

5

LISA
MATEMÁTICA
NA
ESCOLA
ELEMENTAR

MARIA DO CARMO
ARRUDA DE OLIVEIRA

LISA-MATEMÁTICA
NA
ESCOLA ELEMENTAR



MATEMÁTICA MODERNA

MARIA DO CARMO ARRUDA TOLEDO

MATEMÁTICA MODERNA
NA
ESCOLA ELEMENTAR

5 ° VOLUME



LISA — EDITORA IRRADIANTE S.A.

9400337

T583m

ÀS CRIANÇAS DO BRASIL

Espero que gostem dos volumes desta coleção. Eles foram feitos especialmente para vocês; queremos, não só facilitar o seu aprendizado da Matemática, mas também transformá-lo num prazer.

Desejo-lhes, pois, estudo agradável e proveitoso.

O Editor

LEONÍDIO BALBINO DA SILVA

AOS PAIS BRASILEIROS

V. S.^{as} não de verificar como os volumes desta série são diferentes daqueles em que aprenderam os rudimentos da Matemática. Com efeito, pesquisas demoradas de grandes especialistas da Didática moderna revolucionaram o estudo desta matéria, considerada até há pouco difícil e tediosa. O método elaborado por eles é posto aqui pela Autora ao serviço do primário. Graças a ele, desde cedo as crianças se familiarizam com o raciocínio matemático, o que lhes permitirá abordar sem dificuldade os estágios subseqüentes.

Temos certeza de que, dando uma olhada nestes livros coloridos e alegres, V. S.^{as} ficarão com inveja de seus filhos, que, graças à renovação dos métodos didáticos, estão agora em condições de enfrentar sem medo o espantinho de várias gerações.

O Editor

Todos os direitos reservados pela
LISA — EDITORA IRRADIANTE S.A.
Rua Castro Alves, 127 131, 139 — Liberdade
Tels.: 278-8900 — 278-7944 — 278-1752 — 278-0015 — 278-0085
SÃO PAULO

de conjunto no plano

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. A união dos conjuntos A e B , denotada por $A \cup B$, é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B .

Exemplo:

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$.

Então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.

1.1. Definição. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. A interseção dos conjuntos A e B , denotada por $A \cap B$, é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem tanto a A quanto a B .

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$. Então $A \cap B = \{2, 3\}$.

Teoria dos Conjuntos

A teoria dos conjuntos é uma das áreas da matemática que estuda as propriedades e as relações entre conjuntos. Ela é fundamental para a compreensão de muitos outros ramos da matemática, como a álgebra, a geometria e a análise.

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS CONJUNTOS

Um conjunto é uma coleção bem definida de objetos, chamados de elementos do conjunto. Os conjuntos são representados por letras maiúsculas, e os elementos por letras minúsculas.

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$. Então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ e $A \cap B = \{2, 3\}$.

CONCEITOS PRIMITIVOS

A palavra *conjunto* encerra uma idéia por demais conhecida. Observando o mundo em que vivemos verificamos que pessoas, animais, objetos, etc., não existem apenas como *elementos* isolados, mas também como *conjuntos*. Uma família é um conjunto de pessoas que são os elementos do conjunto. A Seleção Brasileira de Futebol é um conjunto de jogadores que são os elementos do conjunto. Todos os números divisíveis por cinco constituem o conjunto de múltiplos de cinco e tais números são os elementos do conjunto. A reta é um conjunto de pontos e os pontos são os elementos do conjunto.

As noções de *conjunto* e *elemento* são extremamente fundamentais em toda a Matemática. Assim sendo, devemos aceitá-las como noções primitivas. Esses termos são chamados *não-definidos* e as noções que eles encerram são *conceitos primitivos*.

Sendo as noções de conjunto e elemento noções fundamentais, se tentássemos defini-los, estaríamos perdendo tempo, pois para isso deveríamos empregar entes que ainda não foram definidos. E, ao procurarmos definir tais entes, deveríamos usar outros, não definidos também. Assim, uma definição estando sempre na dependência de outras definições, nunca chegaríamos a um ponto de partida. Adotamos, por isso, as noções de conjunto e elementos, intimamente relacionadas, como pontos de partida, sem procurarmos definir nenhum dos dois termos.

O *ponto* e a *reta* também são termos não-definidos em Matemática porque são extremamente fundamentais para o estudo das outras figuras geométricas. Já temos noção intuitiva desses entes geométricos.

A idéia de ponto é associada a de um corpúsculo infinitamente pequeno, tão pequeno que não tem dimensões.

Podemos obter uma imagem razoavelmente boa de ponto através do sinal deixado pela ponta de um lápis, bem apontado, no papel.

A idéia de reta pode ser representada por meio de um traço bem fino feito com o auxílio de uma régua. Este traço não é a reta, mas um modelo de reta.

Os termos conjunto, elemento, ponto e reta são conceitos primitivos e servirão de base para definições de outros termos que empregaremos

para organizar de uma forma bem moderna os nossos conhecimentos de Matemática. Não devemos, portanto, defini-los.

Usando a notação universalmente adotada no ensino de Matemática Moderna, representaremos os conjuntos de modo geral pelas letras maiúsculas do alfabeto latino e os elementos, pelas minúsculas.

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Dizemos que um elemento de um conjunto *pertence* ao conjunto. Você *pertence* ao conjunto de sua família. Pelé *pertence* ao conjunto de jogadores de futebol da Seleção Brasileira de 1970. O número 25 *pertence* ao conjunto de múltiplos de cinco. O ponto *pertence* ao conjunto de pontos da reta, e assim por diante.

Assim, há uma relação entre os elementos e o conjunto a que *pertencem*, denominada *relação de pertinência*.

Seja o conjunto A dos meses do ano, que podemos representar assim:

$$A = \{j, f, m, a, m, j, j, a, s, o, n, d\}.$$

Como março e maio estão representados por m, é preciso distinguir um elemento do outro e escreveremos m_1 para março e m_2 para maio. A mesma coisa ocorre com abril e agosto, que passarão a ser representados por a_1 e a_2 , respectivamente, e janeiro, junho e julho, que representaremos j_1, j_2, j_3 , respectivamente. E teremos:

$$A = \{j_1, f, m_1, a_1, m_2, j_2, j_3, a_2, s, o, n, d\}.$$

O fato de um elemento pertencer a um dado conjunto é indicado por \in (pertence) e a sua negação por \notin (não pertence).

No exemplo acima, "janeiro pertence ao conjunto dos meses do ano", a frase entre aspas pode ser escrita simbolicamente assim: janeiro $\in A$ ou $j_1 \in A$.

A frase "primavera não pertence ao conjunto dos meses do ano" pode ser escrita simbolicamente assim: primavera $\notin A$.

Outros exemplos: 1.º Seja A o conjunto dos meses do ano:

- Maior $\in A$ (maio pertence ao conjunto dos meses do ano).
- domingo $\notin A$ (domingo não pertence ao conjunto dos meses do ano).

2.º Seja B = {jogadores do Santos Futebol Clube}:

- Pelé $\in B$.
- Rivelino $\notin B$.

3.º) Seja $M = \{\text{rios do Brasil}\}$:

- a) Amazonas $\in M$.
b) Reno $\notin M$.

4.º) Seja $N = \{\text{Números naturais}\}$:

- a) $5 \in N$.
b) $\frac{3}{5} \notin N$.

IDENTIFICAÇÃO DOS ELEMENTOS DO CONJUNTO

Vimos que um conjunto é determinado pelos seus elementos. Podemos identificar os elementos de um conjunto de três maneiras:

1.ª) Observando, um a um, os elementos que o constituem.

É uma identificação concreta pela observação dos próprios elementos ou de seus desenhos.

Exemplos:

Conjuntos de objetos escolares, de estudantes de uma escola, de flôres do jardim, etc.

2.ª) Nomeando, um a um, todos os elementos do conjunto.

Exemplos:

$A = \{\text{São Paulo, Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul}\}$
(conjunto dos Estados da região Sul do Brasil).

$B = \{\text{Mercúrio, Vênus, Terra, Marte}\}$ (conjunto de planêtas).

$C = \{2, 5, 8, 10\}$ (conjunto numérico).

3.ª) Indicando uma propriedade comum a todos os elementos do conjunto.

Exemplos:

- a) conjunto dos professores primários do Brasil.
b) conjunto dos habitantes da cidade de Campinas.
c) conjunto dos números naturais.

RELAÇÃO DE INCLUSÃO — SUBCONJUNTOS

Consideremos os conjuntos $A = \{\text{Vênus, Terra, Marte}\}$ e $B = \{\text{Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno, Plutão}\}$.

Observemos, no exemplo, que todo elemento que pertence a A , pertence também a B .

Neste caso, dizemos que "A está contido em B" ou "B contém A".

Fica, assim, estabelecida uma relação entre os conjuntos A e B , *relação de inclusão*.

Para indicar: "o conjunto A está contido no conjunto B " usaremos o símbolo \subset . No exemplo acima, escreveremos: $A \subset B$.

A frase "B contém A", com o mesmo significado da anterior, pode ser simbolicamente escrita: $B \supset A$.

A negação de ambas: $A \not\subset B$ ou $B \not\supset A$ (A não está contido em B ou B não contém A).

Exemplos:

Sejam os conjuntos:

$M = \{\text{meses do ano}\}$.

$F = \{\text{meses de férias escolares}\}$.

$E = \{\text{estações do ano}\}$.

Podemos escrever:

a) $F \subset M$ ou $M \supset F$ porque todos os elementos que pertencem a F pertencem também a M .

b) $E \not\subset M$ ou $M \not\supset E$ porque os elementos que pertencem a E não pertencem a M .

c) $F \not\subset E$ ou $E \not\supset F$ pela mesma razão acima exposta.

Definição: "Dados dois conjuntos A e B quaisquer, dizemos que A é *subconjunto* de B quando A está contido em B " (ou B contém A).

Nos exemplos acima, F é subconjunto de M e E não é subconjunto de M .

CONJUNTOS IGUAIS

Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{c, a, b\}$.

Uma simples observação nos leva a concluir que os elementos que pertencem a A são os mesmos elementos que pertencem a B , isto é, $A \subset B$ e $B \subset A$.

Neste caso, dizemos que $A = B$ ou que A e B constituem o mesmo conjunto.

Outro exemplo: $A = \{2, 5, 10, 20\}$ e $B = \{10, 20, 2, 5\}$.

Os conjuntos A e B são constituídos pelos mesmos elementos, logo: $A = B$.

A negação de $A = B$ é $A \neq B$.

Quando dizemos que dois conjuntos são iguais ou quando escrevemos uma igualdade $A = B$ entre dois conjuntos, estamos afirmando que os dois conjuntos têm precisamente os mesmos elementos.

Mas, pensará você:

— Se os dois conjuntos têm precisamente os mesmos elementos, eles são o mesmo conjunto! Por que hei de dizer que são *dois* conjuntos iguais?

É você tem alguma razão. Mas, em Matemática, são feitas algumas generalizações para que certos conceitos se tornem mais amplos e sejam evitadas as exceções. Quando introduzimos o conceito de conjunto vazio e de conjunto unitário, nada mais fizemos que ampliar o conceito de conjunto de tal forma que não há exceções. Uma propriedade caracteriza sempre um conjunto, mesmo que ele não possua elementos.

Vejamos, agora, o caso dos conjuntos que possuem os mesmos elementos e que dizemos serem iguais.

Se, por exemplo, procurarmos no conjunto das cores aquelas que têm a propriedade "ser cor da bandeira da Holanda", teremos:

$H = \{\text{vermelho, branco, azul}\}$.

Se ainda procurarmos no conjunto das cores aquelas que têm a propriedade "ser cor da bandeira da França", teremos:

$F = \{\text{vermelho, branco, azul}\}$.

Observando os conjuntos H e F , vemos que ambos são formados pelos mesmos elementos. Então:

$$H = F$$

Pelo conceito de igualdade entre conjuntos, podemos ver que duas propriedades diferentes podem definir o mesmo conjunto.

Logo, quando são dadas duas propriedades diferentes, podemos associar um conjunto a cada uma delas. Pode acontecer, entretanto, que essas duas propriedades definam o mesmo conjunto, como no exemplo anterior. Então, os dois conjuntos são iguais.

Outro exemplo:

Seja A o conjunto de todos os números naturais compreendidos entre 1,5 e 12,5 e seja B o conjunto dos números naturais menores que 13 e maiores que 1.

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.\}$$

Então, $A = B$, pois os conjuntos A e B são constituídos pelos mesmos elementos.

É freqüente o caso em que o mesmo conjunto pode ser descrito de maneiras diferentes. As descrições apresentarem-se com aspectos diferentes não significa, necessariamente, que os conjuntos sejam diferentes.

Outro exemplo:

Seja P o conjunto dos números pares e M , o conjunto dos múltiplos de 2. Também agora, $P = M$, como é fácil verificar.

CONJUNTO VAZIO

Vimos que um conjunto pode ser identificado ou descrito pela enumeração de todos os seus elementos, um a um, ou pela menção de uma propriedade que todos os seus elementos possuem.

Um conjunto pode ficar perfeitamente determinado mediante uma propriedade que cada um de seus elementos deve possuir; aqueles que possuem a propriedade pertencem ao conjunto, aqueles que não possuem a propriedade, não pertencem ao conjunto.

Assim, a cada propriedade, procuramos associar um conjunto, independentemente de sabermos ou não enumerar os seus elementos.

Mas, este procedimento pode nos levar a uma situação desconfortável: e se a uma dada propriedade não existir nenhum conjunto a ela associado? Se não houver elemento algum associado a essa propriedade? Era preciso que tal situação fosse evitada. Não deveria haver exceções para que o campo de aplicações da teoria dos conjuntos fosse ilimitado, geral.

Para evitar a limitação do campo de aplicação da teoria dos conjuntos, ficou estabelecido que: um conjunto é sempre definido por uma propriedade, isto é, existe sempre um conjunto formado pelos elementos que possuem uma dada propriedade, por mais absurda que seja essa propriedade. Se não houver elemento algum que possua tal propriedade dizemos que tal conjunto é vazio. Mas é conjunto, já foi definido por uma propriedade, apenas ele não possui elementos, é vazio.

O conceito de conjunto vazio é uma generalização da idéia natural de conjunto. A extensão da idéia de conjunto é conveniente e necessária.

Para definir um conjunto vazio, empregamos, geralmente, uma propriedade, absurda ou duas propriedades contraditórias. Seja a seguinte propriedade: "ser homem de mais de 10 m de altura". Claro que não há elemento que satisfaça a essa propriedade! O conjunto de homens com tal altura é vazio.

Outro exemplo de conjunto vazio: Conjunto dos "números maiores que 1 e menores que 0". Tal conjunto não possui elementos, ser maior que um e menor que zero, ao mesmo tempo, é querer que os elementos de tal conjunto possuam duas propriedades, ao mesmo tempo, sendo elas contraditórias. Tais propriedades não podem ser associadas a nenhum elemento, do conjunto universo, isto é, não existe elemento que as possua simultaneamente. Logo tal conjunto é vazio.

Mais exemplos de conjunto vazio: conjunto dos vulcões ativos do Brasil, dos ossos de uma formiga, dos estados brasileiros que são banhados pelo Oceano Pacífico, dos dias da semana cujos nomes começam com a letra m (em português), dos números que são ao mesmo tempo pares e ímpares, etc.

Pela igualdade de conjuntos que estudamos atrás, podemos concluir que só existe um único conjunto vazio. Vimos que os conjuntos para serem iguais devem possuir os mesmos elementos. Sendo os conjuntos vazios desprovidos de elementos, são todos iguais. Se são iguais são o mesmo conjunto. Logo, só há um conjunto vazio.

REPRESENTAÇÃO DO CONJUNTO VAZIO

Para representar o conjunto vazio, podemos usar a dupla chave { }, sem escrever nada entre elas.

Podemos também simbolizar o conjunto vazio pela letra grega \emptyset (phi).

O conjunto A, dos números pares maiores que 10 e menores que 12, por exemplo, pode ser representado assim:

$$A = \{ \} \quad \text{ou} \quad A = \emptyset$$

Preferimos, para alunos da escola primária, a primeira forma uma vez que eles já estão acostumados a empregar as chaves para representar conjuntos e não haverá a introdução de um novo símbolo.

Alguns exemplos:

1.º A = {estados brasileiros cujo nome começa com z}.

$$A = \{ \} \quad \text{ou} \quad A = \emptyset$$

2.º B = {número natural maior que 10 e menor que 11}.

$$B = \{ \} \quad \text{ou} \quad B = \emptyset$$

3.º C = {número primo par cujo numeral mais simples é expresso por 2 algarismos}.

$$C = \{ \} \quad \text{ou} \quad C = \emptyset$$

CONJUNTO UNITÁRIO

Fixada uma propriedade para caracterizar um conjunto, pode acontecer que não exista mais que *um* elemento que satisfaça tal propriedade, como no caso da seguinte propriedade: "ser um número natural maior que 10 e menor que 12". O único elemento que satisfaz a esta propriedade é o número natural 11.

Logo, o único conjunto que se pode associar àquela propriedade é $\{11\}$.

Este conjunto é denominado conjunto *Unitário*, pois só possui um elemento.

Outros exemplos de conjuntos unitários:

Conjunto de dias da semana cujos nomes começam com a letra d: $\{\text{domingo}\}$

Conjunto das capitais do estado de Minas Gerais: $\{\text{Belo Horizonte}\}$

Conjunto de estados da região Nordeste do Brasil cujos nomes começam com a letra A: $\{\text{Alagoas}\}$

Conjunto dos números primos que são pares: $\{2\}$.

MAIS DUAS IMPORTANTES GENERALIZAÇÕES

Com as noções que temos de subconjunto e de conjunto vazio, podemos chegar ainda a duas generalizações interessantes:

1.º) Dado um conjunto Z , qualquer conjunto cujos elementos pertençam todos a Z é subconjunto de Z . Logo, o próprio conjunto Z é subconjunto de Z , isto é, todo conjunto é subconjunto de si mesmo.

2.º) O conjunto vazio, não possuindo elemento algum, está contido em qualquer conjunto. Então, o conjunto vazio, *por convenção*, é subconjunto de qualquer conjunto.

Logo, qualquer conjunto que não seja o vazio tem pelo menos dois subconjuntos: êle mesmo e o conjunto vazio.

Exemplos:

Seja o conjunto $Z = \{2, 4, 8\}$.

1.º) $A = \{2, 4\}$

A é subconjunto de Z porque $A \subset Z$.

2.º) $B = \{2, 8\}$

B é subconjunto de Z porque $B \subset Z$.

3.º) $C = \{4, 8\}$

C é subconjunto de Z porque $C \subset Z$.

4.º) $D = \{2\}$

D é subconjunto de Z porque $D \subset Z$.

5.º) $E = \{4\}$

E é subconjunto de Z porque $E \subset Z$.

$$6.º) F = \{8\}$$

F é subconjunto de Z porque $F \subset Z$.

$$7.º) G = \{8, 4, 2\}$$

G é subconjunto de Z porque $G \subset Z$ (ou $G = Z$).

$$8.º) H = \{ \}$$

H é subconjunto de Z porque $H \subset Z$.

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

OPERAÇÃO REUNIÃO OU UNIÃO

Simbolizamos a união de dois conjuntos A e B por

$$A \cup B$$

A união de dois conjuntos A e B quaisquer é um outro conjunto C formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B ou a ambos. Assim:

$$A \cup B = C$$

Podemos ler $A \cup B = C$ assim: "A união B é igual a C".

Exemplos:

1.º Sejam $A = \{\text{Argentina, Brasil, Chile}\}$

e $B = \{\text{Argentina, Brasil, Uruguai, Paraguai}\}$.

Então:

$A \cup B = \{\text{Argentina, Brasil, Chile, Uruguai, Paraguai}\}$.

2.º Sejam $A = \{a, e, i, o, u\}$

e $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, x, z\}$.

Então:

$A \cup B = \{a, b, c, \dots, v, x, z\}$.

3.º Sejam $A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

e $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

Então:

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$.

Como vimos na igualdade de conjuntos, os elementos comuns aos dois conjuntos não precisam ser repetidos. Assim, no primeiro exemplo, os elementos Argentina e Brasil que pertencem tanto ao conjunto A como ao conjunto B, devem ser escritos uma só vez no conjunto reunião.

No segundo exemplo, podemos observar que $A \cup B = B$. Isto acontece porque A é subconjunto de B (ou $A \subset B$).

No terceiro exemplo, observamos que a reunião do conjunto dos números pares com o conjunto dos números ímpares é o conjunto dos números naturais.

OPERAÇÃO INTERSECÇÃO

Simbolizamos a intersecção de A e B por

$$A \cap B$$

A intersecção de dois conjuntos quaisquer A e B é aquele conjunto C constituído por todos os elementos que pertencem a A e a B ao mesmo tempo. Assim:

$$A \cap B = C$$

Lemos: "A intersecção B" ou simplesmente "A inter B", é igual a C .

Exemplos: Os mesmos utilizados para a operação união.

1.º $A \cap B = \{\text{Argentina, Brasil}\}$ porque são estes os dois únicos elementos que pertencem a ambos os conjuntos dados.

2.º $A \cap B = \{a, e, i, o, u, \}$ ou $A \cap B = A$. Isto acontece porque A é subconjunto de B (ou $A \subset B$).

3.º $A \cap B = \{ \}$ ou \emptyset , pois A e B não possuem elementos comuns.

Observação: Dois conjuntos se interceptam quando há um ou mais elementos que pertencem aos dois conjuntos *ao mesmo tempo*. Por exemplo, o corpo docente de uma escola e a família do Professor X, dessa escola, se interceptam, porque o professor X pertence aos dois conjuntos.

Na figura abaixo, cada um dos triângulos é um conjunto de pontos e a sua intersecção contém precisamente dois pontos, P e Q .

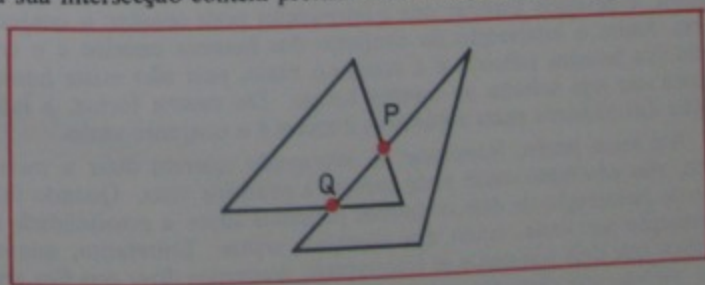


FIG. 1

Assim também cada uma das duas regiões triangulares correspondentes (no mesmo desenho) é um conjunto de pontos, e a sua intersecção é a região triangular pertencente tanto a primeira como a segunda, isto é, a pequena região triangular que aparece hachurada no desenho abaixo:

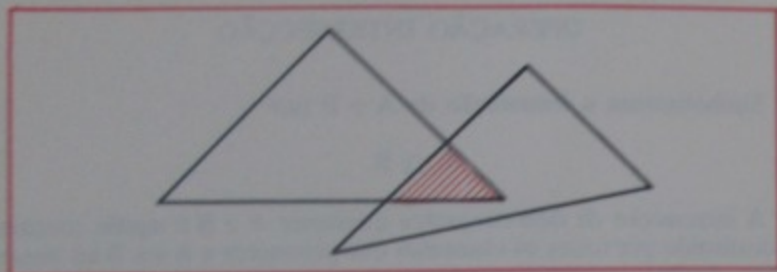


FIG. 2

Na figura seguinte, cada uma das retas é um conjunto de pontos e sua intersecção consiste em um único ponto P:

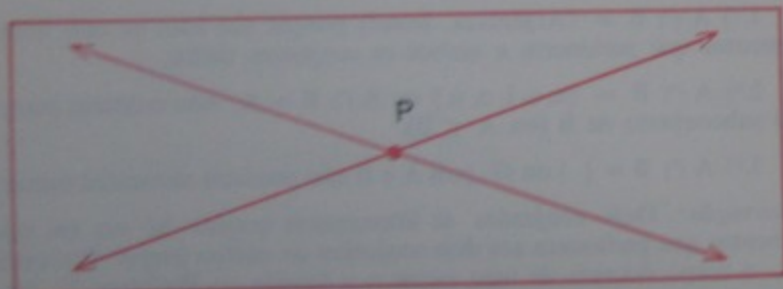


FIG. 3

Já temos o conceito do conjunto vazio, conjunto que não tem elementos, e devemos lembrar que a intersecção pode resultar o conjunto vazio. Assim, a intersecção do conjunto dos homens casados e o conjunto dos homens solteiros é o conjunto vazio, pois não existe homem casado que seja solteiro ao mesmo tempo. Da mesma forma, a intersecção dos números pares e números ímpares é o conjunto vazio.

Até certo ponto, *interceptar* e *intersecção* querem dizer a mesma coisa, mas não tanto como pode parecer à primeira vista. Quando falamos de intersecção de dois conjuntos podemos supor a possibilidade da intersecção ser vazia, como nos exemplos acima. Entretanto, quando dizemos que dois conjuntos se interceptam, queremos dizer que eles têm, pelo menos, um elemento em comum.

- Observações: 1.º) $\emptyset \subset A$, para todo conjunto A.
 2.º) $A \cup \emptyset = A$, para todo conjunto A.
 3.º) $A \cap \emptyset = \emptyset$, para todo conjunto A.

PROPRIEDADE COMUTATIVA DA UNIÃO E DA INTERSECÇÃO DOS CONJUNTOS

Tanto a união como a intersecção de conjuntos são operações comutativas.

É indiferente a ordem com que os elementos de A e de B são levados em conta para a construção do conjunto resultante da sua reunião ou intersecção.

$$\text{Logo } A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

Exemplificando:

$$A = \{3, 8, 12, 15\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\}.$$

Temos:

$$1.^{\circ} A \cup B = \{3, 8, 12, 15\} \cup \{2, 4, 6, 8\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 15\}$$

$$B \cup A = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 8, 12, 15\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 15\}$$

$$\text{Logo, } A \cup B = B \cup A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 15\}.$$

$$2.^{\circ} A \cap B = \{3, 8, 12, 15\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{8\}$$

$$B \cap A = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{3, 8, 12, 15\} = \{8\}$$

$$\text{Logo, } A \cap B = B \cap A = \{8\}.$$

CONJUNTO UNIVERSO E COMPLEMENTO

Conjunto Universo

Muitas vezes precisamos, em Matemática, considerar um conjunto que contenha os demais. Tal conjunto é denominado *conjunto universo* e representado pela letra U (maiúscula).

Por exemplo: No estudo dos habitantes do Estado de S. Paulo, o conjunto de pessoas residentes na cidade de S. Paulo é parte do conjunto mais amplo — o conjunto dos habitantes de todo o estado de S. Paulo. Este conjunto mais amplo é o conjunto universo.

Outros exemplos:

1.º Para um estudo sobre as regiões geográficas em que está dividido o Brasil, podemos considerar a região brasileira (todo o Brasil) como sendo o conjunto universo.

2.º No curso primário, o conjunto universo para o estudo de Matemática é o conjunto dos números racionais.

3.º No curso secundário, o conjunto universo para o estudo de Matemática é o dos números reais.

Pelo visto, o conjunto universo é uma noção muito relativa, depende muito da amplitude que queremos dar a um determinado assunto que se vai estudar.

Complemento

Chamamos de complemento de um conjunto A qualquer, tal que $A \subset U$, ao conjunto A' dos elementos que pertencem a U mas não pertencem a A.

Assim: Seja $U = \{n^{\circ} \text{ naturais}\}$ e $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

$A' = \text{complemento de } A = \{\text{qualquer número natural } > 5\}$.

Outro exemplo:

Seja $U = \{\text{cidadão brasileiro}\}$ e $B = \{\text{cidadão baiano}\}$.

A' = complemento de $A = \{\text{cidadão brasileiro exceto o brasileiro que é também baiano}\}$.

Mais um exemplo: $U = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\}$

$$A = \{0, 6, 12, 18, \dots\}$$

$$A' = \{3, 9, 15, 21, \dots\}$$

A noção de complemento, portanto, depende da noção de conjunto universo.

DIAGRAMAS

DIAGRAMA DE VENN

Representando qualquer conjunto universo U por um retângulo e sua região interior, e seus subconjuntos, por círculos contidos no retângulo, estaremos empregando o denominado diagrama de Venn.

Assim:

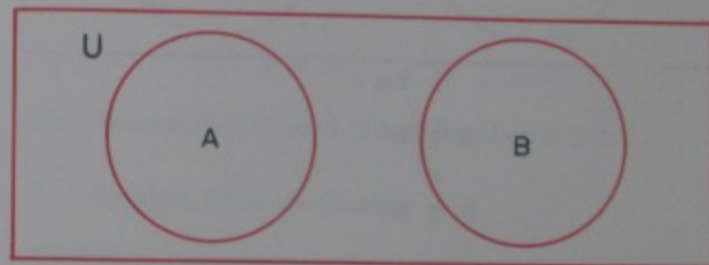


FIG. 4

Com o auxílio do diagrama idealizado por Venn podemos dar ênfase aos conceitos até aqui adquiridos. Vejamos:

1 — Observemos em um diagrama de Venn a *relação de pertinência*:

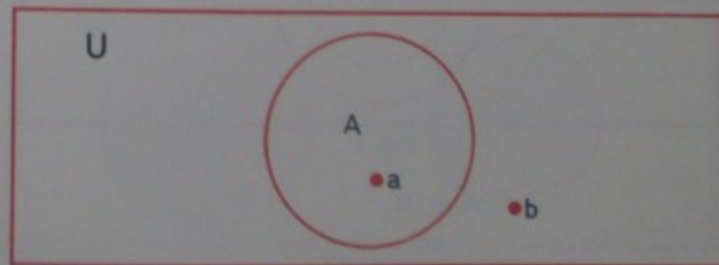


FIG. 5

$$\begin{aligned} a &\in A \\ b &\notin A \end{aligned}$$

2 — Observemos, agora, num diagrama de Venn, a *relação de inclusão*:

1.º Caso em que A e B não possuem elementos em comum (conjuntos disjuntos):

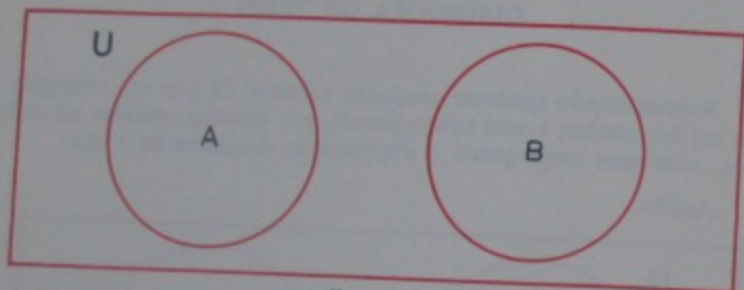


FIG. 6

$$\begin{aligned} A &\not\subset B \\ &e \\ B &\not\subset A \end{aligned}$$

2.º Caso em que A é subconjunto de B:

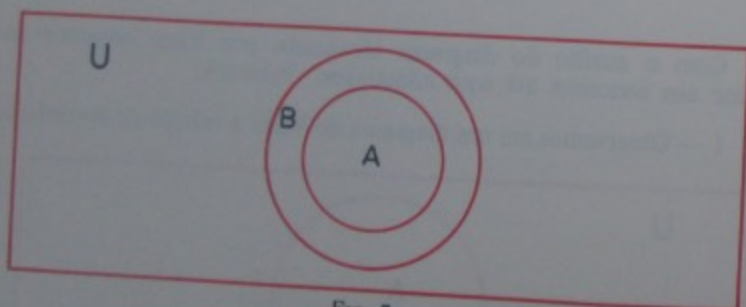


FIG. 7

$$\begin{aligned} A &\subset B \\ \text{ou} \\ B &\supset A \end{aligned}$$

3.º Caso em que A e B possuem elementos comuns (conjuntos não disjuntos):

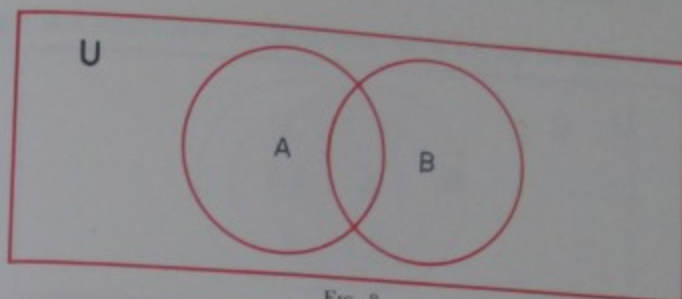


FIG. 8

$$\begin{aligned} A &\not\subset B \\ &e \\ B &\not\subset A \end{aligned}$$

Nos três casos, $A \subset U$ ou $U \supset A$ e $B \subset U$ ou $U \supset B$

3 — *Operação União ou Reunião*:

Também as operações entre os conjuntos podem ser "vistas" em um diagrama de Venn. O resultado das operações será representado pela região hachurada:

1.º Caso em que A e B não possuem elementos comuns (conjuntos disjuntos):

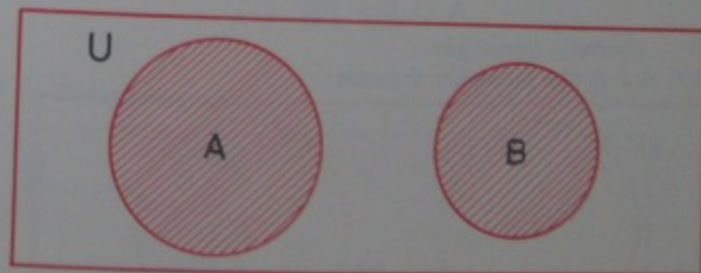


FIG. 9

$$A \cup B = \text{////}$$

2.º) Caso em que A é subconjunto de B:

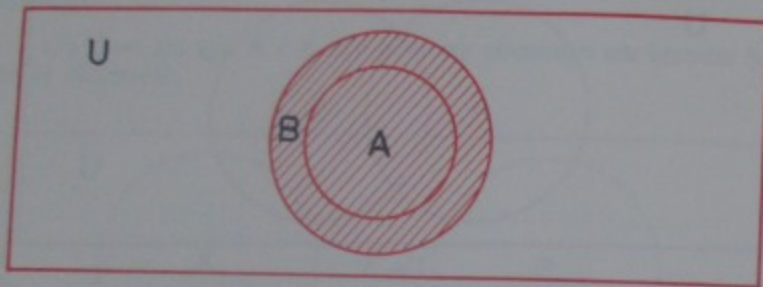


FIG. 10

$$A \cup B = \text{////}$$

ou $A \cup B = B$

3.º) Caso em que A e B possuem elementos em comum (conjuntos não disjuntos):

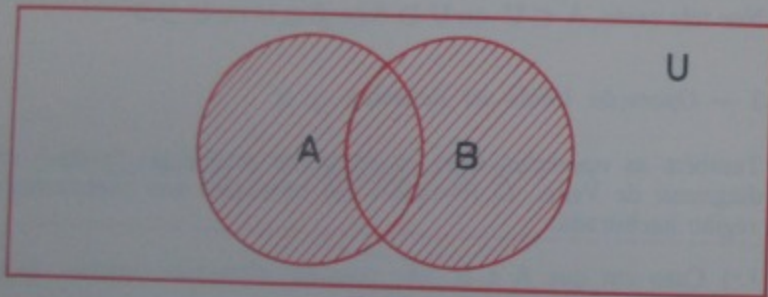


FIG. 11

$$A \cup B = \text{////}$$

4 — Operação Intersecção:

1.º) A e B são conjuntos disjuntos:

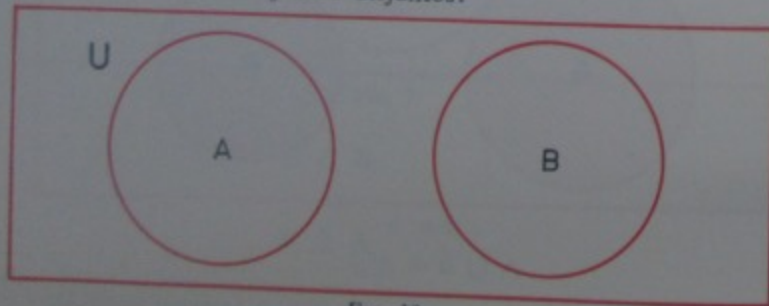


FIG. 12

$$A \cap B = \emptyset$$

2.º) A é subconjunto de B:

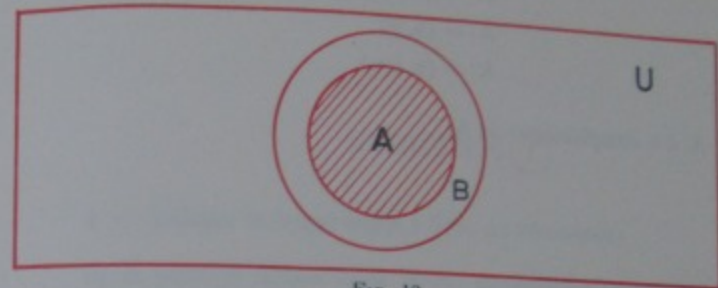


FIG. 13

$$A \cap B = \text{////}$$

ou $A \cap B = A$

3.º) A e B são conjuntos não disjuntos:

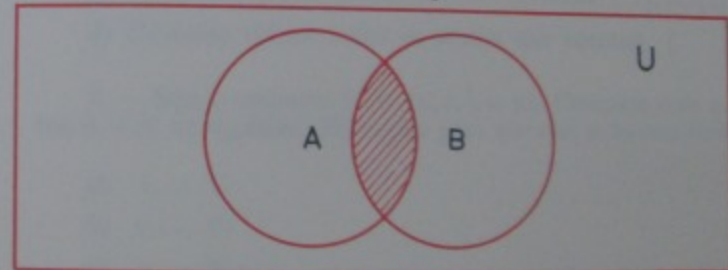


FIG. 14

$$A \cap B = \text{////}$$

5 — Complementação:

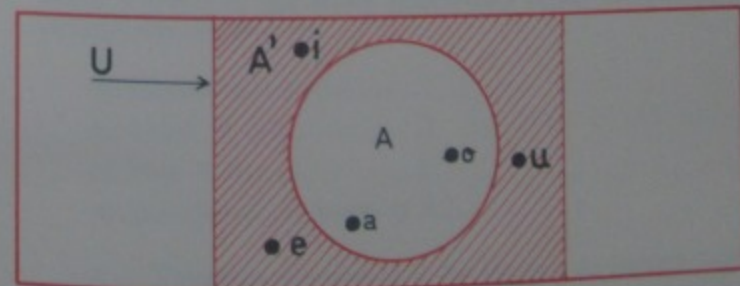


FIG. 15

$$U = \{a, e, i, o, u\}$$

$$A = \{a, o\}$$

$$A' = \{e, i, u\}$$

A' é o complemento de A .

EXERCÍCIOS (1)

1 — Indique se o que segue é falso ou verdadeiro:

- a) É possível definir cada termo matemático empregando termos matemáticos cada vez mais simples. (.....)
- b) Os termos mais simples e mais fundamentais da Matemática são empregados sem definição e as definições dos outros termos são baseadas nêles. (.....)
- c) O termo conjunto é um termo não-definido. (.....)
- d) Devemos definir todos os termos que usarmos. (.....)

2 — Seja o conjunto $V = \{a, e, i, o, u\}$. Complete com os símbolos \in e \notin as seguintes afirmações para que elas se tornem verdadeiras:

- a) $i \dots V$.
- b) $v \dots V$.
- c) $u \dots V$.
- d) $m \dots V$.
- e) $a \dots V$.

3 — Considere o conjunto A dos estados da região Nordeste do Brasil e responda nas linhas pontilhadas se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- a) Pernambuco $\in A$ (.....)
- b) Ceará $\notin A$ (.....)
- c) Pará $\in A$ (.....)
- d) Rio Grande do Norte $\notin A$ (.....)

4 — Considere o conjunto S dos planetas do Sistema Solar e complete com um dos símbolos: \in ou \notin as afirmações que seguem para que elas se tornem verdadeiras:

- a) Terra S.
- b) Mercúrio S.
- c) Lua S.
- d) Vênus S.
- e) Sol S.

5 — Desenhando seus elementos, determine dois conjuntos quaisquer:

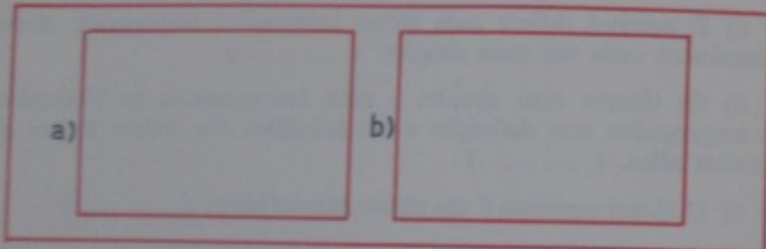


FIG. 16

6 — Determine, nomeando seus elementos:

- a) Um conjunto de animais invertebrados:

{.....}

- b) O conjunto de estados centrais (não marítimos) do Brasil:

{.....}

7 — Determine dois conjuntos quaisquer através de uma propriedade que os descreva:

a)

b)

8 — Determine os conjuntos:

- a) De todos os meses do ano que têm 30 dias:

.....

- b) De cinco personagens ilustres de nossa História:

.....

- c) Das estações do ano:

.....

- d) Dos dias da semana cujos nomes começam com t:

.....

- e) Dos meses do ano cujos nomes começam com p:

.....

- f) De tôdas as lêtras distintas da palavra "Matemática":

.....

9 — Escreva entre chaves, enumerando os seus elementos, os seguintes conjuntos:

- a) Dos números pares maiores que 100 e menores que 120:

.....

- b) Dos números ímpares que estão entre 99 e 105:

.....

- c) Dos números naturais maiores que 5 e menores que 7:

.....

- d) Dos números pares que estão entre 30 e 32:

.....

10 — Assinale com V as afirmações verdadeiras e com F as que forem falsas:

a) $5 \in \{1, 3, 5, 8\}$ (...)

d) $8 \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (...)

b) $0 \in \{0, 2, 4, 6\}$ (...)

e) $0 \in \{5, 10, 15\}$ (...)

c) $0 \notin \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (...)

f) $8 \notin \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ (...)

11 — Complete as seguintes sentenças para estabelecer as relações de pertinência de modo que elas se tornem verdadeiras, preenchendo os traços:

a) $3 \in \{1, 2, \text{---}\}$

b) $12 \notin \{1, 3, \text{---}\}$

c) $z \in \{x, j, \text{---}\}$

d) $a \notin \{\text{---}, c, m, n\}$

e) $0 \in \{ \text{—}, 2, 4 \}$

f) $0 \notin \{3, 5, 7, \text{—}\}$

12 — Assinale com um V as afirmações seguintes que forem verdadeiras e com F, as que forem falsas:

a) $\{ \text{João, Maria, Pedro} \} \subset \{ \text{Antônio, João, Maria, Carlos, Pedro} \}$
(...)

b) $\{x, j, z\} \not\subset \{ \text{alfabeto da língua portuguesa} \}$ (...)

c) $\{5, 6\} \supset \{1, 3, 5, 6\}$ (...)

d) $\{1, 3, 5, 6\} \not\supset \{5, 6\}$ (...)

e) $\{a, e\} \subset \{a, b, c, d\}$ (...)

f) $0 \subset \{3, 5, 7\}$ (...)

g) $\{a, b, c\} \supset \{ \quad \}$ (...)

13 — Considere um conjunto A de três alunos seus, $\{a, b, c\}$. Assinale os conjuntos seguintes que são subconjuntos do conjunto considerado:

a) $\{a, b\}$; b) $\{a, c\}$; c) $\{b, c\}$; d) $\{a\}$;

e) $\{b\}$; f) $\{c\}$; g) $\{a, b, c\}$; h) \emptyset .

14 — Assinale com V as afirmações verdadeiras e com F as que forem falsas:

a) $\{3, 8\} \subset \{0, 3, 5, 8, 10\}$ (...) d) $\{1, 5\} \not\subset \{1, 3, 5, 7\}$ (...)

b) $\{1\} \subset \{0, 1, 3\}$ (...) e) $\{2, 8\} \supset \{0, 2, 6, 8\}$ (...)

c) $\{3, 4, 7\} \supset \{3, 4\}$ (...) f) $\{ \quad \} \subset \{6, 12, 15\}$ (...)

15 — Sejam os conjuntos:

a) $A = \{1, 3, 10\}$ e $B = \{3, 1, 10\}$

Indique se é verdadeira ou falsa a afirmação: $A = B$.

(.....)

b) $M = \{3, 5, 3, 9\}$, $N = \{3, 5, 5, 9\}$ e $P = \{3, 5, 9\}$

É verdadeira ou falsa a afirmação: $M = N = P$?

(.....)

16 — Dado o conjunto $A = \{7, 11, 13\}$, escreva os possíveis subconjuntos de A:

.....

17 — Considere os conjuntos $A = \{4, 8, 16, 32\}$ e $B = \{4, 16, 64\}$.

a) Qual é a intersecção dos dois conjuntos?

.....

b) Qual é a reunião de A e B?

.....

18 — Determine a intersecção e a reunião dos seguintes conjuntos, em cada caso:

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6\}$

$A \cap B =$

$A \cup B =$

b) $A = \{1, 3, 5, 9, 11\}$ e $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$A \cap B =$

$A \cup B =$

c) $A = \{2, 4, 8, 16, 32\}$ e $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$A \cap B =$

$A \cup B =$

19 — Nas figuras seguintes, considere a reta e o retângulo como conjuntos de pontos. Em cada caso, qual a intersecção deles?

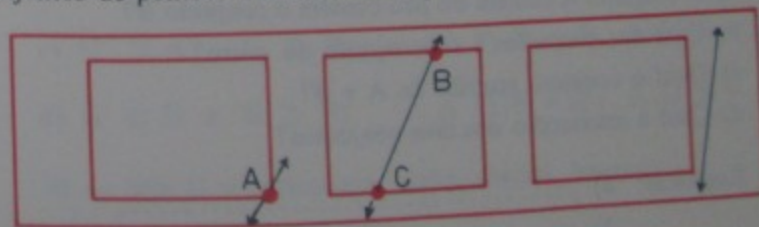


FIG. 17

20 — Considere o conjunto de todos os números pares positivos e o conjunto de todos números ímpares positivos.

- a) Indique a reunião dos dois conjuntos.

 b) Indique a intersecção dos dois conjuntos.

21 — Sejam os seguintes conjuntos:

- A = {Rios do Estado de S. Paulo}
 B = {Rios da bacia do Tietê}
 C = {Rios do município de S. Paulo}
 D = {Rios da bacia do Paraíba}

- a) Quais os pares de conjuntos que se interceptam?

 b) Qual é o conjunto reunião de A e B?

 c) Qual é o conjunto reunião de C e D?

 d) Qual é o conjunto intersecção de B e D?

22 — Considere os seguintes conjuntos:

- A = {corpo discente de sua escola}
 B = {sua classe}

- a) O conjunto A contém ou não contém o conjunto B?
 b) Qual dos conjuntos é subconjunto do outro?
 c) Qual o conjunto reunião de A e B?
 d) Qual a intersecção dos dois conjuntos?

- Respostas: a)
 b)
 c)
 d)

23 — Represente no diagrama de Venn os dois conjuntos que seguem:

- A = {corpo discente de sua escola}
 e B = {alunos de sua classe}

24 — Estabeleça as relações de pertinência e de inclusão representadas no diagrama abaixo:

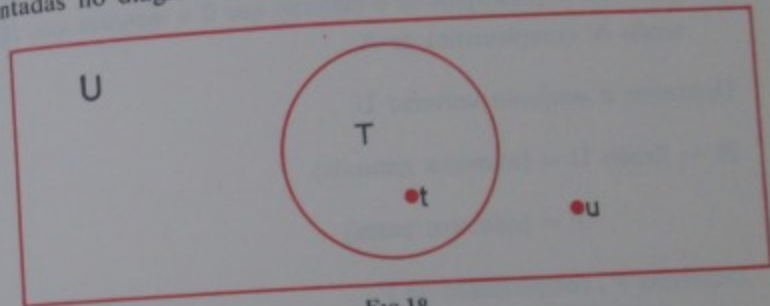


FIG.18

- a) $t \dots U$
 b) $u \dots U$
 c) $T \dots U$ ou $U \dots T$

25 — Por meio de um diagrama de Venn para cada exercício mostre que:

- a) $M \subset U$ ou $U \supset M$; $m \in M$; $n \notin M$.
 b) $A \subset U$ e $B \subset U$; $A \cap B = C$; $A \cup B = \text{///}$
 c) $U \supset A$ e $U \supset B$; $A \cap B = B$; $A \cup B = A$
 d) $A \subset U$ e $U \supset B$; $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = \text{///}$

26 — Seja $U = \{\text{primavera, verão, outono, inverno}\}$

$A = \{\text{outono, inverno}\}$

Determine o conjunto complemento A.

- 27 — Seja $A = \{0, 3, 4, 6\}$
e $A' = \{1, 2, 5, 7, 8, 9, 10\}$
sendo A' o complemento de A .

Determine o conjunto universo U .

- 28 — Seja $A = \{\text{múltiplos de 10 menores que 30}\}$
e $A' = \{\text{múltiplos de 6 maiores que 0 e menores que 30}\}$
sendo A' complemento de A

Determine o conjunto universo U .

- 29 — Sendo $U = \{\text{números naturais}\}$

$$P = \{\text{números pares}\}$$

Determine P' , complemento de P .

- 30 — Sendo $U = \{\text{números racionais}\}$

$$F = \{\text{números fracionários}\}$$

Determine F' , complemento de F .

CORRESPONDÊNCIA ENTRE CONJUNTOS

NOÇÃO DE CORRESPONDÊNCIA

Quando queremos contar os livros que estão sôbre uma mesa, por exemplo, como procedemos?

Apontamos para um deles e dizemos: um; apontamos para outro e dizemos: dois; e assim procedendo vamos até o último dos livros do conjunto a ser contado. O último numeral pronunciado nos dirá "quantos" elementos possui a coleção.

A operação de contar, portanto, nada mais é que a de *fazer corresponder*, sucessivamente, a cada elemento da coleção, um número de sucessão natural.

O antigo pastor, para contar, empregava um conjunto de pedrinhas e as fazia corresponder ao conjunto de ovelhas. Seu problema era comparar o conjunto formado pelos animais que saíam pela manhã para pastar e o conjunto formado pelos animais que à tarde voltavam. Para resolvê-lo, que fez o pastor? Formou um conjunto auxiliar, com pedrinhas, com a mesma quantidade de elementos que o conjunto de ovelhas.

Foi assim que o homem descobriu um processo para fazer a comparação de dois conjuntos pela quantidade de elementos, "fazendo corresponder" cada elemento de um conjunto com um elemento de outro conjunto.

A operação de "fazer corresponder" é uma operação mental das mais importantes e que usamos constantemente.

CORRESPONDÊNCIA BIUNÍVOCA

Consideremos um conjunto de carteiras e um conjunto de alunos e façamos com que cada aluno sente-se em uma carteira.

Procedendo dessa forma, estaremos estabelecendo uma correspondência entre o conjunto de alunos e o conjunto de carteiras. Três casos poderão ocorrer quando estabelecemos esse tipo de correspondência:

- 1.º há mais alunos que carteiras;
- 2.º há mais carteiras que alunos;
- 3.º há tantos alunos quantas são as carteiras.

No primeiro caso, para cada carteira corresponde um aluno (alguns alunos ficam sem carteiras); no segundo caso, para cada aluno corresponde uma carteira (algumas carteiras ficam vazias); no terceiro caso, para cada aluno corresponde uma carteira e para cada carteira corresponde um aluno. Dizemos, neste último caso, que o conjunto de alunos está em *correspondência* biunívoca com o conjunto de carteiras.

Portanto, dois conjuntos estão em correspondência biunívoca (ou um-a-um) se, e somente se, a cada elemento do primeiro houver um só correspondente no segundo e vice-versa.

Uma camisa possui vários botões (conjunto de botões) e várias "casas" (conjunto de "casas"). A cada botão corresponde uma só "casa" e, a cada "casa", corresponde um único botão. Assim, o conjunto de botões está em correspondência *duas vezes* unívoca, ou biunívoca, com o conjunto de "casas".

CONJUNTOS EQUIVALENTES

Todos os conjuntos que estão em correspondência biunívoca têm uma propriedade comum: o número de seus elementos. Tais conjuntos são denominados *equivalentes* ou *ordenáveis*. Há também quem use o termo equipotente, com o mesmo significado.

Assim, o conjunto de "casas" e o conjunto de botões de uma camisa são conjuntos equivalentes ou ordenáveis (ou ainda: equipotentes).

Exemplo:

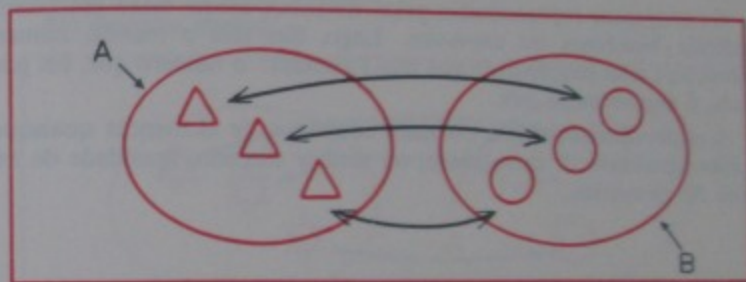


FIG. 19

A e B são conjuntos equivalentes ou A e B estão em correspondência biunívoca.

Outro exemplo:

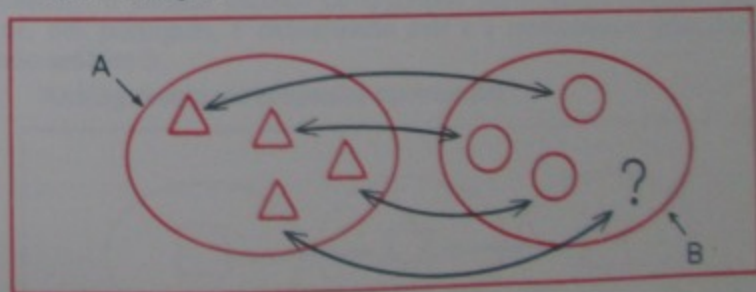


FIG. 20

A e B não são conjuntos equivalentes ou não estão em correspondência biunívoca.

Todos os conjuntos equivalentes têm a mesma quantidade de elementos (ou o mesmo número natural).

Exemplo:

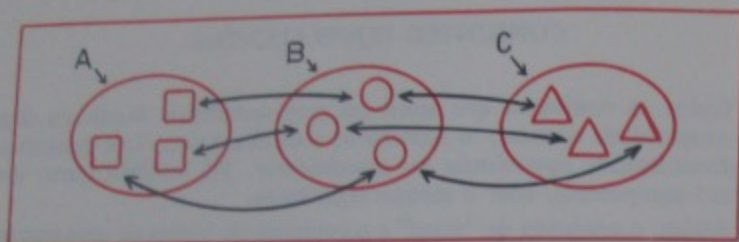


FIG. 21

Os conjuntos representados pelos desenhos acima estão em correspondência biunívoca ou um-a-um. Logo, eles têm o mesmo número natural, têm uma propriedade que lhes é comum: o número que, em português, é denominado *três*.

A equivalência de dois ou mais conjuntos de elementos quaisquer significa igualdade de quantidade, ou melhor dizendo, igualdade de números de elementos.

O NÚMERO NATURAL

Os conjuntos equivalentes ou que estão em correspondência biunívoca deram margem a que a mente humana fizesse uma primeira abstração e criasse o número natural. Colocando de lado a natureza dos elementos que constituem os diferentes conjuntos e se apoiando unicamente na correspondência biunívoca existente entre seus elementos, a mente humana passou a destacar a permanência da propriedade comum: o número de elementos, a quantidade dos elementos, ou o *número natural* caracterizando o conjunto.

