

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

NOVAS FORMULAÇÕES INTEGRAIS PARA PROBLEMAS DA MECÂNICA

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE SANTA CATARINA PARA OBTENÇÃO DO GRAU  
DE DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

LUIZ HENRY MONKEN E SILVA

FLORIANÓPOLIS, MARÇO DE 1988


NOVAS FORMULAÇÕES INTEGRAIS PARA PROBLEMAS DA MECÂNICA

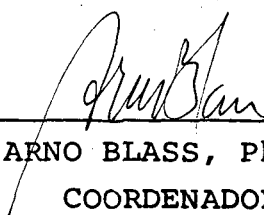
LUIZ HENRY MONKEN E SILVA

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

DOUTOR EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO SÓLIDOS, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.


  
CLOVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph.D.  
ORIENTADOR

  
ARNO BLASS, Ph.D.  
COORDENADOR

BANCA EXAMINADORA:

  
CLOVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph.D.

  
RAÚL ANTONINO FEIJÓO, D.Sc.

  
CARLOS ALBERTO DE C. SELKE, Ph.D.

  
WEBE JOÃO MANSUR, Ph.D.

  
SÉRGIO COLLE, D.Sc.

A  
Divair,  
Mariana e  
Mayra.

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Clovis Sperb de Barcellos, pelo incentivo, orientação, treinamento e assistência constantes, em incontáveis reuniões de trabalho, ao longo dos meus estudos de pós-graduação;

À Universidade Estadual de Maringá (PR), pelo suporte financeiro indispensável à realização desses estudos;

À Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de estudos concedida.

## ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	
1.1	- Principais Formulações e Metodologias Empregadas em Elementos de Contorno	1
1.2	- Investigações Anteriores	6
1.3	- Objetivos do Trabalho	13
2.	MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL: FORMULAÇÃO ABSTRATA	
2.1	- Introdução	15
2.2	- Notações e Preliminares	20
2.3	- Relação Generalizada de Reciprocidade	22
2.4	- Formulação Abstrata do MMFGL	24
2.5	- Partição de Domínio e Condições de Transmissão	26
3.	APROXIMAÇÃO DA FORMULAÇÃO ABSTRATA DO MMFGL	
3.1	- Introdução	31
3.2	- Formulação Variacional do MMFGL	34
3.3	- O Problema Discreto	37
3.4	- Aproximação Direta das Matrizes de Green	41
4.	APLICAÇÃO DO MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL EM HASTES DELGADAS	
4.1	- Introdução	47
4.2	- Notações e Preliminares	49
4.3	- Formulação do MMFGL para Hastes	53
4.4	- Aproximação Numérica	58
4.5	- Aplicação do MMFGL para Solução Numérica de Problemas de Hastes Delgadas	60
4.5.1	- Haste com rigidez constante	60

4.5.2 - Haste com rigidez variável .....	63
5. APLICAÇÃO DO MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL EM VIGAS	
5.1 - Introdução .....	68
5.2 - Preliminares .....	70
5.3 - Formulação do MMFGL para Vigas de Bernoulli .....	72
5.4 - Aproximação Numérica .....	80
5.5 - Aplicação do MMFGL para Solução Numérica de Vigas .....	84
5.5.1 - Solução de equação diferencial bi- -harmônica .....	84
5.5.2 - Viga com rigidez variável .....	86
6. APLICAÇÃO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL EM MEMBRANAS ELÁSTICAS	
6.1 - Introdução .....	92
6.2 - Preliminares .....	94
6.3 - Formulação do MMFGL para Membranas Elásticas .....	95
6.4 - Aproximação Numérica .....	102
6.4.1 - Formulação variacional das represen- tações integrais .....	102
6.4.2 - O problema discreto .....	104
6.4.3 - Aproximação direta das matrizes de Green .....	106
6.5 - Aplicação do MMFGL para Solução Numérica de Problemas de Membranas .....	111
6.5.1 - Membranas retangulares fixas .....	111
6.5.2 - Membrana circular fixa .....	117
6.5.3 - Membrana retangular com lados opo- tos fixos e livres .....	118
7. FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS MO- DELADAS PELA TEORIA DE MINDLIN	
7.1 - Introdução .....	122

7.2 - Notações e Preliminares .....	127
7.3 - Relação de Reciprocidade para Placas de Mindlin .....	134
7.4 - Determinação de Solução Fundamental para o Operador de Placas de Mindlin .....	137
7.5 - Formulação Integral do Problema de Placas de Mindlin .....	141
7.6 - Aproximação Numérica .....	146
7.6.1 - Formação do sistema linear .....	148
7.6.2 - Cálculo dos elementos das matrizes .....	150
7.6.3 - Solução do sistema linear .....	152
7.6.4 - Cálculo de variáveis em pontos internos .....	152
7.7 - Aplicações Numéricas .....	153
7.7.1 - Placas circulares .....	153
7.7.2 - Placas retangulares .....	157
 8. CONCLUSÕES E SUGESTÕES	
8.1 - Resumo e Conclusões .....	163
8.2 - Sugestões para outras Investigações .....	165
 APÊNDICES	
A - ELEMENTOS DE CONTORNO PARA HASTES .....	168
B - ELEMENTOS DE CONTORNO PARA VIGAS .....	171
C - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL AUXILIAR .....	176
D - TENSORES FUNDAMENTAIS PARA O OPERADOR DA TEORIA DE PLACAS DE MINDLIN .....	180
BIBLIOGRAFIA .....	184

## RESUMO

Neste trabalho, inicialmente, desenvolve-se uma metodologia, em contexto matemático abstrato, para estabelecer relações de reciprocidade generalizadas. A partir dessas relações, empregando função de Green que satisfaz condições de contorno do tipo de Cauchy, definida em subregiões, obtém-se uma formulação integral denominada Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL). A seguir, propõe-se uma técnica geral para obtenção direta (sem usar função de Green ou solução fundamental do problema) dos elementos das matrizes do problema discreto. Essa técnica amplia o campo de aplicação dos métodos de elementos de contorno. Aplica-se o MMFGL para solucionar problemas de hastes, vigas e membranas elásticas. Os resultados obtidos são precisos, mesmo quando se emprega malha esparsa para discretização do problema.

Prosseguindo, determina-se uma solução fundamental para o operador diferencial presente na teoria de placas de Mindlin. Estabelece-se, através da metodologia acima referida, uma relação de reciprocidade que origina uma formulação integral direta para placas modeladas pela teoria de Mindlin. A discretização do problema é realizada por colocação e a aproximação por elementos finitos. Os resultados obtidos, empregando-se essa formulação, são precisos e comprovam que não ocorre "locking" quando aplicada para analisar placas finas.



## ABSTRACT

In the present work a methodology is developed to establish generalized reciprocal relations. After, a Green's function defined locally is used to obtain a new integral formulation called Modified Local Green's Function Method. The Galerkin method together with finite element interpolation functions is applied to discretize the system of integral equations. A general technique is proposed to directly evaluate (without using the Green's function explicitly) the matrices which result from the discretization. Practical problems of rods, beams and membranes are solved by the proposed method. The results show good agreement with analytical solutions and other results obtained by finite element method and conventional boundary element techniques.

A boundary integral direct formulation for plates modelled by the Mindlin's Theory is also developed. For laying down the procedure, a fundamental solution of Mindlin's plate equations is obtained using Hörmander's method. Then this solution is used as usual for defining the boundary integral equations. The unknown variables and the geometry are approximated by isoparametric interpolation functions and the collocation method is used as a discretization procedure. Several numerical examples are presented. The results are accurate and show that, when the integral formulation is applied to solve thin plates problems, doesn't occur locking.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 1.1 Principais Formulações e Metodologias Empregadas em Elementos de Contorno

Em geral, os problemas da engenharia e da física são formulados matematicamente através de um sistema de equações diferenciais ou integrais.

Para solucionar problemas, as técnicas de contorno usam formulações integrais ou representações integrais de alguma de suas variáveis. Essas representações satisfazem **a priori** os sistemas de equações diferenciais que descrevem os problemas e contêm distribuições incógnitas, que são determinadas para que as variáveis presentes nas representações satisfaçam as condições de contorno. As referidas distribuições podem ser identificadas tanto com quantidades relacionadas aos problemas, quanto com quantidades auxiliares.

Quando as representações integrais contêm distribuições auxiliares, a formulação é denominada **indireta**; se as distribuições são relacionadas com variáveis do problema, a formulação é chamada **direta** (BREBBIA [1]).

A formulação indireta apareceu antes que a direta e foi muito empregada para solução de problemas potenciais (KELLOG [2]) e de mecânica dos fluidos (HESS [3]).

A formulação direta foi apresentada pela primeira vez por CRUZE & RIZZO [4], para problemas de elastostática.

As representações integrais usadas nas formulações indiretas são obtidas através dos potenciais de camadas simples e duplas (KELLOG [2]). As expressões desses potenciais envolvem, respectivamente, uma solução fundamental do operador diferencial do problema e a derivada dessa solução segundo a direção do vetor normal.

As formulações diretas são obtidas por meio de uma relação de reciprocidade entre o estado real, incógnito, e um estado auxiliar, escolhido para conduzir a uma representação integral que envolva quantidades diretamente relacionadas com as dos problemas que se deseja solucionar (CRUZE [4]).

As referidas representações, por serem definidas no domínio, não são apropriadas para as técnicas de contorno. Atuando nelas através de um procedimento de limite (BREBBIA [5] e [6]), obtém-se uma representação definida no contorno do problema. É nessas representações que se fundamenta o método de elementos de contorno.

Portanto, o estabelecimento das formulações integrais requer o conhecimento prévio de uma solução fundamental do operador diferencial do problema, no caso das indiretas, e, além disso, de uma relação de reciprocidade, no caso das diretas.

O método de elementos de contorno vem sendo aplicado com sucesso em muitos campos da engenharia e da física, conforme observa BREBBIA [7]. Mas é preciso reconhecer que os citados requisitos, por serem essenciais às formulações integrais, restringem suas aplicações. Alguns problemas da mecânica dos sólidos, tais como os que envolvem não-linearidade geométrica,

somente agora começam a ser abordados por elementos de contorno (ZHANG [8]).

À medida que as aplicações se tornam mais complexas, fica mais difícil o conhecimento de uma apropriada solução fundamental. Nesses casos, as formulações usam solução fundamental de partes do operador, que são conhecidas. Essa técnica leva ao aparecimento, na formulação, de integrais de domínio que envolvem incógnitas. O esquema torna-se iterativo e o domínio necessita ser discretizado. Essa metodologia é usada para resolver vários problemas não-lineares, conforme se observa, por exemplo, em ZHANG [8] e MUKHERJEE [9].

Até meados da década de 70, para transformar o problema contínuo de equações integrais em um sistema de equações algébricas, o contorno era discretizado por elementos retos (nos problemas bidimensionais) ou planos (nos tridimensionais). As variáveis eram aproximadas, supondo-se que fossem constantes em cada elemento. A colocação (FINLAYSON [10]) das equações discretizadas em pontos situados nos elementos completava a transformação.

A partir de 1973, com os trabalhos de HESS [11], CRUZE [12] e LCHAT [13], que empregam técnicas de elementos finitos, a implementação computacional dos métodos integrais se tornou mais adequada aos problemas práticos. O emprego de elementos curvos para discretização dos contornos, de funções de interpolação de ordem elevada para aproximação das variáveis e de integrações numéricas eficientes tornou os métodos integrais competitivos com outros métodos numéricos, como o de diferenças finitas e o de elementos finitos.

A transformação pode, também, ser realizada através do

método de Galerkin (BAKER [14]). A desvantagem da integração adicional que esse método requer é compensada pelo uso de fórmulas especiais de integração numérica, bem como por ele propiciar soluções que não dependem da localização dos pontos nodais e por ser aplicável a problemas cuja solução apresenta baixa ordem de regularidade (ARNOLD [15]).

Geralmente, as matrizes que resultam do processo de transformação são não-simétricas e cheias (BREBBIA [6]). Essas características conflitam com as das matrizes provenientes do método de elementos finitos, que são simétricas e esparsas. Uma das conseqüências disso é que a combinação desses métodos não é direta (ZIENKIEWICZ [16]). Primeiro, adota-se um procedimento para tornar simétrica a matriz de elementos de contorno (TULLBERG [17]); em seguida faz-se a sobreposição, de modo convencional.

Nos problemas práticos, em que ocorrem matrizes de médio e grande porte, o emprego da técnica de subestruturação, que em elementos de contorno é denominada de técnica de sub-regionalização, propicia redução no tempo de computação, tanto na etapa de construção como na de solução do sistema de equações. Além disso, a sub-regionalização melhora o condicionamento do sistema de equações, conforme observam CRUZE & WILSON [18].

A construção do sistema de equações, no método de elementos de contorno, envolve o cálculo de integrais singulares e não-singulares. A integração analítica somente é possível para os elementos e soluções fundamentais mais simples. Em geral, as integrações são realizadas numericamente.

As integrais não-singulares são geralmente calculadas através de regras de integração convencionais. O número de pontos de integração pode ser determinado conforme LACHAT [19], pa-

ra haver boa precisão e reduzido esforço computacional.

As integrais de contorno com singularidade logarítmica foram inicialmente calculadas por meio de regras de integração ponderadas pela função logarítmica, como as apresentadas em STROUD [20]. Mais recentemente, em elementos curvos, essas integrais puderam ser calculadas pelo procedimento desenvolvido por KATSIKADELIS [21].

Um procedimento mais geral, que pode ser aplicado para o cálculo de integrais com singularidade fraca (POGORZELSKI [22]) é o apresentado por TELLES [23].

As integrais com singularidade do tipo de Cauchy,  $(1/r)$ , são entendidas no sentido de valor principal. Com freqüência, elas são calculadas indiretamente, mediante imposição, na equação integral, do estado proveniente de movimentos de corpo rígido, como mostra BREBBIA [1].

Essas integrais e outras com singularidades mais fortes podem ser, também, entendidas no sentido de parte finita, como mostra KUTT [24], que apresenta regras gaussianas para calculá-las.

Pelo exposto, verifica-se que o método de elementos de contorno dispõe, atualmente, de procedimentos e metodologias que o tornam uma boa alternativa para a solução de problemas de valores de contorno.

Entretanto, o número de soluções fundamentais existentes necessita ser ampliado, a fim de que novos problemas possam ser, apropriadamente, abordados por técnicas de contorno. Como essa ampliação é complexa, uma metodologia de aproximação é útil a essas técnicas.

Para aumentar a eficiência do método de elementos de

contorno, no que diz respeito à construção do sistema de equações algébricas, é necessário o desenvolvimento de formulações que envolvam apenas integrais com singularidades fracas e que possuam reduzido contorno de integração.

## 1.2 Investigações Anteriores

Nesta seção, mencionam-se apenas os trabalhos mais diretamente relacionados com os procedimentos e metodologias citados que contribuíram para a presente pesquisa.

As primeiras aplicações de métodos integrais foram feitas na análise de problemas de escoamentos potenciais. Sob o nome de "surface source method", as formulações foram indiretas, sendo apresentadas por SMITH [25] e HESS [26]. Nesses trabalhos, o contorno do corpo foi discretizado por um grande número de elementos planos. A intensidade da distribuição de fontes foi suposta constante em cada elemento.

Na terminologia atual de elementos de contorno, Hess e Smith empregaram elementos constantes para discretizar e aproximar o problema.

A capacidade desses métodos para propiciarem resultados precisos verificou-se desde as primeiras aplicações.

A fundamentação potencial apresentada por KELLOG [2] fornece uma representação integral para uma função harmônica, baseada na terceira identidade de Green, análoga às representações usadas pelas formulações diretas.

JASWON [27] estudou teoricamente as equações integrais relacionadas com a teoria potencial. Duas questões importantes foram por ele abordadas: a) o estabelecimento de con-

dições de existência e unicidade de solução das equações de primeira espécie; b) o emprego da fórmula de Green para problemas mistos da teoria potencial.

Os estudos teóricos apresentados por Jaswon foram implementados numericamente por SYMM [28]. Os procedimentos adotados foram análogos aos de Smith e Hess, mas a utilização de uma representação integral proveniente da fórmula de Green originou a formulação direta de elementos de contorno.

Essas formulações integrais foram aplicadas para diversos problemas relativos a escoamento potencial, eletrostática, transferência de calor, propagação de ondas, etc.

Na implementação numérica, a tendência era trabalhar com as características dos problemas e da discretização, a fim de calcular analiticamente as integrais dos núcleos presentes nas formulações.

RIZZO [29], com base nessas formulações, propôs uma para problemas da elasticidade. Para isso, empregou a relação de reciprocidade de Betti. Como estado auxiliar, escolheu uma solução fundamental do operador de Navier-Cauchy para elasticidade. As variáveis que entraram na formulação foram os deslocamentos e as tensões resultantes no contorno.

Para a implementação numérica usou apenas elementos planos, mas as integrais com singularidade do tipo de Cauchy passaram a ser calculadas indiretamente, através da imposição de movimentos de corpo rígido.

As formulações diretas e indiretas a que se fez referência até agora constituíram a base para o desenvolvimento do método de elementos de contorno.

As técnicas de elementos finitos, à época dessas formulações integrais, já haviam alcançado elevado estágio de de-



envolvimento. Não tardou que elas influenciassem os métodos integrais.

HESS [11], em sua formulação, introduziu elementos curvos e aproximou as intensidades das fontes por meio de séries de potências da medida de arco ao longo do contorno. Essa metodologia tornou a formulação mais eficiente do que a que usava elementos constantes.

CRUZE [12], analisando problemas da elasticidade tridimensional através de formulação direta, discretizou o contorno através de elementos planos, mas, para as variáveis do problema, admitiu aproximação linear. Ao final, indicou o direcionamento a ser seguido para melhorar a eficiência dos métodos integrais: **a)** utilização de aproximações de ordem elevada; **b)** emprego de elementos curvos; **c)** desenvolvimento de algoritmos eficientes para realizar numericamente as integrações.

Todos esses procedimentos foram introduzidos por LACHAT [13] na análise de problemas da elastostática. Nesse trabalho, diversas metodologias foram sistematizadas e passaram a ser aplicadas a outros problemas. Após o trabalho de Lachat, tornou-se comum o emprego de elementos curvos isoparamétricos, a utilização de integração numérica com escolha adaptativa do número de pontos de integração e o cálculo de integrais no sentido de valor principal, mediante imposição de movimentos de corpo rígido. O emprego da técnica de subestruturação melhora o condicionamento das matrizes e aumenta a eficiência da etapa de solução do sistema. Nos contornos com vértices, o uso de nó duplo forneceu, de modo simples, as equações adicionais necessárias para tornar determinado o problema.

Com referência aos aspectos de formulação, Lachat em-

pregou o método de Hörmander [30] para determinar uma solução fundamental do operador de Navier-Cauchy para elasticidade. Convém dizer que esse método pode ser aplicado a todos os operadores elípticos com coeficientes constantes.

Embora os métodos integrais estivessem sendo aplicados com sucesso aos problemas potenciais e, em especial, aos de domínio infinito desde os trabalhos de Smith, Hess, Jaswon e Symm, foi a partir do trabalho de Lachat que passaram a competir com outros métodos para a solução de problemas de valores de contorno.

Assim, na análise tridimensional de tensões, o método de elementos de contorno encontrou um profícuo campo de aplicação, devido à redução da dimensão do problema e à precisão dos resultados.

Os problemas com domínios infinitos e semi-infinitos (por exemplo, os de interação solo-estrutura e fluido-estrutura), bem como aqueles com singularidades (como os de mecânica da fratura e os de concentração de tensões), são resolvidos de modo mais eficiente por elementos de contorno.

Muitos problemas de placas finas, por estas serem, na teoria clássica, modeladas por uma equação bi-harmônica, também foram investigados através do método de elementos de contorno. O enfoque bi-harmônico originou as primeiras formulações integrais, que eram indiretas e resolviam apenas alguns problemas de placas. Somente por volta de 1978 é que surgiu a formulação direta, que pode ser aplicada a problemas gerais de placas finas. Uma revisão dessas formulações encontra-se em BARCELLOS & SILVA [32].

Poucas aplicações foram realizadas para problemas de

placas modeladas por teoria que envolve força cortante. A primeira formulação, apresentada por WEEEN [33], referia-se a placas modeladas pela teoria de Reissner (REISSNER, [34]).

No Capítulo 7 do presente trabalho, o autor atualiza a revisão citada e comenta pormenorizadamente o trabalho de Wëeen.

Há poucas aplicações do método de elementos de contorno para problemas de cascas. As existentes são restritas às cascas abatidas, como as apresentadas por TOTTENHAM [35], TOSAKA & MIYAKE [36] e RONG [37]. Um dos problemas para o estabelecimento de formulações integrais para cascas é a inexistência de soluções fundamentais apropriadas.

Os aspectos matemáticos das formulações integrais receberam pouca atenção dos pesquisadores. Apesar disso, o método de elementos de contorno já está inserido na estrutura de análise matemática disponível para os métodos de elementos finitos e de diferenças finitas.

O emprego da técnica de resíduos ponderados ou da expressão do trabalho virtual de um sistema, como mostra BREBBIA [1] e [42], difundiu a formulação integral nos meios técnicos. Mas as fórmulas de Green também são adequadas para o desenvolvimento de formulações integrais. Para serem empregadas, é desejável que, ao lado da fundamentação matemática que possuem, tenham também apelo técnico.

FUSCO JR. [43] apresenta uma abordagem unificada para os métodos de elementos finitos e de contorno. Mostra que o método de elementos de contorno pode ser estabelecido através do método de Petrov-Galerkin, para problemas da elastostática linear com condições de contorno usuais.

HERRERA [44], [45] e [46] descreve uma estrutura matemática que unifica os métodos de elementos finitos e de contorno. Entretanto, a sua abordagem não se aplica às formulações através de equações integrais singulares.

É preciso continuar estudando os aspectos relacionados às metodologias destinadas ao estabelecimento de formulações integrais, pois nelas residem as características matemáticas e computacionais dos métodos integrais.

Do exposto até o momento, verifica-se que as formulações diretas foram mais aplicadas. A obtenção direta dos deslocamentos e tensões com a mesma ordem de precisão é uma propriedade importante dessas formulações, porém SYMM [28] observa que a formulação indireta é mais compacta que a direta. Em consequência, os algoritmos computacionais resultantes são mais simples. Outra vantagem das formulações indiretas é que podem apresentar somente singularidades fracas, o que facilita a sua implementação numérica.

Então, é desejável a investigação de formulações integrais que sejam compactas e que apresentem apenas singularidades fracas.

Nessa linha, BURNS [38], empregando uma função de Green apropriada e usando procedimento de reciprocidade, obteve uma formulação integral para o problema multidimensional de difusão de nêutrons. A representação integral da solução é análoga à das formulações indiretas; portanto, é compacta. As singularidades nelas presentes são todas fracas. No Capítulo 2 desta tese, comenta-se mais pormenorizadamente o trabalho de Burns.

Com base em Burns, HORAK [39] estabeleceu o método da função de Green local para problemas de condução de calor e es-

coamentos incompressíveis. A formulação de Horak possui as mesmas características que a de Burns. Mais pormenores sobre esse trabalho são também fornecidos no Capítulo 2.

Formulação análoga à de Burns e à de Horak é a de LAWRENCE [40], para problemas de difusão de nêutrons. A eficiência computacional é a característica marcante dessa formulação. Quanto aos métodos, os trabalhos de Burns, Horak e Lawrence apresentam apenas os formalismos. Esses métodos são específicos para os problemas que esses autores pretendiam solucionar. Além disso, as formulações foram restritas a domínios que possuem contornos que coincidem com linhas de coordenadas ortogonais. É desejável que elas possam ser aplicadas a contornos mais gerais. A dificuldade está na determinação da função de Green requerida por essas formulações.

A obtenção de função de Green aproximada constitui alternativa que deve ser investigada.

Alguns trabalhos realizados com essa finalidade são comentados no Capítulo 3 desta tese.

O procedimento de determinação direta (sem conhecimento prévio da função de Green) das matrizes provenientes dos métodos integrais também é desejável, conforme observa BURNS [38].

Esta mesma idéia é aplicada por NISHIMURA & KOBAYASHI [41], para problemas da elastostática tridimensional anisotrópica. Esses autores desenvolveram uma formulação indireta que não usa explicitamente uma solução fundamental, pois calcularam diretamente o valor do potencial, em vez de trabalhar com a solução fundamental.

O cálculo direto das matrizes dos métodos integrais substitui, de modo eficiente e prático, o emprego de solução funda-

mental numérica, na tentativa de ampliar o campo de aplicabilidade do método de elementos de contorno convencional, como observaram esses autores.

Então, é desejável o desenvolvimento de metodologias gerais destinadas ao cálculo direto das matrizes de elementos de contorno.

### 1.3 Objetivos do Trabalho

O presente trabalho tem por objetivos gerais: **a)** propor novas formulações integrais que sejam compactas, apresentem apenas singularidades fracas, propiciem resultados precisos e sejam aplicáveis a uma ampla classe de problemas; **b)** ampliar a aplicabilidade do método de elementos de contorno. A classe escolhida é a de problemas modelados por operadores diferenciais elípticos.

Seguindo essas diretrizes, primeiro se estabelece uma relação de reciprocidade generalizada matematicamente fundamentada, que identifica os espaços funcionais em que as quantidades e operadores dessa relação estão definidos.

Continuando, desenvolve-se uma representação integral abstrata que origina uma formulação integral denominada de Método Modificado da Função de Green Local, que possui as propriedades referidas inicialmente, ou seja, é compacta como uma formulação indireta e apresenta somente singularidades fracas. Além disso, propicia o cálculo das incógnitas de maneira direta (sem integração adicional).

A técnica de subestruturação também é inserida no formalismo abstrato, que fornece uma metodologia para a obtenção

das condições de transmissão nas interfaces das sub-regiões. Esses tópicos são expostos no Capítulo 2.

No Capítulo 3, apresentam-se as aproximações para as formulações abstratas e propõe-se uma metodologia geral para o cálculo direto das matrizes que resultam dos problemas discretos. Essa metodologia visa principalmente ampliar a aplicabilidade da formulação proposta.

Nos Capítulos 4 e 5, aplica-se o método modificado da função de Green local para problemas de hastes delgadas e vigas de Bernoulli. A simplicidade desses problemas não testa a potencialidade das metodologias desenvolvidas.

No Capítulo 6, o método proposto é aplicado para membranas elásticas não-homogêneas, sob carregamento e condições de contorno arbitrários. Os problemas resolvidos testam a formulação quanto a sua versatilidade para tratar de contornos curvos, vértices e descontinuidade nas condições de contorno. Além disso, comprovam a capacidade do método para propiciar resultados precisos.

Uma nova aplicação do método de elementos de contorno é apresentada no Capítulo 7. Para tanto, determina-se uma solução fundamental para placas modeladas pela teoria de Mindlin. Através dela, estabelece-se uma formulação integral direta, que usa como variáveis os valores nodais dos deslocamentos e das tensões resultantes, definidos em relação às coordenadas locais no contorno.

A implementação numérica proposta emprega técnicas recentes de integração numérica para cálculo das integrais com singularidades fracas.

No último capítulo, resume-se o trabalho e apresentam-se as conclusões e sugestões para investigações futuras.

## CAPÍTULO 2

### **MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN**

#### **LOCAL: FORMULAÇÃO ABSTRATA**

##### 2.1 Introdução

As relações que servem de base para as formulações de elementos de contorno usualmente são obtidas por meio de um procedimento de resíduo ponderado ou a partir de uma relação de reciprocidade [6], que envolve dois estados: o **real**, que é incógnito, e um **auxiliar**, que pode ser convenientemente escolhido. Frequentemente, em elementos de contorno, escolhe-se como estado auxiliar o proveniente da solução fundamental [47] do operador adjunto associado ao problema em análise, conforme se verifica em [48 - 52]. Substituindo essa solução na relação inicial obtém-se uma representação integral da solução em pontos do domínio de definição do problema. Em seguida essa representação é levada ao contorno através de um procedimento de limite, resultando uma representação da solução em pontos situados no contorno do domínio de interesse. Isso é essencial às metodologias de elementos de contorno. Entretanto, esse procedimento nem sempre aproveita eficientemente as estruturas matemática e computacional e as propriedades geométricas e de materiais contidas nos problemas.

BURNS, em [38], apresentou uma formulação integral pa-



ra o problema multidimensional de difusão de nêutrons. Para obtê-la, usou reciprocidade entre o estado real e o estado associado a uma função de Green, definida localmente, escolhida para tornar mais compactas as representações das soluções, incorporar condições de transmissão nas interfaces dos volumes locais e favorecer esquemas numéricos de aproximação e discretização. Assim, representa-se inicialmente o fluxo de nêutrons no domínio do volume local. Atuando convenientemente nessa representação e avaliando o resultado na superfície do volume local, obtém-se uma representação no contorno para o fluxo parcial de nêutrons. As duas representações integrais descritas formulam completamente problemas gerais de difusão de nêutrons. Para a discretização do problema, foi usado o método de resíduo ponderado [10]. Os problemas unidimensionais foram extensamente estudados para se reduzir o tratamento numérico e, em consequência, aumentar a eficiência do método. Os testes realizados indicaram, basicamente, que o método desenvolvido por Burns tem elevada capacidade para alcançar resultados precisos, sendo nesses casos significativamente (4 a 5 vezes) mais eficiente que os métodos de diferenças finitas e elementos finitos, conforme é possível observar em [38], páginas 68 e 72. A eficiência se mantém, mesmo que a complexidade do problema aumente. Todos os problemas testados envolveram sempre geometrias simples, para as quais se dispunha da função de Green apropriada. Para geometrias complexas, Burns introduz, apenas simbolicamente, uma maneira de aproximar de forma direta (sem necessidade de determinação prévia da função de Green) as matrizes resultantes da transformação dos operadores integrais em operadores discretos, as quais daqui por diante serão denominadas de matrizes de Green. Ao final, Burns recomenda

que sejam realizados estudos para o desenvolvimento de metodologias que visem à determinação direta, aproximada, das matrizes de Green, o que viria aumentar a aplicabilidade dos métodos da função de Green local.

HORAK, em [39], desenvolveu o método da função de Green local (MFGL) para solução de problemas de condução de calor e de escoamentos incompressíveis. Nos problemas de condução de calor, a abordagem adotada por Horak seguiu a de Burns, comentada anteriormente. Assim, atuando na relação de reciprocidade, definida localmente, Horak incorporou condições de contorno do tipo de Cauchy, por meio da inserção de um parâmetro arbitrário (porém pré-especificado) e obteve uma representação integral da temperatura para pontos do domínio local. Dessa representação obteve, em pontos do contorno, uma outra para uma quantidade que combina a temperatura e o fluxo de calor. As condições de transmissão nas interfaces dos domínios locais foram estabelecidas em função dessa nova variável definida apenas nos contornos dos domínios locais. A discretização do problema foi realizada empregando-se o método de resíduo ponderado. Mas então, como os operadores integrais eram dependentes de um parâmetro, as matrizes de Green locais e global também ficaram dele dependentes.

Horak estudou o comportamento do MFGL em comparação com os métodos de diferenças finitas e de elementos finitos para diversos valores do parâmetro. Basicamente mostrou que o MFGL para problemas de condução de calor tem capacidade para proporcionar resultados precisos. Entretanto, a eficiência computacional do método depende de uma escolha apropriada do parâmetro, que varia de problema para problema. A forte dependência paramétrica contida no formalismo de Horak é inconveniente, pois não se dis-

põe de pelo menos uma estratégia automática para fazer a escolha mais apropriada em cada problema. Com uma escolha adequada para os parâmetros, a eficiência do MFGL foi significativamente (1000 vezes) maior, em relação aos métodos de elementos finitos e de diferenças finitas, mesmo nos problemas bidimensionais, como se observa em HORAK [39], páginas 34 e 36. Todos esses testes foram realizados com problemas para as quais existiam as funções de Green apropriadas.

Nos problemas de escoamentos incompressíveis, Horak usou inicialmente a técnica de integração transversa, que transforma o operador diferencial parcial do problema em um operador diferencial ordinário. Isso, por um lado, simplifica a determinação do tensor de Green associado ao operador adjunto, mas, por outro, particulariza a aplicação do método a domínios que possuam contornos coincidentes com linhas de coordenadas. A eficiência do método foi avaliada comparativamente com a do método de diferenças finitas inserido no contexto de um programa computacional (SOLA), [39], página 65, verificando-se que aquele método é significativamente (10000 vezes) mais eficiente do que este, conforme se observa em HORAK [39], página 72.

LAWRENCE, em [40], apresenta o método da função de Green local para o problema de difusão de nêutrons. Inicialmente emprega, em domínios locais, a técnica de integração transversa para transformar o operador diferencial parcial em um ordinário. Isso facilita a obtenção da função de Green local para as equações transversalmente integradas. Entretanto, esse método só pode ser aplicado a domínios que permitam uma partição em subdomínios retangulares.

Os trabalhos de BURNS [38], HORAK [39] e LAWRENCE [40]

apresentam os aspectos formais de métodos que usam funções de Green definidas localmente. Nenhuma estrutura matemática foi colocada nessas formulações.

Neste capítulo, após se apresentarem alguns conceitos relacionados a espaços de Hilbert, mostra-se como proceder para conhecer o operador e o operador adjunto formal associados a determinada forma bilinear. Esta base matemática é importante para a formulação integral, visto que a insere no mesmo contexto das outras formulações. Além disso, fisicamente, a forma bilinear citada é justamente a expressão do trabalho virtual do sistema. Em seguida, obtêm-se relações generalizadas entre uma forma bilinear, por um lado, e, por outro, o operador a ela associado e os operadores de contorno, que incorporam as condições de contorno do problema. As mesmas relações são obtidas também para os operadores adjuntos. Com uma escolha adequada de espaços, obtêm-se uma relação de reciprocidade generalizada, ponto referencial para a formulação de técnicas de contorno. Em seguida, apresenta-se a formulação abstrata do método modificado da função de Green local, doravante citado como MMFGL. As modificações propostas dizem respeito ao sistema de equações integrais empregadas na solução do problema, ou seja, elege-se um conjunto de incógnitas distintas das usadas por BURNS [38] ou HORAK [39]. Essas modificações facilitam o tratamento das condições de contorno que aparecem em problemas de mecânica dos sólidos: deslocamentos e forças generalizadas. Ademais, o novo sistema de equações torna a formulação independente dos parâmetros arbitrários nela inseridos. Na parte final do capítulo, apresenta-se a formulação efetuando uma partição de domínio, que permite a definição regionalizada do problema. As condições de transmissão

nas interfaces das regiões são estabelecidas sistematicamente por meio de procedimento variacional compatível com o MMFGL.

## 2.2 Notações e Preliminares

Nos desenvolvimentos que seguem,  $\Omega$  denotará um domínio aberto, limitado, no espaço  $\mathbb{R}^n$ , com contorno  $\partial\Omega$  suficientemente regular, ou seja, que admite existência de vetor normal em quase todos os pontos (exceto possivelmente em conjuntos de medida nula).

As formulações de elementos de contorno, [6], utilizam funções definidas em espaços de Hilbert com valores no contorno. Em seguida, estes valores são usados para determinar os do domínio. Logo, os espaços de funções apropriados devem permitir extensões ao contorno, isto é, devem possuir a propriedade do traço.

Diz-se que um espaço de Hilbert,  $H$ , tem a propriedade do traço se as seguintes condições, conforme [54], forem satisfeitas:

- a)  $H$  estiver contido em um espaço de Hilbert,  $U$ , sendo a topologia de  $U$  mais fraca que a de  $H$ ;
- b)  $H$  for denso em  $U$ , e  $U$  for um espaço pivotal, ou seja,

$$H \subset U = U' \subset H' \quad (2.1)$$

onde  $U'$  e  $H'$  são os espaços duais topológicos de  $U$  e  $H$ , isto é, respectivamente os espaços dos funcionais lineares contínuas sobre  $U$  e  $H$ ;

- c) existir um operador linear  $\gamma$  que mapeie  $H$  sobre outro espaço de Hilbert,  $\partial H$ , tal que o núcleo de  $\gamma$ ,  $H_0$ , seja denso em  $U$ , isto é,

$$\text{Ker}\gamma = H_0 \subset H ; \quad H_0 \subset U = U' \subset H' \quad (2.2)$$

sendo as inclusões densas e contínuas.

O espaço  $\partial H$  corresponde a um espaço de valores de contorno, e o operador  $\gamma$  estende os elementos de  $H$ , definidos no interior de  $\Omega$ , sobre  $\partial H$ . O operador  $\gamma$  é denominado operador - traço. Em um espaço  $H^m$ , esse operador é definido por

$$\gamma_j \equiv \frac{\partial^j u}{\partial n^j} \Big|_{\partial \Omega}, \quad 0 \leq j \leq m-1, \quad (2.3)$$

$$\gamma \equiv (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}) \quad (2.4)$$

e esses componentes são as derivadas normais em  $\partial \Omega$  de ordem menor que  $m$ .

Mostra-se a seguir como obter o operador associado a uma forma bilinear. Para tanto, sejam  $H$  e  $F$  dois espaços de Hilbert reais que possuem a propriedade do traço, isto é:

$$H \subset U = U' \subset H' \quad ; \quad F \subset V = V' \subset F', \quad (2.5)$$

$$\gamma: H \rightarrow \partial H \quad ; \quad \gamma^*: F \rightarrow \partial F, \quad (2.6)$$

$$\text{Ker} \gamma = H_0 \quad ; \quad \text{Ker} \gamma^* = F_0, \quad (2.7)$$

$$H_0 \subset U = U' \subset H'_0 \quad ; \quad F_0 \subset V = V' \subset F'_0. \quad (2.8)$$

Considere-se uma forma bilinear contínua,  $B$ , definida em  $H \times F$ :

$$B: H \times F \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Os valores de  $B$  em  $\mathbb{R}$  são denotados por  $B(u,v)$ ,  $u \in H$ ,  $v \in F$ .

Observa-se de 2.6 que as funções de interesse não são toda e qualquer função pertencente a  $\partial H$  e  $\partial F$  mas apenas aquelas que pertençam as imagens de  $H$  e  $F$  sob os operadores  $\gamma$  e  $\gamma^*$ , respectivamente. Assim, pode-se considerar também uma forma bilinear contínua de contorno,  $b$ , definida em  $H \times F$ , no sentido do traço:

$$b: H \times F \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.10)$$

sendo seus valores em  $\mathbb{R}$  denotados por  $b(\gamma u, \gamma^* v)$ .

Partindo da forma bilinear  $B$ , fixe-se um elemento  $u \in H$ ,

e seja  $v \in F_0$ . Logo,  $B(u, \cdot)$  descreve um funcional linear contínuo em  $F_0$ , que depende de  $u \in H$ , ou seja,  $B(u, \cdot) = l_u(\cdot)$ . Essa dependência é linear, contínua, e pode ser descrita em termos de um operador linear:  $A_u \equiv l_u$ .

Portanto, existe uma transformação  $A: H \rightarrow F'_0$  tal que  $A_u = Au$ , resultando

$$B(u, v) = \langle Au, v \rangle_F, \quad v \in F_0, \quad (2.11)$$

onde  $A$  é o operador associado a  $B$ , e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$  denota o par dual em  $F' \times F$ . Das definições acima, tem-se que

$$A \in \mathcal{L}[H, F'_0], \quad (2.12)$$

sendo  $\mathcal{L}[H, F'_0]$  o espaço dos operadores lineares contínuos de  $H$  em  $F'_0$ .

Analogamente, fixando-se  $v \in F$  e percorrendo  $u \in H_0$ , tem-se que  $B(\cdot, v)$  define um operador linear contínuo  $A^*$ , através de

$$B(u, v) = \langle A^*v, u \rangle_H, \quad u \in H_0, \quad (2.13)$$

onde  $A^*$  é o operador adjunto formal associado a  $B$ , e

$$A^* \in \mathcal{L}[F, H'_0] \quad (2.14)$$

### 2.3 Relação Generalizada de Reciprocidade

As equações (2.11) e (2.13) são válidas para  $v \in F_0$  e  $u \in H_0$ , não aparecendo nelas valores no contorno. Para incorporar, naquelas associações, valores no contorno, toma-se, então,  $u \in H$  e  $v \in F$ . O procedimento se torna mais geral com a introdução de formas bilineares de contorno, como as definidas em (2.10), que estendem os tipos de condições de contorno que podem ser analisadas.

Considerem-se os subespaços

$$H_A = \{u \in H ; Au \in V\} , \quad (2.15)$$

$$F_{A^*} = \{v \in F ; A^*v \in U\} . \quad (2.16)$$

Nessas condições é possível mostrar, usando as técnicas desenvolvidas em [53] e os resultados alcançados em [54], que existem operadores  $\delta \in \mathcal{L}[H_A, \partial F']$  e  $\delta^* \in \mathcal{L}[F_{A^*}, \partial H']$ , unívocos, tais que sejam válidas as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} B(u,v) + b(\gamma u, \gamma^* v) &= (v, Au)_V + \langle \delta u, \gamma^* v \rangle_{\partial F} , \\ u \in H_A , \quad v \in F , \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} B(u,v) + b(\gamma u, \gamma^* v) &= (A^*v, u)_U + \langle \delta^* v, \gamma u \rangle_{\partial H} , \\ u \in H , \quad v \in F_{A^*} , \end{aligned} \quad (2.18)$$

Em (2.17) e (2.18),  $(\dots)_U$  e  $(\dots)_V$  denotam produto interno em  $U$  e  $V$ , respectivamente. Os operadores  $\gamma \in \mathcal{L}[H, \partial H]$  e  $\gamma^* \in \mathcal{L}[F, \partial F]$  são os operadores de Dirichlet associados a  $A$  e  $A^*$ , respectivamente. Por sua vez, os operadores  $\delta \in \mathcal{L}[H_A, \partial F']$  e  $\delta^* \in \mathcal{L}[F_{A^*}, \partial H']$  são, agora, operadores generalizados de Neumann associados a  $A$  e  $A^*$ , respectivamente.

