

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Julio Cesar Frantz

**ANÁLISE ESTÁTICA DE SISTEMAS ROBÓTICOS  
COOPERATIVOS**

Florianópolis

2015



Julio Cesar Frantz

**ANÁLISE ESTÁTICA DE SISTEMAS ROBÓTICOS  
COOPERATIVOS**

Dissertação submetida ao Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia Me-  
cânica para a obtenção do Grau de  
Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Henrique Simas, Dr.  
Eng.

Coorientador: Prof. Daniel Martins,  
Dr. Eng.

Florianópolis

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Frantz, Julio Cesar

Análise estática de sistemas robóticos cooperativos /  
Julio Cesar Frantz ; orientador, Henrique Simas ;  
coorientador, Daniel Martins. - Florianópolis, SC, 2015.  
152 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Robótica. 3. Teoria de  
Helicoides. 4. Análise estática. 5. Capacidade de força-  
momento. I. Simas, Henrique. II. Martins, Daniel. III.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

Julio Cesar Frantz

## ANÁLISE ESTÁTICA DE SISTEMAS ROBÓTICOS COOPERATIVOS

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Mecânica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 30 de Março de 2015.

---

Prof. Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr. Eng.  
Coordenador do Curso

---

Prof. Henrique Simas, Dr. Eng.  
Orientador

---

Prof. Daniel Martins, Dr. Eng.  
Coorientador

### **Banca Examinadora:**

---

Prof. Henrique Simas, Dr. Eng. - Presidente  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Lucas Weihmann, Dr. Eng.  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Roberto Simoni, Dr. Eng.  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Rolf Bertrand Schroeter, Dr. Eng.  
Universidade Federal de Santa Catarina



## AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado condições de lutar e alcançar os objetivos pretendidos.

Ao meu pai, sem seu apoio e incentivo incondicional ao estudo, este trabalho nunca se concretizaria. À minha querida mãe, minha inspiração.

Aos meus orientadores Henrique Simas e Daniel Martins pelo conhecimento transmitido, pelo respeito, pela amizade e, principalmente, pelo forte apoio e incentivo ao longo de todo o período de realização deste trabalho.

A minha namorada Grazieli Bartz pelo carinho, amor, apoio e compreensão ao longo destes anos. Minha eterna gratidão.

Aos meus irmãos, Felipe e Guilherme Frantz, à minha segunda família, Ide, Vilmar e Rodrigo, pela alegria compartilhada nos bons momentos e pela união nos momentos difíceis.

Aos meus amigos Marcel Grando, Thaís Muraro e Gonzalo Moreno, pela companhia, pelas dificuldades compartilhadas, sem vocês teria sido muito pior, obrigado amigos.

Ao meu amigo Leonardo Mejia, pelo incentivo e contribuição técnica valiosa no desenvolvimento desta dissertação.

A todos meus amigos, aqueles que colaboraram direta e indiretamente, faltaria espaço para agradecer à todos vocês, meu muito obrigado.

Finalmente, a CAPES e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC pela oportunidade e pelo apoio indispensável.



*“Crescer significa mudar e mudar envolve riscos, uma passagem do conhecido para o desconhecido.”*

Autor desconhecido.



## RESUMO

As exigências de produtividade, qualidade e adaptabilidade tanto de robôs industriais como máquinas ferramentas, estão crescendo dia a dia nas instalações de produção. Além disso, a necessidade de flexibilidade para fabricação de vários tipos de peças, ou com alto grau de complexidade, impactam em uma busca por melhorias contínuas. Se tratando de robôs industriais, aplicações onde exijam o contato com o meio representam uma grande oportunidade para um aumento de produtividade, porém, em muitos casos a capacidade de carga está abaixo da necessidade que a tarefa exige. Enquanto que, robôs industriais não possam fornecer a precisão de posicionamento durante tarefas que exijam contato com o meio da mesma forma que fornecem repetibilidade de posicionamento, alternativas estão sendo estudadas para permitir significantes reduções de custos para um grande potencial de aplicações. A possibilidade de utilização de dois ou mais robôs para realizar uma tarefa vem de encontro a estas necessidades, podendo viabilizar algumas aplicações. Estes Sistemas Robóticos Cooperativos (SRCs), permitem um ganho de flexibilidade na execução de tarefas, bem como, uma distribuição homogênea entre os esforços gerados durante a interação do manipulador com o meio. Assim, outras aplicações podem ser avaliadas, tornando possível flexibilizar o uso destes equipamentos na área industrial. O objetivo principal deste estudo é a aplicação de uma metodologia para determinação da capacidade de força-momento de SRCs em aplicações onde exista o contato com o meio. A modelagem estática do problema é realizada através da teoria de helicoides e do método de Davies. A capacidade de força e a distribuição de carga é resolvida através do método denominado fator de escala. Os resultados da aplicação desta metodologia em SRCs permitiram a obtenção de um balanceamento de forças entre os manipuladores, obtendo um mapa da capacidade de força para o SRC. São apresentados dois casos de estudos com SRCs: um caso planar e outro espacial. Também é proposto neste estudo uma generalização do método do fator de escala, permitindo a obtenção do polítopo da capacidade de força-momento de manipuladores industriais.

**Palavras-chave:** Robótica. Sistema Robótico Cooperativo. Capacidade de força. Método de Davies. Teoria de Helicoides.



## ABSTRACT

The needs for efficiency (productivity), quality and adaptability of industrial robots and machine tools steeply increasing day by day in production facilities. Moreover, the need for flexibility for manufacturing various kinds of parts, or parts with high complexity, is promoting continuous researches to improve these devices. In many cases, the loading capacity of industrial robots is quite below the required capacity, causing the force-moment capacity of this equipment can reach the saturation limit and possible material damage and losses. While industrial robots can not provide the positioning accuracy for tasks requiring surface contact in the same way that provide positioning repeatability, alternatives are being studied to enlarge potential applications. The possibility of using two or more robots to perform a task can meet these needs making these applications possible. These robotic systems, characterized as Cooperative Robotics System (CRS), with increased flexibility in performing tasks, as well as a more homogenous distribution of the forces generated during the interaction between the end effector of the robot and the environment. Thus, many applications can be evaluated to make these robots more flexible to use for any task in industry. Therefore, the main objective of this study is the application of a methodology for determining the force-moment capacity of CRS where robots are in contact with the environment. Static model were analyzed using Screw Theory and Davies' method. The force capability and load distribution is solved through a method called scaling factor. The application of the scale factor, lets us obtain a balance of forces between the robots, thus a map of the force capabilities for the CRS. Two case studies of CRS are presented: planar case and spatial case. A scale factor generalized method is proposed allowing us to obtain the polytope's of force-moment capabilities of industrial robots.

**Keywords:** Robotics. Cooperative Robotic Systems. Force capability. Davies method. Screw theory.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Interações entre o robô e o processo de usinagem. . . . .	29
Figura 2	Forças atuando em uma broca helicoidal. . . . .	30
Figura 3	Diagrama de corpo livre de um elo i. . . . .	38
Figura 4	Componentes da heliforça atuando em um corpo rígido. . . . .	42
Figura 5	Estrutura cinemática e grafo correspondente de um robô serial plano. . . . .	45
Figura 6	Transformação de coordenadas de um helicoides. . . . .	51
Figura 7	Transformação de coordenadas em um SRC. . . . .	53
Figura 8	Transformação de forças e momentos de um helicoides. . . . .	54
Figura 9	Transformação de forças e momentos em um SRC. . . . .	55
Figura 10	Estrutura cinemática e digrafo equivalente de um SRC planar. . . . .	57
Figura 11	Grafo das ações do SRC planar. . . . .	58
Figura 12	Representação esquemática do mecanismo 3R cooperativo. . . . .	60
Figura 13	Rede de Acoplamentos e Grafo de Acoplamentos. . . . .	61
Figura 14	Ações nos acoplamentos do SRC. . . . .	62
Figura 15	Grafo das ações do mecanismo 3R cooperativo. . . . .	63
Figura 16	Direção de aplicação da força no efetuador final do manipulador. . . . .	72
Figura 17	Aplicação do fator de escala $\Phi$ na heliforça do efetuador final do manipulador. . . . .	74
Figura 18	Mapa da capacidade de força do manipulador 3R planar. . . . .	74
Figura 19	Torques dos atuadores versus o ângulo de aplicação da heliforça ( $\theta$ ) com $m_z = 0$ . . . . .	75
Figura 20	Caso 1: Manipulador 3R aplicando forças no meio (momento nulo). . . . .	84
Figura 21	Postura do manipulador 3R. . . . .	85
Figura 22	Torques das juntas a, b e c do robô 3R ( $m_z = 0$ ). . . . .	85
Figura 23	Polígono da máxima capacidade de força do manipulador 3R ( $m_z = 0$ ). . . . .	86
Figura 24	Caso 2: Robô 3R com forças e momentos. . . . .	87
Figura 25	Polítopo da máxima capacidade de força do manipulador	

3R.....	88
Figura 26 Caso 3: SRC planar.....	89
Figura 27 Postura dos manipuladores do SRC planar.....	90
Figura 28 Mapa da máxima capacidade de força do SRC planar..	91
Figura 29 Torques dos atuadores do manipulador operador.....	92
Figura 30 Torques dos atuadores do manipulador seguidor.....	92
Figura 31 Torques dos atuadores do manipulador seguidor com $F_T$ ajustado.....	93
Figura 32 Mapa da máxima capacidade de força do manipulador operador, seguidor e do equilíbrio de forças.....	94
Figura 33 SRC espacial.....	95
Figura 34 Sistema de coordenadas esférico.....	96
Figura 35 Grafo das ações do SRC espacial.....	97
Figura 36 Postura dos manipuladores do SRC espacial.....	98
Figura 37 Poliedro de forças do manipulador ABB IRB 140.....	98
Figura 38 Poliedro de forças do manipulador ABB IRB 1600. ....	99
Figura 39 Poliedro de forças do SRC espacial (equilíbrio de forças). 99	
Figura 40 Poliedros de forças do SRC espacial.....	100
Figura 41 Poliedros de forças do SRC espacial ( $f_z = 0$ ).....	101
Figura 42 Distribuição dos torques do manipulador ABB IRB 140.101	
Figura 43 Distribuição dos torques do manipulador ABB IRB 1600.102	
Figura 44 Interface gráfica do SRC espacial.....	102
Figura 45 Postura inicial do manipulador 3R com a referência no elo 3.....	117
Figura 46 Representação esquemática do mecanismo.....	121
Figura 47 Rede de Acoplamentos e Grafo de Acoplamentos.....	122
Figura 48 Ações nos acoplamentos do mecanismo do robô 3R.....	122
Figura 49 Grafo das Ações $G_a$ do mecanismo do robô 3R.....	123
Figura 50 Cortes-f no grafo das ações do mecanismo do robô 3R. .	124
Figura 51 Postura inicial do SRC planar.....	133

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Forças de usinagem para operação de furação. ....	32
Tabela 2	Identificação dos acoplamentos do SRC. ....	60
Tabela 3	Regiões de saturação dos torques dos atuadores do manipulador 3R. ....	75
Tabela 4	Condições para cálculo das raízes. ....	79
Tabela 5	Dados dos manipuladores do SRC Planar. ....	90
Tabela 6	Parâmetros helicoidais do manipulador 3R planar. ....	117
Tabela 7	Identificação dos acoplamentos do mecanismo 3R Planar. ....	121
Tabela 8	Parâmetros helicoidais do SRC Planar. ....	133



## LISTA DE ALGORITMOS

1	Algoritmo para cálculo de $F_{app}$ - Método de Nokleby. . . . .	76
2	Algoritmo para cálculo de $F_{app}$ - Método proposto. . . . .	80
3	Algoritmo para cálculo de $F_{T_{int}}$ . . . . .	93



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3R	Manipulador planar com três juntas rotativas
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
Al	Alumínio
CNC	Comando Numérico Computadorizado
CRSs	<i>Cooperative Robotics System</i>
DOF	<i>Degrees of freedom</i> - graus de liberdade
SRCs	Sistemas Robóticos Cooperativos
STF	<i>Screw Theory Framework</i>
fol	Manipulador seguidor
op	Manipulador operador



## LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto latino

$A_N$		Matriz das ações
$\hat{A}_N$		Matriz das ações unitárias em rede
$\hat{A}_{N_{esc}}$		Matriz das ações escalonada
$\hat{A}_{N_S}$		Matriz das ações das variáveis primárias
$\hat{A}_{N_P}$		Matriz das ações das variáveis secundárias
$C$		Grau de restrição bruto
$C_n$		Grau de restrição líquido
$E_M$		Condição de erro do momento no efetuador final
$F$		Vetor das forças de contato com o meio
$\vec{F}$		Vetor força da heliforça
$F_{app}$	[N]	Força máxima todas as direções possíveis
$F_{app_{int}}$	[N]	Força máxima todas as direções SRC
$F_{app_{fol}}$	[N]	Força máxima manipulador seguidor
$F_{app_{op}}$	[N]	Força máxima manipulador operador
$F_{din}$	[N]	Força dinâmica
$F_{est}$	[N]	Força estática
$F_f$	[N]	Força de avanço
$F_T$	[N]	Força total aplicada/suportada pelo efetuador final
$F_{T_{int}}$	[N]	Força total do manipulador ajustada
$G_A$		Grafo das ações
$G_C$		Grafo dos acoplamentos
$I$		Matriz identidade
$J$		Jacobiano do manipulador
$k_c$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Força específica de corte
$\vec{M}$		Vetor momento da heliforça
$P$	[kW]	Potência de corte
$Q$	[J]	Carga térmica
$[Q]$		Matriz de cortes
$\vec{R}$		Força resultante em um corpo
${}^i R_j$		Matriz de rotação do sistema de coordenadas $j$ para $i$
$S$		Eixo de atuação da heliforça
$S_0$		Vetor posição da heliforça
$\vec{T}$		Binário atuante na heliforça

$\vec{T}_P$		Momento em um ponto P do corpo
$\tilde{T}$		Matriz de transformação
$W$		Matriz <i>skew-symmetric</i> ou anti-simétrica
$c_p$		Número de restrições unitárias dos acoplamentos passivos
$c_a$		Número de restrições unitárias dos acoplamentos ativos
$e_i$		Aresta $i$
$f_u$	[N]	Força na direção $u$ do sistema de coordenadas
$f_v$	[N]	Força na direção $v$ do sistema de coordenadas
$f_x$	[N]	Força na direção $x$ do sistema de coordenadas
$f_y$	[N]	Força na direção $y$ do sistema de coordenadas
$f_z$	[N]	Força na direção $z$ do sistema de coordenadas
$h$	[m]	Passo do helicóide
$k$		corte
$l$		corda
$m_x$	[Nm]	Momento em torno do eixo $x$
$m_y$	[Nm]	Momento em torno do eixo $y$
$m_z$	[Nm]	Momento em torno do eixo $z$
$m_w$	[Nm]	Momento em torno do eixo $w$
$p$	[m]	Vetor distância entre dois sistemas de coordenadas
$\dot{q}$	[m/s]	Velocidade das juntas de um manipulador
$v_p$		Velocidade linear de um ponto P do corpo
$v_x$	[m/s]	Velocidade linear na direção $x$
$v_y$	[m/s]	Velocidade linear na direção $y$
$\dot{x}$	[m/s]	Velocidade cartesiana de um manipulador
$\$$		Helicóide
$\hat{\$}$		Helicóide normalizado
$\$^A$		Heliforça

$\hat{\$}A$	Heliforça normalizada
$\$F$	Heliforça do efetuador final
$\$M$	Heligiro
$\$F_{op}$	Heliforça do manipulador operador
$\$F_{fol}$	Heliforça do manipulador seguidor

### Alfabeto grego

$f(\theta)$		Função que depende da postura do manipulador
$\kappa$	[Nm]	Fator do momento $m_z$
$\lambda$		Espaço de trabalho
$\tau$	[Nm]	Vetor dos torques dos atuadores do manipulador
$\tau_i$	[Nm]	Torque da junta $i$
$\tau_{i_{max}}$	[Nm]	Torque máximo da junta $i$
$\tau_{int}$	[Nm]	Torque da junta $i$ ajustado
$\omega$	[rad/s]	Velocidade angular do corpo
$\omega_z$	[rad/s]	Velocidade angular em torno do eixo $z$
$\psi$	[N]	Magnitude da heliforça
$\Psi_P$	[N]	Vetor das magnitudes primárias
$\Psi_S$	[N]	Vetor das magnitudes secundárias
$\Phi$		Fator de escala
$\theta$	[°]	Ângulo de aplicação da heliforça



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	27
1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA .....	27
1.2 MOTIVAÇÃO .....	32
1.2.1 Breve histórico das pesquisas antecedentes .....	33
1.3 OBJETIVOS .....	35
1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	36
<b>2 ANÁLISE ESTÁTICA DE ROBÔS</b> .....	37
2.1 ESTÁTICA DE ROBÔS: DIAGRAMA DE CORPO LIVRE .....	38
2.2 REVISÃO SOBRE TEORIA DE HELICOIDES .....	40
2.2.1 Helicoides na Estática: A Heliforça .....	41
2.3 MÉTODO DE DAVIES: PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS ..	44
2.4 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO .....	47
<b>3 ANÁLISE ESTÁTICA DE SISTEMAS ROBÓTICOS COOPERATIVOS</b> .....	49
3.1 DESLOCAMENTOS HELICOIDAIS SUCESSIVOS .....	49
3.2 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS HELICOIDAIS .....	51
3.3 TRANSFORMAÇÃO DE FORÇAS E MOMENTOS .....	54
3.4 REPRESENTAÇÃO DE CADEIAS CINEMÁTICAS ATRAVÉS DE GRAFOS .....	56
3.5 SOLUÇÃO ESTÁTICA DE UM SISTEMA ROBÓTICO COOPERATIVO PLANAR .....	59
3.6 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO .....	70
<b>4 FATOR DE ESCALA PARA DETERMINAÇÃO DA CAPACIDADE DE FORÇA E MOMENTO</b> .....	71
4.1 MÉTODO DO FATOR DE ESCALA DE NOKLEBY .....	71
4.2 MÉTODO DO FATOR DE ESCALA PROPOSTO .....	76
4.3 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO .....	81
<b>5 CASOS DE ESTUDO</b> .....	83
5.1 CASO 1: ROBÔ 3R APLICANDO FORÇAS NO MEIO (MOMENTO NULO) .....	83
5.2 CASO 2: ROBÔ 3R APLICANDO FORÇAS E MOMENTOS NO MEIO .....	86
5.3 CASO 3 - SRC PLANAR .....	89
5.4 CASO 4 - SRC ESPACIAL .....	94
5.5 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO .....	103
<b>6 CONCLUSÕES DO TRABALHO E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS</b> .....	105

<b>REFERÊNCIAS</b> .....	109
<b>APÊNDICE A – Cinemática direta por helicoides sucessivos - Manipulador 3R planar</b> .....	117
<b>APÊNDICE B – Estática através do método de Davies - Manipulador 3R planar</b> .....	121
<b>APÊNDICE C – Cinemática direta por helicoides sucessivos - Sistema Robótico Cooperativo planar</b> .....	133
<b>APÊNDICE D – Dados do manipulador ABB IRB 140</b> .	137
<b>APÊNDICE E – Dados do manipulador ABB IRB 1600</b>	141
<b>ANEXO A – Informações técnicas do manipulador ABB IRB 140</b> .....	145
<b>ANEXO B – Informações técnicas do manipulador ABB IRB 1600</b> .....	149

# 1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação explora o problema da aplicação de Sistemas Robóticos Cooperativos (SRCs) em tarefas onde ocorra a interação do efetuador final do manipulador com o meio como, por exemplo, tarefas de usinagem robotizada. O desenvolvimento do trabalho está baseado em dois assuntos principais: a solução da estática e a determinação da capacidade de força do SRC. A introdução apresenta uma contextualização do problema, uma breve revisão das pesquisas antecedentes e a estrutura do texto.

## 1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Máquinas ferramentas estão sendo cada vez mais exigidas no âmbito industrial devido a necessidade de adaptabilidade, produtividade e qualidade que são extremamente importantes. Neste cenário incluem-se os robôs industriais.

Conforme Subrin et al. (2011), em comparação com uma máquina ferramenta 5-eixos, robôs possuem um espaço de trabalho maior e menor investimento, porém possuem limitações nas aplicações de força, como o caso do processo de usinagem. Por este motivo sua aplicação está limitada a materiais com menor dureza, como por exemplo, o poliuretano. O principal fator desta limitação é a falta de rigidez da estrutura do robô.

As forças excessivas de contato do robô com o meio provocam deformações nos elos da cadeia cinemática e vibrações na estrutura do manipulador, impactando diretamente na qualidade da peça usinada (PAN et al., 2006; COELHO et al., 2011). Estas deformações devem ser absorvidas pela estrutura do manipulador, e sendo o manipulador um elemento de baixa rigidez, ocasionada principalmente pela concepção de sua estrutura serial e pela rigidez torsional baixa dos atuadores, a precisão e a qualidade do processo ficam afetadas (OWEN et al., 2008).

Pires et al. (2002) abordam aspectos aplicados a robôs industriais que realizam tarefas onde ocorre contato com o meio. Neste tipo de processo, a ferramenta acoplada ao efetuador final do robô interage fisicamente com um ponto ou a superfície da peça.

Pan e Zhang (2010) realizaram um trabalho de revisão bibliográfica, que leva em conta as questões críticas e as metodologias a serem adotadas para melhorar a eficiência dos processos de

usinagem utilizando robôs industriais. As principais contribuições em Pan e Zhang (2010) são a apresentação de uma nova metodologia que consiste na modelagem da rigidez, na compensação da deformação em tempo real e na remoção controlada de material. Uma solução completa utilizando um controle de força ativa é integrada ao controlador IRC5 de um manipulador ABB, permitindo testes experimentais, os quais comprovam a existência de benefícios e melhorias obtidos com o emprego deste tipo de robô.

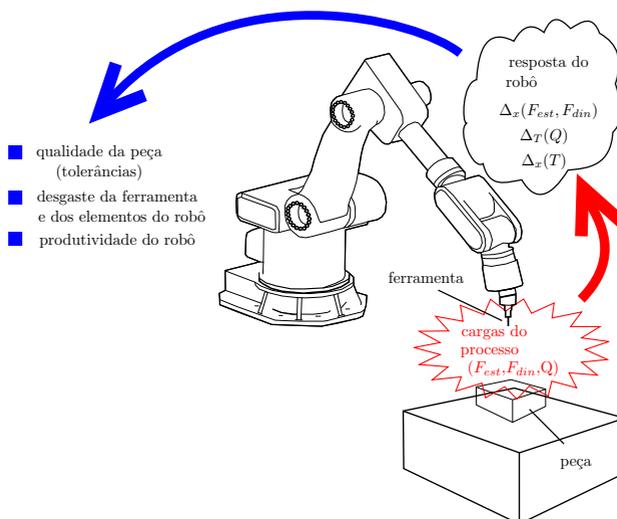
Lehmann et al. (2012) abordam três passos para melhorar a eficiência do processo de usinagem robotizada. O primeiro passo é a seleção de estratégias de fresamento e parâmetros de corte apropriados para alcançar e melhorar a qualidade da superfície da peça como, por exemplo, evitando situações onde os eixos do robô estejam com capacidade de carga baixa e selecionando taxas de avanço adequadas para gerar um movimento mais estável na trajetória do robô. O segundo passo é a compensação das forças através de métodos *off-line*, ou seja, depois de selecionar a melhor estratégia de fresamento e a trajetória da ferramenta mais adequada, as forças de corte podem ser mensuradas de tal forma que a trajetória da ferramenta possa ser alterada, para que se realize uma compensação da deflexão na trajetória do robô manipulador. O terceiro passo é a compensação *online* de força, que consiste na compensação das forças de interação entre o robô e a peça, medida através de um sensor de força e torque. Utilizando a diferença entre as forças calculadas do método *offline* e do método *online* o desvio delas é calculado e corrigido no controle do robô como um *offset*.

Sörnmo et al. (2012) realizam um trabalho de investigação sobre a precisão de tarefas de fresamento com robôs industriais. Neste trabalho, a ferramenta de usinagem foi acoplada a um micro manipulador piezo-atuado com alta dinâmica, e não ao efetuador do manipulador, o que passou a manipular a peça a ser usinada. A utilização do micro-manipulador fixado a uma estrutura rígida permitiu um aumento significativo da precisão em termos de rugosidade da superfície usinada, comparado ao método sem compensação *online* de erro de posição. Com esta solução o sistema resulta em um desacoplamento onde o robô fica sujeito a um controle de posição e seguimento de trajetória e a ferramenta fica sujeita a um controle de força. O comportamento dinâmico da força, que tende a ser mais rápido que o comportamento dinâmico da posição e da trajetória, e os consequentes erros de força gerados são computados e compensados mais rapidamente no micro manipulador, que possui uma massa envolvida menor comparada a do robô industrial.

Um dos principais obstáculos que impedem a utilização de robôs para processos de usinagem é a vibração. A ocorrência de vibração durante o processo de usinagem robotizada pode resultar em vários efeitos adversos, podendo incluir uma precisão dimensional baixa na peça, uma redução da vida da ferramenta, e também danos no equipamento (PAN et al., 2006; ALTINTAS; CHAN, 1992).

A Figura 1 apresenta um exemplo das fontes de erros durante uma operação de usinagem robotizada. A precisão da tarefa é afetada pela exatidão de posicionamento e as deformações estruturais ( $\Delta x$ ) relativas entre a ferramenta e a peça no ponto de contato. Estes erros são produzidos por cargas térmicas ( $Q$ ) e solicitações mecânicas durante o corte ( $F_{est}$ ,  $F_{din}$ ), e contribuem para o surgimento de desvios em relação as dimensões desejadas da peça, resultando em erros, de forma, dimensão, posição e rugosidade (KOENIG; KLOCKE, 2001; MACHADO et al., 2011).

Figura 1 – Interações entre o robô e o processo de usinagem.



Fonte: do Autor.

A estrutura de um robô industrial é bastante diferente de uma máquina com Comando Numérico Computadorizado (CNC). A rigidez de um robô manipulador é usualmente menor que  $1 \text{ N}/\mu\text{m}$ , enquanto que um equipamento CNC pode possuir uma rigidez maior que  $50 \text{ N}/\mu\text{m}$  (PAN et al., 2006).

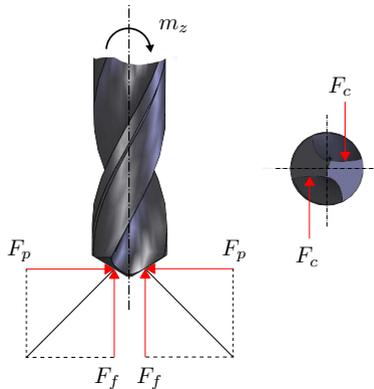
Aplicações com usinagem robotizada necessitam uma alta precisão de posicionamento, porém, a grande maioria dos robôs industriais foram projetados para realizar tarefas repetitivas e sem contato com o meio. A repetibilidade dos robôs está na faixa milesimal ou decimal (0.03 mm a 0.1 mm), e a precisão é quase sempre medida na faixa dos números inteiros (milímetros) (OLABI et al., 2010).

Mas existem alguns robôs industriais que tem apresentado adequado comportamento quando utilizados em aplicações como, prototipagem, limpeza e rebarbação de peças, assim como usinagem de peças com tolerâncias acima de ( $> 400\mu m$ ), como exemplo os robôs do fabricante KUKA (KUKA-ROBOTICS, 2015).

O requisito básico para realização de uma operação de usinagem robotizada é o controle das forças de interação com o meio (ALICI, 1999). Como já citado anteriormente, as forças de interação podem ser mensuradas através de um sensor de força, acoplado ao efetuador final do manipulador.

Para estudar o comportamento das forças durante uma operação de furação, estas também podem ser determinadas através de modelos matemáticos (CRUZ, 2010). A força de usinagem  $F_T$  que atua sobre os gumes de uma broca helicoidal pode ser decomposta de forma simplificada em componentes como a força de corte  $F_c$ , força de avanço  $F_f$ , força passiva  $F_p$  e momento torçor  $m_z$ , conforme a Fig. 2 (STEMMER, 1992; CRUZ, 2010).

Figura 2 – Forças atuando em uma broca helicoidal.



Fonte: Adaptado de (STEMMER, 1992).

A determinação da força de usinagem leva em conta muitas variáveis, justamente por esta razão existem muitos modelos para a determinação das forças de usinagem, cada um deles utilizando diferentes características do processo em consideração (CRUZ, 2010).

O modelo empírico de Kienzle descreve o comportamento das forças de usinagem e adota uma função potencial, bastante simples, visando especialmente a aplicação prática, desenvolvida para o processo de torneamento em geral, Eq. 1.1 (STEMMER, 1989).

$$F_c = k_{e1.1} \cdot b \cdot h^{1-m_c} \quad (1.1)$$

onde:

$k_{e1.1}$  - Força específica de corte para  $b \times h = 1 \text{ mm}^2$ ;

$b$  - Largura do cavaco;

$h$  - Espessura do cavaco;

$1-m_c$  - Expoente de Kienzle.

Baseado no modelo de Kienzle, Witte *apud* Boeira et al. (2009) elaborou as equações para determinação das componentes de força e momento na furação em cheio, Eq. 1.2, 1.3 e 1.4.

$$F_c = k_c \cdot \frac{f \cdot d}{4} \quad (1.2)$$

$$F_f = k_f \cdot \frac{f \cdot d \cdot \text{sen}(\frac{\sigma}{2})}{2} \quad (1.3)$$

$$m_z = k_c \cdot \frac{f \cdot d^2}{8000} \quad (1.4)$$

onde:

$k_c$  - Força específica de corte;

$k_f$  - Força específica de avanço;

$f$  - Avanço;

$d$  - Diâmetro da broca;

$\sigma$  - Ângulo de ponta da ferramenta.

Portanto para a determinação das componentes da força de usinagem bastam conhecer as constantes da força de corte e de avanço e os parâmetros de corte. Os valores das constantes são determinados a partir de ensaios experimentais, sendo que para uma vasta gama de materiais estes valores já foram determinados. Uma tabela com os valores de  $1-m_c$  e  $k_{c1.1}$  para alguns tipos de materiais pode ser encontrada em Stemmer (1989).

Na Tabela 1 pode-se visualizar valores de forças de avanço, momento torçor e potência necessária para a usinagem de alguns materiais. Os resultados são obtidos utilizando-se uma broca helicoidal de 2 mm de diâmetro, avanço ( $f$ ) da operação de furação de 0,2 mm, velocidade de corte ( $v_c$ ) de 30 m/min, ângulo de inclinação da broca de  $4^\circ$  e ângulo de folga de  $12^\circ$ .

