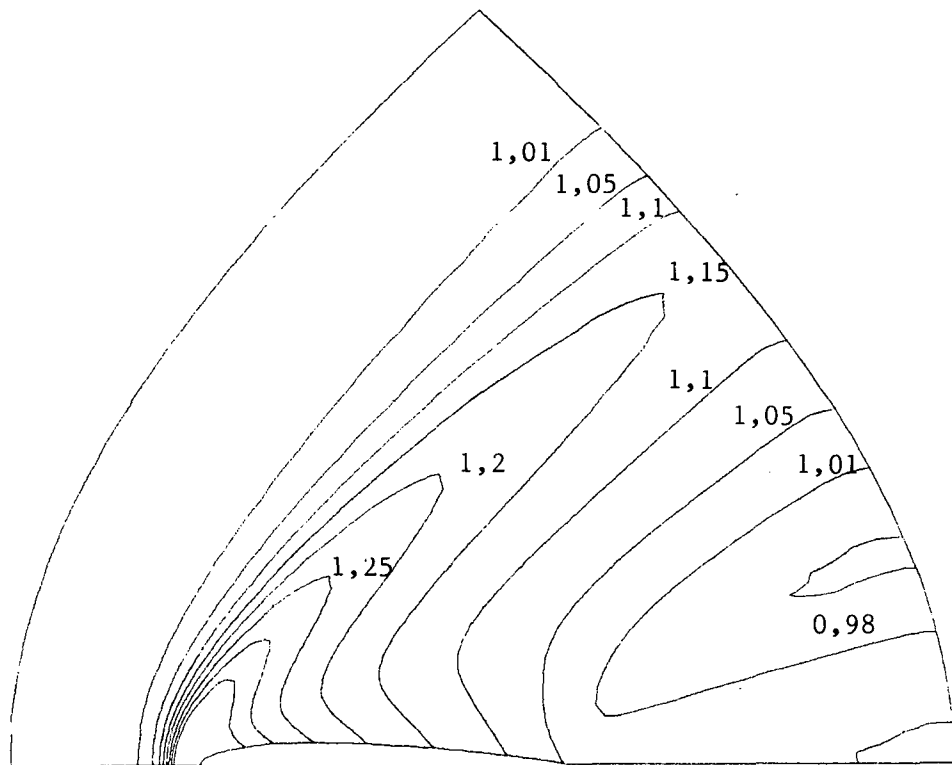


Fig. 6.6 - Curvas de temperatura constante para Mach 2.0 sobre o perfil NACA 0012 para malha 38x82 usando variáveis co-localizadas

### 6.3 - RESULTADOS PARA O ESCOAMENTO SOBRE A PARTE FRONTAL DO VLS

O escoamento sobre a parte frontal do VLS já encontra-se resolvido, usando-se de variáveis desencontradas [10], e comparado com resultados experimentais. A geometria, as malhas utilizadas e as condições de contorno são as mesmas que foram utilizadas em [10] e são apresentadas na Fig. 6.7. A malha utilizada para resolver este problema é de 26x62 volumes conforme Fig. 6.8.

A Fig. 6.9 apresenta curvas de massa específica constante para ambas as metodologias usando variáveis desencontradas e co-localizadas para Mach da corrente livre igual a 3.75 onde verifica-se boa concordância entre os resultados.

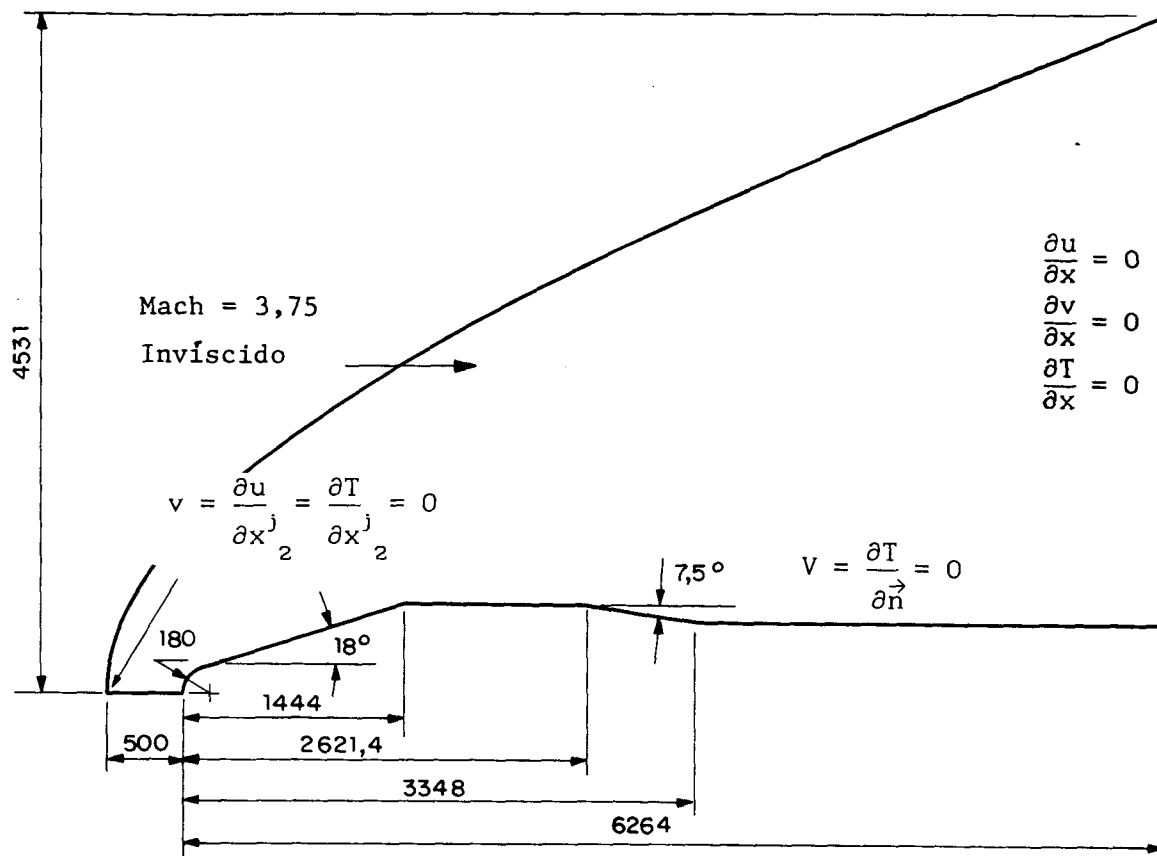


Fig. 6.7 - Geometria e condições de contorno para o problema do VLS parte frontal (axissimétrico)

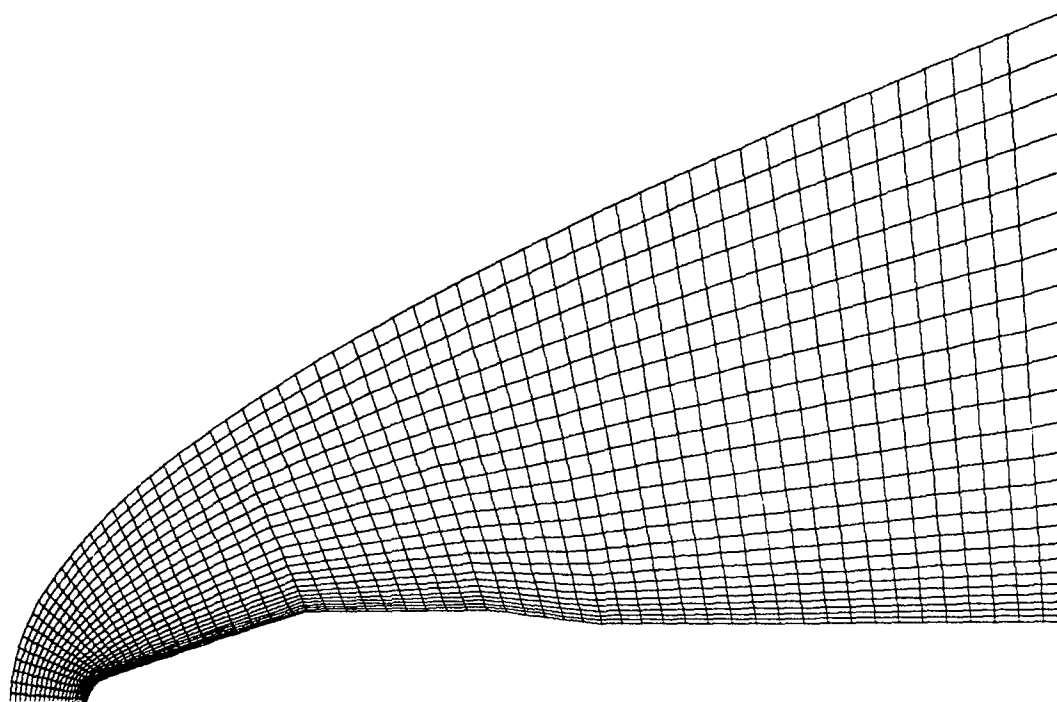


Fig. 6.8 - Malha 26x62 utilizada na solução do escoamento sobre o perfil do VLS parte frontal

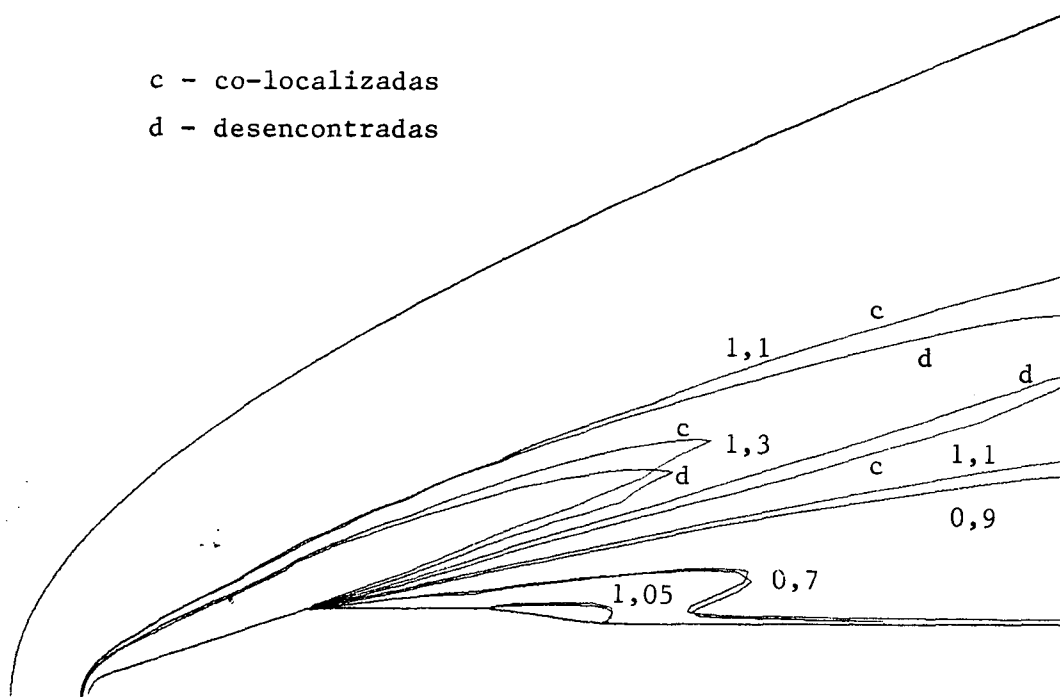


Fig. 6.9 - Linhas de massa específica constante usando-se variáveis co-localizadas e desencontradas para Mach 3.75 e malha 26x62 volumes para a parte frontal do VLS.

Curvas do coeficiente de pressão sobre a superfície da parte frontal do VLS demonstram perfeita concordância entre o uso de variáveis desencontradas e co-localizadas conforme apresentado na Fig. 6.10

Curvas do número de Euler, temperatura e Mach constantes são apresentados nas Fig. 6.11 a 6.13, respectivamente, mostrando que o uso de variáveis desencontradas e co-localizadas fornecem resultados semelhantes.

