

Pedro Ricardo Piccini

**PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” PROBABILÍSTICA NA  
REDE DE BETHE E EM REDES DE HUSIMI**

Dissertação submetida ao  
Programa de Pós graduação em Física  
da Universidade Federal de Santa  
Catarina para a obtenção do grau de  
Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Nilton  
da Silva Branco

Florianópolis  
2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Piccini, Pedro Ricardo

Percolação de "bootstrap" probabilística na rede de Bethe  
e em redes de Husimi / Pedro Ricardo Piccini ; orientador,  
Nilton da Silva Branco - Florianópolis, SC, 2015.  
85 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.  
Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Mecânica estatística. 3. Percolação. I. Silva  
Branco, Nilton da. II. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Pedro Ricardo Piccini

**PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” PROBABILÍSTICA NA  
REDE DE BETHE E EM REDES DE HUSIMI**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de “Mestre em Física” e aprovado em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_

---

Prof. Dr. Luiz Guilherme de Carvalho Rego  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora**

---

Prof. Dr. Nilton da Silva Branco  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Minos Martins Adão  
Neto  
Universidade Federal do  
Amazonas

---

Prof. Dr. Marcelo Tragtenberg  
Universidade Federal de Santa  
Catarina

---

Prof. Dr. Lucas Nicolao  
Universidade Federal de Santa  
Catarina

---

Prof. Dr. Daniel Girardi  
Universidade Federal de Santa  
Catarina



## **AGRADECIMENTOS**

Ao CNPq pelo suporte financeiro que possibilitou a realização deste projeto.



## RESUMO

A probabilidade de percolação em redes de Bethe e redes de Husimi (quadrada e triangular) é calculada para os casos de percolação usual, daqui para a frente chamada apenas de percolação, percolação de “bootstrap” e percolação de “bootstrap” probabilística. É obtido também o expoente crítico  $\beta$  para os mesmos casos. É utilizado para os cálculos um método bastante direto que permite montar equações que, resolvidas, obtêm resultados exatos para os sistemas estudados. Os resultados obtidos com este método são comparados com resultados conhecidos para os casos de percolação, percolação de “bootstrap” e percolação de “bootstrap” probabilística na rede de Bethe bem como percolação em redes de Husimi. São obtidos resultados novos para percolação de “bootstrap” em redes de Husimi e são apresentadas as equações para a percolação de “bootstrap” probabilística em redes de Husimi.

**Palavras-chave:** Percolação, Rede de Bethe, Rede de Husimi, Transição de fase.





## ABSTRACT

Percolation probabilities in Bethe and Husimi (square and triangular) lattices are obtained for following models: usual percolation, from now on called only percolation, bootstrap percolation, and probabilistic bootstrap percolation. Also the critical exponent  $\beta$  is obtained for these cases. A very direct method is used, which leads to equations that, when solved, allow to obtain exact solutions for the studied systems. The results obtained with this method are compared with known results for the cases of percolation, bootstrap percolation, and probabilistic bootstrap percolation in the Bethe lattice and percolation in Husimi lattices. New results are obtained for bootstrap percolation in Husimi lattices and also the equations for probabilistic bootstrap percolation in Husimi lattices are presented.

**Keywords:** Percolation, Bethe lattice, Husimi lattice, Phase transition.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Rede quadrada 4x4 com todos os sítios presentes. ....	21
Figura 2: Exemplos de possíveis configuração do sistema com $p = 0,522$	
Figura 3: Fração de sítios na ilha infinita $P$ por concentração $p$ na rede de Bethe com $z = 3$ para percolação usual com $p_c = 0,5$ . ....	23
Figura 4: Exemplo de configuração em rede 5x5.....	24
Figura 5: Exemplo de percolação de “bootstrap” em rede 5x5. ....	25
Figura 6: Exemplo de percolação de “bootstrap” em rede 5x5. ....	25
Figura 7: Exemplo de configuração percolante para rede quadrada 5x5 com $m = 2$ .....	26
Figura 8: Rede de Bethe com $z = 3$ representada até a terceira geração de sítios.....	27
Figura 9: Exemplo de rede de Husimi quadrada com $z = 4$ . ....	28
Figura 10: Exemplo de rede de Husimi triangular com $z = 4$ .....	28
Figura 11: Rede de Bethe com $z = 3$ centralizada em um sítio com os ramos e sub-ramos destacados .....	29
Figura 12: Fração de sítios na ilha infinita $P$ por concentração $p$ na rede de Bethe com $z = 4$ para percolação usual. ....	32
Figura 13: Rede de Bethe com $z = 4$ , ramo superior e seus respectivos sub-ramos A, B e C destacados. ....	33
Figura 14: Fração de sítios na ilha infinita $P$ pela concentração $p$ na rede de Bethe com $z = 4$ para percolação de “bootstrap” com $m = 3$ .....	35
Figura 15: Fração de sítios na ilha infinita $P$ pela concentração $p$ na rede de Bethe com $z = 4$ para percolação de “bootstrap” com $m = 2$ .....	37
Figura 16: Fração de sítios na ilha infinita $P$ por concentração $p$ na rede de Bethe com $z = 4$ para percolação de “bootstrap” probabilística” com $m_1 = 2$ e $m_2 = 3$ para valores de $j$ variando de 0,0 a 0,4 em incrementos de 0,1.....	39
Figura 17: Fração de sítios na ilha infinita $P$ por concentração $p$ na rede de Bethe com $z = 4$ para percolação de “bootstrap” probabilística com $m_1 = 2$ e $m_2 = 3$ para valores de $j$ variando de 0,5 a 1,0 em incrementos de 0,1.....	40
Figura 18: Diagrama de fases para o caso de percolação de “bootstrap” probabilística para rede de Bethe com $z = 4$ , $m_1 = 2$ e $m_2 = 3$ . Acima da curva o sistema se encontra na fase percolante, abaixo da curva o sistema se encontra na fase não percolante. ....	41

Figura 19: Fração de sítios na ilha infinita P por concentração p na rede de Bethe com $z = 4$ para percolação de “bootstrap” probabilística com $m_1 = 1$ e $m_2 = 3$ para valores de j variando de 0,01 a 0,10.....	42
Figura 20: Fração de sítios na ilha infinita P por concentração p na rede de Bethe com $z = 4$ para percolação de “bootstrap” probabilística com $m_1 = 1$ e $m_2 = 3$ para $j = 0,15$ . .....	43
Figura 21: Fração de sítios na ilha infinita P por concentração p na rede de Bethe com $z = 4$ para percolação de “bootstrap” probabilística com $m_1 = 1$ e $m_2 = 3$ para valores de j variando de 0,2 a 1,0.....	44
Figura 22: Diagrama de fases para o caso de percolação de “bootstrap” probabilística para rede de Bethe com $z = 4$ , $m_1 = 1$ e $m_2 = 3$ . Acima da curva o sistema se encontra na fase percolante, abaixo da curva o sistema se encontra na fase não percolante. ....	45
Figura 23: Rede de Husimi com $z = 4$ com as duplas de ligações equivalentes destacadas.....	46
Figura 24: Rede de Husimi com $z = 4$ . Destacado está um dos grupos de sítios cuja configuração será usada para calcular P e que será chamado de núcleo. ....	47
Figura 25: “Núcleo” na rede de Husimi com $z = 4$ e o sítio de onde ele se origina, destacados os sítios A, B e C, que compõem o núcleo, e suas respectivas duplas de ligações DA, DB e DC. ....	48
Figura 26: Possíveis configurações para um núcleo em uma rede de Husimi quadrada com $z = 4$ . ....	49
Figura 27: Fração de sítios na ilha infinita P por concentração p na rede de Husimi quadrada com $z = 4$ para percolação usual. ....	52
Figura 28: Loop fechado de sítios e ligações na rede de Husimi com $z = 4$ . ....	53
Figura 29: Fração de sítios na ilha infinita P por concentração p na rede de Husimi com $z = 4$ para percolação de “bootstrap” com $m = 3$ . ....	56
Figura 30: Fração de sítios na ilha infinita P por concentração p na rede de Husimi com $z = 4$ para percolação de “bootstrap” com $m = 2$ . ....	60
Figura 31: Fração de sítios na ilha infinita P por concentração p na rede de Bethe com $z = 6$ para percolação de “bootstrap” probabilística com $m_1 = 1$ e $m_2 = 3$ para valores de j variando de 0,01 a 0,05.....	66
Figura 32: Fração de sítios na ilha infinita P por concentração p na rede de Bethe com $z = 6$ para percolação de “bootstrap” probabilística com $m_1 = 1$ e $m_2 = 3$ para $j = 0,10$ . ....	67

Figura 33: Fração de sítios na ilha infinita $P$ por concentração $p$ na rede de Bethe com $z = 6$ para percolação de “bootstrap” probabilística com $m_1 = 1$ e $m_2 = 3$ para valores de $j$ variando de 0,15 a 1,00. ....	68
Figura 34: Diagrama de fases para o caso de percolação de “bootstrap” probabilística para rede de Bethe com $z = 6$ , $m_1 = 1$ e $m_2 = 3$ . Acima da curva o sistema se encontra na fase percolante, abaixo da curva o sistema se encontra na fase não percolante. ....	69
Figura 35: Rede de Husimi triangular $z = 4$ com as duplas de ligações destacadas por linhas pontilhadas e o sítio original a ser estudado marcado como $O$ . ....	70
Figura 36: Rede de Husimi triangular $z = 4$ com um núcleo destacado por e os sítios do núcleo marcados como $A$ e $B$ . ....	71
Figura 37: Fração de sítios na ilha infinita $P$ por concentração $p$ na rede de Husimi triangular com $z = 4$ para percolação usual. ....	72
Figura 38: Fração de sítios na ilha infinita $P$ por concentração $p$ na rede de Husimi triangular com $z = 4$ para percolação de “bootstrap” com $m = 3$ . ....	73
Figura 39: Fração de sítios na ilha infinita $P$ por concentração $p$ na rede de Husimi triangular com $z = 4$ para percolação de “bootstrap” com $m = 2$ . ....	75



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Casos estudados e seus respectivos pontos críticos $p_c$ , pontos de transição $p_t$ quando existente, expoente crítico Beta $\beta$ e tipo de transição de fase. ....	78
--	----





## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>19</b>
<b>2 MODELOS DE PERCOLAÇÃO E TIPOS DE REDES .....</b>	<b>21</b>
<b>2.1 PERCOLAÇÃO USUAL .....</b>	<b>21</b>
<b>2.2 PERCOLAÇÃO EM REDES INFINITAS .....</b>	<b>23</b>
<b>2.2 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” .....</b>	<b>24</b>
<b>2.3 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” PROBABILÍSTICA .....</b>	<b>26</b>
<b>2.4 REDE DE BETHE .....</b>	<b>26</b>
<b>2.5 REDE DE HUSIMI .....</b>	<b>27</b>
<b>3 MÉTODO PARA O CÁLCULO DE P .....</b>	<b>29</b>
<b>3.1 CÁLCULO DE P PARA REDE DE BETHE .....</b>	<b>29</b>
<b>3.1.1 PERCOLAÇÃO USAL EM REDE DE BETHE .....</b>	<b>29</b>
<b>3.1.2 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” NA REDE DE BETHE .....</b>	<b>32</b>
<b>3.1.3 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” PROBABILÍSTICA NA REDE DE BETHE .....</b>	<b>37</b>
<b>3.2 CÁLCULO DE P PARA REDE DE HUSIMI QUADRADA .....</b>	<b>46</b>
<b>3.2.1 PERCOLAÇÃO USUAL EM REDE DE HUSIMI .....</b>	<b>46</b>
<b>3.2.2 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” EM REDE DE HUSIMI .....</b>	<b>52</b>
<b>3.2.3 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” PROBABILISTICA EM REDE DE HUSIMI .....</b>	<b>60</b>
<b>4 OUTROS CASOS .....</b>	<b>65</b>
<b>4.1 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” PROBABILISTICA NA REDE DE BETHE COM <math>Z = 6</math> .....</b>	<b>65</b>
<b>4.2 PERCOLAÇÃO USUAL EM REDE DE HUSIMI TRIANGULAR COM <math>Z = 4</math> .....</b>	<b>70</b>

<b>4.3 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” EM REDE DE HUSIMI TRIANGULAR COM <math>Z = 4</math>.</b> .....	72
<b>4.4 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” PROBABILÍSTICA EM REDE DE HUSIMI TRIANGULAR COM <math>Z = 4</math>.</b> .....	75
<b>5. CONCLUSÃO</b> .....	77
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	81
<b>APÊNDICE A</b> .....	83
<b>GENERALIZAÇÃO DA PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” PROBABILÍSTICA NA REDE DE BETHE</b> .....	83

## 1 INTRODUÇÃO

A teoria da percolação trata do efeito da conectividade entre as partículas de um determinado sistema [1]. Um dos aspectos mais interessantes da percolação é que é um dos modelos mais simples que apresenta fenômenos críticos [2]. Outro ponto de grande interesse é que apesar de sua simplicidade o modelo, que será definido adiante, apresenta resultados relativamente realistas e pode ser usado para modelar uma quantidade muito grande de sistemas. Para diversos modelos a característica discreta do sistema é importante, e o estudo da percolação em redes se torna interessante.

Os modelos de percolação em rede já são empregados há décadas, e a percolação aleatória foi originalmente resolvida exatamente em dois casos: em uma dimensão e na rede de Bethe [3]. Muito progresso foi feito na descrição da percolação em diferentes redes, mas os resultados exatos são poucos em redes usuais, entre os quais podemos destacar os das redes hexagonal, quadrada, triangular e de Kagome para percolação de ligação e apenas a rede triangular para percolação de sítio [3]. Uma maneira encontrada para obter soluções exatas é a utilização de redes recursivas como redes de Bethe e redes de Husimi. Como estas redes têm dimensionalidade infinita [1], os resultados obtidos no estudo da percolação nesta rede representar comportamento de campo médio para o processo de percolação [4]. A rede de Husimi, por apresentar loops internos, se aproxima mais das redes de Bravais.

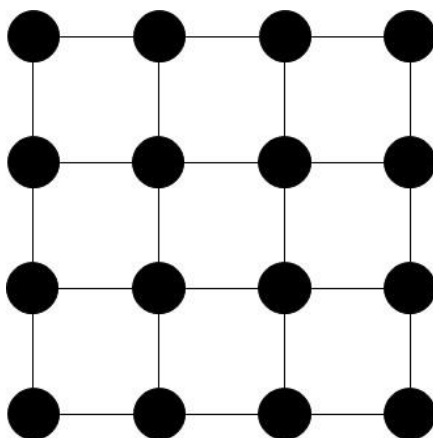
Além do modelo usual de percolação diversas generalizações já foram propostas e estudadas, entre elas e de particular interesse para o presente trabalho estão a percolação de “bootstrap” e percolação de “bootstrap” probabilística. A motivação para a introdução desses modelos vem de uma variedade de sistemas físicos, entre eles o fluxo de fluidos em matérias porosos e efeito de campos cristalinos em material magnético [5]. Se os resultados exatos já são poucos para a percolação usual, são ainda mais escassos para essas variantes. Neste trabalho iremos apresentar um método bastante direto para obter uma solução exata para estes tipos de percolação em redes de Bethe e redes de Husimi ou nos aproximarmos da solução, quando não for possível obter o resultado final. Os resultados obtidos com este método são comparados com resultados conhecidos para

os casos de percolação, percolação de “bootstrap” e percolação de “bootstrap” probabilística na rede de Bethe [1] [5] [6], bem como percolação em redes de Husimi [3]. São apresentados resultados novos para percolação de “bootstrap” em redes de Husimi e são apresentadas as equações para a percolação de “bootstrap” probabilística em redes de Husimi.

## 2 MODELOS DE PERCOLAÇÃO E TIPOS DE REDES

### 2.1 PERCOLAÇÃO USUAL

Para melhor ilustrar o conceito relevante de percolação para este trabalho, podemos considerar uma rede quadrada por simplicidade, de  $4 \times 4$  sítios, por exemplo.



*Figura 1: Rede quadrada 4x4 com todos os sítios presentes.*

Neste caso, todos os sítios e ligações estão presentes. Podemos, entretanto, considerar o caso em que nem todos os sítios estejam presentes e definir uma probabilidade  $p$  de que um sítio esteja presente e, portanto,  $(1-p)$  de estar ausente. Para  $p = 0,5$  cada sítio teria uma probabilidade igual de estar presente ou ausente, enquanto para  $p = 1,0$  todos os sítios estariam presentes, como na Figura 1. Algumas possíveis configurações para o sistema no caso de  $p = 0,5$  seriam:

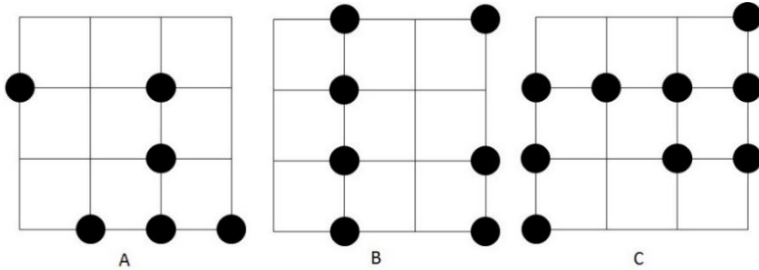


Figura 2: Exemplos de possíveis configuração do sistema com  $p = 0,5$

A um grupo de sítios presentes ligados entre si chamaremos de ilha de sítios.

