EUCLIDES ROXO
ROBERTO PEIXOTO
HAROLDO CUNHA
DACORSO NETTO

MATEMÁTICA
2º CICLO

LIVRO DE USO AUTORIZADO PELO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (REGISTRO N.º [illegible])

3ª Série

1955

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

Matemática 2.° Ciclo

3.ª Série

Euclides Roxo
Haroldo Lisbôa da Cunha
(do Colégio Pedro II)

Roberto Peixoto
Cesar Dacorso Netto
(do Instituto de Educação)

MATEMÁTICA
2.º CICLO

3.ª SÉRIE

DE ACÔRDO COM A PORTARIA MINISTERIAL N.º 1 045
DE 14 DE DEZEMBRO DE 1951

Pelos professôres Haroldo Lisboa da Cunha e Roberto Peixoto

4.ª EDIÇÃO

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
EDITÔRA PAULO DE AZEVEDO LTDA.
166, Rua do Ouvidor — Rio de Janeiro
SÃO PAULO — 292, Rua Líbero Badaró
BELO HORIZONTE — Rua Rio de Janeiro, 655
1955

Nº 636

PROGRAMA

I — *Conceito de função; representação cartesiana; reta e círculo; noção intuitiva de limite e de continuidade.*

1. Conceito elementar de variável e de função. Variável progressiva e variável contínua; intervalos. Noção intuitiva de limite de uma sucessão; exemplos clássicos elementares; convergência.
2. Funções elementares; classificação. Representação cartesiana de uma função e equação de uma curva. Curvas geométricas e curvas empíricas; noção intuitiva de continuidade. Representação gráfica de funções usuais; função exponencial, função logarítmica e funções trigonométricas diretas. Acréscimo de uma função num ponto; funções crescentes e funções decrescentes. Tangente; inclinação da tangente.
3. Limite de variáveis e de funções; limites infinitos. Propriedades fundamentais. Exemplos elementares de descontinuidade de uma função em um ponto. Descontinuidade das funções racionais fracionárias.
4. A função linear e a linha reta em coordenadas cartesianas. Parâmetro angular e parâmetro linear. Formas diversas da equação da linha reta. Representação paramétrica; área de um triângulo em função das coordenadas dos vértices. Os problemas clássicos de inclinação, interseção, passagem e distâncias, relativos à linha reta.
5. A equação geral do 2.º grau com duas variáveis e a circunferência de círculo em coordenadas cartesianas. Formas diversas da equação da circunferência de círculo. Interseção de retas e circunferências.

II — *Noções sôbre derivadas e primitivas, interpretações; aplicações*

1. Definição da derivada em um ponto; notações; derivada infinita. Interpretação geométrica e cinemática da derivada. Diferença e diferencial; interpretação geométrica. Funções derivadas. Derivação sucessiva.
2. Regras de derivação; derivada de uma constante; de uma função de função; de funções inversas; da soma, do produto e do quociente de funções. Aplicação à derivação de funções elementares.
3. Aplicação da teoria das derivadas ao estudo da variação de uma função. Funções crescentes e funções decrescentes; máximos e mínimos relativos; interpretação geométrica.
4. Funções primitivas; integral definida, constante de integração. Primitivas imediatas; regras simples de integração.
5. Integral definida. Aplicação ao cálculo de áreas e de volumes; exemplos elementares.

III — *Introdução à teoria das equações, polinômios; propriedades, divisibilidade por $x + a$, problemas de composição, transformação e pesquisa de raízes, equações de tipos especiais.*

1. Polinômios de uma variável; identidade. Aplicação ao método dos coeficientes a determinar. Divisibilidade de um polinômio inteiro em x por $x + a$; regra e dispositivo prático de Ruffini. Fórmula de Taylor para os polinômios; algoritmo de Ruffini-Horner.
2. Polinômios e equações algébricas em geral; raízes ou zeros. Conceito elementar de número complexo; forma binomial; complexos conjugados; módulo; representação geométrica. Operações racionais. Decomposição de um polinômio em fatores binômios; número de raízes de uma equação; raízes múltiplas e raízes nulas. Raízes complexas conjugadas. Indicação sôbre o número de raízes reais contidas em um dado intervalo; teorema de Bolzano; conseqüências.
3. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação; aplicação à composição das equações. Propriedades das raízes racionais inteiras e fracionárias.
4. Transformação das equações; transformações de primeira ordem aditivas, multiplicativas e recíprocas.
5. Equações recíprocas; classificação; forma normal; abaixamento do grau.
6. Cálculo das raízes inteiras. Determinação das cotas pelo método de Laguerre-Thibault. Regras de exclusão de Newton. Algoritmo de Peletarius.

UNIDADE I

I — CONCEITO DE FUNÇÃO; REPRESENTAÇÃO CARTESIANA; RETA E CÍRCULO; NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE E DE CONTINUIDADE

1 — Conceito elementar de variável e de função. Variável progressiva e variável contínua; intervalos. Noção intuitiva de limite de uma sucessão; exemplos clássicos elementares; convergência.

1 — Origem da idéia de função. A idéia de função é fundamental em todos os domínios da ciência. É difícil se torna precisar a época em que se esboçou tal idéia, visto como, desde os passos iniciais da matemática, em remota antiguidade, quando foram estabelecidas as primeiras relações entre as grandezas características dos problemas considerados, pode-se dizer que surgiu, implicitamente, o conceito de função.

Tomemos, por exemplo, a fórmula de quadratura do círculo:

$$S = \pi r^2$$

Ao apreciá-la, diremos, insensivelmente, que *a área é função do raio*.

No entanto, cumpre assinalar que, só com a notável obra de Descartes — "La Géométrie — em 1637, quando foi estabelecido o princípio da correspondência entre as *equações* e as *curvas*, é que a idéia da *função* tomou vulto.

2 — Conceito elementar de variável e de função. Intervalo. Suponhamos que a letra x possa representar qualquer número compreendido, por exemplo, entre -1 e $+1$. Diremos, então, que x é uma *variável*, cujo *campo de variabilidade* é o *intervalo* $(-1, +1)$, escrevendo:

$$-1 < x < +1$$

É claro, entretanto, que os próprios extremos do *intervalo* poderão ser incluídos no mesmo, em conjunto ou em separado. De acôrdo com as diversas hipóteses possíveis, teríamos então:

$$-1 \leqq x \leqq +1$$

ou:

$$-1 < x \leqq +1$$

ou, ainda:

$$-1 \leqq x < +1$$

3 — Imaginemos, agora, duas variáveis x e y, por tal forma *conjugadas* que, dos valores da primeira, possamos deduzir os valores *correspondentes* da segunda.

Diz-se, neste caso, que y é uma *função* de x, dando-se, a esta, a denominação de *variável independente* ou, simplesmente, *variável*, e àquela, a de *variável dependente*, ou, mais brevemente, *função* (*).

Simbòlicamente, escreve-se:

$$y = f(x)$$

Observemos, entretanto, que uma *função* poderá ser definida *aritmèticamente*, *geomètricamente* e, ainda, *algèbricamente*.

Suponhamos, por exemplo, como se consigna no quadro abaixo, os números que representam os *sobreviventes* de um grupo inicial de 100 000 pessoas observadas, para cada idade, entre 20 e 30 anos:

Idades: t	Sobreviventes: s	Idades: t	Sobreviventes: s
20	66 642	26	63 944
21	66 225	27	63 487
22	65 781	28	63 033
23	65 322	29	62 582
24	64 862	30	62 133
25	64 403		

(*) A *variável independente* é chamada, por vêzes, de *argumento* e isto, principalmente, quando se trata de ângulo.

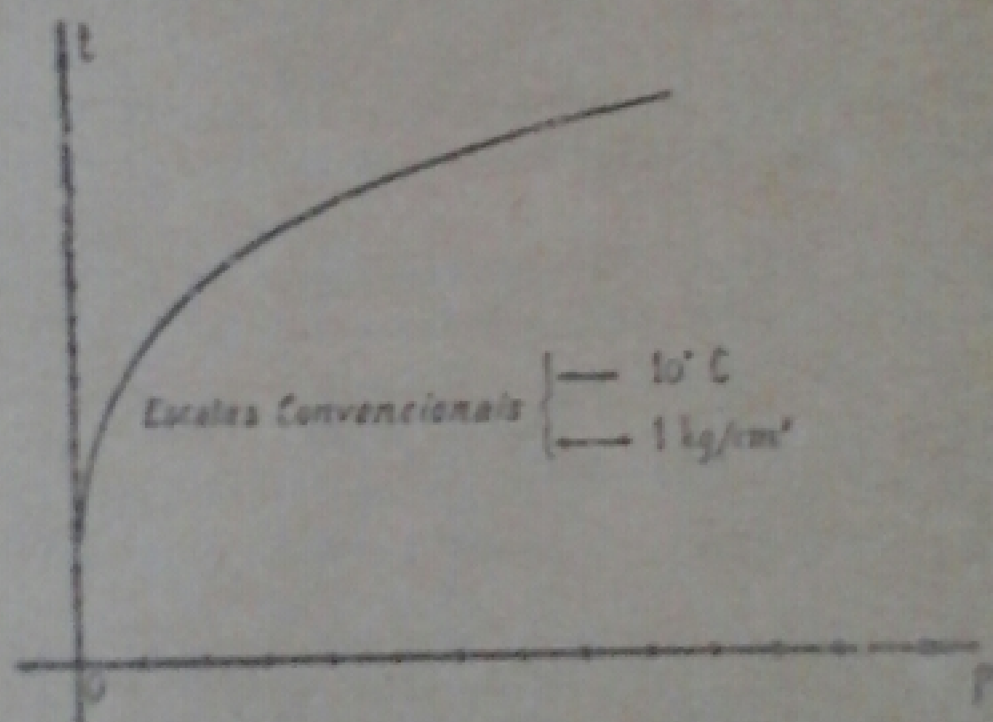
Diremos que S (*número de sobreviventes*) é *função* de *t* (*idade*), estando a função definida *aritmèticamente* pelo quadro em causa.

O caso característico da definição *geométrica* é dado pelas *curvas* nos sistemas de coordenadas. Consideremos, por exemplo, a correspondência entre a *temperatura* t e as *pressões p* no estudo da ebulição da água, quando se sujeita o *vapor d'água* saturado a pressões variáveis. Para isso, num sistema de coordenadas retangulares, marquemos as *pressões* sôbre o *eixo das abcissas*, e as *temperaturas*, sôbre o *eixo das ordenadas*.

A função:

$$t = f(p)$$

estará, assim, definida *geomètricamente* pela *curva c*, representativa do fenômeno físico em causa.



A definição *algébrica* constitui o exemplo comum das *fórmulas* tais como $S = \pi r^2$, $y = \sqrt{2x+1}$, $t = \frac{1}{2} g t^2$ $y = \text{sen } 2x$, etc.

Nem sempre, entretanto, nessas *fórmulas* existe uma aplicação pura e simples das operações aritméticas clássicas. Um exemplo frisante é dado pela *função*:

$$y = E(x)$$

onde a *característica E* indica *ser y o maior número inteiro inferior ou, quando muito, igual a x.*

Assim, para:

$$-3 \leqq x < -2$$

temos $y = -3$; para:

$$5 \leqq x < 6$$

temos $y = 5$, etc.

4 — Variável progressiva e variável contínua. Tais exemplos são suficientes para ver-se que, numa função $y = f(x)$, nem sempre, podemos atribuir a x valores arbitràriamente escolhidos.

Assim, no caso considerado da *função de sobrevivência*, ambas as variáveis são sempre *números inteiros aritméticos* (*).

5 — O conjunto de valores que se podem atribuir à *variável independente* caracteriza o *domínio de existência* da função.

No caso da *função de sobrevivência*, o *domínio de existência* será constituído por todos os números inteiros desde 0 até 100, incluídos êstes, uma vez que:

$$0 \leqq t \leqq 100 \; (^{**})$$

6 — Se, no entanto, considerarmos a função

$$y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

é evidente que o domínio de existência de função será definido pelo conjunto de valores de x tais que

$$2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

visto como para quaisquer outros, teremos $\operatorname{sen} x < 0$, números para os quais *não existirá* a raiz assinalada.

(*) Quando se quer frizar que uma variável é um número inteiro é comum usar-se a letra n ou, ainda, k, i, j etc.

(**) A idade $t = 100$ anos constitui o limite das observações em casos.

Mas quando, como neste exemplo, os valores da variável podem ser quaisquer, dentro de certo intervalo, diz-se que a variável é *contínua*.

7 — Funções inversas — Consideremos as funções:

$$y = a^x$$

e

$$y = \log_a x$$

A segunda poderá, ainda, ser escrita:

$$x = a^y$$

Vemos, então, que uma poderá ser deduzida da outra pela permutação das variáveis. E o que, numa, é *variável independente*, noutra, é *variável dependente*. Diz-se, então, que uma das funções é *inversa* da outra.

De um modo geral, a *inversa* de

$$y = f(x)$$

poderá ser representada por:

$$y = f_{-1}(x)$$

8 — Noção intuitiva de limite de uma sucessão. Exemplos clássicos elementares; convergência. Consideremos o número fracionário periódico:

$$0{,}99\ldots$$

e os sucessivos valores aproximados do mesmo, obtidos tomando uma, duas, ... n casas decimais, etc., isto é:

$$a_1 = 0{,}9 \quad a_2 = 0{,}99 \quad \ldots \quad a_n = \underbrace{0{,}99\ldots\ 9}_{n \text{ casas decimais}} \quad \ldots$$

Vê-se, imediatamente, que:

$$1 - 0{,}9 > 1 - 0{,}99 > \ldots > 1 - 0{,}99\ldots9 > \ldots$$

isto é:

$$1 - a_1 > 1 - a_2 > \quad \ldots \quad > 1 - a_n > \ldots$$

Mas a diferença $1 - a_n$ *como se vê, não só decresce, como pode tornar-se tão pequena quanto quisermos*. Diz-se, então que $1 - a_n$ *tende* ou *converge para zero*, escrevendo-se:

$$\lim (1 - a_n) = 0$$

que se lê *limite de* $1 - a_n$ *igual a zero*.

9 — De um modo geral, quando numa sucessão $[a_n]$ se tem:

$$\lim (a - a_n) = 0$$

ou:

$$\lim (a_n - a) = 0$$

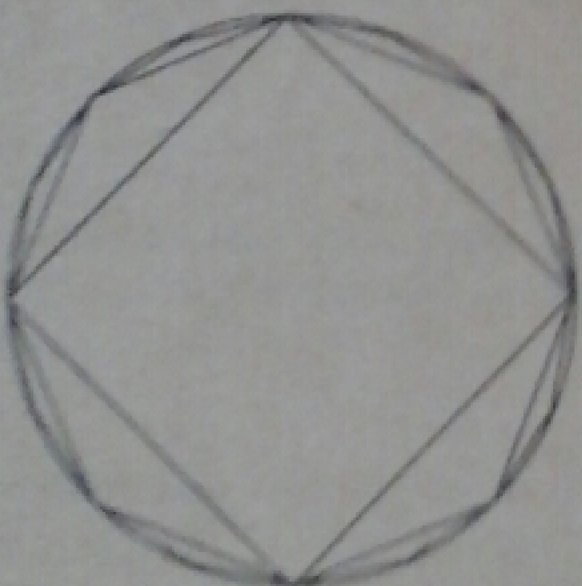
diz-se, também, que:

$$\lim a_n = a$$

Assim, no caso visto:

$$\lim a_n = 1$$

10 — Tomemos, ainda, outro exemplo clássico, fornecido por um problema elementar da Geometria.



Seja P_1 o perímetro de um *quadrado* inserito em uma circunferência de raio R.

Suponhamos obtidos, a seguir, os perímetros P_2, P_3, etc., correspondentes, respectivamente, ao *octógono*, ao *hexadecágono*, etc., todos supostos regulares e inseritos na mesma circunferência, como nos mostra a figura.

Teremos:

$$P_1 < P_2 < P_3 < \ldots < P_n < \ldots$$

Mas, embora, prossigamos indefinidamente nessa operação geométrica de passar do perímetro de determinado polígono regular, ao perímetro de outro polígono regular mas de número duplo de lados, teremos sempre

$$P_n < C$$

onde C representa o comprimento da circunferência, isto é, $C = 2\pi R$.

No entanto, a própria figura nos mostra que, já para o hexadecágono, é sensível a aproximação do contôrno do polígono à circunferência.

Poderemos escrever, portanto:

$$\lim (C - P_n) = 0$$

ou, o que é equivalente:

$$\lim P_n = C.$$

11 — Observação — Se considerássemos pares sucessivos de polígonos regulares, um inscrito e outro circunscrito, com 4, 8, 16 etc. lados, ou, ainda, seguindo outra qualquer seqüência, mostraríamos, sem dificuldade, que o *comprimento da circunferência* seria o *limite comum* das duas sucessões de perímetros obtidos, sendo *crescente* a relativa aos inscritos e *decrescente* a relativa aos circunscritos.

2 — Funções elementares; classificação. Representação cartesiana e equação de uma curva. Curvas geométricas e curvas empíricas; noção intuitiva de continuidade. Representação gráfica de funções usuais; função exponencial, função logarítmica e funções trigonométricas diretas. Acréscimo de uma função num ponto; funções crescentes e funções decrescentes. Tangente; inclinação da tangente.

12 — Funções elementares. Classificação. Como já vimos, uma expressão:

$$y = 3x^2 + 7x - 4$$

é uma função da variável x, correspondendo a cada valor da variável independente x, um valor da função ou variável dependente y.

Em muitos casos a um valor da variável livre correspondem vários valores da função. Ex.: Na função $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, a cada valor de x correspondem dois valores de y. Estas funções são denominadas, em contraposição às outras em que a cada valor da variável livre corresponde um único valor da função, funções *unívocas* ou *univalentes*.

Há funções nas quais a variável livre só pode tomar valores em determinado intervalo (2). É o caso da função $y = \sqrt{1 - x^2}$ na qual a sua existência real exige a condição

$$-1 \leqq x \leqq 1$$

Anàlogamente, y é função de várias variáveis $u, v, \ldots, z$, quando a cada grupo de valores numéricos de $u, v, \ldots, z$, correspondem um ou mais valores determinados de y.

A lei que estabelece a correspondência entre as variáveis é representada por uma letra $f, \varphi, \psi, \ldots$ denominada *característica* da função; escrevemos:

$$y = f(x) \qquad\qquad y = \varphi(x)$$

y é uma função explícita de x quando a equação que liga y a x está resolvida em relação a x. Caso contrário a função é *implícita*. Ex.: Em $y^2 - x^2 + 4 = 0$, y é uma função implícita de x.

Resolvendo esta equação em relação a x, encontramos $y = \pm \sqrt{x^2 - 4}$ e agora y é uma função explícita de x.

Se numa função explícita a ou as variáveis livres estão ligadas apenas pelas operações racionais — adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação de expoentes inteiros (positivos ou negativos) — a função é *racional*. No caso da ou das variáveis livres aparecerem em radicais irredutíveis, a função é *irracional*. Ex.: $y = \dfrac{2}{3}x + x^2\sqrt{3}$ é uma função racional e $y = \sqrt{x^2 - 1}$ é uma função irracional.

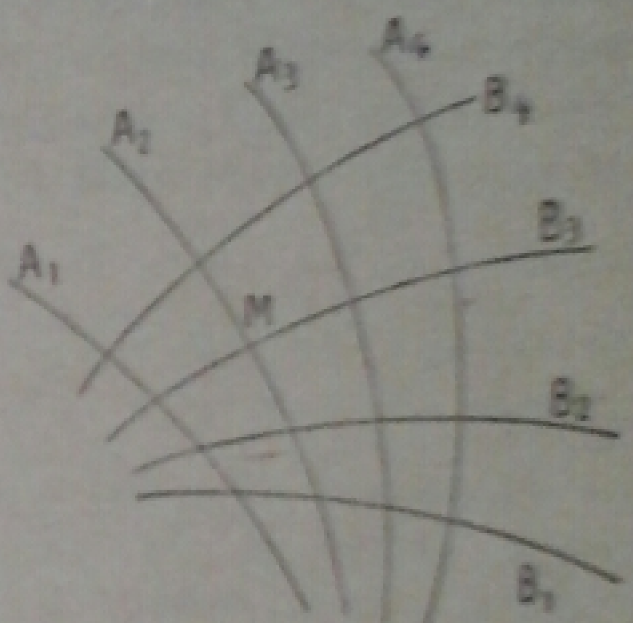
Quando a ou as variáveis livres estão ligadas apenas pelas operações inteiras — adição, subtração, multiplicação e potenciação de expoente inteiro e positivo — a função explícita é *inteira*. Quando a ou as variáveis livres aparecem em divisor, de quociente irredutível, a função é *fracionária*. Ex.: A função $y = \dfrac{3}{4}x^3 + 7x - \dfrac{1}{2}$ é inteira e a função $y = \dfrac{1}{3 - x}$ é fracionária.

y é uma função *algébrica* das variáveis $u, v, \ldots, z$, se a correspondência entre y e as variáveis livres fôr expressa por uma equação $f(y, u, v, \ldots, z) = 0$ cujo primeiro membro é um polinômio ligando as variáveis, apenas pelas operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. As funções racionais e irracionais, inteiras e fracionárias, são algébricas.

Além das funções algébricas há as funções *transcendentes* — exponenciais, logarítmicas e circulares — cujos valores são calculados, habitualmente, por tabuas.

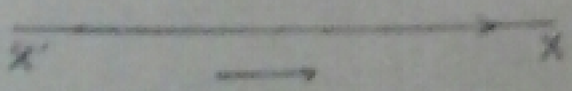
Se tomarmos uma função $y = f(x)$ e a resolvermos em relação a x, a nova função $x = f_{-1}(y)$ é inversa da primeira. Assim, a função $y = x^2$ tem como inversa $x = \pm\sqrt{y}$.

13 — Coordenadas. A posição de um ponto qualquer de um plano pode ser determinada por um conjunto de duas grandezas denominadas *coordenadas*.



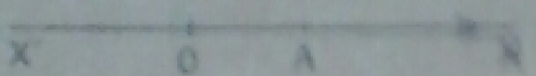
Consideremos um conjunto de linhas A_1, A_2, A_3, ..., de uma mesma espécie, correspondentes a certos valores de uma variável x, e outro conjunto de linhas B_1, B_2, B_3, ..., de outra mesma espécie, correspondentes a certos valores de outra variável y. A posição de um ponto M do plano destas linhas fica determinada pela intersecção das duas linhas, uma de cada sistema, passando pelo ponto considerado. Ao conjunto dos valores de x e de y, correspondentes às duas linhas que passam por M, denominamos *coordenadas* do ponto M, e ao sistema formado pelos dois conjunto de linhas *sistema de coordenadas*.

14 — Reta orientada. Eixo. Semi-eixos. RETA ORIENTADA é uma reta na qual escolhemos arbitràriamente um sentido de percurso para um ponto móvel que nela se desloque. Êste sentido é chamado *positivo* e o sentido contrário é o sentido *negativo*.



Indicamos o sentido positivo de uma reta orientada por meio de uma flecha colocada no eixo ou a êle paralela, ou, utilizando duas letras x' e x por exemplo, e dizendo *sentido de* x' *para* x ou *sentido* $x'x$.

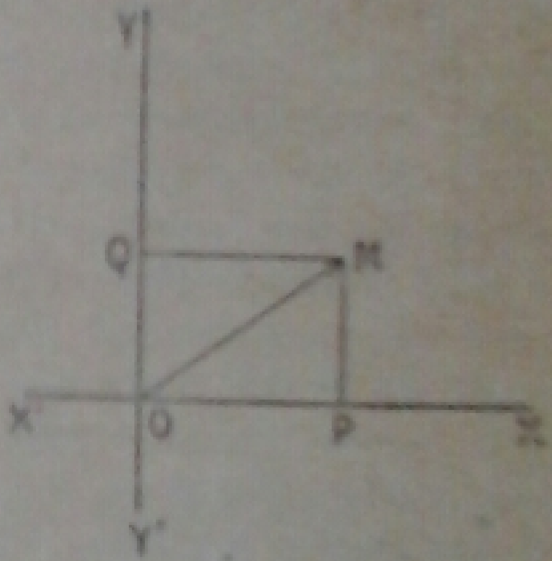
Uma reta orientada na qual escolhemos arbitràriamente uma *origem* O e uma unidade de comprimento para os segmentos nela localizados, é um *eixo*.



A origem O divide o eixo em dois *semi-eixos*, um positivo Ox e outro negativo Ox'.

15 — Coordenadas retilíneas ou cartesianas (*). **Sistema retilíneo ortogonal.** EIXOS COORDENADOS ORTOGONAIS são dois eixos $x'x$ e $y'y$ que se cortam ortogonalmente. O ponto O de intersecção dêstes eixos é a *origem das coordenadas*. Êle é a origem comum dos dois eixos.

Seja M um ponto do plano dêstes eixos. Tracemos por M uma paralela a cada um dos eixos; determinaremos os dois vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$. O valor algébrico do vetor $\overrightarrow{OP}$, $\overline{OP} = x$, é denominado *abcissa*, e, o valor algébrico do vetor $\overrightarrow{OQ}$, $\overline{OQ} = y$, é chamada *ordenada* do ponto M; a abcissa x e a ordenada y são as coordenadas do ponto M.



Os dois conjuntos de linhas (13) que determinam um ponto do plano neste sistema, são constituídos pelas paralelas traçadas aos dois eixos a distâncias arbitrárias.

Exprimimos que um ponto M tem de abcissa a e de ordenada b, ou que tem de coordenadas a e b, escrevendo

$$M\,(a, b) \quad \text{ou} \quad M \left|\, a, b \,\right| \quad \text{ou ainda} \quad M \left|\, \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right. ,$$

com o cuidado de escrever em primeiro lugar a abcissa.

(*) Do nome de René Descartes, fundador da Geometria Analítica.

Se ligarmos a origem O ao ponto M, teremos o vetor $\overrightarrow{OM}$. As coordenadas de M poderão ser definidas como sendo as projeções ortogonais do vetor $\overrightarrow{OM}$ sobre cada um dos eixos, paralelamente ao outro eixo.

As coordenadas são números relativos. São positivas as abcissas contadas da origem O para a direita e negativas as contadas da origem O para a esquerda. São positivas as ordenadas contadas da origem O para cima e negativas as contadas para baixo.

Se dermos dois números relativos, a e b, existe um e sòmente um ponto M que possui a como abcissa e b como ordenada. Obtemos èste ponto tomando sôbre $x'x$, $\overline{OP} = a$, e sôbre $y'y$, $\overline{OQ} = b$ e pelos pontos P e Q, assim obtidos, traçando paralelas aos eixos: a intersecção destas duas retas é o *único* ponto de coordenadas a e b.

As equações $x = a$ e $y = b$ são chamadas *equações do ponto*.

Dois pontos simétricos em relação à origem têm coordenadas simétricas, e, reciprocamente. A origem é o único ponto que tem as duas coordenadas nulas.

A figura representa os pontos

$M_1(4,3)$

$M_2(-5,4)$

$M_3(-2,-4)$

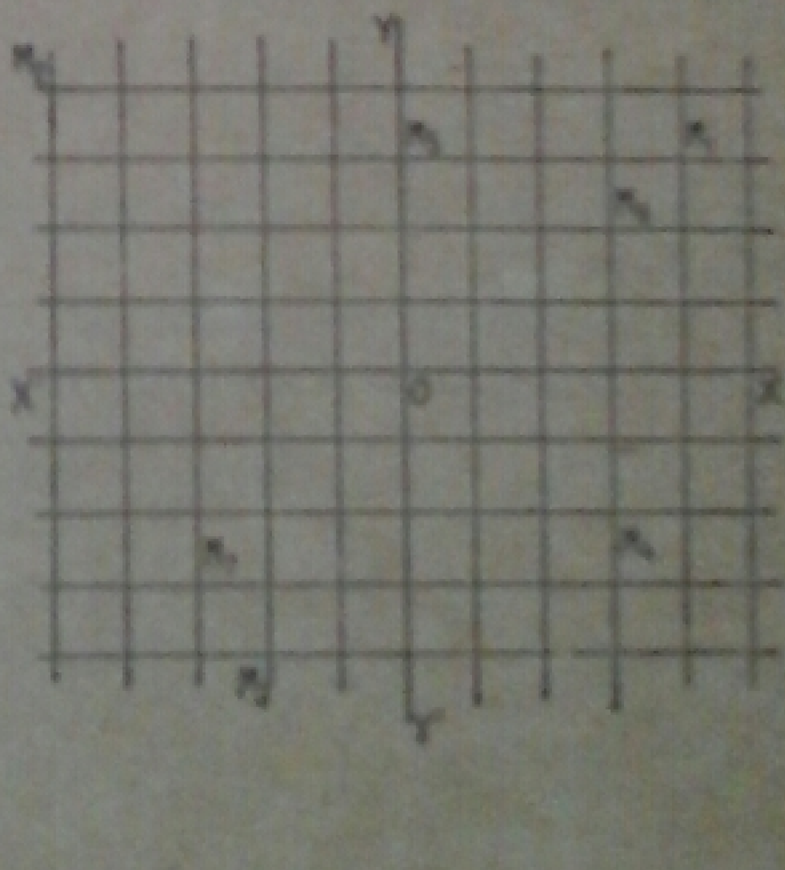
$M_4(3,-2)$

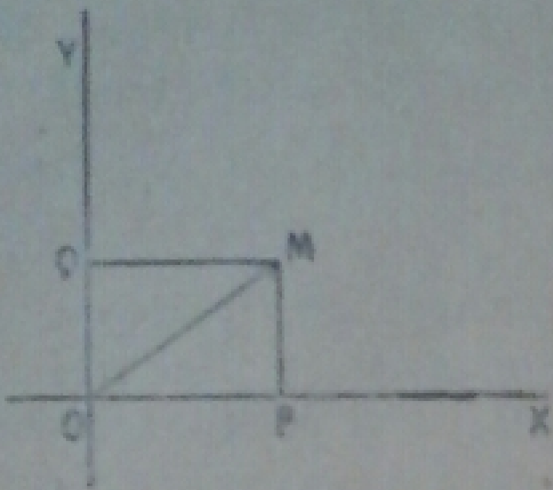
$M_5(0,3)$

e os pontos simétricos

$M_6(3,2)$

$M_7(-3,-2)$





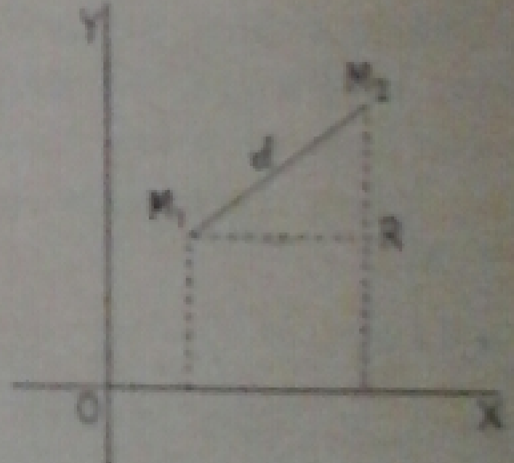
Como

$$\overline{OP} = \overline{QM}$$
$$\overline{OQ} = \overline{PM}$$

podemos ler a abcissa de M tanto em $\overline{OP}$ como em $\overline{QM}$, e a ordenada tanto em $\overline{OQ}$ como em $\overline{PM}$. O contôrno OPM é chamado *contôrno das coordenadas* do ponto M. Sua resultante é $\overrightarrow{OM}$.

O plano dos eixos $x'x$ e $y'y$ é orientado de modo que a semi-reta Ox possa coincidir com Oy quando a fizermos girar de um ângulo igual a $\frac{\pi}{2}$ no sentido direto, isto é, no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros de um relógio.

Êste sistema é um caso particular do sistema retilíneo em que o ângulo dos semi-eixos está sujeito à condição $O < \Theta < \pi$, podendo pois ser diferente de $\frac{\pi}{2}$. Deixamo-lo de parte por só interessar ao nosso curso o caso de $\Theta = \frac{\pi}{2}$ (*).



Problema: — *Calcular a distância d dos dois pontos*

$M_1\ (x_1, y_1)$

$M_2\ (x_2, y_2)$

dos quais conhecemos as suas coordenadas.

Tracemos as ordenadas de M_1, e M_2 e M_1R paralela a $x'x$. O triângulo retângulo M_1RM_2 dá

$$\overrightarrow{M_1M_2}^2 = \overrightarrow{M_1R}^2 + \overrightarrow{RM_2}^2$$

ou

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ou ainda $\qquad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(*) De acôrdo com o conceito geral de coordenadas (12) podemos estabelecer muitos outros sistemas.

EXERCÍCIOS: — 1) *Calcular a distância do ponto* M_1 $(-1, -2)$ *ao ponto* M_2 (3.1).

$$d = \sqrt{(3+1)^2 + (1+2)^2} = 5$$

2) — *Calcular as coordenadas do ponto igualmente distante dos pontos* M_1 $(-1{,}2)$, M_2 $(0, -5)$ *e* M_3 $(6{,}3)$.

Sendo $P\,(x, y)$ o ponto procurado, teremos:

$$\overline{M_1P}^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2$$
$$\overline{M_2P}^2 = (x-0)^2 + (y+5)^2$$
$$\overline{M_3P}^2 = (x-6)^2 + (y-3)^2$$

Pelas condições exigidas no enunciado, teremos:

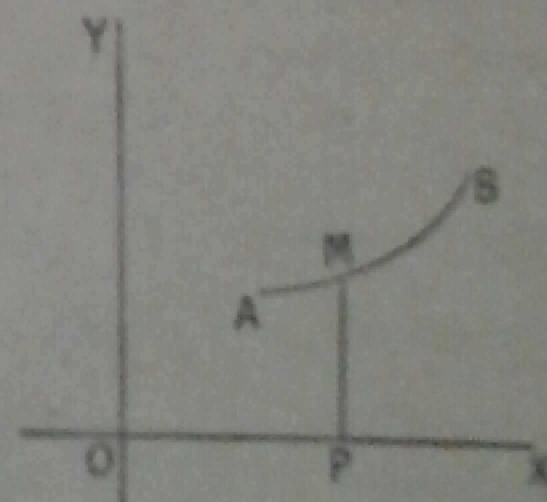
$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-0)^2 + (y+5)^2 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 + (y-3)^2 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x - 7y = 10 \\ 7x + y = 20 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

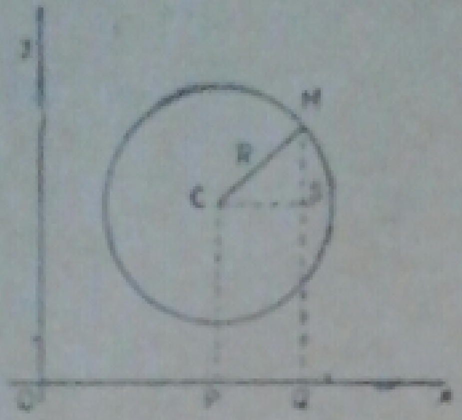
16 — Correlação entre um lugar geométrico e uma equação. TEOREMA: *Toda linha definida geomètricamente pode ser representada por uma equação com duas variáveis.*

Consideremos a curva AB no plano dos dois eixos $x'x$ e $y'y$. Tomemos sôbre o eixo dos x um ponto arbitrário P e por êle tracemos uma paralela ao eixo dos y. Esta reta cortará a curva em um ou mais pontos tais como M. A cada vetor $\overrightarrow{OP}$ corresponderão valores determinados do vetor $\overrightarrow{PM}$. A ordenada $\overline{PM} = y$ de um ponto da linha é, pois, função da abcissa $\overline{OP} = x$ deste ponto. A relação $f\,(x, y) = 0$ ou $y = f\,(x)$ que liga as coordenadas de um ponto qualquer M da curva, dependente da forma da curva, chama-se *equação da curva*.



(Fig. 18)

Exemplo: — Estabelecer a equação do lugar geométrico dos pontos cujas distâncias ao ponto (3,2) são iguais a 4.



$$\overline{MC}^2 = R^2 \quad \therefore$$

O lugar geométrico é uma circunferência de círculo de centro $C(3,2)$ e raio 4.

Seja $M(x, y)$ um ponto do lugar, poderemos escrever $MC = R$ (*).

Aplicando a fórmula da distância de dois pontos (15) aos pontos M e C, teremos:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2 \quad \therefore$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$$

Esta é a equação do lugar geométrico pedido. Ela exprime a relação que liga as coordenadas de um ponto qualquer do lugar.

RECÌPROCAMENTE, *os pontos cujas coordenadas verificam uma equação com duas variáveis estão, em geral, sobre uma curva.*

Seja a equação $f(x, y) = 0$ definindo uma função contínua. A cada par de valores reais de x e y, satisfazendo esta equação, corresponde um ponto do plano. Se considerarmos um dêstes pares, (x, y), e fizermos x variar a partir de x_0, de modo contínuo, y variará também de modo contínuo, a partir de y_0. O ponto de coordenadas x e y descreverá uma linha contínua que será a representação geométrica (pintura geométrica) da equação $f(x, y) = 0$.

