P. PUIG ADAM

EL MATERIAL DIDACTICO MATEMATICO ACTUAL

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL

XI REUNION DE LA COMISION INTERNACIONAL PARA EL ESTUDIO Y MEJORA DE LA ENSEÑANZA MATEMATICA Y I EXPOSICION INTERNACIONAL DE MATERIAL DIDACTICO MATEMATICO

PUBLICACIONES DE LA REVISTA "ENSEÑANZA MEDIA"

"ENSEÑANZA MEDIA"

REVISTA DE ORIENTACION DIDACTICA
DEL
MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL

Director:
DACIO RODRIGUEZ LESMES

SUSCRIPCION ANUAL (20 NUMEROS)
200 PESETAS

(EXTRANJERO: 6 DOLARES)

NUMERO SENCILLO: 20 PESETAS
DOBLE: 40 PESETAS

(EXTRAORDINARIO 60 PESETAS)

DIRECCION:
INSPECCION CENTRAL DE ENSEÑANZA MEDIA
(PUBLICACIONES)
MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL
ALCALA, 34 - MADRID

EL MATERIAL DIDACTICO MATEMATICO ACTUAL

Oferta da Fam.
Arns

"ENS

REVIST

MINIST

SUS

P. PUIG ADAM

EL MATERIAL DIDACTICO MATEMATICO ACTUAL

PRESENTADO EN LA

XIª REUNION DE LA COMISION INTERNACIONAL PARA
EL ESTUDIO Y MEJORA DE LA ENSEÑANZA MATEMATICA
Y
EXPOSICION INTERNACIONAL SIMULTANEA
(MADRID, 21-27 ABRIL 1957)

MADRID
1958

PUBLICACIONES
DE LA
REVISTA «ENSEÑANZA MEDIA»

Director: DACIO RODRIGUEZ LESMES

Núm. 46

Dirección:
Inspección Central de Enseñanza Media
(Publicaciones)
Ministerio de Educación Nacional
Alcalá, 34 - Madrid
Teléfonos 220874 y 321300-244

Depósito Legal: M. 10045-1958

Gráficas Cóndor, S. A. — Aviador Lindbergh, 5 — Madrid 462-58

PROLOGO

Recuerdo perfectamente la escena. Fué en la calle de Valverde, a las puertas de la Academia de Ciencias, cuando al despedirme de Gattegno y apretando fuertemente sus brazos entre mis manos, insistí: «Hemos de hacer todo lo posible para que la Reunión-Exposición que proyectáis para 1957 sobre el material de la enseñanza matemática se celebre en Madrid.»

Nos habíamos conocido dos días antes. Corría el mes de abril de 1955. El profesor Caleb Gattegno, del Instituto de Educación de la Universidad de Londres, había venido a Madrid para dar a conocer el material de Números en color de Cuisenaire. Pronto nació entre los dos una mutua y fuerte amistad, originada, más que en la comunidad de ideas didácticas, en el sentimiento común de amor al niño y de íntegra dedicación a él. Comprendí en seguida que estaba en presencia de una personalidad avasalladora, de una enorme capacidad de trabajo y sacrificio, de un talento excepcional, de una singularísima originalidad de ideas y de una seguridad en sí mismo tan simpática por lo valiente como hiriente a veces por su brusca sinceridad. Secretario y organizador de la Comisión Internacional para el Estudio y mejora de la Enseñanza Matemática, me había informado ampliamente de las tareas de dicha Comisión, invitándome a participar en ella. De origen remoto español, mostraba (y ha seguido mostrando siempre) un gran interés en que España se incorporara al movimiento didáctico matemático moderno internacional. Y yo secundé con toda el alma este interés ofreciendo nuestro ambiente para la celebración de alguna de las reuniones de la Comisión, y, en particular, para la relativa al material didáctico, que suponía había de levantar grandemente el interés y el estímulo de nuestro profesorado de matemáticas.

La tal Comisión había nacido, unos cinco años antes, como resultado de una confluencia de inquietudes procedentes de diversos campos. Varios matemáticos, pedagogos, psicólogos y epistemólogos, interesados en estudiar y remediar el fallo que en la educación de todos los países presenta todavía la enseñanza de la matemática, especialmente en los niveles primario y secundario, estimaron que sólo la coordinación de esfuerzos comunes en un plano internacional podría realizar el anhelo de una reforma profunda y eficaz en los programas, métodos y modos de enseñar nuestra ciencia en el mundo.

Para ello se necesitaba, de un lado, el conocimiento profundo de las estructuras matemáticas, y de otro, el conocimiento no menos esencial de los procesos evolutivos de la inteligencia y afectividad del niño, no sólo para comprender mejor la génesis de los conceptos y juicios matemáticos en su mente, sino también para tener en cuenta los factores de atracción e interés que puedan estimularla y favorecerla.

De aquí la presencia en la Comisión de epistemólogos y psicólogos como Piaget, Gonseth, Beth; de matemáticos como Choquet, Dieudonné, Kurepa, Lichnerowicz; de pedagogos como Gattegno, Drenkhahn, E. Castelnuovo, Servais...

El intercambio de puntos de vista entre tales especialistas y otros a los que la Comisión suele invitar según los temas a tratar, se realiza por medio de reuniones internacionales periódicas, de las que, hasta el momento a que aludimos, habían tenido lugar las siguientes: En abril de 1950 (en Debden, cerca de Londres), con el tema: «Relaciones entre los programas matemáticos de las escuelas secundarias y el desarrollo de la capacidad intelectual del adolescente». En abril de 1951 (en Kerbergen, cerca de Bruselas), con el tema: «La enseñanza de la Geometría en las primeras clases de las escuelas secundarias». En agosto de 1951 (en Herzberg, Suiza): «El programa funcional; de la escuela maternal a la Universidad». En abril de 1952 (Rocheton, Francia): «Estructuras matemáticas y estructuras mentales». En abril de 1953 (Weilerbach, Luxemburgo): «Las relaciones entre la enseñanza de las matemáticas y las necesidades de la ciencia y de la técnica modernas». En julio de 1953 (Calw, Selva Negra, Alemania): «Las relaciones entre la mentalidad de los alumnos y la enseñanza de las matemáticas». En agosto de 1954 (Oosterbeck, Holanda): «La matemática moderna en la escuela».

De Madrid se dirigía entonces Gattegno a Belgrano (Italia), donde había de tener lugar la 8.ª Reunión bajo el tema: «El alumno frente a las matemáticas. Una pedagogía liberadora». En agosto del mismo año se celebraba la 9.ª Reunión en Ramsau (Austria), con el tema: «La enseñanza de la probabilidad y de la estadística», y a ella asistió ya una representación española, integrada por don Alfonso Guiraum y el que suscribe. En ella quedó acordada la celebración de la 10.ª Reunión en Novi (Yugoslavia), con el tema: «La formación matemática del Magisterio», y de la 11.ª Reunión en Madrid, para abril de 1957, bajo el tema: «El material de la enseñanza matemática», con exposición simultánea de modelos y material didáctico matemático. Esta exposición exigía el marco de una gran ciudad y por ello la Comisión renunciaba a su sana y eficaz costumbre de desarrollar sus trabajos en plena naturaleza, lejos de los grandes núcleos urbanos. Madrid y España quedaban desde aquel momento en deuda de gratitud con la Comisión. La elección que sobre nosotros recaía suponía un indudable honor, pero asimismo una no menos indudable responsabilidad, a la que hicimos frente sin acobardarnos.

Hoy, aquella Reunión-Exposición, que tantos esfuerzos costó, que tantas sorpresas produjo, que tantas enseñanzas promovió, dejándonos una estela de satisfacciones compensadoras de los sinsabores y angustias con los que se amasó su preparación, pertenece ya a la historia... Una historia escrita hasta ahora con más amplitud en otros idiomas que en el nuestro, lo que no deja de suponer una aberración y una ingratitud.

Si nos cupo la honra de que nuestro país fuera elegido para celebrar en él el primer Certamen internacional que la historia de la ciencia registra, sobre el material didáctico matemático; si se avinieron a desplazar el suyo otros países, que tanto se habían distinguido en su creación, nosotros nos veíamos obligados, en consecuencia, no sólo a recibirles dignamente, como así se hizo colmándoles de atenciones, sino también a corresponder con esfuerzo paralelo de aportaciones, lo que asimismo han reconocido, y, finalmente, a asimilar la magnífica lección que se nos brindaba. Esta asimilación tal vez haya sido lograda, pero lo cierto es que no ha sido manifestada hasta hoy en la medida a que el honor recibido nos obligaba (*).

(*) Dejando a un lado los efímeros reflejos informativos de la prensa diaria, son muy de estimar (y por mi parte de agradecer) las crónicas de don José R. Pascual Ibarra, en *Revista de Educación*; de don Manuel González Díéguez, en el *Boletín Pedagógico* de la Institución de Formación del Profesorado Laboral, y la

La Revista ENSEÑANZA MEDIA, que sin ser especializada en Matemáticas tiene a gala recoger cuantas manifestaciones de interés se desarrollan en nuestra Patria en todos los sectores de la enseñanza secundaria, publicó en su momento una oportuna crónica (núm. 7-8) y anunció su propósito de editar más tarde un libro que dejara a los profesores de Matemáticas españoles memoria útil de lo vivido y expuesto en aquel Certamen. La realización de este propósito se ha ido retrasando por varias causas. Una de ellas el agobio de original que han producido las recientes reformas de planes y cuestionarios, el régimen de Centros, la reglamentación de pruebas de examen, etc., y otra causa: la crisis de cronistas.

Aunque la dirección de la Revista se dirigió a mí para la preparación y redacción de tal trabajo, estimé que no debía ser yo precisamente el comentarista de tal Reunión por el papel de protagonista destacado que la Providencia me deparó en ella. La dualidad de papeles había de crearme situaciones difíciles, aparte de que quien es avaro de su tiempo para la acción suele considerarlo mal gastado relatando lo pasado, cuando tanto queda todavía por hacer. Pero después de veinte meses, en que dicha crónica ni se ha escrito ni lleva trazas de escribirse, y tras los cuales vuelve a repetirme su solicitud la dirección de dicha Revista, pienso que la falta de otros cronistas justificará tal vez el que lo sea yo mismo, y me agenciará las indulgencias necesarias para todos mis pecados de inmodestia, que procuraré sean los menos amparándome en la perspectiva del tiempo transcurrido y en los documentos y comentarios ajenos que este

---

de la señorita Concepción Sánchez, en *Servicio*, semanario de los maestros españo-
les, en las que, con extensión proporcionada a Revistas no precisamente especiali-
zadas en Matemáticas, se glosaron las principales enseñanzas de aquel Certamen.
No merece, en cambio, el nombre de crónica la simple reproducción del programa
calendario y lista de personajes aparecida en una revista especializada, tarea que
pudo correr a cargo de cualquier persona ajena a la enseñanza, a la Matemática y
a la Reunión, lo que supone una evidente falta de aprecio y atención a lo mucho
que en ella se hizo, se dijo y se expuso.

Contrasta esta actitud con la extensión dedicada a comentar el Certamen en
las revistas especializadas extranjeras: seis expresivas páginas en el *Bulletin de
l'Association des Professeurs de Mathematiques*, francés; otras tantas en *Mathe-
matica & Paedagogia*, de la Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas; otras
seis en el boletín *Mathematics Teaching*, de la Asociación similar inglesa; catorce
páginas ilustradas en la revista italiana *Archimede*...; hasta de Polonia recibimos
con sorpresa el eco de aquella Reunión a través de la revista *Matematika*, destina-
da al personal enseñante.

mismo tiempo ha deparado. Y pienso también, finalmente, que la acción, desarrollada íntegramente en este caso en busca de resonancias que redunden en bien del niño, necesita también del complemento documental indispensable capaz de ampliar estas resonancias entre los no presentes y aun de evocarlas tonificando el recuerdo de quienes la presenciaron y vivieron.

He aquí explicado el por qué aparezco aquí, sin deber serlo, y pidiendo por ello perdón, como cronista de la Reunión-Exposición que como delegado español de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática, hube de organizar en Madrid en el mes de abril de 1957.

Antes de cerrar estas previas líneas de introducción, considero mi primer deber, como miembro de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática, manifestar aquí la gratitud de dicha Comisión a todas las autoridades españolas y extranjeras que prestaron su apoyo y ayuda a esta Reunión-Exposición. En primer lugar, al Excelentísimo Señor Ministro de Educación Nacional, don Jesús Rubio, por el apoyo moral y la subvención material que permitió hacer frente a los gastos de recepción, instalación y reexpedición de materiales; al Ilustrísimo Señor Director general de Enseñanza Primaria, don Joaquín Tena, que en representación suya inauguró la Exposición; al Ilustrísimo Señor Director general de Enseñanza Media, don Lorenzo Vilas, que la clausuró; al Ilustrísimo Señor Director general de Enseñanzas Técnicas, don Gregorio Millán, que nos honró con su visita; al entonces Ilustrísimo Señor Director general de Información, don Florentino Pérez Embid, por la eficaz ayuda que la Sección de Actos Públicos del Ministerio de Información y Turismo nos brindó en la instalación; a las Embajadas de Francia, Italia, Inglaterra, Alemania, Bélgica y Suiza, por su cordial ayuda e intervención en la recepción de materiales; al Excelentísimo Señor Alcalde de Madrid y a la Masa Coral madrileña por el agasajo musical a los congresistas; a las autoridades toledanas por los agasajos análogos de que fueron objeto en su excursión a Toledo; a los Liceos francés e italiano, por la gentil aportación de su alumnado en las lecciones experimentales; al Director y claustro del Instituto de San Isidro por la generosa acogida en sus amplios locales de las actividades de la Comisión y en especial de la Exposición, que tuvo digno marco en la galería principal que circunda su hermoso patio; al Director y claustro del Instituto «Ramiro Maeztu», donde se celebró la sesión de clausura, por las atenciones dispensadas en dicho acto; y, finalmente, a cuantos colegas, profesores y alumnos españoles contribuyeron con su aportación de modelos y ayuda personal o con su simple asistencia, a aumentar y a subrayar la eficacia de nuestra Reunión.

Pero también, como profesor español, debo manifestar aparte la inmensa gratitud del profesorado español de Matemáticas a todos los colegas extranjeros que hicieron el esfuerzo de traernos su material y de dedicar sus vacaciones de Pascua a desarrollar en nuestro marco sus actividades, contrastando su experiencia con la nuestra y aportándonos gran cúmulo de ideas y enseñanzas de las que tanto provecho obtuvimos.

P. Puig Adam

Madrid, diciembre de 1958.

PARTE PRIMERA

XI REUNION DE LA COMISION INTERNACIONAL PARA EL ESTUDIO Y MEJORA DE LA ENSEÑANZA MATEMATICA

XI REUNION DE LA COMISION INTERNACIONAL PARA EL ESTUDIO Y MEJORA DE LA ENSEÑANZA MATEMATICA

De once nacionalidades, y en número de unos cincuenta, fueron los colegas extranjeros que se reunieron en Madrid con motivo de aquel Certamen. Entre ellos recordamos: por parte de Francia, los profesores Mr. Choquet (de la Sorbona), Mr. Walusinski (Presidente de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Francia), Mr. Biguenet, Mlle. Felix, Mme. Dreyfus-See, Mlle. Vervaecke, Mr. et Mme. Coubebaisse, Mr. Bernard, mademoiselle Barluet, Mr. et Mme. Faisse, Mlle. Motte. Por parte de Bélgica, los profesores Mr. Servais (Presidente de la Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas), Mr. Delmotte, Mr. Lievens, Mr. et Mme. Vanhamme, Mlle. Carleer, Mlle. Lenger, Mlle. Boigelot, Mlle. Walraevens; Mlle. Ruymen, Mlle. Irenay. Por parte de Italia, los profesores Campedelli (catedrático de la Universidad y Director del Centro Didáctico Matemático de Florencia), Emma Castelnuovo, Ragusa Gilli, D'Agostini, Pescarini. Por Portugal, los profesores A. Silva (del Centro de Estudios Matemáticos de Lisboa), Calado, Furtado-Leote, Heytor. Por Inglaterra, los profesores Gattegno (del Instituto de Educación de la Universidad de Londres), Fletcher, Harris. Por Alemania, los profesores Pauls y Wolf. Por Suiza, los profesores Nicolet, Schilt y Roth. Por Austria, el profesor Staber. Por Yugoslavia, el profesor Kurepa. Por Uruguay, el profesor Galli.

A ellos se añadieron, para participar en las tareas regulares de la Reunión, alrededor de un centenar de profesores españoles de Centros oficiales y privados (Institutos de Enseñanza Media y Laborales, Escuelas del Magisterio, Colegios de religiosos y seglares, etc.), y otros muchos más que asistieron a sesiones aisladas de cine, conferencias y demás actos, aparte del numeroso público que visitó la Exposición de modelos.

SESION INAUGURAL

La Reunión tuvo lugar durante la semana del 21 al 27 de abril de 1957 y se inició con una sesión inaugural el domingo 21, a las seis de la tarde, en el salón de actos del Instituto de San Isidro. En ella tomaron la palabra: el profesor Gustavo Choquet, Presidente de la Comisión, que pronunció unas breves frases de bienvenida a los congresistas y de gratitud a la acogida dispensada por España; y el profesor Gattegno, Secretario de la Comisión, que, tras trazar las directrices de trabajo, señaló las características que diferenciaban esta Reunión de las anteriores, todas ellas efectuadas en ambiente de minoría e intimidad y en lugares apartados de las grandes concentraciones urbanas, lo que no procedía en esta ocasión por la organización de una Exposición simultánea, que exigía el marco de una gran ciudad y la proyección de resultados y enseñanzas a un número considerablemente mayor de asistentes. Finalmente, el profesor Puig Adam pronunció una conferencia sobre el tema que se le había asignado, «El papel de lo concreto en la Matemática», conferencia que se reproduce más abajo y de la que leyó a continuación un breve resumen en francés (*). Terminada la parte académica del acto, la Masa Coral de Madrid, dirigida por el maestro Benedito, dió un concierto de canciones folklóricas españolas, ofrecido por el Excelentísimo Ayuntamiento de Madrid a los señores congresistas.

EXPOSICION DE MATERIAL DIDACTICO

El martes 23, a mediodía, el Ilmo. Sr. Director Gral. de Enseñanza Primaria, en representación del Excelentísimo Señor Ministro de Educación Nacional, acompañado del Ilmo. Sr. Director Gral. de Enseñanzas Técnicas, inauguraron la Exposición de material didáctico matemático, recorriendo con detenimiento las secciones de los distintos países y teniendo palabras de aliento y admiración para los notables trabajos que en ellos se hallaban expuestos y que se detallan en la segunda parte de este folleto.

(*) Este resumen ha sido reproducido, que sepamos, en las siguientes revistas: *Bulletin de l'Association de Professeurs de Mathematiques*, de Francia; en *Mathematica & Paedagogia*, de Bélgica; en *Il Centro*, de Italia, y en *Matematika*, de Polonia (en versión polaca).

TEORIA MODERNA DEL POTENCIAL

El miércoles 24, la Academia de Ciencias ofreció su cátedra y salón de actos al profesor Choquet, de la Sorbona, Presidente de la Comisión, para que en ella desarrollara el tema «Teoría moderna del potencial», como así lo hizo con gran altura científica y moderno lenguaje, y que por su carácter técnico superior nos abstenemos de reseñar aquí. No podemos, sin embargo, dejar de subrayar el hecho, altamente significativo y ejemplar, de que un profesor universitario de la categoría del profesor Choquet tenga tal interés por los problemas didácticos que asuma la presidencia de nuestra Comisión y desarrolle en ella labor tan provechosa para los niños del mundo entero. Esta vivencia didáctica de su matemática da precisamente un alto calor humano a sus actividades superiores, y así la conferencia que comentamos fué una muestra elocuente de cómo se puede hablar un lenguaje científico elevado con la maravillosa apariencia de lo llano, de lo natural, de lo espontáneo y de lo bello. Juego de intuiciones fué también su bella conferencia, y aun, si se quiere, de «modelos» manejados en un sentido superior de estructuras isomorfas más asequibles.

EL VALOR DE LOS METODOS INTUITIVOS

El viernes 25 por la tarde, y en parte con carácter de cuadro de conclusiones, el profesor Servais pronunció una bella conferencia, acompañada de discusión, sobre «El valor de los métodos intuitivos».

En ella el profesor Servais arremetió valientemente contra la enseñanza tradicional matemática en el grado medio, enseñanza en la que, según frase que recordamos, «todos los elementos: profesores, textos, programas, exámenes, parecían coaligados en contra del alumno». Es una aberración la creencia, tan frecuente en el profesor tradicional, de que el uso del material concreto traiciona la esencia de la matemática, sustituyendo su prístina enseñanza por un escamoteo que la desvirtúa. Todo depende del uso que de dicho material se haga.

Con frases concisas y tajantes analiza el papel de los modelos concretos en la enseñanza intuitiva de la matemática, que no se detiene en la intuición sensible, sino que alcanza el dominio interior de las imágenes, de los recuerdos, de las representaciones, en el que el dinamismo de las operaciones se desliga ya de las percepciones y de los actos materiales en sí. Es, en esta intuición mental, donde la lógica halla ocasión de extraer los conceptos y las relaciones abstractas por observación de analogías entre situaciones y por adquisición de conciencia de ellas. Es, con este material de ideas, con el que se organiza deductivamente la matemática abstracta. En resumen, el objeto de los métodos intuitivos no consiste en burlar el edificio lógico, sino, por el contrario, en darle una base psicológica firme a través de los tres grados que Servais distingue en la intuición: la intuición sensible de lo concreto, la intuición mental de las representaciones y la intuición matemática propiamente dicha, concebida como la visión directa de la estructura de las relaciones y de las operaciones.

CLAUSURA DE LA REUNION

La sesión de clausura se celebró el sábado 27, en el Instituto Ramiro de Maeztu, bajo la presidencia del Ilustrísimo Señor Director General de Enseñanza Media, quien dirigió unas cariñosas palabras de estímulo y gratitud a los profesores extranjeros y de aliento a los nacionales, aludiendo al apremiante problema de la crisis de profesorado de Matemáticas en el mundo entero y del necesario fomento de vocaciones para combatirla. En esta sesión hablaron también el Presidente y Secretario de la Comisión, el delegado español de la misma y varios representantes de los países presentes, así como de cada uno de los sectores de la enseñanza patria que habían concurrido al Congreso que se cerraba. Todos coincidieron en estimar la trascendencia que había tenido para la mejora de métodos de enseñanza matemática, que constituye el fin y la razón de ser de la Comisión. La sesión de clausura fué seguida de una visita al referido Instituto «Ramiro de Maeztu», cuyas instalaciones fueron altamente elogiadas por los visitantes, y se han comentado en el mismo tono en artículos posteriormente publicados describiendo las actividades de aquella agitada y venturosa semana (*).

(*) Véase *Mathematics Teaching*, núm. 5, noviembre de 1957.

EL PAPEL DE LO CONCRETO EN LA MATEMATICA

Texto de la conferencia inaugural, pronunciada por don Pedro Puig Adam al iniciarse, en el Instituto de San Isidro, las tareas de la Reunión:

La Comisión me ha pedido que sea yo esta vez, como representante español, quien inaugure sus tareas pronunciando unas palabras sobre «El papel de lo concreto en la Matemática». Pero, ante todo, permítaseme dar la bienvenida a los numerosos colegas extranjeros que nos honran con su presencia, agradeciéndoles el considerable esfuerzo que ha supuesto para muchos de ellos la venida, y, sobre todo, la traída de material; y también a los profesores españoles que a nuestra llamada han acudido para acompañarles en las tareas de esta reunión.

Quiero expresar gratitud, en nombre de la Comisión, a las Embajadas de los países participantes, a las autoridades académicas españolas que nos han apoyado y nos cobijan, a aquellas otras autoridades que con tanta diligencia han hecho montar las instalaciones; gracias, pues, repito, en nombre de la Comisión a la que me honro en pertenecer. Pero también quiero añadir mi propia gratitud a todos, los de fuera y los de dentro de casa. Todos sabéis el enorme empeño e ilusión que he puesto en que esta Reunión-Exposición se celebrara en mi patria. Lo saben los miembros todos de la Comisión y lo sabe también el profesorado español, que me ha apoyado en la empresa.

España se halla actualmente en plena evolución social e industrial, no puede quedarse rezagada, le urge colocarse al nivel de los pueblos que tienen una ciencia y una técnica propias, y aportar en lo posible su esfuerzo al progreso universal; ello exige, ante todo, una adecuada formación matemática de nuestra juventud. No he de insistir ahora en el papel fundamental que la matemática desempeña en el progreso técnico de la humanidad. La técnica es, en definitiva, el dominio de las fuerzas naturales, y no puede lograrse tal dominio sin un conocimiento profundo de las fuentes de energía y de las leyes con que se gobiernan. Energética y Cibernética, en sus aspectos nuclear y electrónico, respectivamente, son los grandes campos de actividad técnica presente y futura, y ya sabemos la magnitud del instrumental matemático que tales técnicas necesitan. Para la obra técnica matemática del futuro se precisarán cuadros cada vez más amplios de investigadores, agrupados en equipos de estructura piramidal, es decir, edificados en estratos que vayan desde una amplia base humana de eficiencia realizadora, hasta singulares cúspides creadoras de elevada perspectiva. A nosotros los educadores nos corresponde asegurar todo lo posible la elevación de estas estructuras, empezando por consolidar y amplificar sus bases en cantidad y calidad, hacer la cultura elemental y media asequible al mayor número de inteligencias, no sólo en el sentido político de equiparación cultural de clases sociales (problema que tanto preocupa a nuestro Gobierno), sino también en un sentido amplificador de accesibilidad pedagógica.

La Matemática ha constituído, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser nunca una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces. La coyuntura matemática actual está clamando por una profunda revisión de modos y métodos de enseñar, que permitan ensanchar los campos de eficiencia matemática de nuestra juventud; para eso estamos y para eso se creó nuestra Comisión, que agrupa a hombres de la mejor voluntad, procedentes de distintos campos y nacionalidades: matemáticos puros, ingenieros, psicólogos, epistemólogos, pedagogos y profesores de todos los niveles de enseñanza. Saludo alborozado, como español, su presencia entre nosotros, que contribuirá poderosamente a que nuestro profesorado, al ser tenido en cuenta, se sienta orgulloso de colaborar en la gran tarea de mejorar la enseñanza matemática en todo el mundo.

* * *

Y ahora entremos en el tema, motivo de la breve conferencia inicial. Aun no siendo mucho lo que voy a decir, pienso que me pierdo una bella ocasión de callarme y de aprender, ya que empiezo por sentirme disconforme con el título que han asignado a mi charla, que, en lugar de llamarla «El papel de lo concreto en la Matemática», mejor la rotularía yo «El papel de la Matemática en lo concreto». Trataré de explicarme, si puedo, porque la primera dificultad para hablar de cualquier cosa es saber de qué se está hablando, y no es fácil decir algo de lo concreto en Matemáticas cuando ha de empezarse por confesar, como lo hago, mi incapacidad de precisar qué es lo concreto y qué es la Matemática.

Para acotar un poco los términos de la cuestión diré que quisiera referirme a la Matemática como actividad mental y no como cúmulo de conocimientos adquiridos mediante ella; y que, ante la imposibilidad de definir «lo concreto», me referiré a este algo «inconcreto» que, en lenguaje vulgar, se contrapone, a veces indebidamente, a lo abstracto. Prescindiendo del juego paradójico de adjetivos, quiero precisar, pues, que abandono todo intento de definición de lo concreto y de lo abstracto, y que quiero referirme tan sólo a la disyuntiva, o a la simple comparación que los relativiza. Pero, aun así, surgen difíciles interrogantes. ¿Qué debemos entender por actividad matemática? ¿En qué consiste la distinción comparativa, que permite situar, en cada caso, a un lado lo concreto y al otro lo abstracto? Las respuestas que demos a estas preguntas acaso marcarán un sello específico a nuestra enseñanza.

Si consideramos como actividad matemática estrictamente la operatoria relacional entre conceptos ya elaborados, hemos de situarnos inicialmente en un mundo de entes idealizados, bien sea considerándolos como innatos, como indirectamente definidos por sus relaciones, o como resultantes de procesos de idealización que caen fuera de la actividad matemática. Este es el punto de vista del matemático puro, que no es ciertamente el mío como educador. Como tal, yo no puedo dejar de pensar que la actividad matemática de la gran mayoría de mis futuros alumnos se desenvolverá partiendo de situaciones bastante menos depuradas que al paso les ofrezca la realidad concreta. Y aquí hacemos uso, por primera vez, del adjetivo concreto, asociándolo al ambiente real en torno al hombre futuro que será nuestro escolar; de poco le servirá entonces toda la dinámica operacional abstracta o semiabstracta, si no encuentra para su aplicación los entes ya depurados con los que se le adiestró.

Lo he repetido hasta la saciedad a lo largo de mi vida académica profesional: una formación matemática completa de nuestra juventud, es decir, una formación que habilite a dicha juventud para prestar una decisiva utilidad en el mundo técnico-social futuro, no puede limitarse al cultivo de la fase central operatoria, al cultivo de las facultades lógicas, como suele decirse, entendiendo así minimizado el papel de la Lógica en la Matemática. Este punto de vista, demasiado exclusivista, que cada generación de profesores hereda de la precedente, crea una tendencia a la abstracción prematura, al descuido y al olvido, que son un desprecio implícito, del mundo real; y la enseñanza, que de ello resulta, deviene, en cierto modo, estéril, por desarrollarse en una atmósfera rarificada a fuerza de depuración. El mecanismo lógico abstracto es sólo una fase intermedia en la resolución de los problemas cuantitativos de la filosofía natural, fase esencial ciertamente, pero que tiene que ir precedida de una fase de planteamiento o de abstracción, en la que la mente reduzca a esquemas matemáticos los fenómenos naturales en estudio, y seguida de otra fase de concreción, es decir, de interpretación, de proyección de los resultados obtenidos al campo de la realidad. Creo que el olvido del cultivo simultáneo de las dos fases anterior y posterior aludidas, motivó en gran parte el fracaso de la enseñanza matemática tradicional.

Abstraer del mundo físico el *substratum* matemático de los fenómenos no es cuestión que se resuelva jugando a los silogismos, sino adquiriendo la intuición de lo esencial; el mecanismo lógico viene después, lo que no disminuye su importancia. Es, asimismo, al proyectar de nuevo en el campo físico de origen los resultados de dicha elaboración abstracta, cómo se ha podido juzgar de la verosimilitud de las esquematizaciones y de la validez de las teorías físico-matemáticas sobre ellas edificadas. Por ello es igualmente importante educar al alumno, desde un principio, a practicar esta actividad que hemos llamado concreción, si queremos despertar en él facultades verificadoras y evitar la insensibilidad, desgraciadamente tan frecuente entre nuestros escolares, ante los resultados físicamente absurdos. La ausencia del cultivo de estas fases supone un concepto restringido de actividad matemática que hay que evitar, pues no se remedian *a posteriori* sus estragos con la adición circunstancial de los llamados problemas y ejercicios de aplicación. Se hace necesario prevenir el mal desde el origen mismo de la enseñanza de la Matemática, atacando el problema genético de la formación de las abstracciones, y añadiendo el sentido posterior de readaptación de las abstracciones formadas, a la realidad concreta.

Es axioma de la moderna educación que el educador debe analizar sus propios procesos de aprendizaje, para tenerlos en cuenta al guiar el de sus alumnos. Pues bien: yo me di cuenta por primera vez del vacío creado por la enseñanza matemática tradicional, al comprobar las dificultades de planteamiento que encontraba en el estudio de los fenómenos de la técnica del ingeniero. Analizando tales dificultades, comprendí que procedían del hábito de razonar sobre entes demasiado perfectos y que difícilmente podían encajar en el complejo cuadro que la técnica me ofrecía; para una tal adaptación precisaba atrevidas simplificaciones y una cierta intuición apriorística de su posibilidad dentro del margen de aproximaciones que tal técnica permitía. Comprobé que todo mi bagaje de cálculo y de ecuaciones diferenciales me servía de muy poco para la labor de planteamiento, cuando no me estorbaban, induciéndome a la consideración de sutilezas innecesarias. Toda la educación matemática de que me ufanaba, no me había enseñado a efectuar procesos eficientes de abstracción, de selección de causas predominantes en las que juega más la intuición que la lógica. Y no se escuden los profesores puristas en que ésta es tarea de educación tecnológica posterior. Existe una cuestión de hábito que es preciso educar desde el principio, sin que con ello pretendamos los profesores de Matemáticas invadir el campo específico de tales tecnologías. Si no se educa este hábito desde un principio, difícilmente el alumno podrá construir por sí mismo esquemas lógicos con buen sentido de aplicación, y aun los que se le presenten, aparecerán ante su sentido crítico exigente de pureza, como artificios que ha de admitir sin convicción.

La técnica necesita fundamentalmente el cultivo de estas facultades esquematizadoras; y no ejercitarlas desde un principio entre los alumnos de nuestras escuelas superiores, es incapacitar, a quienes en ellas se forman, para toda labor posterior de auténtica creación. Y al ver esto claro en mi aprendizaje como técnico, aprendizaje que simultaneaba con mis primeros años de ejercicio como profesor de Matemáticas en este Instituto, comprendí que este fallo era general en toda la educación matemática elemental, y tal vez uno de los más importantes factores contribuyentes a la general aversión de la juventud hacia el estudio de la Matemática: su desconexión con la realidad (en este caso, naturalmente, la realidad infantil); su apartamiento del mundo y de sus intereses concretos, intereses que no coinciden con los primarios vitales del adulto, como algunas escuelas han preconizado; su desconocimiento del mundo, de sus percepciones sensibles y de sus acciones, con las que juega y aprende a un tiempo inconscientemente.

Lo concreto empieza siendo para el niño lo que percibe; sobre estas percepciones primeras actúa elaborando analogías de las que surgen conceptos más generales, más abstractos, llegando a veces a procesos de abstracción de rapidez insospechada. La percepción y la acción parecen constituir el binomio sobre el que se desarrolla el aprendizaje matemático; con su doble juego el niño y también el adulto —niño, al fin, en tanto aprende— elabora conceptos y relaciones válidas para clases de entes cada vez más generales. Y si en un principio la base concreta parte de las percepciones sobre el mundo físico, los estratos siguientes de elaboración generalizadora parten ya de las primeras idealizaciones, que, si representaron abstracciones resultantes de los primeros procesos, son luego, a su vez, base concreta sobre la que se apoyan los procesos ulteriores.

De aquí se infiere que lo concreto y lo abstracto no son términos absolutos, sino relativos, en función del salto de cada estrato al siguiente; de aquí también que podamos hablar de percepción en un sentido no sólo sensorial, sino también intelectivo. La percepción intelectiva sería así como el alumbramiento de las tomas de conciencia de los sucesivos estratos de abstracción, y lo virtual, que es muchas veces la esencia del pensamiento matemático, pasa a ser, a los efectos de concreción consciente, tan real para el matemático puro como pueda serlo para el físico el mundo experimental.

En los procesos matemáticos de abstracción ha desempeñado un papel decisivo la simbolización. Es la condensación simbólica y la formalización del razonamiento matemático lo que ha hecho posible la rápida y formidable progresión de abstracciones y generalizaciones crecientes, que constituyen la Matemática desde Vieta hasta nuestros días. Expresados los conceptos mediante símbolos y traducidas las relaciones que los ligan mediante leyes formales entre los mismos, puede descansar la mente matemática de los contenidos y operar sobre las simbolizaciones. De su com-

binación surgen entonces conceptos nuevos, que se expresan mediante nuevos símbolos unidos por nuevas leyes, y así sucesiva e indefinidamente. La forma en Matemáticas ha ido, de este modo, adquiriendo tal preponderancia que, al fin, la ley formal operante ha terminado teniendo más fuerza que los propios conceptos operados. Empezó anticipándose a ellos, en el Renacimiento, con la resolución ciega de ecuaciones cúbicas mediante radicales imaginarios, cuando éstos carecían de todo sentido matemático, y ha terminado dejando reducidos los entes matemáticos a meros ropajes concretos con los que pueden revestirse las estructuras. Pero cada estructura no deja de ser, a su vez, un nuevo concepto, base de ulteriores especulaciones dentro de un cuadro de superestructuras más amplias. El álgebra de Boole, que admite ropajes concretos tan diversos como las clases, las proposiciones, los conjuntos, los circuitos de interruptores y de conmutadores, las conexiones de válvulas de vacío en las máquinas electrónicas de cálculo, no pasa de ser, a su vez, un ejemplo muy singular en el cuadro más general de las estructuras algebraicas con doble ley de composición.

La Matemática, que empezó desnudando al mundo físico de sus atributos sensoriales para edificar sus primeros contenidos matemáticos conceptuales (número, espacio euclídeo, medida, etc.), ha terminado desnudándose a sí misma de estos contenidos, y quedándose en las simples estructuras pragmáticas que los relacionan. Pero este proceso de generalizaciones y de abstracciones no se sabe a ciencia cierta cuándo empezó, ni cuándo terminará. Sólo sabemos que el mundo físico y social que paralelamente evoluciona, estimula de tanto en tanto estos procesos, sugiriendo conceptos abstractos nuevos que el matemático se afana luego en depurar y en combinar para la creación de nuevos conceptos derivados, y que también este mismo mundo físico se beneficia posteriormente de las creaciones abstractas puras, hallando para ellas nuevas e insospechadas adaptaciones; para no citar más que un ejemplo, recuérdese la misma álgebra de Boole, antes referida. Ningún profesor de Matemáticas debe olvidar esta monumental e interminable simbiosis, con la que mutuamente se alimentan la Matemática y la Filosofía natural. Con ello no sólo podrá vivificar los conceptos matemáticos puros, proyectándolos sobre la realidad física, sino que sabrá buscar en ésta los trampolines para nuevos saltos de elevación abstracta.

* * *

Iniciamos hoy las tareas de nuestra oncena Reunión, cuya finalidad es el estudio del material moderno de enseñanza matemática. Este material: modelos, films, filminas, visto por los matemáticos situados desde la elevada perspectiva abstracta, son meras concreciones ilustradoras, simple ropaje conveniente para facilitar momentáneamente comprensiones dificultosas; pero para el educador matemático, que no pierde la perspectiva de los procesos iniciales de abstracción, este material es mucho más: representa algo sustancial en su función educativa. Este material estructurado en forma de modelos, de los que hay abundantes muestras en la Exposición que presentamos, tiene no sólo la función de traducir ocasionalmente ideas matemáticas, sino también de originarlas, de sugerirlas. Hemos de estudiar la manera más acertada pedagógicamente de conseguirlo y también los materiales más dúctiles para su realización.

Pero, puesto que la percepción y la acción son fundamentales en toda educación matemática, hemos de conseguir también que los modelos sean capaces de provocar una y otra, de modo que traduzcan o sugieran, creando situaciones activas de aprendizaje. Para ello habrá que ir sustituyendo los clásicos modelos de vitrina de contemplación pasiva por modelos multivalentes de nueva concepción, manipulados por el propio alumnado y determinantes de una actividad sugeridora del conocimiento que se trate de adquirir. La vida misma, a veces los juguetes, nos los ofrecen insospechadamente; y tanto mejor si esta actividad se manifiesta en la creación de nuevos modelos ideados por el propio alumno, ya que así no sólo ejercitará la concreción de la idea matemática a ilustrar o traducir, sino que también, al presentar su modelo a sus compañeros, tendrá que pensar en que sea capaz de sugerir en ellos la abstracción de la que él partió. Véase por dónde la concepción y confección de modelos puede ser vehículo natural y eficiente para la práctica feliz de las dos actividades, de abstracción y de concreción que, como he dicho, deben formar parte de la integral actividad matemática educativa.

Y ahora aprovechemos intensamente la semana en que estaremos reunidos alrededor de este tema. Trabajemos con fe. Pensemos que de nuestra tarea puede resultar la felicidad de millones de niños para quienes todavía el estudio de la Matemática es un suplicio. Bien merece nuestro esfuerzo la esperanza de su liberación.

MODELOS, FILMINAS Y FILMS DIDACTICOS

Dada la extensión de los temas abarcados y la afluencia de participantes en nuestra XI Reunión, desde la iniciacion de sus tareas, hubo que dividir éstas en cuatro secciones. Los cincuenta profesores extranjeros y cerca del centenar de profesores españoles se distribuyeron en cuatro grupos, algunos de los cuales se subdividieron a su vez en subgrupos de trabajo homogéneo. Surgieron así las secciones siguientes, cuya labor resumiremos acto seguido.

I. *Modelos (materiales).* Con varios subgrupos de iniciación y de iniciados.

II. *Modelos (ideas).* Un solo grupo.

III. *Filminas.* Un solo grupo.

IV. *Films.* Con cinco subgrupos.

Todos los grupos trabajaron intensamente de dos a tres horas diarias durante la semana entera en locales aislados específicamente habilitados para ello en el Instituto de San Isidro.

Habiendo correspondido al comentarista que suscribe la dirección del grupo II, sólo por referencia podré reflejar aquí la labor de los demás. Me valdré para ello del testimonio personal de algunos participantes y de las crónicas que en el extranjero se han publicado.

Debo declararme responsable de la diferenciación de dos grupos en lo relativo al estudio de los modelos: el grupo I destinado a dedicar especial atención al estudio de los materiales más adecuados para la confección de modelos (cartón, celofán, plástico, alambre, etc.) y a la técnica de su manejo (cortado, plegado, soldadura, etc.), y el grupo II, que había de concentrar preferentemente su atención en el estudio de las ideas que habían presidido en el proyecto y uso de tales modelos, con objeto de analizar y discutir su eficacia y susceptibilidad de mejora. Aunque proyecto y realización deben ir siempre de la mano, y es muy frecuente el hecho de que ésta modifique aquél, no es menos cierto que la enorme variedad de ideas contenidas en la abundante exposición (más de cien metros lineales de mesas de unos setenta centímetros de ancho) exigía un análisis sistemático de conjunto que resultó ser, en efecto, singularmente luminoso desde el punto de vista didáctico.

Grupo I.—Modelos (materiales)

Todo el peso de la organización de trabajo y dirección del grupo I y de sus varios subgrupos recayó sobre el magnífico equipo belga, cuyos modelos llamaron desde el primer momento la atención, no sólo por la riqueza de contenido en ideas, sino también por la pulcritud de su acabado y el hábil manejo de materiales que manifestaban. Los admirables compañeros Servais, Vanhame..., pasaron sus vacaciones pascuales enseñando a doblar, cortar, pegar, soldar... a sus colegas de otras naciones y entre ellos en mayoría a los españoles.

Pero, naturalmente, no se trataba de transmitir una simple manipulación de oficio. Se partía de la concepción de un modelo y se comentaban las operaciones necesarias para realizarlo, discutiéndose los materiales más dúctiles y adecuados para ello, sus ventajas e inconvenientes, y se procuraba sacar de la manipulación, supuesta efectuada por un niño realizador, todas las consecuencias que en orden didáctico formativo podían desprenderse de dicha realización y ver cómo de la misma podían, a su vez, extraerse consecuencias en cuanto al propio proyecto del modelo.

La profesora Emma Castelnuovo detalla, por ejemplo, en su crónica publicada en *Archimede* (*) la crítica de la construcción de un cubo, bien sea de alambre, bien de cartulina, desde este punto de vista didáctico sugeridor, hasta llegar a la discusión de sus posibles secciones planas, siguiendo las ideas de los belgas Libois, Jeronnez, de las que el lector tendrá amplia información leyendo los artículos de dichos profesores pu-

(*) *Archimede* (Rivista per gli insignanti e i cultori di Matematiche pure e applicate). Florencia, mayo-junio 1957.

blicados en el folleto *Documentation*, Cahier n.° 5, publicado por el Ministerio de Instrucción Pública de Bélgica, íntegramente destinado a *Les modèles dans l'enseignement mathématique*.

Como he dicho, no tuve ocasión de presenciarlo, pero imagino con emoción a todos estos profesores y sobre todo al respetable y prestigioso Director del Instituto Didáctico de Florencia, Profesor Campedelli, autor de varias obras y trabajos, realizador de notables modelos de superficies y curvas algebraicas, interesado por técnicas nuevas de soldadura, doblado y cortado, infantilizándose con ahinco y entusiasmo, como todos, con el pensamiento puesto en los niños de todo el mundo. Y en este ambiente sencillo, cordial y laborioso, se desarrollaron las tareas de esta sección, de las que quedaron realizados multitud de modelos estáticos: poliedros varios de alambre, cartón y celofán, alguno con descomposición en poliedros parciales, y otros dinámicos: figuras planas articuladas de tiras de cartón, varillas, etc.

Fueron ampliamente comentados en esta sección los modelos realizados por los colegas españoles Fernández de Trocóniz y Fernández Biarge, el primero de los cuales, concebido para ilustración de la mayor parte de las propiedades de la geometría del espacio, tuvo lugar destacado en la exposición y figura en la descripción ilustrada del material expuesto en la última parte de este libro.

Grupo II.—Modelos (ideas)

Como antes he dicho, dedicó este grupo su actividad al estudio comparativo de las ideas dominantes en el material presentado, acentuando el cronista que suscribe la nota tal vez más singular de la participación española sobre el contenido didáctico matemático subyacente en múltiples objetos de la vida diaria, como consecuencia de la base matemática en que a su vez se apoyan los oficios realizadores de los productos industriales, mecánicos o manufacturados. Entre éstos adquieren singular relieve didáctico varios juguetes y juegos infantiles. A juzgar por los comentarios aparecidos en la prensa extranjera, y por la seriedad y ahinco con que sorprendimos a más de un congresista analizando y meditando los movimientos de los juegos solitarios expuestos, o de la simple falleba, este tema ha constituído uno de los más acusados impactos producidos por la participación española entre el profesorado extranjero asistente.

careció de complemento difusor análogo, por lo que hubo de dedicar buena parte de su horario a proyectar y conocer primero el abundante material de filminas hasta entonces realizadas, al tiempo que se discutía largamente su oportunidad didáctica. Con los juicios y comentarios de los asistentes se analizó y precisó mejor la función que las filminas son capaces de llenar en la didáctica matemática, y los caracteres que diferencian esta función de la que parece destinada a los films. Llamó la atención la filmina en colores realizada por el profesor Gattegno sobre el método de los números en color.

Según comenta la profesora Emma Castelnuovo en el artículo referido de la revista *Archimede* (*), las filminas constituyen un recurso que, sin pretender abarcar situaciones en las que el movimiento es sustancial, intenta evocar, con secuencias adecuadas de cuadros cuidadosamente ordenados, un proceso de transformaciones o relaciones que conducen a una enseñanza matemática determinada.

De aquí que cuando la filmina pretende reemplazar al film suele fracasar, mientras se muestra útil y eficaz cuando, por sí sola o combinada con otras, crea una sucesión de situaciones sugeridoras en relación con los argumentos tratados.

También en esta sección se formularon algunos proyectos de filminas sobre temas precisos, tales como la teoría de proporciones en Aritmética y Geometría y otro tema propuesto por el profesor Pescarini en relación con las cartas náuticas, que asimismo fueron objeto de despliegue material en la exposición de modelos.

Como era inevitable, todos estos proyectos originaron interesantes cambios de puntos de vista sobre los principios de la Aritmética y de la Geometría puestos en juego en tales temas.

Nos place a este propósito citar aquí el primer intento de realización de filmina española realizado por el profesor Yagüez, del Instituto Laboral de Peñaranda de Bracamonte.

Grupo IV.—Films

Este grupo fué dirigido por los profesores ingleses Fletcher y Harris, el primero de los cuales es realizador de varios films sobre temas de nivel

(*) L'XI Congresso della «Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques», *Archimede*, anno IX, núm. 3, mayo-junio 1957.

universitario. Se reunieron en él unos treinta congresistas deseosos de iniciarse en la técnica de proyecto y realización de films didácticos matemáticos, los cuales se dividieron en cinco subgrupos, dos de ellos dedicados a la realización de films destinados a alumnos de menos de catorce años; otro, dedicado a nivel superior; un cuarto grupo, dedicado al estudio de la realización de un film en colores sobre la teoría de conjuntos y, finalmente, otro dedicado a la animación de figuras recortadas. Se reunieron en esta sección, junto a los profesores extranjeros Choquet, Silva, Walusinski, Félix, Delmotte, D'Agostini..., los profesores españoles Mir, Yagüez y otros.

Resultando materialmente imposible llegar a la realización completa de un film en una semana, cada uno de los subgrupos proyectó, sin embargo, un guión, que fué animadamente discutido por el grupo y comentado por el director profesor Fletcher. Este inició las tareas con indicaciones de carácter general sobre las modalidades del film de dibujos animados, según el objeto perseguido y la edad de los escolares a que va destinado, así como acerca de las técnicas preferentes para su realización: dibujo a tinta china sobre celofán, y fotografía de dibujos recortados, a los que se imprime desplazamientos sucesivos. Tres de los grupos llegaron hasta los comienzos de la realización efectiva sobre celofán; pero todos pudieron hacerse cargo de las esencias y dificultades de la técnica de los dibujos animados y se dieron cuenta de cómo ideas buenas en apariencia pueden ser inoperantes por dificultades de orden técnico y cómo, en definitiva, el material puede reaccionar sobre el guión, modificándolo y aun sugiriendo ideas nuevas durante el curso de la realización.

Entre los temas propuestos como base de desarrollo de los guiones respectivos se recuerda uno sobre «ángulos en la circunferencia», destinado a algunos de grados inferiores; otro sobre generación de cónicas, y en plano universitario, sendos proyectos de Choquet, Silva y D'Agostino sobre Topología y Geometría diferencial.

Proyección de films didácticos

El estudio teórico-práctico realizado por el grupo IV sobre proyecto y realización de films de didáctica matemática se complementó con la proyección de múltiples films de distintas nacionalidades durante sesiones destinadas a todos los congresistas y al público en general, sesiones que se dieron diariamente en el salón de actos del Instituto de San Isidro, a mediodía o al término de las sesiones de trabajo, por la tarde.

En estas sesiones se dieron a conocer al público (para el que constituían una novedad) los depurados films de Nicolet, dedicados a varios temas de matemática del grado medio elemental: Determinación de la circunferencia por tres puntos; Circunferencia como lugar del vértice de un ángulo de amplitud fija cuyos lados pasan por dos puntos fijos; Arco capaz; Propiedad de las bisectrices de un triángulo; Sección áurea y construcción del pentágono regular; Teorema de Eudoxio; Lugar de puntos desde los cuales se ven dos círculos bajo ángulos iguales; La sección áurea y la estrofoide, y Generación común de las tres cónicas; este último film, de realización reciente, era desconocido por la mayoría de los congresistas y fué unánimemente aplaudido y admirado, tanto por la perfección técnica de su realización como por el acierto y la belleza del guión, que con una habilísima ordenación de secuencias y hasta con el finísimo detalle de la regulación de velocidades del punto generador, llega casi a dar realidad material a la imagen idealizada de los puntos del infinito.

La característica de los films de Nicolet son su brevedad y su muda elocuencia. La simpática presencia del autor pudo explicarnos las vicisitudes de su larga experiencia (más de veinte años) en la génesis y confección de films de dibujos animados y las ideas básicas que le guían al producirlos. Según Nicolet, el film matemático para niños ha de tener por exclusiva misión el alumbramiento del feliz momento en que la intuición descubre una verdad matemática, a lo que contribuye eficazmente la sintaxis expresiva del movimiento y de la secuencia. Y como tales alumbramientos, los films son muy breves. La necesidad de afianzar estas intuiciones mediante el raciocinio lógico viene después, necesidad a la que el film no se contrapone sino que más bien coadyuva. Para la mentalidad infantil la lógica demuestra mientras la intuición persuade, complementándose ambas en lugar de oponerse. Pero no parece éste el lugar adecuado para insistir sobre los fundamentos psicopedagógicos del uso de los films según la concepción de Nicolet. Todo aquel lector curioso que quiera documentarse más ampliamente sobre ellos puede consultar los folletos publicados por el propio autor y en especial el titulado *Intuition mathématique et dessins animés* (Librairie Payot, Lausanne, 1942), y el más reciente que con el mismo título forma parte del libro *Le matériel pour l'ensei-*

Aspectos de la Sala durante una de las sesiones de proyección de films.

gnement des mathématiques, publicado por Delachaux Niestlé hace escasamente ocho meses.

Características algo distintas tienen los films de Fletcher destinados a niveles mucho más avanzados, y, por tanto, a alumnos de edad superior. Sus bellos films, de magnífica realización técnica, sobre la recta de Simpson, la cardiode y la cuerda vibrante, de duración notablemente mayor, y que también fueron proyectados, permiten apreciar la cantidad de propiedades que se pueden enunciar en corto tiempo, es decir, sin palabras, con la simple imagen a la que el movimiento imprime un verdadero lenguaje expresivo. Quienes hemos proyectado estos films ante la juventud hemos podido apreciar, además, cuánta mayor facilidad y rapidez de percepción de dicho lenguaje tienen los abiertos sentidos jóvenes que nuestro ya maduro y fatigado sistema receptivo. Las ideas de Fletcher sobre el film matemático y su realización han tenido, asimismo, cabida en un capítulo «Les problèmes du film mathematique» del citado libro *Le material pour l'enseignement de Mathématiques*, de Delachaux Niestlé, *que se reseña al final de este folleto*, cuya parte central está íntegramente dedicado a la técnica del film y su manejo didáctico.

También fueron proyectados los simpáticos ensayos efectuados en plan amateur por el profesor alemán Pauls, de Nagold, quien, con los elementos más simples: un tablero, unas ventosas, cordeles y tizas, y con la filmación directa de la acción suya o de sus discípulos ante el encerado, ha conseguido unos films muy expresivos sobre la generación y trazado de cónicas. Esta exhibición fué un gran aliento para los profesores de matemáticas aficionados al film, pues mostró cómo también pueden lograrse films de contenido didáctico utilizando la imagen humana directa, como en una película cualquiera, sin necesidad de pasar por el laborioso proceso de centenares de dibujos animados.

Finalmente, desfilaron por la pantalla algunos films sonoros de Jacquemard destinados a la enseñanza de escuelas técnicas francesas; uno, sobre la ecuación de la recta en Geometría analítica, algo lenta y reiterativa, y sobrada de palabras y aun de símbolos y letras; otra, sobre polígonos regulares, convexos y estrellados, de análogos defectos, y otra, mucho más acertada sobre geometría de movimientos espaciales en mecanismos de taller, en los que las ideas esquematizadoras obtenidas por superposición de dibujo e imágenes reales estaban eficazmente conseguidas.

La proyección de todos estos films dejó en el ánimo de todos la impresión de estar en los comienzos de una técnica docente de valor insospechado, llena de problemas y de dificultades, pero cuyos alcances para el bien de la enseñanza estamos aún lejos de prever.

CLASES EXPERIMENTALES

El tema de la Reunión-Exposición, cuyas notas dominantes fueron, según hemos dicho, la introducción de modelos dinámicos, la revelación del material multivalente (tanto mejor cuanto más sencillo) y la utilización de motivos extraídos de la propia vida, parecía exigir la puesta en práctica de los principios en que se fundan, mediante algunas clases modelo desarrolladas ante los propios congresistas.

Tales lecciones ante público numeroso adolecen de un grave y esencial inconveniente: el clima de espectacularidad que inevitablemente crean alrededor de ellas y que influye poderosamente no sólo en los niños, sino también en el propio profesor actuante.

El público suele formar juicio de la eficacia de una lección a través de los resultados inmediatos que pretende ver en ella, entendiendo por tales resultados los aciertos del alumnado en el diálogo y en la acción que la clase suscita; y suele considerarse defraudado si no anota buen número de tales aciertos en relación con el tema desarrollado. Pero las lecciones, aparte de los propósitos didácticos que pueda atribuírseles en relación con los programas, han de tener otros fines formativos o experimentales más trascendentes y remotos, los cuales suelen pasar desapercibidos del público (aun del espectador inteligente) si ignora la recóndita intención del maestro al desplegar su acción. E incluso a veces el mismo que siembra no conoce el verdadero valor de la semilla echada hasta no ver más tarde la planta germinada.

Todo ello crea una inevitable tensión que resta sinceridad y espontaneidad a las clases dadas ante público. Todos sabemos que en el mundo físico la observación influye en lo observado. ¿Cómo, pues, no ha de influir en el mundo psíquico, de reacciones tan sensibilizadas? Pero, aun contando con dichos inconvenientes, que una vez más se pusieron bien de relieve en las críticas y discusiones que siguieron a las lecciones desarrolladas, ¿qué otro medio podía haber para experimentar y comentar en vivo la eficacia de los principios didácticos propugnados al asignar a lo concreto el papel esencial que ha de tener en la educación matemática de la infancia? Esta interrogación justifica que la Comisión mantuviera el criterio de organizar dichas lecciones, que se desarrollaron en ambiente internacional, en atención al profesorado extranjero y al carácter de la reunión, y gracias a la amable colaboración de los Liceos francés e italiano de Madrid, los cuales facilitaron gentilmente su alumnado para las lecciones que los profesores Servais y Puig Adam desarrollaron en francés, y las que la profesora Emma Castelnuovo y el profesor Galli desarrollaron en italiano, mientras el profesor Gattegno realizaba su lección en castellano ante alumnos españoles.

La profesora Castelnuovo desarrolló su lección ante niños de primer curso del Liceo italiano, tomando por base dos simples experiencias efectuadas con rudimentario material: goma y cordel. La primera tuvo por objeto sugerir en los niños la constancia de la suma de los ángulos de un triángulo, valiéndose de uno isósceles variable, realizado mediante un trozo de goma de extremos sujetos a dos clavos situados a su vez en los extremos de una barrita de madera. Esta barrita formaba la base fija del triángulo mientras los lados se variaban a voluntad, tensando más o menos la goma por su punto medio. El diálogo con los niños, efectuado en la más encantadora cordialidad, tenía por objeto comentar los cambios observados hasta llegar a la adquisición de conciencia de la invariancia interesada. Instructivos los interrogantes que planteaba y las reacciones que promovía la intuición del caso límite (goma de longitud infinita), prácticamente irrealizable.

La segunda experiencia fué realizada con un sencillo trozo de cuerda de extremos anudados, tendido entre cuatro dedos formando los vértices de un rectángulo variable de perímetro constante (la longitud de la cuerda). Tenía por objeto hacer adquirir a los niños la conciencia de la variación del área pese a dicha constancia del perímetro. Esta variación, que tan natural nos parece a los adultos, constituye todavía una sorpresa a estas edades, por lo que tardan en admitirla; y el diálogo, bien conducido, pone de manifiesto las dificultades que surgen en la mente del niño al tener que auto-rectificar una intuición errónea nacida de una falsa vinculación entre perímetro y área. En el provechoso efecto de auto-rectificaciones de esta índole radicaba en tal caso la intencionalidad didáctica de la lección, de trascendencia mucho más formativa que informativa.

El profesor uruguayo Galli, de origen italiano, desarrolló análogamente, ante alumnos italianos de análogo nivel, una lección doble, cuya primera parte trató de relaciones angulares obtenidas mediante un modelo tan concreto y corriente como la esfera de un reloj y cuya segunda parte constituyó un ejercicio lógico interesante inspirado en el clásico problema de los prisioneros. Tres niños tocados con birretes cónicos de colores vivos, de un lote conocido de cinco (tres amarillos y dos rojos), fueron sentados en fila, de tal modo que cada uno sólo podía ver el color de los birretes que tenía delante, desconociendo el suyo propio y el de los de atrás. Se preguntaba sucesivamente al último, al segundo y al primero, si podían acertar el color de su propio birrete fundándose en los que veían delante y en las contestaciones de los de atrás. El ejercicio de implicaciones lógicas que tales respuestas exigen, y el más complejo que de ellas se deriva al proponer analizar todas las ordenaciones posibles y las respuestas inherentes, es de indudable valor formativo, y en este sentido la lección tuvo gran interés, que no es incompatible con el aspecto más o menos «divertido» que tal clase presenta.

El profesor Gattegno dió, ante alumnos españoles de enseñanza primaria, una de sus experimentadas lecciones con el material multivalente por excelencia: las regletas coloreadas de Cuisenaire. Parte de la lección hubo de destinarse a que los niños se familiarizaran con el material, con una actividad completamente libre al principio, y paulatinamente conducida luego hasta llegar a establecer los primeros conceptos sobre fracciones y cálculos sencillos con ellas. Por ser este material ya bastante conocido entre nuestro público docente y haber publicado el propio Gattegno varias obritas en castellano sobre su manejo y modo de enfocar con él la iniciación en los distintos capítulos de la Aritmética, nos remitimos a esta bibliografía para dar idea de la forma en que dicha lección se desarrolló (*).

Nos permitimos señalar, sin embargo, como nota característica de la singularidad del método, la puesta en juego del concepto de «razón» (entre regletas) como noción primaria, en vez de la de «operador» (a efectuar con la unidad) como es corriente en la enseñanza tradicional.

El profesor Servais dió a alumnos de los cursos superiores del Liceo francés, una lección de iniciación a la afinidad, partiendo, como motivación inicial concreta, de las relaciones geométricas entre una ventana y su sombra. La propuesta inicial sobre la forma de la sombra del contorno rectangular de la ventana y la incierta intuición que de ella manifestaban al principio los alumnos (no daba el sol en la sala en que la experiencia didáctica se realizaba) abrió largo diálogo y discusión con los alumnos, quienes fueron invitados a contraponer sus ideas y rectificarse mutuamente, a construir materialmente paralelogramos deformables sugeridores de la relación de afinidad que se quería inculcar. La interesante lección, que parecía desenvolverse al principio a ritmo lento, según valoración de los impacientes, terminó alcanzando rápidamente metas insospechadas, como la de las propiedades invariantes en la transformación y en particular la de la razón de áreas de la que resulta fácilmente la constancia del área de todo paralelogramo circunscrito a una elipse, es decir, uno de los teoremas de Apolonio. Pudieron convencerse los que acusan de lentitud a los métodos activos eurísticos, de lo fecunda que resulta a la postre la lentitud inicial derivada de la auténtica lucha del educando con la idea, hasta la conquista de la misma por su propio esfuerzo.

Finalmente, el autor de esta crónica desarrolló su lección ante un grupo mixto de alumnos de primero y segundo curso del Liceo francés (sixième et cinquième), eligiendo como terreno de ensayo la iniciación a relaciones de congruencia y al álgebra anular que en ellas resulta y como base concreta un corro de nueve alumnos de primero (respaldado por otro de segundo en funciones de control) entre los que se procedió a distribuir mentalmente *todos los números* siguiendo el orden circular del corro.

Pero antes quise explorar en ellos la noción de multiplicidad escribiendo en el encerado la sucesión 18, 27, 36, ..., para que fuera continuada lo mismo por la derecha (como hicieron fácilmente) que por la izquierda, don-

(*) G. Cuisenaire y C. Gattegno: *Números en color*, publicado por el Ministerio de Educación Nacional. Madrid, 1956.—C. Gattegno: *L'Arithmétique avec les nombres en couleur*. Nueve manuales (Delachaux-Niestlé). Los tres primeros traducidos ya al castellano y los otros en vías de traducción.

de surgieron las primeras dificultades y la primera diversidad de opiniones (*).

Volviendo al juego del corro, una sucesión de números bien escalonada, con la pregunta ¿a quién corresponde el número ...?, basta para que los niños se den cuenta, por ejemplo, de que al tercero del corro le corresponde, asimismo, el 30, el 300, el 3000, etc., y análogamente para los demás. Descubierto este hecho, ellos mismos desplazaron el origen, sumando los valores absolutos al enunciarles números de dos o más cifras significativas. No había más que provocar luego la toma de conciencia de lo que hacían para llegar al resto y a la divisibilidad módulo nueve.

Pero como no era éste precisamente mi objeto, sino más bien explorar al máximo el juego de reacciones de los pequeños, renové el interés de ellos planteando una situación aparentemente nueva: la adivinación de una cifra tachada en el resultado de restar de un número cualquiera la suma de sus cifras. El truco fué rápidamente descubierto por los pequeños y, a la indicación de que con tal descubrimiento podían retirarse ya los satisfechos, alguno planteó tímidamente el deseo de saber el «por qué», que prendió también en los demás, y ya nadie se marchó.

Entonces me pareció que podía ofrecer algún interés una muestra ilustrativa de razonamiento intuitivo apoyado en material *concreto imaginado*, salto intermedio entre el modelo real y la abstracción posterior. Imaginando materializadas las unidades de los diversos órdenes mediante cerillas, paquetes (decenas), cajitas (centenas)... y extrayendo una unidad

(*) Después de un muy sensato cambio de pareceres entre ellos, convinieron los propios niños en que 9 era múltiplo de 9, como producto de 9 × 1. En cambio, el cero no podía serlo en modo alguno. Sin embargo, convenían en que la diferencia de dos múltiplos de 9 era múltiplo de 9. «Toujours», afirmaban. «¿Toujours?», preguntaba. «Et alors ¿27 — 27?» Perplejidad. Había que modificar el enunciado de la propiedad... Una sugerencia: «Y si, aun convencidos de que no lo *es*, *llamáramos* también al **0** *múltiplo* de 9, ¿obtendríamos con ello alguna ventaja?» Sólo esperaba a que me dijeran que no haría ya falta modificar el enunciado de la propiedad, pero un pequeño me dijo algo más sorprendente para su edad: «La propriété serait plus générale.» Como comenté después ante los circunstantes, estas atrevidas preguntas no tenían tanto por objeto explorar hasta dónde llegaban aquellos niños en sus nociones sobre lo particular y lo general, sino también poner de manifiesto la inconsecuencia de que podrían acusarnos nuestros alumnos de Aritmética elemental al llamar al cero múltiplo de todos los números, considerándolo como el menor de ellos, al tiempo que nos esforzamos en buscar el *mínimo común múltiplo* de varios de ellos.

de cada decena, centena, etc., llegan fácilmente a formar imaginativamente dos montones, uno divisible por nueve y otro pequeñito formado por la suma de las cifras. El montón múltiple de nueve es precisamente la diferencia de la que yo adivinaba (en virtud de la misma regla de divisibilidad) la cifra tachada. Fué un final de carácter un tanto explicativo, en contraste con el desarrollo más eurístico del resto de la lección; pero, repito, dado con la finalidad demostrativa indicada: la construcción de modelos intuitivos en la propia imaginación del niño (*).

