

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ABORDAGEM DIRETA DOS MODELOS DE PLACA DE REISSNER E MINDLIN  
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

TANCREDO WESTPHAL JUNIOR

FLORIANÓPOLIS, OUTUBRO DE 1990

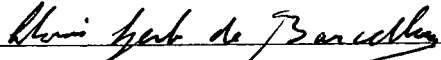
ABORDAGEM DIRETA DOS MODELOS DE PLACA DE REISSNER E MINDLIN  
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

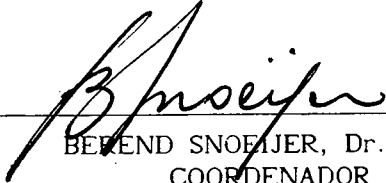
TANCREDO WESTPHAL JUNIOR

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO, APROVADA EM  
SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.

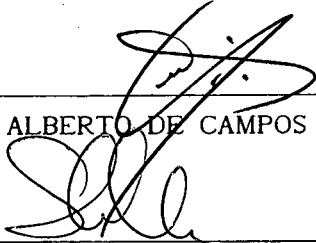
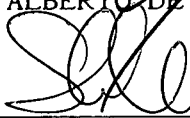
  
CLOVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph. D.  
ORIENTADOR

  
BEREND SNOEIJER, Dr.-Ing.  
COORDENADOR

BANCA EXAMINADORA:

  
CLOVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph. D.  
PRESIDENTE

  
LUIZ HENRY MONKEN E SILVA, D. Eng.

  
CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE, Ph. D.  
  
SÉRGIO COLLE, D. Sc.

À minha mãe Eloá e minhas irmãs  
Claudete, Margarét e Elizabete

À memória de Tancredo  
Roberto, Jeanete e Rosinete

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Clovis Sperb de Barcellos

pela orientação, incentivo e sugestões imprescindíveis;

Ao Luiz Henry

pelas valiosas informações;

Ao amigo Jun Sérgio Ono Fonseca

pelo apoio logístico e espírito desbravador, que paralelamente ao Wronski forneceu o suporte computacional;

Um agradecimento especial aos colegas

Bosco

Paulo Resin

André Ogliari

Jun;

Ao amigo Valdir Volpato

particularmente pelos percursos Braço do Norte - Florianópolis;

Ao CNPq e à CAPES

pelo apoio financeiro;

Aos colegas, especialmente aos da sala 5 e à "turma do mar de lama"

pela amizade sempre.

## SUMÁRIO

### CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1 - Introdução	1
1.2 - Revisão Bibliográfica	3

### CAPÍTULO 2 - MODELO DE REISSNER PARA DEFLEXÃO DE PLACAS

2.1 - Introdução	6
2.2 - Fundamentos	6
2.3 - Equações de Equilíbrio	7
2.4 - Campo de Tensões	8
2.5 - Deslocamentos Generalizados	9
2.6 - Campo de Deformações Generalizadas	9
2.7 - Relações Tensão-Deslocamento	10
2.8 - Condições de Contorno	11
2.9 - Equações de Reissner	11
2.10 - A Solução Fundamental e as Equações de Reissner	12
2.11 - Unificação dos Modelos de Placa de Reissner e Mindlin	14
2.12 - Conclusão	15

### CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO INTEGRAL DOS MODELOS DE REISSNER E MINDLIN PARA DEFLEXÃO DE PLACAS

3.1 - Introdução	16
3.2 - Solução Fundamental	16
3.3 - Deslocamentos e Trações sobre o Contorno	20
3.3.1 - Tensor Deslocamento Fundamental $U_{ij}$	21
3.3.2 - Tensor Tensão Fundamental $T_{ij}$	23
3.4 - Deslocamentos e Esforços no Domínio	26
3.4.1 - Deslocamentos	26
3.4.2 - Esforços	26
3.5 - Conclusão	33

## CAPÍTULO 4 - O MÉTODO DIRETO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO AOS MODELOS DE PLACA DE REISSNER E MINDLIN

4.1 - Introdução	34
4.2 - O Método dos Elementos de Contorno	34
4.3 - Processo de Discretização	35
4.4 - Discretização para Pontos sobre o Contorno	38
4.5 - Discretização para Pontos do Domínio	43
4.5.1 - Deslocamentos	43
4.5.2 - Esforços	44
4.6 - Processo de Integração	44
4.6.1 - Integrais Regulares	44
4.6.2 - Integrais Singulares	45
4.7 - Solução do Sistema de Equações	48
4.8 - Cálculo das Variáveis em Pontos Internos	48

## CAPÍTULO 5 - APLICAÇÕES NUMÉRICAS

5.1 - Introdução	49
5.2 - Placas Circulares	49
5.2.1 - Placa Circular Engastada com Carga Uniformemente Distribuída	49
5.2.2 - Placa Circular Simplesmente Apoiada com Carga Uniformemente Distribuída	52
5.2.3 - Placa Circular Engastada com Carga Concentrada no Centro	57
5.2.4 - Placa Circular sob Flexão Axissimétrica	58
5.3 - Placas Retangulares	58

## CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1 - Introdução	59
6.2 - Conclusões	59
6.3 - Sugestões	60

## APÊNDICES

A - MODELO DE MINDLIN PARA DEFLEXÃO DE PLACAS	61
B - OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS PELO MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS	65

C - ADEQUAÇÃO DAS EQUAÇÕES AO MODELO DE PLACA DE MINDLIN	74
D - ALGUMAS EQUAÇÕES NECESSÁRIAS PARA A OBTENÇÃO DOS TENSORES FUNDAMENTAIS	76
E - DETERMINAÇÃO DOS FATORES GEOMÉTRICOS $C_{ij}$	80
F - TRANSFORMAÇÃO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO EM INTEGRAIS SOBRE O CONTORNO	82
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	87

## SIMBOLOGIA

$I, J$	→ Índices que variam de 1 a 3 vezes o número de nós de um elemento (de contorno ou domínio)
$i, j, k, a, b$	→ Índices que variam de 1 a 3
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$	→ Índices que variam de 1 a 2
$\omega$	→ Índice que varia de 1 a 2 e não implica somatório quando repetido
$(.)^*$	→ variável $(.)$ qualquer do estado correspondente à solução fundamental
$a$	→ raio de uma placa circular [m]
$A = K_0 + \frac{2}{Z} \left[ K_1 - \frac{1}{Z} \right]$	
$AI = I_0 + \frac{2}{Z} \left[ -I_1 - \frac{1}{Z} \right]$	
$A$ $\approx$	→ matriz "de rigidez"
$b$ $\approx$	→ matriz resultante da integral de $U$ e $\bar{U}$ sobre os elementos de domínio
$B = K_0 + \frac{1}{Z} \left[ K_1 - \frac{1}{Z} \right]$	
$BI = I_0 + \frac{1}{Z} \left[ -I_1 - \frac{1}{Z} \right]$	
$CC = C_2(1-\nu) + 4C_4(1+\nu) - 2C_1 - 2C_5$	
$C_{1J}(P)$	→ matriz geométrica em P
$C_{\alpha\beta}$	→ componentes do tensor das constantes elásticas
$C_1, \dots, C_6$	→ constantes da solução fundamental $G(Q,P)$



$d$	→ deslocamentos de corpo rígido
$\approx$	
$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	→ rigidez à flexão [N/m]
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$	→ espaço das distribuições em $\mathbb{R}^2$
$e_1$	→ vetores unitários na direção $x_1$
$E$	→ módulo de elasticidade [N/m <sup>2</sup> ]
$f_1^*$	→ variações de $F_1^*$ ao longo de $x_3$
$F_1^*$	→ cargas concentradas unitárias
$F_1(\partial_Q)$	→ operador diferencial em relação às coordenadas do ponto Q
$F_3$ e $F_6$	→ constantes envolvidas na solução fundamental
$F$	→ vetor "de carga"
$\sim$	
$g$	→ matriz resultante da integral de $U_{ij}$ sobre os elementos de contorno
$\approx$	
$G$	→ matrizes $g$ sobrepostas
$\approx$	
$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$	→ módulo de elasticidade transversal [N/m <sup>2</sup> ]
$G(Q,P)$	→ solução fundamental
$ G_n $	→ jacobiano de um elemento de contorno
$ G_r $	→ jacobiano de um "elemento" de domínio
$h$	→ espessura da placa [m]
$h_{ij}$	→ matriz $\hat{h}$ correspondente ao ponto singular, acrescida da respectiva matriz $C_{ij}$
$\hat{h}$	→ matriz resultante da integral de $T_{ij}$ sobre os elementos de contorno
$\approx$	
$H$	→ matrizes $\hat{h}$ e $h_{ij}$ sobrepostas
$\approx$	
$I$	→ matriz identidade
$\approx$	

$$\bar{I} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$I_0, I_1$  → funções modificadas de Bessel de primeira espécie de ordem zero e um

$k^2$  → fator de correção da tensão cisalhante

$K_0, K_1$  → funções modificadas de Bessel de segunda espécie de ordem zero e um

$l$  → comprimento de um elemento de contorno [m]

$L_{ij}(\partial_Q)$  → operador diferencial em relação às coordenadas do ponto Q

$|L_{ij}(\partial_Q)|$  → determinante de  $L_{ij}(\partial_Q)$

$L_{ij}^{co}(\partial_Q)$  → cofator de  $L_{ij}(\partial_Q)$

$M_{\alpha\beta}$  → momentos fletores e torçores por unidade de comprimento [N.m/m]

$MF = \begin{cases} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}, & \text{Reissner} \\ 0, & \text{Mindlin} \end{cases}$  → "fator de modelo"

$nd$  → número de pontos nodais no domínio

$n_\alpha$  → cossenos diretores da normal exterior em relação aos eixos  $x_\alpha$

$N$  → número de elementos de contorno

$p$  → ponto P sobre  $\Gamma$

$P \equiv (\xi_1, \xi_2)$  → ponto fonte em  $\Omega$

$q$  → ponto Q sobre  $\Gamma$

$q(x_\alpha)$  → carregamento transversal externo [N/m<sup>2</sup>]

$q_1^j$  → força externa aplicada no nó j na direção i

$Q \equiv (x_1, x_2)$  → ponto campo em  $\Omega$

$Q_\alpha$  → esforços cortantes por unidade de comprimento [N/m]

$Q$  → forças nodais no domínio

~

$r = \|Q-P\|$  → distância de Q a P

$r_{\alpha} = x_{\alpha}(Q) - x_{\alpha}(P)$	
$r_{,\alpha}$	→ derivada de $r$ em relação à coordenada $x_{\alpha}$
$r_{,n} = r_{,\alpha} n_{\alpha}$	→ derivada normal
$R$	→ número de "elementos" de domínio
$R_{ij}$	→ matriz de transformação do sistema global para o local
$s$	→ número de pontos nodais sobre o contorno
$t_i$	→ forças de superfície generalizadas [N.m/m]
$\bar{t}_i$	→ forças de superfície generalizadas prescritas
$t_i^j$	→ forças de superfície nodais
$t'^j$	→ esforços de placa sobre um elemento de contorno
$T$	→ esforços nodais de placa sobre o contorno
$\sim$	
$T_{ij}$	→ campo de esforços da solução fundamental
$T_{\alpha ij}$	→ tensor definido no cálculo dos esforços em pontos internos
$u_i$	→ deslocamentos generalizados
	$u_{\alpha} \rightarrow$ rotações [rad]
	$u_3 \rightarrow$ deflexão [m]
$\bar{u}_i$	→ deslocamentos generalizados prescritos
$u_i^j$	→ deslocamentos nodais
$u'^j$	→ deslocamentos de placa sobre um elemento de contorno
$\sim$	
$U$	→ vetor formado pelos $u'^j$
$\sim$	
$\sum_{n=1}^N U$	→ união dos $N$ elementos de contorno
$U_{ij}$	→ campo de deslocamentos da solução fundamental
$\bar{U}_{ij}$	→ tensor presente na integral de domínio do modelo de Reissner, quando do cálculo dos valores sobre o contorno e dos deslocamentos no domínio
$U_{\alpha ij}$	→ tensor definido no cálculo dos esforços em pontos internos

$v_i$	→ deslocamentos [m]
$V_{\alpha i}$	→ tensor presente na formulação integral do modelo de Reissner, no cálculo dos esforços em pontos internos
$x_1, x_2$	→ coordenadas do ponto Q
$x_1, x_2, x_3$	→ coordenadas cartesianas
$x_\alpha^i$	→ coordenadas nodais
$X$ ~	→ vetor das incógnitas sobre o contorno
$y$	→ coordenada usada para definir a coordenada adimensional $\eta$
$y^i$	→ ponto sobre o qual atua uma carga concentrada
$Y_{\alpha i \beta}$	→ tensor das integrais de domínio convertidas para o contorno, usado no cálculo dos esforços em pontos internos
$z = \lambda r$	
$\phi$	→ conjunto vazio
$\Gamma$	→ contorno de $\Omega$
$\Gamma_n$	→ elemento de contorno
$\Gamma_t$	→ parte do contorno $\Gamma$ sobre a qual são prescritas as forças de superfície generalizadas
$\Gamma_u$	→ parte do contorno $\Gamma$ sobre a qual são prescritos os deslocamentos generalizados
$\delta(Q,P)$	→ delta de Dirac
$\delta_{ij}$	→ delta de Kronecker
$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}$	→ operador de Laplace
$\Delta^2 = \Delta \Delta$	→ operador bi-harmônico
$\epsilon'_{ij} \equiv \epsilon'_{ij}(x_i)$	→ componentes do tensor deformação [m/m]
$\epsilon_{ij} \equiv \epsilon_{ij}(x_\alpha)$	→ componentes do tensor deformação de placa [m/m]

$\eta$	→ coordenada adimensional de um elemento de contorno
$\eta_\alpha$	→ coordenadas adimensionais de um "elemento" de domínio
$\lambda^2 = \frac{12k^2}{h^2}$	→ parâmetro característico dos modelos de placa estudados
$\Lambda_1$	→ tensor mediante o qual se transformam integrais de domínio em integrais sobre o contorno
$\nu$	→ coeficiente de Poisson
$\xi_1, \xi_2$	→ coordenadas do ponto P
$\sigma_{ij}$	→ componentes do tensor tensão [N/m <sup>2</sup> ]
$\tau_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}$	
$\tau_{\alpha 3} = Q_\alpha$	
$\phi(r)$	→ função teste em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$
$\phi_j$	→ funções de interpolação
$\psi \approx$	→ expressão matricial dos $\phi_j$
$\Omega$	→ domínio da região em estudo
$\Omega_r$	→ "elemento" de domínio
$\langle -, - \rangle$	→ produto interno
$\  - \ $	→ norma euclidiana
$  -  $	→ determinante

## RESUMO

A aplicação do método dos resíduos ponderados ao modelo diferencial de placa de Reissner resulta num conjunto de equações integrais. Uma simplificação destas equações fornece aquelas correspondentes ao modelo de placa de Mindlin. A formulação é então unificada para os dois modelos.

A solução fundamental é determinada pelo método de Hörmander. Pela teoria das distribuições verifica-se que a solução fundamental é composta de funções essenciais e complementares (ou livres). Os coeficientes das funções livres são estudados através de alguns experimentos numéricos, pela aplicação do método dos elementos de contorno. Uma simplificação do tensor deslocamento fundamental conduz a uma equiparação com o correspondente tensor associado ao modelo de placa de Kirchhoff.

Um sistema de equações algébricas lineares é obtido pelo uso do método da colocação, e o estudo numérico é efetuado empregando funções de interpolação isoparamétricas constantes, lineares ou quadráticas.

As integrais são calculadas numericamente por quadratura gaussiana, sendo antes aplicado um procedimento especial de regularização sobre as integrais singulares. Os valores principais, junto com os fatores geométricos, são obtidos pela imposição de deslocamentos unitários de corpo rígido.

Quando o carregamento é uniformemente distribuído sobre a placa, as integrais no domínio são convertidas em integrais sobre o contorno. Contudo, esta transformação é opcional, pois assim podem ser considerados problemas com carregamento genérico.

São apresentados alguns exemplos numéricos, sendo os resultados obtidos muito bons. Observa-se também que não ocorre "locking" quando se analisam placas finas.

## ABSTRACT

The application of the weighted residual method to Reissner's plate model leads to a set of integral equations. An additional simplification of these equations gives those corresponding integral equations for the Mindlin's plate model. The formulation is then unified for the two models.

The fundamental solution is obtained by Hörmander's method. Through the theory of distributions it is verified that the fundamental solution is composed by essential and complementary (or free) functions. The coefficients of the free functions are studied by a number of numerical experiments, applying the boundary element method. A simplification of the fundamental displacement tensor brings to light a correlation between this tensor and the corresponding one derived from Kirchhoff's plate model.

A system of equations is obtained by the collocation method, and the numerical study is made by using constant, linear or quadratic isoparametric interpolation functions.

The integrals are computed by using the gaussian quadrature rule, after regularizing the singular terms. The principal values are obtained, together with the geometrical factors, by imposing unitary rigid body displacements.

When the loading is uniformly distributed over the plate, the domain integrals are converted to boundary integrals. However, this transformation is optional; so, generic loading problems can be considered.

Some numerical examples are presented, and the results are very accurate. Also, locking does not occur when the formulation is applied to solve thin plates problems.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 1.1 - Introdução

Para a solução de problemas de valores no contorno provenientes da teoria da elasticidade ou mesmo da mecânica dos sólidos, os métodos mais gerais e de amplo emprego possuem características numéricas. Dentre estes métodos, os principais são o método das diferenças finitas (MDF), o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC).

Tanto o MDF como o MEF são métodos de domínio, envolvendo simultaneamente todas as incógnitas nos pontos usados para discretizar o domínio bem como o respectivo contorno. Já o MEC envolve apenas, inicialmente, as incógnitas sobre os pontos necessários para modelar o contorno. Se for desejável a determinação de incógnitas em pontos do domínio, isto é feito somente após a determinação daquelas sobre o contorno. Estas incógnitas são calculadas apenas nestes pontos, e somente em função dos valores sobre o contorno, já então todos determinados.

Deste "desacoplamento" entre o contorno e o domínio resulta diretamente um sistema de equações muito menor que o correspondente aos outros métodos previamente citados. Este fato, aliado à considerável redução no volume dos dados necessário para discretizar o problema, resultou no grande aumento da quantidade de trabalhos sobre o método dos elementos de contorno apresentados pela maioria dos centros de pesquisa, como pode ser verificado pelo número de congressos e artigos publicados nas revistas especializadas. Isto é salientado previamente como apoio e justificativa para este trabalho.

Isto posto, optou-se pela aplicação do método aos modelos de placa de Reissner e Mindlin, visto que os modelos para a análise de deflexão de placas são uma boa representação bi-dimensional de um problema tri-dimensional. Tais modelos revestem-se de grande importância ao se constatar o seu uso em larga escala como ferramentas para o cálculo de componentes estruturais em vários campos da engenharia.

As equações dos modelos que determinam a deflexão transversal de placas, incluindo o efeito das deformações cisalhantes transversais, foram desenvolvidas por ERIC REISSNER [1]-[3] e R. D. MINDLIN [4]. O sistema de equações diferenciais resul-



tante, para ambos os modelos abordados, possibilita a satisfação de três condições de contorno em cada ponto do mesmo, descartando-se desta forma a necessidade de reações concentradas nos vértices da placa (se existirem vértices), reações estas presentes no modelo clássico (modelo de Kirchhoff), aplicável para placas finas (TIMOSHENKO e WOINOWSKI-KRIEGER [5]).

Embora a existência de soluções de equações integrais tenha sido rigorosamente demonstrada por E. I. Fredholm em anos imediatamente posteriores a 1900, somente na década de 60 foi possível implementar processos de discretização que viabilizassem a solução numérica de problemas postulados na forma integral, paralelamente ao advento dos computadores eletrônicos digitais.

As formulações integrais, aplicadas particularmente às equações da elasticidade, são um método geral para a solução de problemas neste campo. As equações podem ser obtidas a partir de relações funcionais entre quantidades no domínio e sobre o contorno, ficando definidas apenas sobre o contorno mediante um procedimento de limite. Quando a relação funcional é obtida mediante distribuições singulares sobre o contorno, cujas intensidades são determinadas a fim de satisfazer as condições de contorno, o método é denominado indireto. Quando a representação integral emprega uma relação de reciprocidade ou de energia, o método é denominado direto (SILVA e BARCELLOS [6]). No método direto, as incógnitas são as variáveis físicas reais do problema, enquanto que no método indireto estas incógnitas são funções sem um significado físico específico, através das quais pode-se determinar as quantidades de interesse para o problema. Ambas as técnicas podem ser interpretadas como diferentes formulações em resíduos ponderados (BREBBIA et alii [7], [8]).

As equações integrais obtidas representam uma relação compatível entre os deslocamentos e as trações sobre o contorno. Para resolver estas equações, cujas soluções algébricas são por via de regra de difícil determinação, divide-se o contorno da região (domínio) em consideração em uma série de elementos, disso vindo a resultar, após o procedimento descrito neste trabalho, um sistema de equações que possibilita a determinação das incógnitas do problema sobre os pontos usados para definir os citados elementos. É a este processo sistemático de discretização, que fornece um sistema de equações, que chamamos de método dos elementos de contorno (MEC).

No caso presente, as equações integrais são obtidas a partir do método dos resíduos ponderados (BREBBIA et alii [7]-[9]). A função de influência considerada no desenvolvimento do método é a solução fundamental, responsável pelo surgimento de integrais singulares, determinada pelo método de Hörmander (SILVA [10]).

A formulação pode envolver integrações no domínio, porém, diferentemente do método dos elementos finitos, estas contêm somente variáveis conhecidas, sendo

tratadas de forma semelhante àquelas sobre o contorno, contribuindo com sua parcela para o vetor de carga.

As integrais são tratadas numericamente por quadratura gaussiana (BANERJEE e BUTTERFIELD [11]), porém as integrais singulares são submetidas primeiramente a uma transformação regularizadora de ordem cúbica (TELLES [12]). Este procedimento evita a necessidade de isolar as singularidades e subdividir o elemento quando a singularidade for interna ao mesmo, para só então ser possível integrá-la separadamente, usando algum processo adequado (quadratura gaussiana, etc.).

Fazendo uso de uma formulação sobre o contorno, o problema é reduzido em uma dimensão, resultando daí a grande atratividade do método, ou seja, a redução da quantidade dos dados de entrada, quando comparado com os métodos de domínio. Consequentemente, o sistema de equações resultante é menor, sendo no entanto a matriz dos coeficientes cheia e não simétrica.

Caso seja necessário a determinação de valores em pontos pertencentes ao domínio, isto pode ser feito apenas nos pontos de interesse. O acréscimo de tempo computacional necessário para o cálculo dos valores nos pontos internos depende diretamente da quantidade destes pontos. A contribuição de cada elemento sobre estes pontos é direta, assemelhando-se a um processo de mínimos quadrados, dado que não há neste caso a formação de um sistema de equações.

## 1.2 - Revisão Bibliográfica

Partindo da primeira aplicação do MEC às placas modeladas pela teoria clássica, apresenta-se a sucessão cronológica das principais aplicações a esta teoria até chegarmos, no final do capítulo, às aplicações do método aos modelos de placa de Reissner e Mindlin.

M. A. JASWON e M. MAITI [13], em 1968, foram os primeiros a aplicar o MEC para a análise de placas finas, tratando problemas biarmônicos relacionados com a teoria de placas, analisando placas retangulares engastadas ou simplesmente apoiadas, obtendo resultados muito bons, aplicando formulação própria desenvolvida em conjunto com G. T. SYMM [14]. Mas foi somente no decorrer da década de 70 que as pesquisas se voltaram para esta aplicação. Esta demora deveu-se, sem dúvida, a dois fatores principais: os métodos integrais clássicos foram formulados de forma puramente matemática, distanciados assim do campo da engenharia, e o desenvolvimento dos computadores digitais coincidiu com o desenvolvimento do MEF, alicerçado, este sim, no trabalho de engenheiros, o que explica em parte o enorme volume de publicações sobre este último método.

Passado este interregno, M. MAITI e S. K. CHAKRABARTY [15], em 1974, desenvolveram uma formulação para placas poligonais simplesmente apoiadas. O desenvolvimento da formulação para placas de formas arbitrárias foi apresentado por Y. NIWA, S. KOBAYASHI e T. FUKUI [16], também em 1974.

Em 1975, o primeiro congresso sobre o MEC reuniu nove trabalhos diversos sobre o assunto, editado por T. A. CRUSE e F. J. RIZZO [17], sendo citado aqui por ser o primeiro de uma série de congressos hoje efetuados anualmente em âmbito mundial.

Em 1976 E. B. HANSEN [18], desenvolvendo duas formulações integrais para placas infinitas contendo furos, aplicou o método a uma placa com furo elíptico usando as duas formulações citadas.

N. J. ALTIERO e D. L. SIKARSKIE [19], em 1978, desenvolveram uma formulação geral para a determinação da solução de alguns problemas com condições de engastamento.

Todas as aplicações para placas anteriormente citadas foram elaboradas com a formulação indireta.

As primeiras formulações diretas para placas finas foram desenvolvidas independentemente por G. BÉZINE [20], G. BÉZINE e D. A. GAMBY [21], em 1978, e M. STERN [22], em 1979. Estes trabalhos despertaram a atenção da comunidade científica internacional, ao mostrarem a viabilidade da aplicação dos métodos integrais para a solução de problemas de placas finas.

Após o trabalho pioneiro dos autores que desenvolveram o método direto para a análise de placas finas, tem surgido uma quantidade crescente de trabalhos sobre o assunto, conforme pode ser visto nas revisões de SILVA e BARCELLOS [6], BREBBIA et alii [8], SILVA [10], TOTTENHAM [23] e STERN [24].

Em 1982, VAN DER WEEËN [25]-[26] desenvolveu a primeira formulação integral para placas considerando cisalhamento, aplicando o método para placas modeladas pela teoria de REISSNER [2]. O problema foi abordado de forma direta, com a solução fundamental sendo obtida pelo método de Hörmander. As equações integrais foram obtidas pelo método dos resíduos ponderados, sendo as integrais no domínio convertidas a integrais sobre o contorno, considerando carregamento uniformemente distribuído.

O contorno foi discretizado com elementos quadráticos isoparamétricos. Para o cálculo das integrais regulares foi usada quadratura gaussiana. Para o cálculo das integrais singulares o núcleo foi primeiramente regularizado por uma transformação quadrática. Isto evitou a necessidade de isolar a singularidade e integrá-la por processo especial. Os valores principais foram obtidos, simultaneamente com os fato-

res geométricos, mediante imposição de movimentos unitários de corpo rígido.

A solução apresentada para a torção de uma placa quadrada foi muito boa. Já para uma placa circular engastada, os resultados para o momento radial não foram bons, e para a força cortante foram ruins. Também foi analisada uma placa infinita com um furo circular, sujeita a um momento fletor constante no infinito, apresentando bons resultados.

Por último, foi resolvido o problema de flexão de uma placa com contornos curvos, cujos resultados, comparados com aqueles obtidos pelo MEF, revelam que neste exemplo o MEC é mais econômico em tempo computacional, para uma dada precisão.

KARAM [27]-[28], em 1986, descrevendo a aplicação do método para placas finitas e infinitas, obtém resultados para placa circular engastada muito bons, em contraste com os obtidos por van der Weeën. As integrais de domínio foram transformadas de acordo com VAN DER WEEËN [25].

A primeira formulação para placas modeladas pela teoria de Mindlin foi apresentada por BARCELLOS e SILVA [29], em 1987, e SILVA [10], em 1988. Mediante uma relação de reciprocidade, na qual o estado auxiliar é a solução fundamental, cuja obtenção é efetuada pelo método de Hörmander, é obtida a formulação integral do problema.

A demonstração da forma geral da solução fundamental é efetuada pela aplicação das propriedades das funções teste, como postulado pela teoria das distribuições.

Os núcleos dos operadores integrais são descritos em relação às coordenadas globais, mas os valores nodais são relacionados às coordenadas locais em cada ponto, com o intuito de facilitar a imposição das condições de contorno. Os valores calculados sobre o contorno também são relacionados às coordenadas locais, o que facilita a interpretação dos mesmos.