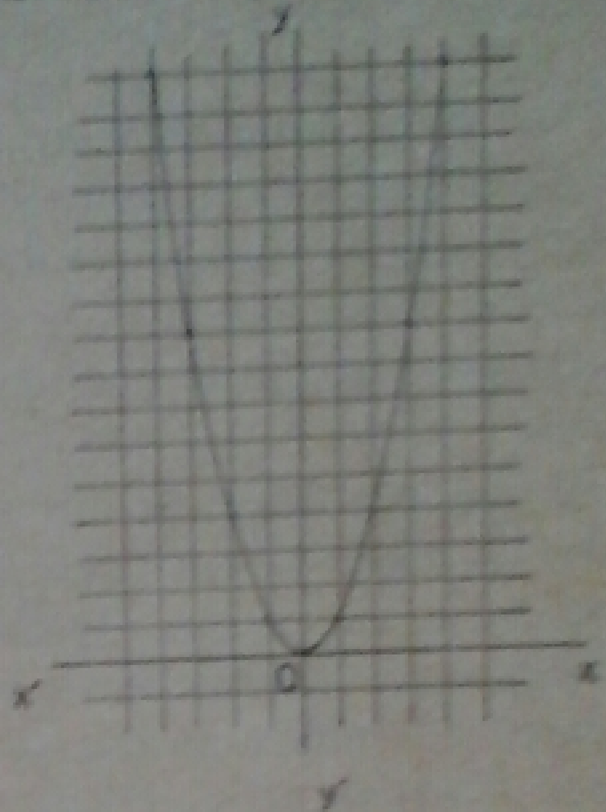
Exemplo: — Construir a curva representativa da função $y = x^2$.

Atribuamos a x valores arbitrários e calculemos os valores correspondentes de y. Representando, a seguir, os pontos cujas coordenadas sejam os pares de valores assim obtidos para x e y, e li-

(*) Esta equação que traduz a definição geométrica do lugar é denominada *equação espontânea* ou *natural*.

gando os pontos obtidos teremos a curva representativa da função $y = x^2$.

x	y
...	...
— 3	9
— 2	4
— 1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
...	...



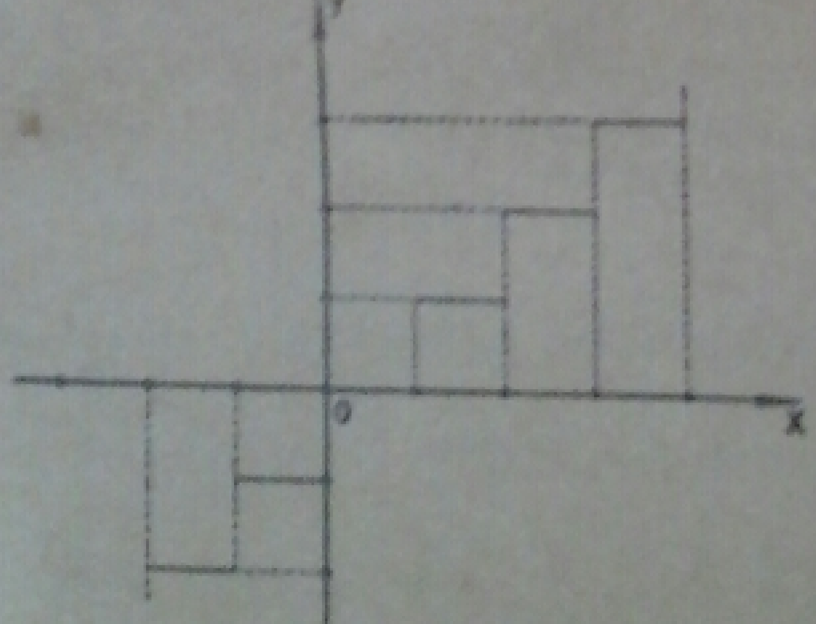
Curva representativa de uma equação é o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas verificam esta equação.

Equação de uma curva é a equação que deve ser satisfeita para as coordenadas de um ponto qualquer da curva.

A tôda curva definida, geomètricamente, corresponde, pois, uma equação $f(x, y) = 0$ e, a tôda equação $f(x, y) = 0$ corresponde, em geral, uma curva.

Dizemos *em geral* porque há equações que não têm representação geométrica, como, por exemplo,

$$x^2 + y^2 = -25$$



que não se verifica para valores reais de x e y.

OBSERVAÇÕES: 1.ª — Nem sempre, entretanto, o *gráfico* de uma função será uma *linha*, no sentido intuitivo da palavra. É o caso da função $y = E(x)$, antes referida (3).

Fazendo x variar de $-\infty$ a $+\infty$, vemos que o seu *gráfico* se constitui de uma sucessão de segmentos unitários a que não poderemos, evidentemente, chamar de *linha*.

2.º — Nem tôda função admite representação gráfica, e, mesmo admitindo, nem sempre o gráfico é uma linha. No entanto, uma curva qualquer traçada a esmo, definirá sempre uma função, visto estabelecer através das abcissas e ordenadas dos seus pontos, uma correspondência entre dois conjuntos numéricos.

É o que verificamos, em sentido inverso, com a representação de fenômenos em que um elemento é *função* de outro, sem que haja expressão algébrica que permita *calcular* o primeiro quando é conhecido um valor particular do segundo. Neste caso obtemos uma *curva empírica* — em oposição às outras denominadas *geométricas* — obtida com os dados estatísticos tirados da observação direta do fenômeno. É o caso, por exemplo, do gráfico que podemos fazer registrando em abcissas as horas do dia e em ordenadas temperaturas correspondentes de um doente.

17 — Continuidade. No exemplo que estudamos (16), $y = x^2$, só atribuimos a x valores inteiros e consecutivos. Fácil será, porém, verificar que se dermos a x valores compreendidos entre dois números inteiros e consecutivos, os valores correspondentes de y estarão também compreendidos entre os valores de y obtidos anteriormente para os valores consecutivos de x. Assim, para $x = 1{,}5$, valor compreendido entre 1 e 2, obteremos $y = 2{,}25$, valor compreendido entre os valores 1 e 4 de y. Observamos que quanto menos variar x, menos variará também y, ou, por outras palavras, que y é uma *função contínua* de x.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES USUAIS

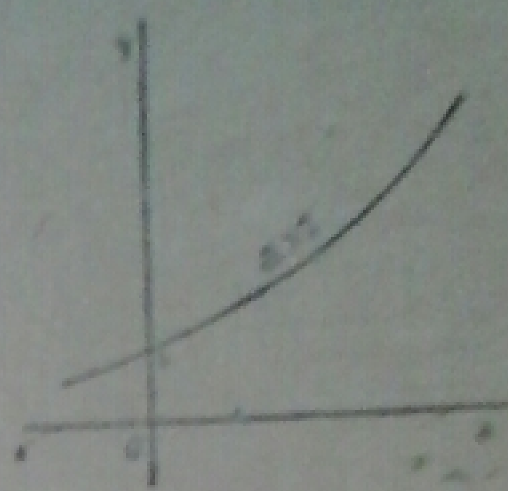
18 — Função exponencial. É a função da forma

$$y = a^x$$

na qual a é uma constante positiva.

Variação e gráfico.

1.º Caso: $a > 1$

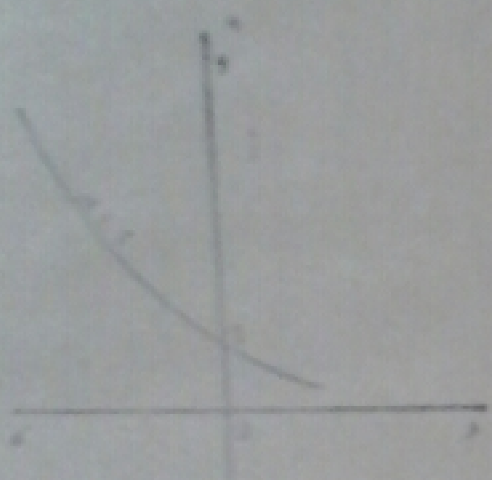


$$x \to \infty \quad y = a^{\to \infty} \to \infty$$

$$x = 1 \quad y = a^1 = a$$

$$x = 0 \quad y = a^0 = 1$$

$$x \to -\infty \qquad y = a^{\to -\infty} = \frac{1}{a^{\to \infty}} = \frac{1}{\infty} \to 0$$



A curva tem como assíntota o semi-eixo negativo dos x.

2.º Caso: $a < 1$

$$x \to \infty \quad y = a^{\to \infty} \to 0$$

$$x = 1 \quad y = a^1 = a$$

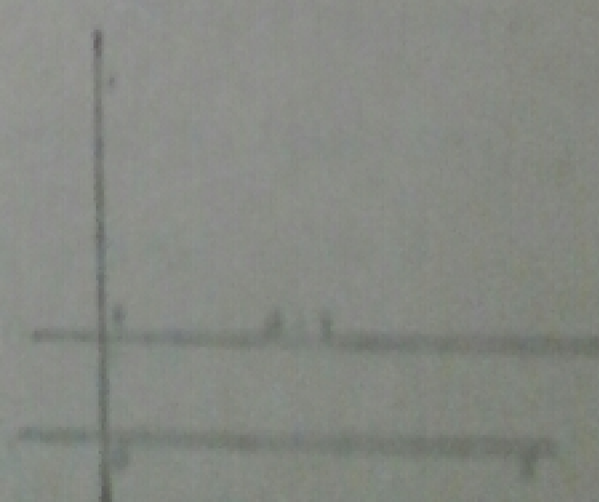
$$x = 0 \quad y = a^0 = 1$$

$$x \to -\infty \qquad y = a^{\to -\infty} = \frac{1}{a^{\to \infty}} \to 0$$

OBSERVAÇÕES: 1.ª — Para $a = 1$ temos sempre $y = 1$ qualquer que seja x. O gráfico é uma reta paralela ao eixo dos x, de ordenada igual a 1.

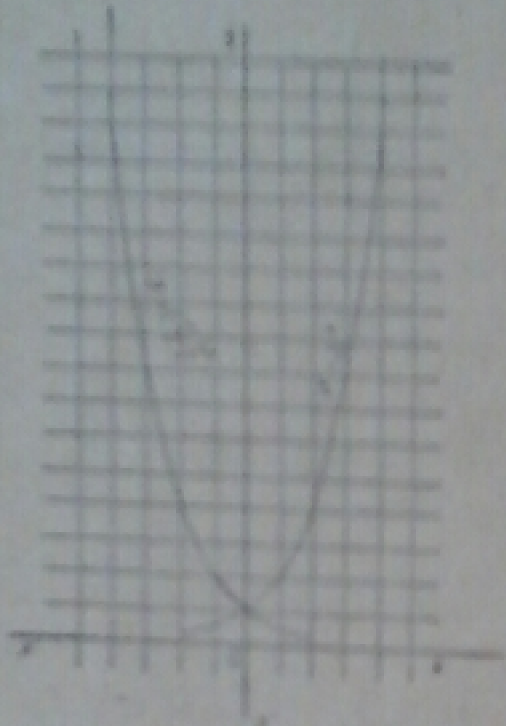
2.ª — Em qualquer caso a curva representativa da função corta o eixo dos y no ponto de ordenada 1.

3.ª — A base a da função tem que ser positiva porque se tivermos $a < 0$, para valores de x da forma $\frac{p}{q}$ sendo $q = 2k$ e $p = 2k_1 + 1$, os valores de y serão imaginários.



Aplicações. Gráficos das funções $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$y = 2^x$ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



x	y
....	....
3	8
2	4
1	2
0	1
— 1	1/2
— 2	1/4
— 3	/8
....	....

x	y
....	....
3	1/8
2	1/4
1	1/2
0	1
— 1	2
— 2	4
— 3	8
....	....

19 — Função logaritmica. É a função da forma

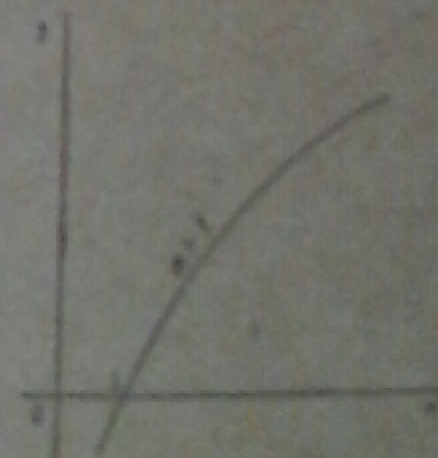
$$y = lg_a x$$

sendo a, constante e positiva, a *base* do sistema de logaritmos.

Esta função é inversa da exponencial $a^y = x$ (18)

Variação e gráfico.

1.º Caso: $a > 1$

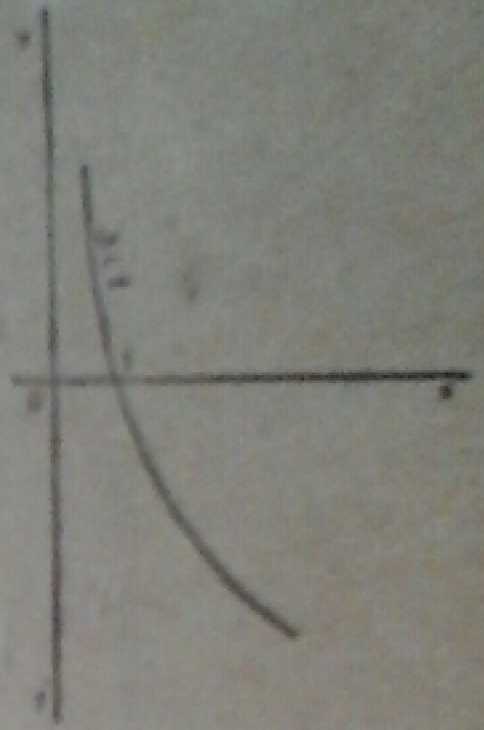


$x \to \infty$ $\quad lg\, y \to \infty$

$x = 1$ $\quad lg\, y = 0$

$x \to 0$ $\quad lg\, y \to -\infty$

2.º Caso: $a < 1$



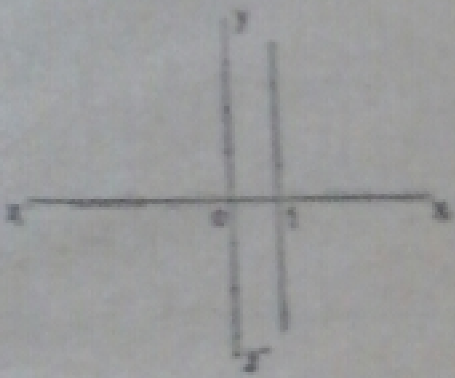
$x \to \infty \qquad lg\, y \to 0$

$x = 1 \qquad lg\, 1 = 0$

$x \to 0 \qquad lg\, y \to \infty$

3.º Caso: $a = 1$

Neste caso temos $1^y = 1$, qualquer que seja y, e, conseqüentemente, $\lg_1^1 = y$ sendo y qualquer.

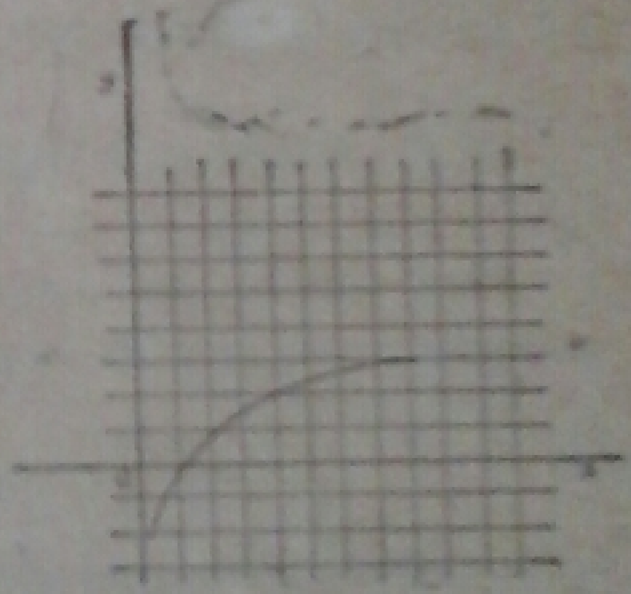


O gráfico da função será uma paralela ao eixo dos y, de ordenada 1.

APLICAÇÃO. Gráfico da função

$$y = \lg_2 x$$

x	y
....	....
8	3
4	2
2	1
1	0
1/2	— 1
1/4	— 2
....	....



20 — Funções circulares diretas. São as funções da forma

$$y = \text{sen } x \qquad y = \cos x \qquad y = \text{tg } x \quad \ldots \quad (*)$$

Exemplo: — Gráfico da função

$$y = \cos x$$

(*) Tôdas estas funções foram estudadas na "Matemática" — 2.ª Série — 2.º Ciclo.

Observemos, inicialmente, que:

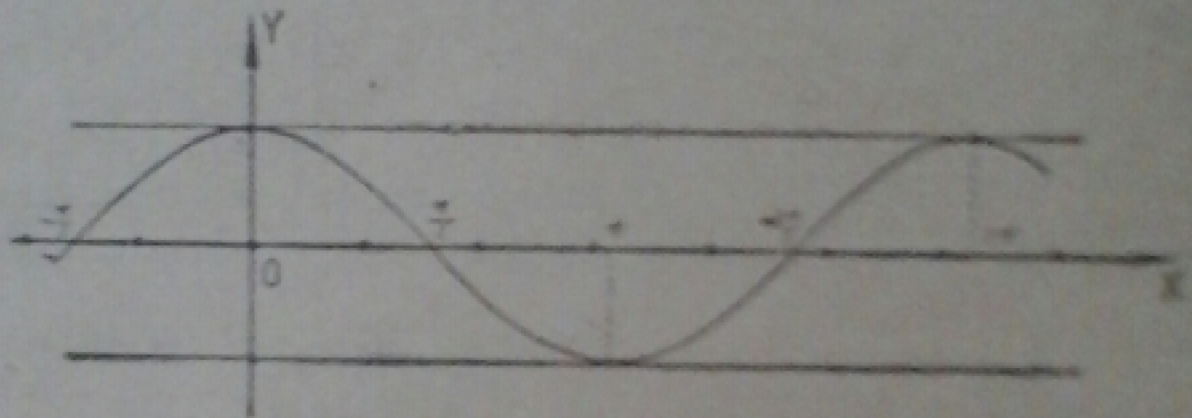
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Dizemos, então, que a função é *periódica e de período* 2π.

Além disso sabemos que $\cos x = \cos(-x)$, isto é, a função assume o mesmo valor para valores *simétricos da variável*: é uma função par (*).

Observemos, ainda, que a função é definida para qualquer valor real do argumento.

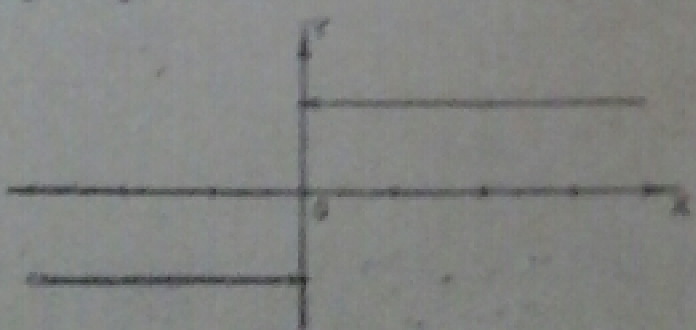
O gráfico desta função constitui a clássica *cossenóide*



que apresenta *ramificações infinitas* em dois sentidos.

21 — Gráfico da função $y = \dfrac{|x|}{x}$

Esta função foi estudada por Cauchy. É definida para qualquer valor real de x, excetuado o *zero*. Para $x > 0$, temos $y = 1$ e, para $x < 0$, $y = -1$. Seu gráfico compõe-se de duas retas paralelas a ox.



Indicamos com setas os pontos sôbre oy, porque a função não é definida para $x = 0$.

22 — Acréscimo de uma função. Tomemos uma função

$$y = f(x)$$

(*) Êste é o caso de $f(-x) = f(x)$. Se tivermos $f(-x) = -f(x)$ a função é dita *impar*.

e representemos por y_0 seu valor numérico, correspondente a um dado valor x_0 da variável, isto é, seja:

$$y_0 = f(x_0) \tag{13}$$

Suponhamos, depois, x_0 acrescido de uma quantidade arbitràriamente escolhida h, *que poderá ser positiva ou negativa*. À função, corresponderá, em geral, um valor numérico diferente, que representaremos por $y_0 + k$, *podendo* k, *ser, também, positivo ou negativo*. Em casos especiais, teremos $k = 0$.

Escreveremos dessa forma:

$$y_0 + k = f(x_0 + h)$$

Subtraindo, membro a membro, as duas últimas igualdades, virá:

$$k = f(x_0 + h) - f(x_0) \tag{15}$$

Êsse número k é o *acréscimo da função*, correspondente ao *incremento* h de x.

Conservamos a denominação *acréscimo* mesmo quando se tem $k < 0$ ou $k = 0$.

Tomemos, por exemplo, a função:

$$P(x) = -2x^2 + 5x + 3$$

e seja $x_0 = 2$. Teremos:

$$P(x_0) = 5$$

Calculemos, agora, o *acréscimo* da função para $h = 0{,}1$. Virá: $x_0 + h = 2{,}1$ e, portanto:

$$k = P(x_0 + h) - P(x_0) = -0{,}32.$$

Vemos que, para o valor $x_0 = 2$, ao *incremento* $h = 0{,}1$, corresponde o acréscimo $k = -0{,}32$.

23 — Função crescente; função decrescente. Uma função é *crescente*, para um valor x_0 da variável, quando, por menor que seja h em valor abosluto, k e h têm sempre o mesmo sinal.

Ao contrário, diz-se que a função é *decrescente*, quando os sinais de k e h são opostos.

Uma função *crescente* (decrescente) para todos os valores da variável, em um dado *intervalo*, é dita *crescente* (decrescente) nesse *intervalo*.

Em resumo, uma função é *crescente* quando x e y variam no mesmo sentido; isto é, crescendo x, y cresce; decrescendo x, y decresce. Ao contrário, é *decrescente*, quando x e y variam em sentidos opostos; crescendo x, y decresce; decrescendo x, y cresce.

EXEMPLO — "Verificar o sentido de variação da função :

$$y = -2x^2 + 5x + 3$$

para o valor $x_0 = 2$ ".

Tomando $x_0 + h = 2 + h$, teremos $P(x_0 + h) = -2h^2 - 3h + 5$ e $P(x_0) = 5$. Logo :

$$k = P(x_0 + h) - P(x_0) = -2h^2 - 3h$$

de onde virá :

$$k = -h(2h + 3)$$

e, finalmente :

$$\frac{k}{h} = -(2h + 3)$$

24 — Ligando êstes conceitos aos já estabelecidos, anteriormente (17) diremos que uma função é *contínua*, para um valor x_0 da variável, quando, em valor absoluto, h e k podem tornar-se tão pequenos quanto se queira.

Em outras palavras, podemos dizer que, quando uma função $f(x)$ é contínua para um valor x_0 da variável, seus valores numéricos : $f(x_0)$ e $f(x_0 + h)$ são tanto mais próximos quanto menor é o intervalo $(x_0, x_0 + h)$.

Se tal não se der, diremos que, para êsse valor x_0 da variável, a função é *descontínua*. Uma função é ainda dita *descontínua*, para um dado valor x_0, quando o símbolo $f(x_0)$ deixa de ter significado numérico.

Seja, por exemplo, a função :

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

Para $x_0 = 2$, é *descontínua*, porquanto :

$$f(x_0) = \frac{1}{0}$$

representa, apenas, um símbolo de impossibilidade. Nada significa numèricamente.

Uma função *contínua* para todos os valores da variável, em um dado *intervalo*, é dita *contínua* nesse *intervalo*.

APLICAÇÃO: Estudar a continuidade da função

$$y = ax^2 + bx + c$$

Consideremos um valor x_0 qualquer. Virá:

$$k = [a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c] - [ax_0^2 + bx_0 + c]$$

isto é:

$$k = h[2ax_0 + b + ah]$$

Tomando valores absolutos, teremos:

$$|k| = |h| \times |2ax_0 + b + ah|$$

Mas, em qualquer hipótese:

$$|2ax_0 + b + ah| \leqq |2ax_0| + |b| + |ah|$$

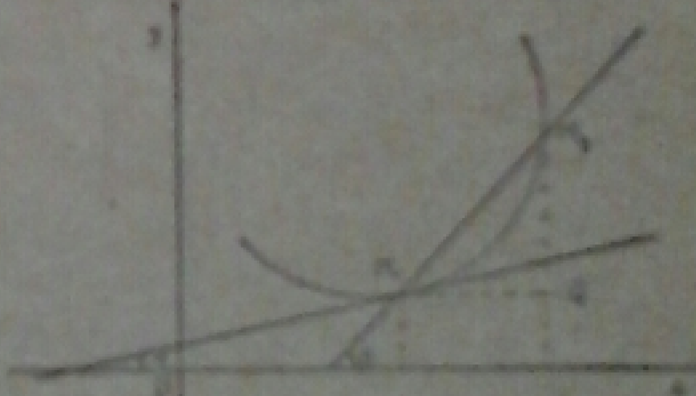
Portanto:

$$|k| \leqq |h| \left[|2ax_0| + |b| + |ah| \right]$$

A expressão entre parênteses diminuirá quando $|h|$ decrescer, conservando-se, entretanto, superior a $|2ax_0| + |b|$. Mas, à medida que tornarmos menor $|h|$, o segundo membro decrescerá sem limites, porque $|h|$ aí aparece como fator. Dessa maneira, $|k|$ será tão pequeno quanto quisermos. E como x_0 é um número qualquer, concluímos que a função $ax^2 + bx + c$ é sempre *contínua*.

25 — Tangente a uma curva plana. Seja $y = f(x)$ uma função *contínua* de x, e AB a curva que a representa.

Tomemos dois pontos $M_0(x_0, y_0)$ e $M_1(x_0 + h, y + k)$ dessa curva. Traçando a secante M_0M_1, as ordenadas de M_0 e M_1, e M_0Q paralela a $x'x$, teremos, no triângulo retângulo M_0QM_1:



$$\overline{M_1Q} = \overline{M_0Q} \cdot \text{tg}\ \beta \quad \text{ou}$$

$$k = h \cdot \text{tg}\ \beta \quad \therefore \quad \text{tg}\ \beta = \frac{k}{h}$$

Se fizermos, agora, a secante M_0M_1 girar em tôrno de M_0 de forma a M_1 tender a confundir-se com M_0, essa secante tenderá para a tangente à curva em M_0, e o ângulo β da secante com o eixo dos x tenderá para o ângulo α da tangente com o eixo dos x. Poderemos, então, escrever:

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = \operatorname{tg} \alpha$$

O valor $\operatorname{tg} \alpha$ é denominado *declividade* ou *inclinação* da tangente à curva com o eixo dos x no ponto $M_0(x_0, y_0)$.

3 — Limite de variáveis e de funções; limites infinitos. Propriedades fundamentais. Exemplos elementares de descontinuidade de uma função em um ponto. Descontinuidade das funções racionais fracionárias.

26 — Limite de uma variável. Seja C o *campo de variabilidade* de x, isto *é*, seja C o conjunto de números que x poderá representar.

Diz-se que x *tende* para um número x_0, quando é possível atribuir-lhe valores satisfazendo à condição:

$$| x - x_0 | < \varepsilon \qquad (1)$$

para todo e qualquer número aritmético ε, tão pequeno quanto quisermos, ou, em outras palavras, quando os valores de x podem tornar-se tão próximos de x_0 quanto desejarmos.

O número x_0 poderá pertencer, ou não, a C. No primeiro caso, diz-se ser possível atingir o limite.

Admitamos, por exemplo, o *campo de variabilidade* C constituído pelo conjunto de números racionais do *intervalo aberto* (1,3), isto *é*, x só poderá ser um número racional satisfazendo à condição: $1 < x < 3$.

Examinemos três hipóteses diferentes:

1.ª) $x_0 = 2$. É evidente a possibilidade da condição:

$$| x - 2 | < \varepsilon$$

pois, como se sabe, existem, no intervalo, números racionais tão próximos de 2 quanto desejarmos.

Poderemos portanto fazer x *tender* para 2 e tomar, também, $x = 2$, porquanto 2 é um número do intervalo.

2ª) $x_0 = \sqrt{3}$, isto é, x é um *número irracional* compreendido entre 1 e 2.

Concluiremos ainda pela possibilidade da condição:

$$|x - \sqrt{3}| < \varepsilon$$

pois existem números racionais que diferem do irracional dado, tão pouco quanto quisermos.

Vemos, assim, que x poderá *tender* para $\sqrt{3}$, mas sem atingir o limite, porquanto, por hipótese, é sempre racional.

3ª) $x = 1$, isto é, tomámos, agora, a extremidade inferior do intervalo.

A condição:

$$|x - 1| < \varepsilon$$

será evidentemente satisfeita, pois, no intervalo, existem números tão próximos da extremidade 1 quanto desejarmos. Mas, tal como no caso anterior, êsse limite não poderá ser atingido, embora se trate, agora, de um número racional. Bastará ver que admitimos inicialmente: $1 < x < 3$.

27 — Ponto de acumulação. É usual chamar-se o limite x_0 de *ponto de acumulação* ou de *ponto limite* de C, porquanto, em tôrno do valor x_0, existe sempre uma infinidade de valores de x, isto é, uma infinidade de números do conjunto C.

É prático e comum escrever $x \to x_0$, para afirmar que x tende para x_0.

28 — Limites infinitos. Em particular, quando os valores assumidos por uma variável são tais que é sempre satisfeita a condição

$$|x| > E \qquad (2)$$

para todo e qualquer número aritmético E, tão grande quanto se imagine, diz-se, por extensão, que o *limite de* x *é infinito*.

Em particular, para valores positivos de x, escreveremos:

$$x \to +\infty$$

e, para valores negativos:

$$x \to -\infty.$$

Consideremos, por exemplo, sôbre um eixo, um ponto de abcissa x.

Passar a admitir que o ponto de abcissa x está *à direita* de todo e qualquer ponto de abcissa E, por maior que seja o número positivo E, equivale a supor x *tendendo* para $+\infty$.

29 — Limite de uma função. Dada uma função $y = f(x)$, definida em um intervalo (a, b), dizer que:

$$\lim_{x \to x_0} y = y_0 \tag{3}$$

equivale a afirmar ser possível a condição:

$$| y - y_0 | < \delta \tag{4}$$

para qualquer número aritmético δ, tão pequeno quanto desejarmos, desde que tomemos x *suficientemente* próximo de x_0, isto é, poderemos sempre, em (1), escolher ε de modo que seja verificada esta condição (4).

Com outras palavras, diremos que y_0 é o limite da função, ao tender x para x_0.

30 — Observações. Diz-se anàlogamente, que:

$$\lim_{x \to \infty} y = y_0 \tag{5}$$

quando a relação (4) é acarretada, não mais pela condição (1), porém, pela condição (2).

Poderemos admitir, ainda, que, ao tender x para um determinado valor x_0, tenhamos:

$$| y | > E$$

isto é:

$$\lim_{x \to x_0} | y | = \infty$$

Se, no entanto, a função se conservar positiva, poderemos escrever:

$$\lim_{x \to x_0} y = +\infty$$

e, na hipótese de se conservar negativa:

$$\lim_{x \to x_0} y = -\infty$$

Fàcilmente seria, então, concebida a extensão das duas últimas expressões ao caso de $x \to \pm \infty$.

31 — Limite de sucessão. Uma sucessão $\{ a_n \}$ poderá ser considerada como uma *função de variável inteira.* De fato, a cada valor atribuido a n, corresponde um número perfeitamente determinado a_n.

Dizer, então, que a sucessão a_n tem para limite a equivale a escrever para a função a_n:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

Vemos, assim, surgir o conceito de *limite de uma sucessão*, como simples caso particular, no estudo que ora fazemos.

32 — Limite à direita e limite à esquerda. Ao estudar o limite de uma função poderemos supor que x tende para x_0, separadamente, por valores superiores e por valores inferiores a x_0. No primeiro caso diz-se *limite à direita* e, no segundo, *limite à esquerda*, escrevendo-se, respectivamente:

$$\lim_{x \to x_0+} y \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0-} y$$

Veremos, adiante que êsses limites poderão ser diferentes e, até, existir um e outro não.

É comum adotar para êsses limites, respectivamente, os símbolos $f\ (x_0 + 0)$ e $f\ (x_0 - 0)$, devidos a Dirichlet.

Assim, para a função $y = E\ (x)$ cujo gráfico se compõe de uma sucessão de segmentos (16) são evidentes, por exemplo, as conclusões:

$$\lim_{x \to 2+} y = 2$$

$$\lim_{x \to 2-} y = 1$$

isto é, existem e são diferentes os limites, respectivamente, à direita e à esquerda, no ponto $x = 2$.

Já para a função $y = \sqrt{x - 1}$, por exemplo, vê-se logo ser:

$$\lim_{x \to 1+} y = 0$$

enquanto que o limite à esquerda não existe.

Assim sendo, só deveremos deixar de especificar o limite, quando fôr indiferente considerá-lo à direita ou à esquerda.

33 — Propriedades fundamentais. De um modo geral, poderemos aceitar o cálculo de limites, como uma operação *reversível* em relação às operações elementares.

Assim, via de regra, teremos:

$$\lim (A + B) = \lim A + \lim B$$

$$\lim AB = \lim A \cdot \lim B$$

$$\lim \sqrt{A} = \sqrt{\lim A}$$

. . . .

mas há restrições que só um estudo meticuloso da teoria dos limites poderia evidenciar.

EXERCÍCIO I — "*Calcular* $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x$ *e* $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$".

Ora, para $x \neq k\pi$ sabemos que:

$$0 < |\operatorname{sen} x| < |x|$$

E, como $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, virá $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

Por outro lado:

$$1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$$

e, de acôrdo com o que acabámos de ver acima:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} < \left(\frac{x}{2}\right)^2 (x \neq k\pi)$$

Virá, assim:

$$0 < |1 - \cos x| < \frac{x^2}{2}$$

onde $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{2} = 0$. Logo: $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

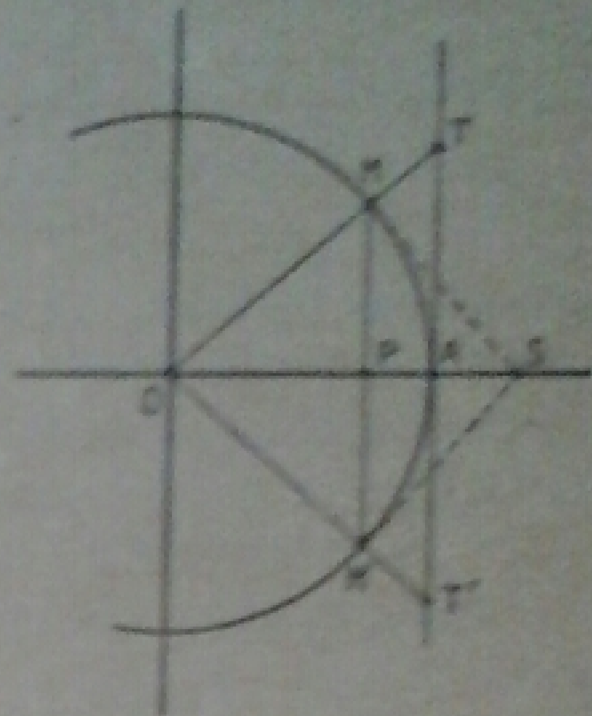
EXERCÍCIO II — "*Calcular* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$".

Na figura abaixo, tomando $\overset{\frown}{AM} = x$, teremos, *aritmèticamente*:

$MM' = 2\,PM$

$\overset{\frown}{MAM'} = 2\,\overset{\frown}{AM}$

$MS + SM' = TT' = 2\,AT$



E, visto que:

$MM' < \overset{\frown}{MAM'} < MS + SM'$

concluimos ser:

$$PM < \overset{\frown}{AM} < AT$$

ou, melhor:

$$\frac{PM}{OA} < \frac{AM}{OA} < \frac{AT}{OA}$$

De um modo geral, teremos então:

$$|\operatorname{sen} x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$$

para $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$.