Tabela 1 – Forças de usinagem para operação de furação.

Material	$k_c$ (N/mm <sup>2</sup> )	$F_f$ (N)	$m_z$ (Nm)	P (kW)
Aço ABNT 1020	2862	83	0,3	0,14
Al 2024	1724	50	0,2	0,09

Fonte: do Autor.

Através das forças de corte obtidas na Tab. 1 pode-se avaliar a capacidade de força de um manipulador quando empregado para realização de uma operação de furação.

## 1.2 MOTIVAÇÃO

A utilização de robôs industriais em aplicações onde exija o contato com o meio está ligada a um fator importante que é a capacidade de força-momento disponibilizada para à realização da tarefa. Atualmente, os manipuladores paralelos possuem maior vantagem para realizar tais tarefas por apresentarem uma maior rigidez em sua estrutura, porém, os robôs seriais por possuírem uma boa relação entre área de trabalho e a área construtiva, vem sendo aplicados para usinagem de protótipos em poliuretano, como modelos de carrocerias e embarcações em escala real (VERGEEST; TANGELDER, 1996; DEMENICIS, 2006; NAGATA et al., 2014).

Assim como a tarefa de prototipagem, aplicações com furação robotizada vem sendo desenvolvidas com sucesso em robôs seriais (OLSSON et al., 2010; ZANCHETTIN et al., 2011; BI; LIANG, 2011). Em alguns casos já existem robôs seriais projetados especificamente para

tarefas de contato com o meio, como o caso do robô ABB IRB 6660 e do KUKA KR 100 HA (ABB-ROBOTICS, 2015; KUKA-ROBOTICS, 2015). Tratando-se especificamente do manipulador, não do controlador, alterações na capacidade de força e rigidez são realizadas, entretanto, a capacidade de força da grande maioria dos robôs utilizados na indústria, em aplicações de posicionamento, está abaixo da necessidade que tarefas de força exigem, fazendo com que os atuadores destes equipamentos, se utilizados em tais tarefas, possam ser levados ao limite de saturação o que pode ocasionar danos e perdas materiais.

Enquanto que robôs industriais não possam fornecer a precisão de posicionamento durante tarefas que exijam contato com o meio, da mesma forma que fornecem repetibilidade de posicionamento, atualmente alternativas estão sendo estudadas para permitir significantes reduções de custos para um grande potencial de aplicações. A possibilidade de utilização de dois ou mais robôs para realizar uma tarefa vem ao encontro a estas necessidades (CACCAVALE; UCHIYAMA, 2008; FREITAS et al., 2011), em alguns casos tornando possíveis tais aplicações.

Neste contexto, o Laboratório de Robótica da UFSC vem desenvolvendo estudos sobre a capacidade de força-momento de manipuladores paralelos e seriais, bem como pesquisas em cinemática para manipuladores cooperativos. Dentre todos os trabalhos publicados até o momento, nenhum estudo sobre como tratar tais limitações da estática de SRCs foi realizado. Estes são os questionamentos desta pesquisa de dissertação de mestrado. Outro fator que levou a escolha do tema, é a presença de dois manipuladores de cadeia serial do fabricante ABB nas instalações do Laboratório de Robótica da UFSC, onde tem-se como perspectiva desenvolver aplicações de usinagem robotizada de forma cooperativa entre os manipuladores.

### 1.2.1 Breve histórico das pesquisas antecedentes

A capacidade de força-momento de um manipulador é definida como a força (ou momento) máxima que o mesmo consegue aplicar ou suportar no meio em situações estáticas ou quase-estáticas (NOKLEBY et al., 2005).

Estudos da capacidade de força-momento são apresentados em Papadopoulos e Gonthier (1995) e em Nokleby et al. (2005), empregando-se o método do fator de escala. No entanto, as metodologias apresentadas são restritas a determinados tipos de robôs e a determinadas aplicações.

Mejia (2012) desenvolveu em seu trabalho uma metodologia para determinação da capacidade de força de um manipulador paralelo simétrico planar de tipo 3RRR, otimizando simultaneamente sua topologia. Weihmann (2011) realizou a otimização de capacidade força-momento de robôs manipuladores em contato com o meio, em situações estáticas ou quase-estáticas, aproveitando de forma eficiente a redundância cinemática e a redundância de atuação dos mecanismos em estudo. Em seu trabalho, também realiza a análise estática de um manipulador de cadeia serial, chamado Roboturb. Reis (2013) desenvolve um módulo computacional, STF (*Screw Theory Framework*), para modelagem e análise do problema de estática para mecanismos e robôs através da teoria de helicoides e do método de Davies. Seu *framework* é aplicado na solução de um manipulador paralelo espacial, o ABB IRB 360 *Flexpicker*.

O problema de compartilhamento de carga e distribuição de força em mecanismos de cadeia fechada é apresentado por diferentes autores (ZHENG; LUH, 1988; KUMAR; WALDRON, 1988; WALKER et al., 1989; DAVIDSON; HUNT, 2004). Ao compartilhar a carga, o número total de graus de liberdade (*DOF*) do mecanismo é usualmente maior do que o espaço que o mesmo está contido, assim, pode-se utilizar a redundância de atuação para otimizar certos tipos de performance, como o consumo de mínima energia e a distribuição de carga (ZHENG; LUH, 1988).

Dois grandes problemas na aplicação de SRCs são discutidos em (HSU, 1993). Um dos problemas está ligado ao controle do sistema. Se os manipuladores não são cuidadosamente controlados, conflitos de movimento entre eles podem causar falhas ou até quebras do objeto em manipulação. Outro problema é a distribuição de carga entre os manipuladores. Por exemplo, quando dois ou mais manipuladores estão trasportando a mesma peça, se a distribuição de carga falhar, algum dos manipuladores pode se sobrecarregar.

Caccavale e Uchiyama (2008) realizam a análise cinetoestática de robôs cooperativos através da formulação simétrica (*symmetric formulation*). Para a solução estática do sistema é equacionado o Jacobiano dos manipuladores, assumindo relações cinemáticas e estáticas entre as forças generalizadas e velocidades atuantes na peça em manipulação e suas resultantes atuando nos efetuadores dos manipuladores. É introduzido o conceito de *virtual sticks* ('bastões virtuais'), que é definido como um vetor que determina a posição de ligação entre o objeto em manipulação e os efetuadores dos manipuladores. Também são apresentadas estratégias de controle de ambas, forças de interação e movimento, para robôs cooperativos.

A solução da cinemática diferencial de SRCs pode ser encontrada em (DOURADO, 2005; RIBEIRO, 2010; TONETTO, 2011). Dourado (2005) realiza uma análise de métodos para a resolução cinemática de SRCs, verificando vantagens e desvantagens, propondo no final a abordagem utilizando cadeias cinemáticas virtuais. A solução da cinemática de SRCs através de um jacobiano de cooperação é apresentada por Ribeiro (2010). Através do jacobiano de cooperação é desenvolvido um modelo matemático que permite a modelagem cinemática diferencial de SRCs. Tonetto (2011) realiza uma sistematização da modelagem cinemática de SRCs para a automatização do processo de programação e planejamento e execução de tarefas.

Uma boa revisão bibliográfica sobre o emprego de robôs manipuladores em processos de interação com o meio é encontrada em (CRUZ, 2010). Em seu trabalho também é proposto um modelo matemático representativo das forças de interação que se manifestam entre o robô e o meio. O modelo desenvolvido é aplicado a processos de usinagem como, a retificação e o fresamento (fresamento de disco de dentes retos e de topo).

A solução estática de mecanismos seriais e paralelos utilizando a teoria de helicoides e o método de Davies também é encontrada em (CAZANGI, 2008; ERTHAL, 2010; ACEVEDO, 2012). Conceitos gerais envolvendo a teoria de Grafos também podem ser encontrados em (MARTINS, 2002).

### 1.3 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia para determinação da capacidade de força de SRCs. São objetivos específicos:

- Adaptar o método de Davies para a resolução estática de SRCs.
- Propor um método de determinação da capacidade de força em SRCs.
- Desenvolver a distribuição da capacidade de força de SRCs.
- Analisar os fatores que influenciam na capacidade de força de SRCs.
- Desenvolver uma generalização do método do fator de escala para aplicações onde exista momento no efetuador final do manipulador.

## 1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A dissertação está dividida em seis capítulos e três apêndices. No Capítulo 1, é apresentado a definição do problema em estudo, motivação, estado da arte e objetivos.

No Capítulo 2, é realizada uma revisão sobre a análise estática de manipuladores. As forças e momentos atuantes em um elo de um manipulador são apresentadas através do método do diagrama de corpo livre, e a relação do Jacobiano do manipulador com a estática. Os conceitos da teoria de Helicoides e do método de Davies para a solução estática de manipuladores são apresentados.

O Capítulo 3 aborda a análise estática e cinemática de SRCs. Como forma de apresentação e desenvolvimento, um Sistema Robótico Cooperativo planar é solucionado utilizando-se como ferramentas a teoria de helicoides e o método de Davies. São apresentadas todas as etapas para determinar as equações de restrição, calculando-se os torques dos atuadores dos manipuladores em função das forças de interação.

Os conceitos do método de otimização da capacidade de força-momento são apresentados no Capítulo 4. Uma generalização do método para aplicações onde ocorra momento no contato do efetuador com o meio também é apresentada.

No Capítulo 5 são apresentados casos de estudo em robôs seriais e SRCs. Os resultados da generalização do método do fator de escala são mostrados.

As conclusões do trabalho e as perspectivas de trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 6.

## 2 ANÁLISE ESTÁTICA DE ROBÔS

Quando um manipulador robótico realiza uma tarefa o seu efetuador final entra em contato com o meio, surgindo forças e momentos suportadas ou aplicadas pelo efetuador final no meio. Estas forças e momentos são geradas através de atuadores, normalmente servomotores, quando se trata de robôs industriais.

Na análise estática de mecanismos, podem-se aplicar ações nos atuadores e calcular os esforços que o manipulador impõe ao meio, ou, podem-se aplicar ações de contato no efetuador e calcular as ações nos atuadores necessárias para equilibrar o sistema (WEIHMANN, 2011).

Definindo como  $\boldsymbol{\tau}$  o vetor das ações dos atuadores<sup>1</sup> e como  $\boldsymbol{F}$  as forças e momentos aplicados ou suportadas pelo efetuador final no meio, o mapeamento entre  $\boldsymbol{\tau}$  e  $\boldsymbol{F}$  em geral é obtido pela relação (WEIHMANN, 2011):

$$\boldsymbol{\tau} = f(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{F} \quad (2.1)$$

onde a função  $f(\boldsymbol{\theta})$  é o mapeamento estático dependente da postura do manipulador.

A estática de manipuladores robóticos pode ser resolvida através de vários métodos, tais como o **método vetorial**, **vetores duais** e **quaternions duais**, **método de Davies utilizando helicoides** e o **princípio do trabalho virtual** (TSAI, 1999)(CAZANGI, 2008). Neste trabalho foi obtido a solução da estática de manipuladores através do emprego do método de Davies, por apresentar vantagens em relação aos outros métodos, como a solução direta em uma forma matricial, facilitando a solução através de técnicas computacionais.

Para facilitar o entendimento das forças e momentos atuando em um elo do manipulador robótico, apresenta-se primeiramente o método clássico de solução da estática através do diagrama de corpo livre (TSAI, 1999). Através deste método pode-se também entender a relação do Jacobiano do manipulador com a estática, permitindo melhor compreender nas próximas seções a solução estática empregando-se o método de Davies.

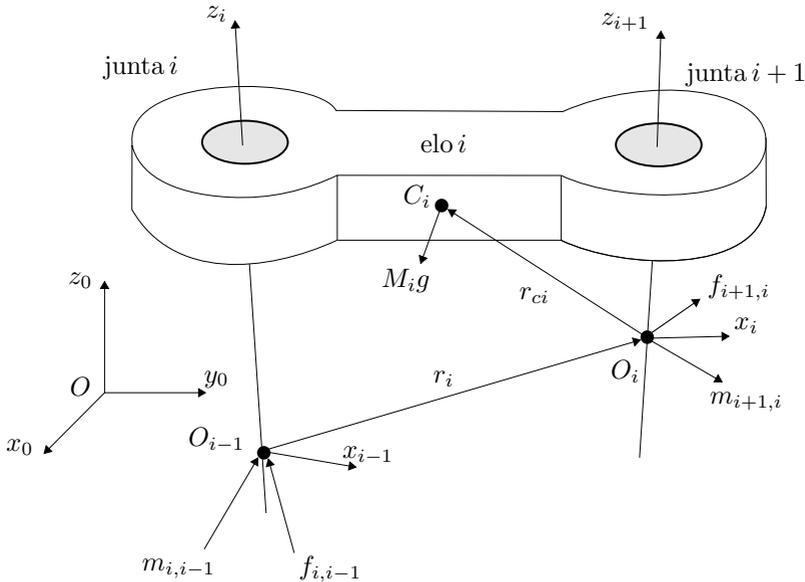
---

<sup>1</sup>Torques para juntas rotativas e forças para juntas prismáticas.

## 2.1 ESTÁTICA DE ROBÔS: DIAGRAMA DE CORPO LIVRE

A análise estática pelo diagrama de corpo livre está baseada no equilíbrio de forças e momentos atuantes em um elo do manipulador robótico (TSAI, 1999)(WEIHMANN, 2011). A Figura 3 mostra o diagrama de corpo livre de um elo  $i$ , conectado ao elo  $i-1$  através da junta  $i$  e ao elo  $i+1$  através da junta  $i+1$ . O referencial utilizado para o cálculo dos momentos é a origem  $O_i$ , fixa ao elo  $i$ .

Figura 3 – Diagrama de corpo livre de um elo  $i$ .



Fonte: Adaptado de (TSAI, 1999).

onde:

$\mathbf{f}_{i+1,i}$  : força resultante exercida no elo  $i+1$  pelo elo  $i$  no ponto  $O_i$ ,

$\mathbf{g}$ : aceleração da gravidade,

$M_i$  : massa do elo  $i$ ,

$\mathbf{m}_{i+1,i}$  : momento resultante exercido no elo  $i+1$  pelo elo  $i$  sobre o ponto  $O_i$ ,

$\mathbf{r}_{ci}$  : vetor posição do centro de massa  $C_i$  do elo  $i$  em relação à origem  $O_i$ ,

$\mathbf{r}_i$  : vetor posição da origem  $O_i$  com respeito à origem  $O_{i-1}$ .

Para que ocorra o equilíbrio estático no elo  $i$ , o somatório de forças e momentos atuantes no elo deve ser igual a zero. Primeiramente considera-se o balanço de forças. Como mostrado na Fig. 3, existem três forças atuando no elo  $i$ :  $\mathbf{f}_{i,i-1}$ ,  $-\mathbf{f}_{i+1,i}$  e  $M_i \mathbf{g}$ . Aplicando-se o somatório de forças igual a zero, obtém-se a Eq. 2.2 (TSAI, 1999).

$$f_{i,i-1} - f_{i+1,i} + M_i g = 0 \quad (2.2)$$

Agora considera-se o balanço de momentos atuantes no elo  $i$  em torno da origem  $O_i$ . Como mostrado na Fig. 3, existem dois momentos atuando no elo  $i$ :  $\mathbf{m}_{i,i-1}$  e  $-\mathbf{m}_{i+1,i}$ . As forças  $M_i \mathbf{g}$  e  $\mathbf{f}_{i,i-1}$  também provocam momento em torno da origem  $O_i$ . Aplicando-se o somatório de momentos, obtém-se a Eq. 2.3.

$$m_{i,i-1} - m_{i+1,i} - r_i \times f_{i,i-1} + r_{ci} \times M_i g = 0 \quad (2.3)$$

As Equações 2.2 e 2.3 representam o balanço de forças e momentos atuantes no elo  $i$ . Para um manipulador de  $n$  elos são geradas  $2n$  equações vetoriais e  $2(n+1)$  reações de forças e momentos (TSAI, 1999).

Para solucionar o sistema de equações ao menos duas variáveis devem ser conhecidas, estas variáveis são as forças e momentos geradas na interação do efetuador final com o meio (TSAI, 1999).

Desta forma, para  $i = n$ , as forças e momentos presentes no efetuador final são  $\mathbf{f}_{n+1,n}$  e  $\mathbf{m}_{n+1,n}$ , aqui tratadas como uma heliforça  $\$_F$  contendo as parcelas de forças e momentos atuantes no efetuador final do manipulador, apresentada na Eq. 2.4 (TSAI, 1999).

$$\$_F = \left\{ \begin{array}{c} f_x \\ f_y \\ f_z \\ - \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

Realizando-se o balanço de forças e momentos para cada elo de um manipulador, e lembrando que os vetores posição devem ser escritos em relação a mesma origem, pode-se determinar as forças e/ou torques

de atuação de cada junta do manipulador, projetando-se as forças de reação no correspondente eixo da junta (TSAI, 1999).

As demais forças nas juntas são utilizadas, por exemplo, para dimensionar a capacidade de carga dos rolamentos e também a rigidez da estrutura do manipulador.

Na ausência de gravidade, as Eqs. 2.2 e 2.3 podem ser escritas como o Jacobiano do manipulador. Desta forma, a Eq. 2.1 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\tau = \mathbf{J}^T F \quad (2.5)$$

onde  $J$  é o Jacobiano do manipulador robótico.

A Equação 2.5 permite calcular os torques das juntas de um manipulador robótico em função apenas da postura do manipulador e da heliforça com as ações de contato com o meio.

O método do diagrama de corpo livre pode ser resolvido de forma recursiva, porém, se forem adicionadas novas forças externas como por exemplo, as forças de atrito, as equações devem ser reescritas e nova substituição recursiva de variáveis é necessária.

Maiores detalhes sobre o método do diagrama de corpo livre pode ser visto em (TSAI, 1999) e (WEIHMANN, 2011).

## 2.2 REVISÃO SOBRE TEORIA DE HELICOIDES

A teoria de Helicoides é uma ferramenta capaz de representar o estado instantâneo de movimentos e de ações de corpos rígidos no espaço, sendo por isso empregada na análise cinemática e estática de manipuladores (CAZANGI, 2008; WEIHMANN, 2011; MEJIA, 2012).

Giulio Mozzi (1763) foi o primeiro a formular a teoria de helicoides representando um deslocamento infinitesimal de um corpo rígido através de um **heligiro**. Mais tarde a teoria de Helicoides foi sistematizada por Ball (1900), representando o estado de ações de um corpo rígido através de uma **heliforça** e o estado de movimentos de um corpo rígido através de um **heligiro** (DAVIDSON; HUNT, 2004).

Pelo fato da teoria de Helicoides representar tanto o estado de ações em um corpo rígido (forças e momentos) e bem como o estado de movimentos (velocidades angulares e lineares), vem sendo empregada como uma forte ferramenta para a análise cinemática e estática de mecanismos (WEIHMANN, 2011; MEJIA, 2012).

Um helicóide  $\$$  é definido por uma reta direcionada e um passo  $h$  associado. O helicóide pode representar tanto o estado de movimentos

$\$^M$ , ou como, o estado de ações  $\$^A$  de um corpo rígido. A forma geral de um helicóide é apresentado na Eq. 2.6.

$$\$ = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \\ \hline P^* = P + hL \\ Q^* = Q + hM \\ R^* = R + hN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{S} \\ \hline \vec{S}_0 \times \vec{S} + h\vec{S} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

onde a Eq. 2.6 expressa o helicóide através das seis coordenadas homogêneas de Plücker. Nesta Eq.,  $\vec{S}$  representa o vetor direção do eixo helicoidal,  $\vec{S}_0$  representa o vetor posição de um ponto que passa pelo eixo helicoidal e  $h$  o passo associado.

O helicóide pode representar um heligiro, quando as coordenadas de Plücker  $L$ ,  $M$  e  $N$  representam a velocidade angular  $\omega$  do corpo, e as parcelas  $P^*$ ,  $Q^*$  e  $R^*$  representam a velocidade linear  $v_p$  deste corpo. O helicóide apresentado na Eq. 2.6 é definido como escrito na formação axial (DAVIDSON; HUNT, 2004; ACEVEDO, 2012).

### 2.2.1 Helicóides na Estática: A Heliforça

Na análise estática de mecanismos, as forças e momentos atuantes em um corpo deste mecanismo podem ser representadas através de uma heliforça  $\$^A$ , como mostra a Eq. 2.7 (CAZANGI, 2008; MEJIA, 2012). Esta heliforça é composta por um vetor linha  $\vec{R}$  que representa a força atuando ao longo da linha de ação normalizada  $\vec{S}^A$  e um binário  $\vec{T}_P$  que age sobre o corpo rígido em um ponto P instantaneamente coincidente com a origem  $O_{xyz}$ .

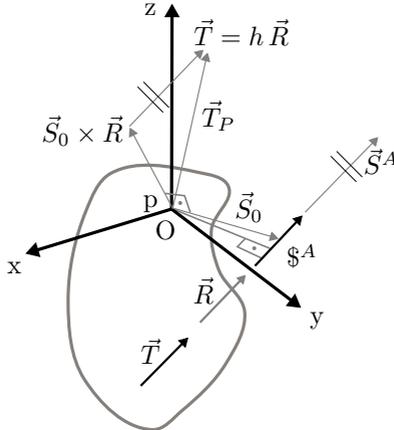
$$\$^A = \begin{pmatrix} \vec{T}_P \\ \hline \vec{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}^* = \mathcal{P} + h\mathcal{L} \\ \mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} + h\mathcal{M} \\ \mathcal{R}^* = \mathcal{R} + h\mathcal{N} \\ \hline \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{S}_0 \times \vec{R} + h\vec{R} \\ \hline \vec{R} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Os três primeiros componentes correspondem ao binário paralelo  $\vec{T}_P$  que está relacionado por  $\sqrt{\mathcal{P}^{*2} + \mathcal{Q}^{*2} + \mathcal{R}^{*2}} = |\vec{T}_P|$ ; as últimas três componentes do vetor correspondem a força resultante  $\vec{F}$  e estão

relacionadas por  $\sqrt{\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2} = |\vec{R}|$ .

O binário  $\vec{T}_P$  é composto pelo binário  $\vec{T}^2$  de eixo paralelo a  $\vec{S}^A$  e pelo momento devido à atuação da força  $\vec{R}$ , calculado pelo produto vetorial entre os vetores  $\vec{S}_o$  e  $\vec{R}$ , como mostrado na Fig. 4.

Figura 4 – Componentes da heliforça atuando em um corpo rígido.



Fonte: Adaptado de (CAZANGI, 2008).

A heliforça  $\$^A$  pode ser normalizada, separando-a em componente geométrico  $\hat{\$}^A$  sem dimensão associada e um componente escalar  $\psi$  com unidade de força.

Na análise estática de mecanismos é usual representar cada restrição presente na junta como uma heliforça unitária, sendo, a heliforça resultante o somatório das heliforças unitárias existentes (WEIHMANN, 2011). Diferente do Heligiro, a Heliforça apresentada na Eq. 2.7 é escrita na formação radial (DAVIDSON; HUNT, 2004; ACEVEDO, 2012).

Quando uma heliforça representar um binário (momento puro), o passo  $h$  da heliforça é considerado infinito e a força  $\vec{R}$  é igual a zero. A Eq. 2.7 fica restrita apenas ao binário  $\vec{T}^2$ , que pode ser decomposto nas direções cartesianas do sistema de referência como apresentado na Eq. 2.8.

<sup>2</sup>O binário  $\vec{T}^2$  tem unidades de [força]×[comprimento] e pode ser relacionado à força resultante  $\vec{F}$  através de um parâmetro escalar (passo)  $h$  de dimensão [comprimento] (Fig. 4).

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^A &= \begin{Bmatrix} \vec{T} \\ \vdots \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ m_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
\hat{\mathcal{S}}^A &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} m_x + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} m_y + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} m_z
\end{aligned} \tag{2.8}$$

As magnitudes  $\{m_x, m_y, m_z\}$  da Eq. 2.8 possuem dimensão força×distância.

Se a heliforça representar forças puras, o passo  $h$  é zero e a componente  $\vec{T}_P$  que representa o binário fica reduzida a  $\vec{S}_0 \times \vec{R}$ . Conhecidas as coordenadas  $p_x, p_y, p_z$  que determinam o vetor  $\vec{S}_0$ , cada uma das restrições podem ser escritas na forma de uma heliforça unitária, como mostra a Eq. 2.9.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^A &= \begin{Bmatrix} \vec{T}_P \\ \vdots \\ \vec{R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{S}_0 \times \vec{R} \\ \vdots \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p_z f_y + p_y f_z \\ p_z f_x - p_x f_z \\ -p_y f_x + p_x f_y \\ \vdots \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \\
\hat{\mathcal{S}}^A &= \begin{Bmatrix} 0 \\ p_z \\ -p_y \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} f_x + \begin{Bmatrix} -p_z \\ 0 \\ p_x \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} f_y + \begin{Bmatrix} p_y \\ -p_x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} f_z
\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde as componentes  $\{f_x, f_y, f_z\}$  possuem dimensão força.

Desta forma, na análise estática de manipuladores pode-se representar as ações existentes em uma junta que acopla dois elos consecutivos através de uma heliforça.

Durante a solução do sistema estático é conveniente que todas as heliforças existentes estejam representadas em relação ao mesmo ponto (em geral a origem do sistema), porém, na solução de Sistemas Robóticos Cooperativos, as referências locais são diferentes, para isso utiliza-se a **transformação de coordenadas de helicoides** e a **transformação de forças e momentos** apresentadas no Capítulo 3.

## 2.3 MÉTODO DE DAVIES: PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS

O método de Davies estabelece uma maneira sistemática para relacionar as forças e momentos em cadeias cinemáticas fechadas (WEIHMANN et al., 2011). Este método é baseado na **teoria de grafos**, **teoria de helicoides** e na **lei dos cortes e das malhas de Kirchhoff-Davies** e pode ser utilizado para obter as equações de restrição da estática de um manipulador robótico de forma matricial (WEIHMANN et al., 2011).

O método de Davies é apresentado em diversas publicações anteriores, maiores esclarecimentos também podem ser encontradas em (DAVIES, 1983a, 1983b, 1983c; CAZANGI, 2008; ERTHAL, 2010; WEIHMANN et al., 2011; ACEVEDO, 2012; MEJIA, 2012).

O método de Davies está fundamentado na Lei dos circuitos para a cinemática e na Lei dos nós para a estática (CAZANGI, 2008).

A adaptação da Lei das Malhas de Kirchhoff contribui para a análise cinemática, pois, estabelece relações entre os movimentos das juntas pertencentes a um mesmo circuito<sup>3</sup> (CAZANGI, 2008). Esta lei determina que a soma algébrica das diferenças de potencial ao longo de qualquer circuito é zero. De forma análoga, Davies (1981) estabelece a **Lei dos Circuitos** a qual determina que a soma algébrica dos heligiros ao longo de qualquer percurso fechado é zero.

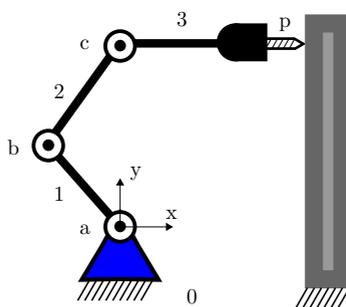
Através da adaptação da Lei dos nós de Kirchhoff se estabelece as relações entre as ações pertencentes a um mesmo corte<sup>4</sup>, possibilitando o equacionamento estático para as ações pertencentes no mecanismo (CAZANGI, 2008; WEIHMANN, 2011; MEJIA, 2012). A lei dos nós estabelece que a soma algébrica das correntes que entram e saem de um nó é zero. De maneira análoga, Davies (2006) determina que a soma algébrica das heliforças que pertencem a um mesmo corte é zero, estabelecendo a **Lei dos Cortes**.

<sup>3</sup>Um circuito é uma cadeia que inicia e termina no mesmo vértice (CAZANGI, 2008; WEIHMANN, 2011).

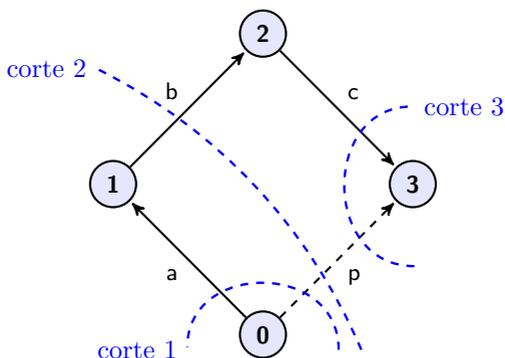
<sup>4</sup>Um corte é um conjunto de arestas que, se removidas, separam o grafo em dois subgrafos independentes (CAZANGI, 2008; WEIHMANN, 2011).

Cazangi (2008) apresenta em seu trabalho nove etapas para solucionar a estática de mecanismos através do método de Davies. O método de Davies é dividido em etapas para permitir a implementação em uma ferramenta computacional. Para ilustrar estes conceitos e introduzir o método de Davies apresenta-se um robô serial plano com três juntas rotativas, o robô 3R. Este manipulador possui acoplado na extremidade do efetuator final uma ferramenta de usinagem. A Figura 5a mostra sua estrutura cinemática e a Fig. 5b mostra sua representação através do digrafo.

Figura 5 – Estrutura cinemática e grafo correspondente de um robô serial plano.



(a) Estrutura cinemática.



(b) Grafo equivalente.

Fonte: do Autor.

Os elos são identificados através de números e as juntas através de letras. O fechamento da cadeia é realizado na aresta P, que repre-

senta as ações de contato com o meio. Na análise estática o direcionamento das arestas define se um corpo está aplicando ação sobre outro corpo ou recebendo a ação (WEIHMANN, 2011).

Para construir o Grafo das Ações  $G_A$  deve-se conhecer as restrições impostas por cada junta do robô. Cada aresta do grafo representa uma junta do tipo qualquer, sendo as mais comuns na robótica a prismática, a rotativa e a esférica. Considerando o espaço planar a junta rotativa R permite uma rotação e restringe duas translações. Para o robô 3R da Fig. 5a o grau de restrição será seis. Como uma junta é um elemento responsável por transmitir forças e torques de um elo para o outro em um mecanismo, considera-se na junta rotativa um torque de restrição imposto pelo atuador presente na junta, somando-se ao grau de restrição do robô 3R três restrições de transmissão, totalizando nove o grau de restrição. Agora, somando-se as restrições impostas pelas ações de contato com o meio da aresta  $p$ , no caso planar são as forças  $f_x$  e  $f_y$  e o momento  $m_z$  o **grau de restrição bruto** do mecanismo  $C$  é igual a doze (informações adicionais sobre os tipos de restrições em juntas podem ser consultados em (CAZANGI, 2008)).

