UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

ANÁLISE DE TENSÕES EM CASCAS ORTOTRÓPICAS DE REVOLUÇÃO, INCLUINDO EFEITOS TÉRMICOS, ATRAVÉS DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA.

RAUL GUENTHER

SETEMBRO - 1979

ANÁLISE DE TENSÕES EM CASCAS ORTOTRÓPICAS DE REVOLUÇÃO,
~~INCLUINDO EFEITOS TÉRMICOS, ATRAVÉS DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS~~

RAUL GUENTHER

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO MECÂNICA APLICADA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO.

Prof. Arno Blass, Ph.D.
Integrador

Prof. Domingos Boechat Alves, Ph.D.
Orientador

APRESENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS PROFESSORES:

Prof. Domingos Boechat Alves, Ph.D.

Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, Ph.D.

Prof. Arno Blass, Ph.D.

Prof. Edison da Rosa, M.Sc.

À Rosane e Meus Pais

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Domingos Boechat Alves, pela orientação;

- Aos membros do Grupo de Análise de Tensões (GRANTE), pelas sugestões;

- Ao companheiro Antônio Bento Filho, pelo constante incentivo;

- A todos que de qualquer forma contribuiram com o desenvolvimento deste trabalho.

AGRADECIMENTO

Este trabalho foi realizado com o suporte financeiro da Comissão Nacional de Energia Nuclear, do Conselho Nacional de Pesquisas e da FINEP com recursos da FNDCT em cumprimento do Convênio firmado entre a CNEN e a Fundação do Ensino da Engenharia em Santa Catarina.

ÍNDICE

APÊNDICES

RESUMO

Em diversas situações práticas, tais como em reservatórios e vasos de contenção, cascas de revolução podem estar submetidas a distribuições de temperatura e carregamentos estáticos das mais diferentes formas.

No presente trabalho desenvolve-se um modelo analítico-numérico para a determinação de deslocamentos, tensões resultantes e deformações, objetivando possibilitar a análise do comportamento de cascas nestas situações.

O desenvolvimento analítico é realizado, utilizando-se a primeira aproximação de Love, e a formulação numérica é feita através de diferenças finitas, sendo os resultados obtidos por meio de um programa digital.

ABSTRACT

Rotationally symmetric shells can be subjected in practical applications to a variety of temperature and static loading distributions.

An analytical-numerical method is here developed for the determination of displacements and resulting stresses and strains, in order to provide the feasibility of an analysis of the behavior of shells under such conditions.

An analytical development is presented, using Love's first approximation, and a numerical formulation, using the method of finite differences is obtained. Results for a sample of test cases are obtained by means of a digital program.

I - INTRODUÇÃO

Uma casca fina pode ser considerada como um corpo limitado por duas superfícies curvas, espaçadas por uma pequena distância [13]. Desta forma pode ser imaginada como a materialização de uma superfície curva, assim como uma viga e uma placa plana o são para uma linha reta, e para uma superfície plana, respectivamente.

Uma casca tem três características fundamentais: sua superfície de referência, espessura e contornos. Destas, a mais importante é, sem dúvida, a superfície de referência, por definir a forma da casca. Além disso, como a casca pode ser imaginada como sua materialização, pode-se estudar seu comportamento a partir do da superfície de referência.

Em cascas de revolução, a superfície de referência é uma superfície de revolução, gerada pela rotação de uma curva plana (meridiano) em torno de um eixo, chamado eixo de revolução.

A espessura da casca é a distância entre as duas superfícies curvas, medida ao longo da normal à superfície de referên

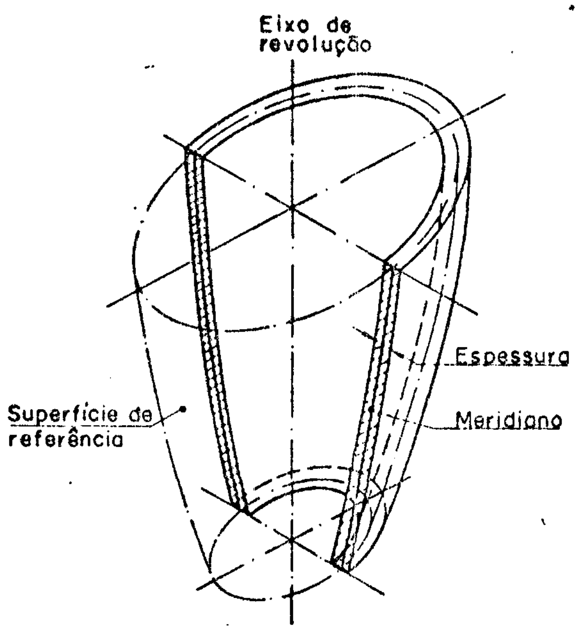


Figura 1.1

cia.

Em cascas de revolução, os contornos têm sempre a forma de coroa circular.

Devido à forma da casca, um ponto material sobre ela é comumente localizado por um sistema de coordenadas curvilíneo (Apêndice A1).

Em diversas situações práticas, tais como em reservatórios e vasos de contenção, uma casca de revolução pode estar submetida a distribuições de temperatura e/ou carregamentos estáticos das mais diferentes formas. O presente trabalho tem por objetivo a determinação da configuração de deslocamentos e tensões nestes casos.

Quando a forma geométrica da casca é simples (espessura constante, por exemplo), seu material é isotrópico, e a distribuição de temperaturas e/ou cargas à qual ela se encontra submetida também é relativamente simples, pode-se determinar a configuração de tensões e deslocamentos analiticamente. As referências [10,13,15,16], apresentam soluções analíticas de vários problemas, principalmente para cascas sob carregamentos de forças, momentos e distribuições de pressão.

À medida que a forma geométrica, o material e a distribuição de temperaturas e/ou cargas se tornam mais complexas, e o modelo mais próximo à realidade, sua solução só pode ser determinada numericamente. A referência [13] apresenta uma compilação dos vários métodos numéricos utilizados na solução de cascas, bem como relaciona os principais trabalhos publicados no assunto, até a data de sua edição.

No presente trabalho, considera-se que a distribuição de temperaturas e/ou cargas seja qualquer, ao longo do meridiano e da direção circunferencial, com a ressalva de que nesta, ela deve ser suficientemente "suave" para que possa ser expandida em série de Fourier. O material é considerado elasto-termicamente ortotrópico, podendo suas propriedades serem variáveis ao longo do meridiano. Como a casca é considerada de revolução, na direção circunferencial as propriedades do material devem, no entanto, ser constantes, devendo o módulo de elasticidade e o coeficiente de dilatação térmica ser tomados para o valor da temperatura média.

As propriedades geométricas da casca são definidas pela forma do meridiano, dada por uma função que fornece a distância do eixo de revolução ao meridiano "r" (figura 1.2), ao longo do comprimento do meridiano "s":

$$r = r(s) \qquad (1.1)$$

e pela espessura também variável do longo do meridiano.

A função que define a forma do meridiano (1.1), pode ainda ter derivada descontínua (figura 1.2), o que, conforme nomenclatura adotada a partir deste ponto, caracteriza o problema das descontinuidades.

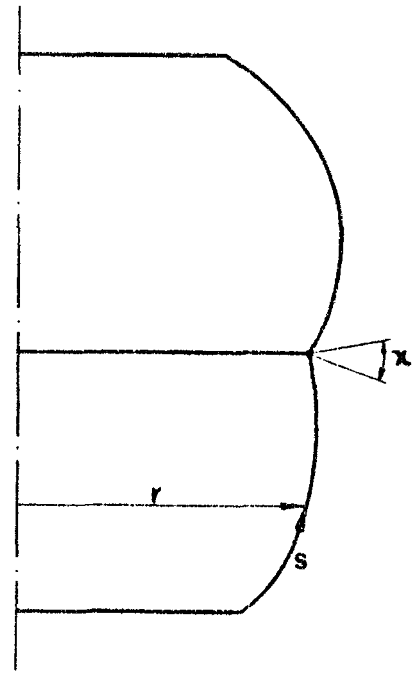


Figura 1.2

No capítulo dois é apresentada a formulação analítica do problema, baseada na teoria de cascas conhecida como primeira aproximação de Love.

No terceiro capítulo é mostrado o processo numérico utilizado, compreendendo a obtenção das propriedades geométricas do meridiano, a formulação numérica através de diferenças finitas e os algoritmos utilizados para a solução do sistema de equações.

Como o sistema de equações na análise de problemas com e sem descontinuidades é diferente, os algoritmos para sua solução também o são, e devido a este fato, desenvolveram-se dois programas digitais (CORTER - sem descontinuidades - e CORTERDE - com descontinuidades) para executá-los. Desta forma pôde-se ampliar o conceito de descontinuidade, passando ela a ser caracterizada por uma mudança brusca de espaçamento pivotal, de espessura e de propriedades do material, além da descontinuidade na derivada mencionada anteriormente.

Finalizando, apresenta-se no capítulo quatro os resultados, comparações e conclusões de alguns problemas, resolvidos utilizando os programas digitais.

II - FORMULAÇÃO ANALÍTICA

2.1 - Introdução

Neste capítulo será desenvolvida a formulação analítica do problema, a partir de um exame das hipóteses básicas da teoria de cascas utilizada.

Com base nestas hipóteses, obter-se-ão as relações deformações-deslocamentos e, definindo tensões e momentos resultantes, as relações tensões resultantes-deformações.

Utilizando as equações de equilíbrio para um elemento genérico de casca, chegar-se-á às equações diferenciais parciais fundamentais que regem o problema. Adimensionalizando e expandindo as variáveis em série de Fourier, obter-se-á um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Completando a formulação, analisar-se-ão as condições de contorno e o problema das descontinuidades.

2.2 - Hipóteses básicas

O desenvolvimento analítico apresentado neste capítulo baseia-se na teoria de cascas, normalmente referenciada como primeira aproximação de Love, fundamentada nas seguintes hipóteses:

1. A casca é fina;

2. Os deslocamentos que ocorrem são pequenos;

3. A tensão normal à superfície de referência (σ_z) é desprezível;

4. Segmentos de reta normais à superfície de referência antes da deformação, permanecem normais à superfície de referência deformada, não mudando de comprimento durante a deformação.

A consideração de que a casca é fina estabelece praticamente toda a teoria, já que a terceira e a quarta hipóteses são feitas a partir dela. Diante da dificuldade de estabelecer precisamente uma definição de casca fina, adota-se comumente o termo para cascas em que a relação entre a espessura e o menor raio de curvatura pode ser desprezada em relação à unidade.

A hipótese de que os deslocamentos são pequenos, permite supor que a configuração da superfície de referência após a deformação, seja aproximadamente igual àquela antes da deformação, permitindo desta forma que se desenvolva todas as equações referenciadas à superfície de referência antes da deformação. Além disso, esta hipótese é necessária para que possam ser utilizadas relações deformações-deslocamentos lineares, o que em conjunto com a lei de Hooke faz com que a teoria resultante seja elástica-linear. Para a discussão dos resultados das outras hipóteses, considere-se a lei de Hooke para um material homogêneo, elástico ortotrópico:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{s\theta} \\ \gamma_{sz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_s} & -\frac{\nu_{s\theta}}{E_\theta} & -\frac{\nu_{sz}}{E_z} & & & \\ -\frac{\nu_{\theta s}}{E_s} & \frac{1}{E_\theta} & -\frac{\nu_{\theta z}}{E_z} & & & \\ -\frac{\nu_{zs}}{E_s} & -\frac{\nu_{z\theta}}{E_\theta} & \frac{1}{E_z} & & & \\ & & & \frac{1}{G_{s\theta}} & & \\ & & & & \frac{1}{G_{sz}} & \\ & & & & & \frac{1}{G_{\theta z}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{s\theta} \\ \tau_{sz} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_{ts} \\ \alpha_{t\theta} \\ \alpha_{tz} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} T \qquad (2.1)$$

onde σ_s, σ_Θ, σ_z são as tensões normais nas direções (s,Θ,z), ε_s, ε_Θ, ε_z são as deformações correspondentes, $\gamma_{s\Theta}$, γ_{sz}, $\gamma_{\Theta z}$ e $\tau_{s\Theta}$, τ_{sz}, $\tau_{\Theta z}$ são, respectivamente, as deformações e tensões cisalhantes, T é a temperatura no ponto(s,Θ,z),e α_{ts}, $\alpha_{t\Theta}$, α_{tz} são os coeficientes de expansão térmica linear , nas direções (s,Θ,z). Finalmente E_s, E_Θ, E_z, $G_{s\Theta}$, G_{sz}, $G_{\Theta z}$ e $\nu_{s\Theta}$, $\nu_{\Theta s}$, ν_{sz}, ν_{zs}, $\nu_{\Theta z}$, $\nu_{z\Theta}$ são as constantes elásticas (módulos de elasticidade, módulos de elasticidade transversais e coeficientes de Poisson) ao longo das três coordenadas, relacionadas entre si da seguinte ma neira:

$$\frac{\nu_{sz}}{E_z} = \frac{\nu_{zs}}{E_s} \; ; \qquad \frac{\nu_{\Theta z}}{E_z} = \frac{\nu_{z\Theta}}{E_\Theta} \; ; \qquad \frac{\nu_{s\Theta}}{E_\Theta} = \frac{\nu_{\Theta s}}{E_s} \tag{2.2}$$

A terceira das hipóteses mencionadas anteriormente pode ser expressa como

$$\sigma_z \cong 0 \tag{2.3}$$

sendo razoável para cascas finas, exceto para regiões próximas a cargas concentradas.

A quarta hipótese, da preservação da normal, implica em

$$\varepsilon_z = \gamma_{sz} = \gamma_{\Theta z} = 0 \tag{2.4}$$

Desta forma, a lei de Hooke (2.1) fica sendo

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\Theta \\ \gamma_{s\Theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_s} & -\frac{\nu_{s\Theta}}{E_\Theta} & 0 \\ -\frac{\nu_{\Theta s}}{E_s} & \frac{1}{E_\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{s\Theta}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\Theta \\ \tau_{s\Theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_{ts} \\ \alpha_{t\Theta} \\ 0 \end{Bmatrix} T \tag{2.5}$$

2.3 - Relações deformações-deslocamentos

No apêndice A2, são desenvolvidas relações deformações-deslocamentos para cascas cujas linhas de coordenadas são linhas de curvatura principais, nas quais é adotada a primeira aproximação de Love, a partir das relações deformações-deslocamentos estabelecidas na teoria da elasticidade.

Utilizando as equações (A1.16) e (A1.17), pode-se particularizar as equações (A2.5) e (A2.8) para cascas de revolução, lembrando que, conforme o apêndice A1, as linhas de coordenadas são (s,Θ,z):

$$\varepsilon_s^o = u' + w/r_1 \qquad (2.6a)$$

$$\varepsilon_\Theta^o = \frac{1}{r}\,(r'u + \dot{v} - r_1 r'' w) \qquad (2.6b)$$

$$\gamma_{s\Theta}^o = \frac{1}{r}\,\dot{u} - \frac{r'}{r}\,v + v' \qquad (2.6c)$$

$$\phi_s = \frac{1}{r_1}\,u - w' \qquad (2.6d)$$

$$\phi_\Theta = -\,\frac{r_1\, r''}{r}\,v - \frac{1}{r}\,\dot{w} \qquad (2.6e)$$

$$k_s = -\,\frac{r_1'}{r_1^2}\,u + \frac{1}{r_1}\,u' - w'' \qquad (2.6f)$$

$$k_\Theta = \frac{r'}{r\,r_1}\,u - \frac{r_1\, r''}{r^2}\,\dot{v} - \frac{1}{r^2}\,\ddot{w} - \frac{r'}{r}\,w' \qquad (2.6g)$$

$$k_{s\Theta} = \frac{1}{r\,r_1}\,\dot{u} + \left(2\,\frac{r_1 r' r''}{r^2} - \frac{(r_1 r'')'}{r}\right)v - \frac{r_1 r''}{r}\,v' + 2\,\frac{r'}{r^2}\,\dot{w} - 2\,\frac{1}{r}\,\dot{w}' \qquad \ldots(2.6h)$$

onde se utilizou a simbologia $\partial/\partial s(\;) = (\;)'$ e $\partial/\partial\Theta(\;) = (\dot{\;})$.

2.4 - Tensões e momentos resultantes

A hipótese da preservação da normal implica numa distribuição linear das deformações ao longo da espessura da casca, (Apêndice A2). Desta forma, pela lei de Hooke, a distribuição de tensões ao longo da espessura de cascas finas também é linear. Torna-se conveniente então, integrar as distribuições das tensões ao longo da espessura, obtendo as tensões e momentos resultantes, já que assim elimina-se a variável z, e o problema passa a ser bi-dimensional.

No apêndice A3, mostra-se o procedimento para a obtenção das tensões e momentos resultantes por unidade de comprimento, ~~considerando um sistema de coordenadas ortogonal (x,y,z).~~

Para cascas de revolução com um sistema de coordenadas (s,Θ,z) os resultados obtidos nas equações (A3.6) ficam sendo:

$$N_s = \int \sigma_s \, dz \tag{2.7a}$$

$$N_\Theta = \int \sigma_\Theta \, dz \tag{2.7b}$$

$$N_{s\Theta} = N_{\Theta s} = \int \tau_{s\Theta} \, dz \tag{2.7c}$$

$$Q_s = \int \tau_{sz} \, dz \tag{2.7d}$$

$$Q_\Theta = \int \tau_{\Theta z} \, dz \tag{2.7e}$$

$$M_s = \int \sigma_s \, z \, dz \tag{2.7f}$$

$$M_\Theta = \int \sigma_\Theta \, z \, dz \tag{2.7g}$$

$$M_{s\Theta} = M_{\Theta s} = \int \tau_{s\Theta} \, z \, dz \tag{2.7h}$$

com as direções e sentidos das tensões e momentos resultantes indicados na figura 2.1.

2.5 - Relações tensões resultantes-deformações

As relações tensões resultantes-deformações são obtidas pela substituição das relações tensões-deformações nas equações (2.7), que definem as tensões resultantes.

Resolvendo o sistema (2.5), chega-se a:

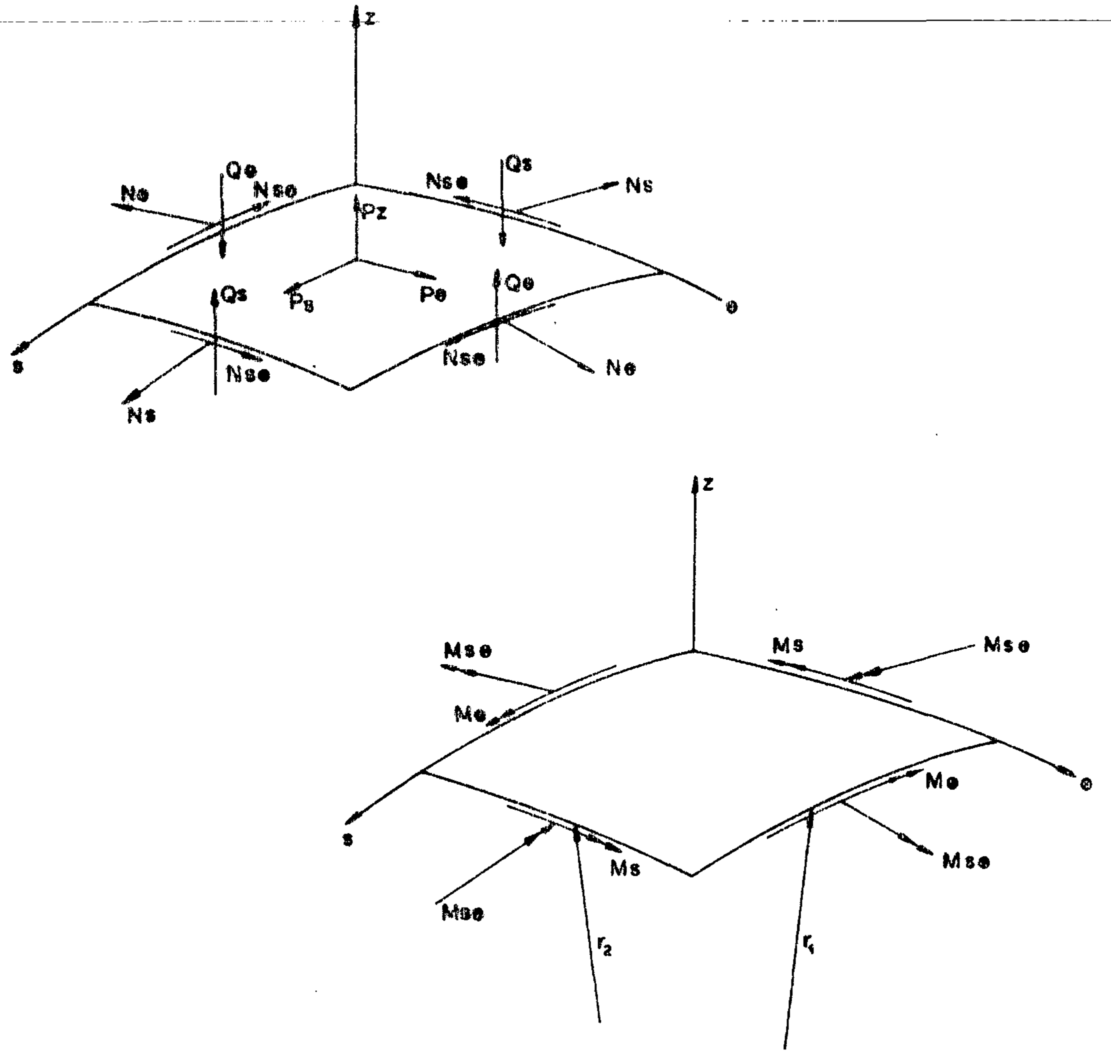


Fig. 2.1 - Tensões resultantes em um elemento genérico da casca.

$$\bar{\sigma} = H\,\bar{\varepsilon} - B\,T \tag{2.8}$$

onde $\bar{\sigma} = \{\sigma_s,\ \sigma_\Theta,\ \tau_{s\Theta}\}^t$; $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_s,\ \varepsilon_\Theta,\ \gamma_{s\Theta}\}^t$

$$B = \begin{Bmatrix} E_s^* \alpha_{ts} + \nu_{\Theta s} E_\Theta^* \alpha_{t\Theta} \\ E_\Theta^* \alpha_{t\Theta} + \nu_{s\Theta} E_s^* \alpha_{ts} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} E_s^* & \nu_{\Theta s} E_\Theta^* & 0 \\ \nu_{s\Theta} E_s^* & E_\Theta^* & 0 \\ 0 & 0 & G_{s\Theta} \end{bmatrix}$$

com

$$E_s^* = \frac{E_s}{(1 - \nu_{s\Theta}\,\nu_{\Theta s})} \qquad \text{e} \qquad E_\Theta^* = \frac{E_\Theta}{(1 - \nu_{s\Theta}\,\nu_{\Theta s})}$$

Como a distribuição das tensões é linear ao longo da espessura da casca, utilizando as relações (A2.7), pode-se escrever:

$$\bar{\sigma} = H\,\bar{\varepsilon}^{o} + z\,H\,\bar{K} - B\,T \tag{2.9}$$

onde $\bar{\varepsilon}^{o} = \{\varepsilon_s^{o},\ \varepsilon_\Theta^{o},\ \varepsilon_{s\Theta}^{o}\}^t$, $\quad \bar{K} = \{k_s,\ k_\Theta,\ k_{s\Theta}\}^t$

Substituindo as linhas de (2.9) nas equações (2.7), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\Theta \\ N_{s\Theta} \\ M_s \\ M_\Theta \\ M_{s\Theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 & R_{14} & R_{15} & 0 \\ R_{12} & R_{22} & 0 & R_{24} & R_{25} & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} & 0 & 0 & R_{36} \\ R_{14} & R_{24} & 0 & R_{44} & R_{45} & 0 \\ R_{15} & R_{25} & 0 & R_{45} & R_{55} & 0 \\ 0 & 0 & R_{36} & 0 & 0 & R_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s^{o} \\ \varepsilon_\Theta^{o} \\ \gamma_{s\Theta}^{o} \\ k_s \\ k_\Theta \\ k_{s\Theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} B_1 p_T \\ B_2 p_T \\ 0 \\ B_1 m_T \\ B_2 m_T \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

onde

$$R_{11} = \int E_s^{*}\,dz \qquad\qquad R_{12} = \int E_\Theta^{*}\,\nu_{\Theta s}\,dz$$

$$R_{14} = \int E_s^{*}\,z\,dz \qquad\qquad R_{15} = \int E_\Theta^{*}\,\nu_{\Theta s}\,z\,dz$$

$$R_{21} = \int E_s^{*}\,\nu_{s\Theta}\,dz \qquad\qquad R_{22} = \int E_\Theta^{*}\,dz$$

$$R_{24} = \int E_s^{*}\,\nu_{s\Theta}\,z\,dz \qquad\qquad R_{25} = \int E_\Theta^{*}\,z\,dz$$

$$R_{33} = \int G_{s\Theta}\,dz \qquad\qquad R_{36} = \int G_{s\Theta}\,z\,dz$$

$$R_{44} = \int E_s^{*}\,z^2\,dz \qquad\qquad R_{45} = \int E_\Theta^{*}\,\nu_{\Theta s}\,z^2\,dz$$

$$R_{55} = \int E_{\Theta}^{*} z^2 \, dz \qquad R_{66} = \int G_{s\Theta} z^2 \, dz$$

$$B_1 = E_s^{*} \alpha_{ts} + \nu_{\Theta s} E_{\Theta}^{*} \alpha_{t\Theta} \qquad B_2 = E^{*} \alpha_{t\Theta} + \nu_{s\Theta} E_s^{*} \alpha_{ts}$$

$$p_T = \int T \, dz \qquad m_T = \int T z \, dz$$

Se a superfície de referência for tomada como sendo a superfície média da casca, as integrais passam a ser calculadas entre -h/2 e h/2, sendo h a espessura da casca. Desta forma, se as propriedades elásticas do material da casca forem simétricas em relação à superfície média, $R_{14} = R_{15} = R_{24} = R_{25} = R_{36} = 0$, resultando:

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\Theta \\ N_{s\Theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s^o \\ \varepsilon_\Theta^o \\ \gamma_{s\Theta}^o \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{Bmatrix} p_T \qquad \begin{matrix} (2.11a) \\ (2.11b) \\ (2.11c) \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_s \\ M_\Theta \\ M_{s\Theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_s \\ k_\Theta \\ k_{s\Theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{Bmatrix} m_T \qquad \begin{matrix} (2.11d) \\ (2.11e) \\ (2.11f) \end{matrix}$$

onde A_{ij} são as constantes de rigidez extensionais, D_{ij} são as constantes de rigidez flexionais, p_T é a "força térmica" e m_T é o "momento térmico", obtidos da seguinte maneira:

$$A_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} E_s^{*} \, dz \qquad A_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} E_\Theta^{*} \, \nu_{\Theta s} \, dz$$

$$A_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} E_\Theta^{*} \, dz \qquad A_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} G_{s\Theta} \, dz$$

$$D_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} E_s^* \; z^2 \, dz \qquad D_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} E_\Theta^* \, \nu_{\Theta s} \, z^2 \, dz$$

$$D_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} E_\Theta^* \; z^2 \, dz \qquad D_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} G_{s\Theta} \; z^2 \, dz$$

$$p_T = \int_{-h/2}^{h/2} T \, dz \qquad m_T = \int_{-h/2}^{h/2} T \, z \, dz$$

2.6 - Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio para cascas, podem ser obtidas pela integração das equações de equilíbrio determinadas na teoria da elasticidade [05,06,14], ao longo da espessura da casca.

A referência [14] mostra este procedimento para cascas finas, cujas linhas de coordenadas coincidem com as direções principais,e considerando as tensões resultantes e o vetor carga por unidade de área, $\vec{P} = \{p_s, p_\Theta, p_z\}$ orientado segundo as direções e sentidos indicados na figura 2.1, chega a equações que particularizadas para cascas de revolução, ficam:

$$(r\,N_s)' + \dot{N}_{s\Theta} - r'\,N_\Theta + \frac{r}{r_1}\,Q_s = -r\,p_s \tag{2.12a}$$

$$(r\,N_{s\Theta})' + \dot{N}_\Theta + r'\,N_{s\Theta} - r_1\,r''\,Q_\Theta = -r\,p_\Theta \tag{2.12b}$$

$$(r\,Q_s)' + \dot{Q}_\Theta - \frac{r}{r_1}\,N_s + r_1\,r''\,N_\Theta = -r\,p_z \tag{2.12c}$$

$$(r\,M_s)' + \dot{M}_{s\Theta} - r'\,M_\Theta - r\,Q_s = 0 \tag{2.12d}$$

$$(r\,M_{s\Theta})' + \dot{M}_\Theta + r'\,M_{s\Theta} - r\,Q_\Theta = 0 \tag{2.12e}$$

2.7 - Equações fundamentais

Eliminando Q_s e Q_Θ das equações (2.12), obtém-se:

$$(r\,N_s)' + \dot{N}_{s\Theta} - r'\,N_\Theta + \frac{1}{r_1}\,(r\,M_s)' + \frac{1}{r_1}\,\dot{M}_{s\Theta} - \frac{r'}{r_1}\,M_\Theta = -r\,p_s \qquad \text{...(2.13a)}$$

$$(r\,N_s)' + \dot{N}_\Theta + r'\,N_{s\Theta} - \frac{r_1\,r''}{r}\,(r\,M_{s\Theta})' - \frac{r_1\,r''}{r}\,M_\Theta - \frac{r_1\,r'\,r''}{r}\,M_{s\Theta} = -r\,p_\Theta \qquad (2.13b)$$

$$(r\,M_s)'' + \dot{M}'_{s\Theta} - r'\,M'_\Theta - r''\,M_\Theta + \frac{1}{r}\,(r\,\dot{M}_{s\Theta})' + \frac{1}{r}\,\ddot{M}_\Theta + \frac{r'}{r}\,\dot{M}_{s\Theta} - \frac{r}{r'}\,N_s + r_1\,r''\,N_\Theta = -r\,p_z \qquad (2.13c)$$

Para que no sistema de equações diferenciais a maior derivada em relação a s seja de segunda ordem, elimina-se k_s das expressões (2.11d) e (2.11e), resultando:

$$M_\Theta = \frac{D_{12}}{D_{11}}\,M_s + (D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}})\,k_\Theta + (\frac{D_{12}}{D_{11}}\,B_1 - B_2)\,m_T \qquad (2.14)$$

Substituindo as relações (2.6) nas equações (2.11) e na expressão de M_Θ acima, e as relações assim obtidas bem como suas derivadas (determinadas no Apêndice A4) nas equações (2.13), obtém-se as três primeiras equações fundamentais. A quarta é obtida pela substituição das relações deformações-deslocamentos (2.6) na expressão (2.11d).

Desta forma, resulta:

$$C_1\,u'' + C_2\,u' + C_3\,u + C_4\,\ddot{u} + C_5\,\dot{v}' + C_6\,\dot{v} + C_7\,w' + C_8\,\ddot{w}' + C_9\,w + C_{10}\,\ddot{w} + C_{11}\,M'_s + C_{12}\,M_s = b_1^* \qquad (2.15a)$$

$$C_{13}\,\dot{u}' + C_{14}\,\dot{u} + C_{15}\,v'' + C_{16}\,v' + C_{17}\,\ddot{v} + C_{18}\,v + C_{19}\,\dot{w}'' +$$

$$+ C_{20}\, \dot{w}' + C_{21}\, \ddot{w}' + C_{22}\, \dot{w} + C_{23}\, \dot{M}_s = b_2^* \qquad (2.15b)$$

$$C_{24}\, \ddot{u}' + C_{25}\, u' + C_{26}\, u + C_{27}\, \ddot{u} + C_{28}\, \dot{v}'' + C_{29}\, \dot{v}' + C_{30}\, \ddot{v}' +$$

$$+ C_{31}\, \dot{v} + C_{32}\, \ddot{w}'' + C_{33}\, w'' + C_{34}\, \ddot{w}' + C_{35}\, w' + C_{36}\, \dddot{w} +$$

$$+ C_{37}\, \ddot{w} + C_{38}\, w + C_{39}\, M_s'' + C_{40}\, M_s' + C_{41}\, \ddot{M}_s + C_{42}\, M_s = b_3^*$$

(2.15c)

$$C_{43}\, u + C_{44}\, u' + C_{45}\, \dot{v} + C_{46}\, w' + C_{47}\, w'' + C_{48}\, \ddot{w} + C_{49}\, M_s = b_4^*$$

...(2.15d)

onde os C_i's são funções dos parâmetros geométricos e das constantes de rigidez da casca, os b_j^*'s são funções dos parâmetros geométricos,dos carregamentos e da distribuição de temperaturas, e se encontram indicados no apêndice A5.

2.8 - Adimensionalização e expansão das variáveis em série de Fourier na direção circunferencial.

Expandindo as variáveis em série de Fourier na direção circunferencial, transforma-se o sistema (2.15) num sistema de equações diferenciais ordinárias em relação a s,para cada harmônico da série.