(*) Espero sabrá perdonárseme la mayor extensión dedicada a mi propia lección, debido al hecho de haberla vivido más intensamente y de tener aún grabadas en la memoria casi todas sus incidencias. ¡Una vez más aprendía en ella tanto de los niños!

PARTE SEGUNDA

EXPOSICION DE MATERIAL DIDACTICO

EXPOSICION DE MATERIAL DIDACTICO

Como hemos dicho anteriormente, la Exposición se instaló en las galerías de la planta principal del Instituto de San Isidro que circundan su hermoso patio. Más de cien metros lineales de tablero (de unos 70 cm. de ancho) ocupaba el material expuesto, que se distribuía por nacionalidades del siguiente modo: la mitad ocupada por el material español; la otra mitad por el extranjero, y la mitad de éste era material belga. Las aportaciones de Francia, Inglaterra, Italia, Alemania, Suiza, Uruguay y Austria ocupaban el espacio restante.

Como acertadamente señala el profesor Harris en *Mathematics Teaching*, los caracteres dominantes en el material expuesto pueden resumirse en estos términos: *movimiento y multivalencia*, caracteres que se ajustan perfectamente a las exigencias de creación y actividad de la enseñanza moderna.

En la imposibilidad de describir minuciosamente cada uno de los modelos expuestos, de los que damos luego lista completa acompañada de fotografías de casi todos ellos, nos limitaremos a indicar a continuación lo más saliente y diferenciado de cada país.

MATERIAL EXTRANJERO

Alemania.—Estuvo representada por el profesor Pauls de Nagold, quien exhibió un interesante modelo de esfera desmontable realizada en alambre, materializando los círculos máximos y menores más importantes para la ilustración de las aplicaciones de la Geometría y Trigonometría esférica a la Geografía, Cosmografía y Astronomía (meridianos, paralelos, ecuador, eclíptica, etc.). Tanto la primorosa realización como su facilidad de montaje valoran la excelente calidad de este modelo (figs. 1 y 2).

En otro orden de ideas, el profesor Pauls mostró el excelente partido que obtiene de las ventosas de goma para la fijación de puntos y sujeción a ellos de cuerdas, en el trazado de cónicas y otras curvas (figs. 3 y 4).

Suiza presentó unos discos de cálculo, bien concebidos y pulcramente ejecutados, que sustituyen con ventaja las reglas de cálculo al uso en las oficinas técnicas. También fueron objeto de exhibición, presentadas y manipuladas por el profesor Schilt, las conocidas y diminutas máquinas de calcular «Curta», que son un verdadero prodigio de mecánica de precisión, en la que los suizos son tradicionalmente maestros (figs. 6 y 7).

Uruguay nos trajo en la dinámica persona del profesor Galli la simpática aportación que podía tener cabida en su equipaje personal; aportación que giró especialmente en torno a las notables experiencias con las que este benemérito inspector estimula la labor de los profesores de su país. De este material hizo uso en su interesante clase sobre implicaciones lógicas con el juego de los tres birretes descritos en la primera parte (fig. 8).

Italia presentó dos modelos de geoespacios, uno en alambre (fig. 10), y otro en plástico (figs. 9 y 12), de primorosa ejecución. Estos instrumentos didácticos son cubos en cuyo interior pueden tenderse gomas o cuerdas para realizar con ellas figuras varias del espacio e intuir así mejor sus propiedades.

En el geoespacio en plástico los puntos de amarre son orificios practicados en las paredes laterales y ganchos en la base; en el modelo en alambre son sistemas de ganchos que pueden deslizarse a lo largo de los barrotes que forman cada cara. Unos y otros constituyen (como los modelos del autor de esta crónica) generalizaciones de los geoplanos del profesor Gattegno.

La aportación gráfica del profesor Campedelli (fig. 11) relativa a sus numerosos modelos de curvas y superficies nos informó de su acertada téc-

nica (alambre e hilo para curvas y superficies regladas, escayola para las demás) y del nivel universitario a que se dirige.

Interesantes las múltiples aplicaciones didácticas que efectúa el profesor Pescarini, de Rávena, con una carta náutica (fig. 11) como base concreta de atracción del interés de sus alumnos de orillas del Adriático.

La clepsidra bicónica que presentó la profesora Castelnuovo constituyó un ejemplo de modelo extraído de la vida (fig. 11).

Francia, dignamente representada por el profesor Biguenet, exhibió los múltiples sistemas articulados de los que este profesor es autor, para materializar e ilustrar las principales transformaciones geométricas planas: traslaciones, giros, semejanzas, homotecias, inversiones, polaridad (figuras 13 a 18). Ingeniosos son los dispositivos que materializan el producto de dos transformaciones, como el de dos homotecias que es una tercera homotecia, materializada por un tercer pantógrafo en un plano vertical (fig. 17)). La idea de *grupo* es, pues, asimismo, abordada y materializada con estas realizaciones concretas.

Dignas de notarse son también, aparte de los numerosos y pulcros modelos en madera ilustrativos de secciones planas de cuerpos varios de revolución (fig. 21), las alusivas a los productos de movimientos en el espacio que se realizan en las máquinas útiles industriales y de las que se exhibieron dos reducidos modelos (fig. 22).

Austria presentó una variante interesante (Staber) del geoplano de Gattegno, variante cuya principal idea consiste en hacer posible el desplazamiento continuo de los ganchos de uno de sus bordes para introducir la continuidad en la variación de las figuras del geoplano (fig. 23).

Inglaterra.—Además del geoplano móvil del profesor Gattegno (figuras 25 y 26), fueron ricas de contenido y ejemplares de calidad las dos colecciones enviadas por el profesor Pesket, cuyos reducidos modelos (figuras 27 a 30) son muestra elocuente de lo mucho y bueno que puede hacerse con los elementos constructivos más simples. Sin que nuestros modelos se parecieran, había una indiscutible resonancia de intencionalidad entre los medios utilizados por este notable profesor y los recursos empleados en los modelos construídos en el Instituto de San Isidro. De entre los abundantes ejemplares enviados por Pesket nos llamaron poderosamente la atención: la esferilla transparente (del tamaño de una bombilla) con luz central, ilustradora de las proyecciones geográficas; la graciosa «persiana» confeccionada con canutillos de colores para hacer visible una síntesis armónica (gracioso contraste entre el primitivismo de medios y la complejidad de idea); sin olvidar los modelos dinámicos (catapulta) ni los estáticos, de difícil y pulcra realización (complejos poliedros derivados de los regulares). La notable aportación de este profesor, en la que se unen las dos excelentes notas: modestia de medios y calidad de ideas y de ejecución, constituyó una admirable y anticipada ilustración de cuanto nos ha dicho después en letras de molde en el artículo «Méthodes de fabrication de modèles et matériaux nécessaires» de la citada obra *Les modèles pour l'enseignement des Mathématiques.*

Bélgica.—Merece especial mención la abundante y notable aportación (figuras 31 a 46) de la simpática Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas, cuya ayuda generosa en las tareas de la Reunión hemos comentado ya. Tanto en los modelos estáticos como en los dinámicos, Bélgica se ha mostrado una vez más maestra de pulcritud y ejecución. Sus profesores y alumnos hicieron gala, en los numerosos modelos presentados, del dominio de todos los materiales (desde la cartulina al celofán, de la madera al alambre y plastilina) y de todas las técnicas (doblado, soldadura, articulación, deslizamiento).

De esta suerte pudieron presentar desde los bellos poliedros semirregulares de Mlle. Lucienne Carleer (figs. 46 y 47) hasta las finas realizaciones en piezas de alambre articuladas, del profesor Bosteels (figs. 33 y 35), que, como las de Biguenet, ilustran las transformaciones planas: traslaciones y sus productos, giros, semejanzas y sus productos, homotecias y sus productos, simetrías, polaridad, inversión, etc.

Cúmpleme agradecer aquí al profesor Bosteels y a todo el equipo belga la fineza que tuvieron con el Instituto de San Isidro haciendo donación de dichos modelos dinámicos y de algunos otros estáticos, como los de las celdas de abejas (fig. 34).

Notables por la ingeniosidad de la idea y siempre por su perfecta realización, fueron varios de los modelos presentados por el profesor Servais (figs. 36 a 42), especialmente los dinámicos relativos a generación y propiedades de cónicas y cuádricas (figs. 36 a 40), así como los circuitos de conmutación ilustradores de propiedades lógicas (fig. 42), que marca-

ron también una simpática resonancia con las realizaciones efectuadas en San Isidro por el que suscribe y sus alumnos del Curso preuniversitario 1956-57, como aplicación de las leyes del álgebra de Boole, utilizando conmutadores corrientes del comercio.

No queremos dejar de citar, asimismo, el uso de varillas ranuradas y articuladas para la construcción y clasificación de cuadriláteros (fig. 44) (análogas a las que nuestro compatriota Juan Fernández usa en el Instituto Laboral de Ayamonte). Y, finalmente, nos interesaron los abundantes modelitos de madera para ejercitación de las proyecciones diédricas, colección presentada por una Escuela de modalidad profesional (fig. 45).

Con ser tan variada y hermosa la muestra de la modelística belga traída a la Exposición, no constituía, sin embargo, sino una pequeña parte de lo que en aquel simpático país se ha pensado y realizado en materia de modelos didácticos matemáticos. Quien quiera tener una más completa noción de ello puede consultar el luminoso fascículo *Documentation*, número 5, del Ministerio de Instrucción Pública belga, titulado «Les modèles dans l'enseignement Mathématique».

Cabalgando entre el stand belga y el inglés se presentó el material de los «Números en color», por ser su autor, Georges Cuisenaire, profesor belga, y ser el material presentado de fabricación inglesa, como asimismo de esta nacionalidad el profesor Gattegno, que tanto se ha desvelado en propagarlo y en mejorar la técnica de su manejo. Este material (fig. 48), que ha revolucionado totalmente la enseñanza de la Aritmética elemental, tanto por su eficacia didáctica como por su profundo sentido moderno en relación con la dinámica estructural que sugiere, bastaría por sí sólo para dar relieve al país de origen, donde se ensayó durante veinte años hasta ponerlo en manos de los niños del mundo entero. España ha acogido con interés enorme este material, que tiene ya gran número de adeptos entre el magisterio español y el profesorado de escuelas normales. Su descripción y método de manejo ha sido objeto de las obritas citadas al hablar de la lección del profesor Gattegno. No insistimos, pues, nuevamente en ello.

RELACION DETALLADA DE LOS MODELOS EXTRANJEROS (*)

ALEMANIA.—Profesor PAULS

1. Modelo para el estudio de la Geometría de la esfera, Trigonometría esférica y Cosmografía. (Fabricado con aros y varillas metálicas por Fa. Georg. Scheck; Esslingen.—Barezplatz) (figs. 1 y 2).
2. Dispositivo para el trazado de cónicas en la pizarra (barras metálicas con ventosas y cuerdas) (fig. 3).
3. Dispositivo metálico circular con ventosas y cuerdas para el trazado de la evolvente de una circunferencia (fig. 4).
4. Modelo sólido en metal para el estudio de triedros suplementarios (polares) (fig. 5).

SUIZA

1. Disco de cálculo. Sustituye con ventaja a la regla de cálculo (fig. 6).
2. Modelos de máquinas de calcular «Curta» (figs. 6 y 7).

URUGUAY.—Profesor GALLI

1. Juego de lógica con los esquemas matemáticos correspondientes (figura 8).
2. Disco con clavos para ilustrar problemas sobre móviles y en particular sobre relojes.

ITALIA.—Profesores CASTELNUOVO, CAMPEDELLI, PESCARINI.

1. Geoespacio (geoestereoscopio) construído en material plástico y gomas (Pescarini) (figs. 9 y 12).
2. Uso de la carta náutica (Pescarini) (fig. 11).
3. Geoespacio de varillas metálicas (fig. 10).

(*) Agradecemos esta relación al profesor Pascual Ibarra.

4. Reloj de arena para ilustración de las secciones cónicas (E. Castelnuovo) (fig. 11).
5. Fotografías de modelos de superficies algebraicas (L. Campedelli) (figura 11).

FRANCIA.—Profesor BIGUENET

1. Inversor de Paucellier, construído con piezas de «mecano» (fig. 14).
2. Polar de un punto respecto de un círculo (varillas metálicas articuladas) (fig. 15).
3. Homotecia (piezas de «mecano») (fig. 16).
4. Arco capaz de un ángulo (modelo construído en material plástico ranurado con guías metálicas) (fig. 19).
5. Hipocicloide rectilínea: $r = \frac{R}{2}$ (dos plaquetas de plástico con guías ranuradas).
6. Caracol de Pascal (cartulina y plástico con guías ranuradas) (fig. 20).
7. Producto de dos homotecias (cartulina y piezas de «mecano»: tres pantógrafos, uno de ellos en plano vertical) (fig. 17).
8. Modelo de hélice cilíndrica (cilindro de madera al que se arrolla una cartulina) (fig. 13).
9. Semejanza y rotación (dos triángulos en cartulina y piezas de «mecano») (fig. 18).
10. Secciones planas de cilindro, cono y toro. Descomposición del ortoedro en pirámides. «Gorro chino» (tres conos) (fig. 21).
11. Fresadora universal como modelo de producto de rotación y traslación (fig. 22).
12. Cabeza de fresadora y producto de dos rotaciones (fig. 22).

AUSTRIA

1. Modelo dinámico de hipocicloide rectilínea ($r = \frac{R}{2}$) e hipocicloide alargada (elipse). Construído en plástico con guías ranuradas.
2. Modelos en cartulina, varillas metálicas y cuerdas para el estudio de ángulos diedros y triedros (fig. 24).
3. Modelo para el estudio de equivalencia de triángulos, trapecios y paralelogramos (fig. 23).

INGLATERRA.—Profesores PESKET y GATTEGNO

1. Geoplanos fijos.
2. Geoplano móvil (figs. 25 y 26).
3. Poliedros regulares, estrellados y derivados, construídos en cartulina, material plástico y maderas de basa (varios modelos) (fig. 27).
4. Descomposición del cubo en cuatro pirámides de vértice en el centro (cartulina) (fig. 28).
5. Sólido, intersección de dos cilindros iguales de ejes perpendiculares (cartón y cartulina) (fig. 28).
6. Idem de tres cilindros (cartón y cartulina) (fig. 28).
7. Rodador para el trazado de sinusoides.
8. Sección plana de un cubo realizada con material plástico y sus proyecciones ortogonales (fig. 29).
9. Esfera terrestre con foco luminoso en el centro para proyección de meridianos y paralelos (mapas) (fig. 30).
10. Modelo en cartulina para ilustrar los conceptos de longitud y latitud geográficas.
11. Síntesis de ondas sinusoidales (canutillos de cartón coloreado) (fig. 30).
12. Angulos en la circunferencia (cartulina y gomas) (fig. 30).
13. Cuadriláteros articulados con varillas y gomas (fig. 30).
14. Catapulta para probar la conservación de la cantidad de movimiento (figura 30).

BELGICA.—Profesores SERVAIS, DELMOTTE, etc.

1. Diversos materiales: varillas, plasticina, piezas de «mecano», soldador, etc., para ilustrar las construcciones (fig. 31).
2. Diferentes modelos de geoplanos.
3. Poliedros semirregulares obtenidos por truncadura (plástico y cartulina) (fig. 32).
4. Tetraedro y sus elementos (agujas de tricotar, gomas e hilos) (figura 32).
5. Modelos dinámicos: inversión, polaridad (fig. 33).
6. Modelo dinámico de varillas soldadas con lugar geométrico del punto medio de un segmento cuyos extremos se deslizan sobre dos ejes perpendiculares (fig. 33).

7. Generación proyectiva de una cónica obtenida por proyección de un sistema de generatrices de una serie reglada de segundo orden (varillas soldadas) (fig. 33).
8. Equivalencia de paralelepípedos, en plástico (fig. 34).
9. Equivalencia de paralelepípedos, en varillas soldadas (fig. 34).
10. Descomposición de ortoedros y pirámides, en cartulina (fig. 34).
11. Problema de las abejas, en cartulina (fig. 34).
12. Modelo en plástico para ilustrar el cubo de $(a + b)$ y sección plana del cubo que da un hexágono regular.
13. Teorema de las tres perpendiculares en varillas soldadas.
14. Modelo dinámico sobre proyectividad y perspectividad (varillas metálicas sobre tablero de madera ranurada).
15. Sistemas articulados para realizar traslaciones, semejanzas, rotaciones y simetrías. Combinaciones de estos sistemas para el producto de transformaciones: traslación por traslación, homotecia por homotecia y homotecia por traslación (alambres sobre cartulinas con el dibujo) (fig. 35).
16. Generación de la elipse por dos haces proyectivos (varillas sobre tablero de madera) (fig. 36).
17. Generación puntual y tangencial de la hipérbola (fig. 37).
18. Modelo de cilindro transformable en hiperboloide (las generatrices son cuerdas) (figs. 38 y 39).
19. Modelo de cilindro transformable en hiperboloide (las generatrices son gomas).
20. Series semejantes (dos piezas de «mecano» unidas por gomas) (figura 39).
21. Secciones cónicas obtenidas en la superficie libre del agua en un embudo (fig. 40).
22. Generación mecánica, mediante poleas y agujas de tricotar, de circunferencias e hipérbolas equiláteras (fig. 40).
23. Sistema mecánico sobre rodadura de elipses (dos bielas cruzadas) (figura 40).
24. Parábola colgada y su transformación afín (fig. 40).
25. Círculos trigonométricos (dos en madera y uno en cartulina) (fig. 41).
26. Utilización de varillas coloreadas y plasticina en la construcción de modelos) (fig. 31).

27. Realización de las relaciones lógicas mediante circuitos eléctricos con conmutadores (fig. 42).
28. Descomposición del prisma triangular en tres tetraedros (acetato de celulosa) (fig. 43).
29. Utilización de la lámina de celulosa (acetato) en Geometría del espacio, proyección diédrica y abatimientos.
30. Tablero de madera con dos guías paralelas y varillas ranuradas para construcción dinámica de cuadriláteros y triángulos (fig. 44).
31. Ejercicios de lectura de planos mediante piezas de madera (fig. 45).
32. Pavimentación en mosaico por polígonos regulares (fig. 46).
33. Poliedros semirregulares (plástico y cartulina) (fig. 47).
34. Material Cuisenaire (fig. 48).

MATERIAL ESPAÑOL

Y aquí llegamos al punto más comprometido de nuestra labor de cronistas, por lo que con verdadero alivio cederíamos la pluma a cualquier compañero compasivo. Y no es porque la participación española desmereciera de la reseñada. Nada de eso. Es que...; pero dejemos primero que hablen los extranjeros por nosotros y luego añadiremos los comentarios que hagan falta.

Extractamos del *Bulletin de l'Association de Professeurs de Mathématiques* cuanto dice sobre el material español:

«Particulièrement abondante et instructive était la participation espagnole. Nous ne pouvons que citer trop vite et avec des lacunes les dispositifs d'illustrations des variations de fonctions trigonométriques, et pour résoudre les systèmes du premier degré, de M. Diéguez (Galicie), le matériel si simple pour une initiation a la similitude des triangles de M. Ibarra. Et surtout les modèles et les récits d'expériences si variés et si riches du professeur Puig Adam, depuis le spectaculaire icosaèdre géant suspendu au-dessus de la cour d'honneur de l'Institut par de grands élèves à qui furent posés pour cela des problèmes de statique et de topologie, jusqu'aux exemples d'utilisation multivalente de matériels déjà connus: bâtonnets Cuisenaire, par exemple, ou tout simplement du matériel offert par tous les objets de la vie courante: parapluie, lutrin, espagnolette, à

qui sait y voir les structures mathématiques sous-jacentes. D'une telle visite on revient convaincu que l'utilisation d'un matériel n'est pas un bricolage, mais un appel a l'activité mentale de l'enfant...» (*T. Vervaecke.*)

Transcribimos análogamente de la revista *Mathematics Teaching*:

«... In this process the role of the mathematical model and other physical material is fundamental. A mathematician of abstract turn of mind might regard it merely as a collection of simple concrete illustrations, suitable merely to give a momentary assistance on a point that is imperfectly understood, but seen in proper perspective this material is far more... (y sigue glosando el final de la conferencia inaugural). The old-fashioned showcase model intended only for passive contemplation must give place to multivalent material wich can be manipulated by de pupils and wich stimulates them to make models themselves to pass on their own abstract ideas to their fellows. Professor Puig Adam practises what he preaches. The teaching material which he displayed at the exhibition in the course of the week presented his ideas in a form which, being independent of language, was all the more forceful and impressive to an international audience, and his adress set de mood of the conference.»

«The final summing up on Saturday was honoured by the presence of the Director General of Secondary Education and took place in the music room of the Instituto Ramiro de Maeztu. This Institute is a most impressive educational unit combining all levels of instruction up to a Technical College. The furnishings and decor are modern and in excellent taste, and the facilities are lavish, including a delightful mathematites room with mural painting illustrating the history of the subject and a large collection of models. We cannot show anything quite the same in England, and it will be interesting to see if the present trend to large educational units produces anything like it.» (T. J. F.)

Y otro comentarista de la misma revista añade:

«The host, Spain, made extremely good use of common materials; press studs, empty penicillin bottles and metal bottle tops, the latter for explaining the game Cha-cha (Solitaire) and the theory of groups. Details of many of these exhibits are in the book *Didáctica matemática eurística* by Puig Adam reviewed on page 51. Sets of coloured plastic slotted rods for the rapid construction of dynamic and static models and a compass that drew ellipses originated by Juan Fernández y Fernández deserve special mention. The use of the Cuisenaire rods and Geo-boards was evident, the notions of the Geo-boards being extended to three dimensions-Geo-cubes. The Spanish contribution left me examining everything, from door knobs to mantillas, for their mathematical possibilities.»

«The situation, an upper cloister around a square courtyard, suggested that was no ordinary exhibition of aids for the teaching of mathematics, especially as the most prominent exhibit was a huge icosahedron, probably the largest in the world! This mighty icosahedron, suspended above the centre of the courtyard, was the work of a group of pupils from the San Isidro and was constructed by the aid of a scale model of the courtyard and its surroundings, which was also shown. The icosahedron symbolised the grand quality of the exhibition and the great camaraderie of the exhibitors.»

«It was very pleasing to find that this international exhibition wich dealt, in the main, with visual material, had a section for the blind. How, without sight, they master all branches of mathematics using their own especialised material is a wonderful achievement and an inspiration to us all.» (*I. Harris.*)

También hace alusión al material que expuso nuestro Colegio Nacional de Ciegos el profesor Gattegno al contestar a una de las preguntas que la revista *Servicio* le formuló a raíz de la Exposición. La pregunta fué «¿Cuál es su opinión sobre la Exposición Internacional en general y sobre la sección que presenta España en especial?» Y contestó en estos términos, que transcribimos de dicha revista (4 de mayo de 1957):

«Mi opinión es de poco valor; pero es de valor para el público que todos los que la han visitado y la han estudiado, sean profesionales o estudiantes, hallaron en ella una tal cantidad de ideas nuevas y sugestivas que pensaban pasarse todo el tiempo asimilando su contenido. Fué para muchos extranjeros una sorpresa feliz ver lo que los compañeros españoles habían ya realizado. La parte del profesor Puig Adam fué admirada por todos y muchos se llevan sus ideas y sus libros. Los Institutos Laborales han mostrado mucha valentía y su éxito es muy animoso. La Sección de los ciegos es también de sumo interés. Hay tanto que ver en la Sección española que me gustaría proponer que se llevara de jira por España.»

Y ahora permítaseme añadir en lo que sigue algunas palabras propias para subsanar algunos olvidos, que si son justificables para los de fuera

ante una limitación de espacio disponible, serían imperdonables en este lugar y para este cronista.

LA APORTACION DE LOS INSTITUTOS LABORALES

Aunque la aportación de los Institutos Laborales ha sido citada en bloque por Gattegno y aludida en modelos singulares por las revistas francesa e inglesa, yo necesito dar aquí el relieve que merece el esfuerzo realizado por los numerosos profesores de estos Institutos que respondieron gustosos a mi llamada, llenando con sus aportaciones una octava parte de la Exposición. Si, como era de prever, llamó principalmente la atención del profesorado extranjero el material dinámico y multivalente, que deja gran libertad de creación al niño y desarrolla su acción e iniciativa, no es menos cierto que entre el material no específicamente clasificable en tal categoría aportaron los Institutos Laborales gran cantidad de trabajo e ingenio.

Destaca en este sentido la magnífica labor del profesor de Ribadavia: Manuel González Diéguez, que aun después ha seguido ideando y produciendo modelos. Entre los presentados a la Exposición llamaron poderosamente la atención (siendo muy comentadas y aun discutidas) las cajas y material para la enseñanza de las ecuaciones. Muy ingeniosos los tableros con dispositivos mecánicos para el trazado de haces de cónicas, y el círculo goniométrico demostrador de la variación de las funciones trigonométricas elementales. Ingeniosos los dispositivos eléctricos ideados por don Julián Delgado, del Instituto Laboral de Amurrio, para marcar automáticamente los aciertos en cuadros de respuestas relativas a relaciones matemáticas. Muy eficaces: el tablero cartesiano, de don Manuel Pérez Guajardo, del Instituto de Lebrija; las tablitas para relaciones algebraicas, de doña Encarnación Reverté, de Guía de Gran Canaria; la caja de progresiones con bolas, de don Juan Camps, de Benicarló; los círculos goniométricos, de doña María Pilar Pinedo, de Valle de Carranza; didácticamente elocuente en su primitiva tosquedad, el goniómetro, de don Juan Bel, de Amposta, y muy estimables las restantes aportaciones: de don Manuel Castro Rodrigo, que ha seguido ampliando luego la colección de sus magníficos modelos de poliedros, realizados en alambres soldados, hasta constituir una bella colección; las de don Ramón Diz, de Villagarcía; de don Eduardo Gutiérrez Nebot, de don Horacio Gutiérrez Rivero y de don Diego Manzanera; y dando, finalmente, en el clavo de la sencillez y multivalencia don Juan Fernández Fernández, con sus vistosas varillas ranuradas de plástico y sus redes cuadriculadas de motivos impresos que tan variada actividad puede sugerir a un niño con unas tijeras en la mano, así como el sencillo material de agujas, pinzas y trozos de goma para la construcción de figuras espaciales, presentado, entre otros, por don Vicente Guidotti, de Barbastro, que tanto recuerda al material similar presentado por los belgas. Y no olvidemos, finalmente, la entusiasta aportación del profesor Yagüez, de Peñaranda de Bracamonte, con su primer ensayo de filmina «sobre semejanza de triángulos».

He aquí resumida en pocas palabras la magnífica contribución de los Institutos Laborales al certamen, de la que damos a continuación detalle inventariado y suficiente ilustración gráfica. Para todos ellos (incluso los que pueda haber omitido por involuntario olvido) mi más cariñoso aliento y gratitud.

Relación del material presentado por los Institutos Laborales

Profesor: Don Manuel González Diéguez (Ribadavia) (figs. 51 y 52).

- Tablero para el trazado de parábolas.
- Tablero elipsógrafo.
- Tablero hiperbológrafo.
- Un modelo de arco capaz.
- Rombo articulado. Triángulos metálicos deformables.
- Cuadro eléctrico.
- Tabla transparente de funciones goniométricas.

Profesor: Don Julián Delgado Serrano (Amurrio) (figs. 53, 54 y 55).

- Dos tablas de control eléctrico de soluciones.
- Geoplano y banda para la medición de la circunferencia.
- Modelo para ilustrar abatimientos y simetría geométrica.
- Caja con sectores coloreados para ilustrar las propiedades de los ángulos inscritos.

Profesor: Don Juan Fernández Fernández (Ayamonte) (fig. 54).

- Regletas con guía y caja de palomillas.
- Elipsógrafo.
- Hojas de papel impreso con redes cuadriculadas de puntos.

Profesor: Don Vicente Guidotti (Barbastro) (fig. 58).

- Juego de tablas y tablero cuadriculados para ilustrar propiedades de operaciones.
- Alfileres, pinzas y base de corcho para construcciones de geometría del espacio.
- Círculo goniométrico y triángulos que ilustran la propiedad de las funciones goniométricas.
- Modelo sobre paralelas y secante.
- Abaco para la obtención de medias geométricas.
- Juego de engranajes para ilustrar relaciones de proporcionalidad.

Profesor: Doña María del Pilar Pinedo (Valle de Carranza) (fig. 53).

- Tabla con dos círculos goniométricos y otros dos accesorios.

Profesor: Don Juan Camps (Benicarló).

- Una caja y tablero para la formación de progresiones variadas con bolas.

Profesor: Doña Encarnación Reverté Roig (Guía de Gran Canaria).

- Tablitas y juego de «puzzle» para ilustrar relaciones algebraicas.

Profesor: Don Manuel Pérez Guajardo (Lebrija) (figs. 56 y 57).

- Tablero goniométrico.
- Tablero cartesiano.

Profesor: Don Pedro Manuel Castro Rodrigo (Alcira) (fig. 56).

- Omnipoliedro en alambre soldado.

Profesor: Don Ramón Diz (Villagarcía de Arosa) (fig. 57).

- Modelo para ilustrar la suma de los ángulos de un triángulo.
- Cubo de una suma.
- Regletas para ilustrar la noción de mínimo común múltiplo.

Profesor: Don Eduardo Gutiérrez Nebot (Alfaro) (fig. 57).

- Modelo de arco capaz.

Profesor: Don Horacio Gutiérrez Rivero (Luanco) (fig. 59).

- Lados y apotemas de polígonos regulares.

Profesor: DON DIEGO MANZANERA MORANTE (Trujillo) (fig. 59).
Modelos para ilustrar la obtención de áreas de figuras planas.

Profesor: DON JUAN BEL GUASCH (Amposta) (fig. 53).
Goniómetro para Agrimensura.

Profesor: DOÑA CARMEN HERNÁNDEZ BAYÓN (Peñaranda de Bracamonte) (fig. 59).
Discos, anillo y regla para trazar curvas cicloides.

LA APORTACION DE LOS INSTITUTOS NACIONALES

En menor número, aunque en mayor extensión (por la abundante aportación del Instituto de San Isidro, cuyos modelos ocupaban una cuarta parte de la Exposición), concurrieron los Institutos nacionales: *Ramiro de Maeztu* (profesores García Rúa y Royo), *Bilbao, femenino* (profesor Fernández de Trocóniz), *Valladolid* (profesor Pascual Ibarra), *Figueras* (profesor Casulleras) y *San Isidro* (profesores Puig Adam y Fernández Biarge).

El Instituto *Ramiro de Maeztu* presentó, junto a una colección de diapositivas descriptivas de la instalación de su Museo matemático y de sus pinturas murales sintetizadoras de la Historia de la Matemática, modelos varios (círculo trigonométrico, paralelepípedo deformable, figuras espaciales ilustrativas de teoremas diversos), entre los que se señalaba como una de las singularidades de su labor docente matemática la iniciación estadística (allí ensayada con anticipación a su aparición en los cuestionarios oficiales) de la que mostraron distintas interpretaciones concretas en forma de modelos muy sugestivos (fig. 61).

El profesor Fernández Trocóniz, de *Bilbao*, presentó varios modelos (gran esfera didáctica de reloj para enseñanza de relaciones angulares, tableros con figuras recortadas ilustrando relaciones de equivalencia, fichas alineables para ilustrar las transformaciones en determinantes, goniómetros y otros) (fig. 62 a 65), entre los que es de resaltar el modelo para ilustración de propiedades de Geometría del espacio, de perfecta ejecución y en el que un sistema de orificios y ganchos en tres placas de plástico transparente y un conjunto de piezas supletorias, permiten materializar la mayor parte de las figuras y cuerpos que constituyen el contenido de los cursos corrientes de Geometría del espacio.

El profesor Pascual Ibarra, de *Valladolid*, contribuyó aportando el sencillo material por él ideado para la iniciación al estudio de la semejanza de triángulos, consistente (fig. 66) en varios «puzzles» procedentes de descomponer un mismo triángulo escaleno en 4, 9 y 16 triángulos semejantes. Un sencillísimo juego de yuxtaposición y ensamble de piezas origina una actividad altamente sugeridora, de la que se desprenden gran número de enseñanzas. Este material entra de lleno dentro de las concepciones modernas.

El profesor Casulleras, de *Figueras*, envió un modelo con carácter mixto de geoplano y geoespacio, al parecer de limitada aplicación a las figuras piramidales o cónicas. La falta de explicación aneja y el hecho de haberse deteriorado las cuerdas del modelo en el viaje, impidieron reproducirlo fotográficamente en la forma en que sin duda su autor lo concibió. Sea como fuere, constituyó una contribución grata y estimable.

De la aportación del *Instituto de San Isidro* no me corresponde hablar. Quisiera insistir, sin embargo, en las ideas básicas que inspiraron la larga preparación de los modelos presentados y en cuya realización material me ha resultado tan valiosa la colaboración del maestro don Mariano Fernández Gómez, a quien expreso aquí nuevamente mi estima y mi gratitud por el entusiasmo infatigable con que asumió la tarea y aun la paciencia demostrada en las rectificaciones a las que le obligaban mis exigencias. Dichas ideas, pueden resumirse en los siguientes términos: sencillez, multivalencia, invitación a la acción y proyección sobre la vida. Este último aspecto es sin duda el que mayor impresión causó entre los colegas extranjeros, tal vez por su carácter de novedad en sus hábitos didácticos. Las lecciones obtenidas por medio de la falleba, del paraguas, del atril, de un trozo de cristal, pedazos de cascote y de los diversos juegos y juguetes infantiles, fueron entre ellos las más comentadas y anotadas, y se refleja todavía su impacto en los comentarios que hemos reproducido. El empleo de los materiales más simples para urdir lecciones de Aritmética y de Geometría: botellines, fichas, cordeles, cajas de todas formas y tamaños, bobinas, cintas, etc., establecía notables resonancias de nuestro material con otros, como el de Pesket (Inglaterra). Claro es que la sencillez del material, casi siempre aparejada a su multivalencia, exige el complemento explícito de la idea intencional que se persigue al manejarlo. De aquí que resultaba obligado adjuntar a cada material exhibido un dosel explicativo de la lección o lecciones que con él se podían desarrollar. Más de treinta de tales lecciones se exponían o indicaban en la instalación de San Isidro (*). Confesemos que algunas, como la del problema de los móviles y su conexión con la noción de cuaterna armónica, se amparaba en el uso de algún modelo que podríamos llamar todavía romántico por su típico sello de aparato casero de física finisecular. Pero alguna concesión nos habíamos de permitir en homenaje a un siglo en el que todavía hemos nacido. Creemos, en cambio, que nuestros modelos de geoespacio superan en sencillez y manejabilidad a los demás presentados, y que sus variantes (desmontable, plegable, deformable, de ganchos y de paredes enrejadas) permiten abrir a su uso las más amplias perspectivas. Todas estas posibilidades fueron descritas en el número 3 de la Revista «Enseñanza Media».

RELACIÓN DE LAS LECCIONES QUE PRESENTÓ EL INSTITUTO DE SAN ISIDRO, CON EL MATERIAL CORRESPONDIENTE

Números primos y compuestos. Material de fichas y botellines (fig. 67).

Iniciación al estudio de las congruencias. Material de regletas coloreadas (fig. 68).

Lección sobre progresiones elementales. Fichas, reglas, juego de bolitas coloreadas, serpentines, cítaras (fig. 69).

Lección sobre progresiones aritméticas de orden superior. Material Cuisenaire (fig. 70).

La estructura de la regla de la raíz cuadrada. Lección eurística con botones automáticos (fig. 71).

Ecuaciones y sistemas lineales con balanzas (fig. 72).

Iniciación a las máquinas de calcular. Con modelos varios ilustrativos de la gradación conceptual, que va de las regletas deslizantes a las máquinas multiplicadoras de tambor (fig. 73).

Iniciación al Algebra de conjuntos. Tablero con figuras de plástico coloreado transparente (fig. 74).

El Algebra de Boole en los circuitos. Realización de circuitos ilustrativos de relaciones algebraicas varias, como la regla de los signos para dos y tres factores (fig. 75).

(*) Gran parte de ellas se describen en el librito *Didáctica matemática eurística*, publicado por la Institución de Formación del Profesorado Laboral. Madrid, 1956. En la última parte de este libro se reproducen varias.

Una lección sobre simetrías en el plano. Con modelos sugeridores de una actividad de encaje de figuras en sus huecos como motivación inicial (fig. 76).

Didáctica matemática del plegado. Relaciones algebraicas y geométricas obtenidas mediante juego de dobleces (fig. 76).

Angulos inscritos y arco capaz. Modelos varios ejecutados con varillas articuladas, mecano y bobinas de máquina de escribir (fig. 77).

Desde la mediatriz a los haces de cónicas. Lección desarrollada con un simple trozo de cordel. Realización de un rudimentario aparato para el trazado de haces de cónicas en el encerado o jardín (fig. 76).

Posiciones de rectas y de planos en el espacio. Material: carpetas y agujas de tricotar (fig. 78).

Estereojaulas (geoespacios) *y sus diversas posibilidades* en la enseñanza de la Geometría. (Véase el artículo recordado en la Revista «Enseñanza Media») (figs. 79 a 86).

Los poliedros regulares y el omnipoliedro. Realización de los modelos presentados, desde el icosaedro gigante del patio hasta el ingenioso dodecaedro de líneas poligonales alabeadas enganchadas, del profesor Fernández Biarge (figs. 87 y 88).

El problema de los móviles y la división armónica. Modelo dispositivo de tres móviles movidos con cinta arrollada a cilindros coaxiales de distinto diámetro (fig. 89).

Las simetrías en el espacio y la falleba (fig. 90).

El paraguas modelo multivalente. Lecciones y problemas varios que sugiere su varillaje (fig. 90).

La geometría del atril (fig. 90).

La geometría que puede hacerse con un trozo de vidrio. Nueva versión óptica de la geometría de los dobleces (fig. 91).

La geometría del cascote. La recomposición de pedazos rotos como problema de geometría (fig. 91).

Estructuras algebraicas en un juego mosaico. Iniciación al cálculo con irracionales, tomando como motivación inicial el «puzzle» de piezas denominado «Rombo» (fig. 92).

Estructuras matemáticas en un juego solitario. Conceptos matemáticos que sugiere el solitario denominado «Cha-cha-cha» y estrategia que inducen (fig. 93).

La estructura de grupo en el juego de los quince (fig. 92).

Trayectorias parabólicas y bola-vá (fig. 94).

El tablero de los cinco en línea, sugeridor de una iniciación a la Geometría analítica (fig. 94).

LA APORTACION DE OTROS CENTROS OFICIALES Y PRIVADOS

Dos Escuelas del Magisterio: Toledo (profesora De la Quintana) y Zamora (profesora D.ª María del Pilar Martín Ruiz) enviaron material simpático por su ingenuidad en relación con las labores femeninas, en las que también pueden hallarse conceptos matemáticos, y con los juegos y construcciones infantiles (fig. 96).

El juniorado de religiosas de Sagrado Corazón, de Valladolid, y la entusiasta Madre Puig (sin vínculo alguno de parentesco con el cronista) que en él profesa la enseñanza de la Matemática, nos envió dos vistosos tableros con fichas coloreadas y una red cuadriculada de huecos circulares donde distribuirlas, que ha ideado para exponer en forma de juego diversos temas de Aritmética y Análisis (teoría de la divisibilidad, raíz cuadrada, progresiones, combinatoria, etc.). Otra muestra interesante de material eficaz, sencillo y multivalente (fig. 97).

La Hermana Lera, del Colegio de las Hijas de la Caridad, nos envió una bella lección de iniciación a la Trigonometría con los modelitos y círculo trigonométrico correspondiente, además de otro ilustrativo de las distintas fases de la demostración en el teorema de las tres perpendiculares (fig. 98).

Finalmente, el Colegio Nacional de Ciegos expuso abundante material didáctico matemático, que interesó grandemente a los congresistas, ya que ilustró a los videntes de los recursos de que se valen los ciegos para efectuar las operaciones aritméticas y para seguir los razonamientos geométricos (figs. 99 y 100). La mayor parte del material geométrico expuesto en su instalación es obra del referido maestro don Mariano Fernández Gómez, que se especializó durante varios años aplicando su habilidad manual a la confección de modelitos de Geometría plana y del espacio en los que el tacto pudiera reemplazar la función de la vista en el reconocimiento de los elementos de las figuras y de sus relaciones.

BIBLIOGRAFIA

GATTEGNO, SERVAIS, CASTELNUOVO, NICOLET, FLETCHER, MOTARD, CAMPEDELLI, BIGUENET, PESKET, PUIG ADAM: *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques* (Delachaux, Niestlé. Neuchatel-Paris. 958) (*).

Esta obra es la segunda que publica la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática. Han colaborado en ella especialistas de siete nacionalidades, en forma de *symposium*, que se quiso combinar con la XI Reunión celebrada por dicha Comisión en Madrid, abril de 1957, y que se describe en este folleto.

Los doce capítulos de que consta el libro están agrupados en tres secciones: la primera, con carácter general de enfoque epistemológico del tema del material y su utilización; la segunda, dedicada especialmente al novísimo tema del film didáctico matemático, y la tercera, a los modelos propiamente dichos y a su uso didáctico.

Abre la sección primera un artículo de psicología aplicada del profesor Gattegno: *La perception et l'action comme bases de la pensée mathématique*, en el que, como el título indica, razona el autor la intervención esencial del juego perceptivo-activo en la edificación de los conceptos matemáticos primeros. Si tal juego es fenómeno vital en toda la escala animal, sólo el hombre es capaz de adquirir conciencia de esta actividad, de virtualizarla y de esquematizarla en símbolos. La novedad y audacia de

(*) Reproducimos aquí el comentario publicado sobre dicho libro en la Revista «Enseñanza Media», núm. 24-25.

la tesis de Gattegno, que apoya en sus múltiples experiencias realizadas en todas las latitudes y niveles escolares, es que el niño tiene un poder de abstracción y de simbolización mucho más precoz, mucho más rico y multivalente de lo que las estratificaciones dogmáticas al uso suelen admitir. La didáctica matemática consecuente consistirá en crear situaciones sobre base realista para extraer de ellas, y mediante el antedicho juego perceptivo-activo, el máximo cuadro de relaciones intrínsecas abstractas que las caracterizan matemáticamente. Esta tesis sitúa desde el primer momento el papel del material didáctico matemátitco en su justo marco psicológico.

En el capítulo II, de título *Concret-Abstrait*, el profesor W. Servais estudia la abstracción en sus diversas fases y grados, especialmente en lo que concierne a la Matemática. Un análisis, avalado por múltiples citas filosóficas, le hace recorrer las distintas etapas que van desde la abstracción analógica espontánea (en la que no falta la fecunda alusión al dibujo esquemático del niño), la abstracción conceptual (modelación abstracta, lógica de clases), la abstracción representativa o simbólica (lenguaje matemático) y, finalmente, la abstracción axiomática, último proceso conducente a la desnudez de las modernas estructuras. El pensamiento matemático, dice Servais, suscitado por los modelos, los desborda en virtud de la conciencia de la virtualidad interpretativa del juego simbólico, virtualidad que se expresa operatoriamente por el paso de un modelo a otro isomorfo, hasta alcanzar la estructura.

En el capítulo III, la profesora Emma Castelnuovo estudia las relaciones entre: *L'objet et l'action dans l'enseignement de la Géometrie intuitive*. Para ello empieza efectuando un estudio crítico comparativo de la enseñanza de algunos temas de Geometría euclídea elemental (suma de los ángulos de un triángulo, semejanza de triángulos, posiciones de rectas en el espacio, noción de area, etc.), según el método expositivo-intuitivo más o menos tradicional y el que ella emplea basado en la acción constructiva. El artículo, que confirma la reconocida maestría profesional de la autora, constituye una defensa ejemplificada del método de enseñanza activa, llegando a la conclusión de que solamente el método constructivo, que, como tal, tiene que partir de una base material concreta, es capaz de dejar una huella formativa en el educando matemático.

Inicia la segunda parte, destinada a los films matemáticos, el capítulo IV, *Intuitión mathématique et dessins animés*, del profesor suizo

Nicolet, consagrado al tema desde hace más de veinte años y realizador de los films matemáticos de todos conocidos. Empieza este artículo con algunos ejemplos oportunos de obtención inductiva de resultados varios, intentando con ello hallar una definición satisfactoria de la intuición matemática, que termina formulando como la «contemplación de procesos de imágenes», procesos sugeridos por el subconsciente en el caso de un espíritu creador, y procedentes del exterior en el caso del aprendizajé matemático estimulado. Para Nicolet la certeza intuitivamente descubierta es la que crea la necesidad de la demostración. La lógica aparece, según él, como límite de la intuición. Mientras ésta persuade, aquélla demuestra, complementándose ambas en vez de oponerse. La breve descripción de dos guiones de sus films nos revela el proceso y la idea de su creación, cuya finalidad es el alumbramiento en el alumno del instante feliz del hallazgo de una verdad matemática que luego habrá de ser lógicamente demostrada.

En el capítulo V, el profesor Fletcher, joven entusiasta inglés del film matemático y creador de varios de ellos, profundiza ampliamente sobre *Les problèmes du film mathématique*, abordando tres fundamentales cuestiones: la sintaxis expresiva del film, su belleza y su realización. Inicia su artículo con una aguda crítica del rigor matemático, tal como se le suele entender comúnmente. Niega la existencia de un rigor absoluto, sino en relación con determinados contextos y se pregunta por qué se prefiere el contexto lógico verbal al contexto gráfico. En cuanto éste se dinamiza, es capaz de adquirir su lógica y su lenguaje, con la ventaja de tener carácter universal. Con finas observaciones trata de situar el problema, aún no resuelto, de la creación de una sintaxis o lenguaje fílmico y de caracterizar sus dificultades a la luz de la lógica moderna y de sus estructuras. Una extensa alusión a la teoría de grupos y simetrías apunta al tema de la belleza expresiva del film, el cual, como toda obra de arte, es resultante de una adaptación mutua de idea y de material. La realización técnica queda así vinculada a los anteriores problemas y la identificación del proyectista y del realizador permite incluso llegar a dar matices investigadores a la simple realización de un film, al llevarle, como a él le ha ocurrido personalmente, mucho más allá de su intención primera a lo largo del desarrollo mismo de la idea. Buen número de observaciones prácticas de realizador experto terminan avalando este interesante artículo que, sin duda, será de gran provecho para todo aquél que se sienta atraído hacia esta nueva e incipiente técnica didáctica, cuyos alcances estamos aún lejos de sospechar.

Pinceladas muy generales dedica el ingeniero Mr. Lucien Motard en el brevísimo capítulo VI a *Les techniques du dessin animé mathématique*, en las que exige rigor de pensamiento, de grafismo y de animación, y entre las que anotamos, como insistencia práctica afirmativa, la preferencia del fondo negro en los dibujos animados.

Cierra esta sección el profesor Gattegno con el capítulo VII, *L'enseignement par le film mathématique*, en el que describe la forma cómo ha utilizado algunos films de la colección Nicolet para conducir con ellos la enseñanza en clase, extrayendo de la situación creada al proyectarlos y de los comentarios subsiguientes establecidos mediante el recuerdo dialogado con los alumnos, y las variantes que se suscitan de los mismos al agotar todas las posibilidades de modificación y dinamismo de datos, todas las relaciones posibles en las que va mucho más allá de las intenciones didácticas del propio autor de los films. La inagotable fuente de sugerencias que Gattegno provoca al comentar con sus alumnos el sencillo film de Nicolet, sobre la determinación de la circunferencia por tres puntos, constituye por sí sólo una muestra elocuentísima de su eficaz pedagogía.

Inicia la tercera parte, dedicada a los modelos, un artículo del profesor Campedelli, que constituye el capítulo VII, bajo el título *Les modèles geométriques*. Empieza situándolos en una zona de intercambio entre el pensamiento abstracto y la experiencia concreta, tras un documentado análisis de la génesis de las teorías matemáticas y de sus tendencias modernas. Cuerpos y movimientos; sombras y creación simbólica, son las fuentes de modelos que el autor señala en el dominio de la geometría, según su nivel elemental, proyectivo, algebraico. Comprensión y seguridad son los anhelos que el autor atribuye al hombre en su afán investigador. El primero conduce a la sistematización estática; el segundo, a la búsqueda de elementos invariantes en las transformaciones del mundo real. Esto explicaría las estructuraciones euclídea y kleineana de la Geometría, a las que corresponden los tipos de modelos estáticos y dinámicos, respectivamente, mientras la simbolización o metáfora algebraica constituye la inagotable fuente de modelos lineales, superficiales, corpóreos que el profesor Campedelli ha elaborado en el campo de la Geometría algebraica, tan cultivada en Italia. Su rica colección, cuya alta calidad matemática se conjuga maravillosamente con la expresividad artística dentro de las formas del arte moderno abstracto, se muestra con abundante ilustración gráfica en dicho artículo, mientras defiende y justifica el empleo de tales modelos, no sólo como meras ilustraciones, sino principalmente en su aspecto de elaboración constructiva y, por tanto, como elemento de enseñanza creador y eurístico.

La ilustración material de la Geometría, en el campo de los modelos, y en su aspecto dinámico moderno, como ciencia que estudia las transformaciones espaciales y sus propiedades invariantes, tiene su adecuada representación en el capítulo IX, *Modèles animés pour illustrer l'enseignement de la Géometrie*, del que es autor el profesor francés Biguenet. Con hojas de plástico transparente y con los sencillos elementos del juego «mecano» ha realizado dicho profesor múltiples e ingeniosos modelos, principalmente constituídos por sistemas articulados, cuya manipulación ilustra elocuentemente los distintos tipos de transformaciones planas: traslaciones, giros, homotecias, semejanzas, inversiones, polaridades, etc., así como sus productos, reflejando así, en forma material, las estructuras de grupo que las asocian. La amplia ilustración gráfica que acompaña dicho capítulo lo hacen de lectura particularmente cómoda y grata.

De gran utilidad y valor práctico para los profesores y alumnos que deseen iniciarse en la elaboración de modelos matemáticos es el capítulo X, del profesor inglés Pesket, *Méthodes de fabrication de modèles et matériaux nécéssaires*. Una amplia relación de materiales y elementos utilizables para la confección de modelos matemáticos, relación que, sin pretender ser exhaustiva, es bastante completa, se enriquece con un estudio minucioso de los más importantes, así como del modo de manejarlos y de los utensilios usuales para ello. Describe a título de ejemplos: la construcción de modelos geométricos variados de plásticos y cartulina, de otros verificadores de leyes mecánicas, como la conservación de la cantidad de movimiento; otros ilustrativos del teorema de Pitágoras y sus generalizaciones; dinamómetros para pesar; tensómetros para evaluar fuerzas de inercia; pivotes simples y deslizantes; aparatos construídos con elementos del «mecano» para el trazado de eplecicloides e hipocicloides, etc. La riqueza de observaciones que a tales ejemplos acompaña serán del mayor provecho para los constructores incipientes y marcan el capítulo culminante de efectividad práctica del libro en el terreno de la modelística matemática.

Encargado el comentarista que suscribe, por la secretaría de la Comisión internacional citada, de la redacción de un capítulo (el XI del libro) bajo el título *Modèles prêts et modèles faits*, es decir, que tuviera por objeto parangonar el interés didáctico de los modelos «dispuestos» o prefabricados, con el de los modelos «hechos» o realizados por el propio alumno, empecé por exigir del modelo, no sólo la traducción o la sugerencia de ideas matemáticas, sino la creación mediante él de situaciones activas de aprendizaje. La observación de una multiplicidad de modelos estáticos con una idea abstracta común subyacente o la manipulación de modelos dinámicos con elementos invariantes, son las percepciones y acciones que han de sugerir las nociones matemáticas que se desea inculcar. Los modelos realizados en la escuela, por su parte, no sólo deben concebirse como traducciones de ideas matemáticas abstractas, sino como modelos capaces de sugerir dichas ideas en los demás una vez confeccionados. La realización de modelos resulta ser así la actividad más efectiva para proporcionar una educación matemática completa, en la que el doble juego de abstracción y concreción que procede y sigue al mecanismo lógico deductivo se verifique en toda su plenitud y eficacia. Se describen en el artículo diversos modelos realizados en el Instituto de San Isidro como resultantes de las necesidades e incidencias de la clase viva. Pero la nota que, a juzgar por los comentarios recogidos, parece haber dejado mayor impacto internacional de este artículo y de la participación española en la citada Exposición, fué la sugerencia, ampliamente ilustrada con ejemplos de la vida corriente, de que dicha vida es la más rica fuente de modelos matemáticos confeccionados, para el que sepa ver en los objetos corrientes el contenido matemático que los oficios y la técnica constructiva ha dejado en ellos. El artículo desarrolla varios ejemplos, que van desde una ventana y sus accesorios hasta los juguetes; desde un pedazo de cristal plano hasta los «puzzles» a que dan lugar la recomposición de fragmentos de piezas rotas.

Cierra esta sección y con ella el libro, un último capítulo XII, sobre *Les materiels multivalents*, en el que el profesor Gattegno, después de acentuar el interés de los modelos de mayor sencillez y multivalencia, muestra, mediante ejemplos ampliamente vividos por él, todas las posibilidades de los geoplanos de su invención en la enseñanza de la Geometría, y las del material de regletas en color de Cuisenaire, para la enseñanza de la Aritmética, y aun de ciertos capítulos mantenidos hasta aho-

ra alejados en la enseñanza elemental. A la impresionante lista de tales posibilidades, el autor ha tenido la gentileza de querer reproducir una lección de este comentarista sobre *Progressions arithmétiques d'ordre supérieur*, resuelta en forma activa mediante el referido material Cuisenaire, y que constituye un apéndice de dicho último capítulo.

Termina el libro con una lista de films matemáticos didácticos elegidos entre los más interesantes de la producción inglesa, americana, francesa y suiza.

Les modèles dans l'enseignement mathèmatique, Ministère de l'Instruction publique. Documentation. Cahier n.° 5. Bruselas. Bélgica.

Más de cuarenta artículos, de otros tantos autores constituyen el contenido de este interesante libro, publicado por el Ministerio de Instrucción Pública belga, a raíz del Congreso y Exposición Nacional sobre material didáctico matemático habidos en Berchem, en noviembre de 1955. En la imposibilidad de reseñarlos todos nos hemos de limitar aquí a dar una idea muy general de su alcance, que excede del que modestamente se declara en el prólogo al decir que «la Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas trata de reunir todas las buenas voluntades con el fin de ofrecer a los profesores de todos los grados, y particularmente a los debutantes, sugestiones ingeniosas, procedimientos hábiles, capaces de lograr que ciertas nociones matemáticas se hagan más accesibles a gran número de alumnos, y capaces también de suscitar el interés del niño y de proporcionarle el gusto hacia una rama del saber que le suele ser hostil». Algo más que sugestiones ingeniosas y procedimientos hábiles se desprenden del libro cuyo contenido establece el más íntimo contacto entre lo concreto y lo abstracto en el proceso de aprendizaje del niño. Así afirma Servais en el artículo inicial, tratando de fijar el papel de los modelos en la didáctica matemática y de convencer a los reacios a su uso, que su empleo no desvirtúa la clásica educación matemática, perjudicándola, sino que, por el contrario, coadyuva a ella eficacísimamente completando su valor formativo. Si bien la gran mayoría de artículos se refieren a modelos geométricos, tanto estáticos como dinámicos, que van desde el uso del geoplano hasta los sistemas articulados realizadores de transformaciones geométricas planas y sus productos, desde la construcción de sólidos diversos con materiales variados, hasta el estudio de sus secciones planas mediante diversos recursos (goma, rayos y planos luminosos), utilización de materiales corrientes y confección de material nuevo acoplable para la construcción de cuerpos diversos, etc., etc., no faltan artículos y modelos relativos a la enseñanza de la aritmética y el álgebra (material Cuisenaire, Algebloc, ...), así como otros relativos a relaciones de carácter lógico. Ni faltan tampoco artículos específicamente dedicados a las técnicas de tratamiento de los materiales (doblado, pegado, soldadura, etc.). Cierra el libro un artículo del profesor Gattegno, que traza todo un programa de investigaciones y problemas que plantea una pedagogía de modelos.

PARTE TERCERA

MODELOS

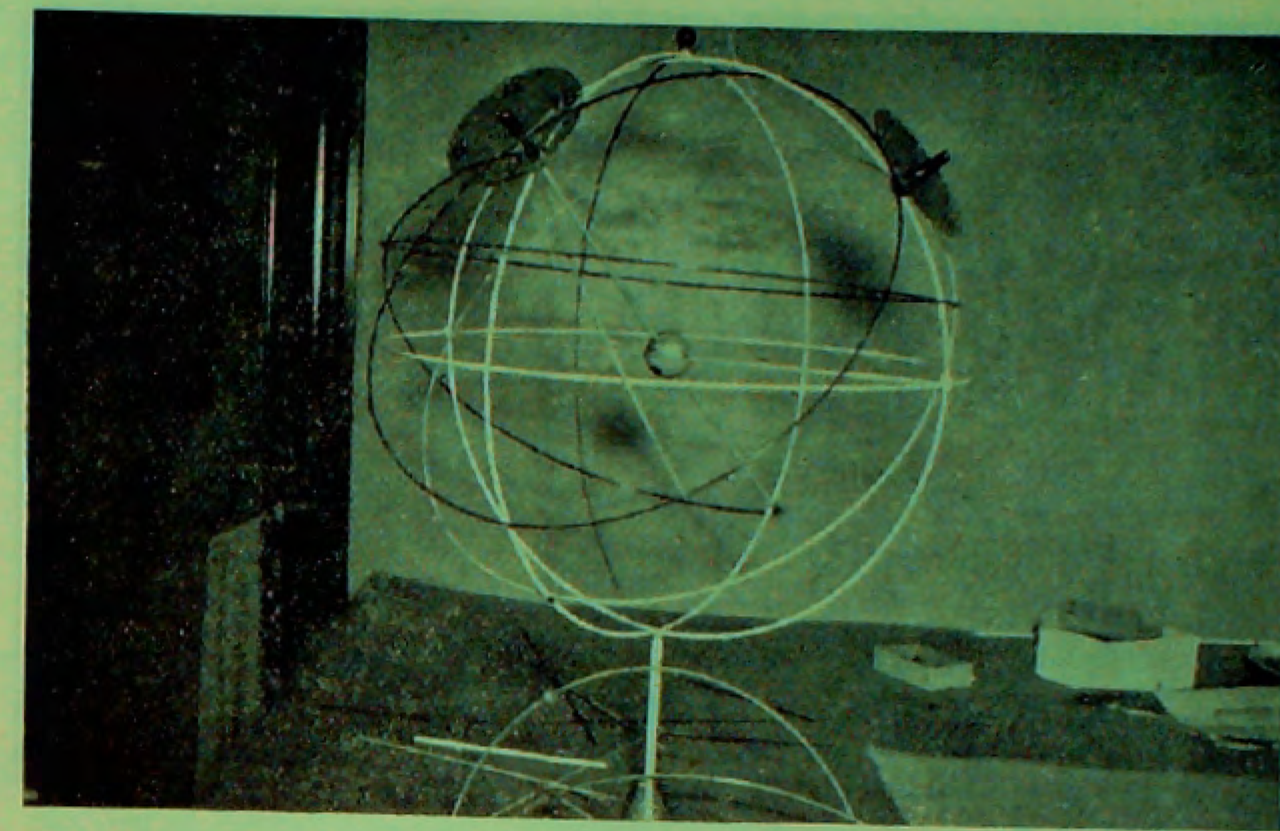


FIGURA 1.—Modelo del profesor Pauls, para el estudio de la Geometría de la esfera. Trigonometría esférica y Cosmografía.

FIGURA 2.—El profesor Pauls explicando el uso didáctico de su modelo.

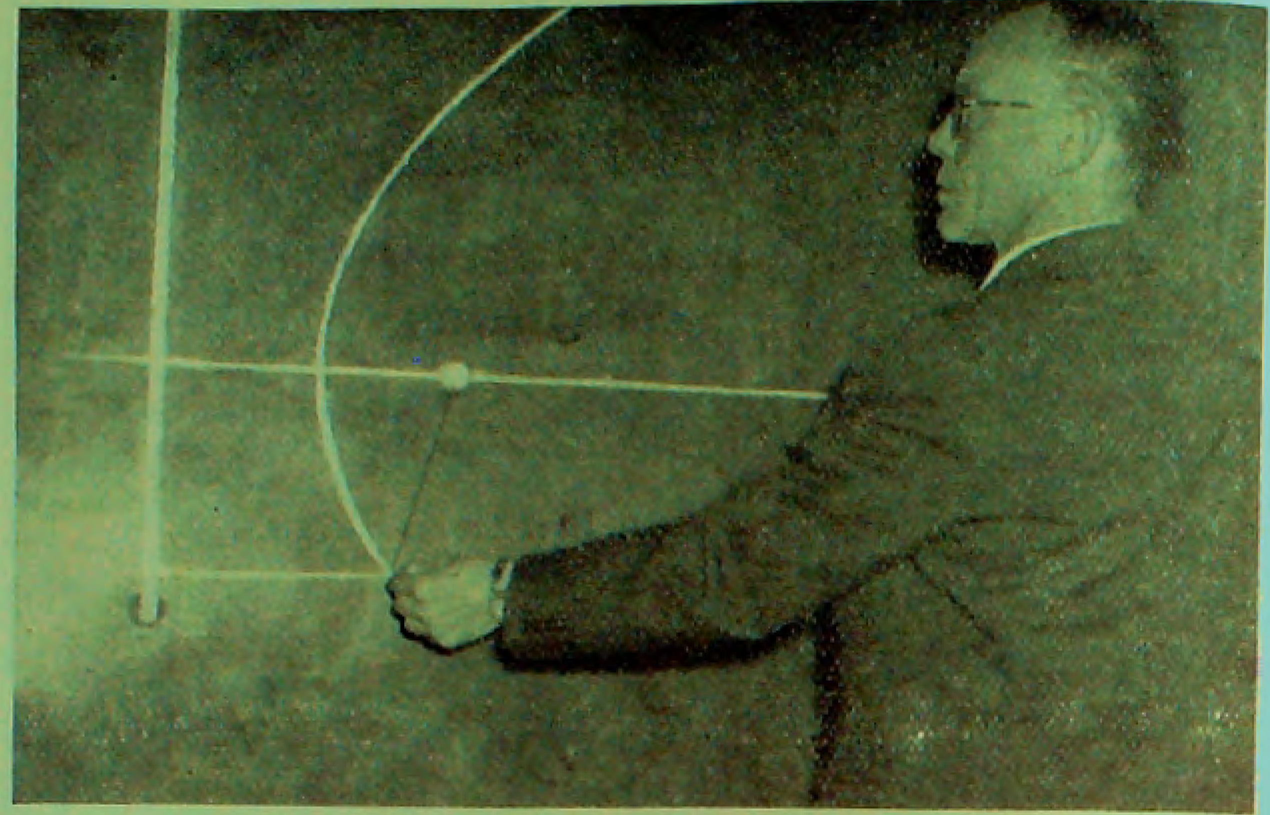


FIGURA 3.—El profesor Pauls trazando una parábola en el encerado, con material de hilos, poleas y ventosas.

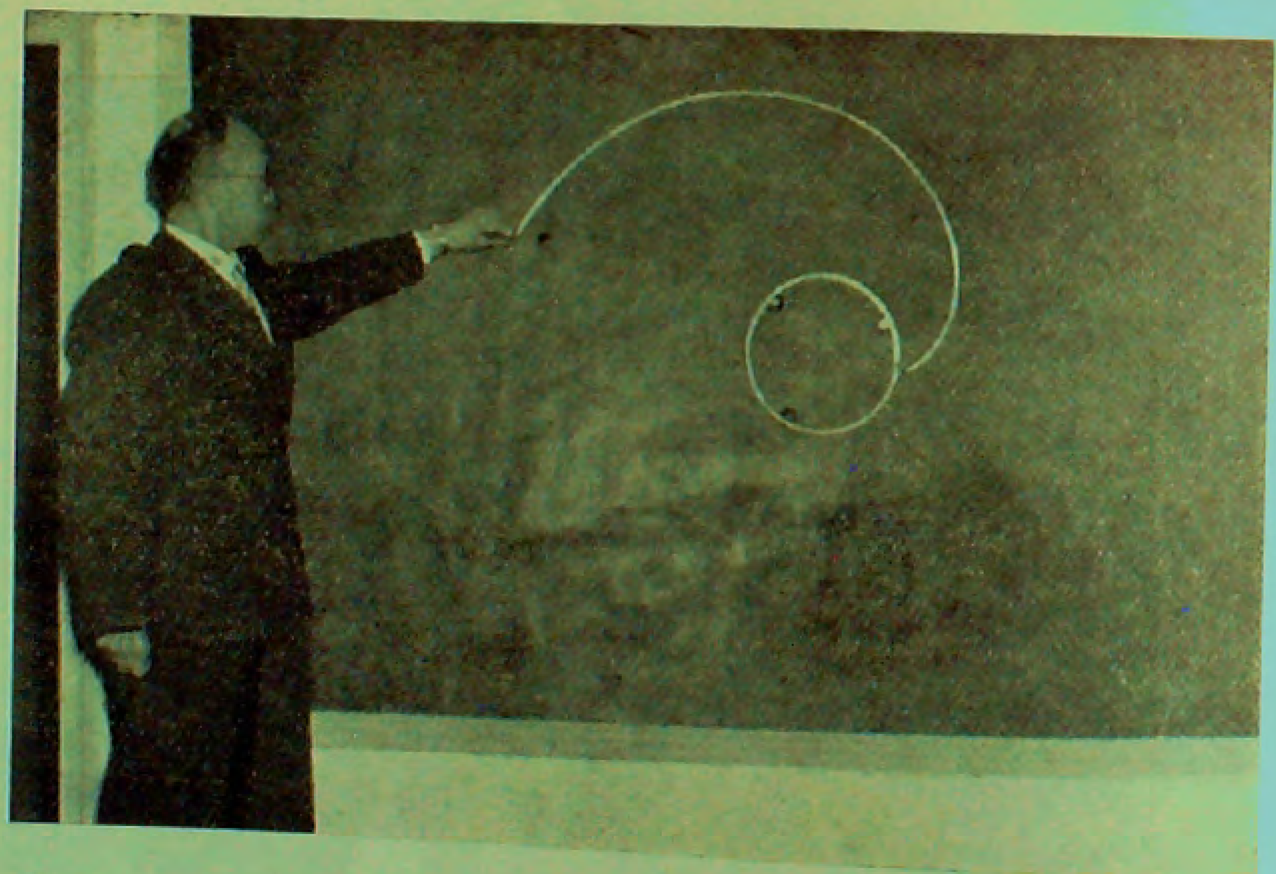


FIGURA 4.—El profesor Pauls trazando con su material una evolvente de círculo.

