

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

ANÁLISE DE TENSÕES E DESLOCAMENTOS
ATRAVÉS DE SÉRIES DE FOURIER EM RESERVATÓRIOS CILÍNDRICOS
APOIADOS EM DIAFRAGMAS

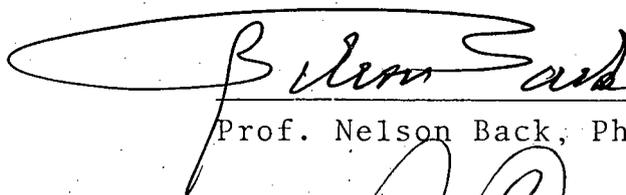
LAURO CESAR NICOLAZZI

FLORIANÓPOLIS
SANTA CATARINA - BRASIL
JANEIRO - 1982

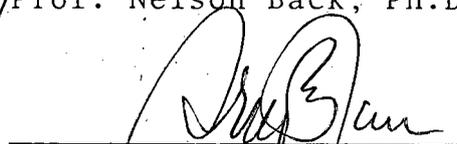
ANÁLISE DE TENSÕES E DESLOCAMENTOS
ATRAVÉS DE SÉRIES DE FOURIER EM RESERVATÓRIOS CILÍNDRICOS
APOIADOS EM DIAFRAGMAS

LAURÓ CESAR NICOLAZZI

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PRO
JETO, E APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS -
GRADUAÇÃO

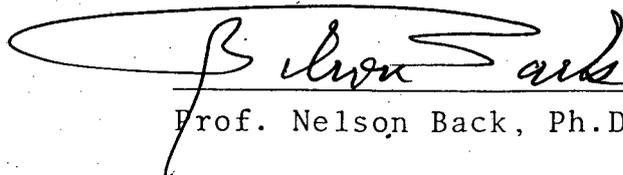


Prof. Nelson Back, Ph.D.



Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador

APRESENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS PRO-
FESSORES:



Prof. Nelson Back, Ph.D.



Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.



Prof., Domingos Boechat Alves, Ph.D.

À Debora, Denise e Miriam.

AGRADECIMENTOS

- À Universidade Federal de Santa Catarina, por ter proporcionado a realização deste trabalho;
- Ao professor Domingos Boechat Alves, pelo auxílio na utilização do PROASE;
- Ao professor Luiz Teixeira do Valle Pereira, pelo auxílio na elaboração final do texto, constante apoio e incentivo;
- Aos demais professores do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC.

ÍNDICE

1 - INTRODUÇÃO.....	1
2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	4
2.1 - Equação de equilíbrio para cascas cilíndricas.....	4
2.2 - Equações diferenciais de equilíbrio em função dos deslocamentos.....	8
2.3 - Consideração da pressão interna.....	11
3 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA.....	15
3.1 - Solução da equação diferencial de cascas cilíndricas finas.....	15
4 - DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DOS CARREGAMENTOS.....	19
4.1 - Carregamentos radiais, sobre a superfície de um cilindro, inscritos em retângulos.....	19
4.2 - Carregamentos radiais concentrados.....	25
4.3 - Linhas de cargas radiais segundo a direção de um paralelo.....	26
4.4 - Anel de carregamento.....	27
4.5 - Linhas de cargas radiais ao longo de meridianos...	29
4.6 - Momentos na direção circunferencial.....	31
4.7 - Superposição de tipos de carregamentos.....	34
5 - REPRESENTAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS u e v NA FORMA DE SÉRIES.....	35
5.1 - Deslocamentos nas direções x e ϕ em função do deslocamento radial.....	35
6 - SÉRIES DOS ESFORÇOS RESULTANTES.....	37
6.1 - Esforços resultantes em função dos coeficientes das séries dos deslocamentos.....	37
7 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS.....	40
7.1 - Introdução.....	40
7.2 - Comparação dos resultados com os valores obtidos por Bijlaard.....	40

7.3 - Cilindro carregado com pressão interna.....	46
7.4 - Anel de carga largo.....	54
7.5 - Anel linear de carga.....	60
7.6 - Carga radial inscrita em um retângulo.....	66
Bibliografia.....	85

APÊNDICES.

A ₁ - DEFORMAÇÕES EM CASCAS FINAS.....	86
A ₂ - ESFORÇOS RESULTANTES EM CASCAS FINAS.....	90
A ₃ - PARTICULARIZAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES PARA CASCAS CILÍNDRICAS, EM FUNÇÃO DOS DESLOCAMENTOS.....	96
A ₄ - PROGRAMA FOURIER.....	102

RESUMO

Este trabalho apresenta uma solução analítica para o problema de cascas cilíndricas finas apoiadas em diafragmas, com carregamentos radiais, usando a formulação mostrada por Timoshenko.

São determinadas expressões para calcular deslocamentos e tensões, objetivando possibilitar a análise do comportamento de cilindros com carregamentos radiais.

O desenvolvimento analítico é realizado através de séries duplas de Fourier, sendo os resultados obtidos através de um programa digital.

As comparações tomam como parâmetro de referência os resultados obtidos pelo método de elementos finitos.

Abstract

This work presents an analytical solution for the problem of cylindrical thin shells supported by diafragms, subjected to radial loads, using the formulation presented by Timoshenko.

Equations for the computation of the displacements and the resultant stresses are developed in order to analyse the behavior of radially loaded cylinders.

The analytical development is presented using Double Fourier Series and the results are obtained using a digital computer program.

The results obtained with this method are compared with results obtained by the Finite Element Method.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Na indústria química, nuclear e outras, que trabalham com processos que utilizam altas pressões, a análise de tensões em tubulações submetidas a carregamentos externos complexos, bem como bifurcações e intersecções de tubos, é de grande interesse, já que nas instalações destas indústrias o problema é bastante comum.

A análise de tensões de tais problemas pode ser feita através de soluções analíticas ou então através de métodos numéricos, tais como: elementos finitos, diferenças finitas e equações integrais. As soluções numéricas têm a vantagem de serem aplicáveis na maioria dos problemas mencionados, mesmo com grandes custos de análise e operação e, às vezes, dependendo do tamanho da malha, com alguma imprecisão, enquanto que as soluções analíticas têm a vantagem de terem a sua aplicação restrita a um caso particular. Porém, dentro do seu campo de validade, os resultados obtidos são de grande confiabilidade, podendo ser tomados como padrão de comparação para outras soluções, inclusive as numéricas mencionadas acima.

Na referência [10], está proposto um método de abordagem de tais problemas, através de uma solução analítica. Este método consiste em resolver as equações diferenciais do problema, através da superposição de duas soluções, uma homogênea e a outra particular. A solução particular foi selecionada de forma a representar o carregamento imposto sobre a estrutura e ainda satisfazer as condições de contorno do cilindro, que é interceptado, enquanto que a solução homogênea permite a análise da intersecção das cascas sem que o equilíbrio global do corpo e as condições de contornos sejam altera

das. A solução homogênea é apresentada na referência |11|, enquanto que nas referências |2| e |5| está apresentada a solução particular.

Para o desenvolvimento do método de análise de tensões e deslocamentos na intersecção de cascas cilíndricas, dividiu-se a solução em duas partes, uma consistindo no desenvolvimento da solução particular e outra consistindo no desenvolvimento da solução homogênea e superposição da particular, de forma a se ter a solução completa. Neste trabalho é desenvolvida apenas a solução particular, porém os resultados obtidos a partir dela, são comparados com os resultados obtidos pelo método de elementos finitos, através do programa PROASE Y/75, de forma crítica, com o objetivo de verificar se a precisão da solução permite que se faça uso dela, para a análise de problemas mais complexos.

As equações diferenciais que regem o problema de cascas a ser solucionado, juntamente com as simplificações e hipóteses adotadas para a sua formulação, estão detalhadas no Capítulo 2. Como base neste desenvolvimento a referência |2| foi utilizada.

No Capítulo 3, a solução da equação diferencial que rege o problema é apresentada. Esta solução proposta nas referências |5| e |2| é aplicada para alguns casos da referência |1|, e consiste em expandir os deslocamentos radiais bem como os carregamentos em séries duplas de Fourier, nas duas direções principais da casca cilíndrica. Esta solução resolve apenas problemas de cascas cilíndricas apoiadas em diafragmas, nos seus extremos, e submetidas a carregamentos radiais, o que limita bastante o campo de aplicação da solução.

No Capítulo 4, é mostrada uma série de carregamentos radiais para os quais a solução é apropriada. Para cada carregamento

ali apresentado, os coeficientes das séries de carregamentos são determinados através dos métodos tradicionais apresentados nas referências [3], [4] e [6], com a finalidade de possibilitar a determinação dos coeficientes da série dos deslocamentos radiais.

Nos Capítulos 5 e 6, os demais deslocamentos bem como os esforços resultados da casca estão expandidos em séries duplas de Fourier e, também, estão apresentadas as relações entre os coeficientes das expansões destas variáveis e os coeficientes da série do deslocamento radial.

A comparação dos resultados obtidos pelo método proposto está apresentada no Capítulo 7. O parâmetro de referência para esta comparação foi obtido do método de elementos finitos através do programa PROASE Y/75. Os comentários dos resultados, bem como propostas de continuação do trabalho, estão apresentados no Capítulo 8.

Nas Apêndices A1, A2 e A3, está desenvolvida a teoria básica de cascas finais isotrópicas, da qual tirou-se subsídios necessários para a obtenção das equações diferenciais apresentadas no segundo capítulo deste trabalho. No Apêndice A4 está apresentado um diagrama de bloco do programa desenvolvido para a obtenção dos resultados, bem como um suscinto manual para utilização do programa.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA CASCAS CILÍNDRICAS

Para a obtenção da equação diferencial de equilíbrio para cascas cilíndricas, em função dos deslocamentos u , v e w , como mostra a referência [2], parte-se de um elemento característico, isolado do cilindro indicado na figura 2.01, representado pela superfície média da casca como mostra a figura 2.02.

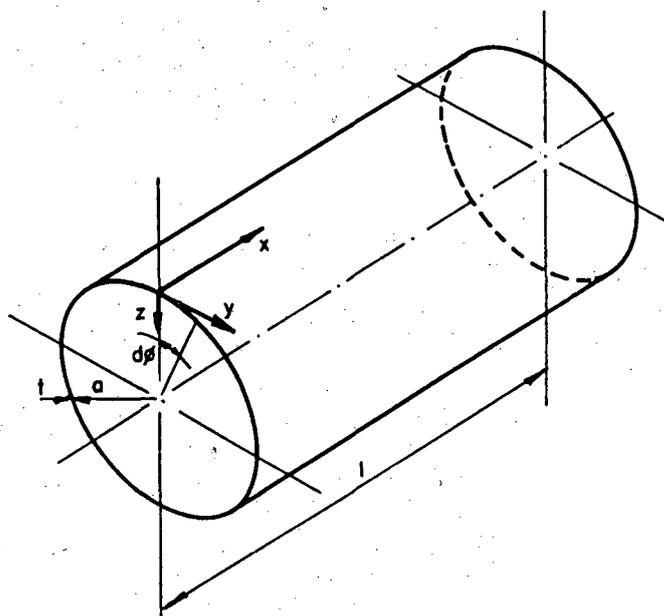


FIGURA 2.01 - Sistema de coordenadas.

Devido às deformações da casca, causadas por carregamentos radiais, existem deslocamentos entre os lados do elemento OABC da figura 2.02. Estes deslocamentos relativos entre as laterais do elemento, devem ser considerados ao se aplicar as condições de equilíbrio estático.

Sabendo-se disto, tem-se que as componentes de rotação

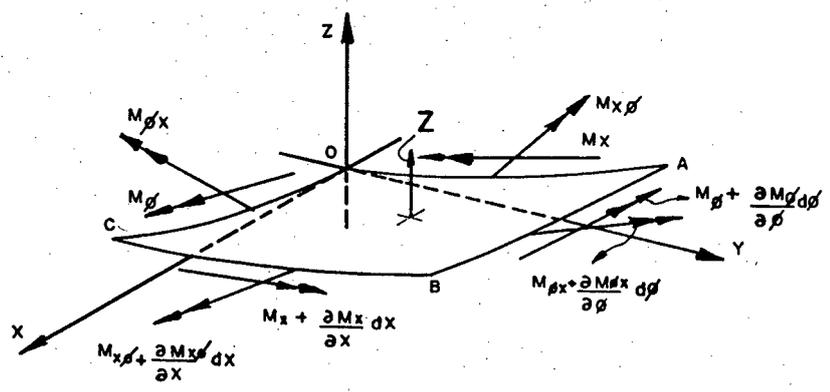
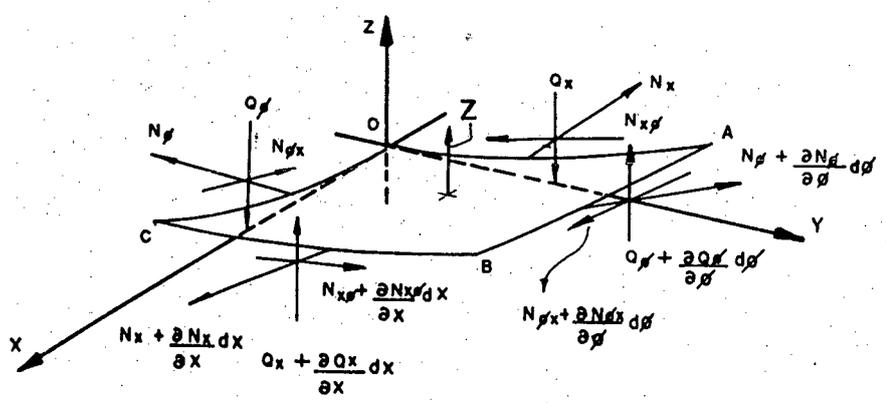


FIGURA 2.02 - Esforços resultantes

nas direções x, y e z da face AB em relação a face OC, são respectivamente:

$$d_{\phi} + d_{\phi} \left(\frac{\partial v}{a \partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \phi^2} \right) \quad (2.01)$$

$$- \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\phi \quad (2.02)$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \phi \partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\phi \quad (2.03)$$

As componentes da rotação de BC em relação a OA, nas direções x, y e z são respectivamente:

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \right) dx \quad (2.04)$$

$$- \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (2.05)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \quad (2.06)$$

Com o auxílio das seis equações anteriores obtém-se:

a) do equilíbrio de forças:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} - a Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a N_{x\phi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_{\phi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \right) \\ - N_{\phi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.07a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\phi}}{\partial \phi} + a \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} + a N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_x \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \right) + \\ + N_{\phi x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - Q_{\phi} \left(1 + \frac{\partial v}{a \partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \phi^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.07b)$$

$$\begin{aligned}
 & a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} + N_{x\phi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \right) + a N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
 & + N_\phi \left(1 + \frac{\partial v}{a \partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \phi^2} \right) + N_{\phi x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \right) + Z.a = 0 \quad (2.07c)
 \end{aligned}$$

onde Z significa um carregamento distribuído na direção radial;

b) do equilíbrio de momentos:

$$a \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} - \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} - a M_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_{\phi x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + a Q_\phi = 0 \quad (2.08a)$$

$$\frac{\partial M_{\phi x}}{\partial \phi} + a \frac{\partial M_x}{\partial x} + a M_{x\phi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_\phi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - a Q_x = 0 \quad (2.08b)$$

Na obtenção das equações (2.07) e (2.08) a variação de curvatura do elemento OABC foi levada em consideração. Este procedimento é necessário se as forças N_ϕ , $N_{x\phi}$ e $N_{\phi x}$ não são pequenas em relação a valores críticos à flambagem da casca.

Considerando-se pequenas deformações, as variações de curvatura resultam em um efeito pequeno nas equações de equilíbrio, logo, pode-se desprezar, das expressões (2.07) e (2.08), o produto das forças e momentos pelas derivadas dos deslocamentos, obtendo-se:

$$a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} = 0 \quad (2.09a)$$

$$\frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + a \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} - Q_\phi = 0 \quad (2.09b)$$

$$a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} + N_\phi + Z a = 0 \quad (2.09c)$$

$$a \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} - \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + a Q_\phi = 0 \quad (2.09d)$$

$$\frac{\partial M_{\phi x}}{\partial \phi} + a \frac{\partial M_x}{\partial x} - a Q_x = 0 \quad (2.09e)$$

Através da combinação linear das equações (2.09), pode-se eliminar Q_ϕ e Q_x , obtendo-se:

$$a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} = 0 \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + a \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial^2 M_{\phi x}}{\partial x \partial \phi} + a \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 M_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 M_{x\phi}}{\partial x \partial \phi} + N_\phi + Z.a = 0 \quad (2.10c)$$

2.2 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO EM FUNÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

As equações (2.10) podem ser postas em função dos deslocamentos u , v e w , com o auxílio das expressões (A2.10) do Apêndice A2. Assim, substituindo-se nas equações (2.10) as expressões (A3.01), (A3.02), (A3.03), (A3.08), (A3.10b) e (A3.17) do Apêndice A3, vem:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\nu}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} - w \right) \right] \quad (2.11a)$$

$$N_\phi = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} - w \right) + \frac{\nu \partial u}{\partial x} \right] \quad (2.11b)$$

$$N_{x\phi} = N_{\phi x} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \quad (2.11c)$$

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) \right] \quad (2.11d)$$

$$M_{\phi} = - D \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) + \frac{v \partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (2.11e)$$

$$M_{x\phi} = - M_{\phi x} = \frac{D(1-\nu)}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.11f)$$

As expressões (2.10), após a substituição das equações (2.11), transformam-se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} - \frac{v}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \phi} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{h^2}{12a^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \phi} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^3 w}{a^2 \partial \phi^3} \right) + \frac{h^2}{12a^2} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{a^2 \partial \phi^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{a \partial \phi} - \frac{w}{a} - \frac{ah^2}{12} \nabla^4 w - \frac{h^2}{12} \left(\frac{2-\nu}{a} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \phi} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^3 v}{a^3 \partial \phi^3} \right) = - \frac{Z a (1-\nu^2)}{Eh} \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde ∇^4 é operador abaixo:

$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{a^2 \partial \phi^2} \right)^2 \quad (2.15)$$

O último termo da equação (2.13) pode ser desprezado em relação aos segundo e terceiro termos porque o fator $t^2/12a^2$, para cascas finas, é pequeno. Com esta simplificação, o sistema de equações diferenciais formado por (2.12), (2.13) e (2.14) pode ser reduzido a uma equação diferencial de oitava ordem em função, apenas, do deslocamento radial, como mostra-se a seguir.

Aplicando-se o operador $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$ na equação (2.12) obtém-

se:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial \phi} = \frac{2}{(1+v)} \left[\frac{v}{a} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{1-v}{2a^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial \phi^2} \right] \quad (2.16)$$

e aplicando-se o operador $\frac{\partial^2}{a^2 \partial \phi^2}$ também na equação (2.12), obtém-se:

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial \phi^3} = \frac{2}{(1+v)} \left[\frac{v}{a^3} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \phi^2} - \frac{\partial^4 u}{a^2 \partial \phi^2 \partial x^2} - \frac{1-v}{2a^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \phi^4} \right] \quad (2.17)$$

Introduzindo as expressões (2.16) e (2.17) na equação resultante da operação $(\frac{\partial^2}{a \partial x \partial \phi})$ em (2.13), tem-se:

$$a \nabla^4 u = v \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w}{a^2 \partial x \partial \phi^2} + \frac{(1+v)}{(1-v)} \frac{t^2}{12a^2} \left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial \phi^2} + \frac{\partial^5 w}{a^2 \partial x \partial \phi^4} \right) \quad (2.18)$$

O operador $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ aplicado na equação (2.13) fornece:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial \phi} = \frac{2}{1+v} \left[\frac{1}{a^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \phi} - \frac{(1-v)}{2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^4 v}{\partial \phi^2 \partial x^2} - \frac{t^2}{12a^2} \left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial \phi} + \frac{\partial^5 w}{a^2 \partial \phi^3 \partial x^2} \right) \right] \quad (2.19)$$

e o operador $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ aplicado também em (2.13), fornece:

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial^4 u}{\partial \phi^3 \partial x} = \frac{2}{1+v} \left[\frac{1}{a^4} \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^3} - \frac{(1-v)}{2a^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial \phi^2} - \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 v}{\partial \phi^4} - \frac{t^2}{12a^2} \left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^2 \partial \phi^3} + \frac{\partial^5 w}{a^2 \partial \phi^5} \right) \right] \quad (2.20)$$

Substituindo-se as expressões (2.19) e (2.20) na equação resultante da aplicação do operador $\frac{\partial^2}{a \partial \phi \partial x}$ em (2.12) vem:

$$a \nabla^4 v = (2+v) \frac{\partial^3 w}{a \partial \phi \partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{a^3 \partial \phi^3} - \frac{t^2}{12a^2} \left(\frac{2a}{1-v} \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial \phi} + \right.$$

$$+ \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{\partial^5 w}{a \partial x^2 \partial \phi^3} + \frac{\partial^5 w}{a^3 \partial \phi^5} \quad (2.21)$$

Com os operadores $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial \phi}$ e ∇^4 e as equações (2.18), (2.21) e (2.14), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \nabla^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 t^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \left[\frac{2}{a^6} \frac{\partial^6 w}{\partial \phi^6} + (6+\nu-\nu^2) \frac{\partial^6 w}{a^2 \partial x^4 \partial \phi^2} \right. \\ \left. + (7+\nu) \frac{\partial^6 w}{a^4 \partial x^2 \partial \phi^4} \right] - \frac{1}{D} \nabla^4 Z = 0 \quad (2.22) \end{aligned}$$

que é a equação diferencial de equilíbrio de uma casca cilíndrica em função, apenas, dos deslocamentos radiais, onde

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$

2.3 - CONSIDERAÇÃO DA PRESSÃO INTERNA

A pressão interna, em tubulações, é um carregamento normalmente presente, e sendo assim, é conveniente introduzi-la na formulação de forma que seja fácil a sua consideração, na solução de problemas. Isto é conseguido com a superposição da formulação de membrana de um cilindro fechado nos extremos e submetido a pressão interna, na equação (2.22).

Os esforços de membrana para um cilindro fechado nos extremos e submetido a pressão interna q são:

$$N_x = \frac{q \cdot a}{2} \quad (2.23)$$

$$N_\phi = q \cdot a \quad (2.24)$$

Isolando-se de uma casca cilíndrica deformada e submetida a uma força radial uniforme Q , um elemento representado na figura 2.04, tem-se para o equilíbrio de forças na direção radial que:

$$N_{\phi} \frac{1}{r'_{\phi}} + N_x \frac{1}{r'_x} = Q \quad (2.25)$$

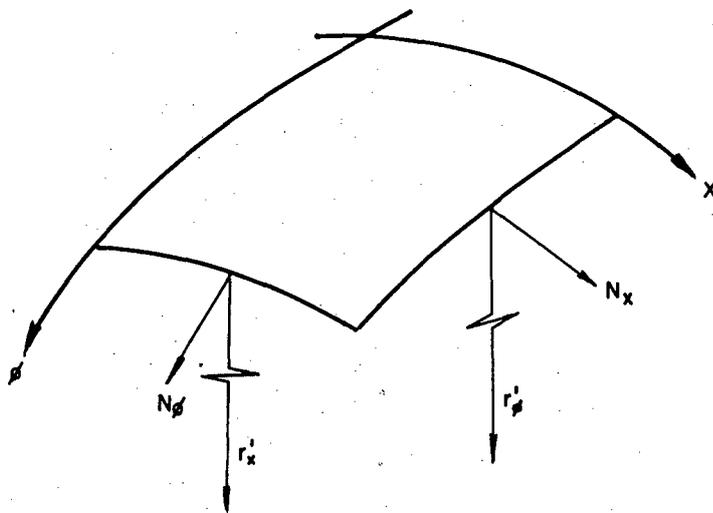


FIGURA 2.04 - Casca deformada

onde r'_x e r'_{ϕ} são os raios de curvatura da casca deformada.

Para cascas de geometria qualquer, as variações de curvatura são definidas por:

$$\chi_{\phi} = \frac{1}{r'_{\phi}} - \frac{1}{r_{\phi}} \quad (2.26)$$

$$\chi_x = \frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \quad (2.27)$$

onde r_x e r_ϕ são os raios de curvatura da casca indeformada.

Para cascas cilíndricas tem-se que $r_\phi = a$ e $r_x = \infty$, e desta forma as curvaturas da casca deformada são dadas por:

$$\frac{1}{r'_\phi} = \chi_\phi + \frac{1}{a} \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{r'_x} = \chi_x \quad (2.29)$$

Substituindo na equação (2.25) as equações (2.28) e (2.29), obtém-se:

$$Q - q = N_\phi \cdot \chi_\phi - N_x \cdot \chi_x \quad (2.30)$$

Considerando a diferença entre Q e q , como uma carga radial uniforme denominada Z_q , e as variações de curvatura χ_ϕ e χ_x em termos do deslocamento radial, dadas pelas equações (A3.10a) e (A3.08), a equação (2.30) reescrita fica:

$$Z_q = N_\phi \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + w \right) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.31)$$

Com as equações (2.23) e (2.24), a equação (2.31) pode ser novamente reescrita como:

$$Z_q = \frac{q \cdot a}{2} \left[\frac{2}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{2w}{a^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (2.32)$$

Desta forma, pode-se sobrepor o carregamento Z_q , dado pela equação (2.32), na equação de equilíbrio (2.22), como segue.

$$\nabla^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 t^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \left[\frac{2}{a^6} \frac{\partial^6 w}{\partial \phi^6} + (6+\nu-\nu^2) \frac{1}{a^2} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial \phi^2} \right]$$

$$+ (7+\nu) \frac{\partial^6 w}{a^4 \partial x^2 \partial \phi^4} \Big] - \frac{1}{D} \nabla^4 \left[Z + \frac{q \cdot a}{2} \left(\frac{2 \partial^2 w}{a^2 \partial \phi^2} + \frac{2w}{a^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = 0 \quad (2.33)$$

CAPÍTULO 3

SOLUÇÃO DO PROBLEMA

3.1 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE CASCAS CILÍNDRICAS FINAS

Para a solução da equação diferencial (2.33) pode ser adotada a série dupla de Fourier:

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \cos rm\phi \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.01)$$

e para expressar os carregamentos radiais:

$$Z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn} \cos rm\phi \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.02)$$

onde: m e n são inteiros positivos;

r número de cargas radiais, na direção ϕ ;

W_{mn} , Z_{mn} são os coeficientes da série, e x e ϕ são as coordenadas do cilindro, conforme a figura 3.01.