A adimensionalização e expansão das variáveis compatível com a das cargas e temperaturas é a seguinte:

$$p_s = \frac{\sigma_o\, h_o}{a} \sum_{n=0}^{\infty} p_{sn}(s) \cos(n\Theta)$$

$$p_\Theta = \frac{\sigma_o\, h_o}{a} \sum_{n=0}^{\infty} p_{\Theta n}(s) \operatorname{sen}(n\Theta)$$

$$p_z = \frac{\sigma_o\, h_o}{a} \sum_{n=0}^{\infty} p_{zn}(s) \cos(n\Theta)$$

$$\cancel{T = T_o \sum_{n=0}^{\infty} T_n(s) \cos(n\Theta)}$$

$$N_s = \sigma_o h_o \sum_{n=0}^{\infty} N_{sn}(s) \cos(n\Theta)$$

$$N_\Theta = \sigma_o h_o \sum_{n=0}^{\infty} N_{\Theta n}(s) \cos(n\Theta)$$

$$N_{s\Theta} = \sigma_o h_o \sum_{n=0}^{\infty} N_{s\Theta n}(s) \operatorname{sen}(n\Theta)$$

$$Q_s = \sigma_o h_o \sum_{n=0}^{\infty} Q_{sn}(s) \cos(n\Theta)$$

$$Q_\Theta = \sigma_o h_o \sum_{n=0}^{\infty} Q_{\Theta n}(s) \operatorname{sen}(n\Theta)$$

$$M_s = \frac{\sigma_o h_o^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} M_{sn}(s) \cos(n\Theta)$$

$$M_\Theta = \frac{\sigma_o h_o^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} M_{\Theta n}(s) \cos(n\Theta)$$

$$M_{s\Theta} = \frac{\sigma_o h_o^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} M_{s\Theta n}(s) \operatorname{sen}(n\Theta)$$

$$p_T = \frac{\sigma_o h_o T_o}{E_o} \sum_{n=0}^{\infty} p_{Tn}(s) \cos(n\Theta)$$

$$m_T = \frac{\sigma_o h_o^3 T_o}{a E_o} \sum_{n=0}^{\infty} m_{Tn}(s) \cos(n\Theta)$$

$$u = \frac{a \sigma_o}{E_o} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(s) \cos(n\Theta)$$

$$v = \frac{a \sigma_o}{E_o} \sum_{n=0}^{\infty} v_n(s) \operatorname{sen}(n\Theta)$$

$$w = \frac{a\,\sigma_o}{E_o} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(s) \cos(n\Theta)$$

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_o}{E_o} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{sn}(s) \cos(n\Theta)$$

$$\varepsilon_\Theta = \frac{\sigma_o}{E_o} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{\Theta n}(s) \cos(n\Theta)$$

$$\gamma_{s\Theta} = \frac{\sigma_o}{E_o} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{s\Theta n}(s) \operatorname{sen}(n\Theta)$$

$$\phi_s = \frac{\sigma_o}{E_o} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{sn}(s) \cos(n\Theta)$$

$$\phi_\Theta = \frac{\sigma_o}{E_o} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{\Theta n}(s) \operatorname{sen}(n\Theta)$$

$$k_s = \frac{\sigma_o}{a\,E_o} \sum_{n=0}^{\infty} k_{sn}(s) \cos(n\Theta)$$

$$k_\Theta = \frac{\sigma_o}{a\,E_o} \sum_{n=0}^{\infty} k_{\Theta n}(s) \cos(n\Theta)$$

$$k_{s\Theta} = \frac{\sigma_o}{a\,E_o} \sum_{n=0}^{\infty} k_{s\Theta n}(s) \operatorname{sen}(n\Theta)$$

onde σ_o é a tensão de referência
h_o é a espessura de referência
a é o comprimento de referência
T_o é a temperatura de referência e
E_o é o módulo de elasticidade de referência.

Desta maneira, o problema será resolvido para apenas uma componente da expansão de Fourier (a simétrica ou a anti-simétrica, conforme o caso). A solução para a outra componente é conseguida através de um deslocamento da origem do sistema de referência.

Substituindo estas relações nas equações fundamentais ~~(2.15), obtém-se:~~

$$p_{11}\, u''_n + q_{11}\, u'_n + r_{11}\, u_n + q_{12}\, v'_n + r_{12}\, v_n + q_{13}\, w'_n + r_{13}\, w_n + $$
$$+ q_{14}\, M'_{sn} + r_{14}\, M_{sn} = c_1 \qquad (2.16a)$$

$$q_{21}\, u'_n + r_{21}\, u_n + p_{22}\, v''_n + q_{22}\, v'_n + r_{22}\, v_n + p_{23}\, w''_n + q_{23}\, w'_n +$$
$$+ r_{23}\, w_n + r_{24}\, M_{sn} = c_2 \qquad (2.16b)$$

$$q_{31}\, u'_n + r_{31}\, u_n + p_{32}\, v''_n + q_{32}\, v'_n + r_{32}\, v_n + p_{33}\, w''_n + q_{33}\, w'_n +$$
$$+ r_{33}\, w_n + p_{34}\, M''_{sn} + q_{34}\, M'_{sn} = c_3 \qquad (2.16c)$$

$$q_{41}\, u'_n + r_{41}\, u_n + r_{42}\, v_n + p_{43}\, w''_n + q_{43}\, w'_n + r_{43}\, w_n + r_{44}\, M_{sn} = c_4$$
$$\ldots (2.16d)$$

onde $(\ )' = \dfrac{\partial}{\partial(s/a)}(\ ) = \dfrac{\partial}{\partial\xi}(\ )$ com $\xi = s/a$,

e os p_{ij}, q_{ij}, r_{ij}, c_j, $i = 1,4$, $j = 1,4$ são coeficientes que estão indicados no Apêndice A6, determinados levando em conta as definições:

$$\rho = r/a \qquad \rho_1 = r_1/a \qquad \beta = h_o^2/a^2$$

$$a_{11} = \frac{A_{11}}{E_o\, h_o} \qquad a_{12} = \frac{A_{12}}{E_o\, h_o} \qquad a_{22} = \frac{A_{22}}{E_o\, h_o}$$

$$a_{33} = \frac{A_{33}}{E_o\, h_o} \qquad d_{11} = \frac{D_{11}}{E_o\, h_o^3} \qquad d_{12} = \frac{D_{12}}{E_o\, h_o^3}$$

$$d_{22} = \frac{D_{22}}{E_o\, h_o^3} \qquad d_{33} = \frac{D_{33}}{E_o\, h_o^3} \qquad d_s = D_{12}/D_{11}$$

$$d_\Theta = \frac{1}{E_o\, h_o^3}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right) \qquad b_1 = \frac{T_o}{E_o}\, B_1 \qquad b_2 = \frac{T_o}{E_o}\, B_2$$

As equações (2.16) podem ainda ser escritas na forma

$$P\,X'' + Q\,X' + R\,X = C \qquad (2.17)$$

onde $X = \{u_n,\ v_n,\ w_n,\ M_{sn}\}^t$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} & 0 \\ 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & p_{43} & 0 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & 0 & q_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix}$$

A equação (2.17) é a equação diferencial ordinária na variável $\xi = s/a$ que governa o domínio do problema, para cada harmônico da série de Fourier.

2.9 - Tensões resultantes em função da variável fundamental

Adimensionalizando as equações (A4.1), (A4.3), (A4.5), (A4.8), (A4.12) e (A4.16) (Apêndice A4) e expandindo as variáveis em série de Fourier na direção circunferencial, conforme procedimento estabelecido no ítem 2.8, obtém-se as tensões resultantes adimensionalizadas, cujas expressões para cada harmônico ficam sendo:

$$N_{sn} = \frac{\rho'}{\rho}\, a_{12}\, u_n + a_{11}\, u_n' + \frac{1}{\rho}\, a_{12}\, n\, v_n + \left(\frac{1}{\rho_1}\, a_{11} - \frac{\rho_1\, \rho''}{\rho}\, a_{12}\right) w_n -$$

$$- \, b_1\, p_{Tn} \qquad (2.18a)$$

$$N_{\Theta n} = \frac{\rho'}{\rho} a_{22} u_n + a_{12} u'_n + \frac{1}{\rho} a_{22} n v_n + \left(\frac{1}{\rho_1} a_{12} - \frac{\rho_1 \rho''}{\rho} a_{22}\right) w_n -$$

$$- b_2 p_{Tn} \qquad (2.18b)$$

$$N_{s\Theta n} = -a_{33}\left(\frac{1}{\rho} n u_n + \frac{\rho'}{\rho} v_n - v'_n\right) \qquad (2.18c)$$

$$M_{\Theta n} = \frac{\rho'}{\rho \rho_1} d\Theta u_n - \frac{\rho_1 \rho''}{\rho^2} d\Theta n v_n - \frac{\rho'}{\rho} d\Theta w'_n + \frac{1}{\rho^2} d\Theta n^2 w_n +$$

$$+ ds M_{sn} + (ds b_1 - b_2) m_{Tn} \qquad (2.18d)$$

$$M_{s\Theta n} = - \frac{1}{2\rho \rho_1} d_{33} n u_n + \left[\frac{(\rho_1 \rho'')\rho'}{\rho^2} - \frac{(\rho_1 \rho'')'}{2\rho}\right] d_{33} v_n -$$

$$- \frac{\rho_1 \rho''}{2\rho} d_{33} v'_n - \frac{\rho'}{\rho^2} d_{33} n w_n + \frac{1}{\rho} d_{33} n w'_n \qquad (2.18e)$$

$$Q_{sn} = -\left(\frac{\rho'^2}{\rho^2 \rho_1} \beta d\Theta + \frac{1}{2\rho_1 \rho^2} \beta d_{33} n^2\right) u_n - \frac{\rho_1 \rho''}{2\rho^2} \beta d_{33} n v'_n +$$

$$+ \left[\frac{(\rho_1 \rho'')\rho'}{\rho^3} (d_{33} + d\Theta)\beta - \frac{(\rho_1 \rho'')'}{2\rho^2} \beta d_{33}\right] n v_n +$$

$$+ \frac{\rho'^2}{\rho^2} \beta d\Theta w'_n + \frac{1}{\rho^2} \beta d_{33} n^2 w'_n - \frac{\rho'}{\rho^3} (d_{33} + d\Theta)\beta n^2 w_n +$$

$$+ \beta M'_{sn} + \frac{\rho'}{\rho} (1 - ds)\beta M_{sn} - \frac{\rho'}{\rho} (ds b_1 - b_2)\beta m_{Tn} \qquad (2.18f)$$

2.10 - Condições de contorno

A equação (2.17) representa um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, e requer, portanto, a prescrição de quatro condições de contorno na estação inicial e quatro na estação final.

A prescrição pode ser feita em termos dos deslocamentos u_n, v_n, w_n, ϕ_{sn} ou dos esforços no contorno N_{sn}, $\hat{N}_{s\Theta n}$, $\hat{Q}_{sn}$, M_{sn}, ou ainda de uma combinação deles. Onde

$$\hat{N}_{s\Theta n} = N_{s\Theta n} - \frac{\rho_1 \rho''}{\rho} \beta M_{s\Theta n} \qquad (2.19a)$$

$$\hat{Q}_{sn} = Q_{sn} + \frac{\beta n}{\rho} M_{s\Theta n} \qquad (2.19b)$$

são respectivamente, a força cisalhante de membrana e a força cisalhante transversal efetiva, determinadas no apêndice A7.

As condições de contorno podem então ser dadas numa forma similar à proposta pela referência [02]:

$$g_1 N_{sn} + h_1 u_n = e_1 \qquad (2.20a)$$

$$g_2 \hat{N}_{s\Theta n} + h_2 v_n = e_2 \qquad (2.20b)$$

$$g_3 \hat{Q}_{sn} + h_3 w_n = e_3 \qquad (2.20c)$$

$$g_4 \phi_{sn} + h_4 M_{sn} = e_4 \qquad (2.20d)$$

onde os g's, h's e e's são constantes que definem as condições de contorno. Para um contorno engastado ($u_n = v_n = w_n = \phi_{sn} = 0$) ter-se-ia, por exemplo, $g_1 = g_2 = g_3 = h_4 = e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0$ e $g_4 = h_1 = h_2 = h_3 = 1$.

Desta forma, como N_{sn}, $\hat{N}_{s\Theta n}$, $\hat{Q}_{sn}$ e ϕ_{sn} podem ser escritos em termos de X e X'(Eqs.(2.6d),(2.19), (A7.15) e (A7.16)),obtém-se a equação que estipula as condições de contorno com a seguinte forma:

$$E X' + F X = Y \qquad (2.21)$$

onde

$$E = \begin{bmatrix} g_1 f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 f_6 & g_2 f_8 & 0 \\ 0 & g_3 f_{11} & g_3 f_{13} & g_3 f_{15} \\ 0 & 0 & g_4 f_{17} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} g_1 f_1 + h_1 & g_1 f_3 & g_1 f_4 & 0 \\ g_2 f_5 & g_2 f_7 + h_2 & g_2 f_9 & 0 \\ g_3 f_{10} & g_3 f_{12} & g_3 f_{14} + h_3 & g_3 f_{16} \\ g_4 f_{18} & 0 & 0 & h_4 \end{bmatrix}$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}^t$$

com os f's e os y's sendo coeficientes definidos no apêndice A8.

2.11 - O problema de descontinuidade

Nos pontos de descontinuidade, as componentes u e w do vetor deslocamento podem sofrer uma mudança brusca. Desta forma, torna-se necessário estabelecer o sistema de equações que governa este fenômeno.

Considerando o sentido dos deslocamentos e tensões positivo conforme a figura 2.2, e denotando os vetores antes e após a descontinuidade pelos sinais (-) e (+), as condições de compatibilidade de deslocamentos são:

$$\begin{aligned} u^+ &= u^- \cos\chi - w^- \operatorname{sen}\chi & \qquad v^+ &= v^- \\ w^+ &= u^- \operatorname{sen}\chi + w^- \cos\chi & \qquad \phi_s^+ &= \phi_s^- \end{aligned} \tag{a}$$

e as equações de equilíbrio de forças são

$$N_s^+ = N_s^- \cos\chi - \hat{Q}_s^- \operatorname{sen}\chi \qquad \hat{N}_{s\Theta}^+ = \hat{N}_{s\Theta}^-$$

$$\hat{Q}_s^+ = N_s^- \operatorname{sen}\chi + \hat{Q}_s^- \cos\chi \qquad M_s^+ = M_s^- \tag{b}$$

Adimensionalizando e expandindo as variáveis das relações (a) e (b) em série de Fourier na direção circunferencial, e reagrupando-as convenientemente, pode-se escrever para cada harmônico:

$$X^+ = \Psi\, X^- \tag{2.22}$$

$$\text{e} \qquad Z^+ = \Psi\, Z^- \tag{2.23}$$

onde

$$\Psi = \begin{bmatrix} \cos\chi & 0 & -\operatorname{sen}\chi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\chi & 0 & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^+ = \{u_n^+,\ v_n^+,\ w_m^+,\ M_{sn}^+\}^t \qquad X^- = \{u_n^-,\ v_n^-,\ w_n^-,\ M_{sn}^-\}^t$$

$$Z^+ = \{N_{sn}^+,\ \hat{N}_{s\Theta n}^+,\ \hat{Q}_{sn}^+,\ \phi_{sn}^+\}^t \qquad Z^- = \{N_{sn}^-,\ \hat{N}_{s\Theta n}^-,\ \hat{Q}_{sn}^-,\ \phi_{sn}^-\}^t$$

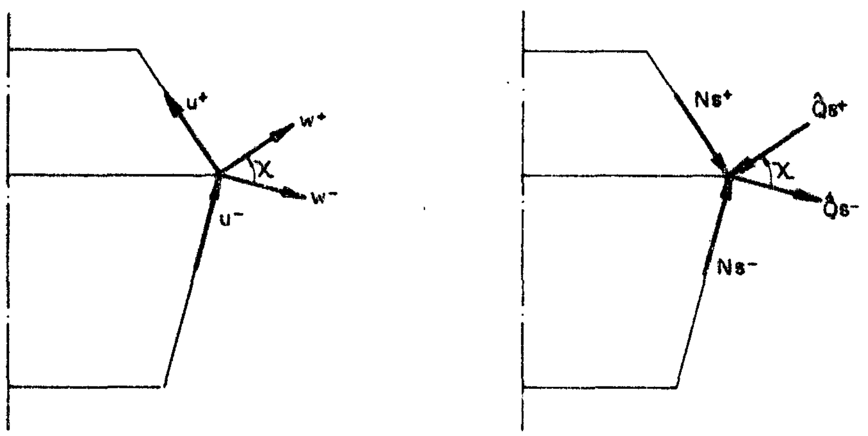


Fig. 2.2 - Deslocamentos e tensões resultantes numa descontinuidade.

Por outro lado, Z pode ser escrito em função de X e X'

$$Z = S\,X' + T\,X + L \qquad (2.24)$$

onde

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & s_{23} & 0 \\ 0 & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ 0 & 0 & s_{43} & 0 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \{\ell_1,\ 0,\ \ell_3,\ 0\}^t$$

onde os s_{ij}, t_{ij}, ℓ_j, são constantes definidas no apêndice A9.

Substituindo (2.24) em (2.23), obtém-se

$$\Psi\, S^-(X^-)' + \Psi\, T^- X^- - S^+(X^+)' - T^+X^+ - L^+ - \Psi\, L^- \qquad (2.25)$$

Assim, as descontinuidades são governadas pelas equações (2.22) e (2.25).

III - PROCESSO NUMÉRICO

3.1 - Introdução

Neste capítulo será desenvolvida a base para a solução numérica do problema. Esta base compreende a obtenção das propriedades geométricas do meridiano, a formulação numérica, e os algoritmos utilizados para a solução dos sistemas lineares característicos do problema.

As propriedades geométricas serão obtidas para meridianos retilíneos, e meridianos curvilíneos formados por arcos de circunferência.

A formulação numérica será realizada pela utilização de equações de diferenças finitas, que serão aplicadas aos sistemas de equações que governam o problema e as descontinuidades, e às condições de contorno.

Os algoritmos utilizados na solução dos sistemas lineares dos problemas de cascas delgadas com e sem descontinuidades, resultantes da formulação numérica utilizada, serão desenvolvidos a partir do esquema de Cholesky.

3.2 - Propriedades geométricas do meridiano

3.2.1 - Introdução

No capítulo anterior foram estabelecidas as equações do problema estudado no presente trabalho. Observando-se as expressões dos coeficientes destas equações, verifica-se ser necessária a determinação de várias propriedades geométricas do meridiano (figura 3.1):

ρ - raio (adimensionalizado)

ρ' - derivada do raio em relação ao comprimento do arco ξ (adimensionalizado)

ρ'' - derivada segunda do raio em relação a ξ

ρ/ρ_1 - razão entre o raio e o raio de curvatura meridional.

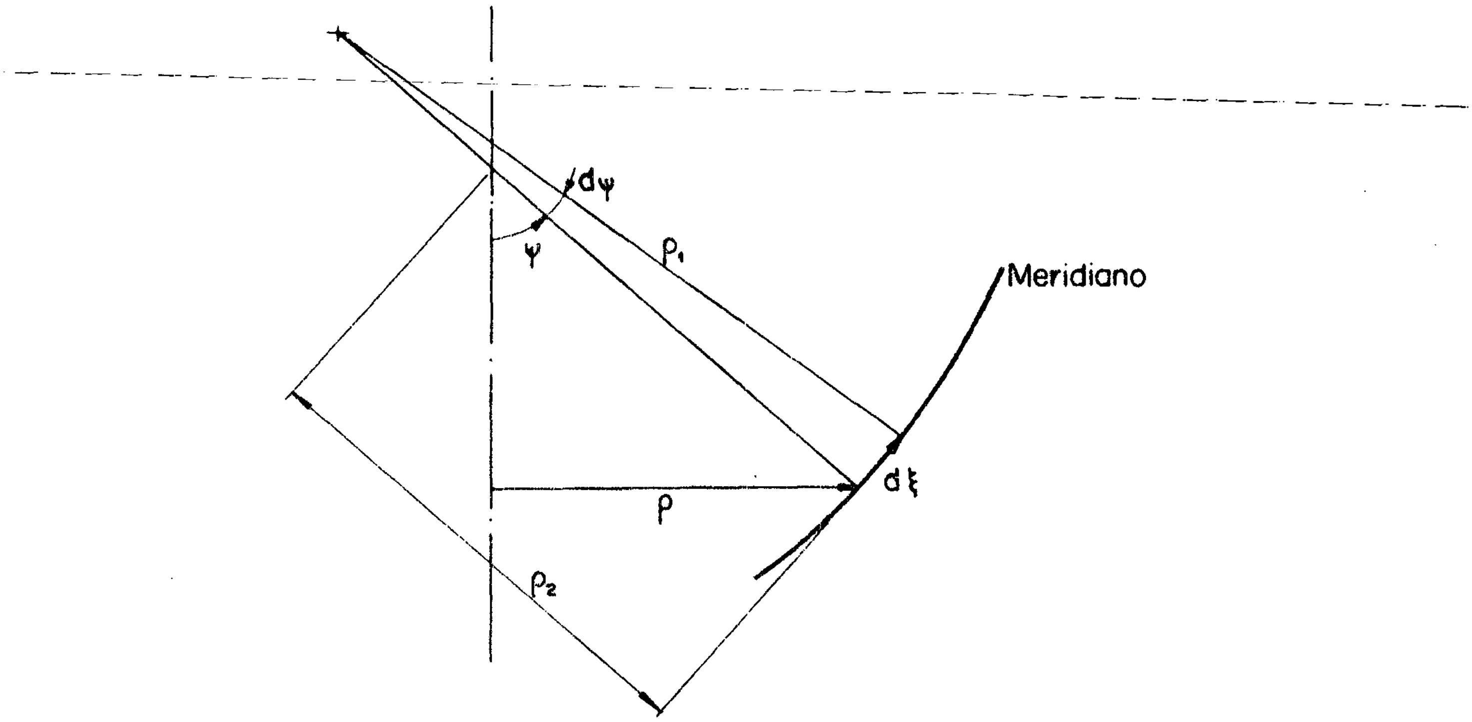


Figura 3.1

$(\rho/\rho_1)'$ - derivada desta razão em relação a ξ

$(-\rho_1\rho'')$ - seno do ângulo meridional

$(-\rho_1\rho'')'$ - derivada do seno do ângulo meridional em relação a ξ

$(-\rho_1\rho'')''$ - derivada segunda do seno do ângulo meridional em relação a ξ.

Lembrando que, conforme considerações anteriores, o presente trabalho considera que o meridiano pode ser composto de segmentos com diversas formas, determina-se a seguir, as propriedades geométricas para um segmento de meridiano retilíneo, e para um segmento de meridiano formado por um arco de circunferência.

3.2.2 - Segmento de meridiano retilíneo

Considerando a figura 3.2, onde está mostrado o k-ésimo segmento meridional retilíneo com origem no ponto A_k e término no ponto B_k, o raio ρ pode ser dado por

$$\rho = \rho_o - \xi \text{ sen } \alpha \tag{3.1}$$

cuja derivada em relação a ξ é

$$\rho' = - \text{ sen } \alpha \tag{3.2}$$

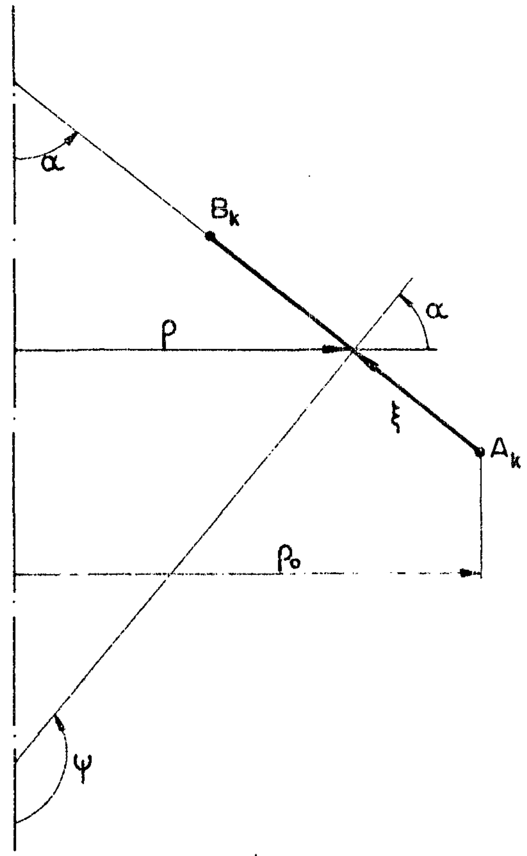


Figura 3.2

Ainda pela figura 3.2, o seno do ângulo meridional ψ é

$$(-\rho_1 \rho'') = \text{sen } \psi = \cos \alpha \tag{3.3}$$

e o raio de curvatura meridional $\rho_1 = \infty$.

As demais propriedades são

$$\rho'' = 0 \tag{3.4}$$

$$\rho/\rho_1 = 0 \tag{3.5}$$

$$(\rho/\rho_1)' = 0 \tag{3.6}$$

$$(-\rho_1 \rho'')' = 0 \qquad (3.7)$$

$$(-\rho_1 \rho'')'' = 0 \qquad (3.8)$$

Desta forma, tem-se as propriedades geométricas para cascas com segmentos cilíndricos ($\alpha = 0$) e cônicos. Fazendo $\alpha = \pi/2$, pode-se obter ainda as propriedades geométricas do meridiano de uma placa circular.

3.2.3 - Segmento de meridiano formado por um arco de circunferência

Considerando que o k-ésimo segmento do meridiano da casca é um arco de circunferência, que começa no ponto A_k e termina no ponto B_k, com raio de curvatura ρ_{1k} (figura 3.3), as coordenadas de seu centro de curvatura podem ser estabelecidas determinando-se:

a) Distância entre os pontos A_k e B_k

$$d_k = \left[(z_{B_k} - z_{A_k})^2 + (\rho_{B_k} - \rho_{A_k})^2 \right]^{1/2} \qquad (3.9)$$

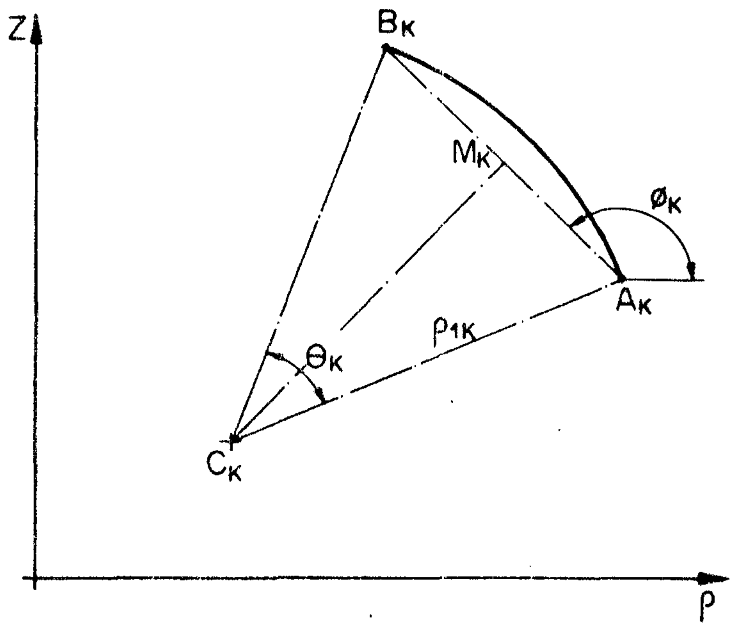


Figura 3.3

b) Distancia entre os pontos C_k e M_k

$$h_k = \left[(\rho_{1_k})^2 - (d_k/2)^2\right]^{1/2} \tag{3.10}$$

c) Coordenadas do ponto M_k

$$\rho_{M_k} = \frac{\rho_{Bk} + \rho_{Ak}}{2} \tag{3.11a}$$

$$z_{M_k} = \frac{z_{Bk} + z_{Ak}}{2} \tag{3.11b}$$

d) Ângulo do arco $\widehat{A_k B_k}$

$$\Theta_k = 2 \tan^{-1} \left[d_k/2\ h_k\right] \qquad 0 < \Theta_k < \pi \tag{3.12}$$

e) Inclinação do segmento de reta $\overline{A_k B_k}$

$$\text{sen}\ \phi_k = \frac{z_{Bk} - z_{Ak}}{d_k} \tag{3.13a}$$

$$\cos\ \phi_k = \frac{\rho_{Bk} - \rho_{Ak}}{d_k} \tag{3.13b}$$

f) Coordenadas do centro de curvatura

$$\rho_{ck} = \rho_{Mk} - \rho_{1k}\ \text{sen}\ \phi_k\ \cos\ (\Theta_k/2) \tag{3.14a}$$

$$z_{ck} = z_{Mk} + \rho_{1k}\ \cos\ \phi_k\ \cos\ (\Theta_k/2) \tag{3.14b}$$

Deve-se observar que se o raio de curvatura for positivo, o arco de circunferência será côncavo em relação ao sistema de referência, e se ele for negativo, o arco de circunferência será convexo em relação ao sistema de referência.

Determinadas as coordenadas do centro de curvatura, as coordenadas de um ponto sobre o arco são (figura 3.4):

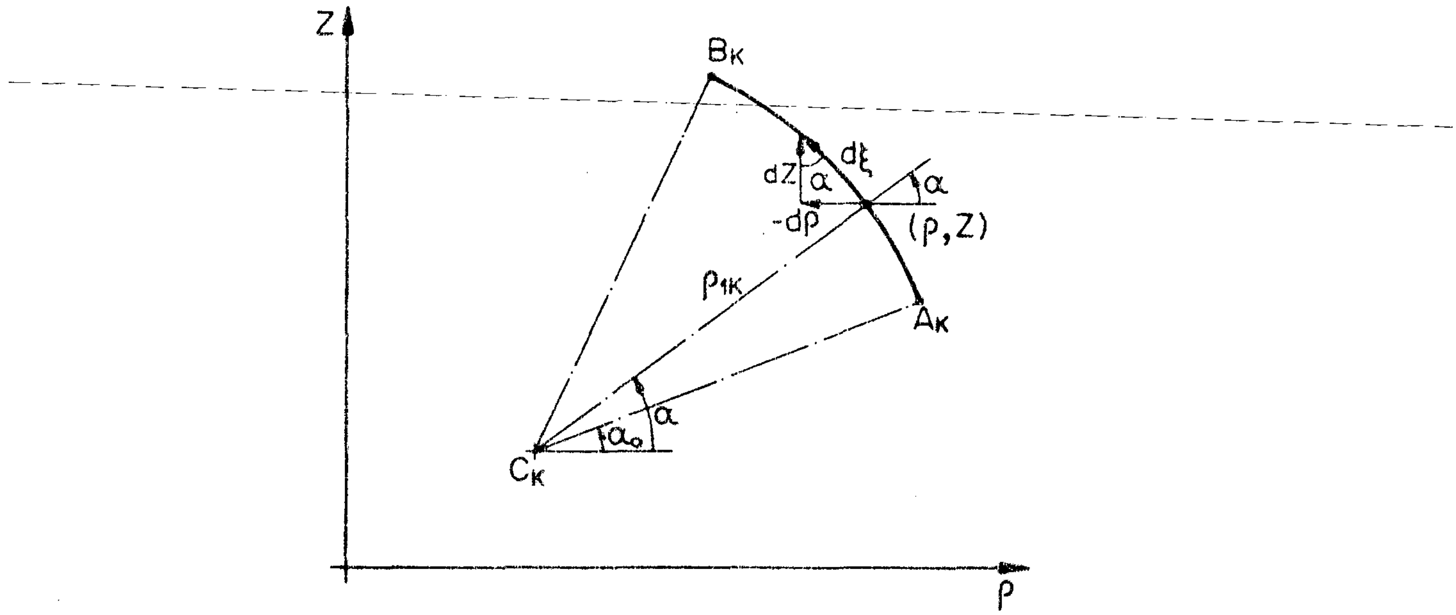


Figura 3.4

$$\rho = \rho_{c_k} + \rho_{1_k} \cos \alpha \tag{3.15a}$$

$$z = z_{c_k} + \rho_{1_k} \operatorname{sen} \alpha \tag{3.15b}$$

Da figura 3.4 verifica-se que os ângulos α_o e α podem ser determinados da seguinte maneira:

$$\alpha_o = \tan^{-1} \left[\frac{z_{Ak} - z_{ck}}{\rho_{Ak} - \rho_{ck}}\right] \tag{3.16a}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left[\frac{z - z_{ck}}{\rho - \rho_{ck}}\right] \tag{3.16b}$$

O comprimento de arco ξ até o ponto (ρ, z) é

$$\xi = |\rho_{1_k}(\alpha - \alpha_o)| \tag{3.17}$$

Da figura 3,4 observa-se ainda que:

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\xi} = - \operatorname{sen} \alpha \tag{3.18}$$

$$z' = \frac{dz}{d\xi} = \cos \alpha \tag{3.19}$$

Para determinar as demais propriedades geométricas, pode-se partir da expressão (3.18), que derivada em relação a ξ fornece:

$$\rho'' = \frac{d^2\rho}{d\xi^2} = -\cos\alpha \frac{d\alpha}{d\xi} \tag{3.20}$$

sendo α determinado por (3.16).

Derivando a expressão (3.16) em relação a ξ tem-se:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\xi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{z - z_{ck}}{\rho - \rho_{ck}}\right)^2} \left[\frac{z'(\rho - \rho_{ck}) - \rho'(z - z_{ck})}{(\rho - \rho_{ck})^2}\right] \quad \ldots(3.21)$$

onde ρ' e z' são determinadas pelas expressões (3.18) e (3.19).

Derivando a expressão (3.20) em relação a ξ chega-se a:

$$\rho''' = \frac{d^3\rho}{d\xi^3} = \operatorname{sen}\alpha \frac{d\alpha}{d\xi} - \cos\alpha \frac{d^2\alpha}{d\xi^2} \tag{3.22}$$

que para ser determinada, necessita que se obtenha a derivada da expressão (3.21):

$$\alpha'' = \frac{d^2\alpha}{d\xi^2} = - \frac{2\left(\frac{z - z_{ck}}{\rho - \rho_{ck}}\right) \left[\frac{z'(\rho - \rho_{ck}) - \rho'(z - z_{ck})}{(\rho - \rho_{ck})^2}\right]^2}{\left[1 + \left(\frac{z - z_{ck}}{\rho - \rho_{ck}}\right)^2\right]^2} +$$

$$+ \frac{1}{1 + \left(\frac{z - z_{ck}}{\rho - \rho_{ck}}\right)^2} \left\{ \frac{z''(\rho - \rho_{ck}) - \rho''(z - z_{ck})}{(\rho - \rho_{ck})^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\rho'\left[z'(\rho - \rho_{ck}) - \rho'(z - z_{ck})\right]}{(\rho - \rho_{ck})^3} \right\} \tag{3.23}$$

onde z'' é determinada derivando-se a expressão (3.19)

$$z'' = \frac{d^2 z}{d\xi^2} = -\operatorname{sen}\alpha \frac{d\alpha}{d\xi} \tag{3.24}$$

Assim, utilizando a expressão (3.23) e as obtidas anteriormente, a expressão (3.22) fica completamente determinada.