No desenho abaixo,

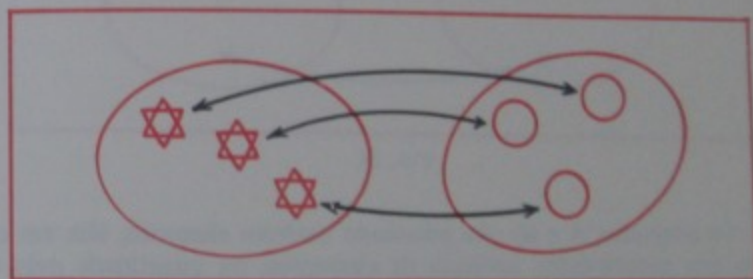


FIG. 22

o conjunto de estrelas e o conjunto de círculos são equivalentes e têm, como já dissemos atrás em exemplo semelhante, a seguinte propriedade comum: o mesmo número de elementos ou o mesmo número natural que, em português, é denominado *três* e é representado pelo símbolo indo-arábico 3.

Analogamente, os conjuntos equivalentes

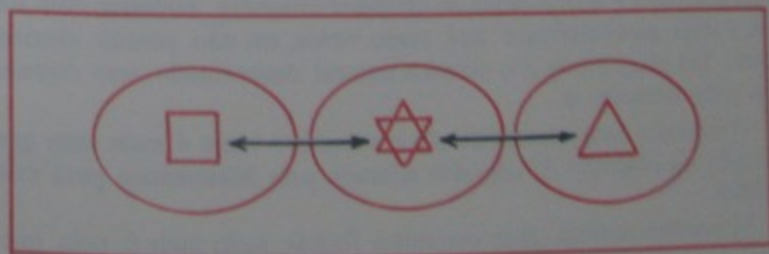


FIG. 23

têm em comum a seguinte propriedade: o mesmo número de elementos ou o mesmo número natural, agora denominado *um* e indicado pelo símbolo indo-arábico 1.

E assim, considerando-se outros conjuntos que podem entrar em correspondência biunívoca, teremos os outros números naturais: dois, quatro, cinco, etc.

Sejam os conjuntos A, de todos os meses do ano que começam com a letra r, e B, de todos os dias da semana que começam com a letra p.

Como não existem elementos que satisfaçam as propriedades definidas para A e B, temos:

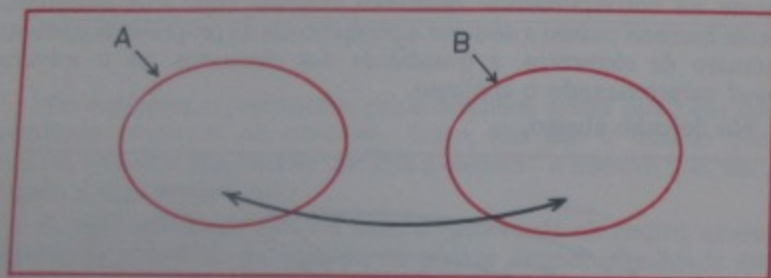


FIG. 24

Os conjuntos A e B, não possuindo nenhum elemento, têm em comum esta propriedade: ausência de elementos, ou quantidade nula de elementos. Tal propriedade é o número natural que caracteriza o conjunto vazio e que tem o nome de *zero* e cujo símbolo é: 0.

Os conjuntos A e B são, portanto, equivalentes. E, mais que equivalentes, são iguais, de acordo com o conceito que temos de conjuntos iguais.

Podemos, então, considerar, em particular, a correspondência entre o conjunto vazio e seu único subconjunto que é ele mesmo, (o conjunto vazio é um só e é subconjunto de qualquer conjunto, inclusive de ele mesmo), e cuja particularidade está, como vimos, em não possuir elemento algum. Tal propriedade é o número natural denominado *zero* representado pelo símbolo: 0.

O número zero caracterizando o conjunto vazio é mais uma generalização ou extensão de conceito adotada pela Matemática para evitar exceções.

O número natural, para conjuntos finitos, nada mais é, pois, que o número de elementos do conjunto.

Podemos ainda notar que um conjunto pode ser ordenado por um critério qualquer, não influenciando tal ordenação no número natural que o caracteriza.

Assim, o conjunto $\{6, 8, 10\}$, ordenado segundo o critério do menor número anteceder o maior, e o conjunto $\{10, 8, 6\}$, ordenado do maior para o menor número, ambos caracterizados pelo mesmo número natural três.

A SUCESSÃO DOS NÚMEROS NATURAIS É ILIMITADA

Os diferentes conjuntos finitos equivalentes entre si deram origem aos números naturais que, por sua vez, formam também um conjunto: o conjunto dos números naturais.

Costuma-se indicar o conjunto dos números naturais assim:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$$

O que querem dizer, nesta sucessão, os três pontos colocados após a última vírgula? Eles significam que não estão lá escritos os numerais de todos os números naturais. Se não escrevemos todos os numerais, é porque faltam números naturais para serem representados ali. Mas, faltam quantos? Ou: onde termina essa sucessão? Ou ainda: qual o maior de todos os números naturais?

Raciocinando como um ser civilizado, (o homem primitivo não era capaz de pensar assim), podemos pensar: na sucessão dos números naturais, passamos de um número para o seguinte acrescentando-lhe uma unidade. A operação mental "juntar uma unidade" permite-nos ir tão longe quanto quisermos. Por maior que seja um número, podemos sempre acrescentar-lhe mais uma unidade e obter um número maior. Logo, não há número maior que todos os outros. O nosso pensamento aceita, então, a possibilidade de repetir ilimitadamente a operação mental de adicionar uma unidade.

Logo, podemos dizer que a sucessão dos números naturais é ilimitada, ou o conjunto dos números naturais é infinito.

Se excluirmos o zero do conjunto dos números naturais, o que às vezes é conveniente, o novo conjunto passará a ser indicado assim:

$$N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$$

O conjunto dos números naturais N e o conjunto dos números naturais com a exclusão de zero N^* , são conjuntos infinitos.

O número natural é, como vimos, uma conquista da mente humana, é uma propriedade comum (idéia) a todos os conjuntos equivalentes ou equipotentes entre si.

CORRESPONDÊNCIA ENTRE CONJUNTOS INFINITOS

A extensão do conceito de equivalência de conjuntos finitos para conjuntos infinitos deve-se ao Matemático Georg Cantor. Êle percebeu que se considerarmos como conjuntos equivalentes aqueles que se acham em correspondência biunívoca, sem pensarmos no número de seus elementos, podemos estender o conceito de equivalência aos conjuntos infinitos.

Exemplos:

$$A = \{\text{verde, amarelo, azul, branco}\}$$

$$B = \{\text{primavera, verão, outono, inverno}\}.$$

Os conjuntos A (das cores da bandeira brasileira) e B (das estações do ano), finitos, são equivalentes porque entre eles existe uma relação biunívoca.

Sejam, agora, os conjuntos infinitos:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}.$$

Os conjuntos infinitos N (dos números naturais) e P (dos números pares) são também equivalentes porque entre eles existe uma correspondência biunívoca: a cada número de N corresponde um de P , e um só, o seu dôbro; reciprocamente, a cada número de P corresponde um de N , e um só, a sua metade.

Logo, N e P são equivalentes, isto é, o conjunto dos números naturais (infinito) é equivalente ao conjunto dos números pares (infinito).

Uma consequência desta equivalência:

Em conjuntos infinitos, um subconjunto pode ser equivalente ao conjunto.

No exemplo acima, P é subconjunto de N ($P \subset N$) e P é equivalente a N .

CONJUNTOS EQUIVALENTES E NÚMEROS NATURAIS

Cada coleção de conjuntos equivalentes é caracterizada por um número e cada número é associado a um numeral mais simples.

Assim:

Conjunto	Número que o caracteriza	Numeral mais simples
{ }	zero	0
{ a }	um	1
{ b, c }	dois	2
{ d, e, f }	três	3
{ g, h, i, j }	quatro	4
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Podemos alongar as colunas acima quanto quisermos. Basta acrescentar mais um elemento ao conjunto para ter um novo número natural e um novo numeral para representá-lo.

Nota: Os símbolos indo-arábicos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), que são os numerais mais simples dos números naturais de zero a nove, são também denominados algarismos. Cada símbolo é um algarismo. Então, os numerais dos números menores que dez são constituídos por um só algarismo. O numeral mais simples do número dez (10) já é formado por dois algarismos (dois símbolos indo-arábicos).

EXERCÍCIOS (2)

Escreva os nomes dos números naturais que estão associados a cada um dos conjuntos que seguem e os respectivos numerais mais simples:

- 1 — {v, x, y, z}.
- 2 — {Marta, Maria, José, Luís, Mário}.
- 3 — {dias da semana}.
- 4 — {meses do ano}.
- 5 — {Estados do Brasil}.
- 6 — {0, 1, 2, 3, 4, 5, }.
- 7 — {oceanos que banham a costa brasileira}.
- 8 — {montanhas brasileiras com mais de 5.000 m de altitude}.
- 9 — {2, 5, 9, 14, 20, 27, 35, 44, 54, 65, 77, 90}.
- 10 — {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}.

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

RÁPIDA RESENHA HISTÓRICA

A idéia dos números naturais foi se formando lentamente, no espírito do homem, através dos séculos, pela necessidade que ele foi sentindo, cada vez maior, da contagem.

O número natural surgiu aos poucos, pela prática constante de contagens a que o homem foi se submetendo à medida que sua vida social foi crescendo. Logo, a contagem é anterior à idéia de número. Não podemos imaginar que o homem tenha primeiro idealizado os números naturais para depois aplicá-los à contagem. A idéia de número dependeu muito das experiências diárias de contagens. Resultou de uma abstração na comparação de dois conjuntos.

Quando o homem se sentiu senhor da idéia de número, percebeu a necessidade de descobrir uma forma de representá-lo. Foram, então, criados muitos símbolos para a representação dos números. Cada civilização procurou descobrir aqueles que julgou ser os mais lógicos e os mais simples.

Hoje, chamamos a esses símbolos de numerais, assim como aos nomes dos números.

A maneira mais simples encontrada pelo homem para representar os números foi a de fazer corresponder a cada idéia um símbolo. A representação empregada pelos babilônios (3.000 anos A.C) mostra de forma bem clara que, no princípio, a simbologia se apoiava completamente no conceito fundamental de números. Assim, para representar o número cinco, por exemplo, os babilônios usavam cinco cunhas, cada uma delas representando um elemento do conjunto.

Empregavam o princípio da justaposição para representar os números de um a nove:

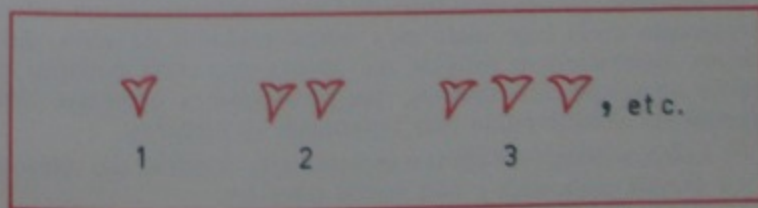


FIG. 25

Para representar o número dez, usavam a cunha em posição deitada e mais aberta:

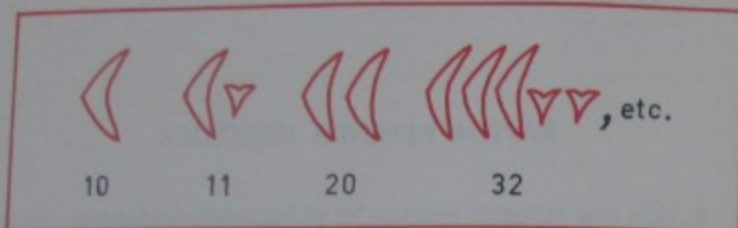


FIG. 26

Uma cunha maior representava o número sessenta:

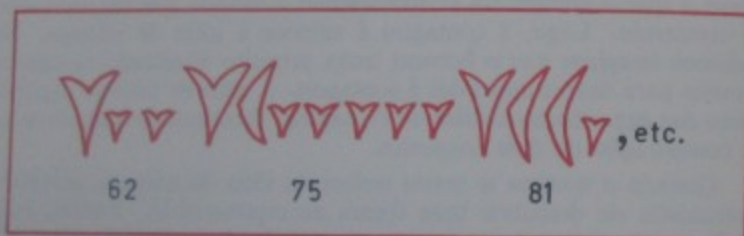


FIG. 27

Já na civilização maia, houve uma tentativa de simplificação na representação dos números, mas ainda com apoio no conceito fundamental de número.

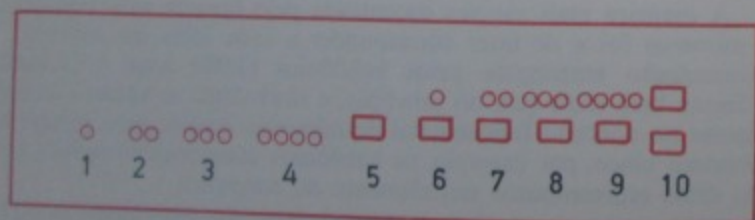


FIG. 28

Os romanos, poucos anos antes de Cristo, empregavam um sistema de numeração ainda hoje usado para indicar capítulos de livros, datas históricas, mostradores de relógios, etc. Houve uma certa evolução nos numerais ao tempo dos romanos, que começaram a empregar letras maiúsculas do alfabeto latino para representar os números.

Os valores atribuídos às letras e as regras para a escrita dos numerais são por demais conhecidos e não vamos repeti-los.

Os romanos ainda não conheciam o zero e nem o princípio posicional dos algarismos, motivos pelos quais pouco se desenvolveram em Matemática.

A idéia de número foi se consolidando aos poucos na mente do homem que, sentindo-se cada vez mais seguro, tornou-se capaz de representá-lo de maneira mais simples e sem necessidade de associar à representação a quantidade de elementos que estava representando. Assim, os gregos e os hindus usavam, simplesmente, letras de seus próprios alfabetos na representação dos números.

Só no quinto século depois de Cristo é que os homens, e mais particularmente os hindus, tiveram a idéia de utilizar a posição do símbolo no numeral para diferenciá-lo. Empregando um sistema de base 10 e valendo-se da nova idéia que passou a se chamar Princípio da Posição, o homem viu nascer o Sistema de Numeração Decimal que veremos logo mais e que empregamos até hoje.

SISTEMAS MODERNOS DE NUMERAÇÃO

Todos os sistemas de numeração hoje utilizados valem-se do Princípio da Posição. Variam apenas na base adotada.

Os computadores eletrônicos empregam a *base dois*, usando um Sistema Binário de Numeração.

Nós usamos a base dez, mas, muitas vezes, empregamos *outras* bases para a contagem. Se alguém nos perguntar quantas semanas são 17 dias, tomaremos a semana (7 dias) como base.

Representando por pontos os dias, teremos:

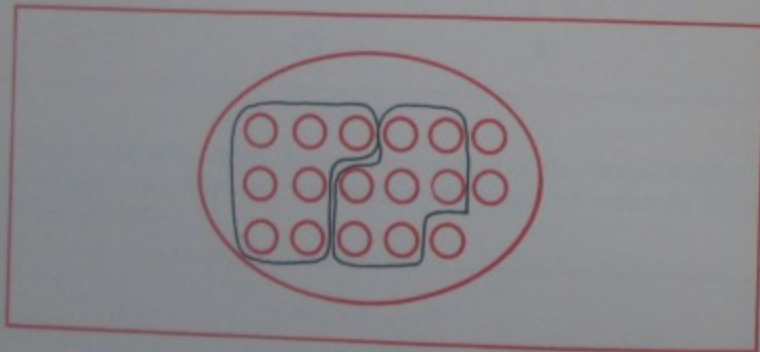


FIG. 29

Temos:

Dois subconjuntos de 7 elementos ou 2 semanas e sobram três pontos que representam 3 dias.

Empregando o valor posicional e os algarismos indo-arábicos para representar esse número na base sete, teremos o seguinte numeral:

23_{sete} (dizemos: "dois, três, na base sete", e não vinte e três).

Representemos agora o mesmo número de dias na base 8:

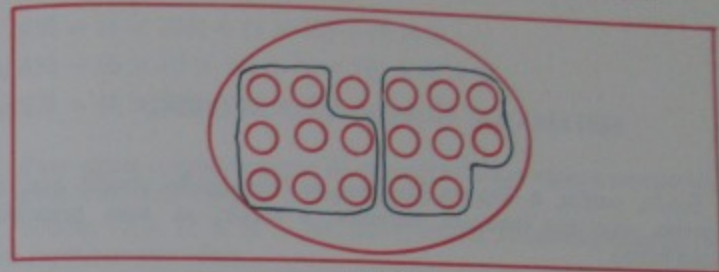


FIG. 30

Temos: Dois subconjuntos de 8 elementos e sobra um.

Com o emprêgo do valor posicional e dos algarismos nossos conhecidos, temos o numeral:

21_{oito} (lê-se: "dois, um, na base oito").

O mesmo número de dias (dezessete), contados na base dez:

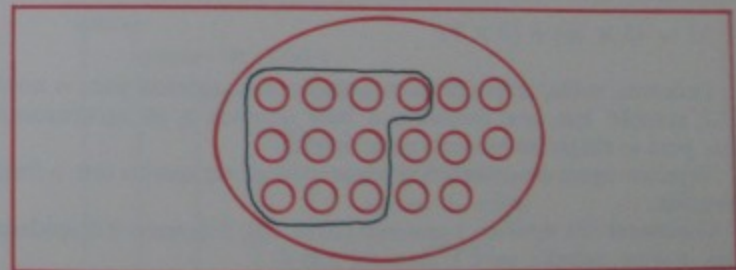


FIG. 31

Temos:

Um subconjunto de dez elementos (dezena) e sobram sete:

17_{dez} (dizemos "um, sete, na base dez")

ou, simplesmente: 17 (dezessete); isto porque, na base dez, os números têm nomes também quando expressos com mais de um algarismo.

Vimos assim que a mesma quantidade (dezessete elementos) pode ser expressa em sistemas de bases diferentes desde que se empregue o valor posicional descoberto pelos hindus e uns poucos símbolos. Assim é que 23_{sete} é o mesmo que 21_{oito} ou 17_{dez} ou ainda, 17, simplesmente.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Sendo, porém, o Sistema Decimal de Numeração aquele que, no momento, mais nos interessa, daremos, a seguir, as suas principais características:

- 1.ª) a base é o número dez;
- 2.ª) os símbolos empregados para representar todos os números são os dez numerais indo-arábicos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
- 3.ª) o valor posicional dos algarismos é obedecido.

O numeral 32, por exemplo, no sistema de numeração decimal significa três dezenas e duas unidades. Como 3 dezenas é o mesmo que 3×10 , segue-se que:

$$32 = (3 \times 10) + (2 \times 1).$$

Podemos, então, empregar uma notação mais extensa para o numeral 32, notação essa que evidencia a base adotada e os agrupamentos feitos para se chegar ao numeral mais simples.

Vejam agora o numeral 356 como poderá ser escrito sob a forma expandida.

O numeral 356 significa 3 centenas (10×10), 5 dezenas e 6 unidades. Logo, a nova notação para o numeral 356 é:

$$356 = (3 \times 100) + (5 \times 10) + (6 \times 1).$$

Pelo mesmo raciocínio, poderemos escrever de forma extensa o numeral 4.685, por exemplo:

$$4.685 = (4 \times 1.000) + (6 \times 100) + (8 \times 10) + (5 \times 1).$$

Valor do Lugar

Vimos que o lugar ocupado pelo algarismo no numeral mais simples de um número indica o seu valor. Chama-se valor relativo do algarismo, pois é um valor que o algarismo passa a ter em função do lugar que ocupa.

Por exemplo:

$$638 = (6 \times 100) + (3 \times 10) + (8 \times 1)$$

$$\text{ou } 638 = (6 \times 10 \times 10) + (3 \times 10) + (8 \times 1)$$

$$\text{ou } 638 = (6 \times 10^2) + (3 \times 10^1) + (8 \times 1).$$

Para sanar o inconveniente de se repetir muitas vezes o mesmo fator, foi inventada uma nova notação: o expoente.

Assim, $10 \times 10 \times 10 = 10^3$, isto é, o fator 10 (que é chamado base) deve repetir-se três vezes.

$$10 \times 10 = 10^2$$

$$10 \times 10 \times 10 = 10^3$$

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4, \text{ e assim sucessivamente.}$$

Com a nova notação, podemos estabelecer um quadro indicando o valor do lugar de cada algarismo.

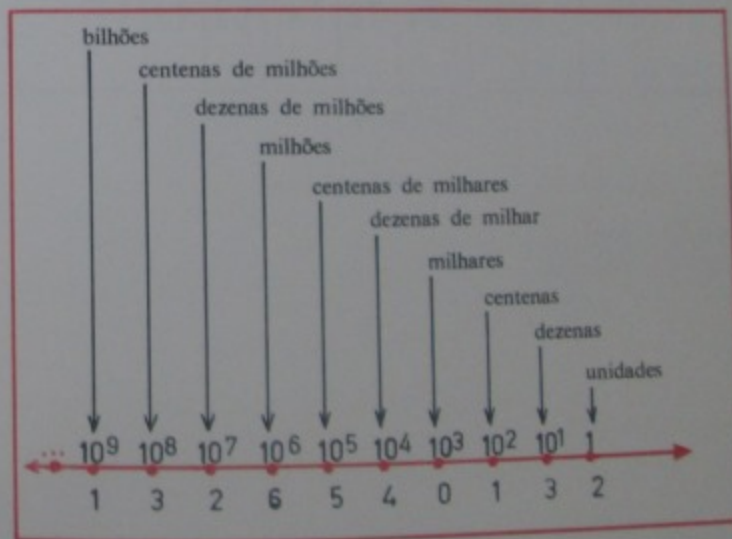


FIG. 32

O numeral abaixo do quadro deve ser lido assim: 1 bilhão, 326 milhões, 540 mil e 132.

O algarismo 5, nesse numeral, ocupa o lugar das centenas de milhar e o seu valor, aí, é:

$$5 \times 10^5 \text{ ou } 5 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \text{ ou } 5 \times 100.000 = 500.000.$$

A aplicação das características do Sistema de Numeração Decimal é muito conhecida e foi por nós estudada em todos os volumes anteriores e sistematizada no volume 4.

Vamos, portanto, apenas esquematizar a terminologia empregada nesse sistema de numeração.

MILHÕES Terceira Classe			MILHARES Segunda Classe			UNIDADES Primeira Classe		
9. ^a ordem	8. ^a ordem	7. ^a ordem	6. ^a ordem	5. ^a ordem	4. ^a ordem	3. ^a ordem	2. ^a ordem	1. ^a ordem
centenas de milhão	dezenas de milhão	unidades de milhão	unidades de milhar	dezenas de milhar	centenas de milhar	centenas simples	dezenas simples	unidades simples

FIG. 33

EXERCÍCIOS 3

Seja, por exemplo, o seguinte numeral:

28.305.246

- 1 — Quantas classes apresenta o numeral acima?
- 2 — Quais são essas classes?
- 3 — Quantas ordens? Qual a ordem mais alta?
- 4 — Quantas unidades simples possui o número representado pelo numeral acima? (É o mesmo que perguntar: quantos elementos possui qualquer conjunto que esteja associado ao número ali representado?)
- 5 — Quantos milhares? (É o mesmo que perguntar: quantos subconjuntos de mil elementos podemos formar com 28.305.246 elementos?)
- 6 — Quantas dezenas? (É o mesmo que perguntar: quantos subconjuntos de dez elementos podemos formar com 28.305.246 elementos?)
- 7 — No número acima representado, qual o algarismo que ocupa a ordem das centenas de milhar?
- 8 — Qual o valor posicional (ou relativo) de algarismo 5 no numeral que estamos considerando?
- 9 — Qual o valor posicional do algarismo 0 naquele numeral?
- 10 — Qual o valor posicional do algarismo 2 que ocupa a 3.^a ordem? E do mesmo algarismo, ocupando agora a 8.^a ordem?
- 11 — Qual o numeral mais simples de:
 - a) $3 \times 10^8 + 2 \times 10^7 + 5 \times 10 + 3 \times 1$
 - b) $8 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 9 \times 10 + 6 \times 1$
 - c) $6 \times 10^9 + 8 \times 10^8 + 5 \times 10^7$
- 12 — Escreva o numeral expandido dos seguintes numerais:
 - a) 2.536
 - b) 352.421
 - c) 9.345.108

OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS

ADIÇÃO

Vamos considerar dois conjuntos, A e B, finitos e disjuntos:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{u, v, x, z\}$$

Efetuada a reunião de A com B, temos:

$$A \cup B = \{a, b, c, u, v, x, z\}$$

A é caracterizado pelo número natural três e B, pelo número natural quatro.

O número natural que caracteriza o conjunto-reunião S é sete.

Considerando, agora, apenas os números naturais que caracterizam cada um dos conjuntos acima, temos:

$$\begin{array}{ccc} A \cup B = S \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 3 \quad 4 \quad 7 \end{array}$$

Assim, ao par (3; 4) corresponde o número natural 7.

A correspondência que associa um par de números naturais que caracterizam dois conjuntos A e B a um terceiro número natural que caracteriza o conjunto-reunião dos dois primeiros é denominada adição.

Logo, a operação reunião de dois conjuntos finitos e disjuntos corresponde à operação de adição entre números naturais.

Nos exemplos que seguem, chamaremos de A e B, os conjuntos que serão reunidos e de S, o conjunto-reunião.

Exemplo:

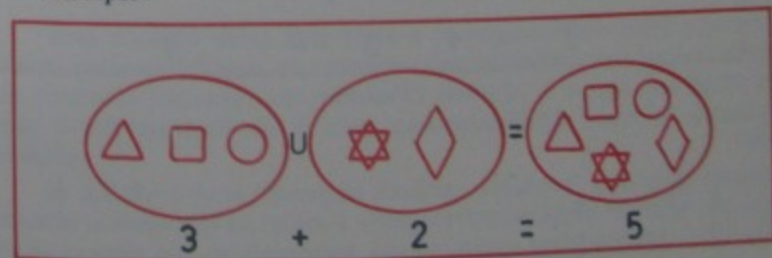


FIG. 34

ou:

$$\begin{array}{ccc} A \cup B = S \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 3 + 2 = 5 \end{array}$$

Outro exemplo:

$$\left\{ \square, \triangle \right\} \cup \left\{ \circ, \star, \bullet, \blacksquare \right\} = \left\{ \square, \triangle, \circ, \star, \bullet, \blacksquare \right\}$$

$$2 + 4 = 6$$

FIG. 35

ou:

$$\begin{array}{ccc} A \cup B = S \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 2 + 4 = 6 \end{array}$$

Mais um exemplo:

$$\left\{ \star, \triangle, \circ \right\} \cup \left\{ \quad \right\} = \left\{ \star, \triangle, \circ \right\}$$

$$3 + 0 = 3$$

FIG. 36

ou:

$$\begin{array}{ccc} A \cup B = S \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 3 + 0 = 3 \end{array}$$

Ainda outro exemplo:

$$\left\{ \quad \right\} \cup \left\{ \square, \triangle, \circ, \star \right\} = \left\{ \square, \triangle, \circ, \star \right\}$$

$$0 + 4 = 4$$

FIG. 37

ou:

$$\begin{array}{ccc} A \cup B = S \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 + 4 = 4 \end{array}$$

Vimos, pelos exemplos dados acima, que há uma relação biunívoca entre a operação reunião de conjuntos (finitos e disjuntos) e a operação adição de números naturais.

Podemos representar o par de números naturais e a sua correspondência de adição, nos exemplos dados, assim:

$$\begin{array}{l} (3; 4) \xrightarrow{+} 7 \\ (3; 2) \xrightarrow{+} 5 \\ (2; 4) \xrightarrow{+} 6 \\ (3; 0) \xrightarrow{+} 3 \\ (0; 4) \xrightarrow{+} 4 \end{array}$$

Esta notação deixa bem clara a correspondência entre o par de números naturais (termos da operação denominados *parcelas*) e o resultado da operação (denominado *soma*). O símbolo $+$ acima das flexas indica que a correspondência é uma correspondência especial denominada *Adição*.

A adição é uma *operação binária*. Dizemos que uma operação é binária quando ela se refere a uma correspondência do tipo que expusemos: a cada par de elementos (dados numa certa ordem), corresponde um determinado elemento.

Podemos ainda observar que a adição não é uma correspondência biunívoca. A um mesmo número podem corresponder vários pares de números. Por exemplo, ao par $(2; 3)$ corresponde o número natural 5. Mas, vários outros pares de números também correspondem ao número natural 5, como podemos observar facilmente:

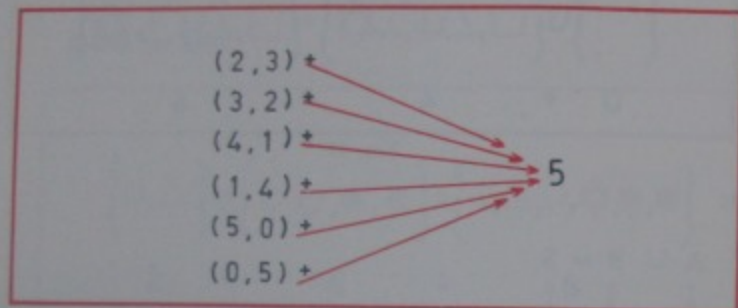


FIG. 38

A adição é, pois, uma correspondência do tipo muitos-a-um (muitos pares de números podem corresponder a um mesmo número).

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

Já vimos que há uma correspondência biunívoca entre a operação reunião de conjuntos (finitos e disjuntos) e a adição de números naturais.

Então, a adição possui tôdas as propriedades da união de tais conjuntos.

a) — Propriedade Comutativa

Se $A \cup B = B \cup A$, segue-se que $3 + 2 = 2 + 3$,
 $2 + 4 = 4 + 2$, etc.

Ou, em outras palavras, a adição é comutativa.

b) — Propriedade do Elemento Neutro

Se $A \cup \{ \} = A$ e $\{ \} \cup A = A$, podemos concluir que a adição possui um elemento neutro que é o zero (número natural que caracteriza o conjunto vazio).

Podemos também escrever: $A \cup \emptyset = A$ e $\emptyset \cup A = A$

c) — Propriedade Associativa

Sejam os conjuntos:

$$\begin{aligned}
 A &= \{ \circ, \square \} \\
 B &= \{ \triangle, \star, * \} \\
 C &= \{ \bullet, \blacksquare, \blacktriangle, \star \}
 \end{aligned}$$

FIG. 39

$$\begin{aligned}
 1^\circ) (A \cup B) \cup C &= \{ \circ, \square, \triangle, \star, * \} \cup \{ \bullet, \blacksquare, \blacktriangle, \star \} = \\
 &= \{ \circ, \square, \triangle, \star, *, \bullet, \blacksquare, \blacktriangle, \star \}
 \end{aligned}$$

FIG. 40

$$\begin{aligned}
 2^\circ) A \cup (B \cup C) &= \{ \circ, \square \} \cup \{ \triangle, \star, *, \bullet, \blacksquare, \blacktriangle, \star \} = \\
 &= \{ \circ, \square, \triangle, \star, *, \bullet, \blacksquare, \blacktriangle, \star \}
 \end{aligned}$$

FIG. 41

Comparando os resultados dos dois exemplos acima, vemos que:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Logo, a operação reunião é associativa.

Conseqüentemente, porque a reunião de conjuntos (finitos e disjuntos) e a adição de números naturais correspondem-se biunivocamente, a adição de números naturais é *associativa*.

MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação de números naturais tem também um significado que pode ser colocado nos termos da linguagem dos conjuntos.

Consideremos os conjuntos A, B, C, finitos e disjuntos, todos eles caracterizados pelo número natural *dois*:

$$\begin{aligned}
 A &= \{ \triangle, \square \} \\
 B &= \{ \circ, \diamond \} \\
 C &= \{ \star, * \}
 \end{aligned}$$

FIG. 42

Façamos a reunião desses conjuntos:

$$\begin{array}{c}
 A \cup B \cup C = \{ \triangle, \square, \circ, \diamond, \star, * \} \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 2 + 2 + 2 = 6
 \end{array}$$

FIG. 43

Sendo as parcelas da adição correspondentes à união dos conjuntos A, B e C, tôdas iguais, porque os conjuntos são caracterizados pelo mesmo número natural, essa adição pode ser grandemente facilitada, principalmente se forem muitos os conjuntos a serem reunidos, por uma nova operação: a multiplicação.

Para tornar bem clara a correspondência que leva o nome de multiplicação, organizaremos abaixo os elementos do conjunto-reunião de

A, B e C, que chamaremos S, de modo a formar uma linha para os elementos de cada conjunto dado e colunas, cada uma delas com 1 elemento de cada linha. Assim:

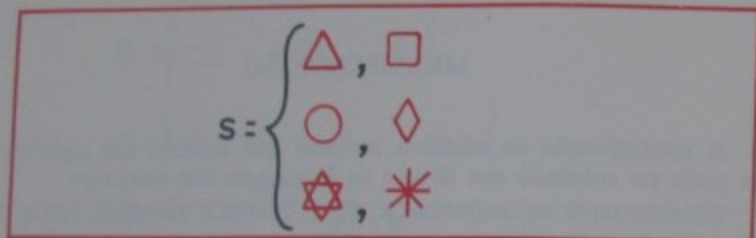


FIG. 44

O conjunto-reunião S possui elementos dispostos em três linhas (são três os conjuntos reunidos), e duas colunas (cada conjunto tem dois elementos). O número natural que caracteriza S é seis. Logo, ao par (3; 2) está associado o número natural 6. Esta não é mais uma correspondência de adição, mas uma nova correspondência. Sob a adição, ao par (3; 2) corresponde o número natural 5 e a adição é uma correspondência muitos-a-um. Logo, não pode corresponder também ao número 6. Esta nova correspondência recebe o nome de multiplicação. E é também uma correspondência do tipo muitos-a-um.

Consideremos o conjunto:

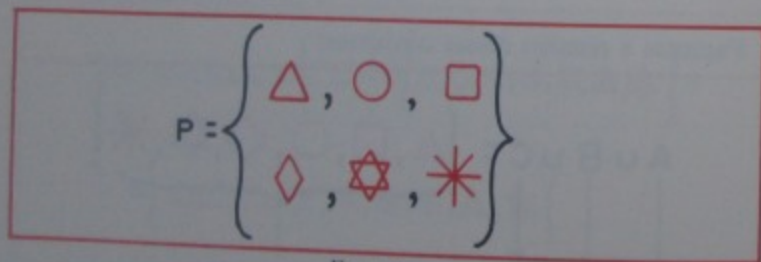


FIG. 45

O número natural que caracteriza P é também 6. O par associado ao seis, porém, é (2; 3), pois são 2 linhas e 3 colunas de elementos.

Logo, ao par (2; 3) também corresponde o número natural 6. Podemos indicar essas correspondências assim:

$$(3; 2) \xrightarrow{\times} 6$$

$$(2; 3) \xrightarrow{\times} 6$$

O sinal acima da flecha (\times) é para indicar que a correspondência é de multiplicação. Há autores que usam um ponto (.) para indicá-la. Ao par de números naturais se dá a denominação de fatores e ao resultado, a denominação de produto.

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

a) Propriedade Comutativa

Se aos pares (3; 2) e (2; 3) corresponde o mesmo número natural 6, podemos dizer que a multiplicação é comutativa, isto é, a ordem dos fatores não altera o produto.

b) Propriedade do Elemento Neutro

Seja o conjunto

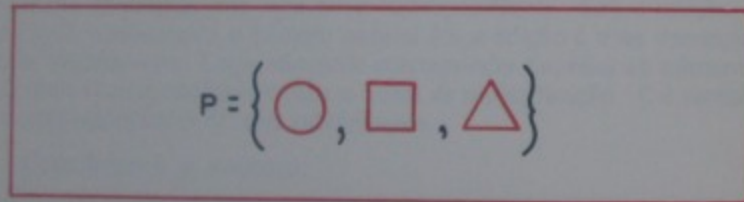


FIG. 46

constituído por uma linha e três colunas e caracterizado pelo número natural 3. Vemos que ao par (1; 3) corresponde o número 3.

Se o conjunto P tivesse sido organizado assim:

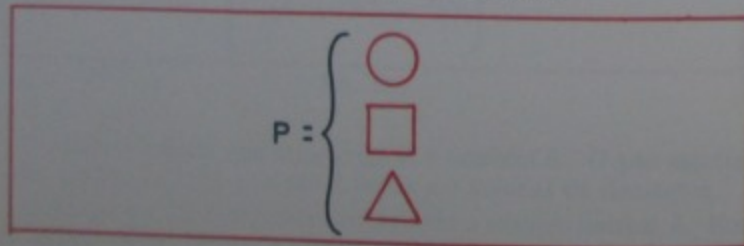


FIG. 47

P continuaria a se caracterizar pelo mesmo número natural 3, mas o par é (3; 1), pois temos agora 3 linhas e uma coluna de elementos em P.

Logo,

$$(1; 3) \xrightarrow{\times} 3$$

$$(3; 1) \xrightarrow{\times} 3$$

e o número natural 1 é neutro na multiplicação.

c) Propriedade Associativa

A multiplicação, como a adição, é uma operação binária, na qual intervém um par de números. Mas pode, como a adição, ser aplicada a mais de dois números. Isto porque, cada três números podem ser reduzidos a um par, como veremos a seguir:

$$\begin{array}{l} (2; 3) ; 4 \\ \downarrow \times \\ (6; 4) \xrightarrow{\times} 24 \end{array}$$

$$\text{ou: } 2; (3; 4) \\ \downarrow \times \\ (2; 12) \xrightarrow{\times} 24$$

Pelo exemplo, podemos dizer que:

$$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$$

ou que a multiplicação é associativa.

O ZERO NA MULTIPLICAÇÃO

O que significa 3×0 ?

3×0 significa $0 + 0 + 0 = 0$

Como a multiplicação é comutativa, podemos dizer que

$3 \times 0 = 0 \times 3$

e que 0×3 também é igual a zero.

Assim, quando zero é um dos fatores, o produto é zero.

Pensando de maneira inversa, que podemos dizer quando um produto é zero?

Podemos dizer, quando o produto é zero, que pelo menos um dos fatores é zero. Pode ser que ambos os fatores sejam zero, pois $0 \times 0 = 0$.

Assim, se $a \times b = 0$, temos que:

$a = 0$ ou $b = 0$, ou $a = b = 0$

PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA DA MULTIPLICAÇÃO

Esta propriedade da multiplicação a relaciona com a adição.

Sejam os conjuntos:

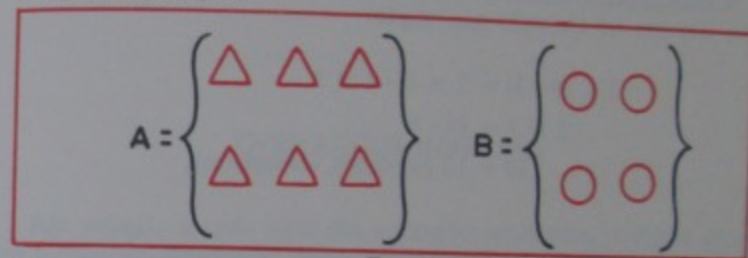


FIG. 48

O número natural que caracteriza A é 6 e o número natural que caracteriza B é 4. Se fizermos a reunião de A e B, teremos:

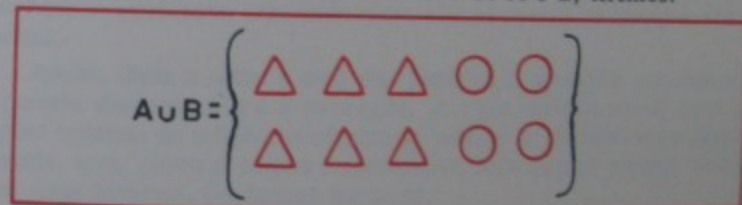
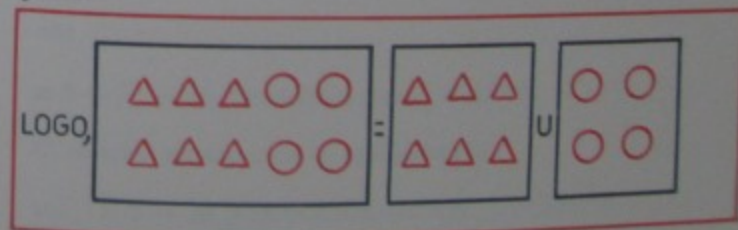


FIG. 49

O número natural que caracteriza o conjunto-reunião S é 10, ou 2×5 , como podemos observar pela disposição dos elementos em cada conjunto.



$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{FIG. 50} & & & & \\
 & & = & & & & \\
 S & & A & & B & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 2 \times (3 + 2) & = & 2 \times 3 & + & 2 \times 2 & &
 \end{array}$$

Observando atentamente a última expressão, notamos que a multiplicação por 2 foi distribuída entre os números 3 e 2 que se achavam adicionados.

Este exemplo, e muitos outros que podemos empregar para a verificação da propriedade, nos leva a afirmar: a multiplicação pode ser distribuída entre as parcelas da adição.

Logo, a multiplicação possui a propriedade distributiva em relação à adição.

A multiplicação distribui-se também pelos termos de uma subtração, como veremos no exemplo que segue:

$$2 \times (8 - 3) = 2 \times 8 - 2 \times 3$$

$$2 \times 5 = 16 - 6$$

$$10 = 10 \text{ (sentença verdadeira).}$$

OPERAÇÕES INVERSAS

Em relação a cada uma das operações anteriores, podemos deparar com o seguinte problema: dado o resultado e um dos termos da operação, determinar o outro.

Este problema é o da inversão das operações. As operações que resolvem o problema, em cada caso, são as operações inversas das primeiras.

Assim, dada a soma e uma das parcelas, a operação que determina a parcela desconhecida é a *subtração*. A rigor, deveria haver duas operações inversas da adição, conforme se pedisse a primeira ou a segunda parcela, mas, como a adição é comutativa, seus papéis podem trocar-se e as duas inversas, fundem-se numa só.

Assim,

$$\text{se } \square + 8 = 13, \text{ podemos concluir que } \square = 13 - 8$$

ou:

$$\text{se } 5 + \square = 13, \text{ concluímos que } \square = 13 - 5.$$

O mesmo sucede com a multiplicação:

$$\text{se } \square \times 5 = 20, \text{ podemos concluir que } \square = 20 \div 5$$

ou:

$$\text{se } 4 \times \square = 20, \text{ concluímos que } \square = 20 \div 4.$$

SUBTRAÇÃO

Seja, por exemplo, o seguinte problema:

Carlos tinha 8 cruzeiros e ganhou alguns cruzeiros do pai passando a possuir 13 cruzeiros. Quanto êle ganhou do pai?

Baseados nos dados do problema, temos a seguinte sentença:

$$8 + \square = 13$$

A operação que permite determinar a parcela desconhecida é a subtração.

Representando o conjunto de cruzeiros que Carlos passou a possuir após receber os cruzeiros do pai por um conjunto de 13 círculos, podemos pôr em evidência a operação inversa da adição que vamos realizar:

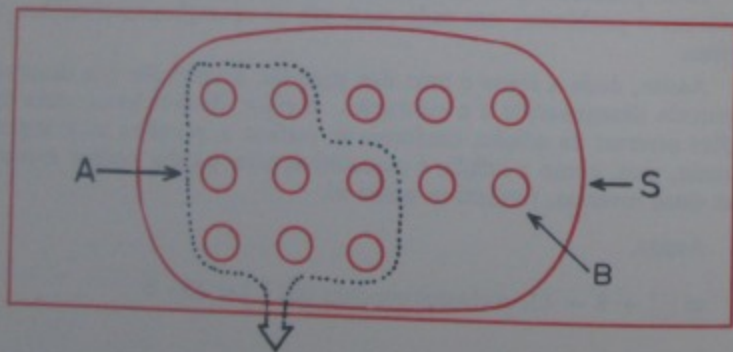


FIG. 51

Removendo o subconjunto A, S passará a possuir apenas os elementos pertencentes ao subconjunto B que antes fôra reunido a A para produzir S.

Essa operação corresponde à operação inversa de reunir conjuntos, isto é, ela é a operação que desfaz a operação de reunir. Logo, voltando ao nosso problema e operando com os números naturais associados aos conjuntos em questão teremos:

$$8 + \square = 13 \Leftrightarrow \square = 13 - 8$$

Em outras palavras: as sentenças $8 + \square = 13$ e $\square = 13 - 8$ são equivalentes.

Na subtração acima, ao par (13; 8) associamos o número 5 que caracteriza o subconjunto que restou em S quando removemos A. Esta correspondência recebe o nome de subtração.

A indicação da subtração é feita pelo sinal - (menos) e o resultado da subtração é denominado diferença. O primeiro número do par ordenado é o minuendo e o segundo, subtraendo.

Indicamos a correspondência de subtração assim:

$$(13; 8) \xrightarrow{-} 5$$

onde $13 - 8 = 5$ porque $5 + 8 = 13$.

PROPRIEDADES DA SUBTRAÇÃO

Será comutativa a subtração? Isto é, podemos inverter a ordem dos termos de uma subtração?

Exemplo:

$$8 - 5 = 3$$

$$\text{e } 5 - 8 = ? \text{ (não representa nenhum número natural)}$$

Logo, a subtração não é comutativa.

Será ela associativa? Isto é, poderemos agrupar indiferentemente os seus termos sem alterar a diferença?

$$\text{Exemplo: } 15 - 8 - 3$$

$$\text{Temos: } (15 - 8) - 3 = 7 - 3 = 4$$

$$\text{e } 15 - (8 - 3) = 15 - 5 = 10.$$

Como os resultados se alteram conforme agrupamos os primeiros ou os últimos termos, isto é, como $4 \neq 10$, notamos que a subtração não é associativa.

POSSIBILIDADE DA SUBTRAÇÃO

Se tentarmos subtrair de um número natural um outro que seja maior que êle, o que acontecerá? É claro que não vamos encontrar nenhum número natural que seja o resultado dessa operação!

Exemplo:

$$10 - 28 = ?$$

Não é possível!

Logo, a subtração nem sempre é possível entre dois números naturais. Ela só é possível quando o segundo número do par (subtraendo) é menor ou igual ao primeiro deles (minuendo).

Por isso, dizemos que a subtração não possui a propriedade do fechamento no conjunto dos números naturais.

O ZERO NA SUBTRAÇÃO

Se o conjunto vazio é removido de S, sendo

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, o resultado é o próprio conjunto S.

Logo, o número que caracteriza S, que podemos representar assim $n(S)$ menos o número que caracteriza o conjunto vazio, que podemos representar assim $n(\emptyset)$, é igual $n(S)$.

Ou:

$$\begin{array}{rcccl} n(S) - n(\emptyset) & = & n(S) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 - 0 & = & 5 & & \end{array}$$

Então, sendo zero o subtraendo, a diferença e o minuendo são o mesmo número.

Se do conjunto S removemos êle mesmo, o resultado é o conjunto vazio. Logo,

$$\begin{array}{rcccl} n(S) - n(S) & = & n(\emptyset) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 - 5 & = & 0 & & \end{array}$$

Em outras palavras: se o minuendo e o subtraendo são o mesmo número, a diferença é zero.

DIVISÃO

Na multiplicação, a inversão consiste em: dado um produto e um dos fatores, determinar o outro fator. Deveria haver duas operações inversas para a multiplicação, conforme se quisesse determinar o multiplicador ou o multiplicando, mas, em virtude da multiplicação ser comutativa, as duas fundem-se numa só que se chama *divisão*.

A mesma relação que existe entre a subtração e a adição existe também entre a divisão e a multiplicação.

Sabendo que multiplicação e divisão são operações inversas, podemos interpretar, por exemplo, que $6 \div 3$ é um fator que se fôr multiplicado por 3 produzirá o produto 6. Assim:

$$(6 \div 3) \times 3 = 6$$

Se associarmos êsses números a conjuntos de círculos e os arruarmos em linhas e colunas, teremos:

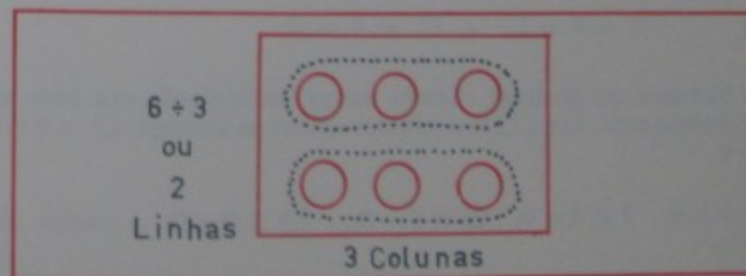


FIG. 52

$$2 \times 3 = 6 \iff 6 \div 3 = 2$$

O ZERO NA DIVISÃO

Façamos, em primeiro lugar, uma investigação sobre a divisão por zero. Isto é, poderá o número natural zero funcionar como divisor de qualquer outro número natural?

a) Se a multiplicação e a divisão são operações inversas,

$$5 \div 0 = \square \text{ e } \square \times 0 = 5$$

devem ser equivalentes.

Mas, nós sabemos que qualquer número natural multiplicado por zero é igual a zero. Então, não existe um número natural que possa estar sendo representado por \square na sentença $\square \times 0 = 5$. Logo, $5 \div 0$ não é numeral de nenhum número. É impossível dividir por zero, pois quaisquer que sejam os exemplos por nós imaginados iremos sempre chegar à mesma conclusão.

b) Vejamos, agora, o caso especial:

$$0 \div 0 = ?$$

Relacionando-o com a multiplicação e representando por \square a solução, se existir, teremos:

$$0 \div 0 = \square \text{ e } \square \times 0 = 0$$

Sabemos que qualquer número natural multiplicado por zero tem por produto zero. Logo, \square tem infinitos valores na sentença: $\square \times 0 = 0$. Isto é:

$0 \times 0 = 0$, $8 \times 0 = 0$, $25 \times 0 = 0$, $124 \times 0 = 0$, e assim por diante.

Se aceitássemos $0 \div 0$ como sendo numeral de um número, teríamos que aceitá-lo como numeral de uma infinidade de números, o que, certamente, não nos convém.

Do exposto, podemos concluir que, no primeiro caso, não existe nenhum número que possa ser representado como uma divisão indicada por zero, isto é, a divisão de um número diferente de zero por zero é impossível; no segundo caso, ao contrário, existem infinitos números naturais que poderiam ser representados por $0 \div 0$, o que não nos convém, porque o quociente nunca poderia ser determinado.

Logo, a divisão por zero não tem significado. Em outras palavras: "dividir por zero" não é uma operação e "multiplicação por zero" é uma operação que não tem operação inversa.

c) Resta investigar um terceiro e último caso do zero na divisão: $0 \div 5$, por exemplo.

Relacionando a divisão do exemplo com a multiplicação e designando por \square o quociente, temos:

$$0 \div 5 = \square \text{ e } \square \times 5 = 0$$

O único número natural que multiplicado por 5 tem por produto zero, é o próprio zero. Logo, se $0 \times 5 = 0$, então $0 \div 5 = 0$.

Assim, podemos concluir que zero pode ser dividido quando o divisor for um número natural que não seja zero. Nesse caso, o quociente será sempre zero.

A divisão é indicada pelo sinal \div (ou $:$).

Podemos indicar a operação de dividir assim:

$$(8; 2) \xrightarrow{+} 4$$

8 e 2 são os termos da divisão exata e, respectivamente, chamam-se dividendo e divisor. O resultado, 4, é o quociente.

POSSIBILIDADE DA DIVISÃO

Vimos já que a divisão por zero é impossível.

Para que a divisão seja possível é preciso que exista para quociente um número natural que multiplicado pelo divisor reproduza o dividendo. Nem sempre isto acontece. É o caso de $9 \div 4$, por exemplo. Não existe nenhum número natural que multiplicado por 4 dê 9. Mas, não é o caso de dizermos que 9 nunca pode ser dividendo, pois,

$$9 \div 3 = 3 \text{ porque}$$

$$3 \times 3 = 9 \text{ ou que } 4 \text{ nunca pode ser divisor, pois,}$$

$$8 \div 4 = 2 \text{ porque}$$

$$2 \times 4 = 8.$$

É o par (9,4) que não tem um correspondente número natural na operação de dividir. Neste caso, há um quarto número denominado resto (menor que o divisor), tal que seja verificada a seguinte igualdade:

$$\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor} + \text{resto}$$

Assim, em $9 \div 4$,

$$9 = 2 \times 4 + 1$$

Neste caso, dizemos que a divisão é aproximada e possível, embora seja impossível a divisão exata, no conjunto dos números naturais.

PROPRIEDADES DA DIVISÃO

Será a divisão uma operação comutativa? Ou, em outras palavras, $8 \div 4$ e $4 \div 8$, por exemplo, serão numerais de um mesmo número? É evidente que não. $8 \div 4 = 2$ e $4 \div 8$ não representa nenhum número natural.

Logo, $8 \div 4 \neq 4 \div 8$ e a divisão não é comutativa.

A divisão será associativa? Isto é, $(12 \div 6) \div 2$ e $12 \div (6 \div 2)$ serão numerais de um mesmo número?

Vejam os:

$$(12 \div 6) \div 2 = 2 \div 2 = 1$$

$$\text{e } 12 \div (6 \div 2) = 12 \div 3 = 4$$

Então, $(12 \div 6) \div 2 \neq 12 \div (6 \div 2)$ e a divisão não é associativa.

O "um" na divisão

Sabemos que $8 \div 1 \neq 1 \div 8$ porque a divisão não é comutativa.

Mas, no caso do divisor ser um, notamos que o quociente é o mesmo número que o dividendo.

$$\text{Exemplos: } 8 \div 1 = 8$$

$$6 \div 1 = 6$$

$$24 \div 1 = 24$$

$$348 \div 1 = 348$$

Propriedade distributiva da divisão

Vejam se é possível distribuir a divisão pelas parcelas de uma soma (ou diferença):

$$12 \div 3 = (9 + 3) \div 3$$

$$4 = 9 \div 3 + 3 \div 3$$

$$4 = 3 + 1$$

$$4 = 4$$

Vale, portanto, para a divisão de números naturais a propriedade distributiva da divisão exata em relação à adição indicada.

Outro exemplo:

$$8 \div 4 = (24 - 16) \div 4$$

$$2 = 24 \div 4 - 16 \div 4$$

$$2 = 6 - 4$$

Vale, também, a propriedade distributiva da divisão exata em relação à subtração indicada.

Entretanto, podemos verificar que a divisão de números naturais possui a propriedade distributiva apenas quando é exata e quando a adição ou subtração se distribui em relação ao divisor. Em outras palavras: a distributividade da divisão não se faz nos dois sentidos, como na multiplicação, em virtude da divisão não ser comutativa. A propriedade só é válida no sentido da direita. Por exemplo:

$$18 \div (3 + 6) = 18 \div 9$$

$$18 \div 3 + 18 \div 6 \neq 2$$

$$6 + 3 \neq 2$$

$$9 \neq 2$$

Entretanto:

$$(18 + 6) \div 3 = 24 \div 3$$

$$18 \div 3 + 6 \div 3 = 8$$

$$6 + 2 = 8$$

Vale a distribuição para a direita, portanto.

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

POTENCIAÇÃO — CONCEITO E NOMENCLATURA

Assim como a multiplicação surgiu como uma conseqüência das adições de parcelas iguais, fundamentando-se, portanto, na adição, podemos dizer que a *potenciação* se fundamenta na multiplicação em que todos os fatores são iguais.

Por exemplo:

$$2 \times 2 \times 2$$

é um produto de três fatores iguais a 2.