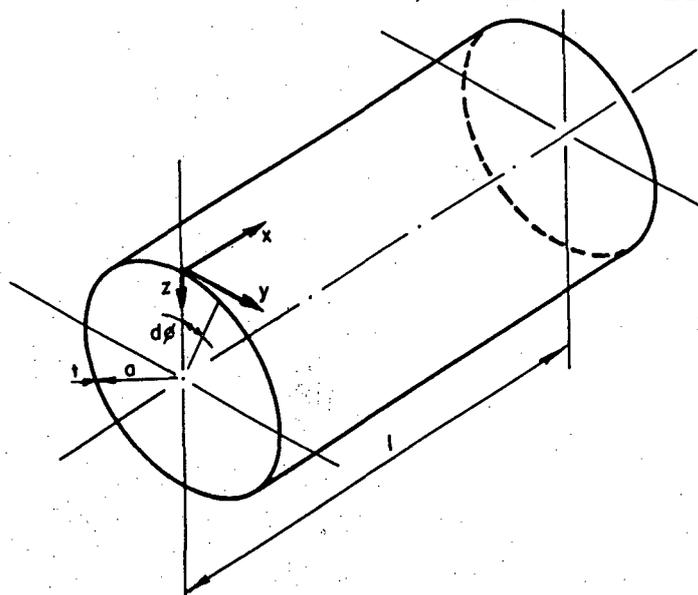


FIGURA 3.01 - Sistemas de referência e grandezas do cilindro.

A solução adotada tem a vantagem de satisfazer automaticamente as equações de compatibilidade e as condições de contorno, porém possui uma desvantagem inerente que é a de resolver apenas o problema de cilindros apoiados em diafragmas, conforme a figura 3.02 abaixo.

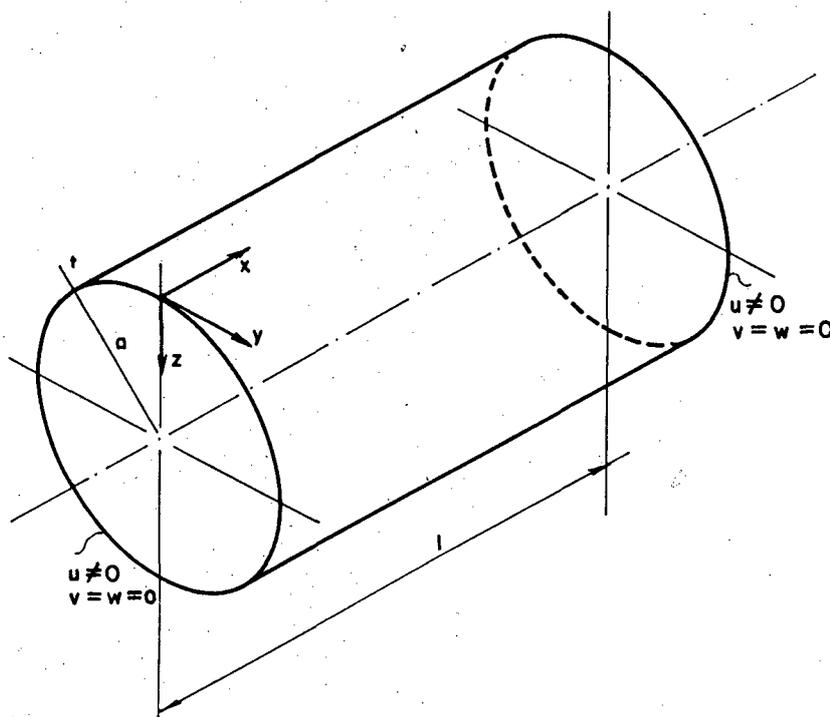


FIGURA 3.02 - Condições de contorno de um cilindro apoiado em diafragmas.

A expansão (3.01) satisfaz a equação diferencial (2.33) se os coeficientes da série forem determinados apropriadamente, como é feito no desenvolvimento seguinte.

Aplicando-se as operações indicadas na equação diferencial (2.33) nas expansões das variáveis w e Z (3.01) e (3.02), obtêm-se:

$$\nabla^8 w = \sum \sum W_{mn} \left(\left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right)^4 \cos m\phi \sin \frac{\lambda}{a} x \quad (3.03a)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \Sigma \Sigma W_{mn} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^4 \cos rm\phi \sin \frac{\lambda}{a} x \quad (3.03b)$$

$$\frac{\partial^6 W}{\partial \phi^6} = \Sigma \Sigma W_{mn} (- (rm)^6) \cos rm\phi \sin \frac{\lambda}{a} x \quad (3.03c)$$

$$\frac{\partial^6 W}{\partial x^4 \partial \phi^2} = \Sigma \Sigma W_{mn} (- (rm)^2 \left(\frac{\lambda}{a}\right)^4) \cos rm\phi \sin \frac{\lambda}{a} x \quad (3.03d)$$

$$\frac{\partial^6 W}{\partial x^2 \partial \phi^4} = \Sigma \Sigma W_{mn} (- (rm)^4 \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2) \cos rm\phi \sin \frac{\lambda}{a} x \quad (3.03e)$$

$$\nabla^4 Z = \Sigma \Sigma Z_{mn} \left(\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 + \left(\frac{rm}{a}\right)^2 \right)^2 \cos rm\phi \sin \frac{\lambda}{a} x \quad (3.03f)$$

$$\nabla^4 Z_q = \frac{q a}{2} \Sigma \Sigma W_{mn} \left[- \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 + \frac{2}{a^2} - 2 \left(\frac{rm}{a}\right)^2 \right] \left(\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 + \left(\frac{rm}{a}\right)^2 \right) \cos rm\phi \sin \frac{\lambda}{a} x \quad (3.03g)$$

onde

$$\lambda = \frac{n \pi a}{l}$$

Substituindo estas expressões na equação diferencial (2.33), resulta:

$$\begin{aligned} \Sigma \Sigma \{ W_{mn} \{ \left[\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 + \left(\frac{rm}{a}\right)^2 \right]^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 t^2} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^4 + \frac{1}{a^2} \left[- \frac{2}{a^6} (rm)^6 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(6+\nu-\nu^2)}{a^2} (rm)^2 \left(\frac{\lambda}{a}\right)^4 - \frac{(7+\nu)}{a^4} (rm)^4 \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \right] - \frac{q a}{2D} \left[- \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{a^2} - 2 \left(\frac{rm}{a}\right)^2 \right] \left[\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 + \left(\frac{rm}{a}\right)^2 \right]^2 \} + \frac{Z_{mn}}{D} \left[\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{rm}{a}\right)^2 \right]^2 \} \cos rm\phi \sin \frac{\lambda}{a} x = 0 \end{aligned} \quad (3.04)$$

A equação (3.04) deve ser satisfeita para todo e qualquer ponto (x, ϕ) , logo:

$$\begin{aligned}
W_{mn} \{ & \left[\left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 + \left(\frac{rm}{a} \right)^2 \right]^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 t^2} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^4 + \frac{1}{a^2} \left[- \frac{2}{a^6} (rm)^6 \right. \\
& - \frac{(6+\nu-\nu^2)}{a^2} (rm)^2 \left(\frac{\lambda}{a} \right)^4 - \frac{7+\nu}{a^4} (rm)^4 \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \left. \right] - \frac{qa}{2D} \left[- \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \right. \\
& \left. + \frac{2}{a^2} 2 \left(\frac{rm}{a} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 + \left(\frac{rm}{a} \right)^2 \right]^2 \} + \frac{Z_{mn}}{D} \left[\left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 + \left(\frac{rm}{a} \right)^2 \right]^2 = 0 \quad (3.05)
\end{aligned}$$

Sendo o coeficiente Z_{mn} facilmente determinado pelos métodos tradicionais, a única incógnita da equação (3.05) é W_{mn} :

$$\begin{aligned}
W_{mn} = & \frac{(\lambda^2 + (rm)^2)^2 a^4 Z_{mn}}{D \{ (\lambda^2 + (rm)^2)^4 + 12(1-\nu^2) \frac{a^2 \lambda^4}{t^2} - (rm)^2 [2(rm)^4 + (6+\nu-\nu^2) \lambda^4 + (7+\nu) (rm)^2 \lambda^2] \} +} \\
& + \frac{qa^3}{D} \left(\frac{\lambda^2}{2} - 1 + r^2 m^2 \right) (\lambda^2 + (rm)^2)^2 \} \quad (3.06)
\end{aligned}$$

Com esta expressão são determinados os coeficientes da série de deslocamentos.

CAPÍTULO 4

DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DOS CARREGAMENTOS

4.1 - CARREGAMENTOS RADIAIS, SOBRE A SUPERFÍCIE DE UM CILINDRO, INSCRITOS EM RETÂNGULOS

Cargas radiais uniformes inscritas em retângulos na superfície de cascas cilíndricas, figura 4.1, podem ser desdobradas para que se possa, de maneira simples, determinar os coeficientes da expansão (3.02).

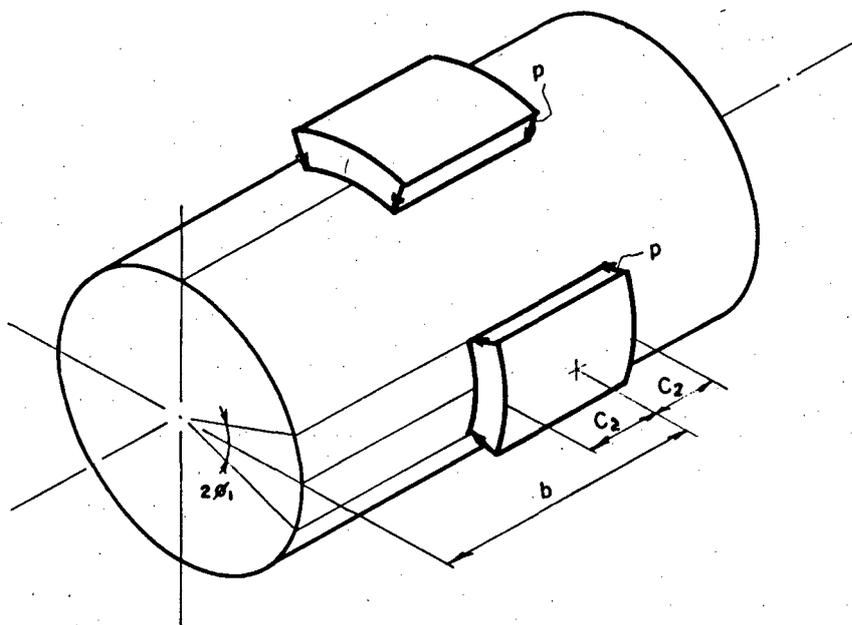


FIGURA 4.01 - Carregamentos retangulares sobre o cilindro.

Este desdobramento é realizado em dois passos: o primeiro considera a expansão do carregamento na direção dos parale-

los e o segundo na direção dos meridianos, sendo o resultado final a superposição dos resultados parciais.

Considerando que a dimensão de um paralelo seja denominada por um parâmetro genérico t , e para que haja coerência com a expressão geral dos carregamentos, expansão (3.02), é necessário que a expansão nesta direção seja par, conforme a função representada na figura 4.02.

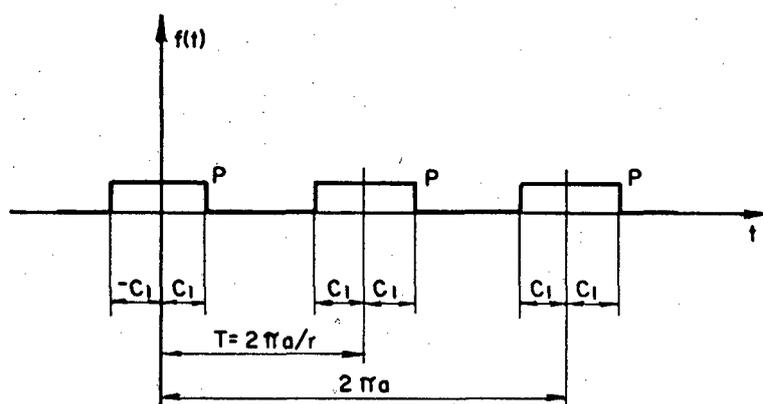


FIGURA 4.02 - Representação da função do carregamento sobre o cilindro, ao longo do parâmetro t .

Sendo par, a expansão na forma de série de Fourier, em função do parâmetro t , é dada por:

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{2m\pi}{T} t \quad (4.01)$$

onde:

$m = 1, 2, 3, \dots$ - número de termos da série

T - período da série

t - parâmetro variável

Os coeficientes da série (4.01), a_0 e a_m , são determinados da maneira indicada por Kreyszig [3], como segue:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \quad (4.02)$$

$$a_m = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos \frac{2m\pi t}{T} dt \quad (4.03)$$

Para a função esquematizada na figura 4.02, a função $f(t)$, dos coeficientes a_0 e a_m , vale:

$$f(t) = p \quad (4.04)$$

e existindo apenas para $t = T \pm C_1$.

Com a mudança de coordenadas, que é indicada abaixo, pode-se passar do parâmetro genérico t para um paralelo de uma casca cilíndrica.

$$T = \frac{2\pi a}{r} \quad (4.05)$$

$$C_1/r = \phi_1 \cdot a \quad (4.06)$$

$$t = \phi \cdot a \quad (4.07)$$

onde: $r = 1, 2, 3, \dots$ - número de cargas ao longo de um paralelo
 a - raio da casca cilíndrica;

C_1 - metade do comprimento da carga ao longo do paralelo;
 ϕ_1 - metade do arco do comprimento da carga ao longo de um
 paralelo.

e estão representados na figura 4.01.

Os coeficientes da série determinados a partir das equações (4.02) e (4.03), com as condições dadas pelas expressões (4.04) a (4.07) são:

$$a_0 = \frac{rp\phi_1}{\pi} \quad (4.08)$$

$$a_m = \frac{2p}{m\pi} \text{sen}(m\phi_1) \quad (4.09)$$

Com os coeficientes acima, a expansão (4.01) completa, é dada por:

$$p(\phi) = \frac{rp\phi_1}{\pi} + \frac{2p}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen}(m\phi_1) \cos(m\phi) \quad (4.10)$$

Desta forma, conclui-se o primeiro passo do desdobramento e a seguir passa-se ao segundo passo do processo e a superposição dos resultados, simultaneamente.

Para que se tenha uma configuração de carregamento sobre o cilindro, igual a indicada na figura 4.01, é necessário expandir a série, dada pela equação (4.10), na direção axial do cilindro, figura 4.03. Esta expansão ao longo do meridiano, deverá ser necessariamente ímpar, para que haja concordância da expressão obtida com a expansão geral dos carregamentos (3.02).

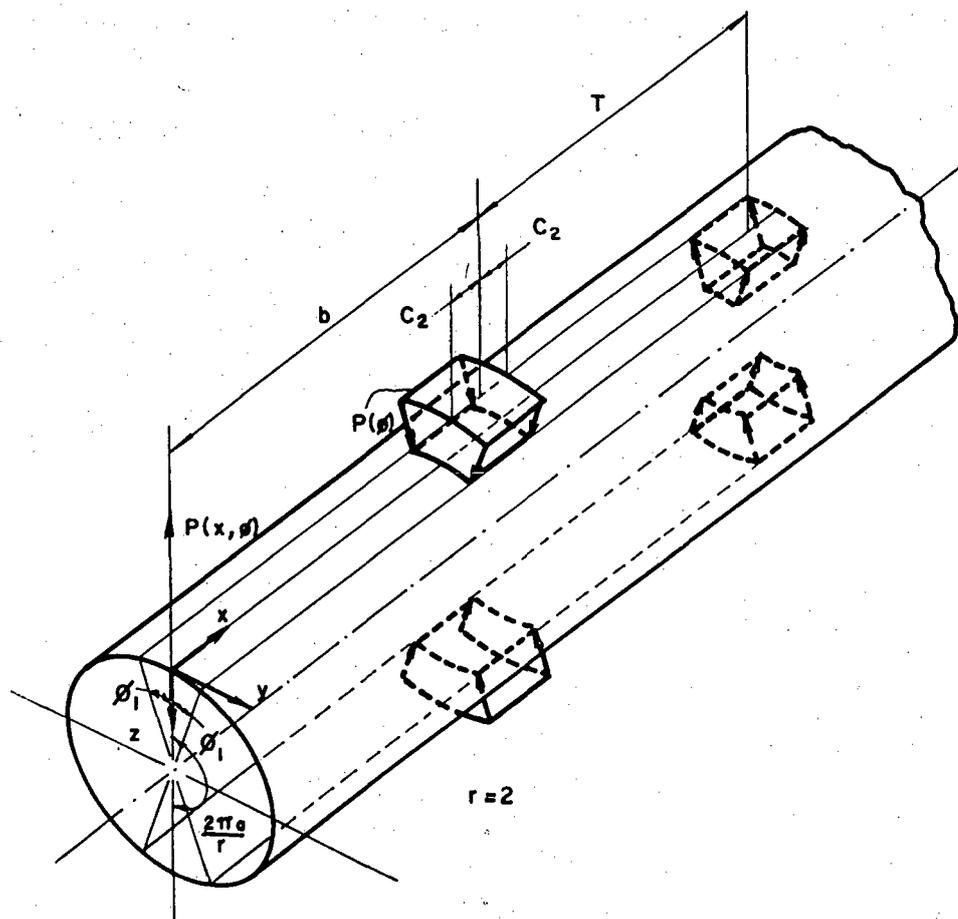


FIGURA 4.03 - Expansão da função (4.10) ao longo do comprimento do cilindro.

A expansão da função (4.10) na direção axial, em série ímpar de Fourier é dada por:

$$p(x, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x \quad (4.11)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$, e o período T é duas vezes o comprimento do cilindro.

$$T = 2\ell \quad (4.12)$$

A variável ϕ é introduzida na expressão (4.11) através da determinação do coeficiente b_n , como segue:

$$b_n = \int_0^{T/2} p(\phi) \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{T} x \, dx \quad (4.13)$$

onde a função $p(\phi)$ é dada pela equação (4.10).

Resolvendo (4.13) obtém-se:

$$b_n = \frac{4p(\phi)}{n} \operatorname{sen} \frac{2n\pi b}{T} \operatorname{sen} \frac{2n\pi C_2}{T} \quad (4.14)$$

Substituindo as expressões (4.14), (4.12) e (4.10) na expansão (4.11), chega-se a:

$$p(x, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{n\pi} \left[\frac{rp\phi_1}{\pi} + \frac{2p}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen}(m\phi_1) \cos(m\phi) \right] \right. \\ \left. \left[\operatorname{sen} \frac{n\pi b}{\ell} \operatorname{sen} \frac{m\pi C_2}{\ell} \right] \right\} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2\ell} x \quad (4.15)$$

Da comparação entre as expressões (4.15) e (3.02) obtêm-se os coeficientes Z_{mn} , para o carregamento retangular no cilindro, como segue:

$$Z_{0n} = \frac{4rp\phi_1}{n\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi b}{\ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi C_2}{\ell} \quad (4.16)$$

sendo: $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

e:

$$Z_{mn} = \frac{8p}{mn\pi^2} \operatorname{sen}(m\phi_1) \operatorname{sen} \frac{n\pi b}{\ell} \operatorname{sen} \frac{m\pi C_2}{\ell} \quad (4.17)$$

onde: m e $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

p - intensidade da carga retangular

ℓ - comprimento do cilindro

b - distância do ponto médio do carregamento retangular \tilde{a}

origem do eixo x.

C_2 - metade do comprimento do carregamento na direção axial do cilindro.

Estas grandezas estão indicadas nas figuras 4.01, 4.02 e 4.03.

4.2 - CARREGAMENTOS RADIAIS CONCENTRADOS

Carregamentos radiais concentrados, figura 4.04, podem ser considerados como casos particulares de carregamentos radiais inscritos em retângulos na superfície do cilindro.

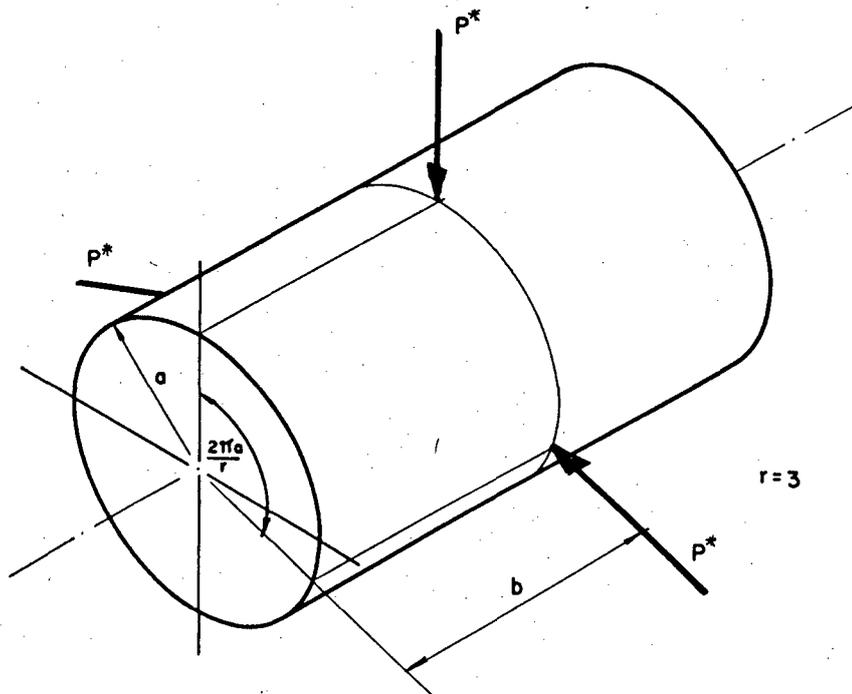


FIGURA 4.04 - Cargas radiais concentradas.

Desta forma, uma carga concentrada P^* pode ser simulada por um carregamento equivalente, p , distribuído numa pequena área retangular de lados $2C_2$ e $2a\phi_1$, como segue:

$$P^* = 4C_2\phi_1ap \quad (4.18)$$

ou

$$p = \frac{P^*}{4C_2\phi_1a} \quad (4.19)$$

Com a substituição da equação (4.19) em (4.16) e (4.17) e fazendo C_2 e ϕ_1 tenderem a zero, obtêm-se:

$$Z_{on} = \frac{r P^*}{\pi a \ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi b}{\ell} \quad (4.20)$$

e

$$Z_{mn} = \frac{2rP^*}{\pi a \ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi b}{\ell} \quad (4.21)$$

onde P^* é a carga concentrada e r o número destas na direção de um paralelo.

4.3 - LINHAS DE CARGAS RADIAIS SEGUNDO A DIREÇÃO DE UM PARALELO.

Linhas de cargas radiais, segundo a direção de um paralelo (figura 4.05), podem ser, também, consideradas como casos particulares de carregamentos radiais uniformes inscritos em retângulos sobre a superfície de cilindros.

Sendo assim, uma carga linear uniformemente distribuída q_0 , segundo o comprimento $2a\phi_1$, de um paralelo, pode ser simulada pelo carregamento uniforme p inscrito no retângulo de lados $2C_2$ e $2a\phi_1$, como segue:

$$2a\phi_1 \cdot q_0 = 4pC_2a\phi_1$$

logo:

$$p = \frac{q_0}{2C_2} \quad (4.22)$$

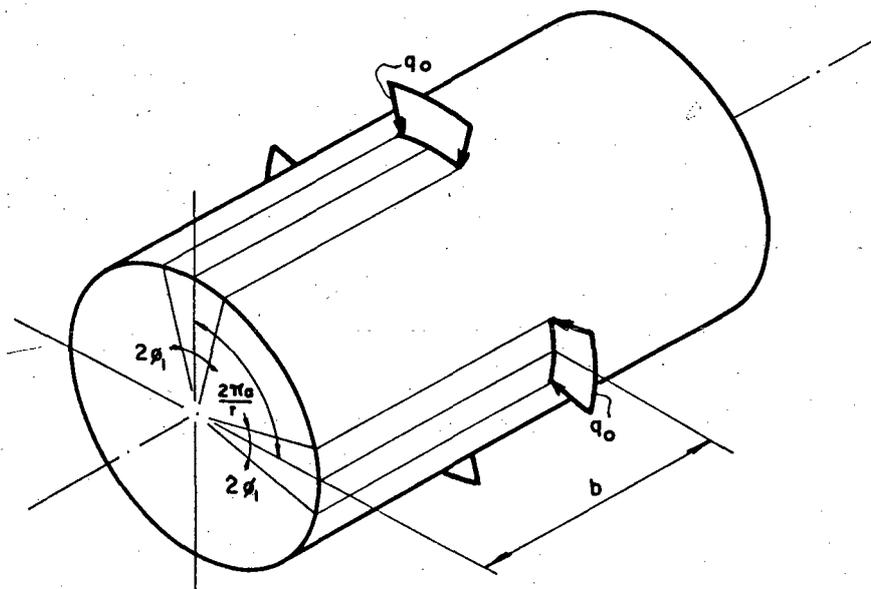


FIGURA 4.05 - Linhas de cargas radiais segundo um paralelo.

Substituindo a equação (4.22) em (4.16) e (4.17), e em seguida, para que o retângulo se torne uma linha, faz-se C_2 tender a zero, o que resulta:

$$Z_{0n} = \frac{2rq_0\phi_1}{\pi\ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi b}{\ell} \quad (4.23)$$

e

$$Z_{mn} = \frac{4q_0}{\pi\ell m} \operatorname{sen}(m\phi_1) \operatorname{sen} \frac{n\pi b}{\ell} \quad (4.24)$$

onde q_0 é a carga distribuída linearmente na direção de um paralelo.

4.4 - ANEL DE CARREGAMENTO

Anéis radiais de carregamentos, figura 4.06, podem ser considerados como particularizações de linhas de cargas radiais em

um paralelo.