Escolhendo  $u \in H_A$  e  $v \in F_{A^*}$  em (2.17) e (2.18), obtém-se a fórmula de Green abstrata para o operador:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{L}[H, F'_0] \cap \mathcal{L}[H_A, V]: \\ (A^*v, u)_U &= (v, Au)_V + \langle \delta u, \gamma^* v \rangle_{\partial F} - \\ &\quad - \langle \delta^* v, \gamma u \rangle_{\partial H} , \quad u \in H_A , \quad v \in F_{A^*} , \end{aligned} \quad (2.19)$$

que expressa uma relação de reciprocidade entre os estados  $\{u, \gamma u, \delta u\} \in H_A \times \partial H \times \partial F'$  e  $\{v, \gamma^* v, \delta^* v\} \in F_{A^*} \times \partial F \times \partial H'$

associados aos operadores  $A$  e  $A^*$ , respectivamente.



## 2.4 Formulação Abstrata do MMFGL

As formulações diretas de elementos de contorno, como pode ser visto em [6], [12], [52] e [55], empregam relações de reciprocidade, como (2.19), a fim de fornecer representações da solução da equação diferencial correspondente ao operador  $A$  e às condições de contorno definidas pelos operadores  $\gamma$  e  $\delta$ . Para isso, escolhe-se freqüentemente  $\mathbf{v}$  como sendo uma solução fundamental do operador  $A^*$  [6]. Entretanto, outras escolhas do estado auxiliar  $\mathbf{v}$  podem ser feitas, visando compactar as representações de soluções obtidas a partir de (2.19) e melhorar as características de regularidade das quantidades que envolvem o estado auxiliar na equação de reciprocidade. A compactação das representações conduz a esquemas numéricos mais eficientes e simples de serem implementados. Aumentando a regularidade das quantidades que envolvem  $\mathbf{v}$  em (2.19), os pares duais que lá aparecem podem ser computados sem tratamento especial. Logo, a eficiência computacional da metodologia estaria sendo melhorada.

A escolha de  $\mathbf{v}$  como uma função de Green apropriada dá origem a uma formulação do tipo das usadas nos métodos da função de Green local (MFGL), que, com as modificações introduzidas, dão origem ao MMFGL.

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , com contorno  $\partial\Omega$ , conforme descrito na Seção 2.2. Na equação (2.19), considere-se o estado  $\{\mathbf{v}, \gamma^*\mathbf{v}, \delta^*\mathbf{v}\}$  obtido da solução do seguinte problema:

$$A^*\mathbf{v} = \delta(P, Q) \quad , \quad P, Q \in \Omega \quad , \quad (2.20)$$

$$\delta^*\mathbf{v} = 0 \quad , \quad \text{em } \partial\Omega \quad , \quad (2.21)$$

onde

$A^*$  indica o operador adjunto formal associado à forma bilinear  $B(u,v)$ , definida em (2.9);

$\delta^*$  indica o operador de Neumann generalizado, associado a  $A^*$ ;

$\delta(P,Q)$  indica a distribuição de Dirac no ponto  $Q$ .

A solução do problema apresentado em (2.20) e (2.21) depende do ponto  $Q$ , e isso é denotado fazendo-se  $v=v(P,Q)$ .

Substituindo-se (2.20) e (2.21) em (2.19), resulta

$$u(Q) = (v(P,Q), Au)_V + \langle \delta u, \gamma^* v(p,Q) \rangle_{\partial F} ,$$

$$P, Q \in \Omega, u \in H_A, v \in F_{A^*} \text{ e } p \in \partial\Omega. \quad (2.22)$$

A equação (2.22), é usada para se calcular os valores de  $u$  no interior do domínio  $\Omega$ .

Agora, escolhendo-se o estado  $\{v, \gamma^* v, \delta^* v\}$ , como solução do problema

$$A^* v = 0, \quad P \in \Omega \quad (2.23)$$

$$\delta^* v = \delta(p,q), \quad p, q \in \partial\Omega \quad (2.24)$$

e substituindo-se o referido estado na relação de reciprocidade (2.19), obtém-se

$$\gamma u(q) = (v(P,q), Au)_V + \langle \delta u, \gamma^* v(p,q) \rangle_{\partial F} ,$$

$$q \in \partial\Omega, u \in H_A, v \in F_{A^*}, P \in \Omega \quad (2.25)$$

onde  $\gamma$  é o operador-traço associado ao operador  $A$  do problema, como foi exemplificado em (2.3) e (2.4). A equação (2.25) fornece valores de  $\gamma u$  no contorno,  $\partial\Omega$ , do domínio  $\Omega$ .

As representações (2.22) e (2.25) formam um sistema de equações integrais que podem ser usadas na solução de equações diferenciais parciais que envolvam o operador  $A$  e os operadores de contorno  $\gamma$  e  $\delta$ .

## 2.5 Partição de Domínio e Condições de Transmissão

Aspectos matemáticos, físicos e computacionais relativos à regularidade da solução e dos dados e à estrutura das matrizes resultantes da discretização do contínuo podem determinar a necessidade de uma partição do domínio  $\Omega$  em subdomínios,  $\Omega^k$ , que doravante serão chamados de elementos. Assim, considere-se  $\Omega$  subdividido em  $E$  elementos, tais que

$$\bigcup_{k=1}^E \bar{\Omega}^k = \bar{\Omega} \text{ e } \Omega^k \cap \Omega^m = \emptyset, \text{ para } k \neq m.$$

Sejam, ainda,  $A^k$  e  $u^k$  restrições do operador  $A$  e de  $u$  ao elemento  $\Omega^k$ , respectivamente. Os espaços  $H$ ,  $F$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $\partial H$  e  $\partial F$ , definidos conforme (2.5 - 2.8), ficam sendo

$$H = H(\Omega^1) \times H(\Omega^2) \times \dots \times H(\Omega^E), \quad (2.26)$$

$$F = F(\Omega^1) \times F(\Omega^2) \times \dots \times F(\Omega^E), \quad (2.27)$$

$$U = U(\Omega^1) \times U(\Omega^2) \times \dots \times U(\Omega^E), \quad (2.28)$$

$$V = V(\Omega^1) \times V(\Omega^2) \times \dots \times V(\Omega^E), \quad (2.29)$$

$$\partial H = \partial H(\Gamma^1) \times \partial H(\Gamma^2) \times \dots \times \partial H(\Gamma^E), \quad (2.30)$$

$$\partial F = \partial F(\Gamma^1) \times \partial F(\Gamma^2) \times \dots \times \partial F(\Gamma^E), \quad (2.31)$$

onde  $\Gamma^k$  representa o contorno do  $k$ -ésimo elemento. A interface dos elementos  $k$  e  $m$  ( $\partial\Omega^{k,m}$ ) é um subconjunto aberto de  $\Gamma^k$  e  $\Gamma^m$ .

Com essas escolhas, é possível definir em  $H \times F$  a seguinte forma bilinear contínua:

$$B(u,v) + b(\gamma u, \gamma^* v) = \sum_{k=1}^E \{B^k(u^k, v^k) + b^k(\gamma u^k, \gamma^* v^k)\} \quad (2.32)$$

sendo  $B^k(\dots)$  e  $b^k(\dots)$  restrições de  $B(\dots)$  e  $b(\dots)$  a  $\Omega^k$ , respectivamente. Fazendo-se no momento,  $b(\gamma u, \gamma^* v) = 0$  em (2.32) e empregando-se o mesmo desenvolvimento usado para obter as expressões (2.11) e (2.13), chega-se aos operadores  $A$  e  $A^*$  associados a  $B$ , definidos por

$$Au = (A^1 u^1, A^2 u^2, A^3 u^3, \dots, A^E u^E), \quad (2.33)$$

em  $H_A$ ,

$$A^*v = (A^{*1} v^1, A^{*2} v^2, \dots, A^{*E} v^E), \quad (2.34)$$

em  $F_A$ , onde

$$H_A = H_{A^1}(\Omega^1) \times H_{A^2}(\Omega^2) \times \dots \times H_{A^E}(\Omega^E) \quad (2.35)$$

e

$$F_{A^*} = F_{A^{*1}}(\Omega^1) \times F_{A^{*2}}(\Omega^2) \times \dots \times F_{A^{*E}}(\Omega^E). \quad (2.36)$$

Com as partições descritas anteriormente, as representações (2.22) e (2.25) passam a ter caráter local. A sobreposição dos elementos é realizada com o auxílio das condições de transmissão nas interfaces dos elementos. O estabelecimento dessas condições de modo consistente com a formulação do problema nem sempre é uma questão fácil.

A formulação variacional equivalente ao problema diferencial ( $Au = f$ ), propicia uma forma de obter tais condições. Para tanto, sem perda de generalidade, considere-se  $\Omega$  subdividido em apenas duas sub-regiões:  $\Omega = \Omega^1 \cup S \cup \Omega^2$  conforme a figura 2.1.

A partição de  $\Omega$ , deve ser realizada para propiciar sub-regiões que possuam propriedades suficientemente regulares e auxiliem na solução aproximada do problema.

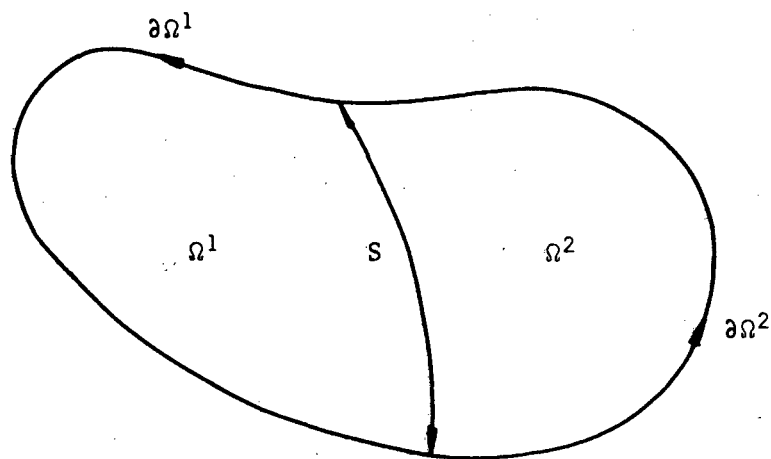


FIGURA 2.1 Exemplo de domínio subdividido em duas sub-regiões  $\Omega^1$  e  $\Omega^2$  por uma variedade  $S$ .

Introduzem-se, ainda, os operadores

$$\gamma = (\gamma^1, -\gamma^2), \quad (2.37)$$

$$\delta = (\delta^1, \delta^2), \quad (2.38)$$

$$\gamma^* = (\gamma^{*1}, -\gamma^{*2}), \quad (2.39)$$

$$\delta^* = (\delta^{*1}, \delta^{*2}), \quad (2.40)$$

O problema de interface é associado aos espaços  $W$  e  $T$ , definidos por

$$W = \{u = (u^1, u^2) \in H; \gamma^1 u^1 = \gamma^2 u^2, \text{ em } S\}, \quad (2.41)$$

$$T = \{v = (v^1, v^2) \in F; \gamma^{*1} v^1 = \gamma^{*2} v^2 \text{ em } S\}. \quad (2.42)$$

Então, o problema na forma variacional passa a ser: encontrar  $u \in W$  que satisfaça

$$B(u, v) + b(\gamma u, \gamma^* v) = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega^k} f^k v^k d\Omega^k \quad \forall v = (v^1, v^2) \in T. \quad (2.43)$$

Em (2.43),  $f^k$  é a restrição de  $f$  ao elemento  $\Omega^k$ . Como a equação (2.43) é válida  $\forall v \in T$ , é válida também para  $v \in T$ , tal que  $v^1|_{\partial\Omega^1} = 0$  e  $v^2 = 0$ . Logo, em vista de (2.11), a equação (2.43) for-

nece

$$A^1 u^1 = f^1 \in v(\Omega^1) . \quad (2.44)$$

Analogamente, se for escolhido  $v^1=0$  e  $v^2|_{\partial\Omega^2}=0$ , obtém-se

$$A^2 u^2 = f^2 \in v(\Omega^2) . \quad (2.45)$$

Das equações (2.44) e (2.45), conclui-se que  $u^1 \in H_{A^1}$  e

$u^2 \in H_{A^2}$ . Assim, a equação (2.17) é válida, tornando-se possível escrever

$$\begin{aligned} B(u,v) + b(\gamma u, \gamma^* v) &= \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega^k} f^k v^k d\Omega^k = \\ &= \sum_{k=1}^2 (v^k, Au^k)_{V(\Omega^k)} + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \langle \delta^k u^k, \gamma^{*k} v^k \rangle_{\partial F(\partial\Omega^k)} , \\ \forall v \in T. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Mas, em vista de (2.44) e (2.45), a (2.46) fornece

$$\sum_{k=1}^2 \langle \delta^k u^k, \gamma^{*k} u^k \rangle_{\partial F(\partial\Omega^k)} = 0 , \forall v \in T . \quad (2.47)$$

Substituindo-se (2.38) e (2.39) em (2.47), resulta

$$\langle \delta^1 u^1, \gamma^{*1} v^1 \rangle_{\partial F(\partial\Omega^1)} - \langle \delta^2 u^2, \gamma^{*2} v^2 \rangle_{\partial F(\partial\Omega^2)} = 0 , \\ \forall v \in T . \quad (2.48)$$

A equação (2.48) pode ser assim reescrita

$$\begin{aligned} &\langle \delta^1 u^1, \gamma^{*1} v^1 \rangle_{\partial F(\partial\Omega^1 - S)} - \langle \delta^2 u^2, \gamma^{*2} v^2 \rangle_{\partial F(\partial\Omega^2 - S)} + \\ &+ \langle \delta^1 u^1, \gamma^{*1} v^1 \rangle_{\partial F(S)} - \langle \delta^2 u^2, \gamma^{*2} v^2 \rangle_{\partial F(S)} = 0 , \\ &\forall v \in T . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Escolhendo-se  $v \in F_0$  e substituindo na equação (2.49), obtém-se

$$\langle \delta^1 u^1, \gamma^{*1} v^1 \rangle_{\partial F(S)} - \langle \delta^2 u^2, \gamma^{*2} v^2 \rangle_{\partial F(S)} = 0,$$

$$\forall v \in T, \quad (2.50)$$

ou seja,

$$\delta^1 u^1 = \delta^2 u^2, \quad (2.51)$$

que completa as condições de transmissão na interface entre elementos.

O emprego das relações e formulações apresentadas neste capítulo, requer apenas a identificação adequada dos espaços funcionais e da definição apropriada das formas bilineares, referidas no desenvolvimento. Estas, são relacionadas com o trabalho virtual dos sistemas físicos que estão sendo modelados matematicamente.

## CAPÍTULO 3

### APROXIMAÇÃO DA FORMULAÇÃO

#### ABSTRATA DO MMFGL

#### 3.1 Introdução

As técnicas de elementos de contorno empregam, com frequência, o método de colocação para realizar a discretização dos operadores presentes nas formulações integrais. O método de Galerkin é pouco usado nessas formulações, devido à integração adicional necessária. Isso, eventualmente, reduz a eficiência computacional dessas técnicas. Entretanto, JENG & WEXLER, [56], concluem, através de aplicações, que o método de colocação é menos preciso que o obtido por uma técnica variacional. Além disso, argumentam que o método de colocação ocasionalmente pode levar a resultados errôneos por não haver garantias gerais de sua convergência.

WENDLAND & ARNOLD, em [57], mostram teoricamente que o método de Galerkin é superior ao de colocação, se a mesma espécie de funções de expansão for usada. Mais especificamente, para se obter a mesma ordem de aproximação é necessário usar splines de ordens diferentes,  $m_G$  para Galerkin e  $m_C$  para colocação, cuja relação é

$$m_C = 2m_G + 1 \quad (3.1)$$

Por outro lado, esses autores concluíram que, usando integração



gaussiana convencional, o cálculo das matrizes de influências para o método de Galerkin requer mais tempo que o cálculo para o método de colocação, quando os erros forem de mesma ordem de precisão. Mas, empregando fórmulas especiais de integração, concluíram que, para uma mesma ordem de precisão, os dois métodos possuem esforços computacionais semelhantes. É oportuno dizer, ainda, que o método de colocação, por empregar funções de expansão de ordens superiores às usadas no de Galerkin (ver equação (3.1)), requer maior regularidade dos dados e do contorno. Do ponto de vista computacional, a integração dupla que aparece no método de Galerkin regulariza os operadores integrais envolvidos, tornando mais fácil integrar os núcleos singulares, [56] e [58]. Além disso, para uma dada precisão, o sistema de equações lineares resultante da discretização pelo método de Galerkin possui menor número de equações que o sistema que resulta do método de colocação. Por último, a garantia de convergência da formulação variacional é fato que não pode ser desprezado quando da escolha do método para a solução de um problema relevante.

A formulação do MMFGL emprega uma função de Green apropriada, que em geral não é disponível analiticamente. Nesse caso, na abordagem convencional de elementos de contorno, há a necessidade de primeiramente se obter uma aproximação para a função de Green, para depois se calcular as matrizes de Green. Neste trabalho, com exceção das matrizes dos problemas unidimensionais, os elementos das matrizes de Green do MMFGL serão calculados diretamente. Tal procedimento fornece os elementos das matrizes sem ser preciso o prévio conhecimento da função de Green. Isso apresenta a vantagem de contornar o problema de aproximação da função de Green, cujas abordagens não são gerais,

conforme se verifica na bibliografia.

KANTOROVICH & KRYLOV, em [59], apresentam para o operador laplaciano uma aproximação da função de Green que satisfaz as condições de Dirichlet. Escrevem a função de Green como soma da solução fundamental do operador laplaciano com uma função harmônica no domínio. Essa função é determinada através de interpolação harmônica, cujos coeficientes são determinados para que a função de Green satisfaça as condições de contorno. Observa-se que esse procedimento requer solução fundamental do operador e é facilitado neste caso, pela existência de uma base completa para funções harmônicas.

CIARLET, em [60], desenvolve abordagem variacional para aproximar funções de Green relativas a operadores diferenciais de segunda ordem, elípticos, simétricos e positivo definidos em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . A função de Green aproximada é escrita em termos de uma expansão bilinear, finita, que usa autovalores e autovetores aproximados a partir do quociente de Rayleigh para o operador do problema. Nesse procedimento, surge um outro problema, que é o de aproximação de autovalores e autovetores. A dificuldade da abordagem está na construção dos espaços de funções-bases (isto é, que satisfaçam as condições de contorno do problema).

CIARLET & VARGA, em [61], desenvolvem a mesma metodologia para operadores unidimensionais a coeficientes constantes, e FORSTER, em [62], para coeficientes variáveis.

COLLE, em [63], apresenta um método para construção da função de Green de operadores elípticos de segunda ordem, simétricos e positivo definidos, unidimensionais. Para tanto, elege um funcional cujas condições de estacionaridade fornecem os requisitos de continuidade e regularidade da função de Green. Em

seguida, usa o método de Ritz, obtendo os coeficientes da aproximação. A mesma metodologia é estendida para operadores elípticos de segunda ordem, agora definidos no  $\mathbb{R}^n$ , em [64]. Merece destaque o fato de o funcional incorporar as condições de contorno do problema, facilitando a construção dos espaços de funções-bases.

Na seção seguinte, apresenta-se uma formulação variacional para o MMFGL. A escolha foi feita com base nas características da aproximação que o método variacional fornece, conforme foi exposto anteriormente. Além disso, o método variacional aproveita a estrutura do MMFGL e propicia um procedimento para a obtenção das matrizes de Green.

Nos problemas unidimensionais, em que se conhece analiticamente a função de Green e o contorno se reduz a pontos, a aproximação foi realizada através do método de colocação. Continuando, introduz-se o problema discreto e sua aproximação por elementos finitos. Finalmente, apresenta-se um procedimento para obtenção das matrizes de Green de modo direto, isto é, sem necessidade da determinação prévia da função de Green do problema adjunto. Usando-se elementos finitos para a construção dos espaços de funções-bases, a metodologia se torna mais geral e eficiente que as que usam aproximação para a função de Green.

### 3.2 Formulação Variacional do MMFGL

As mesmas nomenclaturas e definições dadas no Capítulo 2 são adotadas no desenvolvimento que segue.

As representações (2.22) e (2.25) não são apropriadas à abordagem numérica, devido à presença do operador de Neumann

generalizado, que, para ser calculado, envolve derivadas de  $u$  no sentido do traço. Para modificá-las, introduz-se uma nova quantidade  $F$ , definida por

$$F = \delta u \in \partial F' . \quad (3.2)$$

Com (3.2), as representações (2.22) e (2.25) são reescritas da seguinte forma:

$$u(Q) = (G(P,Q), Au)_V + \langle F, \gamma^* G(p,Q) \rangle_{\partial F} ,$$

$$P, Q \in \Omega , \quad p \in \partial\Omega ; \quad u \in H_A , \quad G \in F_{A^*} , \quad (3.3)$$

$$\gamma u(q) = (G(P,q), Au)_V + \langle F, \gamma^* G(p,q) \rangle_{\partial F} ,$$

$$P \in \Omega , \quad p, q \in \partial\Omega , \quad u \in H_A , \quad G \in F_{A^*} , \quad (3.4)$$

onde foi trocado  $v(P,Q)$  por  $G(P,Q)$ , que denota a função de Green determinada a partir do problema apresentado em (2.20) e (2.21).

Os diversos tipos de condições de contorno são inseridos na formulação através das quantidades  $\gamma u$  e  $F$ , dadas em partes disjuntas do contorno. Com efeito, o traço de  $u$  ao contorno,  $\gamma u$ , absorve diretamente condições do tipo Dirichlet. A quantidade  $F$  incorpora condições do tipo Neumann ou Cauchy. Dessa forma, em cada ponto do contorno as incógnitas são  $\gamma u$  ou  $F$ , ou partições dessas quantidades.

A seguir, é enunciado o problema de equações integrais a ser resolvido. Para tanto, sejam

$$H_A = \{u \in H ; Au \in V\} \quad (3.5)$$

$$\partial H_\alpha = \{u \in \partial H ; u = \alpha \text{ em } \partial\Omega \cap (\partial\Omega - \partial\Omega_{\bar{F}})\} , \quad (3.6)$$

$$\partial F'_\beta = \{F \in \partial F' ; F = \beta \text{ em } \partial\Omega \cap (\partial\Omega - \partial\Omega_u)\} , \quad (3.7)$$

onde:  $\partial\Omega_u$  = indica a união das partes de  $\partial\Omega$  onde se especi-

com  $\gamma u$  ou alguma de suas partições;

$\partial\Omega_F$  indica a união das partes de  $\partial\Omega$  onde se especificou  $F$  ou alguma de suas partições;

$H, \partial H$  indicam os espaços definidos nas equações (2.5) e (2.6), respectivamente;

$\partial F'$  indica o espaço dual de  $\partial F$  (2.6).

Com essas definições, o problema, na forma integral, fica sendo o seguinte:

" Dado  $f \in V$ , encontrar  $u \in H$ ,  $\gamma u \in \partial H_\alpha$  e  $F \in \partial F'_\beta$  ,

tais que

$$u(Q) = (G(P, Q), f)_V + \langle F, \gamma^* G(p, Q) \rangle_{\partial F} ,$$

$$P, Q \in \Omega, G \in F_{A^*}, p \in \partial\Omega \quad (3.8)$$

$$\gamma u(q) = (G(P, q), f)_V + \langle F, \gamma^* G(p, q) \rangle_{\partial F} ,$$

$$P \in \Omega, p, q \in \partial\Omega, G \in F_{A^*} " . \quad (3.9)$$

Distribucionalmente, verifica-se que  $Au = f$  quase em todo lugar, e, como  $f \in V$ , então  $u \in H_A$ .

Para desenvolver a formulação variacional do sistema de equações integrais formado pelas equações (3.8) e (3.9), definem-se as seguintes formas bilineares limitadas:

$$a(u, v) = (u, v)_H, \quad u \in H, \quad v \in H, \quad (3.10)$$

$$b(\eta, v) = (\langle \eta, \gamma^* G(p, Q) \rangle_{\partial F}, v)_H, \quad \eta \in \partial F', \quad v \in H, \quad (3.11)$$

$$c(t, w) = (t, w)_{\partial H}, \quad t, w \in \partial H, \quad (3.12)$$

$$d(t, w) = \langle \langle t, \gamma^* G \rangle_{\partial F}, w \rangle_{\partial H}, \quad t \in \partial F', \quad w \in \partial H, \quad (3.13)$$

e também as formas lineares limitadas:

$$l(v) = ((G, f)_V, v)_H, \quad v \in H, \quad (3.14)$$

$$m(w) = \langle (G, f)_V, w \rangle_{\partial H}, \quad w \in \partial H. \quad (3.15)$$

Após (3.10 - 3.13), (3.14) e (3.15), o equacionamento variacional do problema descrito pelas equações (3.8) e (3.9) se apresenta da seguinte forma:

"Dado  $f \in V$ , encontrar  $u \in H$ ,  $\gamma u \in \partial H_\alpha$  e  $F \in \partial F'_\beta$ , tais que

$$i) \quad a(u, v) - b(F, v) = l(v), \quad \forall v \in H, \quad (3.16)$$

$$ii) \quad c(\gamma u, w) - d(F, w) = m(w), \quad \forall w \in \partial H". \quad (3.17)$$

Os problemas enunciados em (3.8 - 3.9) e (3.16 - 3.17) são equivalentes. Ora, (3.8 - 3.9) implicam (3.16 - 3.17) pois  $H_A$  é subespaço de  $H$ , e os demais espaços são iguais nas duas formulações. Em seguida, multiplicando (3.8) por  $v \in H$  e (3.9) por  $w \in \partial H$ , e integrando em  $\Omega$  e  $\partial\Omega$ , respectivamente, obtém-se (3.16) e (3.17).

Reciprocamente, sejam  $u$ ,  $\gamma u$  e  $F$  a solução de (3.16 - 3.17). As equações variacionais (3.16) e (3.17) valem para toda  $v \in H$  e  $w \in \partial H$ . Logo, (3.8) e (3.9) são satisfeitas. Nos problemas analisados pelo MMFGL com abordagem variacional, mostra-se que a variável  $F$  é encontrada num espaço mais regular que o de sua definição. Mais especificamente, nos problemas auto-adjuntos,  $F$  tem a mesma regularidade de  $\gamma u$ .

### 3.3 O problema discreto

Considere-se que o domínio do problema é  $\bar{\Omega}$ , modelado pela região  $\bar{\Omega}_h$ , tomada como a união de um número finito,  $E$ , de sub-regiões fechadas, limitadas,  $\bar{\Omega}^k$ , sendo cada uma o fecho de uma região aberta  $\Omega^k$ , denominada elemento [65], isto é,

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{k=1}^E \bar{\Omega}^k, \quad (3.18)$$

$$\bar{\Omega}^k = \Omega^k \cup \partial\Omega^k, \quad k=1, 2, \dots, E \quad (3.19)$$

tal que

$$\Omega^k \cap \Omega^m = \emptyset, \quad \text{para } k \neq m. \quad (3.20)$$

Analogamente, considere-se o contorno  $\bar{\partial\Omega}$ , modelado por  $\bar{\partial\Omega}_h$ , sendo

$$\bar{\partial\Omega}_h = \bigcup_{m=1}^e \bar{\partial\Omega}^m, \quad (3.21)$$

$$\bar{\partial\Omega}^m = \partial\Omega^m \cup \Gamma^m, \quad m=1, 2, \dots, e, \quad (3.22)$$

$$\partial\Omega^m \cap \partial\Omega^n = \emptyset, \quad \text{para } m \neq n, \quad (3.23)$$

onde  $\Gamma^m$  é a fronteira do elemento de contorno  $\partial\Omega^m$ .

Para desenvolver uma aproximação por elementos finitos, constroem-se subespaços de dimensões finitas:  $V^h$  de  $V$ ,  $H^h$  de  $H$ ,  $\partial H^h$  de  $\partial H$ , gerados por bases constituídas pelas funções polinomiais  $\{\psi_r\}_{r=1}^J$  para os espaços definidos em  $\bar{\Omega}_h$  e  $\{\phi_s\}_{s=1}^N$  para os definidos em  $\bar{\partial\Omega}_h$ , respectivamente, denominadas funções de interpolação globais [66]. A construção dessas funções é feita justapondo-se funções interpoladoras locais, isto é, definidas em cada elemento.

Denotam-se por  $a_h(\dots)$ ,  $b_h(\dots)$ ,  $c_h(\dots)$ ,  $d_h(\dots)$ ,  $l_h(\dots)$  e  $m_h(\dots)$  as aproximações em  $\bar{\Omega}_h$  e  $\bar{\partial\Omega}_h$  para as formas bilineares e lineares definidas em (3.10 - 3.13), (3.14) e (3.15), respectivamente.

Então, uma aproximação de (3.16 - 3.17) por elementos finitos fornece o problema discreto:

$$\text{"Dados } f_h \in V^h, \alpha \in \partial H^h, \beta \in \partial F^h, \text{ encontrar } u_h \in H^h,$$

$\gamma u_h \in \partial H_\alpha^h$ ,  $F_h \in \partial F_\beta^h$ , tais que

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad a_h(u_h, v_h) - b_h(F_h, v_h) &= l_h(v_h), \\ \forall v_h \in H^h \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad c_h(\gamma u_h, w_h) - d_h(F_h, w_h) &= m_h(w_h) \\ \forall w_h \in \partial H^h. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A computação é realizada, admitindo-se as expansões

$$u_h = \sum_{i=1}^J \psi_i u_i, \quad (3.26)$$

$$\gamma u_h = \sum_{m=1}^N \theta_m u_m^c, \quad (3.27)$$

$$F_h = \sum_{j=1}^N \theta_j F_j, \quad (3.28)$$

$$f_h = \sum_{i=1}^J \psi_i f_i, \quad (3.29)$$

que substituídas em (3.24) e (3.25), resulta:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \sum_{i=1}^J [u_i a_h(\psi_i, v_h)] - \sum_{j=1}^N [F_j b_h(\theta_j, v_h)] &= \\ = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in H^h \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \sum_{m=1}^N [u_m^c c_h(\theta_m, w_h)] - \sum_{j=1}^N [F_j d_h(\theta_j, w_h)] &= \\ = m_h(w_h), \quad \forall w_h \in \partial H^h \end{aligned} \quad (3.31)$$

Em particular, as equações (3.30) e (3.31) são válidas para cada uma das funções das bases  $\{\psi_r\}_{r=1}^J$  e  $\{\theta_s\}_{s=1}^N$ , geradoras de  $H^h$  e  $\partial H^h$ , respectivamente. Fazendo-se em (3.30)  $v_h = \psi_r$ ,



$r = 1, 2, \dots, J$  e em (3.31)  $w_h = \emptyset_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$ , obtêm-se as seguintes relações globais:

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{u}} - \underline{\underline{B}}\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{L}}\underline{\underline{f}}, \quad (3.32)$$

$$\underline{\underline{C}}\underline{\underline{u}}^C - \underline{\underline{D}}\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{M}}\underline{\underline{f}}, \quad (3.33)$$

onde

$$\underline{\underline{A}} = [A_{ri}]; A_{ri} = a_h(\psi_i, \psi_r), 1 \leq i, r \leq J, \quad (3.34)$$

$$\underline{\underline{B}} = [B_{rs}]; B_{rs} = b_h(\emptyset_s, \psi_r), 1 \leq s \leq N; 1 \leq r \leq J, \quad (3.35)$$

$$\underline{\underline{C}} = [C_{ms}]; C_{ms} = c_h(\emptyset_m, \emptyset_s), 1 \leq m, s \leq N, \quad (3.36)$$

$$\underline{\underline{D}} = [D_{ms}]; D_{ms} = d_h(\emptyset_m, \emptyset_s), 1 \leq m, s \leq N, \quad (3.37)$$

$$\underline{\underline{L}} = [L_{rj}]; L_{rj} = ((G, \psi_j)_{Vh}, \psi_r)_{Hh}, 1 \leq j, r \leq J, \quad (3.38)$$

$$\underline{\underline{M}} = [M_{sj}]; M_{sj} = \langle (G, \psi_j)_{Vh}, \emptyset_s \rangle_{\partial Hh}, \quad (3.39)$$

$$1 \leq j \leq J, \quad 1 \leq s \leq N.$$

As matrizes  $\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{C}}$  são facilmente calculadas por envolverem apenas funções de interpolação. As matrizes  $\underline{\underline{B}}$ ,  $\underline{\underline{D}}$ ,  $\underline{\underline{L}}$  e  $\underline{\underline{M}}$  envolvem produtos da função (ou do tensor) de Green por funções de expansão. Nos procedimentos convencionais, é necessário o prévio conhecimento da função de Green para calcular essas matrizes. Se ela for disponível, a computação continua sem dificuldades, até porque no MMFGL as singularidades que aparecem são fracas e a integração adicional da abordagem variacional as regulariza. Agora, se a função de Green não for disponível, primeiramente ter-se-á que aproximá-la, para depois prosseguir os cálculos. Mas a estrutura do MMFGL e da formulação variacional propicia o emprego de um procedimento não-convencional, que calcula

diretamente os elementos das matrizes. Com isso, evita-se o problema de aproximação da função de Green, que, em certos casos, nem possui solução através de procedimento variacional, conforme AXELSSON & BARKER mostram em [66].

### 3.4 Aproximação Direta das Matrizes de Green

Os elementos das matrizes  $\underline{B}$ ,  $\underline{D}$ ,  $\underline{L}$  e  $\underline{M}$  podem ser reescritos explicitamente, lembrando as equações (3.10 - 3.15) como sendo

$$B_{rs} = b_h (\vartheta_s, \psi_r) = \langle \vartheta_s, \gamma^* G \rangle_{\partial Fh}, \psi_r)_{Hh}, \quad (3.40)$$

$$D_{ms} = d_h (\vartheta_m, \vartheta_s) = \langle \langle \vartheta_m, \gamma^* G \rangle_{\partial Fh}, \vartheta_s \rangle_{\partial Hh}, \quad (3.41)$$

$$L_{rj} = ((G, \psi_j)_{Vh}, \psi_r)_{Hh}, \quad (3.42)$$

$$M_{sj} = \langle (G, \psi_j)_{Vh}, \vartheta_s \rangle_{\partial Hh}, \quad (3.43)$$

A seguir, definem-se no domínio  $\Omega$  do problema as funções

$$G_j^\Omega(Q) = (G(P, Q), \psi_j(P))_{Vh}, \quad P, Q \in \Omega \quad (3.44)$$

e

$$G_s^\Gamma(Q) = \langle \vartheta_s(P), \gamma^* G(P, Q) \rangle_{\partial Fh}, \quad P \in \partial\Omega; \\ Q \in \Omega. \quad (3.45)$$

As funções  $G_j^\Omega(Q)$  e  $G_s^\Gamma(Q)$  são suficientemente regulares [67] para admitirem as seguintes expansões:

$$G_j^\Omega(Q) = \sum_{k=1}^J \psi_k(Q) g_{kj}^\Omega, \quad Q \in \Omega, \quad (3.46)$$

e

$$G_S^\Gamma(Q) = \sum_{k=1}^J \psi_k(Q) g_{ks}^\Gamma, \quad Q \in \Omega, \quad (3.47)$$

onde  $g_{kj}^\Omega$  e  $g_{ks}^\Gamma$  são os coeficientes de expansão de  $G_j^\Omega(Q)$  e  $G_S^\Gamma(Q)$ , respectivamente.

Fazendo o produto interno de  $G_j^\Omega(Q)$  em (3.46) com  $\psi_r \in H^h$ , resulta, usando (3.44),

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^J (\psi_k, \psi_r)_{Hh} g_{kj}^\Omega &= (G_j^\Omega, \psi_r)_{Hh} = \\ &= ((G(P,Q), \psi_j(P))_{Vh}, \psi_r)_{Hh}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

O terceiro termo em (3.48) pode ser identificado como o elemento  $L_{rj}$  da matriz  $\underline{L}$ .

Repetindo o procedimento anterior, agora para  $G_S^\Gamma(Q)$ , de (3.47) obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^J (\psi_k, \psi_r)_{Hh} g_{ks}^\Gamma &= (G_S^\Gamma, \psi_r)_{Hh} = \\ &= (\langle \emptyset_s(p), \gamma^* G(p,Q) \rangle_{\partial Fh}, \psi_r)_{Hh}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

que é identificado com o elemento  $B_{rs}$  da matriz  $\underline{B}$ . Em (3.48) e (3.49), para cada  $j=1,2,\dots,J$  e  $s=1,2,\dots,N$ , fazendo  $r=1,2,\dots,J$ , identificam-se as  $j$ -ésima e  $s$ -ésima colunas de  $\underline{L}$  e  $\underline{B}$ , respectivamente. Assim sendo, verifica-se de (3.48) e (3.49) que as matrizes  $\underline{L}$  e  $\underline{B}$  estariam determinadas se os coeficientes  $g_{kj}^\Omega$  e  $g_{ks}^\Gamma$  das expansões (3.46) e (3.47) fossem conhecidos. Portanto, o problema, agora, resume-se em obter os citados coeficientes de expansões, pois, sendo eles conhecidos,  $\underline{L}$  e  $\underline{B}$  são facilmente obtidas, multiplicando-se a matriz gramiana  $(\psi_k, \psi_r)_{Hh}$ ,  $1 \leq k, r \leq J$

pela matriz formada pelos coeficientes  $g_{kj}^{\Omega}$ ,  $1 \leq k, j \leq J$  e  $g_{ks}^{\Gamma}$ ,  $1 \leq k \leq J$ ;  $1 \leq s \leq N$ , respectivamente.

Antes de se fornecer um procedimento para a determinação de  $g_{kj}^{\Omega}$  e  $g_{ks}^{\Gamma}$ , mostra-se como obter as matrizes  $\underline{\underline{M}}$  e  $\underline{\underline{D}}$ , que completam o problema discretizado (3.32 - 3.33), a partir das matrizes  $\underline{\underline{L}}$  e  $\underline{\underline{B}}$ . Com efeito, a matriz  $\underline{\underline{M}}$  é obtida da matriz  $\underline{\underline{B}}$  como segue.

Inicialmente, supõe-se que  $\partial H^h \subset \partial F^h$  e  $H^h \subset V^h$ . Então, a equação (3.43) fornece

$$\begin{aligned} M_{sj} &= \langle (G, \psi_j)_{V^h}, \phi_s \rangle_{\partial H^h} = \\ &= \langle \phi_s, \gamma^* G \rangle_{\partial H^h}, \psi_j \rangle_{V^h} = B_{js}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

ou seja,

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{B}}^T, \quad (3.51)$$

onde  $\underline{\underline{B}}^T$  é a matriz transposta de  $\underline{\underline{B}}$ .

Os elementos da matriz  $\underline{\underline{D}}$  são obtidos a partir da equação (3.45). Para isso, calcula-se o traço da função  $G_s^{\Gamma}(Q)$  ao contorno  $\partial\Omega$ :

$$\begin{aligned} \gamma^* G_s^{\Gamma}(q) &= \lim_{Q \rightarrow q} G_s^{\Gamma}(Q) = \langle \phi_s(p), \gamma^* G(p, q) \rangle_{\partial F^h}, \\ Q \in \Omega; p, q \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.52)$$

pois  $\gamma^* G(p, q)$  envolve apenas singularidade fraca, não resultando, portanto, "saltos" quando  $G_s^{\Gamma}(Q)$  é levado ao contorno. Com as equações (3.41) e (3.52) é possível escrever

$$\begin{aligned} D_{ms} &= \langle \langle \phi_m(q), \gamma^* G(p, q) \rangle_{\partial F^h}, \phi_s(p) \rangle_{\partial H^h} = \\ &= \langle \phi_m(q), \langle \phi_s(p), \gamma^* G(p, q) \rangle_{\partial F^h} \rangle_{\partial H^h} = \end{aligned}$$

$$= \langle \emptyset_m(q), \gamma^* G_S^\Gamma(q) \rangle_{\partial Hh} . \quad (3.53)$$

Logo, conhecido  $G_S^\Gamma(Q)$ , a matriz  $D$  pode ser calculada a partir de (3.53).

### Determinação de $G_j^\Omega(Q)$ e $G_S^\Gamma(Q)$

Para encontrar  $G_j^\Omega$ , definido na equação (3.44), considere-se o problema definidor da função de Green, conforme as equações (2.20) e (2.21), ou seja,

$$A_Q^* G(P,Q) = \delta(P,Q) , \quad P, Q \in \Omega , \quad (3.54)$$

$$\delta^* G(P,q) = 0 , \quad q \in \partial\Omega , \quad (3.55)$$

onde o índice  $Q$  em  $A_Q^*$  indica que a variável é o vetor de coordenadas do ponto  $Q$ . Multiplicando-se (3.54) por  $\psi_j(P)$ , integrando-se em  $\Omega$  e tendo-se em vista (3.44), obtém-se

$$A_Q^* G_j^\Omega(Q) = \psi_j(Q) , \quad Q \in \Omega . \quad (3.56)$$

Atuando-se da mesma forma na condição de contorno (3.55), resulta

$$\delta^* G_j^\Omega(q) = 0 , \quad q \in \partial\Omega . \quad (3.57)$$

As equações (3.56) e (3.57) definem  $G_j^\Omega(Q)$ .