Produtos como o do exemplo acima podem ser indicados sob uma forma abreviada, escrevendo-se uma só vez o fator que se repete e, um pouco acima e em tamanho menor, a seguir, o número de vezes que o fator é repetido. Assim:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

onde: 2^5 $\begin{matrix} \swarrow & \text{expoente (número de fatores repetidos)} \\ \searrow & \text{base (fator que se repete)} \end{matrix}$

O fator que se repete é chamado *base* (2, no exemplo). O número de vezes que o fator se repete é denominado *expoente* (5, no exemplo).

Assim, 3^2 significa um produto de 2 fatores iguais a 3, isto é,

$$3^2 = 3 \times 3$$

Do mesmo modo, 5^4 significa um produto de 4 fatores iguais a 5, isto é,

$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

Outros exemplos:

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (lê-se: "dois elevado à quarta potência" ou "quarta potência de dois").

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ (lê-se: "três elevado à quinta potência" "quinta potência de três").

$10^6 = 10 \times 10 \times 10$ (lê-se: "dez elevado à terceira potência" ou "terceira potência de dez").

Podemos esquematizar as multiplicações de fatores iguais da seguinte maneira:

$$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

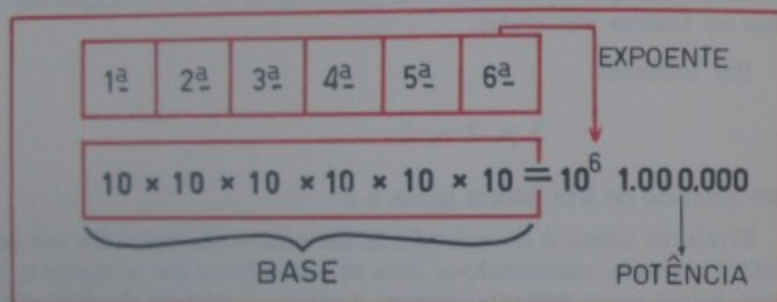


FIG. 53

Logo, ao par $(10; 6)$ podemos associar o número 1.000.000, denominado *potência*.

A operação que associa um par ordenado de números naturais, não nulos, a um terceiro número natural denominado *potência* do primeiro, é a operação denominada *potenciação*.

$$\begin{array}{ccc} \text{Exemplo: } (10; 6) & \longrightarrow & 10^6 = 1.000.000 \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \\ \text{base expoente} & & \text{potência} \end{array}$$

$$\text{Outro exemplo: } (5; 3) \longrightarrow 5^3 = 125$$

Dada a grande aplicação dos expoentes 2 e 3 na vida prática, estes expoentes têm grande destaque no estudo da potenciação, usando-se até denominações próprias quando a cada um deles nos referimos.

Exemplos:

$3^2 = 3 \times 3$ (costuma-se ler: três *ao quadrado*, porque a área de um quadrado é dada pela segunda potência da medida de seu lado)

$5^3 = 5 \times 5 \times 5$ (costuma-se ler: cinco *ao cubo*, porque o volume do cubo é dado pela terceira potência da medida de sua aresta).

Assim, segunda potência de um número é o mesmo que "quadrado" desse número e, terceira potência de um número é o mesmo que "cubo" desse número.

POTÊNCIA DE ZERO

Alguns exemplos nos levarão a concluir que as potências de zero são iguais a zero.

$$0^2 = 0 \times 0 = 0$$

$$0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$$

$$0^4 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$$

E assim, sucessivamente. Logo, toda potência de zero é zero.

POTÊNCIAS DE UM

Também agora, alguns exemplos nos elucidarão a respeito:

$$1^2 = 1 \times 1 = 1$$

$$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

Logo, qualquer que seja o expoente (desde que seja um número natural), quando a base é 1, a potência é 1. Em outras palavras: as potências de um são iguais a um.

O EXPOENTE UM

Como não há produto com menos de dois fatores, o expoente 1 é mais uma generalização adotada pela Matemática.

Convencionou-se que:

$$2^1 = 2$$

$$3^1 = 3$$

$$4^1 = 4$$

E assim por diante. Logo, a potência indicada que possui expoente 1 é igual à base.

O EXPOENTE "ZERO"

Convencionou-se também que toda potência indicada que possui expoente zero é igual à unidade.

Assim:

$$2^0 = 1$$

$$3^0 = 1$$

$$4^0 = 1$$

As duas convenções acima têm por principal razão o seguinte: as propriedades estruturais das potências continuam a valer nos casos dos expoentes um e zero.

A justificação da convenção adotada para o expoente zero será dada quando tratarmos das operações com potências de mesma base, nosso próximo assunto.

Observação: A expressão 0^0 não tem sentido, isto é, a expressão 0^0 não representa nenhum número natural.

OPERAÇÕES COM POTÊNCIAS

1 — Multiplicação de Potências de Mesma Base

Suponhamos a seguinte operação:

$$2^3 \times 2^2$$

Trata-se de uma multiplicação em que os fatores são potências de mesma base (base 2).

Sabemos que:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2$$

$$\text{e } 2^2 = 2 \times 2$$

Logo, $2^3 \times 2^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2)$

ou: $2^3 \times 2^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

Observemos os termos e o resultado da operação:

$$2^3 \times 2^2 = 2^5$$

O resultado é uma potência de mesma base que os fatores (2). O expoente do resultado é igual à soma dos expoentes dos fatores ($3 + 2 = 5$).

Outro exemplo:

$$5^3 \times 5^4$$

Temos:

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5$$

$$\text{e } 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

Logo, $5^3 \times 5^4 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5)$

ou: $5^3 \times 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^7$

Observemos os termos e o resultado da operação:

$$5^3 \times 5^4 = 5^7$$

O resultado é uma potência de mesma base que os fatores (5). O expoente do resultado é igual à soma dos expoentes dos fatores ($3 + 4 = 7$).

Assim, podemos deduzir que:

$$2^5 \times 2^4 = 2^{(5+4)} = 2^9$$

$$7^3 \times 7^5 = 7^{(3+5)} = 7^8$$

$$11^2 \times 11^6 = 11^{(2+6)} = 11^8$$

Também no caso de haver mais de dois fatores, raciocinamos de maneira análoga:

$$5^3 \times 5^2 \times 5^4 = 5^{(3+2+4)} = 5^9$$

porque:

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5$$

$$5^2 = 5 \times 5$$

$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

e, portanto,

$$5^3 \times 5^2 \times 5^4 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5)$$

$$\text{ou } 5^3 \times 5^2 \times 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^9$$

Outros exemplos:

$$3^2 \times 3^5 \times 3^3 \times 3^6 = 3^{(2+5+3+6)} = 3^{16}$$

$$8^5 \times 8^2 \times 8 = 8^{(5+2+1)} = 8^8$$

$$5 \times 5^3 \times 5^2 = 5^{(1+3+2)} = 5^6$$

2 — Divisão de Potências de Mesma Base

Suponhamos a seguinte operação:

$$4^7 \div 4^3$$

Trata-se de uma divisão em que o dividendo e o divisor são potências de mesma base (base 4).

Sabemos que a divisão é a operação inversa da multiplicação.

Logo,

$$4^7 \div 4^3 = \square \Leftrightarrow \square \times 4^3 = 4^7$$

Sabemos também que o fator que multiplicado por 4^3 dá 4^7 é 4^4 , pois $4^4 \times 4^3 = 4^{(4+3)} = 4^7$.

Logo, para calcular o quociente de $4^7 \div 4^3$ (\square), podemos raciocinar assim:

$$4^7 \div 4^3 = 4^{(7-3)} = 4^4$$

O resultado é uma potência da mesma base que o dividendo e o divisor (4). O expoente do resultado é igual à diferença entre os expoentes do dividendo e do divisor ($7 - 3 = 4$).

No conjunto dos números naturais, só é possível a divisão de potências de mesma base quando o expoente do dividendo é maior ou igual ao expoente do divisor.

Exemplos:

$$6^8 \div 6^5 = 6^{(8-5)} = 6^3$$

$5^3 \div 5^5 = 5^{(3-5)} = 5^2$ (impossível, no conjunto dos números naturais, pois $3 - 5$ é uma operação impossível neste conjunto).

3 — Um caso especial de divisão de potências de mesma base: expoentes iguais.

$2^3 \div 2^3 = 2^{(3-3)} = 2^0 = 1$ (por convenção, como já vimos).

Podemos, agora, verificar que a convenção adotada de que $2^0 = 1$ satisfaz ao resultado da divisão de potências de mesma base no caso dos expoentes serem iguais:

$$\begin{array}{ccc} 2^3 \div 2^3 = 2^0 = 1 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 8 \div 8 = 1 \end{array}$$

Outro exemplo:

$$\begin{array}{ccc} 3^4 \div 3^4 = 3^0 = 1 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 81 \div 81 = 1 \end{array}$$

Agora, é fácil compreender o porquê da convenção adotada atrás quando dissemos que qualquer número natural afetado pelo expoente zero é igual a 1.

POTÊNCIA DE UMA POTÊNCIA INDICADA

Suponhamos uma operação como a que segue:

$$(3^2)^3$$

Isto significa que devemos elevar ao cubo o número 3^2 (três ao quadrado).

Logo,

$$(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{(2+2+2)} = 3^{(2 \times 3)} = 3^6$$

Outro exemplo:

$$(5^3)^2$$

A expressão $(5^3)^2$ significa que o número 5^3 (cinco ao cubo) deve ser elevado ao quadrado.

Portanto,

$$(5^3)^2 = 5^3 \times 5^3 = 5^{(3+3)} = 5^{(2 \times 3)} = 5^6$$

Dêstes exemplos, podemos tirar uma conclusão bastante importante e que é uma regra prática para elevar a uma potência qualquer um número expresso por uma potência: conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes. Assim:

$$(3^2)^3 = 3^{(2 \times 3)} = 3^6$$

$$(5^3)^2 = 5^{(2 \times 3)} = 5^6$$

$$(2^4)^3 = 2^{(3 \times 4)} = 2^{12}$$

$$(1^5)^4 = 1^{(4 \times 5)} = 1^{20}$$

$$(10^2)^4 = 10^{(4 \times 2)} = 10^8$$

Há diferença entre a operação $(2^3)^2$ e $2^{(3^2)}$

A primeira, já sabemos: $(2^3)^2 = 2^{(2 \times 3)} = 2^6$

A segunda, como $3^2 = 9$, temos que $2^{(3^2)} = 2^9$, o que não é a mesma coisa.

Logo, $(2^3)^2 \neq 2^{(3^2)}$

$$\begin{array}{lcl} (5 + 2)^2 \neq 5^2 + 2^2 & e & (5 - 2)^2 \neq 5^2 - 2^2 \\ 7^2 \neq 25 + 4 & & 3^2 \neq 25 - 4 \\ 49 \neq 29 & & 9 \neq 21 \end{array}$$

PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO

Podemos verificar que, assim como para a divisão e a subtração, não valem as propriedades estruturais que estudamos para a adição e a multiplicação, também para a potenciação elas não valem. Vejamos:

1 — A potenciação não é comutativa, desde que $3^2 \neq 2^3$, como veremos:

$$\begin{aligned} 3^2 &= 3 \times 3 = 9 \\ 2^3 &= 2 \times 2 \times 2 = 8 \end{aligned}$$

Logo, $3^2 \neq 2^3$ porque $9 \neq 8$, ou a potenciação é não-comutativa.

2 — A potenciação não possui elemento neutro, pois:

$$3^1 = 3 \quad e \quad 1^3 = 1$$

Assim, no primeiro exemplo, pode parecer que o número 1 é o elemento neutro da potenciação. Entretanto, pelo segundo exemplo, vemos que o número um é atuante, isto é, o segundo número do par (1; 3) é que não influi no resultado da operação.

3 — A potenciação não possui a propriedade associativa, desde que $(3^2)^3 \neq 3^{(2^3)}$, conforme veremos:

$$\begin{aligned} (3^2)^3 &= 9^3 = 729 \\ e \quad 3^{(2^3)} &= 3^8 = 6.561 \end{aligned}$$

Logo, $(3^2)^3 \neq 3^{(2^3)}$, ou a potenciação não possui a propriedade associativa.

4 — A potenciação não possui a propriedade distributiva em relação à adição e à subtração.

Podemos facilmente verificar que $(5 + 2)^2 \neq 5^2 + 2^2$ da mesma forma que $(5 - 2)^2 \neq 5^2 - 2^2$.

5 — A potenciação é Distributiva em relação à Multiplicação e à Divisão.

Realmente:

$$(3 \times 5)^2 = 3^2 \times 5^2$$

pois, $15^2 = 9 \times 25$

e $225 = 225$ é uma sentença verdadeira.

Também,

$$(12 \div 4)^2 = 12^2 \div 4^2$$

pois, $3^2 = 144 \div 16$

e $9 = 9$ é uma sentença verdadeira.

Ilustrando, teremos:

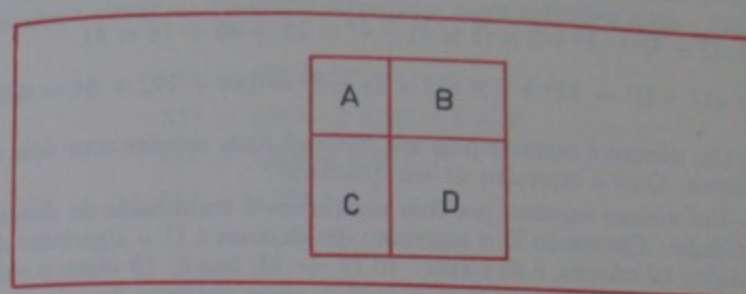


FIG. 54

$$A_{\square} = (3 + 4)^2 = 7^2 = 49$$

Examinando o desenho, podemos chegar ao mesmo resultado calculando a área de cada uma das partes em que o quadrado foi dividido e adicionando-as. Assim:

$$\text{Área do quadrado designado por A} = 3 \times 3 = 9$$

$$\text{Área do retângulo B} = 3 \times 4 = 12$$

$$\text{Área do retângulo C} = 3 \times 4 = 12$$

$$\text{Área do quadrado D} = 4 \times 4 = 16$$

A área do retângulo todo é igual à soma das áreas de A, B, C e D.

$$\text{Portanto: } A_{\square} = 9 + 12 + 12 + 16 = 49$$

Chegamos ao mesmo resultado anterior, quando elevamos a medida do lado ao quadrado.

Logo, a igualdade que segue é verdadeira:

$$(3 + 4)^2 = (3 \times 3) + 2 \times (3 \times 4) + (4 \times 4)$$

Esta conclusão nos leva a uma regra para calcular o quadrado de uma soma indicada, das mais importantes, pois será aplicada muitas e muitas vezes em oportunidades as mais diversas: "o quadrado de uma soma indicada, de duas parcelas, é igual à soma do quadrado da primeira parcela com o dobro do produto da primeira parcela pela segunda e o quadrado da segunda parcela".

O QUADRADO DE UMA SOMA INDICADA

Como vimos, a potenciação não possui a propriedade distributiva em relação à adição, pois:

$$(3 + 4)^2 \neq 3^2 + 4^2$$

Entretanto, podemos elevar ao quadrado uma soma indicada de duas parcelas.

Seja a seguinte operação:

$$(3 + 4)^2$$

que desejamos efetuar de maneira diferente da seguinte:

$$(3 + 4)^2 = 7^2 = 49$$

Se desejamos ou precisamos efetuar essas operações sem efetuar a adição em primeiro lugar, podemos descobrir uma regra para tal.

Para isso, vamos procurar a área de um quadrado cujos lados medem $(3 + 4)$ unidades.

Sabemos que para calcular a área do quadrado devemos multiplicar a medida do lado por ela mesma, isto é, devemos elevar ao quadrado a medida do lado.

Logo, a área do quadrado será:

$$(3 + 4) \times (3 + 4) \text{ ou } (3 + 4)^2$$

Aplicando a regra acima, iremos calcular alguns quadrados:

$$1.^{\circ}) (5 + 4)^2 = 5^2 + 2 \times (5 \times 4) + 4^2 = 25 + 40 + 16 = 81$$

$$2.^{\circ}) (12 + 8)^2 = 12^2 + 2 \times (12 \times 8) + 8^2 = 144 + 192 + 64 = 400$$

3.º) Um número é expresso pelo seu numeral mais simples com dois algarismos. Qual a expressão de seu quadrado?

Um número expresso por dois algarismos é constituído de dezenas e unidades. Chamando D o algarismo das dezenas e U o algarismo das unidades, tal número, é da forma: $10 D + U$, isto é, 10 vêzes o valor absoluto do algarismo das dezenas mais o valor absoluto do algarismo das unidades.

O quadrado do número assim expresso será:

$$(10 D + U)^2 = (10 D)^2 + 2 \times (10 D \times U) + U^2$$

ou:

$$(10 D + U)^2 = (10 D)^2 + 20 D \times U + U^2$$

A expressão $(10 D)^2 + 20 D \times U + U^2$ é a expressão do quadrado de qualquer número cujo numeral mais simples tem dois algarismos.

Seja, por exemplo, o número 65, de dois algarismos.

O número 65 pode ser expresso segundo a forma geral atrás mencionada: $10 D + U$

E, elevando-a ao quadrado, temos:

$$(10 D + U)^2 = (10 D)^2 + 20 D \times U + U^2$$

Como, no número 65, $D = 6$ e $U = 5$, substituindo cada uma dessas letras pelo seu valor, no exemplo, temos:

$$(10 \times 6 + 5)^2 = (10 \times 6)^2 + 20 \times 6 \times 5 + 5^2$$

ou: $65^2 = 60^2 + 600 + 5^2$

$$65^2 = 3.600 + 600 + 25$$

$$65^2 = 4.225$$

Poderíamos, também, decompor o número 65 em uma soma de duas parcelas e elevar ao quadrado segundo a regra aprendida atrás. Assim:

$$65^2 = (60 + 5)^2$$

$$65^2 = 60^2 + 2 \times 60 \times 5 + 5^2$$

$$65^2 = 3.600 + 600 + 25$$

$$65^2 = 4.225$$

EXPRESSÕES NUMÉRICAS CONTENDO POTÊNCIAS INDICADAS

Em primeiro lugar são efetuadas as potências. A seguir, é obedecida a ordem estabelecida para as outras operações.

Exemplos:

$$1.^{\circ}) 3 + 2^3 \times 4$$

$$3 + 8 \times 4$$

$$3 + 32 = 35$$

$$2.^{\circ}) (65 - [48 \div (4^2 \div 2^2) + 1^2 \times 3^2]) + (2^3 \times 3^2)$$

$$65 - [48 \div (64 \div 16) + 1 \times 9] + (8 \times 9)$$

$$65 - [48 \div 4 + 1 \times 9] + 72$$

$$65 - [12 + 9] + 72$$

$$65 - 21 + 72$$

$$52 + 72 = 124$$

RADICIAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

Vimos já que 6^2 é uma potência indicada que se lê: 6 ao quadrado e que 6^2 significa 6×6 ou 36.

Logo, o número 6 é um número que elevado ao quadrado é igual a 36.

Podemos, então, pensar na seguinte questão: Qual é o número que elevado ao quadrado é igual a 36?

A resposta vem imediatamente: É 6, porque $6^2 = 36$.

O número 6, neste caso, recebe o nome de *raiz quadrada* de 36.

Outro exemplo: 2^3 é uma potência indicada que se lê: "2 ao cubo" e significa $2 \times 2 \times 2$ ou 8.

Portanto, o número 2 é um número que elevado ao cubo é igual a 8.

Se perguntarmos: Qual é o número que elevado ao cubo é igual a 8, a resposta será: 2, porque $2^3 = 8$.

O número 2, neste exemplo, recebe o nome de *raiz cúbica* de 8.

Do exposto, podemos concluir que há uma operação que nos dá a *raiz quadrada*, a *raiz cúbica*, a *raiz quarta*, etc., de um número e que essa operação é inversa da potenciação.

É a operação que associa a um par ordenado de números naturais, não-nulos, (sendo o primeiro o expoente e o segundo a potência) a um terceiro número (a base), que passa a ser denominada *raiz*.

Tal operação é a *radiciação*.

O símbolo $\sqrt[2]{4}$ indica a raiz quadrada de 4, isto é, é outro numeral do número 2, pois a raiz quadrada de 4 é 2 porque $2^2 = 4$.

$\sqrt[2]{25}$ indica a raiz quadrada de 25, ou 5, enquanto que $\sqrt[3]{49}$ indica a raiz quadrada de 49, ou 7, pois $7^2 = 49$.

$\sqrt[3]{8}$ indica a raiz cúbica de 8, ou 2, porque $2^3 = 8$, enquanto que $\sqrt[5]{32}$ indica a raiz quinta de 32, ou 2, porque $2^5 = 32$.

Podemos, então, escrever as seguintes equivalências, valendo-nos dos exemplos acima:

$$\sqrt[2]{4} = 2 \Leftrightarrow 2^2 = 4$$

$$\sqrt[2]{25} = 5 \Leftrightarrow 5^2 = 25$$

$$\sqrt[2]{49} = 7 \Leftrightarrow 7^2 = 49$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

$$\sqrt[5]{32} = 2 \Leftrightarrow 2^5 = 32$$

Analogamente, se $6^2 = 36$, então $\sqrt[2]{36} = 6$. E as equivalências que seguem, a começar pelo exemplo deste parágrafo, são verdadeiras:

$$6^2 = 36 \Leftrightarrow \sqrt[2]{36} = 6$$

$$1^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[2]{1} = 1$$

$$2^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{16} = 2$$

$$3^3 = 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{27} = 3$$

$$1^5 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[5]{1} = 1$$

A operação de radiciação é, como vimos, uma operação inversa da potenciação. Indiquemos por R, essa operação.

Assim, ao par (2; 4) a radiciação associa o número $\sqrt[2]{4}$ ou 2.

Simbolicamente, podemos indicar:

$$(2; 4) \xrightarrow{R} \sqrt[2]{4} \quad \text{ou } 2$$

Outros exemplos:

$$(2; 9) \xrightarrow{R} \sqrt[2]{9} \quad \text{ou } 3$$

$$(3; 8) \xrightarrow{R} \sqrt[3]{8} \quad \text{ou } 2$$

$$(3; 27) \xrightarrow{R} \sqrt[3]{27} \quad \text{ou } 3$$

Como vemos, a indicação das raízes é feita pelo símbolo $\sqrt{\quad}$ (denominador radical).

Vejamos a nomenclatura completa dos termos de uma expressão que representa a raiz de um número:

$$\begin{array}{ccc} \text{índice} & \longrightarrow & \sqrt[2]{36} = 6 \longleftarrow \text{raiz} \\ \text{radical} & \nearrow & \uparrow \\ & & \text{radicando} \end{array}$$

Quando o índice de uma radiciação é 2, convencionou-se que ele não precisa ser expresso, fica subentendido. Assim:

$$\sqrt[2]{25} \quad \text{ou} \quad \sqrt{25} \quad (\text{lê-se "raiz quadrada de 25"}).$$

$$\sqrt[2]{100} \quad \text{ou} \quad \sqrt{100} \quad (\text{lê-se "raiz quadrada de 100"}).$$

Apenas como informação, diremos que a radiciação não é a única operação inversa da potenciação. Há ainda mais uma operação que é inversa da potenciação e que consiste em determinar o expoente a que uma determinada base é elevada para resultar em uma da potência.

Assim:

$$3^2 = 9$$

$$2^3 = 32$$

$$5^2 = 125$$

A operação inversa da potenciação que dá o expoente procurado é denominada *logaritmação*. Não iremos tratar dela neste trabalho que é bastante elementar.

Voltemos à radiciação. Esta operação é bastante limitada no conjunto dos números racionais.

Ainda não são conhecidas técnicas de cálculo bastante práticas para a determinação de modo bem simples de uma raiz, quando dados o radicando e o índice. A técnica de cálculo da radiciação apresenta dificuldades que aumentam com o grau da potência.

Para a raiz quadrada e a raiz cúbica há técnicas mais conhecidas, mas de raciocínio bastante complexo. É por este motivo que a determinação, mesmo das raízes quadrada e cúbica é feita por meio de tabelas. Ao final deste capítulo anexaremos uma dessas tabelas.

QUADRADO PERFEITO

Sabemos que todo número composto é também denominado número retangular (volume 4 desta coleção) e pode ser representado por um retângulo formado de pontos, cada ponto correspondendo a uma unidade do número. Assim:

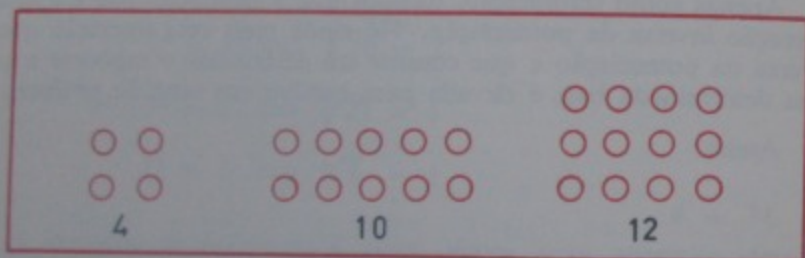


FIG. 55

Como o quatro, muitos outros números são representados por quadrados. Tais números são denominados "quadrados perfeitos". Além do número 4, mostraremos mais alguns:

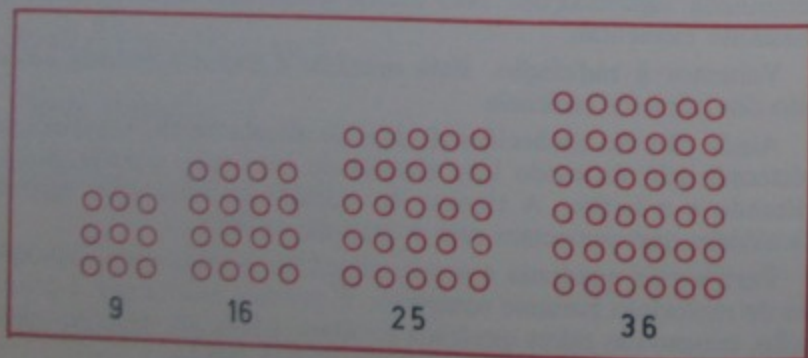


FIG. 56

Os quadrados perfeitos de 1 a 100 são: 4 que é igual a 2^2 , $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $25 = 5^2$, $36 = 6^2$, $49 = 7^2$, $64 = 8^2$, $81 = 9^2$ e $100 = 10^2$.

A RAIZ QUADRADA

A raiz quadrada exata de um número só é possível quando o número dado é "um quadrado perfeito". A raiz quadrada de 6, por exemplo, não é um número natural, pois não há um número natural que elevado ao quadrado seja igual a 6.

A observação acima nos leva à seguinte conclusão: a radiciação não possui a propriedade do fechamento, pois a raiz (de ordem qualquer) de um número natural, como no exemplo acima e nos que seguem, não é um número natural:

$$\sqrt{2} = ? \quad \sqrt{5} = ? \quad \sqrt{10} = ? \quad \sqrt[3]{4} = ?$$

Voltando à raiz quadrada de um número. Como dizíamos, ela só é exata quando o número dado é um quadrado perfeito.

São quadrados perfeitos, de 1 a 100, os seguintes números e suas respectivas raízes exatas:

NÚMERO	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
RAIZ QUADRADA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

FIG. 57

Para extrair a raiz quadrada de um número dado, mesmo que não tenhamos à mão uma tabela, poderemos agir da mesma forma que quando efetuamos uma divisão, procurando saber quantas unidades, dezenas, centenas, etc., terá o resultado.

Logo, nossa primeira preocupação será a de determinar a mais alta ordem decimal da raiz procurada, isto é, se o resultado terá centenas, milhares, unidades de milhar, etc.

Não é difícil chegarmos à conclusão da grandeza do número a ser encontrado. Basta pensar no radicando e observar o seguinte:

Todos os n.ºs menores que	têm o seu quadrado menor que	porque	ou
10	100	$10^2 = 100$	$(10)^2 = 10^2$
100	10.000	$100^2 = 10.000$	$(10^2)^2 = 10^4$
1.000	1.000.000	$1.000^2 = 1.000.000$	$(10^3)^2 = 10^6$
10.000	100.000.000	$10.000^2 = 100.000.000$	$(10^4)^2 = 10^8$

FIG. 58

Por exemplo: A raiz quadrada do número 288 é maior que 10, porque $10^2 = 100$ (que é menor que 288) e é menor que 100, porque $100^2 = 10.000$ (que é maior que 288).

Logo, a raiz quadrada de 288, sendo maior que 10 e menor que 100, é da ordem das dezenas, ou seja; é um número cujo numeral mais simples é expresso com dois algarismos.

Outro exemplo: A raiz quadrada do número 9.216 é maior que 10, porque $10^2 = 100$ (que é menor que 9.216) e é menor que 100, porque $100^2 = 10.000$ (que é maior que 9.216).

Logo, a raiz quadrada de 9.216 também é um número cujo numeral mais simples é expresso com dois algarismos, isto é, a sua ordem mais alta é a das dezenas.

Com mais alguns exemplos, chegaremos à seguinte conclusão: Se o numeral mais simples do número dado tiver 1 ou 2 algarismos, o numeral mais simples de sua raiz quadrada terá apenas 1 algarismo. Se o numeral mais simples do número dado tiver 3 ou 4 algarismos, o da raiz quadrada terá 2 algarismos. Se o numeral mais simples do número dado tiver 5 ou 6 algarismos, o da raiz quadrada terá 3 algarismos, e assim por diante.

Baseados nesta conclusão, a técnica para efetuar o cálculo da raiz quadrada de um número começa mandando separar os algarismos do numeral mais simples do número dado em grupos de 2 algarismos, da direita para a esquerda, para determinar quantos algarismos tem o numeral mais simples da raiz quadrada. (Tem tantos algarismos quantos são os grupos formados).

Exemplo: $\sqrt{4.225}$

42.25 \longrightarrow 2 grupos

Logo, o numeral mais simples da raiz quadrada de 4.225 é expresso com 2 algarismos e sua mais alta ordem é a das dezenas.

Pois, $10^2 = 100 < 4.225$
e $100^2 = 10.000 > 4.225$

Portanto, a raiz quadrada de 4.225 é um número maior que 10 e menor que 100.

Usaremos, a seguir, a seguinte disposição prática para o cálculo da raiz de 4.225:

$$\begin{array}{r} \sqrt{42.25} \quad \checkmark \text{ raiz} \\ \hline \end{array}$$

Como o grupo da esquerda (42) é o que contém o quadrado das dezenas (D^2) da raiz, o valor de D, algarismo que representa as dezenas da raiz, pode ser, no máximo, 6, pois $6^2 = 36 < 42$ e $7^2 = 49 > 42$.

Sabendo que o valor absoluto do algarismo das dezenas é 6, podemos calcular o quadrado das dezenas, isto é, 60^2 ou 3.600. Estas 3.600 unidades correspondem, portanto, ao quadrado das 60 unidades das dezenas da raiz que estamos procurando. Assim:

$$\begin{array}{r} \sqrt{42.25} \quad \checkmark D \\ - 36 \ 00 \\ \hline 06 \ 25 \end{array}$$

O resto, 625 unidades, corresponde à outra parte da raiz.

Para podermos esclarecer bem qual é esta outra parte, necessário se torna que decomponhamos a raiz em dezenas (D) e unidades (U).

A raiz, já dissemos, será expressa com 2 algarismos. Logo, será um número da forma:

$$10 \times D + U$$

Portanto,

$$4.225 = (10 \times D + U)^2 \text{ ou } (10D + U)^2$$

Sabemos calcular o quadrado de uma soma:

$$4.225 = (10D + U)^2 = (10D + U) \times (10D + U) \longrightarrow \text{definição de quadrado}$$

$$4.225 = (10D + U) \times (10D + U) = (10D \times 10D) + (10D \times U) + (10D \times U) + U^2$$

$$4.225 = (10D^2) + 2 \times (10D \times U) + U^2$$

$$4.225 = (10D^2) + 20D \times U + U^2$$

$$4.225 = (10D^2) + (20D + U)U.$$

A parte da expressão equivalente ao número dado $(10D)^2$ já foi encontrada e corresponde a $(10 \times 6)^2 = 60^2 = 3.600$. Logo, a parte restante do número 4.225 corresponde à segunda parte da expressão que lhe é equivalente, isto é:

$$625 \text{ corresponde a } (20D + U) \times U.$$

Então,

$$(20D + U) \times U \longrightarrow 625$$

$$U \longrightarrow 625 \div (20 \times 6 + U)$$

$$U \longrightarrow 625 \div (2 \times 60 + U).$$

Logo, para determinar o algarismo das unidades, basta dividir o resto (625) por 20 vezes o valor do algarismo das dezenas, ou duas vezes o valor relativo do algarismo das dezenas. Portanto, U (algarismo das unidades) é encontrado dividindo 625 por 120, o que, na prática, equivale a $62 \div 12 = 5$ (este será o valor aproximado do algarismo das unidades, U, isto é, o segundo algarismo da raiz).

Voltando à disposição prática, no ponto em que interrompemos atrás, prosseguiremos:

$\sqrt{42.25}$	D	
65	← U	
- 3600	(20D + U) × U (parte da expressão do radicando que	
0625	ou	corresponde ao resto)
- 625	(20 × 6 + 5) × 5 = (120 + 5) × 5 = 125 × 5 = 625.	
000		

Logo, a parte restante corresponde a 625, exatamente a mesma do resto. Portanto, a raiz quadrada de 4.225 é 65.

Usemos, agora, a regra prática, que é baseada no raciocínio acima. A raiz quadrada de 42 (último grupo à esquerda) é 6 (algarismo das dezenas).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42.25} & 6 \\ - 36 & \\ \hline & 06 \end{array}$$

$6^2 = 36$, que escrevemos abaixo de 42 e subtraímos; o resto é 6.

Copiamos o grupo seguinte à direita do resto, assim:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42.25} & 6 \\ - 36 & 12 \\ \hline & 062.5 \end{array}$$

A seguir, separamos um algarismo à direita do resto acrescido do segundo grupo, e temos o número 62.

Feito isso, multiplicamos por 2 a parte já encontrada da raiz: 2×6 , e escrevemos logo abaixo da raiz o produto, que é 12.

Isto feito, dividimos 62 por 12 para descobrir o algarismo seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 62 & 12 \\ 2 & 5 \end{array}$$

5 será, provavelmente, o algarismo das unidades. Escrevemos 5 à direita de 12, que passará a ser 125 e multiplicamos 125 por 5. Assim:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{42.25} & 65 \\ - 36 & 125 \times 5 = 625 \\ \hline & 062.5 \\ - 625 & \\ \hline & 000 \end{array}$$

Como esse produto (625) pode ser tirado do resto da radiciação, podemos ter agora certeza de que o algarismo das unidades é 5 e escre-

veremos à direita do das dezenas que é 6. Subtraímos 625 de 625 e teremos o resto zero, o que indica que 4.225 tem por raiz quadrada exata o número 65.

$$\text{Prova: } (65)^2 = 65 \times 65 = 4.225.$$

Os exemplos seguintes não serão explicados mas servirão para comparação dos resultados obtidos com exercícios para treino da técnica da raiz quadrada.

$$1.^\circ \text{ exemplo: } \sqrt{3.277}$$

Separando os algarismos do radicando em grupos de dois e estraiendo a raiz quadrada do número formado pelos algarismos do último grupo à esquerda (32):

$$\begin{array}{r} \sqrt{32.77} \quad 5 \\ - 25 \\ \hline 07 \end{array}$$

Dobrando a raiz, abaixando o grupo seguinte, separando o algarismo da direita do número assim formado e calculando o algarismo seguinte da raiz:

$$\begin{array}{r} \sqrt{32.77} \quad 57 \\ - 25 \\ \hline 077.7 \\ - 74.9 \\ \hline 02.8 \end{array}$$

77 | 10
7 | 7

$107 \times 7 = 749$

$$\text{Prova: } (57)^2 + 28 = 3.249 + 28 = 3.277.$$

$$2.^\circ \text{ exemplo: } 74.689$$

Separando em grupos de dois os algarismos do radicando e calculando a raiz quadrada do número formado pelos algarismos do último grupo à esquerda, encontramos o algarismo das centenas da raiz, (7), porque o radicando foi separado em 3 grupos de 2 algarismos:

$$\begin{array}{r} \sqrt{746.89} \quad 2 \\ - 4 \\ \hline 34.6 \end{array}$$

Dobrando a parte encontrada da raiz, separando o algarismo da direita do número formado pelo resto e o grupo seguinte e descobrindo o algarismo das dezenas da raiz:

$$\begin{array}{r} \sqrt{746.89} \quad 28 \\ - 4 \\ \hline 34.6 \\ - 38.4 \\ \hline ? \end{array}$$

34 | 4
2 | 8

$48 \times 8 = 384$

Como o produto (384) é maior que o resto (346), concluímos que o quociente 8 é muito grande. Então, repetimos toda a operação desta segunda parte do processo empregando 7 ao invés de 8. Logo, o algarismo das dezenas é 7:

$$\begin{array}{r} \sqrt{746.89} \quad 27 \\ - 4 \\ \hline 34.6 \\ - 32.9 \\ \hline 0178.9 \end{array}$$

47 | 7 = 329

Dobrando a parte da raiz já encontrada (2×27), separando um algarismo à direita do resto acompanhado do último grupo e descobrindo o último algarismo da raiz (unidades):

$$\begin{array}{r} \sqrt{746.89} \quad 273 \\ - 4 \\ \hline 34.6 \\ - 32.9 \\ \hline 0178.9 \\ - 162.9 \\ \hline 016.0 \end{array}$$

178 | 54
16 | 3

$543 \times 3 = 1.629$

Portanto, a raiz quadrada aproximada de 74.689 é 273 e o resto é 160.

$$\text{Prova: } (273)^2 + 160 = 74.529 + 160 = 74.689.$$

3.º exemplo: 9.342.506

Separando em grupos de 2 algarismos e extraíndo a raiz quadrada do número formado pelos algarismos do grupo da esquerda:

$$\begin{array}{r} \sqrt{9.34.25.06} \quad 3 \\ - 9 \\ \hline 034 \end{array}$$

Separando um algarismo à direita do resto, dobrando a parte encontrada da raiz e procurando o segundo algarismo da raiz (a deste exemplo tem 4 algarismos, pois são 4 os grupos formados no radicando):

$$\begin{array}{r} \sqrt{9.34.25.06} \quad 30 \leftarrow \begin{array}{l} 3 \mid 6 \\ 3 \mid 0 \end{array} \\ - 9 \\ \hline 034 \end{array} \quad \begin{array}{l} 60 \times 0 = 0 \\ 60 \times 0 = 0 \end{array}$$

Abaixando os algarismos do grupo seguinte e repetindo a operação (não fazer a subtração com o zero porque o resto continuará a ser 34 mesmo):

$$\begin{array}{r} \sqrt{9.34.25.06} \quad 305 \leftarrow \begin{array}{l} 342 \mid 60 \\ 42 \mid 5 \end{array} \\ - 9 \\ \hline 0342.5 \\ - 3025 \\ \hline 0400 \end{array} \quad \begin{array}{l} 60 \times 0 = 0 \\ 605 \times 5 = 3.025 \end{array}$$

Abaixando o último grupo de algarismos à direita do resto e repetindo as operações de costume:

$$\begin{array}{r} \sqrt{9.34.25.06} \quad 3.056 \leftarrow \begin{array}{l} 4.000 \mid 610 \\ 340 \mid 6 \end{array} \\ - 9 \\ \hline 0342.5 \\ - 3025 \\ \hline 04000.6 \\ - 36636 \\ \hline 03370 \end{array} \quad \begin{array}{l} 60 \times 0 = 0 \\ 605 \times 5 = 3.025 \\ 6.106 \times 6 = 36.636 \end{array}$$

Portanto, a raiz quadrada aproximada de 9.342.506 é 3.056 e o resto é 3.370.

Prova: $(3.056)^2 + 3.370 = 9.339.136 + 3.370 = 9.342.506$.

O RESTO DA RAIZ QUADRADA

O resto da raiz quadrada de um número natural é sempre menor que o dobro da raiz mais 1.

Seja N um número natural qualquer e R sua raiz quadrada aproximada por falta. Assim, teremos:

$$N = R^2 + \text{resto}$$

Sendo R a raiz quadrada aproximada por falta de N , $R + 1$ será a sua raiz quadrada por excesso.

Logo,

$$N < (R + 1)^2$$

$$\text{ou } N < R^2 + 2 \times R \times 1 + 1^2 \text{ (quadrado de uma soma indicada)}$$

$$\text{ou ainda: } N < R^2 + 2R + 1$$

Como o número $N = R^2 + \text{resto}$, podemos escrever:

$$R^2 + \text{resto} < R^2 + 2R + 1$$

Retirando o quadrado da raiz (R^2) de ambos os membros da desigualdade acima, teremos:

$$\text{resto} < 2R + 1,$$

isto é, o resto da raiz quadrada de um número natural é menor que o dobro da raiz mais 1, como afirmamos de início.

Exemplo: $\sqrt{99}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{99} \quad 9 \\ - 81 \\ \hline 18 \end{array}$$

$18 = 2 \times 9$ (o dôbro da raiz quadrada aproximada por falta).

Se acrescentarmos uma unidade a 99 para experimentarmos se o resto pode ser maior que 18, isto é, para o resto ser $18 + 1$, teremos o número 100, cuja raiz quadrada exata é 10. Logo, o resto da raiz não pode mesmo ser maior que o seu dôbro.

A RAIZ CÚBICA DE NÚMEROS NATURAIS

Para determinar a raiz de qualquer índice de um número natural, procede-se como para determinar a raiz quadrada. Desenvolve-se o mesmo raciocínio, mas, quanto mais alto o índice, maiores as dificuldades.

Vejamos, agora, o caso da raiz cúbica.

Como no caso da raiz quadrada, iniciemos nosso raciocínio procurando fixar os intervalos em que se situam os cubos dos números de 1 a 10, 10 a 100, etc.

Todos os n ^{os} menores que	têm o cubo menor que	porque	ou
10	1.000	$10^3 = 1.000$	$(10^1)^3 = 10^3$
100	1.000.000	$100^3 = 1.000.000$	$(10^2)^3 = 10^6$
1.000	1.000.000.000	$1.000^3 = 1.000.000.000$	$(10^3)^3 = 10^9$
10.000	1.000.000.000.000	$10.000^3 = 1.000.000.000.000$	$(10^4)^3 = 10^{12}$

FIG. 59

E assim sucessivamente.

Vejamos, por exemplo, em que intervalo da sucessão natural dos números se situa a raiz cúbica do número 1.520.875:

A sua raiz cúbica é

maior que 100, pois $100^3 = 1.000.000 < 1.520.875$

e menor que 1.000, pois $1.000^3 = 1.000.000.000 > 1.520.875$, isto é, a raiz cúbica de 1.520.875 tem a centena como sua mais alta ordem (3 algarismos em seu numeral mais simples).

Podemos ainda observar que a raiz cúbica de 1.520.875 está muito mais próxima de 100 que de 1.000, pois o cubo de 100 é um número

relativamente próximo do número dado enquanto que o cubo de 1.000 é um número muito maior que ele.

Já sabemos algumas coisas muito importantes a respeito da raiz cúbica do número dado: sabemos que sua mais alta ordem é a centena, isto é, que o seu numeral mais simples é expresso com 3 algarismos; sabemos que a raiz cúbica procurada é maior que 100 e menor que 1.000, mas, bem mais próxima de 100 que de 1.000.

Pelo exemplo, podemos ainda tirar a seguinte conclusão: o numeral mais simples do número dado, dividido em grupos de 3 algarismos, da direita para a esquerda, forma 3 grupos; o numeral mais simples da raiz cúbica tem tantos algarismos quantos são os grupos formados, isto é, 3 algarismos (unidades, dezenas e centenas, como já tínhamos verificado).

1.520.875 ← 3 grupos

Prossigamos, agora, na pesquisa da raiz cúbica.

Sabemos que ela tem centenas. Quantas?

Como vimos que a raiz cúbica procurada está muito próxima de 100, vejamos o cubo de 100 e de 200, para verificar se a centena está nesse intervalo.

$$100^3 = 1.000.000 < 1.520.875$$

$$200^3 = 4.000.000 > 1.520.875$$

Concluimos que, se a raiz cúbica procurada é menor que 200 porque o cubo de 200 ultrapassa o número dado é porque o algarismo das centenas é 1.

Vejamos, agora, o algarismo das dezenas.

Ao localizarmos o algarismo das centenas, determinamos o cubo de 100 e o de 200. Pelos resultados encontrados, podemos concluir que a raiz cúbica de 1.520.875 está muito mais próxima de 100 que de 200.

Determinaremos o cubo de 110, para saber se a raiz cúbica de 1.520.875 é maior ou menor que 110:

$$110^3 = 1.331.000 < 1.520.875$$

Logo, a raiz cúbica que queremos determinar é maior que 110, pois o cubo de 110 é menor que o número dado.

Vejamos o cubo de 120:

$$120^3 = 1.728.000 > 1.520.875$$

Portanto, a raiz cúbica procurada é menor que 120 e sabemos, pela tentativa anterior, que é maior que 110.

Localizamos, portanto, a raiz cúbica de 1.520.875 num intervalo numérico bastante curto: ela está entre 110 e 120. Logo, o algarismo das dezenas é 1, pois todos os números que estão entre 110 e 120 têm uma centena e uma dezena. Falta descobrir o algarismo das unidades. Se

$$110^3 = 1.331.000 < 1.520.875$$

$$e \quad 120^3 = 1.728.000 > 1.520.875,$$

não é fácil, pela simples observação, concluirmos se a raiz cúbica procurada está mais próxima de 110 ou de 120. Entretanto, surge aqui um fator que muito nos ajudará: estamos procurando o algarismo das unidades, isto é, o último algarismo do numeral mais simples da raiz cúbica. Como o número 1.520.875 tem o seu numeral mais simples terminado pelo algarismo 5, a ordem das unidades tem que ser, inevitavelmente, 5 (se o número dado fôr um cubo perfeito). Qualquer outro final para a raiz não daria um cubo com final 5. Portanto, a raiz cúbica procurada pode ser 115. De fato:

$$115^3 = 1.520.875$$

Por tentativas, chegamos à conclusão de que

$$\sqrt[3]{1.520.875} = 115$$

Prova: $(115)^3 = 115 \times 115 \times 115 = 1.520.875$.

Se o número dado fôsse, por exemplo, 1.522.920, chegaríamos à conclusão de que sua raiz cúbica, no conjunto dos números naturais, é igual a 115, aproximadamente. Há um resto igual à diferença entre o cubo de 115 e o número dado, que é 2.045 (1.522.920 - 1.520.875)

Vimos que, por tentativas, podemos precisar a raiz cúbica de um número natural, desde que raciocinemos por etapas. Não deixa de ser um processo trabalhoso, mas é uma forma de se chegar ao resultado desejado raciocinando, sabendo o que se está fazendo. Há uma técnica

para se calcular a raiz cúbica de um número, mais rápida, com uma disposição prática dos dados semelhante àquela que empregamos para o cálculo da raiz quadrada. A sua justificação, porém, demanda tempo e conhecimentos outros que não caberiam nesta obra sem grandes pretenções. Descrever a técnica, sem justificá-la, não é nossa intenção. Logo, quem desejar conhecê-la, apenas como um processo de cálculo, não terá dificuldade em encontrá-la em publicações do gênero.

EXERCÍCIOS 4

1 — Calcular:

- | | | | |
|----------|----------|-------------|-----------|
| a) 3^2 | d) 5^3 | g) 1^{10} | j) 8^2 |
| b) 2^3 | e) 1^4 | h) 10^3 | l) 10^6 |
| c) 6^2 | f) 3^0 | i) 9^0 | m) 2^4 |

2 — Efetuar:

- | | | |
|---|-------------------|--------------|
| a) $2^2 \times 2^5$ | d) $3^4 \div 3^2$ | g) $(2^3)^2$ |
| b) $3^4 \times 3 \times 3^2$ | e) $8^6 \div 8$ | h) $(3^2)^3$ |
| c) $8^2 \times 8 \times 8^3 \times 8^4$ | f) $4^3 \div 4^3$ | i) $(5^3)^4$ |

3 — Escrever, dentro dos parênteses, V ou F, conforme cada uma das sentenças que seguem sejam verdadeiras ou falsas:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------|
| a) $10^0 = 1$ () | d) $12^5 \div 12^3 = 12^2$ () |
| b) $2^3 \neq 3^2$ () | e) $6^4 \div 6^4 = 6^0 = 1$ () |
| c) $5^2 \times 5 = 5^2$ () | f) $0^8 = 0$ |

4 — Completar as equivalências, tornando-as verdadeiras:

- | | |
|--|---|
| a) $8^2 = 64 \Leftrightarrow \sqrt{64} = \dots$ | d) $\sqrt{100} = 10 \Leftrightarrow 10^2 = \dots$ |
| b) $5^3 = 125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{125} = \dots$ | e) $\sqrt[3]{27} = 3 \Leftrightarrow \dots$ |
| c) $3^4 = 81 \Leftrightarrow \sqrt[4]{81} = \dots$ | f) $\sqrt[4]{16} = 2 \Leftrightarrow \dots$ |

5 — Qual é o número cuja raiz quadrada é 12?

6 — Se a raiz quadrada de um número é 23, qual é esse número?

7 — Complete:

- a) O número natural que elevado ao quadrado é igual a 16 é ...
 b) O número natural que elevado ao quadrado é igual a 49 é ...
 c) O número natural que elevado ao quadrado é igual a 64 é ...
 d) O número natural que elevado ao quadrado é igual a 100 é ...

8 — Descubra o valor das bases das seguintes potências:

- a) $\square^2 = 25$
 $\square = \dots$
 b) $\square^2 = 9$
 $\square = \dots$
 c) $\square^2 = 4$
 $\square = \dots$
 d) $\square^2 = 1$
 $\square = \dots$

9 — Complete as sentenças que seguem, tornando-as verdadeiras:

- a) A raiz quadrada de 16 é 4 porque
 b) A raiz quadrada de 81 é 9 porque
 c) $\sqrt{36} = 6$ porque
 d) $\sqrt{49} = 7$ porque
 e) $\sqrt{25} = 5$ porque

10 — Descubra o valor de cada uma das expressões que seguem:

- a) $\sqrt{1} = \dots$
 b) $\sqrt{4} = \dots$
 c) $\sqrt{9} = \dots$
 d) $\sqrt{16} = \dots$

- e) $\sqrt{25} = \dots$
 f) $\sqrt{36} = \dots$
 g) $\sqrt{49} = \dots$
 h) $\sqrt{64} = \dots$
 i) $\sqrt{81} = \dots$
 j) $\sqrt{100} = \dots$

11 — Complete:

- a) $2^3 = 8$ então $\sqrt[3]{8} = \dots$
 b) $3^3 = 27$ então $\sqrt[3]{27} = \dots$
 c) $4^3 = 64 \Leftrightarrow \sqrt[3]{64} = \dots$
 d) $5^3 = 125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{125} = \dots$
 e) $6^3 = 216 \Leftrightarrow \sqrt[3]{216} = \dots$

12 — Complete as equivalências:

- a) $2^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{16} = \dots$
 b) $3^4 = 81 \Leftrightarrow \sqrt[4]{81} = \dots$
 c) $2^5 = 32 \Leftrightarrow \sqrt[5]{32} = \dots$
 d) $1^{10} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[10]{1} = \dots$

13 — Por que 5 é a raiz quadrada (ou raiz segunda) de 25?

14 — Por que 9 é a raiz quadrada (ou raiz segunda) de 81?

15 — Por que 3 é a raiz cúbica (ou raiz terceira) de 27?

16 — Por que 2 é a raiz cúbica (ou raiz terceira) de 8?

17 — Complete o quadro:

Nº	RAIZ QUADRADA
1	1
4	2
9	...
16	...
25	...
36	...
49	...
64	...
81	...
100	...

FIG. 60

18 — Complete o quadro:

Nº	RAIZ CÚBICA
1	1
8	...
27	...
64	...
125	...
216	...
343	...
512	...
729	...
1.000	...

FIG. 61

19 — Qual é o número cuja raiz cúbica é 5 ?

20 — Qual é o número cuja raiz sexta é 3 ?

21 — Se a raiz quarta de um número é 8, qual é esse número ?

22 — Escrever V ou F dentro dos parênteses conforme sejam verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) $(2 + 3)^2 = 5^2$ ()

d) $(6 - 4)^2 \neq 6^2 - 4^2$ ()

b) $(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2$ ()

e) $(3 + 8)^2 = 11^2$ ()

c) $(2 + 3)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3 + 3^2$ ()

f) $(9 - 3)^2 \neq 6^2$ ()

23 — Extrair a raiz quadrada exata dos seguintes quadrados perfeitos:

a) 1.936

d) 12.996

g) 114.921

b) 7.921

e) 22.201

h) 126.025

c) 14.161

f) 61.504

i) 225.625

24 — Extrair a raiz quadrada aproximada por falta dos seguintes números que não são quadrados perfeitos:

a) 950

d) 18.408

g) 118.400

b) 3.460

e) 55.600

h) 125.285

c) 7.148

f) 63.945

i) 137.620

25 — Extrair a raiz cúbica dos seguintes cubos perfeitos:

a) 8.000

c) 91.125

e) 314.432

b) 27.000

d) 216.000

f) 493.039

26 — A raiz quadrada aproximada de um número natural é 15. Qual o maior resto que a radiciação desse número pode deixar? Por quê?

27 — Empregando a técnica comum de radiciação para encontrar a raiz quadrada de um dado número natural, foi encontrada a raiz 208 e o resto 195. Pode haver esse resto na radiciação do número dado? Por quê?

