

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO DE PROBLEMAS DINÂMICOS EM EXAUSTORES DE GÁS CLORÍDRICO

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

MÁRCIO ANTÔNIO TORRES BUENO

FLORIANÓPOLIS - SANTA CATARINA - BRASIL

1989

ESTUDO DE PROBLEMAS DINÂMICOS EM EXAUSTORES DE GÁS CLORÍDRICO

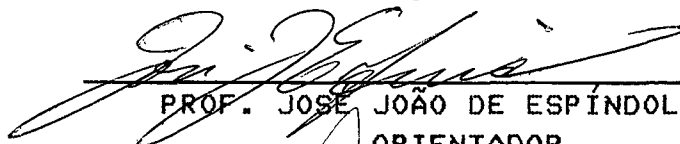
MÁRCIO ANTÔNIO TORRES BUENO

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

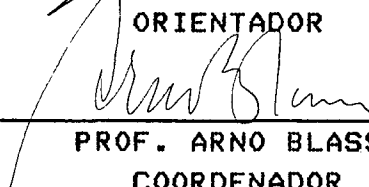
"MESTRE EM ENGENHARIA"

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL

PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

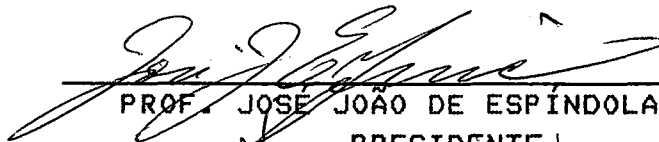


PROF. JOSÉ JOÃO DE ESPÍNDOLA, Ph.D.
ORIENTADOR

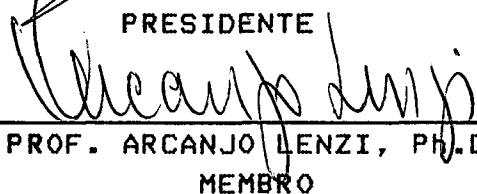


PROF. ARNO BLASS
COORDENADOR

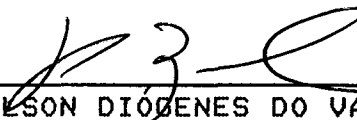
BANCA EXAMINADORA



PROF. JOSÉ JOÃO DE ESPÍNDOLA, Ph.D
PRESIDENTE



PROF. ARCANJO LENZI, Ph.D
MEMBRO



PROF. NELSON DIÓGENES DO VALLE - Dr.ING.
MEMBRO



PROF. NELSON BACK, Ph.D
MEMBRO

Dedico inteiramente este trabalho
a meu pai, ANTÔNIO PEDREIRA BUENO,
que, consoante a vontade do SENHOR,
não pôde ver este estudo concluído,
e à minha mãe, IRENE TORRES BUENO

"Não sei como o mundo me julga, mas a mim próprio parece-me que tenho sido uma criança que brinca na praia e que se diverte quando encontra uma pedra mais lisa do que a outra, ou uma concha mais bonita do que as comuns, enquanto o imenso oceano da verdade jazia perante mim, como uma incógnita."

Sir ISAAC NEWTON - 1727

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me fortaleceu em todos os momentos difíceis do curso;

À Companhia Siderúrgica Nacional, pela oportunidade concedida, permitindo meu aprimoramento profissional;

Ao Prof. José João de Espíndola, pela orientação e atenção dispensadas durante o desenvolvimento deste;

Ao Prof. Arcanjo Lenzi, pela inestimável colaboração e amizade demonstradas em todos os momentos. Valeu!

Aos meus superiores de então, Eng^o Antônio Carlos Possobom, Chefe do Departamento Técnico de Manutenção e Eng^o Helcio Marcello do Amaral, Superintendente Geral de Engenharia de Manutenção, pela indicação de meu nome;

Ao Eng^o Ernesto José Meduna, orientador por parte da CSN, pelo constante incentivo e sugestões valiosas;

Aos Prof. Arcanjo Lenzi e Nelson D. do Valle pela preciosa colaboração e amizade;

Ao colega de turma e hoje grande amigo, Eduardo Márcio de Oliveira Lopes, o "Mineiro", pelo apoio e hospitalidade;

Aos demais professores do Curso de Vibrações e Acústica, sempre dispostos a colaborar;

Ao Engº Nicodemus Neto da Costa Lima, pela inestimável colaboração e orientação na "Análise Modal" do rotor;

Ao Engº Benedito Mendonça Neto, Superintendente de Manutenção da Laminação a Frio da CSN, que me confiou o problema e acreditou na solução apresentada;

Ao Engº Luis Antônio de Carvalho e Técnico de Indústria Antônio Carlos, ambos da Superintendência de Calderaria da CSN, pela confecção criteriosa do pêndulo trifilar e pedestais do rotor, bem como pelo incentivo neste trabalho;

Ao Engº Olavo José Curátola, pelo grande apoio dado no desenvolvimento dos programas em "Basic", bem como pelo espírito de amizade ao longo do curso;

Ao Engº Ronaldo Fernandes, sempre solícito em fornecer informações e literatura técnica sobre rolamentos;

À Valéria, minha esposa, pelo apoio, compreensão e carinho;

Aos meus amigos e colegas de trabalho, pelas constantes palavras de ânimo;

Ao Eduardo Rodrigues da Silva, da SGEM (SSE/N) pelo esforço e dedicação na digitação, em microcomputador, deste trabalho;

Ao Edmo, Carlos Alexandre (Maninho), Lima e Inês, pelos desenhos executados com auxílio do CAD;

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS	vi
LISTA DE ABREVIATURAS	xii
RESUMO	xiv
ABSTRACT	xv
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Breve histórico das Vibrações em Máquinas Rota- tivas	1
1.2 - Objetivo	9
CAPÍTULO 2 - UM EXEMPLO PRÁTICO	12
2.1 - Generalidades	12
2.2 - Características do Conjunto Motor/Exaustor .	15
2.3 - Problemas do Exaustor	18
2.3.1 - Desbalanceamento	18
2.3.2 - Mancais danificados	25
2.3.3 - Trincas na estrutura	26
2.3.4 - Mudança brusca de seção do eixo	26
2.3.5 - Trincas nos discos do rotor	26
2.3.6 - Ruído	29
2.3.7 - Fatores econômicos	31
2.4 - Comentários	32

CAPÍTULO 3 - DETERMINAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DO SISTEMA	35
3.1 - Objetivo	35
3.2 - Cálculo das Frequências Naturais	36
3.2.1 - Método de Iteração Matricial	36
3.2.2 - Método de Matrizes de Transferência	42
3.2.3 - Método do Determinante Característico ...	43
3.2.4 - Método de Dunkerley	44
3.2.5 - Método de Rayleigh	45
3.3 - Parâmetros modificadores das frequências naturais	46
3.3.1 - Efeitos Inerciais Rotatórios	46
3.3.2 - Efeito Giroscópico (ou de Coriolis).....	50
3.3.3 - Efeito das Mangas do Eixo	55
3.3.4 - Efeito da Flexibilidade dos Suportes ...	56
3.3.5 - Efeito da Excentricidade do Disco do Rotor	58
3.3.6 - Influência do Número de Graus de Liberdade-Rotor com cotas (caso não simétrico .	60
3.3.7 - Discretização considerando-se cotas reais (rotor assimétrico), efeito combinado da Inércia Rotatória e redução das mangas do eixo	62

3.3.8 - Influência da Flexibilidade dos Discos do Rotor	64
CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DE SINAIS	68
4.1 - Introdução	68
4.2 - Tempo de Gravação do Sinal	70
4.3 - Resolução - Δf	73
4.4 - Calibração das Curvas Obtidas	74
4.5 - Escolha do Parâmetro a ser medido: Deslocamento, Velocidade ou Aceleração	76
4.6 - Curvas obtidas	78
4.7 - Determinação da Amplitude	81
4.8 - Identificação das Frequências de Interesse ..	83
4.8.1 - Frequência de Passagem das Pás	83
4.8.2 - Frequências dos Rolamentos	84
4.8.3 - Soma e diferenças de frequências	87
4.9 - Limites Toleráveis de Vibração	91
CAPÍTULO 5 - ANÁLISE MODAL	98
5.1 - Objetivo	98
5.2 - Breve teoria	98

5.3 - Determinação Experimental das Frequências	
Naturais do Rotor via Digital	109
5.3.1 - Cadeia de Medição/Procedimentos	110
5.3.2 - Valores Encontrados/Comentários	122
5.4. - Análise Modal via Digital	125
5.4.1 - Cadeia de Medição/Procedimentos	129
5.4.2 - Curvas Obtidas (Função Resposta em Fre-	
quência)	132
5.4.3 - Valores Encontrados/Comentários	138
5.4.4 - Registro dos Modos de Vibração	140
5.5 - Comentários Gerais/Conclusões	144
CAPÍTULO 6 - MEDIDAS CORRETIVAS	147
6.1 - Sistema Rotor (eixo + discos)	147
6.1.1 - Alternativas para Modificação das Fre -	
quências Naturais	149
6.2 - Modificações Gerais	155
6.2.1 - Revestimento do Eixo	155
6.2.2 - Verificação do Acréscimo da Rigidez	155
6.2.3 - Aumento da Rigidez dos Discos	157
6.2.4 - Acoplamento	157
6.2.5 - Limitação do Torque de Partida do Motor .	157
6.2.6 - Mudança do Sistema de Lubrificação	158

6.2.7 - Substituição dos Mancais	158
6.2.8 - Verificação do Alinhamento do Acoplamento	159
6.2.9 - Adoção do Programa de Manutenção Pre - ditiva	161
6.2.10 - Monitoramento Contínuo	164
CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	165
APÊNDICE A - Sinópsse dos métodos usados em Análise de Rotores	170
APÊNDICE B - Determinação dos Momentos de Inércia do Disco - Pêndulo Trifilar	217
APÊNDICE C - Fluxogramas para Determinação das Frequências Naturais	234
Referências Bibliográficas	240

LISTA DE SÍMBOLOS

[] matriz quadrada

() matriz coluna

[]⁻¹ matriz inversa

[]^T matriz transposta

diag [] matriz diagonal

[] matriz linha

[C] matriz de amortecimento

[D] matriz dinâmica

[F]_i i-ésima matriz de campo

[α] matriz de flexibilidade

[G_D] matriz efeito giroscópico

[H(jw)] matriz resposta em frequência

[I] matriz identidade

[K] ou [k] matriz de rigidez

[m] matriz de inércia ou de massa

[m]_{iG} i-ésima matriz de ponto com efeito giroscópico

[P]_i i-ésima matriz de ponto

[S] matriz de varrimento

[U] matriz resultante da multiplicação entre matrizes de ponto e de campo

- (f) ou (P) forças generalizadas, vetores
- (q) deslocamentos generalizados, vetores
- (\dot{q}) velocidades generalizadas, vetores
- (\ddot{q}) acelerações generalizadas, vetores
- (0) vetor nulo
- (S)_i^E vetor de estado no ponto i , lado esquerdo
- (S)_i^D vetor de estado no ponto i , lado direito
- (μ) matriz coluna, vetor deslocamento
- ($\mu^{(r)}$) autovetor correspondente à frequência natural ω_r
- (μ)_Cⁱ⁺¹ vetor vinculado, ortogonal ao autovetor ($\mu^{(i)}$)
- (μ)^T transposto da matriz coluna (vetor deslocamento)
-
- A. área (m²), Amplitude (μm)
- B(s) matriz do sistema
- C amortecimento (Ns/m)
- d deslocamento, diâmetro das esferas (mm)
- d_i^E deslocamento do ponto i , lado esquerdo
- d_i^D deslocamento do ponto i , lado direito
- D diâmetro primitivo dos elementos girantes (mm)
- E Módulo de Young (N/m²)
- e excentricidade (mm)
- F força (N)
- f frequência linear (Hz)

f_s	freqüência de amostragem (Hz)
f_c	freqüência de corte do filtro (Hz)
f_{co}	freqüência fundamental do conjunto (Hz)
f_o	freqüência de rotação do eixo (Hz), freq. fundamental
f_B	freqüência de Spin do elemento rotativo (Hz)
f_d	freqüência de defeito das esferas (Hz)
f_E	freqüência de passagem da pista externa (Hz)
f_I	freqüência de passagem da pista interna (Hz)
f_{pas}	freqüência de passagem das pás (Hz)
Δf	resolução em freqüência (Hz)
F_{max}	freqüência máxima de análise (Hz)
$f(t)$	força de excitação em função do tempo
g	aceleração da gravidade
$\overline{G_{xx}}(f)$	densidade espectral de potência (média) da excitação $x(t)$
$\overline{G_{xy}}(f)$	densidade espectral de potência cruzada (média) da excitação $x(t)$ e resposta $y(t)$
$H(f)$	Função de Transferência no domínio da freqüência
$H(s)$	Função de Transferência, domínio da variável complexa <u>s</u>
$H(j\omega)$	Função Resposta em Freqüência
$h(t)$	propriedades dinâmicas da estrutura
h, H	altura (m) ou (mm)
I	momento de inércia da seção transversal (m^4)

I_D	momento de inércia diametral ou transversal (Kg.m^2)
I_P	momento de inércia polar (Kg.m^2)
I_{Dx}	momento de inércia diametral em relação ao eixo x
K, k	rigidez (N/m)
k_{ij}	elementos da matriz de rigidez
L, l	comprimento (m) ou (mm)
M_D	massa do disco (Kg)
M_O	par ou conjugado atuante
m	massa (Kg)
m_i	massa no ponto i
M_i^E	Momento de flexão no ponto i, lado esquerdo
M_i^D	Momento de flexão no ponto i, lado direito
M_R	momento angular resultante ($\text{Kg.m}^2/\text{s}$)
m_{ij}	elementos da matriz de massa ou de inércia
n	número de graus de liberdade
N	nº de amostras ou número de pontos usados na conversão Analogica/Digital
N	nº de médias
P	peso (N)
P_k	polos
R	raio do passo circular (mm)
r	raio da esfera ou rolo (mm)

R, r raio genérico
 S variável de Laplace
 t tempo (s)
 $T(\epsilon)$ Transmissibilidade
 T Tempo de aquisição da amostra (s)
 Δt intervalo de amostragem (s)
 $\mu(t)$ deslocamento generalizado
 $\mu(x,t)$ deslocamento generalizado como função dependente do tempo
 μ_{ij} coeficientes da matriz [U]
 V esforço cortante (N), velocidade (m/s) ou (mm/s)
 V_{ef} velocidade eficaz (mm/s)
 V_{pico} velocidade pico (mm/s)
 V_{jE} força cisalhante no ponto j , lado esquerdo
 V_{jD} força cisalhante no ponto j , lado direito
 x, y, z direções de deslocamento
 $x(t)$ sinal da excitação do sistema
 $y(t)$ sinal da resposta do sistema
 α_{ij} coeficientes da matriz de flexibilidade
 α_{aco} coeficiente de dilatação linear do aço ($/^{\circ}C$)
 α_{Ti} coeficiente de dilatação linear do titânio ($/^{\circ}C$)
 β deslocamento angular do pêndulo
 δ_{ij} delta de Kronecker

δ	deflexão (mm)
Δ	determinante
ϵ	relação entre frequência de excitação e frequência natural
ξ	coeficiente de amortecimento viscoso
φ	ângulo de contato das esferas no rolamento, ângulo do eixo de rotação com a linha de centro do eixo em repouso ($^{\circ}$)
$\varphi(x)$	função genérica que descreve um movimento
φ_i^E	inclinação do ponto i, lado esquerdo
φ_i^D	inclinação do ponto i, lado direito
$\gamma_{xy}^2(f)$	
ou γ^2	coeficiente de coerência
ρ	massa específica (Kg/m^3)
τ	período do pêndulo trifilar (s)
σ_k	coeficiente de amortecimento
θ	ângulo de torção ou deslocamento angular (rad, $^{\circ}$)
ω	frequência natural angular (rad/s)
Ω	frequência de rotação do sistema (Hz)
$\overline{\Omega}$	frequência de rotação de precessão do eixo (Hz)

LISTA DE ABREVIATURAS

API	American Petroleum Institute
BK	Brüel & Kjaer
CA	corrente alternada
CG	centro de gravidade
CSN	Companhia Siderúrgica Nacional
CV	Cavalo vapor
dB	decibel
dBA	decibéis, curva ponderada A
FFT	Fast Fourier Transform
FM	Frequência Modulada
FN	Frequência Natural
FRF	Função Resposta em Frequência
GL	Graus de Liberdade
HP	Hewlett Packard, Horse Power
Hz	Hertz
Im	parte imaginária de um número complexo
ISO	International Organization for Standardization
LVA	Laboratório de Vibrações e Acústica
MRF	Matriz Resposta em Frequência
MS	Margem de Separação

N_{crit} rotação crítica

NPS Nível de Pressão Sonora

Re parte real de um número complexo

rpm rotações por minuto

RMS Root Mean Square

TF Transformada de Fourier

TL Transformada de Laplace

UFSC Universidade Federal de Santa Catarina

VDI Verein Deutsch Ingenieure

RESUMO

Analisam-se os problemas de vibrações de um exaustor de gás clorídrico da Companhia Siderúrgica Nacional, tendo em vista a determinação das causas e sua solução. Cinco métodos de cálculo das frequências naturais são utilizados e comparados, a saber:

- Método de Dunkerley
- Método de Rayleigh
- Método do Determinante Característico
- Método de Iteração Matricial
- Método de Matrizes de Transferência

Consideram-se vários efeitos que poderão alterar as frequências naturais tais como: redução do diâmetro das mangas do eixo, efeitos giroscópicos, flexibilidade dos discos e dos mancais, número de graus de liberdade, excentricidade dos discos e efeito da inércia rotatória. Efetua-se análise de sinais das vibrações do sistema, mediante utilização de gravação em FM e processamento desses sinais em um Analisador de vibrações (Fourier Analyser) FFT-5451-C, Hewlett Packard. As propriedades dinâmicas do rotor são obtidas através da Análise Modal, onde são determinadas as frequências naturais, modos de vibração e fatores de amortecimento. São discutidos os resultados numéricos e experimentais. Soluções, consistindo em modificações do exaustor, são sugeridas.

ABSTRACT

Vibrations problems of a Chloridic Gas Exhausting Fan of Companhia Siderurgica Nacional are analysed in order to identify the causes and present a solution. Five methods of determination of the natural frequencies are used and compared namely:

- Dunkerley Method
- Rayleigh Method
- Characteristic Determinant Method
- Matricial Iteration Method
- Transfer Matrix Method.

Several effects are taken into account, which may change the natural frequencies, namely: reduction of shaft diameter near bearings, gyroscopic effects, bearings and disk flexibility, number of degrees of freedom, disks excentricity and effect of rotatory inertia.

Vibration signal analysis of system are effected by using FM tape recorder and processing these signals in a Fourier Analyser

FFT-5451-C, Hewlett Packard. The dynamics properties of rotor are got through Modal Analysis, where the natural frequencies, vibrations modes and damping factors are obtained. Numerical and experimental results are discussed. Solutions, consisting of system modifications are suggested.

CAPITULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 BREVE HISTÓRICO DAS VIBRAÇÕES EM MÁQUINAS ROTATIVAS

Tendo em vista a crescente implicação e importância do fenômeno das vibrações em equipamentos rotativos (turbo máquinas, exaustores, bombas, compressores, turbinas de aeronaves, etc) e em estruturas (prédios, cascos de navios, aviões, foguetes, satélites, etc), um número cada vez maior de trabalhos de pesquisa é desenvolvido e publicado praticamente em todos os quadrantes do mundo. Objetivando situar no tempo a evolução da teoria das vibrações, sob uma forma sucinta, é dado, a seguir, uma breve história do assunto, antes de abordar-se o estudo propriamente dito. Tal resumo é baseado em dados coletados por S.S.Rao [1] e A.D.Dimarogonas [2].

As pessoas interessaram-se em vibrações quando os primeiros instrumentos musicais, provavelmente apitos ou tambores, foram descobertos. Desde então, aplicaram a inteligência e investigação crítica para estudar o fenômeno da vibração.

Galileu (1564-1642) descobriu a relação entre o comprimento do pêndulo e sua frequência e observou a ressonância de dois corpos que foram conectados por algum meio de transferência de energia e sintonizados na mesma frequência natural. Posteriormente, ele observou as interrelações da densidade, tensão, comprimento e vibração de uma corda vibrante. Embora fosse conhecido a longo tempo que o som estava relacionado à vibração de um sistema mecânico, não era muito claro que o tom é determinado pela frequência de vibração até Galileu descobrir este fato. Praticamente, ao mesmo tempo que Galileu, Hooke mostrou a relação entre frequência e tom.

Dentre os matemáticos, Taylor, Bernoulli, d'Alembert, Euler, Lagrange e Fourier deram valiosas contribuições ao desenvolvimento da teoria de vibrações.

Wallis e Sauveur observaram, independentemente, o fenômeno dos modos de vibração (com pontos estacionários denominados nós) em cordas vibrantes. Eles também estabeleceram que a frequência do segundo modo era de duas vezes a do primeiro e, a do terceiro modo, tres.

É creditado a Sauveur ser o pioneiro do uso do termo fundamental para a frequência mais baixa e harmônicos para os demais. Bernoulli foi o primeiro a propor o princípio da superposição linear dos

harmônicos: "Qualquer configuração geral de vibrações livres é composta de configurações de harmônicos individuais, atuando independentemente em diferentes intensidades".

Após a enunciação da Lei da Elasticidade de Hooke em 1676, Euler (1744) e Bernoulli (1751) derivaram a equação diferencial que governa a vibração lateral de barras prismáticas e investigaram sua solução para o caso de pequenas deflexões. Em 1784, Coulomb realizou estudos teóricos e experimentais sobre oscilações torsionais de um cilindro metálico suspenso por um fio.

Há uma história interessante relacionada com o desenvolvimento da teoria da vibração de placas. Em 1802, Chladni desenvolveu o método de colocar areia em uma placa vibrante para encontrar seus modos de vibração e observou a beleza e complicação dos modelos modais das placas vibrantes. Em 1809, a Academia Francesa convidou Chladni para fazer uma demonstração de seus experimentos. Napoleão Bonaparte, atendendo ao convite, ficou muito impressionado e presenteou a Academia com 3.000 francos a serem oferecidos à primeira pessoa a dar uma teoria matemática satisfatória sobre vibrações em placas. Quase ao final do prazo estabelecido para a competição, em outubro de 1811, apenas uma candidata, Sophie Germain, havia se inscrito. Mas Lagrange, que era um dos juízes, notificou um erro na dedução da equação diferencial

do movimento. A Academia iniciou nova competição, com data de encerramento prevista para outubro de 1813. Sophie Germain inscreveu-se novamente, apresentando a forma correta da equação diferencial. Contudo, a Academia não lhe concedeu o prêmio, pois os juízes desejavam justificativas físicas de suas suposições feitas para a derivação. A competição estava aberta mais uma vez. Na sua terceira tentativa, Sophie Germain ganhou finalmente o prêmio em 1816, embora os juízes não estivessem completamente satisfeitos com sua teoria. De fato, descobriu-se posteriormente que sua equação diferencial estava correta, mas que as condições de contorno estavam erradas. As condições de contorno corretas para vibrações de placas foram dadas por Kirchoff, em 1850.

Após este fato, os estudos de vibração foram feitos em inúmeros sistemas mecânicos estruturais.

Em 1877, Lord Rayleigh publicou seu livro sobre a teoria do som; é considerado um clássico no assunto de vibrações até os dias de hoje. Notável entre as muitas contribuições de Rayleigh é o método de encontrar a frequência fundamental de vibração de um sistema conservativo fazendo uso do princípio da conservação da energia - agora conhecido como método de Rayleigh.

Em 1902, Frahm investigou a importância do estudo da vibração torsional no projeto de eixos propulsores de navios a vapor. O absor-

vedor dinâmico de vibrações, o qual envolve a adição de um sistema secundário de massa-mola para eliminar as vibrações de um sistema principal, foi também proposto por Frahm em 1909.

Dentre os modernos contribuidores da teoria das vibrações, os nomes de Stodola, Timoshenko e Mindlin são notáveis. O Método de Stodola para análise de vigas vibrantes é também aplicável às pás de turbinas. Os trabalhos de Timoshenko e Mindlin resultaram num aperfeiçoamento das teorias de vibrações de vigas e placas.

É conhecido a muito tempo que muitos problemas básicos da mecânica, incluindo aqueles relacionados às vibrações, não são lineares. Embora os tratamentos lineares comumente adotados são bastante satisfatórios para a maioria das aplicações, eles não são adequados para todos os casos. Em sistemas não lineares, sempre ocorrem fenômenos que são teoricamente impossíveis em sistemas lineares. A teoria matemática de vibrações não lineares começou a ser desenvolvida em trabalhos de Poincaré e Lyapunov, no final do último século. Após 1920, estudos realizados por Duffing e Van der Pol encontraram as primeiras soluções precisas sobre a teoria de vibrações não lineares e chamaram a atenção para sua aplicação em engenharia. Nos últimos 20 anos, autores como Minorsky e Stoker empenharam-se em coletar os principais resultados concernentes às vibrações não lineares em forma de monografias.

Características aleatórias estão presentes em diversos fenômenos tais como terremotos, ventos, transporte de mercadorias sobre veículos com rodas, e ruídos de foguetes e jatos. Tornou-se necessária a formulação de conceitos e métodos de análise de vibração para estes efeitos aleatórios. Embora Einstein em 1905 tenha considerado o movimento Browniano, um tipo particular de vibração aleatória, nenhuma aplicação foi investigada até 1930. A introdução da função de correlação por Taylor em 1920 e densidade espectral por Wiener e Khinchin, no início da década de 30, abriu novas perspectivas para o progresso da teoria de vibrações aleatórias.

Trabalhos de Lin e Rice, publicados entre 1943 e 1945, abriram caminho para as aplicações de vibrações aleatórias em problemas práticos de engenharia. As monografias de Crandall, Mark e Robson, sistematizaram o conhecimento existente da teoria de vibrações aleatórias.

Em torno de 30 anos atrás, estudos de vibrações, mesmo aqueles lidando com complexos sistemas de engenharia, eram realizados utilizando-se modelos grosseiros, com apenas poucos graus de liberdade. Contudo, o advento de computadores digitais de alta velocidade, na década de 50, tornou possível tratar sistemas moderadamente complexos e

gerar soluções aproximadas na forma semi-fechada, contando com os métodos clássicos de solução mas utilizando avaliações numéricas de certos termos que não podem ser expressos na forma fechada. O desenvolvimento simultâneo do Método de Elementos Finitos permitiu o uso de computadores digitais por engenheiros, conduzindo a análise de vibrações numericamente detalhada de complexos sistemas mecânicos, estruturais, veículos, envolvendo alguns milhares de graus de liberdade.

Referindo-se propriamente às máquinas rotativas, o projeto e construção das mesmas sofreram um desenvolvimento extraordinário na década de 20, quando as condições de trabalho exigiram velocidades supercríticas, nomeando-se a este novo ramo de estudos como Dinâmica de Rotores.

Os principais tópicos tratados neste campo são: balanceamento dinâmico; determinação de velocidades críticas; aceleração do rotor durante a passagem pelas frequências naturais; efeitos do amortecimento; comportamento mecânico de vários tipos de mancais; estabilidade do movimento rotativo; efeito giroscópico dos rotores; influência da flexibilidade dos mancais e, mais recentemente, efeitos térmicos.

Na década de 60, outra revolução neste campo aconteceu: por imposição de necessidades operacionais e econômicas, houve um aumento na potência das turbomáquinas.

Isto foi facilitado pelo emprego de técnicas avançadas de projeto, e pelo uso do computador digital.

A nova situação demandou grandes e rápidos rotores, operando acima da segunda e, às vezes, da terceira velocidade crítica, como é o caso de turbinas a gás ou a vapor e máquinas de aviação.

Inevitavelmente, toda uma classe de novos problemas foi criada: acréscimo da concentração de potência acarreta considerável interação entre o comportamento dinâmico de rotores de um lado e campos de fluxo de fluído/térmico associados, de outro.

A análise dinâmica de rotores de formas complexas tornou-se uma necessidade, enquanto que a importância dos métodos aproximados para análise foi enfatizada, devido a sua capacidade de prover tanto soluções confiáveis quanto meios de checar os resultados do computador baseados em algoritmos complicados. Finalmente, o aparecimento da Mecânica da Fratura nas últimas 2 décadas, como um novo ramo da Mecânica Aplicada, forneceu ferramentas analíticas para investigação de trincas no comportamento dinâmico de rotores.

1.2 - OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é o estudo dos problemas dinâmicos de um exaustor de gás clorídrico da Companhia Siderúrgica Nacional cuja função é exaurir gases oriundos do processo de recuperação de ácido clorídrico utilizado para decapagem contínua de chapas de aço.

O estudo foi efetuado utilizando-se, a título de comparação, vários métodos de cálculo das frequências naturais, os quais são apresentados resumidamente no Apêndice A incluindo-se aí a teoria condensada do efeito giroscópico dos rotores. Tais métodos são: Matrizes de Transferência, Matriz de Varrimento, Determinante Característico (autovalores e autovetores), Dunkerley, Rayleigh e Elementos Finitos, sendo este último apenas citado. O Método da Matriz de Varrimento é também conhecido como Método de Iteração Matricial ou de Stodola.

O Cap. 2 trata da descrição de um caso real, ou seja, o sistema do exaustor com os problemas que apresenta, bem como as propriedades inerciais do rotor. A maneira prática da obtenção do momento de inércia de um dos discos do rotor através da utilização de um pêndulo trifilar é abordada no APÊNDICE B.

A aplicação e discussão da análise numérica, as propriedades

elásticas, a variação do número de graus de liberdade e a inclusão da influência da flexibilidade dos suportes (mancais) são abordadas no Cap. 3.

Tendo em vista os resultados analíticos, o Cap. 4 trata o problema de uma maneira prática, utilizando-se um Analisador de Fourier 5451-C (FFT-Hewlett Packard) onde são obtidas as curvas do espectro de potência do sistema.

É descrito o sistema de medição, especificação dos instrumentos, esquemas, limitações do experimento, comparação com resultados numéricos e comentários; são estipuladas as frequências de interesse, detectadas as frequências críticas e são comentados os critérios de severidade (limites de tolerâncias de vibrações) com respeito ao eixo-auxiliar.

O Cap. 5 aborda o tema de Análise Modal, objetivando o levantamento dos modos de vibração e suas respectivas frequências naturais tecendo comentários sobre os procedimentos adotados, limitações, resultados, instrumentação utilizada, sendo estes tópicos precedidos de breve teoria de Análise Modal.

Com base nos dados obtidos, o Cap. 6 trata das medidas corretivas com respeito a: rolamentos, acoplamentos, controle do torque de

partida do motor, aumento da rigidez do sistema, lubrificação. São apresentados esquemas das modificações sugeridas.

Finalmente, o Cap. 7 trata das conclusões e sugestões para um estudo posterior mais apurado do rotor (disco) em si, bem como a otimização do plano de manutenção existente.

CAPÍTULO 2

UM EXEMPLO PRÁTICO

2.1 - GENERALIDADES:

Para a aplicação dos métodos expostos anteriormente (exceto Elementos Finitos) resolveu-se adotar um caso prático. Trata-se de um exaustor de gás clorídrico da Companhia Siderúrgica Nacional (CSN - Volta Redonda - RJ), cuja finalidade é exaurir gases do processo de recuperação de ácido clorídrico (HCl), proveniente dos tanques de decapagem contínua de chapas. A unidade de exaustão é composta por 2 exaustores que, em casos de emergência (maior demanda) poderão trabalhar em paralelo.

Sucintamente, o processo de recuperação é descrito a seguir, observando-se a Fig. 2.1.:

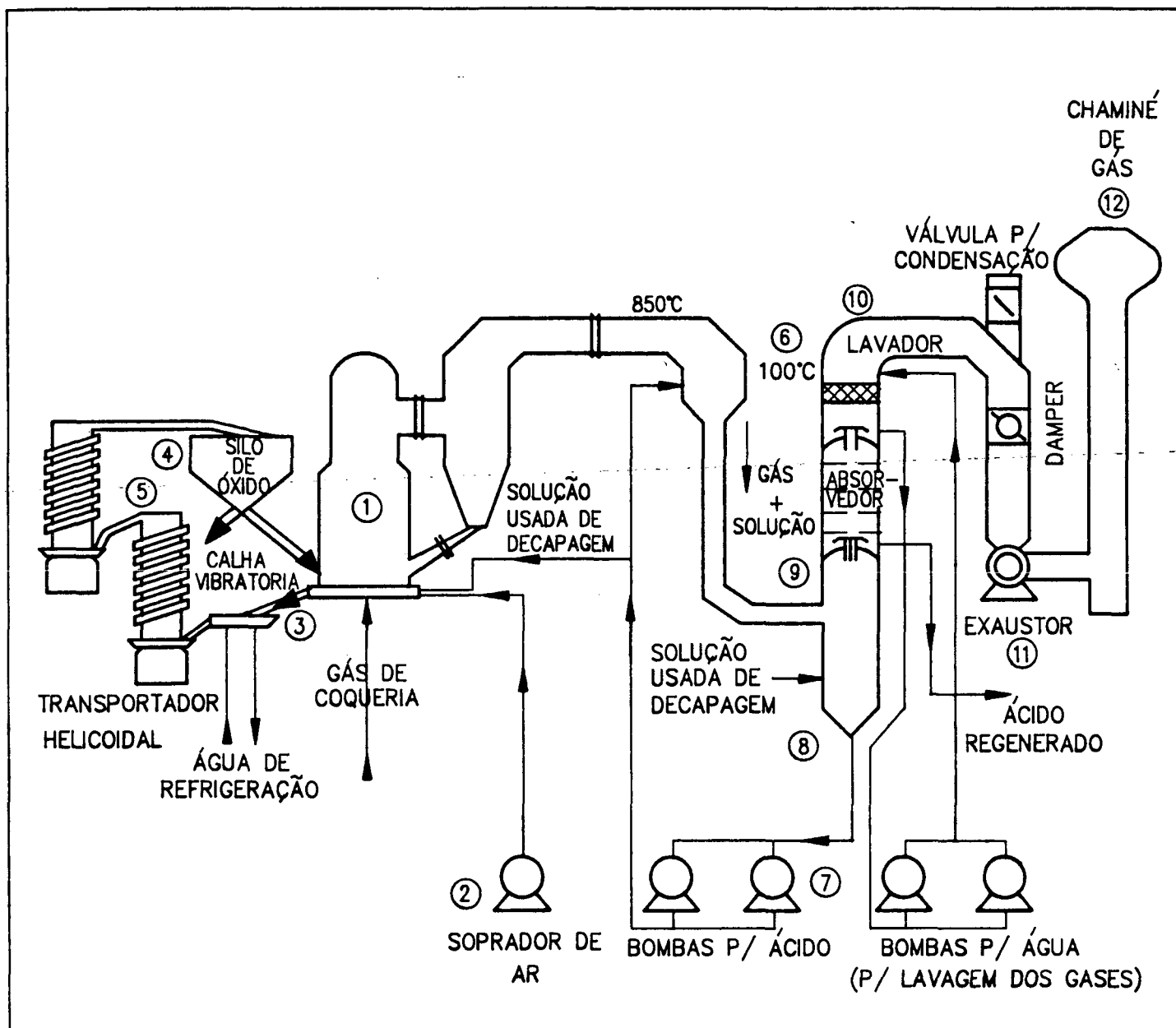
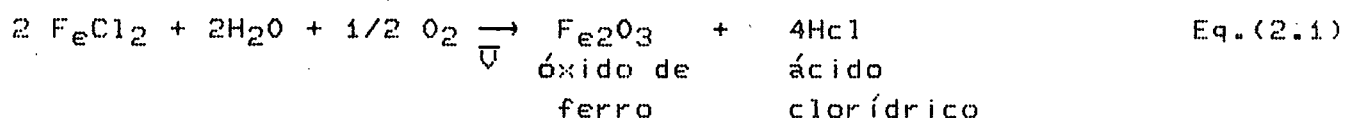


Fig. 2.1 - Representação Esquemática do Sistema de Regeneração de Ácido

A solução proveniente da decapagem contínua de chapas consiste de uma mistura de água + óxido de ferro ± 2% de ácido clorídrico, o qual deverá ser recuperado por razões econômicas e de controle ambiental. O processo de separação da água e óxido de ferro do ácido clorídrico inicia-se no Reator (1), após este ser aquecido através da combustão do gás de coqueria e ar de um Soprador (2), atingindo 850°C. Neste Reator há a reação química provocada pelo calor, separando o óxido de ferro da parte líquida (ácido + água), segundo a fórmula:



Este óxido de ferro é enviado a uma Calha Vibratória (3), sofrendo lavagem e conduzido ao Silo de Óxido (4) através dos Transportadores Helicoidais (5). Parte deste óxido é enviado para a Sinterização (aglomeração do minério) e pode também ser utilizado na indústria de tintas, como pigmento (zarcão); indústria eletrônica (gravação), etc. Outra pequena parte é utilizada para se iniciar o processo de reação (no Reator).

Os gases quentes provenientes do Reator (850°C) são resfriados no tubo Venturi (6) pela mistura com a solução usada, através das Bombas p/Ácido (7), atingindo 100°C e dirigem-se para o Vaso de Separação (8), onde é obtido o HCl regenerado. Os vapores, ainda com

pequena quantidade de ácido, passam pelo Absorvedor (9), consistindo de bandejas. Sofrem limpeza no Lavador de Gases (10), dirigindo-se finalmente para o Exaustor (11) e Chaminé (12).

2.2 - CARACTERÍSTICAS DO CONJUNTO MOTOR/EXAUSTOR:

As características nominais do conjunto são:

a) Exaustor:

Fabricante: ALVI-Bélgica (Consoiciada com KERAMCHEMIE- Alemanha)

Tipo: centrífugo, pás curvadas para trás

Vazão: $9,72\text{m}^3/\text{s}$

Rotação: 3550 rpm

Temperatura de trabalho: 80°C

Depressão: 200 mm Hg

Material dos discos: Titânio ASTM-B348 Grau 2

Nº de pás: 11

Massa de cada disco: 38 Kg

Massa de eixo + discos: 263,5Kg

Material do eixo: aço ABNT 1040 (c/revestimento anticorrosivo)

Rolamento: SKF-1316K+H316 (autocompensador com 2 carreiras de esferas), com caixa SN616

Lubrificação : Graxa (manual)

b) Motor :

Fabricante: GE

Potência: 400cv

Rotação: 3550 rpm (C.A)

Acionamento direto

Acoplamento: FALK STEELFLEX 12F

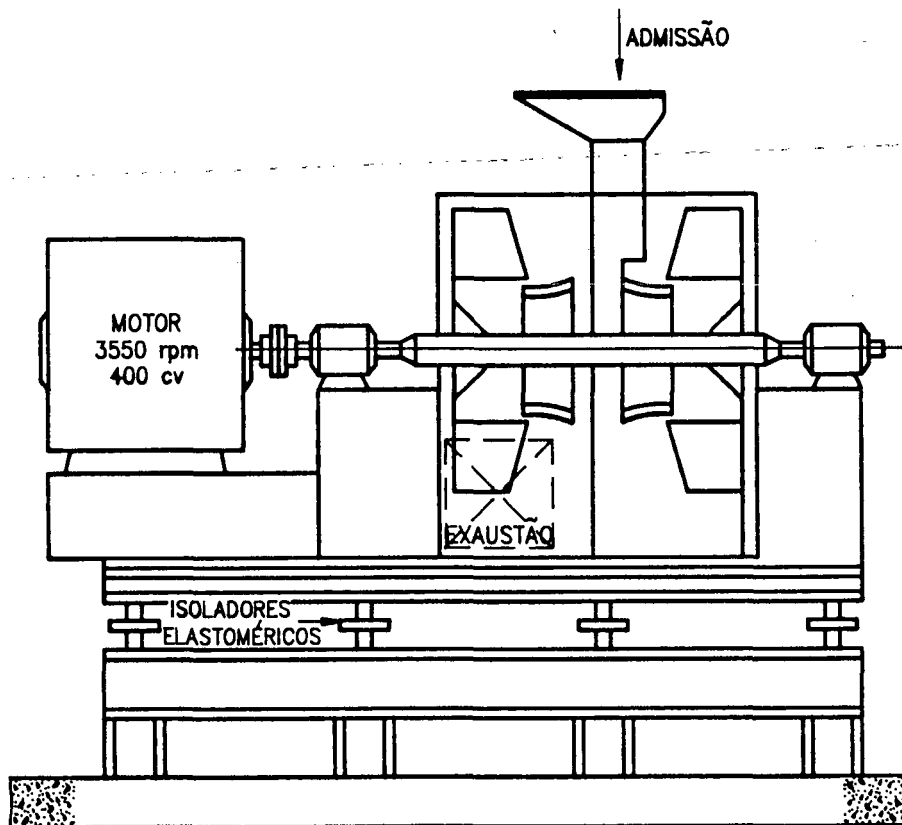


Fig. 2.2. - Esquema do conjunto motor/exaustor.

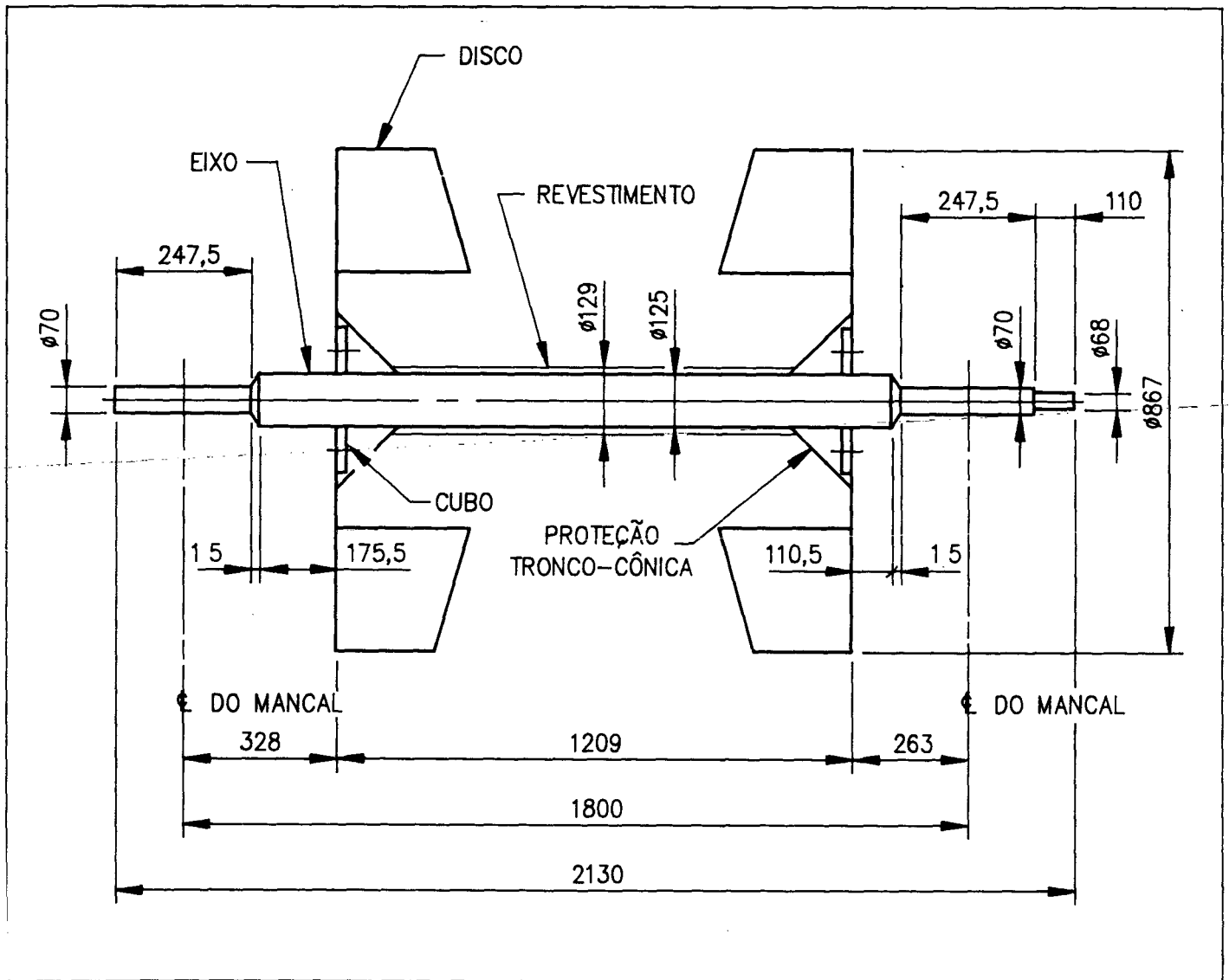


Fig. 2.3 - Dimensões Gerais do Rotor.

Vê-se pela Fig. 2.3 acima que o eixo possui uma camada de 2mm de revestimento, o qual pode ser de 2 tipos: Titânio (ASTM B348 Grau 2) ou Ebonite. Tal revestimento tem a finalidade de proteger o eixo do ataque ácido. A escolha entre um e outro tipo dependerá de certas particularidades que serão abordadas no próximo tópico.

2.3 - PROBLEMAS DO EXAUSTOR:

Desde a instalação do equipamento, em 1981, ocorreram várias paradas do mesmo, ocasionadas por excesso de vibração, chegando até à ruptura do eixo, em determinadas ocasiões. Por diversas vezes constatou-se níveis de vibração de 200µm (pico). Tais vibrações, após análise preliminar, eram provocadas por:

2.3.1 - Desbalanceamento

Decorrente principalmente por danos no revestimento do eixo, a saber:

a) Revestimento de Titânio:

O projeto original previu eixo de aço carbono (ABNT-1040) revestido por uma camada de 2mm de titânio ASTM-B348 Grau 2 (mesmo material dos discos). Isto se fez necessário para se evitar o ataque do ácido clorídrico que, embora sob a forma de gás, há formação de condensado, transformando-se em ácido. Este revestimento é feito através do processo de cladeamento (um tubo fino de Titânio reveste o eixo e,

através de aquecimento, há a difusão do T_i para o aço).

Conforme pode ser observado na Fig. 2.3, entre eixo e disco adaptou-se uma proteção tronco-cônica para o cubo de fixação do disco, sendo este cubo também de aço ABNT-1040, posto ser deficiente a soldabilidade entre aço e T_i . Após poucas horas de funcionamento do sistema, as vibrações acentuaram-se, havendo necessidade de parada para inspeção.

Detectou-se trincas na solda da proteção entre eixo e cone (base menor do cone), bem como este último apresentou deformação por tração-compressão, o que elimina a hipótese de falha por diferença de coeficiente de dilatação térmica entre aço e T_i . Optou-se, assim, pela proteção através de Ebonite.

b) Revestimento de Ebonite:

Este tipo de revestimento foi adotado levando-se em conta seus custos (cerca de 30 vezes mais barato que o T_i) e sua resistência ao ácido clorídrico. Porém, apresentou dois sérios inconvenientes:

b.1) Quando em rotação, há o desgaste por abrasão do Ebonite depositado sobre a cabeça dos 8 parafusos de fixação dos discos ao cubo. A cabeça do parafuso, sendo sextavada, faz com que as arestas tenham uma camada de revestimento muito fina, desgastando-se

rapidamente. Assim, além do desbalanceamento provocado, há a penetração do ácido, corroendo todo o parafuso e parte do cubo, se não for detectado a tempo (vide Fig. 2.5).

b.2) Como o sistema trabalha com temperatura igual ou superior a 80°C, há o endurecimento do Ebonite. Com níveis de vibrações sempre altos, há a tendência de se trincar o revestimento, já fragilizado. Tal fato acarretou, em uma das vezes, uma fratura insólita do eixo, após corrosão de cerca de 95% da seção útil do mesmo, conforme as figuras a seguir:

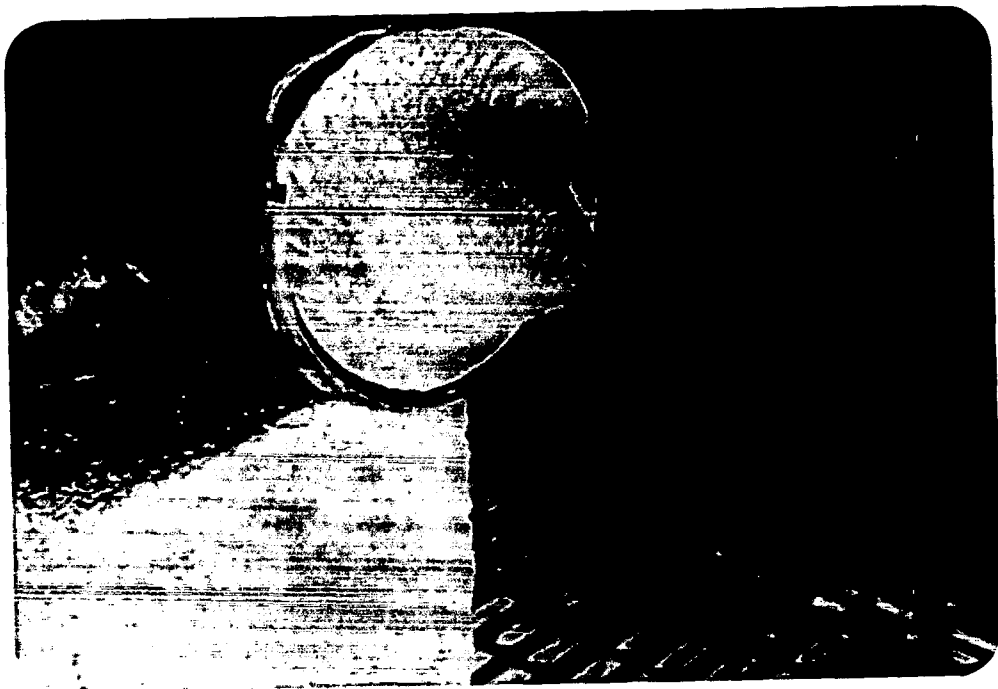


Fig. 2.4 - Eixo de aço ABNT-1040, com 125mm de diâmetro, corroído pelo ácido clorídrico. Note a camada de Ebonite e as linhas no eixo que denotam centrifugação do ácido.

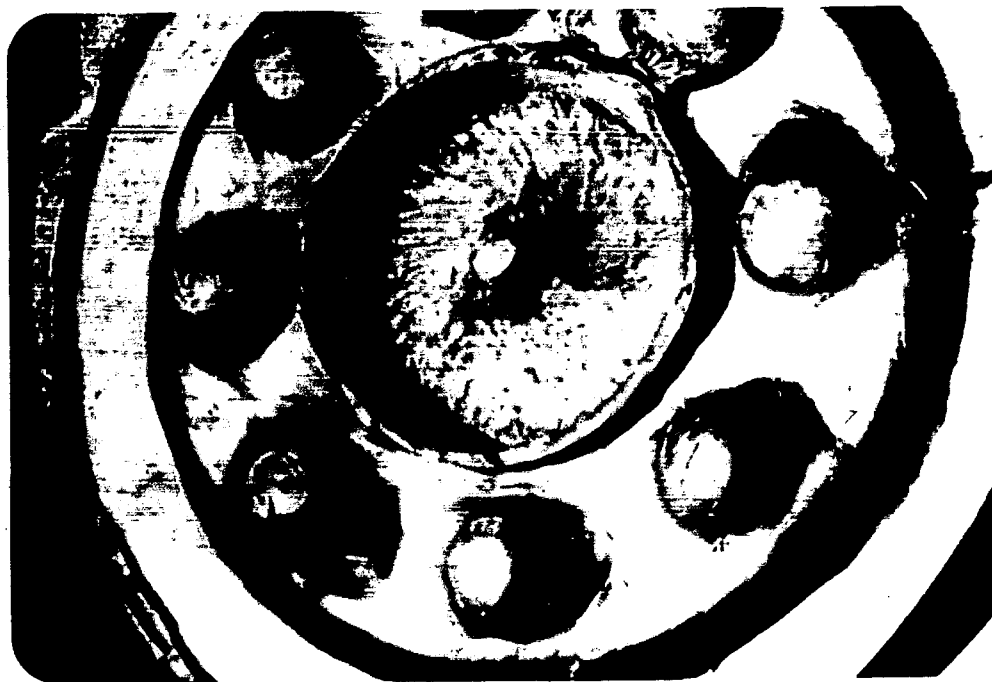


Fig. 2.5 - Detalhe do disco do rotor. Observe a corrosão do eixo e o início do desgaste do revestimento da cabeça dos parafusos.



Fig. 2.6 - Vista do eixo + disco danificados.

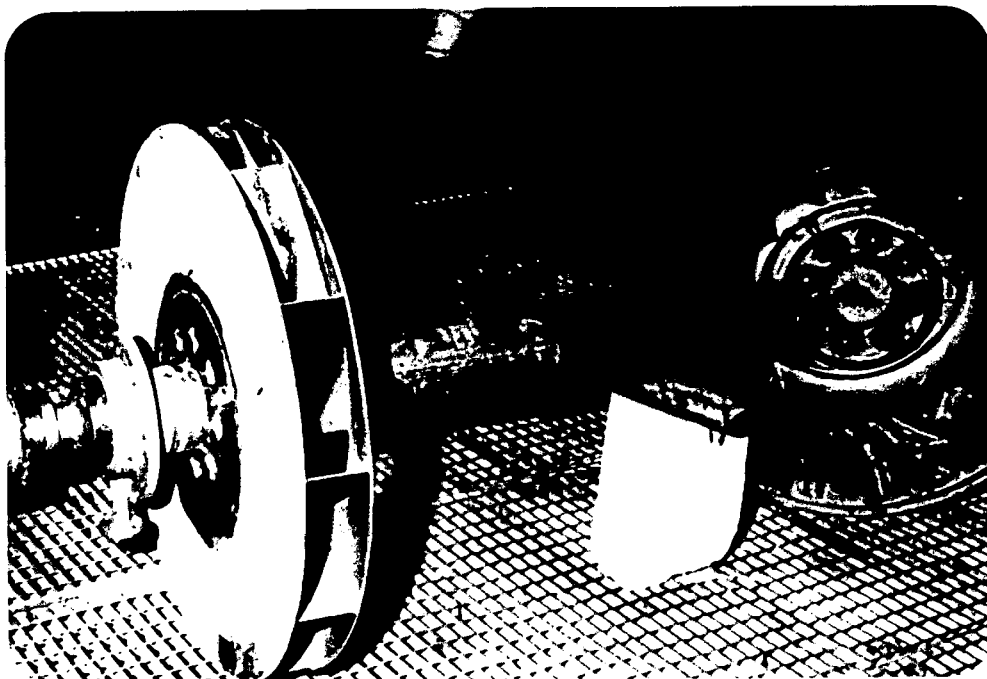


Fig. 2.7 - Vista geral do conjunto avariado.

É digno de nota que, embora o conjunto estivesse a plena carga e rotação nominal (3550 rpm), desprovido de sistema de parada de emergência, o acidente não teve conseqüências maiores devido à pronta ação do operador. Após este episódio, foi instalado um sistema de monitoração contínua das vibrações, dotado de alarme e desarme automático.

Com respeito ao balanceamento dinâmico, observa-se que, quando este é realizado em máquinas convencionais (baixa rotação), quando em regime de trabalho apresenta sintomas de desbalanceamento, necessitando rebalancear no local.

2.3.2 - Mancais danificados:

Segundo o fabricante, a vida útil prevista para os rolamentos é de 55.000 horas de trabalho em regime contínuo (\approx 6 anos). Contudo, aconselha a troca a cada 8.000 horas (\approx 1 ano). Apesar de serem tomados todos os cuidados na montagem dos rolamentos, a duração dos mesmos tem sido, em média de 3 meses.

Certa vez, durante o balanceamento no local por firma especializada, foi observada a mudança de fase lentamente, em rotação nominal, com o auxílio de uma lâmpada estroboscópica. Tal fato, acompanhado de variação simultânea fase/amplitude, é característico de desbalanceamento rotativo, provocado por aquecimento desigual do rotor, descrito magnificamente por DEN HARTOG [10].

Entretanto, ao se inspecionar as caixas dos mancais, verificou-se que havia deslizamento entre a pista externa do rolamento e a caixa. Este problema foi solucionado pela adição de solda química (cola especial).

A lubrificação atual é feita por graxa, periodicamente. Consultando-se os catálogos de fabricante de rolamentos, [3]; [4], [5] e [6], constatou-se que, embora as capacidades de carga (estática e dinâmica) estivessem compatíveis com o sistema ($C_0 = 40.500N$ e $C_{din} = 68.000N$), vida útil esperada de 2 anos, o limite

de rotação para este rolamento é de 3.600 rpm, lubrificado a graxa. Portanto, o rolamento trabalha no limite máximo de rotação. Os defeitos mais comuns detectados são: deficiência de lubrificação, rupturas nas gaiolas e pistas marcadas em toda a circunferência.

As medidas corretivas propostas estão expostas no Cap. 6.

2.3.3 - Trincas na estrutura:

Observando-se a Fig. 2.2, verificou-se que a localização dos isoladores (elastoméricos) é adequada para minimizar a transmissibilidade do equipamento para o piso (isolamento ativo). Contudo, as vibrações são transmitidas para a carcaça do exaustor, feitas de chapas finas (5mm) em construção soldada. A região próxima aos mancais já apresentou, diversas vezes, trincas generalizadas provocadas por fadiga (induzida pela energia vibratória).

2.3.4 - Mudança brusca da seção do eixo:

Pela Fig. 2.3 vê-se que o eixo passa de um diâmetro de \varnothing 125mm para \varnothing 70mm, sem nenhum raio de adocamento. Tal fato, até o presente, não causou nenhum dano, mas é um problema potencial que não pode ser desconsiderado.

2.3.5 - Trincas nos discos do rotor:

Houve casos em que os discos apresentaram trincas ao longo da

circunferência descrita pela base das pás. O comprimento das trincas variaram entre 40 a 70mm. Pela Fig. 2.7 percebe-se que as trincas originaram-se próximas às raízes das soldas das pás, regiões de alta concentração de tensões. Verifica-se também que, tendo o disco uma espessura de 6mm e uma distância entre a linha dos parafusos de fixação (ϕ 210mm) e a linha da base das pás (ϕ 411mm) igual a $(210 + 411)/2 = 310,5\text{mm}$, o rotor apresenta grande flexibilidade. Assim, quando em rotação, deduz-se que o disco apresenta um movimento lateral semelhante ao de um diafragma (\longleftrightarrow), favorecendo o aparecimento das trincas. Isto logicamente contribui para a falha prematura dos rolamentos, induzindo esforços axiais indesejáveis.

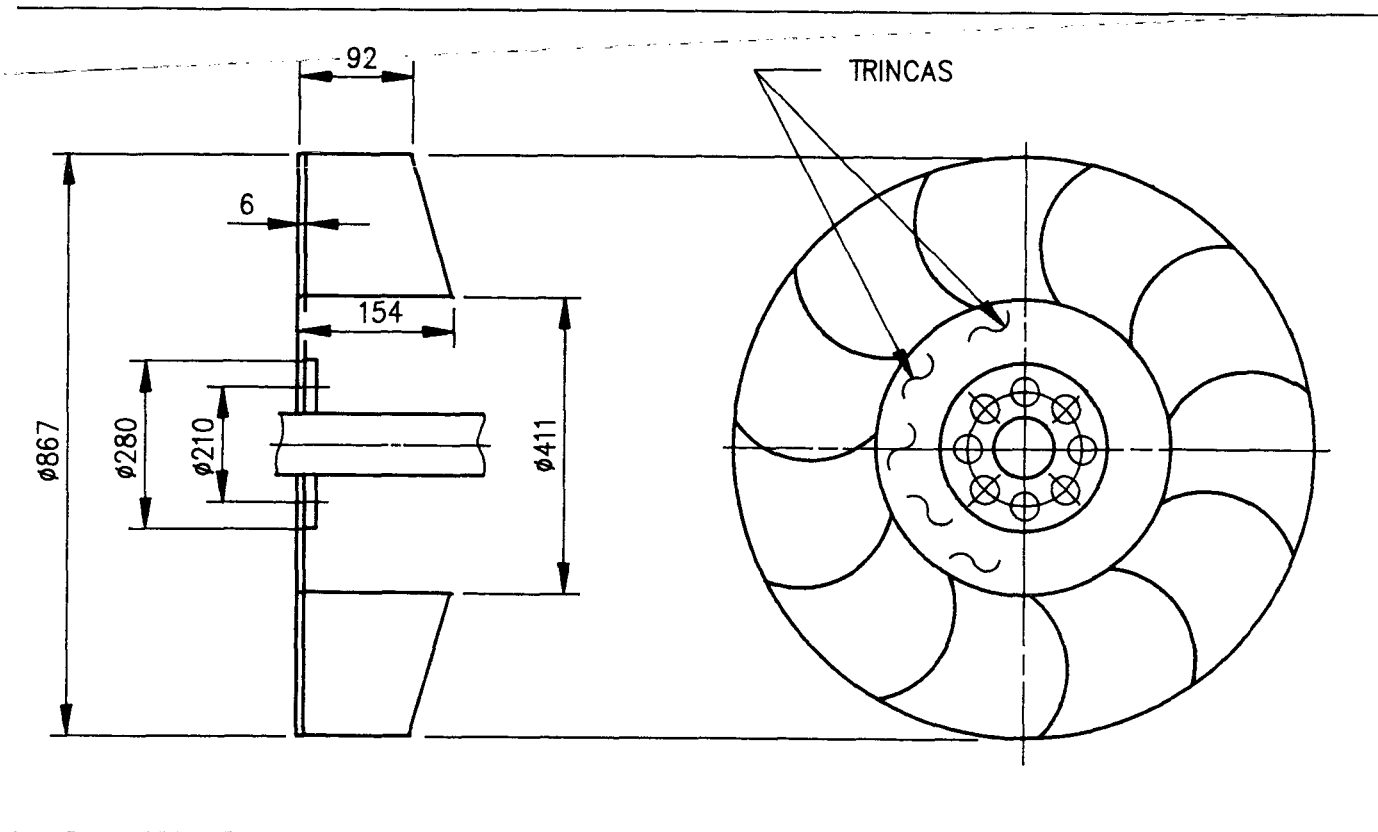


Fig. 2.7 - Localização das Trincas no Disco.

Em setembro/87, outro acidente praticamente destruiu o conjunto rotor: as trincas se propagaram e um dos discos transformou-se em pedaços (Fig. 2.8); o outro estava na eminência de ruptura, conforme pode-se observar a propagação circunferencial das trincas (Fig. 2.9). O sistema de proteção (alarme e desarme do sistema) não atuou. Na região do disco danificado, a carga ficou completamente destruída.

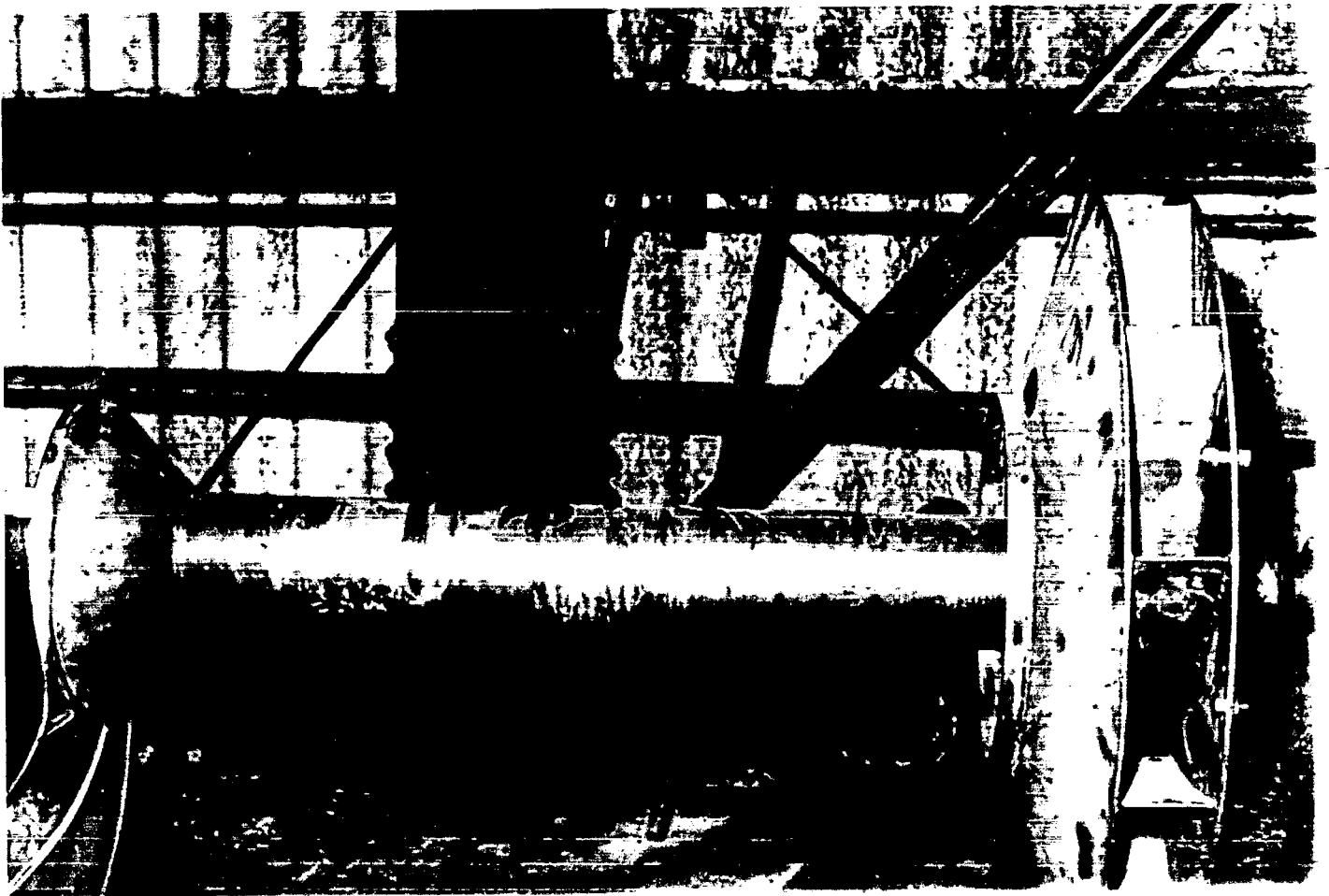


Fig. 2.8 - Disco esquerdo completamente destruído após propagação circunferencial de trincas.