A função  $G_S^\Gamma(Q)$  definida em (3.45) é encontrada a partir do problema apresentado em (2.23) e (2.24), isto é,

$$A_Q^* G(p,Q) = 0 , \quad p \in \partial\Omega , \quad Q \in \Omega \quad (3.58)$$

$$\delta^* G(p,q) = \delta(p,q) , \quad p, q \in \partial\Omega . \quad (3.59)$$

A equação (3.58), multiplicada por  $\emptyset_S$  e integrada em  $\partial\Omega$  na variável  $p$ , fornece

$$A_Q^* G_S^\Gamma(Q) = 0 , \quad Q \in \Omega . \quad (3.60)$$

Analogamente, de (3.59) resulta

$$\delta^* G_S^\Gamma(q) = \emptyset_S(q) \quad , \quad q \in \partial\Omega \quad . \quad (3.61)$$

As equações (3.60) e (3.61) definem  $G_S^\Gamma(Q)$ .

Os problemas (3.56 - 3.57) e (3.60 - 3.61) admitem o seguinte equacionamento variacional: "Encontrar  $\bar{G} \in H$ , tal que

$$B(u, \bar{G}) + b(\gamma u, \gamma^* \bar{G}) = (u, P^\Omega)_U - \langle P^\Gamma, \gamma u \rangle_{\partial H} \quad , \\ \forall u \in H \quad , \quad (3.62)$$

onde as formas bilineares  $b(.,.)$  e  $B(.,.)$  são as definidas em (2.9) e (2.10), respectivamente, e os termos que envolvem  $P^\Omega$  e  $P^\Gamma$  são excludentes.

Na equação (3.62), deve-se fazer

- a)  $P^\Omega = \psi_j$  e  $P^\Gamma = 0$  , para obter  $\bar{G} = G_j^\Omega$  ;
- b)  $P^\Omega = 0$  e  $P^\Gamma = \emptyset_S$  , para encontrar  $\bar{G} = G_S^\Gamma$  .

O problema descrito em (3.62) é aproximado por elementos finitos, empregando-se a mesma discretização e os mesmos espaços definidos na Seção 3.3. Sejam  $B_h(.,.)$  e  $b_h(.,.)$  as aproximações de  $B(.,.)$  e  $b(.,.)$ , em  $\bar{\Omega}_h$  e  $\partial\Omega_h$ , respectivamente. Admitindo-se as expansões (3.46) e (3.47) para  $\bar{G}$ , obtém-se

$$\underline{K} \underline{\bar{G}}_t = \underline{R}_t \quad (3.63)$$

onde:

$$K_{ij} = B_h(\psi_i, \psi_j) + b_h(\gamma \psi_i, \gamma^* \psi_j) \quad , \\ i, j = 1, 2, \dots, J \quad (3.64)$$

$$R_{it} = (\psi_i, \psi_t)_{U_h} \quad , \quad i, t = 1, 2, \dots, J \quad (3.65)$$

ou

$$R_{it} = \langle \emptyset_t, \gamma \psi_i \rangle_{\partial H_h} \quad ,$$

$$t = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, \dots, J, \quad (3.66)$$

e

$$g_{it} = g_{it}^{\Omega}, \quad i = 1, 2, \dots, J; t = 1, 2, \dots, J, \quad (3.67)$$

ou

$$g_{it} = g_{it}^{\Gamma}, \quad i = 1, 2, \dots, J; t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.68)$$

dependendo da função que está sendo determinada:  $G_j^{\Omega}$  ou  $G_s^{\Gamma}$ .

É conveniente observar que a matriz de rigidez  $\underline{K}$  é a mesma para os dois problemas, e isso possibilita a determinação de todos os coeficientes simultaneamente.

Dependendo da aplicação, o procedimento variacional proposto para solucionar os problemas auxiliares, que conduzem às matrizes de Green, pode ser simplificado. Além disso, outros procedimentos também podem ser usados, incluindo os próprios de elementos de contorno. Entretanto, o método de elementos finitos foi apresentado devido sua generalidade e sua eficiência para solução de problemas regulares. No presente desenvolvimento, é oportuno observar que a regularidade dos problemas auxiliares, depende basicamente da regularidade do contorno. Pois, o carregamento é no mínimo de classe  $C^0(\Omega)$  e independe do problema a ser resolvido.

## CAPÍTULO 4

### **APLICAÇÃO DO MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL EM HASTES DELGADAS**

#### 4.1 Introdução

As equações diferenciais ordinárias de segunda ordem a valores de contorno têm sido estudadas sob os enfoques analítico e computacional. Para solução dessas equações, vários métodos têm sido desenvolvidos, principalmente tendo-se em consideração a estrutura do operador diferencial. Um dos métodos empregados é o da função de GREEN [68].

Matematicamente, a importância dessa metodologia se traduz por ela conduzir ao operador inverso do operador do problema. Entretanto, a construção da função de Green para um operador diferencial é, em geral, uma questão da mesma complexidade que resolver o próprio problema, como se observa em [68] e [69]. Isso reduz a aplicabilidade do método. Convém dizer que essa metodologia não é a empregada em elementos de contorno.

BANERJEE & BUTTERFIELD, em [50], tratam do problema potencial no contexto de elementos de contorno. Apresentam as formulações direta e indireta, que usam, em vez da função de Green, uma solução fundamental de domínio infinito do operador do problema. As matrizes resultantes da colocação são não-simétricas.

HORAK, em [39], desenvolveu o método da função de Green



local (doravante MFGL) para solução de problemas de condução de calor e de escoamentos incompressíveis, conforme foi comentado no Capítulo 2. Essas formulações são alcançadas introduzindo-se um parâmetro arbitrário por meio de condições de contorno da função de Green local. Então, os operadores integrais locais são dependentes desse parâmetro, e após a discretização as matrizes locais e global também dependem dessa quantidade.

Horak estudou a eficiência do MFGL em comparação com os métodos de diferenças finitas e de elementos finitos, para diversos valores do parâmetro. Quando esse foi escolhido convenientemente, a eficiência do MFGL foi significativamente maior que a dos outros métodos citados. Ademais, à medida que aumentou a precisão relativa requerida para os resultados, maior foi a eficiência do MFGL em relação àqueles métodos. Assim, embora seja possível alcançar elevada eficiência com o MFGL desenvolvido por HORAK, em [39], a forte dependência paramétrica presente no formalismo de seu método é inconveniente, pois não se dispõe de uma estratégia automática para fazer a escolha mais apropriada do parâmetro para cada problema. As matrizes resultantes da discretização dos operadores integrais do MFGL para problemas unidimensionais foram tridiagonais, o que simplificou consideravelmente o esquema de solução numérica dos problemas.

Neste capítulo, inicialmente formula-se matematicamente o problema de hastes delgadas, apresenta-se a estrutura matemática em que o problema é abordado e mostra-se como obter de maneira sistemática as condições de transmissão nas interfaces de elementos. Em seguida, desenvolve-se formalmente o MMFGL para hastes delgadas. Posteriormente, trata-se da aproximação numérica do problema. Finalmente, são realizadas várias aplica-

ções, com a finalidade de avaliar a precisão e o comportamento numérico do método proposto.

#### 4.2 Notações e Preliminares

Considere-se uma haste delgada, isotrópica, que ocupa a região  $[0, L] \times \bar{\Omega}$ , em  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ , onde  $(x, y, z)$  são coordenadas cartesianas,  $\Omega$  é um domínio aberto limitado no plano  $(y, z)$ , com contorno suficientemente regular,  $\partial\Omega$ , sendo  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  e  $(0, L)$  um intervalo aberto no eixo  $x$ , com extremos em 0 (zero) e  $L$ . O deslocamento segundo o eixo  $x$ ,  $u(x)$ , de uma haste sujeita a um carregamento longitudinal,  $q(x)$ , satisfaz a equação diferencial, [70]:

$$-\frac{d}{dx} [E(x) A(x) \frac{du(x)}{dx}] = q(x), \quad 0 < x < L; \quad (4.1)$$

juntamente com as condições de contorno

$$l_1(\dot{u}) = \alpha_1, \quad x = 0 \quad (4.2)$$

$$l_2(\dot{u}) = \alpha_2, \quad x = L; \quad (4.3)$$

onde,

- $E(x)$  indica o módulo de elasticidade longitudinal;
- $A(x)$  indica a área da seção transversal;
- $q(x)$  indica a força distribuída por unidade de comprimento, no sentido longitudinal da haste;
- $l_1(\cdot)$ ,  $l_2(\cdot)$  indicam combinações lineares dos seguintes operadores:

$$\text{Tr}[\cdot] \quad (4.4)$$

e

$$\text{Tr} [EA \frac{d}{dx}]. \quad (4.5)$$

O símbolo  $\text{Tr}[\cdot]$  é definido, como em [92], por

$$\text{Tr} [f(x_0)] \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} f(x); \quad (4.6)$$

e significa o traço da função  $f(x)$  ao ponto  $x_0$ .

O operador em (4.4) é apropriado para condições cinemáticas, enquanto que em (4.5) ele serve as condições naturais, conforme é mostrado na figura 4.1.

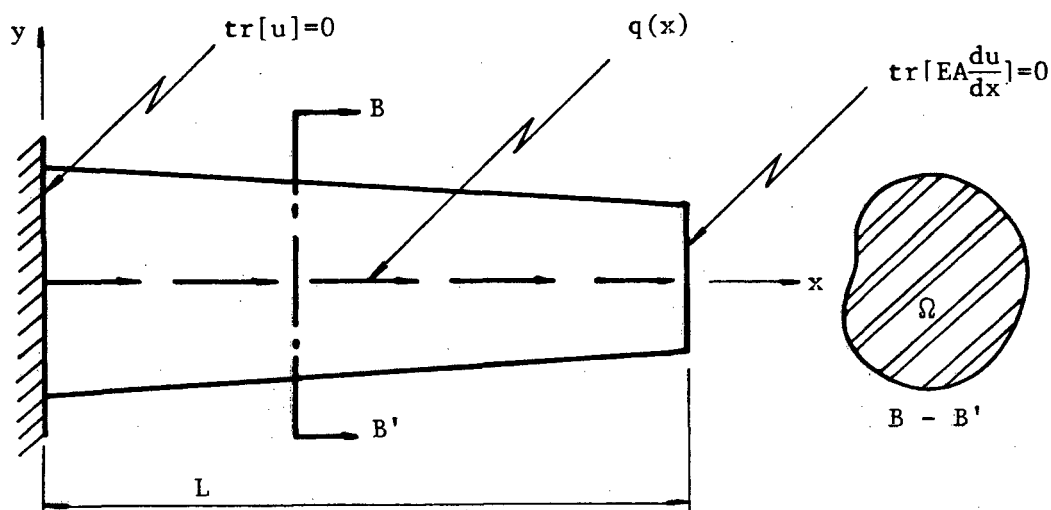


FIGURA 4.1 Haste sujeita a carga distribuída, com um extremo fixo e outro livre.

Considere-se uma partição de  $\bar{I} \equiv [0, L]$  em  $n$  subintervalos  $I^k = (x_{k-1}, x_k)$ , tal que  $\bigcup_{k=1}^n \bar{I}^k = \bar{I}$  e  $I^i \cap I^j = \emptyset$ , para  $i \neq j$ , sendo  $x_0 = 0$  e  $x_n = L$ , que doravante serão denominados **elementos**, como mostra a figura 4.2.

Agora, seja

$$V = H^1(0, L), \quad (4.7)$$

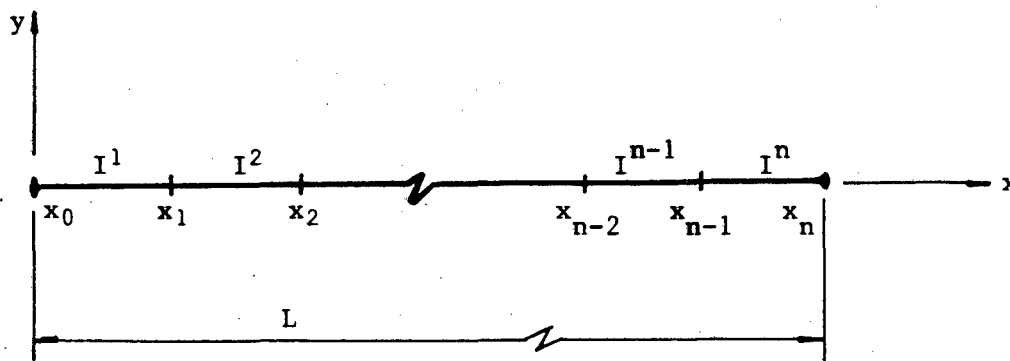


FIGURA 4.2 Partição do intervalo  $I \equiv (0, L)$  em  $n$  subintervalos.

onde  $H^1(0, L)$  é o espaço de Hilbert de primeira ordem, definido em [54] como

$$H^1(0, L) = \{v \mid v \in L_2(0, L), \frac{dv}{dx} \in L_2(0, L)\}, \quad (4.8)$$

onde  $L_2(0, L)$  indica o espaço das funções ao quadrado integráveis no sentido de Lebesgue em  $(0, L)$ .

Sejam  $u^k$ ,  $E^k$ ,  $A^k$  e  $q^k$  as restrições de  $u$ ,  $E$ ,  $A$  e  $q$  em  $I^k$ , respectivamente. Em  $V \times V$ , define-se a seguinte forma bilinear contínua:

$$a(u, v) = \sum_{k=1}^n a^k(u^k, v^k) = \sum_{k=1}^n \int_{I^k} E^k(x) A^k(x) \frac{du^k}{dx} \frac{dv^k}{dx} dx. \quad (4.9)$$

Pela relação (4.9), a formulação variacional associada ao problema definido em (4.1 - 4.2) é dada por

$$\sum_{k=1}^n a^k(u^k, v^k) = \sum_{k=1}^n \int_{I^k} q^k(x) v^k(x) dx,$$

$$\forall v \in V. \quad (4.10)$$

Se, em (4.10), for selecionado  $v^j \in \mathcal{D}(I^j)$  e  $v^k=0$ , com  $j, k=1, 2, \dots, n$  e  $k \neq j$ , encontra-se

$$L^j u^j = q^j \text{ em } I^j, \quad (4.11)$$

onde  $\mathcal{D}(I^j)$  é o espaço das funções-testes infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em  $I^j$  e

$$L^j = - \frac{d}{dx} [E^j(x) A^j(x) \frac{d(\cdot)}{dx}]. \quad (4.12)$$

Considere-se então a identidade obtida por meio de integrações por parte em  $I^k$ :

$$\int_{I^k} (L^k u^k) v^k dx = - [E^k(x) A^k(x) v^k \frac{du^k}{dx}]_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} + a^k(u^k, v^k). \quad (4.13)$$

À vista das relações (4.11) e (4.13), a (4.10) fornece

$$\sum_{k=1}^n [E^k(x) A^k(x) v^k \frac{du^k}{dx}]_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} = 0, \forall v \in V. \quad (4.14)$$

Em (4.14), escolhendo-se  $v^k = v^{k+1}$  em  $x_k$  e  $v^j=0$  em  $x_j$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ , com  $j \neq k$ , resultam as condições de contorno nas interfaces dos elementos,

$$u^k = u^{k+1}, \quad (4.15)$$

e

$$E^k(x) A^k(x) \frac{du^k}{dx} \Big|_{x=x_k} = E^{k+1}(x) A^{k+1}(x) \frac{du^{k+1}}{dx} \Big|_{x=x_k}, \quad (4.16)$$

com  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .

### 4.3 Formulação do MMFGL para Hastes

Inicialmente, considere-se o espaço  $V$  e a forma bilinear  $a(u, v)$ , definidos em (4.7) e (4.9), respectivamente. De (4.9), tem-se que

$$a(u, v) = a(v, u), \quad (4.17)$$

isto é, a forma bilinear, além de contínua, é simétrica. Seja  $I^k$  um elemento genérico. A condição de simetria (4.17), usada em conjunto com a equação (4.13), fornece

$$\begin{aligned} & \int_{I^k} (L^k u^k) v^k dx + \left[ E^k(x) A^k(x) v^k \frac{du^k}{dx} \right]_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \\ &= \int_{I^k} (L^k v^k) u^k dx + \left[ E^k(x) A^k(x) u^k \frac{dv^k}{dx} \right]_{x=x_{k-1}}^{x=x_k}, \quad (4.18) \end{aligned}$$

com  $u^k, v^k \in V$ .

O estado físico  $\{u^k, \frac{du^k}{dx}\}$ , que se deseja determinar, é decorrente do carregamento e das condições de fixação a que a haste está sujeita. O estado auxiliar  $\{v^k, \frac{dv^k}{dx}\}$  é escolhido de modo

a fornecer uma formulação integral do problema. Para tanto,  $v^k$  deve satisfazer

$$L^k v^k = - \frac{d}{dx} [E^k(x) A^k(x) \frac{dv^k}{dx}] = \delta(x, \xi),$$

$$x, \xi \in I^k, \quad (4.19)$$

sendo  $\delta(x, \xi)$  a distribuição de Dirac, que, no caso, pode ser fisicamente interpretada como uma carga pontual segundo o eixo  $x$  no ponto  $\xi$ . Assim, a função  $v^k(x)$  representa um deslocamento longitudinal no ponto  $x$ , devido a uma carga pontual em  $\xi$ . Portanto,  $v^k$  passa a depender de duas variáveis:  $x$  e  $\xi$ . Para denotar essa característica em  $v^k$ , faz-se

$$v_{\xi}^k(x) = G^k(x, \xi). \quad (4.20)$$

À vista de (4.20), substituindo-se (4.19) em (4.18) e tendo-se em consideração a propriedade de filtro [69] da distribuição de Dirac, chega-se a

$$u^k(\xi) = \int_{I^k} (L^k u^k) G^k(x, \xi) dx +$$

$$+ \left[ E^k(x) A^k(x) G^k(x, \xi) \frac{du^k}{dx} \right]_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} -$$

$$- \left[ E^k(x) A^k(x) u^k(x) \frac{dG^k(x, \xi)}{dx} \right]_{x=x_{k-1}}^{x=x_k}$$

$$\xi \in I^k, \quad (4.21)$$

que embora seja uma representação integral de  $u^k$ , não é adequada à abordagem de elementos de contorno.

Nos termos de contorno que aparecem no lado direito de (4.21), introduz-se a quantidade

$$k_0 G^k(x, \xi) u^k(x), \quad x \in \partial I^k, \quad \xi \in I^k, \quad (4.22)$$

e reagrupam-se os termos para encontrar

$$\begin{aligned} u^k(\xi) = & \int_{I^k} G^k(x, \xi) q^k(x) dx + \left\{ G^k(x, \xi) [k_0 u^k(x) + \right. \\ & \left. E^k(x) A^k(x) \frac{du^k}{dx} \right] \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} - \left\{ u^k(x) [k_0 G^k(x, \xi) + \right. \\ & \left. E^k(x) A^k(x) \frac{dG^k(x, \xi)}{dx} \right] \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k}, \\ & \xi \in I^k. \end{aligned} \quad (4.23)$$

O parâmetro  $k_0$  introduzido em (4.23) através de (4.22) é arbitrário, porém pré-especificado, e tem dimensão tal que o produto  $k_0 u^k$  pode ser interpretado como uma força elástica que atua no contorno do elemento  $I^k$ .

Completando a definição da função de Green,  $G^k(x, \xi)$ , escolhem-se as condições de contorno de modo a anular o último termo do lado direito da (4.23). Procedendo-se assim,  $G^k(x, \xi)$  fica definida por:

$$-\frac{d}{dx} \left[ E^k(x) A^k(x) \frac{dG^k(x, \xi)}{dx} \right] = \delta(x, \xi), \quad x, \xi \in I^k \quad (4.24)$$



$$\left[ k_0 G^k(x, \xi) + E^k(x) A^k(x) \frac{dG^k(x, \xi)}{dx} \right]_{x=x_k} = 0, \quad \xi \in I^k, \quad (4.25)$$

$$\left[ k_0 G^k(x, \xi) + E^k(x) A^k(x) \frac{dG^k(x, \xi)}{dx} \right]_{x=x_{k-1}} = 0, \quad \xi \in I^k. \quad (4.26)$$

Com as condições estabelecidas em (4.25) e (4.26), a equação (4.23) pode ser assim reescrita:

$$u^k(\xi) = \int_{I^k} G^k(x, \xi) q^k(x) dx + \left\{ G^k(x, \xi) \left[ k_0 u^k(x) + E^k(x) A^k(x) \frac{du^k}{dx} \right] \right\}_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \\ \xi \in I^k. \quad (4.27)$$

O termo  $k_0 u^k(x) + E^k(x) A^k(x) \frac{du^k}{dx}$  se encontra definido apenas no contorno. Isso permite definir uma nova quantidade, apropriada à formulação de contorno. Com efeito, seja

$$F^{m,k}(x) = k_0 u^k(x) + E^k(x) A^k(x) \frac{du^k}{dx}, \quad x \in \partial I^{m,k} \quad (4.28)$$

onde  $\partial I^{m,k}$  denota a interface dos elementos  $I^k$  e  $I^m$ .

Com a definição apresentada em (4.28), a equação (4.27)

fica sendo

$$u^k(\xi) = \int_{I^k} G^k(x, \xi) q^k(x) dx + \left[ G^k(x, \xi) F^{k+1,k}(x) \right]_{x=x_k} - \left[ G^k(x, \xi) F^{k-1,k}(x) \right]_{x=x_{k-1}}, \quad \xi \in I^k. \quad (4.29)$$

Para tornar a equação (4.29) adequada à abordagem de elementos de contorno, toma-se o traço de  $u^k(\xi)$  ao contorno, obtendo-se

$$\begin{aligned} \text{Tr}[u^k(\xi^C)] = & \text{Tr} \left[ \int_{I^k} G^k(x, \xi^C) q^k(x) dx \right] + \\ & + \text{Tr} \left[ G^k(x_k, \xi^C) F^{k+1,k}(x_k) \right] - \\ & - \text{Tr} \left[ G^k(x_{k-1}, \xi^C) F^{k-1,k}(x_{k-1}) \right], \\ & \xi^C \in \partial I^k. \end{aligned} \quad (4.30)$$

As equações (4.29) e (4.30) constituem a formulação do MMFGL para problemas de hastes delgadas. As condições de contorno são inseridas diretamente na equação (4.30) através do  $\text{Tr}[u^k(\xi^C)]$ , se forem do tipo Dirichlet, ou com o auxílio da quantidade  $F^{m,k}(x)$ , se forem do tipo Neumann. Se as condições de contorno forem as de Cauchy, podem ser tratadas diretamente através de  $F^{m,k}(x)$ .

O sistema global é obtido por meio da sobreposição dos elementos. Esta é realizada impondo-se as condições de transmissão (4.15) e (4.16) nas interfaces dos elementos. No presente exemplo, essas condições assumem a forma

$$\text{Tr}[u^k(a)] = \text{Tr}[u^m(a)], \quad (4.31)$$

$$F^{m,k}(a) = F^{k,m}(a), \quad (4.32)$$

sendo  $a$  o ponto de interface dos elementos. Se houver uma força concentrada  $P$  na interface dos elementos, a condição (4.32) fica sendo

$$F^{m,k}(a) = F^{k,m}(a) + P, \quad a \in \partial I^{m,k}, \quad (4.33)$$

onde a força  $P$  será positiva ou negativa conforme seja de tração ou de compressão, respectivamente, em relação ao elemento  $m$ .

#### 4.4 Aproximação Numérica

Inicialmente, considere-se o particionamento da dimensão longitudinal da haste,  $I = (0, L)$ , em  $n$  elementos, como mostra a figura 4.2. Nos problemas unidimensionais, o contorno se reduz a pontos. Então, o método de colocação [10], aplicado aos elementos é apropriado para transformar os operadores integrais em matrizes locais que, sobrepostas, formam um sistema de equações algébricas lineares.

Colocando-se a equação (4.30) nos pontos nodais  $x_{k-1}$  e  $x_k$ , de um elemento genérico  $I^k$ , a contribuição do mesmo para o sistema global pode ser representada matricialmente na forma

$$\begin{bmatrix} G_{k-1, k-1}^k & -G_{k, k-1}^k & 1 & 0 \\ -G_{k-1, k}^k & G_{k, k}^k & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{k-1}^{k-1, k} \\ F_k^{k+1, k} \\ \hline u_{k-1}^k \\ u_k^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{k-1}^k \\ -S_k^k \end{Bmatrix}, \quad (4.34)$$

onde foi adotada a seguinte notação:

$$u^k(x_p) = u_p^k \quad (4.35)$$

$$G^k(x_p, x_q) = G_{p, q}^k \quad (4.36)$$

$$F^{m,k}(x_p) = F_p^{m,k} \quad (4.37)$$

$$S^k(x_p) = \int_{I^k} G^k(x, x_p) q^k(x) dx = S_p^k. \quad (4.38)$$

A matriz global, doravante denominada de **matriz de Green**, é obtida sobrepondo-se as matrizes dos elementos. As condições de transmissão (compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de forças) nas interfaces dos elementos possibilitam a compactação dos deslocamentos nodais. Uma ordenação adequada do vetor das incógnitas  $F^{m,k}(x)$ ,  $x \in \partial I^{m,k}$ , conduz a um sistema simétrico e tridiagonal de equações algébricas lineares.

A ordenação do vetor das incógnitas, que propicia um sistema linear simétrico e tridiagonal, encontra-se no Apêndice A, para várias condições de contorno. Após a compactação dos graus de liberdade de deslocamentos [71], o sistema pode ser simbolicamente representado por

$$\underline{G} \underline{X} = \underline{P} \quad (4.39)$$

onde  $\underline{G}$  indica a matriz de Green para a haste;

$\underline{X}$  indica o vetor das incógnitas ordenado na forma

$$\underline{X} = [F_{0,1}^{0,1} \quad F_{1,2}^{1,2} \quad F_{2,3}^{2,3} \quad \dots \quad F_{n-2,n-1}^{n-2,n-1}, F_n^{n,n+1}]^T;$$

$\underline{P}$  indica o vetor carregamento obtido por superposição dos vetores de carregamento locais.

Resolvido o sistema (4.39), todas as demais variáveis do problema podem ser determinadas. Assim, os deslocamentos nos

pontos nodais são obtidos de (4.34), e as forças de (4.28). Caso haja necessidade de deslocamentos em outros pontos, pode ser empregada a equação (4.29).

#### 4.5 Aplicação do MMFGL para Solução Numérica de Problemas de Hastes Delgadas

O MMFGL, descrito na seção 4.3 deste capítulo, foi aplicado para solucionar diversos problemas de hastes delgadas. Todos os problemas resolvidos possuem solução analítica. Isso possibilita avaliar a precisão do MMFGL. A dependência paramétrica das matrizes de Green em relação a  $k_0$  foi muito testada. A função de Green usada para formação das matrizes dos elementos foi obtida analiticamente e se encontra no Apêndice A.

##### 4.5.1 Haste com rigidez constante

Considere-se uma haste delgada com rigidez constante, submetida a carregamento uniforme na direção axial, fixa em seus extremos, como mostra a Figura 4.3.

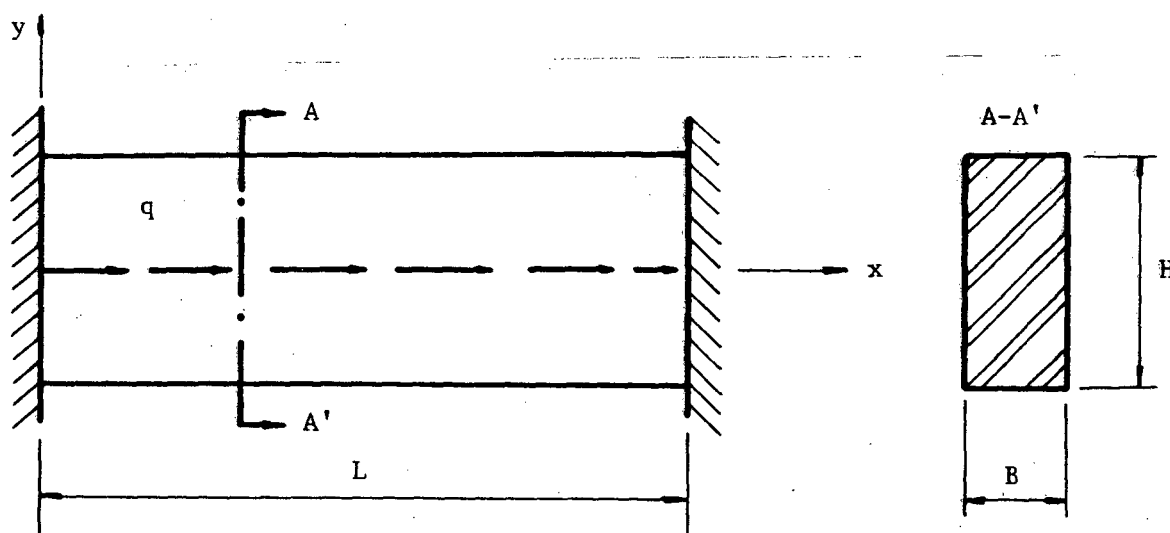


FIGURA 4.3 Haste bi-engastada com rigidez constante e carregamento uniforme.

Os dados numéricos usados neste problema são os seguintes:

Comprimento (L)	30 cm
Módulo de elasticidade longitudinal (E)	$2 \times 10^7$ N/cm <sup>2</sup>
Seção: retangular	
Altura da seção (H)	10 cm
Largura da seção (B)	2 cm
Taxa de carga (q)	2 N/cm

Os testes computacionais foram realizados sem partição da haste. Os resultados numéricos obtidos são comparados aos analíticos na tabela 4.1, com  $k_0 = 1420$  N/cm.

TABELA 4.1 Resultados analíticos e numéricos de deslocamentos  $u$  e de forças axiais  $N$ , em haste bi-engastada, com carga axial uniforme. Coeficiente  $k_0 = 1420$  N/cm.

Ponto	$x$ (cm)	$u \times 10^5$ (cm)		$N$ (N)	
		Resultados analíticos (exatos)			
		Resultados numéricos (MMFGL)			
1	0.	0.		30.	
		0. (*)		30.	
2	15.	0.5625		0.	
		0.56237		$0.2710 \times 10^{-16}$	
3	30.	0.		-30.	
		0. (*)		-30.	

Os valores assinalados com (\*) na tabela 4.1 foram obtidos após a obtenção dos valores no contorno e servem para tes-

tar a precisão com os valores especificados.

O parâmetro arbitrário  $k_0$  inserido na formulação do MMFGL poderia influir no comportamento numérico do método, alterando o raio espectral das matrizes de Green. Tal dependência foi testada processando-se o presente problema para os seguintes valores de  $k_0$  N/cm: 1450, -1050, -1000, -300, -100, -10, 1, 10, 100, 500, 1000, 1420, 1430 e 1450. Os resultados obtidos mostram completa independência das matrizes em relação ao parâmetro  $k_0$ . Na tabela 4.2 estão os resultados para  $k_0=1450$  N/cm. Como se observa, não há alterações significativas na precisão dos resultados mostrados nessas tabelas.

TABELA 4.2 Resultados analíticos e numéricos de deslocamentos  $u$  e forças axiais  $N$ , em haste bi-engastada.

Coefficiente:  $k_0 = 1450$  N/cm.

Ponto	$x(\text{cm})$	$u \times 10^5$ (cm)	$N$ (N)
		Resultados analíticos (exatos)	
		Resultados numéricos (MMFGL)	
1	0.	0.	30.
		0. (*)	30.
2	15.	0.5625	0.
		0.56237	$-0.563785 \times 10^{-17}$
3	30.	0.	-30.
		0. (*)	-30.

Ao lado da característica de independência do MMFGL em relação ao parâmetro  $k_0$ , os resultados numéricos obtidos, compa-

rados com os analíticos, são muito precisos e mostram a capacidade do método para atingir resultados precisos.

#### 4.5.2 Haste com rigidez variável

Para examinar o comportamento do método quando há variações na rigidez, na carga e no tipo de condições de contorno, considerou-se o problema de uma haste delgada de rigidez variável, com um extremo fixo e o outro livre, sob ação da carga mostrada na figura 4.4. Os dados numéricos desse problema são os seguintes:

Comprimento total (L)	700 mm
Comprimento dos elementos ( $L_1$ )	400 mm
( $L_2$ )	300 mm
Seções: retangulares	
Altura das seções ( $H_1$ )	100 mm
( $H_2$ )	50 mm
Largura das seções ( $B_1$ )	100 mm
( $B_2$ )	50 mm
Cargas ( $q_1$ )	200 N
( $q_2$ )	100 N

Para a solução desse problema, procedeu-se a partição da haste em dois elementos. Embora, neste caso, a escolha dos subdomínios fosse natural, em problemas mais complexos a partição deve ser efetuada de modo que, no modelo discreto, as propriedades do contínuo estejam representadas. Onde houver alguma descontinuidade ou singularidade, deve-se inserir um ponto nodal



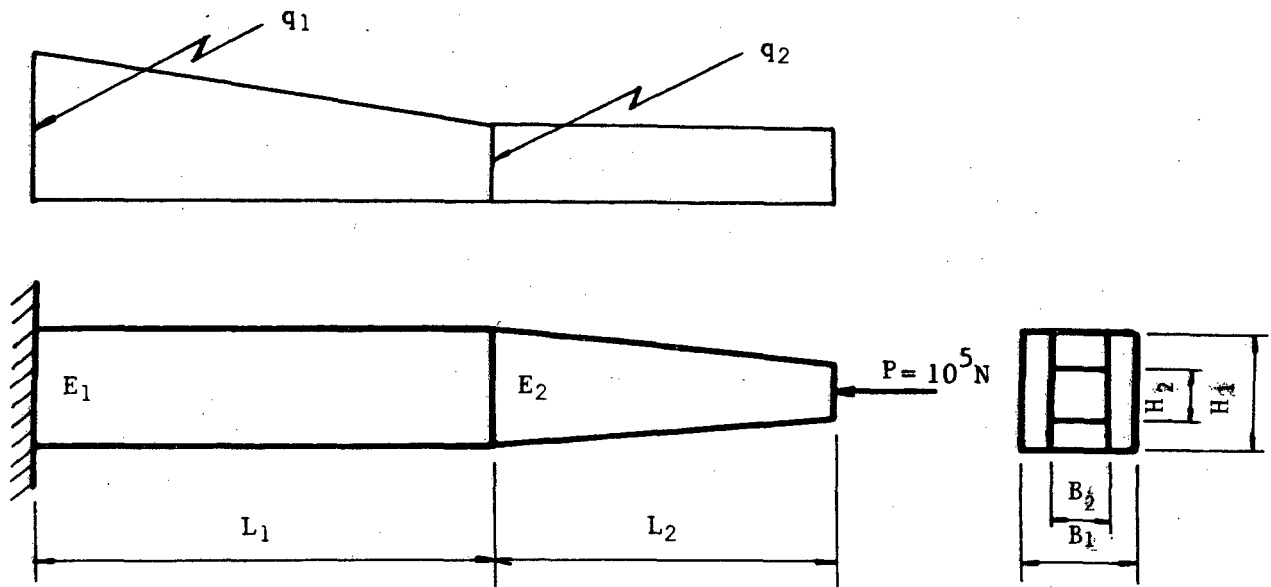


FIGURA 4.4 Haste engastada - livre  
com rigidez variável.

que defina um novo elemento. Dessa forma, assegura-se a regularidade esperada para a solução.

Na tabela 4.3, os resultados numéricos obtidos são comparados com os analíticos. Os erros relativos, tanto dos deslocamentos como das forças axiais calculadas, foram no máximo da ordem de 5%. Nos pontos nodais do contorno das subregiões, as variáveis são mais precisas. Vários testes foram realizados para verificar a dependência dos operadores integrais em relação ao parâmetro  $k_0$ . Os resultados obtidos evidenciam, novamente, que o MMFGL não depende da escolha de  $k_0$ , pois em nenhum dos casos processados houve alteração significativa na precisão deles, conforme se observa na tabela 4.4.

Nas tabelas 4.3 e 4.4, (\*) tem o mesmo significado que na tabela 4.2.

TABELA 4.3 Resultados analíticos e numéricos de deslocamento  $u$  e força axial  $N$ , em haste engastada - livre, com rigidez e carregamento variáveis.

Coefficiente:  $k_0 = 1450 \text{ N/cm}$ .

Ponto	x(mm)	u x 10 (mm)	N x 10 <sup>-3</sup> (N)
		Resultados analíticos (exatos)	Resultados numéricos (MMFGL)
1	0.	0.	-1
		-0.568434x10 <sup>-12</sup> (*)	-0.999999
2	100.	-0.027976	-2.875
		-0.028144	-2.343115
3	200.	-0.080952	-4.5
		-0.082775	-4.521267
4	300.	-0.155357	-5.875
		-0.155296	-5.925986
5	400.	-0.247619	-7
		-0.247619	-6.999999
6	500.	-0.325915	-8
		-0.323991	-7.84719
7	600.	-0.434536	-9
		-0.432838	-9.152814
7	650.	-0.505159	-9.5
		-0.505997	-9.596100
9	700.	-0.591100	-10.
		-0.592074	-10. (*)

TABELA 4.4 Resultados analíticos e numéricos de deslocamento  $u$  e força axial  $N$ , em haste engastada-livre, com rigidez e carregamento variáveis. Coeficiente:  $k_0 = 1 \text{ N/cm}$ .

Ponto	x (cm)	u x 10 (mm)	N x 10 <sup>-3</sup> (N)
		Resultados analíticos (exatos)	
		Resultados numéricos (MMFGL)	
1	0.	0.	-1
		0. (*)	0.999998
2	100.	-0.027976	-2.875
		-0.0281442	-2.8433114
3	200.	-0.080952	-4.5
		-0.0827753	-4.521267
4	300.	-0.155357	-5.875
		-0.155296	-5.92254
5	400.	-0.247619	-7
		-0.247619	-6.999999
6	500.	-0.325915	-8
		-0.324001	-7.84721
7	600.	-0.434536	-9
		-0.432840	-9.152813
8	650.	-0.505159	-9.5
		-0.506001	-9.596098
9	700.	-0.591100	-10.
		-0.592001	-10. (*)

A formulação do MMFGL em hastes delgadas, conduz à matrizes de Green que possuem as mesmas características das que resultam do método de elementos finitos. Além disso, a independência paramétrica da formulação proposta e a possibilidade de partição esparsa, tornam o MMFGL uma alternativa, válida, para solução de problemas de hastes delgadas.

## CAPÍTULO 5

### APLICAÇÃO DO MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL EM VIGAS

#### 5.1 Introdução

O operador diferencial bi-harmônico unidimensional tem sido estudado sob os enfoques analítico e computacional. Neste último, uma das abordagens mais frequentes na análise de vigas faz uso de elementos finitos baseados em deslocamentos [72]. Nessa formulação, o requisito de que as funções de interpolação devem ser de classe  $C^1$  caracteriza o operador diferencial de quarta ordem. Esse requisito, mais difícil de ser atendido nos problemas multidimensionais, motivou estudos para o estabelecimento de outras formulações, que, mesmo empregando funções menos regulares, fornecessem uma apropriada aproximação para o problema bi-harmônico.

As formulações mistas e híbridas de elementos finitos [54], são abordagens que atenuam os requisitos de regularidade exigidos pelo operador bi-harmônico. Neste sentido, as formulações de elementos de contorno constituem alternativa válida, por transferirem todas as exigências de regularidade para o estado auxiliar, na relação de reciprocidade generalizada. Apesar disso, o tratamento do problema bi-harmônico unidimensional através de técnicas de contorno não tem sido frequente.

BANERJEE & BUTTERFIELD, em [49], desenvolveram formulações diretas e indiretas para vigas de Bernoulli homogêneas e não-homogêneas e para vigas sob apoio elástico, usando sempre a solução fundamental de domínio infinito do operador bi-harmônico unidimensional. Nos dois últimos problemas a solução foi obtida iterativamente.

No método direto, há necessidade de formação de duas matrizes  $4 \times 4$ , e no indireto de uma matriz  $4 \times 4$ . Após a introdução das condições de contorno, o sistema é rearranjado, resultando uma matriz  $4 \times 4$ .

Em geral, as matrizes resultantes das discretizações são não-simétricas, tendo sido obtidas através do cálculo de valores funcionais de solução fundamental e de suas derivadas.

Uma formulação alternativa para o operador bi-harmônico foi apresentada por KESAVAN, em [73]. Ela se fundamenta no desmembramento do problema em dois problemas potenciais. Um deles é sobredeterminado (pois há duas condições de contorno e o operador é de segunda ordem), e o outro é subdeterminado (não há condições de contorno para o operador). Empregando-se a solução fundamental de domínio infinito para o operador de Laplace, Kesavan encontrou uma condição de contorno não-local [74] para a equação, que era subdeterminada. Na aproximação, os espaços de dimensões finitas foram construídos através do método de elementos finitos. Os problemas analisados ficaram restritos ao operador bi-harmônico com condições de contorno de Dirichlet (engastamento). O problema unidimensional, depois de discretizado, conduziu a matrizes tridiagonais positivas definidas. As funções de interpolação foram de classe  $C^0$ .