TABELA DOS QUADRADOS, CUBOS, RAÍZES QUADRADAS E RAÍZES CÚBICAS DOS NÚMEROS DE 1 A 100

legenda $\left\{ \begin{array}{l} n = \text{número} \\ n^2 = \text{número ao quadrado} \\ n^3 = \text{número ao cubo} \\ \sqrt{n} = \text{raiz quadrada do número} \\ \sqrt[3]{n} = \text{raiz cúbica do número} \end{array} \right.$

n	n ²	n ³	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	n ²	n ³	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1,0000	1,0000	51	26 01	132 651	7,1414	3,8084
2	4	8	1,4142	1,2599	52	27 04	140 608	7,2111	3,7325
3	9	27	1,7321	1,4422	53	28 09	148 677	7,2801	3,7563
4	16	64	2,0000	1,5874	54	29 16	157 464	7,3485	3,7798
5	25	125	2,2361	1,7100	55	30 25	166 375	7,4162	3,8030
6	36	216	2,4495	1,8171	56	31 36	175 616	7,4833	3,8259
7	49	343	2,6458	1,9129	57	32 49	185 193	7,5498	3,8385
8	64	512	2,8284	2,0000	58	33 64	195 112	7,6158	3,8709
9	81	729	2,9800	2,0801	59	34 81	205 379	7,6811	3,8930
10	100	1 000	3,1623	2,1544	60	36 00	216 000	7,7460	3,9149
11	121	1 331	3,3166	2,2240	61	37 21	226 981	7,8102	3,9365
12	144	1 728	3,4641	2,2894	62	38 44	238 328	7,8740	3,9579
13	169	2 197	3,6065	2,3513	63	39 69	250 047	7,9373	3,9791
14	196	2 744	3,7517	2,4101	64	40 96	262 144	8,0000	4,0000
15	225	3 375	3,8730	2,4662	65	42 25	274 625	8,0623	4,0207
16	256	4 096	4,0000	2,5198	66	43 56	287 496	8,1240	4,0412
17	289	4 913	4,1231	2,5713	67	44 89	300 763	8,1854	4,0615
18	324	5 832	4,2426	2,6207	68	46 24	314 432	8,2462	4,0817
19	361	6 859	4,3589	2,6684	69	47 61	328 509	8,3066	4,1016
20	400	8 000	4,4721	2,7144	70	49 00	343 000	8,3666	4,1213
21	441	9 261	4,5826	2,7589	71	50 41	357 911	8,4261	4,1408
22	484	10 648	4,6904	2,8020	72	51 84	373 248	8,4853	4,1602
23	529	12 167	4,7958	2,8439	73	53 29	389 017	8,5440	4,1793
24	576	13 824	4,8990	2,8845	74	54 76	405 224	8,6023	4,1983
25	625	15 625	5,0000	2,9240	75	56 25	421 875	8,6603	4,2172
26	676	17 576	5,0990	2,9625	76	57 76	438 976	8,7178	4,2358
27	729	19 683	5,1952	3,0000	77	59 29	456 533	8,7750	4,2543
28	784	21 952	5,2893	3,0366	78	60 84	474 552	8,8318	4,2727
29	841	24 389	5,3812	3,0723	79	62 41	493 039	8,8882	4,2908
30	900	27 000	5,4712	3,1072	80	64 00	512 000	8,9443	4,3089
31	961	29 791	5,5678	3,1414	81	65 61	531 441	9,0000	4,3267
32	1024	32 768	5,6599	3,1748	82	67 24	551 368	9,0554	4,3445
33	1089	35 937	5,7466	3,2075	83	68 89	571 787	9,1104	4,3621
34	1156	39 304	5,8280	3,2396	84	70 56	592 704	9,1652	4,3795
35	1225	42 875	5,9161	3,2711	85	72 25	614 125	9,2195	4,3968
36	1296	46 656	6,0000	3,3019	86	73 96	636 056	9,2736	4,4140
37	1369	50 653	6,0828	3,3322	87	75 69	658 503	9,3274	4,4310
38	1444	54 872	6,1644	3,3620	88	77 44	681 472	9,3808	4,4480
39	1521	59 319	6,2450	3,3912	89	79 21	704 969	9,4340	4,4647
40	1600	64 000	6,3246	3,4200	90	81 00	729 000	9,4868	4,4814
41	1681	68 921	6,4031	3,4482	91	82 81	753 571	9,5394	4,4979
42	1764	74 088	6,4807	3,4760	92	84 64	778 688	9,5917	4,5144
43	1849	79 507	6,5574	3,5034	93	86 49	804 357	9,6437	4,5307
44	1936	85 184	6,6332	3,5303	94	88 36	830 584	9,6954	4,5468
45	2025	91 125	6,7082	3,5569	95	90 25	857 375	9,7468	4,5629
46	2116	97 336	6,7823	3,5830	96	92 16	884 736	9,7980	4,5789
47	2209	103 823	6,8557	3,6088	97	94 09	912 673	9,8489	4,5947
48	2304	110 592	6,9282	3,6342	98	96 04	941 192	9,8995	4,6104
49	2401	117 649	7,0000	3,6593	99	98 01	970 299	9,9499	4,6261
50	2500	125 000	7,0711	3,6840	100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416

DIVISIBILIDADES NO CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

MÚLTIPLOS E DIVISORES

Os múltiplos e os divisores de um número já foram estudados em volumes anteriores, especialmente no volume 4.

A relação "ser múltiplo de" ou "ser divisível por" tem por inversa a relação "ser divisor de" ou "ser fator de".

Assim, se 15 é múltiplo de 5 ou é divisível por 5, então 5 é divisor de 15 ou fator de 15.

O conjunto de múltiplos de 15 é:

$$M_{15} = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, \dots\}$$

O conjunto de divisores de 15 é:

$$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$$

Pelo que já foi estudado nos volumes anteriores e pelo exemplo acima, sabemos que:

"Um número natural tem um conjunto infinito de múltiplos e um conjunto finito de divisores".

O único número natural que tem um conjunto finito de múltiplos e infinito de divisores é o zero.

Vejamos quais são os múltiplos de zero:

$0 \times 0 = 0$; $1 \times 0 = 0$; $2 \times 0 = 0$; $3 \times 0 = 0$; $4 \times 0 = 0$,
e assim por diante.

Como o produto de zero por qualquer número é zero, o conjunto de seus múltiplos é unitário, portanto, finito. Assim:

$$M_0 = \{0\}$$

Vejamos, agora, os divisores de zero.

Como ser divisor é o mesmo que ser fator, observando as multiplicações por zero que fizemos acima, vemos que 1 é fator ou divisor de zero, 2 é fator ou divisor de zero, 3 é fator ou divisor de zero, etc.

Logo, zero tem um conjunto infinito de divisores: todos os números naturais, com exceção d'ele mesmo, porque zero, já vimos, não pode ser divisor, nunca.

Assim,

$$D_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

Uma propriedade dos múltiplos que será empregada no estudo da divisibilidade, logo mais:

"A soma e a diferença de dois múltiplos de um número são também múltiplos desse número".

Por exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 32 \text{ é múltiplo de } 4 \\ e \\ 20 \text{ é múltiplo de } 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a) (32 + 20) \text{ ou } 52 \text{ é múltiplo de } 4 \\ b) (32 - 20) \text{ ou } 12 \text{ é múltiplo de } 4 \end{array}$$

Podemos justificar esta propriedade assim:

$$32 = 4 \times 8$$

$$e \quad 20 = 4 \times 5$$

Logo,

$$32 + 20 = 4 \times 8 + 4 \times 5$$

ou $32 + 20 = 4 \times (8 + 5)$ pela prop. distributiva da multiplicação

ou $32 + 20 = 4 \times 13$ (que é múltiplo de 4).

Da mesma forma,

$$32 - 20 = 4 \times 8 - 4 \times 5$$

ou $32 - 20 = 4 \times (8 - 5)$ pelo p. d. m.

ou $32 - 20 = 4 \times 3$ (que é múltiplo de 4).

Outra propriedade: "Se um número é múltiplo de outro, todos os múltiplos desse número são também múltiplos desse outro".

Assim,

Se 10 é múltiplo de 5, todos os múltiplos de 10 são também múltiplos de 5.

Observação: Alguns múltiplos têm denominações próprias, conforme mostra a relação abaixo:

O número 2×5 é o *dôbro* de 5,
 3×5 é o *triplo* de 5,
 4×5 é o *quádruplo* de 5,
 5×5 é o *quintuplo* de 5,
 6×5 é o *sêtiplo* de 5,
 7×5 é o *sêtiplo* de 5,
 8×5 é o *óctuplo* de 5,
 9×5 é o *nônuplo* de 5,
 10×5 é o *décuplo* de 5.

Outra propriedade: "Todos os divisores de um número são também divisores desse número".

Assim,

Se 12 é divisor de 24, todos os divisores de 12 são também divisores de 24.

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Sabemos que um número é divisível por outro quando a sua divisão por esse outro é exata. Ser divisível é o mesmo que ser múltiplo, portanto.

Exemplo:

12 é múltiplo de 3

e 12 é múltiplo de 4, pois $3 \times 4 = 12$.

Da mesma forma,

12 é divisível por 3, pois $12 \div 3 = 4$

e 12 é divisível por 4, pois $12 \div 4 = 3$

Para verificar se um número é divisível por outro, dividimos o número por esse outro. Se o resto for zero, isto é, se a divisão for exata, o número dado é divisível pelo outro. Caso contrário, havendo resto diferente de zero, o número não é divisível pelo outro.

Há, entretanto, regras bastante práticas que permitem verificar se um número é, ou não, divisível por alguns divisores que mais frequentemente ocorrem na vida prática.

Tais regras, denominadas *critérios ou caracteres de divisibilidade*, baseiam-se nas informações que os numerais mais simples dos números trazem em si a respeito do número que representam.

Vejamos como, apenas observando o numeral mais simples de um determinado número, podemos saber, sem efetuar a divisão, se ele é ou não é divisível por outros:

1 — Divisibilidade por dois:

Pelo próprio conceito de número par, sabemos que *um número é divisível por dois quando é par*, ou seja, quando o algarismo das unidades de seu numeral mais simples é um dos seguintes: 0, 2, 4, 6, 8.

O resto da divisão de um número ímpar por 2 é sempre 1.

Exemplos de números divisíveis por 2:

1.º) 256 é divisível por 2 porque é par; o algarismo das unidades é 6.

2.º) 5.352 é divisível por 2 porque é par; o algarismo das unidades é 2.

2 — Divisibilidade por três:

Escolhamos um exemplo para raciocinar com ele. Seja o número 4.572.

Sabemos que o número de nosso exemplo,

$$4.572 = 4 \times 1.000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 2$$

Ao efetuar a divisão de 4.572 por 3, estaremos procurando saber quantos subconjuntos de 3 elementos estão contidos em um conjunto de 4.572 elementos.

Sabemos que:

$$10 = 3 \times 3 + 1$$

$$100 = 33 \times 3 + 1$$

$$1.000 = 333 \times 3 + 1, \text{ etc.}$$

Pensando assim, descobrimos que em cada dezena, centena, etc., podemos separar um certo número de subconjuntos de 3 elementos, mas sempre sobra 1 elemento.

No exemplo acima, 4.572, podemos observar que, após serem formados subconjuntos de 3 com todas as dezenas, centenas e milhares do número dado, sobram ainda os seguintes elementos:

- 4 elementos (1 em cada mil) e são 4×1.000
- 5 elementos (1 em cada cem) e são 5×100
- 7 elementos (1 em cada dez) e são 7×10
- 2 elementos que correspondem às unidades.

Logo, sobram $(4 + 5 + 7 + 2)$ elementos para que formemos os restantes subconjuntos de 3 elementos.

$$4 + 5 + 7 + 2 = 18$$

Com 18 elementos podemos formar mais seis subconjuntos de 3 elementos, exatamente, sem sobrar nenhum elemento. Logo, o número 4.572 é divisível por 3.

Comparando as parcelas que nos deram a soma dos elementos restantes das diversas ordens do número dado com os algarismos do seu numeral mais simples, verificamos que elas são formadas pelos valores absolutos desses mesmos algarismos.

Logo, um número é divisível por 3 quando a soma dos valores absolutos dos algarismos de seu numeral mais simples é um número divisível por 3.

No caso de não ser divisível por 3 o número dado, o resto será 1 ou 2. Este resto também poderá ser determinado sem efetuar a divisão do número dado por 3, como é fácil de entender.

Exemplos:

1.º) 5.342

$$5.342 = 5 \times 1.000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 2$$

$$1.000 = 3 \times 333 + 1$$

$$\text{e } 5.000 = 5 \times 3 \times 333 + 5$$

$$100 = 3 \times 33 + 1$$

$$\text{e } 300 = 3 \times 3 \times 33 + 3$$

$$10 = 3 \times 3 + 1$$

$$\text{e } 40 = 4 \times 3 \times 3 + 4$$

$$\text{e } 2 = \quad \quad \quad + 2$$

$$5.342 = \text{múltiplo de } 3 + 14$$

$$\begin{array}{r} 14 \overline{) 3} \\ 2 \quad 4 \end{array}$$

Logo, o número 5.342 não é divisível por 3. O resto de sua divisão por 3 é 2. Verifique.

2.º) 16.435

$$1 + 6 + 4 + 3 + 5 = 19$$

$$\begin{array}{r} 19 \overline{) 3} \\ 1 \quad 6 \end{array}$$

Como 19 não é múltiplo de 3, concluímos que o n.º 16.435 não é divisível por 3. Se o dividirmos por 3, o resto será 1, como poderemos verificar.

3 — Divisibilidade por quatro:

Seja o seguinte exemplo: 5.232.

Sabemos que o número

$$5.232 = 52 \times 100 + 32$$

Qualquer número cujo numeral mais simples é expresso com mais de dois algarismos pode ser decomposto em uma soma de duas parcelas, uma constituída pelas centenas e outra, formada pelas dezenas e unidades. Assim, a primeira parcela será sempre divisível por 4 porque $100 = 4 \times 25$; a segunda, menor que 100, pode ser ou não divisível por 4. Logo, basta verificar se a segunda parcela em que se decompôs o número é divisível por 4. Como esta parcela é a constituída pelo número formado pelos dois últimos algarismos do numeral mais simples do número dado, basta verificar se esta parte do numeral expressa um número divisível por 4.

No exemplo acima, o número 5.232 é divisível por 4 porque 32 é múltiplo de 4.

Logo, um número é divisível por 4 quando o número expresso pelos dois últimos algarismos de seu numeral mais simples é divisível por 4.

No caso do número dado não ser divisível por 4, o resto de sua divisão por 4 será 1, 2 ou 3, conforme o resto da divisão da segunda parcela por 4 deixe o resto 1, 2 ou 3.

Exemplos:

1.º) 25.348 é divisível por 4 porque 48, número que é expresso pelos dois últimos algarismos do numeral do número dado, é divisível por 4 (ou é múltiplo de 4).

2.º) 7.363 não é divisível por 4 porque 63, número expresso pelos dois últimos algarismos do numeral mais simples do número dado, não é divisível por 4, como é fácil verificar, e o resto é 3.

Podemos ainda concluir que o resto da divisão de 7.363 por 4 é também, 3. Verifique.

4 — Divisibilidade por cinco:

Seja o seguinte exemplo: 6.365.

Sabemos que o número

$$6.365 = 636 \times 10 + 5$$

Qualquer número expresso com mais de um algarismo pode ser decomposto, como no exemplo acima, em duas parcelas, uma formada pelas dezenas e outra, pelas unidades. A primeira parcela é sempre divisível por 5 porque $10 = 2 \times 5$; a segunda parcela pode ser, ou não, divisível por 5. Sendo ela constituída pelas unidades simples, é expressa por um só algarismo. Os números expressos com um só algarismo e que são divisíveis por 5 são apenas o zero e o cinco.

Portanto, um número é divisível por cinco quando o último algarismo de seu numeral mais simples é 0 ou 5.

O nosso exemplo, 6.365, é divisível por cinco porque o último algarismo de seu numeral mais simples é 5.

Quando isso não acontece, o número dado não é divisível por cinco e o resto de sua divisão por 5 pode ser 1, 2, 3 ou 4.

Exemplos:

1.º) 6.580 é divisível por 5 porque o último algarismo de seu numeral mais simples é 0. Verifique.

2.º) 12.053 não é divisível por 5 porque o algarismo final do seu numeral mais simples é 3. O resto de sua divisão por 5 é, também, 3. Verifique.

3.º) 897 não é divisível por 5 porque seu numeral mais simples tem por algarismo representativo das unidades simples o 7. Isto mostra, ainda, que o resto da sua divisão por 5 é 2. (7 - 5). Verifique.

5 — Divisibilidade por seis:

Observemos o conjunto M_3 de múltiplos de 3 (ou números divisíveis por 3):

$$M_3 = \left\{ \begin{array}{cccccccc} & +3 & +3 & +3 & +3 & +3 & +3 & +3 & +3 \\ \{0, & 3, & 6, & 9, & 12, & 15, & 18, & 21, & 24, \dots\} \end{array} \right\}$$

Os pares e os ímpares se alternam, nessa sucessão.

Consideremos apenas os pares:

$$M_3 = \left\{ \begin{array}{cccc} \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \dots\} \\ +6 & +6 & +6 & +6 \end{array} \right\}$$

O conjunto constituído pelos pares da seqüência dos múltiplos de 3, obtido pela adição de 6 unidades ao número par anterior, a partir

de zero que é divisível por todos os números a não ser êle mesmo, é o conjunto dos múltiplos de 6, como é fácil verificar.

Logo, um número é divisível por 6 quando é par e divisível por 3.

Assim, os números 4.326 e 15.210 são divisíveis por 6 porque são pares e divisíveis por 3. A soma dos valores absolutos dos algarismos do primeiro dêles é 15 e, do segundo, 9.

Os números ímpares não são divisíveis por 6. Nem os que, sendo pares, não preenchem a segunda condição: ser divisível por 3. O resto da divisão por 6 de um número não divisível por 6 pode ser: 1, 2, 3, 4, 5.

Exemplos:

1.º) 6.548 é par mas não é divisível por 3. Logo, não é divisível por 6. Verifique.

2.º) 54.036 é par e é divisível por 3. Logo, é divisível por 6. Verifique.

3.º) 8.139 é divisível por 3 mas não é par. Logo não é divisível por 6. Verifique.

6 — Divisibilidade por sete:

A divisibilidade por sete é apresentada, geralmente, segundo um critério tão complexo que mais vale efetuar a divisão para verificar se o número dado é ou não é divisível por 7 do que empregá-la. Muitos são os autores que já deixaram de apresentar um critério de divisibilidade por 7, por êsse motivo.

Há, entretanto, a partir dos últimos anos, uma certa divulgação de um critério muito prático e muito rápido para se verificar se o número é ou não divisível por 7. O Professor Osvaldo Sangiorgi o tem publicado em seus últimos livros, fazendo a seguinte ressalva: êste método, ou critério, é empregado pelo professor Michel Avi Saad, desde 1.956*. Não o justificou, porém. Procuraremos fazer a justificação do processo, após a sua explicação.

É o seguinte: "um número é divisível por sete quando: separando o primeiro algarismo da direita (de seu numeral mais simples), multiplicando o seu valor absoluto por 2 e subtraindo o produto obtido do número expresso pelo numeral que restou à esquerda, e assim operando sucessivamente, resulta um múltiplo de sete".

* Aurélio Baldor, autor cubano, em publicação anterior a essa data já ensinava êste critério para a divisibilidade por 7, usando ainda critérios análogos para a divisibilidade por 13, 17 e 19.

Exemplos:

1.º) 945 é divisível por 7, porque:

$$\begin{array}{r} 945 \\ - 10 \\ \hline 84 \\ - 8 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \times 5 = 10 \\ 2 \times 4 = 8 \\ 0 \text{ (zero é múltiplo de sete)} \end{array}$$

2.º) 2.492 é divisível por 7, porque:

$$\begin{array}{r} 2492 \\ - 4 \\ \hline 245 \\ - 10 \\ \hline 14 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 2 \times 5 = 10 \\ 14 \text{ (14 é múltiplo de 7)} \end{array}$$

3.º) 5.345 não é múltiplo de 7, porque:

$$\begin{array}{r} 5345 \\ - 10 \\ \hline 524 \\ - 8 \\ \hline 44 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \times 5 = 10 \\ 2 \times 4 = 8 \\ 44 \text{ (44 não é múltiplo de 7)} \end{array}$$

Nosso primeiro exemplo servirá para justificar o processo: 945, divisível por 7, como vimos.

Quando separamos o algarismo das unidades (5) e multiplicamos o seu valor absoluto por 2, para subtrair da parte restante, na realidade estamos retirando 21 vezes o número representado pelo algarismo das unidades, pois vamos subtrair o seu dôbro da ordem das dezenas, portanto, 20 vezes o seu valor. Como êle também é suprimido, quando o separamos, retiramos o valor expresso pelo algarismo das unidades (20 + 1) 21 vezes. Assim:

$$\begin{array}{r} 945 \\ - 105 \\ \hline 840 \end{array} \quad \begin{array}{r} 21 \\ \times 5 \\ \hline 105 \end{array}$$

A seguir, multiplicamos por 2 o algarismo que está representando as dezenas e o suprimimos, subtraindo aquêle produto da parte restante. Logo, suprimimos 200 vezes o valor daquele algarismo, pois vamos retirar das centenas o seu dôbro, e mais 10 vezes o seu valor, pois êle ocupava o valor das dezenas. Nessa segunda operação, portanto, retiramos 210 vezes o valor representado pelo algarismo das dezenas do número dado, que é 4. Assim:

$$\begin{array}{r} 840 \\ - 840 \\ \hline 000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 210 \\ \times 4 \\ \hline 840 \end{array}$$

Podemos notar que estamos sempre subtraindo do número dado um número que é múltiplo de 7, pois 21 vezes um número, 210 vezes um número, etc., são múltiplos de 7 porque $21 = 3 \times 7$, $210 = 30 \times 7$, etc.

Vejamos, agora, o número 5.345, que não é múltiplo de 7, do nosso terceiro exemplo.

$$\begin{array}{r} 5345 \\ - 105 \\ \hline 5240 \end{array} \quad \begin{array}{r} 21 \\ \times 5 \\ \hline 105 \end{array}$$

Subtraímos do número dado 21×5 .

$$\begin{array}{r} 5240 \\ - 840 \\ \hline 4400 \end{array} \quad \begin{array}{r} 210 \\ \times 4 \\ \hline 840 \end{array}$$

Subtraímos do número restante 210×4 .

Não é mais possível repetir a operação, isto é, subtrair de 4 o dôbro de 4 ou subtrair de 4.400 o produto 2.100×4 .

Então, examinando o número resultante:

$$4.400 = 44 \times 100$$

Verificamos que o fator 100 não é múltiplo de 7, o que já sabemos perfeitamente. Para que o número 4.400 seja divisível por 7, é preciso que o outro fator o seja, isto é, que 44 seja divisível por 7. Mas não é. Logo, o número dado não é múltiplo de 7.

O critério que damos para a divisibilidade por 7 é muito prático e simples. Apenas demos a justificativa para que não aparecesse uma regra como num passe de mágica, sem que se soubesse no que ela se baseia. Apenas por isso. Logo, é só seguir o critério de início e pronto. Sabemos rapidamente se o número dado é ou não divisível por 7.

7 — Divisibilidade por oito:

O raciocínio empregado para justificar o critério de divisibilidade por 8 é semelhante ao empregado no estudo da divisibilidade por 4.

Seja, por exemplo, o número 5.428.536.

Sabemos que

$$5.428.536 = 5.428 \times 1.000 + 536$$

Qualquer número expresso por mais de 3 algarismos pode ser decomposto em duas parcelas, como fizemos com o exemplo acima: uma, formada pelo número de milhares que o número dado possui, e que é divisível por 8, porque $1.000 = 8 \times 125$; outra, menor que 1.000, que pode ser ou não divisível por 8.

O número do exemplo acima é divisível por 8 porque 5.428×1.000 é divisível por 8, como já dissemos, e 536 também:

$$\begin{array}{r|l} 536 & 8 \\ \hline 56 & 67 \\ 0 & \end{array}$$

Assim, um número é divisível por 8 quando o número cujo numeral mais simples é expresso pelos algarismos da classe das unidades (centenas, dezenas e unidades) é divisível por 8.

Exemplos:

1.º) $\underline{5.352}$ é divisível por 8 porque $\begin{array}{r|l} 352 & 8 \\ \hline 32 & 44 \\ 0 & \end{array}$

2.º) $\underline{32.064}$ é divisível por 8 porque $64 \div 8 = 8$

3.º) $\underline{543.252}$ não é divisível por 8 porque $\begin{array}{r|l} 252 & 8 \\ \hline 12 & 31 \\ 4 & \end{array}$

8 — Divisibilidade por nove:

O raciocínio que iremos empregar na justificação do critério da divisibilidade por 9 é semelhante ao que empregamos no estudo da divisibilidade por 3.

Seja o seguinte exemplo: 25.632

$$25.632 = 2 \times 10.000 + 5 \times 1.000 + 6 \times 100 + 3 \times 10 + 2$$

Sabemos que:

$$10.000 = 9.999 + 1$$

$$1.000 = 999 + 1$$

$$100 = 99 + 1$$

$$10 = 9 + 1$$

Logo, o número

$$25.632 = \left[\begin{array}{l} 2 \times (9.999 + 1) = 2 \times 9.999 + 2 \times 1 \\ 5 \times (999 + 1) = 5 \times 999 + 5 \times 1 \\ 6 \times (99 + 1) = 6 \times 99 + 6 \times 1 \\ 3 \times (9 + 1) = 3 \times 9 + 3 \times 1 \\ 2 \times 1 = 2 \times 1 \\ 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{pela} \\ \text{propriedade} \\ \text{distributiva} \\ \text{da multipli-} \\ \text{cação} \end{array}$$

Assim, o número dado, 25.632 (ou qualquer outro), pode ser decomposto em duas parcelas tais que a primeira é sempre divisível por nove e a segunda é constituída pela soma dos valores absolutos de seus algarismos ($2 + 5 + 6 + 3 + 2$). Se esta segunda parcela for divisível por 9, então o número dado também o será. Como a soma da segunda parcela é 18, concluímos que 25.632 é divisível por 9.

Exemplos:

1.º) 8.073 é divisível por 9 porque $8 + 7 + 3 = 18$ e $18 \div 9 = 2$

2.º) 36.585 é divisível por 9 porque $3 + 6 + 5 + 8 + 5 = 27$ e $27 \div 9 = 3$

3.º) 56.248 não é divisível por 9 porque $5 + 6 + 2 + 4 + 8 = 25$ e

$$\begin{array}{r|l} 25 & 9 \\ \hline 7 & 2 \end{array}$$

9 — Divisibilidade por dez:

Já vimos, quando do estudo da multiplicação por 10, que todo produto de um número natural por 10 tem no seu numeral mais simples uma característica interessante: o algarismo das unidades é zero.

Logo, um número é divisível por 10 se, no seu numeral mais simples, o algarismo das unidades é zero.

Exemplos de números divisíveis por 10:

580, 50, 660, 10.200, 16.240, etc.

Os números 415, 618, 5.413, etc., não são divisíveis por 10.

O resto da divisão de um número por 10 é igual ao número que corresponde ao algarismo das unidades de seu numeral mais simples. O resto, por exemplo, da divisão de 613 por 10 é 3.

10 — Divisibilidade por onze:

Começemos por observar como se comportam as potências de 10 em relação ao número 11.

$10 = 11 - 1$, isto é, um múltiplo de $11 - 1$.

$100 = 99 + 1$, isto é, um múltiplo de $11 + 1$.

$1.000 = 1.001 - 1$, isto é, um múltiplo de $11 - 1$.

$10.000 = 9.999 + 1$, isto é, um múltiplo de $11 + 1$, e assim sucessivamente. Podemos, então, dizer: toda potência de 10 é um múltiplo de 11 mais ou menos 1. Ainda observando o estudo que fizemos das potências de 10 em relação ao número 11, podemos tirar uma segunda conclusão: Quando o número de zeros é par, a potência de 10 é múltiplo de $11 + 1$, quando o número de zeros é ímpar, a potência de 10 é múltiplo de $11 - 1$.

Agora, um exemplo. Seja o número 5.742:

$$a) 5.742 = 5.000 + 700 + 40 + 2 \quad (\text{p. d. a.})$$

$$b) 5.742 = 5 \times 1.000 + 7 \times 100 + 4 \times 10 + 2$$

$$c) 5.742 = 5 \times (M_{11} - 1) + 7 \times (M_{11} + 1) + 4 \times (M_{11} - 1) + 2$$

$$d) 5.742 = \underbrace{5 \times M_{11}} - \underbrace{5 \times 1} + \underbrace{7 \times M_{11}} + \underbrace{7 \times 1} + \underbrace{4 \times M_{11}} - \underbrace{4 \times 1} + 2 \quad (\text{p. d. m.})$$

$$e) 5.742 = M_{11} - 5 + M_{11} + 7 + M_{11} - 4 + 2$$

$$f) 5.742 = \underbrace{M_{11}} + \underbrace{(2 + 7) - (4 + 5)} \quad (\text{p. a. a.})$$

1.ª parcela 2.ª parcela

Explicando: Em a) decomposemos o número 5.742 em suas diversas ordens pela p. d. a. (propriedade distributiva da adição).

Em b), substituímos cada parcela de a) por um produto em que um dos fatores é potência de 10.

Em c), substituímos cada potência de 10 por múltiplos de 11 mais ou menos um ($M_{11} + 1$ ou $M_{11} - 1$) de acordo com as conclusões tiradas acima.

Em d), aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação (p. d. m.) a cada uma das parcelas da linha c).

Em e), efetuamos as multiplicações indicadas. (Um múltiplo de 11 multiplicado por 5, continua múltiplo de 11, daí termos efetuado $5 \times M_{11} = M_{11}$, o mesmo ocorrendo com os outros termos em que aparece o fator M_{11}).

Em f), empregamos a propriedade associativa da adição (p. a. a.) e reunimos todos os múltiplos de 11 em um só termo, a sua soma, que é M_{11} ; os outros termos da adição foram reunidos em $(2 + 7) - (4 + 5)$, pela mesma p. a. a.

Assim, obtém-se o número dado, (ou qualquer outro) decomposto em duas parcelas: a primeira delas é sempre um múltiplo de 11. A segunda, pode ser ou não múltiplo de 11. Se fôr, o número dado é múltiplo de 11, se não fôr, o número dado também não será múltiplo de 11.

Em nosso exemplo, a segunda parcela: $(2 + 7) - (4 + 5)$ é múltiplo de 11, pois ela é igual a $9 - 9 = 0$ e zero é múltiplo de 11. Logo, o número dado, 5.742, é divisível por 11.

Agora, observando o numeral mais simples de nosso exemplo, vamos ver como podemos tirar dessas nossas conclusões um critério prático para saber se um número é ou não divisível por 11 mais rapidamente que efetuando a sua divisão por 11.

Concluimos atrás que o número dado pode ser decomposto em duas parcelas:

$$5.742 = \underbrace{M_{11}}_{1.ª \text{ parcela}} + \underbrace{(2 + 7) - (4 + 5)}_{2.ª \text{ parcela}}$$

Observando o numeral mais simples do número dado vemos que a 2.ª parcela, a que nos interessa, pois a outra já sabemos que é múltiplo de 11, é constituída pelos números expressos pelos mesmos algarismos que expressam o número dado: em $(2 + 7)$ correspondem os algarismos da 1.ª e 3.ª ordens (unidades e centenas) do número 5.742 e em $(4 + 5)$ correspondem os algarismos da 2.ª e 4.ª ordens (dezenas e unidades de milhar) do número 5.742.

Da observação dêste exemplo, e de muitos outros, podemos concluir que: *um número é divisível por 11 quando a diferença entre as somas dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a dos de ordem par de seu numeral mais simples é divisível por 11.*

Ainda: se a soma dos algarismos de ordem ímpar (S_i) fôr menor que a soma dos algarismos de ordem par (S_p), adiciona-se 11 à primeira soma tantas vezes quantas forem necessárias para que se torne possível a subtração.

Exemplos:

$$1.^{\circ} \begin{array}{ccccccc} 8 & 6 & 5 & 5 & 9 & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot & & & & & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{é divisível por 11: } S_i = 9 + 5 + 8 = 22 \\ S_p = 5 + 6 = 11 \end{array}$$

$$22 - 11 = 11 \text{ que é múltiplo de 11.}$$

$$2.^{\circ} \begin{array}{ccc} 6 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{não é divisível por 11: } S_i = 9 + 6 = 15 \\ S_p = 8 \end{array}$$

$$15 - 8 = 7 \text{ que não é múltiplo de 11.}$$

$$3.^{\circ} \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 7 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot & & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{não é divisível por 11: } S_i = 4 + 0 = 4 \\ S_p = 7 + 2 = 9 \end{array}$$

$$4 - 9 = ?$$

$$(4 + 11) - 9 =$$

$$15 - 9 = 6 \text{ que não é múltiplo de 11.}$$

$$4.^{\circ} \begin{array}{ccccccc} 5 & 2 & 8 & 0 & 9 & 1 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot & & & & & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{não é divisível por 11: } S_i = 1 + 0 + 2 = 3 \\ S_p = 9 + 8 + 5 = 22 \end{array}$$

$$3 - 22 = ?$$

$$(3 + 11) - 22 = 14 - 22?$$

$$(14 + 11) - 22 =$$

$$25 - 22 = 3 \text{ que não é múltiplo de 11.}$$

11 — Divisibilidade por *doze*:

Com base no raciocínio empregado no estudo da divisibilidade por 6, observemos os conjuntos de múltiplos de 3 e de 4:

$$M_3 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} & +12 & & +12 & & & \\ 0, & 3, & 6, & 9, & 12, & 15, & 18, & 21, & 24, & \dots \end{array} \right\}$$

$$M_4 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} & +12 & & +12 & & & \\ 0, & 4, & 8, & 12, & 16, & 20, & 24, & 28, & \dots \end{array} \right\}$$

Podemos observar que o conjunto constituído pelos números que são ao mesmo tempo elementos de M_3 e de M_4 são os números divisíveis por 12. Logo, um número é divisível por 12 quando é, ao mesmo tempo, divisível por 3 e por 4.

Exemplos:

1.^o 6.732 é divisível por 12 porque é divisível por 3 ($6 + 7 + 3 + 2 = 18$) e por 4 (o numeral termina em 32).

2.^o 560 não é divisível por 12 porque é divisível por 4 (o numeral termina em 60) mas não é divisível por 3 ($5 + 6 + 0 = 11$).

3.^o 15.438 não é divisível por 12 porque é divisível por 3 ($1 + 5 + 4 + 3 + 8 = 21$) mas não é divisível por 4 (o numeral termina em 38).

Quando tratarmos da *fatoração dos números naturais* poderemos completar o estudo da divisibilidade verificando que podemos sempre saber se um número é ou não divisível por outro sem precisar efetuar a divisão.

Daremos, a seguir, os critérios de divisibilidade por 13, 17 e 19, mais como curiosidade. Os mesmos, como a divisibilidade por 7, baseiam-se na propriedade que enunciamos no início de nosso capítulo de divisibilidade: "a soma e a diferença de dois múltiplos de um número são também múltiplos dêste número". Não os explicaremos, como fizemos em relação ao 7, deixando a critério do interessado, se o desejar, descobrir a justificação para cada caso:

Divisibilidade por *treze*:

"Um número é divisível por 13 quando, separando o último algarismo da direita de seu numeral mais simples, multiplicando o seu valor por 9, subtraindo o produto encontrado da parte restante à esquerda, e assim sucessivamente, resulta um múltiplo de 13".

Exemplo: 1.625

Temos:	$\begin{array}{r} 1.625 \\ - 45 \\ \hline 117 \\ - 63 \\ \hline 52 \end{array}$	$5 \times 9 = 45$	$7 \times 9 = 63$
		(52 é múltiplo de 13)	

Logo, 1.625 é divisível por 13. Experimente.

Observação: quando o produto do último algarismo da direita por 9 é maior que a parte restante à esquerda, pode-se inverter os termos da subtração para encontrar a diferença. Foi o que fizemos acima quando, não sendo possível subtrair 63 de 11, subtraímos 11 de 63.

Claro que sabemos que a subtração não é comutativa! Mas, o que nos interessa, neste caso, é a diferença entre um número e outro, sem nos preocupar em saber qual deles é o maior.

A última diferença, entretanto, torna-se desnecessária se, ao encontrarmos a diferença 117 já soubermos que ele é múltiplo de 13 e pudermos concluir imediatamente que o número dado é divisível por 13.

Outros exemplos:

1.º) 3.185

Temos:	$\begin{array}{r} 3.185 \\ - 45 \\ \hline 273 \\ - 27 \\ \hline 00 \end{array}$	$5 \times 9 = 45$	$3 \times 9 = 27$
		(0 é múltiplo de 13)	

Logo, 3.185 é divisível por 13. Verifique.

2.º) 18.342

Temos:	$\begin{array}{r} 18.342 \\ - 18 \\ \hline 1816 \\ - 54 \\ \hline 127 \\ - 63 \\ \hline 51 \end{array}$	$2 \times 9 = 18$	$6 \times 9 = 54$	$7 \times 9 = 63$
		(51 não é múltiplo de 13)		

Logo, 18.342 não é divisível por 13.

Divisibilidade por dezessete:

“Um número é divisível por 17 quando, separando o último algarismo da direita de seu numeral mais simples, multiplicando o seu valor por 5 e subtraindo o produto da parte restante à esquerda, e assim sucessivamente, a diferença é um múltiplo de 17”.

Exemplo: 3.978

Temos:	$\begin{array}{r} 3.978 \\ - 40 \\ \hline 357 \\ - 35 \\ \hline 00 \end{array}$	$8 \times 5 = 40$	$7 \times 5 = 35$
		(0 é múltiplo de 17)	

Logo, o número 3.978 é divisível por 17.

Outros exemplos:

1.º) 106.131

Temos:	$\begin{array}{r} 106.131 \\ - 5 \\ \hline 10608 \\ - 40 \\ \hline 1020 \\ - 0 \\ \hline 102 \\ - 10 \\ \hline 00 \end{array}$	$1 \times 5 = 5$	$8 \times 5 = 40$	$0 \times 5 = 0$	$2 \times 5 = 10$
		(zero é múltiplo de 17)			

Logo, 106.131 é divisível por 17.

2.º) 208.342

Temos:	208.342	$2 \times 5 = 10$
	- 10	

	208 24	$4 \times 5 = 20$
	- 20	

	206 2	$2 \times 5 = 10$
	- 10	

	196	$6 \times 5 = 30$
	- 30	

	11	(11 não é múltiplo de 17)

Logo, o número 208.342 não é divisível por 17.

Divisibilidade por *dezenove*:

“Um número é divisível por 19 quando, separando o último algarismo de seu numeral mais simples, multiplicando-o por 17 e subtraindo o produto do número expresso pela parte restante do numeral, à esquerda, e assim sucessivamente, a diferença é um múltiplo de 19”.

Exemplo: 1.881

Temos:	1.881	$1 \times 17 = 17$
	- 17	

	1 71	$1 \times 17 = 17$
	- 17	

	0 0	(zero é múltiplo de 19)

Logo, 1.881 é divisível por 19.

Outros exemplos:

1.º) 285

Temos:	285	$5 \times 17 = 85$
	- 85	

	57	(57 é múltiplo de 19)

Logo, 285 é divisível por 19.

2.º) 16.345

Temos:	16.345	$5 \times 17 = 85$
	- 85	

	15 49	$9 \times 17 = 153$
	- 153	

	00 1	(1 não é múltiplo de 19)

Logo, 16.345 não é divisível por 19.

Esta prova não garante que o cálculo esteja absolutamente certo, mas assegura uma boa probabilidade de acerto. No caso de serem trocados algarismos da soma, esquecido um zero, etc., a prova não acusa o engano. Entretanto, por ser muito prática e dar uma boa margem de segurança, é muito usada.

Assim como tiramos a prova dos "nove" da adição baseados na propriedade dos restos da divisão por 9, podemos tirar a prova da adição baseados na mesma propriedade dos restos da divisão por qualquer divisor: 3, 5, 6, 11, etc.

Tiremos a prova da mesma adição de nosso exemplo anterior usando o divisor 5:

$$\begin{array}{r} 256 \rightarrow \text{final } 6 \rightarrow \text{resto } 1 \\ 548 \rightarrow \text{final } 8 \rightarrow \text{resto } 3 \\ + 632 \rightarrow \text{final } 2 \rightarrow \text{resto } 2 \\ \hline 1.436 \rightarrow \text{final } 6 \rightarrow \text{resto } 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 1 + 3 + 2 = 6 \rightarrow \text{resto } 1$$

Agora, pelo divisor 11:

$$\begin{array}{r} 256 \rightarrow (6 + 2) - 5 = 3 \rightarrow \text{resto } 3 \\ 548 \rightarrow (8 + 5) - 4 = 9 \rightarrow \text{resto } 9 \\ + 632 \rightarrow (2 + 6) - 3 = 5 \rightarrow \text{resto } 5 \\ \hline 1.436 \rightarrow (6 + 4) - (3 + 1) = 6 \rightarrow \text{resto } 6 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} (3 + 9 + 5) = 17; \\ 17 \div 11 \rightarrow \text{resto } 6$$

A mesma propriedade é empregada para a verificação da subtração porque, sendo esta a operação inversa da adição, é claro que: se a soma dos restos (da divisão por 9 ou outro qualquer divisor) das parcelas é igual ao resto da soma, pelo mesmo divisor, podemos dizer, inversamente, que o resto da soma (por um divisor) menos o resto de uma das parcelas, (pelo mesmo divisor) é igual ao resto da outra parcela.

No caso de haver mais de duas parcelas, empregamos a propriedade associativa da adição e reduzimos todas as parcelas a duas para empregar a propriedade dos restos à correspondente subtração (que só tem dois termos).

Seja o seguinte exemplo: (prova dos "nove")

$$\begin{array}{r} 128 \rightarrow (1 + 2 + 8) \div 9 \rightarrow \text{resto } 2 \\ + 352 \rightarrow (3 + 5 + 2) \div 9 \rightarrow \text{resto } 1 \\ \hline 480 \rightarrow (4 + 8) \div 9 \rightarrow \text{resto } 3 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (2 + 1) \rightarrow \text{resto } 3$$

Inversamente:

$$\begin{array}{r} 480 \rightarrow (4 + 8) \div 9 \rightarrow \text{resto } 3 \\ - 352 \rightarrow (3 + 5 + 2) \div 9 \rightarrow \text{resto } 1 \\ \hline 128 \rightarrow (1 + 2 + 8) \div 8 \rightarrow \text{resto } 2 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (2 + 1) \rightarrow \text{resto } 3$$

Outro exemplo:

$$\begin{array}{r} 65 \rightarrow (6 + 5) \div 9 \rightarrow \text{resto } 2 \\ 39 \rightarrow (3 + 9) \div 9 \rightarrow \text{resto } 3 \\ + 26 \rightarrow (2 + 6) \div 9 \rightarrow \text{resto } 8 \\ \hline 130 \rightarrow (1 + 3) \div 9 \rightarrow \text{resto } 4 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} (2 + 3 + 8) \div 9 \rightarrow 4$$

Empregando a p. a. a., podemos reunir duas quaisquer das parcelas em uma: (65 e 39, por exemplo).

E teremos: $(65 + 39) + 26$ ou $104 + 26$

Assim:

$$\begin{array}{r} 65 \left\{ \begin{array}{l} 104 \rightarrow (1 + 4) \div 9 \rightarrow \text{resto } 5 \\ 39 \rightarrow (3 + 9) \div 9 \rightarrow \text{resto } 3 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (5 + 8) \div 9 \rightarrow \text{resto } 4 \\ + 26 \rightarrow (2 + 6) \div 9 \rightarrow \text{resto } 8 \\ \hline 130 \rightarrow (1 + 3) \div 9 \rightarrow \text{resto } 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 130 \rightarrow (1 + 3) \div 9 \rightarrow \text{resto } 4 \\ - 26 \rightarrow (2 + 6) \div 9 \rightarrow \text{resto } 8 \\ \hline 104 \rightarrow (1 + 4) \div 9 \rightarrow \text{resto } 5 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (5 + 8) \div 9 \rightarrow \text{resto } 4$$

Outra propriedade dos restos:

"O resto da divisão de um produto por um número é igual ao resto da divisão, pelo mesmo número, do produto dos restos dos fatores".

Seja a seguinte multiplicação: 358×32 .

$$\begin{array}{r} 358 \rightarrow (3 + 5 + 8) \div 9 \rightarrow \text{resto } 7 \\ \times 32 \rightarrow (3 + 2) \div 9 \rightarrow \text{resto } 5 \\ \hline 716 \\ 1074 \\ \hline 11456 \rightarrow (1 + 1 + 4 + 5 + 6) \div 9 \rightarrow \text{resto } 8 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (7 \times 5) \div 9 \rightarrow \text{resto } 8$$

O mesmo exemplo, empregando o divisor 5:

$$\begin{array}{r}
 358 \rightarrow \text{final } 8 \rightarrow \text{resto } 3 \\
 \times 32 \rightarrow \text{final } 2 \rightarrow \text{resto } 2 \\
 \hline
 716 \\
 1074 \\
 \hline
 11456 \rightarrow \text{final } 6 \rightarrow \text{resto } 1
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \end{array}
 \right\}
 (3 \times 2) \div 5 \rightarrow \text{resto } 1$$

Ainda o mesmo exemplo, com o divisor 11:

$$\begin{array}{r}
 358 \rightarrow (8 + 3) - 5 = 6 \rightarrow \text{resto } 6 \\
 \times 32 \rightarrow (2 - 3) = ? \rightarrow (2 + 11) - 3 = 10 \rightarrow \text{resto } 10 \\
 \hline
 716 \\
 1074 \\
 \hline
 11456 \rightarrow (6 + 4 + 1) - (5 + 1) = 11 - 6 = 5 \rightarrow \text{resto } 5
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \end{array}
 \right\}
 (6 \times 10) \div 11 \rightarrow \text{resto } 5$$

A prova dos "nove" da divisão (ou por qualquer outro divisor) baseia-se também nesta última propriedade, pois a divisão exata é a operação inversa da multiplicação e a divisão aproximada tem também uma relação fundamental com a multiplicação que é: $\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor} + \text{resto}$.

Portanto, apenas exemplificaremos. Seja o seguinte exemplo:

$25.344 \div 12$.

Temos:

$$\begin{array}{r}
 25.344 \\
 013 \\
 014 \\
 024 \\
 00
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 (2 + 5 + 3 + 4 + 4) \div 9 = 18 \div 9 \rightarrow \text{resto } 0 \\
 12 \rightarrow (1 + 2) \div 9 \rightarrow \text{resto } 3 \\
 2112 \rightarrow (2 + 1 + 1 + 2) \div 9 \rightarrow \text{resto } 6 \\
 (3 \times 6) \div 9 \rightarrow \text{resto } 0
 \end{array}
 \right\}$$

Outro exemplo: $5.356 \div 14$

Temos:

$$\begin{array}{r}
 5.356 \\
 115 \\
 036 \\
 08
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 (5 + 3 + 5 + 6) \div 9 \rightarrow \text{resto } 1 \\
 14 \rightarrow (1 + 4) \div 9 \rightarrow \text{resto } 5 \\
 382 \rightarrow (3 + 8 + 2) \div 9 \rightarrow \text{resto } 4 \\
 (5 \times 4 + 8) \div 9 \rightarrow \text{resto } 1 \\
 08 \rightarrow 8 \div 9 \rightarrow \text{resto } 8
 \end{array}
 \right\}$$

NÚMEROS PRIMOS E NÚMEROS COMPOSTOS

No conjunto dos números naturais há números que só têm dois divisores. São os números primos, como, aliás, já tivemos oportunidade de dizer no volume 4.

Os números naturais que têm mais de dois divisores são os números compostos, ou retangulares.

Logo, todo número natural maior que 1 que não seja um número composto é um número primo.

Então, o número *um* não é primo nem composto e podemos dizer que o conjunto dos números naturais é a reunião do conjunto dos números primos com o conjunto dos números compostos e o conjunto unitário formado pelo número um.

Assim:

$$\{\text{números naturais}\} = \{1\} \cup \{\text{números primos}\} \cup \{\text{números compostos}\}$$

Esquematizando:

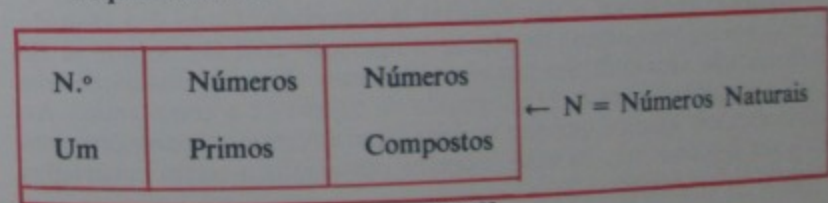


Fig. 62

Quantos serão os números primos?

Os números primos constituem um conjunto infinito, pois sempre podemos encontrar novos números primos dentro da sucessão infinita de números naturais.

Para se obter uma lista de números primos, registrados de forma ordenada, eliminaremos o zero, que é múltiplo, o um, que não é primo nem múltiplo, todos os pares com exceção do 2, por serem múltiplos, e os retangulares ímpares que sobraem. É claro que essa lista deverá registrar os números primos menores que um determinado número, pois nunca será possível completá-la porque a sucessão dos números primos é infinita.

A primeira dessas listas, conhecida pelo nome de Crivo de Eratóstenes, data de antes de Cristo. Feita por Eratóstenes, que a elaborou furando os números compostos. Daí, o nome de crivo.

O crivo de Eratóstenes é construído da seguinte maneira:

Todos os numerais dos números naturais de 2 até um número pré determinado são escritos. A seguir, vão sendo cancelados os dos números compostos, assim: os múltiplos de 2, a partir do 2; os múltiplos de 3, a partir do 3, etc. Os que não forem cancelados representam os números primos até o número fixado.

Podemos elaborar uma lista de números primos até 50, por exemplo, de uma forma mais rápida:

Escrevem-se os numerais do número 2 (único par que é primo) e de todos os ímpares maiores que 2 até o limite fixado. Assim:

2 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 13 - 15 - 17 - 19 - 21 - 23 - 25 - 27 - 29 - 31
33 - 35 - 37 - 39 - 41 - 43 - 45 - 47 - 49.

A seguir, a partir do 3, cancelamos todos os múltiplos de 3, o que é muito simples, pois basta ir contando os numerais até 3 e os cortando com um traço. Depois, cancelamos os múltiplos de 5 a partir do 5, contando de 5 em cinco, e assim sucessivamente.

Quando chegamos a um numeral já cancelado, como é o caso do 9, não haverá necessidade de repetir a operação com êle porque se êle já foi riscado, seus múltiplos também já o foram. Passa-se imediatamente para o seguinte, no caso, 11, contando de 11 em 11 e cancelando. Ao atingirmos um número que não dê para fazer a respectiva contagem nem uma vez é porque não há mais números compostos a serem cancelados naquela lista. Assim:

2 - 3 - 5 - 7 - ~~9~~ - 11 - 13 - ~~15~~ - 17 - 19 - ~~21~~ - 23 - ~~25~~ - ~~27~~ - 29 - 31
~~33~~ - ~~35~~ - 37 - ~~39~~ - 41 - 43 - ~~45~~ - 47 - ~~49~~.

Portanto, os números primos menores que 50 são:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47.

No final deste capítulo anexaremos uma tábua de todos os números primos até 1.000.

RECONHECIMENTO DE UM NÚMERO PRIMO

Quando não temos à mão uma tabela de números primos e precisamos saber se um dado número é ou não é primo, que faremos? Pode também ocorrer que tenhamos a tabela, mas o número que precisamos saber se é primo, ou não, é maior que o limite da tábua. Nestes casos, é conveniente que conheçamos um processo para tal verificação.

Tal processo consiste em empregar a própria sucessão dos números primos e os critérios de divisibilidade. Assim:

Divide-se o número dado pela sucessão dos números primos até encontrar um quociente menor ou igual ao divisor. Se nenhuma das divisões fôr exata, o número dado é primo.

Observação: Não serão feitas as divisões por 2, 3, 5, etc, pois os critérios de divisibilidade conhecidos nos permitem evitar essas divisões.

Exemplos:

1.º Verificar se 157 é, ou não, primo.

157 não é divisível por $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ porque é ímpar;} \\ 3 \text{ porque a soma dos alg. do numeral é } 13; \\ 5 \text{ porque termina em } 7; \\ 7 \text{ porque a diferença entre } 15 \text{ e } (2 \times 7) \text{ é } 1; \\ 11 \text{ porque } (7 + 1) - 5 = 3. \end{array} \right.$

De 13 para frente, iremos efetuando as divisões:

$$\begin{array}{r} 157 \quad | \quad 13 \\ 027 \quad | \quad 12 \leftarrow \text{quociente} < \text{divisor (13)} \\ 01 \leftarrow \text{resto} > 0 \end{array}$$

Podemos concluir que 157 é um número primo.

2.º exemplo: 3.249

Não é divisível por 2 por ser ímpar; mas é divisível por 3, uma vez que $(3 + 2 + 4 + 9) = 18$. Então, o número 3.249 não é primo.

3.º exemplo: 589

Aplicando os critérios de divisibilidade por 2, 3, 5, 7 e 11, vemos que 589 não é divisível por nenhum desses números. Experimentemos dividi-lo por 13 e pelos números primos seguintes, caso a primeira divisão não seja exata:

$$\begin{array}{r} 589 \overline{) 13} \\ 069 \\ \hline 04 \end{array} \quad \begin{array}{r} 589 \overline{) 17} \\ 079 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 589 \overline{) 19} \\ 019 \\ \hline 00 \end{array} \leftarrow \text{quociente exato}$$

Logo, o número 589 não é primo porque é divisível por 19.

4.º exemplo: 293

Pelos critérios de divisibilidade, verificamos que o número 293 não é divisível por nenhum número menor que 13. Experimentemos dividi-lo por 13:

$$\begin{array}{r} 293 \overline{) 13} \\ 033 \\ \hline 07 \end{array} \quad \begin{array}{r} 293 \overline{) 17} \\ 123 \\ \hline 04 \end{array} \leftarrow \text{quociente igual ao divisor}$$

↙ resto > 0

Podemos, já, concluir que o número 293 é primo, pois o quociente encontrado (17) é igual ao divisor (17) e a divisão não é exata.

FATORAÇÃO

O termo *fator* é já bastante conhecido. Vem sendo usado associado à idéia de multiplicação (os termos da multiplicação são os fatores) e de divisor de um número, pois sendo a divisão a operação inversa da multiplicação, um dos fatores da multiplicação será fatalmente o divisor da divisão correspondente.

Assim,

em $3 \times 5 = 15$, os termos 3 e 5 são os fatores de 15.

A expressão 3×5 , como sabemos, é outro numeral do número 15. Portanto, o número 15 (ou qualquer outro número natural maior que um) pode ser expresso por um produto de fatores. Denomina-se *fatoração* a operação de expressar um número natural por um produto de dois ou mais fatores.

Exemplos:

$$18 = 2 \times 9$$

ou $18 = 2 \times 3 \times 3$

Nos dois casos, o número 18 sofreu a operação fatoração, isto é, o número 18 foi *fatorado*.

Quando o número a ser fatorado é primo, só é possível fazer-se o produto de seus dois únicos fatores (o número primo só tem 2 divisores) que são a unidade e o próprio número primo.

Exemplos: $7 = 1 \times 7$
 $13 = 1 \times 13$
 $293 = 1 \times 293$

Já no caso dos números compostos, o assunto se torna bem mais interessante. Todo o número natural que é composto tem, pelo menos,

três divisores (ou fatores), como já tivemos oportunidade de ver. Com um pouco de reflexão, podemos chegar à seguinte conclusão: o menor dos divisores de um número composto é um número primo. Por quê? Porque se um divisor de um número é composto, seus divisores são também divisores do número. (Vimos isto em múltiplos e divisores, no começo do estudo de divisibilidade.) Portanto, se um divisor (ou fator) é composto, não pode ser o menor divisor de um número. Seja, por exemplo, o número 42, que é composto e queremos fatorar (expressar por meio de um produto de fatores):

O menor divisor de 42 diferente da unidade é 2.

Portanto,

$$42 = 2 \times 21$$

O número 21, por sua vez, é composto e seus divisores são também divisores de 42.

O menor divisor de 21 diferente da unidade é 3, que é primo, e

$$21 = 3 \times 7$$

Logo, $42 = 2 \times 3 \times 7$.

O número 7 é primo; portanto, seu único divisor diferente da unidade é ele mesmo. Assim,

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

é a *fatoração completa* de 42, pois todos os fatores em que foi decomposto o número 42 são primos.

Todos os números naturais compostos podem ser fatorados completamente empregando raciocínio semelhante. Podemos esquematizar o raciocínio empregado no exemplo acima assim:

$$\begin{array}{l}
 42 = 2 \times 21 \\
 \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad 21 = 3 \times 7 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 3 \times 7 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow \\
 42 = 2 \times 3 \times 7
 \end{array}$$

Outro exemplo: 90

$$90 = 2 \times 45$$

$$90 = 2 \times 3 \times 15$$

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

Logo, para expressar o número 90 como um produto de todos os seus fatores primos, escreveremos:

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

Todos os fatores de 90 são primos, como podemos observar. Logo, a fatoração foi *completa*.

Quando um ou mais fatores primos se repete, é conveniente escrevê-lo sob a forma de potência, já estudada.

Assim, no exemplo anterior,

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5,$$

podemos empregar a seguinte notação:

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

Há um algoritmo (disposição prática) que torna bastante simples a fatoração completa de um número. Consiste em dispor os quocientes e os divisores respectivos em duas colunas separadas por um traço vertical: à direita do traço registram-se os fatores primos, em ordem crescente e, à esquerda, os quocientes das divisões. Continua-se o processo até que se encontre para quociente o número 1.

$$\begin{array}{r|l}
 \text{Assim:} & 90 \\
 & 2 \\
 & 45 \\
 & 3 \\
 & 15 \\
 & 3 \\
 & 5 \\
 & 5 \\
 & 1
 \end{array}$$

ou seja: $90 = 2 \times 3^2 \times 5$

Outro exemplo: 144

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

ou seja: $144 = 2^4 \times 3^2$

Mais um exemplo: 23.100

23.100	2
11.550	2
5.775	3
1.925	5
385	5
77	7
11	11
1	

ou seja: $23.100 = 2^3 \times 3 \times 5^3 \times 7 \times 11$.