Foram resolvidas placas circulares e quadradas engastadas, sendo analisado o comportamento da formulação quando as placas se tornam finas ou muito finas, à fim de investigar o fenômeno do "locking", que frequentemente aparece quando se analisa este modelo de placa através do MEF. Por fim, constata que este fenômeno não ocorre na formulação integral. Os resultados obtidos em alguns exemplos são todos muito bons.

## CAPÍTULO 2

### MODELO DE REISSNER PARA DEFLEXÃO DE PLACAS

#### 2.1 - Introdução

O modelo clássico de placas (modelo de Kirchhoff), que não considera as deformações cisalhantes transversais, leva à obtenção de um sistema de equações de quarta ordem, o que implica em duas condições de contorno em cada ponto do mesmo. Mas como existem três condições de contorno para o problema, este modelo conduz a uma contração destas para apenas duas (REISSNER [3], MINDLIN [4], TIMOSHENKO e WOINOWSKI-KRIEGER [5]). REISSNER [2] e MINDLIN [4] consideraram o efeito das deformações cisalhantes transversais no desenvolvimento de seus modelos para deflexão de placas, obtendo conseqüentemente um sistema de equações de sexta ordem, o que possibilitou a satisfação das três condições de contorno do problema.

Partindo do campo de tensões  $\sigma_{\alpha\beta}$  deduzido pelo modelo de Mindlin (apêndice A) obtemos, através das equações de equilíbrio, o campo de tensões postulado por Reissner, para então chegarmos às equações que descrevem os deslocamentos e as tensões de placas espessas.

A notação indicial é extensamente utilizada. Os índices que variam de 1 a 3 são representados por letras latinas, aqueles que variam de 1 a 2 são representados por letras gregas, e vírgulas denotam diferenciação. Também é usada a convenção de Einstein para o somatório, exceto quando o índice mudo for expressamente dado por  $\omega$ .

#### 2.2 - Fundamentos

Seja uma placa isotrópica e homogênea, de espessura uniforme  $h$ , ocupando uma região  $\Omega(x_\alpha) \times [-h/2, h/2] \subset \mathbb{R}^3(x_i)$ , conforme a Figura 1, onde os  $x_i$ 's são as coordenadas cartesianas e  $\Omega$  é o plano de referência  $x_\alpha$ , aberto e limitado, com contorno  $\Gamma$  lipschitziano. Suponhamos que a placa está sujeita a uma carga distribuída  $q(x_\alpha)$  por unidade de área de  $\Omega$  na direção  $x_3$  (transversal a  $\Omega$ ).

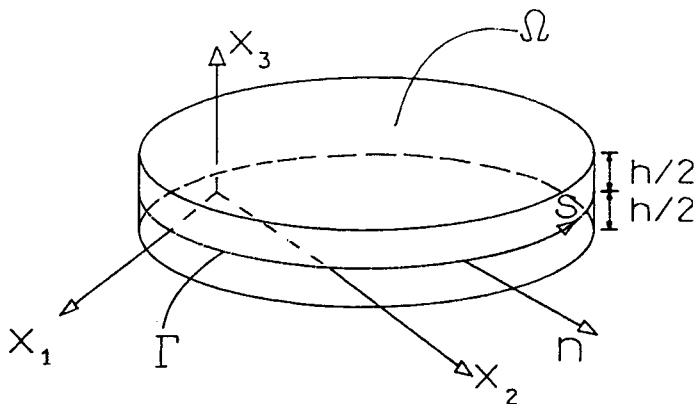


Figura 1 - Sistemas de Coordenadas

As condições de carregamento nas faces da placa são:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}(x_{\beta}, \pm h/2) &= 0 \\ \sigma_{33}(x_{\beta}, \pm h/2) &= \pm \frac{1}{2} q(x_{\beta}) \end{aligned} \quad (1)$$

As componentes de tensão de placa são definidas por:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}(x_{\gamma}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}(x_i) x_3 dx_3 \\ Q_{\alpha}(x_{\gamma}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3}(x_i) dx_3 \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $M_{\alpha\beta}$  e  $Q_{\alpha}$  são os momentos (fletores e torçores) e os esforços cortantes, respectivamente, por unidade de comprimento.

### 2.3 - Equações de Equilíbrio

Considerando um paralelepípedo retangular em uma configuração deformada (pequenos deslocamentos) com arestas  $dx_i$  (Figura 2), resultam as equações de equilíbrio:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (3)$$

desprezando as forças de corpo.

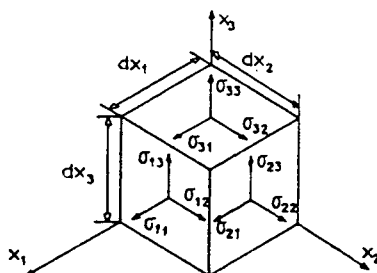


Figura 2 - Estado Geral de Tensões

Para o elemento de placa da Figura 3 obtém-se as equações de equilíbrio:

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \quad (4)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} + q = 0$$

com as quantidades todas mostradas no sentido positivo e atuando na superfície média da placa.

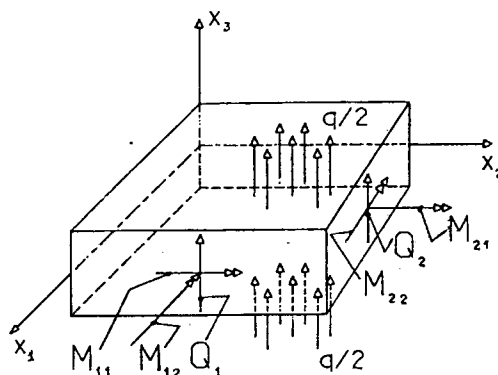


Figura 3 - Elemento de Placa em Equilíbrio

#### 2.4 - Campo de Tensões

O campo de tensões postulado por REISSNER [2] é obtido a partir do campo de tensões  $\sigma_{\alpha\beta}$  deduzido pelo modelo de Mindlin (apêndice A, Equações (A12)):

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12}{h^3} x_3 M_{\alpha\beta} \quad (5)$$

Substituindo as Equações (5) nas duas primeiras Equações (3) e usando a primeira das Equações (4) obtemos, após considerar as condições de contorno (1):

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2}{h} x_3 \right)^2 \right] Q_\alpha \quad (6)$$

Então, a terceira Equação (3) fornece, juntamente com a segunda das relações (4) e condições de contorno (1):

$$\sigma_{33} = \frac{1}{4} \left( \frac{2}{h} x_3 \right) \left[ 3 - \left( \frac{2}{h} x_3 \right)^2 \right] q \quad (7)$$

A distribuição das tensões suposta ao longo da espessura da placa é linear para as tensões de flexão  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e tensão cisalhante  $\sigma_{12}$ , quadrática para as tensões cisalhantes transversais  $\sigma_{13}$  e  $\sigma_{23}$ , e cúbica para a tensão transversal  $\sigma_{33}$ .

Portanto, obtivemos assim o campo de tensões postulado por REISSNER [2], Equações (5)-(7).

## 2.5 - Deslocamentos Generalizados

Substituindo o campo de tensões acima na expressão do trabalho efetuado pelas trações sobre o contorno, definimos os deslocamentos generalizados  $u_1$ :

$$u_\alpha = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} v_\alpha(x_1) x_3 dx_3$$

$$u_3 = \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} v_3(x_1) \left[ 1 - \left( \frac{2}{h} x_3 \right)^2 \right] dx_3$$
(8)

onde os  $v_1$ 's são as componentes dos deslocamentos de pontos situados ao longo de  $x_3$  nas direções  $x_1$ . Vemos assim que os  $u_\alpha$  representam quantidades equivalentes, mas não idênticas, às componentes de mudança de ângulo (rotação) da normal à superfície média indeformada, valendo o mesmo para  $u_3$ , equivalente ao deslocamento transversal da placa. Efetivamente, o presente modelo conduz a uma média ponderada, ao longo da direção  $x_3$ , tanto dos deslocamentos transversais à superfície média, quanto dos deslocamentos dos pontos sobre a normal à mesma superfície média da placa nas direções  $x_\alpha$  (comparar as variações ao longo da direção  $x_3$  entre as Equações (8) e (5)-(6)). Isto pode ser facilmente verificado ao se considerar  $v_\alpha$  linear em  $x_3$ , enquanto  $v_3$  é considerado constante (Equações (A2)).

## 2.6 - Campo de Deformações Generalizadas

Mediante a substituição das Equações (A3) em relações similares às Equações (8), e aplicando a teoria linear da elasticidade, resulta o seguinte campo de "deformações" generalizadas, dado em função dos deslocamentos generalizados:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} \right)$$

$$\gamma_{\alpha 3} = u_\alpha + u_{3,\alpha}$$

$$\varepsilon_{33} = 0$$
(9)

onde os  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  são as deformações de flexão generalizadas (curvaturas), e os  $\gamma_{\alpha 3}$  são as deformações cisalhantes transversais generalizadas (ANTES [30]).

De acordo com as Equações (A17), porém, o campo de deformações de placa variacionalmente consistente deve ser definido como:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\beta,\alpha}$$

$$\gamma_{\alpha 3} = u_\alpha + u_{3,\alpha}$$
(10)



Se desprezarmos as deformações cisalhantes transversais, fazendo  $\gamma_{\alpha 3} = 0$ , recaímos no âmbito do modelo de Kirchhoff, no qual as rotações são expressas simplesmente pelas derivadas do deslocamento transversal nas direções respectivas.

## 2.7 - Relações Tensão-Deslocamento

A aplicação do Teorema de Castigliano generalizado, incluindo as Equações (4), fornece as expressões generalizadas tensão-deslocamento para placas (REISSNER [3], MASON E SOUZA [31]):

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= D \frac{1-\nu}{2} \left( u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{\alpha\beta} \\ Q_{\alpha} &= D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left( u_{\alpha} + u_{3,\alpha} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

onde:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} - \text{rigidez à flexão da placa}$$

$E$  - módulo de elasticidade longitudinal

$\nu$  - coeficiente de Poisson

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \neq \beta \\ 1, & \text{se } \alpha = \beta \end{cases} - \text{delta de Kronecker}$$

$$\lambda^2 = \frac{10}{h^2} - \text{parâmetro característico do modelo de Reissner, sendo:}$$

$$\lambda^2 = \frac{12k^2}{h^2} \quad (12)$$

$$k^2 = 5/6 \quad (13)$$

Faremos duas observações referentes aos modelos de Reissner e Mindlin quanto aos esforços cortantes  $Q_{\alpha}$ , Equações (11) e (A10) respectivamente, notando:

- o caráter distinto entre os deslocamentos  $u_i$ , Equações (8) e (A2), respectivamente;
- a diferença entre os fatores de correção da tensão cisalhante,  $k^2$ , dados na Tabela 1, onde o presente fator é constante e aparece naturalmente no modelo de Reissner, enquanto o mesmo é função do coeficiente de Poisson e surge como um fator de ponderação no modelo de Mindlin (Equação (A8)).

$\nu$	Mindlin					Reissner
	0.	.17641	.21096	.3	.5	
$k^2$	.76393	.82247 ( $\pi^2/12$ )	.83333 (5/6)	.86009	.91262	.83333 (5/6)

Tabela 1

## 2.8 - Condições de Contorno

Seja  $\Gamma$  o contorno exterior total da superfície média  $\Omega$  da placa. O contorno  $\Gamma$  é composto de duas partes,  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_t$ , sendo  $\Gamma_u$  aquela sobre a qual são prescritos os deslocamentos generalizados  $u_i$ , enquanto  $\Gamma_t$  representa a parte sobre a qual são prescritas as forças de superfície generalizadas  $t_i$ . Os  $u_i$ 's prescritos sobre  $\Gamma_u$  são as condições de contorno essenciais ou de Dirichlet, e os  $t_i$ 's prescritos sobre  $\Gamma_t$  são as condições de contorno naturais ou de Neumann.

Podemos especificar qualquer tipo de condição de contorno sobre  $\Gamma$ , atendendo porém para o fato de que devem ser prescritos, em cada ponto, num problema bem posto, o deslocamento ou a força de superfície correspondente em cada uma das três direções generalizadas. Logo,  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_t$  devem ser partes complementares de  $\Gamma$ , sendo portanto  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ , com  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \phi$ . Temos assim:

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i \quad \text{sobre } \Gamma_u \\ t_i &= \bar{t}_i \quad \text{sobre } \Gamma_t \end{aligned} \quad (14)$$

indicando-se as variáveis prescritas com uma barra sobreposta, sendo as forças de superfície generalizadas definidas por:

$$t_\alpha = M_{\alpha\beta} n_\beta \quad (15)$$

$$t_3 = Q_\alpha n_\alpha$$

e

$$\bar{t}_\alpha = \bar{M}_{\alpha\beta} n_\beta \quad (16)$$

$$\bar{t}_3 = \bar{Q}_\alpha n_\alpha$$

nas quais  $n_\alpha$  são os cossenos diretores da normal exterior à  $\Gamma$ .

## 2.9 - Equações de Reissner

A substituição das relações tensão-deslocamento (11) nas equações de e-

quilíbrio (4) conduz a um sistema de três equações diferenciais parciais, que são as equações de Navier para o problema:

$$L_{1j}(\partial_Q)u_j(Q) = -F_1(\partial_Q)q(Q), \quad Q \equiv (x_1, x_2) \in \Omega \quad (17)$$

onde:

$$L(\partial_Q) \approx D \frac{1-\nu}{2} \begin{bmatrix} \left( \Delta - \lambda^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) & \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & -\lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \left( \Delta - \lambda^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) & -\lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_1} & \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_2} & \lambda^2 \Delta \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$F(\partial_Q) \approx \begin{bmatrix} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

sendo  $\Delta = \partial^2 / (\partial x_\alpha \partial x_\alpha)$  o operador de Laplace. Observamos que  $L_{\alpha\beta}$  é simétrico e  $L_{\alpha 3}$  é anti-simétrico.

Finalmente, introduzindo  $Q_\alpha$ , Equações (11), nas Equações (17) reescritas de forma apropriada, e procedendo um arranjo das mesmas, obtemos o sistema de equações de Reissner em termos de  $Q_\alpha$  e  $u_3$ , (SALERNO e GOLDBERG [32], DYM e SHAMES [33]):

$$D\Delta^2 u_3 = \left[ 1 - \frac{(2-\nu)}{(1-\nu)\lambda^2} \Delta \right] q \quad (20)$$

$$- \left[ 1 - \frac{1}{\lambda^2} \Delta \right] Q_\alpha = D \Delta u_{3,\alpha} + \frac{1}{(1-\nu)\lambda^2} q_{,\alpha}$$

sendo  $\Delta^2 = \Delta\Delta$  o operador bi-harmônico. Nesta forma desacoplada é possível determinar algumas soluções analíticas, tal como aquela apresentada no capítulo 5. Para um carregamento uniforme, a primeira das equações acima é idêntica àquela do modelo clássico. No entanto, as condições de contorno são diferentes.

## 2.10 - A Solução Fundamental e as Equações de Reissner

As relações necessárias para determinar as equações integrais básicas do modelo de Reissner (apêndice B), onde o estado auxiliar corresponde à solução fundamental, identificado pelo sobre-índice asterisco, são obtidas mediante a suposição de

que as cargas concentradas unitárias  $F_i^*$  variam de acordo com as seguintes forças de corpo (ver Equações (5) e (6)):

$$\begin{aligned} f_\alpha^* &= \frac{12}{h^3} x_3 F_\alpha^* \\ f_3^* &= \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2}{h} x_3 \right)^2 \right] F_3^* \end{aligned} \quad (21)$$

Os  $F_\alpha^*$ 's representam, como se pode observar, momentos concentrados unitários generalizados nas direções  $x_\alpha$ , enquanto  $F_3^*$  representa uma força concentrada unitária generalizada na direção  $x_3$ .

As equações de equilíbrio para este estado resultam:

$$\sigma_{1j,j}^* + f_i^* = 0 \quad (22)$$

Substituindo as Equações (5), (6) e as duas primeiras das (21) nas duas primeiras Equações (22), e então as Equações (6), (7) e a última das (21) na última das Equações (22) resultam:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_\alpha^* + F_\alpha^* &= 0 \\ Q_{\alpha,\alpha}^* + F_3^* &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

levando finalmente às expressões generalizadas tensão-deslocamento:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}^* &= D \frac{1-\nu}{2} \left( u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right) \\ Q_\alpha^* &= D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left( u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^* \right) \end{aligned} \quad (24)$$

As demais expressões mantêm basicamente a mesma forma. Resumidamente, temos então as equações correspondentes aos dois estados:

● equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_\alpha^* &= 0 \\ Q_{\alpha,\alpha}^* + q &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_\alpha^* + F_\alpha^* = 0$$

$$Q_{\alpha,\alpha}^* + F_3^* = 0$$

● deslocamentos:

$$\begin{aligned} u_1 \\ u_1^* \end{aligned} \quad (26)$$

- forças de superfície:

$$t_i = t_i^* \quad (27)$$

sendo:

$$\begin{aligned} t_\alpha &= M_{\alpha\beta} n_\beta \\ t_3 &= Q_\alpha n_\alpha \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} t_\alpha^* &= M_{\alpha\beta}^* n_\beta \\ t_3^* &= Q_\alpha^* n_\alpha \end{aligned}$$

- deformações:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= u_{\beta,\alpha} \\ \gamma_{\alpha 3} &= u_\alpha + u_{3,\alpha} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^* &= u_{\beta,\alpha}^* \\ \gamma_{\alpha 3}^* &= u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^* \end{aligned}$$

- tensões de placa:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= D \frac{1-\nu}{2} \left( u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{\alpha\beta} \\ Q_\alpha &= D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left( u_\alpha + u_{3,\alpha} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}^* &= D \frac{1-\nu}{2} \left( u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right) \\ Q_\alpha^* &= D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left( u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^* \right) \end{aligned}$$

## 2.11 - Unificação dos Modelos de Placa de Reissner e Mindlin

A formulação unificada para os modelos de placa em estudo é obtida mediante a inclusão de um "fator de modelo" MF (WESTPHAL JR. e BARCELLOS [34]), tal que:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= D \frac{1-\nu}{2} \left( u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + MF q \delta_{\alpha\beta} \\ Q_\alpha &= D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left( u_\alpha + u_{3,\alpha} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

sendo:

$$MF = \begin{cases} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} & , \text{ modelo de Reissner} \\ 0 & , \text{ modelo de Mindlin} \end{cases} \quad (32)$$

de acordo com o apêndice C, Equações (C1) e (C2), lembrando que isto é condicionado à condição de carregamento  $\pm q/2$ , dada pela Equação (1).

## 2.12 - Conclusão

Foram obtidas neste capítulo, paralelamente ao apêndice A, as equações diferenciais dos modelos de placa de Reissner e Mindlin, convertidas para a forma integral no apêndice B.

Foram definidas as variáveis pertinentes aos modelos citados, deslocamentos e tensões resultantes, bem como as trações sobre o contorno. As equações de equilíbrio e as relações tensão-deslocamento dos estados atual e auxiliar (solução fundamental), junto com a definição das deformações de placa, completaram o conjunto de equações necessárias aos propósitos do presente trabalho.

A unificação dos modelos de placa em consideração, mediante um simples fator escalar, possibilitou uma expressão diferencial representativa de ambos os modelos.

## CAPÍTULO 3

### FORMULAÇÃO INTEGRAL DOS MODELOS DE REISSNER E MINDLIN PARA DEFLEXÃO DE PLACAS

#### 3.1 - Introdução

A partir de uma solução particular genérica do operador fundamental escalar determina-se a solução fundamental geral, ao se garantir que esta solução gere uma função delta de Dirac, quando sobre ela é aplicado o referido operador (SILVA [10]).

A dedução das equações integrais primordiais é feita mediante o método dos resíduos ponderados, cujo procedimento está descrito no apêndice B.

São obtidos então os tensores fundamentais  $U_{ij}$  e  $T_{ij}$ , que descrevem os deslocamentos generalizados (sobre o contorno e no domínio) e as trações generalizadas sobre o contorno e, a partir destes, são obtidos os tensores  $U_{\alpha ij}$ ,  $T_{\alpha ij}$  e  $V_{\alpha i}$ , que descrevem os esforços em pontos internos.

#### 3.2 - Solução Fundamental

No desenvolvimento das equações integrais (apêndice B) consideramos um estado auxiliar, no qual os deslocamentos e as trações são denotados, respectivamente, por  $U_{ij}(Q,P)$  e  $T_{ij}(Q,P)$ , onde  $Q \equiv (x_1, x_2)$  e  $P \equiv (\xi_1, \xi_2)$ . O tensor  $U_{ij}(Q,P)$ , que satisfaz as equações de Navier do operador fundamental, representa as rotações ( $j = 1, 2$ ) e a deflexão ( $j = 3$ ), no ponto campo  $Q$  de uma placa infinita, quando um momento concentrado unitário generalizado ( $i = 1, 2$ ) ou uma força concentrada unitária generalizada ( $i = 3$ ) é aplicada no ponto fonte  $P$ , sendo  $T_{ij}(Q,P)$  as trações correspondentes (ver Equações (B23)). Para a determinação da solução fundamental é usado o método de Hörmander (HÖRMANDER [35], SILVA [10]).

Procedendo de forma semelhante àquela do item 2.9, porém com as relações do estado auxiliar, e usando as Equações (B20) e (B23), obtemos (VAN DER WEEËN [25]):

$$L_{ij}(\partial_Q)U_{kj}(Q,P) = -\delta(Q,P)\delta_{ik} \quad (33)$$

onde  $U_{ij}(Q,P)$  é a solução fundamental do operador  $L_{ij}$ , com elementos em  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  (espaço das distribuições em  $\mathbb{R}^2$ ).

Seja  $L_{ij}^{co}(\partial_Q)$  a matriz dos cofatores de  $L_{ij}(\partial_Q)$ . Então (HÖRMANDER [35], SILVA [10]):

$$\left[ L_{ij}^{co}(\partial_Q) \right] L_{kj}(\partial_Q) = L_{ij}(\partial_Q) \left[ L_{kj}^{co}(\partial_Q) \right] = \left| \underline{L}(\partial_Q) \right| \delta_{ik} \quad (34)$$

onde  $\left| \underline{L} \right| \equiv \det L_{ij}$  representa o determinante de  $\underline{L} \equiv L_{ij}$ .

De acordo com HÖRMANDER [35] (VAN DER WEEËN [25]), expressamos  $U_{kj}(Q,P)$  na forma:

$$U_{kj}(Q,P) = \left[ L_{kj}^{co}(\partial_Q) \right] G(Q,P) \quad (35)$$

onde  $G(Q,P)$  é a solução fundamental do operador  $\det L_{ij}$  (Equação (37)), sendo (BARCELLOS e SILVA [36]):

$$L_{ij}^{co}(\partial_Q) = \left[ \frac{D}{2} (1-\nu) \right]^2 \begin{bmatrix} \lambda^2 \left[ \frac{2}{1-\nu} \Delta^2 - \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta + \lambda^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right] & -\lambda^2 \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta + \lambda^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & -\lambda^2 (\Delta - \lambda^2) \frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\lambda^2 \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta + \lambda^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \lambda^2 \left[ \frac{2}{1-\nu} \Delta^2 - \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta + \lambda^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] & -\lambda^2 (\Delta - \lambda^2) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \lambda^2 (\Delta - \lambda^2) \frac{\partial}{\partial x_1} & \lambda^2 (\Delta - \lambda^2) \frac{\partial}{\partial x_2} & (\Delta - \lambda^2) \left( \frac{2}{1-\nu} \Delta - \lambda^2 \right) \end{bmatrix} \quad (36)$$

Então, substituindo as Equações (35) nas Equações (33), observando as Equações (34), resulta:

$$\left| \underline{L}(\partial_Q) \right| G(Q,P) = -\delta(Q,P) \quad (37)$$

Portanto, o problema de encontrar uma solução fundamental para o operador  $L_{ij}(\partial_Q)$  (Equações (33)) reduziu-se ao de encontrar uma solução escalar para o operador  $\det L_{ij}(\partial_Q)$  (Equação (37)) (SILVA [10]).

Calculando o determinante de  $L_{ij}(\partial_Q)$  resulta:

$$\left| \underline{L}(\partial_Q) \right| = D^3 \left( \frac{1-\nu}{2} \right)^2 \lambda^2 \Delta^2 (\Delta - \lambda^2) \quad (38)$$

Consequentemente, a solução fundamental  $G(Q,P)$  pode ser determinada por:

$$D^3 \left( \frac{1-\nu}{2} \right)^2 \lambda^2 \Delta^2 (\Delta - \lambda^2) G(Q,P) = -\delta(Q,P) \quad (39)$$

Como os operadores  $\Delta$  e  $\Delta^2$  em  $\mathbb{R}^2$  são invariantes em relação à rotação, e



lembrando que estamos lidando com domínios isotrópicos, somos induzidos a considerar uma solução fundamental que possua simetria radial. Portanto,  $G(Q,P) = G(P,Q) = G(r)$ ,  $r = \| Q - P \|$ , sendo  $\| \cdot \|$  a norma euclidiana. Precisamos pois encontrar uma solução para a equação (SILVA [10]):

$$\Delta^2(\Delta - \lambda^2)V(r) = 0 \quad (40)$$

Porém, pelo exposto acima, concluímos que uma combinação linear de funções que pertencem aos núcleos dos operadores  $\Delta^2$  e  $(\Delta - \lambda^2)$  satisfaz a Equação (40). Sejam  $V_1(r)$  e  $V_2(r)$  estas combinações, respectivamente. Então:

$$\Delta^2 V_1(r) = 0 \quad (41)$$

$$(\Delta - \lambda^2)V_2(r) = 0 \quad (42)$$

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) \quad (43)$$

Da Equação (41) temos as soluções:

$$1, \ln r, r^2, r^2 \ln r \quad (44)$$

Da equação (42) temos, após multiplicá-la por  $r^2$ , com  $z = \lambda r$ :

$$z^2 V_{2,zz} + z V_{2,z} - z^2 V_2 = 0 \quad (45)$$

cujas soluções são:

$$I_0(z), K_0(z) \quad (46)$$

onde  $I_0(z)$  e  $K_0(z)$  são as funções modificadas de Bessel de ordem zero de primeira e segunda espécie, respectivamente, sendo ainda:

$$\lim_{z \rightarrow 0} K_0(z) = \lim_{z \rightarrow 0} - \left[ \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \right] \rightarrow \infty \quad (47)$$

sendo  $\gamma$  a constante de Euler.