Neste trabalho, a abordagem dada ao problema bi-harmô-

nico unidimensional é a do MMFGL. Para tanto, inicialmente o problema é colocado numa estrutura matemática adequada às técnicas de contorno. Em seguida, encontra-se uma relação de reciprocidade generalizada para o problema de vigas de Bernoulli, usando-se os resultados previamente obtidos no Capítulo 2. A escolha apropriada do estado auxiliar, na relação de reciprocidade, conduz à formulação do MMFGL para vigas. Continuando, apresenta-se o tratamento numérico, que usa o método de colocação para transformar os operadores integrais em matrizes. O processo de cálculo das matrizes envolve, com exceção do vetor de carga distribuída, apenas cálculo de valores funcionais. As matrizes que resultam da discretização são simétricas e de banda, cuja largura é igual às das que resultam do método de elementos finitos, independentemente do tipo de condições de contorno. Por último, descrevem-se as aplicações realizadas para avaliar a técnica desenvolvida, em particular, quanto à precisão dos resultados. Testa-se também a dependência paramétrica da formulação MMFGL.

## 5.2 Preliminares

Considere-se uma viga de Bernoulli [89], isotrópica, que ocupa a região  $[0, L] \times \bar{\Omega}$ , em  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ , onde  $(x, y, z)$  são coordenadas cartesianas,  $\Omega$  é um domínio aberto limitado no plano  $(y, z)$ , com contorno  $\partial\Omega$ , sendo  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  e  $(0, L)$  um intervalo aberto no eixo  $x$ , com extremos em 0 (zero) e  $L$ . Considere-se ainda, que a viga está sujeita a um carregamento transversal  $f(x)$ , conforme a figura 5.1, e que a sua rigidez seja  $E(x)J(x) \in L_{\infty}(0, L)$ .

Então, o deslocamento segundo o eixo  $z$ , denotado por  $w = w(x)$  e denominado de **deslocamento transversal da viga**, satisfaz a equação diferencial (WASHIZU, [75]).

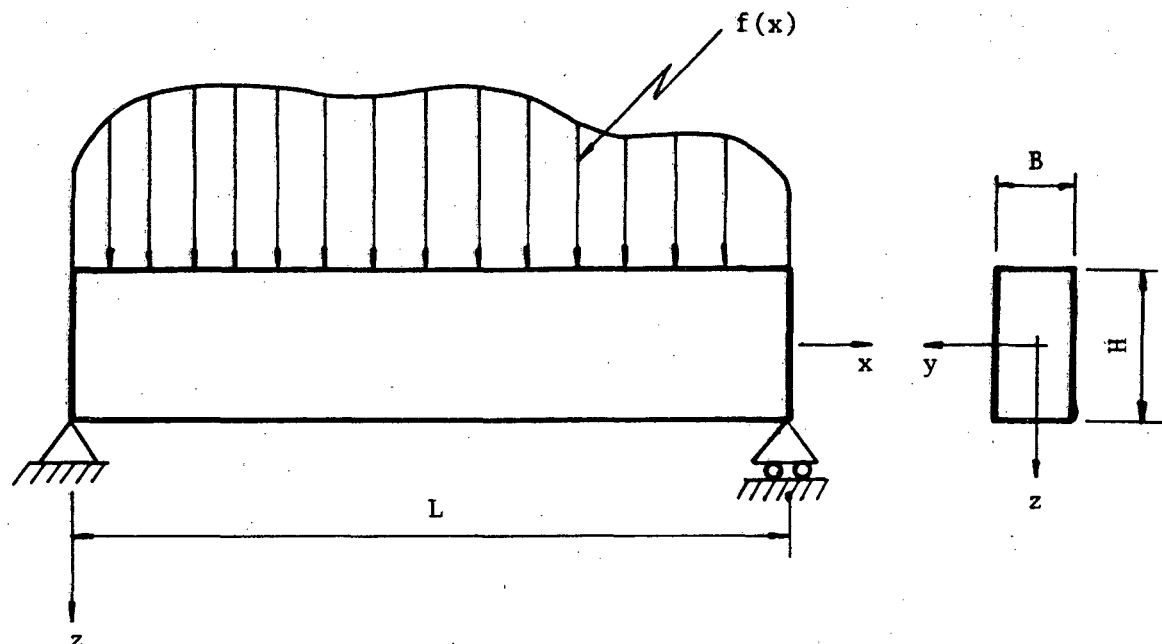


FIGURA 5.1 Viga de Bernoulli

$$Aw = \frac{d^2}{dx^2} [E(x) J(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2}] = f(x), \quad 0 < x < L, \quad (5.1)$$

completada pelo seguinte conjunto de condições de contorno:

$$l_1(w) = \alpha_1 \text{ e } l_2(w) = \alpha_2, \quad \text{em } x = 0, \quad (5.2)$$

$$l_3(w) = \alpha_3 \text{ e } l_4(w) = \alpha_4, \quad \text{em } x = L, \quad (5.3)$$

onde  $E(x)$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $J(x)$  é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo neutro,  $f(x)$  é força transversal por unidade de comprimento e  $l_1(\cdot)$ ,  $l_2(\cdot)$ ,  $l_3(\cdot)$  e  $l_4(\cdot)$  são combinações lineares de operadores de contorno, convenientemente escolhidos dentre os seguintes:

$$\text{Tr}[(\cdot)], \quad (5.4)$$

$$\text{Tr}\left[\frac{d(\cdot)}{dx}\right], \quad (5.5)$$

$$\text{Tr}\left[E(x) J(x) \frac{d^2(\cdot)}{dx^2}\right], \quad (5.6)$$

$$\text{Tr}\left[\frac{d}{dx} \left(E(x) J(x) \frac{d^2(\cdot)}{dx^2}\right)\right], \quad (5.7)$$

sendo o símbolo  $\text{Tr}[(\cdot)]$  definido como na equação (4.6).



O operador  $\text{Tr}[(.)]$  é apropriado para a especificação de deslocamentos lineares,  $\text{Tr}[\frac{d(.)}{dx}]$  serve para deslocamentos angulares,  $\text{Tr}[E(x) J(x) \frac{d^2(.)}{dx^2}]$  é adequado para a especificação de momento fletor no contorno e  $\text{Tr}[\frac{d}{dx}(E(x) J(x) \frac{d^2(.)}{dx^2})]$  incorpora força cortante como condição de contorno.

### 5.3 Formulação do MMFGL para Vigas de Bernoulli

Considere-se o intervalo  $\bar{I} = [0, L]$ , subdividido em  $N$  elementos  $I^k = (x_{k-1}, x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , definidos como no problema de haste delgada, conforme a figura 4.2. A subdivisão deve ser tal que, em cada elemento  $I^k$ , a rigidez  $E(x) J(x)$  seja suficientemente regular.

Para estabelecer a relação de reciprocidade que dá origem à formulação MMFGL para o problema de viga colocado em (5.1 - 5.3), identificam-se os espaços, de acordo com (2.26 - 2.31), como

$$H = F = H^2(I^1) \times H^2(I^2) \times \dots \times H^2(I^N) \quad (5.8)$$

$$H' = F' = H^{-2}(I^1) \times H^{-2}(I^2) \times \dots \times H^{-2}(I^N) \quad (5.9)$$

$$U = V = H^{-1}(I^1) \times H^{-1}(I^2) \times \dots \times H^{-1}(I^N) \quad (5.10)$$

Considerem-se  $w^k$ ,  $v^k$ ,  $E^k$  e  $J^k$  como restrições de  $w$ ,  $v$ ,  $E$  e  $J$  ao elemento genérico  $I^k$ .

Prosseguindo, definem-se as formas bilineares  $B : H \times F \rightarrow \mathbb{R}$  e  $b : H \times F \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo seus valores dados por

$$B(w, v) = \sum_{k=1}^N \left[ \int_{I^k} E^k(x) J^k(x) \frac{d^2 w^k}{dx^2} \frac{d^2 v^k}{dx^2} dx \right]$$

$$w, v \in H, \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}
b(\gamma w, \gamma^* v) = & \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ k_2 \frac{dw^k(x)}{dx} \frac{dv^k(x)}{dx} \right] \Bigg|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} + \right. \\
& \left. + \left[ k_3 w^k(x) v^k(x) \right] \Bigg|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \right\}, \\
w, v \in H, & \qquad \qquad \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

respectivamente. Em (5.12), as variáveis e suas derivadas devem ser entendidas no sentido do traço. As constantes  $k_2$  e  $k_3$  são arbitrárias no momento, porém pré-especificadas, e foram introduzidas para generalizar a formulação e, eventualmente, melhorar o comportamento computacional do problema discreto, o que é abordado na próxima seção.

Agora, fazendo-se

$$H_A = F_{A^*} = H_{A^1}(I^1) \times H_{A^2}(I^2) \times \dots \times H_{A^N}(I^N), \quad (5.13)$$

onde

$$H_{A^k}(I^k) = \{v \in H^2(I^k); A^k v \in H^{-1}(I^k)\}, \quad (5.14)$$

trabalhando-se com as restrições  $B^k(w^k, v^k)$  e  $b^k(\gamma w^k, \gamma^* v^k)$  em  $I^k$  das formas bilineares  $B(.,.)$  e  $b(.,.)$ , respectivamente, e empregando-se as equações (2.17) e (2.18), obtém-se

$$\begin{aligned}
& \int_{I^k} E^k(x) J^k(x) \frac{d^2 w^k}{dx^2} \frac{d^2 v^k}{dx^2} dx + \left[ k_2 \frac{dw^k(x)}{dx} \frac{dv^k(x)}{dx} \right] \Bigg|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \\
& + \left[ k_3 w^k(x) v^k(x) \right] \Bigg|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} = \int_{I^k} v^k(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[ E^k(x) J^k(x) \frac{d^2 w^k(x)}{dx^2} \right] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left[ k_3 w^k(x) - \frac{d}{dx} (E^k(x) J^k(x) \frac{d^2 w^k(x)}{dx^2}) \right] v^k(x) + \right. \\
& \left. \left[ k_2 \frac{dw^k(x)}{dx} + E^k(x) J^k(x) \frac{d^2 w^k(x)}{dx^2} \right] \frac{dv^k}{dx} \right\} \Bigg|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k}, \\
& w \in H_{A^k}^k(I^k), \quad v^k \in H^2(I^k), \quad (5.15)
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
& \int_{I^k} E^k(x) J^k(x) \frac{d^2 w^k}{dx^2} \frac{d^2 v^k}{dx^2} dx + \left[ k_2 \frac{dw^k(x)}{dx} \frac{dv^k(x)}{dx} \right] \Bigg|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} + \\
& + \left[ k_3 w^k(x) v^k(x) \right] \Bigg|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} = \int_{I^k} w^k \frac{d^2}{dx^2} [E^k(x) v^k(x) \frac{d^2 v^k(x)}{dx^2}] dx + \\
& + \left\{ \left[ k_2 \frac{dv^k}{dx} + E^k(x) J^k(x) \frac{d^2 v^k(x)}{dx^2} \right] \frac{dw^k(x)}{dx} + \right. \\
& + \left. \left[ k_3 v^k(x) - \frac{d}{dx} (E^k(x) J^k(x) \frac{d^2 v^k(x)}{dx^2}) \right] w^k(x) \right\} \Bigg|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \\
& w^k \in H^2(I^k), \quad v^k \in F_{A^*k}(I^k). \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Identificando-se (5.15) com (2.17), tem-se que

$$A^k(\cdot) = \frac{d^2}{dx^2} [E^k(x) J^k(x) \frac{d^2(\cdot)}{dx^2}]; \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned}
\delta^k(\cdot) = & \left[ \delta_2^k(\cdot) \Big|_{x=x_{k-1}}, \delta_3^k(\cdot) \Big|_{x=x_{k-1}}, \delta_2^k(\cdot) \Big|_{x=x_k} \right. \\
& \left. \delta_3^k(\cdot) \Big|_{x=x_k} \right]. \quad (5.18)
\end{aligned}$$

$$\gamma^{*k}(\cdot) = [\gamma_0^{*k}(\cdot) \Big|_{x=x_{k-1}} \quad \gamma_1^{*k}(\cdot) \Big|_{x=x_{k-1}} \quad \gamma_0^{*k}(\cdot) \Big|_{x=x_k} \quad \gamma_1^{*k}(\cdot) \Big|_{x=x_k}] \quad (5.19)$$

onde

$$\delta_2^k(\cdot) \Big|_{x=x_p} = k_2 \frac{d(\cdot)}{dx} \Big|_{x=x_p} + E^k(x) J^k(x) \frac{d^2(\cdot)}{dx^2} \Big|_{x=x_p} \quad (5.20)$$

$$\delta_3^k(\cdot) \Big|_{x=x_p} = k_3(\cdot) \Big|_{x=x_p} - \frac{d}{dx} [E^k(x) J^k(x) \frac{d^2(\cdot)}{dx^2}] \Big|_{x=x_p} \quad (5.21)$$

e

$$\gamma_0^{*k}(\cdot) \Big|_{x=x_p} = (\cdot) \Big|_{x=x_p}, \quad (5.22)$$

$$\gamma_1^{*k}(\cdot) \Big|_{x=x_p} = \frac{d(\cdot)}{dx} \Big|_{x=x_p}. \quad (5.23)$$

Analogamente, da equação (5.16) resulta

$$A^{*k}(\cdot) = A^k(\cdot) \quad (5.24)$$

$$\delta^{*k}(\cdot) = \delta^k(\cdot) \quad (5.25)$$

$$\gamma^k(\cdot) = \gamma^{*k}(\cdot). \quad (5.26)$$

Escolhendo-se  $w^k \in H_{A^k}$  e  $v^k \in F_{A^{*k}}$ , as equações (5.15 -

-5.16) fornecem

$$\begin{aligned}
 & \int_{I^k} w^k(x) \frac{d^2}{dx^2} [E^k(x) J^k(x) \frac{d^2 v^k}{dx^2}] dx = \\
 & \int_{I^k} v^k(x) \frac{d^2}{dx^2} [E^k(x) J^k(x) \frac{d^2 w^k(x)}{dx^2}] dx + \\
 & + \left. \left\{ \frac{dv^k(x)}{dx} \delta_2[w^k(x)] + v^k(x) \delta_3[w^k(x)] \right\} \right|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} - \\
 & - \left. \left\{ \frac{dw^k(x)}{dx} \delta_2[v^k(x)] + w^k(x) \delta_3[v^k(x)] \right\} \right|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \\
 & w^k, v^k \in H_{A^k}^k(I^k), \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

que é a relação de reciprocidade generalizada entre o estado real,  $\{w^k, \frac{dw^k}{dx}, \delta_2^k(w^k), \delta_3^k(w^k)\}$ , e o auxiliar,  $\{v^k, \frac{dv^k}{dx}, \delta_2^k(v^k), \delta_3^k(v^k)\}$ , para os problemas de vigas de Bernoulli.

Escolhendo-se  $v^k$ , como em (2.20) e (2.21), e substituindo-se na equação (5.27), obtém-se

$$\begin{aligned}
 w^k(\xi) &= \int_{I^k} G^k(x, \xi) f^k(x) dx + \\
 & + \left[ M^k(x) \frac{dG^k(x, \xi)}{dx} + F^k(x) G^k(x, \xi) \right] \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k}, \\
 \xi \in I^k, w^k, G^k &\in H_{A^k}^k(I^k), \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

onde foram definidas, no contorno, as quantidades

$$M^k(x) = k_2 \frac{dw^k(x)}{dx} + E^k(x) J^k(x) \frac{d^2 w^k(x)}{dx^2},$$

$$x \in \partial I^k, \quad (5.29)$$

e

$$F^k(x) = k_3 w^k(x) - \frac{d}{dx} [E^k(x) J^k(x) \frac{d^2 w^k(x)}{dx^2}],$$

$$x \in \partial I^k. \quad (5.30)$$

A equação (5.28) é a representação integral da solução do problema apresentado em (5.1 - 5.3), para pontos do domínio  $I^k$ . O traço ao contorno dessa representação fornece

$$\begin{aligned} \text{Tr}[w^k(\xi^c)] &= \int_{I^k} \text{Tr}[G^k(x, \xi^c)] f^k(x) dx + \\ &+ \{M^k(x) \text{Tr}[\frac{dG^k(x, \xi^c)}{dx}] + \\ &+ F^k(x) \text{Tr}[G^k(x, \xi^c)]\} \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k}, \\ &\xi^c \in \partial I^k, w^k, G^k \in H_{A^k}^1(I^k). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Para continuar a formulação, são introduzidas nas equações (5.29) e (5.30), algumas quantidades da teoria de vigas. Com efeito, sabe-se que o momento fletor e a força cortante em  $I^k$  são determinados em função do deslocamento transversal, através de

$$M^k(x) = - E^k(x) J^k(x) \frac{d^2 w^k(x)}{dx^2} \quad (5.32)$$

$$T^k(x) = - \frac{d}{dx} [E^k(x) J^k(x) \frac{d^2 w^k(x)}{dx^2}], \quad (5.33)$$

respectivamente. Assim, (5.29) e (5.30) podem ser reescritas como

$$F^k(x) = k_3 w^k(x) + T^k(x), \quad x \in \partial I^k, \quad (5.34)$$

e

$$M^k(x) = k_2 \frac{dw^k(x)}{dx} - M^k(x), \quad x \in \partial I^k, \quad (5.35)$$

obtendo-se as associações de  $F^k$  e  $M^k$ , respectivamente, com a força cortante e o momento fletor no contorno do elemento  $I^k$ .

O operador diferencial do problema é de quarta ordem. Então, em cada ponto do contorno são especificadas duas condições de contorno. Mas as equações (5.31), (5.34) e (5.35) envolvem seis quantidades. Logo, há necessidade de mais uma equação, para tornar o problema determinado. De acordo com (2.25), a equação que completa a formulação provém do traço do deslocamento angular ao contorno. Para tanto, deriva-se a equação (5.28) em relação à variável  $\xi$ , para obter

$$\begin{aligned} \frac{dw^k(\xi)}{d\xi} &= \int_{I^k} \frac{dG^k(x, \xi)}{d\xi} f^k(x) dx + [M^k(x) \frac{d^2 G^k(x, \xi)}{d\xi dx}] \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \\ &+ [F^k(x) \frac{dG^k(x, \xi)}{d\xi}] \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \\ \xi &\in I^k, \quad w^k, G^k \in H_{A^k}^k(I^k). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Em seguida, toma-se o traço ao contorno de  $I^k$  dessa representação, do que resulta

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[ \frac{dw^k(\xi^c)}{d\xi} \right] &= \int_{I^k} \text{Tr} \left[ \frac{dG^k(x, \xi^c)}{d\xi} \right] f^k(x) dx + \\ &+ \left\{ M^k(x) \text{Tr} \left[ \frac{d^2 G^k(x, \xi^c)}{d\xi dx} \right] \right\} \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} + \\ &+ \left\{ F^k(x) \text{Tr} \left[ \frac{dG^k(x, \xi^c)}{d\xi} \right] \right\} \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k}, \\ \xi^c &\in \partial I^k, \quad w^k, G^k \in H_{A^k}^k(I^k). \end{aligned} \quad (5.37)$$

As equações (5.28), (5.36), (5.31) e (5.37) servem para resolver os problemas de vigas de Bernoulli através do MMFGL, tanto para os pontos do domínio  $I^k$  como para os situados no contorno  $\partial I^k$ .

As condições de contorno são incorporadas diretamente nas equações (5.31) e (5.37), através de  $\text{Tr}[w^k(\xi^c)]$  e  $\text{Tr}[\frac{dw^k(\xi^c)}{d\xi}]$ , se forem do tipo Dirichlet ou através das quantidades  $F^k$  e  $M^k$ , se forem do tipo Neumann. Se forem do tipo de Cauchy, podem ser inseridas diretamente na formulação, através de  $F^k$  e  $M^k$ .

O sistema global é obtido sobrepondo-se os elementos. Isso é realizado através das condições de transmissão nas interfaces dos elementos, obtidas a seguir. Se não houver força ou momento concentrado no ponto de interface de dois elementos ( $I^k$  e  $I^m$ , por exemplo), então, em vista de que  $w^k \in H_{A^k}^k$  e das condições (2.51), tem-se



$$\text{Tr}[w^k(a)] = \text{Tr}[w^m(a)]; \quad (5.38)$$

$$\text{Tr}\left[\frac{dw^k(a)}{d\xi}\right] = \text{Tr}\left[\frac{dw^m(a)}{d\xi}\right]; \quad (5.39)$$

$$F^k(a) = F^m(a); \quad (5.40)$$

$$M^k(a) = M^m(a); \quad (5.41)$$

com  $a \in \partial I^{k,m}$ .

No caso mais geral de haver força e momento concentrado no ponto de interface, as condições (5.40) e (5.41) ficam sendo

$$F^k(a) - F^m(a) - \bar{P}_a = 0, \quad (5.42)$$

$$M^k(a) - M^m(a) + \bar{M}_a = 0, \quad (5.43)$$

onde  $\bar{P}_a$  e  $\bar{M}_a$  são, respectivamente, valores especificados da força cortante e do momento fletor no ponto  $a \in \partial I^{k,m}$ . Os sentidos positivos adotados para estas grandezas estão indicados na figura 5.2.

#### 5.4 Aproximação Numérica

Sendo o modelo de viga Bernoulli unidimensional, os contornos ficam reduzidos a pontos. Então, é apropriado o emprego do método de colocação para transformar os operadores integrais locais em matrizes locais, que, sobrepostas, formam o sistema global.

Para tanto, considere-se um elemento genérico  $\bar{I}^k \equiv [x_{k-1}, x_k]$ . Colocando-se as equações (5.31) e (5.37) primeiramente no

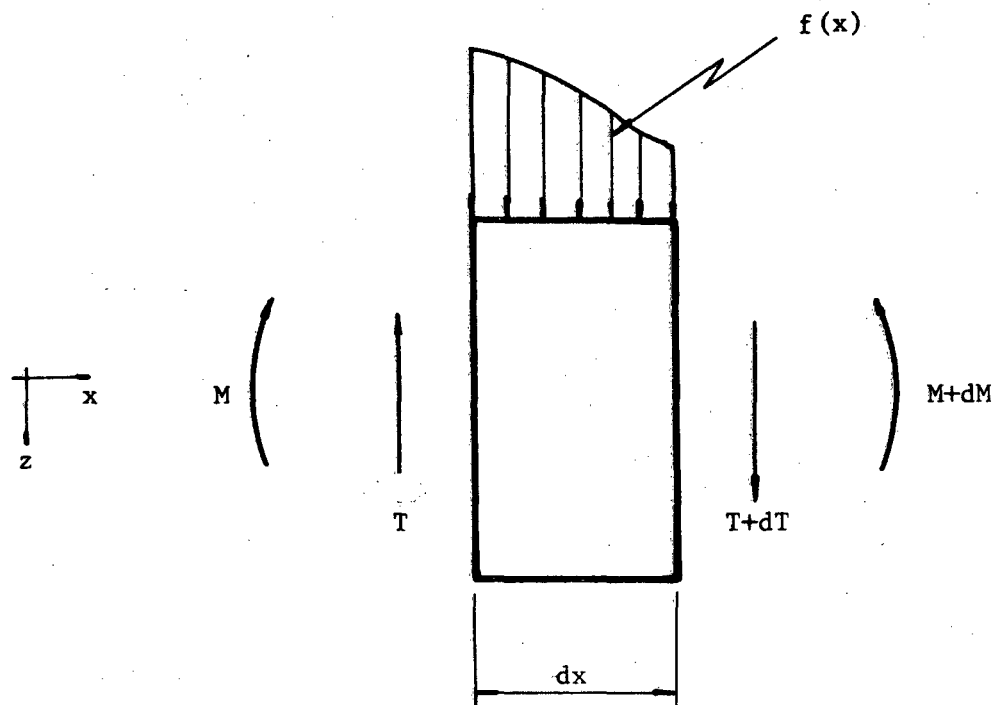


FIGURA 5.2 Elemento de viga. Sentidos positivos de momento fletor  $M$ , força cortante  $T$  e carga distribuída  $f$ .

ponto  $x = x_{k-1}$ , e depois em  $x = x_k$ , resulta a seguinte relação matricial:

$$\begin{bmatrix}
 G_{k-1,k-1}^k & \left. \frac{dG^k}{dx} \right|_{k-1,k-1} & -G_{k,k-1}^k & -\left. \frac{dG^k}{dx} \right|_{k,k-1} \\
 \left. \frac{dG^k}{d\xi} \right|_{k-1,k-1} & \left. \frac{d^2 G^k}{d\xi dx} \right|_{k-1,k-1} & -\left. \frac{dG^k}{d\xi} \right|_{k,k-1} & -\left. \frac{d^2 G^k}{d\xi dx} \right|_{k,k-1} \\
 -G_{k-1,k}^k & -\left. \frac{dG^k}{dx} \right|_{k-1,k} & G_{k,k}^k & \left. \frac{dG^k}{dx} \right|_{k,k} \\
 -\left. \frac{dG^k}{d\xi} \right|_{k-1,k} & -\left. \frac{d^2 G^k}{d\xi dx} \right|_{k-1,k} & \left. \frac{dG^k}{d\xi} \right|_{k,k} & \left. \frac{d^2 G^k}{d\xi dx} \right|_{k,k}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 F_{k-1}^k \\
 M_{k-1}^k \\
 F_k^k \\
 M_k^k
 \end{Bmatrix}
 +$$

$$\begin{array}{c} + \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} w_{k-1}^k \\ \theta_{k-1}^k \\ w_k^k \\ \theta_k^k \end{array} \right] = \int_{I^k} \left\{ \begin{array}{c} G^k(x, x_{k-1}) \\ \frac{dG^k(x, x_{k-1})}{d\xi} \\ - G^k(x, x_k) \\ - \frac{dG^k(x, x_k)}{d\xi} \end{array} \right\} f^k(x) dx, \end{array}$$

(5.44)

onde se adotou a seguinte notação:

$$w^k(x_p) = w_p^k; \quad (5.45)$$

$$G^k(x_p, \xi_q) = G_{p,q}^k; \quad (5.46)$$

$$\frac{dG^k(x_p, \xi_q)}{dx} = \left. \frac{dG^k}{dx} \right|_{p,q}; \quad (5.47)$$

$$\frac{dG^k(x_p, \xi_q)}{d\xi} = \left. \frac{dG^k}{d\xi} \right|_{p,q}; \quad (5.48)$$

$$\frac{d^2 G^k(x_p, \xi_q)}{d\xi dx} = \left. \frac{d^2 G^k}{d\xi dx} \right|_{p,q}; \quad (5.49)$$

$$\frac{dw^k(x_p)}{d\xi} = \theta_p^k. \quad (5.50)$$

As condições de transmissão nas interfaces dos elementos, que fisicamente indicam compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de forças generalizadas, possibilitam a compactação dos graus de liberdade associados aos deslocamentos generalizados nodais. Portanto, ficam como incógnitas somente as quantidades  $F$  e  $M$ . No Apêndice B, apresenta-se a organização dos elementos  $I^1$  e  $I^N$  para os tipos de condições de contorno mais frequentes nos problemas de vigas.

O sistema global resultante pode ser escrito simbolicamente como

$$\underline{\underline{G}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{P}}, \quad (5.51)$$

onde  $\underline{\underline{G}}$  é uma matriz simétrica e de banda com semilargura quatro, que contém apenas valores da função de Green e de suas derivadas,  $\underline{\underline{X}}$  é o vetor das incógnitas, com a ordenação

$$\underline{\underline{X}} = [F_0^1, M_0^1, F_1^1, M_1^1, F_2^2, M_2^2, \dots, F_N^N, M_N^N]^T; \quad (5.52)$$

e  $\underline{\underline{P}}$  é o vetor de carregamento obtido por superposição dos vetores de cargas locais.

Obtida a solução do sistema (5.51), todas as outras variáveis do problema podem ser determinadas. Os deslocamentos e as forças generalizadas nodais são determinados através das equações (5.44), (5.34) e (5.35), respectivamente. O cálculo de deslocamentos ou forças generalizadas em pontos não-nodais é feito empregando-se as equações (5.28) e (5.36), e derivadas dessas equações em relação à variável  $\xi \in I^k$ . Uma alternativa para calcular deslocamentos e forças generalizadas sem empregar as equa-

ções (5.28), (5.36) é adotar uma partição da viga tal que os pontos onde se desejam as variáveis coincidam com pontos nodais.

### 5.5 Aplicação do MMFGL para Solução Numérica de Vigas

A formulação MMFGL para vigas, proposta na Seção 5.3 deste capítulo, foi aplicada para diferentes problemas a fim de mostrar a versatilidade do método para tratar de situações práticas, tais como cargas concentradas, descontinuidade de rigidez e condições de fixação de vigas. Todos os problemas resolvidos possuem soluções analíticas. Assim, foi possível avaliar a precisão do MMFGL. A função de Green se encontra no Apêndice B.

Nas aplicações, sempre foi usada a função de Green local, obtida analiticamente. É conveniente observar que, para o operador em questão, é possível obter a função de Green exata ou, no máximo, com o envolvimento de algumas integrais, fáceis de serem calculadas numericamente. A dependência paramétrica das matrizes de Green em relação aos parâmetros  $k_2$  e  $k_3$  da formulação foi bastante testada. A primeira aplicação trata apenas de resolver uma equação diferencial ordinária bi-harmônica e serve para mostrar a aplicabilidade do método, mesmo quando os seus dados não condizem com os de um modelo físico.

#### 5.5.1 Solução de equação diferencial bi-harmônica

Considere-se o problema

$$\alpha \frac{d^4 w}{dx^4} = f(x) \quad \text{em } (0, L),$$

$$\text{Tr}[w(0)] = \text{Tr}\left[\frac{dw(0)}{dx}\right] = 0$$

$$\text{Tr}\left[\alpha \frac{d^2 w(L)}{dx^2}\right] = \text{Tr}\left[\alpha \frac{d^3 w(L)}{dx^3}\right] = 0$$

Os dados numéricos são os seguintes:

$$L = 300, \quad f = 90 \quad \text{e} \quad \alpha = 1953.125 \times 10^6.$$

Nesta aplicação, os testes computacionais foram realizados sem partição de domínio, pois os dados são suficientemente regulares para possibilitar este tratamento.

Na tabela 5.1, os resultados numéricos obtidos são comparados com os analíticos, em que foi feito  $k_2 = k_3 = 1$ .

TABELA 5.1 Solução de equação diferencial bi-harmônica.

$$k_2 = k_3 = 1.$$

		w	$\frac{dw}{dx}$	$\alpha \frac{d^2 w}{dx^2} \times 10^{-5}$	$\alpha \frac{d^3 w}{dx^3} \times 10^{-3}$
Ponto	x	(Resultados exatos)			
		(Resultados numéricos - MMFGL)			
1	0.	0.	0.	- 40.5	27.
		0. (*)	0. (*)	- 40.5	27.
2	150.	1.65	0.018144	- 10.125	13.5
		1.65	0.018143	- 10.125	13.5
3	300.	46.656	0.20736	0.	0.
		46.656	0.20736	0. (*)	0. (*)

Os valores assinalados com (\*) na tabela 5.1 foram obtidos a partir dos valores determinados numericamente no contorno e, através dos valores especificados, testam a precisão dos resultados. É fácil observar que os resultados numéricos coincidem com os analíticos exatos. Essa aplicação foi repetida para vários valores de  $k_2$  e  $k_3$ . Entretanto, os resultados numéricos obtidos não apresentaram alterações em relação aos mostrados na tabela 5.1.

### 5.5.2 Viga com rigidez variável

Considere-se uma viga em balanço, com seção retangular, sujeita a carga concentrada, conforme a figura 5.3.

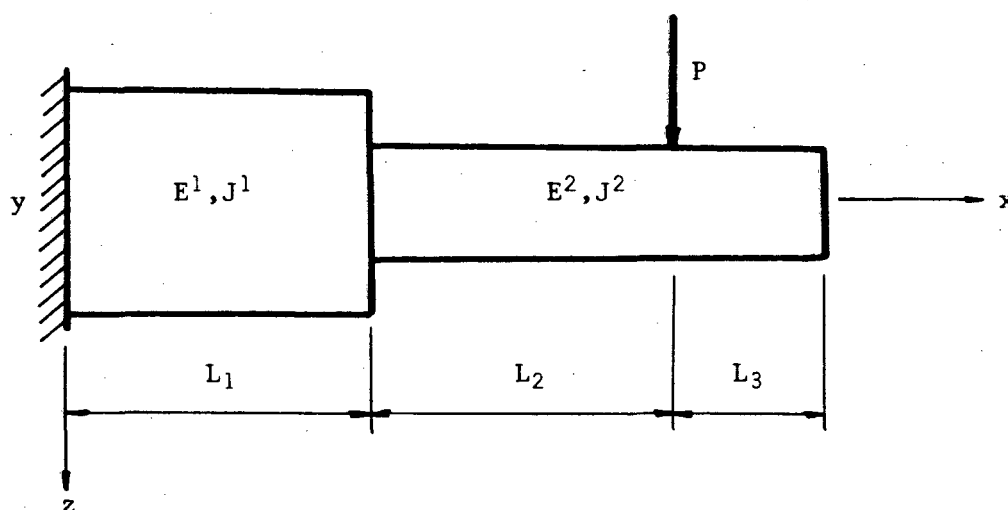


FIGURA 5.3 Viga em balanço, com rigidez variável, sujeita a carga concentrada.

Os dados numéricos para este problema são os seguin-

tes:

$$\begin{aligned} L_1 &= 150 \text{ mm} \\ \text{Comprimentos } L_2 &= 150 \text{ mm} \\ L_3 &= 100 \text{ mm} \end{aligned}$$

Módulos de elasticidade longitudinal:

$$E^1 = E^2 = 7 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$$

Momentos de inércia em relação ao eixo  $y$  (eixo central):

$$\begin{aligned} J^1 &= 1953.125 \times 10^3 \text{ mm}^4 \\ J^2 &= 390.625 \times 10^3 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Carga concentrada em  $x = 300 \text{ mm}$ :

$$P = 5 \times 10^3 \text{ N.}$$

Para a solução numérica deste problema, subdivide-se a viga em três elementos, conforme a figura 5.4, de modo que em cada elemento se tenha  $E^k(x)J^k(x) \in C^2(I^k)$  e  $f^k(x) \in L_2(I^k)$ , podendo haver forças e momentos concentrados somente nos extremos dos elementos.

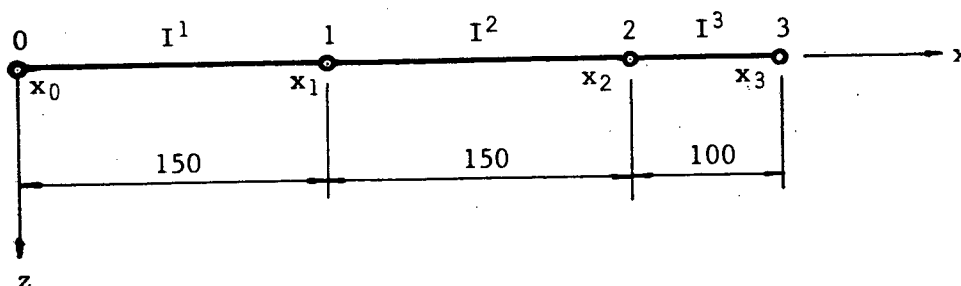


FIGURA 5.4 Partição da viga considerando-se a rigidez e a carga.



Na tabela 5.2, os resultados numéricos obtidos através do MMFGL são comparados com os analíticos exatos, quando foi pré-especificado  $k_2 = k_3 = 1$ .

TABELA 5.2 Viga engastada-livre. Resultados numéricos de deslocamentos lineares e angulares:  $w, \theta$ ; momento fletor,  $M$ , e força cortante,  $T$ . Coeficientes:  $k_2 = 1 \text{ N.mm}$ ,  $k_3 = 1 \text{ N/mm}$ .

Ponto	$x$ (mm)	$w$ (mm)	$\theta \times 10^2$ (rad)	$M \times 10^{-5}$ (N.mm)	$T$ (N)
		(Resultados exatos)			
		(Resultados numéricos - MMFGL)			
0	0.	0.	0.	-1.5	500.
		0. (*)	0. (*)	-1.500	500.0
1	75.	0.0283	0.0720	-1.125	500.
		0.02829	0.07200	-1.125	500.0
2	150.	0.1029	0.1233	-0.750	500.
		0.1029	0.1234	-0.7500	500.0
3	225.	0.2597	0.2778	-0.375	500.
		0.2597	0.2777	-0.3751	500.0
4	300.	0.4937	0.3291	0.	0.
		0.4937	0.3291	0.	0.
5	350.	0.6582	0.3291	0.	0.
		0.6583	0.3291	0.	0.
6	400.	0.8229	0.3291	0.	0.
		0.8229	0.3291	0. (*)	0. (*)

Observa-se nesta tabela que os resultados numéricos pra-

ticamente coincidem com os analíticos, tanto nos pontos nodais como nos pontos não-nodais (internos aos elementos).

Essa aplicação é repetida para valores de  $k_2$  e  $k_3$  entre 0.01 e 1000. Os resultados não apresentam alterações em relação aos apresentados na tabela 5.2. Somente para evidenciar esse comportamento, nas tabelas 5.3 e 5.4 são mostrados os resultados obtidos fazendo-se  $k_2 = 500 \text{ N.mm}$ ,  $k_3 = 500 \text{ N/mm}$  e  $k_2 = 0.1 \text{ N.mm}$ ,  $k_3 = 0.1 \text{ N/mm}$ .

É oportuno observar que o MMFGL pode representar a configuração de corpo rígido, que o último trecho da viga assume, e isso pode ser verificado a partir dos resultados obtidos para as variáveis em pontos deste trecho.

TABELA 5.3 Viga engastada-livre. Resultados numéricos de deslocamentos lineares e angulares:  $w$ ,  $\theta$ ; momento fletor,  $M$ , e força cortante,  $T$ . Coeficientes:  $k_2 = 500 \text{ N.mm}$ ,  $k_3 = 500 \text{ N/mm}$

Ponto	x (mm)	w (mm)	$\theta \times 10^2$ (rad)	$M \times 10^{-6}$ N.mm	T (N)
		(Resultados exatos)			
		(Resultados numéricos - MMFGL)			
0	0.	0.	0.	-1.5	500.
		0. (*)	0. (*)	-1.500	500.0
1	75.	0.0283	0.0720	-1.125	500.0
		0.02829	0.07200	-1.125	500.0
2	150.	0.1029	0.1233	-0.750	500.
		0.1029	0.1234	-0.750	500.
3	225.	0.2597	0.2778	-0.375	500.
		0.2598	0.2778	-0.3751	500.
4	300.	0.4937	0.3291	0.	0.
		0.4937	0.3291	0.	0.
5	350.	0.6582	0.3291	0.	0.
		0.6583	0.3291	0.	0.
6	400.	0.8229	0.3291	0.	0.
		0.8229	0.3291	0. (*)	0. (*)

TABELA 5.4 Viga engastada-livre. Resultados numéricos de deslocamentos linear e angular:  $w$  e  $\theta$ ; momento fletor,  $M$ , e força cortante,  $T$ . Coeficientes:  $k_2 = 0.1 \text{ N.mm}$ ,  $k_3 = 0.1 \text{ N/mm}$ .

Ponto	x (mm)	w (mm)	$\theta \times 10^2$ (rad)	$M \times 10^{-6}$ (N.mm)	T (N)
		(Resultados exatos)			
(Resultados numéricos - MMFGL)					
0	0.	0.	0.	-1.5	500.
		0. (*)	0. (*)	-1.500	500.0
1	75.	0.283	0.0720	-1.125	500.
		0.02824	0.07200	-1.125	500.0
2	150.	0.1029	0.1233	-0.750	500.
		0.1028	0.1234	-0.7500	500.0
3	225.	0.2597	0.2778	-0.375	500.
		0.2597	0.2777	-0.3751	500.0
4	300.	0.4937	0.3291	0.	0.
		0.4937	0.3291	0.	0.
5	350.	0.6582	0.3291	0.	0.
		0.6582	0.3291	0.	0.
6	400.	0.8229	0.3291	0.	0.
		0.8229	0.3291	0. (*)	0. (*)

## CAPÍTULO 6

### **APLICAÇÃO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL EM MEMBRANAS ELÁSTICAS**

#### 6.1 Introdução

Os desenvolvimentos teóricos a respeito de existência, unicidade e regularidade da solução de problemas de valores de contorno elípticos, estão bem estabelecidos para diversas classes de problemas, conforme se observa, por exemplo, em [53], [74] e [76]. Entretanto, a determinação da solução analítica somente é possível para os operadores mais simples, em domínios cujos contornos coincidam com linhas de coordenadas e condições de contorno convencionais. Em geral a solução é aproximada. Com esse objetivo, vários métodos foram desenvolvidos. Dentre eles, destacam-se o de diferenças finitas, os variacionais, o de elementos finitos e o de elementos de contorno.

É difícil realizar uma comparação de eficiência computacional entre esses métodos, em vista das dificuldades para delinear os fatores que nela entrariam. Se, eventualmente, ela fosse realizada, a conclusão seria que há para cada método contextos em que ele poderia ser aplicado eficientemente. Por isso, justifica-se plenamente o desenvolvimento de novas formulações, que ampliem o campo de aplicação dos métodos, aumentem a capacidade destes para propiciar resultados precisos e reduzam

deficiências de formulações estabelecidas.