Escrevendo, sucessivamente, as razões de $|\operatorname{sen} x|$ para o próprio $|\operatorname{sen} x|$, $|x|$ e $|\operatorname{tg} x|$, virá, em virtude das últimas relações estabelecidas:

$$1 > \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| > |\cos x|$$

Ora, sabemos que $\lim\limits_{x \to 0} |\cos x| = 1$, logo:

$$\lim_{x \to 0} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = 1$$

Mas, na vizinhança do valor $x_0 = 0$, x e $\operatorname{sen} x$ têm sempre o mesmo sinal. Portanto, poderemos escrever de um modo mais geral que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

34 — Descontinuidade de uma função. Uma função $y = f(x)$, definida em um intervalo (a, b), é *contínua*, para um valor x_0 dêsse intervalo, quando:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se considerarmos, separadamente, as *condições*:

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0)$$

definiremos, para o valor x_0, a *continuidade à direita e à esquerda*, respectivamente.

Com a notação de Dirichlet (**32**), escreveriamos $f(x_0+0) = f(x_0)$ para a *continuidade à direita* e $f(x_0-0) = f(x_0)$, para a *continuidade à esquerda*.

Aliás, quando tivermos:

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x)$$

diremos, simplesmente, que a função é *contínua para o valor x_0*.

Diz-se que a função f (x) *é contínua em (a, b)*, quando é contínua em todos os pontos dêsse intervalo.

Diremos, ao contrário, que a função dada é *descontínua* para o valor x_0 considerado, em qualquer um dos seguintes casos:

a) quando o símbolo $f(x)$ não tiver significado numérico;

b) quando não existir o $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

c) quando, embora existindo êsse limite e o valor $f(x)$, tivermos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Poderemos, ainda, ter apenas uma *descontinuidade parcial*, isto é, *à direita* ou *à esquerda*.

Observaremos, entretanto, que as descontinuidades apresentam-se, geralmente, em limitado número de pontos.

EXEMPLO I — "*Estudar a continuidade das funções* y = sen x e y = cos x".

Tomando a primeira, temos:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 = 2 \cos \frac{x + x_0}{2} \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2}.$$

Ora, no segundo membro, o primeiro fator trigonométrico é delimitado, pois $\cos \dfrac{x + x_0}{2} \leqslant 1$ e o limite do segundo, para $x \to x_0$ é nulo (**33**, Exercício I) Portanto:

$$\lim_{x \to x_0} (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0) = 0$$

isto é:

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$$

mostrando que a função é contínua para qualquer valor da variável, uma vez que $\operatorname{sen} x_0$ existe sempre e nenhuma restrição fizemos sôbre o número que x_0 representa (*).

Para a segunda função, as conclusões são análogas. De fato:

$$\cos x_0 - \cos x = 2 \operatorname{sen} \frac{x + x_0}{2} \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2}$$

e, pelas mesmas razões:

$$\lim_{x \to x_0} (\cos x_0 - \cos x) = 0$$

isto é:

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$

EXEMPLO II — *"Estudar a continuidade da função*

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Temos, em virtude da teoria dos limites:

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} (r^2 - x^2)} = \sqrt{r^2 - \lim_{x \to x_0} x^2}$$

isto é:

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - x_0^2}$$

A função é pois contínua em todo seu domínio de definição, caracterizado pela condição $|x| \leqslant r$.

(*) São denominadas inteiras as funções que, como esta, não apresentam descontinuidade para: $-\infty < x < +\infty$.

35 — Classificação das descontinuidades. Diz-se, em geral, que a descontinuidade é de *primeira espécie* quando existem os limites $f(x_0+0)$ e $f(x_0-0)$; de *segunda espécie*, quando um, ao menos, não existe.

O caso particular em que $f(x_0+0) = f(x_0-0)$, define o que se chama *descontinuidade evitável*, pois nada nos impede de tomar para valor convencional de $f(x_0)$ aquele que corresponde aos limites.

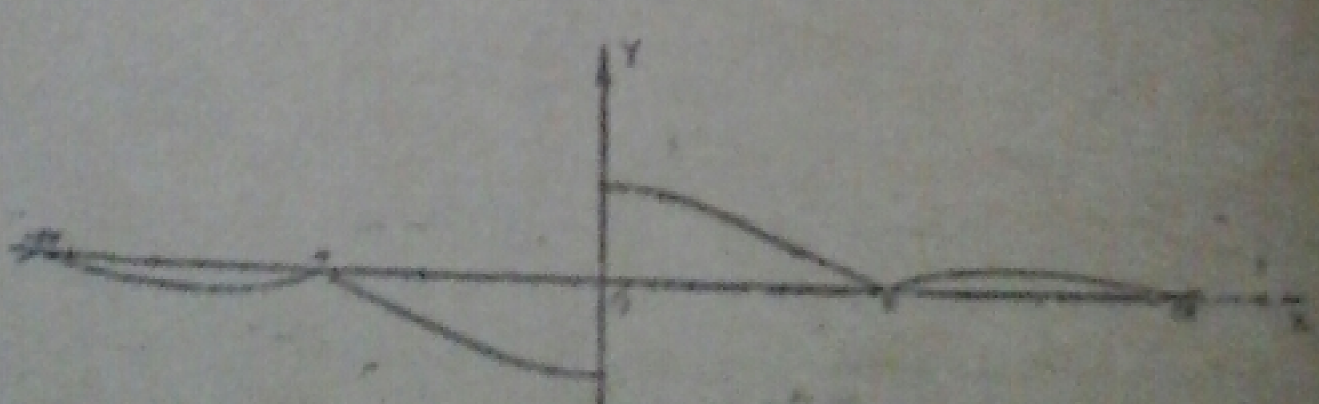
E' o que se dá, por exemplo, com a função $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$ no ponto $x_0 = 0$, onde $f(x_0+0) = f(x_0-0) = 1$ (**33**, *Exercício* II).

Poderemos, então, *por convenção*, tomar $f(0) = 1$, visto que, verdadeiramente, temos $f(0) = \dfrac{0}{0}$, símbolo sem significado numérico.

Assim procedendo, desaparecerá a descontinuidade assinalada, de onde o qualificativo de *evitável*.

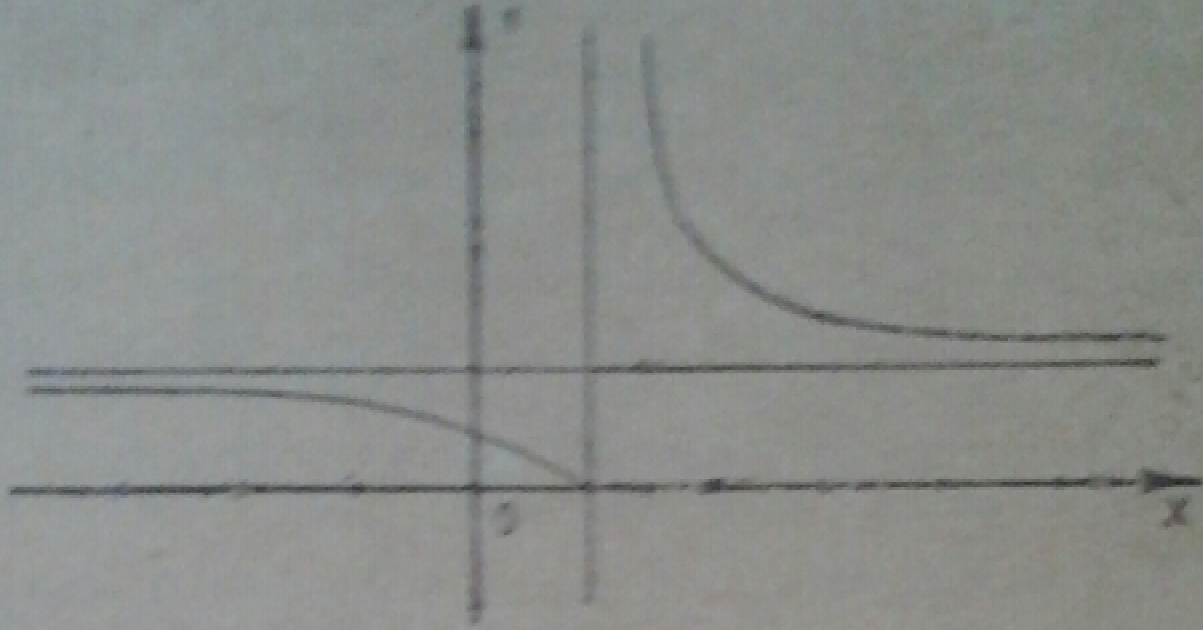
Nas descontinuidades de primeira espécie em geral, a diferença $|f(x_0+0) - f(x_0-0)|$ define o *salto*, que poderá ser finito ou não.

Tomemos, por exemplo $f(x) = \dfrac{|\text{sen}\, x|}{x}$. Para $x_0 = 0$, teremos $f(x_0+0) = 1$ e $f(x_0-0) = -1$. Nesse ponto há,



pois, um *salto* igual a 2 que será melhor apreciado no gráfico da função, que, aliás, só apresenta esta descontinuidade.

Seja, ainda, $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$. No ponto $x_0 = 1$, teremos $f(x_0 + 0) = +\infty$ e $f(x_0 - 0) = 0$. Há, pois, um *salto infinito*, que, no gráfico, evidencia-se perfeitamente bem.



Um exemplo, característico de descontinuidade de segunda espécie, é apresentado pela função:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{1}{x-1}}{2^{\frac{1}{x-1}} + 1}$$

no ponto $x_0 = 1$. Aí, $f(x_0 + 0) = 0$, sem que exista $f(x_0 - 0)$, pois o valor de sen $\dfrac{1}{x-1}$ oscila indefinidamente entre 1 e -1, para $x \to 1$, enquanto que, como acabámos de ver:

$$\lim_{x \to 1+} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

e:

$$\lim_{x \to 1-} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0$$

36 — Observação. A condição de continuidade expressa por $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ poderá ser escrita sob a forma:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

desde que tomemos $x = x_\circ + h$ $(h \gtrless 0)$. Vem, assim:

$$\lim_{h \to 0} \left| f(x_\circ + h) - f(x_\circ) \right| = 0$$

E $f(x_\circ + h) - f(x_\circ)$ representa, justamente, o *acréscimo* da função, correspondente ao *acréscimo h* da variável.

Surge daí uma idéia intuitiva de continuidade, caracterizada pela possibilidade de variar a função por graus imperceptíveis desde que, assim, varie x (17).

Como consequência, no estudo gráfico, somos levados a admitir que a toda função contínua deverá, *necessàriamente*, corresponder uma *linha contínua*, na acepção geral da palavra. Há, entretanto, funções *contínuas* que não admitem qualquer representação gráfica, mas constituem casos bastante excepcionais.

37 — Descontinuidade das funções racionais fracionárias. As propriedades gerais da teoria dos limites permitem estabelecer imediatamente que a *soma*, a *diferença* e o *produto de funções contínuas* são ainda *funções contínuas*.

Concluímos, então, que os polinômios algébricos, racionais e inteiros são funções contínuas para todo o domínio real.

Consideremos, entretanto, em particular, as funções *algébricas racionais*, do tipo:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios algébricos racionais e inteiros.

Quando o denominador se reduz a uma constante, temos uma função *algébrica racional inteira* ou, simplesmente, um *polinômio*.

Nos pontos para os quais tivermos $Q(x) = 0$, $f(x)$ não será *definida*; caracterizam-se, assim, as únicas *descontinuidades* apresentadas pelas *funções algébricas racionais*.

Suponhamos, então, $Q(x_\circ) = 0$ e $P(x_\circ) = k$, resultados que permitirão duas hipóteses:

a) $k \neq 0$, de onde $f(x) = \dfrac{k}{0}$, símbolo de impossibilidade operatória, isto é, f (x) *não existe* para $x = x_0$. Poderemos, entretanto, *convencionar* (**35**):

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Ora, $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e, por conseguinte, funções contínuas. Assim:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0) = k$$

$$\lim_{x \to x_0} Q(x) = Q(x_0) = 0$$

Teremos, então, *por convenção*:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm \infty$$

Diz-se, neste caso, que, em x_0, a função apresenta um *polo*.

b) $k = 0$, de onde $f(x_0) = \dfrac{0}{0}$, símbolo de indeterminação. Concluímos, de igual modo, não ser definida a função $f(x)$, para $x = x_0$ e, por convenção, tomaremos, ainda:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Ora, quando um polinômio se anula para $x = x_0$ (*), é divisível por $x - x_0$. Teremos, então, de um modo geral:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x - x_0)^p \, P_1(x)}{(x - x_0)^q \, Q_1(x)}$$

Sendo $p = q$, as expressões $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ e $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ terão valores iguais, excepto para $x = x_0$. Nesse ponto, a primeira ficará $\dfrac{0}{0}$ e a segunda tomará um valor determinado, visto ser $P_1(x_0) \neq 0$ e $Q_1(x_0) \neq 0$.

(*) De fato, se $f(x)$ é divisível por $x - x_0$, temos $f(x) = (x - x_0) \cdot f_1(x)$ e, para $x = x_0$ esta igualdade ficará $f(x_0) = 0$. Ver adiante § 195.

Por consequência:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}$$

Para $p > q$, é evidente a relação:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)^{p-q} P_1(x)}{Q_1(x)} = 0$$

e, para $p < q$:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{(x - x_0)^{q-p} Q_1(x)} = \pm \infty$$

É usual chamar-se êsse valor convencional, $f(x_0)$, de *verdadeiro valor* e *valor principal*. Melhor será *valor limite*.

EXEMPLO I — *"Estudar as descontinuidades da função*

$$f(x) = \frac{3x + 5}{x^2 - 5x + 6}\text{"}$$

Resolvendo a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, verificamos que o denominador anula-se para os valores 2 e 3 da variável, sem que o mesmo aconteça ao numerador. Há, portanto, dois *polos*, isto é: $f(2) = \pm \infty$ e $f(3) = \pm \infty$.

A ambiguidade de sinal é devida ao fato de tender o denominador para zero, quer por valores positivos, quer por valores negativos enquanto permanece fixo o sinal do numerador.

EXEMPLO II — *"Estudar as descontinuidades da função:*

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$$

Para o valor 2, anula-se sòmente o denominador, portanto, $f(2) = \pm \infty$. Mas para o valor 3, obtém-se a expressão $\frac{0}{0}$. Excluindo o fator $x - 3$, obteremos:

$$f(3) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \left[\frac{x + 1}{x - 2} \right]_{x = 3} = \frac{4}{1} = 4$$

38 — Observação. O limite duma *função racional*, para $x \to \pm \infty$, obtém-se pelo mesmo processo usado no caso da paridade *vel inteira n*. O raciocínio é idêntico e os casos que se apresentam são análogos.

EXERCICIO I — "*Calcular* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 1}{4x^3 - 5x + 7}$"

Dividimos os dois têrmos da fração por x^3 e fazemos $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{4x^3 - 5x + 7} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^3}}{4 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{7}{x^3}} = \frac{3}{4}$$

EXERCICIO II — "*Calcular* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x + 1}{5x^2 - 3x + 1}$"

O grau do numerador é 1 e do denominador 2. Dividimos ambos os membros por x^2 (usando o maior grau):

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x + 1}{5x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{5 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = 0$$

EXERCICIO III — "*Calcular* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x^5 + 2x^3 + 4x}{5x^3 - 2x - 1}$"

Dividimos ambos os têrmos da fração por x^5 (usando o maior dos dois graus 5 e 3).

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^5 + 2x^3 + 4x}{5x^3 - 2x - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x^4}}{\dfrac{5}{x^2} - \dfrac{2}{x^4} - \dfrac{1}{x^5}} = \infty$$

Concluimos com a observação dêstes três exercicios que o

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ é:}$$

a) $\dfrac{A_0}{B_0}$, sendo A_0 e B_0 os coeficientes dos têrmos de maior grau em $P(x)$ e $Q(x)$, quando o grau do numerador é igual ao grau do denominador.

b) zero (0) quando o grau do numerador fôr menor que o do denominador.

c) ∞ (infinito) quando o grau do numerador fôr maior que o do denominador.

EXERCÍCIOS

1. Determinar o *campo de definição* das funções:

$$y = \sqrt{2 + x\,(1 - x)}$$
$$y = \sqrt[4]{(x - 3)\,(x - 5)^2}$$
$$y = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$$
$$y = \text{arc sen}\,(x^2 + x - 1)$$
$$y = \sqrt{\text{sen}\,x + \cos x}$$

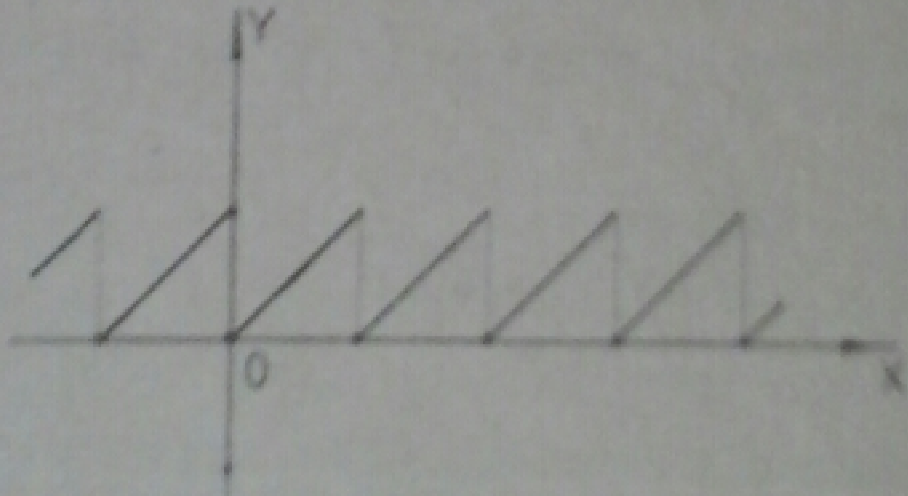
Resp.: $-1 \leq x \leq 2$; $x \geqslant 3$; $x \leq 1$ ou $x \geqslant 4$;

$-2 \leq x \leq -1$ e $0 \leq x \leq 1$ para $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$;

$x = \dfrac{(8k+1)\pi}{4} + \dfrac{\theta\pi}{2}$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$ e $-1 < \theta < 1$.

2. Estudar a representação gráfica da função $y = x - E\,(x)$.

Resp.:

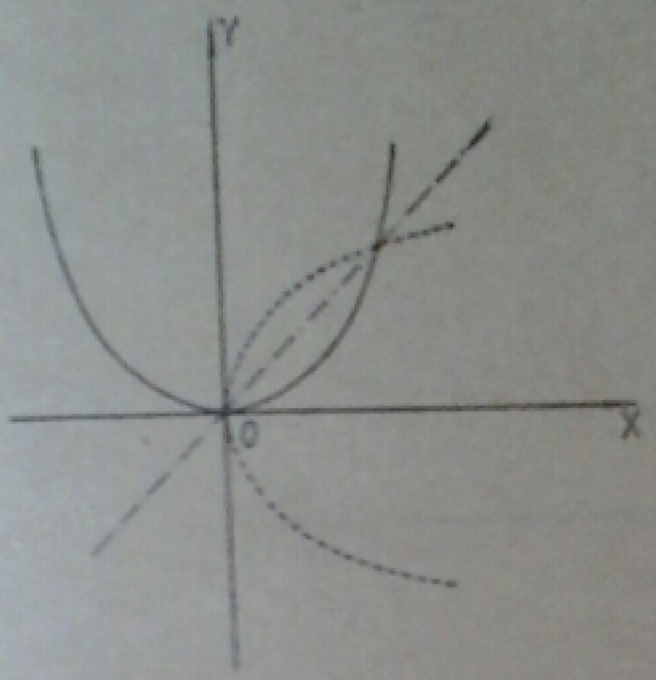


3. Estudar a representação gráfica das funções inversas:

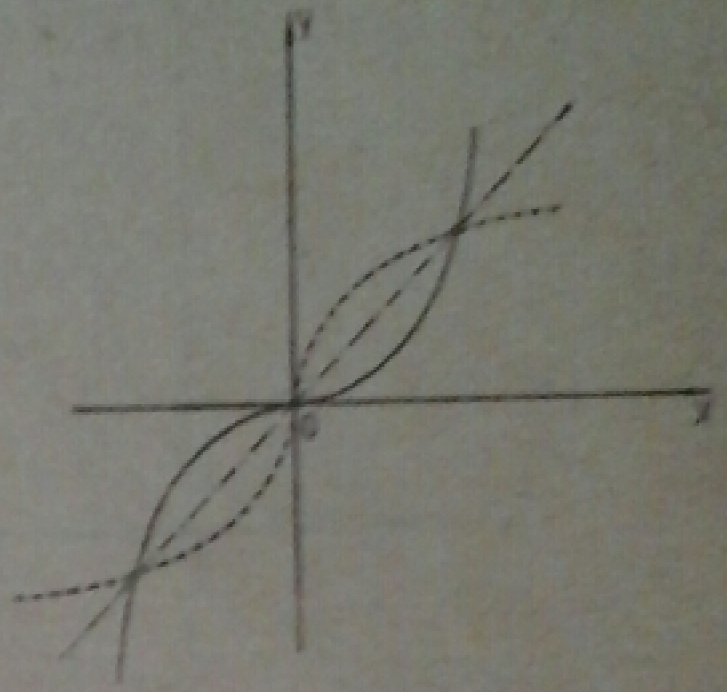
$y = x^m$ e $y = \sqrt[m]{x}$ (m inteiro)

$y = e^x$ e $y = l.\,x$

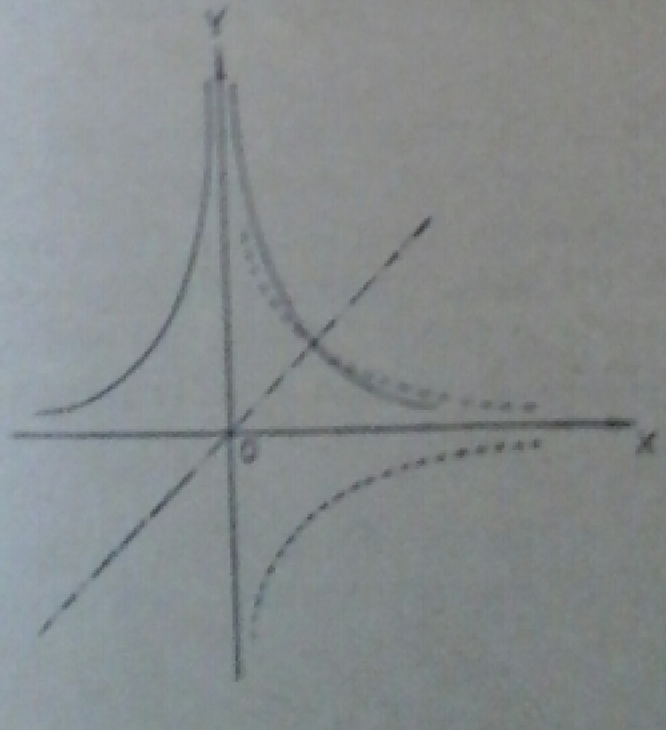
Resp.: $y = x^m$ e $y = \sqrt[m]{x}$



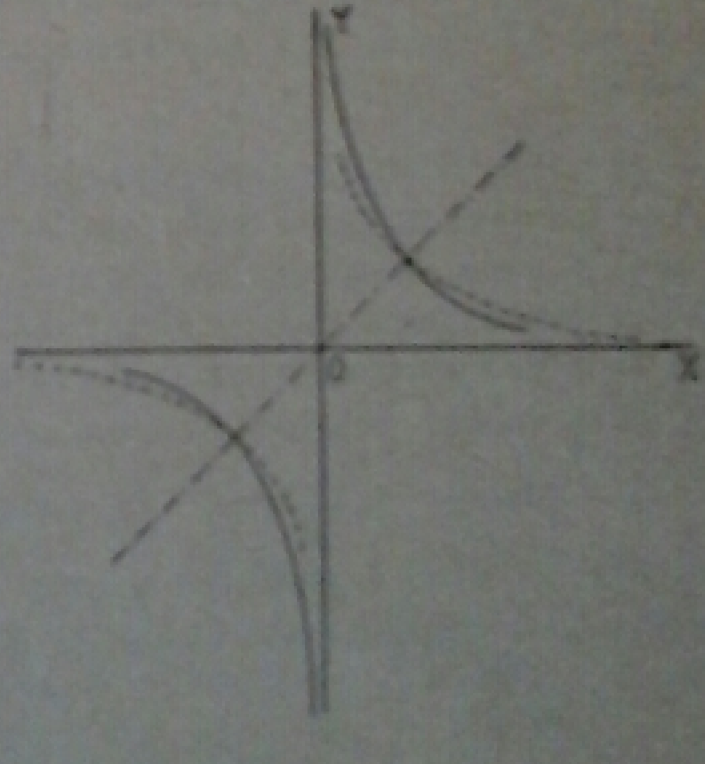
(m > 0 e par)



(m > 0 e ímpar)

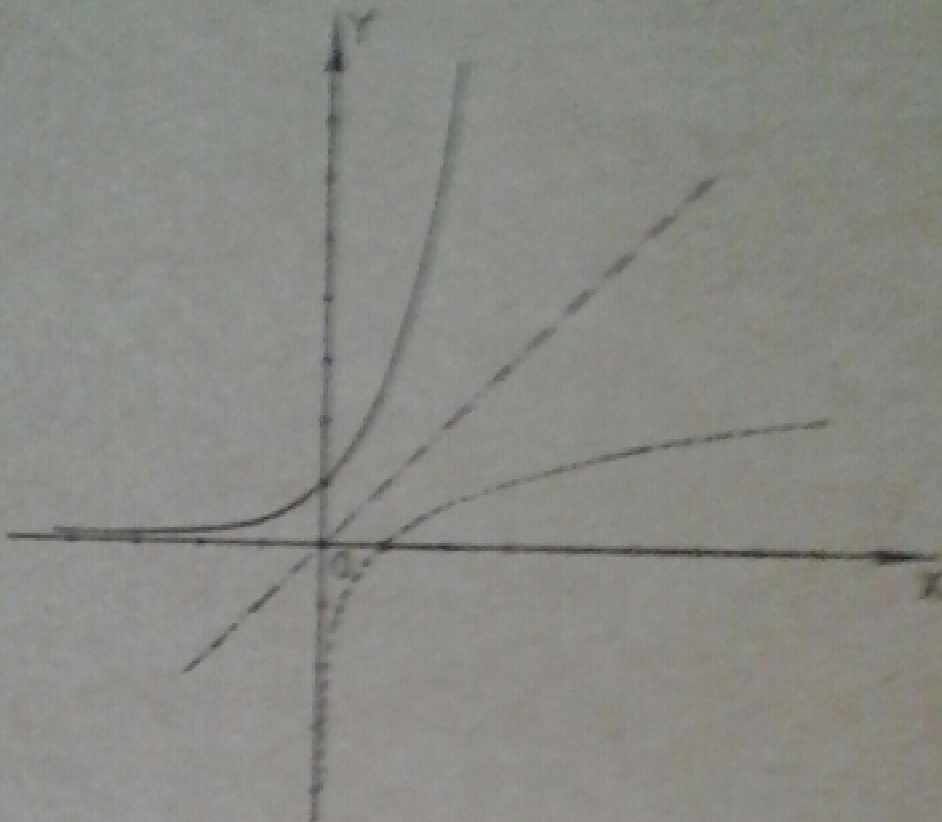


(m < 0 e par)



(m < 0 e ímpar)

Resp.: $y = e^x$ $y = l.\ x.$



Os traços cheios representam a função direta; os pontilhados, a inversa.

4. Estudar a representabilidade gráfica da função que é igual a 1 ou 0, conforme se tenha abcissa *racional* ou *irracional* (Dirichlet).

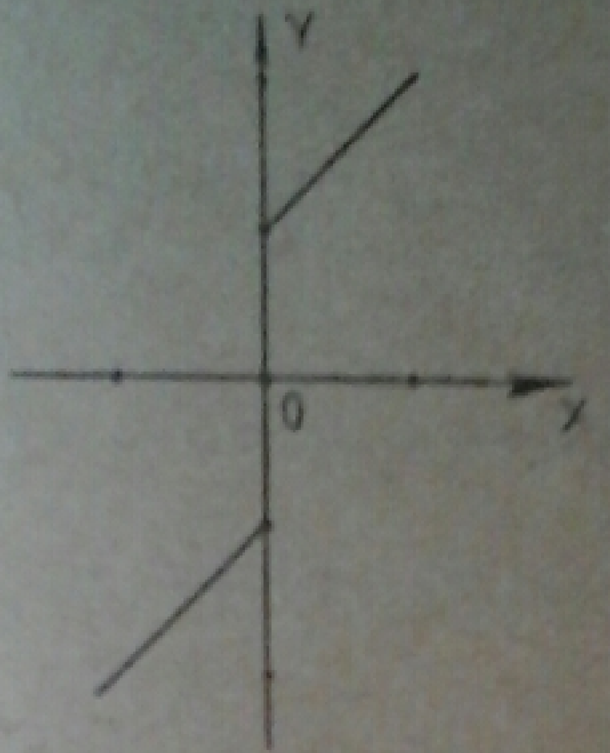
Resp.: Não admite representação gráfica; seriam *aparentes* as *retas* esboçadas, uma pelo conjunto de pontos de abcissas racionais e outra pelo conjunto de pontos de abcissas irracionais. Para que se *formasse* uma *reta*, na verdadeira acepção, seria necessário que um dos conjuntos de pontos completasse o outro. Todos os pontos da função são pontos de descontinuidade à direita e à esquerda.

5. Mesmo problema (4) para $y = (-2)^x$.

Resp.: Não é possível representar, gràficamente, tal função porque, na vizinhança de qualquer ponto há sempre pontos nos quais não é definida.

6. Traçar o gráfico da função $y = x + \dfrac{x}{|x|}$.

Resp.:



7. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} \qquad \lim_{k \to \infty} (k - \operatorname{sen} k) \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda - \operatorname{sen} \lambda}{\lambda + \operatorname{sen} \lambda} \qquad \lim_{\lambda \to \pm\infty} \frac{\lambda - \operatorname{sen} \lambda}{\lambda + \operatorname{sen} \lambda} \qquad \lim_{\sigma \to 0} \sigma^{\sigma}$$

Resp.: 1; ∞; 0; 0; 1; 1

8. Calcular:

$$\lim_{t \to \infty} \sqrt{\frac{9t^2 - 3t + 25}{25t^2 + 36}} \qquad \lim_{t \to \infty} \sqrt{\frac{9t^2 - 3t + 25}{25t^2 + 36}}$$

$$\lim_{u \to \infty} \left[\sqrt{u + 1} - \sqrt{u} \right].$$

Resp.: $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{6}$; 0.

9. Calcular:

$$\lim_{\varphi \to 0} \left(\varphi + \operatorname{sen} \frac{1}{\varphi} \right) \qquad \lim_{\varphi \to 0} \varphi . \operatorname{sen} \frac{1}{\varphi}$$

$$\lim_{x \to 0+} e^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x \to 0+} e^{\frac{1}{x}};$$

$$\lim_{x \to 1+} [\, x - E(x) \,] \qquad \lim_{x \to 1-} [\, x - E(x) \,]$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} \qquad \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x}$$

Resp.: Indeterminado; 0; 0; ∞; 0; 1; 1; -1.

10. Calcular:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{3}}{x - 3}$$ (*Sugestão*: tomar $x = t^4$ e $3 = a^4$)

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{1 - \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi}$$ (*Sugestão*: exprimir a relação em função de $\frac{\varphi}{2}$).

Resp.: $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{27}}$; 0.

11. Sendo $f(x) = \dfrac{1}{2x - 5}$, calcular $f(\frac{5}{2} + 0)$ e $f(\frac{5}{2} - 0)$.

Resp.: ∞ e $-\infty$.

12. Calcular $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}$.

Sugestão: $$\frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)} = \frac{ax}{bx} \cdot \frac{\dfrac{\operatorname{sen} ax}{ax}}{\dfrac{\operatorname{sen} bx}{bx}}$$

Resp.: $\dfrac{a}{b}$

13. Calcular $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} 3x}{x \cos x}$. **Resp.:** 4

14. Estudar a continuidade de $y = a^x$.

Resp.: A função é contínua para $-\infty < x < \infty$, visto como qualquer que seja x_0 tem-se sempre $\displaystyle\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

15. Calcular os pontos de descontinuidade da função

$$y = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{x + 1}$$ **Resp.:** $x = \dfrac{1 + 2k}{1 - 2k}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$)

16. Estudar as descontinuidades das funções abaixo:

I) $\rho = \operatorname{sen} \dfrac{1}{\varphi}$, para $\varphi = 0$;

II) $y = e^{\frac{1}{x}}$, para $x = 0$;

III) $y = x - E(x)$, para $x = 2$;

IV) $s = \dfrac{1}{t^2}$, para $t = 0$;

V) $v = \dfrac{2k^2 + k - 3}{k^3 - k^2 + k - 1}$;

VI) $y = \dfrac{2x - 5}{3x^2 + x - 2}$.

I) Nesse ponto há *descontinuidade de 2.ª espécie;* $f(0)$, $f(-0)$ e $f(+0)$ *não existem;*

II) nesse ponto $x_0 = 0$, há um *salto infinito*, pois $f(-0) = 0$ e $f(+0) = \infty$ (descontinuidade de 1ª espécie); $f(x)$ não é aí definida;

III) para $x_0 = 2$, temos $f(2) = 0$, $f(2-0) = 1$ e $f(2+0) = 0$; é, portanto, contínua à esquerda e *descontínua à direita*, onde apresenta um *salto finito* (descontinuidade de 1ª espécie);

IV) $t = 0$ é um polo da função, pois $f(t-0) = f(t+0) = \infty$ e como há igualdade dos limites (à direita e à esquerda) temos uma *descontinuidade de 1ª espécie evitável* (para desaparecer a *descontinuidade* bastará convencionar $f(0) = \infty$).

V) para $k = 1$, única raiz do denominador, a função *não existe*, mas:

$$f(1-0) = f(1+0) = \frac{5}{2}$$

portanto, a *descontinuidade é de 1ª espécie e evitável;* bastará convencionarmos $f(1) = \dfrac{5}{2}$.

VI) *saltos infinitos* nos pontos -1 e $\dfrac{2}{3}$, raízes do denominador, pois:

$$f(-1-0) = -\infty \qquad f\left(\frac{2}{3} - 0\right) = \infty$$

e

$$f(-1+0) = +\infty \qquad f\left(\frac{2}{3} + 0\right) = -\infty$$

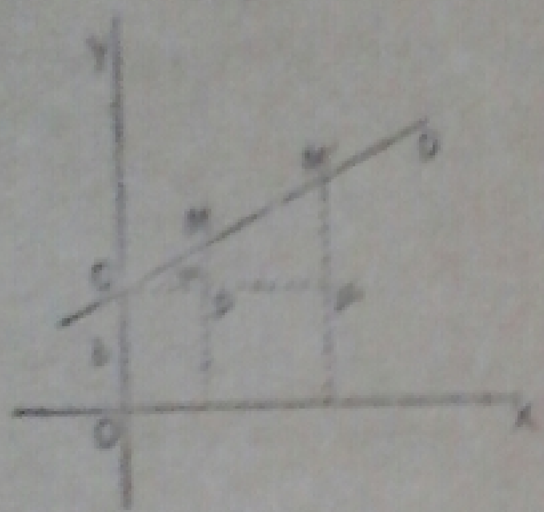
17. Estudar a continuidade da função $f(\lambda) = (1 + \lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$ no ponto $\lambda_0 = 0$.

Resp.: A função *não existe* para $\lambda_0 = 0$, mas $f(-0) = f(+0) = e$, portanto, temos uma *descontinuidade evitável*, bastando tomar $f(0) = e = 2{,}71828\ldots$

4 — A função linear é a linha reta em coordenadas cartesianas. Parâmetro angular e parâmetro linear. Formas diversas da equação da linha reta. Representação paramétrica; área de um triângulo em função das coordenadas dos vértices. Os problemas clássicos de inclinação, interseção, passagem e distância, relativos a linha reta.

LINHA RETA

39 — Equações da linha reta. TEOREMA: — *A linha reta é representada por uma equação do primeiro grau com duas variáveis.*



Seja D uma reta e $M(x,y)$ e $M'(x',y')$ dois dos seus pontos. Pelo ponto Q de interseção da reta com o eixo dos y tracemos uma paralela ao eixo dos x.

A semelhança dos triângulos QPM e $QP'M'$ dá:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{P'M'}}{\overline{QP'}} = \ldots = a$$

sendo a uma constante.

