

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA ELÍPTICO DA  
CONVECÇÃO NATURAL EM CANAIS ABERTOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA



0.188.365-1

FRANCISCO MARCONDES

UFSC-BU

FLORIANÓPOLIS, OUTUBRO - 1988

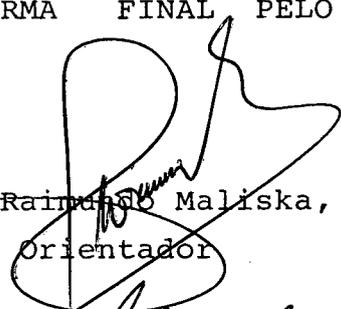
**SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA ELÍPTICO DA  
CONVECÇÃO NATURAL EM CANAIS ABERTOS**

**FRANCISCO MARCONDES**

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

**MESTRE EM ENGENHARIA**

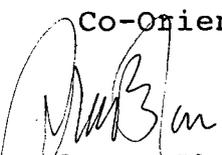
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONHECIMENTO CIÊNCIAS  
TÉRMICAS E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO

  
Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.

Orientador

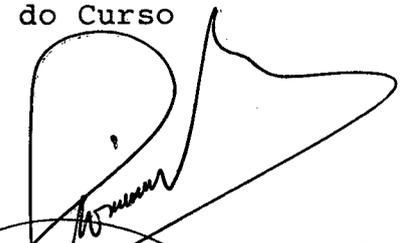
  
Prof. Antonio Fábio Carvalho da Silva, M.Sc.

Co-Orientador

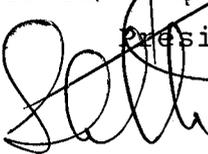
  
Prof. Arno Blass, Ph.D.

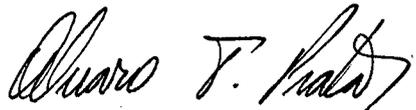
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA:

  
Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.

Presidente

  
Prof. Sergio Colle, D. Sc.

  
Prof. Álvaro Toubes Prata, Ph.D.

  
Prof. Antonio Fábio Carvalho da Silva, M.Sc.

Aos meus pais Moisés e Naíde,  
pela formação

## AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Clovis Raimundo Maliska, pelos conhecimentos transmitidos e a valiosa e precisa orientação, sempre obtidos através de um diálogo fácil e fluente.

- Ao Professor Antonio Fabio Carvalho da Silva, pela valiosa cooperação.

- Aos Engenheiros Carlos H. Marchi e Jonas Gretter pelo auxílio prestado na parte gráfica e pela amizade.

- Ao Eng. e amigo Sergio Polina pela auxílio e amizade.

- Aos demais membros do SINMEC, pela amizade e cooperação.

- A Vera Lucia Sodré Texeira pela datilografia das equações deste trabalho.

- Ao SINMEC pelo apoio técnico prestado durante toda a realização deste trabalho.

- Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

## ÍNDICE

	página
LISTA DE FIGURAS.....	viii
LISTA DE TABELAS.....	xii
SIMBOLOGIA.....	xiii
RESUMO.....	xviii
ABSTRACT.....	xix
CAPÍTULOS	
1 - INTRODUÇÃO.....	01
1.1 - Preliminares.....	01
1.2 - Revisão Bibliográfica.....	02
1.3 - Perfil da Dissertação.....	05
2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	07
2.1 - Introdução.....	07
2.2 - Métodos para a solução das equações em canais abertos.....	07
2.2.1 - Modelo Parabólico.....	07
2.2.2 - Modelo Elíptico.....	08
2.3 - Justificativa Para a Escolha do Modelo Elíptico.....	08
2.4 - Formulação do Problema.....	10

3 - EQUAÇÕES APROXIMADAS.....	15
3.1 - Introdução.....	15
3.2 - Transformação das Equações Governantes.....	15
3.3 - Equações Aproximadas no Plano Transformado.....	18
3.4 - Equações do Movimento Para as Velocidades Contravariantes U e V.....	25
3.5 - Método Para Tratamento do Acoplamento Pressão- Velocidade.....	26
3.6 - Equação Para a Pressão.....	27
3.7 - Método de Solução das Equações.....	28
4 - CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	29
4.1 - Introdução.....	29
4.2 - Cálculo das Velocidades Para os Pontos Fictícios.....	29
4.3 - Condições de Contorno Para a Temperatura.....	32
4.4 - Condição de Contorno Para a Velocidade.....	34
4.4.1 - Entrada do Canal.....	34
4.4.2 - Saída do Canal.....	40
4.5 - Condições de Contorno Para a Pressão.....	41
5 - RESULTADOS.....	44
5.1 - Introdução.....	44

	vii
5.2 - Canais Abertos Verticais.....	44
5.3 - Canais Abertos em 'L'.....	55
6 - CONCLUSÕES.....	85
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	87

## LISTA DE FIGURAS

	página
Figura 1.1 - Geometria em 'L'.....	02
Figura 1.2 - Domínio de cálculo usado por Ketteborough [6].....	03
Figura 2.1 - Domínio de cálculo para problemas parabólicos.....	08
Figura 2.2 - Escoamento em um canal plano com recircula- ção em uma das paredes.....	10
Figura 2.3 - Canal aberto de geometria arbitrária.....	11
Figura 3.1 - Volume de controle no plano transformado.....	18
Figura 3.2 - Ilustração das velocidades que serão usadas no cálculo das velocidades U e V, onde não são necessárias para conservar a massa.....	27
Figura 3.3 - Volume de controle para a pressão.....	28
Figura 4.1 - Pontos fictícios na fronteira para uma malha ortogonal no plano x-y.....	30
Figura 4.2 - Pontos fictícios na fronteira para um sis- tema de coordenadas generalizado no plano ( $\xi, \eta$ ).....	31
Figura 4.3 - Balanço de calor na fronteira norte, no plano transformado.....	32
Figura 4.4 - Volume de controle para o cálculo da velocidade na entrada do canal no plano transformado.....	35

- Figura 4.5 - Cálculo da pressão interna  $P$  para um valor da pressão conhecido na entrada, no plano transformado.....41
- Figura 5.1 - Número de Nusselt médio baseado em  $S$ , para o canal vertical, com diferentes condições de contorno para a velocidade e pressão.....47
- Figura 5.2 - Perfis de velocidade e temperatura em três secções diferentes do canal reto, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H)*Ra_S=10^5$ , com  $S=0.01275$ ,  $H=0.15$  e  $Pr=5.0$ .....50-52
- Figura 5.3 - Linhas de corrente para o canal reto, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H)*Ra_S=10^5$ , com  $S=0.01275m$ ,  $H=0.15m$  e  $Pr=5.0$ .....53
- Figura 5.4 - Geometria e as condições de contorno do canal em 'L'.....55
- Figura 5.5 - Malha com  $(67 \times 13)$  volumes para o canal em 'L' para a relação  $(S/H)=0.0875$ .....56
- Figura 5.6 - Perfis de velocidade, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H)*Ra_S=5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.1428m$  e  $Pr=0.708$ .....60
- Figura 5.7 - Perfis de velocidade, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H)*Ra_S=5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.5m$  e  $Pr=0.708$ .....61
- Figura 5.8 - Perfis de velocidade, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H)*Ra_S=5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.828m$  e  $Pr=0.708$ .....62

- Figura 5.9 - Perfis de velocidade, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) * Ra_S = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=2.228m$  e  $Pr=0.708$ .....63
- Figura 5.10 - Linhas de corrente, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) * Ra_S = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.1428m$  e  $Pr=0.708$ .....64
- Figura 5.11 - Linhas de corrente, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) * Ra_S = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.5m$  e  $Pr=0.708$ .....65
- Figura 5.12 - Linhas de corrente, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) * Ra_S = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.828m$  e  $Pr=0.708$ .....66
- Figura 5.13 - Linhas de corrente, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) * Ra_S = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=2.228m$  e  $Pr=0.708$ .....67
- Figura 5.14 - Isotermas, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) * Ra_S = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.1428m$  e  $Pr=0.708$ .....69
- Figura 5.15 - Isotermas, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) * Ra_S = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.5m$  e  $Pr=0.708$ .....70
- Figura 5.16 - Isotermas, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) * Ra_S = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.828m$  e  $Pr=0.708$ .....71

- Figura 5.17 - Isotermas, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) * Ra_S = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^3$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=2.228m$  e  $Pr=0.708$ .....72
- Figura 5.18 - Número de Nusselt local do canal em 'L', com  $S=0.1m$ ,  $H=1.1428m$  e  $Pr=0.708$ .....73
- Figura 5.19 - Número de Nusselt local do canal em 'L', com  $S=0.1m$ ,  $H=1.5m$  e  $Pr=0.708$ .....74
- Figura 5.20 - Número de Nusselt local do canal em 'L', com  $S=0.1m$ ,  $H=1.828m$  e  $Pr=0.708$ .....75
- Figura 5.21 - Número de Nusselt local do canal em 'L', com  $S=0.1m$ ,  $H=2.228m$  e  $Pr=0.708$ .....76
- Figura 5.22 - Perfil de pressão no interior do canal em 'L', para  $(S/H) * Ra_S = 10^4$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1$ ,  $H=1.5$  e  $Pr=0.708$ .....78
- Figura 5.23 - Número de Nusselt médio baseado na altura aquecida(H) para o canal em 'L', com  $Pr=0.708$ .....79
- Figura 5.24 - Linhas de corrente, com fluxo prescrito em das paredes e o restante isolada, para  $(S/H) * Ra_{qs} = 10^4$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=0.75m$  e  $Pr=0.708$ .....82
- Figura 5.25 - Isotermas, com fluxo prescrito em uma das paredes e o restante isolada, para  $(S/H) * Ra_{qs} = 10^4$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1$ ,  $H=0.75$  e  $Pr=0.708$ .....83

## LISTA DE TABELAS

página

Tabela 5.1 - Resultados numéricos de diferentes autores, para diferentes tipos de condição de condições de contorno.....	45
Tabela 5.2 - Número de nusselt e razão entre os fluxos de massa para diferentes condições de contorno para a pressão para $(S/H)=0.0437$ e $Pr=0.708$ .....	48
Tabela 5.3 - Comparação do número de Nusselt local na saída do canal com os dados experimentais de [9] para $H=0.303$ e $Pr=0.708$ .....	54
Tabela 5.4 - Comparação da taxa de fluxo de massa e número de Nusselt médio para diversas condições de contorno para a pressão com $Pr=5.0$ , para a geometria 'L' com $S/H=0.066$ ....	57
Tabela 5.5 - Valores de Nusselt médio e taxa de fluxo de massa com $P_i=0$ na entrada, para diversas relações de $(S/H)$ e $Pr=0.708$ .....	59
Tabela 5.6 - Taxa de fluxo de massa para a relação $(S/H)=0.133$ , com a condição de fluxo prescrito.....	81

## SIMBOLOGIA

- $x, y$  - Sistema cartesiano de coordenadas.
- $J$  - Jacobino da transformação definida pelas Equações (3.1) e (3.2).
- $q, E, F, R, S$  - Grandezas definidas nas Eqs. (2.7) a (2.11).
- $S^\phi$  - Termo fonte na equação de conservação para  $\phi$ .
- $S^\phi$  - Termo fonte transformado na equação de transformação para  $\bar{\phi}$ .
- $L[ ]$  - Aproximação em diferenças finitas da quantidade entre colchetes.
- $S$  - Espaço entre placas.
- $H$  - Altura do canal aquecida.
- $S'$  - Comprimento da extensão horizontal do canal em 'L'. Fig. 5.2.
- $H'$  - Altura da extensão horizontal do canal em 'L'. Fig. 5.2.
- $T$  - Temperatura.
- $T_0$  - Temperatura de referência.
- $P$  - Pressão.
- $P'$  - Pressão efetiva.
- $P_0$  - Pressão hidrostática.
- $P_i$  - Pressão na entrada do canal.

$u, v$  - Componentes de velocidade no sistema cartesiano.

$U, V$  - Componentes contravariantes do vetor velocidade sem normalização métrica.

$\hat{U}, \hat{V}$  - Velocidades presentes nas Eqs. (3.57) e (3.58).

$T^*$  - Temperatura adimensional.

$T_w$  - Temperatura da parede.

$C_1, C_2, C_4, C_5$  - Coeficientes de difusão transformados. Equações (3.8) a (3.10).

$t$  - Tempo na Equação (3.19).

$\Delta t$  - Intervalo de tempo na Equação (3.19).

$E$  - Avanço de tempo. Equação (3.48).

$e, w, n, s$  - Indicadores das faces leste, oeste, norte e sul para volumes de controle.

$P$  - Indicador de volume de controle.

$E, W, N, S, NE,$

$NW, SE, SW$  - Indicador de volumes de controle vizinhos ao elemento  $P$ .

$A_e, A_w, etc.$  - Coeficientes na equação em diferenças finitas para

$\Delta V$  - Volume de um elemento de controle no plano transformado dado por  $\Delta V = \Delta \eta \Delta \xi$ .

$B$  - Termo fonte na equação para pressão.

$k$  - Coeficiente de condutibilidade térmica.

$c_p$  - Calor específico à pressão constante.

$g$  - Aceleração da gravidade.

$q$  - Fluxo de calor.

$\bar{q}$  - Fluxo de calor médio.

$\bar{v}_i$  - velocidade média na entrada do canal. Eq. (4.61).

$v^*$  - Velocidade cartesiana adimensional. Eq. (5.7).

$Nu_m$  - Número de Nusselt dado pela Eq. (5.1).

$Nu'_m$  - Número de Nusselt dado pela Eq. (5.2).

$Nu_s$  - Número de Nusselt médio baseado em  $S$ . Eq. (5.5).

$Nu_H$  - Número de Nusselt médio baseado em  $H$ . Eq. (5.10).

$Nu_l$  - Número de Nusselt local.  $Nu_l = qS/k (T_w - T_o)$ .

$\psi$  - Função linha de corrente.

$\bar{\psi}$  - Função linha de corrente média. Eq. (5.3).

$\dot{m}$  - Taxa de fluxo de massa.

$\delta$  - Espessura da camada limite térmica.

$Pr$  - Número de Prandtl.

$Ra_s$  - Número de Rayleigh baseado em  $S$ . Eq. (5.6).

$Ra_H$  - Número de Rayleigh baseado em  $H$ . Eq. (5.11).

$Ra_{qs}$  - Número de Rayleigh baseado em  $S$  e  $q$ . Eq. (5.12).

$Gr_s$  - Número de Grashof baseado em  $S$ . Eq. (5.4).

$Gr_{qSH}$  - Número de Grashof baseado em  $q$ ,  $S$  e  $H$ . Eq. (5.8).

re - Número de Peclet de malha. Equação (3.34).

$\alpha$  - Componentes do tensor métrico dada por

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 .$$

$\gamma$  - Componentes do tensor métrico dada por

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 .$$

$\beta$  - Componentes do tensor métrico dada por

$$\beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} .$$

$\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  - Coeficientes para os perfis convectivos e difusivos. Equações (3.32) e (3.33).

$\bar{\alpha}$  - Coeficiente de difusividade térmica.

$\bar{\beta}$  - Coeficiente de expansão térmica.

$\xi, \eta$  - Sistema generalizado de coordenadas. Domínio transformado.

$\nu$  - Viscosidade cinemática.

$\rho$  - Massa específica.

$\phi$  - Campo escalar genérico.

$\Gamma\phi$  - Coeficiente de transporte difusivo para um escalar

$\mu$  - Viscosidade absoluta

#### SUBSCRITOS

$\xi, \eta$  - Referem-se a derivadas parciais de primeira ordem.

P, E, N, S, W,

NE, SE, NW, SW - Referem-se aos pontos onde as variáveis são

re - Número de Peclet de malha. Equação (3.34).

$\alpha$  - Componentes do tensor métrico dada por  

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 .$$

$\gamma$  - Componentes do tensor métrico dada por  

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 .$$

$\beta$  - Componentes do tensor métrico dada por  

$$\beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} .$$

$\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  - Coeficientes para os perfis convectivos e difusivos. Equações (3.32) e (3.33).

$\bar{\alpha}$  - Coeficiente de difusividade térmica.

$\bar{\beta}$  - Coeficiente de expansão térmica.

$\xi, \eta$  - Sistema generalizado de coordenadas. Domínio transformado.

$\nu$  - Viscosidade cinemática.

$\rho$  - Massa específica.

$\phi$  - Campo escalar genérico.

$r\phi$  - Coeficiente de transporte difusivo para um escalar

$\mu$  - Viscosidade absoluta.

#### SUBSCRITOS

$\xi, \eta$  - Referem-se a derivadas parciais de primeira ordem.

P, E, N, S, W,

NE, SE, NW, SW - Referem-se aos pontos onde as variáveis são

avaliadas.

o - Indica estado de referência.

#### SUPERSCRITOS

' - Indica flutuações nas propriedades.

\* - Refere-se a valores adimensionais.

n - Refere-se ao nível de iteração nas equações em diferenças finitas.

$n + \theta$  - Refere-se a quantidade avaliadas no tempo  $t + \theta \Delta t$ .

## RESUMO

Neste trabalho é resolvido numericamente o modelo elíptico do problema da convecção natural em canais abertos, usando o método dos volumes finitos em coordenadas coincidentes com a fronteira.

Para o tratamento das condições de contorno na entrada do canal, uma importante questão numérica quando o problema é formulado elipticamente, é proposta uma metodologia de cálculo, onde tanto a pressão como a velocidade são corrigidas durante o processo evolutivo de cálculo.

Para a validação da metodologia de aplicação das condições de contorno mencionadas acima, são usados os diversos resultados experimentais e numéricos existentes na literatura para os canais formados por duas placas planas verticais.

Finalmente, o problema de convecção natural em canais em forma de 'L' é resolvido, variando-se o número de Rayleigh e as dimensões geométricas.

**ABSTRACT**

The elliptic model of the natural convection flows in open ended channels is solved numerically, using a finite volume method in boundary fitted coordinates. The elliptic model can handle physical situations where flow reversal at the channel outlet is present.

It is proposed a methodology to apply the inlet boundary conditions for pressure and velocity, an important question when the elliptic model is employed.

To validate the method the natural convection flow in a vertical channel is solved and the results compared with numerical and experimental results available in the literature.

To finalize the natural convection flow in a open ended channel with a L-shape is analyzed.

## INTRODUÇÃO

### 1.1 - PRELIMINARES

A transferência de calor por convecção natural em canais abertos está presente em uma grande variedade de situações, seja no resfriamento de equipamentos eletrônicos, na troca de calor em coletores de energia solar, no aquecimento de prédios empregando parede Trombe, em secadores de grãos, no processo de troca térmica do condensador de um refrigerador, em chaminés, etc. Em todos estes casos, é necessário conhecer as características dos campos de temperatura e velocidade, para que se possa projetar tais equipamentos com melhor rendimento.

Um problema de grande interesse prático é o da transferência de calor por convecção natural entre o condensador de um refrigerador doméstico e o canal formado pelo refrigerador e a parede onde o mesmo está acomodado. A distância do condensador à parede é fundamental nas dimensões do canal pelo qual se movimentará o ar em convecção natural. Se não existissem restrições de espaço físico uma boa solução seria deixar o refrigerador bastante afastado da parede. Mas nem sempre dispõe-se deste espaço, como no caso de projetos de trailers, em que necessita-se do maior aproveitamento possível da área física. Em contrapartida, necessita-se que o refrigerador em seu interior tenha condições mínimas de funcionamento, para que o mesmo possa ter o rendimento para o qual foi projetado.

No caso de trailers o problema é bem mais complexo, pois, devido ao pequeno espaço disponível, a sucção é feita na parede externa, e um canal conduz o ar aquecido até a parte superior do trailer, onde uma cobertura 'tipo chapéu' é empregada para evitar a penetração de água.

O presente trabalho é, portanto, motivado pela necessidade do conhecimento das características de troca de calor por convecção natural em canais formados pelo espaço entre

o condensador e as paredes do recinto.

Na realidade, o problema proposto é tridimensional mas, como a largura do refrigerador é, em geral, bastante grande em relação ao espaço(S) entre placas do canal, pode-se admitir o problema como 2D. Desse modo, pode-se estudar o efeito da convecção natural, em uma geometria bidimensional em forma de 'L' conforme mostrado na Fig. 1.1. O canal em 'L' é analisado para diferentes  $S/H$ , com  $H'$  constante, variando-se os parâmetros  $(S/H) \cdot Ra_s$  na faixa de  $10^3$  a  $5 \times 10^4$  e  $Ra_H$  na faixa de  $10^8$  a  $8 \times 10^8$ .

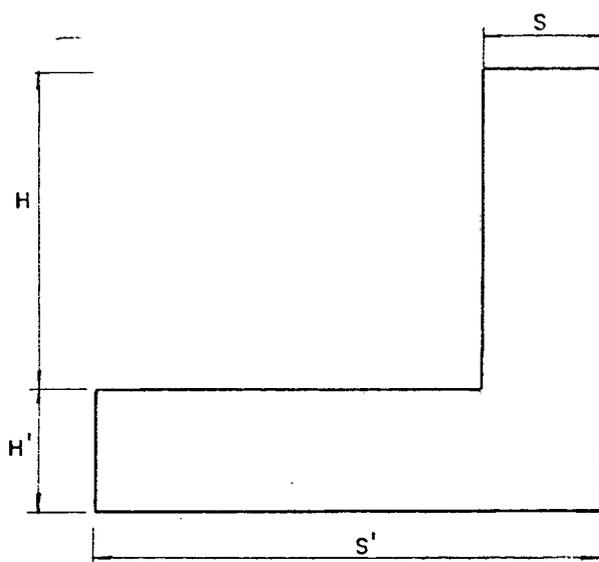


Fig. 1.1 - Geometria em forma de 'L'

O problema é modelado matematicamente usando-se a hipótese de Boussinesq, que permite que o problema seja tratado como incompressível, com as variações da massa específica apenas presente nos termos de empuxo.

Uma das questões fundamentais na solução de problemas de convecção natural em canais abertos, é o tratamento da condição de contorno na entrada do canal, uma vez que não se conhece nem a velocidade nem a pressão neste local. Atenção especial é dada a esta questão no presente trabalho.

## 1.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No que refere-se à troca de calor por convecção

natural, a maioria dos dados existentes na literatura são para os casos de canais formados por duas placas planas verticais.

Um dos primeiros trabalhos numéricos nesta área é o J. R. Bodoia e J. F. Osterle [2] que resolveram o problema de duas placas planas, com a temperatura das paredes constantes e iguais. Usando uma metodologia parabólica, encontraram números Nusselt muito próximos dos valores experimentais de Elenbaas [1].

Seguindo a mesma metodologia numérica apresentada em [2], mas com uma classe de problemas bem mais diversificada, Aung e outros [3] resolveram o caso de canais de placas planas com condições de fluxo ou temperatura prescrita constante. Neste mesmo trabalho encontra-se alguns resultados experimentais obtidos para o caso de temperatura das paredes constantes, e seus valores estão de acordo com os resultados numéricos. Deve-se ressaltar aqui que na faixa de Rayleigh analisada em [3] não foi observado recirculações na saída, próxima a parede mais fria, para os casos assimétricos.

Posteriormente, Sparrow e outros [4] estudaram o problema em canais formados por duas placas planas verticais, estando uma das placas a temperatura constante e a outra isolada. Este trabalho dispõe de resultados experimentais para a água, para faixa de  $(S/H) \cdot Ra_S$  de 200 a  $10^5$ , onde S é a distância entre placas, H é a altura do canal e  $Ra_S$  o número de Rayleigh baseado em S, para quatro relações de largura/altura do canal. O experimento comprovou a existência de uma recirculação na saída do canal após uma determinada força de empuxo imposta. Neste mesmo trabalho encontram-se resultados numéricos, usando a metodologia parabólica. Apesar dos resultados obtidos com a metodologia numérica serem bastante próximos dos resultados experimentais, não existe a captação da recirculação na região de saída próxima a parede mais fria devido as restrições da metodologia adotada.

Recentemente, Aung e outros [5] estudaram numericamente o problema de convecção mista em canais com

temperaturas assimétricas, com a mesma maneira de cálculo usada em [3]. Para os casos em que a relação (Rayleigh/Reynolds) é maior que 250, foi encontrada a presença de recirculação na região de saída, próxima à parede mais fria. Entretanto, para relações maiores que 250 a solução tornava-se instável após a região da recirculação.

Existem poucos métodos na literatura tratando o problema de canais abertos, elipticamente nas duas direções coordenadas. Kettleborough [6] resolveu o caso de um canal formado por duas placas planas, com temperatura das paredes constante e simétricas, substituindo as variáveis primitivas em prol das funções de corrente e vorticidade. Como no caso das velocidades as funções de corrente e vorticidade também são desconhecidas na entrada do canal, o mesmo resolveu este problema estendendo o domínio de cálculo na entrada do canal, conforme Fig. 1.2 abaixo.

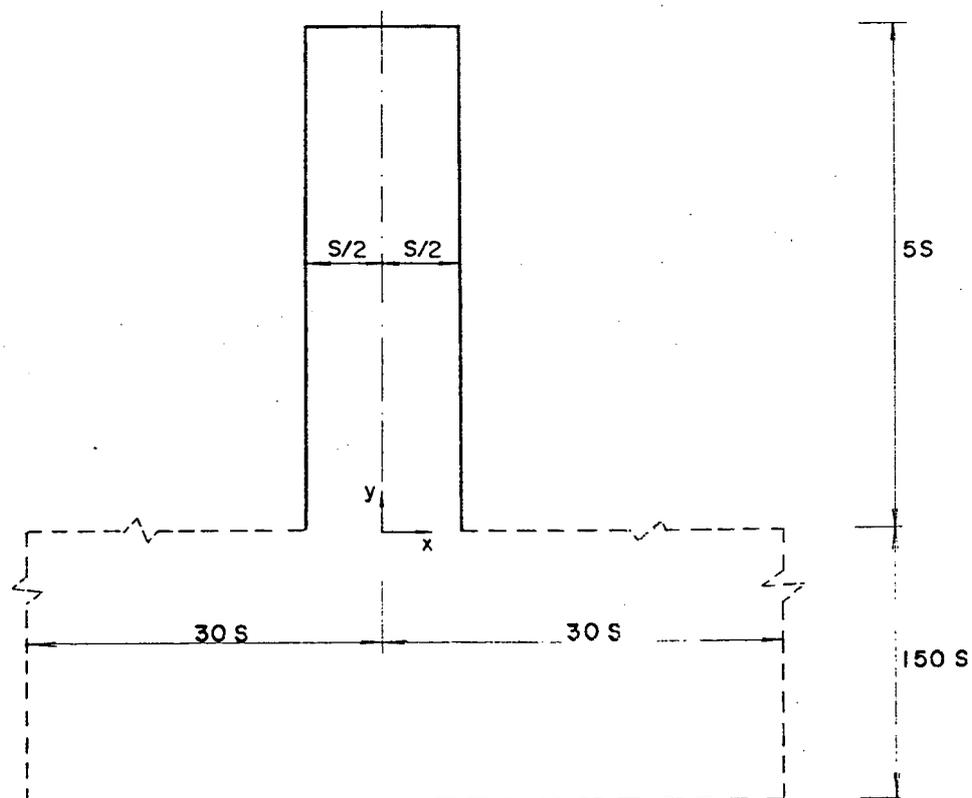


Fig. 1.2 - Domínio de cálculo usado por Kettleborough [6]

Neste caso, longe da entrada do canal foram usadas

condições de contorno de derivada nula, para todas as variáveis do problema. Ou seja, a aplicação das condições de contorno fracas bastante longe da fronteira de entrada não deveria influenciar os resultados numéricos. Com relação a esta maneira de cálculo, uma dificuldade é vista por este autor, devido a grande ampliação da região de cálculo fora do canal. Pode-se ver da Fig. 1.2 que a região (área) fora do canal é 1800 vezes maior que a região interna, que é a região de interesse. Isto acarreta, obviamente, grande esforço computacional adicional.

Nakamura e outros [7], apesar de usarem domínios de cálculo iguais aos de [6] e, novamente, as equações do movimento e energia estarem em função da função de corrente e vorticidade, resolveram o mesmo problema proposto por [6], novamente elíptico nas duas direções. Entretanto, neste trabalho, foi proposta uma equação para a pressão, que deveria ser satisfeita de acordo com as forças de flutuação. Caso o campo de vorticidade e linhas de correntes não satisfizessem a equação da pressão, uma nova iteração seria necessária.