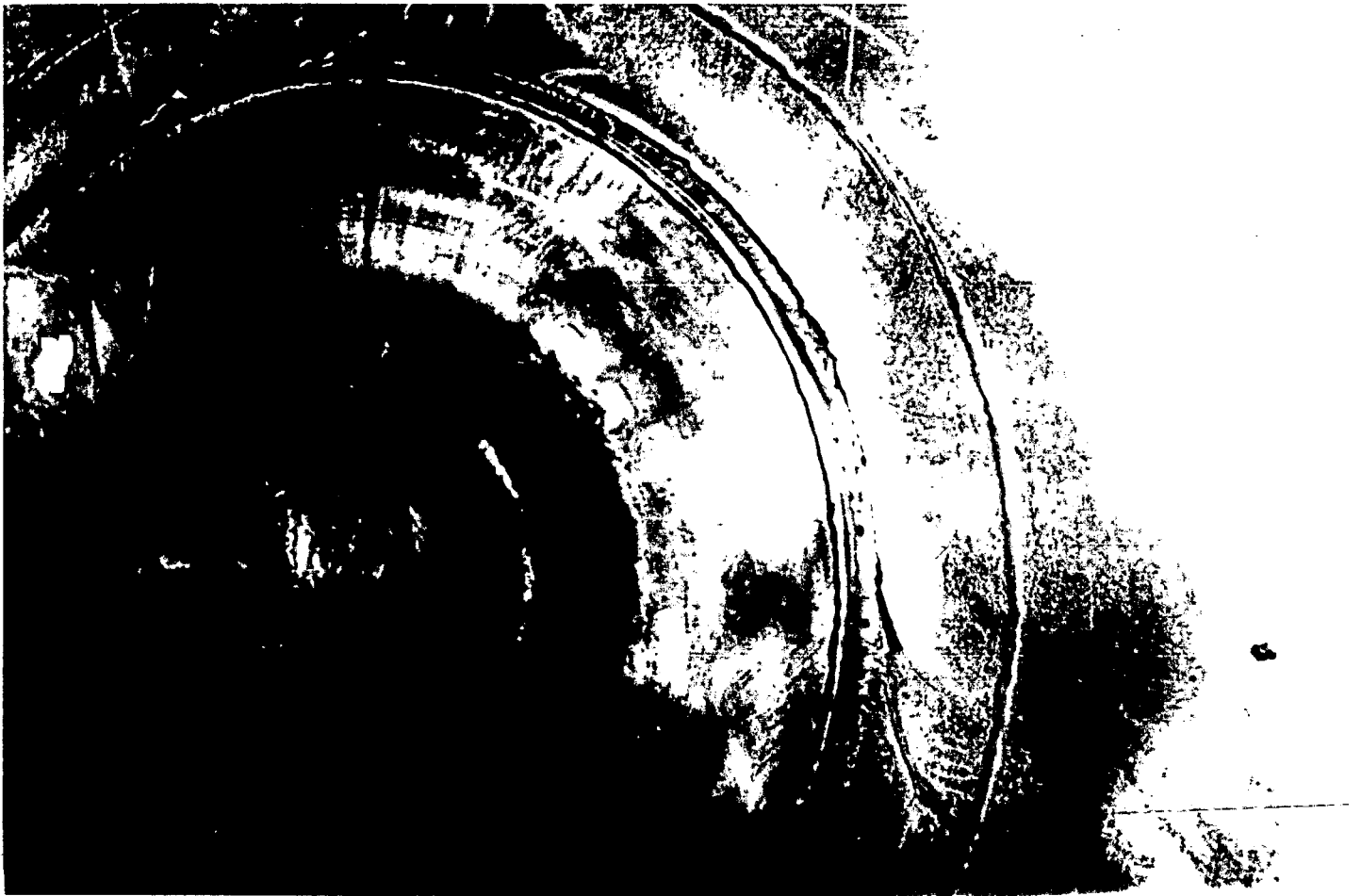


Fig. 2.9 - Trinca se propagando em toda a circunferência do disco direito.

2.3.6 - Ruído:

É uma das conseqüências diretas das vibrações. Estas são transmitidas através dos mancais para a estrutura que, por sua vez, sendo confeccionadas por chapas finas, vibram com maior facilidade. A energia vibratória é, assim, propagada para o ar sob a forma de ondas sonoras (ruído).

Próximo ao exaustor, o NPS (Nível de Pressão Sonora) medido foi de 109 dBA, o que obriga a utilização do protetor auricular. Parte deste ruído é proveniente do motor elétrico e das ondas refletidas (o equipamento encontra-se a 1 metro, aproximadamente, da parede).

Segundo fabricante de ventiladores "GEMA" [7], os principais componentes do ruído emitido por um ventilador, são:

a) ruídos que aparecem em regiões de fluxo turbulento, associados com perdas devido a imperfeições aerodinâmicas no projeto. A energia sonora será distribuída em uma ampla faixa de frequências;

b) ruídos devido à passagem das pás em torno de um ponto fixo. Concentram a energia sonora na frequência da passagem das pás (n° de pás \times rotação do ventilador).

O fenômeno do aparecimento de vibrações e ruído devido ao fluxo aerodinâmico aparece geralmente quando a velocidade de escoamento é superior àquela para qual o sistema foi projetado ou ainda devido a aderência de substâncias estranhas em sistemas projetados com tolerâncias mínimas visando eficiência, deposição essa que altera as dimensões das lâminas, alterando o projeto original (conforme Nepomuceno [8]). Quando o perfil da pá apresentar

irregularidades de projeto (incluindo-se aí a rugosidade superficial), aparecerá uma separação do fluxo, havendo o fenômeno de descolamento da camada limite. O fluxo passa de laminar para rotacional (ou turbulento), desenvolvendo-se uma configuração de pressão variável, originando-se vibração e ruído excessivo. (vide fig. 2.10)



Fig. 2.10 - a) Pá com fluxo laminar
b) Pá em ressonância provocando fluxo turbulento.

2.3.7 - FATORES ECONÔMICOS:

Este é o fator que realmente mede o desempenho da unidade, ou seja, é o parâmetro que aproxima (ou separa!) 3 áreas: manutenção, operação e custos. A título de ilustração, em 1984, durante os 5 primeiros meses, houve 4 interrupções do processo de regeneração de ácido provocadas por parada dos exaustores. O prejuízo, na época, envolvendo balanceamento e revestimento em São Paulo, transporte e

paralisação do processo atingiu a cifra de US\$ 100.000,00. Caso os 2 exautores fiquem impossibilitados de trabalhar, as Linhas de Decapagem Contínua continuam a operar. O ácido enviado para regeneração é, então, estocado em tanques com capacidade total de 700.000l, suficiente para suportar cerca de 3 dias. Terminado este prazo, a produção é paralisada totalmente.

2.4 - COMENTÁRIOS:

Veja-se o quadro que se apresenta:

a) A cada partida do sistema, o rolamento embora com graxa, sofre as conseqüências de uma mudança súbita de seu estado: num período de tempo muito curto a rotação do motor atinge seu valor nominal;

b) Como o rotor dificilmente dispensa o balanceamento no local (p/minimizar o desbalanceamento residual), vemos que o número de partidas da máquina nem sempre é pequeno. Como exemplo, durante um balanceamento no local, o motor necessitou dar 14 partidas. É comum, nestes casos de rotores com 2 discos, ocorrer o efeito cruzado. Após se conseguir níveis toleráveis de vibração, poucas horas depois as vibrações atingem um patamar de 40µm pico. Como já foi dito, os critérios de severidade serão abordados no Cap. 4.

Pelos fatos expostos (trincas generalizadas, níveis altos de

vibração na frequência de rotação, quebra dos mancais, balanceamento dificultado, etc), suspeitou-se que o sistema estivesse operando em ressonância (ou próximo dela). Esta suspeita aumentou quando foi levado em conta que o conjunto se apoia sobre isoladores elásticos cuja finalidade é minimizar o efeito da transmissibilidade (no caso, ativa), na região de ressonância conforme Fig. 2.12 abaixo (Ref. [9]):

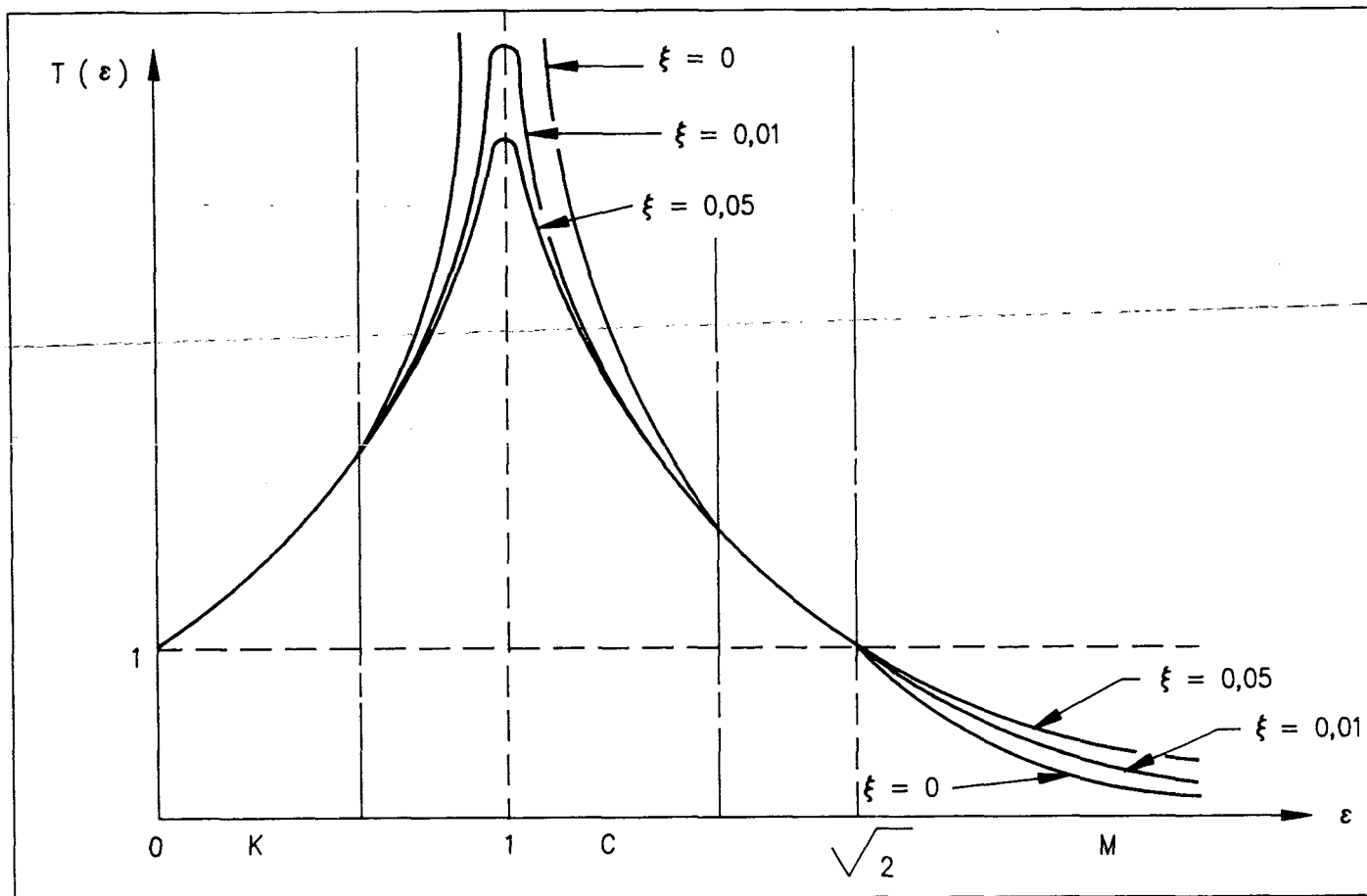


Fig. 2.12 - Transmissibilidade $\times \varepsilon$
 (K = rigidez; C = amortecimento; M = massa)

Desta forma justifica-se determinar os valores das frequências naturais do rotor. Para tal, necessário se faz o cálculo dos momentos de inércia (polar e diametral ou transversal) dos discos visto que os efeitos giroscópicos serão considerados.

Este tópico será abordado no APÊNDICE B.

CAPÍTULO 3

3. DETERMINAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DO SISTEMA

3.1 - OBJETIVO

Com o objetivo de se comparar os métodos de cálculo das frequências naturais, o rotor (eixo + discos) do exaustor foi inicialmente discretizado com 6 GL, com as seguintes hipóteses simplificadoras:

- a) Os discos estão equidistantes dos mancais;
- b) O eixo é considerado ter seção constante ($EI = Cte$);
- c) Suportes rígidos

Posteriormente, os parâmetros modificadores das FN serão abordados.

A representação esquemática do rotor é conforme Fig. 3.1 abaixo:

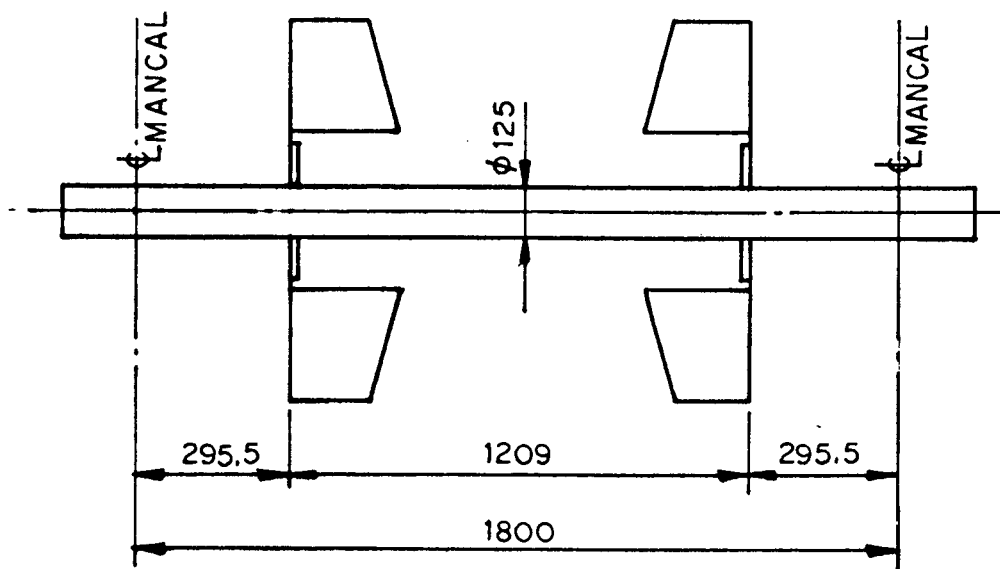


Fig. 3.1 - Representação esquemática do conjunto, considerando simetria.

A discretização correspondente é apresentada na Fig. 3.2 a seguir:

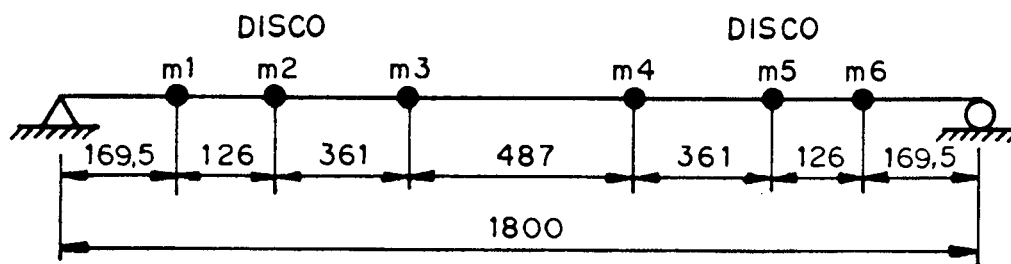


Fig. 3.2 - Discretização do sistema (6 GL - simétrico).

3.2 - CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

3.2.1 - Método de Iteração Matricial (vide Apêndice C)

a) Determinação das Matrizes

Como o sistema é biapoiado em mancais antifricção, será considerado que os mesmos sejam perfeitamente rígidos, bem como desprovido de amortecimento. Na realidade, isto constitui em uma simplificação que facilitará a abordagem analítica do modelo. A flexibilidade dos suportes será tratada oportunamente. Assim, a equação de movimento do sistema linear terá a forma (em notação matricial):

$$[m](\ddot{x}) + [K](x) = \{0\} \quad \dots \text{Eq. (3.1)}$$

As matrizes $[m]$ e $[K]$ são positivas definidas, visto que seus elementos são coeficientes de uma equação de forma quadrática positiva definida [11].

a.1) Matriz de Inércia

A matriz de inércia será diagonal (sistema unidirecional), com os seguintes valores em $[Kg]$:

$$[m] = \begin{bmatrix} 13,7 & & & & & \\ & 71,2 & & & & \\ & & 41,1 & & & \\ & & & 41,1 & & \\ & & & & 71,2 & \\ & 0 & & & & 13,7 \end{bmatrix} \quad [Kg] \quad \dots \text{Eq. (3.2)}$$

Estes valores são obtidos considerando-se massas concentradas no C.G. de cada segmento de eixo considerado. Portanto, a cada grau de liberdade é correspondido um grau na ordem da matriz.

a.2) Matriz de Flexibilidade:

Os elementos da matriz de flexibilidade são obtidos através de fórmulas da Resistência dos Materiais [12], como segue:

Seja o diagrama de corpo livre de uma viga simplesmente apoiada, com uma carga concentrada P, conforme Fig. 3.3, abaixo:

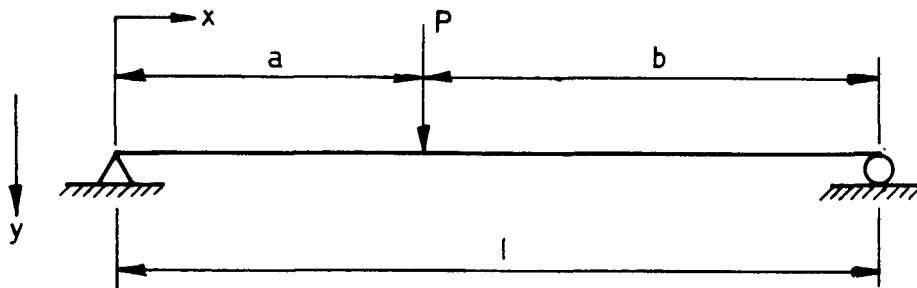


Fig. 3.3 - Diagrama de corpo livre. Viga simplesmente apoiada com carga concentrada P.

Os valores de deslocamento ao longo da viga (curva elástica) são dados por:

1- $P/0 < x < a$

$$\delta = \frac{Pbx}{6EI l} [2l(1-x) - b^2 - (1-x)^2] \quad \dots \text{Eq. (3.3)}$$

2 - $P/a < x < l$

$$\delta = \frac{Pa}{6EI l} (1-x) [2lb - b^2 - (1-x)^2] \quad \dots \text{Eq. (3.4)}$$

Sabe-se que:

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad \dots \text{Eq. (3.5)}$$

$$[K]^{-1} = [\alpha] \quad \dots \text{Eq. (3.6)}$$

A Eq. (3.6) define que o inverso da matriz de rigidez é igual à matriz de flexibilidade. O vetor $\{\delta\}$ corresponde à deflexão das massas discretizadas.

De (3.6) e (3.5), tira-se $[K]^{-1} \{F\} = \{\delta\}$

logo, $[\alpha] \{F\} = \{\delta\}$... Eq. (3.7)

Isto implica em dizer que para uma força unitária, os valores de δ serão numericamente iguais aos elementos da matriz de flexibilidade. Para cada força unitária aplicada nos pontos (C.G's) considerados de cada massa, os efeitos nas demais serão calculados.

A matriz de flexibilidade, assim, é formada pelos coeficientes de influência. A cada carga unitária aplicada permitirá o cálculo de uma coluna da matriz $[\alpha]$, conforme Fig. 3.4 a seguir:

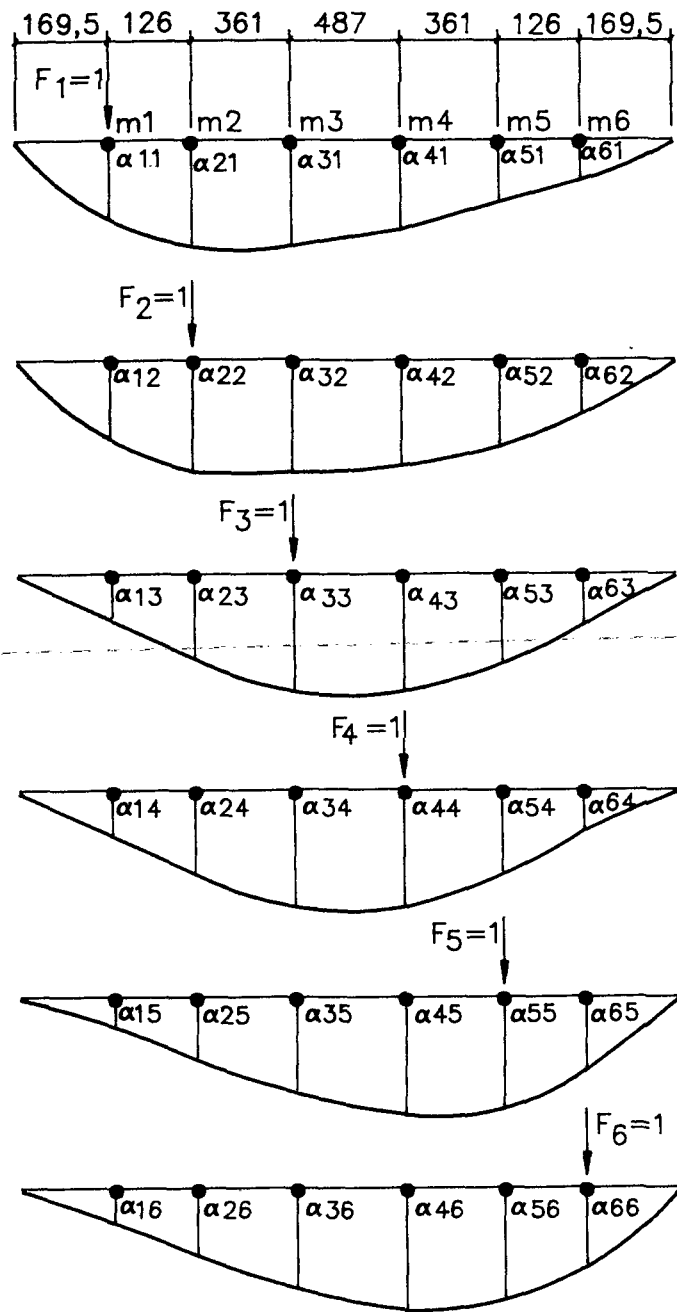


Fig. 3.4 - Representação Esquemática Para Determinação dos Coeficientes de Influência da Matriz de Flexibilidade - 6 GL.

Pode-se provar pelo Teorema da Reciprocidade de Maxwell que a matriz de flexibilidade é simétrica [13], isto é:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad \dots \text{Eq. (3.8)}$$

Com estes dados as 3 primeiras frequências naturais com os respectivos modos de vibração foram calculadas, fornecendo-se os seguintes valores:

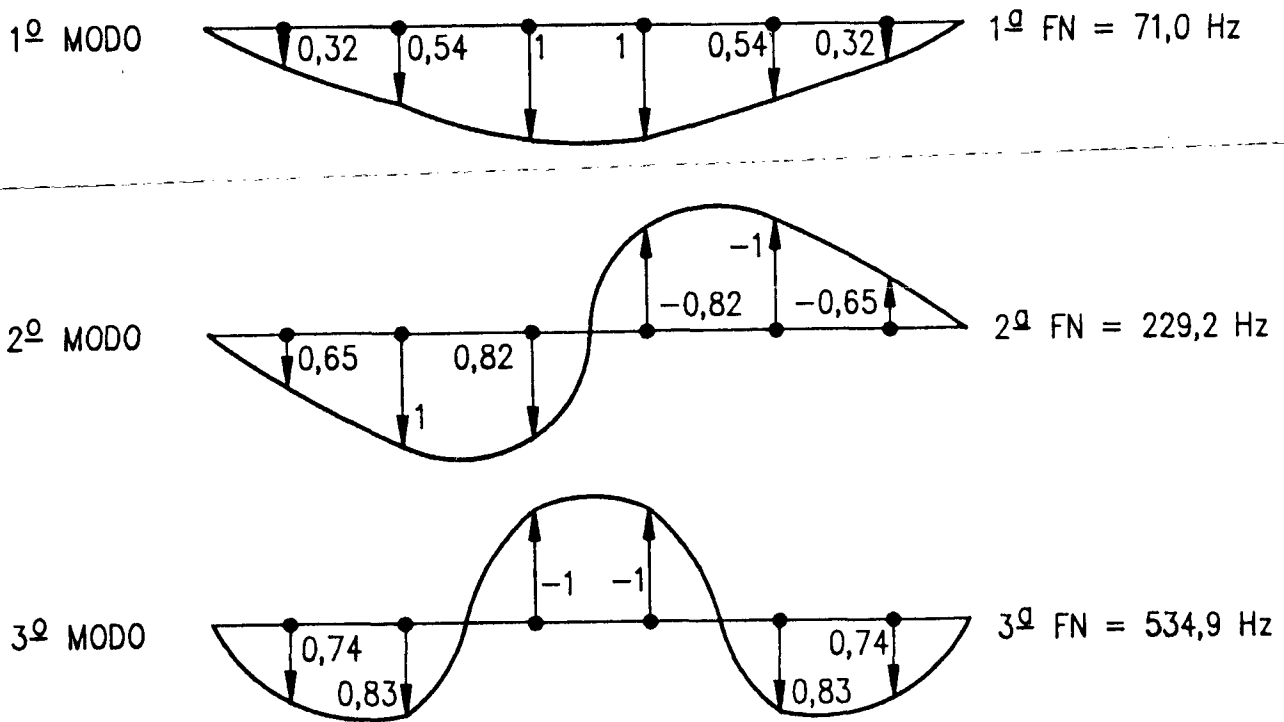


Fig. 3.5 - Frequências Naturais e Modos de Vibração pelo Método de Iteração Matricial

3.2.2 - Método de Matrizes de Transferência [14]

Conforme descrito no Apêndice A vê-se que, levando-se em conta as condições de contorno de um eixo biapoado, o determinante será de 2ª ordem e, como seus elementos são funções de ω , as raízes da equação assim formada serão as frequências naturais desejadas.

A curva de convergência das raízes (frequências naturais) foi obtida utilizando-se microcomputador Itautec I - 7000 PC xt, e sua representação encontra-se na Fig. 3.6 a seguir:

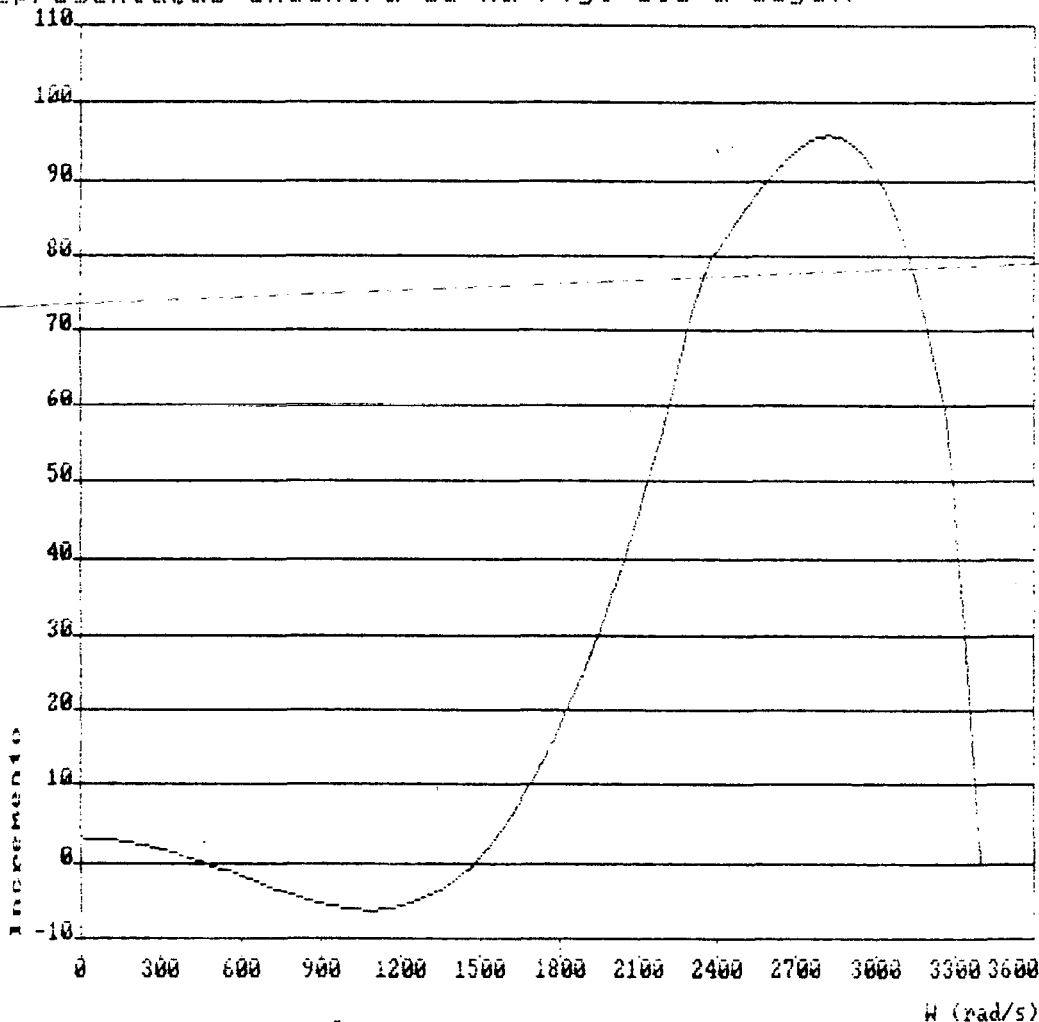


Fig. 3.6 - Convergência das Freq. Naturais - 6GL
Matriz de Transferência
Micro: Itautec I - 7000 PC xt

Os valores encontrados utilizando-se este método são conforme Tab. 3.1, abaixo:

Freq. Hz	Mét. Mat. Transf.
1ª	71,00
2ª	229,26
3ª	534,90

Tabela 3.1 - Frequências Naturais.
Método de Matrizes de Transferência

3.2.3 - Método do Determinante Característico [11]

Através do desenvolvimento do problema de autovalores e autovetores (Apêndice A), chega-se ao seguinte determinante característico:

$$\Delta(\lambda) \left| \lambda \delta_{ij} - D_{ij} \right| = 0 \quad \dots \text{Eq. (3.9)}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker

De outra forma, pode-se escrever:

$$\Delta = \left| \lambda [I] - [D] \right| = 0 \quad \dots \text{Eq. (3.10)}$$

ou

$$\Delta = \left| [D] - \lambda [I] \right| = 0 \quad \dots \text{Eq. (3.11)}$$

onde: [I] = Matriz Identidade

[D] = Matriz Dinâmica

$\lambda = 1/\omega^2$

Considerando-se 6 GL, tem-se:

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}m_1 - \lambda & \alpha_{12}m_2 & \alpha_{13}m_3 & \alpha_{14}m_4 & \alpha_{15}m_5 & \alpha_{16}m_6 \\ \alpha_{21}m_1 & \alpha_{22}m_2 - \lambda & \alpha_{23}m_3 & \alpha_{24}m_4 & \alpha_{25}m_5 & \alpha_{26}m_6 \\ \alpha_{31}m_1 & \alpha_{32}m_2 & \alpha_{33}m_3 - \lambda & \alpha_{34}m_4 & \alpha_{35}m_5 & \alpha_{36}m_6 \\ \alpha_{41}m_1 & \alpha_{42}m_2 & \alpha_{43}m_3 & \alpha_{44}m_4 - \lambda & \alpha_{45}m_5 & \alpha_{46}m_6 \\ \alpha_{51}m_1 & \alpha_{52}m_2 & \alpha_{53}m_3 & \alpha_{54}m_4 & \alpha_{55}m_5 - \lambda & \alpha_{56}m_6 \\ \alpha_{61}m_1 & \alpha_{62}m_2 & \alpha_{63}m_3 & \alpha_{64}m_4 & \alpha_{65}m_5 & \alpha_{66}m_6 - \lambda \end{bmatrix} \dots \text{Eq. (3.12)}$$

Os resultados obtidos encontram-se na Tab. 3.2 abaixo:

FN (Hz)	Método Det. Caract.
1ª	71,0
2ª	229,3
3ª	534,0

Tab. 3.2 - Frequências Naturais.
Método do Determinante Característico

3.2.4 - Método de Dunkerkey

Conforme discutido no Apêndice A, este método nos fornece apenas a 1ª frequência natural ou frequência fundamental, sendo considerado um limite inferior do valor real. O fluxograma adotado encontra-se no apêndice C.

Valor encontrado: Frequência Fundamental = 67 Hz

3.2.5 - Método de Rayleigh

Da mesma forma que o método anterior este também fornece apenas a 1ª FN, sendo esta considerada um limite igual ou superior ao valor real. O fluxograma utilizado é conforme a Fig. C-5, Apêndice C.

Valor encontrado: FN = 71,0 Hz

Assim, os resultados dos 5 métodos tratados podem ser comparados conforme Tab. 3.3, a seguir:

Método		1ª FN	2ª FN	3ª FN
Iteração Matricial	Hz	71,0	229,3	534,9
	rpm	4260	13763	32094
Mat. de Transf.	Hz	71,0	229,0	534,9
	rpm	4260	13756	32094
Det. Característico	Hz	71,0	229,3	534,9
	rpm	4260	13763	32094
Dunkerley	Hz	67,0	-	-
	rpm	4023	-	-
Rayleigh	Hz	71,0	-	-
	rpm	4260	-	-

Tab. 3.3 - Comparação das frequências naturais, conforme o método utilizado

Estes resultados foram obtidos considerando-se o eixo tendo seção constante. Os cálculos foram realizados apenas para as 3 primeiras frequências naturais, posto que o equipamento gira a 3600 rpm (60 Hz). Contudo, os métodos apresentaram resultados praticamente idênticos, exceção feita para o Método de Dunkerley, como era de se esperar. Em uma rápida análise de um sistema, tal método poderá ser utilizado devido à sua simplicidade, verificando-se o limi-

te inferior da frequência fundamental, ficando o Método de Rayleigh com o limite superior (mais próximo do real). Entretanto há que se observar as limitações de análise, as quais são os parâmetros modificadores das frequências naturais, sendo tratados no próximo tópico. Quanto à aplicabilidade dos demais, Matrizes de Transferência se destaca devido à sua versatilidade, ou seja, cada elemento do sistema pode ser tratado isoladamente (mancal, disco, eixo escalonado, efeitos dinâmicos associados a esses elementos, etc). Para a grande maioria dos casos as matrizes tratadas com este método serão de 4ª ordem, o que facilita o tempo computacional.

3.3 - Parâmetros Modificadores das Frequências Naturais

O modelo adotado anteriormente leva em conta uma série de simplificações, as quais induzem a um resultado que pode diferir sensivelmente do valor real. Alguns parâmetros físicos serão agora considerados, visando a determinação das frequências naturais o mais próximo do real possível. Entretanto, a condição de simetria do rotor ainda será considerada. Assim sendo, os fatores que alteram o valor das frequências naturais são:

3.3.1 - Efeitos Inerciais Rotatórios

Tais efeitos acrescentarão mais 2 G.L. em relação ao modelo estudado, devido ao deslocamento angular θ do disco do rotor e, conseqüentemente, ao par M_0 , conforme Fig. 3.7, a seguir:

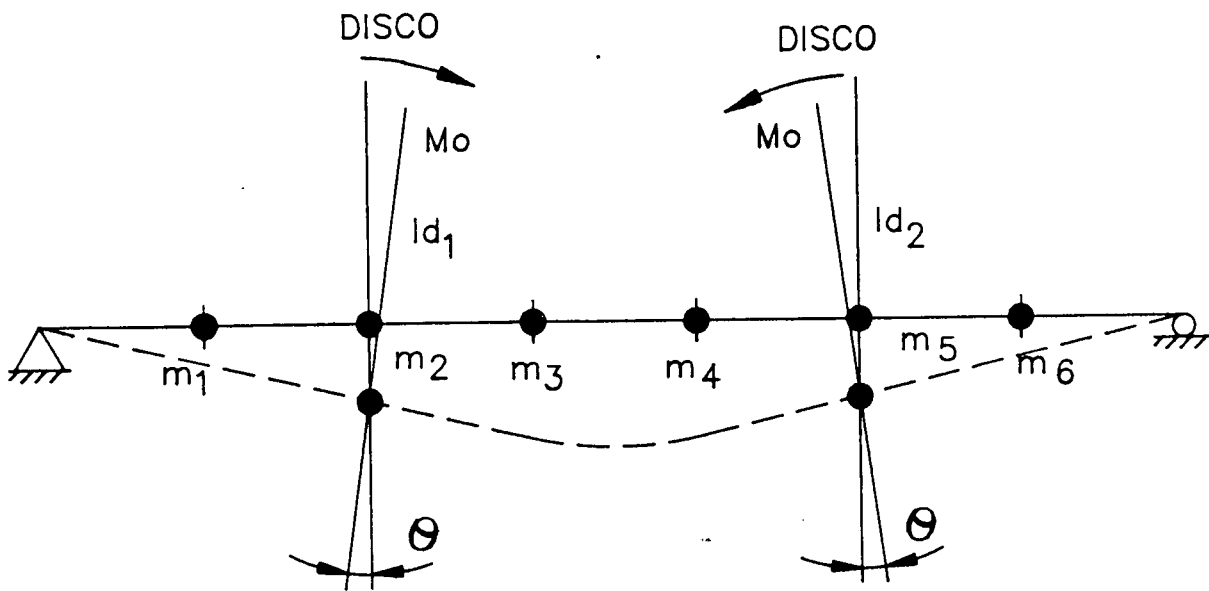


Fig. 3.7 - Representação esquemática do sistema levando-se em conta os efeitos inerciais dos discos.

I_{d1} e I_{d2} são os momentos de inércias diametraais ou transversais dos discos 1 e 2, respectivamente. Neste caso particular, $I_{d1} = I_{d2}$. Conforme o Apêndice B, $I_{d1} = I_{d2} = 1,7736 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$.

Sucintamente, conforme Ref [13], o efeito da inércia rotatória explica-se da seguinte forma: uma viga submetida a vibrações laterais assumirá uma curva de deflexão. Consideremos um elemento de viga no plano (X-Y), na Fig. 3.8, abaixo:

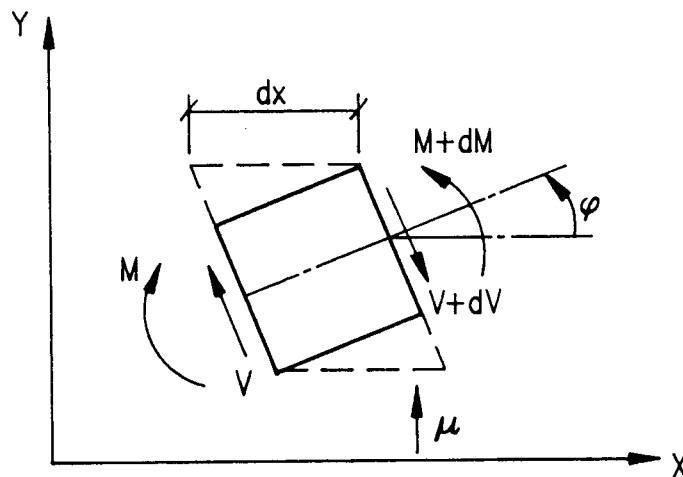


Fig. 3.8 - Vibração lateral de uma viga com inércia rotatória.

A inclinação da curva de deflexão é $\partial v / \partial x$. Assim a rotação do elemento é $\partial v / \partial x$. O efeito da inércia rotatória é devido a este movimento vibratório ou oscilante $\partial v / \partial x$ de dx no plano (X-Y). Este raciocínio é extensivo a todos os elementos que estão sobre a viga (eixo), incluindo-se os discos, sendo nestes o efeito mais pronunciado. No caso presente, a inércia rotatória do eixo está sendo desprezada, considerando-se apenas o efeito sobre os discos. tal efeito é equivalente a um acréscimo de massa e, desta forma, causará um decréscimo da frequência do conjunto. Assim, a nova matriz de inércia será:

$$[m] = \text{diag. } [13,7; 71,2; 41,1; 41,1; 71,2; 13,7; 1,7736; 1,7736] \dots$$

... Eq.(3.13)

A nova matriz de flexibilidade terá os mesmos elementos que a anterior, adicionando-se mais duas linhas e duas colunas, devido ao acréscimo de 2 G.L. e obedecendo ao Teorema da Reciprocidade de Maxwell.

a.1) Determinação dos elementos restantes da matriz de flexibilidade

Da Resistência dos Materiais [12], temos:

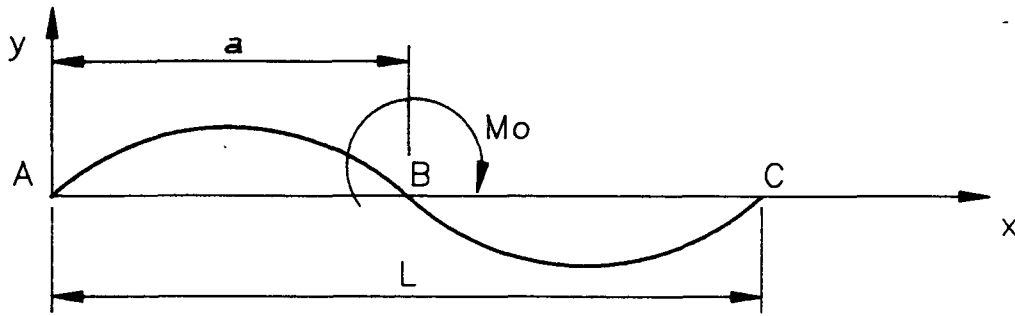


Fig. 3.9 - Representação esquemática para determinação da inclinação de vigas (eixos) devido à inércia rotatória.

De A até B:

$$Y = \frac{M_0}{6EI} \left[(6a - \frac{3a^2}{l} - 21)x - \frac{x^3}{l} \right] \quad \dots \text{Eq. (3.14)}$$

De B até C:

$$Y = \frac{M_0}{6EI} \left[3a^2 + 3x^2 - \frac{x^3}{l} - (21 + \frac{3a^2}{l})x \right] \quad \dots \text{Eq. (3.15)}$$

θ em B

$$\theta = \frac{M_0}{6EI} \left(a - \frac{a^2}{l} - \frac{1}{3} \right) \quad \dots \text{Eq. (3.16)}$$

A inclinação entre $0 < x < a$ será dada por:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{M_0}{6EI} \left(6a - \frac{3a^2}{l} - 21 - \frac{3x^2}{l} \right) \quad \dots \text{Eq. (3.17)}$$

Assim sendo, as 3 frequências naturais tomam os seguintes valores, adotando-se o Método de Iteração Matricial:

	Hz	rpm	Redução %
1ª FN	68,3	4101	-3,8
2ª FN	221,9	13316	-3,2
3ª FN	517,8	31068	-3,2

Tab. 3.4 - Frequências Naturais c/efeito da inércia rotatória.

Vê-se que o efeito da inércia rotatória é diminuir os valores das frequências naturais. O acréscimo da inércia é análogo ao acréscimo da massa.

É digno de nota que o exposto acima é válido para análise estática de vigas (eixos). O caso em estudo trata-se do eixo girante, onde se deverá levar em conta o momento de inércia polar dos discos do rotor. Ambos os momentos (polar e diametral) serão necessários para o cálculo dos efeitos giroscópicos, que aparecem quando da análise dinâmica do sistema, como será visto a seguir. Contudo, o efeito da inércia rotatória será importante para os nossos propósitos, visto que comparar-se-á no próximo capítulo, os resultados numéricos (ou analíticos) com os obtidos com o auxílio de um Analisador de Fourier.

3.3.2 - Efeito Giroscópico (ou de Coriolis)

No Apêndice A discorreu-se sucintamente sobre o efeito giroscópico. Tal assunto vem sendo exaustivamente estudado, conforme Ref. [15] a [21], dentre outras.

A importância se justifica, pois durante o transiente da passagem do rotor pelas frequências naturais, o comportamento do sistema se altera substancialmente. K.Nonami [18] cita o comportamento não estacionário das vibrações neste transiente, o que modifica sensivelmente as condições de fluxo. Não menos importante é a constatação deste mesmo autor, através de formulação matemática de que o movimento de precessão do eixo, durante a passagem pelas frequências naturais, pode se alternar, ou seja, ora a precessão tem o sentido de rotação do eixo (positiva), ora é retrógrada (negativa). Quanto menor for a aceleração de passagem, maior será a alternância.

S.Yanabe [19] complementa o estudo de outros autores, formulando equações que atestam que o efeito giroscópico tende a decrescer a amplitude de vibração durante a passagem da velocidade crítica, o que se constitui num benefício para o sistema, por razões óbvias.

b.1) Equações do movimento do eixo com Efeito Giroscópico

Seja a representação discretizada no sistema (8GL):

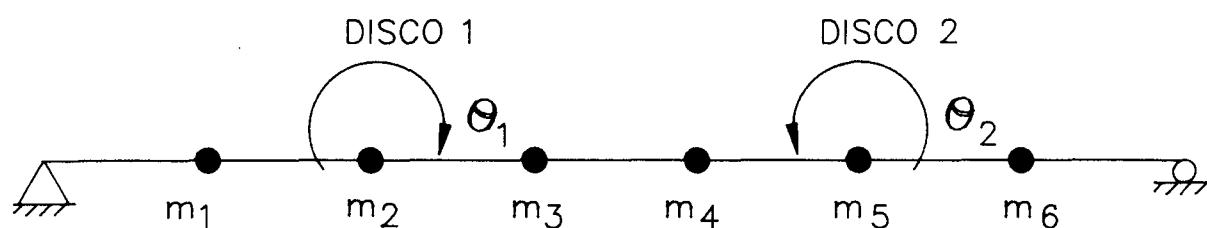


Fig. 3.10 - Discretização do sistema com 8 GL, considerando-se o efeito giroscópico.

As equações que governam o movimento (inclinação e deflexão) do eixo foram baseadas na Ref. [22]. Levando-se em conta o efeito giroscópico e o modelo de 8 GL, acima discretizado, tem-se:

$$Y_1 = \alpha_{11}m_1Y_1w^2 + \alpha_{12}m_2Y_2w^2 + \alpha_{13}m_3Y_3w^2 + \alpha_{14}m_4Y_4w^2 + \alpha_{15}m_5Y_5w^2 + \alpha_{16}m_6Y_6w^2 - \alpha_{17}w(I_p\Omega - Idw)\theta - \alpha_{18}w(I_p\Omega - Idw)\theta \quad \dots \text{Eq. (3.18)}$$

$$Y_2 = \alpha_{21}m_1Y_1w^2 + \alpha_{22}m_2Y_2w^2 + \alpha_{23}m_3Y_3w^2 + \alpha_{24}m_4Y_4w^2 + \alpha_{25}m_5Y_5w^2 + \alpha_{26}m_6Y_6w^2 - \alpha_{27}w(I_p\Omega - Idw)\theta - \alpha_{28}w(I_p\Omega - Idw)\theta \quad \dots \text{Eq. (3.19)}$$

$$Y_3 = \alpha_{31}m_1Y_1w^2 + \alpha_{32}m_2Y_2w^2 + \alpha_{33}m_3Y_3w^2 + \alpha_{34}m_4Y_4w^2 + \alpha_{35}m_5Y_5w^2 + \alpha_{36}m_6Y_6w^2 - \alpha_{37}w(I_p\Omega - Idw)\theta - \alpha_{38}w(I_p\Omega - Idw)\theta \quad \dots \text{Eq. (3.20)}$$

$$Y_4 = \alpha_{41}m_1Y_1w^2 + \alpha_{42}m_2Y_2w^2 + \alpha_{43}m_3Y_3w^2 + \alpha_{44}m_4Y_4w^2 + \alpha_{45}m_5Y_5w^2 + \alpha_{46}m_6Y_6w^2 - \alpha_{47}w(I_p\Omega - Idw)\theta - \alpha_{48}w(I_p\Omega - Idw)\theta \quad \dots \text{Eq. (3.21)}$$

$$Y_5 = \alpha_{51}m_1Y_1w^2 + \alpha_{52}m_2Y_2w^2 + \alpha_{53}m_3Y_3w^2 + \alpha_{54}m_4Y_4w^2 + \alpha_{55}m_5Y_5w^2 + \alpha_{56}m_6Y_6w^2 - \alpha_{57}w(I_p\Omega - Idw)\theta - \alpha_{58}w(I_p\Omega - Idw)\theta \quad \dots \text{Eq. (3.22)}$$

$$Y_6 = \alpha_{61}m_1Y_1w^2 + \alpha_{62}m_2Y_2w^2 + \alpha_{63}m_3Y_3w^2 + \alpha_{64}m_4Y_4w^2 + \alpha_{65}m_5Y_5w^2 + \alpha_{66}m_6Y_6w^2 - \alpha_{67}w(I_p\Omega - Idw)\theta - \alpha_{68}w(I_p\Omega - Idw)\theta \quad \dots \text{Eq. (3.23)}$$

$$\theta_1 = \alpha_{71}m_1Y_1w^2 + \alpha_{72}m_2Y_2w^2 + \alpha_{73}m_3Y_3w^2 + \alpha_{74}m_4Y_4w^2 + \alpha_{75}m_5Y_5w^2 + \alpha_{76}m_6Y_6w^2 - \alpha_{77}w(I_p\Omega - Idw)\theta - \alpha_{78}w(I_p\Omega - Idw)\theta \quad \dots \text{Eq. (3.24)}$$

$$\theta_2 = \alpha_{81}m_1Y_1w^2 + \alpha_{82}m_2Y_2w^2 + \alpha_{83}m_3Y_3w^2 + \alpha_{84}m_4Y_4w^2 + \alpha_{85}m_5Y_5w^2 + \alpha_{86}m_6Y_6w^2 - \alpha_{87}w(I_p\Omega - Idw)\theta - \alpha_{88}w(I_p\Omega - Idw)\theta \quad \dots \text{Eq. (3.25)}$$

Para a resolução do sistema de equações acima, o cálculo matricial é bastante conveniente. Fazendo-se $\lambda = \frac{1}{w^2}$ e levando-se em conta o

Método do Determinante Característico, este terá a seguinte forma:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}m_1 - \lambda & \alpha_{12}m_2 & \alpha_{13}m_3 & \alpha_{14}m_4 & \alpha_{15}m_5 & \alpha_{16}m_6 & -\alpha_{17}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} & -\alpha_{18}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} \\ \alpha_{21}m_1 & \alpha_{22}m_2 - \lambda & \alpha_{23}m_3 & \alpha_{24}m_4 & \alpha_{25}m_5 & \alpha_{26}m_6 & -\alpha_{27}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} & -\alpha_{28}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} \\ \alpha_{31}m_1 & \alpha_{32}m_2 & \alpha_{33}m_3 - \lambda & \alpha_{34}m_4 & \alpha_{35}m_5 & \alpha_{36}m_6 & -\alpha_{37}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} & -\alpha_{38}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} \\ \alpha_{41}m_1 & \alpha_{42}m_2 & \alpha_{43}m_3 & \alpha_{44}m_4 - \lambda & \alpha_{45}m_5 & \alpha_{46}m_6 & -\alpha_{47}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} & -\alpha_{48}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} \\ \alpha_{51}m_1 & \alpha_{52}m_2 & \alpha_{53}m_3 & \alpha_{54}m_4 & \alpha_{55}m_5 - \lambda & \alpha_{56}m_6 & -\alpha_{57}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} & -\alpha_{58}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} \\ \alpha_{61}m_1 & \alpha_{62}m_2 & \alpha_{63}m_3 & \alpha_{64}m_4 & \alpha_{65}m_5 & \alpha_{66}m_6 - \lambda & -\alpha_{67}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} & -\alpha_{68}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} \\ \alpha_{71}m_1 & \alpha_{72}m_2 & \alpha_{73}m_3 & \alpha_{74}m_4 & \alpha_{75}m_5 & \alpha_{76}m_6 & -\alpha_{77}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} & -\alpha_{78}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} \\ \alpha_{81}m_1 & \alpha_{82}m_2 & \alpha_{83}m_3 & \alpha_{84}m_4 & \alpha_{85}m_5 & \alpha_{86}m_6 & -\alpha_{87}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} & -\alpha_{88}Id & \frac{I_p}{Id} \frac{\Omega \sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} \end{vmatrix}$$

Eq. 3.26

Como observado anteriormente, pretende-se o cômputo das velocidades críticas considerando-se precessão síncrona, isto é $\Omega = \omega$

O determinante (3.26) é geral, podendo-se determinar as velocidades críticas para qualquer relação Ω/ω .

Assim, a parcela relativa ao efeito giroscópico ficará:

$$I_d \left(\frac{I_p}{I_d} \frac{\Omega}{\omega} - 1 \right) = I_d \left(\frac{I_p}{I_d} - 1 \right) = (I_p - I_d) \quad \dots \text{Eq. (3.27)}$$

Considerando-se a matriz de ponto derivada no Apêndice A (1-2) para o efeito giroscópico (Matriz de Transferência) e aplicando-se os programas em "Basic" conforme Fig. C-1, Fig. C-2 e Fig. C-3 (Apêndice C), chegou-se aos seguintes resultados:

MÉTODO		1º F.N.			2º F.N.			3º F.N.		
		S/EF.G.	C/EF.G.	ACRÉSC.	S/EF.G.	C/EF.G.	ACRÉSC.	S/EF.G.	C/EF.G.	ACRÉSC.
ITERAÇÃO MATRICIAL	HZ	71,0	73,7	3,8 %	229,35	235,60	2,7 %	534,91	540,9	1,1 %
	RPM	4260	4426		13763	14137		32094,6	32454	
MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA	HZ	71,0	73,7	3,8 %	229,20	235,60	2,7 %	534,91	540,9	1,1 %
	RPM	4260	4426		13756	14137		32094,6	32454	
DETERMINANTE CARACTERÍSTICO	HZ	71,0	73,7	3,8 %	229,32	235,60	2,7 %	534,91	540,9	1,1 %
	RPM	4260	4426		13759	14137		32094,6	32454	

Tab. 3.5 - Comparação entre frequências naturais com e sem efeito giroscópico - EI = cte.

Nota-se que o maior acréscimo da FN é de 3,8% relativo ao 1º modo de vibração. De acordo com a Fig. A-5 (Apêndice A), vê-se que está perfeitamente coerente, considerando-se os discos I e V, corres-

pondendo ao sistema em estudo. Tais resultados ratificam a teoria, conforme Rao [20] e Myklestad [21], dentre outros. Quanto aos métodos adotados, os tres apresentam o mesmo resultado final.

3.3.3 - Efeito das mangas do eixo (EI = cte)

É comum encontrarem-se na literatura resoluções de problemas de dinâmica de rotores as quais não levam em conta a redução da seção do eixo para sede dos mancais (munhões). Isto pode induzir a erros consideráveis, posto que a diminuição do diâmetro das extremidades do eixo implica em redução da rigidez do sistema, decrescendo assim a frequência natural do conjunto. Aplicando-se o Método de Matrizes de Transferência (aqui uma prova-de-sua-versatilidade), apenas a 1ª e última matrizes serão modificadas em seus valores de momento de inércia da seção do eixo. Assim, a Tab. 3.6 fornece os valores encontrados.

FN	EI=CTE	EFEITO MANGA	REDUÇÃO
1ª [Hz]	71,0	67,9	-4,4%
2ª [Hz]	229,3	217,2	-5,5%
3ª [Hz]	534,9	473,9	-12,8%

Tab. 3.6 - FN considerando Efeito de Redução das Mangas do eixo.

Observa-se que as frequências naturais mais elevadas são mais sensíveis à redução de seção das extremidades do eixo.

Isto constitui-se num fator importante, principalmente quando há frequência de passagem, de engrenamento, devido aos rolamentos, etc. Quanto maior a diferença entre o diâmetro da manga e o do corpo principal do eixo maiores serão as diferenças nas frequências naturais, em consequência do aumento da flexibilidade do conjunto.

3.3.4 - Efeito da Flexibilidade dos Suportes

Não menos importante que o anterior, o efeito da flexibilidade dos suportes pode induzir a erros grosseiros, quando não considerado na estimativa das frequências naturais. O modelo discretizado para 6 GL, com apoios flexíveis, é representado na Fig. 3.11, ainda levando-se em conta que o rotor é simétrico:

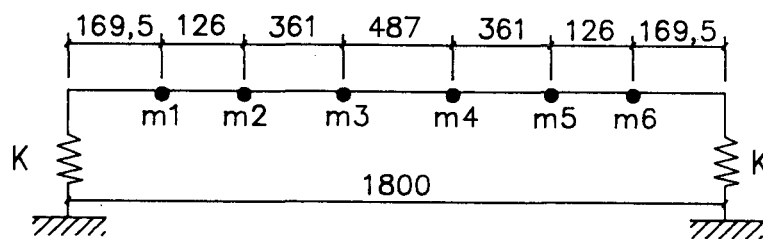


Fig. 3.11 - Modelo discretizado com 6 GL, com Efeito de Flexibilidade dos Suportes.

Pestel [14] trata magnificamente do desenvolvimento do cálculo matricial (Matrizes de Transferência) considerando-se tal efeito, inclusive abordando problemas de instabilidade numérica (e suas soluções) quando aparecem apoios intermediários. Para valores da constante de rigidez K , Parszewski [23], em seu excelente trabalho

adota para mancais antifricção $K = 2 \times 10^8$ N/m. Pode-se obter na prática o valor da constante de rigidez estática dos suportes da seguinte forma:

Sabe-se que $F = KX$, onde X é o deslocamento e F , a força atuante. No caso em estudo, F é a reação de apoio em cada mancal. Com o auxílio de uma talha ou ponte rolante pode-se içar o conjunto rotor; mediante o uso de um teodolito, o deslocamento do suporte é, desta forma, facilmente obtido e, conseqüentemente, K . Cumpre lembrar, entretanto, que o valor resultante é para o caso estático. Os efeitos dinâmicos induzem esforços adicionais, conforme podemos observar no trabalho de tese de Crater [24], onde os mancais são de fricção: a película de óleo varia com os esforços dinâmicos. Tal fato nos induz a questionar duas situações: desbalanceamento do conjunto e passagem/trabalho do conjunto próximo da freqüência natural. Em ambos os casos os esforços dinâmicos serão consideráveis sobre os mancais, levando o eixo a posições diferentes daquela quando em repouso. Assim sendo, variando-se K entre 2×10^8 e $3,33 \times 10^7$ N/m (correspondendo respectivamente às deflexões de 7,5 e 45 μm , para a carga do rotor em questão), o efeito pode ser observado na Fig. 3.12, a seguir, utilizando-se o Método de Matrizes de Transferência.

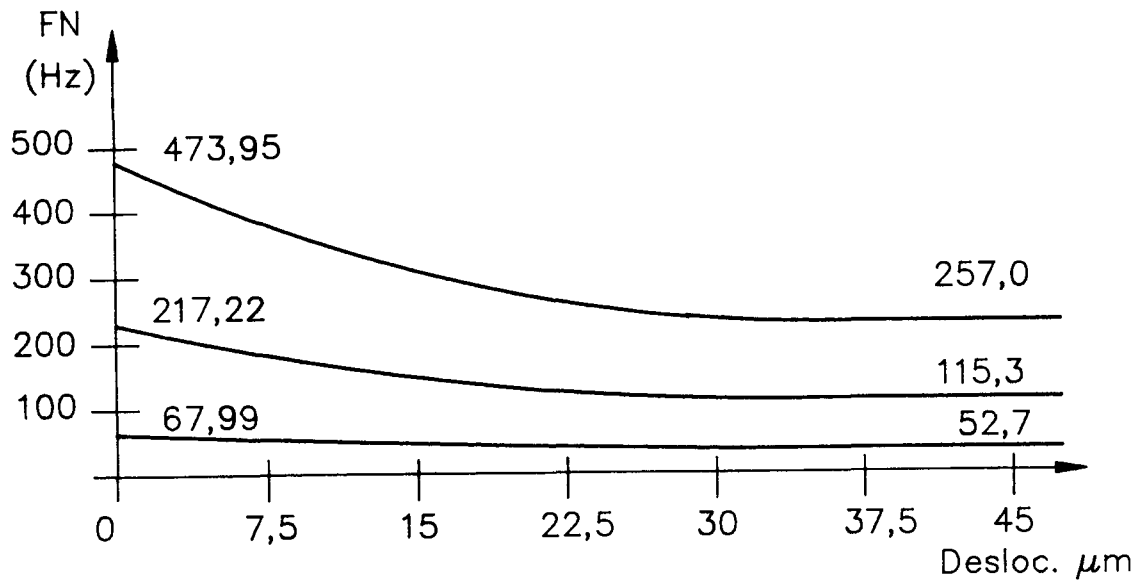


Fig. 3.12 - Influência da Flexibilidade dos Suportes.

Tal qual o efeito das mangas do eixo, a flexibilidade dos suportes tende a abaixar o valor das frequências naturais: quanto mais flexíveis os apoios, maior será a redução das frequências de ordem superior. Este é um fator que, em hipótese alguma, poderá ser desprezado quando se tratar de um problema real, devendo ser previsto durante a fase de projeto de um equipamento rotativo, evitando surpresas desagradáveis no futuro.

Estes resultados ratificam o trabalho de Caruso [25]. A maneira prática de se checar o valor real será comentada no Cap. 5.

3.3.5 - Efeito da excentricidade do disco do rotor

Analogamente à derivação da matriz de ponto (seção 1-2-Apêndice A quando se considera o efeito giroscópico, a excentri-

cidade do centro de massa do rotor resultará em um par adicional, conforme [26], ou seja:

$$M_e = me^2\omega^2 \quad \dots \text{Eq. (3.28)}$$

onde: M_e = momento da massa excêntrica

m = massa

e = excentricidade do centro de massa

Desta forma, a matriz de ponto do disco de um rotor com efeito giroscópico e excentricidade, é:

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (I_p - I_d) + (me^2)\omega^2 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots \text{Eq. (3.29)}$$

ou, apenas a excentricidade:

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & me^2\omega^2 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots \text{Eq. (3.30)}$$

A excentricidade calculada para o disco + cubo em questão é:

$$e = 48,13\text{mm} \quad \dots \quad me^2 = 0,1139 \text{ Kg}\text{m}^2$$

Assim sendo, o quadro a seguir fornece os valores comparativos entre as frequências naturais sem e com excentricidade ($EI = \text{cte}$):

FN[Hz]	s/excent.	c/excen.
1ª	71,0	71,1
2ª	229,3	229,7
3ª	534,9	535,4

Tab. 3.7 - Quadro comparativo das Freq. Naturais com e sem excentricidade - EI = cte

Neste caso, a excentricidade praticamente não alterou os valores das frequências naturais. Contudo, existem situações (conforme Ref. [26]), em que os valores são sensivelmente alterados, principalmente em se tratando de rotores em balanço.