No exemplo A não é possível formar um caminho ininterrupto de sítios presentes que permita atravessar de um lado da rede ao outro, nem vertical nem horizontalmente; dizemos então que o sistema não percolou. No exemplo B é possível formar uma linha ininterrupta de sítios presentes ligando a rede verticalmente, então dizemos que o sistema percolou verticalmente. No exemplo C é possível formar uma linha ininterrupta de sítios preenchidos tanto verticalmente quanto horizontalmente, então dizemos que o sistema percolou vertical e horizontalmente. Esta é a percolação por sítios, ou como será referida adiante, percolação usual.

Outra possibilidade seria considerar todos os sítios presentes e definir uma probabilidade para que a ligação entre eles estivesse presente ou não, tendo assim uma percolação por ligação em contraste com a percolação por sítio. Entretanto, o presente trabalho se concentra apenas na percolação por sítios.

Para uma configuração do sistema determinada a partir da probabilidade  $p$  de que cada sítio esteja presente, uma fração dos sítios fará parte de uma ilha de sítios percolantes, fração que será igual a zero caso a configuração não seja percolante. Definimos essa fração como  $P$ , que pode também ser visto como a probabilidade de um sítio escolhido aleatoriamente fazer parte de uma ilha de sítios percolantes. É evidente que esta probabilidade  $P$  depende de  $p$ . Para  $p = 1$  todos os sítios estarão presentes e  $P = 1$ , para  $p = 0$  todos os sítios estarão ausentes e  $P = 0$ . Para valores intermediários de  $p$  entre 0 e 1 teremos valores intermediários de

P. Para redes finitas, para qualquer valor de  $p$  diferente de 0 existe uma probabilidade de que o sistema seja percolante, o que não acontece nas redes infinitas. [1]

## 2.2 PERCOLAÇÃO EM REDES INFINITAS

Para redes infinitas ainda existe uma relação entre  $P$  e  $p$ ; entretanto, para que exista percolação na rede infinita, é preciso que se forme uma ilha também infinita de sítios ligados. Neste caso existe um limite para  $p$  abaixo do qual não existem ilhas infinitas, ou seja,  $P = 0$ . O valor de  $p$  para o qual abaixo deste valor não existam ilhas infinitas é chamado probabilidade crítica,  $p_c$ .

O valor de  $p_c$  é diferente para cada tipo de rede infinita. Este valor é conhecido, ao menos aproximadamente, para vários tipos de redes infinitas, como a rede hexagonal com  $p_c \approx 0,6962$ , quadrada com  $p_c \approx 0,5927$ , triangular com  $p_c = 0,5$ , etc [1]. Todos estes valores se referem a percolação por sítio. Como exemplo temos o resultado conhecido para a percolação na rede de Bethe com  $z = 3$  [1].

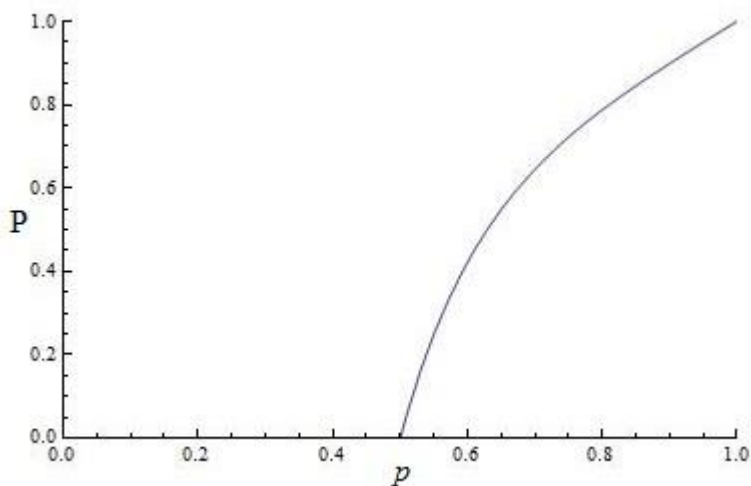


Figura 3: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Bethe com  $z = 3$  para percolação usual com  $p_c = 0,5$ .

Da relação entre  $P$  e  $p$ , conhecido o  $p_c$ , podemos obter o expoente crítico  $\beta$  definido como  $P(p_c) \sim (p - p_c)^\beta$  para  $p > p_c$  [1] e comparar os resultados obtidos com os resultados das redes conhecidas. No exemplo da Figura 3  $\beta = 1$  [1].

## 2.2 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP”

Na percolação de “bootstrap” além da probabilidade  $p$  de que um sítio esteja presente, é adicionada uma condição adicional para que o sítio continue presente, sendo esta a de que ele tenha um número mínimo  $m$  de vizinhos presentes. Se um sítio presente tiver menos do que  $m$  vizinhos presentes esse sítio se torna ausente e deixa de contar como um sítio presente para seus vizinhos, o que pode fazer com que estes vizinhos deixem de ter  $m$  vizinhos presentes e também se tornem ausentes, e assim sucessivamente. Este conceito pode ser mais facilmente compreendido com um exemplo.

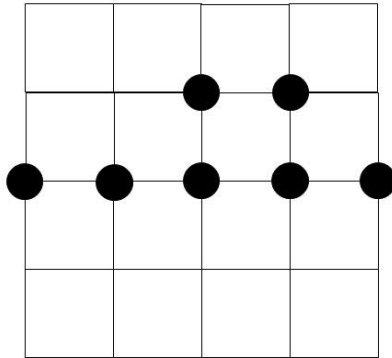


Figura 4: Exemplo de configuração em rede 5x5.

Suponha que estejamos tratando de uma percolação de “bootstrap” com  $m = 2$ . Nesse caso os sítios com menos de 2 vizinhos presentes se tornam ausentes, e a configuração da Figura 4 muda a da Figura 5



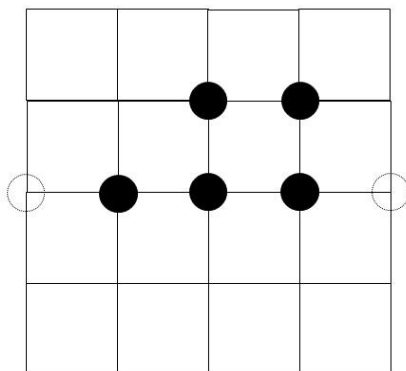


Figura 5: Exemplo de percolação de “bootstrap” em rede 5x5.

Os sítios que se tornaram ausentes estão marcados como um círculo apenas para auxílio visual, mas em nada se diferenciam dos demais sítios ausentes. Estes sítios que se tornaram ausentes podem alterar também os seus vizinhos. Removendo novamente os sítios com menos de 2 vizinhos presentes temos:

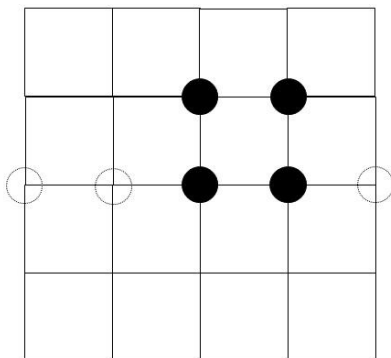


Figura 6: Exemplo de percolação de “bootstrap” em rede 5x5.

E agora todos os sítios têm ao menos 2 vizinhos presente e a ilha restante é chamada de estável. Se esta ilha restante também atravessar a

rede de um lado ao outro a configuração é percolante. Como exemplo temos:

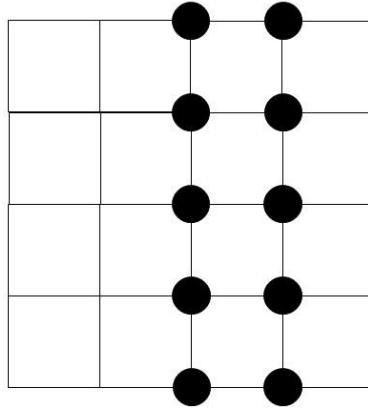


Figura 7: Exemplo de configuração percolante para rede quadrada 5x5 com  $m = 2$ .

### 2.3 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” PROBABILÍSTICA

A percolação de “bootstrap” probabilística é uma variação da percolação de “bootstrap” com mais um parâmetro probabilístico. Em vez de apenas um valor de  $m$  igual para todos os sítios, cada sítio pode ter um valor igual a  $m_1$  ou  $m_2$  definido probabilisticamente. Cada sítio tem uma probabilidade  $j$  de ter um valor de  $m = m_1$  e  $(1-j)$  de ter um valor de  $m = m_2$ . Após a definição dos valores de  $m$  para cada sítio o processo é o mesmo da percolação de “bootstrap”.

### 2.4 REDE DE BETHE.

Como vamos resolver este modelo em uma geometria chamada rede de Bethe, vamos defini-la aqui. Rede de Bethe é uma rede na qual

cada sítio tem  $z$  vizinhos que se espalham por ramos que não têm ligações entre si.

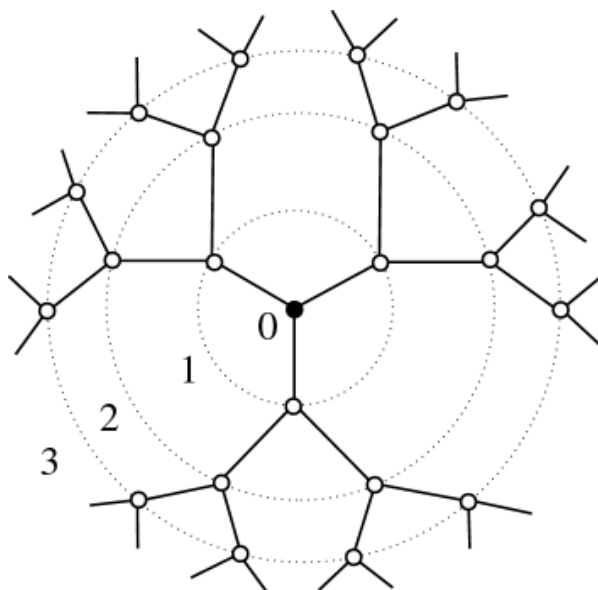


Figura 8: Rede de Bethe com  $z = 3$  representada até a terceira geração de sítios.

Considere o exemplo da Figura 8. É interessante notar que cada ramo que se origina dos 3 vizinhos do sítio inicial são independentes, no sentido de que não existem ligações entre eles além daquela através do sítio 0.

Para a rede de Bethe  $p_c = 1/(z-1)$  e  $\beta = 1$  [1]. Este resultado de  $p_c$  recupera o valor correto de  $p_c$  para  $z = 2$ , que é equivalente a rede unidimensional onde  $p_c = 1$  [1].

## 2.5 REDE DE HUSIMI

Uma rede de Husimi é semelhante a uma rede de Bethe, mas existe um loop fechado dentro dos ramos que se originam de cada sítio. Este loop pode aparecer de diferentes formas para um mesmo  $z$ .

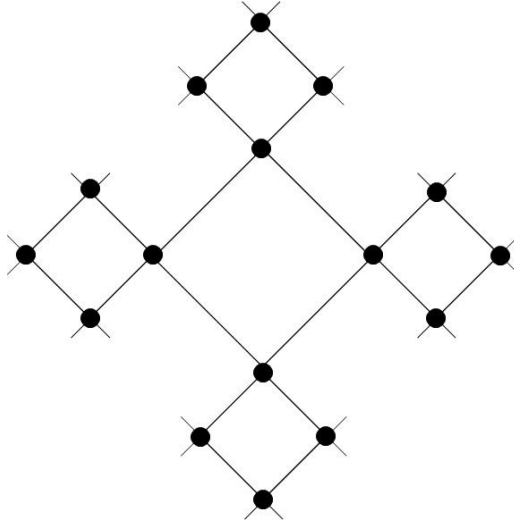


Figura 9: Exemplo de rede de Husimi quadrada com  $z = 4$ .

Na figura 9 temos uma rede de Husimi quadrada, em que os loops têm a forma de quadrados.

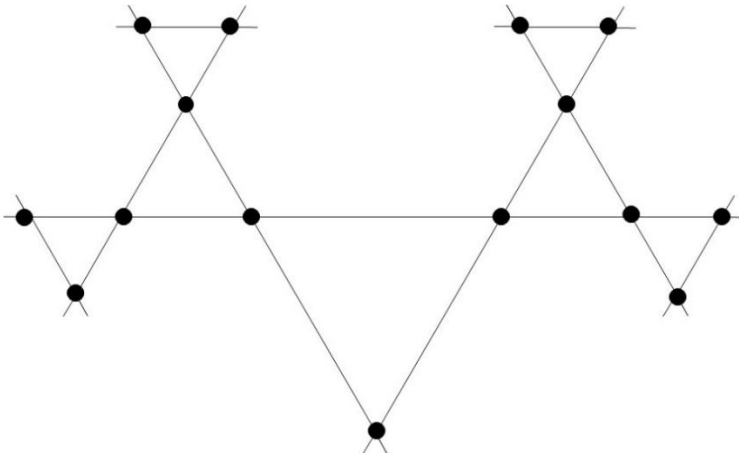


Figura 10: Exemplo de rede de Husimi triangular com  $z = 4$ .

Na figura 10 temos uma rede de Husimi triangular, em que os loops têm a forma de triângulos.

### 3 MÉTODO PARA O CÁLCULO DE P

Neste capítulo será apresentado o método utilizado para o cálculo de P em função de  $p$ , para as redes de Bethe e Husimi para os casos de percolação usual, de “bootstrap” e de “bootstrap” probabilística.

#### 3.1 CÁLCULO DE P PARA REDE DE BETHE

Nesta seção será calculado P em função de  $p$  na rede de Bethe para os diversos tipos de percolação propostos.

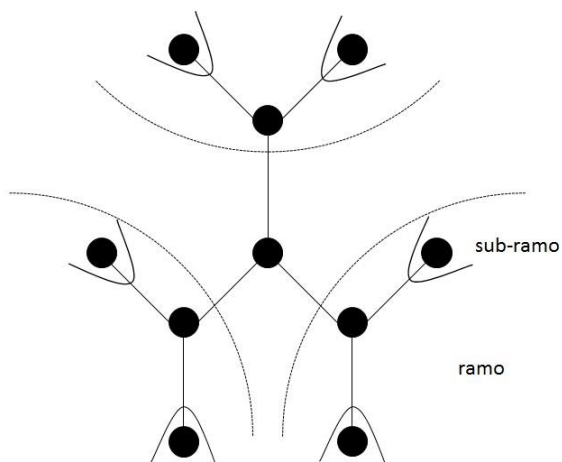


Figura 11: Rede de Bethe com  $z = 3$  centralizada em um sítio com os ramos e sub-ramos destacados

#### 3.1.1 PERCOLAÇÃO USAL EM REDE DE BETHE

Apresentaremos aqui uma variação simples de uma solução conhecida para este problema [1].

Para calcular a probabilidade  $P$  de um sítio pertencer à ilha infinita, ou seja, percolante, vamos levar em consideração a independência dos ramos e sub-ramos na rede de Bethe e a equivalência de todos os sítios na rede infinita, e considerar  $z = 4$  por simplicidade.

Para determinar se um sítio faz parte de uma ilha infinita, devemos observar os ramos que se originam neste sítio. Um sítio fará parte da ilha infinita se estiver presente e se ao menos um de seus ramos fizer parte da ilha infinita. Definindo como  $R$  a probabilidade de que um ramo faça parte da ilha infinita e levando em consideração que os sítios em uma rede de Bethe infinita são equivalentes [1], podemos afirmar que a probabilidade de um sub-ramo que parta deste ramo fazer parte da ilha infinita é igualmente  $R$ . Como a probabilidade de um ramo fazer parte de uma ilha infinita depende da probabilidade de seus sub-ramos fazerem parte da ilha infinita, e ambas são iguais a  $R$ , podemos montar uma equação com a variáveis  $R$  e  $p$  e obter  $R$  em função de  $p$ .

Dizemos que um ramo faz parte da ilha infinita se o primeiro sítio deste ramo estiver presente, com probabilidade  $p$ , e qualquer um dos seus sub-ramos estiver ligado à ilha infinita. É mais simples nesse caso calcular primeiro a probabilidade de nenhum sub-ramo estar ligado a ilha infinita. Para que um ramo não esteja ligado a ilha infinita a probabilidade é  $1-R$ . Como a probabilidade de um sub-ramo estar ou não ligado a ilha infinita é independente da dos outros sub-ramos, podemos multiplicar as probabilidades, pois são eventos independentes, e temos que a probabilidade de nenhum dos 3 sub-ramos da rede de Bethe com  $z = 4$  estar ligado à ilha infinita é  $(1-R)^3$ . Como ou nenhum dos sub-ramos estará ligado à ilha infinita ou ao menos um deles estará, temos que a probabilidade de ao menos um estar ligado à ilha infinita é  $1 - (1-R)^3$ . Levando também em conta a probabilidade  $p$  do primeiro sítio do ramo, de onde se originam os sub-ramos, estar presente temos:

$$R = p(1 - (1 - R)^3) \quad (1)$$

Que tem as seguintes soluções:

$$R = 0 \quad (2)$$

$$R = \frac{3p \pm \sqrt{4p - 3p^2}}{2p} \quad (3)$$

Para termos  $R$  positivo e entre 0 e 1, pois é uma probabilidade, temos que  $p \geq 1/3$ . Abaixo deste valor não existe valor de  $p$  para o qual  $R$  seja positivo e entre 0 e 1, ou seja, não existe ilha infinita e a configuração é não percolante. Chamamos este valor mínimo que separa as fases percolante e não percolante de probabilidade crítica,  $p_c$ . Logo,  $p_c = 1/3$  para este caso. Para valores abaixo de  $p_c$  vale a solução (2).

Tendo a probabilidade  $R$  de que um ramo esteja ligado a uma ilha infinita, podemos calcular a probabilidade  $P$  de um sítio fazer parte de uma ilha infinita. Para que um sítio faça parte da ilha infinita ele precisa estar presente com probabilidade  $p$  e qualquer um dos ramos originados dele estarem ligados à ilha infinita com probabilidade  $R$ .