Como a Equação (40) é uma equação diferencial de sexta ordem, a solução geral é obtida por uma combinação linear das funções dadas nas Equações (44) e (46). Construiremos a solução fundamental mediante a combinação linear:

$$G(z) = C_1 K_0(z) + C_2 \ln z + C_3 z^2 + C_4 z^2 \ln z + C_5 I_0(z) + C_6 \quad (48)$$

A Equação (48) será uma solução fundamental se verificar a Equação (39). Esta verificação, que possibilitará a determinação das constantes  $C_1$  a  $C_6$ , é efetuada mediante a teoria das distribuições. Efetivamente, devemos ter (SILVA [10]):

$$\langle G(z), D^3 \left( \frac{1-\nu}{2} \right)^2 \lambda^2 \Delta^2 (\Delta - \lambda^2) \phi(r) \rangle = -\phi(0), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(r) \quad (49)$$

onde  $\phi(r)$  é uma função teste em  $\mathcal{D}(r)$ , o espaço das distribuições. Integrando esta expressão por partes, após excluir uma esfera de raio  $\varepsilon$  centrada na origem, obtém-se (SILVA [10]):

$$\begin{aligned} D^3 \left( \frac{1-\nu}{2} \right)^2 \lambda^2 \left\{ - \int_{\Gamma_\varepsilon} G \Delta (\Delta - \lambda^2) \frac{d\phi}{dr} d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta (\Delta - \lambda^2) \phi \frac{dG}{dr} d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta G (\Delta - \lambda^2) \frac{d\phi}{dr} d\Gamma + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_\varepsilon} (\Delta - \lambda^2) \phi \Delta \frac{dG}{dr} d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta^2 G \frac{d\phi}{dr} d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \phi \Delta^2 \frac{dG}{dr} d\Gamma + \right. \\ \left. + \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \phi \Delta^2 (\Delta - \lambda^2) G d\Omega \right\} = -\phi(0) \quad (50) \end{aligned}$$

As derivadas de  $G(z)$  são:

$$\frac{dG}{dr} = \lambda \left( -C_1 K_1(z) + \frac{1}{2} C_2 + 2C_3 z + C_4 z(1+2\ln z) + C_5 I_1(z) \right)$$

$$\Delta G = \lambda^2 \left( C_1 K_0(z) + 4C_3 + 4C_4(1+\ln z) + C_5 I_0(z) \right)$$

$$\Delta \frac{dG}{dr} = \lambda^3 \left( -C_1 K_1(z) + \frac{4}{2} C_4 + C_5 I_1(z) \right)$$

$$\Delta^2 G = \lambda^4 \left( C_1 K_0(z) + C_5 I_0(z) \right)$$

$$\Delta^2 \frac{dG}{dr} = \lambda^5 \left( -C_1 K_1(z) + C_5 I_1(z) \right)$$

$$\Delta^2 (\Delta - \lambda^2) G = 0 \quad (51)$$

No limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  constatamos que a primeira, a terceira e a quinta integrais da Equação (50) se anulam. A sétima integral evidentemente também se anula. Da sexta integral, satisfazendo a igualdade, tiramos:

$$C_1 = \left[ 2\pi D^3 \left( \frac{1-\nu}{2} \right)^2 \lambda^6 \right]^{-1} \quad (52)$$

Então, precisamos regularizar as integrais restantes. Da quarta integral concluímos:

$$4C_4 = C_1 \quad (53)$$

enquanto que da segunda integral tiramos:

$$C_2 = C_1 \quad (54)$$

Pelas condições de regularidade (regiões infinitas, BREBBIA et alii [8]), temos:

$$C_5 = 0 \quad (55)$$

Quanto às constantes  $C_3$  e  $C_6$  nenhuma restrição é imposta, constatando-se assim que a solução fundamental proposta, Equação (48), possui duas funções livres ou complementares. Sumariando estas conclusões temos:

a) funções essenciais:  $K_0(z)$ ,  $\ln z$  e  $z^2 \ln z$

b) funções complementares:  $z^2$  e  $1$

Substituindo estas constantes na Equação (48), após fazermos  $C_3 = -C_4$  e  $C_6 = 0$ , obtemos a solução fundamental proposta por VAN DER WEEËN [25]-[26]:

$$G(z) = \left[ 2\pi D^3 \left( \frac{1-\nu}{2} \right)^2 \lambda^6 \right]^{-1} \left\{ K_0(z) + \ln z + \frac{z^2}{4} (\ln z - 1) \right\} \quad (56)$$

Porém, não faremos a substituição de nenhuma destas constantes, pois objetivamos determinar o melhor valor das constantes  $C_3$  e  $C_6$ , bem como verificar a influência das distintas funções na solução do problema. Efetivamente, fizemos  $C_6 = 0$  e, num estudo computacional preliminar, constatamos que (WESTPHAL JR. e BARCELLOS [34]):

$$C_4 \leq C_3 \leq C_1 \quad (57)$$

fornece melhores resultados.

### 3.3 - Deslocamentos e Trações sobre o Contorno

Para pontos situados sobre o contorno  $\Gamma$  da placa obtivemos no apêndice B, Equações (B40), um sistema de três equações integrais que descrevem todas as variáveis de placa sobre o referido contorno:

$$C_{1j}(p)u_j(p) + \int_{\Gamma} T_{1j}(q,p)u_j(q)d\Gamma(q) = \int_{\Gamma} U_{1j}(q,p)t_j(q)d\Gamma(q) + \int_{\Omega} \left[ U_{13}(Q,p) - MF U_{1\alpha,\alpha}(Q,p) \right] q(Q)d\Omega(Q) \quad (58)$$

### 3.3.1 - Tensor Deslocamento Fundamental $U_{ij}$

Substituindo a Equação (48) nas Equações (35) determinamos o tensor  $U_{ij}(Q,P)$ , que representa a solução fundamental do operador  $L_{ij}$  (equações de Navier dos modelos de placa de Reissner e Mindlin), sendo apresentados no apêndice D alguns cálculos intermediários necessários para sua obtenção:

$$\begin{aligned}
 U_{\alpha\beta} &= \left[ \frac{D^{1-\nu}}{2} \right]^2 \lambda^6 \left\{ \frac{2}{1-\nu} \left[ C_1 \left( B\delta_{\alpha\beta} - A r_{,\alpha} r_{,\beta} \right) - \frac{CC}{2Z^2} \left( \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \left[ 2C_3 + C_4 \left( 2\ln z + 1 \right) \right] \delta_{\alpha\beta} - 2C_4 r_{,\alpha} r_{,\beta} + \frac{2}{1-\nu} C_5 \left[ BI\delta_{\alpha\beta} - AI r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \right\} \\
 U_{\alpha 3} &= - \left[ \frac{D^{1-\nu}}{2} \right]^2 \lambda^6 \left\{ \left[ 4C_4 - C_2 \right] \frac{1}{Z^2} - 2C_3 - C_4 \left( 2\ln z + 1 \right) \right\} r r_{,\alpha} \\
 U_{33} &= \left[ \frac{D^{1-\nu}}{2} \right]^2 \lambda^4 \left\{ \left( C_2 - 4 \frac{3-\nu}{1-\nu} C_4 \right) \ln z + z^2 \left( C_3 + C_4 \ln z \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 4 \frac{3-\nu}{1-\nu} \left( C_3 + C_4 \right) + C_6 \right\} \\
 U_{3\alpha} &= - U_{\alpha 3} \tag{59}
 \end{aligned}$$

onde:

$$z = \lambda r \tag{60}$$

$$r_{,\alpha} = x_{\alpha}(Q) - x_{\alpha}(P) \tag{61}$$

$$r = \| Q - P \| = \sqrt{r_{,\alpha} r_{,\alpha}} \tag{62}$$

$$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_{\alpha}(Q)} = \frac{1}{r} r_{,\alpha} \tag{63}$$

$$A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z} \left( K_1(z) - \frac{1}{z} \right) \tag{64}$$

$$B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z} \left( K_1(z) - \frac{1}{z} \right) \tag{65}$$

$$AI(z) = I_0(z) + \frac{2}{z} \left( -I_1(z) - \frac{1}{z} \right) \tag{66}$$

$$BI(z) = I_0(z) + \frac{1}{z} \left( -I_1(z) - \frac{1}{z} \right) \tag{67}$$

$$CC = C_2(1-\nu) + 4C_4(1+\nu) - 2C_1 - 2C_5 \tag{68}$$

com as derivadas em relação às coordenadas do ponto campo Q, por ser a variável envolvida nas equações integrais (58), sendo ainda  $I_1(z)$  e  $K_1(z)$  as funções modificadas

de Bessel de ordem um de primeira e segunda espécie, respectivamente.

VAN DER WEEËN [25]-[26], com a solução fundamental proposta na Equação (56), eliminou o fator constante em  $U_{33}$ .

Substituindo os valores de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_4$  e  $C_5$  nas Equações (59), com:

$$C_3 = F_3 C_1 \quad (69)$$

$$C_6 = F_6 C_1$$

obtemos:

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \left[ \left( 8B - (1-\nu)(2\ln z + 1 + 8F_3) \right) \delta_{\alpha\beta} - \left( 8A + 2(1-\nu) \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right]$$

$$U_{\alpha 3} = \frac{1}{8\pi D} \left( 2\ln z + 1 + 8F_3 \right) r r_{,\alpha} \quad (70)$$

$$U_{3\alpha} = -U_{\alpha 3}$$

$$U_{33} = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} \left[ z^2(1-\nu) \left( \ln z + 4F_3 \right) - 8\ln z - 4 \left( (3-\nu)(4F_3 + 1) - (1-\nu)F_6 \right) \right]$$

Podemos chegar a uma expressão simplificada para as mesmas, fazendo:

$$F_3 = -\frac{1}{8} \quad (71)$$

$$F_6 = \frac{3-\nu}{2(1-\nu)}$$

Assim:

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi D(1-\nu)} \left[ \left( 4B - (1-\nu)\ln z \right) \delta_{\alpha\beta} - \left( 4A + 1 - \nu \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right]$$

$$U_{\alpha 3} = \frac{1}{4\pi D} \ln z r r_{,\alpha}$$

$$U_{3\alpha} = -U_{\alpha 3}$$

$$U_{33} = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} \left[ z^2(1-\nu) \left( \ln z - \frac{1}{2} \right) - 8\ln z \right] \quad (72)$$

Temos então, para  $h$  pequeno:

$$U_{33} \sim \frac{r^2}{8\pi D} \left( \ln \lambda r - \frac{1}{2} \right) \quad (73)$$

que é similar à solução fundamental para placas finas, dada por COSTA JR. e BREBBIA [37]. Salientamos a coincidência da função livre, expressa pelo fator  $-1/2$  (fator

este livre tanto para placas finas como para os modelos aqui tratados).

Desenvolvendo  $K_0(z)$  e  $K_1(z)$  para pequenos argumentos (ABRAMOWITZ e STEGUN [38]), conclui-se que a função  $A(z)$  é contínua e  $B(z)$  apresenta singularidade logarítmica:

$$\lim_{z \rightarrow 0} B(z) = \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \left[ \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma + \frac{1}{2} \right] \quad (74)$$

Observamos assim que o tensor  $U_{ij}$  apresenta singularidade logarítmica, visto que a aparente singularidade  $1/z^2$  (Equações (59)) se anula com os dados valores de  $C_1, C_2, C_4$  e  $C_5$ .

### 3.3.2 - Tensor Tensão Fundamental $T_{ij}$

As forças de superfície generalizadas provenientes do estado gerado pela solução fundamental são dadas pelas Equações (28):

$$t_{\alpha}^* = M_{\alpha\beta}^* n_{\beta} \quad (75)$$

$$t_3^* = Q_{\alpha}^* n_{\alpha}$$

Estas forças estão relacionadas com o tensor  $T_{ij}(Q,P)$  de acordo com as Equações (B23):

$$t_{\alpha}^* = T_{i\alpha}(Q,P) e_i \quad (76)$$

$$t_3^* = T_{i3}(Q,P) e_i$$

Temos assim:

$$T_{i\alpha}(Q,P) e_i = M_{\alpha\beta}^* n_{\beta} \quad (77)$$

$$T_{i3}(Q,P) e_i = Q_{\alpha}^* n_{\alpha}$$

As cargas concentradas unitárias generalizadas são supostas atuarem independentemente nas direções  $e_i$ . Assim suposto, ficamos com:

$$T_{i\alpha}(Q,P) = M_{\alpha\beta}^{*(1)} n_{\beta} \quad (78)$$

$$T_{i3}(Q,P) = Q_{\alpha}^{*(1)} n_{\alpha}$$

sendo  $M_{\alpha\beta}^{*(1)}$  e  $Q_{\alpha}^{*(1)}$  os momentos e os esforços cortantes, respectivamente, devidos às cargas concentradas unitárias generalizadas aplicadas nas direções  $i$  (correspondentes à coluna  $i$  do tensor  $T_{ij}$ ).

Portanto, substituindo as Equações (B23) nas Equações (24) resultam:

$$M_{\alpha\beta}^{*(1)} = D \frac{1-\nu}{2} \left[ U_{1\alpha,\beta} + U_{1\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} U_{1\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right]$$

$$Q_{\alpha}^{*(1)} = D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ U_{1\alpha} + U_{13,\alpha} \right]$$
(79)

Para as derivadas do tensor  $U_{ij}$ , Equações (59), são de grande utilidade as relações na forma apresentada no apêndice D, ítem D.2, resultando:

$$U_{\alpha\beta,\gamma} = - \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^2 \frac{\lambda^7}{Z} \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[ C_1 \left[ zK_1 r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + A \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left( 4A + zK_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right] + \frac{CC}{Z^2} \left( 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} - r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} - r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} - r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] + \right. \\ \left. + C_4 \left[ r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right] + \frac{1}{1-\nu} C_5 \left[ -zI_1 r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + \right. \right. \\ \left. \left. + AI \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) - \left( 4AI - zI_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right] \right\}$$

$$U_{\alpha 3,\beta} = - \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^2 \lambda^6 \left\{ \left( 4C_4 - C_2 \right) \left[ \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \frac{1}{Z^2} - 2C_3 \delta_{\alpha\beta} - \right. \\ \left. - C_4 \left[ \left( 2 \ln z + 1 \right) \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \right\}$$

$$U_{33,\alpha} = \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^2 \lambda^6 \left\{ \left[ C_2 - 4 \frac{3-\nu}{1-\nu} C_4 \right] \frac{1}{Z^2} + 2C_3 + C_4 \left[ 2 \ln z + 1 \right] \right\} r r_{,\alpha}$$

$$U_{3\alpha,\beta} = -U_{\alpha 3,\beta}$$
(80)

Os momentos  $M_{\alpha\beta}^{*(i)}$  e os esforços  $Q_{\alpha}^{*(i)}$ , devidos às cargas concentradas unitárias generalizadas aplicadas na direção  $i$ , são obtidos mediante a substituição das Equações (80) nas Equações (79), resultando:

$$M_{\alpha\beta}^{*(\gamma)} = - \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^3 \frac{\lambda^7}{Z} \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[ C_1 \left[ \left( zK_1 + 2A \right) \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} \right) + 2A r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 2 \left( 4A + zI_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{CC}{Z^2} \left( 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} - r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} - r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} - r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] + 2C_4 \left[ r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + \frac{1+\nu}{1-\nu} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{1-\nu} C_5 \left[ \left( -zI_1(z) + 2AI(z) \right) \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} \right) + 2AI r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 2 \left( 4AI - zI_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta}^{*(3)} &= \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^3 2\lambda^6 \left\{ \left( 4C_4 - C_2 \right) \left[ \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \frac{1}{Z^2} - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} C_3 \delta_{\alpha\beta} - \right. \\
&\quad \left. - 2C_4 r_{,\alpha} r_{,\beta} - \frac{1}{1-\nu} C_4 \left[ 2(1+\nu) \ln z + 1 + 3\nu \right] \delta_{\alpha\beta} \right\} \\
Q_{\alpha}^{*(\beta)} &= \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^3 \lambda^8 \left\{ \frac{2}{1-\nu} \left[ C_1 \left( B\delta_{\alpha\beta} - Ar_{,\alpha} r_{,\beta} \right) - \frac{CC}{2Z^2} \left( \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \left( 4C_4 - C_2 \right) \left[ \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \frac{1}{Z^2} + \frac{2}{1-\nu} C_5 \left[ BI\delta_{\alpha\beta} - AIr_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \right\} \\
Q_{\alpha}^{*(3)} &= -D^3(1-\nu)^2 \frac{\lambda^7}{Z} C_4 r_{,\alpha} \\
M_{\alpha\beta}^{*(i)} &= M_{\beta\alpha}^{*(i)} \tag{81}
\end{aligned}$$

Substituindo as Equações (81) nas Equações (78) determinamos o tensor  $T_{ij}(Q,P)$ , que representa as forças de superfície do estado gerado pela solução fundamental, cujas expressões são:

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\beta} &= - \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^3 2 \frac{\lambda^7}{Z} \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[ C_1 \left( \left( zK_1 + 2A \right) \left( r_{,\beta} n_{,\alpha} + r_{,\alpha} n_{,\beta} \right) + 2Ar_{,\alpha} n_{,\beta} - 2 \left( 4A + zK_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\alpha} n_{,\beta} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{CC}{Z^2} \left( 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\alpha} n_{,\beta} - r_{,\alpha} n_{,\beta} r_{,\beta} n_{,\alpha} - r_{,\alpha} n_{,\beta} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] + 2C_4 \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu} r_{,\alpha} n_{,\beta} + r_{,\beta} n_{,\alpha} + r_{,\alpha} n_{,\beta} \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\alpha} n_{,\beta} \right] + \\
&\quad \left. + \frac{1}{1-\nu} C_5 \left[ \left( -zI_1 + 2AI \right) \left( r_{,\beta} n_{,\alpha} + r_{,\alpha} n_{,\beta} \right) + 2AIr_{,\alpha} n_{,\beta} - 2 \left( 4AI - zI_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\alpha} n_{,\beta} \right] \right\} \\
T_{3\alpha} &= \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^3 2\lambda^6 \left\{ \left( 4C_4 - C_2 \right) \left[ n_{,\alpha} - 2r_{,\alpha} r_{,\alpha} n_{,\alpha} \right] \frac{1}{Z^2} - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} C_3 n_{,\alpha} - \right. \\
&\quad \left. - 2C_4 r_{,\alpha} r_{,\alpha} n_{,\alpha} - \frac{1}{1-\nu} C_4 \left[ 2(1+\nu) \ln z + 1 + 3\nu \right] n_{,\alpha} \right\} \\
T_{\alpha 3} &= \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^3 \lambda^8 \left\{ \frac{2}{1-\nu} \left[ C_1 \left( Bn_{,\alpha} - Ar_{,\alpha} r_{,\alpha} n_{,\alpha} \right) - \frac{CC}{2Z^2} \left( n_{,\alpha} - 2r_{,\alpha} r_{,\alpha} n_{,\alpha} \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \left( 4C_4 - C_2 \right) \left[ n_{,\alpha} - 2r_{,\alpha} r_{,\alpha} n_{,\alpha} \right] \frac{1}{Z^2} + \frac{2}{1-\nu} C_5 \left[ BIn_{,\alpha} - AIr_{,\alpha} r_{,\alpha} n_{,\alpha} \right] \right\} \\
T_{33} &= -D^3(1-\nu)^2 \frac{\lambda^7}{Z} C_4 r_{,\alpha} n_{,\alpha} \tag{82}
\end{aligned}$$

onde:



$$\Gamma_{,n} = \Gamma_{,\alpha} n_{\alpha} \quad (83)$$

Observamos que o tensor  $T_{ij}$  apresenta as singularidades  $\ln z$  e  $1/z$ .

### 3.4 - Deslocamentos e Esforços no Domínio

#### 3.4.1 - Deslocamentos

As Equações (B40) descrevem os deslocamentos em qualquer ponto  $P \equiv (\xi_1, \xi_2) \in \Omega$  com  $C_{ij} = \delta_{ij}$ :

$$u_i(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}(q,P) u_j(q) d\Gamma(q) = \int_{\Gamma} U_{ij}(q,P) t_j(q) d\Gamma(q) + \int_{\Omega} \left[ U_{i3}(Q,P) - MF U_{i\alpha,\alpha}(Q,P) \right] q(Q) d\Omega(Q) \quad (84)$$

Os deslocamentos  $u_i(P)$  são determinados em função dos  $u_i$ 's e  $t_i$ 's sobre o contorno, previamente determinados pelas Equações (58).

#### 3.4.2 - Esforços

Os esforços  $M_{\alpha\beta}$  e  $Q_{\alpha}$  são determinados mediante a substituição das Equações (84) nas Equações (31), com as respectivas derivadas agora em relação às coordenadas do ponto fonte P, sendo:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}(P)} = - \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}(Q)} \quad (85)$$

$$u_{i,\alpha}(P) = \int_{\Gamma} U_{ij,\alpha}(q,P) t_j(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} T_{ij,\alpha}(q,P) u_j(q) d\Gamma(q) + \int_{\Omega} \left[ U_{i3,\alpha}(Q,P) - MF U_{i\gamma,\gamma\alpha}(Q,P) \right] q(Q) d\Omega(Q) \quad (86)$$

pois as Equações (84) são uma representação do campo de deslocamentos em qualquer ponto  $P \in \Omega$ , sendo as derivadas interpretadas no sentido distributivo.

Resultam assim expressões da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta}(P) &= \int_{\Gamma} U_{\alpha\beta j}(q,P) t_j(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} T_{\alpha\beta j}(q,P) u_j(q) d\Gamma(q) + \\
 &+ \int_{\Omega} \left[ U_{\alpha\beta 3}(Q,P) - MF V_{\alpha\beta}(Q,P) \right] q(Q) d\Omega(Q) + MF q(P) \delta_{\alpha\beta} \\
 Q_{\alpha}(P) &= \int_{\Gamma} U_{\alpha 3 j}(q,P) t_j(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} T_{\alpha 3 j}(q,P) u_j(q) d\Gamma(q) + \\
 &+ \int_{\Omega} \left[ U_{\alpha 3 3}(Q,P) - MF V_{\alpha 3}(Q,P) \right] q(Q) d\Omega(Q) \tag{87}
 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 U_{\alpha\beta j} &= D \frac{1-\nu}{2} \left[ U_{\alpha j, \beta} + U_{\beta j, \alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} U_{\gamma j, \gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \\
 V_{\alpha\beta} &= D \frac{1-\nu}{2} \left[ U_{\alpha\delta, \delta\beta} + U_{\beta\delta, \delta\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} U_{\gamma\delta, \delta\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \\
 U_{\alpha 3 j} &= D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ U_{\alpha j} + U_{3 j, \alpha} \right] \\
 V_{\alpha 3} &= D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ U_{\alpha\delta, \delta} + U_{3\delta, \delta\alpha} \right] \tag{88}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\beta j} &= D \frac{1-\nu}{2} \left[ T_{\alpha j, \beta} + T_{\beta j, \alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} T_{\gamma j, \gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \\
 T_{\alpha 3 j} &= D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ T_{\alpha j} + T_{3 j, \alpha} \right] \tag{89}
 \end{aligned}$$

e, como podemos ver:

$$\begin{aligned}
 V_{\alpha\beta} &= U_{\alpha\beta\gamma, \gamma} \\
 V_{\alpha 3} &= U_{\alpha 3\gamma, \gamma} \tag{90}
 \end{aligned}$$

Observando a Equação (85), constatamos que as derivadas necessárias agora em questão equivalem àquelas anteriormente apresentadas nas Equações (80), porém com sinal invertido. Portanto, precisamos das derivadas segundas do tensor  $U_{ij}$  acima expressas, bem como das derivadas do tensor  $T_{ij}$ , obtidas por sua vez mediante as derivadas de  $M_{\alpha\beta}^{*(1)}$  e  $Q_{\alpha}^{*(1)}$ . Como já salientado, as derivadas agora em questão são em relação ao ponto P, exceção única sendo  $U_{\alpha\gamma, \gamma}$  em  $V_{\alpha 3}$ , que é em relação ao ponto Q (pois esta derivada vem do termo  $u_{\alpha}$  (Equações (84)), presente na expressão dos esforços cortantes  $Q_{\alpha}$  (Equações (31))). Assim, as derivadas segundas de  $U_{ij}$  resultam (em relação ao ponto P):

$$\begin{aligned}
U_{\alpha\beta,\gamma\theta} = & \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^2 2 \frac{\lambda^8}{z^2} \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[ C_1 \left( zK_1 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} - \left( z^2K_0 + 2zK_1 \right) r_{,\gamma} r_{,\theta} \delta_{\alpha\beta} + \right. \right. \right. \\
& + A \left( \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\theta} + \delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma} \right) - \left( zK_1 + 4A \right) \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) r_{,\theta} - \\
& \left. \left. - \left( 4A + zK_1 \right) \left( r_{,\alpha} r_{,\beta} \delta_{\gamma\theta} + r_{,\alpha} r_{,\gamma} \delta_{\beta\theta} + r_{,\beta} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\theta} \right) + \left( z^2K_0 + 8zK_1 + 24A \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\theta} \right] + \right. \\
& + \frac{CC}{z^2} \left[ \left( 4r_{,\alpha} r_{,\theta} - \delta_{\alpha\theta} \right) \delta_{\beta\gamma} + \left( 4r_{,\beta} r_{,\theta} - \delta_{\beta\theta} \right) \delta_{\alpha\gamma} + \left( 4r_{,\gamma} r_{,\theta} - \delta_{\gamma\theta} \right) \delta_{\alpha\beta} + \right. \\
& + 4 \left( r_{,\alpha} r_{,\beta} \delta_{\gamma\theta} + r_{,\alpha} r_{,\gamma} \delta_{\beta\theta} + r_{,\beta} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\theta} \right) - 24r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\theta} \left. \right] + C_4 \left[ \left( \delta_{\gamma\theta} - 2r_{,\gamma} r_{,\theta} \right) \delta_{\alpha\beta} + \right. \\
& + \left( \delta_{\beta\theta} - 2r_{,\beta} r_{,\theta} \right) \delta_{\alpha\gamma} + \left( \delta_{\alpha\theta} - 2r_{,\alpha} r_{,\theta} \right) \delta_{\beta\gamma} - 2 \left( r_{,\alpha} r_{,\beta} \delta_{\gamma\theta} + r_{,\alpha} r_{,\gamma} \delta_{\beta\theta} + r_{,\beta} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\theta} \right) + \\
& + 8r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\theta} \left. \right] + \frac{1}{1-\nu} C_5 \left[ -zI_1 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} - \left( z^2I_0 - 2zI_1 \right) r_{,\gamma} r_{,\theta} \delta_{\alpha\beta} + \right. \\
& + AI \left( \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\theta} + \delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma} \right) - \left( -zI_1 + 4AI \right) \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) r_{,\theta} - \\
& \left. \left. - \left( 4AI - zI_1 \right) \left( r_{,\alpha} r_{,\beta} \delta_{\gamma\theta} + r_{,\alpha} r_{,\gamma} \delta_{\beta\theta} + r_{,\beta} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\theta} \right) + \left( z^2I_0 - 8zI_1 + 24AI \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\theta} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\alpha 3, \beta \gamma} = & - \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^2 2 \frac{\lambda^7}{z} \left[ \frac{1}{z^2} (4C_4 - C_2) \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right) + \right. \\
& \left. + C_4 \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{33, \alpha\beta} = & - \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^2 \lambda^6 \left[ \frac{1}{z^2} \left( C_2 - 4 \frac{3-\nu}{1-\nu} C_4 \right) \left( \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right) + 2C_3 \delta_{\alpha\beta} + \right. \\
& \left. + C_4 \left( (2 \ln z + 1) \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right) \right]
\end{aligned} \tag{91}$$

As derivadas de  $M_{\alpha\beta}^{*(i)}$  e  $Q_{\alpha}^{*(i)}$  resultam:

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta,\theta}^{*(\gamma)} = & \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^3 2 \frac{\lambda^8}{z^2} \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[ C_1 \left[ \left( zK_1 + 2A \right) \left( \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\theta} + \delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma} \right) + 2A \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} - \right. \right. \right. \\
& - \left( z^2K_0 + 4zK_1 + 8A \right) \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} \right) r_{,\theta} - 2 \left( zK_1 + 4A \right) r_{,\gamma} r_{,\theta} \delta_{\alpha\beta} - \\
& \left. \left. - 2 \left( zK_1 + 4A \right) \left( r_{,\alpha} r_{,\beta} \delta_{\gamma\theta} + r_{,\alpha} r_{,\gamma} \delta_{\beta\theta} + r_{,\beta} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\theta} \right) + 2 \left( z^2K_0 + 8zK_1 + 24A \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\theta} \right] + \right. \\
& \left. + 2 \frac{CC}{z^2} \left[ \left( 4r_{,\alpha} r_{,\theta} - \delta_{\alpha\theta} \right) \delta_{\beta\gamma} + \left( 4r_{,\beta} r_{,\theta} - \delta_{\beta\theta} \right) \delta_{\alpha\gamma} + \left( 4r_{,\gamma} r_{,\theta} - \delta_{\gamma\theta} \right) \delta_{\alpha\beta} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4 \left( r_{,\alpha} r_{,\beta} \delta_{\gamma\theta} + r_{,\alpha} r_{,\gamma} \delta_{\beta\theta} + r_{,\beta} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\theta} \right) - 24 r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\theta} \Big] + \\
& + 2C_4 \left[ \left( \delta_{\alpha\theta} - 2r_{,\alpha} r_{,\theta} \right) \delta_{\beta\gamma} + \left( \delta_{\beta\theta} - 2r_{,\beta} r_{,\theta} \right) \delta_{\alpha\gamma} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left( \delta_{\gamma\theta} - 2r_{,\gamma} r_{,\theta} \right) \delta_{\alpha\beta} - \right. \\
& - 2 \left( r_{,\alpha} r_{,\beta} \delta_{\gamma\theta} + r_{,\alpha} r_{,\gamma} \delta_{\beta\theta} + r_{,\beta} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\theta} \right) + 8 r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\theta} \Big] + \\
& + \frac{1}{1-\nu} C_5 \left[ \left( -zI_1 + 2AI \right) \left( \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\theta} + \delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma} \right) + 2AI \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} - \right. \\
& - \left( z^2 I_0 - 4zI_1 + 8AI \right) \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} \right) r_{,\theta} - 2 \left( -zI_1 + 4AI \right) r_{,\gamma} r_{,\theta} \delta_{\alpha\beta} - \\
& \left. - 2 \left( -zI_1 + 4AI \right) \left( r_{,\alpha} r_{,\beta} \delta_{\gamma\theta} + r_{,\alpha} r_{,\gamma} \delta_{\beta\theta} + r_{,\beta} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\theta} \right) + 2 \left( z^2 I_0 - 8zI_1 + 24AI \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\theta} \right] \Big\} \\
M_{\alpha\beta,\gamma}^{*(3)} & = \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^3 4 \frac{\lambda^7}{z} \left[ \frac{1}{z^2} (4C_4 - C_2) \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right) + \right. \\
& \left. + C_4 \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + \frac{1+\nu}{1-\nu} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right) \right] \\
Q_{\alpha,\gamma}^{*(\beta)} & = \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^3 2 \frac{\lambda^9}{z} \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[ C_1 \left( zK_1 r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + A \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) - \right. \right. \right. \\
& - \left. \left. \left( 4A + zK_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right) + \frac{CC}{z^2} \left( 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} - r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} - r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} - r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] - \\
& - \frac{1}{z^2} (4C_4 - C_2) \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right) + \\
& \left. + \frac{1}{1-\nu} C_5 \left[ -zI_1 r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + AI \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) - \left( 4AI - zI_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right] \right\} \\
Q_{\alpha,\beta}^{*(3)} & = D^3 (1-\nu)^2 \frac{\lambda^8}{z^2} C_4 \left( \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right) \tag{92}
\end{aligned}$$

Então, pelas Equações (78) podemos calcular as derivadas de  $T_{ij}$ . Assim:

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\beta,\gamma} & = \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^3 2 \frac{\lambda^8}{z^2} \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[ C_1 \left[ \left( zK_1 + 2A \right) \left( \delta_{\alpha\beta} n_{,\gamma} + \delta_{\beta\gamma} n_{,\alpha} \right) + 2A \delta_{\alpha\gamma} n_{,\beta} - \right. \right. \right. \\
& - \left. \left. \left( z^2 K_0 + 4zK_1 + 8A \right) \left( r_{,\beta} n_{,\alpha} + r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} \right) r_{,\gamma} - 2 \left( zK_1 + 4A \right) r_{,\alpha} r_{,\gamma} n_{,\beta} - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \left( zK_1 + 4A \right) \left( r_{,\beta} r_{,\alpha} n_{,\gamma} + r_{,\alpha} r_{,\beta} n_{,\gamma} + r_{,\alpha} r_{,\beta} n_{,\gamma} \right) + 2 \left( z^2 K_0 + 8zK_1 + 24A \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} n_{,\alpha} \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\frac{CC}{Z^2} \left[ \left( 4r_{,\beta} r_{,\gamma} - \delta_{\beta\gamma} \right) n_{\alpha} + \left( 4r_{,\gamma} r_{,n} - n_{\gamma} \right) \delta_{\alpha\beta} + \left( 4r_{,\alpha} r_{,\gamma} - \delta_{\alpha\gamma} \right) n_{\beta} + \right. \\
& \left. +4 \left( r_{,\beta} r_{,n} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\alpha} r_{,\beta} n_{\gamma} + r_{,\alpha} r_{,n} \delta_{\beta\gamma} \right) - 24r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} n \right] + \\
& +2C_4 \left[ \left( \delta_{\beta\gamma} - 2r_{,\beta} r_{,\gamma} \right) n_{\alpha} + \left( n_{\gamma} - 2r_{,\gamma} r_{,n} \right) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left( \delta_{\alpha\gamma} - 2r_{,\alpha} r_{,\gamma} \right) n_{\beta} - \right. \\
& \left. -2 \left( r_{,\beta} r_{,n} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\alpha} r_{,\beta} n_{\gamma} + r_{,\alpha} r_{,n} \delta_{\beta\gamma} \right) + 8r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} n \right] + \\
& +\frac{1}{1-\nu} C_5 \left[ \left( -zI_1 + 2AI \right) \left( \delta_{\alpha\beta} n_{\gamma} + \delta_{\beta\gamma} n_{\alpha} \right) + 2AI \delta_{\alpha\gamma} n_{\beta} - \left( z^2 I_0 - 4zI_1 + 8AI \right) \left( r_{,\beta} n_{\alpha} + r_{,n} \delta_{\alpha\beta} \right) r_{,\gamma} - \right. \\
& \left. -2 \left( -zI_1 + 4AI \right) r_{,\alpha} r_{,\gamma} n_{\beta} - 2 \left( -zI_1 + 4AI \right) \left( r_{,\beta} r_{,n} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\alpha} r_{,\beta} n_{\gamma} + r_{,\alpha} r_{,n} \delta_{\beta\gamma} \right) + \right. \\
& \left. +2 \left( z^2 I_0 - 8zI_1 + 24AI \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} n \right] \Big\} \\
T_{3\alpha,\beta} & = \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^3 4 \frac{\lambda^7}{Z} \left[ \frac{1}{Z^2} (4C_4 - C_2) \left( r_{,\alpha} n_{\beta} + r_{,\beta} n_{\alpha} + r_{,n} \delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} \right) + \right. \\
& \left. + C_4 \left( r_{,\alpha} n_{\beta} + r_{,n} \delta_{\alpha\beta} + \frac{1+\nu}{1-\nu} r_{,\beta} n_{\alpha} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} \right) \right] \\
T_{\alpha 3,\beta} & = \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^3 2 \frac{\lambda^9}{Z} \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[ C_1 \left( zK_1 r_{,\beta} n_{\alpha} + A \left( r_{,n} \delta_{\alpha\beta} + r_{,\alpha} n_{\beta} + r_{,\beta} n_{\alpha} \right) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( 4A + zK_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} \right) + \frac{CC}{Z^2} \left( 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} - r_{,\alpha} n_{\beta} - r_{,\beta} n_{\alpha} - r_{,n} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] - \\
& \left. - \frac{1}{Z^2} (4C_4 - C_2) \left( r_{,\alpha} n_{\beta} + r_{,\beta} n_{\alpha} + r_{,n} \delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{1-\nu} C_5 \left[ -zI_1 r_{,\beta} n_{\alpha} + AI \left( r_{,\alpha} n_{\beta} + r_{,\beta} n_{\alpha} + r_{,n} \delta_{\alpha\beta} \right) - \left( 4AI - zI_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} \right] \right\} \\
T_{33,\alpha} & = D^3 (1-\nu)^2 \frac{\lambda^8}{Z^2} C_4 \left( n_{\alpha} - 2r_{,\alpha} r_{,n} \right) \tag{93}
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos determinar os tensores internos  $U_{\alpha 1j}$ ,  $T_{\alpha 1j}$  e  $V_{\alpha 1}$ . Assim, os tensores internos  $U_{\alpha 1j}$  são:

$$U_{\alpha\beta\gamma} = \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^3 2 \frac{\lambda^7}{Z} \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[ C_1 \left( \left( zK_1 + 2A \right) \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} \right) + 2Ar_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -2\left(4A+zK_1\right)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma} \left.+2\frac{CC}{Z^2}\left(4r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}r_{,\alpha}\delta_{\beta\gamma}r_{,\beta}\delta_{\alpha\gamma}r_{,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right)\right]+ \\
& +2C_4\left(r_{,\alpha}\delta_{\beta\gamma}+r_{,\beta}\delta_{\alpha\gamma}+\frac{1+\nu}{1-\nu}r_{,\gamma}\delta_{\alpha\beta}-2r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}\right)+ \\
& +\frac{1}{1-\nu}C_5\left[\left(-ZI_1+2AI\right)\left(r_{,\alpha}\delta_{\beta\gamma}+r_{,\beta}\delta_{\alpha\gamma}\right)+2AIr_{,\gamma}\delta_{\alpha\beta}-2\left(4AI-ZI_1\right)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}\right]\} \\
U_{\alpha\beta 3} & = \left[D\frac{1-\nu}{2}\right]^3 2\lambda^6\left[\frac{1}{Z^2}\left(4C_4-C_2\right)\left(\delta_{\alpha\beta}-2r_{,\alpha}r_{,\beta}\right)-2\frac{1+\nu}{1-\nu}C_3\delta_{\alpha\beta}-2C_4r_{,\alpha}r_{,\beta}-\right. \\
& \left.-\frac{1}{1-\nu}C_4\left(2(1+\nu)\ln z+1+3\nu\right)\delta_{\alpha\beta}\right] \\
U_{\alpha 3\beta} & = \left[D\frac{1-\nu}{2}\right]^3 \lambda^8\left\{\frac{2}{1-\nu}\left[C_1\left(B\delta_{\alpha\beta}-Ar_{,\alpha}r_{,\beta}\right)-\frac{CC}{2Z^2}\left(\delta_{\alpha\beta}-2r_{,\alpha}r_{,\beta}\right)\right]-\right. \\
& \left.-\frac{1}{Z^2}\left(4C_4-C_2\right)\left(\delta_{\alpha\beta}-2r_{,\alpha}r_{,\beta}\right)+\frac{2}{1-\nu}C_5\left(BI\delta_{\alpha\beta}-AIr_{,\alpha}r_{,\beta}\right)\right\} \\
U_{\alpha 33} & = D^3(1-\nu)^2 \frac{\lambda^7}{Z} C_{4,\alpha} \tag{94}
\end{aligned}$$

Os tensores internos  $T_{\alpha ij}$  resultam:

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\beta\gamma} & = \left[D\frac{1-\nu}{2}\right]^4 2\frac{\lambda^8}{Z^2}\left\{\frac{1}{1-\nu}\left[C_1\left(2\left(zK_1+2A\right)\left(n_{\alpha}\delta_{\beta\gamma}+n_{\beta}\delta_{\alpha\gamma}\right)+4An_{\gamma}\delta_{\alpha\beta}-\right.\right.\right. \\
& \left.\left.-\left(z^2K_0+6zK_1+16A\right)\left(r_{,\alpha}r_{,\gamma}n_{\beta}+r_{,\beta}r_{,\gamma}n_{\alpha}+r_{,\alpha}r_{,\beta}n_{\gamma}+r_{,\alpha}n_{\beta}\delta_{\alpha\gamma}+r_{,\beta}n_{\alpha}\delta_{\alpha\gamma}\right)\right]-\right. \\
& \left.-4\left(zK_1+4A\right)\left(r_{,\alpha}r_{,\beta}n_{\gamma}+r_{,\gamma}r_{,\beta}n_{\alpha}\right)+4\left(z^2K_0+8zK_1+24A\right)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}n_{\alpha}\right]+ \\
& +4\frac{CC}{Z^2}\left[4\left(r_{,\alpha}r_{,\gamma}n_{\beta}+r_{,\beta}r_{,\gamma}n_{\alpha}+r_{,\alpha}n_{\beta}\delta_{\alpha\gamma}+r_{,\beta}n_{\alpha}\delta_{\alpha\gamma}\right)+4\left(2r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}+r_{,\gamma}r_{,\beta}n_{\alpha}\delta_{\alpha\beta}\right)-\right. \\
& \left.-\left(n_{\alpha}\delta_{\beta\gamma}+n_{\beta}\delta_{\alpha\gamma}+n_{\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right)-24r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}n_{\alpha}\right]+4C_4\left[n_{\alpha}\delta_{\beta\gamma}+n_{\beta}\delta_{\alpha\gamma}+\frac{1+3\nu}{1-\nu}n_{\gamma}\delta_{\alpha\beta}-\right. \\
& \left.-2\left(r_{,\alpha}r_{,\gamma}n_{\beta}+r_{,\beta}r_{,\gamma}n_{\alpha}+r_{,\alpha}n_{\beta}\delta_{\alpha\gamma}+r_{,\beta}n_{\alpha}\delta_{\alpha\gamma}\right)-2\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(r_{,\alpha}r_{,\beta}n_{\gamma}+r_{,\gamma}r_{,\beta}n_{\alpha}\delta_{\alpha\beta}\right)+\right. \\
& \left.+8r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}n_{\alpha}\right]+\frac{1}{1-\nu}C_5\left[2\left(-ZI_1+2AI\right)\left(n_{\alpha}\delta_{\beta\gamma}+n_{\beta}\delta_{\alpha\gamma}\right)+4AI n_{\gamma}\delta_{\alpha\beta}-\right. \\
& \left.-\left(z^2I_0-6zI_1+16AI\right)\left(r_{,\alpha}r_{,\gamma}n_{\beta}+r_{,\beta}r_{,\gamma}n_{\alpha}+r_{,\alpha}n_{\beta}\delta_{\alpha\gamma}+r_{,\beta}n_{\alpha}\delta_{\alpha\gamma}\right)-\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4\left(-zI_1+4AI\right)\left(r_{,\alpha}r_{,\beta}n_{,\gamma}+r_{,\gamma}r_{,\alpha}\delta_{\alpha\beta}\right)+4\left(z^2I_0-8zI_1+24AI\right)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}r_{,\alpha}\left.\right\} \\
T_{\alpha 3\beta} = & -\left[D\frac{1-\nu}{2}\right]^4 2\frac{\lambda^9}{z}\left[\frac{1}{1-\nu}\left[C_1\left(2Ar_{,\alpha}n_{,\beta}+\left(zK_1+2A\right)\left(r_{,\beta}n_{,\alpha}+r_{,\alpha}n_{,\beta}\right)\delta_{\alpha\beta}\right)-\right.\right. \\
& \left.\left.-2\left(4A+zK_1\right)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\alpha}\right)+2\frac{CC}{z^2}\left(4r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\alpha}n_{,\alpha}n_{,\beta}r_{,\beta}n_{,\alpha}n_{,\alpha}\delta_{\alpha\beta}\right)\right]- \\
& -\frac{2}{z^2}\left(4C_4-C_2\right)\left(r_{,\alpha}n_{,\beta}+r_{,\beta}n_{,\alpha}+r_{,\alpha}n_{,\beta}\delta_{\alpha\beta}-4r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\alpha}\right)+ \\
& \left.+\frac{1}{1-\nu}C_5\left[2AIr_{,\alpha}n_{,\beta}+\left(-zI_1+2AI\right)\left(r_{,\beta}n_{,\alpha}+r_{,\alpha}n_{,\beta}\right)\delta_{\alpha\beta}\right]-2\left(4AI-zI_1\right)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\alpha}\right\} \\
T_{\alpha\beta 3} = & \left[D\frac{1-\nu}{2}\right]^4 2\frac{\lambda^9}{z}\left[\frac{1}{1-\nu}\left[C_1\left(\left(zK_1+2A\right)\left(r_{,\alpha}n_{,\beta}+r_{,\beta}n_{,\alpha}\right)+2Ar_{,\alpha}n_{,\beta}\delta_{\alpha\beta}-\right.\right.\right. \\
& \left.\left.-2\left(4A+zK_1\right)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\alpha}\right)+2\frac{CC}{z^2}\left(4r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\alpha}n_{,\alpha}n_{,\beta}r_{,\beta}n_{,\alpha}n_{,\alpha}\delta_{\alpha\beta}\right)\right]- \\
& -\frac{2}{z^2}\left(4C_4-C_2\right)\left(r_{,\alpha}n_{,\beta}+r_{,\beta}n_{,\alpha}+r_{,\alpha}n_{,\beta}\delta_{\alpha\beta}-4r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\alpha}\right)+ \\
& \left.+\frac{1}{1-\nu}C_5\left[\left(-zI_1+2AI\right)\left(r_{,\alpha}n_{,\beta}+r_{,\beta}n_{,\alpha}\right)+2AIr_{,\alpha}n_{,\beta}\delta_{\alpha\beta}-2\left(4AI-zI_1\right)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\alpha}\right]\right\} \\
T_{\alpha 33} = & D^4\frac{(1-\nu)^3}{16}\lambda^{10}\left[2C_1\left(Bn_{,\alpha}-Ar_{,\alpha}r_{,\alpha}\right)-\frac{CC}{z^2}\left(n_{,\alpha}-2r_{,\alpha}r_{,\alpha}\right)+\right. \\
& \left.+\frac{1}{z^2}\left(4(1+\nu)C_4+(1-\nu)C_2\right)\left(n_{,\alpha}-2r_{,\alpha}r_{,\alpha}\right)+2C_5\left(BIn_{,\alpha}-AIr_{,\alpha}r_{,\alpha}\right)\right] \tag{95}
\end{aligned}$$

E, por derradeiro, os tensores internos  $V_{\alpha i}$  são:

$$\begin{aligned}
V_{\alpha\beta} & = D^3(1-\nu)^3 \frac{\lambda^8}{z^2} C_4 \left( \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha}r_{,\beta} \right) \\
V_{\alpha 3} & = 0 \tag{96}
\end{aligned}$$

As Equações (87) podem ser escritas numa forma mais adequada. Para isto definimos:

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha\beta} & = M_{\alpha\beta} \\
\tau_{\alpha 3} & = Q_{\alpha} \tag{97}
\end{aligned}$$

resultando:

$$\tau_{\alpha 1} = \int_{\Gamma} U_{\alpha 1 j} t_j d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{\alpha 1 j} u_j d\Gamma + \int_{\Omega} \left[ U_{\alpha 1 3} - MF V_{\alpha 1} \right] q d\Omega + MF q \delta_{\alpha 1} \quad (98)$$

### 3.5 - Conclusão

Aplicando o método de Hörmander determinamos a solução fundamental geral do operador escalar, consistindo os demais cálculos apenas de manipulações algébricas. Esta solução é composta de funções essenciais e funções livres.

Os núcleos dos operadores presentes na formulação integral do problema, descrevendo a correlação funcional entre as variáveis de placa sobre o contorno, bem como no domínio da região em estudo, foram desenvolvidos na sua forma mais geral.

A forma simplificada do tensor deslocamento fundamental resultou numa similaridade do mesmo com aquele correspondente ao modelo clássico de placa.



## CAPÍTULO 4

### O MÉTODO DIRETO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO AOS MODELOS DE PLACA DE REISSNER E MINDLIN

#### 4.1 - Introdução

A formulação integral especialmente desenvolvida no capítulo anterior está posta de forma a ser abordada numericamente pelo método dos elementos de contorno.

Para a discretização necessária são previstas funções de interpolação constantes, lineares e quadráticas, tanto para as variáveis como para a geometria, ou seja, serão usados elementos isoparamétricos de ordem zero, um e dois.

As integrais sobre cada elemento, cujo processamento é um dos passos necessários para a determinação do sistema de equações algébricas, são efetuadas por quadratura gaussiana. Caso as mesmas possuam funções singulares, antes do processo de integração é feita uma transformação regularizadora sobre as respectivas funções.

#### 4.2 - O Método dos Elementos de Contorno

A redução das equações integrais a um sistema de equações algébricas lineares é geralmente efetuada mediante os seguintes passos, que são a essência do método dos elementos de contorno (BREBBIA, TELLES e WROBEL [8]):

- a) Discretização do contorno  $\Gamma$  em uma série de elementos  $\Gamma_n$ , tal que
$$\bigcup_{n=1}^N \Gamma_n = \Gamma, \text{ com } \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \text{ para } i \neq j, \text{ onde } N \text{ é o número de elementos em que } \Gamma \text{ é dividido. Os elementos } \Gamma_n \text{ são definidos pelas respectivas coordenadas nodais e uma especificada variação da geometria do mesmo, sendo estendida no caso presente esta mesma variação aos deslocamentos e às trações sobre o referido elemento. Processo similar se aplica ao domínio } \Omega, \text{ sendo neste caso } \bigcup_{r=1}^R \Omega_r = \Omega, \text{ com } \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ para } i \neq j, \text{ onde } R \text{ é o número de "elementos" em que } \Omega \text{ é dividido, não havendo no entanto nenhuma incógnita sobre os mesmos.}$$
- b) Usando o método da colocação, ou seja, aplicando as equações discreti-

zadas em cada um dos  $s$  pontos nodais  $p$  do contorno, e computando as integrais sobre cada elemento, geralmente por quadratura numérica, resulta um sistema de  $3 \times s$  equações algébricas lineares envolvendo um conjunto de  $3 \times s$  deslocamentos e  $3 \times s$  trações.

- c) Imposição das condições de contorno e subsequente redução do sistema de equações envolvendo  $3 \times s$  valores nodais de deslocamentos e trações sobre o contorno. Nesta forma, o sistema pode ser resolvido por métodos adequados, seja eliminação gaussiana ou outro método, para a determinação das incógnitas envolvidas.
- d) Deslocamentos e esforços em pontos internos podem então ser determinados, se necessário, em função somente dos valores nodais sobre o contorno.

#### 4.3 - Processo de Discretização

Para a discretização do problema, o contorno  $\Gamma$  é aproximado por um conjunto  $\Gamma_n$  de elementos. As coordenadas  $x_\alpha$  de pontos situados sobre cada elemento  $\Gamma_n$  são expressas em termos das coordenadas nodais  $x_\alpha^j$  usadas para definir o elemento, com as funções de interpolação  $\phi_j$  especificando a variação geométrica adotada para o elemento. Então:

$$x_\alpha = \phi_j x_\alpha^j \quad (99)$$

que pode ser expressa matricialmente:

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\psi}^T \underset{\sim}{x}^j \quad (100)$$

e, de acordo com a definição dos elementos isoparamétricos:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\psi}^T \underset{\sim}{u}^j \quad (101)$$

$$\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{\psi}^T \underset{\sim}{t}^j \quad (102)$$

onde  $j$  é o número de pontos nodais necessários para definir o elemento, com  $u_i^j$  e  $t_i^j$  sendo os valores nodais de  $u$  e  $t$  na direção  $i$  do nó  $j$ .

As funções de interpolação previstas na implementação numérica são de ordem zero, um e dois (elemento constante, linear e quadrático), Figura 4, sendo dadas respectivamente por:

$$\underset{\sim}{\phi}^T = \left\{ 1 \right\} \quad (103)$$

$$\underset{\sim}{\phi}^T = \frac{1}{2} \left\{ (1-\eta) \quad (1+\eta) \right\} \quad (104)$$

$$\underset{\sim}{\phi}^T = \frac{1}{2} \left\{ \eta(\eta-1) \quad 2(1-\eta^2) \quad \eta(\eta+1) \right\} \quad (105)$$

correspondentes a  $j = 1, 2$  e  $3$ , nesta ordem. Os elementos isoparamétricos são usados sem restrição, a não ser quando se trata de elemento constante, sendo neste caso usada a interpolação linear para as coordenadas.

A coordenada adimensional  $\eta$  é determinada por:

$$\eta = \frac{2}{l} y \quad (106)$$

onde  $l$  é o comprimento do elemento em consideração.

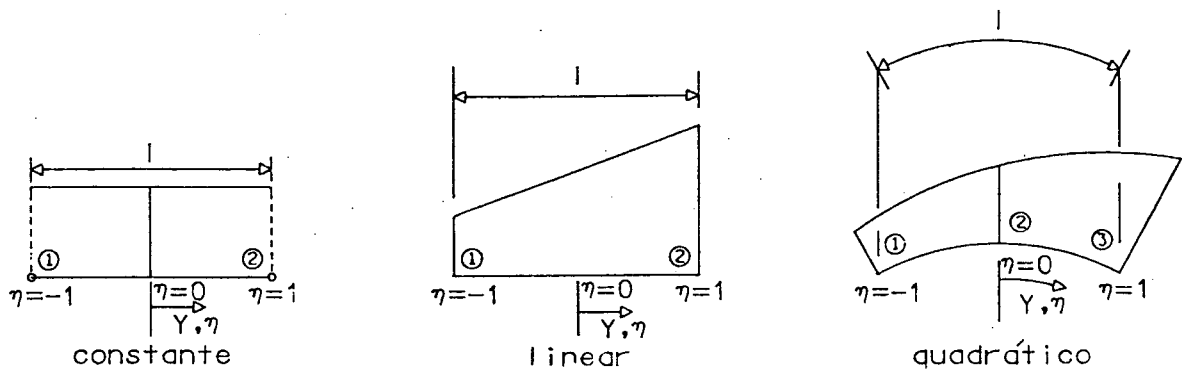


Figura 4 - Elementos de Contorno Utilizados

As matrizes expressas nas Equações (100)–(102), cujos elementos são as funções de interpolação dadas nas Equações (103)–(105) são expressas por:

$$\underset{\sim}{\psi}^T = \left\{ \begin{array}{c} \phi^T \\ \sim \\ \phi^T \\ \sim \\ \phi^T \\ \sim \end{array} \right\} \quad (107)$$

devendo-se eliminar a terceira submatriz quando interpolando as coordenadas.

A discretização do domínio  $\Omega$  é feita de modo similar ao contorno  $\Gamma$ , sendo as funções de interpolação dadas por (Figura 5):

$$\underset{\sim}{\phi} = \left\{ 1 \right\} \quad (108)$$

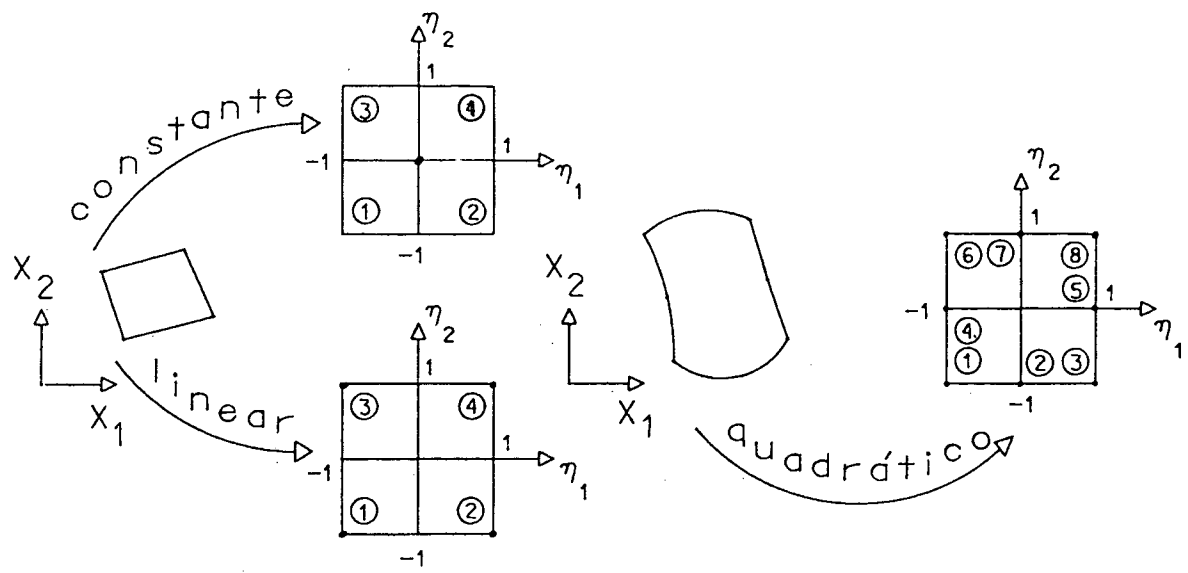


Figura 5 - Elementos de Domínio Utilizados

$$\phi \sim \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1-\eta_1)(1-\eta_2) \\ (1+\eta_1)(1-\eta_2) \\ (1-\eta_1)(1+\eta_2) \\ (1+\eta_1)(1+\eta_2) \end{Bmatrix} \tag{109}$$

$$\phi \sim \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1-\eta_1)(1-\eta_2)(-\eta_1-\eta_2-1) \\ 2(1-\eta_1^2)(1-\eta_2) \\ (1+\eta_1)(1-\eta_2)(\eta_1-\eta_2-1) \\ 2(1-\eta_1)(1-\eta_2^2) \\ 2(1+\eta_1)(1-\eta_2^2) \\ (1-\eta_1)(1+\eta_2)(-\eta_1+\eta_2-1) \\ 2(1-\eta_1^2)(1+\eta_2) \\ (1+\eta_1)(1+\eta_2)(\eta_1+\eta_2-1) \end{Bmatrix} \tag{110}$$

j = 1, 4 e 8, para elementos de domínio constante, linear e quadrático, respectivamente.