Desta forma, o raio adimensionalizado (ρ) é determinado pela expressão (3.15a), sua derivada primeira (ρ') pela expressão (3.18) e sua derivada segunda (ρ'') pela expressão (3.20). A razão (ρ/ρ_1) é obtida dividindo-se a expressão (3.15a) por ρ_1, e sua derivada $(\rho/\rho_1)'$ fica:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)' = \frac{\rho'}{\rho_1} - \frac{\rho\rho_1'}{\rho_1^2} \tag{3.25}$$

Como ao longo do arco de circunferência $\rho_1' = 0$, tem-se:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)' = \frac{\rho'}{\rho_1} \tag{3.26}$$

O seno do ângulo meridional ($-\rho_1\rho''$) é obtido multiplicando-se a expressão (3.20) pelo raio de curvatura ρ_1 com sinal negativo, e sua derivada primeira é:

$$(-\rho_1\rho'')' = -\rho_1'\rho'' - \rho_1\rho''' \tag{3.27}$$

e pelo argumento utilizado acima

$$(-\rho_1\rho'')' = -\rho_1\rho''' \tag{3.28}$$

que é calculada utilizando-se a expressão (3.22).

A derivada segunda do seno do ângulo meridional, pode ser obtida considerando-se sua definição.

Conforme a figura 3.1 e a expressão (A1.17)

$$\text{sen}\ \psi = -\rho_1\rho'' \tag{3.29}$$

então, lembrando que $d\xi = \rho_1\ d\psi$

$$(-\rho_1\rho'')' = \frac{d}{d\xi}(-\rho_1\rho'') = \frac{d}{\rho_1\ d\psi}(\text{sen}\ \psi) = \frac{1}{\rho_1}\cos\psi \tag{3.30}$$

De forma semelhante

$$(-\rho_1\rho'')'' = -\frac{1}{\rho_1^2}\ \text{sen}\ \psi - \cos\psi\ \frac{\rho_1'}{\rho_1^2} \tag{3.31}$$

Substituindo a expressão de sen ψ (3.29) e a de cos ψ obtida a partir de (3.30), chega-se a:

$$(-\rho_1 \rho'')'' = \frac{1}{\rho_1} \left[\rho'' - \rho_1'(-\rho_1 \rho'')'\right] \tag{3.32}$$

e como $\rho_1' = 0$

$$(-\rho_1 \rho'')'' = \rho''/\rho_1 \tag{3.33}$$

3.3 - Formulação numérica

3.3.1 - Introdução

Considerando que a casca tem n pontos pivotais, que o k-ésimo segmento contínuo termina no ponto j_k, que o espaçamento pivotal neste segmento é Δ_k, e que o número de segmentos contínuos é p, as equações de diferenças finitas utilizadas na formulação numérica do problema são dadas por:

$$\frac{dX_1}{d\xi} = X_1' = \frac{1}{2\Delta_1}(-3X_1 + 4X_2 - X_3) + \Theta\Delta_1^2 \tag{3.34}$$

$$\frac{dX_{j_k}}{d\xi} = X_{j_k}' = \frac{1}{2\Delta_k}(X_{j_k-2} - 4X_{j_k-1} + 3X_{j_k}) + \Theta\Delta_k^2 \tag{3.35}$$

$$\frac{dX_{j_k+1}}{d\xi} = X_{j_k+1}' = \frac{1}{2\Delta_{k+1}}(-2X_{j_k+1} + 4X_{j_k+2} - X_{j_k+3}) + \Theta\Delta_{k+1}^2 \tag{3.36}$$

$$\frac{dX_n}{d\xi} = X_n' = \frac{1}{2\Delta_p}(X_{n-2} - 4X_{n-1} + 3X_n) + \Theta\Delta_p^2 \tag{3.37}$$

$$\frac{dX_i}{d\xi} = X_i' = \frac{1}{2\Delta_k}(X_{i+1} - X_{i-1}) + \Theta\Delta_k^2 \tag{3.38}$$

$$i = 2, n-1; \quad i \neq j_k; \quad i \neq j_k+1$$

$$\frac{d^2X_i}{d\xi^2} = X_i'' = \frac{1}{\Delta_k^2}(X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}) + \Theta\Delta_k^2$$

$$i = 2, n-1; \quad i \neq j_k; \quad i = j_k+1 \qquad (3.39)$$

3.3.2 - Equação diferencial do problema

Substituindo as equações (3.38) e (3.39) na equação (2.17), chega-se a:

$$A_{1i}\, X_{i-1} + A_{2i}\, X_i + A_{3i}\, X_{i+1} = C_i \qquad (3.40)$$

onde

$$A_{1i} = \frac{1}{\Delta_k^2} P_i - \frac{1}{2\Delta_k} Q_i, \qquad A_{2i} = R_i - \frac{2}{\Delta_k^2} P_i$$

$$A_{3i} = \frac{1}{\Delta_k^2} P_i + \frac{1}{2\Delta_k} Q_i$$

com P_i, Q_i, R_i e C_i sendo as matrizes e o vetor definido na equação (2.17), calculados no ponto i.

3.3.3 - Condições de contorno

Utilizando as equações (3.34) e (3.37) na formulação numérica da equação (2.21), obtém-se:

$$A_{11}\, X_1 + A_{21}\, X_2 + A_{31}\, X_3 = Y_1 \qquad (3.41a)$$

$$A_{1n}\, X_{n-2} + A_{2n}\, X_{n-1} + A_{3n}\, X_n = Y_n \qquad (3.41b)$$

onde

$$A_{11} = F_1 - \frac{3}{2\Delta_1} E_1, \quad A_{21} = \frac{2}{\Delta_1} E_1, \quad A_{31} = -\frac{1}{2\Delta_1} E_1$$

$$A_{1n} = \frac{1}{2\Delta_p} E_n, \quad A_{2n} = -\frac{1}{2\Delta_p} E_n, \quad A_{3n} = \frac{3}{2\Delta_p} E_n + F_n$$

com F_1, E_1 Y_1, F_n, E_n, Y_n sendo as matrizes e o vetor definidos na equação (2.21) calculados nos pontos $i = 1$ e $i = n$.

3.3.4 - Equação diferencial nas descontinuidades

Aplicando as equações (3.35) e (3.36) à equação (2.25), e lembrando que o sinal (-) foi utilizado para designar o vetor antes da descontinuidade (correspondendo portanto, ao ponto j_k), e que o sinal (+) foi usado para indicar o vetor depois da descontinuidade (correspondendo então ao ponto j_k+1), obtêm-se:

$$A_{1j_k} X_{j_k-2} + A_{2j_k} X_{j_k-1} + A_{3j_k} X_{j_k} + A_{4j_k} X_{j_k+1} + A_{5j_k} X_{j_k+2} + + A_{6j_k} X_{j_k+3} = C_{j_k} \qquad (3.42)$$

onde

$$A_{1j_k} = \frac{1}{2\Delta_k} \Psi_k S_{j_k}, \qquad A_{2j_k} = -\frac{2}{\Delta_k} \Psi_k S_{j_k}$$

$$A_{3j_k} = \Psi_k\left(\frac{3}{2\Delta_k} S_{j_k} + T_{j_k}\right), \qquad A_{4j_k} = \frac{3}{2\Delta_{k+1}} S_{j_k+1} - T_{j_k+1}$$

$$A_{4j_k} = -\frac{2}{\Delta_{k+1}} S_{j_k+1}, \qquad A_{6j_k} = \frac{1}{2\Delta_{k+1}} S_{j_k+1}$$

$$C_{j_k} = L_{j_k+1} - \Psi_k L_{j_k}$$

sendo S_{j_k}, T_{j_k}, L_{j_k}, S_{j_k+1}, T_{j_k+1}, L_{j_k+1} as matrizes e o vetor definidos pela equação (2.24), calculados nos pontos $i = j_k$ e $i = j_k+1$; e Ψ_k a matriz definida na equação (2.22) calculada no ponto $i = j_k$.

3.3.5 - Sistema linear para problemas sem descontinuidades

Para cascas sem descontinuidades, o sistema é obtido aplicando-se a equação (3.40) nos pontos $i = 2, n-1$, e as equações (3.41) nas bordas ($i = 1$ e $i = n$).

Como as matrizes A_{11} e A_{3n} podem ser singulares, o sis tema deve ser modificado antes de se proceder sua solução. Esta modificação consiste na obtenção de duas equações pela aplicação de (3.40) nos pontos i = 2 e i = n-1, com as quais elimina-se, respectivamente, A_{11} e A_{3n}, obtendo-se:

$$\bar{A}_{22}\ X_2 + \bar{A}_{32}\ X_3 = \bar{C}_2 \tag{3.43a}$$

$$\bar{A}_{1,n-1}\ X_{n-2} + \bar{A}_{2,n-1}\ X_{n-1} = \bar{C}_{n-1} \tag{3.43b}$$

onde

$$\bar{A}_{22} = A_{11}(A_{12})^{-1}\ A_{22} - A_{21}$$

$$\bar{A}_{32} = A_{11}(A_{12})^{-1}\ A_{32} - A_{31}$$

$$\bar{C}_2 = A_{11}(A_{12})^{-1}\ C_2 - Y_1$$

$$\bar{A}_{1,n-1} = A_{3n}(A_{3,n-1})^{-1}\ A_{1,n-1} - A_{1n}$$

$$\bar{A}_{2,n-1} = A_{3n}(A_{3,n-1})^{-1}\ A_{2,n-1} - A_{2n}$$

$$\bar{C}_{n-1} = A_{3n}(A_{3,n-1})^{-1}\ C_{n-1} - Y_n$$

Utilizando a equação (3.40) nos pontos i = 3,n-2 e as equações (3.43), obtém-se um sistema linear que, resolvido, fornece a solução para os vetores X_i = 2,n-1, podendo-se então determinar X_1 e X_n através de:

$$X_1 = (A_{12})^{-1}(C_2 - A_{22}\ X_2 - A_{32}\ X_3) \tag{3.44a}$$

$$X_n = (A_{3,n-1})^{-1}(C_{n-1} - A_{1,n-1}\ X_{n-2} - A_{2,n-1}\ X_{n-1}) \tag{3.44b}$$

3.3.6 - Sistema linear para problemas com descontinuidades

Nos problemas com descontinuidades, obtém-se o sistema linear aplicando a equação (3.40) nos pontos i = 3,n-2 com $i \neq j_k$ e $i \neq j_k+1$, utilizando as equações (3.43) (i = 2 e i = n-1), a equação (3.42) nos pontos $i = j_k$, k = 1, p-1, e a equação (2.22) nos pontos j_k+1.

Deve-se lembrar que os pontos j_k e j_k+1 ocupam fisica~~mente a mesma posição, sendo portanto um deles fictício (por e~~xemplo, j_k+1).

Resolvendo o sistema assim formado, chega-se à solução de X_i, $i = 2,n-1$, obtendo-se então X_1 e X_n através das equações (3.44).

3.4 - Solução dos sistemas lineares

3.4.1 - Introdução

Observando as formas particulares dos sistemas lineares para problemas com e sem descontinuidades, desenvolveram-se dois algoritmos a partir do esquema de Cholesky para resolvê-los.

Denominando a matriz $L = [\ell_{ji}]$ com a propriedade de que para todo $j < i$, $\ell_{ji} = 0$ de matriz triangular inferior, e a matriz $T = [t_{ji}]$ tal que, para todo $j > i$, $t_{ji} = 0$ e $t_{jj} = 1$, de matriz unidade triangular superior, o esquema de Cholesky consiste na determinação de uma matriz L, cujo inverso reduz o sistema $AX = C$ a um sistema $TX = K$. Ou seja:

$$L^{-1}(AX - C) = TX - K \tag{3.45}$$

A obtenção das matrizes L, T e do vetor K para um sistema qualquer pode ser encontrada na referência [03] .

O esquema de Cholesky pode também ser utilizado na solução de sistemas do tipo $A^*X^* = C^*$, com $A^* = [A_{ji}]$, $X^* = \{X_i\}$, $C^* = \{C_i\}$, onde A_{ji} são matrizes mxm, X_i e C_i são vetores de dimensão m.

Neste caso, a equação (3.45) fica sendo

$$(L^*)^{-1}(A^*X^* - C^*) = T^*X^* - K^* \tag{3.46}$$

onde $L^* = [L_{ji}]$, com L_{ji} sendo matrizes mxm tal que para todo $j < i$, $L_{ji} = \Theta$

$T^* = [T_{ji}]$, com T_{ji} sendo matrizes mxm tal que para todo $j > i$, $T_{ji} = \Theta$ e $T_{jj} = I_m$.

$X^* = \{X_i\}$, com X_i sendo vetores de dimensão m

~~$K^* = \{K_i\}$, com K_i sendo vetores de dimensão m.~~

3.4.2 - Problema sem descontinuidade

Para a formulação numérica adotada, o sistema linear do problema sem descontinuidade, montado segundo o item 3.3.5, assume a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & & & & & & & \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & & & & & & & \\ & A_{13} & A_{23} & A_{33} & & & & & & \\ & & A_{14} & A_{24} & A_{34} & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & & A_{1,n-3} & A_{2,n-3} & A_{3,n-3} & & \\ & & & & & & A_{1,n-2} & A_{2,n-2} & A_{3,n-2} & \\ & & & & & & & A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & A_{3,n-1} \\ & & & & & & & A_{1,n} & A_{2,n} & A_{3,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ \vdots \\ X_{n-3} \\ X_{n-2} \\ X_{n-1} \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ \vdots \\ C_{n-3} \\ C_{n-2} \\ C_{n-1} \\ C_n \end{Bmatrix} \qquad (3.47)$$

onde A_{ji} são submatrizes 4 x 4, X_i e C_i são vetores de dimensão 4.

Deve-se notar que após a mudança realizada no sistema, prevendo a singularidade de A_{11} e A_{3n}, chega-se a outro semelhante ao (3.47), com $A_{31} = A_{1n} = \Theta$.

Utilizando o esquema de Cholesky na solução de (3.47), chega-se a matrizes L^* e T^* com a seguinte forma:

$$L^* = \begin{bmatrix} L_{11} & & & & & & & \\ L_{21} & L_{22} & & & & & & \\ & L_{32} & L_{33} & & & & & \\ & & L_{34} & L_{44} & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & L_{n-2,n-3} & L_{n-2,n-2} & & \\ & & & & & L_{n-1,n-2} & L_{n-1,n-1} & \\ & & & & & L_{n,n-2} & L_{n,n-1} & L_{n,n} \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

$$T^* = \begin{bmatrix} I & T_{12} & T_{13} & & & & & \\ & I & T_{23} & & & & & \\ & & I & T_{34} & & & & \\ & & & I & T_{45} & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & I & T_{n-2,n-1} & \\ & & & & & & I & T_{n-1,n} \\ & & & & & & & I \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

Objetivando obter expressões simples para os elementos de L* e T*, procede-se sua renumeração, ficando as matrizes:

$$L^* = \begin{bmatrix} L_{11} & & & & & & & \\ L_{12} & L_{22} & & & & & & \\ & L_{13} & L_{23} & & & & & \\ & & L_{14} & L_{24} & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & L_{1,n-2} & L_{2,n-2} & & \\ & & & & & L_{1,n-1} & L_{2,n-1} & \\ & & & & & L_{1,n} & L_{2,n} & L_{3,n} \end{bmatrix} \qquad (3.50)$$

$$T^* = \begin{bmatrix} I & T_1 & T_2 & & & & & \\ & I & T_3 & & & & & \\ & & I & T_4 & & & & \\ & & & I & T_5 & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & I & T_{n-1} & \\ & & & & & & I & T_n \\ & & & & & & & I \end{bmatrix} \qquad (3.51)$$

Desta forma, as matrizes L_{ji}, T_i e os vetores K_i são dados por:

$$L_{1i} = A_{1,i} \qquad i = 1,\ n \qquad (3.52a)$$

$$L_{22} = A_{22} - L_{12}\,T_1 \qquad (3.52b)$$

$$L_{2,i} = A_{2,i} - L_{1,i}\,T_i \qquad i = 3,n-1 \qquad (3.52c)$$

$$L_{2,n} = A_{2,n} - L_{1,n} T_{n-1} \quad (3.52d)$$

$$L_{3,n} = A_{3,n} - L_{2,n} T_n \quad (3.52e)$$

$$T_1 = (A_{11})^{-1} A_{12} \quad (3.52f)$$

$$T_2 = (A_{11})^{-1} A_{13} \quad (3.52g)$$

$$T_3 = (L_{22})^{-1} (A_{32} - L_{12}) \quad (3.52h)$$

$$T_i = (L_{2,i-1})^{-1} A_{3,i-1} \qquad i = 4,n \quad (3.52i)$$

$$K_1 = (A_{11})^{-1} \{C_1\} \quad (3.52j)$$

$$K_i = (L_{2,i})^{-1} \{C_i - L_{1,i} K_{i-1}\} \qquad i = 2,n-1 \quad (3.52\ell)$$

$$K_n = (L_{3,n})^{-1} \{C_n - L_{1,n} K_{n-2} - L_{2,n} K_{n-1}\} \quad (3.52m)$$

Determinadas as matrizes T_i e os vetores K_i, os vetores solução X_i são dados por:

$$X_n = K_n \quad (3.53a)$$

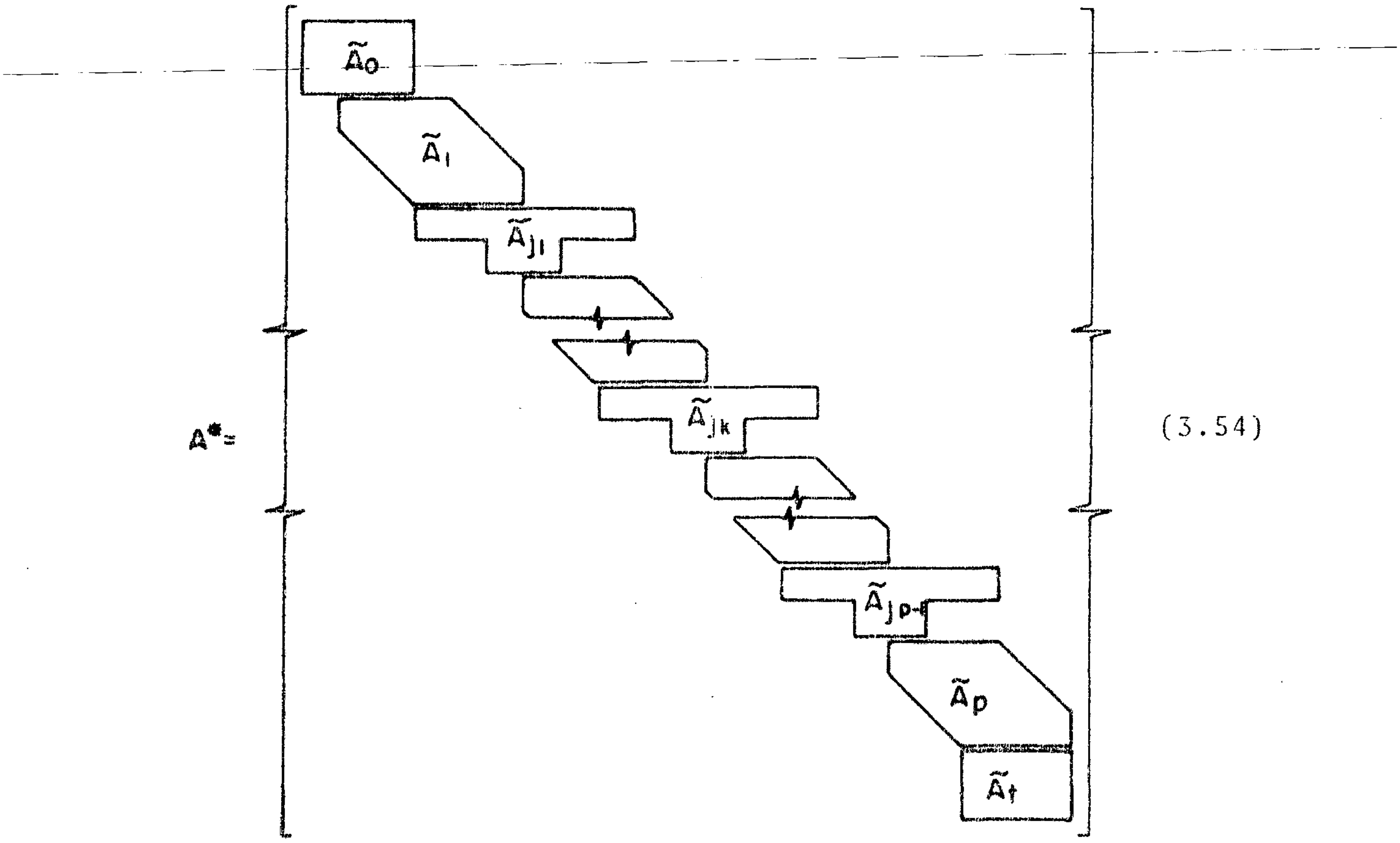
$$X_i = K_i - T_{i+1} X_{i+1} \qquad i = n-1,2 \quad (3.53b)$$

$$X_1 = K_1 - T_1 X_2 - T_2 X_3 \quad (3.53c)$$

Utilizando este procedimento, desenvolveu-se uma subrotina digital (COLERA), cujo fluxograma está apresentado no Apêndice A10.

3.4.3 - Problema com descontinuidade

O sistema linear do problema com descontinuidade, construído segundo o ítem 3.3.6, assume a seguinte forma:

$A^* =$ 

(3.54)

onde, conforme a nomenclatura adotada anteriormente, tem-se:

a) Nos contornos:

$$\tilde{A}_o = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \end{bmatrix} \qquad \tilde{A}_t = \begin{bmatrix} A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & A_{3,n-1} \\ A_{1,n} & A_{2,n} & A_{3,n} \end{bmatrix}$$

b) Nos pontos intermediários $k = 1,p$

$$\tilde{A}_k = \begin{bmatrix} A_{1,i-1} & A_{2,i-1} & A_{3,i-1} & \Theta & \Theta \\ \Theta & A_{1,i} & A_{2,i} & A_{3,i} & \Theta \\ \Theta & \Theta & A_{1,i+1} & A_{2,i+1} & A_{3,i+1} \end{bmatrix}$$

c) Nos pontos de descontinuidade

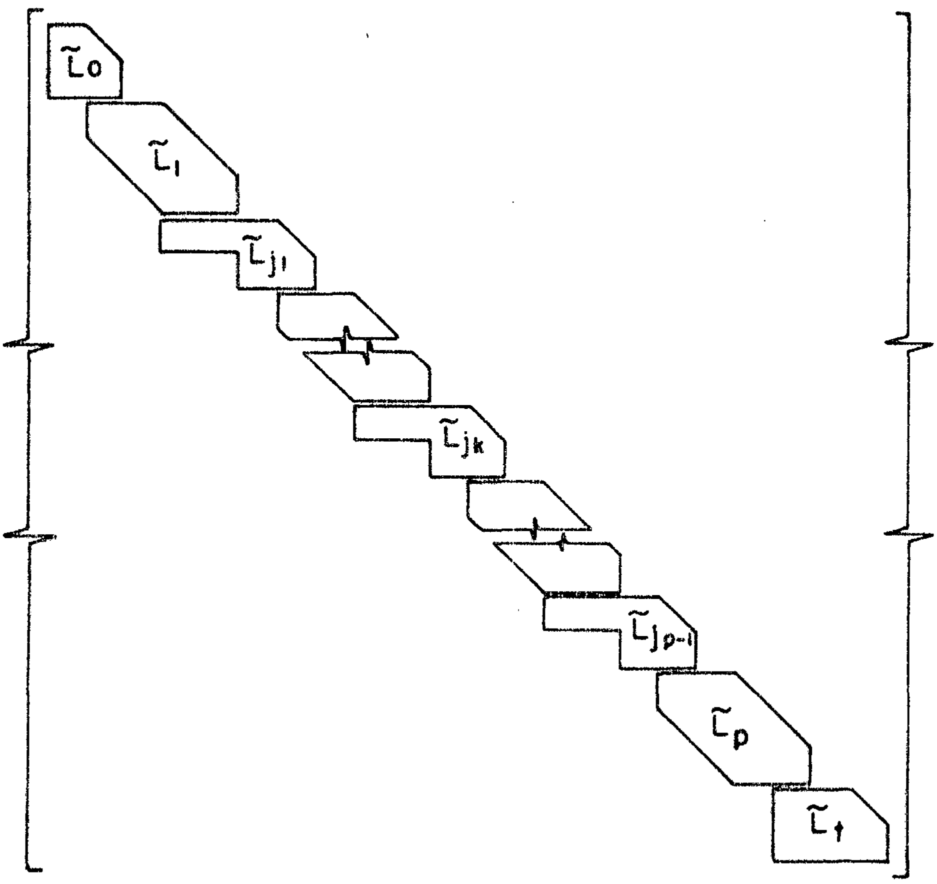
$$\tilde{A}_{j_k} = \begin{bmatrix} A_{1,j_k} & A_{2,j_k} & A_{3,j_k} & A_{4,j_k} & A_{5,j_k} & A_{6,j_k} \\ \Theta & \Theta & A_{1,j_k+1} & A_{2,j_k+1} & \Theta & \Theta \end{bmatrix}$$

com A_{ji} sendo matrizes 4 x 4.

Deve-se observar novamente que após a alteração feita no sistema prevendo a singularidade de A_{11} e A_{3n}, chega-se a outro semelhante ao (3.54), onde $A_{31} = A_{1n} = \Theta$.

Empregando o esquema de Cholesky para solucionar (3.54), chega-se às matrizes L* e T* com a forma

$L^* =$



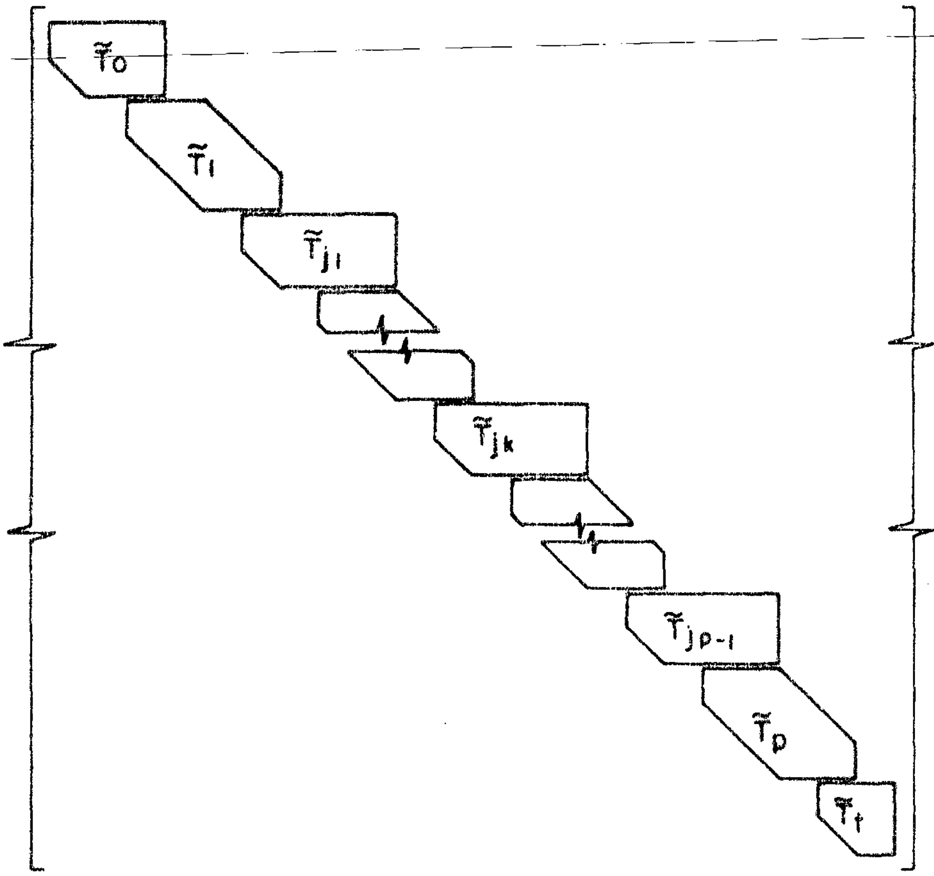
(3.55)

onde

$$\tilde{L}_o = \begin{bmatrix} L_{11} & \Theta \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L}_k = \begin{bmatrix} L_{1,i-1} & L_{2,i-1} & \Theta & \Theta \\ \Theta & L_{1,i} & L_{2,i} & \Theta \\ \Theta & \Theta & L_{1,i+1} & L_{2,i+1} \end{bmatrix} \qquad k = 1,\ p$$

$T^* =$



(3.56)

$$\tilde{L}_{j_k} = \begin{bmatrix} L_{1,j_k} & L_{2,j_k} & L_{3,j_k} & \Theta \\ \Theta & \Theta & L_{1,j_k+1} & L_{2,j_k+1} \end{bmatrix} \qquad k = 1,p-1$$

$$\tilde{L}_t = \begin{bmatrix} L_{1,n-1} & L_{2,n-1} & \Theta \\ L_{1,n} & L_{2,n} & L_{3,n} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{T}_o = \begin{bmatrix} I & T_{11} & T_{21} \\ \Theta & I & T_{12} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{T}_k = \begin{bmatrix} I & T_{1,i-1} & \Theta & \Theta \\ \Theta & I & T_{1,i} & \Theta \\ \Theta & \Theta & I & T_{1,i+1} \end{bmatrix} \qquad k = 1,\ p$$

$$\tilde{T}_{j_k} = \begin{bmatrix} I & T_{1,j_k} & T_{2,j_k} & T_{3,j_k} \\ \Theta & I & T_{1,j_k+1} & T_{2,j_k+1} \end{bmatrix} \qquad k = 1,p-1$$

$$\tilde{T}_t = \left[\begin{array}{c|c} I & T_{1,n-1} \\ \hline \Theta & I \end{array}\right]$$

com os L_{ji} e os T_{ji} sendo matrizes 4 x 4 determinadas segundo as expressões:

$$L_{1,i} = A_{1,i} \qquad i = 1,\ n \tag{3.57a}$$

$$L_{2,i} = A_{2,i} - L_{1,i}\ T_{1,i-1} \qquad i = 2,n-1,\quad i \neq j_k \tag{3.57b}$$

$$L_{2,j_k} = A_{2,j_k} - L_{1,j_k}\ T_{1,j_k-1} \qquad k = 1,p-1 \tag{3.57c}$$

$$L_{2,n} = A_{2,n} - L_{1,n}\ T_{1,n-2} \tag{3.57d}$$

$$L_{3,j_k} = A_{3,j_k} - L_{2,j_k}\ T_{1,j_k-1} \qquad k = 1,p-1 \tag{3.57e}$$

$$L_{3,n} = A_{3,n} - L_{2,n}\ T_{1,n-1} \tag{3.57f}$$

$$T_{11} = (A_{11})^{-1}\ A_{21} \tag{3.57g}$$

$$T_{12} = (L_{22})^{-1}\ (A_{32} - L_{12}\ T_{21}) \tag{3.57h}$$

$$T_{1,i} = (L_{2,i})^{-1}\ A_{3,i} \qquad i = 3,n-1;\ i \neq j_k;\ i \neq j_k+1 \tag{3.57i}$$
$$i \neq j_k+2$$

$$T_{1,j_k} = (L_{3,j_k})^{-1}\ A_{4,j_k} \qquad k = 1,p-1 \tag{3.57j}$$

$$T_{1,j_k+1} = -(L_{2,j_k+1})^{-1}(L_{1,j_k+1}\ T_{2,j_k}) \qquad k = 1,p-1 \tag{3.57ℓ}$$

$$T_{1,j_k+2} = (L_{2,j_k+2})^{-1}\ (A_{3,j_k+2} - L_{1,j_k+2}\ T_{2,j_k+1}) \qquad k = 1,p-1$$
$$\ldots(3.57m)$$

$$T_{21} = (A_{11})^{-1}\ A_{31} \tag{3.57n}$$

$$T_{2,j_k} = (L_{3,j_k})^{-1}\ A_{5,j_k} \tag{3.57o}$$

$$T_{2,j_k+1} = -(L_{2,j_k+1})^{-1}(L_{1,j_k+1}\ T_{3,j_k}) \tag{3.57p}$$

$$T_{3,j_k} = (L_{3,j_k})^{-1} A_{6,j_k} \tag{3.57q}$$

e os K_i sendo vetores de dimensão 4, calculados da seguinte maneira:

$$K_1 = (L_{11})^{-1} C_1 \tag{3.58a}$$

$$K_i = (L_{2,i})^{-1}\{C_i - L_{1,i} K_{i-1}\} \qquad i = 2,n-1;\ i \neq j_k \tag{3,58b}$$

$$K_{j_k} = (L_{3,j_k})^{-1}\{C_{j_k} - L_{1,j_k} K_{j_k-2} - L_{2,j_k} K_{j_k-1}\} \qquad k = 1,p-1 \quad \ldots(3.58c)$$

$$K_n = (L_{3,n})^{-1}\{C_n - L_{1,n} K_{n-2} - L_{2,n} K_{n-1}\} \tag{3.58d}$$

Determinadas as matrizes T_{ji} e os vetores K_i, os vetores solução X_i são dados por:

$$X_n = K_n \tag{3.59a}$$

$$X_i = K_i - T_{1,i} X_{i+1} \qquad i = n-1,2;\ i \neq j_k;\ i \neq j_k+1 \tag{3.59b}$$

$$X_{j_k+1} = K_{j_k+1} - T_{1,j_k+1} X_{j_k+2} - T_{2,j_k+2} X_{j_k+3} \tag{3.59c}$$

$$X_{j_k} = K_{j_k} - T_{1,j_k} X_{j_k+1} - T_{2,j_k} X_{j_k+2} - T_{3,j_k} X_{j_k+3} \tag{3.59d}$$

$$X_1 = K_1 - T_{11} X_2 - T_{21} X_3 \tag{3.59e}$$

Utilizando este método, desenvolveu-se uma subrotina digital (CORADE), cujo fluxograma está apresentado no Apêndice A10.