Da mesma forma que no cálculo para os sub-ramos, é mais fácil calcular primeiro a probabilidade de que nenhum dos ramos esteja ligado à ilha infinita.  $1-R$  é a probabilidade de um ramo não estar ligado à ilha infinita, e como os ramos são independentes temos que  $(1-R)^4$  é a probabilidade de que nenhum dos 4 ramos esteja ligado à ilha infinita. Como no caso dos sub-ramos, a probabilidade de que ao menos um dos ramos esteja ligado à ilha infinita é um menos a probabilidade que nenhum deles esteja,  $1 - (1-R)^4$ . Levando em conta também a probabilidade  $p$  de que o sítio central em estudo esteja presente temos:

$$P = p (1 - (1 - R)^4) \quad (4)$$

E para a solução  $R = 0$  temos  $P = 0$ , ou seja, não existe ilha infinita no sistema, como era previsível. Temos então, para este caso:

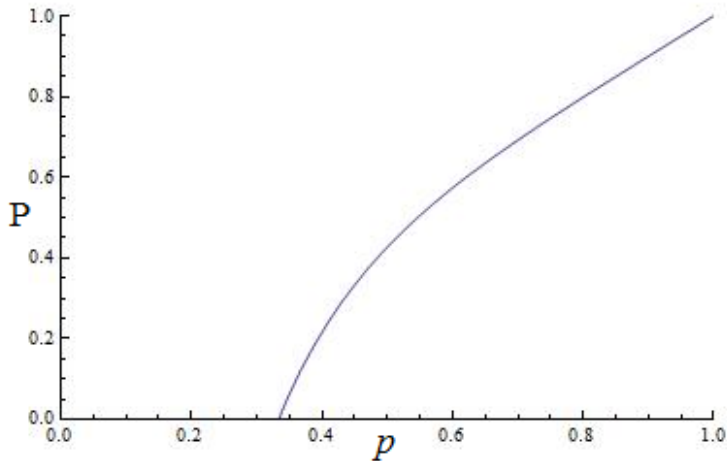


Figura 12: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Bethe com  $z = 4$  para percolação usual.

Expandindo a solução em torno de  $p_c = 1/3$ , utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica, temos  $\beta = 1$  para este caso, resultado já apresentado em [1].

### 3.1.2 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” NA REDE DE BETHE

Na percolação de “bootstrap” adicionamos um parâmetro  $m$  que é o número mínimo de primeiros vizinhos que um sítio precisa ter para permanecer presente. Para ilustrar melhor a solução será utilizada a rede de Bethe com  $z = 4$  para esse estudo. Na rede de Bethe com  $z = 4$  este parâmetro  $m$  poderia ser teoricamente qualquer valor entre 0 e 4, mas o comportamento só é interessante para  $m = 1, 2$  e 3. Para  $m = 0$  temos o caso da percolação usual, enquanto para  $m = 4$  é evidente que só haverá sítio estável caso todos os sítios estejam presentes, ou seja,  $p_c = 1$ .

Faremos agora a análise do caso  $m = 3$ , que é o mais interessante, seguido pelo caso de  $m = 2$ . O caso de  $m = 1$  é praticamente idêntico ao de percolação usual, pois os únicos sítios que deixariam de ficar estáveis



são sítios isolados que não fariam parte da ilha infinita de qualquer maneira.

É importante notar que na rede de Bethe, para  $m = 3$  (assim como para  $m = 2$ ) todas as ilhas estáveis de sítios serão infinitas, pois o sítio no extremo de uma ilha finita teria apenas um vizinho presente e, portanto, não seria estável. Sabendo que todas as ilhas estáveis são infinitas podemos nos valer do fato de que um ramo originado de um determinado sítio ou está ausente ou está ligado a uma ilha infinita para calcular a fração de sítios na ilha infinita  $P$  e a probabilidade que um determinado ramo esteja ligado à ilha infinita  $R$ .

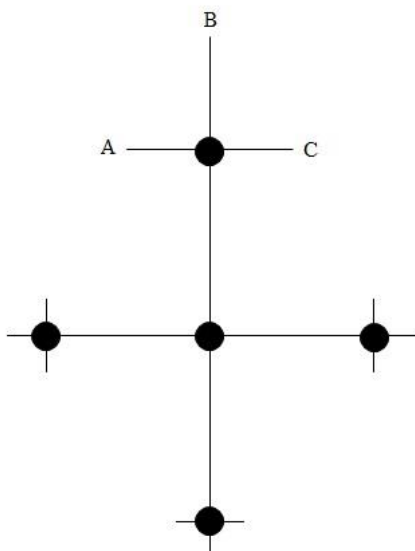


Figura 13: Rede de Bethe com  $z = 4$ , ramo superior e seus respectivos sub-ramos A, B e C destacados.

Para que um ramo originado de um sítio permaneça estável é preciso que ele esteja presente, com probabilidade  $p$ , e que pelo menos 2 de seus sub-ramos estejam presentes e sejam estáveis. Assim ele terá o número mínimo de vizinhos para o caso de  $m = 3$ , sendo 2 destes vizinhos advindos de seus sub-ramos e um do sítio de onde este ramo se originou. Lembrando que iremos considerar o sítio de onde ele se origina como

presente e levar isso em consideração no cálculo final de  $p$ , pois um dos requisitos para que o sítio original faça parte da ilha infinita é, obviamente, que ele esteja presente.

Para que ao menos 2 dos sub-ramos em questão, marcados na Figura 13 como A, B e C do ramo superior do sítio original, estejam presentes, temos as possibilidades de que quaisquer 2 deles estejam presentes ou os 3 estejam presentes. Para que 2 estejam presentes existem 3 possibilidades. A e B presentes, A e C presente e B e C presentes. Como a probabilidade de que um sub-ramo esteja presente é  $R$  e a de que esteja ausente é  $1-R$  e essas probabilidades são independentes, pois não há ligações entre os sub-ramos, podemos multiplicar as probabilidades de que 2 estejam presentes  $R^2$  e a de que um esteja ausente  $(1-R)$ , obtendo  $(1-R)R^2$ . Como esta combinação de 2 sítios presentes e um ausente pode acontecer de 3 formas, como foi explicado, multiplicamos essa probabilidade por 3, obtendo  $3(1-R)R^2$ . Para os 3 estarem presentes existe apenas uma possibilidade e para obter a probabilidade de 3 sub-ramos estarem presentes basta multiplicar a probabilidade  $R$  de cada um deles estar presente, ou seja,  $R^3$ . Somando as probabilidades de termos 2 sub-ramos presentes e um ausente e a de termos 3 presentes, levando em consideração a probabilidade  $p$  do sítio inicial do ramo estar presentes temos a equação para  $R$ :

$$R = p(3(1 - R)R^2 + R^3) \quad (5)$$

Para o cálculo de  $P$  levamos em consideração que ao menos 3 dos ramos originados no sítio em questão devem estar presentes. Essa configuração pode ser obtida com 3 ramos presentes e um ausente, que como nos casos do sub-ramos obtemos a probabilidade multiplicando a probabilidade de 3 sítios estarem presentes e 1 ausente,  $(1-R)R^3$ , multiplicado pelas 4 maneiras que essa configuração pode acontecer, com qualquer um dos 4 ramos presentes e os outros 3 ausentes. A probabilidade de que os 4 ramos estejam presentes, que pode acontecer apenas de uma maneira, é obtida multiplicando a probabilidade de cada um dos ramos estar presentes pois, novamente, os ramos não tem ligações entre eles, sendo independentes, obtendo  $R^4$ . Somando as 4 probabilidades de termos 3 ramos presentes e um ausente e a de termos 4

presentes, levando em consideração a probabilidade  $p$  do sítio central estar presentes temos a equação para  $P$ :

$$P = p(4(1 - R)R^3 + R^4) \quad (6)$$

Resolvendo (5) e (6) simultaneamente, o que neste trabalho foi feito com o software Mathematica, para  $R$  e  $P$  entre 0 e 1 obtemos o resultado desejado:

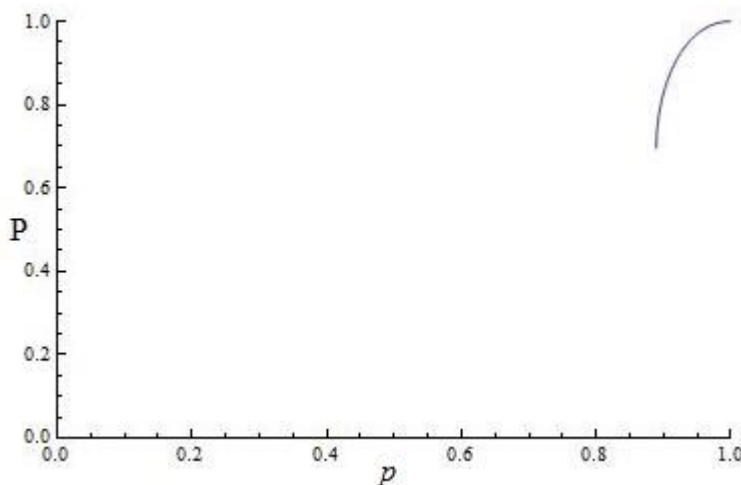


Figura 14: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  pela concentração  $p$  na rede de Bethe com  $z = 4$  para percolação de “bootstrap” com  $m = 3$ .

É interessante notar que nesse caso temos uma transição de fase de primeira ordem e um valor de  $p_c = 8/9$  e  $\beta = 1/2$ , como era esperado para a rede de Bethe [5]. O expoente  $\beta$  foi obtido utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica, em  $p_c = 8/9$ . Neste caso, nem como nos demais que apresentam transição de fase de primeira ordem, o expoente  $\beta$  é definido como  $P - P(p_c) \sim (p - p_c)^\beta$  para  $p > p_c$ .

Para o caso de  $m = 2$ , para que um ramo esteja ligado à ilha infinita basta que ele esteja presente e um de seus sub-ramos esteja ligado à ilha infinita, pois assim terá 2 vizinhos estáveis levando em conta o sítio

de onde este ramo foi originado. Que ao menos um esteja presente é equivalente a que não estejam todos ausentes, ou seja, a probabilidade é um menos a probabilidade de que estejam todos ausentes. Como os sub-ramos são independentes basta multiplicar a probabilidade de que cada um deles esteja ausente  $(1-R)$  para obter a probabilidade de que os 3 estejam ausentes, que é  $(1-R)^3$ . A probabilidade de que ao menos um dos sub-ramos esteja presente é  $1-(1-R)^3$ . Levando em conta a probabilidade  $p$  de que o sítio inicial do ramo esteja presente temos:

$$R = p(1 - (1 - R)^3) \quad (7)$$

Para a probabilidade  $P$  de que um sítio esteja ligado à ilha infinita, é preciso que ele esteja presente com probabilidade  $p$  e que tenha ao menos 2 vizinhos estáveis, ou seja, 2, 3 ou 4 ramos que estejam ligados a ilha infinita. Para calcular de quantas maneiras cada uma dessas possibilidades pode acontecer utilizamos análise combinatória. A princípio temos a permutação dos 4 ramos, o que gera  $4!$  possibilidades, mas os ramos se distribuem em dois grupos de elementos indistinguíveis, ramos presentes ou ramos ausentes, e por isso dividimos as  $4!$  possibilidades pelo número de combinações dos ramos presentes e dos ramos ausentes, ambas permutações. Analisando o sistema temos que existem 6 maneiras de 2 ramos estarem ligados à ilha infinita e 2 não,  $(\frac{4!}{2!2!})$ , com probabilidade  $R^2(1-R)^2$ , 4 maneiras de 3 estarem ligados e 1 não,  $(\frac{4!}{3!1!})$ , com probabilidade  $R^3(1-R)$ , e 1 maneira de todos os 4 estarem ligados à ilha infinita,  $(\frac{4!}{4!1!})$ , com probabilidade  $R^4$ . Somando estas probabilidades e levando em conta a probabilidade  $p$  do sítio central estar presente temos então para  $P$ :

$$P = p(6R^2(1 - R)^2 + 4R^3(1 - R) + R^4) \quad (8)$$

Resolvendo simultaneamente (7) e (8), o que neste trabalho foi feito com o software Mathematica, temos  $P$  em função de  $p$ :

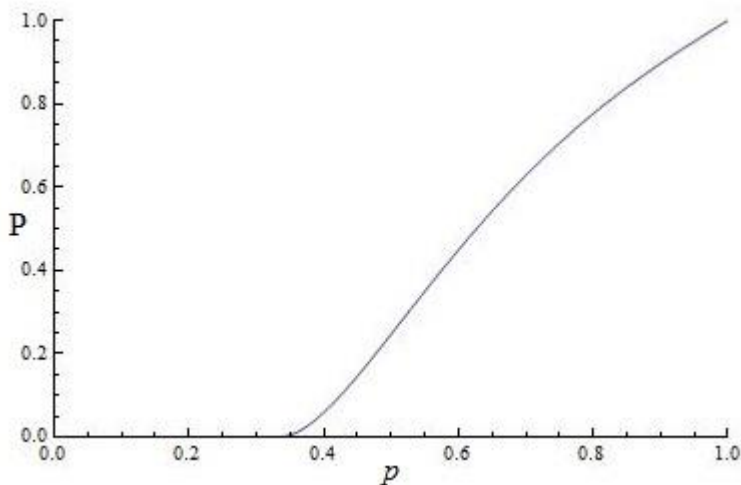


Figura 15: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  pela concentração  $p$  na rede de Bethe com  $z = 4$  para percolação de “bootstrap” com  $m = 2$ .

Neste caso  $p_c = 1/3$  e  $\beta = 2$ , o que está de acordo com [6]. O expoente  $\beta$  foi obtido utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica em torno de  $p_c = 1/3$ .

### 3.1.3 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” PROBABILÍSTICA NA REDE DE BETHE

A diferença entre a percolação de “bootstrap” e a percolação de “bootstrap” probabilística é que em vez de haver um único valor de  $m$  para todos os sítios da rede temos dois possíveis valores,  $m_1$  e  $m_2$ , determinados probabilisticamente. O primeiro caso que iremos tratar é o da rede de Bethe com  $z = 4$ ,  $m_1 = 2$  e  $m_2 = 3$ . A probabilidade de que um sítio tenha  $m = m_1$  é  $j$ , enquanto a probabilidade de ter  $m = m_2$  é  $(1 - j)$ .

Primeiro calculamos a probabilidade de que um dos ramos do sítio original esteja ligado a uma ilha infinita,  $R$ . Também nesse caso a probabilidade é:

$$R = p(jR_1 + (1 - j)R_2), \quad (9)$$

onde  $R_1$  é a probabilidade de um ramo cujo primeiro sítio apresente  $m = m_1$  estar ligado a uma ilha infinita e  $R_2$  a probabilidade de um ramo cujo primeiro sítio apresenta  $m = m_2$  estar ligado a uma ilha infinita. Neste caso  $R_1$  seria equivalente à equação (7) e  $R_2$  à equação (5), ou seja:

$$R = p(j(1 - (1 - R)^3) + (1 - j)(3(1 - R)R^2 + R^3)) \quad (10)$$

Para o cálculo de  $P$  a diferença em relação a percolação de “bootstrap” é que devemos levar em consideração as duas possibilidades de  $m$ , logo:

$$P = p(jC_1 + (1 - j)C_2), \quad (11)$$

onde  $C_1$  é a probabilidade de um sítio presente com  $m = m_1$  estar ligado a uma ilha infinita e  $C_2$  a probabilidade de um sítio presente com  $m = m_2$  estar ligado a uma ilha infinita. Neste caso com  $C_1$  equivalente à equação (6) e  $C_2$  equivalente à equação (8), temos:

$$P = p(j(4(1 - R)R^3 + R^4) + (1 - j)(6R^2(1 - R)^2 + 4R^3(1 - R) + R^4)) \quad (12)$$

Resolvendo o sistema das equações (10) e (12), o que neste trabalho foi feito com o software Mathematica, temos a solução e podemos construir o gráfico de  $P$  em função de  $p$  para diversos valores de  $j$ .

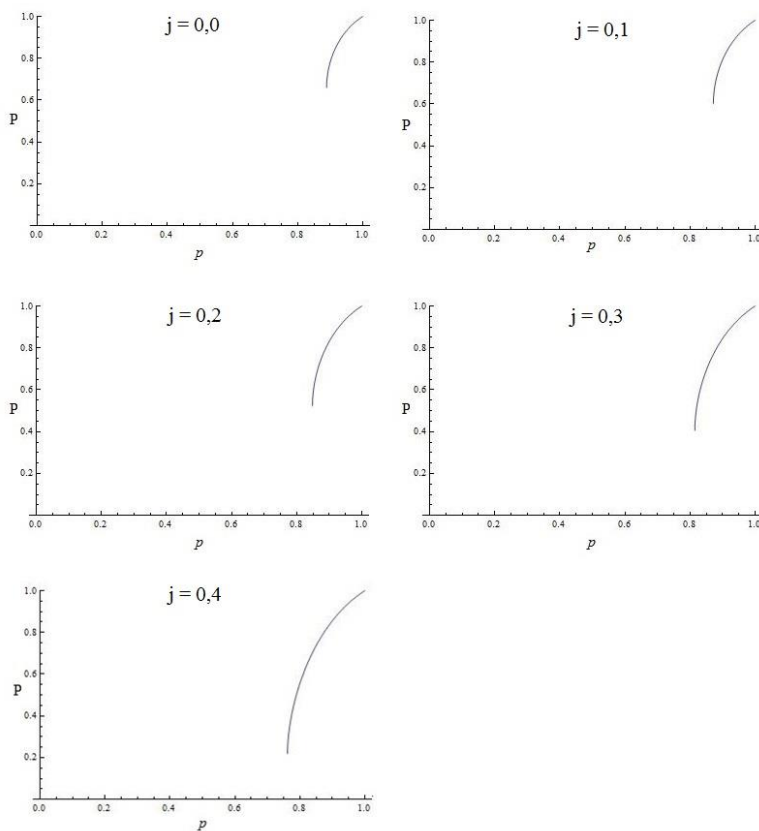


Figura 16: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Bethe com  $z = 4$  para percolação de “bootstrap” probabilística com  $m_1 = 2$  e  $m_2 = 3$  para valores de  $j$  variando de 0,0 a 0,4 em incrementos de 0,1.