Recentemente, A. O. Nieckele e L. F. A. Azevedo [8] resolveram o problema de canais formados por duas placas planas, elípticamente, com uma das placas a temperatura constante e a outra isolada. Neste trabalho os autores apresentam resultados experimentais e numéricos, sendo os resultados numéricos obtidos por procedimentos elípticos e parabólicos. Entretanto, a metodologia de cálculo elíptica, usada pelos mesmos, não está claramente explicada em [8].

### 1.3 - PERFIL DA DISSERTAÇÃO

Apresentamos a seguir o resumo dos capítulos que formam o restante desta dissertação.

**CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA** - Neste capítulo, formula-se o problema e apresenta-se as equações que regem o problema físico, bem como todas as hipóteses simplificativas que foram feitas para obtenção do modelo matemático.

CAPÍTULO 3 - EQUAÇÕES APROXIMADAS - Neste capítulo transforma-se as equações do sistema cartesiano para um sistema genérico  $(\xi, \eta)$ , e são feitas as integrações das mesmas no plano transformado. Apresenta-se também, neste capítulo, o procedimento para o tratamento do acoplamento pressão - velocidade, bem como a equação para a pressão.

CAPÍTULO 4 - CONDIÇÕES DE CONTORNO - Neste capítulo, é feito o cálculo das velocidades para os pontos fictícios, para as diversas condições de contorno. Mostrar-se-á, também, como será aplicada a condição de contorno para a temperatura. Em seguida, apresenta-se a equação para o cálculo da velocidade na entrada do canal. Mostra-se-á também a aplicação das condições de contorno para a pressão.

CAPÍTULO 5 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS - Neste capítulo, mostrar-se-á os diversos resultados obtidos pela metodologia elíptica deste trabalho, para canais formados por placas planas, com suas respectivas comparações com os dados existentes na literatura. Por último, apresenta-se os resultados para os diversos testes feitos para a geometria em 'L'.

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES - São apresentadas de forma sucinta, todas as conclusões que foram obtidas através da análise dos resultados numéricos.

## CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

### 2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, formula-se o problema bidimensional de convecção natural, em canais abertos de geometria arbitrária.

São introduzidas as equações diferenciais parciais em coordenadas cartesianas em forma conservativa para um escalar genérico  $\phi$ . As equações que representam o problema físico são a equação da conservação da massa, conservação da quantidade de movimento nas direções  $x$  e  $y$ , e a equação da energia.

### 2.2 - MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES EM CANAIS ABERTOS

#### 2.2.1 - MODELO PARABÓLICO

Existem muitos problemas físicos de transferência de calor e mecânica dos fluidos que apresentam uma direção predominante de escoamento, em cuja direção os efeitos convectivos são predominantes aos difusivos. Do ponto de vista matemático, isto permite resolver o problema sem a necessidade de condições de contorno a jusante. Tais problemas são denominados parabólicos e permitem um processo de marcha para a sua solução.

Neste caso, a partir das condições de contorno conhecidas na entrada do canal ( $u_i, v_i, P_i$  e  $T_i$ ), pode-se calcular os novos valores ( $u_{i+1}, v_{i+1}, u_{i+1}, P_{i+1}$  e  $T_{i+1}$ ) em uma seção a jusante do canal, com esses valores dependendo unicamente dos valores prescritos na entrada, conforme apresentado na Fig. 2.1. Conhecidos novos valores nesta seção, pode-se avançar para uma nova seção, com os valores a serem calculados, dependendo unicamente dos valores da seção anterior. Desse modo, pode-se marchar no interior do canal, até que todo o campo seja conhecido. Tal método de cálculo é bastante poderoso em problemas onde os termos difusivos na direção principal do escoamento são pequenos quando comparados com os convectivos.

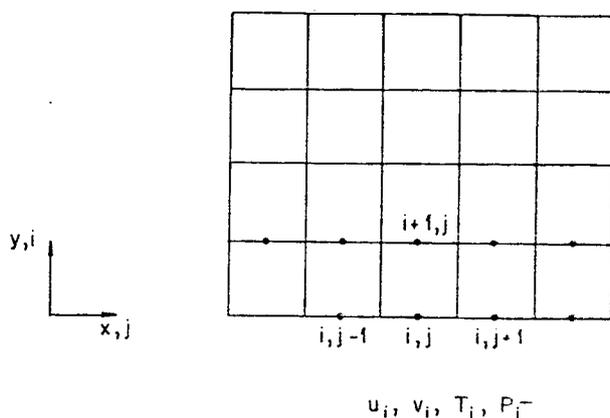


Fig. 2.1 - Domínio de cálculo para problemas parabólicos

O uso de modelos parabólicos, diminui o espaço de memória requerido para o cálculo computacional. Em contrapartida, problemas onde aparece movimento contrário de fluido na direção principal do escoamento não podem ser resolvidos com esta metodologia.

### 2.2.2 - MODELO ELÍPTICO

Quando os termos difusivos assumem importância nas equações do movimento e energia e passam a ser da ordem de grandeza dos termos convectivos, um procedimento de marcha (parabólico) não pode mais ser empregado devido à presença dos termos de derivada de segunda ordem na direção predominante de escoamento. Desta forma, precisa-se conhecer os valores dos campos tanto na entrada como na saída do canal. O modelo elíptico permite, obviamente, tratar escoamentos que apresentem recirculações.

Devido às características do problema em estudo neste trabalho, o modelo elíptico é adotado. As razões para esta escolha serão discutidas a seguir.

### 2.3 - JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO MODELO ELÍPTICO

Como visto acima, podemos escolher duas formas para a formulação das equações. Neste trabalho resolveu-se adotar o

modelo elíptico bidimensional, em virtude das simplificações acima citadas, do modelo parabólico, não levarem em conta os termos difusivos na direção longitudinal do fluxo. Eventualmente, estes termos podem ser de importância fundamental, como nos casos de canais abertos que apresentem recirculações e na geometria em 'L,' que será estudada neste trabalho.

Quando resolve-se parabolicamente o problema em canais abertos prescreve-se uma certa vazão na entrada do canal. Com esta vazão pode-se calcular a pressão na entrada do canal, através da equação de Bernoulli, ou pode-se fazer a pressão igual a zero (diferença entre a pressão na entrada e a pressão fora do canal na mesma altura). Convém lembrar aqui que existe muita diferença entre estas duas formas de condição de contorno para a pressão. Uma vez que se está resolvendo um problema de convecção natural pura, a pressão na entrada deve ser menor do que a pressão fora do canal em uma mesma elevação. Desta forma, o movimento do fluido será ocasionado unicamente pela variação da densidade do fluido. Ao prescrever-se pressão nula na entrada estar-se-á resolvendo um problema de convecção mista. Para visualizarmos este problema, pode-se associar a idéia de que, se o problema fosse de convecção forçada, teríamos uma pressão na entrada maior que a pressão ambiente em uma mesma elevação fora do canal. Como em um problema de convecção natural em um canal aberto, a pressão na entrada deverá ser menor do que a pressão fora do canal, pode-se concluir que fazer a pressão igual a zero é um caso de convecção mista, pois existirão os efeitos de flutuação e os efeitos da pressão prescrita superiores aqueles consistentes com a existência da convecção natural.

No caso parabólico, então, a vazão e a pressão são estabelecidas na entrada do canal, assumindo-se um procedimento de marcha, até que a pressão retorne a zero. Neste ponto, ter-se-á encontrado a altura do canal necessária para succionar aquela vazão prescrita, por convecção natural. Pode-se observar que, mesmo fixando-se um dos parâmetros, no caso a vazão, ainda existe um parâmetro que carece de ser calculado, no caso a

altura do canal. Se tivermos o contrário, isto é, um canal com determinada altura e quisermos saber qual a vazão que será succionada por convecção natural, o problema passa a ser iterativo, com a sucessiva modificação da vazão na entrada até que a pressão na saída seja igual a zero.

Além disso, quando a distância entre as placas pode variar, ou quando não existe simetria térmica e as forças de flutuação são consideráveis, poderão começar a surgir bolsas de ar frio na parede mais fria, como apresentada na Figura 2.2. Neste caso, é necessário que o problema seja tratado elipticamente. Deste modo, as condições de contorno na entrada do canal necessitam tratamento especial. A forma de aplicação de tais condições será apresentada no Cap. 4.

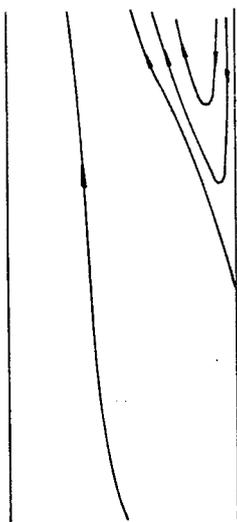


Fig. 2.2 - Escoamento em um canal plano com recirculação em uma das paredes

#### 2.4 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema de interesse é o de convecção natural bidimensional elíptica em canais abertos de geometria qualquer. Neste trabalho interessa-se pelo regime permanente e o domínio de cálculo é mostrado na Fig. 2.3.

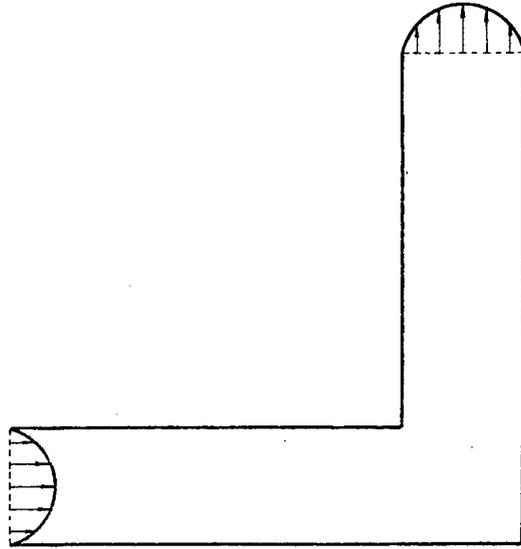


Fig. 2.3 - Canal aberto de geometria arbitrária

Observando as seguintes hipóteses simplificativas,

- a - regime laminar
- b - escoamento incompressível
- c - fluido Newtoniano
- d - todas as propriedades do fluido constantes, a não ser aquelas que aparecem nas forças de campo
- e - sem geração de calor
- f - sem dissipação viscosa

obtem-se as seguintes equações que estabelecem o modelo matemático para o problema físico em questão

conservação da massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (2.1)$$

quantidade do movimento na direção x

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (2.2)$$

quantidade do movimento na direção  $y$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial y}) - \rho g \quad (2.3)$$

energia

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v T) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial y}) \quad (2.4)$$

Fazendo  $P = P' + P_0$  e usando a hipótese de Boussinesq a Eq. (2.3) pode ser colocada na seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = - \frac{\partial P'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial y}) + \rho g \bar{\beta} (T - T_0) \quad (2.5)$$

onde  $T_0$  é a temperatura ambiente,  $P'$  é a pressão efetiva e  $P_0$  é a pressão hidrostática medida na mesma altura, na parte exterior do canal. Maiores detalhes a respeito da passagem da Eq. (2.3) a (2.5) podem ser encontrados em [22].

Analisando-se as Eqs. (2.1) a (2.5), observa-se que as mesmas, podem ser colocadas em uma forma conservativa, para uma variável genérica  $\phi$ .

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + P\phi = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + S\phi \quad (2.6)$$

onde

$$q = \rho \phi \quad (2.7)$$

$$E = \rho u \phi \quad (2.8)$$

$$F = \rho v \phi \quad (2.9)$$

$$R = \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$S = \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.11)$$

e  $S^\phi$  o termo fonte para  $\phi$  e  $P^\phi$  o gradiente de pressão para  $\phi$ .

O valor de  $\Gamma^\phi$  representa a propriedade física responsável pelo transporte difusivo da variável  $\phi$ . Desta forma  $\Gamma^\phi$  representa a viscosidade absoluta para as equações do movimento e a condutibilidade térmica dividida pelo calor específico a pressão constante para a equação da energia.

Por simplicidade, de agora em diante  $P'$  será substituída por  $P$ .

Observando as Eqs. (2.1) a (2.5) vê-se que a Eq. (2.6) representa:

a) a equação da conservação da massa quando  $\phi=1$ ,  $P^\phi=S^\phi=0$

b) a equação do movimento em x quando  $\phi=u$ ,  $P^\phi=\frac{\partial P}{\partial x}$  e  $S^\phi=0$

c) a equação do movimento em y quando  $\phi=v$ ,  $P^\phi=\frac{\partial P}{\partial y}$  e  $S^\phi=\rho g \beta(T-T_0)$

d) a equação da energia quando  $\phi=T$  e  $S^\phi=P^\phi=0$

Observando as Eqs. (2.1) a (2.5) pode-se ver que temos quatro equações a quatro incógnitas ( $u, v, P$  e  $T$ ). Como no presente trabalho o procedimento é segregado, a equação do movimento em  $x$  é usada para o avanço de  $u$ , a equação do movimento em  $y$  é usada para o avanço de  $v$  e a equação da energia para o avanço de  $T$ . Observa-se que não tem-se uma equação para o avanço de  $P$ . No Cap. 3 a equação da continuidade é utilizada para o estabelecimento de uma equação para a pressão.

## CAPÍTULO 3 - EQUAÇÕES APROXIMADAS

### 3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo é feita, inicialmente, a transformação do plano físico para o plano computacional da Eq. (2.6) e, após a transformação, é feita sua integração neste plano.

São apresentadas as equações do movimento na forma contravariante e a equação para o cálculo da pressão.

### 3.2 - TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

Para que a discretização do domínio de cálculo apresente sempre volumes inteiros nas fronteiras para geometrias quaisquer, é necessário que o sistema coordenado seja coincidente com a fronteira. Isto pode ser conseguido escrevendo-se as equações governantes do problema para o sistema generalizado de coordenadas. Para cada nova geometria que se deseje analisar um novo sistema coordenado é construído.

Neste novo sistema as linhas coordenadas são denominadas  $(\xi, \eta)$  e para que se realize a transformação é necessário conhecer as funções

$$\xi = \xi(x, y) \tag{3.1}$$

$$\eta = \eta(x, y) \tag{3.2}$$

que relaciona as coordenadas no sistema cartesiano com as coordenadas no plano transformado, cuja matriz jacobiana é dada por

$$|J| = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

cujo determinante é dado por

$$J = \det|J| = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \quad (3.4)$$

onde os subíndices indicam derivadas parciais.

Aplicando a transformação geral definida pelas Eqs. (3.1) e (3.2) sobre a equação cartesiana genérica (2.6), a mesma adquire a seguinte forma no plano transformado

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V \phi) + \hat{P} \phi = \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \\ \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \hat{S} \phi \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde

$$\hat{P} \phi = \frac{P \phi}{J} \quad (3.6)$$

$$\hat{S} \phi = \frac{S \phi}{J} \quad (3.7)$$

$$C_1 = \alpha J \Gamma \phi \quad (3.8)$$

$$C_2 = C_5 = - \beta J \Gamma \phi \quad (3.9)$$

$$C_4 = \gamma J \Gamma \phi \quad (3.10)$$

$$U = y_\eta u - x_\eta v \quad (3.11)$$

$$V = x_\xi v - y_\xi u \quad (3.12)$$

Os termos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são as componentes do tensor métrico apresentadas na simbologia.

Todos os detalhes da obtenção da Eq. (3.5) a partir da

Eq. (2.6) podem ser encontrados em Perez [28]. Os termos  $U$  e  $V$  nas Eqs. (3.11) e (3.12) representam as velocidades contravariantes e são as velocidades responsáveis pelo transporte da massa, quantidade de movimento, energia, etc, através das faces dos volumes elementares, Maliska[26].

Substituindo os valores de  $\phi$  para as diversas equações dadas no Cap. 2, chega-se as seguintes equações no plano transformado

continuidade

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (3.13)$$

movimento para  $u$

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U u) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V u) + \hat{P}^u = \frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial u}{\partial \xi}) + \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial u}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \xi}(C_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_5 \frac{\partial u}{\partial \xi}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

movimento para  $v$

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U v) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V v) + \hat{P}^v = \frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial v}{\partial \xi}) + \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial v}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \xi}(C_2 \frac{\partial v}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_5 \frac{\partial v}{\partial \xi}) + \frac{\rho g \beta}{J}(T - T_0) \end{aligned} \quad (3.15)$$

energia

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U T) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V T) = \frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta}) + \\ \frac{\partial}{\partial \xi}(C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde  $\hat{P}^u$  e  $\hat{P}^v$  nas Eq. (3.13) e (3.14) são dados por

$$\hat{P}^u = \frac{\partial P}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial P}{\partial \eta} y_\xi \quad (3.17)$$

$$\hat{P}^v = \frac{\partial P}{\partial \eta} x_\xi - \frac{\partial P}{\partial \xi} x_\eta \quad (3.18)$$

### 3.3 - EQUAÇÕES APROXIMADAS NO PLANO TRANSFORMADO

Feita a transformação das equações do sistema cartesiano para o geral, necessita-se agora integrar a equação geral para a variável  $\phi$  no plano transformado, para cada elemento de volume, conforme Fig. 3.1

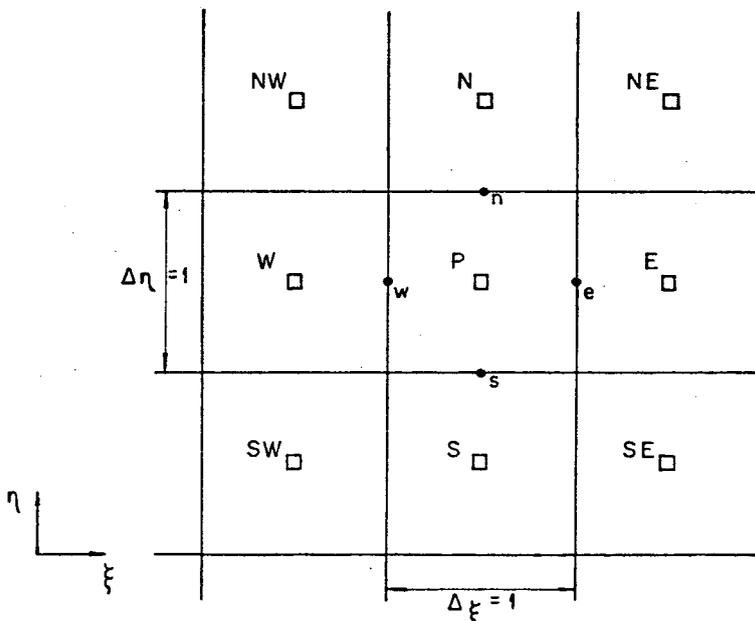


Fig. 3.1 - Volume de controle no plano transformado

Integrando a equação (3.5) no volume de controle da Fig. 3.1 e no tempo resulta

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta_s}^{\eta_n} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \left[ \frac{1}{J} (\rho\phi)^{t+\Delta t} - \frac{1}{J} (\rho\phi)^t \right] d\eta d\xi + \int_{\eta_s}^{\eta_n} \int_t^{t+\Delta t} [(\rho U\phi)_e - \\
& (\rho U\phi)_w] d\eta dt + \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_t^{t+\Delta t} [(\rho V\phi)_n - (\rho V\phi)_s] d\xi dt + \\
& \int_{\eta_s}^{\eta_n} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_t^{t+\Delta t} \hat{P}\phi d\eta d\xi dt = \int_{\eta_s}^{\eta_n} \int_t^{t+\Delta t} \left[ C_1 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \Big|_e - C_1 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \Big|_w \right] d\eta dt + \\
& \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_t^{t+\Delta t} \left[ C_4 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \Big|_n - C_4 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \Big|_s \right] d\xi dt + \int_{\eta_s}^{\eta_n} \int_t^{t+\Delta t} \left[ C_2 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \Big|_e - \right. \\
& \left. C_2 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \Big|_w \right] d\eta dt + \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_t^{t+\Delta t} \left[ C_5 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \Big|_n - C_5 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \Big|_s \right] d\xi dt + \\
& \int_{\eta_s}^{\eta_n} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_t^{t+\Delta t} \hat{S}\phi d\eta d\xi dt \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Como se pode ver na equação acima, necessita-se dos valores da propriedade  $\phi$  e de seu gradiente  $\frac{\partial\phi}{\partial n}$  nas faces do elemento de volume, pois dispomos de  $\phi$  armazenada no centro do volume. Neste trabalho faz-se uso do "Esquema de Diferenças Ponderadas a Montante" (WUDS) de Raithby e Torrance [23].

Assim, as expressões para  $\phi$  e  $\frac{\partial\phi}{\partial n}$  ficam da seguinte forma

$$\phi_e = \left| \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_e \right| \phi_P + \left| \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right| \phi_E \tag{3.20}$$

$$\phi_w = \left| \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right| \phi_W + \left| \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_w \right| \phi_P \tag{3.21}$$

$$\phi_n = \left| \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n \right| \phi_P + \left| \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right| \phi_N \tag{3.22}$$

$$\phi_S = \left| \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_S \right| \phi_S + \left| \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_S \right| \phi_P \quad (3.23)$$

$$C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e = C_1 \bar{\beta}_e \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta \xi} \right) \quad (3.24)$$

$$C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_w = C_1 \bar{\beta}_w \left( \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta \xi} \right) \quad (3.25)$$

$$C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_n = C_4 \bar{\beta}_n \left( \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta \eta} \right) \quad (3.26)$$

$$C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_s = C_4 \bar{\beta}_s \left( \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta \eta} \right) \quad (3.27)$$

$$C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_e = C_2 \bar{\beta}_e \left( \frac{\phi_{NE} + \phi_N - \phi_{SE} - \phi_S}{4\Delta \eta} \right) \quad (3.28)$$

$$C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_w = C_2 \bar{\beta}_w \left( \frac{\phi_{NW} + \phi_N - \phi_{SW} - \phi_S}{4\Delta \eta} \right) \quad (3.29)$$

$$C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_n = C_5 \bar{\beta}_n \left( \frac{\phi_{NE} + \phi_E - \phi_{NW} - \phi_W}{4\Delta \xi} \right) \quad (3.30)$$

$$C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_s = C_5 \bar{\beta}_s \left( \frac{\phi_{SE} + \phi_E - \phi_{SW} - \phi_W}{4\Delta \xi} \right) \quad (3.31)$$

Os parâmetros  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  nas Eqs. (3.20) a (3.31) são as funções pesos, que avaliam a importância dos termos difusivos e convectivos. Os valores de  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  são dados por Raithby [24]. Por exemplo,

$$\bar{\alpha}_e = \frac{r_e^2}{10 + r_e^2} \quad (3.32)$$

$$\bar{\beta}_e = \frac{1 + 0.005r_e^2}{1 + 0.05r_e^2} \quad (3.33)$$

onde

$$r_e = \frac{\rho U \Delta \xi}{\Gamma^\phi J \alpha} \Big|_e \quad (3.34)$$

é o número de Peclet avaliado na face este do volume.

Por conveniência, na Eq. (3.19) representar-se-á  $t + \Delta t$  por  $n + 1$  e  $t + \theta \Delta t$  por  $n + \theta$ , com  $\theta$  variando de 0 a 1. Quando  $\theta = 0$  a formulação está na forma explícita e quando  $\theta = 1$  a formulação é implícita.

Substituindo as Eqs. (3.20) a (3.31) em (3.19) e usando a equação da continuidade,

$$|(\rho U)_e - (\rho U)_w| \Delta \eta - |(\rho V)_n - (\rho V)_s| \Delta \xi = 0 \quad (3.35)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{\rho_P}{J_P} \frac{\Delta V}{\Delta t} \phi_P^{n+1} - \frac{\rho_P}{J_P} \frac{\Delta V}{\Delta t} \phi_P^n + A_P^* \phi_P^{n+\theta} &= A_e \phi_E^{n+\theta} + A_w \phi_W^{n+\theta} + A_n \phi_N^{n+\theta} + \\ &A_s \phi_S^{n+\theta} + A_{ne} \phi_{NE}^{n+\theta} + A_{nw} \phi_{NW}^{n+\theta} + A_{se} \phi_{SE}^{n+\theta} + \\ &A_{sw} \phi_{SW}^{n+\theta} + L |\hat{S} T^\phi| - L |\hat{P}^\phi| \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde

$$A_e = (\rho U)_e \left( \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right) \Delta \eta + C_{1e} \bar{\beta}_e \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + C_{5n} \frac{\Delta \eta}{4\Delta \xi} - C_{5s} \frac{\Delta \eta}{4\Delta \xi} \quad (3.37)$$

$$A_w = (\rho U)_w \left( \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right) \Delta \eta + C_{1w} \bar{\beta}_w \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + C_{5s} \frac{\Delta \eta}{4\Delta \xi} - C_{5n} \frac{\Delta \eta}{4\Delta \xi} \quad (3.38)$$

$$A_n = (\rho V)_n \left( \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) \Delta \xi + C_{4n} \bar{\beta}_n \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} + C_{2e} \frac{\Delta \xi}{4\Delta \eta} - C_{2w} \frac{\Delta \xi}{4\Delta \eta} \quad (3.39)$$

$$A_s = (\rho V)_s \left( \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right) \Delta \xi + C_{4s} \bar{\beta}_s \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} + C_{2w} \frac{\Delta \xi}{4\Delta \eta} - C_{2e} \frac{\Delta \xi}{4\Delta \eta} \quad (3.40)$$

$$A_{ne} = C_{5n} \frac{\Delta \eta}{4\Delta \xi} + C_{2e} \frac{\Delta \xi}{4\Delta \eta} \quad (3.41)$$

$$A_{nw} = - C_{2w} \frac{\Delta \xi}{4\Delta \eta} - C_{5n} \frac{\Delta \eta}{4\Delta \xi} \quad (3.42)$$

$$A_{se} = - C_{2e} \frac{\Delta \xi}{4\Delta \eta} - C_{5s} \frac{\Delta \eta}{4\Delta \xi} \quad (3.43)$$

$$A_{sw} = C_{2w} \frac{\Delta \xi}{4\Delta \eta} + C_{5s} \frac{\Delta \eta}{4\Delta \xi} \quad (3.44)$$

$$A_p^* = A_e + A_w + A_n + A_s \quad (3.45)$$

Fazendo  $\theta = 0$  na Eq. (3.36) obtem-se o avanço no tempo de modo que os coeficientes ainda sejam positivos

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_P}{J_P} \frac{\Delta V}{\Delta t} \phi_P^{n+1} + (A_P^* - \frac{\rho_P}{J_P} \frac{\Delta V}{\Delta t}) \phi_P^n = & A_e \phi_E^n + A_w \phi_W^n + A_n \phi_N^n + \\
& A_s \phi_S^n + A_{ne} \phi_{NE}^n + A_{nw} \phi_{NW}^n + A_{se} \phi_{SE}^n + A_{sw} \phi_{SW}^n - \\
& L |\hat{P}^\phi| + L |\hat{ST}^\phi|
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Da Eq. (3.46) pode-se tirar que o maior avanço no tempo de modo que o coeficiente de  $\phi_P^n$  não seja negativo

$$\Delta t_{\max} = \frac{\rho_P \Delta V}{J_P A_P^*} \tag{3.47}$$

Para a formulação explícita, podemos escolher um valor de E [25] entre 0 e 1, de tal modo que

$$\Delta t = E \Delta t_{\max} \tag{3.48}$$

Para a formulação totalmente implícita ( $\theta=1$ ) são permitidos valores de  $E > 1$ . Substituindo (3.47) em (3.48) vem,

$$\frac{\rho_P \Delta V}{J_P \Delta t} = \frac{A_P^*}{E} \tag{3.49}$$

Substituindo (3.49) na Eq. (3.36) para  $\theta=1$ , vem

$$\begin{aligned}
(\frac{A_P^*}{E} + A_P^*) \phi_P^{n+1} = & A_e \phi_E^{n+1} + A_w \phi_W^{n+1} + A_n \phi_N^{n+1} + A_s \phi_S^{n+1} + \\
& A_{ne} \phi_{NE}^{n+1} + A_{nw} \phi_{NW}^{n+1} + A_{se} \phi_{SE}^{n+1} + A_{sw} \phi_{SW}^{n+1} + \\
& L |\hat{ST}^\phi| - L |\hat{P}^\phi| + \frac{A_P^*}{E} \phi_P^n
\end{aligned} \tag{3.50}$$

mas,

$$\frac{A_P^*}{E} + A_P^* = A_P^* \tag{3.51}$$

Substituindo (3.51) em (3.50), chega-se a

$$\begin{aligned}
A_P \phi_P^{n+1} &= A_e \phi_E^{n+1} + A_w \phi_W^{n+1} + A_n \phi_N^{n+1} + A_s \phi_S^{n+1} + A_{ne} \phi_{NE}^{n+1} + \\
&A_{nw} \phi_{NW}^{n+1} + A_{se} \phi_{SE}^{n+1} + A_{sw} \phi_{SW}^{n+1} - L|\hat{P}^\phi| + L|\hat{ST}^\phi| + \\
&\frac{A_P}{(1+E)} \phi_P^n
\end{aligned} \tag{3.52}$$

A Eq. (3.36) tem informação dos 9 pontos vizinhos. Para a temperatura Tribess [22], Milioli [27], Perez [28] e Polina [29] mantiveram no termo fonte, os termos devido à não ortogonalidade. Dessa forma, mesmo usando um método implícito para o cálculo da variável, ainda permanece uma parcela explícita nas equações, uma vez que a avaliação do termo fonte nesse caso, em um instante 't+1' é feita com os valores do instante 't' e mantido constante neste instante. Neste trabalho os termos não ortogonais são tratados implicitamente.