IV - RESULTADOS E CONCLUSÕES

4.1 - Introdução

Com o objetivo de testar a validade da formulação analítico-numérica desenvolvida nos capítulos anteriores, criando simultaneamente, uma ferramenta computacional que pudesse ser usada na análise numérica de problemas práticos, desenvolveram-se dois programas digitais em FORTRAN IV, CORTER e CORTERDE, para cascas sem e com descontinuidades, respectivamente, cuja descrição e fluxograma estão apresentados no apêndice A10.

Utilizando estes programa, resolveram-se alguns problemas de cascas de revolução, com solução analítica conhecida, para que se pudesse comparar os resultados e demonstrar a validade da solução numérica.

Neste capítulo serão apresentadas as soluções, comparações e conclusões obtidas desta forma.

4.2 - Casca cilíndrica de espessura constante, engastada, uniformemente aquecida.

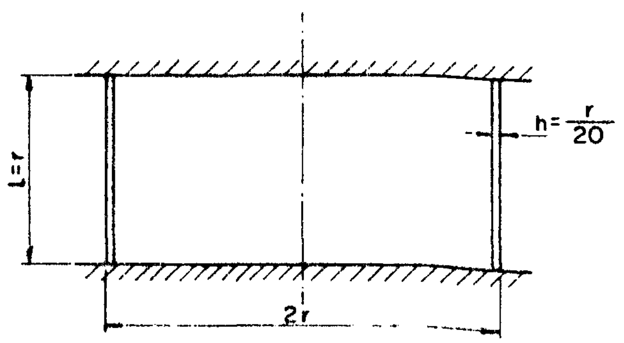


Figura 4.1

Dados: $E_s = E_\Theta = 2,06 \times 10^{11}$ N/m², $\nu_{s\Theta} = \nu_{\Theta s} = 0,3$

$\alpha_{ts} = \alpha_{t\Theta} = 10^{-5}$ 1/°C, h = 0,5 m, r = 10 m

$\ell = 10$ m, $T = 100^oC$

$\sigma_o = 4 \times 10^8$ N/m^2 (tensão de referência)
$h_o = 0{,}5$ m (espessura de referência)
$a = 10$ m (comprimento de referência)
$E_o = 2{,}06 \times 10^{11}$ N/m^2 (módulo de elasticidade de referência)
$T_o = 100^oC$ (temperatura de referência)
Espaçamento pivotal adimensionalizado em relação ao comprimento de referência $\Delta = 0{,}01$
Número de pontos $n_p = 101$

A referência [13], apresenta a solução analítica deste problema, considerando a "força térmica" na direção axial nula, ao longo da casca e nos contornos. A solução é fornecida em termos do deslocamento radial "w" e do momento meridional "M_s", calculados pelas seguintes expressões:

$$w = r\, \alpha_{t\Theta}\, T\, [1 - C_1 \cosh \mu x - C_2 \operatorname{senh} \mu x \operatorname{sen} \mu x] \qquad (4.1)$$

$$M_s = -2\mu^2 D_s\, r\, \alpha_{t\Theta}\, T\, [C_1 \operatorname{sen} \mu x \operatorname{senh} \mu x - C_2 \cos \mu x \cosh \mu x] \qquad \ldots(4.2)$$

onde x é o comprimento do meridiano medido a partir do centro da casca

$$\mu = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \nu_{s\Theta}\, \nu_{\Theta s})}{r^2\, h^2}}$$

$$D_s = \frac{E_s\, h^3}{12(1 - \nu_{s\Theta}\, \nu_{\Theta s})}$$

$$C_1 = \frac{\operatorname{sen} \delta \cosh \delta + \cos \delta \operatorname{senh} \delta}{\operatorname{senh} \delta \cosh \delta + \operatorname{sen} \delta \cos \delta}$$

$$C_2 = \frac{\operatorname{sen} \delta \cosh \delta - \cos \delta \operatorname{senh} \delta}{\operatorname{senh} \delta \cosh \delta + \operatorname{sen} \delta \cos \delta} \qquad \text{com } \delta = \frac{\mu\, \ell}{2}$$

Objetivando testar o método de solução adotado neste trabalho, resolveu-se o problema numericamente através do programa CORTER, introduzindo as simplificações utilizadas na obtenção da solução analítica.

Estas simplificações foram introduzidas tomando como condições de contorno $N_s = v = w = \phi_s = 0$, ao invés das condições de engastamento $u = v = w = \phi_s = 0$, e tornando $B_1 = 0$ (equação (2.10)) para que a "força térmica" na direção axial (B_1 p_T) resultasse nula ao longo da casca. Deve-se notar que esta última simplificação, implica em considerar o coeficiente de dilatação térmica na direção axial nulo ($\alpha_{ts} = 0$), e o coeficiente de Poisson $\nu_{\Theta s}$ igual a zero para fins de determinação da "força térmica".

Na tabela 4.1 estão apresentados os resultados numéricos obtidos utilizando-se as expressões (4.1) e (4.2), os determinados através do programa CORTER considerando-se as simplificações, bem como o erro da solução numérica (CORTER) em relação à solução analítica, em função de $\xi = s/a$ (comprimento do meridiano adimensionalizado em relação ao comprimento de referência), medido a partir da extremidade da casca. Devido à simetria do problema, apresentam-se os resultados somente até a metade da casca, ($\xi = 0,5$).

TABELA 4.1 - Resultados da solução com simplificações

ξ	$w/r\ \alpha_{t\Theta}\ T$			$M_s/2\mu^2\ D_s\ r\ \alpha_{t\Theta}\ T$		
	Analítica	CORTER	Erro relat. (%)	Analítica	CORTER	Erro rel. (%)
0	0	0	0	-1,00652	-1,01140	0,48
0,05	0,06886	0,06759	1,84	-0,51454	-0,51803	0,68
0,10	0,22410	0,22282	0,57	-0,17529	-0,17759	1,31
0,15	0,41045	0,40908	0,33	0,03617	0,03479	3,81
0,20	0,59215	0,59091	0,21	0,15015	0,14946	0,46
0,25	0,74998	0,74894	0,14	0,19640	0,19620	0,10
0,30	0,87593	0,87512	0,09	0,20090	0,20104	0,07
0,35	0,96897	0,96837	0,06	0,18445	0,18480	0,02
0,40	1,03160	1,03117	0,04	0,16244	0,16292	0,03
0,45	1,06732	1,06702	0,03	0,14529	0,14584	0,04
0,50	0,07890	1,07863	0,02	0,13893	0,13951	0,04

A tabela 4.2 mostra os resultados numéricos determinados através do programa CORTER sem que fossem incluídas as simplificações realizadas quando da obtenção da solução analítica.

TABELA 4.2 - Resultados da solução sem simplificações

ξ	$w/r\ \alpha_{t\Theta}\ T$	$M_s/2\mu^2\ D_s\ r\ \alpha_{t\Theta}\ T$
0	0	-1,35790
0,05	0,09077	-0,69566
0,10	0,29923	-0,23851
0,15	0,54938	0,04671
0,20	0,79355	0,20071
0,25	1,00580	0,26349
0,30	1,17520	0,26998
0,35	1,30041	0,24818
0,40	1,38480	0,21880
0,45	1,43290	0,19586
0,50	1,44850	0,18734

Os resultados das tabelas 4.1 e 4.2 encontram-se apresentados graficamente na figura 4.2.

Utilizando o programa CORTER, resolveu-se ainda o problema para harmônicos de ordem superior (n = 1,2,5,10), cujos resultados estão apresentados na figura 4.3.

Pela tabela 4.1, verifica-se um erro máximo de 1,84% no valor do deslocamento, e de 3,81% no do momento meridional, quando se compara a solução numérica com a analítica, devendo-se observar que estes erros ocorrem para os menores valores das respectivas variáveis, e que para os demais, principalmente para os máximos, o erro é bem menor.

Considerando que para valores muito pequenos a precisão numérica computacional decresce, e que praticamente o interesse concentra-se mais nos valores mais elevados, pode-se concluir que a precisão numérica da solução é ótima.

Observando a tabela 4.2 e os gráficos da figura 4.2, verifica-se que as simplificações adotadas na formulação analítica implicam em valores aproximadamente 25% menores. Desta forma, po

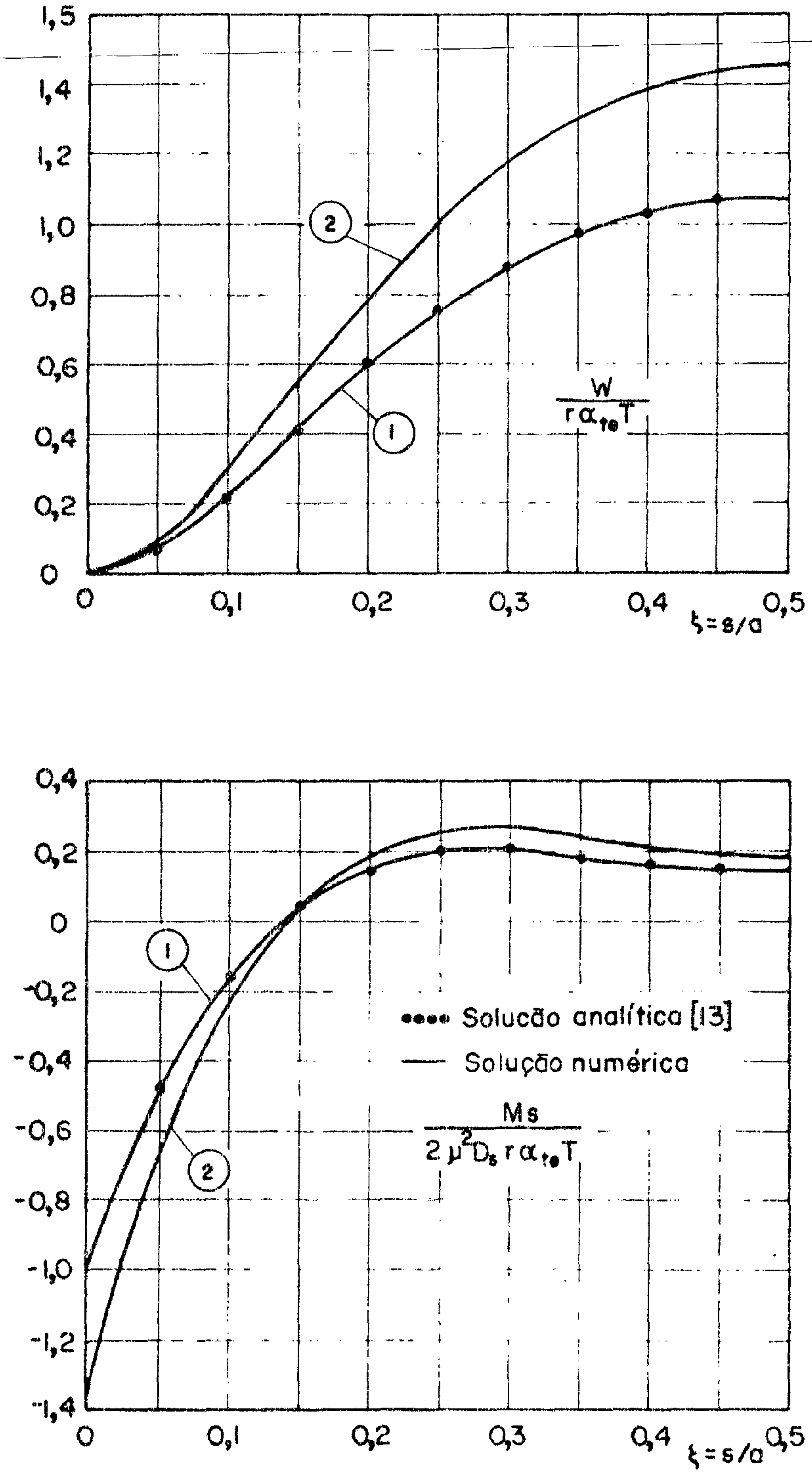


Fig. 4.2 - Deslocamento radial e momento meridional com simplificações (1) e sem simplificações (2).

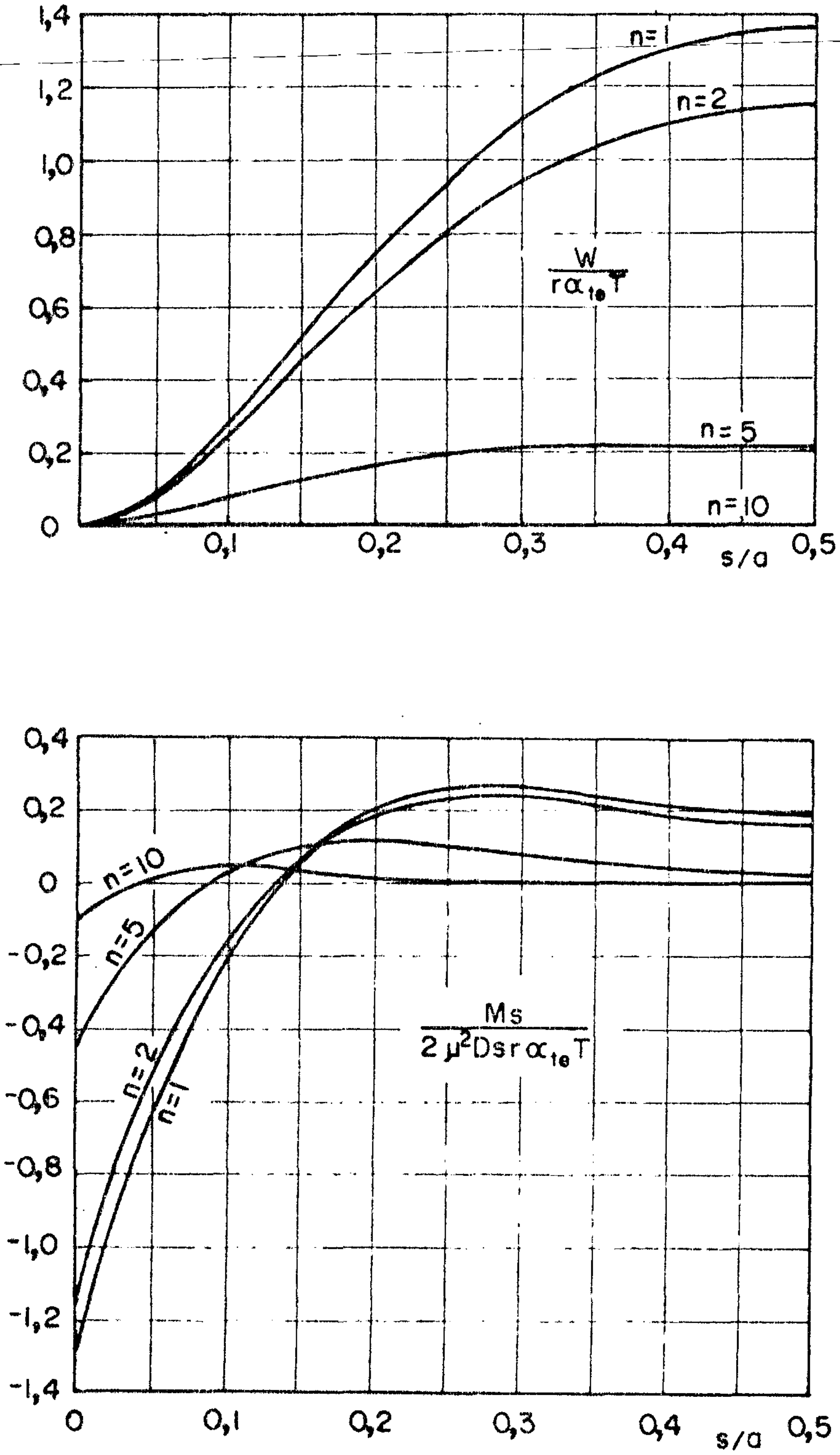


Fig. 4.3 - Deslocamento radial e momento meridional para harmônicos de ordem superior.

de-se concluir que desprezar o coeficiente de dilatação térmica na direção axial, o coeficiente de Poisson $\nu_{\Theta s}$ para efeito de determinação da "força térmica", e a "força térmica" nos contornos, não são boas hipóteses para a solução deste problema.

Pela figura 4.3 observa-se a rápida convergência dos coeficientes de Fourier em problemas com harmônicos de ordem superior.

4.3 - Extremidade livre de uma casca cilíndrica submetida a uma distribuição linear de temperatura, ao longo da espessura

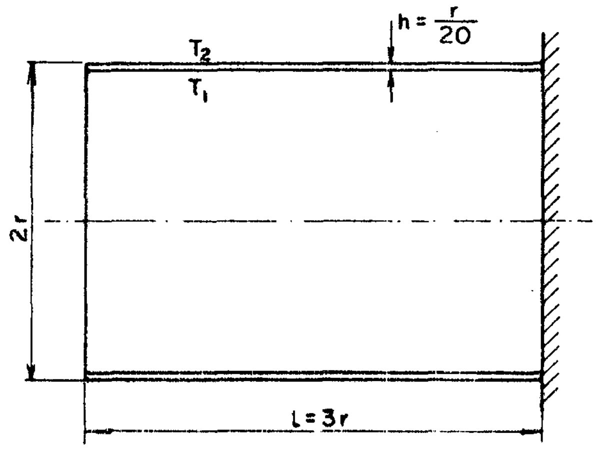


Figura 4.4

Dados: $E_s = E_\Theta = E = 2 \times 10^{11}$ N/m^2, $\nu_{s\Theta} = \nu_{\Theta s} = \nu = 0,25$

$\alpha_{ts} = \alpha_{t\Theta} = \alpha = 6 \times 10^{-5}$ 1/^{o}C, $h = 0,5$ m, $r = 10$ m

$\ell = 30$ m, $T_1 = -50^o$C (temperatura interna)

$T_2 = 50^o$C (temperatura externa)

$\sigma_o = 4 \times 10^8$ N/m^2, $h_o = 0,5$ m, $a = 10$ m

$E_o = 2 \times 10^{11}$ N/m^2, $T_o = 100^o$C

A solução analítica deste problema encontra-se desenvolvida na referência [12], cuja formulação resulta numa equação diferencial análoga à de uma viga sobre apoios elásticos, com momentos m_T atuando nas extremidades:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\,\mu^4\, w = 0 \tag{4.3}$$

com

$$m_T = \frac{E\,h^3}{12(1-\nu)}\,\frac{\alpha\Delta T}{h}$$

sendo o momento térmico. e onde

w é o deslocamento radial

x é o comprimento ao longo do meridiano medido a partir da extremidade

$$\mu^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{r^2\,h^2}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1$$

A solução geral da equação (4.3) pode ser dada por:

$$w = e^{\mu x}(C_1 \cos \mu x + C_2 \operatorname{sen} \mu x) + e^{-\mu x}(C_3 \cos \mu x + C_4 \operatorname{sen} \mu x) \tag{4.4}$$

onde C_i, $i = 1,4$ são constantes determinadas pelas condições de contorno.

Segundo a mesma referência, considerando que o interesse se concentra na extremidade, que a casca é suficientemente longa, e que, pela analogia, o efeito do momento aplicado à borda livre da viga sobre apoios elásticos desaparece ao longo do comprimento do meridiano, as constantes C_1 e C_2 podem ser tomadas iguais a zero. Desta forma, a solução geral fica sendo

$$w = e^{-\mu x}(C_3 \cos \mu x + C_4 \operatorname{sen} \mu x) \tag{4.5}$$

As constantes C_3 e C_4 são determinadas utilizando as expressões [12]

$$M_s = \frac{E\,h^3}{12(1-\nu^2)}\,\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{E\,h^3}{12(1-\nu)}\,\frac{\alpha\Delta T}{h} \tag{4.6}$$

$$Q_s = \frac{E\ h^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{d^3 w}{dx^3} \tag{4.7}$$

e aplicando as condições de contorno para $x = 0$ ($M_s = 0$ e $Q_s = 0$)

Assim

$$C_3 = -C_4 = \frac{1 + \nu}{2\mu^2} \frac{\alpha \Delta T}{h} \tag{4.8}$$

e as expressões para o deslocamento radial e o momento meridional ficam sendo:

$$w = \frac{1 + \nu}{2\mu^2} \frac{\alpha \Delta T}{h} e^{-\mu x} (\cos \mu x - \operatorname{sen} \mu x) \tag{4.9}$$

$$M_s = \frac{E\ h^3}{12(1 - \nu)} \frac{\alpha \Delta T}{h} e^{-\mu x} (\operatorname{sen} \mu x + \cos \mu x - 1) \tag{4.10}$$

Substituindo os dados supracitados nas equações (4.9) e (4.10), obtém-se os valores numéricos para a solução analítica apresentados nas tabelas 4.3 e 4.4.

Para resolver este problema numericamente, tomou-se uma casca com um comprimento tal que as condições no contorno não livre não influissem nos resultados próximos à extremidade livre. Além disso, tomou-se o cuidado de escolher uma condição de contorno não livre, tal que as variáveis tivessem a mesma tendência dos pontos longe da extremidade livre (ou seja, $w \to 0$ e $M_s \to m_T$). Através destes critérios foram escolhidas condições de engastamento.

Os resultados obtidos pelo programa CORTER para a configuração geométrica da figura 4.4, e os dados supracitados, estão apresentados nas tabelas 4.3 e 4.4, para espaçamentos pivotais $\Delta_1 = 0{,}02$ ($n_p = 151$) e $\Delta_2 = 0{,}01$ ($n_p = 301$).

As tabelas 4.3 e 4.4 indicam ainda o erro da solução numérica (CORTER) em relação à analítica.

TABELA 4.3 - Deslocamento radial adimensionalizado w/k_1

$$k_1 = \frac{1+\nu}{2\mu^2}\,\frac{\alpha\Delta T}{h}$$

ξ	Analítica	CORTER			
		$\Delta_1 = 0{,}02$	Erro rel.(%)	$\Delta_2 = 0{,}01$	Erro rel.(%)
0	-1,0	-1,00999	1,00	-1,00252	0,25
0,1	-0,34470	-0,35102	1,83	-0,34627	0,46
0,2	0,02097	0,01745	16,78	0,02011	4,10
0,3	0,17750	0,17589	0,91	0,17713	0,21
0,4	0,20698	0,20649	0,24	0,20689	0,04
0,5	0,17388	0,17396	0,06	0,17393	0,03
0,6	0,12056	0,12085	0,24	0,12068	0,10
0,7	0,07020	0,07050	0,43	0,07032	0,17
0,8	0,03237	0,03258	0,65	0,03247	0,31
0,9	0,00848	0,00857	1,06	0,00856	0,94
1,0	-0,00394	-0,00395	0,25	-0,00388	1,55
1,1	-0,00854	-0,00863	1,05	-0,00848	0,70
1,2	-0,00866	-0,00861	1,73	-0,00862	0,46
1,3	-0,00679	-0,00697	2,65	-0,00675	0,59
1,4	-0,00445	-0,00464	4,27	-0,00442	0,67
1,5	-0,00243	-0,00262	7,82	-0,00240	1,23

A figura 4.5 mostra graficamente os resultados das tabelas 4.3 e 4.4.

A análise dos resultados apresentados nas tabelas 4.3 e 4.4 e na figura 4.5, mostra novamente que a precisão da solução numérica obtida pelo programa CORTER é bastante boa. Como no problema anterior, os maiores erros ocorrem para os pequenos valores das variáveis.

Observa-se ainda que o erro relativo para o espaçamento pivotal $\Delta_1 = 0{,}02$ é consideravelmente maior do que para $\Delta_2 = 0{,}01$. Isto acontece devido à ordem do erro ser $\Theta\Delta^2$, e portanto $\Theta\Delta_1^2 = 4\ \Theta\Delta_2^2$. Segundo este raciocínio, o erro para $\Delta_1 = 0{,}02$ deveria ser quatro vezes maior do que para $\Delta_2 = 0{,}01$, o que não é completamente verdadeiro, já que a utilização de um espaçamento pivotal menor implica num aumento do número de pontos, o que

TABELA 4.4 - Momento meridional adimensionalizado M_s/k_2,

$$k_2 = \frac{E\ h^3}{12(1-\nu)}\ \frac{\alpha\Delta T}{h}$$

ξ	Analítica	CORTER			
		$\Delta_1 = 0{,}02$	Erro rel.(%)	$\Delta_2 = 0{,}01$	Erro rel.(%)
0	0	0	-	0	-
0,1	-0,12656	-0,12431	1,78	-0,12598	0,46
0,2	-0,37689	-0,37407	0,75	-0,37615	0,20
0,3	-0,62603	-0,62350	0,40	-0,62535	0,11
0,4	-0,81915	-0,81720	0,24	-0,81862	0,06
0,5	-0,94457	-0,94327	0,14	-0,94417	0,04
0,6	-1,01221	-1,01145	0,08	-1,01197	0,02
0,7	-1,03931	-1,03897	0,03	-1,03920	0,01
0,8	-1,04250	-1,04235	0,01	-1,04242	0,01
0,9	-1,03444	-1,03447	0,00	-1,03440	0,00
1,0	-1,02322	-1,02330	0,01	-1,02322	0,00
1,1	-1,01310	-1,01317	0,01	-1,01310	0,00
1,2	-1,00572	-1,00575	0,00	-1,00575	0,00
1,3	-1,00119	-1,00125	0,01	-1,00117	0,00
1,4	-0,99893	-0,99892	0,00	-0,99892	0,00
1,5	-0,99817	-0,99817	0,00	-0,99817	0,00

faz com que o sistema de equações seja maior, e que a solução necessite de um maior número de operações, o que por sua vez provoca um aumento no erro de truncamento.

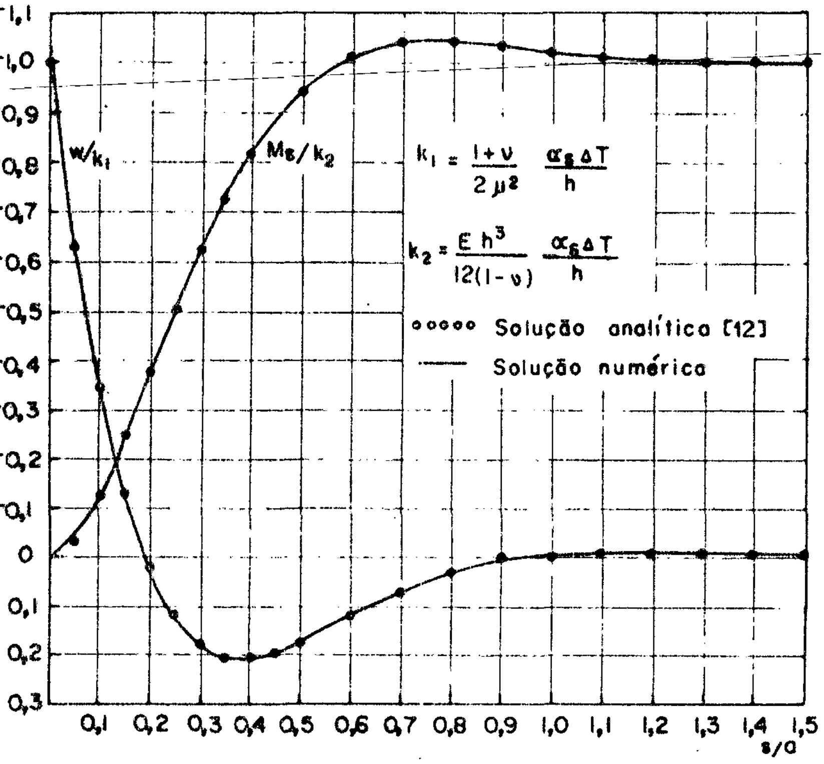


Fig. 4.5 - Deslocamento radial e momento meridional na extremidade de uma casca cilíndrica com "momento térmico".

4.4 - Conexão de uma casca cilíndrica com uma tampa esférica submetida à pressão interna.

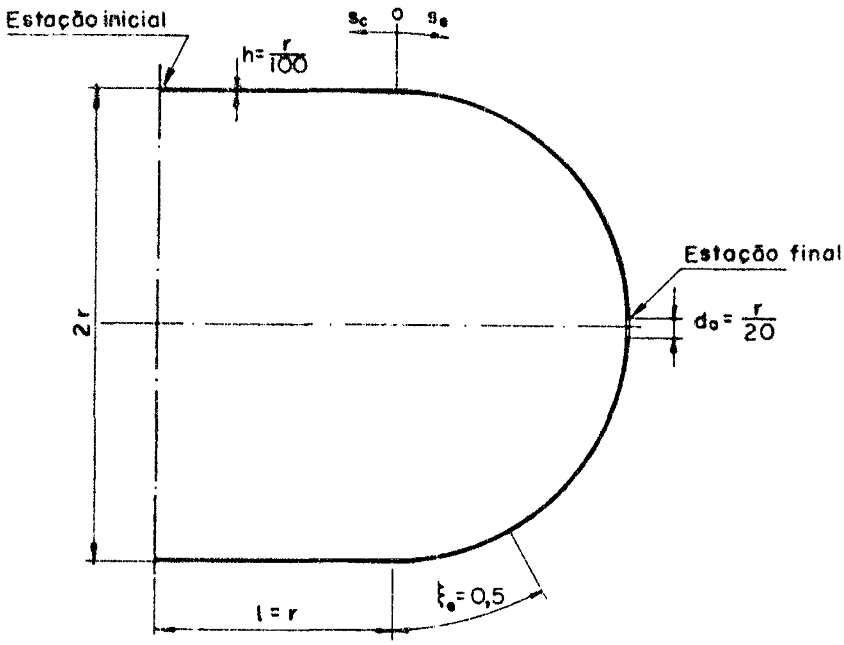


Figura 4.6

Dados: $E_s = E = E = 2{,}06 \times 10^{11}\ N/m^2$, $\nu_{s\Theta} = \nu_{\Theta s} = \nu = 0{,}3$

$\alpha_{ts} = \alpha_{t\Theta} = 10^{-5}\ 1/^{o}C$, $h = 0{,}1\ m$, $r = 10\ m$, $d_a = 0{,}5\ m$

$p = 1{,}0 \times 10^{7}\ N/m^2$ (pressão interna), $\chi = 0$

$\sigma_o = 4 \times 10^{8}\ N/m^2$, $h_o = 0{,}1\ m$, $a = 10\ m$

$E_o = 2{,}06 \times 10^{11}\ N/m^2$, $T_o = 100^{o}C$

A solução analítica deste problema encontra-se desenvolvida na referência [10], sendo apresentada em termos do comportamento do momento meridional M_s e da força tangencial N_Θ nas proximidades da descontinuidade (conexão cilindro-esfera). Considerando o sentido das tensões resultantes indicado na figura 2.1, tem-se:

a) Para a casca cilíndrica

$$M_s = \frac{p\ r^2}{8\ \mu^2}\ e^{-\mu x/r}\ \text{sen}\ \frac{\mu x}{r} \qquad (4.11)$$

$$N_\Theta = p\ r\left(1 - \frac{1}{4}\ e^{-\mu x/r}\cos\frac{\mu x}{r}\right) \qquad (4.12)$$

onde $\mu^4 = 3(1-\nu)\ \frac{r^2}{h^2} - \frac{\nu^2}{4}$

x é a distância ao longo do meridiano, a partir da conexão

b) Para a casca esférica

$$M_s = -\ \frac{p\ r^2}{8\ \mu^2}\ e^{-\mu\omega}\ \text{sen}\ \mu\omega \qquad (4.13)$$

$$N_\Theta = p\ r\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ e^{-\mu\omega}\cos\mu\omega\right) \qquad (4.14)$$

com ω sendo o ângulo, em radianos, medido a partir da conexão.

Substituindo as propriedades fornecidas nas expressões (4.12) a (4.14), obtêm-se os valores numéricos apresentados nas tabelas 4.5 e 4.6.

O problema foi resolvido numericamente utilizando-se o programa CORTERDE, tomando como estação inicial o começo da casca cilíndrica, e como última estação a abertura na casca esférica. Na estação inicial consideraram-se as condições de simetria, e na final, contorno livre, ou seja:

$$\hat{N}_{s\Theta n} = \hat{Q}_{sn} = \phi_s = u_n = 0 \quad \text{(1a. estação)}$$

$$N_{sn} = \hat{N}_{s\Theta n} = \hat{Q}_{sn} = M_{sn} = 0 \quad \text{(última estação)}$$

A simetria foi utilizada para que, mesmo com a casca cilíndrica sendo curta, as condições de contorno nesta estação não viessem a influir no comportamento das variáveis nas proximidades da região de transição.

A casca cilíndrica foi dividida em 100 espaços pivotais, portanto $n_p = 101$, e a casca esférica em 148 espaços pivotais, ($n_p = 149$). Com isto o espaçamento pivotal da casca cilíndrica ficou sendo $\Delta_c = 0{,}01$, e o da casca esférica $\Delta_e \simeq 0{,}01$.

Os resultados obtidos desta maneira encontram-se apresentados nas tabelas 4.5 e 4.6, onde ξ_c e ξ_e são os comprimentos dos meridianos das cascas cilíndrica e esférica, respectivamente, adimensionalizados em relação ao comprimento de referência, medidos a partir da conexão.