Representando por b o valor algébrico do vetor $\overrightarrow{OQ}$, teremos $\overline{PM} = y - b$, e a igualdade anterior ficará:

$$\frac{y-b}{x} = a \quad \therefore \quad y = ax + b$$

É esta a equação da reta D: ela é do primeiro grau com duas variáveis e encerra dois *parâmetros* que são: b, chamado *parâmetro* ou *coeficiente linear*, igual à *ordenada na origem*, e, a, denominado *parâmetro* ou *coeficiente angular*, ou ainda, *declividade da reta*, igual à tangente trigonométrica do ângulo que forma com o semi-eixo Ox a reta D:

$$a = \frac{\overline{PM}}{\overline{QP}} = \operatorname{tg} \alpha$$

Quando a *reta passa pela origem* temos $b = 0$ e a equação da reta será Grifado

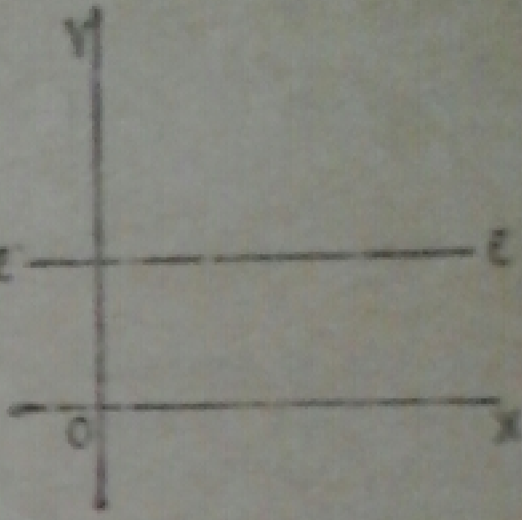
$$y = ax$$

RECÍPROCA: — *Toda equação do primeiro grau com duas variáveis representa uma reta.*

Vamos demonstrar que toda equação da forma

$$Ax + By + C = O, \qquad (I)$$

em que A, B e C são constantes arbitrárias, representa uma reta.



1) $A = 0, B \neq 0.$

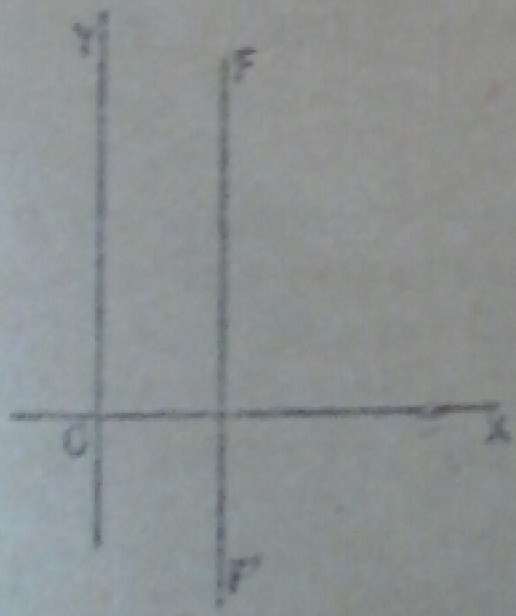
A equação (I) ficará:

$$By + C = 0 \quad \therefore y = -\frac{C}{B}$$

Todos os pontos do lugar geométrico representado por esta equação têm ordenadas iguais a $-\frac{C}{B}$: êles formarão uma reta EE' paralela ao eixo dos x.

Em particular, se tivermos ainda $C = 0$, a equação será

$$y = 0$$



que é *a equação do eixo dos x*.

Anàlogamente, quando $B = 0$ e $A \neq 0$, a equação fica

$$Ax + C = 0 \quad \therefore \quad x = -\frac{C}{A}$$

e representa uma reta FF' paralela ao eixo dos y. Em particular,

$$x = 0$$

é a equação do eixo dos y.

Conclusão: — *Tôda equação do primeiro grau com uma única variável, x ou y, representa uma reta paralela ao eixo da variável que falta na equação.*

2) $C = 0$ e $AB \neq 0$.

A equação neste caso é

$$Ax + By = 0$$

ou

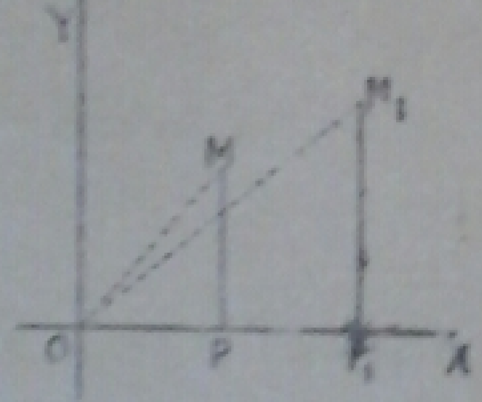
$$y = -\frac{A}{B}x$$

Fazendo $-\dfrac{A}{B} = a$, teremos:

$$y = ax \quad \therefore \quad \frac{y}{x} = a \qquad \text{(II)}$$

Como a equação $y = ax$ não possui têrmo independente, uma de suas soluções é $x = y = 0$, e, concluímos que a linha que ela representa passa pela origem.

Consideremos, então, dois pontos M e M_1 do lugar geométrico representado por (II). De acôrdo com esta equação, teremos:



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = a \\[2ex] \dfrac{\overline{P_1M_1}}{\overline{OP_1}} = a \end{array}\right\} \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{P_1M_1}}{\overline{OP_1}}$$

e os dois triângulos retângulos OPM e OP_1M_1 são semelhantes por terem um ângulo igual (o ângulo reto) compreendido entre lados proporcionais. Logo, o ângulo POM é igual ao ângulo P_1OM_1, e, as retas OM e OM_1 coincidirão: os pontos M, M_1 e O estão em linha reta. Concluímos então que todos os pontos do lugar geométrico representado por (II) estão numa reta passando pela origem. A equação (I) ainda neste caso representa uma reta.

Conclusão: — *Tôda equação do primeiro grau com duas variáveis, sem têrmo independente, representa uma reta passando pela origem.*

3) $ABC \neq 0$

A equação (I) dá então:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

ou

$$y = ax + b$$

sendo

$$-\frac{A}{B} = a \quad \text{e} \quad -\frac{C}{B} = b$$

Comparando a equação

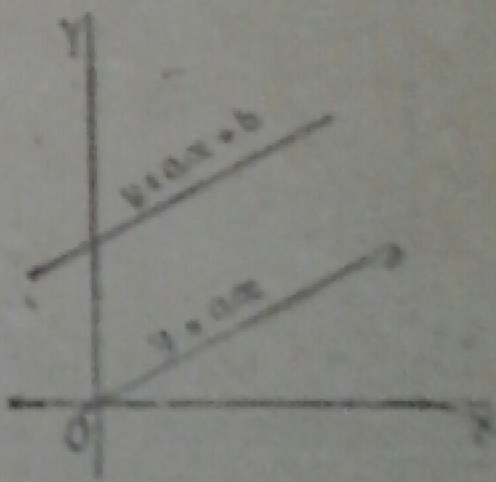
$$y = ax + b$$

com a equação

$$y = ax$$

vemos que os valores de y da primeira, correspondentes a um certo valor de x, são iguais aos que fornece a segunda somados a uma quantidade constante b. A equação (I) representa, assim, neste caso, uma reta paralela à reta $y = ax$ passando por um ponto do eixo dos y de ordenada igual a b.

Logo, ainda neste caso, a equação (I) representa uma reta.



CONCLUSÃO FINAL: — *Tôda equação do primeiro grau com uma ou duas variáveis representa uma reta.*

OBSERVAÇÕES: I) — *A equação* $Ax + By + C = 0$ *é a equação geral da linha reta.* A equação $y = ax + b$, que alguns autores denominam de *equação reduzida* da linha reta, tem sôbre a equação $Ax + By + C = 0$, a vantagem de dar uma significação geométrica simples aos parâmetros a e b, mas apresenta o inconveniente de não representar retas paralelas ao eixo dos y, porque, não sòmente não existiria ponto de intersecção da reta com o eixo dos y, como também o coeficiente angular da reta seria infinito.

II) — Por ser do primeiro grau a equação da linha reta, foi dada a denominação de *equação linear* a toda equação do primeiro grau com uma ou mais variáveis.

CASO PARTICULAR: — A equação da bissetriz do ângulo $x0y$ dos eixos, é

$$y = x$$

Com efeito, a equação da reta é da forma $y = ax$ porque a reta passa pela origem, e, o coeficiente angular é igual a 1 porque

$$a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

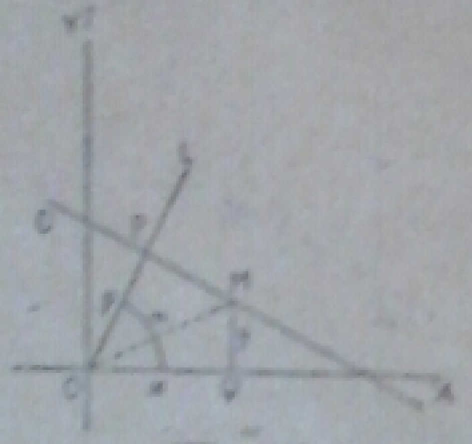
A bissetriz do ângulo $y0x'$ será

$$y = -x$$

porque teremos ainda $b = 0$ e

$$a = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1$$

40 — Equação normal da linha reta. Podemos demonstrar de outra forma que a linha reta é representada por uma equação do primeiro grau com duas variáveis.



(Fig. 44)

Consideremos a reta D. Tracemos da origem à reta a perpendicular OL e chamemos de p o valor algébrico do vetor $\overrightarrow{OP}$ contado positivamente de O para D, e, de α o ângulo do semi-eixo positivo dos x com $\overrightarrow{OP}$.

É evidente que para um ponto M (x,y) estar sôbre a reta D, bastará que a projeção sôbre OP do vetor OM que liga a origem das coordenadas ao ponto M seja igual a p, isto é,

$$pr_{OL} \overrightarrow{OM} = p$$

A equipolência

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QM}$$

dá

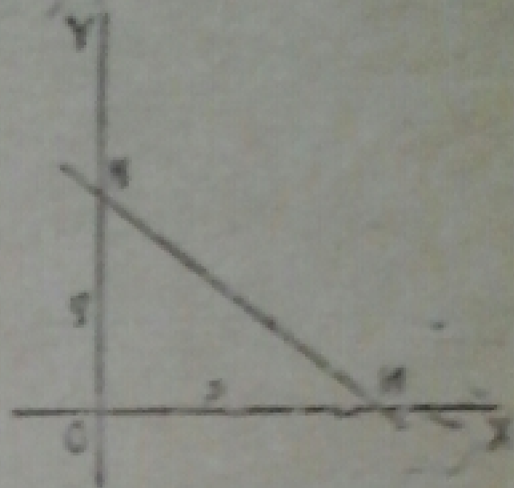
$$\text{pr}\ \overrightarrow{OM} = \text{pr}\ \overrightarrow{OQ} + \text{pr}\ \overrightarrow{QM}$$

Fazendo a projeção ortogonal sôbre OL, teremos:

$$p = x \cos \alpha + y \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

ou $$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0$$

que é a *equação normal da linha reta;* ela encerra a *normal* da origem à reta, e é do primeiro grau com duas variáveis.



(Fig. 45)

41 — Equação da linha reta em função das suas coordenadas na origem. Consideremos a reta D cortando os eixos coordenados nos pontos $M(p, 0)$ e $N(0, q)$: p e q são denominadas *coordenadas na origem.*

Como a reta D de equação

$$Ax + By + C = 0$$

passa pelos pontos M e N, as coordenadas destes pontos devem satisfazer esta equação; logo:

$$Ap + C = 0 \qquad A = -\frac{C}{p}$$

$$Bq + C = 0 \qquad B = -\frac{C}{q}$$

Substituindo estes valôres de A e B na equação da reta, teremos:

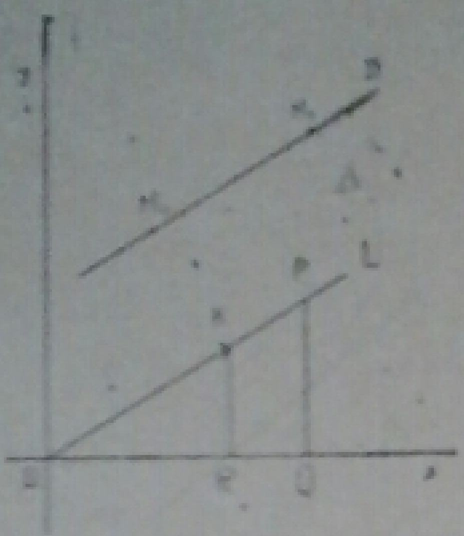
$$-\frac{C}{p}x - \frac{C}{q}y + C = 0$$

ou $$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Esta é a equação da linha reta encerrando as coordenadas na origem.

Os pontos M e N são chamados *traços* da reta nos eixos.

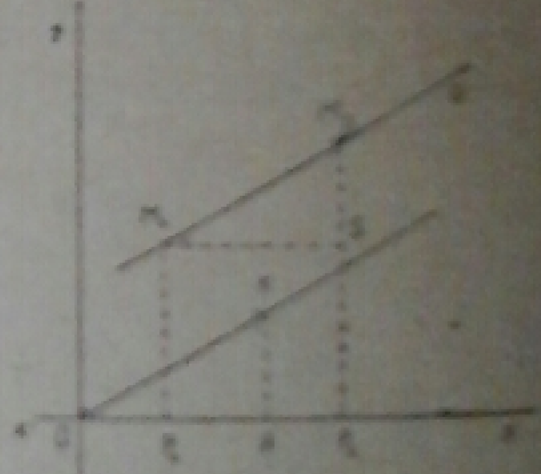
42 — Equações paramétricas da linha reta. Consideremos a reta D no sistema xOy. Tracemos pela origem uma semi-reta OL paralela a D. Tomemos sôbre OL um ponto P tal que $OP \neq O$. As coordenadas de P, $\overline{OQ}$ e $\overline{QP}$, são denominadas *parâmetros diretores* da direção definida por D (ou (OL). Se tivermos um ponto K tal que $\overline{OK} = +1$, o ponto K é denominado *ponto diretor*, o vetor OK é o *vetor diretor* ou *vetor unitário* e as coordenadas de K, $\overline{OR} = \lambda$ e $\overline{RK} = \mu$, são os *parâmetros diretores principais* ou *coeficientes diretores da direção definida por* D.



Em virtude da semelhança dos triângulos, temos que os parâmetros diretores são proporcionais aos coeficientes diretores:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{QP}}$$

Se tomarmos o vetor M_0M_1 localizado sôbre D, definido por sua origem $M_0(x_0, y_0)$ e sua extremidade $M_1(x_1, y_1)$, traçarmos as ordenadas de M_0 e M_1 e ainda M_0S paralela a $x'x$, teremos:

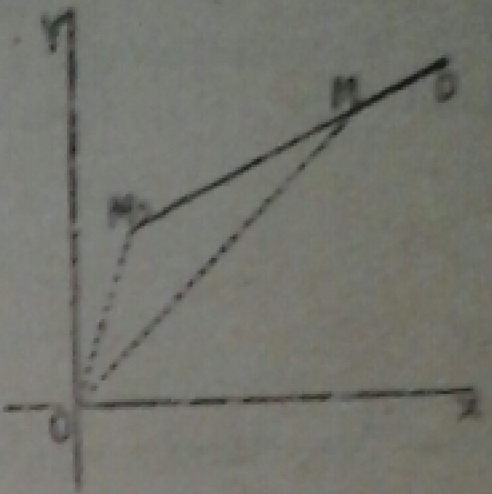


$$\frac{\overline{M_0M_1}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{M_0S}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{SM_1}}{\overline{RK}}$$

Como $\dfrac{\overline{M_0M_1}}{\overline{OK}} = \rho$, sendo ρ a medida de M_0M_1 com a unidade OK, teremos:

$$\rho = \frac{\overline{M_0S}}{\lambda} = \frac{\overline{SM_1}}{\mu} \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{M_0S} = \lambda\rho \quad \therefore \quad \text{pr}_{x'x}\ \overrightarrow{M_0M_1} = \lambda\rho \\ \overline{SM_1} = \mu\rho \quad \therefore \quad \text{pr}_{y'y}\ \overrightarrow{M_0M_1} = \mu\rho \end{array} \right.$$

e concluímos que *as projeções de um vetor sôbre os eixos são iguais ao valor algébrico do vetor multiplicado pelo coeficiente diretor correspondente*.



Consideremos agora $M_0(x_0, y_0)$ um ponto determinado e $M(x, y)$ um ponto variável de D. Ligando M_0 e M à origem, teremos um contôrno OM_0M que nos dá:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}$$

Projetando êste contôrno ortogonalmente sôbre cada um dos eixos, teremos:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\rho \\ y = y_0 + \mu\rho \end{cases}$$

Estas são as *equações paramétricas* da linha reta: elas exprimem as coordenadas de um ponto da reta em função de um parâmetro variável ρ.

ρ variando de $-\infty$ a $+\infty$, o ponto M descreve a reta no sentido definido pelo seu vetor diretor.

43 — Forma simétrica da equação da linha reta. As equações paramétricas podem ser escritas:

$$x - x_0 = \lambda\rho$$

$$y - y_0 = \mu\rho$$

e, por divisão:

$$\frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu}$$

Como λ e μ são proporcionais aos parâmetros diretores (42), podemos escrever também

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

sendo m e n dois parâmetros diretores da reta.

Esta equação constitui a *forma simétrica da equação da linha reta.*

OBSERVAÇÃO: — Podemos reduzir a equação da linha reta $Ax + By + C = 0$ à forma simétrica. Com efeito, se x_0 e y_0 forem uma solução da equação, isto é, as coordenadas de um ponto da reta, teremos $Ax_0 + By_0 + C = 0$, e, por subtração,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

ou

$$\frac{x - x_0}{B} = - \frac{y - y_0}{A}$$

como queríamos estabelecer.

A forma simétrica da equação da linha obriga que um dos denominadores sendo nulo o numerador correspondente também seja. Assim, se $\lambda = 0$, teremos:

$$x - x = 0$$

ou

$$x = x_0$$

e a reta é paralela ao eixo dos y. Neste caso, $\mu = 1$ e y é arbitrário.

Observaremos ainda que λ e μ não podem ser nulos ao mesmo tempo (42).

44 — Construção de uma reta conhecida a sua equação.
1.º) CASO: — A equação só contém uma das variáveis x ou y

Se a equação fôr

$$Ax + C = 0$$

a reta é paralela ao eixo dos y (**39**) e tem por abcissa na origem $x = - \dfrac{C}{A}$

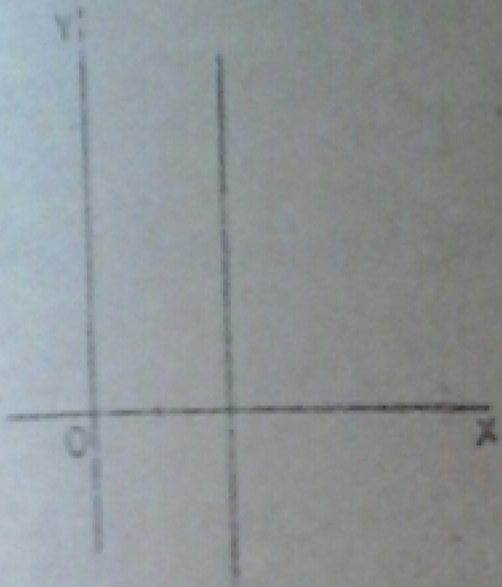
Se a equação fôr

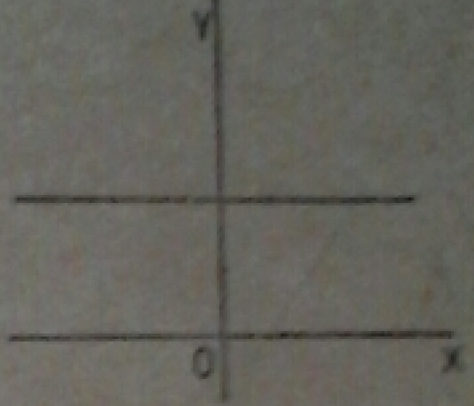
$$By + C = 0$$

a reta é paralela ao eixo dos x (39) e tem por ordenada na origem

$$y = - \frac{C}{B}$$

EXEMPLOS: — A equação $3x - 6 = 0$ é de uma reta paralela ao eixo dos y e abcissa de qualquer dos seus pontos é $x = \frac{6}{3} = 2$.



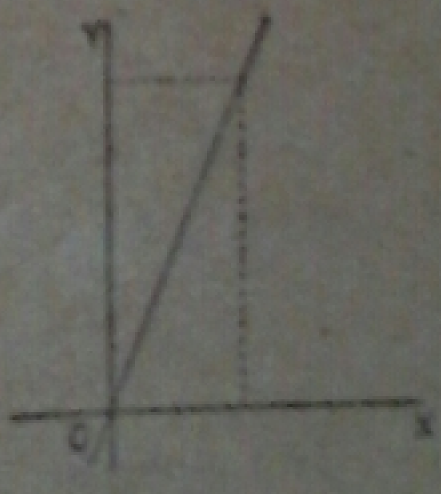


A equação $2y - 4 = 0$ é de uma paralela ao eixo dos x e a ordenada de qualquer dos seus pontos é $y = \frac{4}{2} = 2$.

2º CASO: $Ax + By = 0$, sendo $AB \neq 0$.

A reta passa pela origem pois a sua equação não possui termo independente. Para termos outro dos seus pontos, resolvemos a equação em relação a y; teremos:

$$y = -\frac{A}{B}x$$



Para $x = -B$, teremos $y = A$ e a reta passará pelo ponto $(-B, A)$. Ligando este ponto à origem, temos a reta.

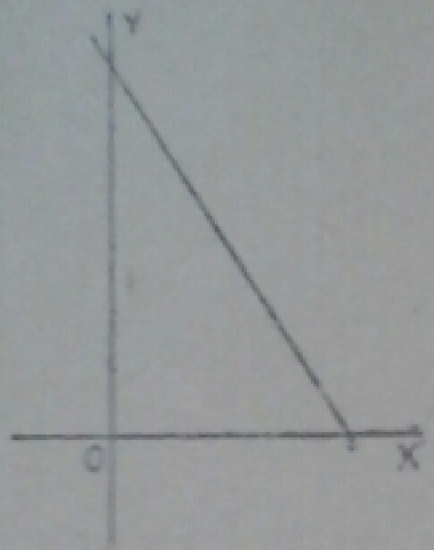
EXEMPLO: — A reta $5x - 2y = 0$ passa pela origem e pelo ponto $(2,5)$.

3º CASO: $Ax + By + C = 0$, sendo $ABC \neq 0$.

Para construir a reta, podemos determinar dois dos seus pontos, ligando-os a seguir. Escolheremos os pontos em que a reta corta os eixos.

Para isto faremos separadamente, $y = 0$ e $x = 0$ na equação da reta; teremos:

$$Ax + C = 0 \quad \therefore \quad x = -\frac{C}{A}$$



$$By + C = 0 \quad \therefore \quad y = -\frac{C}{B}$$

A reta passará pelos dois pontos

$$M\left(-\frac{C}{A}, 0\right) \text{ e } N\left(0, -\frac{C}{B}\right).$$

Exemplo: — A equação $3x + 2y - 12 = 0$, para $x = 0$ dá $y = 6$, e, para $y = 0$ dá $x = 4$. As coordenadas desta reta na origem são pois 4 e 6.

45 — Retas passando por um ponto $M_1(x_1, y_1)$. Feixe de retas. A equação geral da linha reta é

$$Ax + By + C = 0$$

Se esta reta passar pelo ponto $M_1(x_1, y_1)$, as coordenadas dêste ponto devem satisfazer a equação, isto é:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$

Subtraindo ordenadamente as duas igualdades, teremos

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

Esta é a equação das retas que passam por M_1.

Se $B \neq 0$ ela pode também ser escrita:

$$y - y_1 = -\frac{A}{B}(x - x_1)$$

Esta equação encerra um único parâmetro $-\frac{A}{B} = a$, que é o coeficiente angular da reta; teremos, então:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

a neste problema fica arbitrário. É natural que assim seja, porque por um ponto podemos ter uma infinidade de retas. A equação deduzida representará todas as retas que passam pelo ponto $M_1(x_1, y_1)$: ela é a equação do *feixe de retas* que passam por M_1.

EXERCÍCIO: — *Qual a equação do feixe de retas que passam pelo ponto* M (3 — 5) ?

$$A\ (x-3) + B\ (y+5) = 0$$

Sendo $B \neq 0$, temos

$$y + 5 = -\frac{A}{B}\ (x-3)$$

ou ainda

$$y + 5 = a\ (x-3)$$

46 — Equação da reta que passa por dois pontos

$$M_1(x_1, y_1) \text{ e } M_2(x_2, y_2).$$

1ª SOLUÇÃO: — As retas que passam por M_1 têm por equação (**45**)

$$A\ (x-x_1) + B\ (y-y_1) = 0$$

Destas retas, a que passar por M_2, dará

$$A\ (x_2-x_1) + B\ (y_2-y_1) = 0$$

Eliminando A e B entre estas duas equações, teremos, sucessivamente:

$$\left.\begin{array}{l} A\ (x-x_1) = -B\ (y-y_1) \\ A\ (x_2-x_1) = -B\ (y_2-y_1) \end{array}\right\} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

ou

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ (x-x_1) \qquad x_2 - x_1 \neq 0 \qquad (1)$$

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ é o coeficiente angular da reta determinada pelos pontos M_1 e M_2: êle é *a razão entre as diferenças das ordenadas dêsses pontos e a diferença das suas abcissas*.

2ª Solução: — A equação geral da linha reta é

$$Ax + By + C = 0$$

Se os pontos $M_1(x_1, y_1)$ e $M_2(x_2, y_2)$ pertencem a esta reta, as suas coordenadas têm que satisfazer à equação; logo:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0$$

Eliminando nas três equações as quantidades A, B e C (*), teremos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Esta é a equação da reta que passa pelos dois pontos $M_1(x_1, y_1)$ e $M_2(x_2, y_2)$.

Exercício: — *Calcular a equação da reta que passa pelos pontos* M_1 (2, — 1) e M_2 (— 3,4).

$$y + 1 = \frac{4+1}{-3+2}(x-2) \quad \text{ou} \quad x + y = 1.$$

ou sob a forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad x + y = 1.$$

47 — Condição para três pontos serem colineares. Consideremos os três pontos $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ e $M_3(x_3, y_3)$.

A reta que passa pelos dois primeiros pontos tem por equação

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

(*) Teorema de Rouché — Matemática — 2.° Ciclo — 1.ª Série

Se o terceiro ponto M_3 pertencer também à reta M_1M_2, as suas coordenadas terão que satisfazer à equação, isto é,

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - x_1}$$

Esta é a condição pedida.

Sob a forma de determinante, teremos:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

48 — Intersecção de duas retas. Sistemas de retas. Calculemos as coordenadas do ponto de intersecção das retas.

$$Ax + By + C = 0$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

As coordenadas dêsse ponto têm que satisfazer as duas equações, símultâneamente, logo, têm que ser raízes do sistema por elas formado. Resolvendo o sistema obteremos:

$$\left.\begin{aligned} (AB_1 - BA_1)x = BC_1 - CB_1 \quad \therefore \quad x = \frac{BC_1 - CB_1}{AB_1 - BA_1} \\ (AB_1 - BA_1)y = CA_1 - AC_1 \quad \therefore \quad y = \frac{CA_1 - AC_1}{AB_1 - BA_1} \end{aligned}\right\} AB_1 - BA_1 \neq 0$$

que são as coordenadas do ponto de intersecção das duas retas.

DISCUSSÃO: I) — Se $AB_1 - BA_1 \neq 0$, os valores de x e y serão finitos e determinados. As retas têm *um único ponto de intersecção*.

II) — Se $AB_1 - BA_1 = 0$, sem que $BC_1 - CB_1$ ou $CA_1 - AC_1$ sejam também nulos, o sistema não tem solução, e, as retas não têm ponto comum; *são paralelas e distintas*.

Neste caso temos:

$$\left.\begin{array}{l} AB_1 - BA_1 = 0 \quad \therefore \quad \dfrac{A}{A_1} = \dfrac{B}{B_1} \\[2ex] BC_1 - CB \neq 0 \quad \therefore \quad \dfrac{B}{B_1} \neq \dfrac{C}{C_1} \end{array}\right\} \therefore \quad \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \neq \frac{C}{C_1}$$

que é a *condição de paralelismo* das duas retas.

III) — Se tivermos $AB_1 - BA_1 = 0$ e $BC_1 - CB_1 = 0$, o sistema é indeterminado: *as retas coincidem*.

De fato, nesta hipótese as duas equações são equivalentes, pois temos:

$$\left.\begin{array}{l} AB_1 - BA_1 = 0 \quad \therefore \quad \dfrac{A}{A_1} = \dfrac{B}{B_1} \\[2ex] BC_1 - CB_1 = 0 \quad \therefore \quad \dfrac{B}{B_1} = \dfrac{C}{C_1} \end{array}\right\} \quad \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$$

As duas equações representam então a mesma reta: as duas retas coincidem. Concluímos, então, que a *condição de coincidência* de duas retas, ou a condição para duas equações do primeiro grau com duas variáveis representarem a mesma reta, é que os coeficientes das variáveis e os termos constantes sejam proporcionais.

PROBLEMA: — *Escrever a equação das retas que passam pela intersecção das retas* Ax + By + C = 0 e A'x + B'y + C' = 0.

Sendo $\lambda \neq 0$, teremos

$$Ax + By + C + \lambda\,(A'x + B'y + C') = 0.$$

EXERCÍCIOS: I) — *Calcular as coordenadas do ponto de intersecção das duas retas* 3 x + 7 y — 13 = 0 *e* 5 x — 2 y — 8 = 0.

O sistema das duas equações tem por solução

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

II) — *Escrever a equação do sistema de retas paralelas à reta* 2 x — 5 y + 7 = 0.

A equação é

$$2\,x - 5\,y + m = 0$$

III) — *Escrever a equação da reta que passa por* M_1 *(3,2) e é paralela à reta* $5x - 4y - 6 = 0$.

A equação das retas que passam por M_1 é

$$A(x-3) + B(y-2) = 0$$

Como A e B têm que ser proporcionais a 5 e -4, teremos

$$5(x-3) - 4(y-2) = 0$$

ou

$$5x - 4y - 7 = 0$$

49 — Ângulos de uma reta com os eixos coordenados. A equação da linha reta pode ser escrita:

$$y = ax + b$$

sendo

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

e α o ângulo da reta com o semi-eixo Ox.

Se a reta fôr dada pela equação geral

$$Ax + By + C = 0$$

resolvê-la-emos em relação a y $(B \neq 0)$, obtendo:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

e teremos (39):

$$a = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{A}{B}$$

Se $B = 0$ a equação se reduz a

$$Ax + C = 0 \quad \therefore \quad x = -\frac{C}{A}$$

e a reta é paralela ao eixo dos y: teremos

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Em qualquer caso, o ângulo da reta com o eixo dos y é

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

EXERCÍCIOS: I) — *Calcular o ângulo que forma a reta $3x + 3y - 10 = 0$ com o semi-eixo positivo dos x.*

Esta equação pode ser escrita

$$y = -x + \frac{10}{3}$$

Temos, então

$$a = tg\ \alpha = -1 \quad \therefore \quad \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

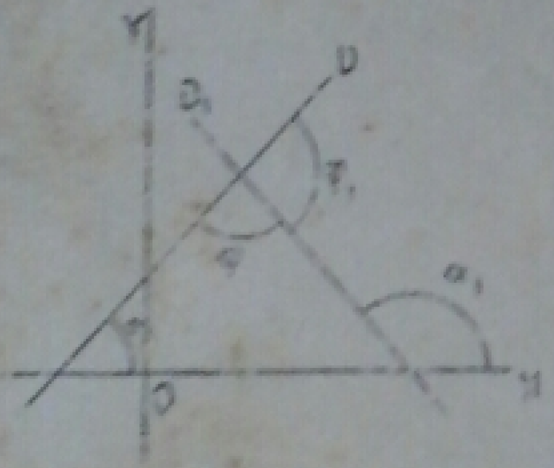
II) — *Escrever a equação da reta que passa pelo ponto M_1 (3,7) e forma com o eixo dos x um ângulo cuja tangente é* $\frac{3}{5}$

$$y - 7 = \frac{3}{5}(x - 3)$$

ou

$$3x - 5y + 26 = 0$$

50 — Angulos de duas retas. Calculemos o ângulo das retas $D)\ y = ax + b$ e $D_1)\ y = a_1x + b_1$.



Sejam α e α_1 os ângulos que forma o semi-eixo positivo dos x com as retas dadas, e, φ e φ_1 os dois ângulos, suplementares, que uma reta forma com a outra.

A figura dá

$$\varphi = \alpha_1 - \alpha$$

Logo:

$$tg\ \varphi = tg\ (\alpha_1 - \alpha) = \frac{tg\ \alpha_1 - tg\ \alpha}{1 + tg\ \alpha_1 . tg\ \alpha}$$

Como (**49**) $tg\ \alpha = a$ e $tg\ \alpha_1 = a_1$, teremos:

$$tg\ \varphi = \frac{a_1 - a}{1 + aa_1}$$

Se as retas forem dadas pelas equações

D) $Ax + By + C = 0$ e *D₁)* $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$,

teremos

$$a = -\frac{A}{B} \quad \text{e} \quad a_1 = -\frac{A_1}{B_1}$$

e a expressão de tg φ ficará:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A}{B}}{1 + \dfrac{AA_1}{BB_1}} = \frac{AB_1 - BA_1}{AA_1 + BB_1}$$

Naturalmente,

$$\varphi_1 = \pi - \varphi$$

Logo

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{a_1 - a}{1 + aa_1} = \frac{a - a_1}{1 + aa_1}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{AB_1 - BA_1}{AA_1 + BB_1} = \frac{BA_1 - AB_1}{AA_1 + BB_1}$$

EXERCÍCIOS: I) — *Calcular os ângulos que formam as retas* $2x + y - 6 = 0$ *e* $x - 2y + 2 = 0$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2(-2) - 1 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 1(-2)} = -\frac{5}{0} = -\infty$$

Estas duas retas são paralelas

II) — *Achar as equações das retas que passam por* M (1,3) *e formam com a reta* $y = 5x + 1$ *ângulos cuja tangente é* $\frac{3}{5}$.

Na fórmula $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{a_1 - a}{1 + aa_1}$ temos $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{3}{5}$ e a ou a_1, um deles, igual a 5.

Se $a = 5$, teremos:

$$\frac{3}{5} = \frac{a_1 - 5}{1 + 5a_1} \quad \therefore \quad a_1 = -\frac{11}{5}$$

e a equação pedida será:

$$y - 3 = -\frac{11}{5}(x - 1) \quad \therefore \quad 11x + 5y - 26 = 0$$

Se $a_1 = 5$, teremos anàlogamente:

$$\frac{3}{5} = \frac{5 - a}{1 + 5a} \quad \therefore \quad a = \frac{11}{10}$$

e a equação da reta será:

$$y - 3 = \frac{11}{10}(x - 1) \quad \therefore \quad 11x - 10y + 19 = 0$$

51 — Condição de paralelismo de duas retas. Para as retas D e D' serem paralelas, devemos ter

$$\operatorname{tg} \varphi = 0$$

o que obriga

$$a - a_1 = 0 \quad \therefore \quad a = a_1$$

ou

$$BA_1 - AB_1 = 0 \quad \therefore \quad \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$$

A condição pedida é que os coeficientes angulares das duas retas sejam iguais ou que os coeficientes das variáveis, nas duas equações, sejam proporcionais.

Observação: — A equação da reta que passa por $M_1(x_1, y_1)$ e é paralela à reta $Ax + By + C = 0$ é

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

A equação da reta que passa por $M_1(x_1, y_1)$ e é paralela à reta $y = ax + b$ é $y - y_1 = a(x - x_1)$.

Exercício: — *Achar a equação da reta que passa pelo ponto M (3, —2) e é paralela à reta 6 x + 4 y + 5 = 0.*

$$6(x - 3) + 4(y + 2) = 0$$

ou, simplificando:

$$3x + 2y - 5 = 0$$

II) — *Escrever a equação da reta que passa pela origem e é paralela à reta* $y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$.

$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 0) \quad \therefore \quad y = -\frac{3}{2}x$$

52 — Condição de perpendicularismo de duas retas. Para as duas retas D e D' serem perpendiculares devemos ter

$$\operatorname{tg} \varphi = \infty$$

o que obriga

$$1 + aa_1 = 0 \quad \therefore \quad a_1 = \frac{1}{a}$$

ou

$$AA_1 + BB_1 = 0 \quad \therefore \quad \frac{A}{B} = -\frac{B_1}{A_1}$$

A condição pedida é pois, que os coeficientes angulares das retas sejam recíprocos e de sinais contrários, ou, que a razão dos coeficientes de x e y em uma das equações seja recíproca e de sinal contrário da razão dos coeficientes de x e y na outra equação.