Desse modo, temos o seguinte conjunto de equações, respeitando-se as definições para  $\phi$  no Cap. 2.

continuidade

$$(\rho U)_e - (\rho U)_w - (\rho V)_n - (\rho V)_s = 0 \tag{3.53}$$

movimento para u

$$\begin{aligned}
A_P u_P^{n+1} &= A_e u_E^{n+1} + A_w u_W^{n+1} + A_n u_N^{n+1} + A_s u_S^{n+1} + A_{ne} u_{NE}^{n+1} + \\
&A_{nw} u_{NW}^{n+1} + A_{se} u_{SE}^{n+1} + A_{sw} u_{SW}^{n+1} - L|\hat{P}^u| + L|\hat{ST}^u| + \\
&\frac{A_P}{(1+E)} u_P^n
\end{aligned} \tag{3.54}$$

movimento para  $v$

$$\begin{aligned}
 A_P v_P^{n+1} &= A_e v_E^{n+1} + A_w v_W^{n+1} + A_n v_N^{n+1} + A_s v_S^{n+1} + A_{ne} v_{NE}^{n+1} + \\
 &A_{nw} v_{NW}^{n+1} + A_{se} v_{SE}^{n+1} + A_{sw} v_{SW}^{n+1} - L|\hat{P}^V| + L|\hat{S}T^V| + \\
 &\frac{A_P}{(1+E)} v_P^n
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

energia

$$\begin{aligned}
 A_P T_P^{n+1} &= A_e T_E^{n+1} + A_w T_W^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + A_{ne} T_{NE}^{n+1} + \\
 &A_{nw} T_{NW}^{n+1} + A_{se} T_{SE}^{n+1} + A_{sw} T_{SW}^{n+1} + L|\hat{S}T^T| + \frac{A_P}{(1+E)} T_P^n
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

### 3.4 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO PARA AS VELOCIDADES CONTRAVARIANTES $U$ E $V$

Observando-se as Eqs. (3.54) e (3.55), vê-se que é preciso resolver as mesmas para um mesmo ponto, tendo-se em vista que em um volume arbitrário  $u$  e  $v$  são necessárias para o cálculo do fluxo de massa através das faces. Como citado anteriormente, as componentes contravariantes  $U$  e  $V$  são as únicas velocidades responsáveis pelo transporte de massa, respectivamente nas faces este e oeste e norte e sul. Dessa forma, torna-se conveniente escrever as equações do movimento para  $U$  e  $V$ . Usando a metodologia de cálculo, proposta por Maliska [26], chega-se às seguintes expressões para  $U$  e  $V$ .

$$U_P = \hat{U}_P - \left| \frac{\alpha \Delta V}{A_P} \frac{\Delta P}{\Delta \xi} \right|_P + \left| \frac{\beta \Delta V}{A_P} \frac{\Delta P}{\Delta \eta} \right|_P \tag{3.57}$$

$$V_P = \hat{V}_P - \left| \frac{\gamma \Delta V}{A_P} \frac{\Delta P}{\Delta \eta} \right|_P + \left| \frac{\beta \Delta V}{A_P} \frac{\Delta P}{\Delta \xi} \right|_P \tag{3.58}$$

onde as expressões de  $\hat{U}$  e  $\hat{V}$  podem ser encontradas em Tribess [22], Milioli [27], Perez [28] e Polina [29].

### 3.5 - MÉTODO PARA O TRATAMENTO DO ACOPLAMENTO PRESSÃO - VELOCIDADE

Como já comentado é necessário estabelecer uma equação para a pressão. Para resolver este problema é usado o método PRIME, cujos maiores detalhes podem ser encontrados em Maliska [26]. Neste método as Eqs. (3.57) e (3.58) são substituídas na equação da continuidade e é obtida uma equação para a pressão. Resolvido o campo de pressão, volta-se nas Eqs. (3.57) e (3.58) e corrige-se o campo de velocidades, tal que o mesmo satisfaça a conservação da massa.

O processo iterativo neste trabalho usando o PRIME tem a seguinte sequência:

- 1 - Estima-se os campos iniciais de  $u$ ,  $v$ ,  $P$  e  $T$ ;
- 2 - Calcula-se os coeficientes para  $U$  e  $V$ ;
- 3 - Calcula-se as velocidades  $U$  e  $V$ ;
- 4 - Resolve-se a equação para a pressão;
- 5 - Calcula-se  $U$  e  $V$  com o novo campo de pressões usando as Eqs. (3.57) e (3.58);
- 6 - Calcula-se  $U$  e  $V$ , nos locais onde não é exigida a conservação da massa, usando uma média (ver Fig. 3.2);

$$U = \left( \frac{U_A + U_B + U_C + U_D}{4} \right) \quad (3.59)$$

$$V = \left( \frac{V_A + V_B + V_C + V_D}{4} \right) \quad (3.60)$$

- 7 - Calcula-se  $u$  e  $v$ ;
- 8 - Calcula-se  $T$ ;

9 - Volta-se ao item 2 e itera-se até atingir a convergência.

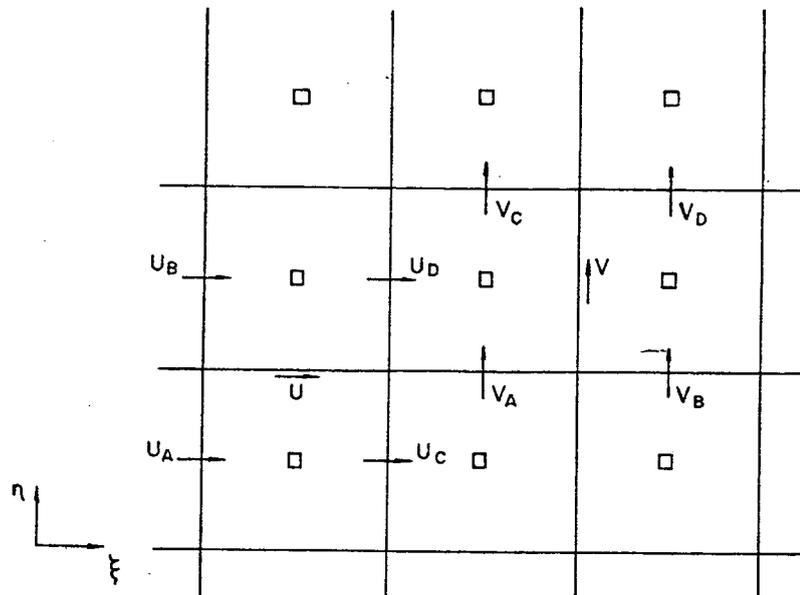


Fig. 3.2 - Ilustração das velocidades que serão usadas no cálculo das velocidades  $U$  e  $V$ , onde não são necessárias para conservar a massa

### 3.6 - EQUAÇÃO PARA A PRESSÃO

Como discutido no Cap. 2, necessitamos de uma maneira para calcular a pressão, uma vez que a equação da continuidade, é apenas uma condição a ser satisfeita pelo campo de velocidades.

Para encontrar uma equação para a pressão, substitui-se as Eqs. (3.53) e (3.54) no volume de controle para a pressão, conforme Fig. 3.3.

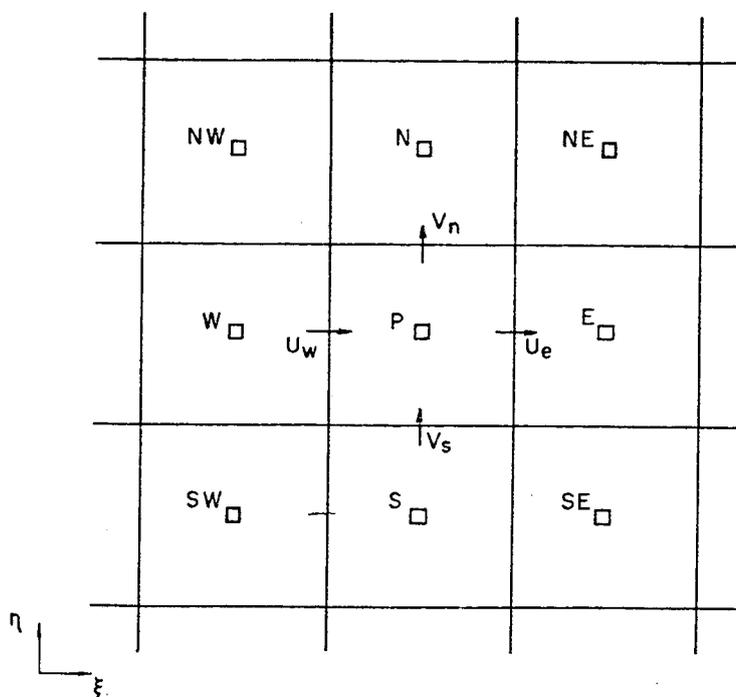


Fig. 3.3 - Volume de controle para a pressão mostrando o arranjo de variáveis empregado

Substituindo  $U_e$ ,  $U_w$ ,  $V_n$ , e  $V_s$  no volume de controle para a pressão, chega-se à seguinte equação

$$A_p P = A_e P_E + A_w P_W + A_n P_N + A_s P_S + A_{ne} P_{NE} + A_{nw} P_{NW} + A_{se} P_{SE} + A_{sw} P_{SW} + \nabla \cdot \hat{V} \quad (3.61)$$

onde

$$\nabla \cdot \hat{V} = \hat{U}_w - \hat{U}_e + \hat{V}_s - \hat{V}_n \quad (3.62)$$

As velocidades  $\hat{U}$  e  $\hat{V}$  que fazem parte da Eq. (3.62) são calculadas com o campo de velocidades da iteração anterior.

### 3.7 - MÉTODO DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

Para a solução das equações da temperatura e pressão foi usado um método quase direto de solução, denominado MSI[31].

## CAPÍTULO 4 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

### 4.1 - INTRODUÇÃO

No Cap. 2 o problema foi proposto e suas equações deduzidas. No Cap. 3 foram feitas as transformações do plano físico para o plano transformado e em seguida feita a integração destas equações para uma variável escalar genérica  $\phi$  no plano transformado.

Neste Capítulo, mostrar-se-á como serão aplicada as condições de contorno para a velocidade através do uso de pontos fictícios. Para a aplicação das condições de contorno para a temperatura far-se-á o uso de balanços de fluxo de calor e, para a pressão é feito balanços de fluxo de massa nas fronteiras. Em seguida, apresenta-se a equação para o cálculo da velocidade na entrada do canal e, por último, mostra-se a aplicação da condição de contorno para a pressão também na entrada do canal.

### 4.2 - CÁLCULO DAS VELOCIDADES PARA OS PONTOS FICTÍCIOS

Muitas vezes em um algoritmo de cálculo é desejável que tenhamos a mesma forma das equações para todo o domínio, isto é, a mesma equação para os pontos internos e pontos de fronteira. Para isto é necessária a utilização de pontos fictícios. Logicamente, o valor da função no ponto fictício será dependente do tipo de condição de contorno dada. Considere a Fig. 4.1, onde são feitos os cálculos para os diferentes tipos de condições de contorno. Para uma malha ortogonal na parede temos

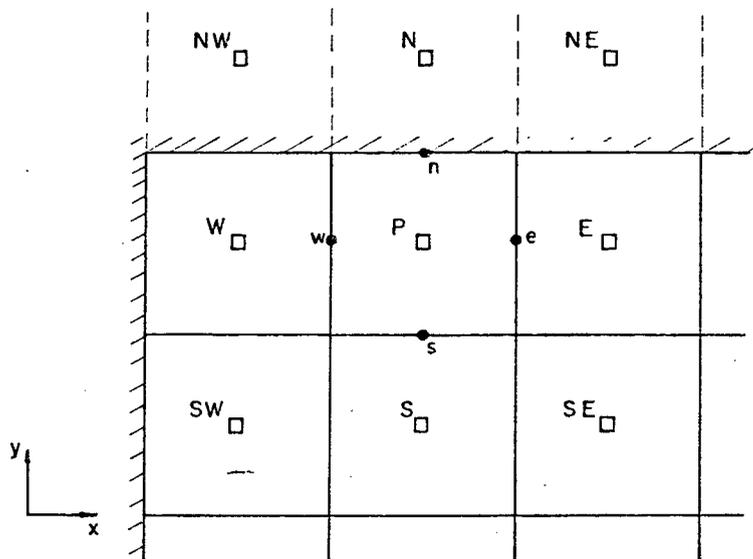


Fig. 4.1 - Pontos fictícios na fronteira para uma malha ortogonal no plano  $x - y$

1 - Tipo Dirichlet - Velocidade prescrita nas parede.

Fazendo uma média das velocidades  $N$  e  $P$ , chega-se a

$$V_n = \left( \frac{V_N + V_P}{2} \right) \quad (4.1)$$

de onde determina-se a expressão da velocidade fictícia norte, como

$$V_N = 2V_n - V_P \quad (4.2)$$

2 - Tipo Neumann - Gradiente de velocidade prescrito na fronteira

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad (4.3)$$

Utilizando diferenças centrais chega-se a

$$V_N = V_P \quad (4.4)$$

Quando a discretização empregada é não ortogonal na fronteira existe uma maior complexidade na aplicação da condição de contorno do tipo Neumann, pois o gradiente na direção normal envolve os gradientes nas duas direções coordenadas, como abaixo

$$\frac{\partial V}{\partial n}\bigg|_n = J\gamma^{1/2} \frac{\partial V}{\partial \eta}\bigg|_n - J\beta\gamma^{-1/2} \frac{\partial V}{\partial \xi}\bigg|_n = 0 \quad (4.5)$$

Usando diferenças centrais para avaliar estas derivadas tem-se

$$V_N = \left| J \frac{\gamma^{1/2} V_P}{\Delta \eta} - J\gamma^{-1/2} \beta \left( \frac{V_{NE} + V_E - V_{NW} - V_W}{4\Delta \xi} \right) \right| / \left| \frac{J\gamma^{1/2}}{\Delta \eta} \right| \quad (4.6)$$

Como podemos ver, a Eq. (4.6) envolve o cálculo de outros pontos fictícios (NE e NW) além dos pontos P, E e W. Este é o motivo pelo qual, neste trabalho, usa-se pontos fictícios apenas para a velocidade, uma vez que geralmente as velocidades são conhecidas na fronteira. Um outro fator que leva ao uso de pontos fictícios é o armazenamento das variáveis que, por ser desconhecido, onde as velocidades são localizadas nas faces de um volume de controle para a pressão, seria complexo aplicar as condições de contorno da velocidade sem o uso dos pontos fictícios pois os volumes nas fronteiras seriam de tamanho diferentes.

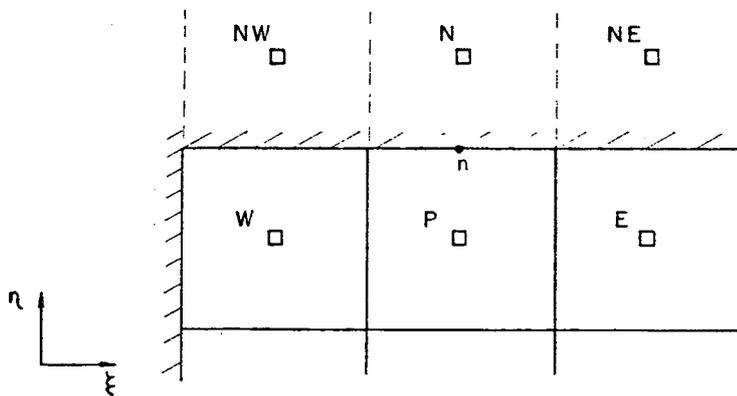


Fig. 4.2 - Pontos fictícios na fronteira para um sistema de coordenadas generalizado no plano  $(\xi, \eta)$ .

### 4.3 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A TEMPERATURA

Fazendo-se um balanço de calor na fronteira, conforme Fig. 4.3, tem-se para o ponto P

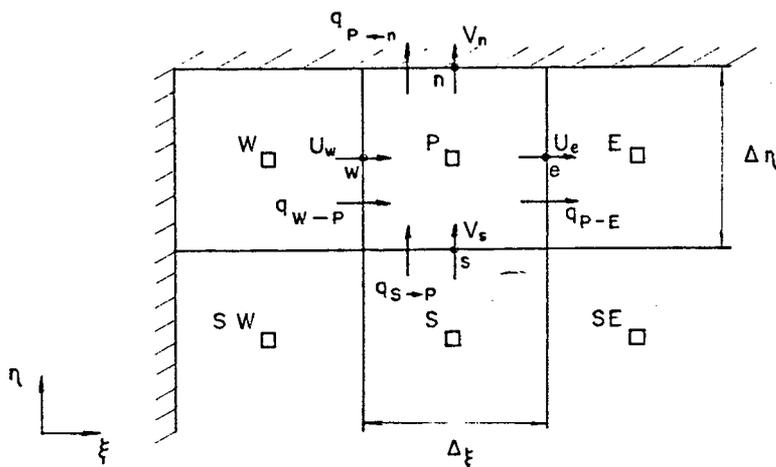


Fig. 4.3 - Balanço de calor na fronteira norte, no plano transformado

$$q_{P \rightarrow n} \Delta \xi - q_{S \rightarrow P} \Delta \xi + q_{P \rightarrow E} \Delta \eta - q_{W \rightarrow P} \Delta \eta + \rho V_n C_p T_n \Delta \xi - \rho V_s C_p T_s \Delta \xi + \rho U_e C_p T_e \Delta \eta - \rho U_w C_p T_w \Delta \xi = 0 \quad (4.7)$$

onde as expressões dos fluxos são dadas por

$$q_{P \rightarrow E} = -K \left[ \alpha J \frac{\partial T}{\partial \xi} + \beta J \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_e \quad (4.8)$$

$$q_{W \rightarrow P} = -K \left[ \alpha J \frac{\partial T}{\partial \xi} + \beta J \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w \quad (4.9)$$

$$q_{S \rightarrow P} = -K \left[ \gamma J \frac{\partial T}{\partial \eta} + \beta J \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]_s \quad (4.10)$$

e  $q_{P \rightarrow n}$  pode assumir diversos valores, dependendo do tipo de condição de contorno.

Substituindo os valores dos fluxos, chega-se a seguinte equação

$$A_p T_P = A_e T_E^{n+1} + A_w T_W^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + A_{se} T_{SE}^{n+1} + A_{sw} T_{SW}^{n+1} + \text{STT} \quad (4.11)$$

com

$$\text{STT} = - \frac{q_{P \rightarrow n}}{C_p} - \rho V_n C_p T_n + \frac{A_p T_P^n}{(1+E)} \quad (4.12)$$

e

$$A_p^* = A_p^* \frac{(1+E)}{E} \quad (4.13)$$

onde

$$A_p^* = A_e + A_w + A_n - \rho V_n \quad (4.14)$$

e  $A_e$ ,  $A_w$ ,  $A_s$ ,  $A_{se}$  e  $A_{sw}$  são dadas pelas Eqs. (3.35), (3.36), (3.38), (3.41) e (3.42), respectivamente. O termo fonte na Eq. (4.12) depende dos diversos tipos de condição de contorno. Alguns tipos são agora analisados.

a - Parede sólida com fluxo de calor prescrito.

$$q_{P \rightarrow n} = q_{\text{prescrito}} \quad (4.15)$$

$$V_n = 0 \quad (4.16)$$

b - Parede sólida com temperatura prescrita.

$$q_{P \rightarrow n} = - \left[ C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]_n \quad (4.17)$$

$$V_n = 0 \quad (4.18)$$

com os gradientes calculados com a temperatura da fronteira e dos pontos internos.

c - fronteira com temperatura e fluxo de massa prescritos

$$q_{p \rightarrow n} = - \left| C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_n \quad (4.19)$$

$$V_n = V_{\text{prescrito}} \quad (4.20)$$

maiores detalhes a respeito da forma das equações para as fronteiras podem ser encontrados em Tribess [22].

Na saída do canal, para todos os casos apresentados no Cap. 5, será aplicada a condição de derivada nula. Caso exista a presença de recirculação nesta região a temperatura será feita igual a temperatura ambiente.

#### 4.4 - CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA A VELOCIDADE

##### 4.4.1 - ENTRADA DO CANAL

Quando se resolve o problema de convecção natural em canais abertos é desconhecida, a princípio, a vazão que será succionada por convecção natural. Desta forma, necessita-se de uma maneira para prescrever-se o perfil de velocidade na entrada. A metodologia aplicada neste trabalho é similar à usada por Lage e Mendes [21] para a solução do problema de convecção forçada em dutos.

Em [21] foi proposto que a equação do movimento, responsável pelo transporte de massa na fronteira de entrada, fosse integrada sobre um meio volume (volume hachuriado na Fig. 4.4), resultando assim, em uma equação para o cálculo da velocidade. Ou seja, a velocidade na entrada é tratada como uma incógnita sendo calculada justamente como as equações para os pontos internos de velocidade. Em [21] esta velocidade é obtida

da solução da equação do movimento e não sofre o processo de correção comum às velocidades internas. Na metodologia de cálculo apresentada neste trabalho a velocidade calculada em um instante "t", não será a velocidade estimada para o novo cálculo no instante "t+1", como feito em [21]. A velocidade estimada para o instante "t+1" terá forma semelhante às velocidades U e V nas equações (3.57) e (3.58), e seu valor calculado com as velocidades vizinhas, como será visto a seguir.

Em relação a forma de cálculo da velocidade na entrada, adotada neste trabalho, não deve-se interpretá-la como sendo iterativa, uma vez que a mesma tem a mesma característica evolutiva das velocidades internas. Tal fato não ocorre, por exemplo, com a metodologia parabólica, quando a altura de canal é conhecida, que necessita então de um procedimento realmente iterativo para a velocidade de entrada.

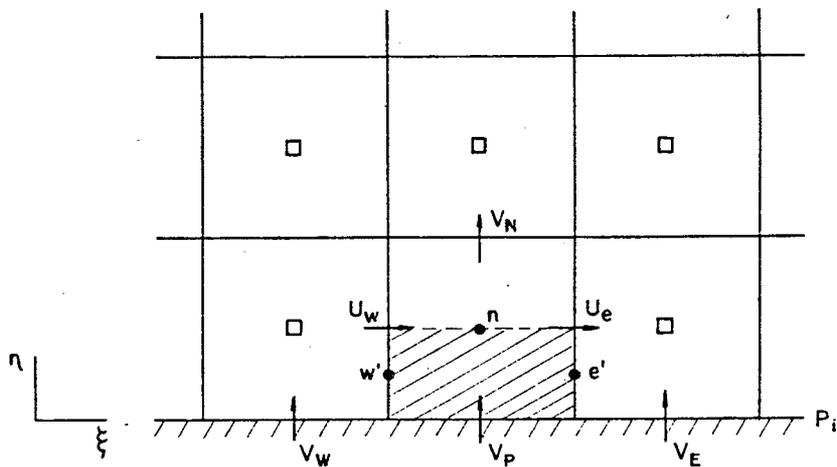


Fig. 4.4 - Volume de controle para o cálculo da velocidade na entrada do canal no plano transformado ( $\xi, \eta$ )

Integrando a Eq. (3.5) no volume de controle da Fig. 4.4, considerando-se a malha ortogonal na fronteira, por simplicidade, vem,

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta_p}^{\eta_n} \int_{\xi_{w'}}^{\xi_{e'}} \left[ \frac{1}{J} (\rho\phi)^{t+\Delta t} - \frac{1}{J} (\rho\phi)^t \right] d\eta d\xi - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_p}^{\eta_n} [(\rho U\phi)_{e'} - \\
& (\rho U\phi)_{w'}] dt d\eta + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_{w'}}^{\xi_{e'}} [(\rho V\phi)_n - (\rho V\phi)_p] dt d\xi + \\
& \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_{w'}}^{\xi_{e'}} \int_{\eta_p}^{\eta_n} \hat{P} \phi dt d\xi d\eta = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_p}^{\eta_n} \left[ C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{e'} - C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{w'} \right] dt d\eta + \\
& \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_{w'}}^{\xi_{e'}} \left[ C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_n - C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_p \right] dt d\xi + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_{w'}}^{\xi_{e'}} \int_{\eta_p}^{\eta_n} \hat{S} T \phi dt d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Fazendo-se as seguintes aproximações para os termos convectivos e difusivos nas faces do volume de controle, tem-se:

$$(\rho U)_{e'} = \left( \frac{\rho U}{2} \right)_e \tag{4.22}$$

$$(\rho U)_{w'} = \left( \frac{\rho U}{2} \right)_w \tag{4.23}$$

$$(\rho V)_n = \rho \left( \frac{V_N + V_P}{2} \right) \tag{4.24}$$

$$\phi_{e'} = \frac{1}{2} (\phi_P + \phi_E) \tag{4.25}$$

$$\phi_{w'} = \frac{1}{2} (\phi_P + \phi_W) \tag{4.26}$$

$$\phi_n = \left( \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n \right) \phi_P + \left( \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) \phi_N \tag{4.27}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{e'} = \bar{\beta}_e \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta \xi} \right) \quad (4.28)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{w'} = \bar{\beta}_w \left( \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta \xi} \right) \quad (4.29)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_n = \bar{\beta}_n \left( \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta \eta} \right) \quad (4.30)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_p = 0 \quad (4.31)$$

Substituindo-se as expressões (4.22) a (4.31) em (4.21) e avaliando as variações no tempo de  $t + \theta \Delta t$ , tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{2J_P} \frac{\Delta V}{\Delta t} \phi_P^{n+1} - \frac{\rho}{2J_P} \frac{\Delta V}{\Delta t} \phi_P^n + \left( \frac{\rho U}{4} \right)_e \left( \frac{\phi_P^{n+\theta} + \phi_E^{n+\theta}}{2} \right) \Delta \eta - \\ & \left( \frac{\rho U}{4} \right)_w \left( \frac{\phi_P^{n+\theta} + \phi_W^{n+\theta}}{2} \right) \Delta \eta + \rho \left( \frac{V_N + V_P}{2} \right) \left( \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n \right) \phi_P^{n+\theta} + \\ & \left( \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) \phi_N^{n+\theta} | \Delta \xi - (\rho V)_P \phi_P^{n+\theta} \Delta \xi + L | \hat{P} \phi | \Delta V = \\ & C_{1e} \bar{\beta}_e \left( \frac{\phi_E^{n+\theta} - \phi_P^{n+\theta}}{2 \Delta \xi} \right) \Delta \eta - C_{1w} \bar{\beta}_w \left( \frac{\phi_P^{n+\theta} - \phi_W^{n+\theta}}{2 \Delta \xi} \right) \Delta \eta + \\ & C_{4n} \bar{\beta}_n \left( \frac{\phi_N^{n+\theta} - \phi_P^{n+\theta}}{\Delta \eta} \right) \Delta \xi + L | \hat{P} \phi | \Delta V \end{aligned} \quad (4.32)$$

Rearranjando-se os termos e substituindo a equação da continuidade na Eq. (4.32), vem

$$\begin{aligned} & \frac{\rho \Delta V}{J_P \Delta t} \phi_P^{n+1} - \frac{\rho \Delta V}{J_P \Delta t} \phi_P^n + A_P^* \phi_P^{n+\theta} = A_e \phi_E^{n+\theta} + A_w \phi_W^{n+\theta} + \\ & A_n \phi_N^{n+\theta} - L | \hat{P} \phi | \Delta V \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde

$$A_e = - \left( \frac{\rho U}{4} \right)_e + C_{1e} \bar{\beta}_e, \quad (4.34)$$

$$A_w = \left( \frac{\rho U}{4} \right)_w + C_{1w} \bar{\beta}_w, \quad (4.35)$$

$$A_n = (\rho V)_N \left( \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) + 2C_{4n} \bar{\beta}_n \quad (4.36)$$

$$A_p^* = A_e + A_w + A_n \quad (4.37)$$

Fazendo-se as manipulações que foram feitas para a Eq. (3.36), chega-se a

$$\phi_P^{n+1} = \left( \frac{A_e \phi_E^{n+1} + A_w \phi_W^{n+1} + A_n \phi_N^{n+1}}{A_p} \right) + \frac{\phi_P^n}{(1+E)} - \frac{L |\hat{P}\phi|}{A_p} \quad (4.38)$$

onde

$$A_p = A_p^* \frac{(1+E)}{E} \quad (4.39)$$

com termo  $L|\hat{P}\phi|$  na Eq. (4.38) dependendo da velocidade a ser corrigida,  $u$  ou  $v$ , dado por

$$\hat{P}^u = \frac{\partial P}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial P}{\partial \eta} y_\xi \quad (4.40)$$

$$\hat{P}^v = \frac{\partial P}{\partial \eta} x_\xi - \frac{\partial P}{\partial \xi} x_\eta \quad (4.41)$$

Integrando-se as Eqs. (4.40) e (4.41) no volume de controle da Fig. (4.4) e observando que  $P = P(\eta)$  na fronteira sul, vem

$$L|\hat{P}^v| = - \frac{\Delta P}{\Delta \eta} x_{\xi} \Delta_{\xi} \quad (4.42)$$

$$L|\hat{P}^u| = - \frac{\Delta P}{\Delta \eta} y_{\xi} \Delta_{\xi} \quad (4.43)$$

Multiplicando-se a equação (4.38) por  $X_{\xi}$  quando  $\phi = v$  e por  $-Y_{\xi}$  quando  $\phi = u$ , chega-se a seguinte equação para  $V_P$  na entrada do canal:

$$V_P = \hat{V}_P - \frac{\Delta P}{\Delta \eta} \frac{\gamma_P \Delta_{\xi}}{A_P^V} \quad (4.44)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{V}_P = & A_e^V (v_e x_{\xi P} - u_e y_{\xi P}) + A_w^V (v_w x_{\xi P} - u_w y_{\xi P}) + \\ & A_n^V (v_n x_{\xi P} - u_n y_{\xi P}) + \frac{v_P x_{\xi P}}{(1+E)} - \frac{u_P y_{\xi P}}{(1+E)} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Dessa forma, o cálculo da velocidade na entrada será feito da seguinte forma:

- 1 - Estima-se um campo de  $u$ ,  $v$ ,  $P$  e  $T$  para todo o domínio, inclusive os valores de  $u$ ,  $v$  e  $P$  na entrada;
- 2 - Calcula-se os coeficientes para  $V$ , através das Eqs. (4.34) a (4.37);
- 3 - Calcula-se todo o campo de  $U$  e  $V$ ;
- 4 - Substitui-se o campo de  $U$  e  $V$  na equação da continuidade, calculando assim o novo campo de pressão;
- 5 - Substitui-se o campo de pressão nas equações de  $U$  e  $V$  e calcula-se um novo campo de velocidade, com as velocidades na entrada sendo calculada pelo gradiente dado por  $P_p - P_i$ ;
- 6 - Calcula-se  $u$  e  $v$ ;

7 - Calcula-se T;

8 - Volta-se ao item 2 e itera-se até a obtenção do regime permanente.