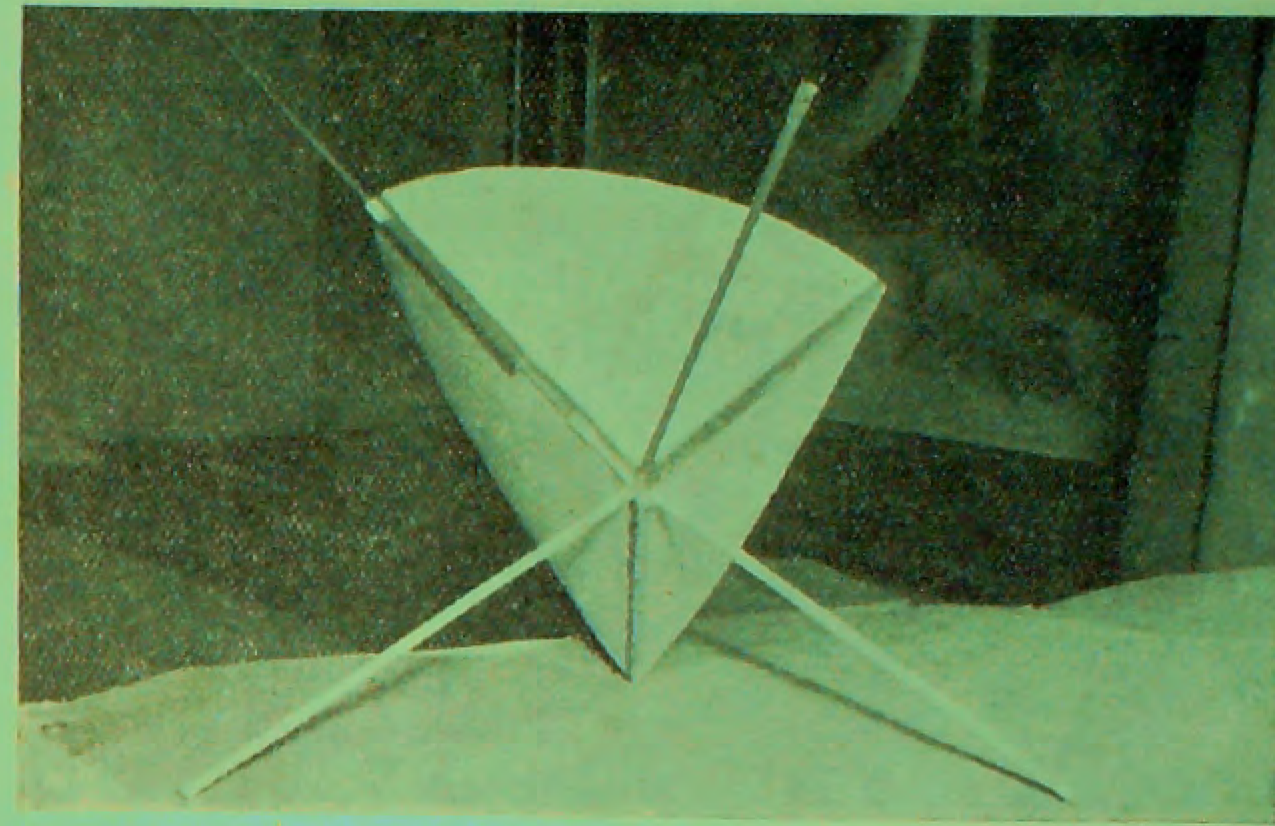


FIGURA 5.—Modelo de triedros polares en metal y cartulina (Pauls-Alemania).

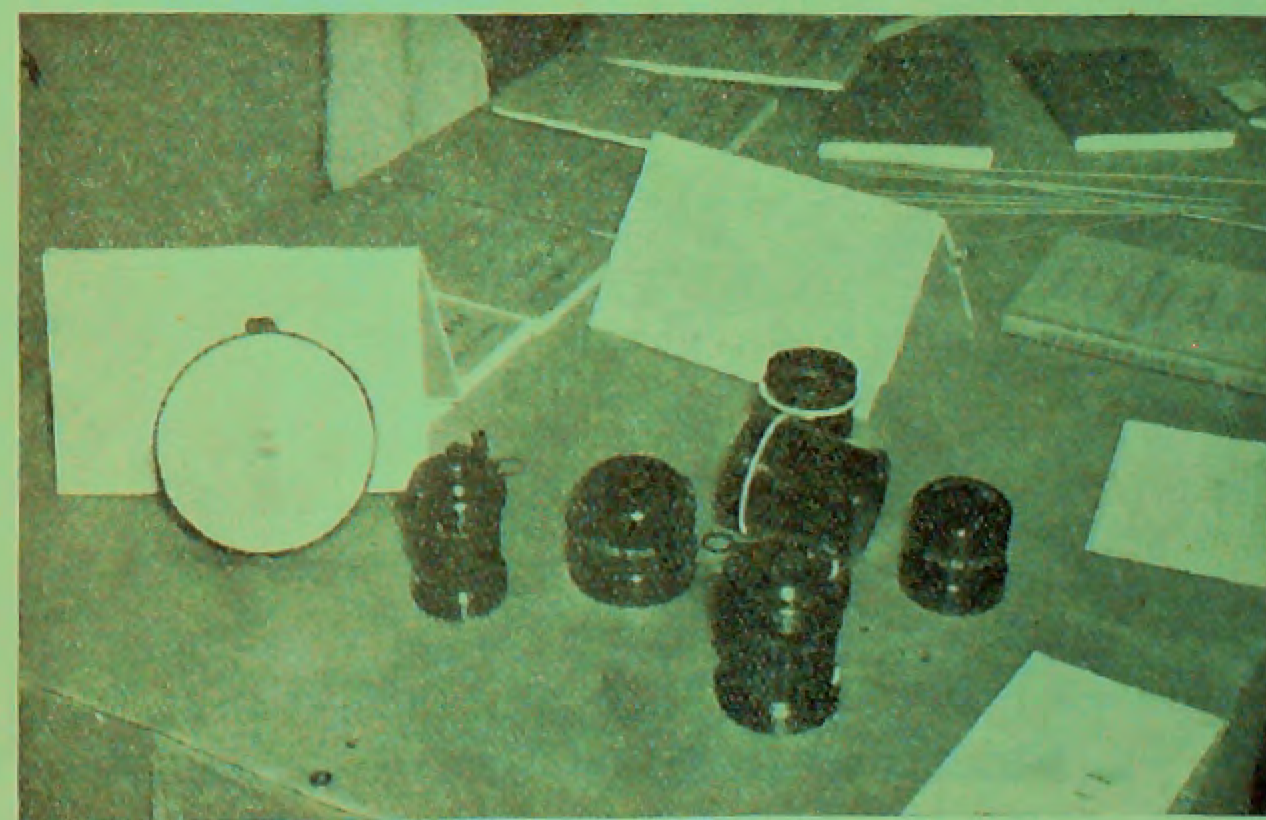


FIGURA 6.—Material suizo. Discos de cálculo y máquinas de calcular «Curta».

FIGURA 7.—El profesor Schilt explicando el manejo de las máquinas «Curta»

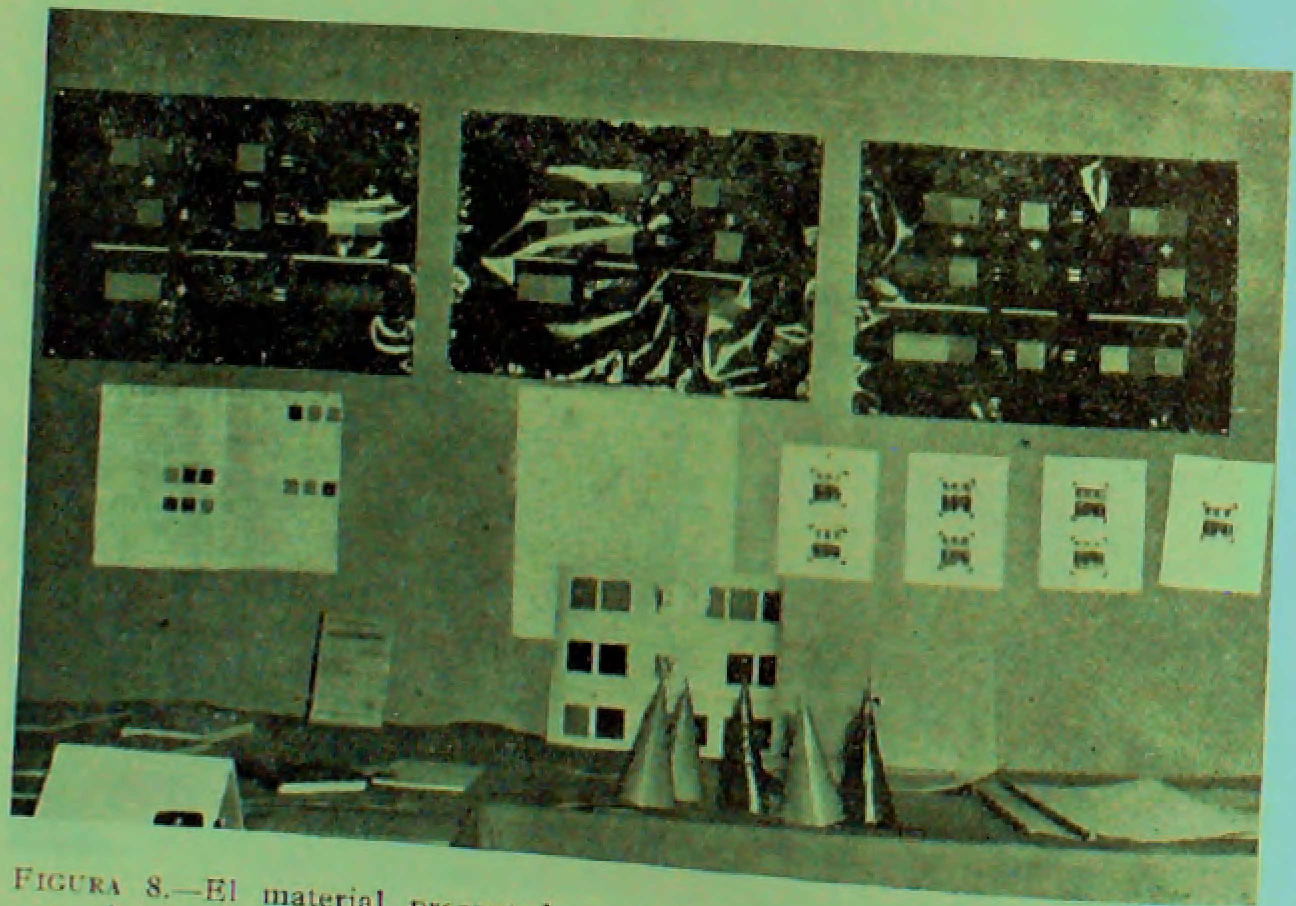


FIGURA 8.—El material presentado por el profesor Galli (Uruguay). Sobre la mesa los birretes cónicos utilizados en su clase experimental.

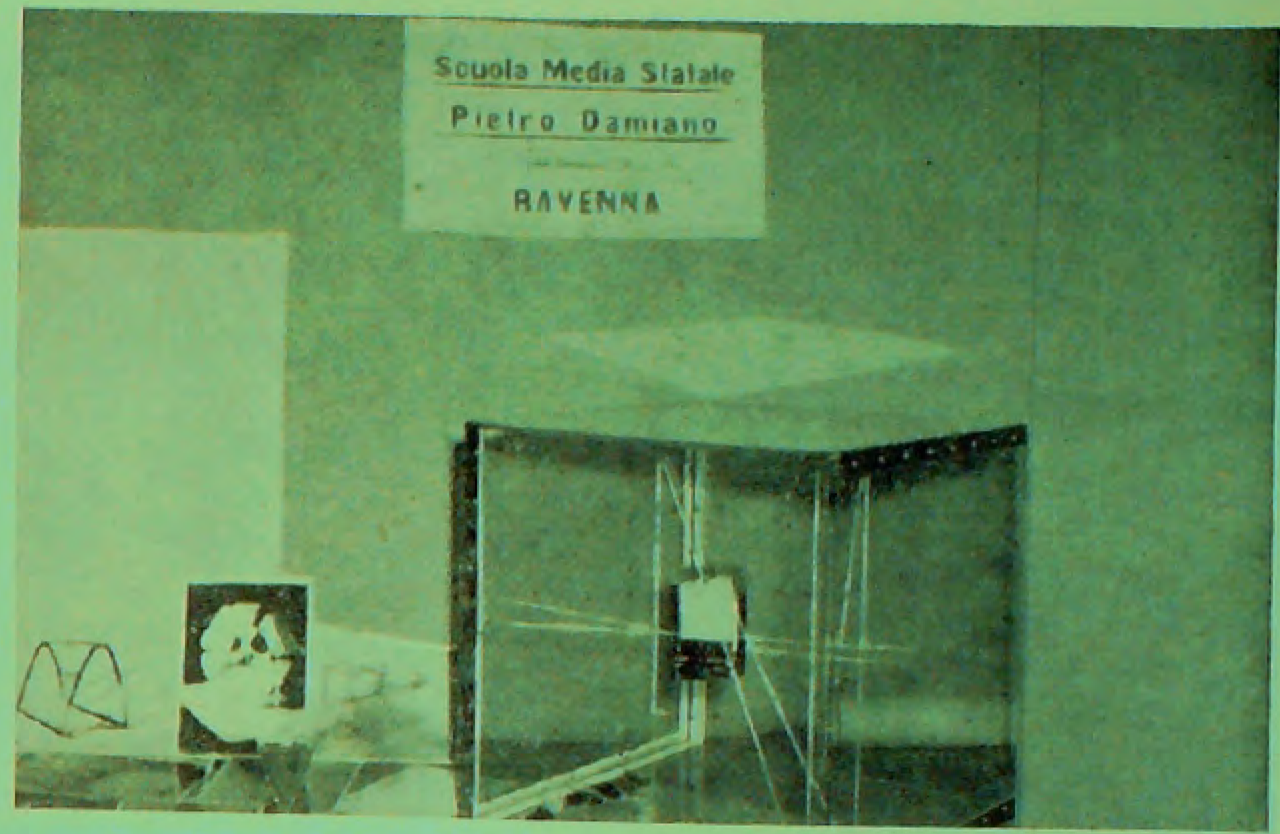


FIGURA 9.—El geoespacio de Pescarini (Italia) en material plástico transparente para la ilustración de propiedades y figuras de Geometría del espacio.

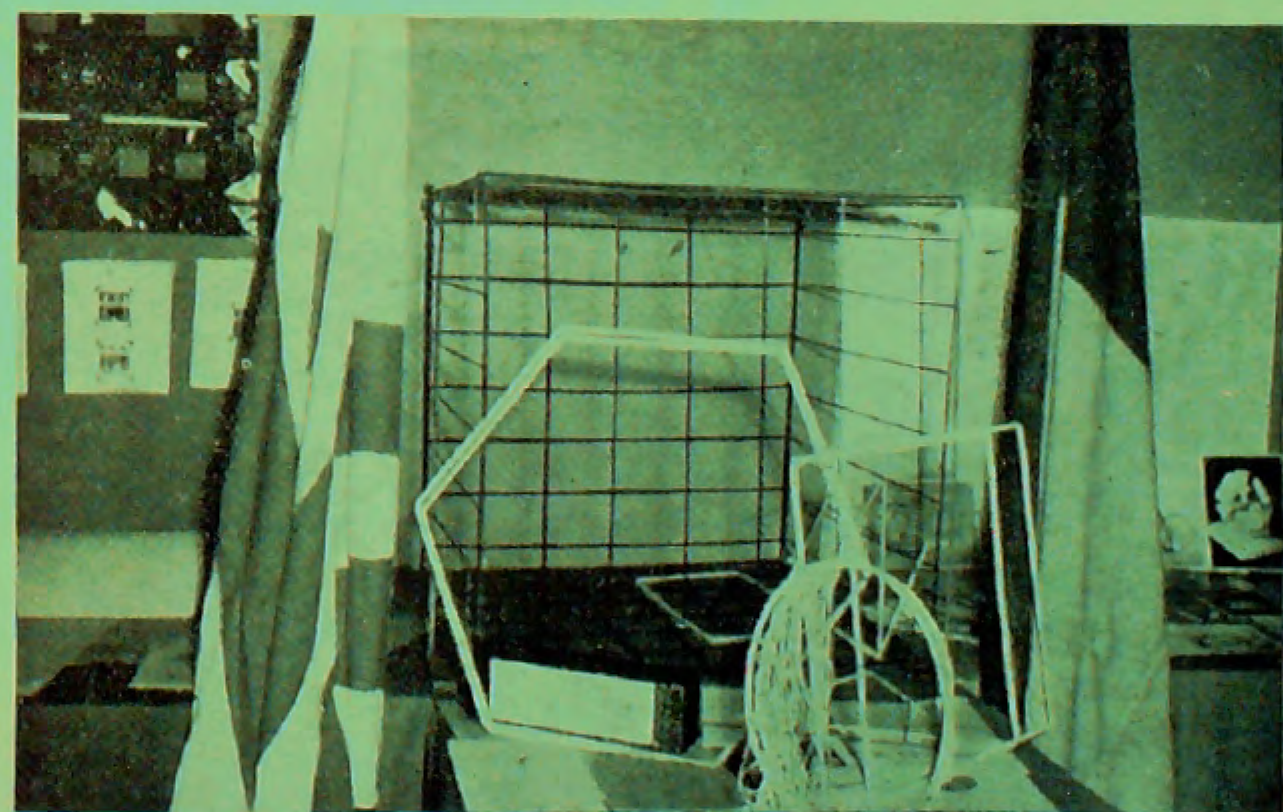


FIGURA 10.—Geoespacio metálico y accesorios varios de alambre, presentados por una escuela de Enseñanza Media Profesional de Roma.

FIGURA 11.—Carta náutica de Pescarini (en la pared). Fotografías varias de los modelos del profesor Campedelli sobre curvas y superficies. En el centro un reloj de arena para ilustración de las secciones cónicas (E. Castelnuovo).

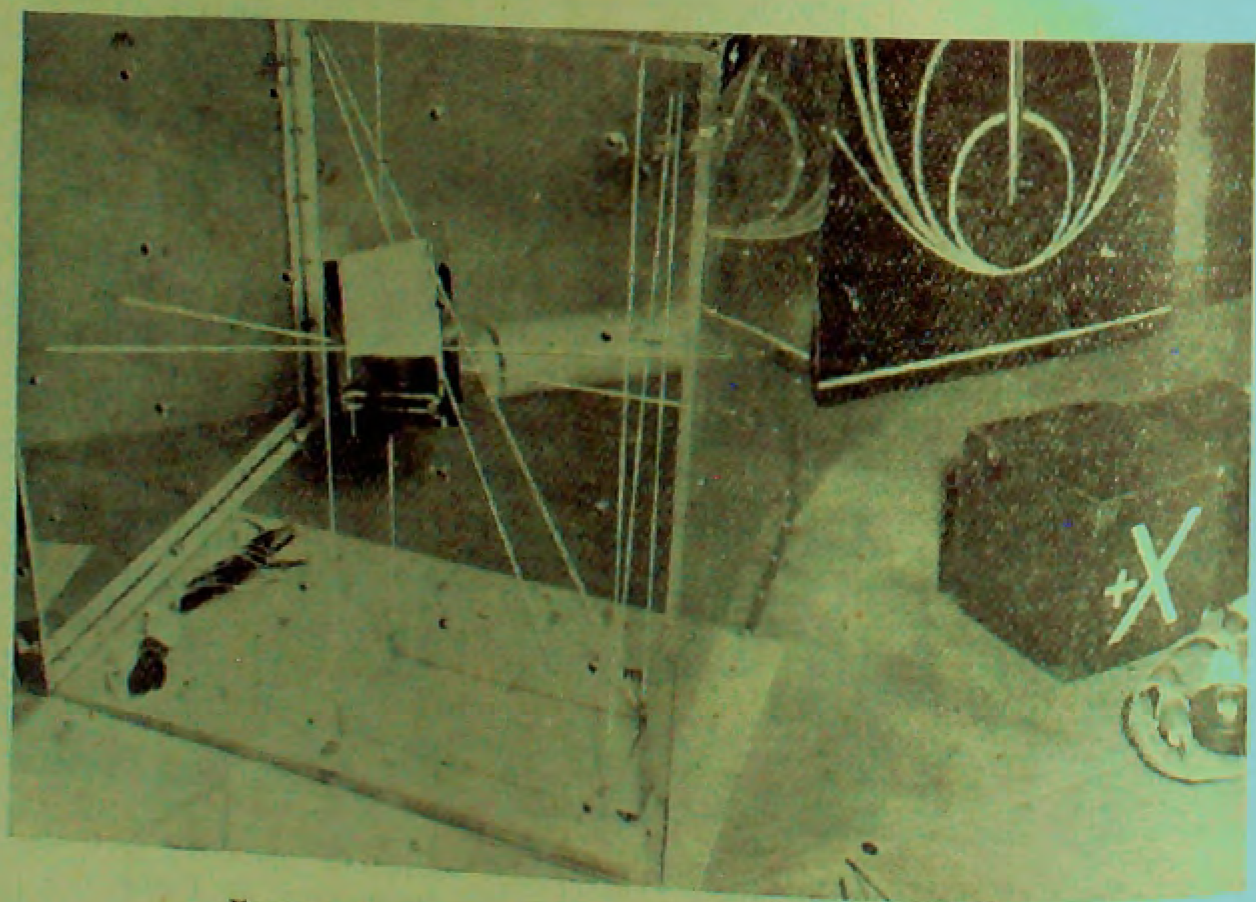


FIGURA 12.—Detalle del geoespacio de Pescarini.

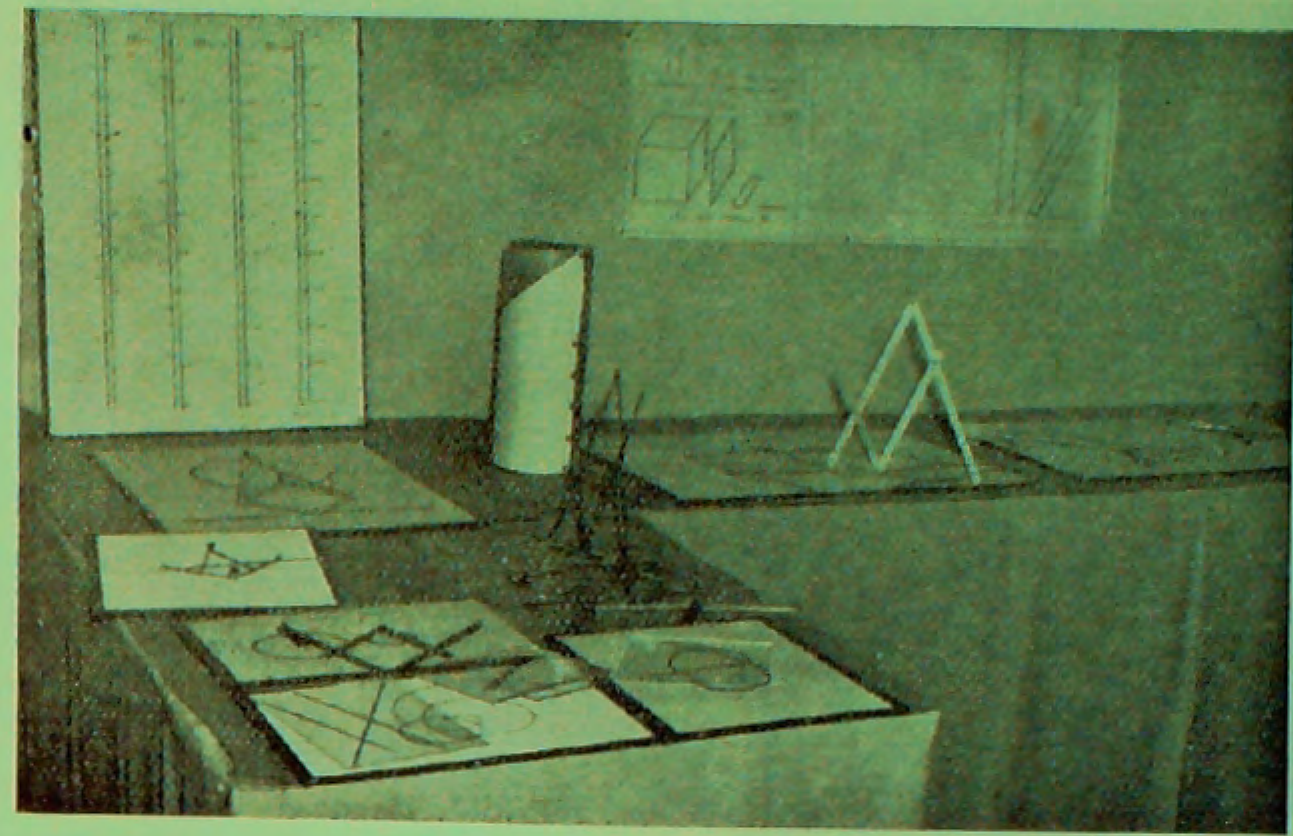


FIGURA 13.—El material presentado por el profesor Biguenet (Francia).

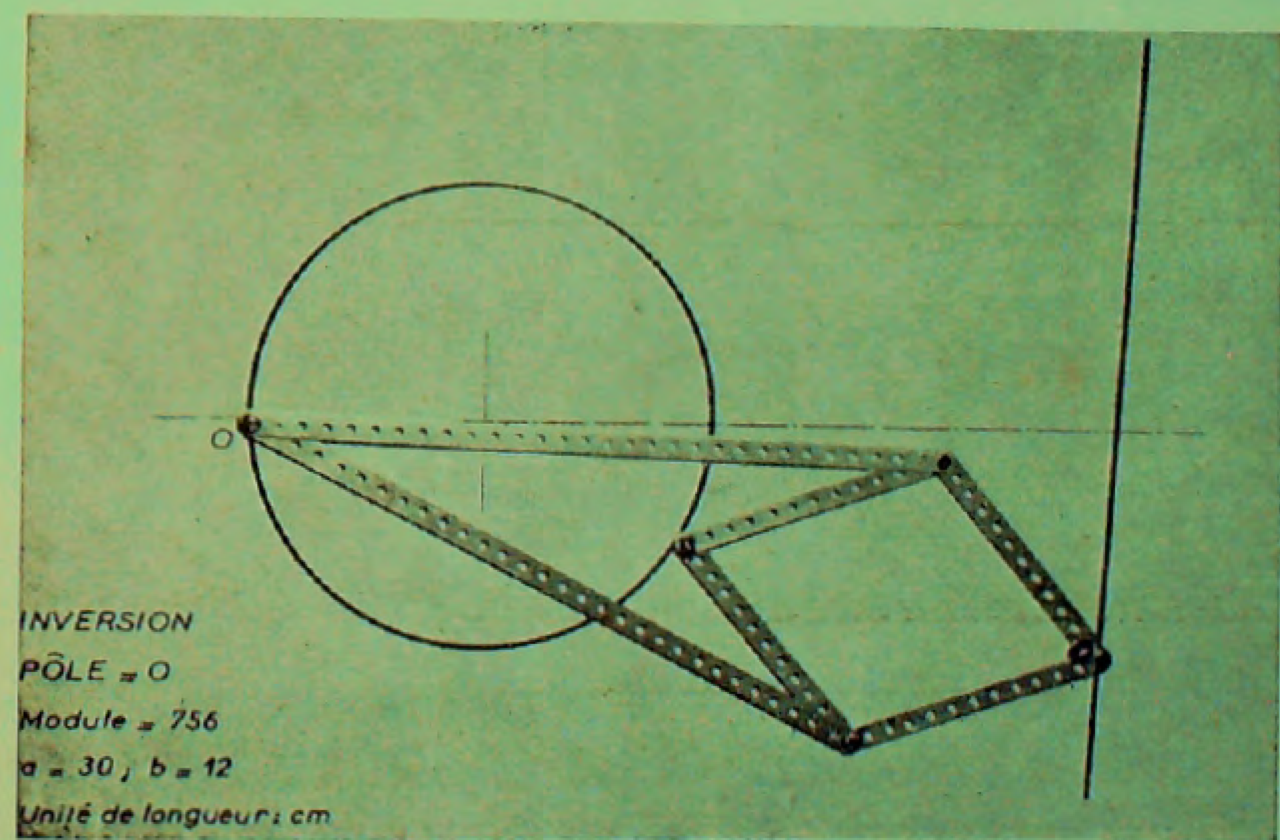


FIGURA 14.—Inversor de Paucellier construído con piezas de mecano (Francia.)

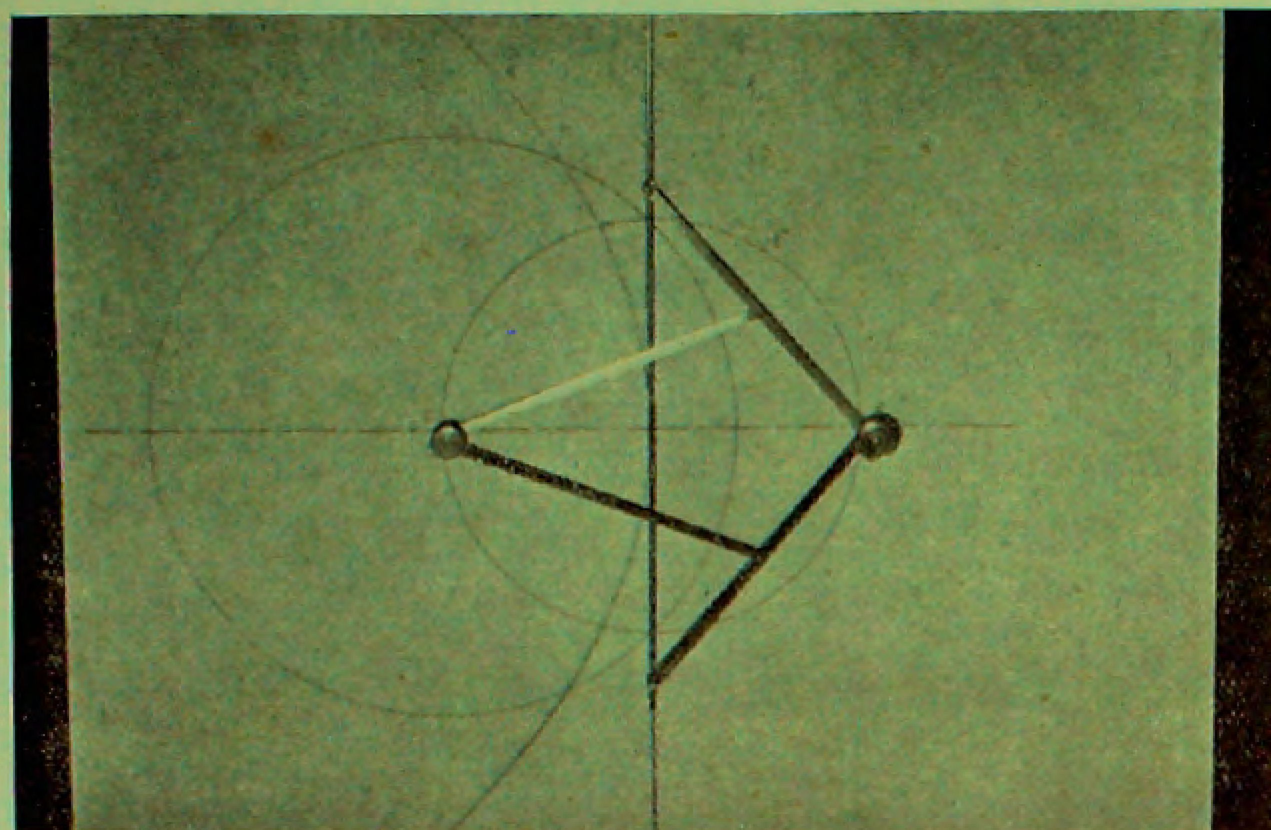


FIGURA 15.—Sistema articulado realizando la transformación de polaridad en el círculo (Francia).

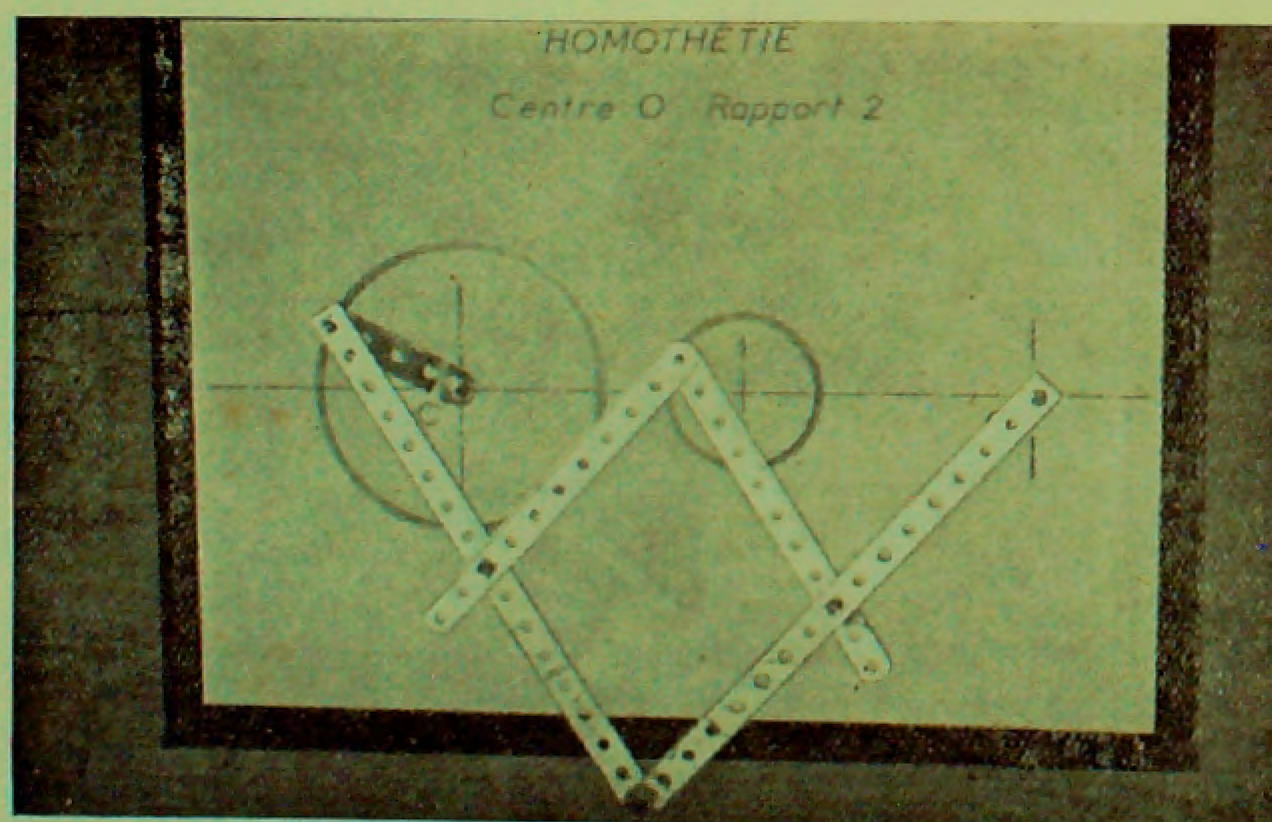


FIGURA 16.—Pantógrafo construído con elementos de mecano para realizar la transformación por homotecia.

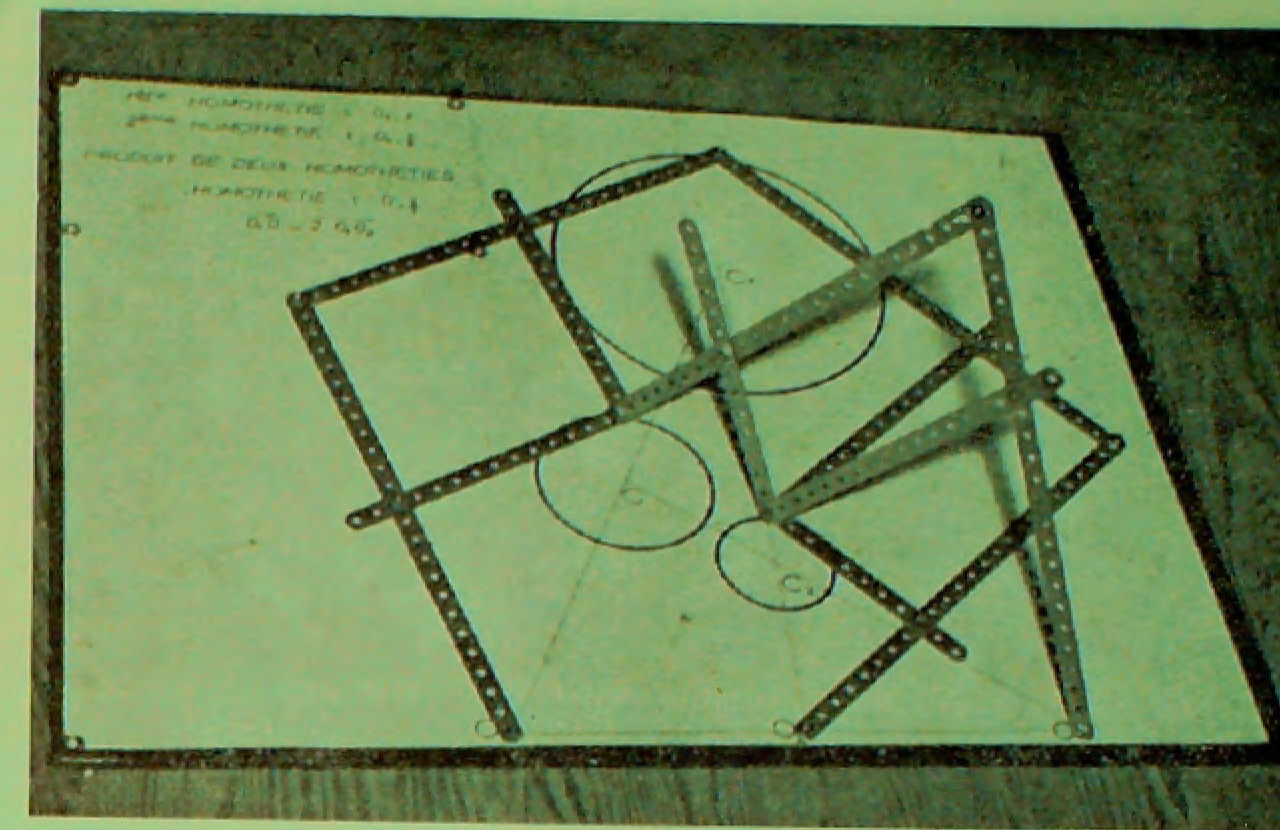


FIGURA 17.—Homotecia resultante del producto de otras dos (Bignenet-Francia).

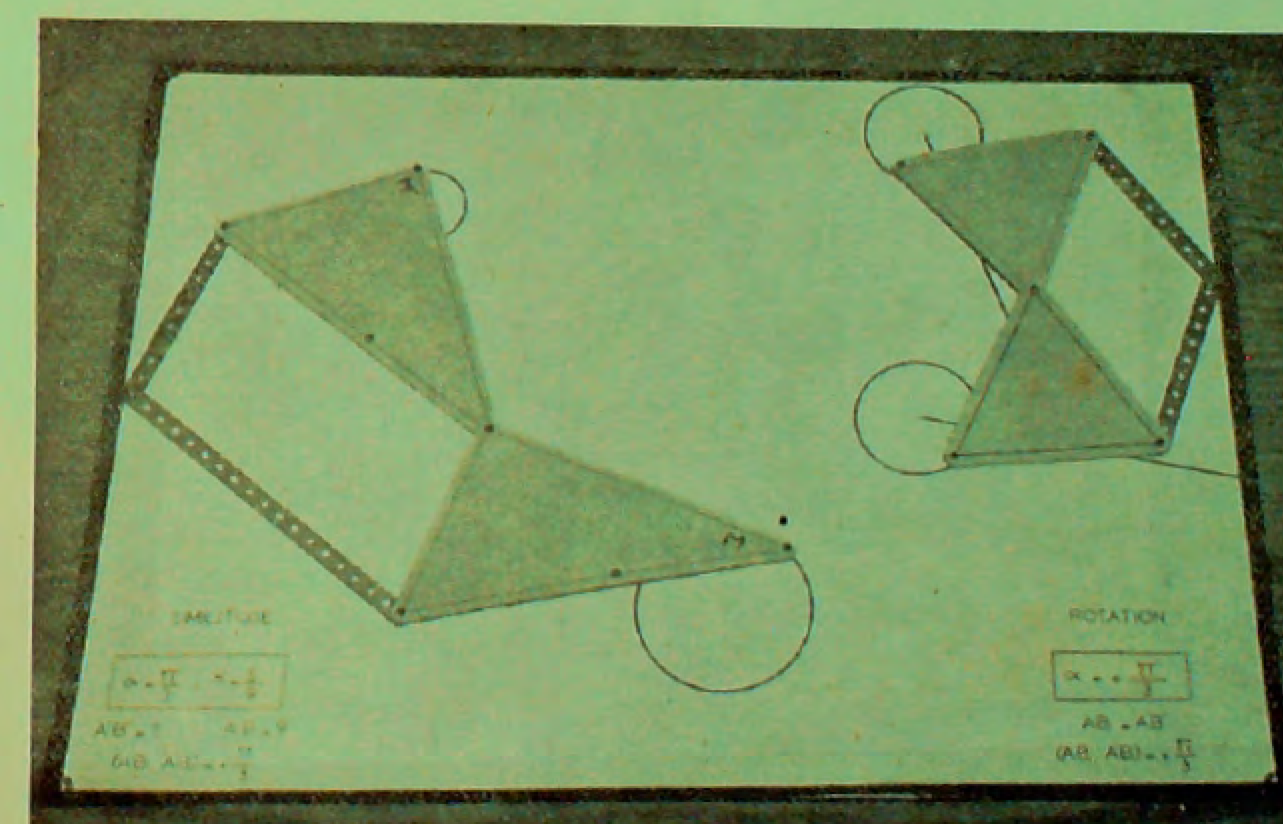


FIGURA 18.—Sistemas articulados que realizan la semejanza y la rotación.

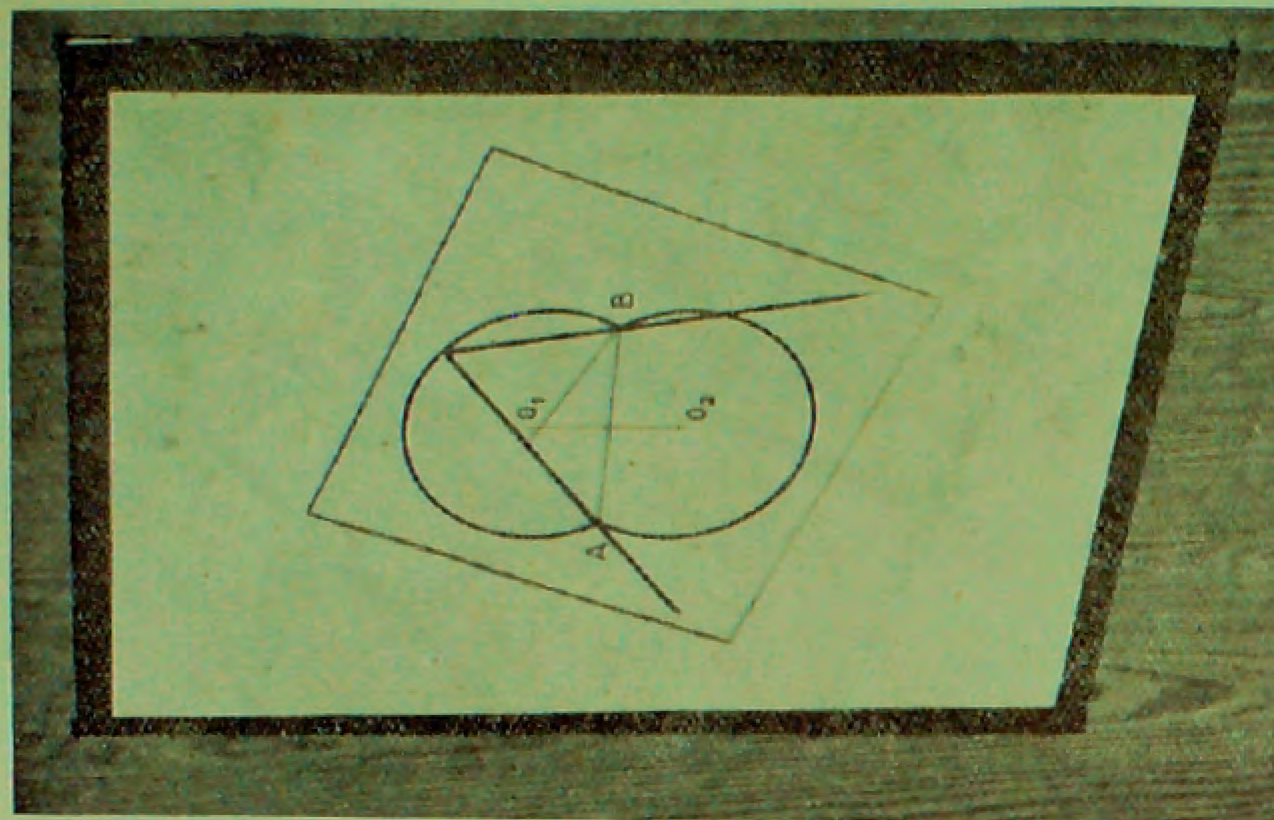


Figura 19.—Modelo realizador del arco capaz. Material plástico ranurado con guías metálicas (Biguenet-Francia).

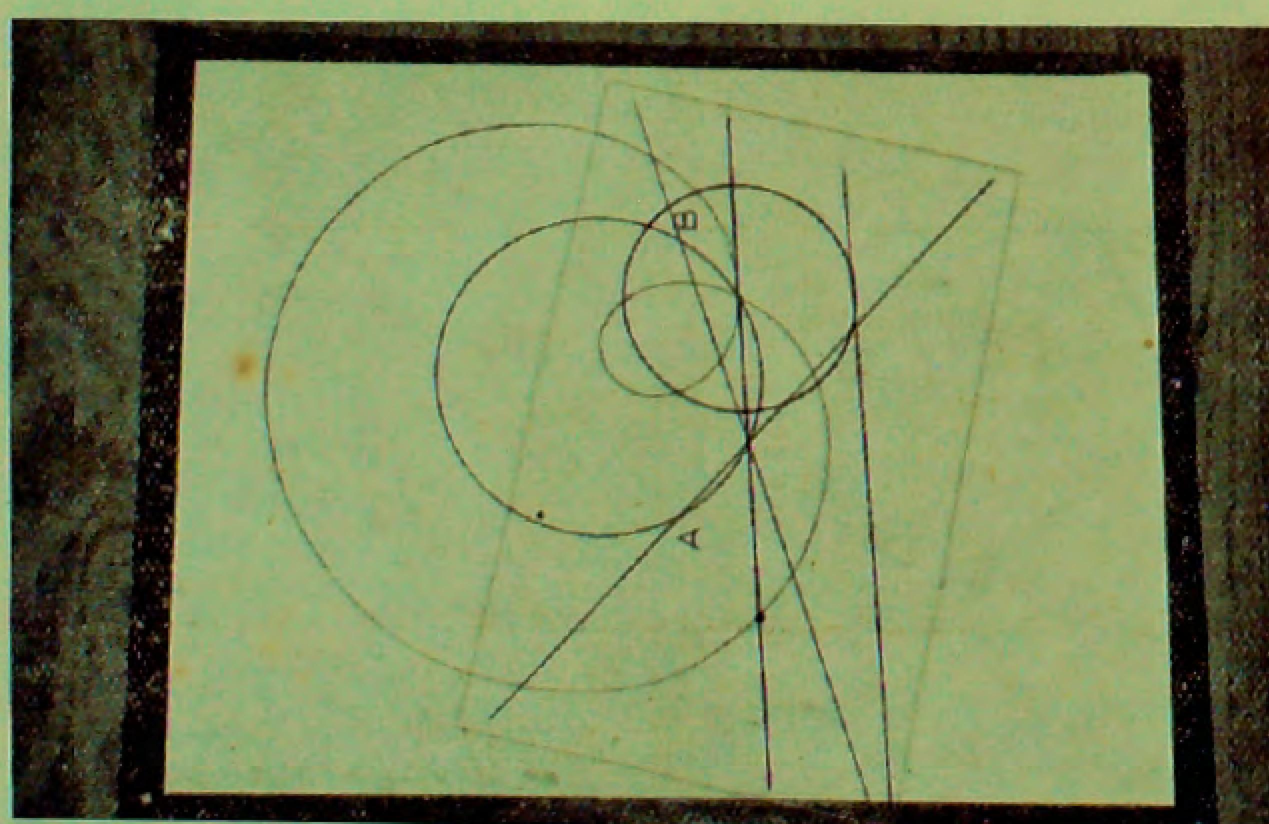


Figura 20.—Generación del caracol de Pascal (Biguenet-Francia).

Figura 21.—Secciones y descomposiciones de cuerpos geométricos en madera (Francia).

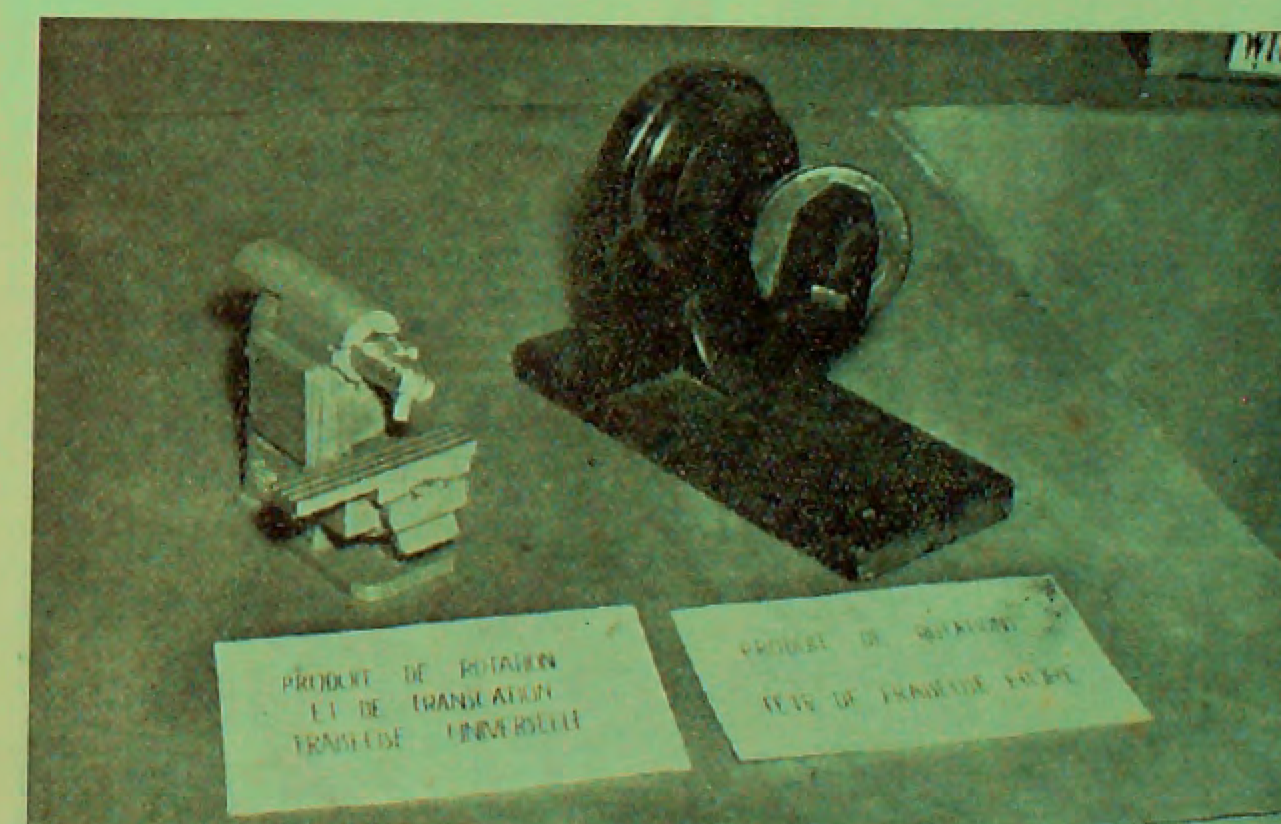


Figura 22.—Productos de movimientos espaciales en órganos de máquinas (Francia).

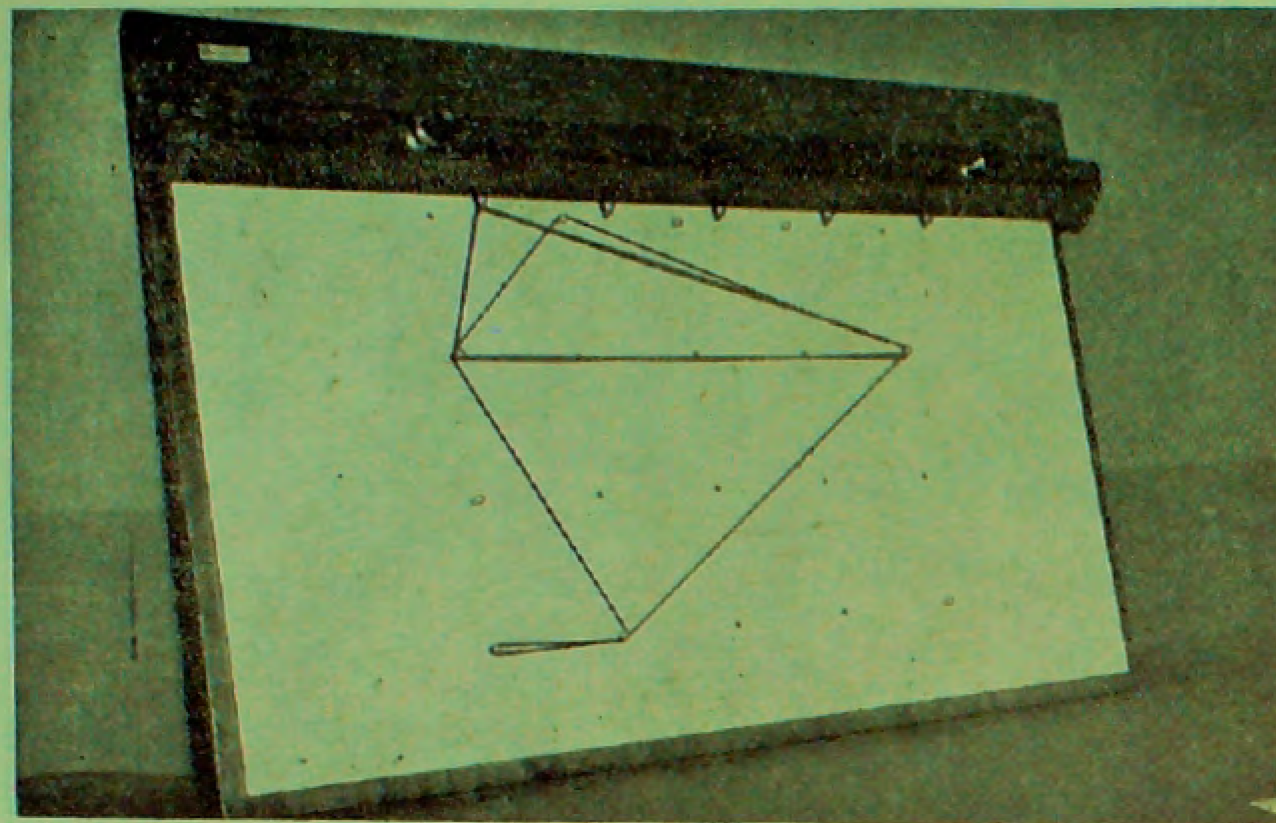


FIGURA 23.—Modelo austríaco de geoplano.

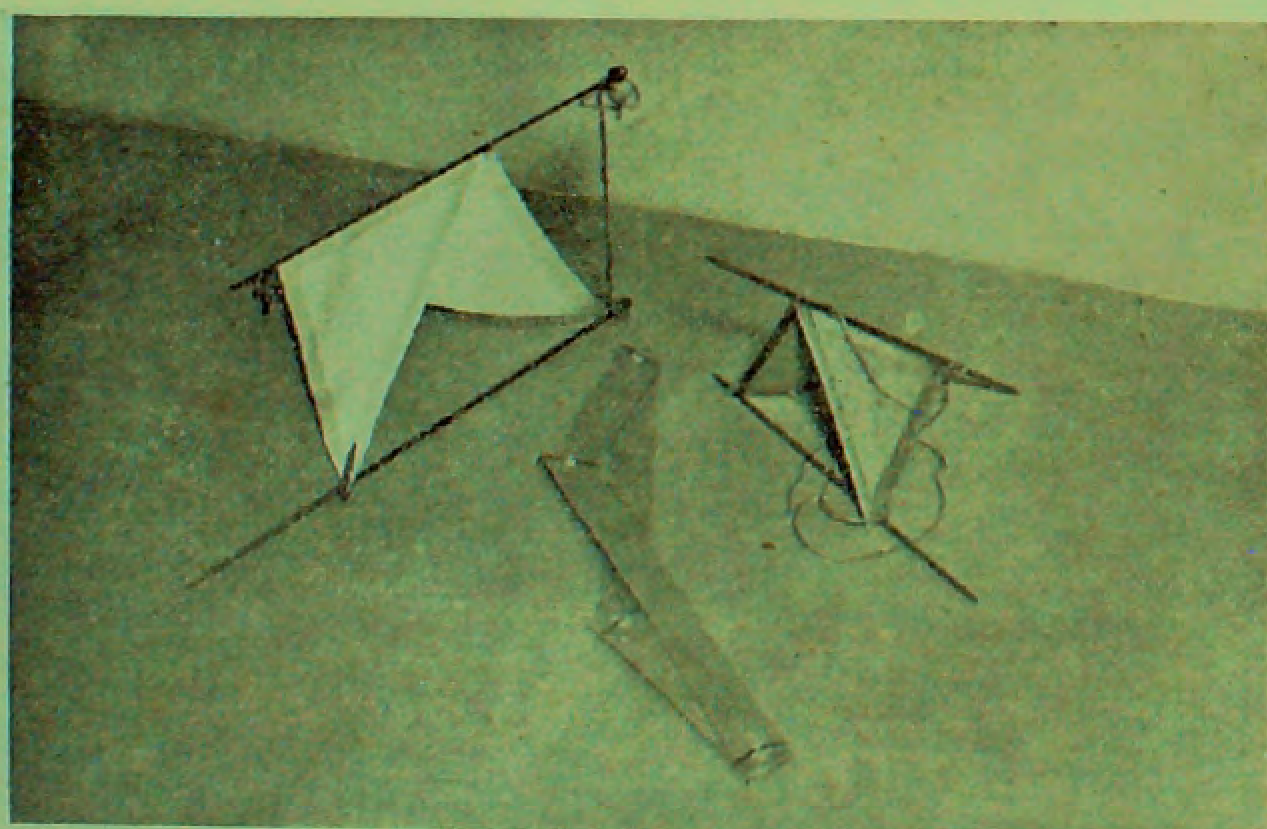


FIGURA 24.—Modelos en cartulina y tela, varillas y cuerdas para el estudio de ángulos diedros, triedros, etc. (Austria).

FIGURA 25.—El profesor Gattegno mostrando un modelo de su geoplano.

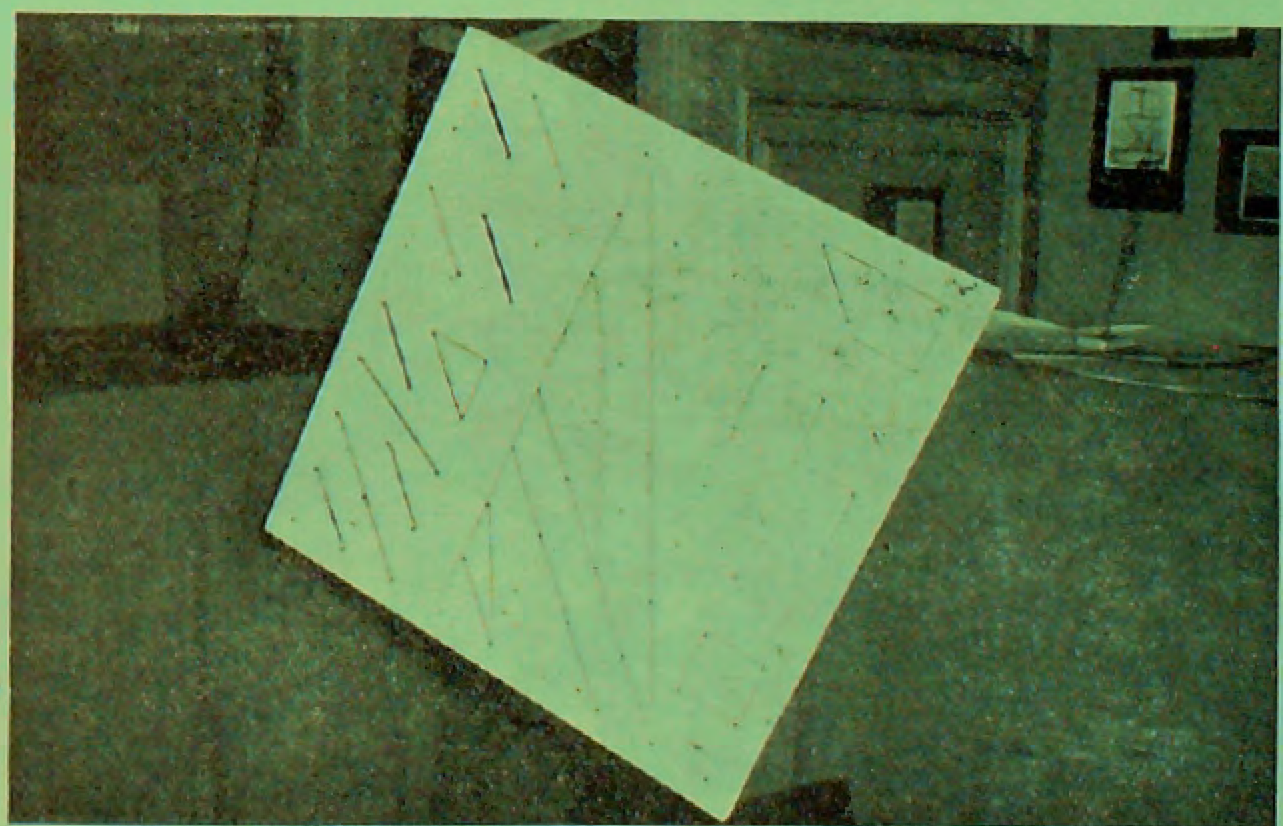


FIGURA 26.—Figuras geométricas en el geoplano del profesor Gattegno.