OBSERVAÇÃO: — A equação da reta que passa por $M_1(x_1, y_1)$ e é perpendicular à reta $Ax + By + C = 0$ é

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

A equação da reta que passa por $M_1(x_1, y_1)$ e é perpendicular à reta $y = ax + b$ é

$$y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1)$$

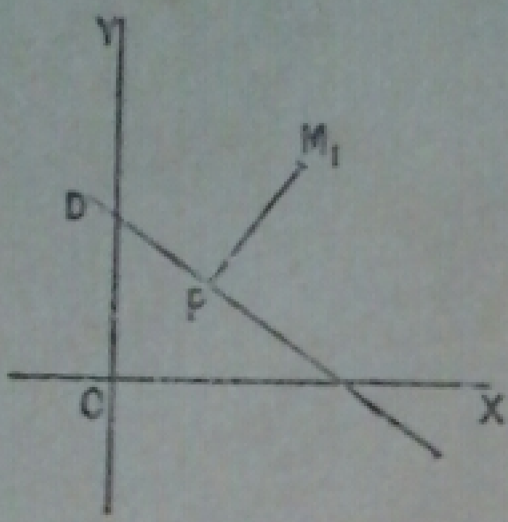
EXERCÍCIO: I) — *Calcular a equação da reta que passa pelo ponto* M (3,2) *e é perpendicular à reta* $3x - 5y + 4 = 0$.

$$5(x - 3) + 3(y - 2) = 0$$

$$5x + 3y - 21 = 0.$$

II) — *Calcular a equação da reta que passa por* M (3,2) *e é perpendicular à reta* $y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$.

$$y - 2 = -\frac{5}{3}(x - 3) \quad \therefore \quad 5x + 3y - 21 = 0$$



53 — Distância de um ponto a uma reta. Calculemos a distância do ponto $M_1(x_1, y_1)$ à reta D: $Ax + By + C = 0$.

Para isto, tracemos a perpendicular de M_1 à reta e calculemos o comprimento do segmento desta perpendicular compreendido entre M_1 e o pé desta perpendicular na reta dada.

A reta que passa por M_1 e é perpendicular à reta D tem por equação (52)

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

A intersecção desta reta com D é dada pelo sistema

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0 \end{cases}$$

Vamos resolvê-lo tomando a segunda equação sob o aspecto:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \varrho \quad \begin{cases} x - x_1 = A\varrho \;\therefore\; x = x_1 + A\varrho \\ y - y_1 = B\varrho \;\therefore\; y = y_1 + B\varrho \end{cases}$$

Levando estes valores de x e y na primeira equação do sistema, teremos:

$$A(x_1 + A\varrho) + B(y_1 + B\varrho) + C = 0$$

ou

$$\varrho = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}$$

Com êste valor temos:

$$x - x_1 = -A \cdot \frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}$$

$$y - y_1 = -B \cdot \frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}$$

Lembrando que os valores de x e y dados pelas últimas igualdades são as coordenadas de P e que x_1 e y_1 são as coordenadas de M_1, teremos, pela fórmula da distância de dois pontos (15):

$$d^2 = \overline{MP}^2 = \left(-A \cdot \frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}\right)^2 +$$

$$+ \left(-B \cdot \frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}\right)^2 = \frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{A^2 + B^2}$$

ou

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

Tomando d em valor absoluto (valor numérico de um comprimento), teremos:

$$d = \frac{| Ax_1 + By_1 + C |}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

É esta a expressão procurada. Observaremos que o numerador é o resultado que obtemos substituindo, no primeiro membro da equação da reta, x e y pelas coordenadas do ponto.

Caso particular: — Distância da origem à reta $Ax + By + C = 0$. Bastará fazermos na última fórmula $x_1 = y_1 = 0$; teremos:

$$d = \frac{| C |}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Exercício: — *Calcular a distância do ponto* M (10.3) *à reta* $3x + 2y + 5 = 0$.

$$d = \frac{3.10 + 2.3 + 5}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{41}{\sqrt{13}}$$

54 — Bissetrizes dos ângulos de duas retas. Calculemos as equações das bissetrizes dos ângulos das retas D) $Ax + By + C = 0$ e D_1) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

Como a bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados deste ângulo, para obter a sua equação bastará escrevermos que um ponto qualquer dessa bissetriz, $M(x, y)$, está equidistante dos dois lados do ângulo, que são as duas retas D e D_1. Teremos então:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

ou

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \pm \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = 0$$

Tomando separadamente o sinal + e o sinal —, teremos as equações das bissetrizes dos dois ângulos formados pelas duas retas.

EXERCÍCIO: — *Calcular as equações das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas* $3x - 4y + 8 = 0$ *e* $8x + 6y - 3 = 0$.

$$\frac{3x - 4y + 8}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \pm \frac{8x + 6y - 3}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = 0$$

ou

$$14x - 2y + 13 = 0$$

$$2x + 14y - 19 = 0$$

ÁREA DE UM TRIÂGULO EM FUNÇÃO DAS COORDENADAS DOS VÉRTICES

55 — Calculemos a área do triângulo cujos vértices são

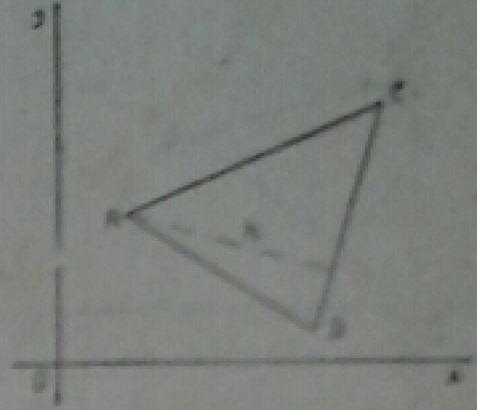
$$A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2) \quad \text{e} \quad C(x_3, y_3).$$

De acôrdo com a geometria euclidiana, a área do triângulo é igual ao semi-produto da base pela altura:

$$S = \frac{1}{2} . BC . h$$

Equação da reta BC (46):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Distância de A à reta BC (53):

$$h = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix}^2}} = \frac{\Delta}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}}$$

Como o denominador é o segmento BC (15), temos:

$$h = \frac{\Delta}{BC}$$

A área do triângulo será, pois:

$$S = \frac{1}{2} \; BC \; \frac{\Delta}{BC} = \frac{1}{2} \; \Delta$$

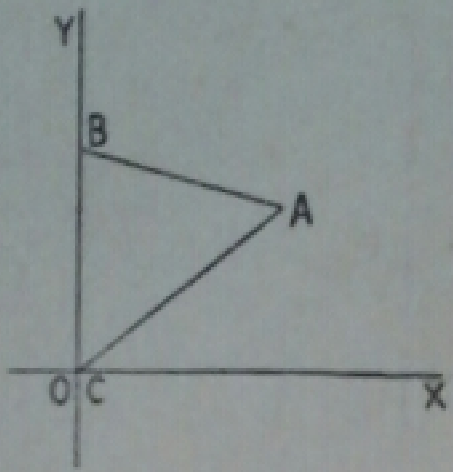
ou

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercício: — *Calcular a área do triângulo cujos vértices são* A (2,6), B (6,0) *e* C (6,4).

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

Convenção de sinal — Conforme a ordem em que considerarmos os vértices do triângulo, a área será positiva ou negativa. Vejamos como determinar "a priori" o sinal desta área.



Façamos deslizar o triângulo ABC no plano dos eixos, sem o deformar, até que o vértice C vá coincidir com a origem das coordenadas e o vértice B com um ponto de semi-eixo positivo dos y. Os vértices do triângulo na nova posição serão:

$$A'(x'_1, y'_1) \quad B'(0, y'_2) \quad C'(0,0)$$

sendo $y'_2 > 0$.

O triângulo não se deformando com o deslocamento, a sua área conserva-se constantemente igual a S, e, na nova posição será

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ 0 & y'_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\, x'_1 y'_2$$

Como obrigamos que y'_2 seja positivo, o sinal de S será o de x'_1, isto é, se x'_1 fôr positivo a área também será e se x'_1 fôr negativo, o mesmo acontecerá à área. Se x'_1 fôr positivo, um móvel que percorrer o perímetro do triângulo no sentido $A'B'C'$, isto é, partindo de A', indo depois a B', depois a C' e voltando a A', se deslocará no sentido positivo da orientação do plano; se x'_1 fôr negativo, o móvel se deslocará no sentido negativo.

Regra: — A área é positiva quando um móvel percorrendo o perímetro do triângulo *no sentido positivo de orientação do plano* partindo do vértice $A(x_1, y_1)$, por exemplo, encontra a seguir o vértice $B(x_2, y_2)$ e depois o vértice $C(x_3, y_3)$. Se a seguir ao vértice A encontra o vértice C, *sempre caminhando no sentido positivo*, e a seguir o vértice B, a área é negativa.

EXERCÍCIOS

1 Escrever a equação da reta que tem para coeficiente angular $\frac{3}{2}$ e coeficiente linear $\frac{5}{4}$. Resp.: $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$.

2. Escrever a equação da reta que tem de coeficiente angular 3 e corta o eixo dos y no ponto de ordenada — 4.

Res.: $y = 3x - 4$.

3. Calcular a equação da reta que corta o eixo dos y no ponto de ordenada 2 e forma com o semi-eixo positivo dos x um ângulo igual a $\frac{\pi}{3}$.

Resp.: $y = x\sqrt{3} + 2$.

4. Calcular a equação da reta que tem para ordenada na origem 1 e forma com o semi-eixo positivo dos x um ângulo cuja tangente é $\frac{1}{2}$.

Resp.: $x - 2y + 2 = 0$.

5. Em que ponto a reta $3x - 7y = 28$ corta o eixo dos y?

Resp.: $(0, -4)$.

6. Escrever a equação da reta de declividade 4 e de coeficiente linear — 1.

Resp.: $y = 4x - 1$.

7. Escrever a equação do feixe de retas que têm ordenada na origem igual a 5.

Resp.: $y = ax + 5$.

8. Qual a equação do sistema de retas de coeficiente angular 4?

Resp.: $y = 4x + b$.

9. Qual a equação da reta que determina sôbre os eixos segmentos respectivamente iguais a 3 e — 2? Resp.: $2x - 3y - 6 = 0$.

10. A normal da origem a uma reta mede 5 e o ângulo que ela forma com o semi-eixo positivo dos x é igual a $\frac{\pi}{4}$. Qual a equação da reta?

Resp.: $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} - 10 = 0$.

11. O ângulo que forma o semi-eixo positivo dos x com uma reta é igual a $\frac{\pi}{3}$ e a normal da origem à reta é igual a 6. Escrever a equação da reta.

Resp.: $x + y\sqrt{3} - 12 = 0$.

12. Em que pontos a reta $3x - 5y - 15 = 0$ corta os eixos?

Resp.: $(0, -3)$ e $(5, 0)$.

13. Estabelecer as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $M_1(2, 3)$ e $M_2(8, 5)$.

Resp.: $x = 2 + \frac{3}{\sqrt{10}}\varrho$; $y = 3 + \frac{1}{\sqrt{10}}\varrho$

14. Estabelecer as equações paramétricas e a equação sob a forma simétrica da reta cuja equação cartesiana é $3x + 4y - 12 = 0$.

Resp.: $\frac{x-4}{-4} = \frac{y}{3}$.

15. Calcular o ângulo que forma o semi-eixo positivo dos x com a reta $5x - 2y - 20 = 0$. Resp.: $\alpha = \text{arc tg}\ \dfrac{5}{2}$.

16. Calcular as equações das retas que têm de coeficiente angular 1 e estão a 4 unidades da origem.

Resp.: $x\sqrt{2} - y\sqrt{2} \pm 8 = 0$.

17. Analisar as equações das bissetrizes dos ângulos dos eixos?

Resp.: $y = \pm x$.

18. Construir as retas $y = 6$; $x = -4$; $2x - 3y = 0$; $3x - 7y + 21 = 0$; $y = x$; $y = -x$; $y = 0$; $x = 0$.

19. Qual a equação do feixe de retas que passam por $M(3, -4)$? Resp.: $y + 4 = a(x - 3)$.

20. Qual a equação da reta que passa por $M(3,5)$ e tem de coeficiente angular $\dfrac{2}{3}$? Resp.: $2x - 3y + 9 = 0$.

21. Calcular a equação da reta que passa pelos pontos $(4,1)$ e $(-2, -3)$.

Resp.: $2x - 3y - 5 = 0$.

22. Calcular a equação da reta que liga a origem ao ponto $(2, 4)$.

Resp.: $y = 2x$.

23. Qual a posição relativa das retas $3x - 8y = 1$ e $6x - 16y = 2$? das retas $3x - 8y = 5$ e $6x - 16y = 15$? das retas $3x - 8y = 5$ e $4x + y = 7$? Resp.: Coincidentes; paralelas; concorrentes.

24. Calcular m e p para as equações $2mx + 8y - 6 = 0$ e $4x - py + 2 = 0$ representarem a mesma reta.

Resp.: $m = -6 \quad p = \dfrac{8}{3}$

25. Escrever a equação da reta que passa pelo ponto $(3, -5)$ e é paralela à reta $2x + 3y - 4 = 0$. Resp.: $2x + 3y + 9 = 0$.

26. Qual a equação do sistema de retas paralelas à reta $y = 5x - 4$?

Resp.: $y = 5x + m$.

27. Das retas paralelas a $y = 5x + 9$ qual a que passa na origem? qual a que corta o eixo dos y no ponto de ordenada -9?

Resp.: $y = 5x$

$y = 5x - 9$.

28. Qual a equação das retas paralelas à reta $2x + 3y - 9 = 0$?

Resp.: $2x + 3y + C = 0$.

29. Calcular as coordenadas do ponto de intersecção das retas $2x + 3y - 9 = 0$ e $x - 4y + 1 = 0$. Resp.: $(3,1)$.

30. Calcular o perímetro e a área do triângulo limitado pelas retas $5x + 4y - 34 = 0$, $7x - 4y + 10 = 0$ e $x - 4y - 2 = 0$.

Resp.: $\sqrt{41} + \sqrt{68} + \sqrt{65}$; 24.

31. Qual a natureza do quadrilátero determinado pelas retas $5x - 3y = 0$, $x - 6y = 0$, $5x - 3y - 9 = 0$ e $2x - 12y + 54 = 0$?
Resp.: Paralelogramo.

32. Verificar se os três pontos $A(1,1)$, $B(4,2)$ e $C(10,4)$ estão em linha reta.
Resp.: Sim.

33. Estabelecer a equação da reta que passa por $(-1,3)$ e é perpendicular à reta $y = 3x - 5$.
Resp.: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$.

34. Calcular o ângulo que forma a reta $4x + 3y - 12 = 0$ com a reta $3x + 5y - 15 = 0$.
Resp.: arc tg $\frac{11}{27}$.

35. Calcular os ângulos formados pelas retas $6x - 2y + 7 = 0$ e $4x + 2y - 7 = 0$
Resp.: $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

36. Calcular a equação da reta que passa por $(0,1)$ e forma com a reta $2x - 4y + 4 = 0$ um ângulo igual a $\frac{\pi}{4}$.
Resp.: $3x - y + 1 = 0$.

37. Calcular a distância do ponto $(6,7)$ à reta $4x + 3y - 2 = 0$.
Resp.: $\frac{43}{5}$.

38. Calcular a distância da origem à reta $5x - 6y - 30 = 0$.
Resp.: $\frac{30}{\sqrt{61}}$.

39. Calcular a distância da origem à reta que passa pelos pontos $(-1, 7)$ e $(7, 1)$.
Resp.: 5.

40. Calcular os comprimentos das alturas do triângulo cujos vértices são $(7, 8)$, $(1, 4)$ e $(7, 1)$.
Resp.: $\frac{14}{\sqrt{5}}$, 6, $\frac{21}{\sqrt{13}}$.

41. Calcular a distância entre as paralelas $3x - 5y - 15 = 0$ e $6x - 10y = 0$.
Resp.: $\frac{15}{\sqrt{34}}$.

42. Estabelecer a equação da reta que passa pelo ponto $(1, 5)$ e dista $3\sqrt{2}$ da origem.
Resp.: $x + y - 6 = 0$,
$7x - 17y + 78 = 0$.

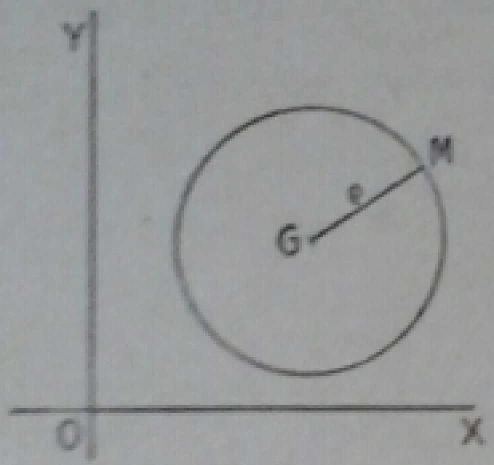
43. Calcular as equações das bissetrizes das retas $x - 4 = 0$ e $y - 3 = 0$.

44. Verificar que as medianas do triângulo cujos vértices são (1, 6), (5, 4) e (1, 4) concorrem num mesmo ponto.

45. Verificar que as alturas do triângulo cujos vértices são (3, 6), (— 3, — 2) e (7, 3) concorrem num mesmo ponto.

5 — A equação geral do 2.º grau com duas variáveis e a circunferência de círculo em coordenadas cartesianas. Formas diversas da equação da circunferência de círculo. Interseção de retas e circunferências.

56 — Definição e equação natural da circunferência de círculo. A CIRCUNFERÊNCIA DE CÍRCULO é o lugar geométrico dos pontos de um plano situados a uma distância constante de um ponto fixo do mesmo plano chamado centro.

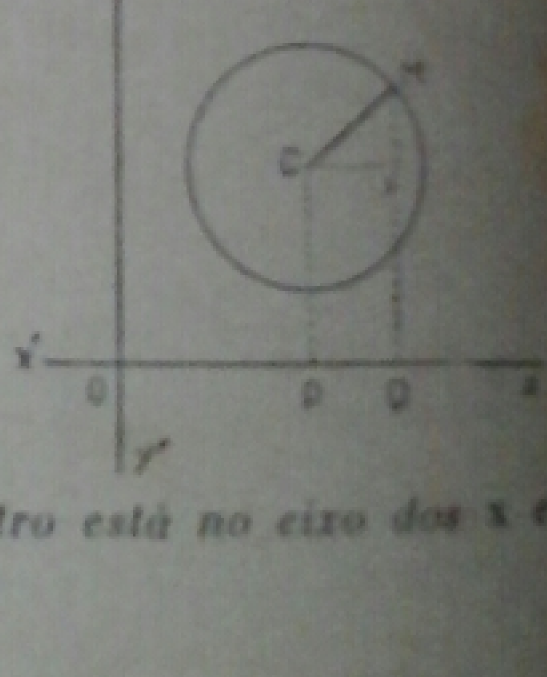


Para traduzirmos algèbricamente esta definição bastará escrevermos que a distância de um ponto qualquer M da curva ao centro é igual ao raio. A equação natural (16) da circunferência de círculo será pois:

$$\rho = R$$

57 — Equação da circunferência de círculo em eixos cartesianos ortogonais.

Sejam $C(x_o, y_o)$ o centro, R o raio e $M(x, y)$ um ponto qualquer da circunferência.



Substituamos na equação natural ρ pelo seu valor dado pela fórmula da distância de dois pontos (15); teremos:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$$

Esta é a equação pedida.

CASOS PARTICULARES: I) — *O centro está no eixo dos* x *e a circunferência passa pela origem.*

Neste caso $x_o = R$ e $y_o = 0$, e, a equação ficará:

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0$$

II) — *O centro está na origem.*

Temos aqui $x_0 = y_0 = 0$ e a equação ficará:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Esta é a equação da circunferência de círculo referida a dois diâmetros ortogonais.

58 — Condições para que a equação do segundo grau com duas variáve s represente uma circunferência de círculo. A equação geral do segundo grau com duas variáveis é da forma

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad \text{(I)}$$

e a equação da circunferência de círculo é (57)

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2x_ox - 2y_oy + x_o^2 + y_o^2 - R^2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

Para que a equação (I) represente pois uma circunferência de círculo, é necessário e suficiente que possamos calcular valores de x, y e R, finitos e determinados, tais que as equações (I) e (II) tenham as mesmas soluções. Para isto, os coeficientes dos termos correspondentes das duas equações devem ser proporcionais, isto é,

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{0} = \frac{C}{1} = -\frac{D}{x_o} = -\frac{E}{y_o} = \frac{F}{x_o^2 + y_o^2 - R^2}$$

Uma propriedade das proporções, em Aritmética, diz que quando o denominador de uma série de razões iguais é nulo, o numerador correspondente é também nulo. Assim sendo, temos, imediatamente:

$$B = 0.$$

A e C, iguais, em virtude da igualdade das razões, não podem ser também nulos, porque, então, a equação (1) não seria do segundo grau. Temos então as duas condições

$$A = C$$
$$B = 0$$

Estas condições, independentes das incógnitas x_0, y_0 e R, verificam-se por si mesmas: são *condições necessárias*.

Elas são também *suficientes*, porque desde que elas se verifiquem, podemos calcular os valores de x_0, y_0 e R. Com efeito, da série de razões acima, tiramos

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{D}{A} \\ y_0 = -\dfrac{E}{A} \\ x_0^2 + y_0^2 - R^2 = \dfrac{F}{A} \quad \therefore \quad R^2 = x_0^2 + y_0^2 - \dfrac{F}{A} = \dfrac{D^2+E^2-AF}{A^2} \end{cases}$$

Concluímos então que as condições necessárias e suficientes para que a equação geral do segundo grau com duas variáveis represente uma circunferência de círculo, são: 1) — Os coeficientes de x^2 e de y^2 serem iguais; 2) — O coeficiente de xy ser nulo.

Observações: I) — Para a circunferência de círculo ter existência real, devemos ter

$$R^2 > 0 \quad \therefore \quad D^2 + E^2 - AF > 0$$

Se $D^2 + E^2 - AF = 0$, o círculo se reduz ao ponto (x_0, y_0): a equação (1) representa uma circunferência de círculo de raio nulo, ou, o ponto (x_0, y_0).

Se $D^2 + E^2 - AF < 0$ a equação nada representa: dizemos que representa uma circunferência de círculo imaginária.

II) — As coordenadas do centro $-\dfrac{D}{A}$ e $-\dfrac{E}{A}$ quando os coeficientes de x^2 e y^2 forem iguais à unidade

$(A = C = 1)$, serão, respectivamente iguais às metades dos coeficientes de x e de y na equação, com sinais contrários.

Observação. A equação geral da circunferência de círculos em eixos ortogonais é, pois,

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{D}{A} x + 2 \cdot \frac{E}{A} y + \frac{F}{A} = 0$$

ou ainda:

$$x^2 + y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

Exercícios: 1) — *Calcular as coordenadas do centro e o raio da circunferência de círculo* $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 25 = 0$.

As coordenadas do centro, são

$$x_0 = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$y_0 = -\frac{-10}{2} = 5$$

e o raio é

$$R = \frac{\sqrt{3^2 + 5^2 - 1.25}}{1} = 3$$

É costume, também, resolver êste problema completando os quadrados do primeiro membro da equação. Teremos sucessivamente:

$$x^2 - 6x + y^2 - 10y = -25$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = -25 + 9 + 25$$

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

Concluímos então:

$$x_0 = 3$$

$$y_0 = 5$$

$$R = \sqrt{9} = 3$$

II) — *Calcular as coordenadas do centro e o raio da circunferência de círculo* $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34 = 0$.

Teremos sucessivamente:

$$x^2 - 6y + y^2 - 10y = -34$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = -34 + 9 + 25$$
$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 0$$

A equação representa uma circunferência de círculo de raio nulo, ou o ponto (3,5).

III) — *Calcular as coordenadas do centro e o raio da circunferência de círculo* $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 14 = 0$.

Teremos:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = -14$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -14 + 4 + 9$$
$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = -1$$

A equação nada representa ou representa uma circunferência imaginária.

IV) — *Formar a equação da circunferência de círculo que passa pelos pontos* $M_1(-1, 2)$, $M_2(0, -5)$ *e* $M_3(6, 3)$.

A equação é da forma

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Se a circunferência passa por M_1, M_2 e M_3, as coordenadas dêstes pontos devem satisfazer esta equação, logo:

$$\begin{cases} 1 + 4 - 2D + 4E + F = 0 \\ 25 - 10E + F = 0 \\ 36 + 9 + 12D + 6E + F = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2D - 4E - F = 5 \\ 10E - F = 25 \\ 12D + 6E + F = -45 \end{cases}$$

Resolvendo êste sistema encontraremos:

$$D = -3 \qquad E = 1 \qquad F = -15$$

Substituindo na equação da circunferência encontramos:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$$

59 — Intersecção de uma reta com uma circunferência de círculo. Para obtermos a intersecção da reta

$$Ax + By + C = 0$$

com a circunferência

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

bastará resolvermos o sistema das duas equações, e as soluções obtidas serão as coordenadas da intersecção.

Três casos podem se dar:

1. Há dois pares distintos de soluções: a reta corta a circunferência em dois pontos reais e distintos. Neste caso a distância do centro da circunferência à reta é menor que o raio.

2. Os dois pares de soluções são iguais: a reta é tangente à circunferência. Neste caso a distância do centro da circunferência à reta é igual ao raio.

3. As soluções são imaginárias: a reta e a circunferência não têm ponto comum. A distância do centro da circunferência à reta é maior que o raio.

EXERCÍCIOS: — 1. Calcular a intersecção da reta $x + 7y + 8 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ x + 7y + 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (-7y - 8)^2 + y^2 - 6(-7y - 8) - \\ \qquad - 4y - 12 = 0 \\ x = -7y - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + 3y + 2 = 0 \\ x = -7y - 8 \end{cases} \quad \therefore \quad M_1 \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \qquad M_2 \begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases}$$

M_1 e M_2 são os dois pontos de intersecção.

2. Calcular a intersecção da reta $4x + 3y - 25 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 25$.

$$\begin{cases} 4x + 3y - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Só há um ponto comum da reta com a circunferência: a reta é tangente à circunferência.

3. Calcular a intersecção da reta $7x + 9y = 63$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 25$.

O sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 7x + 9y = 63 \end{cases}$$

não tem solução real: a reta não tem ponto comum com a circunferência.

EXERCÍCIOS

1. Calcular a equação da circunferência de círculo que tem de raio 4 e é tangente ao eixo dos x na origem.

Resp.: $x^2 + y^2 \pm 8x = 0$.

2. Calcular a equação da circunferência de círculo de raio 6 tangente aos dois semi-eixos positivos.

Resp.: $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$.

3. Calcular a equação da circunferência de círculo que passa pelo ponto $(6, 6)$ e tem para centro $C(2, 3)$.

Resp.: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

4. Calcular a equação da circunferência de círculo que tem um diâmetro cujas extremidades são $(2, 4)$ e $(10, 6)$.

Resp.: $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 44 = 0$.

5. O centro de um círculo tem de abcissa 3. Calcular a equação da circunferência correspondente sabendo-se que ela corta o eixo dos y nos pontos de ordenadas 6 e -2.

Resp.: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$.

6. Calcular a equação da circunferência circunscrita ao triângulo cujos vértices são $(-1, 6)$, $(3, 8)$ e $(8, 3)$.

Resp.: $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$.

7. Calcular a equação da circunferência de círculo que passa pelos pontos $(-2, 5)$ e $(5, 6)$ e cujo raio é 5.

Resp.: $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$
$x^2 + y^2 - 2x - 18y + 57 = 0$.

8. Calcular a equação da circunferência de círculo concêntrica à circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$ e passando pela origem.

Resp.: $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 0$.

9. Calcular a equação da circunferência de círculo que tem o centro no eixo dos x e possui uma corda cujas extremidades são $(2, 2)$ e $(8, 4)$.

Resp.: $x^2 + y^2 - 12x + 16 = 0$.

10. Calcular a distância do ponto de intersecção das retas $3x + 2y - 12 = 0$ e $x - 2y + 4 = 0$ ao centro da circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$.

Resp.: zero.

II — NOÇÕES SÔBRE DERIVADAS E PRIMITIVAS; INTERPRETAÇÕES; APLICAÇÕES

1 — Definição da derivada em um ponto; notações; derivada infinita. Interpretação geométrica e cinemática da derivada. Diferença e diferencial; interpretação geométrica. Funções derivadas. Derivação sucessiva.

60 — Derivada em um ponto. Seja x_0 um ponto qualquer onde se supõe definida a função $y = f(x)$.

Atribuindo a x um *acréscimo* arbitrário Δx, o acréscimo correspondente da função, que caracteriza sua *diferença* será:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \tag{1}$$

O limite da *razão incremental* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, para $\Delta x \to 0$, quando existe, define a *derivada* da função; seu valor depende do ponto considerado (*).

Para representá-la são usuais os símbolos:

$$f'(x_0) \text{ (Lagrange) e } \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \text{(Leibniz).}$$

Podemos, portanto, escrever:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

(*) Observemos que, para $\Delta x = 0$, essa relação não é determinada, pois toma a forma $\dfrac{0}{0}$, sem significado numérico.

Diz-se que $f(x)$ é *derivável* num intervalo (a, b), quando, a cada ponto do mesmo, corresponde um valor determinado de $f'(x)$ (*).

Seja, por exemplo, a função $f(x) = x^3$.

Virá:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$$
$$= 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

e:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$$

Portanto:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$$

A função é *derivável* em qualquer ponto, pois que x poderá ser tomado à vontade, de $-\infty$ a $+\infty$.

Ao contrário, a função:

$$f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}; \ f(0) = 0$$

para a qual:

$$\Delta y = (x + \Delta x) \operatorname{sen} \frac{1}{x + \Delta x} - x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

não é *derivável* no ponto $x_0 = 0$. De fato:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{x=0} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{\Delta x}$$

e êsse limite *não existe*. Quando $\Delta x \to 0$, $\operatorname{sen} \frac{1}{\Delta x}$ oscila, indefinidamente, entre 1 e -1.

Observemos, no entanto, que, para êsse ponto $x_0 = 0$, a função é *contínua*.

61 — Derivada infinita. Por extensão, diz-se ainda que a função é *derivável*, quando o limite é infinito.

(*) Sempre que se trata de um valor particular de x deveremos usar, para representá-lo, um símbolo como x_0, x_1, ... etc. Mas, quando o próprio símbolo x não der origem a confusão, poderemos, como é usual, conservá-lo.

É o que se dá com $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ no ponto $x_0 = 1$.

Com efeito:

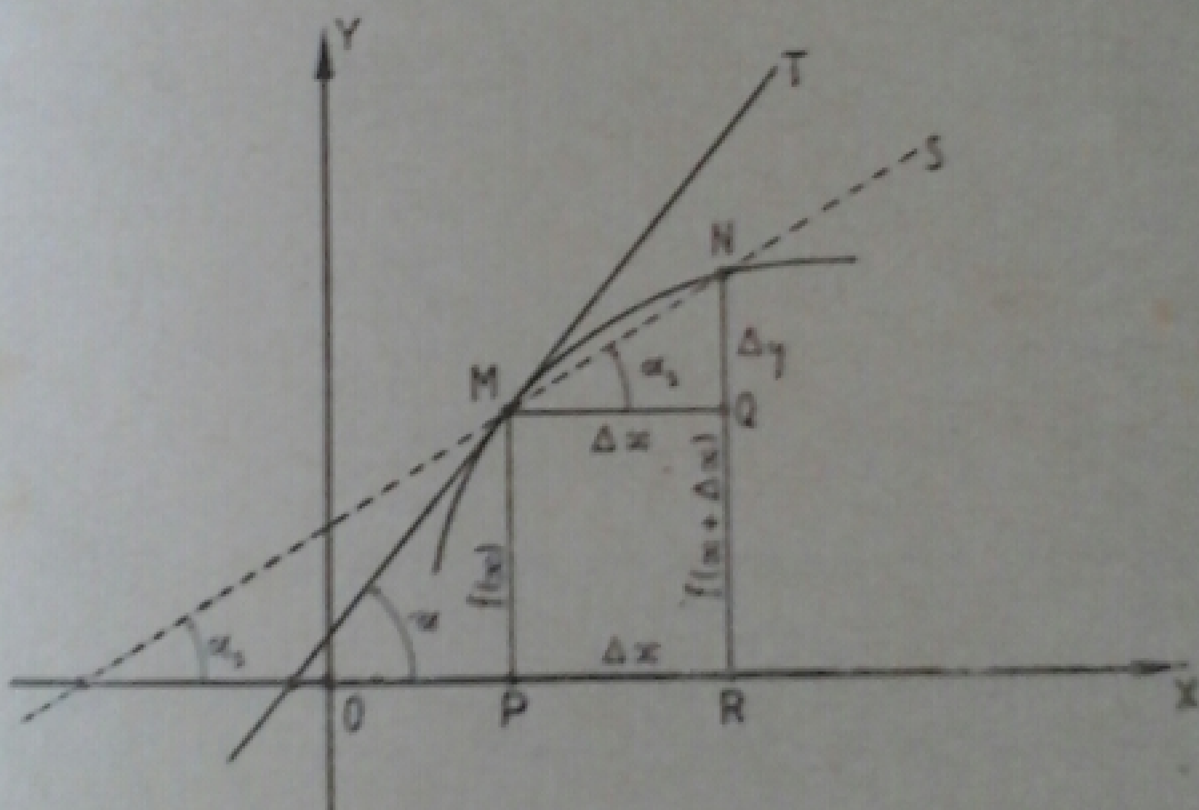
$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} \right]_{x=1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty$$

Diz-se, então, que a derivada é *infinita*, escrevendo-se:

$$f'(1) = +\infty$$

62 — Interpretação geométrica. Consideremos, em um sistema cartesiano ortogonal, a curva representativa de uma função $y = f(x)$.

Os pontos M e N, de abcissas x e $x + \Delta x$, respectivamente, determinam uma secante S que forma com $0x$ um ângulo α_s.



Quando imaginarmos $\Delta x \to 0$, o ponto N aproximar-se-á, indefinidamente, de M. O limite das posições da secante S, como sabemos, será a tangente T, formando com $0x$ o ângulo α.

Mas, no triângulo retângulo MNQ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha_s$$

Por conseqüência:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{N \to M} \operatorname{tg} \alpha_s = \operatorname{tg} \alpha \qquad (3)$$

isto é, *a derivada da função* y = f (x), *correspondente a um ponto de sua curva representativa, em um sistema de eixos cartesianos ortogonais, é o coeficiente angular da tangente nesse ponto.*

63 — Observação. Essa interpretação geométrica mostra que, nos pontos de *derivada infinita*, a curva representativa da função apresenta tangente paralela a *oy*, pois para os mesmos, $\operatorname{tg} \alpha = \pm \infty$.

64 — Interpretação cinemática (*). Consideremos um móvel animado de determinado movimento. Seja

$$l = f(t)$$

a lei que o define.

Suponhamos que, no instante t, l represente o espaço percorrido.

No instante $t + \Delta t$, teremos o espaço $l + \Delta l$ onde:

$$\Delta l = f(t + \Delta t) - f(t)$$

A relação:

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

representará a *velocidade média* com que foi percorrido o espaço Δl.

Se tomarmos o limite, para $\Delta t \to 0$, teremos o que se chama a *velocidade num instante* t (*instantânea* ou *verdadeira*).

(*) A introdução, em fins do século XVII, do conceito de *derivada*, devido principalmente a G. W. Leibniz e I. Newton, constituiu um dos maiores passos que já deu a Matemática. O primeiro partiu do problema geométrico das tangentes; o segundo, do conceito cinemático de *fluxão*. A denominação *derivada* foi criada por Leibniz, em 1677. A Newton deve-se ainda o método *das primeiras e últimas razões* (método dos limites) e a notação $\dot{y}$ que, caindo em desuso, voltou, hoje, a ser empregada na Mecânica. J. L. Lagrange, foi um dos continuadores da concepção dêsses dois grandes gênios. Entre os trabalhos de crítica mais conhecidos temos o de Carnot, "*Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal*", (4ª ed., Paris, 1860).

Portanto, *a derivada, do espaço em relação ao tempo, representa a velocidade no instante considerado.*

EXEMPLO — *"No movimento definido pela lei* $l = a + bt + ct^2$, *determinar a velocidade em um dado instante".*

Ora, sendo:

$$l = a + bt + ct^2$$

onde l é o espaço percorrido; t, o tempo e a, b, c, coeficientes determinados, teremos:

$$\Delta l = a + b\,(t + \Delta t) + c\,(t + \Delta t)^2 - a - bt - ct^2$$

e, por consequência:

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = b + 2ct + c\,\Delta t$$

Logo:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = b + 2ct$$

65 — Diferencial de uma função. Representando por dy a *diferencial* da função $y = f(x)$, tem-se por definição:

$$dy = f'(x)\ \Delta x \qquad (4)$$

Tomemos, entretanto, o caso particular da função $y = x$. Visto que $\Delta y = \Delta x$, virá:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

e, por consequência:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

mostrando que a derivada dessa função é sempre a unidade.