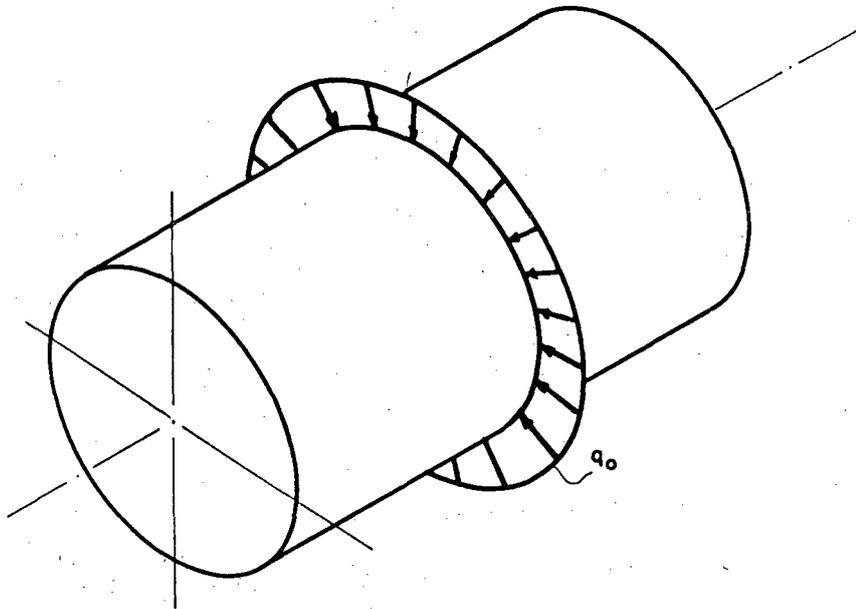


FIGURA 4.06 - Anel de carregamento.

Sendo assim, é fácil visualizar na figura 4.05, que se o ângulo ϕ_1 for aumentado de forma que o seu produto pelo número "r" de cargas resulte em um ângulo π , as cargas intermitentes que compõem as linhas de carga sobre um paralelo, se tornarão contínuas formando um anel, conforme desejado. A condição para que isto ocorra é dada por:

$$\phi_1 = \frac{\pi}{r} \quad (4.25)$$

Com a substituição da equação (4.25) em (4.17) e (4.18) obtém-se:

$$Z_{on} = \frac{2q_0}{\ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi b}{\ell} \quad (4.26)$$

$$Z_{mn}^* = 0 \quad (4.27)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$

4.5 - LINHAS DE CARGAS RADIAIS AO LONGO DE MERIDIANOS

Linhas de cargas radiais, dispostas ao longo de r meridianos de uma casca cilíndrica, como ilustra a figura 4.07, também podem ser analisadas pela formulação abordada.

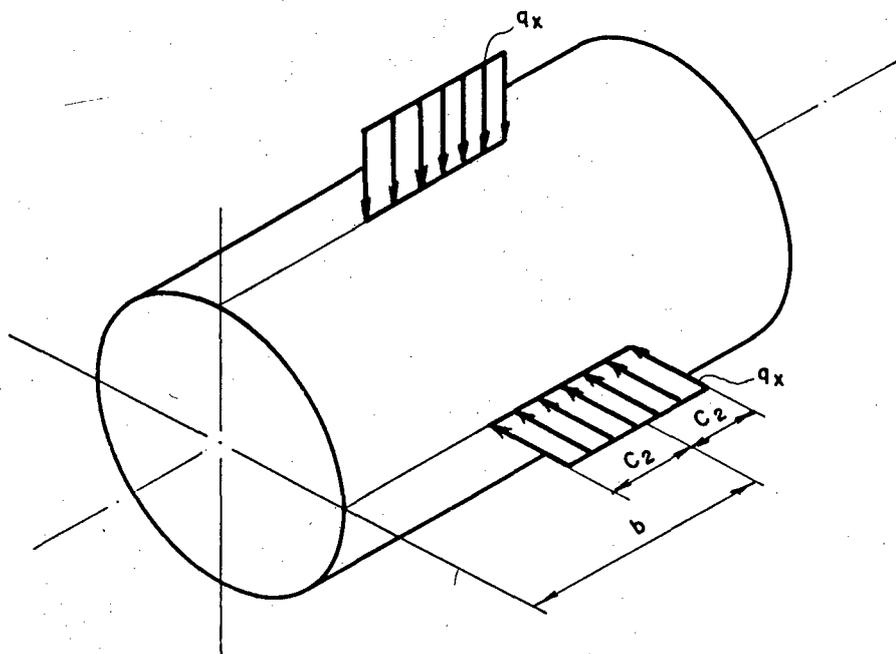


FIGURA 4.07 - Linhas de cargas.

Sendo assim, uma carga q_x por unidade de comprimento do cilindro, pode ser simulada por uma carga p distribuída em uma área $4C_2\phi_1a$, como segue:

$$q_x \quad 2C_2 = 4pC_2\phi_1a \quad (4.28)$$

Ao isolar-se a carga equivalente p , da equação anterior, obtém-se:

$$p = \frac{q_x}{2a\phi_1} \quad (4.29)$$

Com a substituição da equação (4.29) em (4.16) e (4.17) e em seguida fazendo-se com que ϕ_1 tenda a zero, obtém-se de (4.16) e (4.17) as seguintes equações modificadas:

$$Z_{on} = \frac{2rq_x}{n\pi^2a} \operatorname{sen} \frac{n\pi b}{\ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi C_2}{\ell} \quad (4.30)$$

e

$$Z_{mn} = \frac{4q_x r}{n\pi^2a} \operatorname{sen} \frac{n\pi b}{\ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi C_2}{\ell} \quad (4.31)$$

onde m e $n = 1, 2, 3, \dots$

Nas equações (4.30) e (4.31) ao considerar-se que $2C_2 = \ell$ e $b = \ell/2$, consegue-se ter linhas de carga ao longo de todo o comprimento do cilindro em "r" meridianos e, com estas modificações, as duas últimas equações transformam-se em:

$$Z_{on} = \frac{2rq_x}{n\pi^2a} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{2} \quad (4.32)$$

e

$$Z_{mn} = \frac{4rq_x}{n\pi^2a} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{2} \quad (4.33)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$

Estas duas últimas equações são casos particulares de (4.30) e (4.31), porém o seu desenvolvimento é justificável em razão da sua melhor precisão para o uso em computadores.

4.6 - MOMENTOS NA DIREÇÃO CIRCUNFERENCIAL

Momentos na direção circunferencial, segundo um paralelo e em número igual a "r", figura 4.08, podem ocorrer em cascas cilíndricas devidos a ganchos e suportes soldados na parte externa da casca, com a finalidade de permitir o transporte e fixação do elemento em sua fundação.

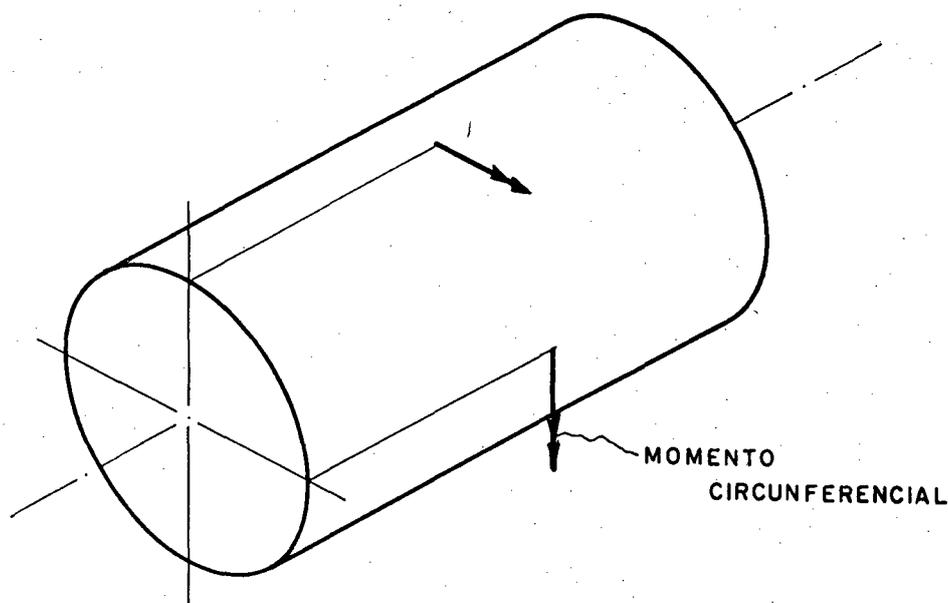


FIGURA 4.08 - Momentos circunferenciais concentrados ao longo de um paralelo.

Estes momentos podem ser simulados por carregamentos retangulares constantes ao longo dos paralelos, linearmente variáveis ao longo dos meridianos, como é visto a seguir.

Para o desenvolvimento das equações que fornecem as constantes da série dos carregamentos, parte-se da equação (4.10), repetida a seguir:

$$p(\phi) = \frac{rp\phi_1}{\pi} + \frac{2p}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen}(rm\phi_1) \cos(rm\phi) \quad (4.34)$$

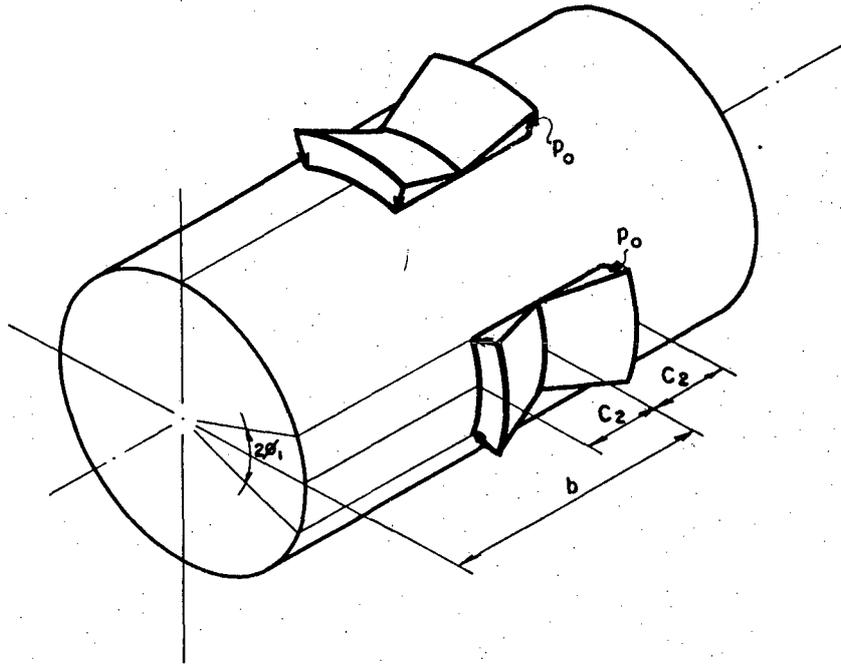


FIGURA 4.09 - Cargas retangulares variáveis com x .

Considerando que na expressão (4.34) a carga p seja função de x , figura 4.10, equação (4.35), consegue-se fazer com que o carregamento seja variável ao longo do meridiano.

$$p = ex + d \quad (4.35)$$

onde:

$$e = p_0/C_2 \quad (4.36)$$

$$d = p_0b/C_2 \quad (4.37)$$

p_0 = valor máximo da carga distribuída

Introduzindo-se (4.35), (4.36) e (4.37) em (4.34) obtêm-se a seguinte expressão:

$$p(x, \phi) = \frac{p_0}{C_2} (x-b) \left[\frac{r\phi_1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen} (rm\phi_1) \right] \cos (rm\phi) \quad (4.38)$$

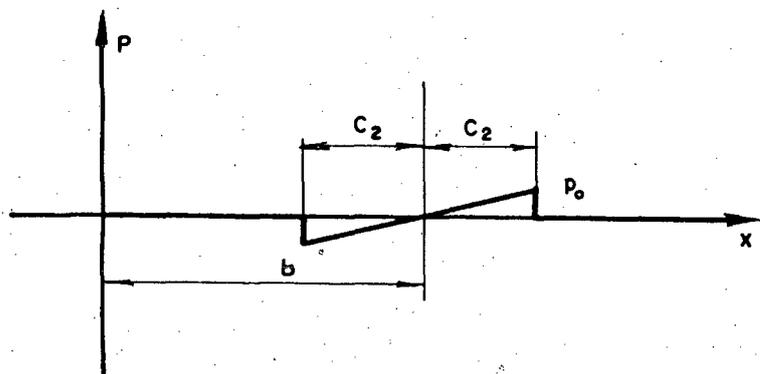


FIGURA 4.10 - Forma do carregamento ao longo do eixo x

Com procedimento exatamente igual ao apresentado no ítem 4.1, determina-se os coeficientes da série dos carregamentos, Z_{on} e Z_{mn} , mostrados a seguir.

$$Z_{on} = \frac{4r\phi_1 p_0}{C_2 n \pi^2} \left(\frac{\ell}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi C_2}{\ell} - C_2 \cos \frac{n\pi C_2}{\ell} \right) \cos \frac{n\pi b}{\ell} \quad (4.39)$$

$$Z_{mn} = \frac{8p_0}{\pi^2 C_2 mn} \left(\frac{\ell}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi C_2}{\ell} - C_2 \cos \frac{n\pi C_2}{\ell} \right) \operatorname{sen} (r m \phi_1) \cos \frac{n\pi b}{\ell} \quad (4.40)$$

onde:

r - número de cargas ao longo de um paralelo;

p_0 - magnitude máxima da carga variável;

b - cota do centro da carga ao longo do comprimento do cilindro.

4.7 - SUPERPOSIÇÃO DE TIPOS DE CARREGAMENTOS

Normalmente, em estruturas reais, os carregamentos que ocorrem, dificilmente são os casos particulares que foram mostrados nos itens anteriores, porém uma boa parcela deles pode ser obtido pela superposição dos casos.

A superposição dos casos aqui apresentados, pode ser feita não através da superposição dos resultados mas apenas pela soma direta dos coeficientes dos termos das séries que representam cada caso particular de carregamento, para representar o carregamento existente. Com este processo, os coeficientes das séries dos carregamentos são transformados para o desejado, e o processo a partir daí para a determinação dos coeficientes das séries dos esforços e dos deslocamentos, não é alterado, já que são obtidos diretamente a partir dos coeficientes dos carregamentos.

Pode-se notar que a precisão do resultado obtido a partir da soma dos coeficientes das séries de carregamento será mais eficiente, tanto em rapidez e precisão, do que a superposição direta dos resultados, pois os erros de truncamento e operações desnecessárias serão reduzidos drasticamente.

CAPÍTULO 5

REPRESENTAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS u e v NA FORMA DE SÉRIES5.1 - DESLOCAMENTOS NAS DIREÇÕES x e ϕ EM FUNÇÃO DO DESLOCAMENTO RADIAL

Conforme visto anteriormente o deslocamento radial é dado pela equação:

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \cos rm\phi \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (5.01)$$

Ao se desenvolver os deslocamentos u e v , em séries duplas de Fourier, como segue:

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos rm\phi \cos \frac{n\pi}{\ell} x \quad (5.02)$$

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin rm\phi \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (5.03)$$

é possível a relação dos coeficientes U_{mn} e V_{mn} , das expressões (5.02) e (5.03), com os coeficientes W_{mn} da expressão (5.01) através das equações (2.18) e (2.21) repetidas abaixo:

$$a\nabla^4 u = v \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w}{a^2 \partial x \partial \phi^2} + \frac{1+v}{1-v} \frac{t^2}{12a^2} \left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial \phi^2} + \frac{\partial^5 w}{a^2 \partial x \partial \phi^4} \right) \quad (5.04)$$

$$a\nabla^4 v = (2+v) \frac{\partial^3 w}{a \partial x^2 \partial \phi} + \frac{\partial^3 w}{a^3 \partial \phi^3} - \frac{t^2}{12a^2} \left(\frac{2a}{1-v} \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial \phi} + \frac{3-v}{1-v} \frac{\partial^5 w}{a \partial x^2 \partial \phi^3} + \frac{\partial^5 w}{a^3 \partial \phi^5} \right) \quad (5.05)$$

A análise das equações (5.02) e (5.03) confirma que, para os apoios, os deslocamentos u são diferentes de zero e os deslocamentos v e w são nulos, conforme figura 3.02, sendo que, a forma somente par de u e somente ímpar de v é devida às relações que existem entre estes deslocamentos e o deslocamento radial w (equação (5.01)), dadas pelas equações (5.04) e (5.05).

Substituindo as expressões (5.01), (5.02) e (5.03) em (5.04) e (5.05) obtêm-se os valores de U_{mn} e V_{mn} em função dos coeficientes W_{mn} :

$$U_{mn} = \frac{\lambda}{(\lambda^2 + r^2 m^2)^2} \left\{ r^2 m^2 - \nu \lambda^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{t^2 r^2 m^2}{12 a^2} (\lambda^2 + r^2 m^2) \right\} W_{mn} \quad (5.06)$$

e

$$V_{mn} = \frac{r m}{(\lambda^2 + r^2 m^2)^2} \left\{ (2+\nu) \lambda^2 + r^2 m^2 + \frac{t^2}{12 a^2} \left(\frac{2}{1-\nu} \lambda^4 + \frac{3-\nu}{1-\nu} r^2 m^2 \lambda^2 + r^2 m^2 \right) \right\} W_{mn} \quad (5.07)$$

Com as equações (5.06) e (5.07) as expressões (5.02) e (5.03) podem ser escritas como segue:

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{(\lambda^2 + r^2 m^2)^2} \left\{ r^2 m^2 - \nu \lambda^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{t^2 r^2 m^2}{12 a^2} (\lambda^2 + r^2 m^2) \right\} W_{mn} \cos r m \phi \cos \frac{\lambda}{a} x \quad (5.08)$$

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r m}{(\lambda^2 + r^2 m^2)^2} \left\{ (2+\nu) \lambda^2 + r^2 m^2 + \frac{t^2}{12 a^2} \left(\frac{2}{1-\nu} \lambda^4 + \frac{3-\nu}{1-\nu} r^2 m^2 \lambda^2 + r^4 m^4 \right) \right\} W_{mn} \sin r m \phi \sin \frac{\lambda}{a} x \quad (5.09)$$

as quais representam os deslocamentos das direções axial e transversal do cilindro.

CAPÍTULO 6

SÉRIES DOS ESFORÇOS RESULTANTES

6.1 - ESFORÇOS RESULTANTES EM FUNÇÃO DOS COEFICIENTES DAS SÉRIES DOS DESLOCAMENTOS

Os esforços resultantes, equações (A2.10) do Apêndice A2, podem ser postos em função dos deslocamentos através das equações (A3.01), (A3.02), (A3.03), (A3.08), (A3.10a) e (A3.17) do Apêndice A3 como segue:

$$N_x = \frac{Et}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial v}{a \partial \phi} - \frac{w}{a} \right) \right] \quad (6.01)$$

$$N_\phi = \frac{Et}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{a \partial \phi} - \frac{w}{a} - \frac{\nu \partial u}{\partial x} \right] \quad (6.02)$$

$$N_{x\phi} = N_{\phi x} = \frac{Et}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u}{a \partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (6.03)$$

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) \right] \quad (6.04)$$

$$M_\phi = -D \left[\frac{1}{a^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\nu \partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (6.05)$$

$$M_{x\phi} = -M_{\phi x} = \frac{D(1-\nu)}{a} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \right] \quad (6.06)$$

Porém os deslocamentos u e v estão relacionados com o deslocamento w através das equações (5.04) e (5.05) e portanto as equações (6.01) a (6.06) podem ser escritas, com o auxílio das equações (5.08) e (5.09), da seguinte forma:

$$N_x = \frac{Et}{1-\nu^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{\lambda^2 A}{aC^2} + \frac{\nu}{a} \left[\frac{r^2 m^2 B}{C^2} - 1 \right] \right\} W_{mn} \cos rm\phi \operatorname{sen} \frac{\lambda}{a} x \quad (6.07)$$

$$N_\phi = \frac{Et}{1-\nu^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\nu \lambda^2 A}{aC^2} + \frac{1}{a} \left[\frac{r^2 m^2 B}{C^2} - 1 \right] \right\} W_{mn} \cos rm\phi \operatorname{sen} \frac{\lambda}{a} x \quad (6.08)$$

$$N_{x\phi} = N_{\phi x} = \frac{Et}{2(1+\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda rm}{aC^2} (B - A) W_{mn} \operatorname{sen} rm\phi \cos \frac{\lambda}{a} x \quad (6.09)$$

$$M_x = -D \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 + \frac{\nu}{a^2} (1-r^2 m^2) \right] W_{mn} \cos rm\phi \operatorname{sen} \frac{\lambda}{a} x \quad (6.10)$$

$$M_\phi = -D \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\nu \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^2} (1-r^2 m^2) \right] W_{mn} \cos rm\phi \operatorname{sen} \frac{\lambda}{a} x \quad (6.11)$$

$$M_{x\phi} = -M_{\phi x} = \frac{D(1-\nu)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda rm}{a} \left[\frac{B}{C^2} - 1 \right] W_{mn} \operatorname{sen} rm\phi \cos \frac{\lambda}{a} x \quad (6.12)$$

onde:

$$A = (rm)^2 - \nu \lambda^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{(trm)^2 C}{12a^2} \quad (6.13)$$

$$B = (2+\nu) \lambda^2 + (rm)^2 + \frac{t^2}{12a^2} \left(\frac{2}{1-\nu} + \frac{3-\nu}{1-\nu} (rm\lambda)^2 + (rm)^4 \right) \quad (6.14)$$

$$C = \lambda^2 + (rm)^2 \quad (6.15)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6.16)$$

CAPÍTULO 7

APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

7.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é a comparação dos resultados obtidos pela solução proposta com os resultados do método de elementos finitos e com os resultados apresentados na referência |1|, de forma que se possa ter uma idéia da precisão do método, bem como a sua validade, para vários tipos de carregamentos que a solução permite.

7.2 - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS COM OS VALORES OBTIDOS POR BIJLAARD

Bijlaard, referência |1|, usando o mesmo método de solução, apresenta resultados para a análise de cilindros com cargas radiais inscritas em retângulos. As tabelas 7.01, 7.02 e 7.03, apresentam a comparação destes resultados com os resultados obtidos neste trabalho, na forma adimensional, para três geometrias distintas de cilindros.

A região retangular da superfície do tubo, fig. 7.01, na qual está aplicada a carga distribuída, tem as suas dimensões regidas pelo seguinte padrão:

$$\beta_1 = C_1/a = 1/8 \quad (\text{radianos}) \quad (7.01)$$

$$\beta_2 = \phi_1 = 1/8 \quad (\text{radianos}) \quad (7.02)$$

onde as variáveis C_1 , a e ϕ_1 estão indicadas na figura 7.01.

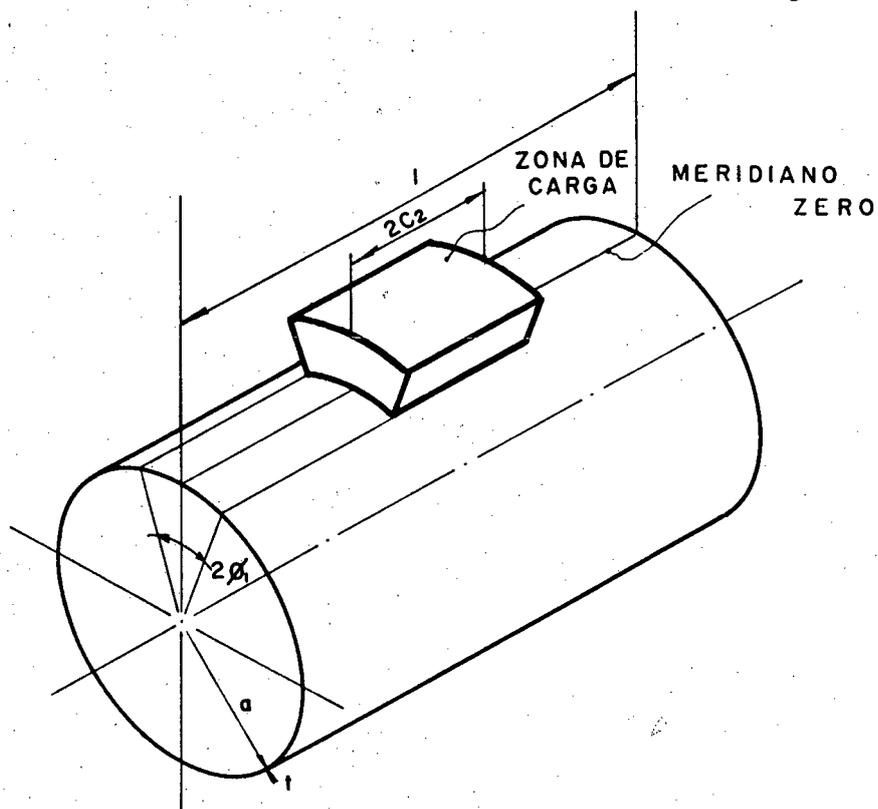


FIGURA 7.01 - Grandezas do cilindro e do carregamento

Tabela 7.01 - Carregamento radial inscrito em um retângulo da superfície do tubo cilíndrico com

$$\delta = a/t = 15 \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{l}{a} = 3$$

Método	$\delta = a/t$	$\alpha = l/a$	$\frac{wE}{4\phi_1 C_1 p}$	$\frac{M_\phi}{4a\phi_1 C_1 p}$	$\frac{Mx}{4a\phi_1 C_1 p}$	$-\frac{N_\phi}{4\phi_1 C_1 p}$	$-\frac{N_x}{4\phi_1 C_1 p}$
Referência [1]	15	3	272	0,1324	-0,1057	2,6126	2,320
Fourier	15	3	270	0,1325	0,1048	2,4819	2,303
Diferença %			0,74	-0,08	0,85	5,00	0,73

Tabela 7.02 - Carregamento radial inscrito em um retângulo da superfície do tubo cilíndrico, com $\delta = 15$ e $\alpha = 10$

Método	$\delta = a/t$	$\alpha = \ell/a$	$\frac{wE}{4\phi_1 C_{1P}}$	$\frac{M_\phi}{4a\phi_1 C_{1P}}$	$\frac{M_x}{4a\phi_1 C_{1P}}$	$-\frac{N_\phi}{4\phi_1 C_{1P}}$	$-\frac{N_x}{4\phi_1 C_{1P}}$
Referência 1	15	10	576	0,1463	0,1102	2,5744	2,784
Fourier	15	10	599	0,1498	0,1102	2,4209	2,805
Diferença %			-3,99	-2,39	0	5,96	-0,75

Tabela 7.03 - Carregamento radial inscrito em um retângulo da superfície do tubo cilíndrico, com $\delta = 50$ e $\alpha = 8$

Método	$\delta = a/t$	$\alpha = l/a$	$\frac{wE}{4\phi_1 C_1 P}$	$\frac{M_\phi}{4a\phi_1 C_1 P}$	$\frac{M_x}{4a\phi_1 C_1 P}$	$-\frac{N_\phi}{4\phi_1 C_1 P}$	$-\frac{N_x}{4\phi_1 C_1 P}$
Referência [1]	50	8	6924	0,0967	0,0614	6,4816	8,064
Fourier	50	8	6911	0,0963	0,0583	6,3077	8,060
Diferença %			0,19	0,41	5,05	2,68	0,05

Na referência [1], também são apresentados os resultados de deslocamentos radiais, para cargas radiais concentradas, P, aplicadas em cilindros de três geometrias distintas. Estes resultados são apresentados nas tabelas a seguir, como parâmetro de referência para os resultados aqui obtidos.