A distribuição do coeficiente de pressão, também conhecido como número de Euler, é definido conforme Eq. (6.1)

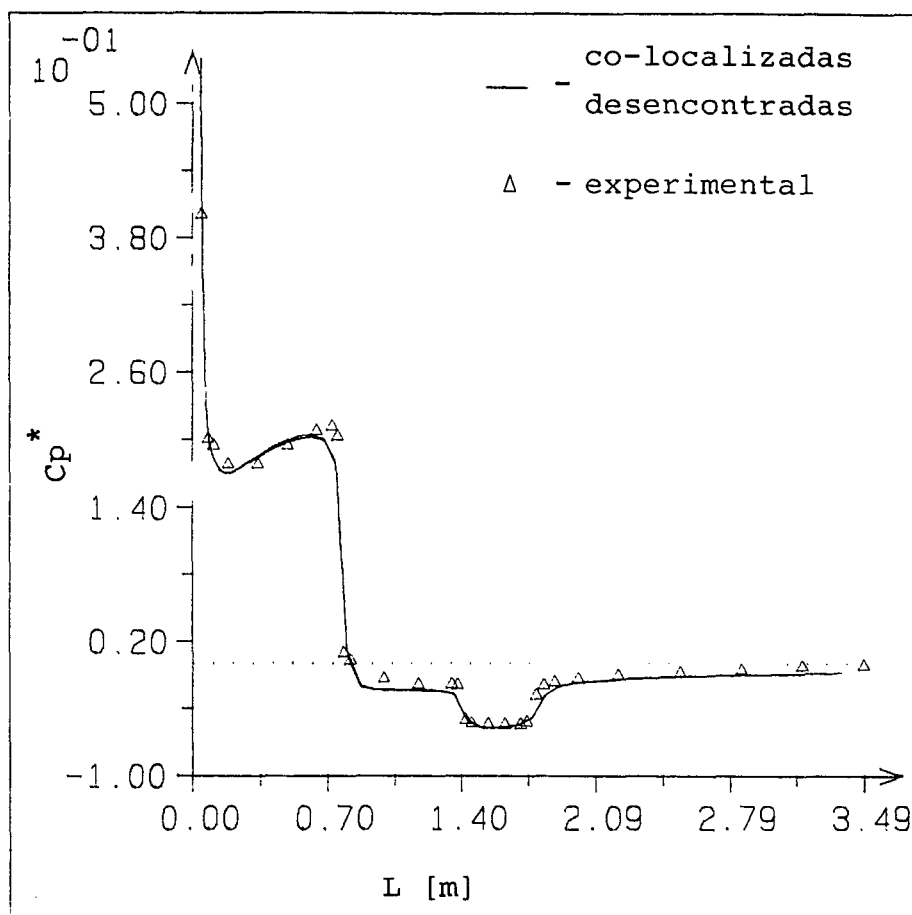


Fig. 6.10 - Curvas do coeficiente de pressão usando-se variáveis co-localizadas e desencontradas para malha 26x62 volumes e dados experimentais [10] para Mach 3.75 para a parte frontal do VLS.

$$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho \vec{V}^2} = \frac{P_p - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (6.1)$$

que é frequentemente usado em testes de aerodinâmica e em outros testes de modelos.

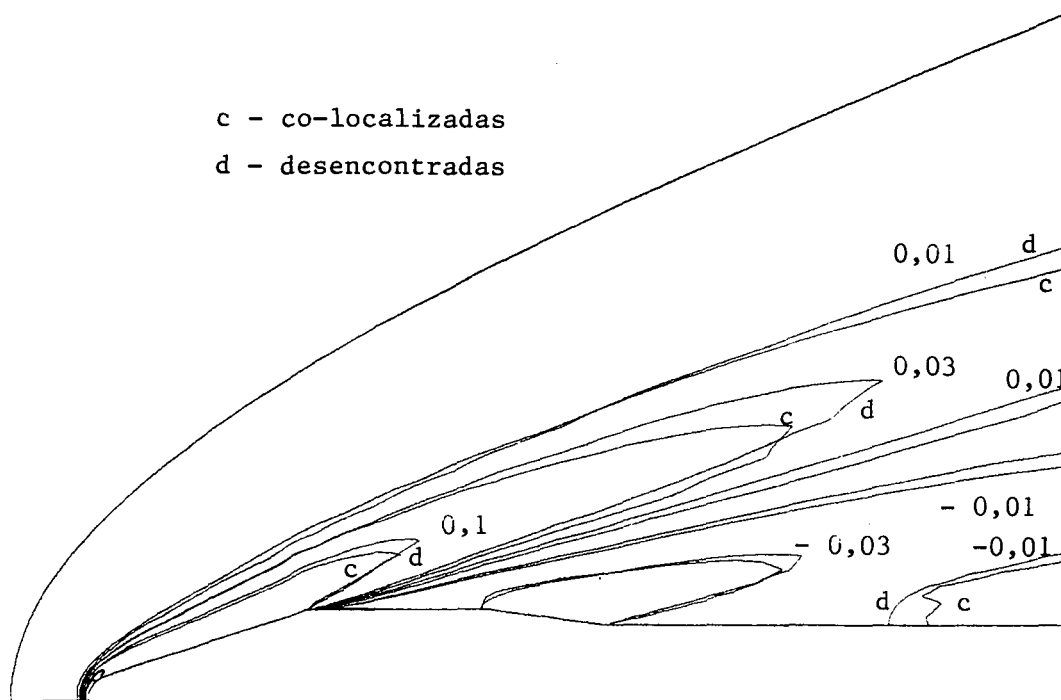


Fig. 6.11 - Linhas de Euler usando-se variáveis co-localizadas e desencontradas para Mach 3.75 e malha 26x62 volumes para a parte frontal do VLS.

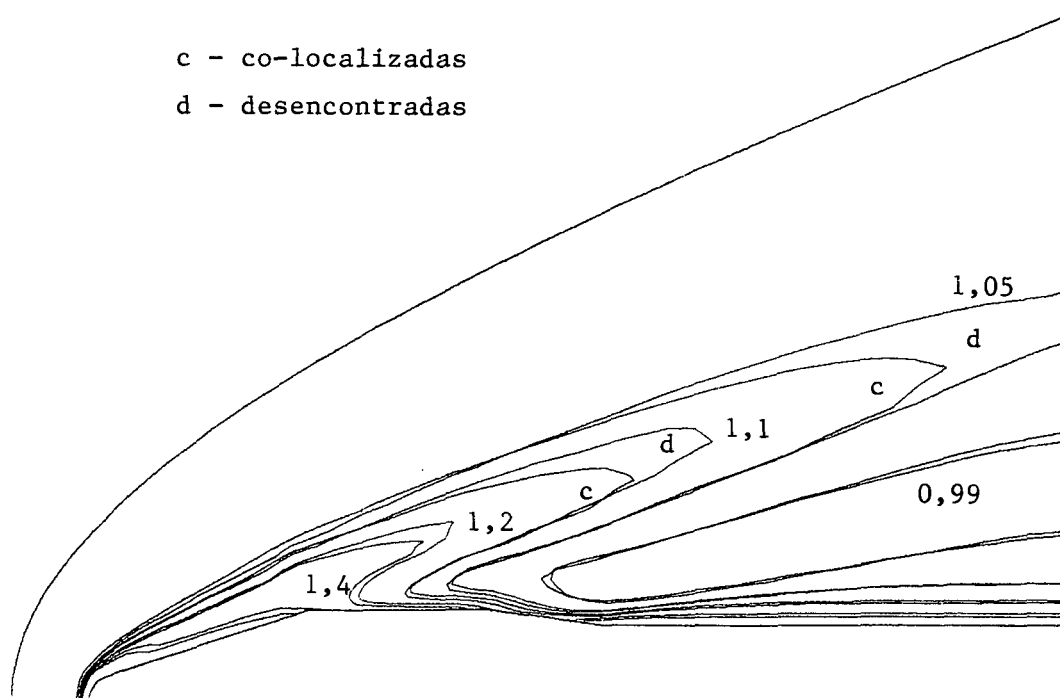


Fig. 6.12 - Linhas de temperatura constante usando-se variáveis co-localizadas e desencontradas para Mach 3.75 e malha 26x62 volumes para a parte frontal do VLS.



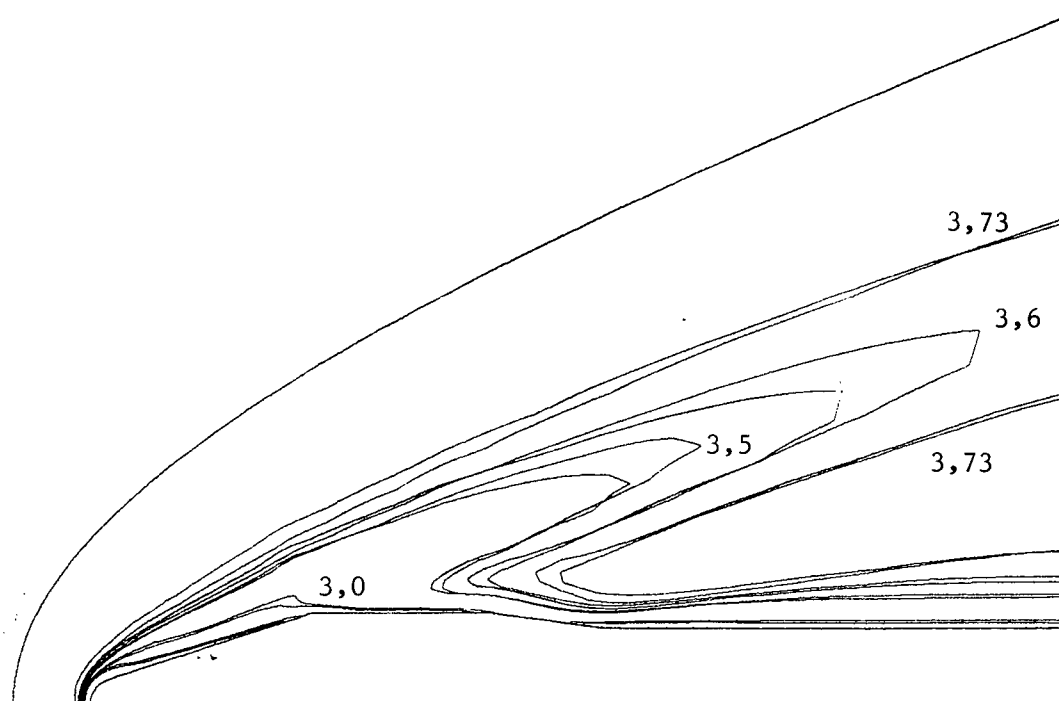


Fig. 6.13 - Linhas de Mach constante usando-se variáveis co-localizadas e desencontradas para Mach 3.75 e malha 26x62 volumes para a parte frontal do VLS.

Na Fig. 6.14 é apresentada curva de desempenho usando-se variáveis co-localizadas e desencontradas. Verifica-se que o uso de variáveis co-localizadas apresenta melhor desempenho, economizando aproximadamente 40% do tempo computacional necessário.

Estes resultados mostram que o uso de variáveis co-localizadas, para problemas bi-dimensionais compressíveis em coordenadas generalizadas, apresenta melhor desempenho que o uso de variáveis desencontradas. Estas conclusões foram mencionadas em [15] na solução de problemas incompressíveis usando-se variáveis co-localizadas.

Verifica-se que a extensão da metodologia que usa variáveis co-localizadas para problemas compressíveis apresenta as mesmas características que as apresentadas na solução de

escoamentos incompressíveis, enfatizando a expectativa de grande economia de tempo e memória computacional necessário para resolver problemas em geometrias tridimensionais.

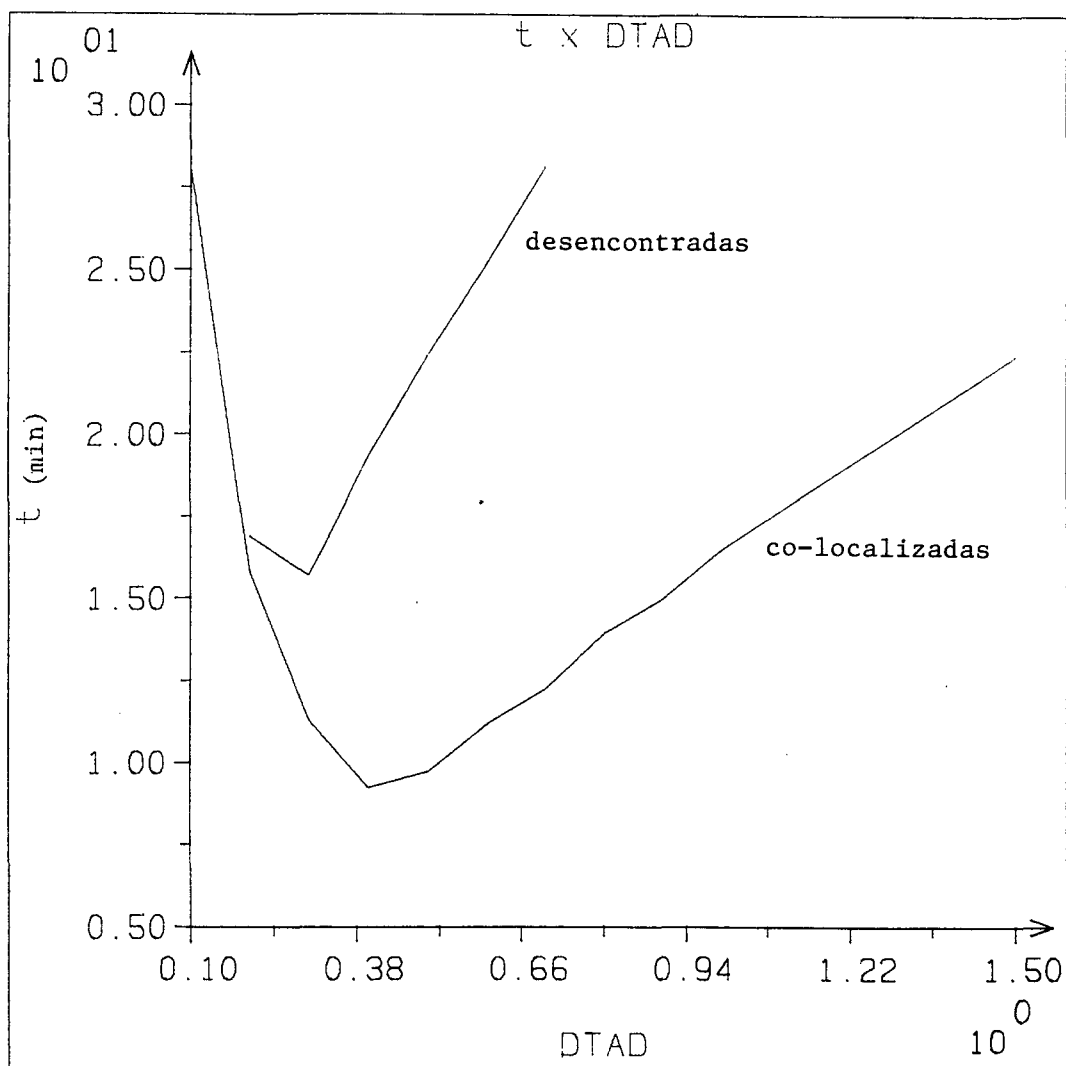


Fig. 6.14 - Curvas de desempenho para malha 26x62 volumes para Mach 3.75 usando variáveis co-localizadas e desencontradas no IBM 4381 modelo Q 13 para a parte frontal do VLS