As coordenadas adimensionais  $\eta_\alpha$  são dadas por:

$$\eta_\omega = \frac{2}{l_\omega} y_\omega \tag{111}$$

não valendo a convenção do somatório, de acordo com o expresso no último parágrafo do item 2.1.

Para o cálculo das integrais é necessário expressar  $d\Gamma$  e  $d\Omega$  em termos das coordenadas adimensionais ( $\eta$  para elemento unidimensional e  $\eta_\alpha$  para elemento bidimensional), o que é feito pelo jacobiano da transformação, sendo  $|G_n|$  o jacobiano para

um elemento de contorno  $\Gamma_n$  e  $|G_r|$  o correspondente jacobiano para um elemento de domínio  $\Omega_r$ , ou seja:

$$d\Gamma_n = |G_n| d\eta \tag{112}$$

$$d\Omega_r = |G_r| d\eta_1 d\eta_2 \tag{113}$$

O jacobiano é o determinante da matriz de transformação do sistema global  $(x_1, x_2)$  para o sistema local  $(\eta_1, \eta_2)$ , Figura 6.

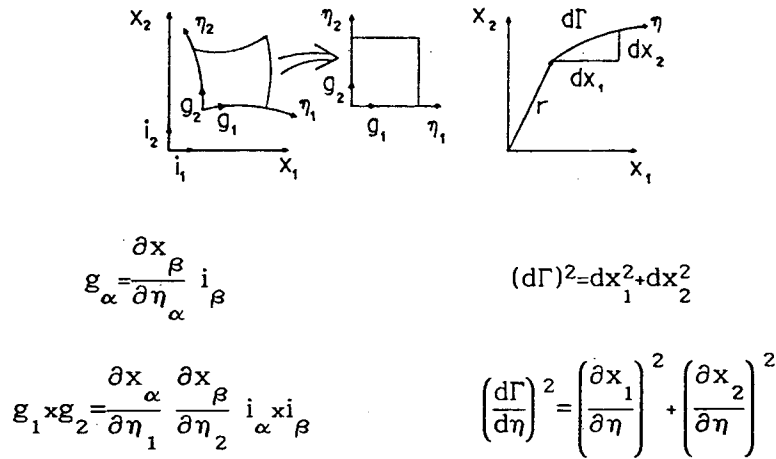


Figura 6 - Sistemas de Coordenadas Global e Local

O jacobiano da transformação é calculado mediante a relação entre os elementos de linha dos sistemas global e local (BANERJEE e BUTTERFIELD [11]):

$$dx_{\alpha} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \eta_{\beta}} d\eta_{\beta} \tag{114}$$

Podemos então determinar os jacobianos:

$$|G_n| = \sqrt{\frac{dx_{\alpha}}{d\eta} \frac{dx_{\alpha}}{d\eta}} \tag{115}$$

$$|G_r| = \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} \tag{116}$$

#### 4.4 - Discretização para Pontos sobre o Contorno

No apêndice B, mediante a aplicação do método dos resíduos ponderados, obtivemos um conjunto de três equações integrais, para cada ponto (Equações (B40)):

$$\begin{aligned}
C_{1j}(p)u_j(p) + \int_{\Gamma} T_{1j}(q,p)u_j(q)d\Gamma(q) &= \int_{\Gamma} U_{1j}(q,p)t_j(q)d\Gamma(q) + \\
+ \int_{\Omega} \left[ U_{13}(Q,p) - MF U_{1\alpha,\alpha}(Q,p) \right] q(Q)d\Omega(Q) & \quad (117)
\end{aligned}$$

que, expressa em notação matricial, fornece (Equações (B41)):

$$\begin{aligned}
C(p)u(p) + \int_{\Gamma} T(q,p)u(q)d\Gamma(q) &= \int_{\Gamma} U(q,p)t(q)d\Gamma(q) + \\
+ \int_{\Omega} \left[ U(Q,p) - MF \bar{U}(Q,p) \right] q(Q)d\Omega(Q) & \quad (118)
\end{aligned}$$

sendo p e q pontos restritos ao contorno  $\Gamma$ . Da Equação (B39) temos:

$$\bar{U} \approx \begin{bmatrix} U_{12,2} & U_{11,1} & U_{11,1} + U_{12,2} \\ U_{22,2} & U_{21,1} & U_{21,1} + U_{22,2} \\ U_{32,2} & U_{31,1} & U_{31,1} + U_{32,2} \end{bmatrix} \quad (119)$$

As variáveis  $u_i$  e  $t_i$  expressas nas Equações (101) e (102) foram implementadas numericamente na seguinte forma, válida para um elemento de contorno quadrático:

$$u \approx \left\{ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \right\}^T \quad (120)$$

$$t \approx \left\{ t_1 \quad t_2 \quad t_3 \right\}^T \quad (121)$$

$$\psi^T \approx \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \quad \phi_1 \\ \phi_1 \quad \phi_1 \\ \vdots \quad \vdots \\ \phi_2 \quad \phi_2 \\ \phi_2 \quad \phi_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ \phi_3 \quad \phi_3 \\ \phi_3 \quad \phi_3 \\ \vdots \quad \vdots \end{array} \right\} \quad (122)$$

$$u^j \approx \left\{ \begin{array}{c} u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \\ u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \\ u_1^3 \quad u_2^3 \quad u_3^3 \end{array} \right\}^T \quad (123)$$

$$t^j \approx \left\{ \begin{array}{c} t_1^1 \quad t_2^1 \quad t_3^1 \\ t_1^2 \quad t_2^2 \quad t_3^2 \\ t_1^3 \quad t_2^3 \quad t_3^3 \end{array} \right\}^T \quad (124)$$

As expressões válidas para elemento constante e linear correspondem às primeiras e segundas submatrizes das Equações (122)-(124), respectivamente.

Temos também:

$$\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{\psi}^T \underset{\sim}{q}^J \quad (125)$$

onde  $q_i^j$  são as forças externas aplicadas nos nós  $j$  nas direções  $i$ , com  $j = 1, 4$  e  $8$ , para elemento de domínio constante, linear e quadrático, respectivamente. Convém notar que:

$$\underset{\sim}{q} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & q \end{matrix} \right\}^T \quad (126)$$

$$\underset{\sim}{\psi}^T = \left\{ \begin{matrix} \phi_1 & & & \phi_4 & & & \phi_8 \\ & \phi_1 & & & & & \\ & & \dots & & & & \\ & & & \phi_4 & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & & \phi_8 \\ & & \phi_1 & & \phi_4 & & \\ & & & & & & \phi_8 \end{matrix} \right\} \quad (127)$$

$$\underset{\sim}{q}^J = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & q^1 & \dots & 0 & 0 & q^4 & \dots & 0 & 0 & q^8 \end{matrix} \right\}^T \quad (128)$$

A distinção entre as Equações (122) e (127) fica clara no contexto em que as mesmas são usadas.

Assim, na forma discretizada, as Equações (117) podem ser escritas:

$$\begin{aligned} C_{ik} \psi_{ik} u_I^j(p) + \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} T_{ik} \psi_{ik} d\Gamma_n \right\} u_I^j(q) &= \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} U_{ik} \psi_{ik} d\Gamma_n \right\} t_I^j(q) + \\ &+ \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} [U_{ik} - MF \bar{U}_{ik}] \psi_{ik} d\Omega_r \right\} q_I^j(Q) \end{aligned} \quad (129)$$

ou, expresso em notação matricial (Equações (118)):

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\psi}^T \underset{\sim}{u}^j(p) + \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \underset{\sim}{T} \underset{\sim}{\psi}^T d\Gamma_n \right\} \underset{\sim}{u}^j(q) &= \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \underset{\sim}{U} \underset{\sim}{\psi}^T d\Gamma_n \right\} \underset{\sim}{t}^j(q) + \\ &+ \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} \left[ \underset{\sim}{U} - MF \underset{\sim}{\bar{U}} \right] \underset{\sim}{\psi}^T d\Omega_r \right\} \underset{\sim}{q}^j(Q) \end{aligned} \quad (130)$$

sendo que os índices 'i' e 'j' (este último será usado a seguir) variam de 1 até 3 vezes o número de nós do elemento (de contorno ou domínio).

As integrais acima, devido à dificuldade de serem integradas analiticamente, são normalmente calculadas por integração numérica. Estas integrais relacionam

o nó  $i$  (ponto  $p$ ) com os elementos de contorno  $n$  (pontos  $q$ ) ou elementos de domínio  $r$  (pontos  $Q$ ) sobre os quais a mesma é aplicada.

A Equação (130) associa seis quantidades a cada ponto nodal sobre o contorno, das quais três são determinadas pelas condições de contorno, sendo as restantes incógnitas.

Colocando a Equação (130) em cada um dos  $s$  pontos nodais sobre o contorno, obtemos um sistema linear de  $3 \times s$  equações a  $3 \times s$  incógnitas, no caso de contorno sem vértices. Quando houver descontinuidade nas trações (vértices) é usada a técnica do nó duplo.

Para facilitar a inclusão das condições de contorno no sistema de equações (130), os vetores de valores nodais  $\tilde{u}^j$  e  $\tilde{t}^j$  são referenciados às coordenadas locais  $n$  e  $s$  (Figura 1). Seja  $R$  a matriz de transformação do sistema global para o local, aplicada nos pontos nodais  $p_f$  e  $q_c$ . O sistema de equações (129) pode então ser escrito (SILVA [10], WATSON [39]):

$$\begin{aligned}
 & R_{ai}(p_f) C_{ak}(p_f) \psi_{jk}(p_f) R_{JI}(p_f) u_I^j(p_f) + \\
 & + R_{ai}(p_f) \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} T_{ak}(q, p_f) \psi_{jk}(q) d\Gamma_n(q) \right\} R_{JI}(q_c) u_I^j(q_c) = \\
 & = R_{ai}(p_f) \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} U_{ak}(q, p_f) \psi_{jk}(q) d\Gamma_n(q) \right\} R_{JI}(q_c) t_I^j(q_c) + \\
 & + R_{ai}(p_f) \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} [U_{ak}(Q, p_f) - MF \bar{U}_{ak}(Q, p_f)] \psi_{Ik}(Q) d\Omega_r(Q) \right\} q_I^j(Q_c) \quad (131)
 \end{aligned}$$

ou, expresso matricialmente (Equações (130)):

$$\begin{aligned}
 & \underset{\approx}{R^T} \underset{\approx}{C} \underset{\approx}{\psi^T} \underset{\approx}{R} \underset{\approx}{u}^j(p_f) + \underset{\approx}{R^T}(p_f) \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \underset{\approx}{T} \underset{\approx}{\psi^T} d\Gamma_n \right\} \underset{\approx}{R} \underset{\approx}{u}^j(q_c) = \\
 & = \underset{\approx}{R^T}(p_f) \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \underset{\approx}{U} \underset{\approx}{\psi^T} d\Gamma_n \right\} \underset{\approx}{R} \underset{\approx}{t}^j(q_c) + \\
 & + \underset{\approx}{R^T}(p_f) \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} \left[ \underset{\approx}{U} - MF \underset{\approx}{\bar{U}} \right] \underset{\approx}{\psi^T} d\Omega_r \right\} \underset{\approx}{q}^j(Q_c) \quad (132)
 \end{aligned}$$



onde:

$$\underset{\sim}{u}'^J(q_c) = \left\{ \psi_n^J(q_c) \quad \psi_s^J(q_c) \quad w^J(q_c) \right\}^T \quad (133)$$

$$\underset{\sim}{t}'^J(q_c) = \left\{ M_n^J(q_c) \quad M_{ns}^J(q_c) \quad Q_n^J(q_c) \right\}^T \quad (134)$$

como se nota, são as variáveis de placa sobre o contorno (ver Equações (8) e (A2)), referenciadas no sistema local.

Construímos agora um vetor para os deslocamentos, um outro para as trações, e também um para o carregamento externo, sobre cada ponto nodal (sendo  $\psi_n^J = u_1^J$ ,  $\psi_s^J = u_2^J$  e  $w^J = u_3^J$ ):

$$\underset{\sim}{U} = \left\{ u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad \dots \quad u_1^s \quad u_2^s \quad u_3^s \right\} \quad (135)$$

$$\underset{\sim}{T} = \left\{ t_1^1 \quad t_2^1 \quad t_3^1 \quad \dots \quad t_1^s \quad t_2^s \quad t_3^s \right\} \quad (136)$$

$$\underset{\sim}{Q} = \left\{ 0 \quad 0 \quad q^1 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad q^{nd} \right\} \quad (137)$$

onde  $s$  é o número de nós sobre o contorno, e  $nd$  o número de nós no domínio.

De acordo com BREBBIA [7], adotamos a seguinte convenção, lidando com as equações na forma matricial (Equações (132)) e substituindo os diferenciais respectivos pelas Equações (112) e (113):

$$\underset{\approx}{\hat{h}} = \underset{\approx}{R^T}(p_f) \left\{ \int_{-1}^1 \underset{\approx}{T} \underset{\approx}{\psi^T} |G_n| d\eta \right\} \underset{\approx}{R}(q_c) \quad (138)$$

$$\underset{\approx}{g} = \underset{\approx}{R^T}(p_f) \left\{ \int_{-1}^1 \underset{\approx}{U} \underset{\approx}{\psi^T} |G_n| d\eta \right\} \underset{\approx}{R}(q_c) \quad (139)$$

$$\underset{\approx}{b} = \underset{\approx}{R^T}(p_f) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \underset{\approx}{U} - MF \underset{\approx}{\bar{U}} \right] \underset{\approx}{\psi^T} |G_r| d\eta_1 d\eta_2 \quad (140)$$

Resulta assim:

$$\underset{\approx}{R^T} C \underset{\approx}{\psi^T} \underset{\approx}{R} \underset{\approx}{u}'^J(p_f) + \sum_{n=1}^N \underset{\approx}{\hat{h}} \underset{\approx}{u}'^J(q_c) = \sum_{n=1}^N \underset{\approx}{g} \underset{\approx}{t}'^J(q_c) + \sum_{r=1}^R \underset{\approx}{b} \underset{\approx}{q}^J(Q_c) \quad (141)$$

O sistema acima pode ser escrito como:

$$\begin{matrix} H & U & = & G & T & + & B & Q \\ \approx & \approx & & \approx & \approx & & \approx & \approx \end{matrix} \quad (142)$$

após fazer as sobreposições implícitas, tendo para isso definido:

$$h_{1j} = \begin{cases} \hat{h}_{1j} & \text{para } q_c \neq p_f \\ \hat{h}_{1j} + R_{ai} C_{ak} \psi_{1k} R_{1j} & \text{para } q_c = p_f \end{cases} \quad (143)$$

sendo  $\psi_{1k} = I_{1k}$  a matriz identidade associada à função de interpolação unitária correspondente ao ponto fonte  $p_f$ .

Sobre cada ponto nodal responsável pela formação do sistema de equações (142) é conhecido o deslocamento ou a tração em cada uma das direções generalizadas. Portanto, é possível colocar o sistema (142) na forma:

$$\begin{matrix} A & X & = & F \\ \approx & \approx & & \approx \end{matrix} \quad (144)$$

sendo o vetor  $X_i$  composto com os valores nodais incógnitos de  $U_i$  e  $T_i$ , e  $F_i$  composto com as quantidades restantes, todas conhecidas. O sistema se encontra na forma adequada para ser resolvido por qualquer método.

#### 4.5 - Discretização para Pontos do Domínio

##### 4.5.1 - Deslocamentos

Uma vez determinados os deslocamentos e as trações sobre o contorno, tendo resolvido o sistema linear (Equações (144)), podemos determinar os deslocamentos em qualquer ponto  $P \in \Omega$  discretizando as Equações (84):

$$\begin{aligned} \tilde{u}(P) &= \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \tilde{U} \tilde{\psi}^T d\Gamma_n \right\} R_{\tilde{t}^j} (q_c) - \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \tilde{T} \tilde{\psi}^T d\Gamma_n \right\} R_{\tilde{u}^j} (q_c) + \\ &+ \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} \left[ \tilde{U} - MF \tilde{U} \right] \tilde{\psi}^T d\Omega_r \right\} q^j (Q_c) \end{aligned} \quad (145)$$

#### 4.5.2 - Esforços

Os esforços nos pontos internos são calculados pelas Equações (98), transcritas abaixo na forma discretizada:

$$\begin{aligned} \tau(P) \approx & \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \left[ \begin{array}{c} \underline{U} \\ \approx \\ \underline{\psi}^T \end{array} \right] d\Gamma_n \right\} \underline{R} \underline{t}^{j, j}(q_c) - \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \left[ \begin{array}{c} \underline{T} \\ \approx \\ \underline{\psi}^T \end{array} \right] d\Gamma_n \right\} \underline{R} \underline{u}^{j, j}(q_c) + \\ & + \sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega_r} \left[ \begin{array}{c} \underline{U} - \text{MF} \underline{V} \\ \approx \\ \underline{\psi}^T \end{array} \right] d\Omega_r \right\} \underline{q}^j(Q_c) + \text{MF} \underline{q} \bar{\underline{I}} \end{aligned} \quad (146)$$

sendo o tensor  $V_{\alpha i j}$  escrito de forma a reproduzir o tensor  $V_{\alpha i}$  para  $j = 3$ , ou seja:

$$V_{\alpha i 3} = V_{\alpha i} \quad (147)$$

e

$$\bar{\underline{I}} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (148)$$

#### 4.6 - Processo de Integração

##### 4.6.1 - Integrais Regulares

Quando os pontos fonte e campo não estão situados sobre o mesmo elemento, as integrais correspondentes são regulares, podendo ser calculadas por quadratura gaussiana. Assim, por exemplo, a integral expressa na Equação (138) pode ser calculada como:

$$\int_{-1}^{+1} \left[ \begin{array}{c} T(q, p_f) \underline{\psi}^T(q) |G_n(q)| \\ \approx \\ \approx \end{array} \right] d\eta(q) = w_i \left( \left[ \begin{array}{c} T(q, p_f) \underline{\psi}^T(q) |G_n(q)| \\ \approx \\ \approx \end{array} \right] \right)_{q=q_i} \quad (149)$$

onde  $q_i$  é a coordenada do  $i$ -ésimo ponto de integração, sendo  $w_i$  o peso correspondente (BREBBIA, TELLES e WROBEL [8]). Esta fórmula integra exatamente qualquer função polinomial de ordem menor ou igual a  $2k-1$ , onde  $i = 1, k$ . As demais integrais não singulares podem ser aproximadas da mesma forma.

## 4.6.2 - Integrais Singulares

Estando os pontos fonte e campo situados sobre o mesmo elemento ( $p_f \in \Gamma_n$ , Equação (131)), as integrais expressas nas Equações (138)-(140) apresentam singularidade. Também apresentam singularidade as integrais em  $\Omega$ , Equações (145) e (146), para pontos internos. Antes de aplicar o esquema de integração usado para integrais regulares, é feita uma transformação regularizadora sobre os núcleos das respectivas integrais. De acordo com TELLES [12], a integral:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\eta) d\eta \quad (150)$$

onde  $f(\eta)$  é singular no ponto  $\bar{\eta}$ ,  $|\bar{\eta}| \leq 1$ , tem o integrando regularizado pela transformação polinomial cúbica:

$$\eta = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \quad (151)$$

com:

$$\begin{aligned} \eta(-1) &= -1 \\ \eta(1) &= 1 \\ \left. \frac{d\eta}{d\gamma} \right|_{\bar{\eta}} &= 0 \\ \left. \frac{d^2\eta}{d\gamma^2} \right|_{\bar{\eta}} &= 0 \end{aligned} \quad (152)$$

Assim, a Equação (150) é transformada em:

$$I = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{(\gamma-\tau)^3}{1+3\tau^2} + \bar{\eta}\right) \frac{3(\gamma-\tau)^2}{1+3\tau^2} d\gamma \quad (153)$$

onde  $\tau$  é o valor de  $\gamma$  que satisfaz  $\eta(\tau) = \bar{\eta}$ , dado por:

$$\tau = \sqrt[3]{\bar{\eta}(\bar{\eta}^2-1) + |\bar{\eta}^2-1|} + \sqrt[3]{\bar{\eta}(\bar{\eta}^2-1) - |\bar{\eta}^2-1|} + \bar{\eta} \quad (154)$$

Este procedimento concentra automaticamente os pontos de integração próximo à singularidade. Além do mais, o mesmo pode ainda ser usado para integrais quase-singulares. A integral regularizada, Equação (153), pode ser agora efetuada de modo idêntico ao processo descrito pela Equação (149).

Os elementos da matriz  $G$  provenientes das integrais singulares são calculados pelo procedimento acima descrito.

Os elementos da matriz  $H$  provenientes das integrais singulares são separados em dois casos (SILVA [10], WATSON [39]). Primeiro considera-se o caso em que a função de interpolação  $\phi_j$  não é aquela associada ao nó singular. Então, como o tensor  $T_{ij} = O(1/r)$  e  $\phi_j = O(r)$ , o produto a ser integrado tende a um limite, podendo ser realizada uma integração numérica normal, sendo no entanto necessário um grande número de pontos de integração. Porém, para calcular estas integrais de forma mais efetiva, emprega-se a técnica anteriormente descrita.

Quando a função de interpolação  $\phi_j$  é aquela associada ao nó singular,  $\phi_j \sim 1$  e, como já é sabido, as integrais devem ser interpretadas no sentido do valor principal de Cauchy. Portanto, é necessário calcular os valores principais, bem como os coeficientes  $C_{ij}$ . Porém, as submatrizes da diagonal de  $H$ , que correspondem à soma dos fatores geométricos  $C_{ij}$  com as integrais envolvendo o tensor  $T_{ij}$ , interpretadas no sentido do valor principal de Cauchy, podem ser obtidas sem o cálculo direto de  $C_{ij}$  e  $\hat{h}_{ij}$  (LACHAT [40])). Através da imposição de movimentos de corpo rígido em cada uma das três direções referentes ao sistema global de coordenadas nos pontos nodais  $p_f$  (e posterior pré multiplicação pelas matrizes  $R_{ij}$  correspondentes), reduz-se o sistema dado pelas equações na forma (117) a:

$$H U = 0 \quad (155)$$

ou seja:

$$C_{ij}(p_f)u_j(p_f) + \int_{\Gamma} T_{ij}(q,p_f)u_j(q)d\Gamma(q) = 0 \quad (156)$$

onde  $U$  agora representa os referidos deslocamentos de corpo rígido.

Esta equação admite soluções não triviais  $u_i$ , que são combinações arbitrárias dos três deslocamentos unitários básicos de corpo rígido:

$$\begin{aligned} u_1(q,p_f) &= [ 1 \quad 0 \quad x_1(p_f) - x_1(q) ]^T \\ u_2(q,p_f) &= [ 0 \quad 1 \quad x_2(p_f) - x_2(q) ]^T \\ u_3(q,p_f) &= [ 0 \quad 0 \quad 1 ]^T \end{aligned} \quad (157)$$

pois, neste caso (Equações (29)):

$$u_{\alpha} = -u_{3,\alpha} = 1 \quad (158)$$

Para que a Equação (155) seja válida considerando um sistema de deslocamentos de corpo rígido arbitrário, definimos:

$$d(q,p_f) \approx [ \underset{\sim}{u}_1(q,p_f) \quad \underset{\sim}{u}_2(q,p_f) \quad \underset{\sim}{u}_3(q,p_f) ] \quad (159)$$

ou seja:

$$d(q,p_f) \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1(p_f) - x_1(q) & x_2(p_f) - x_2(q) & 1 \end{bmatrix} \quad (160)$$

Assim, as submatrizes da diagonal de  $H$ , correspondentes ao ponto  $p_f$ , ou seja, as submatrizes  $h'_{ij}$ , são calculadas por (Equações (155)):

$$h'_{ij} = -R_{ki}(p_f) \sum_{\substack{n=1 \\ q_c \neq p_f}}^s h_{kl} d_{lj} \quad (161)$$

onde  $s$  é o número de nós sobre o contorno, estando presente a rotação de acordo com as Equações (141).

Cada submatriz  $3 \times 3$  da diagonal de  $H$ ,  $h'_{ij}$ , é numericamente igual à soma das submatrizes  $h_{ij}$  restantes, relativas ao ponto  $p_f$ , sobre cada nó  $q_c$  do contorno,  $q \neq p_f$ , multiplicadas pela matriz de deslocamentos de corpo rígido associada, com o sinal invertido.

Assim, temos (Equações (156)):

$$h'_{i\alpha}(p_f) = -R_{ki}(p_f) \int_{\Gamma} \left[ T_{k\alpha}(q,p_f) + \left( x_{\alpha}(p_f) - x_{\alpha}(q) \right) T_{k3}(q,p_f) \right] d\Gamma(q) \quad (162)$$

$$h'_{i3}(p_f) = -R_{ki}(p_f) \int_{\Gamma} T_{k3}(q,p_f) d\Gamma(q)$$

com  $q \neq p_f$ .

A matriz  $C_{ij}$  é obtida no apêndice E, mediante um procedimento de limite.

#### 4.7 - Solução do Sistema de Equações

O sistema de equações obtido resulta numa matriz cheia e não-simétrica. Para a solução do sistema empregou-se o método da eliminação de Gauss com pivotação parcial (SILVA [10]), ou, de acordo com HUMES et alii [41], eliminação de Gauss com condensação pivotal.

#### 4.8 - Cálculo das Variáveis em Pontos Internos

Os deslocamentos e os esforços em pontos internos específicos podem ser determinados pelas Equações (145) e (146), desde que tenha sido resolvido o sistema de equações (144), que possibilita a determinação das variáveis sobre o contorno. Como neste caso não existe um sistema de coordenadas associado a cada ponto interno, é natural que estas variáveis sejam definidas no sistema global de coordenadas.

Dado que agora os pontos fonte situam-se no domínio, as integrais sobre o contorno não apresentam singularidades, podendo ser integradas normalmente. No entanto, deve-se ter o cuidado de não especificar pontos muito próximos ao contorno, ou então, se necessário, fazê-lo aplicando o procedimento de TELLES [12] para integrais quase-singulares, o que não foi considerado neste trabalho.

Para o cálculo dos deslocamentos em pontos internos, as integrais de domínio apresentam as singularidades do tipo  $\ln z$  e  $1/z$ , sendo esta última restrita ao modelo de Reissner, podendo ser integradas usando o procedimento de TELLES [12].

Os tensores correspondentes aos esforços em pontos internos, cujas integrais de domínio apresentam as singularidades  $\ln z$ ,  $1/z$  e  $1/z^2$ , sendo a singularidade do tipo  $1/z^2$  restrita ao modelo de Reissner, são integrados também mediante o procedimento de TELLES [12].

É importante salientar que, no arquivo de dados necessário para modelar o problema, a inclusão de pontos internos implica somente na adição de tantas linhas quantos forem estes pontos, necessárias para a leitura das coordenadas dos mesmos. O cálculo das coordenadas locais destes pontos (para o caso de integração singular no domínio) é efetuado pelo método de Newton-Raphson.

No apêndice F é feita a transformação das integrais no domínio para o contorno, lançando-se mão de uma equação de Poisson auxiliar, para carregamentos uniformemente distribuídos. Estas novas integrais sobre o contorno, que apresentam singularidades quando expressas no domínio, são todas regulares. No fim do mesmo também é estudado o caso de cargas concentradas.

Áreas sem carga, que são normalmente a maior parte da superfície da placa, não precisam ser discretizadas para a integração no domínio.