Tabela 7.04 - Comparação do maior deslocamento radial para cilindros com geometria $\delta = 15$ e $\alpha = 3$

Método	$\delta = a/t$	$\alpha = l/a$	wEa/P
Referência [1]	15	3	300
Fourier	15	3	298
Diferença %			0,67

Tabela 7.05 - Comparação do deslocamento radial para cilindro carregado com carga radial concentrada e geometria $\delta = 15$ e $\alpha = 10$

Método	$\delta = a/t$	$\alpha = l/a$	wEa/P
Referência [1]	15	10	601
Fourier	15	10	629
Diferença %			-4,66

Tabela 7.06 - Comparação do deslocamento radial para cilindro carregado com carga radial concentrada com geometria $\delta = 50$ e $\alpha = 8$

Método	$\delta = a/t$	$\alpha = \ell/a$	wEa/P
Referência 1	50	8	7631
Fourier	50	8	7692
Diferença %			-0,80

As comparações apresentadas nas tabelas 7.01 a 7.06, são relativas aos valores máximos de deslocamentos e solicitações.

Os resultados para esta comparação, foram obtidos pelo método desenvolvido, a partir das séries duplas de Fourier, por isto mesmo, aqui, denominado de Fourier. As séries foram expandidas em cento e vinte (120) termos em cada direção, enquanto que a referência |1|, usando o mesmo método, utilizou apenas sessenta e um (61) termos.

7.3 - CILINDRO CARREGADO COM PRESSÃO INTERNA

Para o caso de pressão interna, a análise de esforços e deslocamentos foi feita para um tubo cilíndrico de raio de 300 mm, comprimento de 880 mm e espessura de parede de 20 mm. O módulo de elasticidade $E = 210$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ são as propriedades físicas do material do tubo. A excitação, pressão in-

terna, é igual a 0,6 MPa.

O parâmetro de comparação foi obtido do programa de elementos finitos PROASE/Y75. Para modelagem do problema, para o método de elementos finitos, partiu-se de elementos de placas retangulares e construiu-se um modelo equivalente a quarta parte do cilindro completo, conforme pode ser visto na figura 7.02. A razão de ser usado apenas a quarta parte do cilindro, é a existência de dois planos de simetria para o modelo completo com qualquer carregamento localizado na posição média do comprimento do cilindro. Desta forma, os resultados de referência, para todas as comparações a serem realizadas neste trabalho, serão obtidos a partir deste modelo, apenas com as devidas alterações nos carregamentos.

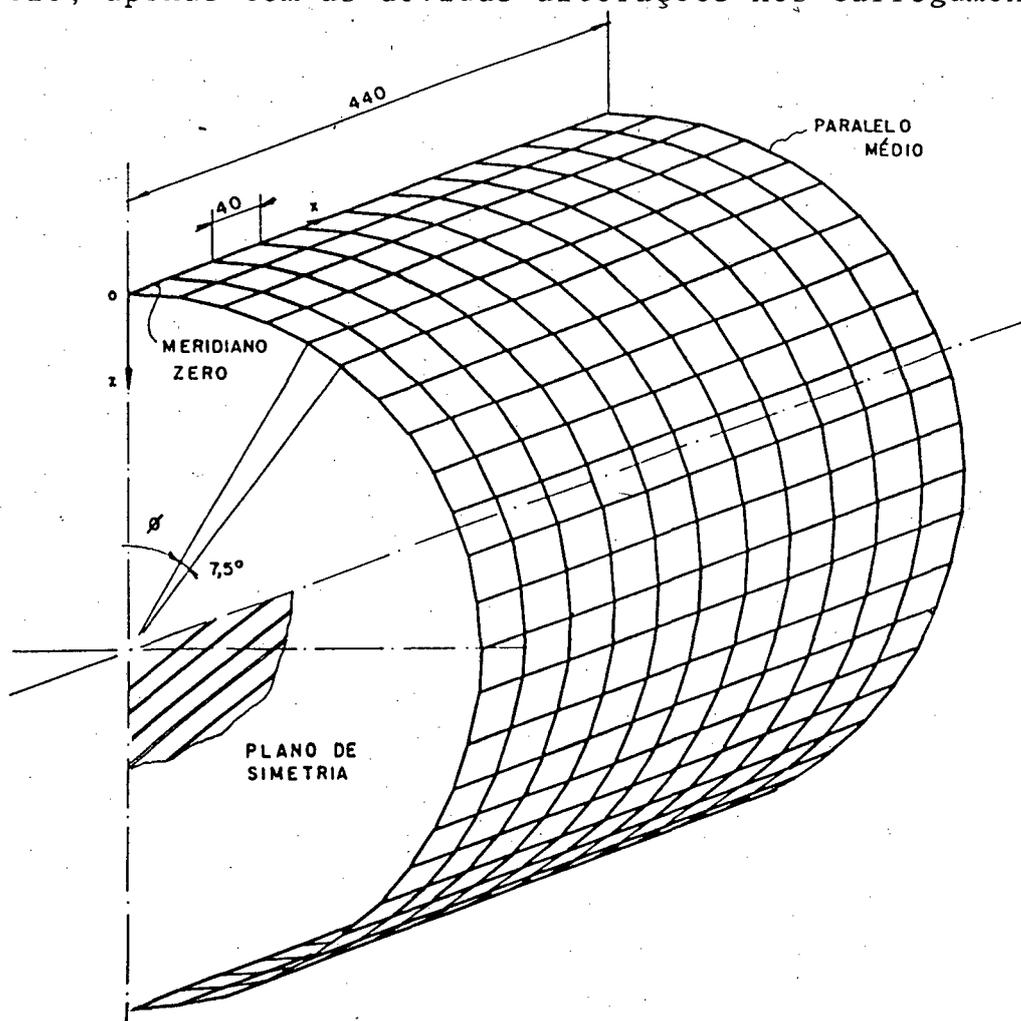


FIGURA 7.02 - Esquema da malha de elementos finitos usada.

O modelo composto de 264 elementos de placas retangulares, com 40 mm por 39,24 mm, não possui alguma restrição de deslocamento e rotação, salvo aqueles elementos em cujos nós estão os planos de simetria e apoios, aos quais condições de contorno adequadas foram aplicadas. Os carregamentos são aplicados como forças nodais equivalentes a força distribuída no elemento. Na figura 7.02 estão representadas as grandezas e variáveis necessárias para a interpretação dos resultados que são apresentados a seguir.

Tabela 7.07 - Deslocamentos axiais ao longo de um meri-
diano.

Ordenada x (mm)	u.10 ³ (mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	-5,2558	-5,2698	-0,27
40	-5,1038	-5,1086	-0,09
80	-4,7088	-4,7035	0,11
120	-4,1908	-4,1842	0,16
160	-3,6402	-3,6368	0,09
200	-3,0973	-3,0970	0,01
240	-2,5697	-2,5709	-0,05
280	-2,0525	-2,0537	-0,06
320	-1,5396	-1,5402	-0,04
360	-1,0271	-1,0272	-0,01
400	-0,5139	-0,5138	0,02
440	0,0000	0,0000	0,00

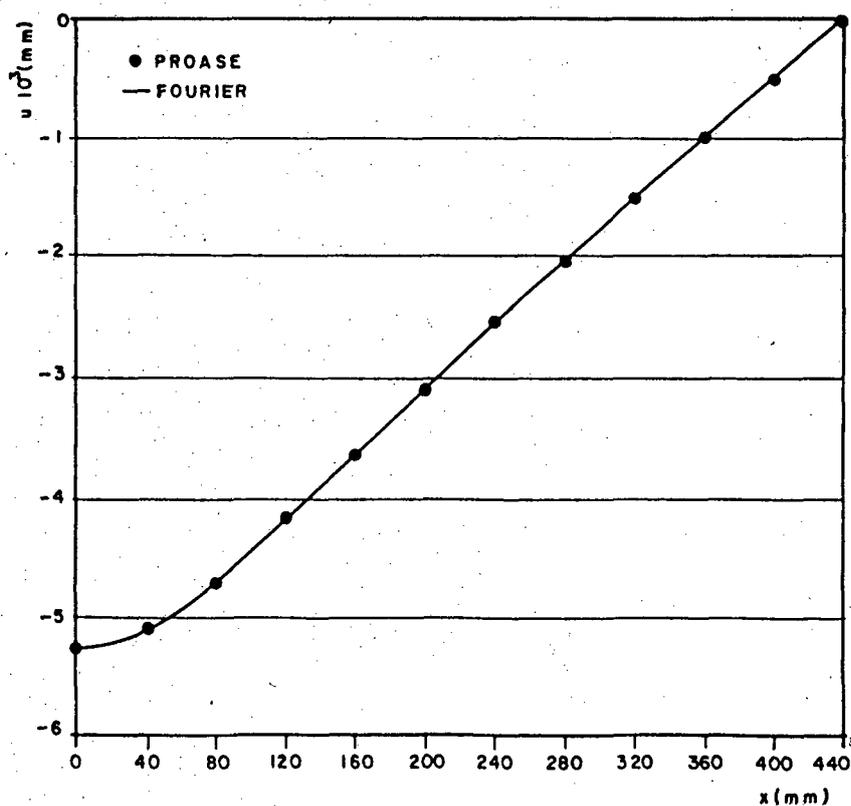


FIGURA 7.03 - Deslocamento axiais ao longo de um meridiano.

Tabela 7.08 - Deslocamentos radiais ao longo de um meridiano.

Ordenado x (mm)	w.10 ² (mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0000	0,0000	0,00
40	0,7601	0,7643	-0,55
80	1,2150	1,2036	0,94
120	1,3746	1,3574	1,25
160	1,3781	1,3656	0,91
200	1,3364	1,3315	0,37
240	1,3013	1,3017	-0,03
280	1,2843	1,2866	-0,18
320	1,2803	1,2823	-0,16
360	1,2817	1,2828	-0,09
400	1,2840	1,2842	-0,02
440	1,2848	1,2848	0,00

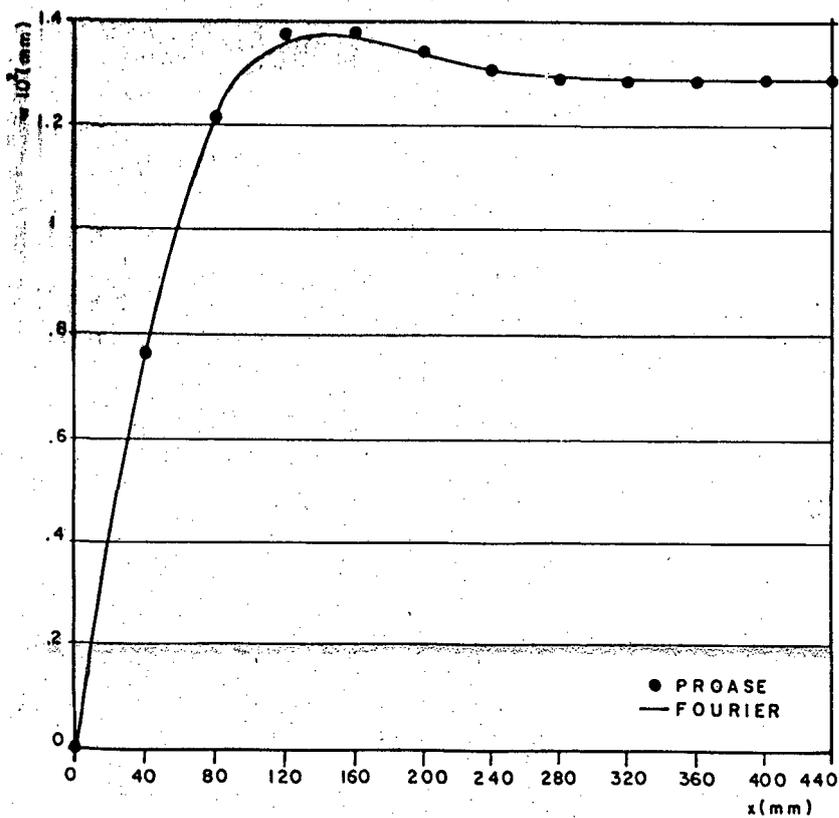


FIGURA 7.04 - Deslocamentos radiais ao longo de um meridiano.

Tabela 7.09 - Esforço normal da direção ϕ ao longo de um meridiano.

Ordenada x (mm)	$N_{\phi} \cdot 10^{-1}$ (N/mm)		Dif %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0000	0,0000	0,0
40	-10,6420	-10,6998	-0,54
80	-17,0103	-16,8507	0,94
120	-19,2453	-19,0031	1,26
160	-19,2943	-19,1184	0,91
200	-18,7104	-18,6412	0,37
240	-18,2195	-18,2238	-0,02
280	-17,9818	-18,0121	-0,17
320	-17,9225	-17,9516	-0,16
360	-17,9464	-17,9586	-0,07
400	-17,9774	-17,9786	-0,01
440	-17,9901	-17,9872	0,02

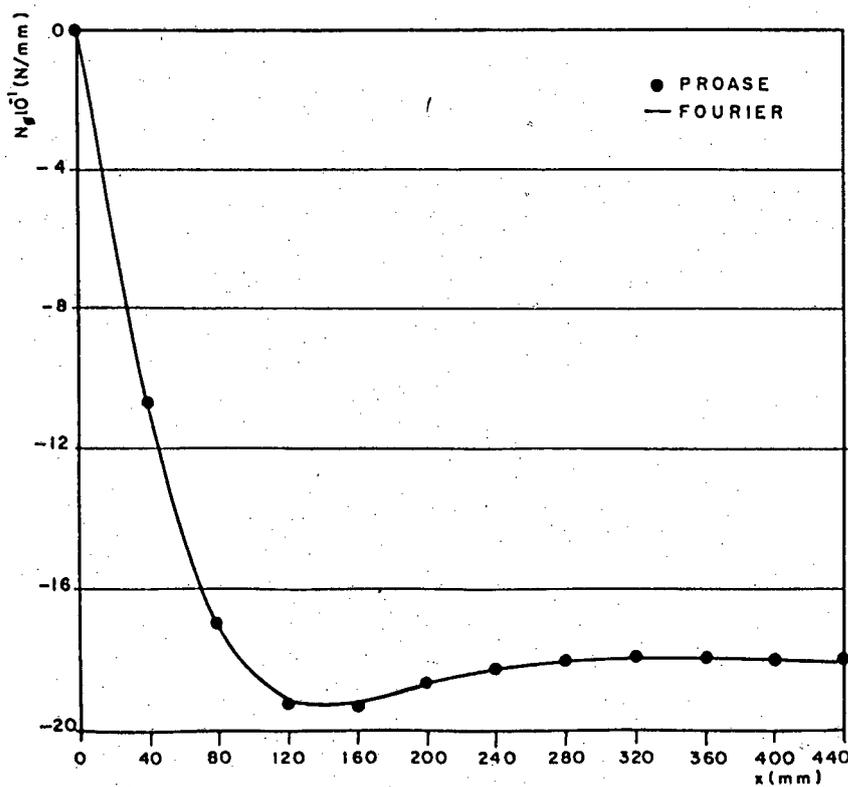


Figura 7.05 - Esforço normal da direção ϕ ao longo de um meridiano.

Tabela 7.10 - Momento da direção x ao longo de um meri-
diano.

Ordenada x (mm)	$M_x \cdot 10^{-1}$ (N)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	-0,0005	0,0000	100,00
40	36,4777	34,2027	6,24
80	29,8222	27,4300	8,02
120	14,1956	12,8503	9,48
160	3,2780	2,9030	11,44
200	-1,2854	-1,3873	-7,93
240	-1,9693	-2,1916	-11,29
280	-1,2549	-1,6895	-34,63
320	-0,4748	-1,1137	-134,56
360	-0,2488	-0,7264	-119,96
400	0,1480	-0,5622	-
440	0,1801	-0,5476	-

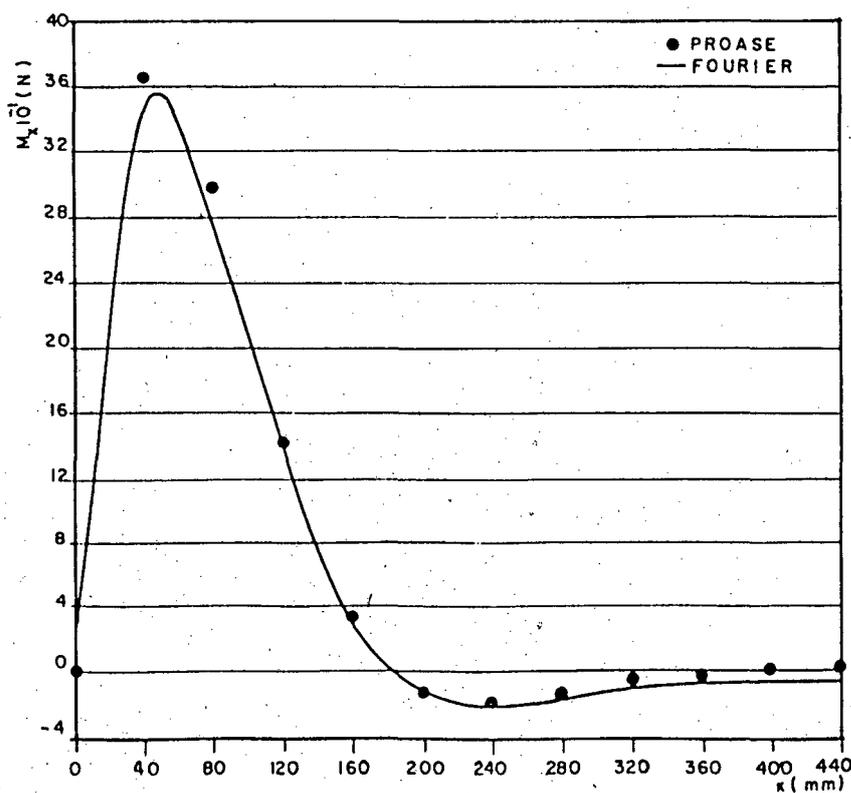


FIGURA 7.06 - Momento da direção x ao longo de um meridiano.

Tabela 7.11 - Momento da direção ϕ ao longo de um meridiano.

Ordenada x (mm)	$M_{\phi} \cdot 10^{-1}$ (N)		Dif %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0000	0,0000	0,0
40	10,9420	9,0720	17,09
80	8,9446	6,3567	28,93
120	4,2561	1,7436	59,03
160	0,9809	-1,2534	227,78
200	0,3880	-2,4874	741,08
240	-0,5935	-2,6823	351,95
280	-0,3796	-2,5082	-560,75
320	-0,1453	-2,3287	1502,68
360	-0,0110	-2,2133	-
400	0,0402	-2,1663	-
440	0,0473	-2,1629	-

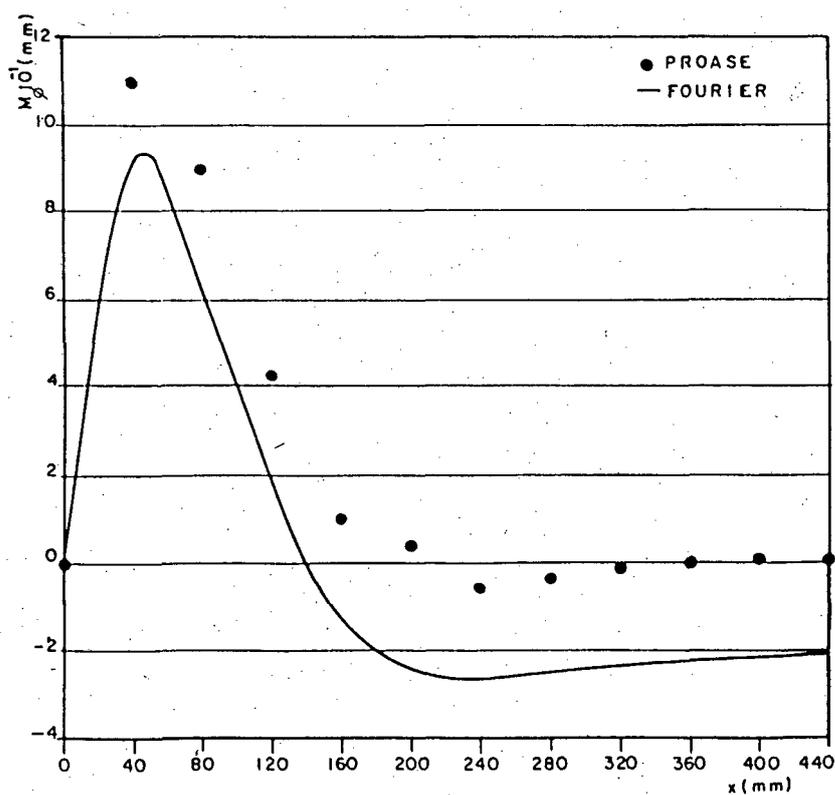


FIGURA 7.07 - Momento da direção ϕ ao longo de um meridiano.

7.4 - ANEL DE CARGA LARGO

Para este caso, o tubo cilíndrico a ser excitado é idêntico ao modelo do item 7.3, apenas com mudança de carregamento, que passou a ser anelar, com comprimento de 240 mm e intensidade de 0,6 MPa, e colocado exatamente na posição média do tubo, como pode ser visualizado na figura 7.08, abaixo.

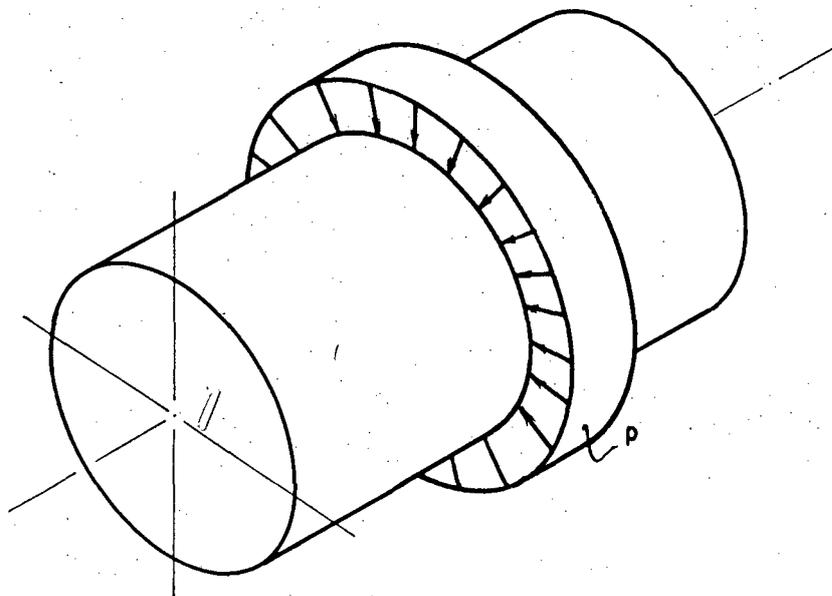


FIGURA 7.08 - Cilindro com anel de carga.

Os resultados de referência, obtidos do método de elementos finitos, são determinados a partir do modelo padrão, especificado no item 7.03, apenas com as alterações necessárias no carregamento.

A seguir apresenta-se a comparação dos resultados dos deslocamentos e as solicitações, obtidos pelo PROASE Y/75 e Fourier.

Tabela 7.12 - Deslocamentos axiais ao longo de um meridiano.

Ordenada x (mm)	u . 10 ³ (mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	-0,5138	-0,5138	0,0
40	-0,5135	-0,5136	-0,02
80	-0,5128	-0,5132	-0,08
120	-0,5127	-0,5132	-0,10
160	-0,5150	-0,5154	-0,08
200	-0,5223	-0,5217	0,11
240	-0,5352	-0,5330	0,41
280	-0,5467	-0,5435	0,59
320	-0,5342	-0,5334	0,15
360	-0,4565	-0,4622	-1,25
400	-0,2735	-0,2831	-3,51
440	0,0000	0,0000	0,0

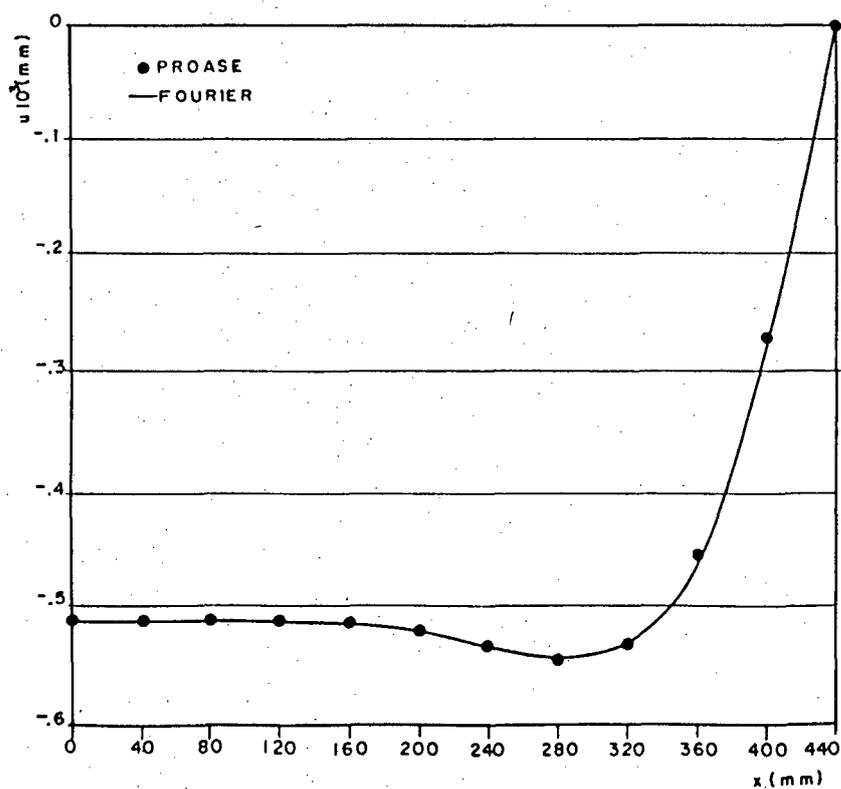


FIGURA 7.09 - Deslocamento axiais ao longo de um meridiano.