Como visto na Figura 16, entre os valores de  $j = 0,0$  e  $j = 0,4$  o sistema apresenta transições de fases de primeira ordem e  $\beta = \frac{1}{2}$ . O expoente  $\beta$  foi obtido utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica, em  $p_c$ .

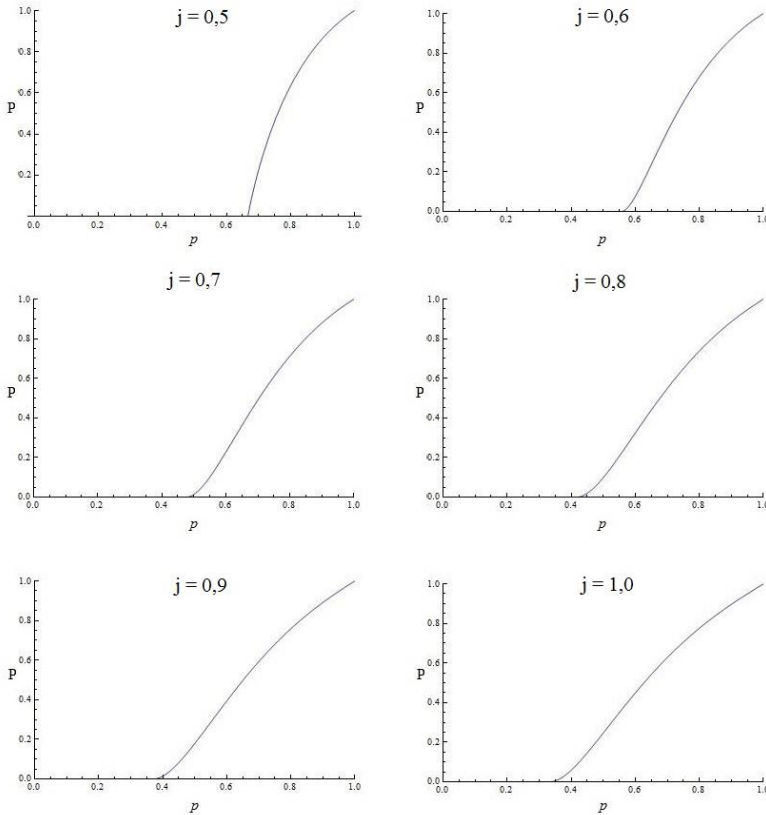


Figura 17: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Bethe com  $z = 4$  para percolação de “bootstrap” probabilística com  $m_1 = 2$  e  $m_2 = 3$  para valores de  $j$  variando de 0,5 a 1,0 em incrementos de 0,1.

Como podemos ver na Figura 17, para valores de  $j$  entre 0,5 e 1,0 o sistema apresenta transições de fases contínuas. Para  $j = 0,5$   $\beta = 1$ , para os valores de  $j$  entre 0,6 e 1,0  $\beta = 2$ , em concordância com [5]. O expoente  $\beta$  foi obtido utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica em torno de  $p_c$ .

Podemos obter um diagrama de fases para este caso de percolação de “bootstrap” probabilística construindo um gráfico de  $p$  por  $j$ , como mostra a Figura 18.



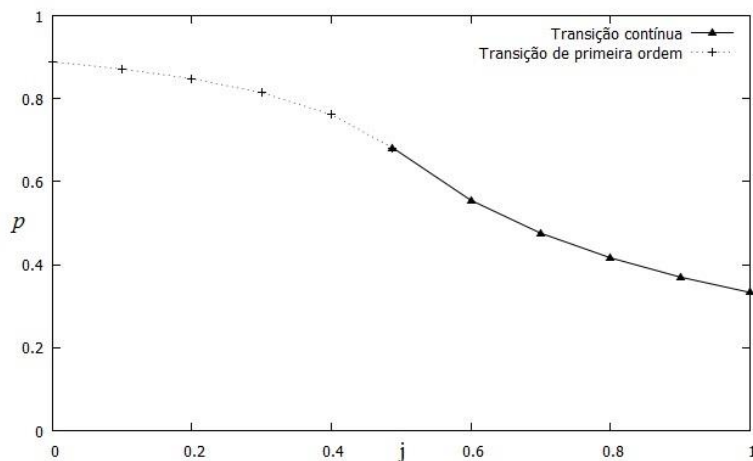


Figura 18: Diagrama de fases para o caso de percolação de “bootstrap” probabilística para rede de Bethe com  $z = 4$ ,  $m_1 = 2$  e  $m_2 = 3$ . Acima da curva o sistema se encontra na fase percolante, abaixo da curva o sistema se encontra na fase não percolante.

Como podemos observar na Figura 18, o sistema apresenta apenas transição de fase de primeira ordem para  $j \leq 0,48$  e apenas transição contínua para  $j \geq 0,48$ , sendo estes valores de  $j$  aproximados. Acima da curva o sistema se encontra na fase percolante, abaixo da curva o sistema se encontra na fase não percolante.

O segundo caso estudado para percolação de “bootstrap” probabilística na rede de Bethe com  $z = 4$  é com os valores de  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$ . O cálculo para este caso apresenta uma importante peculiaridade que não aparecia no anterior. Para  $m = 1$  existe a possibilidade de se formarem ilhas finitas dentro da rede de Bethe, pois um sítio presente no final de um ramo finito ainda teria 1 vizinho e permaneceria estável. Esta possibilidade de ilhas finitas é importante nesse caso porque se um dos ramos originados do sítio em estudo estiver ligado a uma rede finita ele contará como um vizinho presente mesmo não estando ligado à uma ilha infinita. Portanto, na possibilidade do sítio em questão precisar de 3 vizinhos presentes, apenas 1 deles precisa estar ligado à ilha infinita para que ele permaneça estável e esteja também ligado à ilha infinita. Para levar em conta essa possibilidade precisamos definir uma nova possibilidade, a de que um ramo esteja ligado a uma ilha finita.

Chamaremos essa possibilidade de  $U$ . Para este caso precisaremos resolver os sistemas de equações para  $U$ ,  $R$  e  $P$  em função de  $p$ . Uma generalização deste caso está no apêndice A; tomando os valores de  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$  e  $z = 4$  para este caso específico temos:

$$U = p(j((1 - R)^3) + (1 - j)(3U^2(1 - R - U) + U^3)) \quad (13)$$

$$R = p(j(1 - (1 - R)^3) + (1 - j)(6RU(1 - R - U) + 3(R^2)(1 - R - U) + 3R(U^2) + 3(R^2)U + R^3)) \quad (14)$$

$$P = p(j(1 - (1 - R)^4) + (1 - j)(12R(U^2) + 12R^2(U)(1 - R - U) + 6(R^2)(U^2) + 4R(U^3) + 4(R^3)U + 4(R^3)(1 - R - U) + R^4)) \quad (15)$$

Resolvendo o sistema de equações formado por (13), (14) e (15), o que neste trabalho foi feito com o software Mathematica, temos os gráficos de  $P$  em função de  $p$  para o caso em estudo.

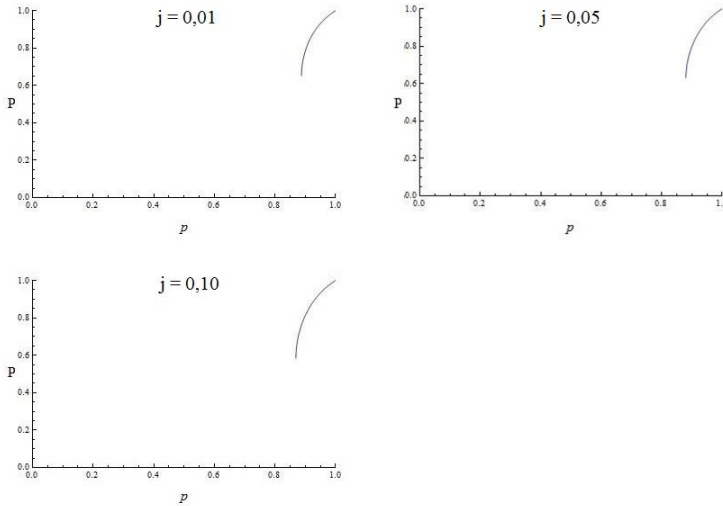


Figura 19: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Bethe com  $z = 4$  para percolação de “bootstrap” probabilística com  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$  para valores de  $j$  variando de 0,01 a 0,10.

Para os valores de  $j$  mostrados na Figura 19 temos  $m = 3$  dominante, com uma transição de fase de primeira ordem, como em casos anteriores. Entretanto, obtivemos  $\beta = 1$  para estes casos. O expoente  $\beta$  foi obtido utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica em torno de  $p_c$ . É importante notar que não está indicado o caso de  $j = 0$  (equivalente a percolação de “bootstrap com  $m = 3$ ), pois as equações que construímos levam em conta a possibilidade de existência de ilhas finitas, o que não é possível se todos os sítios precisam de 3 vizinhos estáveis. Este caso foi estudado separadamente na seção anterior e obtivemos  $\beta = 1/2$ .

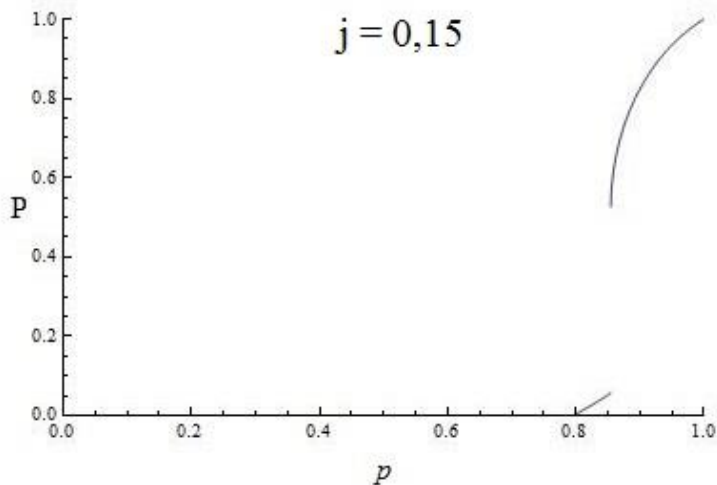


Figura 20: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Bethe com  $z = 4$  para percolação de “bootstrap” probabilística com  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$  para  $j = 0,15$ .

Para o caso de  $j = 0,15$  temos uma “mistura” entre os resultados de  $m = 1$  e  $m = 3$ , com uma transição contínua em  $p \sim 0,7965$  e uma transição de primeira ordem para um valor mais alto de  $p$ , que chamaremos ponto de transição,  $p_t \sim 0,8555$ . Para ambos os pontos  $\beta = 1$ . O expoente  $\beta$  foi obtido utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica em torno de  $p_c$ .

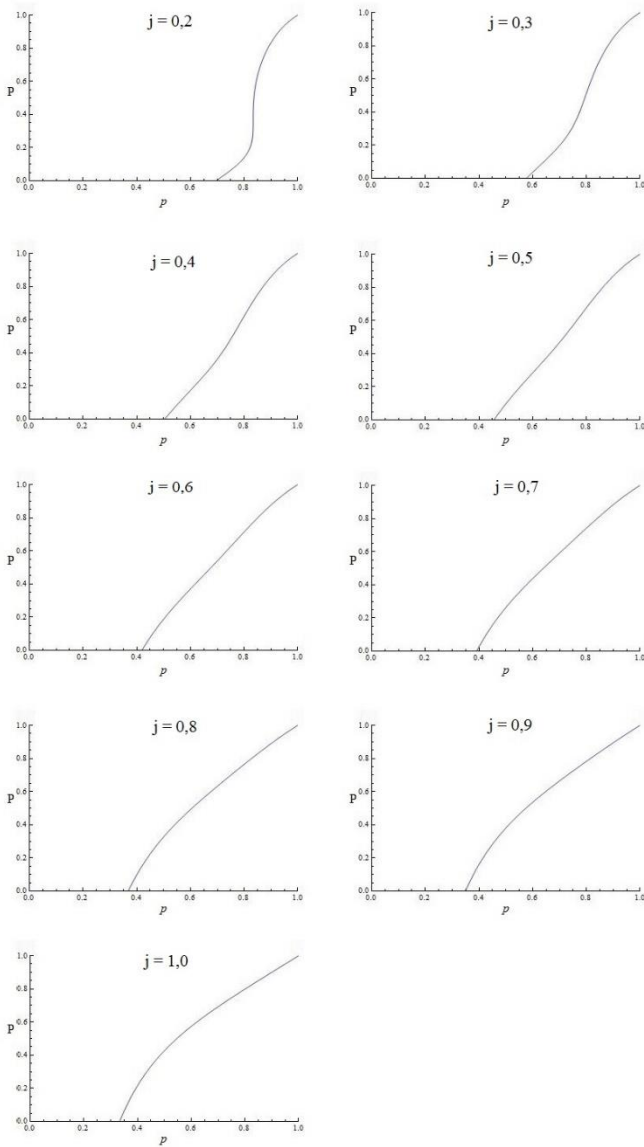


Figura 21: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Bethe com  $z = 4$  para percolação de "bootstrap" probabilística com  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$  para valores de  $j$  variando de 0,2 a 1,0.

Nos casos de  $j$  maior que 0,2 temos uma dominância do comportamento de  $m = 1$  e uma transição contínua. Para todos esses valores de  $j$ ,  $\beta = 1$ . O expoente  $\beta$  foi obtido utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica em torno de  $p_c$ .

Podemos obter um diagrama de fases para este caso de percolação de “bootstrap” probabilística construindo um gráfico de  $p$  por  $j$ , como mostra a Figura 22.

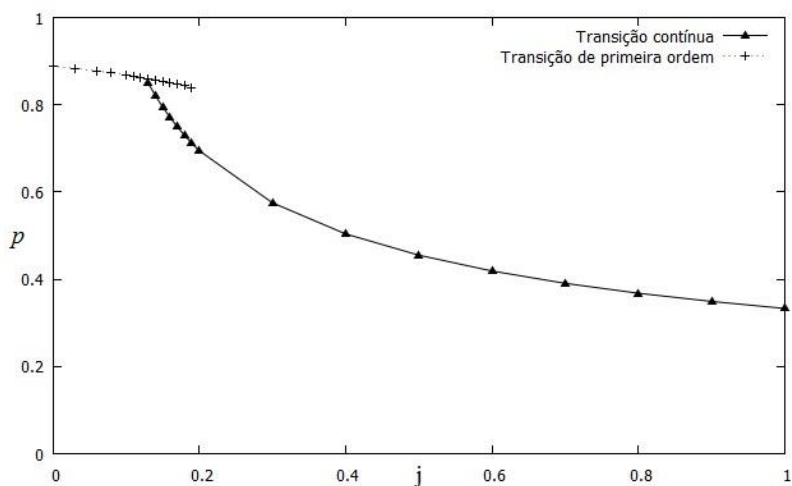


Figura 22: Diagrama de fases para o caso de percolação de “bootstrap” probabilística para rede de Bethe com  $z = 4$ ,  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$ . Acima da curva o sistema se encontra na fase percolante, abaixo da curva o sistema se encontra na fase não percolante.

Como podemos observar na Figura 22, o sistema apresenta apenas transição de fase de primeira ordem para  $j \leq 0,13$ , transição de primeira ordem e contínua para  $0,13 \leq j \leq 0,19$  e apenas transição contínua para  $j \geq 0,19$ , sendo estes valores de  $j$  aproximados. Acima da curva o sistema se encontra na fase percolante, abaixo da curva o sistema se encontra na fase não percolante.

### 3.2 CÁLCULO DE P PARA REDE DE HUSIMI QUADRADA

Nesta seção será calculado  $P$  em função de  $p$  na rede de Husimi para os diversos tipos de percolação propostos.

#### 3.2.1 PERCOLAÇÃO USUAL EM REDE DE HUSIMI

Para calcular a fração de sítios na ilha infinita  $P$  em redes de Husimi usaremos uma variação do método utilizado nas redes de Bethe. A principal diferença é que não podemos considerar os ramos originados do sítio em estudo como equivalentes porque eles não são independentes, já que a cada dupla existe uma ligação entre eles. Entretanto, cada dupla de ramos pode ser vista como equivalente às demais, e a partir dessa observação construiremos um método semelhante à resolução utilizada nas redes de Bethe.

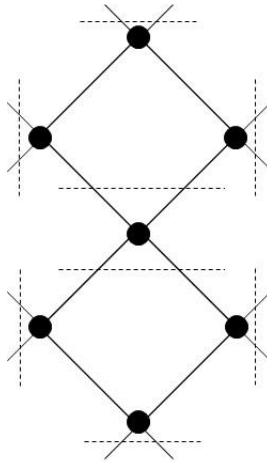


Figura 23: Rede de Husimi com  $z = 4$  com as duplas de ligações equivalentes destacadas.