Ainda mais um exemplo: 7.620

7.620	2
3.810	2
1.905	3
635	5
127	127
1	

ou seja: $7.620 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 127$.

O fator 127 é primo, mas é preciso verificar, segundo as regras de divisibilidade e do reconhecimento se um número é ou não é primo, pois os fatores quando são números relativamente grandes, podem enganar. Portanto, para se ter a certeza que um fator surgido na decomposição é realmente primo, precisamos fazer o reconhecimento.

Exemplo: Verificar se 632 é divisível por 24.

Temos:

$$\begin{array}{r|l} 632 & 2 \\ 316 & 2 \\ 158 & 2 \\ 79 & 79 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$632 = 2^3 \times 79$$

$$24 = 2^3 \times 3$$

Comparando os números dados expressos como produto de fatores primos, vemos que 632 não é divisível por 24, pois $24 = 2^3 \times 3$ e 632, apesar de conter o fator 2 com o expoente 3, não contém o fator 3.

Entretanto, se multiplicarmos o número 632 por 3 obteremos um número divisível por 24. Tal número terá todos os fatores primos de 632 e mais o fator 3, condição esta que falta a 632 para ser divisível por 24.

Logo, 632×3 é múltiplo de 24.

Pode-se, agora, apresentar a seguinte questão:

Determinar o menor número pelo qual se deve multiplicar o número 420 para que ele se torne um múltiplo de 99.

Decompondo os números dados em seus fatores primos, temos:

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$99 = 3^2 \times 11$$

Como o fator 3 só aparece em 420 com o expoente 1 e em 99 ele aparece com o expoente 2, será preciso acrescentá-lo mais uma vez em 420; e, como o fator 11 que aparece em 99 não faz parte dos fatores primos de 420, é preciso também acrescentá-lo como fator de 420.

Logo, precisamos multiplicar 420 por 3×11 (ou 33) para que ele se torne múltiplo de 99.

Mediante a fatoração completa dos números e considerando que os fatores primos de um número são primos entre si, podemos completar o estudo dos critérios de divisibilidade com o seguinte:

DIVISIBILIDADE POR UM NÚMERO QUALQUER

Podemos reconhecer se um número é divisível por outro (qualquer) número quando conhecemos seus fatores primos. Assim, por exemplo, verifiquemos se o número 720 é divisível por 48. Façamos a sua decomposição em fatores primos, antes de mais nada:

$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Expressemos, agora, os números dados como produtos de seus respectivos fatores primos:

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

e $48 = 2^4 \times 3$

Mas, o número 720 pode também ser expresso assim:

$$720 = 2^4 \times 3 \times 3 \times 5$$

ou $720 = 48 \times 15$

Logo, 720 é múltiplo de 48 ou é divisível por 48.

Do exposto, podemos concluir que sempre é possível determinar se um número é divisível por outro, bastando para isso decompô-lo em seus fatores e compará-los:

“Se o primeiro número contiver todos os fatores primos do segundo com expoentes iguais ou maiores é porque ele é divisível pelo segundo”.

“Quando um número é divisível por dois outros que sejam primos entre si, é também divisível pelo seu produto”.

A divisibilidade por 6 e por 12, cujos critérios já foram enunciados atrás, encontra aqui a sua melhor justificação.

Podemos, ainda, estabelecer facilmente se um número é divisível por 14, 15, 18, 21, 22, 24, etc.

Assim:

Se um número fôr divisível por:

- a) 2 e 7, o é por 14;
- b) 3 e 5, o é por 15;
- c) 2 e 9, o é por 18;
- d) 3 e 7, o é por 21;
- e) 2 e 11, o é por 22;
- f) 3 e 8, o é por 24, e assim por diante.

RADICIAÇÃO PELA FATORAÇÃO COMPLETA

Sabemos que a tóda potência corresponde uma raiz exata.

$$\text{Assim, se } 3^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3$$

A raiz exata de uma potência pode ser determinada mediante a decomposição da potência em seus fatôres primos, isto é, pela sua fatoraço completa.

Seja o seguinte exemplo:

$$\sqrt{36} = 6$$

Fatorando completamente 36 e 6, temos:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

e

$$6 = 2 \times 3$$

Logo,

$$\sqrt{36} = 6$$

Pode ser escrito assim:

$$\sqrt{2^2 \times 3^2} = 2 \times 3$$

Observando esta última igualdade, notamos que os fatôres que figuram na raiz são os mesmos que figuram no radicando, com os expoentes divididos por dois, por se tratar de uma raiz quadrada (índice 2).

Portanto, para extrair a raiz quadrada exata de um número que é quadrado perfeito, pode-se fatorar completamente o número dado, dividir por dois todos os expoentes dos fatores e multiplicar os resultados.

Assim:

$$\sqrt{225} = \sqrt{3^2 \times 5^2} = 3 \times 5 = 15$$

Mais alguns exemplos:

$$1.^{\circ}) \sqrt{625} = \sqrt{5^4} = 5^2 = 25$$

$$2.^{\circ}) \sqrt{5.776} = \sqrt{2^4 \times 19^2} = 2^2 \times 19 = 4 \times 19 = 76$$

$$3.^{\circ}) \sqrt{9.216} = \sqrt{2^{16} \times 3^2} = 2^8 \times 3 = 32 \times 3 = 96$$

Este processo, como dissemos, só serve para determinar a raiz quadrada exata de um número natural que é quadrado perfeito. Vimos, pelos exemplos, que os fatores primos dos números que são quadrados perfeitos têm expoentes pares e podem sempre ser divididos por dois.

Logo, podemos concluir que, fatorado completamente um número, pelos expoentes dos fatores, podemos saber se ele é ou não é quadrado perfeito: se todos os expoentes forem pares, o número é quadrado perfeito e tem raiz quadrada exata; basta que o expoente de um de seus fatores seja ímpar para que saibamos que o número dado não é quadrado perfeito e não tem, portanto, uma raiz quadrada exata.

O processo que acabamos de expor é *geral* para a extração da raiz de qualquer ordem, desde que os expoentes dos fatores primos da decomposição sejam divisíveis pelo índice do radical.

Exemplos:

$$1.^{\circ}) \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{(3 \div 3)} = 3$$

$$2.^{\circ}) \sqrt[3]{9.261} = \sqrt[3]{3^3 \times 7^3} = 3^{(3 \div 3)} \times 7^{(3 \div 3)} = 3 \times 7 = 21$$

$$3.^{\circ}) \sqrt[3]{13.824} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^3} = 2^{(3 \div 3)} \times 3^{(3 \div 3)} = 2 \times 3 = 8 \times 3 = 24$$

$$4.^{\circ}) \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5^{(4 \div 4)} = 5$$

$$5.^{\circ}) \sqrt[4]{1.889.568} = \sqrt[4]{2^4 \times 3^{10}} = 2^{(4 \div 4)} \times 3^{(10 \div 4)} \times 5 = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

Pelos exemplos, podemos notar que só é possível extrair-se a raiz exata de um número que seja potência.

É por esse motivo que dizemos que a radiciação é uma operação que não possui a propriedade do fechamento.

OS DIVISORES DE UM NÚMERO NATURAL

Lembrando-nos que o conjunto dos divisores de um número natural é *finito*, podemos pensar na possibilidade de determinar *todos* os divisores de um número natural.

A fatoração completa de um número natural permite que conheçamos alguns de seus divisores (os primos). Seja o número 90:

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

Logo, podemos saber que, 2, 3 e 5 são divisores de 90, assim como a unidade, pois sabemos que o número 1 é divisor de todos os números. Entretanto, sabemos que 90 admite outros divisores, que não são primos e nem a unidade, tais como 15, 45 e o próprio 90.

Como é natural, os divisores de 90 serão apenas os números que contiverem os fatores 2, 3 e 5 com expoentes não superiores àqueles que figuram nos respectivos fatores em 90.

Assim, os divisores de 90 só poderão possuir o fator 2 com expoente menor ou igual a 1 (2^0 e 2^1); o fator 3 com expoente menor ou igual a 2 (3^0 , 3^1 e 3^2) e o fator 5 com expoente menor ou igual a 1 (5^0 e 5^1).

Para facilitar a determinação de todos os divisores de um número há um algoritmo que, valendo-se da disposição prática utilizada na fatoração completa do número, dá todos os seus divisores, partindo dos seus fatores primos. Voltemos ao nosso exemplo, 90:

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Traçamos uma vertical à direita dos fatores primos, já determinados. A seguir, procurando os números que resultam das multiplicações dos fatores, iremos determinar todos os seus divisores. Lembrando-nos de que 1, como dissemos atrás, é divisor de 90 (e de qualquer número), o registramos um pouco acima do primeiro fator primo e à direita da vertical que traçamos. Multiplicando por 1 o primeiro dos fatores pri-

mos do número, obteremos o primeiro divisor maior que 1 e o registramos abaixo do 1, na vertical. A seguir, multiplicamos por 1 o segundo fator primo e registramos o seu produto logo abaixo do segundo divisor. Multiplicamos o segundo divisor pelo terceiro e registramos o produto à sua direita. Passaremos, assim, sucessivamente, de um fator primo para o outro, sempre começando por multiplicá-lo por 1 e pelos divisores que o que antecederam, reservando, para cada fator primo, uma linha horizontal onde são registrados os divisores correspondentes às multiplicações por êle. Quando um fator é repetido, como o fator 3, em nosso exemplo, é claro que não precisamos repetir os divisores já encontrados. Assim: (em baixo mostramos como foram encontrados os divisores, acima)

		1
90	2	2
45	3	3 - 6
15	3	9 - 18
5	5	5 - 10 - 15 - 30 - 45 - 90
1		

		1
90	2	1×2
45	3	$1 \times 3 - 2 \times 3$
15	3	$3 \times 3 - 3 \times 6$
5	5	$1 \times 5 - 2 \times 5 - 3 \times 5 - 6 \times 5 - 9 \times 5 - 18 \times 5$
1		

Assim, o conjunto de divisores de 90 é:

$$D_{90} = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}.$$

Vejamos mais um exemplo: Determinar todos os divisores de 420.
Temos:

		1
420	2	2
210	2	4
105	3	3 - 6 - 12
35	5	5 - 10 - 20 - 15 - 30 - 60
7	7	7 - 14 - 28 - 21 - 42 - 84 - 35 - 70 - 140 - 105 - 210 - 420
1		

O conjunto de todos os divisores de 420 é:

$$D_{420} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 28, 30, 35, 42, 60, 70, 84, 105, 140, 210, 420\}.$$

DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE DIVISORES DE UM NÚMERO NATURAL

O número de divisores de um número natural composto varia muito. Alguns números têm muitos divisores, outros têm poucos divisores. Os números compostos que têm menor número de divisores têm três divisores, condição mínima para que o número seja considerado composto. Mas, quantos são os divisores de cada número?

O processo para se determinar o número de divisores de um número natural qualquer é bastante simples: representamos o número dado como um produto de fatores primos, após a sua fatoração completa. Assim:

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

A seguir, adicionamos uma unidade a cada um dos expoentes dos fatores primos e multiplicamos os números obtidos. Não podemos nos esquecer que o fator que não apresenta expoente, como o 2 e o 5, em nosso exemplo, têm por expoente o número 1, subentendido.

Então, temos:

$$(1 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 2 \times 3 \times 2 = 12$$

O número 90 tem 12 divisores distintos.

Podemos verificar, contando-os, já que o conjunto dos divisores de 90 acha-se registrado logo atrás, como exemplo da determinação de todos os divisores de um número.

Aproveitemos o segundo exemplo daquele estudo, 420, e vejamos quantos divisores tem esse número, conferindo, a seguir, o resultado, no conjunto D_{420} .

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

Os expoentes dos fatores acrescidos de uma unidade e multiplicados entre si nos darão o resultado. Assim:

$$(2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$$

O número 420 tem 24 divisores distintos.

A explicação do processo que acabamos de apresentar é a seguinte: o expoente de cada fator é aumentado de uma unidade porque cada fator é considerado a partir do expoente zero (2^0 , 3^0 , etc.) como participando do cálculo dos divisores do número dado.

Essa regra, tão fácil de ser aplicada, possibilita também a resolução do problema inverso: determinar um número que tenha um número pré-fixado de divisores.

Assim, por exemplo, se quisermos determinar um número que tenha 12 divisores, raciocinamos assim:

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$12 = (1 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1)$$

$\underbrace{\quad \quad \quad}_{\uparrow} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{\uparrow} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{\uparrow}$ expoente dos fatores primos.

Logo, todo número que tenha 3 fatores primos, um deles com o expoente 2 e os outros dois com o expoente 1, são números que possuem 12 divisores. Muitos são os números que preenchem essa condição (ter 12 divisores).

Exemplos:

Alguns números que têm 12 divi- sores distintos	$2^2 \times 3 \times 5 = 60$
	$2 \times 3^2 \times 5 = 90$
	$2 \times 3 \times 5^2 = 150$
	$2^2 \times 5 \times 7 = 140$
	$2 \times 5^2 \times 7 = 350$
	$2 \times 5 \times 7^2 = 490$
	$3^2 \times 5 \times 7 = 315$
$5 \times 7^2 \times 11 = 2.695, \text{ etc.}$	

DIVISORES COMUNS — O MAIOR DIVISOR COMUM MAXIMAÇÃO

Muita coisa a respeito dos divisores de um número natural e dos múltiplos de um número natural já foi por nós estudada. Inclusive, em nosso volume 4, tratamos já dos múltiplos comuns e dos divisores comuns.

Façamos, agora, uma rápida revisão para, a seguir, chegarmos a algumas conclusões importantes, dadas as suas aplicações práticas.

Sabemos que os conjuntos de divisores de 15 e 12, por exemplo, são:

$$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$$

$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Também sabemos que os divisores comuns de 15 e 12 são aqueles que pertencem tanto ao conjunto de divisores de um como ao de outro. Portanto, aqueles que pertencem ao conjunto-intersecção de ambos:

$$D_{15} \cap D_{12} = \{1, 3, 5, 15\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{1, 3\}$$

Logo, os divisores comuns de 15 e 12 são os números 1 e 3.

Mas, na realidade, interessa-nos apenas determinar o maior dos divisores comuns de dois ou mais números, pois todos os demais divisores comuns são divisores desse maior.

Assim, no conjunto dos divisores comuns de 15 e 12, interessa-nos em particular o divisor 3 (maior divisor comum) e usaremos a seguinte notação:

$$D_{15} \cap D_{12} = \{1, 3\}$$

\downarrow
D

A operação que determina o maior divisor comum de dois ou mais números naturais é denominada *Maximação*.

O resultado da operação é o *maior divisor comum* dos números dados.

Abreviadamente, dizemos que o maior divisor comum de 15 e 12 é 3, assim:

$$15 \text{ D } 12 = 3$$

ou $15 \wedge 12 = 3$

Não vamos nos demorar com mais exemplos porque o assunto foi tratado e suficientemente exemplificado em nosso quarto volume.

Vimos que, na determinação do maior divisor comum de dois ou mais números naturais podemos formar os conjuntos dos divisores de cada um dos números dados, calcular o conjunto-intersecção deles (que é o conjunto de seus divisores comuns) e determinar entre os elementos deste conjunto o maior número.

Este processo é muito importante no estudo da determinação do maior divisor comum de dois ou mais números naturais porque ele conceitua a operação de maximização. É por este motivo que, na escola elementar, só demos este processo. É preciso que se dê à criança, muito bem, o conceito de todas as operações. Como não temos necessidade de operar com números muito grandes na escola primária (e nem devemos), o processo da intersecção dos conjuntos de divisores dos números dados é necessário e suficiente.

Entretanto, se quisermos operar com números que têm muitos divisores, tal processo é muito trabalhoso. Precisamos encontrar outro, mais rápido.

Raciocinemos, para isso, com os números cujos maior divisor comum queremos determinar expressos como produtos de seus fatores primos. Tais numerais tornam mais evidentes os divisores dos números dados e facilitam o nosso raciocínio.

Determinemos, por exemplo, o maior divisor comum de 60 e 144.

Sabemos que:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

e $144 = 2^4 \times 3^2$

Já vimos que os divisores de 60 e os de 144 (ou os de qualquer número natural diferente de zero) podem ser obtidos pela multiplicação de dois ou mais de seus fatores primos. (Processo dado para determinar todos os divisores de um número natural.) Pensando nisso, fica claro que os divisores comuns de dois ou mais números naturais podem ser determinados pela multiplicação dos fatores primos que são comuns aos números dados. E, tomando-se os fatores primos comuns o maior número de vezes possível, o produto deles é o maior divisor comum dos números considerados.

Assim, em nosso exemplo, os fatores primos comuns aos números 60 e 144 são o 2 e o 3. O fator 5 só é fator primo do número 60, não sendo fator comum, portanto.

Logo, o maior divisor comum de 60 e 144 pode ser obtido pela multiplicação:

$$2^2 \times 3$$

ou $60 \text{ D } 144 = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$

Podemos concluir uma regra bastante prática para efetuar a operação maximização entre dois ou mais números naturais, a partir da fatoração completa dos números considerados:

“O maior divisor comum de dois ou mais números naturais pode ser expresso pelo produto dos fatores primos comuns a todos os números dados, cada um deles elevado ao menor expoente com que aparece nas fatorações completas dos números”.

Exemplo: $45 \text{ D } 165 = ?$

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Temos:

$$45 = 3^2 \times 5$$

$$165 = 3 \times 5 \times 11$$

Logo, $45 \text{ D } 165$ ou $45 \wedge 165 = 3 \times 5 = 15$

Outro exemplo: $36 \text{ D } 54 \text{ D } 90 = ?$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Temos:

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$54 = 2 \times 3^3$$

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

$$\text{Logo, } 36 \text{ D } 54 \text{ D } 90 \text{ ou } 36 \wedge 54 \wedge 90 = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

Dêste processo, podemos retirar um algoritmo, que lembra o da fatoração completa dos números naturais:

$$\left. \begin{array}{l} 36 - 54 - 90 \\ 18 - 27 - 45 \\ 6 - 9 - 15 \\ 2 - 3 - 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 3 \\ \end{array} \text{ fatores primos comuns}$$

Portanto, fazendo uma fatoração simultânea dos números dados, obteremos já os fatores primos do maior divisor comum (fatores comuns com os menores expoentes).

Assim,

$$(36 \text{ D } 54) \text{ D } 90 \text{ ou } (36 \wedge 54) \wedge 90 = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

como, aliás, tínhamos determinado antes.

Há, ainda, uma disposição prática conhecida como processo das divisões sucessivas ou disposição prática de Euclides, pela qual se determina o maior divisor comum de dois ou mais números naturais. Não achamos de muito interesse o conhecimento desta disposição prática porque o algoritmo que sugerimos acima é dos mais simples e não se distancia do conceito da operação.

A disposição prática de Euclides também, é claro, fundamenta-se no conceito da operação. Entretanto, a colocação dos quocientes de divisões sucessivas ao alto, fugindo ao normal das técnicas empregadas em divisões, faz com que os principiantes se percam um pouco e distanciem-se do conceito da operação que está sendo efetuada (maximação).

Mas, vejamos a disposição prática de Euclides, o grande Matemático da antiga Grécia, determinando ainda o maior divisor comum de 36, 54 e 90. Tomando dois dos números considerados, 36 e 54, por exemplo, determinaremos seu maior divisor comum dividindo o maior

pelo menor; se houver resto na divisão, divideremos o número que funcionou como divisor na divisão antecedente pelo resto, e assim sucessivamente, até que a divisão seja exata. O último divisor é o maior divisor comum dos dois números. Assim, registrando o quociente de cada divisão ao alto do respectivo divisor:

$$\begin{array}{r|l|l} & 1 & 2 \\ 54 & 36 & 18 \\ \hline 18 & 00 & \end{array}$$

Assim,

$$54 \text{ D } 36 \text{ ou } 54 \wedge 36 = 18 \text{ (último divisor)}$$

Como a maximização é associativa (vimos no volume 4), podemos associar os seus termos assim $(54 \text{ D } 36) \text{ D } 90$. Então, acharemos agora, pelo mesmo processo acima, o maior divisor comum de 18 e 90, pois $(54 \text{ D } 36) \text{ D } 90 = 18$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ 90 & 18 \\ \hline 00 & \end{array}$$

Logo, o maior divisor comum dos números dados é 18.

Outro exemplo: Calcular: $(144 \text{ D } 60) \text{ D } 42$

$$\begin{array}{r|l|l|l} & 2 & 2 & 3 \\ 144 & 60 & 24 & 12 \\ \hline 24 & 12 & 00 & \end{array}$$

Então, $144 \text{ D } 60 \text{ ou } 144 \wedge 60 = 12$

$$\begin{array}{r|l|l} & 2 & 3 \\ 42 & 12 & 6 \\ \hline 06 & 0 & \end{array}$$

Logo, $(144 \text{ D } 60) \text{ D } 42 = 6$

MÚLTIPLOS COMUNS — O MENOR MÚLTIPLO COMUM MINIMAÇÃO

Sabemos que os conjuntos de múltiplos de 4 e 6, por exemplo, são:

$$M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \dots\}$$

$$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, \dots\}$$

Também sabemos que os múltiplos comuns de 4 e 6 são aqueles números que pertencem ao mesmo tempo como elementos dos conjuntos M_4 e M_6 . Logo, são os que pertencem ao conjunto-intersecção de ambos:

$$M_4 \cap M_6 = \{0, 12, 24, \dots\}$$

Mas, o que nos interessa, na realidade, é determinar o *menor* dos múltiplos comuns dos números dados, diferente de zero, uma vez que todos os demais são múltiplos desse menor.

Assim, no conjunto dos múltiplos comuns de 4 e 6, interessa-nos, particularmente, o número 12 (menor múltiplo comum diferente de zero) e usaremos a seguinte notação:

$$M_4 \cap M_6 = \{0, 12, 24, \dots\}$$

↓
M

A operação que determina o menor múltiplo comum (diferente de zero) de dois ou mais números naturais é denominada *Minimação*.

O resultado da operação é o *menor múltiplo comum* dos números dados.

Abreviadamente, dizemos que o menor múltiplo comum de 4 e 6 = 12, assim:

$$4 \text{ M } 6 = 12$$

ou $4 \vee 6 = 12$

O assunto *minimação* foi tratado e exemplificado suficientemente em nosso volume 4, na parte que podemos ensinar a alunos de escola primária.

Vimos que, para determinar o menor múltiplo comum de dois ou mais números naturais podemos formar os conjuntos dos múltiplos de cada um dos números considerados, calcular o conjunto-intersecção deles (que é o conjunto de seus múltiplos comuns) e determinar entre os elementos deste conjunto o menor número diferente de zero.

Este processo é muito importante porque é através dele que temos o conceito da operação *minimação*. Por este motivo, só demos esse processo para ser ensinado na escola primária.

Podemos, porém, procurar um processo mais rápido, como fizemos no caso da *maximação*, para quando tivermos que operar com os múltiplos de muitos números ao mesmo tempo (ou quando os números dados forem muito grandes).

Raciocinemos com os números cujo menor múltiplo comum queremos determinar expressos como produtos de fatores primos. Seja, por exemplo, a determinação do menor múltiplo comum de 12 e 15.

Sabemos que:

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$\text{e } 45 = 3^2 \times 5$$

Também sabemos que todo número é múltiplo de si mesmo. Logo, 12 é múltiplo de 12 ou de $2^2 \times 3$ e 45 é múltiplo de 45 ou de $3^2 \times 5$.

Então, para que um número seja múltiplo comum de 12 e 45, deve ser ao mesmo tempo múltiplo dos números que expressaremos assim:

$$2 \times 2 \times 3$$

$$\text{e } 3 \times 3 \times 5$$

O fator 3 aparece em ambos os numerais, com expoentes diferentes (1 e 2) e, propositadamente, o escrevemos um abaixo do outro.

Podemos concluir, observando os dois produtos, que o número $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ é múltiplo comum dos fatores $2^2 \times 3$ e $3^2 \times 5$. E mais, que ele é o menor múltiplo comum dos números dados porque, se retirarmos qualquer um dos fatores de $2^2 \times 3^2 \times 5$, o produto obtido não será mais múltiplo comum dos números dados.

Assim, podemos concluir:

“O menor múltiplo comum de dois ou mais números naturais é determinado pelo produto de todos os fatores primos (comuns e não

comuns) dos números dados, cada fator elevado ao maior expoente com que aparece nas fatorações completas daqueles números".

Logo, sendo

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$\text{e } 45 = 3^2 \times 5$$

concluimos que:

$$12 \text{ M } 45 \text{ ou } 12 \vee 45 = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = \underline{180}$$

Podemos, agora, introduzir um velho algoritmo, semelhante ao empregado para a maximização, muito conhecido, e que consiste na fatoração simultânea dos números dados. A diferença está em que, no caso já estudado, nos interessávamos particularmente pelos fatores primos a todos os números. Agora, faremos a fatoração completa dos números considerados, simultaneamente. Assim:

Sejam os números 12, 18 e 30:

12 - 18 - 30	2	} fatores primos dos números dados (comuns e não comuns)
6 - 9 - 15	2	
3 - 9 - 15	3	
1 - 3 - 5	3	
1 - 1 - 5	5	
1 - 1 - 1		

Os fatores encontrados são já os fatores primos do menor múltiplo comum (fatores comuns e não comuns com os maiores expoentes).

Assim,

$$(12 \text{ M } 18) \text{ M } 30 \text{ ou } (12 \vee 18) \vee 30 = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = \underline{180}$$

Justificação do algoritmo acima: quando um fator primo é divisor de pelo menos um dos números dados, é fator também de qualquer de seus múltiplos comuns. Ao efetuarmos a fatoração simultânea e completa dos números dados, cada fator primo é considerado o menor número de vezes possível. Logo, a quantidade de vezes que cada fator primo aparece na fatoração simultânea e completa é a menor possível para formar um múltiplo comum, sendo, portanto, o seu produto, o *menor múltiplo comum* dos números considerados.

PROPRIEDADES DA MAXIMAÇÃO E MINIMAÇÃO

Vimos já, em nosso volume 4, algumas dessas propriedades. Assim, apenas diremos que:

1 — Tanto a maximização como a minimização possuem a *propriedade comutativa*:

$$a) 32 \text{ D } 56 = 56 \text{ D } 32$$

$$b) 12 \text{ M } 27 = 27 \text{ M } 12$$

2 — Tanto uma como outra das operações que estamos estudando possuem a *propriedade associativa*:

$$a) (15 \text{ D } 20) \text{ D } 28 = 15 \text{ D } (20 \text{ D } 28)$$

$$b) (16 \text{ M } 9) \text{ M } 24 = 16 \text{ M } (9 \text{ M } 24)$$

3 — A maximização e a minimização não possuem a propriedade do fechamento, isto é, existem casos, embora excepcionais, de não haver no conjunto dos números naturais, dado um par de números, um terceiro que seja o seu maior divisor comum, o mesmo acontecendo em relação ao menor múltiplo comum. Basta um contra-exemplo para que a operação deixe de possuir a propriedade. Vejamos:

1.º) $0 \text{ D } 0 = ?$ (não existe, pois o conjunto dos divisores de zero tem infinitos elementos);

2.º) $5 \text{ M } 0 = ?$ (não existe, embora o zero seja múltiplo dos números dados, pois o conceito de menor múltiplo comum exclui o zero como resultado).

4 — *Elemento neutro*:

a) O elemento neutro da maximização é o número zero.

$$5 \text{ D } 0 = 5 \text{ e } 0 \text{ D } 5 = 5$$

Basta interseccionar os dois conjuntos de divisores do exemplo para nos certificarmos da veracidade da afirmação acima:

$$D_1 = \{1, 5\}$$

$$D_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

Lembremo-nos que, entre os conjuntos de divisores dos números naturais, o único que é infinito é o de divisores de zero.

$$D_1 \cap D_0 = \{1, 5\}$$

↓
D

Como a maximização é comutativa,

$$5 D 0 = 0 D 5 = 5$$

Logo, o elemento neutro da maximização é o zero.

b) O elemento neutro da minimização é o número um.

$$6 M 1 = 6 \text{ e } 1 M 6 = 6$$

Basta que interseccionemos os dois conjuntos de múltiplos do exemplo para nos certificarmos da veracidade da afirmação acima:

$$M_1 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, \dots\}$$

$$M_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

$$M_1 \cap M_0 = \{0, 6, 12, \dots\}$$

↓
M

Como a minimização é comutativa,

$$6 M 1 = 1 M 6 = 6$$

Logo, o elemento neutro da minimização é o um.

5 — Propriedade Distributiva.

Esta propriedade relaciona a maximização com a minimização, e vice-versa.

a) Propriedade distributiva da maximização (D) em relação à minimização (M):

$$6 D (10 M 15) = (6 D 10) M (6 D 15)$$

Verificação:

$$\begin{array}{ccc} 6 & D & 30 \\ & \swarrow & \searrow \\ & 6 & \end{array} = \begin{array}{ccc} 2 & M & 3 \\ & \swarrow & \searrow \\ & 6 & \end{array}$$

Como tivemos oportunidade de observar, no exemplo, a maximização (D) distribui-se entre os termos da minimização, entre parênteses: $10 M 15$.

Efetuada os cálculos indicados em ambos os membros da igualdade, notamos que ela é verdadeira.

b) Propriedade distributiva da minimização (M) em relação à maximização (D):

$$10 M (6 D 20) = (10 M 6) D (10 M 20)$$

Verificação:

$$\begin{array}{ccc} 10 & M & 2 \\ & \swarrow & \searrow \\ & 10 & \end{array} = \begin{array}{ccc} 30 & D & 20 \\ & \swarrow & \searrow \\ & 10 & \end{array}$$

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI

O conceito de números primos entre si foi dado no volume 4. São números cujo maior divisor comum é a unidade.

Exemplos: 12 e 25

$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$D_{25} = \{1, 5, 25\}$$

$$D_{12} \cap D_{25} = \{1\}$$

↓
D

Logo, os números 12 e 25 são *primos entre si*.

Pelo exemplo acima, vemos que os números não precisam ser primos individualmente para que sejam primos entre si. O número 12 é um número composto, tem seis divisores, e o número 25 também (tem três divisores). Entretanto, são primos entre si, não têm divisor comum diferente da unidade.

OS NÚMEROS PRIMOS SÃO PRIMOS ENTRE SI

Se dois números são primos, é fácil concluir que são também primos entre si. Como cada um dos números primos considerados só tem dois divisores, o próprio número e a unidade, e eles são dois números diferentes, o único fator comum a ambos é a unidade. Logo, os números primos são primos entre si.

Exemplos: 17 e 31

$$D_{17} = \{1, 17\}$$

$$D_{31} = \{1, 31\}$$

$$D_{17} \cap D_{31} = \{1\}$$

↓
D

DOIS NÚMEROS CONSECUTIVOS SÃO PRIMOS ENTRE SI

Sejam os números consecutivos 8 e 9.

$$D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$$

$$D_9 = \{1, 3, 9\}$$

$$D_8 \cap D_9 = \{1\}$$

Outro exemplo: os números consecutivos 48 e 49.

$$D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

$$D_{49} = \{1, 7, 49\}$$

$$D_{48} \cap D_{49} = \{1\}$$

Mais um exemplo: os números consecutivos 0 e 1.

$$D_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$D_1 = \{1\}$$

$$D_0 \cap D_1 = \{1\}$$

Pelos exemplos dados e por quantos queiramos empregar, concluímos que dois números consecutivos são sempre primos entre si.

Justificando melhor: se um número possui o fator 2, (é par) o seu vizinho (na sucessão natural dos números) não possui esse fator (porque é ímpar); se um número possui o fator 3, o seu vizinho não o possui, porque só o número que contém três unidades a mais ou três unidades a menos é que possui o fator três. E assim, raciocinando com a série de fatores primos que os números naturais podem possuir ou não, chegamos à conclusão de que não existem números consecutivos que não sejam primos entre si.

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI E O ZERO

Qual é o maior divisor comum de um número natural qualquer e zero?

Vejamos:

$$D_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

$$D_4 = \{1, 2, 4\}$$

$$D_0 \cap D_4 = \{1, 4\}$$

Logo, 0 e 4 não são primos entre si.

Outro exemplo:

$$D_2 = \{1, 2\}$$

$$D_0 \cap D_2 = \{1, 2\}$$

Zero e 2 também não são primos entre si.

Assim, podemos concluir que zero e qualquer número natural (diferente de 1, porque 1 é seu consecutivo) não são primos entre si.

O MENOR MÚLTIPLO COMUM DE NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI

Sabemos que o maior divisor comum de dois ou mais números primos entre si é a unidade.

E o menor múltiplo comum?

Sendo o menor múltiplo comum de dois ou mais números naturais o produto de todos os seus fatores primos, comuns e não, e como estes são todos diferentes, temos que o seu mínimo múltiplo comum é o produto de todos os fatores primos dos números dados. Então, o mínimo múltiplo comum de dois ou mais números primos entre si é o seu produto.

Exemplos: 8 e 9, que sabemos serem primos entre si.

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$9 = 3 \times 3 = 3^2$$

$$8 \text{ M } 9 \text{ ou } 8 \vee 9 = 2^3 \times 3^2 = \underline{8 \times 9} = 72$$

Outro exemplo: 12 e 25, que também sabemos serem primos entre si.

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

$$25 = 5 \times 5 = 5^2$$

$$12 \text{ M } 25 \text{ ou } 12 \vee 25 = (2^2 \times 3) \times 5^2 = \underline{12 \times 25} = 300$$

Observações:

1.º) O maior divisor comum de dois números, quando o maior é divisível pelo menor, é o menor.

Exemplos: $8 \text{ D } 4 = 4$ (4 é divisor de 4 e de 8)

$12 \text{ D } 3 = 3$ (3 é divisor de 3 e de 12)

$5 \text{ D } 15 = 5$ (5 é divisor de 5 e de 15)

2.º) O menor múltiplo comum de dois números, quando o maior é divisível pelo menor, é o maior.

Exemplos: $8 \text{ M } 4 = 8$ (8 é múltiplo de 8 e de 4)

$12 \text{ M } 3 = 12$ (12 é múltiplo de 12 e de 3)

$5 \text{ M } 15 = 15$ (15 é múltiplo de 15 e de 5)

3.º) Dividindo-se dois números pelo seu maior divisor comum, os quocientes obtidos serão primos entre si.

Exemplos: Dados os números 36 e 60, cujo maior divisor comum é 12 e dividindo cada um deles por 12, os quocientes 3 e 5 são primos entre si.

Conclusão: De tudo que dissemos a respeito da maximização e minimização e dos exemplos dados, assim, como das propriedades de cada uma das operações, podemos concluir que:

1.º) A operação que a cada par ordenado de números naturais, não simultaneamente nulos, associa o seu maior divisor comum, é a *maximização*.

Assim:

$$\begin{array}{ccc} (15;20) & \xrightarrow{\text{D}} & 5 \\ \uparrow & \text{operação} & \uparrow \\ \text{têrmos} & & \text{resultado} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (0;4) & \xrightarrow{\text{D}} & 4 \\ \uparrow & \text{operação} & \uparrow \\ \text{têrmos} & & \text{resultado} \end{array}$$

2.º) A operação que a cada par ordenado de números naturais diferentes de zero associa o seu menor múltiplo comum, é a *minimização*.

Assim:

$$\begin{array}{ccc} (5;8) & \xrightarrow{\text{M}} & 40 \\ \uparrow & \text{operação} & \uparrow \\ \text{têrmos} & & \text{resultado} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (1;6) & \xrightarrow{\text{M}} & 6 \\ \uparrow & \text{operação} & \uparrow \\ \text{têrmos} & & \text{resultado} \end{array}$$

NÚMEROS PRIMOS MENORES QUE 1.000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

1 — Complete as equivalências:

- a) 12 é múltiplo de 3 \Leftrightarrow 3 é de 12.
 b) 15 é \Leftrightarrow 5 é divisor de ...
 c) 36 é \Leftrightarrow 9 é divisor de ...
 d) 100 é múltiplo de 10 \Leftrightarrow ... é

2 — Complete as sentenças abaixo tornando-as verdadeiras:

- a) 12 não é múltiplo de 5, porque 5 não é de 12.
 b) 16 não é múltiplo de 3, porque
 c) 27 não é múltiplo de 4, porque

3 — Escreva os seguintes conjuntos de múltiplos:

- a) Múltiplos de 3 (indicado por M_3)
 b) Múltiplos de 6 (indicado por M_6)
 c) Múltiplos de 9 (indicado por M_9)
 d) Múltiplos de 1 (indicado por M_1)
 e) (Múltiplos de 0 (indicado por M_0))

4 — Escreva V ou F, dentro dos parênteses, conforme você ache que cada uma das sentenças seguintes é verdadeira ou é falsa:

- a) Geralmente, o conjunto dos múltiplos de um número é infinito, isto é, tem um número infinito de elementos. ()
 b) Zero é múltiplo de qualquer número. ()
 c) O conjunto dos múltiplos de zero é um conjunto unitário: $M_0 = \{0\}$ ()
 d) O conjunto dos múltiplos de zero é também um conjunto com infinitos elementos. ()
 e) Todo número é múltiplo de si mesmo. ()
 f) O único conjunto de múltiplos que não é infinito é o conjunto de múltiplos de zero. ()

5 — Abaixo você vê representados dois conjuntos, M_5 e M_6 , colocados em correspondência biunívoca:

$$M_5 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, \dots\}$$

Adicionando os elementos que se correspondem, obtemos um novo conjunto:

$$M_5 + M_6 = \{0, 11, 22, 33, 44, 55, \dots\}$$

- a) O novo conjunto obtido pelos elementos que se correspondem biunívocamente nos conjuntos M_5 e M_6 é o conjunto de múltiplos de que número ?
 b) Então, $M_5 + M_6 = M$?

6 —

- a) Escreva os conjuntos dos múltiplos de 8 e de 9, M_8 e M_9 , e estabeleça uma relação biunívoca entre os seus elementos.
 b) $M_8 + M_9$ é o conjunto de múltiplos de que número ?
 c) Complete: $M_8 + M_9 = \dots$

7 —

- a) Escreva os conjuntos de múltiplos de 10 e de 3, M_{10} e M_3 , e estabeleça uma relação biunívoca entre os seus elementos.
 b) Determine as diferenças entre os elementos que se correspondem biunívocamente e responda: o conjunto assim formado é o conjunto dos múltiplos de que número ?
 c) $M_{10} - M_3 = M$?

8 — Coloque V ou F, entre os parênteses, conforme as sentenças que seguem sejam verdadeiras ou falsas:

- a) $M_5 + M_8 = M_{13}$ ()
 b) $M_9 + M_9 = M_9$ ()
 c) $M_6 + M_4 = M_4 + M_6$ ()
 d) $M_8 - M_2 = M_6$ ()
 e) $M_{15} - M_3 = M_{10}$ ()

9 — 24 é múltiplo de 6 e de 60 também. Logo,

- a) $(60 + 24)$ é múltiplo de ...
 b) $(60 - 24)$ é múltiplo de ...

10 — Se 30 e 45 são múltiplos de 5, posso concluir que:

- a) $(45 + 30)$ é
 b) $(49 - 30)$ é

11 — Escreva os seguintes conjuntos:

- a) divisores de 10 (indicado por D_{10});
 b) divisores de 24 (indicado por D_{24});
 c) divisores de 25 (indicado por D_{25});
 d) divisores de 5 (indicado por D_5);
 e) divisores de 1 (indicado por D_1);
 f) divisores de 0 (indicado por D_0).

12 — Quantos divisores tem um número primo ?

13 — Quantos divisores tem o número 1 ?

14 — O número 1 é primo ? Por quê ?

15 — Do seguinte conjunto de números, forme dois subconjuntos: P = todos os números primos e C = todos os números compostos.

$$\{2, 4, 7, 12, 13, 17, 21, 31, 35, 39, 47\}$$

16 — Qual é o menor divisor de um número ?

17 — Qual é o menor múltiplo de um número diferente de zero ?

18 — Qual é o maior divisor de um número diferente de zero ?

19 — Qual é o maior divisor de 568 ? E o menor ?

20 — São primos todos os números ímpares ?

21 — Todos os números pares são compostos ?

22 — São pares todos os números compostos ?

23 — São ímpares todos os números primos ?

24 — Verifique se os números 558, 1.242 e 8.998 e 6.126.120 são divisíveis por 2, 3, 4, etc. (todos os divisores cujos critérios de divisibilidade foram estudados.)

25 — Qual é o maior resto que pode deixar um número que não é divisível por 4 quando efetuamos a sua divisão aproximada por 4 ?

26 — Efetue a fatoração completa dos números:

a) 48; b) 15; c) 125; d) 2.116; e) 8.451.

27 — Extraia a raiz quadrada exata dos números que seguem, pela fatoração completa:

a) 441; b) 4.225; c) 7.396; d) 9.409.

28 — Determine quantos divisores e quais são eles:

a) do número 54;

b) do número 144;

c) do número 520.

29 — Determine, pela interseção dos respectivos conjuntos de divisores, o maior divisor comum de:

a) 8 e 12; b) 18 e 24; c) 16, 24 e 40; d) 22, 33 e 44.

30 — Determine, por qualquer das técnicas que você conhece, o maior divisor comum de:

a) 212 e 1.431; b) 144 e 520; c) 425, 800 e 950; d) 168, 252, 280 e 917.

31 — Calcule, pela interseção dos respectivos conjuntos de múltiplos, o menor múltiplo comum de:

a) 6 e 48; b) 12 e 30; c) 5, 10 e 15; d) 2, 3, 4 e 6.

32 — Calcule, por qualquer das técnicas que você conhece, o menor múltiplo comum de:

a) 12 e 14; b) 125 e 360; c) 96 e 108; d) 8, 10, 15 e 32.

33 — Qual é o menor múltiplo comum de dois números primos entre si? E o maior divisor comum?

34 — Qual é o maior divisor comum de dois números consecutivos? E o menor múltiplo comum? Por quê?

35 — Dois números primos são sempre primos entre si? Por quê?

NÚMEROS RACIONAIS

REVISÃO DE CONCEITO

Muito já falamos sobre números racionais nos terceiro e quarto volumes desta série. Para não repetirmos tudo o que lá foi dito, diremos apenas que o conjunto dos racionais constitui o conjunto-reunião de todos os números naturais com todos os números fracionários. Assim:

$$\{\text{números racionais}\} = \{\text{números naturais}\} \cup \{\text{números fracionários}\}$$

Portanto, tudo que tratamos até aqui neste volume e nos que o antecederam, foi sobre números racionais. Não dizíamos "números racionais" porque nos referíamos a apenas uma parte deles, aos naturais. Vamos, agora, tratar da outra parte, isto é, dos números fracionários.

Como também sobre números fracionários muito coisa já foi dita, procuraremos, na medida do possível, nos abster das repetições. Falaremos, de início, sobre as técnicas operatórias dos números fracionários, assunto ainda não tratado.

Vimos no volume anterior que todo número racional pode ser escrito sob a forma de fração.

Realmente, todo número natural pode ser representado por uma fração de denominador 1, podendo, pois, serem englobadas as duas espécies conhecidas de números (naturais e fracionários) num único conjunto denominado conjuntos dos números racionais.

Portanto, quando falamos em número racional, estamos nos referindo tanto aos números naturais como aos fracionários, indistintamente.

ADIÇÃO

Adição de números racionais é a operação que associa a um par de números racionais a sua soma.

Exemplo:

A operação que associa ao par $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$ o número racional $\frac{3}{5}$ que é a sua soma, chama-se adição.

Como os números racionais podem ser sempre expressos sob a forma de fração, trataremos das operações de números racionais como sendo operações com frações (que são numerais dos números racionais).

Podemos distinguir dois casos na adição de duas frações:

1.º caso: As frações têm o mesmo denominador.

Já procuramos mostrar que os alunos da escola primária devem operar com números fracionários pela compreensão de cada situação e de acordo com os conceitos que vão aos poucos adquirindo. Logo, um aluno de 4.ª série deve saber adicionar frações que têm o mesmo denominador, como vimos em nosso quarto volume. Vamos, agora, daquelas experiências, deduzir uma regra que permita adicionar duas frações quaisquer que tenham o mesmo denominador. É a seguinte:

“Para adicionar duas frações homogêneas (de mesmo denominador), adicionamos os numeradores das parcelas e conservamos o denominador comum”.

Se as frações a serem adicionadas forem mais de duas, empregaremos a propriedade associativa da adição (válida para todos os números racionais) e adicionaremos segundo a técnica acima descrita.

Exemplos:

$$1.º) \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$2.º) \frac{8}{13} + \frac{3}{13} = \frac{11}{13}$$

$$3.º) \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) + \frac{4}{9} = \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$$

Podemos, também, fazer assim:

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2 + 1 + 4}{9} = \frac{7}{9}$$

$$4.º) \frac{3}{25} + \frac{8}{25} + \frac{4}{25} = \frac{3 + 8 + 4}{25} = \frac{15}{25}$$

$$5.º) \frac{9}{132} + \frac{28}{132} + \frac{1}{132} + \frac{33}{132} = \frac{9 + 28 + 1 + 33}{132} = \frac{71}{132}$$

2.º caso: As frações têm denominadores diferentes.

Este caso pode ser reduzido ao primeiro considerando as frações equivalentes às dadas e que tenham o mesmo denominador. Vimos isso em nosso volume anterior e dissemos que a criança (ou o principiante de qualquer idade) deve procurar as frações equivalentes às dadas em suas respectivas classes de equivalência. Este trabalho deve ser realizado no início das operações com frações até que a pessoa que está aprendendo fixe bem todos os passos da operação sem mecanizá-la, sabendo o que está fazendo. Só assim a redução das frações heterogêneas (de denominadores diferentes) às suas equivalentes homogêneas é bem entendida pelo principiante. Após um estágio mais ou menos longo realizando a redução por esse processo (toda a 4.ª série primária, ou quase toda), quando já de posse dos conhecimentos sobre múltiplos e divisores, e em especial do mínimo múltiplo comum (por qualquer processo), será iniciado o estudo da técnica rápida para a conversão de frações ao menor denominador comum.

Exemplo: $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

Os denominadores das parcelas são 3 e 4, números que já sabemos serem primos entre si, pois são consecutivos. Logo, o seu menor múltiplo comum é o seu produto.

$$3 \times 4 = 12$$

O número 12, sendo múltiplo de 3 e de 4, figurará como denominador de uma das frações da classe de equivalência da fração $\frac{2}{3}$, o mesmo ocorrendo com a fração $\frac{3}{4}$. Logo, já sabemos que as frações equivalentes às frações dadas (com o menor denominador comum) terão por denominador o número 12.

Assim:

$$\frac{2}{3} = \frac{?}{12} \quad \text{e} \quad \frac{3}{4} = \frac{?}{12}$$

Vimos em nosso volume anterior que as frações equivalentes têm uma propriedade muito interessante: o produto do numerador da primeira delas pelo denominador da segunda é igual ao produto do numerador da segunda pelo denominador da primeira.

Então, conhecendo o denominador das frações que estamos procurando, praticamente elas já estão determinadas:

$$\text{Se } \frac{2}{3} = \frac{\square}{12} \Leftrightarrow 3 \times \square = 2 \times 12 \text{ ou } \square = (2 \times 12) \div 3 = 8$$

e a fração procurada, equivalente a $\frac{2}{3}$, é $\frac{8}{12}$.

Analogamente, se

$$\frac{3}{4} = \frac{\square}{12} \Leftrightarrow 4 \times \square = 3 \times 12 \text{ ou } \square = (3 \times 12) \div 4 = 9$$

e a fração de denominador 12 equivalente a $\frac{3}{4}$ é $\frac{9}{12}$.

Não precisaremos, sempre, fazer todos esses cálculos. Basta que observemos as frações dadas e as operações realizadas para determinar cada um dos numeradores procurados.

Que fizemos para determinar o numerador 8 e conhecer a fração equivalente à primeira fração? O seguinte: $(2 \times 12) \div 3$, isto é, multiplicamos o numerador da fração dada (2) pelo menor múltiplo comum encontrado (12) e dividimos o produto pelo denominador da fração dada (3). Encontraríamos o mesmo resultado se operássemos assim: $\square = (12 \div 3) \times 2$, isto é, se efetuássemos, em primeiro lugar, a divisão e, depois, a multiplicação (porque sendo a multiplicação e a divisão operações de

segunda espécie, como dissemos em nosso volume 3 quando tratamos das expressões numéricas, tanto faz efetuarmos uma como outra em primeiro lugar, desde que só haja dessas operações na expressão).

$$\text{Assim, } (2 \times 12) \div 3 = (12 \div 3) \times 2 = 8$$

Logo, para determinarmos o numerador da fração equivalente à dada, temos a seguinte regra, muito conhecida: dividimos o menor múltiplo comum dos denominadores das frações dadas por cada um dos respectivos denominadores e multiplicamos pelos numeradores correspondentes. Assim:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8 + 9}{12}$$

$$(12 \div 3) \times 2 = 8$$

$$(12 \div 4) \times 3 = 9$$

$$\text{ou: } \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8 + 9}{12} = \frac{17}{12}$$

$$\text{Outro exemplo: } \frac{3}{5} + \frac{2}{4} + \frac{1}{8}$$

$$5 \text{ M } 4 \text{ M } 8 = 40$$

Logo, o denominador comum será 40 e

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{4} + \frac{1}{8} = \frac{24 + 20 + 5}{40} = \frac{49}{40}$$

$$\left. \begin{array}{l} (40 \div 5) \times 3 = 24 \\ (40 \div 4) \times 2 = 20 \\ (40 \div 8) \times 1 = 5 \end{array} \right\} \text{ numeradores das frações equivalentes às dadas.}$$

Quando a soma é uma fração imprópria, como no caso de nossos dois exemplos anteriores, podemos "extrair os inteiros" e dar-lhes uma forma mista, bastando para isso dividir o numerador pelo denominador. O quociente obtido é a parte *natural* da fração imprópria. O resto é

a parte fracionária, menor que 1, que continuará, como é óbvio, com o mesmo denominador da fração equivalente à forma mista. Assim:

a) No primeiro exemplo, onde a soma é $\frac{17}{12}$

Temos:

$$\begin{array}{r} 17 \overline{) 12} \\ 5 \quad 1 \end{array} \quad e \quad \frac{17}{12} = 1 \frac{5}{12} \leftarrow \text{forma mista}$$

↑
fração imprópria

b) No segundo exemplo, onde a soma é $\frac{49}{40}$

Temos:

$$\begin{array}{r} 49 \overline{) 40} \\ 9 \quad 1 \end{array} \quad e \quad \frac{49}{40} = 1 \frac{9}{40} \leftarrow \text{forma mista}$$

↑
fração imprópria

Observação: Daqui para a frente, os resultados das operações, sempre que forem frações impróprias, serão reduzidos à sua forma mista. Também, se os resultados não forem a expressão mais simples do número racional, isto é, a sua menor determinação, faremos a sua simplificação, pelos processos já estudados.

Quando a adição envolve números naturais e formas mistas, transformamos as formas mistas em frações impróprias e os números naturais em frações aparentes de denominador 1.

Exemplo: $3 \frac{2}{5} + 9$

Temos: $3 \frac{2}{5} = \frac{(3 \times 5) + 2}{5} = \frac{17}{5}$

e $9 = \frac{9}{1}$

Logo,

$$3 \frac{2}{5} + 9 = \frac{17}{5} + \frac{9}{1} = \frac{17 + 45}{5} = \frac{62}{5} = 12 \frac{2}{5}$$

Podemos, também, o que é mais simples, adicionar as partes naturais e as partes fracionárias separadamente. Assim:

$$3 \frac{2}{5} + 9 = (3 + 9) + \frac{2}{5} = 12 + \frac{2}{5} = 12 \frac{2}{5}$$

Outro exemplo: $2 \frac{1}{4} + 5 + 1 \frac{3}{5}$

$$2 \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$5 = \frac{5}{1}$$

$$1 \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

Logo,

$$2 \frac{1}{4} + 5 + 1 \frac{3}{5} = \frac{9}{4} + \frac{5}{1} + \frac{8}{5} = \frac{45 + 100 + 32}{20} =$$

$$\frac{177}{20} = 8 \frac{17}{20}$$

Ou:

$$\begin{aligned} 2 \frac{1}{4} + 5 + 1 \frac{3}{5} &= (2 + 5 + 1) + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{5} \right) = \\ &= 8 + \frac{5 + 12}{20} = 8 \frac{17}{20} \end{aligned}$$

SUBTRAÇÃO

A operação que associa a um par de números racionais a sua diferença é denominada subtração.

Exemplo:

A subtração é a operação que associa ao par de racionais $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ o número $\frac{1}{5}$ que é a sua diferença.

Como fizemos com a adição, trataremos da subtração de racionais como subtração de frações.

Podemos, como na adição de frações, distinguir dois casos na subtração de duas frações, dadas numa certa ordem.

1.º caso: Os denominadores das frações dadas são iguais (frações homogêneas).

Neste caso, basta encontrar a diferença entre os numeradores e conservar o denominador.

$$\text{Exemplo: } \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

Temos:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Outro exemplo: } \frac{5}{8} - \frac{2}{8}$$

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8}$$

2.º caso: As frações dadas têm denominadores diferentes (frações heterogêneas).

Como na adição, reduzimos as frações dadas a frações equivalentes de mesmo denominador e operamos como no 1.º caso. Exemplo: $\frac{5}{8} - \frac{3}{5}$

Temos:

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{5} = \frac{25-24}{40} = \frac{1}{40}$$

$$\text{Outro exemplo: } \frac{9}{4} - \frac{11}{7}$$

Temos:

$$\frac{9}{4} - \frac{11}{7} = \frac{63-44}{28} = \frac{19}{28}$$

Se a subtração de frações envolver números naturais e formas mistas, a operação será efetuada com os números naturais transformados em frações aparentes de denominador 1 e as formas mistas transformadas em frações impróprias. Por exemplo: $6\frac{5}{9} - 3$

Logo, em frações impróprias. Por exemplo: $6\frac{5}{9} - 3$

$$\begin{cases} 6\frac{5}{9} = \frac{59}{9} \\ 3 = \frac{3}{1} \end{cases}$$

Logo,

$$6\frac{5}{9} - 3 = \frac{59}{9} - \frac{3}{1} = \frac{59-27}{9} = \frac{32}{9} = 3\frac{5}{9}$$

Ou:

$$6\frac{5}{9} - 3 = \left(6 + \frac{5}{9}\right) - 3 = (6-3) + \frac{5}{9} = 3 + \frac{5}{9} = 3\frac{5}{9}$$

Outro exemplo: $8 \frac{4}{5} - 2 \frac{5}{6}$

$$\begin{cases} 8 \frac{4}{5} = \frac{44}{5} \\ 2 \frac{5}{6} = \frac{17}{6} \end{cases}$$

Logo,

$$8 \frac{4}{5} - 2 \frac{5}{6} = \frac{44}{5} - \frac{17}{6} = \frac{264 - 85}{30} = \frac{179}{30} = 5 \frac{29}{30}$$

Possibilidade da subtração de frações: a subtração de frações só é possível quando o minuendo (1.ª fração) é maior ou igual ao subtraendo (2.ª fração). Por isso, dizemos: subtração de frações dadas em uma certa ordem.

ADIÇÕES E SUBTRAÇÕES COMBINADAS

As mesmas normas convencionais empregadas na resolução de operações combinadas com números naturais são utilizadas nas expressões (operações combinadas) de números fracionários. São todos números racionais, como vimos no início deste capítulo. Portanto, tudo quanto se estudou a respeito dos naturais (conceitos, convenções, propriedades) vale para os fracionários.