Então, de acôrdo com (4), sua *diferencial* será:

$$dx = \Delta x$$

Substituamos, portanto, em (4), o *acréscimo* Δx, pela *diferencial* dx da variável. Virá para expressão da *diferencial de uma função* $y = f(x)$:

$$dy = f'(x)\ dx \quad (*) \qquad (5)$$

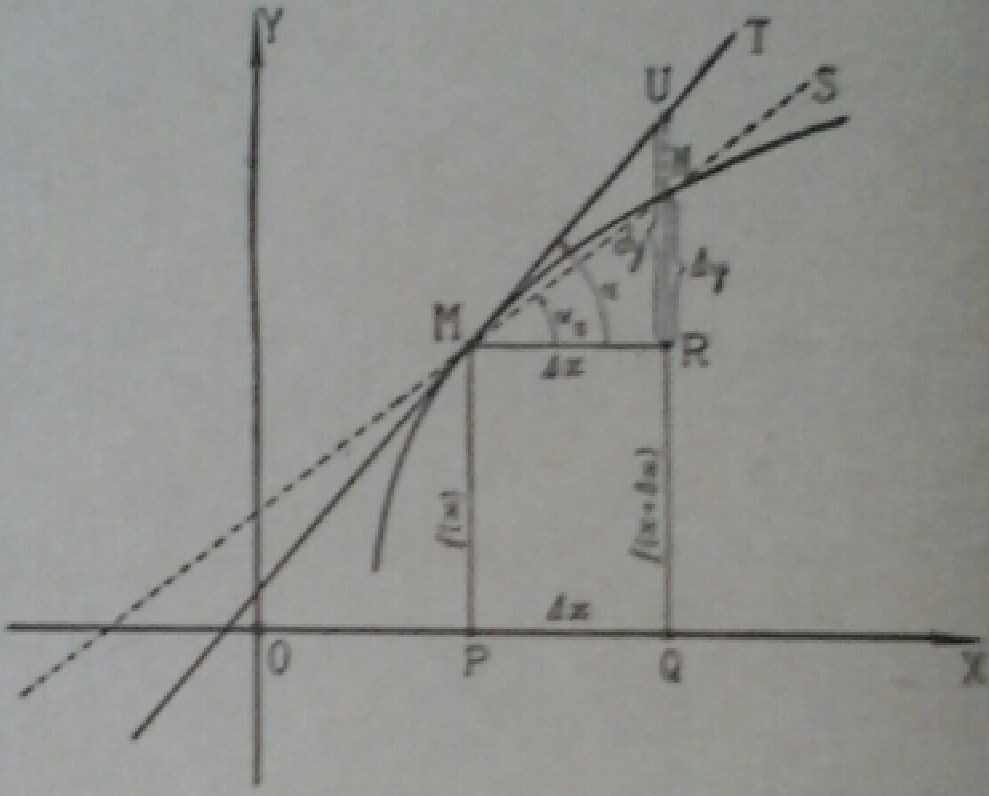
(*) Esse conceito simples de *diferencial* é devido a Cauchy (1823). A idéia original de Leibniz (1684), complexa e metafísica, foi posta à margem.

de onde:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

A expressão (4) mostra que o *cálculo das diferenciais* reduz-se ao *cálculo das derivadas*.

66 — Interpretação geométrica. Consideremos, em uma curva de equação $y = f(x)$, dois pontos M e N de abcissas, respectivamente, x e $x + \Delta x$ e imaginemos traçadas a secante S e a tangente T.



O triângulo MRU nos dá:

$$RU = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Mas, $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$, de onde:

$$RU = f'(x) \cdot \Delta x$$

mostrando que a *diferencial* dy constitui o acréscimo RU da ordenada da tangente.

67 — Observação. A *diferencial*, como se vê, é, em geral, *finita e determinada*, tal como a *diferença* Δy. Mas, quando $\Delta x \to 0$, uma e outra tendem para zero. É usual, então, chamar-se a *diferencial* de *acréscimo elementar* ou *instantâneo* da função.

Ora, da figura, tiramos imediatamente:

$$\Delta y = \Delta x \ \mathrm{tg}\ \alpha_s$$

$$dy = \Delta x \ \mathrm{tg}\ \alpha$$

de onde se conclui:

$$\frac{\Delta y}{dy} = \frac{\mathrm{tg}\alpha_s}{\mathrm{tg}\,\alpha}$$

e, por consequência:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{N \to M} \frac{\mathrm{tg}\alpha_s}{\mathrm{tg}\alpha} = 1$$

pois, com efeito, em (3), mostramos que $\lim\limits_{N \to M} \mathrm{tg}\alpha_s = \mathrm{tg}\alpha$.

Portanto, para valores suficientemente pequenos de Δx, poderemos tomar:

$$dy \cong \Delta y$$

Essa substituição do incremento Δy pela diferencial dy, aparentemente sem significação, é de incalculáveis vantagens nas aplicações em geral; dela decorre a denominação de *acréscimo elementar* ou *instantâneo*, que também se dá à diferencial, conforme assinalámos antes.

A extraordinária simplificação, que assim se introduz nos cálculos, justifica a importância e o largo uso da diferencial em todos os domínios da matemática aplicada.

Observemos, finalmente, que, de um modo geral, teremos $dy > \Delta y$ ou $dy < \Delta y$, *conforme a concavidade* da curva esteja *voltada para baixo ou para cima* (*).

68 — Funções derivadas. Derivação sucessiva. Suponhamos obtida a expressão $f'(x)$ da *derivada* da função $f(x)$, em certo ponto x. É evidente que o valor numérico de $f'(x)$ variará com o ponto considerado. Será, assim, por sua vez, uma outra função de x, a que chamamos *função derivada* da função $f(x)$ (**60**).

Para cada valor de x, elas nos dá, numèricamente, a *derivada* de $f(x)$, no ponto em causa.

(*) Dizemos que, em um ponto, a *concavidade volta-se para baixo*, quando, em sua vizinhança, as ordenadas da curva são inferiores às da tangente; a hipótese contrária define a *concavidade voltada para cima*.

Dêste modo, se $f'(x)$ fôr derivável num intervalo, obtemos outra função, dela derivada, a que chamaremos *derivada de segunda ordem da função* $f(x)$, que se representa por $f''(x)$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Chegaremos, por esta forma, ao conceito de *derivada de ordem n*, representada por $f^{(n)}(x)$ ou $\frac{d^ny}{dx^n}$, cuja obtenção caracteriza a *derivação sucessiva*.

2 — Regras de derivação; derivada de uma constante; de uma função de função; de funções inversas; da soma, do produto e do quociente de funções. Aplicação à derivação de funções elementares.

69 — Regra geral. A relação (2) traduz, implìcitamente, o método geral a empregar no cálculo das *funções derivadas*. Aliás, nos exemplos vistos antes, assim procedemos.

Deveremos, apenas, examinar os casos especiais que se apresentam comumente.

70 — Derivada de uma constante. Por extensão, poderemos admitir ainda que $y = c$, sendo c uma constante, é uma *função de x*.

Mas, qualquer que seja o valor de Δx, é claro que teremos $\Delta y = 0$. Portanto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

isto é, *a derivada de uma constante é nula*.

71 — Derivada de uma função de função. Se tivermos

$$y = f_1(u) \ , \ u = f_2(v) \ , \ \dots , \ w = f_{n-1}(t) \ , \ t = f_n(x)$$

partiremos da identidade:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \ \frac{\Delta u}{\Delta v} \ \cdots \ \frac{\Delta w}{\Delta t} \ \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Admitindo que existam os limites dessas *razões incrementais*, teremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdots \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

ou, finalmente:

$$\boxed{y' = f'_1(u)\ f'_2(v) \ldots f'_{n-1}(t)\ f'_n(x)}$$

72 — Relação entre as derivadas de funções inversas. Considerando (**5**):

$$y = f(x) \quad e \quad x = f_{-1}(y)$$

poderemos escrever:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\right)}$$

visto que, para $\Delta x \neq 0$, tem-se $\Delta y \neq 0$.

Admitir que existe o limite do primeiro membro é supor $\Delta y \to 0$ para $\Delta x \to 0$. Portanto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

ou, finalmente:

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{f'_{-1}(y)}}$$

Tomemos, por exemplo, a função $y = \sqrt[3]{x}$.

Sua inversa é $x = y^3$, cuja derivada já obtivemos (**60**), isto é:

$$f'_{-1}(y) = 3\,y^2$$

Por conseqüência a fórmula acima nos dará:

$$y' = \frac{1}{3\,y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Como vemos, é de grande utilidade essa propriedade das funções inversas.

73 — Derivada de uma soma de funções. Seja:

$$y = u + v$$

a soma algébrica de duas funções de x. Ao acréscimo Δx, dado a x, corresponderão os acréscimos Δu, para u, Δv, para v e, conseqüentemente, Δy, para y. Portanto:

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$

e:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$

de onde se conclui:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

e, por conseguinte:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Admitindo, portanto a existencia das derivadas das funções componentes, u e v, teremos:

$$\boxed{y' = u' + v'}$$

Esta regra poderá ser, imediatamente, generalizada. Mas deveremos supor sempre que o número de funções é limitado.

Tomando, por exemplo:

$$y = u + v + \ldots + w$$

obteremos, raciocinando do mesmo modo:

$$\boxed{y' = u' + v' + \ldots + w'} \qquad (6)$$

74 — Derivada de um produto de duas funções. Seja, anàlogamente:

$$y = uv$$

de onde concluiremos, para um acréscimo Δx da variável independente:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

isto é:

$$\Delta y = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

Daí a *relação incremental*:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\,\frac{\Delta v}{\Delta x}\,\Delta x$$

Passando, ao limite para $\Delta x \to 0$, virá finalmente:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\,\frac{\Delta v}{\Delta x}\,\Delta x \right)$$

Supondo que $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ e $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ admitam limites finitos, teremos, finalmente (*):

$$\boxed{y' = uv' + v\,u'} \qquad (7)$$

75 — Observação. Será fácil, generalizando, obter pelo método de recorrência, a fórmula:

$$\boxed{y' = u'v \ldots wt + uv' \ldots wt + \ldots + uv \ldots wt'}$$

para o caso de um número qualquer de fatôres, isto é:

$$y = uv \ldots wt$$

Vê-se, então, que a regra estabelecida ainda é aplicável ao caso de n funções e, portanto, geral, uma vez que, inicialmente, a demonstrámos para $n = 2$.

(*) Notemos que, nas *operações de passagem ao limite*, quando $\Delta x \to 0$, supõe-se que x não varia. Dêsse modo, u e v são consideradas *constantes*.

76 — Observação. Quando tivermos:

$$y = c\,v$$

sendo c uma *constante*, a última fórmula dará simplesmente (**70**):

$$\boxed{y' = c\,v'}$$

77 — Derivada logarítmica de um produto de funções. Multiplicando e dividindo o segundo membro de (7) por y, isto é, por uv virá:

$$y' = y\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right)$$

e, ainda:

$$\boxed{\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}}$$

expressão que define a *derivada logarítmica* da função dada.

78 — Derivada de um quociente de funções. Seja agora:

$$y = \frac{u}{v}$$

Considerando os acréscimos que correspondem ao acréscimo Δx da variável, virá:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

e, sucessivamente:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$\Delta y = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v^2 + v\,\Delta v}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\,\Delta v}$$

Passando aos limites, obteremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2}$$

visto que: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v \, \Delta v = 0$

Adotando então a notação de Lagrange, como temos feito em geral, virá finalmente:

$$\boxed{y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}}$$

79 — Funções elementares. Dentre as funções elementares, consideraremos a *potência*, a *raiz* e as *trigonométricas circulares*.

Para argumento, tomaremos uma função u de x. Teremos, dêsse modo, funções de função, permitindo resultados mais gerais e melhor ajustados às aplicações correntes.

80 — Derivada da função potência. Tomemos:

$$y = u^m$$

sendo u uma função de x e m, um *número inteiro e positivo qualquer*.

Considerado o acréscimo Δx da variável, virá:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)^m$$

e pela fórmula do "*binômio de Newton*":

$$y + \Delta y = u^m + mu^{m-1} \Delta u + \frac{m(m-1)}{2!} u^{m-2} \Delta u^2 + \ldots + \Delta u^m$$

de onde vem:

$$\Delta y = mu^{m-1} \Delta u + \frac{m(m-1)}{2!} u^{m-2} \Delta u^2 + \ldots + \Delta u^m$$

e, finalmente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m\, u^{m-1} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{m(m-1)}{2!} u^{m-2} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta u +$$

$$+ \ldots + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta u^{m-1}$$

Por consequência, passando ao limite, para $\Delta x \to 0$, virá:

$$\boxed{y' = m\, u^{m-1}\, u'} \qquad (8)$$

É claro que neste caso, como nos demais que se seguem, a existência da derivada ficará subordinada à existência da função no ponto considerado.

81 — Derivada de um polinômio. É uma conseqüência imediata das fórmulas (6) e (8).

Tomando-se, por exemplo:

$$y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

virá:

$$y' = m a_0 x^{m-1} + (m-1)\, a_1 x^{m-2} + (m-2)\, a_2 x^{m-3} + \ldots + a_{m-1}$$

pois $D_x\, x = 1$ (**65**).

EXEMPLO — *Calcular a derivada do polinômio:*

$$P(x) = 5x^4 - 7x^2 - 8x + 1$$

temos logo: $P'(x) = 20x^3 - 14x - 8$

82 — Derivada da função raiz. Supondo:

$$y = \sqrt[n]{u}$$

teremos:

$$u = y^n$$

e, por conseguinte (**80**):

$$u' = n y^{n-1}\, y'$$

isto é:

$$y' = \frac{u'}{n y^{n-1}}$$

ou, finalmente:

$$\boxed{y' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}}$$

EXEMPLO I — "*Dada a curva* $y = \sqrt{2x}$, *calcular a inclinação da tangente, no ponto* $x = 0.5$ (*eixos ortogonais*)".

Ora:

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

Portanto:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left[\frac{1}{\sqrt{2x}}\right]_{x=0.5} = 1 \quad e \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rd}$$

EXEMPLO II — *Calcular a derivada de* $\sqrt[3]{2\varphi^3 + 3\varphi - 1}$

Teremos: $\dfrac{d}{dx} =$

$$= \sqrt[3]{2\varphi^3 + 3\varphi - 1} = \frac{(2\varphi^3 + 3\varphi - 1)}{3\sqrt[3]{(2\varphi^3 + 3\varphi - 1)^2}} = \frac{2\varphi^2 + 1}{\sqrt[3]{(2\varphi^3 + 3\varphi - 1)^2}}$$

83 — Derivadas das funções trigonométricas. Bastará derivar uma delas. As expressões das demais em função da mesma permitirão, fàcilmente, o cálculo das derivadas.

Consideremos, então:

$$a) \quad y = sen\, u$$

Teremos:

$$y + \Delta y = \text{sen}\,(u + \Delta u)$$

$$\Delta y = \text{sen}\,(u + \Delta u) - \text{sen}\; u$$

Transformando o segundo membro desta expressão, virá (*):

$$\Delta y = 2 \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \text{sen}\, \frac{\Delta u}{2}$$

(*) Cfr "*Matemática — 2.º Ciclo*" — *2.ª Série* de onde:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\dfrac{\Delta u}{2}}{\dfrac{\Delta u}{2}}\,\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Mas já vimos que $\lim\limits_{\frac{\Delta u}{2} \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\Delta u}{2}}{\dfrac{\Delta u}{2}} = 1$ (**33,** *Exercício II*).

Portanto:

$$\boxed{y' = \cos u \; u'}$$

b) $y = \cos u$

ou:

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

e, por conseguinte:

$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-u')$$

isto é:

$$\boxed{y' = -\operatorname{sen} u \; u'}$$

c) $y = \operatorname{tg} u$

Ora, $\operatorname{tg} u = \dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$, logo:

$$y' = \frac{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u}\, u'$$

isto é:

$$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

ou melhor:

$$\boxed{y' = \sec^2 u \; u'}$$

d) $y = \operatorname{cotg} u$

Tomemos, anàlogamente, $\operatorname{cotg} u = \dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$

Virá:

$$y' = \frac{-\operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u} u' = -\frac{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u} u'$$

isto é:

$$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} u'$$

ou, finalmente:

$$\boxed{y' = -\operatorname{cosec}^2 u \; u'}$$

e) $y = \sec u$

isto é:

$$y = \frac{1}{\cos u}$$

Logo:

$$y' = \frac{-(-\operatorname{sen} u \; u')}{\cos^2 u} = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u} u'$$

ou, finalmente:

$$\boxed{y' = \sec u \; \operatorname{tg} u \; u'}$$

f) $y = \operatorname{cosec} u$

Tomando, então: $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$, virá:

$$y' = \frac{-\cos u \; u'}{\operatorname{sen}^2 u} = -\frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u} u'$$

isto é:

$$\boxed{y' = -\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\, u'}$$

EXERCÍCIO IV — *Calcular a derivada da função:*

$$\rho = \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{cosec}^2 \varphi + 2 \operatorname{cotg} \varphi$$

Virá:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \operatorname{cotg} \varphi \left(2 \operatorname{cosec} \varphi \frac{d}{d\varphi} \operatorname{cosec} \varphi \right) + \operatorname{cosec}^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} \operatorname{cotg} \varphi -$$
$$- 2 \operatorname{cosec}^2 \varphi = -2 \operatorname{cotg}^2 \varphi \operatorname{cosec}^2 \varphi - \operatorname{cosec}^4 \varphi - 2 \operatorname{cosec}^2 \varphi =$$
$$= -2 \operatorname{cosec}^2 \varphi (\operatorname{cotg}^2 \varphi + 1) - \operatorname{cosec}^4 \varphi = -2 \operatorname{cosec}^4 \varphi - \operatorname{cosec}^4 \varphi$$

isto é:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -3 \operatorname{cosec}^4 \varphi$$

84 — Cálculo das diferenciais. Conforme já vimos (**65**), as diferenciais se deduzem, imediatamente, das derivadas. Prevalecem, pois, todas as regras antes estabelecidas, bastando fazer uma observação quanto à *função de função.*

Seja:

$$y = f(u)$$

onde u é, por hipótese, função de x. Já vimos que, neste caso (**71**):

$$y' = f'(u)\, u'$$

e, para a diferencial, virá:

$$dy = y'dx = f'(u)\, u'\, dx$$

Mas, por outro lado, $du = u'dx$; portanto:

$$dy = f'(u)\, du$$

mostrando que a definição da diferencial é a mesma, quer a variável u seja dependente ou não.

Essa propriedade torna extraordinariamente cômodo o uso da diferencial, em inúmeras questões em que intervém a noção de derivada. É mais uma vantagem a ser acrescentada às que antes mencionámos (**67**).

EXERCÍCIO I — *Calcular o acréscimo de volume de uma esfera, quando o raio sofre um acréscimo elementar* (*).

Temos:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

e, por conseguinte:

$$V' = 4 \pi r^2$$

O *acréscimo elementar*, como já vimos (**67**), exprime-se pela *diferencial*. Portanto:

$$d V = 4 \pi r^2 dr$$

EXERCÍCIO II — *Calcular a variação de volume de um gás perfeito, correspondente a um acréscimo elementar da pressão, quando se supõe constante a temperatura.*

Ora, para os gases perfeitos, tem-se neste caso (**):

$$p v = c$$

isto é:

$$v = \frac{c}{p}$$

e, imediatamente:

$$dv = - \frac{c}{p^2} dp$$

O mesmo problema resolvido por meio da *diferença da função*, daria:

$$\Delta v = \frac{c}{p + \Delta p} - \frac{c}{p} = - \frac{c \Delta p}{p (p + \Delta p)}$$

e, ainda:

$$\Delta v = - \frac{c}{p^2} \Delta p \left[\frac{1}{1 + \frac{\Delta p}{p}} \right]$$

mostrando que, para $\Delta p \to 0$, viria a expressão da diferencial, obtida acima sem a necessidade dessas transformações que, em muitos casos, tornam-se extraordinariamente laboriosas.

(*) É usual denominar-se elementar a quantidade que tende para zero.
(**) Lei de Boyle — Mariotte.

85 — Aplicação à derivação sucessiva. Tomando, como exemplo:

$$y = x^3$$

teremos: $y''' = 3!$ e $y^{(IV)} = 0$

E, de um modo geral, para $y = x^m$, $y^{(m)} = m!$ e $y^{(m+1)} = 0$.

Anàlogamente para $y = \dfrac{1}{x}$, teremos sucessivamente:

$$y' = -\frac{1}{x^2}\ ;\ y'' = \frac{1.2}{x^3}\ ;\ y''' = -\frac{1.2.3}{x^4}\ ;\ y^{(IV)} = \frac{1.2.3.4}{x^5}\ ;\ \ldots$$

e, por consequência: $y^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Derivando-se essa expressão, verifica-se logo que a fórmula é geral, ou melhor, que a função é *indefinidamente derivável.*

86 — Diferenciais sucessivas. Na expressão:

$$dy = f'(x)\ dx$$

vê-se que dy é função de x e de dx. Admitamos, entretanto, que dx, embora variável, seja o mesmo para todos os valores de x considerados; representará, então, com referência a x, o papel de uma verdadeira *constante.*

Dessa forma, de acôrdo com a definição já vista (**65**), teremos:

$$d\,(dy) = [\ f'(x)\ dx\ ]'\ dx$$

Mas, representando dx uma *constante*:

$$[\ f'(x)\ dx\ ]' = f''(x)\ dx$$

Portanto:

$$d^2 y = f''(x)\ (dx)^2$$

ou, como é habitual:

$$d^2 y = f''(x)\ dx^2$$

De um modo geral, teremos a *diferencial de ordem n*:

$$d^n y = f^{(n)}(x)\ dx^n$$

que justifica a notação de Leibniz para a *derivada de ordem n*, pois, daí tiramos:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

87 — Observação. Se tivermos uma função de função, virá:

$$dy = f'(u)\ du$$

e, não sendo *du* constante:

$$d^2y = d\left| f'(u)\ du \right| = f''(u)\ du^2 + f'(u)\ d^2u$$

A diferenciação sucessiva conduziria, agora, a uma expressão polinomial.

EXERCÍCIO — *"Conhecida a lei que define um movimento variado qualquer, determinar a aceleração em um dado instante"*.

Ora, seja, por hipótese:

$$l = f(t)$$

Em um intervalo de tempo Δt, a *aceleração média* será dada pela razão:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Para um instante dado, virá então:

$$\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

ou, melhor:

$$\gamma = \frac{dv}{dt}$$

Mas, uma vez que $v = \dfrac{dl}{dt}$, teremos:

$$\gamma = \frac{d^2l}{dt^2} = f''(t)$$

3 — Aplicação da teoria das derivadas ao estudo da variação de uma função. Funções crescentes e funções decrescentes; máximos e mínimos relativos; interpretação geométrica.

88 — Funções crescentes e decrescentes; máximos e mínimos relativos; interpretação geométrica. Dada uma função f (x), definida em um intervalo (a, b), consideremos dois pontos, x_1 e x_2, dêsse intervalo.

Se tivermos, para todos os pares possíveis de pontos distintos escolhidos:

a) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, diremos que, em (a, b), f (x) é *crescente*, ou, melhor, que f (x) e x variam no mesmo sentido;

b) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, diremos que, em (a, b), f (x) é *decrescente*, ou, melhor, que f (x) e x variam em sentidos opostos.

Em particular, o sinal de:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

para valores vizinhos de x, definirá, de modo análogo, a *função crescente* ou *decrescente* no ponto x_1.

89 — Teorema. *"Em um ponto x_1, em que f (x) é derivável, se tivermos:*

a) $f'(x_1) > 0$, a função será crescente;

b) $f'(x_1) < 0$, a função será decrescente;

e reciprocamente".

Ora, visto que:

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$$

teremos, na vizinhança de $f(x_1)$, o sinal da fração coincidindo com o de $f'(x_1)$ (**83**), o que demonstra o teorema.

A recíproca é evidente.

EXERCÍCIO — "*Estudar o sentido do crescimento da função:*

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

Derivando teremos:

$$y' = \frac{(x^2 - 5x + 6)\ (2x + 2) - (x^2 + 2x + 1)\ (2x - 5)}{(x^2 - 5x + 6)^2} =$$

$$= \frac{-7x^2 + 10x + 17}{(x^2 - 5x + 6)^2}$$

Vê-se, imediatamente, que o sinal de y' será o do numerador da expressão. E, para êsse trinômio, temos $a = -7\ (< 0)$, $\Delta = 576 > 0$ e, como raízes, $x' = -1$ e $x'' = \frac{17}{7}$. Assumirá, então, valores *negativos* para:

$$x < x' \text{ ou } x > x''$$

e *positivos*, para (*):

$$x' < x < x''$$

Teremos, então ,em resumo:

a) $-\infty < x < -1$ .... $y' < 0$... y — *decrescente;*

b) $-1 < x < \frac{17}{7}$ .... $y' > 0$... y — *crescente;*

c) $\frac{17}{7} < x < +\infty$ .... $y' < 0$... y — *decrescente.*

Observemos que para $x = 2$ e $x = 3$, raízes do denominador $x^2 - 5x + 6$, a função y e sua derivada y' são *descontínuas*, passando por valores infinitos.

90 — Máximos e mínimos relativos. Diz-se que f (x) é *máxima*, no ponto x_0, quando se tem:

$$f(x \pm h) < f(x) \qquad (9)$$

(*) Cfr. "*Matemática — 1.º Ciclo — 3.ª série — Estudo do Trinômio do 2.º grau* — N. Lemgruber e Roberto Peixoto.

para qualquer valor positivo de h, tão pequeno quanto quisermos.

Ao contrário, a condição:

$$f(x_0 \pm h) > f(x_0)$$

define um *mínimo* de $f(x)$.

Em resumo, dizer que, em x_0, a função passa por um *máximo* é afirmar que $f(x_0)$ supera os valores que $f(x)$ assume na vizinhança de x_0. Ao contrário, se os valores de $f(x)$ superarem $f(x_0)$, a função passará por um *mínimo* nesse ponto.

O *valor máximo* ou *mínimo* da função recebe, em geral, a denominação de *extremo* (*).

91 — Cálculo dos máximos e mínimos. Supondo que, em x_0, a função passe por um máximo, tiraremos de (9):

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} > 0 \text{ e } \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0 \quad (10)$$

E se admitirmos que, nesse ponto, a derivada é determinada e única, virá:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Mas essas *razões incrementais*, quando h tende para zero, mantêm sinais opostos, portanto, o limite comum só poderá ser nulo, isto é:

$$f'(x) = 0$$

Além do mais, vê-se, em (10), que *à esquerda* de x_0, a derivada será positiva e, *à direita*, negativa, isto é, $f(x)$ passará, nesse ponto, de *crescente* a *decrescente*.

Se, em x_0, a função passar por um *mínimo*, teremos ainda $f'(x_0) = 0$, mas a derivada passará de negativa a positiva, ou melhor, $f(x)$, de *decrescente*, tornar-se-á *crescente*.

(*) Como se vê, tais definições referem-se a máximos e mínimos relativos.

Observando que, na vizinhança de um *máximo*, a derivada é positiva à esquerda, nula no ponto e negativa à direita, concluiremos que $f'(x)$, *por* sua vez, *decresce* nesse ponto. Deveremos ter então (**89**):

$$f''(x) < 0$$

Para um *mínimo* a conclusão seria contrária.

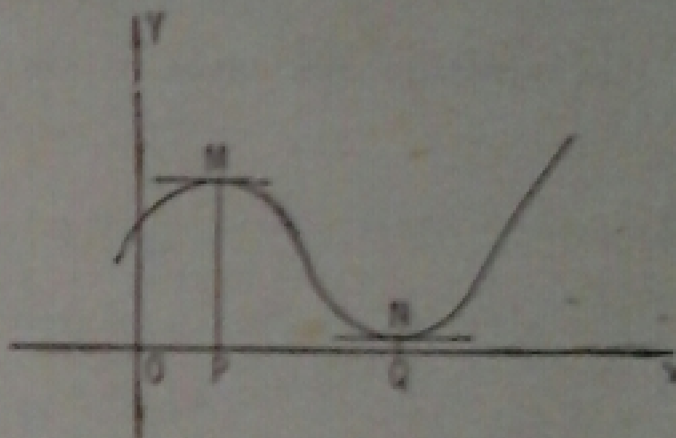
Chegamos, assim, de um modo geral, ao método para a pesquisa dos *extremos* de uma função:

a) *determinam-se os pontos em que* $f'(x) = 0$;

b) *sendo, por exemplo,* x *uma das raízes dessa equação, à mesma corresponderá um máximo se* $f''(x_i) < 0$; *um mínimo no caso contrário;*

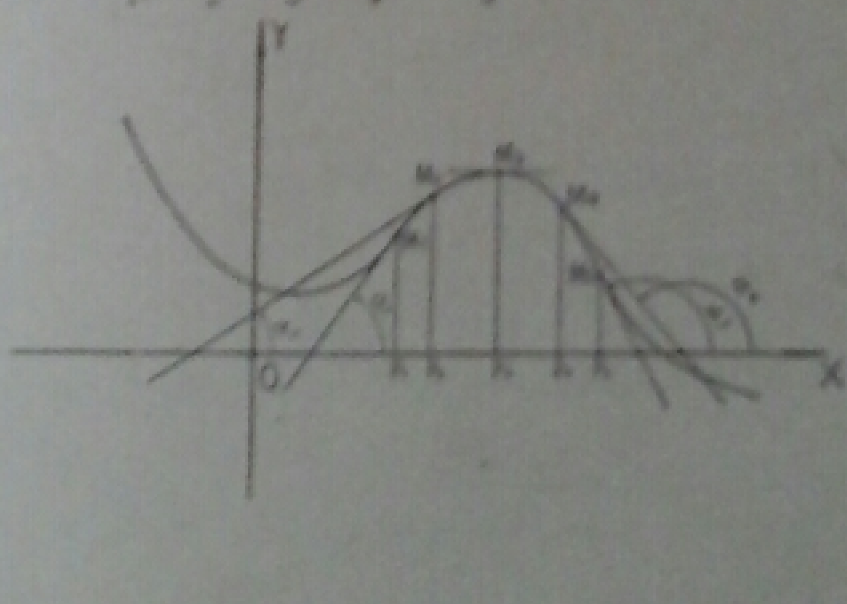
c) *calculam-se, por fim, os extremos relativos* $f(x_i)$.

92 — Interpretação geométrica. A interpretação dos resultados obtidos é imediata. Em um ponto x_0, onde a função é *máxima* ou *mínima*, a derivada é nula, isto é, a tangente à curva representativa da função é paralela a ox.



Vejamos agora o significado da derivada de segunda ordem negativa, nas vizinhanças de um *máximo*, e positiva, nas vizinhanças de um *mínimo*.

Tomemos um arco compreendido entre dois pontos sucessivos de inflexão, M_1 e M_5. Marquemos outros pontos intermediários e sejam x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 as abcissas correspondentes



aos pontos assinalados, na ordem em que se encontram. Teremos (**62**): $f'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha_1$; $f'(x_2) = \operatorname{tg} \alpha_2$; $f'(x_3) = \operatorname{tg} \alpha_3$; $f'(x_4) = \operatorname{tg} \alpha_4$; $f'(x_5) = \operatorname{tg} \alpha_5$ e, portanto:

$$f'(x_1) > f'(x_2) > f'(x_3) > f'(x_4) > f'(x_5)$$

A função $f'(x)$ é, pois, decrescente entre M_1 e M_5. Mas, num e noutro *ponto de inflexão*, muda de sentido a variação de α e portanto de $f'(x)$. Altera-se, então o sinal de $f''(x)$ ao mesmo tempo que a concavidade da curva muda de sentido.

A conclusão é imediata: a derivada segunda negativa caracteriza a *concavidade voltada para baixo*. Ao contrário, positiva, define a *concavidade voltada para cima*.

Nos pontos de inflexão a concavidade mudando de sentido, mudará também o sinal dessa derivada de segunda ordem.

EXEMPLO I — *Calcular os extremos relativos da função*

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$

Derivando e igualando a zero, virá a equação

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

cujas raízes são $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ e $x_2 = 1$.

Examinemos os sinais da derivada de segunda ordem

$$f''(x) = 24x - 6 = 6(4x - 1)$$

Teremos $f''(x_1) = -18$ (< 0) e $f''(x_2) = 18$ (> 0). Portanto, haverá um *máximo* no ponto x_1 e um *mínimo* no ponto x_2.

Para calculá-los, bastará substituir, em $f(x)$, os valores assinalados para x.

Teremos, assim, os *extremos*: $f(x_1) = \dfrac{31}{4}$ (*máximo*) e $f(x_2) = 1$ (*mínimo*).

EXEMPLO II — *Determinar os extremos da função:*

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

Igualando a zero a derivada, teremos (**89**, Exercício):

$$f'(x) = \frac{-7x^2 + 10x + 17}{(x^2 - 5x + 6)^2} = 0$$

Os valores $x_1 = -1$ e $x_2 = \frac{17}{7}$ anulam o numerador, sem anular o denominador. São pois as raízes da equação.

Poderemos determinar a natureza dos *extremos* correspondentes a êsses pontos, sem o cálculo laborioso da derivada de segunda ordem. Bastará verificar a variação de sinal da derivada de primeira ordem.

Ora, conforme já vimos (**89**, Exercício), f' (x) é *negativa à esquerda de* x_1 *e positiva à direita;* a x_1, corresponde, por conseguinte, um *mínimo*. No ponto x_2, ao contrário, f'(x) é *positiva à esquerda* e *negativa à direita;* a x_2, corresponde, então, um *máximo*.

Calculando êsses *extremos* encontrámos: f $(x_1) = 0$ (*mínimo*) e f $(x_2) = -48$ (*máximo*).

EXEMPLO III — *"Estudar quanto aos máximos e mínimos, a soma de dois números de produto constante"*.

Seja x um dos números, β o produto constante. O outro número será $\frac{\beta}{x}$ e a soma:

$$y = x + \frac{\beta}{x}$$

Derivando e igualando a zero, teremos:

$$y' = 1 - \frac{\beta}{x^2} = 0$$

de onde:

$$\frac{x^2 - \beta}{x^2} = 0$$

equação fracionária que exige $x^2 - \beta = 0$ e $x^2 \neq 0$. Suas raízes são, portanto: $x_1 = -\sqrt{\beta}$ e $x_2 = \sqrt{\beta}$.

A derivada de segunda ordem é:

$$y'' = \frac{2\beta}{x^3}$$

Por consequência, para $x = x_1$, teremos $y'' < 0$, indicando um um *máximo* e, para $x = x_2$, $y'' > 0$, indicando um *mínimo*.

Os *extremos* correspondentes serão: $-2\sqrt{\beta}$ (*máximo*) e $2\sqrt{\beta}$ (*mínimo*).

Se supusermos $\beta < 0$, a equação $x^2 - \beta = 0$ não terá raízes. Não haverá *extremos* para a função.

93 — Estudo da variação de algumas funções simples. O estudo da variação de uma função resume-se na determinação de seu domínio de existência, pontos de descontinuidade, extremos relativos e valores nos pontos impróprios (*). A variação de sinal da derivada dá as imprescindíveis indicações sôbre o crescimento e o decrescimento da função. O *diagrama* (**) permite estabelecer a continuidade entre os diversos resultados obtidos; é um precioso auxiliar.

A marcha geral poderá ser assim discriminada:

a) *determinam-se: o domínio de existência da função e os pontos de descontinuidade;*

b) *estuda-se a variação de sinal da derivada, pesquisando-se os pontos em que se anula* (extremos da função); *calculam-se os máximos e mínimos;*

c) *determinam-se os valores da função nos pontos impróprios, isto é, os valores limites para* $x \to \pm\infty$;

d) *forma-se um quadro geral dos resultados e traça-se o diagrama que relaciona êsses resultados* (***).

EXEMPLO 1 — *Estudar a variação da função:*

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$$

a) A função existe para $-\infty < x < +\infty$; não apresenta descontinuidades.

b) A derivada:

$$f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1)$$

anula-se para $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ e verifica-se imediatamente que:

1) $f'(x) < 0$, para: $-\infty < x < -1$ ....f (x) *decresce;*
2) $f'(x) > 0$, para: $-1 < x < 0$ ....f (x) *cresce;*
3) $f'(x) < 0$, para: $0 < x < 1$ .... f (x) *decresce;*
4) $f'(x) > 0$, para: $1 < x < +\infty$ .... f (x) *cresce;*

É claro então que, a x_1, corresponde um *mínimo*, $f(x_1) = -1$; a x_2, um *máximo*, $f(x_2) = 1$ e, a x_3, novamente, um *mínimo*, $f(x_3) = -1$.