#### 6.4 - RESULTADOS PARA O ESCOAMENTO SOBRE UM CONE

O problema do cone foi escolhido por constituir-se numa geometria simples, de fácil aplicação da metodologia e por possuir resultados para comparação [24]. A geometria e as condições de contorno deste problema podem ser vistos na Fig. 6.15

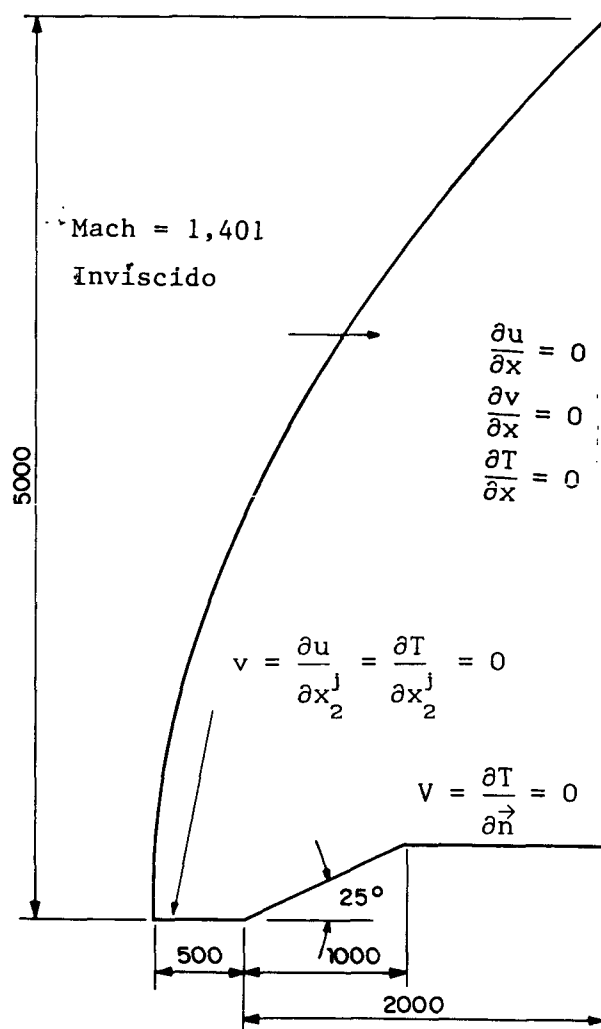


Fig. 6.15 - Geometria e condições de contorno para o problema do cone (axissimétrico)

Para verificar o comportamento da solução com o refino da malha, foram utilizadas as malhas 50x30 e 97x58 volumes, sendo que a última é apresentada na Fig. 6.16.

Neste trabalho também foi testada a influência do uso da viscosidade para o ar. Os resultados demonstram que não existe variação significativa entre o comportamento das isocurvas resolvendo-se o problema utilizando as equações de Navier-Stokes

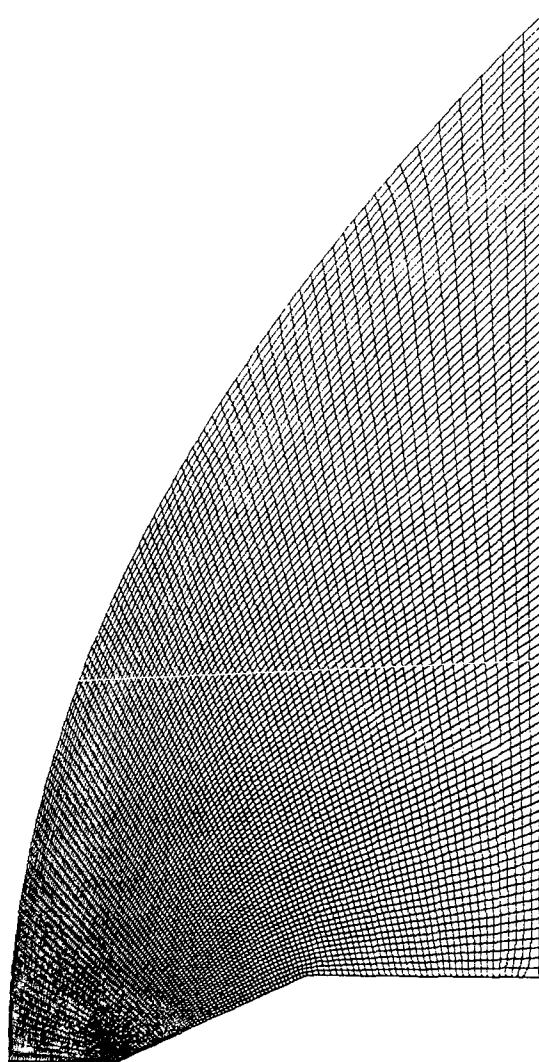


Fig. 6.16 - Malha 97x58 volumes utilizada na solução do escoamento sobre o cone

ou Euler, devido as dimensões dos volumes das malhas utilizadas serem grandes quando comparadas com a espessura da camada limite.

A Fig. 6.17 apresenta curvas de Mach constante para malhas 50x30, 97x58 .

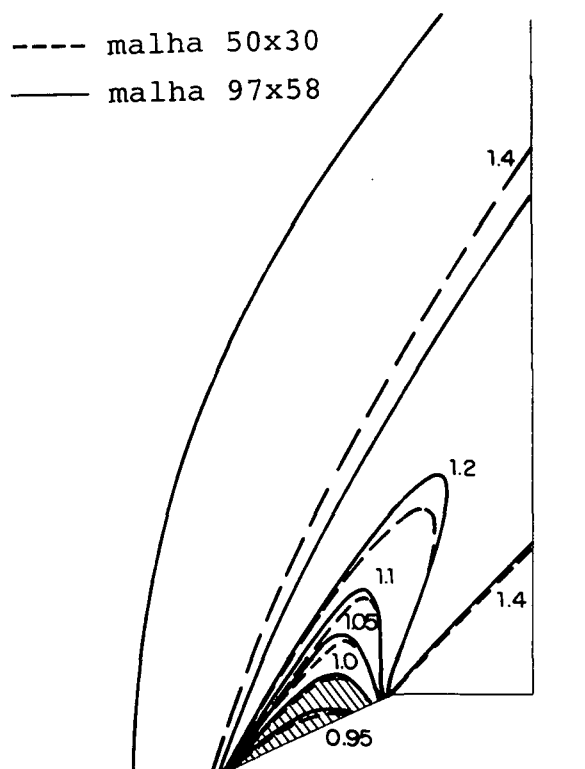


Fig. 6.17 - Linhas de Mach constante para o cone usando variáveis co-localizadas para Mach 1.401 para malhas 50x30, 97x58 volumes.

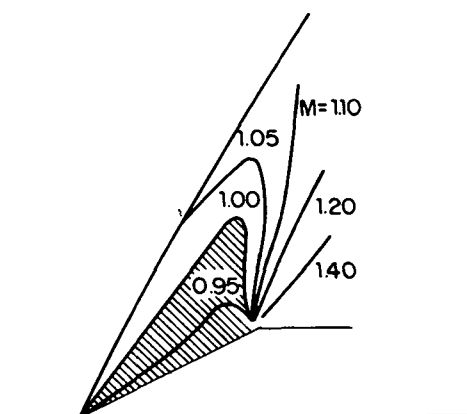


Fig. 6.18 - Linhas de Mach constante para o cone para Mach 1.401 da referência [24]

A Fig. 6.18 apresenta as curvas de Mach constante para

a referência [24]. Nestas curvas verifica-se que a metodologia utilizando variáveis co-localizadas, através do refino de malha, tende ao comportamento das isocurvas apresentadas em [24].

A seguir são apresentadas as isocurvas de temperatura, e massa específica para a malha 97x58 volumes conforme Fig. 6.19 a 6.20 respectivamente.

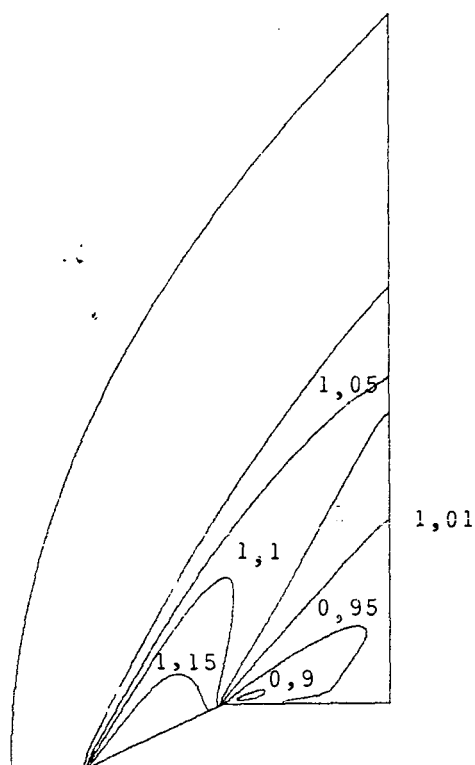


Fig. 6.19 - Linhas de temperatura constante para o cone usando variáveis co-localizadas para Mach 1.401 e malha 97x58 volumes

Outros refinamentos de malha não foram executados devido ao consumo de tempo para obtenção da solução elevar-se significativamente e o objetivo de verificação do comportamento da metodologia ter sido alcançado com a malha 97x58 volumes.

Estranha-se entretanto, o fato de não ser captada, como esperada, a onda de choque que é mostrada em [24]. Provavelmente o emprego de aproximações "upwind" presentes no

método utilizado neste trabalho atenuem o choque, dificultando sua captação. A solução, obviamente, melhora com o refino da malha.

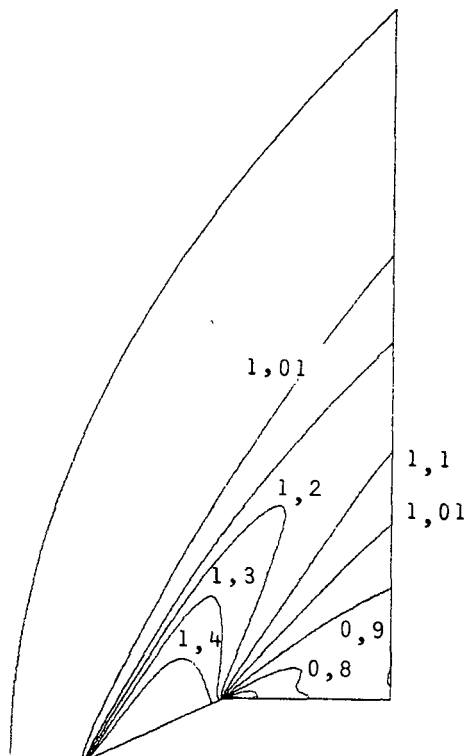


Fig. 6.20 - Linhas de massa específica constante para o cone usando variáveis co-localizadas para Mach 1.401 e malha 97x58 volumes

#### 6.4 - RESULTADOS DO ESCOAMENTO SOBRE UM PERFIL CUNHA (INLET)

O "inlet", como é conhecido na literatura internacional, constitui-se em uma cunha imersa no escoamento, que pode ser identificado, por exemplo, em uma turbina de jato ou mesmo em um tubo de pitot usado em aviação. A Fig. 6.21, mostra a geometria analisada e as condições de contorno.

As dimensões da Fig. 6.21 foram obtidas diretamente por leitura utilizando uma mesa digitalizadora através das figuras da referência [25], pois as mesmas não foram cotadas naquela referência. Para resolver este problema foram utilizadas malhas 123x51 e 123x71, sendo que a malha 123x71 é apresentada na Fig. 6.22.