3.3.6 - Influência do Número de G.L. - Rotor com Cotas Reais (caso não simétrico)

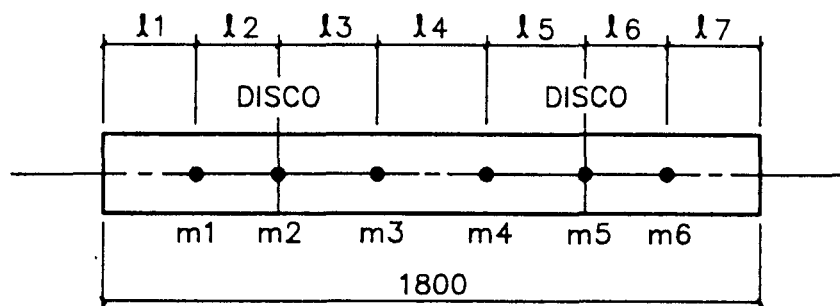
É sobejamente conhecida a influência da variação do número de graus de liberdade no cômputo das frequências naturais, ou seja, aumentando-se o número de parâmetros discretos, aumenta-se a precisão do cálculo, visto que em assim procedendo, o sistema de parâmetros discretos tenderá para o sistema contínuo, cuja solução é exata. Assim, como foi descrito no Apêndice A, a utilização dos Elementos Finitos converge sensivelmente mais rápido que outros métodos, devido ao elevado número de G.L. envolvido. Craig [27] apresenta um exemplo típico de convergência, a qual, em geral, é decrescente. A convergência é crescente quando se aplica o Método de Iteração Matri-

cial, ou Determinante Característico, pois os autovalores (λ) são inversamente proporcionais ao quadrado das frequências naturais ($\lambda = 1/w^2$).

Entretanto esta afirmação é válida para o caso de autovetores à direita. Caso contrário (autovetores à esquerda), a convergência será decrescente. No caso em questão, adotando-se as cotas reais do posicionamento dos discos do rotor (Fig.3.13), os valores das frequências naturais para 3, 6, 10 e 12 G.L. (e $EI = \text{cte}$), utilizando-se Matrizes de Transferência são:

FN[Hz]	3G.L	6 G.L	10 G.L	12 G.L
1ª	69,68	68,04	68,00	68,00
2ª	298,28	225,76	225,66	225,02
3ª	625,47	543,91	509,84	509,00

Tab. 3.8 - Influência do Número de G.L. - $EI = \text{cte}$ - Cotas Reais do Rotor.



$$m_1 = 22,04[\text{Kg}]$$

$$l_1 = . 145[\text{m}]$$

$$m_2 = 49,86[\text{Kg}]$$

$$l_2 = . 118[\text{m}]$$

$$m_3 = 53,09[\text{Kg}]$$

$$l_3 = . 279175[\text{m}]$$

$$m_4 = 53,09[\text{Kg}]$$

$$l_4 = . 55115[\text{m}]$$

$$m_5 = 69,03[\text{Kg}]$$

$$l_5 = . 378675[\text{m}]$$

$$m_6 = 15,40[\text{Kg}]$$

$$l_6 = . 183[\text{m}]$$

$$l_7 = . 145[\text{m}]$$

Fig. 3.13 - Discretização com cotas reais do rotor.

Vê-se que, com 10 G.L., o cálculo das FN, em termos dos objetivos em questão, já apresenta estabilidade para os 3 valores. Comparando-se o caso de rotor simétrico com o real (e 6 G.L.), tem-se:

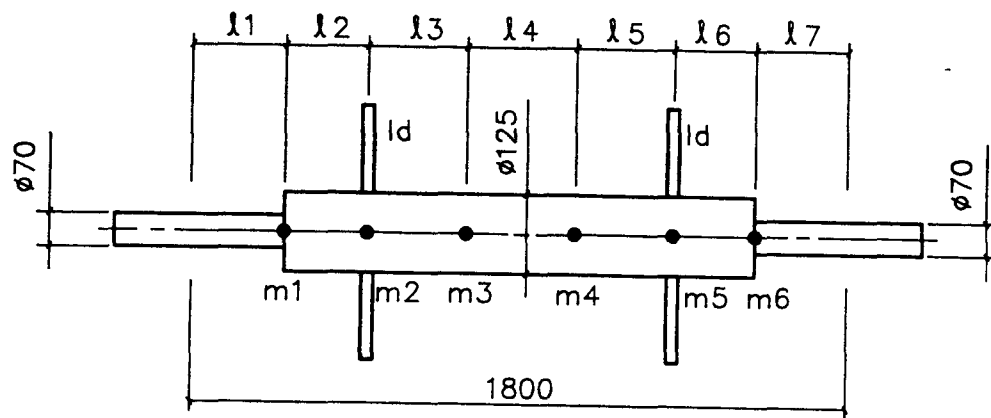
FN[Hz]	Discret.Rotor Sim.	Discret.Real	Dif. %
1ª	71,00	68,04	-4,1
2ª	229,30	225,76	-1,5
3ª	534,91	543,91	+1,6

Tab. 3.9 - ~~Frequências naturais: Rotor Simétrico x Rotor c/cotas reais(s/efeito das mangas e inércia rotatória).~~

A Tab. acima mostra o efeito da distribuição de massa sobre o rotor, sendo significativa a queda do valor da 1ª FN, para o caso em estudo.

3.3.7 - Discretização considerando cotas reais (rotor assimétrico), efeito combinado da inércia rotatória e redução das mangas do eixo

Tendo em vista o caso real, ou seja, rotor com os discos posicionados corretamente, mangas com seção reduzida e efeito da inércia rotatória dos discos, o seguinte modelo (Fig. 3.14), discretizado com 6 G.L., foi adotado:



$$m_1 = 22,04[\text{Kg}]$$

$$l_1 = . 145[\text{m}]$$

$$m_2 = 49,86[\text{Kg}]$$

$$l_2 = . 118[\text{m}]$$

$$m_3 = 53,09[\text{Kg}]$$

$$l_3 = . 279175[\text{m}]$$

$$m_4 = 53,09[\text{Kg}]$$

$$l_4 = . 55115[\text{m}]$$

$$m_5 = 69,03[\text{Kg}]$$

$$l_5 = . 378675[\text{m}]$$

$$m_6 = 15,40[\text{Kg}]$$

$$l_6 = . 183[\text{m}]$$

$$l_7 = . 145[\text{m}]$$

Fig. 3.14 - Discretização correta. Efeito da inércia rotatória e mangas com seções reduzidas.

Esta situação é a mais próxima da real possível (caso estático), servindo de base de comparação com as frequências naturais obtidas com o auxílio de um Analisador de Fourier (Cap. 5). Os valores encontrados foram:

FN[Hz]	Rotor Simétrico	Rotor Real	Dif.%
1ª	71,00	64,62	-8,9
2ª	229,20	207,34	-9,5
3ª	534,91	426,40	-20,2

Tab. 3.10 - Comparação entre as FN do modelo adotado originalmente com o caso real.

Vê-se claramente a discrepância ($\approx 6,4\text{Hz}$) para a 1ª FN e 108,5Hz para a 3ª FN. Deve-se portanto, obter-se um modelo para discretização o mais próximo possível da realidade, Qualquer simplificação pode induzir a resultados bastante discrepantes, como visto até o presente. Resta-nos apenas tecer breves comentários, úteis entretanto, sobre a flexibilidade dos discos do rotor.

3.3.8 - Influência da Flexibilidade dos Discos do Rotor

Este tópico, devido à sua complexidade, compreenderia um estudo à parte que, por si próprio, teria corpo para ser englobado em uma tese. Como exemplo, a Ref. [28] corresponde a um resumo de tese de doutorado elaborada por D.R.Chivens, onde são testados discos com vários graus de rigidez. Entretanto, cumpre lembrar que tais discos são constituídos apenas de cubo e chapa circular fina e plana.

Sua conclusão principal é de que a flexibilidade dos discos pode alterar sensivelmente os valores das frequências naturais do sistema eixo-disco: quanto maior a flexibilidade dos discos menores serão as frequências naturais do conjunto. A dificuldade maior reside no modelamento matemático do conjunto: para o exemplo supra-citado as equações envolvidas, baseadas nas leis de Newton e Princípio de Hamilton, já são suficientemente complicadas e trabalhosas para uma tentativa de aplicação das mesmas considerando-se os discos do estudo

em apreço, cuja configuração é demasiadamente complexa. Este é um assunto para ser abordado utilizando-se o Método dos Elementos Finitos [29], o que foge ao escopo deste trabalho, ficando como recomendação para uma pesquisa subsequente. Foi visto entretanto, no Cap. 2, que os discos são altamente flexíveis, seja pela pequena espessura da chapa principal, seja pela fixação e material utilizado (Titânio ASTM-B348 Grau 2), onde o Módulo de Young é praticamente a metade do E_{aco} . De outra forma, pode-se ter idéia do grau de influência desta flexibilidade no cálculo das frequências naturais: lançar-se-á mão das FN obtidas com o auxílio do FFT conforme será visto posteriormente em detalhes, no Cap. 5. Considerar-se-á apenas a 1ª FN para o conjunto, discretização real, efeito de manga e inércia rotatória (Tab. 3.10); o parâmetro comparativo será o eixo sem os discos, conforme Tab.(3.11) a seguir:

FN[Hz]	Eixo + Discos			Eixo s/Discos		
	Calculada	FFT	Difer.	Calculada	FFT	Difer.
1ª	64,02	57,3	-11,3%	73,32	67,1	-8,4%

Tab. 3.11 - FN calculadas x medidas com FFT -
Eixo + Discos/Eixo sem Discos

Observa-se que as diferenças percentuais variam para os dois casos comparados: conjunto completo (eixo com os discos) e apenas eixo, quando, teoricamente deveriam ser iguais. A defasagem é de $11,3 - 8,4 = 2,9\%$. Este valor deve ser atribuído à flexibilidade

dos discos, ratificando o trabalho de Chivens [28], flexibilidade esta que poderá ser visualizada quando do tratamento da Análise Modal do conjunto (Cap. 5). Assim, os fatores principais que podem modificar os valores das frequências naturais podem ser resumidos na Tab. 3.12, a seguir:

FN	Ref. EI = cte Rotor Bimétrico	Ef. Inercial Rotatório	Red. X	Ef. cópico	Acres. X	Ef. Red. das Mangas/eixo	Red. X	Excentricidade dos discos	Acres. X	Cotas reais EI = cte	Dif. X	C.Reais+Ef. Mangas + In. Rotatório	Red. X
16 Hz	71,0	68,3	-3,8	73,3	+3,8	67,9	-4,4	71,1	+0,14	68,04	-4,1	64,62	-8,9
rpm	4260	4101		4426		4074		4266		4082		3877	
28 Hz	229,3	221,9	-3,2	235,6	+2,7	217,2	-5,5	229,7	+0,17	225,7	-1,5	207,34	-9,5
rpm	13763	13316		14137		13052		13782		13545		12440	
38 Hz	534,9	517,8	-3,2	549,9	+1,1	473,9	-12,0	535,4		543,4	+1,6	426,40	-20,5
rpm	32094	31068		32974		28434		32124		32634		25884	

Tab. 3.12 - Comparação entre as 3 Frequências Naturais conforme o parâmetro modificador.

A flexibilidade dos suportes não foi numericamente incluída na Tab. 3.12 por desconhecer-se o valor real da constante de rigidez dos suportes. Contudo, é bom ter em mente a Fig. 3.12.

Pelos resultados obtidos neste capítulo, utilizando-se 5 métodos diferentes e chegando-se aos mesmos valores numéricos (exceto Dunkerley), concluiu-se, a priori, que o sistema trabalha muito próximo de sua velocidade crítica (frequência de rotação = $60\text{Hz} = 3600\text{ rpm}$), configurando-se uma situação de ressonância.

Antes de tratarmos da Análise Modal do rotor para aferir esta hipótese, estudar-se-á primeiramente o comportamento vibratório do Sistema, através da Análise de Sinais, objeto do próximo capítulo.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DE SINAIS

4.1 - INTRODUÇÃO

Após o cômputo das frequências naturais levando-se em conta fatores que, sob determinadas condições, podem alterá-las, julgou-se necessário obter o espectro de potência do exaustor em funcionamento, objetivando identificar as frequências componentes do espectro e sua parcela de contribuição no nível global de vibrações, bem como conhecer este nível, comparando-o com valores estabelecidos em normas internacionais e por institutos de pesquisa. A representação esquemática do conjunto motor/exaustor e a cadeia de medição podem ser visualizadas na Fig. 4.1, a seguir:

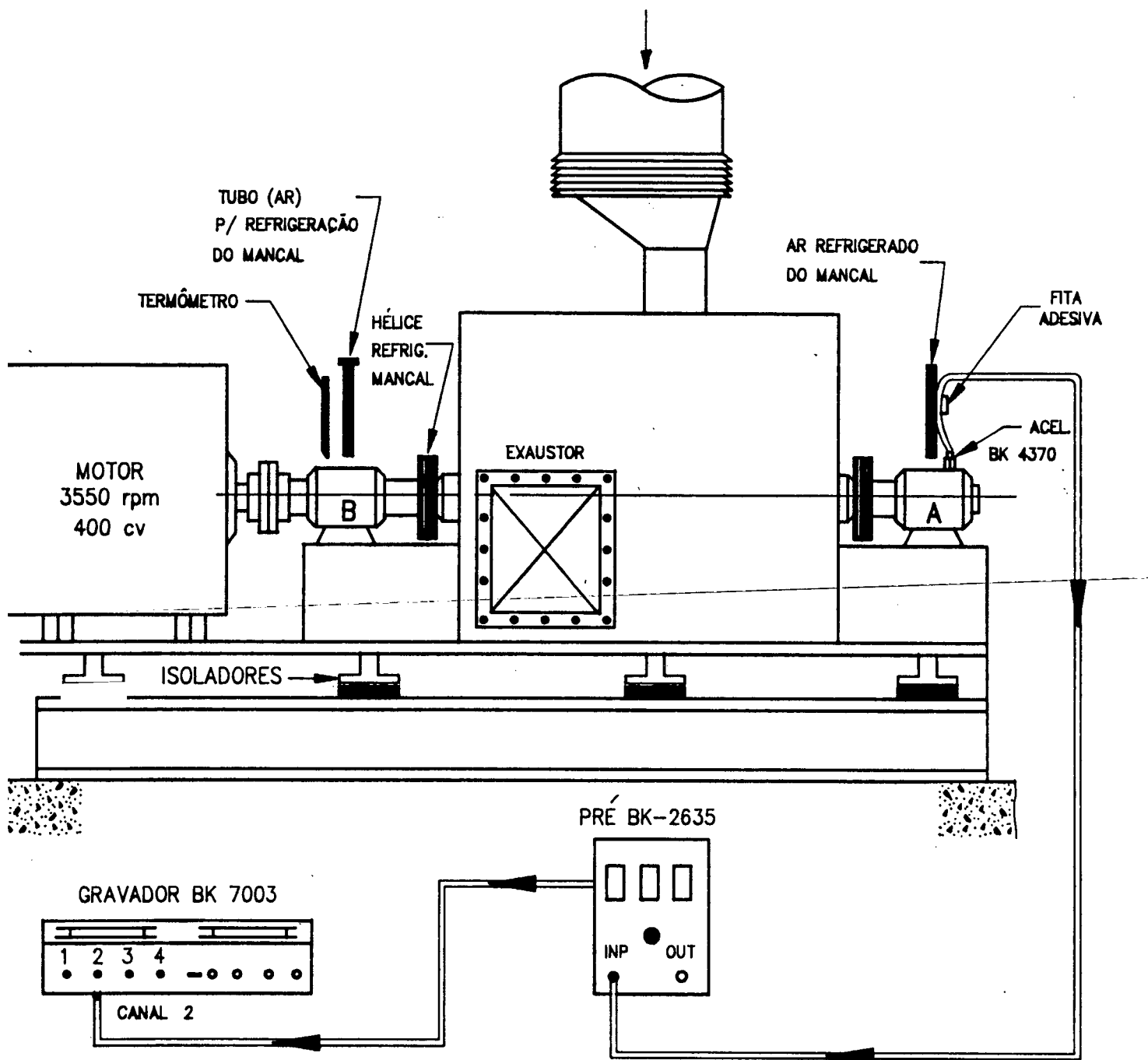


Fig. 4.1 - Esquema geral do grupo motor/exaustor com a cadeia para gravação.

Instrumentação utilizada:

- 1 acelerômetro BK-4370
- 1 pré-amplificador BK-2635
- 1 gravador BK-7003

4.2 - Tempo de Gravação do Sinal

Os parâmetros principais envolvidos estão representados na Fig. 4.2, a seguir:

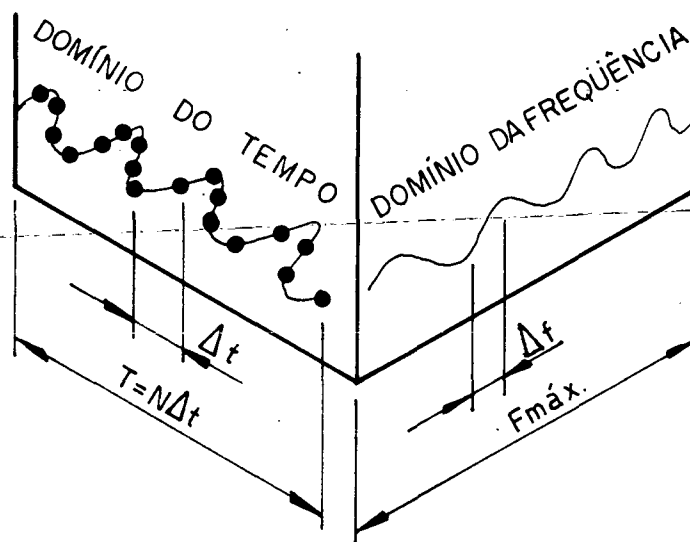


Fig. 4.2 - Parâmetros para Amostragem do Sinal.

Considerando-se que a gravação FM permite o registro do sinal até 10 KHz, este valor foi adotado como sendo $F_{máx.}$

As relações seguintes são conforme Ref. [30]:

$$F_{máx.} = \frac{1}{2\Delta t} \quad \dots \text{Eq. (4.1)}$$
$$\therefore \Delta t = \frac{1}{2F_{máx.}} = \frac{1}{2 \times 10.000} \rightarrow \Delta t = 50 \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$T = N\Delta t \quad \dots \text{E.q. (4.2)}$$

onde $N = n^\circ$ de amostras ou n° de pontos obtidos

$$N = 2^p \quad \dots \text{E.q. (4.3)}$$

onde p é um n° inteiro.

Para o Fourier Analyser (LVA), $P_{\max} = 12 \rightarrow$

$N = 4096$ pontos

Adotando-se $p = 11 \rightarrow N = 2048$ pontos, obtém-se:

$$T = 2048 \times 50 \times 10^{-6} \rightarrow \boxed{T = 0,1024\text{s}}$$

$T =$ tempo para aquisição ou gravação de 1 amostra do sinal.

Para se evitar erro de identificação (Aliasing) do sinal, o qual consiste em dobramento do espectro em torno da frequência de Nyquist, a frequência de amostragem ($f_s = 1/\Delta t$) ~~deve ser~~

suficientemente alta, de modo a cobrir toda a faixa de frequências do sinal. Para se garantir esta condição, deve-se remover frequências mais altas que $1/2\Delta t$ Hz através do uso de filtros "anti-aliasing" antes da conversão analógico-digital (Ref. [31]).

$$\dots F_{\max} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2 \times 50 \times 10^{-6}} = 10.000 \text{ Hz}$$

Como o acelerômetro BK-4370 fornece confiavelmente frequências até 6 KHz, o filtro no computador adotado foi de 1250Hz, o que deixa uma ampla faixa de garantia contra o efeito de dobramento ("aliasing") do sinal.

Com o objetivo de se eliminar os efeitos de ruídos externos provenientes de outras fontes e que poderiam comprometer o sinal adquirido, necessário se faz que se obtenha várias amostras do mesmo, realizando médias que "alisam" o sinal, conforme Fig.4.3 (Ref. [32]) onde se nota a redução na variância do sinal.

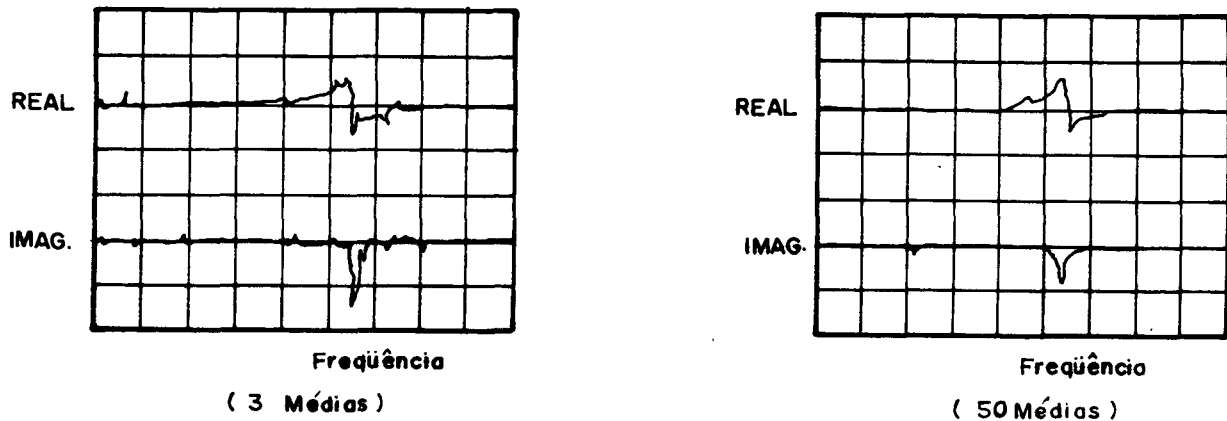


Fig.4.3 - Efeito do número de médias na redução do ruído externo.

Assim sendo, pode-se afirmar que o tempo necessário para efetuar uma gravação do sinal do exaustor em questão é:

$$T_{grav.} = nN\Delta t \quad \dots \text{Eq. (4.4)}$$

onde n = nº de médias ou de graus de liberdade

Para 100 médias, $T_{grav} = 100 \times 2048 \times 50 \times 10^{-6} =$ 10,24s

As Fig.4.4 e Fig.4.5 mostram o esquema da cadeia de análise e o sinal obtido, respectivamente, utilizando-se o programa "Power Spectrum" no Analisador de Fourier.

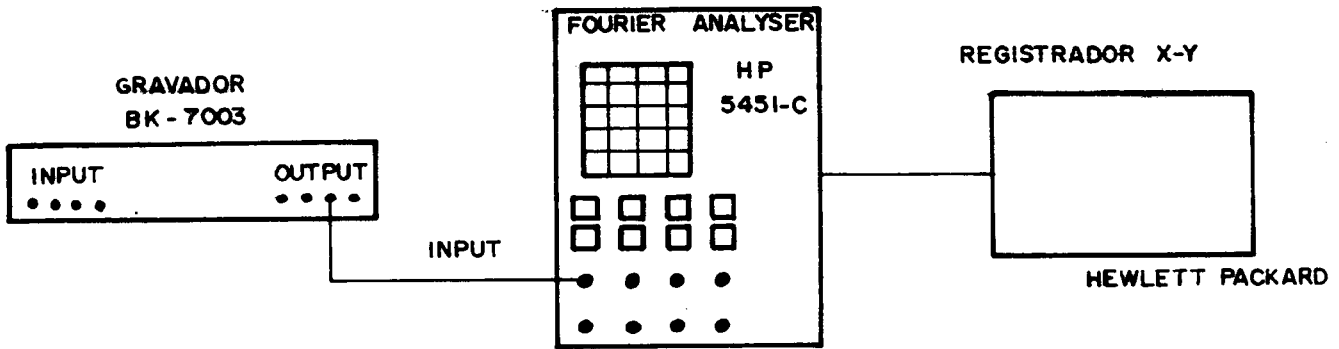


Fig.4.4 - Representação esquemática da cadeia de processamento do sinal gravado.

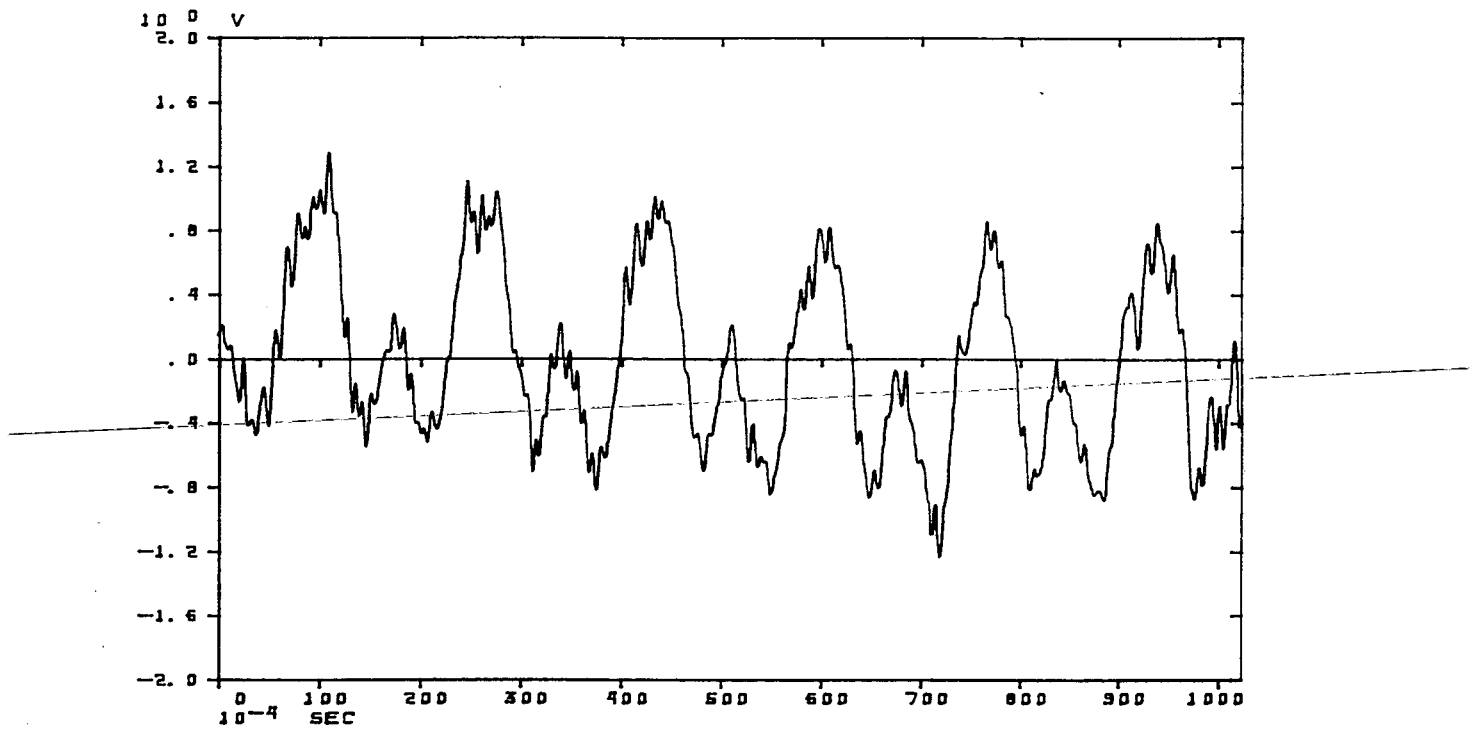


Fig.4.5 - História Temporal (sinal no domínio do tempo)
 $F_c = 1250$ Hz - Medida em Velocidade (m/s)
 $N = 2048$ pontos

4.3 - RESOLUÇÃO - Δf :

A resolução é dada por:

$$\Delta f = \frac{1}{T}$$

... Eq.(4.5)

Como $T = 0,1024s$ para a amostra anterior, $\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,1024} = 9,76 \text{ Hz}$,

ou seja, uma resolução muito pobre, podendo induzir a erros grosseiros na análise espectral. Conforme [31], a melhor maneira de se estabelecer um valor seguro para F_{\max} presente nos dados é filtrar-se o sinal original antes da digitalização com filtro passa-baixa, com frequência de corte superior igual a F_{\max} (isto para evitar "aliasing").

Assim, com $f_{\text{corte}} = F_{\max} = 1250 \text{ Hz}$ e $N = 4096$ pontos, tem-se:

$$F_{\max} = \frac{N}{2} \times \Delta f \quad \dots \text{Eq. (4.6)}$$

~~∴ $1250 = \frac{4096}{2} \times \Delta f$ ∴ $\Delta f = 0,61 \text{ Hz}$, o que nos fornece uma~~

confiabilidade maior na análise do sinal.

Sendo $\Delta f = \frac{1}{T} \rightarrow T = \frac{1}{\Delta f} = \frac{1}{0,61} = 1,639 \text{ s}$

Para 100 médias, $T_{\text{grav.}} = nT = 100 \times 1,639 = 163,9s = 2,73 \text{ min.}$

Por garantia, a gravação foi de 3 minutos.

4.4 - CALIBRAÇÃO DAS CURVAS OBTIDAS:

A Fig.4.6, a seguir, representa um sinal referência de 200 Hz, obtido através de um gerador de sinais ("Sine Random Generator - BK-1027), com intensidade de 1 Vrms e 80 dB de amplitude:

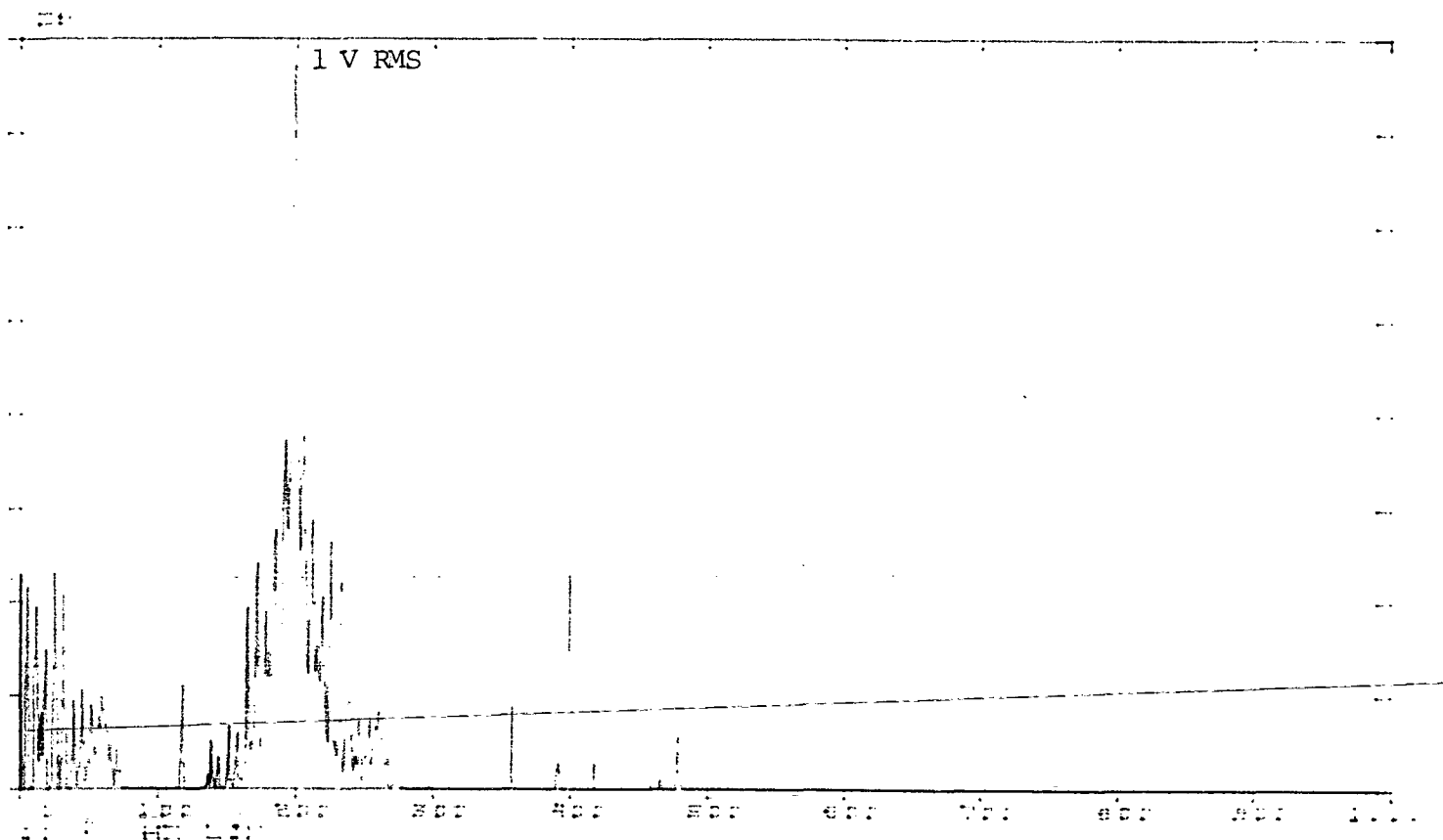


Fig.4.6 - Sinal Referência para Calibração.

A relação de escala é:

$$dB = 20 \log \frac{V}{V_{ref}} \quad \dots \text{Eq.(4.7)}$$

onde: $V_{ref} = 1 V_{rms}$

Para a Fig.4.5 a escala de amplitude é dada em Volts. O valor real da velocidade em [mm/s], é obtido da seguinte forma: quando da gravação das vibrações do exaustor, o ganho do pré estava, em uma das

medidas, em 1000 mV/unidade de saída (= m/s), mas na escala de "Lower Freq. Limit" o fator da escala é de 0,01 (velocidade),

Assim, na saída tem-se:

$$V_{\text{eloc}} = 1000 \times 10^{-3} \text{ v/m/s} \times 0,01$$

$$\therefore V_{\text{eloc}} = 1 \text{ V/10mm/s}$$

Na Fig.4.5, o pico máximo é:

$$V_{\text{pico}} = 1,3 \text{ Volts}$$

$$V_{\text{ef}} = 1,3 \times 0,707 = 0,92 \text{ Volts (rms)}$$

$$1 \text{ } V_{\text{rms}} \rightarrow 10 \text{ mm/s}$$

$$0,92 \text{ } V_{\text{rms}} \times \quad \quad \quad \times = 9,2 \text{ mm/s (rms)}$$

$$\therefore \text{ Amplitude de velocidade: } \left| \begin{array}{l} \text{pico} = 13 \text{ mm/s} \\ \text{rms} = 9,2 \text{ mm/s} \end{array} \right.$$

4.6 - ESCOLHA DO PARÂMETRO A SER MEDIDO: Deslocamento, Velocidade ou Aceleração:

As grandezas a serem consideradas nas medições de vibrações são as amplitudes de : deslocamento, velocidade e aceleração. Cada uma das quais possui vantagens e desvantagens ([33]), conforme a seguir:

a) Deslocamento: é geralmente o melhor parâmetro a ser usado para medidas de frequências muito baixas (menor que 600 cpm ou 10 Hz) onde as amplitudes de velocidade e aceleração são extremamente baixas.

b) Velocidade: é usualmente o melhor parâmetro para análise de vibrações em máquinas, particularmente na faixa de 600 a 60.000 cpm

(10 a 1000 Hz). Para a maioria das máquinas a condição mecânica é geralmente melhor considerada com a velocidade de vibração, a qual é uma medida de energia dissipada e conseqüente fadiga dos componentes da máquina. Pode detetar defeitos a baixas, médias e altas frequências.

c) Aceleração: é a melhor medida para se detetar problemas em altas frequências (acima do 1000 Hz).

Matematicamente, tem-se:

$$D = X = X_0 \text{ sen } wt \rightarrow \text{deslocamento} \quad \dots \text{ Eq. (4.8)}$$

$$V = \dot{X} = X_0 \omega \text{ cos } wt \rightarrow \text{velocidade} \quad \dots \text{ Eq. (4.9)}$$

$$A = \ddot{X} = -X_0 \omega^2 \text{ sen } wt \rightarrow \text{aceleração} \quad \dots \text{ Eq. (4.10)}$$

Pode-se observar claramente a influência das altas frequências pela Eq.(4.10), dando valores de amplitude em aceleração muito superiores aos de amplitude em deslocamento.

A Ref. [34], dentre outras, nos fornece limites práticos de utilização destes parâmetros, conforme Fig.4.7 a seguir:

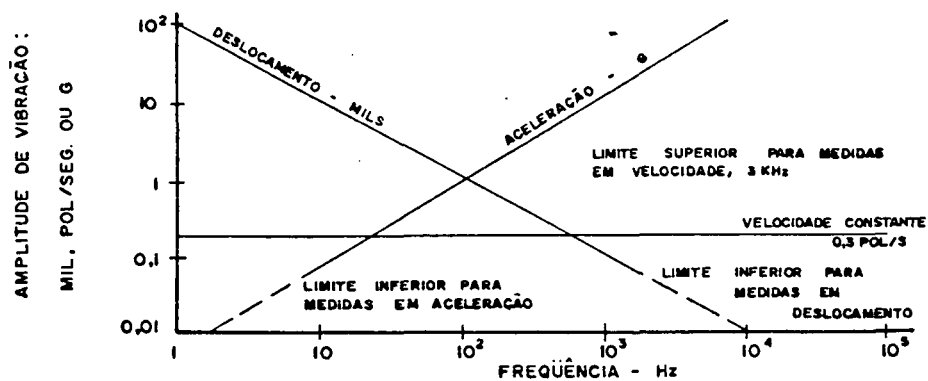


Fig. 4.7 - Limitações em sistemas e transdutores para análise de vibrações em máquinas.

A prática mostra que, como tudo na vida, o bom senso prevalece. Assim, costuma-se usar medidas de velocidade e deslocamento até a faixa de 7.200 cpm (120 Hz); acima deste valor, velocidade e aceleração constituem a melhor escolha. Em qualquer caso, entretanto, prevalece os valores que apresentarem maior amplitude.

4.6 - CURVAS OBTIDAS:

Pelo exposto acima, foram feitas medidas (verticais) conforme Fig.4.1, utilizando-se como parâmetro as amplitudes de velocidade e aceleração. As curvas obtidas são mostradas a seguir. A Fig.4.8 mostra o espectro de potência (ou seja, o sinal no domínio de tempo é transportado para o domínio da frequência pela aplicação da Transformada de Fourier) do sinal vibratório, medida em velocidade (m/s) e frequência de corte $F_c = 250$ Hz. Vê-se que o 1º harmônico aparece na frequência de rotação do conjunto (60 Hz), sendo seguido pelos demais harmônicos. Segundo Ref. [35], este comportamento é indicativo de desalinhamento ou eixo empenado, sendo comum estes picos aparecerem na frequência de rotação (1 x rpm) e no 2º harmônico (2 x rpm), algumas vezes em 3 e 4 x rpm. Contudo, ao observar-se a Fig.4.9, os harmônicos podem ser perfeitamente identificados em todo o espectro ($F_c = 1250$ Hz). Isto sugere o alto grau de flexibilidade do conjunto. Senão, vejamos:

a) 1º modo de vibração será excitado, simulando desalinhamento ou eixo empenado;

b) a diferença entre \varnothing eixo (125mm) e \varnothing munhão ou mangas (\varnothing 70mm) favorece este tipo de comportamento dinâmico. Outro detalhe interessante da Fig. 4.9 é que, como o sinal foi medido em aceleração, o pico do 1º harmônico (60 Hz) tem amplitude menor que o do 2º harmônico (120 Hz), o que não foi observado quando se mediu em velocidade.

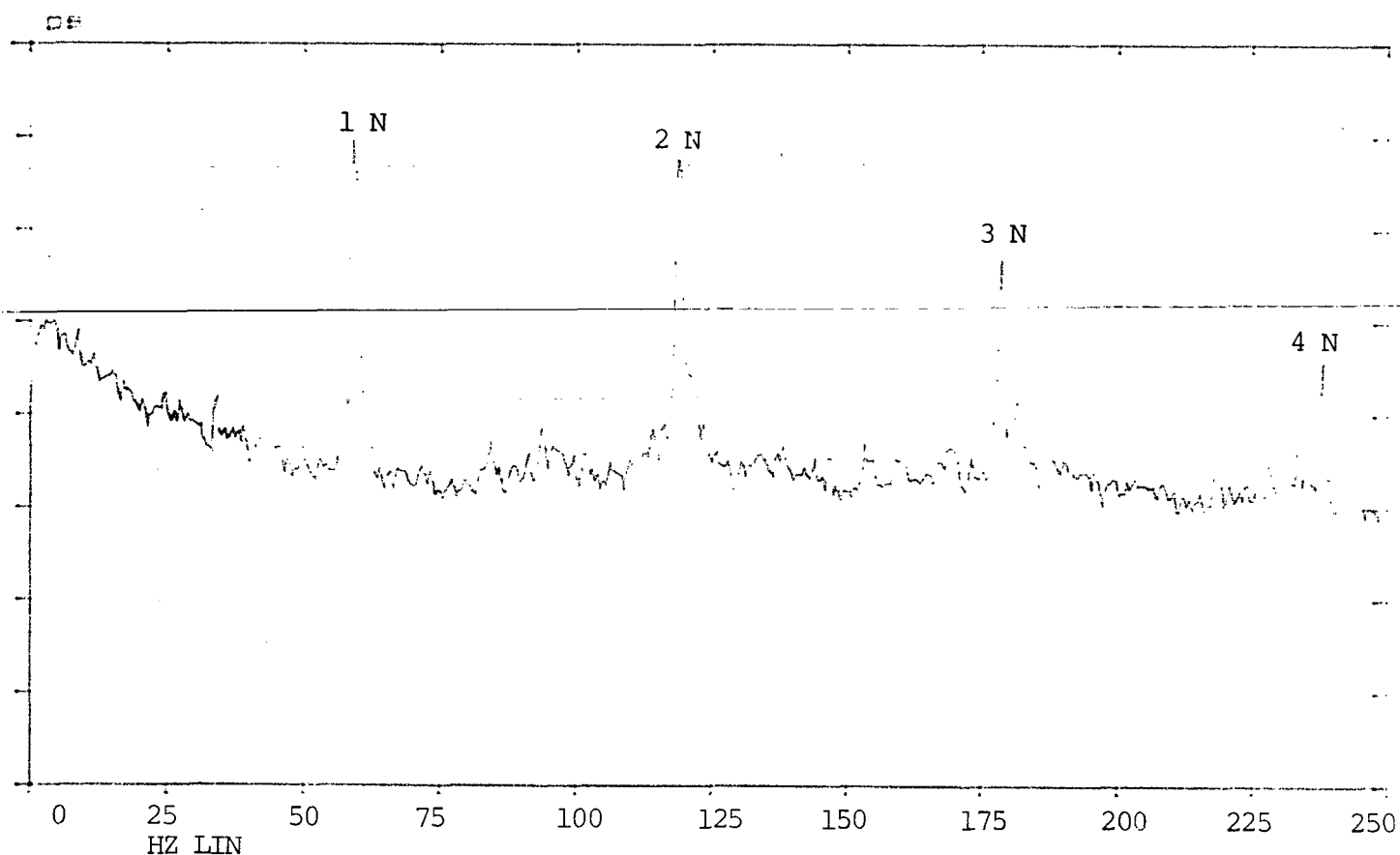


Fig. 4.8 - Espectro de Potência - 24 médias
 $F_c = 250$ Hz - Medida em Velocidade (m/s).

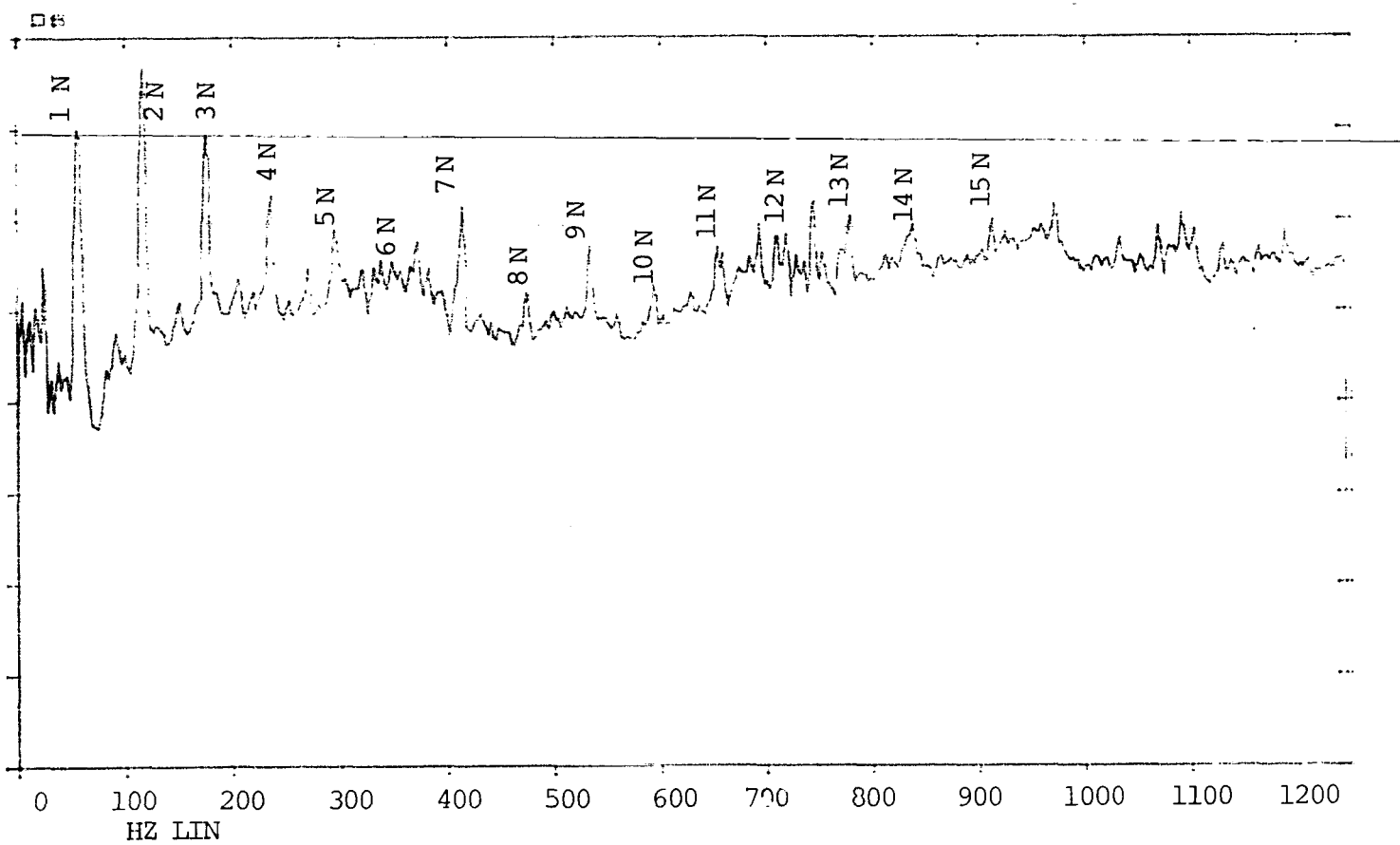


Fig. 4.9 - Espectro de Potência - 100 médias
 $F_c = 1250$ Hz - Medida em Aceleração (m/s^2).

4.7 - DETERMINAÇÃO DA AMPLITUDE

Tomando-se por base a Fig.4.8, tem-se:

- Amplitude do 1º harmônico (velocidade rms):

$$\text{Ampl.} = -11\text{dB}$$

$$\text{dB} = 20 \log \frac{V}{V_{\text{ref}}} \quad \text{onde:} \quad V_{\text{ref}} = 1 \text{ Vrms (volts rms)}$$

$$\therefore -11 = 20 \log V \quad \rightarrow \quad \boxed{V = 0,2818 \text{ Vrms}}$$

Ganho do pré-amplificador: 316 mV/unid. de saída = 0,316V/10mm/s

$$\therefore 0,316\text{V} - 10\text{mm/s}$$

$$0,2818\text{V} - \text{veloc.} \quad \text{veloc.} = 8,92 \text{ mm/s (rms)}$$

$$\therefore \text{Amplitude de velocidade rms} = 8,92 \text{ mm/s}$$

$$\text{pico} = 12,6 \text{ mm/s}$$

Comparando-se estes valores com os encontrados anteriormente ($V_{\text{rms}} = 9,2 \text{ mm/s}$ e $V_{\text{pico}} = 13 \text{ mm/s}$), vê-se que os resultados são compatíveis, pois no 1º caso as medidas foram do nível global de vibrações e, no 2º, da frequência discretizada.

O valor em deslocamento é:

$$\dot{X} = X_0 \omega \cos \omega t \quad \therefore \quad 12,6 = X_0 \times 2\pi \times 60 \quad \therefore \quad \boxed{X_0 = 33\mu\text{m (pico)}}$$

O grau de severidade desta amplitude será discutido no final deste capítulo.

Teve-se a oportunidade de se registrar o sinal das vibrações, nesta mesma época, com o auxílio de um Analisador de Vibrações

BK-2515, durante a demonstração de utilização do mesmo, pelo representante técnico do fabricante. A curva obtida é conforme Fig. 4.10, a seguir:

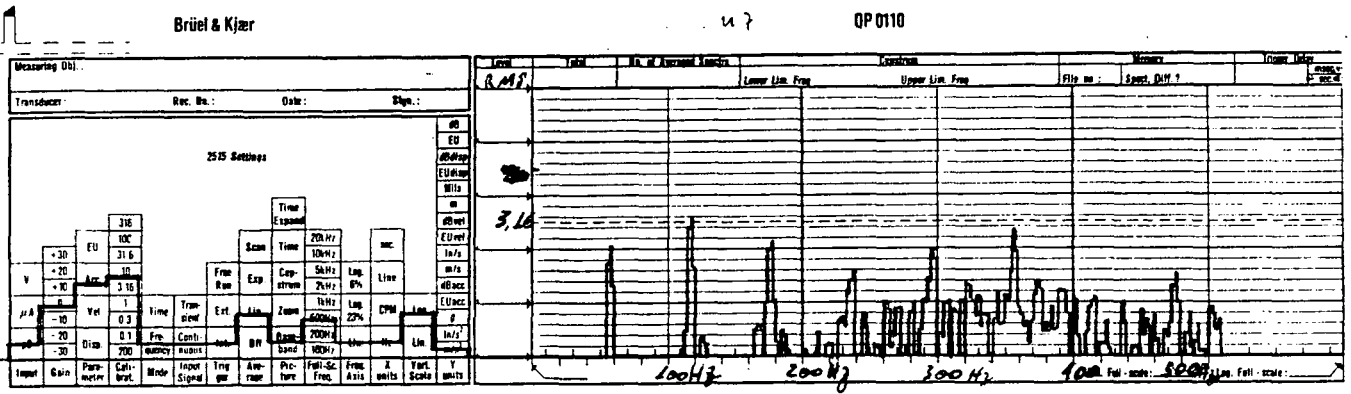


Fig. 4.10 - Espectro de Potência obtido com o Analisador BK-2515.

$F_{corte} = 500 \text{ Hz}$
 Filtro : 1/2 banda de oitava.

Nota-se claramente a igualdade de espectros, dentro da faixa de frequências considerada.

A medida utilizada foi de aceleração (m/s^2), com o seguinte valor de amplitude:

$$\ddot{X} = -x_0 \omega^2 \text{ sen } \omega t \quad x_0 = 33 \text{ } \mu\text{m (pico)}$$

$$\therefore \ddot{X} = 33 \times 10^{-6} \times (2\pi \times 60)^2 = 4,7 \text{ m/s}^2 \text{ (pico)} = 3,32 \text{ m/s}^2 \text{ (rms)}$$

o que está compatível com o valor registrado.

4.8 - IDENTIFICAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS DE INTERESSE:

Dentro dos aspectos considerados nas figuras anteriores, diversos picos diferentes dos harmônicos da rotação foram registrados.

Tais picos são devidos a :

- ruídos de fundo (outros equipamentos trabalhando próximos ao exaustor. Também conhecido como Transmissibilidade Passiva)
- ruído elétrico (da própria cadeia de medição)
- frequência de passagem das pás
- frequências oriundas do acionamento (acoplamento e motor elétrico)
- frequências dos rolamentos
- soma e diferença das frequências

~~Outros fatores poderiam introduzir picos no espectro, tais como:~~ base sem aperto suficiente e atrito entre partes rotativas. No 1º caso, o pico aconteceria apenas a $2 \times \text{rpm}$ [35] e, no 2º, o atrito provocaria componentes de altas frequências, as quais não são consideradas na análise presente, pelas limitações citadas anteriormente.

4.8.1 - Frequência de Passagem das Pás

$$f_{\text{passagem}} = \text{nº de pás} \times \frac{\text{rpm}}{60} = 11 \times \frac{3600}{60} = 660 \text{ Hz}$$

Considerando o escorregamento do motor, $f_{\text{passagem}} = 11 \times \frac{3550}{60}$

∴ $f_{\text{passagem}} = 650,8 \text{ Hz}$

4.8.2 - Frequências dos rolamentos

Rolamento utilizado: SKF-1316K (autocompensador com 2 carreiras de esferas).

As fórmulas seguintes foram desenvolvidas por diversos autores, todos eles baseados no trabalho de Arvid Palmgren [36]. A Fig.4.11 representa esquematicamente um rolamento com os parâmetros principais.

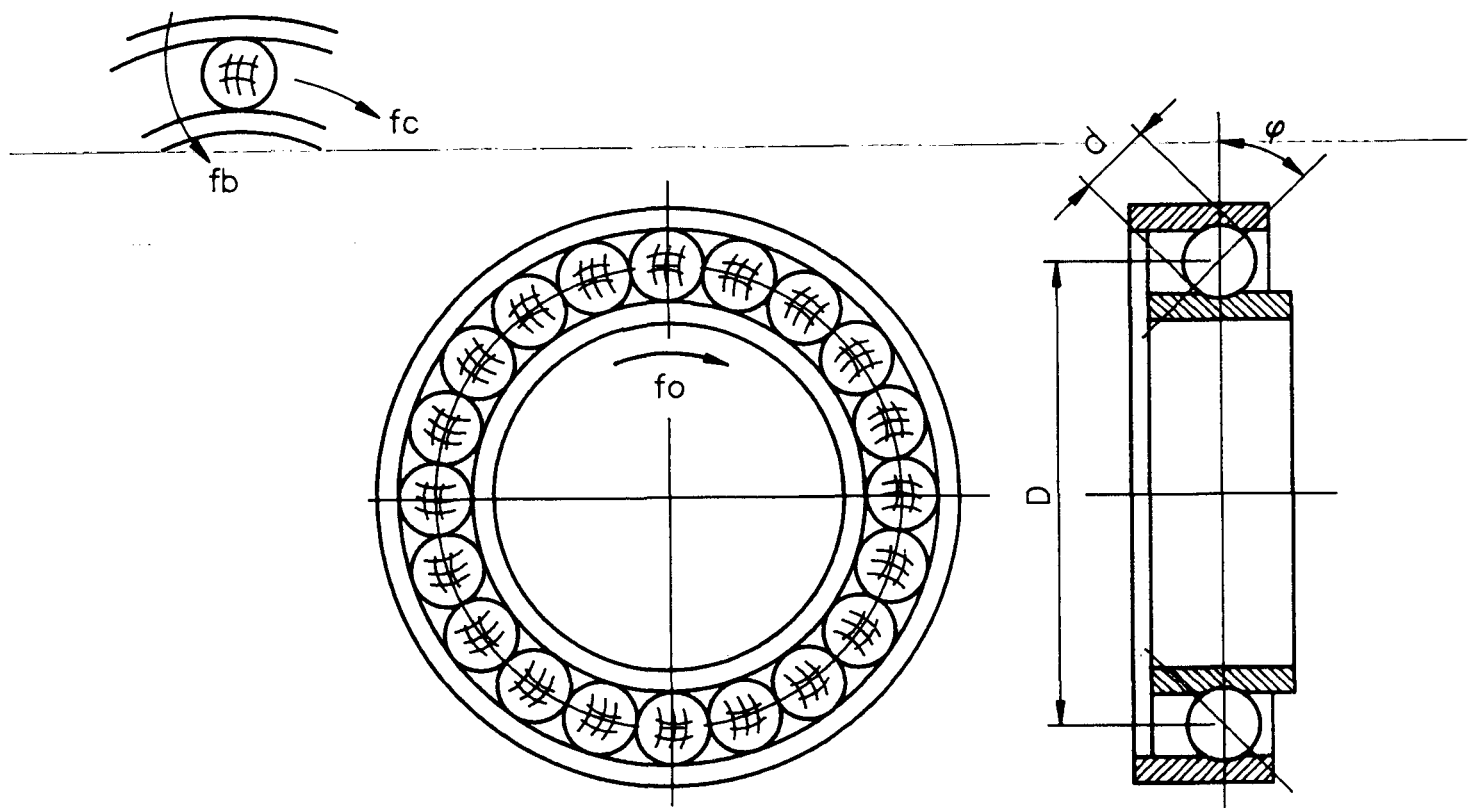


Fig. 4.11 - Representação esquemática de um rolamento.

Seja a seguinte simbologia:

f_0 = frequência de rotação do eixo

f_c = frequência fundamental do conjunto

f_B = frequência de Spin do elemento rotativo

f_E = frequência de passagem na pista externa

f_I = frequência de passagem na pista interna

D = Diâmetro do passo interno (\emptyset primitivo dos elementos girantes)

d = Diâmetro do elemento girante

N = nº de elementos girantes

φ = ângulo de contato

f_d = frequência de defeito das esferas

~~As fórmulas a seguir fornecem as frequências de interesse:~~

$$f_c = \frac{f_0}{2} \left(1 - \frac{d}{D} \cos \varphi \right) \quad \dots \text{Eq. (4.11)}$$

$$f_B = \frac{D}{d} \cdot \frac{f_0}{2} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \cos \varphi \right)^2 \right] \quad \dots \text{Eq. (4.12)}$$

$$f_E = N \cdot \frac{f_0}{2} \left(1 - \frac{d}{D} \cos \varphi \right) \quad \dots \text{Eq. (4.13)}$$

$$f_I = N \cdot \frac{f_0}{2} \left(1 + \frac{d}{D} \cos \varphi \right) \quad \dots \text{Eq. (4.14)}$$

$$f_d = \frac{D}{d} \cdot f_0 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \cos \varphi \right)^2 \right] \quad \dots \text{Eq. (4.15)}$$

- Dados do rolamento:

$d = 20\text{mm}$ (medido no próprio rolamento)

$D = 125\text{mm}$ (Ref. [4])

$\varphi = 0^\circ$

$N = 30$ esferas

∴ Com estes dados, obtém-se:

$f_O = 59,2 \text{ Hz}$ (freq. de rotação do eixo)

$f_C = 24,8 \text{ Hz}$

$f_B = 360,5 \text{ Hz}$

$f_E = 746 \text{ Hz}$

$f_I = 1030 \text{ Hz}$

$f_d = 360,5 \text{ Hz}$

Segundo Collacott [37], a frequência de defeito nas esferas/rolos é dada por:

$$f_d = \left(\frac{R + r}{r} \right) \left(\frac{R - r}{R} \right) \frac{N}{n} \quad \dots \text{Eq. (4.16)}$$

onde: $R =$ raio do passo circular ($R = 62,5\text{mm}$)

$r =$ raio da esfera/rolo ($r = 10\text{mm}$)

$N =$ rotação do eixo, rpm ($N = 3550 \text{ rpm}$)

$n =$ nº de esferas/rolos ($n = 30$)

Assim, $f_d = 720,6 \text{ Hz}$

Vê-se que, por esta fórmula, a frequência de defeito nas esferas resultou no dobro da calculada anteriormente. A justificativa do

autor é que a irregularidade da esfera ataca a pista interna e externa, simultaneamente.

O objetivo deste tópico referente a rolamentos é apenas mostrar as frequências que podem aparecer no espectro. A identificação de suas falhas, por tratar-se de um assunto que por si só permitiria um trabalho à parte, pode ser melhor abordada pelos estudos de Balderston e Collacott (Ref. [37] a [41] e [44]) dentre outras.

A abordagem de falhas em rolamentos implica em acompanhamento da variação do espectro do sinal, o que foge ao escopo deste estudo.

4.8.3 - Soma e Diferença de Frequências

~~É comum~~ aparecer no espectro de frequências picos aparentemente sem correspondência com os parâmetros físicos usualmente conhecidos como fontes de excitação vibratória. Estudando o fenômeno do batimento em sistemas mecânicos, Ehrich [42] e Eshleman [43] constataram que tais picos são resultantes da soma e/ou diferença de duas frequências, sendo uma delas, a principal, a da própria rotação do equipamento; a segunda (e/ou demais) são geradas por sistemas engrenados, defeitos de rolamentos, etc. Os harmônicos ou múltiplos destas frequências podem obedecer o quadro 4.1 a seguir, considerando-se que a diferença de frequências seja uma banda lateral de uma frequência central fictícia (\emptyset - zero).

<u>Frequências laterais</u>	<u>Frequências Centrais</u>		<u>Freq. laterais</u>
-	0		$(w_2 - w_1)$
$(2w_1 - w_2)$	w_1	w_2	$(2w_2 - w_1)$
$(3w_1 - w_2)$	$2w_1$	$(w_1 + w_2)$ $2w_2$	$(3w_2 - w_1)$
$(4w_1 - w_2)$	$3w_1$	$(2w_1 + w_2)$ $(w_1 + 2w_2)$ $3w_2$	$(4w_2 - w_1)$ etc.

Quadro 4.1 - Modelo de Componentes de Frequência.

A Fig.4.12 a seguir mostra o espectro de frequência com os picos principais identificados: frequência de rotação e seus harmônicos; frequência de passagem das pás; frequência de defeito das esferas (f_d), confirmando a fórmula proposta por Collacott [37]; frequência de passagem na pista externa do rolamento (f_E); frequência de passagem na pista interna do rolamento (f_I), tendo esta 2 frequências laterais, provocadas pela soma e diferença com a frequência de rotação do conjunto. Conforme Eshleman [43], f_I é mais propensa a apresentar tais frequências laterais.

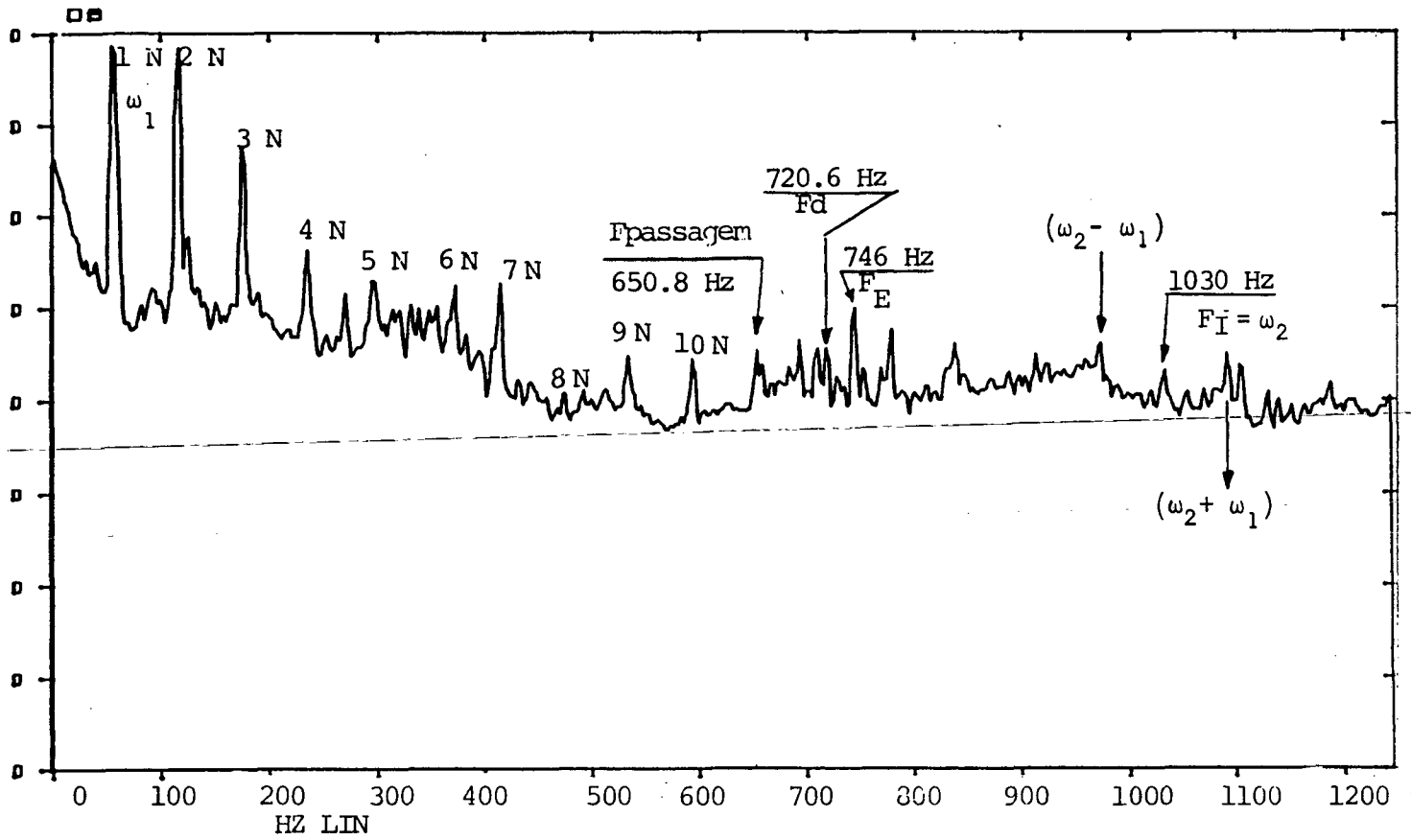


Fig. 4.12 - Espectro de Potência - 100 médias
 $F_C = 1250$ Hz - Medida em Velocidade (m/s).