Na análise estática através do método de Davies, cada restrição imposta pela junta é representada como uma aresta no grafo das ações. A partir do grafo das ações aplica-se a lei dos cortes para obter as equações de equilíbrio da solução estática, construindo-se a matriz das ações  $[\hat{A}_N]_{(\lambda k \times C)}$ , onde as linhas representam as heliforças pertencentes a cada corte e as colunas o grau de restrição bruto  $C$ . Cada corte segmenta o mecanismo em subconjuntos onde, para cada um deles, o equilíbrio estático deve ser preservado (WEIHMANN, 2011). Conhecendo-se o número de cortes e o grau de restrição bruto calcula-se as  $C_n$  variáveis conhecidas (variáveis primárias) e as  $\lambda k$  incógnitas (variáveis secundárias). A matriz  $[\hat{A}_N]$  pode ser manipulada separando-a em matriz das ações de rede primária  $[\hat{A}_{N_P}]$  e secundária  $[\hat{A}_{N_S}]$  e o vetor de magnitudes das heliforças em vetor de magnitudes primárias  $\vec{\Psi}_P$  e secundárias  $\vec{\Psi}_S$ , obtendo-se (WEIHMANN, 2011):

$$\{\vec{\Psi}_S\}_{(\lambda k \times 1)} = - \left[ \hat{A}_{N_S}^{-1} \right]_{(\lambda k \times \lambda k)} \left[ \hat{A}_{N_P} \right]_{(\lambda k \times C_n)} \{\vec{\Psi}_P\}_{(C_n \times 1)} \quad (2.10)$$

Na ausência de singularidades, a matriz  $[\hat{A}_{N_S}]$  pode ser invertida, determinando-se as magnitudes das heliforças das  $\lambda k$  incógnitas em função das  $C_n$  variáveis conhecidas. Portanto, para o manipulador 3R da Fig. 5a, o mapeamento estático das forças/momentos do espaço do efetuador final para o espaço das forças/momentos das juntas é definido

pela Eq. 2.11.

$$\begin{pmatrix} {}^a f_x \\ {}^a f_y \\ \tau_a \\ {}^b f_x \\ {}^b f_y \\ \tau_b \\ {}^c f_x \\ {}^c f_y \\ \tau_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ - & - & - \\ - & - & - \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ - & - & - \\ - & - & - \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Os termos  $a_1, \dots, a_9$  representam as equações de restrições dado pela multiplicação das matrizes  $\hat{A}_{N_P}$  e  $\hat{A}_{N_S}$ . Como deseja-se conhecer os torques dos atuadores em função das forças de contato, a Eq. 2.11 pode ser reescrita, resultando na Eq. 2.12.

$$\begin{pmatrix} \tau_a \\ \tau_b \\ \tau_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

onde  $\tau$  representa o vetor dos torques das juntas do manipulador e  $F$  o vetor das forças e momentos presentes no efetuador final. Os componentes  $[a_1, \dots, a_9]$ , escritos na matriz  $A_N$ , são as equações de equilíbrio obtidas na solução da Eq. 2.10 que é similar ao mapeamento estático clássico obtido através do método de trabalho virtual (SICILIANO et al., 2009).

## 2.4 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

Neste capítulo apresentou-se uma breve introdução sobre a análise estática de robôs. Através do método do diagrama de corpo livre identificou-se as ações presentes nos elos do robô e a relação do Jacobiano com a estática. Uma breve descrição da teoria de helicoides foi apresentada, identificando-se o helicóide na estática (heliforça), o qual representa as ações (forças/momentos) através das seis coordenadas homogêneas de Plücker. Os princípios fundamentais do método de Davies foram apresentados, permitindo-se obter as equações de equilíbrio do robô, organizadas de forma matricial na matriz  $A_N$ .



### 3 ANÁLISE ESTÁTICA DE SISTEMAS ROBÓTICOS COOPERATIVOS

A discussão apresentada no Capítulo 2 mostrou de forma breve os fundamentos da análise estática de manipuladores robóticos.

Este capítulo apresenta um estudo da análise estática de manipuladores robóticos cooperativos através da utilização da teoria de helicoides e do método de Davies (1981). Originalmente desenvolvido para cadeias fechadas, o conceito pode ser estendido para cadeias cinemáticas abertas através do fechamento da cadeia no ponto de contato com o meio (ERTHAL, 2010).

Ao final do estudo, utilizando-se a teoria de helicoides e o método de Davies, apresenta-se a solução estática de um SRC planar, composto por dois manipuladores seriais 3R.

#### 3.1 DESLOCAMENTOS HELICOIDAIS SUCESSIVOS

Na cinemática de mecanismos, o movimento relativo entre dois elos pode ser descrito por um deslocamento helicoidal (FONTAN, 2007; SIMAS, 2008).

O *Teorema de Chasles* define que o movimento de um corpo rígido no espaço pode ser representado por uma rotação sobre um eixo seguido de uma translação ao longo do mesmo eixo. Tal combinação de translação e rotação é chamada de deslocamento helicoidal (BOTTEMA; ROTH, 1979).

O deslocamento helicoidal pode ser definido como um deslocamento rotacional, prismático ou a combinação deles (helicoidal) de acordo com o tipo de junta que se está tratando. Quando o passo  $h$  de um helicóide é igual a zero obtém-se uma rotação pura, assim, a Eq. 2.6 pode ser reescrita, passando a representar o helicóide de uma junta rotativa (Eq. 3.1) (DAVIDSON; HUNT, 2004; CAZANGI, 2008).

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{S} \\ \vec{S}_0 \times \vec{S} \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

Entretanto, quando o passo  $h$  do helicóide é infinito, o movimento é definido como de translação pura. O eixo do helicóide passa a estar definido ao longo de uma linha, ou, qualquer linha paralela ao longo do vetor deslocamento pode ser definida como o eixo do helicóide. O helicóide passa a representar uma junta prismática, desta forma, a Eq. 2.6 pode ser reescrita novamente como (DAVIDSON; HUNT, 2004; CAZANGI, 2008):

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ - \\ \vec{S} \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

O deslocamento de um corpo rígido é completamente definido a partir de um eixo de helicóide ( $S$  e  $S_0$ ), mais dois parâmetros helicoidais ( $t$  e  $\theta$ ) (TSAI, 1999).

Considerando um eixo helicoidal descrito por um heligiro  $\mathcal{S} = (\omega; V_p)^T$ , sendo  $\omega$  a velocidade angular e  $V_p$  a velocidade linear do par cinemático, este pode ser representado pelo eixo normalizado  $\hat{\mathcal{S}} = (L, M, N, P^*, Q^*, R^*)^T$  e sua magnitude  $\dot{q}$  representado por (FONTAN, 2007; SIMAS, 2008):

$$\mathcal{S} = \hat{\mathcal{S}} \dot{q} \quad (3.3)$$

Para uma cadeia cinemática composta por  $n$  juntas, o helicóide resultante para o deslocamento do efetuador final ( $\dot{x}$ ) pode ser obtido de maneira linear pela soma dos helicóides de deslocamento de cada junta (TSAI, 1999), como mostra a Eq. 3.4:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \hat{\mathcal{S}}_i \quad (3.4)$$

Da Equação 3.4 pode-se obter o Jacobiano (Eq. 3.5) do manipulador que relaciona o deslocamento do efetuador final no espaço cartesiano ( $\dot{x}$ ) com as velocidades de deslocamentos no espaço das juntas ( $\dot{q}$ ) (TSAI, 1999).

$$J = \left[ \hat{\mathcal{S}}_1, \hat{\mathcal{S}}_2, \dots, \hat{\mathcal{S}}_n \right] \quad (3.5)$$

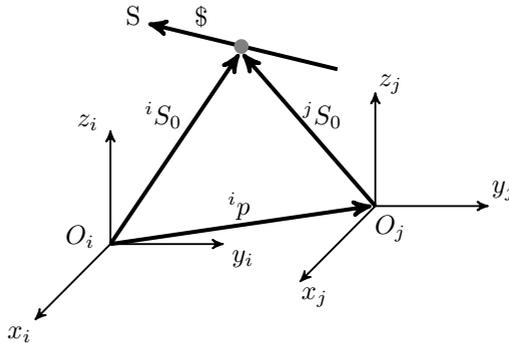
Da Equação 3.5, observa-se que o Jacobiano é simplesmente uma matriz contendo os helicóides unitários (normalizados) associados a cada junta do manipulador (TSAI, 1999; SIMAS, 2008).

Em uma cadeia cinemática os helicoides são descritos em relação a um sistema de coordenadas referencial. Em muitos casos existe a necessidade de representar o helicóide em um sistema referencial diferente, neste caso utiliza-se a matriz de transformação  ${}^i\tilde{T}_j$  (TSAI, 1999) descrito na próxima seção.

### 3.2 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS HELICOIDAIS

O modelo cinemático e estático global de um SRC precisa estar referenciado em um mesmo sistema de coordenadas. Para isso, uma mudança de coordenadas de referência nos helicoides deve ser realizada utilizando-se uma matriz de transformação (TSAI, 1999; SIMAS, 2008). A Figura 6 ilustra um helicóide  $\$$  e dois sistemas de referência  $O_i$  e  $O_j$ .

Figura 6 – Transformação de coordenadas de um helicóide.



Fonte: Adaptado de (TSAI, 1999).

A posição e a orientação entre os sistemas de referência  $O_j$  e  $O_i$  é dado, respectivamente pelo vetor  ${}^i p = [p_x, p_y, p_z]$  e pela matriz de rotação  ${}^i R_j$ .

A relação entre os dois sistemas de coordenadas é dado, por (TSAI, 1999):

$${}^i\mathcal{S} = {}^i\tilde{T}_j {}^j\mathcal{S} \quad (3.6)$$

onde  ${}^i\tilde{T}_j$  é a matriz de transformação de coordenadas de helicoides ( $6 \times 6$ ) apresentada na Eq. 3.7.

$${}^i\tilde{T}_j = \begin{bmatrix} {}^iR_j & \vdots & 0 \\ \dots\dots & \vdots & \dots\dots \\ {}^iW_j {}^iR_j & \vdots & {}^iR_j \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Uma vez que  ${}^iW_j$  é anti-simétrica e  ${}^iR_j$  é ortogonal, a transformação inversa entre os dois sistemas de coordenadas também pode ser realizada (TSAI, 1999; FONTAN, 2007; SIMAS, 2008).

Uma aplicação da matriz de transformação para um SRC pode ser desenvolvida a partir da Fig. 7 composto por dois robôs 3R representados no plano  $\lambda = 3$ , sendo definido o sistema de referência global na origem  $O_i$ , fixo na base do manipulador operador. Os helicoides  ${}^j\$d$ ,  ${}^j\$e$  e  ${}^j\$f$  do manipulador seguidor, inscritos em relação a origem  $O_j$  que devem ser transformados para a origem  $O_i$ , utilizando-se a matriz de transformação  ${}^i\tilde{T}_j$ .

Os helicoides do manipulador seguidor (em relação a origem  $O_j$ ) são apresentados nas Eqs. 3.8, 3.9 e 3.10. Por estar contido em um espaço plano o helicoide de cada junta é composto pelas coordenadas  $[v_x \ v_y \ \omega_z]^T$ , assim tem-se:

$${}^j\$d = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

$${}^j\$e = \begin{Bmatrix} 1 \\ L_4 s_4 \\ -L_4 c_4 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

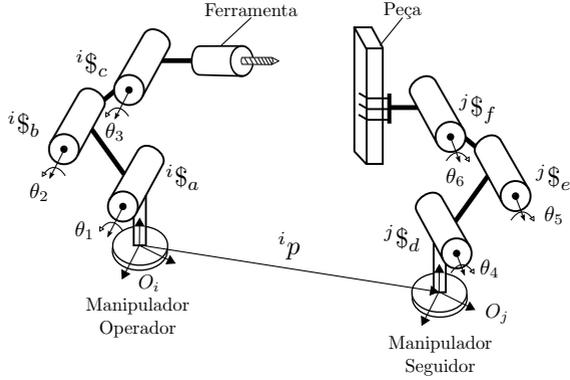
$${}^j\$f = \begin{Bmatrix} 1 \\ L_5 s_{45} + L_4 s_4 \\ -L_4 c_{45} - L_4 c_4 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

onde  $L_i$  representa o comprimento do elo  $i$  e  $s_4 = \text{sen}(\theta_4)$ ,  $c_4 = \text{cos}(\theta_4)$ ,  $c_{45} = \text{cos}(\theta_4 + \theta_5)$  e  $s_{45} = \text{sen}(\theta_4 + \theta_5)$ .

Maiores informações na construção dos helicoides dos manipuladores também podem ser consultados em (DOURADO, 2005; FONTAN, 2007; SIMAS, 2008).

Utilizando-se a Eq. 3.6 pode-se transformar os helicoides do robô seguidor para a origem  $O_i$ . O vetor  $\overline{O_j O_i}$  é definido por  $p_i = [-p_x, -p_y]$ , assim a matriz de transformação  ${}^i\tilde{T}_j$  pode ser reescrita como a Eq. 3.11.

Figura 7 – Transformação de coordenadas em um SRC.



Fonte: do Autor.

$${}^i\tilde{T}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_y & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_x & 0 & 1 & 0 \\ p_y & -p_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Substituindo-se as Eqs. 3.8 a 3.11 na Eq. 3.6, os helicoides inscritos no sistema de coordenadas  $O_i$  resultam:

$${}^iS_d = \begin{Bmatrix} 1 \\ -p_y \\ p_x \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

$${}^iS_e = \begin{Bmatrix} 1 \\ -p_y + L_4 s_4 \\ p_x - L_4 c_4 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

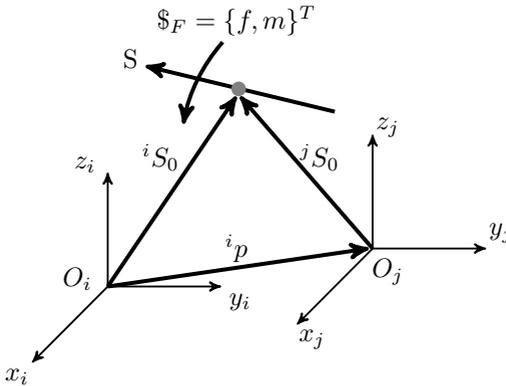
$${}^iS_f = \begin{Bmatrix} 1 \\ -p_y + L_5 s_{45} + L_4 s_4 \\ p_x - L_4 c_{45} - L_4 c_4 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

### 3.3 TRANSFORMAÇÃO DE FORÇAS E MOMENTOS

Como visto anteriormente, um helicóide pode ser transformado de um sistema de coordenadas para outro através da matriz de transformação  ${}^i\tilde{T}_j$ . Analogamente, as coordenadas de uma heliforça na estática podem ser transformadas de um sistema de coordenadas a outro através da mesma matriz de transformação (TSAI, 1999).

Seja  $\$F$  a heliforça atuando sobre um corpo qualquer, esta heliforça pode ser escrita como um vetor seis componentes  $\$F = \{f_x, f_y, f_z, m_x, m_y, m_z\}^T$ . Seja então  ${}^i\$F$  a heliforça escrita no sistema de coordenadas  $O_i$  e,  ${}^j\$F$  a mesma heliforça escrita no sistema de coordenadas  $O_j$ . A posição e a orientação entre os sistemas de coordenadas  $O_j$  e  $O_i$  é dado respectivamente pelo vetor  ${}^i p = [p_x, p_y, p_z]$  e pela matriz de rotação  ${}^i R_j$  como é apresentado na Fig. 8.

Figura 8 – Transformação de forças e momentos de um helicóide.



Fonte: Adaptado de (TSAI, 1999).

Desde que a heliforça possua as propriedades de um helicóide, a Eq. 3.6 pode ser reescrita, obtendo-se:

$${}^i\$F = {}^i\tilde{T}_j {}^j\$F \quad (3.15)$$

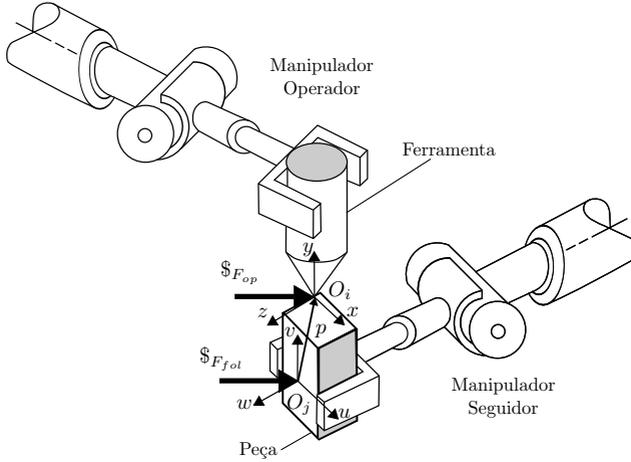
onde  ${}^i\tilde{T}_j$  é a matriz  $6 \times 6$  apresentada na seção 3.2.

Desta forma, dada uma heliforça sobre um sistema de coordenadas, pode-se transformá-la para outro sistema de coordenadas, e vice-versa, aplicando-se a Eq. 3.15.

A Figura 9 mostra um SRC com o manipulador operador apli-

cando uma heliforça  $\$F_{op}$ , inscrita no sistema de coordenadas  $O_i (x,y,z)$ , sobre a peça fixa no efetuador do manipulador seguidor, sistema de coordenadas  $O_j (u,v,w)$ .

Figura 9 – Transformação de forças e momentos em um SRC.



Fonte: do Autor.

Para encontrar a heliforça  $\$F_{fol}$ , escrita no sistema de coordenadas  $O_j (u,v,w)$ , pode-se aplicar a Eq. 3.15, desde que a heliforça  $\$F_{op}$  seja conhecida. Assumindo que os sistemas de coordenadas  $O_i$  e  $O_j$  são paralelos entre si, a matriz de transformação  ${}^i\tilde{T}_j$  resulta em:

$${}^i\tilde{T}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_z & p_y & 1 & 0 & 0 \\ p_z & 0 & -p_x & 0 & 1 & 0 \\ -p_y & p_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Substituindo-se a Eq. 3.16 na Eq. 3.15, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_z & p_y & 1 & 0 & 0 \\ p_z & 0 & -p_x & 0 & 1 & 0 \\ -p_y & p_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_u \\ f_v \\ f_w \\ m_u \\ m_v \\ m_w \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

### 3.4 REPRESENTAÇÃO DE CADEIAS CINEMÁTICAS ATRAVÉS DE GRAFOS

Nesta seção apresenta-se uma revisão sobre a teoria de grafos, uma ferramenta útil no cálculo da cinemática e estática de robôs. O objetivo aqui é apenas mostrar de forma simplificada a obtenção do grafo das ações na análise estática. Maiores esclarecimentos da teoria de grafos podem ser obtidos consultando (TSAI, 2001; MARTINS, 2002; CAZANGI, 2008; WEIHMANN, 2011).

Um mecanismo pode ser representado de forma unívoca através de um grafo (MARTINS, 2002). O grafo consiste de um conjunto de vértices conectados por arestas, onde as arestas são as juntas do mecanismo e os vértices são os elos (CAZANGI, 2008). A Figura 10a apresenta a estrutura cinemática de um SRC planar, composto por dois manipuladores 3R planares ( $\lambda = 3$ ). Neste esquema os elos são numerados como 0, 1, 2 e 3 da base até o efetuador do manipulador operador e de 4, 5, 6 e 7 do efetuador até a base do manipulador seguidor. As juntas do manipulador operador identificadas como a, b e c e as juntas do manipulador seguidor como d, e e f. O sistema de referência  $(x, y, z)$  é definido na base do manipulador operador e o sistema de referência  $(u, v, w)$  é definido na base do manipulador seguidor.

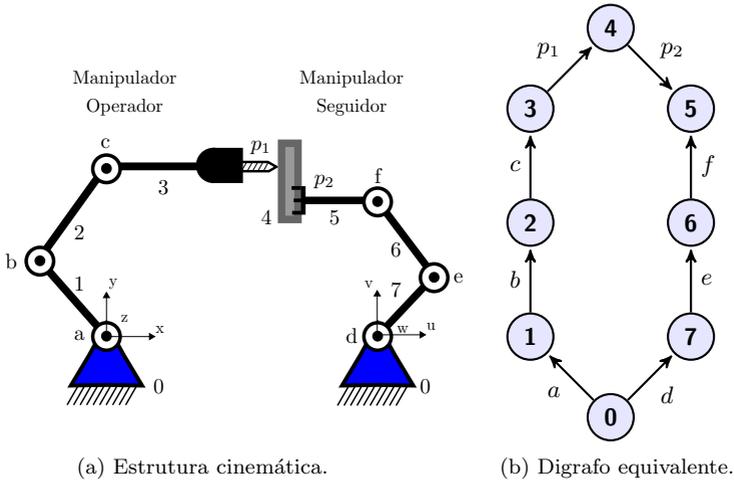
Na análise estática de robôs através do método de Davies, os mecanismos precisam ser de cadeia fechada. Desta forma, cadeias seriais podem ser analisadas realizando-se o fechamento da cadeia em sua extremidade (efetuador final) (ERTHAL, 2010).

A Figura 10b mostra o digrafo equivalente a estrutura cinemática do SRC planar. O digrafo é um grafo direcionado onde as arestas apresentam um sentido de orientação (CAZANGI, 2008). Na análise estática, o direcionamento das arestas define se um corpo está aplicando ação sobre outro corpo adjacente ou recebendo a ação (WEIHMANN, 2011). O fechamento da cadeia ocorre nas arestas  $p_1$  e  $p_2$ , internalizando as ações de contato com o meio. No caso planar, a heliforça de cada efetuador final dos manipuladores, operador e seguidor, ficam respectivamente:

$$\mathcal{F}_{op} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}_{fol} = \begin{Bmatrix} f_u \\ f_v \\ m_w \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Utilizando-se as heliforças  $\mathcal{F}_{op}$  e  $\mathcal{F}_{fol}$  para a solução estática do SRC, o sistema fica desacoplado, permitindo a obtenção das equações

Figura 10 – Estrutura cinemática e digrafo equivalente de um SRC planar.



Fonte: do Autor.

de restrição de forma separada. Como o manipulador operador está aplicando a heliforça sobre a peça fixa no efetuator do manipulador seguidor (aresta  $p_1$ ), as forças e torques na estrutura do manipulador operador são calculados em função da heliforça  $\$F_{op}$ .

Já no caso do manipulador seguidor, este está suportando a heliforça aplicada pelo manipulador operador (aresta  $p_2$  da Fig. 10b). Sendo assim, a determinação das forças e torques na estrutura do manipulador seguidor são determinadas em relação ao ponto de aplicação da heliforça  $\$F_{op}$ . A heliforça  $\$F_{fol}$  deve ser transformada de  $p_2$  a  $p_1$  utilizando-se a transformação de forças e momentos apresentada na seção 3.3.

A partir do digrafo equivalente (Fig. 10b), pode-se gerar o grafo das ações  $G_A$ . Identificando-se as restrições impostas por cada junta do manipulador como uma aresta no grafo das ações, sendo que, para uma junta rotativa no espaço planar tem-se apenas duas restrições de movimento, aqui considerado como  $f_x$  e  $f_y$ . Também deve-se internalizar as ações externas, no caso do SRC os torques dos atuadores do manipulador operador  $\tau_a$ ,  $\tau_b$  e  $\tau_c$  e os torques do manipulador seguidor  $\tau_d$ ,  $\tau_e$  e  $\tau_f$ . Mais informações sobre as restrições nos tipos de juntas pode ser obtido consultando (CAZANGI, 2008).



A partir do grafo das ações pode-se conhecer todas as restrições impostas e as liberdades permitidas de cada junta. Cada aresta do grafo representa um tipo de junta qualquer, sendo as mais comuns na robótica, o tipo rotativa, prismática e esférica (WEIHMANN, 2011).

O próximo passo na análise estática é a construção da matriz das ações, por isso, é fundamental a correta construção do grafo das ações, determinando-se todas as restrições impostas no mecanismo e os cortes necessários para gerar as equações de equilíbrio.

Além de representar de forma unívoca a estrutura topológica de um mecanismo, a teoria de grafos também é utilizada na análise e síntese de mecanismos para o cálculo da mobilidade (CARBONI, 2008), facilita também a obtenção das equações de restrição da cinemática de manipuladores (MARTINS, 2002) e inclusive manipuladores redundantes (SIMAS, 2008).

### 3.5 SOLUÇÃO ESTÁTICA DE UM SISTEMA ROBÓTICO COOPERATIVO PLANAR

O SRC apresentado na Fig. 10a é composto por dois manipuladores 3R planares, possuindo seis juntas atuadas e grau de mobilidade  $M = 3$ . Por se tratar de um mecanismo planar, tanto a análise cinemática como a análise estática podem ser realizadas considerando um espaço de dimensão  $\lambda = 3$ .

O manipulador do sistema de referência  $(x,y,z)$  é chamado de manipulador *operador*. O manipulador operador é responsável pela aplicação da força por meio de uma ferramenta fixa ao seu efetuador final, formando um elo rígido. Já o outro manipulador é chamado de *seguidor*, tendo como sistema de referência  $(u,v,w)$ . No manipulador seguidor, a peça está fixa através de um contato rígido, mais especificamente uma garra.

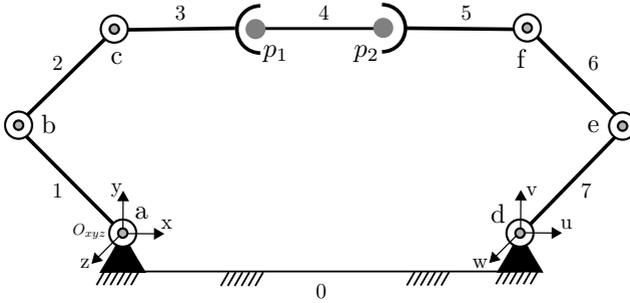
Como citado anteriormente, o objetivo da aplicação do método de Davies na análise estática é a obtenção das equações de restrições para o cálculo dos torques dos atuadores dos dois manipuladores. As etapas do método de Davies apresentadas nesta seção seguem a sistematização apresentada por (CAZANGI, 2008).

O método de Davies foi dividido em nove etapas.

A **primeira** etapa refere-se à Fig. 12, que ilustra a representação esquemática do mecanismo. É uma versão simplificada do modelo físico contendo as informações de topologia e geometria, além do sistema inercial de coordenadas, definido na origem  $O_{xyz}$ , junta  $a$  do manipulador

operador. O SRC apresenta, como visto na Fig. 12, um total de 8 corpos e 8 juntas (juntas de reação e transmissão).

Figura 12 – Representação esquemática do mecanismo 3R cooperativo.



Fonte: do Autor.

A Tabela 2 mostra as características de cada junta do sistema cooperativo. Para a solução estática cada junta do mecanismo será representada através das ações presentes nas mesmas. O contato do manipulador operador com a peça fixa no manipulador seguidor é representado por uma heliforça  $\$F_{op}$  (operador), e o contato do manipulador seguidor com a peça por uma heliforça  $\$F_{fol}$  (seguidor).

Tabela 2 – Identificação dos acoplamentos do SRC.

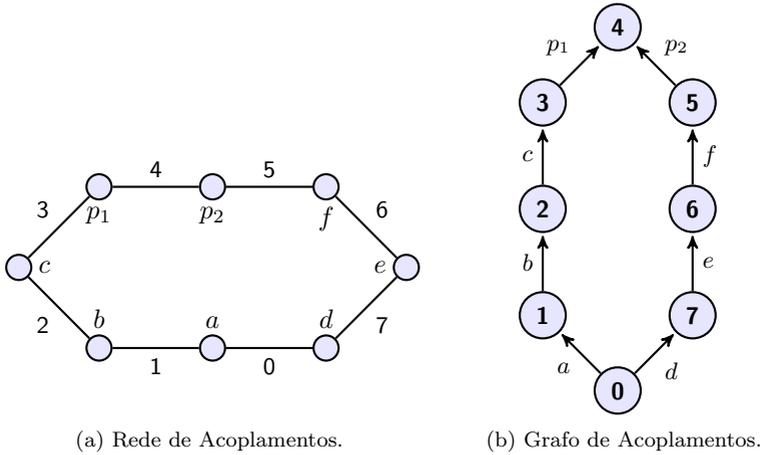
Junta	Elementos	Tipo	Função
a	0-1	Rotativa	Reação (Atuador)
b	1-2	Rotativa	Reação (Atuador)
c	2-3	Rotativa	Reação (Atuador)
$p_1$	3-4	-	Transmissão
d	0-7	Rotativa	Reação (Atuador)
e	6-7	Rotativa	Reação (Atuador)
f	5-6	Rotativa	Reação (Atuador)
$p_2$	4-5	-	Transmissão

Fonte: do Autor.

A partir da indentificação dos parâmetros dos acoplamentos pode-se formar a rede de acoplamentos, ilustrada na Fig. 13a. Tendo montado a rede de acoplamentos é aplicada a Teoria de Grafos, obtendo-se o Grafo de Acoplamentos  $G_C$ , onde cada elo é representado por um vértice e cada junta é representada por uma aresta. Neste caso,

atribui-se a direção da aresta  $a$  saindo do corpo 0 e chegando ao corpo 1 e assim por diante até o corpo 4; e a direção da aresta  $d$  saindo do corpo 0 e chegando ao corpo 7 e assim por diante até o corpo 4, como é ilustrado na Fig. 13b. Neste exemplo, utiliza-se a aresta  $p_2$  saindo do corpo 5 e chegando ao 4, com o intuito de apresentar a modificação das equações de restrições obtidas na última etapa do método de Davies, a ser apresentado nas últimas etapas.

Figura 13 – Rede de Acoplamentos e Grafo de Acoplamentos.



Fonte: do Autor.

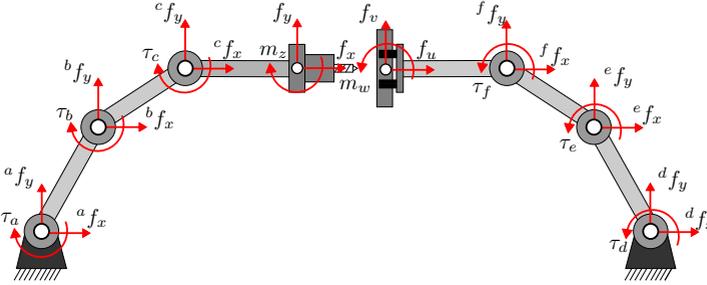
Na **segunda** etapa do método de Davies deve-se determinar as ações externas, internalizá-las e reunir as características dos acoplamentos necessárias a formação das heliforças e a construção do grafo das ações  $G_A$ .