Tabela 7.13 - Deslocamentos radiais ao longo de um meridiano.

Ordenada x (mm)	w . 10 ³ (mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0000	0,0000	0,0
40	0,0157	0,0108	31,21
80	0,0186	0,0092	50,54
120	-0,0126	-0,0193	-53,17
160	-0,1050	-0,0965	8,10
200	-0,2602	-0,2250	13,53
240	-0,3838	-0,3201	16,60
280	-0,1911	-0,1282	32,91
320	0,8157	0,8099	0,71
360	3,0724	2,9635	3,54
400	6,0748	6,0183	0,93
440	7,6011	7,6453	-0,58

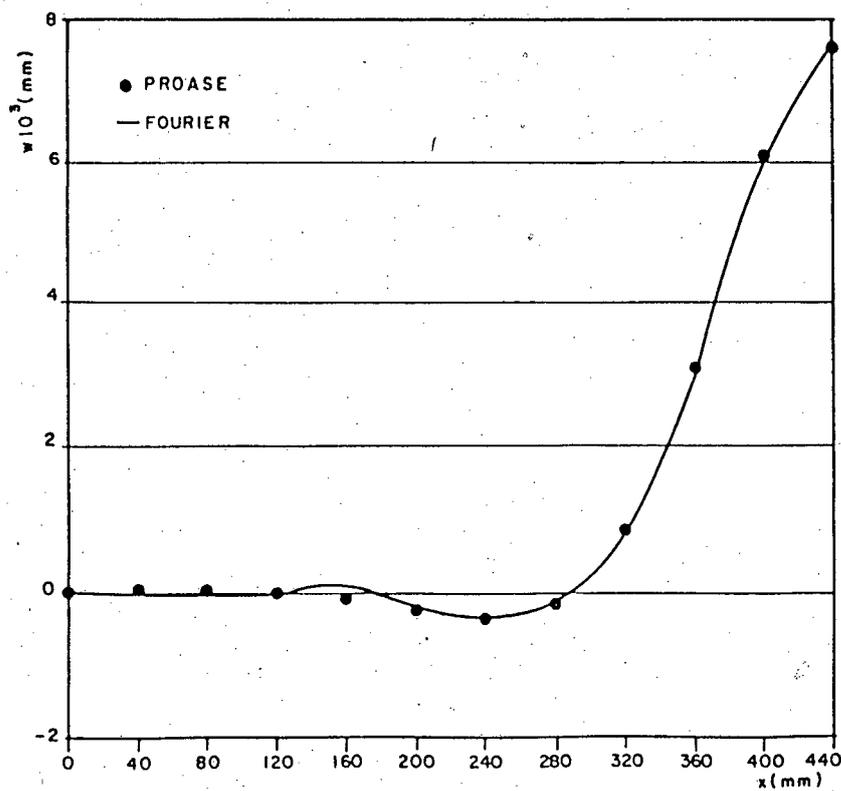


FIGURA 7.10 - Deslocamento radiais ao longo de um meridiano.

Tabela 7.14 - Esforços normais tangenciais ao longo de um meridiano.

Ordenada x (mm)	$N_{\phi} \cdot 10^{-1}$ (N/mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0000	0,0000	0,0
40	-0,0160	-0,0151	5,63
80	-0,0164	-0,0129	21,34
120	0,0245	0,0270	-10,20
160	0,1384	0,1351	2,38
200	0,3260	0,3150	3,37
240	0,4690	0,4481	4,46
280	0,2033	0,1795	22,96
320	-1,1329	-1,1338	-0,08
360	-4,1863	-4,1488	0,90
400	-8,4472	-8,4256	0,26
440	-10,6910	-10,7035	-0,12

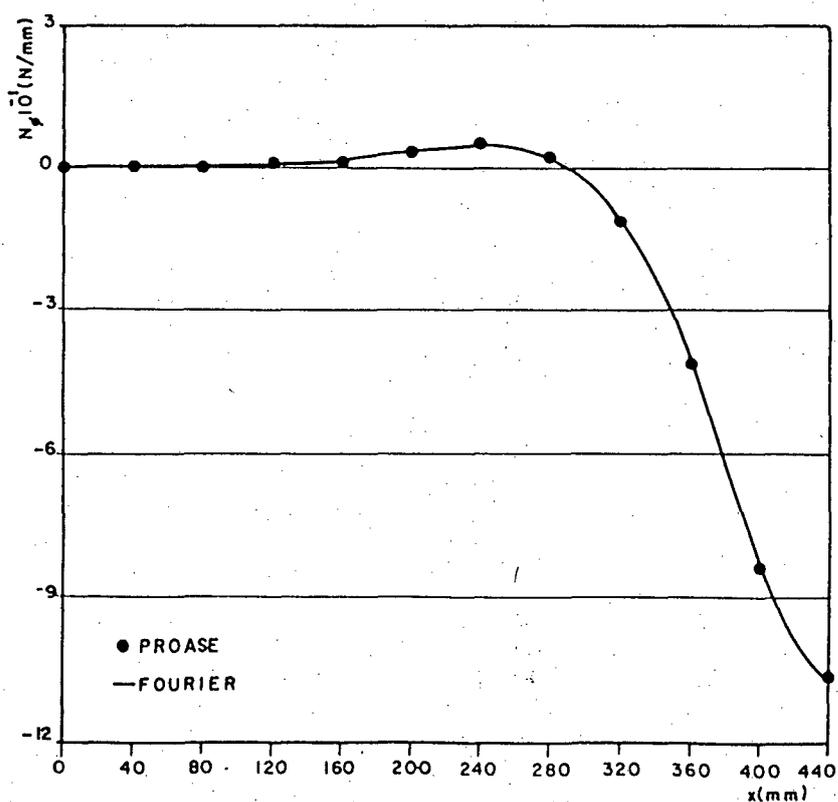


FIGURA 7.11 - Esforço normais tangenciais ao longo de um meridiano.

Tabela 7.15 - Momento da direção x ao longo de um meri-
diano.

Ordenada x (mm)	$M_x \cdot 10^{-2}$ (N)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0000	0,0000	0,0
40	0,0099	0,0191	-92,93
80	0,0276	0,0185	32,97
120	0,0517	0,0455	11,99
160	0,0586	0,0662	-12,97
200	-0,0126	-0,0233	-84,92
240	-0,2559	-0,2624	-2,54
280	-0,7259	-0,6938	4,42
320	-1,2481	-1,2312	1,35
360	-1,0667	-1,1024	-3,35
400	1,4228	1,3780	3,15
440	3,5041	3,4673	1,05

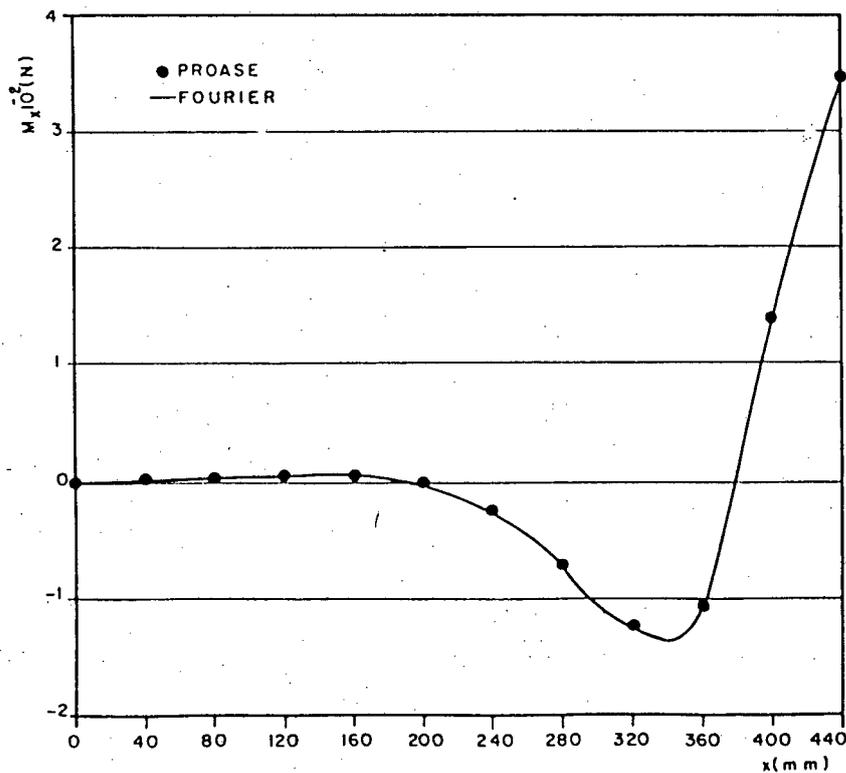


FIGURA 7.12 - Momento da direção x ao longo de um meridiano.

Tabela 7.16 - Momento da direção tangencial ao longo de um meridiano.

Ordenada x (mm)	$M_{\phi} \cdot 10^{-1}$ (N)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0000	0,0000	0,0
40	0,0298	0,0556	-86,58
80	0,0827	0,0542	34,46
120	0,1551	0,1395	10,06
160	0,1759	0,2136	-21,43
200	-0,0379	-0,0348	8,18
240	-0,7677	-0,7374	3,95
280	-2,1822	-2,0614	5,54
320	-3,7442	-3,8195	-2,01
360	-3,2002	-3,7683	-17,75
400	4,2677	3,1978	25,07
440	10,5117	9,2127	12,36

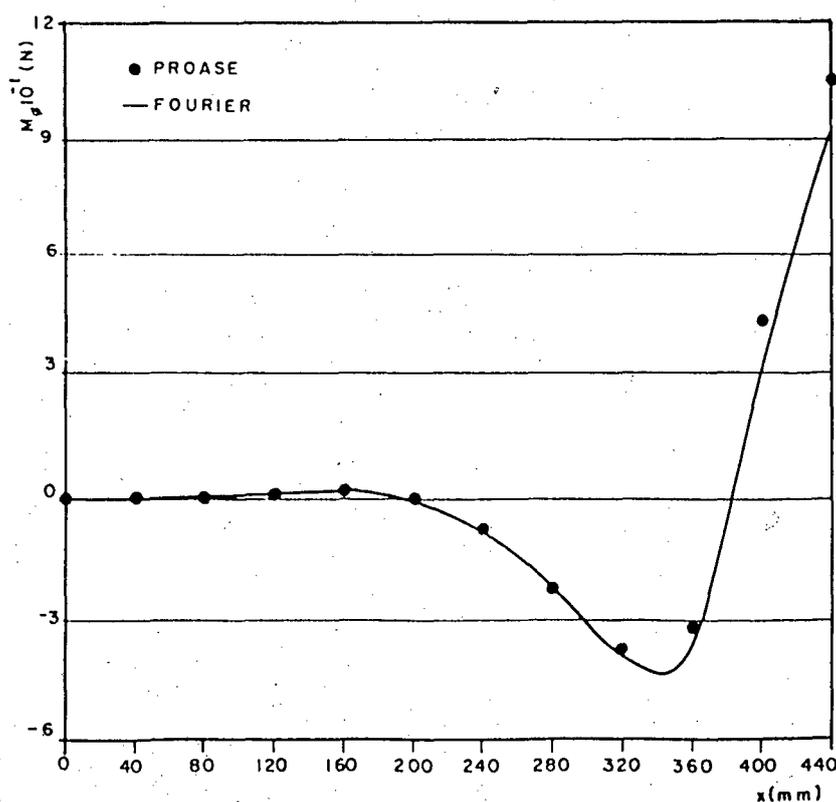


FIGURA 7.13 - Momento da direção tangencial ao longo de um meridiano.

7.5 - ANEL LINEAR DE CARGA

Novamente é feita a análise do tubo cilíndrico com carregamento axisimétrico, porém o carregamento é uma linha de carga de intensidade de 20 N/mm ao longo do paralelo médio, como mostra a figura abaixo.

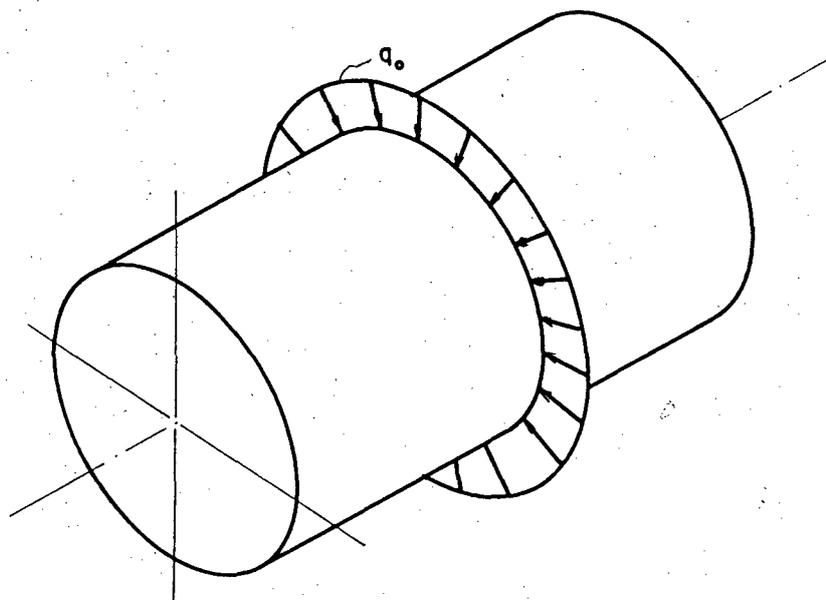


FIGURA 7.14 - Cilindro com anel de carga linear.

As comparações realizadas, e apresentadas nas tabelas e gráficos a seguir, tomaram novamente como padrão de referência os resultados obtidos pelo método de elementos finitos a partir do modelo especificado no item 7.03.

Tabela 7.17 - Deslocamentos axiais ao longo de um meri
diano.

Ordenada x (mm)	u . 10 ³ (mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	-0,2142	-0,2141	0,05
40	-0,2140	-0,2140	0,00
80	-0,2136	-0,2138	-0,09
120	-0,2134	-0,2137	-0,14
160	-0,2141	-0,2144	-0,14
200	-0,2169	-0,2170	-0,05
240	-0,2227	-0,2219	0,36
280	-0,2297	-0,2276	0,91
320	-0,2291	-0,2262	1,27
360	-0,2025	-0,2006	0,94
400	-0,1267	-0,1274	-0,55
440	-0,0000	0,0000	0,00

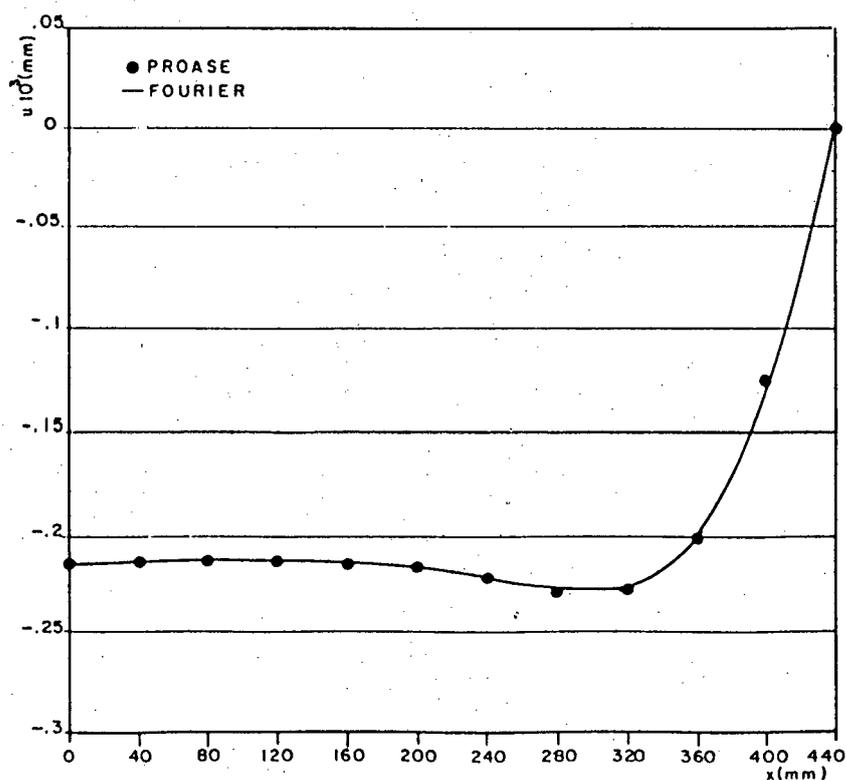


FIGURA 7.15 - Deslocamento axiais ao longo de um meridiano.

Tabela 7.18 - Deslocamentos radiais ao longo de um meridiano.

Ordenada x (mm)	w . 10 ³ (mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0000	0,0000	0,00
40	0,0055	0,0048	12,73
80	0,0070	0,0059	15,71
120	-0,0030	-0,0044	-46,67
160	-0,0358	-0,0361	-0,84
200	-0,0966	-0,0934	3,31
240	-0,1581	-0,1495	5,44
280	-0,1183	-0,1041	12,00
320	0,2313	0,2450	-5,97
360	1,1410	1,1418	-0,07
400	2,5909	2,5707	0,78
440	3,5893	3,5546	0,97

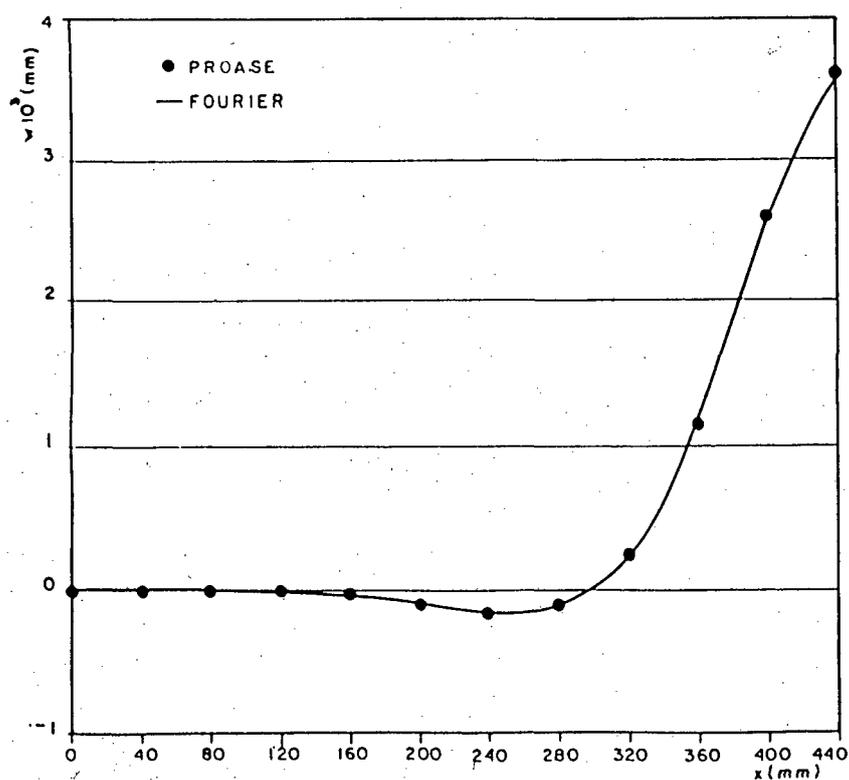


FIGURA 7.16 - Deslocamento radiais ao longo de um meridiano.

Tabela 7.19 - Esforços normais na direção ϕ ao longo de um meridiano.

Ordenada x (mm)	$N_{\phi} \cdot 10^{-1}$ (N/mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0000	0,0000	0,00
40	-0,0011	-0,0068	-
80	-0,0015	-0,0083	-
120	0,0020	0,0062	-
160	0,0490	0,0506	-3,27
200	0,1491	0,1307	12,34
240	0,2600	0,2092	19,54
280	0,2266	0,1457	35,70
320	-0,2675	-0,3430	-28,22
360	-1,5949	-1,5986	-0,23
400	-3,7118	-3,5989	3,04
440	-5,1562	-4,9763	3,49

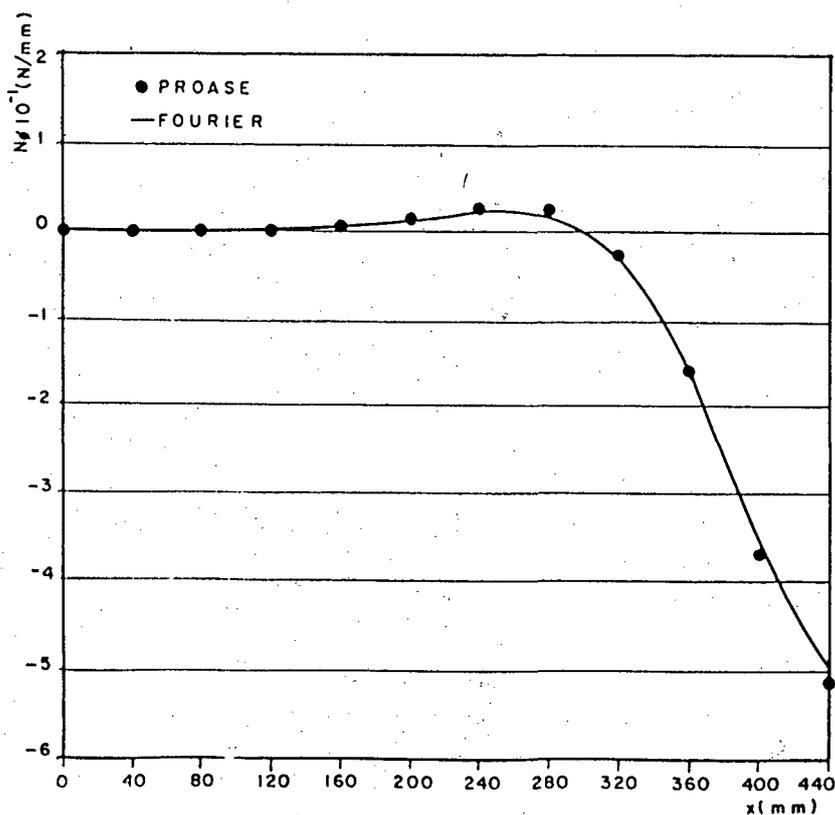


FIGURA 7.17 - Esforço normais na direção ϕ ao longo de um meridiano.

Tabela 7.20 - Momento na direção x ao longo de um meri
diano.

Ordenada x (mm)	$M_x \cdot 10^{-1}$ (N)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0000	0,0000	0,00
40	0,0309	-0,0030	-
80	0,1134	0,1548	-36,51
120	0,2618	0,1800	31,25
160	0,3876	0,2564	33,85
200	0,2080	0,1073	48,41
240	-0,7779	-0,9436	-21,30
280	-3,0250	-2,8270	6,55
320	-6,0729	-5,3899	11,25
360	-6,9488	-6,0557	12,85
400	1,4032	2,8219	-101,10
440	28,9940	26,9764	6,96

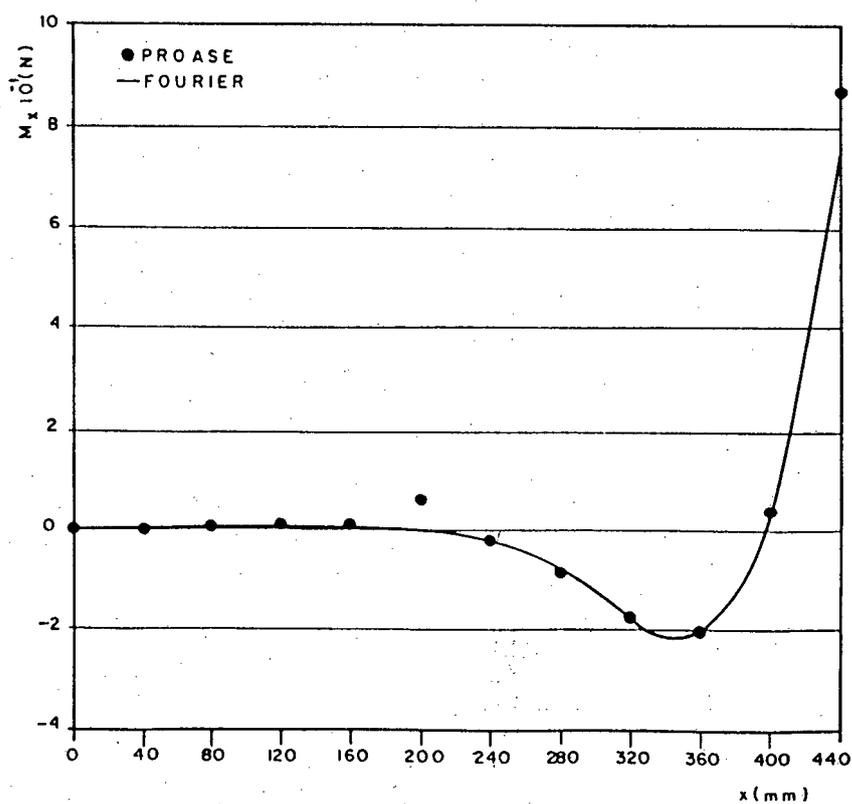


FIGURA 7.18 - Momento na direção x ao longo de um meridiano.

Tabela 7.21 - Momento na direção ϕ ao longo de um meridiano.

Ordenada x (mm)	$M_{\phi} \cdot 10^{-1}$ (N/mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0000	0,0000	0,00
40	0,0092	-0,0017	118,48
80	0,0340	0,0455	-33,82
120	0,0785	0,0547	30,32
160	0,1162	0,0825	29,00
200	0,6241	0,0467	92,52
240	-0,2333	-0,2598	-11,36
280	-0,9075	-0,8319	8,33
320	-1,8220	-1,6551	9,16
360	-2,0847	-1,9943	4,34
400	0,4207	0,4467	-6,18
440	8,6978	7,5400	13,31

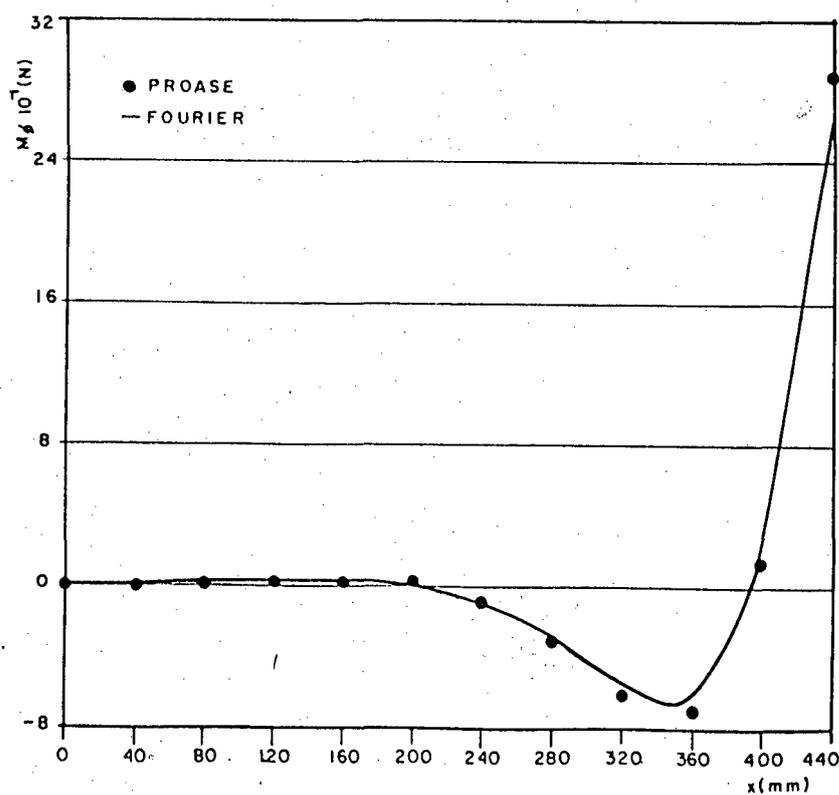


FIGURA 7.19 - Momento na direção ϕ ao longo de um meridiano.