## CAPÍTULO 5

### APLICAÇÕES NUMÉRICAS

#### 5.1 - Introdução

Com a formulação desenvolvida nos capítulos anteriores, e adaptando o programa em FORTRAN elaborado por SILVA [10], aplicamos o método dos elementos de contorno a alguns problemas de placa, fazendo comparações entre os elementos previstos e analisando a influência das funções livres na convergência dos resultados. Também é analisada a convergência dos resultados quando se aumenta o número de pontos de integração, sendo usados oito pontos quando não mencionado.

Verifica-se o comportamento da formulação quando as placas se tornam finas, a fim de investigar o fenômeno do "locking", que surge em algumas situações de placas finas, quando analisadas por elementos finitos através dos modelos aqui descritos.

#### 5.2 - Placas Circulares

##### 5.2.1 - Placa Circular Engastada com Carga Uniformemente Distribuída

Para uma placa circular de raio  $a$  e espessura  $h$ , submetida a um carregamento uniformemente distribuído  $\pm q/2$  em cada face da mesma, engastada em  $r = a$ , temos a seguinte solução analítica, de acordo com o modelo de Reissner (VAN DER WEEËN [25], REISSNER [2]):

$$w = \frac{qa^4}{64D} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \left\{ 1 + 2C - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right\}$$

$$\phi_n = \frac{qa^3}{16D} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \frac{r}{a}$$

$$\phi_s = 0$$

$$M_{nn} = \frac{qa^2}{16} \left\{ 1 + \nu(1+C') - (3+\nu) \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right\}$$



$$M_{ss} = \frac{qa^2}{16} \left\{ 1 + \nu(1+C') - (1+3\nu) \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right\} \quad (163)$$

$$M_{ns} = 0$$

$$Q_n = -\frac{qa}{2} \left( \frac{r}{a} \right)$$

$$Q_s = 0$$

onde:

$$C = \frac{4}{3k^2(1-\nu)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \quad (164)$$

$$C' = C$$

Fazendo  $C' = 0$  obtemos a solução correspondente para o modelo de Mindlin (DYM e SHAMES [33]), enquanto que fazendo  $C = C' = 0$  obtemos a solução para o modelo de Kirchhoff (TIMOSHENKO e WOINOWSKI-KRIEGER [5]).

O problema foi resolvido para os três tipos de elemento: 16(32) elementos de contorno constantes (caso 16C(32C)) e lineares (16L(32L)), e 8(16) elementos quadráticos (8Q(16Q)). Os sub-itens 1, 2, 3 e 4 são associados às funções livres dadas pelas Equações (56) (VAN DER WEEËN [25]), (72), (165) e (166), conforme segue:

$$C_3 = -\frac{3}{4} C_1 \quad C_6 = 0 \quad (165)$$

e

$$C_3 = 0 \quad C_6 = 0 \quad (166)$$

respectivamente.

Como a solução analítica presente é a única que possuímos, vamos analisar este caso com mais detalhes. Em todos os problemas resolvidos com este tipo de geometria verificamos que o elemento quadrático apresentou uma oscilação dos valores calculados entre os nós do extremo e o do centro de cada elemento. Consideremos as Tabelas 2 a 5 abaixo, sendo os valores calculados sobre o contorno correspondentes ao nó central de um elemento identificados pelos itens com asterisco. Selecionamos para este exemplo o modelo de Mindlin, com  $\nu = 0,3$ ,  $k^2 = 5/6$ ,  $a = 0,5$  e  $h = 0,2$ . No programa implementado todas as integrações são feitas com um número fixo e único de pontos de integração. As condições de contorno estão indicadas nas tabelas por cc. O valor de  $M_{ss}$  não é calculado em pontos do contorno, por não ser um valor rigorosamente sobre o mesmo, sendo indicado nas tabelas por nc (não calculado).

Como podemos ver nas tabelas citadas, o aumento do número de pontos de integração para as malhas constantes piorou um pouco os resultados, enquanto os valores de interpolação linear ficaram estáveis. Já a convergência dos resultados para os

	$\frac{64D}{qa^4} w$	$\frac{16D}{qa^3} \phi_n$	$\frac{16}{qa^2} M_{ss}$	$\frac{16}{qa^2} M_{nn}$	$\frac{2}{qa} Q_n$	r/a	
EXATO	1,7314	0,0000	1,3000	1,3000	0,0000	0,0	
16C1	1,6477	0,0000	1,2610	1,2610	0,0000		
16C2	1,6477		1,2610	1,2610			
16C3	1,6478		1,2611	1,2611			
16C4	1,6477		1,2610	1,2610			
16L1	1,6996	0,0000	1,2852	1,2852	0,0000		
16L2	1,6996		1,2852	1,2852			
16L3	1,7000		1,2855	1,2855			
16L4	1,6997		1,2852	1,2852			
8Q1 8Q2 8Q3 8Q4	1,7340	0,0000	1,3015	1,3015	0,0000		
EXATO	1,1111	0,3750	0,8250	0,4750	-0,5000		0,5
16C1	1,0424	0,3600	0,7860	0,4360	-0,5000		
16C2			0,7860	0,4360			
16C3			0,7861	0,4361			
16C4			0,7860	0,4360			
16L1	1,0849	0,3693	0,8102	0,4602	-0,5000		
16L2	1,0850	0,3693	0,8102	0,4602			
16L3	1,0853	0,3694	0,8105	0,4605			
16L4	1,0850	0,3693	0,8102	0,4602			
8Q1 8Q2 8Q3 8Q4	1,1131	0,3756	0,8265	0,4764	-0,5001		
EXATO	0,0000	0,0000	-0,60000	-2,0000	-1,0000	1,0	
16C1				-1,9429	-0,9799		
16C2				-1,9441	-0,9801		
16C3				-1,9574	-0,9796		
16C4				-1,9452	-0,9803		
16L1	cc	cc	nc	-1,9786	-0,9836		
16L2				-1,9756	-0,9829		
16L3				-1,9336	-0,9829		
16L4				-1,9727	-0,9824		
8Q1				-2,0238	-1,0092		
8Q2				-2,0235	-1,0091		
8Q3				-2,0179	-1,0090		
8Q4				-2,0231	-1,0090		
8Q1*				-1,9893	-0,9952		
8Q2*				-1,9889	-0,9951		
8Q3*				-1,9834	-0,9951		
8Q4*				-1,9885	-0,9951		

Tabela 2 - Placa Circular Engastada com Carga Unitária Uniforme.

Elementos 16C, 16L e 8Q, 8 Pontos de Integração.

elementos quadráticos foi muito boa. Os erros percentuais máximos são sumariados na Tabela 6, para os elementos quadráticos.

A não convergência dos resultados para os elementos constante e linear pode ser explicada pelo fato da geometria não ser adequadamente representada por estes elementos. O aumento do número dos mesmos melhora sensivelmente os valores calculados, diminuindo então a divergência dos resultados com o aumento do número de pontos de integração para os elementos constantes.

Tendo em vista as condições de contorno impostas, o sistema de Equações (142) está colocado na forma:

$$\begin{matrix} G & T & = & - & B & Q \\ \approx & \approx & & & \approx & \approx \end{matrix} \quad (167)$$

Ou seja, voltando às equações integrais (117):

$$\int_{\Gamma} U_{ij} t_j d\Gamma = - \int_{\Omega} \left[ U_{i3} - MF U_{i\alpha, \alpha} \right] q d\Omega \quad (168)$$

Ou, transformando as integrais no domínio em integrais sobre o contorno (apêndice F):

$$\int_{\Gamma} U_{ij} t_j d\Gamma = -q \int_{\Gamma} \left[ \Lambda_{i, \alpha} - MF U_{i\alpha} \right] n_{\alpha} d\Gamma \quad (169)$$

Assim sendo, efetivamente estamos trabalhando apenas com o tensor  $U_{ij}$  (e  $\Lambda_{i, \alpha}$ , que é regular, quando resolvendo as Equações (169)).

Para finalizar, reduzimos a relação  $h/a$  e constatamos não haver "locking" e nem algum tipo de instabilidade numérica. A ausência de "locking" já era esperada, pois trabalhamos com a expressão analítica dos tensores fundamentais.

A título de ilustração da ausência de "locking", apresentamos na Tabela 7 os resultados obtidos para  $h = 0,01$  e  $h = 0,001$ , usando a discretização 16Q2 da Tabela 5.

### 5.2.2 - Placa Circular Simplesmente Apoiada com Carga Uniformemente Distribuída

Neste exemplo usaremos o modelo de Reissner (Mindlin), com  $a = 0,5$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $h = 0,02$  e  $k^2 = 5/6$ , comparando os resultados de duas discretizações (16 e 32 elementos lineares) com aqueles dados por TIMOSHENKO e WOINOWSKI-KRIEGER [5]). Daqui por diante passaremos a usar a solução fundamental dada pelas Equações (72). Os resultados estão mostrados na Tabela 8.

	$\frac{64D}{qa^4} w$	$\frac{16D}{qa^3} \phi_n$	$\frac{16}{qa^2} M_{ss}$	$\frac{16}{qa^2} M_{nn}$	$\frac{2}{qa} Q_n$	r/a	
EXATO	1,7314	0,0000	1,3000	1,3000	0,0000	0,0	
16C1	1,6451	0,0000	1,2595	1,2595	0,0000		
16C2	1,6451		1,2595	1,2595			
16C3	1,6452		1,2596	1,2596			
16C4	1,6451		1,2595	1,2595			
16L1	1,6996	0,0000	1,2852	1,2852	0,0000		
16L2	1,6996		1,2852	1,2852			
16L3	1,7000		1,2855	1,2855			
16L4	1,6997		1,2852	1,2852			
8Q1	1,7309	0,0000	1,2998	1,2998	0,0000		
8Q2							
8Q3							
8Q4							
EXATO	1,1111	0,3750	0,8250	0,4750	-0,5000		0,5
16C1	1,0403	0,3594	0,7845	0,4345	-0,5000		
16C2			0,7845	0,4345			
16C3			0,7846	0,4346			
16C4			0,7845	0,4345			
16L1	1,0850	0,3693	0,8102	0,4602	-0,5000		
16L2	1,0850	0,3693	0,8102	0,4602			
16L3	1,0853	0,3694	0,8105	0,4605			
16L4	1,0850	0,3693	0,8102	0,4602			
8Q1	1,1106	0,3749	0,8248	0,4748	-0,5000		
8Q2							
8Q3							
8Q4							
EXATO	0,0000	0,0000	-0,60000	-2,0000	-1,0000	1,0	
16C1				-1,9416	-0,9796		
16C2				-1,9430	-0,9799		
16C3				-1,9596	-0,9795		
16C4				-1,9443	-0,9801		
16L1	cc	cc	nc	-1,9786	-0,9836		
16L2				-1,9756	-0,9829		
16L3				-1,9336	-0,9829		
16L4				-1,9727	-0,9824		
8Q1				-2,0029	-1,0013		
8Q2				-2,0028	-1,0013		
8Q3				-2,0010	-1,0013		
8Q4				-2,0026	-1,0012		
8Q1*				-1,9983	-0,9989		
8Q2*				-1,9982			
8Q3*				-1,9964			
8Q4*				-1,9981			

Tabela 3 - Placa Circular Engastada com Carga Unitária Uniforme.

Elementos 16C, 16L e 8Q, 20 Pontos de Integração.

	$\frac{64D}{qa^4} w$	$\frac{16D}{qa^3} \phi_n$	$\frac{16}{qa^2} M_{ss}$	$\frac{16}{qa^2} M_{nn}$	$\frac{2}{qa} Q_n$	r/a	
EXATO	1,7314	0,0000	1,3000	1,3000	0,0000	0,0	
32C1	1,7111	0,0000	1,2905	1,2905	0,0000		
32C2							
32C3							
32C4							
32L1	1,7231	0,0000	1,2961	1,2961	0,0000		
32L2	1,7231		1,2961	1,2961			
32L3	1,7232		1,2962	1,2962			
32L4	1,7231		1,2961	1,2961			
16Q1	1,7332	0,0000	1,3010	1,3010	0,0000		
16Q2							
16Q3							
16Q4							
EXATO	1,1111	0,3750	0,8250	0,4750	-0,5000		0,5
32C1	1,0944	0,3714	0,8155	0,4655	-0,5000		
32C2							
32C3							
32C4							
32L1	1,1043	0,3735	0,8211	0,4711	-0,5000		
32L2			0,8211	0,4711			
32L3			0,8212	0,4712			
32L4			0,8211	0,4711			
16Q1	1,1125	0,3754	0,8260	0,4760	-0,5000		
16Q2							
16Q3							
16Q4							
EXATO	0,0000	0,0000	-0,60000	-2,0000	-1,0000	1,0	
32C1	cc	cc	nc	-1,9860	-0,9950		
32C2				-1,9862	-0,9951		
32C3				-1,9888	-0,9950		
32C4				-1,9864	-0,9951		
32L1				-1,9945	-0,9959		
32L2				-1,9938	-0,9957		
32L3				-1,9837	-0,9957		
32L4				-1,9931	-0,9956		
16Q1				-2,0200	-1,0089		
16Q2				-2,0198	-1,0088		
16Q3				-2,0175	-1,0088		
16Q4				-2,0197	-1,0088		
16Q1*				-1,9911	-0,9957		
16Q2*				-1,9909			
16Q3*				-1,9887			
16Q4*				-1,9908			

Tabela 4 - Placa Circular Engastada com Carga Unitária Uniforme.  
Elementos 32C, 32L e 16Q, 8 Pontos de Integração.

	$\frac{64D}{qa^4} w$	$\frac{16D}{qa^3} \phi_n$	$\frac{16}{qa^2} M_{ss}$	$\frac{16}{qa^2} M_{nn}$	$\frac{2}{qa} Q_n$	r/a	
EXATO	1,7314	0,0000	1,3000	1,3000	0,0000	0,0	
32C1	1,7097	0,0000	1,2898	1,2898	0,0000		
32C2							
32C3							
32C4							
32L1	1,7231	0,0000	1,2961	1,2961	0,0000		
32L2	1,7231		1,2961	1,2961			
32L3	1,7232		1,2962	1,2962			
32L4	1,7232		1,2961	1,2961			
16Q1	1,7316	0,0000	1,3001	1,3001	0,0000		
16Q2							
16Q3							
16Q4							
EXATO	1,1111	0,3750	0,8250	0,4750	-0,5000		0,5
32C1	1,0933	0,3711	0,8148	0,4648	-0,5000		
32C2							
32C3							
32C4							
32L1	1,1043	0,3735	0,8211	0,4711	-0,5000		
32L2			0,8211	0,4711			
32L3			0,8212	0,4712			
32L4			0,8211	0,4711			
16Q1	1,1112	0,3750	0,8251	0,4751	-0,5000		
16Q2							
16Q3							
16Q4							
EXATO	0,0000	0,0000	-0,6000	-2,0000	-1,0000	1,0	
32C1	cc	cc	nc	-1,9853	-0,9949		
32C2				-1,9857	-0,9950		
32C3				-1,9899	-0,9949		
32C4				-1,9860	-0,9950		
32L1				-1,9945	-0,9959		
32L2				-1,9938	-0,9957		
32L3				-1,9837	-0,9957		
32L4				-1,9931	-0,9956		
16Q1				-2,0027	-1,0012		
16Q2				-2,0026			
16Q3				-2,0023			
16Q4				-2,0026			
16Q1*				-1,9988	-0,9994		
16Q2*				-1,9988			
16Q3*				-1,9984			
16Q4*				-1,9987			

Tabela 5 - Placa Circular Engastada com Carga Unitária Uniforme.  
Elementos 32C, 32L e 16Q, 20 Pontos de Integração.

TABELA	w	$\phi_n$	$M_{ss}$	$M_{nn}$	$Q_n$	r/a
2	0,15		0,12	0,12		
3	0,03	0,0	0,02	0,02	0,0	0,0
4	0,10		0,08	0,08		
5	0,01		0,008	0,008		
2	0,18	0,16	0,18	0,29	0,02	
3	0,05	0,03	0,03	0,04	0,0	0,5
4	0,13	0,11	0,12	0,21	0,0	
5	0,009	0,0	0,01	0,02	0,0	
2				1,2	0,92	
3				0,15	0,13	1,0
4	cc	cc	nc	1,0	0,9	
5				0,13	0,12	

Tabela 6 - Erros Percentuais Máximos com Elementos Quadráticos.

	$\frac{64D}{qa^4} w$	$\frac{16D}{qa^3} \phi_n$	$\frac{16}{qa^2} M_{ss}$	$\frac{16}{qa^2} M_{nn}$	$\frac{2}{qa} Q_n$	r/a	h
EXATO	1,7314	0,0000	1,3000	1,3000	0,0000	0,0	0,2
16Q2	1,7316	0,0000	1,3001	1,3001	0,0000	0,0	
EXATO	1,1111	0,3750	0,8250	0,4750	-0,5000	0,5	
16Q2	1,1112	0,3750	0,8251	0,4751	-0,5000	0,5	
EXATO	0,0000	0,0000	-0,6000	-2,0000	-1,0000	1,0	
16Q2 16Q2*	cc cc	cc cc	nc nc	-2,0026 -1,9988	-1,0012 -0,9994	1,0	
EXATO	1,0018	0,0000	1,3000	1,3000	0,0000	0,0	0,01
16Q2	1,0020	0,0000	1,3001	1,3001	0,0000	0,0	
EXATO	0,5639	0,3750	0,8250	0,4750	-0,5000	0,5	
16Q2	0,5640	0,3750	0,8251	0,4751	-0,5000	0,5	
EXATO	0,0000	0,0000	-0,6000	-2,0000	-1,0000	1,0	
16Q2 16Q2*	cc cc	cc cc	nc nc	-2,0081 -1,9959	-1,0051 -0,9974	1,0	
EXATO	1,0000	0,0000	1,3000	1,3000	0,0000	0,0	0,001
16Q2	1,0003	0,0000	1,3002	1,3002	0,0000	0,0	
EXATO	0,5625	0,3750	0,8250	0,4750	-0,5000	0,5	
16Q2	0,5627	0,3751	0,8252	0,4752	-0,5000	0,5	
EXATO	0,0000	0,0000	-0,6000	-2,0000	-1,0000	1,0	
16Q2 16Q2*	cc cc	cc cc	nc nc	-2,0124 -1,9937	-1,0075 -0,9962	1,0	

Tabela 7 - Placa Circular Engastada com Carga Unitária Uniforme.

Observação da Ausência de "Locking".

	$\frac{64D}{qa^4} w$	$\frac{16D}{qa^3} \phi_n$	$\frac{16}{qa^2} M_{ss}$	$\frac{16}{qa^2} M_{nn}$	$\frac{2}{qa} Q_n$	r/a
T&W-K	4,0769	0,0000	3,3000	3,3000	0,0000	0,0
16L	3,9861 (3,9878)	0,0000	3,2641	3,2641	0,0000	
32L	4,0701 (4,0718)	0,0000	3,2985 (3,2986)	3,2985 (3,2986)	0,0000	
T&W-K	2,8702	1,1442	2,8250	2,4750	-0,5000	0,5
16L	2,7918 (2,7931)	1,1300 (1,3004)	2,7891	2,4390	-0,5000	
32L	2,8625 (2,8638)	1,1432 (1,1437)	2,8235 (2,8236)	2,4735 (2,4736)	-0,5000	
T&W-K	0,0000	1,5385	1,4000	0,0000	-1,0000	1,0
16L	cc	1,5108 (1,5117)	nc	cc	-0,9825	
32L	cc	1,5324 (1,5332)	nc	cc	-0,9959	

Tabela 8 - Placa Circular Simplesmente Apoiada com Carga Unitária Uniforme e Discretização Linear.

### 5.2.3 - Placa Circular Engastada com Carga Concentrada no Centro

Neste problema consideramos uma placa de acordo com o modelo de Mindlin, sendo  $\nu = 0,3$ ,  $k^2 = 5/6$ ,  $a = 0,5$ ,  $h = 0,05$  e  $E = 200000$ , comparando os valores calculados no contorno com aqueles dados por TIMOSHENKO e WOINOWSKI-KRIEGER [5], de acordo com a Tabela 9.

	$M_{nn}$	$Q_n$	Número de Pontos de Integração
T&W-K	-0,079577	-0,31831	
L16	-0,080394	-0,32104	8
Q08	-0,081406	-0,33180	8
Q08*	-0,078705	-0,31169	8
Q08	-0,079873	-0,32239	20
Q08*	-0,079486	-0,31644	20

Tabela 9 - Valores Calculados no Contorno para uma Placa com Carga Concentrada no Centro.

Os erros aqui são da ordem de 1 a 4 por cento. Porém, quando foram usados 20 pontos de integração nos elementos quadráticos, este erro caiu para a faixa de 1 por cento (para 8 elementos quadráticos!).



### 5.2.4 - Placa Circular sob Flexão Axissimétrica

Para esta placa, submetida a um momento unitário e de raio  $a = 0,5$ , com  $E = 200000$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $h = 0,01$ ,  $k^2 = 5/6$  e resolvida de acordo com o modelo de Mindlin, consideramos uma discretização com 96 elementos lineares, comparando os resultados com aqueles dados por TIMOSHENKO e WOINOWSKI-KRIEGER [5], sendo sumariados os resultados na Tabela 10.

	w	$\phi_n$	$M_{nn}$	r/a
T&W-K	5,25	0,0	1,0	0,0
CALC.	5,233	0,0	0,9971	
T&W-K	3,9375	10,5	1,0	0,5
CALC.	3,924	10,47	0,9971	
T&W-K	0,0	21,0	1,0	1,0
CALC.	cc	20,98	cc	

Tabela 10 - Placa Circular sob Flexão Axissimétrica.

### 5.3 - Placas Retangulares

Adicionalmente ao que já foi considerado, nestes casos existem pontos do contorno sobre os quais não há continuidade do vetor normal, surgindo assim graus de liberdade adicionais sobre os nós usados para definir o mesmo (a não ser que o elemento seja constante ou incompatível).

A técnica do nó duplo é aqui utilizada para fornecer as equações adicionais necessárias. Assim sendo, testaremos apenas o caso de uma placa simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída, empregando o modelo de Mindlin. Esta foi discretizada com 96 elementos lineares, sendo  $q = 1$ ,  $E = 0,2D+7$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $a = 1$  e  $h = 0,005$ , sendo  $k^2$  compatível com  $\nu$  ( $k^2 = 0,86009$ , Tabela 1). Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 11, comparados com aqueles apresentados por TIMOSHENKO e WOINOWSKI-KRIEGER [5], sendo adotada a solução fundamental dada pela Equação (165). A deflexão é calculada no ponto central da placa e os esforços no meio de um lado.

	$\frac{D}{qa^4} w$	$\frac{1}{qa^2} M_{xx}$	$\frac{1}{qa} Q_x$
T&W-K	0,00406	0,0479	-0,420
CALC.	0,004057	0,047836	-0,4204

Tabela 11 - Placa Retangular Simplesmente Apoiada.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 6.1 - Introdução

No desenvolvimento deste trabalho considerou-se essencialmente o seguinte:

- a) dois modelos de placa: Reissner e Mindlin;
- b) três funções de interpolação: constante, linear e quadrática;
- c) uma solução fundamental geral, caracterizada pelos coeficientes  $C_3$  e  $C_6$ .

Dessa abordagem decorre uma série de conclusões, apresentadas a seguir. Ao final, são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros, sejam independentes ou extensivos ao presente trabalho.

#### 6.2 - Conclusões

Aplicou-se o método dos elementos de contorno para a determinação de deslocamentos e esforços em placas mediante os modelos de Reissner e Mindlin.

Além da reduzida quantidade dos dados necessários para a codificação do problema, o método assegura um menor gasto em tempo computacional, relativo aos outros métodos numéricos tradicionalmente usados para a solução deste tipo de problema, para mesma precisão, desde que se mantenha o número de pontos internos dentro de um certo limite. Constatou-se a eficiência do método inclusive em alguns casos onde se usou o mais simples dos elementos (elemento constante).

Se considerarmos uma discretização não muito grosseira, obtemos erros menores de 1 por cento para elementos quadráticos, enquanto os outros elementos apresentam ordem de erro maior.

O aumento do número de elementos não resultou em mal condicionamento do sistema, não sendo feito nenhum escalonamento a fim de melhorá-lo. No caso da placa descrita no item 5.2.1, obtivemos um erro muito pequeno no domínio, com uma discretização de 32 elementos quadráticos, usando apenas 2 pontos de integração, quando trabalhamos com integrais somente sobre o contorno (resultados não apresentados).

A solução fundamental dada pelas Equações (72) mostrou ser adequada para estes problemas. Em vista da simplificação dos tensores resultantes, bem como da similaridade existente entre este e aquele dado para placas finas, propomos seu uso como solução padrão para os problemas a ela correlatos.

### 6.3 - Sugestões

Estudos recentemente feitos com algumas integrações analíticas mostraram que o procedimento de TELLES [12] para integrações singulares talvez não seja tão bom substituto do processo de integração gaussiana com funções peso logarítmicas. Se estas singularidades forem isoladas e então integradas separadamente é possível obter resultados mais precisos. O uso de funções de interpolação cúbicas, bem como de elementos com formato de arco de círculo, pode melhorar ainda mais os resultados, e possivelmente eliminar ou reduzir as oscilações observadas nos elementos quadráticos.

A extensão da formulação para problemas dinâmicos e de estabilidade é o mais direto dos caminhos a ser seguido, incluindo ainda a análise de placas laminadas compostas, placas em fundações elásticas, termo-elasticidade, etc.

Deve também ser prevista uma seleção automática do número de pontos de integração, dependendo estes da distância mínima do ponto de colocação ao elemento sob integração (BEER [42]), bem como prever o uso simultâneo de distintos elementos, possibilidades estas não previstas na versão numérica atualmente implementada.

## APÊNDICE A

### MODELO DE MINDLIN PARA DEFLEXÃO DE PLACAS

Por conveniência, as definições iniciais apresentadas no Capítulo 2 serão aqui repetidas.

Seja uma placa isotrópica e homogênea, de espessura uniforme  $h$ , ocupando uma região  $\Omega(x_\alpha) \times [-h/2, h/2] \subset \mathbb{R}^3(x_i)$ , conforme a Figura 1, onde os  $x_i$ 's são as coordenadas cartesianas e  $\Omega$  é o plano de referência  $x_\alpha$ , aberto e limitado, com contorno  $\Gamma$  lipschitziano. Suponhamos que a placa está sujeita a uma carga distribuída  $q(x_\alpha)$  por unidade de área de  $\Omega$  na direção  $x_3$  (transversal a  $\Omega$ ).

As condições de carregamento nas faces da placa são:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha 3}(x_\beta, \pm h/2) &= 0 \\ \sigma_{33}(x_\beta, \pm h/2) &= \pm \frac{1}{2} q(x_\beta)\end{aligned}\tag{A1}$$

No âmbito do modelo de MINDLIN [4] supomos o campo de deslocamentos  $(\psi_\alpha, w)$ , Figura A1, tal que os  $v_i$ 's, as componentes dos deslocamentos de pontos situados ao longo de  $x_3$  nas direções  $x_i$ , são:

$$\begin{aligned}v_\alpha(x_i) &= x_3 \psi_\alpha(x_\beta) \\ v_3(x_i) &= w(x_\beta)\end{aligned}\tag{A2}$$

onde  $w$  é a deflexão transversal da superfície de referência e os  $\psi_\alpha$  são as rotações da normal à superfície de referência indeformada nos planos  $x_\alpha x_3$ . Para simplificar as equações seguintes, o campo de deslocamentos de placa  $(\psi_\alpha, w)$  será expresso a partir deste ponto por  $u_i$ .

Devido à consideração das deformações cisalhantes, a normal à superfície de referência indeformada não permanece normal à mesma superfície deformada, permanecendo no entanto reta e inextensível.