O SRC apresentado na Fig. 10a do tipo planar ( $\lambda = 3$ ) possui seis juntas rotativas, que possuem  $c_p = 2$  restrições unitárias de força ( $f_x, f_y$ ). Como estes robôs possuem uma cadeia serial, todas as juntas devem ser atuadas, desta forma, cada torque externo  $\tau_a, \tau_b$  e  $\tau_c$  do manipulador operador e  $\tau_d, \tau_e$  e  $\tau_f$  do manipulador seguidor correspondem a  $c_a = 1$  restrição unitária.

Para a determinação estática do mecanismo este deve estar super-restringido, portanto, considera-se que o efetuidor final dos manipuladores estão em contato com o meio, surgindo as ações de restrições das heliforças  $\$F_{op}$  e  $\$F_{fol}$ .

Na Figura 14 é possível verificar as ações existentes nos acoplamentos do SRC. A partir de agora, as ações são todas definidas em relação ao sistema de referência global  $O_{xyz}$  do manipulador operador.

Figura 14 – Ações nos acoplamentos do SRC.



Fonte: do Autor.

Uma vez que a geometria, a topologia e as atuações externas do mecanismo são conhecidas, na **terceira** etapa é formado o grafo das Ações  $G_A$ . Cada uma das  $e = 8$  arestas de  $G_C$  são substituídas por  $c_p = 2$  arestas em paralelo, representando as ações passivas. Ainda são adicionadas  $c_a = 1$  aresta em  $a, b$  e  $c$ , relativas às ações internalizadas  $\tau_a, \tau_b$  e  $\tau_c$  e em  $d, e$  e  $f$ , relativas às ações internalizadas  $\tau_d, \tau_e$  e  $\tau_f$ .

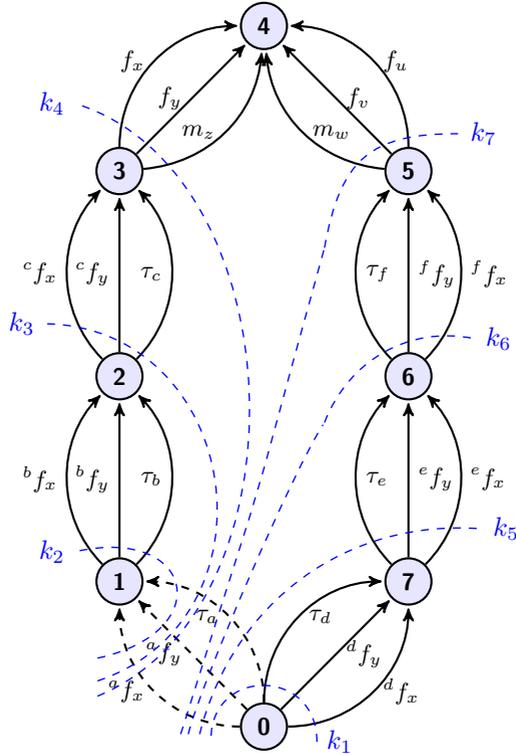
No contato do efetuator de cada manipulador com o meio são adicionadas três arestas, representando as heliforças  $\$F_{op}$  e  $\$F_{fol}$ . Portanto, o grau de restrição bruto  $C$  do mecanismo é igual a 24.

É necessário ainda determinar a árvore geradora para formar o grafo das ações. Para isso calcula-se o número de cortes  $k$  (número de corpos - 1) e o número de cordas  $l$  (arestas - vértices + 1), resultando em sete cortes e uma corda. Para a seleção da árvore geradora existem várias possibilidades, para este mecanismo, opta-se por selecionar a aresta  $a$  como corda<sup>1</sup>, desta forma, as demais arestas são ramos da árvore geradora. Lembrando que o corte nunca deve passar por dois ramos, ou arestas, o grafo das ações é apresentado na Fig. 15.

O próximo passo é transformar as informações topológicas contidas no grafo  $G_A$  para a forma matricial resultando na matriz de Cortes-f  $[Q]_{k \times C} = [Q]_{i,j}$ .

<sup>1</sup>A escolha das arestas que serão as cordas do grafo não é única e, para cada escolha feita, podem surgir circuitos formados por arestas diferentes. Na análise cinemática, uma escolha conveniente das cordas pode tornar o modelo menos complexo (WEIHMANN, 2011).

Figura 15 – Grafo das ações do mecanismo 3R cooperativo.



Fonte: do Autor.

Levando-se em conta os parâmetros estabelecidos na Eq. 3.19 (CAZANGI, 2008) e escrevendo os helicoides em sua forma reduzida, obtém-se a Eq. 3.20.

$$\begin{aligned}
 Q_{i,j} &= 1 \text{ se } e_i \text{ pertence ao corte - } f \text{ } k_i \text{ e tem a mesma} \\
 &\text{orientação do ramo que o define,} \\
 Q_{i,j} &= -1 \text{ se } e_i \text{ pertence ao corte - } f \text{ } k_i \text{ e tem orientação} \\
 &\text{oposta ao ramo que o define,} \\
 Q_{i,j} &= 0 \text{ se } e_i \text{ não pertence ao corte - } f \text{ } k_i.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

As linhas da Eq. 3.20 representam os cortes-f, enquanto que as colunas representam as restrições unitárias de cada acoplamento e também as ações internalizadas.

$$[Q]_{7 \times 24} = \begin{bmatrix} \$a & 0 & 0 & \$d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\$a & \$b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\$a & 0 & \$c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\$a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \$F_{op} & 0 \\ \$a & 0 & 0 & 0 & \$e & 0 & 0 & 0 \\ \$a & 0 & 0 & 0 & 0 & \$f & 0 & 0 \\ \$a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \$F_{fol} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Na **quarta** etapa constroem-se as heliforças de cada ação presente no mecanismo, substituindo-se os parâmetros helicoidais de cada junta na Eq. 2.7.

Como as juntas são rotativas, o passo da heliforça é  $h = 0$ . Escrevendo as heliforças na formação radial e eliminando-se as componentes  $\mathcal{P}^*$ ,  $\mathcal{Q}^*$  e  $\mathcal{N}$  por se tratar do espaço plano ( $\lambda=3$ ) obtém-se:

$$\begin{aligned} \$a &= \$a_{fx} + \$a_{fy} + \$\tau_a \\ &= {}^a f_x \begin{Bmatrix} -a_y \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + {}^a f_y \begin{Bmatrix} a_x \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \tau_a \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde as componentes  $a_x$  e  $a_y$  representam as coordenadas da junta  $\mathbf{a}$  do robô operador determinadas através da etapa da cinemática direta. O índice  $a$  representa as forças e momentos da junta  $a$ . As demais heliforças  $\$b$ ,  $\$c$ ,  $\$d$ ,  $\$e$ ,  $\$f$ ,  $\$F_{op}$  e  $\$F_{fol}$  seguem o mesmo procedimento da Eq. 3.21, substituindo-se as ações presentes na junta e as coordenadas das juntas, respectivamente por  $[b_x, b_y]$ ,  $[c_x, c_y]$ ,  $[d_x, d_y]$ ,  $[e_x, e_y]$ ,  $[f_x, f_y]$ ,  $[p_x, p_y]$  e  $[p_u, p_v]$ . O procedimento de construção das heliforças também pode ser consultado em (CAZANGI, 2008; WEIHMANN, 2011).

Com as heliforças construídas pode-se gerar a matriz das ações  $[A_D]_{\lambda \times C}$  que reúne todas as heliforças do mecanismo, como demonstrado na Eq. 3.22.

$$\begin{aligned} [A_D]_{3 \times 24} &= \begin{bmatrix} -a_y {}^a f_x & a_x {}^a f_y & \tau_a & -b_y {}^b f_x & b_x {}^b f_y & \tau_b & -c_y {}^c f_x & \dots \\ {}^a f_x & 0 & 0 & {}^b f_x & 0 & 0 & {}^c f_x & \dots \\ 0 & {}^a f_y & 0 & 0 & {}^b f_y & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \\ c_x {}^c f_y & \tau_c & -d_y {}^d f_x & d_x {}^d f_y & \tau_d & -e_y {}^e f_x & e_x {}^e f_y & \tau_e & -f_y {}^f f_x \\ 0 & 0 & {}^d f_x & 0 & 0 & {}^e f_x & 0 & 0 & {}^f f_x & \dots \\ {}^c f_y & 0 & 0 & {}^d f_y & 0 & 0 & {}^e f_y & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (3.22) \\ & \begin{bmatrix} f_x {}^f f_y & \tau_f & -p_y f_x & p_x f_y & m_z & -p_v f_u & p_u f_v & m_w \\ 0 & 0 & f_x & 0 & 0 & f_u & 0 & 0 \\ {}^f f_y & 0 & 0 & f_y & 0 & 0 & f_v & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$





Escalonando a matriz das ações unitárias em rede (Eq. 3.26), obtém-se a matriz escalonada das ações unitárias  $[\hat{A}_{Nesc}]_{21 \times 24}$  (Eq. 3.27).

$$[\hat{A}_{Nesc}]_{21 \times 24} = [I]_{[21 \times 21]} \left[ \begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & a_y - p_v & p_u - a_x & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & b_y - p_v & p_u - b_x & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & c_y - p_v & p_u - c_x & 1 \\ & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 0 \\ & -d_y + p_v & -p_u + d_x & -1 \\ & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 0 \\ & -e_y + p_v & -p_u + e_x & -1 \\ & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 0 \\ & -g_y + p_v & -p_u + g_x & -1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & p_y - p_v & p_u - p_x & 1 \end{array} \right] \quad (3.27)$$

Na **sexta** etapa verifica-se que a matriz escalonada das ações unitárias  $[\hat{A}_{Nesc}]_{21 \times 24}$  não possui linhas nulas, o que significa que esta matriz não apresenta equações linearmente dependentes no sistema, conseqüentemente, o posto de  $[\hat{A}_{Nesc}]_{21 \times 24}$  é igual a 21 e as equações se mantêm com a mesma dimensão.

$$[\hat{A}_N]_{21 \times 24} \{ \vec{\Psi} \}_{24 \times 1} = \{ \vec{0} \}_{21 \times 1} \quad (3.28)$$

Na **sétima** etapa são determinadas as variáveis primárias (variáveis conhecidas) necessárias para determinar estaticamente o sistema. Para isso deve-se avaliar o grau de restrição líquido  $C_n$  do SRC:

$$C_n = C - \lambda.k = 24 - 3.7 = 3 \quad (3.29)$$

Portanto, são necessárias 3 variáveis primárias conhecidas para determinar estaticamente o sistema e assim conhecer o comportamento das outras variáveis secundárias.

O objetivo do problema é otimizar os torques dos atuadores em função das forças de interação entre os manipuladores, portanto, as variáveis conhecidas (primárias) podem ser definidas para o manipulador operador ( $f_x$ ,  $f_y$  e  $m_z$ ) ou para o manipulador seguidor ( $f_u$ ,  $f_v$  e  $m_w$ ).

Na **oitava** etapa pode-se construir as equações da estática selecionando-se primeiramente como variáveis primárias as ações de contato do manipulador operador ( $f_x$ ,  $f_y$  e  $m_z$ ), o sistema de equações fica da seguinte forma:

$$\{\vec{\Psi}_S\}_{21,1} = - \left[ \hat{A}_{N_S}^{-1} \right]_{21,21} \left[ \hat{A}_{N_P} \right]_{21,3} \left\{ \begin{array}{l} f_x \\ f_y \\ m_z \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

onde o vetor das magnitudes secundárias  $\{\vec{\Psi}_S\}$  é dado por:

$$\{\vec{\Psi}_S\} = \{ \begin{array}{l} {}^a f_x \quad {}^a f_y \quad \tau_a \quad {}^b f_x \quad {}^b f_y \quad \tau_b \quad {}^c f_x \dots \\ {}^c f_y \quad \tau_c \quad {}^d f_x \quad {}^d f_y \quad \tau_d \quad {}^e f_x \quad {}^e f_y \dots \\ \tau_e \quad {}^g f_x \quad {}^g f_y \quad \tau_f \quad f_u \quad f_v \quad m_w \end{array} \} \quad (3.31)$$

A Equação 3.30 permite determinar os torques do manipulador operador em função das forças de contato com o efetuador do manipulador seguidor. Na ausência de singularidades a matriz das ações de rede secundárias pode ser invertida e as ações secundárias calculadas.

Agora, selecionando-se como variáveis primárias as forças de contato do manipulador seguidor com o efetuador do manipulador operador ( $f_u$ ,  $f_v$  e  $m_w$ ), obtém-se a Eq. 3.32:

$$\{\vec{\Psi}_S\}_{21,1} = - \left[ \hat{A}_{N_S}^{-1} \right]_{21,21} \left[ \hat{A}_{N_P} \right]_{21,3} \left\{ \begin{array}{l} f_u \\ f_v \\ m_w \end{array} \right\} \quad (3.32)$$

onde o vetor das magnitudes secundárias  $\{\vec{\Psi}_S\}$  é dado por:

$$\{\vec{\Psi}_S\} = \{ \begin{array}{l} {}^a f_x \quad {}^a f_y \quad \tau_a \quad {}^b f_x \quad {}^b f_y \quad \tau_b \quad {}^c f_x \dots \\ {}^c f_y \quad \tau_c \quad {}^d f_x \quad {}^d f_y \quad \tau_d \quad {}^e f_x \quad {}^e f_y \dots \\ \tau_e \quad {}^g f_x \quad {}^g f_y \quad \tau_f \quad f_x \quad f_y \quad m_z \end{array} \} \quad (3.33)$$

As Equações 3.30 e 3.32 resultam em vinte uma variáveis secundárias em função das três variáveis primárias conhecidas.

Na **nona** etapa solucionam-se as Eqs. 3.30 e 3.32 para os torques dos atuadores dos manipuladores operador e seguidor, desta forma, obtém-se os sistemas de Eqs. 3.34 e 3.35:

$$\begin{Bmatrix} \tau_a \\ \tau_b \\ \tau_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1_{op}} & a_{2_{op}} & a_{3_{op}} \\ a_{4_{op}} & a_{5_{op}} & a_{6_{op}} \\ a_{7_{op}} & a_{8_{op}} & a_{9_{op}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

sendo:

$$\begin{aligned} a_{1_{op}} &= (p_y - a_y) & a_{2_{op}} &= (-p_x + a_x) & a_{3_{op}} &= -1 \\ a_{4_{op}} &= (p_y - b_y) & a_{5_{op}} &= (-p_x + b_x) & a_{6_{op}} &= -1 \\ a_{7_{op}} &= (p_y - c_y) & a_{8_{op}} &= (-p_x + c_x) & a_{9_{op}} &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_d \\ \tau_e \\ \tau_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1_{fol}} & a_{2_{fol}} & a_{3_{fol}} \\ a_{4_{fol}} & a_{5_{fol}} & a_{6_{fol}} \\ a_{7_{fol}} & a_{8_{fol}} & a_{9_{fol}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_u \\ f_v \\ m_w \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

sendo:

$$\begin{aligned} a_{1_{fol}} &= (p_v - d_y) & a_{2_{fol}} &= (-p_u + d_x) & a_{3_{fol}} &= -1 \\ a_{4_{fol}} &= (p_v - e_y) & a_{5_{fol}} &= (-p_u + e_x) & a_{6_{fol}} &= -1 \\ a_{7_{fol}} &= (p_v - f_y) & a_{8_{fol}} &= (-p_u + f_x) & a_{9_{fol}} &= -1 \end{aligned}$$

As Equações 3.34 e 3.35 têm como resultado os torques dos atuadores dos manipuladores em função das forças de interação entre os efetuadores de cada manipulador.

As componentes da matriz  $A_N$ ,  $[a_x, a_y] \dots [f_x, f_y]$ , representam, respectivamente, as coordenadas  $x$  e  $y$  da junta  $a$  e  $x$  e  $y$  da junta  $f$ , assim sucessivamente, obtidas da cinemática direta dos manipuladores.

Pelo sentido adotado na aresta  $p_2$  do digrafo da Fig. 13b, o manipulador seguidor está aplicando forças no meio, entretanto, este deve suportar as forças que o manipulador operador está realizando. Isto significa que deve ser adotado um sinal negativo na matriz  $A_N$  da Eq. 3.35 (WEIHMANN, 2011), reescrevendo os termos da Eq.  $A_N$  obtém-se:

$$\begin{aligned} a_1 &= (-p_v + d_y) & a_2 &= (p_u - d_x) & a_3 &= 1 \\ a_4 &= (-p_v + e_y) & a_5 &= (p_u - e_x) & a_6 &= 1 \\ a_7 &= (-p_v + f_y) & a_8 &= (p_u - f_x) & a_9 &= 1 \end{aligned}$$

A partir das Eqs. 3.34 e 3.35 pode-se calcular a capacidade de força (NOKLEBY et al., 2005; MEJIA et al., 2014) de cada manipula-

dor aplicando-se o método do fator de escala, que será apresentado no próximo capítulo.

### 3.6 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

A utilização da teoria de helicoides juntamente com o método de Davies mostra-se eficaz para solucionar a estática de SRCs. O método de Davies apresenta um formalismo sistemático<sup>2</sup>, e permite a solução de forma matricial, facilitando a manipulação computacional.

A utilização das duas heliforças,  $\$F_{op}$  e  $\$F_{fol}$ , para representar as forças de interação entre os efetuadores dos manipuladores, permite resolver o sistema de forma desacoplada. Assim, pode-se obter a matriz das variáveis secundárias inversa, solucionando as equações secundárias do sistema.

Nota-se que, as equações de restrição obtidas através do emprego da teoria de helicoides e do método de Davies, é um mapeamento estático dependente da postura do manipulador, equivalente ao Jacobiano obtido através dos métodos clássicos ( TSAI, 1999; SICILIANO et al., 2009). Outra vantagem do emprego do método de Davies neste tipo de solução é a capacidade de inclusão de forças externas, como por exemplo, as forças de contato com o meio, visto que a única alteração necessária é adicionar uma aresta ao grafo e alterar a matriz das ações unitárias em rede. Comparando com o método do diagrama de corpo livre, que a cada inclusão de forças externas, uma nova abordagem recursiva do método deve ser realizada para solucionar as equações de restrição da estática.

No próximo capítulo será apresentado o método de determinação da capacidade de força-momento do fator de escala, bem como a generalização proposta a partir do mesmo método.

---

<sup>2</sup>O formalismo do método de Davies é evidenciado pelo procedimento sistematizado na geração dos grafos, escolha dos cortes, obtenção das matrizes de rede, definição das variáveis primárias e manipulação das equações para obtenção das equações de equilíbrio (WEIHMANN, 2011).

## 4 FATOR DE ESCALA PARA DETERMINAÇÃO DA CAPACIDADE DE FORÇA E MOMENTO

Neste capítulo apresenta-se a estratégia de determinação da capacidade de força de manipuladores através do método do fator de escala. Primeiramente, apresenta-se o método clássico desenvolvido em Nokleby et al. (2005), cujo método se restringe a alguns tipos de aplicações, como o caso onde não ocorra momentos na heliforça do efetuador final.

Desejando-se utilizar o método onde o momento não seja nulo, realiza-se uma modificação, calculando-se um fator  $\kappa$  atribuído ao momento desejado. Com este fator permitiu-se estender o método, permitindo utiliza-lo onde o momento aplicado ou suportado pelo efetuador final do manipulador seja diferente de zero.

### 4.1 MÉTODO DO FATOR DE ESCALA DE NOKLEBY

A estratégia do fator de escala apresentada por Nokleby et al. (2005), consiste em aplicar uma ação de força unitária na direção desejada e determinar a junta do manipulador relativamente mais carregada (WEIHMANN, 2011).

Essa estratégia permite que os limites de saturação dos atuadores sejam incorporados no problema de capacidade de força/momento de manipuladores robóticos (NOKLEBY et al., 2005).

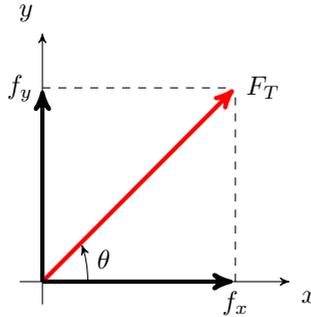
No método do fator de escala, uma heliforça unitária  $\$F$  é utilizada para representar a direção desejada da heliforça do efetuador final do manipulador, como mostra a Eq. 4.1 (NOKLEBY et al., 2005). Nesta Eq.  $f_{app}$  é a intensidade da heliforça  $F_{app}$ .

$$F_{app} = f_{app} \$F \quad (4.1)$$

A heliforça do efetuador final,  $F_{app}$ , pode ser escrita através de um helicoide  $F_{app} = \{f^T; m^T\}^T$ , sendo  $f$  a parcela de forças  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$  e  $m$  a parcela de momentos  $m_x$ ,  $m_y$  e  $m_z$ .

Utilizando-se como exemplo o caso planar, pode-se então reescrever as componentes  $f_x$  e  $f_y$  da heliforça  $F_{app}$  em função da direção de aplicação da força total  $F_T$ , como mostrado na Fig. 16.

Figura 16 – Direção de aplicação da força no efetuador final do manipulador.



Fonte: do Autor.

Decompondo  $F_T$  nos eixos  $x$  e  $y$  e reescrevendo a Eq. 4.1, tem-se a Eq. 4.2:

$$F_{app} = f_{app} \begin{Bmatrix} F_T \cos(\theta) \\ F_T \text{sen}(\theta) \\ m_z \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

onde:

$$F_T = \sqrt{f_x^2 + f_y^2};$$

$\theta$  : ângulo de direção de aplicação da força total  $F_T$ .

Impondo no primeiro instante que  $F_T$  possui um valor unitário, ou seja,  $1 N$ , e determinando que o momento  $m_z$  é igual a zero, a Eq. 4.2 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F_{app} = \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Substituindo a heliforça da Eq. 4.3 na Eq. 2.5, pode-se obter de forma fechada os torques dos atuadores de um manipulador planar, em função de uma força unitária.

Determinados os torques dos atuadores necessários para aplicar/suportar uma força unitária no efetuador final do manipulador, pode-se determinar o fator de escala  $\Phi$  de cada um dos atuadores das juntas  $i$  do manipulador.

O fator de escala  $\Phi$  de cada atuador é uma razão entre o limite de atuação  $\tau_{i_{max}}$  do atuador da junta e o valor de torque  $\tau_i$  encontrado para este atuador quando a ação conhecida é aplicada, determinado pela Eq. 4.4.

$$\Phi = \min \left| \left( \frac{\tau_{i_{max}}}{\tau_i} \right) \right| \quad (4.4)$$

O fator de escala  $\Phi$  do manipulador será o menor dos fatores de escala, indicando a proporção em que a força conhecida pode ser aumentada sem ultrapassar o limite de saturação do atuador mais crítico.

A capacidade de força do manipulador é determinada pelo produto entre a ação unitária aplicada inicialmente e o fator de escala obtido. Os torques máximos dos atuadores do manipulador podem ser determinados, reescrevendo-se a Eq. 2.5:

$$\tau = J^T \Phi F_{app} \quad (4.5)$$

A Figura 17 facilita o entendimento do problema. Nota-se que as forças  $f_x$  e  $f_y$  no primeiro instante, determinadas para um valor de  $F_T$  unitário ( $1 N$ ), implicam em uma capacidade de força unitária. Assim que determina-se o fator de escala do manipulador, em função da junta mais crítica, pode-se facilmente calcular a máxima capacidade de força do manipulador, realizando-se a multiplicação ( $\Phi f_x$ ) e ( $\Phi f_y$ ), aumentando-se a força até o limite de saturação do atuador da junta mais crítica.

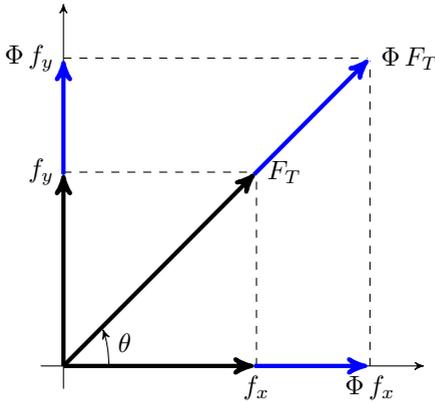
Agora variando-se o ângulo ( $\theta$ ) de aplicação da força total ( $F_T$ ) em um intervalo de  $[0 : 2\pi]$  e na ausência de singularidades o Jacobiano ( $J$ ) da Eq. 4.5 pode ser invertido, o polígono da máxima capacidade de força do manipulador pode ser obtido, como mostrado na Fig. 18.

O polígono da capacidade de força mostrado na Fig. 18 identifica a máxima capacidade de força do manipulador 3R nas direções  $x$  e  $y$  quando o momento  $m_z$  aplicado ou suportado pelo efetuador final do manipulador é igual a zero. Os dados para a simulação da capacidade de força do manipulador 3R são:  $L_1 = 0,4m$ ,  $L_2 = 0,25m$ ,  $L_3 = 0,15m$ , a posição do efetuador  $(0,25m; 0,25m)$  e com os torques máximos dos atuadores  $\tau_{1_{max}} = \tau_{2_{max}} = \tau_{3_{max}} = \pm 10 Nm$ .

A Figura 19 mostra os torques dos atuadores versus o ângulo de aplicação da heliforça ( $\theta$ ) quando  $m_z = 0$  para o manipulador 3R.

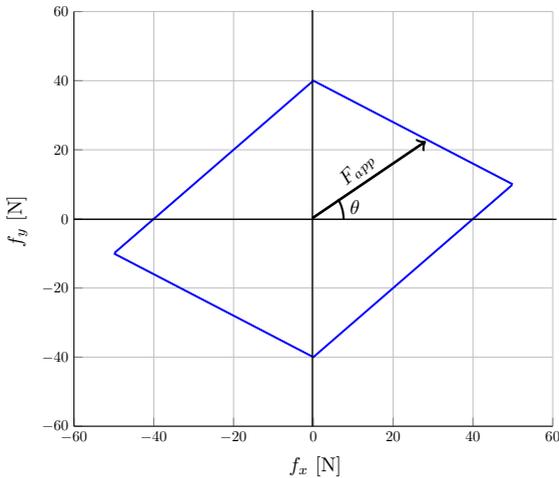
Nota-se que para qualquer valor de  $\theta$  apenas um atuador está com o seu valor de torque no limite de saturação ( $\pm 10 Nm$ ).

Figura 17 – Aplicação do fator de escala  $\Phi$  na heliforça do efetuator final do manipulador.



Fonte: do Autor.

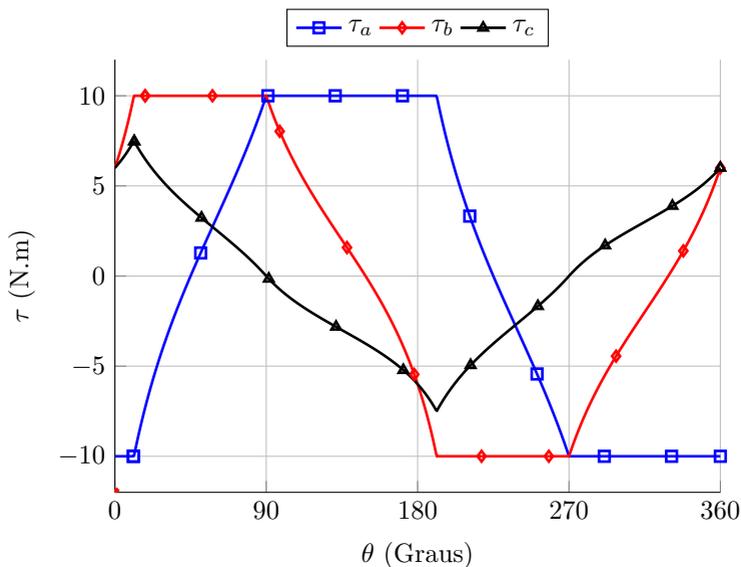
Figura 18 – Mapa da capacidade de força do manipulador 3R planar.



Fonte: do Autor.

A Tabela 3 identifica as regiões de saturação de cada atuador do manipulador 3R planar. Os sinais positivo e negativo identificam a região de saturação do atuador e *n.s.* onde o atuador não satura.

Figura 19 – Torques dos atuadores versus o ângulo de aplicação da heliforça ( $\theta$ ) com  $m_z = 0$ .



Fonte: do Autor.

Tabela 3 – Regiões de saturação dos torques dos atuadores do manipulador 3R.

$\theta/\tau_i$	$0^\circ$	$11^\circ$	$90^\circ$	$190^\circ$	$270^\circ$
$\tau_1$	-	<i>n.s.</i>	+	<i>n.s.</i>	-
$\tau_2$	<i>n.s.</i>	+	<i>n.s.</i>	-	<i>n.s.</i>
$\tau_3$	<i>n.s.</i>	<i>n.s.</i>	<i>n.s.</i>	<i>n.s.</i>	<i>n.s.</i>

Fonte: do Autor.

Um exemplo do algoritmo para o cálculo da capacidade de força de um manipulador utilizando-se o método do Fator de Escala pode ser visto no Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo para cálculo de  $F_{app}$  - Método de Nokleby.

---

**Entrada:**  $J$ ,  $\tau_{max}$ ,  $\theta$  e  $q$

**Saída:**  $F_{app}$

**Início**

Inicializar a matriz  $J$

Inicializar o vetor dos torques máximos  $\tau_{max}$

**Para**  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  **faça**;

    Construir o vetor das heliforças  $\$F$ ;

    Calcular os torques unitários dos atuadores  $\tau_i$ ;

    Calcular o fator de escala mínimo do manipulador  $\Phi$ ;

    Calcular os torques dos atuadores  $\tau_i$ ;

    Calcular a força máxima  $F_{app}$ ;

    Armazenar  $F_{app}$

**fim Para**

**Fim**

---

Fonte: do Autor.

## 4.2 MÉTODO DO FATOR DE ESCALA PROPOSTO

O método do fator de escala apresentado na seção 4.1 realiza a a determinação da capacidade de força de manipuladores considerando-se a parcela de momentos atuando no efetuador final do manipulador iguais a zero.

Quando utilizado um valor diferente de zero para o momento em torno do efetuador final do manipulador, a multiplicação pelo escalar  $\Phi$  no método do fator de escala de Nokleby, resulta em uma alteração no momento desejado. Por exemplo, suponha-se que a heliforça da Eq. 4.2 seja igual à  $F_{app} = [1 \ 0 \ 10]^T$ , quando multiplicado por um fator de escala  $\Phi = 10$ , a parcela do momento  $m_z = 100$ , ou seja, não se obtém o momento desejado.