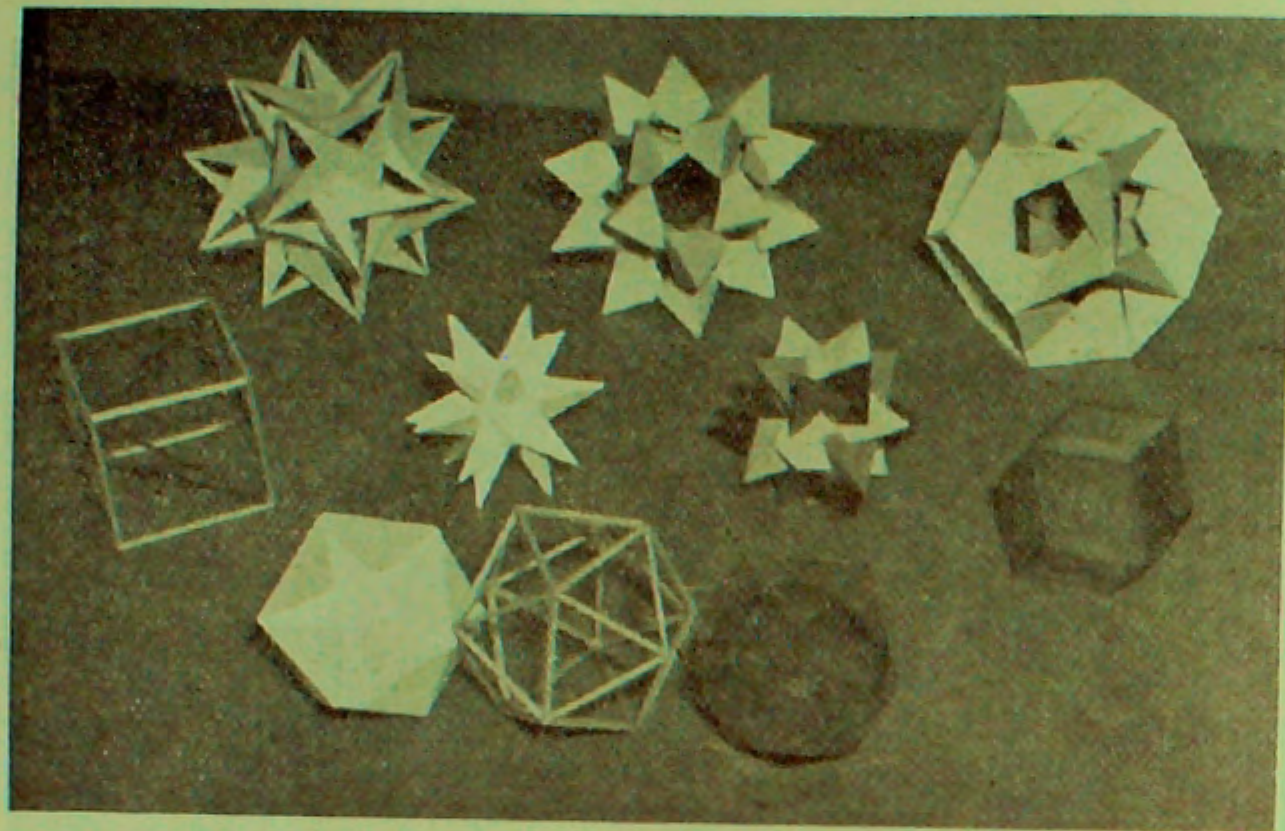


FIGURA 27.—Poliedros regulares, estrellados y derivados, construídos en cartulina, material plástico y madera (profesor Pesket-Inglaterra).

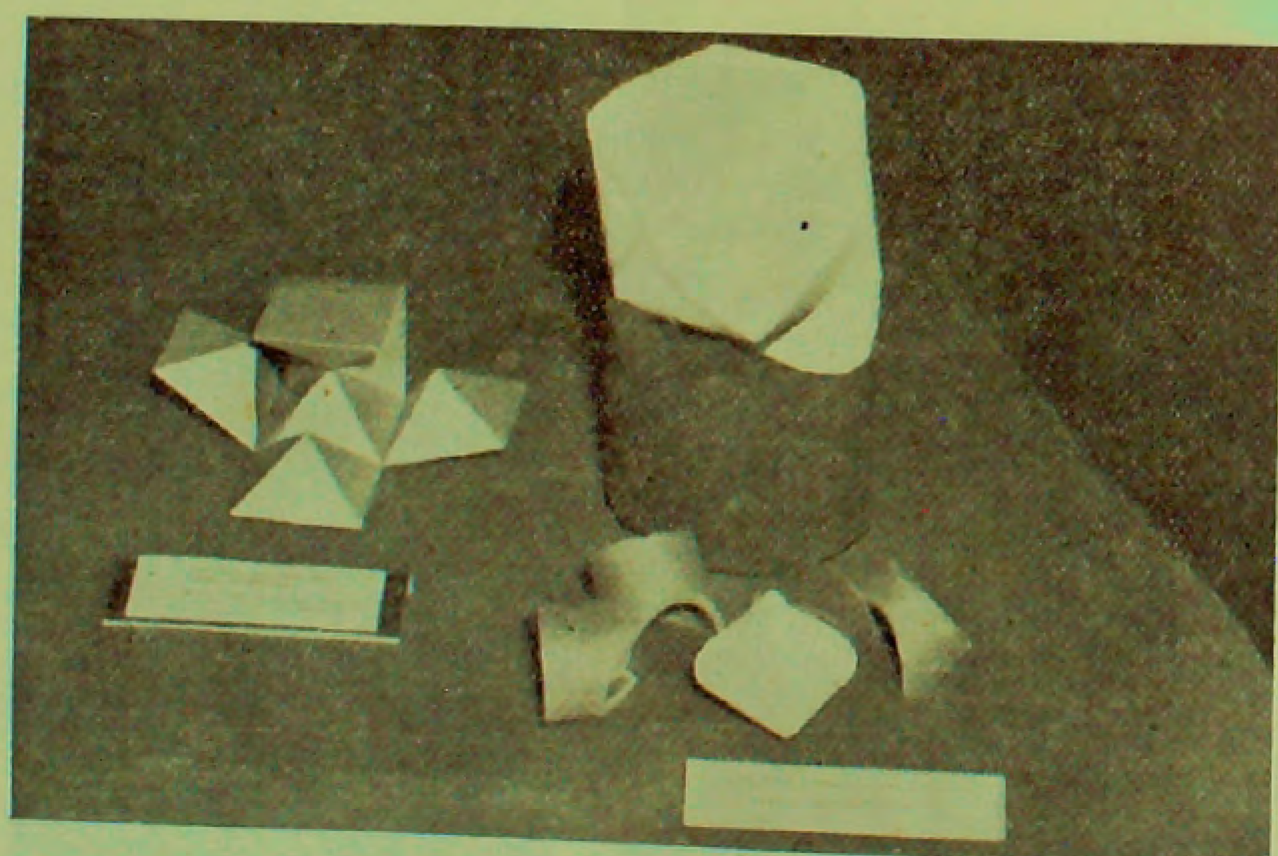


FIGURA 28.—Modelos varios del profesor Pesket (Inglaterra).

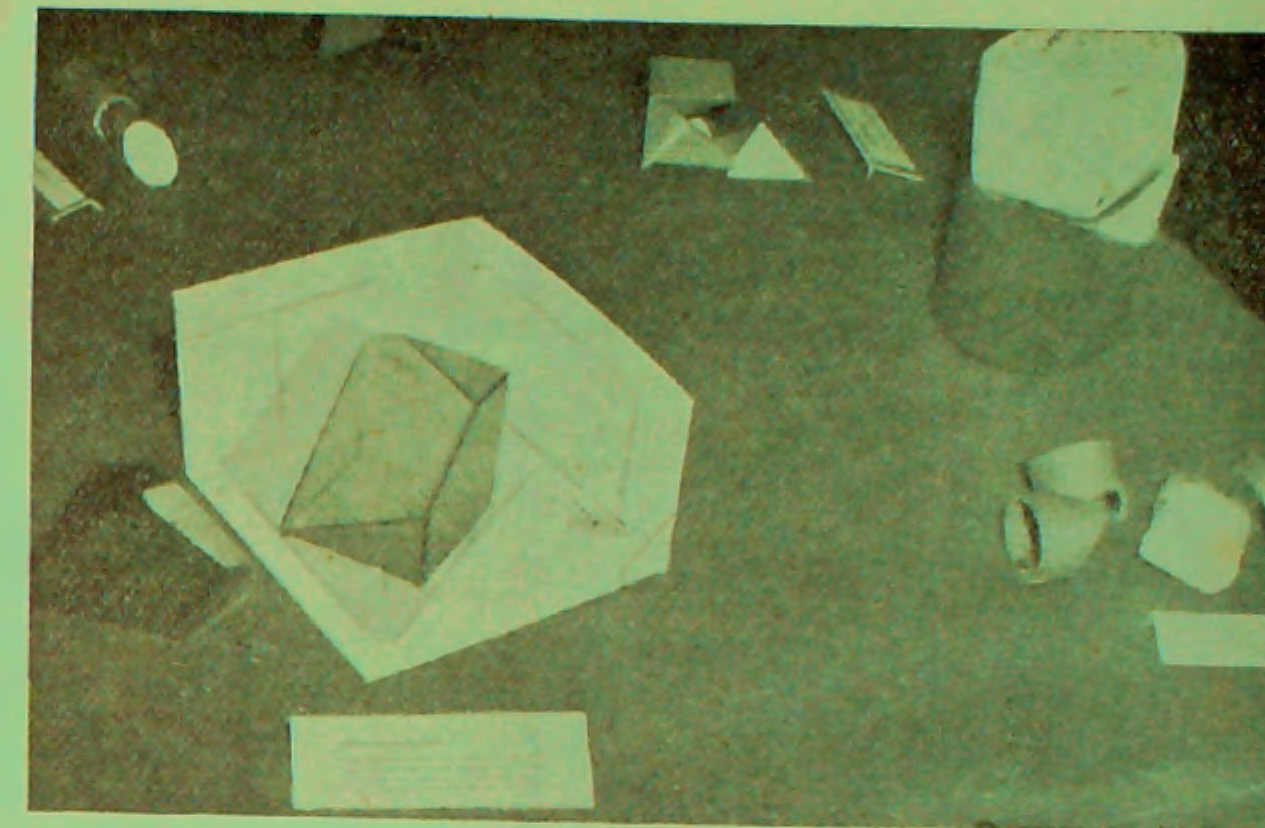


FIGURA 29.—Sección plana de un cubo y sus proyecciones. Material plástico transparente (Pesket-Inglaterra).

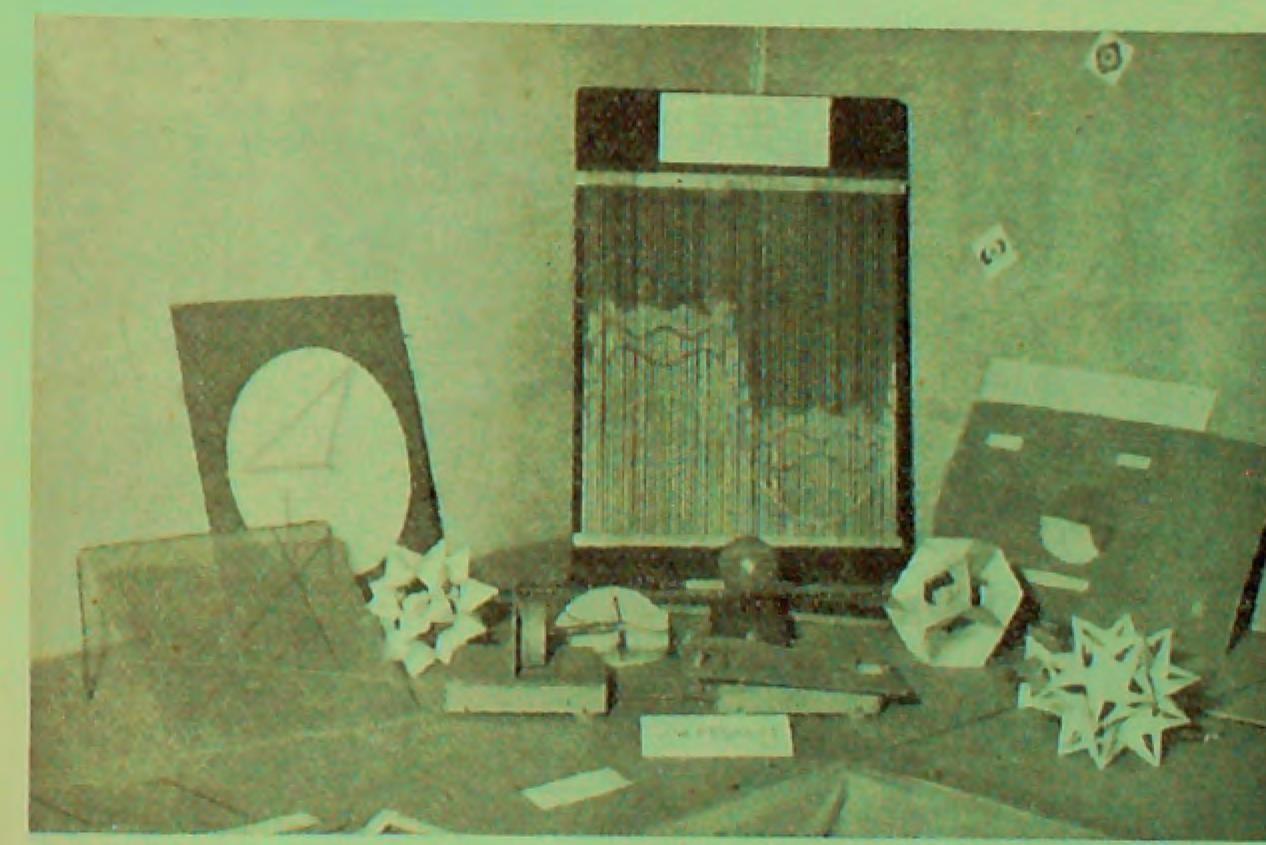


FIGURA 30.—Material didáctico matemático inglés presentado por el profesor Pesket. Al fondo, tablero para síntesis de ondas sinusoidales. Sobre la mesa una diminuta esfera terrestre transparente para ilustrar las proyecciones geográficas, y una catapulta para ilustrar la conservación de la cantidad de movimiento.

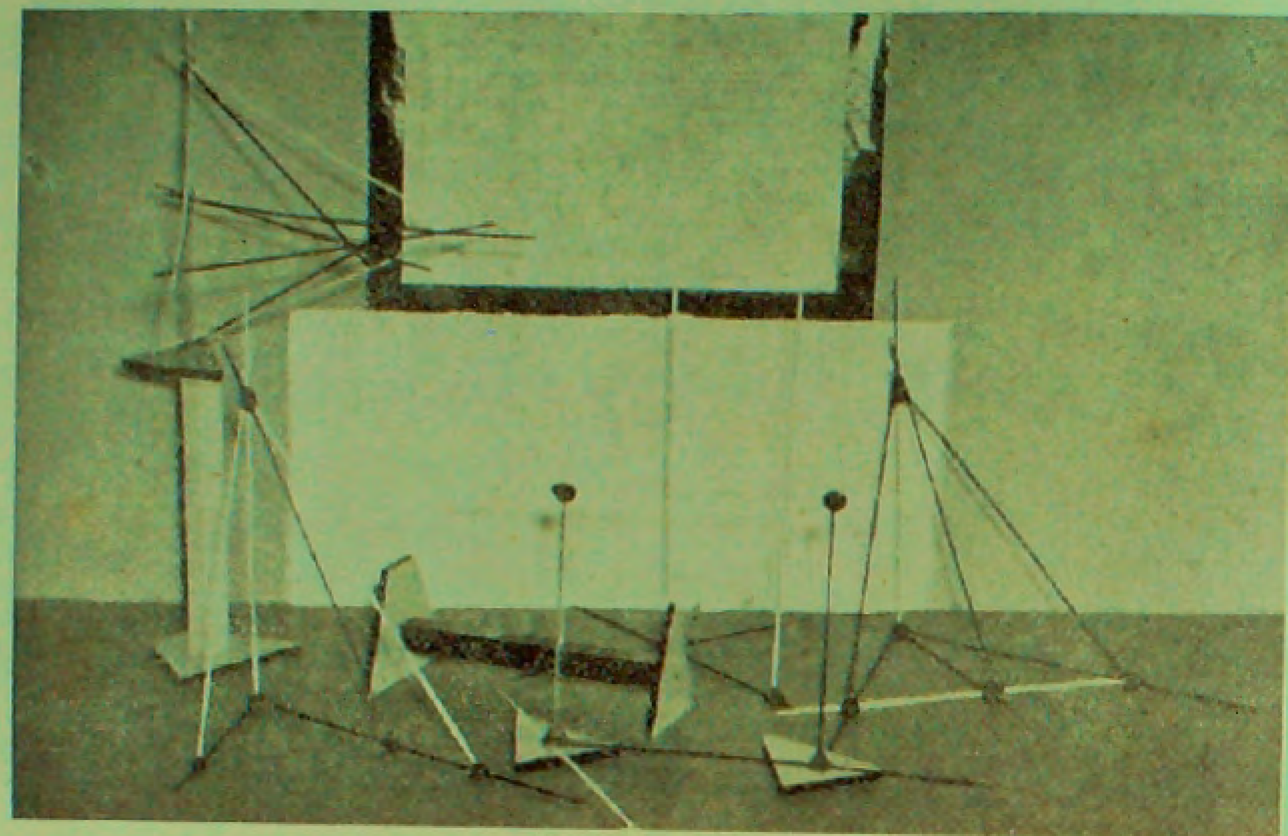


FIGURA 31.—Realización de figuras espaciales con plastilina y varillas (Bélgica).

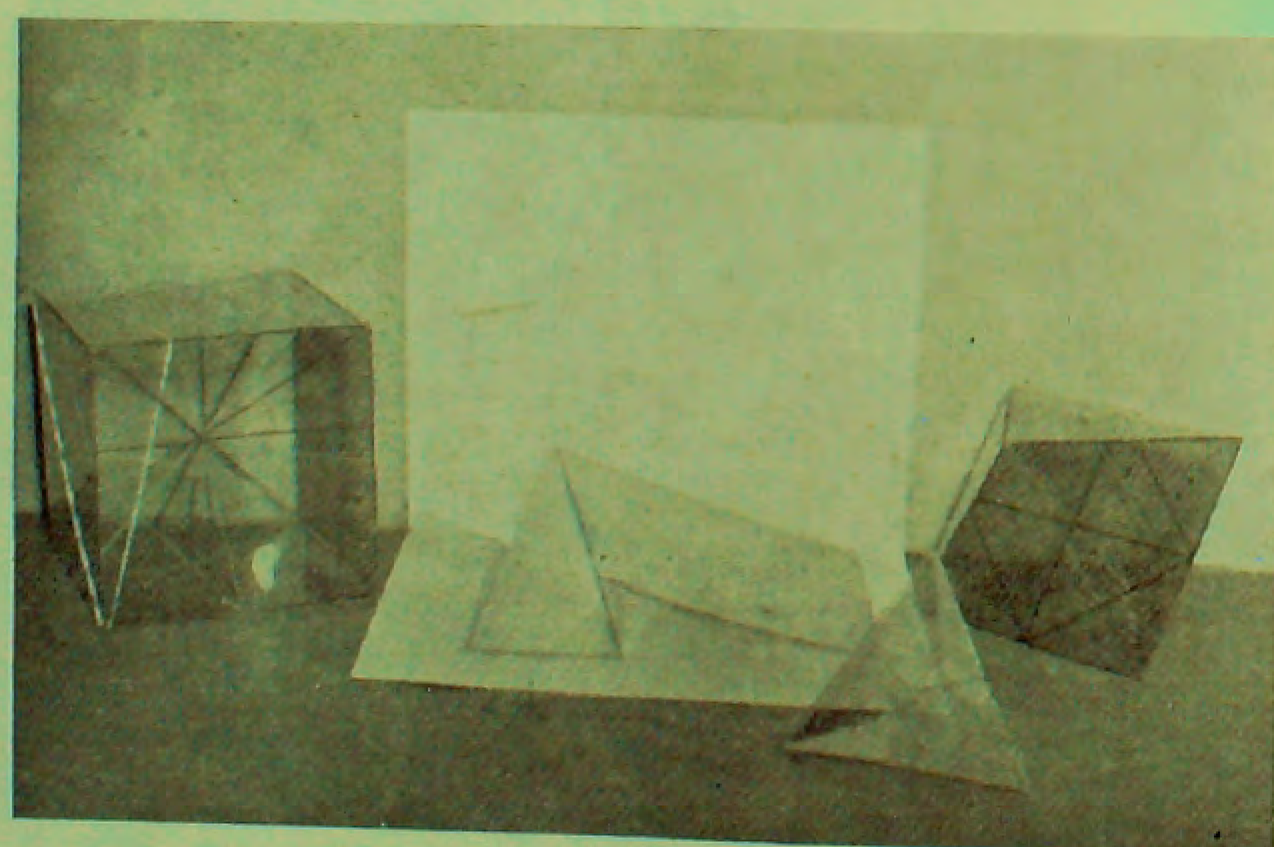


FIGURA 32.—Poliedros semirregulares obtenidos por truncadura. Plástico y cartulina (Bélgica).

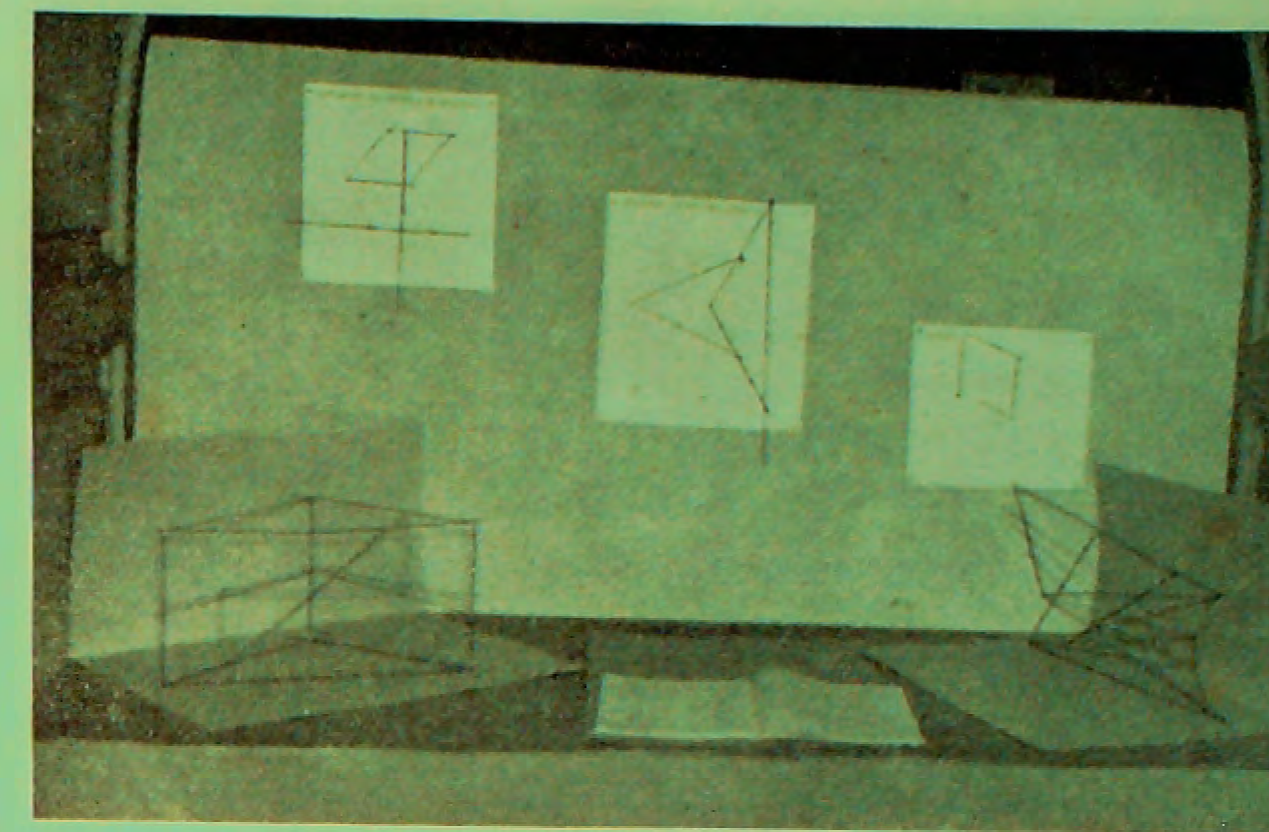


FIGURA 33.—Modelos dinámicos realizadores de transformaciones geométricas varias: traslación, inversión, polaridad. Material: piezas de alambre articuladas y deslizantes (Bosteels-Bélgica).

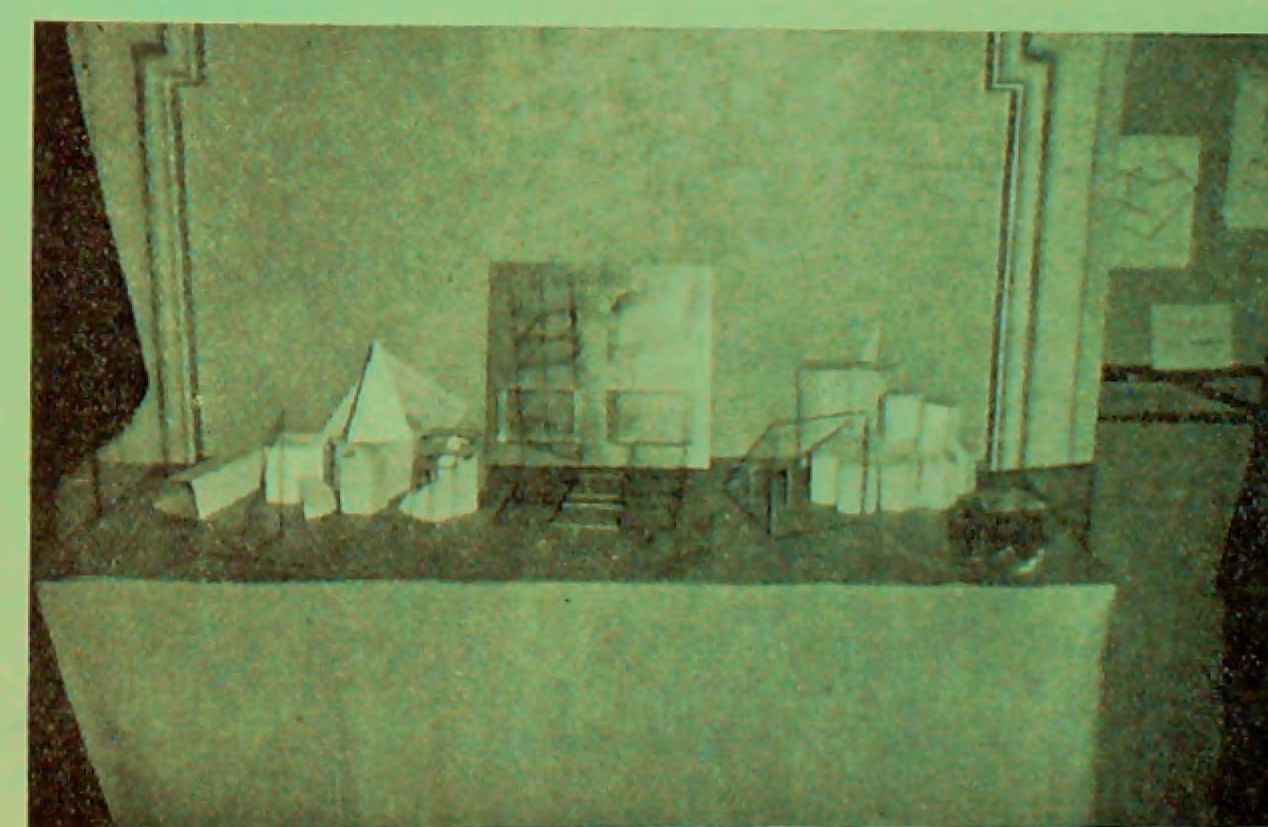


FIGURA 34.—Modelos estáticos varios: equivalencia de prismas, descomposición. Celdillas de abejas. Material: plástico, cartulina y varillas (Bélgica).

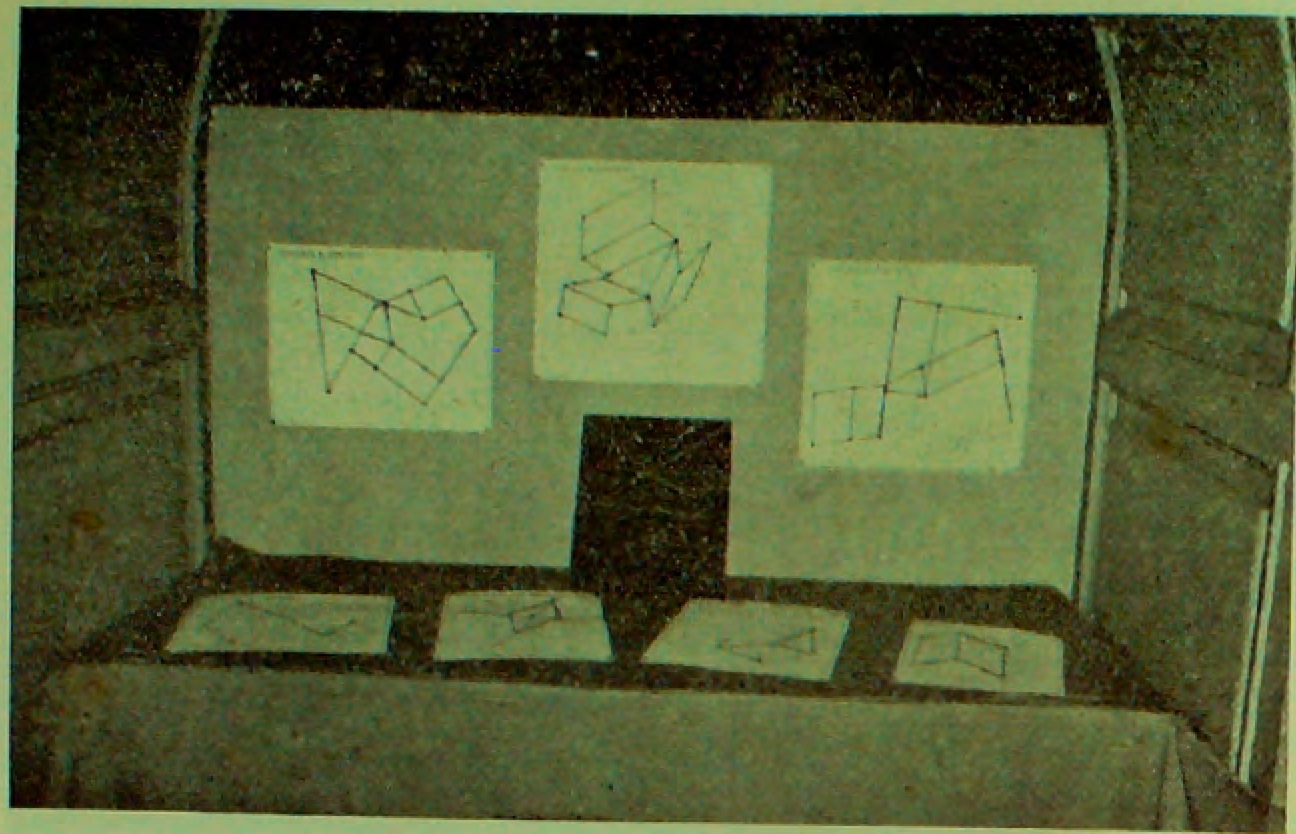


FIGURA 35.—Modelos dinámicos para ilustrar transformaciones geométricas varias: traslaciones, giros, semejanzas, homotecias y sus productos (Bosteels-Bélgica).

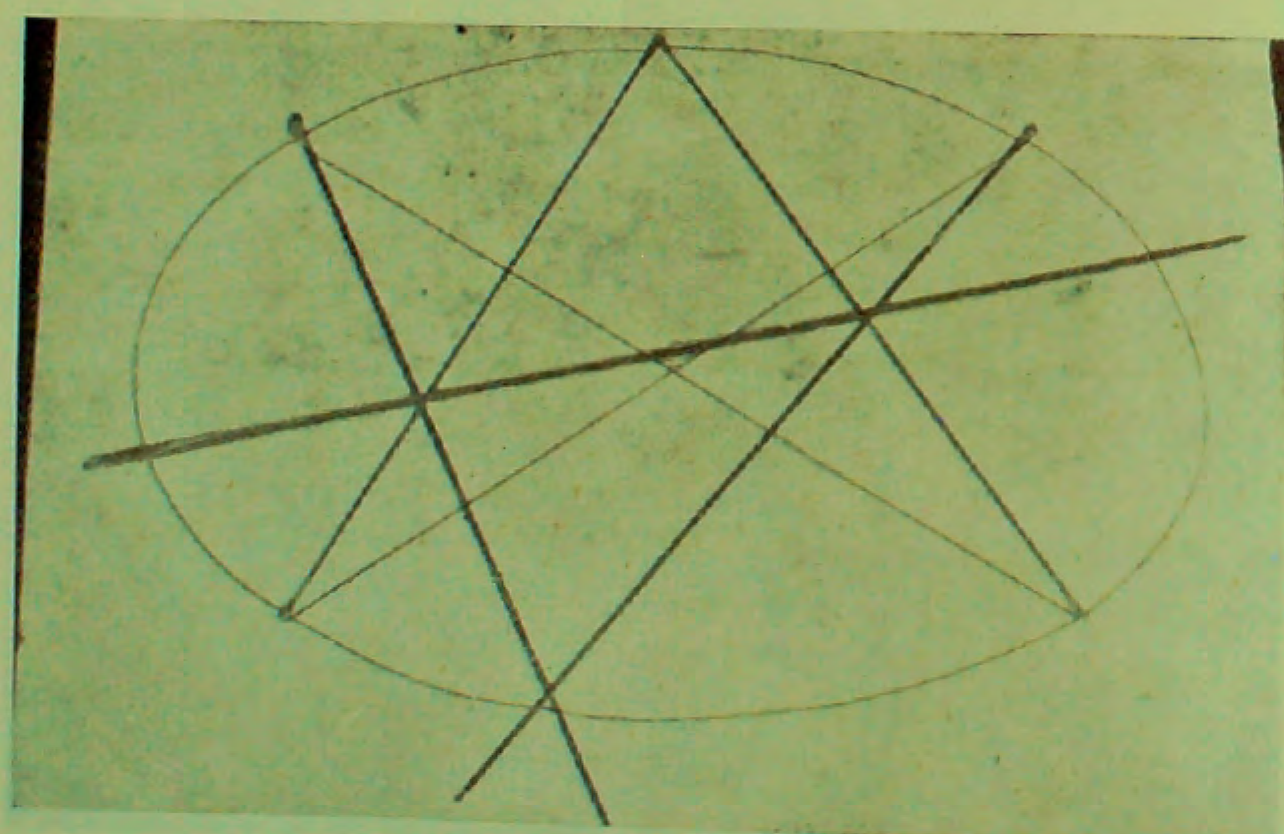


FIGURA 36.—Modelo dinámico para ilustrar la generación proyectiva de las cónicas. Varillas articuladas y deslizantes (Servais-Bélgica).

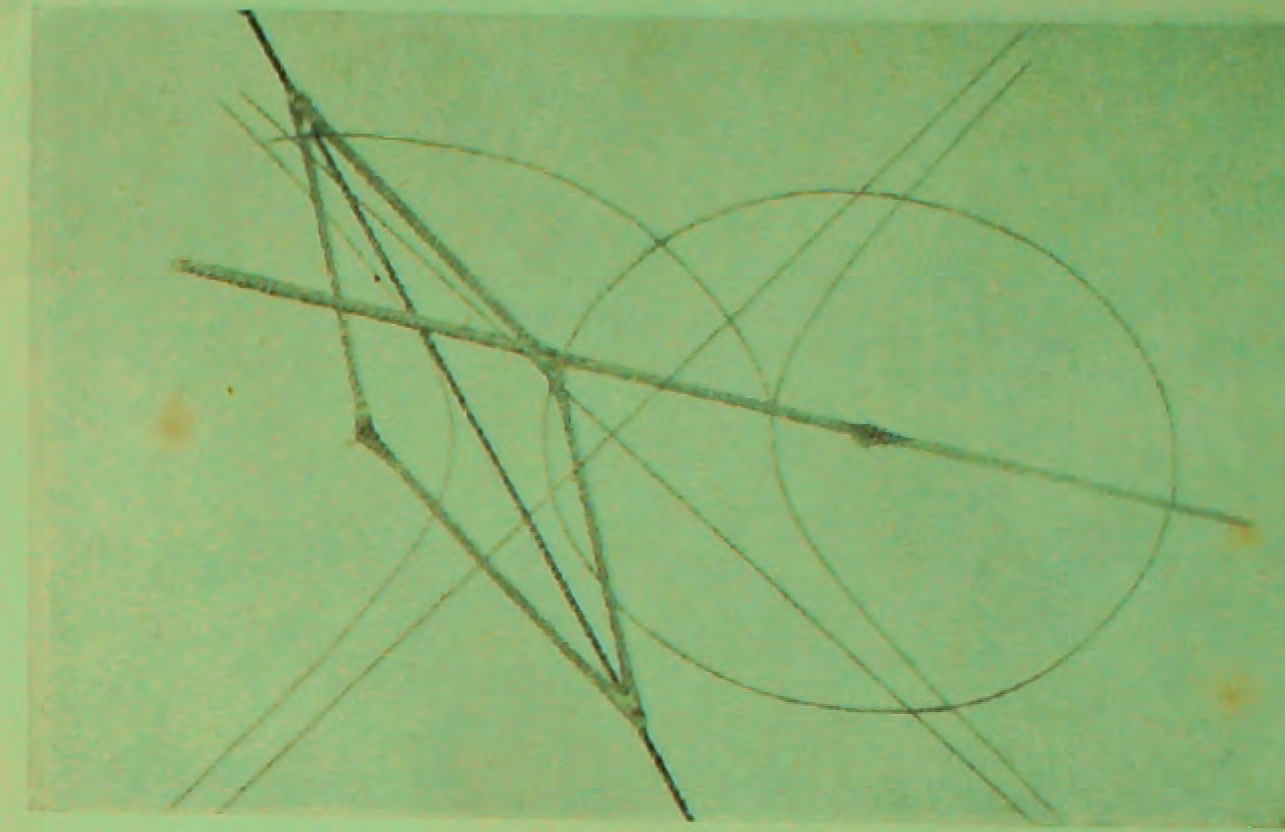


FIGURA 37.—Generación puntual y tangencial de la hipérbola (Servais-Bélgica).

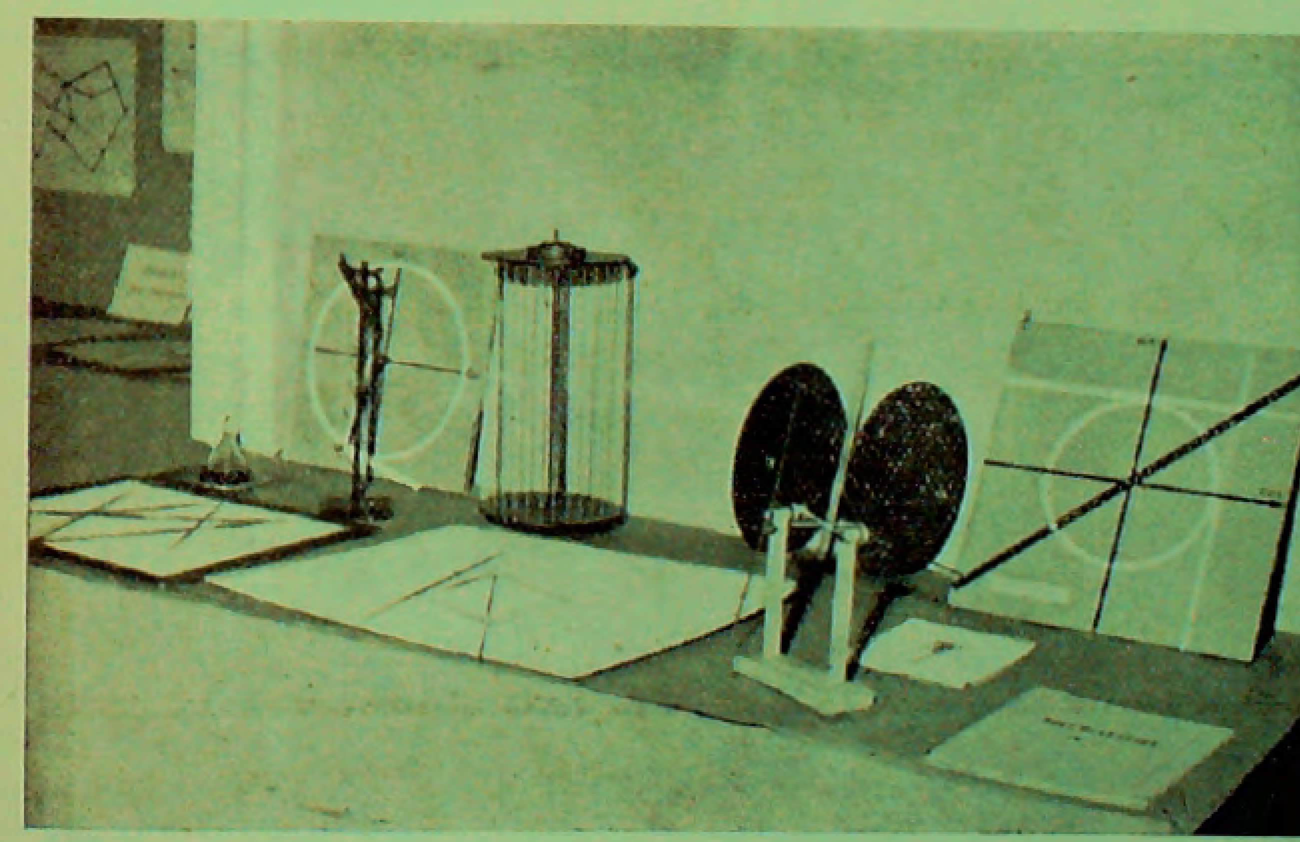


FIGURA 38.—Material belga variado. Sobre el plano de la mesa, generación de cónicas. De pie: cilindro transformable en hiperboloide y cono. Variación de funciones trigonométricas. Intersección de haces iguales. Rodadura de elipses, etc.

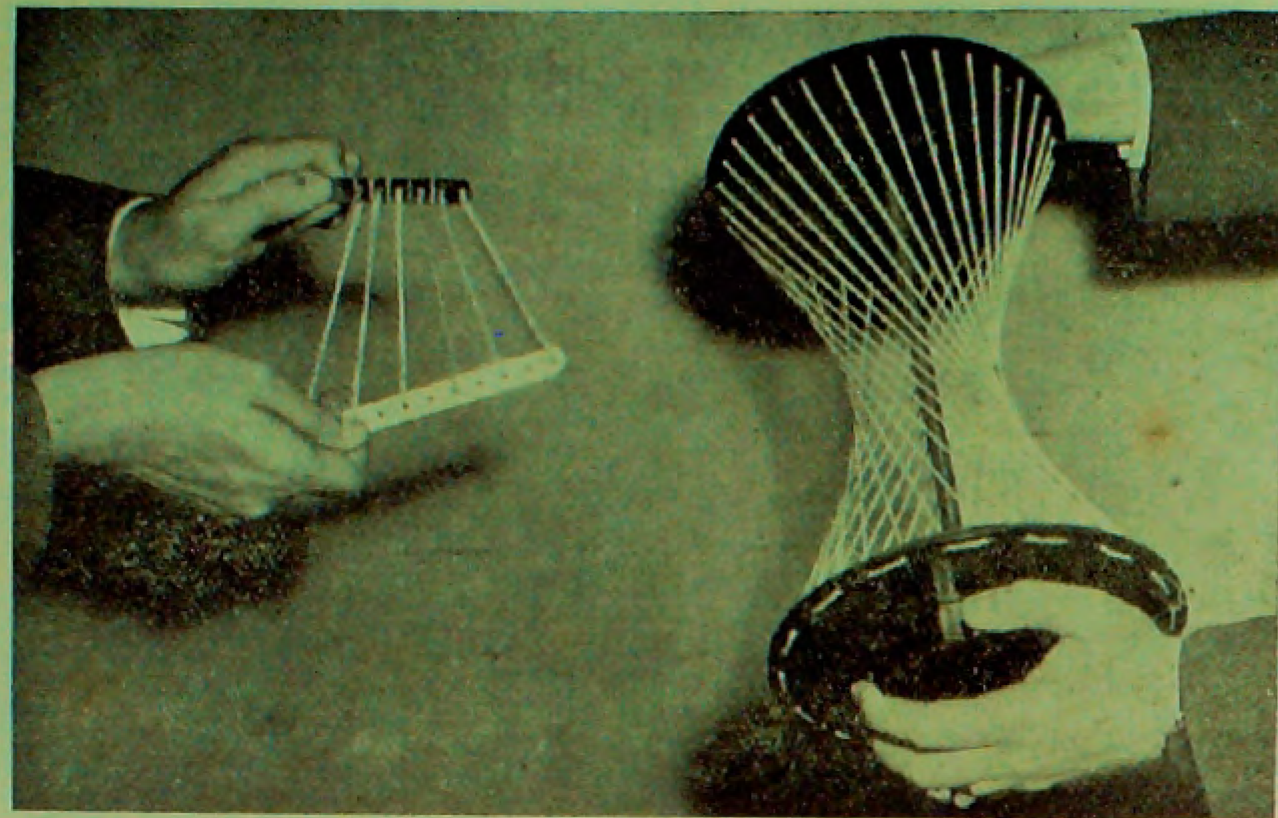


FIGURA 39.—Modelos generadores de cuádricas regladas. A la derecha, el cilindro de la figura anterior transformado en hiperboloide. A la izquierda, parboloide hipubólico obtenido por unión de series semejantes (Bélgica).

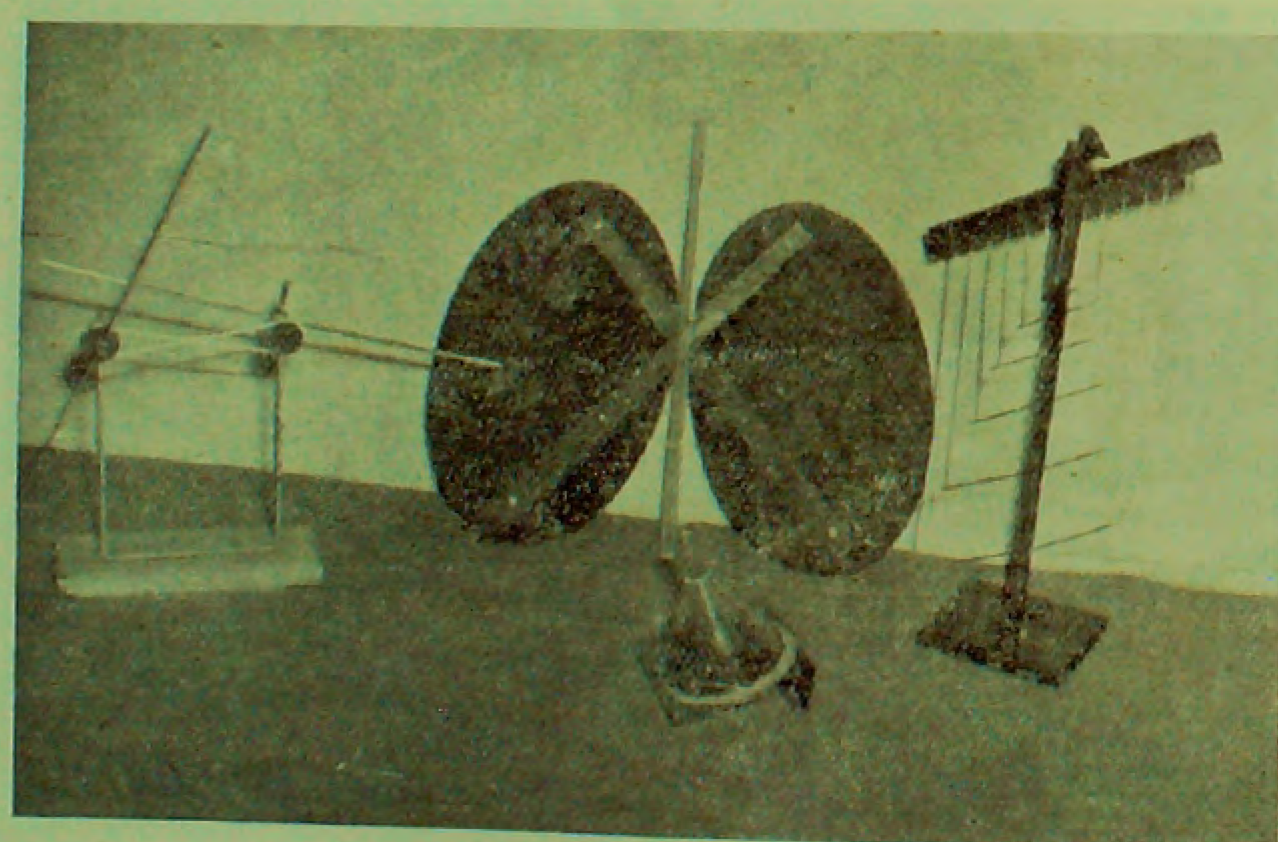


FIGURA 40.—Detalle ampliado de la figura 38. Generación de la circunferencia e hipérbola equilátera por intersección de haces iguales. Rodadura de elipses. Cónicas en la superficie libre del agua en un cono. Parábolas y su transformación afín (Bélgica).

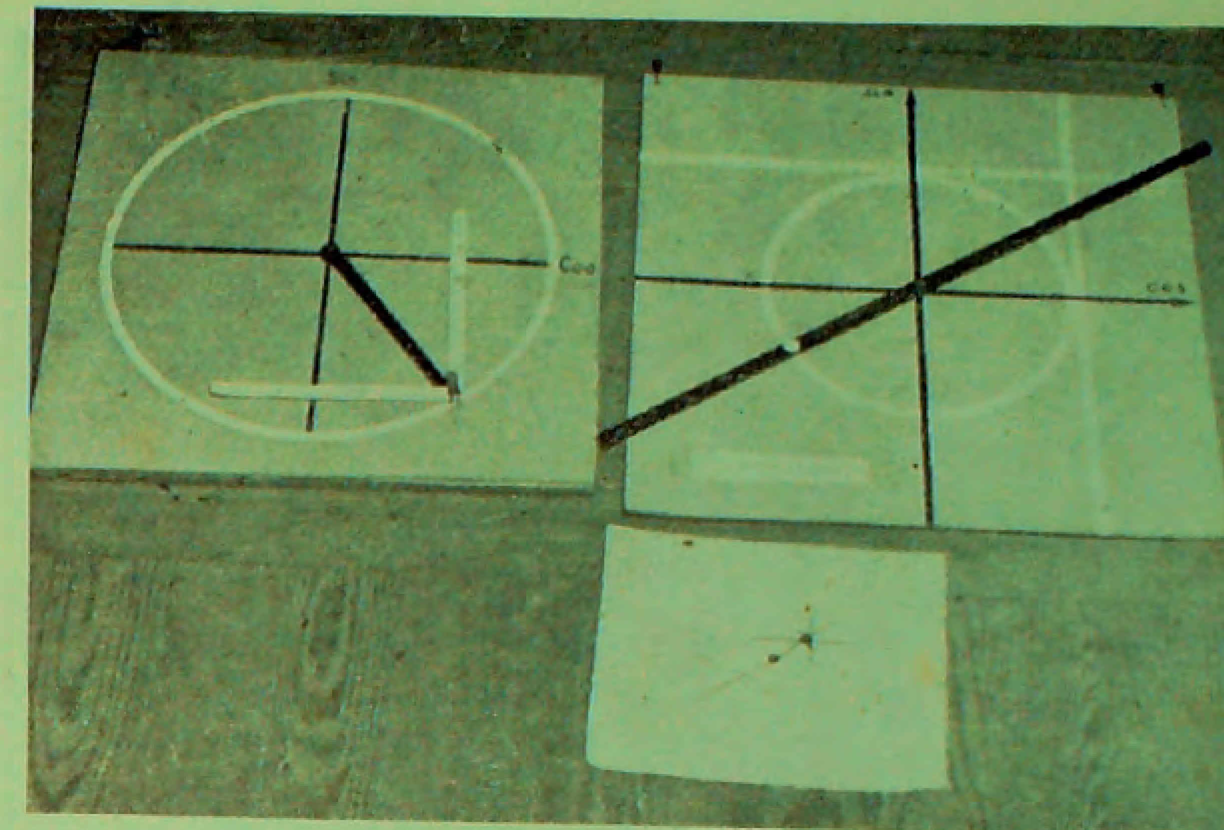


FIGURA 41.—Círculos trigonométricos. Madera y cartulina (Bélgica).

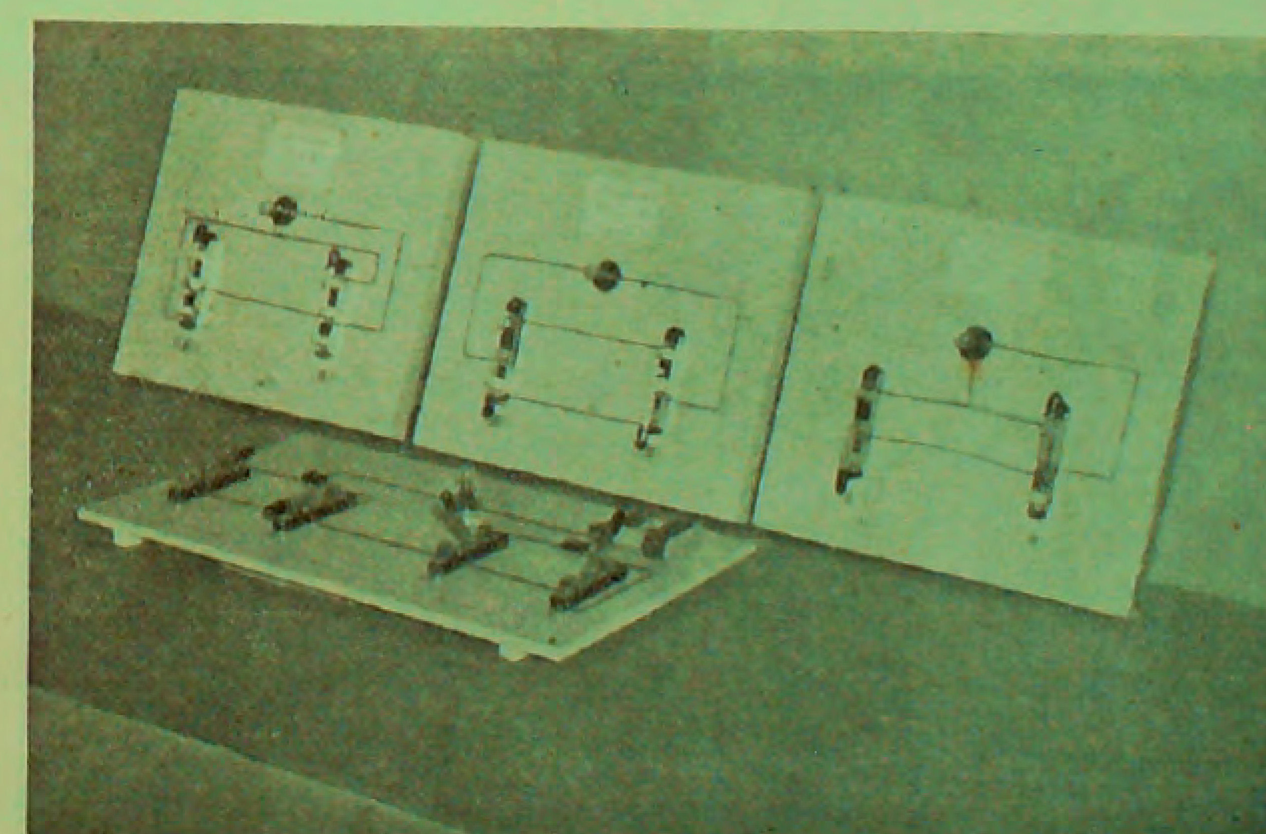


FIGURA 42.—Relaciones lógicas realizadas mediante circuitos (Servais - Bélgica).

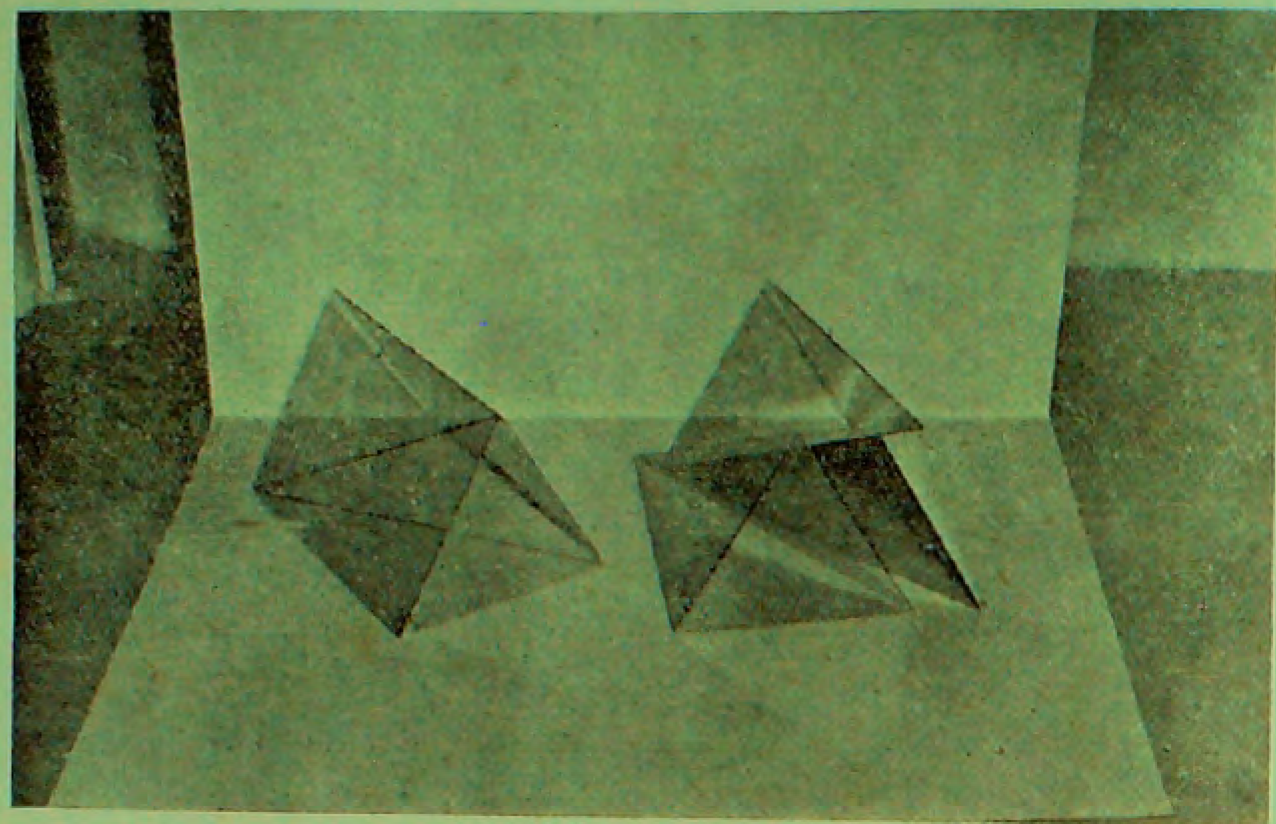


FIGURA 43.—Descomposición del prisma triangular en tres tetraedros (acetato de celulosa) (Bélgica).

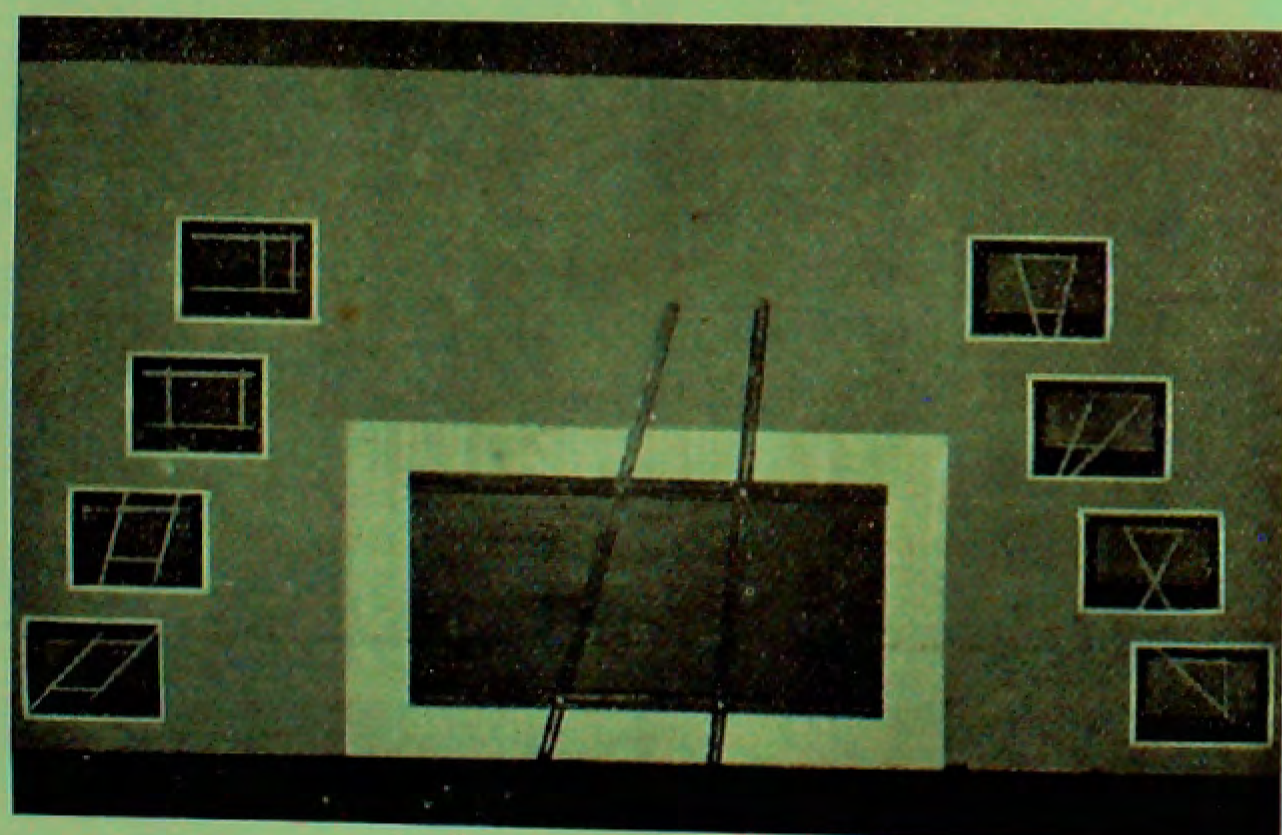


FIGURA 44.—Construcción dinámica de cuadriláteros con varillas articuladas y deslizantes (Bélgica).

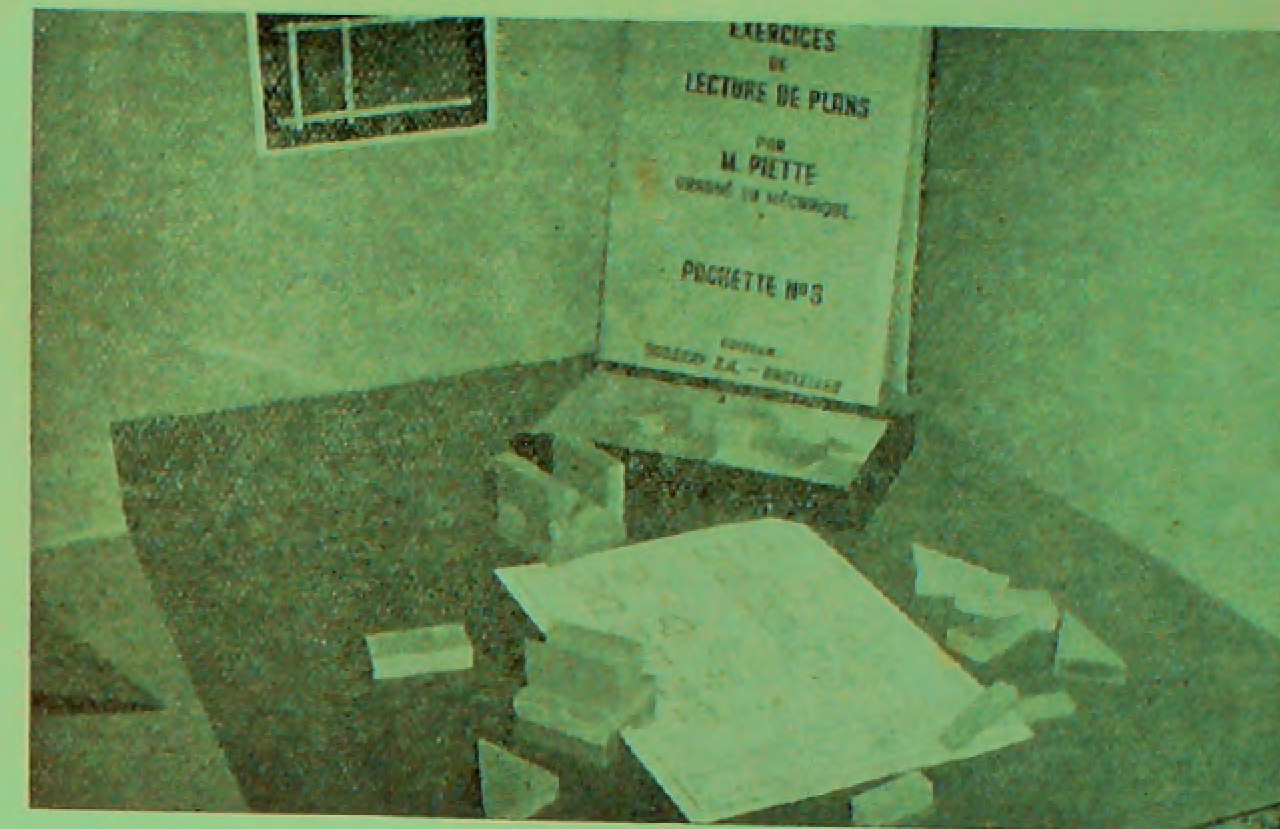


FIGURA 45.—Piezas de madera para ejercicios de lecturas de planos (Piette-Bélgica).