Temos assim o seguinte campo de deformações, considerando a teoria linear da elasticidade (BORESI e LYNN [43]):

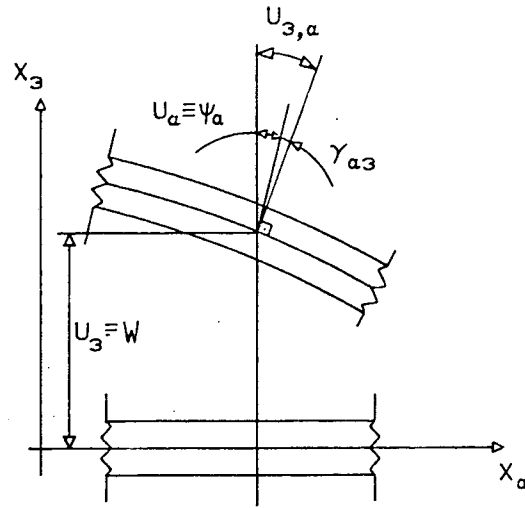


Figura A1 - Campo de Deslocamentos

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} [u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}] x_3 \\ \gamma'_{\alpha3} &= u_{\alpha} + u_{3,\alpha} \\ \varepsilon'_{33} &= 0\end{aligned}\tag{A3}$$

sendo simétrico o tensor das deformações.

Pela teoria linear da elasticidade temos ainda as seguintes equações constitutivas:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta} &= G \left[ \varepsilon'_{\alpha\beta} + \varepsilon'_{\beta\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \varepsilon'_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \\ \sigma_{\alpha3} &= G \gamma'_{\alpha3}\end{aligned}\tag{A4}$$

onde:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ - módulo de elasticidade transversal}$$

$E$  - módulo de elasticidade longitudinal

$\nu$  - coeficiente de Poisson

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{para } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{para } \alpha = \beta \end{cases} \text{ - delta de Kronecker}$$

sendo desprezadas as tensões  $\sigma_{33}$ .

Substituindo as Equações (A3) em (A4) resultam:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta} &= G \left[ u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] x_3 \\ \sigma_{\alpha3} &= G \left[ u_{\alpha} + u_{3,\alpha} \right]\end{aligned}\tag{A5}$$

Finalmente, definimos as componentes de tensão de placa da maneira usual, ou seja:

$$M_{\alpha\beta}(x_\gamma) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \quad (A6)$$

$$Q_\alpha(x_\gamma) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3$$

onde  $M_{\alpha\beta}$  e  $Q_\alpha$  são os momentos (fletores e torçores) e os esforços cortantes, respectivamente, por unidade de comprimento.

Pelas hipóteses cinemáticas adotadas obtivemos as tensões cisalhantes transversais constantes ao longo da espessura da placa ( $u_i \equiv u_i(x_\alpha)$ ), o que sabemos não representar bem uma situação real (ver Equações (6)). No entanto, levaremos em consideração o fato de que as mesmas variam ao longo da direção  $x_3$ . Com este intuito, faremos uma ponderação no valor de  $\sigma_{\alpha 3}$ , usando a seguinte expressão para a integração das expressões acima:

$$\bar{\sigma}_{\alpha 3} = k^2 \sigma_{\alpha 3} \quad (A7)$$

onde  $k^2$  é uma constante que depende de  $\nu$ , tal que o resultado obtido na solução de um determinado problema de propagação de ondas seja idêntico àquele obtido mediante a teoria tridimensional da elasticidade, sendo dado por:

$$4\sqrt{(1-\alpha k^2)(1-k^2)} = (2-k^2)^2 \quad 0 < k < 1 \quad (A8)$$

com

$$\alpha = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (A9)$$

Então, mediante a substituição das Equações (A5) nas Equações (A6), usando as Equações (A7) ao invés das correspondentes Equações (A5), obtém-se as seguintes relações tensão-deslocamento:

$$M_{\alpha\beta} = D \frac{1-\nu}{2} \left[ u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right]$$

$$Q_\alpha = D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 (u_\alpha + u_{3,\alpha}) \quad (A10)$$

onde:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} - \text{rigidez à flexão da placa}$$

sendo:

$$\lambda^2 = \frac{12k^2}{h^2} \quad (\text{A11})$$

Assim, das Equações (A5) e (A10) resulta o seguinte campo de tensões:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12}{h^3} x_3 M_{\alpha\beta} \quad (\text{A12})$$

variando linearmente ao longo da espessura da placa.

A fim de definir as componentes de deformação de placa, procedemos de forma semelhante à acima, obtendo:

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{1}{hk^2} Q_{\alpha} \quad (\text{A13})$$

Fazendo  $k^2 = 1$  definimos, a partir das Equações (A12) e (A13), as componentes de deformação de placa (MINDLIN [4]):

$$(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}) = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon'_{11}, \varepsilon'_{22}, \gamma'_{12}) x_3 dx_3 \quad (\text{A14})$$

$$\gamma_{\alpha 3} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \gamma'_{\alpha 3} dx_3$$

Contudo, de acordo com REISSNER [44]-[45], o estado real de deformação variacionalmente consistente é definido pelo princípio dos trabalhos virtuais:

$$\int_{\Omega} \left[ M_{\alpha\beta} \delta\varepsilon_{\alpha\beta} + Q_{\alpha} \delta\gamma_{\alpha 3} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left[ q \delta u_3 + m_{\alpha} \delta u_{\alpha} \right] d\Omega \quad (\text{A15})$$

considerando a aplicação de momentos externos  $m_{\alpha}$ , com as conseqüentes equações de equilíbrio (ver Equações (4)):

$$M_{\alpha\beta, \beta} - Q_{\alpha} + m_{\alpha} = 0 \quad (\text{A16})$$

$$Q_{\alpha, \alpha} + q = 0$$

Integrando por partes a Equação (A15), observando as Equações (A16), resultam:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\beta, \alpha} \quad (\text{A17})$$

$$\gamma_{\alpha 3} = u_{\alpha} + u_{3, \alpha}$$

sendo este estado de deformação de placa ( $\varepsilon_{\alpha\beta}$  relacionado às mudanças de curvatura) efetivamente considerado na formulação integral do problema.

## APÊNDICE B

### OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS PELO MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

A formulação de problemas na forma integral é possível mediante a aplicação de princípios de reciprocidade, recentemente identificados com o método dos resíduos ponderados (MRP) (BREBBIA [7]).

Pela abordagem de um problema mediante o método dos resíduos ponderados pode-se fazer uma distinção entre os diversos métodos disponíveis para se obter uma solução aproximada do mesmo. Além da possibilidade de uma classificação dos diferentes métodos, a abordagem de um problema pelo MRP é geral e permite a abordagem direta de problemas de formulações mais complexas.

Ao solucionar um problema de valores sobre o contorno usando uma solução aproximada, as equações de equilíbrio e respectivas condições de contorno não são rigorosamente verificadas, ocorrendo portanto erros residuais.

O método dos resíduos ponderados, garantindo a minimização destes erros residuais, estabelece que (BREBBIA e WALKER [9]):

$$\int_{\Omega} \epsilon^i w^i d\Omega = \int_{\Gamma_t} \epsilon_2^i w^i d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \epsilon_1^i q^i d\Gamma \quad (B1)$$

onde  $\Omega$  é o domínio em consideração,  $\Gamma_t$  é a parte do contorno sobre a qual são prescritas as forças de superfície generalizadas, e  $\Gamma_u$  a parte do contorno sobre a qual são prescritos os deslocamentos generalizados, sendo o contorno total  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ , com  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \phi$ .

A adoção de uma solução aproximada dá origem aos seguintes erros residuais, considerando as equações de equilíbrio (4) e as condições de contorno (14):



$$\begin{aligned}
\varepsilon^\alpha &= M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha \neq 0 \text{ em } \Omega \\
\varepsilon^3 &= Q_{\alpha,\alpha} + q \neq 0 \text{ em } \Omega \\
\varepsilon_1^1 &= u_1 - \bar{u}_1 \neq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_u \\
\varepsilon_2^1 &= t_1 - \bar{t}_1 \neq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_t
\end{aligned} \tag{B2}$$

As funções peso pré-estabelecidas, segundo as quais os erros residuais são minimizados, são dadas por:

$$\begin{aligned}
w^i &= u_1^* \\
q^i &= t_1^*
\end{aligned} \tag{B3}$$

onde  $u_1^*$  e  $t_1^*$  são os deslocamentos e as trações correspondentes ao estado auxiliar, descrito no item 2.10.

Podemos então expressar a Equação (B1) na forma (KARAM [27]):

$$\int_{\Omega} \left[ \left( M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha \right) u_\alpha^* + \left( Q_{\alpha,\alpha} + q \right) u_3^* \right] d\Omega = \int_{\Gamma_t} (t_1 - \bar{t}_1) u_1^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_1 - \bar{u}_1) t_1^* d\Gamma \tag{B4}$$

Procedendo uma integração por partes da integral de domínio, e usando as Equações (15), resulta:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left[ \left( M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha \right) u_\alpha^* + \left( Q_{\alpha,\alpha} + q \right) u_3^* \right] d\Omega &= - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \\
&- \int_{\Omega} Q_\alpha \left( u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^* \right) d\Omega + \int_{\Omega} q u_3^* d\Omega + \int_{\Gamma} t_1 u_1^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{B5}$$

A Equação (B4) então se transforma em:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left[ M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* + Q_\alpha \left( u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^* \right) \right] d\Omega &= \\
&= \int_{\Gamma_u} t_1 u_1^* d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_1 u_1^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (u_1 - \bar{u}_1) t_1^* d\Gamma + \int_{\Omega} q u_3^* d\Omega
\end{aligned} \tag{B6}$$

Podemos escrever a primeira equação para as tensões de placa (Equações (11)) na seguinte forma:

$$M_{\alpha\beta} = \dot{M}_{\alpha\beta} + \dot{q}_{\alpha\beta} \quad (B7)$$

sendo:

$$\dot{M}_{\alpha\beta} = D \frac{1-\nu}{2} \left( u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (B8)$$

$$\dot{q}_{\alpha\beta} = \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q\delta_{\alpha\beta}$$

As equações constitutivas são:

$$\begin{aligned} \dot{M}_{\alpha\beta} &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} & M_{\alpha\beta}^* &= C_{\alpha\beta\gamma\delta}^* \varepsilon_{\gamma\delta}^* \\ Q_{\beta} &= C_{\beta 3\delta 3} \gamma_{\delta 3} & Q_{\beta}^* &= C_{\beta 3\delta 3}^* \gamma_{\delta 3}^* \end{aligned} \quad (B9)$$

onde os  $C_{\alpha i \beta j}$  são as componentes do tensor das constantes elásticas.

Podemos escrever então:

$$\dot{M}_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta} \gamma_{\beta 3}^* = C_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta}^* + C_{\beta 3\delta 3} \gamma_{\delta 3} \gamma_{\beta 3}^* \quad (B10)$$

Considerando a simetria do tensor  $C_{\alpha i \beta j}$  temos:

$$\dot{M}_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta} \gamma_{\beta 3}^* = (C_{\gamma\delta\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^*) \varepsilon_{\gamma\delta} + (C_{\delta 3\beta 3} \gamma_{\beta 3}^*) \gamma_{\delta 3} \quad (B11)$$

Ou seja:

$$\left( M_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q\delta_{\alpha\beta} \right) \varepsilon_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta} \gamma_{\beta 3}^* = M_{\gamma\delta}^* \varepsilon_{\gamma\delta} + Q_{\delta}^* \gamma_{\delta 3} \quad (B12)$$

Esta expressão, ao se proceder uma integração no domínio, fica:

$$\int_{\Omega} \left( M_{\alpha\beta}^* \varepsilon_{\alpha\beta} + Q_{\alpha}^* \gamma_{\alpha 3} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left( M_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^* + Q_{\alpha} \gamma_{\alpha 3}^* \right) d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q \varepsilon_{\alpha\beta}^* \delta_{\alpha\beta} d\Omega \quad (B13)$$

Lembrando que  $M_{\alpha\beta}$  é simétrico e usando a Equação (10):

$$M_{\alpha\beta}^* \varepsilon_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} \quad (B14)$$

Assim, substituindo as Equações (29) e (B14) em (B13):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} + Q_{\alpha}^* (u_{\alpha} + u_{3,\alpha}) \right] d\Omega = \\
& = \int_{\Omega} \left[ M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* + Q_{\alpha} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) \right] d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega
\end{aligned} \tag{B15}$$

que pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* + Q_{\alpha} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) \right] d\Omega = \\
& = \int_{\Omega} \left[ M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} + Q_{\alpha}^* (u_{\alpha} + u_{3,\alpha}) \right] d\Omega + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega
\end{aligned} \tag{B16}$$

Substituindo o lado direito da igualdade acima na Equação (B6) resulta:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} + Q_{\alpha}^* (u_{\alpha} + u_{3,\alpha}) \right] d\Omega + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega = \\
& = \int_{\Gamma_u} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i) t_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} q u_3^* d\Omega
\end{aligned} \tag{B17}$$

Integrando por partes a primeira integral em  $\Omega$ , observando as Equações (28), vem:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left[ M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_{\alpha}^* \right] u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}^* u_3 d\Omega = \\
& = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_i t_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} q \left[ u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha,\alpha}^* \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{B18}$$

Das Equações (23) tiramos:

$$\int_{\Omega} F_i^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} u_i t_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} q \left[ u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha,\alpha}^* \right] d\Omega \tag{B19}$$

As forças de domínio  $F_i^*$  são forças concentradas unitárias generalizadas aplicadas em um ponto P pertencente a  $\Omega$ , em cada uma das três direções ortogonais generalizadas, dadas pelos vetores unitários  $e_i$ . O ponto P será chamado de ponto fonte, sendo as citadas forças expressas por (vide item 2.10):

$$F_1^* = \delta(Q,P)e_1(P) \quad (B20)$$

onde:

P - ponto fonte, onde atuam os  $F_1^*$

Q - ponto campo, onde observam-se os efeitos de  $F_1^*$

$\delta(Q,P)$  - função generalizada delta de Dirac, com singularidade em P, possuindo a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega} g(Q)\delta(Q,P)d\Omega = g(P) \quad (B21)$$

Portanto:

$$\int_{\Omega} F_1^*(Q,P)u_1(Q)d\Omega(Q) = u_1(P)e_1(P) \quad (B22)$$

Como observado no item 2.10, os  $F_{\alpha}^*$ 's representam momentos concentrados unitários generalizados nas direções  $x_{\alpha}$ , enquanto  $F_3^*$  representa uma força concentrada generalizada unitária na direção  $x_3$ .

Considerando cada carga concentrada unitária generalizada atuando independentemente, podemos escrever (BREBBIA, TELLES e WROBEL [8]):

$$\begin{aligned} u_j^* &= U_{ij}(Q,P)e_i(P) \\ t_j^* &= T_{ij}(Q,P)e_i(P) \end{aligned} \quad (B23)$$

onde  $U_{ij}(Q,P)$  e  $T_{ij}(Q,P)$  representam os deslocamentos e as forças de superfície generalizadas na direção j do ponto Q, correspondentes a uma carga concentrada unitária generalizada aplicada na direção i do ponto P. Os deslocamentos  $U_{ij}(Q,P)$  correspondem ao estado descrito pela Equação (33).

Note que  $U_{ij}(Q,P)$  é função de dois pontos: o ponto fonte P, sobre o qual temos a singularidade da função generalizada delta de Dirac, e o ponto campo Q, onde estão definidas as variáveis envolvidas nas equações integrais. Para tais equações a solução fundamental é função somente da distância r entre P e Q, sendo r dado por:

$$r = \| Q - P \| \quad (B24)$$

Finalmente, a substituição das Equações (B22) e (B23) em (B19), lembrando que  $q \equiv q_3$ , resulta num sistema de três equações integrais, válidas para um ponto P

qualquer situado em  $\Omega$ :

$$u_i(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}(Q,P)u_j(Q)d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} U_{ij}(Q,P)t_j(Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} \left[ U_{i3}(Q,P) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha,\alpha}(Q,P) \right] q(Q)d\Omega(Q) \quad (B25)$$

que é a identidade de Somigliana para os deslocamentos  $u_i$  (BREBBIA, TELLES e WROBEL [8]).

Como a expressão acima requer o conhecimento dos deslocamentos e trações sobre o contorno, e sabendo-se que para um problema bem posto não se pode especificá-los simultaneamente sobre um mesmo ponto e na mesma direção generalizada, é necessário reduzir a identidade de Somigliana para pontos sobre o contorno, o que é feito mediante um procedimento de limite. Os pontos P e Q, quando restritos ao contorno  $\Gamma$ , são denotados por p e q.

O contorno próximo ao ponto p,  $\Gamma_\epsilon$ , é substituído por um arco circular de raio  $\epsilon$  centrado em p e exterior a  $\Omega$ , denotado por  $\bar{\Gamma}_\epsilon$  (Figura B1). A Equação (B25) pode ser escrita (BREBBIA, TELLES e WROBEL [8]):

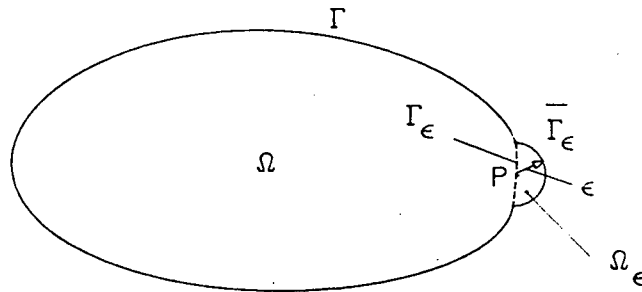


Figura B1 - Ponto p sobre o contorno  $\Gamma_\epsilon$  substituído por um arco circular  $\bar{\Gamma}_\epsilon$  de raio  $\epsilon$

$$u_i(p) + \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} T_{ij}(q,p)u_j(q)d\Gamma(q) = \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} U_{ij}(q,p)t_j(q)d\Gamma(q) + \int_{\Omega + \Omega_\epsilon} \left[ U_{i3}(Q,p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha,\alpha}(Q,p) \right] q(Q)d\Omega(Q) \quad (B26)$$

Podemos analisar o limite de cada integral separadamente, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

A integral do lado esquerdo da Equação (B26) pode ser escrita:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{ij}(q,p) u_j(q) d\Gamma(q) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} T_{ij}(q,p) u_j(q) d\Gamma(q) + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{ij}(q,p) u_j(q) d\Gamma(q) \end{aligned} \quad (\text{B27})$$

podendo ainda a última integral ser representada por:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{ij}(q,p) u_j(q) d\Gamma(q) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{ij}(q,p) [u_j(q) - u_j(p)] d\Gamma(q) + \\ &+ u_j(p) \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{ij}(q,p) d\Gamma(q) \right] \end{aligned} \quad (\text{B28})$$

A primeira integral à direita da Equação (B28) se anula, pois os  $u_j$  são contínuos. Logo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{ij}(q,p) u_j(q) d\Gamma(q) = \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{ij}(q,p) d\Gamma(q) \right] u_j(p) \quad (\text{B29})$$

Assim, como no limite  $\Gamma - \Gamma_\varepsilon = \Gamma$ , a expressão do lado esquerdo da Equação (B26) pode ser escrita:

$$\begin{aligned} u_i(p) + u_j(p) \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{ij}(q,p) d\Gamma(q) \right] + \int_{\Gamma} T_{ij}(q,p) u_j(q) d\Gamma(q) &= \\ = u_j(p) \left[ \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{ij}(q,p) d\Gamma(q) \right] + \int_{\Gamma} T_{ij}(q,p) u_j(q) d\Gamma(q) \end{aligned} \quad (\text{B30})$$

A última integral em (B30) deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy, cuja existência pode ser demonstrada se os  $u_j(q)$  satisfizerem a condição de Hölder em  $p$ , ou seja:

$$|u_j(p) - u_j(q)| < Br^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad B > 0 \quad (\text{B31})$$

que vem a ser a condição de Lipschitz quando  $\alpha = 1$  (JASWON e SYMM [46]).

As demais integrais em (B26) apresentam singularidades fracas, podendo serem assim interpretadas no sentido normal de integração (BREBBIA, TELLES e WROBEL [8]).

Definimos:

$$C_{ij}(p) = \delta_{ij} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} T_{ij}(q,p) d\Gamma(q) \quad (\text{B32})$$

Quando o contorno é suave, obtemos (BREBBIA e WALKER [9]):

$$C_{ij}(p) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (\text{B33})$$

Podemos escrever a identidade de Somigliana, Equação (B25), para um ponto P qualquer pertencente ao domínio ou ao contorno, observando a Equação (B32):

$$C_{ij}(P)u_j(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}(q,P)u_j(q)d\Gamma(q) = \int_{\Gamma} U_{ij}(q,P)t_j(q)d\Gamma(q) + \int_{\Omega} \left[ U_{i3}(Q,P) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha,\alpha}(Q,P) \right] q(Q)d\Omega(Q) \quad (\text{B34})$$

devendo a integral a esquerda ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy.

A Equação (B34) pode ser escrita em notação matricial:

$$\underset{\sim}{C} \underset{\sim}{u} + \int_{\Gamma} \underset{\sim}{T} \underset{\sim}{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \underset{\sim}{U} \underset{\sim}{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \left[ \underset{\sim}{U} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \bar{\underset{\sim}{U}} \right] \underset{\sim}{q} d\Omega \quad (\text{B35})$$

onde:

$$\underset{\sim}{u} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\}^T \quad (\text{B36})$$

$$\underset{\sim}{t} = \{t_1 \quad t_2 \quad t_3\}^T \quad (\text{B37})$$

$$\underset{\sim}{q} = \{0 \quad 0 \quad q\}^T \quad (\text{B38})$$

$$\underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} U_{12,2} & U_{11,1} & U_{11,1} + U_{12,2} \\ U_{22,2} & U_{21,1} & U_{21,1} + U_{22,2} \\ U_{32,2} & U_{31,1} & U_{31,1} + U_{32,2} \end{bmatrix} \quad (\text{B39})$$

As Equações (B34), quando unificadas para os modelos de placa de Reissner e Mindlin, de acordo com o item 2.11, são expressas por (WESTPHAL JR e BARCELLOS [34]):

$$\begin{aligned} C_{ij}(P)u_j(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}(q,P)u_j(q)d\Gamma(q) &= \int_{\Gamma} U_{ij}(q,P)t_j(q)d\Gamma(q) + \\ &+ \int_{\Omega} \left[ U_{i3}(Q,P) - MF U_{i\alpha,\alpha}(Q,P) \right] q(Q)d\Omega(Q) \end{aligned} \quad (\text{B40})$$

Em notação matricial temos:

$$\underset{\sim}{C} \underset{\sim}{u} + \int_{\Gamma} \underset{\sim}{T} \underset{\sim}{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \underset{\sim}{U} \underset{\sim}{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \left[ \underset{\sim}{U} - MF \overline{\underset{\sim}{U}} \right] \underset{\sim}{q} d\Omega \quad (\text{B41})$$



## APÊNDICE C

### ADEQUAÇÃO DAS EQUAÇÕES AO MODELO DE PLACA DE MINDLIN

REISSNER [2] e MINDLIN [4], ao estabelecerem as hipóteses norteadoras de seus respectivos modelos para deflexão de placas, incluíram o efeito das deformações cisalhantes transversais, o que foi a chave para a resolução do paradoxo clássico das condições de contorno (REISSNER [45]).

Enquanto Reissner partiu de uma equação variacional para as tensões, Mindlin partiu de um campo de deslocamentos, fazendo as integrações apropriadas das equações de equilíbrio tridimensionais na direção 3. No modelo de Reissner a parcela proveniente de  $\sigma_{33}$  é variacionalmente nula, enquanto que no modelo de Mindlin é desprezado o efeito médio de  $\sigma_{33}$ . As demais diferenças diretas entre os dois modelos podem ser vistas no item 2.7.

Portanto, como resultado das diferentes hipóteses adotadas, obtivemos (Equações (11) e (A8)):

Reissner:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= D \frac{1-\nu}{2} \left( u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{\alpha\beta} \\ Q_{\alpha} &= D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left( u_{\alpha} + u_{3,\alpha} \right) \end{aligned} \quad (C1)$$

Mindlin:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= D \frac{1-\nu}{2} \left( u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \\ Q_{\alpha} &= D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left( u_{\alpha} + u_{3,\alpha} \right) \end{aligned} \quad (C2)$$

Logo, vemos que os momentos fletores  $M_{\omega\omega}$  do modelo de Reissner têm acrescida uma parcela, relacionada ao carregamento no ponto de medição destes momentos.

No que concerne à solução fundamental, podemos ver que a referida parcela está inclusa no operador diferencial  $F_1$ , e portanto a solução fundamental é a mesma

para os dois modelos, como se pode ver pelas Equações (17) e (33).