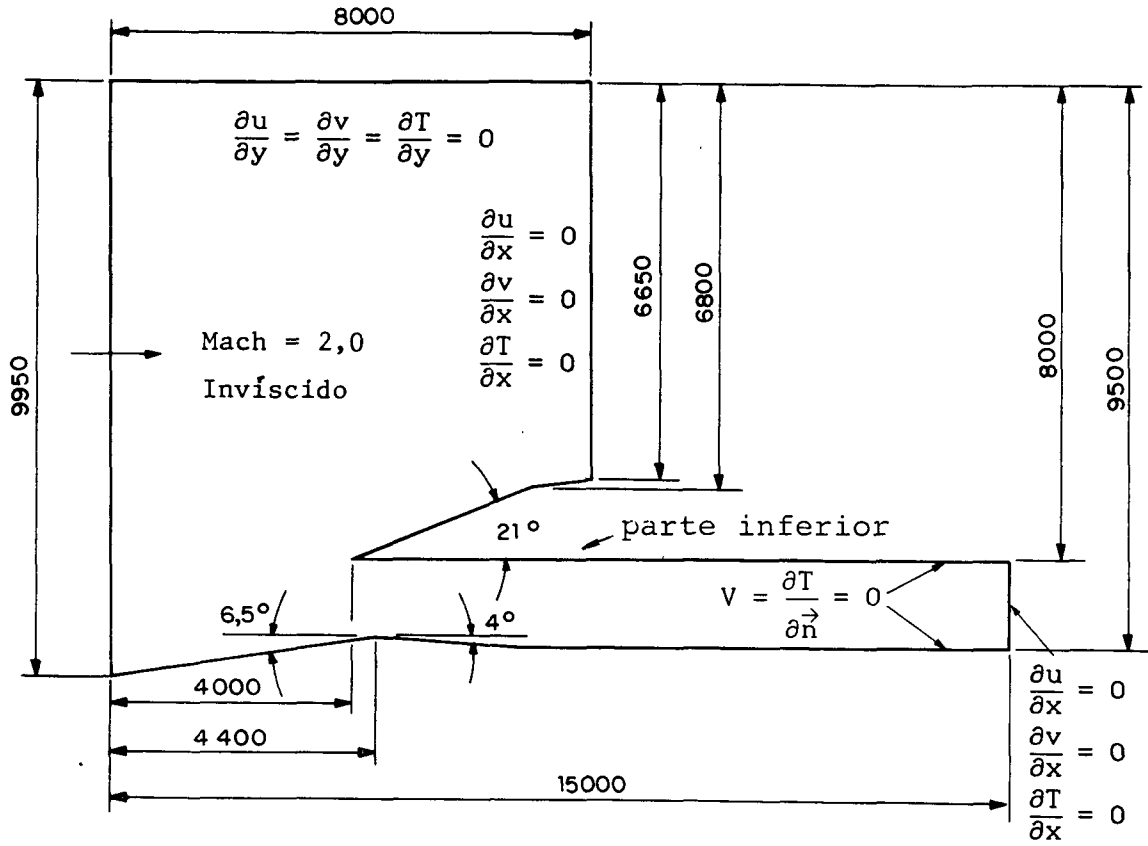


Fig. 6.21 - Geometria e condições de contorno para o problema da cunha

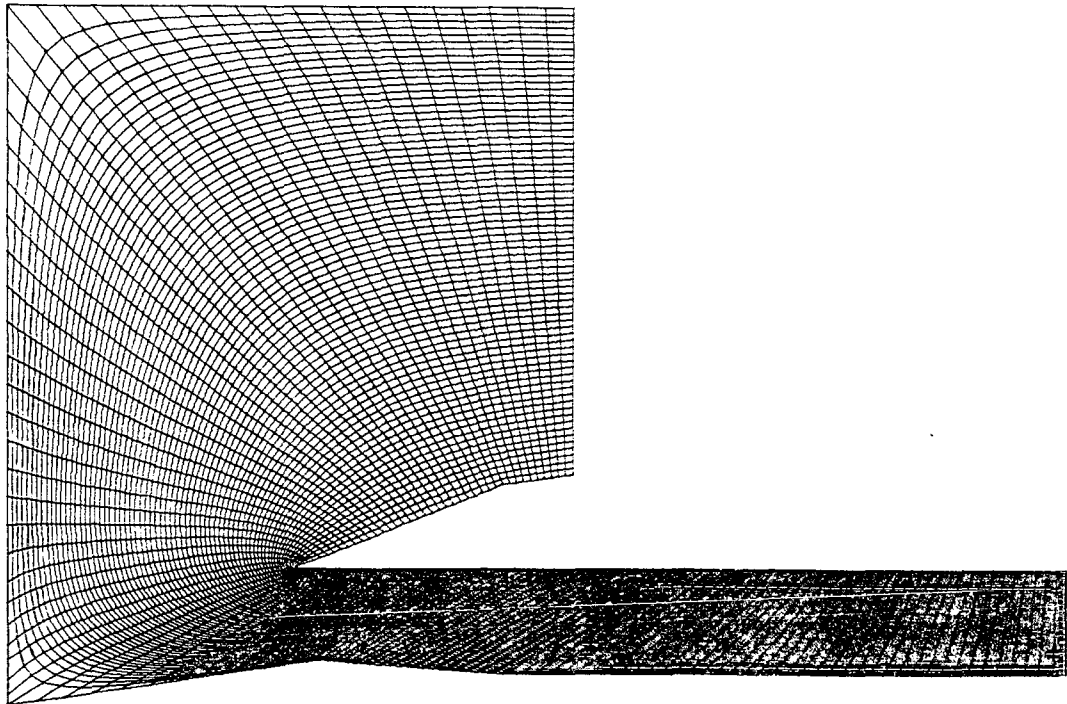


Fig. 6.22 - Malha 123x71 utilizada na solução do escoamento sobre a cunha



Os resultados obtidos quando comparados com a referência [25] mostram novamente que há dificuldade em captar a onda de choque mesmo para malha de 123x71 volumes, o que não ocorre com o uso da metodologia apresentada em [25] para malha 66x36 volumes.

Também neste caso acredita-se tratar-se de excessiva difusão numérica introduzida. Estudos que quantificam a difusão numérica introduzida pela aproximação WUDS podem ser vistos em [28].

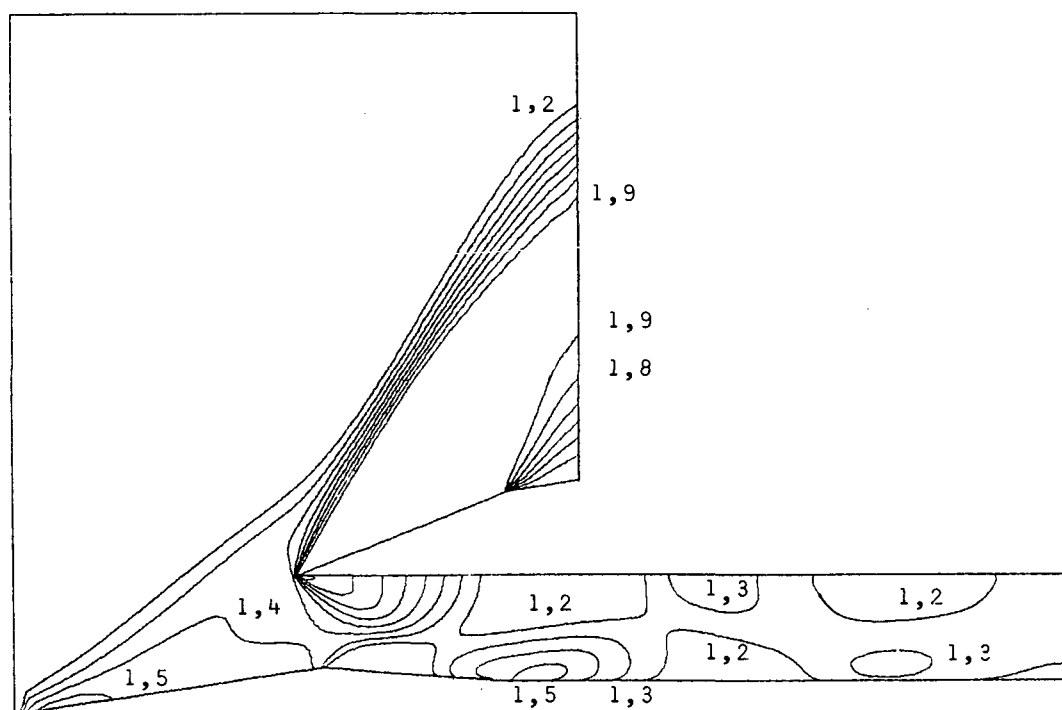


Fig. 6.23 - Linhas de massa específica constante para o problema da cunha usando variáveis co-localizadas para Mach 2.0 e malha 123x71 volumes

Devido a quantidade de isocurvas apresentadas em [25], as figuras não serão superpostas, além do que os seus valores não foram indicados nesta referência. Na Fig. 6.23 são apresentadas

curvas de massa específica constante para Mach da corrente livre 2.0.

Linhas de massa específica constante da referência [25] são apresentadas na Fig. 6.24

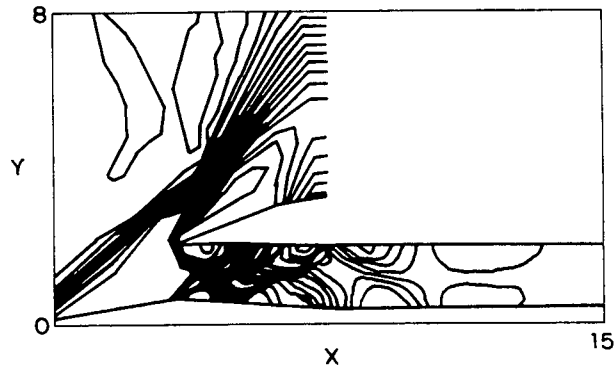


Fig. 6.24 - Linhas de massa específica constante para o problema da cunha para Mach 2.0 da referência [25]

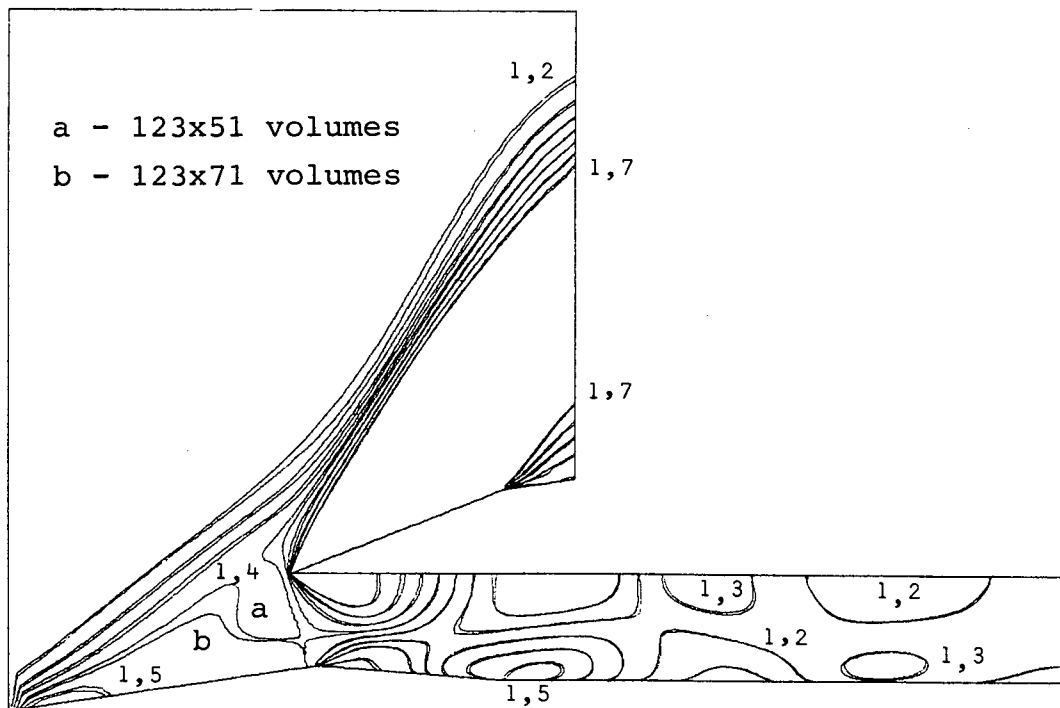


Fig. 6.25 - Linhas de massa específica constante para o problema da cunha usando variáveis co-localizadas para Mach 2.0 para malhas 123x51 e 123x71 volumes

Na Fig. 6.25 são apresentadas as curvas de massa específica constante para malhas 123x51 e 123x71 volumes com a finalidade de mostrar o comportamento da solução com o refinamento da malha.