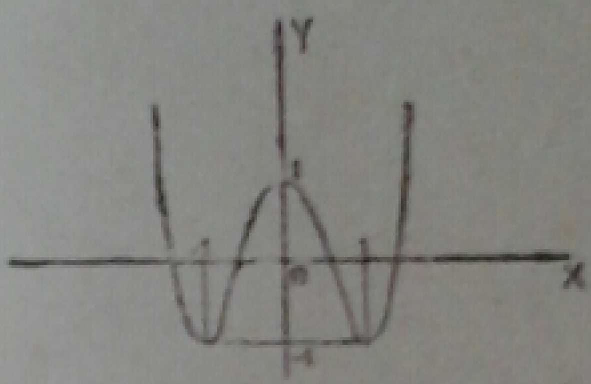
(*) São assim chamados os pontos correspondentes a $x = \pm\infty$.
(**) Preferimos chamar de diagrama a representação gráfica em traços gerais.
(***) Tais indicações, é claro, referem-se a *funções explícitas*.

c) Para $x \to \pm \infty$, virá $f(x) \to +\infty$.

d) Teremos, assim, o quadro geral da variação:

x	$-\infty$	cresce	-1	cresce	0	cresce	1	cresce	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	decresce	-1 (mínimo)	cresce	1 (máximo)	decresce	-1 (mínimo)	cresce	$+\infty$

e o *diagrama* da função, que completa o estudo:



EXERCÍCIO II — "*Estudar a variação da função:*

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 5x + 6}"$$

a) A função só deixa de existir nos pontos $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$, onde se anula o trinômio denominador. São essas as *descontinuidades* que apresenta (**37**).

b) A derivada:

$$f'(x) = \frac{-7x^2 + 10x + 17}{(x^2 - 5x + 6)^2}$$

conforme já vimos (**92**, *Exemplo II*), anula-se para $x_1 = -1$, onde a função apresenta um *mínimo*: $f(x_1) = 0$, e, para $x_2 = \dfrac{17}{7}$, onde a mesma apresenta um *máximo*: $f(x_2) = -48$.

Quanto ao sentido da variação temos (**89**, *Exercício II*):

1) $f'(x) < 0$, para: $-\infty < x < -1$ .... $f(x)$ *decrescente;*

2) $f'(x) > 0$, para: $-1 < x < \dfrac{17}{7}$ ... $f(x)$ *crescente;*

3) $f'(x) < 0$, para: $\dfrac{17}{7} < x < +\infty$ .... $f(x)$ *decrescente;*

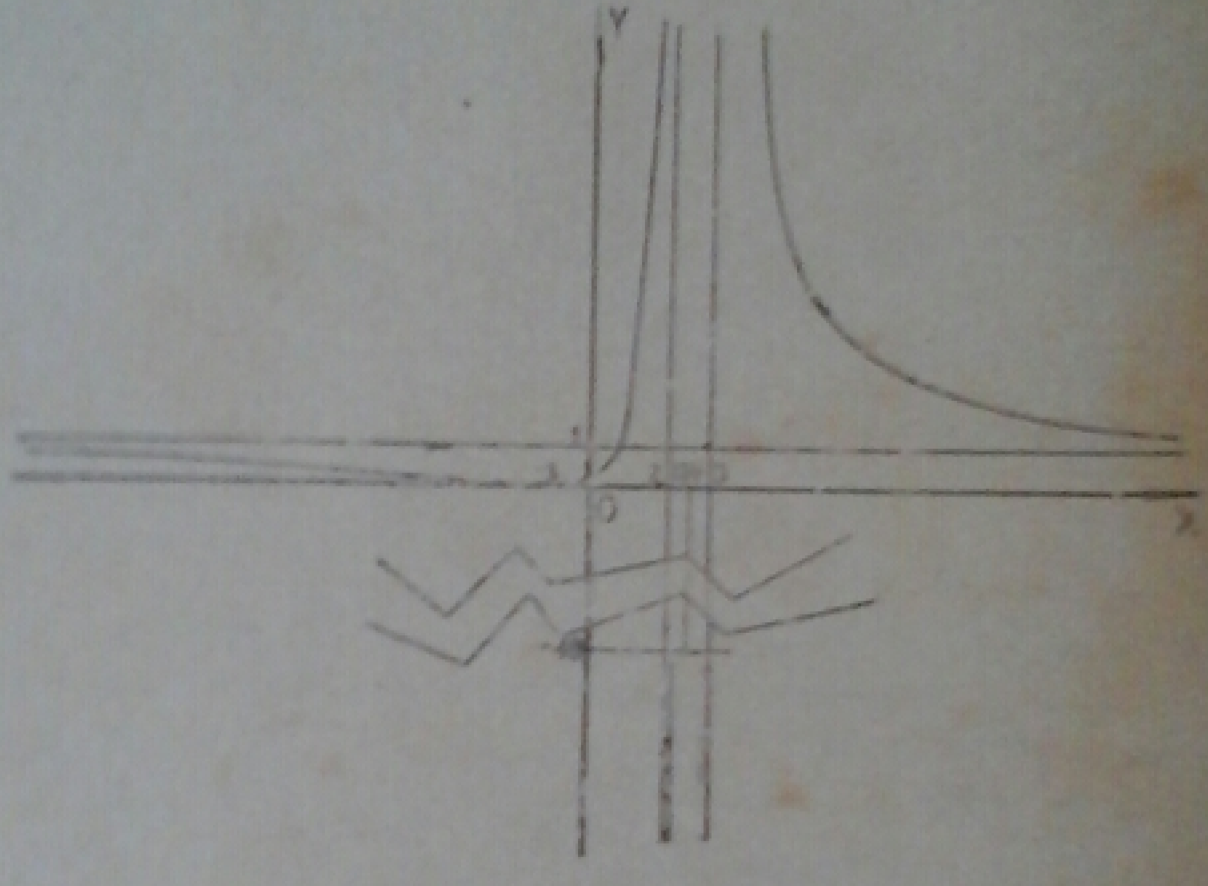
Para $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$, a derivada também é *descontínua*.

c) Para $x \to \pm \infty$, virá $\lim f(x) = 1$ (**28**);

d) O quadro geral será então:

x	$-\infty$	↗	-1	↗	2	↗	[illegible]	↗	3	↗	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-$	
$f(x)$	1	↘	0 (mínimo)	↗	$\pm\infty$	↗	-48 (máximo)	↘	$\pm\infty$	↘	1

Segue-se o *diagrama* da função (*):



Exercícios propostos

1. Estudar a derivada da função $y = \operatorname{sen} \sqrt{x}$, no ponto $x_0 = 0$.

Resp.: Tem-se $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ e, por conseguinte,

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{1}{0}$. Tomando o *valor limite* virá

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0 = \infty$.

(*) Note-se que substituímos, como é usual, a palavra *cresce* pelo sinal ↗ e, *decresce*, por ↘ . Se tivéssemos em vista o *traçado da curva* representativa da função, deveriam ser marcados os pontos notáveis da inflexão [illegible]

2. Indicar a natureza do movimento definido pela lei $s = a + bt + ct^2$, determinando os coeficientes a, b e c.

Resp.: O movimento é *uniformemente variado*; $a = s_0$ (espaço inicial); $b = v_0$ (velocidade inicial) e $c = \dfrac{\varphi}{2}$ (φ é a aceleração).

3. Demonstrar que, sendo $f'(x) = \varphi'(x)$, tem-se $f(x) - \varphi(x) =$ = constante.

Resp.: Bastará ver que $f'(x) - \varphi'(x) = 0$ qualquer que seja x.

4. Calcular as derivadas das funções:

I) $y = \dfrac{a + x}{a - x}$ Resp.: $y' = \dfrac{2a}{a^2 - x^2}$.

II) $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ Resp.: $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

III) $y = (ax^3 + bx^2 + cx + d)^2$;

Resp.: $y' = 2(ax^3 + bx^2 + cx + d)(3ax^2 + 2bx + c)$.

5. Calcular o coeficiente angular da tangente à curva $y = (5x^3 + 8x^2 + 13x - 1)^3$, no ponto de abcissa $x = -1$ (eixos ortogonais).

Resp.: $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0 = 4.356$.

6. Calcular as derivadas das funções abaixo, onde t é a variável independente:

I) $y = \varphi\left(\dfrac{1}{t}\right)$ Resp.: $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{t^2}\varphi'(t)$.

II) $z = f(t^2)$. Resp.: $\dfrac{dz}{dt} = 2t\,f'(t^2)$.

7. Calcular as derivadas das funções referidas no exemplo anterior, supondo t função da variável independente x.

Resp.: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{t'}{t^2}\varphi'(t)$ e $\dfrac{dz}{dx} = 2tf'(t^2)t'$.

8. Calcular as derivadas das funções:

I) $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$;

Resp.: $y' = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

II) $y = \dfrac{x^m}{(x+1)^m}$; Resp.: $y' = \dfrac{mx^{m-1}}{(x+1)^{m+1}}$.

III) $y = \sqrt[3]{ax^2 + bx + c}$;

Resp.: $y' = \dfrac{2ax + b}{3\sqrt[3]{(ax^2 + bx + c)^2}}$.

IV) $y = (x+1)\,(x+2)\,(x+3)$;

Resp.: $y' = 3\,x^2 + 12x + 11$.

V) $y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2$. Resp.: $y' = \dfrac{4(1+x)}{(1-x)^3}$.

9. Calcular os valores das derivadas das funções abaixo, para $x = 1$:

I) $y = \sqrt{x^2 + 8}$; Resp.: $\dfrac{1}{3}$

II) $y = x^2\sqrt{x+1}$ Resp.: $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

III) $y = (3x-1)\,(5x+4)$; Resp.: 37.

10. Calcular a expressão da derivada de ordem n das funções:

I) $y = \text{sen } x$; Resp.: $y^{(n)} = \text{sen}\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

II) $y = \cos x$; Resp.: $y^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

I) $u = \dfrac{v-1}{v+2}$; Resp.: $du = \dfrac{3dv}{(v+2)^2}$.

11. *Diferenciar* as funções:

II) $k = (3a^2 - 2)\,\sqrt{(a^2+1)^3}$;

Resp.: $dk = 15a^3\sqrt{a^2+1}\;da$.

III) $\lambda = \sqrt{\text{sen } \varphi}$; Resp.: $d\lambda = \dfrac{\cos\varphi\, d\varphi}{2\sqrt{\text{sen }\varphi}}$.

12. Calcular a *derivada logarítmica da função:*

$y = (x+a)\,(x+b)$; Resp.: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x+a} + \dfrac{1}{x+b}$.

13. No movimento cuja lei é definida pela relação $l = t^4 - \dfrac{7}{3}t^3 - t + 1$, determinar a *velocidade* e a *aceleração* no instante $t = 3$.

Resp.: $v = 44 \quad \varphi = 66$.

14. Calcular a derivada de 2.ª ordem da função:

$$y = \text{sen } x - x \cos x$$

Resp.: $y'' = \text{sen } x + x \cos x$.

15. Calcular o *acréscimo* de volume de um tronco de cone de revolução, correspondente a um *acréscimo elementar* do raio r da base.

Resp.: $dV = \dfrac{\pi h}{3} (2r + r') \, dr$.

16. No problema do móvel lançado livremente e segundo a vertical do lugar, determinar o acréscimo de velocidade correspondente a um *acréscimo elementar* da altura.

Resp.: $dv = \sqrt{\dfrac{g}{2h}} \, dh$.

17. Calcular a derivada de ordem n de um polinômio:

$$P(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

para $n \leqslant m$.

Resp.: $P^{(n)} (x) \equiv m(m-1) \ldots (m-n+1) \, a_0 x^{m-n} +$
$+ (m-1) \ (m-2) \ldots (m-n) \, a_1 x^{m-n-1} + \ldots +$
$+ n! \, a^{m-n}$

18. Determinar o intervalo em que é decrescente a função $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Resp.: $1 < x < 3$.

19. Determinar o intervalo em que é *decrescente* a função

$$y = \frac{1 + x + x^2}{2 + x}$$

Resp.: $-2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$.

20. Estudar os máximos e mínimos do trinômio $y = ax^2 + bx + c$.

Resp.: Temos $y' = 2ax + b$ e $y'' = 2a$; à abcissa $x = -\dfrac{b}{2a}$ corresponderá, então, um *máximo* ou um *mínimo* do trinômio, conforme tenhamos $y'' < 0$ ou $y'' > 0$, isto é, $a < 0$ ou $a > 0$.

21. Calcular os máximos e mínimos das funções:

I) $y = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^2 + x - 2}$; Resp.: Nem máximo, nem mínimo.

II) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 4x + 4}$; Resp.: $y_m = \dfrac{11}{12}$ para $x = -4$.

22. Calcular os extremos relativos da função $y = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$.

$$\text{Resp.: } y_m = \left[\frac{a_2 + a_3 + \ldots + (1-n)a_1}{n}\right]^2 +$$

$$+ \left[\frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_n + (1-n)a_2}{n}\right]^2 + \ldots + \left[\frac{a_1 + a_2 + \ldots + (1-n)a_n}{n}\right]^2$$

correspondente à abcissa

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

23. Determinar os extremos relativos da função $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 15$.

Resp.: Nos pontos de abcissas -2 e 1 apresenta, respectivamente, os *máximos* -31 e 23; nos pontos de abcissas -1 e 2, apresenta, respectivamente, os *mínimos* -53 e 1.

24. Estudar, quanto aos extremos relativos, a função $y = x^3$.

Resp.: Nem máximo, nem mínimo.

25. Estudar a variação das funções:

I) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$;

II) $\varphi(x) = \dfrac{3x^2 - 8x + 9}{x^2 + 1}$;

III) $\psi(x) = \dfrac{3x^2 - x + 10}{x^2 + 3x}$;

I)

x	$-\infty$	↗	-1	↗	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	$+\infty$	+	0
$f(x)$	1	↗	$\pm\infty$	↗	1

II)

x	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	2	↗	$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	+	0	−	0	+	0
$\varphi(x)$	3	↗	11 (máximo)	↘	1 (mínimo)	↗	1

III)

x	$-\infty$	↗	-3	↗	-1	↗	0	↗	3	↗	$+\infty$
$\psi'(x)$	0	+	$+\infty$	+	0	−	$+\infty$	−	0	+	0
$\psi(x)$	3	↗	$\pm\infty$	↗	-7 (máximo)	↘	$\pm\infty$	↘	$\frac{17}{9}$ (mínimo)	↗	3

4 — Funções primitivas; integral indefinida; constante de integração. Primitivas imediatas, regras simples de integração.

94 — Funções primitivas; integral indefinida; constante de integração. Consideradas as funções $2x^3$ e $6x^2$, a segunda, como se vê, é *a derivada* da primeira. Reciprocamente, se diz que $2x^3$ é *uma primitiva* de $6x^2$. E diz-se *uma primitiva*, porque, efetivamente, há outras.

De fato, $6x^2$ é a *derivada* não só de $2x^3$, como, ainda, das funções:

$$2x^3 + 1$$
$$2x^3 + 10$$
$$2x^3 - 5$$

ou, de um modo geral, das funções de tipo:

$$2x^3 + c$$

Qualquer uma delas é, pois, uma *primitiva* de $6x^2$.

É claro, então, que $2x^3 + c$ representa a *forma geral* das primitivas de $6x^2$.

Não há um símbolo, de uso generalizado, para caracterizar esta operação de *cálculo da função primitiva*. Comumente, se parte, não da função *derivada* $6x^2$, porém, da *diferencial* $6x^2dx$ e, em relação a esta, a função $2x^3 + c$ é chamada de *função integral* ou, simplesmente, *integral*. O número c define a *constante de integração*. E, como símbolo, usa-se o sinal $\int$ (*), escrevendo-se, então:

$$\int 6x^2dx = 2x^3 + c$$

O fato de termos, em c, um *número não determinado*, faz com que, sob esta forma, a integral seja denominada *integral indefinida*.

95 — Primitivas imediatas. Os problemas da *integração* e da *diferenciação* (**65**), embora inversos, não se apresentam, sob o ponto de vista do cálculo com as mesmas características.

(*) É um S deformado.

Enquanto que, na *diferenciação*, há regras fixas e diretivas gerais, na *integração*, os principais recursos reduzem-se a particularidades e artifícios.

Partindo da *teoria da derivação*, estabelece-se, então, o maior número possível de *primitivas* que, por êsse motivo, são chamadas *primitivas imediatas* (*) e, às quais, procura-se, então, reduzir qualquer tipo encontrado, através de operações que, em geral, aplicam-se, apenas, a um número mais ou menos restrito de exemplos.

Damos, a seguir, os tipos mais simples, adotando a forma de *integral indefinida*:

1. $\int a dx = ax + c$

2. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + c$

3. $\int \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c$

4. $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$

5. $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$

6. $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + c$

7. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$

8. $\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + c$

9. $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

Seja, por exemplo $\int x^3 dx$. Temos, pela fórmula **2**:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

Ainda, como exemplo, poderíamos escrever:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^3 x \, d(\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + c$$

(*) Anàlogamente, se têm as *integrais imediatas*.

visto como se trata de uma integral do tipo geral:

$$\int u^3 du$$

que, pela fórmula **2**, dará $\dfrac{u^4}{4} + c$.

96 — Regras simples de integração. Dentre as regras mais simples de integração, enunciemos as seguintes:

a) Uma integral não se altera quando se passa, para fora ou para dentro do sinal de integração, qualquer fator constante existente.

Isto é, quer-se mostrar que:

$$\int a f'(x)\, dx = a \int f'(x)\, dx$$

Supondo, por exemplo, que $\int f'(x)\, dx$ seja igual a $F(x) + c$, verifica-se, imediatamente, que o primeiro membro nos conduzirá à integral $aF(x) + c$, enquanto que o segundo nos dará $aF(x) + ac$. Mas tais resultados são equivalentes, porquanto a *parcela constante* é inteiramente arbitrária (*).

Teremos, assim:

$$\int 2x^4 dx = 2 \int x^4 dx = 2\,\frac{x^5}{5} + c$$

b) A integral de uma expressão polinomial é obtida pela integração têrmo a têrmo.

É uma conseqüência imediata da regra de derivação de um polinômio (**81**).

Assim:

$$\int (3x^2 - 2x + 1)\, dx = \int 3x^2 dx - \int 2x dx + \int dx =$$
$$= 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + \int dx =$$
$$= (x^3 + c_1) - (x^2 + c_2) + (x + c_3)$$

Reunido, num só número c as três *constantes de integração*, vem, finalmente:

$$\int (3x^2 - 2x + 1)\, dx = x^3 - x^2 + x + c$$

(*) Tal propriedade permitirá que, multiplicando e dividindo por um mesmo número, adotemos as formas mais convenientes ao problema da integração.

EXERCÍCIO I — *Calcular* $\int (x^2 - \text{sen } x)\, dx$

Vem:

$$\int (x^2 - \text{sen } x)\, dx = \int x^2 dx - \int \text{sen } x\, dx = \int x^2 dx +$$

$$\int (-\text{sen } x) dx = \frac{x^3}{3} + \cos x + C \quad (*)$$

EXERCÍCIO II — *Calcular* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

Temos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int \frac{2dx}{2\sqrt{2x+1}} = \int \frac{d(2x+1)}{2\sqrt{2x+1}}$$

Esta última é *imediata*, visto como se reduz ao tipo $\displaystyle\int \frac{du}{2\sqrt{u}} =$ $= \sqrt{u} + c$. Finalmente, vem então:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1} + c$$

EXERCÍCIO III — *Calcular* $\int \text{tg}^2 x\, dx$. Ora, como sabemos:

$$\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

Portanto:

$$\int \text{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx =$$

$$= \text{tg} x - x + c$$

EXERCÍCIO IV — *Calcular* $\int 3x(1+x)^2 dx$

Desenvolvendo, vem:

$$\int 3x(1+x)^2 dx = \int (3x^3 + 6x^2 + 3x) dx =$$

$$= \frac{3x^4}{4} + 2x^3 + \frac{3x^2}{2} + C$$

(*) Para comodidade de cálculo, passamos, na segunda integral, o fator -1 para dentro do sinal de integração

EXERCÍCIO V — *Calcular* $\int \cos 2x\, dx$

Introduzindo o fator 2, vem:

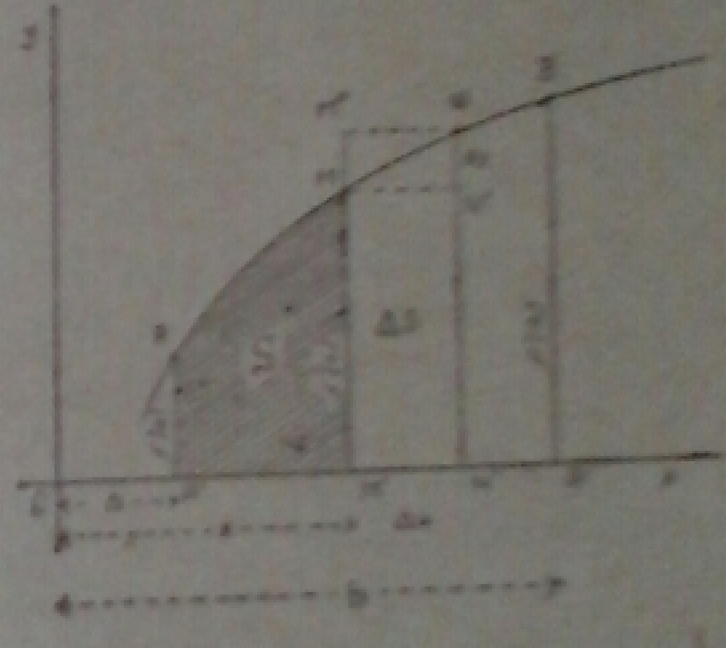
$$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x\, 2dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x\, d(2x) =$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + C$$

5 — Integral definida. Aplicação ao cálculo de áreas e de volumes; exemplos elementares.

97 — Integral definida; interpretação gráfica. Consideremos uma função $f(x)$ e sua *derivada* $f'(x)$; e suponhamos, além disso, traçada a curva representativa da função:

$$y = f(x)$$



Dados dois pontos A e B, de abcissas respectivamente iguais a a e a b, tomemos um ponto M, qualquer, intermediário e chamemos de S a área $AMA'M'$, que, assim, vem a ser, como se vê, uma função de x, ainda não conhecida.

Suposto, em M, um acréscimo Δx dado a x, o acréscimo correspondente à área será

$$\Delta S = MNM'N'$$

Vemos, então, que:

$$f'(x)\ \Delta x < \Delta S < [\, f'(x) + \Delta y\,]\ \Delta x$$

de onde vem:

$$f'(x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f'(x) + \Delta y$$

e, portanto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f'(x)$$

pois, Δx e Δy tendem juntos para zero.

Se a *derivada da área S*, que é uma função de x, é igual à derivada de $f(x)$, S e $f(x)$ só poderão diferir por uma constante, isto é (**94**):

$$S = f(x) + c$$

Mas visto que estamos contando a área S a partir do ponto A, se imaginarmos M coincidindo com A, ou, em outras palavras, $x = a$, deveremos ter $S = 0$. Portanto:

$$f(a) + c = 0$$

de onde se tira o valor da constante:

$$c = -f(a)$$

A fórmula se torna, então, em:

$$S = f(x) - f(a)$$

Para termos, agora, a área total delimitada, *ABA'B'*, bastará nesta última relação, tomar $x = b$, isto é:

$$S = f(b) - f(a)$$

Passamos, assim, da *integral indefinida* $f(x) + c$, representando funcionalmente a área S, à relação $f(a) - f(b)$, equivalente a uma área $ABA'B'$ perfeitamente determinada. Dá-se, por isso, a esta última relação, o nome de *integral definida*, escrevendo-se, de um modo geral:

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

Vê-se, portanto, que uma *integral definida* pode ser sempre interpretada como representativa de uma área determinada.

Tomemos, como exemplo: $\int_1^3 3x^2 dx$. Calculando, primeiramente, a *integral indefinida*, temos:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c$$

onde x^3 representa a expressão pròpriamente dita da *primitiva*. Substituindo, agora, os *limites* 1 e 2, vem:

$$[x^3]_{x=2} - [x^3]_{x=1} = 8 - 1 = 7$$

isto é:

$$\int_1^2 3x^2 dx = 7$$

número que representa a área limitada pela curva:

$$y = 3x^2$$

e compreendida entre a mesma, o eixo das abcissas e as ordenadas dos pontos de abcissas, respectivamente, 1 e 2.

EXERCÍCIO I — *Calcular a integral definida* $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

Ora, como já vimos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1+C}$$

portanto:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = (\sqrt{2x+1})_{x=4} - (\sqrt{2x+1})_{x=0} =$$

$$= 3 - 1 = 2$$

EXERCÍCIO II — *Calcular a integral definida* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x\, dx$.

Já vimos, também, que:

$$\int \mathrm{tg}^2 x\, dx = \mathrm{tg}\, x - x + c$$

Conclui-se, portanto, que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x\, dx = \Big|\mathrm{tg} x - x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} - \Big|\mathrm{tg} x - x\Big|_{x=0} =$$

$$= \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4} =$$

$$= \frac{0,8584\ldots}{4} = 0,2146\ldots$$

EXERCÍCIO III — Calcular a integral definida

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } 2x \, dx \, .$$

Temos:

$$\int \text{sen } 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \text{sen } 2x \, 2dx = \frac{1}{2} \int \text{sen } 2x \, d(2x) =$$

$$= \frac{1}{2} \int d(-\cos 2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + c.$$

E daí:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } 2x \, dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_{x=\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_{x=0} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2 \times \frac{\pi}{2} - \left| -\frac{1}{2} \cos 0 \right| =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos \pi + \frac{1}{2} \cos 0 =$$

$$= -\frac{1}{2} \times -1 + \frac{1}{2} = 1$$

98 — Aplicação ao cálculo de áreas e volumes; exemplos elementares. Das aplicações vistas, conclui-se que poderemos aplicar o conceito de integral definida a certos problemas de Geometria.

O problema resume-se em obter, em função de uma variável, a *diferencial* da área ou do volume em causa, conforme o que seja pretendido.

Em particular, quando se quer calcular a área compreendida entre uma curva $y = f(x)$, o eixo das abcissas e duas ordenadas correspondentes a pontos, por exemplo, de abcissas a e b, tem-se, como já foi visto:

$$\frac{dS}{dx} = f(x)$$

e, portanto:

$$dS = f(x) \, dx$$

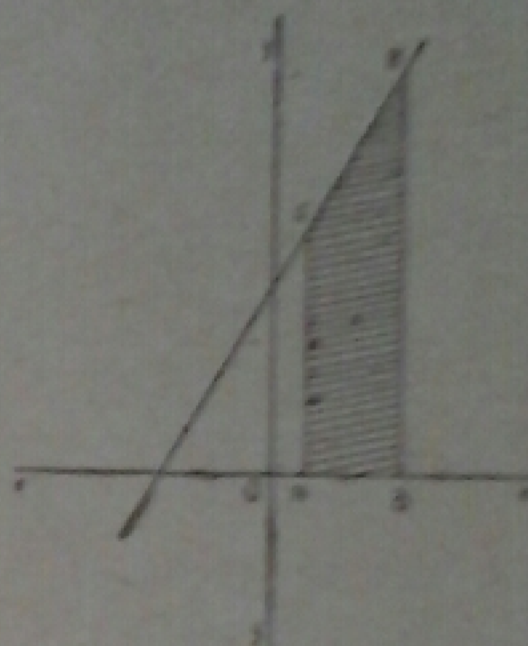
Dêsse modo, vem a expressão já encontrada:

$$S = \int_a^b f(x)\ dx$$

ou:

$$S = \int_a^b y\ dx$$

Tomemos, como exemplo, o cálculo da área do trapézio $ABA'B'$ da figura ao lado, onde, como caso particular da *curva* $y = f(x)$, temos a *linha reta* $y = 2x + 5$.



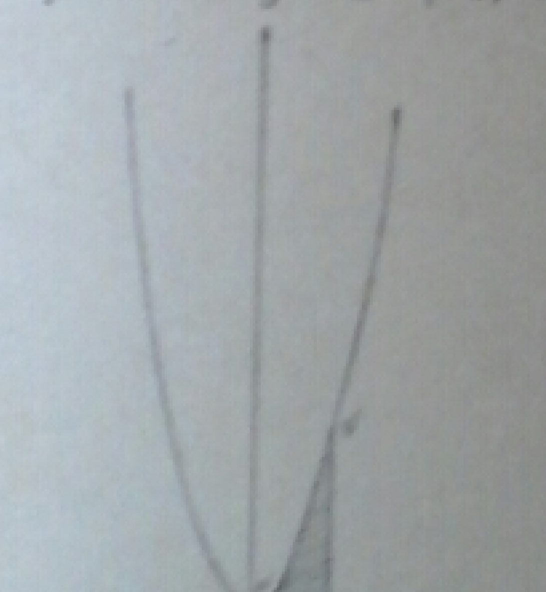
Temos $a = 1$ e $b = 4$, de onde se conclui:

$$S = \int_1^4 (2x + 5)\ dx = \left[\ x^2 + 5x\ \right]_1^4 =$$

$$= (16 + 20) - (1 + 5)$$

$$\text{ou} \quad S = 30 \quad (^*).$$

Suponhamos, ainda, o cálculo da área compreendida entre a *parábola* $y = x^2 + 1$, e o eixo das abcissas, entre os pontos de abcissas 0 e 2, hachuriada na figura ao lado.



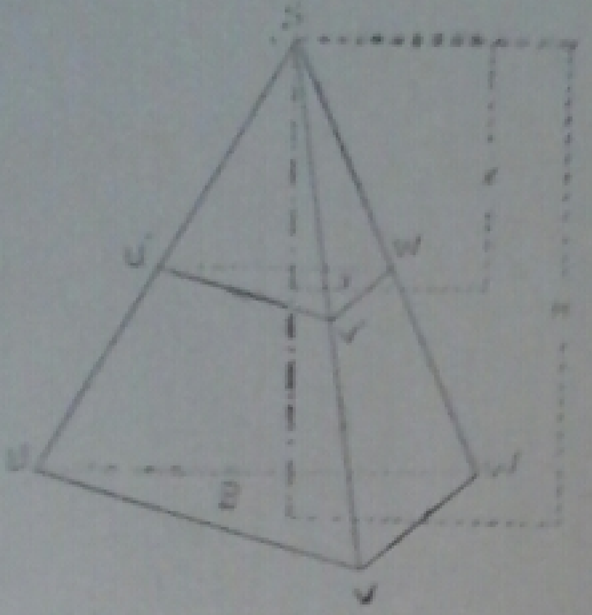
Teremos:

$$S = \int_0^2 (x^2 + 1)\ dx =$$

$$= \left[\ \frac{x^3}{3} + x\ \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$$

(*) Se a unidade linear fôr u, a área virá expressa em u². Em geral faz-se abstração da unidade.

Passemos, agora, ao cálculo de um volume. Como exemplo, imaginemos uma pirâmide de base B e altura H, e suponhamos representada por y a área de uma seção produzida na mesma, a uma distância x do vértice.



É conhecida a relação:

$$\frac{y}{B} = \frac{x^2}{H^2}$$

de onde virá:

$$y = \frac{B}{H^2} x^2$$

Se imaginarmos um *prisma* de base $U'V'W'$ e altura dx, seu volume será dado pela expressão (*):

$$dV = y\ dx$$

que, afinal, representa a *diferencial* do volume V procurado.

Teremos, então:

$$V = \int_0^H dV = \int_0^H y\ dx = \int_0^H \frac{B}{H^2} x^2\ dx =$$

$$= \frac{B}{H^2} \int_0^H x^2\ dx = \frac{B}{H^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^H$$

de onde se conclui:

$$V = \frac{B}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{BH}{3}$$

que é a clássica fórmula para o cálculo do volume da pirâmide.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Obter as integrais indefinidas:

I) $\displaystyle\int \frac{x}{2} (x^2 + 4)\ dx$ Resp.: $\dfrac{x^4}{8} + x^2$

(*) Um prisma assim suposto recebe a denominação de prisma elementar.

II) $\int (x^2 - 1)^2 \, dx$ Resp.: $\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{2x^3}{3} + x + c$

III) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$ Resp.: $\dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + c$

IV) $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \, dx$ Resp.: $\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c$

V) $\int (4x^3 - \cos x^2) x \, dx$ Resp.: $\dfrac{4x^5}{5} - \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{2} + c$

2. Calcular as integrais definidas:

I) $\int_0^1 x^3 dx$ Resp.: $\dfrac{1}{4}$

II) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$ Resp.: $\dfrac{1}{3}$

III) $\int_{-1}^{+1} (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) \, dx$ Resp.: 1,5

IV) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2x \, dx$ Resp.: 1.

V) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ Resp.: 2.

3. Calcular a área compreendida entre a curva $y = \operatorname{sen} x$, o eixo das abcissas e os pontos $a = -\pi$ e $b = +\pi$. Resp.: 2.

4. Idem, para a curva $y = \sec^2 x$ e os pontos

$$a = 0 \quad \text{e} \quad b = \frac{\pi}{4}. \qquad \text{Resp.: } 1.$$

30. Calcular a área compreendida entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 3x - 2$ (sugestão: preliminarmente obter os pontos de intersecção entre a reta e a parábola, cujas abcissas darão os limites das duas integrais a obter). Resp.: $\dfrac{1}{6}$

31. Usando o conceito de integral definida, estabelecer a fórmula que dá a área de uma superfície qualquer de revolução.

Resp.: $S = 2\pi \int_a^b f(x) \, dx$.

32. Idem para o volume.

Resp.: $V = \pi \int_a^b f(x) \, dx$.

III — INTRODUÇÃO À TEORIA DAS EQUAÇÕES; POLINÔMIOS; PROPRIEDADES; DIVISIBILIDADE POR $x \pm a$; PROBLEMAS DE COMPOSIÇÃO; TRANSFORMAÇÃO E PESQUISA DE RAÍZES; EQUAÇÕES DE TIPOS ESPECIAIS

1 — Polinômios de uma variável; identidade. Aplicação ao método dos coeficientes a determinar. Divisibilidade de um polinômio inteiro em x por $x - a$; regra e dispositivo prático de Ruffini. Fórmula de Taylor para os polinômios; algoritmo de Ruffini-Horner.

99 — Definições. Polinômios de uma variável. Chamaremos de *polinômio*, como é usual, apenas os polinômios algébricos, racionais e inteiros, considerando-os sempre *reduzidos* e *ordenados*, isto é, sob forma *canônica*.

Nos polinômios *de uma variável*, de tipo :

$$P(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$ são números dados.

À letra x poderá ser atribuído qualquer valor (*); daí ser chamada *variável*.

Para os polinômios *de mais de uma variável*, poderemos adotar ainda o mesmo tipo, isto é :

$$P(x, y, z, \dots, t) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

Mas, neste caso, os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$ serão expressões contendo as letras $y, z, \dots, t$.

A letra x é a *letra ordenatriz;* e outra qualquer das restantes poderia ter sido escolhida para tal fim.

Dentre os polinômios de mais de uma variável, os *homogêneos* são de particular interesse na Álgebra. São chamados *quânticas*, *formas algébricas* ou, simplesmente, *formas*.

(*) O programa restringe o estudo ao domínio real.

Classificam-se, pelo grau, em: *lineares*, *quadráticas*, *cúbicas*, *quárticas*, *quínticas*, etc. e, pelo número de variáveis, em: *binárias*, *ternárias*, *quaternárias*, etc.

Assim :

$$a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3$$

é uma *forma binária cúbica*.

100 — Função polinomial. Consideremos um polinômio $P(x)$. Uma vez conhecidos os coeficientes a_0, a_1, a_2, ..., a_{m-1}, a_m, se atribuirmos um dado valor a x, $P(x)$ assumirá um valor único, bem determinado, visto como, na expressão $P(x)$, só aparecem operações racionais (*).

101 — Polinômio idênticamente nulo. Diz-se que um polinômio $P(x)$ é *identicamente nulo* ou *equivalente a zero*, quando se anula para qualquer valor da variável.

Escrevemos, então:

$$P(x) = 0$$

TEOREMA — "*É condição necessária e suficiente para que um polinômio* $P(x)$ *seja identicamente nulo, que sejam nulos todos os seus coeficientes*".

Considerado o polinômio :

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m \qquad (1)$$

é evidente que, se tivermos $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{m-1} = a_m = 0$, $P(x)$ será nulo para qualquer valor de x. Consequentemente, a condição é *suficiente*.

Para demonstrar que é também *necessária*, admitamos que o seja para os polinômios do grau $m-1$. Provaremos que ainda o será para os do grau m (**).

Sem fazer hipótese alguma sôbre os coeficientes a_0, a_1, a_2, ..., a_{m-1}, a_m, imaginemos que seja identicamente nulo o polinômio $P(x)$.

(*) Soma, subtração, multiplicação, divisão e potenciação com expoente inteiro.

(**) Seguiremos a demonstração devida a G. Sannia (Cfr. Niewenglowski, "*Cours d'Algèbre*", Paris, 1930, 2.ª ed., t. I, pg. 17).

Ora, se $P(x)$ se anular, por hipótese, para qualquer valor de x, o mesmo se dará com as expressões $2^m P(x)$ e $P(2x)$ (*).