FIGURA 46.—Mosaicos varios obtenidos con polígonos regulares (profesora Carleer-Bélgica).

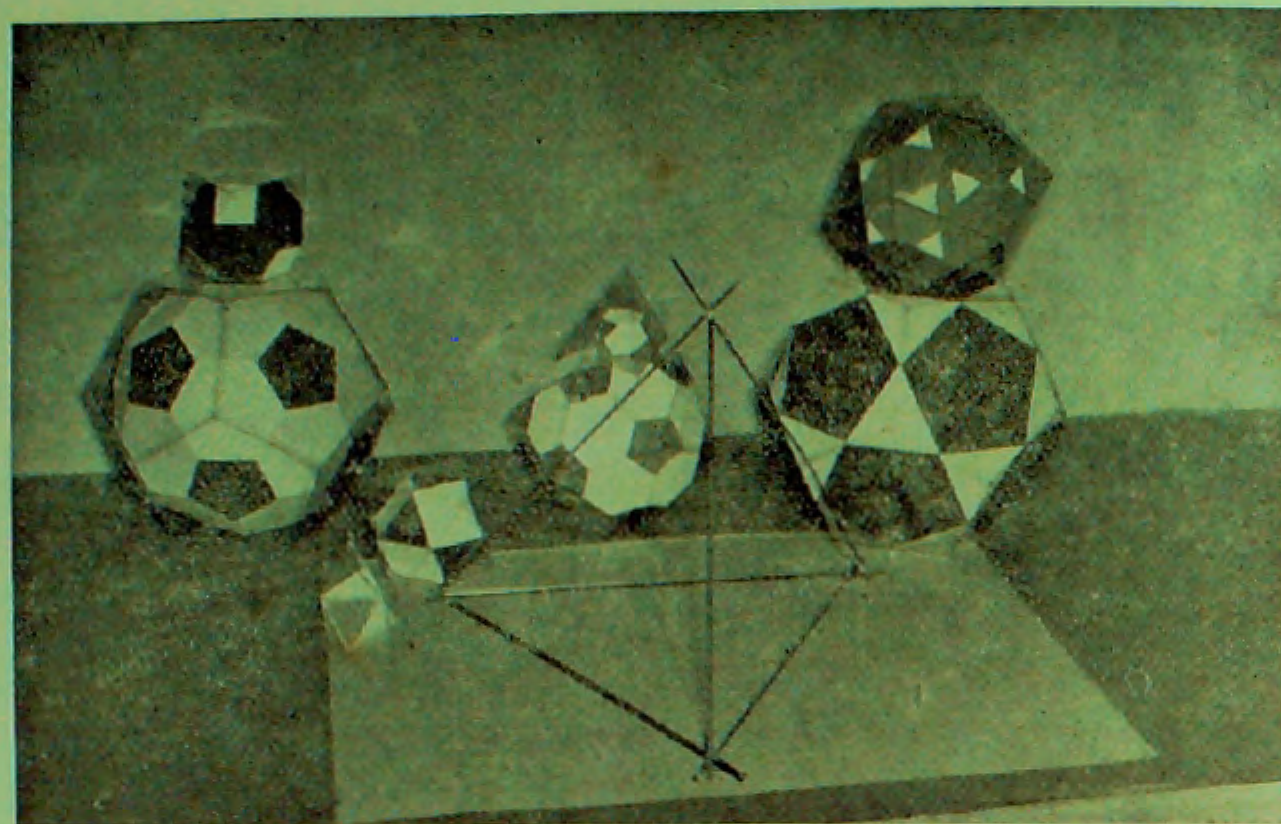


FIGURA 47.—Poliedros regulares y semirregulares en plástico y cartulina (Carleer-Bélgica).

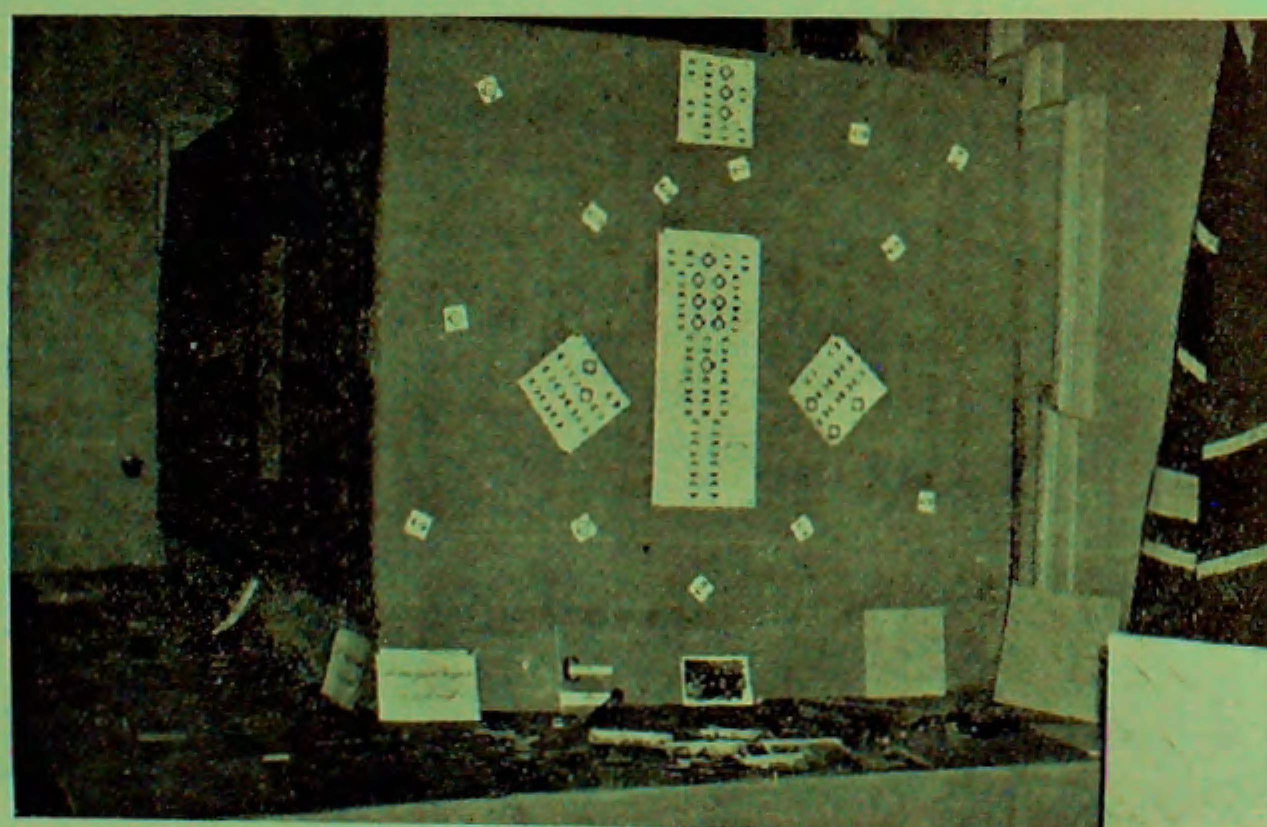


FIGURA 48.—Material Cuisenaire. Números en color.

FIGURA 49.—El profesor Gattegno explicando el material Cuisenaire al Ilustrísimo Señor Don Joaquín Tena, Director General de Primera Enseñanza.

FIGURA 50.—El profesor Servais mostrando el material belga a los Directores Generales de Enseñanza Primaria y Técnica.

FIGURA 51.—El material presentado por don Manuel González Diéguez.

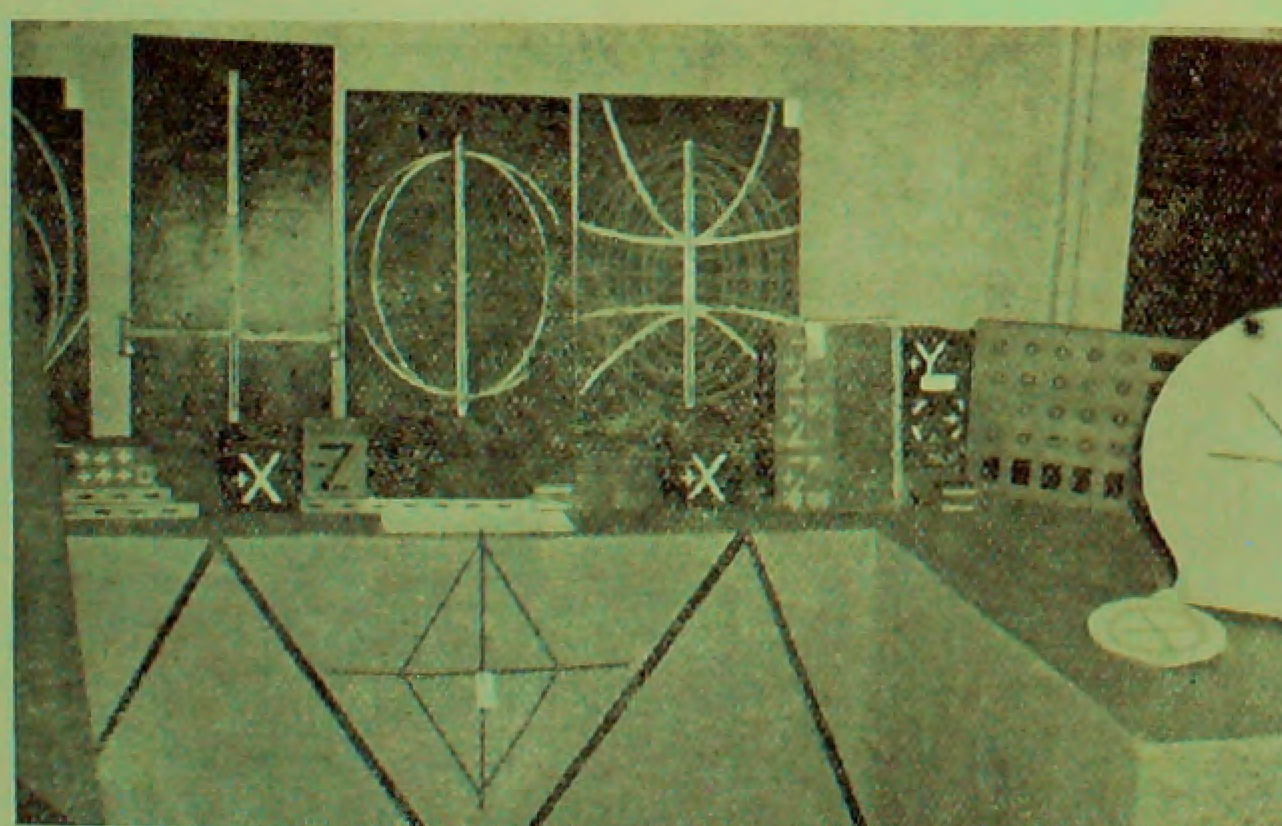


FIGURA 52.—Material presentado por don Manuel González Diéguez (Instituto Laboral de Ribadavia).

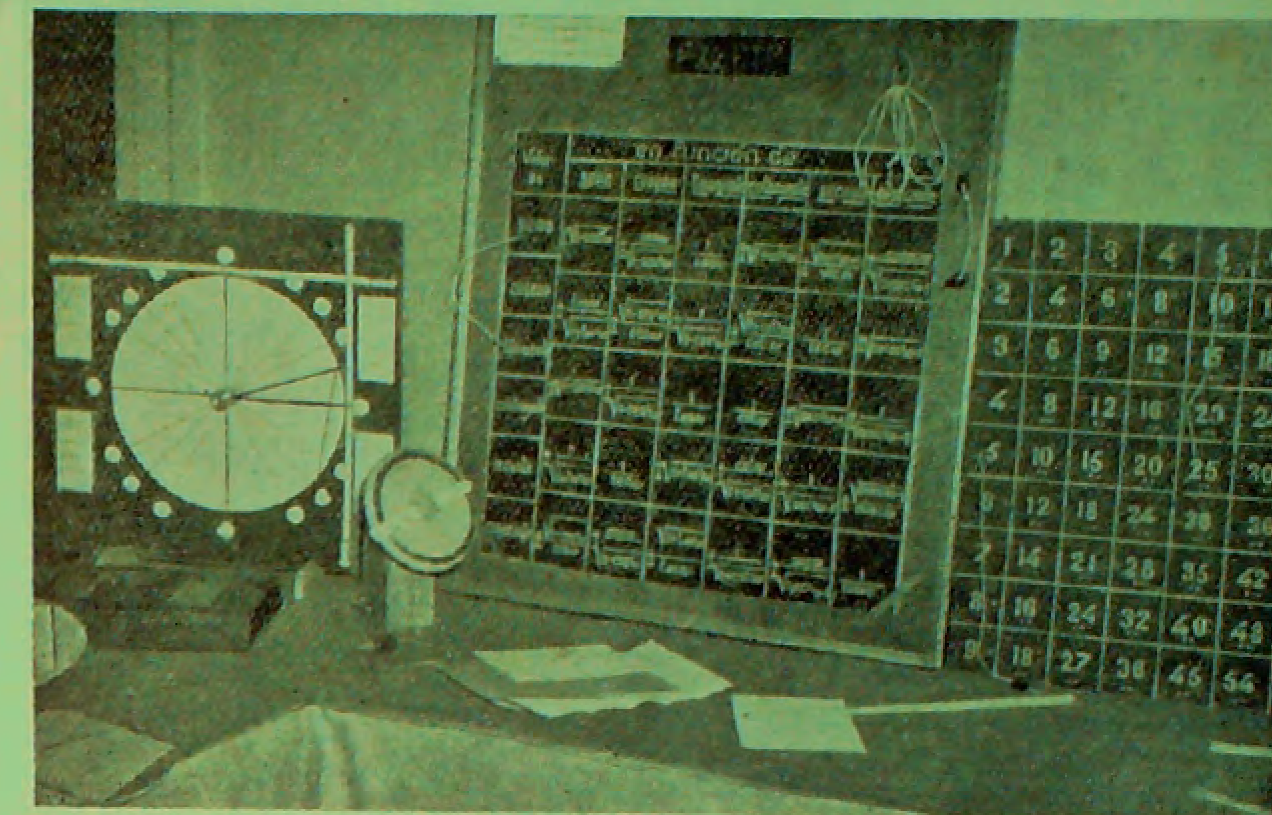


FIGURA 53.—Material presentado por don Julián Delgado (Instituto Laboral de Amurrio); doña María del Pilar Pinedo (Instituto Laboral del Valle de Carranza) y don Juan Bel (Amposta).

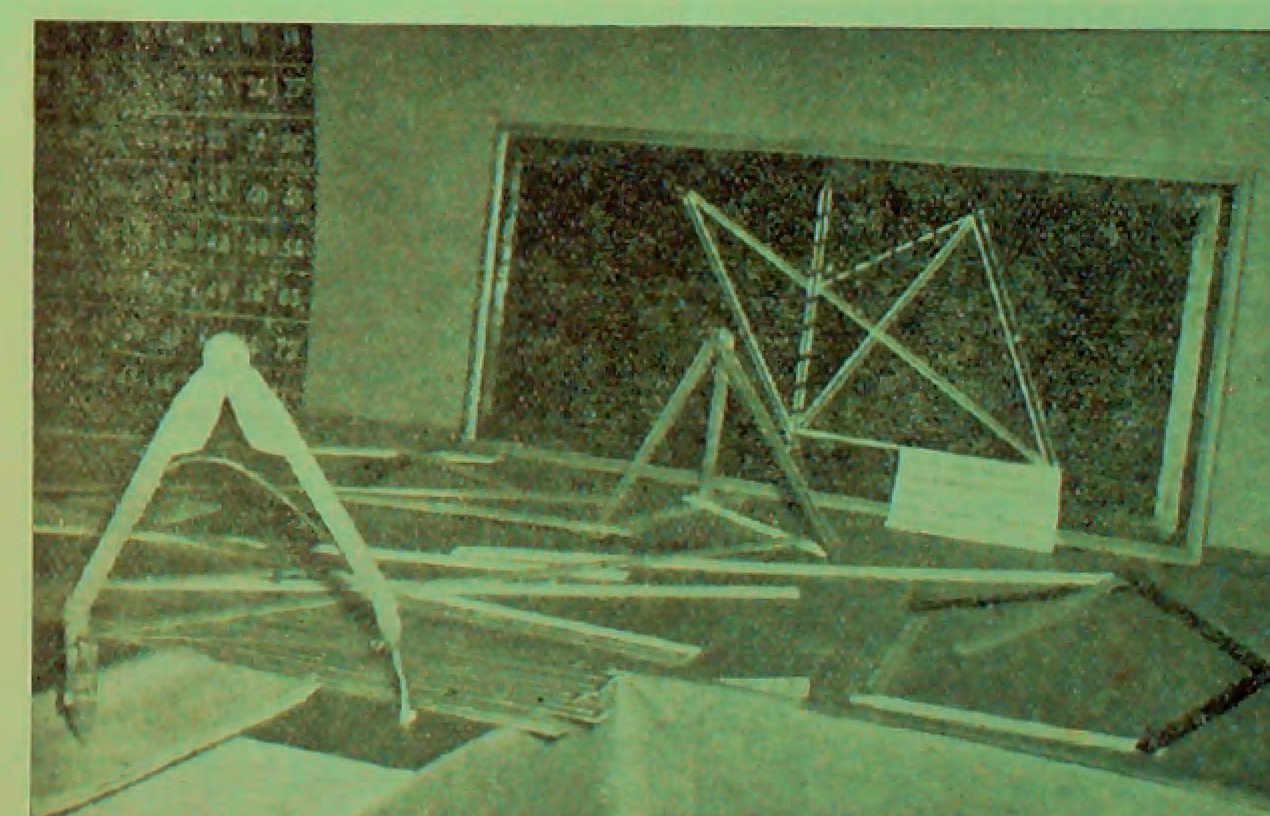


FIGURA 54.—Material presentado por don Julián Delgado y don Juan Fernández (Instituto Laboral de Ayamonte, Huelva).

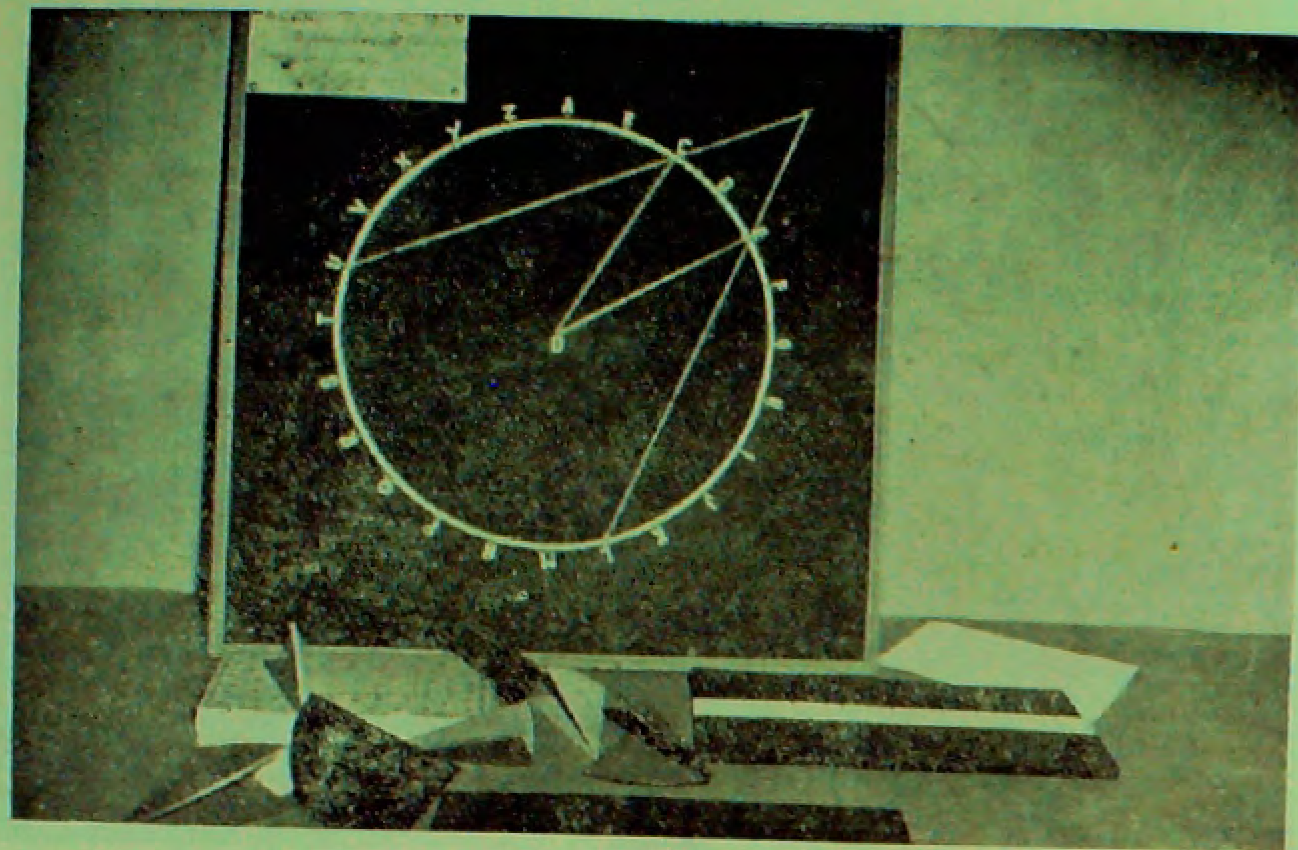


FIGURA 55.—Material presentado por don Julián Delgado (Amurrio).

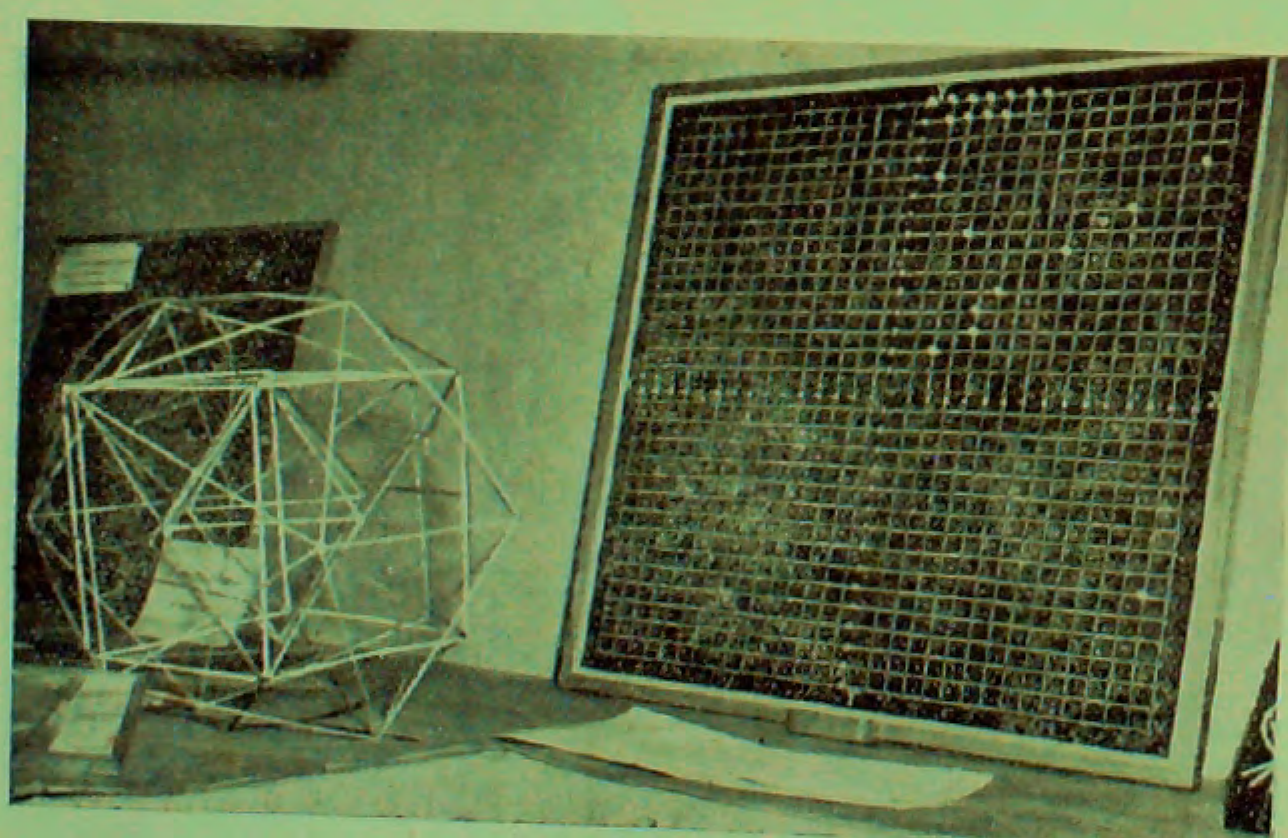


FIGURA 56.—Material presentado por los profesores don Manuel Pérez Guajardo (Lebrija) y don Pedro M. Castro Rodrigo (Alcira).

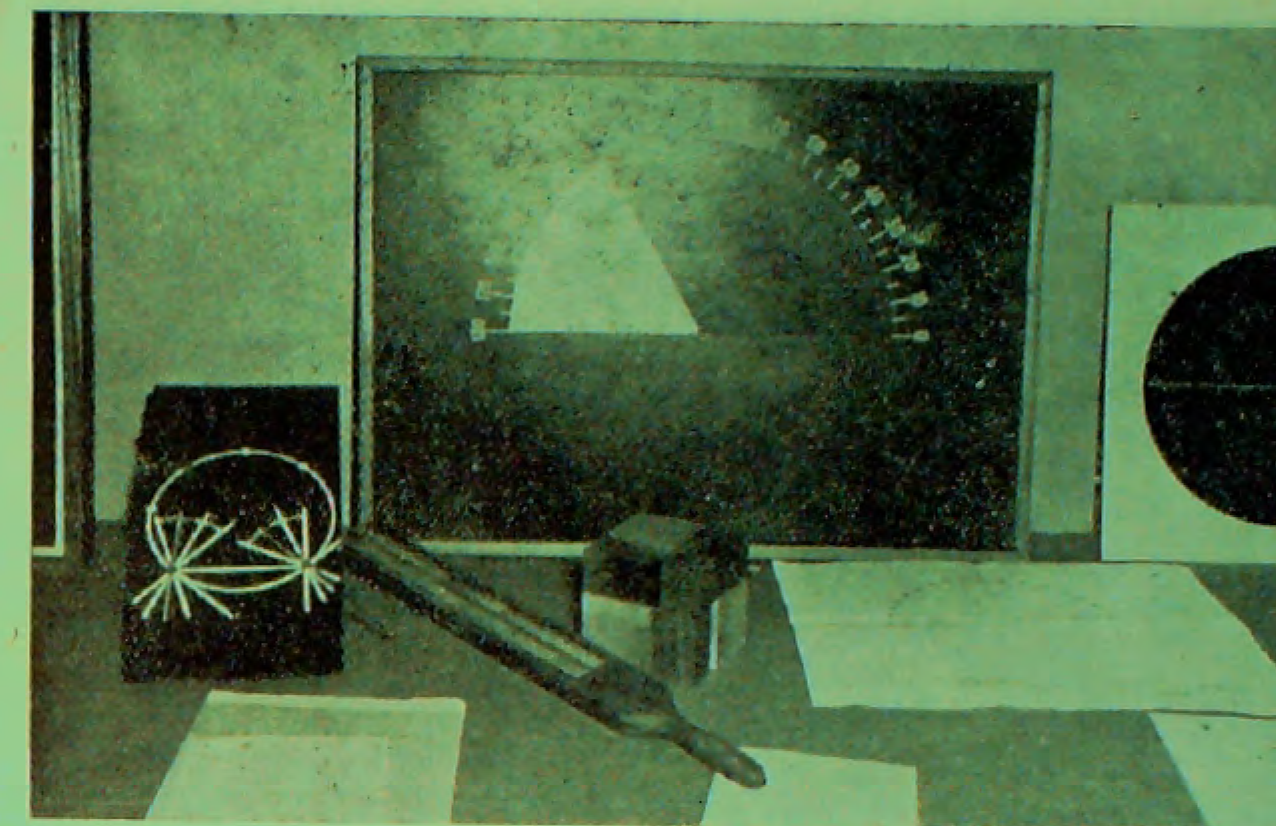


FIGURA 57.—Material presentado por los profesores don Manuel Pérez Guajardo (Lebrija), don Ramón Díez (Villagarcía), don Eduardo Gutiérrez Nebot (Alfaro).

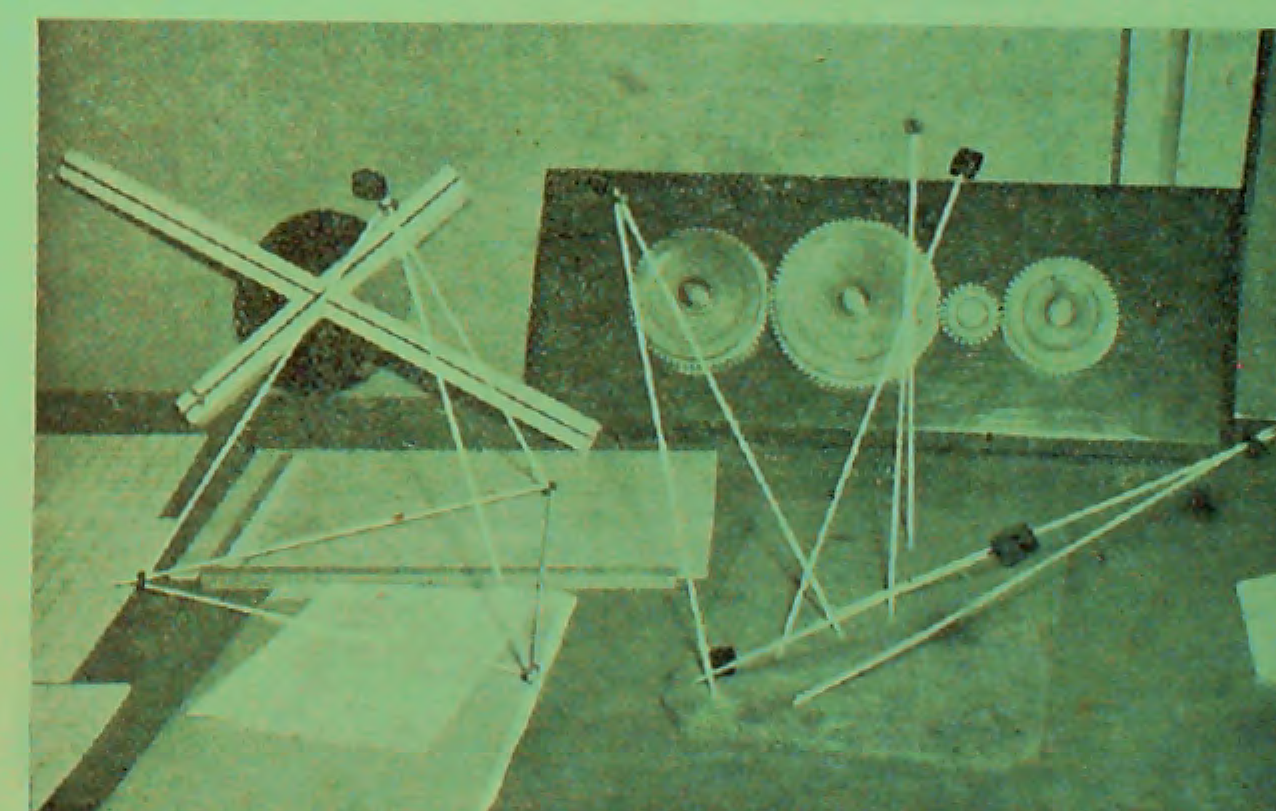


FIGURA 58.—Material presentado por don Vicente Guidotti (del Instituto Laboral de Barbastro).

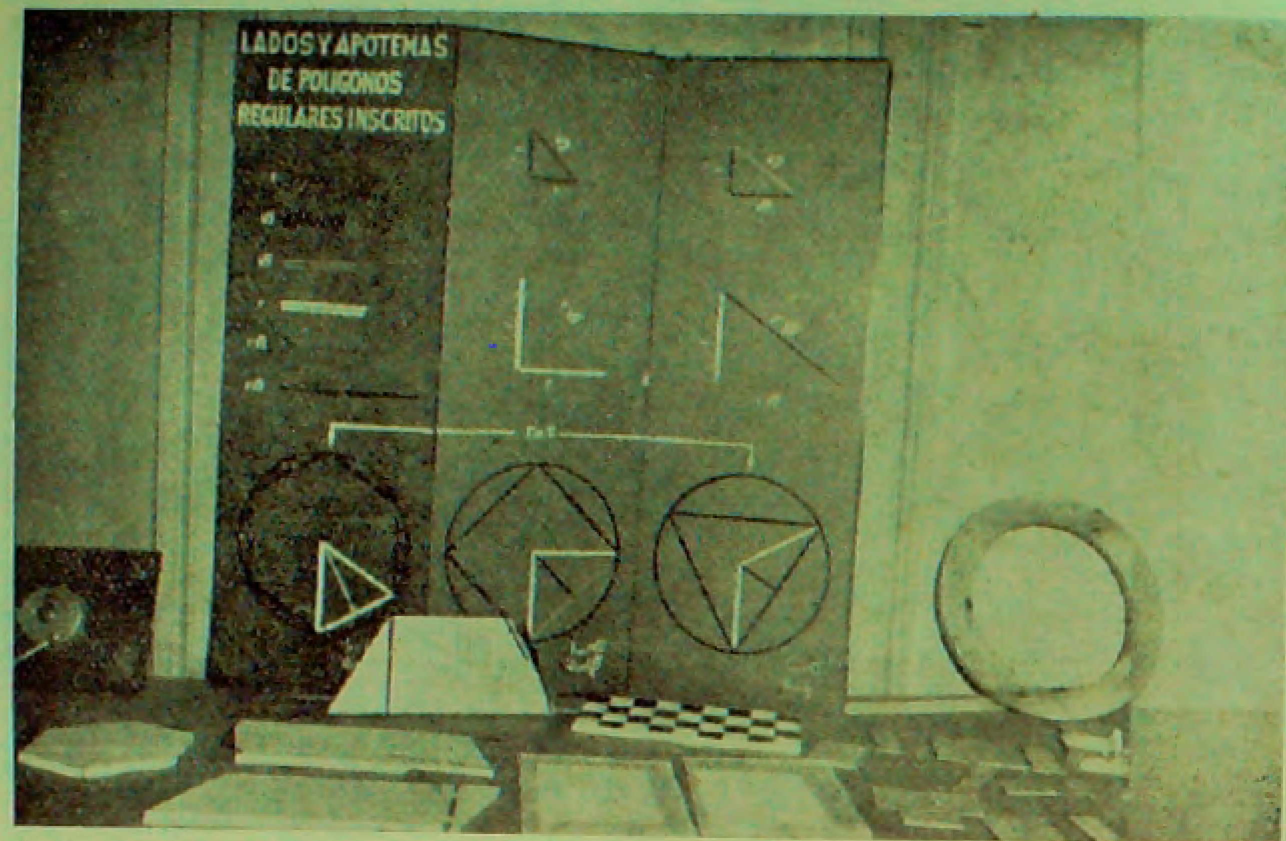


FIGURA 59.—Material de don Horacio Gutiérrez Rivero (Luanco), don Diego Manzanera (Trujillo), doña Carmen Hernández (Peñaranda de Bracamonte).

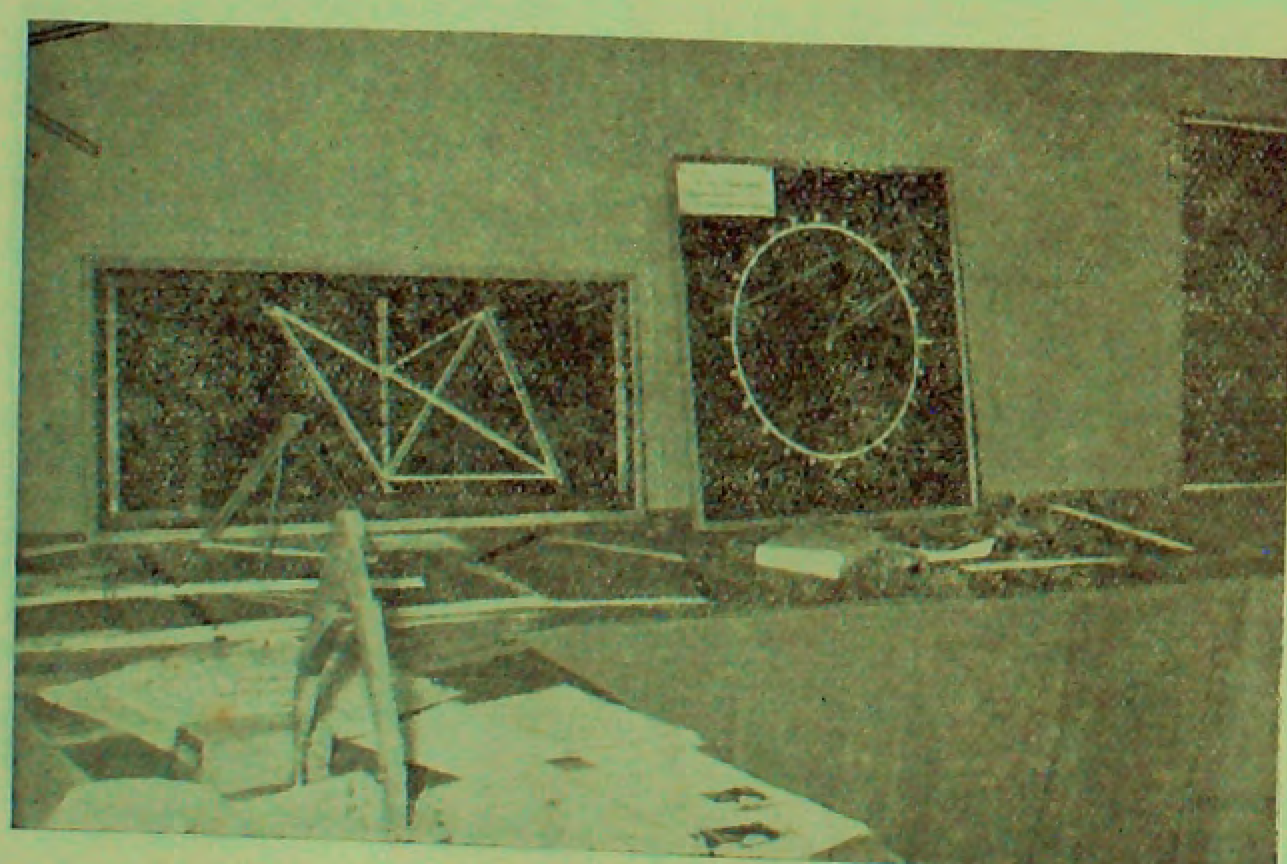


FIGURA 60.—Otro aspecto del material de Institutos Laborales.


FIGURA 61.—Material presentado por el Instituto «Ramiro de Maeztu».

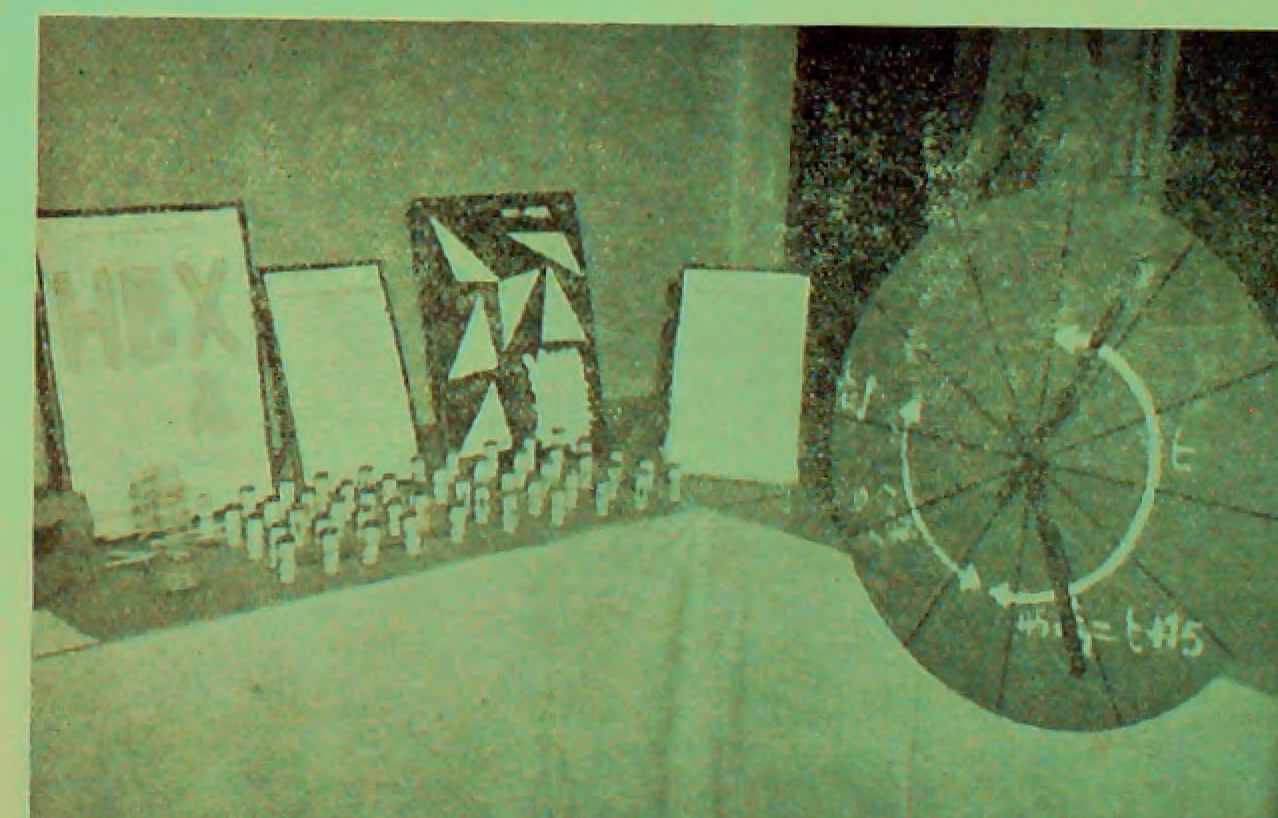


FIGURA 62.—Material didáctico presentado por el profesor Fernández Troconiz, de Bilbao.

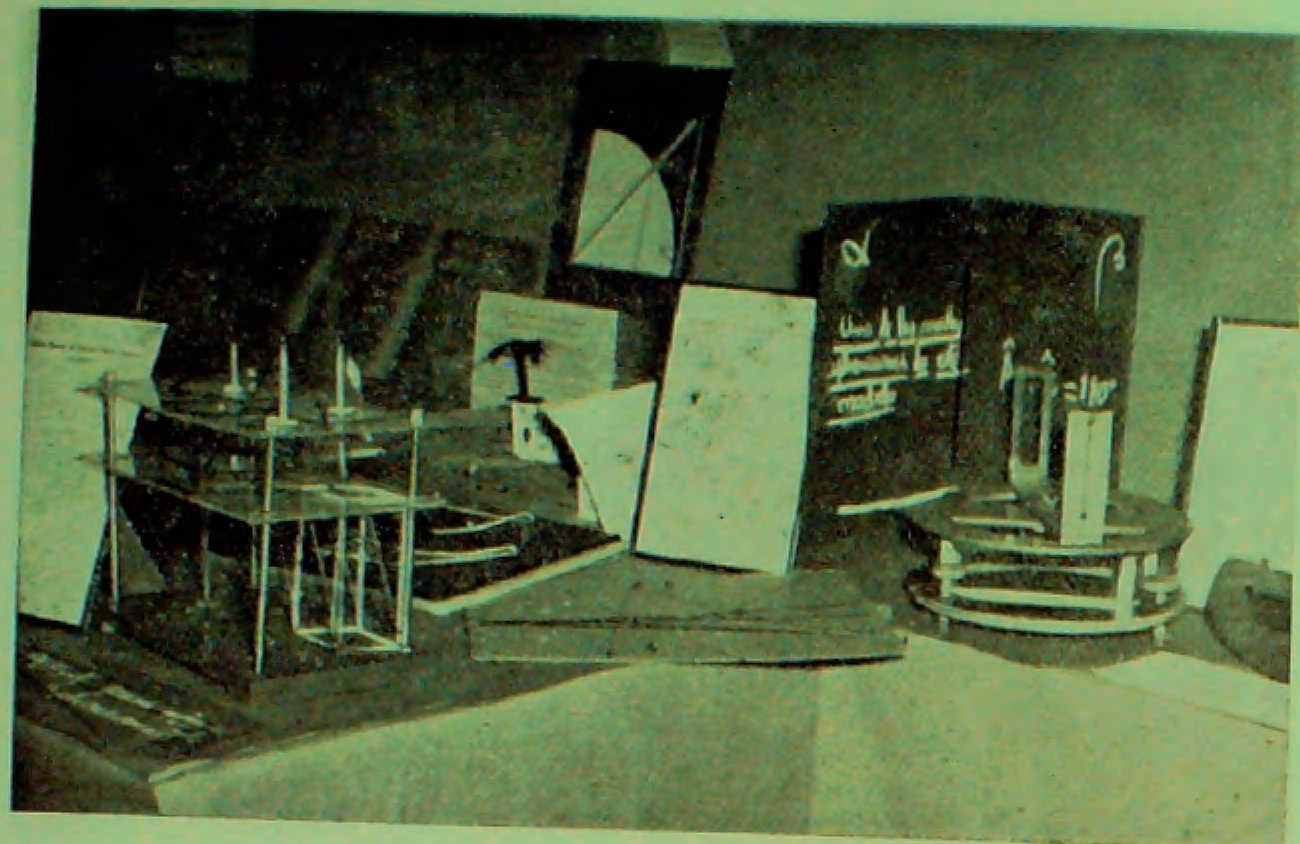


FIGURA 63.—Más material presentado por el profesor Fernández Troconiz.

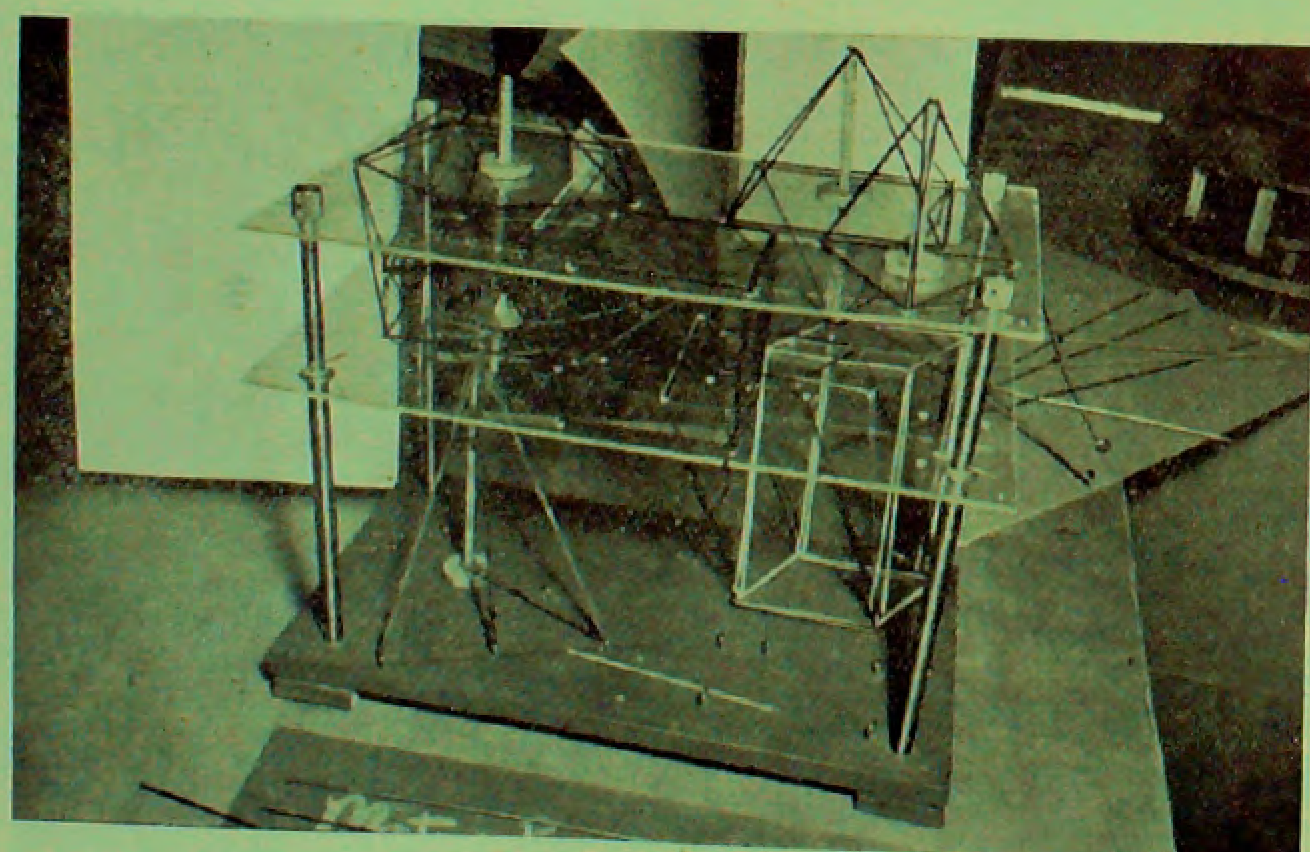


FIGURA 64. Detalle del modelo presentado por el profesor Fernández Troconiz para la construcción de figuras de la Geometría del espacio.

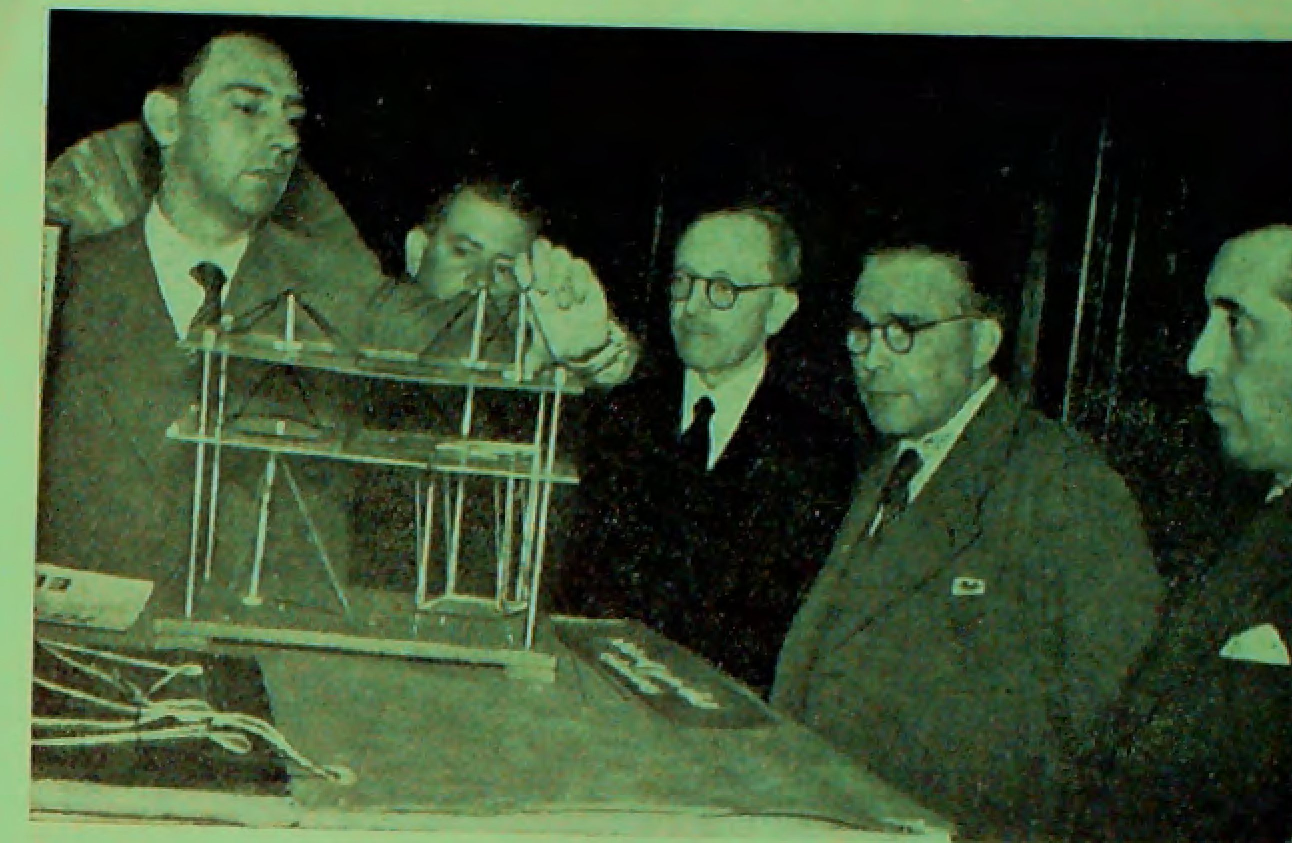


FIGURA 65.—El profesor Fernández Troconiz explicando su material a varios colegas.

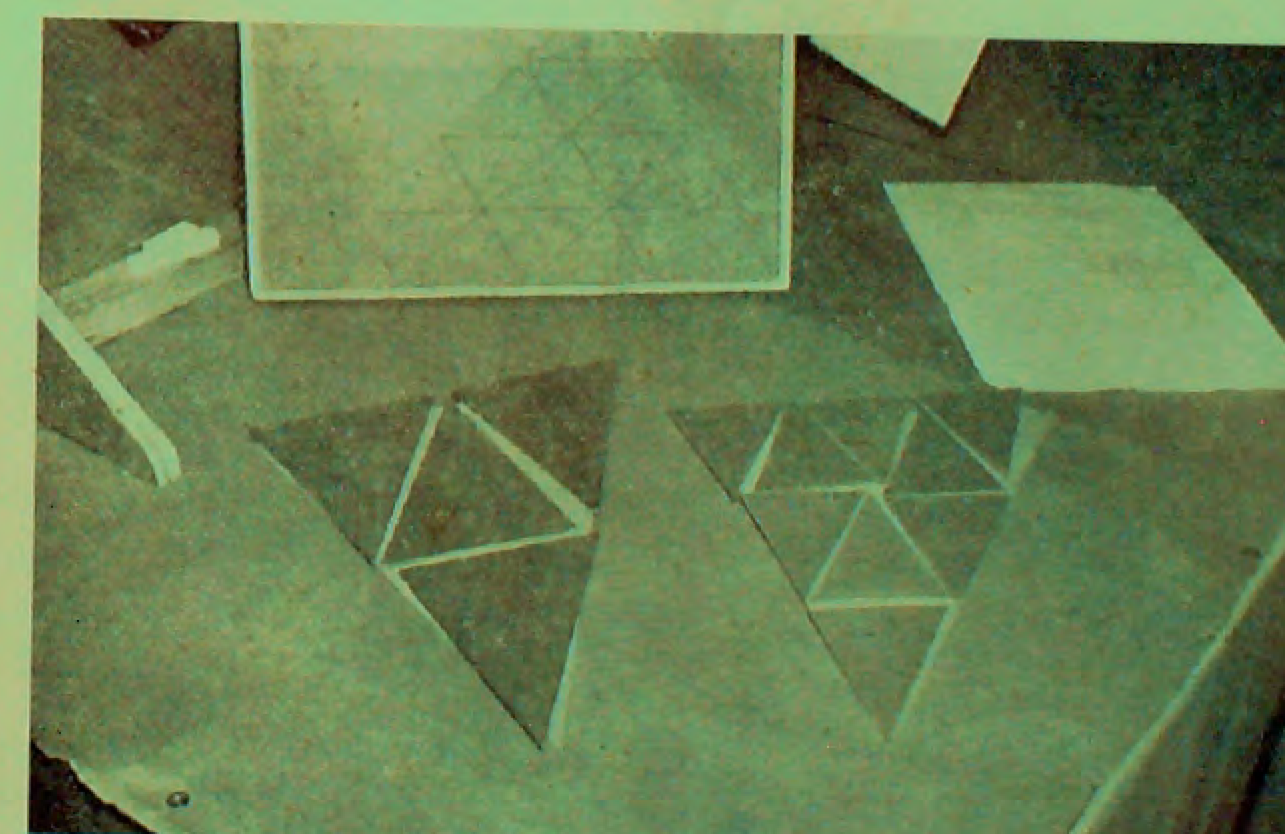


FIGURA 66.—El material del profesor Pascual Ibarra, de Valladolid, para la iniciación a la semejanza de triángulos.

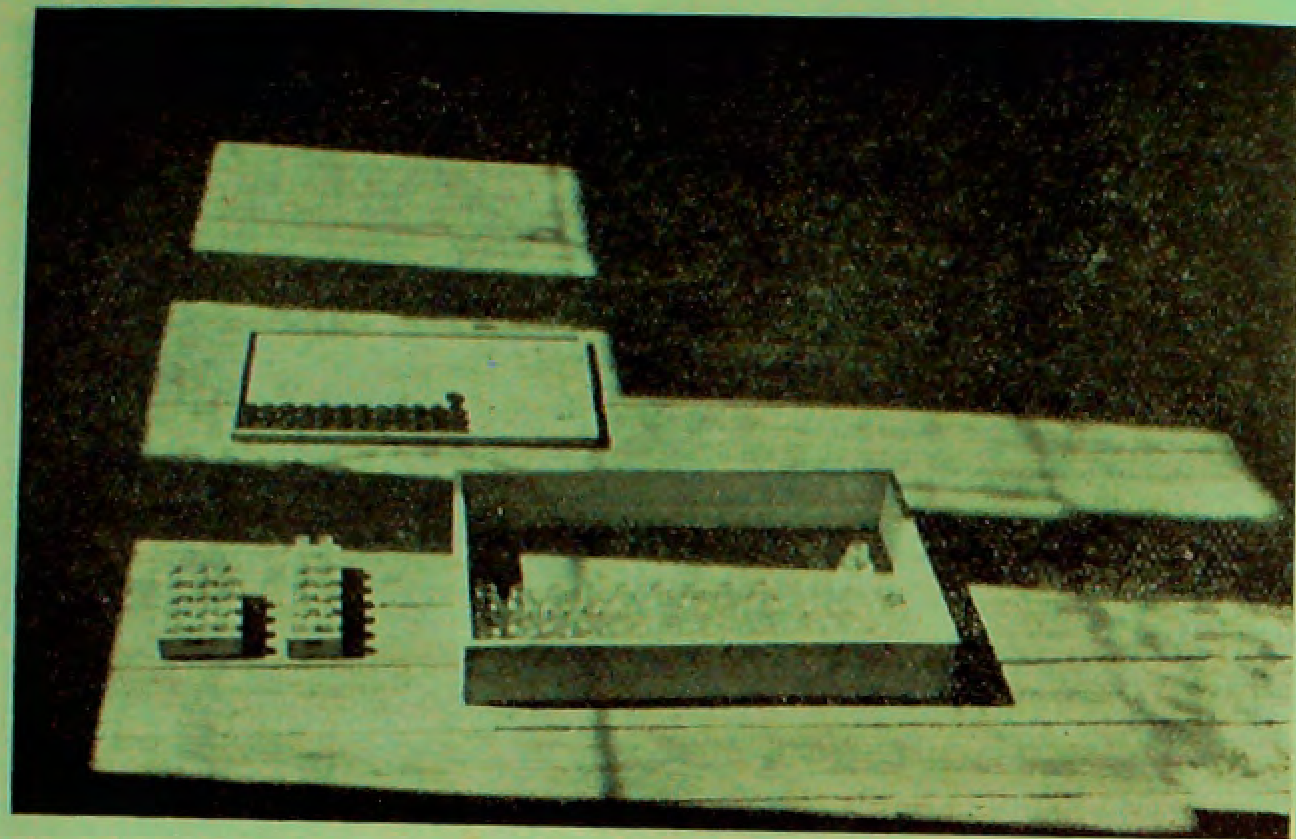


FIGURA 67.—Números primos y compuestos (San Isidro).

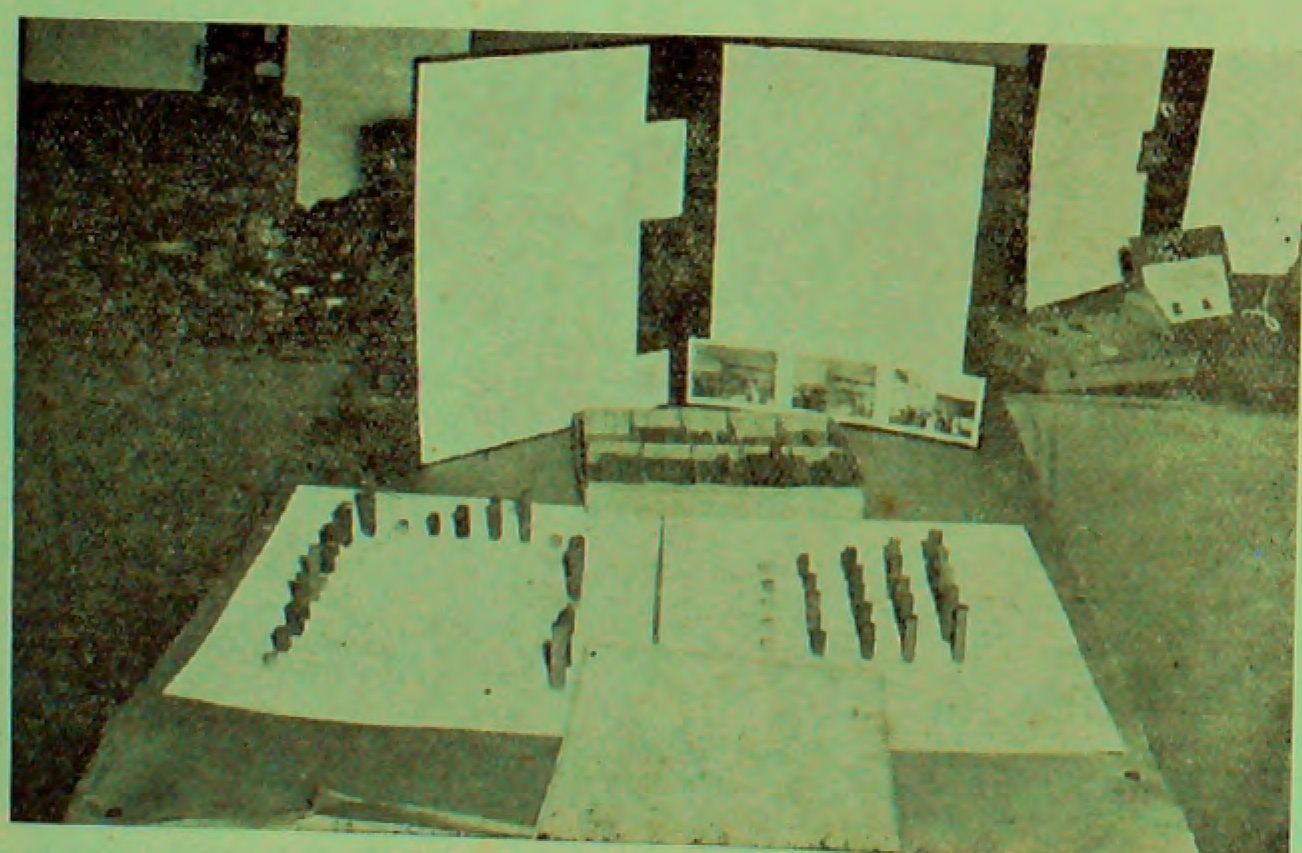


FIGURA 68.—Iniciación al estudio de las congruencias (San Isidro).

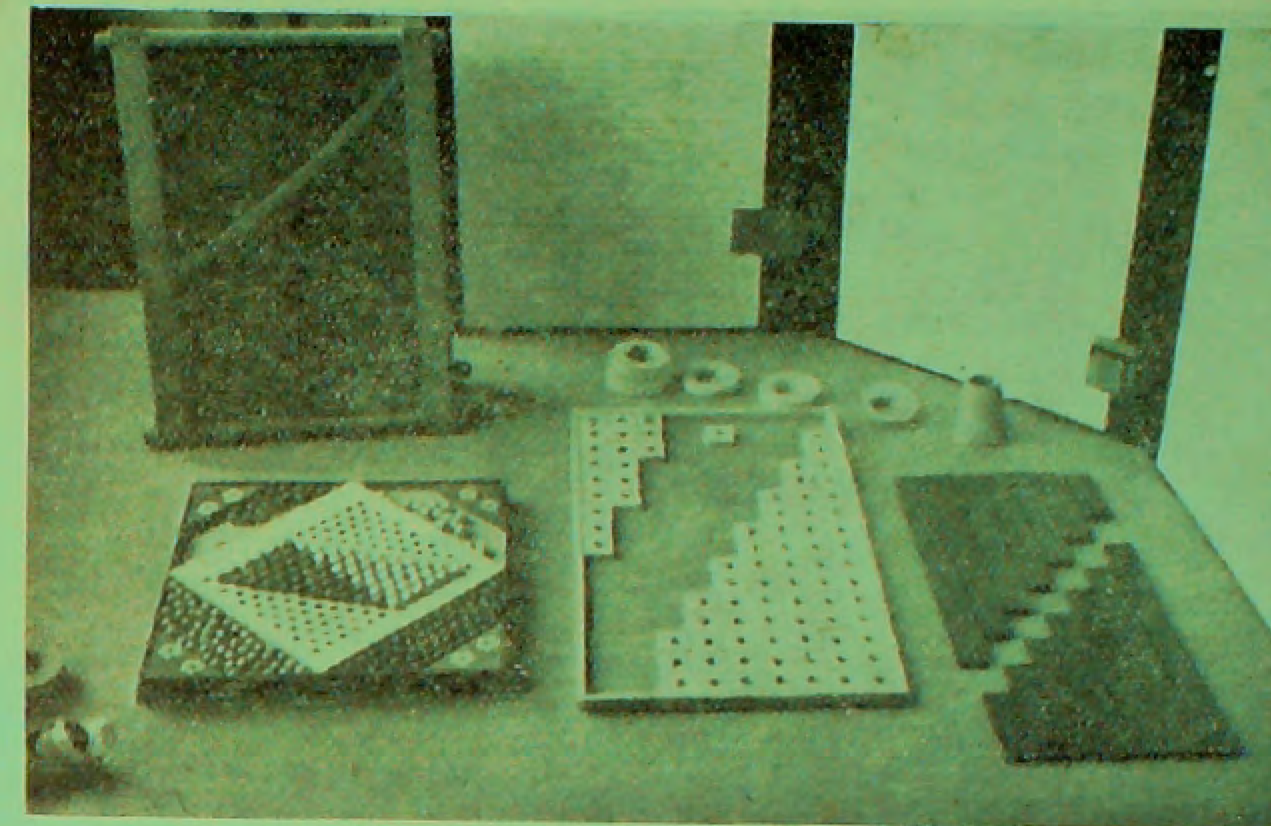


FIGURA 69.—Lección sobre progresiones elementales (San Isidro).