A Fig. 6.26 apresenta curvas de Mach constante para malha 123x71 volumes submetido a Mach da corrente livre 2.0

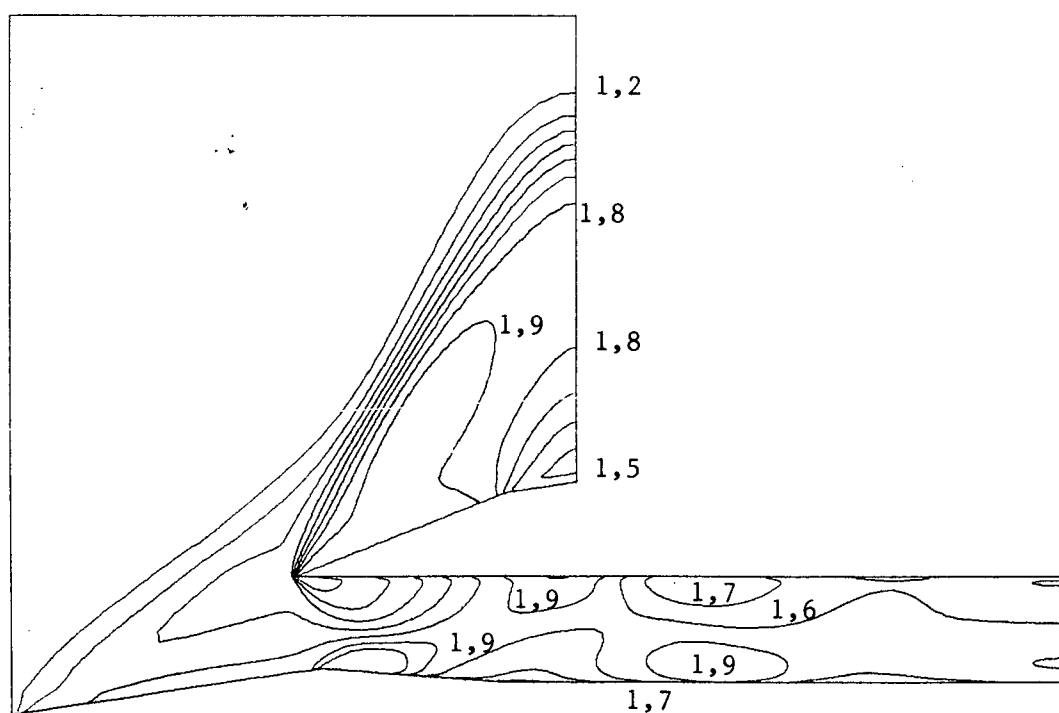


Fig. 6.26 - Linhas de Mach constante do problema da cunha usando variáveis co-localizadas para Mach 2.0 para malha 123x71 volumes

Curva de pressão sobre a superfície interna da cunha é apresentada na Fig. 6.27, onde verifica-se dificuldade em captar a onda de choque.

Apesar da dificuldade de captar a onda de choque, verifica-se bom comportamento da solução.

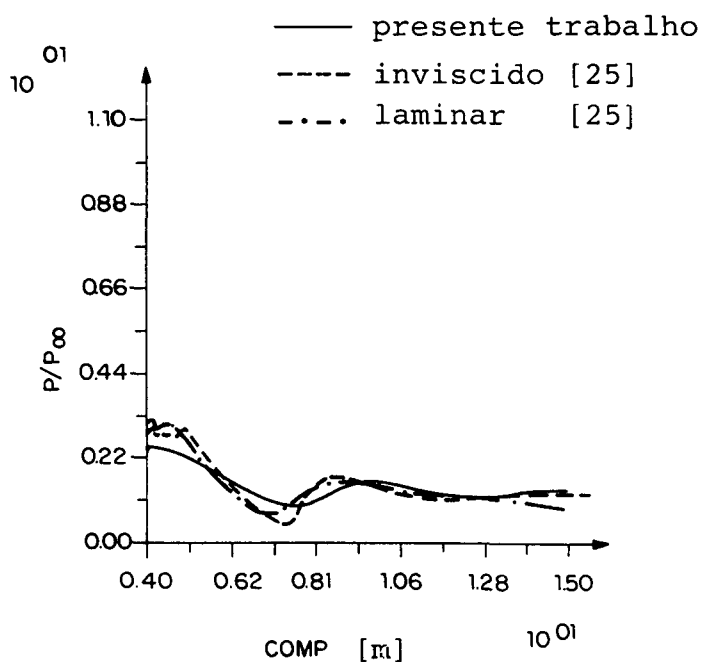


Fig. 6.27 - Curvas de pressão constante para a parte inferior da cunha para malha 123x71 e da referência [25] para Mach igual a 2.0

Curvas de Mach constante também são apresentadas para o caso do deslocamento da cunha de 0.75 m na vertical em relação a posição original, na qual pode ser verificado similaridade de escoamento em relação a posição inicial, conforme Fig. 6.28.

Resultados obtidos mostram que a solução converge apresentando perfis conforme os apresentados que, quando comparados com os de referência [25], demonstram boa concordância. Como não existem resultados experimentais para este problema, a solução foi corroborada apenas com os resultados numéricos. Curvas de pressão demonstram dificuldade de captação da onda de choque o que exigiria refinamento da malha com esta finalidade. Como o choque é rebatido torna-se difícil o refinamento parcial da malha sendo exigido uma malha geral bem mais fina, elevando o tempo de computação. Neste caso é que se

faz sentir a importância do uso de malhas adaptativas, pois o programa por si só tenderia a concentrar a malha nas regiões mais críticas, embora um programa com toda esta versatilidade exige grandes quantidades de memória e elevados tempos de computação.

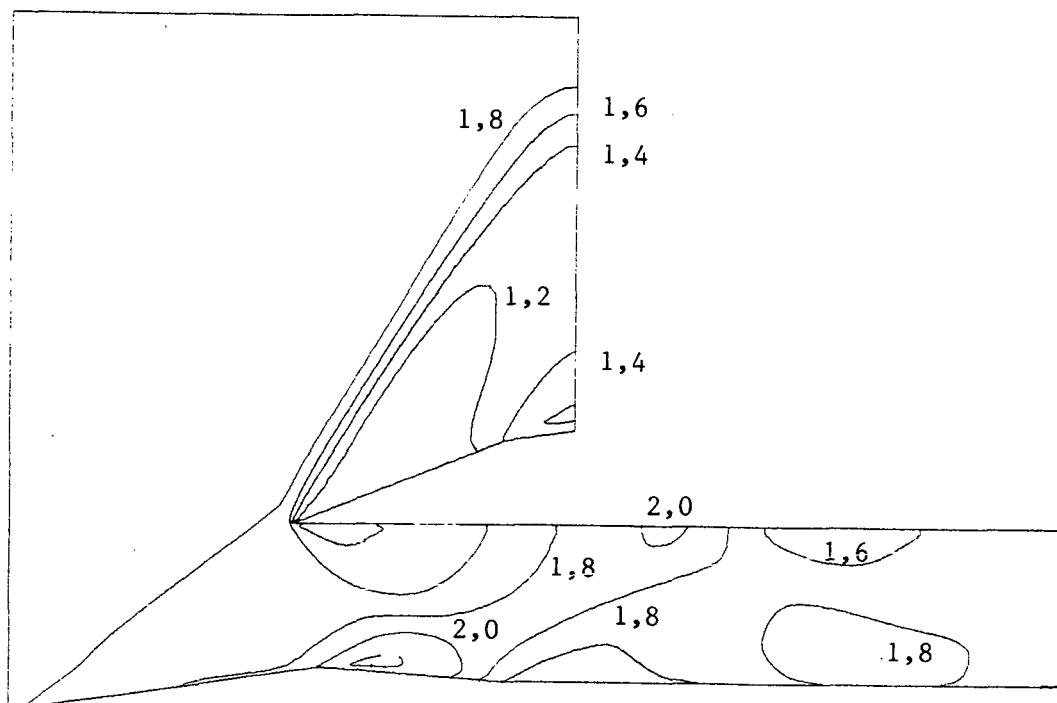


Fig. 6.28 - Linhas de Mach constante usando variáveis colocadas para Mach 2.0 para malha 123x71 volumes do problema da cunha deslocada 0.75m

A Fig. 6.29 apresenta foto para campo de Mach constante obtida da tela de uma estação de trabalho, InterPro 240. Para obtenção desta foto foram utilizadas 17 cores do espectro. Ela

mostra os campos para escoamento invíscido, onde a cunha encontra-se deslocada conforme Fig. 6.28.

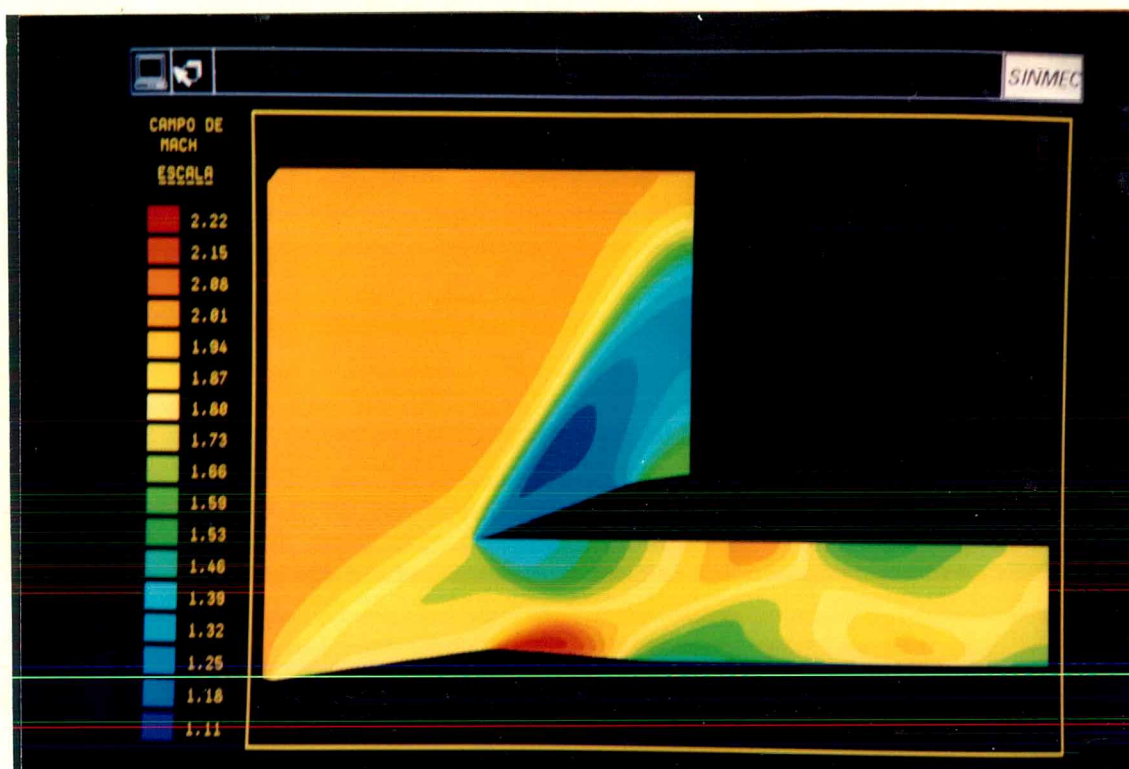


Fig. 6.29 - Foto dos campos de Mach constante obtida da tela de uma InterPro 240 para o problema da cunha.

## 6.5 - RESULTADOS OBTIDOS DO ESCOAMENTO SOBRE UM BOOSTER

O VLS (Veículo Lançador de Satélites) brasileiro é formado por um corpo central e quatro "boosters" laterais responsáveis pelo primeiro estágio do foguete, conforme Fig. 6.30. O conhecimento das características do escoamento junto aos "boosters" é essencial para o projeto, uma vez que nesta região existe a formação de um choque destacado, que sofrerá reflexões contra a parte central do VLS, e o escoamento entre o espaço formado pelos boosters e o corpo central que poderá, inclusive, se tornar subsônico. Logicamente, este escoamento é tridimensional.

Neste trabalho, com o objetivo de verificar o comportamento da metodologia perante uma onda de choque refletida, esta situação tridimensional é aproximada para uma situação bi-dimensional. Para este fim, o "booster" é considerado um anel ao redor do corpo central. A geometria e as condições de contorno são mostradas na Fig. 6.31.

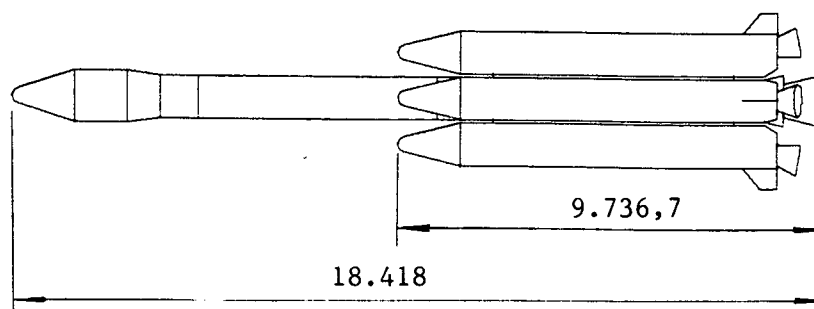


Fig. 6.30. - Geometria para o problema real do VLS

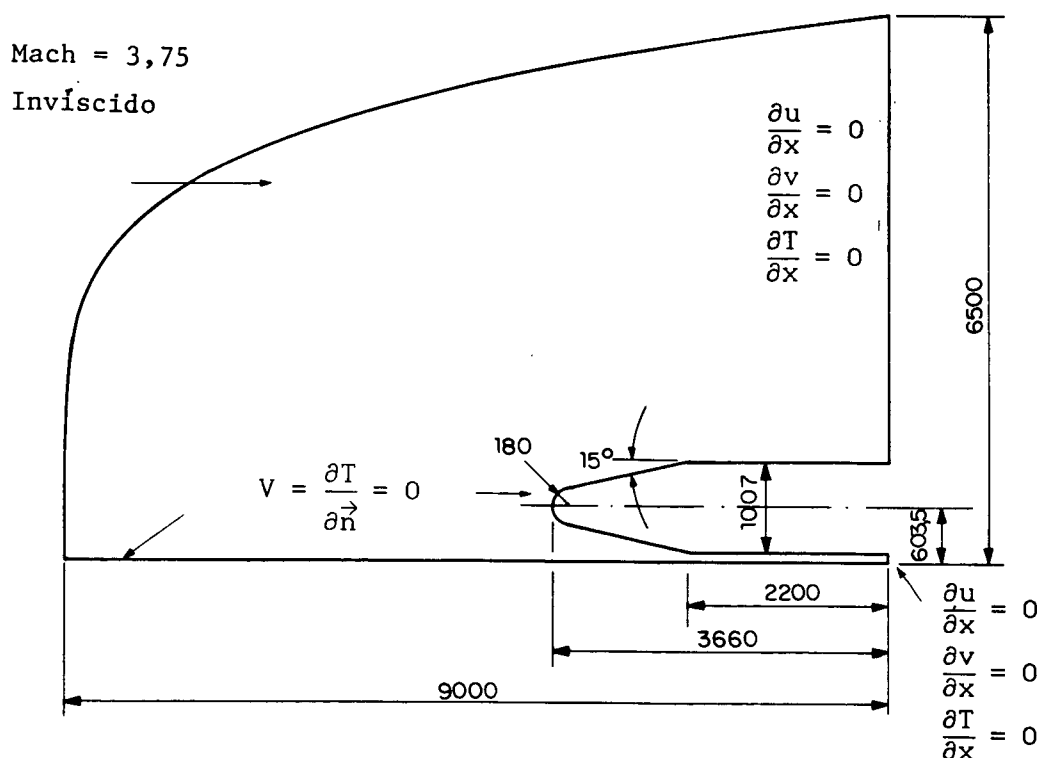


Fig. 6.31 - Geometria e condições de contorno para o problema do booster (axissimétrico)

As condições iniciais são de velocidades iguais as da corrente livre, embora só se esteja interessado na solução de regime permanente. Estas condições iniciais não devem influenciar na solução final do problema.