Exemplos:

$$1.º) \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right)$$

Temos:

$$\frac{3}{5} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{5} + \left(\frac{3-2}{4} \right) = \frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{12+5}{20} = \frac{17}{20}$$

$$2.º) \left(\frac{6}{7} + \frac{2}{5} \right) - \frac{2}{3}$$

Temos:

$$\left(\frac{6}{7} + \frac{2}{5} \right) - \frac{2}{3} = \left(\frac{30+14}{35} \right) - \frac{2}{3} = \frac{44}{35} - \frac{2}{3} = \frac{132-70}{105} = \frac{62}{105}$$

$$3.º) 5 \frac{2}{3} + \left(6 - 2 \frac{3}{5} \right)$$

Temos:

$$5 \frac{2}{3} + \left(6 - 2 \frac{3}{5}\right) = \frac{17}{3} + \left(\frac{6}{1} - \frac{13}{5}\right) = \frac{17}{3} + \frac{30 - 13}{5} =$$

$$= \frac{17}{3} + \frac{17}{5} = \frac{85 + 51}{15} = \frac{136}{15} = 9 \frac{1}{15}$$

$$4.^{\circ}) 20 - \left[8 - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right)\right]$$

Temos:

$$20 - \left[8 - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right)\right] = 20 - \left[8 - \left(\frac{12 + 10}{15}\right)\right] =$$

$$= 20 - \left[\frac{8}{1} - \frac{22}{15}\right] = 20 - \left[\frac{120 - 22}{15}\right] = \frac{20}{1} - \frac{98}{15} =$$

$$= \frac{300 - 98}{15} = \frac{202}{15} = 13 \frac{7}{15}$$

$$5.^{\circ}) \frac{97}{15} - \left\{\frac{3}{4} + \left[5 - \left(3 \frac{1}{4} + 2 \frac{2}{3}\right)\right]\right\} + \frac{3}{5}$$

Temos:

$$\frac{97}{15} - \left\{\frac{3}{4} + \left[5 - \left(3 \frac{1}{4} + 2 \frac{2}{3}\right)\right]\right\} + \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{97}{15} - \left\{\frac{3}{4} + \left[5 - \left(\frac{13}{4} + \frac{8}{3}\right)\right]\right\} + \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{97}{15} - \left\{\frac{3}{4} + \left[5 - \left(\frac{39 - 32}{12}\right)\right]\right\} + \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{97}{15} - \left\{\frac{3}{4} + \left[\frac{5}{1} - \frac{7}{12}\right]\right\} + \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{97}{15} - \left\{\frac{3}{4} + \left[\frac{60 - 7}{12}\right]\right\} + \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{97}{15} - \left\{\frac{3}{4} + \frac{53}{12}\right\} + \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{97}{15} - \left\{\frac{9 + 53}{12}\right\} + \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{97}{15} - \frac{62}{12} + \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{388 - 310 + 36}{60} = \frac{114}{60} = \frac{114 \div 6}{60 \div 6} = \frac{19}{10} = 1 \frac{9}{10}$$

Observação: Dividimos os dois termos da fração $\frac{114}{60}$ por 6 para simplificá-la, pois 6 é o maior divisor comum dos números 114 e 60.

Uma expressão como a que acabamos de resolver (ou de reduzir ao seu numeral mais simples) poderia ter chegado a um final assim, por exemplo:

$$\frac{24 - 35 + 18}{12}$$

Como terminá-la? $24 - 35 = ?$

Se isso acontecer, raciocinaremos assim: as operações indicadas no numerador da fração mandam que se tire 35 unidades de 24 e depois acrescente-se 18 unidades à diferença. Ora, se não podemos retirar as 35 unidades de 24 porque 24 não as tem, juntemos antes as unidades que iriam ser juntadas depois e retiremos, a seguir, as 35 unidades. Assim:

$$\frac{24 - 35 + 18}{12} = \frac{(24 + 18) - 35}{12} = \frac{42 - 35}{12} = \frac{7}{12}$$

Ao associarmos 24 a 18 para depois subtrair 35, não contrariamos as regras estudadas para a resolução de expressões, uma vez que só há, ali, operações de 1.ª espécie (adições e subtrações). Podemos, sempre que há várias adições e várias subtrações indicadas, reunir o primeiro

térmo a todos os que devem ser adicionados e, da soma assim obtida, retirar todos os números que devem ser subtraídos de uma só vez, reunidos em um só.

Assim:

$$25 - 12 + 13 - 18 - 5 + 20 = (25 + 13 + 20) - (12 + 18 + 5) = 58 - 35 = 23$$

MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação de racionais é a operação que associa a um par de números racionais o seu produto.

Exemplo:

O par $\left(\frac{3}{5}; \frac{2}{7}\right)$ é associado ao número racional $\frac{6}{35}$ pela operação multiplicação.

Para multiplicar um número racional por outro, nós já deduzimos a regra prática, para os alunos de 4.ª série, no volume 4: "dá-se para numerador da fração resultante o produto dos numeradores das frações dadas e, para denominador, o produto dos denominadores das mesmas frações". Assim:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{3 \times 5} = \frac{6}{15}$$

Nota: Se tivermos de multiplicar formas mistas, antes as reduzimos a frações impróprias. Assim:

$$2 \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{13}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{26}{15} = 1 \frac{11}{15}$$

Como a multiplicação é associativa, se tivermos de multiplicar várias frações ao mesmo tempo, multiplicamos as duas primeiras e o resultado pela terceira, etc. Na prática, podemos multiplicar todos os numeradores entre si, bem como os denominadores. Assim:

$$\frac{5}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{5 \times 2 \times 1 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 5} = \frac{30}{120} = \frac{30 \div 30}{120 \div 30} = \frac{1}{4}$$

Nota: Sempre que efetuamos multiplicações de frações, se possível, devemos simplificar os seus termos antes de calcular os produtos dos

mesmos. Para tanto, cancelamos os fatores comuns a qualquer numerador com qualquer denominador. Vejamos, no mesmo exemplo acima, a simplificação dos termos da multiplicação, conhecida como simplificação por cancelamento.

$$\frac{5}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \times \overset{1}{\cancel{2}} \times 1 \times \overset{1}{\cancel{3}}}{4 \times \underset{1}{\cancel{3}} \times \underset{1}{\cancel{2}} \times \underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{1}{4}$$

FRAÇÃO DE FRAÇÃO

O produto de uma fração por outra é também conhecido como "fração de fração". Assim, para se calcular os $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$, efetuamos o produto: $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

Podemos proceder de maneira idêntica se quisermos calcular a "fração de um número natural". Sabemos, por exemplo, que $\frac{2}{3}$ de 15 é igual a 10, pois $\frac{1}{3}$ de 15 é 5 e $\frac{2}{3}$ de 15 é 2×5 ou 10. Mas, poderemos calcular $\frac{2}{3}$ de 15 assim: $\frac{2}{3} \times \frac{15}{1} = \frac{30}{3} = 10$

Ou, empregando o cancelamento dos fatores comuns:

$$\frac{2}{3} \text{ de } 15 = \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\overset{5}{15}}{1} = \frac{10}{1} = 10$$

INVERSO MULTIPLICATIVO (ou elemento inverso da multiplicação): já vimos, no volume 4, que chamamos de *fração inversa* de outra à fração que tem por numerador o denominador da primeira e por denominador o numerador da primeira.

Assim, a fração $\frac{3}{5}$ tem por inversa a fração $\frac{5}{3}$.

A fração inversa de outra é também denominada "inverso multiplicativo" dessa outra.

Assim, o inverso multiplicativo de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$.

Observações:

Cada número racional (diferente de zero) tem o seu inverso multiplicativo.

O produto de qualquer número racional (diferente de zero) pelo seu inverso multiplicativo é igual a 1.

Exemplos:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

$$\frac{1}{5} \times \frac{5}{1} = 1$$

$$6 \times \frac{1}{6} = 1$$

O número racional zero não tem inverso multiplicativo: $\frac{0}{1} \times ?$
 ($\frac{1}{0}$ é numeral de nenhum número)

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

Além da propriedade do elemento inverso, valem para a multiplicação de frações tôdas as propriedades da multiplicação de números naturais. Como tais propriedades já são por demais conhecidas, daremos apenas exemplos de cada uma delas:

1.ª) *Comutativa*: Exemplo:

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$$

$$\frac{6}{35} = \frac{6}{35} \text{ (verdadeira)}$$

2.ª) *Elemento neutro*: o número 1.

$$\frac{3}{4} \times 1 = 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

↑ ↑
 elemento neutro

3.ª) *Fechamento*: Exemplos:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

↑ ↑ ↑
 número racional

outro exemplo:

$$\frac{3}{5} \times 8 = \frac{24}{5}$$

↑ ↑ ↑
 número racional

4.ª) *Associativa*. Exemplo:

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{2}{15} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{25}$$

$$\frac{4}{75} = \frac{4}{75} \text{ (verdadeira)}$$

Como vimos, a única propriedade nova introduzida foi a do "inverso multiplicativo".

DIVISÃO

Divisão é a operação que associa a um par de números racionais o seu quociente.

Para determinar o quociente de dois números racionais, dados numa certa ordem, multiplica-se o primeiro pelo inverso multiplicativo do segundo. Assim:

$$1.ª) \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$$

$$2.ª) 6 \div \frac{3}{5} = \frac{6}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{1} \text{ ou } 10$$

$$3.ª) \frac{3}{4} \div 5 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$$

$$4.ª) 20 \div 4 = \frac{20}{1} \times \frac{1}{4} = 5$$

Possibilidade: Podemos observar que no conjunto dos números racionais a divisão é sempre possível, desde que o divisor não seja zero, o que não acontecia quando trabalhávamos apenas com o conjunto dos números naturais.

$2 \div 5$, por exemplo, no conjunto dos naturais é impossível.

No conjunto dos números racionais, tal operação já é possível:

$$2 \div 5 = \frac{2}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Ao par (2; 5) a divisão associa o número racional $\frac{2}{5}$ que é o seu quociente.

Em conseqüência da possibilidade da divisão de dois números racionais quaisquer (excluído o caso do divisor zero), a propriedade do fechamento que a divisão de números naturais não possui, passa a valer para a divisão de números racionais.

Exemplos:

$$1.^{\circ}) \frac{3}{5} \div \frac{1}{4} = \frac{12}{5}$$

↑ ↑ ↑
número racional

$$2.^{\circ}) 7 \div 3 = \frac{7}{3}$$

↑ ↑ ↑
número racional

QUOCIENTE EXATO

A partir do conhecimento do inverso multiplicativo e da divisão de números racionais, podemos dizer que é sempre possível determinar o quociente exato de dois números racionais (sendo o segundo diferente de zero).

Exemplo: $35 \div 8$

No conjunto dos números naturais não existe número que seja quociente exato de 35 por 8, pois não há número natural que multiplicado por 8 dê o produto 35.

No conjunto dos números racionais, tal divisão é exata:

$$35 \div 8 = \frac{35}{1} \times \frac{1}{8} = \frac{35}{8}$$

O quociente de 35 por 8 é $\frac{35}{8}$ realmente, pois

$$\frac{35}{8} \times \frac{8}{1} = 35$$

EXPRESSÕES COM NÚMEROS RACIONAIS

O cálculo das operações indicadas nas expressões com números racionais segue a ordem que estudamos para expressões que envolvem apenas números naturais. Logo, não vamos repeti-la.

Exemplos:

$$1.^{\circ}) \frac{2}{5} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{1}}{\cancel{1}} = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{4+5}{10} = \frac{9}{10}$$

$$2.^{\circ}) \left(2\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 2\right) \times \frac{1}{2} + 5 =$$

$$= \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\right) \times \frac{1}{2} + 5 =$$

$$= \left(\frac{15+2}{6}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{2} + 5 =$$

$$= \frac{17}{6} + \left(\frac{15-4}{20}\right) \times \frac{1}{2} + 5 =$$

$$= \frac{17}{6} + \frac{11}{20} \times \frac{1}{2} + 5 =$$

$$= \frac{17}{6} + \frac{11}{40} + \frac{5}{1} = \frac{340+33+600}{120} = \frac{973}{120} = 8\frac{13}{120}$$

$$3.^{\circ}) \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right) + \left(2\frac{1}{2} - \frac{5}{7}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{7}\right) =$$

$$= \frac{15-8}{40} + \frac{35-10}{14} =$$

$$= \frac{7}{40} + \frac{25}{14} = \frac{7}{\cancel{40}} \times \frac{7}{25} = \frac{49}{500}$$

$$4.^{\circ}) \frac{3}{4} \times \left\{3\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \left[\frac{2}{6} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \left(6 + \frac{2}{3}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{3}{4} \times \left\{\frac{11}{3} + \frac{3}{5} \times \left[\frac{2}{6} - \frac{3}{8} + \left(\frac{18+2}{3}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{3}{4} \times \left\{\frac{11}{3} + \frac{3}{5} \times \left[\frac{2}{6} - \frac{3}{8} + \frac{20}{3}\right]\right\} =$$

$$= \frac{3}{4} \times \left\{\frac{11}{3} + \frac{3}{5} \times \left[\frac{2}{6} - \frac{3}{8} \times \frac{3}{20}\right]\right\} =$$

$$= \frac{3}{4} \times \left\{\frac{11}{3} + \frac{3}{5} \times \left[\frac{2}{6} - \frac{9}{160}\right]\right\} =$$

$$= \frac{3}{4} \times \left\{\frac{11}{3} + \frac{3}{5} \times \left[\frac{160-27}{480}\right]\right\} =$$

$$= \frac{3}{4} \times \left\{\frac{11}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{133}{480}\right\} =$$

$$= \frac{3}{4} \times \left\{\frac{11}{3} + \frac{399}{2.400}\right\} =$$

$$= \frac{3}{4} \times \left\{\frac{8.800+399}{2.400}\right\} =$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{9.199}{2.400} = \frac{27.597}{9.600} = 2 \frac{8.397}{9.600} = 2 \frac{2.799}{3.200}$$

$$4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{10} \right) \times \frac{2}{5}$$

5.º)

$$4 - \left(2 \frac{1}{5} + 3 \frac{2}{3} \right)$$

Sabemos que o traço de fração representa também a divisão, pois $\frac{12}{3}$, por exemplo, significa $12 \div 3$. Assim, quando o numerador de uma fração, ou o denominador, ou ambos, são expressões numéricas, devemos reduzir cada uma das expressões ao seu numeral mais simples e dividir o numerador pelo denominador.

É o caso de nosso último exemplo:

$$\frac{4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{10} \right) \times \frac{2}{5}}{4 - \left(2 \frac{1}{5} + 3 \frac{2}{3} \right)} = \frac{4 + \left(\frac{1}{5} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{10} \right) \times \frac{2}{5}}{4 - \left(\frac{11}{5} + \frac{11}{3} \right)} =$$

$$\frac{4 + \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{10} \right) \times \frac{2}{5}}{4 - \left(\frac{11}{5} \times \frac{3}{1} \right)} = \frac{4 + \frac{2}{5} \times \frac{1}{5}}{4 - \frac{33}{5}} = \frac{4 + \frac{2}{25}}{4 - \frac{33}{5}} =$$

$$= \frac{\frac{100 + 2}{25}}{\frac{20 - 33}{5}} = \frac{102}{25} \div \frac{17}{5} = \frac{102}{25} \times \frac{5}{17} = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5}$$

$$6.º) \frac{2 + \frac{2 + \frac{2 + \frac{1}{2}}{2}}{2}}{2 - \frac{2 + \frac{1}{2}}{2}} = \frac{2 + \frac{4 + 1}{2}}{2 - \frac{2 + \frac{1}{2}}{2}} = \frac{2 + \frac{5}{2}}{2 - \frac{2 + \frac{1}{2}}{2}} =$$

$$= \frac{2 + \frac{5}{2} + 2}{2 - \frac{2 + \frac{1}{2}}{2}} = \frac{2 + \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}}{2 - \frac{2 + \frac{1}{2}}{2}} = \frac{2 + \frac{5}{4}}{2 - \frac{2 + \frac{1}{2}}{2}} =$$

$$= \frac{2 + \frac{8 + 5}{4}}{2 - \frac{2 + \frac{1}{2}}{2}} = \frac{2 + \frac{13}{4}}{2 - \frac{2 + \frac{1}{2}}{2}} = \frac{2 + \frac{13}{4} + 2}{2 - 2 + \frac{12}{5}} =$$

$$= \frac{2 + \frac{13}{4} \times \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2} \times \frac{5}{6}} = \frac{2 + \frac{13}{8}}{2 - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{16 + 13}{8}}{\frac{12 - 5}{6}} = \frac{\frac{29}{8}}{\frac{7}{6}} =$$

$$= \frac{29}{8} \div \frac{7}{6} = \frac{29}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{87}{28} = 3 \frac{3}{28}$$

Expressões como estas, muito longas na resolução, podem também ser resolvidas assim, para não tomar tanto espaço: (por linhas)

$$\begin{array}{r}
 2 + \frac{1}{2} \leftarrow 1.ª \text{ linha do numerador} \\
 2 + \frac{\quad}{2} \leftarrow 2.ª \text{ linha " " } \\
 2 + \frac{\quad}{2} \leftarrow 3.ª \text{ linha " " } \\
 \hline
 2 - \frac{\quad}{2} \leftarrow 3.ª \text{ linha do denominador} \\
 2 + \frac{1}{2} \leftarrow 2.ª \text{ linha " " } \\
 2 + \frac{1}{2} \leftarrow 1.ª \text{ linha " " }
 \end{array}$$

$$1.ª \text{ linha: } 2 + \frac{1}{2} = \frac{4+1}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

$$2.ª \text{ linha: } 2 + \frac{5}{2} = 2 + \frac{5}{2} + 2 = 2 + \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = 2 + \frac{5}{4} = \frac{8+5}{4} = \boxed{\frac{13}{4}}$$

$$\begin{aligned}
 3.ª \text{ linha: } 2 + \frac{13}{4} &= 2 + \frac{13}{4} + 2 = 2 + \frac{13}{4} \times \frac{1}{2} = 2 + \frac{13}{8} = \\
 &= \frac{16+13}{8} = \boxed{\frac{29}{8}}
 \end{aligned}$$

Logo o numerador da fração representada pela expressão dada é $\frac{29}{8}$.

O denominador é encontrado resolvendo cada linha de baixo para cima, isto é, a última passa a ser a 1.ª.

$$1.ª \text{ linha: } 2 + \frac{1}{2} = \frac{4+1}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 2.ª \text{ linha: } 2 + \frac{1}{\frac{5}{2}} &= 2 + 1 + \frac{5}{2} = 2 + 1 \times \frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5} = \\
 &= \frac{10+2}{5} = \boxed{\frac{12}{5}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.ª \text{ linha: } 2 - \frac{2}{\frac{12}{5}} &= 2 - 2 + \frac{12}{5} = 2 - \cancel{2} \times \frac{5}{\cancel{12}} = 2 - \frac{5}{6} = \\
 &= \frac{12-5}{6} = \boxed{\frac{7}{6}}
 \end{aligned}$$

Logo, o denominador da expressão é $\frac{7}{6}$.

Então, toda a expressão se reduz a:

$$\begin{array}{r}
 \frac{29}{8} \leftarrow (3.ª \text{ linha do numerador}) \\
 \hline
 \frac{7}{6} \leftarrow (3.ª \text{ linha do denominador})
 \end{array}$$

que é resolvida assim:

$$\frac{\frac{29}{8}}{\frac{7}{6}} = \frac{29}{8} + \frac{7}{6} = \frac{29}{\cancel{8}} \times \frac{3}{\cancel{8}} \times \frac{3}{7} = \frac{87}{28} = 3 \frac{3}{28}$$

POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Sabemos que potência de um número natural é um produto de fatores iguais a esse número.

Analogamente, potência de um número fracionário é um produto de fatores iguais a esse número.

$$\text{Assim, } 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

16 é uma potência de 2 (a 4.ª potência); 2 é um número natural, 16 também.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

$\frac{8}{125}$ é uma potência de $\frac{2}{5}$ (a 3.ª potência); $\frac{2}{5}$ é um número fracionário,

$\frac{8}{125}$ também.

Então, como tanto os números naturais como os fracionários são racionais, podemos resumir o que dissemos acima:

Potência de um número racional é um produto de fatores iguais a esse número.

Seja outro exemplo:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

Pelos exemplos dados, vemos que a técnica para elevar um número racional expresso sob a forma de fração a uma potência qualquer é a seguinte: elevam-se os seus dois termos a essa potência.

Como no caso dos números naturais, os expoentes um e zero são casos especiais, valendo, para os racionais, as mesmas observações feitas sobre esses expoentes para os números naturais.

Assim, todo número racional diferente de zero elevado à potência zero é igual a 1.

Exemplos:

$$1.^{\circ}) 8^0 = 1$$

$$2.^{\circ}) \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

$$3.^{\circ}) \left(2 \frac{3}{4}\right)^0 = 1$$

Todo número racional elevado ao expoente 1 é igual a ele mesmo.

Exemplos:

$$1.^{\circ}) 5^1 = 5$$

$$2.^{\circ}) \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4}$$

$$3.^{\circ}) \left(5 \frac{4}{5}\right)^1 = 5 \frac{4}{5}$$

Quando um número racional está sob a forma mista, antes de elevar-lo a qualquer potência maior que 1, devemos convertê-lo numa fração imprópria.

$$\left(2 \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{7^2}{3^2} = \frac{49}{9}$$

$$\left(1 \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

Todas as propriedades da potenciação de números naturais continuam válidas para os números racionais.

Também continuam válidas as técnicas operatórias de multiplicação e divisão de potências de mesma base. Assim:

$$1.º) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$2.º) \left(\frac{1}{2}\right)^5 \div \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$3.º) \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^{2 \times 3} = \left(\frac{1}{5}\right)^6$$

RADICIAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Sendo a radiciação uma operação inversa da potenciação (aquela que determina a base), fácil se torna, conhecida a potenciação, encontrar uma regra geral para calcular a raiz de uma potência que é um número racional. Assim:

$$\text{Se } \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}, \text{ então } \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$

As duas igualdades são, portanto, equivalentes, e podemos escrever:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$

Exemplos:

$$1.º) \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

$$2.º) \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$$

As equivalências acima nos mostram, claramente, o caminho a seguir para encontrar a raiz de um número racional dado.

$$\text{Vimos acima que } \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$

Comparando o resultado com a fração dada, concluímos:

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$$

No exemplo seguinte: $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

Comparando ainda o resultado com a fração dada, vemos que:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$$

No exemplo seguinte:

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$$

Logo, para extrair uma dada raiz de uma fração, extrai-se a raiz de mesmo grau de cada um dos termos da fração.

EXPRESSÕES NUMÉRICAS COM NÚMEROS RACIONAIS ENVOLVENDO POTÊNCIAS E RAÍZES

Ampliando a relação dada anteriormente sobre a ordem em que as operações devem ser efetuadas para reduzir expressões numéricas ao seu numeral mais simples, diremos que a ordem é a seguinte:

- 1.º) efetuam-se as potenciações e radiciações;
- 2.º) efetuam-se as multiplicações e divisões;
- 3.º) por último, efetuam-se as adições e subtrações.

Exemplos: Reduzir ao mais simples numeral cada uma das expressões seguintes:

$$1.º) \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{32} = \frac{64-3}{96} = \frac{61}{96}$$

$$2.º) 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 8 = 1 - \frac{1}{16} \times \frac{8}{1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$3.º) 8 + \sqrt{\frac{9}{16}} + \frac{3}{4} = 8 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 8 + \frac{3}{1} \times \frac{1}{1} = 8 + 1 = 9$$

$$4.º) \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \times \left[3 + \frac{3}{2}\right]^2 - \left[1 - \frac{1}{3}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{4}{9} - \frac{1}{8}\right] \times \left[\frac{6+3}{2}\right]^2 - \left[\frac{3-1}{3}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{32-9}{72}\right] \times \left[\frac{9}{2}\right]^2 - \left[\frac{2}{3}\right]^2 =$$

$$= \frac{23}{8} \times \frac{9}{4} - \frac{4}{9} = \frac{207}{32} - \frac{4}{9} = \frac{1.863 - 128}{288} = \frac{1.735}{288} = 6 \frac{7}{288}$$

EXERCÍCIOS (6)

1 — Que números naturais representam as seguintes frações:

a) $\frac{12}{4}$; b) $\frac{20}{5}$; c) $\frac{8}{2}$; d) $\frac{32}{8}$; e) $\frac{9}{3}$; f) $\frac{27}{9}$; g) $\frac{30}{5}$; h) $\frac{36}{4}$.

2 — Escreva em sua forma mista os seguintes números racionais:

a) $\frac{10}{4}$; b) $\frac{9}{2}$; c) $\frac{11}{5}$; d) $\frac{23}{6}$; e) $\frac{15}{7}$; f) $\frac{32}{5}$; g) $\frac{25}{3}$; h) $\frac{28}{9}$.

3 — Escreva sob a forma de fração os seguintes números naturais:

a) 2 em têrços; b) 5 em meios; c) 8 e quartos;
d) 3 em quartos e) 6 em têrços; f) 7 em meios.

4 — Reduza $\frac{2}{3}$ em uma fração equivalente de denominador 24.

5 — Reduza $\frac{3}{4}$ em uma fração equivalente de numerador 18.

6 — Reduza a fração $\frac{12}{15}$ em uma equivalente de denominador 20.

7 — Reduza ao mínimo denominador comum, pelas classes de equivalência:

a) $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{6}$; b) $\frac{10}{3}$ e $\frac{2}{5}$; c) $\frac{3}{8}$ e $\frac{1}{4}$; d) $\frac{13}{6}$ e $\frac{8}{15}$.

8 — Adicione:

a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$; c) $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$; d) $\frac{5}{11} + \frac{2}{11}$;

$$e) \frac{4}{7} + \frac{1}{7} + \frac{8}{7}; f) \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8}; g) \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{3};$$

$$h) \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{5} + \frac{4}{10}; i) \frac{7}{18} + \frac{15}{36} + \frac{3}{9}; j) 3\frac{1}{4} + 5\frac{2}{3};$$

$$l) 4\frac{1}{4} + 3\frac{1}{8} + 5\frac{1}{16} + 1\frac{1}{32}; m) 2\frac{1}{8} + 3\frac{3}{20} + 5\frac{5}{10}.$$

9 — Subtraia:

$$a) \frac{3}{5} - \frac{1}{5}; b) \frac{9}{4} - \frac{3}{4}; c) \frac{8}{9} - \frac{3}{9}; d) \frac{3}{4} - \frac{2}{5}; e) \frac{13}{2} - \frac{5}{3};$$

$$f) 8 - \frac{1}{2}; g) \frac{8}{3} - 2; h) 3\frac{4}{5} - 1\frac{5}{8}; i) 6\frac{4}{5} - 6\frac{2}{3}.$$

10 — Reduza ao numeral mais simples as expressões:

$$a) 2 + \frac{3}{5} - \frac{1}{8};$$

$$b) 7\frac{1}{2} + 6\frac{1}{8} - 5\frac{1}{4} + 6\frac{1}{9} - 6\frac{1}{6};$$

$$c) \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right);$$

$$d) \left(8 - \frac{1}{5}\right) - \left(6 - \frac{1}{3}\right);$$

$$e) \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{12}\right) - \frac{3}{2};$$

11 — Perdi $\frac{1}{5}$ do dinheiro que possuía e gastei $\frac{1}{8}$. Com que parte fiquei?

12 — Que número devo adicionar a $2\frac{2}{5}$ para obter a soma de $5\frac{1}{3}$ e $3\frac{1}{9}$?

13 — Efetue:

$$a) \frac{6}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4};$$

$$b) \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} \times \frac{6}{7};$$

$$c) \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{10}{9} \times \frac{1}{8};$$

$$d) 5\frac{1}{4} \times 1\frac{3}{25} \times 8\frac{1}{3};$$

$$e) \left(5 - \frac{4}{9}\right) \times \frac{3}{41};$$

$$f) \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right);$$

$$g) \left(\frac{1}{6} + \frac{10}{25}\right) \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \times 5\frac{4}{15};$$

14 — Calcule:

$$a) \frac{1}{3} \text{ de } 15;$$

$$d) \frac{2}{3} \text{ de } \frac{9}{20};$$

$$b) \frac{2}{5} \text{ de } 20;$$

$$e) \frac{11}{7} \text{ de } \frac{49}{33};$$

$$c) \frac{3}{5} \text{ de } \frac{1}{3}; \quad f) \frac{10}{11} \text{ de } 6\frac{1}{9}.$$

15 — Um relógio adianta $\frac{2}{7}$ de minuto em cada hora. Quantos minutos êle adianta em 7 horas ?

16 — Uma pessoa herdou os $\frac{2}{5}$ de uma fazenda e vendeu os $\frac{2}{3}$ de sua parte.

Que porção da fazenda lhe restou ?

17 — A idade de Pedro é $\frac{2}{3}$ da metade da de sua mãe. Se esta tem 36 anos, qual é a idade de Pedro ?

18 — Em uma fábrica trabalham 220 operários e o número de mulheres é os $\frac{4}{11}$ do total. Quantos são os homens ?

19 — Efetue:

$$a) \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \quad e) 4\frac{1}{50} + 24\frac{3}{25};$$

$$b) 8 + \frac{5}{4}; \quad f) \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right);$$

$$c) \frac{9}{2} + 5; \quad g) \left(3 + \frac{6}{9}\right) + 2\frac{7}{10};$$

$$d) 1\frac{1}{8} + 3\frac{3}{5}; \quad h) \frac{5}{6} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{6}{5}\right).$$

20 — Se uma criança gasta, em média, $\frac{2}{25}$ de um lápis por dia, quanto tempo ela levará para gastar 2 lápis ?

21 — Reparti $17\frac{1}{2}$ l de leite entre várias pessoas, recebendo cada uma $2\frac{1}{2}$ l. Quantas eram as pessoas ?

22 — Por que número devo dividir $2\frac{3}{7}$ para obter o quociente 5 ?

23 — Reduza à sua expressão mais simples:

$$a) \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{3}}$$

$$b) \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{4}}$$

$$c) \frac{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{4}}}{\frac{5}{2}}$$

$$d) \frac{\frac{\frac{6}{5}}{\frac{8}{8}}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2}}$$

$$e) \frac{\frac{3}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{7} \times \frac{7}{5}}$$

24 — Efetue as operações indicadas para encontrar o numeral mais simples de cada umas das expressões que seguem:

$$a) 1 + \frac{3}{2 + \frac{4}{1 - \frac{1}{4}}}$$

$$b) 1 - \frac{5}{6 + \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}{3}}$$

$$c) 5 + \frac{\frac{3}{\frac{3}{5} - \frac{3}{7}}}{20 - \frac{4}{\frac{1}{7} \times \frac{3}{5}}}$$

25 — Um negociante compra vinho a Cr\$ 30,00 o barril e o vende lucrando $\frac{3}{10}$ do custo. A como vende o barril de vinho ?

26 — Quanto perde uma pessoa que vende um objeto que lhe custou Cr\$ 72,00 pelos $\frac{3}{4}$ do custo ?

27 — Qual o lucro de um comerciante que vende pelos $\frac{11}{7}$ do custo uma mercadoria que lhe custou Cr\$ 651,00 ?

28 — Um andarilho deve percorrer, de uma cidade a outra, 210 km. No 1.º dia, percorreu os $\frac{3}{7}$ da distância a percorrer, no 2.º, os $\frac{2}{21}$ e no 3.º, os $\frac{3}{14}$. Quantos km ainda faltam para que êle atinja a sua meta ?

29 — Qual é o número cuja diferença entre seus $\frac{5}{6}$ e $\frac{2}{9}$ é 22 ?

30 — Ao vender um terreno por Cr\$ 10.200,00, ganho os $\frac{5}{17}$ de seu custo. Quanto me custou o terreno ?

REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS RACIONAIS

Já sabemos que as frações que têm denominador 10, ou 100, ou 1.000, etc., são chamadas frações decimais. Sabemos que tôdas as propriedades que valem para as frações valem para as frações decimais, como não poderia deixar de ser.

As frações não decimais são denominadas frações ordinárias.

As frações decimais de numerador 1 representam números racionais chamados *unidades decimais*. Assim,

$\frac{1}{10}$ é a unidade decimal de 1.ª ordem;

$\frac{1}{100}$ é a unidade decimal de 2.ª ordem;

$\frac{1}{1.000}$ é a unidade decimal de 3.ª ordem, e assim por diante.

Como podemos verificar facilmente, "uma unidade decimal de dada ordem é igual 10 unidades de ordem imediatamente superior". Assim:

$$10 \times \frac{1}{1.000} = \frac{1}{100} \text{ ou: } 10 \text{ unidades de } 3.ª \text{ ordem} = 1 \text{ unidade de } 2.ª \text{ ordem.}$$

$$10 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10} \text{ ou: } 10 \text{ unidades de } 2.ª \text{ ordem} = 1 \text{ unidade de } 1.ª \text{ ordem.}$$

A unidade simples (1), a dezena (10), a centena (100), etc., são *unidades inteiras*, respectivamente, de 1.ª ordem, 2.ª ordem, 3.ª ordem, etc.

Podemos ver que:

a) 10 unidades de 1.ª ordem decimal (décimos) formam uma unidade de 1.ª ordem inteira (um);

$$10 \times \frac{1}{10} = 1$$

b) 100 unidades de 2.^a ordem decimal (centésimos) formam uma unidade inteira (um).

$$100 \times \frac{1}{100} = 1$$

c) 1.000 unidades de 3.^a ordem decimal formam uma unidade inteira (um), etc.

Podemos escrever as unidades inteiras e as unidades decimais na seguinte ordem decrescente:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots, & 1.000, & 100, & 10, & 1, & \frac{1}{10}, & \frac{1}{100}, & \frac{1}{1.000}, & \dots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \dots, & \text{milhar,} & \text{centena,} & \text{dezena,} & \text{unidade,} & \text{décimo,} & \text{centésimo,} & \text{milésimo,} & \dots \end{array}$$

Cada unidade vale 10 vezes mais que a unidade da direita.

O simples fato de "cada unidade decimal equivaler a 10 unidades de ordem imediatamente superior", o mesmo que ocorre com as unidades inteiras, em que "cada unidade equivale a 10 unidades de ordem imediatamente inferior", proporciona uma nova e prática maneira de representar certos números racionais.

Seja o seguinte número racional: $\frac{1.325}{100}$

A fração decimal que representa o número racional de nosso exemplo pode ser decomposta assim:

$$\frac{1.325}{100} = \frac{1.000}{100} + \frac{300}{100} + \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = 10 + 3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

$$\text{mas, } 10 + 3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 1 \times 10 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100}$$

$$\begin{array}{cccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & \text{dezena} & \text{unidade} & \text{décimo} & \text{centésimo} \end{array}$$

$$\text{Logo, } \frac{1.325}{100} = 1 \text{ dezena} + 3 \text{ unidades} + 2 \text{ décimos} + 5 \text{ centésimos}$$

Podemos, então, representar a fração decimal $\frac{1.325}{100}$ assim: 13,25.

A vírgula separa a parte inteira da parte decimal.

Mais um exemplo $\frac{2.428}{1.000}$.

$$\frac{2.428}{1.000} = \frac{2.000}{1.000} + \frac{400}{1.000} + \frac{20}{1.000} + \frac{8}{1.000} = 2 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1.000}$$

$$\text{mas, } 2 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1.000} =$$

$$\begin{array}{cccc} 2 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100} + 8 \times \frac{1}{1.000} \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \text{unidade} \quad \quad \quad \text{décimo} \quad \quad \quad \text{centésimo} \quad \quad \quad \text{milésimo} \end{array}$$

$$\text{Portanto, } \frac{2.428}{1.000} = 2,428$$

Dizemos que 13,25 e 2,428 são representações decimais (ou formas decimais) dos números racionais $\frac{1.325}{100}$ e $\frac{2.428}{1.000}$, respectivamente.

Logo, $\frac{1.325}{100}$ e 13,25 são dois numerais diferentes do mesmo número

racional, o mesmo ocorrendo com $\frac{2.428}{1.000}$ e 2,428.

A observação dos dois exemplos acima nos sugere uma regra prática para passar de uma representação a outra:

a) Para passar da forma fracionária para a decimal, escreve-se o numerador da fração e separam-se com uma vírgula, à direita, tantos algarismos quantos são os zeros do denominador. (Se necessário, completam-se com zeros, à esquerda, as casas decimais.)

Assim:

$$\frac{35}{10} = 3,5; \quad \frac{28}{100} = 0,28; \quad \frac{12}{1.000} = 0,012$$

b) Para passar da forma decimal para a fracionária, procede-se de maneira exatamente inversa: dá-se para numerador da fração o numeral decimal todo, sem a vírgula, e, para denominador, a unidade seguida de tantos zeros quantos forem os algarismos da parte decimal.

Assim:

$$8,4 = \frac{84}{10}; \quad 0,15 = \frac{15}{100}; \quad 3,48 = \frac{348}{100}; \quad 0,024 = \frac{24}{1.000}$$

PROPRIEDADES CARACTERÍSTICAS DOS NUMERAIS DECIMAIS

1 — Os números racionais representados por numerais decimais não se alteram quando se acrescentam ou suprimem zeros à direita do seu último algarismo.

Assim,

$$1,2 = 1,20 = 1,200 = 1,2.000 = \dots$$

De fato:

$$1,2 = \frac{12}{10} = \frac{12 \times 10}{10 \times 10} = \frac{120}{100} = 1,20$$

Logo, $1,2 = 1,20$

Anàlogamente, tomando a fração $\frac{12}{10}$ que é equivalente a 1,2 e multi-

plicando os dois termos da fração por 100, teremos:

$$\frac{12}{10} = \frac{12 \times 100}{10 \times 100} = \frac{1.200}{1.000} = 1,200$$

Assim, $1,2 = 1,200$, etc.

2 — Um número natural pode sempre ter representação decimal: a parte inteira é constituída pelo próprio número natural e a parte decimal por quantos zeros queiramos.

Assim,

$$5 = 5,0 = 5,00 = \dots, \text{ uma vez que } \frac{5}{1} = \frac{50}{10} = \frac{500}{100} = \dots$$

COMPARAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS EXPRESSOS SOB A FORMA DECIMAL

Para sabermos qual número racional é o maior quando estão representados sob a forma decimal, basta compararmos sua mais alta ordem. Assim, sejam os números racionais 12,235 e 12,253.

Temos:

1	2	2	3	5	e	1	2	2	5	3
2. ^o	1. ^a	1. ^a	2. ^a	3. ^a		2. ^a	1. ^a	1. ^a	2. ^a	3. ^a
ord.	ord.	ord.	ord.	ord.		ord.	ord.	ord.	ord.	ord.
int.	int.	dec.	dec.	dec.		int.	int.	dec.	dec.	dec.

A mais alta ordem dos dois numerais dados que é representada por algarismos diferentes é a 2.^a decimal, isto é, a dos centésimos. Logo, podemos comparar os dois números comparando essa ordem decimal, sem a vírgula, é claro. Assim, o primeiro número tem 1.223 centésimos e o segundo, 1.225 centésimos. Logo, este é o maior dos dois números dados e podemos escrever:

$$12,253 > 12,235 \quad \text{ou} \quad 12,235 < 12,253$$

OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS EXPRESSOS SOB A FORMA DECIMAL

A adição, a subtração, a multiplicação e a divisão de números racionais expressos sob a forma decimal, assim como suas propriedades, aplicações, etc., já foram estudadas nos quatro volumes que antecederam este, cada vez em maior profundidade, e não iremos repetir neste último volume porque, tudo o mais que poderíamos dizer ultrapassaria o nível a que nos propusemos ao iniciar este trabalho.

QUOCIENTE APROXIMADO

Apenas acrescentaremos alguma coisa ao que dissemos no volume 4, sobre quociente aproximado.

Vimos que ao efetuar a divisão $51 \div 6$, pudemos encontrar um quociente aproximado por falta, 8. Assim:

$$\begin{array}{r} 51 \overline{) 6} \\ 3 \quad 8 \end{array} \longleftarrow \text{quociente aproximado por falta}$$

Porque $8 \times 6 = 48$, sendo o quociente 8 pouco e

$9 \times 6 = 54$, sendo o quociente 9 muito.

A conclusão a que chegamos foi a seguinte: o verdadeiro quociente de $51 \div 6$ é maior que 8 e menor que 9.

Logo, quando dizemos que o quociente dessa divisão é 8, estamos aceitando um quociente aproximado *por falta*, cometendo um *erro menor que uma unidade*. (Vimos que o quociente verdadeiro está entre 8 e 9.)

Se aceitarmos o número 9 como quociente da divisão de nosso exemplo, cometeremos um *erro por excesso a menos que uma unidade*.

Logo,

$$8 < 51 \div 6 < 9$$

Se, ao invés de $51 \div 6$, tivéssemos $510 \div 6$, teríamos:

$$\begin{array}{r} 510 \quad | \quad 6 \\ 30 \quad 85 \\ 0 \end{array}$$

Como 510 é 10 vezes maior que 51, o quociente de 510 por 6 é dez vezes maior que o quociente de 51 por 6. Logo, se queremos obter este último, devemos dividir aquele por 10. Assim:

$$51 \div 6 = \frac{(51 \times 10) \div 6}{10} = \frac{510 \div 6}{10} = \frac{85}{10} = 8,5$$

Outro exemplo: $68 \div 11$

$$\begin{array}{r} 68 \quad | \quad 11 \\ 02 \quad 6 \end{array}$$

Como $6 \times 11 = 66$ e $7 \times 11 = 77$, o quociente exato não é 6 nem 7, mas um número maior que 6 e menor que 7.

Logo,

$$6 < \frac{68}{11} < 7$$

6 é o quociente aproximado por falta e 7 é o quociente aproximado por excesso, com erro menor que uma unidade, em ambos os casos.

Vamos agora dividir 680 (10×68) por 11 e obteremos um quociente 10 vezes maior que $68 \div 11$:

$$\begin{array}{r} 680 \quad | \quad 11 \\ 020 \quad 61 \\ 09 \end{array}$$

O quociente aproximado de $680 \div 11$ é 61 por falta e 62 por excesso, com erro inferior a uma unidade, isto é, o quociente exato está entre 61 e 62. Assim,

$$61 < \frac{680}{11} < 62$$

Se dividirmos por 10 o quociente de $680 \div 11$, teremos o de $68 \div 11$:

$$\frac{61}{10} < \frac{680}{11} < \frac{62}{10}$$

$$\text{ou } 6,1 < \frac{68}{11} < 6,2$$

Podemos, agora, afirmar que o verdadeiro resultado da divisão $68 \div 11$ está entre 6,1 e 6,2.

Logo, o erro é agora menor que um décimo quando dizemos que o quociente de $68 \div 11$ é 6,1 ou 6,2, respectivamente, por falta ou por excesso.

Dividindo 6.800 por 11, o quociente será 100 vezes maior que o de $68 \div 11$, pois $6.800 = 68 \times 100$, e teremos:

$$\begin{array}{r} 6.800 \quad | \quad 11 \\ 020 \quad 618 \\ 090 \\ 02 \end{array}$$

Como há um resto maior que zero, o quociente é aproximado por falta, com erro inferior a uma unidade e

$$618 < \frac{6.800}{11} < 619$$

Como o quociente de $68 \div 11$ deve ser 100 vezes menor que o de 6.800 por 11, temos, dividindo tudo por 100:

$$\frac{618}{100} < \frac{6.800}{11 \times 100} < \frac{619}{100}$$

$$\text{ou } 6,18 < \frac{68}{11} < 6,19$$

e os quocientes aproximados, respectivamente, por falta e por excesso, de $68 \div 11$ são 6,18 e 6,19, com erro menor que um centésimo, pois o verdadeiro quociente está entre 6,18 e 6,19.

Assim, sucessivamente, podemos encontrar, nas divisões inexatas, quocientes aproximados com erros cada vez menores.

Na prática, obtém-se o quociente aproximado de dois números naturais, sob a forma de numeral decimal, por falta, a menos de um décimo, um centésimo, um milésimo, etc., acrescentando um, dois três, etc. zeros ao dividendo e efetuando a divisão como a de dois números naturais. A seguir, separam-se no quociente, com uma vírgula, tantas casas decimais quantos foram os zeros acrescentados ao dividendo. Assim:

Empregando o mesmo exemplo acima: $68 \div 11$.

1.º Quociente aproximado a menos de uma unidade:

$$\begin{array}{r} 68 \quad | \quad 11 \\ 02 \quad \quad | \quad 6 \end{array}$$

2.º Quociente aproximado a menos de um décimo (0,1):

$$\begin{array}{r} 68,0 \quad | \quad 11 \\ 02 \ 0 \quad | \quad 6,1 \\ 0 \ 9 \end{array}$$

3.º Quociente aproximado a menos de um centésimo (0,01):

$$\begin{array}{r} 68,00 \quad | \quad 11 \\ 02 \ 0 \quad | \quad 6,18 \\ 0 \ 90 \\ 02 \end{array}$$

4.º Quociente aproximado a menos de um milésimo (0,001):

$$\begin{array}{r} 68,000 \quad | \quad 11 \\ 02 \ 0 \quad | \quad 6,181 \\ 0 \ 90 \\ 020 \\ 09 \end{array}$$

Outro exemplo: Calcular os quocientes aproximados de $5 \div 7$ por falta, respectivamente, a menos de uma unidade, um décimo, um centésimo e um milésimo.

1.º Quociente aproximado a menos de uma unidade:

$$\begin{array}{r} 5 \quad | \quad 7 \\ \quad \quad | \quad 0 \end{array}$$

NOTA: Sendo o dividendo menor que o divisor, o quociente por falta é zero, e por excesso, 1. O verdadeiro quociente, nestes casos, está entre 0 e 1, isto é,

$$0 < \frac{5}{7} < 1$$

2.º Quociente aproximado a menos de 0,1:

$$\begin{array}{r} 5,0 \quad | \quad 7 \\ 1 \quad \quad | \quad 0,7 \end{array}$$

3.º Quociente aproximado a menos de 0,01:

$$\begin{array}{r} 5,00 \quad | \quad 7 \\ 10 \quad \quad | \quad 0,71 \\ 3 \end{array}$$

4.º Quociente aproximado a menos de 0,001:

$$\begin{array}{r} 5,000 \quad | \quad 7 \\ 10 \quad \quad | \quad 0,714 \\ 30 \\ 2 \end{array}$$

DIVISÃO APROXIMADA DE DOIS NÚMEROS RACIONAIS EXPRESSOS SOB A FORMA DECIMAL

Procede-se como no caso comum de divisão em que dividendo e divisor estão sob a forma decimal:

- a) Reduzindo os dois termos à mesma unidade decimal;
- b) Multiplicando o dividendo por 10, 100, etc., conforme a aproximação desejada;
- c) Dividindo o quociente pelo mesmo número pelo qual se multiplicou o dividendo.

Exemplo: Calcular o quociente aproximado, por falta, a menos de 0,01, de 2,8 por 5,42.

$$1.^{\circ}) \quad 2,80 \overline{) 5,42} \quad \text{ou} \quad 280 \overline{) 542}$$

$$2.^{\circ}) \quad \begin{array}{r} 280,00 \overline{) 542} \\ 0900 \quad 0,51 \\ \hline 358 \end{array}$$

O quociente aproximado, por falta, a menos de 0,01, de 2,8 por 5,42 é 0,51.

Mais um exemplo: Calcular o quociente aproximado, por falta, a menos de 0,1, de 25,21 por 0,255.

$$1.^{\circ}) \quad 25,210 \overline{) 0,255} \quad \text{ou} \quad 25.210 \overline{) 255}$$

$$2.^{\circ}) \quad \begin{array}{r} 25.210,0 \overline{) 255} \\ 2260 \quad 98,8 \\ \hline 2200 \\ \hline 160 \end{array}$$

O quociente aproximado procurado é 98,8.

POTENCIAÇÃO

Os números racionais expressos sob a forma decimal sempre podem ser expressos sob a forma de fração decimal. A potenciação dos racionais sob a forma decimal, portanto, pode ser efetuada após a sua redução à forma de fração decimal.

Exemplo: Calcular $(0,3)^2$.

$$(0,3)^2 = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100} = 0,09.$$

Mas, 0,09 é o mesmo que $0,3 \times 0,3$.

$$\text{Logo, } (0,3)^2 = 0,3 \times 0,3 = 0,09$$

Outro exemplo: $(0,5)^3$.

$$(0,5)^3 = \left(\frac{5}{10}\right)^3 = \frac{125}{1.000} = 0,125$$

Mas, 0,125 é o mesmo que $0,5 \times 0,5 \times 0,5$.

$$\text{Logo, } (0,5)^3 = 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,125.$$

Pelos exemplos acima, podemos concluir que:

“Para calcular a potência indicada de um número racional sob a forma decimal, calcula-se a potência indicada como se a base fôsse um número natural (sem levar em conta a vírgula) e separa-se, no resultado, um número de casas decimais igual ao produto do expoente da potência indicada pelo número de casas decimais da base”.

Exemplo:

$$(0,12)^2 = 0,12 \times 0,12 = 0,0144$$

Ou, segundo a regra prática que acabamos de enunciar: $12^2 = 144$ (como se 0,12 fôsse o número natural 12)

Como o expoente da potência indicada é 2 e 0,12 tem 2 casas decimais, separam-se no produto $2 \times 2 = 4$ casas decimais, e temos:

$$(0,12)^2 = 0,0144$$

NOTA: Se a base da potência indicada fôr uma dízima periódica, o cálculo será efetuado com a sua geratriz.

Exemplo:

$$(0,333 \dots)^3 = \left(\frac{3}{9}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

RADICIAÇÃO

A radiciação de um número racional expresso sob a forma decimal também pode ser efetuada após a sua redução à forma de fração decimal.

Exemplo: $\sqrt{0,25}$

$$\sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{10^2}} = \frac{5}{10} = 0,5$$

Observando, no exemplo, que

$$\sqrt{0,25} = 0,5$$

concluimos que podemos extrair a raiz quadrada de 25 (não considerando a vírgula) e depois, ao resultado da $\sqrt{25}$ que é 5, marcamos a metade das casas decimais (uma) com a vírgula. Assim:

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{e} \quad \sqrt{0,25} = 0,5$$

Outro exemplo: $\sqrt{0,0144}$

$$\sqrt{0,0144} = \sqrt{\frac{144}{10.000}} = \frac{\sqrt{2^4 \times 3^2}}{\sqrt{2^4 \times 5^4}} = \frac{2^2 \times 3}{2^2 \times 5^2} = \frac{4 \times 3}{4 \times 25} = \frac{12}{100} = 0,12$$

Como no primeiro exemplo, podemos extrair a raiz quadrada de 144 (sem considerar a vírgula) e, no resultado, separar a metade das casas decimais (duas, porque 0,0144 tem quatro). Assim:

$\sqrt{1.44}$	12
- 1	22 × 2 = 44

04.4	
4 4	

0 0	

Temos:

$$\sqrt{144} = 12 \quad \text{e} \quad \sqrt{0,0144} = 0,12$$

Mais um exemplo: $\sqrt{10,5625}$

$$\sqrt{10,5625} = \sqrt{\frac{105.625}{10.000}} = \frac{\sqrt{5^4 \times 13^2}}{\sqrt{2^4 \times 5^4}} = \frac{5^2 \times 13}{2^2 \times 5^2} = \frac{25 \times 13}{4 \times 25} = \frac{325}{100} = 3,25$$

Ou:

$\sqrt{10.56.25}$	32
- 9	62 × 2 = 124
15.6	
- 1224	645 × 5 = 3.225
03 22.5	
- 3 22 5	
0 00 0	

Logo, podemos extrair a raiz quadrada de um número racional sob a forma decimal de dois modos:

1.º) Passá-lo para a forma de fração decimal e extrair a raiz quadrada de cada termo; a seguir, escrever o resultado sob a forma decimal.

2.º) Extrair a raiz quadrada do número dado sem considerar a vírgula, como se êle fôsse um número natural; a seguir, separar na raiz um número de casas decimais iguais à metade das casas decimais do radicando.

Observação: Se o número dado tiver um número ímpar de casas decimais, basta acrescentar um zero à direita para que o número delas se torne par e seja divisível por dois.

RAIZ QUADRADA DE UM NÚMERO NATURAL COM APROXIMAÇÃO DECIMAL

Quando extraímos a raiz quadrada de um número natural que não é quadrado perfeito, cometemos um erro por falta, a menos que uma unidade, pois se acrescentarmos uma unidade à raiz encontrada ela já será maior que a verdadeira raiz. Por exemplo, a raiz quadrada de 7 é 2 por falta, pois $2^2 = 4$, que é menor que 7. Se dissermos que a raiz quadrada de 7 é 3, cometeremos ainda um erro, agora por excesso, pois $3^2 = 9$, que é maior que 7. Assim,

$$2 < \sqrt{7} \quad \text{e} \quad 3 > \sqrt{7}$$

Sabendo calcular a raiz quadrada de números expressos sob a forma decimal, podemos encontrar a raiz quadrada de um número natural que não é quadrado perfeito com aproximação de 0,1, 0,01, 0,001, etc. Basta que coloquemos vírgula à direita do número dado e tantos pares de zeros quantas sejam as ordens decimais que queremos de aproximação.

Exemplo: $\sqrt{7}$ com uma aproximação de 0,1.

Temos: $\sqrt{7} = \sqrt{7,00}$

$\sqrt{7.00}$	26
- 4	46 × 6 = 276
3 00	
- 2 76	
0 24	

Logo, $\sqrt{7,00} = 2,6$ ou $\sqrt{7} = 2,6$ com erro menor que 0,1.

Tomemos, agora, a $\sqrt{7}$ com uma aproximação de 0,01.

Temos: $\sqrt{7} = \sqrt{7,0000}$

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{7.00.00} & 264 \\
 - 4 & 46 \times 6 = 276 \\
 \hline
 30.0 & \\
 - 276 & 524 \times 4 = 2.096 \\
 \hline
 0240.0 & \\
 - 2096 & \\
 \hline
 0304 &
 \end{array}$$

Logo, $\sqrt{7,0000} = 2,64$ ou $\sqrt{7} = 2,64$ com erro inferior a 0,01.

Vejamos ainda a $\sqrt{7}$ com uma aproximação de 0,001.

$$\sqrt{7} = \sqrt{7,000000}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{7.00.00.00} & 2645 \\
 - 4 & 46 \times 6 = 276 \\
 \hline
 30.0 & \\
 - 276 & 524 \times 4 = 2.096 \\
 \hline
 0240.0 & \\
 - 2096 & 5.285 \times 5 = 26.425 \\
 \hline
 03040.0 & \\
 - 26425 & \\
 \hline
 03975 &
 \end{array}$$

Logo, $\sqrt{7,000000} = 2,645$ ou $\sqrt{7} = 2,645$ com erro inferior a 0,001.

RAIZ QUADRADA DE UM NÚMERO RACIONAL EXPRESSO SOB A FORMA DECIMAL COM APROXIMAÇÃO DECIMAL

De forma análoga, podemos extrair a raiz quadrada de um número racional expresso sob a forma decimal com a aproximação desejada: 0,1, 0,01, 0,001, etc. Basta que acrescentemos zeros às casas decimais do número dado, tantas quantas chegarem para torná-las o dúbio das casas da aproximação desejada. Por exemplo: $\sqrt{0,5}$ com aproximação de 0,001.

Temos:

$$\sqrt{0,5} = \sqrt{0,500000}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{50.00.00} & 707 \\
 - 49 & 140 \times 0 = 0 \\
 \hline
 010.0 & \\
 - 000 & 1.407 \times 7 = 9.849 \\
 \hline
 1000.0 & \\
 - 9849 & \\
 \hline
 0151 &
 \end{array}$$

Logo,

$\sqrt{0,500000} = 0,707$ ou $\sqrt{0,5} = 0,707$ com erro inferior a 0,001.

Outro exemplo: $\sqrt{6,15}$ com aproximação de 0,01.