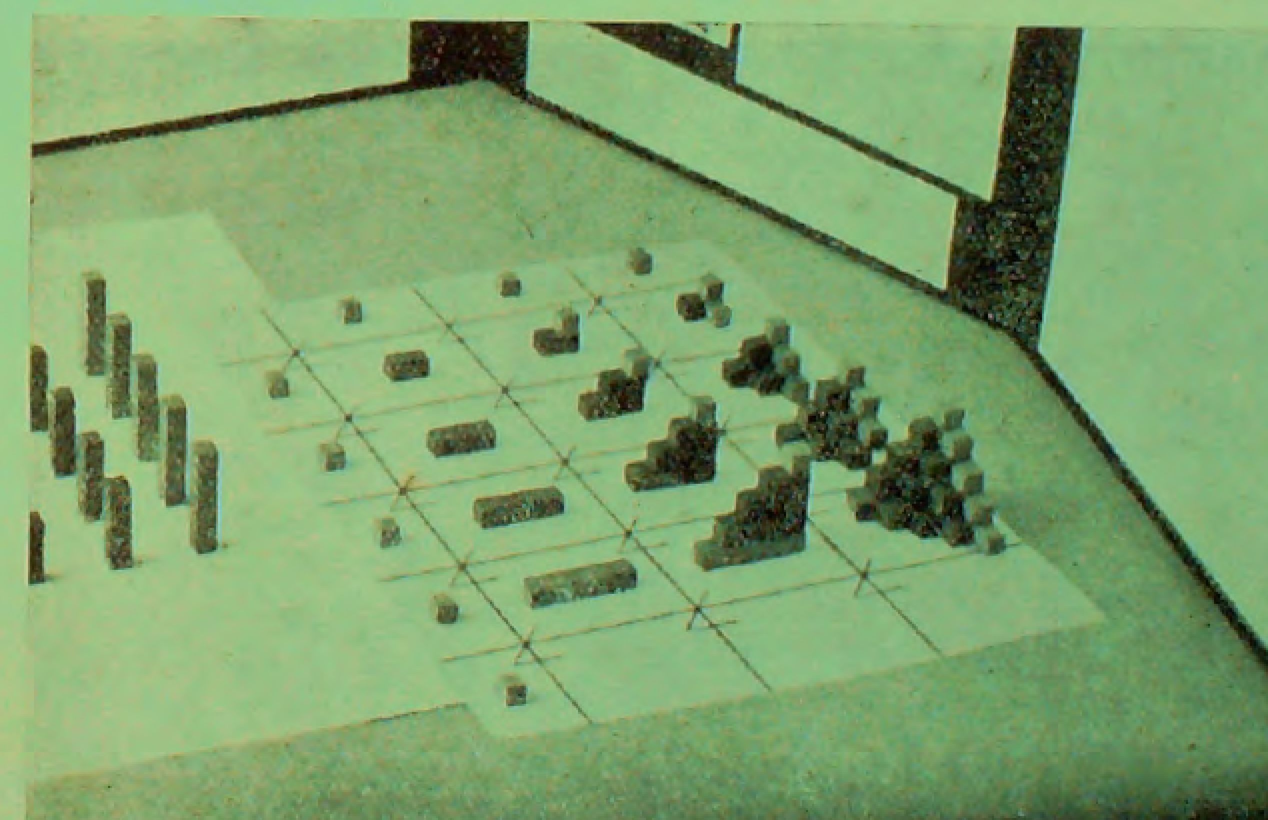


FIGURA 70.—Lección sobre progresiones aritméticas de orden superior (San Isidro).

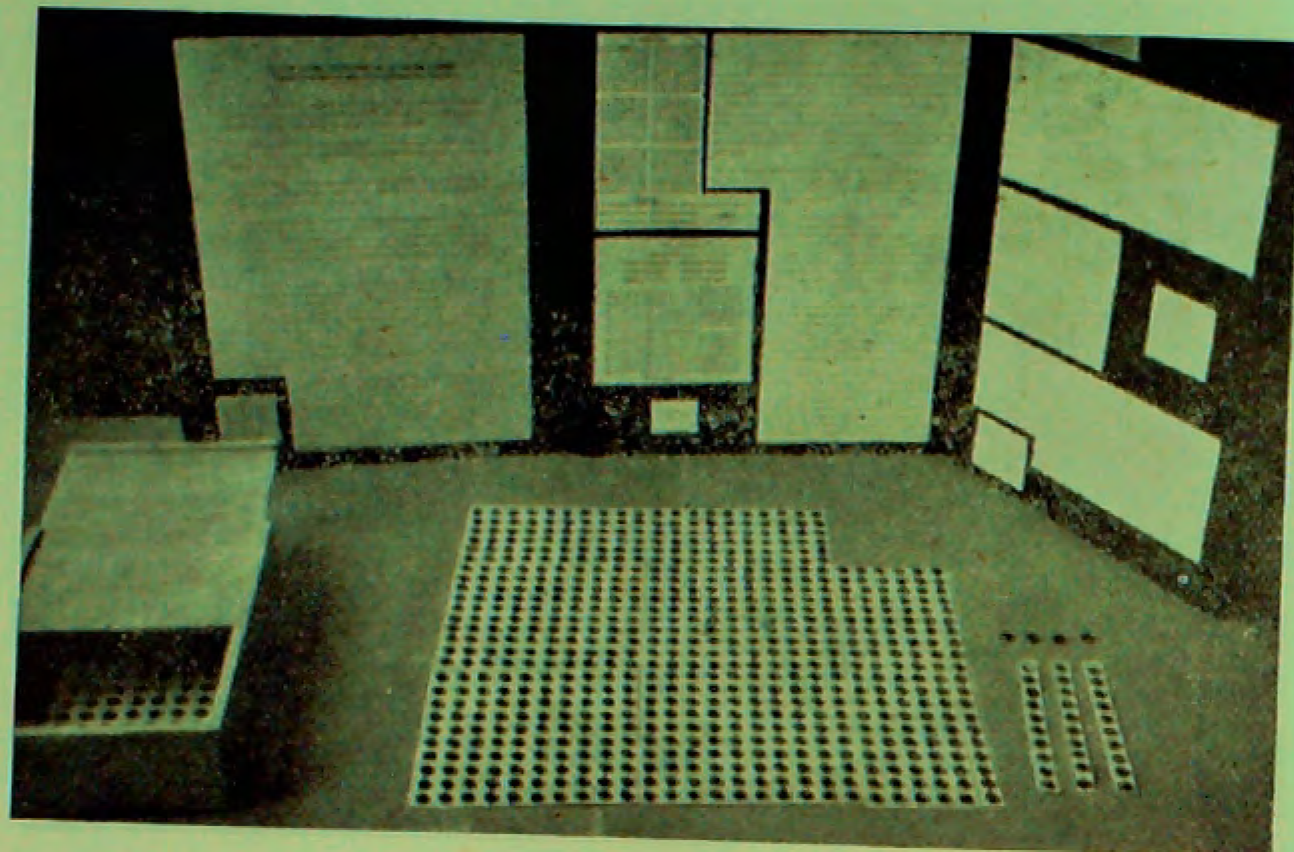


FIGURA 71.—Lección sobre la estructura de la regla de la raíz cuadrada (San Isidro).

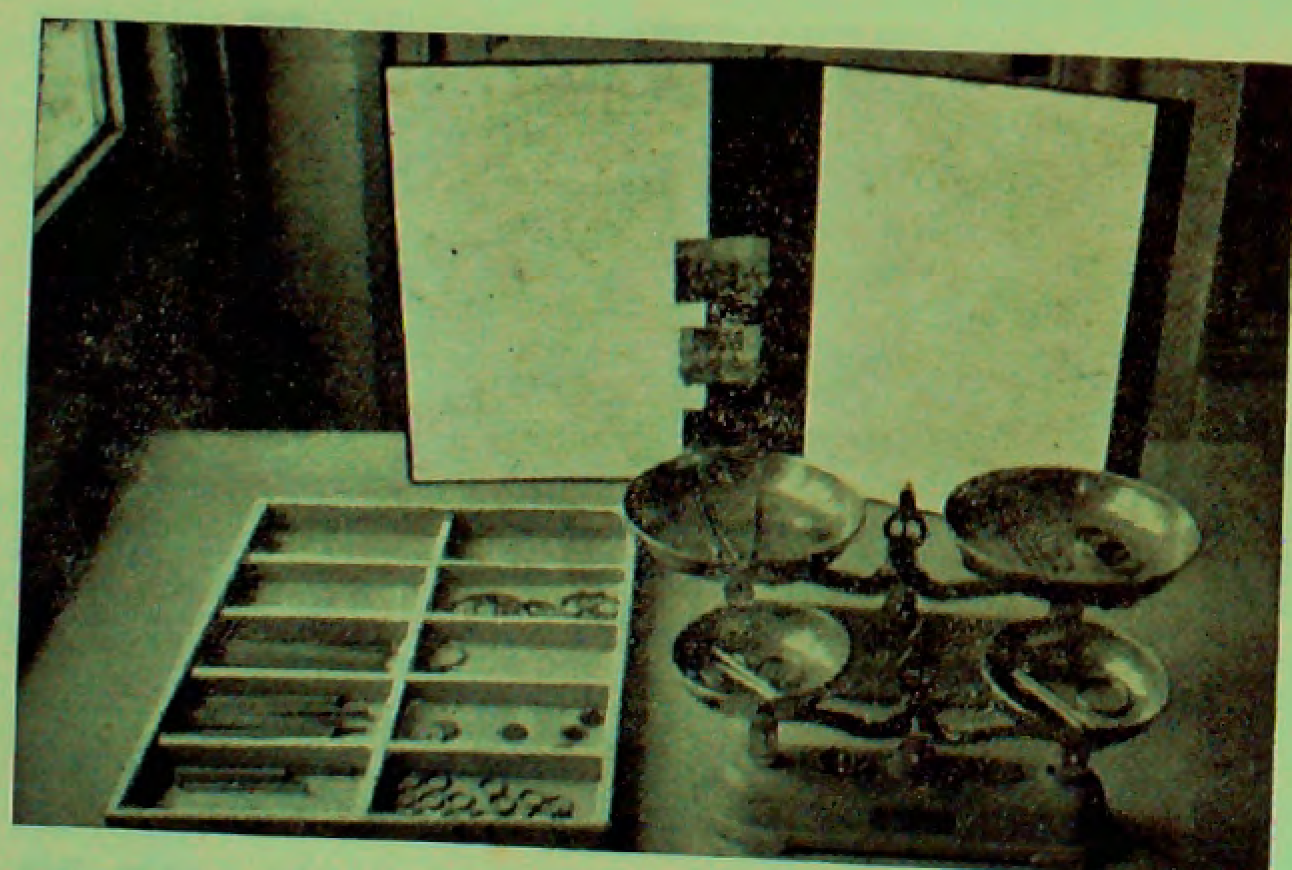


FIGURA 72.—Ecuaciones y sistemas lineales con balanzas (San Isidro).

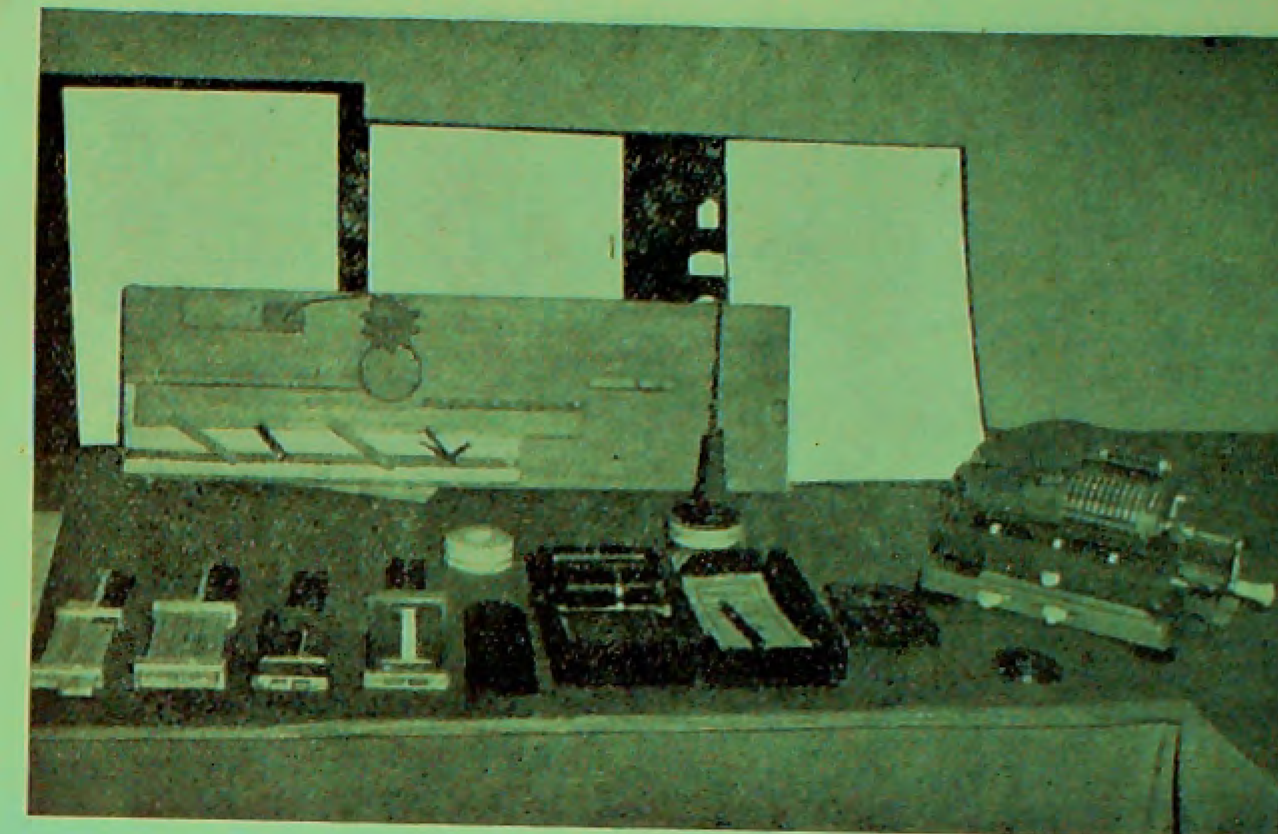


FIGURA 73.—Iniciación a las máquinas de calcular (San Isidro).

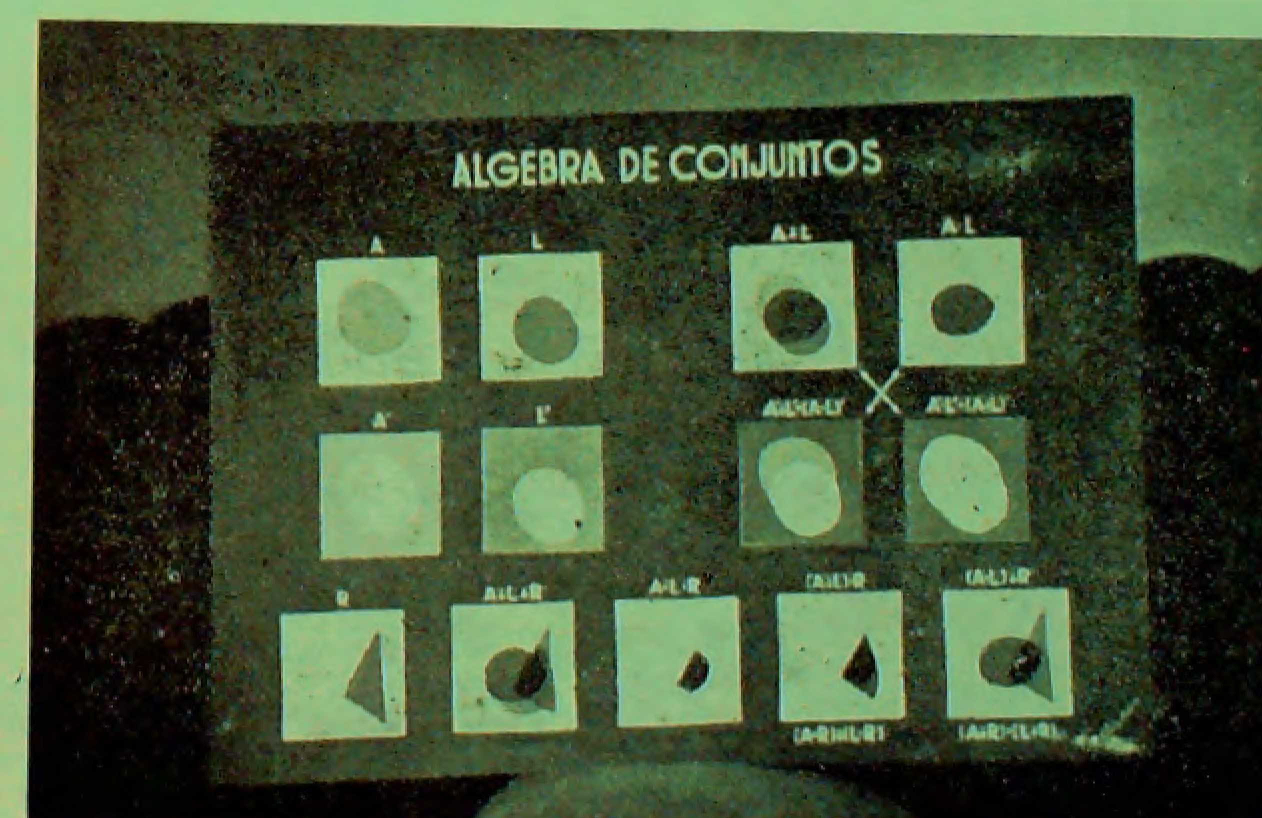


FIGURA 74.—Iniciación al Algebra de conjuntos (San Isidro).

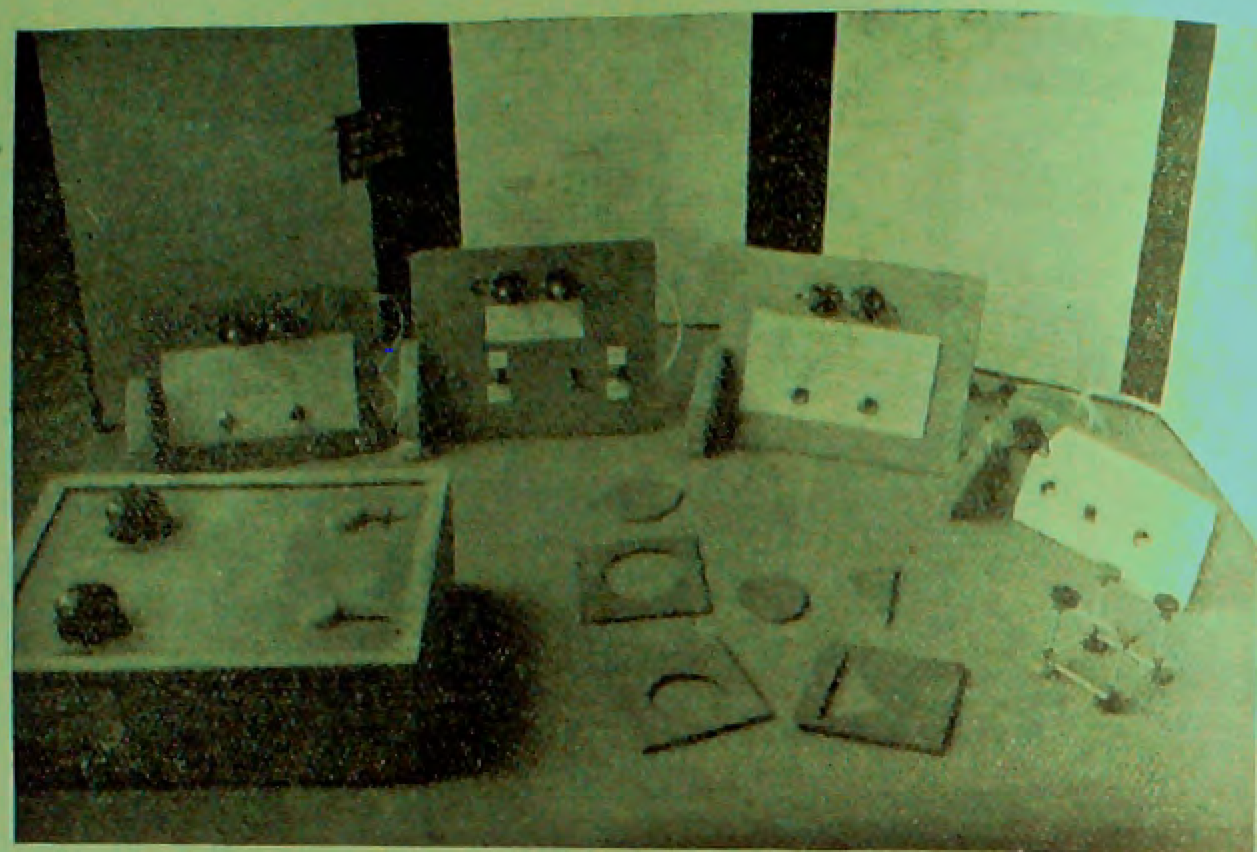


FIGURA 75.—Algebra de Boole en los circuitos (San Isidro).

FIGURA 76.—Lecciones sobre simetrías en el plano; sobre geometría y álgebra de dobleces; sobre haces de cónicas (San Isidro).

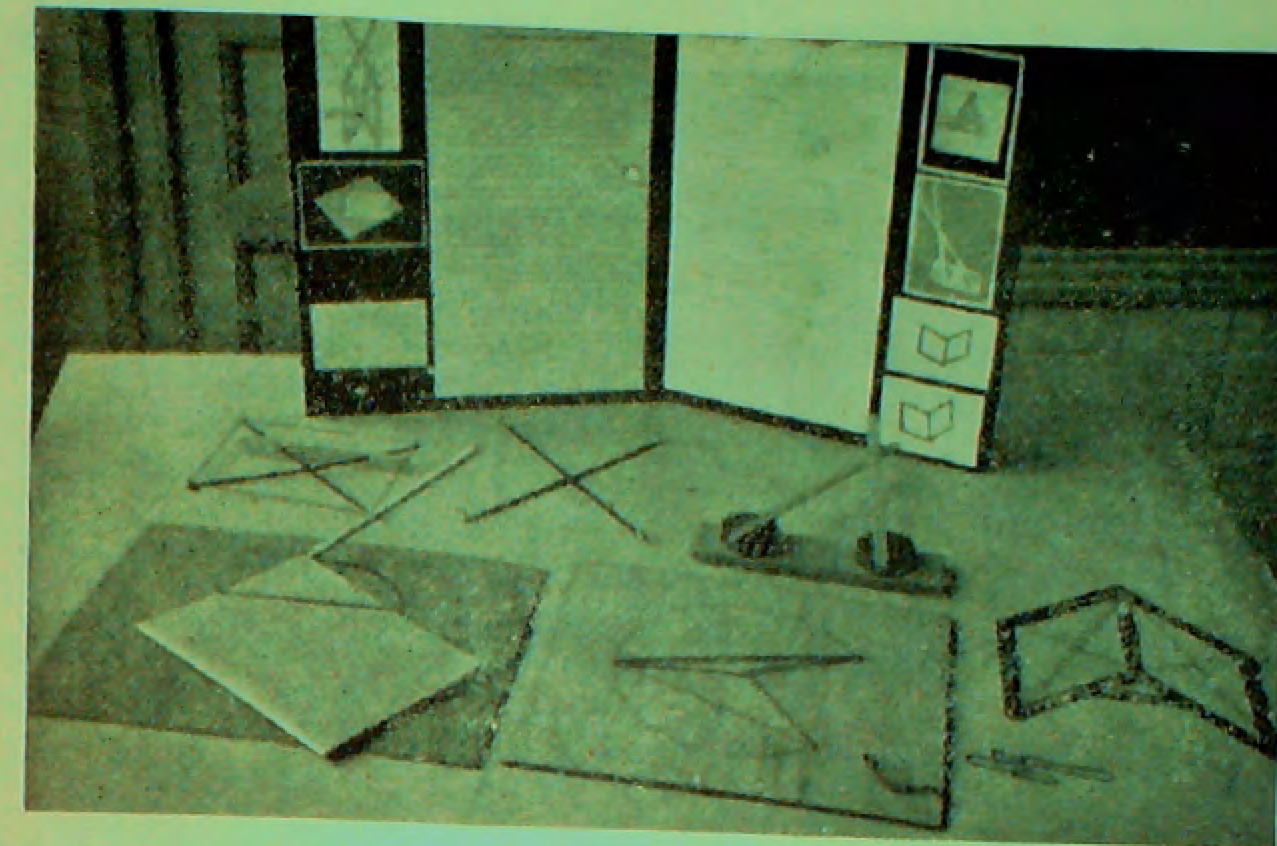


FIGURA 77.—Lección sobre ángulos inscritos y arco capaz (San Isidro).

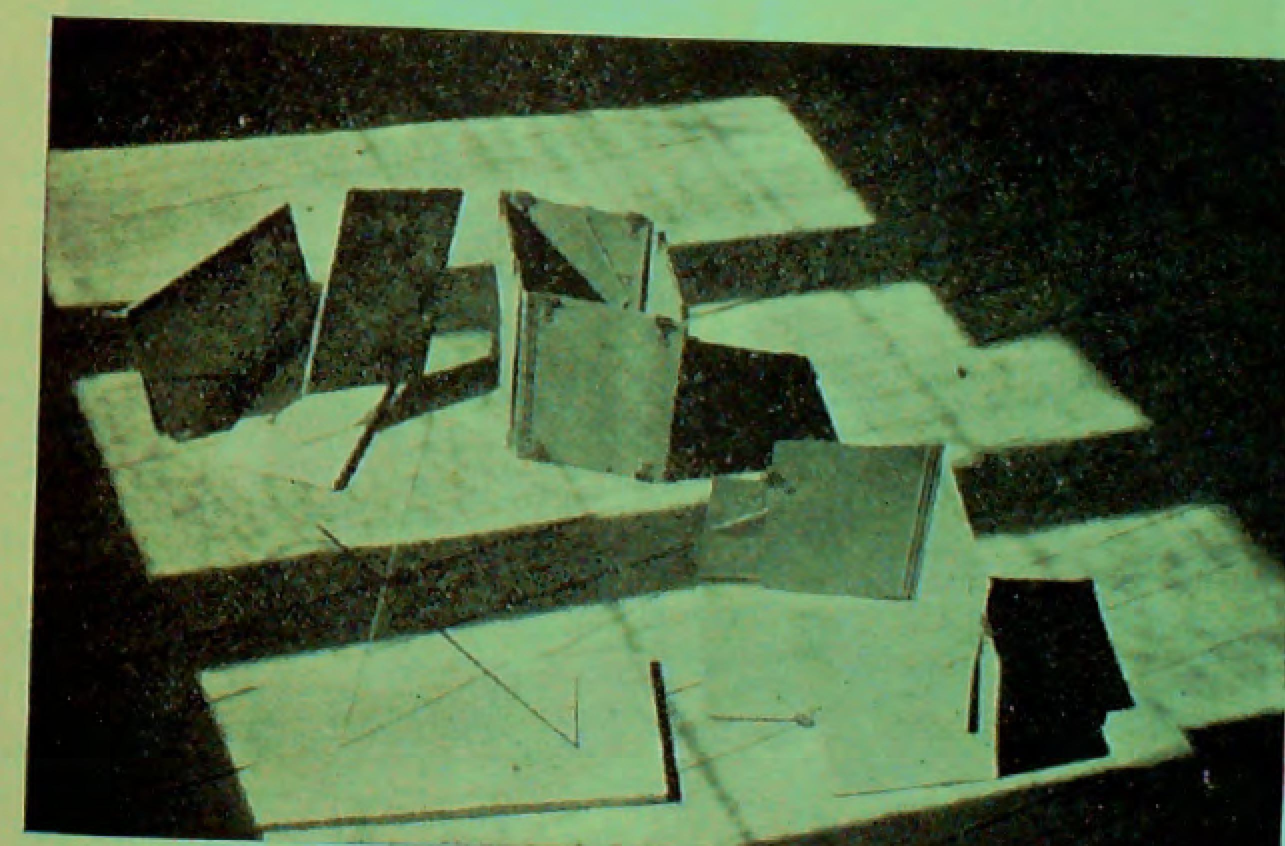


FIGURA 78.—Las primeras lecciones sobre geometría del espacio con carpetas de tricotar y agujas (San Isidro).

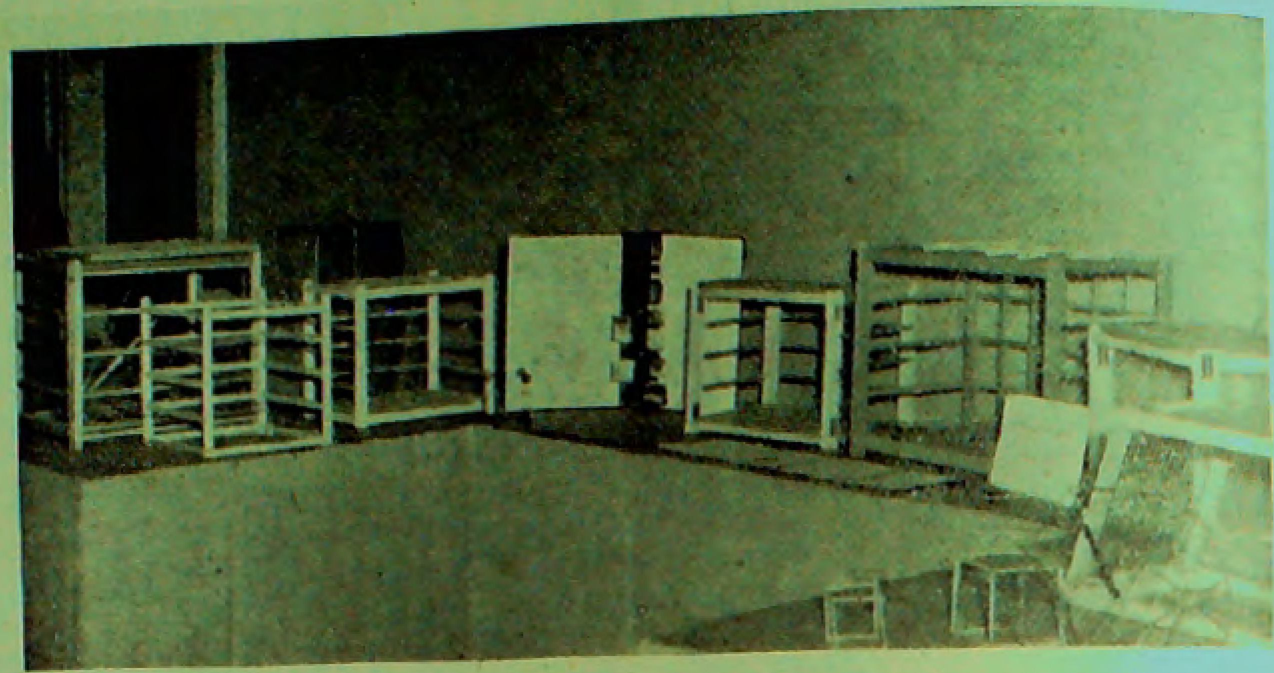


FIGURA 79.—Modelos varios de geoespacios de Puig Adam (San Isidro).

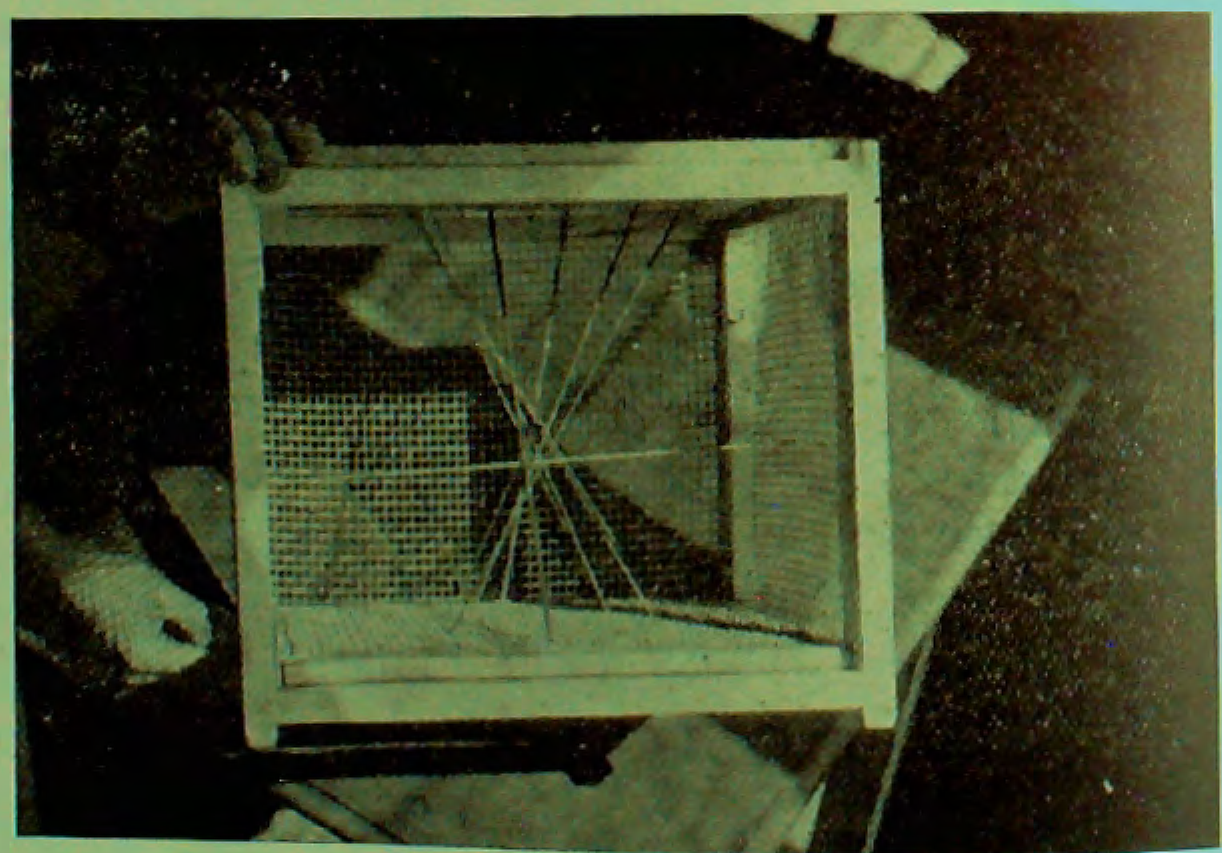


FIGURA 80.—Una variante del geoespacio para la realización de curvas alabeadas y desarrolladas circunscritas; la figura pone de manifiesto el triedro intrínseco de un punto de la curva (San Isidro).

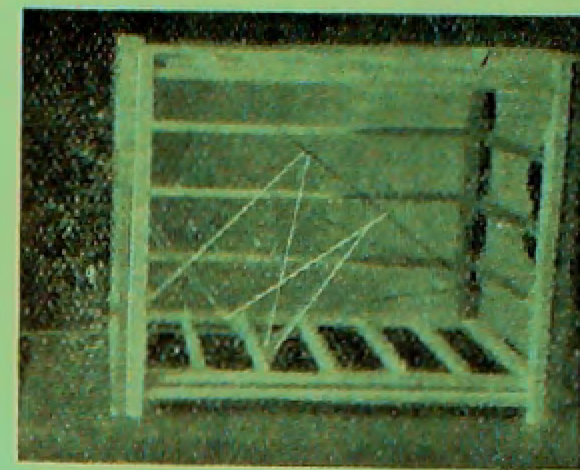


FIGURA 81

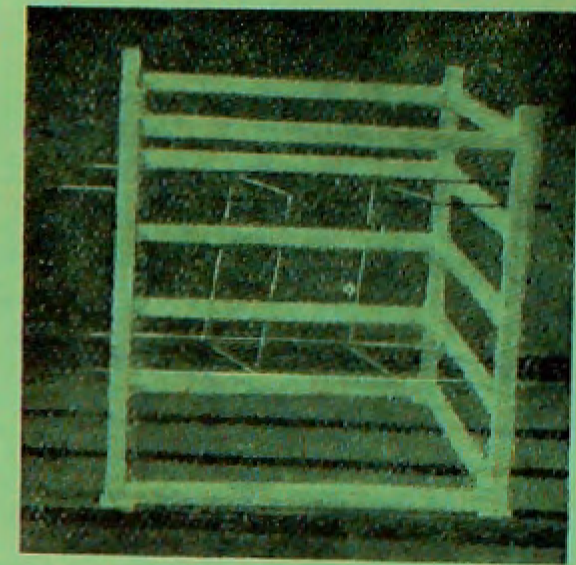


FIGURA 82

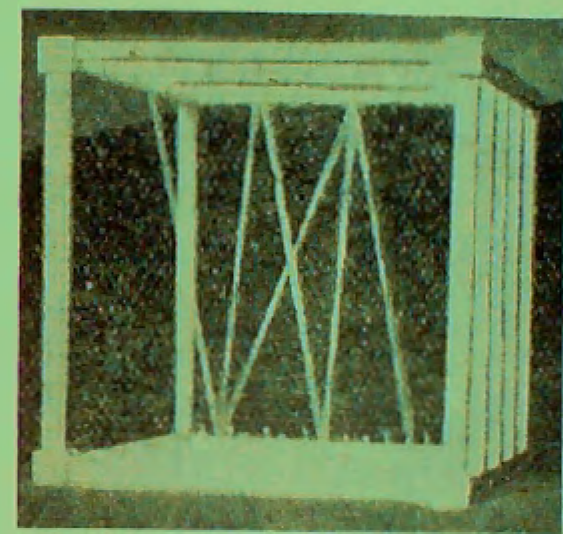


FIGURA 83

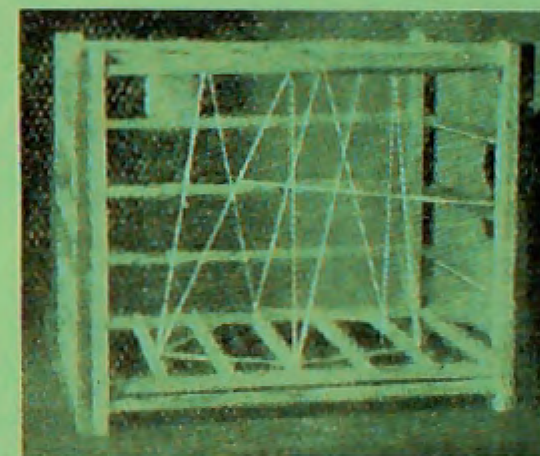


FIGURA 84

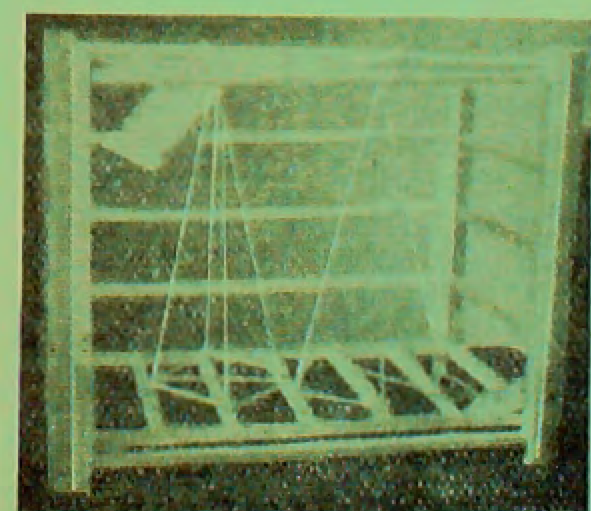


FIGURA 85

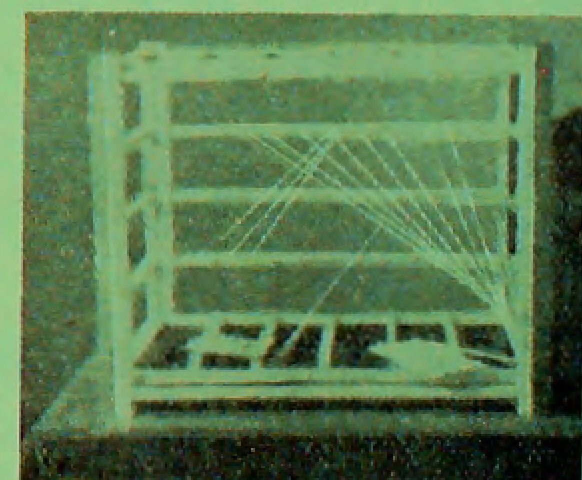


FIGURA 86

Realizaciones varias en los geoespacios, de Puig-Adam (San Isidro).

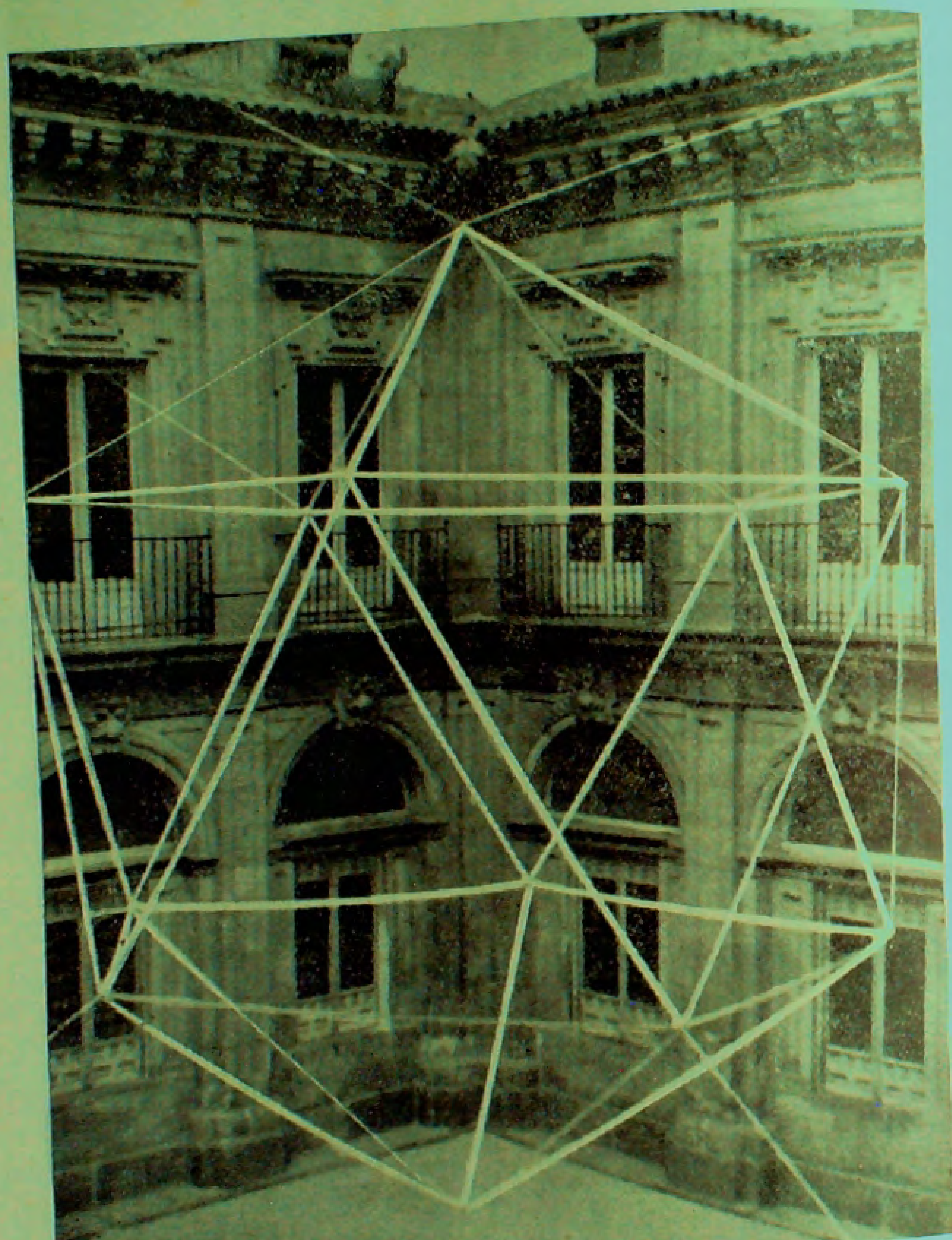


FIGURA 87.—El gran icosaedro de cinta suspendido en el patio (atirantado por sus vértices mediante cuerdas tensoras sujetas a los marcos de balcones y ventanas).

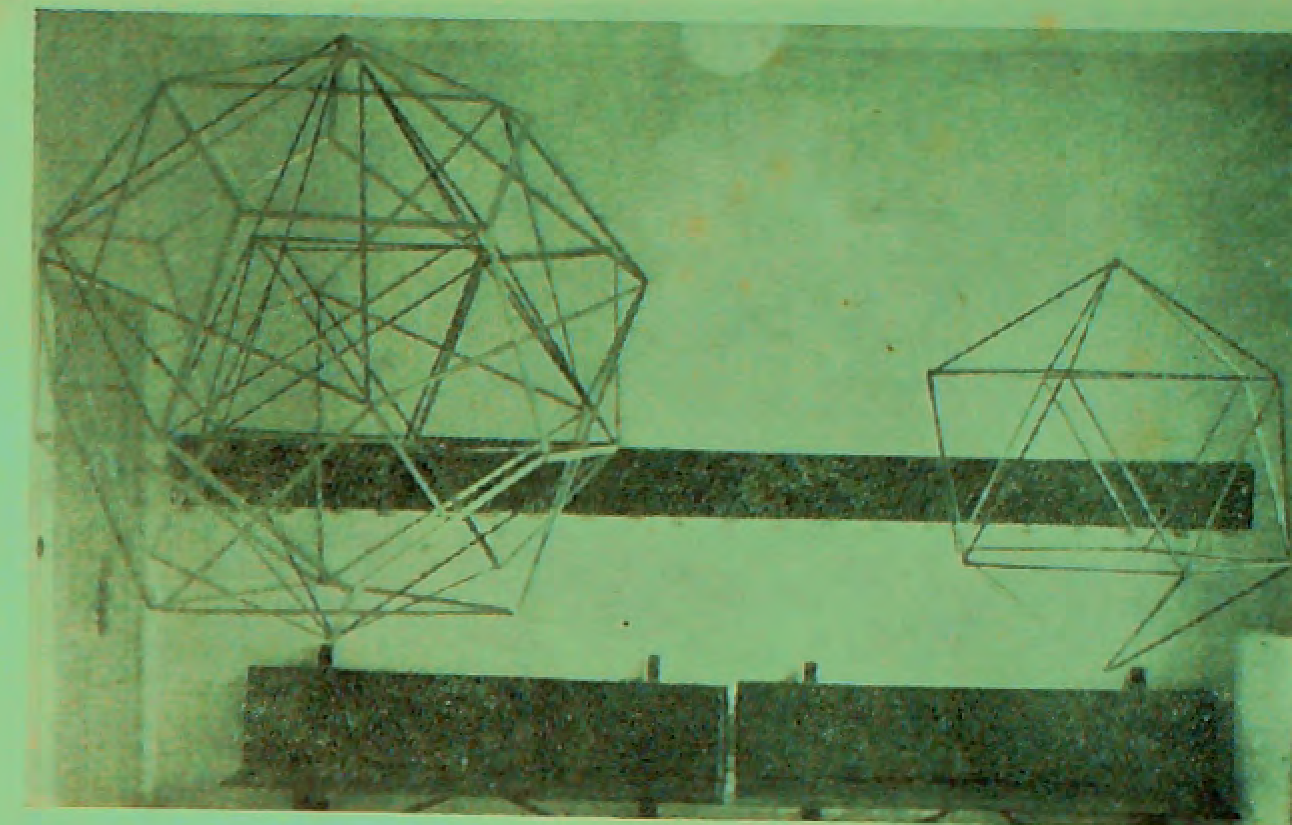


FIGURA 88.—El omnipoliedro de varillas y su precursor el icosaedro (San Isidro).

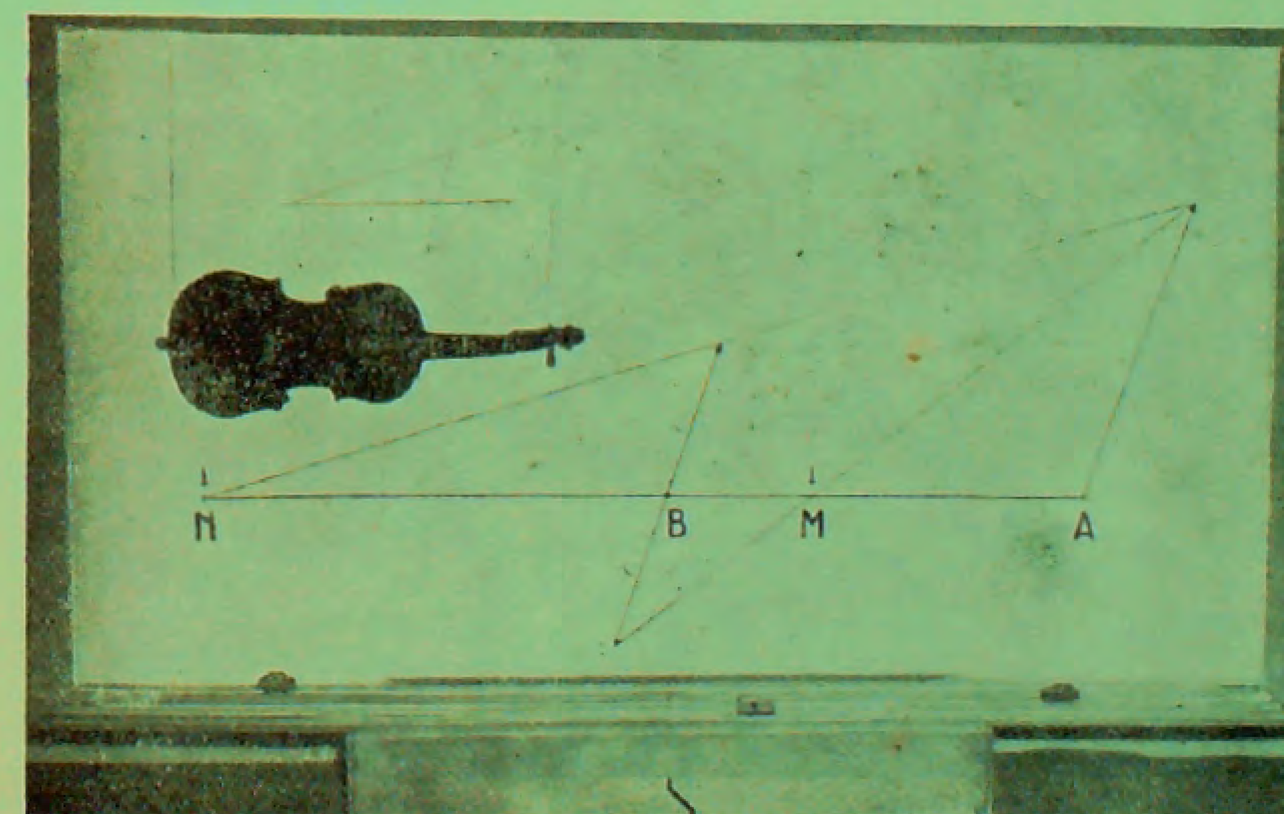


FIGURA 89.—El problema de los móviles y la división armónica (San Isidro).

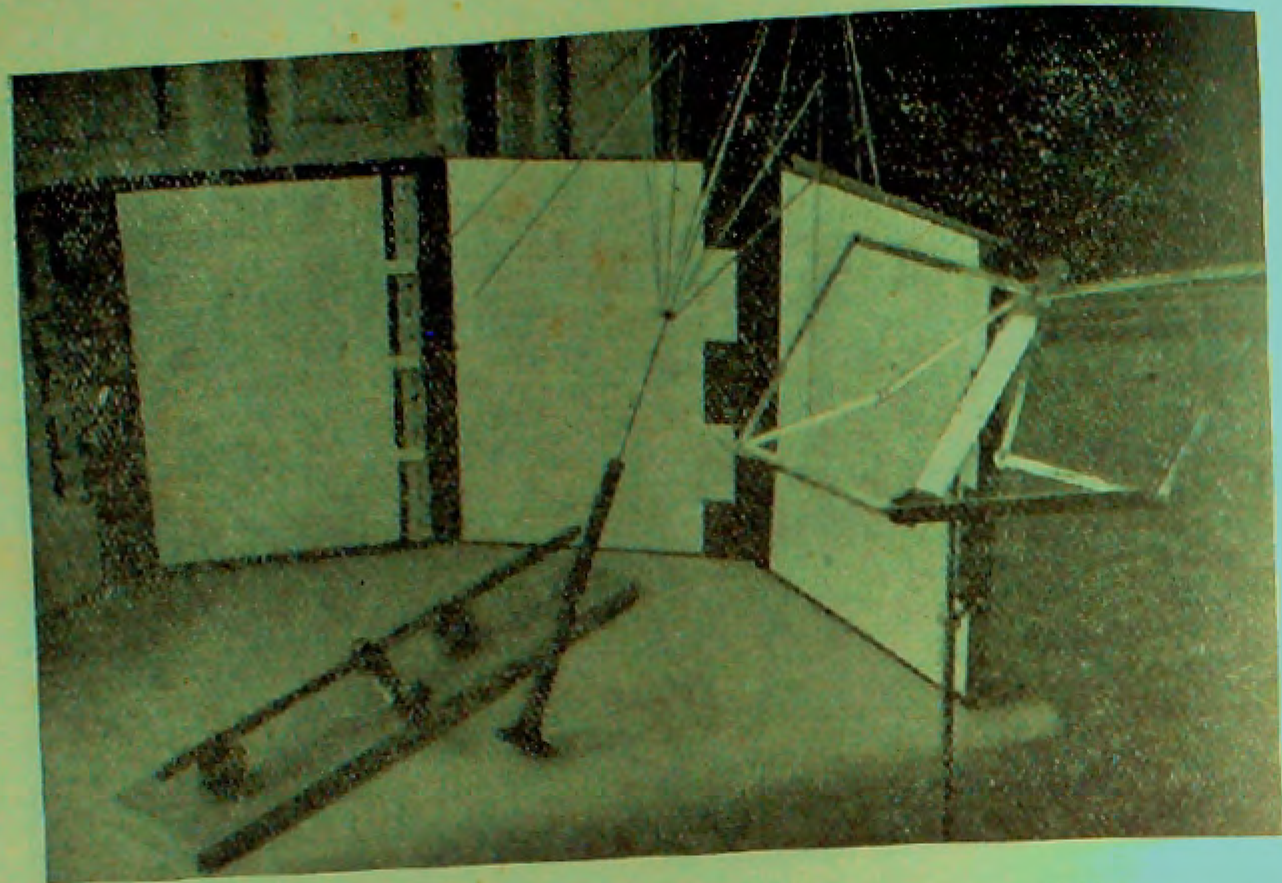


FIGURA 90.—La falleba, el paraguas y el atril como material didáctico matemático (San Isidro).

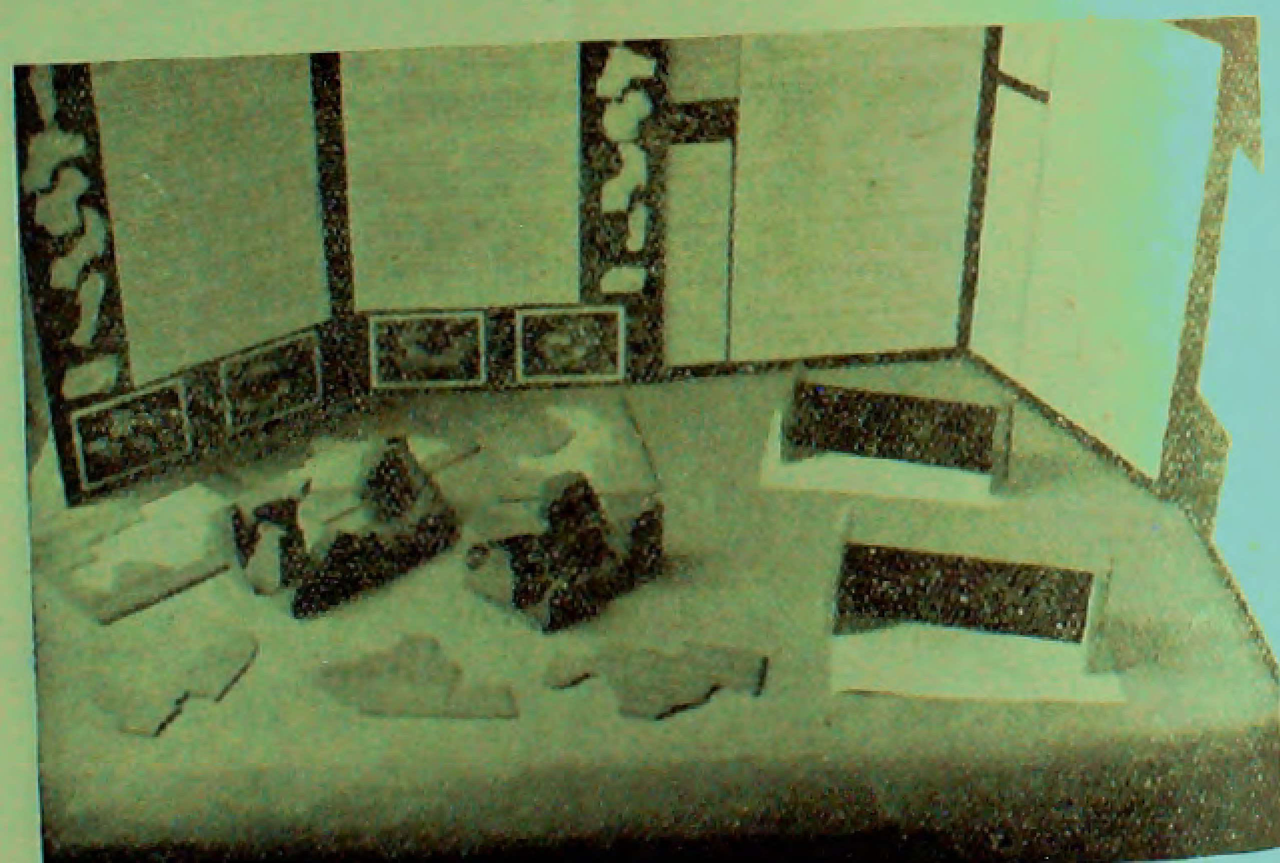


FIGURA 91.—La geometría que puede hacerse con un trozo de vidrio. Geometría del cascote (San Isidro).

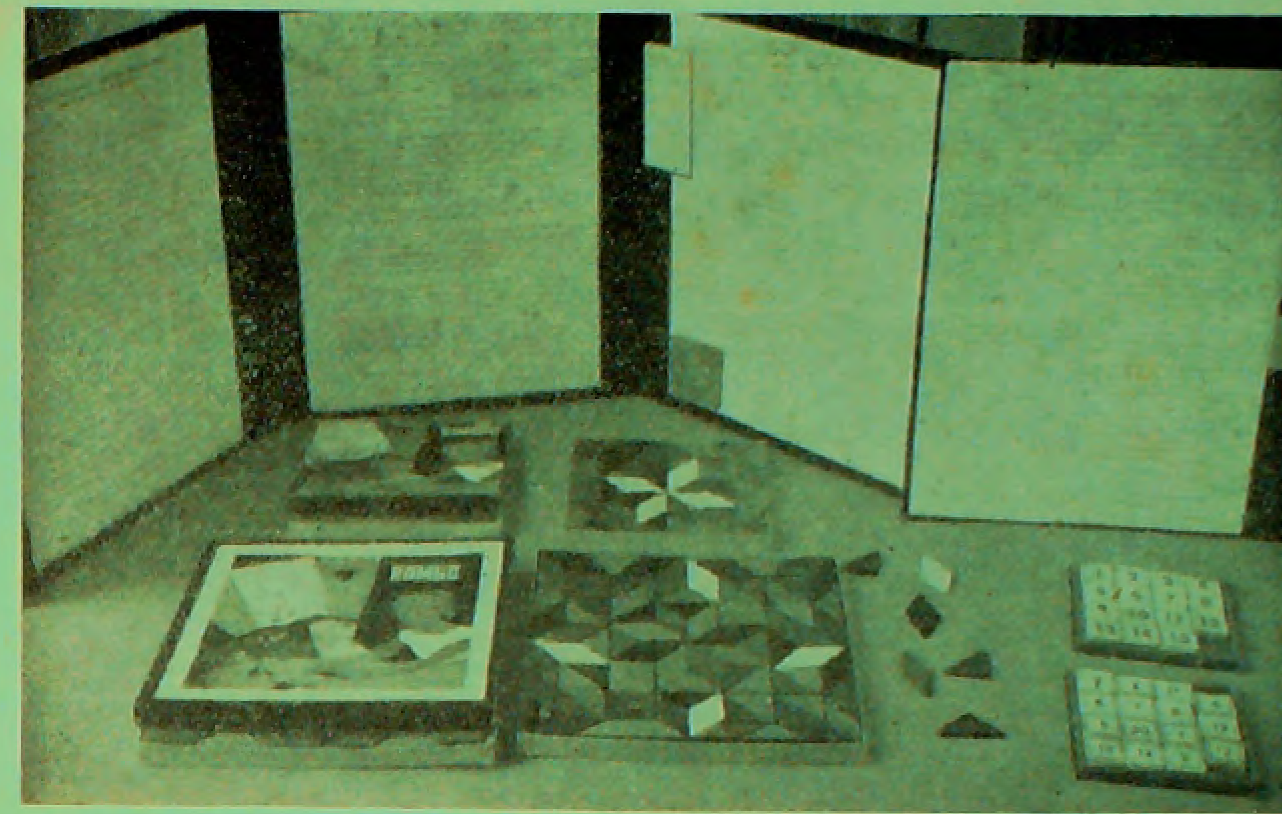


FIGURA 92.—Estructuras algebraicas en un juego mosaico. Estructuras de grupo en el solitario de los quince (San Isidro).

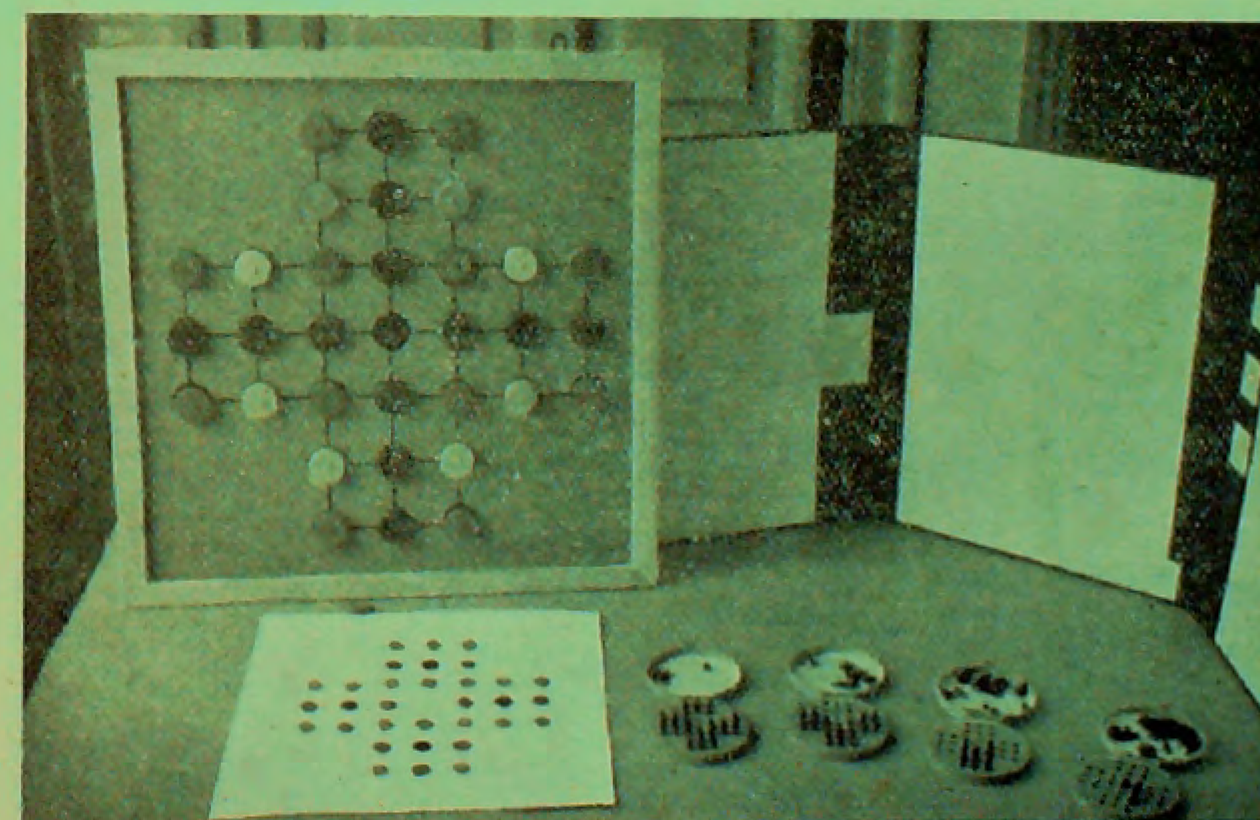


FIGURA 93.—Estructuras matemáticas diversas en un juego solitario (San Isidro).