7.6 - CARGA RADIAL INSCRITA EM UM RETÂNGULO

Este modelo, tem por finalidade a verificação do comportamento da solução para carregamentos não axisimétricos. Apesar de não ser axisimétrico, este carregamento aplicado sobre o cilindro possui dois planos de simetria, um no paralelo médio e outro no meridiano zero, conforme pode ser visualizado na figura 7.20 abaixo, o que permite que o mesmo possa ser analisado com o modelo padrão de elementos finitos, apresentado no item 7.03.

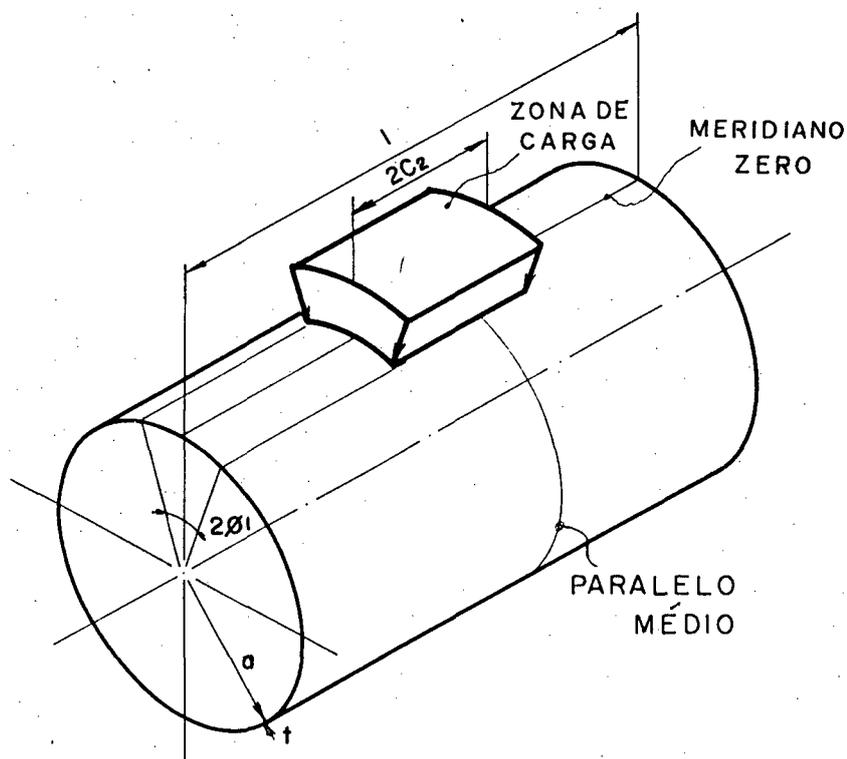


FIGURA 7.20 - Cilindro com carga radial inscrita em um retângulo.

O carregamento aplicado sobre o tubo cilíndrico, tem o seu ponto médio coincidente com a intersecção do paralelo médio e

do meridiano zero, e está distribuído sobre uma área retangular com 240 mm de lado na direção axial e em um arco de circunferência dado pelo produto de um raio de 300 mm e um ângulo de 30° , sendo a sua intensidade igual a 0,02 MPa.

As tabelas e os gráficos, a seguir, fazem a comparação dos deslocamentos u , v e w e das solicitações N_x , N_ϕ , M_x e M_ϕ obtidos pelo método proposto com os valores obtidos pelo método de elementos finitos. Como o carregamento não é simétrico os resultados são apresentados para os paralelos e meridianos, nos quais os deslocamentos e os esforços são maiores possíveis em módulo.

Tabela 7.22 - Deslocamentos axiais para o meridiano em
 $\phi = 0^\circ$.

Ordenada x (mm)	u . 10 ³ (mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,5716	0,5747	-0,54
40	0,5679	0,5709	-0,53
80	0,5563	0,5592	-0,52
120	0,5363	0,5390	-0,50
160	0,5069	0,5093	-0,47
200	0,4663	0,4685	-0,47
240	0,4136	0,4155	-0,46
280	0,3483	0,3497	-0,40
320	0,2721	0,2729	-0,29
360	0,1872	0,1879	-0,37
400	0,0957	0,0961	-0,42
440	0,0000	0,0000	0,00

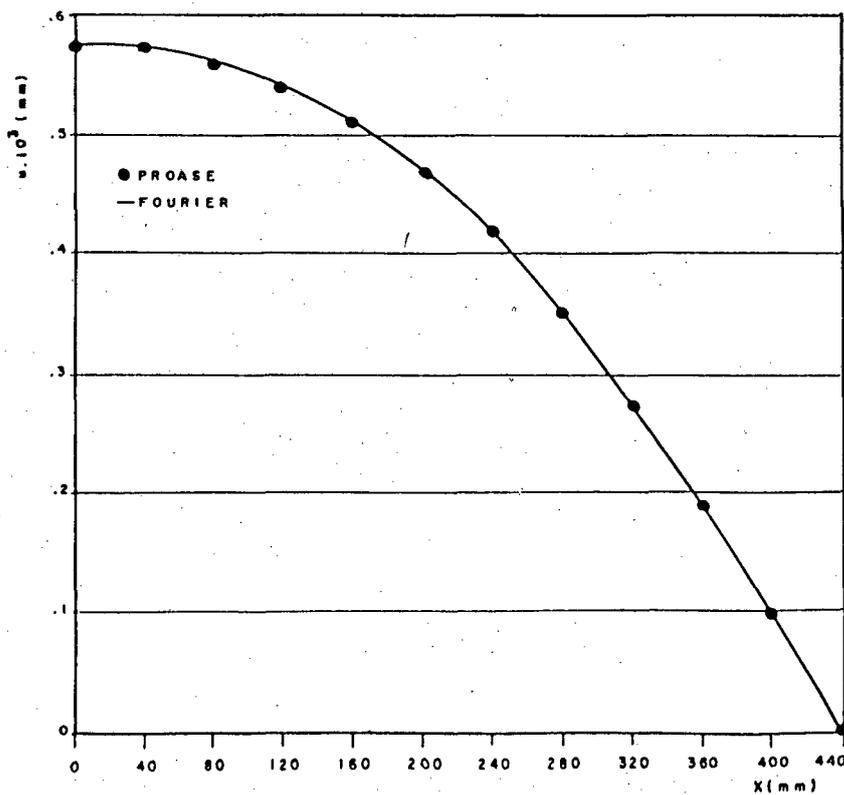


FIGURA 7.21 - Deslocamento axiais para o meridiano
em $\phi = 0^\circ$.

Tabela 7.23 - Deslocamentos axiais para o paralelo em
 $x = 0.$

Ordenada ϕ em (graus)	$u \cdot 10^3$ (mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,5716	0,5747	-0,54
15	0,4497	0,4519	-0,49
30	0,1570	0,1574	-0,25
45	-0,1465	-0,1476	-0,75
60	-0,3283	-0,3301	-0,55
75	-0,3506	-0,3523	-0,48
90	-0,2579	-0,2590	-0,43
105	-0,1263	-0,1266	-0,24
120	0,0171	0,0169	1,17
135	0,0428	0,0433	-1,17
150	0,0590	0,0595	-0,85
165	0,0539	0,0543	-0,74
180	0,0493	0,0495	-0,61

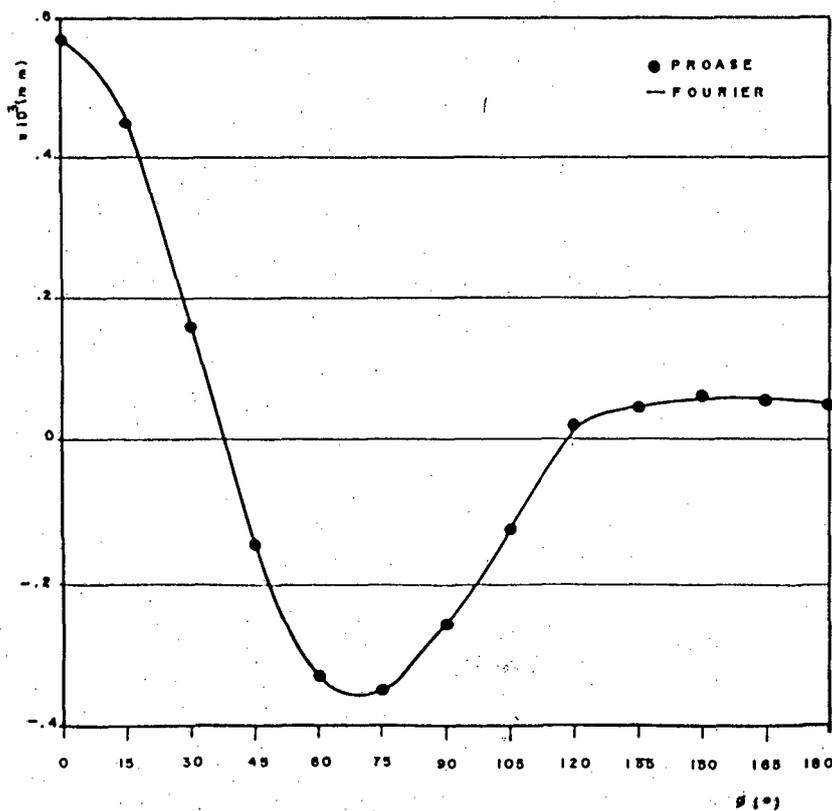


FIGURA 7.22 - Deslocamentos axiais para o paralelo
em $x = 0.$

Tabela 7.24 - Deslocamentos tangenciais para o meridia-
no em $\phi = 30^\circ$

Ordenada x (mm)	v . 10 ³ (mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0000	0,0000	0,00
40	0,2287	0,2344	-2,49
80	0,4575	0,4687	-2,45
120	0,6862	0,7028	-2,42
160	0,9146	0,9366	-2,41
200	1,1418	1,1692	-2,40
240	1,3654	1,3983	-2,41
280	1,5789	1,6178	-2,46
320	1,7707	1,8159	-2,55
360	1,9245	1,9750	-2,62
400	2,0241	2,0779	-2,66
440	2,0586	2,1134	-2,66

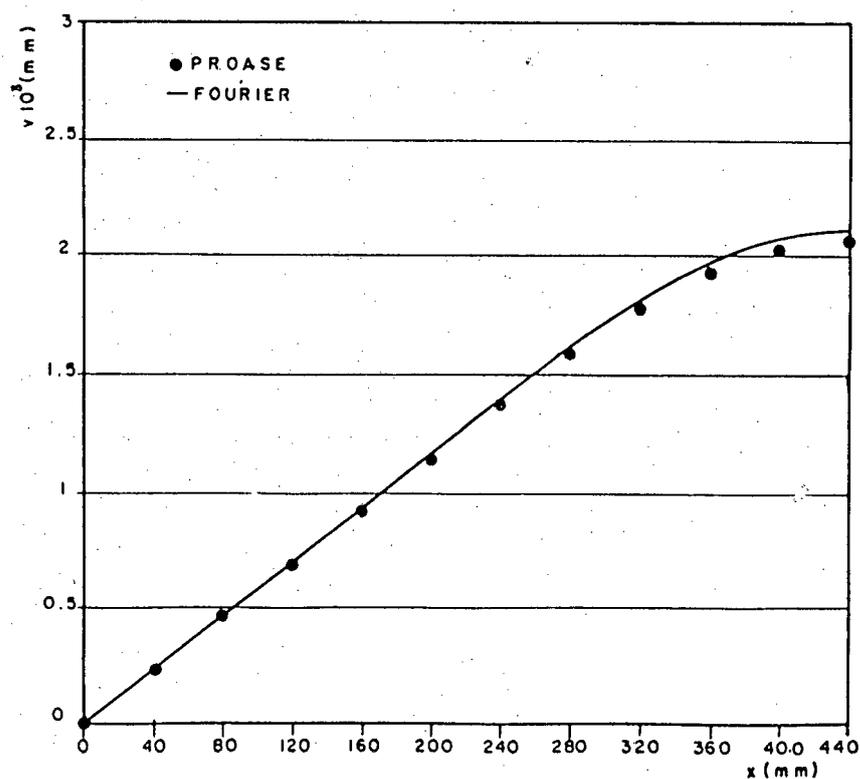


FIGURA 7.23 - Deslocamentos tangenciais para o meridiano em $\phi = 30^\circ$.

Tabela 7.25 - Deslocamentos tangenciais para o paralelo em $x = 440$ mm.

Ordenada ϕ (graus)	$v \cdot 10^3$ (mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0000	0,0000	0,00
15	1,4892	1,5435	-3,65
30	2,0586	2,1134	-2,66
45	1,6860	1,7141	-1,67
60	0,8733	0,8746	-0,15
75	0,0979	0,0830	15,22
90	-0,3806	-0,3997	-5,02
105	-0,5223	-0,5371	-2,83
120	-0,4284	-0,4354	-1,63
135	-0,2458	-0,2458	0,00
150	-0,0916	-0,0882	3,71
165	-0,0159	-0,0130	18,24
180	0,0000	0,0000	0,00

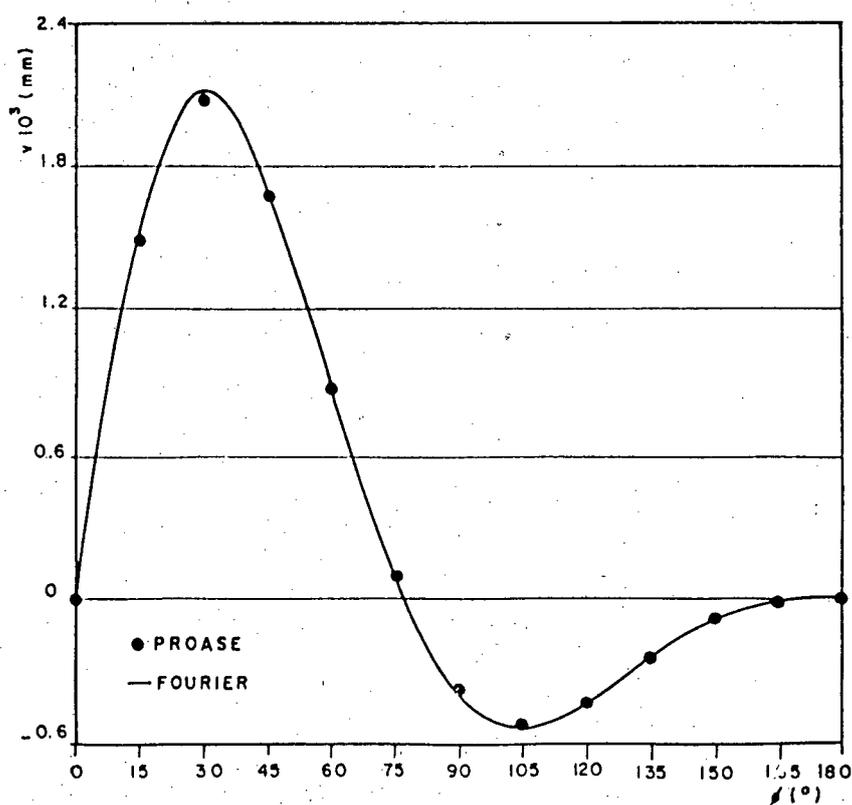


FIGURA 7.24 - Deslocamento tangenciais para o paralelo em $x = 440$ mm.

Tabela 7.26 - Deslocamentos radiais para o meridiano
em $\phi = 00$.

Ordenada x (mm)	w . 10 ² (mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0000	0,0000	0,00
40	0,0601	0,0612	-1,85
80	0,1204	0,1225	-1,74
120	0,1811	0,1844	-1,82
160	0,2430	0,2477	-1,93
200	0,3081	0,3142	-1,95
240	0,3796	0,3870	-1,95
280	0,4610	0,4698	-1,91
320	0,5493	0,5611	-2,15
360	0,6272	0,6416	-2,30
400	0,6767	0,6919	-2,25
440	0,6931	0,7084	-2,21

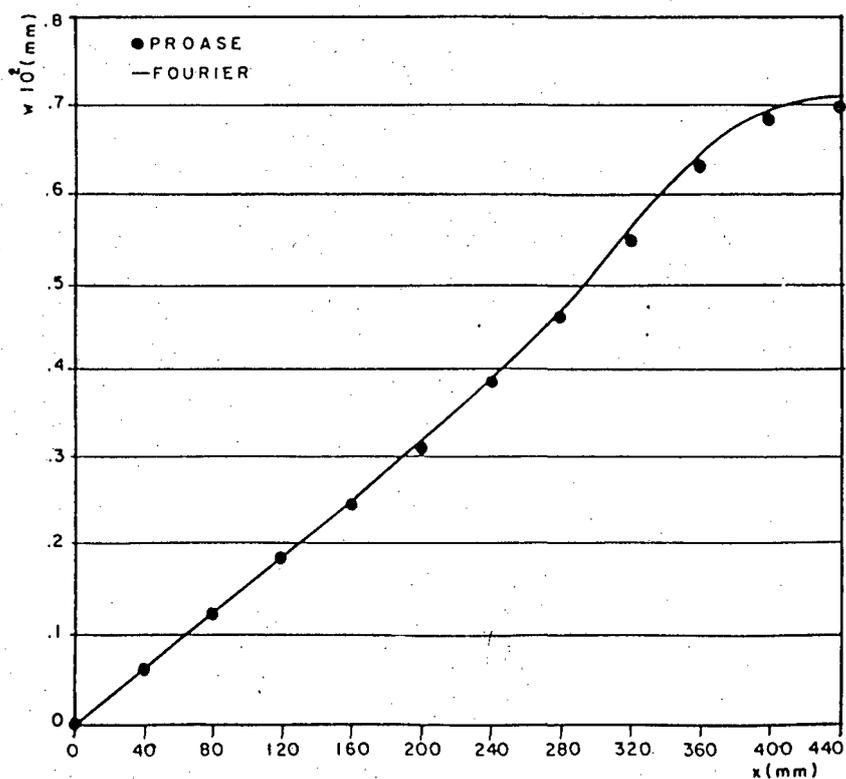


FIGURA 7.25 - Deslocamentos radiais para o meridiano
em $\phi = 00$.

Tabela 7.27 - Deslocamentos radiais para o paralelo em
 $x = 400$ mm.

Ordenada ϕ (graus)	$w \cdot 10^2$ (mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,6931	0,7084	-2,21
15	0,4670	0,4740	-1,50
30	0,0419	0,0376	10,26
45	-0,2420	-0,2494	-3,06
60	-0,3145	-0,3205	-1,91
75	-0,2399	-0,2429	-1,25
90	-0,1106	-0,1109	-0,27
105	0,0014	0,0029	-107,14
120	0,0614	0,0634	-3,26
135	0,0685	0,0699	-2,04
150	0,0434	0,0439	-1,15
175	0,0137	0,0133	2,92
180	0,0011	0,0003	72,73

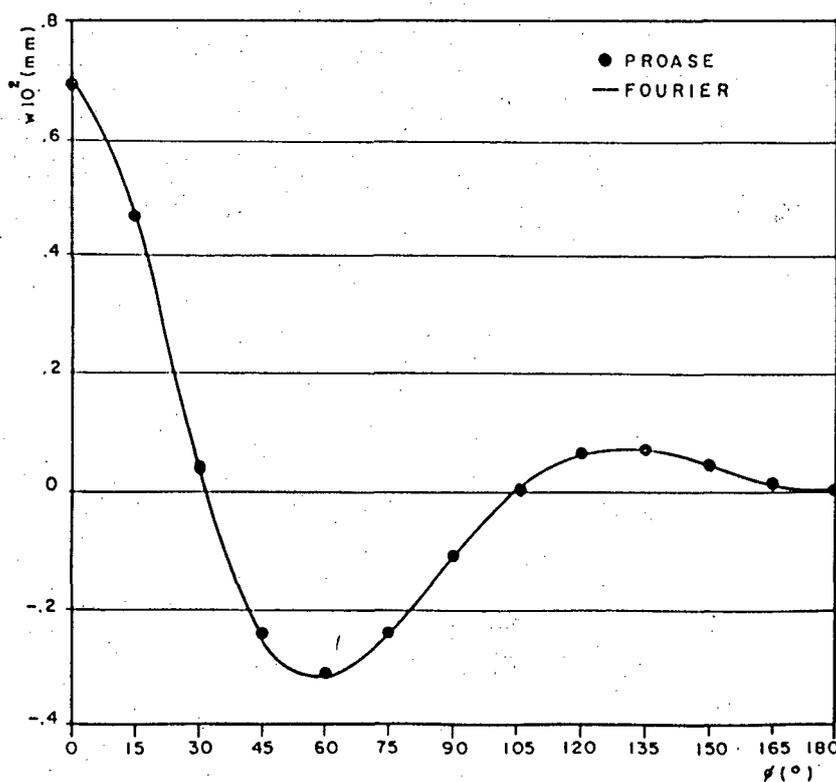


FIGURA 7.26 - Deslocamentos radiais para o paralelo
em $x = 400$ mm.

Tabela 7.28 - Esforço normal da direção x para o meridiano zero.

Ordenada x (mm)	$N_x \cdot 10^{-1}$ (N/mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	-0,0036	0,0000	-
40	-0,0740	-0,0743	-0,41
80	-0,1517	-0,1519	-0,13
120	-0,2373	-0,2368	0,21
160	-0,3362	-0,3343	0,57
200	-0,4553	-0,4513	0,88
240	-0,6009	-0,5954	0,92
280	-0,7727	-0,7701	0,34
320	-0,9553	-0,9628	-0,79
360	-1,1182	-1,1364	-1,63
400	-1,2293	-1,2518	-1,83
440	-1,2684	-1,2914	-1,81

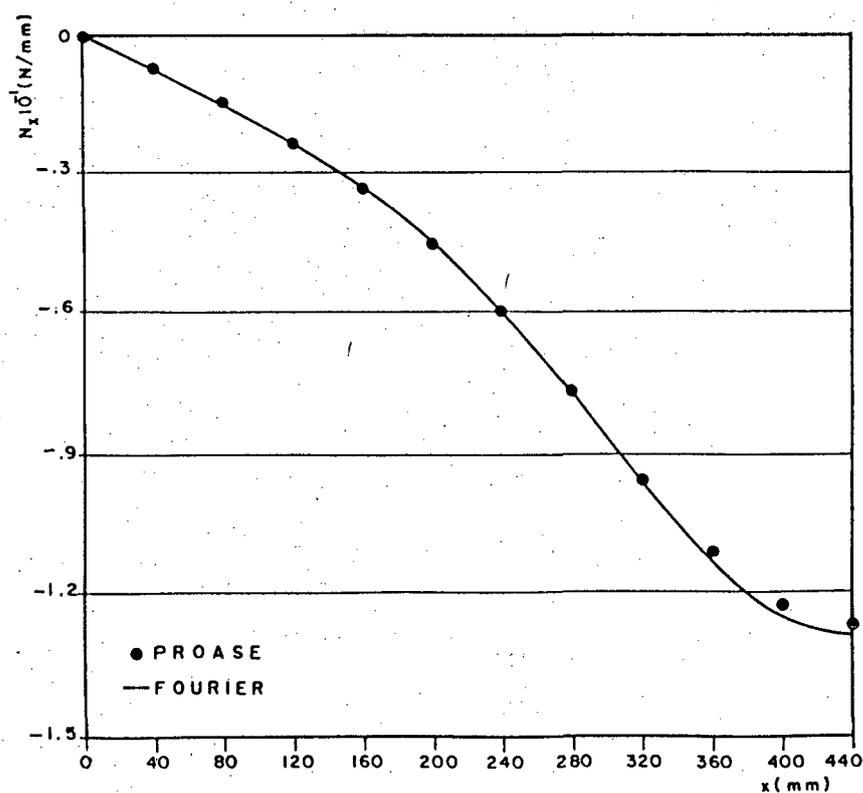


FIGURA 7.27 - Esforço normal da direção x para o meridiano zero.

Tabela 7.29 - Esforço normal da direção x para o paralelo médio.