Para resolver este problema, apresenta-se uma generalização do método do fator de escala de (NOKLEBY et al., 2005), mostrado no decorrer desta seção.

Considerando-se a parcela de momento  $m_z$  diferente de zero, podemos reescrever o modelo generalizado da estática para o manipulador 3R, Eq. 2.5 como:

$$\begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ m_z \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Solucionando-se o sistema mostrado acima, obtém-se os valores de

$\tau_1(m_z)$ ,  $\tau_2(m_z)$  e  $\tau_3(m_z)$ , estes valores resolvem corretamente o sistema sempre que  $F_T$  é unitário, ou seja, 1N, mas aplicando-se um fator de escala percebe-se que o momento originalmente imposto também resulta modificado, ou seja,  $\Phi \cdot m_z \neq m_z$ .

Para solucionar este problema, deve-se considerar que o valor inicial do momento satisfaça a seguinte condição:

$$m_z = \Phi \kappa \quad (4.7)$$

onde  $\kappa$  é o valor do momento que multiplicado por  $\Phi$  resulta no momento desejado  $m_z$ .

Desta forma a Eq. 4.6 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \\ \Phi \kappa \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

A Equação 4.8 faz com que a solução fique em função do valor de  $\kappa$  desconhecido. O valor de  $\kappa$  deve ser tal que multiplicado pelo fator de escala  $\Phi$  obtenha-se o momento  $m_z$  imposto no primeiro instante. Como o valor de  $\Phi$  é adimensional, a dimensão de  $\kappa$  será a mesma do momento imposto, neste caso [Nm].

Substituindo o valor de  $m_z$  por  $\kappa$  na Eq. 4.6 e solucionando o sistema chegamos aos seguintes resultados:

$$\tau_1 = a_1 \cos(\theta) + a_2 \text{sen}(\theta) + a_3 \kappa \quad (4.9)$$

$$\tau_2 = a_4 \cos(\theta) + a_5 \text{sen}(\theta) + a_6 \kappa \quad (4.10)$$

$$\tau_3 = a_7 \cos(\theta) + a_8 \text{sen}(\theta) + a_9 \kappa \quad (4.11)$$

De forma simplificada podemos reescrever as Eqs. 4.9, 4.10 e 4.11 como:

$$\tau_1 = g_1 + h_1 \kappa \quad (4.12)$$

$$\tau_2 = g_2 + h_2 \kappa \quad (4.13)$$

$$\tau_3 = g_3 + h_3 \kappa \quad (4.14)$$

onde:

$$g_1 = a_1 \cos(\theta) + a_2 \text{sen}(\theta) \text{ e } h_1 = a_3.$$

$$g_2 = a_4 \cos(\theta) + a_5 \text{sen}(\theta) \text{ e } h_2 = a_6.$$

$$g_3 = a_7 \cos(\theta) + a_8 \text{sen}(\theta) \text{ e } h_3 = a_9.$$

As Equações 4.12, 4.13 e 4.14 possuem como resultados os torques nas juntas do manipulador em função do valor de  $\kappa$  desconhecido. Substituindo-se as Eqs. 4.12, 4.13 e 4.14 na Eq. 4.4, resulta em:

$$\Phi = \min \left| \left( \frac{\tau_{1max}}{g_1 + h_1 \kappa} ; \frac{\tau_{2max}}{g_2 + h_2 \kappa} ; \frac{\tau_{3max}}{g_3 + h_3 \kappa} \right) \right| \quad (4.15)$$

De acordo com a Eq. 4.15 o valor de  $\Phi$  é igual a:

$$\Phi = \left| \frac{\tau_{imax}}{g_i + h_i \kappa} \right| \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.16)$$

Agora pode-se determinar o valor de  $\kappa$  substituindo-se a Eq. 4.16 na Eq. 4.7:

$$m_z = \left| \frac{\tau_{imax}}{g_i + h_i \kappa} \right| \kappa \quad (4.17)$$

elevando-se a Eq. 4.17 ao quadrado e isolando os termos obtém-se a Eq. 4.18:

$$m_z^2 |g_i + h_i \kappa|^2 = |\tau_{imax}^2| \kappa^2 \quad (4.18)$$

Note que,

$$|g_i + h_i \kappa|^2 = (g_i + h_i \kappa)^2 > 0$$

e

$$|\tau_{imax}|^2 = \tau_{imax}^2 > 0$$

Portanto, eliminando-se o módulo da Eq. e realizando as devidas operações, obtém-se a Eq. 4.19.

$$\kappa^2 (g_i^2 m_z^2 - \tau_{imax}^2) + \kappa (2 h_i g_i m_z^2) + m_z^2 h_i^2 = 0 \quad (4.19)$$

A solução da Eq. 4.19 apresenta duas raízes distintas, retornando dois valores de  $\kappa$  para cada  $i$ . A solução das raízes da Eq. 4.19 é apresentada na Eq. 4.20.

$$\kappa_{i,1} = \frac{-h_i m_z}{g_i m_z - \tau_{imax}} \quad \kappa_{i,2} = \frac{-h_i m_z}{g_i m_z + \tau_{imax}} \quad (4.20)$$

A Equação 4.20 possui como resultado dois valores de  $\kappa$  para  $i = 1, 2, 3$ . No total obtém-se seis diferentes raízes (duas raízes para cada valor de  $i = 1, 2, 3$ ).

Obtidos os valores de  $\kappa_{i,1}$  e  $\kappa_{i,2}$  pode-se determinar os torques unitários das juntas, para a força total  $F_T = 1 N$ , através das Eqs. 4.12 a 4.14. Substituindo-se os valores dos torques calculados na Eq. 4.15 determina-se o valor do fator de escala  $\Phi$  mínimo para cada  $\kappa$ .

Finalmente pode-se determinar qual a capacidade de força do manipulador para cada valor de  $\kappa$  através da Eq. 4.5. Sendo que na ausência de singularidades o jacobiano do manipulador pode ser invertido temos:

$$F_{app} = (J^T)^{-1} \tau \Phi \quad (4.21)$$

A máxima capacidade de força do manipulador será dada através do valor de  $\kappa$  que satisfaça as condições da Tab. 4.

Tabela 4 – Condições para cálculo das raízes.

Condição 1	Condição 2
$m_z < 0$ e $\kappa < 0$	$E_M = m_z - m_{z_{atual}}$
$m_z > 0$ e $\kappa > 0$	
$m_z = 0$ e $\kappa = 0$	

A condição 1 satisfaz a Eq. 4.7, pois, se o valor do momento desejado  $m_z$  for negativo,  $\kappa$  deve ser negativo devido o valor de  $\Phi$  ser adimensional e positivo, ou no caso contrário, quando  $m_z$  for positivo  $\kappa$  também deve ser positivo. Caso o valor do momento desejado for igual a zero, a função não calcula o  $\kappa$ .

Entre os valores de  $\kappa$  encontrados apenas um irá gerar a máxima capacidade de força no manipulador com o momento desejado igual à  $m_z$ . Desta forma com a condição 2 avalia-se o erro  $E_M$  entre o momento desejado  $m_z$  e o momento atual  $m_{z_{atual}}$ , utilizando-se o valor de  $\kappa$  que gera o menor erro possível.

Um exemplo do procedimento para o cálculo da máxima capacidade de força pelo método proposto é mostrado no Algoritmo 2.

No Algoritmo 2, para cada valor de momento desejado  $m_z$  em torno do efetuador final, calculam-se as raízes de cada junta do manipulador, totalizando em cada interação 6 (seis) raízes. Avaliam-se as raízes em função das condições apresentadas na Tab. 4. Se o valor do momento desejado  $m_z$  é negativo, a raiz também deve ser negativa, devido a Eq. 4.7, pois o valor do fator de escala  $\Phi$  é adimensional, no caso contrário, se o valor do momento desejado é positivo a raiz deve ser positiva.

Como já visto na Fig. 19 apenas um atuador permanecerá no limite de atuação em um intervalo do ângulo  $\theta$ , sendo este o atuador que promoverá a máxima capacidade de força neste intervalo. A condição do erro  $E_M$  determina, desta forma, quais das raízes está promovendo a máxima capacidade de força, onde o erro entre o momento desejado e o momento atual, dado pela Eq. 4.7, seja o mais próximo de zero ou igual a zero. Encontrada a raiz calcula-se a máxima capacidade de força  $F_{app}$  para o valor de  $\theta$ .

---

**Algoritmo 2:** Algoritmo para cálculo de  $F_{app}$  - Método proposto.

---

**Entrada:**

Definir os valores do intervalo de  $m_z$ ;

Definir os valores do vetor de torques máximos  $\tau_{i_{max}}$ ;

Definir o intervalo do ângulo  $\theta$ ;

Para a postura do robô desejada calcular a matriz J;

Definir o Erro:  $E_M \rightarrow \infty$ ;

**Início**

**Para** cada valor de  $m_z$  **faça**;

**Para** cada valor de  $\theta$  **faça**;

Inicializar  $E_M$ ;

Calcular os torques  $\tau_i$  para gerar a força unitária;

Calcular os valores de  $\kappa_{i,1}$  e  $\kappa_{i,2}$ ;

**Para** Cada valor de  $\kappa$  **faça**;

Calcular  $\tau_i$ ;

Calcular o  $\Phi$ ;

Calcular  $F_{app}$ ;

**SE**  $m_z < 0$  E  $\kappa < 0$  OU  $m_z > 0$  E  $\kappa > 0$ ;

**SE**  $m_z - m_{z_{atual}} \leq E_M$ ;

Armazenar  $F_{app}$ ;

Armazenar  $E_M = m_z - m_{z_{atual}}$ ;

**Fim SE**

**Fim SE**

**Fim Para**

**Fim Para**

**Fim Para**

**Fim**

Saída:  $F_{app}$

---

Fonte: do Autor.

### 4.3 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

Neste capítulo apresentou-se o método do Fator de Escala desenvolvido por (NOKLEBY et al., 2005) para o cálculo da máxima capacidade de força de um manipulador robótico. O polígono da capacidade de força do manipulador 3R obtido na Fig. 18 é válido para aplicações onde o momento aplicado/suportado pelo efetuador final do manipulador seja igual a zero. O método do fator de escala demonstra ser uma ferramenta muito útil na determinação da capacidade de força de manipuladores robóticos. Assim, é possível avaliar as aplicações dos maipuladores em função de suas capacidades de força.

Em função do método de Nokleby restringir algumas aplicações, tais como, presença de momentos no efetuador final durante a realização da tarefa, propôs-se uma generalização do método. Através desta generalização, pode-se determinar a máxima capacidade de força dos manipuladores quando um momento é aplicado/suportado pelo efetuador final do manipulador. Esta generalização permite avaliar outras aplicações do método do fator de escala. Os resultados da aplicação da generalização do método do fator de escala são demonstrados no capítulo 5.



## 5 CASOS DE ESTUDO

Neste capítulo são apresentados os resultados da aplicação do método do fator de escala de Nokleby et al. (2005) e do método proposto para determinação da capacidade de força de manipuladores.

No primeiro caso, os resultados da aplicação do método do fator de escala de Nokleby et al. (2005) são apresentados. Para a simulação, um manipulador 3R planar realiza uma tarefa aplicando apenas forças (momento nulo), quando em contato com o meio. Com base nestes resultados, são apresentados os resultados da aplicação do método proposto no caso 2.

O método para determinação da capacidade de força-momento proposto é apresentado no estudo de caso 2 com um manipulador 3R planar. As simulações realizadas levam em conta forças e momentos durante a interação da ferramenta acoplada ao efetuador final do manipulador com o meio. Aplicando-se este método obteve-se o polígono e o polítopo da capacidade de força do manipulador 3R.

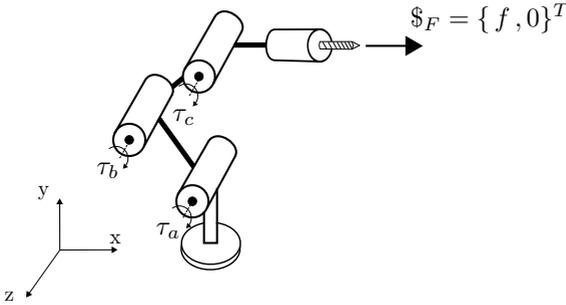
O caso 3 compreende a determinação da capacidade de força de um SRC composto por dois manipuladores 3R planares através do método de Nokleby et al. (2005). Obteve-se os polígonos da capacidade de força dos dois manipuladores e, utilizando-se uma estratégia da análise da força total que os manipuladores aplicam/suportam, permitiu-se obter um balanceamento estático do SRC.

Como aplicação final, a determinação da capacidade de força de um SRC espacial é apresentada. Neste caso, os manipuladores seriais ABB IRB 140 e o ABB IRB 1600 realizam uma tarefa de forma cooperativa. Neste estudo o manipulador ABB IRB 140 aplica a força através de uma ferramenta acoplada em seu efetuador final e o manipulador ABB IRB 1600 recebe a força através de uma peça que está fixa em seu efetuador final.

### 5.1 CASO 1: ROBÔ 3R APLICANDO FORÇAS NO MEIO (MOMENTO NULO)

O caso 1, um manipulador 3R Planar ( $\lambda = 3$ ), ilustrado na Fig. 20, realiza uma tarefa simulando apenas forças (momento nulo) quando em contato com o meio. Neste caso, o efetuador final do manipulador está aplicando uma força  $(f_x, f_y)$  no meio, com momento  $m_z$  igual à zero, como mostra a heliforça  $\$F$  apresentada na Fig. 20. Esta suposição faz-se necessária no primeiro instante devido a restrição do método do fator de escala de Nokleby et al. (2005).

Figura 20 – Caso 1: Manipulador 3R aplicando forças no meio (momento nulo).



Fonte: do Autor.

Para a determinação da capacidade de força do manipulador 3R, primeiramente resolve-se a cinemática direta pelo método de Helicoides Sucessivos (TSAI, 1999; SIMAS, 2008), permitindo obter a posição e orientação do efetuador final do manipulador, bem como a determinação das heliforças da solução estática do problema (a solução completa pode ser vista no Apêndice A). A seguir resolve-se as nove etapas do método de Davies (CAZANGI, 2008; MEJIA, 2012; ACEVEDO, 2012), obtendo na etapa final as equações de restrição para o cálculo dos torques dos atuadores do manipulador 3R (a solução é apresentada no Apêndice B). Por final determina-se a capacidade de força do manipulador utilizando-se o método do Fator de Escala de Nokleby et al. (2005).

Utilizando-se o método do fator de escala apresentado na seção 4.1, pode-se determinar qual é a máxima força a ser aplicada/suportada pelo efetuador final do manipulador sem extrapolar os limites de saturação dos torques dos atuadores.

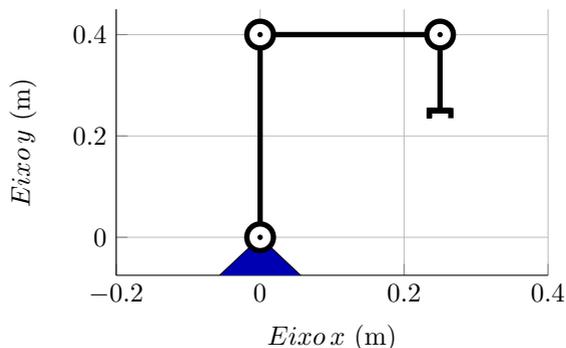
Podemos reescrever a equação B.21 (Apêndice B) como:

$$\begin{Bmatrix} \tau_a \\ \tau_b \\ \tau_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_y & p_x & 1 \\ (-p_y + b_y) & (p_x - b_x) & 1 \\ (-p_y + c_y) & (p_x - c_x) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Os estudos sobre a capacidade de força-momento do manipulador 3R conduzidos por Mejia et al. (2014) servem como referência para os resultados obtidos com a metodologia proposta.

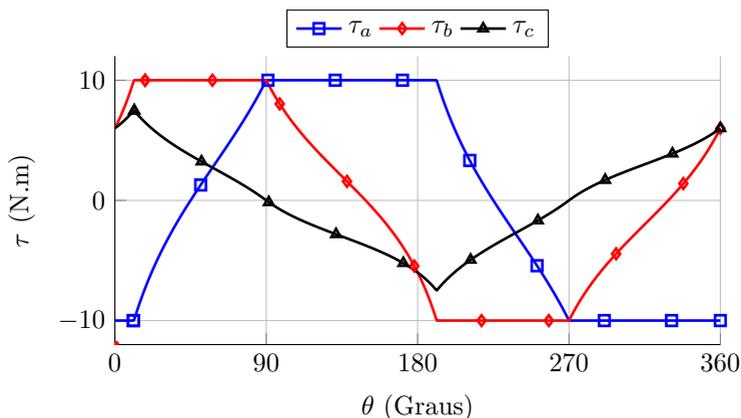
Para a simulação da estática do manipulador 3R, utilizou-se como comprimentos dos elos  $L_1 = 0,4\text{ m}$ ,  $L_2 = 0,25\text{ m}$  e  $L_3 = 0,15\text{ m}$ . Os ângulos de juntas  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  respectivamente,  $\pi/2$ ,  $-\pi/2$  e  $-\pi/2$ . Os torques dos atuadores  $\tau_a = \tau_b = \tau_c = \pm 10\text{ Nm}$ . A Fig. 21 ilustra a postura do manipulador 3R na posição desejada.

Figura 21 – Postura do manipulador 3R.



Fonte: do Autor.

Utilizando-se o método do fator de escala, foi obtido o torque máximo permissível em cada uma das juntas na direção de aplicação da força resultante do efetuador final do manipulador, sem ultrapassar seu limite de saturação. Os resultados são mostrados na Fig. 22. Nota-se que os torques dos atuadores não ultrapassam o valor máximo permitido ( $\tau_{max}$ ) em função do fator de escala  $\Phi$ .

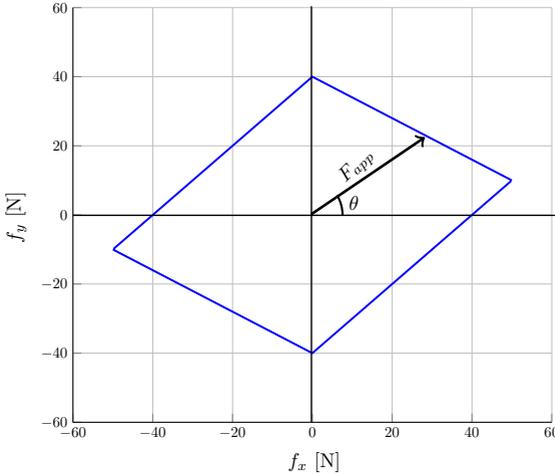
Figura 22 – Torques das juntas a, b e c do robô 3R ( $m_z = 0$ ).

Fonte: do Autor.

Encontrado o máximo valor de torque permissível em cada junta, é possível calcular a máxima capacidade de força do manipulador. A Fig. 23 apresenta o polígono da máxima capacidade de força do manipulador 3R, na postura da Fig. 21. Este polígono representa a máxima força que o

manipulador pode aplicar/suportar do meio nas direções  $x$  e  $y$  do sistema de coordenadas de referência, sem ultrapassar o torque de saturação de cada junta.

Figura 23 – Polígono da máxima capacidade de força do manipulador 3R ( $m_z = 0$ ).



Fonte: do Autor.

O polígono da máxima capacidade de força obtido utilizando o método de Nokleby et al. (2005), se limita a algumas aplicações, tais como, a não presença de momentos durante a realização da tarefa. Entretanto, os resultados obtidos até agora, servem como base de comparação para os resultados que foram obtidos utilizando-se a generalização do método, desenvolvido no Capítulo 4 e apresentado no **Caso 2**.

## 5.2 CASO 2: ROBÔ 3R APLICANDO FORÇAS E MOMENTOS NO MEIO

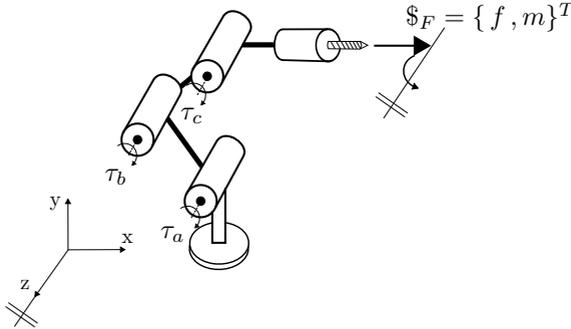
Durante a interação do efetuador final do manipulador com o meio, surgem forças e momentos de contato, aplicadas no meio ou suportadas pelo efetuador final. Um exemplo deste tipo de aplicação é a operação de furação robotizada. Durante a interação da ferramenta de usinagem, surgem forças de contato, estas forças podem ser medidas através de um sensor de força ou calculadas através de um modelo matemático (CAMPOS, 2004).

Como este caso está trabalhando-se com um modelo planar, considera-se que durante a interação do robô com o meio as forças sejam direcionadas no plano  $x$  e  $y$ , ou seja,  $(f_x$  e  $f_y)$  e também um momento em torno do eixo

$z$  ( $m_z$ ).

A Fig. 24 ilustra o problema do Caso 2. Nota-se que, para este caso a parcela de momento da heliforça do efetuador final não é nula.

Figura 24 – Caso 2: Robô 3R com forças e momentos.



Fonte: do Autor.

A solução da estática e cinemática deste manipulador segue o mesmo procedimento apresentado no caso 1, portanto a Eq. B.21 (Apêndice B) pode ser reescrita da seguinte forma:

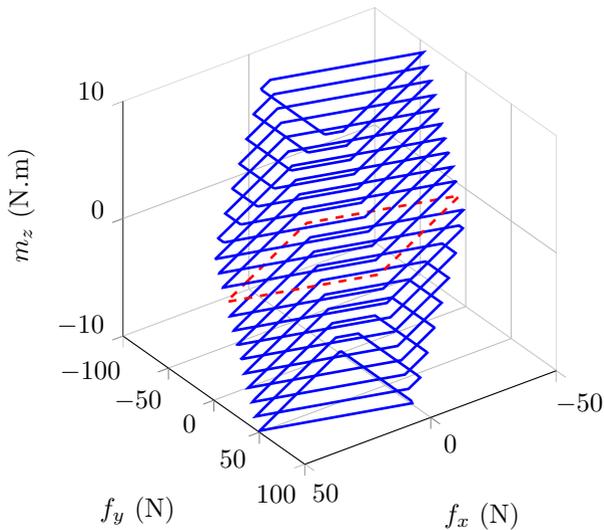
$$\begin{Bmatrix} \tau_a \\ \tau_b \\ \tau_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_y & p_x & 1 \\ (-p_y + b_y) & (p_x - b_x) & 1 \\ (-p_y + c_y) & (p_x - c_x) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ \Phi \kappa \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Os resultados gráficos são obtidos utilizando-se a mesma postura estabelecida no caso 1, seção 5.1 (Fig. 21). Como previamente mostrado na seção anterior, a máxima capacidade de força do efetuador final do manipulador é uma função do ângulo de direção da força ( $\phi$ ) e do momento desejado ( $m_z$ ). Para a determinação da capacidade de força do manipulador 3R do caso 2, utiliza-se como base a Eq. 5.2.

Agora variando-se o momento  $m_z$  de um valor  $[-m_{max}; m_{max}] = [-10 Nm; 10 Nm]$  e aplicando-se o método proposto na seção 4.2 é possível obter o polígono da capacidade de força do manipulador 3R, apresentado na Fig. 25. Note que o polígono da capacidade de força é obtido como um conjunto de polígonos da capacidade de força individuais em função do momento  $m_z$ .

O polígono em vermelho da Fig. 25 é determinado para o instante em que o momento  $m_z$  é igual a zero, portanto, é o mesmo polígono da Fig. 23, apresentado no caso 1. Desta forma, consegue-se atingir os mesmos resultados com o método proposto e com o método de Nokleby et al. (2005), porém considerando também a parcela de momento da heliforça do efetuador final diferente de zero.

Figura 25 – Polítopo da máxima capacidade de força do manipulador 3R.



Fonte: do Autor.

Avaliando-se os resultados obtidos do polítopo da capacidade de força, verifica-se que, com a inserção da parcela de momento no efetuador final do manipulador a capacidade de força diminui, o que pode ser visto também nas equações obtidas pelo método de Davies (Apêndice B), rerepresentadas nas Eqs 5.3, 5.4 e 5.5. Nota-se que a parcela de momento, é diretamente proporcional ao valor de torque dos atuadores.

$$\tau_a = f_x (p_y - a_y) - f_y (p_x - a_x) - m_z \quad (5.3)$$

$$\tau_b = f_x (p_y - b_y) - f_y (p_x - b_x) - m_z \quad (5.4)$$

$$\tau_c = f_x (p_y - c_y) - f_y (p_x - c_x) - m_z \quad (5.5)$$

Através do método proposta, um número maior de aplicações pode ser alcançado para a determinação da capacidade de força-momento de manipuladores. Como a grande maioria das aplicações na área de usinagem, as quais, possuem além das forças, um momento torçor gerado pelo contato da ferramenta com o meio.

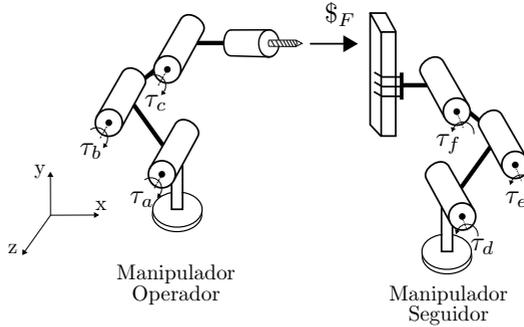
Na próxima seção apresenta-se o modelo do SRC com dois manipuladores 3R planares.

### 5.3 CASO 3 - SRC PLANAR

No SRC apresentado na Fig. 26 o manipulador da esquerda, chamado de operador, possui fixo na extremidade do efetuador a ferramenta de usinagem. Este manipulador é responsável pela aplicação da força, ou seja, a tarefa a ser realizada.

O manipulador da direita, chamado de manipulador seguidor, possui fixo na extremidade do efetuador a peça onde será realizada a tarefa. Portanto, este manipulador recebe a carga aplicada pelo manipulador operador. No ponto de contato entre os dois manipuladores, surgem as forças de contato, apresentadas na heliforça  $\$F$ .

Figura 26 – Caso 3: SRC planar.



Fonte: do Autor.

Os torques dos atuadores dos manipuladores operador e seguidor são determinados em função da posição da heliforça  $\$F$ . Para isso, realiza-se a transformação da heliforça utilizando os conceitos apresentados no Capítulo 3.

A solução estática pelo método de Davies é apresentada no Capítulo 3. Utilizando-se o método do fator de escala com o momento em torno do eixo  $z$  igual à zero, pode-se reescrever as Eqs. 3.34 e 3.35 da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \tau_a \\ \tau_b \\ \tau_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1_{op}} & a_{2_{op}} & a_{3_{op}} \\ a_{4_{op}} & a_{5_{op}} & a_{6_{op}} \\ a_{7_{op}} & a_{8_{op}} & a_{9_{op}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_d \\ \tau_e \\ \tau_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1_{fol}} & a_{2_{fol}} & a_{3_{fol}} \\ a_{4_{fol}} & a_{5_{fol}} & a_{6_{fol}} \\ a_{7_{fol}} & a_{8_{fol}} & a_{9_{fol}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

Os termos  $a_1 \dots a_9$  das Eqs. 5.6 e 5.7 são as equações de restrição obtidas através do método de Davies para cada manipulador, operador (op) e seguidor (fol), como apresentado no Capítulo 3.

A postura adotada na simulação do SRC é mostrada na Fig. 27. A Tab. 5 mostra os dados dos manipuladores.

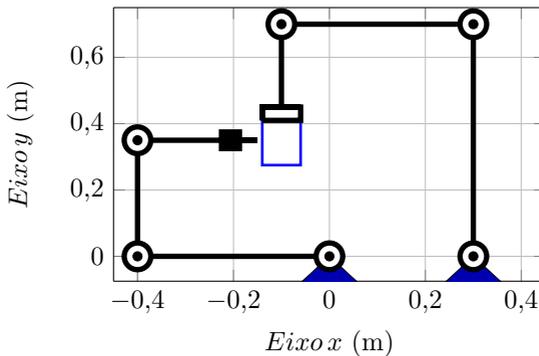
Tabela 5 – Dados dos manipuladores do SRC Planar.

	Operador	Seguidor
Ângulo de juntas $\theta_i$ (rad)	$(\pi; -\pi/2; -\pi/2)$	$(\pi/2; \pi/2; \pi/2)$
Comprimento dos elos $L_i$ (m)	$(0,40; 0,35; 0,25)$	$(0,70; 0,40; 0,25)$
Torques máximos $\tau_{i_{max}}$ (Nm)	$(\pm 5; \pm 5; \pm 5)$	$(\pm 10; \pm 10; \pm 10)$

Fonte: do Autor.

Neste exemplo, para ilustrar o método do fator de escala, utiliza-se dois manipuladores com capacidades de torque nas juntas diferentes, sendo o manipulador operador com capacidade de torque menor, como é mostrado na Tab. 5.

Figura 27 – Postura dos manipuladores do SRC planar.



Fonte: do Autor.

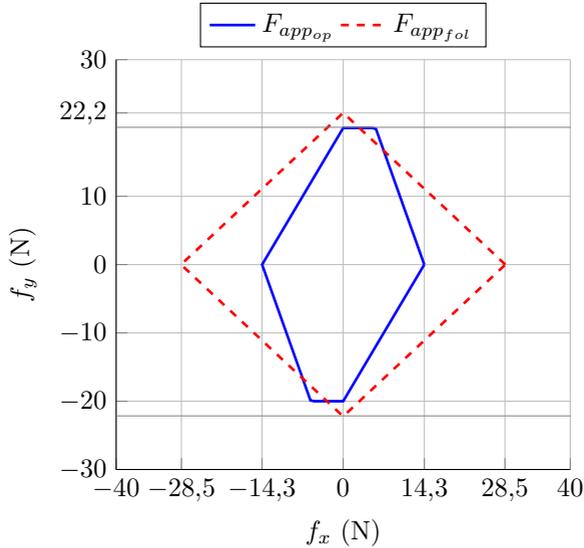
A base do manipulador operador está posicionada na origem  $(0;0)$ , e a base do manipulador seguidor está afastada 0,3 m no sentido positivo do eixo  $x$ , como mostrado na Fig. 27. As coordenadas  $(x;y)$  em metros da localização do efetuador final do manipulador operador são  $(-0,15;0,35)$  e do efetuador do manipulador seguidor  $(-0,10;0,45)$ .