Cada uma das duplas de ligações destacadas na Figura 23 pode ser considerada independente das demais, pois não há ligações entre elas, apenas ligações internas a cada dupla. Na resolução essas duplas serão tratadas como os ramos nas redes de Bethe. Uma diferença notável, mas que será importante nos casos em que o número de vizinhos presentes é

importante, é que cada uma dessas duplas pode fornecer 1 ou 2 vizinhos estáveis para o sítio original, dependendo da configuração dos sítios presentes nela. Para tornar a explicação mais clara, é bom fazer algumas definições. Na Figura 23 podemos notar que do sítio central em estudo se originam duas duplas de ligações. Como elas são equivalentes podemos nos concentrar em uma delas e aplicar os conceitos a ambas.

O grupo de 3 sítios que seguem uma dupla de ligações, e que chamaremos de núcleo, tem ligações entre si e, portanto, devem ser tratados como um grupo para que possam ser considerados equivalentes aos outros núcleos, como podemos notar na Figura 23.

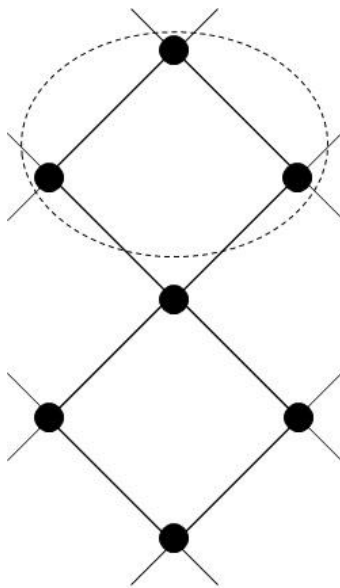


Figura 24: Rede de Husimi com  $z = 4$ . Destacado está um dos grupos de sítios cuja configuração será usada para calcular  $P$  e que será chamado de núcleo.

De cada núcleo originam-se 3 novas duplas de ligações, equivalentes à dupla de ligações de onde se originaram, e a forma como essas ligações definem a probabilidade do sítio original estar ligado à ilha infinita depende da forma com que os sítios do núcleo estejam presentes ou ausentes. Chamaremos os sítios de um núcleo de A, B e C, conforme

a Figura 25, e as duplas de ligações originadas destes sítios de DA, DB e DC, também conforme a Figura 25.

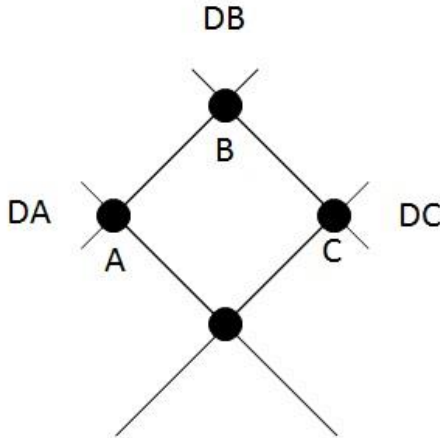


Figura 25: “Núcleo” na rede de Husimi com  $z = 4$  e o sítio de onde ele se origina, destacados os sítios A, B e C, que compõem o núcleo, e suas respectivas duplas de ligações DA, DB e DC.

A forma como as duplas de ligações afetam o sítio original depende da configuração do núcleo. Por exemplo, se a dupla DA estiver ligada a uma ilha infinita mas o sítio A estiver ausente essa dupla não fará com que o sítio original faça parte da ilha infinita. O fato da dupla DB estar ligada a uma ilha infinita só será relevante para o sítio original se o sítio B e pelo menos um dos sítios A ou C também estiver presente. O sítio B nunca fornece um vizinho estável para o sítio original pois não tem uma ligação direta com ele, mas pode servir como vizinho estável para os sítios A e C tornando-os estáveis, e por isso é importante; portanto, devemos estudar as possíveis configurações do núcleo. Como mostrado na Figura 26, temos 8 possíveis configurações para o núcleo.



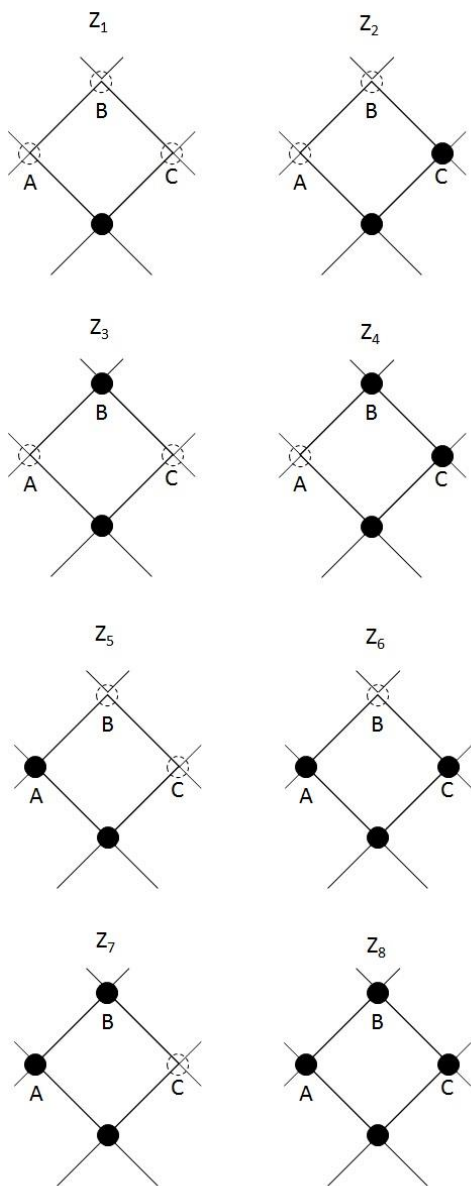


Figura 26: Possíveis configurações para um núcleo em uma rede de Husimi quadrada com  $z = 4$ .

Para determinar se o núcleo estará ligado à ilha infinita é preciso analisar cada uma das configurações e as duplas de ligações DA, DB e DC que partem dele. Essa tarefa é simplificada pelo fato de que algumas configurações são equivalentes, por simetria, e basta analisar uma delas e multiplicar suas probabilidades por 2 para obter o resultado para ambas. Como é simples observar na Figura 26,  $Z_2$  é equivalente a  $Z_5$  e  $Z_4$  é equivalente a  $Z_7$ . Além disso, não é preciso analisar  $Z_1$ , pois esta configuração evidentemente não faz parte da ilha infinita, pois todos os seus sítios estão ausentes. As demais configurações devem ser analisadas individualmente, e a probabilidade do núcleo estar ligado à ilha infinita é:

$$R = \sum_{n=1}^8 Z_n C_n, \quad (16)$$

onde  $Z_n$  é a probabilidade associada a configuração  $n$ , ou seja,  $p$  elevado ao número de sítios presentes na configuração do núcleo e  $(1-p)$  elevado ao número de sítios ausentes na configuração do núcleo, e  $C_n$  é a probabilidade de que as duplas de ligações DA, DB e DC façam com que o núcleo ligue o sítio em estudo à ilha infinita, e que deve ser analisada caso a caso.  $Z_n$  é obtido imediatamente da configuração em questão, enquanto  $C_n$  será calculado caso a caso, multiplicando as probabilidades de cada ramo estar presente ou ausente no caso em questão.

Para  $Z_1$ ,  $C_1$ , é obviamente 0, pois nenhum sítio está presente, e o produto  $Z_1 C_1$  é 0.

Para  $Z_2$ , e por simetria  $Z_5$ , o núcleo ligará o sítio original à ilha infinita se, e somente se, a dupla de ligações DC (DA para  $Z_5$ ) estiver ligada a ilha infinita com probabilidade  $R$ . A probabilidade de  $Z_2$  existir é  $p(1-p)^2$ . Logo o produto  $Z_2 C_2 = Z_5 C_5 = p(1-p)^2 R$ .

Para  $Z_3$  temos uma configuração que pode parecer similar a  $Z_2$ , mas como os sítios A e C estão ausentes, mesmo que a ligação DB esteja ligada à ilha infinita, o sítio original não estará ligado ao sítio B, logo  $C_3 = 0$  e  $Z_3 C_3 = 0$ .

Para  $Z_4$  (e  $Z_7$ ), o núcleo fornecerá uma ligação à ilha infinita para o sítio original se DB ou DC (DA ou DC para  $Z_7$ ) estiverem ligadas à ilha

infinita ou, equivalentemente, um menos a probabilidade de nenhuma das duas estar ligada à ilha infinita. A probabilidade disso acontecer é:  $(1-(1-R)^2)$ . A probabilidade de  $Z_4$  existir é  $p^2(1-p)$ . Logo temos que para essa configuração:  $Z_4C_4 = Z_7C_7 = p^2(1-p) (1-(1-R)^2)$ .

Para  $Z_6$  fornecer uma ligação à ilha infinita ao sítio original é preciso que DA ou DC esteja ligada à ilha infinita. Esta probabilidade, assim como a da configuração existir, é idêntica à de  $Z_4$ , o que nos dá:  $Z_6C_6 = p^2(1-p) (1-(1-R)^2)$

Por fim, para  $Z_8$  fornecer uma ligação à ilha infinita ao sítio original é preciso que pelo menos uma das duplas de ligações esteja ligada a ilha infinita, ou seja:  $C_8 = (1-(1-R)^3)$ . Logo:  $Z_8C_8 = p^3(1-(1-R)^3)$ .

Com estas análises podemos escrever a Eq. (16) em função de  $p$  e  $R$ :

$$R = 2 p(1 - p)^2 R + 3p^2(1 - p)(1 - (1 - R)^2) + p^3(1 - (1 - R)^3) \quad (17)$$

Para a equação de  $P$  basta notar que para o sítio original estar ligado à ilha infinita basta que qualquer uma das duas duplas de ligações originadas dele esteja ligada à ilha infinita e ele esteja presente, obtendo assim:

$$P = p(1 - (1 - R)^2) \quad (18)$$

Resolvendo o sistema de equações formado por (17) e (18), o que neste trabalho foi feito com o software Mathematica, em função de  $p$  temos os gráficos de  $P$  em função de  $p$  para a percolação usual em redes de Husimi com  $z = 4$ .

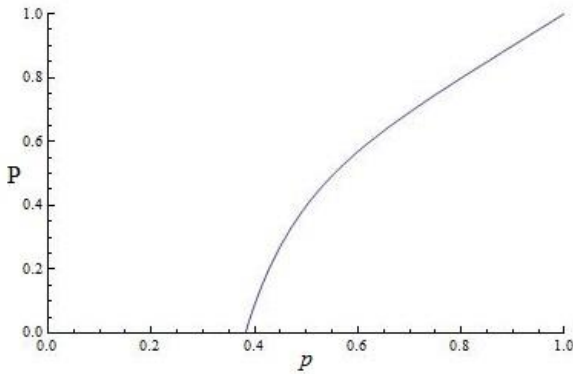


Figura 27: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Husimi quadrada com  $z = 4$  para percolação usual.

Neste caso  $p_c = (3-\sqrt{5})/2 = 0,3819\dots$  em concordância com [3], um valor intermediário entre a rede de Bethe com  $p_c = 0,3333\dots$  e a rede quadrada com  $p_c \sim 0,5927$  [1], todas com  $z = 4$ . O expoente crítico  $\beta$  é 1 para este caso, igual ao resultado na rede de Bethe e diferente da rede quadrada que tem  $\beta = 5/36$ , o que é esperado, pois a rede de Husimi e a rede de Bethe tem a mesma dimensionalidade, infinita, enquanto a rede quadrada é bidimensional, e os expoentes críticos para percolação usual dependem apenas da dimensionalidade da rede [2]. O expoente  $\beta$  foi obtido utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica em torno de  $p_c$ .

### 3.2.2 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” EM REDE DE HUSIMI

Para percolação de “bootstrap” em rede de Husimi faremos uma análise semelhante à da percolação usual, mas com algumas peculiaridades.

A primeira observação a ser feita é que na percolação de “bootstrap” é importante saber quantos vizinhos estáveis um sítio terá, pois sua estabilidade depende disso, e portanto não basta determinar se

uma dupla de ligações independente (DA, DB e DC na Figura 25) está ligada à ilha infinita, mas também se terá um ou dois vizinhos presentes na dupla de ligações, lembrando que apenas A e C contam como vizinhos para o sítio original, pois B não tem uma ligação direta com ele. A segunda observação a se fazer é que, dependendo do valor de  $m$  e de  $z$  da rede, pode existir ou não a possibilidade de formação de ilhas finitas de sítios estáveis, probabilidade que deve ser levada em consideração para determinar o número de vizinhos estáveis que um sítio virá a ter. Iremos definir como R a probabilidade de uma ligação dupla estar ligada à ilha infinita e ter apenas 1 vizinho ligado ao sítio original, W a de estar ligada à ilha infinita e ter 2 vizinhos, U a de estar ligada a uma ilha finita e ter 1 vizinho, D a de estar ligada a uma ilha finita e ter 2 vizinhos e finalmente N, por conveniência, a de não ter nenhum vizinho. Essas definições se aplicam após o processo de eliminação de sítios, ou seja, levando em conta apenas sítios estáveis.

Analisaremos 2 casos nesse trabalho. O da rede de Husimi com  $z = 4$  e  $m = 3$  e rede de Husimi com  $z = 4$  e  $m = 2$ .

No primeiro caso, rede de Husimi com  $z = 4$  e  $m = 3$  a primeira observação a se fazer é que não existe a possibilidade da formação de ilhas finitas estáveis, pois não há como formar um loop fechado em que todos os sítios tenham 3 vizinhos estáveis.

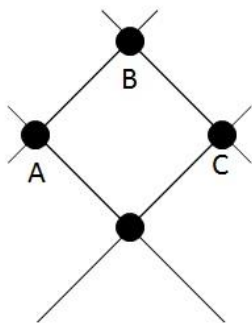


Figura 28: Loop fechado de sítios e ligações na rede de Husimi com  $z = 4$ .

Como podemos notar na Figura 28, para rede de Husimi com  $z = 4$  em um loop fechado cada sítio tem 2 vizinhos presentes dentro do loop,

e para que qualquer um dos sítios tenha 3 vizinhos presentes é necessário um sítio presente de fora do loop. Logo, para  $m = 3$  existirão apenas ilhas infinitas estáveis, enquanto para  $m = 2$  ou menos existe a possibilidade da formação de ilhas finitas estáveis.

Como no caso em análise, de  $m = 3$ , não se formam ilhas finitas estáveis, as possibilidades das duplas de ligações são: estarem ligadas à ilha infinita com apenas um vizinho, ligadas à ilha infinita com 2 vizinhos e não ter nenhum vizinho, ou seja, R, W e N.

Como no caso de percolação usual, existem 8 possíveis configurações para os núcleos, mostradas na Figura 26, e iremos analisar caso a caso, notando que os sítios precisam de 3 vizinhos estáveis para permanecerem estáveis. Temos também as mesmas simetrias,  $Z_2$  é equivalente a  $Z_5$  e  $Z_4$  é equivalente a  $Z_7$ . Uma diferença é que teremos uma equação extra para W, além da equação para R. Temos:

$$R = \sum_{n=1}^8 Z_n R_n, \quad (19)$$

onde  $Z_n$  é a probabilidade da configuração existir e  $R_n$  é a probabilidade das ligações DA, DB e DC formarem uma combinação de R, W e N que deixe o núcleo com apenas um dos sítios A ou C presente e ligado à ilha infinita.

$$W = \sum_{n=1}^8 Z_n W_n, \quad (20)$$

onde  $Z_n$  é a probabilidade da configuração existir e  $W_n$  é a probabilidade das ligações DA, DB e DC formarem uma combinação de R, W e N que deixe o núcleo com os sítios A e C presentes e ao menos 1 deles ligado à ilha infinita.

Analisando primeiro para W, onde procuramos configurações que terminem com dois vizinhos, A e C, estáveis e ligados à ilha infinita, é fácil perceber que das oito configurações possíveis apenas 2 cumprem o requisito básico de que A e C estejam presentes,  $Z_6$  e  $Z_8$ .

Para  $Z_6$  a única forma de tanto A quanto C permanecerem estáveis, com 3 vizinhos cada, é que a duplas de ligações DA e DC forneçam ambas 2 vizinhos, ou seja,  $W_6 = (W^2)$  e  $Z_6W_6 = p^2(1-p)W^2$ .

Para  $Z_8$  cada sítio do núcleo já possui 2 vizinhos, então basta que as ligações DA, DB e DC forneçam ao menos 1 vizinho cada, ou que DA e DC forneçam 2 vizinhos e DB nenhum vizinho. Essa combinação de probabilidades fornece o resultado, já levando em consideração que  $Z_8 = p^3$ ,  $Z_8W_8 = p^3(R^3+3R^2W+3RW^2+W^2(1-R-W)+W^3)$ .

Combinando os dois casos temos a equação para W:

$$W = p^3R^3 + W(3R^2p^3) + W^2(p^2 + 2Rp^3) \quad (21)$$

Para R procuramos configurações que terminem com apenas 1 vizinho, A ou C, estável, independente de B ser estável ou não. É importante notar que mesmo configurações que a princípio tenham ambos A e C presentes podem terminar como uma configuração adequada, pois basta que um dos dois não tenha vizinhos suficientes e ele deixará de ser presente, deixando apenas 1 vizinho presente. Temos de analisar, portanto, todos os casos em que A ou C estejam presentes.

Para  $Z_2 = Z_5$  a única opção é que a dupla de ligações DC (DA para  $Z_5$ ) forneça 2 vizinhos. Temos então que  $Z_2R_2 = p(1-p)^2W$ .