Também, procedendo de forma semelhante àquela do item 2.9, é obtida a forma similar às Equações (20), para o modelo de Mindlin:

$$D\Delta^2 u_3 = \left(1 - \frac{2}{(1-\nu)\lambda^2} \Delta\right) q$$

$$-\left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \Delta\right) Q_\alpha = D\Delta u_{3,\alpha} + \frac{1+\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q_{,\alpha}$$
(C3)

A parte não-homogênea das equações de Navier, Equação (19), é:

$$F(\partial_Q) = \{ 0 \quad 0 \quad 1 \}^T$$
(C4)

## APÊNDICE D

### ALGUMAS EQUAÇÕES NECESSÁRIAS PARA A OBTENÇÃO DOS TENSORES FUNDAMENTAIS

De ABRAMOWITZ e STEGUN [38] temos:

$$K_{0,z} = -K_1 \quad (D1)$$

$$K_{1,z} = -K_0 - \frac{1}{z} K_1 \quad (D2)$$

$$I_{0,z} = I_1 \quad (D3)$$

$$I_{1,z} = I_0 - \frac{1}{z} I_1 \quad (D4)$$

Além disso:

$$z_{,\alpha} = \lambda r_{,\alpha} \quad (D5)$$

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \quad (D6)$$

$$r_{,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (Q) r = \frac{1}{r} r_{,\alpha} \quad (D7)$$

$$\left( r_{,\alpha} \right)_{,\beta} = \frac{\lambda}{z} \left( \delta_{\alpha\beta} - r_{,\alpha} r_{,\beta} \right) \quad (D8)$$

$$\left( r_{,\alpha} r_{,\beta} \right)_{,\gamma} = \frac{\lambda}{z} \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right) \quad (D9)$$

$$\left( r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right)_{,\delta} = \frac{\lambda}{z} \left( r_{,\alpha} r_{,\beta} \delta_{\gamma\delta} + r_{,\alpha} r_{,\gamma} \delta_{\beta\delta} + r_{,\beta} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\delta} - 3r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\delta} \right) \quad (D10)$$

D.1 - Tensor  $U_{1j}$

$K_0$

$$\Delta K_0 = \lambda^2 K_0 \quad (D11)$$

$$\Delta^2 K_0 = \lambda^4 K_0 \quad (D12)$$

$$K_{0,\alpha} = -\lambda K_{1,r,\alpha} \quad (D13)$$

$$K_{0,\alpha\beta} = -\lambda^2 \left[ \frac{1}{z} K_1 \delta_{\alpha\beta} - \left( K_0 + \frac{2}{z} K_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (D14)$$

$$\Delta K_{0,\alpha} = \lambda^2 K_{0,\alpha} \quad (D15)$$

$$\Delta K_{0,\alpha\beta} = \lambda^2 K_{0,\alpha\beta} \quad (D16)$$

$\ln z$

$$\Delta \ln z = 0 \quad (D17)$$

$$\Delta^2 \ln z = 0 \quad (D18)$$

$$(\ln z)_{,\alpha} = \frac{\lambda}{z} r_{,\alpha} \quad (D19)$$

$$(\ln z)_{,\alpha\beta} = \frac{\lambda^2}{z^2} \left( \delta_{\alpha\beta} - 2 r_{,\alpha} r_{,\beta} \right) \quad (D20)$$

$$(\Delta \ln z)_{,\alpha} = 0 \quad (D21)$$

$$(\Delta \ln z)_{,\alpha\beta} = 0 \quad (D22)$$

$z^2$

$$\Delta z^2 = 4\lambda^2 \quad (D23)$$

$$\Delta^2 z^2 = 0 \quad (D24)$$

$$z^2_{,\alpha} = 2\lambda z r_{,\alpha} \quad (D25)$$

$$z^2_{,\alpha\beta} = 2\lambda^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (D26)$$

$$\Delta z^2_{,\alpha} = 0 \quad (D27)$$

$$\Delta z^2_{,\alpha\beta} = 0 \quad (D28)$$

$z^2 \ln z$

$$\Delta z^2 \ln z = 4\lambda^2 (\ln z + 1) \quad (D29)$$

$$\Delta^2 z^2 \ln z = 0 \quad (D30)$$

$$(z^2 \ln z)_{,\alpha} = \lambda z (2 \ln z + 1) r_{,\alpha} \quad (D31)$$

$$(z^2 \ln z)_{,\alpha\beta} = \lambda^2 \left( (2 \ln z + 1) \delta_{\alpha\beta} + 2 r_{,\alpha} r_{,\beta} \right) \quad (D32)$$

$$(\Delta z^2 \ln z)_{,\alpha} = 4 \frac{\lambda^3}{z} r_{,\alpha} \quad (D33)$$

$$(\Delta z^2 \ln z)_{,\alpha\beta} = 4 \frac{\lambda^4}{z^2} \left( \delta_{\alpha\beta} - 2 r_{,\alpha} r_{,\beta} \right) \quad (D34)$$

$I_0$

$$\Delta I_0 = \lambda^2 I_0 \quad (D35)$$

$$\Delta^2 I_0 = \lambda^4 I_0 \quad (D36)$$

$$I_{0,\alpha} = \lambda I_{1,\alpha} r_{,\alpha} \quad (D37)$$

$$I_{0,\alpha\beta} = \lambda^2 \left[ \frac{1}{z} I_1 \delta_{\alpha\beta} + \left( I_0 - \frac{2}{z} I_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (D38)$$

$$\Delta I_{0,\alpha} = \lambda^2 I_{0,\alpha} \quad (D39)$$

$$\Delta I_{0,\alpha\beta} = \lambda^2 I_{0,\alpha\beta} \quad (D40)$$

D.2 - Derivadas do Tensor  $U_{ij}$

$$B_{,\gamma} = -\frac{\lambda}{z} \left( z K_1 + A \right) r_{,\gamma} \quad (D41)$$

$$A_{,\gamma} = -\frac{\lambda}{z} \left( z K_1 + 2A \right) r_{,\gamma} \quad (D42)$$

$$\left( A r_{,\alpha} r_{,\beta} \right)_{,\gamma} = \frac{\lambda}{z} \left[ A \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} \right) - \left( 4A + z K_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right] \quad (D43)$$

$$z^2_{,\gamma} = \frac{2\lambda}{z^3} r_{,\gamma} \quad (D44)$$

$$\left(\frac{1}{z^2} r_{,\alpha} r_{,\beta}\right)_{,\gamma} = \frac{\lambda}{z^3} \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right) \quad (D45)$$

$$BI_{,\gamma} = -\frac{\lambda}{z} \left( -zI_1 + AI \right) r_{,\gamma} \quad (D46)$$

$$AI_{,\gamma} = -\frac{\lambda}{z} \left( -zI_1 + 2AI \right) r_{,\gamma} \quad (D47)$$

$$\left( AI r_{,\alpha} r_{,\beta} \right)_{,\gamma} = \frac{\lambda}{z} \left[ AI \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} \right) - \left( 4AI - zI_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right] \quad (D48)$$

$$(z \ln z)_{,\gamma} = \lambda (\ln z + 1) r_{,\gamma} \quad (D49)$$

$$\left( \frac{1}{z} r_{,\alpha} \right)_{,\gamma} = \frac{\lambda}{z^2} \left( \delta_{\alpha\gamma} - 2r_{,\alpha} r_{,\gamma} \right) \quad (D50)$$

$$\left( z \ln z r_{,\alpha} \right)_{,\gamma} = \lambda \left( \delta_{\alpha\gamma} \ln z + r_{,\alpha} r_{,\gamma} \right) \quad (D51)$$

$$\left( zr_{,\alpha} \right)_{,\gamma} = \lambda \delta_{\alpha\gamma} \quad (D52)$$

$$(z^2 \ln z)_{,\gamma} = \lambda z (2 \ln z + 1) r_{,\gamma} \quad (D53)$$

$$\begin{aligned} \left( B \delta_{\alpha\beta} - A r_{,\alpha} r_{,\beta} \right)_{,\gamma} &= -\frac{\lambda}{z} \left[ zK_1 r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + A \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( 4A + zK_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right] \end{aligned} \quad (D54)$$

$$\left[ \frac{1}{z^2} \left( \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right) \right]_{,\gamma} = -\frac{2\lambda}{z^3} \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right) \quad (D55)$$

$$\begin{aligned} \left( BI \delta_{\alpha\beta} - AI r_{,\alpha} r_{,\beta} \right)_{,\gamma} &= -\frac{\lambda}{z} \left[ -zI_1 r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + AI \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( 4AI - zI_1 \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right] \end{aligned} \quad (D56)$$

## APÊNDICE E

### DETERMINAÇÃO DOS FATORES GEOMÉTRICOS $C_{ij}$

Quando especializamos a identidade de Somigliana (Equações (B25)) para um ponto  $p$  sobre o contorno, definimos os fatores  $C_{ij}(p)$  (Equações (B32)):

$$C_{ij}(p) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{ij}(q,p) d\Gamma(q) \quad (E1)$$

Tendo definido o tensor  $T_{ij}$  nas Equações (82) e observando a Figura E1, resulta (DANSON [47]):

$$n_{,1} = r_{,1} = \cos \theta \quad (E2)$$

$$n_{,2} = r_{,2} = \sin \theta \quad (E3)$$

$$r = \varepsilon \quad (E4)$$

e, conseqüentemente:

$$r_{,n} = 1 \quad (E5)$$

Além do mais, temos os seguintes limites:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(\lambda\varepsilon) = -\frac{1}{2} \quad (E6)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_1(\lambda\varepsilon) = \frac{1}{\lambda\varepsilon} \quad (E7)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(\lambda\varepsilon) = \frac{\lambda\varepsilon}{2} \quad (E8)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} AI(\lambda\varepsilon) = -\frac{2}{\lambda^2\varepsilon^2} \quad (E9)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B(\lambda\varepsilon) = -\frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{\lambda\varepsilon}{2} \right) + \gamma + \frac{1}{2} \right] \quad (E10)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} BI(\lambda\varepsilon) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda^2\varepsilon^2} \quad (E11)$$

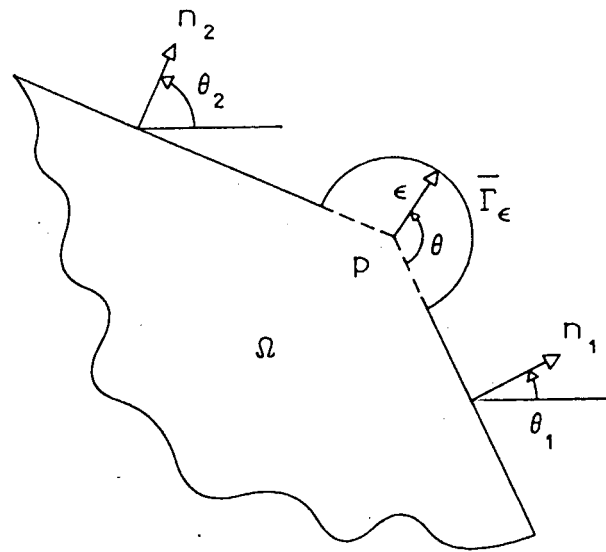


Figura E1 - Ponto p sobre o contorno

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_0(\lambda\varepsilon) = 1 \quad (\text{E12})$$

sendo:

$$\gamma = 0,5772156649015329 \quad (\text{E13})$$

a constante de Euler.

Obtemos assim:

$$C_{ij} = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \Upsilon + \frac{1+\nu}{4} \Upsilon_s & \frac{1+\nu}{4} \Upsilon_c & 0 \\ \frac{1+\nu}{4} \Upsilon_c & \Upsilon - \frac{1+\nu}{4} \Upsilon_s & 0 \\ 0 & 0 & \Upsilon \end{bmatrix} \quad (\text{E14})$$

onde:

$$\Upsilon = \pi + \theta_1 - \theta_2 \quad (\text{E15})$$

$$\Upsilon_s = \sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1 \quad (\text{E16})$$

$$\Upsilon_c = \cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2 \quad (\text{E17})$$

Como esperado, para um ponto do contorno com tangente contínua temos, observando que  $\theta_1 = \theta_2$ :

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (\text{E18})$$



## APÊNDICE F

### TRANSFORMAÇÃO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO EM INTEGRAIS SOBRE O CONTORNO

A principal característica do MEC (equações integrais) é a interdependência funcional entre variáveis definidas apenas sobre o contorno da região em estudo. Problemas formulados originalmente a partir de operadores diferenciais homogêneos resultam diretamente em equações integrais sobre o contorno, citando-se como exemplo a equação de Laplace. Isto no entanto não implica necessariamente que se tenha de modelar o problema apenas sobre o citado contorno, pois a identidade de Somigliana presentemente desenvolvida apresenta integrais no domínio, dado que as equações diferenciais em estudo são não-homogêneas (Equações (17), (19) e (C4)). Não há porém nenhuma incógnita nas mesmas. Assim sendo, observando que esta integral de domínio representa o potencial do carregamento transversal  $q$  aplicado às faces da placa, constatamos que esta integral pode ser transformada numa representação integral sobre o contorno, para alguns tipos de carregamento.

Limitando a presente análise a um carregamento uniformemente distribuído, e conjecturando a seguinte equação de Poisson (VAN DER WEEËN [25]):

$$\Lambda_{1,\alpha\alpha}(Q,P) = U_{13}(Q,P) \quad (F1)$$

podemos expressar as integrais de domínio dadas nas Equações (58) como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ U_{13}(Q,p) - MF U_{1\alpha,\alpha}(Q,p) \right] q(Q) d\Omega(Q) = \\ = \int_{\Omega} \left[ \Lambda_{1,\alpha\alpha}(Q,p) - MF U_{1\alpha,\alpha}(Q,p) \right] q(Q) d\Omega(Q) \end{aligned} \quad (F2)$$

Usando o teorema da divergência e lembrando que no presente caso o carregamento é constante, com a diferenciação em relação ao ponto  $Q$  (por ser a variável envolvida nas equações integrais), reduzimos as integrais no domínio a:

$$\int_{\Omega} \left[ U_{13}(Q,p) - MF U_{1\alpha,\alpha}(Q,p) \right] q(Q) d\Omega(Q) =$$

$$= q \int_{\Omega} \left[ \Lambda_{1,\alpha}(q,p) - MF U_{1\alpha}(q,p) \right] n_{\alpha}(q) d\Gamma(q) \quad (F3)$$

Resolvendo a equação de Poisson (Equação (F1)) obtemos:

$$\Lambda_{\alpha} = \left[ \frac{D^{1-\nu}}{2} \right] \frac{2\lambda^6}{16} r^3 r_{,\alpha} \left\{ 8 \left( C_2 - 4C_4 \right) \frac{\ln z}{z^2} + 4C_3 - C_4 + 4C_4 \ln z \right\}$$

$$\Lambda_3 = \left[ \frac{D^{1-\nu}}{2} \right] \frac{2\lambda^4}{4} r^2 \left\{ \left( C_2 - 4 \frac{3-\nu}{1-\nu} C_4 \right) \ln z + \frac{1}{8} \left( 2C_3 - C_4 \right) z^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} C_4 z^2 \ln z - \left( C_2 + 4 \frac{3-\nu}{1-\nu} C_3 \right) + C_6 \right\} \quad (F4)$$

Derivando as Equações (F4) em relação a Q resultam:

$$\Lambda_{\alpha,\beta} = \left[ \frac{D^{1-\nu}}{2} \right] \frac{2\lambda^6}{16} r^2 \left\{ 8 \left( C_2 - 4C_4 \right) \frac{1}{z^2} \left( r_{,\alpha} r_{,\beta} + \ln z \delta_{\alpha\beta} \right) + \right.$$

$$\left. + \left( 4C_3 - C_4 \right) \left( 2r_{,\alpha} r_{,\beta} + \delta_{\alpha\beta} \right) + 4C_4 \left( r_{,\alpha} r_{,\beta} (2\ln z + 1) + \ln z \delta_{\alpha\beta} \right) \right\}$$

$$\Lambda_{3,\alpha} = \left[ \frac{D^{1-\nu}}{2} \right] \frac{2\lambda^4}{4} r r_{,\alpha} \left\{ \left( C_2 - 4 \frac{3-\nu}{1-\nu} C_4 \right) \left( 2\ln z - 1 \right) + \right.$$

$$\left. + C_3 z^2 + \frac{1}{4} C_4 z^2 (4\ln z - 1) - 8 \frac{3-\nu}{1-\nu} \left( C_3 + C_4 \right) + 2C_6 \right\} \quad (F5)$$

Temos definidos assim os núcleos necessários para o cômputo das integrais provenientes do potencial do carregamento transversal, em função apenas de integrais sobre o contorno (Equações (F3)).

Para a determinação dos deslocamentos em pontos internos, as integrais de domínio das Equações (84) são semelhantes àquelas expressas nas Equações (F3), estando seus núcleos já definidos acima.

Derivando as Equações (84) em relação a  $x_{\alpha}(P)$ , tendo antes feito a substituição das integrais de domínio pelas integrais sobre o contorno dadas nas Equações (F2), resulta a seguinte expressão para as integrais de domínio dadas nas Equações (86):

$$\int_{\Omega} \left[ U_{13,\alpha}(Q,P) - MF U_{1\gamma,\gamma\alpha}(Q,P) \right] q(Q) d\Omega(Q) =$$

$$= q \int_{\Gamma} \left[ \Lambda_{1,\beta\alpha}(q,P) - MF U_{1\beta,\alpha}(q,P) \right] n_{\beta}(q) d\Gamma(q) \quad (F6)$$

Assim, para a determinação dos esforços em pontos internos, fazemos as seguintes substituições das integrais de domínio, Equações (87):

$$\int_{\Omega} \left[ U_{\alpha\beta 3}(Q,P) - MF V_{\alpha\beta}(Q,P) \right] q(Q) d\Omega(Q) =$$

$$= q \int_{\Gamma} \left[ Y_{\alpha\beta\delta}(q,P) - MF U_{\alpha\beta\delta}(q,P) \right] n_{\delta}(q) d\Gamma(q)$$

$$\int_{\Omega} \left[ U_{\alpha 33}(Q,P) - MF V_{\alpha 3}(Q,P) \right] q(Q) d\Omega(Q) =$$

$$= q \int_{\Gamma} \left[ Y_{\alpha 3\delta}(q,P) - MF U_{\alpha 3\delta}(q,P) \right] n_{\delta}(q) d\Gamma(q) \quad (F7)$$

sendo:

$$Y_{\alpha\beta\gamma} = D \frac{1-\nu}{2} \left[ \Lambda_{\alpha,\gamma\beta} + \Lambda_{\beta,\gamma\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \Lambda_{\delta,\gamma\delta} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (F8)$$

$$Y_{\alpha 3\beta} = D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left[ \Lambda_{\alpha,\beta} + \Lambda_{3,\beta\alpha} \right]$$

As derivadas agora em consideração são em relação ao ponto P, exceto  $\Lambda_{\alpha,\beta}$  em  $Y_{\alpha 3\beta}$ , que é em relação a Q.

Derivando as Equações (F5) em relação a P vem:

$$\Lambda_{\alpha,\beta\gamma} = - \left[ D \frac{1-\nu}{2} \right]^2 \frac{\lambda^6}{16r} \left\{ \left( C_2 - 4C_4 \right) \frac{8}{Z^2} \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right) + \right.$$

$$+ 2 \left( 4C_3 - C_4 \right) \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) +$$

$$\left. + 4C_4 \left[ \left( r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) (2 \ln z + 1) + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right] \right\}$$

$$\Lambda_{3,\alpha\beta} = -\left[D\frac{1-\nu}{2}\right]^2 \frac{\lambda^4}{4} \left\{ \left(C_2 - 4\frac{3-\nu}{1-\nu}C_4\right) \left(2r_{,\alpha} r_{,\beta} + 2\ln z \delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\right) + \right. \\ \left. + C_3 z^2 \left(2r_{,\alpha} r_{,\beta} + \delta_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{4} C_4 z^2 \left(8r_{,\alpha} r_{,\beta} \ln z + 4\ln z \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}\right) - \right. \\ \left. - 8\frac{3-\nu}{1-\nu} \left(C_3 + C_4\right) \delta_{\alpha\beta} + 2C_6 \delta_{\alpha\beta} \right\} \quad (F9)$$

Finalmente, o tensor  $Y_{\alpha\beta}$  (Equações (F8)) é dado por:

$$Y_{\alpha\beta\gamma} = -\left[D\frac{1-\nu}{2}\right]^3 \frac{\lambda^6}{4} r \left\{ \left(C_2 - 4C_4\right) \frac{4}{z^2} \left(r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + \frac{1+\nu}{1-\nu} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma}\right) + \right. \\ \left. + \left(4C_3 - C_4\right) \left(r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + \frac{1+3\nu}{1-\nu} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta}\right) + \right. \\ \left. + 2C_4 \left[ \left(r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma}\right) (2\ln z + 1) + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{1-\nu} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \left(2(1+3\nu)\ln z + 1 + 5\nu\right) \right] \right\} \\ Y_{\alpha\beta\beta} = \left[D\frac{1-\nu}{2}\right]^3 \frac{\lambda^6}{4} \left\{ C_2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{4}{1-\nu} C_4 \left(4r_{,\alpha} r_{,\beta} + (4\ln z + 3 - \nu) \delta_{\alpha\beta}\right) + \right. \\ \left. + 8\frac{3-\nu}{1-\nu} C_3 \delta_{\alpha\beta} - 2C_6 \delta_{\alpha\beta} \right\} \quad (F10)$$

Para concluir, as integrais de domínio expressas nas Equações (98) ficam:

$$\int_{\Omega} \left[ U_{\alpha i 3} (Q,P) - MF V_{\alpha i} (Q,P) \right] q(Q) d\Omega(Q) = \\ = q \int_{\Gamma} \left[ Y_{\alpha i \beta} (q,P) - MF U_{\alpha i \beta} (q,P) \right] n_{\beta}(q) d\Gamma(q) \quad (F11)$$

Os tensores associados às novas integrais sobre o contorno são todos regulares.

No caso de cargas concentradas aplicadas em  $m$  pontos  $Q = y^j$ , temos (KAMIYA e SAWAKI [48]):

$$q(Q) = \sum_{j=1}^m q(y^j) \delta(Q, y^j) \quad (F12)$$

Então, as integrais de domínio, Equações (58), são dadas por:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ U_{13}(Q,p) - MF U_{1\alpha,\alpha}(Q,p) \right] q(Q) d\Omega(Q) &= \\ &= \sum_{j=1}^m q(y^j) \left[ U_{13}(y^j,p) - MF U_{1\alpha,\alpha}(y^j,p) \right] \end{aligned} \quad (F13)$$

que pode ser calculado simplesmente, sem integração.

Para a determinação dos esforços em pontos internos, as integrais expressas nas Equações (98) ficam:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ U_{\alpha 13}(Q,P) - MF V_{\alpha 1}(Q,P) \right] q(Q) d\Omega(Q) &= \\ &= \sum_{j=1}^m q(y^j) \left[ U_{\alpha 13}(y^j,P) - MF V_{\alpha 1}(y^j,P) \right] \end{aligned} \quad (F14)$$

## BIBLIOGRAFIA

- 1 REISSNER, E. On the Theory of Bending of Elastic Plates. *J. Math. Phys.*, 23: 184-91, 1944.
- 2 \_\_\_\_\_. The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. *J. Appl. Mech.*, 12: A69-A77, 1945.
- 3 \_\_\_\_\_. On Bending of Elastic Plates. *Q. Appl. Math.*, 5(1): 55-68, 1947.
- 4 MINDLIN, R. D. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. *J. Appl. Mech.*, 18: 31-8, 1951.
- 5 TIMOSHENKO, S. P. & WOINOWSKI-KRIEGER, S. *Theory of Plates and Shells*. 2. ed., Singapore, McGraw-Hill Book Co, 1970. xiv + 580 p.
- 6 SILVA, L. H. M. & BARCELLOS, C. S. "Review" sobre o Método de Elementos de Contorno Aplicado para Solução de Problemas de Placas Elásticas. In: *Anais do VIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, São José dos Campos, ITA, 1985. p. 457-60.
- 7 BREBBIA, C. A. *The Boundary Element Method for Engineers*. London, Pentech Press, 1978. 189 p.
- 8 BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Berlin, Springer-Verlag, 1984. xiv + 464 p.
- 9 BREBBIA, C. A. & WALKER, S. *The Boundary Element Method in Engineering*. London, Newnes-Butterworths, 1980. 210 p.
- 10 SILVA, L. H. M. *Novas Formulações Integrais para Problemas da Mecânica*. UFSC, Florianópolis, 1988. Tese de Doutorado. ix + 192 p.
- 11 BANERJEE, P. K. & BUTTERFIELD, R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. London, McGraw-Hill Book Co (UK) Ltd, 1981. xv + 452 p.
- 12 TELLES, J. C. F. A Self-Adaptive Co-Ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 24: 959-73, 1987.
- 13 JASWON, M. A. & MAITI, M. An Integral Equation Formulation of Plate Bending Problems. *J. Engng. Math.*, 2: 83-93, 1968.
- 14 JASWON, M. A.; MAITI, M.; SYMM, G. T. Numerical Biharmonic Analysis and Some Ap-

- plications. *Int. J. Solids Structures*, 3: 309-32, 1967.
- 15 MAITI, M. & CHAKRABARTY, S. K. Integral Equation Solutions for Simply Supported Polygonal Plates. *Int. J. Engng. Sci.*, 12: 793-806, 1974.
- 16 NIWA, Y.; KOBAYASHI, S.; FUKUI, T. An Application of the Integral Equation Method to Plate Bending. *Faculty Engng.*, Kyoto Univ., 36 (Pt. 2): 140-58, 1974.
- 17 CRUSE, T. A. & RIZZO, F. J. (Eds) *Boundary-Integral Equation Method: Computational Applications in Applied Mechanics*. New York, AMD-Vol 11, ASME, 1975. 148 p
- 18 HANSEN, E. B. Numerical Solution of Integro-Differential and Singular Integral Equations for Plate Bending Problems. *J. Elasticity*, 6: 39-56, 1976.
- 19 ALTIERO, N. J. & SIKARSKIE, D. L. A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form. *Comp. Structures*, 9: 163-8, 1978.
- 20 BÉZINE, G. Boundary Integral Formulation for Plate Flexure with Arbitrary Boundary Conditions. *Mech. Res. Comm.*, 5(4): 197-206, 1978.
- 21 BÉZINE, G. P. & GAMBY, D. A. A New Integral Equation Formulation for Bending Problems. In: Brebbia, C. A., *Recent Advances in Boundary Element Methods*. London, Pentech Press, 1978. p. 327-42.
- 22 STERN, M. A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Plate Bending Problems. *Int. J. Solids Structures*, 15: 769-82, 1979.
- 23 TOTTENHAM, H. The Boundary Element Method for Plates and Shells. In: Banerjee, P. K. & Butterfield, R., *Developments in Boundary Element Methods 1*. London, Applied Science Publishers, 1979. p. 173-205.
- 24 STERN, M. Boundary Integral Equations for Bending of Thin Plates. In: Brebbia, C. A., *Progress in Boundary Element Methods*. London, Pentech Press, 1983. v. 2, p. 158-81.
- 25 VAN DER WEEËN, F. Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 18: 1-10, 1982.
- 26 \_\_\_\_\_. Application of the Direct Boundary Element Method to Reissner's Plate Model. In: Brebbia, C. A., *Proc. 4th Int. Sem. BEM Eng.*, Southampton, 1982. p. 487-99.
- 27 KARAM, V. J. *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas*. COPPE, Rio de Janeiro, 1986. Dissertação de Mestrado. xvi + 142 p.
- 28 \_\_\_\_\_. O Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Teoria de Reissner para Flexão de Placas. In: *Anais do VIII Congresso Latino Americano sobre Métodos Com-*

- putacionais para Engenharia*. São Paulo, 1986. p. 29-42.
- 29 BARCELLOS, C. S. & SILVA, L. H. M. A Boundary Element Formulation for the Mindlin's Plate Model. In: Brebbia, C. A. & Venturini, W. S., *BETECH 87*. Southampton, Comp. Mech. Publ., 1987. p. 123-30.
- 30 ANTES, H. Dual Complementary Variational Principles in Reissner's Plate Theory. *Acta Mechanica*, 65: 13-25, 1986.
- 31 MASON, Jayme & SOUZA, Jorge de Mello e. *Métodos de Energia*. Rio de Janeiro, Livraria Interciência Ltda, 1976. x + 158 p.
- 32 SALERNO, V. L. & GOLDBERG, M. A. Effect of Shear Deformations on the Bending of Rectangular Plates. *J. Appl. Mech.*, 27: 54-8, 1960.
- 33 DYM, Clive L. & SHAMES, Irving H. *Solid Mechanics. A Variational Approach*. New York, McGraw-Hill, Inc., 1973. xix + 556 p.
- 34 WESTPHAL JR., T. & BARCELLOS, C. S. Applications of the Boundary Element Method to Reissner's and Mindlin's Plate Models. In: Brebbia, C. A. & Tanaka, M., *Proc. 12th Int. Conf. BEM*, Japan, 1990.
- 35 HÖRMANDER, L. *Linear Partial Differential Operators*. Berlin, Springer-Verlag, 1964. vii + 287 p.
- 36 BARCELLOS, C. S. & SILVA, L. H. M. *Novas Formulações de Elementos de Contorno para Problemas de Elasticidade*. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, 1985, (Relatório Interno - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica). iii + 111 p.
- 37 COSTA JR., J. A. & BREBBIA, C. A. Plate Bending Problems using BEM. In: Brebbia, C. A., *Boundary Elements VI*, p. 3-43, 3-63, 1984.
- 38 ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A. (Eds) *Handbook of Mathematical Functions*. New York, Dover Publications, 1965, 5th printing, 1972. xiv + 1046 p.
- 39 WATSON, J. O. Advanced Implementation of the Boundary Element Method for Two- and Three-Dimensional Elastostatics. In: Banerjee, P. K. & Butterfield, R., *Developments in Boundary Element Methods 1*. London, Applied Science Publishers, 1979. p. 31-63.
- 40 LACHAT, J. C. *A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics*. University of Southampton, 1975. Ph. D. Thesis. v + 250 p.
- 41 HUMES, Ana F. P. de Castro et alii. *Noções de Cálculo Numérico*. São Paulo, McGraw-Hill, 1984. x + 201 p.
- 42 BEER, G. Implementation of Combined Boundary Element-Finite Element Analysis with



- Applications in Geomechanics. In: Banerjee, P. K. & Watson, J. O., *Developments in Boundary Element Methods - 4*, London, Elsevier Applied Science Publishers, 1986, p. 191-225.
- 43 BORESI, Arthur P. & LYNN, Paul P. *Elasticity in Engineering Mechanics*, New Jersey, Englewood Cliffs, 1974. xv + 475 p.
- 44 REISSNER, E. On the Theory of Transverse Bending of Elastic Plates. *Int. J. Solids Structures*, 12: 545-54, 1976.
- 45 \_\_\_\_\_. Reflections on the Theory of Elastic Plates. *Appl. Mech. Rev.*, 38: 1453-64, 1985.
- 46 JASWON, M. A. & SYMM, G. T. *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*. London, Academic Press, 1977. xiv + 287 p.
- 47 DANSON, D. Linear Isotropic Elasticity with Body Forces. In: Brebbia, C. A. *Progress in Boundary Element Methods*, Vol. 2. London, Pentech Press, 1983. p. 101-35.
- 48 KAMIYA, N. & SAWAKI, Y. An Efficient BEM for some Inhomogeneous and Nonlinear Problems. In: Brebbia C. A. & Maier, G., *Boundary Elements VII*. Italy, 1985, p. 13-59, 13-68.