Além dessas frequências, há grupos de baixas e altas frequências nos rolamentos, devido, principalmente à fabricação defeituosa e desgaste (Ref. [8], conforme quadros (4.2) e (4.3) abaixo:

VIBRAÇÕES ORIUNDAS DE FABRICAÇÃO DEFEITUOSA		
Causa da Anormalidade	Frequências Geradas	Observações
Eixo torto ou rolamento assentado ou ajustado inadequadamente	$f_0 \pm N \cdot f_C$	Aparece gerada a freq. indicada
Elementos girantes com diâmetros desiguais	f_C $2 \cdot f_C - f_0$	Aparecem geradas as freq. indicadas
Ondulações na pista interna	$n \cdot N \cdot f_I \pm f_0$	A freq. é gerada quando o nº de ondulações é $n \cdot N \pm 1$
Ondulações na pista externa	$n \cdot N \cdot f_C$	
Ondulações dos elementos girantes	$2 \cdot n \cdot f_B \pm f_C$	Freq. gerada qdo o nº de ondulações é $2n$

Quadro 4.2 - Vibrações oriundas de fabricação defeituosa -
(n é um nº inteiro positivo)

CAUSA DA ANORMALIDADE	FREQ. GERADAS	OBSERVAÇÕES
Defeitos na pista interna. Irregularidades ou ondulações	$n \cdot f_0$ $n \cdot N \cdot f_I$ $n \cdot N \cdot f_I \pm f_0$ $n \cdot N \cdot f_I \pm f_C$	Em qualquer dos casos deteta-se a freq. natural e são geradas componentes de alta freq.
Defeitos na pista externa. Falhas puntiformes	$n \cdot N \cdot f_C$	Deteta-se vibrações na freq. natural e componentes de alta freq.
Defeitos nos elementos rotativos	$2 \cdot n \cdot f_B$ $n \cdot N \cdot f_B \pm f_C$	Idem ao caso anterior

Quadro 4.3 - Vibrações oriundas de desgaste.

4.9 - LIMITES TOLERÁVEIS DE VIBRAÇÃO

Das 7 referências consultadas ([44] a [50]), todas servem apenas de guia geral quando o fabricante não estabelece os seus próprios limites. Apesar da idoneidade das fontes, há discrepâncias entre elas; contudo, há um ponto em comum: todas são baseadas no fato de que o melhor indicador do grau de severidade do nível de vibrações para determinado equipamento é o próprio operador da mesma, o qual a acompanha diariamente. Outro fator interessante a ser registrado é que, embora determinada máquina apresente um nível considerado alto pelas normas, não significa necessariamente que o reparo da mesma tenha que ser programado o mais breve possível. O importante é o ~~gradiente de variação deste nível~~, o qual é obtido através de um acompanhamento periódico do comportamento dinâmico do equipamento, a partir de sua instalação (máquina nova) ou recém-reparada. Entretanto, o valor das normas constitui em se estabelecer padrões estatisticamente seguros visando aumentar a confiabilidade do equipamento considerado. Recentemente, (1986), um grupo do Southwest Research Institute, San Antonio, Texas, publicou os resultados de vários anos de pesquisa nesta área (Ref. [50], estabelecendo

fatores de correção para os diversos tipos de situações, conforme Quadro 4.4 abaixo:

<u>Fatores de Correção</u>	<u>Aplicação</u>
$K_1 = 1,0$	Fator normal para desbalanceamento, desalinhamento e outras vibrações filtradas próximas da frequência de rotação.
$K_2 = 0,85$	Vibrações não filtradas para fontes próximas da frequência de rotação.
$K_3 = 3,3$	Vibrações subsíncronas autoexcitadas em bombas, compressores, turbinas ou rotores verticais.
$K_4 = 1,4$	Equipamentos com potência nominal menor que 300 Hp.
$K_5 = 0,7$	Máquinas com rotores rígidos, isto é, que operam bem abaixo da 1ª velocidade crítica
$K_6 = 0,6$	Fundação elástica ou máquinas que possuem isoladores/solos macios.
$K_7 = 3,5-10$	Máquinas com relações altas de peso entre carcaça/rotor.

$K_g = 3,5$

Vibrações de alta frequência em pás, usando medições de carcaça.

$K_\phi = 0,35$

Vibrações de altas frequências em engrenagens ou mancais antifricção.

Quadro 4.4 - Fatores de Correção para vibrações.

A Fig. 4.13 abaixo fornece os limites estabelecidos pelo grupo de pesquisa, medidas de vibrações efetuadas sobre os mancais. Esta carta deverá ser utilizada concomitantemente com o Quadro 4.4.

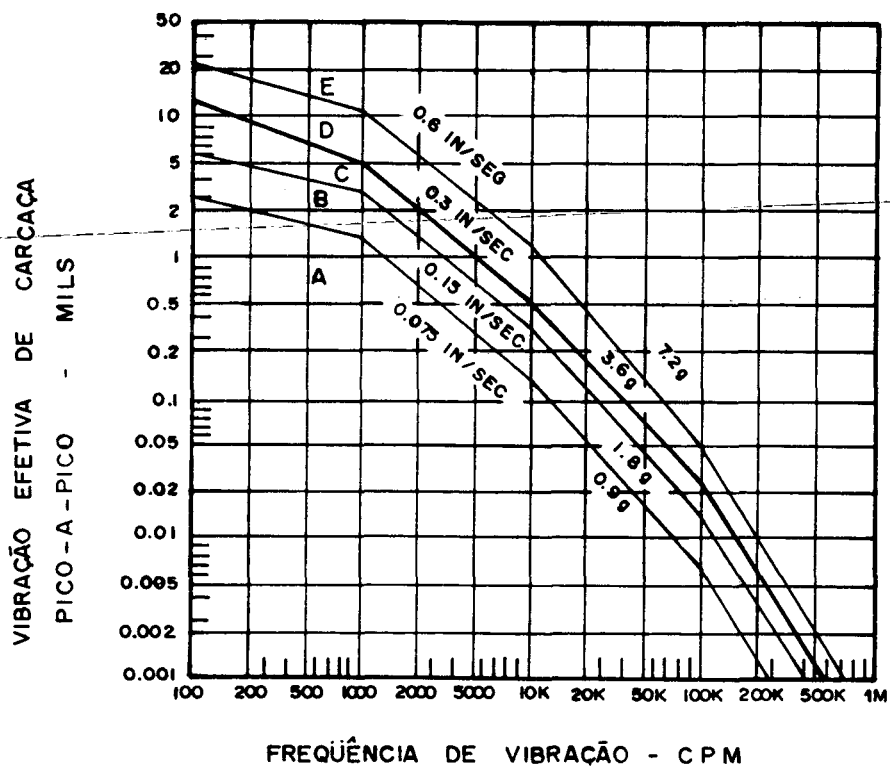


Fig. 4.13 - Limites de vibrações - Medidas sobre os mancais.

onde A = Nenhuma avaria (típico de equipamento novo)

B = Aceitável (correção não é necessária)

C = Marginal (correção é recomendada para economizar em manutenção futura)

D = Falha provável (observar mudanças e preparar a parada ou mudar condições operacionais para reduzir vibrações)

E = Perigo de falha iminente.

No caso em estudo, para critério utilizou-se a carta da Fig. 4.13 e a norma VDI-2056/64 (Ref. [45]), esta por ser de aceitação mundial, sendo as demais uma derivação da mesma. Adota valores de velocidade eficaz para verificação de severidade, pois este parâmetro, conforme já descrito anteriormente, traduz melhor a quantidade de energia presente no sinal vibratório.

A amplitude de velocidade pico encontrada no sinal registrado (Fig. 4.5) foi de 13mm/s (nível global-sinal no domínio do tempo). Em se considerando que o equipamento está apoiado sobre isoladores, o Quadro 4.4 fornece $K_G = 0,6$. Assim, a velocidade efetiva é:

$$V_{\text{efet}} = V_{\text{pico}} \times K_G = 13 \times 0,6 = 7,8 \text{ mm/s} = 0,31 \text{ pol/s}$$

Com frequência de rotação = 60 Hz (3600 cpm), vê-se pela carta da Fig. 4.13 que o equipamento trabalha na faixa de "falhas prováveis", ou seja, numa região em que a confiabilidade do mesmo está comprometida.

Quanto à carta da VDI-2056 (Grupo T → Fundações Elásticas) - Fig. 4.14, para $V_{\text{eficaz}} = 9,2 \text{ mm/s}$ a faixa de trabalho é considerada "ainda admissível".

Levando-se em conta que os isoladores elastoméricos foram instalados em 1981 e, até o presente momento não foram substituídos e que, devido à agressividade do ambiente (temperatura ambiente no verão $\approx 48^{\circ}\text{C}$, vapores de ácido clorídrico), os mesmos já perderam as características iniciais, já com endurecimento e fragilização. Assim, poder-se-á considerar, em uma aproximação, que o equipamento é suportado por bases rígidas. Assim sendo, na fig. 4.13, com $V_{\text{pico}} = 13 \text{ mm/s} = 0,51 \text{ pol/s}$, a faixa de trabalho é próxima de "falha imediata".

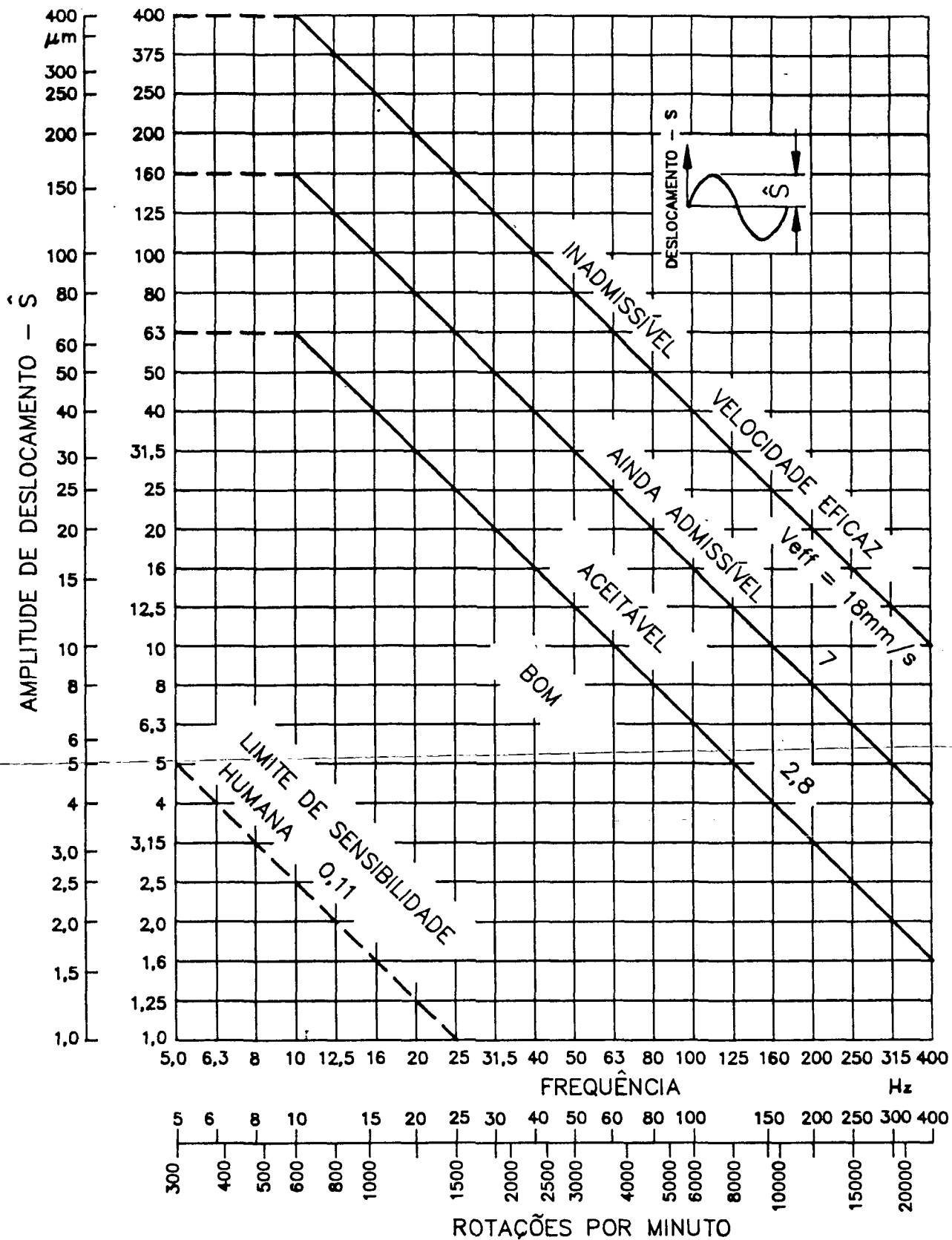


Fig. 4.14

- LIMITES DE VIBRAÇÕES CONFORME VDI - 2056

Grupo T - Fundações Elásticas.

Cálculo da amplitude de deslocamento:

De (4.8), tem-se:

$$X = V = x_0 \omega \cos \omega t$$

onde $X = 13 \text{ mm/s (pico)}$ e $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 60$

∴ $x_0 = 34 \text{ } \mu\text{m (pico)}$ → $x_0 = 68 \text{ } \mu\text{m pico a pico}$

Conforme Ref. [50], um equipamento trabalhando próximo da ressonância pode ser balanceado para ter níveis aceitáveis de vibrações. Contudo, com o decorrer do tempo, o desgaste natural das peças, estabilização térmica do conjunto, etc, fazem com que o grau de severidade das vibrações se acentue drasticamente. Isto pôde ser constatado quando o monitor de vibrações registrava, em certa ocasião, 200 μm pico!

Assim, vê-se claramente que as trincas existentes na carcaça, ruído excessivo e quebras de mancais e discos, têm como causa principal o alto nível de vibração. Resta agora apenas o teste final e definitivo para se comprovar ou não a afirmação de que o exaustor opera na região de ressonância: trata-se da Análise Modal, objeto do próximo capítulo.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE MODAL

5.1 - OBJETIVO:

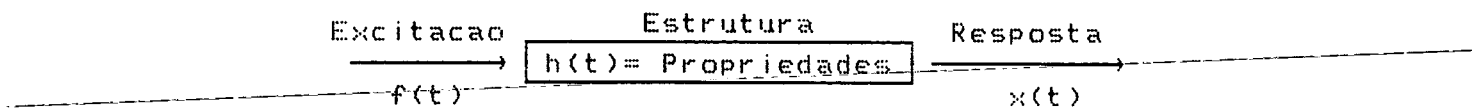
Tendo sido calculadas analiticamente as frequências naturais do sistema em questão, procedeu-se à determinação, em laboratório, de propriedades dinâmicas reais. Tais propriedades são funções da geometria, tipo de material e condições de contorno, sendo perfeitamente identificadas pela distribuição e avaliação da massa, amortecimento e rigidez do sistema. ~~A técnica utilizada é conhecida~~ como Análise Modal. Em outras palavras, pode-se considerar a Análise Modal como um procedimento de identificação das frequências ressonantes (ou naturais) de uma estrutura, fatores de amortecimento e os modos defletidos associados, quando a mesma é excitada em uma destas frequências.

5.2 - BREVE TEORIA:

O termo Análise Modal é também conhecido na literatura técnica como Teste Modal, Teste de Ressonância ou, menos freqüentemente, Método de Impedância Mecânica.

Um marco importante nesta área ocorreu com a publicação do trabalho de Kennedy e Pancu (Ref. [51]), em 1947, o qual descreve um método preciso para a determinação das frequências naturais e níveis de amortecimento em estruturas aeronáuticas. Prevaleceu até a década de 60, com o avanço de novas técnicas de análise, mas o grande passo nesta área foi dado a partir de 1970, com o desenvolvimento da tecnologia em transdutores, eletrônica e analisadores digitais.

Conceitualmente, explica-se a Análise Modal considerando-se uma estrutura como uma "caixa preta" com propriedades dinâmicas $h(t)$, como mostrado abaixo (Ref. [52]):



Quaisquer conjuntos arbitrários de excitação (variantes no tempo), ou entradas $f(t)$, são "filtrados" pelas propriedades dinâmicas $h(t)$, conduzindo à resposta $x(t)$. Obviamente, conhecendo-se as características dinâmicas $h(t)$, pode-se prever a resposta causada por qualquer excitação. Esquemáticamente, tem-se:

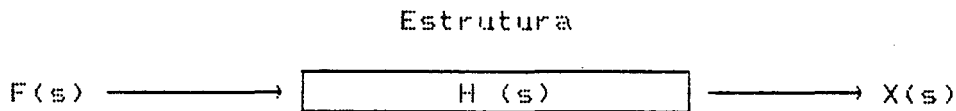
$$\boxed{\text{Resposta}} = \boxed{\text{Propriedades}} \times \boxed{\text{Excitação}}$$

Descrever $h(t)$ da "caixa preta" é mais simples no domínio da frequência, isto é, ao invés de descrever a excitação, resposta e propriedades dinâmicas como funções do tempo, elas são transformadas

em funções da frequência utilizando-se a Transformada de Laplace (T.L.):

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \dots \text{Eq. (5.1)}$$

Desta forma, o diagrama pode ser representado da seguinte maneira:



A relação entrada/saída pode agora ser escrita como uma simples equação algébrica:

$$F(s) \cdot H(s) = X(s) \quad \dots \text{Eq. (5.2)}$$

ou
$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} \quad \dots \text{Eq. (5.3)}$$

$H(s)$ é denominada Função de Transferência e expressa as características dinâmicas da estrutura como uma função da variável complexa $s = \alpha + j\omega$. Medindo-se a excitação $f(t)$ e resposta $x(t)$, e computando-se suas Transformadas de Laplace, a Função de Transferência é obtida pelo quociente $X(s)/F(s)$.

Para aplicações práticas, o esforço em computar a T.L. é desnecessário. Um caso especial ocorre quando $\alpha = 0$, sendo então denominada de Transformada de Fourier (avaliada em $s = j\omega$), a qual é facilmente medida com modernos computadores digitais, através do algoritmo FFT (Fast Fourier Transform), ou seja, Transformada Rápida

de Fourier. Como orientação, o computador utilizado na análise em questão é o FFT-5451C, Hewlett Packard, disponível no Laboratório de Vibrações e Acústica (LVA) da UFSC.

Transformando-se, desta forma, a excitação $f(t)$ e a resposta $x(t)$, as propriedades dinâmicas no domínio da frequência são obtidas.

Isto é conhecido como Função Resposta em Frequência (FRF):

$$H(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} \quad \dots \text{Eq. (5.4)}$$

Tais funções podem ser medidas diretamente com modernos analisadores espectrais. A FRF entre dois graus de liberdade em uma estrutura é descrita da seguinte forma:

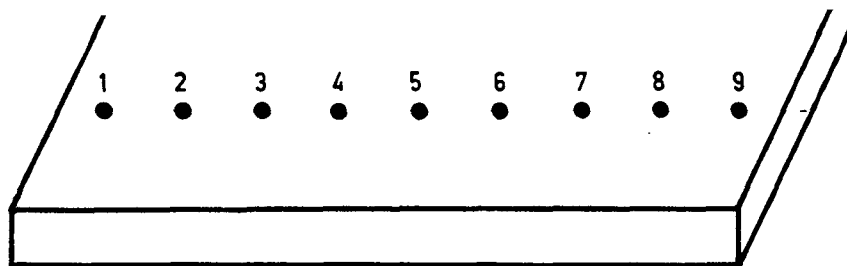
$$H_{ab}(j\omega) = \frac{X_a(j\omega)}{F_b(j\omega)} \quad \dots \text{Eq. (5.5)}$$

onde a = grau de liberdade da resposta

b = grau de liberdade da excitação

A matriz que contém todas as possíveis funções resposta em frequência entre dois pontos (dois graus de liberdade) de teste em uma estrutura denomina-se Matriz Resposta em Frequência (MRF)

A representação é conforme a seguir:



$$[H(j\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}(j\omega) & H_{12}(j\omega) & \dots & H_{19}(j\omega) \\ H_{21}(j\omega) & H_{22}(j\omega) & \dots & H_{29}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{91}(j\omega) & H_{92}(j\omega) & \dots & H_{99}(j\omega) \end{bmatrix}$$

Fig. 5.1 - Matriz Resposta em Frequência.

Usando-se o conhecimento do relacionamento entre funções de transferência e propriedades modais, observa-se que um conjunto apropriado de funções de transferência a serem medidas consiste de uma linha ou coluna da Matriz Resposta em Frequência. Na prática, isto tanto significa excitar a estrutura em um ponto e medir as respostas em todos os outros quanto medir a resposta em um ponto enquanto a excitação é aplicada separadamente nos demais. Este último procedimento mostra-se mais conveniente na prática, utilizando-se um martelo de impacto (conforme Ref. [53]).

As frequências naturais e fatores de amortecimento são constantes e podem ser identificados em qualquer elemento da Matriz de Transferência (ou Matriz Resposta em Frequência), isto é, qualquer

função de transferência tomada da estrutura. Senão, vejamos sucintamente (Ref. [54]):

Assume-se que o movimento de um sistema físico pode ser descrito por um conjunto de n equações diferenciais lineares e simultâneas, no domínio do tempo, dado por:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \quad \dots \text{Eq.}(5.6)$$

onde M, C e K são as matrizes quadradas (n x n) de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente.

A idéia básica da Análise Modal é reduzir as equações simultâneas acima descritas, a um conjunto de equações diferenciais ordinárias independentes.

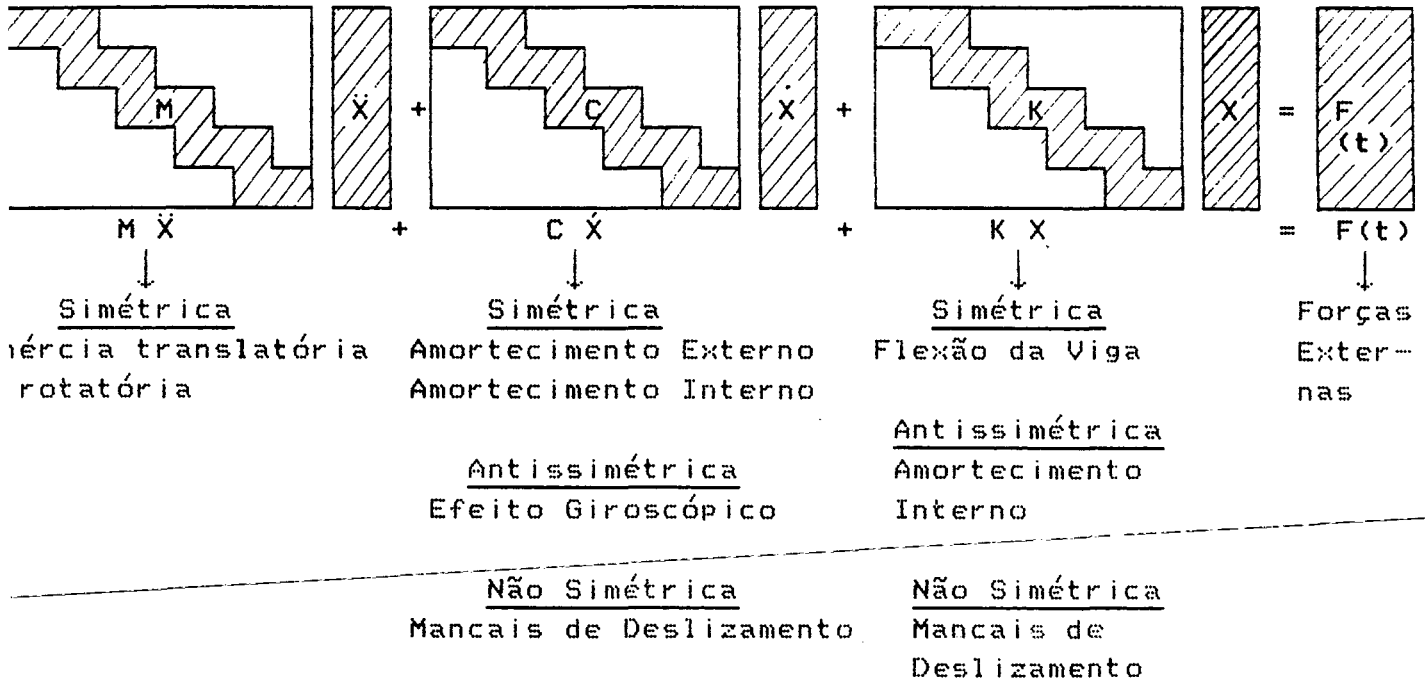
De uma forma geral, a matriz de massa é simétrica e descreve o comportamento inercial de translação e rotação do corpo.

As matrizes de amortecimento e de rigidez contém termos simétricos e podem conter antissimétricos e não simétricos.

Antissimetria é causada pelos efeitos giroscópicos (matriz de amortecimento) e por amortecimento interno ou hysterético (matriz de rigidez).

Não simetria, causada pelo filme de óleo, aparece tanto nas matrizes de rigidez quanto na de amortecimento.

Esquemáticamente, tem-se:



Tomando-se a Transformada de Laplace do sistema de equações (5.6), tem-se: (Ref. [55] e [56])

$$B(s) \times X(s) = F(s) \quad \dots \text{Eq. (5.7)}$$

onde:

$$B(s) = Ms^2 + Cs + K \quad \dots \text{Eq. (5.8)}$$

s = variável de Laplace

F(s) = vetor força aplicada

X(s) = vetor deslocamento no domínio de Laplace

B(s) = Matriz do sistema

$H(s)$ = Matriz de Transferência, definida por

$$H(s) = B(s)^{-1} \quad \dots \text{Eq. (5.9)}$$

o que implica em

$$H(s) F(s) = X(s) \quad \dots \text{Eq. (5.10)}$$

Cada elemento da Matriz de Transferência é uma Função de Transferência. Os elementos de B são funções quadráticas de s e, desde que $H = B^{-1}$, segue que os elementos de H são frações racionais em s , com $\det(B)$ como o denominador. Assim, $H(s)$ pode sempre ser representada na forma de fração parcial.

Se é assumido que os polos de H , isto é, as raízes de $\det(B) = 0$ são de multiplicidade 1 (um), então H pode ser expresso como:

$$H(s) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{a_k}{s - P_k}, \quad (n \times n) \quad \dots \text{Eq. (5.11)}$$

Os polos ocorrem em $s = P_k$ (zeros de $\det(B)$), e cada polo possui uma matriz resíduo a_k ($n \times n$) associada com o mesmo. Para um sistema oscilatório de n -ésima ordem, sempre haverá $2n$ polos, mas eles aparecerão em pares conjugados complexos. Cada par complexo de polos causa um modo de vibração na estrutura.

Os polos são números complexos expressos por:

$$P_k = \xi_k \omega_k + j\omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2} \quad \dots \text{Eq. (5.12)}$$

ou

$$P_k = \sigma_k + j\omega_k \quad \dots \text{Eq. (5.13)}$$

onde: σ_k é o coeficiente de amortecimento

ω_k é a frequência natural de oscilação, amortecida

A frequência ressonante é dada por:

$$\Omega_k = \sqrt{\sigma_k^2 + \omega_k^2} \text{ (rad/s)} \quad \dots \text{Eq. (5.14)}$$

e o fator de amortecimento é:

$$\xi = + \frac{\sigma_k}{\Omega_k} \quad \dots \text{Eq. (5.15)}$$

ω_k e ξ_k podem ser obtidos do polo, como segue:

$$\omega_k^2 = (\text{Re}[P_k])^2 + (\text{Im}[P_k])^2 \quad \dots \text{Eq. (5.16)}$$

$$\xi = - \frac{\text{Re}[P_k]}{\omega_k} \quad \dots \text{Eq. (5.17)}$$

onde Re e Im são as partes reais e imaginárias, respectivamente.

Estas coordenadas podem ser colocadas em gráfico conforme Fig.

5.2, abaixo:

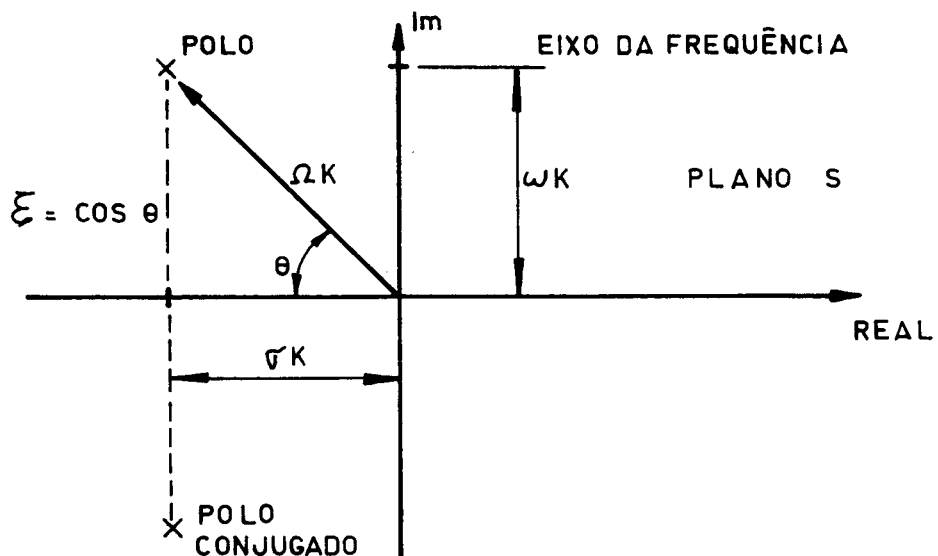


Fig. 5.2 - Diagrama de Nyquist (Representação gráfica dos polos, frequências naturais e coef. de amortecimento).

Assim, vê-se que cada elemento da Matriz Resposta em Frequência é função das propriedades dinâmicas da estrutura.

A representação polar acima descrita denomina-se Diagrama de Nyquist. O objetivo deste capítulo é apresentar a Função Resposta em Frequência em curvas Função de Transferência X Frequência (Diagramas de Bode), ficando a representação polar de Nyquist apenas como informação.

As formas alternativas das Funções de Transferência são apresentadas no quadro abaixo: (Ref.[53])

Resposta (R)	Função de Transf. Resposta/Excitação	Inverso Excitação/Resposta
Deslocamento	Receptância Admitância Compliância Flexibilidade Din.	Rigidez Dinâmica
Velocidade	Mobilidade	Impedância Mecânica
Aceleração	Inertância ou Acelerância	Massa Aparente

Quadro 5.1 - Funções de Transferência e Recíprocas.

As Figs. 5.3, 5.4 e 5.5, nas páginas seguintes, fornecem uma visão geral da representação gráfica das diversas Funções de Transferência:

Observa-se que a representação é praticamente idêntica, embora a resposta seja dada em deslocamento, velocidade ou aceleração.

Contudo, a fase varia de 90° a cada distinta Função de Transferência; a cada ressonância há uma inversão de fase (defasagem de 180°).

Na prática, o diagrama é log-log, sendo as amplitudes representadas em dB.

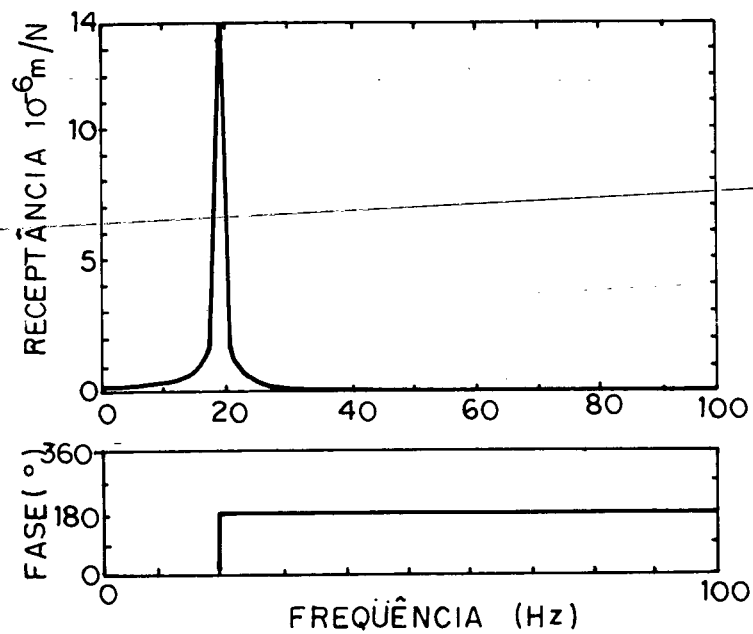


Fig. 5.3 - Receptância (Sistema não amortecido - 1 GL)

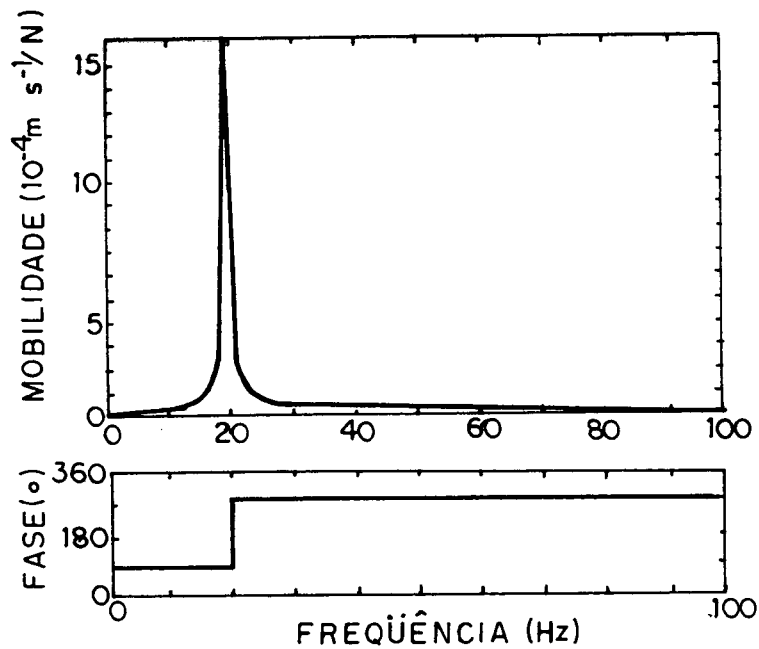


Fig. 5.4 - Mobilidade (Sistema não amortecido - 1 GL).

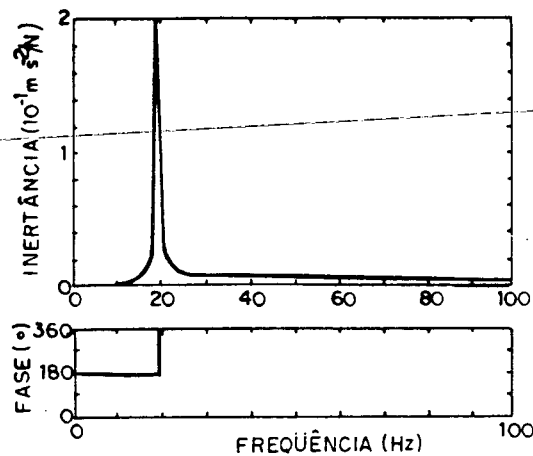
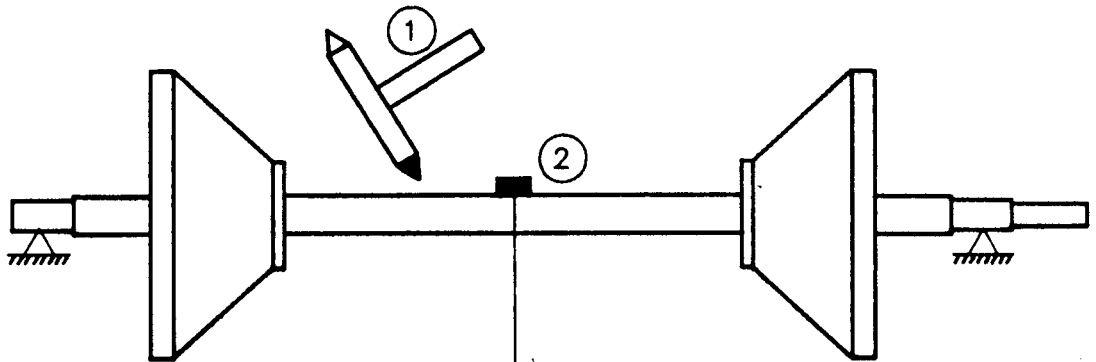


Fig. 5.5 - Inertância (Sistema não amortecido - 1 GL).

5.3 - DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DO ROTOR VIA DIGITAL

Antes de se proceder à Análise Modal propriamente dita, obteve-se as as frequências naturais do rotor mediante o uso do Analisador de Fourier 5451-C. O programa ("software") utilizado foi o "Power Spectrum", desenvolvido pela Hewlett Packard.

5.3.1 - Cadeia de medição/procedimentos



- 1) - Martelo de impacto
- 2) - Acelerômetro tipo BK-4370
- 3) - Pré-Amplificador tipo BK-2635
- 4) - Osciloscópio IWATSU
tipo SS-5702
- 5) - Analisador de Fourier
FFT-5451-C-HP
- 6) - Registrador Gráfico XY

Fig. 5.6 - Cadeia de Medição p/obtenção das Frequências Naturais.

Como o interesse deste ensaio preliminar foi a verificação quantitativa das tres primeiras frequências naturais, a frequência de corte adotada foi $f_c = 1250$ Hz ($F_{max} = F_c \times 2 = 2500$ Hz).

O método consiste em excitar, com o martelo de impacto, um determinado número de pontos do sistema. Neste caso, 16 pontos sobre o eixo (e disco) foram excitados. A resposta é captada pelo acelerômetro, cujo sinal é pré-amplificado e enviado ao Analisador de Fourier, onde é procedida a conversão analógica/digital do sinal. O resultado é registrado em gráfico X-Y.

Para se eliminar o ruído do sinal, cada ponto deve ser excitado diversas vezes, obtendo-se através do valor médio um sinal o mais puro possível.

As fotos 5.1 e 5.2 mosram o sistema "Fourier Analyser
FFT-5451-C" e o rotor sendo ensaiado:

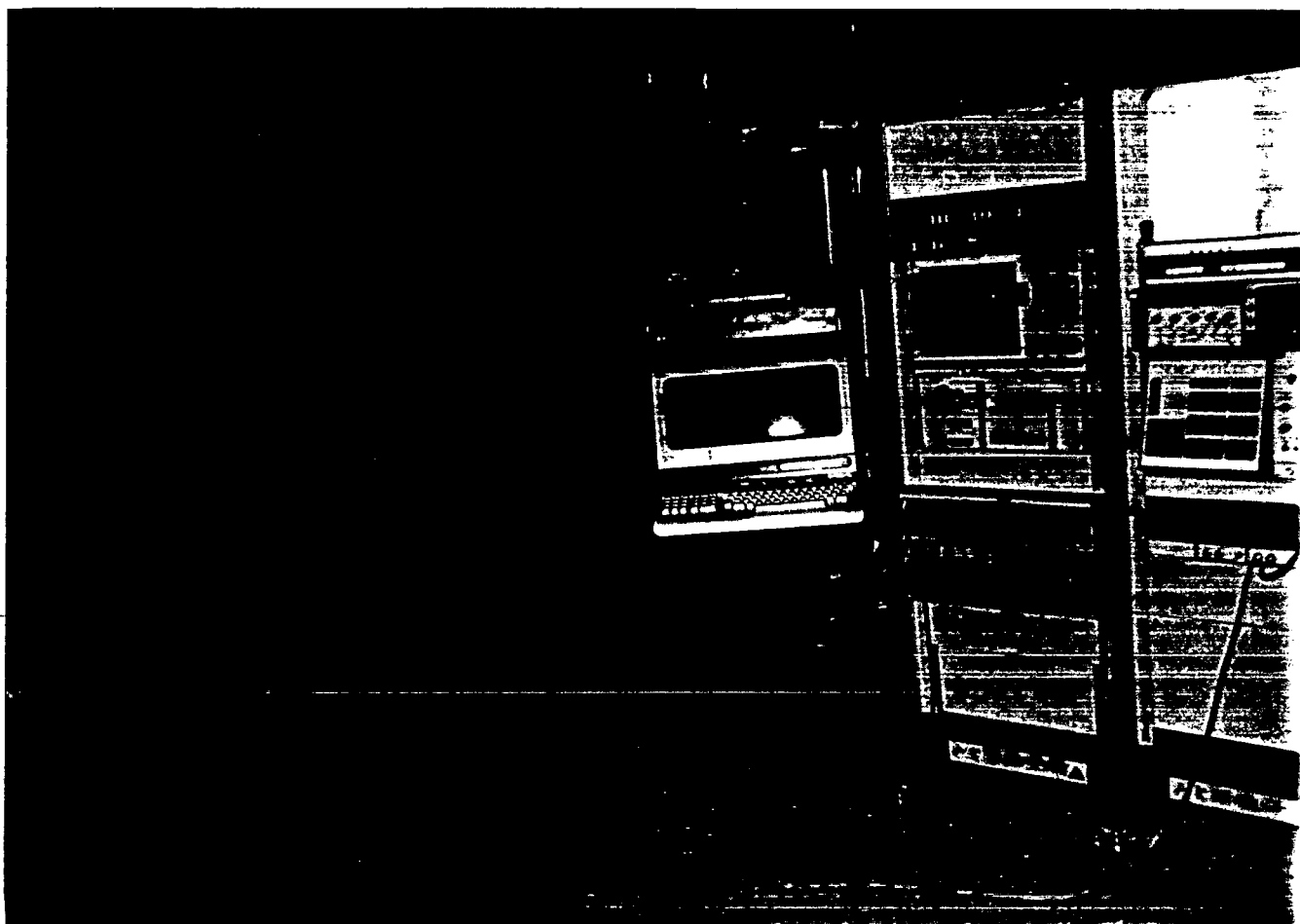


Foto 5.1 - Sistema "Fourier Analyser"
Centro: Unidade acionadora do disco
Direita: Analisador de Fourier 5451-C (FFT)
Esquerda: Terminal de vídeo c/teclado.

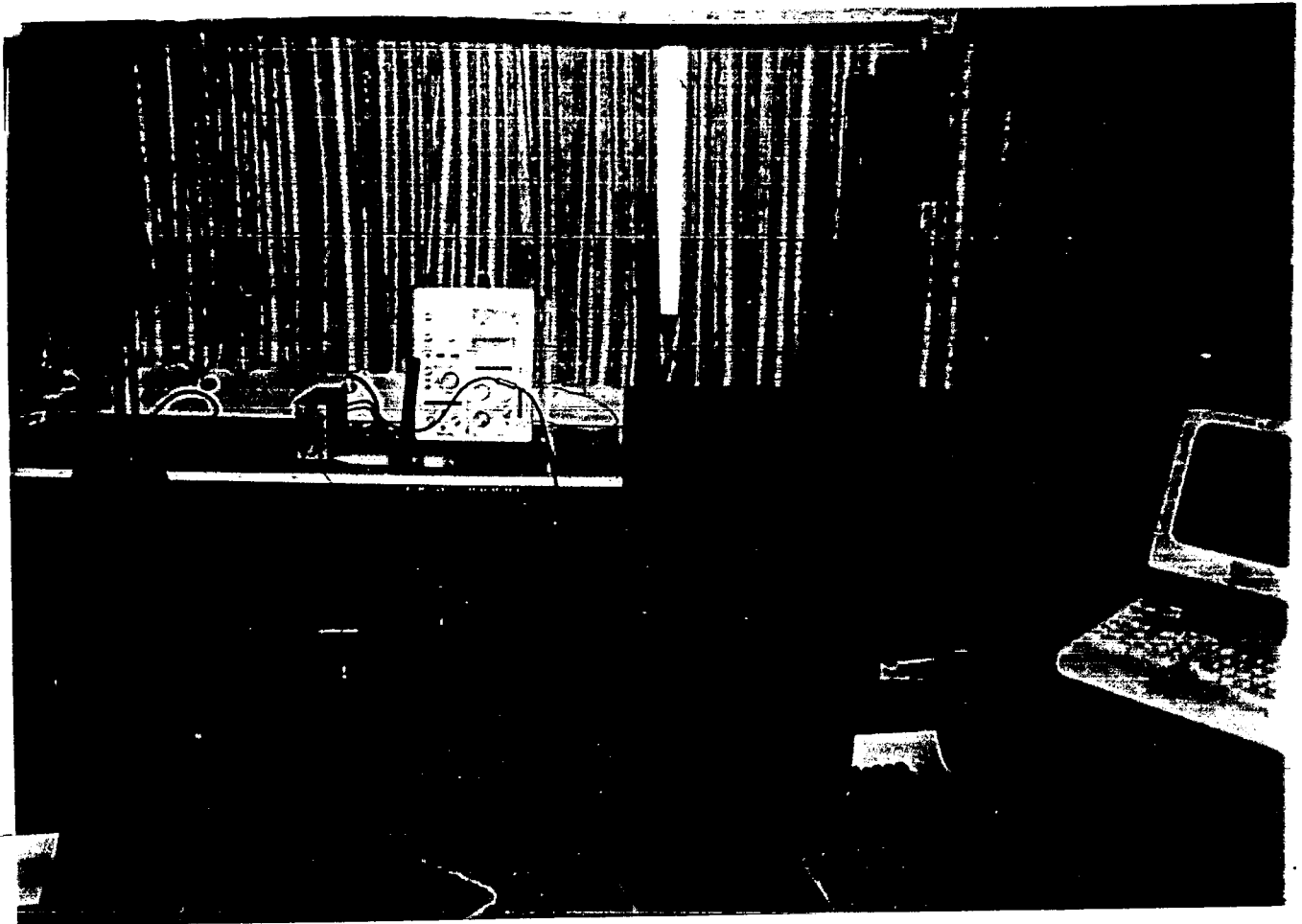


Foto 5.2 - Vista do rotor e cadeia de medição (rotor c/suspensão livre-livre)

A seguir, são apresentados os espectros de potência obtidos considerando-se várias situações:

- a) Conjunto eixo/discos biapoiado rigidamente
- b) Conjunto eixo/discos biapoiado em borracha sintética
- c) Eixo biapoiado (sem os discos)
- d) Eixo livre-livre
- e) Espectro apenas da base (apoio rígido)

Os parâmetros amostrais selecionados no Analisador de Fourier encontram-se na legenda dos espectros (Figs. 5.7 a 5.14).

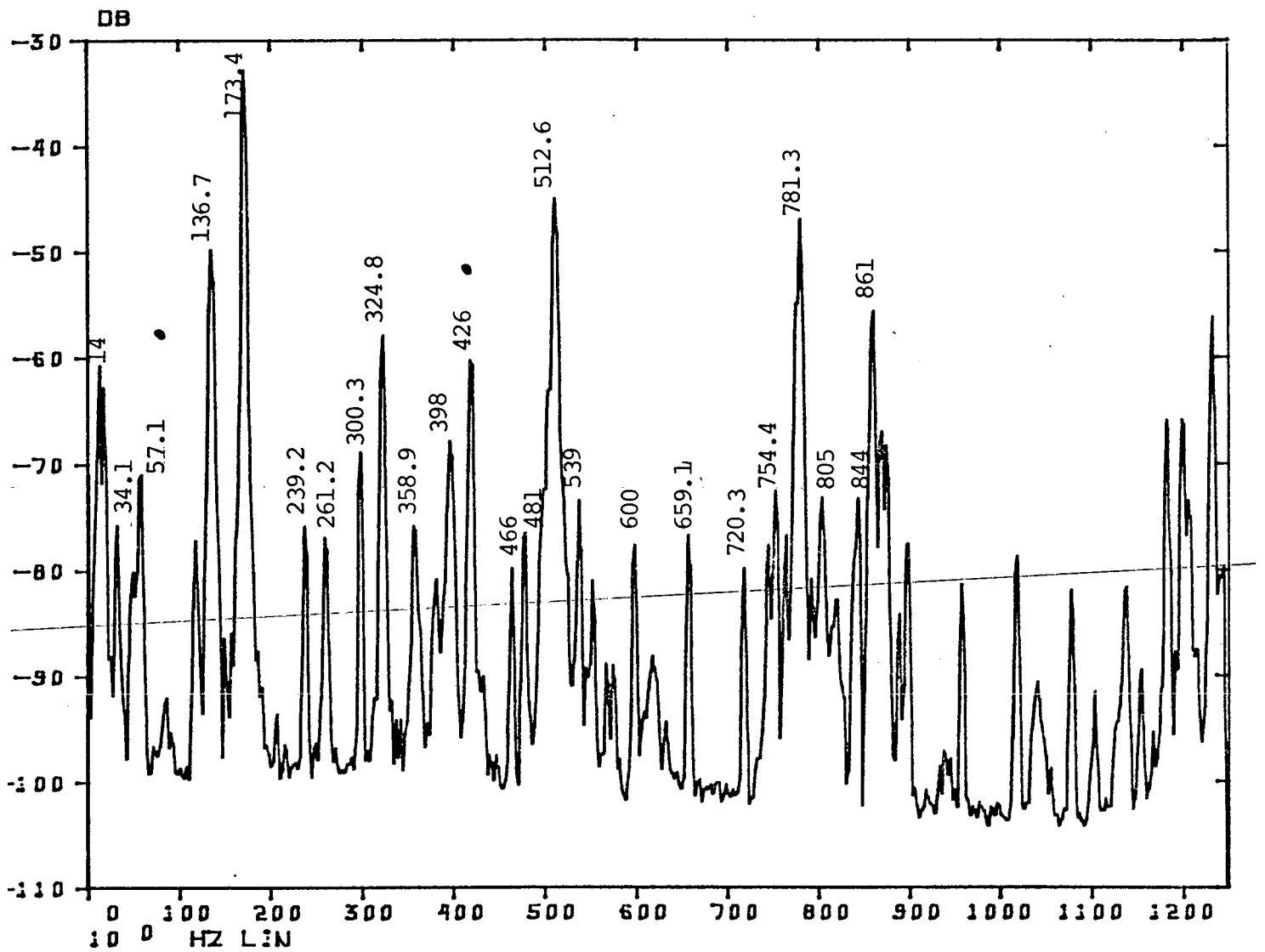


Fig. 5.7 - Espectro de Potência do Conjunto Biapoiado
 Acelerômetro no centro do eixo
 $F_c = 1250$ Hz - $N = 2048$ pontos - 100 médias

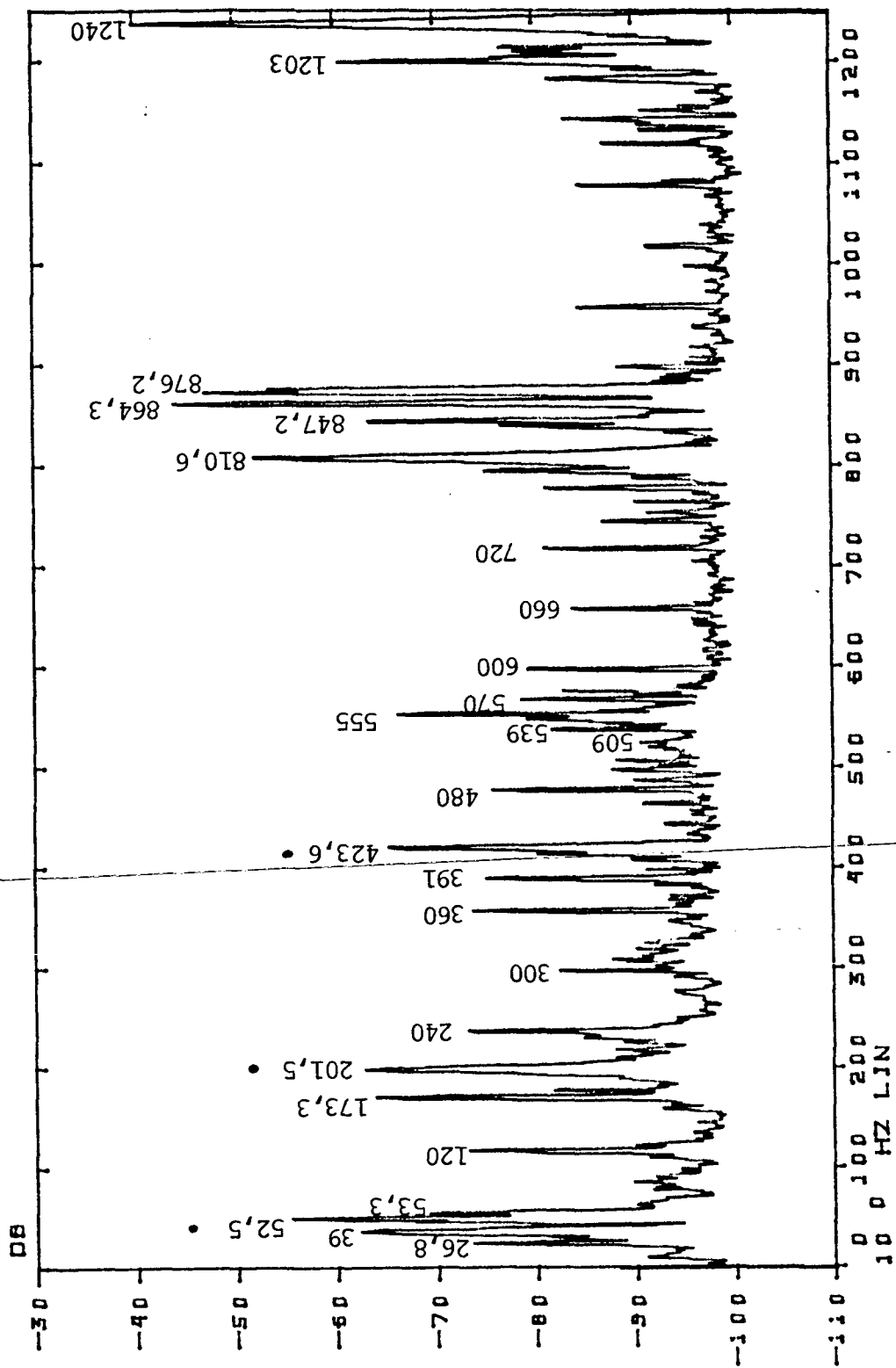


Fig. 5.8 - Espectro de Potência do Conjunto Biapiado em Borracha Sintética (Espessura: 2mm)
 Medida em Aceleração (m/s^2) Acelerômetro no eixo a 1/3 de um dos discos
 $F_c = 1250$ Hz - $N = 4096$ pontos - 100 médias.

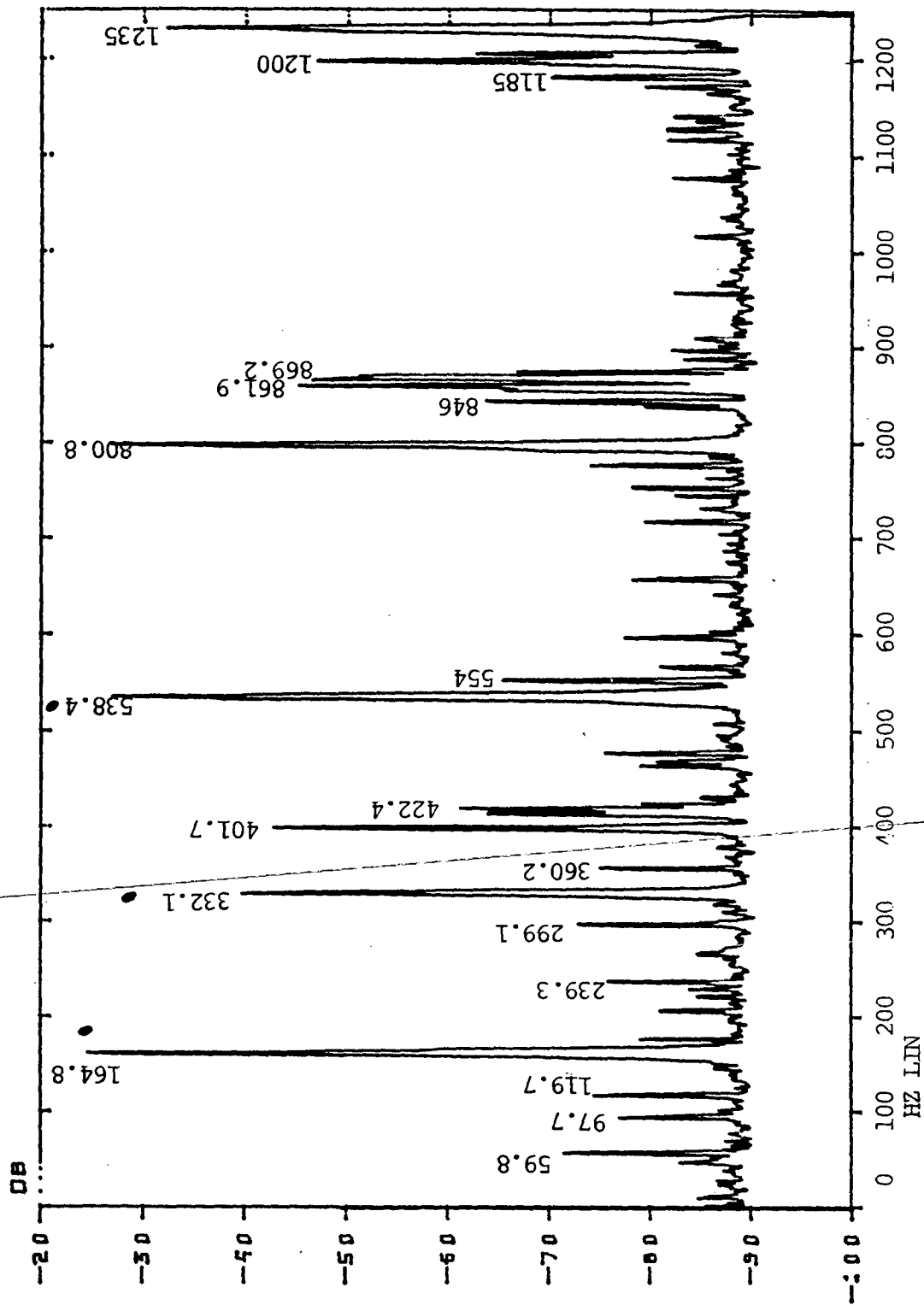


Fig. 5.9 - Espectro de Potência do Conjunto livre-livre
 Acelerômetro no Eixo
 $F_c = 1250$ Hz - $N = 2048$ pontos - 100 médias.

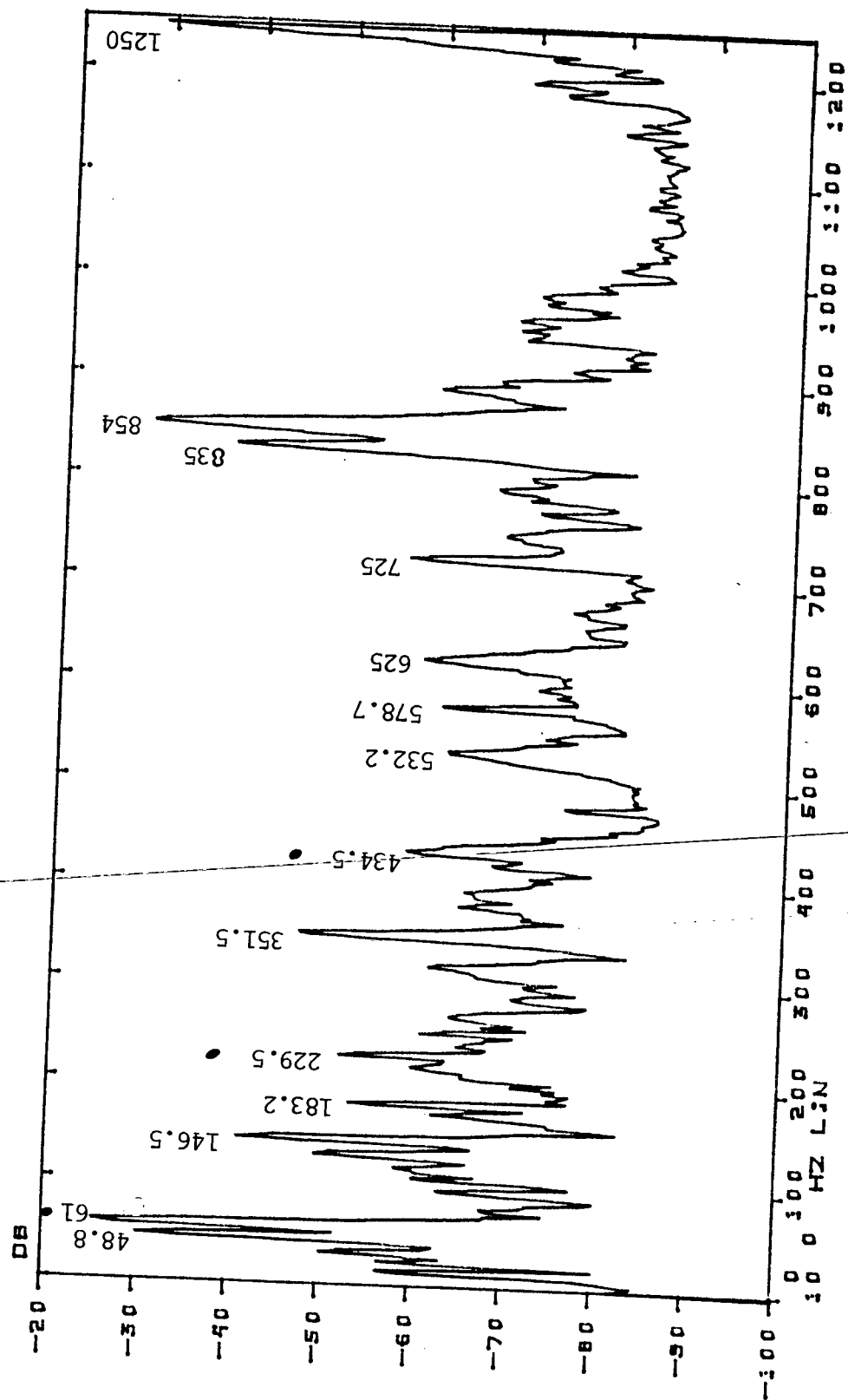


Fig. 5.10 - Espectro de Potência do Eixo Biapoiado (sem os discos)
 $F_c = 1250$ Hz - $N = 2048$ pontos - 200 médias.

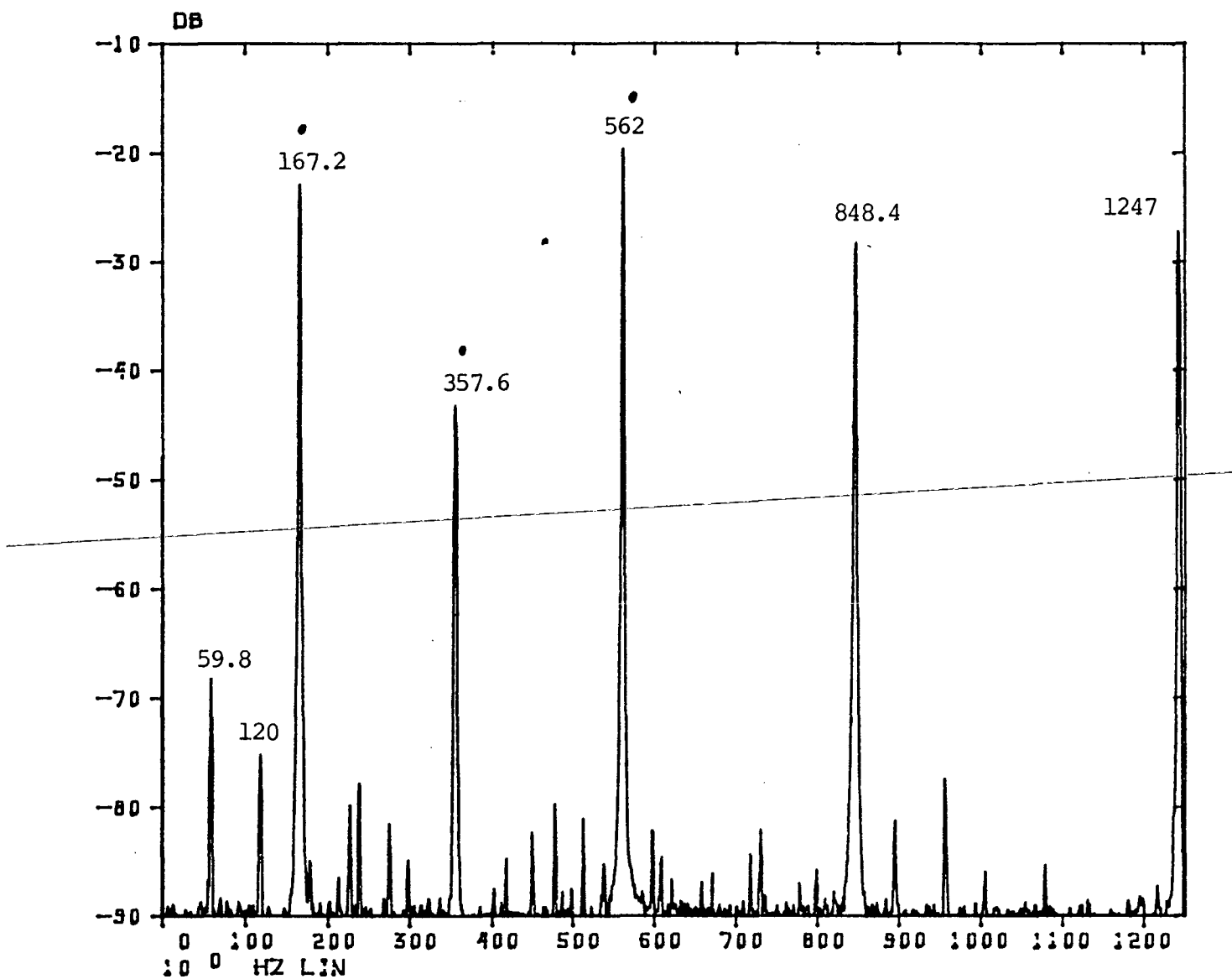


Fig. 5.11 - Espectro de Potência do Eixo livre-livre
 $F_c = 1250$ Hz - $N = 1024$ pontos - 100 médias.