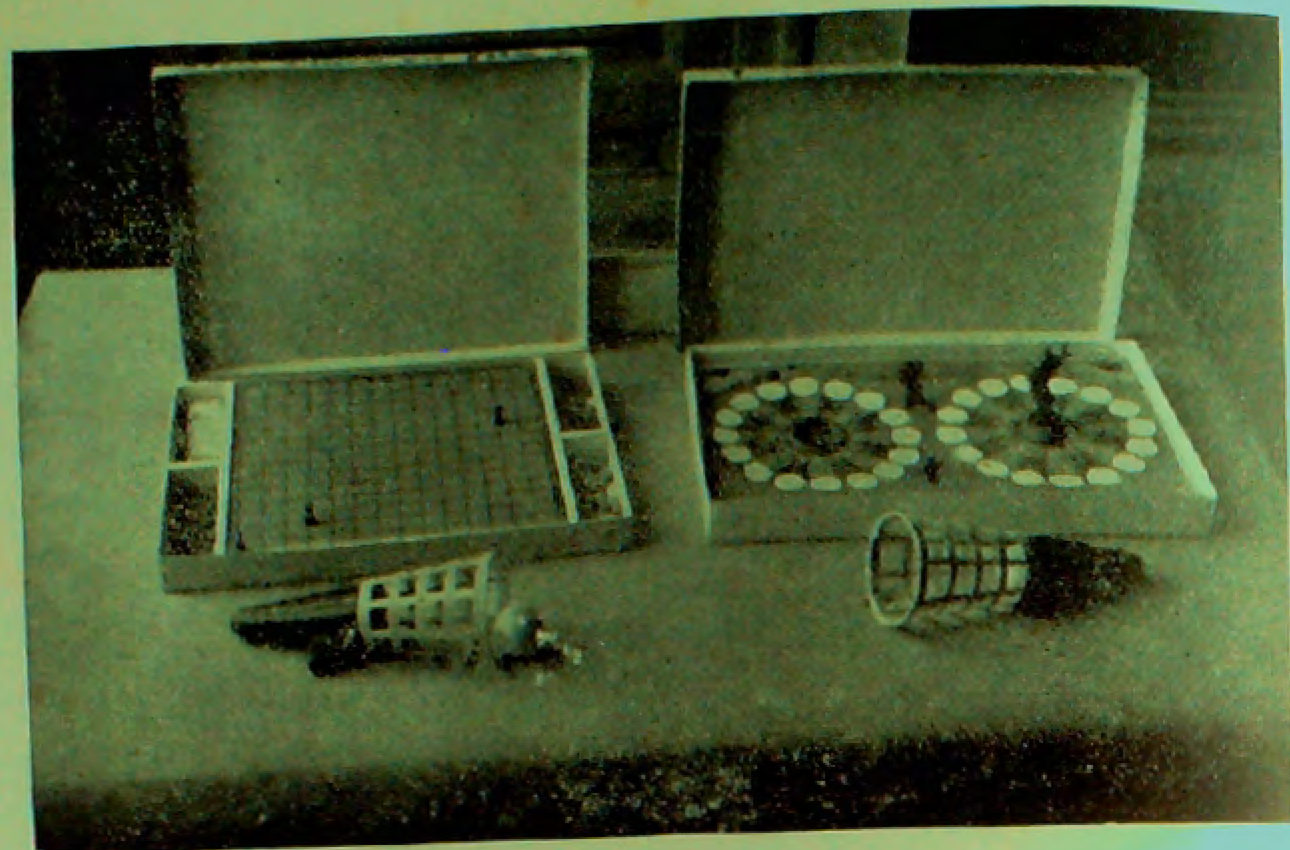


FIGURA 94.—Juegos varios utilizados como material didáctico-matemático (San Isidro).

FIGURA 95.—Un aspecto de la instalación de San Isidro sobre el material didáctico-matemático extraído de la vida.

FIGURA 96.—Material presentado por las Escuelas del Magisterio femeninas de Toledo y Zamora.

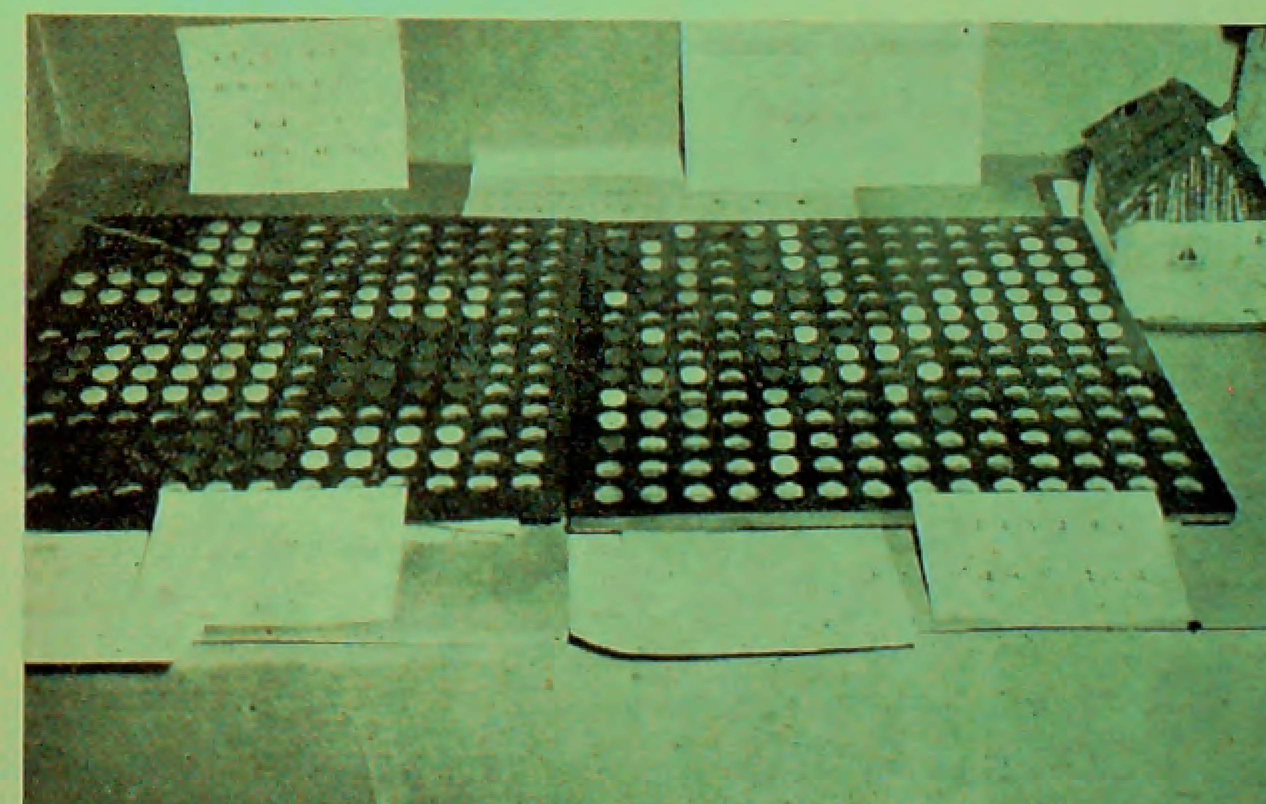


FIGURA 97.—Material presentado por el Juniorado de las Escuelas del Sagrado Corazón, de Valladolid.

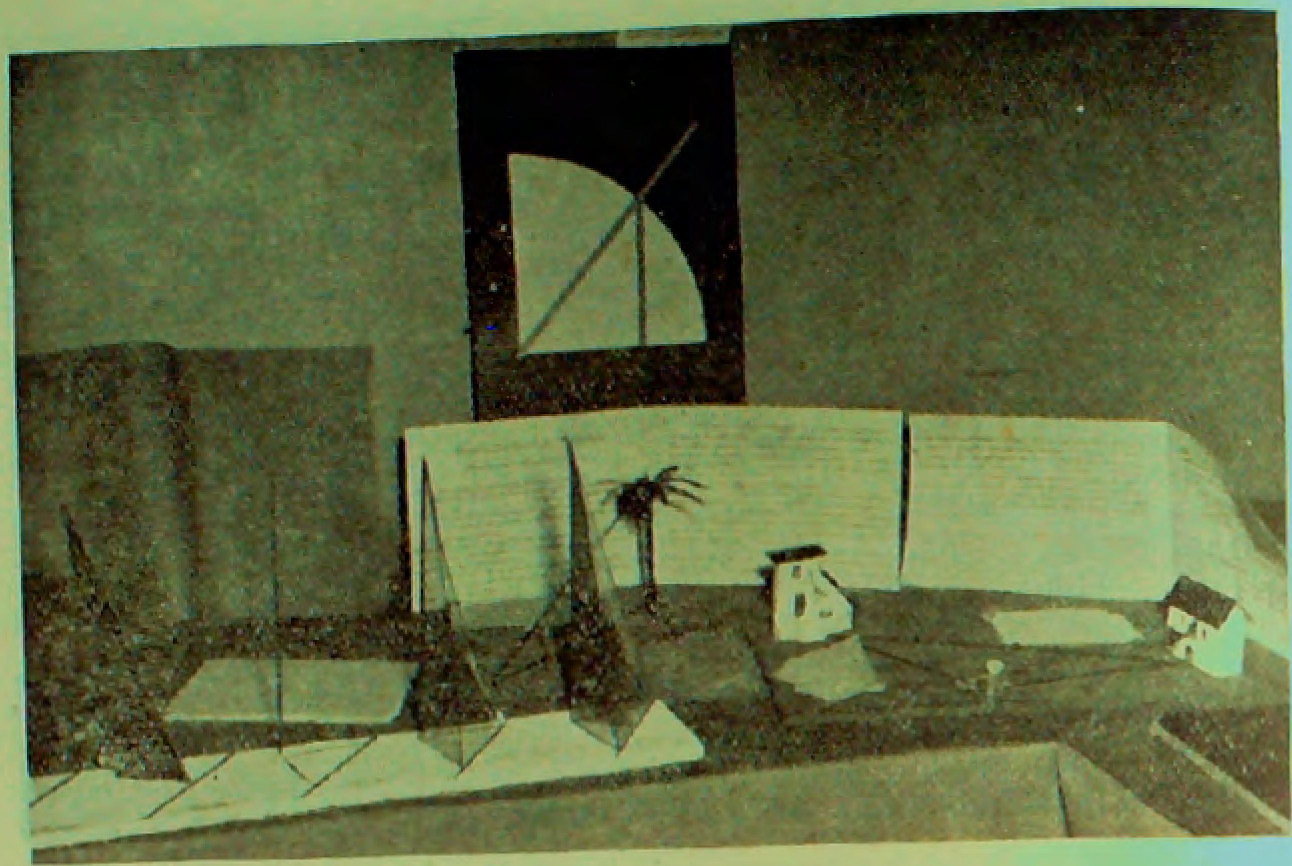


FIGURA 98.—Material presentado por el Colegio de las Hijas de la Caridad, de Madrid.

FIGURA 99.—Material presentado (didáctico-matemático) por el Colegio Nacional de Ciegos.

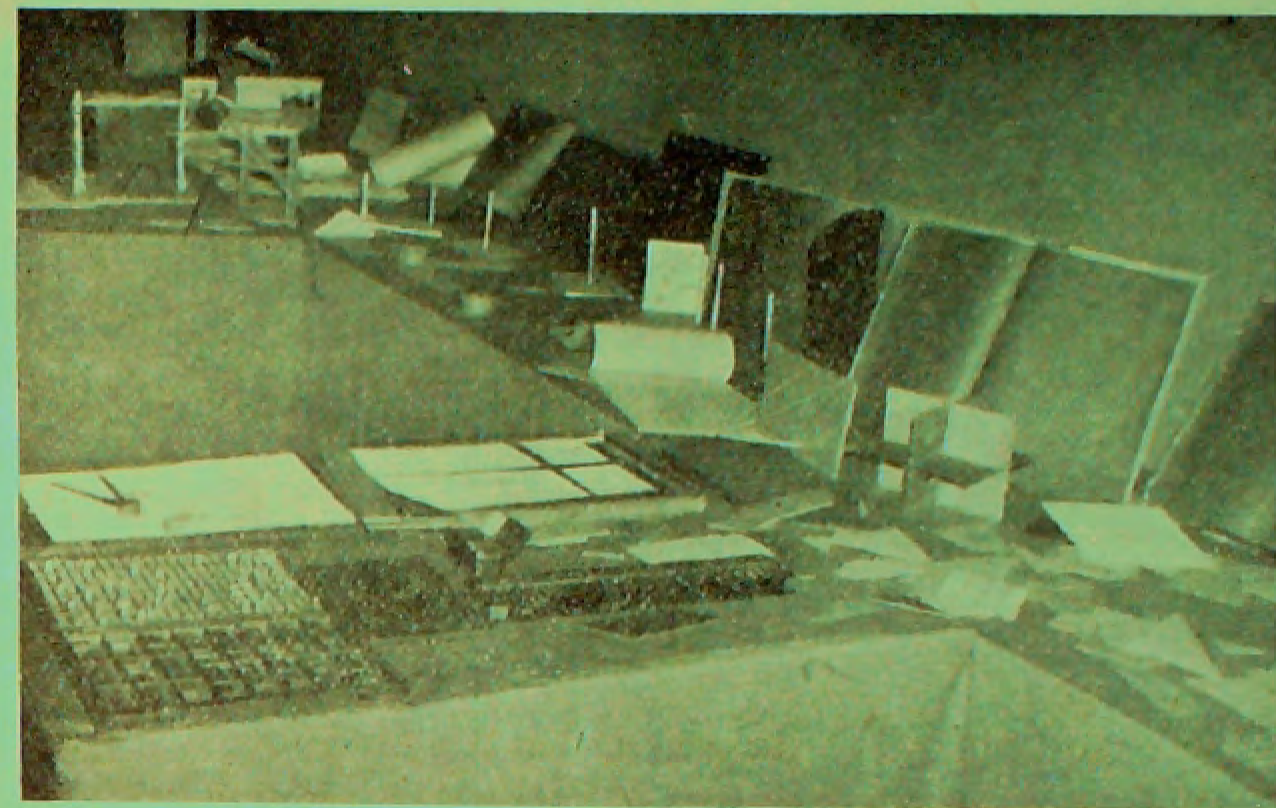
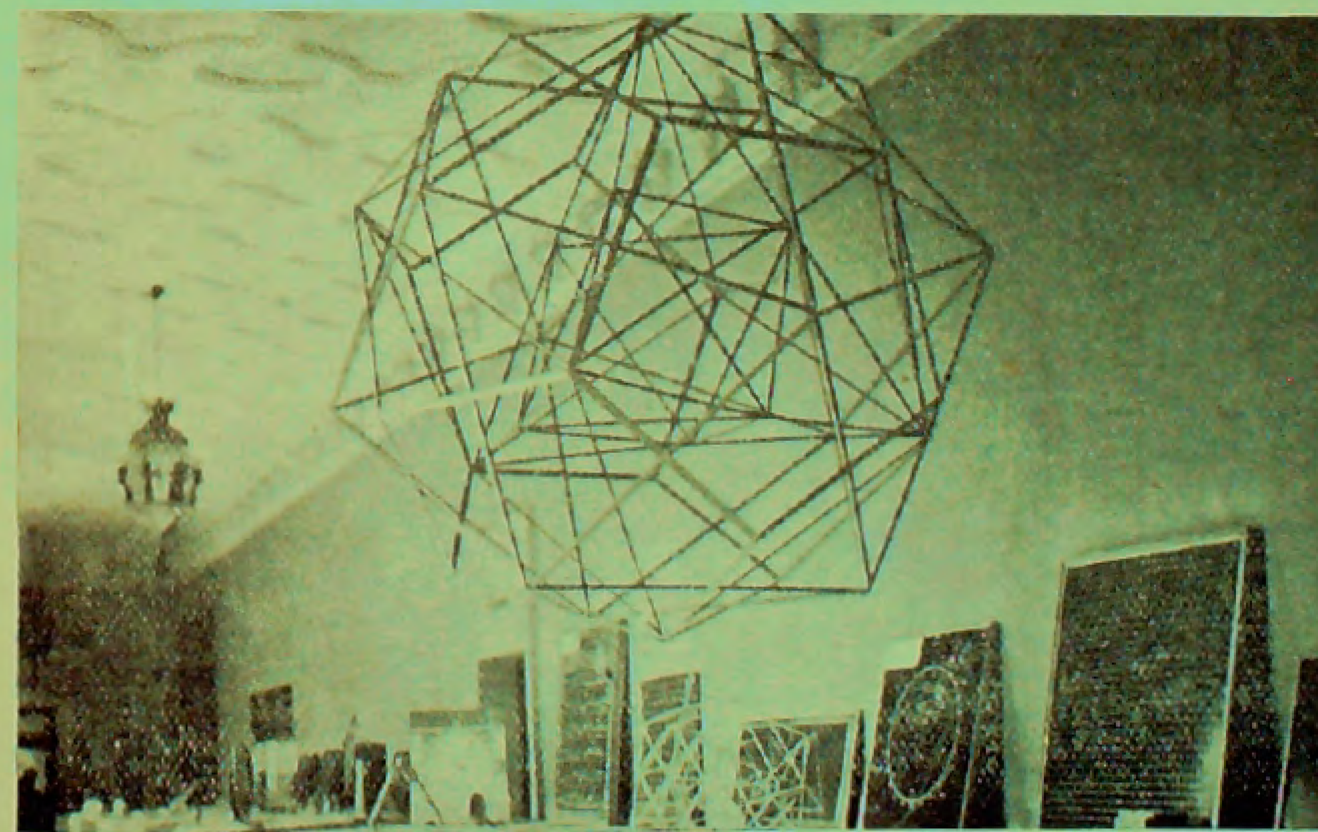


FIGURA 100.—Más material didáctico destinado a la enseñanza de los ciegos.



Vista parcial de una de las cuatro naves de la Exposición Internacional del Material Didáctico-Matemático instalada en el Instituto de San Isidro.

PARTE CUARTA

LECCIONES PRACTICAS: USO DIDACTICO DEL MATERIAL

Con objeto de dar alguna idea del manejo del material didáctico expuesto por el autor en la Exposición anteriormente reseñada, reproducimos a continuación algunas de las explicaciones que acompañaban al referido material.

Constituyen en total doce muestras de técnica didáctica con modelos. Cinco de ellas reproducen lecciones vividas (*) sobre temas diversos:

1. *Angulos inscritos y arco capaz.*
2. *Haces de elipses e hipérbolas homofocales.*
3. *Posiciones de rectas y planos en el espacio.*
4. *Progresiones.*
5. *Congruencias y clases residuales.*

Las siete siguientes resumen indicaciones y sugerencias didácticas estructurables en lecciones varias que abarcan desde temas corrientes desarrollados con nueva técnica mediante el uso de material extraordinariamente simple, y aun objetos de la vida corriente:

6. *Situaciones didácticas obtenidas por plegado.*
7. *Construcciones geométricas con un vidrio oscuro.*
8. *El paraguas modelo multivalente.*
9. *La geometría del atril.*

hasta temas todavía alejados hoy de los programas elementales, pero que no lo serán en un futuro tal vez próximo:

10. ***Iniciación a las máquinas de calcular.***
11. ***Iniciación al Algebra de conjuntos.***
12. ***Algebra y lógica de interruptores y conmutadores.***

(*) Estas lecciones están también contenidas en el libro del autor *Didáctica matemática eurística*, publicado por la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

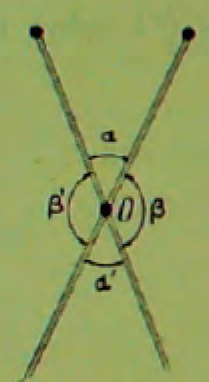
ANGULOS INSCRITOS Y ARCO CAPAZ

Describiremos a continuación una lección activa sobre el tema de los ángulos inscritos y diversos modelos dinámicos, todos ellos realizados en el Instituto de San Isidro, según mis instrucciones, sobre la idea del arco capaz.

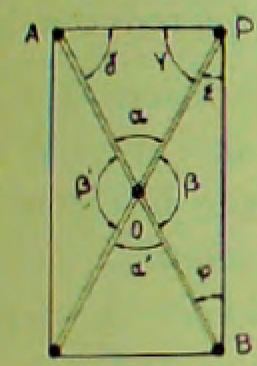
Para mayor claridad dividimos la exposición de dicha lección, desarrollada ante alumnos de primero y segundo cursos, en los siguientes eslabones conceptuales:

I. Presento a los alumnos el modelito de la figura (1), constituído por dos varillas iguales articuladas en su punto medio. Hago variar los ángulos que forman, pero les digo que en cualquier posición estos án-

(1)



(2)



gulos guardan entre sí ciertas relaciones, que han de escribirme en su cuaderno. (Invitación al descubrimiento de relaciones invariantes, con la consiguiente acción mental de comprobación, dejándoles el modelo a su alcance para que puedan manipularlo.)

Ninguna dificultad les ofrece descubrir las relaciones

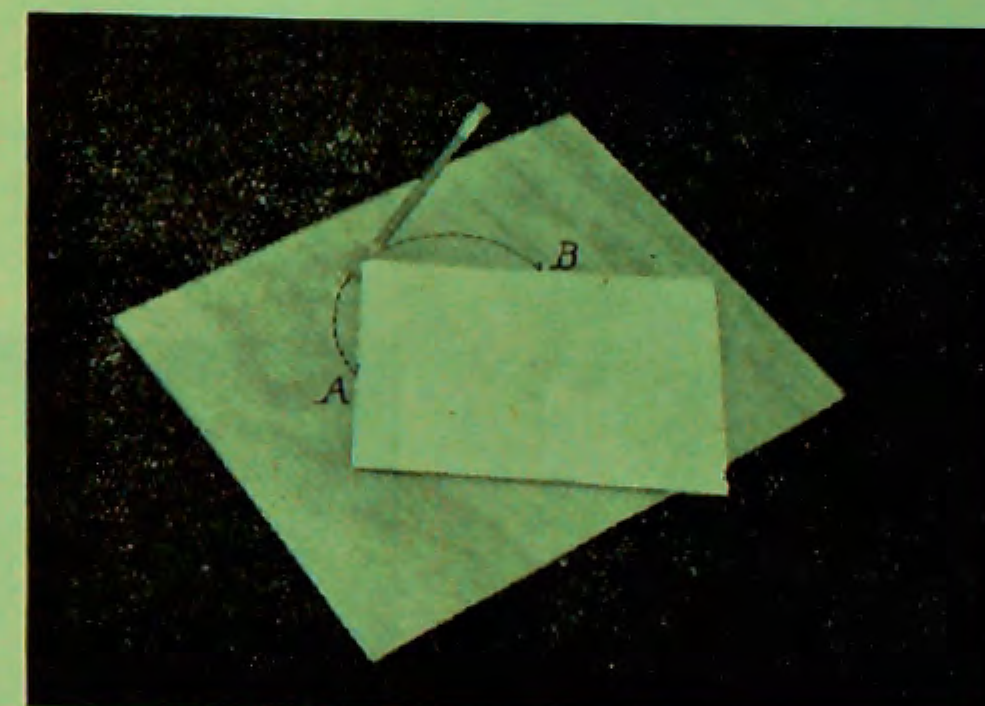
$$\alpha = \alpha'; \qquad \beta = \beta'; \qquad \alpha + \beta = 180^\circ, \text{ etc.}$$

II. Al tender una goma o cordón elástico uniendo los cuatro extremos (materializados mediante poleítas), formo una figura que todos reconoce inmediatamente: Un rectángulo, el cual se deforma al abrir o cerrar el ángulo de las varillas. «¿Qué representan las varillas en el rectángulo?» Al mismo tiempo se han formado nuevos ángulos, que se designan mediante letras, haciendo el esquema (2) en el encerado. Pregunto qué nuevas relaciones descubren entre estos ángulos periféricos. Sin dificultad escriben: $\gamma = \delta$; $\varepsilon = \varphi$; $\gamma + \varepsilon = 90^\circ$, etc. «¿Dependen

estas relaciones de la forma del rectángulo?» Reconocen su invariancia sin necesidad de insistir.

III. Durante la actividad anterior conviene no sólo haber deformado el rectángulo, sino también haber variado su orientación dejándoles manipularlo.

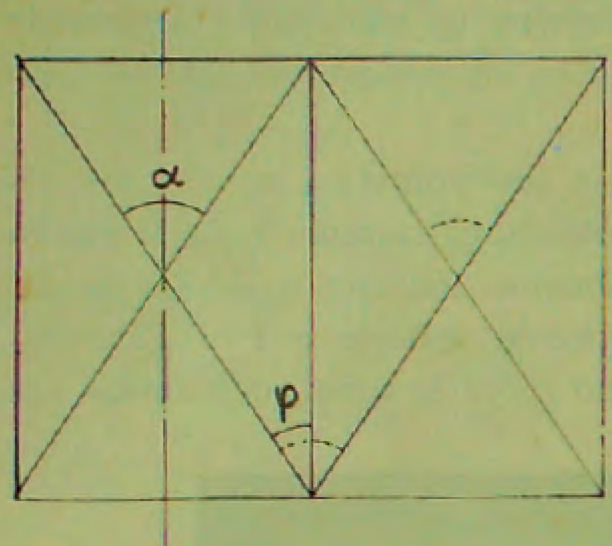
En este momento doy una posición fija (horizontal) a una de las varillas AB y muevo la otra. «¿Qué línea describe el extremo P de la varilla móvil?» «¿Qué ángulo forman constantemente los trozos de goma AP y BP que concurren en él?» «¿Y el extremo opuesto a P?» Enunciado del lugar. Verificación con un cuaderno sobre la mesa, deslizando dos

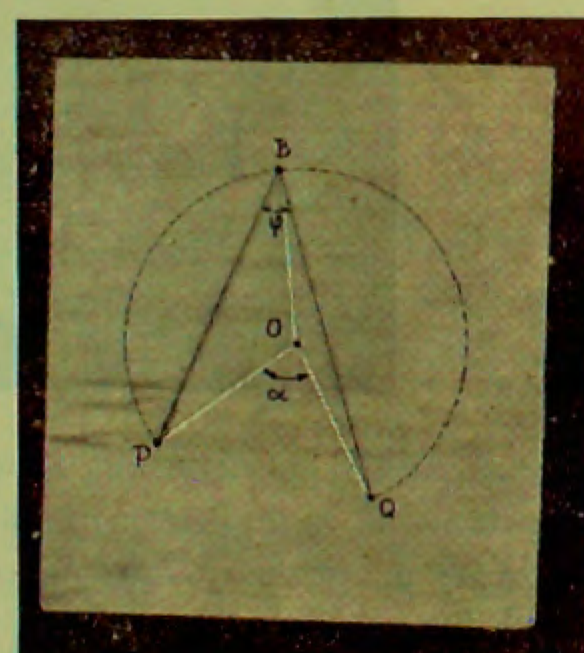


de sus bordes de modo que se apoyen sobre dos alfileres clavados en ella. (Hasta aquí la experiencia ha sido realizada satisfactorimente por los alumnos de primero y segundo cursos. Continúo ahora sólo con los de segundo.)

IV. Antes hemos descubierto propiedades que relacionan los ángulos centrales de la figura (2) y también otras que ligan ángulos periféricos entre sí. Propongo ahora la búsqueda de relaciones que liguen ángulos centrales con ángulos periféricos, concretamente:

«¿Qué relación hay entre α y φ?» La respuesta se hace esperar. No falta quien cree que son iguales, pero no están seguros de ello. Para facilitar el descubrimiento coloco otra varilla en la bisectriz de α, eje de simetría del rectángulo; pero tampoco parece este recurso lo bastante elocuente. Les invito a discurrir sobre el rectángulo de la cuartilla que tiene cada alumno, diciéndoles que tracen sus diagonales y marquen en la figura los dos ángulos α, φ. Les sugiero que doblen la cuartilla por la mitad para marcar el eje, bisectriz de α, con lo cual obtengo ya dos contestaciones correctas. Al preguntar la explicación del porqué, uno de los alumnos me sorprende con una explicación convincente ajena al recurso del doblez propuesto. Este alumno, después de plegar infructuosamente la cuartilla, la duplica, colocando la de su compañero al lado, con lo que observa inmediatamente la igualdad de α con el doble de φ. Esta inesperada colaboración contribuye al convencimiento de los demás, y reconocen asimismo que persiste la propiedad al deformar el rectángulo. Entonces giro la varilla OP, manteniendo fijos A y B, y pregunto: «¿Quién gira más aprisa, la varilla OP o la goma BP? ¿Cuántas veces más aprisa tiene que girar para que α sea siempre el doble de φ?»

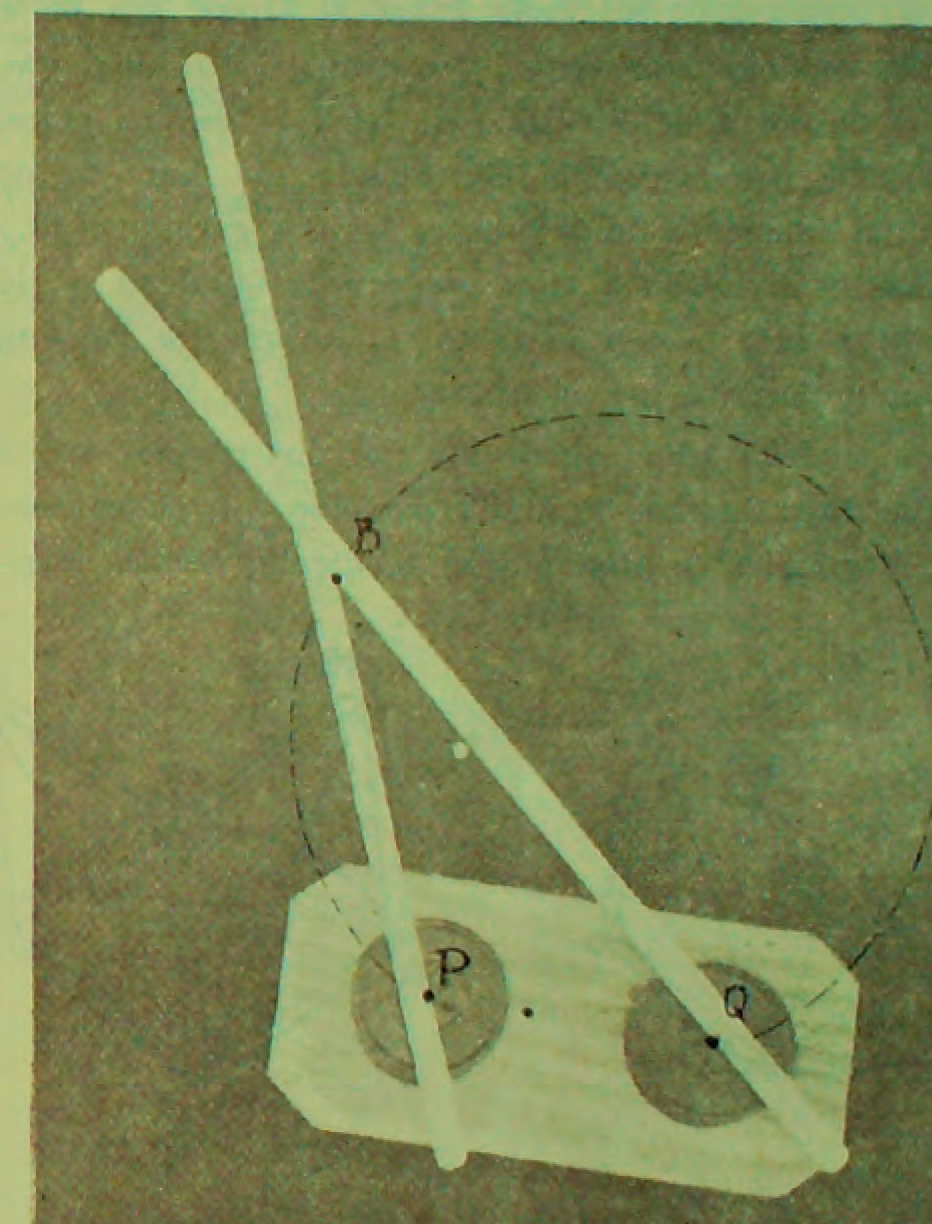




«El ángulo descrito por OP lo llamaremos *central*, y el ángulo descrito por PB le llamaremos *inscrito*. ¿Qué relación existe, pues, entre ambos?» Se anota. Les explico el porqué de la denominación de *central* e *inscrito* en relación con la circunferencia descrita por *P*.

V. Desde este momento, el modelo puede quedar reducido a un simple triángulo isósceles materializado por medio de dos varillas iguales, OP, OB, articuladas en el extremo común O, y una goma tendida entre los extremos libres P, B. Todo ángulo (central) descrito por OP será doble del ángulo descrito al mismo tiempo por la goma BP (ángulo inscrito), mientras OB permanece inmóvil.

Si se añade una tercera varilla, OQ, podremos materializar y fijar un ángulo central, POQ, mientras las gomas PB, BQ, materializarán el ángulo inscrito PBQ, ángulo que se convertirá en móvil si giramos OB

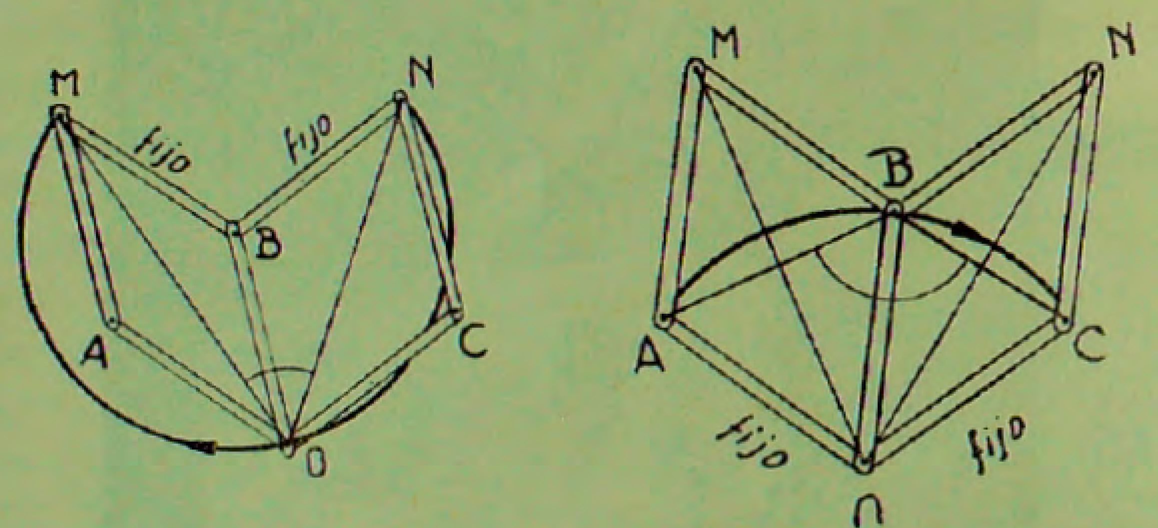


(manteniendo ahora fijos POQ). La invariancia del ángulo central α y de la relación antes descubierta $\varphi = \dfrac{1}{2}\,\alpha$ permite definir un nuevo lugar geométrico generalización del anterior: El *arco capaz* del ángulo PBQ, arco descrito por *B*. Se puede repetir aquí la experiencia del cuaderno haciendo deslizar ahora, entre dos alfileres, ángulos agudos de cartabones, o también ángulos obtusos recortados en cartulina.

Tal es la forma en que conduje eurísticamente el descubrimiento del arco capaz entre alumnos de segundo curso, y los sencillos modelos de que me valí para ello. Pero, con posterioridad, he propuesto a mis alumnos de cursos más avanzados la realización de nuevos modelos sobre la misma idea, con objeto de que la explicación de los lugares geométricos que en ellos se engendran les diera lugar al repaso del tema.

Uno de tales modelos consiste en dos varillas, PB, BQ, que giran alrededor de dos puntos fijos, situados en los ejes de dos poleas horizontales (improvisadas por medio de dos bobinas de cinta de máquina de escribir). Un hilo resistente tendido entre las dos gargantas de dichas poleas y fuertemente arrollado a ellas asegura la igualdad de los ángulos girados por una y otra y, por lo tanto, la invariancia del ángulo PBQ. La intersección B describe así el arco capaz.

Otro de los modelos está constituído por dos rombos articulados con un lado común. Los alumnos lo han construído con elementos del juego Mecano. Las diagonales se materializan tendiendo gomas entre los vérti-



ces opuestos. Si se fijan los lados OA y OC y se mueve OB, el ángulo móvil MON es invariante, por ser mitad del ángulo fijo AOC; luego también es invariante el ángulo ABC de lados perpendiculares, mientras B describe su arco capaz.

Si se fija, en cambio, el ángulo MBN y se mueve BO, permanecen invariantes en el movimiento el ángulo AOC (de lados paralelos al MBN) y su mitad, MON, mientras O describe el arco capaz de este último.

Al presentar el modelo a los alumnos (de cuarto curso y superiores), se les sugieren las dos posibilidades dinámicas y se les pregunta qué ángulos permanecen invariantes en el movimiento.

Observación.

En el punto inicial de partida, al tomar el rectángulo como medio intuitivo más rápido para captar ciertas propiedades del triángulo rectángulo (su mitad), coincido con el profesor Drenkhahn, de Flensburg (Alemania), y creo que el secreto de la eficacia intuitiva del rectángulo que he materializado *empezando por sus diagonales* radica sustancialmente en el hecho de ser una forma geométrica frecuente en todo lo que nos rodea. El niño tiene, desde su más tierna infancia, una gran riqueza de vivencias de ella, y son en el fondo dichas vivencias las que contribuyen al proceso curístico inicial conducente al descubrimiento del lugar de Thales

Estaba presentando en forma amena, a los niños de primer curso, el concepto de mediatriz como lugar geométrico de puntos equidistantes de dos fijos, haciendo sostener a dos niños, A y B, los extremos de un largo cordel en el que había señalado con un nudo el punto medio, mientras un tercero, a ojos cerrados, describía dicha mediatriz manteniendo tensas las dos mitades de las que iba quitando simultáneamente la misma cantidad de hilo, según indican las figuras adjuntas.

«De esta manera, les decía, hasta un ciego puede trazar rectas perpendiculares en su jardín ¿Qué camino sigue el alumno a ciegas? ¿Por qué?...»

La actividad se desenvolvía simultánea al interrogatorio analítico, conducente a la conclusión de la naturaleza y propiedad del lugar.

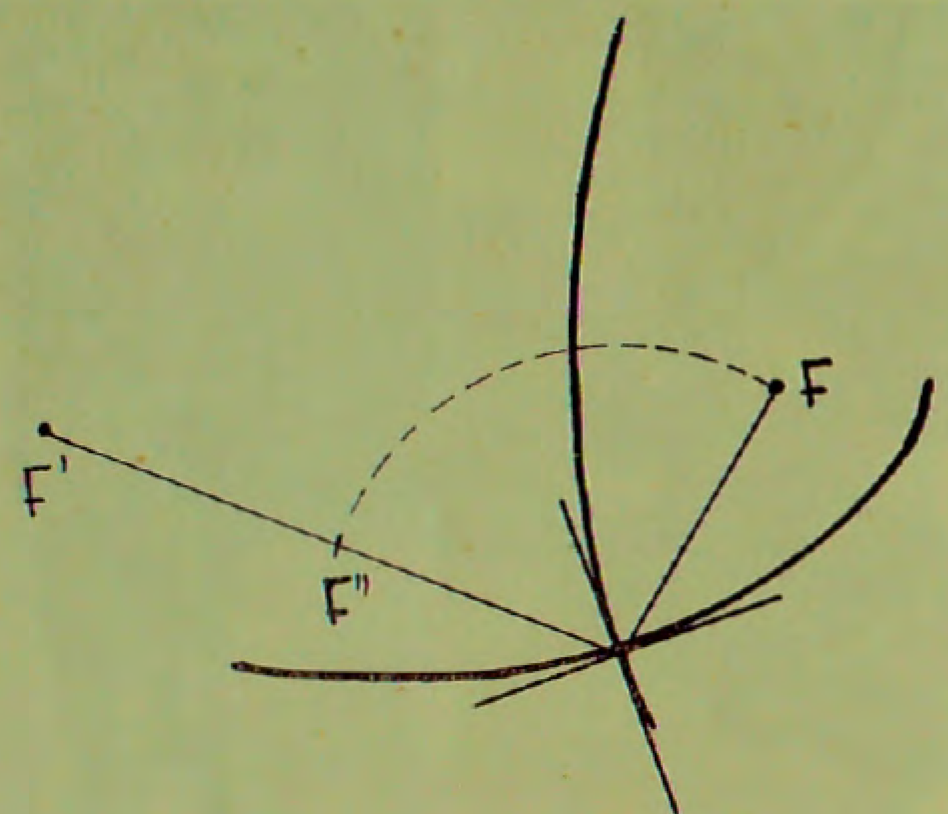
Pero, hallándose presentes, en el patio donde operábamos, alumnos de cuarto curso (que ya tenían noción de la elipse y de la hipérbola) pensé de pronto que también podía hacerles participar en el dinamismo planteado variando la situación inicial. Deshice el nudo medio, y al hacerles repetir la experiencia partiendo de un punto visiblemente no equidistante de los extremos A y B, se vió asimismo que ya no era recto el lugar. «¿Qué curva estamos describiendo ahora?» No se conservaba ya la equidistancia; pero algo se conservaba todavía. «¿Qué era?» No les fué difícil darse cuenta de que al ir quitando lo mismo de los dos ramales, permanecía invariante la diferencia de longitud entre ellos y, por tanto, que la curva descrita era la hipérbola.

Surgió así un nuevo modo de trazar hipérbolas en el jardín y en el encerado, parangonable al método clásico del jardinero para la elipse, puesto que no exige más que el manejo exclusivo del hilo o cuerda, trazado que no he visto, por cierto, en ninguno de los libros de geometría que conozco.

Pero no terminó aquí el análisis del movimiento obtenido. La comparación de los dos movimientos respectivamente generadores de la elipse

y de la hipérbola nos sugirió las propiedades de las tangentes y su ortogonalidad.

He aquí cómo conduje el descubrimiento intuitivo de dichas propiedades. Al partir de la posición de equidistancia, la hipérbola se transforma en recta bisectriz de los dos ramales (radios vectores). El movimiento del punto al engendrar la elipse partiendo de la misma posición es de dirección perpendicular en este punto a la anterior dirección. Pero, «¿y en otra posición cualquiera en la que los radios vectores sean distintos?» Hago sujetar el punto F'' del ramal más largo situado a una distancia del punto generador igual al ramal más corto, y pregunto: «Operando a ciegas, ¿notaríamos *en seguida* el cambio del segundo punto fijo (foco) sobre el radio vector?» El término *en seguida* lleva implícita la noción de infinitésimo y, aunque parezca escandaloso para una mentalidad rigurosa, es suficiente para sugerir que no se nota el cambio de dirección en el instante inicial. También puede emplearse si se quiere la locución menos aconsejable «en el primer instante» que carece de sentido matemático, pero que tiene sentido intuitivo suficiente para ellos. Si la contestación se resiste, se hace la experiencia cambiando el radio en una circunferencia trazada

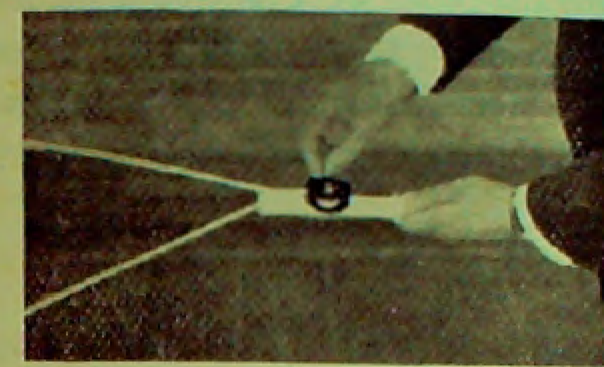


asimismo a cordel. Es curioso consignar aquí el hecho de que, repetida la experiencia y la pregunta con alumnos auténticamente ciegos, la interpretaron y contestaron correctamente de modo inmediato.

Abreviando: Si las direcciones iniciales de los arcos de la elipse y de hipérbola trazados no varían al desplazar un foco a lo largo del radio vector, basta imaginar igualados en todo momento ambos radios vectores para concluir que las tangentes siguen siendo las bisectrices de los ángulos formados por tales radios y sus prolongaciones, y que, por consiguiente, cualquiera que sea la posición de partida, la elipse y la hipérbola, trazadas con ambos modos de generación, son ortogonales entre sí. Naturalmente que no pretendemos reemplazar con estas consideraciones intuitivas la demostración rigurosa de la propiedad, cuya necesidad puede surgir como consecuencia del descubrimiento. Cambiando la longitud del cordel,

así como del punto de partida, podemos obtener de este modo los dos haces de elipses e hipérbolas homofocales ortogonales.

Estos trazados nos sugirieron más tarde la realización de un aparatito muy sencillo que permite la variación de los parámetros a voluntad del operador que lo manipula. El cordel se cierra sobre sí mismo y se arrolla a una bobina después de pasar por los orificios A y B practicados en



dos plaquitas de manera que son las que sostienen los alumnos, de modo que dichos orificios marcan los focos de los dos haces de cónicas. Si los alumnos presionan con el dedo los orificios, inmovilizan la circulación del cordel y el operador puede trazar la hipérbola arrollando y desarrollando el hilo en la bobina. Por el contrario, manteniendo sujeta la bobina para impedir su giro y dejando libres los orificios de las plaquitas,

el hilo se deslizará por ellos al moverse el operador, el cual, manteniendo siempre tenso el hilo, describirá la elipse ortogonal a la anterior en el mismo punto de partida. De esta suerte el operador, con la simple orden de presionar o dejar libres los orificios, puede describir a voluntad las cónicas ortogonales de ambos haces hasta el límite que permite la longitud del cordel.

POSICION DE RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

A continuación reproduzco la conducción eurística de una iniciación a la Geometría del espacio, desarrollada en dos sesiones ante alumnos de segundo curso, mediante rectas y planos, respectivamente materializados mediante agujas de tricotar y carpetas de cartón corrientes en las papelerías. Hemos elegido material usual barato y manipulable para hacer intervenir el gesto y el movimiento en las adquisiciones de conciencia de las propiedades espaciales. Reparto, pues, carpetas y agujas entre los niños (en número de doce, distribuídos en cuatro mesas), les digo que cada carpeta representará un *plano* y cada aguja una *recta*, y comienza la acción:

Posiciones de planos

Una observación: Me he abstenido deliberadamente de toda alusión previa a la infinitud del plano representado por cada carpeta. Ello resultará como comentario a la misma acción. Ordeno de buenas a primeras:

1. «Los tres alumnos de cada mesa me van a colocar sus tres planos paralelos entre sí.» La mayoría me coloca las tres carpetas sobrè la mesa una al lado de la otra con los bordes paralelos. Afortunadamente los tres

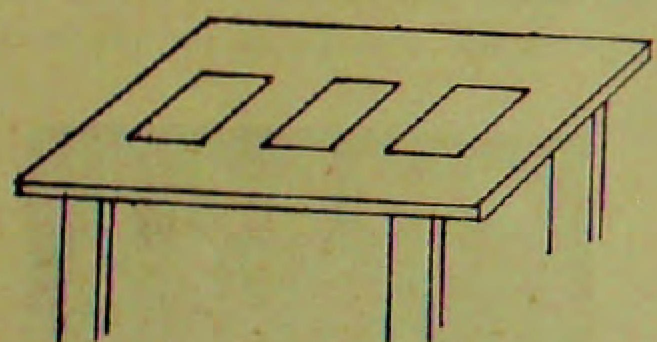


Fig. 1

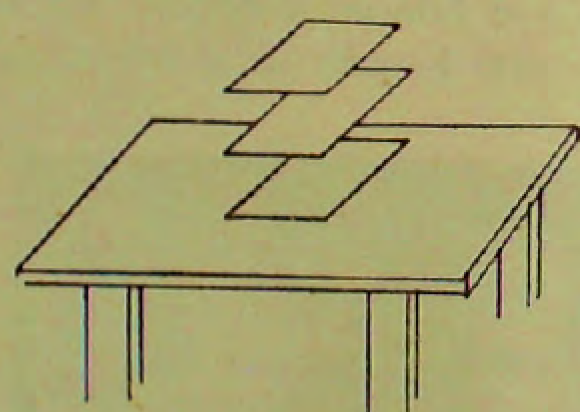


Fig. 2

alumnos de una mesa colocan acertadamente las tres carpetas en planos paralelos distintos (aunque horizontales y con los bordes siempre paralelos). (Si no hubiese surgido entre ellos una solución correcta, quizás hubiese terminado proponiéndola yo mismo.) Inmediatamente la pregunta: «¿Qué solución os parece la mejor?» La contestación va implícita en la acción rectificadora de los equivocados y la permanencia en su actitud de los acertantes. «¿Por qué os parece mejor así?» «¿Existían en verdad tres planos distintos cuando las tres carpetas estaban apoyadas en la mesa?»

2. «Colocadme dos planos coincidentes y uno paralelo.» «¿Cuántos planos distintos hay en verdad ahora?» Colocaciones y contestación correctas (fig. 3).

3. «Colocadme los tres planos coincidentes.» Vuelven a colocarlos apoyados sobre la mesa. «Colocadme los tres planos coincidentes, pero no sobre la mesa.» Solución correcta separando las carpetas de la mesa, pero unidas formando superficie continua. «¿No podríais separar entre sí las carpetas de modo que estén siempre en el mismo plano?» Lo hacen conservando el paralelismo de los bordes. Les giro un poco la carpeta sobre sí misma. «Y ahora, ¿siguen estando en un mismo plano?» (Asienten.) «Y

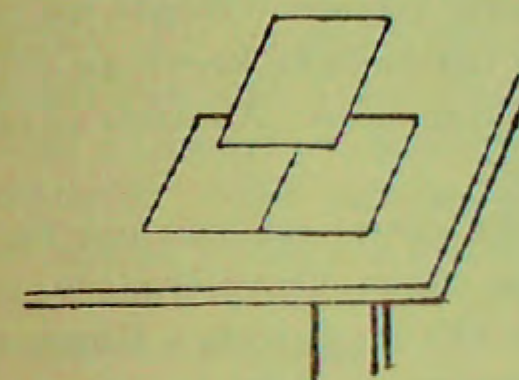


Fig. 3

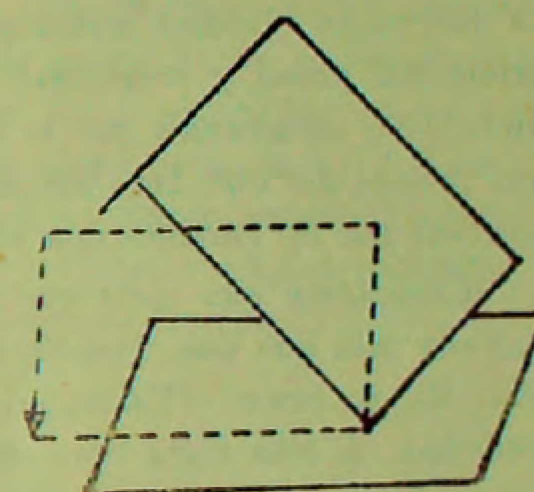


Fig. 4

no podríais separarlos más, sin que dejaran de estar en el mismo plano?» Lo hacen. «Más separados todavía. Más aún.» Obedecen hasta adquirir posturas violentas o tener que levantarse para separarlos ostensiblemente. «Entonces, ¿dónde termina el plano?» «No termina», dicen. Propongo otros modos de decir: «No tiene fin, no tiene límite, es *indefinido*, es *ilimitado*.»

4. El mismo juego con las agujas y la consecuencia de ser la recta ilimitada o indefinida.

5. «Sabiendo ya que el plano es indefinido, ¿podremos colocar dos planos de modo que no tengan más que un solo punto común?» Por ejemplo, tal como se indica en la figura 4. La perplejidad ante la pregunta, pese a la capciosidad del modelo, indica que no caen en el engaño, aunque no se atreven a contestar.

Giro entonces en su plano la carpeta apoyada alrededor del vértice de contacto hasta que exista todo un borde de apoyo. «¿Es el mismo plano de antes? ¿Qué tiene común con el otro? ¿Cómo enunciaremos este descubrimiento?» (Puede añadirse aquí, si se quiere, la separación mutua de ambos planos secantes y la noción de semiplano.)

6. «¿Podéis trazar ahora un plano que sea paralelo a estos dos que se corten?» Negativa espontánea. «Colocados paralelos dos planos, ¿podéis trazar un plano que corte a uno de ellos sin cortar el otro?» Nueva negativa. Enunciado de la propiedad.

Posiciones de recta y plano

7. «Colocadme una recta y un plano que tengan un solo punto común.» Lo hacen. Deslizo entonces un poco la recta sobre sí misma separándola del plano y pregunto: «Y ahora, ¿siguen teniendo un punto común?» ¿No os acordáis que la recta es indefinida?» Rectifican. «Tiene la recta puntos del otro lado del plano.» En resumen: Atraviesa el plano, y es cortada por él. Diremos que se cortan.

8. «Colocadme una recta que tenga dos puntos comunes con un plano.» «Nada más que dos, ¿puede ser?» Lo niegan. Curvo el plano, curvo la recta. Me replican: «Ya no es plano.» «Ya no es recta.» Enunciamos la propiedad. Si una recta tiene dos puntos en un plano...

9. «Colocadme una recta paralela a un plano.» «Colocad todas vuestras rectas paralelas a mi plano.» General tendencia a colocarlas paralelas a uno de los bordes, lo que implica el reconocimiento intuitivo de la propiedad de ser una recta, exterior a un plano, paralela a él con sólo serlo a una de sus rectas. (No me parece oportuno explicar todavía esta

propiedad, contentándome con ver acusada su presencia subyacente en la actitud de los niños, y continúo.)

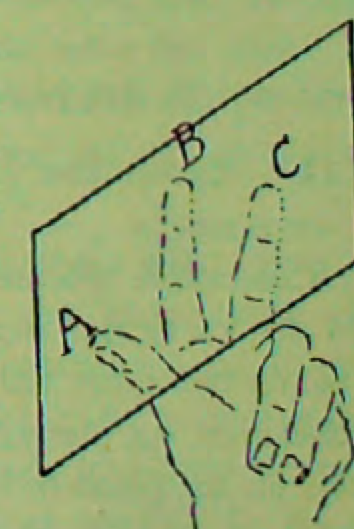
10. La pregunta anterior ha motivado la elección de dos direcciones de rectas. Entonces, a la pregunta: «¿Cuántas rectas paralelas se pueden trazar desde un punto a un plano?», es corriente que contesten: «Una» paralela al plano, según el borde elegido. Invito a dos alumnos sostenedores de rectas de direcciones distintas a que repitan estas paralelas por un mismo punto y ya me dicen: «Dos». Giro mi plano sobre sí mismo, y al darse cuenta de que su criterio les obliga a girar también sus rectas, caen en la cuenta y me dicen: «Muchas, infinitas». «¿Dónde están? ¿Qué forman?» Algunos me han contestado: «Un círculo», lo que motiva nuevamente el recuerdo de la infinitud de la recta. Al fin se consigna en los cuadernos: Por un punto exterior a un plano se pueden trazar infinitas rectas paralelas a él. Todas ellas están en plano paralelo. «¿Cuántos planos paralelos a uno dado se pueden trazar por un punto exterior?» Señalar en la habitación planos paralelos entre sí y rectas y planos paralelos. Suspendo aquí la sesión, que continúo al siguiente día con la

Determinación del plano

Siguen las órdenes y los interrogatorios.

11. «Colocad una recta fija. ¿Cuántos planos pasan por ella?» Colocada la aguja en el interior de la carpeta, adosada al doblez, la carpeta gira alrededor de ella como eje.

«Colocad un plano que pase por vuestra recta fija y por el punto que señalo en el espacio con mi dedo, ¿cuántos planos podéis trazar cada uno de vosotros?» Diremos que el plano está *determinado* por una recta y un punto exterior a ella. «¿Y si el punto estuviera en la recta?



12. «¿Cuántos planos pasan por tres puntos? ¿Y si los puntos están en línea recta?» Manipular en caso necesario con una carpeta apoyada en los extremos de tres dedos. «¿Y por cuatro puntos?» (Carpeta y cuatro dedos; posible oscilación.) «Imaginad la carpeta convertida en el suelo y la mano en una mesa. ¿Por qué bailan las mesas de cuatro patas y no las de tres?»

13. Más difícil: «Colocadme un plano que pase por vuestra recta fija y sea paralelo a la recta que señalo. ¿Cuántos puede trazarme cada uno de vosotros?» «¿Y si diera la casualidad de que mi recta fuera paralela a

alguna de las vuestras, cuántos planos podría trazar el alumno que la tuviera?» Lo realizan en verdad, hasta que contestan correctamente, suscitando en caso necesario el movimiento del plano.

Posiciones de dos rectas

14. «Colocadme cada uno de vosotros dos rectas paralelas.» «¿Están en un plano?»

«Colocadme dos rectas que se cortan.» «¿Están en un plano?» Coloco yo dos agujas separadas cuyas prolongaciones se corten, y pregunto: «¿Se cortan estas rectas?» (Insistencia en la no limitación de la recta.) «¿Están en un plano?» «¿Pueden cortarse o ser paralelas dos rectas si no están en un plano?»

15. «¿Podéis colocarme ahora dos rectas de manera que no se corten ni sean paralelas?» Si no se les ocurre les propongo que busquen en la habitación dos rectas que ni se corten ni sean paralelas y luego que vean si pueden estar en un mismo plano. Designación de *rectas cruzadas*.

Perpendicularidad

16. «Colocad vuestras rectas perpendiculares a mi plano. ¿Cuántas de ellas se pueden trazar por un punto?» Distancia de este punto al plano. ¿Cómo se mediría?

17. «Colocad vuestros planos perpendiculares a mi recta. ¿Cuántos de ellos se pueden trazar por un punto?»

18. «Colocad vuestro plano perpendicular al mío. ¿Cuántos podéis trazar por un punto?»

19. «Colocad vuestra recta perpendicular a mi recta. ¿Cuántas podéis trazar por un punto?» Desplazo mi recta paralelamente manteniendo ellos la perpendicular trazada, de modo que ambas se crucen, y pregunto: «¿Siguen siendo perpendiculares?» De momento parecen dividirse las opiniones, pero prevalece el criterio afirmativo. «¿Cómo sabremos, pues, si dos rectas cruzadas son perpendiculares?»

Angulo y distancia entre dos rectas cruzadas

20. Las situaciones y preguntas anteriores acaban de sugerir el desplazamiento paralelo de una de las rectas cruzadas hasta cortar a la otra, o, lo que es lo mismo, el trazado, por un punto de una de ellas, de una paralela a la otra. Esta operación, si es fácilmente asimilada por los alumnos, va a consentir la formulación de preguntas más generales y difíciles.

La primera: «¿Cómo averiguaremos el ángulo de estas dos rectas cruzadas?» Las materializo con dos agujas. Con objeto de poder yo mismo intervenir en las manipulaciones de los alumnos, dejo las agujas clavadas en una base de corcho o madera.

21. La segunda: «¿Cómo averiguaríamos la distancia entre estas rectas?» Esta distancia puede materializarse mediante una goma tensa entre las dos agujas. Pero la imprecisión que el mismo rozamiento de la goma produce invita a precisar en debida forma la posición de la perpendicular común. Empiezo proponiendo el trazado por cada aguja de un plano paralelo a la otra, lo que efectúan fácilmente con el auxilio de las carpetas. Al llegar a este punto, la manera más sencilla de sugerir lo que procede hacer es mover el conjunto hasta que las dos rectas (y por tanto los planos paralelos por ellas trazados) se coloquen horizontales. Ven en-

tonces que la distancia entre las rectas es la que existe entre los planos paralelos trazados, y que la proyección de cada recta sobre el plano paralelo corta a la otra en el pie de la perpendicular común. Terminé aquí la experiencia.

Observación

Fué muy interesante comprobar a lo largo de ella la influencia permanente de los bordes de las carpetas, tanto en los errores como en los aciertos de los pequeños, ya que dichos bordes unas veces han servido de ayuda a sus intuiciones (posiciones de paralelismo y de perpendicularidad) como han actuado de estorbo a los procesos de generalización. Por ello queda en pie el propósito de repetir la experiencia materializando los planos mediante formas planas variadas y aun de contornos irregulares.

PROGRESIONES

Progresiones aritméticas

Empiezo escribiendo en el encerado la sucesión

$$2 \quad 5 \quad 8 \quad 11 \quad \ldots$$

y les pregunto si sabrían continuarla. Lo hacen sin dificultad, excepto uno de ellos que aprende de los demás. Planteo otra

$$12 \quad 10{,}5 \quad 9 \quad 7{,}5 \quad \ldots$$

y ya aciertan todos a continuarla, incluso el que antes falló. En este nuevo ejemplo pongo empeño en que continúen la sucesión más allá del cero. «¿Por qué os detenéis en el cero?», pregunto a quienes así lo hacen. «¿Y si se trata de unas temperaturas que van bajando de un grado y medio cada vez?...» (Estos alumnos habían estudiado ya los números negativos.)

Les pido ahora si me sabrían hallar el término de lugar 100 de cada sucesión. Propongo un número muy adelantado para evitar que adopten el recurso de continuar la sucesión hasta llegar al número, recurso que por su comodidad siguen si se les propone la búsqueda de un número bajo. Al tratarse de un número muy alto la comodidad se convierte en incomodidad que invita a buscar un camino más rápido, una ley. No aciertan en plazo breve y suavizo la pregunta buscando en una sucesión más sencilla, pero siempre un número alto. «Hallar el centésimo número impar.»

Ya empiezan a acertar. Formulamos explícitamente el razonamiento de los acertantes, indicando el cálculo

$$1 + 99 \,.\, 2 = 199$$

a la vista de lo cual surgen también los aciertos en los ejemplos anteriores

$$2 + 99 \,.\, 3 = 299 \qquad (1)$$
$$12 + 99 \,.\, (-1{,}5) = -136{,}5 \qquad (2)$$

Intentamos generalizar. Les digo que estas sucesiones se llaman ***progresiones aritméticas*** y propongo enunciar una definición de progresión aritmética. Preguntado uno de ellos, propone: «Una sucesión de números que crecen o decrecen.» Pongo un contraejemplo para que todos analicen si conviene a la definición y si responde al mismo carácter de los ejemplos propuestos. El mismo alumno rectifica diciendo «que crecen o decrecen por igual» ¡Bien! Acepto la definición precisando el significado de *por igual,* que todos entienden perfectamente. «Por igual significa aquí que cada término tiene una diferencia constante con el anterior, que llamaremos *razón* de la progresión.» ¿Cuál es, pues, la razón de la primera progresión planteada? ¿Y de la segunda? Todos aciertan, dando incluso el signo correcto a esta última — 1,5.