A máxima capacidade de força do manipulador operador e seguidor para a posição apresentada é determinada, sendo o ângulo de aplicação da força  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $m_z = 0$ , como apresentado na Fig. 28.

A linha sólida em azul representa a capacidade de força do manipulador operador, enquanto que a linha pontilhada em vermelho representa a capacidade de força do manipulador seguidor. Nota-se que, para esta posição o manipulador operador apresenta uma capacidade de força na direção  $x$  de

$\pm 14,3\text{N}$ , menor do que a capacidade de força do manipulador seguidor na direção  $x$  que é de  $\pm 28,5\text{N}$ . O mesmo acontece na direção  $y$ , cujas forças são  $\pm 20\text{N}$  e  $\pm 22,2\text{N}$ , respectivamente, para o manipulador operador e seguidor.

Figura 28 – Mapa da máxima capacidade de força do SRC planar.



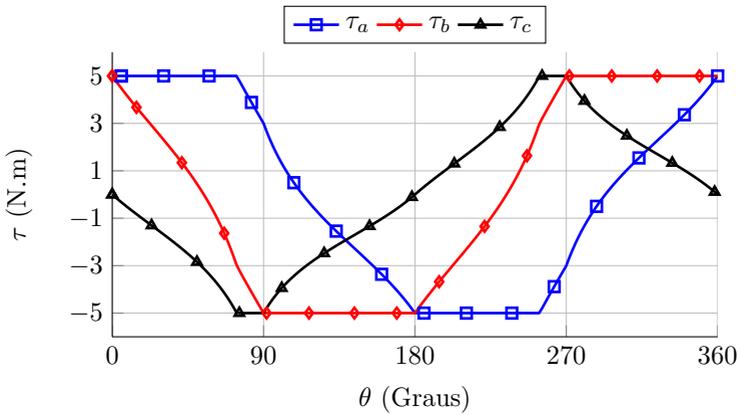
Fonte: do Autor.

As Figs. 29 e 30 mostram a distribuição dos torques dos atuadores para a capacidade de força apresentada na Fig. 28. Nesta situação os manipuladores pertencentes ao SRC não se encontram em equilíbrio estático, podendo o manipulador de capacidade menor sofrer um deslocamento no efetuator, ou até mesmo uma quebra da ferramenta. Nota-se que nas Figs. 29 e 30 apenas um atuador está em seu limite de saturação, demonstrando a funcionabilidade do método para determinação da capacidade de força dos manipuladores.

Para que ocorra o equilíbrio de forças entre os dois manipuladores, deve-se ajustar a força máxima ( $F_T$ ) aplicada ou suportada por cada efetuator final dos manipuladores (Eq. 4.2), encontrando a *intersecção* entre os mapas da capacidade de força. O equilíbrio estático é determinado em função do manipulador que possui a menor capacidade de força. Um exemplo do cálculo de  $F_{T_{int}}$  pode ser visto no Algoritmo 3.

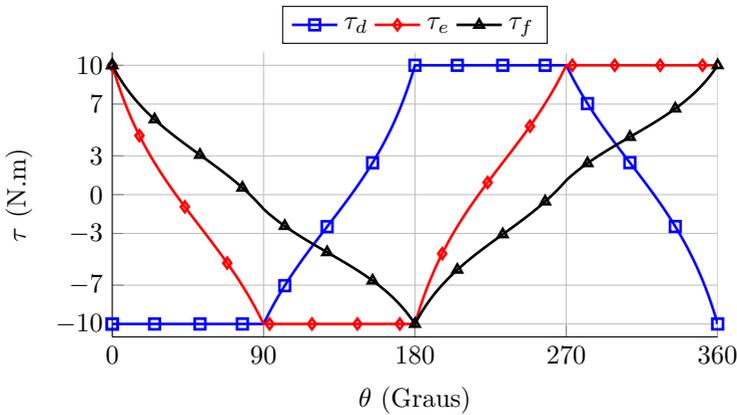
A Fig. 31 apresenta a nova distribuição de torques dos atuadores do manipulador seguidor em função da capacidade de força do manipulador operador. As linhas pontilhadas representam os torques dos atuadores do manipulador trabalhando sem cooperação e, as linhas sólidas são os torques dos atuadores para o manipulador atuando de forma cooperativa.

Figura 29 – Torques dos atuadores do manipulador operador.



Fonte: do Autor.

Figura 30 – Torques dos atuadores do manipulador seguidor.

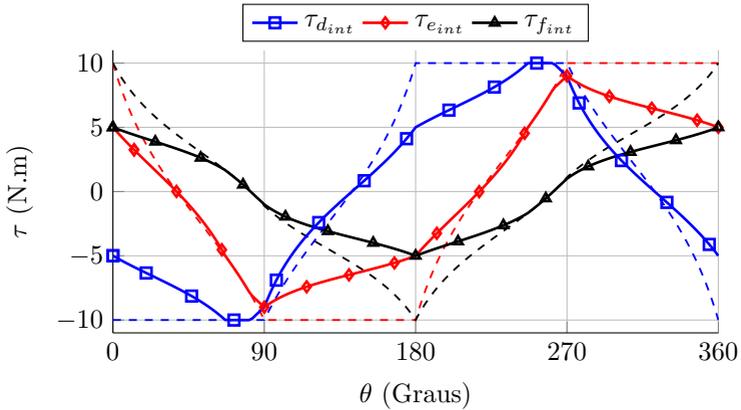


Fonte: do Autor.

Da mesma maneira pode-se determinar o mapa da capacidade de força do sistema em equilíbrio. Utilizando-se agora a força total da intersecção,  $F_{T_{int}}$ , entre os mapas da capacidade de força, calculada através do Algoritmo 3. A Fig. 32 apresenta o mapa da capacidade de força dos dois manipuladores, sendo que a intersecção entre os mapas é mostrada na linha tracejada em verde.

Através da análise da força total de cada manipulador, é possível encontrar o equilíbrio estático entre os manipuladores pertencentes ao SRC, o que

Figura 31 – Torques dos atuadores do manipulador seguidor com  $F_T$  ajustado.



Fonte: do Autor.

permite não só utilizar manipuladores com capacidade de carga diferentes, mas como equilibrar SRCs composto por manipuladores iguais, visto que, a capacidade de carga é dependente da postura do manipulador.

---

**Algoritmo 3:** Algoritmo para cálculo de  $F_{T_{int}}$ .

---

**Entrada:**  $F_{T_{op}}$ ,  $F_{T_{fol}}$ ,  $\tau_{op}$ ,  $\tau_{fol}$ ,  $A_{N_{op}}$  e  $A_{N_{fol}}$

**Saída:**  $F_{T_{int}}$

**Início**

Calcular a força total  $F_T$  de cada manipulador;

**SE**  $F_{T_{op}} > F_{T_{fol}}$

Calcular  $\tau_{op}$  com a heliforça  $F_{T_{fol}}$ ;

Calcular  $F_{T_{op}}$ ;

**SE NÃO SE**  $F_{T_{op}} < F_{T_{fol}}$

Calcular  $\tau_{fol}$  com a heliforça  $F_{T_{op}}$ ;

Calcular  $F_{T_{fol}}$ ;

**SE NÃO**  $F_{T_{op}} = F_{T_{fol}}$

$F_{T_{op}}$  e  $F_{T_{fol}}$  permanecem iguais;

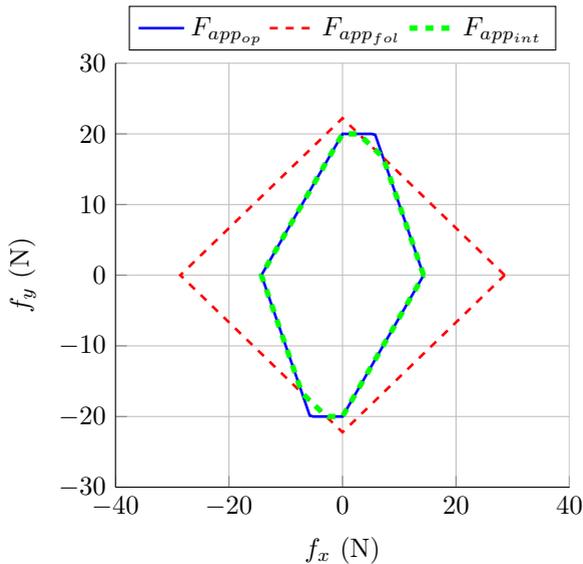
**Fim SE**

**Fim**

---

Fonte: do Autor.

Figura 32 – Mapa da máxima capacidade de força do manipulador operador, seguidor e do equilíbrio de forças.



Fonte: do Autor.

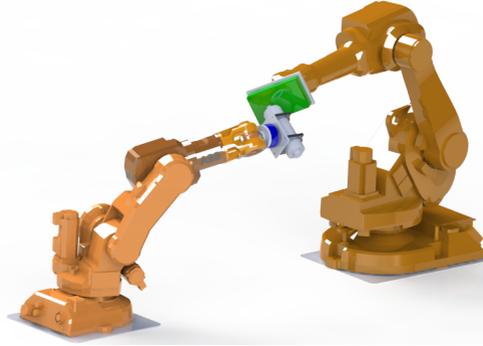
É importante ressaltar que o método do fator de escala de Nokleby et al. (2005) é facilmente aplicado para a solução de SRCs, o que até o momento não encontrou-se aplicações em publicações anteriores. Porém, para possibilitar a utilização do método, é necessário realizar a análise da força total que cada manipulador aplica/suporta do meio, permitindo encontrar a cooperação entre os dois manipuladores.

#### 5.4 CASO 4 - SRC ESPACIAL

O Laboratório de Robótica prof. Raul Guenther possui entre seus equipamentos disponíveis um manipulador ABB IRB 140 e um manipulador ABB IRB 1600. Neste estudo avalia-se a capacidade de força destes dois manipuladores

espaciais. Neste caso de estudo, o manipulador operador ABB IRB 140 possui a ferramenta de usinagem fixa na extremidade do efetuador final e o manipulador seguidor ABB IRB 1600 possui a peça a ser realizada a tarefa fixa na extremidade do efetuador final. As informações técnicas dos manipuladores ABB IRB 140 e ABB IRB 1600 podem ser visualizadas, respectivamente, no anexo A e anexo B. A Fig. 33 apresenta o SRC com os dois manipuladores espaciais.

Figura 33 – SRC espacial.



Fonte: do Autor.

Para a determinação da capacidade de força do SRC empregou-se o método do fator de escala de Nokleby. Portanto, a heliforça que representa as ações de contato é determinada pela Eq. 5.8.

$$\$_F = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

As forças  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$  são decompostas observando o contato como um ponto esférico, e levando-se em conta uma força total ( $F_T$ ) aplicada/suportada pelo efetuador final unitária (1 N). A heliforça da Eq. 5.8 pode ser reescrita da seguinte forma:

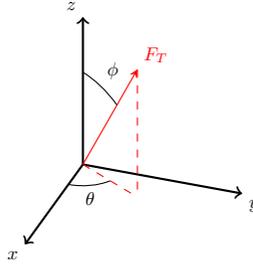
$$\$_F = \begin{Bmatrix} \text{sen}(\phi) \cos(\theta) \\ \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta) \\ \cos(\phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

onde  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\phi \in [0, \pi]$ , como apresentado na Fig. 34.

Os momentos  $m_x$ ,  $m_y$  e  $m_z$  da heliforça  $\$_F$  são considerados nulos, imposição feita em função do método de Nokleby.

A Fig. 35 apresenta o grafo das ações do SRC espacial. As heliforças do manipulador operador são representadas por  $\$_a$ ,  $\$_b$ ,  $\$_c$ ,  $\$_d$ ,  $\$_e$ ,  $\$_f$  e  $\$_{F_{op}}$ ,

Figura 34 – Sistema de coordenadas esférico.



Fonte: do Autor.

totalizando um grau de restrição igual à 42. Da mesma forma, o manipulador seguidor apresenta as heliforças,  $\$g$ ,  $\$h$ ,  $\$i$ ,  $\$j$ ,  $\$k$ ,  $\$l$  e  $\$F_{fol}$ , totalizando um grau de restrição igual à 42. Assim, o grau de restrição bruto do sistema é 84. Como é apresentado no grafo das ações, o sistema possui 14 corpos. Assim, o número de cortes é igual à 13 e o grau de restrição líquido do sistema será igual à 6.

Para solucionar a estática do SRC, primeiro selecionam-se como variáveis primárias os torques dos atuadores do manipulador operador. A Eq. 5.10 apresenta a solução estática para os torques do manipulador operador.

Selecionando-se como variáveis primárias os torques dos atuadores do manipulador seguidor, obtém-se a Eq. 5.11.

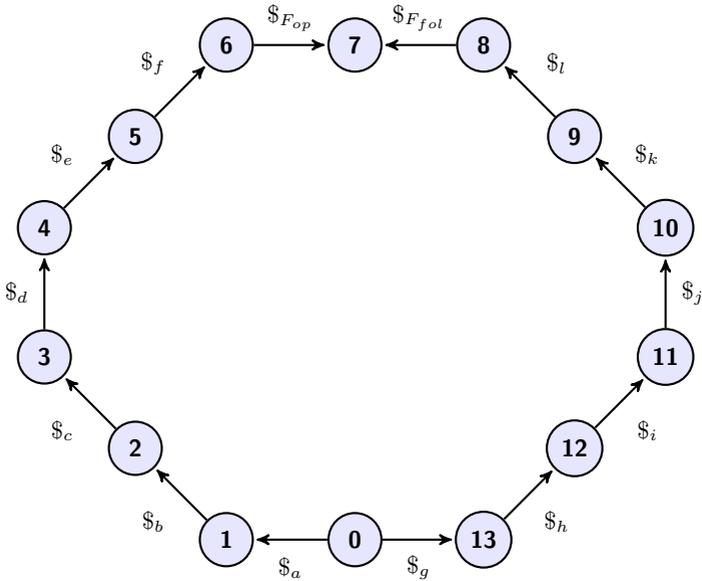
$$\{\vec{\Psi}_s\}_{78,1} = - \left[ \hat{A}_{Ns}^{-1} \right]_{78,78} \left[ \hat{A}_{Np} \right]_{78,6} \begin{Bmatrix} \tau_a \\ \tau_b \\ \tau_c \\ \tau_d \\ \tau_e \\ \tau_f \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\{\vec{\Psi}_s\}_{78,1} = - \left[ \hat{A}_{Ns}^{-1} \right]_{78,78} \left[ \hat{A}_{Np} \right]_{78,6} \begin{Bmatrix} \tau_g \\ \tau_h \\ \tau_i \\ \tau_j \\ \tau_k \\ \tau_l \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

Através das Eqs. 5.10 e 5.11 pode-se aplicar o método do fator do escala para o cálculo da capacidade de força do SRC.

Para a simulação da capacidade de força do SRC, utilizou-se como torques dos atuadores dos dois manipuladores o valor de  $\pm 10 Nm$ . Os dados de torques dos servo-motores e as relações de transmissão de cada eixo não são disponibilizados pelo fabricante. Os resultados encontrados nas si-

Figura 35 – Grafo das ações do SRC espacial.



Fonte: do Autor.

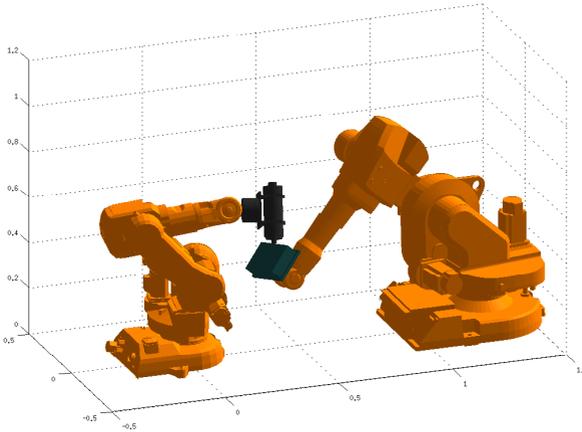
mulações demonstram que para o valor de  $\pm 10 Nm$  a capacidade de carga fica próxima a dos manipuladores que é de 6kg.

Os comprimentos dos elos do manipulador operador (unidade em metros) são,  $L_1 = 0,352$ ,  $L_2 = 0,07$ ,  $L_3 = 0,36$ ,  $L_4 = 0,38$ ,  $L_5 = 0,065$  e do manipulador seguidor  $L_1 = 0,486$ ,  $L_2 = 0,15$ ,  $L_3 = 0,475$ ,  $L_4 = 0,575$ ,  $L_5 = 0,065$ . As coordenadas  $(x; y; z)$  da base do manipulador operador estão definidas na origem  $(0; 0; 0)$  e as coordenadas da base do manipulador seguidor em  $(1,3; 0; 0)$  (unidade em metros). Os ângulos das juntas (em graus) do manipulador operador e seguidor são respectivamente  $\theta_a = 0$ ,  $\theta_b = -87$ ,  $\theta_c = 85$ ,  $\theta_d = -30$ ,  $\theta_e = 16$ ,  $\theta_f = 30$ , e  $\theta_g = 190$ ,  $\theta_h = -76$ ,  $\theta_i = 135$ ,  $\theta_j = 180$ ,  $\theta_k = 90$  e  $\theta_l = 180$ . A postura inicial com as descrições dos parâmetros helicoidais e identificação dos comprimentos dos elos podem ser vistos nos Apêndices D e E.

A capacidade de força do SRC espacial é definida a partir da postura da Fig. 36. O mapa da capacidade de força do manipulador ABB IRB 140 e do manipulador ABB IRB 1600 para a postura descrita anteriormente podem ser vistos, respectivamente, nas Figs. 37 e 38.

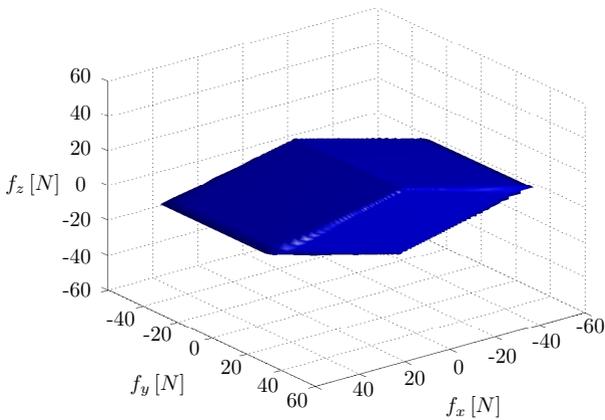
Como pode ser visto nas Figs. 37 e 38 o manipulador ABB IRB 140 apresenta uma capacidade de força maior, por apresentar um poliedro de maiores dimensões quando comparado com o manipulador ABB IRB 1600.

Figura 36 – Postura dos manipuladores do SRC espacial.



Fonte: do Autor.

Figura 37 – Poliedro de forças do manipulador ABB IRB 140.

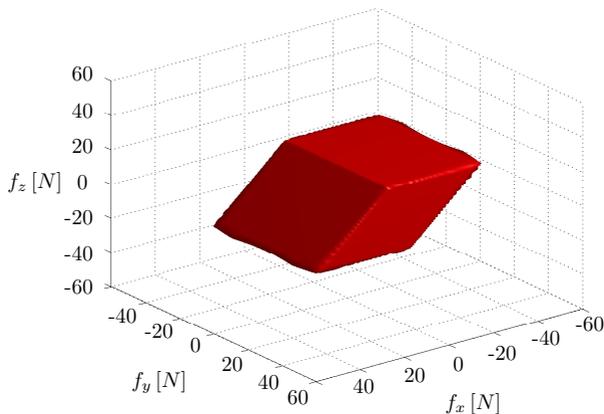


Fonte: do Autor.

A força máxima que o manipulador IRB 140 aplica na direção  $x$  é de  $\pm 54\text{N}$ , enquanto que a do manipulador IRB 1600 é de  $\pm 38,3\text{N}$ .

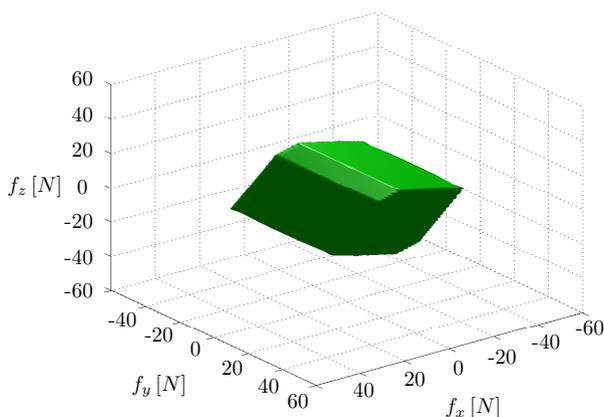
Para equilibrar o sistema cooperativo, calculam-se as forças aplicadas/suportadas pelos efetuadores dos manipuladores, como mostrado no Algoritmo 3. A Fig. 39 apresenta o mapa da capacidade de força do sistema com o equilíbrio de forças pela intersecção dos poliedros das Figs. 37 e 38.

Figura 38 – Poliedro de forças do manipulador ABB IRB 1600.



Fonte: do Autor.

Figura 39 – Poliedro de forças do SRC espacial (equilíbrio de forças).



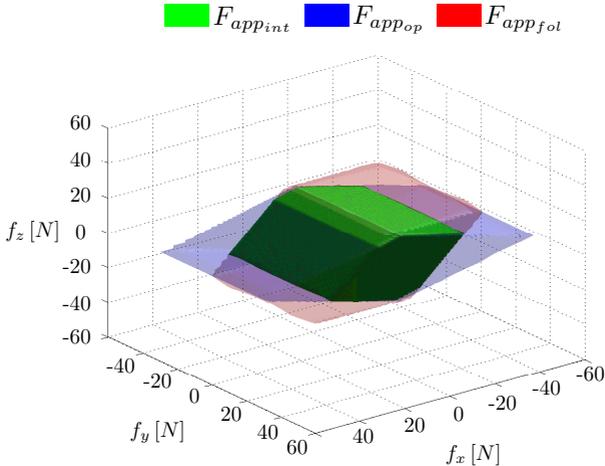
Fonte: do Autor.

A Fig. 40 mostra os três mapas de forças, observa-se que o mapa do equilíbrio estático entre os manipuladores é justamente a intersecção entre os dois mapas de forças dos manipuladores IRB 140 e IRB 1600. Como forma de melhor visualizar a intersecção, a força em  $f_z$  é igualada à zero, como mostra a Fig. 41.

Na Fig. 41, são apresentadas as forças máximas na direção  $x$  do sistema de coordenadas do manipulador operador e seguidor citadas anteriormente.

A intersecção entre os dois poliedros descreve a capacidade de força que o SRC pode aplicar/suportar do meio nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , considerando os momentos  $m_x$ ,  $m_y$  e  $m_z$  nulos.

Figura 40 – Poliedros de forças do SRC espacial.



Fonte: do Autor.

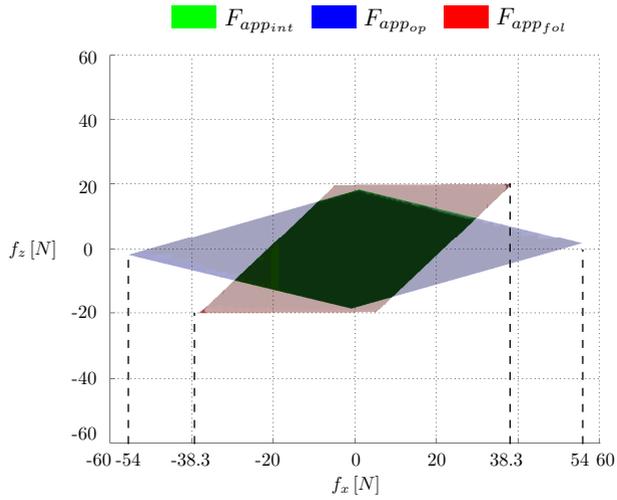
As Figuras. 42 e 43 apresentam a distribuição dos torques dos atuadores dos manipuladores ABB IRB 140 e ABB IRB 1600 para o instante em que o ângulo  $\phi = \pi/2$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

As linhas pontilhadas identificam os torques dos atuadores para os manipuladores trabalhando sem cooperação, já as linhas sólidas os torques dos atuadores para o sistema trabalhando de forma cooperativa. As cores dos atuadores respeitam a mesma ordem, para sem cooperação (linha pontilhada) e com cooperação (linha sólida). O manipulador operador, IRB 140, reduz os valores de torques para atingir o equilíbrio estático, sendo o atuador do eixo  $a$  o que se encontra mais carregado, ou próximo do limite de saturação.

Os resultados apresentados no caso de estudo 4, SRC espacial, foram obtidos através da elaboração de uma interface gráfica. A Fig. 44 apresenta a interface gráfica com os dois manipuladores ABB (1).

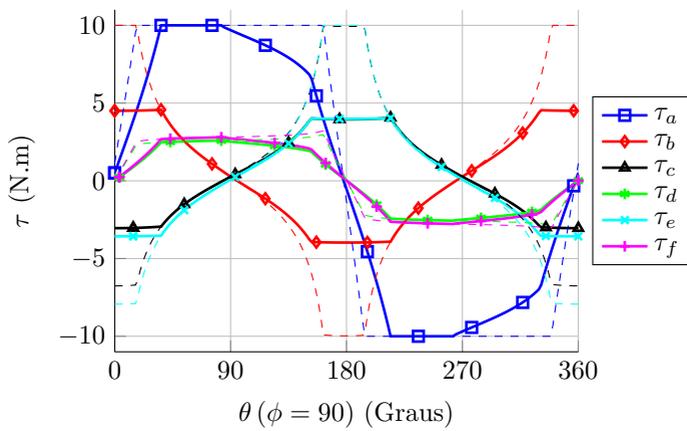
É possível alterar as posições das juntas de cada manipulador através dos *sliders* (2), permitindo, definir a posição dos manipuladores para o cálculo estático. Os torques dos atuadores dos manipuladores são definidos em (3). Executando-se a função Calcular (4) é determinado os mapas das capacidades de força de cada manipulador e do SRC (5) e os mapas das capacidades de atuação do IRB 140 (6) e IRB 1600 (7). Através do botão Gráficos (8) é possível obter os mapas das capacidades de força de cada manipulador individuais e também os mapas das capacidades de atuação.

Figura 41 – Poliedros de forças do SRC espacial ( $f_z = 0$ ).



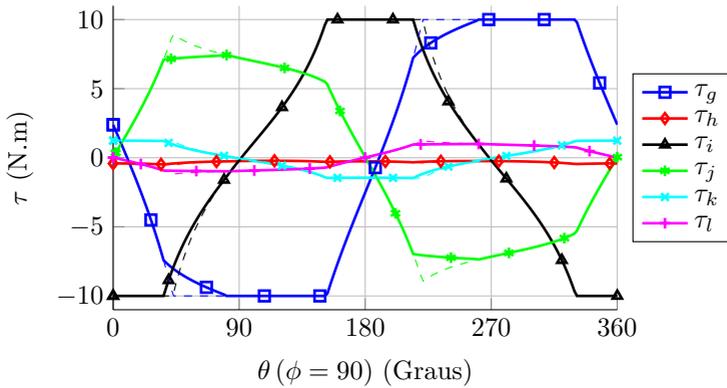
Fonte: do Autor.

Figura 42 – Distribuição dos torques do manipulador ABB IRB 140.



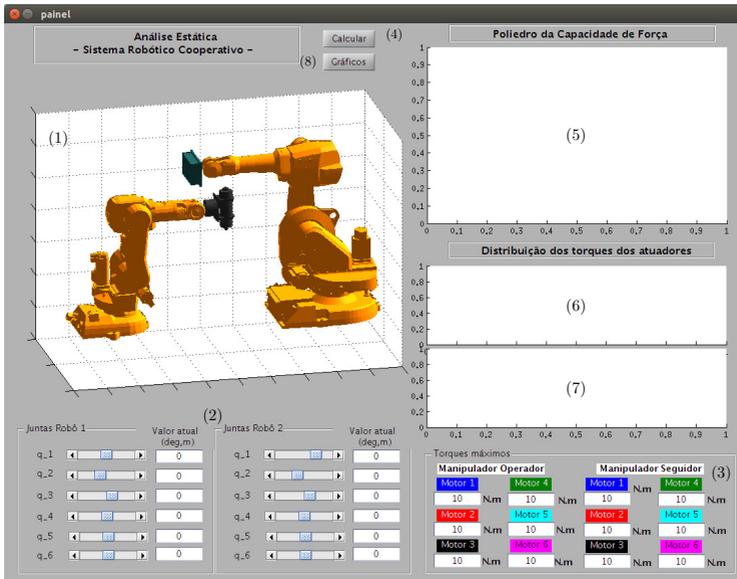
Fonte: do Autor.

Figura 43 – Distribuição dos torques do manipulador ABB IRB 1600.



Fonte: do Autor.

Figura 44 – Interface gráfica do SRC espacial



Fonte: do Autor.

## 5.5 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

Os resultados apresentados no caso 1 coincidem com os apresentados em Nokleby et al. (2005) e Mejia et al. (2014), validando, desta forma, o método do fator de escala.

Porém, o caso 1 considera-se apenas as forças de contato  $f_x$  e  $f_y$  com o meio, atribuindo como zero o momento gerado durante a interação entre o efetuador final do manipulador e o meio. Em função deste caso limitar a aplicação do método, apresentou-se a generalização no caso 2, permitindo, aplica-lo onde ocorra momento no efetuador final do manipulador.

Através da generalização do método de Nokleby et al. (2005) proposto neste trabalho, permitiu-se realizar a otimização de manipuladores robóticos considerando-se forças e momentos no efetuador final. Mostrou-se nesta seção, que pode-se obter os mesmos resultados para o polígono da capacidade de força no instante em que o momento aplicado ou suportado pelo efetuador final é nulo nas duas metodologias, porém, apenas com a generalização do método permitiu-se obter o polítopo da capacidade de força.

Os resultados apresentados nesta seção permitem concluir, que a metodologia de otimização da capacidade de força através do fator de escala também pode ser aplicada a SRCs, o que até o momento, não se utilizou em referências anteriores. O mapa da capacidade de força e bem como o mapa de distribuição dos torques, são resultados diretos da aplicação do método do fator de escala, já a metodologia empregada para realizar a distribuição das forças dos manipuladores é uma proposta realizada neste trabalho.

Os resultados apresentados no caso 4, mostraram que o método do fator de escala foi aplicado com sucesso na determinação da capacidade de força de um SRC espacial. Com a inclusão da análise da força total do efetuador no método, foi possível realizar o equilíbrio estático entre ambos os manipuladores, permitindo, utilizar manipuladores com capacidades de carga diferentes na realização de tarefas cooperativas.