Para  $Z_4 = Z_7$  procuramos configurações em que DC (DA para  $Z_7$ ) forneça 2 vizinhos ou que DB forneça 2 vizinhos para que B seja estável e DC forneça ao menos 1 vizinho. Temos então, para essa configuração,  $Z_4R_4 = p^2(1-p)(W+WR)$

Para  $Z_6$  procuramos configurações em que apenas A ou C permaneça estável, então uma das ligações DA ou DC deve fornecer 2 vizinhos e a outra 1 ou 0 vizinhos. Temos então  $Z_6R_6 = 2p^2(1-p)W(1-W)$

Finalmente para  $Z_8$  é preciso analisar cuidadosamente as possibilidades das 3 duplas de ligações DA, DB e DC para que apenas A ou C permaneça estável. Cada dupla de ligações tem 3 opções, fornecendo

0, 1 ou 2 vizinhos, para um total de 27 opções. Analisando cada uma delas chegamos ao resultado  $Z_8R_8 = 2p^3(W+RW-2R^2W-2RW^2-W^2)$

Combinando todos os casos temos a equação para R:

$$R = 2pW - 2p^2W^2 + R(2p^2W - 4p^3W^2) - R^2(4p^3W) \quad (22)$$

Finalmente para a equação de P basta que o sítio original tenha ao menos 3 vizinhos, então as duas duplas de ligações originadas dele devem ser as duas W ou uma W e outra R. Temos então:

$$P = p(2WR + W^2) \quad (23)$$

Resolvendo o sistema formado por (21), (22) e (23), o que neste trabalho foi feito com o software Mathematica, podemos construir o gráfico de P por p para o caso em estudo.

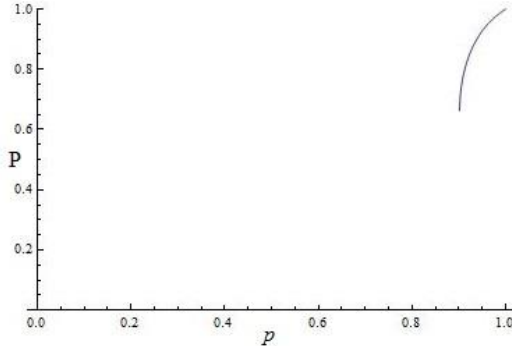


Figura 29: Fração de sítios na ilha infinita P por concentração p na rede de Husimi com  $z = 4$  para percolação de "bootstrap" com  $m = 3$ .

Para este caso  $p_c \sim 0,9019$  e  $\beta = 1$ , em comparação com a rede de Bethe que tem  $p_c = 8/9 = 0,8888\dots$  e  $\beta = 1/2$ , e a rede quadrada com  $p_c = 1$ , todas para  $m = 3$  e  $z = 4$ . É interessante notar que o  $p_c$  tende ao valor da rede quadrada quando se vai da rede de Bethe a rede de Husimi. O expoente  $\beta$  foi obtido utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica em torno de  $p_c$ .



Para o segundo caso a ser analisado, percolação de “bootstrap” com  $m = 2$ , existe a possibilidade da formação de ilhas finitas de sítios ocupados, e portanto devemos levar em consideração as possibilidades de uma dupla de ligações fornecer vizinhos estáveis ao sítio ao qual estão ligadas mas não fornecerem uma ligação à ilha infinita. Neste caso essa dupla irá contribuir para o número mínimo de vizinhos que um sítio necessita para ser estável, mas não irá determinar que ele esteja ligado à ilha infinita através dessa ligação. Desta forma, temos todas as possibilidades citadas anteriormente nesse caso: R a probabilidade de uma ligação dupla estar ligada à ilha infinita e ter apenas 1 vizinho ligado ao sítio original, W a de estar ligada à ilha infinita e ter 2 vizinhos, U a de estar ligada a uma ilha finita e ter 1 vizinho, D a de estar ligada a uma ilha finita e ter 2 vizinhos e finalmente N, por conveniência, a de não ter nenhum vizinho.

As possíveis configurações do núcleo ainda serão as mesmas mostradas na Figura 26, e iremos analisar cada uma delas para montar as equações para U, D, R e W.

Para U, ou seja, a dupla irá fornecer apenas 1 vizinho ligado e não estará ligada à ilha infinita, temos:

$$U = \sum_{n=1}^8 Z_n U_n \quad (24)$$

Para  $Z_1$  e  $Z_3$  os sítios A e C estão ausentes, então não há probabilidade de ter vizinhos presentes.

Para  $Z_2$  e  $Z_5$  basta que a ligação ao sítio presente do núcleo tenha ao menos 1 vizinho e não esteja ligada à ilha infinita, logo,  $Z_2 U_2 = Z_5 U_5 = p(1-p)^2(U+D)$ .

Para  $Z_4$  e  $Z_7$ , analisando todas as possibilidades temos  $Z_4 U_4 = Z_7 U_7 = p^2(1-p)(U+D)(2N+U+D)$ .

Para  $Z_6$  buscamos combinações das duplas de ligações para que apenas um dos sítios, A ou C, seja estável e não esteja ligado à ilha infinita, ou seja,  $Z_6 U_6 = p^2(1-p)2N(U+D)$ .

Para  $Z_8$  os 3 sítios do núcleo já são estáveis considerando somente as ligações entre eles, então não existe a probabilidade de que apenas A ou C seja estável, pois ambos são, e  $U_8 = 0$ .

Temos então:

$$U = 2(p(1-p)^2(U+D) + p^2(1-p)(U+D)(3N+U+D)) \quad (25)$$

Para D, ou seja, a dupla de ligações fornecendo 2 vizinhos mas não estando ligada a ilha infinita basta analisar  $Z_6$  e  $Z_8$ , as configurações onde os sítios A e C estão presentes.

Para  $Z_6$  basta que DA e DC forneçam ao menos 1 vizinho e não estejam ligadas à ilha infinita, logo  $Z_6D_6 = p^2(1-p)(U+D)^2$

Em  $Z_8$  os sítios A e C já tem 2 vizinhos e são estáveis, então basta que nenhuma das ligações DA, DB ou DC esteja ligada à ilha infinita, logo  $Z_8D_8 = p^3(N+U+D)^3$ .

Temos então:

$$D = p^2(1-p)(U+D)^2 + p^3(N+U+D)^3 \quad (26)$$

Para R, ou seja, a dupla de ligações fornecer apenas 1 vizinho e estar ligada a ilha infinita, temos os mesmos casos de U, com a diferença de que ao menos 1 das ligações esteja ligada a ilha infinita.

Para  $Z_1$  e  $Z_3$  os sítios A e C estão ausentes, então não há probabilidade de ter vizinhos presentes.

Para  $Z_2$  e  $Z_5$  basta que a ligação ao sítio presente do núcleo tenha ao menos 1 vizinho e esteja ligada à ilha infinita, logo,  $Z_2R_2 = Z_5R_5 = p(1-p)^2(R+W)$ .

Para  $Z_4$  e  $Z_7$ , analisando todas as possibilidades temos  $Z_4R_4 = Z_7R_7 = p^2(1-p)(R+W)(1+N+U+D)$ .

Para  $Z_6$  buscamos combinações das duplas de ligações para que apenas um dos sítios, A ou C, seja estável e esteja ligado à ilha infinita, ou seja,  $Z_6R_6 = p^2(1-p)2N(R+W)$ .

Para  $Z_8$  os 3 sítios do núcleo já são estáveis considerando somente as ligações entre eles, então não existe a probabilidade de que apenas A ou C seja estável, pois ambos são, e  $R_8 = 0$ .

Temos então:

$$R = 2(p(1-p)^2(R+W) + p^2(1-p)(R+W)(1+2N+U+D)) \quad (27)$$

Para W, ou seja, a dupla de ligações fornecendo 2 vizinhos e estando ligada a ilha infinita basta analisar  $Z_6$  e  $Z_8$ , as configurações onde os sítios A e C estão presentes.

Para  $Z_6$  basta que DA e DC forneçam ao menos 1 vizinho e uma das duplas esteja ligada à ilha infinita, logo  $Z_6W_6 = p^2(1-p)(R+W)(1+U+D-N)$ .

Em  $Z_8$  os sítios A e C já tem 2 vizinhos e são estáveis, então basta que qualquer uma das ligações DA, DB ou DC esteja ligada à ilha infinita, logo  $Z_8W_8 = p^3(1-(N+U+D)^3)$ .

E temos então:

$$W = \frac{p^2(1-p)(R+W)(1+U+D-N) + p^3(1-(N+U+D)^3)}{p^3(1-(N+U+D)^3)} \quad (28)$$

Para obtermos P, buscamos as combinações das duplas de ligações originadas no sítio em estudo que forneçam 2 vizinhos e uma destas duplas ligada à ilha infinita.

Temos, portanto:

$$P = p(R^2 + 2W + 2RU + 2RD - W^2) \quad (29)$$

Resolvendo o sistema de equações formado por (25), (26), (27), (28) e (29), o que nesse caso foi feito numericamente no software Mathematica para apenas alguns valores de  $p$ , devido à complexidade das equações, podemos obter um gráfico para este caso.

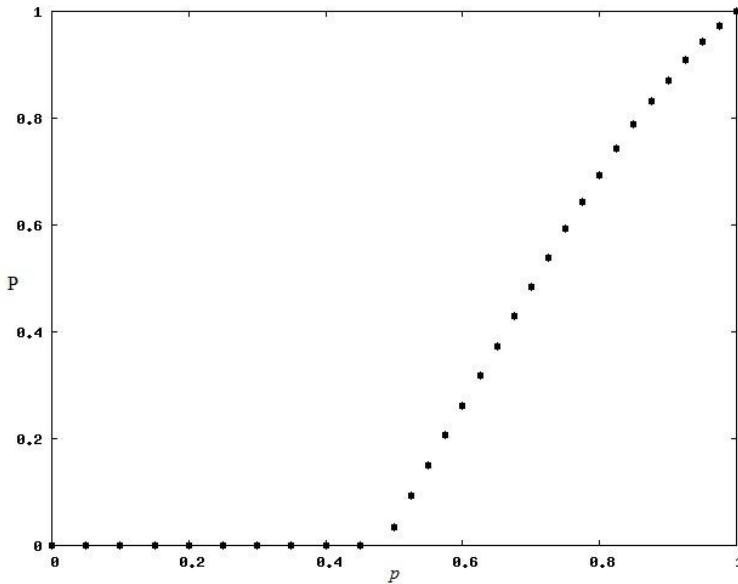


Figura 30: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Husimi com  $z = 4$  para percolação de “bootstrap” com  $m = 2$ .

Para este caso  $p_c \sim 0,4863$  em comparação com a rede de Bethe  $p_c = 0,3333\dots$ , ambas para  $z = 4$  e  $m = 2$ . Lembramos que  $p_c \sim 0,5927$  para a rede quadrada com  $m = 2$ , pois a probabilidade crítica é a mesma que para percolação usual. O expoente  $\beta$  para este caso não foi calculado durante a realização deste trabalho.

### 3.2.3 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” PROBABILÍSTICA EM REDE DE HUSIMI

No caso de percolação de “bootstrap” probabilística para a rede de Husimi, cada sítio tem 3 possíveis estados, sendo eles ausente, presente com  $m = m_1$  ou presente com  $m = m_2$ . Logo, cada núcleo composto por 3 sítios (Figura 24) pode ter 27 configurações possíveis ( $3^3$ ), em contraste com as 8 possíveis no caso de percolação de “bootstrap” (Figura 26). Para encontrar a relação entre  $P$  e  $p$  analisamos cada uma das possibilidades,

como feito para o caso semelhante na rede de Bethe, levando em conta que podem ser formadas ilhas finitas desde que  $m_1$  ou  $m_2$  seja 2 ou menos, pois como na percolação de “bootstrap” é possível a formação de loops fechados em que todos os sítios têm 2 vizinhos estáveis dentro do núcleo. Logo temos as possibilidades U, D, R e W para as duplas de ligações, como no caso da percolação de “bootstrap”.

Trataremos do caso em que  $m_1 = 2$  e  $m_2 = 3$ , com a probabilidade  $j$  de um sítio presente ter  $m_1$  e  $(1-j)$  de ter  $m_2$  como número de vizinhos necessários para o sítio permanecer estável. A análise de cada caso é extremamente longa, então apresentamos aqui as equações finais para U, D, R W e P. Será usada a notação  $g = pj$  e  $q = p(1-j)$  para simplificar, e  $N = 1-U-D-R-W$  como a probabilidade de uma dupla de ligações não fornecer nenhum vizinho.

As equações para o caso são:

$$\begin{aligned}
 U = & 2( & (30) \\
 & (1-p)^2 g(U+D) + \\
 & (1-p)^2 qD + \\
 & (1-p)g^2(U+D)(2N+U+D) \\
 & (1-p)gq(ND+(U+D)^2) + \\
 & (1-p)gq((U+D)(N+U+R)+D(N+U+D)) \\
 & + (1-p)q^2(D(N+2U+D+R)) + \\
 & (1-p)g^2N(U+D) + \\
 & (1-p)gq(ND+(U+D)(N+U+R)) + \\
 & g^2q((N(U+D)(2N+U+D) + \\
 & g^2q(U+D)N^2 + \\
 & gq^2((DN^2) + (U+D)N(N+2U+2R+D)) + \\
 & (1-p)q^2(D(N+U+R)) + \\
 & gq^2(N((U+D)^2+DN)) + \\
 & q^3ND(N+3U+2R+D) \\
 & )
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R = & 2( & (31) \\
 & (1-p)^2 g(R+W) + \\
 & (1-p)^2 qW + \\
 & (1-p)g^2(R+W)(1+N+U+D) \\
 & (1-p)gq(NW+(R+W)(2U+2D+R+W) + \\
 & (1-p)gq(W+(R+W)(N+U+D+R)) + \\
 & (1-p)q^2(D(R+W)+W(N+2U+D+2R+W)) \\
 & + \\
 & (1-p)g^2N(R+W) + \\
 & (1-p)gq(NW+(R+W)(N+U+R)) + \\
 & g^2q((N(R+W)(2N+2U+2D+R+W) + \\
 & g^2q(R+W)N^2 + \\
 & gq^2(N(NW+W+(R+W)(N+2U+2D+2R)) \\
 & +(1-p)q^2(W(N+U+R)) + \\
 & gq^2(N(NW+(R+W)(2U+2D+R+W))) + \\
 & q^3(N(W(N+3U+3R+D+W)+D(R+W))) \\
 & )
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D = & & (32) \\
 & (1-p)g^2(U+D)^2 + \\
 & 2(1-p)gq(D(U+D)) + \\
 & g^3(N+U+D)^3 + \\
 & 2g^2q((U+D)(N+U+D)^2) + \\
 & g^2q((U+D)(N(U+D)+(N+U+D)^2)) + \\
 & 2gq^2((U+D)(ND+(U+D)(N+U+D))) + \\
 & (1-p)q^2D^2 + \\
 & gq^2(U+D)^2(N+U+D) + \\
 & q^3(ND^2+(U+D)^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W = & \quad (33) \\
& (1 - p)g^2((R + W)(2U + 2D + R + W)) + \\
& 2(1 - p)(W(U + D) + (R + W)(D + W) + \\
& g^3((R + W)(1 + (N + U + D)(2N + 2U + 2D + R \\
& \quad + W))) + \\
& 2g^2q((R + W)(1 \\
& \quad + (U + D)(2N + 2U + 2D + R \\
& \quad + W))) + \\
& g^2q((R + W)(N + 2U + 2D + R + W \\
& \quad + N(U + D + R + W) \\
& \quad + (N + U + D)^2)) + \\
& 2gq^2(NW(U + D) \\
& \quad + (R + W)(N(D + W) \\
& \quad + (U + D)(N + U + D) \\
& \quad + (1 + U + D)(U + D + R + W))) + \\
& (1 - p)q^2(W(2D + W)) + \\
& gq^2((R + W)((U + D)(N + U + D) \\
& \quad + (U + D + R + W)(N + 2U + 2D \\
& \quad + R + W))) + \\
& q^3(NDW + NW(D + W) + (U + D)^2(R + W) \\
& \quad + (U + D)(R + W)(U + D + R + W) \\
& \quad + (R + W)(U + D + R + W)^2) \\
P = & g(r^2 + 2R(U + D) + W(2(N + U + D + R) + W)) \quad (34) \\
& + \\
& q(W(2U + 2D + 2R + W) + 2DR)
\end{aligned}$$

Devido à complexidade das equações não foi possível encontrar uma solução para o sistema durante a realização deste trabalho. Esta tarefa será realizada na continuação deste estudo.





## 4 OUTROS CASOS

Neste capítulo serão apresentados resultados para outros casos, tendo sido utilizado o método apresentado no capítulo 3 para sua obtenção.

### 4.1 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” PROBABILÍSTICA NA REDE DE BETHE COM $Z = 6$

Como os ramos são todos independentes na rede de Bethe, é relativamente simples estender os cálculos do caso de  $z = 4$  para o caso  $z = 6$ , bastando para isso utilizar análise combinatória com os ramos, levando em conta o número mínimo de vizinhos necessários para cada sítio. Podemos generalizar o caso de percolação de “bootstrap” probabilístico na rede de Bethe para quando existe a possibilidade de ramos finitos, ou seja quando  $m_1$  ou  $m_2$  seja 1, pois  $m = 1$  é o único caso na rede de Bethe que permite a formação de ramos finitos. Temos assim, tomando  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = m$ , as equações para U, R e P, deduzidas no apêndice A e repetidas aqui por conveniência.

$$U = pj(1 - R)^{z-1} + p(1 - j) \left[ \sum_{l=m-1}^{z-1} \frac{(z-1)!}{l!(z-1-l)!} U^l (1 - U - R)^{z-1-l} \right] \quad (35)$$

$$R = pj(1 - (1 - R)^{z-1}) + p(1 - j) \left\{ \left[ \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{n=m-1-l}^{z-1-l} \frac{z-1!}{l!n!(z-1-l-n)!} R^l U^n (1 - U - R)^{z-1-l-n} \right] + \left[ \sum_{l=m}^{z-1} \sum_{n=0}^{z-1-l} \frac{z-1!}{l!n!(z-1-l-n)!} R^l U^n (1 - U - R)^{z-1-l-n} \right] \right\} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
 P = & pj(1 - (1 - R)^z) + p(1 - j)\{ \\
 & \left[ \sum_{l=1}^m \sum_{n=m-l}^{z-l} \frac{z!}{l! n! (z-l-n)!} R^l U^n (1 - U - R)^{z-l-n} \right] + \\
 & \left. \left[ \sum_{l=m+1}^z \sum_{n=0}^{z-l} \frac{z!}{l! n! (z-l-n)!} R^l U^n (1 - U - R)^{z-l-n} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{37}$$

O caso a ser analisado é o de  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$ .