Designemos los términos de toda progresión del siguiente modo:

Progresión general	u_1	u_2	u_3	u_4
Progresión primera	2	5	8	11

¿Cuál es u_5 en la progresión primera? ¿Cuáles son u_2 y u_4 en la progresión segunda? ¿Cómo designaríamos el término calculado en (1) y en (2)?

$$u_{100} = u_1 + 99\,r$$

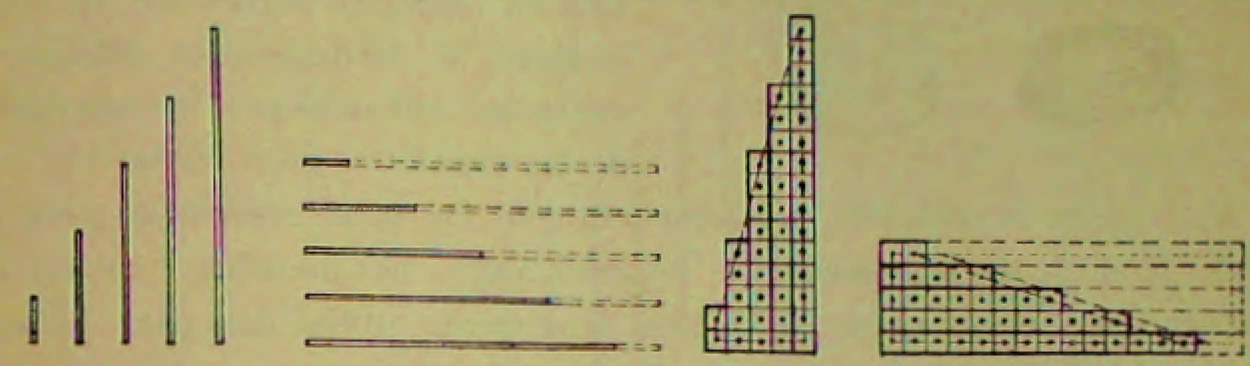
¿Cómo expresaríamos, en general, el término $n°$ o de lugar n? Es curioso que esta nueva generalización les cuesta mucho más (al menos efectuada así, de modo inmediato). Es necesario hallar antes la expresión del término de lugar 50, de lugar 89, etc., para que acierten a escribir el término u_n

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

A continuación propongo el *cálculo rápido* de la suma de cinco términos de la primera progresión, precisando lo que quiero significar con lo de cálculo rápido en el sentido de valernos sólo de algunos términos «acaso del primero y del último» sin efectuar toda la suma. Represento la progresión por sucesiones de segmentos o de alineaciones de puntos, o también de cuadraditos (si se trabaja en pizarra o papel cuadriculado), y les pregunto si la figura no les sugiere otra análoga de la Geometría que les permita resolver la cuestión. Es curioso que en tanto los segmentos o alineaciones de puntos o cuadrados se han colocado en verticales no han sabido ver el trapecio; me bastó, en cambio, representar los términos en sucesiones horizontales para que la sugerencia surgiera inmediata escribiendo el cálculo

$$S_5 = \frac{2 + 14}{2} \cdot 5 = \frac{u_1 + u_5}{2} \cdot 5 \quad \text{Y en general} \quad S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$$

en el que el primero y el último términos hacen el papel de las bases y el número de términos el de altura. Se puede materializar la demostración duplicando la figura y calculando el contenido del rectángulo obtenido por duplicación.

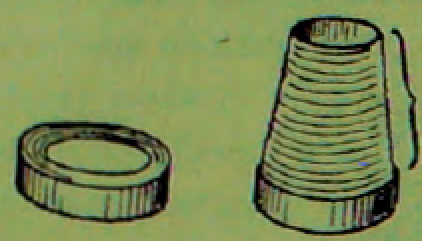


Como se ve, la acción se ha desarrollado más bien en un plano abstracto. Como en otras ocasiones, me ha parecido necesario proyectar aquí la imagen de progresión aritmética en el plano concreto y promover esta concreción por propia inventiva de los alumnos. A la pregunta «¿Me sabrías dar ejemplos de la vida en los que se presentan progresiones aritméticas?» he tenido las siguientes contestaciones: «Costo de tela según los metros.» «Años bisiestos» y, después de decirles que todos los días recorren los alumnos una progresión varias veces en los dos sentidos, «la altura de los peldaños de una escalera». Sobre esta imagen proyecto los conceptos de razón, primero y último término, etc.

Termino con el cálculo de la longitud de hilo necesario para una instalación de timbres en una casa.

Observación

En una clase práctica de repaso dada a alumnos de cursos más avanzados propuse el cálculo de la longitud de una serpentina sin desliarla. Repartidas varias serpentinas en la clase, unos multiplican intuitivamente el desarrollo de la circunferencia media por el número de vueltas. Otros, muy pocos, igualan el volumen antes y después de desarrollar, o, lo que es lo mismo, igualaron el área de la corona al área de la sección longitudinal de la serpentina desarrollada. Pero la mayor parte aplicaron el concepto de progresión aritmética asimilando la espiral que el borde dibuja a un conjunto de circunferencias en progresión aritmética cuyo primero y último términos se obtienen fácilmente por medición de los diámetros interior y exterior de la serpentina. La única dificultad es de orden práctico: la de contar el número de vueltas. Me basta insinuarles el estiramiento de la serpentina en forma de cucurucho, de modo análogo al deslizamiento oblicuo de cuartillas utilizado por los empleados de las papelerías para contarlas.



Este ejemplo concreto, o el recuento de las tejas necesarias para un tejado o el de la instalación de timbres antes mencionados, pueden ser asimismo motivaciones de iniciación igualmente utilizables para la actividad exploradora en la teoría de progresiones aritméticas.

Es interesante subrayar la estructura matemática subyacente común a la suma de los términos de una progresión aritmética, y a las áreas del trapecio y de la corona... Se trata en síntesis de la suma o integral de una función lineal (en cartesianas o polares). Hasta las demostraciones de la suma y del área de trapecio son en el fondo una misma.

Progresiones geométricas

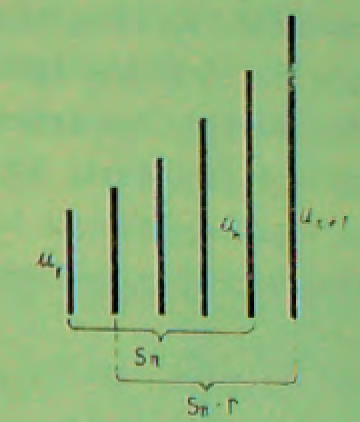
Omitiendo detalles, se comprende que la técnica inicial puede ser la misma descrita antes para las progresiones aritméticas (ventajas del planteamiento abstracto). Por ejemplo, continuar las sucesiones.

$$3 \quad 6 \quad 12 \quad 24 \quad . \quad . \quad .$$
$$8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad . \quad . \quad .$$
$$2 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{9} \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Definición de progresión geométrica. Razón. Fórmula que da el término 6°, 10°, 25°. Generalización. Fórmula que da el término enésimo.

La deducción de la fórmula de la suma es más difícil de conducir eurísticamente. He ensayado, con aceptable resultado el siguiente procedimiento. Hago dibujar varios segmentos en progresión geométrica, de razón por ejemplo $\frac{6}{5}$. (Materializados estos segmentos como cuerdas de una cítara, y tensadas por igual, dan intervalos musicales iguales de tercera menor.)

Y propongo comparar la suma de varios consecutivos, con la suma corrida de un lugar. Unos alumnos ven que todo se ha multiplicado por $\frac{6}{5}$, es decir, por la razón r; otros, en cambio, ven mejor que lo que se ha



hecho es quitar de la suma primera s_n el término primero u_1 y agregar el siguiente u_{n+1} al último. La igualdad de ambos resultados

$$rs_n = s_n - u_1 + u_{n+1}$$

conduce a una ecuación fácil para el cálculo de s_n, que puede primero efectuarse en forma particular concreta y luego en forma general,

$$s_n (r - 1) = u_{n+1} - u_1 \qquad s_n = \frac{u_{n+1} - u_1}{r - 1}.$$

CONGRUENCIAS Y CLASES RESIDUALES

Experiencia realizada ante 24 alumnos de tercer curso de Bachillerato y cuyo objeto era explorar hasta dónde son capaces los niños de intuir estructuras que parecen reservadas a cursos superiores. Se trata aquí de la estructura en anillo de los números congruentes respecto de un mismo módulo y de las clases residuales que los agrupan. Hago uso del material Cuisenaire; regletas coloreadas de un centímetro cuadrado de sección y de longitudes variables desde 1 cm. hasta 10 cm., teñidas de diferentes colores. Solamente utilizo en esta experiencia las regletas de 1 cm. (blancas), 2 cm. (rojas), 3 cm. (verdes), 4 cm. (rosas) y 5 cm. (amarillas), en número suficiente.

Agrupados los 24 alumnos alrededor de una mesa larga, dejo primero que se fijen en los colores y longitudes de las regletas, desordenadamente distribuídas a lo largo de la mesa, y que las ordenen por orden de longitud.

Dispongo primero que los alumnos se numeren y ordenen, del 1 al 24, y empiezo el juego entregando al primero una regleta blanca, al segundo

una roja, al tercero una verde, al cuarto una rosa, al quinto una amarilla, al sexto de nuevo una blanca, al séptimo de nuevo una roja, y aquí interrumpo las entregas que todos han visto. Pregunto al número 17 qué color de regleta le corresponderá. Acierta. Repito la pregunta al 24. Y fi-

nalmente ordeno que cada cual tome de la mesa una regleta del color que le corresponde. Ordeno que me las enseñen y compruebo, haciendo que rectifiquen ellos mismos los desaciertos, si los hay (No los hubo en aquella ocasión.)

«¿Qué habéis hecho para coger la regleta precisa? ¿Cómo habéis acertado el color?» Las respuestas son variadas. Uno ha contado tantos cincos como ha podido delante de él, otro ha dividido directamente por 5..., resulta difícil conseguir que alguno diga explícitamente que es el resto lo

que les ha sugerido el color. Establezco entre los alumnos un vínculo que transfiero asimismo a sus números, el vínculo de *hermanos en color* (sobre cinco colores). En aritmética, les digo, se llaman ***números congruentes respecto al módulo*** 5.

«¿Qué son, pues, números congruentes respecto al módulo 5?» No les cuesta explicitarlo y escribirlo en el encerado: Son los que divididos por cinco dan el mismo resto. Les indico el uso del signo $\equiv$.

Reparto cuartillas y ordeno que cada cual escriba números congruentes con el suyo (respecto al módulo 5) mayores que 50. El número 2 sólo me escribe los terminados en 2: 52, 62, 72, ...; le pregunto si no sabe otros que no terminen en 2. Añade entonces 57, 67, etc. Todos aciertan.

Más difícil les resulta escribir números congruentes con uno dado (12, 28, 64) y mayores que otro número dado (85, por ejemplo). Parece como si al despersonalizar el punto de partida perdiera la cuestión un punto de referencia intuitivo conveniente. Lo que persigo, con todo esto, es, naturalmente, que apliquen directamente el criterio del resto, sin ir agregando cinco unidades sucesivamente. (Este salto resultó particularmente difícil en alumnos menos adelantados, véase observación final.)

Pero después de recorrer tres veces el grupo (limitándome a dar mi conformidad o disconformidad con las soluciones) conseguí que me escribieran un segundo miembro correcto (mayor que 85) a las congruencias planteadas en el encerado

$$12 \equiv \qquad 28 \equiv \qquad 64 \equiv$$

«Ahora, restadme de cada uno de vuestros segundos miembros el primero y leedme los resultados.» Los leen en voz alta. «¿Qué observáis?» La contestación es inmediata: «Todas las diferencias son múltiples de 5.» Se escribe en el encerado esta observación: La diferencia de dos números congruentes (mód. 5) es múltiple de 5.

«¿Se verificará siempre esta propiedad? ¿Será independiente del módulo?»

«Os parece que esta propiedad ha quedado demostrada, o simplemente comprobada en unos casos particulares?» Todos convienen en esto último. Veamos, pues, si es posible idear un razonamiento que nos haga ver su validez general.

Ordeno a los alumnos que se formen en filas de a cinco, es decir, los cinco primeros por su orden en la primera fila, los cinco siguientes por su orden en la segunda, etc. Pregunto al número 12 en qué fila le corresponderá estar (o mejor, cuántas tendrá delante) y en qué lugar de dicha fila estará. La misma pregunta al número 18, al número 21... «Colóquense, pues, todos en formación.» Lo hacen con sólo dos confusiones, que se resuelven.

«¿Cómo se hallan ahora colocados los hermanos en color?» La contestación es inmediata señalando las columnas. Comprobación enseñando las regletas del mismo color que aún conservan en su poder. «¿Por qué resulta así?» Por la igualdad de restos. Estar en la misma columna significa diferir en un número exacto de filas, lo cual es cierto, cualquiera que sea la longitud de la formación. Pregunto:

«Si con los mismos cinco colores os hubiese colocado en filas de a 6, ¿seguiríais estando en columna los hermanos en color? ¿Cómo estaríais colocados?» Uno contesta inmediatamente: «En diagonal.» Insisto: «¿Y si estuviéseis formados de a cuatro?» También contestan en seguida: «En diagonal, pero al revés.» Es digna de notarse la rapidez de estas contestaciones que parecen difíciles a esta edad.

«¿Cuántos colores tendríamos que haber tomado para que siguieran estando en columna los hermanos en color formados de a seis? ¿Y de a

cuatro?» Reconocen así la generalidad de la propiedad para todos los módulos, así como la necesidad y suficiencia de la condición de ser la diferencia de dos números congruentes múltiple del módulo, aun cuando no se especifiquen todavía los conceptos de necesidad y suficiencia.

Termino la experiencia con la siguiente serie de preguntas significativas:

«Un número tiene color blanco, ¿qué color tiene su doble? ¿Y su cuádruple? ¿Y el doble de su cuádruple? ¿Por qué?» No sólo han sido convincentes las respuestas sino su explicación.

«Un número tiene color rojo, ¿qué color tiene su triple?»

«Un número tiene color verde (rosa), otro tiene color blanco (rojo), ¿qué color tiene su suma?»

«Un número tiene color *cualquiera* y otro amarillo, ¿qué color tiene la suma?» La contestación ha sido precisa: «el mismo *cualquiera*».

«Un número tiene color verde (rosa) y otro rojo (verde), ¿qué color tiene el producto?»

«Un número tiene color *cualquiera* y otro blanco, ¿qué color tiene el producto?»

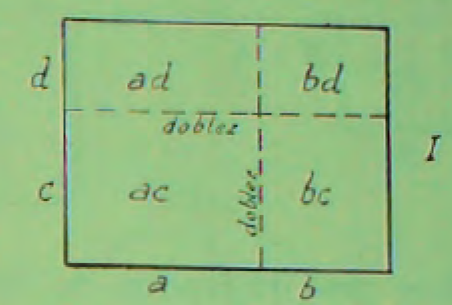
«Un número tiene color *cualquiera* y otro tiene color amarillo, ¿qué color tiene el producto?»

Las contestaciones a estas preguntas han resultado mucho más precisas y ágiles de lo que yo podía sospechar. Me han hecho ver que los muchachos de esta edad no tienen gran dificultad en penetrar en la esencia de la estructura en anillo (conmutativo con unidad) de los números en relación de congruencia. El manejo directo del «conjunto cociente» representado por la gama de colores, en el que cada color representa todos los números hermanos congruentes, implica le reconocimiento implícito de que el color del resultado de una operación es independiente del hermano en color elegido en cada dato, lo que equivale en definitiva a relacionar operativamente, no sólo pares de congruencias, sino las infinitas congruencias que relacionan entre sí todos los hermanos de cada color. El razonamiento que me ha hecho un alumno al pedirle explicaciones ha sido particularmente claro y preciso: «Si me fijo sólo en las unidades... al sumarlos tendrá un número que terminará en... y al multiplicarlos en...»

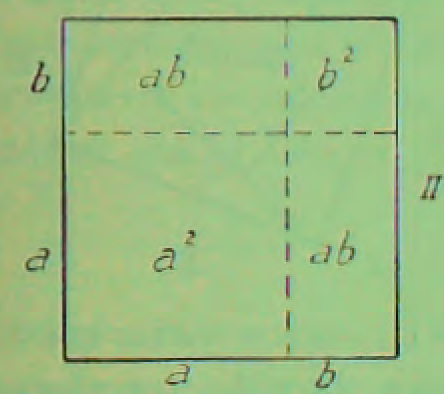
Obsérvese que las preguntas en las que hago intervenir un dato de color *cualquiera* tienen por objeto detectar la intuición de los elementos *neutros* o *idénticos* de la suma (amarillo) y del producto (blanco).

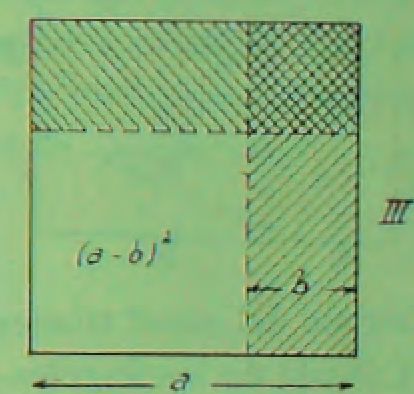
SITUACIONES DIDACTICAS OBTENIDAS POR PLEGADO

El plegado de una hoja de papel es una operación que permite materializar la simetría de un plano respecto a un eje, y por tanto, llevar a cabo las mismas operaciones descritas en otra lección sobre el uso de



la lámina de vidrio vertical, con borde rectilíneo, como espejo transparente. No insistiremos aquí nuevamente sobre esa geometría fundada en las operaciones de simetría. Pero el plegado del papel puede ser utilizado también como ilustración concreta de varias leyes del Algebra, de la





Geometría, de la Trigonometría, etc. Presentamos algunos ejemplos obtenidos plegando hojas cuadradas y rectangulares (*).

I) $(a + b)(c + d) = a\,c + b\,c + a\,d + b\,d$

II) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b$

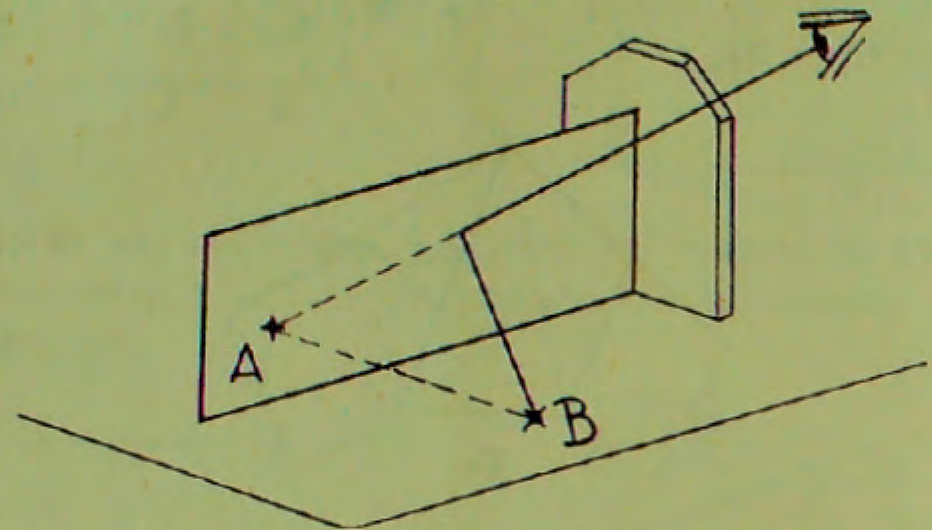
III) $(a - b)^2 + 2\,a\,b - b^2 = a^2$

(*) El plegado de los pañuelos cuadrados que el comercio presenta a veces es un ejemplo vivo del modelo II (observación de la señora Quintana, profesora de Toledo).

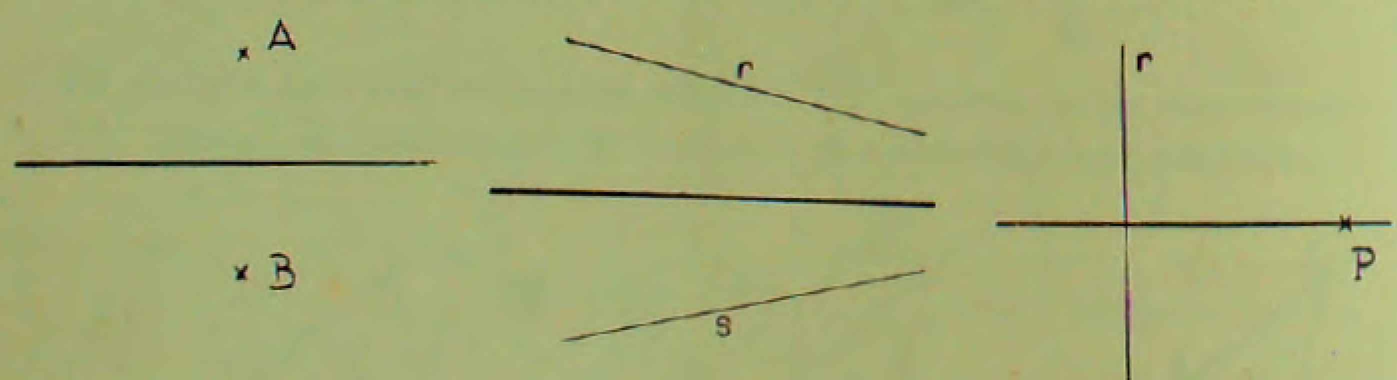
En las figuras se han indicado las líneas de dobleces de trazo interrumpido.

CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS CON UN VIDRIO OSCURO

Sabido es que la Geometría se concibe modernamente como el estudio de propiedades invariantes de las figuras con respecto a ciertos grupos de transformaciones. Los instrumentos que realizan estas transformaciones son, pues, los instrumentos naturales de la Geometría moderna: juego de escuadras para la traslación, papel de calco o transparente para los



movimientos, etc. Un trozo de vidrio plano (con borde rectilíneo), situado perpendicularmente al plano del dibujo, es el instrumento natural para realizar simetrías en el plano. Si el vidrio es de color oscuro, pero transparente, al mirar la cara anterior del vidrio, se reflejará en ella la parte anterior del plano del dibujo, superponiéndose la imagen reflejada de



dicho semiplano anterior con la imagen transparentada del semiplano posterior. Esto permite realizar fácilmente las operaciones fundamentales siguientes:

1. *Hallar el eje de simetría de dos puntos* (mediatriz del segmento que los une) *o de dos rectas* (bisectriz del ángulo que forman).

Basta superponer la imagen reflejada de uno (o una) de ellos con la imagen transparentada del otro (otra). El borde marcará entonces el eje.

La construcción es aplicable, en el caso de la bisectriz, sea o no accesible, en el dibujo, el vértice del ángulo.

2. *Trazar la perpendicular a una recta* r *por un punto P.*

Basta situar el borde sobre este punto (esté o no sobre la recta), de manera que la imagen de la semirrecta anterior al borde coincida con la visión transparentada de la semirrecta posterior. Reiterando la operación, se pueden trazar paralelas.

3. *Hallar el simétrico P' de un punto dado P respecto de un eje dado* r.

Situando el borde del vidrio en *r* bastará colocar la punta del lápiz del lado contrario a P, hasta que su imagen transparentada (o reflejada) coin-

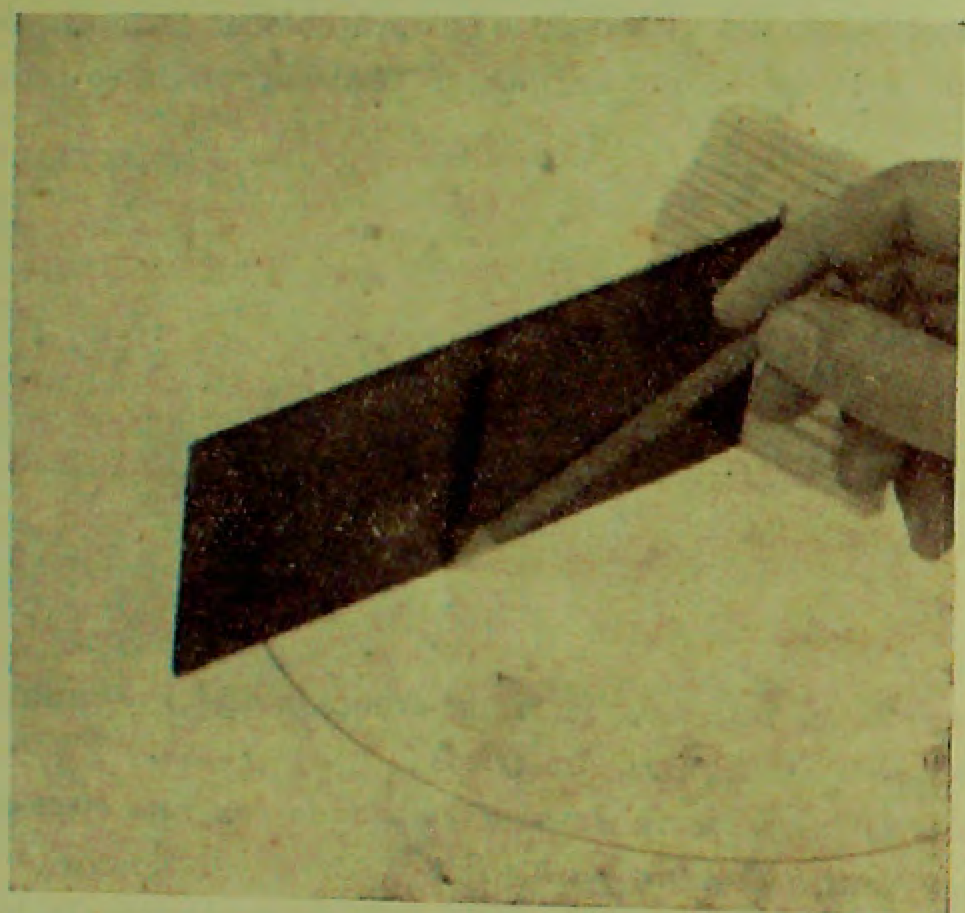
cida con la imagen reflejada (o transparentada) de P. Punto por punto pueden obtenerse así figuras simétricas.

4. *Hallar la intersección de una recta dada con una circunferencia definida por su centro O y un punto P.*

Bastará situar el borde pasando por O, de modo que la imagen de P se sitúe sobre *r*, o bien que la imagen de *r* pase por P. En ambos casos, el punto P', simétrico de P, se situará sobre *r*, proporcionando la solución. Hay, naturalmente, dos soluciones correspondientes a dos posiciones del vidrio.

Este problema es equivalente al de trazar por O las tangentes a la parábola definida por su directriz *r* y su foco P. Estas tangentes son, en efecto, las posiciones del borde del vidrio en las dos soluciones del problema anterior. Recuérdese que la directriz es el lugar geométrico de los simétricos del foco respecto de las tangentes a la parábola.

Mediante estas construcciones básicas, en las que el borde sirve también de regla, se puede probar la posibilidad de efectuar con dicho instrumento todas las construcciones realizables con la regla y el compás de la Geometría clásica. Claro es que no es el instrumento más adecuado para algunas de ellas. Por ejemplo, la construcción de un triángulo dados sus tres lados, equivalente al de hallar la intersección de dos circunferencias de centros y radios dados, resulta particularmente complicada. En cambio, otras construcciones son tan sencillas como puedan serlo las clásicas, cuando no las aventajan, y no nos referimos solamente a los problemas



en los que el uso de la simetría constituye la clave del problema, sino también a otras, como la construcción del conjugado armónico, o del punto inverso de uno dado conocidos el centro y el radio de inversión, problemas que parecen muy alejados de las posibilidades del aparato. Resulta particularmente elegante la construcción de cónicas como envolventes mediante dicho instrumento combinado con el compás.

EL PARAGUAS, MODELO MULTIVALENTE

El juego de varillas y el eje de un paraguas, nos ofrecen un modelo matemátitco, del que extraer muchas lecciones geométricas intuitivas. Presentamos algunos ejemplos:

Relaciones sencillas entre los lados y los ángulos de un triángulo

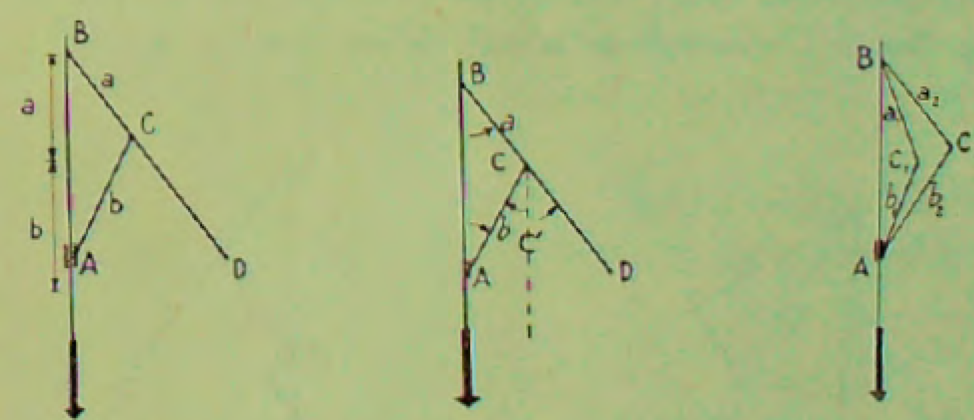
Observemos el triángulo ABC formado por el eje del paraguas, una varilla corta b y el segmento a de varilla larga comprendido entre la cúspide B y la articulación C.

1. Cuando el paraguas está cerrado $AB = a + b$, sin que se forme triángulo. Para que éste exista, es preciso abrir el paraguas, disminuyendo la longitud AB. Luego $AB = c < a + b$.

2. Abriendo el paraguas, el lado AB disminuye al mismo tiempo que el ángulo opuesto C: *Propiedad de los triángulos con pares de lados respectivamente iguales.*

3. Se observa la igualdad de todos los triángulos formados sobre la misma porción de eje AB: *Igualdad de los triángulos con tres lados iguales.*

4. Si $a = b$, los dos sistemas de varillas a y b se abren del mismo ángulo. Todos los triángulos formados son isósceles. Pero si $a \gtrless b$, las va-



rillas b se abren $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{más} \\ \text{menos} \end{smallmatrix} \right\}$ que las varillas a: *Relación entre los ángulos y los lados opuestos de un triángulo.*

5. Si b es mayor que a, el paraguas puede invertirse, formándose ángulos obtusos en B. Estos ángulos no son posibles si b es menor que a, pero entonces, a partir de la posición de b perpendicular al eje, el paraguas se cerrará de tal modo, que se podrá obtener una misma abertura del

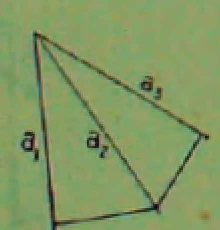
paraguas con dos longitudes AB: *Ambigüedad de un triángulo definido por dos lados y el ángulo opuesto al menor.* Relación entre los ángulos A en ambas posiciones.

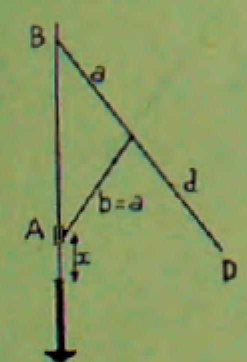
6. Mantengamos fijo el punto C y abramos el paraguas conservando el eje vertical. La varilla *a* gira en un sentido describiendo un ángulo igual al B. La varilla *b* gira en sentido contrario, describiendo otro igual al A. Luego el ángulo exterior C' es igual a B + A. Y también A + B + C = C' + C = 180°.

Triedros y ángulos poliedros

7. Consideremos dos juegos de varillas *a*, *b*, articuladas consecutivas y los dos planos en que están situados. Estos dos planos forman un diedro. ¿Aumenta este diedro cuando se abre o cierra el paraguas? ¿Disminuye? La naturaleza capciosa de estas preguntas provoca a veces respuestas erróneas de las que se puede obtener provecho didáctico. La corrección del error se sugiere de una manera natural preguntando cuántos de estos diedros componen los 360° en torno al eje. Los alumnos se ven entonces obligados a reconocer la invariancia de estos diedros. ¿Qué es, entonces, lo que aumenta o disminuye? Las ***secciones oblicuas*** de ese diedro.

8. Observación de los triedros (isósceles) formados por el eje y los pares de varillas *a* (consecutivas o no). Idem con las *b*.





9. ¿En qué posición quedarán las varillas *a* situadas en el mismo plano? ¿Cuál será entonces el valor de la suma de los ángulos formados por estas varillas (consecutivas o no)? ¿Qué modificación sufren estos ángulos cuando se cierra el paraguas? *Límite superior de la suma de las caras de un ángulo poliedro.*

10. Consideremos una tela extendida entre 3 varillas a_1, a_2, a_3, consecutivas o no. Si se suprime la varilla intermedia a_2, ¿se mantendrá extendida la tela? *Propiedad de la cara* $a_1\,a_3$ *de un triedro de ser inferior a* $a_1\,a_2 + a_2\,a_3$.

Simetrías, rotaciones, homotecias

11. Observación de las simetrías del paraguas abierto.

12. Observación del grupo cíclico de rotaciones, según el número de sistemas articulados.

13. Observación de la homotecia existente entre el sistema de puntos de articulación C y los extremos libres D de las varillas *a*.

Algunos problemas que se pueden proponer sobre la variación de magnitudes, producida al abrirse el paraguas por desplazamiento de A

Llamaremos x al desplazamiento del punto A a partir de su posición correspondiente al paraguas cerrado. Supondremos, además, el caso más simple: $a = b$.

14. Variación de los ángulos A y B en función de x.

15. Variación de la separación entre dos articulaciones consecutivas C (siendo n el número de sistemas articulados).

16. Variación del ángulo de las caras del ángulo poliedro formado por las varillas *a*.

17. Variación del ángulo sólido S limitado por ese ángulo poliedro.

18. Variación del área y del volumen de la bipirámide definida por las varillas *a* y *b*.

19. Máximo del volumen anterior.

20. Cálculo del desplazamiento x correspondiente a un polígono regular (formado por los extremos libres) de perímetro dado.

LA GEOMETRIA DEL ATRIL

Triángulos, triedros, problemas diversos

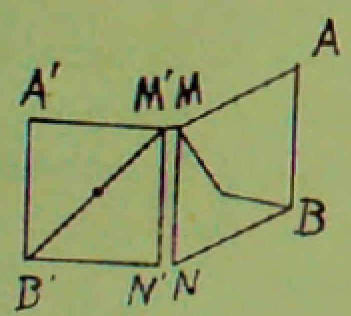
El pie del atril tiene la misma estructura geométrica que un paraguas (invertido) con tres pares de varillas articuladas. Se pueden obtener de él las mismas situaciones didácticas expuestas en «El paraguas, modelo multivalente».

Movimientos espaciales

El deslizamiento de la varilla central a lo largo del eje, permite imprimir al atril movimientos de translación a lo largo de este eje, movimientos de rotación en torno a él y movimientos helicoidales.

Deformaciones que ilustran las propiedades del arco capaz

El atril propiamente dicho está constituído por dos rombos articulados, unidos por un lado. Este doble rombo proporciona varias situaciones di-

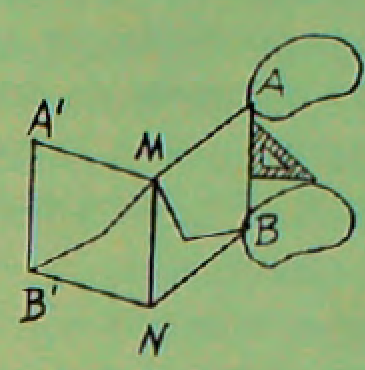


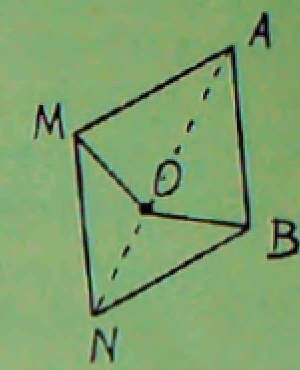
dácticas. Es el mismo sistema articulado que hemos utilizado en la lección sobre los ángulos inscritos y el arco capaz, de tal modo que si se fija la posición de dos lados NB, N'B' (o bien MA, M'A'), dejando un solo grado de libertad a la deformación, y se suponen confundidos MN y M'N', los ángulos B'MB y A'NA son invariantes durante esta deformación y el punto M (o el N) describe el arco capaz de B'MB (o A'NA) sobre BB' (o AA').

Translación plana

Si fijamos el lado A'B', queda un sistema articulado con dos grados de libertad, que permite describir al punto A una figura cualquiera (en-

tre ciertos límites). Simultáneamente, el punto B describirá una figura igual, transformada de la anterior por la translación AB.





Inversión

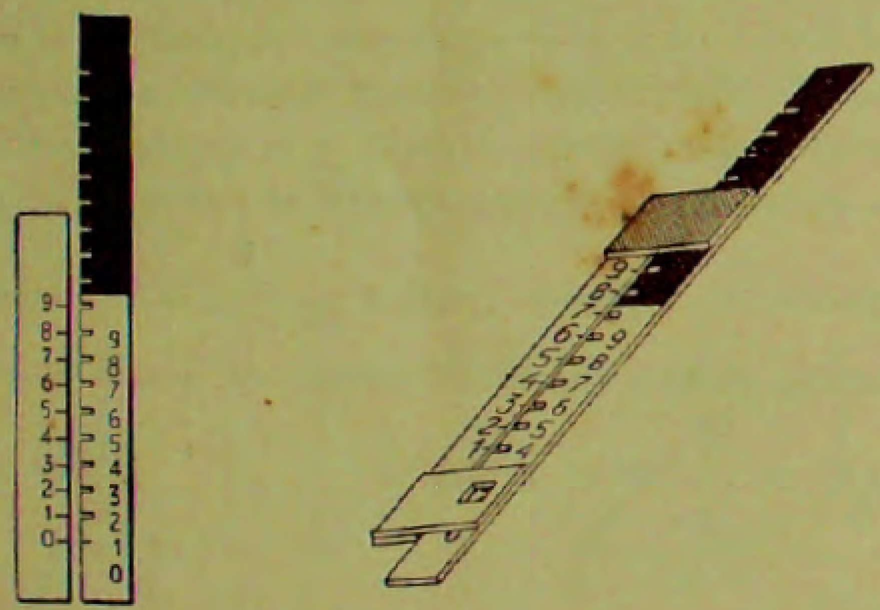
Finalmente, consideremos el sistema articulado MOB, que enlaza los vértices M, B, de uno de los rombos; sistema formado por dos varillas de longitud igual a la mitad de la diagonal del cuadrado obtenido por deformación del rombo. Si fijamos en el plano el punto O, el rombo NBAM posee dos grados de libertad que permiten describir al punto A una figura plana cualquiera (entre ciertos límites), y la figura descrita por el vértice opuesto N es inversa a la descrita por el punto A, respecto al centro O, con potencia de inversión igual a $-\frac{1}{2} MA^2$ (puesto que OA . ON es la potencia de O respecto del círculo de centro M y radio MA y vale $MO^2 - MA^2 = \frac{1}{2} MA^2 - MA^2$).

INICIACION A LAS MAQUINAS DE CALCULAR

Esta lección va destinada a alumnos de doce a trece años, con intención de darles ideas muy esquemáticas y gradualmente ordenadas que les permitan llegar a concebir progresivamente la posibilidad de realizar mecánicamente las operaciones aritméticas. Las cuestiones de detalles constructivos se han omitido deliberadamente (y aun a veces ligeramente falseado) con objeto de aclarar los caracteres esenciales de los esquemas.

MÁQUINAS PARA SUMAR Y RESTAR

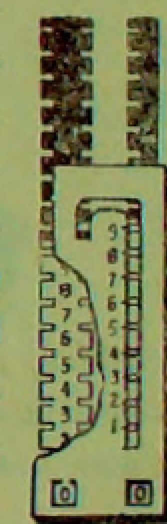
Máquinas de escalas móviles.—Hacemos construir a los alumnos modelos de cartón o madera, formados por dos escalas adosadas como indica la figura. La escala de la izquierda va fija con divisiones equidistantes de centímetro en centímetro y numeradas de cero a nueve. En la escala de



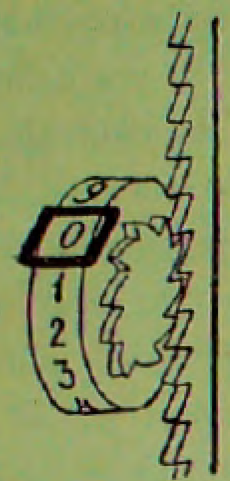
la derecha los trazos se sustituyen por orificios o ranuras en las que penetra la punta de un punzón que le imprime el movimiento de deslizamiento. En esta segunda regleta se inscriben asimismo las cifras de cero a nueve, pero desplazadas de suerte que el cero aparece en la pequeña ventanita abierta en el borde inferior del chasis de soporte cuando los dos orígenes de las escalas coinciden.

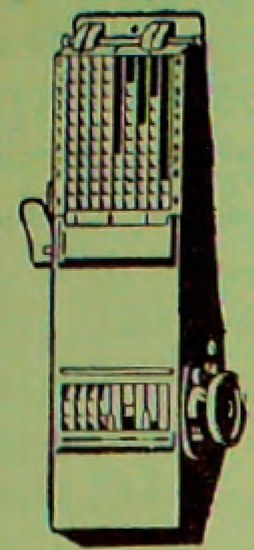
Desplazando, por ejemplo, la escala móvil dos centímetros hacia el borde inferior el número 2 aparece en la ventanita. La suma 2 + 5 se realiza automáticamente por medio de dos traslaciones consecutivas de 2 + 5

centímetros obtenidas colocando el punzón en los orificios sucesivamente situados delante del 2 y del 5 de la escala fija de la izquierda y empujándolo hasta el borde inferior. El número 7 aparece así en la ventana. Sería, naturalmente, imposible sumar indefinidamente del mismo modo. Si queremos, por ejemplo, añadir 6 unidades al 7 recién obtenido, como la sucesión de números de la escala no llega sino al 9, nos deberemos limitar a obtener la cifra de las unidades de 7 + 6. Esto equivaldría a descender 6 y subir 10, lo que equivale a subir 4, complemento de 6, hasta el tope superior. La decisión subir o bajar el punzón según que la suma alcance o quede por bajo de 10 se automatiza observando el color de la regleta móvil (blanco, negro) frente al número a añadir. Así, por ejemplo, en la suma anterior se observa que el orificio situado frente al 6 está en zona negra; hay, pues, que subir el punzón. En resumen: hay que bajar el punzón si la ranura está *en blanco*, y subirle si está *en negro*, hasta el borde inferior o superior respectivamente. El número de golpes de punzón dados sobre el borde superior será el número de decenas transportadas. Con este pequeño modelo podemos, pues, efectuar sumas de columnas de cifras, si retenemos en la memoria el número de golpes superiores. Pero este transporte de decenas puede también automatizarse si colocamos a la izquierda de la escala móvil otra escala igualmente ranurada y graduada y si deslizamos el punzón a lo largo de una ranura en forma de cayado de la parte superior que haga penetrar dicho punzón en la escala móvil de la izquierda haciéndola descender de un centímetro por cada decena transportada. He aquí el fundamento de las maquinitas, de escalas móviles corrientes en el comercio.

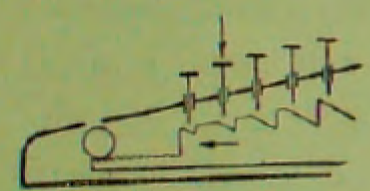


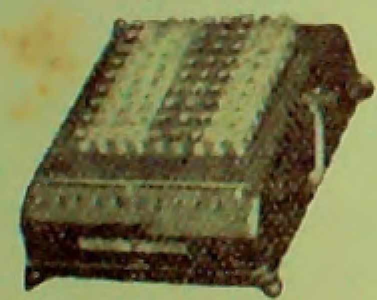
Máquinas de cilindros registradores.—Si la escala de cifras de 0 a 9 se inscribe sobre la superficie lateral de un cilindro, las cifras de las unidades se reproducirán periódicamente y no habrá necesidad de cambiar el sentido del movimiento. Pero sería incómoda la manipulación del punzón girando alrededor del cilindro; la mano pide un movimiento rectilíneo cómodo. Solución: transformar este movimiento en movimiento circular mediante una cremallera cuyos dientes engranen con diez dientes de la rueda (un diente por cada unidad). Cuando la suma exceda de 9, las cifras 0, 1, 2, 3, ... reaparecen, y la decena se transporta al cilindro inmediato mediante cualquier dispositivo saliente de la rueda móvil que impulse a cada vuelta un solo diente de la rueda siguiente.



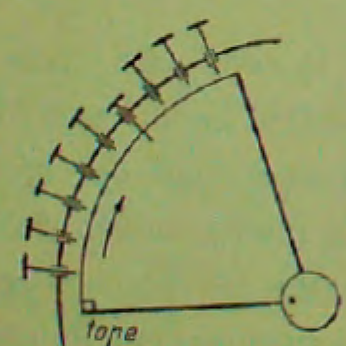


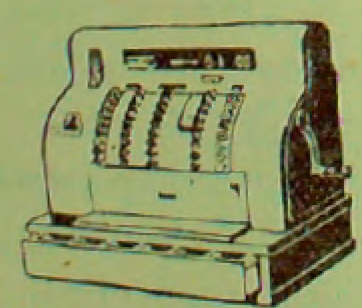
Las indicaciones anteriores sobre los modelos expuestos son suficientes para hacer comprender a los alumnos la mecanización de la adición decimal. Los perfeccionamientos de estas ideas que conducen a las máquinas





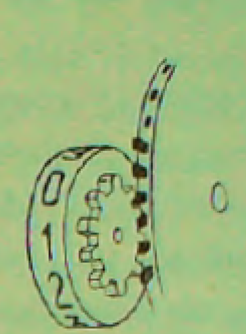
de teclas, a las cajas registradoras de los almacenes, etc. son más fáciles de concebir, pues añaden la automatización de un desplazamiento o de un giro proporcional a la cifra inscrita en la tecla pulsada.

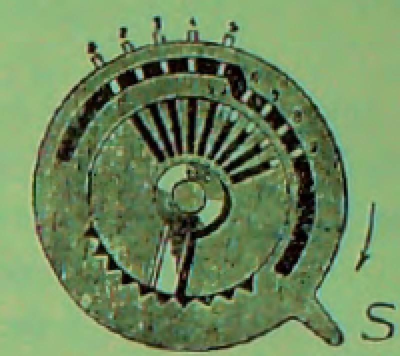




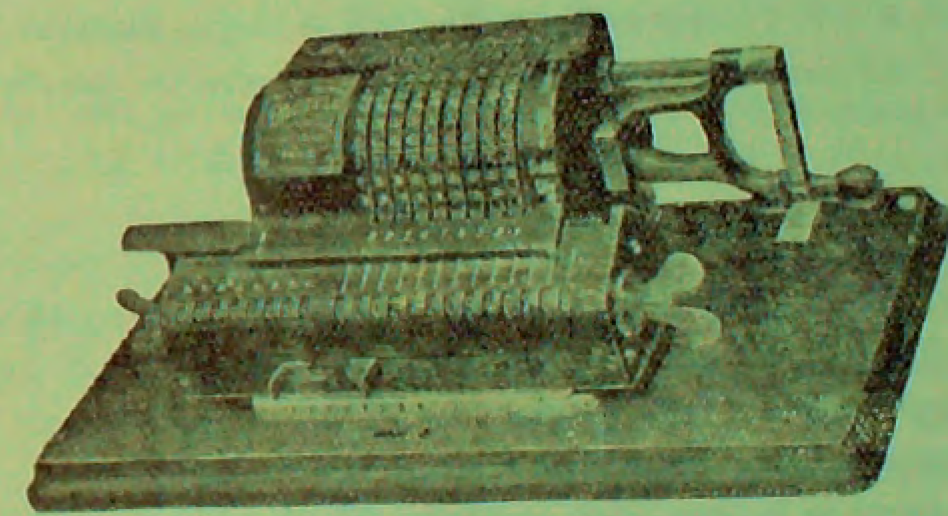
Máquinas para multiplicar y dividir.—Con las máquinas para sumar, la multiplicación puede efectuarse mediante adiciones repetidas. Pero en lugar de repetir los desplazamientos aditivos se pueden disponer ruedas mo-

trices cuyo número de dientes pueda variarse a voluntad de 0 a 9, y que engranen directamente con los cilindros registradores. Así, si hacemos salir 5 dientes de la rueda motriz, siete vueltas completas de la misma ha-





rán el mismo efecto que siete desplazamientos consecutivos, con lo que se registrará el producto 5 . 7. Varios cilindros registradores con sus ruedas correspondientes permitirán así ir sumando consigo mismo un número de varias cifras, tantas veces como vueltas se dé al bloque de ruedas motrices donde se halla inscrito. La multiplicación por un número de varias cifras se obtendrá realizando los productos parciales y adicionándoles pro-



gresivamente después de desplazar el grupo de cilindros registradores de un lugar decimal a la derecha luego de efectuada la adición del producto parcial anterior.

La adición se efectúa inversamente, registrando el dividendo en el grupo de cilindros registradores y el divisor en el grupo de ruedas motrices. Las cifras del cociente se obtienen por el número de vueltas que se puede dar al bloque motor en sentido inverso (sustracción) antes de agotar el dividendo o sus restos parciales. Un simple contador de vueltas registra las cifras de dicho cociente.

INICIACION AL ALGEBRA DE CONJUNTOS

Presento a los alumnos (de unos dieciséis años) el tablero expuesto (fig. 74; pág. 111), donde figuran trozos de celuloide coloreado sobre cuadrados blancos de un decímetro, y les propongo las siguientes cuestiones:

Antonio y Luis tienen sendas colecciones de sellos, y convienen en reunirlas para formar una sola. Representaremos con el cuadrado de un decímetro la colección de todos los sellos existentes en el mundo; por A, la colección de Antonio; por L, la de Luis. Indicad las porciones representativas de: 1.° El conjunto (A') de los sellos que no tiene Antonio. 2.° El conjunto de los sellos que no tiene Luis (L'). 3.° La colección que resulta de la reunión de ambas (designada por A + L). 4.° La colección de sellos repetidos (designada A . L). 5.° El conjunto de los sellos que no tienen ninguno de los dos ¿Cómo designarlo? 6.° El conjunto de los sellos que faltaban a alguno de los dos. ¿Cómo designarlo? 7.° El conjunto de los sellos que faltan a la colección reunida ¿Cómo designarlo? 8.° El de los sellos que faltan en la colección de los repetidos ¿Cómo designarlo?

Comparar 5 y 7. Comparar 6 y 8. Deducir las leyes formales de la suma o reunión y del producto o intersección de colecciones complementarias:

$$(A + L)' = A' . L'; \qquad (A . L)' = A' + L'$$

Roberto tiene también una colección que reune con las precedentes. Esquema de esta reunión en el tablero. Esquema del conjunto de sellos comunes a las tres colecciones (intersección). Comprobar el carácter asociativo y conmutativo de las reuniones y de las intersecciones.

Comprobación de la propiedad distributiva de cada una de estas operaciones respecto a la otra (ver esquemas en el tablero).

$$(A + L) . R = (A . R) + (L . R) \qquad (A . L) + R = (A + R) . (L + R)$$

Si el conjunto de todos los sellos del mundo se representa por «1», y el conjunto nulo por «0», escribir los segundos miembros de

$A + 1 =$ $\quad A . 1 =$ $\quad A + 0 =$ $\quad A . 0 =$

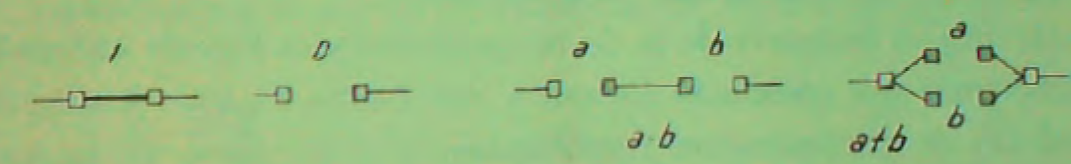
$A + A =$ $\quad A . A =$ $\quad A + A' =$ $\quad A . A' =$

Encontrar las porciones que interpretan A . L' y A' . L; escribir el complemento de su suma A . L' + A' . L, e interpertarlo en el tablero.

ALGEBRA Y LOGICA DE INTERRUPTORES Y CONMUTADORES

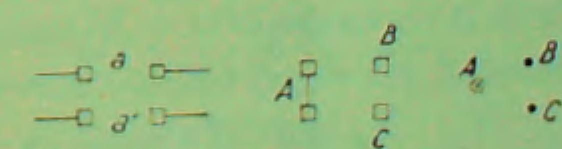
Después de la introducción al álgebra de conjuntos (o mejor de los subconjuntos de un conjunto total designado con «I») hemos considerado el caso particular del conjunto de un solo elemento (subconjuntos 1 y 0) interesante por su aplicación a la lógica y a los circuitos (Algebra de Boole). Propusimos esta pequeña investigación a nuestros alumnos algún tiempo después de la experiencia precedente, y sin hacer alusión a ella, con el fin de ofrecerles el descubrimiento del isomorfismo de ambas álgebras, despertando así su interés sobre los puntos de vista abstractos del Algebra Moderna.

Un interruptor es un dispositivo con dos estados que pueden representarse por 1 (conexión) y por 0 (no conexión). La conexión en serie o en paralelo de dos interruptores define, en función de sus estados *a*, *b*, un

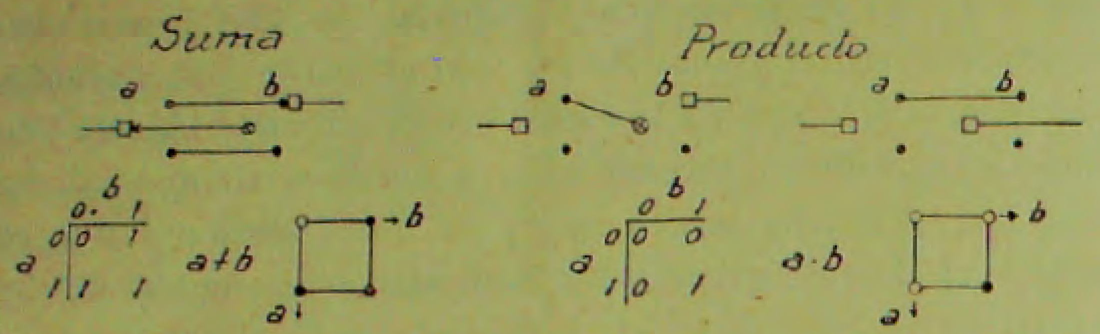


nuevo estado entre los terminales extremos, que corresponden al producto (intersección) *a* . *b*, o a la suma (reunión *a* + *b* del álgebra precedente). Se comprueban fácilmente las leyes formales: conmutativa, asociativa, distributiva, complementaria.

El conmutador que ordinariamente se encuentra en el comercio es un interruptor doble con dos posiciones, de tal modo que cada una de ellas determina estados contrarios en los interruptores parciales. Cuando uno está conectado, el otro no. Pero este conmutador se presenta corrientemente con dos terminales de entrada unidos y los otros dos libres, constituyendo así un tripolo con un terminal de entrada *A* y dos de salida *B* y *C*, correspondientes a dos estados de conmutación que podemos representar igualmente por 1 (conexión *AB*) y por 0 (conexión *AC*). Estos conmutadores nos ofrecen una mayor riqueza de combinaciones que los simples interruptores. La operación «Complemento» se interpretará ahora mediante



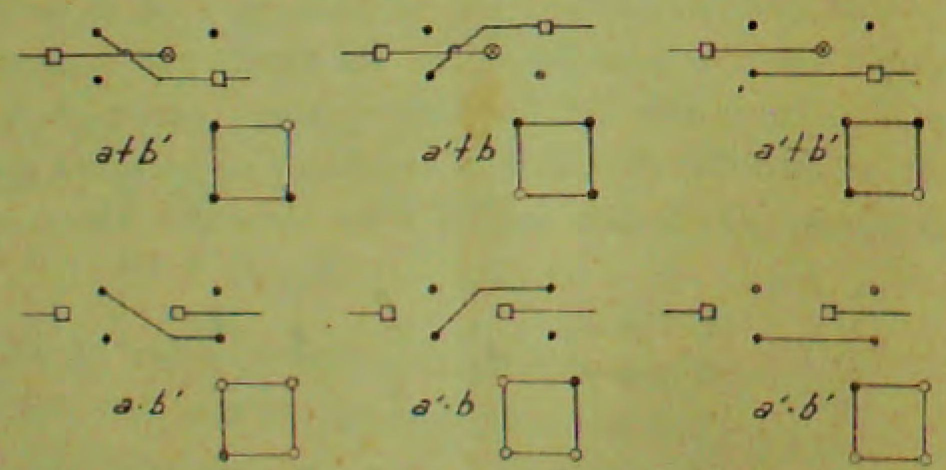
la simple inversión de los polos B y C. El acoplamiento en paralelo (suma) y en serie (producto) se realizará según estos esquemas (realizados en el modelo 1, fig. 75) :



Representando por a y b el estado (1 ó 0) de uno y otro de los conmutadores, el estado de conexión (1) o interrupción (0) entre los terminales □ vendrá dado, respectivamente, por la suma $a + b$ (paralelo) y por el producto $a \, . \, b$ (serie). El estado de conexión se acusa por el encendido de una lámpara intercalada en el circuito.

Esta álgebra es isomorfa de la de las proposiciones lógicas enlazadas por las conjunciones «y» (producto lógico) y «o» (suma lógica). La verdad (1) o falsedad (0) de proposiciones combinadas «p y q», «p o q» es una función de la verdad o falsedad de «p» y de «q», que se rige por las mismas leyes que las agrupaciones en serie y en paralelo.

Combinando estos esquemas con la operación «complemento» (inversión de polos), representada por medio del signo ', podemos construir las sumas y los productos siguientes :

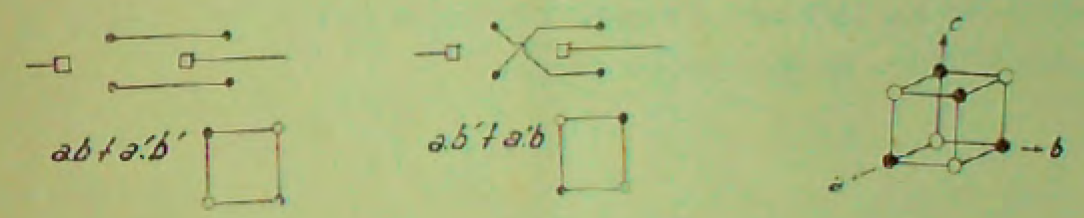


El segundo esquema de esta figura es isomorfo a la implicación lógica «a implica b», siendo a y b dos proposiciones en las que la verdad (1) de a es incompatible con la falsedad (0) de b.

Se comprueba, en todos los casos, que la suma reúne los valores 1 de las variables, mientras que el producto reúne los valores 0, o lo que es lo

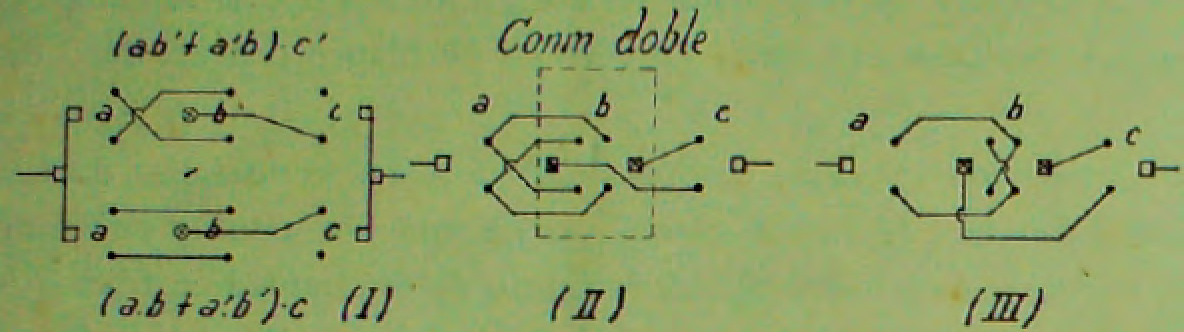
mismo, conserva sólo los valores 1 comunes a ambos factores. Esta observación nos sugirió la representación geométrica convencional de las funciones binarias de dos variables binarias, representando el campo de variabilidad (las 4 combinaciones posibles) por los vértices de un cuadrado (coordenadas 0, 1) y señalando con un círculo blanco o negro cada vértice según que el valor de la función en ese punto sea 0 ó 1. A cada esquema corresponde así una estructura de vértices en blanco o negro fácil de reconocer.

La agrupación en serie (en paralelo) de estas conexiones dará nuevas funciones con sus representaciones en las que los puntos en blanco (en negro) serán, respectivamente, el conjunto de los puntos en blanco (en negro) de los esquemas acoplados. Así, la función $a \, . \, b + a' \, . \, b'$ se obtendrá agrupando en paralelo los dos acoplamientos en serie de $a \, . \, b$ y de $a' \, . \, b'$, como indica la figura de la izquierda, mediante dos conmutadores.



Igualmente la función $a \, . b' + a' \, . \, b$, a la derecha. El resultado de $a \, . \, b + a' \, . \, b'$ es isomorfo a la regla de los signos del álgebra ordinaria (sustituyendo 1 por «positivo» y 0 por «negativo»). Esta operación se realiza en el circuito de la izquierda del modelo 2 (fig. 75). El de la derecha da la propiedad del producto de dos enteros, relativa a su paridad, isomorfa a su vez a la operación $a + b$. La operación $a \, . \, b' + a' \, . \, b$ es isomorfa a la suma de enteros, módulo 2, y se combina en el modelo 3 con su producto, isomorfo a $a \, . \, b$. La combinación de las dos lámparas de este modelo da la tabla de adición en el sistema binario.

El modelo n.º 4 (fig. 75) realiza finalmente la regla algebraica del signo de un producto de tres factores. Representando los signos positivo y negativo, respectivamente, por 1 y 0, la distribución de los valores de la función dependiente de tres variables se representa ahora por la estructura de los vértices, en blanco o en negro, de un cubo, según la figura anterior; es decir, por la reunión de los puntos negros en diagonal de la cara inferior correspondiente a $(a \, . \, b' + a' \, . \, b) \, . \, c'$ y los de la cara superior $(a \, . \, b + a' \, . \, b') \, . \, c$. Agrupando en paralelo los esquemas correspondientes se obtiene el de la figura 1 siguiente. Se puede realizar por medio de dos conmutadores simples (inicial y final) y un conmutador doble, de seis polos, cuyo esquema está representado en II. El esquema III es una



simplificación equivalente de este esquema (con menos hilos) que se aplica en las instalaciones con tres mandos para una sola lámpara. La independencia de los mandos traduce la posibilidad de cambiar el signo de uno cualquiera de los factores. Interpreta también la equivalencia y la contradictoriedad lógica de dos proposiciones.

INDICE

Págs.

Prólogo ... 5

Parte Primera: *XI Reunión de la Comisión internacional para el estudio y mejora de la enseñanza matemática* ... 11
El papel de lo concreto en la matemática ... 17
Modelos, filminas y films didácticos ... 25
Clases experimentales ... 36

Parte Segunda: *Exposición de material didáctico* ... 43
Material extranjero ... 45
Material español ... 54
Bibliografía ... 65

Parte Tercera: *Modelos* ... 73
Ilustraciones gráficas ... 75

Parte Cuarta: *Lecciones prácticas. Uso didáctico del material* ... 125
Angulos inscritos y arco capaz ... 128
Haces de elipses e hipérbolas homofocales ... 134
Posiciones de rectas y planos en el espacio ... 138
Progresiones ... 145
Congruencias y clases residuales ... 150
Situaciones didácticas obtenidas por plegado ... 155
Construcciones geométricas con un vidrio oscuro ... 158
El paraguas, modelo multivalente ... 161
La geometría del atril ... 164
Iniciación a las máquinas de calcular ... 166
Algebra y lógica de interruptores y conmutadores ... 171

PUBLICACIONES DE LA REVISTA "ENSEÑANZA MEDIA"

CUADERNOS DIDACTICOS

FISICA (ELECTRICIDAD). Experiencias de Cátedra y cuestiones de exámenes.
CIENCIAS NATURALES.
FISICA (MECANICA Y FLUIDOS).
BIBLIOTECAS DE CENTROS DE ENSEÑANZA MEDIA.
GEOGRAFIA.
EXAMENES DE GRADO.
LATIN.
CIENCIAS NATURALES (Prácticas de Bioquímica, Ecología Animal y Vegetal, Micrografía y Microscopia, Botánica y Zoología).
MATEMATICAS.
FISICA (CALOR, ACUSTICA Y OPTICA).
LENGUA FRANCESA.
LENGUA Y LITERATURA ESPAÑOLAS.
PLAN DE BACHILLERATO 1957: PROGRAMAS DE PRIMERO Y SEGUNDO CURSOS (Con orientaciones metodológicas).
PLAN DE BACHILLERATO 1957: PROGRAMAS DE TERCERO, CUARTO, QUINTO Y SEXTO CURSOS (Con orientaciones metodológicas).
PLAN DE BACHILLERATO 1957: DECRETO DE 31 DE MAYO Y CUESTIONARIOS GENERALES.
CIENCIAS NATURALES (Prácticas de Anatomía, Fisiología e Higiene Humanas, Geología General Dinámica e Histórica, Mineralogía, Cristalografía y Petrografía.—Temas para el examen práctico de los Ejercicios de Grado).
GRIEGO.
PREUNIVERSITARIO (Decreto de Ordenación de 13 de septiembre de 1957).—Cuestionarios Oficiales. — Programas propuestos por el C. O. D. para el Curso 1958-59.
PREUNIVERSITARIO. Problemas de Matemáticas para el Curso 1958-59.
PREUNIVERSITARIO. «Defensa de Eutropio», de San Juan Crisóstomo.

GUIAS DIDACTICAS

1. GUIA DIDACTICA DE LA LENGUA Y LITERATURA ESPAÑOLAS PARA EL BACHILLERATO.
2. EL METODO DE LA INVETIGACION DIRIGIDA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS EN EL BACHILLERATO, por Manuel Sales Boli, Catedrático de Matemáticas, de los Estudios Nocturnos del Instituto «Ramiro de Maeztu».
3. LA EDUCACION Y LA ENSEÑANZA EN EL MUNDO.
4. EL MATERIAL DIDACTICO MATEMATICO ACTUAL, por el Dr. D. Pedro Puig Adam.
5. LA ENSEÑANZA DE LOS IDIOMAS MODERNOS, por Fr. Closset.

TEMAS DE EXAMENES DE GRADO

COMENTARIO DE TEXTOS (1958).
RELIGION (1958).
LETRAS (1958).
CIENCIAS (1958).
MATEMATICAS (1958).
LATIN (1958).
LENGUAS MODERNAS (1958).
FISICA (1958).