#### 4.4.2 - SAÍDA DO CANAL

Na saída do canal, como geralmente não são conhecidos os perfis de velocidade, fica difícil prescrever-se uma condição de contorno correta. Quando o número de Grashof é de magnitude que permita que o perfil de velocidades atinja o regime plenamente desenvolvido, as condições de contornos

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0 \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (4.47)$$

são as condições corretas. O que ocorre, entretanto, é que para a maioria dos casos de aplicação do ponto de vista de engenharia, a altura de canal existente não proporciona um regime plenamente desenvolvido, mas, mesmo assim, a condição de derivada nula é a mais conveniente, evitando que extensões do domínio sejam necessárias. Neste trabalho, em todos os casos, foi usada a condição de derivada nula na saída, mesmo para aqueles casos onde existe recirculação.

Na região de saída onde a condição de contorno parabólica é aplicada, as equações do movimento e temperatura contêm informação apenas da montante do canal, desprezando-se assim, os efeitos difusivos da propriedade transportada nesta região. Não se pode confundir esta condição de contorno, obviamente, com o processo de marcha do modelo parabólico.

No decorrer deste trabalho foi resolvido alguns casos estendendo-se o domínio de cálculo na região de saída. Desta forma espera-se que a condição de derivada nula dê melhores resultados, uma vez que a mesma estaria sendo aplicada longe da

região onde existe recirculação. O esforço computacional extra necessário e a dificuldade de convergência não tornam o procedimento atrativo.

#### 4.5 - CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA A PRESSÃO

Os balanços de massa, realizados na fronteira são feitos de forma idêntica aos realizados para os volumes internos. A única diferença que se observa na equação ocorre na fronteira de entrada, onde surge um termo a mais no coeficiente e outro no termo fonte, em virtude do cálculo da velocidade ser evolutivo e da pressão ter um valor prescrito na entrada.

A seguir apresenta-se a forma da equação da pressão para um volume de fronteira na entrada do canal, conforme Fig. 4.5.

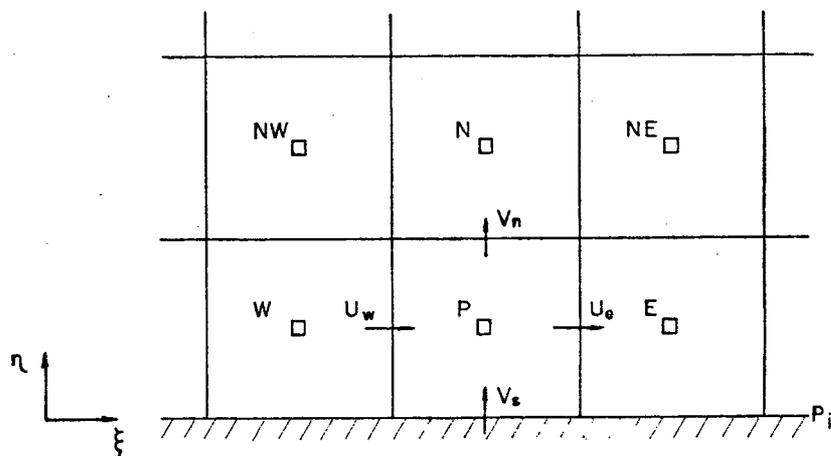


Fig. 4.5 - Cálculo da pressão interna P, para um valor da pressão de entrada conhecido, no plano transformado

$$V_n = \hat{V}_n - \left| \frac{\gamma}{A_P V} \right| (P_N - P_P) + \left| \frac{\beta}{4A_P V} \right|_n (P_{NE} + P_E - P_{NW} - P_W) \quad (4.48)$$

$$V_s = \hat{V}_s - \left| \frac{2\gamma}{A_P V} \right|_s (P_P - P_i) \quad (4.49)$$

$$U_e = \hat{U}_e - \left| \frac{\alpha}{A_p} \right|_e (P_E - P_P) + \left| \frac{\beta}{4A_p} \right|_e (P_{NE} + P_N - P_E - P_P) \quad (4.50)$$

$$U_w = \hat{U}_w - \left| \frac{\alpha}{A_p} \right|_w (P_N - P_W) + \left| \frac{\beta}{4A_p} \right|_w (P_N + P_{NW} - P_W - P_P) \quad (4.51)$$

Substituindo as velocidades  $V_n, V_s, U_e$  e  $U_w$  na equação da continuidade (3.12), temos

$$A_p P_P = A_e P_E + A_w P_W + A_n P_N + B \quad (4.52)$$

onde

$$A_e = \left| \frac{\alpha}{A_p} \right|_e + \left| \frac{\beta}{4A_p} \right|_e - \left| \frac{\beta}{4A_p} \right|_n \quad (4.53)$$

$$A_w = \left| \frac{\alpha}{A_p} \right|_w - \left| \frac{\beta}{4A_p} \right|_w + \left| \frac{\beta}{4A_p} \right|_n \quad (4.54)$$

$$A_n = \left| \frac{\gamma}{A_p} \right|_n - \left| \frac{\beta}{4A_p} \right|_e + \left| \frac{\beta}{4A_p} \right|_w \quad (4.55)$$

$$A_{ne} = - \left| \frac{\beta}{4A_p} \right|_n - \left| \frac{\beta}{4A_p} \right|_e \quad (4.56)$$

$$A_{nw} = \left| \frac{\beta}{4A_p} \right|_n + \left| \frac{\beta}{4A_p} \right|_w \quad (4.57)$$

$$A_p = A_e + A_w + A_n + \left| \frac{2\gamma}{A_p} \right|_s \quad (4.58)$$

$$B = \hat{U}_w - \hat{U}_e + \hat{V}_s - \hat{V}_n + \left| \frac{2\gamma}{A_P V} \right|_s P_i \quad (4.59)$$

Para os restantes das condições de contorno como, velocidade prescrita nas paredes e derivada nula, a substituição é feita do mesmo modo, só que respeitando-se as condições existentes nestas fronteiras. Maiores detalhes podem ser encontrados em Tribess [22].

Deve-se observar que ao fazermos pressão prescrita na entrada do canal, o nível de pressão já está estabelecido, o que não acontece em problemas incompressíveis onde as velocidades são prescritas em todas as fronteiras.

O valor de  $P_i$  que aparece nas Eqs. (4.49) e (4.59) pode ser feito igual a zero (como geralmente é feito na maioria dos casos de problemas de convecção natural em dutos) ou pode-se calcular um valor para  $P_i$  da equação de Bernoulli. Neste trabalho tanto  $P_i=0$  e  $P_i$  calculado através da equação de Bernoulli foram usados. Neste último caso a pressão é calculada por

$$P_i = - \frac{1}{2} \rho \bar{v}_i^2 \quad (4.60)$$

onde

$$\bar{v}_i = \frac{(\sum V_i)}{S} \quad (4.61)$$

Deve-se observar que o valor da pressão é corrigido a cada iteração, uma vez que a velocidade  $V_s$  também muda a cada iteração. As implicações de fazer  $P_i$  igual a zero na entrada do canal serão discutidas no Cap. 5.

Na saída do canal nada é prescrito em relação a pressão, deixando-se que as velocidades na saída estabeleçam um valor para a pressão.

## CAPÍTULO 5 - RESULTADOS

### 5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são feitos diversos testes para verificação da metodologia elíptica usada neste trabalho. Em primeiro lugar, testes são realizados para o canal vertical formado por duas placas planas paralelas, para comparação com os resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura. Ainda considerando o canal vertical, considerações são feitas com relação à aplicação da condição de contorno para a pressão na entrada do canal.

Em seguida, dentro dos objetivos principais do trabalho, é analisada a transferência de calor em canais em forma de 'L'. Em primeiro lugar, as condições de troca de calor no duto em 'L' são comparadas com aquelas obtidas para o canal vertical de mesma relação largura/altura. Com isto, verifica-se a influência da extensão horizontal do canal em 'L'. Por último, são apresentados resultados para o canal em forma de 'L', usando como fluido de trabalho o ar, para as condições de temperatura e fluxo de calor prescritos em uma das paredes. No canal em 'L' a extensão horizontal foi mantida constante, enquanto que a altura  $H$  e a largura  $S$  foram os parâmetros geométricos que sofreram variação.

### 5.2 - CANAIS ABERTOS VERTICAIS

O principal motivo da realização de testes envolvendo o canal vertical é devido a existência de um grande número de soluções disponíveis na literatura para este tipo de problema que são controversas. Para exemplificar, a Tab. 5.1 resume alguns dos resultados numéricos disponíveis. As condições de contorno na parede foram as de velocidade iguais a zero ( $u$  e  $v$ ) e temperatura prescrita. No lado oposto à parede foram usadas condições de simetria para as velocidades e temperatura. Nesta tabela é apresentado o número de Nusselt calculado de duas maneiras. O  $Nu_m$  é obtido utilizando-se o fluxo de calor na parede aquecida, enquanto o  $Nu'_m$  utiliza a diferença entre os

fluxos convectivos e difusivos na saída e entrada do canal. Se o problema estiver bem convergido estes valores de Nusselt devem se idênticos. As expressões para estes números de Nusselt são

$$Nu_m = \frac{\frac{1}{H} \int_0^H \left| k \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\frac{S}{2}} dy \frac{S}{K}}{(T_w - T_o)} \quad (5.1)$$

$$Nu'_m = \frac{\frac{1}{H} \int_0^{\frac{S}{2}} \left| (\rho C_p VT)_{y=H} - (\rho C_p VT)_{y=0} + K \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} dx \frac{S}{K}}{T_w - T_o} \quad (5.2)$$

Tab. 5.1 - Resultados numéricos de diferentes autores, para diferentes tipos de condição de contorno na entrada

Autor(es)	$Gr_S = 10^2$			$Gr_S = 10^4$		
	$Nu_m$	$Nu'_m$	$\bar{\psi}$	$Nu_m$	$Nu'_m$	$\bar{\psi}$
Aihara (a)	-	0.498	3.530	-	4.180	68.40
Aihara (b)	-	0.482	3.410	-	3.780	54.40
Aihara (c)	-	0.482	3.410	-	3.600	54.40
Kettleborough (d)	4.750	0.328	0.273	5.500	4.760	73.50
Nakamura e outros (e)	0.479	0.459	3.140	3.628	3.754	48.00
Presente trabalho (f)	0.689	0.689	3.100	3.860	3.860	55.00

a - modelo parabólico com perfil de velocidade na entrada uniforme e  $P_i = 0$

b - modelo parabólico com perfil de velocidade na entrada uniforme e  $P_i$  calculada da equação de Bernoulli

- c - modelo parabólico com perfil de velocidade na entrada parabólico e  $P_i$  calculada com  $P = -27\rho\bar{v}_i^2 / 35$
- d - modelo elíptico bidimensional com as condições de contorno na entrada do tipo localmente parabólicas aplicadas fora do canal
- e - idêntico a d
- f - modelo elíptico com as condições de contorno para velocidade e pressão na entrada evolutivas, onde a equação para o avanço de  $P_i$  é a equação de Bernoulli

onde

$$\bar{\Psi} = \Psi v \quad (5.3)$$

$$Gr_s = \frac{\rho g \bar{\beta} (T_w - T_0) S^3}{\nu^2} \quad (5.4)$$

Observando-se a Tab. 5.1 encontra-se valores bastantes diferentes de  $Nu_m$  e  $Nu'_m$ , o que sugere que os resultados, principalmente os de Kettleborough, não estão bem convergidos, ou empregam equações aproximadas que não forçam a conservação da energia. Verifica-se também que os resultados obtidos no presente trabalho concordam razoavelmente bem com os resultados de Nakamura e outros [7], que por sua vez são os resultados que apresentam melhor concordância entre  $Nu_m$  e  $Nu'_m$ . Mesmo assim, são grandes as discrepâncias entre os diversos resultados e, para efeito de melhor comparação da metodologia, resultados experimentais também foram usados.

A Fig. 5.1 mostra os resultados numéricos obtidos neste trabalho comparados com os resultados experimentais de [4], para  $S/H=0.0437$  e  $Pr=5.0$ , com uma parede aquecida a temperatura constante e a outra isolada.

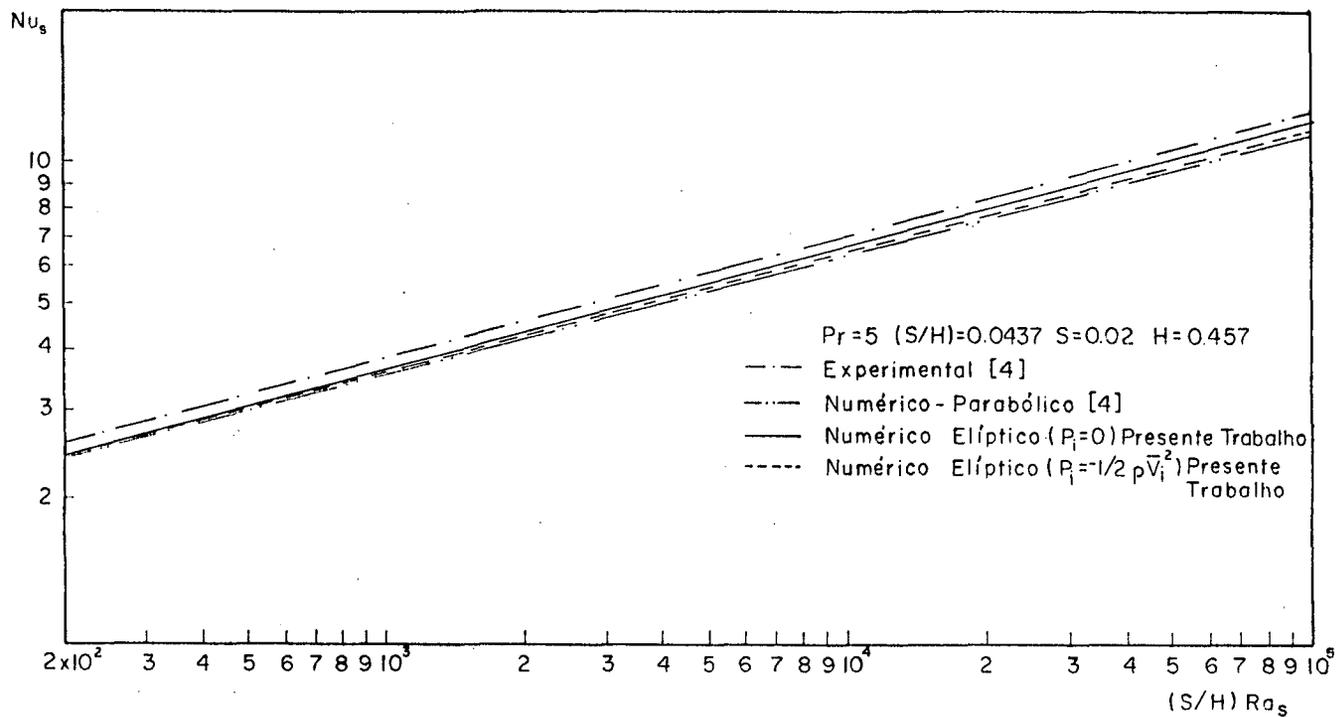


Fig. 5.1 - Número de Nusselt médio baseado em  $S$ , para o canal vertical para diferentes condições de contorno para a velocidade e pressão

As expressões de  $Nu_S$  e  $Ra_S$  são dados por

$$Nu_S = \frac{\bar{q}S}{K(T_W - T_O)} \quad (5.5)$$

$$Ra_S = \frac{\rho g \bar{\beta} (T_W - T_O) S^3}{\bar{\nu} \alpha} \quad (5.6)$$

Como se pode observar na Fig. 5.1, os números de Nusselt são bastante próximos para os quatro casos, ficando a maior diferença entre os dados experimentais e numéricos para os dados obtidos com o procedimento parabólico.

A Tab. 5.2 apresenta os números de Nusselt médio e a relação entre as vazões obtidas usando a pressão igual a zero (condição 1) e a calculada através da equação de Bernoulli (condição 2).

Tab. 5.2 - Número de Nusselt e razão entre os fluxos de massa para diferentes condições de contorno para a pressão para  $(S/H)=0.0437$  e  $Pr=5.0$

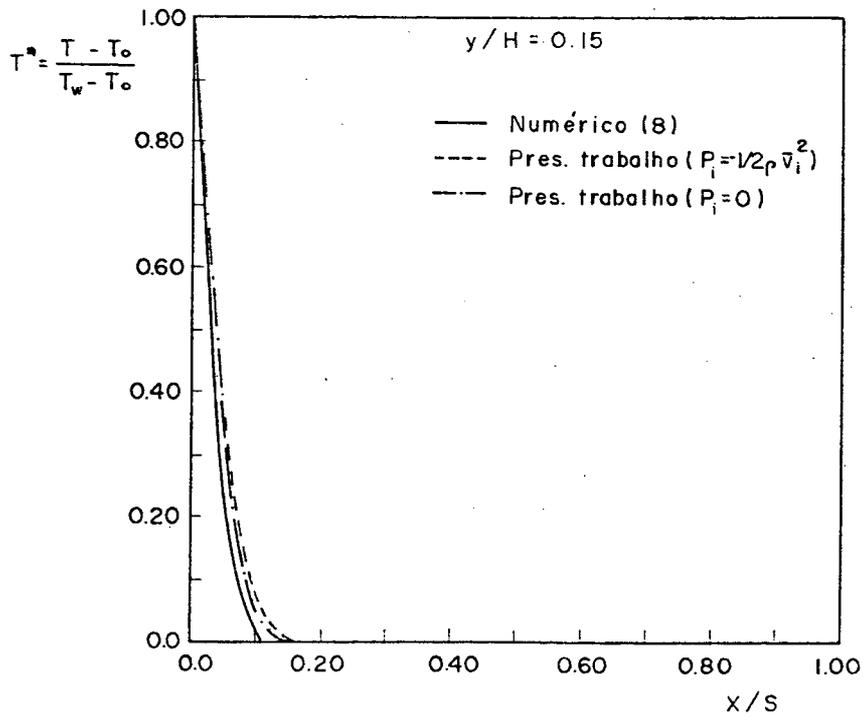
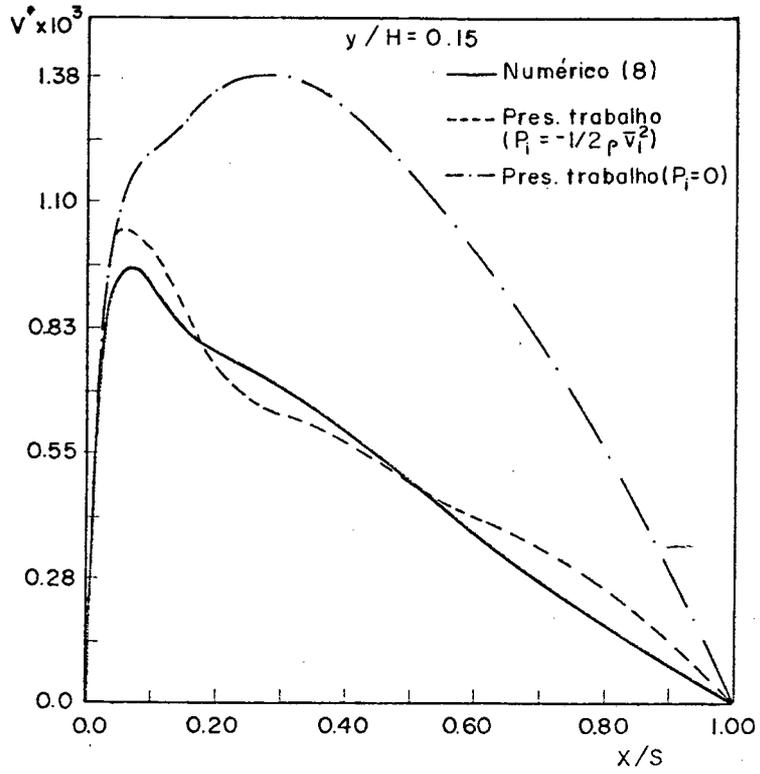
$(S/H) * Ra_S$	$10^3$	$5 \times 10^3$	$10^4$	$5 \times 10^4$
$Nu_{S1}$	3.645	5.449	6.473	9.964
$Nu_{S2}$	3.595	5.342	6.332	9.789
$\dot{m}_1/\dot{m}_2$	1.063	1.156	1.245	1.697

A constatação importante é que a condição de contorno para a pressão não influencia o número de Nusselt mas, como era de se esperar, modifica sensivelmente a vazão, principalmente para  $Ra_S$  elevados. Isto ocorre em virtude de neste tipo de

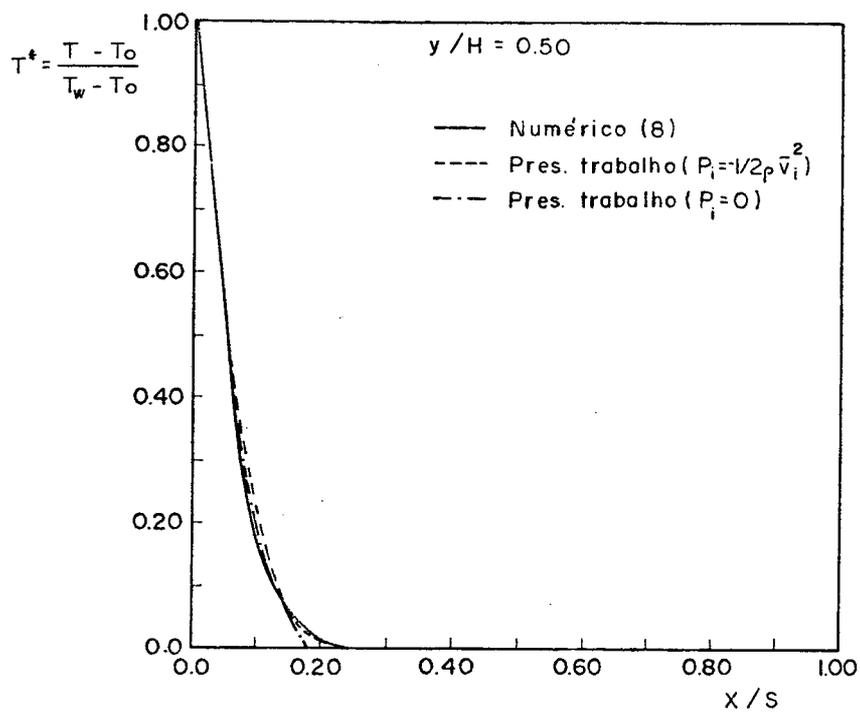
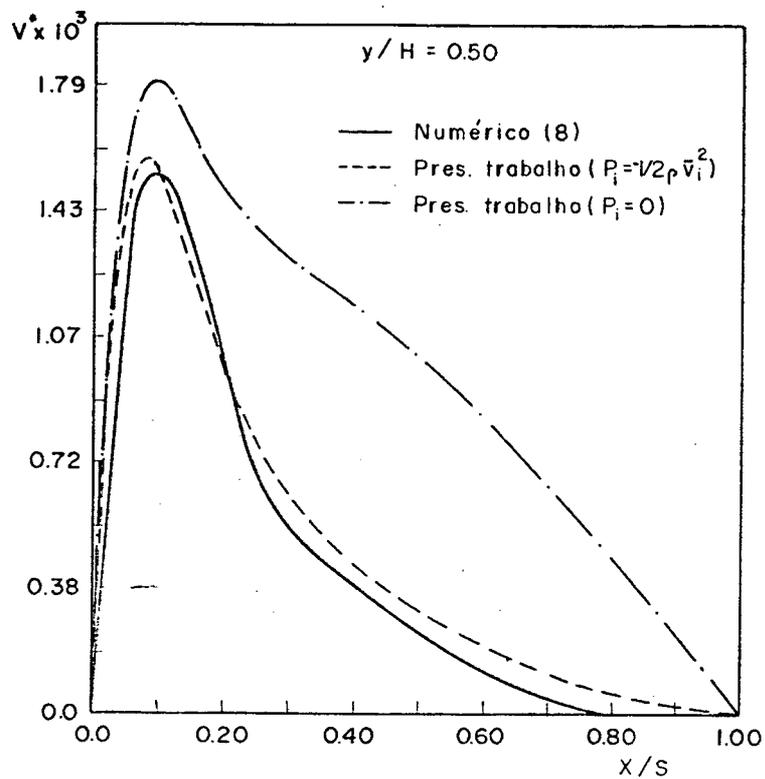
problema existir duas regiões distintas no interior do canal. Uma refere-se à região próxima a parede quente (interior da camada limite térmica), e a outra à região fora da camada limite térmica. Observando-se os perfis de velocidade da Fig. 5.2 (a, b e c) para o caso de  $(S/H) \cdot Ra_S$  igual a  $10^5$ , pode-se ver que os perfis de velocidade, para  $P_i$  calculada pela equação de Bernoulli e  $P_i$  igual a zero, têm aproximadamente o mesmo gradiente perto da parede quente, justamente na região em que os efeitos de flutuação são dominantes. Conclui-se, portanto, que nesta região a condição de contorno utilizada para a pressão não influi no campo de velocidades. Fora da camada limite térmica, entretanto, não existe praticamente nenhum efeito de flutuação, devendo pois, a parcela de fluido que preenche esta região ser carregado pelas tensões cisalhantes. Entretanto, os perfis de velocidade para  $P_i$  igual a zero, nesta região, são completamente diferentes daqueles obtidos com a pressão calculada através da equação de Bernoulli.