Para este caso existe a possibilidade da existência de ramos finitos de sítios estáveis, já que  $m_1 = 1$ . Resolvendo as equações (35), (36) e (37), o que neste trabalho foi feito com o software Mathematica, para estes valores podemos construir os gráficos de  $P$  em função de  $p$ :

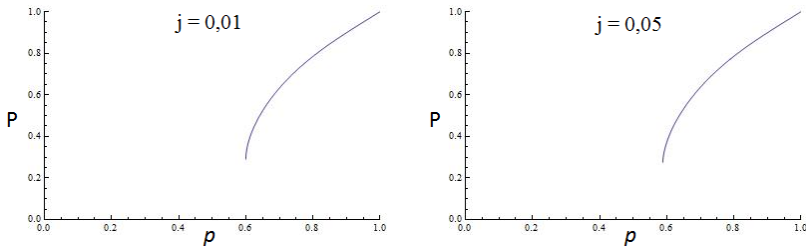


Figura 31: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Bethe com  $z = 6$  para percolação de “bootstrap” probabilística com  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$  para valores de  $j$  variando de 0,01 a 0,05.

Para os valores de  $j$  mostrados na Figura 31 temos  $m = 3$  dominante, com uma transição de fase de primeira ordem. Entretanto, obtivemos  $\beta = 1$  para estes casos. O expoente  $\beta$  foi obtido utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica em torno de  $p_c$ . Assim como na rede de Bethe com  $z = 4$  não está indicado o caso de  $j = 0$  (equivalente a percolação de “bootstrap” com  $m = 3$ ), pois as equações que construímos levam em conta a possibilidade de existência de ilhas finitas, o que não é possível se todos os sítios precisam de 3 vizinhos estáveis. Esta possibilidade de existência de pontas soltas na ilha infinita

parece ser a responsável pela mudança do expoente crítico  $\beta$ , que no caso de percolação de “bootstrap” com  $m = 3$  é  $\frac{1}{2}$ . Só recuperamos este valor de  $\beta$  para  $j < 10^{-33}$ , aproximadamente.

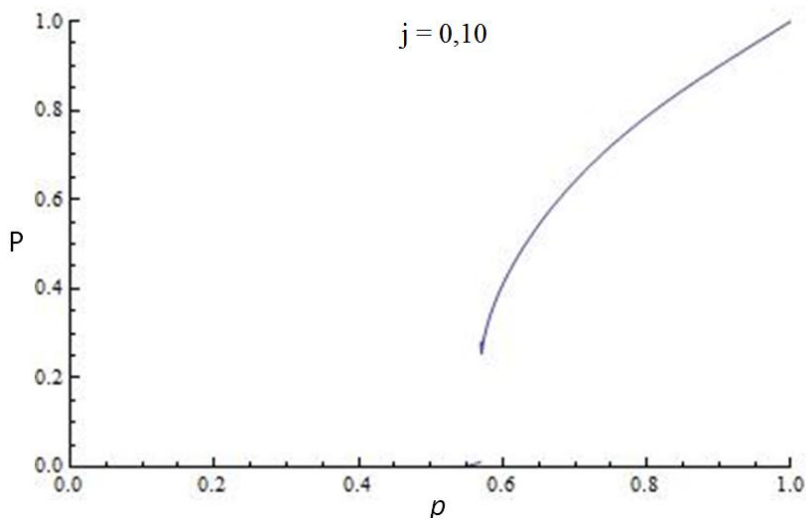


Figura 32: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Bethe com  $z = 6$  para percolação de “bootstrap” probabilística com  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$  para  $j = 0,10$ .

Para o caso de  $j = 0,10$  temos uma “mistura” entre os resultados de  $m = 1$  e  $m = 3$ , com uma transição contínua em  $p \sim 0,5475$  e uma transição de primeira ordem para um valor mais alto de  $p$ , que chamaremos ponto de transição,  $p_t \sim 0,5695$ . Para ambos os pontos  $\beta = 1$ . O expoente  $\beta$  foi obtido utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica em torno de  $p_c$ .

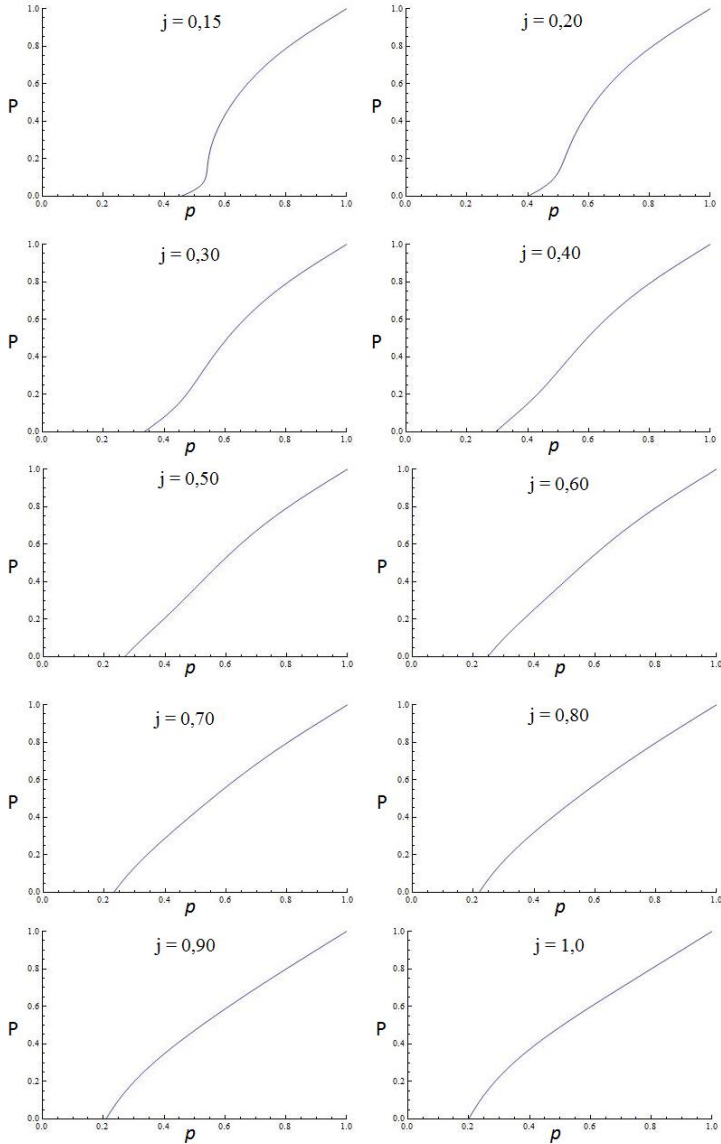


Figura 33: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Bethe com  $z = 6$  para percolação de “bootstrap” probabilística com  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$  para valores de  $j$  variando de 0,15 a 1,00.

Nos casos de  $j$  maior que 0,15 temos uma dominância do comportamento de  $m = 1$  e uma transição contínua. Para estes valores de  $j$ ,  $\beta = 1$ . O expoente  $\beta$  foi obtido utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica em torno de  $p_c$ .

Estes resultados são diferentes dos apresentados em [5], pois neste artigo não foi considerada a possibilidade da formação de ilhas finitas e seu efeito não foi levado em consideração ao calcular  $P$ . No artigo  $\beta$  tem valores de 1 ou 1/2, dependendo de  $j$ , enquanto no presente trabalho  $\beta$  é sempre 1 para qualquer valor de  $j$ .

Podemos obter um diagrama de fases para este caso de percolação de “bootstrap” probabilística construindo um gráfico de  $p$  por  $j$ , como mostra a figura 34.

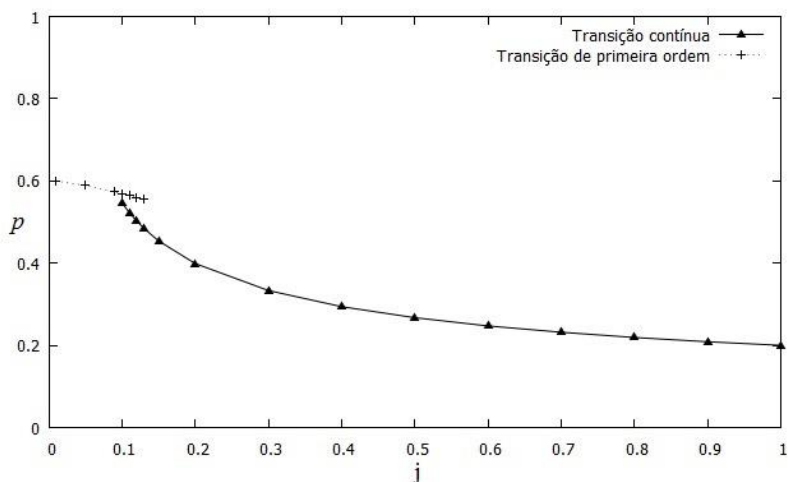


Figura 34: Diagrama de fases para o caso de percolação de “bootstrap” probabilística para rede de Bethe com  $z = 6$ ,  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$ . Acima da curva o sistema se encontra na fase percolante, abaixo da curva o sistema se encontra na fase não percolante.

Como podemos observar na Figura 34, o sistema apresenta apenas transição de fase de primeira ordem para  $j \leq 0,09$ , transição de primeira ordem e contínua para  $0,09 \leq j \leq 0,13$  e apenas transição contínua para  $j \geq 0,13$ , sendo estes valores de  $j$  aproximados. Acima da curva o

sistema se encontra na fase percolante, abaixo da curva o sistema se encontra na fase não percolante.

#### 4.2 PERCOLAÇÃO USUAL EM REDE DE HUSIMI TRIANGULAR COM $Z = 4$ .

Outra rede que pode ser estudada é a rede de Husimi triangular com  $z = 4$ , apresentada na Figura 10. Esta rede é bastante similar à rede de Husimi quadrada com  $z = 4$ , e como nesse caso podemos calcular  $P$  em função de  $p$  observando as duplas de ligações que se originam de um sítio e os núcleos de sítios que ficam entre essas duplas.

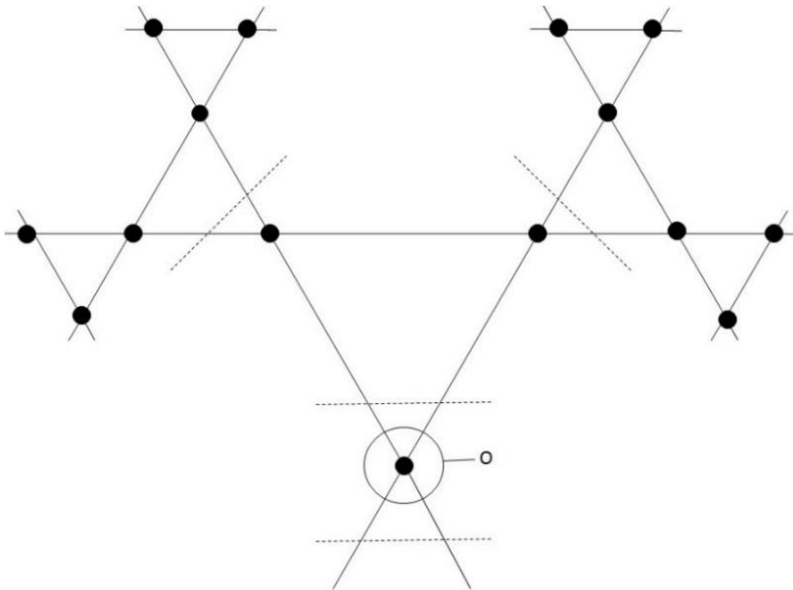


Figura 35: Rede de Husimi triangular  $z = 4$  com as duplas de ligações destacadas por linhas pontilhadas e o sítio original a ser estudado marcado como  $O$ .

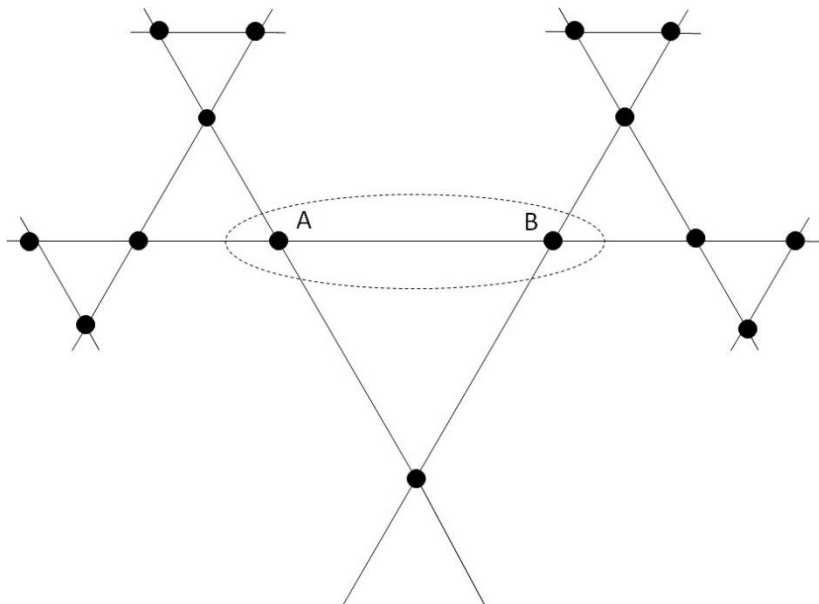


Figura 36: Rede de Husimi triangular  $z = 4$  com um núcleo destacado por e os sítios do núcleo marcados como A e B.

Assim como no caso da rede de Husimi quadrada, iremos analisar as possíveis configurações do núcleo para determinar  $P$ . Entretanto, como os núcleos neste caso são compostos por apenas 2 sítios ao invés de 3, o número de probabilidades é menor, 4 para percolação usual e percolação de “bootstrap” e 9 para percolação de “bootstrap” probabilística.

Para percolação usual basta saber se uma dupla de ligações está ligada à ilha infinita, sem se preocupar se fornecerá um ou dois vizinhos estáveis para o sítio original, logo temos apenas a possibilidade  $R$  e uma equação para  $R$  e uma pra  $P$ :

$$R = \frac{2p - 1}{p^2} \quad (38)$$

$$P = p(1 - (1 - p)^2) \quad (39)$$

Resolvendo (38) e (39), o que neste trabalho foi feito com o software Mathematica, temos  $P$  por  $p$ :

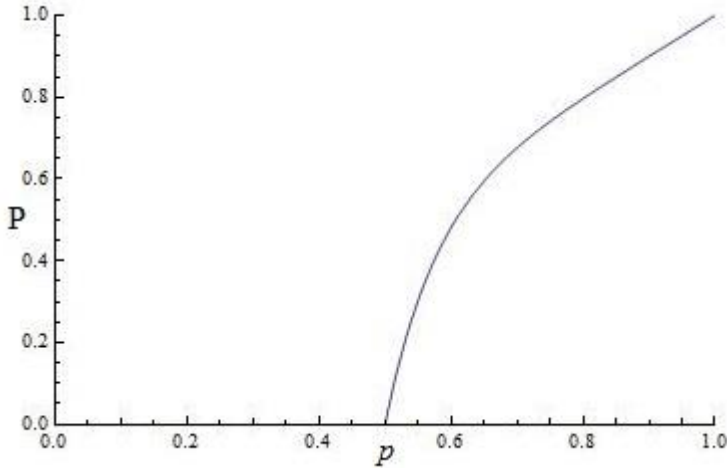


Figura 37: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Husimi triangular com  $z = 4$  para percolação usual.

Para este caso  $p_c = 0,5$  e  $\beta = 1$ , em concordância com [3]. Por comparação, na rede de Bethe  $p_c = 0,3333\dots$ , na rede de Husimi quadrada  $p_c = 0,3819\dots$  e na rede quadrada  $p_c \sim 0,5927$ , todas com  $z = 4$ .

### 4.3 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” EM REDE DE HUSIMI TRIANGULAR COM $Z = 4$ .

Assim como nas outras redes, os casos interessantes para percolação de “bootstrap” são  $m = 2$  e  $m = 3$ .

Para  $m = 3$ , analisando as 4 possíveis configurações do núcleo e levando em conta que não existe a possibilidade de ilhas finitas podemos montar as equações para  $R$ , a dupla de ligações ligada à ilha infinita fornecendo 1 vizinho estável,  $W$ , a dupla de ligações à ilha infinita fornecendo 2 vizinhos estáveis e para  $P$ .

Temos então:



$$R = 2(p(1 - p)W + p^2(W(1 - R - W))) \quad (40)$$

$$W = p^2(R + W)^2 \quad (41)$$

$$P = p(2RW + W^2) \quad (42)$$

Resolvendo (40), (41) e (42), o que neste trabalho foi feito com o software Mathematica, temos  $P$  em função de  $p$ .