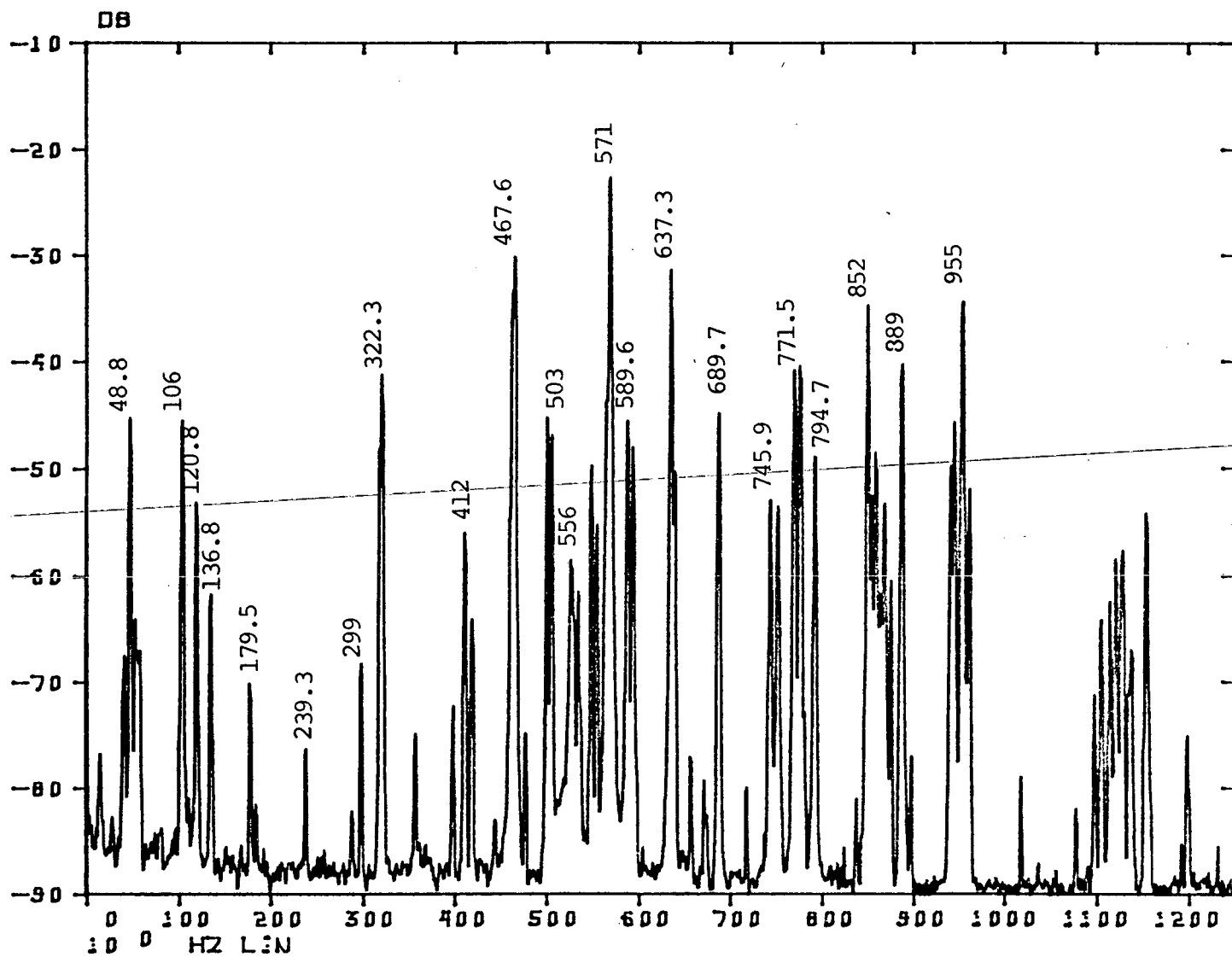


Fig. 5.12 - Espectro de Potência do Conjunto Biapoiado
 Acelerômetro no disco
 $F_c = 1250$ Hz - $N = 4096$ pontos - 100 médias.

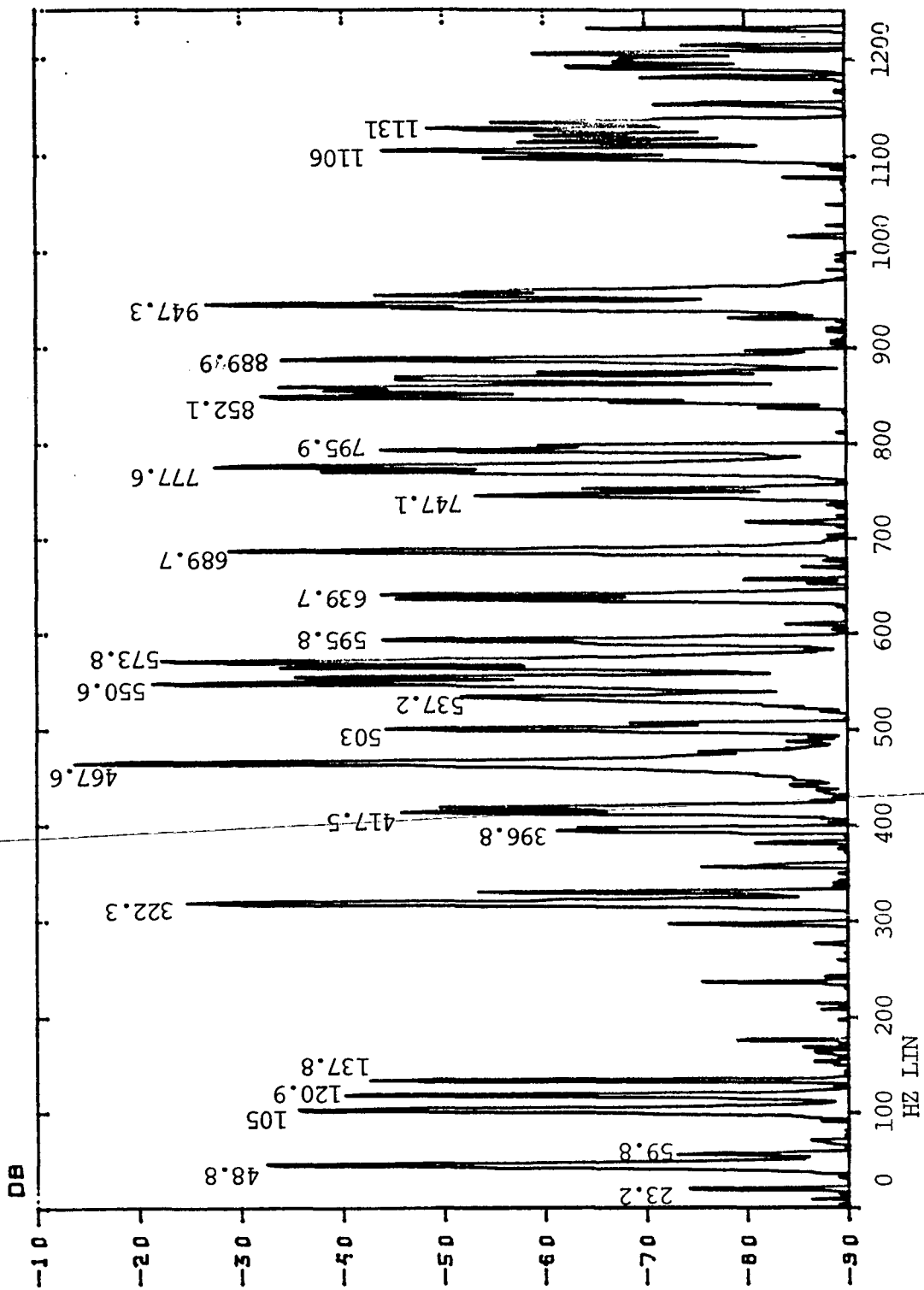


Fig. 5.13 - Espectro de potência do Conjunto livre-livre
 Acelerômetro no disco
 $F_c = 1250$ Hz - $N = 2048$ pontos - 50 médias.

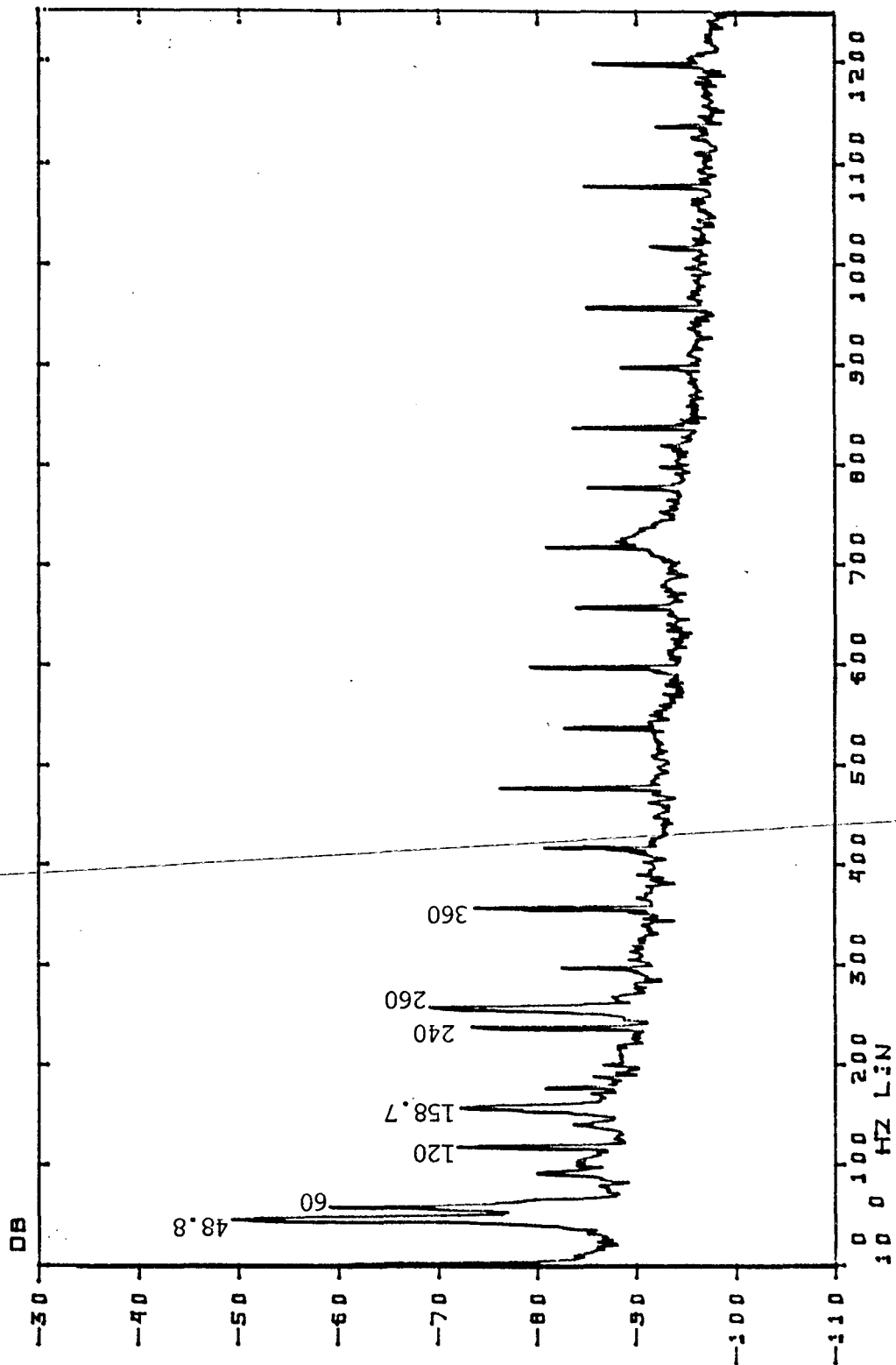


Fig.5.14 - Espectro de Potência da base
 Influência de forte ruído externo (rede elétrica)
 Medida em Velocidade (m/s)
 $F_c = 1250$ Hz - $N = 4096$ - 60 médias.

5.3.2 - Valores encontrados/comentários

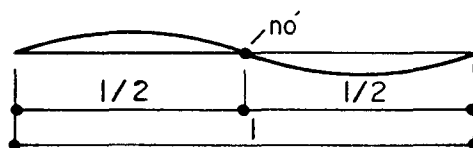
	1ª FN(Hz)	2ª FN(Hz)	3ª FN(Hz)
Modelo Analítico (vide Cap.3.)	64,6	207,3	426,4
Espectros de potência#			
Conj. biapoiado rigidamente (Fig.5.7)	57,1	-	426
Conj. biap. borracha sint.(Fig.5.8)	52,5	201,5	423,6
Conjunto livre-livre (Fig. 5.9)	164,8	332,1	538,4
Eixo biap. rigidamente (Fig.5.10)	61	229,5	434,5
Eixo livre-livre (Fig.5.11)	167,2	357,6	562

Quadro 5.2 - Valores encontrados - Espectros de Potência.

Alguns aspectos interessantes são observados nesses espectros#

Fig. 5.7 - Conjunto biapoiado rigidamente e acelerômetro no centro do eixo#

a) ~~Nota-se que a segunda frequência natural (≈ 207 Hz) não foi excitada, justamente devido à posição do acelerômetro sobre um nó, conforme esquema abaixo#~~



2º Modo de vibração

b) Sem o cálculo prévio (modelo analítico) dificilmente as frequências naturais do conjunto seriam identificadas. Há uma infinidade de componentes oriundas dos modos de vibração das pás dos discos (componentes acopladas), base e rede elétrica.

c) O valor encontrado para a 1ª FN é inferior ao calculado.

Fig. 5.8 - Conjunto biapoiado em camada de borracha sintética com espessura de 2mm:

Observa-se que o espectro das frequências naturais é deslocado para a esquerda:

1ª FN: de 57,1 Hz p/ 52,5 Hz

2ª FN: de 207 Hz p/ 201,5 Hz

3ª FN: de 426 Hz p/ 423,6 Hz

O acelerômetro foi deslocado para 1/3 de um dos discos e os picos referentes à rede elétrica (frequência síncrona e múltiplos → 60 Hz, 120 Hz, etc) ficam inalterados.

~~Fig. 5.9 → Conjunto livre-livre (acelerômetro no eixo):~~

Mostra-se, assim, a diferença acarretada pela alteração das frequências naturais conforme as condições de contorno. É comum verificar-se em revistas técnicas fotos de peças submetidas ao teste de impacto para obtenção das FN considerando-se a peça suspensa. Os valores encontrados serão substancialmente diferentes daqueles cujas condições de contorno se aproximam ao máximo da realidade.

Fig. 5.10 → Eixo biapoiado (sem os discos):

Pelo decréscimo da massa do conjunto (76 Kg dos discos), incrementou-se o valor das FN ($N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}}$)

Fig. 5.11 → Eixo livre-livre:

Comparando-se com a Fig.5.9 (conjunto livre-livre) observa-se um espectro muito mais "limpo" (inexistência das componentes do disco) e com acréscimo das FN pela redução de massa do conjunto.

Fig. 5.12 → Conjunto biapoiado - acelerômetro no disco:

Desapareceram as componentes devidas ao eixo. A energia de vibração (impacto) não foi suficiente para excitá-las, sendo perdida no acoplamento entre disco/cubo do eixo.

Fig. 5.13 → Conjunto livre-livre - acelerômetro no disco:

Nota-se, em relação à Fig. 5.9, um acréscimo das componentes das pás dos discos. As pás, apesar da ~~semelhança~~, não são iguais entre si. Pequenas alterações entre as mesmas são responsáveis pelo espectro denso de picos muito próximos.

Fig. 5.14 → Base:

A componente de 48,8 Hz, visível na maioria dos espectros, é devida à base. Observam-se novamente as fortes componentes oriundas da rede elétrica. Constatou-se, durante os testes, que o isolamento da rede era deficitário. Cuidados deverão ser tomados nos ensaios utilizando-se esta técnica.

5.4 - ANÁLISE MODAL:

Finalmente, os dados obtidos acima (espectros de potência) podem ser verificados e complementados pela Análise Modal, cuja determinação e processamento das Funções de Transferência fornecem:

- a) Frequências ressonantes
- b) Forma dos modos
- c) Fatores de Amortecimento

Conforme Ref.[55], o processo pode ser representado esquematicamente pelas Figs. 5.15 e 5.16, a seguir:

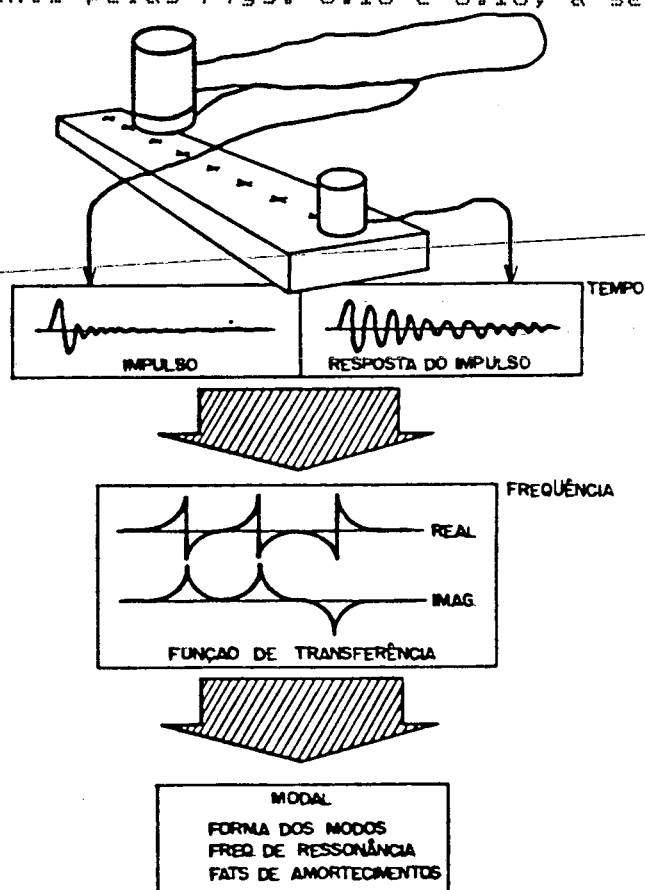


Fig. 5.15 - Medição e exibição do processo.

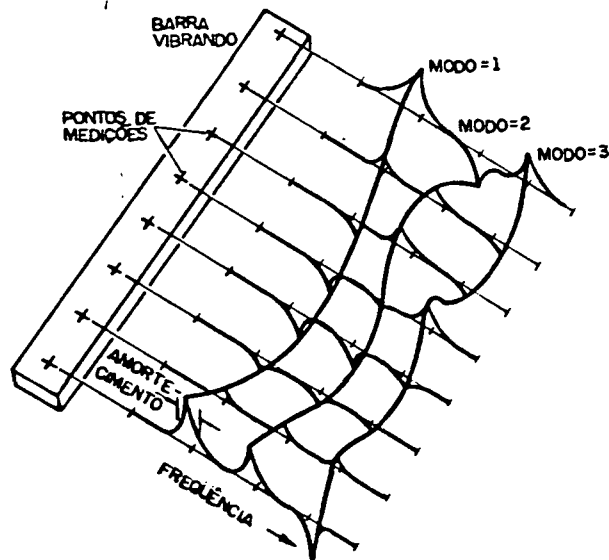


Fig. 5.16 - Dados modais das funções de transferência.

Assim, como foi demonstrado anteriormente, pode-se obter as Funções de Transferência através da fixação do transdutor (acelerômetro, neste caso) em um ponto da estrutura (não coincidente com os pontos nodais), excitando-a com o martelo de impacto (ou outra forma de excitação qualquer) nos demais pontos, onde o coeficiente de coerência é próximo de um (1) ou, contrariamente, excitando-se a estrutura nos pontos (que não os nodais) e fixando-se o acelerômetro a um ponto (segundo a direção da excitação), com valor próximo de um (1) para o coeficiente de coerência. Ponto nodal aqui se refere àquele em que a resposta a uma determinada excitação é praticamente nula.

Neste trabalho, a técnica utilizada foi o método de impacto e o conjunto eixo/discos foi subdividido em 105 pontos, os quais,

através de suas coordenadas X, Y e Z são interligados pelo computador, fornecendo o modelo espacial do rotor.

Considerando-se que cada ponto é dotado de tres possibilidades de movimento, pode-se afirmar que o conjunto foi discretizado com $3 \times 105 = 315$ graus de liberdade. A Fig. 5.17, a seguir, representa esquematicamente a distribuição dos pontos que formam o modelo espacial do rotor.

Os pontos de excitação foram os de nº 3 a 101, sobre o eixo e 23, 31, 84 e 92, sobre os discos.

A cadeia de medição encontra-se na Fig. 5.18.

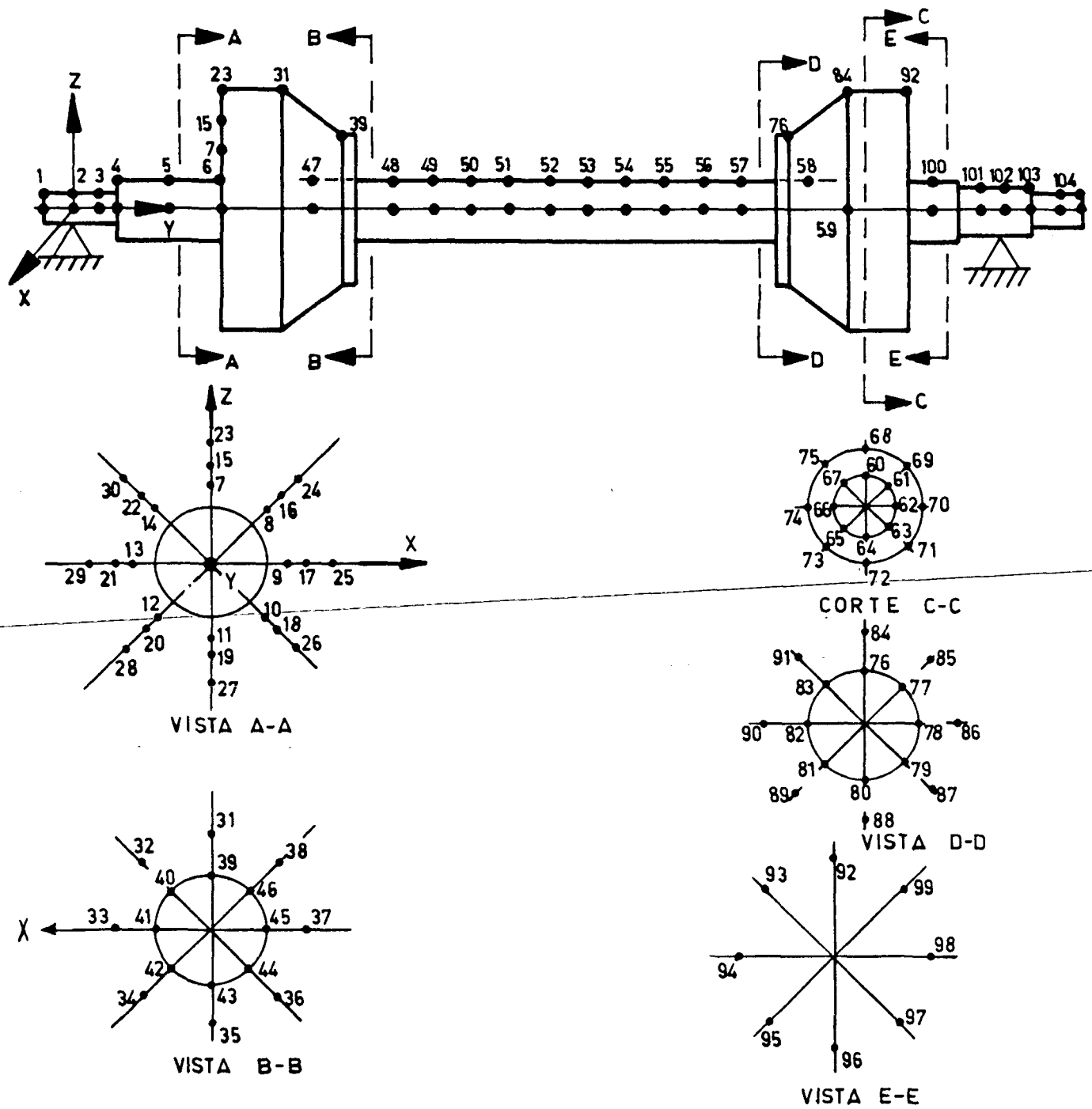
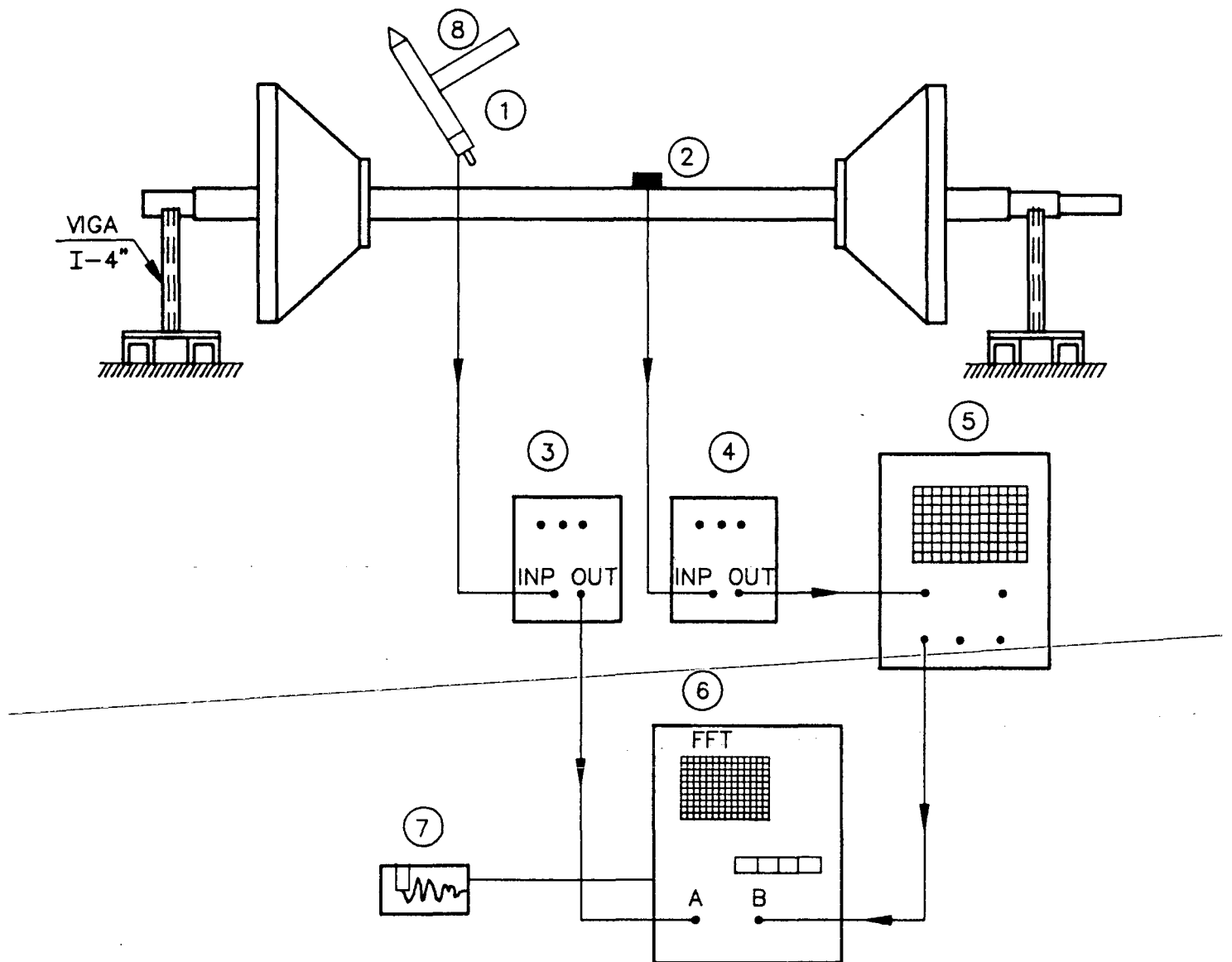


Fig. 5.17 - Composição do modelo espacial do rotor.

5.4.1 - Cadeia de Medição/Procedimentos



- 1) Célula de carga tipo BK-8200
- 2) Acelerômetro tipo BK-4370
- 3) Pré-Amplificador tipo BK-2626
- 4) Pré-Amplificador tipo BK-2635
- 5) Osciloscópio IWATSU tipo SS-5702
- 6) Analisador de Fourier 5451-C
- 7) Registrador X-Y - HP
- 8) Martelo de impacto

Fig. 5.18 - Cadeia de medição p/Análise Modal.

No caso em questão, o acelerômetro foi fixado em um determinado ponto e 25 pontos do conjunto (incluindo-se os discos) foram excitados pelo martelo de impacto.

Assim, a Função de Transferência $H(f)$ é obtida através do quociente da densidade espectral cruzada ($\overline{G_{XY}}(f)$) pela excitação (densidade espectral média) $\rightarrow \overline{G_{XX}}(f)$:

$$H(f) = \frac{\overline{G_{XY}}(f)}{\overline{G_{XX}}(f)} \quad \dots \text{Eq. (5.18)}$$

Como visto no Cap.4, a finalidade em se efetuar tais médias é expurgar o sinal de ruídos, ou seja, otimizar a relação sinal/ruído, antes do cômputo da Função de Transferência.

A fim de se verificar se há boa correspondência entre excitação e resposta, é verificado o coeficiente de coerência. Se o valor deste for igual a um (1) em todas as frequências, há perfeita "causalidade" entre os sinais de excitação e da resposta. Se o valor for zero (0), não há boa "causalidade" entre um e outro sinal medidos.

O coeficiente de coerência entre dois sinais $x(t)$ e $y(t)$ é definido como:

$$\gamma^2_{xy}(f) = \left| \frac{\overline{G_{XY}}(f)}{\overline{G_X}(f)\overline{G_Y}(f)} \right|^2 \leq 1 \quad \dots \text{Eq. (5.19)}$$

onde: $G_x(f)$ e $G_y(f)$ são as densidades espectrais de potência de $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente e $G_{xy}(f)$ → é a densidade espectral cruzada entre $x(t)$ e $y(t)$.

A Fig. 5.19 fornece um registro típico de uma Função de Transferência com a respectiva função de coerência.

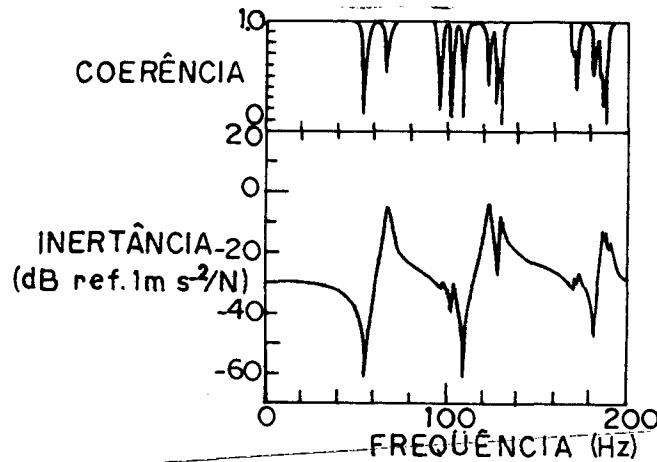


Fig. 5.19 - Função de Transferência e Função de Coerência correspondente.

Quanto ao método de impacto, o mesmo é muito popular e preferível, por suas diversas vantagens: (Ref.[56])

- a) Nenhuma instalação especial é requerida para conduzir o teste;
- b) nenhum excitador eletromecânico é requerido; e
- c) o método é extremamente rápido.

A desvantagem principal é que o espectro de potência (densidade espectral de potência) da força excitadora não é facilmente controlado, o que pode causar não-linearidades, as quais

resultam em não repetibilidade entre as medições sucessivas. Isto é uma consequência direta da forma e da amplitude do sinal da força excitadora. A força de impacto pode ser alterada conforme a dureza da ponta do martelo, o que, por sua vez, pode alterar o espectro.

Em geral, quanto mais larga for a banda da força impulsiva, mais baixas serão as frequências excitadas. Assim, um martelo com a ponta com alta dureza pode ser usado para excitar as altas frequências e, uma ponta macia, a energia de impacto será melhor concentrada nas baixas frequências.

A Fig. 5.20 mostra um pulso de força de impacto típico e seu respectivo espectro:

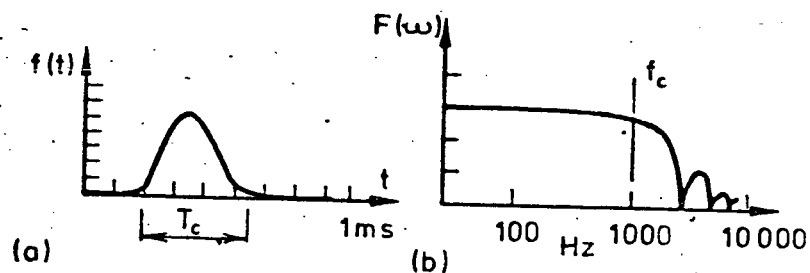


Fig. 5.20 - Pulso de força de impacto e espectro típicos
a) História no tempo
b) Espectro de Frequência

5.4.2 - Curvas Obtidas (Função Resposta em Frequência)

As condições de contorno para obtenção das Funções de Transferência (Inertância), foram:

- a) Conjunto eixo/discos biapoado (rigidamente);

- b) conjunto eixo/discos biapoiado em borracha sintética;
- c) eixo (sem os discos) biapoiado; e
- d) conjunto biapoiado rigidamente com acelerômetro sobre o disco.

Nas legendas dos respectivos espectros são estabelecidos os parâmetros amostrais selecionados no Analisador de Fourier, conforme Figs. 5.21 a 5.24:

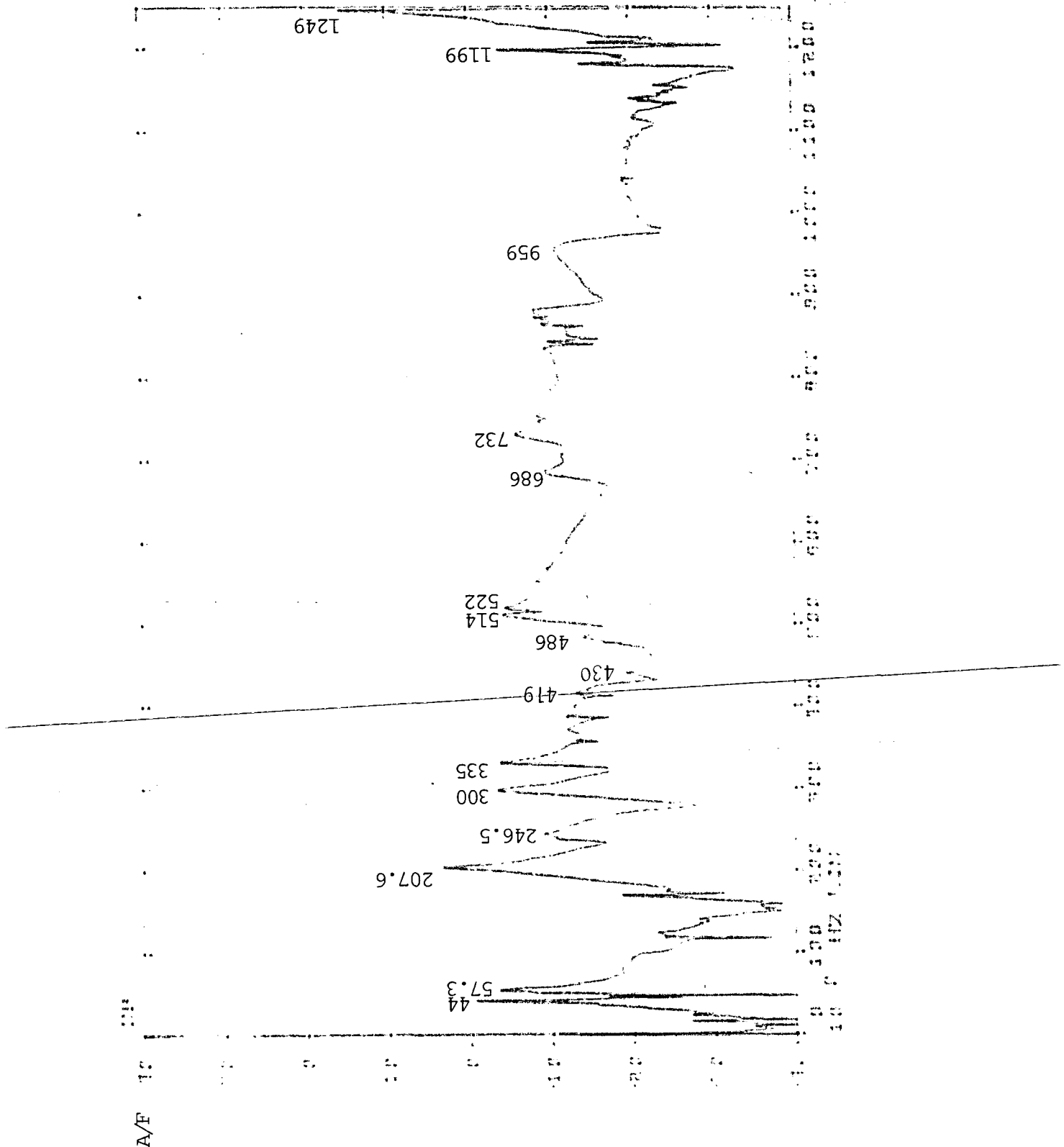


Fig. 5.21 - Função de Transferência (Inertância) do conjunto Biapoia-
do
Acelerômetro a 1/3 de 1 dos discos
 $F_c = 1250$ Hz - N 2048 pontos - 100 médias

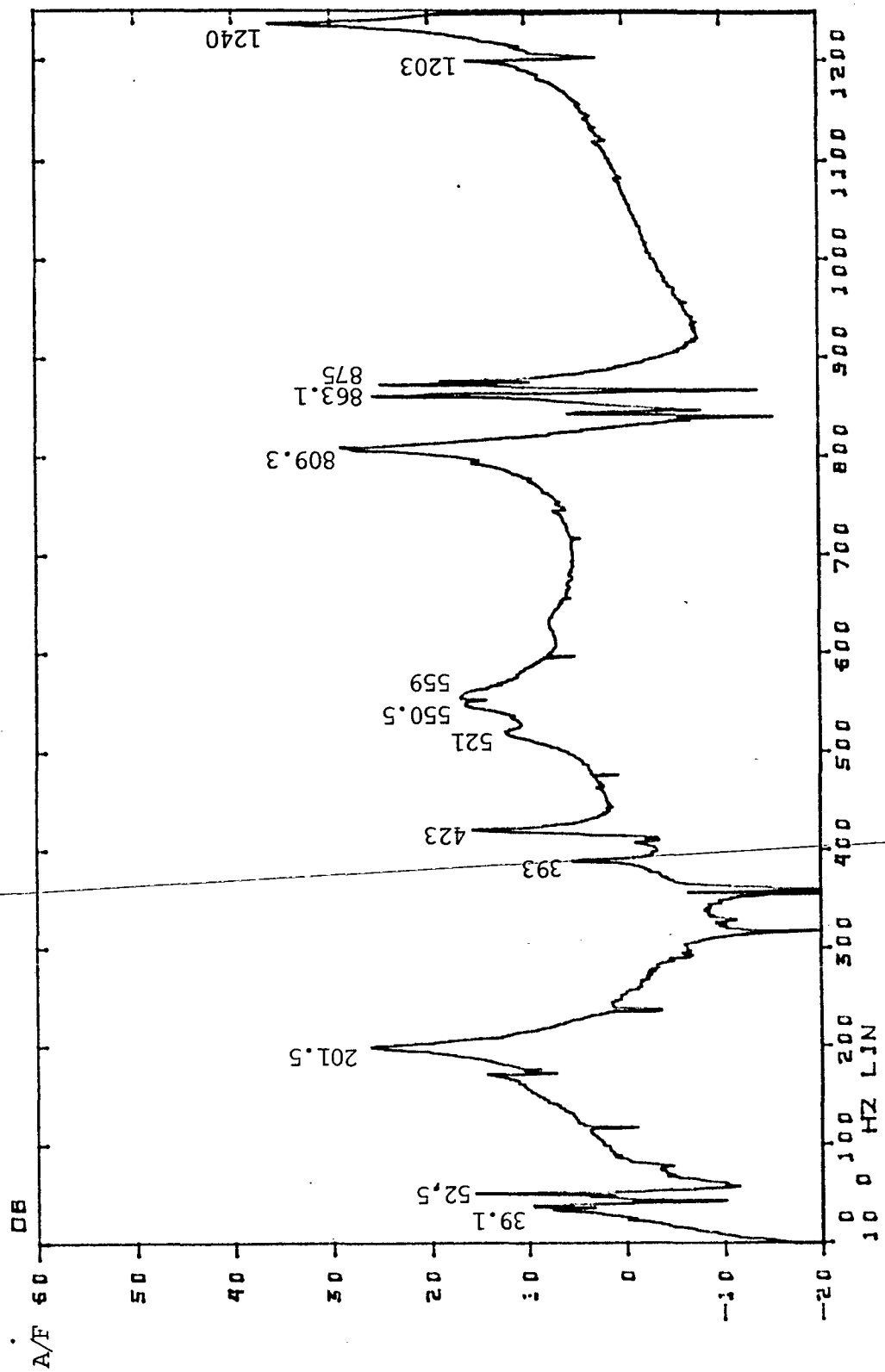


Fig. 5.22 - Função de Transferência (Inertância) do Conjunto Biapoiado em Borracha Sintética (Esp.: 2mm) - Acelerômetro no centro do eixo $F_c = 1250$ Hz - $N = 2048$ pontos - 100 médias.

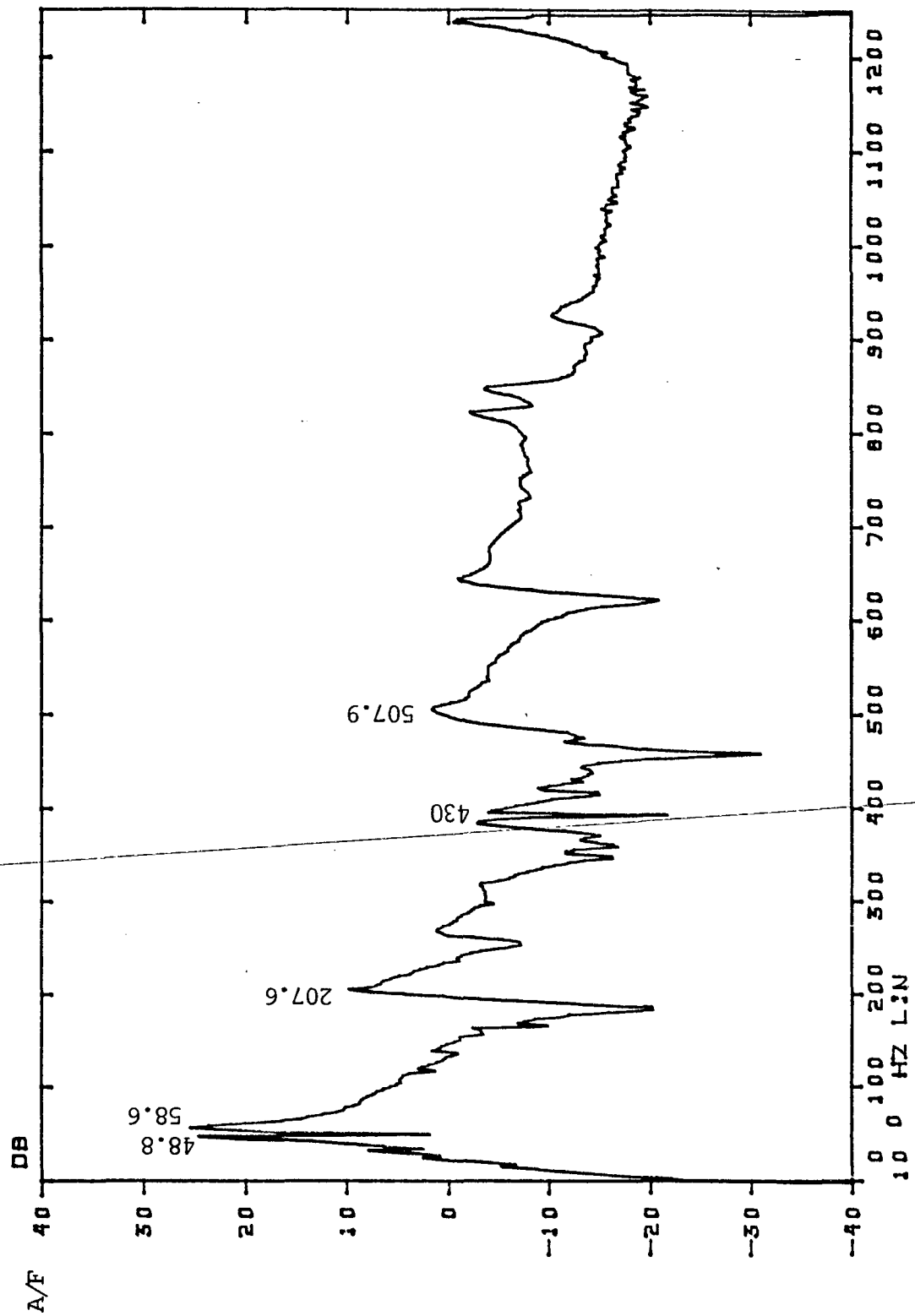


Fig. 5.23 - Função de Transferência (Inertância do eixo sem os discos (Biapoiado)
 Acelerômetro no eixo a 1/3 de 1 dos discos
 $F_c = 1250$ Hz - $N = 2048$ pontos - 200 médias.

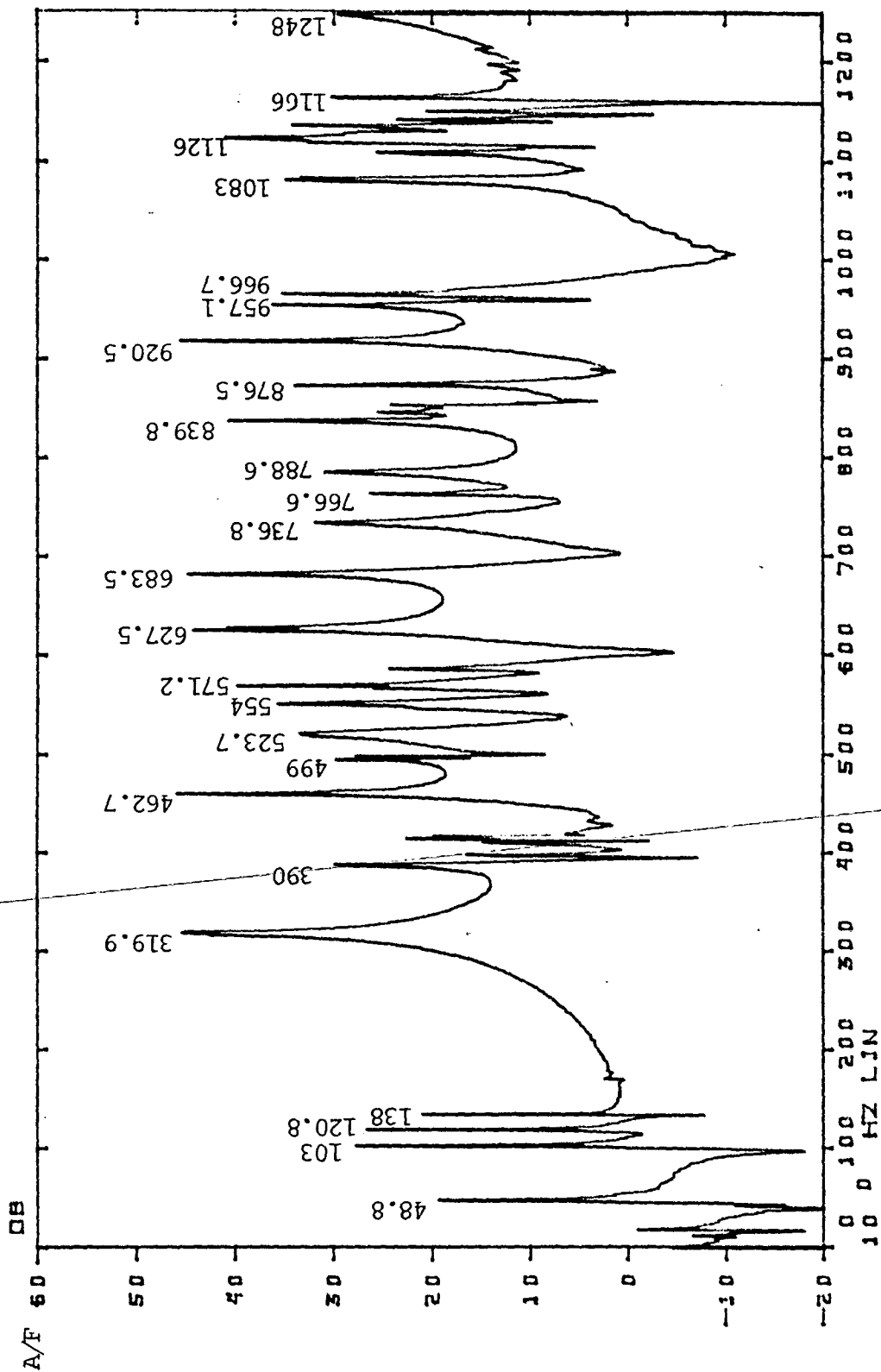


Fig. 5.24 - Função de Transferência (Inertância) do Conjunto Biampoiado

Acelerômetro no disco
 $F_c = 1250$ Hz - $N = 2048$ pontos - 100 médias.

5.4.3 - Valores encontrados/Comentários

	1ª FN(Hz)	2ª FN(Hz)	3ª FN(Hz)
Modelo Analítico (vide Cap.4)	64,6	207,3	426,4
<u>Espectro de Potência:</u>			
Conj.biapoiado rigidamente (Fig.5.7)	57,1	-	426
<u>Funções de Transferência(Inertância)</u>			
Conj.biapoiado rigidamente (Fig.5.2)	57,3	207,6	419
Fator de Amortecimento (%)	2,52	2,85	1428
Coef. de Amortecimento (rad/s)	8,65	37,63	3,71
Conj. biapoiado em borracha sintética (Fig.5.22)	52,5	201,5	423
Eixo (sem os discos) biapoiado rigidamente (Fig.5.23)	58,6	207,6	430

Quadro 5.3 - Valores encontrados na FRF e comparadas com o modelo analítico e espectro de potência.

As características mais importantes observadas nessas figuras foram:

Fig. 5.21 - Conjunto biapoiado rigidamente:

As duas primeiras frequências naturais são destacadas nitidamente enquanto que a terceira não é tão evidente devido à colocação do acelerômetro sobre o eixo, a 1/3 de distância de um dos discos (situação que se configura como transdutor próximo a um nó). O valor da 1ª FN é muito próximo ao encontrado no espectro de potência (Fig.5.7) e, o da 2ª FN, bem próximo ao calculado analiticamente. Os valores dos coeficientes e fatores de amortecimento foram aqui registrados a título de informação.

Fig. 5.22 - Conjunto biapoiado em borracha sintética:

Similarmente ao ocorrido no espectro de potência, Fig. 5.8, as frequências naturais decresceram, sendo o espectro deslocado para a esquerda. Os valores encontrados praticamente coincidiram com o teste anterior (comparar com Fig. 5.8).

Fig. 5.23 - Eixo sem os discos - apoio rígido:

Comparando-se com a Fig. 5.10, os valores divergiram na ordem de 4% (1ª FN) e 9% (2ª FN). O motivo desta discrepância será explicado nas conclusões deste capítulo.

Note-se, ainda, a componente de 48,8 Hz devido à base.

As componentes relativas aos ruídos ~~elétricos~~ desapareceram.

O espectro torna-se bem mais simples de se analisar.

Fig. 5.24 - Conjunto biapoiado-Acelerômetro no disco:

Os valores são muito próximos aos encontrados quando da obtenção do espectro de potência (Fig. 5.12), mas a dificuldade em se analisar permanece. Também aqui as componentes relativas às FN do conjunto desapareceram, sendo que a energia de vibração não foi suficiente para vencer o acoplamento entre disco/cubo do eixo.

Fig. 5.4.4 - Registro dos Modos de Vibração:

Um dos objetivos principais da Análise Modal é a visualização do comportamento dinâmico da estrutura em estudo quando excitada em suas frequências naturais. Assim, as Fig's 5.25 a 5.27 mostram as vistas principais obtidas. As linhas retas representam a situação rotor em repouso, constituindo o modelo espacial fornecido pelo computador conforme o esquema da Fig. 5.17.

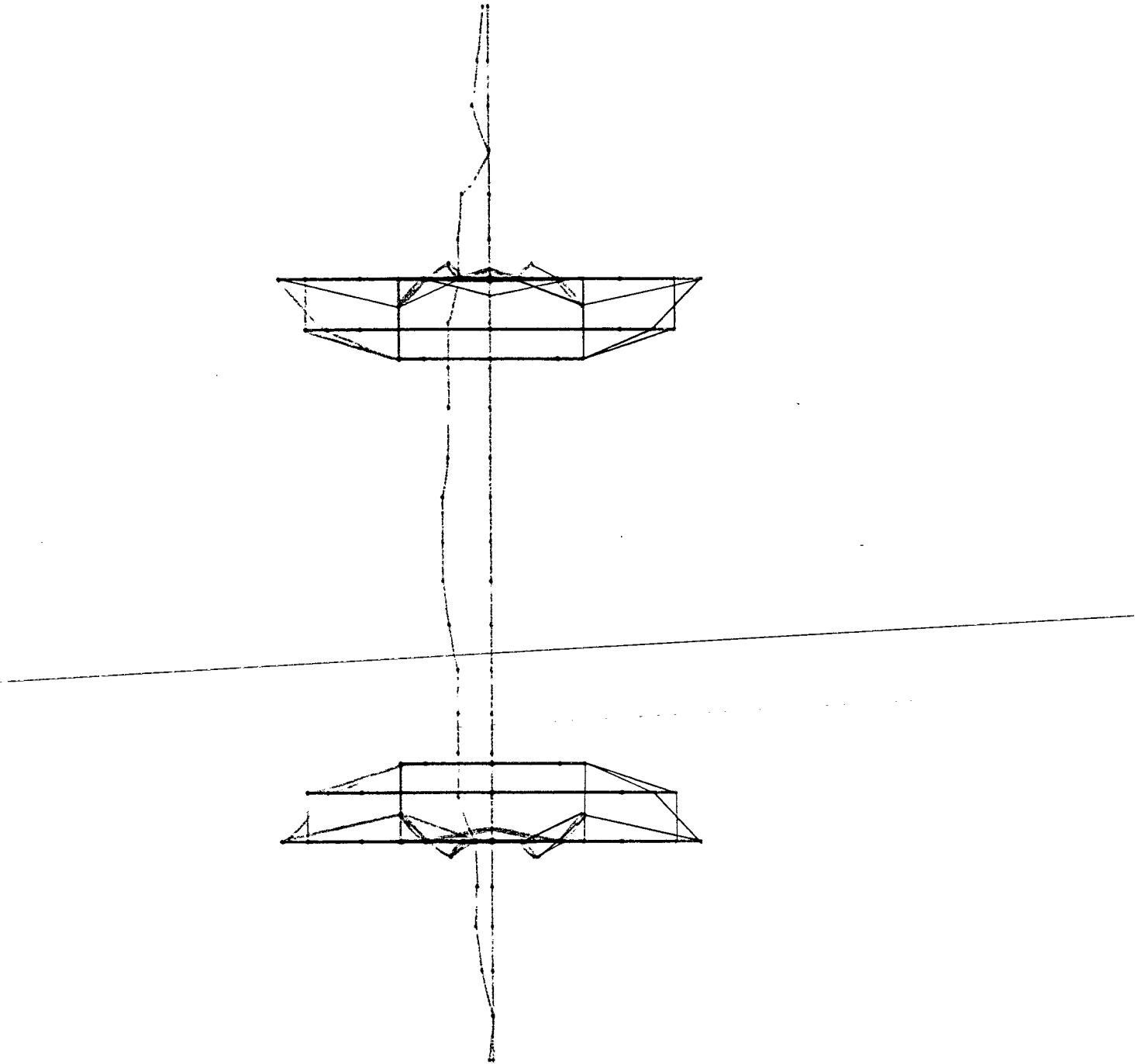


Fig. 5.25 - 1º Modo de Vibração - FN = 57.3 Hz
Vista Frontal.

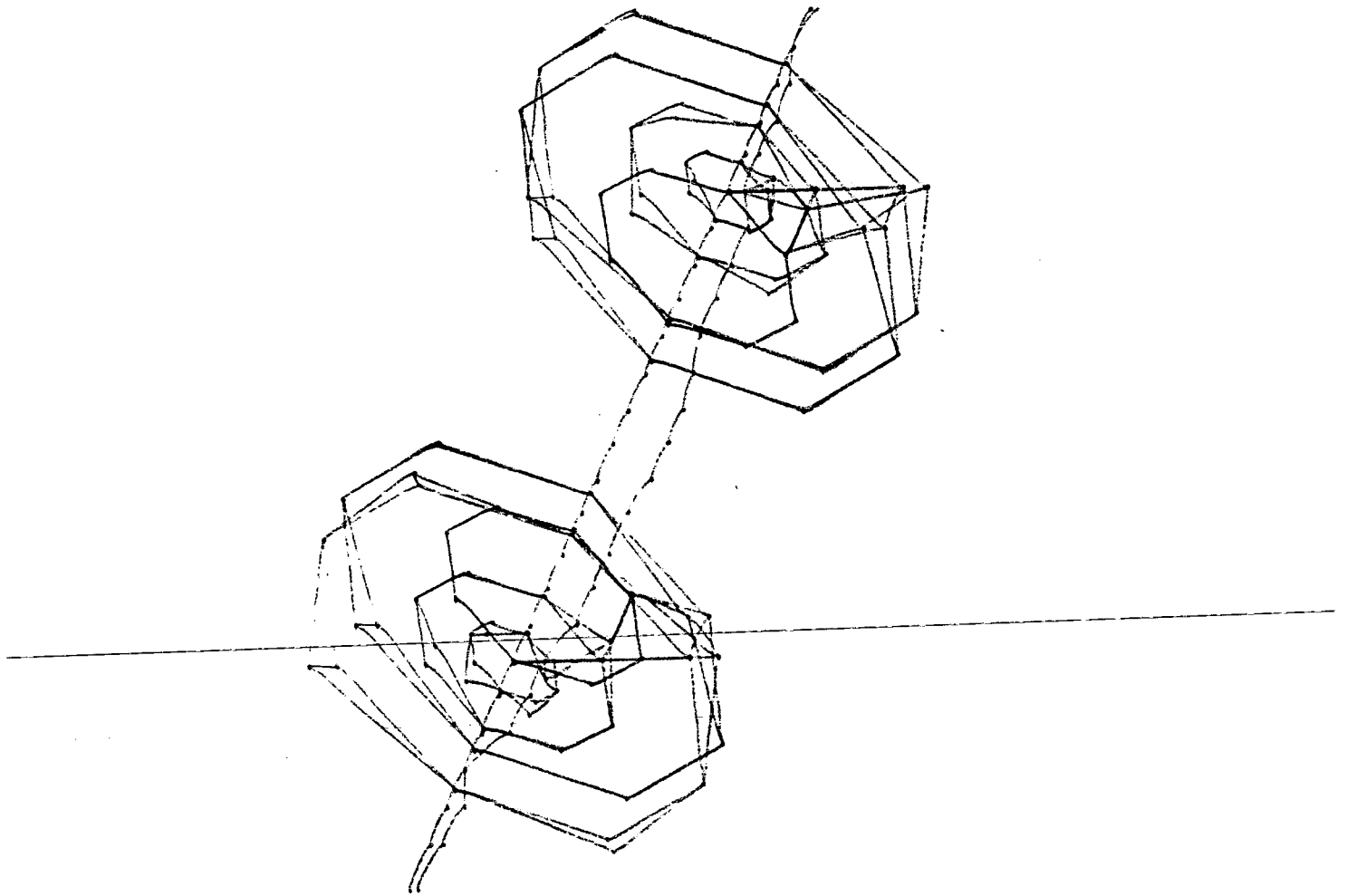


Fig. 5.26 - 1º Modo de Vibração - FN = 57.3 Hz
Vista Isométrica.

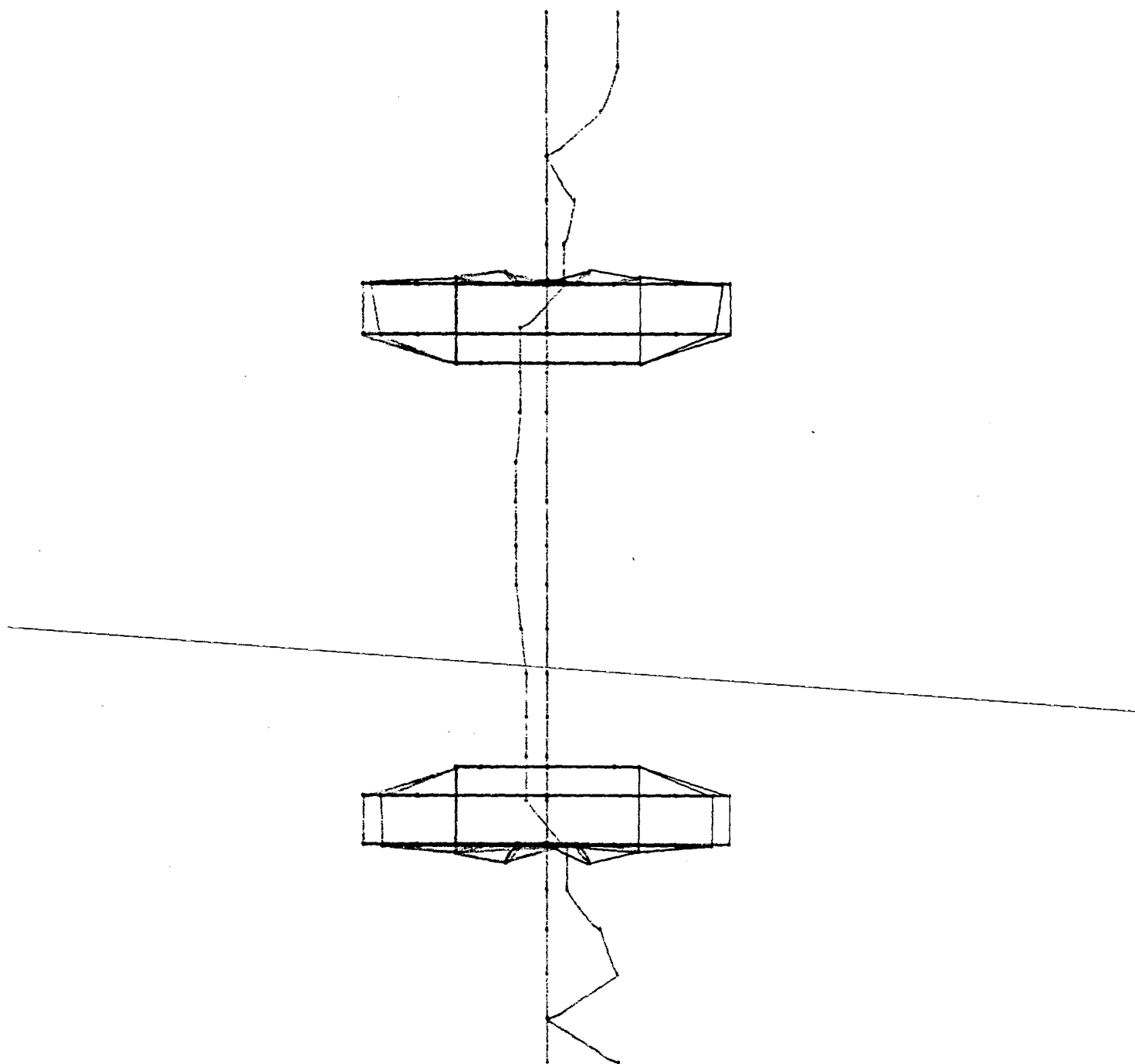



Fig. 5.27 - 3º Modo de Vibração - FN = 419 Hz
Vista Frontal.