Isso explica-se pelo fato de que como não existem forças de empuxo na região fora da camada limite térmica, o escoamento deve-se dar apenas pelo balanço de forças de inércia e forças viscosas. Prescrever uma pressão igual a zero significa um bombeamento, acarretando um processo de convecção mista, uma vez que a pressão na entrada do canal deve ser negativa devido ao movimento. Os fatos expostos acima, explicam o motivo do não surgimento da recirculação perto da parede mais fria, na região de saída do canal, conforme Fig. 5.2, para o caso de  $P_i$  igual a zero prescrito na entrada. Nesta figura  $v^*$  é dado por

$$v^* = \frac{vS}{v} \quad (5.7)$$



(a)



(b)

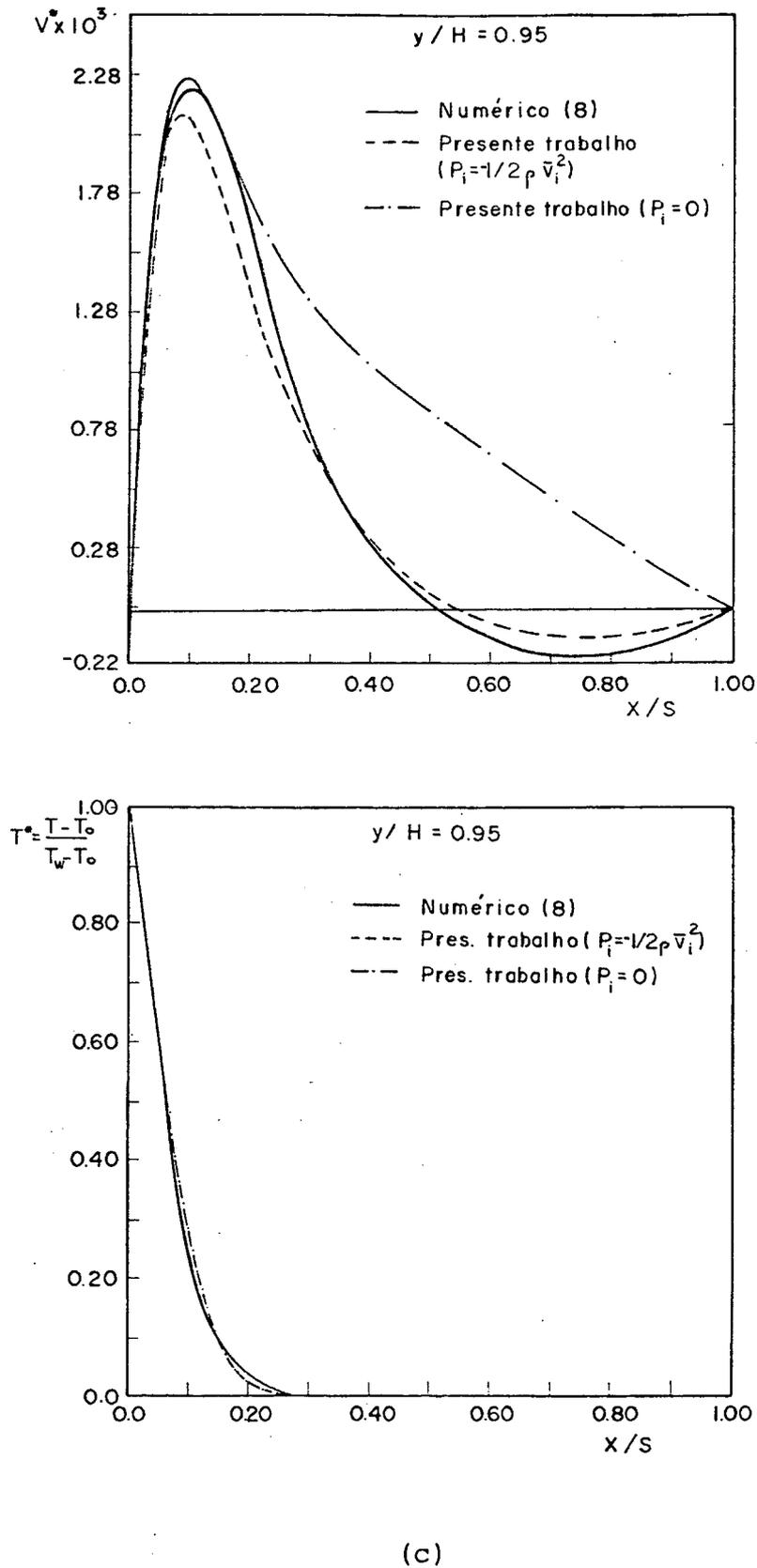


Fig. 5.2 - Perfis de velocidade e temperatura em três secções diferentes do canal reto, para  $(S/H) \cdot Ras = 10^5$ , com  $S = 0.01275\text{m}$ ,  $H = 0.15\text{m}$  e  $Pr = 5.0$

A Fig. 5.3 apresenta as linhas de corrente para o caso de  $(S/H) \cdot Ra_S = 10^5$  com  $(S/H) = 0.085$ . A penetração da recirculação encontrada é de 0.07m, representando 0.466 H. Para o mesmo caso a recirculação observada experimentalmente [8] foi de 0.069m, ou seja, 0.46 H.

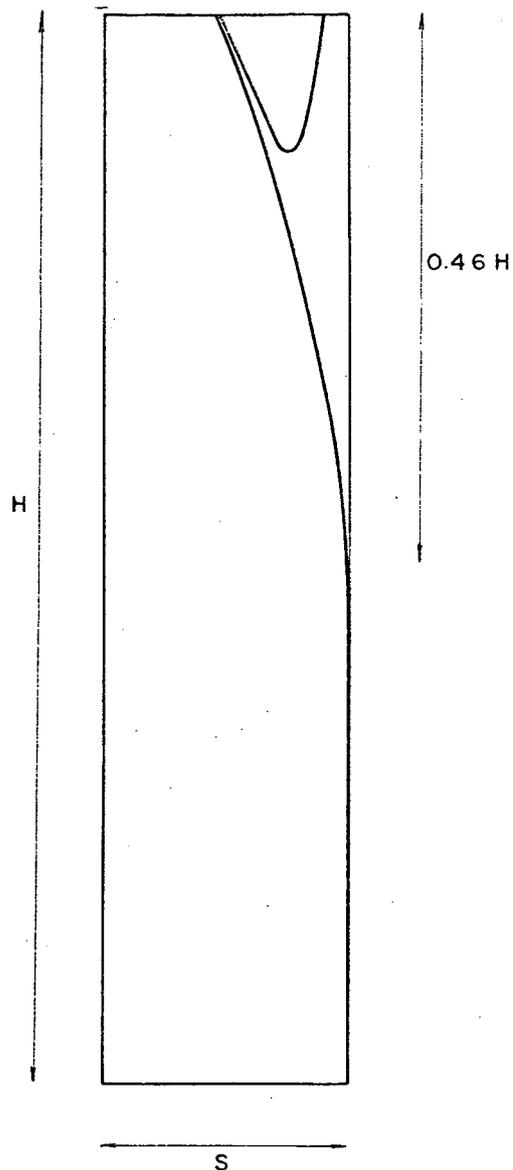


Fig. 5.3 - Linhas de corrente para o canal reto, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada para  $(S/H) \cdot Ra_S = 10^5$ , com  $S = 0.01275\text{m}$ ,  $H = 0.15\text{m}$  e  $Pr = 5.0$

Para finalizar os testes com o canal vertical, apresenta-se na Tab. 5.3 os resultados do número de Nusselt local, calculado na saída do canal para a situação de fluxo prescrito, simétrico e compara-se os mesmos com os dados experimentais de [9].

Tab. 5.3 - Comparação do número de Nusselt local na saída do canal com os dados experimentais de [9] para  $H=0.303\text{m}$  e  $Pr = 0.708$

$Gr_{qsH}$	$S$ [m]	$q$ [w/m <sup>2</sup> ]	$Nu_l(H)$ exp.	$Nu_l(H)$ Num. $c/P = -\frac{1}{2} \rho \bar{V}_i^2$
270	0.01272	55.7	1.24	1.30
1350	0.01780	55.7	2.28	2.01
3410	0.01780	114.0	2.80	2.51

Os números de  $Gr_{qsH}$  e  $Nu_l(H)$  constantes da Tab. 5.3 são dados por

$$Gr_{qsH} = \frac{g \bar{\beta} q S^5}{\nu K^2 H} \quad (5.8)$$

$$Nu_l(H) = \frac{qS}{K(T_W(H) - T_O)} \quad (5.9)$$

Os dados de fluxo de calor da Tab. 5.3 não são adimensionalizados para manter as mesmas informações apresentadas no trabalho experimental [9]. Observa-se que o máximo desvio entre os dados numéricos do presente trabalho e os experimentais é da ordem de 13%. A diferença máxima encontrada pode ser explicada pelo fato de ter-se usado a mesma malha na direção vertical para os três casos de fluxos apresentados na

Tab. 5.3. Para o caso de fluxos maiores talvez fosse necessário o uso de volumes mais refinados na região de saída, pois é nesta região onde os efeitos difusivos são desprezados, em virtude da aplicação da condição de contorno localmente parabólica.

### 5.3 - CANAIS ABERTOS EM 'L'

Dentro do objetivo principal do presente trabalho a seguir são ilustrados os resultados obtidos para o problema da convecção natural em canais verticais com uma extensão horizontal, aqui denominado canal em 'L'. A Fig. 5.4 apresenta a geometria e as condições de contorno utilizadas e a Fig. 5.5 a forma da malha empregada para a relação de  $S/H=0.0875$ .

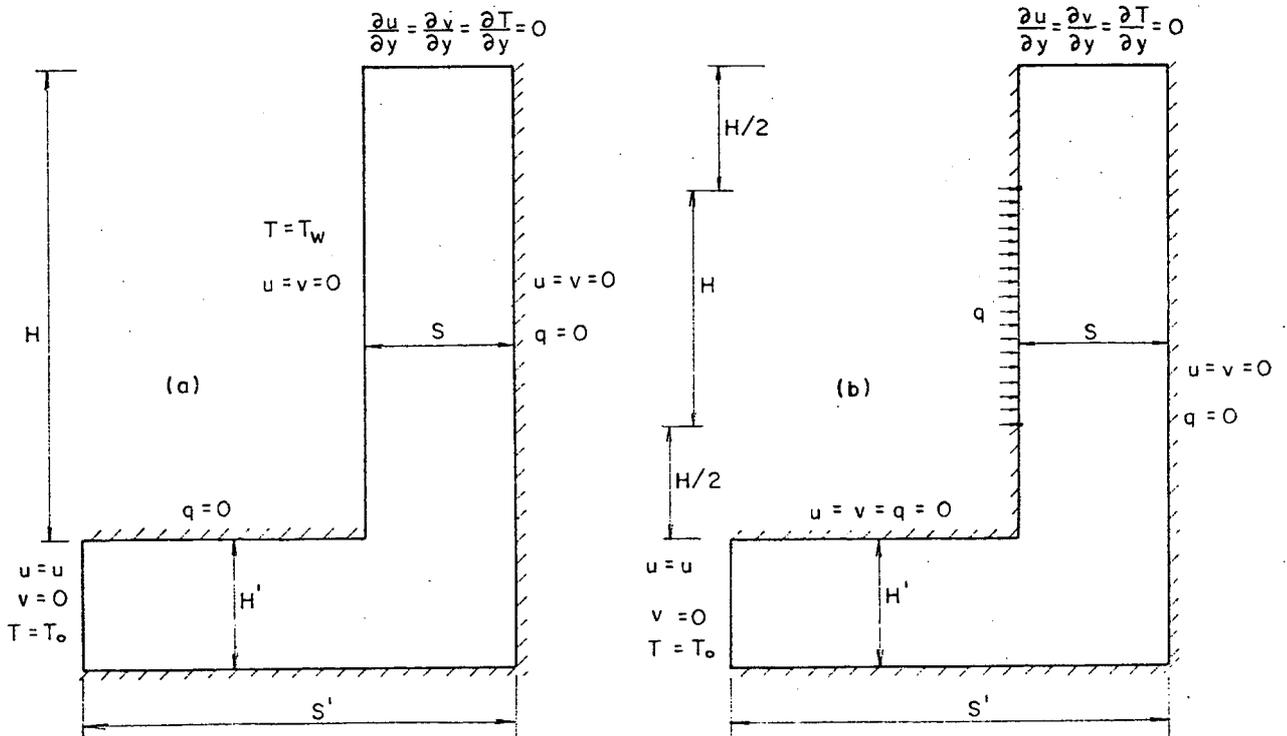


Fig. 5.4 - Geometria e as condições de contorno do canal em 'L'

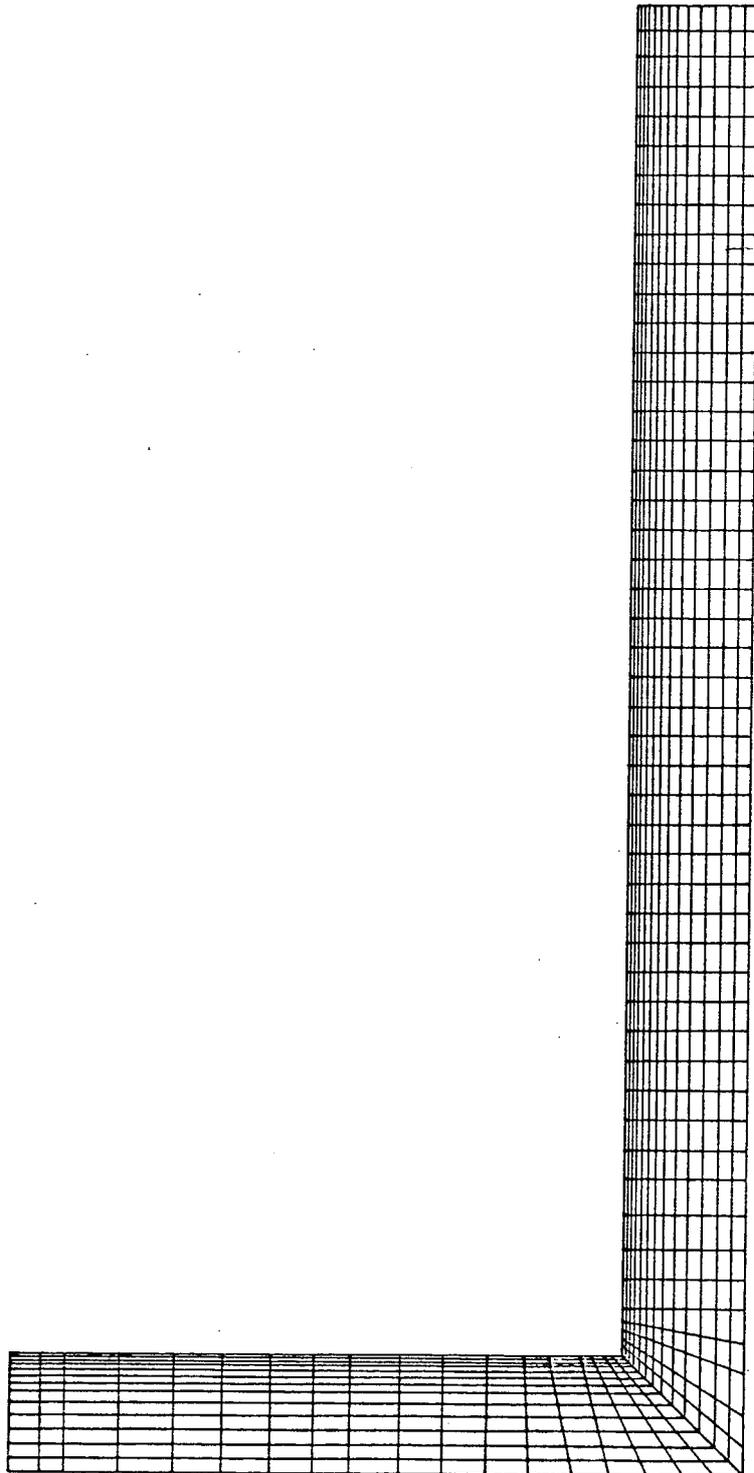


Fig. 5.5 - Malha com (67x13) volumes para a relação  $(S/H)=0.0875$

Em todos os casos simulados,  $H'$  foi mantido constante e igual a 0.1m. O parâmetro  $(S/H) \cdot Ra_S$  foi variado de  $10^3$  a  $5 \times 10^4$ , quando o objetivo era analisar o efeito chaminé deste tipo de geometria. Neste caso,  $S$  foi mantido constante e igual a 0.1m e  $H$  variado de 1.1428 a 2.2280m. Para estudar o efeito do espaçamento entre placas ( $S$ ) no fluxo de calor da parede vertical, o parâmetro  $Ra_H$  foi variado de  $10^8$  a  $8 \times 10^8$ , com  $H$  mantido constante e igual a 1.1428m e  $S$  variado de 0.02 a 0.16m.

A Tab. 5.4 mostra os resultados para a relação  $(S/H) = 0.066$ , para diversos valores de  $(S/H) \cdot Ra_S$ , empregando os dois tipos de condição de contorno para a pressão.

Tab. 5.4 - Comparação da taxa de fluxo de massa e número de Nusselt médio para diversas condições de contorno para a pressão com  $Pr=5.0$ , para a geometria 'L' com  $S/H=0.066$

$(S/H) \cdot Ra_S$	$10^3$	$5 \times 10^3$	$10^4$	$5 \times 10^4$
$\dot{m}_1/\dot{m}_2$	1.030	1.072	1.109	1.270
$Nu_{S1}$	2.629	3.980	4.730	7.096
$Nu_{S2}$	2.610	3.950	4.690	7.037
$Nu_S$ (Exp. do canal vertical)	3.842	5.736	6.816	10.177

Observando-se as relações de vazão da Tab. 5.2 para o canal vertical reto e as da Tab. 5.4 para o canal em 'L' pode-se perceber a grande diferença entre os valores de  $\dot{m}_1/\dot{m}_2$ , para os valores elevados de  $Ra_S$ . Tal fato já era esperado, como foi comentado no Cap. 4, devido à condição de  $P_1$  igual a zero, agora ser aplicada longe da região onde os efeitos de flutuação são importantes.

Novamente, os valores de  $Nu_s$  para ambas as condições de contorno para a pressão são praticamente iguais, apresentando comportamento semelhante ao anteriormente observado para o canal vertical. Por último, pode-se ver o efeito da extensão horizontal em relação ao canal vertical. Como, a extensão horizontal aumenta as perdas de carga no canal, tal efeito causa menores valores de  $Nu_s$  para o canal em 'L', quando comparado com o canal vertical. Isto ocorre em virtude de uma parcela das forças de flutuação ser gasta para vencer o atrito na parte inferior, diminuindo assim a vazão succionada, o que irá proporcionar uma camada limite térmica mais espessa diminuindo conseqüentemente o número de Nusselt.

A Tab. 5.5 mostra diversos resultados para  $Pr=0.708$ , com a condição de contorno de  $P_i$  igual a zero na entrada para pressão. Os dados apresentados a seguir foram calculados com  $P_i$  igual a zero, em virtude de não ter-se conseguido uma boa convergência dos resultados quando prescreveu-se a pressão através da equação de Bernoulli, para valores de  $(S/H)*Ra_s$  maiores que  $10^3$ . Como neste caso os fluxos de massa não são drasticamente afetados com o tipo de condição de contorno para a pressão, não foram feitos esforços para elucidar a razão da não convergência. Nestes resultados o interesse é voltado para o efeito chaminé, conseqüentemente o valor de  $S$  foi mantido constante e igual a 0.1m.

Tab. 5.5 - Valores de Nusselt médio e taxa de fluxo de massa com  $P_i=0$  na entrada, para diversas relações de (S/H) e  $Pr=0.708$

S/H	(S/H) * $Ra_S$	$Nu_S$	$\dot{m}$
0.0437	$10^3$	2.654	0.0044
0.0437	$5 \times 10^3$	3.840	0.0071
0.0437	$10^4$	4.509	0.0085
0.0437	$5 \times 10^4$	6.711	0.0146
0.0547	$10^3$	2.534	0.0035
0.0547	$5 \times 10^3$	3.676	0.0056
0.0547	$10^4$	4.330	0.0069
0.0547	$5 \times 10^4$	6.444	0.0123
0.0666	$10^3$	2.414	0.0028
0.0666	$5 \times 10^3$	3.512	0.0046
0.0666	$10^4$	4.144	0.0056
0.0666	$5 \times 10^4$	6.171	0.0103
0.0875	$10^3$	2.230	0.0021
0.0875	$5 \times 10^3$	3.258	0.0034
0.0875	$10^4$	3.847	0.0042
0.0875	$5 \times 10^4$	5.745	0.0080

As Figs. 5.6 a 5.9 ilustram os perfis de velocidade no interior do canal. Na parte horizontal da geometria estão plotados os valores de  $u$  e na parte vertical os valores de  $v$ . As Figs. 5.10 a 5.13 mostram as linhas de corrente.

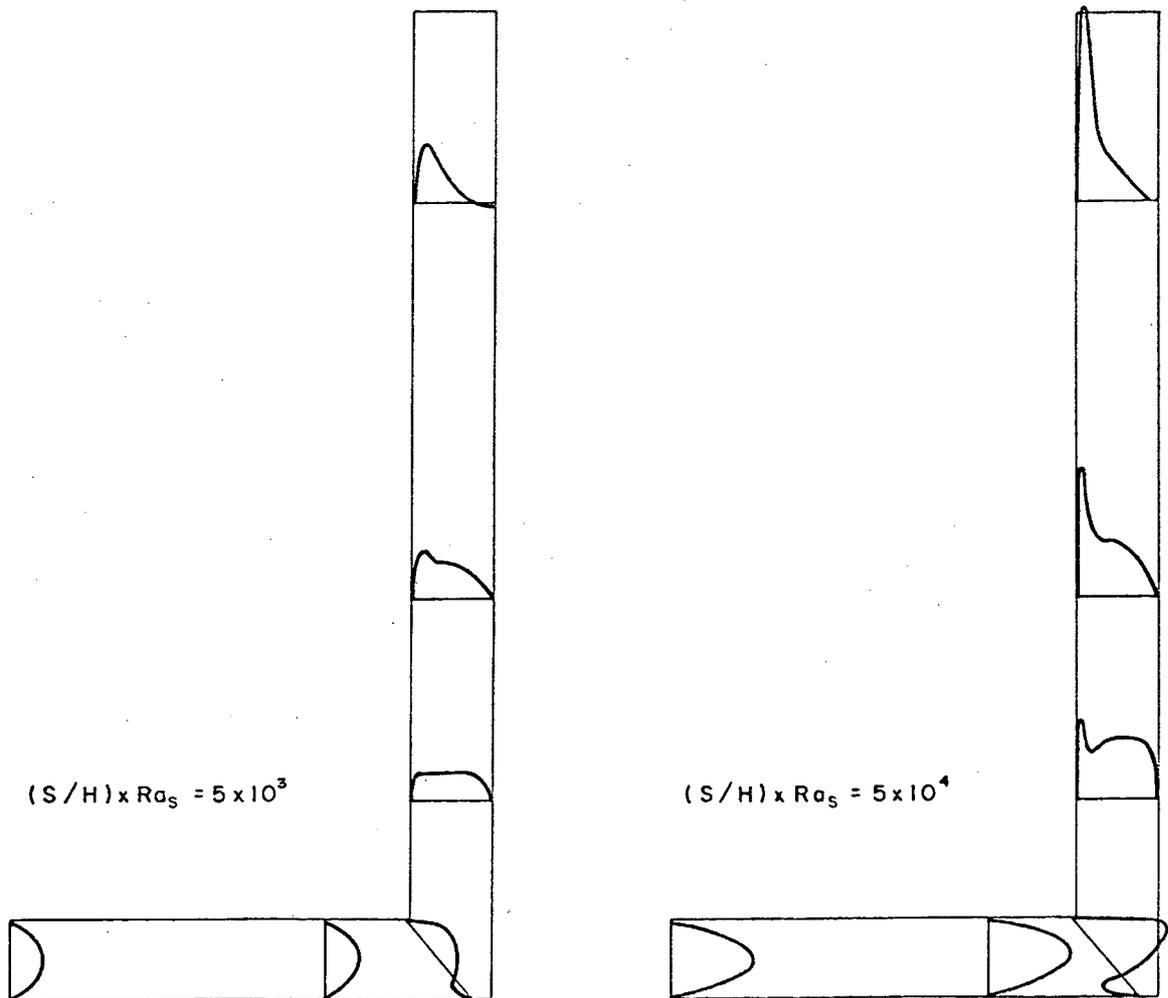


Fig. 5.6 - Perfis de velocidade, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) \times Ra_S = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.1428m$  e  $Pr=0.708$

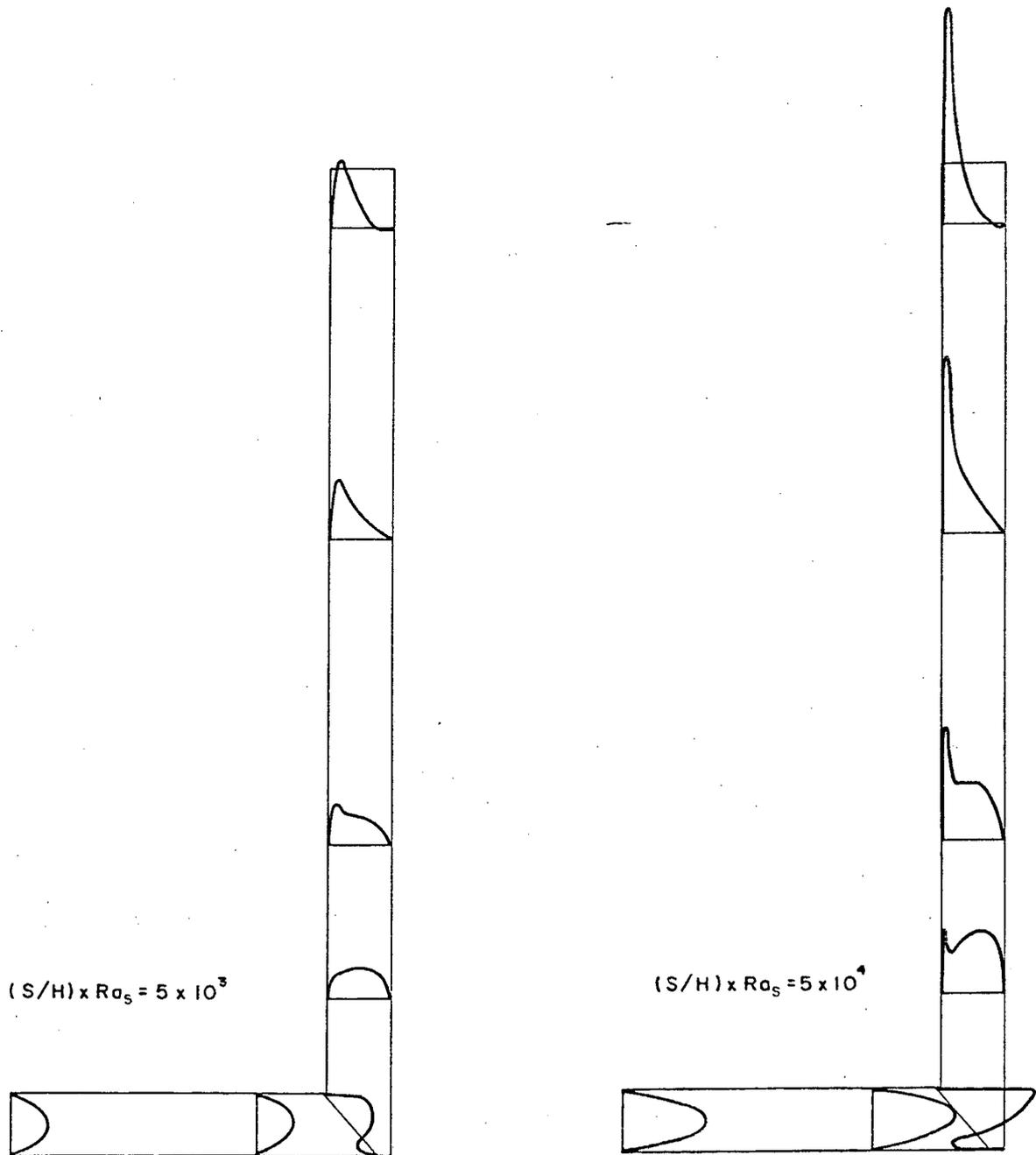


Fig. 5.7 - Perfis de velocidade, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) \times Ra_s = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.5m$  e  $Pr=0.708$