Temos:

$$\sqrt{6,15} = \sqrt{6,1500}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{6.15.00} & 249 \\
 - 4 & 44 \times 4 = 176 \\
 \hline
 21.5 & \\
 - 176 & 487 \times 7 = 3.409 \\
 \hline
 0390.0 & \\
 - 3409 & \\
 \hline
 0491 &
 \end{array}$$

Logo,

$\sqrt{6,1500} = 2,49$ ou $\sqrt{6,15} = 2,49$ com erro menor que 0,01.

EXERCÍCIOS 7

1 — Complete, tornando verdadeiras, as afirmações seguintes:

- Uma unidade simples é equivalente a ... décimos.
- Um décimo equivale a ... centésimos.
- Dez milésimos equivalem a um

2 — Expresse sob a forma decimal os seguintes números racionais:

- | | | |
|---------------------|--------------------------|------------------------|
| a) $\frac{23}{10}$ | d) $\frac{125}{100}$ | g) $\frac{35}{1.000}$ |
| b) $\frac{13}{100}$ | e) $\frac{218}{1.000}$ | h) $\frac{6.463}{100}$ |
| c) $\frac{6}{10}$ | f) $\frac{6.504}{1.000}$ | i) $\frac{8}{1.000}$ |

3 — Expresse sob forma fracionária os seguintes numerais decimais:

- | | | |
|---------|----------|-----------|
| a) 0,8 | d) 0,06 | g) 0,009 |
| b) 1,5 | e) 2,54 | h) 2,043 |
| c) 13,9 | f) 16,15 | i) 12,561 |

4 — Compare os números racionais que seguem, em cada caso, empregando um dos sinais, =, > ou <:

- | | | |
|-------------------|------------------|--------------------|
| a) 12,3 e 21,3 | d) 0,06 e 0,60 | g) 24,132 e 24,123 |
| b) 26,48 e 24,9 | e) 6,5 e 6,500 | h) 10,8 e 10,799 |
| c) 132,51 e 132,8 | f) 9,469 e 9,471 | i) 23,5 e 23,50 |

5 — Determine a soma ou a diferença dos seguintes números racionais:

- a) $6,32 + 12,2 + 0,145$ d) $41,2 - 35,8$
 b) $9,125 + 15,8 + 6$ e) $12,75 - 0,148$
 c) $13,2 + 28,248 + 0,002$ f) $10 - 2,63$

6 — Determine os produtos e os quocientes exatos dos números racionais que seguem:

- a) $15,6 \times 2,5$ d) $2,008 \times 3,05$ g) $12,5 \div 0,25$
 b) $0,345 \times 9,2$ e) $0,175 \div 0,5$ h) $15,3 \div 0,045$
 c) $514,6 \times 12,4$ f) $8,046 \div 0,9$ i) $0,376 \div 0,4$

7 — Calcule as seguintes potências:

- a) $(1,5)^2$ c) $(0,2)^4$ e) $(1,05)^3$
 b) $(2,36)^2$ d) $(0,9)^4$ f) $(0,1)^4$

8 — Determine o quociente aproximado por falta, a menos de 1, de 0,1, de 0,01 e de 0,001 de cada um dos pares de racionais abaixo:

- a) $(8;7)$ c) $(127;32)$ e) $(13,90;6,2)$
 b) $(3;11)$ d) $(12;1,4)$ f) $(3,21;60,1)$

9 — Complete as equivalências que seguem:

- a) $(1,5)^2 = 2,25 \iff \sqrt{2,25} = \dots$
 b) $(0,12)^2 = 0,0144 \iff \sqrt{0,0144} = \dots$
 c) $(0,3)^3 = 0,027 \iff \sqrt[3]{0,027} = \dots$
 d) $(1,24)^2 = 1,5376 \iff \sqrt{1,5376} = \dots$
 e) $(0,2)^4 = 0,0016 \iff \sqrt[4]{0,0016} = \dots$

10 — Determine a raiz quadrada exata dos seguintes números racionais:

- a) 0,09 d) 0,04 g) 0,0036
 b) 0,16 e) 0,0004 h) 1,44
 c) 0,01 f) 0,81 i) 0,0064

11 — Calcule, com aproximação por falta, a menos de 0,1, as seguintes raízes quadradas:

- a) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{35}$ e) $\sqrt{928}$
 b) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{128}$ f) $\sqrt{6.245}$

12 — Calcule, com aproximação inferior a 0,01, as seguintes raízes quadradas:

- a) $\sqrt{165}$ c) $\sqrt{333}$ e) $\sqrt{2}$
 b) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{4.021}$ f) $\sqrt{345}$

13 — Calcule a raiz quadrada de:

- a) 30 com erro menor que 0,001;
 b) 0,8 com erro inferior a 0,01;
 c) 2,5 com erro menor que 0,1;
 d) 12,2 com erro inferior a 0,001;
 e) 23,4 com erro menor que 0,01.

CONVERSÃO DE FRAÇÃO ORDINÁRIA EM DECIMAL E DE FRAÇÃO DECIMAL EM ORDINÁRIA

Sabemos que toda fração decimal pode ser expressa sob a forma decimal (numeral decimal). Assim:

$$\frac{3}{10} = 0,3; \frac{5}{100} = 0,05; \frac{24}{1.000} = 0,024; \text{ etc.}$$

Muitas são as frações ordinárias que podem ser representadas por numerais decimais. São aquelas frações ordinárias que têm equivalentes decimais. A fração $\frac{1}{2}$, por exemplo, é uma fração ordinária que tem

equivalente decimal:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = 0,5$$

Então, a fração ordinária $\frac{1}{2}$ pode ser representada sob a forma decimal 0,5.

O mesmo já não ocorre com outras frações ordinárias, como $\frac{1}{3}$, que não possui equivalente decimal.

Dizemos que vamos "converter" uma fração ordinária em decimal quando queremos expressá-la sob a forma decimal. Para fazermos a "conversão", basta encontrar, na classe de equivalência da fração ordinária dada, uma sua equivalente decimal. A seguir, empregar a forma decimal desta última, como fizemos no exemplo acima.

Daremos, a seguir, mais alguns exemplos:

$$1.^{\circ}) \frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10} = 0,4 \text{ e temos: } \frac{2}{5} = 0,4$$

$$2.^{\circ}) \frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0,75 \text{ e temos: } \frac{3}{4} = 0,75$$

Na prática, podemos encontrar diretamente a forma decimal de uma fração ordinária dividindo o seu numerador pelo respectivo denominador.

Aplicamos esta regra prática nos exemplos acima e veremos que os resultados serão os mesmos:

$$1.^{\circ}) \begin{array}{r} 2,0 \quad | \quad 5 \\ \hline 0 \quad 0,4 \end{array} \quad \text{e temos:} \quad \frac{2}{5} = 0,4$$

$$2.^{\circ}) \begin{array}{r} 3,0 \quad | \quad 4 \\ \hline 20 \quad 0,75 \\ 0 \end{array} \quad \text{e temos:} \quad \frac{3}{4} = 0,75$$

DÍZIMAS PERIÓDICAS

Acontece que, como já vimos, nem sempre a fração ordinária tem equivalente decimal. Então, ao aplicarmos a regra prática para determinar a forma decimal da fração ordinária dada, podem ocorrer dois casos:

1.º caso: a divisão é *exata*, (como nos exemplos dados) e diz-se que a fração ordinária "converteu-se" numa *decimal exata* ou à forma decimal, o que quer dizer que a fração ordinária considerada possui equivalente decimal.

2.º caso: a divisão *não é exata*, isto é, existem restos não-nulos que se repetem de forma periódica e o quociente se prolonga indefinidamente. Diz-se, neste caso, que a fração ordinária "converte-se" numa *decimal periódica* ou numa *dízima periódica*.

Sejam os seguintes exemplos: $\frac{1}{25}$, $\frac{13}{40}$, $\frac{2}{3}$, e $\frac{5}{12}$

$$\frac{1}{25} = 0,04 \quad (\text{decimal exata})$$

$$\begin{array}{r} 1,00 \quad | \quad 25 \\ \underline{00} \quad 0,04 \end{array}$$

$$\frac{13}{40} = 0,325 \quad (\text{decimal exata})$$

$$\begin{array}{r} 13,0 \quad | \quad 40 \\ \underline{100} \quad 0,325 \\ 200 \\ \underline{00} \end{array}$$

$$\frac{2}{3} = 0,6666 \dots \quad (\text{dízima periódica})$$

$$\begin{array}{r} 2,0 \quad | \quad 3 \\ \underline{20} \quad 0,6666 \dots \\ 20 \\ \underline{20} \\ 20 \\ \vdots \end{array}$$

$$\frac{5}{12} = 0,41666 \dots \quad (\text{dízima periódica})$$

$$\begin{array}{r} 5,0 \quad | \quad 12 \\ \underline{20} \quad 0,41666 \dots \\ 80 \\ \underline{80} \\ 80 \\ \underline{80} \\ \vdots \end{array}$$

CONDIÇÃO PARA QUE UMA FRAÇÃO ORDINÁRIA SEJA CONVERSÍVEL NUMA DECIMAL EXATA

Vimos que só há a conversão de uma fração ordinária em decimal exata quando ela tem equivalente decimal, isto é, quando o denominador da fração dada pode se tornar em 10, 100, 1.000, etc. (uma potência de 10). Como os fatores primos de 10 são 2 e 5, o mesmo ocorrendo com suas potências, variando apenas os expoentes dos fatores, podemos concluir:

A condição para que uma fração ordinária se converta numa decimal exata é a seguinte: o denominador da fração ordinária, irredutível, deve ser divisível apenas pelos fatores primos 2 ou 5, ou por ambos ao mesmo tempo.

Conforme os expoentes dos fatores do denominador da fração ordinária, podemos ainda determinar a maior ordem decimal da forma decimal da fração, isto é, quantas casas decimais terá a decimal exata: terá tantas casas decimais quantas forem as unidades do maior expoente de 2 ou de 5.

Exemplo: $\frac{9}{60}$

Antes de mais nada, devemos simplificar os termos da fração para torná-la irredutível. Assim,

$$\frac{9}{60} = \frac{3}{20}$$

O denominador da fração irredutível é 20 que é o mesmo que $2^2 \times 5$.

Logo, a fração $\frac{9}{60}$ (ou $\frac{3}{20}$) pode converter-se em uma decimal exata com duas casas decimais. (O maior expoente do produto de fatores primos $2^2 \times 5$ é 2.)

Verificação:

$$\begin{array}{r|l} 9,0 & 60 \\ 300 & 0,15 \\ 00 & \end{array}$$

De fato:

$$\frac{9}{60} = 0,15 \text{ (decimal exata com duas casas decimais)}$$

Outro exemplo: $\frac{18}{24}$

$$\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

O denominador da fração equivalente irredutível é 4, o mesmo que 2^2 .

Logo, $\frac{18}{24}$ (ou $\frac{3}{4}$) pode ser reduzida a uma decimal exata com duas casas decimais.

Verificação:

$$\begin{array}{r|l} 18,0 & 24 \\ 120 & 0,75 \\ 00 & \end{array}$$

De fato:

$$\frac{18}{24} = 0,75 \text{ (decimal exata com duas casas decimais)}$$

Mais um exemplo: $\frac{27}{125}$

A fração dada já é irredutível, pois 27 e 125 são primos entre si.

$$125 = 5^3$$

Logo, a fração $\frac{27}{125}$ é redutível a uma decimal exata com três casas decimais (o expoente do fator 5 é 3).

Verificação:

$$\begin{array}{r} 27,0 \quad | \quad 125 \\ 0200 \\ 0750 \\ 000 \end{array}$$

De fato:

$$\frac{27}{125} = 0,216 \text{ (decimal exata com 3 casas decimais)}$$

CONVERSÃO DE FRAÇÕES ORDINÁRIAS EM DÍZIMAS PERIÓDICAS SIMPLES E COMPOSTAS

Seja o seguinte exemplo: Expressar a fração ordinária $\frac{3}{11}$ em um numeral decimal.

Sabemos que, para isso, devemos dividir o numerador da fração ordinária pelo respectivo denominador.

Assim:

$$\begin{array}{r} 3,0 \quad | \quad 11 \\ 080 \\ 030 \\ 080 \\ 030 \\ 080 \\ 03 \\ \vdots \end{array}$$

$$\text{Logo, } \frac{3}{11} = 0,272727\dots$$

Vemos que, ao dividir 3 por 11 vão se obtendo restos maiores que zero e menores que 11 (o resto é sempre menor que o divisor) e que, portanto, após um certo número de vezes, terão de se repetir, ocasionando também no quociente a repetição dos algarismos, sempre na mesma ordem. O quociente é então um número cuja representação decimal apresenta um grupo de algarismos que se repete indefinidamente, como tivemos oportunidade de verificar no exemplo acima. O quociente dessa espécie é denominado *dízima periódica* ou *decimal periódica*. O grupo de algarismos que se repete é denominado *período* e pode ter um, dois, três ou mais algarismos.

Se o período aparecer logo depois da vírgula, dizemos que a *dízima periódica* é *simples*. Se houver entre a vírgula e o primeiro período uma parte decimal, dizemos que a *dízima periódica* é *composta*. A parte decimal que fica entre a vírgula e o primeiro período, é denominada *não-periódica*.

Exemplos:

1.º) 0,444... que também se pode representar por $0,4\dot{}$. É uma dízima periódica simples, cujo período é 4.

2.º) 3,2727... que também se pode representar por $3,2\overline{7}$. É uma dízima periódica simples cujo período é 27.

3.º) 0,345345... que também se pode representar por $0,\overline{345}$. É uma dízima periódica simples cujo período é 345.

4.º) 0,0333... que também se pode representar por $0,0\dot{3}$. É uma dízima periódica composta cujo período é 3 e cuja parte não-periódica é 0.

5.º) 0,208333... que também se pode representar por $0,208\dot{3}$. É uma dízima periódica composta cujo período é 3 e cuja parte não-periódica é 208.

Pode-se prever, pelo denominador da fração ordinária dada, sem efetuar a divisão, se a dízima periódica será simples ou composta.

a) Uma fração ordinária irredutível é equivalente a uma dízima periódica simples se o seu denominador não fôr divisível pelos fatores primos 2 e 5.

Exemplo: $\frac{2}{3}$

Com efeito:
$$\begin{array}{r} 2,0 \quad | \quad 3 \\ \underline{20} \quad 0,666\dots \\ 20 \\ \underline{20} \\ \vdots \end{array}$$

O denominador da fração ordinária $\frac{2}{3}$ não é divisível por 2 nem por

5. A dízima periódica que a fração $\frac{2}{3}$ originou é simples: 0,666... ou $0,6\dot{}$.

b) Uma fração ordinária irredutível é equivalente a uma dízima periódica composta se o seu denominador fôr divisível pelos fatores primos 2 ou 5, ou por ambos, e ainda por mais algum outro fator primo.

Exemplo: $\frac{13}{24}$

Com efeito:
$$\begin{array}{r} 13,0 \quad | \quad 24 \\ \underline{100} \quad 0,541666\dots \\ 040 \\ \underline{160} \\ 160 \\ \underline{160} \\ 160 \\ \vdots \end{array}$$

O denominador da fração ordinária irredutível $\frac{13}{24}$ é divisível pelos fatores primos 2 e 3 e, por isso, originou uma dízima periódica composta: $0,541\dot{6}$.

GERATRIZ DE UMA DÍZIMA PERIÓDICA SIMPLES

A fração ordinária que origina uma dízima periódica (simples ou composta) é denominada *fração geratriz*.

Podemos determinar a fração geratriz de uma dízima periódica conhecida.

Para isso, comecemos por observar as dízimas periódicas que se originam nas frações com numerador 1 e denominador 9, 99, 999, etc.

$$\frac{1}{9} = 0,111\dots \text{ ou } 0,\overline{1}$$

$$\frac{1}{99} = 0,0101\dots \text{ ou } 0,\overline{01}$$

$$\frac{1}{999} = 0,001001\dots \text{ ou } 0,\overline{001}$$

⋮

Então, a geratriz de uma dízima periódica simples de período igual a uma unidade decimal (0,1; 0,01; 0,001; ...), é uma fração de numerador 1 e de denominador formado de tantos noves quantos são os algarismos do período.

Uma dízima periódica simples qualquer pode ser representada por um produto em que um dos fatores é uma unidade decimal. Assim:

$$0,333\dots = 3 \times 0,111\dots$$

$$0,272727\dots = 27 \times 0,010101\dots$$

$$0,513513\dots = 513 \times 0,001001\dots$$

Então, se quisermos achar a geratriz da dízima periódica simples 0,727272..., podemos decompor a dízima periódica, a exemplo do que fizemos acima. Assim:

$$0,7272\dots = 72 \times 0,0101\dots$$

Como $\frac{1}{99} = 0,0101\dots$, temos que:

$$0,727272\dots = 72 \times \frac{1}{99} = \frac{72}{99}$$

Observando a geratriz de 0,727272... $\left(\frac{72}{99}\right)$, podemos tirar a seguinte conclusão:

“A geratriz de uma dízima periódica simples (de parte inteira nula) é uma fração que tem para numerador o período e, para denominador, um número formado por tantos noves quantos forem os algarismos do período”.

Exemplos:

Determinar as geratrizes das seguintes dízimas simples:

$$1.^\circ) 0,333\dots = \frac{3}{9}$$

$$2.^\circ) 0,5252\dots = \frac{52}{99}$$

$$3.^\circ) 0,123123\dots = \frac{123}{999}$$

Observação: No caso da parte inteira da dízima periódica não ser nula, acha-se a geratriz da dízima e, no final, junta-se à geratriz a parte inteira.

Como exemplo, calculemos a geratriz da dízima periódica: 5,2323...

Temos:

$$5,2323\dots = 5 + 0,2323\dots$$

$$\text{ou } 5,2323\dots = 5 + \frac{23}{99}$$

$$\text{e } 5,2323\dots = 5 \frac{23}{99}$$

GERATRIZ DE UMA DÍZIMA PERIÓDICA COMPOSTA

Seja o seguinte exemplo:

Determinar a geratriz da dízima periódica composta: 0,2111... (o mesmo que 0,21)

Recuando a vírgula para a direita uma casa decimal, a dízima se transformará de composta em simples, pois a parte periódica só tem um algarismo. Mas, terá seu valor diminuído 10 vezes, como sabemos. Logo, para que ela não se altere, dar-lhe-emos o denominador 10, aplicando o que foi aprendido sobre frações. (Dividindo os dois termos da fração pelo mesmo número, seu valor não se altera.)

$$0,2111... = \frac{2,111...}{10} \text{ ou } \frac{2 + 0,111...}{10}$$

Achando a geratriz de 0,111..., temos:

$$0,111... = \frac{1}{9}$$

Logo, substituindo 0,111... pela sua geratriz, temos:

$$\begin{aligned} 0,211... &= \frac{2,111...}{10} = \frac{2 + 0,111...}{10} = \frac{2 + \frac{1}{9}}{10} = \\ &= \frac{2 \times 9 + 1}{9} \div 10 = \frac{2 \times (10 - 1) + 1}{9} \times \frac{1}{10} = \\ &= \frac{20 - 2 + 1}{90} = \frac{21 - 1}{90} \end{aligned}$$

Observando este resultado, deduzimos uma técnica de cálculo para determinar a geratriz de uma dízima periódica composta (de parte inte-

ra nula): ela é uma fração cujo numerador é a diferença entre o número formado pela parte não periódica seguida de um período e um período; o denominador é um número expresso por tantos noves quantos são os algarismos do período seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não-periódica.

Outro exemplo: 0,1432121... (o mesmo que 0,143 $\overline{21}$).

$$\begin{aligned} 0,143212121... &= \frac{143,212121}{1.000} = \frac{143 + \frac{21}{99}}{1.000} = \\ &= \frac{\frac{143 \times 99 + 21}{99}}{1.000} = \frac{143 \times (100 - 1) + 21}{99 \times 1.000} = \\ &= \frac{14.300 - 143 + 21}{99 \times 1.000} = \frac{14.321 - 143}{99 \times 1.000} = \\ &= \frac{14.321 - 143}{99} \div 1.000 = \frac{14.321 - 143}{99} \times \frac{1}{1.000} = \\ &= \frac{14.321 - 143}{99.000} \end{aligned}$$

No caso da parte inteira da dízima periódica não ser nula, procede-se como no caso das dízimas periódicas simples: determina-se a geratriz da dízima e, no final, adiciona-se à geratriz já determinada a parte inteira. No exemplo anterior, se ao invés de 0,143 $\overline{21}$ fôsse 5,143 $\overline{21}$, teríamos:

$$0,143\overline{21} = \frac{14.321 - 143}{99.000} = \frac{14.178}{99.000} = \frac{2.363}{16.500}$$

$$\text{e } 5,143\overline{21} = 5 + \frac{2.363}{16.500} = 5 \frac{2.363}{16.500}$$

Outros exemplos (empregando a técnica de cálculo):

1.º) $0,27333 \dots$ ou $0,27\dot{3}$

$$0,27\dot{3} = \frac{273 - 27}{900} = \frac{246}{900} = \frac{41}{150}$$

2.º) $2,0111 \dots$ ou $2,0\dot{1}$

$$0,0\dot{1} = \frac{01 - 0}{90} = \frac{1}{90}$$

$$\text{e } 2,0\dot{1} = 2 + \frac{1}{90} = 2 \frac{1}{90}$$

3.º) $1,05757 \dots$ ou $1,05\overline{7}$

$$0,05\overline{7} = \frac{057 - 0}{990} = \frac{57}{990} = \frac{19}{330}$$

$$\text{e } 1,05\overline{7} = 1 + \frac{19}{330} = 1 \frac{19}{330}$$

NOTA: As decimais exatas também têm geratrizes que sabemos determinar desde a terceira série primária. A geratriz de $0,2$, por exemplo, é $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. É a conversão da forma decimal à forma de fração ordinária, sempre na sua expressão mais simples.

EXPRESSÕES NUMÉRICAS ENVOLVENDO DÍZIMAS PERIÓDICAS

As dízimas periódicas expressam *valôres aproximados*. Por esse motivo, quando figuram em expressões, devem ser substituídas pelas respectivas *geratrizes*.

Exemplos:

1 — Calcular: $0,56\dot{7} + 0,1\overline{5} \times 0,12$

1.º) Determinando as geratrizes das dízimas periódicas que figuram na expressão:

$$0,56\dot{7} = \frac{567 - 56}{900} = \frac{511}{900}$$

$$0,1\overline{5} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$$

2.º) Substituindo as dízimas pelas respectivas geratrizes,

temos:

$$\frac{511}{900} + \frac{1}{\cancel{33}} \times \frac{\cancel{12}}{\cancel{100}} = \frac{511}{900} \times \frac{1}{55} = \frac{28.105 + 900}{49.500} = \frac{29.005}{49.500} = \frac{5.801}{9.900}$$

2 — $3,4\overline{6} \div 0,7\dot{7} + 0,36 \times 0,3\dot{3}$

1.º) Determinando as geratrizes das dízimas periódicas que figuram na expressão:

$$3,\overline{46} = 3 + \frac{46}{99} = 3 \frac{46}{99}$$

$$0,\dot{7} = \frac{7}{9}$$

$$0,\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2.º) Resolvendo a expressão (após as devidas substituições pelas respectivas geratizes):

$$3 \frac{46}{99} + \frac{7}{9} + \frac{36}{100} \times \frac{1}{3} = \frac{49}{11} \times \frac{1}{1} + \frac{36}{25} \times \frac{1}{1} =$$

$$= \frac{49}{11} + \frac{3}{25} = \frac{1.225 + 33}{275} = \frac{1.258}{275} = 4 \frac{258}{275}$$

SIGNIFICADO DAS FRAÇÕES DECIMAIS PERIÓDICAS

Quando uma quantidade pode sofrer variações que modificam o seu valor, fazendo-a aumentar ou diminuir de uma forma regular, dizemos que essa quantidade é uma *variável*.

Se a quantidade tem um valor fixo, dizemos que ela é uma *constante*.

Por exemplo:

O quociente da divisão de 3 por 4 é uma constante (tem um valor fixo): 0,75

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 4} \\ \underline{20} \\ 20 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

O quociente da divisão de 1 por 3 é uma variável (tem um valor que pode aumentar ou diminuir, conforme o número de ordens decimais tomadas em sua aproximação): 0,33 ...

$$\begin{array}{r} 1,0 \overline{) 3} \\ \underline{10} \\ 10 \\ \underline{10} \\ 0 \\ \vdots \end{array}$$

Se dissermos que $\frac{1}{3} = 0,33$, daremos um valor mais próximo do seu verdadeiro valor que se dissermos que $\frac{1}{3} = 0,3$ e $0,33 > 0,3$.

Se tomarmos três ordens decimais e fizermos $\frac{1}{3} = 0,333$, estaremos aproximando ainda mais $1 \div 3$ de seu verdadeiro valor e $0,333 > 0,33$. Assim, sucessivamente, cada vez nos aproximaremos mais do real valor do quociente de $1 \div 3$, sem, porém nunca atingi-lo.

Quando os diferentes valores que uma quantidade variável recebe se aproximam cada vez mais de uma quantidade fixa (constante)

tornando a diferença entre a variável e a constante cada vez menor, tão pequena quanto se queira, sem anular-se, porém, dizemos que a constante é o limite da variável ou que a variável *tende para um limite* que é a constante.

As *dízimas periódicas* são quantidades variáveis.

Assim, a *dízima periódica* 0,666... é uma variável porque quanto maior for o número de períodos considerados, seu valor aumenta e se aproxima cada vez mais do seu real valor que é o valor de sua geratriz

$\frac{2}{3}$. Nunca, porém, chega a alcançar este valor, mas a sua diferença vai se tornando cada vez menor.

Se tomarmos um só período de 0,666..., teremos:

$$0,6 = \frac{6}{10}$$

A diferença entre a sua geratriz e $\frac{6}{10}$ é:

$$\frac{2}{3} - \frac{6}{10} = \frac{20 - 18}{30} = \frac{2}{30}$$

Se tomarmos dois períodos de 0,666..., teremos:

$$0,66 = \frac{66}{100}$$

A diferença entre a geratriz $\frac{2}{3}$ e $\frac{66}{100}$ é:

$$\frac{2}{3} - \frac{66}{100} = \frac{200 - 198}{300} = \frac{2}{300}$$

Tomando-se três períodos de 0,666..., teremos:

$$0,666 = \frac{666}{1.000}$$

A diferença entre a geratriz de 0,666... e $\frac{666}{1.000}$ é:

$$\frac{2}{3} - \frac{666}{1.000} = \frac{2.000 - 1.998}{3.000} = \frac{2}{3.000}$$

Podemos já observar que a diferença entre 0,666... e a sua geratriz vai se tornando cada vez menor:

$$\frac{2}{3.000} < \frac{2}{300} < \frac{2}{30}$$

Essa diferença pode se tornar tão pequena quanto queiramos, bastando para isso que tomemos um número cada vez maior de períodos, mas nunca será anulada.

Portanto, 0,666... é uma variável que tende para o limite $\frac{2}{3}$.

Analogamente, 0,363636... é uma variável porque à medida que aumentamos o número de períodos o seu valor vai se tornando maior e se aproximando cada vez mais do valor de sua geratriz que é $\frac{36}{99} = \frac{4}{11}$, sem atingi-lo porém. A diferença pode ser tão pequena quanto se queira.

Portanto, 0,3636... é uma variável que tende para o limite $\frac{4}{11}$ quando o número de períodos aumenta indefinidamente.

Podemos, portanto, entender as *dízimas periódicas* (simples ou compostas) como sendo variáveis que tendem para o limite representado pelas suas geratrizes, quando o número de períodos aumentar indefinidamente.

DÍZIMAS PERIÓDICAS DE PERÍODO 9

As dízimas periódicas de período 9 *não possuem geratrizes* no sentido estudado.

A dízima periódica simples $0,999\dots$ (denominada pura) e as dízimas periódicas compostas de período 9, tais como $0,0999\dots$, $0,01999\dots$, etc., (denominadas mistas) *não se originam de frações ordinárias comuns*. Não existe uma fração ordinária tal que, ao dividirmos o seu numerador pelo respectivo denominador, origine uma dízima periódica de período 9.

A dízima periódica $0,999\dots$, se tomada com três ordens decimais, tem uma diferença de $\frac{1}{1.000}$ de 1, como podemos comprovar:

$$0,999 = \frac{999}{1.000} e 1 - \frac{999}{1.000} = \frac{10.000 - 999}{1.000} = \frac{1}{1.000}$$

Tomada com 4 ordens decimais, difere de 1 em $\frac{1}{10.000}$, e assim sucessivamente, conforme aumentarmos indefinidamente o número de períodos tomados. À medida que vamos aumentando o número de períodos, podemos observar que seu valor se aproxima indefinidamente de 1, sem nunca chegar a ter esse valor. Logo, a diferença entre $0,999\dots$ e 1 pode chegar a ser tão pequena quanto se queira, sem chegar a ser nula.

Então, $0,999\dots$ é uma variável que tende para o limite 1.

É por isso que se formos procurar sua geratriz encontraremos

$$\frac{9}{9} = 1.$$

Da mesma forma, a dízima periódica composta $0,0999\dots$, se tomada com duas ordens decimais, difere $\frac{1}{100}$ de 0,1, pois

$$0,09 = \frac{9}{100} e \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{10 - 9}{100} = \frac{1}{100}$$

Se tomada com três ordens decimais, a dízima periódica composta $0,0999\dots$ difere $\frac{1}{1.000}$ de 0,1, pois

$$0,099 = \frac{99}{1.000} e \frac{1}{10} - \frac{99}{1.000} = \frac{100 - 99}{1.000} = \frac{1}{1.000}$$

Portanto, a dízima periódica composta $0,0999\dots$ pode chegar a ter uma diferença tão pequena quanto se queira, sem nunca chegar a ser zero. Em outras palavras: $0,0999\dots$ é uma variável que tende para o limite 0,1, quando se aumenta indefinidamente o número de períodos. É por isso que, ao se procurar a sua geratriz, encontramos:

$$0,0999\dots = \frac{09 - 0}{90} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10} \text{ ou } 0,1.$$

Analogamente, as dízimas periódicas compostas $0,1999\dots$, $0,2999\dots$, $0,3999\dots$, etc., são variáveis que tendem respectivamente para os limites 0,2, 0,3, 0,4, ..., quando o número de períodos aumenta indefinidamente.

De modo idêntico, as dízimas periódicas compostas $0,00999\dots$, $0,01999\dots$, $0,02999\dots$, são variáveis que tendem respectivamente para os limites 0,01, 0,02, 0,03, etc., quando o número de períodos cresce indefinidamente.

Da mesma forma, as dízimas periódicas compostas $0,10999\dots$, $0,11999\dots$, $0,12999\dots$, etc., são variáveis que tendem respectivamente para os limites 0,11, 0,12, 0,13, etc., quando o número de períodos cresce indefinidamente.

Observações:

1 — As frações ordinárias só podem dar origem a dois tipos de decimais: exatas e periódicas. Estas podem ser simples ou compostas.

2 — As dízimas periódicas com período 9 não se originam nas frações ordinárias.

3 — Existem outras decimais inexatas com número ilimitado de ordens decimais, mas que não se repetem periodicamente, como as que

estudamos. Alguns desses números são notáveis para o cálculo, como o tão conhecido π .

$$\pi = 3,1415926535\dots$$

Tais números não pertencem ao conjunto dos números racionais e não serão estudados por nós que tomamos por Universo em nosso trabalho o conjunto dos números racionais.

Pelo mesmo motivo, não estudaremos a área do círculo, o volume do cilindro e o volume da pirâmide, noções essas que exigem o conhecimento do número π (irracional) que não pertence ao conjunto dos racionais.

EXERCÍCIOS (8)

1 — Diga a que tipo de decimal as seguintes frações ordinárias se converterão, e por quê, (sem efetuar divisões):

a) $\frac{1}{2}$

f) $\frac{5}{14}$

l) $\frac{5}{55}$

b) $\frac{1}{3}$

g) $\frac{2}{6}$

m) $\frac{9}{36}$

c) $\frac{1}{4}$

h) $\frac{3}{15}$

n) $\frac{50}{140}$

d) $\frac{1}{5}$

i) $\frac{7}{28}$

o) $\frac{1.000}{4.000}$

e) $\frac{1}{6}$

j) $\frac{3}{55}$

p) $\frac{1.800}{5.400}$

2 — Separe, no exercício anterior, as frações ordinárias que equivalem a decimais exatas e diga, sem efetuar as divisões, quantas casas decimais cada uma delas terá.

3 — Determine as geratrizes (irredutíveis) das seguintes dízimas periódicas simples:

a) $0,666\dots$

d) $3,1515\dots$

g) $5,\overline{72}$

b) $0,\overline{3}$

e) $0,\overline{52}$

h) $0,009009\dots$

c) $1,444\dots$

f) $0,0505\dots$

i) $1,\overline{018}$

4 — Calcular as geratrizes das seguintes dízimas periódicas compostas:

- a) $0,7666\dots$ d) $3,0\dot{3}$ g) $0,060060\dots$
 b) $1,1844\dots$ e) $0,014545\dots$ h) $2,0\overline{23}$
 c) $0,03\overline{15}$ f) $5,14\overline{36}$ l) $0,0001515\dots$

5 — Determine as frações geratrizes das seguintes decimais exatas ou periódicas:

- a) $3,45$ d) $0,32$ g) $2,0\dot{1}$
 b) $2,4545\dots$ e) $0,018018\dots$ h) $3,1\overline{44}$
 c) $0,1\overline{23}$ f) $0,13444\dots$ i) $0,535656\dots$

6 — Reduza as seguintes expressões numéricas aos seus numerais mais simples:

- a) $0,2 + 0,35 - 0,333\dots$
 b) $(2,15 - 0,4545\dots) + (1,1515\dots + \frac{1}{3})$
 c) $(3,4\overline{5} - 1,\dot{1}) \times \frac{2}{3}$
 d) $0,2323\dots \times \frac{18}{100} + 1,03636\dots$
 e) $2,1\overline{44} + 0,2\dot{4} + (2,75 - 0,1\overline{53})$

7 — Complete as afirmações que seguem, tornando-as verdadeiras:

- a) $0,2323\dots$ é uma variável que tende para o limite \dots quando o número de períodos aumenta indefinidamente.
 b) A variável $0,2444\dots$ tende para o limite \dots quando o número de períodos cresce indefinidamente.

8 — Complete:

- a) A dízima periódica pura $0,999\dots$ tende para o limite \dots quando o número de períodos cresce indefinidamente.
 b) As dízimas periódicas \dots não se originam das frações ordinárias.

APÉNDICE

RESPOSTAS ÀS QUESTÕES FORMULADAS NESTE VOLUME

EXERCÍCIOS 1 — 28

- 1 — a) falso; b) verdadeiro; d) falso.
2 — a) \in ; b) \notin ; c) \in ; d) \notin ; e) \in .
3 — a) verdadeira; b) falsa; c) falsa; d) falsa.
4 — a) \in ; b) \in ; c) \notin ; d) \in ; e) \notin .
5 — Existem tantas soluções quantas desejarmos. Por exemplo:

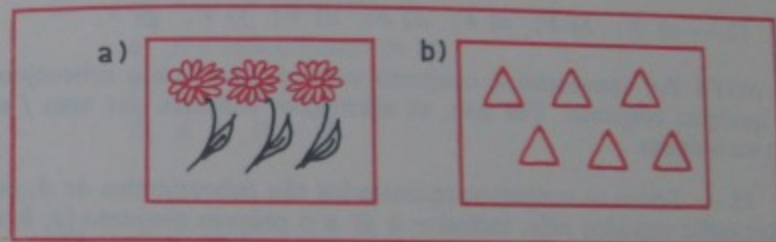


FIG. 63

Conjunto das flôres

Conjunto dos triângulos

- 6 — a) Muitas soluções. Por exemplo:
{abelha, gafanhoto, formiga, minhoca}.
b) {Amazonas, Mato Grosso, Goiás, Minas Gerais, Acre}.
- 7 — Muitas soluções. Por exemplo:
a) conjunto das pessoas nascidas em Brasília.
b) conjunto dos números que são divisíveis por 10.
- 8 — a) {abril, junho, setembro, novembro}.
b) Muitas soluções. Por exemplo:
{Pedro II, Francisco Glicério, Feijó, Campos Salles, Washington Luis}.

c) {primavera, verão, outono, inverno}.

d) {terça-feira}.

e) \emptyset ou $\{ \}$.

f) {m, a, t, e, i, c}.

9 — a) {102, 104, 106, 108, 110, 112, 114, 116, 118}.

b) {101, 103}.

c) {6}.

d) \emptyset ou $\{ \}$.

10 — a) V; b) V; c) F; d) V; e) F; f) F.

11 — a) 3; b) qualquer número diferente de 12; c) z; d) qualquer letra diferente de a; e) 0 (zero); f) qualquer número diferente de zero.

12 — a) V; b) F; c) F; d) F; e) V; f) V; g) V.

NOTA: Por convenção, o conjunto vazio é considerado subconjunto de qualquer conjunto. Por isso, as afirmações contidas nos itens f e g são verdadeiras.

13 — Todos os conjuntos enumerados são subconjuntos de A, pois todos estão contidos nele, inclusive o \emptyset e o próprio conjunto {a, b, c}.

NOTA: Por definição, todo conjunto é subconjunto d'ele mesmo, pois quando definimos subconjunto dizemos: "dados dois conjuntos A e B, A é subconjunto de B se todos os elementos que pertencem a A pertencem também a B".

14 — a) V; b) V; c) V; d) F; e) F; f) V.

15 — a) verdadeira; b) verdadeira.

16 — Os possíveis subconjuntos de A são (em qualquer ordem): {7}, {11}, {13}, {7, 11}, {7, 13}, {11, 13}, \emptyset e {7, 11, 13}.

17 — a) {4, 16}; b) {4, 8, 16, 32, 64}.

18 — a) {0, 2, 4, 6}; {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}.

b) {7, 9, 11}; {1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

c) \emptyset ; {2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 32}.

19 — a) O ponto A; b) os pontos B e C; c) \emptyset .

20 — a) O conjunto dos números naturais {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...} excluindo o zero, pois zero não é positivo (nem negativo).

b) \emptyset ou $\{ \}$.

21 — a) Interceptam-se: A e B; A e C; B e C; A e D.

b) A.

c) \emptyset .

d) \emptyset .

22 — a) $A \supset B$ (contém).

b) B é subconjunto de A.

c) $A \cup B = A$.

d) $A \cap B = B$.

23 —

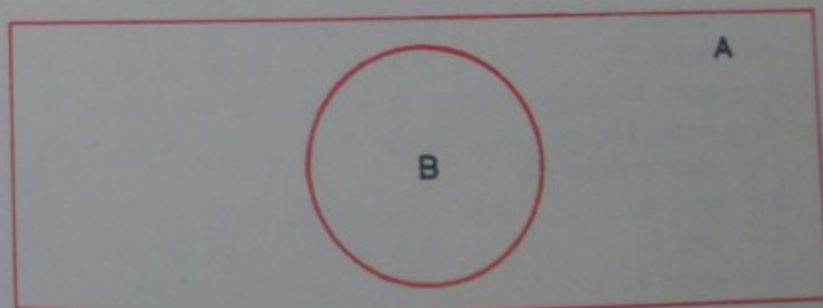


FIG. 64

24 — a) $t \in U$.

b) $u \in U$.

c) $T \subset U$ ou $U \supset T$.

25 —

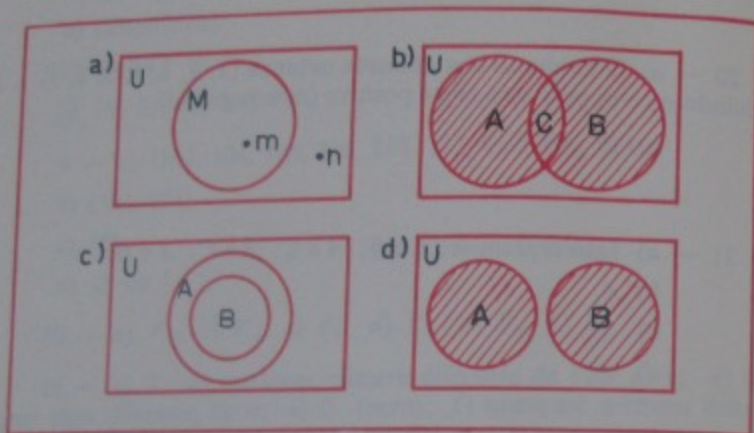


Fig. 65

26 — $A' = \{\text{primavera, verão}\}$.27 — $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.28 — $U = \{0, 6, 10, 12, 18, 20, 24\}$.29 — $P' = \{\text{números ímpares}\}$.30 — $F' = \{\text{números naturais}\}$.

EXERCÍCIOS 2

- 1 — quatro; 4.
- 2 — cinco; 5.
- 3 — sete; 7.
- 4 — doze; 12.
- 5 — vinte e dois; 22.
- 6 — seis; 6.
- 7 — um; 1.
- 8 — zero; 0.
- 9 — doze; 12.
- 10 — dez; 10.

EXERCÍCIOS 3

- 1 — três.
- 2 — 1.^a (das unidades simples); 2.^a (dos milhares); 3.^a (dos milhões).

- 3 — oito; oitava (dezenas de milhões).
- 4 — 28.305.246.
- 5 — 28.305.
- 6 — 2.830.524.
- 7 — 3.
- 8 — 5.000.
- 9 — 0.
- 10 — 200; 20.000.000.
- 11 — a) 3.253; b) 853.296; c) 6.850.000.000.
- 12 — a) $2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10 + 6 \times 1$; b) $3 \times 10^6 + 5 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10 + 1 \times 1$; c) $9 \times 10^8 + 3 \times 10^5 + 4 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 8 \times 1$.

EXERCÍCIOS 4

- 1 — a) 9; b) 8; c) 36; d) 125; e) 1; f) 1; g) 1; h) 1.000; i) 1; j) 64; l) 100.000; m) 16.
- 2 — a) 2^7 ; b) 3^7 ; c) 8^{10} ; d) 3^2 ; e) 8^4 ; f) 4^9 ou 1; g) 2^4 ; h) 3^6 ; i) 5^{12} .
- 3 — a) V; b) V; c) F; d) V; e) V; f) V.
- 4 — a) 8; b) 5; c) 3; d) 100; e) $3^3 = 27$; f) $2^4 = 16$.
- 5 — 144 (porque $12^2 = 144$).
- 6 — 529 (porque $23^2 = 529$).
- 7 — a) 4; b) 7; c) 8; d) 10.
- 8 — a) 5; b) 3; c) 2; d) 1.
- 9 — a) $4^2 = 16$; b) $9^2 = 81$; c) $6^2 = 36$; d) $7^2 = 49$; e) $5^2 = 25$.
- 10 — a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5; f) 6; g) 7; h) 8; i) 9; j) 10.
- 11 — a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 6.
- 12 — a) 2; b) 3; c) 2; d) 1.
- 13 — Porque $5^2 = 25$.
- 14 — Porque $9^2 = 81$.
- 15 — Porque $3^2 = 27$.
- 16 — Porque $2^3 = 8$.
- 17 — 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.
- 18 — 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.
- 19 — 125 (porque $5^3 = 125$).

- 20 — 729 (porque $3^6 = 729$).
 21 — 4.096 (porque $8^4 = 4.096$).
 22 — a) V; b) F; c) V; d) V; e) V; f) F.
 23 — a) 44; b) 89; c) 119; d) 114; e) 149; f) 248; g) 339;
 h) 355; i) 475.
 24 — a) 30; resto = 50; b) 58; resto = 96; c) 84; resto = 92;
 d) 135; resto = 183; e) 235; resto = 375; f) 252; resto = 441;
 g) 344; resto = 64; h) 353; resto = 676; i) 370; resto = 720.
 25 — a) 20; b) 30; c) 45; d) 60; e) 68; f) 79.
 26 — 30; porque o resto não pode ser maior que o dôbro da raiz.
 27 — Sim, porque a raiz sendo 208, poderia haver um resto até
 igual a 2×208 ou 416.

EXERCÍCIOS (5)

- 1 — a) divisor; b) múltiplo de 5; 15; c) múltiplo de 9; 36;
 d) 10 é divisor de 100.
 2 — a) divisor; b) 3 não é divisor de 16; c) 4 não é divisor de 27.
 3 — a) $M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$
 b) $M_6 = \{0, 6, 12, 18, \dots\}$
 c) $M_9 = \{0, 9, 18, 27, \dots\}$
 d) $M_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
 e) $M_0 = \{0\}$.
 4 — a) V; b) V; c) V; d) F; e) V; f) V.
 5 — a) 11; b) M_{11} .
 6 — a) $M_8 = \{0, 8, 16, 24, 32, \dots\}$
 $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$
 $M_9 = \{0, 9, 18, 27, 36, \dots\}$.
 b) $M_8 + M_9 = \{0, 17, 34, 51, 68, \dots\}$.
 c) $M_8 + M_9 = M_{17}$.
 7 — a) $M_{10} = \{0, 10, 20, 30, 40, \dots\}$.
 $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$
 $M_2 = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$.
 b) $M_{10} - M_2 = \{0, 7, 14, 21, 28, \dots\}$
 c) $M_{10} - M_2 = M_7$.

- 8 — Todas as sentenças são verdadeiras.
 9 — a) 6; b) 6.
 10 — a) múltiplo de 5; b) múltiplo de 5.
 11 — a) $D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$.
 b) $D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.
 c) $D_{25} = \{1, 5, 25\}$.
 d) $D_6 = \{1, 5\}$.
 e) $D_1 = \{1\}$.
 f) $D_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.
 12 — Dois.
 13 — Um.
 14 — Não, porque um número primo tem dois divisores e o
 número 1 só tem um divisor.
 15 — $P = \{2, 7, 13, 17, 31, 47\}$ e $C = \{4, 12, 21, 35, 39\}$.
 16 — Um.
 17 — O próprio número.
 18 — O próprio número.
 19 — O próprio número; 1.
 20 — Não, muitos são os números ímpares que não são primos.
 Exemplos: 9, 15, 21, 25, etc., são números compostos e são ímpares.
 21 — Não. Existe um único número par que não é composto, mas
 primo. É o número 2.
 22 — Não. Existem muitos números compostos que são ímpares,
 tais como os citados atrás. (questão n.º 20.)
 23 — Não. Existe um número primo que é par: o número 2.
 24 — 1.º) O número 558 é divisível por: 2, 3, 6 e 9;
 2.º) O número 1.242 é divisível por: 2, 3, 6 e 9;
 3.º) O número 8.998 é divisível por: 2 e 11;
 4.º) O número 6.126.120 é divisível por: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
 9, 10, 11, 13 e 17.
 25 — 3.
 26 — a) $2^4 \times 3$; b) 3×5 ; c) 5^2 ; d) $2^2 \times 23$; e) $3^3 \times 313$.
 27 — a) $441 = 3^2 \times 7^2$; $\sqrt{441} = \sqrt{3^2 \times 7^2} = 3 \times 7 = 21$.
 b) $4.225 = 5^2 \times 13^2$; $\sqrt{4.225} = \sqrt{5^2 \times 13^2} = 5 \times 13 = 65$.
 c) $7.396 = 2^2 \times 43^2$; $\sqrt{7.396} = \sqrt{2^2 \times 43^2} = 2 \times 43 = 86$.
 d) $9.409 = 97^2$; $\sqrt{9.409} = \sqrt{97^2} = 97$.

- 28 — a) 54 tem 8 divisores: {1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54}.
 b) 144 tem 15 divisores: {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144}.
 c) 520 tem 16 divisores: {1, 2, 4, 5, 8, 10, 13, 20, 26, 40, 52, 65, 104, 130, 260, 520}.
- 29 — a) 4; b) 6; c) 8; d) 11.
 30 — a) 53; b) 8; c) 25; d) 7.
 31 — a) 48; b) 60; c) 30; d) 12.
 32 — a) 132; b) 9.000; c) 864; d) 480.
 33 — O produto deles: a unidade.

34 — A unidade; o produto deles; porque dois números consecutivos são sempre primos entre si. Experimente.

35 — Sim; porque se cada um dos números dados é primo, eles não têm divisor comum além da unidade e são, portanto, primos entre si.

EXERCÍCIOS (6)

- 1 — a) 3; b) 4; c) 4; d) 4; e) 3; f) 3; g) 6; h) 9.
 2 — a) $2\frac{2}{4}$ ou $2\frac{1}{2}$; b) $4\frac{1}{2}$; c) $2\frac{1}{2}$; d) $3\frac{5}{6}$; e) $2\frac{1}{7}$;
 f) $6\frac{2}{5}$; g) $8\frac{1}{3}$; h) $3\frac{1}{9}$.
 3 — a) $\frac{6}{3}$; b) $\frac{10}{2}$; c) $\frac{32}{4}$; d) $\frac{12}{4}$; e) $\frac{18}{3}$; f) $\frac{14}{2}$.
 4 — $\frac{2}{3} = \frac{\square}{24}$; $3 \times \square = 2 \times 24$; $3 \times \square = 48$; $\square = 48 \div 3$;
 $\square = 16$. Logo, a fração procurada é $\frac{16}{24}$.
 5 — $\frac{3}{4} = \frac{18}{\square}$; $3 \times \square = 4 \times 18$; $3 \times \square = 72$; $\square = 72 \div 3$;
 $\square = 24$. Logo, a fração procurada é $\frac{18}{24}$.

$6 - \frac{12}{15} = \frac{\square}{20}$; $15 \times \square = 12 \times 20$; $15 \times \square = 240$; $\square = 240 \div 15$; $\square = 16$. Logo, a fração procurada é $\frac{16}{20}$. Podemos verificar a exatidão da resposta simplificando a fração dada $\left(\frac{12}{15}\right)$ e a fração encontrada $\left(\frac{16}{20}\right)$.

7 — a) $\frac{4}{6}$ e $\frac{5}{6}$; b) $\frac{50}{15}$ e $\frac{6}{15}$; c) $\frac{3}{8}$ e $\frac{2}{8}$; d) $\frac{65}{30}$ e $\frac{16}{30}$.

8 — a) $\frac{4}{4}$ ou 1; b) $\frac{6}{5}$ ou $1\frac{1}{5}$; c) $\frac{6}{6}$ ou 1; d) $\frac{7}{11}$; e)

$\frac{13}{7}$ ou $1\frac{6}{7}$; f) $\frac{9}{8}$ ou $1\frac{1}{8}$; g) $\frac{45}{15}$ ou 3; h) $\frac{65}{40}$ ou $1\frac{5}{8}$;

i) $\frac{41}{36}$ ou $1\frac{5}{36}$; j) $8\frac{11}{12}$; l) $13\frac{15}{32}$; m) $10\frac{31}{40}$.

9 — a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{6}{4}$ ou $\frac{3}{2}$ ou $1\frac{1}{2}$; c) $\frac{5}{9}$; d) $\frac{7}{20}$; e) $4\frac{5}{6}$;

f) $7\frac{1}{2}$; g) $\frac{2}{3}$; h) $2\frac{7}{8}$; l) $\frac{2}{15}$.

10 — a) $2\frac{19}{40}$; b) $8\frac{23}{72}$; c) $\frac{29}{24}$ ou $1\frac{5}{24}$; d) $\frac{32}{15}$ ou $2\frac{2}{15}$; e) 0.

11 — $\square = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right)$; $\square = \frac{27}{40}$.

12 — $\square = \left(5\frac{1}{3} + 3\frac{1}{9}\right) - 2\frac{2}{5}$; $\square = 6\frac{2}{45}$.

13 — a) $\frac{1}{7}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{9}$; d) 49; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{85}{144}$; g) $\frac{79}{270}$.

$$14 - a) 5; b) 8; c) \frac{1}{5}; d) \frac{3}{10}; e) \frac{7}{3} \text{ ou } 2\frac{1}{3}; f) \frac{50}{9} \text{ ou } 5\frac{5}{9}.$$

$$15 - \square = 7 \times \frac{2}{7}; \square = 2 \text{ min.}$$

$$16 - \square = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}\right); \square = \frac{2}{15}.$$

$$17 - \square = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 36; \square = 12 \text{ anos.}$$

$$18 - \square = 220 - \left(\frac{4}{11} \times 220\right); \square = 140.$$

$$19 - a) \frac{3}{2} \text{ ou } 1\frac{1}{2}; b) \frac{32}{5} \text{ ou } 6\frac{2}{5}; c) \frac{9}{10}; d) \frac{5}{16}; e) \frac{1}{6};$$

$$f) \frac{5}{6}; g) \frac{5}{3} \text{ ou } 1\frac{2}{3}; h) 1\frac{1}{24}.$$

$$20 - \square = 2 + \frac{2}{25}; \square = 25 \text{ dias.}$$

$$21 - \square = 17 \frac{1}{2} \div 2\frac{1}{2}; \square = 7 \text{ pessoas.}$$

$$22 - 2\frac{3}{7} \div \square = 5; \square = \frac{17}{35}.$$

$$23 - a) \frac{3}{2}; b) \frac{4}{5}; c) \frac{10}{3} \text{ ou } 3\frac{1}{3}; d) 32; e) \frac{25}{2} \text{ ou } 12\frac{1}{2}.$$

$$24 - a) 1\frac{9}{22}; b) \frac{47}{272}; c) 6\frac{41}{64}.$$

$$25 - \text{CS } 39,00.$$

$$26 - \text{Cr\$ } 54,00.$$

$$27 - \text{Cr\$ } 372,00.$$

$$28 - 55 \text{ km.}$$

$$29 - 36.$$

$$30 - \text{Cr\$ } 8.670,00$$

EXERCÍCIOS (7)

$$1 - a) 10; b) 10; c) \text{ centésimo.}$$

$$2 - a) 2,3; b) 0,13; c) 0,61; d) 1,25; e) 0,218; f) 6,504; g) 0,035; h) 64,63; i) 0,008.$$

$$3 - a) \frac{8}{10}; b) \frac{15}{10}; c) \frac{139}{10}; d) \frac{6}{100}; e) \frac{254}{100}; f) \frac{1.615}{100};$$

$$g) \frac{9}{1.000}; h) \frac{2.043}{1.000}; i) \frac{12.561}{1.000}.$$

$$4 - a) 12,3 < 21,3; b) 26,48 > 24,9; c) 132,51 < 132,8; d) 0,06 < 0,60; e) 6,5 = 6,500; f) 9,469 < 9,471; g) 24,132 > 24,123; h) 10,8 < 10,799; i) 23,5 = 23,50.$$

$$5 - a) 18,665; b) 30,925; c) 41,450; d) 5,4; e) 12,602; f) 7,37.$$

$$6 - a) 39; b) 3,174; c) 6.381,04; d) 6,1.244; e) 0,35; f) 8,94; g) 50; h) 340; i) 0,94.$$

$$7 - a) 2,25; b) 5,5696; c) 0,0016; d) 0,729; e) 1,1.025; f) 0,00001.$$

$$8 - a) 1; 1,1; 1,14; 1,142; b) 0; 0,2; 0,27; 0,272; c) 3; 3; 3,9; 2,96; 3,968; d) 8; 8,5; 8,57; 8,571; e) 2; 2,2; 2,24; 2,241; f) 0; 0,0; 0,05; 0,053.$$

$$9 - a) 1,5; b) 0,12; c) 0,3; d) 1,24; e) 0,2.$$

$$10 - a) 0,3; b) 0,4; c) 0,1; d) 0,2; e) 0,02; f) 0,9; g) 0,06; h) 1,2; i) 0,08.$$

$$11 - a) 3,1; b) 1,4; c) 5,9; d) 11,3; e) 30,4; f) 79,0.$$

$$12 - a) 12,84; b) 2,23; c) 18,24; d) 63,41; e) 1,41; f) 18,57.$$

$$13 - a) 5,477; b) 0,89; c) 1,5; d) 3,492; e) 4,83.$$

EXERCÍCIOS (8)

1 — a) exata; o denominador só contém o fator 2; b) dízima periódica simples; o denominador não contém o fator 2 nem o 5; c) exata; o denominador só contém o fator 2; d) exata; o denominador só contém o fator 5. e) dízima periódica composta; o denominador contém os fatores 2 e 3; f) dízima periódica composta; o denominador contém os fatores 2 e 7; g) dízima periódica simples; porque a fração $\frac{2}{6}$ é equivalente à fração $\frac{1}{3}$ cujo denominador não contém os fatores 2 e 5; h) $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$; logo ela se converterá em uma decimal exata (apenas o fator 5 no denominador); i) $\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$; decimal exata, como em c; j) dízima periódica composta, porque o denominador contém os fatores 5 e 11; l) dízima periódica simples porque $\frac{5}{55} = \frac{1}{11}$ e o denominador da expressão mais simples só contém o fator 11; m) $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$; decimal exata, como em c; n) $\frac{50}{140} = \frac{5}{14}$; dízima periódica composta, como em f; o) $\frac{1.000}{4.000} = \frac{1}{4}$; decimal exata, como em c; p) $\frac{1.800}{5.400} = \frac{18}{54} = \frac{1}{3}$; dízima periódica simples, como em b.