Existe grande dificuldade na escolha da malha para o problema do booster, pois deve-se ter várias malhas num espaço muito pequeno que é a região entre o corpo central e o booster. Esta região possui dimensão equivalente a dez por cento do diâmetro do corpo central. A colocação de muitas linhas na direção do eixo implica na colocação de muitas linhas na direção oposta, isto porque é recomendado não ter volumes com relação de dimensão entre os seus lados muito grandes. Se as relações forem grandes, podem ocorrer problemas de anisotropia dos coeficientes.



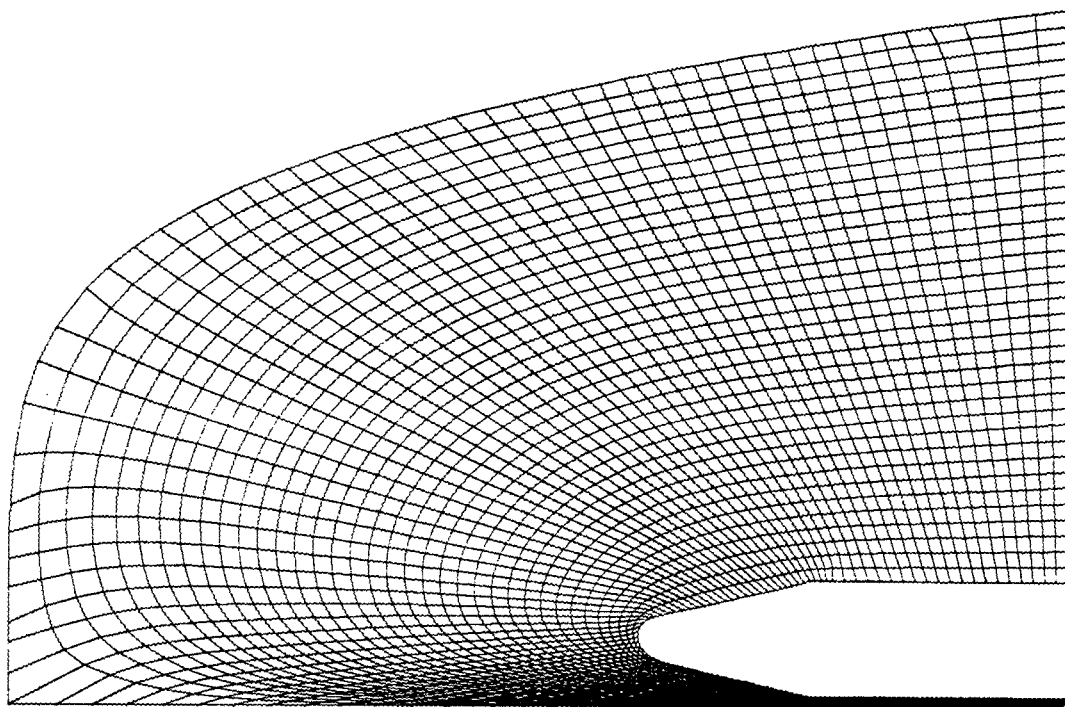


Fig. 6.32 - Malha 139x38 volumes utilizada para resolver o problema do booster

Diante destas considerações, as malhas utilizadas são de 139x26, 139x32 e 139x38, conforme Fig. 6.32.

e - malha 139x32

i - malha 139x38

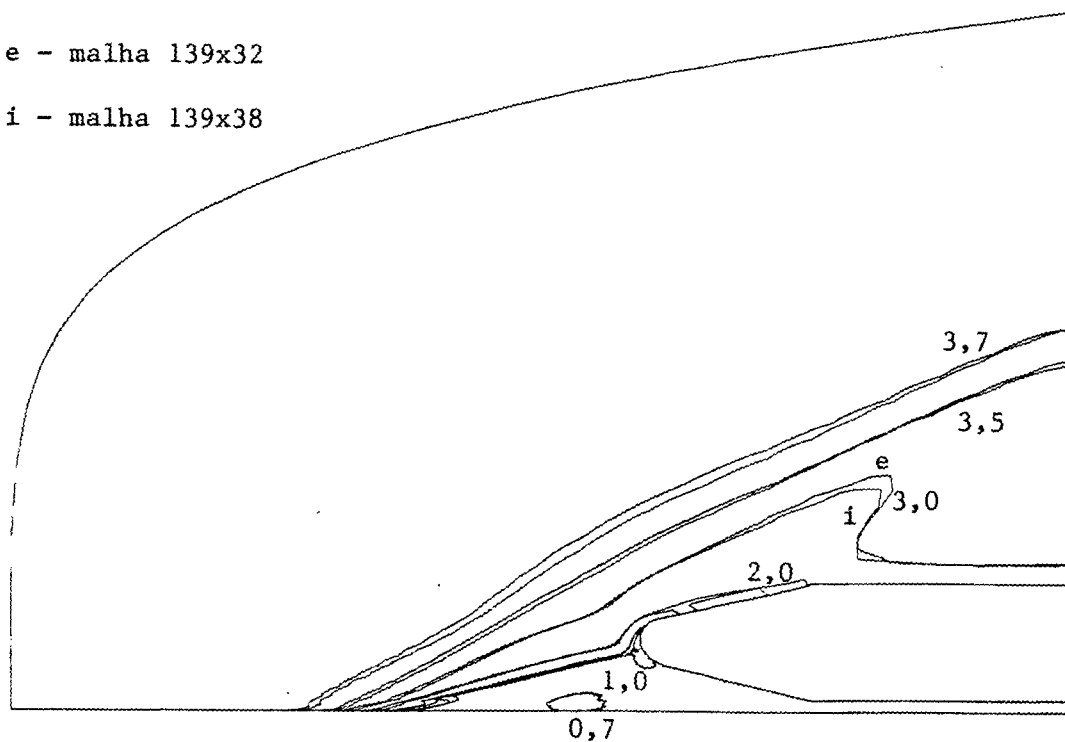


Fig. 6.33 - Linhas de Mach constante para malhas 139x32 e 139x38 para Mach 3.75 usando variáveis co-localizadas para o booster

A Fig. 6.33 apresenta curvas de Mach constante para malhas 139x32 e 139x38 respectivamente, para Mach da corrente livre 3.75.

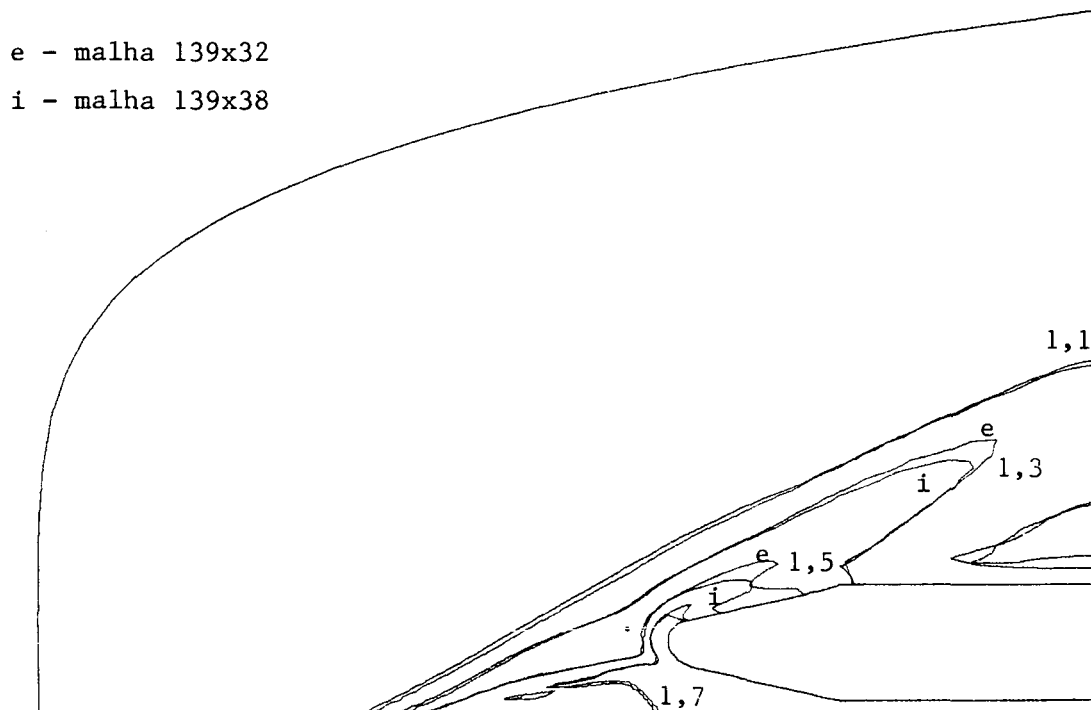


Fig. 6.34 - Linhas de temperatura constante para malhas 139x32 e 139x38 para Mach 3.75 para o problema do booster

Os resultados obtidos foram comparados apenas através do refinamento da malha pois, logicamente, não existe este problema resolvido na literatura e por não existirem resultados experimentais envolvendo a geometria em estudo.

Nas Fig. 6.34 e 6.35 são apresentadas curvas de temperatura e massa específica constantes para malhas 139x32 e 139x38 para Mach 3.75.

O comportamento de  $C_p^*$  sobre a superfície do booster é apresentada na Fig. 6.36.

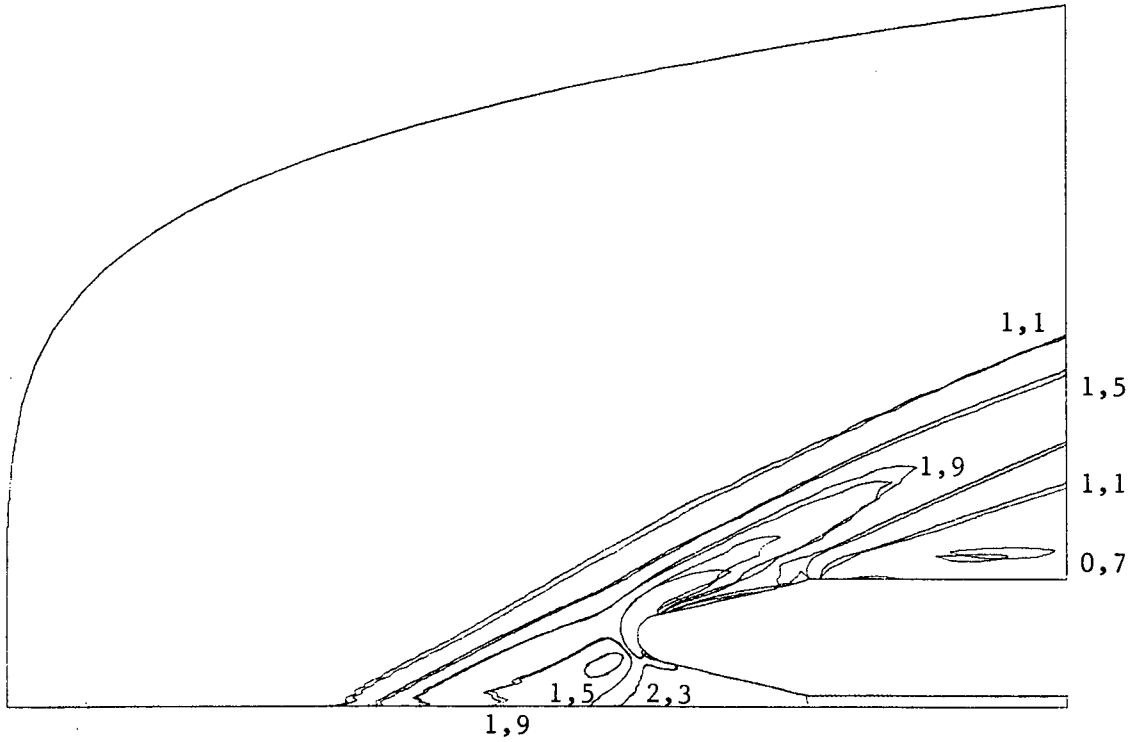


Fig. 6.35 - Linhas de massa específica constante para malhas 139x32 e 139x38 para Mach 3.75