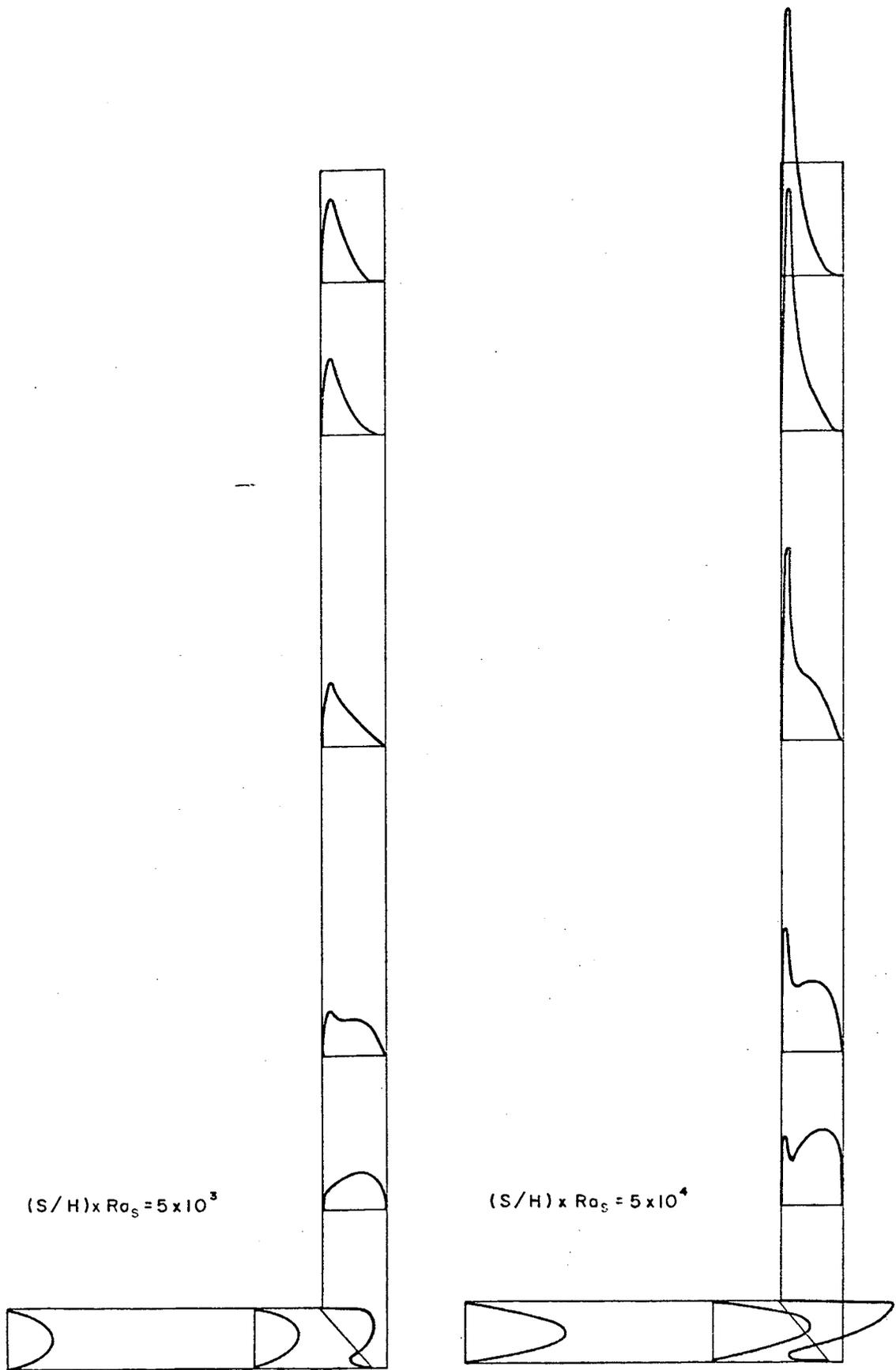


Fig. 5.8 - Perfis de velocidade, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) * Ra_s = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.828m$  e  $Pr=0.708$

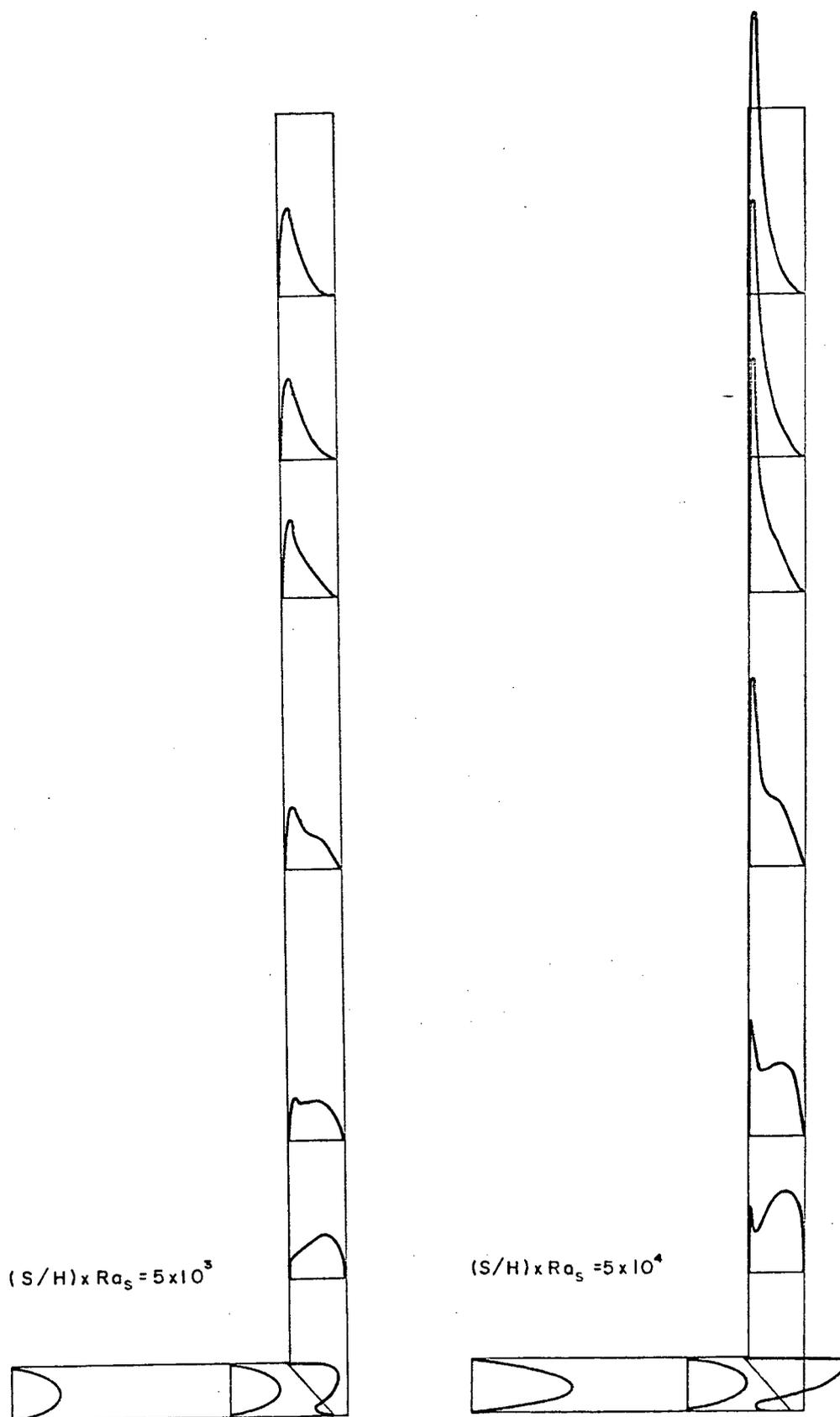


Fig. 5.9 - Perfis de velocidade, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) \times Ra_s = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=2.228m$  e  $Pr=0.708$

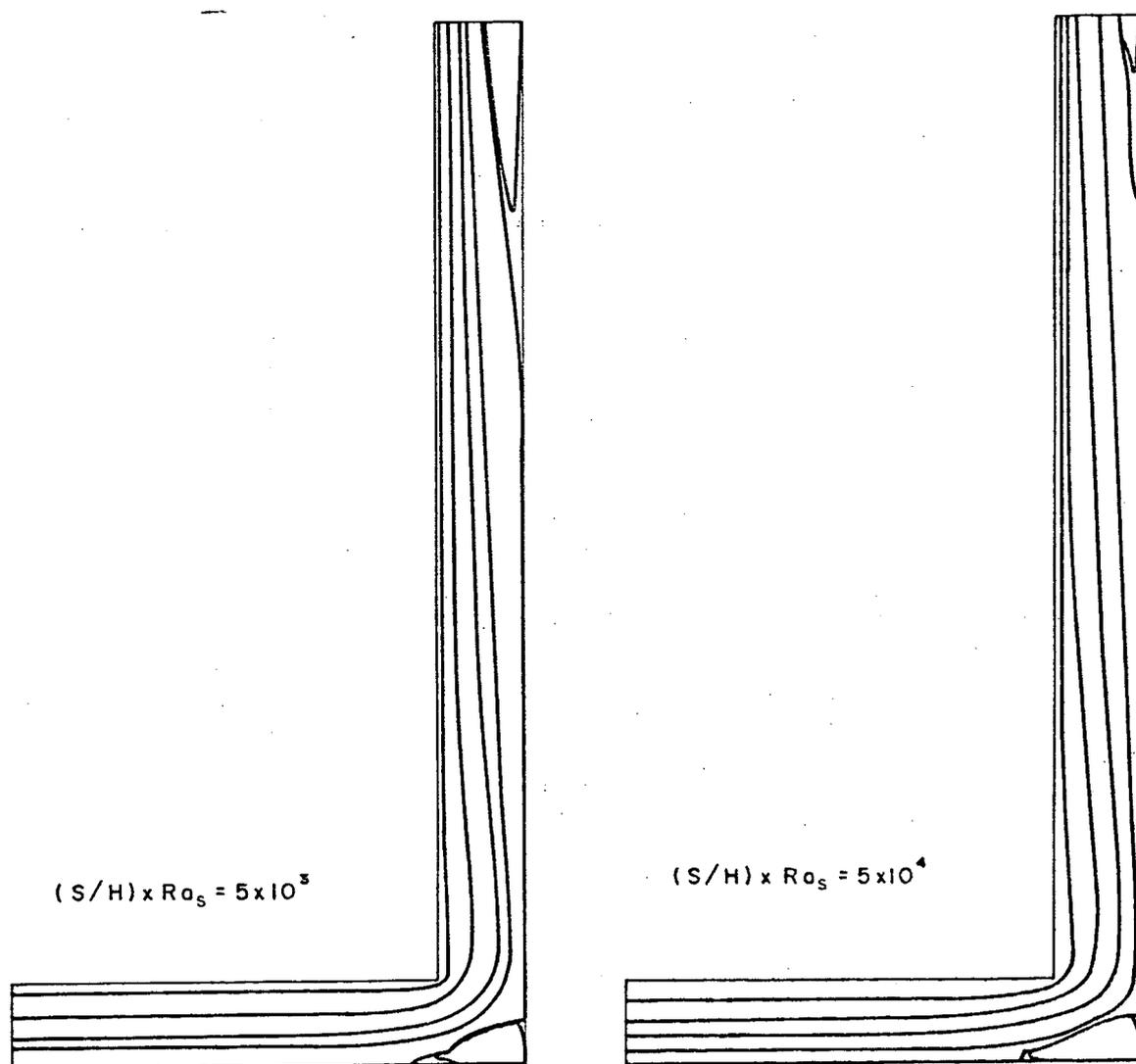


Fig. 5.10 - Linhas de corrente, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) \times Ra_S = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.1428m$  e  $Pr=0.708$

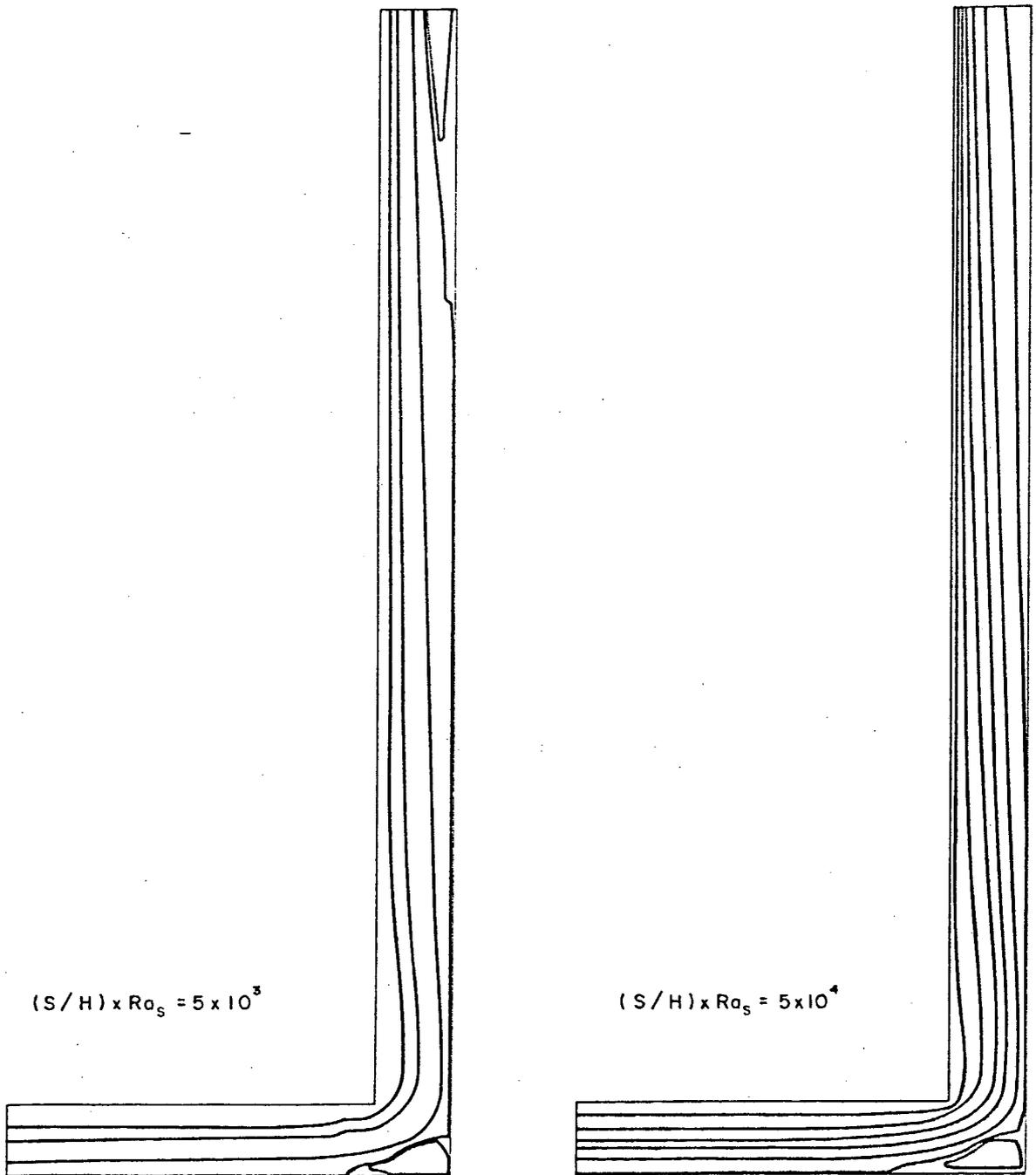


Fig. 5.11 - Linhas de corrente, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) \times Ra_s = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.5m$  e  $Pr=0.708$

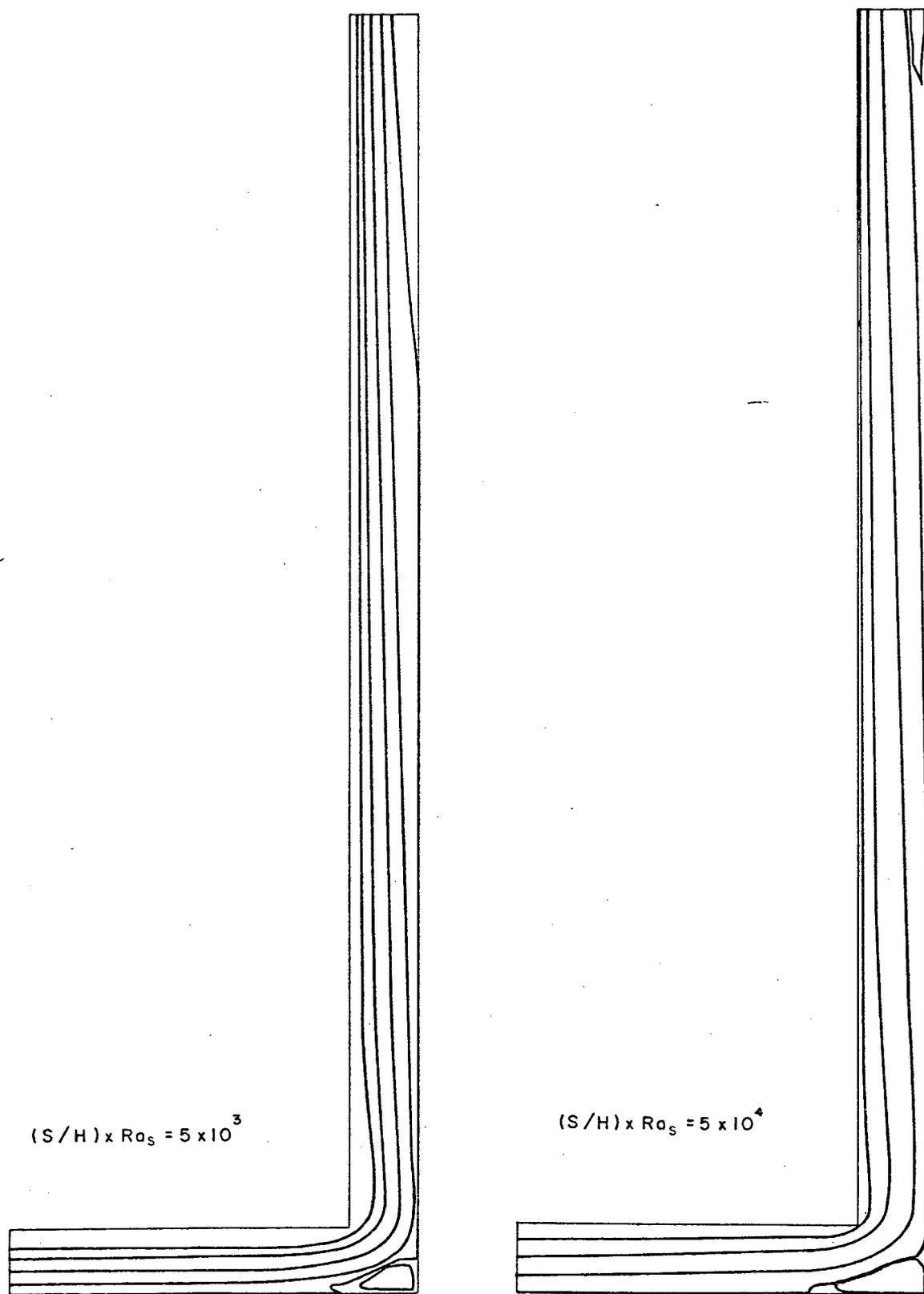


Fig. 5.12 - Linhas de corrente, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) \times Ra_S = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.828m$  e  $Pr=0.708$

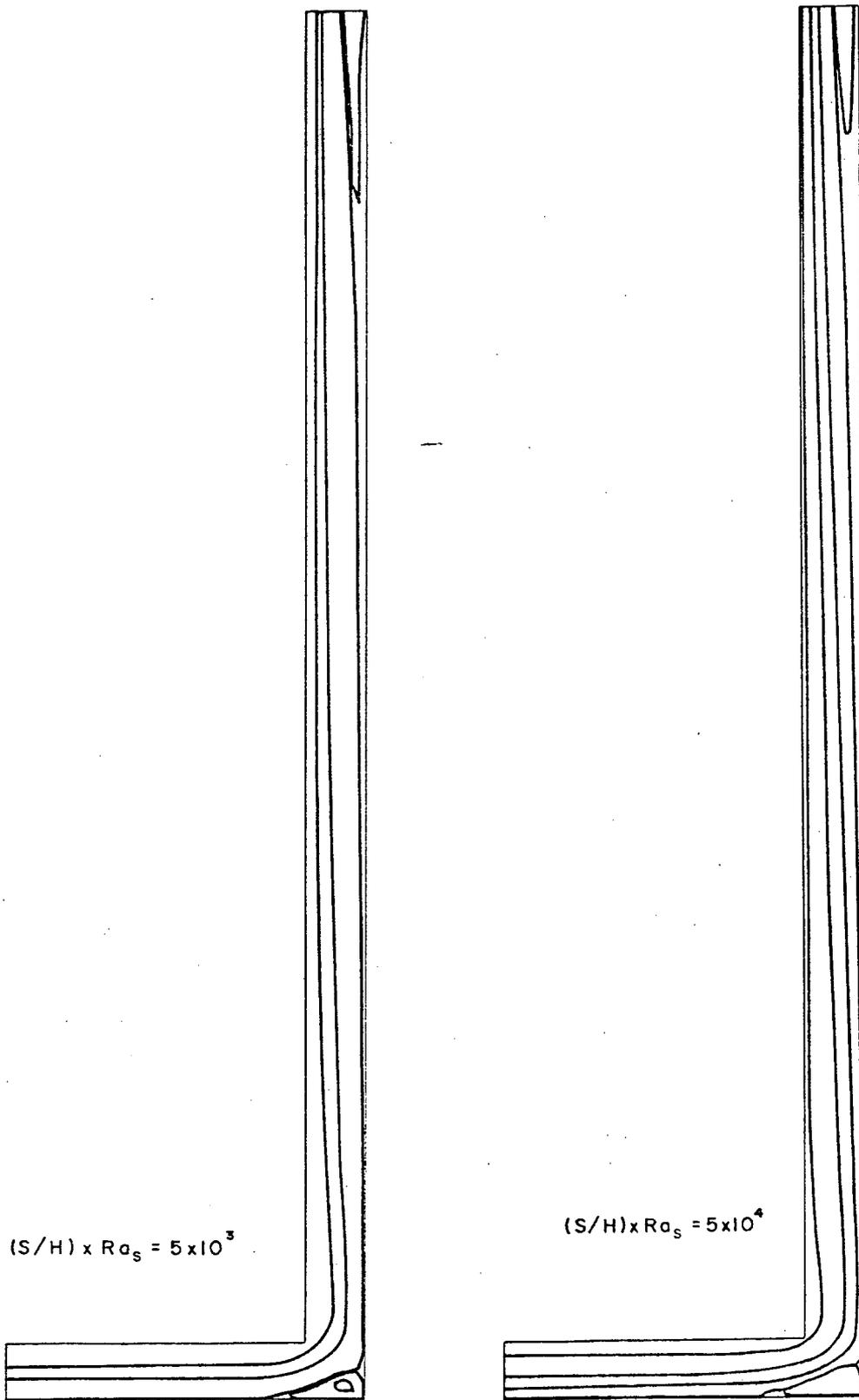


Fig. 5.13 - Linhas de corrente, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) \times Ra_s = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=2.228m$  e  $Pr=0.708$

Inspecionando os perfis das Figs. 5.6 a 5.9, pode-se observar o efeito mais pronunciado da convecção natural no início da trajetória vertical, para os maiores valores de  $(S/H) \cdot Ra_s$ . Nas Figs. 5.10 a 5.13, verifica-se que para os maiores valores de  $(S/H) \cdot Ra_s$  as linhas de corrente estão mais próximas da parede aquecida.

Para um escoamento forçado neste tipo de geometria, sem o efeito de temperatura, existe o surgimento de uma recirculação no canto onde se inicia a parede aquecida. Com o efeito da convecção natural, é de se esperar que o fluido, que tenderia a formar vórtices nesta região, seja succionado e a recirculação tenda a desaparecer ou torne-se desprezível para forças de flutuações consideráveis.

As Figs. 5.14 a 5.17 apresentam as isotermas. Pode-se ver claramente que o efeito da parede quente é pronunciado para as menores relações de  $(S/H) \cdot Ra_s$ , justamente porque quanto menor as velocidades próximas à parede quente, mais o efeito difusivo do calor se propaga em direção à parede mais fria. Este efeito também pode ser observado, na vertical, com relação a isoterma de 0.001, pois quanto menor a velocidade, mais ela penetra na parte horizontal. Pode-se também observar que, praticamente, toda a região horizontal do canal não sofre nenhum efeito da temperatura da parede aquecida.