Ordenada ϕ (graus)	$N_x \cdot 10^{-1}$ (N/mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	-1,2684	-1,2914	-1,85
15	-0,9253	-0,9408	-1,68
30	-0,2279	-0,2282	-0,13
45	0,3271	0,3364	-2,84
60	0,5712	0,5813	-1,77
75	0,5542	0,5614	-1,30
90	0,3914	0,3942	-0,72
105	0,1902	0,1913	-0,58
120	0,0294	0,0289	1,70
135	-0,0608	-0,0620	-1,97
150	-0,0890	-0,0902	-1,35
165	-0,0853	-0,0863	-1,17
180	-0,0800	-0,0809	-1,13

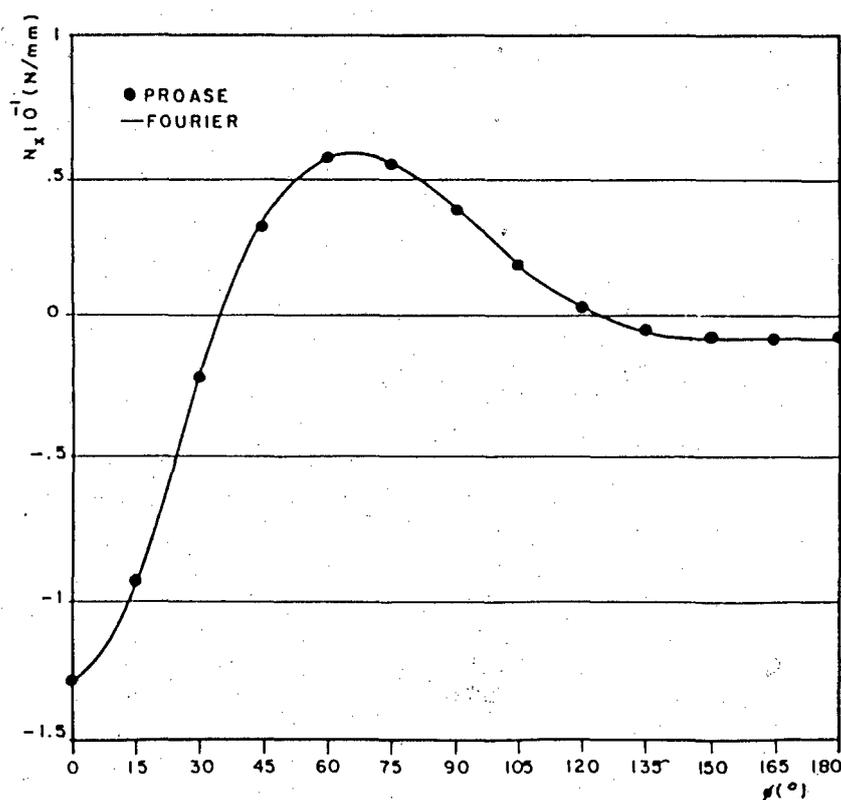


FIGURA 7.28 - Esforço normal da direção x para o paralelo médio.

Tabela 7.30 - Esforço normal da direção ϕ ao longo do meridiano zero.

Ordenada x (mm)	N_{ϕ} (N/mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0054	0,0000	-
40	0,1947	0,2113	-8,53
80	0,4260	0,4586	-5,18
120	0,7295	0,7691	-5,43
160	1,0706	1,1103	-3,71
200	1,2709	1,3144	-3,42
240	0,9059	0,9758	-7,72
280	-0,6560	-0,5592	14,76
320	-3,6211	-3,6660	-1,24
360	-6,6810	-6,8648	-2,75
400	-8,4743	-8,6228	-1,75
440	9,0057	9,1278	+1,36

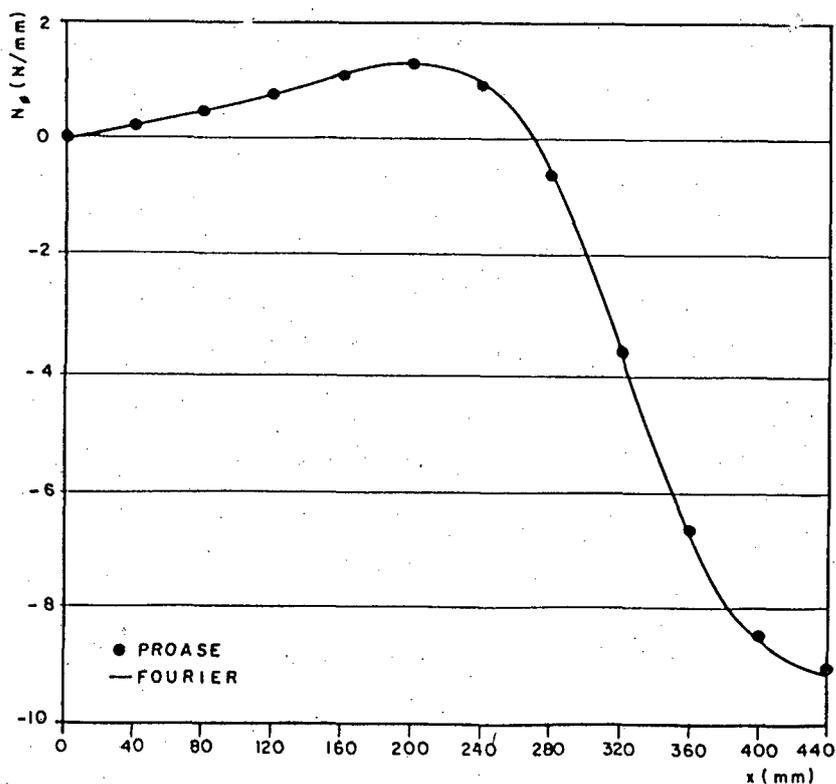


FIGURA 7.29 - Esforço normal da direção ϕ ao longo do meridiano zero.

Tabela 7.31 - Esforço normal da direção ϕ ao longo do paralelo médio.

Ordenada ϕ (graus)	N_{ϕ} (N/mm)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	-9,0057	-9,1278	-1,36
15	-7,9489	-8,0072	-0,73
30	-5,2860	-5,2188	1,27
45	-2,4419	-2,3178	5,08
60	-0,5479	-0,4513	17,63
75	0,3446	0,4006	-16,25
90	0,5924	0,6201	-4,68
105	0,5169	0,5283	-2,21
120	0,3160	0,3181	-0,66
135	0,0981	0,0949	3,26
150	-0,0797	-0,0860	-7,90
165	-0,1915	-0,1994	-4,13
180	-0,2293	-0,2376	-3,62

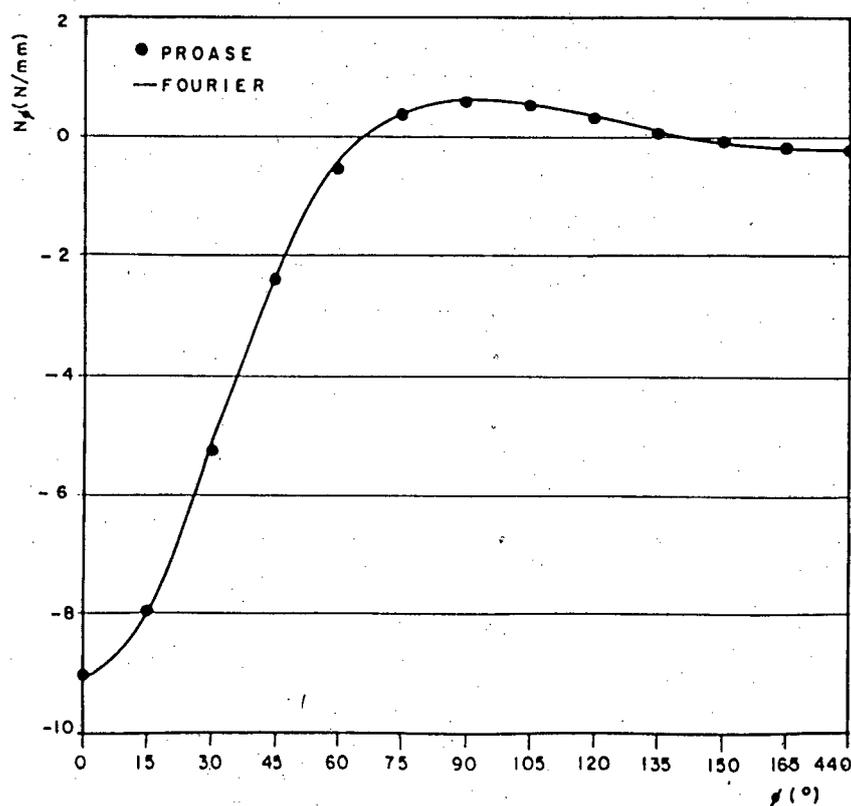


FIGURA 7.30 - Esforço normal da direção ϕ ao longo do paralelo médio.

Tabela 7.32 - Momento da direção x ao longo do meridiano no zero.

Ordenada x (mm)	$M_x \cdot 10^{-1}$ (N)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0411	0,0000	-
40	0,1729	0,1927	-11,45
80	0,3920	0,3894	0,66
120	0,5512	0,5461	0,93
160	0,6353	0,6357	-0,06
200	0,6025	0,6429	-6,71
240	0,5460	0,6187	-13,32
280	1,0258	1,0956	-6,80
320	3,6199	3,6335	-0,38
360	6,2128	6,1857	0,44
400	6,7095	6,6713	0,57
440	6,7204	6,6626	0,86

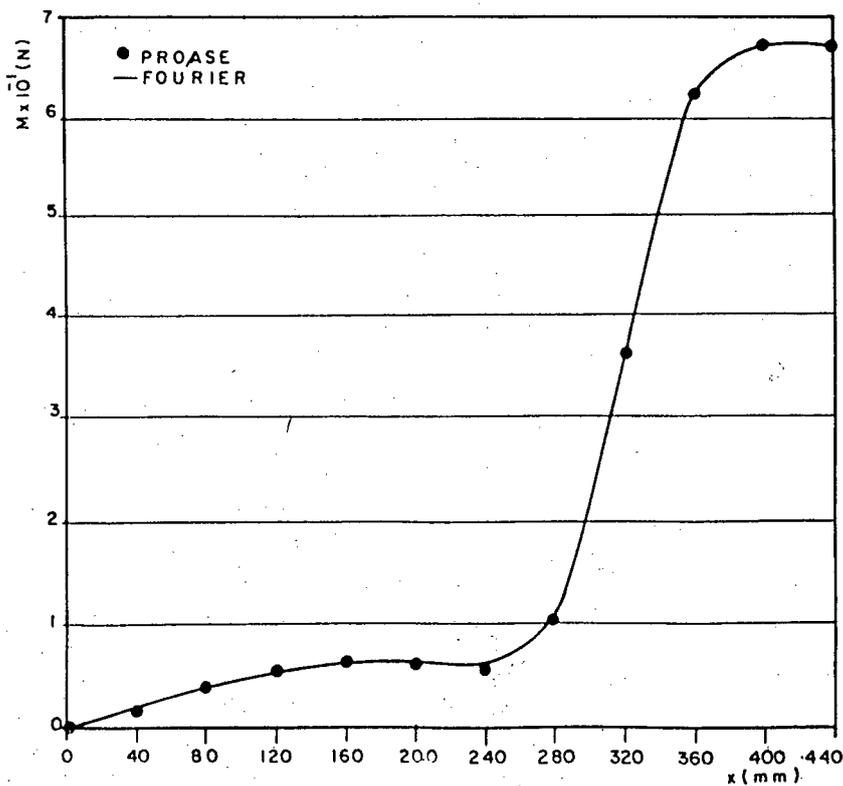


FIGURA 7.31 - Momento da direção x ao longo do meridiano no zero.

Tabela 7.33 - Momento da direção x ao longo do paralelo médio.

Ordenada ϕ (graus)	$M_x \cdot 10^{-1}$ (N)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	6,7204	6,6626	0,86
15	3,2708	3,2302	1,24
30	-1,3840	-1,4148	-2,23
45	-2,4738	-2,5091	-1,43
60	-1,8170	-1,8406	-1,30
75	-0,7692	-0,7775	-1,08
90	0,0476	0,0475	0,21
105	0,4620	0,4640	-0,43
120	0,5175	0,5209	-0,66
135	0,3432	0,3481	-1,43
150	0,0870	0,0904	-3,91
165	-0,1232	-0,1244	-0,97
180	-0,2030	-0,2069	-1,92

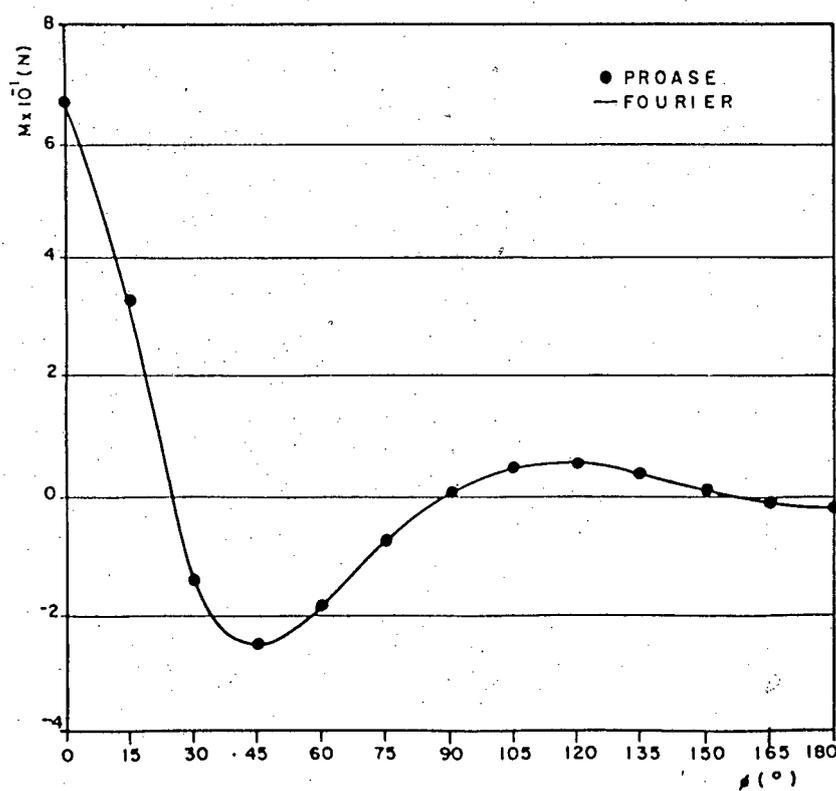


FIGURA 7.32 - Momento da direção x ao longo do paralelo médio.

Tabela 7.34 - Momento da direção ϕ ao longo do meridia
no zero.

Ordenada x (mm)	$M_{\phi} \cdot 10^{-2}$ (N)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	0,0050	0,0000	100
40	0,0689	0,0705	-2,32
80	0,1417	0,1434	-1,20
120	0,2168	0,2197	-1,34
160	0,2979	0,3022	-1,44
200	0,3888	0,3956	-1,75
240	0,5008	0,5087	-1,58
280	0,6585	0,6644	-0,90
320	0,9012	0,9019	-0,08
360	1,1292	1,1247	0,40
400	1,2415	1,2339	0,61
440	1,2744	1,2652	0,72

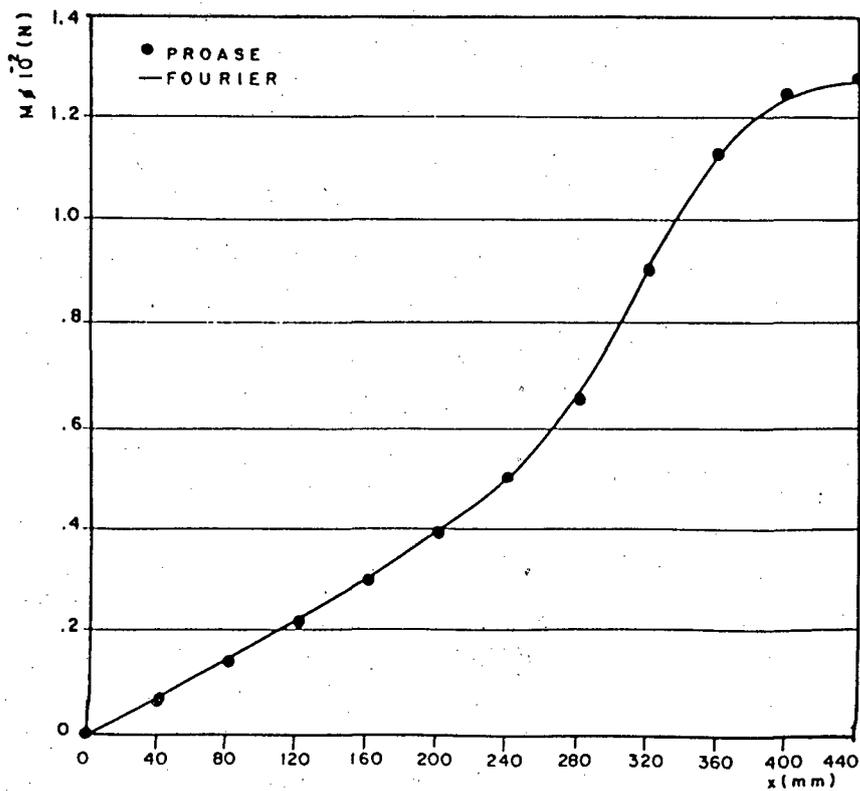


FIGURA 7.33 - Momento da direção ϕ ao longo do meridia
no zero.

Tabela 7.35 - Momento da direção ϕ ao longo do paralelo médio.

Ordenada x (mm)	$M_{\phi} \cdot 10^{-2}$ (N)		Dif. %
	PROASE	FOURIER	
0	12,7438	12,6524	0,72
15	5,0043	4,9510	1,07
30	-4,4352	-4,4805	-1,02
45	-5,4318	-5,5037	-1,32
60	-3,4235	-3,4713	-1,40
75	-1,0225	-1,0356	-1,28
90	0,6791	0,6816	-0,37
105	1,4059	1,4081	-0,16
120	1,3126	1,3170	-0,34
135	0,7393	0,7504	-1,50
150	0,0465	0,0554	-19,14
165	-0,4823	-0,4865	-0,87
180	-0,6769	-0,6893	-1,83

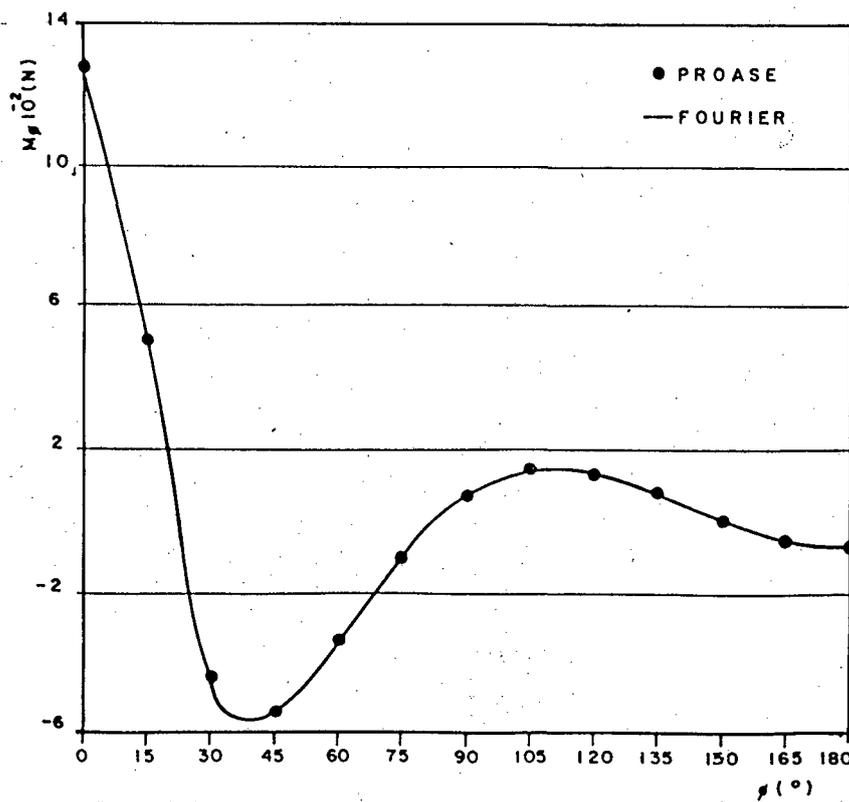


FIGURA 7.34 - Momento da direção ϕ ao longo do paralelo médio.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES

Os resultados para os deslocamentos radiais, obtidos a partir da solução proposta, foram muito bons para todos os modelos testados, como era de se esperar. Dos demais deslocamentos, bem como dos momentos e forças resultantes, não se esperava bom desempenho, já que estas grandezas são obtidas a partir de derivadas de ordem superior do deslocamento radial. Tal fato não ocorreu de maneira generalizada, tendo apenas, para um caso particular de carregamento, o momento M_{ϕ} divergido de forma sensível dos valores tomados como referência. Este fato está mostrado na tabela 7.11 e figura 7.07. Além deste caso de discrepância, ocorrido para um carregamento de pressão interna, a mesma variável apresenta problemas, em escala bem menor, para o caso de um anel de carga largo, como mostra a tabela 7.16 e figura 7.13. Nos demais casos analisados, onde a carga está distribuída em uma pequena região da superfície do cilindro, como no caso de anéis de carga finos ou de carga distribuída sobre pequenos retângulos, tal problema não ocorre. Este problema, seguramente, não é causado pela falta de convergência das séries, já que as mesmas convergem com vinte termos em cada direção, e aqui chegou-se a usar até cento e vinte termos em cada direção. Também não é causado pelo fenômeno de Gibbs, referência [3], pois o caso mais susceptível a este problema é o último analisado, o qual apresenta excelente concordância com os dados de referência.

A causa mais provável destas diferenças, pode ser originada pela forma com que as cargas são aplicadas no modelo de elemen

tos finitos, tomado como referência. No programa, as cargas distribuídas são concentradas e aplicadas em um nó, de forma a haver uma simulação da distribuição. Isto pode justificar o fato de que quanto menor a região de aplicação das cargas, melhor a concordância dos resultados, já que os erros devido a má representação do carregamento são acumulativos.

O método apresentado é de manuseio bastante fácil, pois evita a preocupação da idealização de modelos e malhas, como acontece com os métodos numéricos, quando aplicados para a solução do mesmo problema. Isto porque é específico para os casos avaliados, o que o torna bastante atraente para a solução de tais casos.

A contrapartida, em relação a precisão e a facilidade de manuseio do programa para os casos em que a solução é aplicável, reside exatamente no fato de que é um método somente válido para uma família de problemas, não sendo, portanto, universal como os métodos numéricos.

Com esta análise, pode-se afirmar que o método é bastante preciso para a análise de deslocamentos, forças e momentos resultantes em cascas cilíndricas finas, com a vinculação e carregamentos idênticos aos especificados anteriormente, podendo ser empregado para a solução de problemas que ocorrem na prática, como os comentados na introdução, com garantias de boa confiabilidade dos resultados.

O trabalho aqui apresentado, teve o objetivo de verificar o comportamento da solução proposta de forma crítica, e dependendo do desempenho, ser empregado como parte da solução do problema de intersecção de cascas cilíndricas finas. Desta forma sugere-se como continuação do trabalho, já que existe uma estrutura computacional, o desenvolvimento da formulação do problema de intersecção de

casca cilíndrica fina, de forma mais ampla do que a apresentada na referência [10].

Além desta proposta, sugere-se que sejam desenvolvidas soluções com séries duplas de Fourier, distintas das apresentadas aqui, para que se possa ter uma ampliação do elenco de problemas a serem abordados tanto em carregamentos e vinculação da casca.

BIBLIOGRAFIA

- |1| BIJLAARD, P.P. Stresses From Local Loadings in Cylindrical Pressure Vessels. Transaction of ASME 77, pag 805-816, 1955.
- |2| TIMOSHENKO, S.P., WOINOWSKI., KRIEGER, S. Theory of Plates and Shells. Mc Graw-Hill Book Company-Inc., 1950.
- |3| KREYSZIG, E. Matemática Superior. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1978.
- |4| PISKUNOV, N. Cálculo Diferencial e Integral. São Paulo. Edições Cardoso.
- |5| FLUGGE, W. Stresses in Shells. Third Printing. USA., Springer Verlag, 1966.
- |6| CHURCHIL, R.V. Séries de Fourier e Problemas de Valores de Contorno. Editora Guanabara Dois S.A., 1978.
- |7| ALVES, D.B. Teoria das Cascas. Florianópolis. Publicação Interna do CTC da UFSC., 1978.
- |8| ALVES, D.B. Teoria da Elasticidade. Florianópolis. Publicação Interna do CTC da UFSC., 1978.
- |9| ALVES, D.B. PROASE/Y75, Manual do Usuário. Florianópolis CTC da UFSC. 1975.
- |10| HANSBERRY, J.W., JONES, N. Elastic Stresses Due to Axial Loads on a Nozzle Which Intersects a Cylindrical Shell. Second International Conference on PRESSURE VESSEL TECHNOLOGY, San Antonio, Texas, USA, October 1-4, 1973.
- |11| GREEN, A.E., ZERNA, W., Theoretical Elasticity. Second Edition. Oxford University Press. 1968.

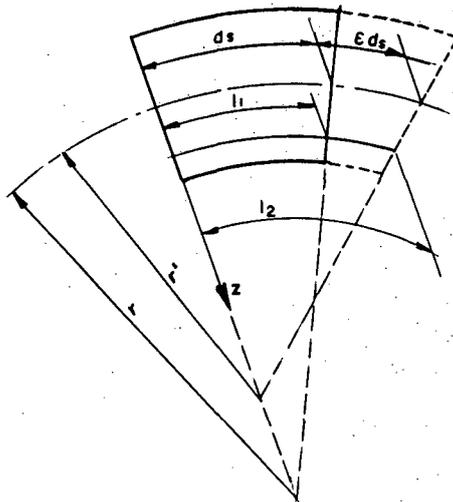


FIGURA A1.2 - Deformação de um arco.

$$\epsilon^* = \frac{l_2' - l_1}{l_1} \quad (\text{A1.01})$$

onde:

$$l_1 = dS(1 - z/r) \quad (\text{A1.02})$$

$$l_2 = dS(1 + \epsilon)(1 - z/r') \quad (\text{A1.03})$$

Substituindo-se em (A1.01) os valores de l_1 e l_2 , tem-se:

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon}{1 - z/r} - \frac{z}{1 - z/r} \left[\frac{1}{r' \frac{1}{(1 + \epsilon)}} - \frac{1}{r} \right] \quad (\text{A1.04})$$

Desenvolvendo o termo $1/(1 + \epsilon)$ numa série de potências, e considerando apenas os primeiros termos da série, a equação (A1.04) pode ser reescrita com uma forma mais simples, como segue:

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon}{1 - z/r} - \frac{z}{1 - z/r} \left[\frac{1}{(1 - \epsilon)r'} - \frac{1}{r} \right] \quad (\text{A1.05})$$

Substituindo-se na expressão (A1.05) ϵ^* por ϵ_x , ϵ por ϵ_1 , r por r_x e r' por r'_x tem-se que:

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_1}{1-z/r_x} - \frac{z}{1-z/r_x} \left[\frac{1}{(1-\epsilon_1)r'_x} - \frac{1}{r_x} \right] \quad (\text{A1.06})$$

Substituindo-se na expressão (A1.05) ϵ^* por ϵ_y , ϵ por ϵ_2 , r por r_y e r' por r'_y , tem-se que:

$$\epsilon_y = \frac{\epsilon_2}{1-z/r_y} - \frac{z}{1-z/r_y} \left[\frac{1}{(1-\epsilon_2)r'_y} - \frac{1}{r_y} \right] \quad (\text{A1.07})$$

onde r'_x e r'_y são os raios de curvatura da casca deformada.