Nota-se, na Fig. 5.25, a região indicada como sendo de máxima tensão (simulação do rotor em funcionamento), região esta em que justamente ocorreram as trincas circunferenciais, levando o rotor à falha (fotos 2.8 e 2.9).

A título de ilustração, o 3º modo foi representado na Fig. 5.27. A configuração senoidal  é razoavelmente representada. Um número maior de pontos forneceriam melhor indicação do modo.

5.5 - COMENTÁRIOS GERAIS/CONCLUSÕES

O quadro 5.4 apresenta os valores encontrados utilizando-se o Modelo Analítico e Função de Transferência:

Modelo Analítico	1ª FN(Hz)	Dif.%	2ª FN(Hz)	Dif.%	3ª FN(hZ)	Dif.%
	64,6		207,3		426,4	
Função de Transf. (Inertância)	57,3	-11,3	207,6	+ 0,1	419	- 1,7

Quadro 5.4 - Modelo Analítico x Inertância.

Pode-se afirmar que as discrepâncias encontradas (principalmente na 1ª FN) foram decorrentes de:

- a) Os apoios considerados no caso analítico são idealmente rígidos (impedância infinita dos suportes).

Na prática, os pedestais possuem impedância finita. O apoio das mangas do eixo, bem como a interface deficitária entre

piso/pedestal, não ofereceram rigidez adequada, conforme Fig. 5.28:

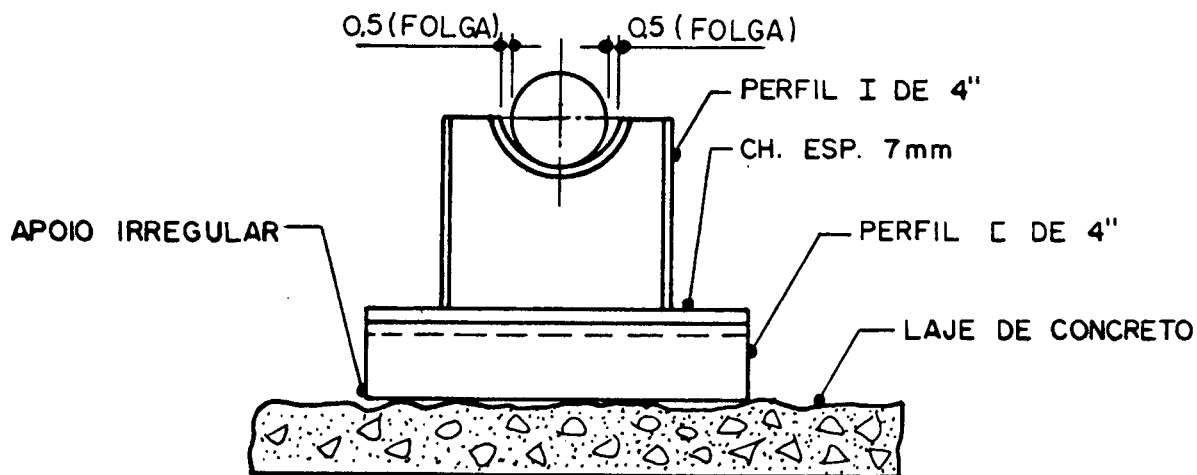


Fig. 5.28 - Suporte do rotor.

Maior rigidez corresponde a maior frequência natural. Nas frequências de 2ª e 3ª ordem este parâmetro não se mostrou significativo. Com rigidez adequada (apoios mais rígidos → impedância elevada) o acréscimo da 1ª FN determinada experimentalmente seria sensível;

b) Flexibilidade dos discos: o modelo do rotor em estudo considera o rotor como um corpo rígido. Trabalhos realizados nesta área por outros autores (Ref's [28], [57] e [58]) constataram a influência da flexibilidade dos discos nas frequências ressonantes. O efeito é a redução das mesmas, levando-se em conta o diâmetro dos discos e espessura das chapas, principalmente.

Considerando-se que:

1 - Os discos são confeccionados em Titânio (favorável à flexibilidade);

2 - Posição dos discos sobre o rotor;

3 - Configuração do 1º modo de vibração (Fig. 5.24),

pode-se concluir que a 1ª FN obtida experimentalmente é inferior, em parte, à calculada, devido ao efeito da flexibilidade dos discos.

Pelo exposto, levando-se em conta os problemas apresentados pelo rotor (Cap. 2) e determinação experimental das mesmas (via digital), conclui-se que o conjunto trabalha em ressonância, ficando a relação

$$\frac{\text{frequência de trabalho}}{1^{\text{a}} \text{ frequência natural}} \approx 1 .$$

A modificação do rotor, bem como alterações no sistema exaustor em geral, são sugeridas no Capítulo 6, a seguir.

CAPÍTULO 6

MEDIDAS CORRETIVAS

6.1 - SISTEMA ROTOR (EIXO + DISCOS)

Uma das sugestões cogitadas para se dirimir o problema das trincas do revestimento (Ebonite ou Titânio) foi a confecção do eixo totalmente em Titânio (ASTM-B-348, Grau 5, para se auferir maior resistência mecânica).

São as seguintes as propriedades do Ti - Grau 5 x Aço:

$$\rho_{Ti} = 4500 \text{ Kg/m}^3$$

$$\rho_{Aco} = 7850 \text{ Kg/m}^3$$

$$E_{Ti} = 114 \text{ GN/m}^2$$

$$E_{Aco} = 210 \text{ GN/m}^2$$

$$\alpha_{Ti} = 9,7 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$$

$$\alpha_{Aco} = 11,7 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$$

Procedendo-se ao cálculo da 1ª Frequência Natural foi encontrado 73,2 Hz, portanto 18% acima da frequência de excitação (60 Hz).

Considerando-se:

a) $m_{Ti} \simeq 0,6 m_{Aco}$

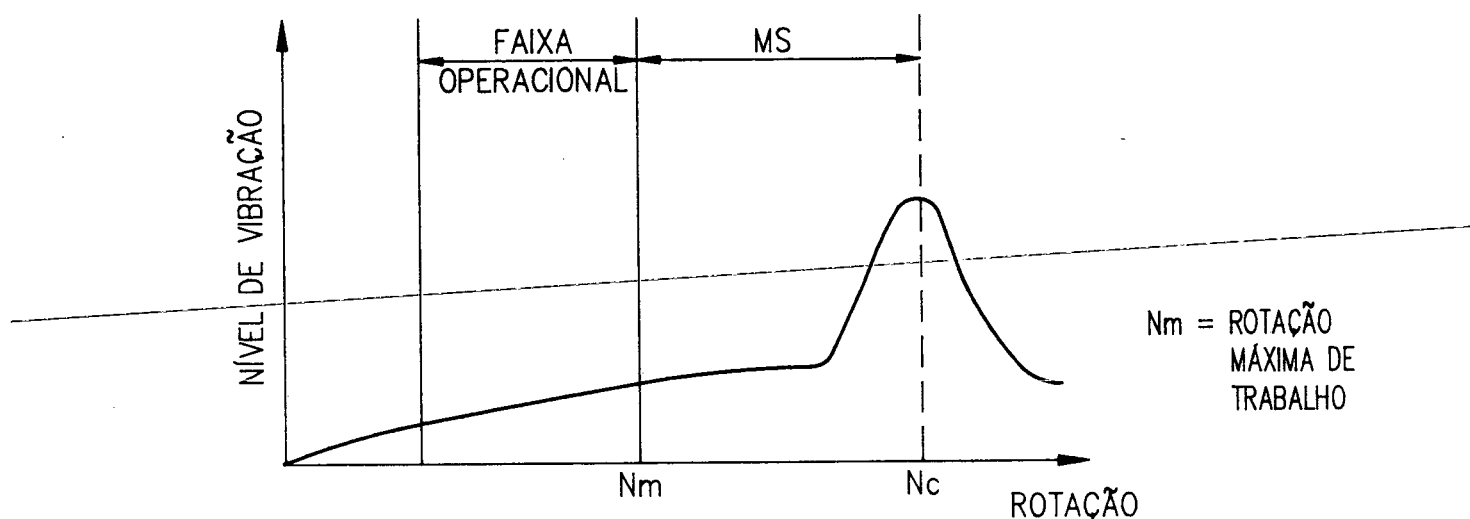
b) $E_{Ti} \simeq 0,5 E_{Aco}$

c) Efeito da flexibilidade dos suportes reais

d) Custos e

e) material importado

tal sugestão foi descartada. Surge, entretanto, a questão: qual a faixa ideal de trabalho de um rotor de exaustor? Procedendo-se a uma pesquisa bibliográfica, a Norma API-673 (Ref. [59]) recomenda que o eixo de um ventilador (exaustor) deverá ser "rígido" isto é, ser projetado para trabalhar abaixo da 1ª FN, conforme Fig. 6.1 a seguir:



N_c = rotação crítica
MS = Margem de Separação

Fig. 6.1 - Margem de Separação dos Modos Laterais.

A Margem de Separação para eixos de exaustores deverá ser, no mínimo de 25% acima da máxima rotação de trabalho, devendo os mesmos serem confeccionados com um erro máximo de concentricidade de 25 μ m.

A qualidade de balanceamento recomendada por esta Norma é grau G 2,5, ou seja, um grau a mais que o estabelecido pelas Normas ISO 1940 e VDI-2060 (Ref. [60] e [61]).

Assim, a modificação das frequências naturais foi efetuada, considerando-se o eixo em aço e suas propriedades dinâmicas, como segue:

6.1.1 - Alternativas para modificação das FN:

Tres alternativas são apresentadas:

- a) Adição do amortecimento
- b) Alteração da massa do eixo
- c) Alteração da rigidez do eixo

a) A adição do amortecimento teria o efeito de redução mínima das frequências naturais. Isto seria possível (principalmente) através da substituição dos mancais antifricção (rolamentos) para mancais de deslizamento (Babbitt). O filme de óleo forneceria o amortecimento desejado. Contudo, o eixo continuaria sendo flexível (portanto, contra as recomendações da API-673). A cada partida do equipamento, obrigatoriamente o eixo deveria passar pela primeira rotação crítica, com todos os seus inconvenientes. Assim, esta hipótese foi descartada.

b) A frequência natural é inversamente proporcional à raiz quadrada da massa ($FN = 1/2\pi \sqrt{K/M}$). Desta forma, para que o rotor se tornasse

rígido, necessário seria a redução substancial da massa, o que acarretaria comprometimento da resistência mecânica do eixo, tanto à torção (paradas e partidas do equipamento), quanto à flexão;

c) O procedimento mais comum consiste na alteração da rigidez do eixo, o que poderia ser conseguido através de :

1) Redução da distância entre mancais:

Esta alternativa foi descartada pois implicaria na modificação da base e carcaça, o que comprometeria a produtividade do equipamento (decorrente do número de dias de paralisação do mesmo);

2) Aumento do diâmetro do eixo:

~~É a alternativa mais viável, considerando-se que $K \sim EI$ (rigidez diretamente proporcional ao fator Módulo de Young vezes Momento de Inércia da seção) e que, para seção circular $I = \pi d^4/64$, ou seja, a frequência natural varia com o quadrado do diâmetro do eixo.~~

Para que não se tenha aumento considerável da massa do eixo (o que implica em perda de potência e carga adicional aos mancais), a opção mais viável é se utilizar tubo mecânico, o que, além de possuir propriedades mecânicas excelentes, é a concepção ideal para transmissão de potência envolvendo torção (neste caso, nas paradas e partidas do equipamento). Após cálculos sucessivos, a solução que procura con-

ciliar eixo rígido e não coincidência das frequências naturais de ordem superior com as frequências de excitação do equipamento (rolamentos, $f_{passagem}$) foi a adoção do sistema esquematizado na Fig. 6.2, a seguir:

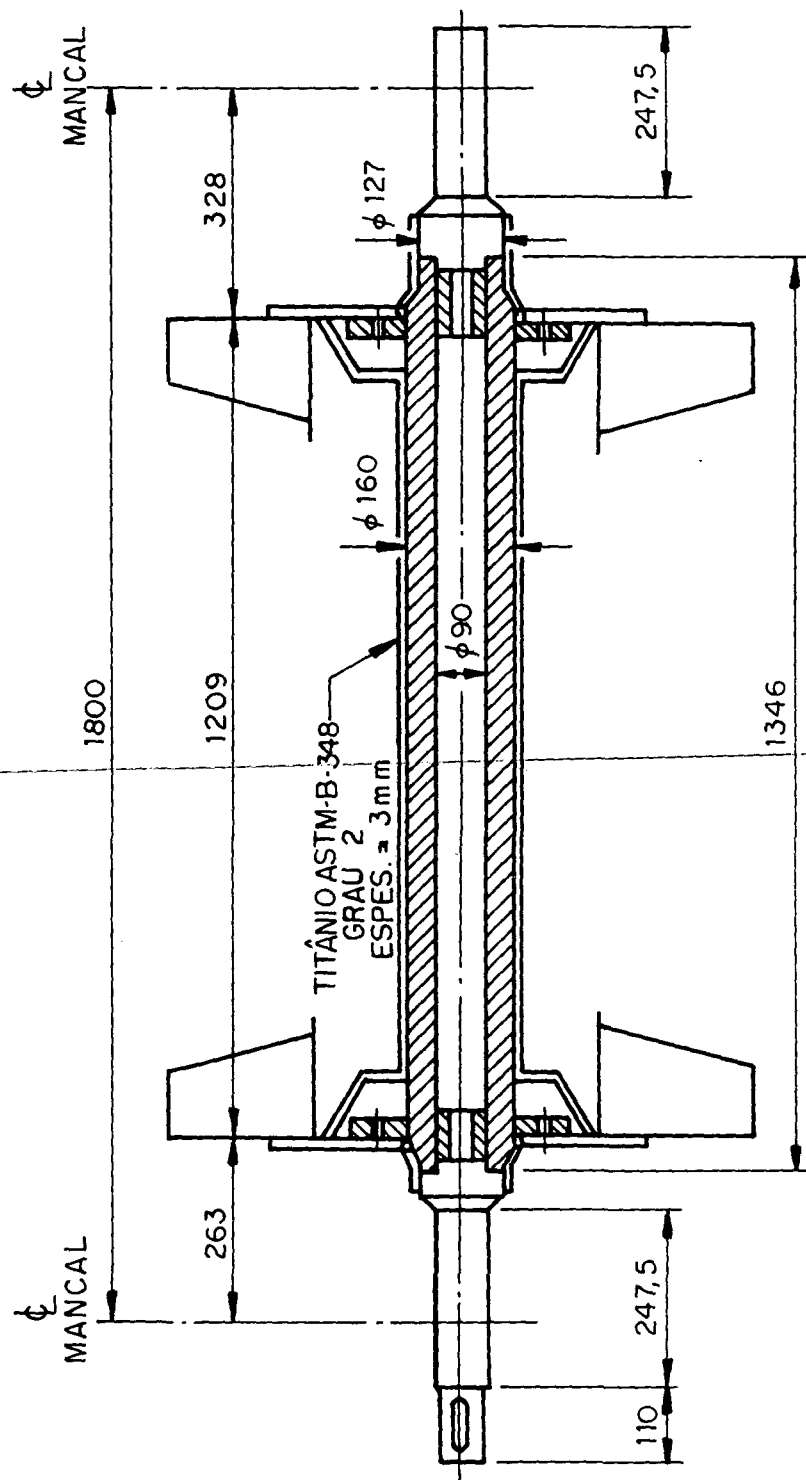


Fig. 6.2 - Esquema do rotor modificado.

As frequências naturais encontradas, utilizando-se o Método de Matrizes de Transferência, foram:

1ª FN	2ª FN	3ª FN
103,3 Hz	322,7 Hz	741,8 Hz

Portanto, o projeto sugerido prevê que a 1ª FN fica a 72% da frequência de trabalho (60 Hz).

Observa-se que, em uma das mangas (Fig. 6.3) providenciou-se um furo de 3/8", o qual permite a saída do ar quente durante a operação do rotor. Caso contrário, o eixo poderia sofrer empeno. As características do tubo mecânico são:

Qualidade ST-52 - Normalizado

∅ ext. 160 mm

∅ int. 90 mm

Carga de ruptura: 50-62 Kg/mm²

Limite elástico \geq 30 Kg/mm²

Composição química:

% C = 0,18

% Mn = 1,40

% Si = 0,50

% P \leq 0,045

% S \leq 0,045

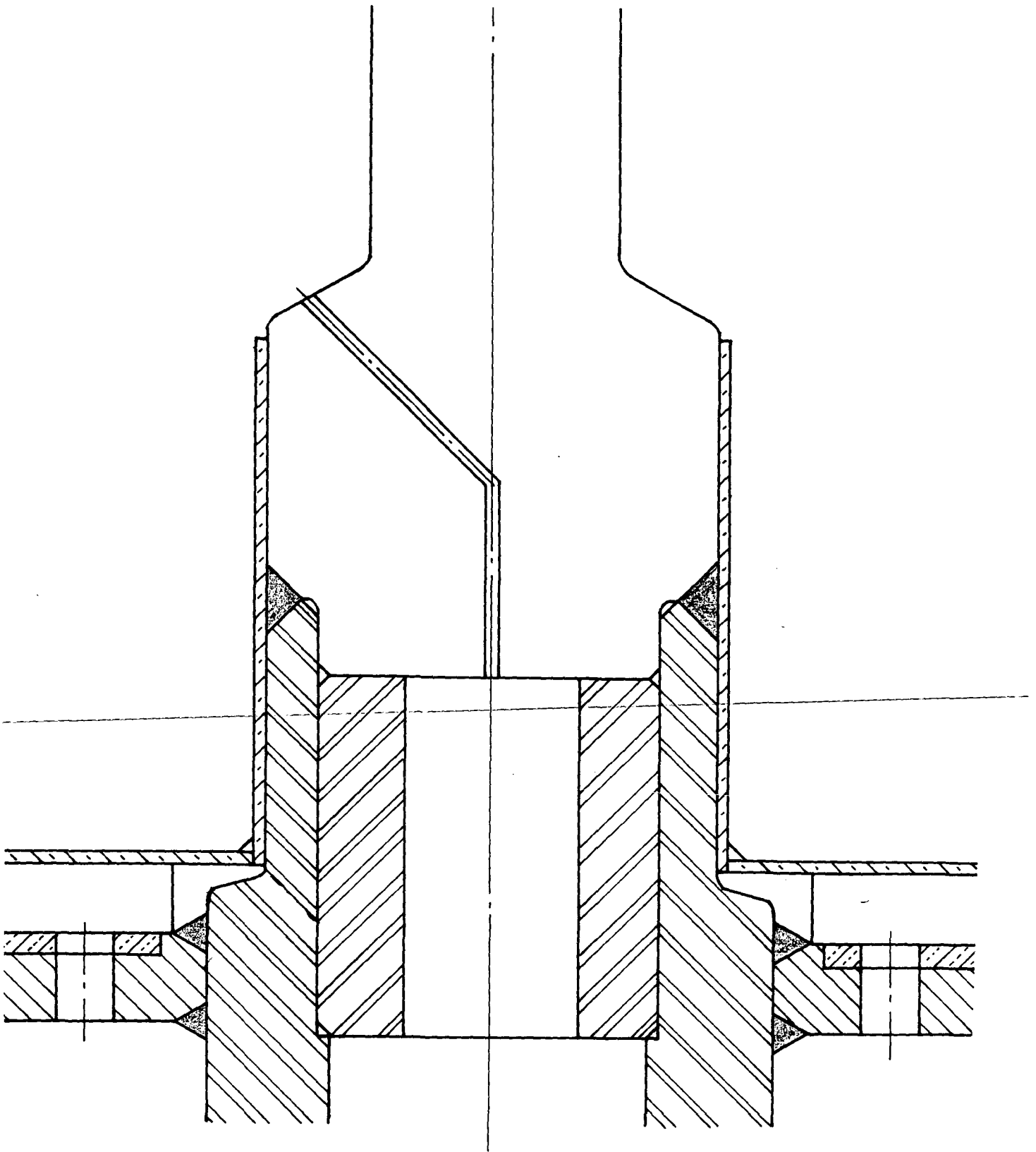


Fig. 6.3 - Detalhe da manga do eixo com furo.

6.2 - MODIFICAÇÕES GERAIS:

As demais alterações relacionam-se como segue:

6.2.1 - Revestimento do Eixo:

Deverá ser executado com Ti B-348, Grau 2, espessura 3 mm, porém com a particularidade de que a proteção tronco-cônica ser adequada aos esforços (empuxos) axiais nos discos, não oferecendo resistência aos mesmos. As trincas e rupturas nesta região deverão desaparecer (vide Fig. 6.2).

6.2.2 - Verificação do acréscimo da rigidez:

Pode-se considerar o eixo + revestimento como um sistema com associação em paralelo. Para um seção circular ôca:

$$I = \frac{\pi}{64} (D_{ext}^4 - d_{int}^4) \quad \dots \text{Eq. (6.1)}$$

$$\dots K_{eq} = C \times \frac{\pi}{64} [114 \times 10^9 (0,166^4 - 0,160^4) + 210 \times 10^9 \times (0,160^4 - 0,090^4)]$$

$$\dots K_{eq} = C \times 6.661.179,6 \quad (\text{projeto sugerido})$$

Similarmente, p/o projeto original (eixo maciço) será obtido:

$$K_{eq1} = C \times 2.516.687,2$$

Portanto, o sistema sugerido terá um acréscimo de 164% em sua rigidez.

A Fig. 6.4 fornece uma idéia clara do projeto original x projeto sugerido.

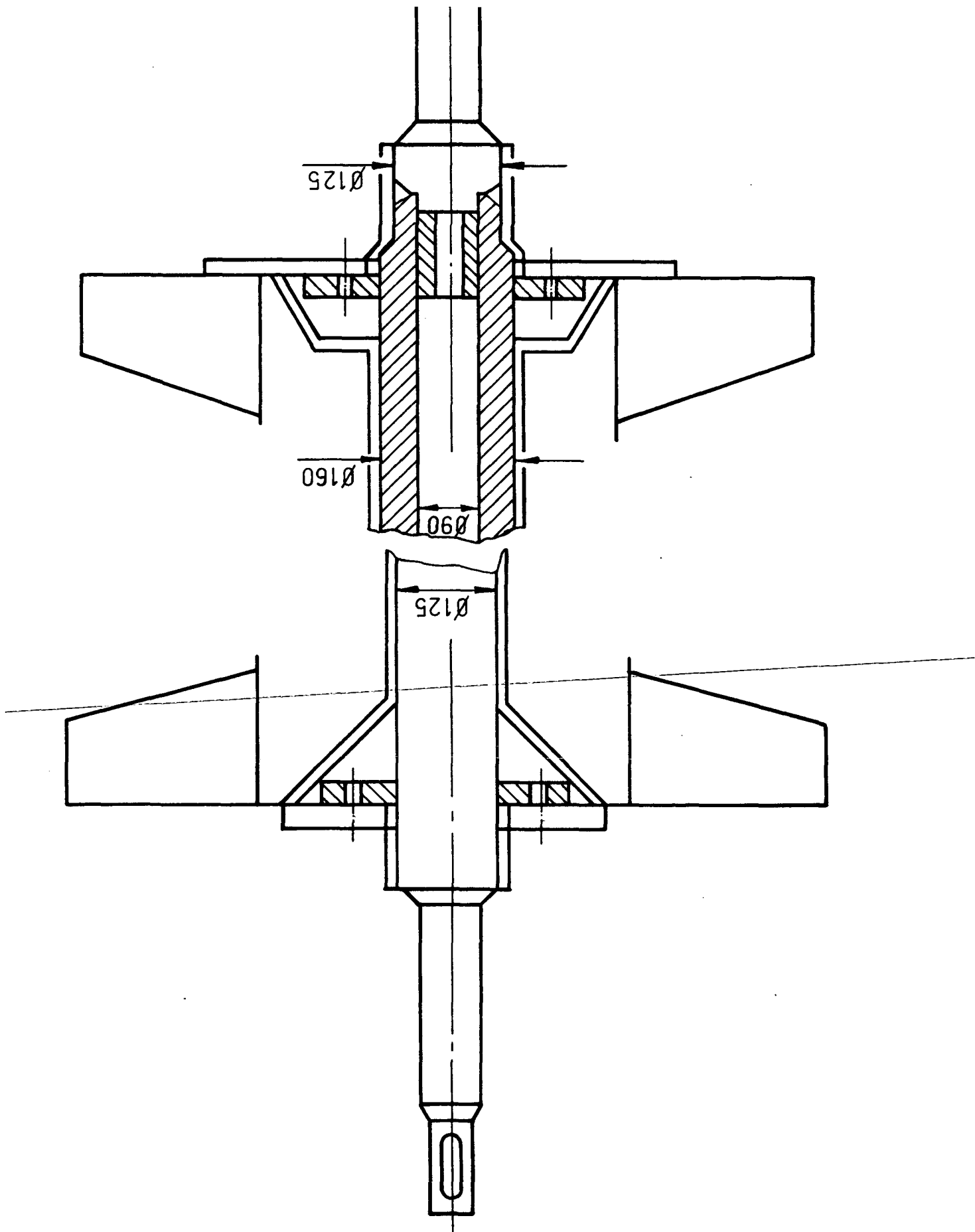


Fig. 6.4 - Projeto Original x Projeto Sugerido.

6.2.3 - Aumento da Rigidez dos Discos:

Foi conseguida através da fixação de 8 aletas laterais (enrijecedores) nos discos, eliminando-se a tendência da formação das trincas circunferenciais (vide Fig. 6.2).

6.2.4 - Acoplamento:

O objetivo em se substituir o acoplamento atual (FALK-Steelflex J. ex 12F) era de se limitar o torque de partida do motor elétrico: o rotor atinge sua rotação nominal em poucos segundos. Como os mancais são do tipo antifricção, a vida útil dos mesmos é seriamente afetada, principalmente considerando-se que o sistema é passível de sofrer balanceamento no local. Contudo, não foi encontrado, no mercado nacional, um acoplamento que satisfizesse esta exigência: a especificação cai fora da faixa de produção seriada dos diversos fabricantes. Pesquisou-se, inclusive, a adoção de acoplamento hidráulico, não sendo possível pela razão acima exposta. A proposta, então, é:

6.2.5 - Limitação do Torque de Partida do Motor:

A rotação nominal, sendo atingida gradualmente, incrementará substancialmente a vida útil dos rolamentos, bem como do acoplamento e resguardará o revestimento de Titânio, minimizando-se os efeitos torcionais nas paradas e partidas do equipamento.

6.2.6 - Mudança do sistema de lubrificação:

A proposta é se alterar o sistema atual (à graxa, manual) para circulatório, a óleo, o que permitiria maior troca térmica dos mancais, aumentaria a capacidade de rotação dos rolamentos (conseqüentemente, a vida útil dos mesmos). O exaustor apenas entraria em operação mediante acionamento prévio da bomba de óleo, o que garantiria a presença de lubrificante sob os elementos rolantes do mancal, evitando-se o atrito seco (ou de Coulomb) no ato da partida.

6.2.7 - Substituição dos mancais:

Uma comparação entre os mancais originais e os sugeridos pode ser observada no Quadro 6.1, abaixo (conforme Ref. E-62 J).

		Limite de rotação (rpm)		Cap. de Carga(N)	
		graxa	óleo	Din.(C)	Est.(C ₀)
Original	SKF-1316K + H316	3600	4300	88400	42500
Proposto	SKF-22216CCK+H316	3200	4000	176000	127000

Quadro 6.1 - Comparação entre mancais de projetos original e proposto.

Vê-se que a capacidade de carga dinâmica é duplicada e a estática, praticamente triplicada e, com o acréscimo do limite de rotação (para 4000 rpm), a vida útil do rolamento proposto (autocompensador de dupla carreira de rolos esféricos), será bem superior à do atual.

6.2.8 - Verificação do alinhamento do acoplamento:

Um equipamento, após alinhamento rigoroso a frio, sofrerá alterações provocadas pelo acréscimo de temperatura durante o funcionamento normal. Recomenda-se, pois, que após a estabilização térmica, o exaustor seja paralisado e o acoplamento seja reinspecionado quanto ao alinhamento.

Como a verificação deverá ser muito rápida (evitando-se as contrações do conjunto) sugere-se que esta operação seja executada com sensor ótico "Optalign" (Ref.[63]), baseando-se na emissão e recepção de raio laser, fornecendo uma precisão de microns no alinhamento. A Fig. 6.5 fornece uma idéia do sistema (sendo o mesmo recentemente introduzido no Brasil e de procedência alemã).

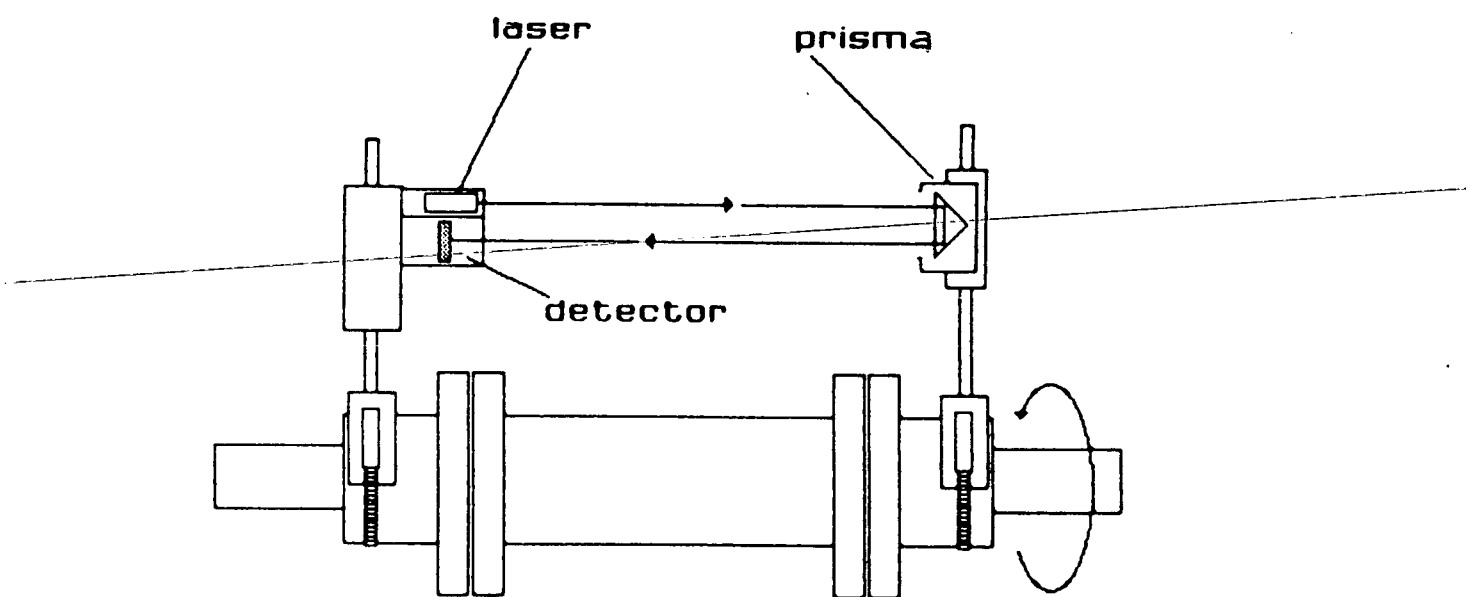


Fig. 6.5 - Princípio de operação do sistema de raio laser.

6.2.9 - Adoção do Programa de Manutenção Preditiva (Ref.[64])

Este programa tem por objetivo básico o incremento da produtividade de um equipamento mediante a detecção e acompanhamento da evolução de um defeito incipiente através da medição e análise das vibrações.

A Fig. **6.6** apresenta, como sugestão, a folha de registro das vibrações, (espectros de Frequência) nas direções vertical, horizontal e axial. O nível de alarme deverá ser estabelecido em 8 mm/s e o reparo deverá ser programado antes que o nível atinja 16 mm/s.

A Fig. 6.7 apresenta, esquematicamente, os passos do programa:



ESPECTROS DE FREQUÊNCIA - MANUTENÇÃO PREDITIVA

GRUPO SIDERGRÁS

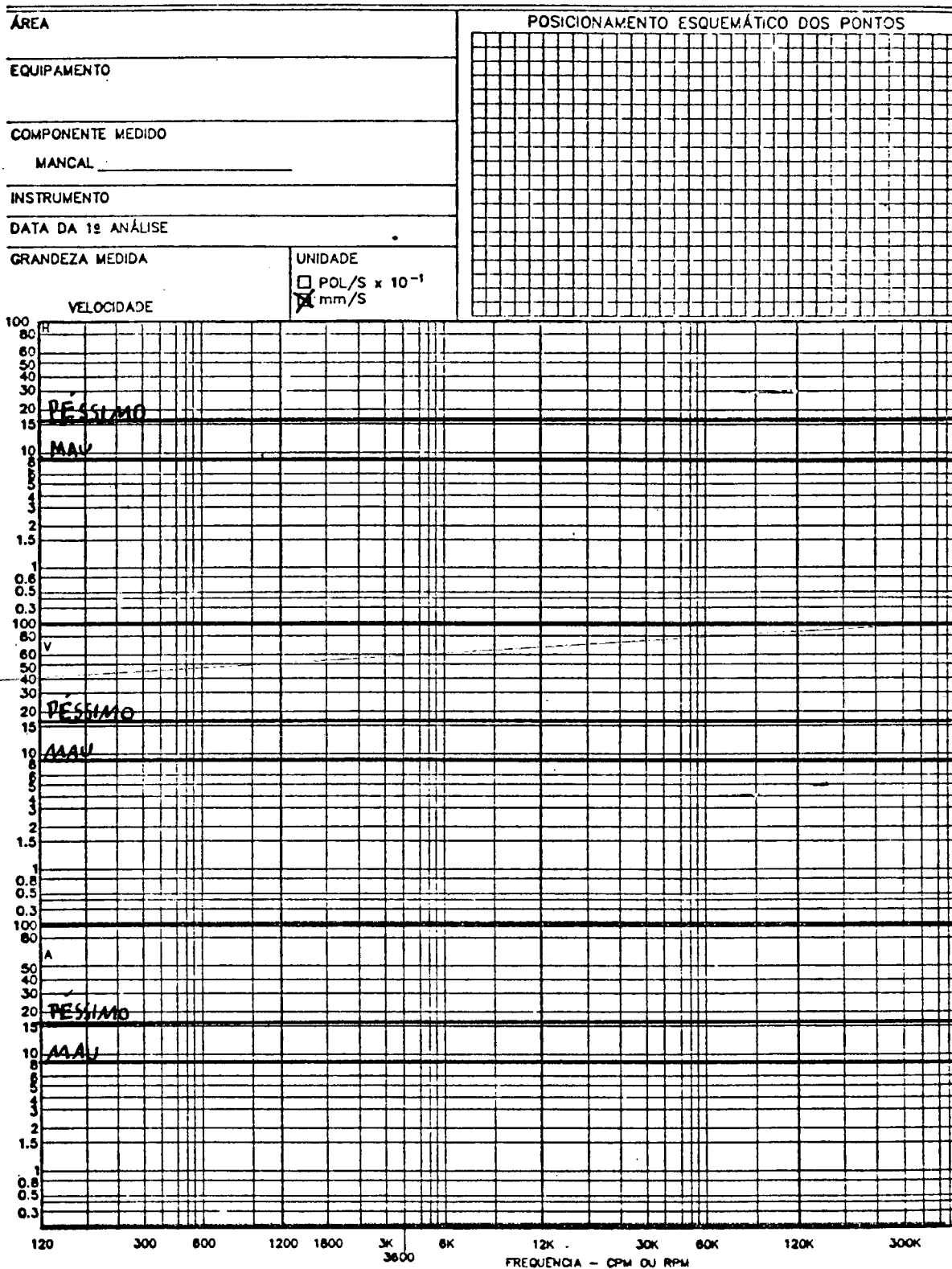


Fig. 6.6 - Folha de Registro do Espectro de Frequência para Manutenção Preditiva.

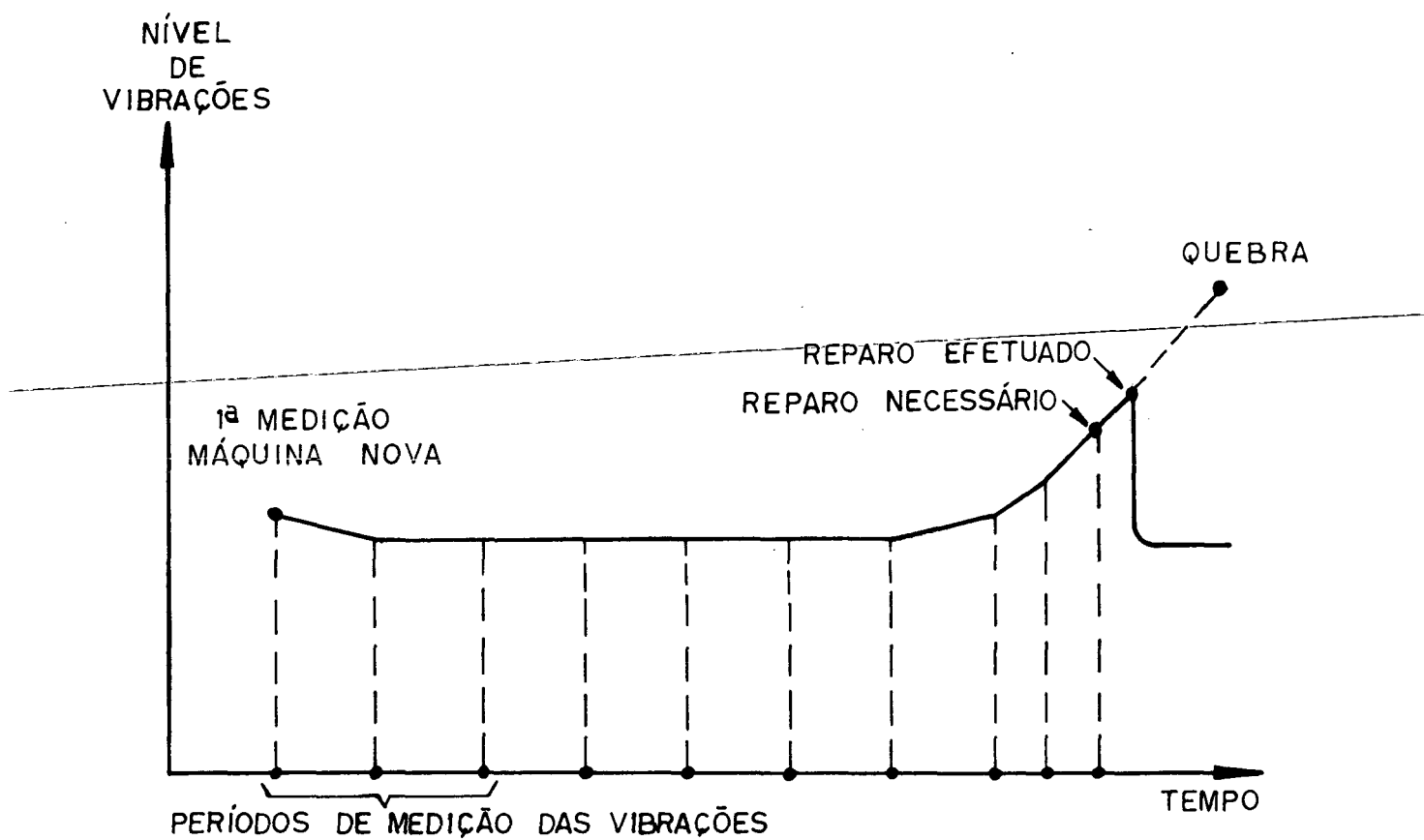


Fig. 6.7 - "Curva da Banheira" - Manutenção Preditiva por Análise de Vibrações.

6.2.10 - Monitoramento Contínuo:

Finalmente, a instalação de um sistema de monitoramento contínuo das vibrações com sinalização de alarme e parada automática protegerá o equipamento de eventuais falhas humanas quando da não observância do programa de Manutenção Preditiva. Neste caso, este programa será grandemente facilitado, sendo o nível de vibrações verificado instantaneamente e constantemente da própria sala de controle. Considerando-se a criticidade do equipamento no contexto geral da produção numa unidade siderúrgica, um investimento nesta instrumentação se justifica plenamente.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Embora as conclusões tenham sido citadas nos capítulos precedentes, necessário se faz tecer alguns comentários de ordem geral.

Desenvolveu-se cinco programas de computador, em "Basic", para determinação das frequências naturais de um exaustor bi-apoiado.

O método de Matrizes de Transferência mostrou ser o de maior versatilidade, visto a facilidade do tratamento individual dos componentes constituintes de um sistema mecânico, bem como permite a elaboração relativamente simples das matrizes representativas dos efeitos dinâmicos, quando considerados, tais como o efeito giroscópico, excentricidade dos discos, efeitos inerciais rotatórios, flexibilidade dos suportes, bem como o tratamento de eixos com seções escalonadas. Por não ser iterativo e sim direto, o tempo computacional mostrou-se bem reduzido. O estabelecimento das condições de contorno é tremendamente simples neste método.

Os métodos de Rayleigh e de Dunkerley mostraram-se eficientes quando de delimitação da 1ª FN (limite superior e inferior, respectivamente), tendo o primeiro demonstrado maior precisão que o segundo.

É testado também a aplicabilidade do pêndulo trifilar, o qual demonstrou que quanto maior a altura entre a fixação dos fios e a peça ensaiada, bem como uma grande flexibilidade desses fios, maior será a precisão.

A formulação do modelo do rotor envolvendo cotas reais, bem como as condições de contorno que mais se aproximam da realidade são as ~~grandes responsáveis pela~~ acuracidade dos resultados.

Pode-se observar que os efeitos giroscópicos terão maior ou menor influência no comportamento dinâmico do sistema, conforme o modo que está sendo excitado e a posição relativa dos discos sobre o rotor.

O efeito da flexibilidade dos suportes causa influência nas frequências naturais (reduzindo-as), sendo mais pronunciada nas frequências de ordem superior, razão pela qual não deve ser desprezado quando do projeto de um sistema rotativo.

Um número relativamente pequeno de GL (12) foi suficiente para a estabilização dos valores das frequências naturais, o que fornece

uma idéia da não necessidade de utilização de um computador de grande porte. Neste caso, utilizou-se um micro-computador SHARP 1500RP, de apenas 11K.

Na análise de sinais ratificou-se a informação de que as medidas em velocidade fornecem uma idéia global do grau de severidade a que todo o sistema está submetido, isto é, detetando-se componentes de baixas a altas frequências. As componentes de baixa frequência provenientes dos rolamentos, bem como soma e diferença de frequência foram facilmente identificadas no espectro.

A Análise Modal mostrou-se uma ferramenta poderosa para a determinação das propriedades dinâmicas do rotor, fornecendo informações de alta confiabilidade, com as quais o projetista poderá elaborar as modificações necessárias que auferirão um funcionamento suave do equipamento ou estrutura. Com o avanço da tecnologia, notadamente a miniaturização dos componentes eletrônicos, a construção compacta de Analisadores de Fourier de vários canais vem revolucinando o conceito de Engenharia de Projetos, bem como propiciando a um número cada vez maior de usuários a oportunidade de se desenvolver equipamentos mais arrojados, com rotações até pouco tempo inadmissíveis, por caírem no terreno do desconhecido.

Enfatizou-se a necessidade de se estabelecer as condições de contorno as mais próximas possíveis da realidade, recomendando-se que a impedância mecânica dos suportes ou pedestais no campo e no laboratório tenham valores próximos.

Mostrou-se a grande sensibilidade da 1ª FN quanto à variação da rigidez, com ênfase na alteração do diâmetro externo do eixo; as frequências de ordem superior não acompanharam proporcionalmente tal variação.

A obtenção das curvas Função Resposta em Frequência constituiu-se num processo que demanda técnica e, sobretudo, paciência do operador.

A não repetibilidade de impactos na estrutura com valores de força não muito divergentes induz a Funções de Transferência com resultados diferentes, chegando-se à conclusão errônea de que o sistema é não-linear. Esta é a razão pela qual o teste deve ser repetido várias vezes.

As curvas obtidas com acelerômetro sobre os discos permitem concluir que o fluxo através das pás dificilmente será laminar, seja qual for a rotação de trabalho. Em qualquer uma delas, haverá excitação de alguma FN.

A construção do novo rotor com a 1ª FN em 103,3 Hz garantirá que o mesmo seja considerado rígido, o qual, quando devidamente balanceado e alinhado, terá um funcionamento suave.

Finalmente, por este estudo se tratar de um caso prático, muitos itens que por si só poderiam constituir um único trabalho ficam como sugestão de complementação deste.

Entre os principais, destacam-se:

a) Estudo da flexibilidade dos discos utilizando-se a técnica de Elementos Finitos;

b) Determinação das FN do conjunto utilizando-se também Elementos Finitos;

c) Estudo do fenômeno de precessão do eixo operando na região de ressonância;

d) Instabilidade do sistema;

e) Instabilidade do fluxo através das pás dos discos; e

f) Desenvolvimento do estudo utilizando-se Matrizes de Transferência considerando-se efeito combinado de flexão e torção.

APÊNDICE A

SINÓPSE DOS MÉTODOS USADOS EM ANÁLISE DE ROTORES

1 - MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA OU MÉTODO DE HOLZER PARA FLEXÃO

Este método é aplicável em análise de sistemas discretos com o auxílio numérico do cálculo matricial, objetivando a determinação das frequências naturais. Conforme Pestel e Leckie [14], a técnica consiste em se substituir o elemento de viga real por outro, de mesma rigidez, sem massa entre os pontos discretos, sendo nestes pontos a concentração da massa, conforme figura abaixo.

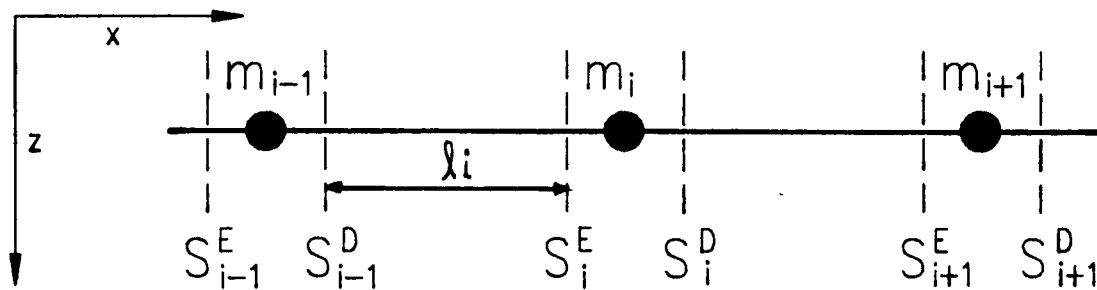


Fig. A-1 - Viga com massas concentradas.

S_i é o vetor de estado do ponto i do sistema elástico, ou seja, um vetor coluna cujos componentes são os deslocamentos do ponto i e as forças internas correspondentes. Os expoentes E e D indicam lado esquerdo e direito, respectivamente.

Isola-se primeiramente o elemento de viga entre os pontos i-1 e i, cuja representação esquemática é a seguinte:

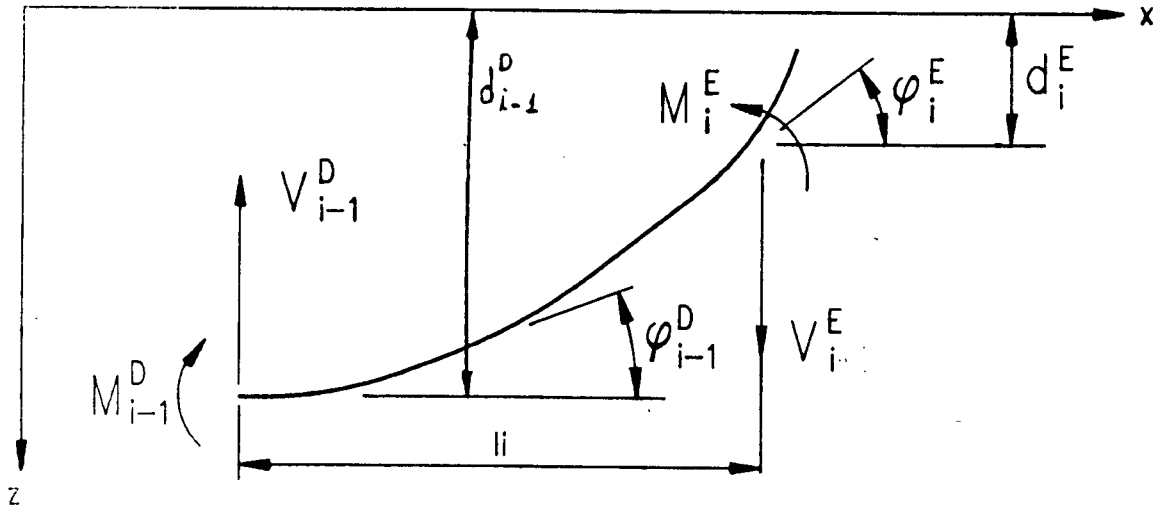


Fig. A-2 - Forças e deflexões no elemento de viga.

Os dois deslocamentos são a deflexão d e a inclinação φ ; as forças correspondentes são: força cisalhante V e momento de flexão M, conforme vemos na Fig. A-2.

Aplicando-se as leis de equilíbrio de Newton no elemento de viga tem-se:

$$V_i^E - V_{i-1}^D = 0 \quad \therefore V_i^E = V_{i-1}^D \quad \dots \text{Eq. (A-1)}$$

$$M_i^E - M_{i-1}^D - V_{i-1}^D \times l_i = 0 \quad \therefore M_i^E = M_{i-1}^D + V_{i-1}^D \times l_i$$

...Eq. (A-2)

Da Resistência dos Materiais tem-se que as equações que relacionam

a deflexão e inclinação de uma viga em balanço, de rigidez à flexão EI , sujeita a um momento M e esforço cisalhante V , em sua extremidade livre, são dadas por:

$$d = \frac{-Ml^2}{2EI} + \frac{Vl^3}{3EI} \quad \dots \text{Eq. (A-3)}$$

$$\varphi = \frac{Ml}{EI} - \frac{Vl^2}{2EI} \quad \dots \text{Eq. (A-4)}$$

Aplicando-se estas equações ao problema em questão e tendo em conta a Fig. A-2, verifica-se que:

$$d_i^E = d_{i-1}^D - \varphi_{i-1}^D l_i - M_{i-1}^D \frac{l_i^2}{2(EI)_i} + V_{i-1}^D \frac{l_i^3}{3(EI)_i} \quad \dots \text{Eq. (A-5)}$$

$$\varphi_i^E = \varphi_{i-1}^D + M_{i-1}^D \frac{l_i}{(EI)_i} - V_{i-1}^D \frac{l_i^2}{2(EI)_i} \quad \dots \text{Eq. (A-6)}$$

Da mesma forma que (A-1) e (A-2), as equações (A-5) e (A-6) podem ser rearranjadas de tal maneira que os elementos do vetor estado no ponto i^E podem ser expressos em termos daqueles do ponto $(i-1)^D$.

A equação (A-3) tomará a seguinte forma:

$$\begin{aligned} d_i^E &= d_{i-1}^D - \varphi_{i-1}^D \times l_i - (M_{i-1}^D + V_{i-1}^D \times l_i) \times \frac{l_i^2}{2EI} + V_{i-1}^D \times \frac{l_i^3}{3EI} \\ &= d_{i-1}^D - \varphi_{i-1}^D \times l_i - M_{i-1}^D \times \frac{l_i^2}{2EI} - V_{i-1}^D \times \frac{l_i^3}{2EI} + V_{i-1}^D \times \frac{l_i^3}{3EI} \\ &= d_{i-1}^D - \varphi_{i-1}^D \times l_i - M_{i-1}^D \times \frac{l_i^2}{2EI} - V_{i-1}^D \times \frac{l_i^3}{6EI} \quad \dots \text{Eq. (A-5-a)} \end{aligned}$$

Da mesma forma, equação (A-6) fica:

$$\begin{aligned} \varphi_i^E &= \varphi_{i-1}^D + (M_{i-1}^D + V_{i-1}^D \times l_i) \frac{l_i}{EI} - V_{i-1}^D \times \frac{l_i^2}{2EI} \\ &= \varphi_{i-1}^D + M_{i-1}^D \times \frac{l_i}{EI} + V_{i-1}^D \times \frac{l_i^2}{EI} - V_{i-1}^D \times \frac{l_i^2}{2EI} \\ &= \varphi_{i-1}^D + M_{i-1}^D \times \frac{l_i}{EI} + V_{i-1}^D \times \frac{l_i^2}{2EI} \quad \dots \text{Eq. (A-6-a)} \end{aligned}$$

Assim tem-se:

$$-d_i^E = -d_{i-1}^D + l_i \varphi_{i-1}^D + \frac{l_i^2}{2EI} M_{i-1}^D + \frac{l_i^3}{6EI} \times V_{i-1}^D \quad (\text{negativo para tornar todos os elementos da matriz positivos})$$

$$\varphi_i^E = \varphi_{i-1}^D + \frac{l_i}{EI} \times M_{i-1}^D + \frac{l_i^2}{2EI} V_{i-1}^D$$

$$M_i^E = M_{i-1}^D + l_i V_{i-1}^D$$

$$V_i^E = V_{i-1}^D$$

Em notação matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} -d \\ \varphi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^E = E \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{l_i^2}{2EI} & \frac{l_i^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{l_i}{EI} & \frac{l_i^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -d \\ \varphi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_{i-1}^D \quad \dots \text{Eq. (A-7)}$$

ou

$$\{S\}_i^E = [F]_i \{S\}_{i-1}^D \quad \dots \text{Eq. (A-7-a)}$$

onde $[F]_i$ é denominada i -ésima matriz de campo.

A matriz a ser obtida agora relacionando-se os vetores de estado (esquerdo e direito) com a massa, é denominada de matriz de ponto. Seja a fig. A-3 abaixo:

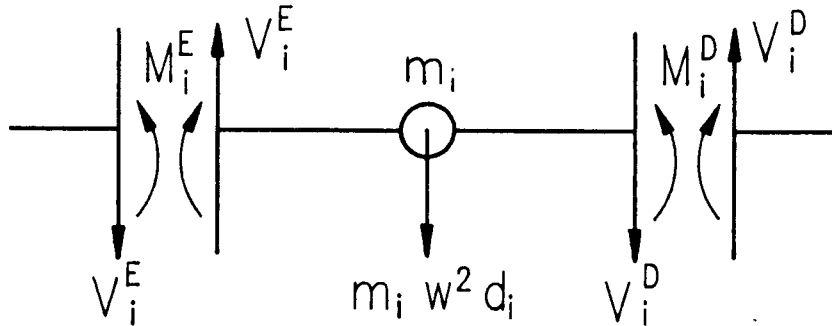


Fig. A-3 - Diagrama de corpo livre da massa m_i

Tomando-se as equações de equilíbrio, pode-se escrever que:

~~$$d_i^D = d_i^E \quad \varphi_i^D = -\varphi_i^E \quad M_i^D = M_i^E \quad \dots \text{Eq. (A-8)}$$~~

O deslocamento, a inclinação e o momento são contínuos no ponto i . A massa, contudo, pela introdução da força de inércia, causa uma descontinuidade no cisalhamento.

Assim:

$$V_i^D = V_i^E - m_i w^2 d_i \quad \dots \text{Eq. (A-9)}$$

Em notação matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} -d \\ \varphi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ mw^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -d \\ \varphi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^E \quad \dots \text{Eq. (A-10)}$$

ou

$$\{S\}_i^D = [P]_i \{S\}_i^E \quad \dots \text{Eq. (A-10-a)}$$

Onde $[P]_i$ = i-ésima matriz de ponto.

Tendo em vista que o trabalho em questão é relacionado com um rotor, pode-se representá-lo esquematicamente por uma viga biapoiada, discretizada, conforme Fig. A-4 abaixo:

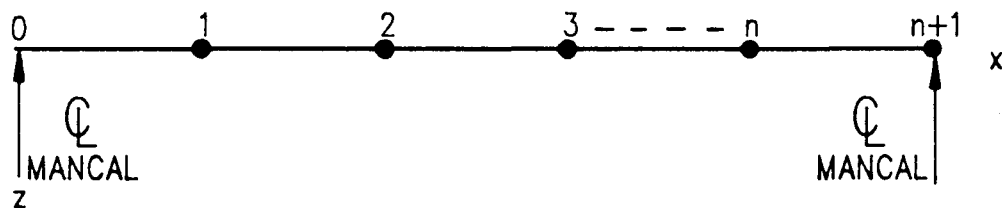


Fig. A-4 - Discretização de um eixo biapoiado

Os vetores de estado dos extremos são interrelacionados da seguinte forma:

$$\{S\}_{n+1} = [F]_{n+1} [P]_n [F]_n [P]_{n-1} \dots [F]_2 [P]_1 [F]_1 \{S\}_0 \quad \dots \text{Eq. (A-11)}$$

ou

$$\{S\}_{n+1} = [U] \{S\}_0 \quad \dots \text{Eq. (A-11-1)}$$

pois

$$\{S\}_1^E = [F]_1 \{S\}_0$$

$$\begin{aligned} \{S\}_1^D &= [P]_1 \{S\}_1^E \\ &= [P]_1 [F]_1 \{S\}_0 \end{aligned}$$

$$\{S\}_{n+1} = [U] \{S\}_0$$

A matriz $[U]$ é, portanto, uma matriz quadrada, de 4ª ordem, resultante da multiplicação das várias matrizes de campo e ponto do sistema. O índice n designa o número de G.L. . Assim, pode-se escrever a (A.11.1) como:

$$\begin{Bmatrix} -d \\ \varphi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & \mu_{34} \\ \mu_{41} & \mu_{42} & \mu_{43} & \mu_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -d \\ \varphi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_0 \quad \dots \text{Eq. (A-12)}$$

Expandindo o produto de matrizes, resulta:

$$-d_{n+1} = -\mu_{11}d_0 + \mu_{12}\varphi_0 + \mu_{13}M_0 + \mu_{14}V_0 \quad \dots \text{Eq. (A.13)}$$

$$\varphi_{n+1} = -\mu_{21}d_0 + \mu_{22}\varphi_0 + \mu_{23}M_0 + \mu_{24}V_0 \quad \dots \text{Eq. (A.14)}$$

$$M_{n+1} = -\mu_{31}d_0 + \mu_{32}\varphi_0 + \mu_{33}M_0 + \mu_{34}V_0 \quad \dots \text{Eq. (A.15)}$$

$$V_{n+1} = -\mu_{41}d_0 + \mu_{42}\varphi_0 + \mu_{43}M_0 + \mu_{44}V_0 \quad \dots \text{Eq. (A.16)}$$

Para o caso em questão (rotor biapoiado), as condições de contorno são:

$$d_{n+1} = 0 \quad M_{n+1} = 0 \quad d_0 = 0 \quad M_0 = 0$$

Substituindo-se estes valores nas equações acima, obtém-se:

$$\emptyset = \mu_{12} \varphi_0 + \mu_{14} V_0 \quad e \quad \dots \text{Eq. (A.17.a)}$$

$$\emptyset = \mu_{32} \varphi_0 + \mu_{34} V_0 \quad \dots \text{Eq. (A.17.b)}$$

Para uma solução não trivial destas equações, o determinante dos coeficientes deverá ser nulo.

Assim,

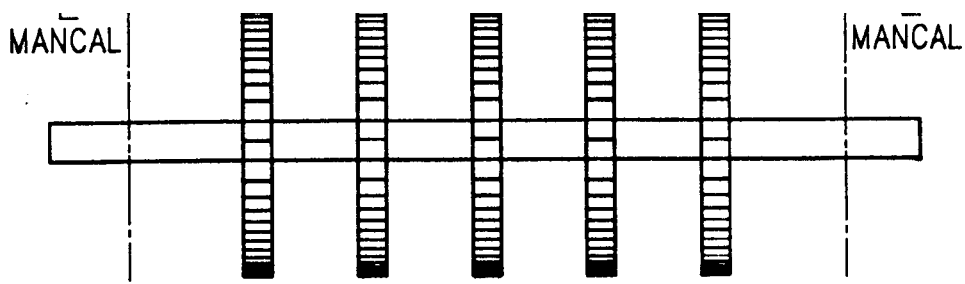
$$\begin{vmatrix} \mu_{12} & \mu_{14} \\ \mu_{32} & \mu_{34} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \text{Eq. (A.18)}$$

Como os elementos μ_{ij} são funções da frequência circular w , o determinante presta-se para o cálculo das frequências naturais circulares.

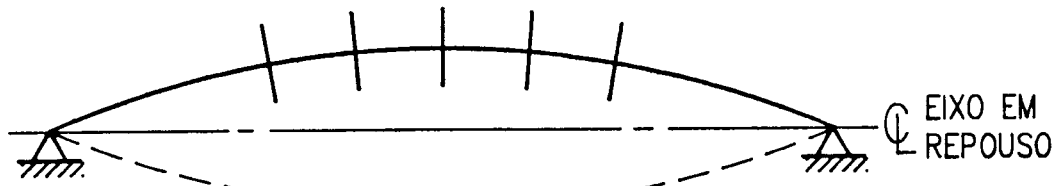
O número de G.L. definirá o grau da equação em w^2 . Antes de se passar para a descrição do método seguinte, necessário se faz a conceituação do fenômeno do "efeito giroscópico" que pode ocorrer na maioria dos casos de máquinas rotativas, em menor ou maior intensidade.

1.1 - Efeitos Giroscópicos (ou de Coriolis)

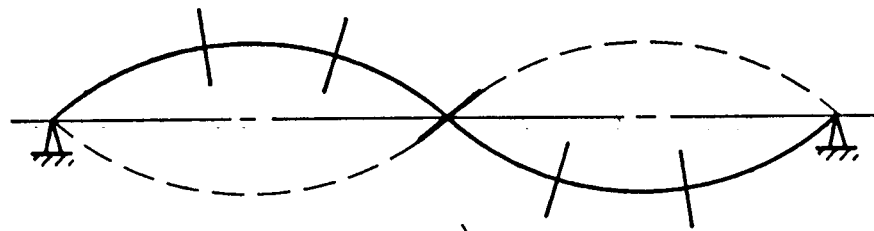
Rotores de turbinas, compressores, exaustores e bombas carregam um ou mais discos ao longo do eixo. Seja a seguinte representação esquemática de uma turbina e os respectivos modos de vibração (até o 3º):



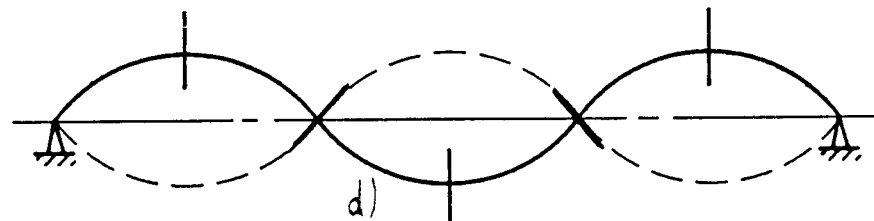
a)



b)



c)



d)

Fig.A-5 - a) Turbina esquemática com 5 discos
 b) 1º modo de vibração
 c) 2º modo de vibração
 d) 3º modo de vibração

Os discos da fig. A-5 acima poderão contribuir ou não para o surgimento do efeito giroscópico, dependendo de sua localização ao longo do rotor e do quão próxima está a rotação do rotor de um de seus modos de vibração. Se os discos estiverem localizados em pontos nodais, os efeitos giroscópicos serão predominantes, pois há uma precessão do disco

correspondendo às mudanças na inclinação, a qual é máxima nestes pontos. Nos antinodais, há uma rotação pura do disco e não há qualquer efeito giroscópico, devido à inexistência de inclinação. Assim, o disco III da Fig. A-5 contribuirá grandemente para o efeito giroscópico no 2º modo de vibração (ou próximo dele), sendo que no 1º e 3º modos há apenas rotação pura. Os discos I e V concorrerão para o aparecimento do fenômeno apenas no 1º modo.

Desta forma, os rotores em balanço serão mais susceptíveis a esses efeitos que os rotores biapoiados, havendo uma influência considerável no comportamento dinâmico do eixo. Nestas condições, o rotor (disco) não girará em seu próprio plano; conseqüentemente, as várias partículas do disco sofrerão os esforços da força centrífuga em diferentes planos, formando um conjugado (binário) de endireitamento do eixo, tendendo a retificá-lo.

A explicação física deste efeito é a seguinte (conforme [10]):

Seja o disco em balanço da Fig.A-6 abaixo:

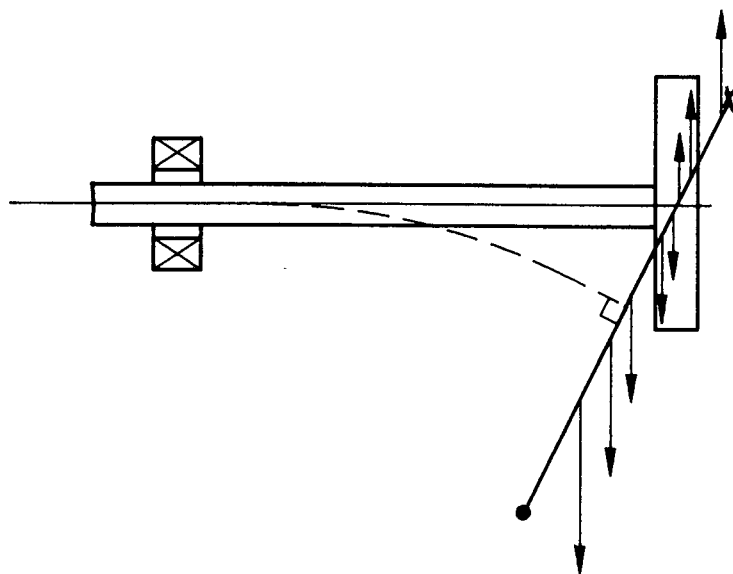


Fig. A-6 - Forças centrífugas em um rotor em balanço.