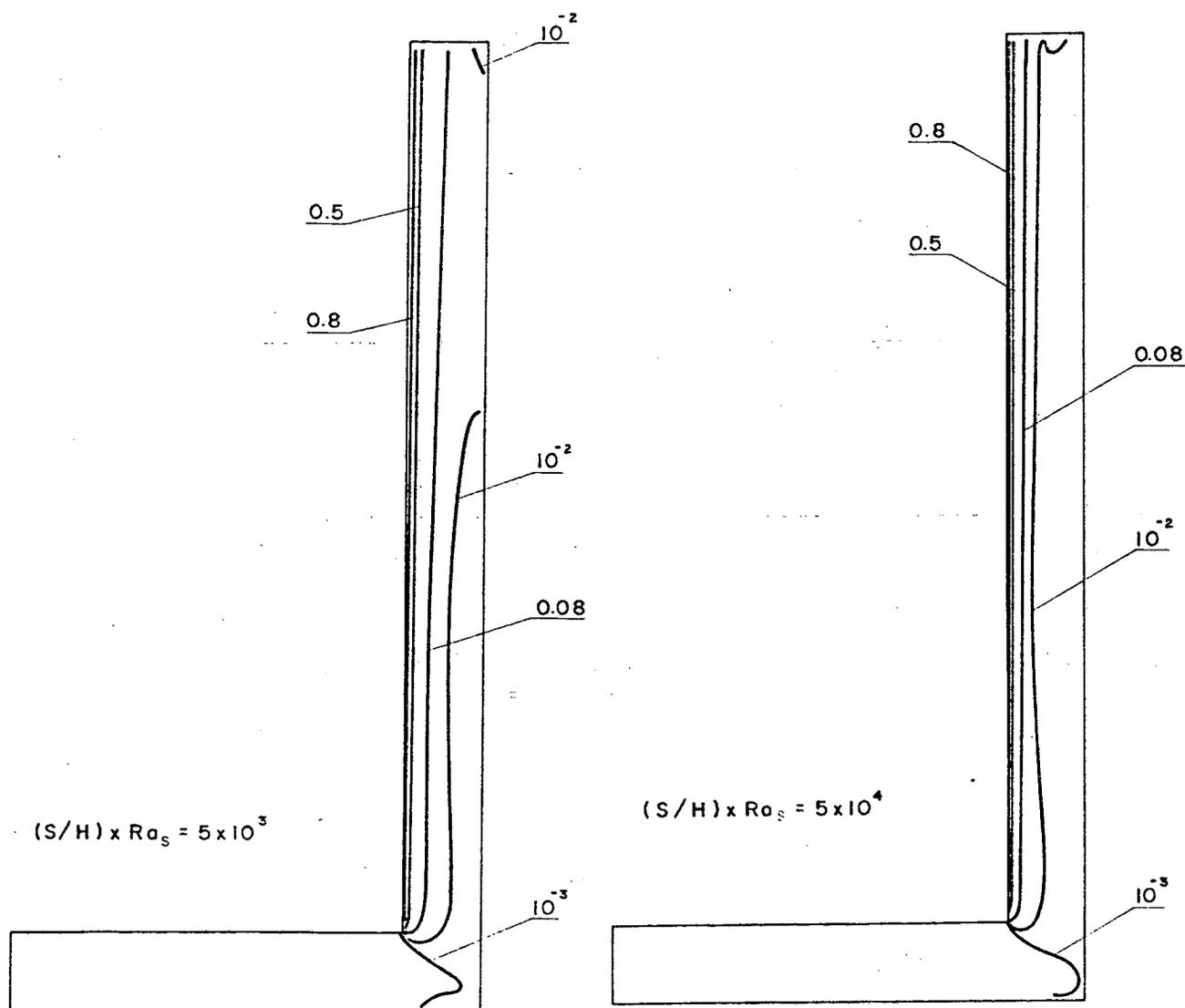


Fig. 5.14 - Isothermas, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) \times Ra_s = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.1428m$  e  $Pr=0.708$

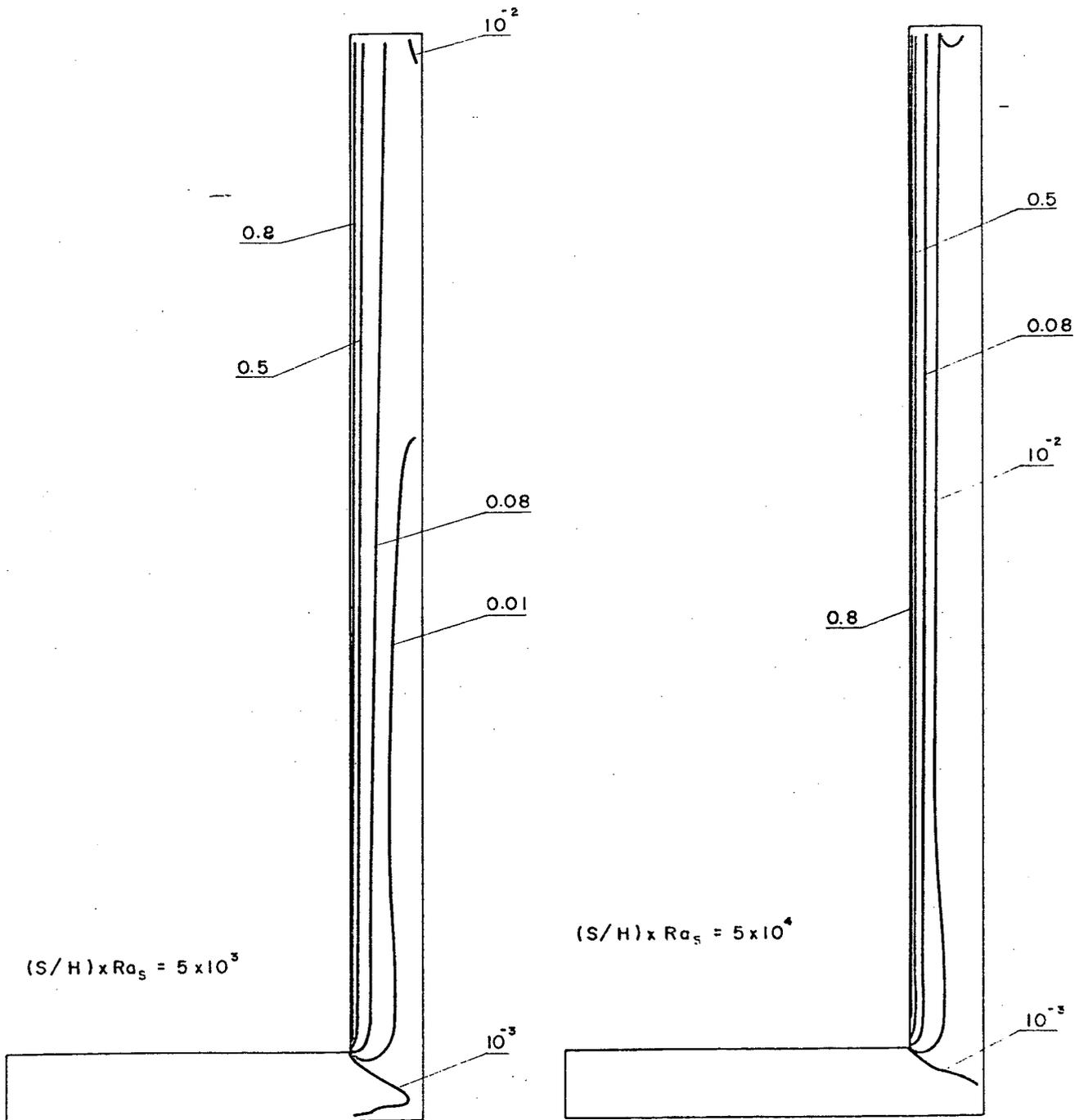


Fig. 5.15 - Isotermas, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) \times Ra_s = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.5m$  e  $Pr=0.708$

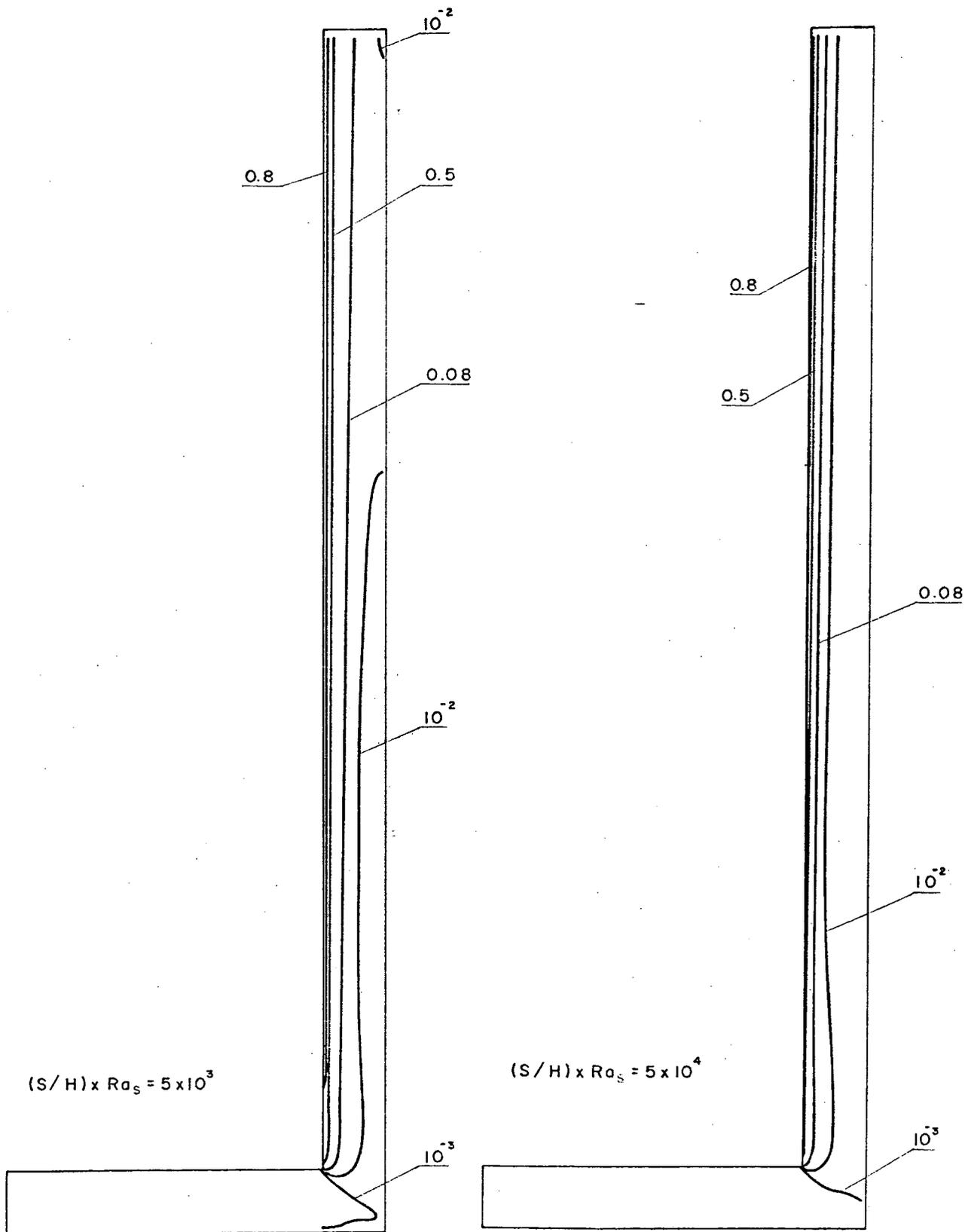


Fig. 5.16 - Isothermas, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) \times Ra_s = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=1.828m$  e  $Pr=0.708$

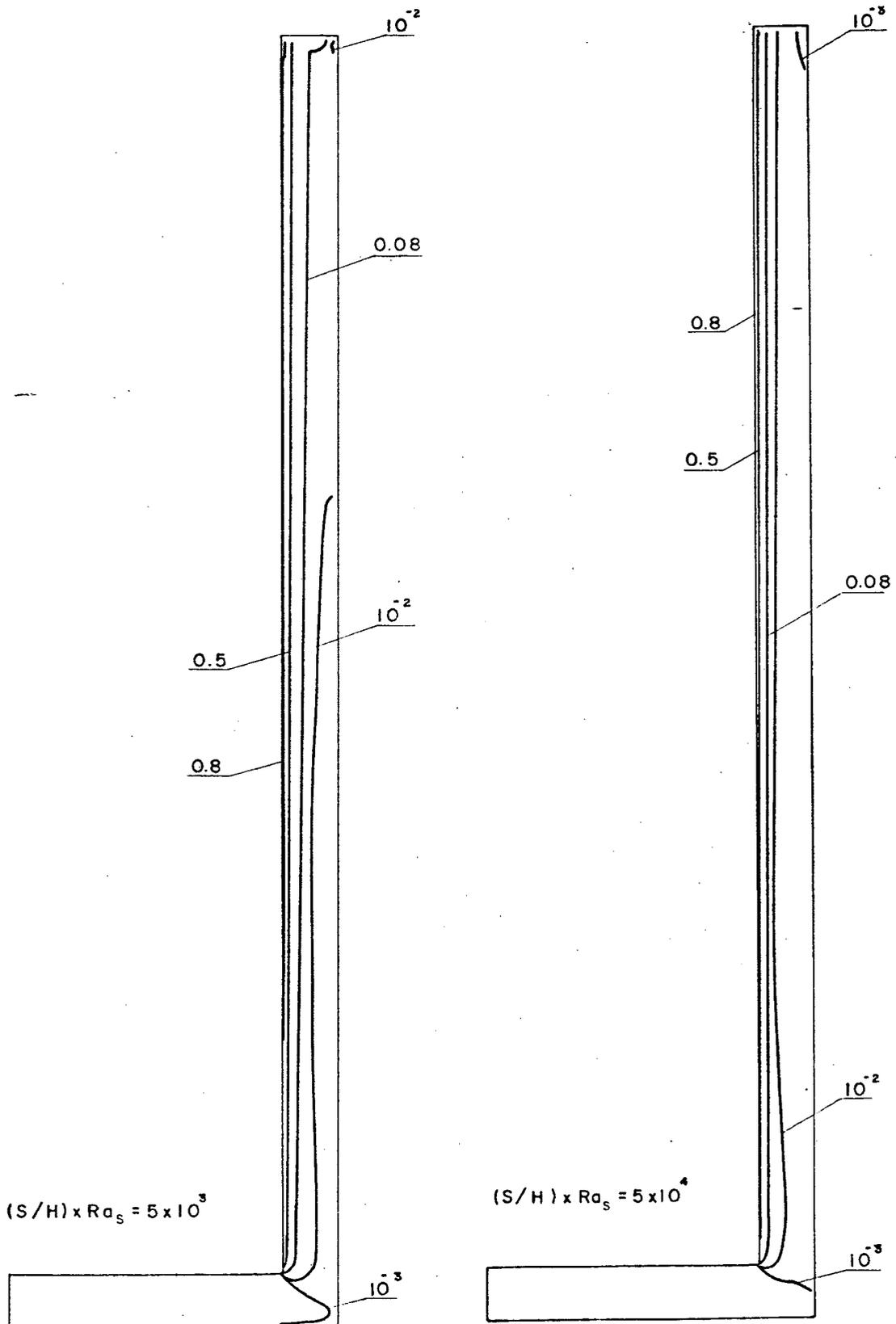


Fig. 5.17 - Isothermas, com uma das paredes a temperatura constante e a outra isolada, para  $(S/H) \times Ra_S = 5 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=2.228m$  e  $Pr=0.708$

As Figs. 5.18 a 5.21 apresentam o número de Nusselt local ( $Nu_L$ ) para quatro relações e quatro valores de  $Ra_S$  diferentes. O valor de  $S$  foi mantido constante e  $H$  foi variado de 1.1428 a 2.228 m. As curvas a seguir apresentam um acréscimo do número de Nusselt local, para um mesmo valor de  $(S/H) * Ra_S$ , a medida que o valor de  $H$  aumenta. Tal fato pode ser explicado da seguinte forma. Ao aumentar o valor de  $H$ , aumenta-se também a vazão succionada para um mesmo valor de  $(S/H) * Ra_S$ . Isto conduz a um aumento do gradiente térmico na parede aquecida, aumentando desta forma o Nusselt local.

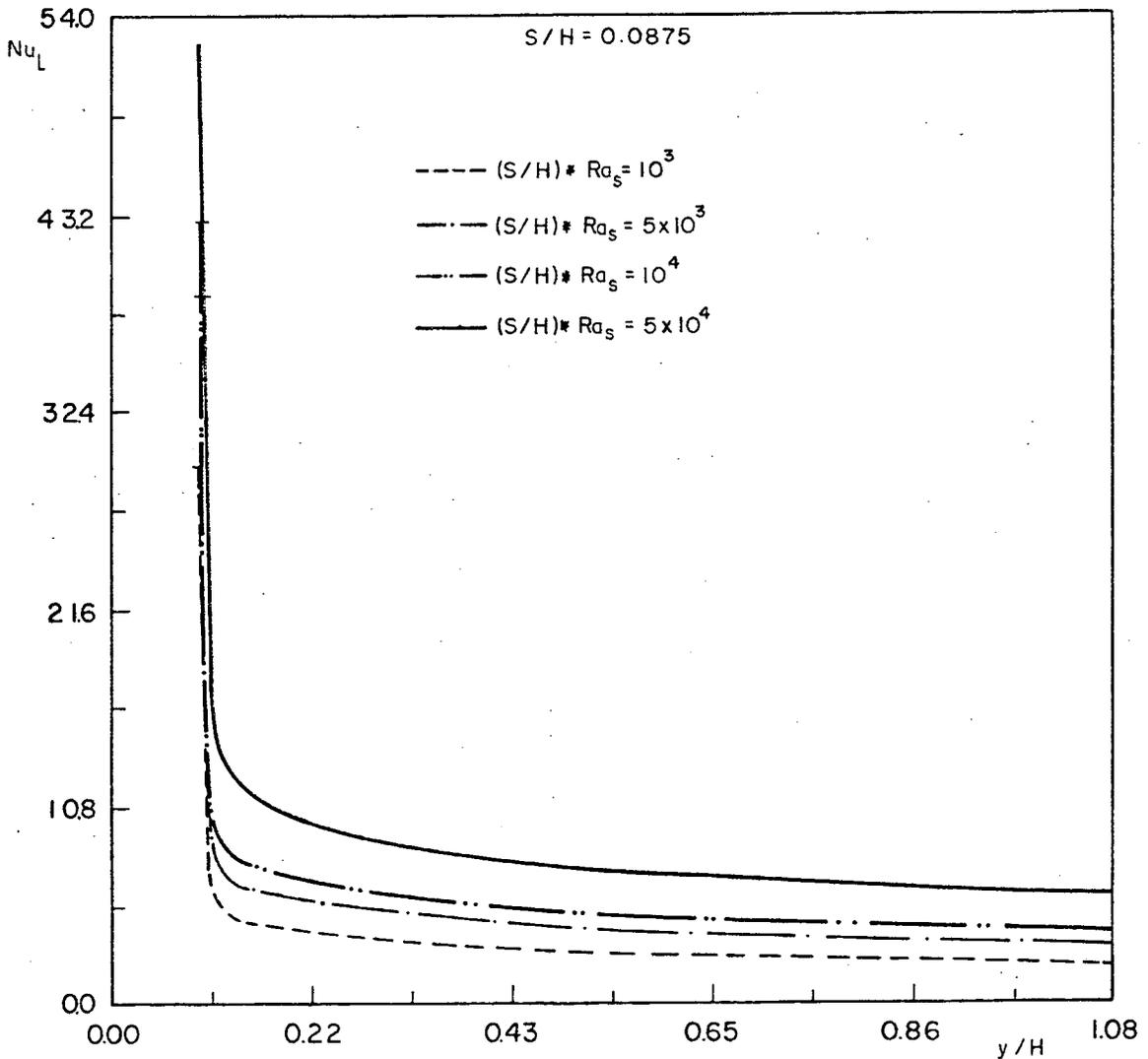


Fig. 5.18 - Número de Nusselt local do canal em 'L', com  $S=0.1m$ ,  $H=1.1428m$  e  $Pr=0.708$

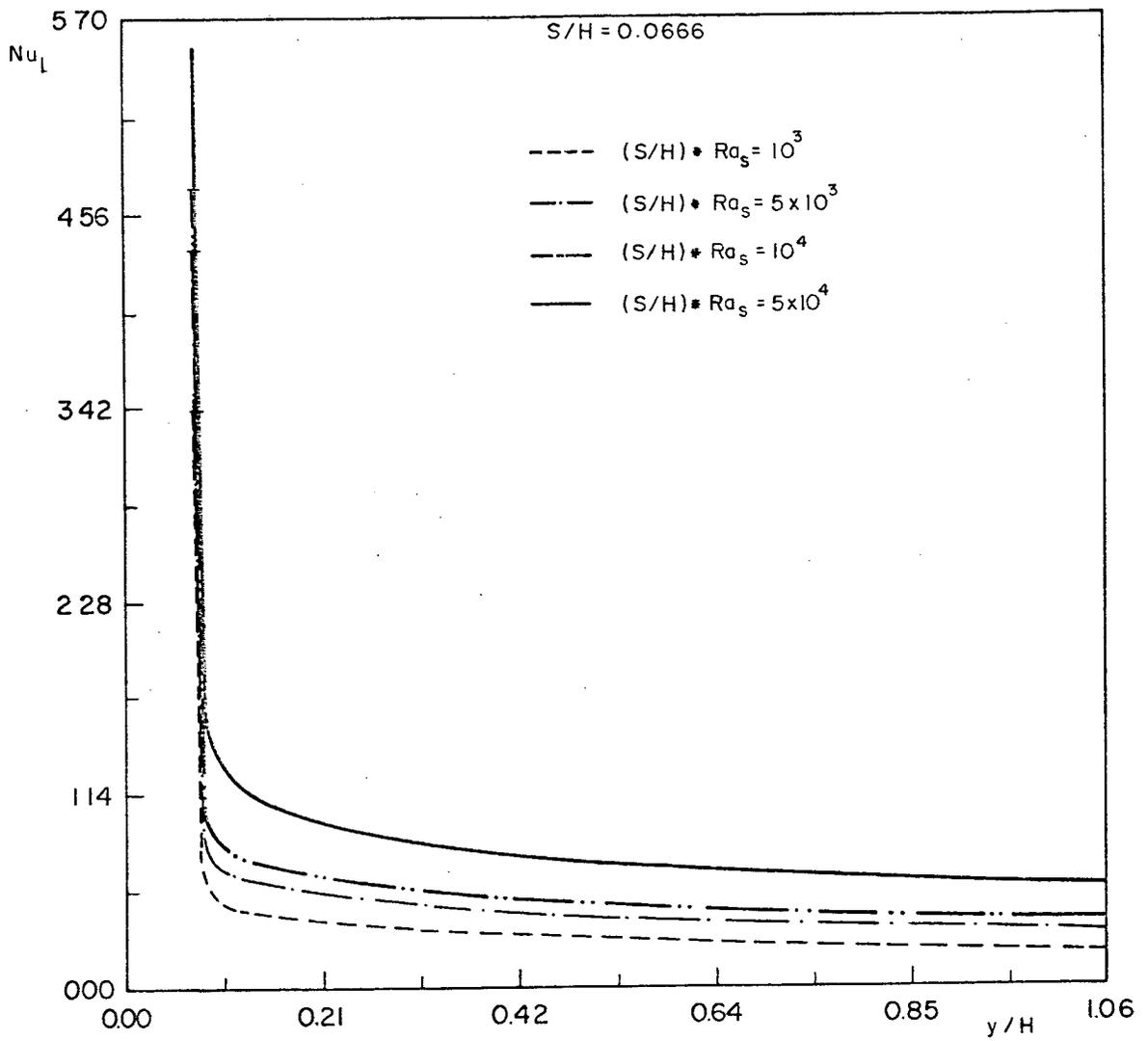


Fig. 5.19 - Número de Nusselt local do canal em 'L', com  $S=0.1m$ ,  $H=1.5m$  e  $Pr=0.708$

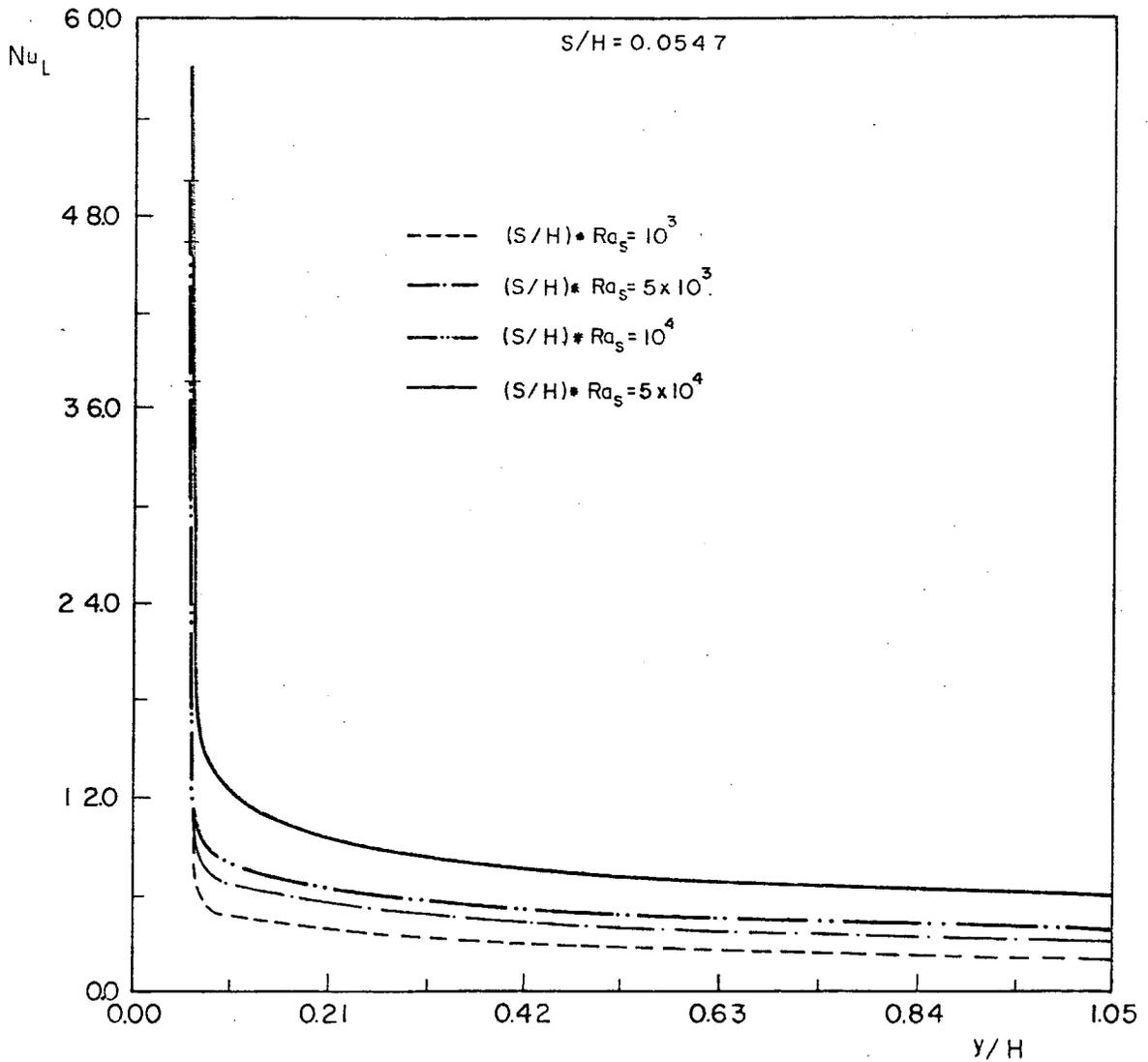


Fig. 5.20 - Número de Nusselt local do canal em 'L', com  $S=0.1m$ ,  $H=1.828m$  e  $Pr=0.708$

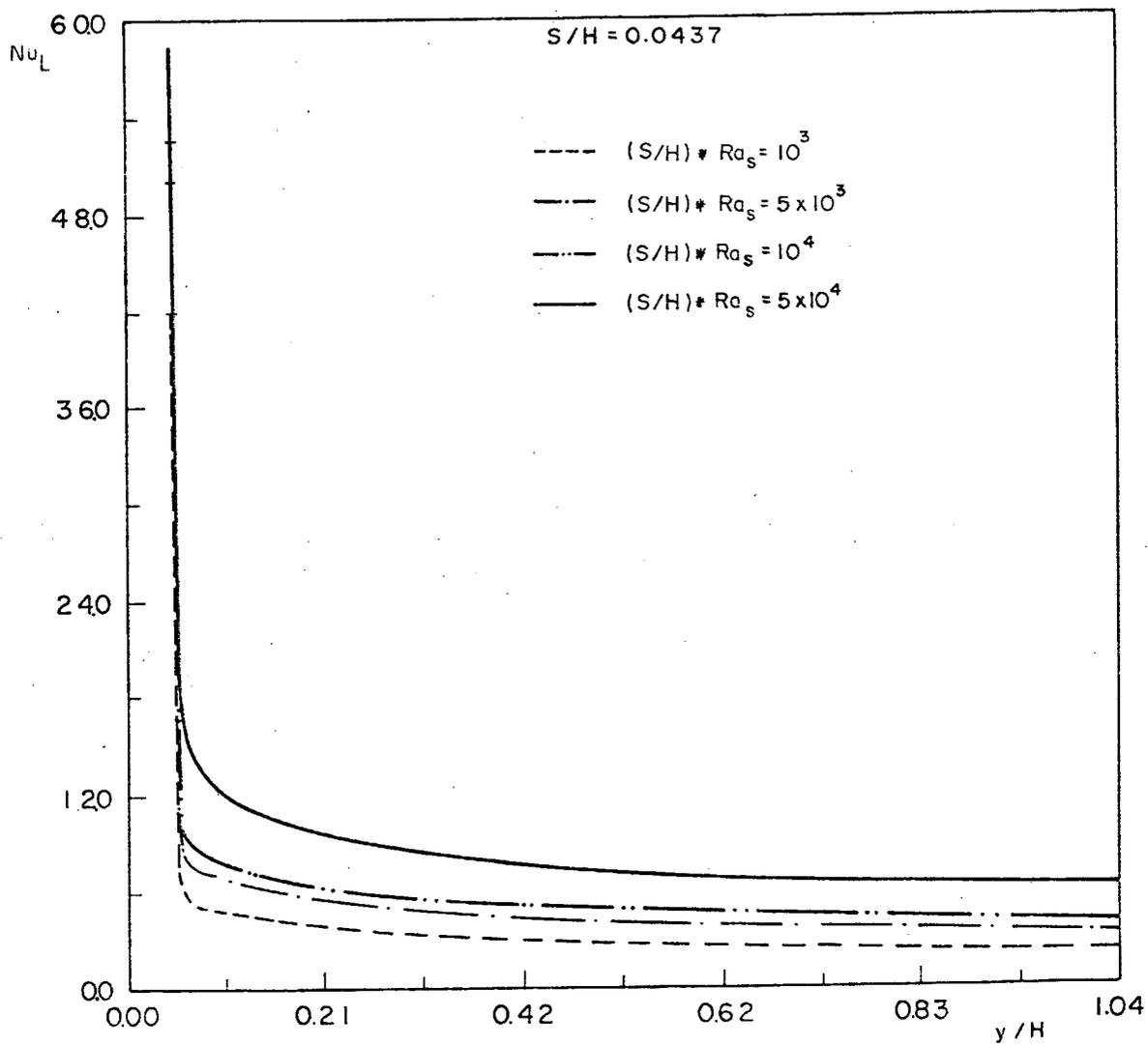


Fig. 5.21 - Número de Nusselt local do canal em 'L', com  $S=0.1m$ ,  $H=2.228m$  e  $Pr=0.708$

A Fig. 5.22 apresenta os perfis de pressão para a relação  $(S/H)=0.066$ , para dois valores de  $Ra_g$  diferentes e para  $P_i$  igual a zero na entrada. As curvas apresentam um valor de pressão elevado perto da região da entrada, seguido de queda semelhante a um desenvolvimento de um perfil de velocidades hidrodinâmico, atingindo seu mínimo na região do começo de aquecimento e em seguida tornando a subir. Pode-se ver que as curvas próximas a parede quente, em ambas as figuras, tem esse comportamento. A outra curva, em ambas as figuras, que mostra uma elevação acentuada da pressão, representa a curva de pressão próxima a parede inferior. É nesta região onde realmente se espera um acréscimo de pressão, em virtude do choque do fluido contra as paredes.