## 6 CONCLUSÕES DO TRABALHO E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

Esta dissertação apresentou um estudo da capacidade de força de Sistemas Robóticos Cooperativos. O método de solução da capacidade de força empregado permitiu obter os mapas das capacidades de força dos manipuladores. A inclusão da análise da força total que o efetuador do manipulador aplica/suporta no meio, permitiu o balanceamento estático entre os manipuladores pertencentes ao SRC.

O objeto da avaliação desta dissertação foi aplicado em dois casos de estudos, o SRC planar e o SRC Espacial.

Considerando o problema da solução estática de SRCs. A utilização da teoria de helicoides juntamente com o método de Davies, demonstrou ser uma eficiente ferramenta para solução deste tipo de problema. A análise do sistema de forma desacoplada, permitiu realizar a inversão da matriz de variáveis secundárias, possibilitando a determinação da estática direta e da estática inversa dos manipuladores pertencentes ao SRC.

Para validação dos resultados quatro estudos foram apresentados. Primeiramente, foi analisado o método da capacidade de força de Nokleby. Com este caso foi possível compreender a ferramenta de análise, verificar os resultados e utilizá-los como comparação aos resultados obtidos na generalização do método do fator de escala. No estudo realizado foi detectado que o método do fator de escala de Nokleby possui algumas restrições com o tipo de aplicação, tais como, a presença de momento no efetuador final. Com o intuito de utilizar-se os manipuladores em aplicações onde no contato com o meio ocorra além das forças um momento sobre o efetuador do manipulador, apresentou-se uma generalização do método do fator de escala. Portanto, o segundo estudo consistiu no desenvolvimento de uma solução da capacidade de força-momento de manipuladores em contato com o meio.

Ao final é apresentado os dois estudos da capacidade de força de SRCs. Os resultados obtidos demonstram que as ferramentas utilizadas são plenamente aplicáveis neste tipo de problema. Com os mapas das capacidades de força dos manipuladores, pode-se avaliar determinadas tarefas onde não se extrapole o limite de saturação dos atuadores.

Para propor o método da capacidade de força de SRCs, muitas análises foram feitas. Se tratando da teoria de helicoides e do método de Davies, o principal fator foi o grau de restrição bruto do sistema, que é crucial na correta determinação das equações de restrição do problema. A utilização de duas heliforças, identificando as ações de cada manipulador com o meio, foi a abordagem que demonstrou melhor resultado, visto que permitiu analisar o sistema de forma desacoplada. Além da transformação de coordenadas helicoidais, foi utilizado a transformação de forças e momentos, permitindo transformar uma heliforça de um manipulador para o outro, o que não apresentou nenhuma modificação do equacionamento atual, visto que, os corpos

são interpretados como sistemas de coordenadas.

Se tratando do método do fator de escala de Nokleby, a aplicação nos SRCs necessitou incluir a análise da força total que o manipulador aplica/suporta do meio. Do modelo SRC planar ao modelo SRC espacial, a principal alteração é dada em função da dimensão do espaço, portanto, a heliforça que indica a direção de aplicação da força é decomposta em função de um sistema de coordenadas esférico. A maior dificuldade nesse modelo é trabalhar com matrizes com muitas linhas e colunas, como no caso do modelo espacial, a matriz das ações com os helicoides secundários é de dimensão  $78 \times 78$ , qualquer descuido na construção da matriz pode levar a um erro. O método proposto não foi aplicado ao problema dos SRCs, visto que é necessário analisar um número maior de raízes ( $\kappa$ ), dificultando principalmente devido ao fator tempo.

A capacidade de força dos manipuladores ABB IRB 140 e ABB IRB 1600 encontradas para o torque máximo dos atuadores de 10 Nm na postura simulada, mostra que os valores obtidos são próximos das forças de usinagem calculadas na Tabela 1. Se tratando apenas da capacidade de força do manipulador, excluindo as interações dinâmicas e a precisão de posicionamento, que este estudo não trata, os dois robôs demonstram capacidade de força para realizar a tarefa de furação. Um estudo aprofundado, considerando a massa dos elos, gravidade, relação de transmissão dos redutores acoplados aos servomotores dos robôs, poderá reproduzir resultados próximos da situação real em que os robôs estão submetidos.

Para concluir, verifica-se que os objetivos deste trabalho, tanto os gerais quanto os específicos, foram alcançados: (1) A metodologia proposta para a determinação da capacidade de força de Sistemas Robóticos Cooperativos em aplicações onde exista o contato com o meio mostrou-se eficaz, comprovado pelas simulações realizadas; (2) A generalização do método do fator de escala para aplicações onde exista momento no efetuator final do manipulador mostrou-se abrangente e útil na determinação da capacidade de força-momento de robôs sujeitos a tais condições; (3) As ferramentas de modelagem estática selecionadas e adaptadas forneceram resultados satisfatórios na modelagem da capacidade de força dos robôs; (4) A análise da força total de cada manipulador pertencente ao SRC, mostrou resultado satisfatório para alcançar o equilíbrio estático entre os manipuladores; (5) Por fim, os casos de estudo realizados serviram de base para que se desenvolvesse um entendimento das influências na capacidade de força de SRCs.

Como propostas para trabalhos futuros, ficam como sugestões:

- Comprovar a viabilidade prática da modelagem proposta, tanto para o modelo cooperativo quanto com o modelo de um único robô;
- Estender a metodologia da capacidade de força-momento proposta para o modelo espacial;
- Avaliar outras técnicas de otimização, otimizando a postura do manipulador para uma posição de máxima capacidade de força-momento;
- Utilizar o método proposta no projeto de robôs, dimensionando eles e atuadores de acordo com a necessidade imposta pela tarefa;
- Inclusão de rigidez e forças gravitacionais no método proposto;
- Incluir efeitos dinâmicos no estudo da capacidade de força.



## REFERÊNCIAS

- ABB-ROBOTICS. *IRB 6660*. Junho 2015. The optimised pre-machining robot. Disponível em: <<http://new.abb.com/products/robotics/industrial-robots/irb-6660-for-pre-machining>>. Acesso em: 22/06/2014.
- ACEVEDO, M. L. R. *Mecanismos com desacoplamento cinetoestático para substituição de atuadores robóticos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2012.
- ALICI, G. A systematic approach to develop system for robotic drilling. *Industrial robot: An International Journal*, p. 389–397, 1999.
- ALTINTAS, Y.; CHAN, P. K. In-process detection and suppression of chatter in milling. *Int. J. Mach. Tools Manufact.*, p. 329–347, 1992.
- BI, S.; LIANG, J. Robotic drilling system for titanium structures. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, p. 767–774, 2011.
- BOEIRA, A. M. G. *Modelagem e simulação das forças na furação com brocas helicoidais a partir de dados obtidos no torneamento de segmentos cilíndricos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.
- BOEIRA, A. M. G.; KUSTER, F.; WEGENER, K.; KNOBLAUCH, R.; MARGOT, R.; SCHROETER, R. B. Contribuições à modelagem de forças na furação com brocas helicoidais. *Congresso Brasileiro de Engenharia de Fabricação, BH, MG, Brasil*, 2009.
- BOTTEMA, O.; ROTH, B. *Theoretical kinematics*. New York: North Holland, 1979.
- CACCAVALE, F.; UCHIYAMA, M. Cooperative manipulators. In: . Springer Handbook of Robotics: Springer Berlin Heidelberg, 2008. p. 701–718.
- CAMPOS, A. A. *Cinemática diferencial de manipuladores empregando cadeias virtuais*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2004.
- CARBONI, A. P. *Análise conceitual de estruturas cinemáticas planas e espaciais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2008.
- CAZANGI, H. R. *Aplicação do método de davies para análise cinemática e estática de mecanismos com múltiplos graus de liberdade*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2008.
- COELHO, R. T.; RODELLA, H. H. T.; MARTINS, V. F.; BARBA, R. An investigation into the use of industrial robots for machining soft and low

- density materials with hsm technique. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.*, vol.33 no.3, Rio de Janeiro, July/Sept. 2011, p. 343–350, 2011.
- CRUZ, F. B. C. *Modelagem, controle e emprego de robôs em processos de usinagem*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2010.
- DAVIDSON, J. K.; HUNT, K. H. *Robots and screw theory: applications of kinematics and statics to robotics*. New York: Oxford University Press Inc., 2004. ISBN 0-19-856245-4 p.
- DAVIES, T. H. Kirchhoff's circulation law applied to multi-loop kinematic chains. *Mechanism and Machine Theory*, v. 16, p. 171–183, 1981.
- DAVIES, T. H. Mechanical networks-i: Passivity and redundancy. *Mechanism and Machine Theory*, v. 18, p. 95–101, 1983.
- DAVIES, T. H. Mechanical networks-ii: Formulae for the degrees of mobility and redundancy. *Mechanism and Machine Theory*, v. 18, p. 103–106, 1983.
- DAVIES, T. H. Mechanical networks-iii: Wrenches on circuit screws. *Mechanism and Machine Theory*, v. 18, p. 107–112, 1983.
- DAVIES, T. H. Freedom and constraint in coupling networks. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C*. Journal of Mechanical Engineering Science: Professional Engineering Publishing, 2006. v. 220, p. 989–1010.
- DEMENICIS, L. E. da S. *Construção e análise de célula robótica para usinagem de modelos tridimensionais aplicados a estruturas navais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2006.
- DOURADO, A. O. *Cinemática de robôs cooperativos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2005.
- ERTHAL, J. L. *Modelo cinestático para análise de rolagem em veículos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.
- FONTAN, D. *Implementação da cinemática inversa de robôs redundantes operando em ambientes confinados no projeto roboturb*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2007.
- FREITAS, G. M.; LEITE, A. C.; LIZARRALDE, F. Kinematic control of constrained robotic systems. *Revista Controle & Automação*. Vol. 22 no. 6, p. 559–572, 2011.
- HSU, P. Coordinated control of multiple manipulator systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 9, p. 400–410, 1993.

- KOENIG, W.; KLOCKE, F. *Tecnologia da usinagem com ferramentas de corte de geometria definida - parte 1. Traduzido e adaptado por R. B. Schroeter e W. L. Weingaertner do livro Fertigungsverfahren, Band 1: Drehen, Fräsen, Bohren. 6. Auflage.* Berlin: Springer-Verlag., 2001. 471 p.
- KUKA-ROBOTICS. *Precise Robot Milling.* Junho 2015. Kuka Robotics. Disponível em: <<http://www.kuka-systems.com/en/technologies/milling/>>. Acesso em: 22/06/2014.
- KUMAR, V.; WALDRON, K. J. Force distribution in closed kinematic chains. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, v. 4, p. 657–664, 1988.
- LEHMANN, C.; HALBAUER, M.; EUHUS, D.; OVERBECK, D. Milling with industrial robots: Strategies to reduce and compensate process force induced accuracy influences. ETFA2012, Krakow, Poland, p. 1–4, Sept 2012.
- MACHADO, A. R.; AO, A. M. A.; COELHO, R. T.; SILVA, B. B. *Teoria da usinagem dos materiais.* São Paulo: Ed. Bluecher, 2011.
- MARTINS, D. *Análise cinemática hierárquica de robôs manipuladores.* Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2002.
- MEJIA, L. *Otimização da capacidade de carga de um manipulador paralelo 3RRR simétrico em trajetórias com contato.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2012.
- MEJIA, L.; SIMAS, H.; MARTINS, D. Force capability in general 3 dof planar mechanisms. *Accepted for publication in Mechanism and Machine Theory*, p. 1–15, 2014.
- NAGATA, F.; OTSUKA, A.; WATANABE, K.; HABIB, M. K. Fuzzy feed rate controller for a machining robot. *Mechatronics and Automation (ICMA), 2014 IEEE International Conference on*, Tianjin, p. 198–203, 2014.
- NOKLEBY, S. B.; FISHER, R.; PODHORODESKI, R. P.; FIRMANI, F. Force capabilities of redundantly-actuated parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, v. 40, p. 578–599, 2005.
- OLABI, A.; BEAREE, R.; GIBARU, O.; DAMAK, M. Feedrate planning for machining with industrial six-axis robots. *Control Engineering Practice*, v. 18, p. 471–482, 2010.
- OLSSON, T.; HAAGE, M.; KIHLMAN, H.; JOHANSSON, R.; NILSON, K.; ROBERTSSON, A.; BJÖRKMAN, M.; ISAKSSON, R.; OSSBAHR, G.; BROGARDH, T. Cost-efficient drilling using industrial robots with high-bandwidth force feedback. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, v. 26, p. 24–38, 2010.
- OWEN, W.; CROFT, E.; BENHABIB, B. Stiffness optimization for two-armed robotic sculpting. *Industrial robot: An International Journal*, Vol. 35 Iss 1, p. 46–57, 2008.

- PAN, Z.; ZHANG, H. *Robotic machining from programming to process control*. Abril 2010. Robot Manipulators New Achievements. Disponível em: <<http://www.intechopen.com/books/robot-manipulators-new-achievements/robotic-machining-from-programming-to-process-control>>. Acesso em: 03/04/2014.
- PAN, Z.; ZHANG, H.; ZHU, Z.; WANG, J. Chatter analysis of robotic machining process. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 173, p. 301–309, 2006.
- PAPADOPOULOS, E.; GONTHIER, Y. On manipulator posture planning for large force tasks. Robotics and Automation, Nagoya, Japan, p. 6, 1995.
- PIRES, J. N.; RAMMING, J.; RAUCH, S.; ARAÚJO, R. *Force/Torque sensing applied to industrial robotic deburring*. Março 2002. Sensor Review Journal. Acesso em: 17/03/2014.
- REIS, M. G. *Desenvolvimento de uma ferramenta para análise estática de mecanismos e robôs utilizando o método de Davies*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2013.
- RIBEIRO, L. P. G. *Modelagem cinemática de sistemas robóticos cooperativos: proposta de uma jacobiano de cooperação*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2010.
- SICILIANO, B.; SCIAVICCO, L.; VILLANI, L.; ORIOLO, G. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer-Verlag: London Limited, 2009. 632 p.
- SIMAS, H. *Planejamento de trajetórias e evitamento de colisão em tarefas de manipuladores redundantes operando em ambientes confinados*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2008.
- SÖRNMO, O.; OLOFSSON, B.; SCHNEIDER, U.; ROBERTSSON, A.; JOHANSSON, R. Increasing the milling accuracy for industrial robots using a piezo-actuated high-dynamic micro manipulator. *Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics*, 2012 IEEE/ASME, Kaohsiung, Taiwan, p. 104–110, 2012.
- STEMMER, E. C. *Ferramentas de corte: ferramentas simples de tornear*. Florianópolis: Ed. da UFSC, 1989. 295 p.
- STEMMER, E. C. *Ferramentas de corte II: brocas, alargadores, ferramentas de roscas, brochas, rebolos e abrasivos*. Florianópolis: Ed. da UFSC, 1992. 326 p.
- SUBRIN, K.; SABOURIN, L.; COUSTURIER, R.; AND, G. G. Robotic drilling system for titanium structures. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, v. 54, p. 767–774, 2011.
- TONETTO, C. P. *Uma sistematização da modelagem e programação cinemática de sistemas robóticos cooperativos para a realização de tarefas*.

Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2011.

TSAI, L. W. *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*. New York: John Wiley & Sons, 1999.

TSAI, L. W. *Mechanism design: Enumeration of kinematic structures according to function*. Washington: D.C: CRC Press, 2001.

VERGEEST, J. S. M.; TANGELDER, W. H. Robot machines rapid prototype. *Industrial robot: An International Journal*, Vol. 25 Iss 5, p. 17–20, 1996.

WALKER, I. D.; MARCUS, S. I.; FREEMAN, R. A. Distribution of dynamic loads for multiple cooperating robot manipulators. *Journal of Robotic Systems*, v. 6, p. 35–47, 1989.

WEIHMANN, L. *Modelagem e otimização de forças e torques aplicados por robôs com redundância cinemática e de atuação em contato com o meio*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2011.

WEIHMANN, L.; MARTINS, D.; COELHO, L. S. Force capabilities of kinematically redundant planar parallel manipulators. *13th World Congress in Mechanism and Machine Science*, Guanajuato, México, p. 483, 2011.

WITTE, L. *Spezifische Zerspankräfte beim Drehen und Bohren*. Tese (Doutorado) — RWTH, Aachen, Alemanha, 1980.

ZANCHETTIN, A. M.; ROCCO, P.; ROBERTSSON, A.; JOHANSSON, R. Exploiting task redundancy in industrial manipulators during drilling operations. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 128–133, 2011.

ZHENG, Y. F.; LUH, J. Y. S. Optimal load distribution for two industrial robots handling a single object. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Philadelphia, PA, v. 1, p. 344–349, 1988.



**APÊNDICE A – Cinemática direta por helicoides sucessivos -  
Manipulador 3R planar**



## A.1 CINEMÁTICA DIRETA POR HELICOIDES SUCESSIVOS

Para o cálculo da cinemática direta do manipulador 3R pelo método dos Helicoides Sucessivos, primeiro seleciona-se a postura inicial do manipulador, Fig. 45. A seguir obtém-se os parâmetros helicoidais a partir da postura inicial, apresentado na Tabela 6.

Figura 45 – Postura inicial do manipulador 3R com a referência no elo 3.

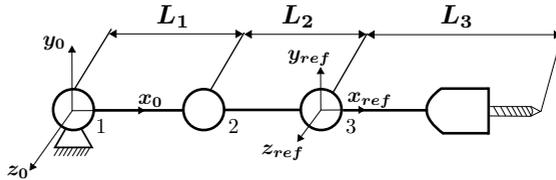


Tabela 6 – Parâmetros helicoidais do manipulador 3R planar.

$Junta_i$	$S_i$	$S_{0i}$	$t_i$	$\theta_i$
1	0, 0, 1	$(-L_1 - L_2), 0, 0$	0	$\theta_1$
2	0, 0, 1	$(-L_2), 0, 0$	0	$\theta_2$
3	0, 0, 1	0, 0, 0	0	$\theta_3$

Através da tabela de parâmetros helicoidais pode-se montar as matrizes de transformação homogêneas. Neste caso, utiliza-se a referência dos helicoides posicionada no elo 3, para ilustrar o método de helicoides sucessivos.

As matrizes de transformação são:

$${}^3A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & (L_2 + L_1)(1 - c_1) \\ s_1 & c_1 & 0 & (L_2 + L_1)s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A.1)$$

$${}^3A_2 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & (L_2)(c_2 - 1) \\ s_2 & c_2 & 0 & (L_2)s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A.2)$$

$${}^3A_3 = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A.3)$$

sendo:  $c_i = \cos(\theta_i)$  e  $s_i = \sin(\theta_i)$  para  $i = 1, 2, 3$ .

Utilizando-se a Eq. A.4 (SIMAS, 2008) pode-se obter a localização das juntas em relação a base do manipulador com a referência localizada no elo 3.

$${}^c\mathbf{A}_k = {}^c\bar{\mathbf{A}}_r \left( \prod_{i=c+1}^k {}^r\mathbf{A}_{qi} \right) {}^r\bar{\mathbf{A}}_k \quad (\text{A.4})$$

Aplicando-se a Eq. A.4, obtêm-se a matriz que descreve a posição e orientação do efetuador em relação a base (Eq. A.5).

$${}^b\mathbf{A}_{ef} = {}^b\bar{\mathbf{A}}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_1 \cdot {}^3\mathbf{A}_2 \cdot {}^3\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\bar{\mathbf{A}}_{ef} \quad (\text{A.5})$$

Sendo que a matriz  ${}^b\bar{\mathbf{A}}_3$  descreve a posição e orientação da referência em relação a base na postura inicial. E a matriz  ${}^3\bar{\mathbf{A}}_{ef}$  descreve a posição e orientação do efetuador final em relação a referência na postura inicial do manipulador apresentadas respectivamente nas Eqs. A.6 e A.7.

$${}^c\bar{\mathbf{A}}_r = {}^b\bar{\mathbf{A}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 + L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$${}^r\bar{\mathbf{A}}_k = {}^3\bar{\mathbf{A}}_{ef} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Resolvendo-se a Eq. A.5 obtêm-se a matriz de transformação que descreve a posição e orientação do efetuador em relação a base apresentado na Eq. A.8.

$${}^c\mathbf{A}_k = {}^0\mathbf{A}_{ef} = \begin{pmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_3 c_{123} + L_2 c_{12} + L_1 c_1 \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_3 s_{123} + L_2 s_{12} + L_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

A partir da solução da cinemática direta para o manipulador 3R, obtêm-se as posições das juntas,  $[\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y] \dots [\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y]$ , extraídas respectivamente, das matrizes  ${}^0\mathbf{A}_1$ ,  ${}^0\mathbf{A}_2$ ,  ${}^0\mathbf{A}_3$  e  ${}^0\mathbf{A}_{ef}$ , (elemento 1 e 2 da quarta coluna) permitindo o cálculo posterior das Heliforças do manipulador.

**APÊNDICE B – Estática através do método de Davies -  
Manipulador 3R planar**



## B.1 ESTÁTICA PELO MÉTODO DE DAVIES

O método de Davies é utilizado para determinar as equações para o cálculo dos torques dos motores em função das forças e momentos de interação no efetuador final. A seguir resolve-se todas as etapas do método conforme (CAZANGI, 2008).

**Etapa 1.a:** A etapa inicial refere-se à Fig. 46 que ilustra a representação esquemática do mecanismo. É uma versão simplificada do modelo físico contendo as informações de topologia e geometria, além do sistema inercial de coordenadas  $O_{xyz}$ . Sendo as juntas  $a$ ,  $b$  e  $c$  rotativas como é indicado na Tabela 7, os corpos 1, 2 e 3 móveis; o corpo 0 fixo e o sistema inercial  $O_{xyz}$  definido na junta  $c$ .

Figura 46 – Representação esquemática do mecanismo.

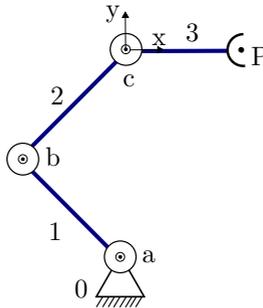


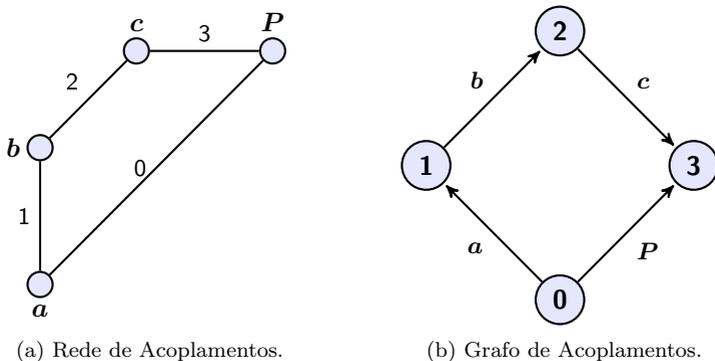
Tabela 7 – Identificação dos acoplamentos do mecanismo 3R Planar.

Junta	Elementos	Tipo	Função
a	0-1	Rotativa	Reação (Atuador)
b	1-2	Rotativa	Reação (Atuador)
c	2-3	Rotativa	Reação (Atuador)
P	3-0	Rotativa	Transmissão

**Etapa 1.b:** Determinados estes parâmetros, forma-se a rede de acoplamentos como é ilustrado na Fig. 47a.

**Etapa 1.c:** A partir da rede de acoplamentos é aplicada a Teoria de Grafos, obtém-se o Grafo de Acoplamentos  $G_C$ , onde cada elo é representado por um vértice e cada junta é representada por uma aresta. Neste caso, atribui-se a direção da aresta  $a$  saindo do corpo 0 e chegando ao corpo 1 e assim por diante até o corpo 3; e a direção da aresta  $P$  saindo do corpo 0 e chegando ao corpo 3, como é ilustrado na Fig. 47b.

Figura 47 – Rede de Acoplamentos e Grafo de Acoplamentos.



**Etapa 2.a:** Nesta etapa deve-se determinar as ações externas, internalizá-las e reunir as características dos acoplamentos necessárias à formação das heliforças e à construção do grafo das ações  $G_a$ .

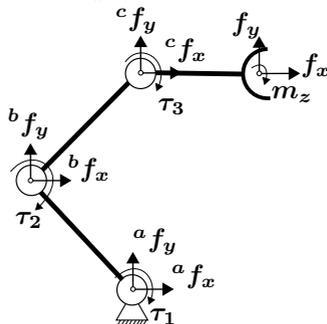
O robô 3R do tipo planar ( $\lambda = 3$ ) possui três juntas rotativas, que possuem  $c_p=2$  restrições unitárias de força ( $f_x, f_y$ ). Como este robô possui uma cadeia serial, todas as juntas devem ser atuadas, desta forma, cada torque externo,  $\tau_1, \tau_2$  e  $\tau_3$ , corresponde a  $c_a=1$  restrição unitária.

Para a determinação estática do mecanismo este deve estar super-restringido, portanto, considera-se que o efetuator final está em contato com o meio, surgindo uma heliforça na interação do efetuator com o meio, que no caso planar do mecanismo do robô 3R é representado por:

$$\$_P = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{Bmatrix} \quad (B.1)$$

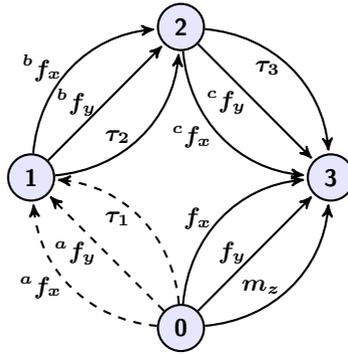
Na Figura 48 é possível verificar as ações existentes nos acoplamentos do mecanismo do robô 3R.

Figura 48 – Ações nos acoplamentos do mecanismo do robô 3R.



**Etapa 3.a:** Uma vez que a geometria, a topologia e as atuações externas do mecanismo são conhecidas, é formado o grafo das Ações  $\mathbf{G}_A$  (Fig. 49). Cada uma das  $e=3$  arestas de  $\mathbf{G}_C$  são substituídas por  $c_p=2$  arestas em paralelos, representando as ações passivas. Ainda são adicionadas  $c_a=1$  aresta em **a**, **b** e **c**, relativas às ações internalizadas  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  e  $\tau_3$ . No contato do efetuidor com o meio são adicionadas três arestas, representando as ações do efetuidor com o meio.

Figura 49 – Grafo das Ações  $\mathbf{G}_a$  do mecanismo do robô 3R.



Calculando-se o **grau de restrição bruto**  $C$  do mecanismo através da Eq.. B.2, tem-se:

$$C = \sum_{i=1}^e C_{pi} + \sum_{j=1}^{e_a} c_{aj} = (2 + 2 + 2 + 2) + (1 + 1 + 1 + 1) = 12 \quad (\text{B.2})$$

como pode ser verificado no grafo da Fig. 49.

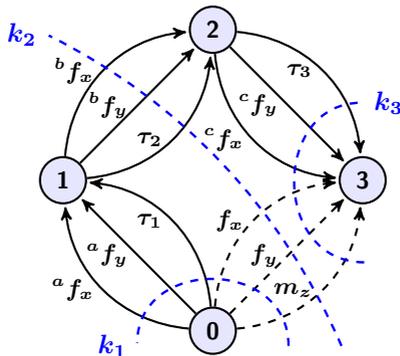
**Etapa 3.b:** Nesta etapa as informações topológicas contidas no grafo  $\mathbf{G}_A$  são convertidas para a forma matricial, resultando na matriz de Cortes-f  $[\mathbf{Q}]_{k \times C}$ . Para isto é necessário identificar-se os cortes-f através da Eq. B.3.

$$k = n - 1 = 4 - 1 = 3 \quad (\text{B.3})$$

Portanto, deve-se determinar cada um dos  $k=3$  cortes-f através da seleção de uma árvore geradora. Para a seleção da árvore geradora existem várias possibilidades, para este mecanismo, opta-se por selecionar as arestas **a**, **b** e **c** para formar a árvore geradora, sendo assim a aresta **p** fica sendo a corda. Para cada ramo da árvore geradora (a, b e c) há um corte-f, identificados em azul na Fig. 50.

Tendo em conta os parâmetros estabelecidos na Eq. 3.19, obtém-se a Eq. B.4.

Figura 50 – Cortes-f no grafo das ações do mecanismo do robô 3R.



$$[Q_A]_{3 \times 12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

As linhas representam os cortes-f, enquanto que as colunas representam as restrições unitárias de cada acoplamento e também as ações internalizadas.

**Etapa 4.a:** Nesta etapa constroem-se as Heliforças de cada ação presente no mecanismo, substituindo-se os parâmetros helicoidais da tabela 6 na Eq. B.5.

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \\ \hline \mathcal{P}^* = P + hL \\ \mathcal{Q}^* = Q + hM \\ \mathcal{R}^* = R + hN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{S} \\ \hline \vec{S}_0 \times \vec{S} + h \cdot \vec{S} \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Como as juntas são rotativas, o passo da heliforça  $h=0$ . Escrevendo as heliforças na formação radial e eliminando-se as componentes  $\mathcal{P}^*$ ,  $\mathcal{Q}^*$  e  $\mathcal{N}$  por se tratar do espaço plano ( $\lambda=3$ ) tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}a_{f_x} &= {}^a f_x \begin{Bmatrix} -a_y \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} & \mathcal{S}a_{f_y} &= {}^a f_y \begin{Bmatrix} a_x \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} & \mathcal{S}\tau_1 &= \tau_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
\mathcal{S}b_{f_x} &= {}^b f_x \begin{Bmatrix} -b_y \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} & \mathcal{S}b_{f_y} &= {}^b f_y \begin{Bmatrix} b_x \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} & \mathcal{S}\tau_2 &= \tau_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
\mathcal{S}c_{f_x} &= {}^c f_x \begin{Bmatrix} -c_y \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} & \mathcal{S}c_{f_y} &= {}^c f_y \begin{Bmatrix} c_x \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} & \mathcal{S}\tau_3 &= \tau_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
\mathcal{S}f_x &= f_x \begin{Bmatrix} -p_y \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} & \mathcal{S}f_y &= f_y \begin{Bmatrix} p_x \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} & \mathcal{S}m_z &= m_z \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Onde as componentes  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $b_x$ ,  $b_y$ ,  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $p_x$  e  $p_y$  representam as coordenadas das juntas do robô 3R determinadas a através da etapa da cinemática direta.