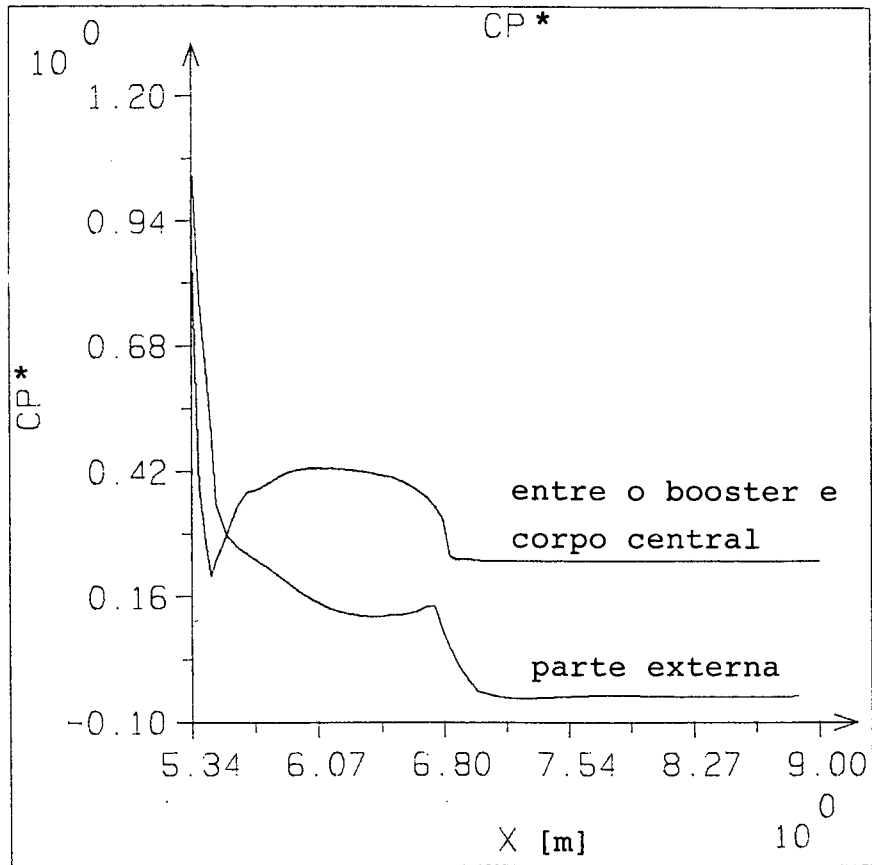


Fig. 6.36 - Curva de  $C_p^*$  sobre a superfície do booster para Mach 3.75

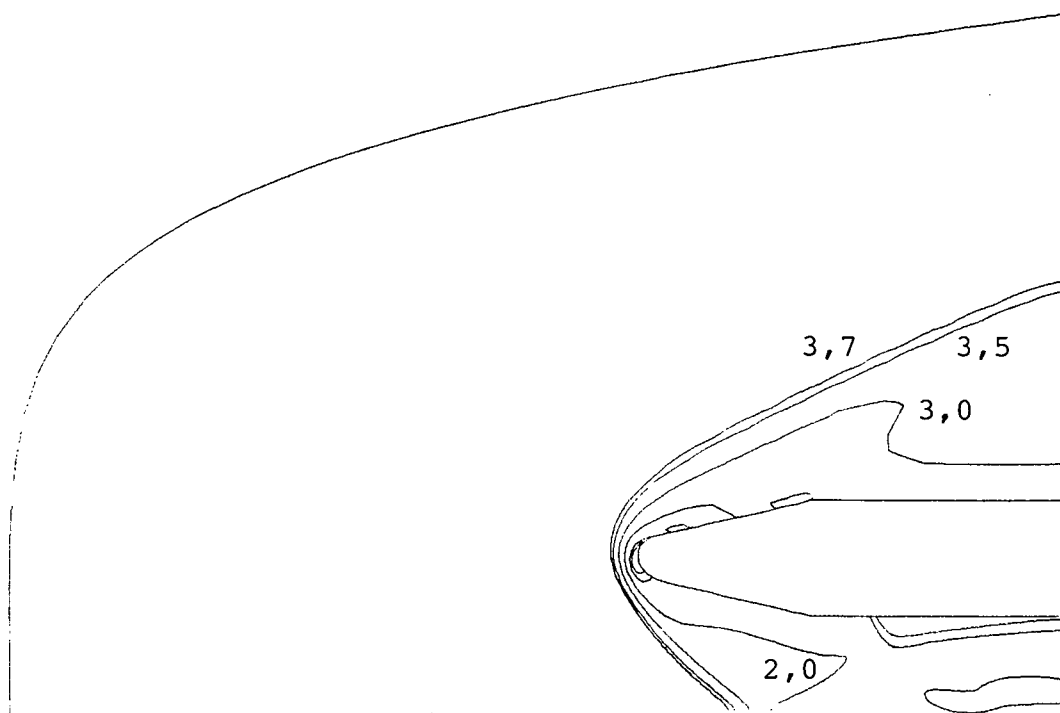


Fig. 6.37 - Linhas de Mach constante para malhas 139x32 para Mach 3.75 e deslocamento 0.75 m usando variáveis colocalizadas para o problema do booster

Para verificar o comportamento da solução com o afastamento do booster em relação ao corpo central, curvas de Mach constante são apresentadas na Fig. 6.37 para o caso de deslocamento do booster de 0.75 m em relação à posição inicial. Como pode ser observado, a onda de choque é melhor visualizada neste caso.

Para tornar abrangente o comportamento da solução, curvas de Mach constante são apresentadas para Mach da corrente livre 2.0, 2.5 e 3.0 nas Fig. 6.38 a 6.40 respectivamente. Pode ser observado que o comportamento da solução é o mesmo para os diversos valores de Mach.

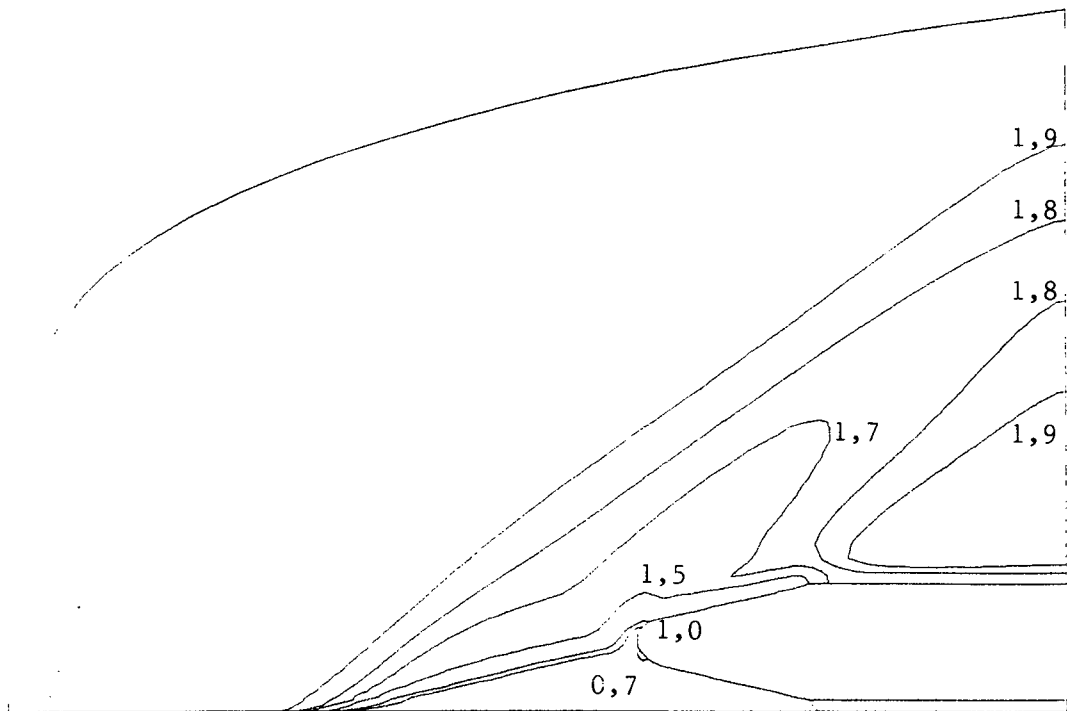


Fig. 6.38 - Linhas de Mach constante para Mach da corrente livre 2.0 e malha 139x32 volumes para o booster

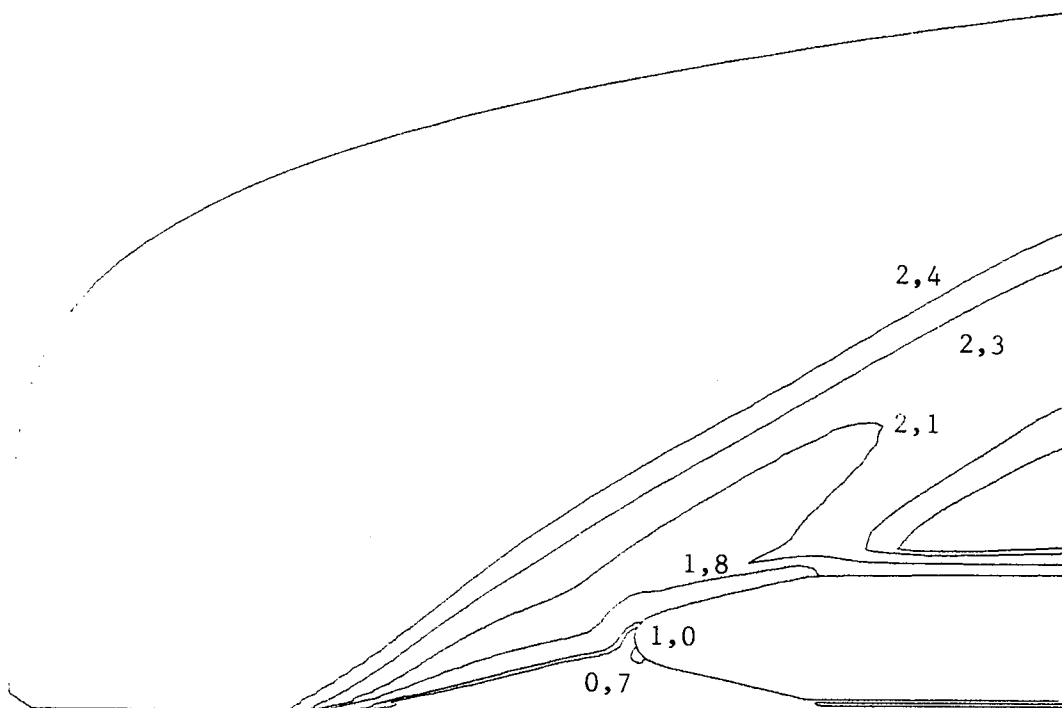


Fig. 6.39 - Linhas de Mach constante para Mach da corrente livre 2.5 e malha 139x32 volumes para o booster

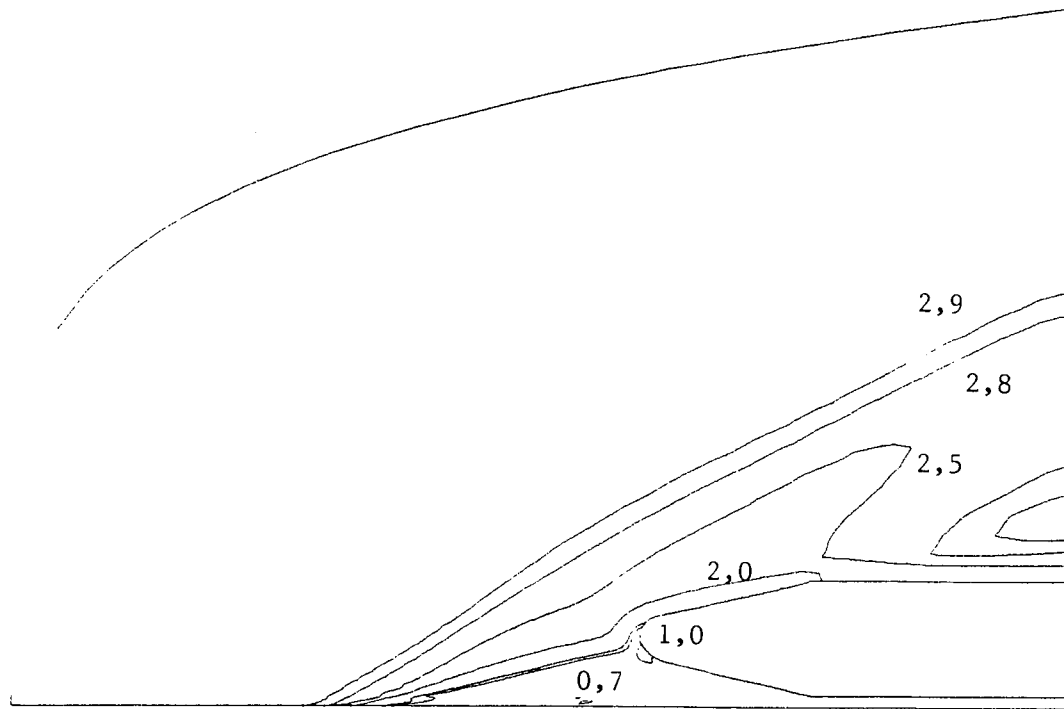


Fig. 6.40 - Linhas de Mach constante para Mach da corrente livre 3.0 e malha 139x32 volumes para o booster

Os resultados obtidos mostram que a influência do booster se manifesta mais a montante quando comparado com a situação onde não existe a presença do corpo central, pois aparece uma região de altas pressões, forçando o escoamento ser subsônico entre o booster e o corpo central. Conforme aumenta o Mach, maior torna-se a pressão entre o booster e o corpo central de forma que a densidade e a temperatura também subam, mostrando que o escoamento ainda permanece subsônico para Mach da corrente livre até 3.75. Afastando-se o booster do corpo central, verifica-se que para distâncias menores ou iguais a 50 cm o comportamento do escoamento permanece o mesmo, enquanto que para distância de 75 cm em relação a posição inicial praticamente desaparece o efeito do corpo central e as características do escoamento são semelhantes àquelas da parte frontal do VLS, como era esperado.