Os trabalhos que mais diretamente contribuíram para o desenvolvimento do MMFGL já foram comentados no Capítulo 2. É oportuno lembrar que, nos problemas analisados por HORAK em [39], por BURNS em [38] e por LAWRENCE em [40], sempre foi empregada função de Green determinada analiticamente. Por isso, os domínios dos problemas ficaram restritos aos que possuem contornos coincidentes com linhas de coordenadas cartesianas ou polares. A necessidade de um estado auxiliar para atuar na relação de reciprocidade é característica das técnicas de contorno, e, como ODEN & CAREY afirmam em [54], página 215, as principais limitações dos métodos de elementos de contorno estão na necessidade de se ter uma fórmula de Green e uma solução fundamental apropriada.

Nesta parte do trabalho, desenvolve-se o MMFGL, proposto no Capítulo 2, para membranas elásticas não-homogêneas. No caso geral, não se dispõe de uma solução fundamental para esses problemas. Assim, as matrizes de Green serão calculadas diretamente, pela técnica apresentada no Capítulo 3.

Para a abordagem pretendida, inicialmente se estabelece o problema numa estrutura matemática condizente com as técnicas de contorno. Em seguida, escolhem-se os espaços funcionais onde o problema está inserido, e obtém-se uma relação de reciprocidade generalizada para o problema em estudo. Depois, obtêm-se as representações integrais da solução em pontos do domínio e do contorno. Continuando, a aproximação numérica do problema é feita variacionalmente, e a discretização é baseada em elementos finitos. Mostra-se todo o procedimento de aproximação direta das matrizes de Green. Ao final, descrevem-se várias aplicações do MMFGL, que servem para testá-lo quanto à flexibi-

lidade na abordagem desses tipos de problemas e para compará-lo com outros métodos.

## 6.2 Preliminares

Considere-se uma membrana que ocupa um domínio aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , situada em um plano, escolhido para ser o plano  $xy$  de um sistema de coordenadas cartesianas  $xyz$ , e que possui como contorno uma curva plana  $\partial\Omega$ , fechada, que localmente seja lipshitziana [53]. Admita-se que a membrana esteja sob ação de uma tensão  $T(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ , sendo  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Externamente, suponha-se que atuem sobre a membrana pressões normais a  $\Omega$ ,  $f(x, y) \in L_2(\Omega)$ , conforme mostra a figura 6.1.

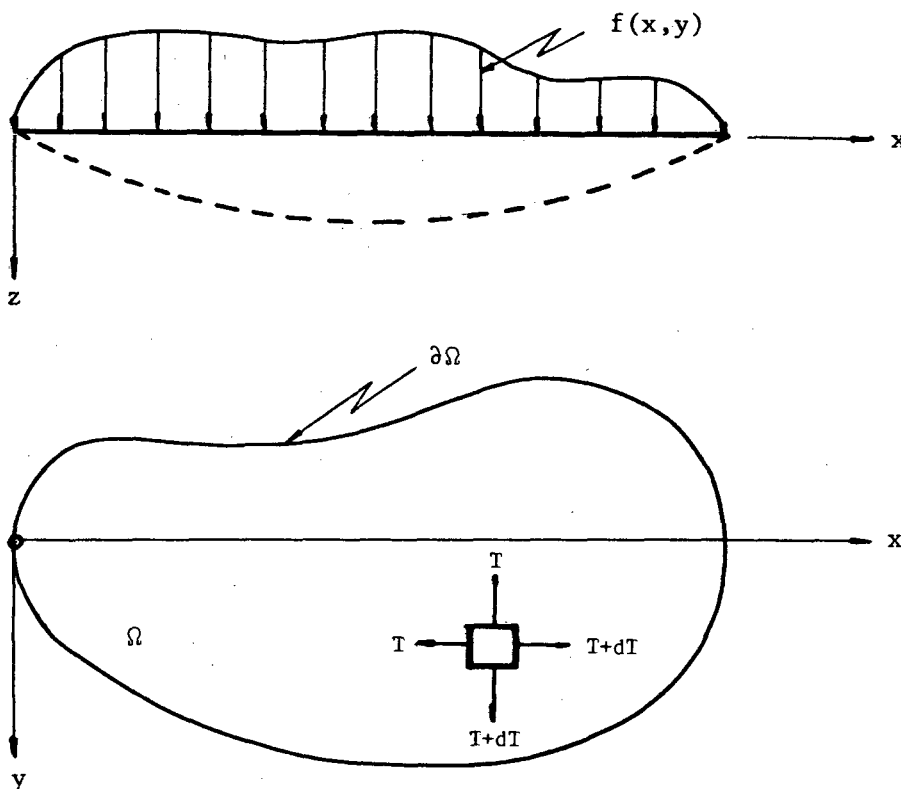


FIGURA 6.1 Membrana elástica.

Admitindo-se pequenas deformações, o deslocamento transversal  $w = w(x, y)$ , segundo o eixo  $z$ , satisfaz a seguinte equação diferencial, [77]:

$$\nabla \cdot [T(P)\nabla w(P)] = -f(P), \quad P \in \Omega, \quad (6.1)$$

juntamente com a condição de contorno

$$\ell[w(p)] = \bar{\alpha}, \quad p \in \partial\Omega, \quad (6.2)$$

onde  $f$  é pressão normal externa,  $T$  é tensão por unidade de comprimento e  $\ell(\cdot)$  é combinação linear de operadores de contorno definidos por

$$\text{Tr}[(\cdot)]; \quad (6.3)$$

$$\text{Tr}\left[T(p) \frac{\partial(\cdot)}{\partial n}\right]; \quad (6.4)$$

sendo  $\partial/\partial n$  o operador de derivada normal e

$$\text{Tr}[g(p)] = \lim_{P \rightarrow p} g(P), \quad P \in \Omega, \quad p \in \partial\Omega. \quad (6.5)$$

O operador (6.3) serve para condições de contorno de Dirichlet, e o (6.4) para condições de Neumann.

### 6.3 Formulação do MMFGL para Membranas Elásticas

Considere-se a região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , subdividida em  $N$  subregiões  $\Omega^k$ , tal que

$$\bigcup_{k=1}^N \bar{\Omega}^k = \bar{\Omega}, \quad \Omega^k \cap \Omega^m = \emptyset, \quad k \neq m, \quad (6.6)$$



doravante denominadas de **elementos**. Considere-se  $w^k$ ,  $T^k$  e  $f^k$  restrições, respectivamente, de  $w$ ,  $T$  e  $f$  ao elemento  $\Omega^k$ . A partição deve ser realizada de forma que em cada  $\Omega^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  se tenha  $T^k \in C^1(\Omega^k)$  e  $f^k \in L_2(\Omega^k)$ .

Para estabelecer a relação de reciprocidade que dá origem à formulação MMFGL para o problema de membrana elástica apresentado em (6.1) e (6.2), de acordo com (2.26-2.31), identificam-se os seguintes espaços:

$$H = H^1(\Omega^1) \times H^1(\Omega^2) \times \dots \times H^1(\Omega^N), \quad (6.7)$$

$$F = H^1(\Omega^1) \times H^1(\Omega^2) \times \dots \times H^1(\Omega^N), \quad (6.8)$$

$$U = H^{-1}(\Omega^1) \times H^{-1}(\Omega^2) \times \dots \times H^{-1}(\Omega^N), \quad (6.9)$$

$$V = L_2(\Omega^1) \times L_2(\Omega^2) \times \dots \times L_2(\Omega^N), \quad (6.10)$$

$$\partial H = H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^1) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^2) \times \dots \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^N), \quad (6.11)$$

$$\partial F = H^{+\frac{1}{2}}(\partial\Omega^1) \times H^{+\frac{1}{2}}(\partial\Omega^2) \times \dots \times H^{+\frac{1}{2}}(\partial\Omega^N). \quad (6.12)$$

As formas bilineares definidas em (2.32) ficam sendo

$B : H \times F \rightarrow \mathbb{R}$  e  $b : H \times F \rightarrow \mathbb{R}$ , no sentido do traço, com suas expressões dadas por

$$B(w, v) = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega^k} T^k(p) \nabla[w^k(p)] \cdot \nabla[v^k(p)] \, d\Omega(p) \quad (6.13)$$

e

$$b(\gamma_0 w, \gamma_0 v) = \sum_{k=1}^N \int_{\partial\Omega^k} k_0 w^k(p) v^k(p) \, ds(p), \quad (6.14)$$

onde  $\nabla[.]$  é o operador gradiente e  $d\Omega(P)$  e  $ds(p)$  representam, respectivamente, as medidas de integração de área e linha, em relação às coordenadas dos pontos  $P \in \Omega^k$  e  $p \in \partial\Omega^k$ . Definem-se, ainda, os seguintes espaços:

$$H_A = H_{A^1}(\Omega^1) \times H_{A^2}(\Omega^2) \times \dots \times H_{A^N}(\Omega^N), \quad (6.15)$$

$$F_{A^*} = H_{A^*1}(\Omega^1) \times H_{A^*2}(\Omega^2) \times \dots \times H_{A^*N}(\Omega^N), \quad (6.16)$$

onde:

$$H_{A^k} = \{ v \in H^1(\Omega^k); A^k v \in L_2(\Omega^k) \}, \quad (6.17)$$

$$H_{A^*k} = \{ v \in H^1(\Omega^k); A^*k v \in H^{-1}(\Omega^k) \} \quad (6.18)$$

Trabalhando com as restrições de  $B(.,.,.)$  e  $b(.,.,.)$  ao elemento  $\Omega^k$ , denominadas de  $B^k(.,.,.)$  e  $b^k(.,.,.)$ , respectivamente, e empregando as equações (2.17) e (2.18), obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^k} T^k(P) \nabla[w^k(P)] \cdot \nabla[v^k(P)] d\Omega(P) + \\ & + \int_{\partial\Omega^k} k_o w^k(p) v^k(p) ds(p) = \\ & - \int_{\Omega^k} v^k(P) \nabla \cdot [T^k(P) \nabla w^k(P)] d\Omega(P) + \\ & + \int_{\partial\Omega^k} [k_o w^k(p) + T^k(p) \frac{\partial w^k(p)}{\partial n_p^k}] v^k(p) ds(p), \end{aligned}$$

$$w^k \in H_{A^k}^1, v^k \in L_2(\Omega^k), \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^k} T^k(P) \nabla [w^k(P)] \cdot \nabla [v^k(P)] \, d\Omega(P) + \\
& + \int_{\partial\Omega^k} k_0 w^k(p) v^k(p) \, ds(p) = \\
& - \int_{\Omega^k} w^k(P) \nabla \cdot [T^k(P) \nabla v^k(P)] \, d\Omega(P) + \\
& + \int_{\partial\Omega^k} [k_0 v^k(p) + T^k(p) \frac{\partial v^k(p)}{\partial n_p}] w^k(p) \, ds(p), \\
& w^k \in H^1(\Omega^k), \quad v^k \in H_{A^*k}(\Omega^k). \quad (6.20)
\end{aligned}$$

Identificando as equações (6.19) e (2.17), tem-se

$$A^k(\cdot) = - \nabla \cdot [T^k(P) \nabla(\cdot)], \quad (6.21)$$

$$\delta^k(\cdot) = \delta_0^k(\cdot), \quad (6.22)$$

$$\gamma^{*k}(\cdot) = \gamma_0^*(\cdot), \quad (6.23)$$

onde

$$\delta_0^k(\cdot) = k_0(\cdot) + T^k(p) \frac{\partial(\cdot)}{\partial n_p^k}, \quad (6.24)$$

e

$$\gamma_0^{*k}(\cdot) = (\cdot) \Big|_{\partial\Omega^k}. \quad (6.25)$$

Analogamente, identificando (6.20) e (2.18) tem-se

$$A^{*k}(\cdot) = A^k(\cdot), \quad (6.26)$$

$$\delta^{*k}(\cdot) = \delta^k(\cdot), \quad (6.27)$$

$$\gamma^k(\cdot) = \gamma_0^k(\cdot). \quad (6.28)$$

Escolhendo  $w^k \in H_{A^k}(\Omega^k)$  e  $v^k \in H_{A^*k}(\Omega^k)$ , as equações (6.19) e (6.20) fornecem a seguinte relação de reciprocidade:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^k} w^k(P) \{ - \nabla \cdot [T^k(P) \nabla v^k(P)] \} d\Omega(P) = \\ & = \int_{\Omega^k} v^k(P) \{ - \nabla \cdot [T^k(P) \nabla w^k(P)] \} d\Omega(P) - \\ & - \int_{\partial\Omega^k} [k_0 v^k(p) + T^k(p) \frac{\partial v^k(p)}{\partial n_p^k}] w^k(p) ds(p) + \\ & + \int_{\partial\Omega^k} [k_0 w^k(p) + T^k(p) \frac{\partial w^k(p)}{\partial n_p^k}] v^k(p) ds(p), \\ & w^k \in H_{A^k}(\Omega^k), \quad v^k \in H_{A^*k}(\Omega^k). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Se o estado auxiliar,  $\{v^k, \frac{\partial v^k}{\partial n^k}\}$ , satisfizer (2.20) e (2.21) e for substituído na equação (6.29), obtém-se

$$\begin{aligned} w^k(Q) &= \int_{\Omega^k} G^k(P, Q) f^k(P) d\Omega(P) + \\ & + \int_{\partial\Omega^k} \gamma_0 [G^k(p, Q)] F^k(p) ds(p), \quad Q \in \Omega^k, \end{aligned} \quad (6.30)$$

após haver definido, no contorno  $\partial\Omega^k$ , a quantidade  $F^k$  através de

$$F^k(p) = k_0 w^k(p) + T^k(p) \frac{\partial w^k}{\partial n_p^k}, \quad p \in \partial\Omega^k, \quad (6.31)$$

e trocado  $v^k(P)$  por  $G^k(P, Q)$ , para indicar a dependência do esta-

do auxiliar em relação ao ponto de aplicação da distribuição de Dirac.

A equação (6.30) é a representação integral da solução do problema apresentado em (6.1) e (6.2) para pontos do domínio  $\Omega^k$ .

Se o estado auxiliar satisfizer as equações (2.23) e (2.24) e for substituído na equação (6.29), obtém-se

$$\begin{aligned} \gamma_0[w^k(q)] = & \int_{\Omega^k} \gamma_0[G^k(p,q)] f^k(p) d\Omega(p) + \\ & + \int_{\partial\Omega^k} \gamma_0[G^k(p,q)] F^k(p) ds(p), \quad q \in \partial\Omega^k, \quad (6.32) \end{aligned}$$

onde  $\gamma_0$  indica o operador - traço de ordem zero, ou seja, uma extensão contínua de valores funcionais restritos ao contorno. É importante notar que, na representação (6.32), não aparecem derivadas da função de Green  $G^k$ . Portanto, as singularidades envolvidas no MMFGL são do tipo fraca, [22].

É conveniente introduzir na formulação alguns elementos da teoria de membranas elásticas. Sabe-se, por [78], que a força normal de membrana,  $s^k$ , é dada por

$$s^k(p) = T^k(p) \frac{\partial w^k(p)}{\partial n_p^k}, \quad p \in \partial\Omega^k. \quad (6.33)$$

Então, a equação (6.31) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F^k(p) = k_0 w^k(p) + s^k(p), \quad p \in \partial\Omega^k, \quad (6.34)$$

estabelecendo-se uma associação de  $F^k$  com força normal ao contorno da membrana.

As equações (6.30) e (6.32) constituem a formulação do

MMFGL para problemas de membranas elásticas, para pontos tanto do domínio  $\Omega^k$  como do contorno  $\partial\Omega^k$ . O sistema global é obtido por sobreposição dos elementos, realizada através das condições de transmissão nas interfaces dos elementos,  $\Omega^k$  e  $\Omega^m$ , por exemplo. Neste problema, como  $w^k \in H_{A^k}^1 C^1 H$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , e considerando a equação (2.51), as condições de transmissão ficam sendo

$$w^k(a) = w^m(a), \quad (6.35)$$

$$F^k(a) = F^m(a) \quad (6.36)$$

onde  $a \in \partial\Omega^{k,m}$  (interface dos elementos  $k$  e  $m$ ).

A condição descrita na equação (6.36) pode ser substituída por outra, em função das tensões normais aos contornos dos elementos  $k$  e  $m$ . De fato,

$$F^k(a) = k_0 w^k(a) + T^k(a) \frac{\partial w^k(a)}{\partial n_a^k}, \quad (6.37)$$

e

$$F^m(a) = k_0 w^m(a) + T^m(a) \frac{\partial w^m(a)}{\partial n_a^m}. \quad (6.38)$$

Portanto, em vista das equações (6.35) e (6.36), tem-se

$$T^k(a) \frac{\partial w^k(a)}{\partial n_a^k} = T^m(a) \frac{\partial w^m(a)}{\partial n_a^m} \quad (6.39)$$

$a \in \partial\Omega^{k,m}.$

Em cada ponto  $p \in \partial\Omega$ , a condição de contorno é inserida na equação (6.32) através de  $\gamma_0 w^k(p) = \text{Tr}[w^k(p)]$ , se for do

tipo Dirichlet, ou através da relação encontrada em (6.34), se for do tipo Neumann ou Cauchy.

#### 6.4 Aproximação Numérica

Para aproximação dos problemas de membranas elásticas, adota-se a abordagem variacional, desenvolvida na Seção 2 do Capítulo 3.

##### 6.4.1 Formulação variacional das representações integrais

Considerem-se, para efeito dos desenvolvimentos que se seguem, os espaços  $H$ ,  $F$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $\partial H$  e  $\partial F$ , definidos conforme (6.7 - 6.12), enquanto que os definidos em (3.5 - 3.7) agora são

$$H_A = H_{A^1}(\Omega^1) \times H_{A^2}(\Omega^2) \times \dots \times H_{A^N}(\Omega^N), \quad (6.40)$$

$$\partial H_{\alpha} = \partial H_{\alpha_1}(\partial\Omega^1) \times \partial H_{\alpha_2}(\partial\Omega^2) \times \dots \times \partial H_{\alpha_N}(\partial\Omega^N), \quad (6.41)$$

$$\partial F'_{\beta} = \partial F'_{\beta_1}(\partial\Omega^1) \times \partial F'_{\beta_2}(\partial\Omega^2) \times \dots \times \partial F'_{\beta_N}(\partial\Omega^N), \quad (6.42)$$

sendo

$$H_{A^k}(\Omega^k) = \{u \in H^1(\Omega^k); A^k u \in L_2(\Omega^k)\} \quad (6.43)$$

$$\partial H_{\alpha_k}(\partial\Omega^k) = \{v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^k); v = \alpha_k, \text{ em } \partial\Omega^k \cap \partial\Omega_u\}, \quad (6.44)$$

$$\partial F'_{\beta_k}(\partial\Omega^k) = \{F \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega^k); F = \beta_k, \text{ em } \partial\Omega^k \cap \partial\Omega_F\}. \quad (6.45)$$

Adiante, restringe-se o desenvolvimento para um elemento  $\Omega^k$ . Em conseqüência, todas as variáveis serão restritas a esse elemento.

Após essas definições, e considerando as equações (3.10-3.13) e (3.8 - 3.9) formula-se o problema: "Dado  $f^k \in L_2(\Omega^k)$ , encontrar  $w^k \in H^1(\Omega^k)$ ,  $\gamma_0 w^k \in \partial H_{\alpha_k}(\partial\Omega^k)$  e  $F^k \in \partial F'_{\beta_k}(\partial\Omega^k)$  tais que

$$\begin{aligned} \text{i) } & \int_{\Omega^k} w^k(Q) v^k(Q) d\Omega^k(Q) - \\ & - \int_{\Omega^k} \int_{\partial\Omega^k} G^k(p, Q) F^k(p) v^k(Q) ds^k(p) d\Omega^k(Q) = \\ & = \int_{\Omega^k} \int_{\Omega^k} G^k(p, Q) f^k(p) v^k(Q) d\Omega^k(p) d\Omega^k(Q), \\ & \forall v^k \in H^1(\Omega^k) \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } & \int_{\partial\Omega^k} \gamma_0 w^k(p) u^k(p) ds^k(p) - \\ & - \int_{\partial\Omega^k} \int_{\partial\Omega^k} G^k(p, q) F^k(p) u^k(q) ds^k(p) ds^k(q) = \\ & = \int_{\partial\Omega^k} \int_{\Omega^k} G^k(p, q) f^k(p) u^k(q) d\Omega^k(p) ds^k(p), \\ & \forall u^k \in \partial H. \end{aligned} \quad (6.47)$$

É oportuno observar que, se  $f^k$  não depender de  $w^k$ , o sistema formado pelas equações (6.46) e (6.47) é desacoplado.

A equação (6.47) tem ação regularizadora sobre a variável  $F^k$ . De fato, se  $F^k \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^k)$ , o potencial  $w^k(Q)$  criado por  $F^k$  através de

$$w^k(Q) = \int_{\partial\Omega^k} G(p, Q) F^k(p) ds^k(p), \quad (6.48)$$



pertence a  $H^1(\Omega^k)$ , conforme, por exemplo, NECAS em [53], página 237. Logo,  $\gamma_0 w^k \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^k)$ . Por outro lado, se (6.47) for satisfeita, então  $\gamma_0 w^k \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^k)$ , e das propriedades dos espaços de Sobolev, conforme ODEN [54], tem-se que  $w^k \in H^1(\Omega^k)$ . Dos resultados sobre regularidades de problemas elípticos, conforme, ainda, Nečas, resulta que  $F^k \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^k)$ .

#### 6.4.2 O problema discreto

No desenvolvimento que segue, o sobre-índice  $k$ , indicativo de variável restrita ao subdomínio  $\Omega^k$ , sempre que não houver dúvida, não será empregado. Assim, considere-se  $\bar{\Omega}$  e  $\partial\bar{\Omega}$  subdivididos, em  $E^d$  elementos de domínio e  $E^c$  elementos de contorno, respectivamente. Sejam os espaços de dimensões finitas  $V^h \subset L_2(\Omega)$ ,  $H^h \subset H^1(\Omega)$  e  $\partial H^h \subset H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , conforme descrito na Seção 3 do Capítulo 3. A discretização do problema apresentado nas equações (6.46) e (6.47) é obtida, a partir das equações (3.24) e (3.25) e fica sendo a seguinte: "Dados  $f_h \in L_2(\Omega)$ ,  $\alpha \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  e  $\beta \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , encontrar  $w_h \in H^h$ ,  $\gamma_0 w_h \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  e  $F_h \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , tais que

$$\begin{aligned} \text{i) } & \int_{\Omega^h} w_h(Q) v_h(Q) d\Omega(Q) - \\ & - \int_{\Omega^h} \int_{\partial\Omega} \gamma_0 G(p, Q) F_h(p) v_h(Q) ds(p) d\Omega(Q) = \\ & = \int_{\Omega^h} \int_{\Omega^h} G(P, Q) f_h(P) v_h(Q) d\Omega(P) d\Omega(Q), \end{aligned}$$

$$\forall v_h \in H^1(\Omega), \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } & \int_{\partial\Omega^h} \gamma_0 w_h(q) t_h(q) ds(q) - \\
& - \int_{\partial\Omega^h} \int_{\Omega^h} \gamma_0 G(p,q) F_h(p) t_h(q) ds(p) ds(q) = \\
& = \int_{\partial\Omega^h} \int_{\Omega^h} G(P,q) f_h(P) t_h(q) d\Omega(P) ds(q), \\
& \forall t_h \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \tag{6.50}
\end{aligned}$$

Substituindo em (6.49) e (6.50) as expansões

$$w_h(P) = \sum_{i=1}^J \psi_i(P) w_i, \tag{6.51}$$

$$\gamma_0 w_h(p) = \sum_{m=1}^N \varphi_m(p) w_m^C, \tag{6.52}$$

$$F_h(p) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(p) F_j, \tag{6.53}$$

$$f_h(P) = \sum_{i=1}^J \psi_i(P) f_i, \tag{6.54}$$

e fazendo  $v_h = \psi_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, J$  e  $t_h = \varphi_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$ , resultam as seguintes relações globais:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{w}} - \underline{\underline{B}} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{f}} \tag{6.55}$$

e

$$\underline{\underline{C}} \underline{\underline{w}}^C - \underline{\underline{D}} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{f}}, \tag{6.56}$$

sendo os elementos das matrizes dados por

$$A_{ri} = \int_{\Omega^h} \psi_i(Q) \psi_r(Q) d\Omega(Q), \quad 1 \leq i, r \leq J, \tag{6.57}$$

$$B_{rs} = \int_{\Omega^h} \int_{\partial\Omega^h} \gamma_0 G(p, Q) \varphi_s(p) \psi_r(Q) ds(p) d\Omega(Q),$$

$$1 \leq s \leq N; \quad 1 \leq r \leq J, \quad (6.58)$$

$$C_{ms} = \int_{\partial\Omega^h} \varphi_m(p) \varphi_s(p) ds(p), \quad 1 \leq m, s \leq N, \quad (6.59)$$

$$D_{ms} = \int_{\partial\Omega^h} \int_{\partial\Omega^h} \gamma_0 G(p, q) \varphi_m(p) \varphi_s(q) ds(p) ds(q)$$

$$1 \leq m, s \leq N \quad (6.60)$$

$$L_{rj} = \int_{\Omega^h} \int_{\Omega^h} G(P, Q) \psi_j(P) \psi_r(Q) d\Omega(P) d\Omega(Q),$$

$$1 \leq j, r \leq J, \quad (6.61)$$

$$M_{sj} = \int_{\partial\Omega^h} \int_{\Omega^h} G(P, q) \psi_j(P) \varphi_s(q) d\Omega(P) ds(q)$$

$$1 \leq s \leq N; \quad 1 \leq j \leq J. \quad (6.62)$$

#### 6.4.3 Aproximação direta das matrizes de Green

As matrizes  $B$ ,  $L$ ,  $D$  e  $M$  são obtidas diretamente através do procedimento desenvolvido na Seção 4 do Capítulo 3. Para tanto, de (3.44) e (3.45) agora se tem

$$G_j^\Omega(Q) = \int_{\Omega^h} G(P, Q) \psi_j(P) d\Omega(P), \quad (6.63)$$

e

$$G_s^\Gamma(Q) = \int_{\partial\Omega^h} \gamma_0 G(p, Q) \varphi_s(p) ds(p). \quad (6.64)$$

Aditem-se as seguintes expansões para  $G_j^\Omega$  e  $G_s^\Gamma$ :

$$G_j^\Omega(Q) = \sum_{k=1}^J \psi_k(Q) g_{kj}^\Omega, \quad Q \in \Omega, \quad (6.65)$$

$$G_s^\Gamma(Q) = \sum_{k=1}^J \psi_k(Q) g_{ks}^\Gamma, \quad Q \in \Omega, \quad (6.66)$$

onde  $g_{kj}^\Omega$  e  $g_{ks}^\Gamma$  são coeficientes a serem determinados.

Mas, uma vez conhecidas as funções  $G_j^\Omega(Q)$  e  $G_s^\Gamma(Q)$ , os elementos das matrizes  $\underline{L}$  e  $\underline{B}$  podem ser calculados. De fato, em vista das equações (3.48) e (3.49), bem como (6.63 - 6.66) as equações (6.58) e (6.61) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} L_{rj} &= \int_{\Omega^h} G_j^\Omega(Q) \psi_r(Q) d\Omega(Q) = \\ &= \sum_{k=1}^J \int_{\Omega^h} \psi_r(Q) \psi_k(Q) d\Omega(Q) g_{kj}^\Omega, \quad 1 \leq r, j \leq J, \end{aligned} \quad (6.67)$$

e

$$\begin{aligned} B_{rs} &= \int_{\Omega^h} G_s^\Gamma(Q) \psi_r(Q) d\Omega(Q) = \\ &= \sum_{k=1}^J \int_{\Omega^h} \psi_r(Q) \psi_k(Q) d\Omega(Q) g_{ks}^\Gamma, \\ &1 \leq r \leq j; \quad 1 \leq s \leq N. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Das equações (6.67) e (6.68), deduz-se que o problema de obter os elementos das matrizes  $\underline{L}$  e  $\underline{B}$ , reduz-se ao de determinar os coeficientes  $g_{kj}^\Omega$  e  $g_{ks}^\Gamma$ . Além disso, as outras duas matrizes também podem ser facilmente obtidas, pois de (3.51), tem-se que

$$\underline{M} = \underline{B}^T, \quad (6.69)$$

e a partir de (3.53) a matriz  $\underline{D}$  pode ser calculada através de

$$D_{ms} = \int_{\partial\Omega^h} \gamma_o G_s^\Gamma(q) \vartheta_m(q) ds(q), \quad (6.70)$$

desde que os coeficientes da expansão (6.66) sejam determinados.

A seguir, determina-se  $G_j^\Omega$  e  $G_s^\Gamma$ .

As equações (3.56) e (3.57) ficam, agora, sendo

$$\nabla_Q \cdot [T(Q) \nabla G_j^\Omega(Q)] = \psi_j(Q), \quad Q \in \Omega, \quad (6.71)$$

$$k_o G_j^\Omega(q) + T(q) \frac{\partial G_j^\Omega(q)}{\partial n} = 0, \quad q \in \partial\Omega, \quad (6.72)$$

que definem  $G_j^\Omega$ .

Analogamente, de (3.60) e (3.61) têm-se as equações

$$\nabla_Q \cdot [T(Q) \nabla G_s^\Gamma(Q)] = 0, \quad Q \in \Omega, \quad (6.73)$$

$$k_o G_s^\Gamma(q) + T(q) \frac{\partial G_s^\Gamma(q)}{\partial n} = \vartheta_s(q), \quad q \in \partial\Omega, \quad (6.74)$$

que definem  $G_s^\Gamma$ .

A formulação variacional unificada proposta para esses dois problemas em (3.62), agora com as formas bilineares dadas conforme (6.13) e (6.14), torna-se a seguinte: "Encontrar  $\bar{G} \in H^1(\Omega)$ , tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} T(Q) \nabla[\bar{G}(Q)] \cdot \nabla[v(Q)] d\Omega(Q) + \\ & + \int_{\partial\Omega} k_o \gamma_o \bar{G}(q) \gamma_o v(q) ds(q) = \int_{\Omega} P^\Omega(Q) v(Q) d\Omega(Q) - \\ & - \int_{\partial\Omega} P^\Gamma(q) \gamma_o v(q) ds(q), \quad \forall v \in H^1(\Omega)", \quad (6.75) \end{aligned}$$

onde os termos que envolvem  $P^\Omega$  e  $P^\Gamma$  são excludentes. Com efeito, para determinar  $G_j^\Omega$  faz-se em (6.75)  $P^\Omega(Q) = \psi_j(Q)$  e  $P^\Gamma(q) = 0$ . Se em (6.75) for feito  $P^\Omega(Q) = 0$  e  $P^\Gamma(q) = \theta_s(q)$ , determina-se  $\bar{G} = G_s^\Gamma$ .

A aproximação do problema descrito em (6.75), feita por elementos finitos, como proposto na Seção 4 do Capítulo 3, fornece

$$[K] \begin{bmatrix} G^\Omega \\ G^\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^\Omega \\ R^\Gamma \end{bmatrix}, \quad (6.76)$$

sendo

$$K_{ik} = \int_{\Omega^h} T(Q) \nabla[\psi_i(Q)] \cdot \nabla[\psi_k(Q)] d\Omega(Q) \quad (6.77)$$

$$1 \leq i, k \leq J,$$

$$G_{kj}^\Omega = [g_{kj}^\Omega], \quad 1 \leq k, j \leq J, \quad (6.78)$$

$$G_{ks}^\Gamma = [g_{ks}^\Gamma], \quad 1 \leq k \leq J; \quad 1 \leq s \leq N, \quad (6.79)$$

$$R_{kj}^\Omega = [R_{kj}^\Omega], \quad R_{kj}^\Omega = \int_{\Omega^h} \psi_k(Q) \psi_j(Q) d\Omega(Q), \quad (6.80)$$

$$1 \leq k, j \leq J,$$

$$R_{ks}^\Gamma = [R_{ks}^\Gamma], \quad R_{ks}^\Gamma = \int_{\partial\Omega^h} \gamma_0 \psi_k(q) \theta_s(q) ds(q), \quad (6.81)$$

$$1 \leq k \leq J; \quad 1 \leq s \leq N,$$

Então, todos os coeficientes podem ser determinados simultaneamente.

O desenvolvimento exposto pode ser entendido tanto co-

mo restrito a um elemento como globalmente. No primeiro caso, o sistema global seria formado através da sobreposição das matrizes locais, com o auxílio das condições de transmissão apresentadas em (6.35) e (6.36), ou em (6.39).

Se o carregamento não depender do deslocamento transversal, a maneira de determinar as incógnitas de um problema é a exposta a seguir.

Primeiramente, resolve-se a equação (6.56), obtendo-se  $\underline{w}^c$  e  $\underline{F}$ , nos pontos do contorno. A força normal ao contorno é obtida a partir da equação (6.34). Calculado  $\underline{F}$ , o deslocamento transversal em pontos do domínio pode ser determinado sem ser necessário inverter a matriz  $\underline{A}$ , pois da equação (6.55) tem-se, localmente,

$$\underline{w}^k = \underline{A}^{k-1} \underline{L}^k \underline{f}^k + \underline{A}^{k-1} \underline{B}^k \underline{F}^k . \quad (6.82)$$

Mas as equações (6.67) e (6.68) fornecem, respectivamente,

$$\underline{L}^k = \underline{A}^k [\underline{G}^\Omega]^k , \quad (6.83)$$

e

$$\underline{B}^k = \underline{A}^k [\underline{G}^\Gamma]^k . \quad (6.84)$$

Portanto,

$$\underline{w}^k = [\underline{G}^\Omega]^k \underline{f}^k + [\underline{G}^\Gamma]^k \underline{F}^k \quad (6.85)$$

Então, a determinação dos deslocamentos em pontos internos envolve apenas multiplicação de matrizes por vetores.

## 6.5 Aplicação do MMFGL para Solução Numérica de Problemas de Membranas

A formulação MMFGL para membranas elásticas, apresentada na Seção 3 deste capítulo, foi aplicada para diferentes problemas, a fim de avaliar a precisão do método, comparar a sua eficiência com a de outros métodos e testar a sua convergência. As aplicações também tiveram o objetivo de testar a versatilidade do MMFGL para tratar contornos curvos, contornos com vértices e descontinuidades nas condições de contorno. Todas as aplicações realizadas foram testadas relativamente à dependência paramétrica da formulação. As matrizes de Green sempre foram calculadas diretamente, e as integrações realizadas numericamente. A regra de quadratura gaussiana de quatro pontos mostrou-se satisfatória em todas as aplicações.

### 6.5.1 Membranas retangulares fixas

#### 6.5.1.1 Problema 1

Considere-se o problema

$$P1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } w, \text{ tal que} \\ \nabla^2 w(P) = 50(-x^2 - y^2 + x + y), \\ P \equiv (x, y) \in \Omega \equiv (0, 1) \times (0, 1), \\ w(p) = 0, \quad p \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Nesta aplicação, verifica-se a precisão do MMFGL comparando-se os resultados numéricos obtidos com os resultados analí-



ticos disponíveis. Quando a comparação é feita entre resultados numéricos obtidos por métodos distintos e os resultados analíticos, avalia-se a capacidade dos métodos para atingirem certa ordem de precisão.

Os resultados numéricos encontrados por meio do MMFGL foram obtidos empregando-se a seguinte discretização, denominada M1: dezesseis elementos finitos quadráticos isoparamétricos de oito nós, no domínio  $\Omega$  e dezesseis elementos finitos quadráticos isoparamétricos unidimensionais, no contorno,  $\partial\Omega$ , que nada mais são do que traços de elementos de domínio, conforme mostram as figuras 6.2 e 6.3.

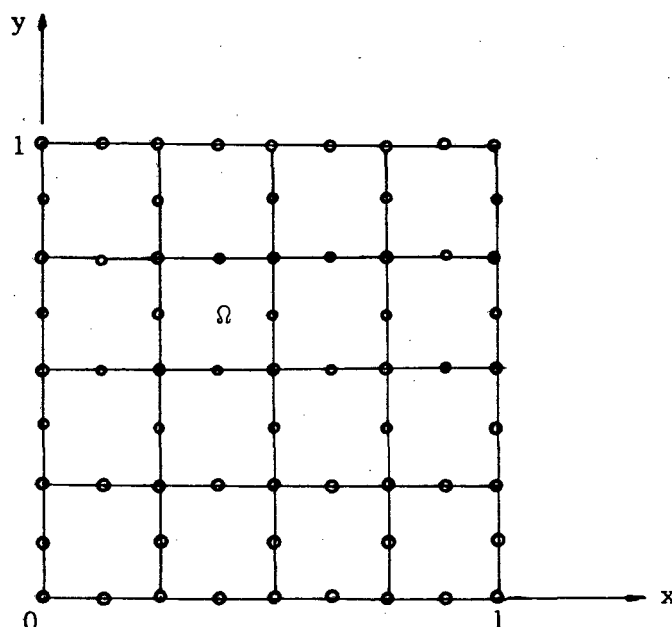


FIGURA 6.2 Partição do domínio: dezesseis elementos quadráticos isoparamétricos. Total de nós: sessenta e cinco.

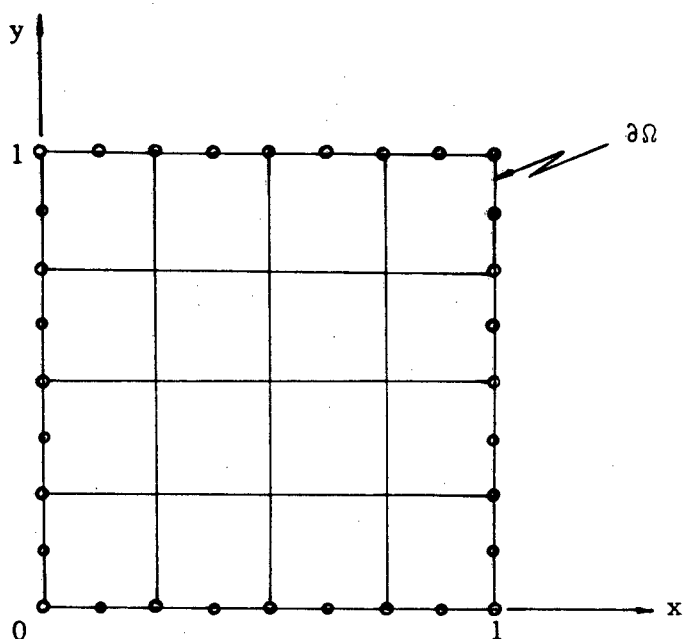


FIGURA 6.3 Partição do contorno: dezesseis elementos quadráticos isoparamétricos. Total de nós: trinta e dois.

Os elementos de domínio foram usados também como células de cargas. Não houve necessidade de tratamento especial nos vértices, pois eles não coincidem com pontos de descontinuidade das condições de contorno.

Para comparação com resultados numéricos obtidos por outro método, toma-se o de elementos finitos, de acordo com SPERANDIO [79]. São disponíveis quatro malhas,  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$ , cada uma contendo, respectivamente, trinta e dois, cento e vinte oito, quinhentos e doze e dois mil e quarenta e oito elementos triangulares lineares.

Na tabela 6.1 estão a solução exata e os resultados nu-

méricos do deslocamento transversal  $w(P)$ , obtidos através do MMFGL e do método de elementos finitos (doravante MEF), com as discretizações descritas anteriormente, fazendo-se  $k_0 = 1$ .

TABELA 6.1 Valores do deslocamento transversal  $w(P)$ , obtidos pelo MMFGL e pelo MEF.  $k_0 = 1$ .

$P = (x, y)$	Solução Exata	MMFGL $w(P)$	MEF - $w(P)$			
			$T_0 \equiv 32$	$T_1 \equiv 128$	$T_2 \equiv 512$	$T_3 \equiv 2048$
(0.5,0.5)	1.5625	1.5644	1.4160	1.5245	1.5529	1.5601
(0.375,0.5)	1.4648	1.4745		1.4289	1.4557	1.4625
(0.25,0.5)	1.1718	1.1763	1.0579	1.1423	1.1644	1.1700
(0.125,0.5)	0.6835	0.6892		0.6656	0.6790	0.6824

Nesta tabela, verifica-se que os resultados do MMFGL são precisos até a segunda casa decimal, enquanto que os do MEF alcançaram essa ordem de precisão somente com a malha  $T_3$ , que tem dois mil e quarenta e oito elementos. O MMFGL envolve sessenta e cinco graus de liberdade no problema auxiliar para cálculo das matrizes de Green, e trinta e dois na determinação da solução do problema. O MEF, para precisão da mesma ordem, envolveu novecentos e sessenta e um graus de liberdade. Para uma mesma ordem de esforço computacional, a malha do MEF seria a  $T_2$ , com quinhentos e doze elementos, e um total de duzentos e vinte e cinco graus de liberdade. Mas, com essa malha, o MEF forneceu resultados precisos apenas na primeira casa decimal.

A dependência da formulação em relação ao parâmetro  $k_0$  foi analisada, resolvendo-se o problema para valores de  $k_0$

que variavam entre  $10^{-3}$  e  $10^5$ . Não houve alteração nos resultados, conforme pode ser observado na tabela 6.2.

TABELA 6.2 Deslocamentos transversais em membrana retangular fixa, obtidos pelo MMFGL, para diferentes valores de  $k_0$ .