Pode-se ver também que a região de passagem do fluido da extensão horizontal para o duto vertical é uma região onde as equações parabólicas que tentassem modelar esse fenômeno, deveriam divergir, quer por parte do efeito bidimensional da pressão, quer por parte da recirculação na parte inferior da curvatura, como apresentado acima, nas figuras de perfis de velocidade e linhas de corrente. Um pouco acima da região da curva, os perfis de pressão, apresentam comportamento semelhante próximo das paredes do duto e, do ponto de vista da pressão, esta região poderia ser tratada parabólicamente.

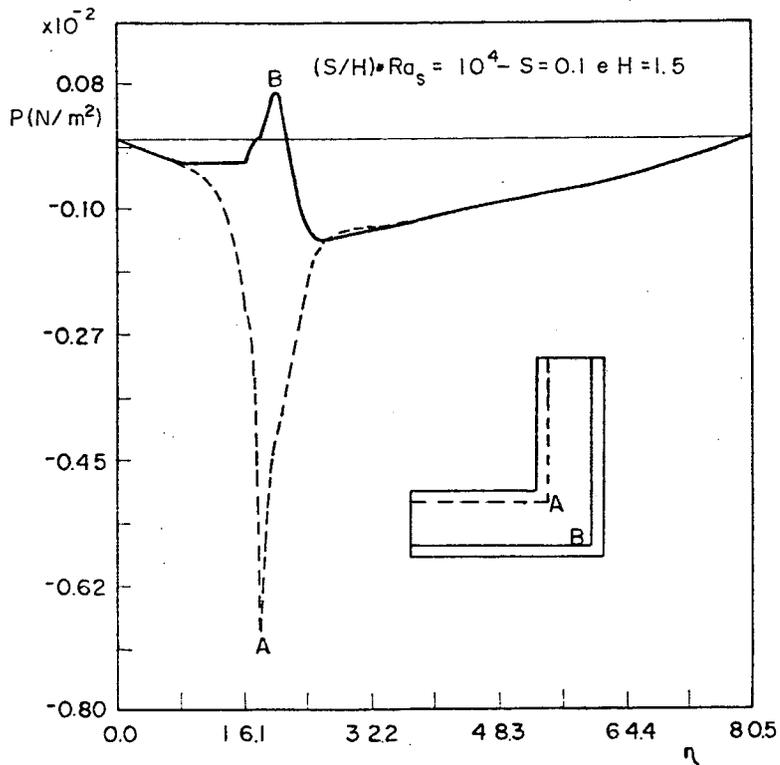
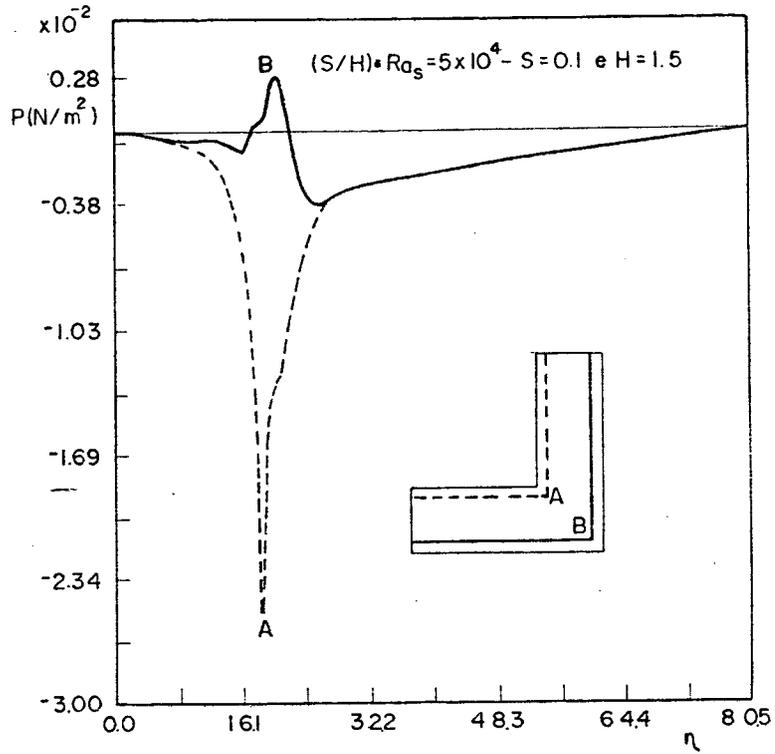


Fig. 5.22 - Perfis de pressão no interior do canal em 'L', para  $(S/H) \cdot Ra_s = 10^4$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1\text{m}$ ,  $H=1.5\text{m}$  e  $Pr=0.708$

A Fig. 5.23 apresenta o número de Nusselt médio baseado na altura aquecida (H), onde H foi mantido constante e igual a 1.1428m. Pode-se concluir através da Eq. (5.5), que  $Nu_H$  representa o fluxo de calor médio na parede aquecida. Desta forma, o efeito do espaçamento entre placas (S) no fluxo de calor, pode agora ser analisado. Os números de  $Nu_H$  e  $Ra_H$  empregados na Fig. 5.23 são dados por

$$Nu_H = \frac{\bar{q}H}{K(T_W - T_O)} \quad (5.10)$$

$$Ra_H = \frac{g\bar{\beta}(T_W - T_O)H^3}{\bar{\nu}\alpha} \quad (5.11)$$

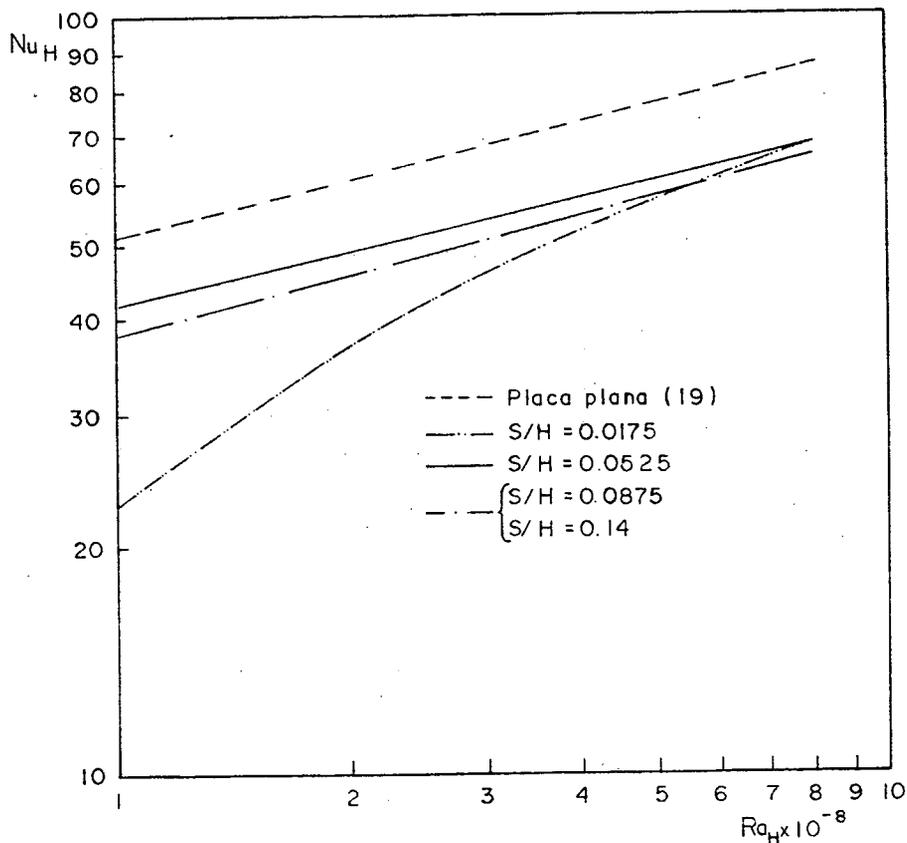


Fig. 5.23 - Número de Nusselt médio baseado na altura aquecida para o canal em 'L'

Da Fig. 5.23 pode-se ver que o número de Nusselt baseado em  $H$ , para os quatro valores de  $S$  analisados é sempre menor que o Nusselt para a placa plana, para um mesmo número de Rayleigh. Tal fato, pode ser explicado em virtude da extensão horizontal, como comentado anteriormente, diminuir a vazão succionada, ocasionando assim menores gradientes de temperatura na parede aquecida.

Voltando nossa atenção para a troca de calor do canal em 'L', pode-se ver que existe um aumento significativo na troca de calor quando o valor de  $S$  é aumentado de  $0.02m$  para  $0.06m$ . Observa-se também nesta figura que para  $S/H=0.0525$  existe a máxima troca de calor do canal em 'L'. Para  $S/H$  maiores do que este valor a troca de calor média diminui. Uma tentativa de explicação para este comportamento é agora apresentada. Se a espessura da camada limite para a placa plana vertical for calculada pela Eq. (7.20) de [32] o valor encontrado será  $\delta/H=0.0486$ , bem próximo de  $S/H=0.0525$ , que é a razão largura/altura que apresenta a maior troca de calor média. Se aumentarmos  $S/H$  além deste valor a camada limite térmica não envolverá todo o canal. Conseqüentemente, a parcela de fluido que não sofre ação da força de empuxo deve ser arrastada pelo fluido no interior da camada limite térmica. Desta maneira pode-se dizer que uma parcela da força de empuxo está sendo utilizada para proporcionar o movimento da massa fria, ocasionando uma diminuição no gradiente de velocidade e conseqüentemente no número de Nusselt.

Para finalizar a apresentação dos resultados para a geometria em forma de 'L', apresenta-se alguns resultados para a condição de fluxo prescrito em uma parte do canal (tal como mostrado na Fig. 5.5.b). A relação é  $(S/H)=0.133$ . Foi usada a condição de fluxo prescrito  $q=1$  e foi usado um  $Ra_{qs}$  definido por

$$Ra_{qs} = \frac{g\beta qS}{\nu\alpha K}^4 \quad (5.12)$$

A seguir apresenta-se na Tab. 5.6 os valores de  $\dot{m}$  para quatro valores de  $Ra_{qs}$ .

Tab. 5.6 - Taxa de fluxo de massa para a relação  $(S/H)=0.133$ , com a condição de fluxo prescrito

$(S/H) * Ra_{qs}$	$10^3$	$5 \times 10^3$	$10^4$	$5 \times 10^4$
$\dot{m}$	0.00095	0.00171	0.00205	0.00222

A Fig. 5.24 apresenta as linhas de corrente e  $\bar{a}$  Fig. 5.25 as isotermas, para dois valores de  $(S/H) * Ra_{qs}$ ,  $10^4$  e  $5 \times 10^4$ . Como se pode ver na Fig. 5.24 para os dois valores de  $(S/H) * Ra_{qs}$  apresentados ( $10^4$  e  $5 \times 10^4$ ), as recirculações aumentam quando o  $(S/H) * Ra_{qs}$  aumenta de  $10^4$  a  $5 \times 10^4$ , como realmente deveria acontecer fisicamente. Tal fato vem comprovar o que já foi comentado anteriormente, de que quanto mais distante estiver a condição de  $P_i=0$  da região de paredes aquecidas, mais correta será a sua aplicação.

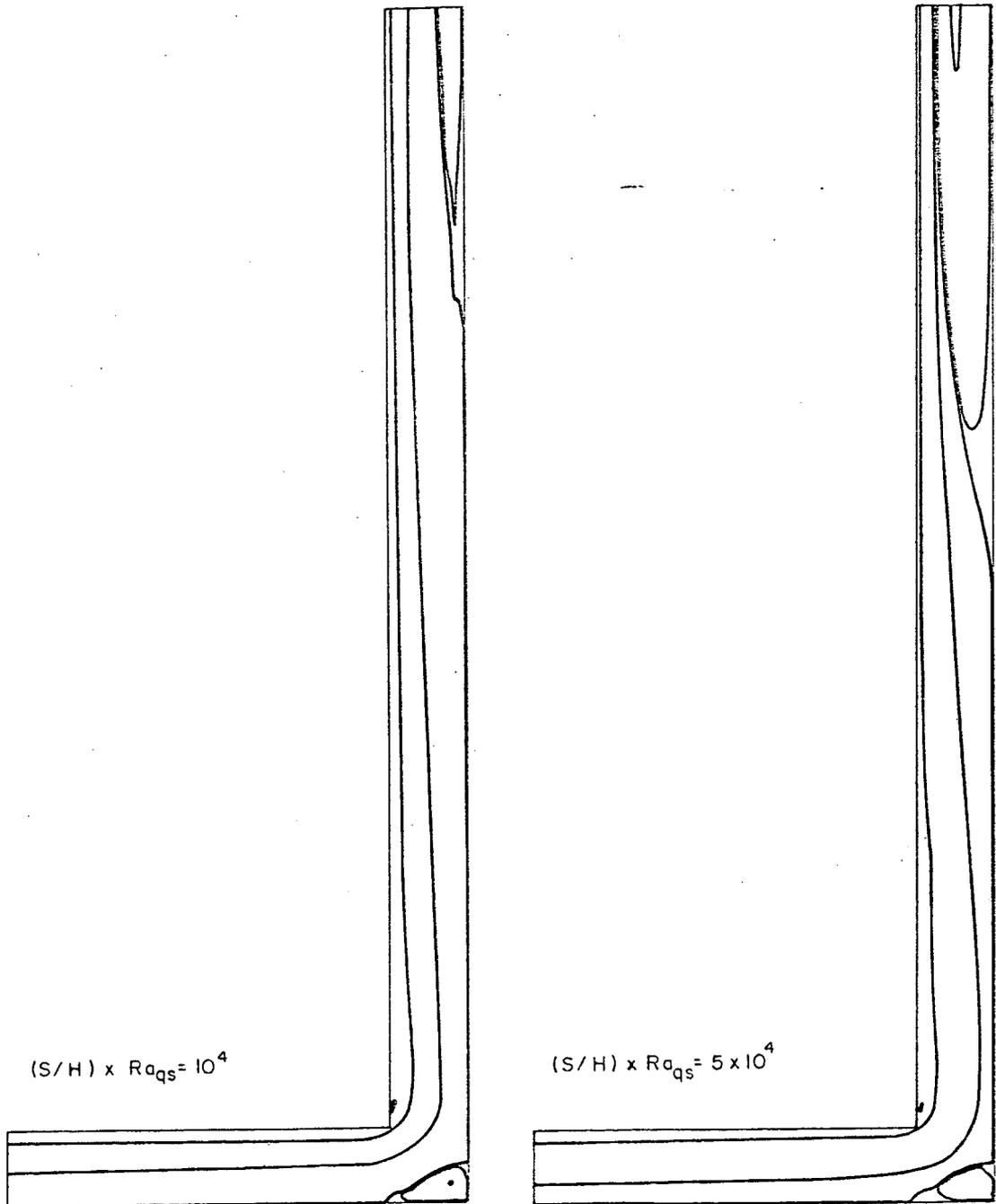


Fig. 5.24 - Linhas de corrente, com fluxo prescrito em uma das paredes e o restante isolada, para  $(S/H) \cdot Ra_{qs} = 10^4$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=0.75m$  e  $Pr=0.708$

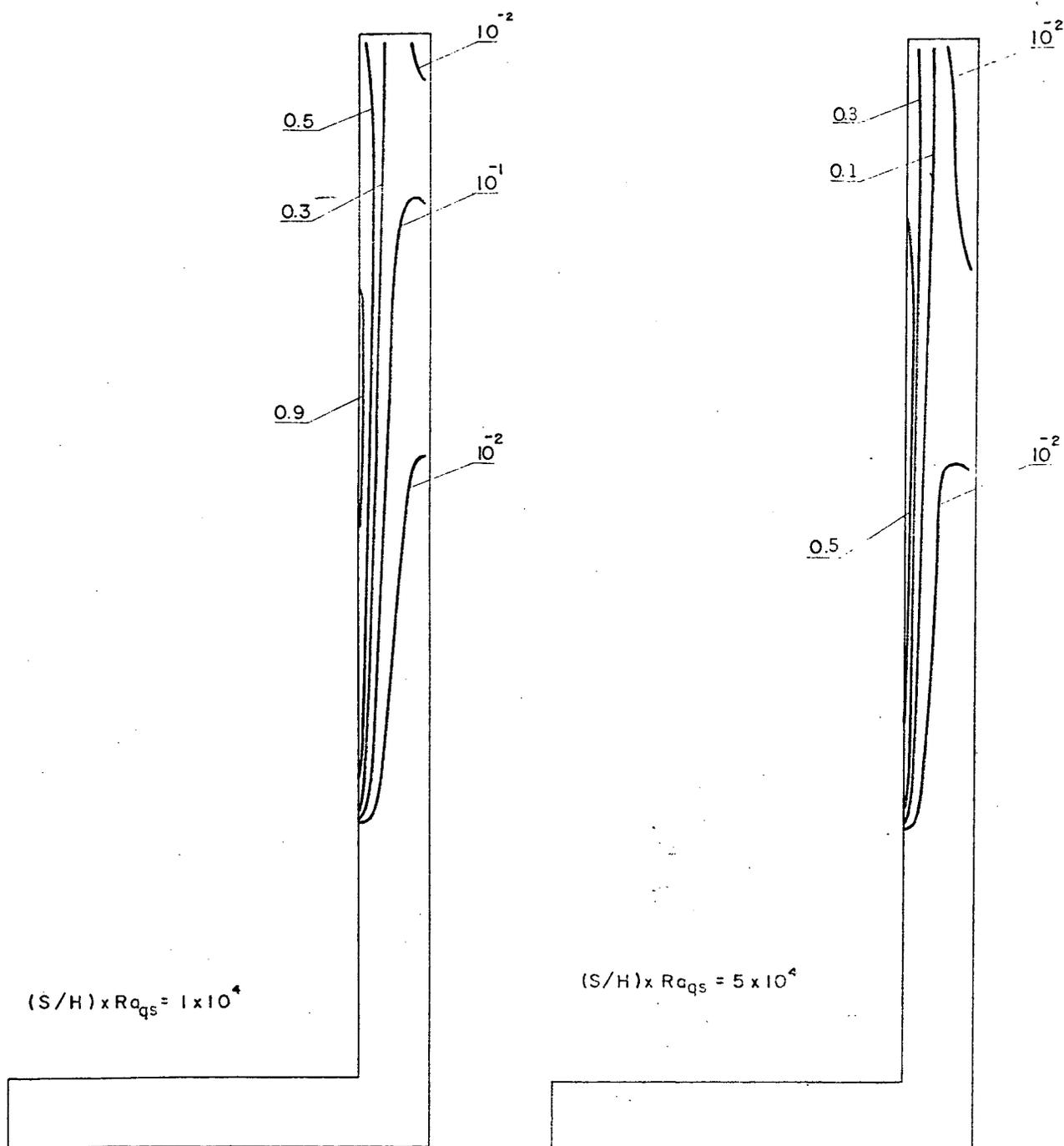


Fig. 5.25 - Isothermas, com fluxo prescrito em uma das paredes a e o restante isolada, para  $(S/H) \times Ra_{qs} = 10^4$  e  $5 \times 10^4$ , com  $S=0.1m$ ,  $H=0.75m$  e  $Pr=0.708$

Todos os resultados numéricos apresentados foram obtidos com um critério de convergência no campo de velocidades cartesianas  $(u,v)$  de  $10^{-4}$ . O critério foi aplicado da seguinte forma. Com o campo de velocidades da iteração  $(n)$  é calculado a diferença entre a máxima e a mínima velocidade. A diferença entre a velocidade na iteração  $(n+1)$  menos a velocidade na iteração  $(n)$  dividida pela diferença máxima, não deve ultrapassar o valor da tolerância para cada ponto. Caso isso não ocorra para alguma velocidade no domínio, uma nova iteração torna-se necessária.

## CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo principal a solução do problema da convecção natural em canais em 'L'. Ao longo do desenvolvimento foi necessário implementar uma metodologia numérica para a aplicação das condições de contorno na entrada do canal para a formulação elíptica. A maneira aqui desenvolvida é não iterativa e apresenta bons resultados.

Com a solução do problema as seguintes características principais do escoamento e da transferência de calor foram observadas:

- 1 - O campo de velocidade é fortemente afetado pela condição de contorno para a pressão na entrada do canal.
- 2 - O efeito de prescrever a pressão na entrada do canal é significativo na região fora da camada limite térmica. Na região onde a flutuação é dominante o escoamento não é afetado pelo tipo de condição de contorno. Como consequência a vazão é bastante modificada pelas diferentes condições de contorno da pressão na entrada do canal.
- 3 - Os perfis de velocidade obtidos com  $P_i$  igual a zero e  $P_i$  calculado através da equação de Bernoulli apresentam o mesmo gradiente próximo da parede quente, sendo este o principal motivo do número de Nusselt ser praticamente igual quando calculado com as duas condições de contorno para a pressão.
- 4 - A aplicação de  $P_i$  igual a zero na entrada será mais correta quanto mais distante estiver a região de entrada da região onde os efeitos de flutuação são presentes.
- 5 - A metodologia apresentada neste trabalho para o cálculo das velocidades e pressão apresentou bons resultados numéricos,

sendo portanto uma importante ferramenta numérica para o estudo de outros tipos de problemas onde não são conhecidas as condições de contorno.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - ELENBRAS, W., Heat Dissipation of Parallel Plates by Free Convection, *Physica* 9, 1942, pp. 1-28
- 2 - BODOIA, J. R., e OSTERLE, J. F., The Development of Free Convection Between Heated Vertical Plates, *Journal Heat Transfer*, Vol. 84, 1962, pp. 40-44.
- 3 - AUNG, W., FLETCHER, L. S., e SERNAS, V., Developing Laminar Free Convection Between Vertical Flat Plates With Asymmetric Heating, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, 1972, pp. 2293-2308.
- 4 - SPARROW, E. M., CHRYSLER, G. M., e AZEVEDO, L. F., Observed Flow Reversals and Measured-Predicted Nusselt Numbers for Natural Convection in a One-Sided Heated Vertical Channel, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 106, 1984, pp. 325-332.
- 5 - AUNG, W., WORKU, G., Developing Flow and Flow reversal in Vertical Channel With Asymmetric Wall Temperatures, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 108, 1986, pp.299-304.
- 6 - KETTLEBOROUGH, C. F., Transient Laminar Free Convection Between Heated Vertical Plates Including Entrance Effects, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, 1972, pp. 883-896.
- 7 - NAKAMURA, H., ASAKO, Y., e NAITOU, T., Heat Transfer by Free Convection Between Two Parallel Flat Plates, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 5, 1982, pp. 95-106.
- 8 - NIECKELE, A. O., e AZEVEDO, L. F. A., Reverse Flow in One-Sided Heated Vertical Channels in Natural Convection, Apresentado no The Winter Annual Meeting of The American Society of Mechanical Engineers, Boston, 1987, pp. 71-77.

- 9 - WIRTZ, R. A., e STUTZMAN, R. J., Experiments on Free Convection Between Vertical Plates With Symmetric Heating, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 104, 1982, pp. 501-507.
- 10 - MIYATAKE, O., FUJJI, T., FUJJI M., e TANAKA, H., Natural Convective Heat Transfer Between Vertical Parallel Plates - One Plate With a Uniform Heat Flux and the Other Thermally Insulated, *Heat Transfer - Japanese Research*, Vol. 4, 1973, pp. 25-33.
- 11 - AIHARA, T., Effects of Inlect Boundary-Condition on Numerical Solutions of Free Convection Between Vertical Parallel Plates, *Rep. Inst. High Speed Mech., Tohoku Univ.*, Vol. 28, 1973, pp. 1-27.
- 12 - SPARROW, E. M. e AZEVEDO, L. F. A., Vertical-Channel Natural Convection Spanning Between the Fully-Developed Limit and the Single-Plate Boundary-Layer Limit, *Internation Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 28, 1985, pp. 1847-1857.
- 13 - BAR-COHEN, A., e ROHSENOW, W. M., Thermally Optimum Spacing of Vertical, Natural Convection Cooled, Parallel Plates, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 106, 1984, pp. 116-123.
- 14 - MODI, V., e TORRANCE, K. E., Experimental and Numerical Studies of Cold Inflow at the Exit of Buoyant Channel Flows, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 109, 1987, pp. 392-399.
- 15 - AZEVEDO, L. F. A., e SPARROW, E. M., Natural Convection in a Vertical Channel Vented to the Ambient Through an Aperture in the Channel Wall, *Internation Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.29, 1986, pp. 819-830.
- 16 - AZEVEDO, L. F. A., e SPARROW, E. M., Natural Convection in Open-Ended Inclined Channels, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 107, 1985, pp. 893-901.

- 17 - AUNG, W., Fully Developed Laminar Free Convection Between Vertical Plates Heated asymmetrically, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 28, 1983, pp. 1173-1180.
- 18 - BURCH, T., RHODES, T., e ACHARYA, S., Laminar Natural Convection Between Finitely Conducting Vertical Plates, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 28, pp. 1173-1180.
- 19 - CHURCHILL, S. W., e CHU, H. H. S., Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection From a Vertical Plate, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 18, 1975, pp. 1323-1329.
- 20 - GRAY, D. D., e GIORGINI, A., The Validity of Boussinesq Approximation for Liquids and Gases, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 19, 1976, pp. 545-551.
- 21 - LAGE, J. L., e MENDES, P. R. S., Laminar Forced Convection Between Parallel Flat Plates, Apresentado no I simpósio Brasileiro de Transferência de Calor e Massa, Campinas, São Paulo, 1987, pp. 22-35.
- 22 - TRIBESS, A., Solução Numérica de Problemas de Transferência de Calor em Escoamentos Confluentes em Geometrias Arbitrárias, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Dept. de Engenharia Mecânica, 1986.
- 23 - RAITHBY, G. D., e TORRANCE, K. E., Upstream Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow, Computers and Fluids, Vol. 2, 1974, pp. 191-206.
- 24 - RAITHBY, G. D., Prediction of Dispersion by Surface Discharge, Basin Investigation and Modeling Section, Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario, Canada, August, 1976.

- 25 - RAITHY, G. D., e SCHNEIDER, G. E., Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow : Treatment of the Velocity-Pressure coupling, Numerical Heat Transfer, Vol. 2, 1979, pp. 417-440.
- 26 - MALISKA, C. R., A Solution Method for Three-Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in nonorthogonal Coordinates, Ph. D. Thesis, Waterloo Univ., Ontario, Canada, 1981.
- 27 - MILIOLI, F. E., Solução Numérica de Problemas Bidimensionais de Convecção Natural em Cavidades Arbitrárias, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Dept. de Engenharia Mecânica, 1985.
- 28 - PEREZ, J. O., Simulação Numérica de Descargas Térmicas de Corpos D'Água Rasos de Geometria e Profundidade Variáveis, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Dept. de Engenharia Mecânica, 1987.
- 29 - POLINA, S., Previsão Numérica da Convecção Natural Laminar em Cavidades Hexagonais, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Dept. de Engenharia Mecânica, 1988.
- 30 - PATANKAR, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill Book Company, U.S.A., 1980.
- 31 - SCHNEIDER, G. E., e ZEDAN, M., A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems, Numerical Heat Transfer, Vol. 4, 1981, pp. 1-19.
- 32 - HOLMAN, J. P., Heat Transfer ( 5th edn. ), McGraw-Hill, New York, 1981.