O erro indicado nestas tabelas é o da solução numérica (CORTERDE) em relação à analítica.

A figura 4.7 mostra graficamente os resultados apresentados nas tabelas 4.5 e 4.6.

A análise dos resultados indica que:

a. A formulação analítica do problema nos pontos de descontinuidade e o processo de solução utilizado no programa CORTERDE funcionam bem para o problema em questão;

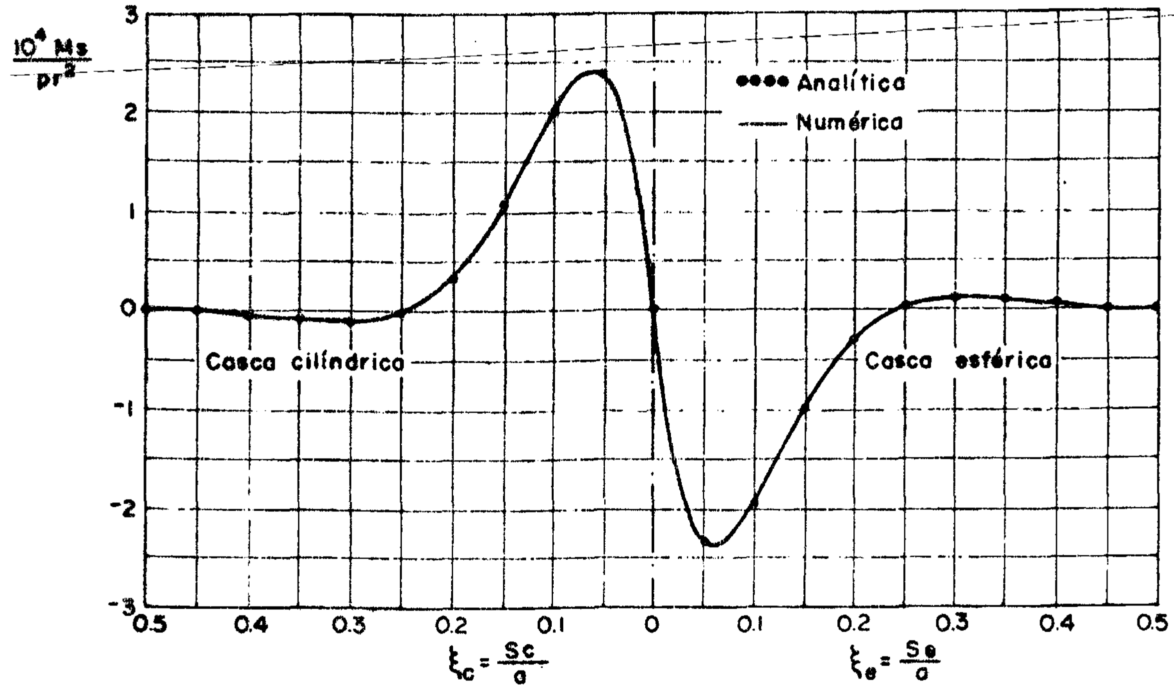
b. Como nos problemas analisados anteriormente, os maiores erros relativos ocorrem nos pequenos valores das variáveis;

TABELA 4.5 - Momento meridional M_s e força tangencial N_Θ na casca cilíndrica.

ξ_c	M_s/pr^2			N_Θ/pr		
	Analítica	CORTERDE	Erro. rel.(%)	Analítica	CORTERDE	Erro rel. (%)
0	0	0	-	0,7500	0,7530	0,41
0,05	$2,3845 \times 10^{-4}$	$2,3515 \times 10^{-4}$	1,38	0,8948	0,8962	0,16
0,10	$2,0075 \times 10^{-4}$	$1,9785 \times 10^{-4}$	1,44	0,9805	0,9807	0,02
0,15	$1,0307 \times 10^{-4}$	$1,0166 \times 10^{-4}$	1,37	1,0127	1,0124	0,03
0,20	$3,1258 \times 10^{-5}$	$3,0991 \times 10^{-5}$	0,85	1,0161	1,0158	0,03
0,25	$-2,1863 \times 10^{-6}$	$-1,9370 \times 10^{-6}$	11,40	1,0100	1,0099	0,01
0,30	$-1,0485 \times 10^{-5}$	$-1,0154 \times 10^{-5}$	3,15	1,0040	1,0039	0,01
0,35	$-8,2225 \times 10^{-6}$	$-7,9809 \times 10^{-6}$	2,94	1,0006	1,0006	0,00
0,40	$-4,0229 \times 10^{-6}$	$-3,8849 \times 10^{-6}$	3,43	0,9994	0,9994	0,00
0,45	$-1,1131 \times 10^{-6}$	$-1,0373 \times 10^{-6}$	6,81	0,9993	0,9993	0,00
0,50	$1,7540 \times 10^{-7}$	$2,2826 \times 10^{-7}$	30,14	0,9996	0,9996	0,00

TABELA 4.6 - Momento meridional M_s e força tangencial N_Θ na casca esférica.

ξ_e	M_s/pr^2			N_Θ/pr		
	Analítica	CORTERDE	Erro rel.(%)	Analítica	CORTERDE	Erro rel. (%)
0	0	0	-	0,7500	0,7530	0,41
0,05	$-2{,}3845 \times 10^{-4}$	$-2{,}4352 \times 10^{-4}$	1,65	0,6052	0,6095	0,72
0,10	$-2{,}0075 \times 10^{-4}$	$-1{,}9719 \times 10^{-4}$	1,77	0,5195	0,5249	1,04
0,15	$-1{,}0307 \times 10^{-4}$	$-1{,}0137 \times 10^{-4}$	1,65	0,4873	0,4930	1,18
0,20	$-3{,}1258 \times 10^{-5}$	$-3{,}0976 \times 10^{-5}$	0,90	0,4839	0,4894	1,14
0,25	$2{,}1863 \times 10^{-6}$	$1{,}9083 \times 10^{-6}$	12,72	0,4899	0,4952	1,07
0,30	$1{,}0485 \times 10^{-5}$	$1{,}0209 \times 10^{-5}$	2,63	0,4960	0,5011	1,02
0,35	$8{,}2225 \times 10^{-6}$	$8{,}1017 \times 10^{-6}$	1,47	0,4994	0,5045	0,87
0,40	$4{,}0229 \times 10^{-6}$	$4{,}0023 \times 10^{-6}$	0,51	0,5006	0,5058	1,03
0,45	$1{,}1131 \times 10^{-6}$	$1{,}1351 \times 10^{-6}$	1,98	0,5007	0,5060	1,07
0,50	$.1{,}7540 \times 10^{-7}$	$-1{,}3809 \times 10^{-7}$	21,27	0,5004	0,5059	1,11



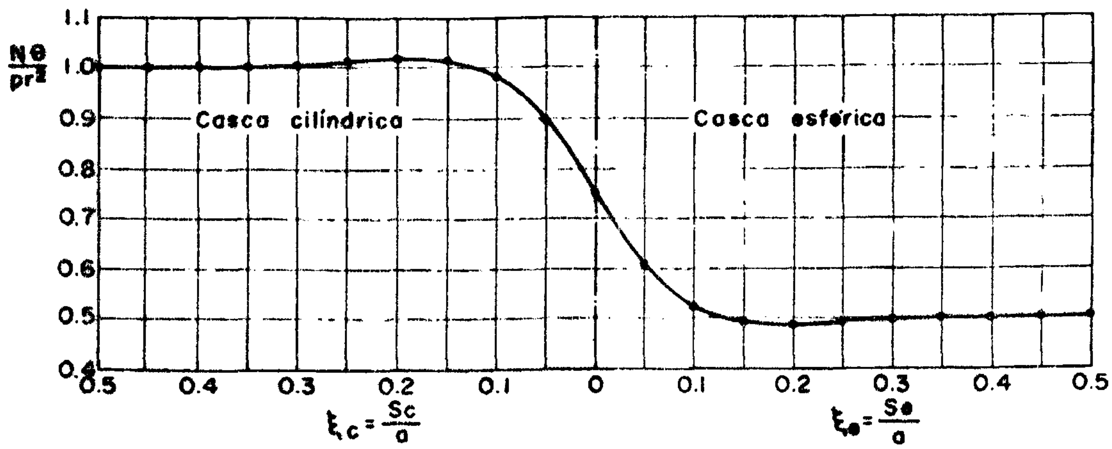


Fig. 4.7 - Momento meridional M_s e força tangencial N_Θ.

c. O erro relativo na variável N_Θ é bem menor, em alguns pontos, do que na variável M_s.

Este último aspecto merece uma análise mais detalhada, já que a tensão N_Θ é calculada em função das grandezas fundamentais (u, v, w, M_s) e suas derivadas, necessitando portanto de mais operações numéricas, o que implicaria num aumento do erro, que no entanto não ocorre.

Uma explicação para este fenômeno é que os erros relativamente grandes que ocorrem em alguns pontos para as grandezas fundamentais são erros locais, já que para uma combinação destas grandezas e de suas derivadas (calculadas numericamente utilizando-se o valor da variável em três pontos), eles desaparecem.

Pode-se concluir então que a precisão da solução numérica como um todo é bastante boa, apesar dos erros que ocorrem em alguns pontos.

Com o objetivo de testar a solução numérica para problemas onde $\chi \neq 0$, resolveu-se o problema indicado na figura 4.8 utilizando os mesmos dados do exemplo anterior.

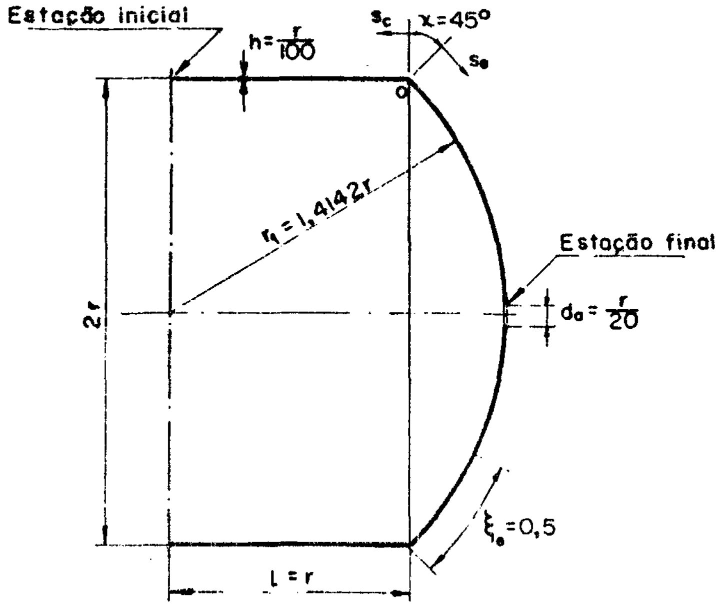


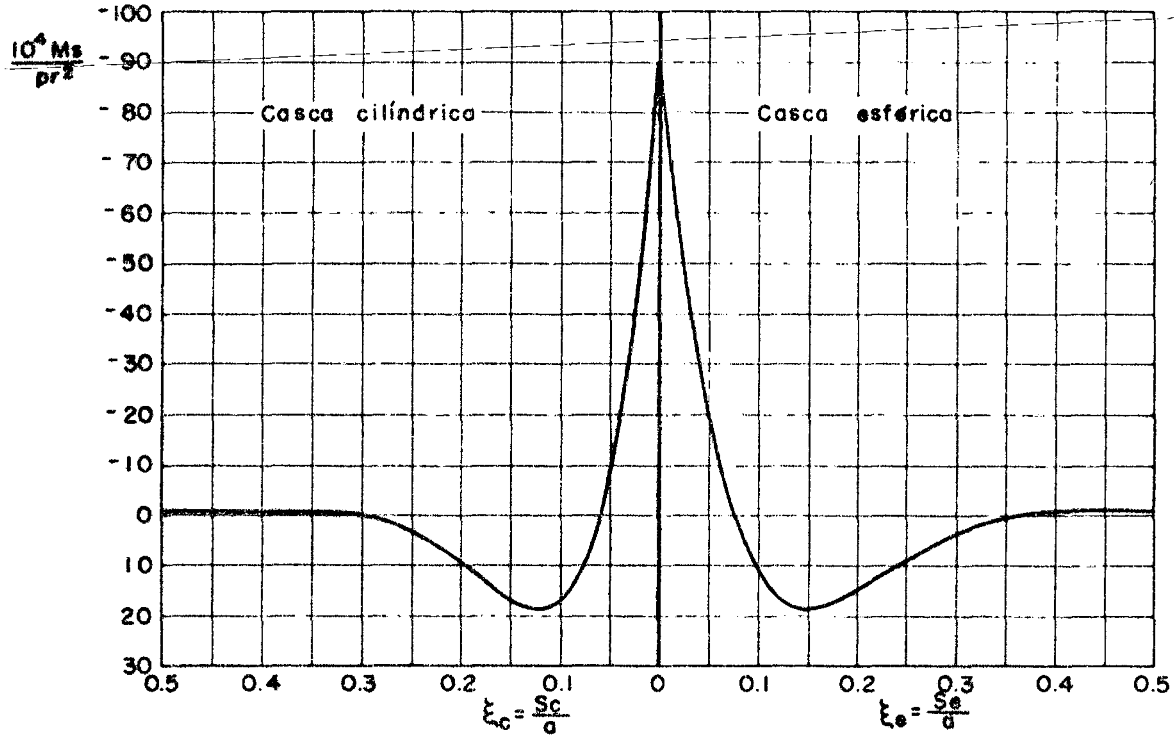
Figura 4.8

A referência [10] apresenta graficamente os resultados da solução analítica deste problema, fornecendo ainda o valor numérico do momento meridional máximo ($M_s = 8{,}92 \times 10^{-3}\ pr^2$).

A solução numérica foi obtida pelo programa CORTERDE, utilizando-se as mesmas condições de contorno do problema anterior.

A casca cilíndrica foi dividida em 100 espaços pivotais ($n_p = 101$) e a casca esférica em 148 ($n_p = 149$), ficando desta forma a casca cilíndrica com um espaçamento pivotal $\Delta_c = 0{,}01$, e a casca esférica com $\Delta_e \approx 0{,}007$.

Os resultados assim obtidos estão indicados na figura 4.9, e o momento meridional máximo encontrado foi $M_s = 8{,}90 \times 10^{-3}\ pr^2$, com um erro de 0,22% em relação à solução analítica.



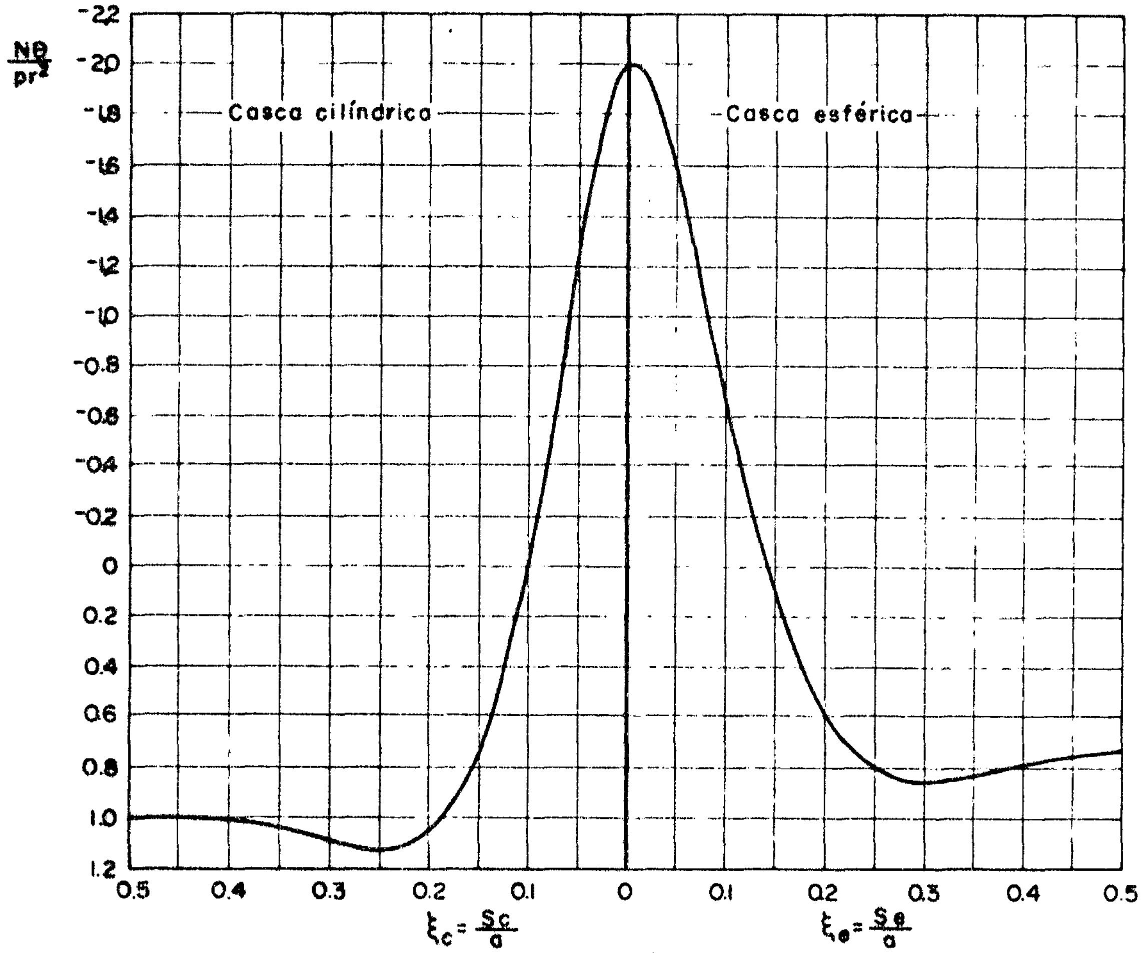


Fig. 4.9 - Momento meridional M_s e força tangencial N_Θ para $\chi = 45^o$.

Como o valor da variável M_s, num determinado ponto, é acoplado aos demais valores e às demais variáveis, e como já se verificou que o processo de solução funciona para $\chi = 0$, pelos resultados obtidos, pode-se concluir que a formulação adotada é também boa para $\chi \neq 0$.

4.5 - Casca esférica com um bocal cilíndrico radial submetida a uma distribuição linear de temperatura ao longo de sua espessura.

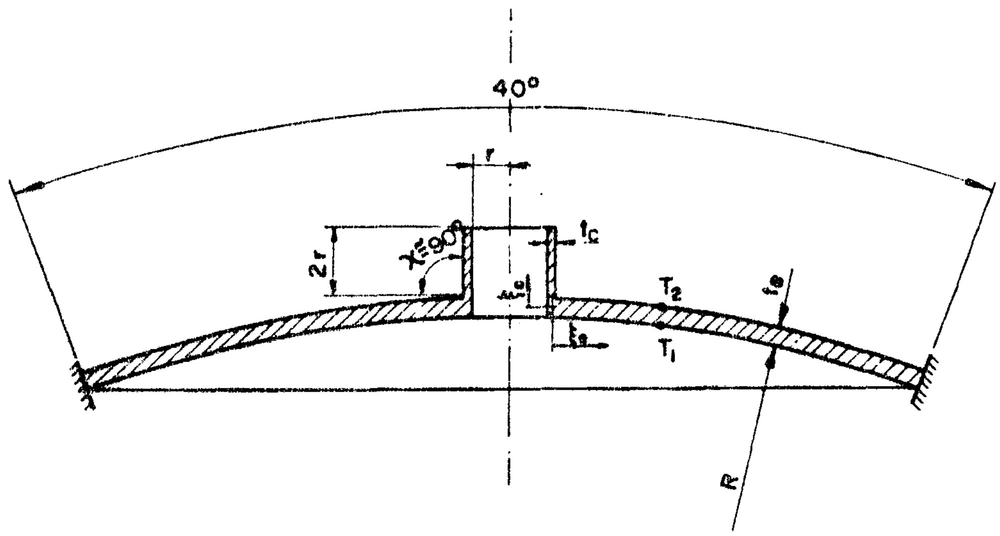


Figura 4.10

Dados: $E_s = E_\Theta = E = 2{,}06 \times 10^{11}$ N/m^2

$\nu_{s\Theta} = \nu_{\Theta s} = \nu = 0{,}3$; $\alpha_{ts} = \alpha_{t\Theta} = \alpha = 10^{-5}$ 1/^{o}C

$t_e = 0{,}025$ m (espessura da esfera)
$t_c = 0{,}0125$ m (espessura do cilindro)

$R = 4$ m; $r = 0{,}125$ m; $\chi = 90^{o}$

$T_1 = -50^{o}$C (temperatura interna de toda a casca, inclusive bocal)

$T_2 = 50^{o}$C (temperatura externa de toda a casca, inclusive bocal)

$$\sigma_o = 4 \times 10^8 \ N/m^2; \quad h_o = 0{,}025 \ m; \quad a = 1 \ m$$

$$E_o = 2{,}06 \times 10^{11} \ N/m^2; \quad T_o = 50^oC$$

A inclusão deste problema no presente trabalho, é feita apenas com o intuito de mostrar uma aplicação do programa CORTERDE, já que os resultados da solução numérica não são comparados com os de outra.

A estação inicial é tomada no engastamento da casca esférica, e a final no contorno livre da casca cilíndrica.

A casca esférica foi dividida em 127 espaços pivotais (n_p = 128), resultando um espaçamento pivotal, adimensionalizado em relação ao comprimento de referência, $\Delta_e \simeq 0{,}01$, e a casca cilíndrica foi dividida em 100 espaços pivotais (n_p = 101), resultando $\Delta_c = 2{,}5 \times 10^{-3}$.

A solução deste problema encontra-se apresentada em termos do deslocamento radial w, e dos momentos resultantes M_s e M_Θ para a casca cilíndrica, e em termos de w, N_s, N_Θ, M_s e M_Θ para a casca esférica nas figuras 4.11 a 4.14.

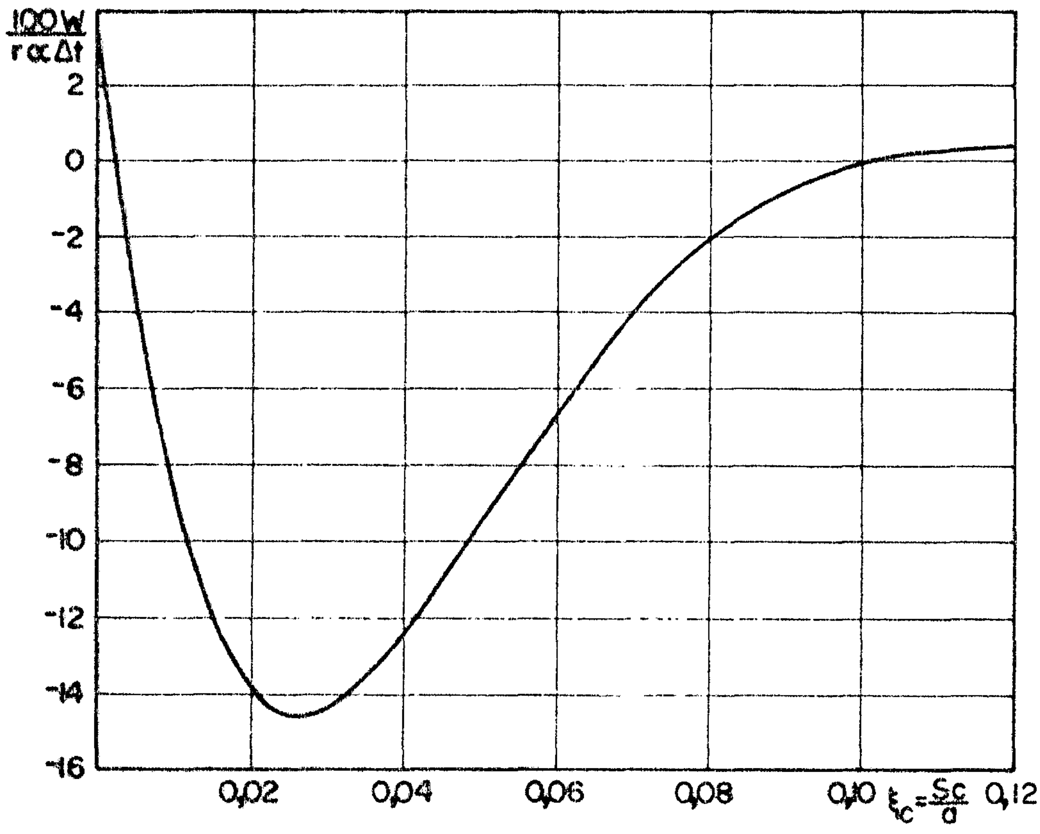


Fig. 4.11 - Deslocamento radial w na casca cilíndrica.

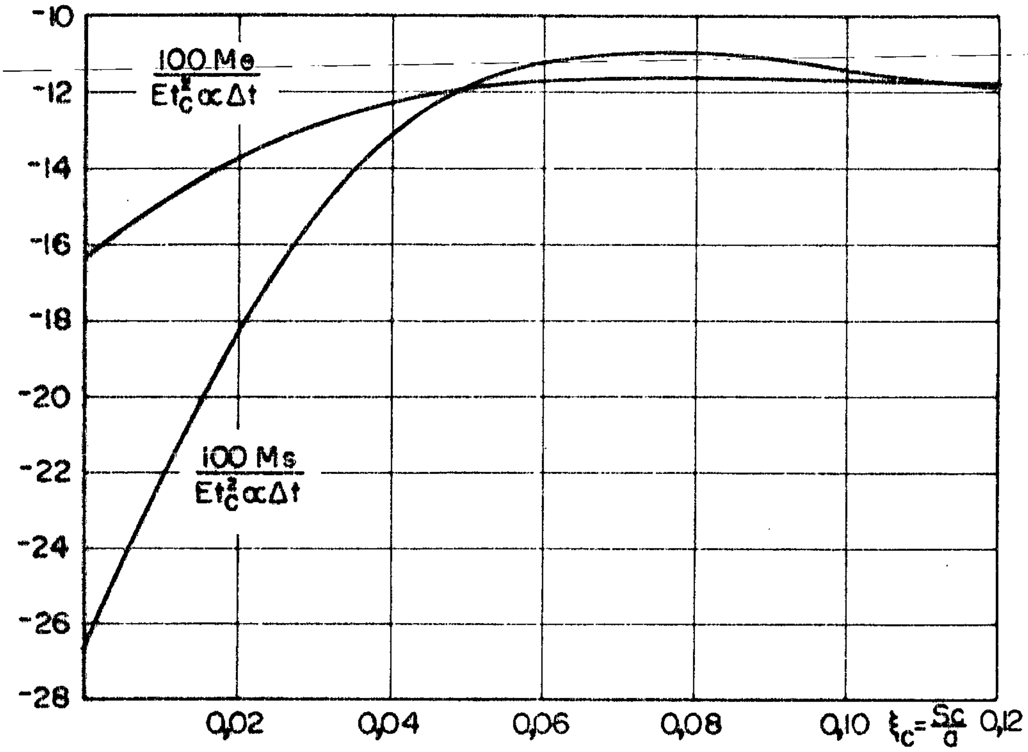


Fig. 4.12 - Momentos resultantes na casca cilíndrica.

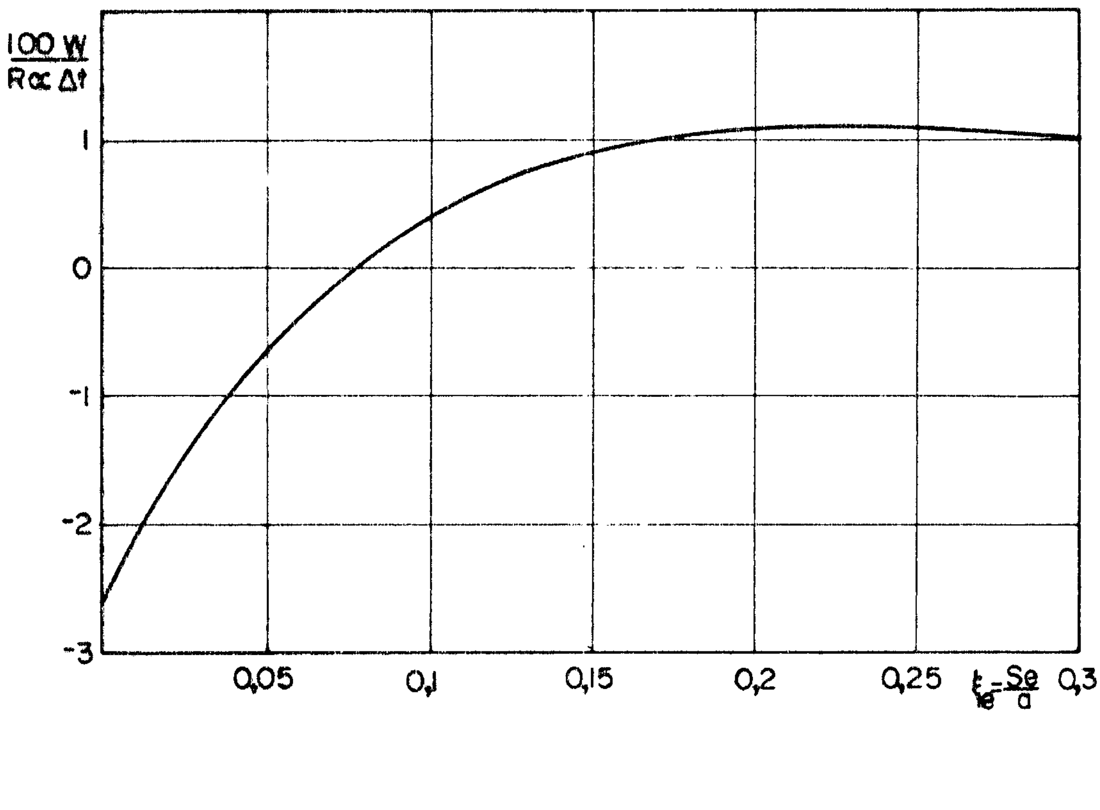


Fig. 4.13 - Deslocamento radial w na casca esférica

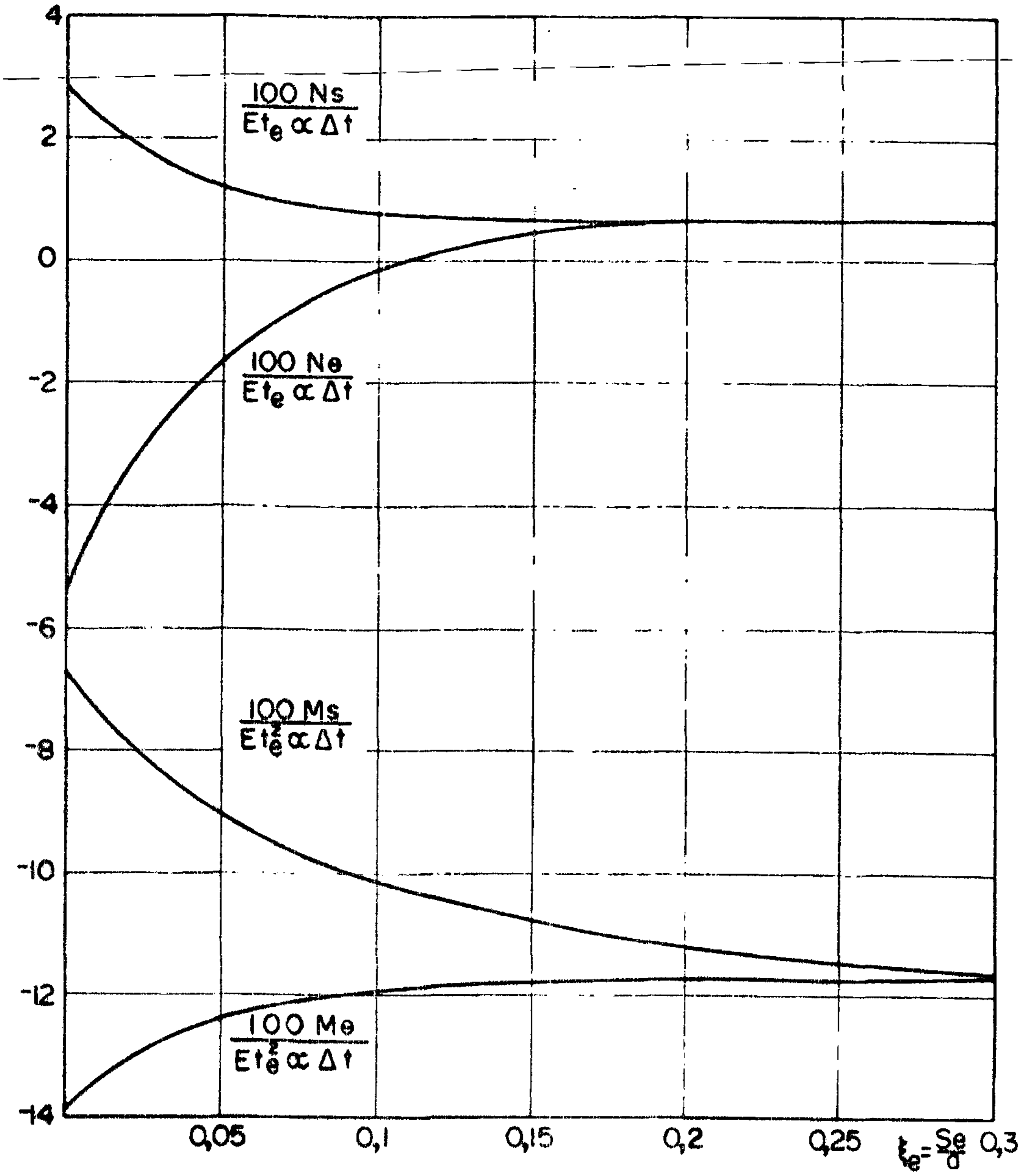


Fig. 4.14 - Tensões de membrana e momentos resultantes na casca esférica.