A Fig. 6.41 apresenta foto obtida da tela de uma estação de trabalho, InterPro 240. Ela mostra os campos de Mach para o problema do booster deslocado 75 cm em relação à posição inicial.

Fica definida uma região onde o escoamento não sofre a influência do booster, representado pela cor vermelha, e uma região de baixas velocidades na vizinhança do ponto de estagnação, dado pela cor azul, na parte frontal do booster.

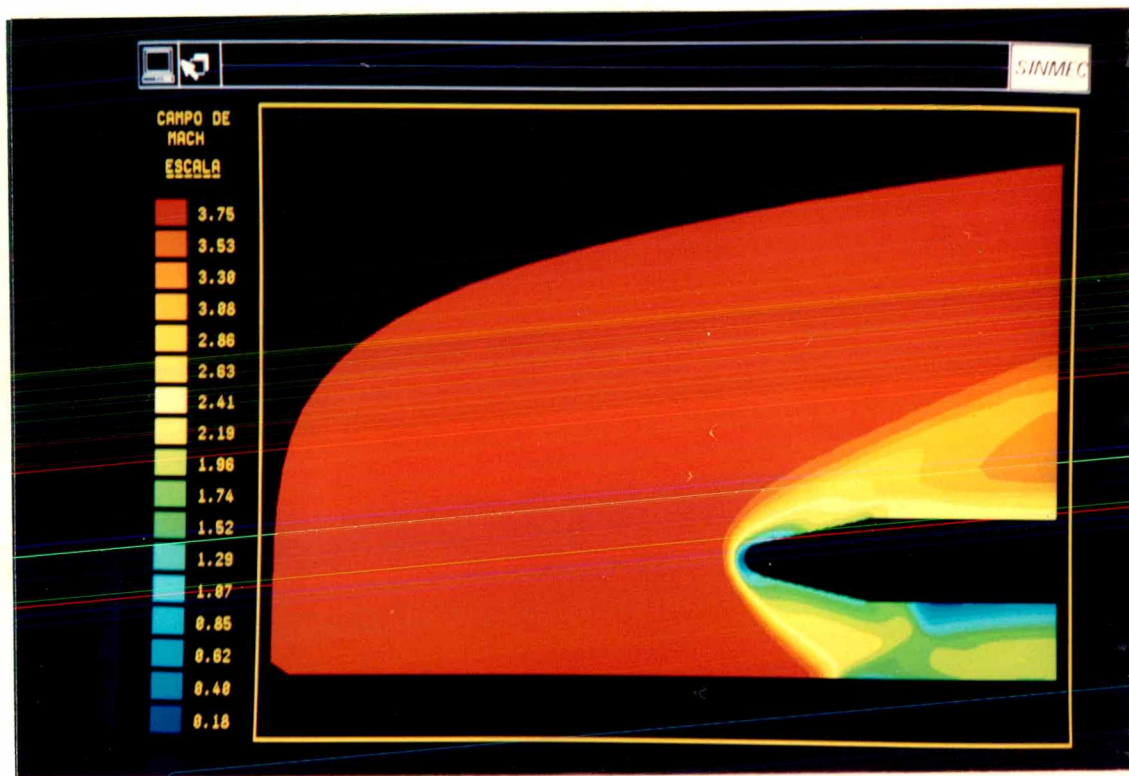


Fig. 6.41 - Foto dos campos de Mach obtidos da tela de uma InterPro 240 para o problema do booster.

## 6.6 - RESUMO E CONCLUSÕES

Resultados obtidos em coordenadas generalizadas demonstram que o uso da disposição co-localizada das variáveis proporciona economia de tempo computacional e de armazenamento de variáveis quando comparado com a disposição desencontrada, para os casos estudados.

Curvas de desempenho, conforme Fig. 6.14, demonstram

que a faixa de tempo adimensional utilizada é bem mais ampla que a faixa para o uso de variáveis desencontradas, para os problemas testados, proporcionando economia de tempo computacional.

Os resultados da massa específica, conforme Fig. 6.24 da referência [25], demonstram certa inconsistência, uma vez que na região onde obteve-se corrente livre aparecem duas isocurvas, mostrando que ou a escolha do domínio de cálculo utilizado é inadequado ou os resultados não estão bem convergidos, embora seja melhor captada a onda de choque. O comportamento obtido através da metodologia empregada neste trabalho parece ser mais coerente.

De forma geral, os resultados obtidos mostram que a solução obtida através do uso de variáveis co-localizadas apresenta bom comportamento quando comparado com resultados experimentais e numéricos.



## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

#### 7.1 - CONCLUSÕES

O objetivo principal deste trabalho foi o desenvolvimento e aplicação de uma metodologia numérica usando variáveis co-localizadas para a solução de escoamentos incompressíveis e/ou compressíveis.

Os problemas testes resolvidos mostraram que o uso de variáveis co-localizadas, além de tornarem mais simples os programas computacionais, significam grande economia de tempo de processamento, especialmente para coordenadas generalizadas, onde o armazenamento e cálculo das métricas da transformação são necessários em muitos pontos, quando se usa variáveis desencontradas. No caso do VLS aproximadamente 40% de economia no tempo de processamento foi conseguido, o que representa uma economia extraordinária. Do ponto de vista de precisão da solução, comparações com as soluções usando variáveis desencontradas foram realizadas.

Algumas dificuldades foram encontradas para a captação da onda de choque no problema do inlet. Acredita-se, entretanto, que esta dificuldade não está associada ao uso de variáveis co-localizadas, mas sim ao tipo de aproximação utilizada para os termos convectivos, que pode introduzir excessiva dissipação numérica, prejudicando a captura do choque. Seria aconselhável utilizar termos dissipativos de intensidade suficiente para estabilizar a solução e que não a prejudiquem.

Os resultados obtidos com o presente trabalho mostram que o uso de variáveis co-localizadas é compensador e seu emprego

pode ser estendido para problemas tridimensionais onde seu uso se mostrará ainda mais compensador.

O trabalho desenvolvido nesta dissertação, juntamente com os trabalhos desenvolvidos por outros pesquisadores desta instituição na área de aerodinâmica supersônica computacional, se constituem, no conhecimento do autor, primeiros na área onde o método dos volumes finitos é empregado na solução de escoamentos subsônicos e/ou supersônicos.

## **7.2 - RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS**

A sequência natural, após ter obtido bons resultados para escoamentos bi-dimensionais em coordenadas cartesianas e generalizadas, é a extensão desta metodologia para problemas tridimensionais. Este trabalho já está sendo realizado.

Para tornar o método aplicável para problemas onde existam interações com onda de choque e camada limite, deve-se introduzir um modelo de turbulência, sendo que para obtenção de bons resultados as malhas utilizadas deverão ser refinadas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - ANDERSON, D. A., TANNEHILL, J. C., PLETCHER, R. H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", McGraw-Hill Book Company, 1984.
- 2 - PATANKAR, S.V., " Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill, New York, 1980.
- 3 - HARLOW, F.H. & AMSDEN, A.A., " A Numerical Fluid Dynamics Calculation for All Flow Speeds". J. Comp. Phys., vol 8, 1971, pp 197-213.
- 4 - VAN DOORMAAL, J. P., "Numerical Methods for the Solution of Incompressible and Compressible Fluid Flows", Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1985
- 5 - SILVA, A. F. C. - "Proposta de Tese submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para Obtenção da Condição de Candidato ao Título de Doutor", Florianópolis, dezembro de 1988.
- 6 - KARKI, K. C. & PATANKAR, S. V. "Pressure Based Calculation Procedure for Viscous Flows at all Speeds in Arbitrary Configurations", AIAA Journal, vol. 27 no. 9, 1989, pp 1167 1174.
- 7 - SILVA, A. F. C. e MALISKA, C. R. " Avaliação no Limite Incompressível de uma Formulação para Qualquer Regime de Escoamento". IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, S.C., Dezembro 1987.
- 8 - MALISKA, C.R. & SILVA, A.F.C. " Desenvolvimento de Códigos Computacionais para Solução de Escoamentos a Alta Velocidade", Parte I. Relatório Técnico preparado ao IAE/CTA. Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, jun 1987, 39p.

- 9 - MALISKA, C.R. & SILVA, A.F.C. Desenvolvimento de Códigos Computacionais para Solução de Escoamentos a Alta Velocidade, Parte II. Relatório Técnico preparado ao IAE/CTA. Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, dez 1987.
- 10 - MALISKA, C.R. & SILVA, A.F.C. " Desenvolvimento de Códigos Computacionais para Solução de Escoamentos a Alta Velocidade", Parte III. Relatório Técnico preparado ao IAE/CTA. Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, set 1988.
- 11 - MALISKA, C.R. e SILVA, A.F.C. " Uma Formulação Segregada em Volumes Finitos para Escoamentos Compressíveis e/ou Incompressíveis em Coordenadas Generalizadas", ENCIT 88 - Águas de Lindóia, S.P., dezembro 1988.
- 12 - JUCÁ, P.C.S., SILVA, A.F.C. & MALISKA, C.R. "Solução Numérica de Problemas Tridimensionais Elípticos de Convecção de Calor", X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, R. De Janeiro, Dezembro 1989, p. 161-164.
- 13 - RHIE, C.M. " A Numerical Study of the Flow Past an Isolated Airfoil with Separation ". Ph.D. Thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, 1981.
- 14 - HSU, C. " A Curvilinear-Coordinate Method for Momentum, Heat and Mass Transfer in Domains of Irregular Geometry". Ph.D. Thesis, University of Minnesota, 1981.
- 15 - PERIC, M. KESSLER, R. & SCHEUERER, G. " Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids". Submitted to Computer and Fluids, 1987, 56 p.
- 16 - MARCHI C.H., DE BORTOLI A.L. & MALISKA C.R. , " The Use of Colocated Variables in the Solution of Supersonic Flows". Tenth Brazilian Congress of Mechanical Engineering, December 1989

- 17 - MALISKA, C.R. " A solution Method for Three Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates", Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1981.
- 18 - HARLOW, F.H. and WELCH, J.E. "Numerical Computation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, Physics of Fluids, Vol.8, 1965, pp 2182-2189
- 19 - RAITHBY, G.D. and TORRANCE, K. E., " Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", Computer and Fluids, Vol. 2 1974, pp 191-206.
- 20 - VAN DOORMAAL, J.P. & RAITHBY, G.D. " Enhancements of the SIMPLE Method for Calculation of Flow with Nonstaggered Grids". Numerical Heat Transfer, vol. 13, 1988, p.125-32
- 21 - SCHNEIDER, G. E. and ZEDAN, " A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems", Numerical Heat Transfer, Vol. 4, 1981, pp 1-19
- 22 - BEJAN, A. " Convective Heat Transfer ", John Wiley & Sons, Inc, U.S.A., 1984.
- 23 - PEYRET, R. & TAYLOR, T. D. - "Computational Methods for Fluid Flow", Springer-Verlag, New York, 1985
- 24 - LIEPMANN, H.W. & ROSHKO, A. "Elements of Gasdynamics", New York, 6 edition, John Wiley & Sons 439, 1965, p. 39p.
- 25 - CHAUSSE D.S. & PULLIAM T. H. , " Two-Dimensional Inlet Simulation Using a Diagonal Implicit Algorithm, AIAA journal, Vol. 19 n 2, Fevereiro 1981
- 26 - MALISKA, C.R. & RAITHBY, G.D. " A Method for Computing Tree-Dimensional Flows Using Non-orthogonal Boundary Fitted Coordinates, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, 4 1984, pp. 519-537.

- 27 - DE SOUZA, M.A.G.U.S. "Método de Volumes Finitos Utilizando Variáveis Co-localizadas para Solução Numérica de Problemas de Calor e Mecânica dos Fluidos em Geometrias Arbitrárias", Proposta de Tese Submetida a U.F.S.C. para obtenção do título de Doutor, Florianópolis, outubro de 1989.
- 28 - SILVA, A.F.C. & MALISKA, C.R., "On The Introduction of Artificial Dissipation in Numerical Methods for Fluid Flow Problems", Trabalho submetido para publicação no III ENCIT 90 Florianópolis, Jun. 90.