P (x, y)	Solução Exata	MMFGL - w(P)			
		$k_0=10^{-3}$	$k_0 = 1$	$k_0=10^{-4}$	$k_0=10^5$
(0.5,0.5)	1.5625	1.5644	1.5644	1.5644	1.5644
(0.375,0.5)	1.4648	1.4744	1.4744	1.4744	1.4744
(0.25,0.5)	1.1718	1.1763	1.1763	1.1763	1.1763
(0.125,0.5)	0.6835	0.6892	0.6892	0.6892	0.6892

### 6.5.1.2 Problema 2

Como segunda aplicação, considere-se o problema

$$P2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } w(P), \text{ tal que} \\ - \nabla^2 w(P) = 1, \\ P \equiv (x, y) \in \Omega \equiv (-1, 1) \times (-1, 1), \\ w(p) = 0, \quad p \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Nesta aplicação, avaliando a convergência do MMFGL, foram determinadas as matrizes de Green e a solução do problema, primeiro usando-se uma malha, denominada M2, formada por quatro elementos quadráticos isoparamétricos no domínio  $\Omega$  e oito elementos quadráticos isoparamétricos unidimensionais no contorno.

Em seguida, o problema foi resolvido empregando-se a malha M1, descrita no Problema 1.

Para comparação dos resultados obtidos pelo MMFGL, com  $k_0 = 1$ , tomaram-se os determinados por JASWON & SYMM [48], através do método indireto de elementos de contorno. Mas, para aumentar a precisão e a eficiência do método, esses autores usaram solução particular exata e fizeram todas as integrações analiticamente. Na discretização e aproximação, foram empregadas duas malhas, denominadas  $T_{64}$  e  $T_{128}$ , formadas, respectivamente, por sessenta e quatro e cento e vinte e oito elementos constantes. Os resultados são mostrados na tabela 6.3.

TABELA 6.3 Valores de deslocamento transversal obtidos pelo MMFGL e pelo método de elementos de contorno (MEC).

$P \equiv (x, y)$	MMFGL - $w(P)$		MEC - $w(P)$	
	M2	M1	$T_{64}$	$T_{128}$
(0.,0.)	0.2697	0.2941	0.2947	0.2947
(0.,0.5)	0.2402	0.2291	0.2293	0.2293
(0.5,0.5)		0.1793	0.1811	0.1811

Segundo esses resultados, apesar de a malha M2 ser grosseira tanto para o domínio como para o contorno, houve precisão em uma casa decimal. Contudo, com a malha M1, que contém trinta e dois pontos no contorno (metade dos pontos da malha  $T_{64}$ ), os resultados evidenciam precisão de até duas casas decimais no geral, e às vezes três casas, quando comparados com os determinados pelo método de elementos de contorno com as malhas  $T_{64}$  e  $T_{128}$ .

A dependência da formulação MMFGL em relação ao parâmetro  $k_0$  foi testada, como no Problema 1, e novamente não houve alteração dos resultados.

### 6.5.2 Membrana circular fixa

Considere-se problema P3:

$$P3 \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } w(P), \text{ tal que} \\ - \nabla^2 w(P) = 4 \\ P \equiv (x, y) \in \Omega \equiv \{x^2 + y^2 < 4\} \\ w(p) = 0, \quad p \in \partial\Omega \equiv \{x^2 + y^2 = 4\}. \end{array} \right.$$

Esta aplicação, que se diferencia das anteriores pela geometria do contorno, que neste caso precisa ser aproximada, estuda a precisão do MMFGL e a compara com a do MEF.

Os resultados numéricos encontrados pelo MMFGL foram obtidos usando-se a malha M1. Os resultados de elementos finitos foram obtidos por SPERANDIO [79], que empregou quatro malhas, formadas por  $T_0 = 18$ ,  $T_1 = 84$ ,  $T_2 = 360$  e  $T_3 = 1488$  elementos triangulares lineares.

Os resultados exatos e numéricos para o deslocamento transversal da membrana estão na tabela 6.4.

Os resultados do MMFGL têm precisão de uma casa decimal, às vezes duas, o que mostra que a aproximação da geometria tem efeito considerável na precisão dos resultados. Os resultados do MEF apresentam precisão de mesma ordem que os do MMFGL somente quando foi usada a malha mais fina,  $T_3$ , com um mil quatrocentos e oitenta e oito elementos triangulares lineares. Para essa ordem de precisão, o porte do problema oriundo do MMFGL é

TABELA 6.4 Valores do deslocamento transversal de membrana circular fixa.

$P \equiv (x, y)$	Solução Exata	MMFGL $w(P)$	MEF = $w(P)$			
			$T_0 \equiv 18$	$T_1 \equiv 84$	$T_2 \equiv 360$	$T_3 \equiv 1488$
(0.,0.)	4.	4.0070	3.3333	3.8623	3.9732	3.9951
(0.5,0.)	3.75	3.7450		3.5513	3.7002	3.7375
(1.,0.)	3.	2.9896	2.2222	2.8256	2.9559	2.9889
(1.5,0.)	1.75	1.7660		1.6438	1.7231	1.7432

significativamente menor do que o do MEF, pois no MMFGL se trabalhou com um sistema de sessenta e cinco graus de liberdade e noventa e sete vetores de carga, tratados simultaneamente, a fim de calcular as matrizes de Green. Ainda, o problema no contorno envolveu apenas trinta e dois graus de liberdade e um vetor de carga associado. Por sua vez, o MEF trabalhou com um sistema de setecentos e vinte e um graus de liberdade e um vetor de carga associado.

### 6.5.3 Membrana retangular com lados opostos fixos e livres

Considere-se o problema P4:

$$P4 \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } w(P), \text{ tal que} \\ - \nabla^2 w(P) = 2, \\ P \equiv (x, y) \in \Omega \equiv (0, 1) \times (0, 1), \\ w(0, y) = w(1, y) = 0, \\ \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial w(x, 1)}{\partial y} = 0. \end{array} \right.$$

Nesta aplicação, a dificuldade interposta diz respeito à coincidência de irregularidade da geometria com descontinuidade das condições de contorno. A técnica empregada para tratar dessa dificuldade foi a de nó duplo, como está descrita em [6]. NO MMFGL, a influência do nó duplo é levada às matrizes de Green através das funções de interpolação  $\phi_S$ , definidas no contorno, que se modificam localmente, conforme exemplifica a figura 6.4.

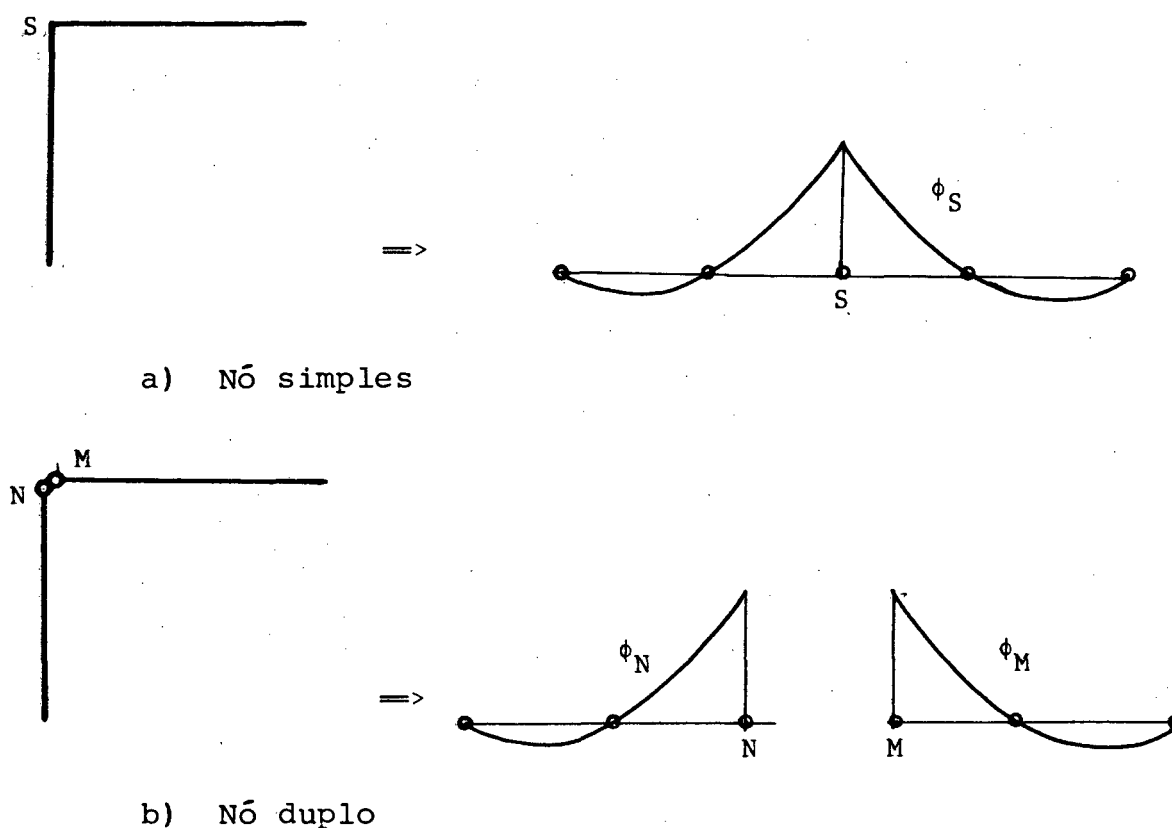


FIGURA 6.4 Função de interpolação global em um vértice.

As matrizes de Green foram obtidas e o problema resolvido empregando-se a malha M1. Os resultados constam na tabela 6.5 e, como se esperava, coincidem com os exatos, uma vez que a solução é uma função quadrática, e todo o procedimento de apro-



ximação do MMFGL usou interpolação quadrática. Entretanto, quando não foi usada a técnica de nó duplo, nos pontos de irregularidade da geometria que coincidem com descontinuidade das condições de contorno os resultados foram errôneos, conforme se observa na tabela 6.6.

TABELA 6.5 Valores de deslocamentos transversais em membranas com bordas opostas fixas e livres, usando-se nó duplo no vértice.

$P \equiv (x, y)$	Solução Exata- $w(P)$	MMFGL M1- $w(P)$
(0.5,0.5)	0.2500	0.2500
(0.375,0.5)	0.23437	0.23437
(0.25,0.25)	0.18750	0.18750

TABELA 6.6 Valores de deslocamentos transversais e tensões de membranas com bordas opostas fixas e livres, usando nó simples no vértice.

$P \equiv (x, y)$	Solução Exata		MMFGL (M1)	
	$w$	$\partial w / \partial n$	$w$	$\partial w / \partial n$
(0.5,0.5)	0.2500	-	0.2498	-
(0.375,0.5)	0.23437	-	0.2346	-
(0.25,0.25)	0.18750	-	0.1870	-
(0.,1.)		-1		- 0.4264

O problema P4 foi resolvido novamente, mas agora com condições de contorno não-homogêneas:

$$w(0, y) = 1$$

$$w(1, y) = 0$$

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial w(x, 1)}{\partial y} = 0$$

Os resultados constam na tabela 6.7.

TABELA 6.7 Valores de deslocamentos transversais e tensões de membranas, com condições de contorno não homogêneas.

P $\equiv$ (x, y)	Solução Exata		MMFGL (M1)	
	w	$\partial w / \partial n$	w	$\partial w / \partial n$
(0.5, 0.5)	0.75	-	0.75	-
(0.375, 0.5)	0.60937	-	0.60937	-
(0.25, 0.25)	0.85937	-	0.85937	-
(0. <sup>+</sup> , 1)	1.00000	0.	1.00000	0.
(0., 1 <sup>-</sup> )	1.00000	0.	1.00000	0.
(1 <sup>-</sup> , 1)	0.	0.	0.	0.
(1., 1 <sup>-</sup> )	0.	- 2.	0.	- 2.

É conveniente observar que, embora se tenha empregado a técnica de nó duplo, foi preservada a continuidade dos deslocamentos nos vértices, como mostra os valores da tabela 6.7.

## CAPÍTULO 7

### FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS MODELADAS PELA TEORIA DE MINDLIN

#### 7.1 Introdução

Placas são componentes estruturais de larga aplicação nas engenharias mecânica, aeronáutica, nuclear e civil.

Nos problemas de placas tem-se que considerar, fundamentalmente, a sua geometria, o carregamento a que ela está submetida, a sua vinculação e o material de que é construída. Disso decorrem as dificuldades para a solução desses problemas. Somente os mais simples possuem solução analítica.

É freqüente o emprego de métodos para a obtenção de solução aproximada. Dentre eles, o de diferenças finitas foi muito empregado, mas cedeu lugar ao de elementos finitos, que têm nas placas uma de suas principais aplicações.

Mais recentemente, as formulações integrais também têm sido aplicadas para esses problemas. As modeladas pela teoria clássica foram as primeiras a serem formuladas.

JASWON et alii [90], desenvolveram uma formulação integral para o problema bi-harmônico, transformando-o em dois problemas harmônicos, resolvidos por formulação indireta. Em seguida, JASWON & MAITI [91] usaram-na para resolver problemas de flexão de placas. As derivadas de ordens superiores, neces-

sárias para cálculo dos esforços, puderam ser calculadas através de relações que usam derivadas apenas de primeira ordem. Analisaram placas retangulares sob diversas condições de contorno. Os resultados obtidos foram precisos.

VIVOLI [92] e VIVOLI & FILIPPI [93] apresentam formulações indiretas para o problema de vibrações de placas. Ao contrário de JASWON & MAITI [91], trabalham diretamente com o problema bi-harmônico. Definem potenciais até terceira ordem e fornecem suas propriedades, que auxiliam essas formulações, no tratamento das condições de contorno. O problema de autovalor resultante não se apresenta na forma algébrica convencional, pois a solução fundamental adotada depende do autovalor. Entretanto, os resultados obtidos foram muito precisos. A título de exemplo, os primeiros nove autovalores de uma placa circular engastada apresentaram erros relativos inferiores a 0.37%.

As primeiras formulações diretas para placas finas foram desenvolvidas por STERN [94] e por BEZINE [95]. Inicialmente, estabeleceram uma relação de reciprocidade que envolvia diretamente deslocamento transversal, rotações, momentos fletores, momento torsor e forças cortantes. Stern usou duas soluções fundamentais independentes para obter as equações integrais que formulam o problema. Bezine empregou apenas uma solução fundamental e completou a formulação calculando a derivada normal da representação do deslocamento transversal. Ambas as formulações incluem as reações de vértices, que aparecem na teoria clássica de placas.

Na implementação numérica, Stern usou aproximação linear para as variáveis. O contorno foi subdividido por pontos nodais, porém não foi aproximado. Bezine discretizou o contorno

através de elementos retos. As variáveis foram supostas como constantes em cada elemento.

Nas aplicações realizadas por Stern e por Bezine, os resultados encontrados possuem elevada precisão. Mostram que os métodos integrais são alternativas eficientes para a solução de problemas de placas finas.

Após os trabalhos desses autores, uma ampla classe de problemas de placas foram analisados por métodos integrais, conforme pode ser verificado na revisão apresentada por BARCELLOS & SILVA [32].

Trabalhos mais recentes são mencionados a seguir, com a descrição de seus principais objetivos e algumas de suas características.

STERN [96] reapresenta a formulação desenvolvida em [94], estendendo-a para problemas de fratura.

TANAKA & MIYAZAKI [97], através de formulação direta, fazem análise de tensões em estruturas compostas por placas submetidas a carregamentos arbitrários. Usaram apenas elementos constantes.

COSTA JR. & BREBBIA [98] apresentam o método direto de elementos de contorno para problemas de estabilidade de placas finas. Empregam o elemento reto para discretizar o contorno e o elemento constante na aproximação das variáveis. Os resultados obtidos mostram que a técnica de contorno é eficiente para solução desses problemas.

ZHU [99] apresenta formulação indireta para placas finitas e infinitas. A sua abordagem se diferencia das anteriores, por, partindo de uma relação de reciprocidade obter uma formulação indireta. Além disso, o tratamento numérico das equa-

ções integrais foi realizado através de formulação variacional, sendo as aproximações funcionais feitas por elementos finitos. As aplicações numéricas realizadas mostram que o erro relativo do deslocamento transversal decresce com o número de elementos na razão  $O(1/N^2)$ , que coincide com a prevista teoricamente.

Outros trabalhos trataram do problema de estabilidade de placas (MANOLIS [100]), da análise de tensões em placas tipo "sandwich", com lados oblíquos (RAO [101]) e do uso de formulação de contorno, que incorpora as influências das vigas e colunas de suporte, para análise de estruturas de edifícios (PAIVA & VENTURINI [102]).

Pelo exposto, a formulação integral de problemas de placas modeladas pela teoria clássica recebeu extensa investigação. Entretanto, as placas moderadamente espessas, modeladas por teorias que incluem a força cortante, foram pouco investigadas pelo método de elementos de contorno.

É oportuno mencionar que o desenvolvimento de materiais compostos conduziu a um grande interesse pelas teorias de placas que possuam ordem de erros mais elevada que a da teoria clássica (WITTRICH [103]).

A primeira formulação integral para uma dessas teorias foi apresentada por WEEEN [33], para placas modeladas pela teoria de REISSNER [34]. A formulação é do tipo direta. Como estado auxiliar na relação de reciprocidade, usou uma solução fundamental obtida pelo método de Hörmander. Na implementação numérica, a discretização do contorno e a aproximação das variáveis foram realizadas através de elementos finitos quadráticos isoparamétricos. A transformação do sistema de equações integrais para o de equações lineares algébricas é feita pelo méto-

do de colocação. Os pontos de colocação coincidem com os pontos nodais dos elementos de contorno.

No cálculo numérico das integrais de contorno não-singulares, empregou-se regra de integração gaussiana. No cálculo das singulares, Weeen, em vez de separar a singularidade logarítmica, que está implícita nos núcleos, preferiu desenvolver um procedimento especial para regularizar esses núcleos. Para tanto, usou uma transformação não-linear, que mapeia os pontos de integração para uma vizinhança do nó em que ocorre a singularidade.

As integrais de domínio, que na formulação incorporam o carregamento, foram transformadas em integrais de contorno, mas o procedimento adotado é restrito para carga uniforme. Consiste em determinar funções cujos laplacianos são iguais aos integrandos, e em seguida aplicar o teorema da divergência.

Os valores principais foram obtidos simultaneamente com os fatores geométricos, mediante imposição de movimentos de corpo rígidos.

Na formulação de Weeen, as variáveis definidas no contorno referem-se ao sistema de coordenadas global. Por isso, o tratamento das condições de contorno, em geral, não é direto, e ao final algumas variáveis de interesse também não são obtidas diretamente.

Com referência aos resultados, os obtidos da análise de placa retangular sob torção apresentaram elevada precisão, tanto para os deslocamentos como para os esforços. Quando a formulação foi aplicada para placa circular submetida a carga uniforme, propiciou resultados precisos para o deslocamento transversal, a rotação e o momento circunferencial. Entretanto, o mo-

mento radial apresentou precisão apenas aceitável, e a força cortante foi imprecisa.

No presente trabalho, a teoria de Mindlin para placas é sucintamente descrita na Seção 2 deste capítulo. Na Seção 3, estabelece-se uma relação de reciprocidade, fundamentada nos desenvolvimentos apresentados no Capítulo 2. Em seguida, na Seção 4, determina-se, através do método de Hörmander, uma solução fundamental para o operador do problema.

Escolhendo-se como estado auxiliar presente na relação de reciprocidade estabelecida a solução fundamental determinada, obtém-se, na Seção 5, a formulação integral do problema, para pontos do domínio. Através do traço, ela é descrita para pontos do contorno. Na Seção 6, propõe-se uma implementação numérica para a formulação integral do problema. Empregam-se técnicas de elementos finitos para discretizá-la e aproximá-la. O método de colocação é usado na transformação do sistema de equações integrais em um sistema de equações algébricas lineares.

Na formulação proposta, os núcleos dos operadores integrais são descritos em relação às coordenadas globais, mas os valores nodais das variáveis de placa são relacionados às coordenadas locais em cada ponto do contorno.

Os resultados obtidos nas aplicações realizadas apresentam precisão aceitável. Os maiores erros relativos, da ordem de 1.5%, ocorreram nos valores da força cortante, quando se analisaram placas muito finas através da formulação proposta.

## 7.2 Notações e Preliminares

Considere-se uma placa isotrópica homogênea que ocupa



uma região cilíndrica  $\bar{\Omega} \times [-h/2, h/2] \subset \mathbb{R}^3(x, y, z)$ , onde  $x, y$  e  $z$  são coordenadas cartesianas,  $\Omega$  é um domínio aberto limitado no plano de referência  $(x, y)$ , com contorno  $\partial\Omega$  lipshitziano, e  $h$  é a sua espessura. Suponha-se que a placa está sujeita a uma carga distribuída por unidade de área da superfície de referência, de intensidade  $f$ , que atua segundo o eixo  $z$ , conforme mostra a figura 7.1.

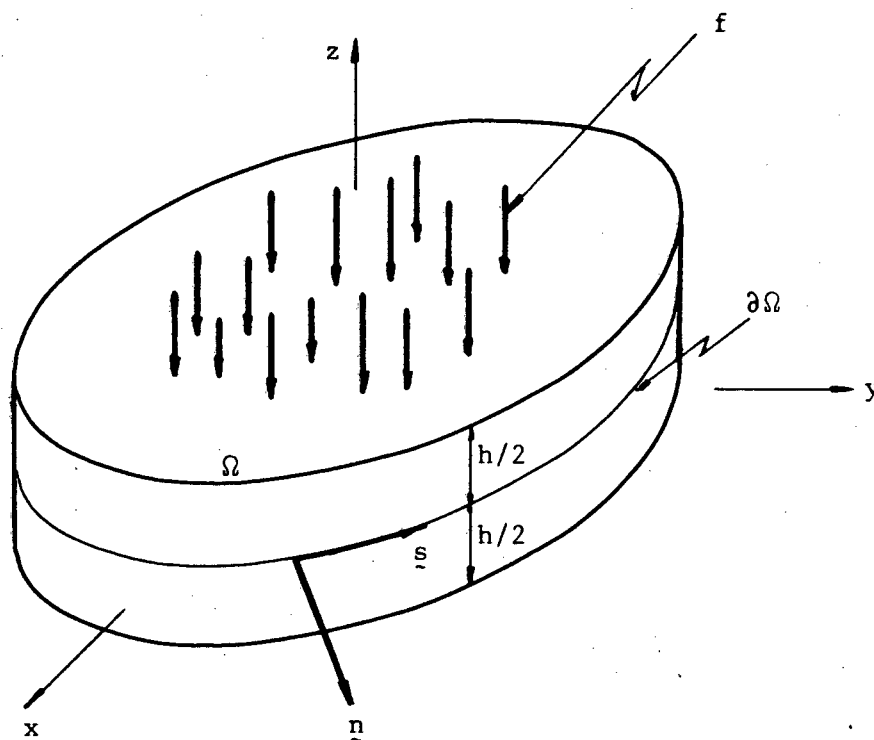


FIGURA 7.1 Sistema de coordenadas para uma placa.

A cinemática admitida na teoria de placas de Mindlin descreve o campo de deslocamentos de um filamento que passa por

um ponto  $P \in \Omega$ , através de três variáveis, sendo duas associadas às rotações:

$\psi_x(P)$ , que indica rotação de um filamento material originariamente perpendicular à superfície de referência, em torno do eixo  $y$ , em uma seção cujo vetor normal coincide com o eixo  $x$ ,

e

$\psi_y(P)$ , que indica rotação de um filamento material originariamente perpendicular à superfície de referência, em torno do eixo  $x$ , em uma seção cujo vetor normal coincide com o eixo  $y$ .

A terceira variável é associada ao deslocamento transversal,

$w(P)$ , que indica o deslocamento de um ponto material  $P$ , originariamente situado na superfície de referência, segundo o eixo  $z$ .

Com isso, a teoria de Mindlin inclui no estado de tensões da placa não só os momentos

$M_x$ , que indica distribuição de momento fletor em relação ao eixo  $y$  em uma seção que tem vetor normal segundo o eixo  $x$ , por unidade de comprimento na direção  $y$ ,

$M_y$ , que indica distribuição de momento fletor em relação ao eixo  $x$ , em uma seção que tem vetor normal segundo o eixo  $y$ , por unidade de comprimento na direção  $x$ ,

e

$M_{xy}$ , que indica distribuição de momento torsor em relação ao eixo  $x$  em uma seção cujo vetor normal coincide com o eixo  $x$ , por unidade de comprimento na direção  $y$ ,

mas também as forças cortantes

$Q_x$ , que indica distribuição de força cortante em uma seção que tem vetor normal segundo o eixo  $x$ , por unidade de comprimento na direção  $y$ ,

e

$Q_y$ , que indica distribuição de força cortante em uma seção que tem vetor normal segundo o eixo  $y$ , por unidade de comprimento na direção  $x$ .

As relações entre os esforços e os deslocamentos, segundo MINDLIN [80], são

$$M_x = D \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right), \quad (7.1)$$

$$M_y = D \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right), \quad (7.2)$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right), \quad (7.3)$$

$$Q_x = k^2 Gh \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (7.4)$$

$$Q_y = k^2 Gh \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (7.5)$$

onde

$D$  indica a rigidez da placa ( $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ ),

$\nu$  indica o módulo de Poisson do material,

$E$  indica o módulo de elasticidade longitudinal do material,

$k^2$  indica o parâmetro presente na teoria de Min-

de modo para compensar as tensões cisalhantes que, em consequência das hipóteses cinemáticas, são constantes ao longo da espessura da placa.

Com essas definições, o campo de deslocamentos satisfaz as seguintes equações de equilíbrio [80]:

$$\bigcirc \quad \underline{L}(\partial_P) \underline{u}(P) = \underline{f}(P), \quad P \in \Omega, \quad (7.6)$$

às quais estão associadas as condições de contorno

$$L_i[\underline{u}(p)] = \alpha_i, \quad p \in \partial\Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.7)$$

onde

$\underline{L}(\partial_P)$  é um operador diferencial em relação às coordenadas do ponto  $P \in \Omega$ , definido por

$$\underline{L}(\partial_P) = \frac{D}{2}(1-\nu) \begin{bmatrix} (\Delta - \lambda^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2}) & (\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}) & (-\lambda^2 \frac{\partial}{\partial x}) \\ (\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}) & (\Delta - \lambda^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2}) & (-\lambda^2 \frac{\partial}{\partial y}) \\ (\lambda^2 \frac{\partial}{\partial x}) & (\lambda^2 \frac{\partial}{\partial y}) & (\lambda^2 \Delta) \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

sendo

$\Delta$  o operador laplaciano,

$\lambda$  parâmetro da placa dado por

$$\lambda^2 = 12 k^2 / h^2. \quad (7.9)$$

Nas equações (7.6) e (7.7), têm-se ainda que

$$\underline{u}(P) = [\psi_x(P), \psi_y(P), w(P)]^T, \quad (7.10)$$

$$\underline{f}(P) = [0, 0, f(P)]^T, \quad (7.11)$$

$\ell_i[(.)]$ ,  $i = 1, 2, 3$  são combinações lineares de operadores no contorno, apropriadamente escolhidos dentre os seguintes:

$$\text{Tr}[\underline{u}(p)], \quad (7.12)$$

$$\text{Tr}[M_n(p)], \quad (7.13)$$

$$\text{Tr}[M_{ns}(p)], \quad (7.14)$$

$$\text{Tr}[Q_n(p)], \quad (7.15)$$

onde o símbolo  $\text{Tr}[(.)]$  tem o mesmo significado anterior. As quantidades  $M_n(p)$ ,  $M_{ns}(p)$  e  $Q_n(p)$  são definidas, conforme WASHIZU [75], por

$$M_n = M_{xn} n_x + M_{yn} n_y, \quad (7.16)$$

$$M_{ns} = M_{yn} n_x - M_{xn} n_y, \quad (7.17)$$

$$Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y, \quad (7.18)$$

sendo

$$M_{xn} = M_x n_x + M_{xy} n_y, \quad (7.19)$$

$$M_{yn} = M_{xy} n_x + M_y n_y \quad (7.20)$$

e

$n_x, n_y$  indicam os cossenos diretores do vetor normal ao contorno, respectivamente em relação aos eixos  $x$  e  $y$ .

Posteriormente, as tensões resultantes  $M_{xn}$  e  $M_{yn}$  são denotadas, respectivamente, por  $t_x$  e  $t_y$ .

A orientação dos momentos e das forças cortantes, definidos por unidade de comprimento das linhas  $x, y$  na superfície

de referência, é mostrada na figura 7.2, e as referentes ao contorno estão ilustradas na figura 7.3.

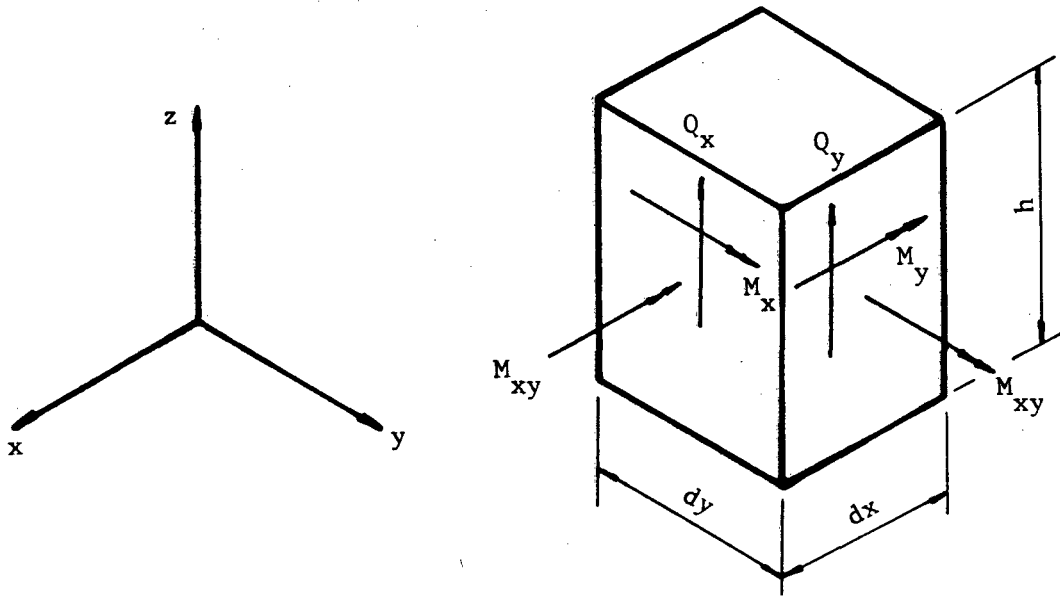


FIGURA 7.2 Momentos e forças cortantes em um elemento de placa.

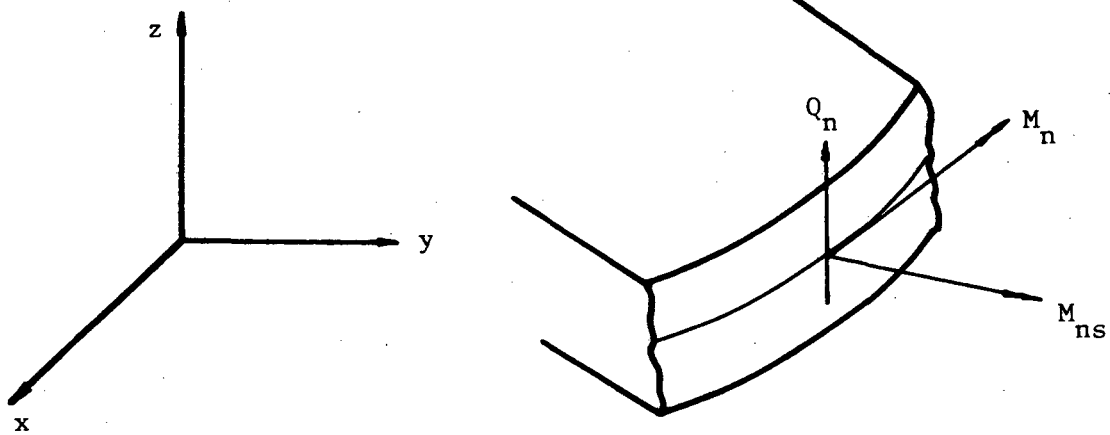


FIGURA 7.3 Momentos e força cortante no contorno de uma placa.

### 7.3 Relação de Reciprocidade para Placas de Mindlin

Considere-se a região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  subdividida em  $N$  sub-regiões  $\Omega^k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , tal que

$$\bigcup_{k=1}^N \bar{\Omega}^k = \bar{\Omega}; \quad \Omega^k \cap \Omega^m = \emptyset, \quad k \neq m.$$

Sejam  $\underline{u}^k = [\psi_x^k, \psi_y^k, w^k]^T$ ,  $\underline{f}^k$ ,  $D^k$  e  $\underline{L}^k(\partial_p)$  (.) restrições, respectivamente, de  $\underline{u}$ ,  $\underline{f}$ ,  $D$  e  $\underline{L}(\partial_p)$  (.) à subregião  $\Omega^k$ .

Para estabelecer a relação de reciprocidade para problemas de placas modeladas pela teoria de Mindlin, de acordo com (2.26 - 2.31), são identificados os seguintes espaços:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^1(\Omega^1) \times \dots \times \mathbf{H}^1(\Omega^N), \quad (7.21)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}^1(\Omega^1) \times \dots \times \mathbf{H}^1(\Omega^N), \quad (7.22)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{H}^{-1}(\Omega^1) \times \dots \times \mathbf{H}^{-1}(\Omega^N), \quad (7.23)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{L}_2(\Omega^1) \times \dots \times \mathbf{L}_2(\Omega^N), \quad (7.24)$$

$$\partial \mathbf{H} = \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega^1) \times \dots \times \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega^N) \quad (7.25)$$

$$\partial \mathbf{F} = \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega^1) \times \dots \times \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega^N) \quad (7.26)$$

onde

$$\mathbf{H}^1(\Omega^k) = [\mathbf{H}^1(\Omega^k)]^3, \quad (7.27)$$

$$\mathbf{L}_2(\Omega^k) = [\mathbf{L}_2(\Omega^k)]^3, \quad (7.28)$$

$$\mathbf{H}^{-1}(\Omega^k) = [\mathbf{H}^{-1}(\Omega^k)]^3, \quad (7.29)$$

$$\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega^k) = [\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega^k)]^3, \quad (7.30)$$

$$\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega^k) = [\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega^k)]^3. \quad (7.31)$$

A forma bilinear  $B(\dots)$ , como está definida em (2.32),

fica sendo

$$B : H \times F \rightarrow \mathbb{R}, \quad (7.32)$$

com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} B(\underline{u}, \underline{v}) = & \sum_{k=1}^N \int_{\Omega^k} \{ D^k \left[ \frac{\partial \psi_y^k}{\partial x} \frac{\partial \phi_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y^k}{\partial y} \frac{\partial \phi_y^k}{\partial y} + \right. \\ & + v^k \frac{\partial \psi_x^k}{\partial x} \frac{\partial \phi_y^k}{\partial y} + v^k \frac{\partial \psi_y^k}{\partial y} \frac{\partial \phi_x^k}{\partial x} \left. \right] + \\ & + \frac{G^k(h)}{12} \left( \frac{\partial \psi_x^k}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^k}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \phi_x^k}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y^k}{\partial x} \right) + \\ & + k^2 G^k h^k \left[ \left( \frac{\partial w^k}{\partial x} + \psi_x^k \right) \left( \frac{\partial v^k}{\partial x} + \phi_x^k \right) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial w^k}{\partial y} + \psi_y^k \right) \left( \frac{\partial v^k}{\partial y} + \phi_y^k \right) \right] \} d\Omega^k(P), \\ & \underline{u} \in H, \quad \underline{v} \in F. \quad (7.33) \end{aligned}$$

Para prosseguir, definem-se os espaços

$$H_L = H_{L^1}(\Omega^1) \times \dots \times H_{L^N}(\Omega^N) \quad (7.34)$$

e

$$F_{L^*} = H_{L^*1}(\Omega^1) \times \dots \times H_{L^*N}(\Omega^N), \quad (7.35)$$

sendo

$$H_{L^k}(\Omega^k) = \{ \underline{u} \in [H^1(\Omega^k)]^3; \underline{L}[\underline{u}] \in [L_2(\Omega^k)]^3 \} \quad (7.36)$$

$$H_{L^*k}(\Omega^k) = \{ \underline{v} \in [H^1(\Omega^k)]^3; \underline{L}^*k(\underline{v}) \in [H^{-1}(\Omega^k)]^3 \}. \quad (7.37)$$

Operando com a restrição de  $B(\dots)$  ao elemento  $\Omega^k$ , de-



notada por  $B^k(\dots)$ , realizando integrações dos termos da equação (7.33) que envolvem o estado  $\underline{v}^k = [\vartheta_x^k, \vartheta_y^k, v^k]^T$  e reagrupando convenientemente os resultados, obtêm-se

$$B^k(\underline{u}^k, \underline{v}^k) = - \int_{\Omega^k} [\underline{v}^k(p)]^T \underline{L}^k(\partial_p) [\underline{u}^k(p)] d\Omega^k(p) +$$

$$+ \int_{\partial\Omega^k} [\underline{v}^k(p)]^T \left\{ \begin{array}{l} M_{xn}^k[\underline{u}^k] \\ M_{yn}^k[\underline{u}^k] \\ Q_n^k[\underline{u}^k] \end{array} \right\} ds^k(p),$$

$$\underline{u}^k \in \mathbf{H}_{L^k}(\Omega^k), \quad \underline{v}^k \in [L_2(\Omega^k)]^3, \quad (7.38)$$

onde a notação  $M_{xn}^k[\underline{u}^k]$  indica que  $M_{xn}^k$  provém do estado  $\underline{u}^k$ .

Analogamente, integrando as parcelas da (7.33) que envolvem o estado  $\underline{u}^k = [\psi_x^k, \psi_y^k, w^k]^T$ , obtêm-se

$$B^k(\underline{u}^k, \underline{v}^k) = - \int_{\Omega^k} [\underline{u}^k(p)]^T \underline{L}^k(\partial_p) [\underline{v}^k(p)] d\Omega^k(p) +$$

$$+ \int_{\partial\Omega^k} [\underline{u}^k(p)]^T \left\{ \begin{array}{l} M_{xn}^k[\underline{v}^k] \\ M_{yn}^k[\underline{v}^k] \\ Q_n^k[\underline{v}^k] \end{array} \right\} ds^k(p),$$

$$\underline{u}^k \in [H^1(\Omega^k)]^3, \quad \underline{v}^k \in \mathbf{H}_{L^*k}(\Omega^k). \quad (7.39)$$

Escolhendo  $\underline{u}^k \in \mathbf{H}_{L^k}(\Omega^k)$  e  $\underline{v}^k \in \mathbf{H}_{L^*k}(\Omega^k)$ , as equações (7.38) e (7.39) fornecem

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega^k} [\underline{u}^k(P)]^T \underline{\underline{L}}^k(\partial_p) [\underline{v}^k(P)] d\Omega^k(P) = \\
& - \int_{\Omega^k} [\underline{v}^k(P)]^T \underline{\underline{L}}^k(\partial_p) [\underline{u}^k(P)] d\Omega^k(P) + \\
& + \int_{\partial\Omega^k} [\underline{v}^k(p)]^T \left\{ \begin{array}{l} M_{xn}^k [\underline{u}^k] \\ M_{yn}^k [\underline{u}^k] \\ Q_n^k [\underline{u}^k] \end{array} \right\} ds^k(p) \\
& - \int_{\partial\Omega^k} [\underline{u}^k(p)]^T \left\{ \begin{array}{l} M_{xn}^k [\underline{v}^k] \\ M_{yn}^k [\underline{v}^k] \\ Q_n^k [\underline{v}^k] \end{array} \right\} ds^k(p), \tag{7.40}
\end{aligned}$$

que expressa uma relação de reciprocidade entre os estados  $\{\underline{u}^k\}$  e  $\{\underline{v}^k\}$  para placas de Mindlin.

Para obter uma representação integral do campo de deslocamentos  $\underline{u}^k$  em pontos do domínio  $\Omega^k$ , utiliza-se uma solução fundamental de domínio infinito para o operador diferencial  $\underline{\underline{L}}(\partial p)$ , obtida conforme BARCELLOS & SILVA [81].

O procedimento para determinar essa solução está exposto a seguir.

#### 7.4 Determinação de Solução Fundamental para o Operador de Placas de Mindlin

Existem vários métodos para a obtenção de solução fundamental de operadores diferenciais parciais. Entre os mais empregados estão os seguintes:

- método de superposição [82],
- método da transformada de Fourier [83],

- método de expansão da distribuição, em ondas planas [84], e

- método de Hörmander [30].

O método de Hörmander é apropriado para o operador de placas de Mindlin, pois  $\underline{L}$ , como está definido em (7.8), envolve apenas coeficientes constantes e satisfaz a condição de elipticidade (NECAS [53]),

$$\det[\underline{L}(\xi)] \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \text{ quase em todo lugar} \\ \text{em } \Omega^k, \quad (7.41)$$

conforme se deduz da equação (7.47).