4.6 - Conclusões finais

Através da análise dos resultados dos problemas resolvidos neste capítulo, pode-se concluir que a formulação analítica desenvolvida no capítulo dois, resolvida pelos métodos apresentados no capítulo três, fornece resultados numéricos bastante bons. Como já se observou anteriormente, os maiores erros relativos nas variáveis fundamentais ocorrem para seus pequenos valores (em módulo), cuja importância, para fins de análise de tensões, também é pequena. Nos valores maiores destas variáveis, e nos das outras grandezas (calculadas como uma combinação daquelas), os erros da solução numérica em relação à solução analítica são desprezíveis.

Este aspecto confere uma confiabilidade bastante boa ao método como um todo, possibilitando sua aplicação na análise do comportamento de cascas de revolução, submetidas a distribuições de temperaturas e cargas estáticas, nas mais diversas situações práticas.

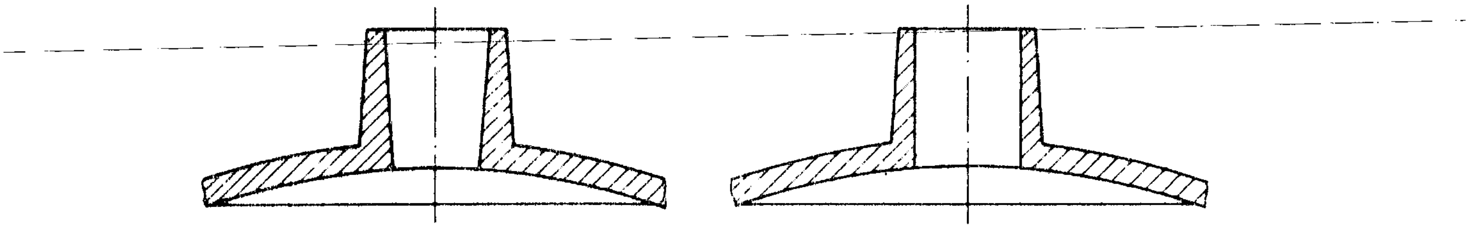
Este trabalho poderia ser prosseguido, utilizando-se a estrutura numérico-computacional montada, para testar outras teorias de cascas finas, com as quais se obteria outra formulação analítica. Desta forma, poder-se-ia comparar os resultados, obtidos utilizando estas diversas teorias, entre si e com a primeira aproximação de Love usada neste trabalho.

Outra continuação importante seria a de eliminar o desacoplamento entre as tensões resultantes membraniais e os momentos resultantes, nas relações tensões resultantes-deformações, conseguido tomando-se a superfície de referência como sendo a superfície média, e fazendo a hipótese de que as propriedades elásticas do material são simétricas em relação a esta superfície. Como estas propriedades são funções da temperatura, nos problemas em que a variação desta ao longo da espessura é muito grande, a hipótese da simetria não é válida.

Por outro lado, tomando-se a superfície média como sendo a de referência, limita-se também a forma da casca, já que sua espessura é função apenas do comprimento do meridiano, distribuindo-se igualmente para seu lado interno e externo. Desta maneira, se externamente a casca é um tronco de cone, sendo sua superfície média cilíndrica, internamente ela também será um tronco de cone (figura 4.15a). Assim não é possível obter-se a solução de problemas de cascas como a mostrada na figura 4.15b, cuja forma interna é cilíndrica sendo a externa tronco-cônica, bastante comum na prática.

Outra contribuição poderia ser a ampliação do conceito de descontinuidade pela inclusão de anéis de reforço submetidos a carregamentos térmicos entre os segmentos de casca.

A estrutura computacional poderia, ainda, ser utiliza-



(a) (b)

Figura 4.15

da na análise de cascas semi-espessas onde, conforme a referência [9], as grandezas fundamentais passam a ser u, v, w, ϕ_s e ϕ_θ, para o que necessitar-se-ia apenas modificar a ordem das sub-matrizes do sistema de equações, além da formulação analítica.

BIBLIOGRAFIA

1. Alves, D. Boechat, Teoria das cascas, Centro Tecnológico/UFSC, 1977.

2. Alves, D. Boechat, Análise numérica de cascas ortotrópicas de revolução, Anais do IV COBEM, Paper nº A-11, pp. 131-142, 1977.

3. Alves, D. Boechat, Métodos Numéricos, Centro Tecnológico/UFSC, 1977.

4. Alves, D. Boechat, Cascas ortotrópicas de revolução reforçadas por anéis, Anais do IV COBEM, Paper nº A-12, pp. 143-155, 1977.

5. Alves, D. Boechat, Teoria da elasticidade, Centro Tecnológico/UFSC, 1977.

6. Boresi, A.P. and Lynn, P.P., "Elasticity in engineering Mechanics", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs. New Jersey, 1974.

7. Budiansky, B. and Radkowsky, P.P., Numerical analysis of unsymmetrical bending of shells of revolution, AIAA J., Vol. 1, No. 8, August, 1963.

8. Cranch, E.T. and Griffith, O.T., Discontinuity thermal stresses in shallow shperical shells, Proceedings of the First International Conference on Pressure Vessel Technology, Part I, Paper I-36, pp. 435-449, 1969.

9. Das, M.L., Consideration of shear deformation in the analysis of unsymmetrical bending of moderately thick shells of revolution, Proceedings of the 3rd. International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Vol. 5, Part M, Paper M3/1, 1975.

10. Flügge, W., "Stresses in shells", Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

11. Hehl, M.E., "Sistema de programação FORTRAN IV", Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda., 1978.

12. Kent, C.H., Thermal stresses in thin-walled cylinders , Transactions of ASME, Applied Mechanics, APM-53-13, pp. 167-180, 1953.

13. Kraus, H., "Thin elastic shells", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967.

14. Langhaar, H.L., "Energy methods in applied mechanics", Wiley New York, 1962.

15. Nowacki, W., "Thermoelasticity", Addison-Wesley, Reading, Mass. (1962).

16. Timoshenko, S.P. and Krieger, S.W., "Theory of plates and shells", Second Edition, McGraw-Hill, Kogakusha, Ltd. Tokyo, 1959.

A P Ê N D I C E S

A1 - SISTEMA DE COORDENADAS

No estudo de problemas de cascas, utiliza-se usualmente um tipo particular de sistema de coordenadas curvilíneo, cujas principais características, bem como sua particularização para cascas de revolução, serão apresentadas neste apêndice.

A superfície de referência de uma casca pode ser definida pelas seguintes equações paramétricas:

$$X = X(x,y) \tag{A1.1a}$$

$$Y = Y(x,y) \tag{A1.1b}$$

$$Z = Z(x,y) \tag{A1.1c}$$

onde X, Y, Z são as coordenadas retangulares, e (x,y) são os parâmetros também chamados linhas de coordenadas.

A localização de um ponto arbitrário sobre a casca é dada pelo vetor posição $\vec{R}$ (Fig. A1.1):

$$\vec{R}(x,y,z) = \vec{r}(x,y) + z\,\vec{n}(x,y) \tag{A1.2}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição de um ponto sobre a superfície de referência, $\vec{n}$ é o vetor normal à superfície de referência (cujo sentido é tal que o sistema seja dextrógiro), e z é a distância normal à superfície de referência, positiva se for tomada no mesmo sentido de $\vec{n}$, e negativa no sentido oposto. O conjunto de valores (x,y,z) que determina um ponto material sobre a casca, forma um sistema curvilíneo de coordenadas espaciais, muitas vezes chamado de coordenadas da casca.

Derivando (A1.2) obtém-se:

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial x} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x} + z\,\frac{\partial\vec{n}}{\partial x} \tag{A1.3a}$$

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial y} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial y} + z\,\frac{\partial\vec{n}}{\partial y} \tag{A1.3b}$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial z} = \vec{n} \qquad \text{(A1.3c)}$$

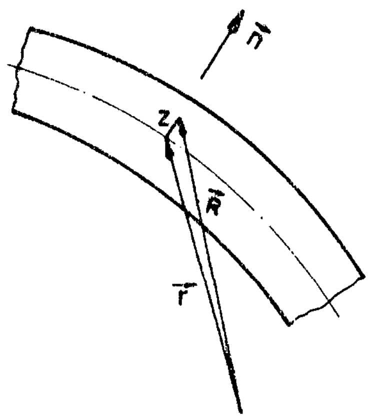


Figura A.1.1

Quando as linhas de coordenadas coincidem com as direções principais (definidas na geometria diferencial [01] como sendo as direções nas quais o raio de curvatura assume valores extremos, sendo neste caso chamadas linhas de curvatura principais), o teorema de Rodrigues, estudado na geometria diferencial e apresentado nas referências [01,14], fornece:

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial x} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \qquad \text{(A1.4a)}$$

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial y} = \frac{1}{r_2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \qquad \text{(A1.4b)}$$

onde r_1 e r_2 são os raios de curvatura nas direções principais.

Desta forma, as expressões (A1.3a) e (A1.3b) ficam

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial x} = (1 + \frac{1}{r_1}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \qquad \text{(A1.5a)}$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial y} = (1 + \frac{1}{r_2}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \qquad \text{(A1.5b)}$$

Assim o diferencial do vetor posição é dado por

$$d\vec{R} = (1 + \frac{z}{r_1}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + (1 + \frac{z}{r_2}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy + \vec{n}\, dz \qquad (A1.6)$$

Na geometria diferencial [01] define-se:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = A^2 \; ; \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = B^2 \qquad (A1.7)$$

com A^2 e B^2 sendo chamados de coeficientes da primeira forma fundamental das superfícies. Determina-se ainda o vetor $\vec{n}$ tal que ele seja unitário, e mostra-se que $\partial\vec{r}/\partial x$ e $\partial\vec{r}/\partial y$ são vetores tangentes às linhas de coordenadas, e portanto:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} . \vec{n} = 0; \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} . \vec{n} = 0; \qquad \vec{n} . \vec{n} = 1 \qquad (A1.8)$$

Se as linhas de coordenadas são ortogonais (como no caso de linhas de curvatura principais), tem-se ainda

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = 0 \qquad (A1.9)$$

Considerando estes resultados, a distância entre os pontos $\vec{R}$ e $\vec{R}+d\vec{R}$ é dada por:

$$dS^2 = d\vec{R} . d\vec{R} = \alpha^2 dx^2 + \beta^2 dy^2 + \gamma^2 dz^2 \qquad (A1.10)$$

com α, β, γ sendo os coeficientes de Lamé [05,06,14], dados por

$$\alpha = A(1 + \frac{z}{r_1}) \qquad (A1.11a)$$

$$\beta = B(1 + \frac{z}{r_2}) \qquad (A1.11b)$$

$$\gamma = 1 \qquad (A1.11c)$$

Em cascas de revolução, utiliza-se normalmente um sistema, cujas linhas de coordenadas coincidem com as direções prin cipais da superfície de referência, sendo uma delas tomada ao longo do comprimento do meridiano (s) e a outra ao longo do ângulo circunferencial (Θ) (figura A1.2).

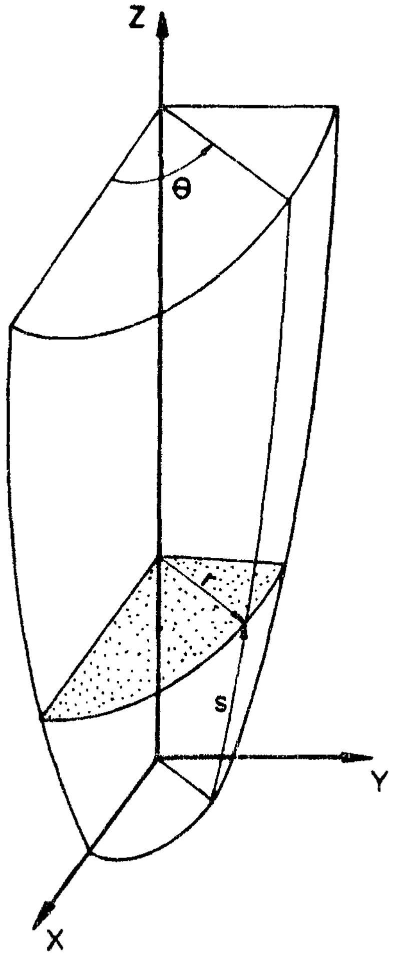


Figura A1.2

Chamando de r o raio da seção circunferencial de coordenada s (Fig. A1.2), as equações do meridiano podem ser dadas por:

$$r = r(s) ; \qquad Z = Z(s) \qquad \text{(A1.12)}$$

Desta forma as equações paramétricas da superfície de referência ficam sendo:

$$X = r \cos \Theta \qquad \text{(A1.13a)}$$

$$Y = r \operatorname{sen} \Theta \qquad \text{(A1.13b)}$$

$$Z = Z(s) \qquad (A1.13c)$$

que são as coordenadas retangulares do vetor posição $\vec{r}(X,Y,Z)$ definido anteriormente. Assim:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = (\frac{\partial r}{\partial s} \cos \Theta, \frac{\partial r}{\partial s} \operatorname{sen} \Theta, \frac{\partial Z}{\partial s}) \qquad (A1.14a)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \Theta} = (-r \operatorname{sen} \Theta, r \cos \Theta, 0) \qquad (A1.14b)$$

A partir das equações (A1.14), pode-se determinar os coeficientes da primeira forma fundamental das superfícies, utilizando (A1.7)

$$A^2 = (\frac{\partial r}{\partial s})^2 + (\frac{\partial Z}{\partial s})^2 \qquad (A1.15a)$$

$$B^2 = r^2 \qquad (A1.15b)$$

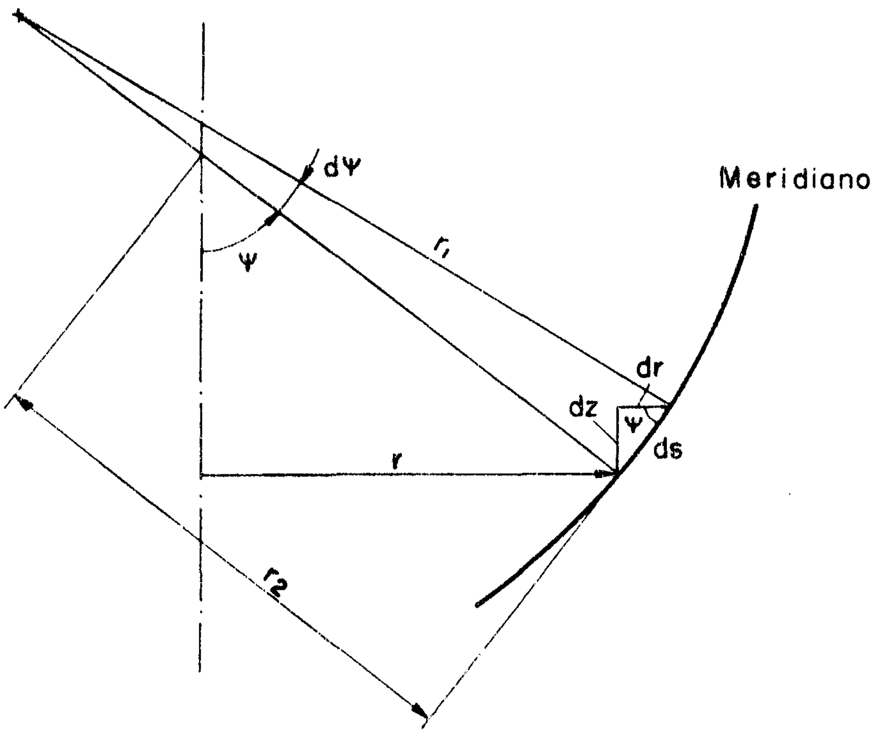


Figura A1.3

Na figura A1.3, observa-se no entanto, que $\partial r/\partial s$ = $dr/ds = \cos\psi$, e que $\partial Z/\partial s = dZ/ds =$ ~~sen ψ, concluindo-se que~~, para cascas de revolução com linhas de coordenadas tomadas da maneira citada

$$A = 1 \qquad\qquad B = r \tag{A1.16}$$

A partir da expressão $dr/ds = \cos\psi$, e lembrando que $ds = r_1\, d\psi$ (Figura A1.3), tem-se:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right) = \frac{d}{ds}(\cos\psi) = \frac{d}{r_1\, d\psi}(\cos\psi) = -\frac{1}{r_1}\operatorname{sen}\psi$$

e portanto

$$r_1 \frac{d^2 r}{ds^2} = -\operatorname{sen}\psi$$

Da figura A1.3

$$r_2 = \frac{r}{\operatorname{sen}\psi}$$

e, desta forma, o raio de curvatura r_2 pode ser determinado por

$$r_2 = -\frac{r}{r_1 \dfrac{d^2 r}{ds^2}} \tag{A1.17}$$

Deve-se observar que os raios de curvatura r_1 e r_2 serão positivos quando estiverem no sentido positivo de $\vec{n}$.

A2 - RELAÇÕES DEFORMAÇÕES-DESLOCAMENTOS

As relações deformações-deslocamentos utilizadas neste trabalho, serão desenvolvidas a partir das relações deformações-deslocamentos estabelecidas na teoria da elasticidade, observando as hipóteses e as particularidades geométricas do problema de cascas finas.

Para um sistema de coordenadas curvilíneo ortogonal (x,y,z), as relações deformações-deslocamentos desenvolvidas na teoria da elasticidade [05,06,14], desprezando os termos quadráticos (com base na hipótese de pequenas deformações), são:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{\beta}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{w}{\gamma}\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right] \qquad \text{(A2.1a)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{\beta}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{\gamma}\frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{u}{\alpha}\frac{\partial \beta}{\partial x}\right] \qquad \text{(A2.1b)}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{\alpha}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{v}{\beta}\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right] \qquad \text{(A2.1c)}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{w}{\beta\,\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{v}{\beta\,\gamma}\frac{\partial \beta}{\partial z} \qquad \text{(A2.1d)}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u}{\gamma\,\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{w}{\gamma\,\alpha}\frac{\partial \gamma}{\partial x} \qquad \text{(A2.1e)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{\alpha\,\beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{u}{\alpha\,\beta}\frac{\partial \alpha}{\partial y} \qquad \text{(A2.1f)}$$

onde u, v, w são os deslocamentos nas direções (x,y,z), α, β, γ são os coeficientes de Lamé (veja Apêndice A1), ε_x, ε_y, ε_z são as deformações normais, e γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} são as deformações cisalhantes.

A referência [01] mostra que, quando o sistema de coordenadas é ortogonal, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\beta}{B}\frac{\partial A}{\partial y} \qquad \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\alpha}{A}\frac{\partial B}{\partial x} \qquad \text{(A2.2)}$$

onde A e B são os coeficientes da primeira forma fundamental das superfícies (Apêndice A1).

Utilizando as equações que fornecem os coeficientes de Lamé (A1.11), estabelecidos no apêndice A1, e substituindo(A2.2) nas equações (A2.1), chega-se a:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A(1+\frac{z}{r_1})}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{B}\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{A}{r_1}w\right] \qquad (A2.3a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{B(1+\frac{z}{r_2})}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{A}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{B}{r_2}w\right] \qquad (A2.3b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (A2.3c)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{B(1+\frac{z}{r_2})}\left[B(1+\frac{z}{r_2})\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{B}{r_2}v\right] \qquad (A2.3d)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{A(1+\frac{z}{r_1})}\left[\frac{\partial w}{\partial x} + A(1+\frac{z}{r_1})\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{A}{r_1}u\right] \qquad (A2.3e)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A(1+\frac{z}{r_1})}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial y}\right) + \frac{1}{B(1+\frac{z}{r_2})}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{A}\frac{\partial B}{\partial x}\right) \qquad (A2.3f)$$

A hipótese de que as normais permanecem normais implica numa distribuição linear dos deslocamentos ao longo da espessura da casca. Portanto, lembrando da hipótese que considera $\varepsilon_z = 0$ e da equação (A2.3c), pode-se escrever:

$$u(x,y,z) = u(x,y) + z\,\phi_x(x,y,0) \qquad (A2.4a)$$

$$v(x,y,z) = v(x,y) + z\,\phi_y(x,y,0) \qquad (A2.4b)$$

$$w(x,y,z) = w(x,y) \qquad (A2.4c)$$

onde ϕ_x e ϕ_y representam as rotações das tangentes às linhas de coordenadas x e y, respectivamente.

As rotações ϕ_x e ϕ_y são determinadas substituindo-se as equações (A2.4) nas equações (A2.3d) e (A2.3e), lembrando que $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$. Desta forma obtém-se:

$$\phi_x = \frac{u}{r_1} - \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial x} \tag{A2.5a}$$

$$\phi_y = \frac{v}{r_2} - \frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{A2.5b}$$

Admitindo, pela hipótese de que a casca é fina, que $z/r_i << 1$, $i = 1,2$, e substituindo as equações (A2.4) nas equações (A2.3a), (A2.3b) e (A2.3f), chega-se a:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}(u + z\,\phi_x) + \frac{1}{A\,B}\frac{\partial A}{\partial y}(v + z\,\phi_y) + \frac{w}{r_1} \tag{A2.6a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial y}(v + z\,\phi_y) + \frac{1}{A\,B}\frac{\partial B}{\partial x}(u + z\,\phi_x) + \frac{w}{r_2} \tag{A2.6b}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v + z\,\phi_y}{B}\right) + \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u + z\,\phi_x}{A}\right) \tag{A2.6c}$$

Estas deformações podem ainda ser dadas da seguinte maneira:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^o + z\,k_x \tag{A2.7a}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^o + z\,k_y \tag{A2.7b}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^o + z\,k_{xy} \tag{A2.7c}$$

onde

$$\varepsilon_x^o = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{A\,B}\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{w}{r_1} \tag{A2.8a}$$

$$\varepsilon_y^o = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{A\,B}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{w}{r_2} \tag{A2.8b}$$

$$\gamma_{xy}^{o} = \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial x}(v/B) + \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial y}(u/A) \qquad \text{(A2.8c)}$$

$$k_x = \frac{1}{A}\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\phi_y}{AB}\frac{\partial A}{\partial y} \qquad \text{(A2.8d)}$$

$$k_y = \frac{1}{B}\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\phi_x}{AB}\frac{\partial B}{\partial x} \qquad \text{(A2.8e)}$$

$$k_{xy} = \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial x}(\phi_y/B) + \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial y}(\phi_x/A) \qquad \text{(A2.8f)}$$

As equações acima fornecem as deformações normais (ε_x^o, ε_y^o)e a de cisalhamento(γ_{xy}^o),as mudanças de curvaturas(k_x,k_y) e a torção (k_{xy}) da superfície de referência durante a deformação, quando as linhas de coordenadas coincidem com as direções principais, e a teoria de cascas é a primeira aproximação de Love.

A3 - TENSÕES E MOMENTOS RESULTANTES

Neste apêndice serão obtidas as tensões e momentos resultantes por unidade de comprimento, para cascas finas cujas linhas de coordenadas coincidem com as direções principais.

As tensões e momentos resultantes são determinadas considerando-se um elemento infinitesimal de casca limitado por duas superfícies separadas entre si pela distância dz, situadas a uma distância z da superfície de referência, e por dois pares de seções realizadas perpendicularmente à superfície de referência, com cada par coincidindo com um par de linhas de coordenadas adjacentes (figura A3.1).

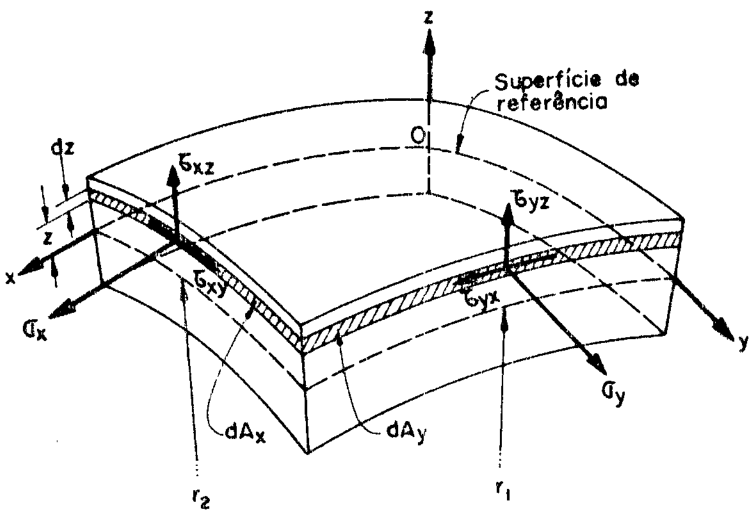


Figura A3.1

Os comprimentos das extremidades deste elemento, segundo a equação (A1.10) são:

$$dS_x = \alpha\ dx = A(1 + \frac{z}{r_1})\ dx \qquad (A3.1a)$$

$$dS_y = \beta\ dy = B(1 + \frac{z}{r_2})\ dy \qquad (A3.1b)$$

e as áreas das extremidades normais às linhas de coordenadas x e y são, respectivamente

$$dA_x = \beta\ dy\ dz = B(1 + \frac{z}{r_2})\ dy\ dz \qquad (A3.2a)$$

$$dA_y = \alpha\, dx\, dz = \Lambda(1 + \frac{z}{r_1})\, dx\, dz \qquad (A3.2b)$$

Chamando de N_x a força por unidade de comprimento que atua ao longo da linha de coordenadas y (z = 0), a força total no elemento infinitesimal (fig. A3.1) na direção x é:

$$N_x\, B\, dy = \int \sigma_x\, dA_x = \int \beta\, \sigma_x\, dy\, dz$$

e

$$N_x = \frac{1}{B} \int \beta\, \sigma_x\, dz \qquad (A3.3a)$$

Se M_x é o momento por unidade de comprimento ao longo da linha coordenada y, o momento total sobre o elemento infinitesimal é:

$$M_x\, B\, dy = \int \sigma_x\, z\, dA_x = \int \beta\, \sigma_x\, z\, dz\, dy$$

e

$$M_x = \frac{1}{B} \int \beta\, \sigma_x\, z\, dz \qquad (A3.3b)$$

Substituindo os coeficientes de Lamé (A1.11) nestas equações, obtém-se:

$$N_x = \int (1 + \frac{z}{r_2})\, \sigma_x\, dz \qquad (A3.4a)$$

$$M_x = \int (1 + \frac{z}{r_2})\, \sigma_x\, z\, dz \qquad (A3.4b)$$

Este procedimento pode ser estendido às demais tensões, obtendo-se finalmente:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ Q_x \end{Bmatrix} = \int \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} (1 + \frac{z}{r_2})\, dz \qquad (A3.5a)$$

$$\begin{Bmatrix} N_y \\ N_{yx} \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} (1 + \frac{z}{r_1})\, dz \qquad \text{(A3.5b)}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} (1 + \frac{z}{r_2}) z\, dz \qquad \text{(A3.5c)}$$

$$\begin{Bmatrix} M_y \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = \int \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{yx} \end{Bmatrix} (1 + \frac{z}{r_1})\, z\, dz \qquad \text{(A3.5d)}$$

onde N_x, N_{xy}, Q_x, N_y, N_{yx}, Q_y são as forças resultantes por unidade de comprimento, e M_x, M_{xy}, M_y, M_{yx} são os momentos resultantes por unidade de comprimento, cujas direções e sentidos estão indicados na figura A3.2.

A partir da hipótese de que a casca é fina, as quantidades z/r_i, $i = 1, 2$ podem ser desprezadas em relação à unidade; então, considerando o tensor tensão simétrico ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$), chega-se a:

$$N_x = \int \sigma_x\, dz \qquad \text{(A3.6a)}$$

$$N_y = \int \sigma_y\, dz \qquad \text{(A3.6b)}$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \int \tau_{xy}\, dz \qquad \text{(A3.6c)}$$

$$Q_x = \int \tau_{xz}\, dz \qquad \text{(A3.6d)}$$

$$Q_y = \int \tau_{yz}\, dz \qquad \text{(A3.6e)}$$

$$M_x = \int \sigma_x \; z \; dz \qquad (A3.6f)$$

$$M_y = \int \sigma_y \; z \; dz \qquad (A3.6g)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int \tau_{xy} \; z \; dz \qquad (A3.6h)$$

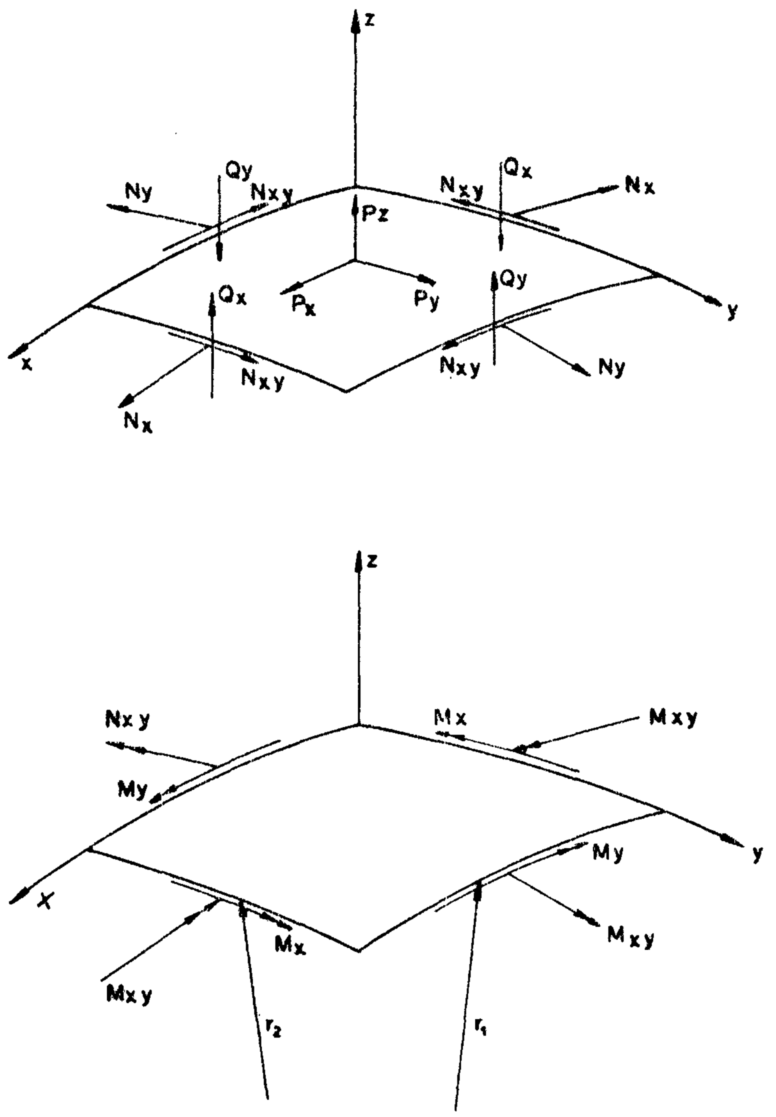


Figura A3.2

A4 - TENSÕES RESULTANTES E SUAS DERIVADAS EM FUNÇÃO DOS DESLOCAMENTOS u, v, w E DO MOMENTO M_s.