**Etapa 4.b:** A matriz das ações  $[A_D]_{\lambda \times C}$  reúne todas as heliforças do mecanismo, como demonstrado na Eq. B.7.

$$[A_D]_{3 \times 12} = \begin{bmatrix} -a_y {}^a f_x & a_x {}^a f_y & \tau_1 & -b_y {}^b f_x & b_x {}^b f_y & \tau_2 & & & & & & \\ {}^a f_x & 0 & 0 & {}^b f_x & 0 & 0 & \dots & & & & & \\ 0 & {}^a f_y & 0 & 0 & {}^b f_y & 0 & & & & & & \\ & & & -c_y {}^c f_x & c_x {}^c f_y & \tau_3 & -p_y f_x & p_x f_y & m_z & & & \\ & & & {}^c f_x & 0 & 0 & f_x & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & {}^c f_y & 0 & 0 & f_y & 0 & & & \end{bmatrix} \tag{B.7}$$

onde as colunas correspondem, respectivamente, as heliforças  $\mathcal{S}a_{f_x}$ ,  $\mathcal{S}a_{f_y}$ ,  $\mathcal{S}\tau_1$ ,  $\mathcal{S}b_{f_x}$ ,  $\mathcal{S}b_{f_y}$ ,  $\mathcal{S}\tau_2$ ,  $\mathcal{S}c_{f_x}$ ,  $\mathcal{S}c_{f_y}$ ,  $\mathcal{S}\tau_3$ ,  $\mathcal{S}f_x$ ,  $\mathcal{S}f_y$ ,  $\mathcal{S}m_z$ .

Ao separar as magnitudes dos heligiros, é possível obter a matriz das Ações Unitárias  $[\hat{A}_D]_{\lambda \times C}$ :

$$[\hat{A}_D]_{3 \times 12} = \begin{bmatrix} -a_y & a_x & 1 & -b_y & b_x & 1 & -c_y & c_x & 1 & -p_y & p_x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

onde as colunas são as heliforças normalizadas.

O Vetor das magnitudes das ações  $\{\tilde{\Psi}\}_{C \times 1}$  é formado por:

$$\{\tilde{\Psi}\}_{12 \times 1} = \{ {}^a f_x \quad {}^a f_y \quad \tau_1 \quad {}^b f_x \quad {}^b f_y \quad \tau_2 \quad {}^c f_x \quad {}^c f_y \quad \tau_3 \quad f_x \quad f_y \quad m_z \} \tag{B.9}$$

contendo as magnitudes das heliforças do problema.

**Etapa 5.a:** Nesta etapa constrói-se a matriz das Ações Unitárias em Rede  $[\hat{A}_N]_{\lambda,k \times C}$ . Para isso cada linha da matriz de Cortes-f (eq. B.4) obtida na etapa 3.b é convertida em uma matriz quadrada com os elementos dispostos na diagonal principal. Utilizando-se as matrizes diagonais, resulta na matriz das Ações Unitárias em Rede  $[\hat{A}_N]_{\lambda,k \times C}$  do mecanismo do robô 3R.

$$[\hat{A}_N]_{3,3 \times 12} = \begin{bmatrix} [\hat{A}_D]_{3 \times 12} \cdot \text{diag}\{[Q_{A1}]_{1 \times 12}\} \\ [\hat{A}_D]_{3 \times 12} \cdot \text{diag}\{[Q_{A2}]_{1 \times 12}\} \\ [\hat{A}_D]_{3 \times 12} \cdot \text{diag}\{[Q_{A3}]_{1 \times 12}\} \end{bmatrix}$$

$$[\hat{A}_N]_{9 \times 12} = \begin{bmatrix} -a_y & a_x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_y & p_x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_y & b_x & 1 & 0 & 0 & 0 & -p_y & p_x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_y & -c_x & -1 & p_y & -p_x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

**Etapa 5.b:** Seguindo a adaptação das leis de Kirchhoff para estática, esta etapa consiste na aplicação da Lei dos Cortes, resultando no sistema de equações da estática do mecanismo do robô 3R.

$$[\hat{A}_N]_{9 \times 12} \{\vec{\Psi}\}_{12 \times 1} = \{\vec{0}\}_{9 \times 1} \quad (\text{B.11})$$

A consistência do sistema de equações depende do posto  $\mathbf{a}$  da matriz  $[\hat{A}_N]_{9 \times 12}$ . Escalonando a matriz das ações unitárias em rede (eq. B.10), obtém-se a Matriz Escalonada das Ações Unitárias  $[\hat{A}_{Nesc}]_{9 \times 12}$  (eq. B.12).

$$[\hat{A}_N]_{9 \times 12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_y - p_y & p_x - a_x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_y - p_y & p_x - b_x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_y - p_y & p_x - c_x & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Verifica-se que a Matriz Escalonada das Ações Unitárias  $[\hat{A}_{Nesc}]_{9 \times 12}$  não possui linhas nulas, o que significa que esta matriz não apresenta equações dependentes no sistema, conseqüentemente, o posto de  $[\hat{A}_{Nesc}]_{9 \times 12}$  é  $\mathbf{a} = 9$ .

**Etapa 6.a:** Nesta etapa determina-se o **grau de liberdade líquido**  $F_N$ . Determinado o posto da matriz Escalonada, o grau de liberdade líquido é encontrado aplicando-se à Eq. B.13.

$$F_N = \lambda.k - a = 3.3 - 9 = 0 \quad (\text{B.13})$$

Como pode ser visto o sistema não possui redundância, desta forma, não existem equações dependentes que podem ser removidas da matriz  $[\hat{A}_{Nesc}]_{9 \times 12}$  permanecendo desta forma com as dimensões atuais.

**Etapa 6.b:** As dimensões da matriz  $[\hat{A}_{Nesc}]_{\lambda.k \times C}$  são mantidas e o sistema é mantido da mesma forma.

$$[\hat{A}_N]_{9 \times 12} \{\vec{\Psi}\}_{12 \times 1} = \{\vec{0}\}_{9 \times 1} \quad (\text{B.14})$$

**Etapa 7.a:** Nesta etapa são determinadas as variáveis primárias (variáveis conhecidas) necessárias para determinar estaticamente o sistema. Para isso deve-se avaliar o **grau de restrição líquido** do mecanismo do robô 3R:

$$C_N = C - \lambda.k = 12 - 3.3 = 3 \quad (\text{B.15})$$

Portanto, são necessárias 3 variáveis primárias conhecidas para determinar estaticamente o sistema e assim conhecer o comportamento das outras variáveis secundárias.

O objetivo do problema é otimizar os torques dos atuadores em função das forças de contato com o meio, portanto, as variáveis conhecidas (primárias) serão as forças de contato,  $f_x$ ,  $f_y$  e  $m_z$ , e desta forma, as variáveis secundárias serão as restantes.

**Etapa 7.b:** Reorganizando a Matriz Escalonada das Ações Unitárias  $[\hat{A}_{Nesc}]_{9 \times 12}$  e bem como o vetor das magnitudes das ações  $\{\vec{\Psi}\}_{12 \times 1}$  em variáveis primárias e secundárias têm-se:

$$\left[ \begin{array}{c|c} [\hat{A}_{NS}]_{9 \times 9} & \vdots & [\hat{A}_{NP}]_{9 \times 3} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\vec{\Psi}_S\}_{9 \times 1} \\ \hline \{\vec{\Psi}_P\}_{3 \times 1} \end{array} \right\} = \{\vec{0}\}_{9 \times 1} \quad \therefore$$

$$\left[ \begin{array}{c|ccc} [I]_9 & & & \\ \hline & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & a_y - p_y & p_x - a_x & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & b_y - p_y & p_x - b_x & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & c_y - p_y & p_x - c_x & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a f_x \\ a f_y \\ \tau_1 \\ b f_x \\ b f_y \\ \tau_2 \\ c f_x \\ c f_y \\ \tau_3 \\ - \\ - \\ f_x \\ f_y \\ m_z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (\text{B.16})$$

**Etapa 8.a:** Resolvendo a Eq. B.16 para as variáveis secundárias desejadas  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  e  $\tau_3$ , obtêm-se as seguintes equações.

$$\tau_1 = f_x (p_y - a_y) - f_y (p_x - a_x) - m_z \quad (\text{B.17})$$

$$\tau_2 = f_x (p_y - b_y) - f_y (p_x - b_x) - m_z \quad (\text{B.18})$$

$$\tau_3 = f_x (p_y - c_y) - f_y (p_x - c_x) - m_z \quad (\text{B.19})$$

As Eqs. B.17 à B.19 podem ser reescritas da forma matricial como:

$$\tau = A_N \mathcal{S}_P$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} (p_y - a_y) & (-p_x + a_x) & -1 \\ (p_y - b_y) & (-p_x + b_x) & -1 \\ (p_y - c_y) & (-p_x + c_x) & -1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} f_x \\ f_y \\ m_z \end{array} \right\} \quad (\text{B.20})$$

Pelo sentido adotado no digrafo da Fig. 49, as ações  $f_x$ ,  $f_y$  e  $m_z$  estão sendo aplicadas pelo meio no manipulador. Considerando que as ações são aplicadas pelo manipulador no meio, pode-se inverter o sinal da matriz na Eq. B.20. Considerando também que a origem do sistema de coordenadas seja definida sobre a junta  $A$  ( $a_x$  e  $a_y$  igual a zero), obtêm-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} -p_y & p_x & 1 \\ (-p_y + b_y) & (p_x - b_x) & 1 \\ (-p_y + c_y) & (p_x - c_x) & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} f_x \\ f_y \\ m_z \end{array} \right\} \quad (\text{B.21})$$

A partir da Eq. B.20 ou B.21 pode-se determinar os torques dos atuadores do manipulador 3R em função da heliforça aplicada ou suportada pelo efetuador final.



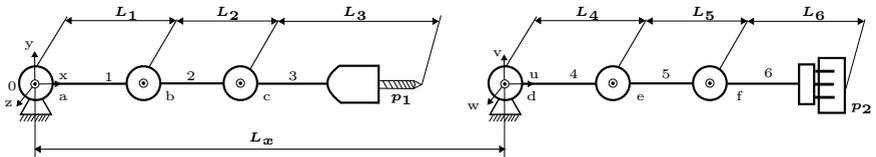
**APÊNDICE C – Cinemática direta por helicoides sucessivos -  
Sistema Robótico Cooperativo planar**



## C.1 CINEMÁTICA DIRETA POR HELICOIDES SUCESSIVOS

Para o cálculo da cinemática direta do SRC pelo método dos Helicoides Sucessivos, primeiro seleciona-se a postura inicial do manipulador, Fig. 51.

Figura 51 – Postura inicial do SRC planar.



A seguir obtém-se os parâmetros helicoidais a partir da postura inicial, apresentado na Tabela 8.

Tabela 8 – Parâmetros helicoidais do SRC Planar.

$Junta_i$	$S_i$	$S_{0i}$	$t_i$	$\theta_i$
a	0, 0, 1	0, 0, 0	0	$\theta_1$
b	0, 0, 1	$L_1$ , 0, 0	0	$\theta_2$
c	0, 0, 1	$L_1 + L_2$ , 0, 0	0	$\theta_3$
d	0, 0, 1	0, 0, 0	0	$\theta_4$
e	0, 0, 1	$L_4$ , 0, 0	0	$\theta_5$
f	0, 0, 1	$L_4 + L_5$ , 0, 0	0	$\theta_6$

Através da tabela de parâmetros helicoidais pode-se montar as matrizes de transformação homogêneas. As matrizes do manipulador operador são apresentadas abaixo.

$${}^0A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C.1)$$

$${}^1A_2 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & -L_1(c_2 - 1) \\ s_2 & c_2 & 0 & -L_1 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C.2)$$

$${}^2A_3 = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & -(L_2 + L_1)(c_3 - 1) \\ s_3 & c_3 & 0 & -(L_2 + L_1)s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C.3)$$

e as matrizes do manipulador seguidor:

$${}^0A_4 = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C.4)$$

$${}^4A_5 = \begin{pmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & -L_4(c_5 - 1) \\ s_5 & c_5 & 0 & -L_4 s_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C.5)$$

$${}^5A_6 = \begin{pmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & -(L_5 + L_4)(c_6 - 1) \\ s_6 & c_6 & 0 & -(L_5 + L_4)s_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C.6)$$

sendo:  $c_i = \cos(\theta_i)$  e  $s_i = \text{sen}(\theta_i)$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

Utilizando-se a Eq. A.4 (SIMAS, 2008) pode-se obter a localização das juntas em relação a mesma referência, localizada na base do manipulador operador, sistema de referência ( $O_{xyz}$ ).

Para encontrar a matriz que descreve a posição e a orientação do efetuador do manipulador seguidor, escrito no sistema de referência ( $O_{uvw}$ ), em relação ao sistema de referência ( $O_{xyz}$ ), é necessário montar as matrizes  ${}^{O_{xyz}}\bar{A}_{O_{uvw}}$  e  ${}^{O_{uvw}}\bar{A}_{ef\,fol}$ , apresentadas nas Eqs. C.7 e C.8.

$${}^c\bar{A}_r = {}^{O_{xyz}}\bar{A}_{O_{uvw}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C.7)$$

$${}^r\bar{A}_k = {}^{O_{uvw}}\bar{A}_{ef\,fol} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L_4 + L_5 + L_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C.8)$$

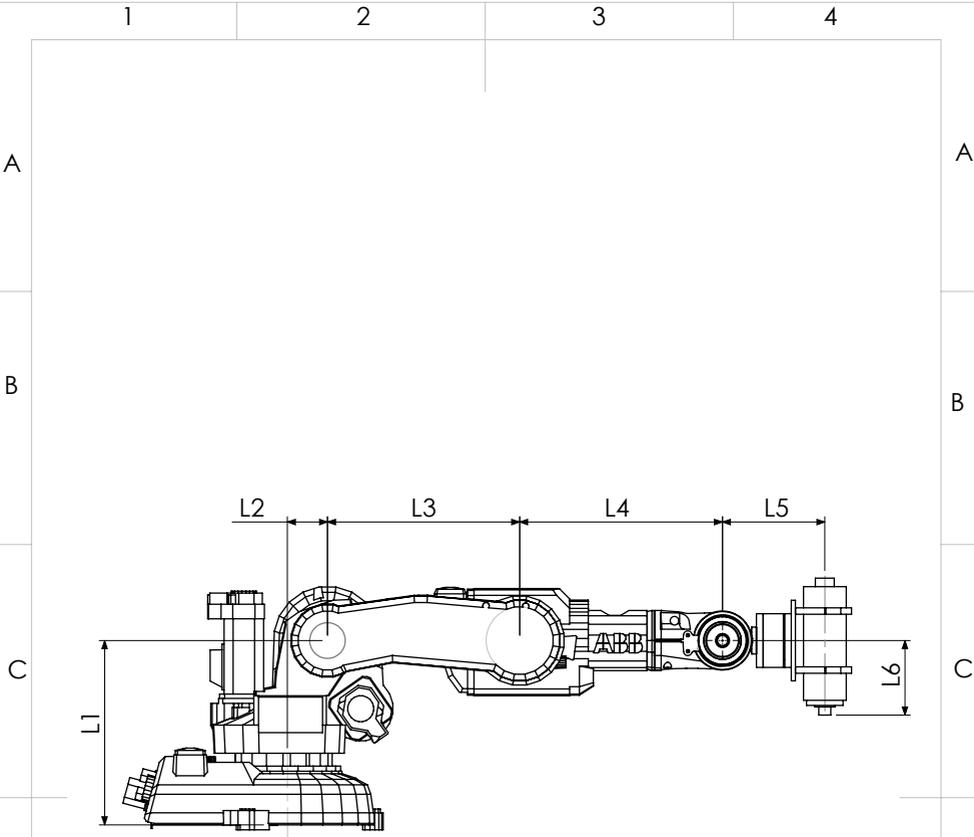
Agora substituindo as Eqs. C.4 à C.8 na Eq. A.4, obtém-se a matriz que descreve a posição e orientação do efetuador do manipulador seguidor em relação ao sistema de referência ( $O_{xyz}$ ).

$${}^{O_{xyz}}A_{ef\,fol} = {}^{O_{xyz}}\bar{A}_{O_{uvw}} \cdot {}^0A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6 \cdot {}^{O_{uvw}}\bar{A}_{ef\,fol} \quad (C.9)$$

A partir da solução da cinemática direta para o SRC planar, obtém-se as posições das juntas,  $[a_x, a_y] \dots [p_x, p_y]$  e  $[d_x, d_y] \dots [p_u, p_v]$ , permitindo o cálculo posterior das heliforças.

## APÊNDICE D - Dados do manipulador ABB IRB 140





L1	L2	L3	L4	L5	L6
352	70	360	380	192	139

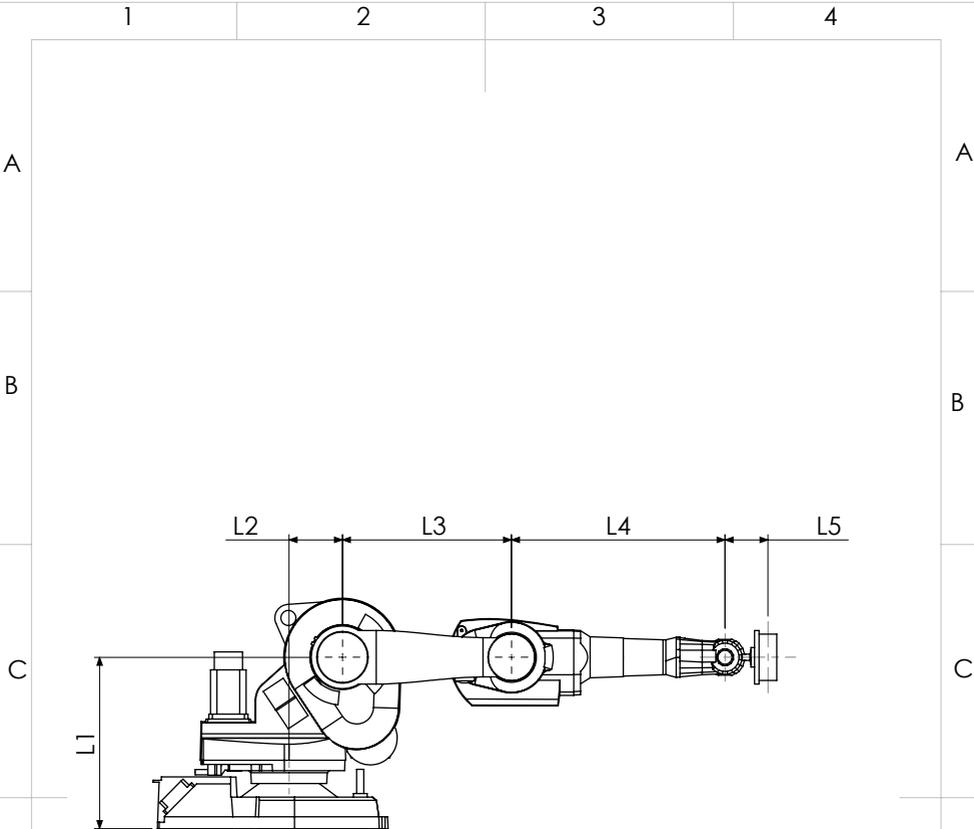
Junta	S	S0	†	Theta
1	0, 0, 1	0, 0, 0	0	1
2	0, 1, 0	L2, 0, L1	0	2
3	0, 1, 0	L2+L3, 0, L1	0	3
4	1, 0, 0	L2+L3, 0, L1	0	4
5	0, 1, 0	L2+L3+L4, 0, L1	0	5
6	1, 0, 0	L2+L3+L4, 0, L1	0	6

REV.	DESCRIÇÃO	NOME	DATA
	ABB IRB 140	Local: Florianópolis - SC	Data: 30/06/2014
	Projeta:	Desenhista:	Unidade:
	---	Julio Frantz	mm
	Projeção:	Material:	Escala:
		---	1 : 10
			Folha: 01/01



**APÊNDICE E - Dados do manipulador ABB IRB 1600**





L1	L2	L3	L4	L5
486,5	150	475	575	121

Junta	S	S0	f	Theta
1	0, 0, 1	0, 0, 0	0	1
2	0, 1, 0	L2, 0, L1	0	2
3	0, 1, 0	L2+L3, 0, L1	0	3
4	1, 0, 0	L2+L3, 0, L1	0	4
5	0, 1, 0	L2+L3+L4, 0, L1	0	5
6	1, 0, 0	L2+L3+L4, 0, L1	0	6

REV.	DESCRIÇÃO	NOME	DATA
	ABB IRB 1600	Local: Florianópolis - SC	Data: 30/06/2014
 Laboratório de Robótica Prof. Rauli Euenhler	Projetaista: ---	Desenhista: Julio Frantz	Unidade: mm
	Projeção: 	Material: ---	Escala: 1 : 15
			Folha: 01/01



## **ANEXO A – Informações técnicas do manipulador ABB IRB 140**



# IRB 140 Industrial Robot

## Main Applications

Arc welding  
Assembly  
Cleaning/Spraying  
Machine tending  
Material handling  
Packing  
Deburring



### Small, Powerful and Fast

Compact, powerful IRB 140 industrial robot.

Six axis multipurpose robot that handles payload of 6 kg, with long reach (810 mm). The IRB 140 can be floor mounted, inverted or on the wall in any angle. Available as Standard, Foundry Plus 2, Clean Room and Wash versions, all mechanical arms completely IP67 protected, making IRB 140 easy to integrate in and suitable for a variety of applications. Uniquely extended radius of working area due to bend-back mechanism of upper arm, axis 1 rotation of 360 degrees even as wall mounted.

The compact, robust design with integrated cabling adds to overall flexibility. The Collision Detection option with full path retraction makes robot reliable and safe.

Using IRB 140T, cycle-times are considerably reduced where axis 1 and 2 predominantly are used.

Reductions between 15-20 % are possible using pure axis 1 and 2 movements. This faster versions is well suited for packing applications and guided operations together with PickMaster.

IRB 140 Foundry Plus 2 and Wash versions are suitable for operating in extreme foundry environments and other harsh environments with high requirements on corrosion resistance and tightness. In addition to the IP67 protection, excellent surface treatment makes the robot high pressure steam washable. Also available in white Clean Room ISO class 6 version, making it especially suited for environments with stringent cleanliness standards.

# IRB 140

## Specification

Robot versions	Handling capacity	Reach of 5th axis	Remarks
IRB 140/IRB 140T	6 kg	810 mm	
IRB 140F/IRB 140TF	6 kg	810 mm	Foundry Plus 2 Protection
IRB 140CR/IRB 140TCR	6 kg	810 mm	Clean Room
IRB 140W/IRB 140TW	6 kg	810 mm	SteamWash Protection
Supplementary load (on upper arm alt. wrist)			
on upper arm		1 kg	
on wrist		0.5 kg	
Number of axes			
Robot manipulator		6	
External devices		6	
Integrated signal supply 12 signals on upper arm			
Integrated air supply Max. 8 bar on upper arm			
IRC5 Controller variants: Single cabinet, Dual cabinet, Compact, Panel mounted			

## Performance

Position repeatability	0.03 mm (average result from ISO test)	
<b>Axis movement</b>	<b>Axis</b>	<b>Working range</b>
	1	360°
	2	200°
	3	280°
	4	Unlimited (400° default)
	5	240°
6	Unlimited (800° default)	
Max. TCP velocity	2.5 m/s	
Max. TCP acceleration	20 m/s <sup>2</sup>	
Acceleration time 0-1 m/s	0.15 sec	

## Velocity \*)

Axis no.	IRB 140	IRB 140T
1	200°/s	250°/s
2	200°/s	250°/s
3	260°/s	260°/s
4	360°/s	360°/s
5	360°/s	360°/s
6	450°/s	450°/s

\*) Max velocity is reduced at single phase power supply, e.g. Compact controller. Please, see the Product specification for further details.

## Cycle time

5 kg Picking side	IRB 140	IRB 140T
cycle 25 x 300 x 25 mm	0.85s	0.77s

## Electrical Connections

Supply voltage	200–600 V, 50/60 Hz
Rated power	
Transformer rating	4.5 kVA
Power consumption typicly	0.4 kW

## Physical

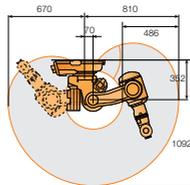
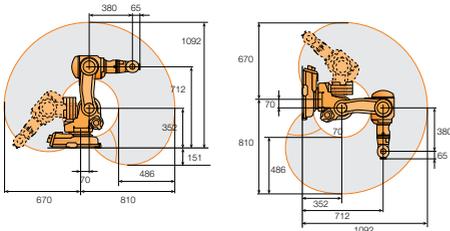
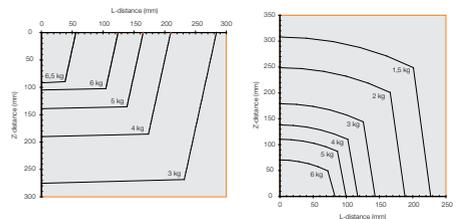
Robot mounting	Any angle
Dimensions	
Robot base	400 x 450 mm
Robot controller H x W x D	950 x 800 x 620 mm
Weight	
Robot manipulator	98 kg

## Environment

Ambient temperature for	
Robot manipulator	5 – 45°C
Relative humidity	
	Max. 95%
Degree of protection,	
Manipulator	IP67
Options	
	Foundry Plus 2
	SteamWash
	(High pressure steam washable)
	Clean Room, class 6
	(certified by IPA)
Noise level	
	Max. 70 dB (A)
Safety	
	Double circuits with supervision, emergency stops and safety functions,
	3-position enable device
Emission	
	EMC/EMI-shielded

Data and dimensions may be changed without notice

## Working range



## **ANEXO B - Informações técnicas do manipulador ABB IRB 1600**



## IRB 1600

The highest performance 10 kg robot.

Performance is often a trade off, optimizing for speed or accuracy. With ABB's IRB 1600, you don't have to choose. The robot's cycle times are shorter, sometimes half that of other robots, allowing you to increase throughput. Meanwhile, you will enjoy the work piece quality that only an ABB robot can offer. Extra everything.

### Double your throughput

The IRB 1600 has up to 50 percent shorter cycle times than competing robots in material handling, machine tending and process applications. It speeds up and slows down faster than other robots, saving time while moving between tasks. This is possible due to ABB's patented second generation QuickMove motion control, combined with the robot's strong motors and low friction losses in the spur gears.

### No more cutting corners

At high speed, most robots will cut corners. With the IRB 1600, the path will be the same regardless of speed, thanks to the robot's unique combination of brains and brawn. Intelligent second generation TrueMove motion control means that "what-you-program-is-what-you-get". Add muscle – a heavy and stiff design – low vibrations and low friction – and you have a robot that will deliver consistently high work piece quality, high yield and few rejects.



### Outstanding reliability

The IRB 1600 offers outstanding reliability, even in the toughest environments and the most demanding 24/7 duty cycles. The entire manipulator is IP 54 classed and sensitive parts are IP 67 classed as standard. The optional protection Foundry Plus offers IP 67, special paint, rust protection and is tailor made for tough foundry environments. The rigid and heavy design combined with spur gears, make the robot extremely robust. Smart collision detection software further adds to the robot's outstanding reliability.

### Easy to integrate

Mounting is fully flexible: on a shelf, on the wall, tilted or inverted. By choosing the compact short-arm version with the 1.2 m reach, you can even fit the IRB 1600 inside a machine, while ensuring sufficient payload as the maximum total load is as high as 36 kg.

### Sustainable and healthy

Low friction spur gears, and no unnecessary moves due to QuickMove and TrueMove, reduces power consumption down to 0.58 kW at max speed, and even less at low speeds. The airborne noise level of just <70 dB (A) secures a healthy sound environment.

# IRB 1600

## Main applications

Machine tending, material handling, arc welding, cutting, dispensing, assembly, palletizing and packaging, measuring, die casting, injection moulding

## Specification

Variants	Reach(m)	Payload(kg)	Armload(kg)
IRB 1600-6/1.2	1.2	6	30,5
IRB 1600-6/1.45	1.45	6	30,5
IRB 1600-10/1.2	1.2	10	20,5
IRB 1600-10/1.45	1.45	10	20,5
Number of axes	6+3 external (up to 36 with MultiMove)		
Protection	Standard IP54; opt. FoundryPlus 2 (IP 67)		
Mounting	Floor, wall, shelf, tilted, inverted		
IRC5 Controller variants	Single cabinet, Dual cabinet, Compact		

## Physical

Dimensions robot base:	484 x 648
Robot height: IRB 1600-6/1.2 and IRB 1600-10/1.2	1069 mm
Robot height: IRB 1600-6/1.45 and IRB 1600-10/1.45	1294 mm
Robot weight:	250 kg

## Performance (according to ISO 9283)

	6/1.2	6/1.45	10/1.2	10/1.45
Pos. repeatability (RP)	0.02 mm	0.02 mm	0.02 mm	0.05 mm
Path repeatability (RT)	0.13 mm	0.19 mm	0.06 mm	0.13 mm

## Movement

Working range	1.2	1.45
Axis 1	+180° to -180°	+180° to -180°
Axis 2	+136° to -63°	+150° to -90°
Axis 3	+55° to -235°	+65° to -245°
Axis 4	+200° to -200° def. +/-190° revolution	+200° to -200° def. +/-190° revolution
Axis 5	+115° to -115°	+115° to -115°
Axis 6	+400° to -400° def. +/-288 revolution	+400° to -400° def. +/-288 revolution
<b>Maximum Speed</b>	<b>6 kg</b>	<b>10 kg</b>
Axis 1	150°/s	180°/s
Axis 2	160°/s	180°/s
Axis 3	170°/s	185°/s
Axis 4	320°/s	385°/s
Axis 5	400°/s	400°/s
Axis 6	460°/s	460°/s

## Electrical connections

Supply voltage	200-600 V, 50-60 Hz
Power consumption	ISO-Cube at max speed 0.58 kW

## Environment

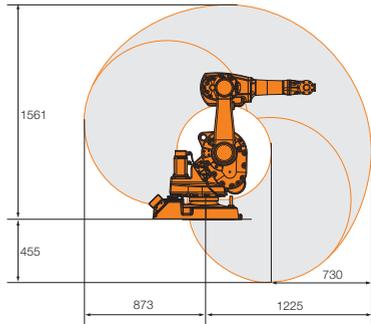
### Ambient temperature for mechanical unit:

During operation	+ 5°C (41°F) to + 45°C (113°F)
During transportation and storage	- 25°C (- 13°F) to + 55°C (131°F)
For short periods (max 24h)	up to + 70°C (158°F)
Relative humidity	Max. 95% at constant temperature
Safety	Double circuits with supervisions, emergency stops and safety functions, 3-position enable device
Emission	EMC/EMI shielded

Data and dimensions may be changed without notice

## Working range

### IRB 1600-x/1.2



### IRB 1600-x/1.45