Admite-se que a velocidade angular da rotação excêntrica do centro do eixo seja igual à velocidade angular de rotação do eixo. Desta forma, o ponto (●) estará girando sempre externamente e o ponto (x) sempre internamente. Assim, as fibras em tensão do eixo sempre estarão tensionadas durante a rotação excêntrica, e as fibras comprimidas, sempre estarão submetidas à compressão. As setas indicam as forças centrífugas atuantes. Tais forças tendem a fletir o disco para um plano perpendicular à posição de equilíbrio do eixo, agindo como uma mola adicional, cujo efeito é o enrijecimento do eixo, aumentando-se, assim, as frequências naturais do sistema, ou seja, as velocidades críticas (caso dinâmico) terão valores superiores aos calculados considerando-se o eixo como uma viga em repouso (caso estático).

Conforme DEN HARTOG [10], a denominação "efeito giroscópico" é errônea, pois o giroscópico (vide Fig. A-7 abaixo) é um corpo que gira muito rápido, cujo eixo de rotação se move lentamente. No disco considerado anteriormente a rotação excêntrica do eixo (precessão), pode ser tão rápida quanto à do disco.

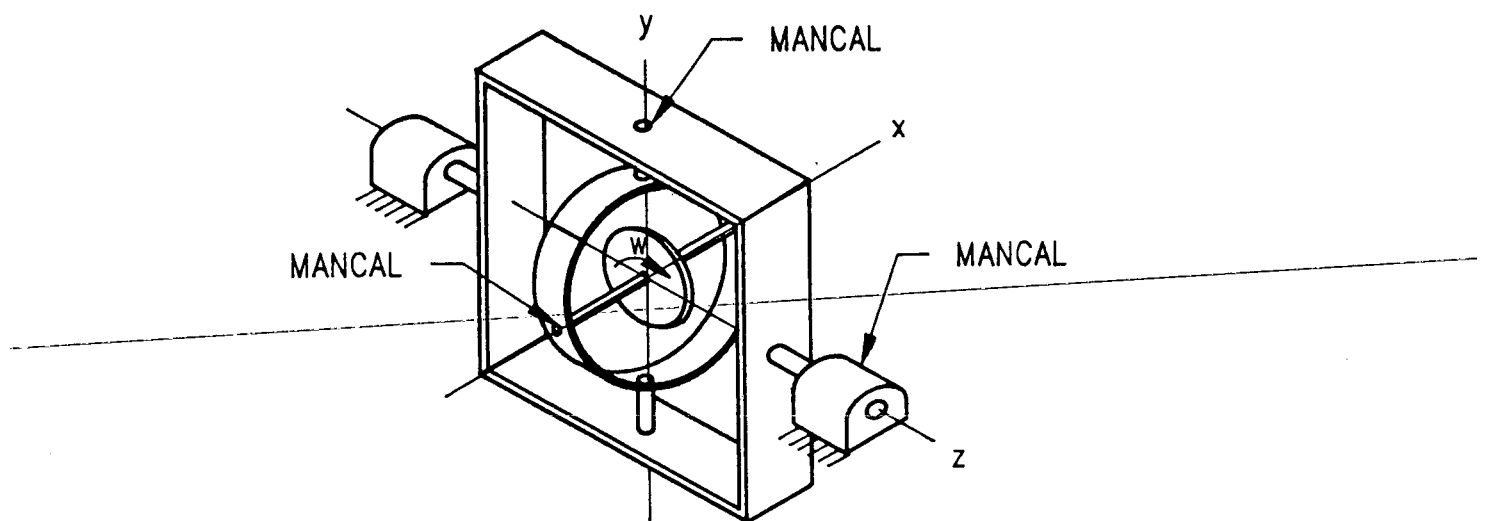


Fig. A-7 - Giroscópio

A análise feita para o disco em um eixo em balanço pode ser generalizada para os demais casos.

Assim, considerando-se o disco rotativo da Fig. A-8 , conforme GREEN [15] tem-se os parâmetros para análise:

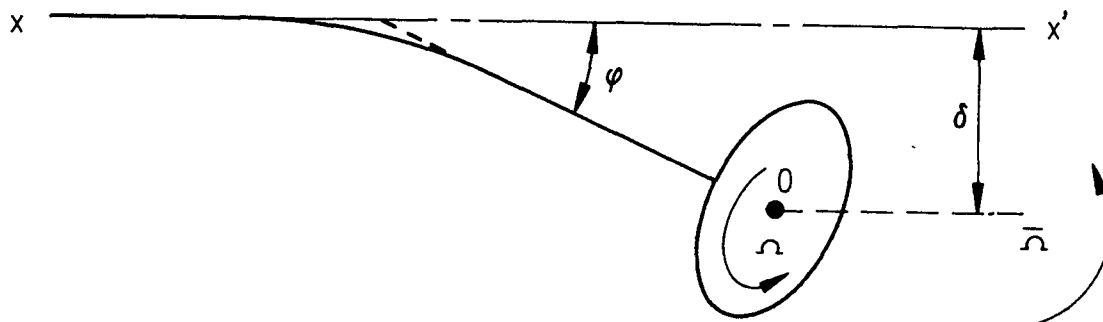


Fig. A-8 - Esquema de rotor em balanço.

Onde:

Ω = velocidade de rotação do eixo/disco

$\bar{\omega}$ = velocidade de rotação do ponto O em torno do eixo $x'x''$
(precessão)

δ = deflexão do eixo

φ = ângulo do eixo de rotação c/a linha de centro do eixo em repouso

As forças e momentos atuantes neste disco serão:

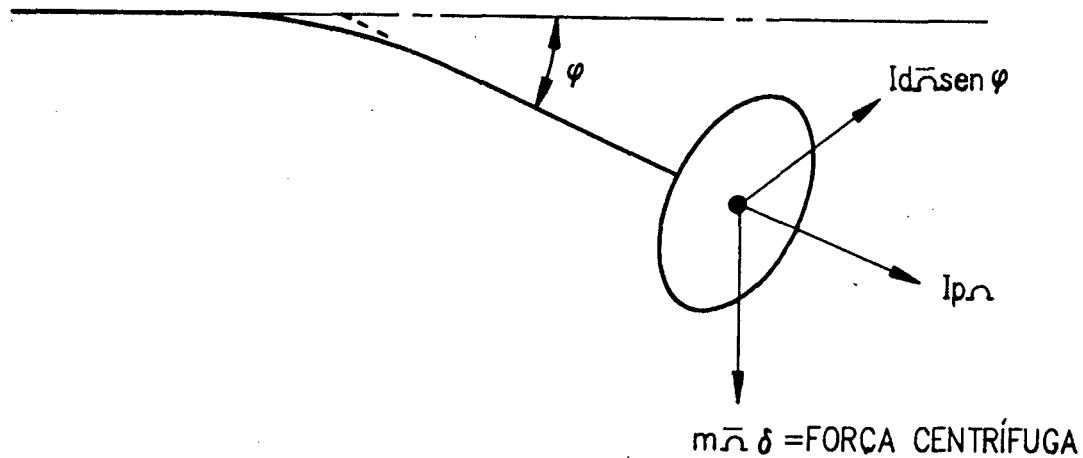


Fig. A-9 - Forças e momentos atuantes no disco.

Pelo princípio do momento angular, a taxa de variação do mesmo, considerando-se qualquer sistema movendo-se em torno de um determinado eixo fixo, é igual ao momento resultante das forças externas em torno do eixo.

O momento angular é representado, na Fig. A-9 acima, por 2 vetores

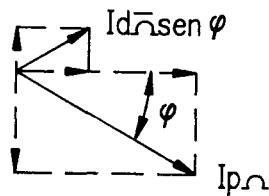
a) Um devido à rotação, normal ao disco, $I_p \Omega$, cuja direção é definida pela regra da mão direita;

b) o outro, devido à rotação excêntrica do eixo, no plano do disco

$$(I_d \bar{\Omega} \sin \varphi).$$

I_d e I_p são o momento de inércia diametral do disco e momento de inércia polar do disco, respectivamente.

As componentes horizontais destes vetores são constantes e não envolvem nenhum momento, conforme esquema a seguir:



As componentes verticais somam-se para formar um vetor de magnitude:

$$-(I_p \bar{\Omega} \sin \varphi - I_d \bar{\Omega} \sin \varphi \cos \varphi),$$

na direção para fora do disco e girando com a mesma velocidade excêntrica (de precessão). Como o ângulo é pequeno, $\sin \varphi \approx \varphi$ e $\cos \varphi \approx 1$.

Assim, o vetor fica:

$$(I_p \bar{\Omega} \varphi - I_d \bar{\Omega} \varphi)$$

O incremento no vetor é o comprimento do vetor em si multiplicado do por $\bar{\Omega} dt$, ou

$$(I_p \bar{\Omega} \varphi - I_d \bar{\Omega} \varphi) \bar{\Omega} dt,$$

e a razão de variação da quantidade de movimento angular (ou momento angular), com o tempo, é:

$$(I_p \bar{\Omega} \varphi - I_d \bar{\Omega} \varphi) \bar{\Omega}$$

Pela 1ª lei de NEWTON, este é o momento exercido pelo eixo sobre o disco e, pela ação e reação, o momento exercido pelo disco sobre o eixo. Em geral, $\Omega = \bar{\Omega}$:

colocando-se sob outra forma:

$I_d \varphi \left(\frac{I_p}{I_d} \frac{\Omega}{\Omega} - 1 \right) (\bar{\Omega})^2 \rightarrow$ o vetor momento angular resultante (M_R) será:

$$M_R = (I_p - I_d) \varphi \Omega^2$$

Assim, a força e momento resultantes que atuam no disco são:

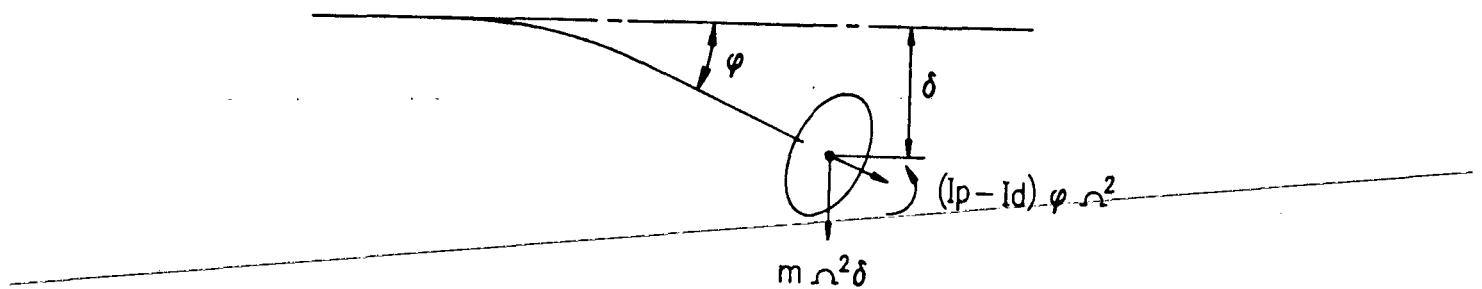


Fig. A-10 - Força e Momento Resultante no Disco.

$m\Omega^2\delta$ é a força centrífuga provocada pelo movimento de precessão do rotor.

$M_R = (I_p - I_d) \varphi \Omega^2$ é o momento que provoca o aumento de rigidez do eixo.

1-2 - Derivação da matriz de ponto considerando-se o efeito giroscópico

Considere-se o diagrama de corpo livre da massa m_i , conforme Fig. A-11, acrescentando-se o momento resultante que atua no disco, conforme visto anteriormente.

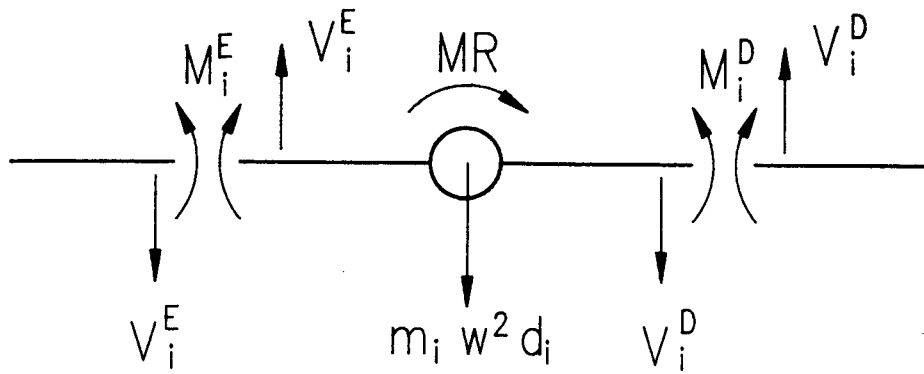


Fig. A-11 - Diagrama de corpo livre da massa m_i com efeito giroscópico.

As equações de equilíbrio ficarão:

$$V_i^D = V_i^E - m_i w^2 d_i \quad \dots \text{Eq. (A-19)}$$

$$d_i^D = d_i^E \quad \varphi_i^D = \varphi_i^E \quad M_i^D = M_i^E + (I_p - I_d) w^2 \varphi_i^E$$

ou

$$-d_i^D = -d_i^E$$

$$\varphi_i^D = \varphi_i^E$$

$$M_i^D = (I_p - I_d) w^2 \varphi_i^E + M_i^E$$

$$V_i^D = -m_i w^2 d_i^E + V_i^E$$

Em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} -d \\ \varphi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (I_p - I_d) w^2 & 1 & 0 \\ m w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -d \\ \varphi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^E \quad \text{Eq. (A-20)}$$

$$\text{ou } \{S\}_i^D = [m]_{iG} \cdot \{S\}_i^E$$

onde $[m]_{iG}$ é i -ésima matriz de ponto com efeito giroscópico.

1-3 - Derivação da Matriz de Ponto considerando-se suportes flexíveis:

Há certos casos em dinâmica de rotores onde os suportes dos mancais não devem ser considerados rígidos. Negligenciando-se este aspecto poder-se-á incorrer em erros grosseiros, principalmente quando os mancais forem de deslizamento, onde o filme de óleo atua como elemento elástico.

Como será visto posteriormente, o efeito da flexibilidade dos suportes é de reduzir as frequências naturais do conjunto. A representação e derivação da matriz de ponto será vista a seguir.

Seja o esquema abaixo:

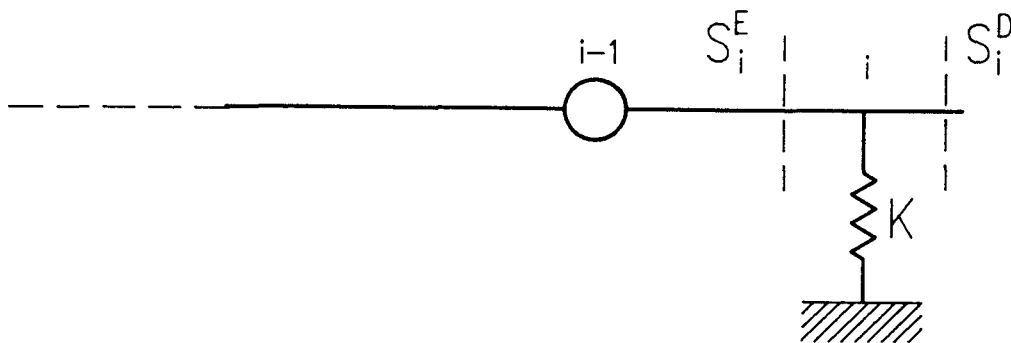


Fig. A-12 - Eixo em suporte elástico

As forças e momentos atuantes são:

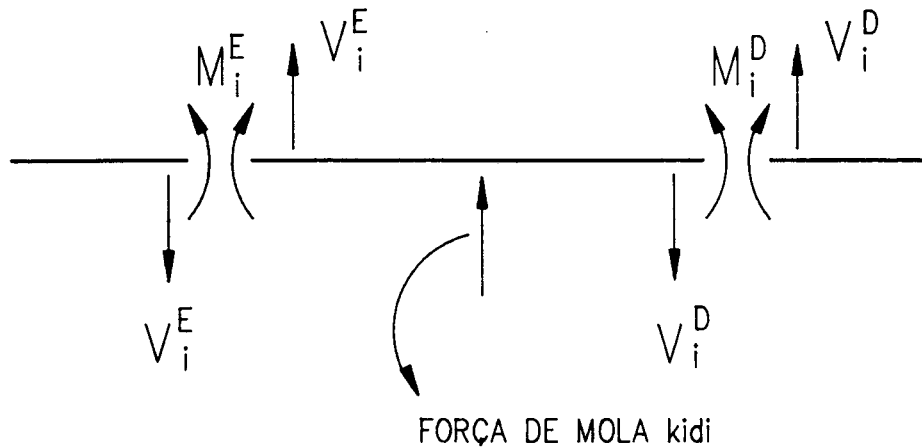


Fig. A-13 - Diagrama de corpo livre do suporte elástico.

A deflexão, inclinação e momento são contínuos sobre o ponto i , mas, levando-se em conta a força de mola restauradora, uma descontinuidade ocorre na força de cisalhamento. Se a mola deflete de uma quantidade d_i , então a força restauradora é $k_i d_i$, onde k_i é a rigidez da mola. Assim, as relações dos elementos do vetor de estado do lado esquerdo e direito do suporte são:

$$-d_i^D = -d_i^E$$

$$\varphi_i^D = \varphi_i^E$$

$$M_i^D = M_i^E$$

$$V_i^D = k_i d_i^E + V_i^E$$

... Eq. (A-21)

Em notação matricial:

$$\begin{Bmatrix} -d_j \\ \varphi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \cdot \begin{Bmatrix} -d_j \\ \varphi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^E \quad \text{Eq. (A-22)}$$

ou

$$[S]_i^D = [P]_i [S]_i^E \quad \dots \text{Eq. (A-23)}$$

2 - Método do Determinante Característico (ou da Matriz de Flexibilidade):

O interesse é a solução do problema das vibrações livres (baseado em [11]):

$$[m] (\ddot{q}) + [K] (q) = \{0\} \quad \dots \text{Eq. (A-24)}$$

sendo $[m]$ e $[K]$ matrizes de inércia e rigidez, respectivamente, positivas definidas. Em particular, deseja-se explorar a possibilidade de haver soluções separáveis em tempo e sob a forma

$$q_j(t) = \mu_j f(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots \text{Eq. (A-25)}$$

o que implica que a relação de amplitudes de 2 coordenadas durante o movimento não depende do tempo. Fisicamente, isto significa que todas as coordenadas apresentam movimentos síncronos e que a configuração do sistema não muda sua forma durante o movimento, mas apenas suas amplitudes. Introduzindo (A-25) em (A-24) obtém-se:

$$[m] (\mu) \ddot{f}(t) + [K] (\mu) f(t) = \{0\} \quad \dots \text{Eq. (A-26)}$$

o que implica n equações do tipo

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \mu_j \ddot{f}(t) + \sum_{j=1}^n K_{ij} \mu_j f(t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots \text{Eq. (A-27)}$$

A dependência do tempo pode ser separada como segue:

$$\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n K_{ij} \mu_j}{\sum_{j=1}^n M_{ij} \mu_j} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots \text{Eq. (A-28)}$$

Vê-se que o 2º membro desta equação é independente do tempo e, devido ao fato de que o 1º membro é independente do índice i, ambos os lados devem ser iguais a uma constante. Fazendo-se esta constante positiva e de valor w^2 , tal que a equação (A-28) conduza às relações:

$$\ddot{f}(t) + w^2 f(t) = 0 \quad \dots \text{Eq. (A-29)}$$

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - w^2 m_{ij}) \mu_j = 0 \quad \dots \text{Eq. (A-30)}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

A solução de (A-29) é:

$$f(t) = \cos (wt - \varphi) \quad \dots \text{Eq. (A-31)}$$

e conclui-se que um movimento no qual todas as coordenadas formam um movimento harmônico com frequência idêntica e idêntico ângulo de fase φ , é possível. A questão permanece em se determinar se a frequência pode tomar qualquer valor. A resposta a esta questão conduz às equações (A-30), as quais constituem um conjunto de n equações homogêneas lineares com incógnitas μ_j . O problema da determinação da constante w^2 para a qual um conjunto de equações homogêneas tem uma solução não trivial, é

conhecido como problema do valor característico ou de autovalores. O caso trivial no qual todos μ_j são iguais a zero deve ser ignorado, pois representa o caso do equilíbrio estático. O problema de autovetores da equação (A-30) pode ser escrito sob a forma matricial:

$$[K](\mu) = \omega^2 [m](\mu) \quad \dots \text{Eq. (A-32)}$$

Uma solução não trivial do conjunto de equações (A-32) é possível apenas se o determinante for nulo:

$$[K](\mu) - \omega^2 [m](\mu) = 0$$

$$([K] - \omega^2 [m])(\mu) = 0$$

$$\therefore \Delta = |[K] - \omega^2 [m]| = 0 \quad \dots \text{Eq. (A-33)}$$

onde Δ é chamado de determinante característico. Expandindo o determinante acima, obtém-se uma equação algébrica de n-ésima ordem em ω^2 , a qual é conhecida como equação característica ou equação da frequência. As n raízes da equação característica são chamadas de valores característicos ou autovalores.

Desde que $[K]$ e $[m]$ sejam simétricas e positivas definidas, pode-se mostrar que as raízes da equação característica são reais e positivas. As raízes são denotadas por: $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$. A raiz quadrada destes valores são as frequências naturais ω_j do sistema. A mais baixa frequência ω_1 , é denominada frequência fundamental. Muitas vezes todos os valores de ω_j são distintos, embora seja bastante possível que 2 ou mais frequências naturais possuam o mesmo valor. Incluindo as raízes caracte-

rísticas em (A-32), obtêm-se n equações do tipo:

$$[K](\mu)_r = \omega_r^2 [m](\mu)_r, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad \dots \text{Eq. (A-34)}$$

Para cada ω_r^2 a equação acima tem uma solução de valor não trivial, denominado vetor característico ou autovetor.

Há um número de métodos pelos quais pode-se obter a solução do problema de autovalores. O método a ser adotado aqui é baseado na solução da equação característica.

Denotando $\frac{1}{\omega^2} = \lambda$

e escrevendo a equação representativa do problema de autovalores, tem-se:

$$[\lambda [K] - [m]](\mu) = (0) \quad \dots \text{Eq. (A-35)}$$

Pré-multiplicando Eq.(A-35) por $[K]^{-1} = [\alpha]$ e introduzindo a notação:

$$[K]^{-1}[m] = [\alpha][m] = [D]$$

onde $[\alpha]$ é a matriz de flexibilidade e $[D]$ é a matriz dinâmica.

Assim, Eq.(A-35) pode ser escrita:

$$[\lambda \delta_{ij} - D_{ij}](\mu) = (0) \quad \dots \text{Eq. (A-36)}$$

onde δ_{ij} é o delta de KRONECKER.

O conjunto de equações representadas por Eq.(A-36) terá uma solução não trivial se:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda \delta_{ij} - D_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

onde $\Delta(\lambda)$ é uma expressão do n -ésimo grau em λ

Como comentado anteriormente, há n raízes reais e positivas λ_r , as quais são denominadas valores característicos ou autovalores de [D], relacionadas às frequências naturais do sistema por $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$.

3 - Método de Iteração Matricial (ou Matriz de Varrimento ou Método de Stodola):

Conforme Meirovitch [11] e Bathe [29], este método baseia-se na suposição de que as frequências naturais são distintas:

$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$. A taxa de convergência é profundamente alterada se 2 frequências naturais tiverem valores muito próximos.

A equação representativa do problema de autovalores

~~$\lambda[K]\{\mu\} - [m]\{\mu\} = \{0\}$~~ , pode ser escrita sob a forma

$$[D]\{\mu\} = \frac{1}{\omega^2} \{\mu\} \quad \dots \text{Eq. (A-37)}$$

a qual é satisfeita por cada autovetor $\{\mu^{(r)}\}$ que corresponde à frequência natural ω_r .

A pré-multiplicação por um vetor arbitrário $\{\mu\}_1$ pela matriz [D] representa uma transformação linear que transforma o vetor tentativa $\{\mu\}_1$ em um outro vetor $\{\mu\}_2$. Se o vetor $\{\mu\}_1$ é um dos autovetores, por exemplo $\{\mu^{(r)}\}$, a pré-multiplicação por [D] resulta em um vetor $\{\mu\}_2$, o qual é proporcional a $\{\mu^{(r)}\}$. Se o vetor tentativa $\{\mu\}_1$ não for um autovetor, o vetor resultante $\{\mu\}_2$ pode ser usado como um vetor tentativa

melhorado. Uma seqüência de tais transformações lineares eventualmente conduz a um vetor o qual, quando pré-multiplicado por [D], transforma em um vetor proporcional a si mesmo. Neste ponto, a convergência termina e o vetor é simplesmente o primeiro autovetor ($\mu^{(1)}$) e a constante de proporcionalidade é w_1^{-2} .

Para um dado grau de precisão, há 2 fatores que afetam o número de iterações necessárias. O primeiro é quão próximo o vetor arbitrário $(\mu)_1$ se parecer com o primeiro modo.

O segundo fator depende inteiramente do sistema, e é relacionado nad com os valores relativos de w_1 e w_2 . Quanto maior for w_2 comparativamente a w_1 , ~~os modos estarão igualmente separados~~ e um pequeno número de iterações será necessário.

O primeiro fator é justificado utilizando-se o "teorema da da expansão". Pelo teorema, os n autovetores $(\mu^{(r)})$ de um sistema, ortogonais, podem ser utilizados como uma base para a decomposição de qualquer vetor (μ) n-dimensional arbitrário, representando um possível movimento do sistema. Assim:

$$(\mu)_1 = C_1 (\mu^{(1)}) + C_2 (\mu^{(2)}) + \dots + C_n (\mu^{(n)}) = \sum_{r=1}^n C_r (\mu^{(r)})_1$$

... Eq. (A-38)

Desta forma, matematicamente isto é equivalente a perguntar quão grande o coeficiente C_1 é, comparado com os outros $n-1$ coeficientes.

Qualquer conjunto de números pode ser escolhido para o vetor tentativa. Mesmo que os números forem tais que o coeficiente C_1 seja quase zero, a convergência será encontrada, embora possa levar mais tempo.

O método descrito acima fornece o primeiro modo ou o fundamental. A seguir ver-se-á como são obtidos os demais modos. Qualquer vetor tentativa arbitrário pré-multiplicado por $[D]$ conduziria novamente ao primeiro modo, sendo que deveremos modificar o procedimento para se obter o 2º modo. Com esta finalidade deve-se insistir que o vetor tentativa para o 2º modo seja independente do 1º autovetor. Isto significa que o vetor tentativa para o 2º modo deva ser ortogonal ao autovetor $(\mu^{(1)})$. A relação de ortogonalidade é expressa por:

$$(\mu)^T [m] (\mu^{(1)}) = 0 \quad \dots \text{Eq. (A-39)}$$

Introduzindo a notação $m^{(r)} = [m](\mu^{(r)})$, $r = 1, 2, \dots, n$,

então a relação de ortogonalidade toma a forma da equação de vínculos:

$$\mu_1 m_1^{(1)} + \mu_2 m_2^{(1)} + \dots + \mu_n m_n^{(1)} = 0 \quad \dots \text{Eq. (A-40)}$$

Esta equação pode ser resolvida para uma das variáveis, por exemplo μ_1 , em termos das $n-1$ variáveis remanescentes.

Fazendo:

$$\frac{m_j^{(1)}}{m_1^{(1)}} = m_{1j}^{(1)}, \quad \text{obtem-se}$$

$$\mu_1 = -m_{12}^{(1)} \mu_2 - m_{13}^{(1)} \mu_3 - \dots - m_{1n}^{(1)} \mu_n \quad \dots \text{Eq. (A-41)}$$

e pode-se escolher as $n-1$ variáveis arbitrariamente,

$$\mu_i = \mu_j \quad i = 2, 3, \dots, n \quad \dots \text{Eq. (A-42)}$$

Com isto, constrói-se a matriz de vínculos

$$[S^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & -m_{12}^{(1)} & -m_{13}^{(1)} & \dots & -m_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \dots \text{Eq. (A-43)}$$

denominada de matriz de varrimento, a qual permite escrever (A-41) e (A-42) na forma compacta:

$$(\mu)_C^{(2)} = [S^{(1)}] (\mu) \quad \dots \text{Eq. (A-44)}$$

Onde (μ) indica um vetor arbitrário e $(\mu)_C^{(2)}$ denota um vetor vinculado-ortogonal ao autovetor $(\mu^{(1)})$. A cada estágio de iteração para o 2º modo deve-se estar seguro de que o 1º modo esteja suprimido. Isto conduz à iteração matricial para o 2º modo, na forma

$$[D](\mu)_C^{(2)} = [D][S^{(1)}](\mu) \quad \dots \text{Eq. (A-45)}$$

Assim é conveniente planejar uma nova matriz dinâmica,

$$[D^{(2)}] = [D][S^{(1)}] \quad \dots \text{Eq. (A-46)}$$

a qual tem todos os elementos na primeira coluna nulos. A matriz $[D^{(2)}]$ conduz à convergência do 2º modo da mesma maneira que $[D]$ dá origem à convergência do 1º modo. O problema de autovalores agora assume a forma:

$$[D^{(2)}](\mu) = \frac{1}{\omega^2} (\mu) \quad \dots \text{Eq. (A-47)}$$

e a iteração para o 2º modo segue o modelo anterior, para o 1º modo.

Para se obter o 3º modo, deve-se insistir que tanto o 1º quanto o 2º modos estejam suprimidos dos vetores tentativas, desde que o vetor tentativa deva ser ortogonal ao 1º e 2º modos, e as condições de ortogonalidade sejam

$$\begin{aligned} (\mu)^T [m] (\mu^{(1)}) &= 0 \\ (\mu)^T [m] (\mu^{(2)}) &= 0 \end{aligned} \quad \dots \text{Eq. (A-48)}$$

as quais representam 2 equações de vínculos simultâneas nas incógnitas $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Resolvendo para μ_1 e μ_2 , em termos das $n-2$ incógnitas restantes e fazendo arbitrariamente $\mu_i = \mu_j$, para $i = 3, 4, \dots, n$, pode-se construir uma nova matriz de varrimento $[S^{(2)}]$ na forma:

$$[S^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_{23}^{(2)} & m_{24}^{(2)} & \dots & m_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & -m_{13}^{(2)} & -m_{14}^{(2)} & \dots & -m_{1n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Onde
$$m_{ij}^{(2)} = \frac{m_i^{(2)} m_j^{(1)} - m_i^{(1)} m_j^{(2)}}{m_1^{(2)} m_2^{(1)} - m_1^{(1)} m_2^{(2)}} \quad \begin{matrix} i=1,2; \\ j=3,4,\dots,n \end{matrix} \quad \dots \text{Eq. (A-49)}$$

Correspondentemente, obtém-se uma terceira matriz dinâmica,

$$[D^{(3)}] = [D] [S^{(2)}], \quad \dots \text{Eq. (A-50)}$$

havendo elementos nulos na 1ª e 2ª colunas; assim, o problema de autovalores

$$[D^{(3)}](\mu) = \frac{1}{\omega^2} (\mu)$$

... Eq.(A-51)

conduz ao 3º modo.

O procedimento segue o mesmo modelo para os modos restantes, os quais são obtidos em ordem ascendente. Este é um procedimento numérico, assim, perde-se precisão nos modos mais elevados.

3.1 - Considerações adicionais sobre Efeitos Giroscópicos:

Seja o problema de autovalores:

$$[D](\mu) = \lambda(\mu), \text{ como visto anteriormente.}$$

$[D]$ é a matriz dinâmica formada pelo produto da matriz de flexibilidade $[\alpha] = [K]^{-1}$ pela matriz de inércia $[m]$. Seja ainda o esquema de um eixo com rotor, sendo apenas a massa deste considerada:

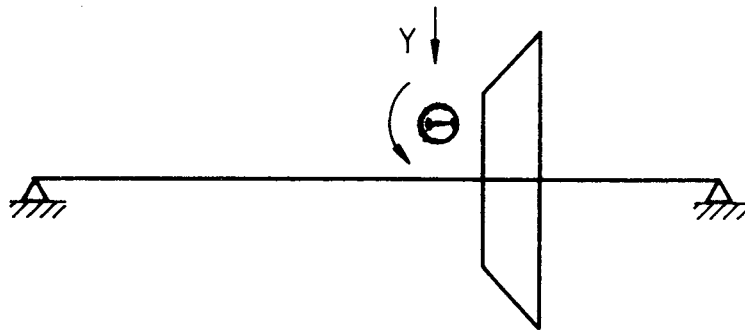


Fig. A-14 - Esquema de um sistema eixo/rotor

Y e θ são as duas coordenadas necessárias para descrever o movimento do eixo. Portanto, as equações deste último são:

$$Y = \alpha_{11}mw^2Y - \alpha_{12}w(I_p\Omega - I_d w) \theta \quad \dots \text{Eq. (A-52)}$$

$$\theta = \alpha_{21}mw^2Y - \alpha_{22}w(I_p\Omega - I_d w) \theta \quad \dots \text{Eq. (A-53)}$$

Onde:

m = massa do disco

$I_p\Omega$ = Quantidade de movimento angular

Ω = velocidade angular (rápida) do disco

w = velocidade angular (lenta) do disco (precessão)

I_p = momento polar de inércia do disco

I_d = momento de inércia diametral do disco (2º momento de área)

α_{11} = deflexão Y no disco devido a uma força de 1N

α_{12} = ângulo θ no disco devido à força de 1N

~~α_{21} = deflexão Y no disco devido ao momento de 1Nxm~~

~~α_{22} = ângulo θ no disco devido ao momento de 1Nxm~~

Assim, a matriz de flexibilidade é obtida mediante a utilização das equações da linha elástica do eixo, desenvolvidas na Resistência dos Materiais. Seus elementos denominam-se "coeficientes de influência".

O fator $w(I_p\Omega - I_p w)$ foi desenvolvido no item 1-1, relacionado ao efeito giroscópico. Nas equações acima (A-52) e (A-53) este fator tem o sinal negativo, simbolizando a reação efetuada pelo disco sobre o eixo.

Portanto, a matriz dinâmica obtida para o eixo em questão é:

$$D[\omega] = [[\alpha]\omega^2[m] - [I]]$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m\omega^2 & 0 \\ 0 & -I_d\omega^2 \left(\frac{I_p}{I_d} \frac{\Omega}{\omega} - 1 \right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este raciocínio pode ser generalizado para quaisquer números de

G.L.

É digno de nota que a teoria do efeito giroscópico exposto até o presente vale não só para o caso de "precessão síncrona" isto é, quando $\omega = \Omega$, como também para valores diferentes de Ω/ω . Segundo Hartog [10], foram observados casos de precessão assíncrona, positiva ou retrógrada. Portanto, um eixo sujeito a efeitos giroscópicos pode apresentar 4 diferentes frequências naturais, relacionadas com estes efeitos.

4 - Método de Dunkerley

Dunkerley desenvolveu um método aproximado para a determinação da frequência natural fundamental de um sistema, sendo este constituído de um eixo com vários discos (sistemas multirotor). Este método fornece bons resultados desde que negligencie-se os efeitos giroscópicos e de amortecimento, e ainda as frequências dos harmônicos sejam bem afastadas da fundamental [1].

Para o desenvolvimento do método, seja o sistema da Fig. A-15

a seguir:

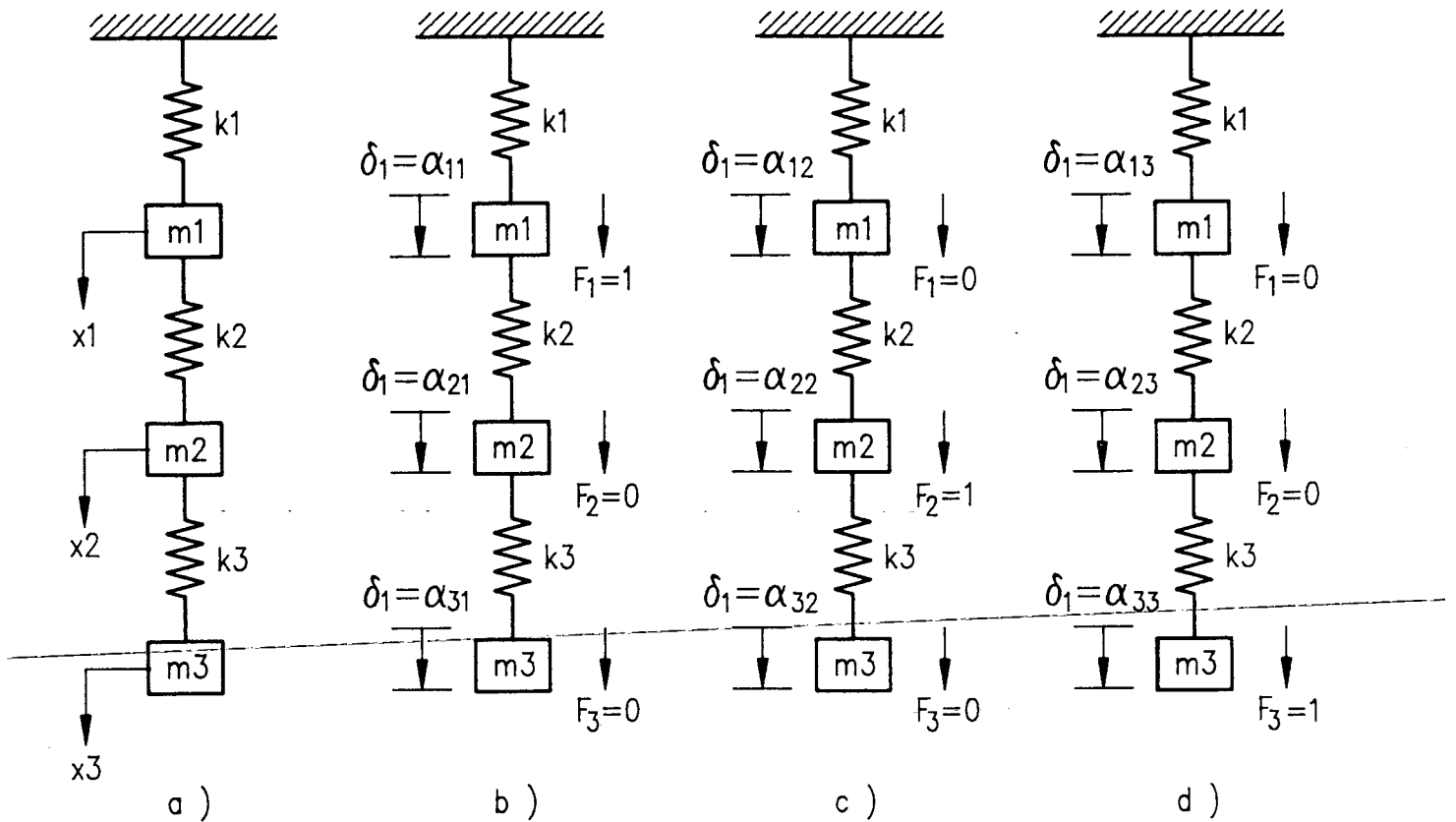


Fig. A-15 - Sistema com 3 G.L.

Sabe-se que $\{F\} = [K]\{X\}$ e $[K]^{-1} = [\alpha]$.:

$\{F\}[\alpha] = \{x\} \rightarrow$ para uma força unitária os coeficientes α_{ij}

serão, numericamente, iguais aos deslocamentos.

Assumindo-se movimento harmônico durante as vibrações livres,

pode-se derivar a equação da frequência:

$$\left| [\alpha][m] - \frac{1}{\omega^2} [I] \right| = \begin{vmatrix} (\alpha_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2}) & \alpha_{12}m_2 & \alpha_{13}m_3 \\ \alpha_{21}m_1 & (\alpha_{22}m_2 - \frac{1}{\omega^2}) & \alpha_{23}m_3 \\ \alpha_{31}m_1 & \alpha_{32}m_2 & (\alpha_{33}m_3 - \frac{1}{\omega^2}) \end{vmatrix} = 0$$

... Eq.(A-54)

Expandindo-se a equação do determinante, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\omega^2} \right)^3 - (\alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2 + \alpha_{33}m_3) \left(\frac{1}{\omega^2} \right)^2 + (\alpha_{11}\alpha_{22}m_1m_2 + \\ & \alpha_{22}\alpha_{33}m_2m_3 + \alpha_{33}\alpha_{11}m_3m_1 - \alpha_{12}\alpha_{21}m_1m_2 - \alpha_{23}\alpha_{32}m_2m_3 - \alpha_{31}\alpha_{13}m_3m_1) \times \\ & \left(\frac{1}{\omega^2} \right) - m_1m_2m_3 \times (\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{21}\alpha_{13}\alpha_{32} - \\ & \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{13}\alpha_{31} - \alpha_{33}\alpha_{12}\alpha_{21}) = 0 \end{aligned} \quad \dots \text{Eq.(A-55)}$$

Esta é uma equação polinomial do 3º grau em $\left(\frac{1}{\omega^2} \right)$.

Fazendo-se as raízes desta equação como sendo $\frac{1}{\omega_1^2}$, $\frac{1}{\omega_2^2}$, $\frac{1}{\omega_3^2}$.

Da álgebra, conhece-se que a soma das raízes de um polinômio cúbico deverá ser igual ao negativo dos coeficientes de seu 2º termo, ou seja:

$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} = \alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2 + \alpha_{33}m_3 \quad \dots \text{Eq.(A-56)}$$

Esta equação pode ser generalizada para um sistema de n graus de liberdade:

$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2} = \alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2 + \dots + \alpha_{nn}m_n \quad \dots \text{Eq.(A-57)}$$

Na maioria dos casos, as frequências mais altas $w_2, w_3 \dots, w_n$, são consideravelmente maiores que a frequência fundamental w_1 ; assim:

$$\frac{1}{w_i^2} \ll \frac{1}{w_1^2}, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad \dots \text{Eq. (A-58)}$$

Tendo em vista a equação acima, a Eq. (A-57) pode ser escrita aproximadamente como:

$$\frac{1}{w_1^2} \simeq \alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2 + \dots + \alpha_{nn}m_n \quad \dots \text{Eq. (A-59)}$$

Esta equação é conhecida como "Fórmula de Dunkerley". A frequência fundamental dada por esta fórmula será sempre menor que o valor exato. Portanto é um valor limite inferior da frequência fundamental real.

Outra maneira de se apresentar esta equação é

$$\frac{1}{w_1^2} \simeq \frac{1}{w_{1n}^2} + \frac{1}{w_{2n}^2} + \dots + \frac{1}{w_{nn}^2} \quad n = 1, 2 \dots \quad \dots \text{Eq. (A-60)}$$

5 - Método de Rayleigh

Este método, desenvolvido por Lord Rayleigh, é aplicável, conforme Hartog [10], sob 2 condições:

- a) O sistema deverá ser conservativo (sem dissipação de energia)
- b) A energia potencial máxima do sistema é igual à sua energia cinética máxima.

Um sistema discreto possui tantos modos de vibração quantos forem os graus de liberdade do mesmo.

Necessário se faz assumir uma determinada forma de modo de vibração (ou vetor modal) para se estimar as frequências naturais. Geralmente este método é usado para se determinar a frequência fundamental, pois os vetores modais para as frequências mais altas são mais difíceis de serem estimadas. Se um modo assumido for exato, a frequência calculada será exata. Não sendo exata, isto é equivalente à aplicação de vínculos adicionais ao sistema vibratório. Assim, a frequência calculada geralmente é maior que o valor verdadeiro. Portanto, este método é aplicável em primeira instância para estipular-se um limite superior para a frequência fundamental.

Em geral, as deflexões do sistema dinâmico são estimadas a partir das deflexões estáticas. Tal suposição contudo pode não ser automática. Para a dedução do método, considere-se um sistema consistindo de um eixo com 3 discos:

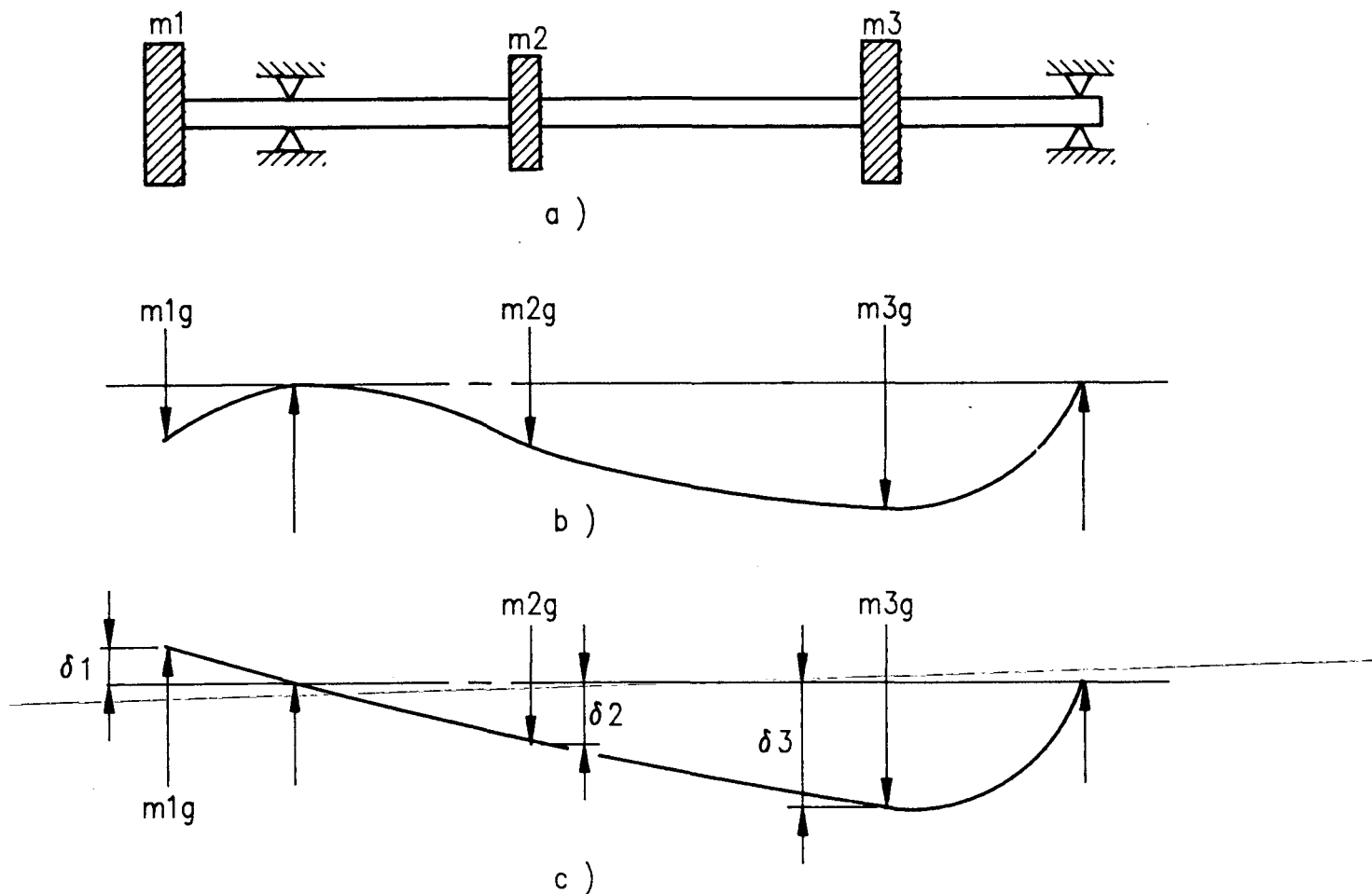


Fig. A-16 - a) Sistema de rotor com 3 discos
 b) Curva de deflexão estática do eixo
 c) Curva de deflexão assumida do eixo

Assume-se que o eixo tem massa desprezível. A energia potencial do sistema é a energia de deformação do eixo fletido, cujo trabalho é feito pelas cargas estáticas. A energia potencial máxima (U_{\max}) é:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} (m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + m_3\delta_3)g \quad \dots \text{Eq. (A-61)}$$

Onde $m_j g$ é a carga estática devido ao rotor e δ_j a deflexão do rotor. Para oscilações harmônicas, a energia cinética máxima (T_{\max}) devido aos discos é:

$$T_{\max} = \frac{w^2}{2} (m_1 \delta_1^2 + m_2 \delta_2^2 + m_3 \delta_3^2) \quad \dots \text{Eq. (A-62)}$$

Onde w é a frequência de oscilação.

Igualando-se as expressões de energia U_{\max} e T_{\max} , e simplificando tem-se:

$$w^2 = \frac{g(m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2 + m_3 \delta_3)}{(m_1 \delta_1^2 + m_2 \delta_2^2 + m_3 \delta_3^2)} \quad \dots \text{Eq. (A-63)}$$

Generalizando:

$$w^2 = g \frac{\sum_{i=1}^n m_i \delta_i}{\sum_{i=1}^n m_i \delta_i^2} \quad \dots \text{Eq. (A-64)}$$

6 - Método dos Elementos Finitos:

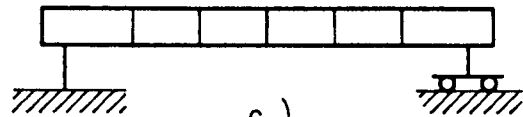
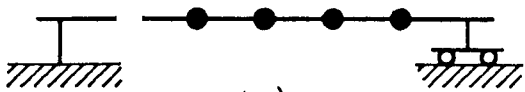
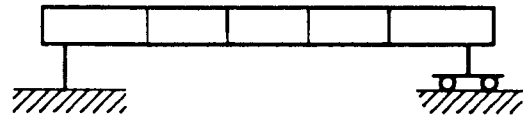
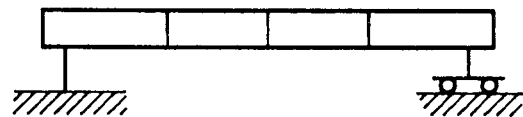
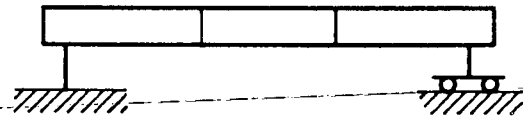
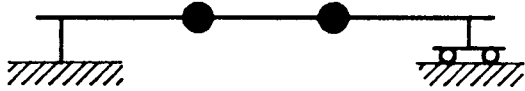
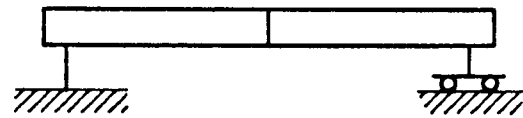
O objetivo deste tópico é explicar, em linhas gerais, a aplicação do Método dos Elementos Finitos para a determinação das frequências naturais. É citado apenas com a finalidade de informar sobre a crescente aceitação do método, principalmente quando envolve partes do sistema que apresentam certo grau de complexidade em sua configuração. Assim sendo, conclui-se que o número de G.L. a ser adotado é bem superior ao adotado em outros métodos, sendo necessária a utilização de computador digital ou um micro-computador de certo porte.

A aplicação dos Elementos Finitos em Dinâmica de Rotores foi introduzida na década de 60 por Archer, conforme referência bibliográfica de Nelson e McVaugh [26]. Desde então, sua aplicação vem sendo implementada com grande sucesso. A principal vantagem do Método dos Elementos Finitos é que pode ser utilizado para se calcular as frequências naturais e os modos de vibração de qualquer sistema linear elástico. Para estruturas tipo viga, o método é similar ao de parâmetros discretos, pois a estrutura é considerada como um número de elementos de massa de comprimento finito, conectados por molas desprovidas de massa. O número infinito de G.L. associado com uma estrutura contínua pode desta forma ser reduzida para um número finito de G.L., os quais podem ser examinados individualmente. Assim, o método consiste em se dividir a estrutura em uma série de elementos por linhas imaginárias e conectando estes elementos apenas na intersecção destas linhas. Tais intersecções são chamadas de nós, termo este inapropriado, pois poderá confundir com as regiões de vibração zero, de mesmo nome, em análise de vibrações. A versatilidade do método também se faz notar, haja vista que além das frequências naturais com os respectivos modos, pode-se obter também os valores de tensão e deformação em cada nó, onde as massas são concentradas. Isto é conseguido mediante formulação adequada do problema, lidando-se com elementos tridimensionais. Da mesma forma que outros métodos, sua precisão é muito grande nos modos mais

baixos e aumenta conforme cresce o número de G.L. A figura A-17 abaixo mostra a comparação entre a representação de uma viga biapoçada, por parâmetros discretos e por elementos finitos:



a) VIGA BIAPOIADA



b)

c)

Fig. A-17 b) Representação discreta
c) Representação por elementos finitos.

O método é desenvolvido baseado na aplicação das equações de Lagrange a modelos contínuos, passando pelo Método dos Modos Assumidos, conforme Craig [27]

6.1 - Derivação das Matrizes de Massa e de Rigidez:

É assumido que o deslocamento de um sistema contínuo tem a forma:

$$\mu(x,t) = \varphi(x)\mu(t) \quad \dots \text{Eq. (A-65)}$$

onde: $\mu(x,t)$ é o deslocamento como função dependente do tempo

$\varphi(x)$ é qualquer função que descreva um movimento

~~$\mu(t)$ é o deslocamento generalizado~~

Tal suposição produz um modelo de parâmetros discretos com 1 G.L.

Generalizando para n G.L., a equação (A-65) pode ser escrita:

$$\mu(x,t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)\mu_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots \text{Eq. (A-66)}$$

Para um movimento transversal (flexão), considere-se um elemento de viga uniforme, de comprimento l , densidade de massa ρ , módulo de elasticidade E , área de seção transversal A e momento de inércia I , conforme figura a seguir:

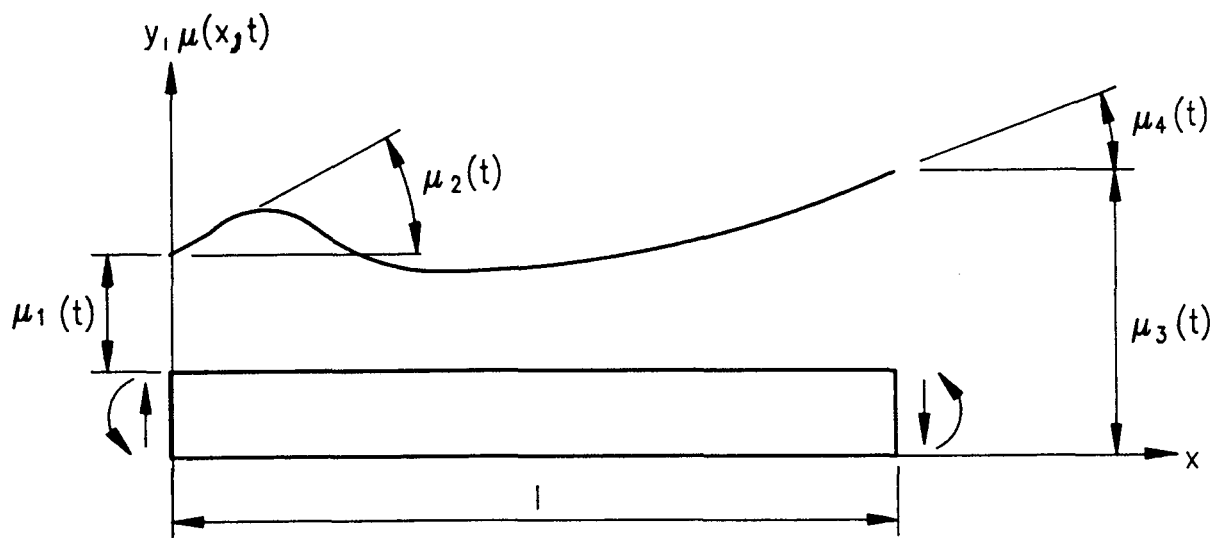


Fig. A-18 - Elemento de viga sujeito à flexão.

Assim, este elemento representa um sistema de 4 G.L.

(deslocamentos $\mu_1(t)$, $\mu_3(t)$ e inclinações $\mu_2(t)$ e $\mu_4(t)$).

Pode-se, desta forma, escrever que:

$$\mu(x,t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \mu_i(t) \quad \dots \text{Eq. (A-67)}$$

Onde as funções $\varphi_i(x)$ satisfazem as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 1, & \varphi_1'(0) &= \varphi_1(1) = \varphi_1'(1) = 0 \\ \varphi_2'(0) &= 1, & \varphi_2(0) &= \varphi_2(1) = \varphi_2'(1) = 0 \\ \varphi_3(1) &= 1, & \varphi_3(0) &= \varphi_3'(0) = \varphi_3'(1) = 0 \\ \varphi_4'(1) &= 1, & \varphi_4(0) &= \varphi_4'(0) = \varphi_4(1) = 0 \end{aligned} \quad \dots \text{Eq. (A-68)}$$

onde:

$\varphi(0)$ e $\varphi(1)$ são as deflexões das extremidades do elemento de viga;
 $\varphi'(0)$ e $\varphi'(1)$ são as inclinações das extremidades do elemento de viga.

A solução geral da equação (A-67) para uma viga uniforme é um polinômio do 3º grau:

$$\mu(x) = C_1 + C_2\left(\frac{x}{1}\right) + C_3\left(\frac{x}{1}\right)^2 + C_4\left(\frac{x}{1}\right)^3 \quad \dots \text{Eq. (A-69)}$$

Substituindo-se as condições de contorno da equação (A-68) na equação acima, obtém-se:

$$\varphi_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{1}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{1}\right)^3$$

$$\varphi_2 = x - 21\left(\frac{x}{1}\right)^2 + 1\left(\frac{x}{1}\right)^3 \quad \dots \text{Eq. (A-70)}$$

$$\varphi_3 = 3\left(\frac{x}{1}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{1}\right)^3$$

$$\varphi_4 = -1\left(\frac{x}{1}\right)^2 + 1\left(\frac{x}{1}\right)^3$$

As expressões para os coeficientes das matrizes de massa e rigidez são dadas por: [27]

$$k_{ij} = \int_0^1 EI \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx \quad \dots \text{Eq. (A-71)}$$

$$m_{ij} = \int_0^1 \rho A \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \quad \dots \text{Eq. (A-72)}$$

Substituindo-se as derivadas das equações (A-70) acima, obtém-se:

$$[k] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{Simétrica} & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \dots \text{Eq. (A-73)}$$

$$[m] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ \text{Simétrica} & & 156 & -22L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \dots \text{Eq. (A-74)}$$

Seja a equação que define o movimento vibratório de um sistema sem amortecimento, considerando-se vibrações livres:

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \quad \dots \text{Eq. (A-75)}$$

Em forma matricial:

$$[m](\ddot{x}) + [K](x) = 0 \quad \dots \text{Eq. (A-76)}$$

Portanto, reportando-se ao elemento de viga analisado anteriormente, a equação que define seu movimento é:

$$\frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ \text{Simétrica} & & 156 & -22L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} +$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{Simétrica} & 12 & -6L & \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots \text{Eq. (A-77)}$$

Assumindo que

$$x(t) = \varphi \cos \omega t \text{ e}$$

fazendo $\lambda = \frac{\omega^2 \rho A L^4}{420 EI}$,

tem-se o seguinte problema de autovalores:

$$\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{Simétrica} & 12 & -6L & \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ \text{Simétrica} & 156 & -22L & \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

... Eq. (A-78)

Pelo cálculo do determinante acima, encontra-se os valores das frequências naturais desejadas, obtidas através da determinação das raízes da equação característica.

6-2 - Matrizes de Massa e de Efeito Giroscópico do disco de um rotor:

Apenas a título de informação, serão mostradas as matrizes de massa e de efeito giroscópico do disco de um rotor, haja vista não ser o escopo deste trabalho o envolvimento do cálculo das frequências naturais através dos elementos finitos. A dedução de tais matrizes, bem como a aplicação encontram-se em trabalhos publicados por Archer [66], Nelson e McVaugh [65], Childs e Graviss [67], Kuhl e Booker [68], Tran [69], dentre outros.

Seja o disco da figura abaixo:

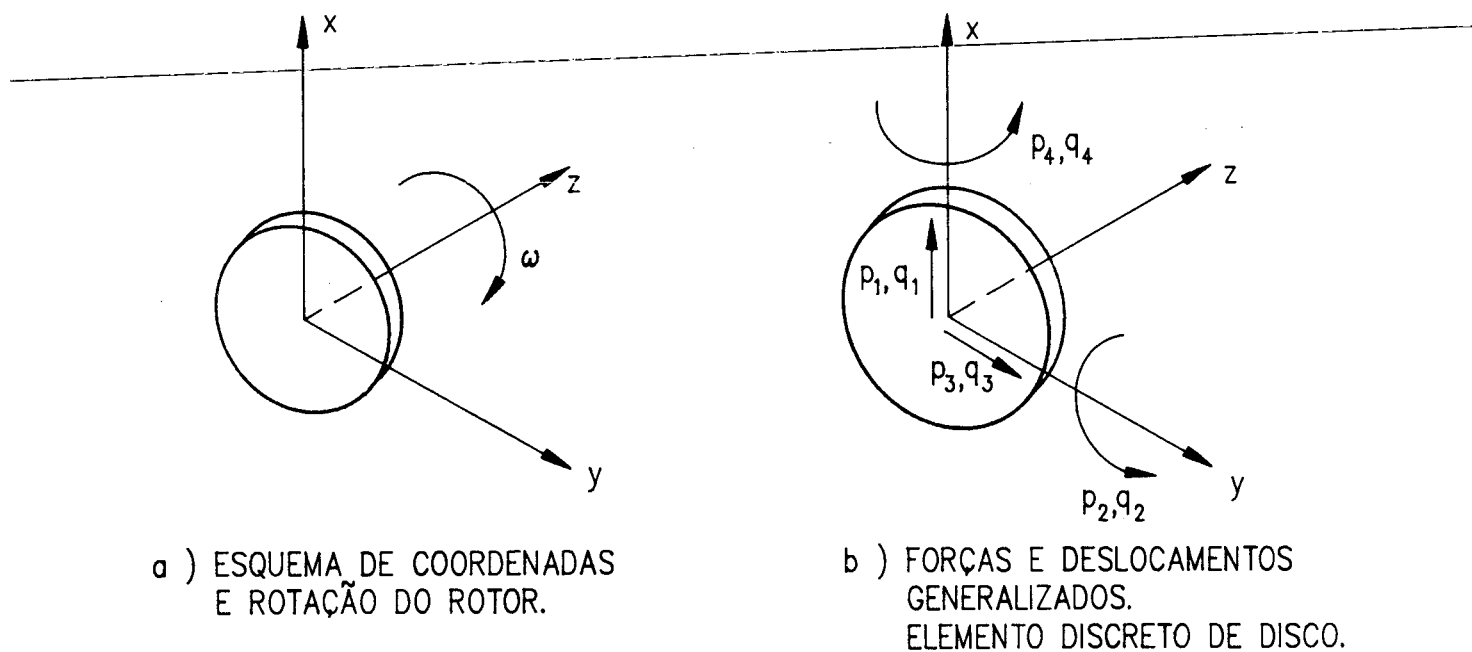


Fig. A-19 - Representação de um disco de rotor.

Com base na referência [69], a matriz de massa $[M_D]$ e de efeito giroscópico $[G_D]$ do disco, são, respectivamente:

$$[M_D] = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \quad \dots \text{Eq. (A-79)}$$

Onde:

M_D = massa do disco

I_{Dx} = momento de inércia de massa com respeito ao eixo x

$$[G_D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \text{Eq. (A-80)}$$

Embora tenha sido comentado anteriormente que o Método dos Elementos Finitos também torna-se impreciso nos modos mais altos, é digno de nota ressaltar que a convergência para os valores reais das frequências naturais nos modos mais baixos é acentuadamente mais rápida, conforme atestado por Ruhl [68].

Finalmente, para um sistema completo, a equação que define o movimento é:

$$[M]dxd (q)dx1 + [C]dxd (\dot{q})dx1 + [K]dxd (q)dx1 = (p)dx1 \quad \dots \text{Eq. (A-81)}$$

Onde:

d = número de graus de liberdade na equação do sistema

OBS:

$d = 4(n+1)$, onde n é o número de elementos finitos

$[M]$ = Matriz de massa

$[C]$ = Matriz de amortecimento

$[K]$ = Matriz de rigidez

(q) = deslocamentos generalizados

(p) = forças generalizadas

Para o caso do sistema sem amortecimento e sujeito a vibrações livres, a equação (A-81) fica:

$$[M]dxd (q)dx1 + [K]dxd (q)dx1 = 0 \quad \dots \text{Eq. (A-82)}$$

Percebe-se pelo índice d , a ordem exagerada das matrizes. Existem métodos de redução da ordem como por exemplo o Método de Redução de Guyan [27]. Tal método, porém, não será aqui apresentado, pelas razões expostas anteriormente.