Substituindo as relações deformações-deslocamentos (2.6) nas equações (2.11) e (2.14), obtém-se as tensões resultantes em função dos deslocamentos. Visando sua substituição nas equações de equilíbrio (2.12), calculam-se também suas derivadas.

$$N_s = \frac{r'}{r} A_{12}\, u + A_{11}\, u' + \frac{1}{r} A_{12}\, \dot{v} + \left(\frac{1}{r_1} A_{11} - \frac{r_1\, r''}{r} A_{12}\right) w - B_1\, p_T \qquad \text{...(A4.1)}$$

$$N_s' = \left[\left(\frac{r''}{r} - \frac{r'^2}{r^2}\right) A_{12} + \frac{r'}{r} A_{12}'\right] u + \left(\frac{r'}{r} A_{12} + A_{11}'\right) u' + A_{11}\, u'' +$$

$$+ \left(\frac{1}{r} A_{12}' - \frac{r'}{r^2} A_{12}\right)\dot{v} + \frac{1}{r} A_{12}\, \dot{v}' + \left\{\frac{1}{r_1} A_{11}' - \frac{r_1'}{r_1^2} A_{11} -\right.$$

$$- \left[\frac{(r_1\, r'')'}{r} - \frac{(r_1\, r'')\, r'}{r^2}\right] A_{12} - \left.\frac{r_1\, r''}{r} A_{12}'\right\} w + \left(\frac{1}{r_1} A_{11} -\right.$$

$$\left. - \frac{r_1\, r''}{r} A_{12}\right) w' - B_1'\, p_T - B_1\, p_T' \qquad \text{(A4.2)}$$

$$N_\Theta = \frac{r'}{r} A_{22}\, u + A_{12}\, u' + \frac{1}{r} A_{22}\, \dot{v} + \left(\frac{1}{r_1} A_{12} - \frac{r_1\, r''}{r}\right) w - B_2\, p_T \qquad \text{...(A4.3)}$$

$$\dot{N}_\Theta = \frac{r'}{r} A_{22}\, \dot{u} + A_{12}\, \dot{u}' + \frac{1}{r} A_{22}\, \ddot{v} + \left(\frac{1}{r_1} A_{12} - \frac{r_1\, r''}{r} A_{22}\right) \dot{w} - B_2\, \dot{p}_T \qquad \text{(A4.4)}$$

$$N_{s\Theta} = \frac{1}{r} A_{33}\, \dot{u} - \frac{r'}{r} A_{33}\, v + A_{33}\, v' \qquad \text{(A4.5)}$$

$$\dot{N}_{s\Theta} = \frac{1}{r} A_{33}\, \ddot{u} - \frac{r'}{r} A_{33}\, \dot{v} + A_{33}\, \dot{v}' \qquad \text{(A4.6)}$$

$$N'_{s\Theta} = \left(\frac{1}{r} A'_{33} - \frac{r'}{r^2} A_{33}\right)\dot{u} + \frac{1}{r} A_{33}\,\dot{u}' - \left[\left(\frac{r''}{r} - \frac{r'^2}{r^2}\right)A_{33} + \frac{r'}{r} A'_{33}\right] v +$$

$$+ \left(A'_{33} - \frac{r'}{r} A_{33}\right)v' + A_{33}\, v'' \qquad \text{(A4.7)}$$

$$M_\Theta = \frac{r'}{r\, r_1}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)u - \frac{r_1\, r''}{r^2}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)\dot{v} - \frac{1}{r^2}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)\ddot{w} -$$

$$- \frac{r'}{r}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)w' + \frac{D_{12}}{D_{11}} M_s + \left(\frac{D_{12}}{D_{11}} B_1 - B_2\right)m_T \qquad \text{(A4.8)}$$

$$\dot{M}_\Theta = \frac{r'}{r\, r_1}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)\dot{u} - \frac{r_1\, r''}{r^2}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)\ddot{v} - \frac{1}{r^2}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)\ddot{w} -$$

$$- \frac{r'}{r}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)\dot{w}' + \frac{D_{12}}{D_{11}} \dot{M}_s + \left(\frac{D_{12}}{D_{11}} B_1 - B_2\right)\dot{m}_T \qquad \text{(A4.9)}$$

$$\ddot{M}_\Theta = \frac{r'}{r\, r_1}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)\ddot{u} - \frac{r_1\, r''}{r^2}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)\dddot{v} - \frac{1}{r^2}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)\dddot{w} -$$

$$- \frac{r'}{r}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)\ddot{w}' + \frac{D_{12}}{D_{11}} \ddot{M}_s + \left(\frac{D_{12}}{D_{11}} B_1 - B_2\right)\ddot{m}_T \qquad \text{(A4.10)}$$

$$M'_\Theta = \left[\frac{r_1\, r''\, r - r'^2\, r_1 - r'\, r\, r'_1}{(r\, r_1)^2}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right) + \frac{r'}{r\, r_1}\left(D_{22} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)'\right] u + \frac{r'}{r\, r_1}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)u' - \left\{\left[\frac{(r_1\, r'')'}{r^2} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2r'\, r_1\, r''}{r^3}\right]\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right) + \frac{r_1\, r''}{r^2}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)'\right\}\dot{v} -$$

$$- \frac{r_1\, r''}{r^2}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)\dot{v}' - \left[\left(\frac{r''}{r} - \frac{r'^2}{r^2}\right)\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{r'}{r}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)'\right] w' - \frac{r'}{r}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)w'' - \left[\frac{1}{r^2}\left(D_{22} -\right.\right.$$

$$- \frac{D_{12}^2}{D_{11}})' - 2\,\frac{r'}{r^3}\,(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}})\Big]\,\ddot{w} - \frac{1}{r^2}\,(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{12}})\,\ddot{w}' + (\frac{D_{12}}{D_{11}})'\,M_s +$$

$$+ \frac{D_{12}}{D_{11}}\,M_s' + (\frac{D_{12}}{D_{11}}\,B_1 - B_2)'\,m_T + (\frac{D_{12}}{D_{11}}\,B_1 - B_2)\,m_T' \qquad \text{(A4.11)}$$

$$M_{s\Theta} = \frac{1}{2r\ r_1}\,D_{33}\,\dot{u} + (\frac{r_1\ r''\ r'}{r^2} - \frac{(r_1\ r'')'}{2r})\,D_{33}\,v - \frac{r_1\ r''}{2r}\,D_{33}\,v' +$$

$$+ \frac{r'}{r^2}\,D_{33}\,\dot{w} - \frac{1}{r}\,D_{33}\,\dot{w}' \qquad \text{(A4.12)}$$

$$\dot{M}_{s\Theta} = \frac{1}{2r\ r_1}\,D_{33}\,\ddot{u} + (\frac{r_1\ r''\ r'}{r^2} - \frac{(r_1\ r'')'}{2r})\,D_{33}\,\dot{v} - \frac{r_1\ r''}{2r}\,D_{33}\,\dot{v}' +$$

$$+ \frac{r'}{r^2}\,D_{33}\,\ddot{w} - \frac{1}{r}\,D_{33}\,\ddot{w}' \qquad \text{(A4.13)}$$

$$M_{s\Theta}' = \frac{1}{2}\,\{\frac{1}{r\ r_1}\,D_{33}' - \left[\frac{r'\ r_1 + r\ r_1'}{(r\ r_1)^2}\right] D_{33}\}\,\dot{u} + \frac{1}{2r\ r_1}\,D_{33}\,\dot{u}' +$$

$$+ \{\left[\frac{3}{2}\ \frac{(r_1\ r'')'r'}{r^2} + \frac{(r_1\ r'')r''}{r^2} - 2\,\frac{(r_1\ r'')r'^2}{r^3} -\right.$$

$$\left. - \frac{(r_1\ r'')''}{2r}\right] D_{33} + \left[\frac{r_1\ r''\ r'}{r^2} - \frac{(r_1\ r'')'}{2r}\right] D_{33}'\}\ v +$$

$$+ \{\left[\frac{3}{2}\ \frac{r_1\ r''\ r'}{r^2} - \frac{(r_1\ r'')'}{r}\right] D_{33} - \frac{r_1\ r''}{2r}\,D_{33}'\}\ v' -$$

$$- \frac{r_1\ r''}{2r}\,D_{33}\,v'' + \left[(\frac{r''}{r^2} - \frac{2r'^2}{r^3})\,D_{33} + \frac{r'}{r^2}\,D_{33}'\right]\dot{w} +$$

$$+ (2\,\frac{r'}{r^2}\,D_{33} - \frac{1}{r}\,D_{33}')\,\dot{w}' - \frac{1}{r}\,D_{33}\,\dot{w}'' \qquad \text{(A4.14)}$$

$$\dot{M}'_{s\Theta} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r\,r_1} D'_{33} - \left[\frac{r'\,r_1 + r\,r'_1}{(r\,r_1)^2}\right] D_{33}\right\} \ddot{u} + \frac{1}{2r\,r_1} D_{33}\,\ddot{u}' +$$

$$+ \left\{\left[\frac{3}{2}\,\frac{(r_1\,r'')'\,r'}{r^2} + \frac{(r_1\,r'')\,r''}{r^2} - 2\,\frac{(r_1\,r'')\,r'^2}{r^3} - \frac{(r_1\,r'')''}{2r}\right] D_{33} + \left[\frac{r_1\,r''\,r'}{r^2} - \frac{(r_1\,r'')'}{2r}\right] D'_{33}\right\} \dot{v} +$$

$$+ \left\{\left[\frac{3}{2}\,\frac{r_1\,r''\,r'}{r^2} - \frac{(r_1\,r'')'}{r}\right] D_{33} - \frac{r_1\,r''}{2r} D'_{33}\right\} \dot{v}' -$$

$$- \frac{r_1\,r''}{2r} D_{33}\,\dot{v}'' + \left[\left(\frac{r''}{r^2} - 2\,\frac{r'^2}{r^3}\right) D_{33} + \frac{r'}{r^2} D'_{33}\right] \ddot{w} +$$

$$+ \left(2\,\frac{r'}{r^2} D_{33} - \frac{1}{r} D'_{33}\right)\ddot{w}' - \frac{1}{r} D_{33}\,\ddot{w}'' \qquad \text{(A4.15)}$$

Da equação (2.12d) obtém-se:

$$Q_s = \frac{1}{r}\,(r\,M_s)' + \frac{1}{r}\,\dot{M}_{s\Theta} - \frac{r'}{r}\,M_\Theta$$

Substituindo as expressões (A4.8) e (A4.13) nesta equação, chega-se a:

$$Q_s = - \frac{r'^2}{r^2 r_1}\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)u + \frac{1}{2r^2\,r_1} D_{33}\,\ddot{u} - \frac{r_1\,r''}{2r^2} D_{33}\,\dot{v}' +$$

$$+ \left[\frac{r_1\,r''\,r'}{r^3}\left(D_{33} + D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right) - \frac{(r_1\,r'')'}{2r^2} D_{33}\right] \dot{v} + \frac{r'^2}{r^2}\left(D_{22} -\right.$$

$$\left.- \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)w' - \frac{1}{r^2} D_{33}\,\ddot{w}' + \frac{r'}{r^3}\left(D_{33} + D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)\ddot{w} + M'_s +$$

$$+ \frac{r'}{r}\left(1 - \frac{D_{12}}{D_{11}}\right)M_s - \frac{r'}{r}\left(\frac{D_{12}}{D_{11}} B_1 - B_2\right)m_T \qquad \text{(A4.16)}$$

A5 - COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

As equações fundamentais (2.15) desenvolvidas de acordo com o procedimento indicado no item 2.7, tem como coeficientes:

$$C_1 = r\ A_{11}$$

$$C_2 = r'\ A_{11} + r\ A'_{11}$$

$$C_3 = r''\ A_{12} + r'\ A'_{12} - \frac{r'^2}{r} A_{22} - \frac{r'^2}{r\ r_1^2} (D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}})$$

$$C_4 = \frac{1}{r} A_{33} + \frac{1}{2r\ r_1^2} D_{33}$$

$$C_5 = A_{12} + A_{33} - \frac{r''}{2r} D_{33}$$

$$C_6 = A'_{12} - \frac{r'}{r} (A_{22} + A_{33}) + \frac{r'\ r''}{r^2}(D_{33} + D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}) - \frac{(r_1\ r'')'}{2r\ r_1} D_{33}$$

$$C_7 = \frac{r}{r_1} A_{11} - r_1\ r''\ A_{12} + \frac{r'^2}{r\ r_1} (D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}})$$

$$C_8 = - \frac{1}{r\ r_1} D_{33}$$

$$C_9 = (\frac{r'}{r_1} - \frac{r\ r'_1}{r_1^2})A_{11} + \frac{r}{r_1} A'_{11} - \left[(r_1\ r'')' + \frac{r'}{r_1}\right]A_{12} - r_1\ r''\ A'_{12} + $$

$$+ \frac{r_1\ r''\ r'}{r} A_{22}$$

$$C_{10} = \frac{r'}{r_1\ r^2} (D_{33} + D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}})$$

$$C_{11} = \frac{r}{r_1}$$

$$C_{12} = \frac{r'}{r_1} \left(1 - \frac{D_{12}}{D_{11}}\right)$$

$$C_{13} = A_{12} + A_{33} - \frac{r''}{2r} D_{33}$$

$$C_{14} = \frac{r'}{r} (A_{22} + A_{33}) + A'_{33} - \frac{r'\ r''}{r^2} \left(\frac{1}{2} D_{33} + D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right) -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{r''}{r} D'_{33} + \frac{r'_1\ r''}{2r\ r_1} D_{33}$$

$$C_{15} = r\ A_{33} + \frac{(r_1\ r'')^2}{2r} D_{33}$$

$$C_{16} = r'\ A_{33} + r\ A'_{33} + \frac{r_1\ r''}{r} \left\{ \left[(r_1\ r'')' - \frac{(r_1\ r'')r'}{2r} \right] D_{33} + \right.$$

$$\left. + \frac{r_1\ r''}{2} D'_{33} \right\}$$

$$C_{17} = \frac{1}{r} A_{22} + \frac{(r_1\ r'')^2}{r^3} \left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)$$

$$C_{18} = -\left(\frac{r'^2}{r} + r''\right)A_{33} - r'\ A'_{33} + \frac{r_1\ r''}{r} \left\{ \left[\frac{(r_1\ r'')''}{2} - \frac{(r_1\ r'')'r'}{2r} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(r_1\ r'')r''}{r} \right] D_{33} + \left[\frac{(r_1\ r'')'}{2} - \frac{(r_1\ r'')r'}{r} \right] D'_{33} \right\}$$

$$C_{19} = \frac{r_1\ r''}{r} D_{33}$$

$$C_{20} = \frac{r_1\ r''}{r} D'_{33} + \frac{r_1\ r''\ r'}{r^2} \left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)$$

$$C_{21} = \frac{r_1 \; r''}{r^3} \left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)$$

$$C_{22} = \frac{1}{r_1} A_{12} - \frac{r_1 \; r''}{r} A_{22} - \frac{(r_1 \; r'')r''}{r^2} D_{33} - \frac{r_1 \; r'' \; r'}{r^2} D'_{33}$$

$$C_{23} = - \frac{r_1 \; r''}{r} \frac{D_{12}}{D_{11}}$$

$$C_{24} = \frac{1}{r \; r_1} D_{33}$$

$$C_{25} = r_1 \; r'' \; A_{12} - \frac{r}{r_1} A_{11} - \frac{r'^2}{r \; r_1} \left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)$$

$$C_{26} = \frac{(r_1 \; r'')r'}{r} A_{22} - \frac{r'}{r_1} A_{12} + \left(\frac{r'^3}{r^2 \; r_1} - 2 \frac{r' \; r''}{r \; r_1} + \frac{r'^2 \; r'_1}{r \; r_1^2}\right) \left(D_{22} - \right.$$

$$\left. - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right) - \frac{r'^2}{r \; r_1} \left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)'$$

$$C_{27} = \frac{1}{r \; r_1} D'_{33} - \frac{r'_1}{r \; r_1^2} D_{33} + \frac{r'}{r^2 \; r_1} \left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)$$

$$C_{28} = - \frac{r_1 \; r''}{r} D_{33}$$

$$C_{29} = 2\left(\frac{r_1 \; r'' \; r'}{r^2} - \frac{(r_1 \; r'')'}{r}\right) D_{33} - \frac{r_1 \; r''}{r} D'_{33} + \frac{r_1 \; r'' \; r'}{r^2} \left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)$$

$$C_{30} = - \frac{r_1 \; r''}{r^3} \left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\right)$$

$$C_{31} = - \frac{1}{r_1} A_{12} + \frac{r_1 \; r''}{r} A_{22} + \left[2 \frac{(r_1 \; r'')'r'}{r^2} + 2 \frac{(r_1 \; r'')r''}{r^2} - \right.$$

$$\left. - 2 \frac{(r_1 \; r'')r'^2}{r^3} - \frac{(r_1 \; r'')''}{r} \right] D_{33} + \left(2 \frac{r_1 \; r'' \; r'}{r^2} - \frac{(r_1 \; r'')'}{r}\right) D'_{33} +$$

$$+ \left[\frac{(r_1\ r'')'r'}{r^2} - 2\,\frac{(r_1\ r'')r'^2}{r^3} + \frac{(r_1\ r'')r''}{r^2}\right](D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}) +$$

$$+ \frac{(r_1\ r'')r'}{r^2}(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}})'$$

$$C_{32} = -\,2\,\frac{1}{r}\,D_{33}$$

$$C_{33} = \frac{r'^2}{r}(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}})$$

$$C_{34} = 2(\frac{r'}{r^2}D_{33} - \frac{1}{r}D'_{33})$$

$$C_{35} = (2\,\frac{r'\ r''}{r} - \frac{r'^3}{r^2})(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}) + \frac{r'^2}{r}(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}})'$$

$$C_{36} = -\,\frac{1}{r^3}(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}})$$

$$C_{37} = 2(\frac{r''}{r^2} - \frac{r'^2}{r^3})D_{33} + 2\,\frac{r'}{r^2}D'_{33} + (\frac{r''}{r^2} - 2\,\frac{r'^2}{r^3})(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}) +$$

$$+ \frac{r'}{r^2}(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}})'$$

$$C_{38} = 2r''\,A_{12} - \frac{r}{r_1^2}A_{11} - \frac{(r_1\ r'')^2}{r}A_{22}$$

$$C_{39} = r$$

$$C_{40} = r'(2 - \frac{D_{12}}{D_{11}})$$

$$C_{41} = \frac{1}{r}\,\frac{D_{12}}{D_{11}}$$

$$C_{42} = r''\left(1 - \frac{D_{12}}{D_{11}}\right) - r'\left(\frac{D_{12}}{D_{11}}\right)'$$

$$C_{43} = \frac{r_1'}{r_1^2} D_{11} - \frac{r'}{r\, r_1} D_{12}$$

$$C_{44} = -\frac{1}{r_1} D_{11}$$

$$C_{45} = \frac{r_1\, r''}{r^2} D_{12}$$

$$C_{46} = \frac{r'}{r} D_{12}$$

$$C_{47} = D_{11}$$

$$C_{48} = \frac{1}{r^2} D_{12}$$

$$C_{49} = 1$$

$$b_1^* = -r\, p_s + r\, B_1\, p_T' + (r'\, B_1 + r\, B_1' - r'\, B_2)p_T + \frac{r'}{r_1}\left(\frac{D_{12}}{D_{11}} B_1 - B_2\right)m_T$$

$$b_2^* = -r\, p_\Theta + B_2\, \dot{p}_T + \frac{r_1\, r''}{r}\left(\frac{D_{12}}{D_{11}} B_1 - B_2\right)\dot{m}_T$$

$$b_3^* = -r\, p_z + \left(r_1\, r''\, B_2 - \frac{r}{r_1} B_1\right)p_T + \left[r'\left(\frac{D_{12}}{D_{11}} B_1 - B_2\right)' + r''\left(\frac{D_{12}}{D_{11}} B_1 - B_2\right)\right]m_T - \frac{1}{r}\left(\frac{D_{12}}{D_{11}} B_1 - B_2\right)\ddot{m}_T + r'\left(\frac{D_{12}}{D_{11}} B_1 - B_2\right)m_T'$$

$$b_4^* = -B_1\, m_T$$

A6 - COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS ADIMENSIONALIZADAS.

Considerando as definições e operações indicadas no ítem 2.8, onde é realizada a adimensionalização e a expansão das variáveis em série de Fourier, os coeficientes das equações 2.16 são:

$$p_{11} = \rho\, a_{11}$$

$$q_{11} = \rho'\, a_{11} + \rho\, a_{11}'$$

$$r_{11} = \rho''\, a_{12} + \rho'\, a_{12}' - \frac{\rho'^2}{\rho}\, a_{22} - \frac{\rho'^2}{\rho\, \rho_1^2}\, \beta\, d\Theta - \left(\frac{1}{\rho}\, a_{33} + \frac{1}{2\rho\, \rho_1^2}\, \beta\, d_{33}\right) n^2$$

$$q_{12} = \left(a_{12} + a_{33} - \frac{\rho''}{2\rho}\, \beta\, d_{33}\right) n$$

$$r_{12} = \left\{a_{12}' - \frac{\rho'}{\rho}\left(a_{22} + a_{33}\right) + \beta \left[\frac{\rho'\, \rho''}{\rho^2}\left(d_{33} + d\Theta\right) - \frac{(\rho_1\, \rho'')'}{2\rho\, \rho_1}\, d_{33}\right]\right\} n$$

$$q_{13} = \frac{\rho}{\rho_1}\, a_{11} - \rho_1\, \rho''\, a_{12} + \frac{\rho'^2}{\rho\, \rho_1}\, \beta\, d\Theta + \frac{1}{\rho\, \rho_1}\, \beta\, d_{33}\, n^2$$

$$r_{13} = \left(\frac{\rho'}{\rho_1} - \frac{\rho\, \rho_1'}{\rho_1^2}\right) a_{11} + \frac{\rho}{\rho_1}\, a_{11}' - \left[(\rho_1\, \rho'')' + \frac{\rho'}{\rho_1}\right] a_{12} - \rho_1\, \rho''\, a_{12}' + \frac{\rho_1\, \rho''\, \rho'}{\rho}\, a_{22} - \frac{\rho'}{\rho_1\, \rho^2}\, \beta\left(d_{33} + d\Theta\right) n^2$$

$$q_{14} = \frac{\rho}{\rho_1}\, \beta$$

$$r_{14} = \frac{\rho'}{\rho_1} \beta(1 - ds)$$

$$q_{21} = -(a_{12} + a_{33} - \frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho} \beta d_{33})n$$

$$r_{21} = -\left[\frac{\rho'}{\rho}(a_{22} + a_{33})\ a'_{33} - \frac{\rho'\ \rho''}{\rho^2} \beta(\frac{1}{2} d_{33} + d\Theta) - \frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho} \beta d'_{33} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\rho'_1\ \rho''}{\rho\ \rho_1} \beta d_{33}\right] n$$

$$p_{22} = \rho\ a_{33} + \frac{(\rho_1\ \rho'')^2}{2\rho} \beta d_{33}$$

$$q_{22} = \rho'\ a_{33} + \rho\ a'_{33} + \frac{\rho_1\ \rho''}{\rho} \beta \left\{\left[(\rho_1\ \rho'')' - \frac{(\rho_1\ \rho'')\rho'}{2\rho}\right] d_{33} + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho_1\ \rho''}{2} d'_{33}\right\}$$

$$r_{22} = -(\frac{\rho'^2}{\rho} + \rho'')a_{33} - \rho'\ a'_{33} + \frac{\rho_1\ \rho''}{\rho} \beta \left\{\left[\frac{(\rho_1\ \rho'')''}{2} - \frac{(\rho_1\ \rho'')'\rho'}{2\rho} - \right.\right.$$

$$\left.- \frac{(\rho_1\ \rho'')\rho''}{\rho}\right] d_{33} + \left[\frac{(\rho_1\ \rho'')'}{2} - \frac{(\rho_1\ \rho'')\rho'}{\rho}\right] d'_{33}\Big\} - \left[\frac{1}{\rho} a_{22} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\rho_1\ \rho'')^2}{\rho^3} \beta d\Theta\right] n^2$$

$$p_{23} = -\frac{\rho_1\ \rho''}{\rho} \beta d_{33}\ n$$

$$q_{23} = -(\frac{\rho_1\ \rho''}{\rho} d'_{33} + \frac{(\rho_1\ \rho'')'}{\rho^2} d\Theta)\beta\ n$$

$$r_{23} = \frac{\rho_1\ \rho''}{\rho^3} \beta\ d\Theta\ n^3 - \left[\frac{1}{\rho_1} a_{12} - \frac{\rho_1\ \rho''}{\rho} a_{22} - \frac{(\rho_1\ \rho'')\rho''}{\rho^2} \beta d_{33} - \right.$$

$$- \frac{(\rho_1 \ \rho'')\rho'}{\rho^2} \beta \ d_{33}' \Big] \ n$$

$$r_{24} = \frac{\rho_1 \ \rho''}{\rho} \beta \ ds \ n$$

$$q_{31} = \rho_1 \ \rho'' \ a_{12} - \frac{\rho}{\rho_1} a_{11} - \frac{\rho'^2}{\rho \ \rho_1} \beta \ d\Theta - \frac{1}{\rho \ \rho_1} \beta \ d_{33} \ n^2$$

$$r_{31} = \frac{(\rho_1 \ \rho'')\rho'}{\rho} a_{22} - \frac{\rho'}{\rho_1} a_{12} + (\frac{\rho'^3}{\rho^2 \ \rho_1} - 2 \frac{\rho' \ \rho''}{\rho \ \rho_1} +$$

$$+ \frac{\rho'^2 \ \rho_1'}{\rho \ \rho_1^2})\beta \ d\Theta - \frac{\rho'^2}{\rho \ \rho_1} \beta \ d\Theta' - (\frac{1}{\rho \ \rho_1} d_{33}' - \frac{\rho_1'}{\rho \ \rho_1^2} d_{33} +$$

$$+ \frac{\rho'}{\rho^2 \ \rho_1} d\Theta)\beta \ n^2$$

$$p_{32} = - \frac{\rho_1 \ \rho''}{\rho} \beta \ d_{33} \ n$$

$$q_{32} = \{2 \left[\frac{(\rho_1 \ \rho'')\rho'}{\rho^2} - \frac{(\rho_1 \ \rho'')'}{\rho}\right] d_{33} - \frac{\rho_1 \ \rho''}{\rho} d_{33}' +$$

$$+ \frac{(\rho_1 \ \rho'')\rho'}{\rho^2} d\Theta\}\beta \ n$$

$$r_{32} = \{- \frac{1}{\rho_1} a_{12} + \frac{\rho_1 \ \rho''}{\rho} a_{22} + \left[2 \frac{(\rho_1 \ \rho'')'\rho'}{\rho^2} + 2 \frac{(\rho_1 \ \rho'')\rho''}{\rho^2} - \right.$$

$$\left. - 2 \frac{(\rho_1 \ \rho'')\rho'^2}{\rho^3} - \frac{(\rho_1 \ \rho'')''}{\rho}\right] \beta \ d_{33} + \left[2 \frac{(\rho_1 \ \rho'')\rho'}{\rho^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\rho_1 \ \rho'')'}{\rho}\right] \beta \ d_{33}' + \left[\frac{(\rho_1 \ \rho'')'\rho'}{\rho^2} - 2 \frac{(\rho_1 \ \rho'')\rho'^2}{\rho^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\rho_1 \ \rho'')\rho''}{\rho^2}\right] \beta \ d\Theta + \frac{(\rho_1 \ \rho'')\rho'}{\rho^2} \beta \ d\Theta'\} \ n + \frac{\rho_1 \ \rho''}{\rho^3} \beta \ d\Theta \ n^3$$

$$p_{33} = \frac{\rho'^2}{\rho} \beta \, d\Theta + 2 \frac{1}{\rho} \beta \, d_{33} \, n^2$$

$$q_{33} = \left[\left(2 \frac{\rho' \rho''}{\rho} - \frac{\rho'^3}{\rho^2} \right) d\Theta + \frac{\rho'^2}{\rho} d\Theta' \right] \beta - 2 \left(\frac{\rho'}{\rho^2} d_{33} - \frac{1}{\rho} d'_{33} \right) \beta \, n^2$$

$$r_{33} = 2\rho'' a_{12} - \frac{\rho}{\rho_1^2} a_{11} - \frac{(\rho_1 \rho'')^2}{\rho} a_{22} - \left[2 \left(\frac{\rho''}{\rho^2} - \frac{\rho'^2}{\rho^3} \right) d_{33} + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\rho'}{\rho^2} d'_{33} + \left(\frac{\rho''}{\rho^2} - 2 \frac{\rho'^2}{\rho^3} \right) d\Theta + \frac{\rho'}{\rho^2} d\Theta' \right] \beta \, n^2 - \frac{1}{\rho^3} \beta \, d\Theta \, n^4$$

$$p_{34} = \rho \beta$$

$$q_{34} = \rho'(2 - ds)\beta$$

$$r_{34} = [\rho''(1 - ds) - \rho' \, ds']\beta - \frac{1}{\rho} \beta \, ds \, n^2$$

$$q_{41} = - \frac{1}{\rho_1} d_{11}$$

$$r_{41} = \frac{\rho_1'}{\rho_1^2} d_{11} - \frac{\rho'}{\rho \rho_1} d_{12}$$

$$r_{42} = \frac{\rho_1 \rho''}{\rho^2} d_{12} \, n$$

$$p_{43} = d_{11}$$

$$q_{43} = \frac{\rho'}{\rho} d_{12}$$

$$r_{43} = - \frac{1}{\rho^2} d_{12} \, n^2$$

$$r_{44} = 1$$

$$c_1 = -\rho\, p_{sn} + \rho\, b_1\, p'_{Tn} + [\rho'(b_1 - b_2) + \rho\, b'_1]\, p_{Tn} +$$

$$+ \frac{\rho'}{\rho_1}\, \beta(ds\, b_1 - b_2) m_{Tn}$$

$$c_2 = -\rho\, p_{\Theta n} - b_2\, n\, p_{Tn} - \frac{\rho_1\, \rho''}{\rho}\, \beta\, (ds\, b_1 - b_2) n\, m_{Tn}$$

$$c_3 = -\rho\, p_{zn} + (\rho_1\, \rho''\, b_2 - \frac{\rho}{\rho_1}\, b_1) p_{Tn} + [\rho'(ds'\, b_1 + ds\, b'_1 - b'_2) +$$

$$+ \rho''(ds\, b_1 - b_2) + \frac{1}{\rho}\, (ds\, b_1 - b_2) n^2] \beta\, m_{Tn} +$$

$$+ \rho'(ds\, b_1 - b_2) \beta\, m'_{Tn}$$

$$c_4 = -b_1\, m_{Tn}$$

A7 - TENSÕES EFETIVAS NO CONTORNO

Para estabelecer a equação que estipula as condições de contorno nos problemas de cascas de revolução, utilizou-se o conceito de tensões efetivas no contorno.

As tensões efetivas no contorno são determinadas a partir das tensões e momentos resultantes que atuam no contorno, considerando-se uma curva de contorno s = constante. Para tal, considere-se a figura A7.1a, com ab = bc = $d\ell$, onde estão mostradas as tensões e momentos por unidade de comprimento.

Substituindo o momento por unidade de comprimento $M_{s\Theta}$, por duas forças $M_{s\Theta}$ e o momento por unidade de comprimento $M_{s\Theta} + (\partial M_{s\Theta}/\partial \ell)d\ell$ por duas forças $M_{s\Theta} + (\partial M_{s\Theta}/\partial \ell)d\ell$, chega-se ao esquema de forças esquematizado na figura A7.1b.

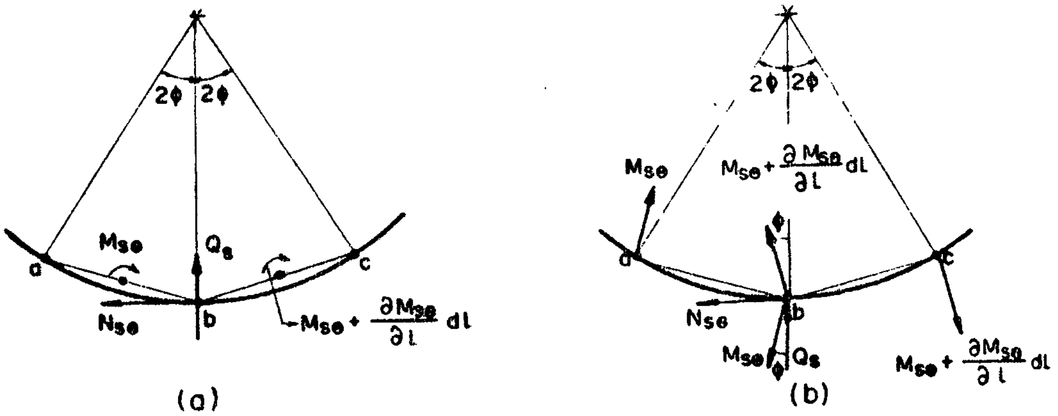


Fig. A7.1

Considerando o ponto b, o somatório de forças na direção radial é:

$$\Sigma F_r = Q_s \, d\ell + (M_{s\Theta} + \frac{\partial M_{s\Theta}}{\partial \ell} d\ell)\cos\phi - M_{s\Theta}\cos\phi \qquad (A7.1)$$

Como $d\ell$ é uma quantidade infinitesimal, ϕ é um ângulo pequeno e $\cos\phi \simeq 1$, então:

$$\Sigma F_r = (Q_s + \frac{\partial M_{s\Theta}}{\partial \ell})d\ell \qquad (A7.2)$$

e pode-se definir

$$\hat{Q}_s = Q_s + \frac{\partial M_{s\Theta}}{\partial \ell} \qquad (A7.3)$$

Considerando ainda o ponto b, o somatório de forças na direção tangencial fornece:

$$\Sigma F_t = N_{s\Theta}\, d\ell + 2M_{s\Theta} \operatorname{sen} \phi + \frac{\partial M_{s\Theta}}{\partial \ell}\, d\ell \operatorname{sen} \phi \qquad (A7.4)$$

sendo $\operatorname{sen} \phi \simeq \phi$ pelas razões apresentadas acima.