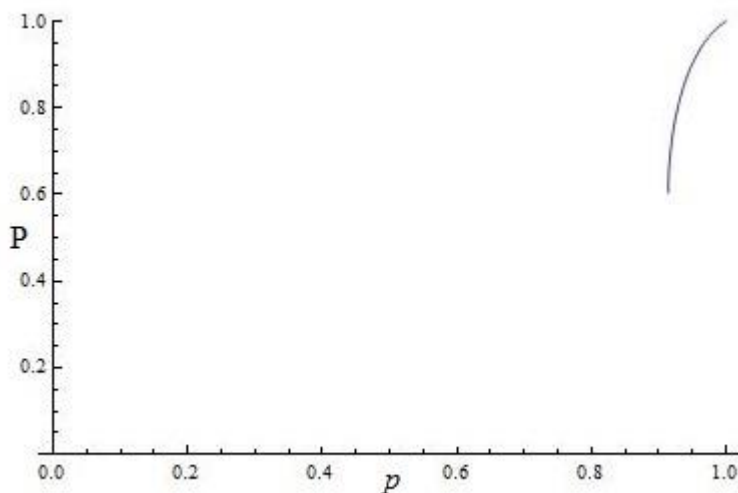


Figura 38: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Husimi triangular com  $z = 4$  para percolação de "bootstrap" com  $m = 3$ .

Para este caso  $p_c = (2\sqrt{2}-1)/2 = 0,9142\dots$  e  $\beta = 1/2$ . Em comparação, para o mesmo caso de percolação de "bootstrap" com  $z = 4$  e  $m = 3$  temos  $p_c = 0,8888\dots$  para a rede de Bethe e  $p_c = 0,9019\dots$  para a rede de Husimi quadrada, o que aponta para a rede de Husimi quadrada como um intermediário entre a rede de Bethe e a rede de Husimi triangular. Para todos esses casos  $\beta = 1/2$ . O expoente  $\beta$  foi obtido

utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica em torno de  $p_c$ .

O outro caso a analisar para percolação de “bootstrap” em rede de Husimi triangular com  $z = 4$  é o de  $m = 2$ . Neste caso existe a possibilidade de formação de ilhas finitas, assim como na rede de Husimi quadrada, e temos as possibilidades U, D, R e W, com os mesmos significados que na rede de Husimi quadrada. As equações para elas, assim como para P são:

$$U = 2p(1 - p)(U + D) \quad (43)$$

$$D = p^2(1 - R - W)^2 \quad (44)$$

$$R = 2p(1 - p)(R + W) \quad (45)$$

$$W = p^2(R + W)(2 - R - W) \quad (46)$$

$$P = p(R^2 + 2W + 2RU + 2RD - W^2) \quad (47)$$

Resolvendo (43), (44), (45), (46), (47), o que neste trabalho foi feito com o software Mathematica, podemos construir P em função de  $p$  para este caso.

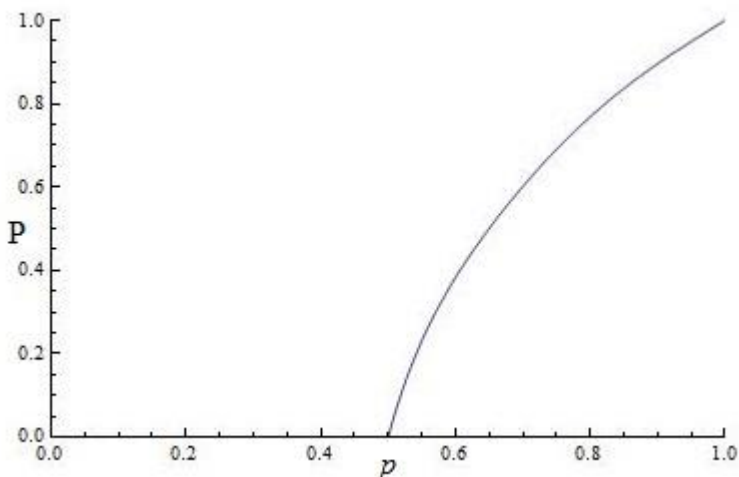


Figura 39: Fração de sítios na ilha infinita  $P$  por concentração  $p$  na rede de Husimi triangular com  $z = 4$  para percolação de “bootstrap” com  $m = 2$ .

Para este caso temos  $p_c = 0,5$  e  $\beta = 1$ , em contraste com o mesmo caso na rede de Bethe com  $z = 4$  que tem  $p_c = 0,3333\dots$  e  $\beta = 2$ . O expoente  $\beta$  foi obtido utilizando uma expansão em série feita pelo software Mathematica em torno de  $p_c$ .

#### 4.4 PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” PROBABILÍSTICA EM REDE DE HUSIMI TRIANGULAR COM $Z = 4$ .

O último caso estudado foi o de percolação de “bootstrap” probabilística em rede de Husimi triangular com  $z = 4$ ,  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$ . Neste caso existe a possibilidade de formação de ilhas finitas, assim como na rede de Husimi quadrada, e temos as possibilidades  $U$ ,  $D$ ,  $R$  e  $W$ , com os mesmos significados que na rede de Husimi quadrada. As equações para elas, assim como para  $P$ , são:

$$\begin{aligned}
 U &= 2(pj(1-p)(U+D) + p(1-j)(1-p)D) & (48) \\
 &+ P^2j(1-j)(U+D)(1-U-D-R-W) \\
 &+ p^2(1-j)^2D(1-U-D-R-W)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= p^2 j^2 (1 - R - W)^2 & (49) \\
 &+ 2p^2 j(1 - j)(U + D)(1 - R - W) \\
 &+ p^2 (1 - j)^2 (U + D)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R &= 2(pj(1 - p)(R + W) + p(1 - j)(1 - p)W) & (50) \\
 &+ P^2 j(1 - j)(R + W)(1 - U - D - R - W) \\
 &+ p^2 (1 - j)^2 W(1 - U - D - R - W)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W &= p^2 j^2 (1 - (1 - R - W)^2) & (51) \\
 &+ 2p^2 j(1 - j)(R + W)(1 + U + D) \\
 &+ p^2 (1 - j)^2 (R + W)(2U + 2D + R + W)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P &= pj(R^2 + 2W + 2RU + 2RD - W^2) + & (52) \\
 &p(1 - j)(2DR + W(2U + 2D + 2R + W))
 \end{aligned}$$

Novamente, devido à complexidade das equações não foi possível encontrar uma solução para o sistema durante a realização deste trabalho.

## 5. CONCLUSÃO

Nesta dissertação calculamos a fração de sítios na ilha infinita  $P$  em função da concentração  $p$  para rede de Bethe e algumas redes de Husimi para percolação usual, percolação de “bootstrap” e percolação de “bootstrap” probabilística, quando possível. Para o cálculo foi utilizado um método exato que considera as múltiplas possibilidades envolvidas nos ramos e sub-ramos de uma rede recursiva levando em conta a equivalência dos sítios na rede infinita. Obtido  $P$  em função de  $p$  foram obtidos também  $p_c$  e o expoente crítico  $\beta$  para as diversas redes e modelos.

Nos casos em que não foi possível obter  $P$  em função de  $p$ , foi possível ao menos construir o sistema de equações que, resolvido, forneceria esse resultado. Continuaremos estes cálculos após a defesa dessa dissertação.

Comparando os pontos críticos das redes estudadas notamos que as redes de Husimi apresentam valores intermediários entre a rede de Bethe e a rede quadrada, o que pode indicar que os loops contidos na rede de Husimi a tornam mais semelhante à rede quadrada, o que pode vir a ser útil pois a rede de Husimi é uma rede recursiva e é mais simples, normalmente, obter resultados para ela do que na rede quadrada, para modelos variados de percolação.

Para o caso de percolação de “bootstrap” probabilística na rede de Bethe com  $z = 6$ ,  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$  atualizamos os resultados obtidos em [5], pois no artigo havia sido ignorada a possibilidade de formação de ilhas finitas e como vimos nos resultados essa possibilidade parece ser importante o bastante para mudar o expoente crítico  $\beta$  para este caso. Neste mesmo caso, tanto para  $z = 4$  como para  $z = 6$ , obtivemos, para alguns valores de  $j$ ,  $P$  em função de  $p$  com transições de fase de primeira ordem e contínuas no mesmo gráfico. Para  $z = 4$  isto acontece para valores de  $j$  entre 0,13 e 0,19 aproximadamente. Para  $z = 6$  isto acontece para valores de  $j$  entre 0,09 e 0,13, também aproximadamente. Para valores menores de  $j$  a transição é apenas de primeira ordem, enquanto para valores maiores a transição é apenas contínua.

A Tabela 1 dá uma visão geral dos resultados obtidos.

Caso	$p_c$	$p_t$	$\beta$	Transição
Bethe $z = 4$ $m = 0$	0,3333		1	Contínua
Bethe $z = 4$ $m = 2$	0,3333		2	Contínua
Bethe $z = 4$ $m = 3$	0,8888		$\frac{1}{2}$	Primeira ordem
Bethe $z = 4$ $m = 2,3$ $j \leq 0,4$	$\leq 0.7619$		$\frac{1}{2}$	Primeira ordem
Bethe $z = 4$ $m = 2,3$ $j = 0,5$	0.6666		1	Contínua
Bethe $z = 4$ $m = 2,3$ $j \geq 0,6$	$\geq 0.5555$		2	Contínua
Bethe $z = 4$ $m = 1,3$ $j \leq 0,1$	$\leq 0,8723$		1	Primeira ordem
Bethe $z = 4$ $m = 1,3$ $j = 0,15$	0,7965	0,8555	1	Primeira ordem e contínua
Bethe $z = 4$ $m = 1,3$ $j \geq 0,2$	$\geq 0,6951$		1	Contínua
Bethe $z = 6$ $m = 1,3$ $j \leq 0,05$	$\leq 0,5880$		1	Primeira ordem
Bethe $z = 6$ $m = 1,3$ $j = 0,10$	0,5475	0,5695	1	Primeira ordem e contínua
Bethe $z = 6$ $m = 1,3$ $j \geq 0,15$	$\geq 0,4543$		1	Contínua
Husimi quadrada $z = 4$ $m = 0$	0,3819		1	Contínua
Husimi quadrada $z = 4$ $m = 2$	0,4863		-	Contínua
Husimi quadrada $z = 4$ $m = 3$	0,9019		1	Primeira ordem
Husimi triangular $z = 4$ $m = 0$	0,5		1	Contínua
Husimi triangular $z = 4$ $m = 2$	0,5		1	Contínua
Husimi triangular $z = 4$ $m = 3$	0,9142		$\frac{1}{2}$	Primeira ordem

Tabela 1: Casos estudados e seus respectivos pontos críticos  $p_c$ , pontos de transição  $p_t$ , quando existente, expoente crítico Beta  $\beta$  e tipo de transição de fase.

Como sugestão para futuros trabalhos podemos indicar a resolução dos sistemas não lineares de equações para os casos que foram montados neste trabalho mas que não puderam ser resolvidos, pois essa resolução proporcionaria um resultado exato para estes casos, e resultados exatos são bastante raros em teoria de percolação. O método utilizado para construir as equações também pode ser estendido para outras redes ou versões mais complexas das redes já apresentadas, embora a complexidade das equações envolvidas possivelmente seja um fator restritivo para essas aplicações [6].





**REFERÊNCIAS**

- [1] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory*, Philadelphia: Taylor & Francis inc, (1994).
- [2] G.Grimmett, *Percolation*, Berlin: Springer-Verlag, (1989).
- [3] A. Corsi and P.D.Gujrati, *Phys. Rev. E* 74, 061121 , (2006).
- [4] R. Zallen, *The Physics of Amorphous Solids*, New York: John Wiley and Sons, (1983).
- [5] N. S. Branco, *J. Stat. Phys.* 70, 1035, (1993).
- [6] J. Chalupa, P. L. Leath and R. Reich, *J. Phys. C* 12:L31, (1979).



## APÊNDICE A

### GENERALIZAÇÃO DA PERCOLAÇÃO DE “BOOTSTRAP” PROBABILÍSTICA NA REDE DE BETHE

Neste apêndice apresentamos uma generalização para o caso de percolação de “bootstrap” probabilística na rede de Bethe com  $m_1 = 1$  e  $m_2 = m$ , ( $m \neq 1$ ), para um  $z$  qualquer, com  $j$  como a probabilidade de um sítio apresentar  $m_1$  e  $(1-j)$  de apresentar  $m_2$ .

Como  $m_1 = 1$ , existe a possibilidade de um ramo da rede ter sítios presentes estáveis que não estão ligados à ilha infinita, pois como o sítio no final de uma sequência de sítios presentes pode precisar de apenas 1 vizinho estável para permanecer estável, a sequência pode terminar neste sítio e ainda assim permanecer estável. Sendo assim, um ramo e seus respectivos sub-ramos podem pertencer a uma das seguintes possibilidades: estável e não conectado à ilha infinita, U, estável e conectado à ilha infinita, R, e ausente,  $(1-R-U)$ . Devemos, portanto, montar equações para U, R e P para obter P em função de  $p$ .

Um ramo pertencente ao grupo U irá contar como um vizinho estável para o sítio de onde este ramo se origina, mas não fornece uma ligação à ilha infinita para este sítio. Assim, para que um dado sítio com  $m_2 = m$  de onde se originam  $z$  ramos estar ligado à ilha infinita e permanecer estável é preciso que ao menos  $m$  desses ramos sejam estáveis, seja U ou R, e ao menos 1 destes esteja conectado à ilha infinita, necessariamente R. Ou seja, a combinação dos  $z$  ramos deve conter 1 ou mais R, uma combinação de U e R igual ou maior que  $m$ , e o restante ausente  $(1-U-R)$ . Com estes pré-requisitos podemos construir a equação generalizada que buscamos utilizando análise combinatória. Ao fazer a análise para U e R, devemos lembrar que os ramos em questão já têm um vizinho estável no sítio de onde se originam e, portanto, precisam de  $(m$

– 1) vizinhos entre os  $(z-1)$  sub-ramos que se originam dele para permanecer estáveis. Para  $U$  temos:

$$U = pj(1 - R)^{z-1} + p(1 - j) \left[ \sum_{l=m-1}^{z-1} \frac{(z-1)!}{l!(z-1-l)!} U^l (1 - U - R)^{z-1-l} \right] \quad (A1)$$

O primeiro termo à direita da igualdade se refere à probabilidade do sítio ter  $m = 1$ . Basta então que nenhum de seus  $(z-1)$  sub-ramos esteja conectado à ilha infinita e ele já será estável e não conectado à ilha infinita, pois já tem 1 vizinho estável no sítio de onde o ramo se origina, ou seja  $(1 - R)^{z-1}$ .

O segundo termo à direita da igualdade se refere à probabilidade do sítio ter  $m = m$ . Logo ao menos  $(m-1)$  dos sub-ramos precisam estar presentes, e como buscamos um ramo estável que não esteja conectado à ilha infinita, nenhum de seus sub-ramos pode estar ligado à ilha infinita. A combinação de  $(z-1)$  sub-ramos distribuídos entre  $(l \geq 1)$  do tipo  $U$  e portanto  $(z-1-l)$  do tipo ausente  $(1-U-R)$ , dá origem ao somatório apresentado na equação (A1).

Para  $R$  temos a equação:

$$R = pj(1 - (1 - R)^{z-1}) + p(1 - j) \left\{ \left[ \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{n=m-1-l}^{z-1-l} \frac{z-1!}{l!n!(z-1-l-n)!} R^l U^n (1 - U - R)^{z-1-l-n} \right] + \left[ \sum_{l=m}^{z-1} \sum_{n=0}^{z-1-l} \frac{z-1!}{l!n!(z-1-l-n)!} R^l U^n (1 - U - R)^{z-1-l-n} \right] \right\} \quad (A2)$$

Novamente, o primeiro termo à direita da igualdade se refere à probabilidade do sítio de ter  $m = 1$ . Como buscamos um ramo estável e conectado à ilha infinita, basta que um dos sub-ramos esteja conectado à ilha infinita, ou seja  $(1-(1-R)^{z-1})$ .

O segundo termo à direita da igualdade se refere à probabilidade do sítio ter  $m = m$ . A diferença neste caso é que podem estar presentes os 3 tipos de sub-ramos, U, R e (1-U-R), e a combinação entre eles deve conter ao menos um R e uma soma de R e U que seja igual ou maior que  $m$ , sendo o restante dos sub-ramos ausentes (1-U-R). Os dois somatórios duplos na equação cumprem estes requisitos e levam em conta a distribuição dos 3 tipos de sub-ramos entre os  $(z-1)$  da rede.

Finalmente, para P, temos basicamente o mesmo caso que para R, com a diferença de que neste caso estamos contando  $z$  ramos, e não  $(z-1)$  sub-ramos, para saber se o sítio está ou não ligado à ilha infinita, e o sítio precisa de  $m$  vizinhos estáveis, pois neste caso não estamos supondo a existência de nenhum a princípio. Temos então, para P:

$$\begin{aligned}
 P = & p_j(1 - (1 - R)^z) + p(1 - j)\{ \\
 & \left[ \sum_{l=1}^m \sum_{n=m-l}^{z-1} \frac{z!}{l! n! (z-l-n)!} R^l U^n (1 - U - R)^{z-l-n} \right] + \\
 & \left[ \sum_{l=m+1}^z \sum_{n=0}^{z-l} \frac{z!}{l! n! (z-l-n)!} R^l U^n (1 - U - R)^{z-l-n} \right] \\
 & \}
 \end{aligned} \tag{A3}$$

Para a percolação de “bootstrap” probabilística na rede de Bethe em que não existe a possibilidade da formação de ilhas finitas, ou seja,  $m_1$  e  $m_2$  diferentes de 1, pode-se utilizar a generalização já conhecida apresentada em [5].