Uma abordagem excelente sobre as aplicações e teoria de Método de Elementos Finitos é dada por Bathe [29].

APÊNDICE B

DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS DE INÉRCIA DO DISCO

1 - Momento de Inércia Diametral (I_d) (ou Transversal):

Seja a representação esquemática do disco:

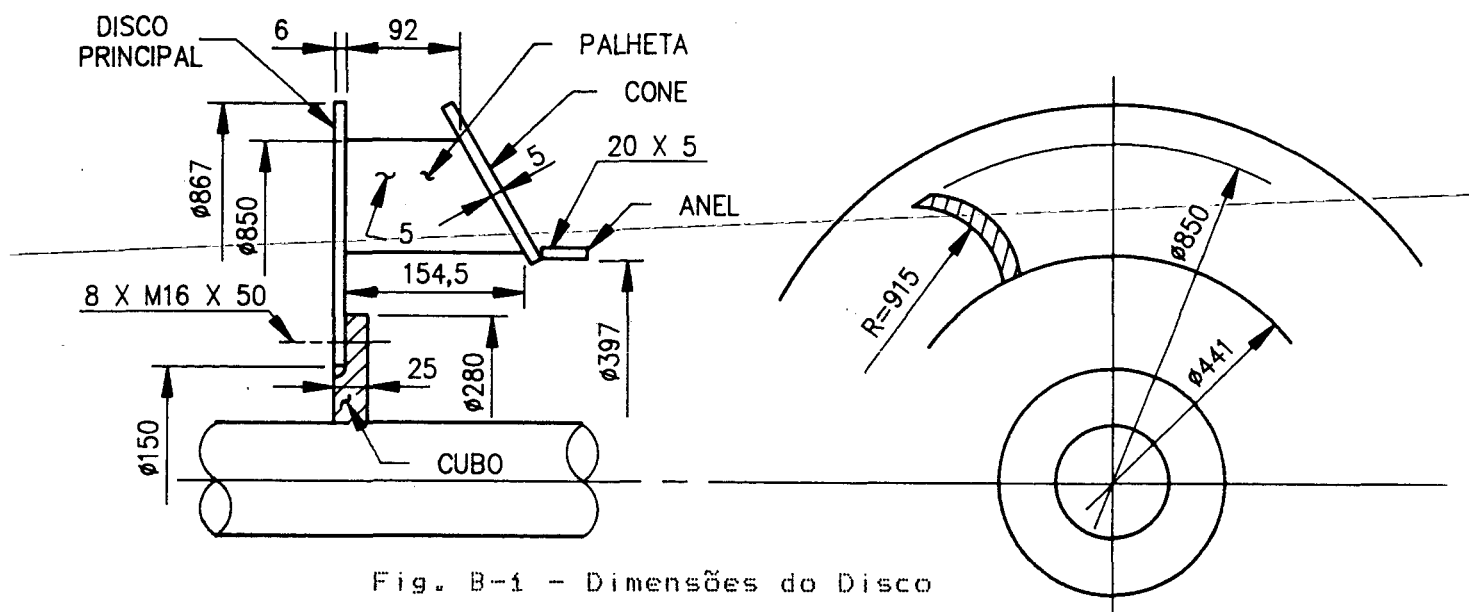


Fig. B-1 - Dimensões do Disco

1.1 - Determinação das massas: (Referência [70])

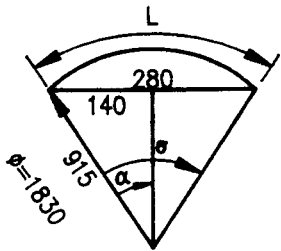
Valores considerados: $\rho_{Tj} = 4500 \text{ Kg/m}^3$

$\rho_{Aço} = 7850 \text{ Kg/m}^3$

a) massa das palhetas:

$$\text{sen } \alpha = \frac{140}{915} = 0,153 \dots \alpha = 0,1536088\text{rd}$$

$$\theta = 2\alpha = 0,3072176\text{rd}$$



$$2\pi \rightarrow \pi \times 1830 \rightarrow L = 281,1\text{mm}$$

$$0,3072176 \rightarrow L$$

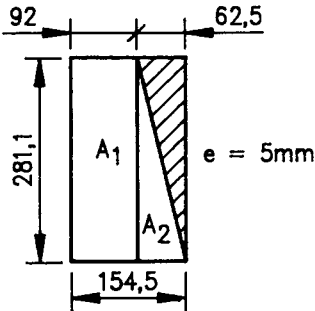
$$A_1 = 0,02585\text{m}^2$$

$$A_2 = (0,0625 \times 0,281)/2 = 0,008712\text{m}^2$$

$$A_{\text{tot}} = 0,03463\text{m}^2$$

$$m = A_{\text{tot}} \times e \times \rho_{Tj} = \boxed{0,7792 \text{ Kg}}$$

$$\text{Como são 11 palhetas: } \boxed{m_p = 8,570 \text{ Kg}}$$



b) Massa do cubo (aço)

$$m_{\text{cubo}} = \rho V = \rho \pi \frac{(D^2 - d^2)}{4} e \rightarrow \boxed{m_{\text{cubo}} = 9,676 \text{ Kg}}$$

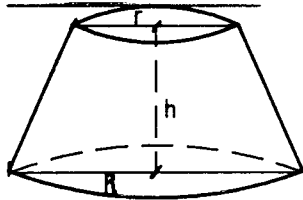
~~c) Massa do disco principal (Titânio)~~

$$m = 4500 \times \pi \frac{(0,867^2 - 0,150^2)}{4} \times 0,006 \rightarrow \boxed{m_{\text{disco}} = 15,463 \text{ Kg}}$$

d) Massa do Anel:

$$m_{\text{anel}} = \pi \times 0,397 \times 0,020 \times 0,005 \times 4500 \rightarrow \boxed{m_{\text{anel}} = 0,5612 \text{ Kg}}$$

e) Massa do cone:



$$m = \rho V$$

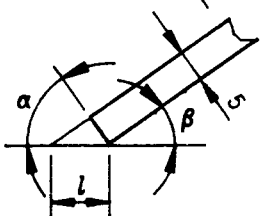
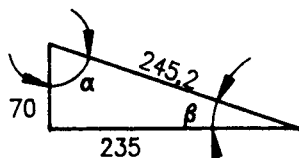
$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$h = 70\text{mm}$$

$$R_{\text{ext}} = 0,4335\text{mm}$$

$$r_{\text{ext}} = 0,1985\text{mm}$$

$$\cos \alpha = \frac{70}{245,2} = 0,275$$



$$l = \frac{5}{\cos \alpha} \rightarrow l = 18,18 \text{ mm}$$

$$r_{\text{int}} = 0,4335 - 0,01818 = 0,4153 \text{ mm}$$

$$r_{\text{int}} = 0,1985 - 0,01818 = 0,1803 \text{ mm}$$

$$m_{\text{cone}} = \frac{4500 \times \pi \times 0,070}{3} (0,4335^2 + 0,1985^2 + 0,4335 \times 0,1985 - 0,4153^2 - 0,1803^2 - 0,4153 \times 0,1803)$$

$$\rightarrow m_{\text{cone}} = 11,05 \text{ Kg}$$

f) Massa dos 8 parafusos + porcas e arruelas (M16x50) \approx 1,5 Kg

g) Massa do disco (total): $m_d = m_p + m_{dp} + m_c + m_a \rightarrow m_d = 35,64 \text{ Kg}$

Obs: A massa do disco medida por uma balança de precisão (em gramas), marca "SARTORIUS", alemã, é de 38,064 Kg.

A diferença entre os resultados é devido a:

- 1) Medidas do desenho são ligeiramente inferiores à peça real;
- 2) a espessura do material não é um número inteiro;
- 3) a massa da solda e dos "pesos" de balanceamento não foram considerados.

Assim sendo, considerar-se-á a massa do disco igual a 38 Kg. Quando se tratar das partes isoladamente, haverá um acréscimo proporcional a cada uma delas. Portanto, as massas finais serão: (diferença: $38,06 - 35,64 = 2,42 \text{ Kg}$)

$$m_{\text{palhetas}} = 8,57 + (0,24 \times 2,42) = 9,15 \text{ Kg} \quad (0,8318 \text{ Kg cada uma})$$

$$m_{\text{disco princ}} = 15,46 + (0,43 \times 2,42) = 16,50 \text{ Kg}$$

$$m_{\text{cone}} = 11,05 + (0,31 \times 2,42) = 11,80 \text{ Kg}$$

$$m_{\text{anel}} = 0,5612 + (0,02 \times 2,42) = 0,610 \text{ Kg}$$

$$\underline{\underline{38,06 \text{ Kg}}}$$

h) Massa do cubo de aço:

$$m = \rho V = \rho \pi \frac{(D^2 - d^2)}{4} \times e \rightarrow \boxed{m_{\text{cubo}} = 9,676 \text{ Kg}}$$

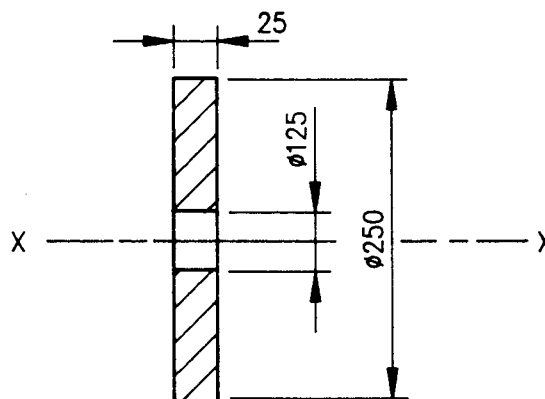
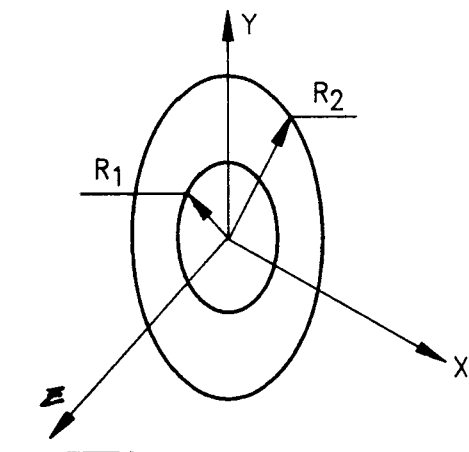
i) Massa total do conjunto do disco sobre o eixo:

$$m_t = 38,06 \text{ (disco)} + 1,5 \text{ (paraf.)} + 9,67 \text{ (cubo)} \rightarrow \boxed{m_t = 49,23 \text{ Kg}}$$

1.2 - Momento de Inércia Diametral (Id) (ou Transversal)

Obs: Para formulário, vide referências [71] e [72]

a) Cubo do rotor (aço)

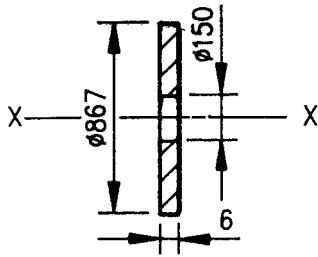


$$I_{zz} = \frac{1}{4} m (R_1^2 + R_2^2)$$

$$m = 9,676 \text{ Kg}$$

$$\therefore I_{\text{cubo}} = \boxed{0,05685 \text{ Kgm}^2}$$

b) Disco Principal

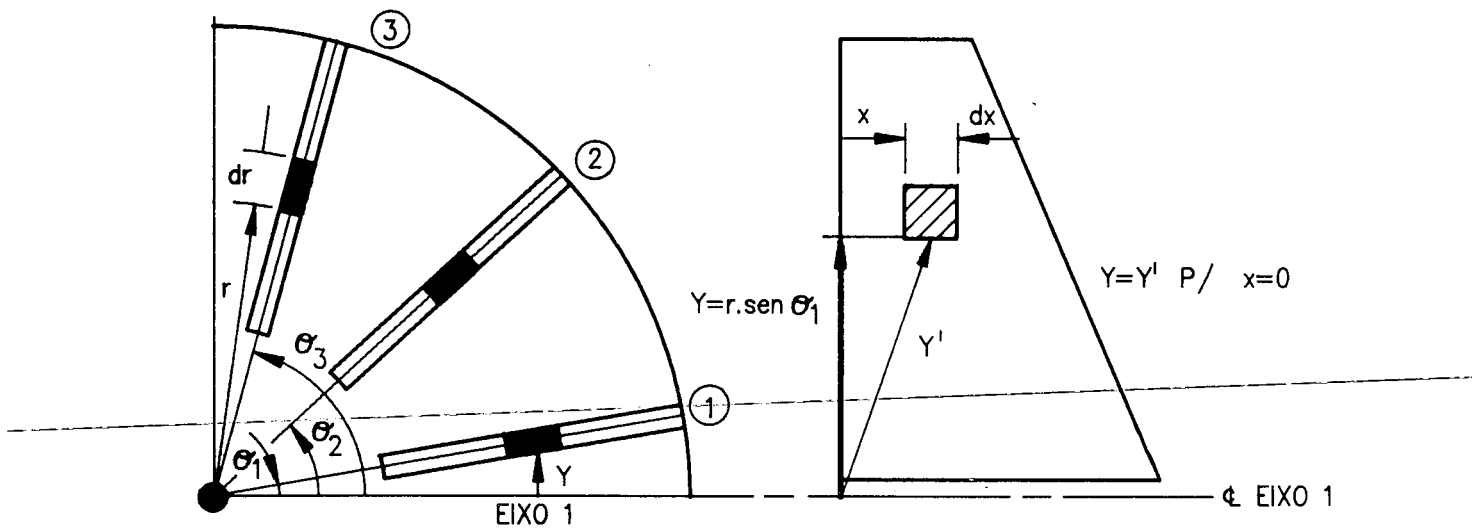


$$I_{zz} = \frac{1}{4} m (R_1^2 + R_2^2)$$

$$\therefore I_{\text{disco princ.}} = \boxed{0,7482 \text{ Kg m}^2}$$

c) Palhetas (11 palhetas)

Seja o quadrante:



Adotando-se $\theta_1 = 10^\circ$ e sendo $\Delta\theta = \frac{360^\circ}{11} = 32,727273^\circ$

teremos:

Em 1 $\rightarrow Y_1 = r \text{ sen } \theta_1$

$\theta_1 = 10^\circ$

Em 2 $\rightarrow Y_2 = r \text{ sen } \theta_2$

$\theta_2 = 42,727273^\circ$

‘ ‘ ‘

$\theta_3 = 75,454546^\circ$

‘ ‘ ‘

$\theta_4 = 108,181820^\circ$

‘ ‘ ‘

$\theta_5 = 140,909090^\circ$

‘ ‘ ‘

$\theta_6 = 173,636360^\circ$

Em 7 $\rightarrow Y_7 = r \text{ sen } \theta_7$

$\theta_7 = 206,363640^\circ$

'

$\theta_8 = 239,090910$

'

$\theta_9 = 271,818180$

Em 10 $\rightarrow Y_{10} = r \text{ sen } \theta_{10}$

$\theta_{10} = 304,545460$

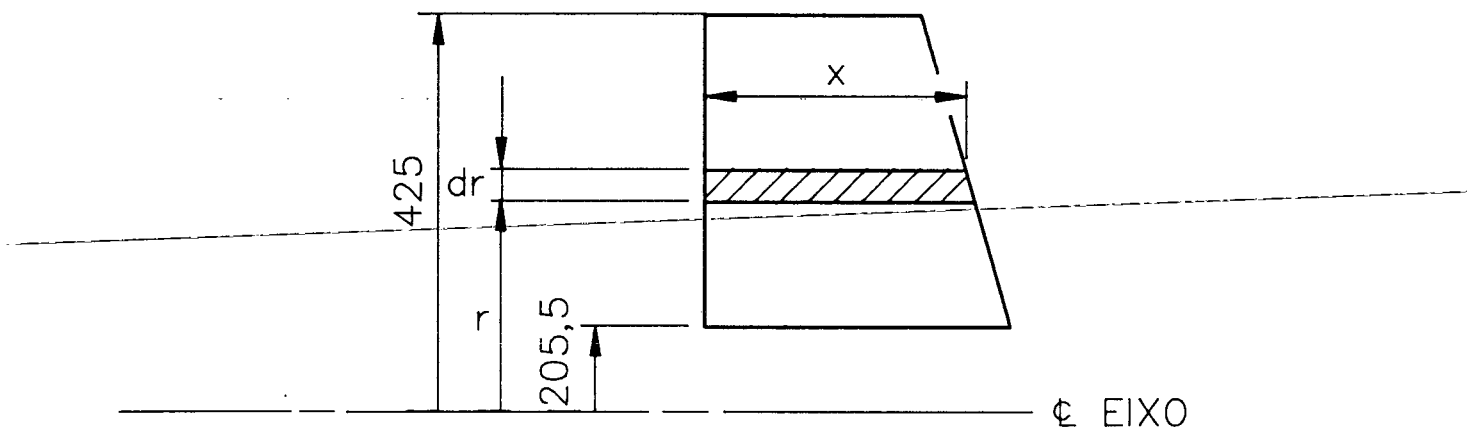
Em 11 $\rightarrow Y_{11} = r \text{ sen } \theta_{11}$

$\theta_{11} = 337,272730$

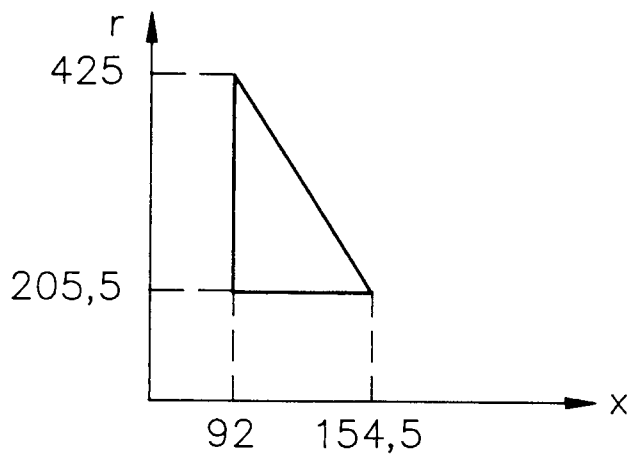
$I' = \int Y'^2 \, dm \quad dm = \rho \, dx \, dr \quad Y'^2 = (r \text{ sen } \theta)^2 + x^2$

$\therefore I' = \iiint [(r \text{ sen } \theta)^2 + x^2] \, \rho \, dx \, dr$

C.1) Determinação dos limites de integração:



Cálculo de x:



Equação da reta:

$$\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \dots \quad \frac{r - 425}{205,5 - 425} = \frac{x - 92}{154,5 - 92}$$

$$\dots \quad \boxed{x = -0,2847r + 0,2130}$$

$$\dots \quad I' = \int_0^{\dots} (-0,2847r + 0,2130) (x^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta) \text{pe} dx dr$$

$$= \text{pe} \int_0^{\dots} \left(\frac{x^3}{3} + xr^2 \text{sen}^2 \theta \right) \Big|_0^{-0,2847r + 0,2130} dr$$

$$= \text{pe} \int \left[\frac{(-0,2847r + 0,2130)^3}{3} - 0,2847r^3 \text{sen}^2 \theta + 0,2130r^2 \text{sen}^2 \theta \right] dr$$

$$= \text{pe} \left[\frac{-0,2847r^4 \text{sen}^2 \theta}{4} \Big|_{r_1}^{R_1} + \frac{0,2130r^3 \text{sen}^2 \theta}{3} \Big|_{r_1}^{R_1} \right]$$

$$- \frac{0,2847r + 0,2130}{0,2847 \times 12} \Big|_{r_1}^{R_1}$$

$$\dots \quad I' = 4500 \times 0,005 \left[\frac{-0,2847 \text{sen}^2 \theta}{4} (0,425^4 - 0,2055^4) + \frac{0,2130 \text{sen}^2 \theta}{3} (0,425^3 - 0,2055^3) - \left(\frac{-0,2847 \times 0,425 + 0,2130}{3,4164} \right)^4 + \left(\frac{-0,2847 \times 0,2055 + 0,2130}{3,4164} \right)^4 \right]$$

$$\dots \quad \boxed{I' = 0,0593779 \text{sen}^2 \theta + 3,28012 \times 10^{-3}}$$

Substituindo-se os valores de θ , teremos:

$$I'_1 = 5,07058 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^2$$

$$I'_7 = 14,9897 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^2$$

$$I'_2 = 30,6162 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^2$$

$$I'_8 = 46,9903 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^2$$

$$I'_3 = 58,9127 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^2$$

$$I'_9 = 62,5982 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^2$$

$$I'_4 = 56,8767 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^2$$

$$I'_{10} = 43,5646 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^2$$

$$I'_5 = 26,8886 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^2$$

$$I'_{11} = 12,1430 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^2$$

$$I'_6 = 4,00958 \times 10^{-3} \text{ Kgm}^2$$

$$\therefore Id_{\text{palhetas}} = \sum I'_i \quad i = 1 \text{ a } 11$$

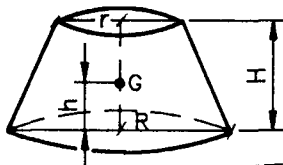
$$Id_{\text{pal}} = 0,362660 \text{ Kgm}^2$$

d) Disco Cônico:

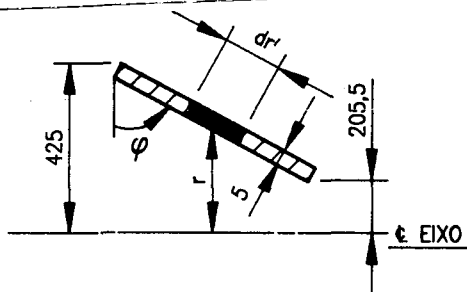
Pelo teorema dos eixos paralelos, pode-se afirmar que:

$$Id = (I_p/2) + mh^2$$

$$m = 10,553 \text{ Kg (já calc.)}$$



$$h = \frac{H}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$$



$$dr = dr' \cos \phi$$

Obs: I_p = Momento de Inércia polar

$$I_p = \int r^2 dm$$

$$m = \rho v$$

$$= \rho A e = \rho e A$$

$$dm = \rho dv$$

$$= \rho e dA$$

$$= \rho e (2\pi r) dr \quad \rightarrow \quad \frac{m}{A} = \frac{dm}{2\pi r dr} \quad e \quad dm = \frac{m}{A} \cdot 2\pi r dr$$

$$\therefore I_p = \int_{r_1}^{R_1} r^2 (m/A) 2\pi r dr = \frac{2\pi m}{A \cos \varphi} \int_{r_1}^{R_1} r^3 dr$$

$$\therefore I_p = \frac{2\pi m}{\cos \varphi} \times \frac{\cos \varphi}{\pi(R_1^2 - r_1^2)} \times \frac{(R_1^4 - r_1^4)}{4} \rightarrow I_p = \frac{1}{2} m (R_1^2 + r_1^2)$$

$$\therefore I_p = \frac{10,553}{2} (0,425^2 + 0,2055^2) \rightarrow I_{p\text{cón}} = 1,17481 \text{ Kgm}^2$$

$$\therefore I_d = \frac{1,17481}{2} + 10,553 \times h^2$$

$$H = 70 \text{ mm}$$

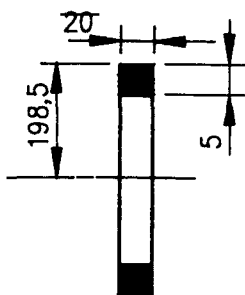
$$R = 433,5 \text{ mm}$$

$$r = 198,5 \text{ mm}$$

$$\therefore h = \frac{70}{4} \frac{(433,5^2 + 2 \times 433,5 \times 198,5 + 3 \times 198,5^2)}{433,5^2 + 433,5 \times 198,5 - 198,5^2} \rightarrow h = 26,70 \text{ mm}$$

$$\therefore I_d = \frac{1,17481}{2} + 10,553 \times (0,02670)^2 \rightarrow I_{d\text{cón}} = 0,5949 \text{ Kgm}^2$$

e) Anel circular



$$I_d = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{0,5612 \times 0,1985^2}{2}$$

$$\therefore I_{d\text{anel}} = 0,0110 \text{ Kgm}^2$$

f) I_d total:

$$I_{d\text{total}} = \sum I_d \text{ componentes} \rightarrow I_{d\text{total}} = 1,7736 \text{ Kgm}^2$$

2. - Momento de Inércia Polar (I_p)

a) Cubo do rotor

Devido à simetria, pode-se afirmar que $I_d = \frac{I_p}{2}$

$$\therefore I_p = 2I_d = 2 \times 0,05685 \rightarrow \boxed{I_{p\text{cubo}} = 0,1137 \text{ Kgm}^2}$$

b) Disco principal:

Da mesma forma, $I_p = 2 I_d \quad \therefore I_{p\text{disco}} = 0,7482 \times 2$

$$\therefore \boxed{I_{p\text{disco princ}} = 1,4964 \text{ Kgm}^2}$$

c) I_p palhetas

$$I_p = \int r^2 dm$$

~~Reportando-se ao desenho para o cálculo de I_d palhetas e con-~~

siderando-se cada palheta individualmente, tem-se:

$$dm = \rho xedr \quad x = -0,2847r + 0,2130 \text{ (já determinado)}$$

$$\begin{aligned} \therefore I_p &= \int r^2 \rho e (-0,2847r + 0,2130) dr \\ &= \int \rho e (-0,2847r^3 + 0,2130r^2) dr \\ &= 4500 \times 0,005 \left[\frac{-0,2847r^4}{4} \Big|_{0,2055}^{0,425} + \frac{0,2130r^3}{3} \Big|_{0,2055}^{0,425} \right] \end{aligned}$$

$$\rightarrow I_p = 0,0593779 \text{ Kgm}^2$$

p/as 11 palhetas, $\boxed{I_p = 0,65315 \text{ Kgm}^2}$

d) Disco cônico

$$\boxed{I_p = 1,17481 \text{ Kgm}^2} \quad (\text{já calculado})$$

e) Anel circular

$$I_p = mr^2$$

$$m = 0,5612 \text{ Kg}$$

$$r = 0,1985 \text{ m}$$

$$\therefore I_p = 0,0221 \text{ Kgm}^2$$

f) $I_{p\text{total}}$

$$I_{p\text{total}} = \Sigma I_{p\text{componentes}} \therefore I_{p\text{total}} = 3,4601 \text{ Kgm}^2$$

3 - Determinação do Momento de Inércia Polar (I_p) pelo Método do Pêndulo Trifilar:

Nem sempre, durante um projeto ou verificação de elementos de máquinas, depara-se com peças de configuração simples, sendo tedioso e propenso a erros grosseiros o cálculo analítico do momento de inércia polar. Diversos métodos foram desenvolvidos para a obtenção prática de I_p , os quais são largamente aplicados para rotores de turbinas (a gás, hidráulicas, etc), engrenagens, motores elétricos, polias, acoplamentos, etc. Objetivando testar um dos métodos, conforme referência [73], escolheu-se o disco do rotor (Titânio), cujo cálculo teórico do I_p foi desenvolvido anteriormente.

Um aparelho que é mais conveniente para uso repetido é composto por uma plataforma leve, suportada por 3 fios flexíveis igualmente espaçados ($\theta = 120^\circ$), conforme Fig.B-14. Assim, o

dispositivo é denominado pêndulo trifilar. O corpo, cujo momento de inércia deverá ser medido, é colocado sobre a plataforma com seu centro de gravidade equidistante dos fios. O momento de inércia em relação ao eixo CC é dado por:

$$I_{CC} = \frac{mg R^2 \tau^2}{4\pi^2 l} \quad \text{Eq. (B-1)}$$

- Onde
- m = soma das massas do corpo de teste e da plataforma [Kg]
 - g = aceleração da gravidade = 9,81 [m/s²]
 - R = raio de fixação dos fios [m]
 - τ = período [s]
 - l = comprimento dos fios flexíveis [m]

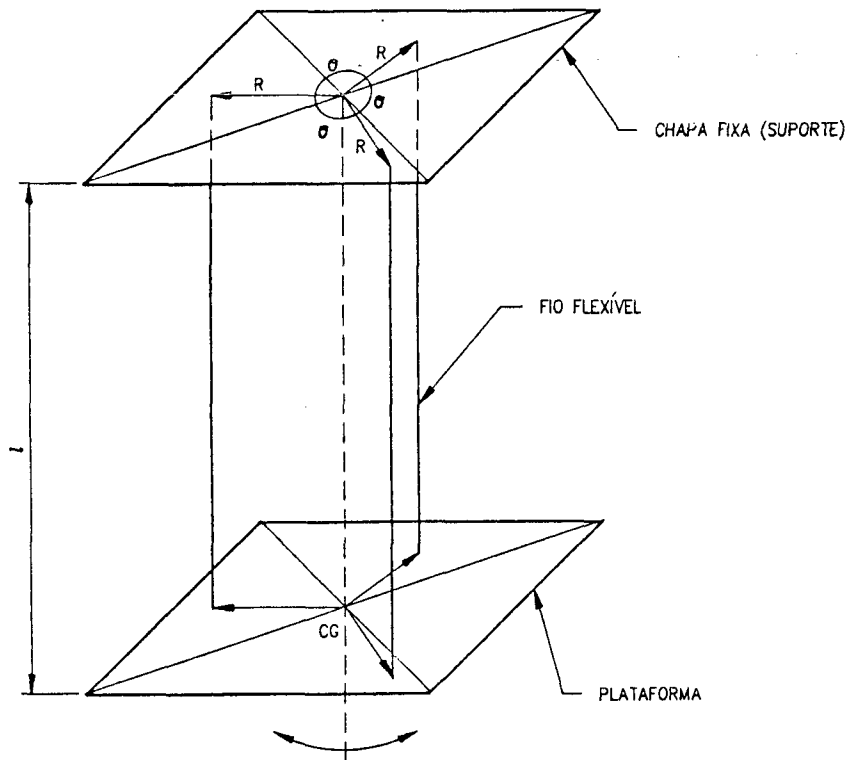


Fig. B-2 - Pêndulo Trifilar

O momento de inércia da plataforma é subtraído do resultado do teste para se obter o momento de inércia do corpo que está sendo medido.

No caso em questão, o disco foi colocado sobre a plataforma, sendo esta constituída por uma chapa de aço carbono de $\varnothing 950 \times 3\text{mm}$, suportada por fios de "nylon" de $\varnothing 12\text{mm}$, com l inicial de 6,615m. Uma vista geral do conjunto e um detalhe do pêndulo podem ser observados nas Fig. B-3 e B-4, respectivamente.

O suporte foi fixado em uma lança de guindaste giratório, na Oficina de Calderaria da CSN.



Fig. B-3 - Vista geral do Pêndulo trifilar

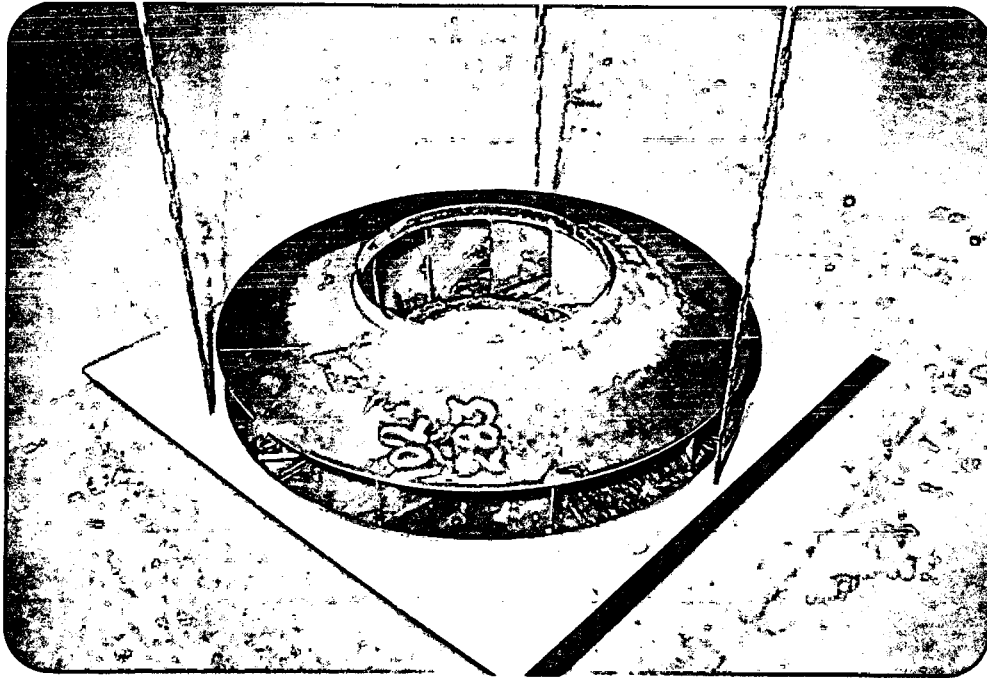


Fig. B-4 - Detalhe da plataforma c/disco

O período τ obtido foi a média de 30 períodos cronometrados. Com o objetivo de se "aferir" o pêndulo, foi medido o I_p de 6 chapas de aço, circulares (ϕ 706mm, $e = 3$ mm), superpostas uma a uma.

Assim, os valores teóricos e práticos obtidos através do pêndulo trifilar, encontram-se na Tabela B-1, a seguir:

Nº de chapas	m[Kg]	l[cm]	I_p teórico [Kgm ²]	I_p Exper. [Kgm ²]	Período τ [S]	Erro %
1	9,98	6,620	0,6218	0,7821	4,08	20,49
2	19,96	6,635	1,2436	1,3804	3,81	9,91
3	29,94	6,661	1,8653	2,0382	3,66	8,48
4	39,92	6,675	2,4872	2,6501	3,54	6,14
5	49,90	6,684	3,1090	3,3740	3,48	7,85
6	59,98	6,709	3,7308	4,0185	3,42	7,16
Disco Exaustor	38,06	6,680	3,4601	4,0138	3,99	13,79
Plataforma	21,20	6,615	3,1969	3,2501	4,44	1,6

Tabela B-1 - Valores Comparativos $I_{p\text{teorico}} \times I_p$ pêndulo Trifilar.

$$I_{p\text{chapas}} = 1/2mR^2$$

$$I_{p\text{plat}} = 1/6ma^2$$

a = lado do quadrado

3-1 - Comentários sobre os erros encontrado e recomendações:

a) O fio flexível utilizado ("nylon", ϕ 12mm) não apresentou comportamento linear quando da superposição das chapas (observe os comprimentos para os casos com 4 chapas e o disco do exaustor). Deve-se, assim, utilizar fios que associem propriedades de alta resistência à tração e baixa resistência à torção, evitando erros grosseiros. Cordas de cânhamo, para este caso, dariam melhores resultados.

b) Conforme W.Ker Wilson [74], o período ideal para se obter erros da ordem de 3% situa-se na faixa de 2 a 3 segundos. Para isso, o comprimento adotado deveria ser aumentado. Assim, recomenda-se prever um excesso no comprimento do fio, até que o período atinja a faixa ideal;

c) a plataforma construída deve ser compatível com o tamanho da peça, em termos de massa. Quanto menor a massa da peça em relação à plataforma, maior a imprecisão;

d) a plataforma deverá estar perfeitamente nivelada, garantindo-se que os 3 fios tenham o mesmo comprimento l. Caso contrário, o período será afetado grandemente;

e) após a colocação da peça na plataforma, o comprimento l deverá ser medido novamente;

f) as peças escolhidas para verificação do pêndulo deverão ter conformação simples, calculando-se mediante formulário disponível em livros de Física;

g) um erro de 13%, conforme encontrado para o disco, não afetará sensivelmente o cálculo das frequências naturais, conforme ver-se-á oportunamente. Isto se deve ao fato de levar-se em conta apenas

vibrações de flexão. Para o caso de vibrações torcionais, este erro poderia comprometer o cálculo;

h) um modelo utilizado em laboratório ($l = 1,5m$, para massas em torno de 1 Kg), com fio "Codornet", obteve precisão da ordem de 2%. Com fios de cobre o erro atingiu mais de 20%;

i) verifica-se pela Tabela B-1 que o maior grau de precisão foi obtido com a plataforma vazia, embora o período fosse de 4,44s. Com carregamento, a melhor situação ocorreu quando a massa da peça era em torno do dobro da massa da plataforma. Isto, porém, não se constitui regra, haja vista que, variando-se l , os resultados serão diferentes.

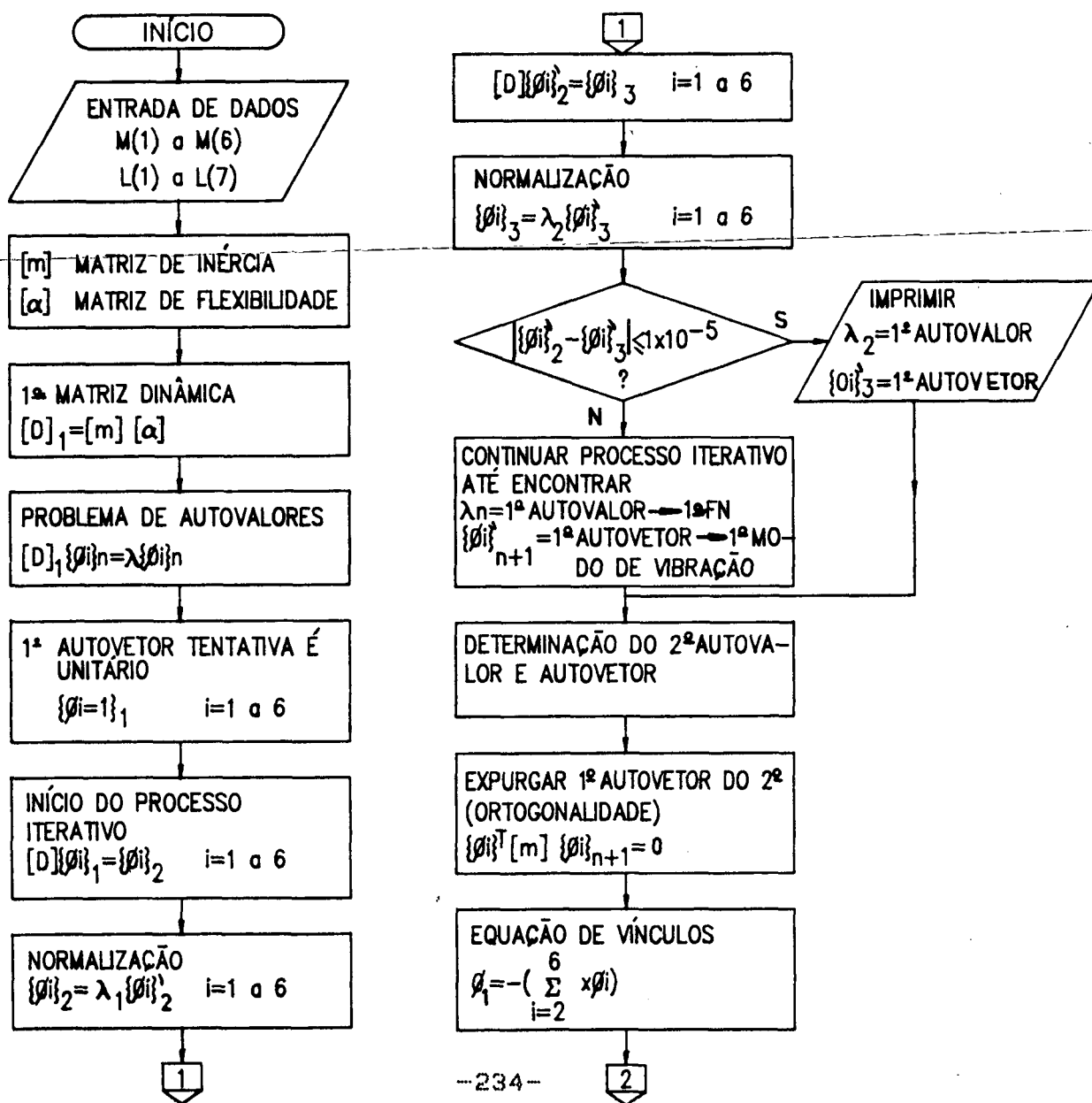
~~O alongamento não linear da corda de "nylon" prejudicou a obtenção de conclusões definitivas;~~

j) o método pode ser utilizado sem a plataforma (caso de turbinas hidráulicas de várias toneladas).

APÊNDICE C

FLUXOGRAMAS PARA DETERMINAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

Conforme descrito sucintamente no Apêndice A, o método foi utilizado mediante elaboração de programa para microcomputador (PC-1500RP-SHARP), obedecendo ao seguinte fluxograma:



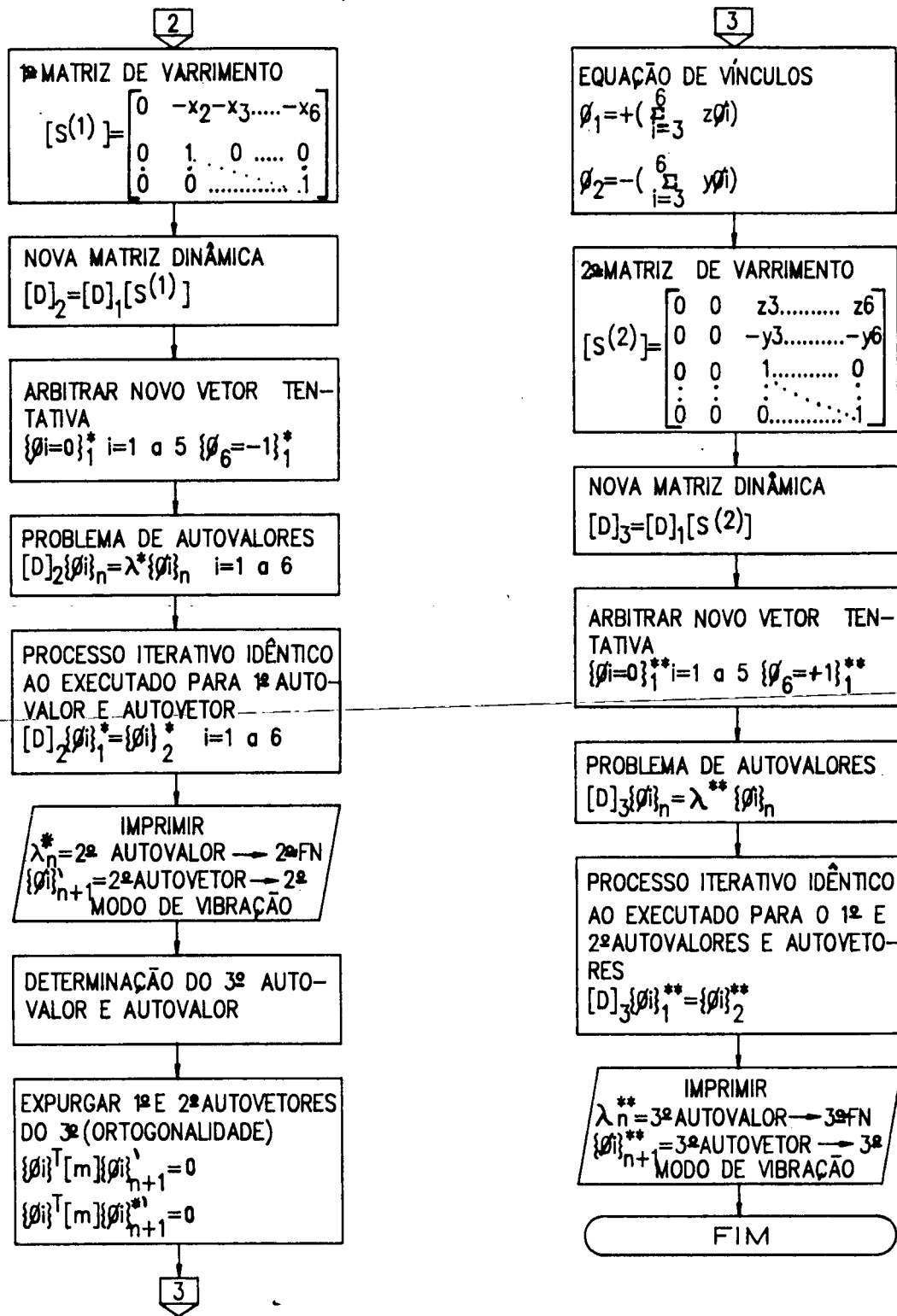


Fig. C.1 - Fluxograma para obtenção das 3 primeiras freqüências naturais com os respectivos modos de vibração (6 GL) Mét. Iter. Matricial.

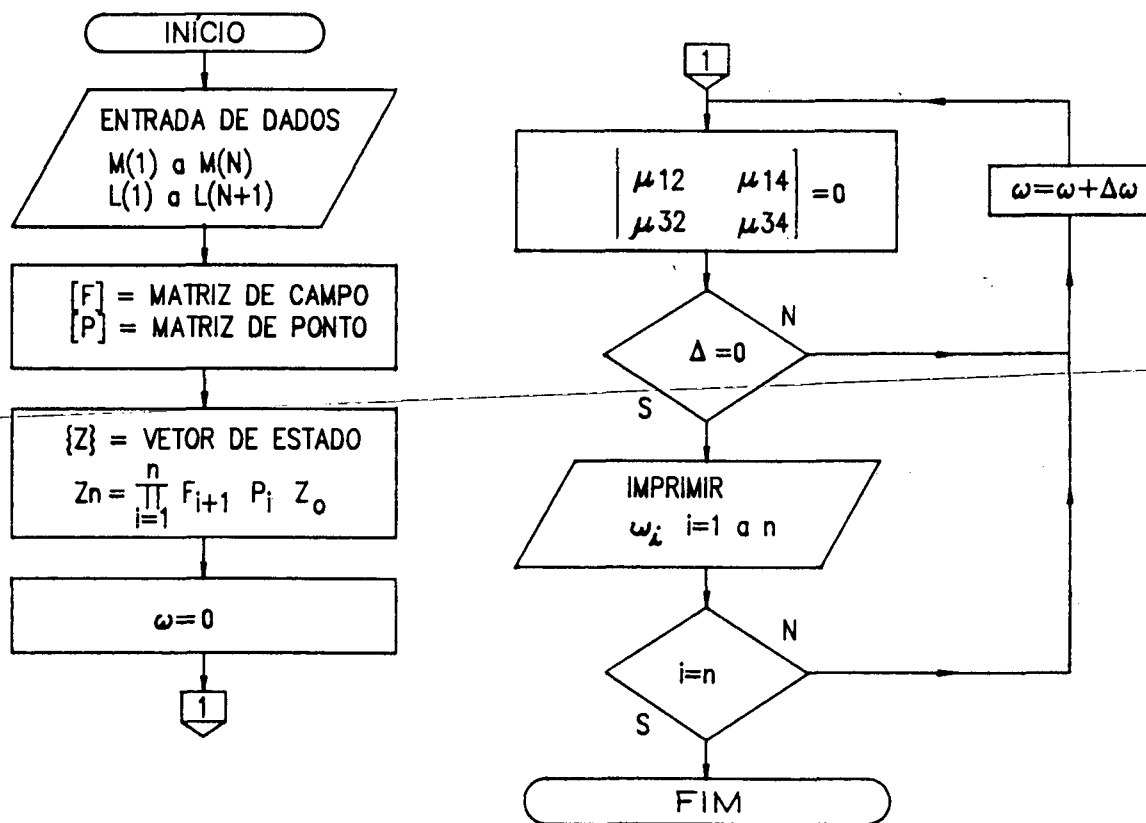


Fig. C-2 - Fluxograma p/obtenção das FN, Matrizes de Transferência.

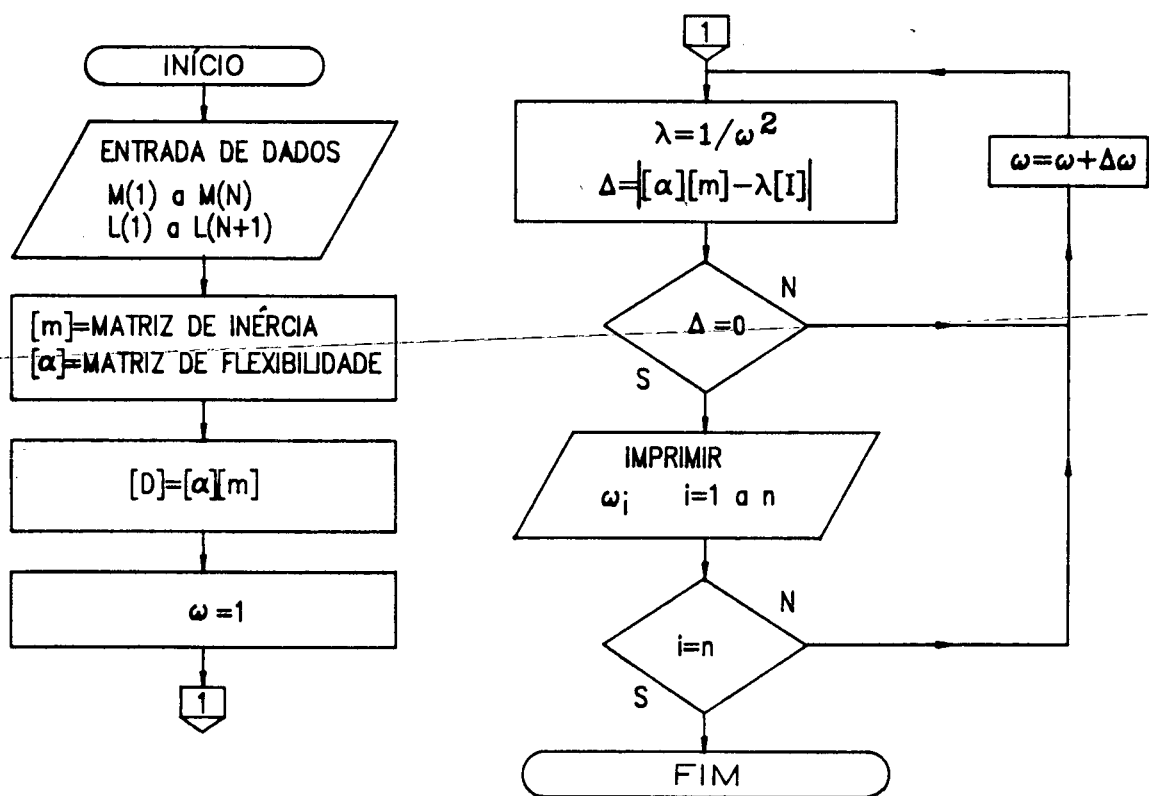


Fig. C-3 - Fluxograma para obtenção das FN Método do Determinante Característico

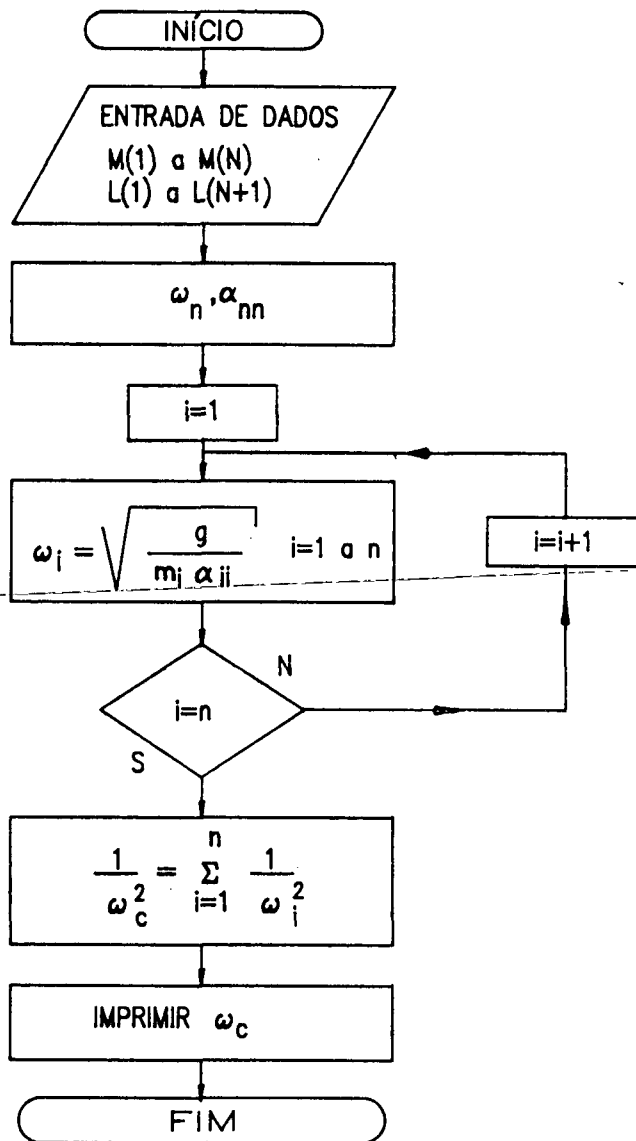


Fig. C-4 - Fluxograma para obtenção da 1ª FN (Fundamental).
Método de Dunkerley.

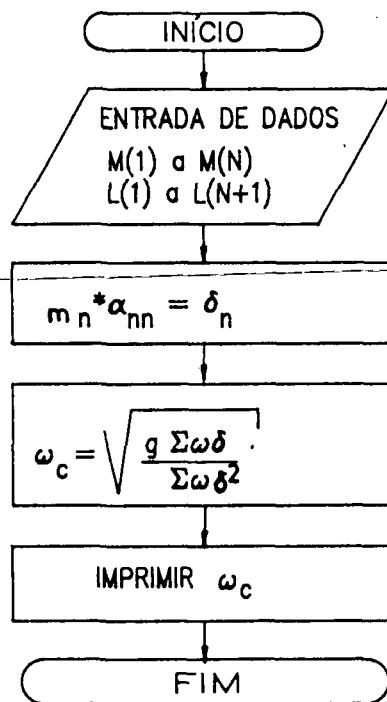


Fig. C-5 - Fluxograma para obtenção da 1ª FN (Fundamental).
Método de Rayleigh

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - Rao, S.S "Mechanical Vibrations"
Addison - Wesley Publishing Company - 1986
- [2] - Dimarogonas, A.D. & "Analytical Methods in Rotor
Paipetis, S.A. Dynamics" - Applied Science
Publishers - 1983
- [3] - SKF - Catálogo Geral - 3.000 PB - 1977
- [4] - NSK - Rolamento de Esferas e de Rolos - Pub. nº 2103 - 1979
- [5] - NTN - Ball and Roller Bearings - Catálogo nº 2001-II - 1976
- [6] - FAG - Programa Standard FAG - Catálogo 41500-SA - 1977
-
- [7] - "Ventiladores Industriais - Aspectos Gerais e Emissão de
Ruídos" - Catálogo GEMA - 1976
- [8] - Nepomuceno, L.X. "Manutenção Preditiva em Instalações
Industriais"
Ed. Edgard Blücher Ltda - 1985
- [9] - Espindola, J.J. - Ph.D Apostila "Sistemas Mecânicos com um
Grau de Liberdade" UFSC - 1985
- [10] - Den Hartog, J.P. "Mechanical Vibrations"
Dover Publications, Inc. - New York -
1984
- [11] - Meirovitch, L. "Analytical Methods in Vibrations"
The Mcmillan Company - New York - 1967
- [12] - Roark, R.J. "Formulas for Stress and Strain"
McGraw Hill Book Company - 1954
- [13] - Tse, F.S.;
Morse, I.E
and Hinkle, R.T. "Mechanical Vibrations - Theory and
Applications"
2nd Ed. - Allyn and Bacon, Inc. 1978

- [14] - Pestel, E.C. & Leckie, F.A. "Matrix Methods in Elastomechanics" McGraw-Hill Book Company Inc. 1963
- [15] - Green, R.B. "Gyroscopic Effects on the Critical Speeds of Flexible Rotors" Transactions of the ASME, vol.70 Journal of Applied Mechanics December - 1948 - pag. 369-376
- [16] - Yanabe, S and Tamura, A. "Vibration of a Shaft Passing Through a Critical Speed" 1st Report - Experiments and Numerical Solutions Bulletin of the JSME - vol. 14 nº 76-1971 - pag. 1050 a 1058
- [17] - Ruggieri, G. e Vallatta, A. "L' Effetto Giroscopico Nel Passaggio Dei Rotori Per la Velocità Critica" Ingegneria Meccanica nº 1 - 1972 - pag 41 a 47
-
- [18] - Nonami, K. "Response in Passing Through Critical Speed of Arbitrarily Distributed Flexible Rotor System" Part.2 Case with Gyroscopic Effect Bulletin of the JSME, vol.26- nº 217 - July-1983 - pag.1205-1212
- [19] - Yanabe, S. "Vibration of a Shaft Passing Through a Critical Speed - 4th Report - "Effect of Gyroscopic Moment" Bulletin of the JSME, vol.23 - nº 180 - June -1980 - pag. 945-952
- [20] - Rao, J.S. "Rotor Dynamics" Wiley Eastern Limited - 1983
- [21] - Myklestad, N.O. "Vibration Analysis" 1st Ed. McGraw-Hill Book Company, Inc - 1944
- [22] - Thomson, W.T. "Teoria da Vibração com Aplicações Ed. Interciência - Rio de Janeiro - 1978

- [23] - Parszewski, Z.A. "Effect of Supporting Structure on Rotor Dynamics"
Cap.2.9 of "Dynamics of Rotors - Stability and System Identification"
Ed. by O.Mahrenholtz - Spring-Verlag - 1984
- [24] - Crater, R.F. "Critical Speeds of a Rotating System With Flexible, Damped Supports"
Masters's Thesis
Naval Post Graduate School- Monterey California - 1962
- [25] - Caruso, W.J. "What You Should Know About Resonant Speeds"
Power - April 1959 - pag.76-78
- [26] - Espíndola, J.J. - Ph D. Apostila "Modelos com Múltiplos Graus de Liberdade UFSC - 1987
- [27] - C. Craig, Jr. R.R. "Structural Dynamics - An Introduction to-Computer Methods"
John Wiley and Sons - 1981
-
- [28] - Chivens, D.R.and Nelson, H.D. "The Natural Frequencies and Critical Speeds of a Rotating, Flexible Shaft-Disk System"
Transaction of the ASME - Journal of Engineering for Industry August 1975 pag. 881-886
- [29] - Bathe, K.J. "Finite Element Procedures in Engineering Analysis"
Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs - New Jersey - 1982
- [30] - "Fourier Analyser System Manual" - 1978 Hewlett-Packard Company
- [31] - Bendat, J.S.& Piersol, A.G. "Measurements and Analysis of Random Data"
John Wiley and Sons - 1966

- [32] - Bastos, A.M.F. "Isolamento de Vibrações em Alta Frequência em Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade"
Tese de Mestrado - UFSC - 1984
Florianópolis
- [33] - "Maintenance Engineering Handbook"
3rd. Ed. 1977 McGraw.Hill
- [34] - Boyce, Meherwan P. "Gas Turbine Engineering Handbook"
Gulf Publishing Company - 1982
- [35] - Publicação Brüel & Kjaer QP 4990
"Vibration Trouble Shooting Chart"
- [36] - Palmgreen, A. "Ball and Roller Bearing Engineering "
3rd. Ed. by SKF-Philadelphia -
1959
-
- [37] - Collacott, R.A. "Mechanical Fault Diagnosis and Condition Monitoring"
Chapman and Hall-London - 1977
- [38] - Balderston, H.L. "The Detection of Incipient Failure in Bearings"
Materials Evaluation - June 1969
pag. 121-128
- [39] - Taylor, J.I. "Identification of Bearing Defects by Spectral Analysis"
Transactions of the ASME
Journal of Mechanical Design
April, 1980 - Vol. 102 - pag. 199-204
- [40] - Datner, B.; Braun, S. "Analysis of Roller/Ball Bearing Vibrations"
Transactions of the ASME -
Journal of Mechanical Design
January, 1979 - Vol.101 pag. 118-125

- [41] - Koizumi, T.; Taniguchi, R.; Kiso, M. "Preventive Maintenance for Roller and Journal Bearings of Induction Motor Based on the Diagnostic Signature Analysis" Transactions of the ASME-Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design January, 1986 - Vol. 108 - pag. 26-31
- [42] - Ehrich, F.F. "Sum and Difference Frequencies in Vibration of High Speed Rotating Machinery" Transaction of the ASME - Journal of Engineering for Industry February - 1972 pag. 181-184
- [43] - Eshleman, R.L. "The Role of Sum and Difference Frequencies in Rotating Machinery Fault Diagnosis" 2nd International Conference "Vibrations in Rotating Machinery" - 1980 Churchill College, Cambridge Paper nº C-272/80 pag. 145-149
-
- [44] - Publicação Brüel & Kjaer - "Machine-Health Monitoring"
- [45] - VDI-2056 - "Beurteilungsmaßstäbe für mechanische Schwingungen von Maschinen" Oktober - 1964
- [46] - Baxter, R.L. & Bernhard, D.L. "Vibration Tolerances For Industry" ASME Pub. nº 67 - PEM-14 - 1967
- [47] - MATEN, S. "New Vibration Velocity Standards" Hydrocarbon Processing - January - 1967

- [48] - ISO 2372-1974(E) - "Mechanical Vibration of Machines With operating Speeds from 10 to 200 rev/s - Basis for Specifying evaluation standards."
- [49] - ISO 3945-1977(E) "Mechanical vibration of large rotating machines with speed range from 10 to 200 rev/s - Measurement and evaluation of vibration severity in situ."
- [50] - Lif shifts, A.; Simmons, H.R.; Smalley, A.J. "More Comprehensive Vibration Limits for Rotating Machinery" Transactions of the ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power - October - 1986, Vol. 108 pag. 583-590
- [51] - Kennedy, C.C. and Pancu, C.D.P. "Use of Vectors in Vibration Measurement and Analysis" J. Aero Sci. 14 (11) - 1947
-
- [52] - Schmidtberg, R. and Pal, T. "Solving Vibration Problems Using Modal Analysis" Sound and Vibration - March 1986 pag. 16-21
- [53] - Ewins, D.J. "Modal Testing: Theory and Practice" John Wiley & Sons Inc.
- [54] - Nordmann, R. "Modal Analysis in Rotor Dynamics" Cap. 1 of "Dynamics of Rotors" International Centre for Mechanical Sciences - Udine-Italy October 1980 Ed. by O.Mahrenholtz - Springer-Verlag
- [55] - "Fourier Analyser System Manual" Hewlett Packard Company
- [56] - Ransey, K.A. "Effective Measurements for Structural Dynamics Testing, Part II" Sound and Vibration - October - 1975

- [57] - Almeida, M.T. e
Neves, M.T. "Efeito da Flexibilidade dos Discos nas Frequências Naturais de Rotores - Partes 1 e 2"
Anais do II Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - Florianópolis - SC. Dezembro 1987
- [58] - Dopkim, J.A.&
Shoup, T.E. "Rotor Resonant Speed Reduction Caused by Flexibility of Disks"
Journal of Engineering for Industry
November 1974 - pag. 132-133
- [59] - API Standard 673 "Special - Purpose Centrifugal Fans for General Refinery Service"
1st Ed. , January - 1982
- [60] - International Standard
ISO 1940 "Balance Quality of Rotating Rigid Bodies"
1st Ed. - 1973
- [61] - VDI - 2060 "Criteria for Assessing the State of Balance of Rotating Rigid Bodies"
October - 1966
-
- [62] - SKF - Catálogo Geral 3200 PB - 1982
- [63] - Piotrowski, J "Shaft Alignment Handbook"
Marcel Dekker, Inc.
New York and Basel - 1986
- [64] - Mitchell, J.S. "An Introduction to Machinery Analysis and Monitoring"
Penn Well Publishing Company
1981
- [65] - Nelson, H.D. &
McVaugh, J.M. "The Dynamics of Rotor Bearing Systems Using Finite Elements"
Transactions of the ASME -
Journal of Engineering for Industry -
May-1976- pag. 593-600

- [66] - Archer, J.S. "Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems" Journal of the Structural Division - Proceedings of the ASCE, Vol.89, ST-4, 1963 - pag. 161
- [67] - Childs, D.W & Graviss, K. "A Note on Critical Speed Solutions for Finite Element - Based Rotor Models" Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design vol. 104 April - 1982 pag. 412-416
- [68] - Ruhl, R.L & Booker, J.F. "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems" Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry Feb. 1972 - pag. 126-132
-
- [69] - Tran, D.M. "Étude du Comportement Dynamique de Rotors Flexibles" These - Doctor Ing. 1981 Institut National des Sciences Appliquees de Lyon - France
- [70] - Protec - Projetista de Máquinas 1976
- [71] - Halliday - Resnich - " Física " - Vol. 1 - 4ª Ed. LTC - 1986
- [72] - Beer - Johnston - "Mecânica Vetorial para Engeheiros" - Estática - Vol. 1 - Mc. Graw-Hill do Brasil - 1973
- [73] - Harris, C.M.& Crede, C.E. "Shock and Vibration Hand book 2nd Ed. 1976 - Mc. Graw-Hill

[74] - Wilson, W. Ker

"Practical Solution of Torsional
Vibration Problems" - Vol.1
3rd Ed. 1956 - John Wiley and
Sons