2 — $\frac{1}{2}$ (uma casa decimal); $\frac{1}{4}$ (2 casas decimais); $\frac{1}{5}$ (uma casa decimal); $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ (uma casa decimal); $\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ (duas casas decimais); $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ (duas casas decimais); $\frac{1.000}{4.000} = \frac{1}{4}$ (duas casas decimais).

3 — a) $\frac{6}{9}$ ou $\frac{2}{3}$; b) $\frac{3}{9}$ ou $\frac{1}{3}$; c) $1\frac{4}{9}$; d) $3\frac{15}{99}$ ou $3\frac{5}{33}$; e) $\frac{52}{99}$; f) $\frac{5}{99}$; g) $5\frac{72}{99}$ ou $5\frac{8}{11}$; h) $\frac{9}{999}$ ou $\frac{1}{111}$; i) $1\frac{18}{999}$ ou $1\frac{2}{111}$.

- 4 — a) $\frac{23}{30}$; b) $1\frac{83}{450}$; c) $\frac{26}{825}$; d) $3\frac{1}{30}$; e) $\frac{4}{75}$; f) $5\frac{79}{550}$; g) $\frac{20}{333}$;
 h) $2\frac{23}{990}$; i) $\frac{1}{6.600}$.
 5 — a) $\frac{69}{20}$; b) $2\frac{5}{11}$; c) $\frac{123}{999}$; d) $\frac{8}{25}$; e) $\frac{2}{111}$; f) $\frac{121}{900}$; g) $2\frac{1}{90}$;
 h) $3\frac{16}{111}$; i) $\frac{5.303}{9.900}$.
 6 — a) $\frac{13}{60}$; b) $3\frac{119}{660}$; c) $1\frac{167}{297}$; d) $1\frac{43}{550}$; e) $11\frac{1.799}{4.884}$.
 7 — a) $\frac{23}{99}$; b) $\frac{11}{45}$.
 8 — a) 1; b) com período 9.

TABELA DOS NUMERAIS ORDINAIS E FRACIONÁRIOS
CORRESPONDENTES DE 1 A 1.000.000.000

CARDINAL ORDINAL	CARDINAL ORDINAL
1 primeiro	101 centésimo primeiro
2 segundo	102 centésimo segundo
3 terceiro	. .
4 quarto	. .
5 quinto	. .
6 sexto	199 centésimo nonagésimo nono
7 sétimo	200 ducentésimo
8 oitavo	201 ducentésimo primeiro
9 nono	. .
10 décimo	. .
11 décimo primeiro ou undécimo	. .
12 décimo segundo ou duodécimo	300 trecentésimo
13 décimo terceiro	301 trecentésimo primeiro
14 décimo quarto	. .
15 décimo quinto	. .
16 décimo sexto	. .
17 décimo sétimo	400 quadringentésimo
18 décimo oitavo	. .
19 décimo nono	. .
20 vigésimo	. .
21 vigésimo primeiro	500 quingentésimo
. .	. .
. .	. .
30 trigésimo	600 sexcentésimo
31 trigésimo primeiro	. .
. .	. .
. .	. .
. .	700 setingentésimo ou septingentésimo
40 quadragésimo	. .
41 quadragésimo primeiro	. .
. .	. .
. .	800 octingentésimo
50 quinquagésimo	. .
51 quinquagésimo primeiro	. .
. .	. .
. .	900 nongentésimo ou noningentésimo
60 sexagésimo	. .
61 sexagésimo primeiro	. .
. .	1.000 milésimo
. .	1.001 milésimo primeiro
. .	. .
70 setuagésimo	. .
71 setuagésimo primeiro	. .
. .	10.000 décimo milésimo
. .	. .
80 octogésimo	. .
. .	1.000.000 milionésimo
. .	. .
. .	. .
90 nonagésimo	1.000.000.000 bilionésimo
. .	. .
. .	. .
100 centésimo	. .

AUTORA: MARIA DO CARMO A. TOLEDO

BIBLIOGRAFIA

- ALBUQUERQUE, Irene, Metodologia da Matemática. Editora Conquista, Rio de Janeiro.
- BALDOR, Aurelio, Aritmetica Teorico Practica. Publicaciones Cultural S. A., Havana, Cuba.
- BERGAMINI, David, Matemáticas. Coleção Científica de Life em espanhol. Editado por Offset Multicolor S. A., 1966, México.
- BUNT, N. H. Lucas, Introdução ao Curso de Geometria Plana, Edição Fundo de Cultura.
- CARAÇA, Bento de Jesus, Conceitos Fundamentais da Matemática, Lisboa, 1958. Tipografia Matemática Ltda.
- CATUNDA, Omar, Conceitos Fundamentais da Matemática, Conjuntos e Estruturas. Publicado em "Matemática Moderna para o Ensino Secundário" do GEEM e IBECC, S. Paulo.
- KEMPT, Albert F., The New Math Made Simple, Doubleday & Company, Inc. Garden City, New York.
- MARMO de Oliveira, Antônio, e SILVA, Agostinho, Biblioteca da Matemática Moderna, Lisa, Livros Irradiantes S. A., S. Paulo.
- PAPY, G., Mathématique Moderne, volumes 1 e 2, M. Didier, Bruxelas, Bélgica.
- SANGIORGI, Osvaldo, Matemática curso-moderno, volumes 1 e 3. Companhia Editora Nacional, S. Paulo.
- SANGIORGI, Osvaldo, "Sistemas Matemáticos e Estruturas". Publicado em "Matemática Moderna para o Ensino Secundário" do GEEM, S. Paulo.
- SPERLING, Abraham P. and LEVISON, Samuel D., Arithmetic Made Simple, Doubleday & Company, Inc. Garden City, New York.
- GEEM, São Paulo, "Matemática Moderna para o Ensino Secundário, 1965.
- PUBLICAÇÕES e APOSTILAS do SOP do Departamento de Educação do Est. de S. Paulo e do PABAE, Minas Gerais.

ÍNDICE REMISSIVO

ADIÇÃO

- aplicações da propriedade associativa da, I, 120.
- com numerais decimais, III, 128.
- conceito de, I, 69.
- considerações gerais sôbre a, IV, 31.
 - de frações, IV, 139.
 - de frações, propriedades da, IV, 143.
 - de números racionais, III, 117; IV, 139; V, 222.
 - de unidades de tempo, IV, 296.
 - e subtração de frações combinadas, IV, 150.
- fatos fundamentais da, I, 69.
- gradação das dificuldades na, I, 117; II, 43.
- introdução do sinal de, I, 71.
- mais de duas parcelas na, I, 117.
- neutralidade do zero na, I, 212.
- nomenclatura dos termos da, II, 51; III, 33
- preparo para a, I, 47.
- prontidão para a, I, 69.
- propriedade associativa da, I, 118.
- propriedade comutativa da, I, 72.
- propriedades da, II, 89; III, 55; IV, 32; V, 83.
- provas da, II, 52; III, 37.
- revisão do conceito de, III, 29; V, 222.
- técnica operatória da, I, 211; II, 41.
- variação do resultado da, III, 39; IV, 37.
- verificação do resultado da, II, 52; III, 37.

ALTURA

- do retângulo, IV, 236.
- dos paralelogramos, IV, 236.
- do trapézio, IV, 255.
- do triângulo, IV, 239.
- do triângulo retângulo, IV, 240.

ÂNGULO

- conceito de, IV, 224.
- congruência de, IV, 228.
- designação de, IV, 225.
- lados do, IV, 224.
- medidas de, IV, 227.
- região externa do, IV, 224.
- região interna do, IV, 224.
- reto, conceito de, IV, 229.
- vértice do, IV, 224.

ÁREA

- conceito de, IV, 205 e 241.
- do paralelogramo, IV, 253.
- do quadrado, IV, 243.
- do retângulo, IV, 245.
- do trapézio, IV, 255.
- do triângulo, IV, 249.
- do triângulo retângulo, IV, 252.
- unidades não padronizadas de, IV, 205.
- unidades padronizadas de, IV, 206.

BASE

- de uma potência, V, 107.
- de um sistema de numeração, II, 21; IV, 19; V, 69.
- do cilindro, IV, 285.
- do cone, IV, 285.
- dos paralelogramos, IV, 236.
- do triângulo, IV, 239.
- do triângulo retângulo, IV, 240.
- noções gerais sobre, II, 21.

CAPACIDADE

- aplicação das unidades de, III, 176.
- leitura e escrita das unidades de, III, 175.
- mudança de unidades de, III, 175.
- representação decimal das unidades de, III, 173.
- unidades de, III, 173.

CENTENA

- conceito de, I, 59.
- revisão do conceito de, II, 9.

CENTÉSIMOS

- conceito de, III, 136.
- equivalência entre décimos e, III, 136.
- representação decimal dos, III, 136.

CENTÍMETRO

- idéia de, II, 135.
- leitura e escrita do, III, 156.
- o metro e o, II, 135; III, 154.
- quadrado, IV, 207.
- representação decimal do, III, 156.

CILINDRO

- altura do, IV, 285.
- bases do, IV, 285.
- conceito de, IV, 285.
- formas semelhantes à do, I, 204.
- idéia do, I, 203.
- planificação do, I, 207.
- reconhecimento do, I, 203.
- superfície curva do, IV, 285.

CÍRCULO

- conceito de, I, 224.
- definição de, I, 173, rodapé.
- reconhecimento do, I, 224.

CIRCUNFERÊNCIA

- conceito de, I, 224.

COMPLEMENTO

- conceito de, V, 33.
- no Diagrama de Venn, V, 41.

COMPRIMENTO

- do retângulo, IV, 245.
- do prisma, IV, 279.
- introdução às medidas de, II, 134.
- mudança de unidades de, III, 162; IV, 201.
- noção de, I, 187; II, 133.
- problemas com unidades de, III, 163; IV, 201.
- representação decimal das unidades de, III, 162; IV, 201.

CONCEITOS

- primitivos, IV, 11.

CONE

- base do, IV, 285.
- conceito de, IV, 285.
- superfície não plana do, IV, 286.

CONJUNTO

- comparação entre, I, 19 e 41.
- complemento, V, 33.
- de pontos, idéia de, II, 148.
- dos números fracionários, II, 116.
- dos números naturais, III, 15.
- dos números racionais, III, 111; V, 221.
- idéia de correspondência entre, I, 23.
- igualdade de, III, 84.
- noção intuitiva de, I, 16.
- relação de inclusão, IV, 12.
- relação de pertinência, IV, 11.
- representação do, III, 9.
- revisão do conceito de, III, 9 e 205; IV, 219.
- s de múltiplos e divisores, IV, 69.
- s disjuntos, V, 37.
- s iguais, I, 23; V, 17.
- s infinitos, III, 25 e 205.
- s introdução à teoria dos, V, 11.
- s não-disjuntos, V, 38.
- s, notação, V, 12.
- s, operações com, V, 25.
- unitário, IV, 10; V, 22.
- universo, V, 33.
- vazio, I, 55; III, 16; IV, 14; V, 19.

CONJUNTO UNIVERSO

- conceito de, V, 33.
- no Diagrama de Venn, V, 37.

CONSTANTE

- conceito de, V, 303.

CONTAGEM

- , agrupamento, I, 44.
- , comparação, I, 41.
- , complementação, I, 41.
- , de rotina, I, 33.
- enumeração na, I, 35.
- histórico da, I, 11.
- , identificação rápida, I, 39.
- , noção de centena, I, 59; II, 9.
- , noção de dezena, I, 54.
- , noção de milhar, II, 10.
- racional, I, 35.
- , representação da centena, I, 59; II, 9.
- , representação da dezena, I, 56.
- , representação do milhar, II, 10.
- , sistema de numeração decimal, III, 18; IV, 19; V, 72.

CONTÔRNO

- conceito de, II, 152.

CORRESPONDÊNCIA

- biunívoca, I, 23.
- entre conjuntos infinitos, V, 61.
- entre o numeral e a idéia de número, I, 43.
- na contagem racional, I, 36.
- noção de, I, 23; V, 53.
- um-a-um, I, 23.

CUBO

- arestas do, IV, 279.
- conceito de, I, 204; IV, 276.
- de um número natural, V, 108.

- de um número racional, V, 250.
- faces do, IV, 276.
- formas semelhantes à do, I, 201.
- planificação do, I, 207.
- reconhecimento do, I, 201.
- s dos números naturais, tabela, V, 148.
- volume do, IV, 280.

CURVA

- aberta, II, 148.
- conceito de, II, 147.
- designação de, II, 147.
- fechada, II, 148.
- fechada, interior e exterior da, II, 149.
- fechada não simples, III, 220.
- fechada simples, III, 220.

DECÍMETRO

- conceito de, III, 154.
- cúbico, IV, 266.
- o metro e o, III, 154.
- quadrado, IV, 207.
- representação decimal do, III, 156.

DÉCIMO

- conceito de, III, 127.
- s equivalência entre centésimos e III, 136.
- representação do, III, 127.

DESIGUALDADE

- entre conjuntos, I, 24.
- entre quantidades, I, 24.
- relação de III, 87; IV, 35.
- símbolo da, I, 24.

DEZENA

- de milhar, conceito da, III, 20.
- de milhar, representação da, III, 20.

- noção de, I, 54.
- representação da, I, 56.
- revisão dos conceitos, IV, 19.

DIAGRAMA

- de Venn, V, 37.
- de Venn, complementação no, V, 41.
- de Venn, operação intersecção no, V, 40.
- de Venn, operação união no, V, 39.
- de Venn, relação de inclusão no, V, 38.
- de Venn, relação de pertinência no, V, 37.

DIVISÃO

- aplicação da, III, 71.
- aproximada, II, 70; IV, 51; V, 274.
- aproximada, o resto da, IV, 52.
- com numerais decimais, III, 142; IV, 183.
- conceito de, I, 141.
- de potências da mesma base, V, 113.
- de racionais, IV, 164; V, 241.
- de racionais, possibilidade da, IV, 166; V, 241.
- em partes desiguais, III, 94.
- fatos fundamentais de, I, 144.
- idéias da, I, 152.
- o zero na, IV, 52; V, 100.
- por 10 e 100, II, 68; III, 81.
- por 10, 100 e 1.000, IV, 53.
- por dois algarismos, seriação para, III, 80.
- possibilidade da, V, 102.
- propriedade da, IV, 53; V, 103.
- provas da, III, 73.
- , quociente aproximado, IV, 187.
- , quociente exato, V, 243.
- revisão das idéias de, IV, 51.
- revisão do conceito de, III, 65; V, 99.
- técnica operatória da, II, 57 e 76; III, 78.
- têrmos da, III, 70.

DIVISIBILIDADE

- , aplicação da propriedade dos restos, V, 173.
- critérios de, V, 154.

- por 2, V, 154.
- por 3, V, 155.
- por 4, V, 157.
- por 5, V, 157.
- por 6, V, 158.
- por 7, V, 159.
- por 8, V, 162.
- por 9, V, 163.
- por 10, V, 164.
- por 11, V, 164.
- por 12, V, 167.
- por 13, V, 167.
- por 17, V, 169.
- por 19, V, 170.
- por um número qualquer, V, 186.

DIVISOR

- comum, o maior, V, 197.
- conceito de, IV, 69.
- conceito de "ser divisor de", III, 102.
- , revisão, V, 151.
- s comuns, V, 151.
- s comuns, conjuntos de, IV, 91.
- s conjunto de, IV, 70.
- s de um número natural, V, 192.
- s de um número, propriedades dos, V, 153.
- s relações de pertinência e inclusão entre conjuntos de, IV, 72.

DÍZIMA PERIÓDICA

- composta, condição para a fração converter-se em, V, 295.
- composta, geratriz de uma, V, 298.
- conceito de, V, 288.
- de período, V, 306.
- é uma variável, V, 304.
- s expressões com, V, 301.
- limite de uma, V, 304.
- s significado das, V, 303.
- simples, condição para a fração converter-se em, V, 294.
- simples, geratriz de uma, 296.

DÔBRO

- e metade, I, 178.
- noção de, I, 178.

DÚZIA

- aplicação da noção de, II, 28.
- conceito de, II, 21 e 24.

ELEMENTO

- noção intuitiva de, I, 16.
- revisão do conceito de, III, 9; IV, 9.
- s de um conjunto, identificação dos, V, 15.
- s, notação dos, V, 12.
- s, ordem de apresentação dos, III, 11.
- , termo não definido, V, 11.

EQUIPOTÊNCIA

- de conjuntos, V, 55.

EQUIVALÊNCIA

- classes de, IV, 111.
- construção das classes de, IV, 115.
- entre conjuntos, V, 55.
- entre frações, III, 116; IV, 109.
- entre numerais decimais, III, 150.
- entre partes da unidade, III, 114.
- representação das classes de, IV, 113.

ÊRRO

- por excesso, V, 269.
- por falta, V, 269.

ESFERA

- base da, IV, 286.
- características da, I, 202; IV, 286.
- conceito de, IV, 286.
- formas semelhantes à da, I, 202.
- reconhecimento da, I, 201.

ESTRUTURA

- de ordem, I, 33 e 35.
- de um problema, II, 168; III, 70; IV, 58.

ESTRUTURA DE ORDEM

- no conjunto dos números naturais, I, 33; III, 25; IV, 22 e 23; V, 60.

EXPOENTE

- conceito de, V, 111.
- um, V, 111.
- zero, V, 111.

EXPRESSÕES NUMÉRICAS

- com adições e subtrações, III, 59; IV, 41.
- com as 4 operações, III, 89; IV, 55,
- com potências, V, 124.
- conceito de, III, 59.
- envolvendo dízimas periódicas, V, 301.
- envolvendo potenciação e radiciação, V, 255.
- exemplos de, III, 60 e 90.
- números racionais, V, 241.
- ordem das operações nas, III, 60.
- sinais de associação nas, III, 60

FATORAÇÃO

- algoritmo para a, V, 183.
- completa, V, 182.
- completa, maximização pela, V, 198.
- completa, minimização pela, V, 203.
- conceito de, V, 181.
- divisibilidade pela, V, 186.
- radiciação pela, V, 189.

FATOS FUNDAMENTAIS

- com o zero, I, 168.
- conceito de, I, 69.
- de adição, I, 69.

- de adição, classificação dos, I, 80.
- de adição e subtração, sistematização, I, 97.
- de adição, organização dos, I, 75.
- de multiplicação, I, 130.
- de multiplicação, classificação dos, I, 130.
- de subtração, I, 82.

FIGURAS

- de faces não planas, IV, 285.
- de faces planas, IV, 276.
- no espaço, I, 197; IV, 273.
- no espaço, classificação das, IV, 275.
- no plano, I, 219.
- que "vivem" no espaço, conceito de, IV, 275.

FIGURAS DE FACES NÃO PLANAS

- , cilindro, IV, 285.
- conceito de, IV, 285.
- , cone, IV, 285.
- , esfera, IV, 286.

FIGURAS DE FACES PLANAS

- classificação das, IV, 276.
- conceito de, IV, 276.
- , pirâmides, IV, 282.
- , prismas, IV, 276.

FRAÇÃO

- adição de, IV, 139; V, 222.
- conceito de, III, 111.
- conversão de decimal em, V, 286.
- decimal, III, 126.
- decimal imprópria, III, 133.
- decimal, representação decimal da, III, 127.
- de fração, V, 237.
- em decimal, conversão de, V, 286.
- noção de, I, 173.
- , o numeral fracionário, II, 116.
- propriedades da adição de, IV, 143.
- revisão da noção de, II, 113.

- s aparentes, IV, 120.
- s, classes de equivalência, IV, 111.
- s decimais, representação decimal das, IV, 177.
- s divisão de, IV, 164; V, 241.
- s equivalentes, IV, 109.
- s equivalentes, reconhecimento das, IV, 117.
- s, expressões com, V, 244.
- simplificação de, IV, 128.
- s impróprias, IV, 119.
- s impróprias, comparação de, IV, 133.
- s impróprias, forma natural ou mista das, IV, 130.
- s inverso multiplicativo das, IV, 162; V, 237.
- s irredutíveis, IV, 125.
- s multiplicação de, V, 235.
- s possibilidade da subtração de, IV, 150.
- s possibilidade da divisão de, IV, 166; V, 241.
- s propriedades da multiplicação de, IV, 160; V, 239.
- s, quociente exato, V, 243.
- s, radiciação de, V, 253.
- subtração de, IV, 145; V, 228.

FRONTEIRA

- , de uma figura plana, noção de, II, 149.
- s de um segmento de reta, III, 208.

GENERALIZAÇÃO

- o conjunto vazio é subconjunto de si mesmo, V, 23.
- o zero como multiplicador é uma, V, 90.
- o zero é um número par é uma, I, 168.
- um conjunto é subconjunto de si mesmo, V, 23.

GEOMETRIA

- , a esfera, I, 202.
- , forma cúbica, I, 201.
- , forma esférica, I, 203.
- na escola primária, objetivo da, I, 199.
- , o cilindro, I, 203.
- , o cubo, I, 201.

GERATRIZ

- de uma decimal exata, V, 300.
- de uma decimal periódica composta, V, 298.
- de uma decimal periódica simples, V, 296.
- é o limite das dízimas periódicas, a, V, 304.

GRÁFICOS

- aplicação da interpretação de, III, 106; IV, 82.
- interpretação de, III, 105; IV, 81.

IGUALDADE

- entre conjuntos, I, 23; V, 18.
- entre quantidades, I, 23.
- propriedade transitiva da, IV, 35.
- relação de, III, 84; IV, 35.
- símbolo de, I, 23.

ÍMPARES

- conceito de números, I, 163.
- , sucessão dos números, IV, 25.

INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

- de divisores, IV, 91.
- de múltiplos, IV, 97.
- no Diagrama de Venn, V, 41.
- operação de, IV, 89; V, 29.
- propriedade associativa da, IV, 94 e 101.
- propriedade comutativa da, V, 32.

JOGOS

- para contagem de rotina, I, 34.
- para identificação rápida, I, 39.

LIMITE

- conceito de, V, 303.
- das dízimas periódicas, V, 304.

LINHA

- conceito de, II, 147.
- designação de, II, 147.
- poligonal, II, 154.
- quebrada, II, 155.
- reta, conceito de, III, 206.
- reta, designação da, III, 207.
- reta, representação da, III, 206.
- reta, segmento de, II, 148 e 153; III, 208.
- s paralelas, III, 214.

LITRO

- aplicação do, II, 136.
- aplicação dos conhecimentos sobre o, III, 176.
- como unidade de volume, I, 188.
- mudança de unidades de capacidade e o, III, 175.
- múltiplos e submúltiplos do, III, 173.
- representação decimal dos múltiplos e submúltiplos do, III, 173.
- , unidade fundamental de capacidade, III, 173.

LOGARITMAÇÃO

- conceito de, V, 127.

LOSANGO

- aplicação da área do, IV, 260.
- área do, IV, 259.
- características do, IV, 233.
- conceito de, IV, 233.

MASSA

- aplicação das unidades de, III, 180.
- conceito de, III, 178.
- múltiplos e submúltiplos do grama, III, 180.
- unidade fundamental de, III, 178.

MATERIAL DIDÁTICO

- caixinha de cálculos, I, 37.
- caixinha de numeração, II, 24.

- cartaz de pregas, I, 55.
- cartaz valor do lugar, I, 55.
- cartões-relâmpagos, I, 47, 76, 113, 139 e 151.
- flanelógrafo, I, 12.
- mostrador de fatos, I, 38.

MAXIMAÇÃO

- , conclusão, V, 199.
- operação de, IV, 92.
- pela fatoração, V, 198.
- pelas divisões sucessivas, V, 200.
- pelo algoritmo de Euclides, V, 200.
- propriedades da, IV, 94; V, 205.
- revisão da operação de, V, 197.

MEDIDA

- conceito de, I, 187; II, 131.
- de capacidade, III, 173.
- de comprimento, I, 187; II, 133 e 134; III, 154.
- de nosso dinheiro, I, 190.
- de pêso, I, 187; II, 133 e 135; III, 178.
- de segmentos, II, 131 e 153; III, 210.
- de superfície; IV, 205.
- de tempo, I, 105; II, 137; III, 186; IV, 289.
- de tempo, conversões, IV, 291.
- de tempo, notação das unidades de, III, 188.
- de volume, I, 188; II, 133 e 136.
- revisão do conceito de, II, 131; III, 153.
- s agrárias, IV, 213.
- unidade de, II, 131.

MEDIR

- conceito da operação de, III, 153.

METADE

- de um grupo, I, 175.
- de um número, I, 176.
- e dôbro, I, 178.
- noção de, I, 173.
- o numeral fracionário de, II, 116.
- revisão do conceito de, II, 113.

METRO

- como unidade de comprimento, I, 187.
- cúbico, múltiplos e submúltiplos, IV, 265.
- e seus submúltiplos, III, 154.
- mudanças de unidades, III, 162.
- múltiplos do, III, 154.
- quadrado, múltiplos e submúltiplos, IV, 205.
- representação decimal dos múltiplos do, III, 156.
- representação decimal dos submúltiplos do, V, 155.
- uso do, II, 134.

MILÉSIMO

- conceito de, III, 149.
- s equivalência entre décimos, centésimos e, III, 150.
- , representação decimal, III, 149.

MILHAR

- conceito dos números maiores que um, III, 19.
- dezena de, III, 20.
- escrita dos numerais dos números maiores que um, III, 19.
- noção de, II, 10.
- numeral das dezenas de, III, 20.
- , o numeral mais simples de, II, 10.
- revisão do conceito de, III, 18.

MINIMAÇÃO

- algoritmo da, V, 204.
- , conclusão, V, 213.
- operação de, IV, 98.
- pela fatoração completa, V, 176.
- pela fatoração simultânea, V, 204.
- propriedades da, IV, 101; V, 205.
- revisão do conceito de, V, 202.

MOEDA NACIONAL

- equivalência entre moedas e cédulas, I, 190.
- , novas cédulas, II, 142.
- , reconhecimento, I, 190.

- , representação decimal, II, 140.
- , revisão dos conceitos, II, 140.
- , seu valor, I, 191.

MULTIPLICAÇÃO

- aplicação da propriedade distributiva na técnica da, II, 105; IV, 49; V, 91.
- com numerais decimais, III, 140; IV, 179.
- conceito de, I, 127.
- considerações gerais, IV, 45.
- de números naturais, revisão do conceito, V, 85.
- de potências de mesma base, V, 112.
- de racionais, IV, 153; V, 235.
- de racionais, o inverso multiplicativo, IV, 162.
- de racionais, propriedades da, IV, 160.
- estimativa na, II, 59; IV, 45.
- fatos fundamentais da, I, 130.
- graduação das dificuldades na, II, 59.
- o número "um" na, III, 82.
- o "zero" na, III, 83; V, 98.
- por 10, 100 ou 1.000, II, 65 e 67.
- propriedade comutativa da, I, 128.
- propriedade distributiva da, II, 103.
- propriedades da, II, 93; III, 82; IV, 47; V, 88;
- provas da, III, 73.
- revisão do conceito de, III, 65.
- técnica operatória da, II, 57; III, 75.
- têrmos da, I, 129; III, 69.

MÚLTIPLOS

- comuns, V, 202.
- conceito de, IV, 69.
- conjuntos de, IV, 69.
- especiais, alguns, V, 153.
- , menor múltiplo comum, V, 202.
- , minimação, V, 202.
- propriedades dos, V, 152.
- relação de inclusão entre conjuntos de, IV, 72.
- relação de pertinência entre conjuntos de, IV, 72.
- , revisão, V, 151.
- , ser múltiplo de, III, 99.

NUMERAL

- conceito de, I, 20.
- decimal, III, 127.
- do número cem, I, 60.
- dos números maiores que dez, I, 57.
- e números, III, 17.
- fracionário, II, 116.
- fracionário e divisão, II, 122.
- leitura e escrita de, I, 42.
- mais simples de um número, III, 17.
- mais simples do número dez, I, 56.
- mais simples do número zero, I, 55.
- ordinal, I, 112.
- romano, I, 108.
- s decimais, adição com, III, 128.
- s decimais, leitura e escrita dos, III, 133.
- s decimais, multiplicação e divisão com, III, 140.
- s decimais, subtração com, III, 131.

NUMERAL DECIMAL

- comparação de números racionais sob a forma de, V, 268.
- divisão aproximada com, V, 274.
- introdução ao, III, 126.
- operações com números racionais expressos sob a forma de, III, 128; V, 269.
- potenciação com, V, 275.
- quociente aproximado, IV, 187; V, 269.
- radiciação com, V, 277.
- s, adição com, III, 128.
- s, leitura e escrita dos, III, 135.
- s, propriedades características dos, V, 267.
- s, representação decimal dos números racionais, V, 263.
- s, subtração com, III, 131.

NÚMERO

- cardinal, I, 23.
- cem, I, 59.
- dez, I, 54.
- e numeral, III, 17.
- fracionário, I, 173.
- fracionário, representação dos, II, 116.

- fracionário, revisão do conceito, II, 113.
- idéia de, I, 20 e 36.
- natural, conceito de, III, 15.
- natural, revisão do conceito, V, 57.
- natural, sucessivo de um; IV, 24.
- primo, conceito de, IV, 75.
- racional, conceito de, III, 111; V, 221.
- racional, revisão do conceito, IV, 107.
- s compostos, conceito de, IV, 76; V, 177.
- s ímpares, I, 163.
- s maiores que 100, conceito e numeral, II, 9.
- s naturais, conjunto de, III, 16.
- s naturais é infinita, a sucessão dos, V, 60.
- s naturais, representação na reta numerada, IV, 23.
- s naturais, sucessão dos, IV, 22.
- s pares, I, 161.
- s pares, sucessão dos, IV, 25.
- s primos entre si, IV, 104.
- s primos, sucessão dos, IV, 77.
- s racionais, comparação dos, III, 115.
- s racionais, representação dos, III, 115.
- s, relação de inclusão nos conjuntos de, IV, 28.
- s, relação de pertinência nos conjuntos de, IV, 26.
- zero, I, 55.

NÚMEROS RACIONAIS

- adição de, IV, 139; V, 222.
- adições e subtrações combinadas de, IV, 150; V, 231.
- classes de equivalência, IV, 111.
- comparação de, III, 115.
- conceito de, III, 111.
- construção das classes de equivalência, IV, 115.
- divisão aproximada de, V, 274.
- divisão de, IV, 164; V, 241.
- expressões com, V, 244.
- fração de fração, V, 237.
- frações equivalentes, IV, 109.
- inverso multiplicativo dos, IV, 162; V, 237.
- maiores que um, IV, 119.
- multiplicação de, IV, 153; V, 235.
- , operações com numerais decimais, IV, 178; V, 269.
- possibilidade da divisão de, IV, 166; V, 241.
- possibilidade da subtração de, IV, 150; V, 230.

- potenciação de, V, 250.
- propriedades da adição, IV, 143.
- propriedades da multiplicação de, IV, 160; V, 239.
- , propriedades dos numerais decimais, V, 267.
- , quociente aproximado, V, 269.
- , quociente exato, V, 243.
- radiciação, V, 253.
- relação de inclusão no conjunto de, IV, 108.
- representação das classes de equivalência, IV, 113.
- representação decimal dos, IV, 175; V, 263.
- representação do, III, 115.
- revisão do conceito de, IV, 107; V, 221.
- subtração de, IV, 145; V, 228.

OBLÍQUAS

- conceito de linhas, IV, 229.

PARALELEPÍPEDO

- base e altura do, IV, 278.
- comprimento, largura e altura do, IV, 279.
- conceito de, IV, 277.
- faces do, IV, 277.
- volume do, IV, 280.

PARALELOGRAMO

- aplicação da área do, IV, 254.
- área do, IV, 253.
- base e altura do, IV, 236.
- classificação do, IV, 233.
- conceito de, III, 229.

PARES

- conceito de números, I, 161.
- sucessão dos números, IV, 25.

PERÍMETRO

- aplicação da noção de, III, 166.
- conceito de, III, 166.
- das figuras planas mais conhecidas, III, 166.

PERÍODO PREPARATÓRIO

- conceito de, I, 11.
- , desenvolvimento do vocabulário aritmético, I, 14.
- , discriminação visual e auditiva, I, 12.
- , hábitos de atenção, I, 12.
- , semelhanças e diferenças, I, 14.

PERPENDICULARISMO

- , conceito de ângulo reto, IV, 229.
- , conceito de linhas perpendiculares, IV, 229.
- , conceito de oblíquas, IV, 229.
- , paralelogramos, IV, 233.

PÊSO

- , aplicação em problemas, III, 180.
- a unidade fundamental de, III, 178.
- conceito de medida de, I, 187.
- idéia de, I, 187.
- medidas de, III, 178.
- , mudança de unidades de, III, 180.
- o kg como unidade de, II, 135.
- , revisão, IV, 201.
- , unidade, múltiplos e submúltiplos, III, 180.

POLIGONAL

- aberta, II, 155.
- conceito de, II, 154.
- fechada, II, 155.
- lados da, II, 155.
- representação de uma, II, 155.

POLÍGONO

- conceito de, II, 157 e 158.
- de 3 lados (triângulo), II, 158.
- de 4 lados (quadrilátero), II, 158.
- designação do, II, 158.
- diagonal de um, III, 223.
- lados do, II, 158; III, 221.
- região interior do, III, 221.

- revisão do conceito de, III, 221.
- s classificação dos, III, 225.
- s, classificação dos paralelogramos, IV, 233.
- vértices do, II, 158; III, 221.

PONTO

- como elemento de um conjunto de pontos, II, 149.
- conceito de, II, 147; III, 205.
- conceito de conjunto de, III, 205.
- designação de um, II, 147.
- representação de um, 147.
- s de fronteira, II, 149.
- s exteriores, II, 149.
- s interiores, II, 149.
- , termo não definido, V, 11.

PORCENTAGEM

- aplicação da, IV, 192.
- conceito de, IV, 190.
- o emprêgo dos termos “por cento”, IV, 190.
- símbolo de “por cento”, IV, 192.
- terminologia na, IV, 197.

POTENCIAÇÃO

- com numerais decimais, V, 275.
- conceito de, V, 107.
- de frações, V, 250.
- de números naturais, V, 107.
- de números racionais, V, 250.
- de uma potência indicada, V, 116.
- expressões envolvendo a, V, 124.
- nomenclatura dos termos da, V, 107.
- o expoente um na, V, 111.
- o quadrado de uma soma indicada, V, 120.
- , potências de um, V, 110.
- , potências de zero, V, 110.
- propriedades da, V, 118.

PRIMO

- conceito de número, IV, 75.
- crivo de Eratóstenes, V, 178.

- reconhecimento de um, V, 179.
- revisão do conceito de número, V, 177.
- s entre si, menor múltiplo comum entre os números, V, 212.
- s entre si, números, IV, 104; V, 208.
- s, entre si, o zero e os números, V, 211.
- s, são primos entre si os números, V, 208.
- s sucessão dos números, IV, 77.
- s, um número natural como um produto de fatores, IV, 78.

PRISMAS

- base e altura dos, IV, 278.
- classificação dos, IV, 276.
- conceito de, IV, 276.
- , o cubo, IV, 276.
- , o paralelepípedo, IV, 277.

PROBLEMAS

- análise do II, 164.
- a sentença matemática nos, I, 229; II, 164.
- com cruzeiros e centavos, III, 200.
- como formular os primeiros, I, 77.
- estrutura do, II, 164.
- requisitos dos, I, 229; II, 163.
- resolvidos, III, 91.
- resolvidos sôbre as 4 operações, IV, 58.
- resolvidos sôbre frações, IV, 168.
- resolvidos sôbre porcentagem, IV, 192.
- sôbre o sistema legal de unidades de medir, IV, 201.
- sôbre perímetro, III, 166.
- sôbre unidades de capacidade, III, 174.
- sôbre unidades de comprimento, III, 163.
- sôbre unidade de pêso, III, 180.
- sôbre unidades de tempo, III, 188.
- sôbre variação dos resultados da adição e da subtração, IV, 37.
- verificação dos, I, 230; II, 165.

PRONTIDÃO

- conceito de, I, 15.
- para a adição, I, 69.
- para a leitura das horas, I, 105.
- para a subtração, I, 82.

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

- aplicação da propriedade associativa da adição, I, 120.
- associativa da adição, I, 120; II, 98.
- associativa da multiplicação, II, 101.
- comutativa da adição, I, 72; II, 91.
- comutativa da multiplicação, II, 93.
- da interseção de conjuntos, V, 32.
- da maximização, IV, 94.
- da minimização, IV, 101.
- da multiplicação, II, 93; III, 82; IV, 47; V, 88.
- da união de conjuntos, V, 32.
- distributiva da divisão, IV, 53; V, 103.
- distributiva da multiplicação, II, 103.
- do anulamento da multiplicação, III, 83.
- do elemento neutro da multiplicação, III, 82.

QUADRADO

- aplicação da área do, IV, 244.
- área do, IV, 243.
- conceito de, II, 158.
- de uma soma indicada, V, 120.
- de um número, V, 108.
- noção intuitiva de, I, 221.
- perímetro do, III, 168.
- principais características do, IV, 233.
- s perfeitos, V, 128.

QUADRILÁTERO

- conceito de, II, 158.
- paralelogramos, III, 229; IV, 233 e 236.
- perímetro de um, III, 168.
- , trapézios, III, 231; IV, 255.

QUÁDRUPLO

- e quarta-parte, I, 181.
- noção de, I, 181.

QUARTA-PARTE

- e metade, II, 119.
- e quádruplo, I, 181; II, 114.

- noção de, I, 181.
- numeral fracionário de, II, 116.
- , relação com o inteiro, I, 181.
- revisão do conceito de, II, 117.

QUILOGRAMA

- , aplicação em problemas, III, 180.
- como unidade de peso, I, 187.
- emprego do, II, 132.
- , múltiplos e submúltiplos, III, 180.
- , revisão, IV, 201.
- , unidade fundamental de massa, III, 178.

QUOCIENTE

- aproximado, II, 70; IV, 51; V, 269.
- aproximado a menos de uma unidade, V, 272.
- aproximado a menos de um centésimo, V, 272.
- aproximado a menos de um décimo, V, 272.
- aproximado a menos de um milésimo, V, 272.
- conceito de, III, 70.
- exato, V, 243.

RADICIAÇÃO

- com numerais decimais, V, 277.
- conceito de, V, 125.
- , conceito de raiz cúbica, V, 125.
- de números racionais, V, 253.
- nomenclatura dos termos da, V, 127.
- , o resto da raiz quadrada, V, 137.
- , prova da raiz quadrada, V, 124.
- , raiz quadrada de um número natural com aproximação decimal, V, 279.
- , raiz quadrada dos números naturais, V, 129.
- , tabela de quadrados, cubos e raízes, V, 148.
- , técnica da raiz quadrada, V, 131.

RAIZ

- conceito de, V, 125
- cúbica de números naturais, V, 139.
- quadrada dos números naturais, V, 129.

- quadrada dos números racionais, V, 279.
- quadrada, o resto da, V, 137.
- quadrada, técnica da, V, 130.
- quadrada, verificação do resultado, V, 134.

RELAÇÃO

- adição-subtração, I, 97.
- de desigualdade, III, 87.
- de igualdade, III, 84.
- de igualdade e de desigualdade, IV, 35.
- de inclusão, IV, 12; V, 16.
- de inclusão na reta, III, 208.
- de inclusão na semi-reta, IV, 222.
- de inclusão no Diagrama de Venn, V, 38.
- de inclusão, símbolo da, V, 16.
- de pertinência, I, 18; IV, 11; V, 13.
- de pertinência na reta, III, 207.
- de pertinência na semi-reta, IV, 223.
- de pertinência no Diagrama de Venn, V, 37.
- de pertinência, símbolo da, IV, 11; V, 13.
- dividendo-divisor-quociente-resto, III, 74.
- $dm^3 - l$, IV, 270.
- entre dois conjuntos (gráficos), III, 105.
- multiplicação-divisão, I, 141.
- múltiplo-divisor, III, 103.
- "ser divisor de", III, 102.
- "ser múltiplo de", III, 99.

RELÓGIO

- conhecimento do, I, 106.
- uso do, 106; II, 138.

RETA

- conceito de linha, III, 206.
- designação da, III, 211.
- designação da linha, III, 207.
- idéia de, III, 25.
- numerada, representação dos números naturais na, III, 25.
- numerada, representação dos números racionais na, III, 114.
- relação de inclusão na, III, 208.

- relação de pertinência na, III, 207.
- representação da linha, III, 206.
- s concorrentes, III, 213.
- s feixe de, III, 215.
- s paralelas, III, 214.

RETÂNGULO

- aplicação da área do, IV, 246.
- área do, IV, 245.
- conceito de, I, 221.
- perímetro do, III, 168.
- principais características do, IV, 233.
- revisão do conceito, II, 158.

REUNIÃO (OU UNIÃO)

- aplicação da, IV, 88.
- conceito de, IV, 87.
- de semi-retas, IV, 224.
- , no Diagrama de Venn, a operação, V, 32.
- operação de V, 27.
- propriedade comutativa da, V, 32.
- símbolo da, IV, 87.

SEGMENTO DE RETA

- conceito de, II, 153.
- designação de um, II, 153.
- fronteiras de um, II, 153.
- idéia de, II, 131.
- medida de um, II, 131 e 153.
- s, comparação de II, 154.
- s congruentes, III, 209.

SEMI-RETA

- conceito de, IV, 219.
- origem da, IV, 220.
- relação de inclusão na, IV, 223.
- relação de pertinência na, V, 223.

SENTENÇA MATEMÁTICA

- aplicação das, II, 33.
- aplicação do singular e plural da, II, 85.
- características da, II, 33.
- conceito de, I, 78 e 195.
- pontuação da, I, 119.
- revisão do conceito de, II, 33.
- singular e plural da, II, 36 e 84.

SÍMBOLO

- da desigualdade, I, 24.
- da igualdade, I, 23.
- da moeda nacional, II, 141.
- da operação intersecção, IV, 89.
- da operação união, IV, 87.
- da porcentagem, IV, 192.
- da radiciação, V, 125.
- da relação de inclusão, V, 16.
- da relação de pertinência, V, 13.
- de equivalência, I, 149.
- do conjunto vazio, V, 21.

SISTEMA LEGAL DE UNIDADES DE MEDIR

- introdução ao, III, 154.
- revisão e aplicação, IV, 201.
- unidades de capacidade, III, 173.
- unidades de comprimento, III, 155.
- unidades de massa, III, 180.
- unidades de superfície, IV, 205.
- unidades de tempo, IV, 289.
- unidades de volume, IV, 263.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

- introdução ao, III, 154.
- mudança de unidades, III, 162.
- mudança de unidades de capacidade, III, 175.
- múltiplos do metro, III, 160.
- o are, o hectare e o centiare, IV, 213.
- o litro, múltiplos e submúltiplos, III, 173.
- o metro e os seus submúltiplos, III, 154.

- o m^2 , múltiplos e submúltiplos, IV, 205.
- o m^3 , múltiplos e submúltiplos, IV, 263.
- representação decimal das unidades de capacidade, III, 173.
- representação decimal dos múltiplos do metro, III, 160.
- representação decimal dos submúltiplos do metro, III, 155.
- revisão e aplicação, IV, 201.
- tonelada e quintal, III, 184.
- unidades de massa, III, 180.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO

- decimal, V, 72.
- decimal, contagem, I, 33.
- decimal, noções gerais, II, 21.
- dos babilônios, V, 67.
- dos maias, V, 68.
- dos romanos, V, 69.
- modernos, V, 70.
- não decimal, noções gerais, II, 22.
- , noção e representação de dezena, I, 54.
- , ordens e classes, IV, 19.
- , rápido histórico, V, 67.
- , revisão de conceitos, III, 20.
- , valor posicional dos algarismos, IV, 19.

SUBCONJUNTO

- conceito de, IV, 12.
- definição de, V, 16.
- duas generalizações sobre, V, 23.

SUBTRAÇÃO

- casos de impossibilidade da, IV, 33.
- classificação dos fatos fundamentais, I, 89.
- conceito de, I, 82.
- de números racionais, III, 120; IV, 145.
- de números racionais, possibilidades da, IV, 150; V, 228.
- de unidades de tempo, IV, 298.
- fatos fundamentais de, I, 83.
- gradação das dificuldades na, II, 49.
- idéias da, I, 89.
- nomenclatura dos termos da, II, 51; III, 35.
- o zero na, V, 98.

provas da, II, 52; III, 38.
 revisão do conceito, V, 94.
 técnica operatória da, I, 211; II, 45; III, 50.
 variação do resultado da, III, 42; IV, 37.

SUPERFÍCIE

conceito de, IV, 205.
 conceito de área de uma, IV, 205.
 conceito de m^2 , IV, 205.
 leitura e escrita de medidas de, IV, 211.
 —, medidas agrárias, IV, 213.
 medidas de, IV, 205.
 múltiplos e submúltiplos do m^2 , IV, 208.
 o dm^2 e o cm^2 , IV, 207.
 unidade fundamental de, IV, 205.

SUPERFÍCIES PLANAS E CURVAS

— curvas, sólidos que apresentam, I, 204.
 — planas e curvas, exploração das, I, 199.
 — planas e curvas, sólidos que apresentam, I, 204.
 — planas, sólidos que apresentam apenas, I, 204.

TABELAS

— de números primos menores que 1.000, V, 214.
 — de ordinários e fracionários até 1 bilhão, V, 328.
 — de quadrados e cubos, V, 148.

TEMPO

—, calendário, I, 105.
 conversões das medidas de, IV, 291.
 medidas de, I, 105; IV, 289.
 outras medidas de, IV, 301.
 relação não decimal entre as unidades de, IV, 290.
 unidades de, II, 137; IV, 289.
 —, uso do relógio, I, 106.

TÉRÇA-PARTE

conceito de, I, 178.
 numeral fracionário de, II, 117.

— relação com o inteiro, I, 178.
 — relação com o triplo, I, 178; II, 120.
 revisão do conceito de, II, 117.

TÊRMINOS

— da adição, II, 51; III, 33.
 — da divisão, III, 70.
 — da multiplicação, II, 51; III, 69.
 — da potenciação, V, 107.
 — da radiciação, V, 127.
 — da subtração, II, 51.
 — não definidos, V, 11.

TRAPÉZIO

aplicação da área do, IV, 256.
 área do, IV, 255.
 conceito de, III, 231.
 noção, III, 171.
 perímetro do, III, 171.
 reconhecimento do, III, 171.

TRIÂNGULO

aplicação da área do, IV, 250.
 área do, IV, 249.
 base e altura do, IV, 239.
 conceito de, II, 158.
 perímetro do, III, 166.
 reconhecimento do, I, 223.
 — retângulo, área do, IV, 252.
 revisão do conceito de, IV, 237.
 —s classificação dos, IV, 237.
 —s, retângulos, IV, 240.

UNIÃO (DE CONJUNTOS)

— de duas semi-retas de origem comum, IV, 224.
 — N e Q, IV, 107.
 operações de, IV, 87.

UNIDADE

- conceito de, I, 56; III, 153.
- monetária, I, 190; II, 140; III, 193.
- s de capacidade, III, 173.
- s de comprimento, II, 131 e 134; III, 154.
- s de peso, I, 187; III, 178.
- s de tempo, I, 105; III, 186; IV, 289.
- s de volume, I, 188; IV, 265.
- s não padronizadas, I, 188.

VALOR POSICIONAL

- noção do, I, 56.
- princípio do, IV, 19; V, 69 e 72.
- revisão da noção do, II, 9; III, 19.

VALOR RELATIVO

- noção do, I, 56.
- princípio do, IV, 19; V, 69 e 72.
- revisão da noção do, II, 9; III, 19.

VARIÁVEL

- conceito de, V, 303.
- s as dízimas periódicas são, V, 304.

VOCABULÁRIO MATEMÁTICO

- introdução ao, I, 14, 41, 204 e 221.

VOLUME

- conceito de, IV, 265.
- do cubo, IV, 280.
- do paralelepípedo, IV, 280.
- , m^3 , múltiplos e submúltiplos, IV, 265.
- mudança de unidades, IV, 267.
- noção de, III, 136.
- o litro como unidade de, IV, 270.
- , relação l/dm^3 , IV, 270.
- unidade de capacidade ou, III, 173.
- unidade fundamental de, IV, 265.

ZERO

- idéia do número, I, 55.
- nunca é divisor, IV, 52.
- o número, III, 16.
- representação do número, I, 55.

ÍNDICE

I — INTRODUÇÃO À TEORIA DOS CONJUNTOS

1 — Conceitos primitivos	11
2 — Relação de pertinência	13
3 — Identificação dos elementos do conjunto	15
4 — Relação de inclusão. Subconjuntos	16
5 — Conjuntos iguais	17
6 — Conjunto vazio	19
7 — Representação do conjunto vazio	21
8 — Conjunto unitário	22
9 — Mais duas importantes generalizações	23

II — OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

1 — Operação Reunião ou União	27
2 — Operação Intersecção	29
3 — Propriedade Comutativa da União e Intersecção dos Conjuntos	32
4 — Conjunto Universo e Complemento	33

III — DIAGRAMAS

1 — Diagrama de Venn	37
2 — Relação de pertinência no diagrama	37
3 — Relação de inclusão no diagrama	38
4 — Operação união ou reunião no diagrama	39
5 — Operação intersecção no diagrama	41
6 — Complementação no diagrama	42
7 — Exercícios (1)	43

IV — CORRESPONDÊNCIA ENTRE CONJUNTOS

1 — Noção de correspondência	53
2 — Correspondência biunívoca	54
3 — Conjuntos equivalentes	55

4 — O número natural	57
5 — A sucessão dos números naturais é ilimitada	60
6 — Correspondência entre os conjuntos infinitos	61
7 — Conjuntos equivalentes e números naturais	62
8 — Exercícios (2)	63

V — SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

1 — Rápida resenha histórica	67
2 — Sistemas modernos de numeração	70
3 — Sistemas de numeração decimal	72
4 — Exercícios (3)	75

VI — OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS COM NÚMEROS NATURAIS

1 — Adição	79
2 — Propriedades da adição	83
3 — Multiplicação	85
4 — Propriedades da multiplicação	88
5 — O zero na multiplicação	90
6 — Propriedade distributiva da multiplicação	91
7 — Operações inversas	93
8 — Subtração	94
9 — Propriedades da subtração	96
10 — Possibilidade da subtração	97
11 — O zero na subtração	98
12 — Divisão	99
13 — O zero na divisão	100
14 — Possibilidade da divisão	102
15 — Propriedade distributiva da divisão	103

VII — POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

1 — Potenciação — conceito e nomenclatura	107
2 — Potências de zero	110
3 — Potências de um	110
4 — O expoente um	111
5 — O expoente zero	111
6 — Operações com potências	112
7 — Potência de uma potência indicada	116
8 — Propriedades da potenciação	118

9 — A potenciação é distributiva em relação à multiplicação e à divisão	119
10 — O quadrado de uma soma indicada	120
11 — Expressões numéricas envolvendo potências	124
12 — Radiciação dos números naturais	125
13 — Quadrados perfeitos	128
14 — Raiz quadrada	129
15 — O resto da raiz quadrada	137
16 — Raiz cúbica dos números naturais	139
17 — Exercícios (4)	143
18 — Tabela de quadrados e cubos	148

VIII — DIVISIBILIDADE

1 — Múltiplos e divisores	151
2 — Critérios de divisibilidade	154
3 — Propriedades do resto da divisão	172
4 — Números primos e números compostos	177
5 — Reconhecimento de um número primo	179
6 — Fatoração	181
7 — Divisibilidade por um número qualquer	186
8 — Radiciação pela fatoração completa	189
9 — Os divisores de um número natural	192
10 — Determinação do número de divisores de um número natural	195
11 — Divisores comuns — O maior divisor comum. Maximização	197
12 — Múltiplos comuns — O menor múltiplo comum. Minimização	202
13 — Propriedades da maximização e da minimização	205
14 — Números primos entre si	208
15 — Os números primos são primos entre si	209
16 — Os números primos são primos entre si e o zero	210
17 — Os números primos consecutivos são primos entre si	211
18 — Dois números consecutivos são primos entre si	212
19 — O menor múltiplo comum de números primos entre si	214
20 — Números primos menores que 1.000	215
20 — Exercícios (5)	215

IX — NÚMEROS RACIONAIS

1 — Revisão de conceitos	221
2 — Adição	222
3 — Subtração	228
4 — Adições e subtrações combinadas	231
5 — Multiplicação	235
6 — Fração de fração	237

7 — O inverso multiplicativo	237
8 — Propriedades da multiplicação	239
9 — Divisão	241
10 — Quociente exato	243
11 — Expressões com números racionais	244
12 — Potenciação dos números racionais	250
13 — Radiciação dos números racionais	253
14 — Expressões numéricas com números racionais envol- vendo potências e raízes	255
15 — Exercícios (6)	257
16 — Representação decimal dos Números Racionais	263
17 — Propriedades características dos numerais decimais ..	267
18 — Comparação de números racionais expressos sob a for- ma decimal	268
19 — Operações com números racionais expressos sob a forma decimal.	269
20 — Quociente aproximado	269
21 — Divisão aproximada de dois números racionais expres- sos sob a forma decimal	274
22 — Potenciação com numerais decimais	275
23 — Radiciação com numerais decimais	277
24 — Raiz quadrada de um número natural com aproxima- ção decimal	279
25 — Raiz quadrada de um número racional expresso sob a forma decimal com aproximação decimal	281
26 — Exercícios (7)	283
27 — Conversão de fração ordinária em decimal e vice-versa	286
28 — Dízimas periódicas	288
29 — Condição para que uma fração ordinária se converta numa decimal exata	290
30 — Conversão de frações ordinárias em dízimas periódicas simples e compostas	293
31 — Geratriz de uma dízima periódica simples	296
32 — Geratriz de uma dízima periódica composta	298
33 — Expressões numéricas envolvendo dízimas periódicas ..	301
34 — Significado das frações decimais periódicas	303
35 — Dízimas periódicas de período nove	306
36 — Exercícios (8)	309
X — APÊNDICE	
1 — Respostas às questões propostas neste volume	315
2 — Tabela de numerais ordinais e fracionários	329
3 — Índice remissivo de todos os volumes	333
4 — Índice deste volume	367

Este livro foi confeccionado
nas oficinas da
ABRIL S.A. — CULTURAL E INDUSTRIAL
à Av. Otaviano Alves de Lima, 800 — São Paulo
para a
LISA — Editora Irradiante S.A. — São Paulo

5

LISA
MATEMÁTICA
NA
ESCOLA
ELEMENTAR

MARIADOLAR
ARRUDA TOLDO

LISA-MATEMÁTICA
NA
ESCOLA ELEMENTAR

510.7