Uma solução fundamental para  $\underline{L}(\partial_P) [\cdot]$  é uma matriz  $\underline{U} = [U_{ij}]$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ , com elementos em  $\mathcal{D}'[\mathbb{R}^2]$  (espaço das distribuições em  $\mathbb{R}^2$ ), tal que

$$\underline{L}(\partial_P) \underline{U}(P, Q) = \delta(P, Q) \underline{I}, \quad (7.42)$$

onde  $\underline{I}$  é a matriz-identidade  $3 \times 3$ . Denotando por  $(\text{co}\underline{L})$  a matriz formada pelos cofatores em  $(\underline{L}^T)$ , tem-se

$$(\text{co}\underline{L})(\underline{L}) = (\underline{L})(\text{co}\underline{L}) = \det(\underline{L}) \underline{I}. \quad (7.43)$$

Seja  $G$  uma solução fundamental para o operador  $\det[\underline{L}(\partial_P(\cdot))]$ , ou seja,

$$\det(\underline{L}(\partial_P)) G(P, Q) = \delta(P, Q). \quad (7.44)$$

Então,  $\underline{U}$ , dada por

$$\underline{U}(P, Q) = [(\text{co}\underline{L}(\partial_P))] [G(P, Q) \underline{I}], \quad (7.45)$$

é uma solução fundamental para o operador  $\underline{L}(\partial_P)$ . De fato, substituindo (7.45) no lado esquerdo da equação (7.42) e tendo em vista as equações (7.43) e (7.44), obtém-se

$$\begin{aligned} \underline{L}(\partial_P) [\overset{CO}{\underline{L}}(\partial_P)] [G(P,Q) \underline{I}] &= \\ = \det \begin{pmatrix} \underline{L} & \underline{I} \\ \underline{I} & \underline{L} \end{pmatrix} [G(P,Q) \underline{I}] &= \\ = \delta(P,Q) \underline{I}. & \end{aligned} \quad (7.46)$$

Portanto, o problema de encontrar uma solução fundamental para o operador  $\underline{L}(\partial_P)$  ficou reduzido ao de encontrar uma solução fundamental escalar para o operador  $\det[\underline{L}(\partial_P)](\cdot)$ .

Calculando-se o determinante de  $\underline{L}(\partial_P)$ ,  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , obtém-se

$$\det \underline{L}(\partial_P) = \frac{D^3}{4} (1 - \nu)^2 \lambda^2 \Delta^2 (\Delta - \lambda^2), \quad (7.47)$$

onde  $\Delta$  e  $\Delta^2$  são, respectivamente, os operadores laplaciano e bi-harmônico. Então, neste problema  $G$  deve ser tal que

$$\frac{D^3}{4} (1-\nu)^2 \lambda^2 \Delta^2 (\Delta - \lambda^2) G(P,Q) = -\delta(P,Q). \quad (7.48)$$

Usando coordenadas polares, admitindo simetria radial para  $G$  e definindo  $z = \lambda r$ , sendo  $r = ||P - Q||$ , pode ser determinada a seguinte solução particular da equação (7.48):

$$\begin{aligned} G(r) &= 2[\pi D^3 (1 - \nu)^2 \lambda^6]^{-1} \{K_0(z) + \lg(z) + \\ &+ (1/4) z^2 [\lg(z) - 1]\}, \end{aligned} \quad (7.49)$$

onde  $K_0(\mathbf{z})$  é a função modificada de Bessel de ordem zero [85].

No Apêndice C, mostra-se como a solução particular apresentada em (7.49) é obtida e que ela é uma solução fundamental para o operador  $\det[\underline{L}(\partial_p)](\cdot)$ .

Com a função G da equação (7.49), o tensor de Green,  $U_{ij}$ , apresentado no Apêndice D, é obtido através da relação (7.45). Cada coluna desse tensor é um campo de deslocamento fundamental, ou seja,

$U_{\alpha\beta}(P,Q)$  indica, para  $\alpha, \beta = 1(2)$ , rotação, em torno do eixo 2(1), de um filamento material que passa pelo ponto P, em uma seção cujo vetor normal coincide o eixo 1(2), devido a um momento concentrado no ponto Q em torno do eixo 2(1), na mesma seção,

$U_{3\beta}(P,Q)$  indica, para  $\beta = 1(2)$ , deslocamento transversal do ponto material que coincide com P, devido a um momento concentrado no ponto Q em torno do eixo 2(1) na seção cujo vetor normal é o eixo 1(2),

$U_{\alpha 3}(P,Q)$  indica, para  $\alpha = 1(2)$ , rotação, em torno do eixo 2(1), de um filamento material que passa pelo ponto P, em uma seção cujo vetor normal coincide com o eixo 1(2), devido a uma carga concentrada no ponto Q segundo o eixo 3.

$U_{33}(P,Q)$  indica deslocamento transversal do ponto material que coincide com P, devido a uma carga concentrada no ponto Q segundo o eixo 3.

As tensões de placa, definidas no contorno, associadas ao tensor de Green de deslocamentos fundamentais e presen-

tes na relação de reciprocidade (7.40), podem ser obtidas das equações (7.1-7.5) e (7.16-7.18). Disso resulta o tensor de tensões fundamentais de placa,  $\underline{T} = [T_{ij}]$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ , cujas colunas são tensões resultantes de placas, dadas por

$$M_{xn}(j) = M_x(j) n_x + M_{xy}(j) n_y = T_{1j}, \quad (7.50)$$

$$M_{yn}(j) = M_{xy}(j) n_x + M_y(j) n_y = T_{2j}, \quad (7.51)$$

$$Q_n(j) = Q_x(j) n_x + Q_y(j) n_y = T_{3j}, \quad (7.52)$$

onde o índice (j) indica que a quantidade provém do campo de deslocamentos associado à coluna j do tensor  $\underline{U}$ .

### 7.5 Formulação Integral do Problema de Placas de Mindlin

Escolhendo-se o estado auxiliar  $\underline{v}^k$  como sendo o proveniente da solução fundamental do operador  $L(\partial_p)$  presente em (7.8), restrito ao elemento  $\Omega^k$ , ou seja,

$$v_i^k(j) = U_{ij}^k, \quad i \leq 3, \quad j \leq 3 \quad (7.53)$$

e substituindo-se as equações (7.42), (7.50), (7.51) e (7.52) em (7.40), obtêm-se uma representação integral para a solução da (7.6) em pontos do domínio  $\Omega^k$ , na forma indicial,

$$u_i^k(Q) = \int_{\Omega^k} U_{ji}^k(P, Q) f_j^k(P) d\Omega^k(P) + \\ + \int_{\partial\Omega^k} U_{ji}^k(p, Q) t_j^k [u^k(p)] ds^k(p) -$$

$$-\int_{\partial\Omega^k} T_{ji}^k(p, Q) u_j^k(p) ds^k(p),$$

$$P, Q \in \Omega^k, \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad (7.54)$$

Determinando-se o traço da equação (7.54), obtém-se uma representação dos deslocamentos em ponto do contorno, calculado através de

$$\text{Tr}[u_i^k(q)] = \lim_{Q \rightarrow q} u_i^k(Q),$$

$$Q \in \Omega^k, \quad q \in \partial\Omega^k. \quad (7.55)$$

Para efetuar o limite indicado em (7.55), procede-se como em [6] e [13]. Considere-se uma região de inclusão com contorno circular, centrada no ponto  $q \in \partial\Omega^k$ , de raio  $\epsilon$ , conforme mostra a figura 7.4.

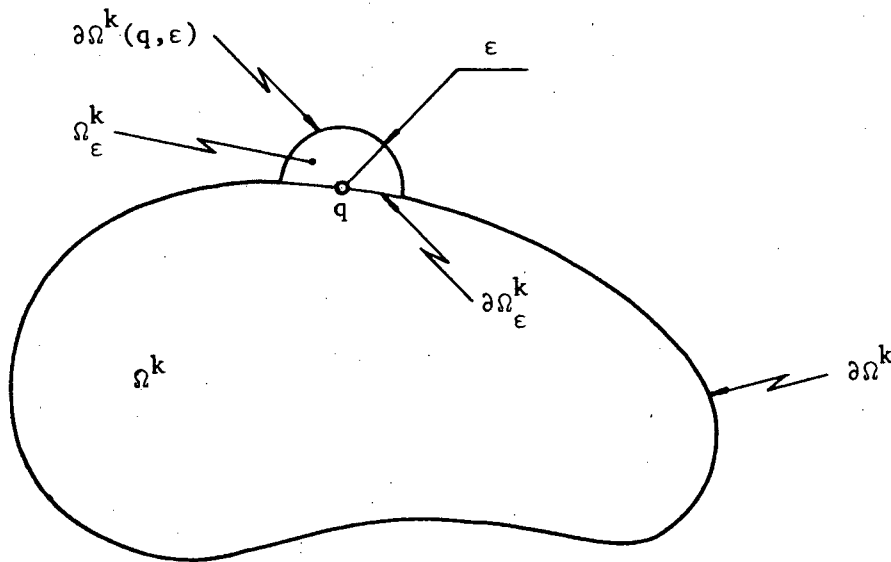


FIGURA 7.4 Contorno de inclusão.

Na região  $\Omega^k \cup \Omega_\epsilon^k$ , a equação (7.54) escrita para o ponto  $q$ , que agora é um ponto interno, fica sendo

$$\begin{aligned}
 u_i^k(q) &= \int_{\Omega^k \cup \Omega_\epsilon^k} U_{ji}^k(p, q) f_j^k(p) d\Omega^k(p) + \\
 &+ \int_{\partial\Omega^k - \partial\Omega_\epsilon^k} U_{ji}^k(p, q) t_j^k[u^k(p)] ds^k(p) + \\
 &+ \int_{\partial\Omega_\epsilon^k} U_{ji}^k(p, q) t_j^k[u^k(p)] ds^k(p) - \\
 &- \int_{\partial\Omega^k - \partial\Omega_\epsilon^k} T_{ji}^k(p, q) u_j^k(p) ds^k(p) - \\
 &- \int_{\partial\Omega_\epsilon^k} T_{ji}^k(p, q) u_j^k(p) ds^k(p), \\
 &q \in \Omega^k \cup \Omega_\epsilon^k, \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad (7.56)
 \end{aligned}$$

A seguir, analisa-se o comportamento dos termos do lado direito da equação (7.56), quando  $\epsilon$  tende a zero. Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^k \cup \Omega_\epsilon^k} U_{ji}^k(p, q) f_j^k(p) d\Omega^k(p) &= \\
 = \int_{\Omega^k} U_{ji}^k(p, q) f_j^k(p) d\Omega^k(p), & \quad (7.57)
 \end{aligned}$$

pois a integral é regular. Quando o ponto  $p$  coincide com  $q$ , o núcleo  $U_{ji}^k(p, q)$  apresenta singularidade implícita, do tipo logarítmico, nos termos que envolvem funções de Bessel modificadas,  $K_0$  e  $K_1$ . Como  $t_j^k < M$ , sendo  $M$  uma constante, tem-se que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega^k - \partial\Omega_\epsilon^k} U_{ji}^k(p, q) t_j^k[u^k(p)] ds^k(p) =$$



$$= \int_{\partial\Omega^k} U_{ji}^k(p, q) t_j^k[u^k(p)] ds^k(p) \quad (7.58)$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon^k} U_{ji}^k(p, q) t_j^k[u^k(p)] ds^k(p) = 0. \quad (7.59)$$

O núcleo  $T_{ji}^k(p, q)$  apresenta singularidade do tipo  $(1/r)$ . Então, a quarta integral em (7.56) é entendida no sentido de valor principal, e adiante, indica-se como calculá-la.

A última integral presente na equação (7.56) fica sendo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon^k} T_{ji}^k(p, q) u_j^k(p) ds^k(p) = \bar{C}_{ij}(q) u_j^k(q), \quad (7.60)$$

pois

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ij}(q) u_j^k(q) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega^k} T_{ji}^k(p, q) [u_j^k(p) - u_j^k(q)] ds^k(p) + \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon^k} T_{ji}^k(p, q) u_j^k(q) ds^k(p). \end{aligned} \quad (7.61)$$

Sendo  $|T_{ji}^k(p, q)| \leq \frac{M_1}{\epsilon}$  e  $|u_j^k(p) - u_j^k(q)| \leq M_2 \epsilon$ , e a medida de comprimento de arco menor que  $2\pi\epsilon$ , a primeira integral em (7.61) tende para zero. Portanto, obtêm-se

$$\bar{C}_{ij}(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon^k} T_{ji}^k(p, q) ds^k(p). \quad (7.62)$$

Após o cálculo desses limites, a equação (7.56) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} C_{ij}(q) u_j^k(q) + \int_{\partial\Omega^k} T_{ji}^k(p, q) u_j^k(p) ds^k(p) &= \\ &= \int_{\Omega^k} U_{ji}^k(p, q) f_j^k(p) d\Omega^k(p) + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\partial\Omega^k} u_{ji}^k(p, q) t_j^k[u^k(p)] ds^k(p),$$

$$p, q \in \partial\Omega^k, \quad (7.63)$$

onde índices repetidos indicam somatória e,

$$C_{ij}(q) = 1 + \bar{C}_{ij}(q). \quad (7.64)$$

Quando o contorno é suave no ponto  $q \in \partial\Omega^k$ , tem-se que

$$C_{ij} = 0.5 \delta_{ij}. \quad (7.65)$$

Na representação (7.63), com exceção do termo de carga, que não envolve incógnitas, os demais estão definidos apenas em pontos de contorno. Logo, a equação (7.63) é apropriada para a abordagem de problemas de placas de Mindlin pelo método de elementos de contorno.

As equações integrais (7.54) e (7.63) formulam os problemas de placas modeladas pela teoria de Mindlin, para pontos do domínio  $\Omega^k$  e do contorno  $\partial\Omega^k$ . As condições de contorno em  $\partial\Omega^k \cap \partial\Omega$  são diretamente incorporadas à formulação, através do traço do vetor de deslocamentos generalizados,  $u_j^k$ , ou do vetor de tensões resultantes,  $t_j^k$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

A formulação integral para a placa inteira é obtida sobrepondo-se as formulações locais através das condições de transmissão nas interfaces das subregiões. Essas condições são encontradas a partir das equações (2.41) e (2.51), e para placas de Mindlin ficam sendo

$$\text{Tr}[u_j^k(a)] = \text{Tr}[u_j^m(a)], \quad (7.66)$$

$$\text{Tr}[t_j^k(a)] = \text{Tr}[t_j^m(a)]. \quad (7.67)$$

onde  $1 \leq j \leq 3$ , e as variáveis  $u_j^k$  e  $t_j^k$  possuem o significado anteriormente descrito.

## 7.6 Aproximação Numérica

O desenvolvimento apresentado a seguir aplica-se a uma subregião genérica  $\Omega^k$ . O sobreíndice  $k$ , indicativo de variável restrita a  $\Omega^k$ , fica subentendido sempre que não houver dúvida sobre a restrição.

Considere-se  $\bar{\Omega}$  e  $\bar{\partial\Omega}$  subdivididos, respectivamente, através de  $E^d$  elementos de domínio e  $E^c$  elementos de contorno. As partições devem ser realizadas de modo a evitar que nas subregiões haja descontinuidades nos parâmetros e nos dados do problema. Realizadas as partições, a equação (7.63) é reescrita na forma

$$\begin{aligned} & C_{ij}(q) u_j(q) + \sum_{e=1}^{E^c} \int_{\partial\Omega^e} T_{ji}(p,q) u_j(p) ds(p) = \\ & = \sum_{E=1}^{E^d} \int_{\Omega^E} U_{ji}(p,q) f_j(p) d\Omega(p) + \\ & + \sum_{e=1}^{E^c} \int_{\partial\Omega^e} U_{ji}(p,q) t_j(p) ds(p), \\ & q \in \partial\Omega, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \end{aligned} \quad (7.68)$$

Sejam os espaços de dimensões finitas  $V^h C[L_2(\Omega)]^3$ ,  $\partial H^h C[H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)]^3$  e  $\partial F^h C[H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)]^3$ , gerados, respectivamente, pelas bases  $\{N_i\}_{i=1}^J$ ,  $\{\beta_m\}_{m=1}^S$  e  $\{\beta_\ell\}_{\ell=1}^S$ , constituídas por funções de interpolação globais de elementos finitos. Suponha-se que as apro-

ximações sejam isoparamétricas. Então,  $J$  e  $S$  são, respectivamente, os números de pontos nodais em  $\bar{\Omega}$  e  $\partial\bar{\Omega}$ .

Admitindo para o carregamento e incógnitas as expansões locais

$$f_j^E(P) = \sum_{\ell=1}^{m^E} N_{\ell}^E(P) f_j^E(P_{\ell}), \quad P \in \bar{\Omega}, \quad (7.69)$$

$$u_j^e(p) = \sum_{n=1}^{m^e} \beta_n^e(p) u_j^e(p_n), \quad p \in \partial\Omega, \quad (7.70)$$

$$t_j^e(p) = \sum_{n=1}^{m^e} \beta_n^e(p) t_j^e(p_n), \quad p \in \partial\Omega, \quad (7.71)$$

$1 \leq j \leq 3$ , onde

$N_{\ell}^E$  e  $\beta_k^e$  são funções de interpolação locais, restritas, respectivamente, aos elementos  $E$  e  $e$ ,

$f_j^E(P_{\ell})$ ,  $u_j^e(p_n)$  e  $t_j^e(p_n)$  são valores de  $f_j$ ,  $u_j$  e  $t_j$ , restritas aos elementos  $E$  e  $e$ , nos pontos nodais  $P_{\ell} \in \bar{\Omega}$ ,  $p_n \in \partial\Omega$ ,

$m^E$ ,  $m^e$  indicam, respectivamente, o número de nós nos elementos  $E$  e  $e$ ,

e substituindo-as na equação (7.68), obtém-se

$$\begin{aligned} C_{ij}(q) u_j(q) + \sum_{e=1}^{E^c} \sum_{n=1}^{m^e} \int_{\partial\Omega^e} T_{ji}(p,q) \beta_n^e(p) ds(p) u_j^e(p_n) = \\ = \sum_{E=1}^{E^d} \sum_{\ell=1}^{m^E} \int_{\Omega^E} U_{ji}(P,q) N_{\ell}^E(P) d\Omega(P) f_j^E(P_{\ell}) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{e=1}^{E^c} \sum_{n=1}^{m^e} \int_{\partial\Omega^e} U_{ji}(p,q) \beta_n^e(p) ds(p) t_j^e(p_n),$$

$$1 \leq i, j \leq 3, \quad q \in \partial\Omega. \quad (7.72)$$

### 7.6.1 Formação do sistema linear

Na equação (7.72), verifica-se que a cada ponto nodal no contorno estão associadas seis quantidades:  $u_j$  e  $t_j$ ,  $1 \leq j \leq 3$ . Destas, três são conhecidas (através das condições de contorno) e as restantes são incógnitas.

A equação (7.72), colocada em cada um dos  $S$  pontos nodais do contorno, fornece um sistema linear de  $3 \times S$  equações a  $3 \times S$  incógnitas, no caso de contorno sem vértice. Escrevendo-a para os nós  $c = 1, 2, \dots, S$ , resultam

$$C_{ij}(q_c) u_j(q_c) + \sum_{e=1}^{E^c} \sum_{n=1}^{m^e} \int_{\partial\Omega^e} T_{ji}(p,q_c) \beta_n^e(p) ds(p) u_j^e(p_n) =$$

$$= \sum_{E=1}^{E^d} \sum_{\ell=1}^{m^e} \int_{\Omega^E} U_{ji}(P,q_c) N_\ell^E(P) d\Omega(P) f_j^E(P_\ell) +$$

$$+ \sum_{e=1}^{E^c} \sum_{n=1}^{m^e} \int_{\partial\Omega^e} U_{ji}(p,q_c) \beta_n^e(p) ds(p) t_j^e(p_n),$$

$$1 \leq i, j \leq 3, \quad 1 \leq c \leq S, \quad q_c \in \partial\Omega. \quad (7.73)$$

Quando há vértices, necessita-se, dependendo do tipo das condições de contorno, de um conjunto adicional de equações. Isso pode ser obtido, por exemplo, admitindo-se a continuidade do tensor tensão de placas nas coordenadas globais, como é mostrado por WEEEN [33], ou ainda através da técnica de nó duplo, que é ado-

tada neste trabalho.

Para tornar a equação (7.73) apropriada à incorporação das condições de contorno na abordagem numérica, é necessário que ela se refira às coordenadas locais de contorno  $\underline{n}$  e  $\underline{s}$ , conforme a figura 7.1. Isso pode ser feito transformando-se a equação (7.63) como está descrito, por exemplo, em [13]. No presente trabalho, transformam-se apenas os vetores de valores nodais de deslocamentos e esforços generalizados. Sejam  $\underline{R}(q_\ell)$  e  $\underline{R}(p_m)$  a matriz de transformação da base global em base local, nos pontos  $q_\ell$  e  $p_m$ , respectivamente. Então, a equação (7.73) pode ser assim reescrita:

$$\begin{aligned}
 & R_{ia}(q_\ell) C_{ij}(q_\ell) R_{jb}(q_\ell) u'_b(q_\ell) + \\
 & + R_{ia}(q_\ell) \sum_{e=1}^{E^c} \sum_{m=1}^{m^e} \int_{\partial\Omega^e} T_{ji}(p, q_\ell) \beta_m^e(p) ds(p). \\
 & \cdot R_{jb}(p_m) u'_b{}^e(p_m) = \\
 & = R_{ia}(q_\ell) \sum_{E=1}^{E^d} \sum_{m=1}^{m^E} \int_{\Omega^E} U_{ji}(p, q_\ell) N_m^E(p) d\Omega(p) f_j^E(p_m) + \\
 & + R_{ia}(q_\ell) \sum_{e=1}^{E^c} \sum_{m=1}^{m^e} \int_{\partial\Omega^e} U_{ji}(p, q_\ell) \beta_m^e(p) ds(p) R_{jb}(p_m) t'_b{}^e(p_m) \\
 & 1 \leq a, b, i, j \leq 3, 1 \leq \ell \leq S, q_\ell \in \partial\Omega, \quad (7.74)
 \end{aligned}$$

onde

$$\underline{u}'^e(p_m) = [\psi_n(p_m), \psi_s(p_m), w(p_m)]^T; \quad (7.75)$$

$$\underline{t}^e(p_m) = [M_n(p_m), M_{ns}(p_m), Q_n(p_m)]^T, \quad (7.76)$$

que são as variáveis dos problemas de placas, como estão definidas em (7.16 - 7.18).

O sistema (7.74), na forma matricial, pode ser escrito como

$$\underline{A} \underline{U} = \underline{B} \underline{F} + \underline{D} \underline{T} \quad (7.77)$$

onde

$\underline{U}$  é o vetor que reúne os deslocamentos generalizados nos pontos nodais do contorno, segundo coordenadas locais,

$\underline{F}$  é o vetor que reúne o carregamento nodal no domínio, segundo o sistema global de coordenadas,

$\underline{T}$  é o vetor dos esforços generalizados nos pontos nodais do contorno, segundo as coordenadas locais.

### 7.6.2 Cálculo dos elementos das matrizes

Os elementos provenientes de integrais não-singulares são calculados numericamente através de regras gaussianas. A regra que usa oito pontos de integração mostrou-se satisfatória em todas as aplicações realizadas.

Quando o ponto de colocação coincide com um dos pontos do elemento que está sendo integrado, os núcleos das integrais de contorno em (7.74) apresentam singularidades. Nesses casos, as integrais que envolvem o produto  $U_{ji}(p, q_c) \beta_m^e(p)$  são calculadas empregando-se a técnica desenvolvida por TELLES [23]. Nesta

técnica, o integrando é regularizado através de uma transformação polinomial que possui determinante jacobiano nulo no ponto singular e que concentra os pontos de integração na vizinhança da singularidade. Nas aplicações, usa-se a regra gaussiana de oito pontos para implementar a citada técnica.

Com referência às integrais de  $T_{ji}(p, q_c) \beta_m^e(p)$ , considera-se primeiro o caso em que a função de interpolação  $\beta_m^e(p)$  não é a associada ao nó singular. Então, quando o ponto  $p$  tende para  $q_c$ ,  $\beta_m^e(p) = O(r)$ , como  $T_{ji}(p, q_c) = O(1/r)$ , o produto tende a um limite, e a integração numérica poderia ser realizada normalmente. Entretanto, seria necessário um grande número de pontos de integração para calcular precisamente essas integrais. Por isso, e visando a um esquema computacional simples, emprega-se novamente a metodologia descrita por Telles.

Quando a função de interpolação  $\beta_m^e(p)$  é a associada ao nó singular e o ponto  $p$  tende para  $q_c$ , tem-se que  $\beta_m^e(p) \approx 1$ . Como  $T_{ji}(p, q_c) = O(1/r)$ , as integrais de  $T_{ji}(p, q_c) \beta_m^e(p)$  existem somente no sentido de valor principal. Portanto, em (7.74) resta calcular os valores principais e os elementos  $C_{ij}(q_\ell)$ . Mas, em vez de calculá-los isoladamente, emprega-se o procedimento, descrito em [13], de imposição de movimentos rígidos referentes ao sistema global de coordenadas no ponto nodal  $q_\ell \in \partial\Omega$ , para obter as somas

$$C_{ij}(q_\ell) + \int_{\partial\Omega} (\dots) ds(p), \quad (7.78)$$

em função somente de integrais não-singulares.



### 7.6.3 Solução do sistema linear

O sistema obtido é não-simétrico e denso. Para sua solução, desenvolveu-se um programa que usa um esquema compacto de eliminação de Gauss (DAHLQUIST [86]), com pivotação parcial. Nas aplicações realizadas, a precisão da solução não se alterou quando o sistema foi previamente escalonado.

### 7.6.4 Cálculo de variáveis em pontos internos

Conhecidas as variáveis de placas nos pontos nodais do contorno  $\partial\Omega$ , a equação (7.54), com as partições de  $\Omega$  e  $\partial\Omega$  descritas no início da Seção 7.3, propicia os deslocamentos generalizados segundo os eixos coordenados, em pontos de domínio  $\Omega$ .

Os esforços de placas,  $M_x$ ,  $M_{xy}$ ,  $M_y$ ,  $Q_x$  e  $Q_y$ , são obtidos a partir da representação (7.54), calculando-se as derivadas que aparecem nas equações (7.1 - 7.5) em relação às coordenadas do ponto  $Q \in \Omega$ .

Verifica-se na equação (7.54) e em suas derivadas que as integrais de contorno presentes não apresentam singularidades. Assim, elas são integradas normalmente por regra gaussiana.

Os núcleos  $U_{ji}(P,Q)$ , que aparecem nas integrais de domínio em (7.54), apresentam singularidades logarítmicas implícitas, ou seja,  $U_{ji}(P,Q) = O(\lg r)$ . As derivadas de (7.54) em relação às coordenadas do ponto  $Q$  apresentam singularidades de Cauchy, isto é,  $O(1/r)$ . Mas, se o domínio  $\Omega$  for descrito em coordenadas polares, o jacobiano da transformação é  $O(r)$ . Logo, não há

dificuldade para calcular pelo procedimento de Telles essas integrais.

## 7.7 Aplicações Numéricas

A formulação integral desenvolvida na Seção 7.5 é aplicada para diversos problemas de placas, a fim de avaliar a precisão do método, comparar sua eficiência computacional com a de outros métodos, testar sua convergência e verificar seu comportamento sobre contornos que possuem vértices.

Como a teoria de Mindlin inclui força cortante, analisa-se o comportamento da formulação quando as placas se tornam finas ou muito finas. O objetivo é investigar o "locking", que freqüentemente aparece na análise de placas finas isotrópicas realizada através de elementos finitos de placas baseados na teoria de Mindlin [87] e [88].

### 7.7.1 Placas circulares

Nesta sub-seção, analisa-se apenas placas circulares engastadas sob carga distribuída uniforme.

Considerem-se os seguintes dados:

raio da placa,  $a = 0.5$  cm;

espessura da placa,  $h = 0.2$  cm;

módulo de elasticidade longitudinal,  $E = 2 \times 10^7$  N/cm<sup>2</sup>

módulo de Poisson,  $\nu = 0.3$ ;

parâmetro da teoria de Mindlin,  $k^2 = 3/4$ ;

intensidade da carga,  $f = 10$  N/cm<sup>2</sup>

As partições do domínio e do contorno consistem, res-

pectivamente, de doze elementos quadráticos isoparamétricos bidimensionais de oito nós e dezesseis elementos quadráticos isoparamétricos unidimensionais. Refere-se a estas partições como M1.

As simetrias do problema não foram usadas na solução numérica. As integrações são realizadas como está descrito nas Seções 7.6.2 e 7.6.4.

Em cada ponto do contorno, calculam-se as seguintes incógnitas: momento fletor normal,  $M_n$ , momento torsor,  $M_{ns}$  e força cortante,  $Q_n$ .

No centro da placa, determinam-se, segundo o sistema global de coordenadas, todos os parâmetros da placa: deslocamento transversal,  $w$ , rotações,  $\psi_x$  e  $\psi_y$ , momentos fletores,  $M_x$  e  $M_y$ , momento torsor,  $M_{xy}$ , e forças cortantes,  $Q_x$  e  $Q_y$ .

Os resultados numéricos obtidos e os analíticos disponíveis para este problema são mostrados na tabela 7.1, em que os asteriscos indicam que o valor da quantidade é menor que  $10^{-6}$ .

Comparando os resultados numéricos com os teóricos, verifica-se que nos pontos do contorno os esforços foram determinados com erros inferiores a 1%. No ponto central, os erros nos deslocamentos e nos esforços são inferiores a 0.1%.

Sendo o carregamento uniforme, não há necessidade de partição fina no domínio. O mesmo problema foi resolvido considerando-se partição do domínio através de quatro, e depois um elemento. Os resultados obtidos foram da mesma precisão que os mostrados na tabela 7.1.

Essa mesma aplicação foi repetida para placas cada vez mais finas. Assim, na tabela 7.2 estão os resultados para uma placa circular de espessura  $h = 10^{-2}$  cm, e na tabela 7.3 os re-

sultados para  $h = 10^{-3}$  cm.

TABELA 7.1 Placa circular engastada sob carga distribuída uniforme.  
Unidades: N, cm.

	Variável	Solução teórica [89]	Solução numérica Formulação integral
Pontos do Contorno	$M_n$	- 0.03125	- 0.03153
	$M_{ns}$	0.	0. (*)
	$Q_n$	- 0.25	- 0.2473
Ponto central da placa	$\psi_x$	0.	0. (*)
	$\psi_y$	0.	0. (*)
	$w \times 10^5$	0.1208	0.1209
	$M_x$	0.02031	0.02033
	$M_y$	0.02031	0.02033
	$M_{xy}$	0.	0. (*)
	$Q_x$	0.	0. (*)
	$Q_y$	0.	0. (*)

Na tabela 7.2, verifica-se que nos pontos do contorno os esforços apresentam erros relativos inferiores a 1.5%. No ponto central todas as variáveis têm erros relativos inferiores a 0.1%.

Observa-se na tabela 7.3 que nos pontos do contorno a força cortante envolve erro relativo da ordem de 6%, enquanto que o momento fletor radial possui erro relativo de 0.5%. No ponto central, o deslocamento apresenta erro relativo da ordem

TABELA 7.2 Placa circular engastada,  $h = 10^{-2}$  cm.

	Variável	Solução teórica [89]	Solução numérica Formulação integral
Pontos do contorno	$M_n$	- 0.03125	- 0.03078
	$M_{ns}$	- 0.	- 0.
	$Q_n$	- 0.25	- 0.2461
Ponto central da placa	$\psi_x$	0.	0.
	$\psi_y$	0.	0.
	$w \times 10^2$	0.5343	0.5351
	$M_x$	0.02031	0.02033
	$M_y$	0.02031	0.02033
	$M_{xy}$	0.	0.
	$Q_x$	0.	0.
	$Q_y$	0.	0.

de 0.004%, e nos esforços os erros relativos são inferiores a 0.1%.

É conveniente dizer que os dados desta aplicação não são compatíveis com os de placas com pequenos deslocamentos. Entretanto, o exemplo é válido a fim de testar o comportamento da formulação integral proposta na solução do sistema de equações diferenciais do modelo descrito na Seção 7.2, quando a relação  $h/d \ll 0.1$ .

Os resultados apresentados nas tabelas 7.1, 7.2 e 7.3 evidenciam que não há distorções nos resultados. Logo, a formulação integral não apresenta "locking".

O mesmo problema foi resolvido empregando-se quatro

TABELA 7.3 Placa circular engastada  $h = 10^{-3}$  cm.

	Variável	Solução teórica [89]	Solução numérica Formulação integral
Pontos do contorno	$M_n$	- 0.03125	- 0.03107
	$M_{ns}$	0.	0.
	$Q_n$	- 0.25	- 0.2651
Ponto central da placa	$\psi_x$	0.	0.
	$\psi_y$	0.	0.
	$w$	5.3321	5.334
	$M_x$	0.02031	0.02032
	$M_y$	0.02031	0.02032
	$M_{xy}$	0.	0.
	$Q_x$	0.	0.
	$Q_y$	0.	0.

elementos quadráticos isoparamétricos bidimensionais no domínio e oito elementos quadráticos unidimensionais no contorno. Refere-se a estas partições como M2. Os resultados estão mostrados na tabela 7.4, em comparação com os obtidos através da partição mais fina, M1, e os exatos.

### 7.7.2 Placas retangulares

Trabalhou-se apenas com placas retangulares engastadas sob carga distribuída uniforme.

Nesta aplicação, testa-se o comportamento da formula-

TABELA 7.4 Comparação dos resultados teóricos com os obtidos através das partições M1 e M2.

	Variável	Solução teórica [89]	Solução numérica-M1	Solução numérica-M2
Pontos do contorno	$M_n$	- 0.03125	- 0.03078	-0.03039
	$M_{ns}$	0.	0.	0.
	$Q_n$	- 0.25	- 0.2461	-0.2427
Ponto central da placa	$\psi_x$	0.	0.	0.
	$\psi_y$	0.	0.	0.
	$w \times 10^2$	0.5343	0.5351	0.5365
	$M_x$	0.02031	0.02033	0.02036
	$M_y$	0.02031	0.02033	0.02036
	$M_{xy}$	0.	0.	0.
	$Q_x$	0.	0.	0.
	$Q_y$	0.	0.	0.

ção proposta no tratamento de contornos com pontos angulosos. A técnica de nó duplo é a empregada para obter as equações adicionais necessárias para tornar o problema determinado.

Sendo engastada, a placa apresenta em cada vértice cinco incógnitas. As equações necessárias são obtidas escrevendo-se as equações (7.74) nos sistemas de coordenadas locais ( $n^1, s^1$ ) e ( $n^2, s^2$ ), associados aos elementos consecutivos ao vértice, como mostra a figura 7.5.

Considerem-se os seguintes dados:

comprimento do lado,  $l = 1$  cm;

espessura da placa,  $h = 0,1$  cm;

módulo de elasticidade longitudinal,  $E = 2 \times 10^7$  N/cm<sup>2</sup>

módulo de Poisson,  $\nu = 0,3$ ;

parâmetro da teoria de Mindlin,  $k^2 = 3/4$ ;

intensidade da carga,  $f = 10$  N/cm<sup>2</sup>

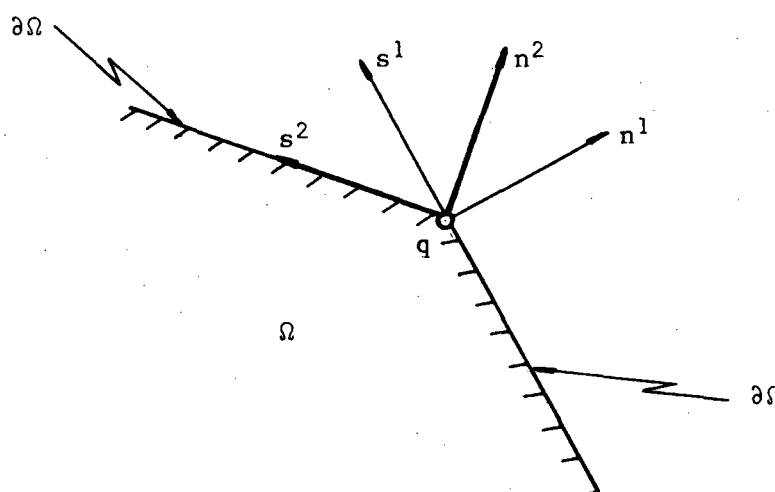


FIGURA 7.5 Sistema de coordenadas locais em ponto angularo.

Particiona-se o domínio através de dezesseis elementos quadráticos isoparamétricos bidimensionais de oito nós, e o contorno através de dezesseis elementos quadráticos isoparamétricos unidimensionais. Refere-se a estas partições por M3.

Na tabela 7.5, mostram-se os resultados numéricos obtidos pela formulação desenvolvida na Seção 7.5 e os obtidos por PUGH [104] através do método de elementos finitos para placas



moderadamente espessas ( $h/l = 0.1$ ).

TABELA 7.5 Placa quadrada engastada, com carga uniforme,  $h = 0.1$  cm.

Posição do ponto na Placa	Variáveis	Resultados de Pugh	Resultados da formulação integral
No Centro	$w \times 10^5$ (cm)	0.8190	0.8371
	$\psi_x$	0.	0.
	$\psi_y$	0.	0.
	$M_x$ (kgf cm)	0.0231	0.02325
	$M_y$ (kgf cm)	0.0231	0.02325
No meio de um lado	$M_x$ (kgf cm)	- 0.0513	- 0.04980
	$M_y$ (kgf cm)	- 0.0513	- 0.04980

Observa-se que, no ponto central da placa, comparando os resultados da formulação integral com os obtidos por Pugh, o deslocamento transversal apresenta erro relativo de 2.2%, enquanto que esse erro nos momentos fletores é de 0.6%. Nos pontos situados no meio dos lados da placa, os momentos fletores apresentam erro relativo da ordem de 3%. Portanto, é aceitável a precisão não só dos deslocamentos mas também dos esforços.

Para verificar o comportamento da formulação integral na solução de placas cada vez mais finas, repete-se essa aplicação para  $h/l = 0.01$  e  $h/l = 0.001$ . Os resultados numéricos obtidos são comparados com os analíticos encontrados para placas finas por TIMOSHENKO [105], e estão mostrados nas tabelas 7.6 e 7.7.

TABELA 7.6 Placa quadrada engastada  
com carga uniforme,  $f =$   
10 N/cm<sup>2</sup> e  $h/l = 0.01$ .

Posição do ponto na placa	Variáveis	Resultados de Timoshenko	Resultados da formulação integral
No Centro	$w \times 10^2$ (cm)	0.68796	0.6942
	$\psi_x$	0.	0.
	$\psi_y$	0.	0.
	$M_x$ (kgf cm)	0.0231	0.02294
	$M_y$ (kgf cm)	0.0231	0.02294
No meio de um lado	$M_x$ (kgf cm)	- 0.0513	- 0.05313
	$M_y$ (kgf cm)	- 0.0513	- 0.0513

TABELA 7.7 Placa quadrada engastada  
com carga uniforme,  $f =$   
10 N/cm<sup>2</sup> e  $h/l = 0.001$ .

Posição do ponto na placa	Variáveis	Resultados de Timoshenko	Resultados da formulação integral
No Centro	$w$ (cm)	6.8796	6.911
	$\psi_x$	0.	0.
	$\psi_y$	0.	0.
	$M_x$ (kgf cm)	0.0231	0.02291
	$M_y$ (kgf cm)	0.0231	0.02291
No meio de um lado	$M_x$ (kgf cm)	- 0.0513	- 0.0516
	$M_y$ (kgf cm)	- 0.0513	- 0.0516

Verifica-se que é aceitável a precisão dos resultados, em comparação com a obtida por Timoshenko. Para placa com  $h/l = 0.01$ , no ponto central, o deslocamento transversal e os esforços apresentam, respectivamente, erros relativos de 0.9% e 0.7%. No ponto situado no meio do lado da placa, os esforços apresentam erro relativo da ordem de 3%. No caso da placa com  $h/l = 0.001$ , os erros relativos dos deslocamentos e dos esforços são inferiores a 0.7%.

Portanto, a formulação integral para placas modeladas pela teoria de Mindlin, quando aplicada para placas finas e muito finas, comporta-se do modo previsto pela teoria clássica de placas.

## CAPÍTULO 8

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 8.1 Resumo e Conclusões

No Capítulo 1, mencionam-se as principais metodologias e formulações aplicáveis a elementos de contorno. Mostra-se que dois requisitos são essenciais para o estabelecimento de métodos integrais: **a)** solução fundamental associada ao operador do problema; **b)** fórmula de Green para validar as integrações.

No contexto de espaços de Hilbert, estabelece-se, no Capítulo 2, uma relação de reciprocidade generalizada e abstrata. Verifica-se que a escolha adequada do estado auxiliar presente naquela relação pode conduzir a formulações integrais que apresentem singularidade fraca e que sejam compactas e gerais.

Então, formula-se o MMFGL, que possui as referidas características.

No Capítulo 3, a formulação variacional do MMFGL conduz ao procedimento de cálculo direto das matrizes resultantes dos problemas discretos, que são todas simétricas. Esse procedimento amplia a aplicabilidade do referido método.

Uma importante observação que pode ser feita é que as regularidades dos problemas auxiliares, formulados para determinação dos elementos das matrizes de Green, são limitadas apenas pela regularidade do contorno, pois os outros dados são, no mí-

nimo, de classe  $C^0$ . Isso possibilita a obtenção das matrizes com precisão aceitável, mesmo usando-se, para tal, malhas esparsas ("coarse meshes").

Para ilustrar a aplicabilidade e versatilidade do MMFGL, alguns problemas são formulados nos Capítulos 4, 5 e 6. Os resultados obtidos em hastes delgadas e vigas de Bernoulli são muito precisos. Os problemas de membranas elásticas testam a potencialidade do método e comprovam a eficiência do procedimento de cálculo direto das matrizes de Green.

Relacionando a qualidade dos resultados obtidos com a "esparsidade" das malhas usadas no contorno e no domínio, conclui-se que o MMFGL propicia resultados muito precisos.