Denominando-se a deformação cisalhante da superfície média de γ e a rotação da aresta BC em torno de x em relação a oz de χ_{xy} , tem-se que a deformação específica cisalhante da lâmina 1, 2, 3, 4, a uma distância z da superfície média, será dada por:

$$\gamma_{xy} = \gamma - 2z\chi_{xy} \quad (\text{A1.08})$$

Para cascas finas as relações z/r_x e z/r_y e a influência das deformações específicas na variação de curvatura podem ser desprezadas em relação a unidade, logo as relações (A1.06) e (A1.07) podem ser simplificadas para:

$$\epsilon_x = \hat{\epsilon}_1 - z \left[\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right] = \epsilon_1 - z\chi_x \quad (\text{A1.09})$$

$$\epsilon_y = \epsilon_2 - z \left[\frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right] = \epsilon_2 - z\chi_y \quad (\text{A1.10})$$

onde χ_x e χ_y são as variações de curvatura nas direções x e y, sendo que a deformação cisalhante, equação (A1.08) não sofre variação com

esta simplificação.

As deformações específicas aqui mostradas, equações (A1.08), (A1.09) e (A1.10), representam um estado plano de deformação, ou seja, $\epsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$.

APÊNDICE A2

ESFORÇOS RESULTANTES EM CASCAS FINAS

Para o elemento de volume abaixo, cortado de uma casca segundo as direções principais de curvatura, os elementos de

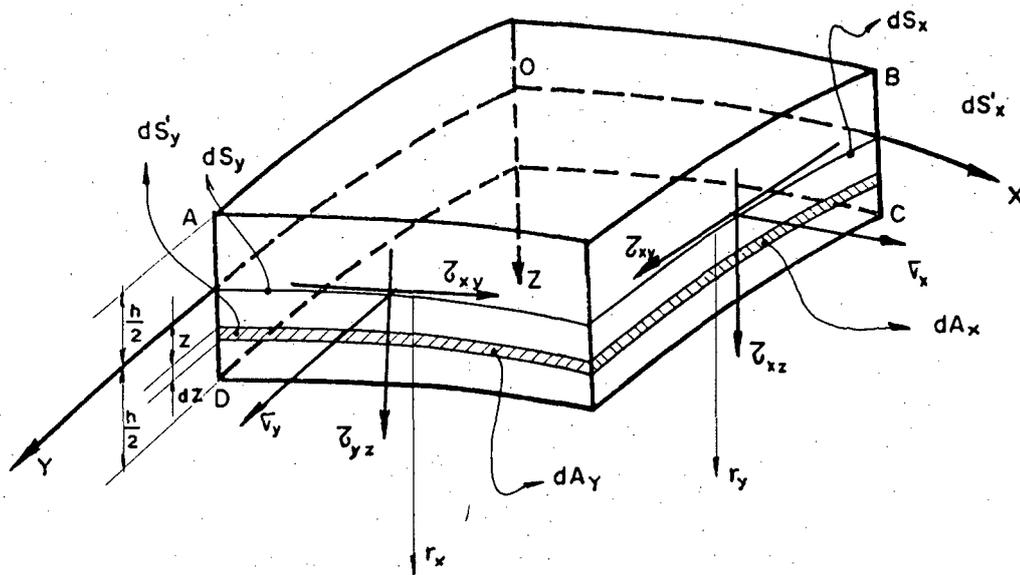


FIGURA A2.1 - Elemento com tensões.

área dA_y e dA_x são dados por:

$$dA_x = dz \, dS'_x$$

(A2.01)

$$dA_y = dz \, dS'_y$$

onde

$$dS'_x = (r_y - z) \frac{dS_x}{r_y}$$

(A2.02)

$$dS'_y = (r_x - z) \frac{dS_y}{r_x}$$

As forças resultantes, provenientes das tensões σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} que atuam nas faces A_x e A_y , são mostrados a seguir:

$$\begin{aligned}
 N_x \, dS_x &= \int_{A_x} \sigma_x \, dA_x \\
 N_y \, dS_y &= \int_{A_y} \sigma_y \, dA_y \\
 N_{xy} \, dS_x &= \int_{A_x} \tau_{xy} \, dA_x \\
 N_{yx} \, dS_y &= \int_{A_y} \tau_{xy} \, dA_y \\
 Q_x \, dS_x &= \int_{A_x} \tau_{xz} \, dA_x \\
 Q_y \, dS_y &= \int_{A_y} \tau_{yz} \, dA_y
 \end{aligned}
 \tag{A2.03}$$

e os momentos:

$$\begin{aligned}
 M_x \, dS_x &= \int_{A_x} \sigma_x \, z \, dA_x \\
 M_y \, dS_y &= \int_{A_y} \sigma_y \, z \, dA_y \\
 M_{xy} \, dS_x &= \int_{A_x} \tau_{xy} \, z \, dA_x \\
 M_{yx} \, dS_y &= \int_{A_y} \tau_{xy} \, z \, dA_y
 \end{aligned}
 \tag{A2.04}$$

Substituindo nas equações (A2.03) e (A2.04) as equações (A2.01) e (A2.02), chega-se a:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$N_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

(A2.05)

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

Estes esforços estão representados esquematicamente nas figuras (A2.03) e (A2.04), que seguem:

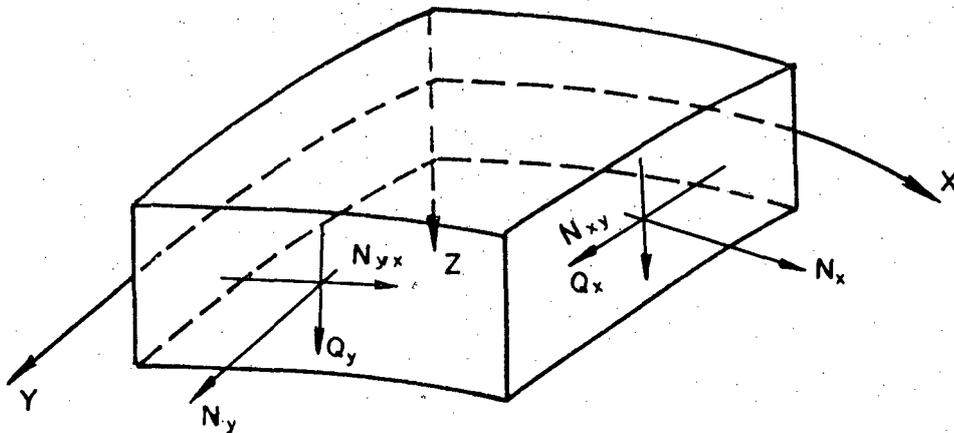


FIGURA A2.03 - Elemento com forças resultantes.

Através da lei de Hooke para materiais isotrópicos, e assumindo os estados de tensão e deformação planos ($\sigma_z = \epsilon_z = 0$), tem-se que as tensões são dadas por:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_x + \nu \epsilon_y]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_y + \nu\epsilon_x] \quad (\text{A2.06})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

que junto com as expressões (A1.08), (A1.09) e (A1.10) fornecem:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_1 + \nu\epsilon_2 - z(\chi_x + \nu\chi_y)] \quad (\text{A2.07})$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_2 + \nu\epsilon_1 - z(\chi_y + \nu\chi_x)] \quad (\text{A2.08})$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\gamma - 2z\chi_{xy}) \quad (\text{A2.09})$$

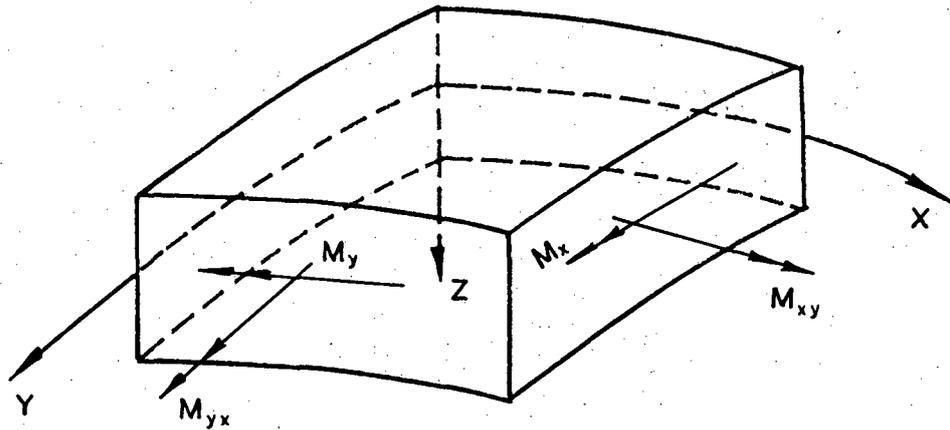


FIGURA A2.04 - Elemento com momentos resultantes.

Substituindo (A2.07), (A2.08) e (A2.09) em (A2.05) (desprezando z/r_x e z/r_y), e após a integração tem-se:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\epsilon_1 + \nu\epsilon_2]$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1]$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \frac{\gamma_{xy} Eh}{2(1+\nu)}$$

$$M_x = -D (\chi_x + \nu\chi_y)$$

$$M_y = -D (\chi_y + \nu\chi_x) \quad (\text{A2.10})$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D (1-\nu)\chi_{xy}$$

onde D é a rigidez a flexão da casca, dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{A2.11})$$

APÊNDICE A3

PARTICULARIZAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES, PARA CASCAS
CILÍNDRICAS, EM FUNÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

Tendo-se assumido, no Apêndice A1, que os segmentos retos e normais à superfície média permanecem retos e normais após o carregamento, as deformações específicas para a superfície de referência (ϵ_1 , ϵ_2 e γ), bem como as variações de curvatura (χ_x e χ_y) e o giro (χ_{xy}), podem ser expressos em função dos deslocamentos u , v e w das direções x , y e z , respectivamente, (figura A3.01).

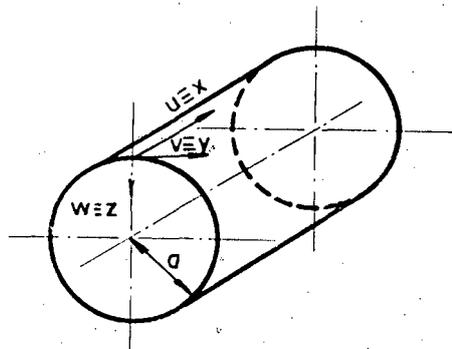


FIGURA A3.01 - Cilindro.

A deformação específica na direção x pode ser escrita como:

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (A3.01)$$

Com o auxílio da figura A3.02, que representa um elemento infinitesimal do meridiano, verifica-se que a deformação ϵ_2 não é resultado apenas do deslocamento v , mas sofre também um acréscimo devido ao deslocamento radial w ,

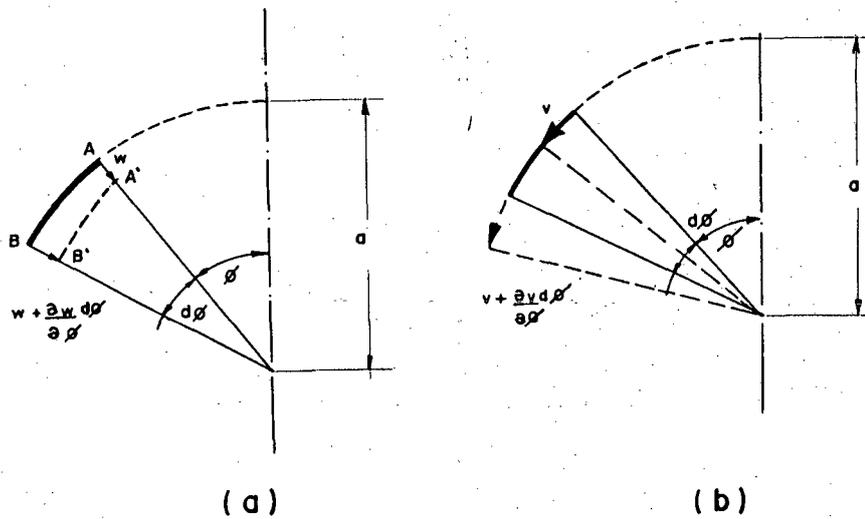


FIGURA A3.02 - Linha do paralelo.

logo:

$$\epsilon_2 = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} - w \right) \quad (\text{A3.02})$$

desde que sejam desprezados os termos de ordem superior.

A deformação cisalhante da superfície média pode ser escrita como:

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (\text{A3.03})$$

onde o primeiro termo na expressão anterior representa o giro do meridiano em torno do eixo z, e o segundo, o giro do elemento AB em torno de z.

Da geometria diferencial sabe-se que a curvatura de um segmento de linha é dada por:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{dS} \quad (\text{A3.04})$$

onde estas grandezas estão representadas na figura (A3.03).

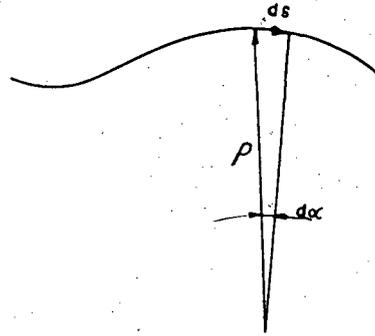
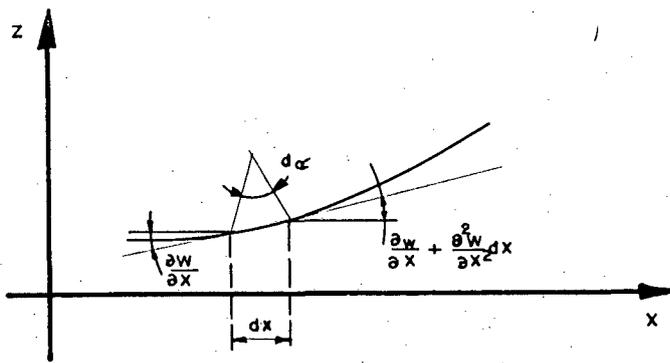
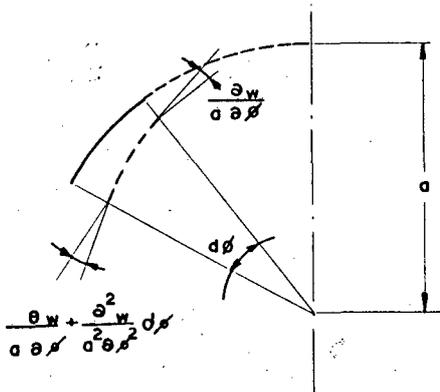


FIGURA A3.03 - Linha de uma direção principal.

Com os deslocamentos dos meridianos e dos paralelos mostrados na figura (A3.04 - a e b),



a) deslocaimentos do meridiano



b) deslocaimentos do paralelo

FIGURA A3.04 - Deslocamentos

obtem-se as expressões seguintes:

$$k_1 = \frac{1}{r'_x} \equiv \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - \frac{\partial w}{\partial x} \right] \frac{1}{dx} \quad (\text{A3.05})$$

$$k_2 = \frac{1}{r'_y} \equiv \left\{ \left(\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} d\phi \right) - \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} + d\phi \right\} / (a-w) d\phi \quad (\text{A3.05})$$

Simplificando-se, vem:

$$k_1 = \frac{1}{r'_x} \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{A3.06})$$

$$k_2 = \frac{1}{r'_y} \equiv \frac{\frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + 1}{(a-w)} \quad (\text{A3.07})$$

As variações de curvatura ficam sendo então:

$$\chi_x = \left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{\infty} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{A3.08})$$

$$\chi_y = \left(\frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right) = \frac{\frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + 1}{(a-w)} - \frac{1}{a} \quad (\text{A3.09})$$

Desenvolvendo-se o termo $(a-w)$ da equação (A3.09) em série de potências, obtém-se:

$$\chi_y = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + w \right) \quad (\text{A3.10a})$$

Esta equação pode ser mais simplificada, fazendo-se $\epsilon_1 = 0$, na equação (A3.02), de onde tira-se que:

$$w = \frac{\partial v}{\partial \phi} \quad (\text{A3.10b})$$

a qual substituída na expressão (A3.10a), resulta em:

$$\chi_y = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) \quad (\text{A3.10b})$$

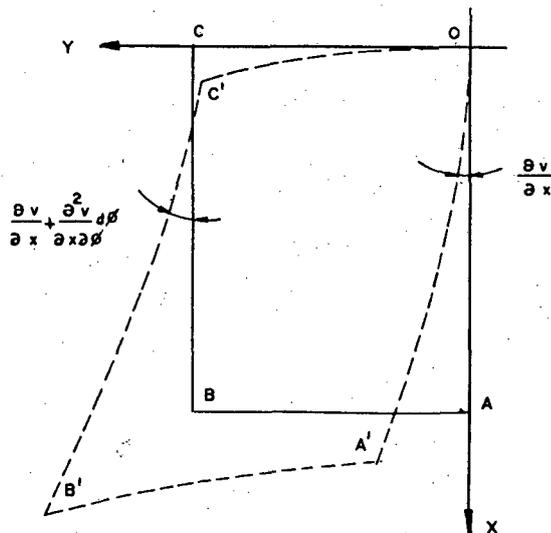
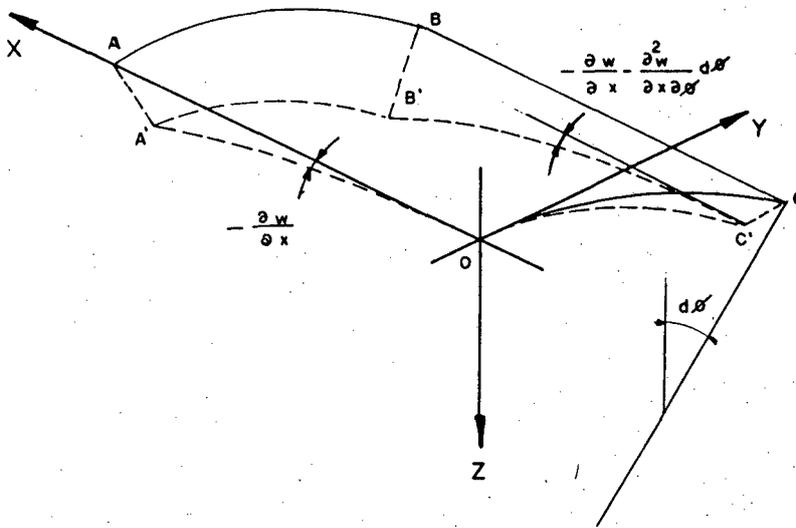


FIGURA A3.05 - Giro das faces do elemento.

Considerando o elemento do paralelo OC (figura A3.05) o mesmo gira a sua normal em relação a y de

$$\theta_o = - \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{em O} \quad e \quad (A3.11)$$

$$\theta_c = - \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial x} d\phi \quad \text{em C} \quad , \quad (A3.12)$$

logo, o giro total entre as duas normais será dado por:

$$\theta_{oc} = - \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial x} d \quad (A3.13)$$

Como a superfície de referência é cilíndrica, o giro da geratriz CB em torno de z faz com que a normal do ponto C possua uma rotação em torno de y igual a:

$$\theta'_c = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} d\phi \right) \cdot \text{sen } d\phi \quad (A3.14)$$

Como $d\phi$ é infinitesimal, ao desprezar-se o termo de ordem superior, obtêm-se:

$$\theta'_c = - \frac{\partial v}{\partial x} d\phi \quad (A3.15)$$

com isto, o ângulo de giro será:

$$-\chi_{xy} a d\phi = - \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial x} d\phi - \frac{\partial v}{\partial x} d\phi \quad (A3.16)$$

e o giro

$$\chi_{xy} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (A3.17)$$

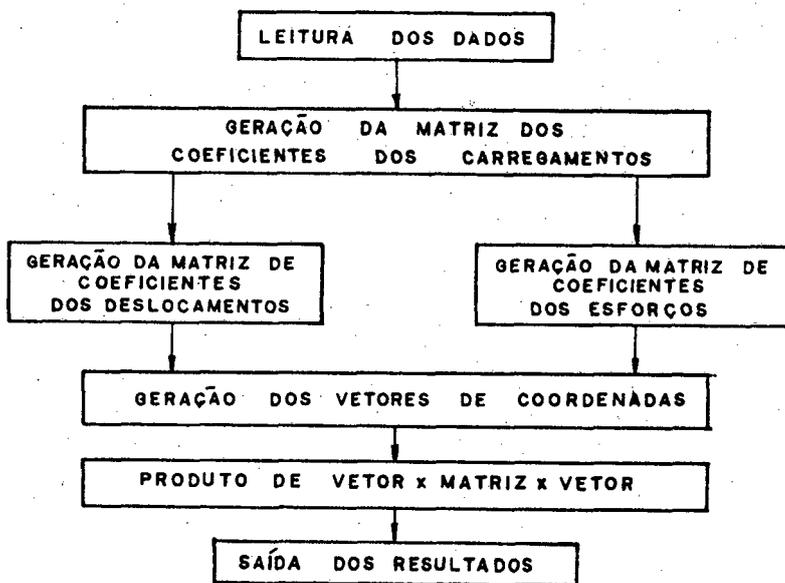
APÊNDICE A4

PROGRAMA FOURIER

A.4.1 - INTRODUÇÃO

Neste Apêndice é apresentado um diagrama do programa FOURIER, utilizado para obter os resultados apresentados, e a forma de entrada de dados.

A.4.2 - DIAGRAMA DO PROGRAMA FOURIER



A.4.3 - DESCRIÇÃO E FORMATOS DA ENTRADA

Os seguintes cartões indicam a ordem e a maneira de entrada dos dados:

a) Geometria do cilindro.

Lista: (raio do cilindro, comprimento do cilindro, espessura de parede).

Formato: (3(5x,E15.4))

b) Propriedades Físicas do material.

Lista: (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson)

Formato: (2(5x,E15.4))

c) Pontos de interesse.

Lista: (número de meridianos (LFI), número de paralelos (LX))

Formato: (2(5x,I4))

Observação: estes dois parâmetros geram um arquivo do tamanho (LFIxLX).

d) Coordenadas dos pontos de interesse.

Lista: (coordenadas X(II),II=1,LX)

Formato: (7(2x,E9.2))

Lista: (coordenadas ϕ (JJ),JJ=1,LFI)

Formato: (7(2x,E9.2))

e) Número de termos das séries.

Lista: (número máximo de termos N (NAX), número máximo de termos M(MAX))

Formato: (2(6x,I4))

f) Tipo do carregamento.

Lista: (tipo do carregamento (Karg))

Formato: (29x,I1)

Os tipos de carregamentos (Karg) que o programa possui estão listados a seguir:

KARG	TIPO DO CARREGAMENTO
0	CARGA CONCENTRADA
1	LINHA DE CARGA NA DIREÇÃO ϕ
2	CARGA RETANGULAR
3	MOMENTO EQUIVALENTE
4	ANEL DE CARGA

g) Forma do carregamento.

Lista: (Magnitude máxima do carregamento (CAR), pressão interna (Q), comprimento do carregamento em ϕ (ϕ_1), comprimento do carregamento em x (C1), posição do ponto médio do carregamento na direção x (B), número de carregamentos idênticos na direção ϕ (r))

Formato: (4E20,8)

Abaixo segue uma figura explicativa das grandezas comentadas acima.

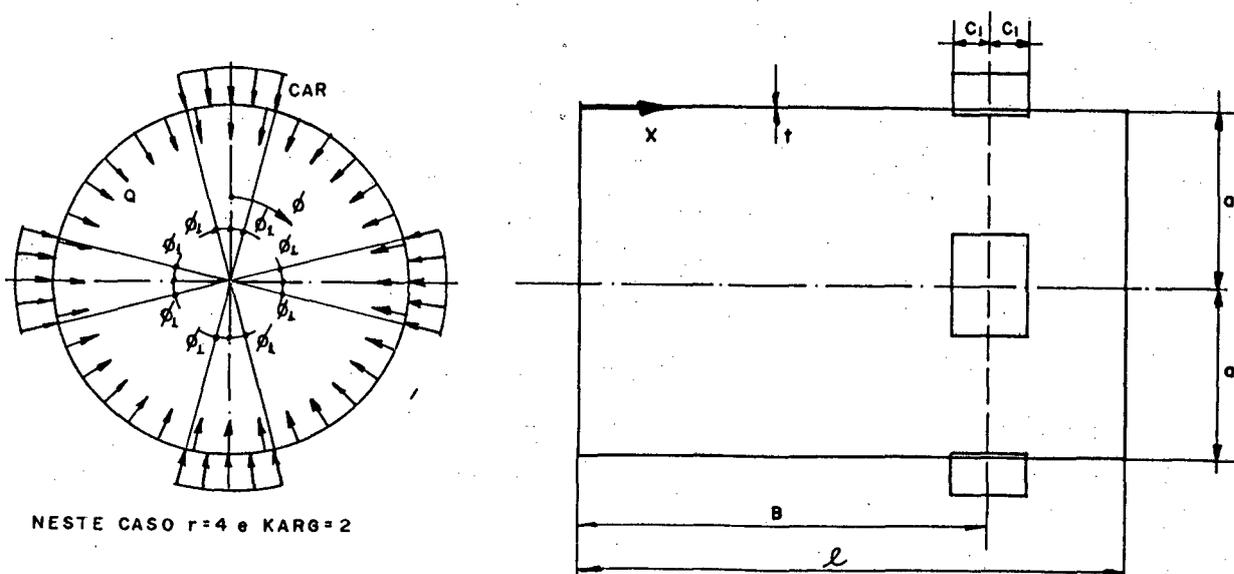


FIGURA A4.01 - Cilindro com algumas grandezas.

h) Novas baterias de carregamentos.

Lista: (NCARREG)

Formato: (29x,I1)

Se não existir novo carregamento para a mesma geometria, NCARREG é branco. Se houverem mais carregamentos a serem processados, NCARREG é um número inteiro de 1 a 9, com isto o programador deve repetir os cartões a partir do item (e). Este procedimento deve ser feito até esgotar todos os carregamentos para esta geometria.

Com isto, tem-se que o programa assume que não existem mais carregamentos a serem processados, para esta geometria, se o cartão referente a este item for branco.

i) Cilindro com nova geometria.

Lista: (nova geometria (NGEOM))

Formato: (29x,I1)

Se não houver nova geometria a ser processada NGEOM deve ser branco. Se houver nova geometria, NGEOM deve ser inteiro de 1 a 9, e o programador deverá repetir os cartões a partir do item (a).

Observação: O final da leitura é indicado por dois cartões em branco.