Pela figura

$$2\phi \simeq \frac{d\ell}{r_2} \quad \text{e portanto} \quad \phi \simeq \frac{d\ell}{2\, r_2} \qquad (A7.5)$$

Assim, a equação (A7.4) fica:

$$\Sigma F_t = N_{s\Theta}\, d\ell + 2M_{s\Theta} \frac{d\ell}{2\, r_2} + \frac{\partial M_{s\Theta}}{\partial \ell}\, d\ell \frac{d\ell}{2\, r_2} \qquad (A7.6)$$

e desprezando diferenciais de ordem superior,

$$\Sigma F_t = (N_{s\Theta} + \frac{M_{s\Theta}}{r_2})\, d\ell \qquad (A7.7)$$

podendo-se definir

$$\hat{N}_{s\Theta} = N_{s\Theta} + \frac{M_{s\Theta}}{r_2} \qquad (A7.8)$$

Como o contorno é sobre a linha de coordenadas Θ, e considerando que a casca é fina, a equação (A3.1b) fornece

$$d\ell = B\, d\Theta \qquad (A7.9)$$

e como a casca é de revolução $B = r$ (equação A1.16), então

$$d\ell = r\, d\Theta \qquad (A7.10)$$

Desta forma a equação (A7.3) fica

$$\hat{Q}_s = Q_s + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{s\Theta}}{\partial \Theta} \qquad \text{(A7.11)}$$

e a equação (A7.8), utilizando a equação (A1.17) que fornece r_2, passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\hat{N}_{s\Theta} = N_{s\Theta} - \frac{r_1\ r''}{r} M_s \qquad \text{(A7.12)}$$

Adimensionalizando as equações (A7.11) e (A7.12) conforme o procedimento indicado no ítem 2.8, chega-se a:

$$\hat{Q}_{sn} = Q_{sn} + \frac{\beta\ n}{\rho} M_{s\Theta n} \qquad \text{(A7.13)}$$

$$\hat{N}_{s\Theta n} = N_{s\Theta n} - \frac{\rho_1\ \rho''}{\rho}\ \beta\ M_{s\Theta n} \qquad \text{(A7.14)}$$

Utilizando as equações (2.18) pode-se determinar $\hat{Q}_{sn}$ e $\hat{N}_{s\Theta}$ em função do vetor $X = \{u_n,\ v_n,\ w_n,\ M_{sn}\}^t$ e sua primeira derivada em relação a ξ.

$$\hat{Q}_{sn} = -(\frac{\rho'^2}{\rho^2\ \rho_1}\ \beta\ d\Theta + \frac{1}{\rho_1\ \rho^2}\ \beta\ d_{33}\ n^2)u_n - \frac{\rho_1\ \rho''}{\rho^2}\ \beta\ d_{33}\ n\ v_n' +$$
$$+ \left[\frac{(\rho_1\ \rho'')\rho'}{\rho^3}\ (2d_{33} + d\Theta)\beta - \frac{(\rho_1\ \rho'')'}{\rho^2}\ \beta\ d_{33}\right] n\ v_n +$$
$$+ \left[\frac{\rho'^2}{\rho^2}\ \beta\ d\Theta + 2\ \frac{1}{\rho^2}\ \beta\ d_{33}\ n^2\right] w_n' - \frac{\rho'}{\rho^3}\ (2d_{33} + d\Theta)\ \beta n^2\ w_n +$$
$$+ \beta\ M_{sn}' + \frac{\rho'}{\rho}\ (1 - ds)\beta\ M_{sn} - \frac{\rho'}{\rho}\ (ds\ b_1 - b_2)\beta\ m_{Tn} \qquad \text{(A7.15)}$$

$$\hat{N}_{s\Theta n} = (-\ \frac{1}{\rho}\ a_{33} + \frac{\rho''}{2\rho^2}\ d_{33}\ \beta)n\ u_n - \{\frac{\rho'}{\rho}\ a_{33} + \frac{\rho_1\ \rho''}{\rho}\left[\frac{(\rho_1\ \rho'')\rho'}{\rho^2}\ -\right.$$
$$\left. - \frac{(\rho_1\ \rho'')'}{2}\right]\beta\ d_{33}\}\ v_n + \left[a_{33} + \frac{(\rho_1\ \rho'')^2}{2\rho^2}\ \beta\ d_{33}\right] v_n' +$$

$$+ \frac{\rho_1 \, \rho'' \, \rho'}{\rho^3} \, d_{33} \, \beta \, n \, w_n - \frac{\rho_1 \, \rho''}{\rho^2} \, d_{33} \, \beta \, n \, w_n' \qquad (A7.16)$$

A8 - ELEMENTOS DAS MATRIZES DA EQUAÇÃO DE CONTORNO

Com as condições de contorno dadas conforme o ítem 2.10, e as definições de variáveis adimensionalizadas conforme o ítem 2.8, os coeficientes das equações de contorno são:

$$f_1 = a_{11}$$

f_2

$$f_2 = \frac{\rho'}{\rho}\, a_{12}$$

$$f_3 = \frac{1}{\rho}\, a_{12}\, n$$

$$f_4 = \frac{1}{\rho_1}\, a_{11} - \frac{\rho_1\, \rho''}{\rho}\, a_{12}$$

$$f_5 = \left(\frac{\rho''}{2\rho^2}\, \beta\, d_{33} - \frac{1}{\rho}\, a_{33}\right) n$$

$$f_6 = \frac{(\rho_1\, \rho'')^2}{2\rho^2}\, \beta\, d_{33} + a_{33}$$

$$f_7 = -\frac{\rho'}{\rho}\, a_{33} - \frac{\rho_1\, \rho''}{\rho} \left[\frac{(\rho_1\, \rho'')\rho'}{\rho^2} - \frac{(\rho_1\, \rho'')'}{2\rho}\right] \beta\, d_{33}$$

$$f_8 = -\frac{\rho_1\, \rho''}{\rho^2}\, \beta\, d_{33}\, n$$

$$f_9 = \frac{\rho_1\, \rho''\, \rho'}{\rho^3}\, \beta\, d_{33}\, n$$

$$f_{10} = -\frac{\rho'^2}{\rho_1\, \rho^2}\, \beta\, d\Theta - \frac{1}{\rho_1\, \rho^2}\, \beta\, d_{33}\, n^2$$

$$f_{11} = -\frac{\rho_1\, \rho''}{\rho^2}\, \beta\, d_{33}\, n$$

$$\cancel{f_{12} = \left[\frac{(\rho_1 \ \rho'')\rho'}{\rho^3} (2d_{33} + d\Theta) - \frac{(\rho_1 \ \rho'')'}{\rho^2} d_{33} \right] \beta \ n}$$

$$f_{13} = \frac{\rho'^2}{\rho^2} \beta \ d\Theta + 2 \frac{1}{\rho^2} \beta \ d_{33} \ n^2$$

$$f_{14} = - \frac{\rho'}{\rho^3} (2d_{33} + d\Theta)\beta \ n^2$$

$$f_{15} = \beta$$

$$f_{16} = \frac{\rho'}{\rho} (1 - ds)\beta$$

$$f_{17} = -1$$

$$f_{18} = \frac{1}{\rho_1}$$

$$y_1 = e_1 + g_1 \ b_1 \ p_{Tn}$$

$$y_2 = e_2$$

$$y_3 = e_3 + g_3 \frac{\rho'}{\rho} (ds \ b_1 - b_2)\beta \ m_{Tn}$$

$$y_4 = e_4$$

A9 - ELEMENTOS DAS MATRIZES DA EQUAÇÃO QUE REGE AS DESCONTINUIDADES

Considerando a definição do vetor $Z = \{N_{sn}, \hat{N}_{s\Theta n}, \hat{Q}_{sn}, \phi_{sn}\}$ e as equações que fornecem suas componentes em função das componentes dos vetores, X' e X, os elementos não nulos das matrizes S, T e do vetor L que aparecem na equação (2.24) são:

$$s_{11} = a_{11}$$

$$s_{22} = a_{33} + \frac{(\rho_1\ \rho'')^2}{2\rho^2}\ \beta\ d_{33}$$

$$s_{23} = -\ \frac{\rho_1\ \rho''}{\rho^2}\ d_{33}\ \beta\ n$$

$$s_{32} = -\ \frac{\rho_1\ \rho''}{\rho^2}\ \beta\ d_{33}\ n$$

$$s_{33} = \frac{\rho'^2}{\rho^2}\ \beta\ d\Theta + 2\ \frac{1}{\rho^2}\ \beta\ d_{33}\ n^2$$

$$s_{34} = \beta$$

$$s_{43} = -1$$

$$t_{11} = \frac{\rho'}{\rho}\ a_{12}$$

$$t_{12} = \frac{1}{\rho}\ a_{12}\ n$$

$$t_{13} = \frac{1}{\rho_1}\ a_{11} - \frac{\rho_1\ \rho''}{\rho}\ a_{12}$$

$$t_{21} = (\frac{\rho''}{2\rho^2} \beta\, d_{33} - \frac{1}{\rho} a_{33})n$$

$$t_{22} = - \frac{\rho'}{\rho} a_{33} - \frac{\rho_1\ \rho''}{\rho} \left[\frac{(\rho_1\ \rho'')\rho'}{\rho^2} - \frac{(\rho_1\ \rho'')'}{2\rho}\right] \beta\, d_{33}$$

$$t_{23} = \frac{(\rho_1\ \rho'')\rho'}{\rho^3} \beta\, d_{33}\, n$$

$$t_{31} = -(\frac{\rho'^2}{\rho^2\ \rho_1} \beta\, d\Theta + \frac{1}{\rho_1\ \rho^2} \beta\, d_{33}\, n^2)$$

$$t_{32} = \left[\frac{(\rho_1\ \rho'')\rho'}{\rho^3} (2d_{33} + d\Theta)\beta - \frac{(\rho_1\ \rho'')'}{\rho^2} \beta\, d_{33}\right] n$$

$$t_{33} = - \frac{\rho'}{\rho^3} (2d_{33} + d\Theta)\beta\, n^2$$

$$t_{34} = \frac{\rho'}{\rho} (1 - ds)\beta$$

$$t_{41} = \frac{1}{\rho_1}$$

$$\ell_1 = -b_1\, p_{Tn}$$

$$\ell_3 = - \frac{\rho'}{\rho} (ds\ b_1 - b_2)\beta\, m_{Tn}$$

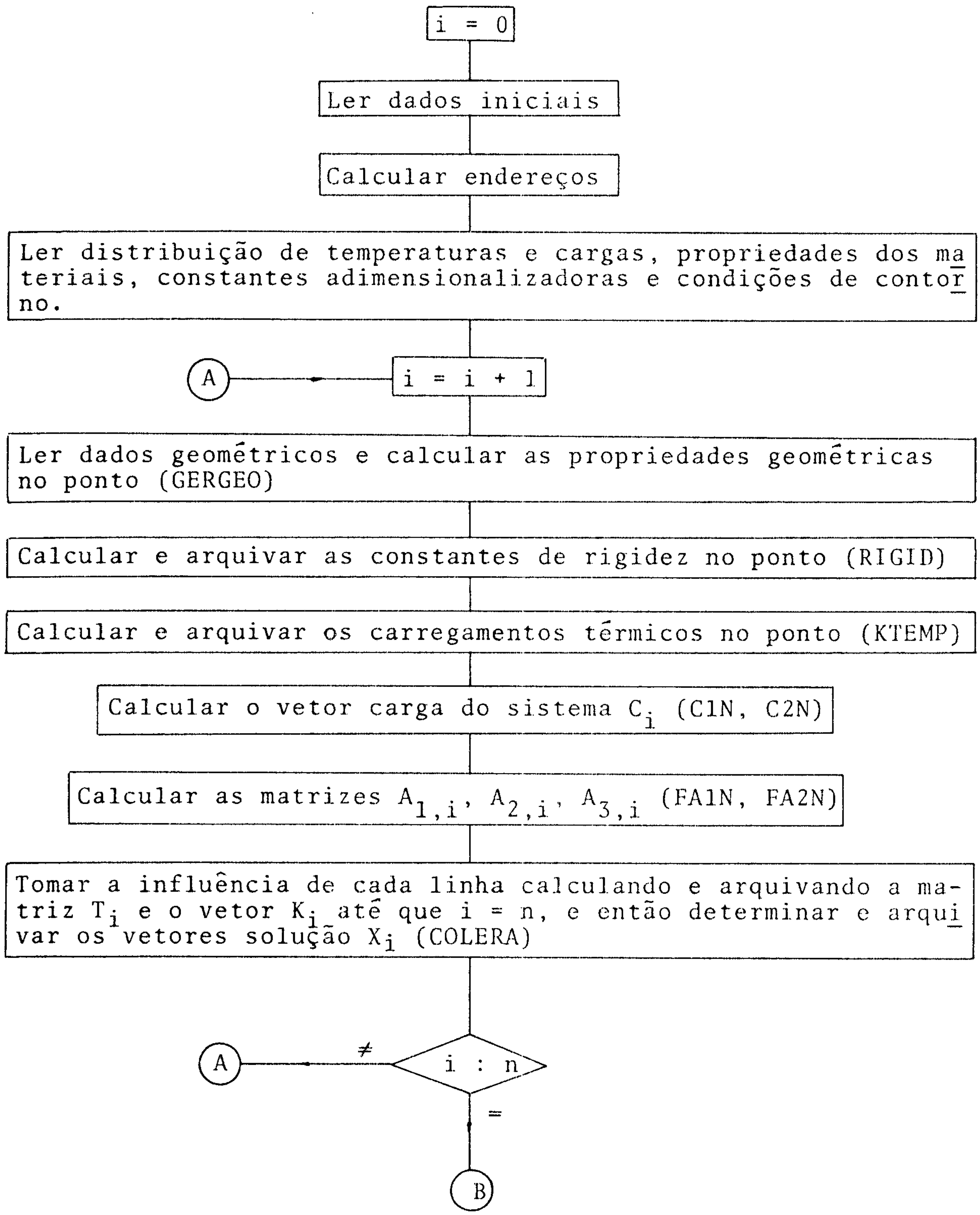
A10 - PROGRAMAS CORTER E CORTERDE

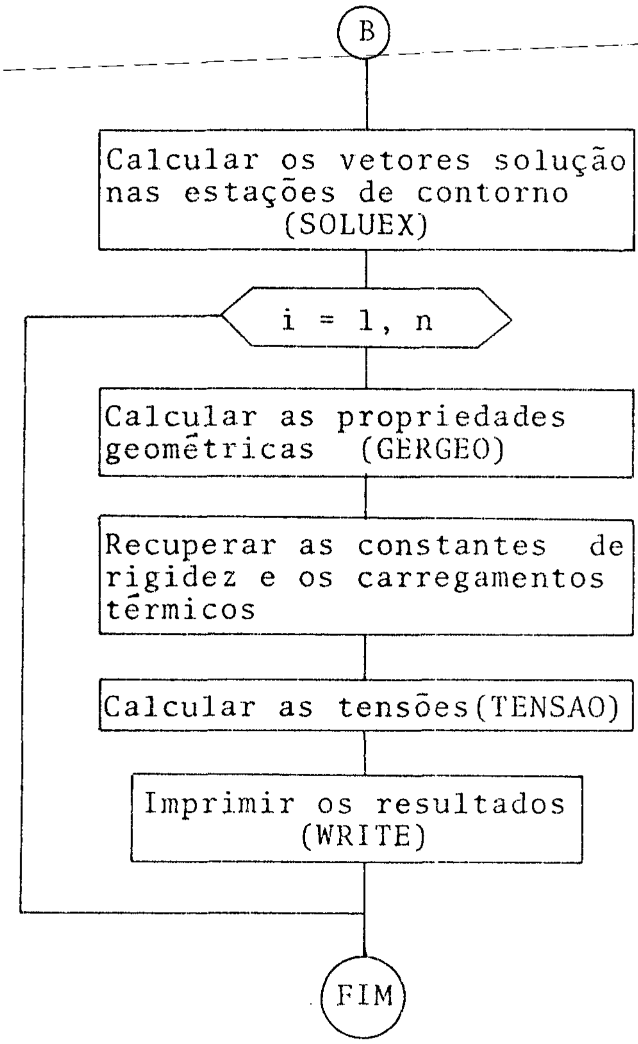
Neste apêndice apresentam-se os fluxogramas dos programas digitais desenvolvidos para as cascas sem descontinuidades (CORTER) e com descontinuidades (CORTERDE), e os das subrotinas utilizadas para solução dos sistemas de equação em cada um destes casos (COLERA e CORADE respectivamente), com o objetivo de mostrar sua estrutura de funcionamento.

O programa CORTER pode ser utilizado na solução de problemas de cascas de revolução submetidas a distribuições de temperatura e cargas quaisquer, cujo material possa ser considerado elasto-termicamente ortotrópico, com propriedades variáveis de forma contínua ao longo do meridiano, cuja forma possa ser modelada através de segmentos de reta e de circunferência, desde que concordantes. A espessura pode ser uma função do comprimento do meridiano, com derivada contínua, e o espaçamento pivotal deve ser constante em toda a casca.

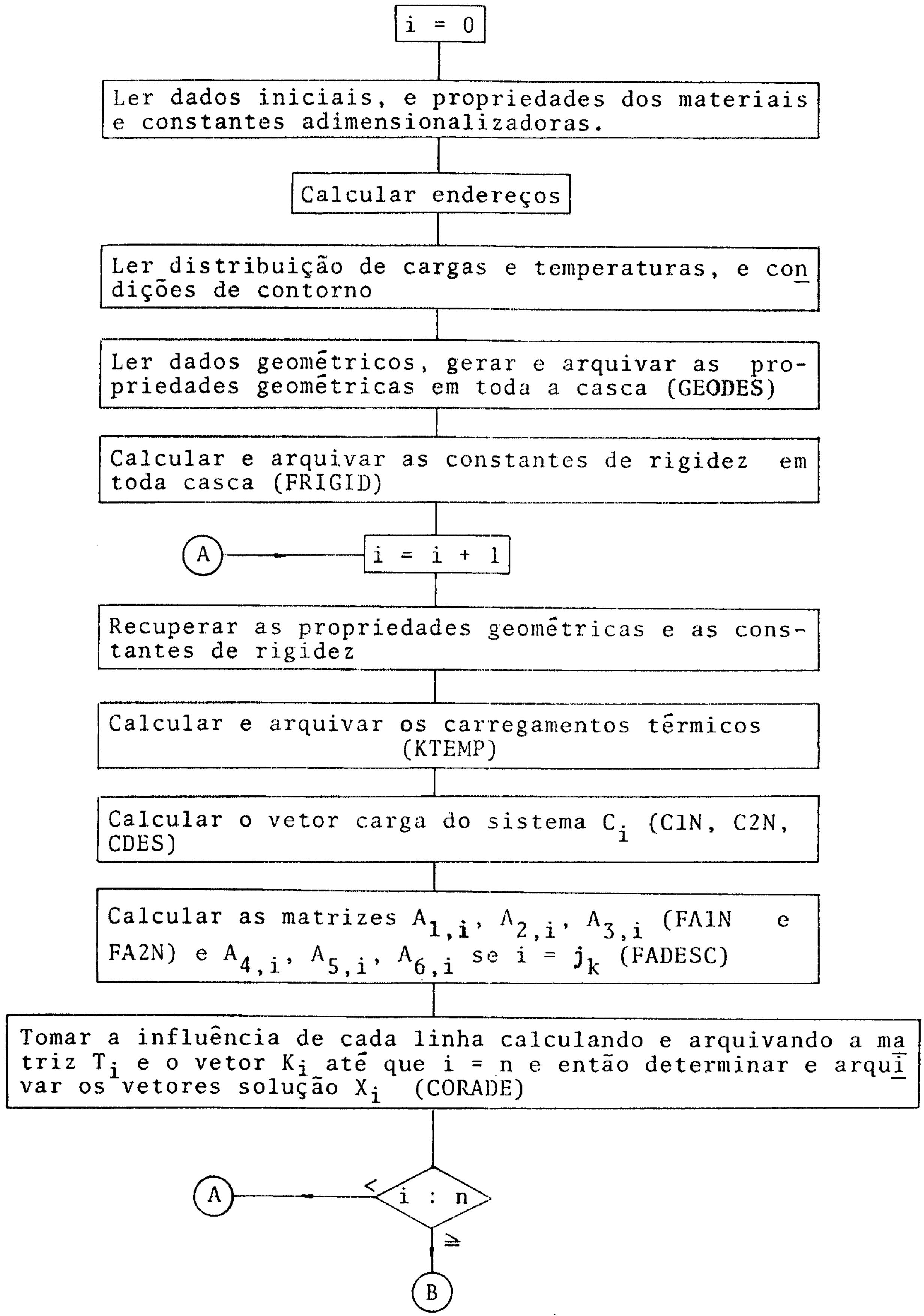
Quando as propriedades do material, a espessura ou o espaçamento pivotal variam bruscamente, ou a função que define a forma do meridiano tem derivada descontínua, o problema deve ser resolvido utilizando-se o programa CORTERDE.

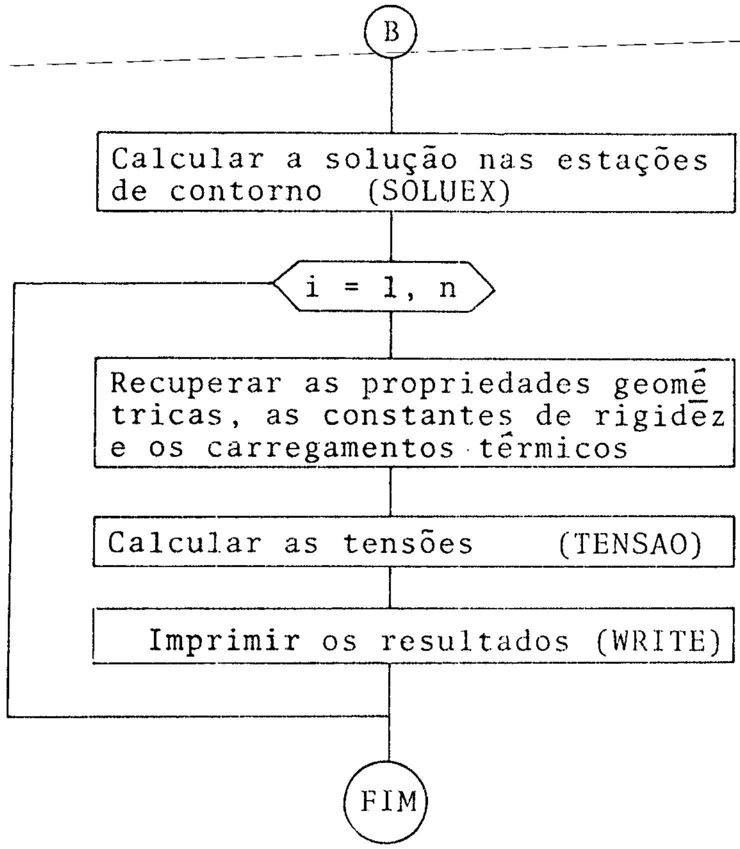
FLUXOGRAMA DO PROGRAMA CORTER



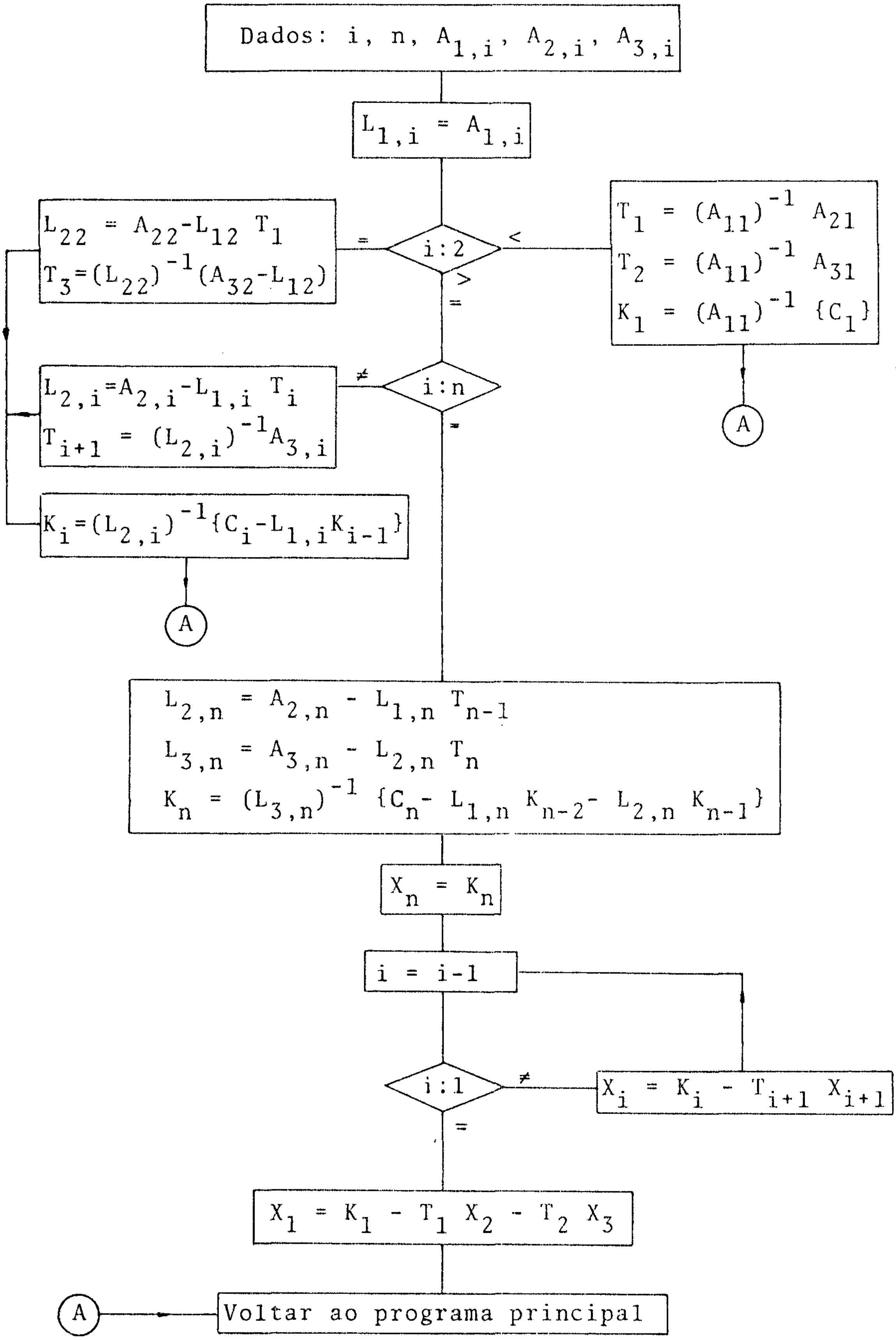

B
Calcular os vetores solução nas estações de contorno (SOLUEX)
i = 1, n
Calcular as propriedades geométricas (GERGEO)
Recuperar as constantes de rigidez e os carregamentos térmicos
Calcular as tensões(TENSAO)
Imprimir os resultados (WRITE)
FIM

FLUXOGRAMA DO PROGRAMA CORTERDE

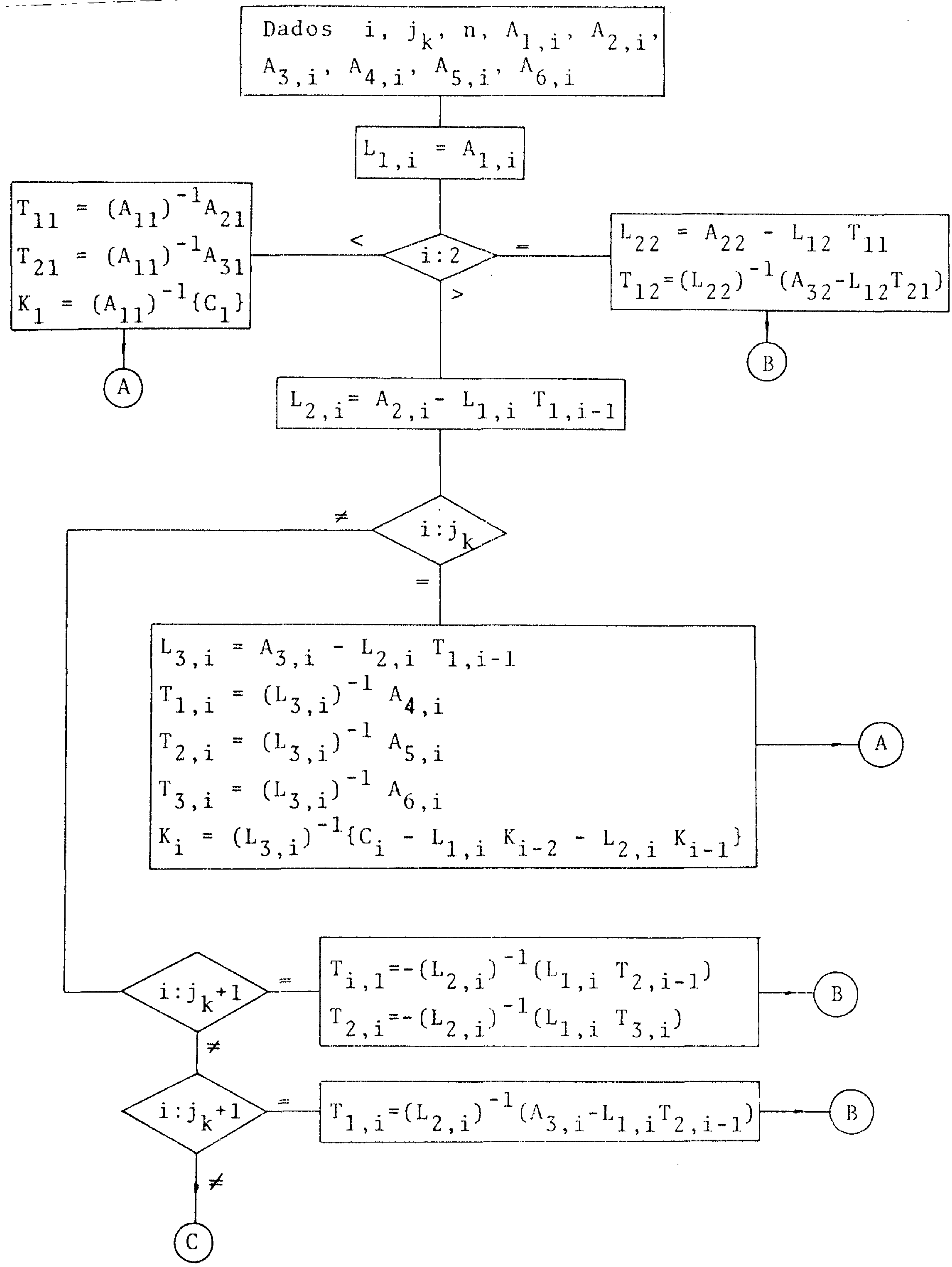


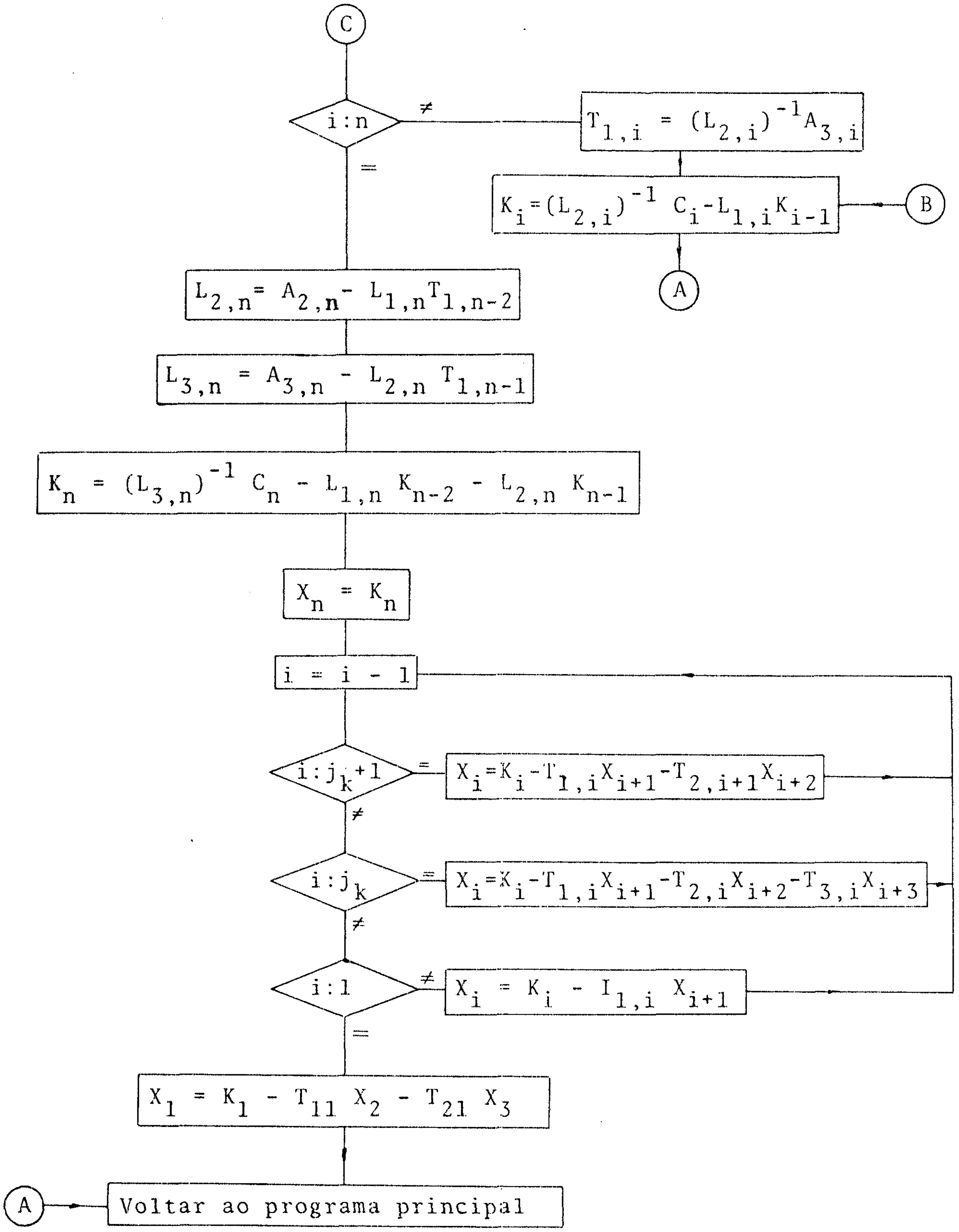

B
Calcular a solução nas estações de contorno (SOLUEX)
i = 1, n
Recuperar as propriedades geomé tricas, as constantes de rigidez e os carregamentos térmicos
Calcular as tensões (TENSAO)
Imprimir os resultados (WRITE)
FIM

FLUXOGRAMA DA SUBROTINA COLERA



FLUXOGRAMA DA SUBROTINA CORADE




C
i:n
≠
=
$T_{1,i} = (L_{2,i})^{-1} A_{3,i}$
$K_i = (L_{2,i})^{-1}\ C_i - L_{1,i} K_{i-1}$
B
A
$L_{2,n} = A_{2,n} - L_{1,n} T_{1,n-2}$
$L_{3,n} = A_{3,n} - L_{2,n}\ T_{1,n-1}$
$K_n = (L_{3,n})^{-1}\ C_n - L_{1,n}\ K_{n-2} - L_{2,n}\ K_{n-1}$
$X_n = K_n$
$i = i - 1$
$i:j_k+1$
=
$X_i = K_i - T_{1,i} X_{i+1} - T_{2,i+1} X_{i+2}$
≠
$i:j_k$
=
$X_i = K_i - T_{1,i} X_{i+1} - T_{2,i} X_{i+2} - T_{3,i} X_{i+3}$
≠
$i:1$
≠
$X_i = K_i - T_{1,i}\ X_{i+1}$
=
$X_1 = K_1 - T_{11}\ X_2 - T_{21}\ X_3$
A
Voltar ao programa principal