Além dessas características do MMFGL, verifica-se que:

- a) as variáveis de interesse, em cada problema, são determinadas sem haver necessidade de integrações adicionais, apesar de a formulação ser indireta;
- b) os valores nodais internos são determinados com reduzido esforço, mediante apenas multiplicação de matrizes e vetores já formados;
- c) o método proposto independe do parâmetro arbitrário que entra em sua formulação.

No Capítulo 7, determina-se, pelo método de Hörmander, uma solução fundamental para placas modeladas pela teoria de Mindlin.

Em seguida, apresenta-se uma formulação integral direta para esses problemas. As variáveis nela presentes, são os valores nodais de deslocamentos e as tensões resultantes, definidos no contorno.

É importante notar que esse procedimento caracteriza-se por: **a)** facilitar o tratamento das condições de contorno; **b)** reduzir o tempo de computação destinado à formação do sistema de

equações; c) propiciar diretamente as variáveis de interesse do problema.

Verifica-se que tanto os resultados de deslocamentos como os de esforços apresentam precisão aceitável. O maior erro relativo encontrado foi da ordem de 1.5%.

Através da formulação proposta, resolvendo-se problemas de placas cada vez mais finas, comprova-se que a formulação integral não apresenta "locking". Portanto, é aplicável a placas finas e espessas.

## 8.2 Sugestões para outras Investigações

Nesta tese, a formulação proposta, por ser abstrata, possui generalidade e grande aplicabilidade, mas é restrita à classe dos operadores diferenciais elípticos e foi aplicada para a solução de poucos problemas.

No contexto de formulação, a extensão do MMFGL a operadores parabólicos e hiperbólicos é, praticamente, a continuação das investigações.

A análise de erros é outro assunto importante, que precisa ser investigado para se completar a formulação. A estrutura matemática em que esta foi inserida favorece o desenvolvimento dessa análise.

O procedimento variacional empregado para transformar equações integrais em equações algébricas precisa ser melhor estudado, para tornar-se mais eficiente. Isso requer o desenvolvimento de fórmulas especiais de integração e a pesquisa de equivalência desse procedimento com o de colocação.

A metodologia de obtenção direta dos elementos das ma-

trizes de Green necessita ser testado em relação ao emprego de elementos mais regulares e de ordens mais elevadas. O uso das funções de interpolação de elementos finitos da base conjugada é outro procedimento que precisa ser testado. O objetivo é aumentar a precisão, mesmo com o emprego de malhas esparsas.

No contexto das aplicações, os problemas da elasticidade anisotrópica, os de placas construídas com materiais compostos e os de cascas genéricas constituem um amplo campo de estudos para as formulações propostas. O procedimento de cálculo direto das matrizes pode ser essencial para essas aplicações.

Com relação à formulação integral de placas de Mindlin, sua extensão para problemas de vibração e estabilidade de placas é o prosseguimento natural das investigações.

A implementação numérica precisa ser investigada, para tornar-se eficiente. Os estudos podem começar pelas técnicas de discretização e aproximação. Inclui-se: **a)** escolha do elemento; **b)** desenvolvimento de fórmulas adaptativas de integração numérica; **c)** conversão de integrais de domínio em integrais de contorno; **d)** tratamento de vértices; **e)** uso de procedimento variacional para transformar o sistema de equações integrais em sistema de equações algébricas.

Finalmente, convém observar que a estrutura matemática abstrata das formulações e procedimentos propostos pode ser identificada com a de diversos problemas de mecânica dos fluidos e de transferência de calor, bem como de mecânica dos sólidos.

**A P É N D I C E S**



## APÊNDICE A

### ELEMENTOS DE CONTORNO PARA HASTES

#### 1. INTRODUÇÃO

Uma ordenação adequada do vetor das incógnitas em um sistema linear influencia a estrutura computacional do sistema. Com efeito, a seguir são dadas as contribuições dos elementos que possuem extremos coincidentes com os extremos da haste, para os tipos mais comuns de fixação de hastes, a fim de se obter um sistema linear, simétrico e tridiagonal.

#### 2. ELEMENTOS DE CONTORNO DO TIPO DIRICHLET

Faz-se uso das equações (4.31 - 4.34) para escrever as contribuições elementares.

##### 2.1 Elemento I<sup>1</sup>

$$\left[ \begin{array}{cc|c} G_{0,0}^1 & -G_{0,1}^1 & 0 \\ -G_{1,0}^1 & G_{1,1}^1 & -1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} F_{0,1}^{0,1} \\ F_{1,1}^{2,1} \\ u_1^1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} s_0^1 - \bar{u}_0^1 \\ -s_1^1 \end{array} \right\}; \quad (\text{A.1})$$

onde  $\bar{u}_0^1$  é um valor especificado.

2.2 Elemento  $I^n$ 

$$\left[ \begin{array}{cc|c} G_{n-1,n-1}^n & -G_{n-1,n}^n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -G_{n,n-1}^n & G_{n,n}^n & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} F_{n-1}^{n-1,n} \\ F_n^{n+1,n} \\ \vdots \\ u_{n-1}^n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} S_{n-1}^n \\ \vdots \\ -S_n^n + \bar{u}_n^n \end{array} \right\}$$

(A.2)

onde  $\bar{u}_n^n$  é um valor especificado

## 3. ELEMENTOS DE CONTORNO DO TIPO NEUMANN

3.1 Elemento  $I^1$ 

$$\left[ \begin{array}{cc|c} (G_{0,0}^1 + \frac{1}{k_0}) & -G_{1,0}^1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -G_{0,1}^1 & G_{1,1}^1 & -1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} F_0^{0,1} \\ F_1^{2,1} \\ \vdots \\ u_1^1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} S_0^1 + \frac{\bar{q}}{k_0} \\ \vdots \\ -S_1^1 \end{array} \right\}; \quad (A.3)$$

sendo  $\bar{q}$  força especificada.

3.2 Elemento  $I^n$ 

$$\left[ \begin{array}{cc|c} G_{n-1,n-1}^n & -G_{n,n-1}^n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -G_{n-1,n}^n & (G_{n,n}^n - \frac{1}{k_0}) & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} F_{n-1}^{n-1,n} \\ F_n^{n+1,n} \\ \vdots \\ u_{n-1}^n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} S_{n-1}^n \\ \vdots \\ -S_n^n - \frac{\bar{q}}{k_0} \end{array} \right\}. \quad (A.4)$$

## 4. FUNÇÃO DE GREEN

Considere-se um elemento de haste como mostra a Figura A.1.

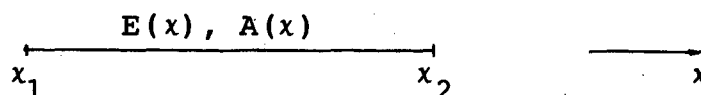


FIGURA A.1 Elemento de haste.

A função de Green associada ao operador (4.12) e que satisfaz as condições de contorno (4.25 - 4.26) pode ser obtida, como descrito em (LANCZOS [68]), na forma,

$$G(x, \xi) = \left\{ -\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\eta}{E(\eta) A(\eta)}} \left[ -\frac{1}{k_0} + \int_{x_1}^{\xi} \frac{d\eta}{E(\eta) A(\eta)} \right] \right\} \cdot \left[ 1 - k_0 \int_{x_1}^x \frac{d\eta}{E(\eta) A(\eta)} \right], \quad x_1 \leq x \leq \xi; \quad (\text{A.5})$$

$$G(x, \xi) = \left\{ \frac{1}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\eta}{E(\eta) A(\eta)}} \left[ -\frac{1}{k_0} + \int_{x_1}^{\xi} \frac{d\eta}{E(\eta) A(\eta)} \right] \right\} \cdot \left[ 1 + k_0 \int_x^{x_2} \frac{d\eta}{E(\eta) A(\eta)} \right], \quad \xi \leq x \leq x_2. \quad (\text{A.6})$$

## APÊNDICE B

### ELEMENTOS DE CONTORNO PARA VIGAS

#### 1. INTRODUÇÃO

A ordenação do vetor das incógnitas que aparece na relação matricial (5.44) favorece a estrutura computacional do sistema, por dar origem, primeiro a nível elementar, e depois a nível global, a matrizes simétricas. A seguir, apresenta-se a forma de incorporar as condições de contorno usuais, no formalismo, a fim de manter a estrutura simétrica das matrizes e propiciar a compactação dos graus de liberdade de deslocamentos generalizados nodais.

#### 2. ELEMENTOS DE CONTORNO DO TIPO DIRICHLET

##### 2.1 Elemento I<sup>1</sup>

Da equação (5.44) resulta

$$\begin{bmatrix} \text{NG}^1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_0^1 \\ M_0^1 \\ F_1^1 \\ M_1^1 \\ \hline w_1^1 \\ \theta_1^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_0^1 & -w_0^1 \\ DS_0^1 & -\theta_0^1 \\ -S_1^1 & \\ -DS_1^1 & \end{Bmatrix} ; \quad (\text{B.1})$$

onde  $\bar{w}_0^1$  e  $\bar{\theta}_0^1$  são valores especificados para o deslocamento transversal e para a rotação, respectivamente.

## 2.2 Elemento $I^N$

$$\begin{bmatrix} u_{GN} \\ \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{N-1}^N \\ M_{N-1}^N \\ F_N^N \\ M_N^N \\ \hline w_{N-1}^N \\ \theta_{N-1}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{N-1}^N \\ DS_{N-1}^N \\ -S_N^N + \bar{w}_N^N \\ -DS_N^N + \bar{\theta}_N^N \end{bmatrix}; \quad (\text{B.2})$$

## 3. ELEMENTOS DE CONTORNO DO TIPO NEUMANN

### 3.1 Elemento $I^1$

$$\begin{bmatrix} G_{0,0}^1 + \frac{1}{k_3} \\ \vdots \\ \frac{d^2 G^1}{d\xi dx} \Big|_{0,0} + \frac{1}{k_2} \\ \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0^1 \\ M_0^1 \\ F_1^1 \\ M_1^1 \\ \hline w_1^1 \\ \theta_1^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0^1 + \bar{T}/k_3 \\ DS_0^1 - \bar{M}/k_2 \\ S_1^1 \\ DS_1^1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

sendo  $\bar{T}$  e  $\bar{M}$  valores especificados para força cortante e para momento fletor, respectivamente.

### 3.2 Elemento $I^N$

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & G_{N,N}^N - \frac{1}{k_3} & 0 & 0 \\ & & \frac{d^2 G^N}{d\xi dx} \Big|_{N,N} - \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} T_{N-1}^N \\ M_{N-1}^N \\ T_N^N \\ M_N^N \\ S_{N-1}^N \\ \Theta_{N-1}^N \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} S_{N-1}^N \\ DS_{N-1}^N \\ S_N^N - \bar{T}/k_3 \\ DS_N^N + \bar{M}/k_2 \end{array} \right\}$$

(B.4)

Nas equações (B.3) e (B.4), são mostrados apenas os elementos que são modificados por ocasião do tratamento das condições de contorno.

Os elementos mistos podem ser facilmente obtidos a partir das equações (B.1 - B.4).

## 4. FUNÇÃO DE GREEN

Considere-se um elemento de viga como mostra a Figura

B.1.

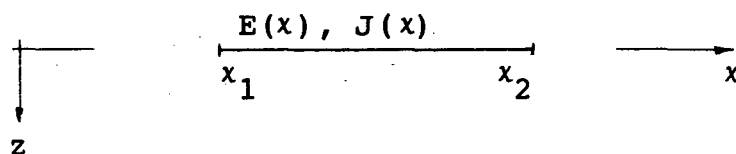


FIGURA B.1 Elemento de viga.

A função de Green associada ao operador (5.24), que satisfaz as condições de contorno (2.21), descritas nesse problema pelos operadores (5.20 - 5.21), pode ser obtida como descrito em (LANCZOS [68]), resultando

$$G(x, \xi) = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4] \begin{Bmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad x_1 \leq x \leq \xi, \quad (\text{B.5})$$

$$G(x, \xi) = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4] \begin{Bmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \xi \leq x \leq x_2; \quad (\text{B.6})$$

onde:

$$a_1 = b_1 - 1/[6 E(x) J(x)], \quad (\text{B.7})$$

$$a_2 = b_2 + \xi/[2 E(x) J(x)], \quad (\text{B.8})$$

$$a_3 = b_3 - \xi^2/[2 E(x) J(x)], \quad (\text{B.9})$$

$$a_4 = b_4 + \xi^3/[6 E(x) J(x)], \quad (\text{B.10})$$

$$\underline{b} = \begin{Bmatrix} \underline{R} & \underline{C} \\ \underline{S} & \underline{C} \end{Bmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

$$\underline{R} = \frac{1}{\alpha_1 \delta_1 \beta_1 \gamma_1} \begin{bmatrix} \delta_1 & -\beta_1 \\ \gamma_1 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

$$\underline{S} = - \begin{bmatrix} 0 & -1/k_2 \\ -1/k_1 & x_2/k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_2 x_2^3 + 6E(x)J(x) & -k_2 x_2^2 \\ -3k_3 x_2^2 - 6E(x)J(x) & -2[k_3 x_2 + E(x)J(x)] \end{bmatrix} \cdot \underline{R} \quad (\text{B.13})$$

$$\underline{C} = \frac{1}{E(x)J(x)} \left\{ \begin{array}{l} (1/6)[k_2 \xi^3 - k_2 x_1^3 + 6E(x)J(x)] + (1/2)(k_2 \xi x_1^2 - k_2 x_1 \xi^2) \\ -(1/6)[3k_3 x_1^2 + 6E(x)J(x) x_1] + (1/2)[2k_3 \xi x_1 + 2\xi E(x)J(x) - \xi^2 k_3] \end{array} \right\}$$

onde:

$$\alpha_1 = k_2 (x_2^3 - x_1^3) + 3 \frac{k_2}{k_3} - [k_3 x_2^2 + 2 E(x)J(x) x_2] (x_1 - x_2), \quad (\text{B.14})$$

$$\beta_1 = k_2 (x_2^2 - x_1^2) + 2 \frac{k_2}{k_3} - [k_3 x_2 + E(x)J(x)] (x_1 - x_2), \quad (\text{B.15})$$

$$\gamma_1 = 3 k_3 (x_2^2 - x_1^2) + 6E(x)J(x) (x_2 - x_1), \quad (\text{B.16})$$

$$\delta_1 = 2 k_3 (x_2 - x_1). \quad (\text{B.17})$$



## APÊNDICE C

### SOLUÇÃO FUNDAMENTAL AUXILIAR

Considere-se a equação (7.48) reescrita na forma

$$\frac{D^3}{4} (1 - \nu)^2 \lambda^2 \Delta^2 (\Delta - \lambda^2) G(P, Q) = - \delta(P, Q). \quad (C.1)$$

Devido à invariância dos operadores  $\Delta$  e  $\Delta^2$  em relação à rotação e devido ao fato de a equação (C.1) descrever fenômenos em meios isotrópicos, é natural que seja escolhida uma solução fundamental que possua simetria radial.

Então, procura-se uma solução para a equação

$$\Delta^2 (\Delta - \lambda^2) v(r) = 0, \quad (C.2)$$

onde  $v(r)$  é uma função que depende somente de  $r = ||P - Q||$ . Uma combinação linear de funções que pertencem aos núcleos dos operadores  $(\Delta - \lambda^2)$  e  $\Delta^2$  satisfaz a equação (C.2).

Aplicando o operador  $(\Delta - \lambda^2)$  a uma função que depende só de  $r$ ,  $v_1(r)$ , tem-se a equação

$$\frac{d^2 v_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_1}{dr} - \lambda^2 v_1 = 0. \quad (C.3)$$

Multiplicando a equação (C.3) por  $r^2$  e transformando a variável  $r$  em  $z$  através de  $z = \lambda r$ , obtém-se

$$z^2 \frac{d^2 v_1}{dz^2} + z \frac{dv_1}{dz} - z^2 v_1 = 0. \quad (\text{C.4})$$

As funções modificadas de Bessel de ordem zero,  $I_0(z)$  e  $K_0(z)$ , são soluções da equação (C.4).

Convém observar que  $I_0$  não apresenta singularidade na origem, enquanto que  $K_0(z)$  apresenta singularidade implícita, do tipo logarítmico.

Para determinar uma solução para o operador  $\Delta^2$ , considera-se a seguinte equação:

$$\Delta^2 v_2(r) = 0. \quad (\text{C.5})$$

As funções

$$1, \lg r, r^2 \text{ e } r^2 \lg r \quad (\text{C.6})$$

são soluções de (C.5).

A fim de construir uma solução fundamental simples para a equação (C.2), seja a combinação linear

$$v = C_1 K_0(z) + C_2 \lg z + C_3 z^2 + C_4 z^2 \lg z. \quad (\text{C.7})$$

As constantes presentes em (C.7) são determinadas para satisfazer a equação (C.1).

A seguir, mostra-se que a função definida em (C.7) é uma solução fundamental da (C.1). Com efeito, é preciso provar que

$$\langle v, \frac{D^3}{4} (1 - v)^2 \lambda^2 \Delta^2 (\Delta - \lambda^2) \phi \rangle = - \phi(0),$$

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(r). \quad (\text{C.8})$$

Retirando uma esfera de raio  $\epsilon$  com centro na origem,

fazendo integrações por partes no domínio remanescente dessa retirada e aplicando as propriedades das funções testes,  $\emptyset$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} v \Delta^2 (\Delta - \lambda^2) \emptyset d\Omega = & - \int_{\partial \Omega_\epsilon} v \frac{\partial}{\partial r} [\Delta (\Delta - \lambda^2) \emptyset] ds + \\
 & + \int_{\partial \Omega_\epsilon} [\Delta (\Delta - \lambda^2) \emptyset] \frac{\partial v}{\partial r} ds - \\
 & - \int_{\partial \Omega_\epsilon} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\Delta - \lambda^2) \emptyset \right] \Delta v ds + \\
 & + \int_{\partial \Omega_\epsilon} [(\Delta - \lambda^2) \emptyset] \frac{\partial}{\partial r} (\Delta v) ds - \\
 & - \int_{\partial \Omega_\epsilon} \frac{\partial \emptyset}{\partial r} \Delta^2 v ds + \\
 & + \int_{\partial \Omega_\epsilon} \emptyset \frac{\partial}{\partial r} [\Delta^2 v] ds. \tag{C.9}
 \end{aligned}$$

Quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , a primeira, a terceira e a quinta integral do lado direito da equação (C.9) se anulam. A segunda integral se torna convergente se as constantes  $C_1$  e  $C_2$  forem escolhidas como sendo

$$C_1 = C_2 \tag{C.10}$$

A quarta integral é convergente se a constante  $C_4$  for escolhida como

$$C_4 = C_1/4 \tag{C.11}$$

Para incluir a função  $z^2$  na solução fundamental, faz-se

$$C_3 = - C_4. \tag{C.12}$$

Finalmente, para que seja satisfeita a equação (C.8), da última integral do lado direito da equação (C.9), obtém-se

$$C_1 = 2[\pi D^3 (1 - \nu)^2 \lambda^6]^{-1}. \quad (C.13)$$

Isso completa a prova de que

$$v(r) = 2[\pi D^3 (1-\nu)^2 \lambda^6]^{-1} [K_0(z) + \lg(z) + \frac{1}{4}z^2(\lg(z)-1)] \quad (C.14)$$

é uma solução fundamental para o operador da equação (C.1).

## APÊNDICE D

### TENSORES FUNDAMENTAIS PARA O OPERADOR DA TEORIA DE PLACAS DE MINDLIN

#### 1. TENSOR DESLOCAMENTO FUNDAMENTAL - $\underline{U}$

Os elementos do tensor  $\underline{U}$  ( $U_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ ) possuem o significado descrito no Capítulo 7. As expressões que foram implementadas computacionalmente são as seguintes:

$$U_{11} = \frac{1}{2\pi D} \left\{ \frac{2}{(1-\nu)} [B(z) - A(z) r_{,1} r_{,1}] - \frac{1}{2} (\lg z - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} r_{,1} r_{,1} \right\},$$

$$U_{21} = \frac{1}{2\pi D} \left[ - \frac{2}{(1-\nu)} A(z) r_{,1} r_{,2} - \frac{1}{2} r_{,1} r_{,2} \right],$$

$$U_{31} = \frac{1}{2\pi D} \left[ \frac{1}{2} r_{,1} (\lg z - \frac{1}{2}) \right],$$

$$U_{12} = U_{21}$$

$$U_{22} = \frac{1}{2\pi D} \left\{ \frac{2}{(1-\nu)} [B(z) - A(z) r_{,2} r_{,2}] - \frac{1}{2} (\lg z - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} r_{,2} r_{,2} \right\},$$

$$U_{32} = \frac{1}{2\pi D} \left[ \frac{1}{2} r_{,2} (\lg z - \frac{1}{2}) \right],$$

$$U_{13} = - U_{31},$$

$$U_{23} = - U_{32},$$

$$U_{33} = \frac{1}{2\pi D \lambda^2} \left[ -\frac{2}{(1-\nu)} \lg z + \frac{1}{4} z^2 (\lg z - 1) \right].$$

Nas equações anteriores, tem-se

$$r = [(x_p - x_Q)^2 + (y_p - y_Q)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$z = \lambda r,$$

$$A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z} [K_1(z) - \frac{1}{z}],$$

$$B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z} [K_1(z) - \frac{1}{z}],$$

$$r_{,1} = \frac{x_p - x_Q}{r},$$

$$r_{,2} = \frac{y_p - y_Q}{r},$$

e

$K_0(z)$ ,  $K_1(z)$  indicam, respectivamente, funções modificadas de Bessel de ordem zero e um,

$\nu$  indica módulo de Poisson.

Usando o desenvolvimento de  $K_0$  e  $K_1$  para pequenos argumentos (ABROWITZ [85]), conclui-se que  $A(z)$  é uma função contínua e  $B(z)$  possui singularidade implícita do tipo logarítmico,  $-\frac{1}{2} \lg z$ .

## 2. TENSOR TENSÃO FUNDAMENTAL - $T_{ij}$

Das equações (7.50 - 7.52), tem-se

$$T_{1j} = M_x(j) n_x + M_{xy}(j) n_y,$$

$$T_{2j} = M_{xy}(j) n_x + M_y(j) n_y,$$

$$T_{3j} = Q_x(j) n_x + Q_y(j) n_y,$$

onde  $1 \leq j \leq 3$ .

As expressões dos esforços que provêm da primeira coluna do tensor  $\underline{U}$  podem ser escritas como

$$M_x(1) = \frac{1}{\pi r} r_{,1} \left\{ -[zK_1(z) + 4A(z) + \frac{1}{2}(1-\nu)] r_{,2} r_{,2} + A(z) - \frac{1}{4}(1+\nu) \right\},$$

$$M_y(1) = \frac{1}{\pi r} r_{,1} \left\{ [zK_1(z) + 4A(z) + \frac{1}{2}(1-\nu)] r_{,2} r_{,2} - A(z) - \frac{1}{4}(1+\nu) \right\},$$

$$M_{xy}(1) = \frac{1}{2\pi r} r_{,2} \left\{ -zK_1(z) r_{,2} r_{,2} + [zK_1(z) + 8A(z) + (1-\nu)] r_{,1} r_{,1} - 2A(z) - \frac{1}{2}(1-\nu) \right\},$$

$$Q_x(1) = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B(z) - A(z) r_{,1} r_{,1}],$$

$$Q_y(1) = -\frac{\lambda^2}{2\pi} A(z) r_{,1} r_{,2}.$$

Os esforços provenientes da segunda coluna do tensor  $\underline{U}$  podem ser escritos como

$$M_x(2) = \frac{1}{\pi r} r_{,2} \left\{ [zK_1(z) + 4A(z) + \frac{1}{2}(1-\nu)] r_{,1} r_{,1} - A(z) - \frac{1}{4}(1+\nu) \right\},$$

$$M_y(2) = \frac{1}{\pi r} r_2 \left\{ [-zK_1(z) + 4A(z) + \frac{1}{2}(1-\nu)] r_1 r_1 + \right. \\ \left. + A(z) - \frac{1}{4}(1+\nu) \right\},$$

$$M_{xy}(2) = \frac{1}{2\pi r} r_1 \left\{ [zK_1(z) + 8A(z) + (1-\nu)] r_2 r_2 - \right. \\ \left. - zK_1(z) r_1 r_1 - 2A(z) - \frac{1}{2}(1-\nu) \right\},$$

$$Q_x(2) = -\frac{\lambda^2}{2\pi} A(z) r_1 r_2$$

$$Q_y(2) = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B(z) - A(z) r_2 r_2].$$

Os esforços que provêm da terceira coluna do tensor  $\underline{U}$  podem ser escritos como

$$M_x(3) = \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{2}(1+\nu) (\lg z - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(1-\nu) r_1 r_1 - \frac{\nu}{2} \right],$$

$$M_y(3) = \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{2}(1+\nu) (\lg z - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(1-\nu) r_2 r_2 - \frac{\nu}{2} \right],$$

$$M_{xy}(3) = \frac{1}{4\pi} (1-\nu) r_1 r_2,$$

$$Q_x(3) = -\frac{1}{2\pi r} r_1,$$

$$Q_y(3) = -\frac{1}{2\pi r} r_2.$$

Convém observar que os esforços apresentam singularidade forte do tipo  $(1/r)$ .



## BIBLIOGRAFIA

- [1] - BREBBIA, C.A. The boundary element method for engineers. London, Pentech Press, 1978.
- [2] - KELLOG, O. D. Potential theory. New York, Dover Publications, 1954.
- [3] - HESS, J.L. & SMITH, A.M.O. Calculation of potential flow about arbitrary bodies. In: Progress in Aeronautical Sciences 8, New York, Pergamon Press, 1966, p.1-138.
- [4] - CRUZE, T.A. & RIZZO, F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. Int. J. Math. Anal. Appl., v.22, p. 244-259, 1968.
- [5] - BREBBIA, C.A. & WALKER, S. Boundary element techniques in engineering. London, Newnes-Butterworths, 1980.
- [6] - BREBBIA, C.A. The boundary element method for engineers. 2.ed. London, Pentech Press, 1984.
- [7] - BREBBIA, C.A. The future of the boundary element method. In: BREBBIA, C.A. Boundary elements VIII. Berlin, Springer-Verlag, 1986.
- [8] - ZHANG, J.D. & ATLURI, S.N. Post-buckling analysis of shallow shells by the field boundary element method. Int. J. Num. Meth. in Engng, 1986.
- [9] - MUKHERJEE, S. & RAJIVAH, H. Analysis of metal forming problems by the boundary element method. In: BREBBIA, C.A. & VENTURINI, W.S. Boundary element techniques: Applications in stress analysis and heat transfer. Great Britain, Computational Mechanics Publications, 1987.
- [10] - FINLAYSON, B.A. The method of weighted residuals. New York, Academic Press, 1972.
- [11] - HESS, J.L. Higher order numerical solution of the integral equation for the two-dimensional Neumann problem. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 2, p. 1-15, 1973.

- [12] - CRUZE, T.A. An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. Computer & Structures, v. 4, p. 741-754, 1974.
- [13] - LACHAT, J.C. A further development of the boundary integral technique for elastostatics. University of Southampton, 1975. (Ph.D. Thesis)
- [14] - BAKER, C.T.H. The numerical treatment of integral equations. Oxford, Clarendon Press, 1978.
- [15] - ARNOLD, D.N. & WENDLAND, W.L. Collocation versus Galerkin procedures for boundary integral methods. In: BREBBIA, C. A. Boundary Elements Methods in Engineering (Fourth International Seminar). Berlin, Springer-Verlag, 1982.
- [16] - ZIENKIEWICZ, O.C. et al. The coupling of the finite element method and Boundary solution procedures. Int. J. Num. Meth. in Engng, v. 11, p. 355-375, 1977.
- [17] - TULLBERG, O. & BOLTEUS, L. A critical study of different boundary element stiffness matrices. In: BREBBIA, C. A. Boundary Elements Methods in Engineering (Fourth International Seminar). Berlin, Springer-Verlag, 1982.
- [18] - CRUZE, T.A. & WILSON, R.B. Advanced applications of boundary-integral method. Nuclear Engineering and Design, v. 46, p. 223-234, 1978.
- [19] - LACHAT, J.C. & WATSON, J.O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics. Int. J. Num. Meth. in Engng., v. 10, p. 991-1005, 1976.
- [20] - STROUD, A. H. & SECREST, D. Gaussian quadrature formulae. New York, Prentice-Hall, 1966.
- [21] - KATSIKADELIS, J.T. & ARMENAKAS, A.E. Numerical evaluation of line integrals with a logarithmic singularity. AIAA Journal, v. 23, p.1135-1137, 1985.
- [22] - POGORZELSKI, W. Integral equations and their applications. Oxford, Pergamon Press, 1966, v.1.
- [23] - TELLES, J.C.F. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. Int. J. Num. Meth. in Engng., v. 24, p. 959-973, 1987.
- [24] - KUTT, H. R. On the numerical evaluation of finite - part integrals involving an algebraic singularity. Pretoria, 1975 (Special Report).

- [25] - SMITH, A.M.O. & PIERCE, J. Exact solution of the Neumann problem. Calculation of plane and axially symmetric flows about or within arbitrary boundaries. [s.l], Douglas Aircraft Company, 1958, (Report nº 26988).
- [26] - HESS, J.L. Calculation of potential flow about bodies of revolution having axes perpendicular to the free-stream direction. Journal of the Aerospace Science, v. 29, p. 726-742, 1962.
- [27] - JASWON, M.A. Integral equation methods in potential theory I. Proc. Roy. Soc., v. 275A, p. 23-32, 1963.
- [28] - SYMM, G.T. Integral equation methods in potential theory II. Proc. Roy. Soc., v. 275A, p.33-46, 1963.
- [29] - RIZZO, F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. Q. Appl. Math., v. 25, p. 83-95, 1967.
- [30] - HÖRMANDER, L. Linear partial differential operators. 3. ed. Berlin, Springer-Verlag, 1969.
- [31] - WATSON, J.O. Advanced implementation of the boundary element method for two-and three-dimensional elastostatics. In: BANERJEE, P.K. & BUTTERFIELD, R. Developments in boundary element methods-1. London, Applied Science Publishers, 1979.
- [32] - BARCELLOS, C.S. & SILVA, L.H.M. "Review" sobre o método de elementos de contorno aplicado para solução de problemas de placas elásticas. In: Anais do VIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica. São José dos Campos, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, p. 457-460, 1985.
- [33] - WEEEN, V.F. Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model. Int. J. Num. Meth. Engng., v. 18, p. 1-10, 1982.
- [34] - REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. Journal of Applied Mechanics, v. 12, p. 69-76, 1945.
- [35] - TOTTENHAM, H. The boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P.K. & BUTTERFIELD, R. Developments in boundary element methods - 1. London, Applied Science Publishers, 1979.
- [36] - TOSAKA, N. & MIYAKE, S. A boundary integral equation formulation for elastic shallow shell bending problems. In: BREBBIA, C.A. Boundary Elements Methods in Engi-

- neering (Fourth International Seminar). Berlin, Springer-Verlag, 1982.
- [37] - RONG, Q. Spline boundary element method for shallow shells. In: BREBBIA, C.A. Boundary Elements VI. Berlin, Springer-Verlag, 1984.
- [38] - BURNS, T.J. The partial current balance method: A local Green's function technique for the numerical solution of multidimensional neutron diffusion problems. Urbana, University of Illinois, 1975, (Ph.D. Thesis).
- [39] - HORAK, W.C. Local Green's function techniques for the solution of heat conduction and incompressible fluid flow problems. Urbana, University of Illinois, 1980, (Ph.D. Thesis).
- [40] - LAWRENCE, R.D. A nodal Green's function method for multidimensional neutron diffusion calculations. Urbana, University of Illinois, 1979, (Ph.D. Thesis).
- [41] - NISHIMURA, N. & KOBAYASHI, S. A boundary integral equation formulation for three dimensional anisotropic elastostatic. In: BREBBIA, C.A. Boundary Elements Method V. Berlin, Springer-Verlag, 1983.
- [42] - BREBBIA, C.A. On variational techniques and discrete formulations. In: Boundary Elements VI. Berlin, Springer-Verlag, 1984.
- [43] - FUSCO JUNIOR, F.B. A unified formulation of the finite and boundary element methods, using energy methods. Applied Mathematical Modelling, v.5, p. 263-268, 1981.
- [44] - HERRERA, I. Unified approach to discrete methods. In: BREBBIA, C.A. Boundary Elements VI. Berlin, Springer-Verlag, 1984.
- [45] - \_\_\_\_\_. Unified approach to numerical methods, part II: finite elements, boundary methods, and their coupling. Numerical Methods for Partial Differential Equations, v. 3, p. 159-186, 1985.
- [46] - \_\_\_\_\_. Unified approach to numerical methods for partial differential equations, part I: Green's formulas for operators in discontinuous fields. Numerical Methods for Partial Differential Equations, v. 1, p. 25-44, 1985.
- [47] - TREVES, F. Basic linear partial differential equations. New York, Academic Press, 1975.

- [48] - JASWON, M.A. & SYMM, G.T. Integral equation methods in potential theory and elastostatic. London, Academic Press, 1977.
- [49] - BANERJEE, P.K. & BUTTERFIELD, R. Developments in boundary element methods - 1. London, Applied Science Publishers, 1979.
- [50] - \_\_\_\_\_. Boundary element methods in engineering Science. London, McGraw-Hill Book, 1981.
- [51] - \_\_\_\_\_. Developments in boundary elements methods- 2. London, Applied Science Publishers, 1982.
- [52] - BREBBIA, C.A. et al. Boundary element techniques. Berlin, Springer-Verlag, 1984.
- [53] - NECAS, J. Les méthodes directes in théorie des équations elliptiques. Prague, Academia, 1967.
- [54] - ODEN, J.T. & CAREY, G.F. Finite elements - Mathematical aspects. New Jersey, Prentice-Hall, 1983, v. IV.
- [55] - CRUZE, T.A. Mathematical foundations of the boundary integral equation method in solid mechanics. Connecticut, United Technologies Corporation, 1977, (Special Scientific Report).
- [56] - JENG, G. & WEXLER, A. Isoparametric, finite element, variational solution of integral equations for three-dimensional fields. Int. J. Num. Meth. in Engng., v. 11, p. 1455-1471, 1977.
- [57] - WENDLAND, W. L. & ARNOLD, D.N. On the asymptotic convergence of collocation methods. Mathematical Computational, v. 41, p. 349-381, 1983.
- [58] - STEFANO, A. & TRALLI, A. A weak formulation of boundary integral equations, with application to elasticity problems. Applied Mathematical Modelling, v. 8, p. 75-80, 1984.
- [59] - KANTOROVICH, L. V. & KRYLOV, V. I. Approximate methods of higher analysis. New York, Interscience Publishers, 1964.
- [60] - CIARLET, P.G. Discrete variational Green's function I. AEQ. Math., v. 4, p. 74-81, 1970.
- [61] - CIARLET, P.G. & VARGA, R.S. Discrete variational Green's

- function II. Numer. Math., v.16, p. 115-128, 1970.
- [62] - FORSTER, P. Discrete variational Green's function and error bounds for Galerkin approximations. Numer. Math., v. 19, p. 407-418, 1972.
- [63] - COLLE, S. Um princípio variacional para a determinação de funções de Green. In: Anais do III Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1975.
- [64] - \_\_\_\_\_. A variational principle for Green's functions approximations. In: Proc. Second IMACS (AICA), Int. Symp. on Computer Methods for Partial Differential Equations. Bethlehem, 1977, p. 53-58.
- [65] - CIARLET, P.G. The finite element method for elliptic problems. New York, North-Holland Publishing, 1978.
- [66] - AXELSSON, O. & BARKER, V.A. Finite element solution of boundary value problems - Theory and Computation. London, Academic Press, 1984.
- [67] - MIKHLIN, S.G. Mathematical Physics, an advanced course. London, North-Holland Publishing, 1970.
- [68] - LANCZOS, C. Linear differential operators. London, D. Van Nostrand, 1961.
- [69] - STAKGOLD, I. Green's functions and boundary value problems. 6. ed. New York, John Wiley & Sons, 1972, v. 1.
- [70] - POPOV, E.P. Introdução à mecânica dos sólidos. São Paulo, Edgard Blücher, 1978.
- [71] - CHUNG, T.J. Finite element analysis in fluid dynamics. New York, McGraw-Hill International Book, 1978.
- [72] - COOK, R.D. Concepts and applications of finite element analysis. 2.ed., New York, John Wiley & Sons, 1981.
- [73] - KESAVAN, S. A potential method for the biharmonic equation. Numer. Math., v. 43, p. 105-119, 1984.
- [74] - AUBIN, J.P. Approximation of elliptic boundary-value problems. 2. ed. New York, Robert E. Krieger Publishing, 1980.
- [75] - WASHIZU, K. Variational methods in elasticity and plasticity. 2. ed., Oxford, Pergamon Press, 1974.

- [76] - GILBARG, D. & TRUDINGER, N.S. Elliptic partial differential equations of second order. 2. ed., Berlin, Springer-Verlag, 1983.
- [77] - SOKOLNIKOFF, I.S. Mathematical theory of elasticity. 2. ed., New Delhi, Tata McGraw-Hill Publishing, 1977.
- [78] - MEIROVITCH, L. Analytical methods in vibrations. New York, The MacMillan, 1967.
- [79] - SPERANDIO, D. Aproximação computacional dos problemas de Poisson e bi-harmônico por elementos finitos lineares. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1981, (Dissertação de Mestrado).
- [80] - MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics, v. 12, p.31-38, 1951.
- [81] - BARCELLOS, C.S. & SILVA, L.H.M. Novas formulações de elementos de contorno para problemas de elasticidade. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, 1985, (Relatório Interno - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica).
- [82] - STAKGOLD, I. Boundary value problems of mathematical physics. 2.ed., New York, The Macmillan, 1971, v. 2.
- [83] - ÖZISIK, M.N. Heat conduction. New York, John Wiley & Sons, 1980.
- [84] - GEL'FAND, I.M. & SHILOV, G.E. Generalized functions. New York, Academic Press, 1964, v.1.
- [85] - ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.A. Handbook of mathematical functions. 5. ed., New York, Dover Publications, 1968.
- [86] - DAHLQUIST, C. & BJÖRCK, A. Numerical methods. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1974.
- [87] - COOK, R. D. Concepts and applications of finite element analysis. New York, John Wiley & Sons, 1974.
- [88] - BARCELLOS, C.S. & SIQUEIRA, E.D. Uma análise comparativa de elementos finitos para flexão de placas. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, 1984, (Dissertação de Mestrado).
- [89] - DYM, C.L. & SHAMES, I.H. Solid mechanics. A variational approach. New York, McGraw-Hill, 1973.

- [90] - JASWON, M. A., et al. Numerical biharmonic analysis and some application. International Journal Solids Structures, v.3, p. 309-322, 1967.
- [91] - JASWON, M.A. & MAITI, M. An integral equation formulation of plate bending problems. Journal of Engineering Mathematics, v. 2, p. 83-93, 1967.
- [92] - VIVOLI, J. Vibration de plaque et potentiels de couches. Acustica, v. 26, p. 305-314, 1972.
- [93] - VIVOLI, J. & FILIPPI, P. Eigen frequencies of thin plates and layer potentials. J. Acoust. Soc. Am., v.55, p. 562-567, 1974.
- [94] - STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. International Journal Solids Structures, v. 15, p.769-782, 1979.
- [95] - BEZINE, G. & GAMBI, D.A. A new integral equation formulation for plate bending problems. In: BREBBIA, C. A. Recent advances in boundary element methods. London, Pentech Press, 1978.
- [96] - STERN, M. Boundary integral equations for bending of thin plates. In: BREBBIA, C.A. Progress in boundary element methods. London, Pentech Press, 1983, v. 2.
- [97] - TANAKA, M. & MIYAZAKI, K. A direct BEM for elastic plate-structure subjected to arbitrary loadings. In: BREBBIA, C.A. & MAIER, G. Boundary elements VII. Berlin, Springer-Verlag, 1985.
- [98] - COSTA, J.A. & BREBBIA, C.A. Elastic buckling of plates using boundary element method. In: BREBBIA, C.A. & MAIER, G. Boundary elements VII. Berlin, Springer-Verlag, 1985.
- [99] - ZHU, J. Integral equation solutions for finite and infinite plate. In: BREBBIA, C.A. & MAIER, G. Boundary elements VII. Berlin, Springer-Verlag, 1985.
- [100] - MANOLIS, G.D. et al. Beam and plate stability by boundary elements. Computer & Structures, v. 22, p. 917-923, 1986.
- [101] - RAO, N.R. & VALSARAJAN, K.V. An integral equation solution for the finite deflection of clamped skew sandwich plates. Computer & Structures, v. 22, p. 665-668, 1986.



- [102] - PAIVA, J.B. & VENTURINI, W.S. Analysis of building structures considering plate-beam-column interactions. In: BREBBIA, C.A. & VENTURINI, W.S. Boundary element techniques: applications in stress analysis and heat transfer. Southampton, Computational Mechanics Publications, 1987.
- [103] - WITTRICK, W.H. Analytical, three-dimensional elasticity solutions to some plate problems, and some observations on Mindlin's plate theory. International Journal Solids Structures, v. 23, p. 441-464, 1987.
- [104] - PUGH, E.D. et al. A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration. Int. J. Num. Meth. Engng., v. 12, p. 1059-1079, 1978.
- [105] - TIMOSHENKO, S.P. & KRIEGER, W.S. Theory of plates and shells. 2. ed., Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1959.