Teremos, então:

$$2^m a_0 x^m + 2^m a_1 x^{m-1} + 2^m a_2 x^{m-2} + \dots + 2^m a_{m-1} x + 2^m a_m = 0 \quad (2)$$

e:

$$2^m a_0 x^m + 2^{m-1} a_1 x^{m-1} + 2^{m-2} a_2 x^{m-2} + \dots + 2 a_{m-1} x + a_m = 0 \quad (3)$$

Subtraindo, membro a membro, (3) de (2), obteremos ainda um polinômio identicamente nulo. Portanto:

$$(2^m - 2^{m-1}) a_1 x^{m-1} + (2^m - 2^{m-2}) a_2 x^{m-2} + \dots + (2^m - 2) a_{m-1} x + \\ + (2^m - 1) a_m = 0 \quad (4)$$

Mas, como (4) é do grau $m - 1$, todos os seus coeficientes, de acôrdo com a hipótese feita, deverão ser *necessariamente* nulos. Teremos, como consequência:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = a_m = 0$$

Mas, dêsse modo, $P(x)$ ficará reduzido a seu primeiro termo $a_0 x^m$. E, como admitimos que se anula para qualquer valor de x, teremos, forçosamente: $a_0 = 0$.

Fica assim demonstrado que, se a condição for *necessária* para um polinômio do grau $m-1$, o será ainda para um polinômio do grau m. Mas, para $m = 1$, a condição é evidente. Portanto, a conclusão a que chegámos será verdadeira para $m = 2, 3, 4, \dots$

102 — Polinômios idênticos. Diz-se que dois polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são *idênticos ou equivalentes*, quando tomam valores numéricos iguais, para qualquer valor de x.

Escrevemos, então:

$$P_1(x) \equiv P_2(x)$$

de onde concluímos

$$P_1(x) - P_2(x) \equiv 0 \quad (5)$$

Suponhamos:

$$P_1(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

e:

$$P_2(x) \equiv b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_{m-1} x + b_m$$

(*) Em vez do fator 2 usado por Sannia, poderíamos adotar um número qualquer k, desde que o supuséssemos diferente de 0 e de 1.

A expressão (5) poderá ser escrita:

$$(a_0 - b_0)x^m + (a_1 - b_1)x^{m-1} + (a_2 - b_2)x^{m-2} + \ldots + \\ + (a_{m-1} - b_{m-1})x + (a_m - b_m) = 0 \qquad (6)$$

Mas, de acôrdo com o teorema anterior, deveremos ter:

$$a_0 - b_0 = a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \ldots = a_{m-1} - b_{m-1} = \\ = a_m - b_m = 0$$

ou, melhor:

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_{m-1} = b_{m-1},\ a_m = b_m.$$

Portanto, teremos, como corolário: *É condição necessária e suficiente para que dois polinômios, do mesmo grau, sejam idênticos, que sejam iguais os coeficientes dos termos semelhantes.*

Vemos, assim, que o número de condições para a identidade de dois polinômios do grau m é igual a $m + 1$.

OBSERVAÇÃO — Suponhamos, agora, $P_1(x)$ do grau m, $P_2(x)$ do grau n, $m > n$ e, por exemplo:

$$m - n = p$$

Seguindo o mesmo raciocínio, concluiremos pela nulidade dos coeficientes dos p primeiros termos de $P_1(x)$, obtendo, de fato, polinômios do mesmo grau.

103 — Método dos coeficientes a determinar. Êste método, de emprêgo corrente em todo cálculo algébrico, foi instituído por Descartes, em 1637.

Consiste em fixar, *a priori*, a forma da expressão algébrica que se tem em vista, escrevendo-a com coeficientes não determinados. Esses coeficientes são a seguir calculados, levando-se em consideração certas condições do problema e mediante o emprêgo da teoria da identidade de polinômios.

Um exemplo esclarecerá completamente a questão.

EXEMPLO — "Decompor o binômio $2x^2 - 3$ na diferença de quadrados do tipo: $(x^2 + a)^2 - (x^2 + b)^2$".

Temos, imediatamente:

$$2x^2 - 3 = (x^2 + a)^2 - (x^2 + b)^2$$

e:

$$2x^2 - 3 = x^4 + 2ax^2 + a^2 - x^4 - 2bx^2 - b^2$$
$$2x^2 - 3 = 2(a - b)x^2 + (a^2 - b^2)$$

Pelo princípio de identidade de polinômios virá logo:

$$2(a - b) = 2$$
$$a^2 - b^2 = -3$$

ou ainda:

$$a - b = 1$$
$$a^2 - b^2 = -3$$

Dividindo-se, membro a membro, a segunda pela primeira, obteremos $a + b = -3$, donde o sistema:

$$a - b = 1$$
$$a + b = -3$$

que nos dá: $a = -1$ e $b = -2$, isto é:

$$2x^3 - 3 = (x^2 - 1)^2 - (x^2 - 2)^2$$

Observação — Na teoria da divisão de polinômios, êsse método de Descartes encontra um largo emprêgo.

104 — Aplicação do método dos coeficientes a determinar ao problema da divisão de polinômios. Tomemos os polinômios:

$$P_1(x) = 4x^4 - 5x^3 + 2x - 3$$
$$P_2(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

e procuremos o quociente e o resto, na *divisão* do primeiro pelo segundo.

Sendo $m = 4$ e $n = 2$, percebemos, *a priori*, que o quociente deverá ser de grau $m - n = 2$ e o resto, *formalmente*, de grau $n - 1 = 1$.

Poderemos escrever, então:

$$Q(x) = c_0x^2 + c_1x + c_2$$
$$R(x) = d_0x + d_1$$

Mas, de acôrdo com a identidade da divisão, deveremos ter:

$$4x^4 - 5x^3 + 2x - 3 = (2x^2 - 3x + 1)(c_0x^2 + c_1x + c_2) +$$
$$+ d_0x + d_1$$

isto é:

$$4x^4 - 5x^3 + 2x - 3 = 2c_0x^4 - (3c_0 - 2c_1)\,x^3 +$$
$$+ (c_0 - 3c_1 + 2c_2)\,x^2 + (c_1 - 3c_2 + d_0)\,x + (c_2 + d_1)$$

e, pelo princípio de identidade de polinômios (**5**):

$$\begin{aligned} 2c_0 &= 4 \\ 3c_0 - 2c_1 &= 5 \\ c_0 - 3c_1 + 2c_2 &= 0 \\ c_1 - 3c_2 + \;d &= 2 \\ c_2 + d_1 &= -3 \end{aligned}$$

de onde tiramos: $c_0 = 2$, $c_1 = \dfrac{1}{2}$, $c_2 = -\dfrac{1}{4}$, $d_0 = \dfrac{3}{4}$ e $d_1 = -\dfrac{11}{4}$. Logo:

$$Q(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}$$

e:

$$R(x) = \frac{3}{4}\,x - \frac{11}{4}$$

como achámos antes.

Observação — Sendo o dividendo do grau m e o divisor do grau n, o quociente será do grau $m - n$, exigindo a determinação de $m - n + 1$ coeficientes. Por sua vez, o resto será, *formalmente*, do grau $n - 1$, exigindo, pois, a determinação de n coeficientes. Ao todo, o número de coeficientes a determinar será $m - n + 1 + n = m + 1$, justamente, o número de relações fornecidas pela aplicação do princípio de identidade. Vemos assim que, ao problema geral da divisão, poderemos, sempre, aplicar o *método dos coeficientes a determinar*, de Descartes.

105 — Divisão por $x \pm a$ Condição de divisibilidade. Apresenta particular interêsse, na Álgebra, o problema da divisão de um polinômio $P(x)$, por um binômio *linear* (*) do tipo $x \pm a$.

(*) É usual a denominação *linear*, em vez de do 1.º grau.

Suponhamos:

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m \qquad (7)$$

Considerando, por exemplo, a divisão por $x - a$, sendo a um número positivo, deveremos ter:

$$P(x) = (x - a)\,Q(x) + R \qquad (8)$$

onde o quociente $P(x)$ será, forçosamente, do grau $m - 1$ e o resto R, uma constante facilmente calculável.

De fato, admitindo na identidade (8) $x = a$, virá:

$$P(a) = R \qquad (9)$$

de onde o teorema (*): "*O resto da divisão de um polinômio* $P(x)$, *por* $x - a$, *é igual a* $P(a)$"; e a conseqüência imediata: "*É condição necessária e suficiente para que um polinômio* $P(x)$ *seja divisível por* $x - a$, *que tenhamos* $P(a) = 0$".

106 — Formação do quociente. Regra de Ruffini. Supondo:

$$Q(x) = b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + b_2x^{m-3} + \ldots + b_{m-2}x + b_{m-1}$$

obteremos a identidade (8) sob a forma:

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m =$$
$$= (x - a)(b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + b_2x^{m-3} + \ldots + b_{m-2}x + b_{m-1}) + R$$

ou ainda:

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m =$$
$$= b_0x^m + (b_1 - b_0a)x^{m-1} + (b_2 - b_1a)x^{m-2} + \ldots +$$
$$+ (b_{m-1} - b_{m-2}a)x + (R - b_{m-1}a)$$

Aplicando as condições de identidade de dois polinômios (**102**), teremos:

$$b_0 = a_0$$
$$b_1 - b_0a = a_1$$
$$b_2 - b_1a = a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_{m-1} - b_{m-2}a = a_{m-1}$$
$$R - b_{m-1}a = a_m$$

(*) Atribuído a D'Alembert.

ou ainda :

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= b_0 a + a_1 \\ b_2 &= b_1 a + a_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{m-1} &= b_{m-2}\, a + a_{m-1} \\ R &= b_{m-1}\, a + a_m \end{aligned} \tag{9}$$

Essas $m + 1$ relações definem a chamada *lei de Ruffini*, para a formação do quociente e do resto.

Se, partindo da primeira, fizermos sucessivas substituições obteremos :

$$R = a_0 a^m + a_1 a^{m-1} + a_2 a^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\, a + a$$

isto é, $R = P(a)$, resultado já encontrado (**105**).

107 — Dispositivo prático de Ruffini (*). As operações indicadas em (10) para a obtenção dos coeficientes do quociente : b_0, b_1, b_2, ..., b^{m-1} e, ainda do próprio resto, poderão ser dispostas como se seguem :

	a_0	a_1	a_2	...	a_{m-1}	a_m
a	b_0	b_1	b_2	...	b_{m-1}	R

Obtido um coeficiente qualquer b_i, para passarmos ao seguinte, somaremos ao produto $b_i a$ o coeficiente a_{i+1} que se acha na coluna correspondente a b_{i+1}, visto que :

$$b_{i+1} = b_i\, a + a_{i+1}$$

Operando, assim, com b_{m-1}, obteremos R.

108 — Observação I. Para a aplicação da regra e do dispositivo prático de Ruffini, o polinômio $P(x)$ deverá ser suposto *completo*, isto é, deverão ser levados em conta os termos de coeficientes nulos.

(*) Tal dispositivo foi usado, por P. Ruffini, em 1804 e, por W. G. Horner, em 1819. Atribuem-no, indevidamente, a C. Briot (1817-1882).

EXEMPLO — *"Calcular o quociente e o resto, na divisão de* $3x^5 - 30x^3 + 8x^2 - 10x + 10$ *por* $x - 3$ *"*.

Teremos o quadro:

	3	0	−30	8	−10	10
3	3	9	−3	−1	−13	−29

De onde:

$$Q(x) = 3x^4 + 9x^3 - 3x^2 - x - 13$$

e:

$$R = -29$$

109 — Observação II. Sendo a um número positivo, para ajustarmos todos os resultados obtidos, ao caso do divisor $x + a$, bastará tomar $x + a = x - (-a)$.

EXEMPLO — *"Calcular o quociente e o resto, na divisão de* $5x^4 - 21x^2 - 2x + 7$ *por* $x + 2$ *"*.

Teremos o quadro:

	5	0	−21	−2	7
−2	5	−10	−1	0	7

De onde:

$$Q(x) = 5x^3 - 10x^2 - x$$

e:

$$R = 7$$

110 — Valor numérico de um polinômio. É de grande alcance prático, a utilização do dispositivo de Ruffini, para o cálculo do valor numérico de um polinômio. Bastará ter em vista que o valor numérico de $P(x)$, para $x = a$, será dado pelo resto que se obtém na divisão de $P(x)$ por $x - a$ (**105**).

Para $x = -a$, tomaremos a divisão por $x + a$ (**109**).

EXEMPLO — *"Calcular o valor numérico do polinômio*

$$P(x) = 3x^5 + 22x^4 - 50x^2 - 8x + 10$$

para $x = -7$ *"*.

Consiste o problema em calcular o resto, na divisão de $P(x)$ por $x + 7$, visto que $a = -7$.

Usando o dispositivo de Ruffini, teremos:

	3	22	0	−50	−8	10
−7	3	1	−7	−1	−1	17

isto é:

$$P(-7) = 17$$

111 — Divisão por ax + b. O problema corresponde a uma generalização dos resultados anteriores.

Por definição, deveremos ter:

$$P(x) = (ax + b)Q(x) + R$$

onde $Q(x)$ deverá ser do grau m-1 e R, uma constante.

Poderemos escrever ainda:

$$P(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right)\left[aQ(x)\right] + R$$

o que nos mostra reduzir-se a questão ao caso da divisão por $x + \alpha$, sendo $\alpha = \dfrac{b}{a}$.

O resto será:

$$R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Quanto ao quociente, poderemos recorrer à regra e ao dispositivo de Ruffini, notando apenas que os coeficientes irão aparecer multiplicados por a.

No resultado final, deveremos eliminar êsse fator a, dividindo tudo por a.

EXEMPLO — "Calcular o quociente e o resto na divisão de $7x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x + 10$ *por* $3x + 2$ *".*

Teremos o quadro:

	7	5	2	1	10
$-\dfrac{2}{3}$	7	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{16}{9}$	$-\dfrac{5}{27}$	$\dfrac{820}{81}$

e, de acôrdo com as considerações feitas:

$$Q(x) = \frac{7}{3}x^3 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{16}{27}x - \frac{5}{81}$$

$$R = \frac{820}{81}$$

112 — Aplicação. *Estudar as divisões do tipo* $\dfrac{x^m \pm a^m}{x \pm a}$.

$$1^{\circ} \text{ Caso: } \frac{x^m + a^m}{x + a}$$

Tem-se $P(x) = x^m + a^m$ e, por conseguinte:

$$R = P(-a) = (-a)^m + a^m$$

Se m for *ímpar*, virá $R = -a^m + a^m = 0$; a divisão será exata. O dispositivo de Ruffini fornecerá, como se segue, o quociente exato.

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^m \\ \hline -a & 1 & -a & a^2 & \dots & a^{m-1} & 0 \end{array}$$

Podemos então escrever :

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \dots + a^{m-1}.$$

Se m for *par*, virá $R = a^m + a^m = 2a^m$; a divisão não será exata, mas o dispositivo de Ruffini permitiria ainda determinar o quociente *incompleto* :

$$x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{-3} - \dots - a^{m-1}$$

2º CASO: $\dfrac{x^m + a^m}{x - a}$

Virá: $R = P(a) = a^m + a^m = 2a^m$

A divisão não será exata, qualquer que seja m.

113 — Fórmula de Taylor para os polinômios. Tomemos, em $P(x)$, $x = x_0 + h$, sendo x_0 e h dois números reais quaisquer.

Virá:

$$P(x_0 + h) = a_0(x_0 + h)^m + a_1(x_0 + h)^{m-1} +$$
$$+ a_2(x_0 + h)^{m-2} + \dots + a_{m-1}(x_0 + h) + a_m$$

Desenvolvendo cada binômio do segundo membro e ordenando a expressão em relação a h, teremos:

$$P(x_0 + h) =$$
$$= \left[a_0x_0^m + a_1x_0^{m-1} + a_2x_0^{m-2} + \dots + a_{m-1}x_0 + a_m\right] +$$
$$+ h\left[ma_0x_0^{m-1} + (m-1)a_1x_0^{m-2} + \right.$$
$$\left. + (m-2)a_2x_0^{m-3} + \dots + a_{m-1}\right]$$
$$+ \frac{h^2}{2!}\left[m(m-1)a_0x_0^{m-2} + (m-1)(m-2)a_1x_0^{m-3} + \right.$$
$$\left. + (m-2)(m-3)a_2x_0^{m-4} + \dots + a_{m-2}\right] +$$
$$+ \dots + \frac{h^m}{m!}\left[m(m-1)(m-2)\dots 2.\ 1.\ a_0\right]$$

onde o último termo equivale a $a_0 h^m$

Observando os parênteses obtidos no segundo membro, concluímos que representam, respectivamente, $P(x_0)$, $P'(x_0)$, $P''(x_0), \ldots, P^{(m)}(x_0)$. Portanto poderemos escrever a identidade:

$$P(x_0 + h) = P(x_0) + hP'(x_0) + \frac{h^2}{2\,!} P''(x_0) + \ldots + \\ + \frac{h^m}{m\,!} P^{(m)}(x_0) \qquad (11)$$

que define a *fórmula de Taylor* para os polinômios, de largo uso no estudo das equações algébricas.

114 — Observação. Tomando $x = x_0 + h$ e, portanto, $h = x - x_0$, poderemos escrever, ainda, um segundo aspecto da mesma:

$$P(x) = P(x_0) + (x - x_0)\, P'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} P''(x_0) + \\ + \ldots + \frac{(x - x_0)^m}{m\,!} P^{(m)}(x_0) \qquad (12)$$

útil em certas aplicações.

115 — Algoritmo de Ruffini-Horner. O cálculo dos coeficientes da *fórmula de Taylor*, poderá ser obtido fàcilmente por um processo formal.

Da última igualdade tiramos imediatamente:

$$P(x) = (x - x_0) \left[P'(x_0) + \frac{x - x_0}{2\,!} P''(x_0) + \right. \\ \left. + \ldots + \frac{(x - x_0)^{m-1}}{m\,!} P^{(m)}(x_0) \right] + P(x_0)$$

Supondo:

$$Q_1(x) = P'(x_0) + \frac{x - x_0}{2\,!} P''(x_0) + \\ + \ldots + \frac{(x - x_0)^{m-1}}{m\,!} P^{(m)}(x_0)$$

obteremos a identidade :

$$P(x) = (x - x_0)\; Q_1(x) + P(x_0)$$

mostrando que, na divisão de $P(x)$ por $x - x_0$, o quociente será $Q_1(x)$ e o resto, $P(x_0)$.

Mas, $Q_1(x)$ poderá, anàlogamente, ser escrita:

$$Q_1(x) \equiv (x - x_0)\left[\frac{1}{2\,!}P''(x_0) + \frac{x - x_0}{3\,!}P'''(x_0) + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{(x - x_0)^{m-2}}{m\,!}\;P^{(m)}(x_0)\right] + P'(x_0)$$

E, para:

$$Q_2(x) = \frac{1}{2\,!}P''(x_0) + \frac{x - x_0}{3\,!}P'''(x_0) +$$

$$+ \ldots + \frac{(x - x_0)^{m-2}}{m\,!}\;P^{(m)}(x_0)$$

virá:

$$Q_1(x) \equiv (x - x_0)\;Q_2(x) + P'(x_0)$$

Portanto, na divisão de $Q_1(x)$ por $x - x_0$, o quociente será $Q_2(x)$ e o resto $P'(x_0)$.

Considerações análogas mostrariam que, nas divisões subseqüentes por $x - x_0$, surgiriam os restos

$$\frac{1}{2\,!}P''(x_0),\; \frac{1}{3\,!}P'''(x_0), \text{ etc.}$$

Mas, sendo de um modo geral $Q_i(x)$ do grau $m - i$, $Q_m(x)$ reduzir-se-á a uma constante, não mais divisível, portanto, por $x - x_0$.

Por extensão, entretanto, dizemos que $Q_m(x)$ representa o próprio resto na divisão por $x - x_0$. Virá, assim, o último coeficiente:

$$Q_m(x) = \frac{1}{m\,!}P^{(m)}\;(x_0) = a_0$$

Em resumo, para o cálculo de:

$$P(x_0),\; P'(x_0),\; \frac{1}{2\,!}P''(x_0), \ldots, \frac{1}{m\,!}P^{(m)}(x_0)$$

bastará efetuar repetidas divisões por $x - x_0$, tomando, de início, $P(x)$ como dividendo.

Os restos encontrados representarão, sucessivamente, esses números.

O *dispositivo de Ruffini* (**107**) torna extraordinàriamente simples a aplicação do algoritmo, que será melhor compreendido através de alguns exemplos.

EXEMPLO I — *Desenvolver o polinômio*:

$$P(x) = 5x^4 - 12x^3 + x^2 - x + 15$$

segundo as potências de $x - 2$.

Pela fórmula (12), escreveremos logo:

$$P(x) = P(2) + (x-2)\,P'(2) + (x-2)^2\,\frac{P''(2)}{2\,!} +$$

$$+\ (x-3)^3\,\frac{P'''(2)}{3\,!} + (x-2)^4\,\frac{P^{(IV)}(2)}{3\,!}$$

Sendo $x = 2$, para divisor teremos $x - 2$, de onde o *quadro de Ruffini-Horner*:

	5	—12	1	—1	15
$x_0 = 2$	5	— 2	—3	—7	1
	5	8	13	19	
	5	18	49		
	5	28			
	5				

A primeira linha é constituida pelos coeficientes de $P(x)$. Os primeiros elementos da segunda correspondem aos coeficientes do polinômio $Q_1(x)$, isto é:

$$Q_1(x) = 5x^3 - 2x^2 - 3x - 7$$

Seu último elemento nos dá o resto $P(x)$. Portanto:

$$P(2) = 1$$

Pela terceira linha, concluimos que:

$$Q_2(x) = 5x^2 + 8x + 13$$

sendo $P'(2) = 19$.

Além disso, teremos:

$$Q_3(x) = 5x + 18 \quad e \quad Q_4(x) = 5$$

sendo:

$$\frac{1}{2!}\,P''(x) = 49\ ;\ \frac{1}{3!}\,P'''(x) = 28 \text{ e } \frac{1}{4!}\,P^{(IV)}(x) = 5$$

Substituindo, virá a identidade pedida:

$$P(x) \equiv 1 + 19(x-2) + 49(x-2)^2 + 28(x-2)^3 + 5(x-2)^4$$

EXEMPLO II — *Dado o polinômio:*

$$P(x) \equiv 2x^5 - 3x^3 + 10x^2 - 1$$

desenvolver P $(-1+h)$ *segundo as potências de* h.

Pela fórmula (11) virá:

$$P(-1+h) \equiv P(-1) + hP'(-1) + h^2\frac{P''(-1)}{2!} + h^3\frac{P'''(-1)}{3!} +$$

$$+ h^4\frac{P^{(IV)}(-1)}{4!} + h^5\frac{P^{(V)}(-1)}{5!}.$$

O *quadro de Ruffini-Horner* será obtido com o divisor $x+1$ Virá assim:

	2	0	-3	10	0	-1
$x_0 = -1$	2	-2	-1	11	-11	10
	2	-4	3	8	-19	
	2	-6	9	-1		
	2	-8	17			
	2	-10				
	2					

mostrando-nos que:

$$P(-1+h) \equiv 10 - 19h - h^2 + 17h^3 - 10h^4 + 2h^5$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determinar m e n para que sejam idênticamente nulos os polinômios:

I) $(mn-2)x^3 + (m^2-n^2-3)x^2 + (m+n-3)x +$
$+ 2m - 5n + 1.$

II) $(m+n-1)x^3 - (mn+6)x^2 + (m^2+n^2-2)x -$
$- mn + n^2 + 2.$

Resp.: I) $m = 2$, $n = 1$; II) Impossível.

2. Determinar a, b e c para que sejam idênticos os polinômios:
$(a + b)x^4 - cx^4 + 13x^2 + abx + 3x + 1$ e
$(a^2 + b^2)x^2 - 3x + c$.
Resp.: $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$ ou $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$

3. Calcular os quocientes e os restos, nas divisões abaixo:
I) $5t^5 - 4t^3 - 2t + 1$ por $t + 1$
Resp.: $Q(t) = 5t^4 - 5t^3 + t^2 - t + 1$, $R = 2$.
II) $a^{11} - 1$ por $a + 1$
Resp.: $Q(a) = a^{10} + a^9 + \ldots + a + 1$, $R = -2$
III) $y^4 - 6$ por $y - 2$
Resp.: $Q(y) = y^3 + 2y^2 + 4y + 8$, $R = 0$

4. Calcular os valores numéricos do polinômio $6x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ para $x - \frac{2}{3}$ e para $x = -\frac{2}{3}$.

$$\text{Resp.: } P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{104}{81},\ P\left(-\frac{3}{2}\right) = -39.$$

2 — Polinômios e equações algébricas em geral; raízes ou zeros. Conceito elementar de número complexo; forma binomial; complexos conjugados; módulo; representação geométrica. Operações racionais. Decomposição de um polinômio em fatores binômios; número de raízes de uma equação; raízes múltiplas e raízes nulas. Raízes complexas conjugadas. Indicação sôbre o número de raízes reais contidas em um dado intervalo; teorema de Bolzano; conseqüências.

116 — Noções preliminares. O estudo das equações do tipo:

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0 \quad (13)$$

onde os coeficientes a_0, a_1, a_2, ..., a_{m-1}, a_m são números quaisquer, constitui o problema fundamental da Álgebra (*).

(*) Para as aplicações correntes, bastará considerar o caso de coeficientes reais, único de que trataremos.

Aliás, essa é a *forma canônica* à qual se reduz, mediante certo número de operações, qualquer *equação algébrica* (*). Observemos, entretanto, que, nem sempre, a equação obtida sob a *forma canônica* será *equivalente* à que foi dada; essa equação (13) poderá conter raízes estranhas à primeira.

Nesse particular são conhecidos os casos da redução de equações fracionárias ou irracionais à *forma canônica*, férteis em tais exemplos. Mas até a simples supressão de termos comuns aos membros de uma equação poderá, em certas circunstâncias, determinar o aparecimento de raízes estranhas.

Bastará tomar, para exemplo:

$$2x + \frac{1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2} \tag{14}$$

e:

$$2x = 4$$

Nenhum valor de x satisfaz à primeira (**). No entanto, a segunda, obtida pela supressão dos termos fracionários, admite a raiz $x = 2$.

Em qualquer hipótese, entretanto, uma verificação, *a posteriori*, indicará as raízes estranhas. Por isso, poderemos cogitar, sòmente, das equações algébricas sob a *forma canônica* assinalada em (13).

117 — Resolução das equações algébricas. De um modo geral, a *resolução das equações* caracteriza-se pela expressão das incógnitas em função dos coeficientes.

Dessa maneira, para a equação (1), deveríamos, ter:

$$x = \varphi\,(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m) \tag{15}$$

E, conforme a natureza dessa expressão φ, a solução seria classificada como *algébrica* (***) ou como *transcendente* (****).

(*) Uma equação é dita *algébrica*, quando as incógnitas que nela figuram estão sujeitas somente a operações *algébricas*, em número limitado. O interêsse que apresenta o estudo das *equações transcendentes* é relativamente pequeno; adaptam-se, em geral, os métodos obtidos para as primeiras e surgem dificuldades que, no mais das vezes, exigem tentativas ou aproximações sucessivas.

(**) Será necessário ter em vista que, de fato, $\frac{1}{0}$ nenhum valor representa.

(***) Também dita — *por meio de radicais*.

(****) Alguns autores, impròpriamente a classificam como analítica.

Para as equações gerais do 1º e do 2º grau, a *solução algébrica*, como sabemos, é imediata. Já para as do 3º e do 4º grau, o problema é complexo, tendo sido resolvido pelos matemáticos italianos do século XVI (*).

No entanto, *para as equações gerais de grau superior ao 4º, não há solução algébrica.*

Esta propriedade, de alcance extraordinário na teoria das equações, antevista por Ruffini em 1798, foi demonstrada rigorosamente por Abel, em 1824.

Para as equações de grau superior ao 4º, só em casos especiais, haverá a possibilidade de *solução algébrica.*

Alguns exemplos elementares são encontrados entre as *binômias*, as *trinômias* e as *recíprocas.*

Acontece, entretanto, que a *solução transcendente*, possível em qualquer caso, é em geral impraticável, pela complexidade que apresenta.

Foram, por isso, procuradas soluções particulares do problema, através do estudo sistemático das propriedades características das equações e, por conseqüência, das propriedades gerais dos próprios polinômios.

118 — Raízes ou zeros de um polinômio. Tomando:

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\,x + a_m \quad (16)$$

escreveremos, abreviadamente, em lugar de (13):

$$P(x) = 0 \quad (17)$$

Todo número a, para o qual se tenha:

$$P(a) = 0$$

é denominado *raiz* da referida equação ou, ainda, *raiz* ou *zero* do polinômio $P(x)$.

119 — Conceito elementar de número complexo. Considerações preliminares. Por uma questão de ordem didática, não tem sido atribuído, até aqui, significado algum às expressões contendo raízes de números negativos, no caso de índices pares. Temos admitido, assim, que as equações do 2.º grau, de discriminante negativo, *não têm raízes*; que certas funções, para os valores do argumento que conduzem a tais expressões, *não são definidas*, etc.

(*) Dentre outros, Ferro, Fiori, Tartaglia, Cardano e Ferrari.

Mas a consideração, apenas, dos *números reais* não permite a interpretação completa dos resultados da Álgebra, nem a necessária generalização das soluções a que conduz, fato êste posto em evidência, desde o século XVI, quando surgiram os primeiros estudos metódicos sôbre a resolução das equações do 3º grau.

Viu-se então que, a essas raízes de números negativos, no caso de índices pares, consideradas antes como meros símbolos de impossibilidade operatória, poderia e *deveria* ser atribuido um significado numérico definido. E, nessas conclusões, desempenharam um papel preponderante os estudos de Bombelli sôbre a equação (*):

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

da qual era conhecida a raiz 4.

Pela aplicação da *fórmula de Cardano* (**), surgiu a notável relação:

$$4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

cujo sentido não poderia ser facilmente percebido.

Bombelli, entretanto, depois de estabelecer engenhosas convenções, concluiu que cabia escrever:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

isto é: $$4 = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}$$

Isso implicava, entretanto, em considerar $\sqrt{-121}$ e $\sqrt{-1}$ como verdadeiros números, sôbre os quais operara aritmèticamente com acêrto. Mas, pouco antes de Bombelli, o próprio Cardano tivera, sem dúvida, essa intuição.

(*) Esse caso, tratado por R. Bombelli em sua "*Algebra*", Bolonha, 1572 é clàssicamente conhecido sob a denominação de "*caso irredutível do 3.º grau*".

(**) Para uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$, tem-se:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Tal fórmula, publicada por G. Cardano, em sua "*Ars magna etc*", Nuremberga, 1545, é devida, de fato, a Ferro (1515) e Tartaglia (1535).

Ao discutir o referido *caso irredutível das equações de 3.º grau* concluiu afirmando que $\sqrt{-9}$ não poderia ter a mesma natureza de 3, nem de -3, *sed quaedam tertia natura abscondita* (*)".

Torna-se imprescindível, portanto, introduzir uma idéia mais ampla de número.

120 — Número I. Aceitemos, então que $\sqrt{-1}$ caracterize, efetivamente, um *número*, o qual para maior brevidade, passaremos a representar pelo símbolo i, e que é, comumente, denominado *unidade imaginária* (**).

Observando que:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

vem: $i^2 = -1$.

Facilmente se estabelece então a lei de formação de suas potências.

Bastará levar em conta a *associatividade* da multiplicação, pois, dessa forma, obteremos sucessivamente:

$$\begin{aligned} i^3 &= i^2 \,.\, i = -i \\ i^4 &= i^3 \,.\, i = -i \,.\, i = -i^2 = 1 \\ i^5 &= i^4 \,.\, i = i \\ i^6 &= i^5 \,.\, i = i^2 = -1 \\ i^7 &= i^6 \,.\, i = -i \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Êsses resultados mostram que as potências se repetem periòdicamente.

Tomando por convenção $i^0 = 1$ e $i^1 = i$, poderemos escrever, então, de um modo geral:

$$\begin{cases} i^{4k} = 1 \\ i^{4k+1} = i \\ i^{4k+2} = -1 \\ i^{4k+3} = -i \end{cases} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (18)$$

Considerado, por exemplo, o expoente 67, teremos $67 = 16 \times 4 + 3$ e, por consequência, $i^{67} = -i$.

(*) *"mas alguma terceira natureza desconhecida"*.

(**) O têrmo *imaginário* é devido a Descartes; o símbolo i, a Euler.

121 — Formula binomial; números complexos; igualdade. Tendo em vista tais regras é claro que qualquer expressão polinomial contendo i poderá sempre reduzir-se a outra, de forma $a + bi$, onde a e b são *números* que, em oposição ao novo conceito, denominam-se *números reais*.

Tomemos, por exemplo, a expressão $-15i^7 + 2i^3 - 3i^2 - 4i + 1$.

Teremos $= i^7 = -i$, $i^3 = -i$ e $i^2 = -1$, de onde:

$$-15i^7 + 2i^3 - 3i^2 - 4i + 1 = 4 + 9i$$

expressão binomial da forma $a + bi$, onde $a = 4$ e $b = 9$, caracterizando o que, comumente, chamamos de *número complexo*, isto é, número composto de uma *parcela real* a e outra *imaginária* bi.

122 — Módulo. O *módulo é o número aritmético*

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Para representá-lo, escreve-se $| a + bi |$.

Diz-se que os *números complexos* $a + bi$ e $a' + b'i$ são iguais, quando se tem, ao mesmo tempo,

$$a = a' \quad \text{e} \quad b = b'$$

Quando se tem $b = 0$, ϱ coincide com o *valor absoluto* do *número real* obtido. Daí a notação referida antes.

É claro que, para $\varrho = 0$, o número complexo é nulo, e vice-versa. Assim sendo, conclui-se que a condição para que se tenha $a + bi = 0$ é que sejam nulos a e b, isto é:

$$a = b = 0$$

O número $a^2 + b^2$ é denominado *norma* do complexo.

123 — Complexos conjugados; números opostos. Define-se, como *conjugado* de $a + bi$, o número $a - bi$.

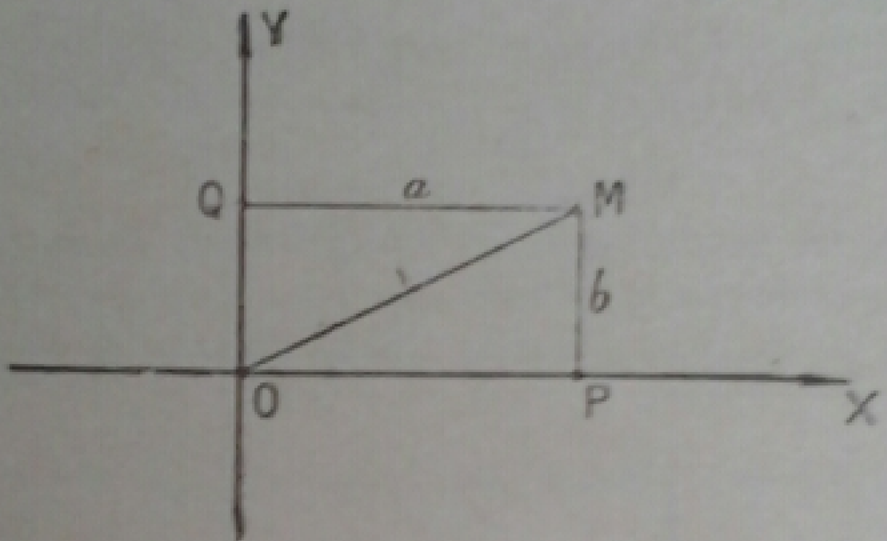
Torna-se evidente, então, que dois *complexos conjugados* têm a mesma *norma* e, por consequência, o mesmo *módulo*. A recíproca, entretanto, não é verdadeira.

O número $-a - bi$ é denominado *oposto* ou *contrário* de $a + bi$.

Ainda neste caso, terão a mesma *norma* e, portanto, o mesmo *módulo*.

124 — Interpretação geométrica; argumento. Num sistema cartesiano ortogonal, marquemos o ponto $M(a, b)$. Poderemos considerá-lo como a *imagem* (*) do número complexo $a + bi$.

Com efeito, adotando tal interpretação, faremos corresponder, sem ambiguidade, a cada número complexo, um ponto do plano, e vice-versa. O número passará a ser, então, o *afixo* do ponto correspondente.



Sendo $b = 0$, os números serão *reais* e os pontos correspondentes estarão sôbre $0x$. Ao contrário, sendo $a = 0$, os números serão *imaginários puros* e os pontos correspondentes estarão sôbre $0y$.

Daí ser $0x$ denominado *eixo real* e $0y$ *eixo imaginário* (**).

O triângulo retângulo OPM nos dá:

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2$$

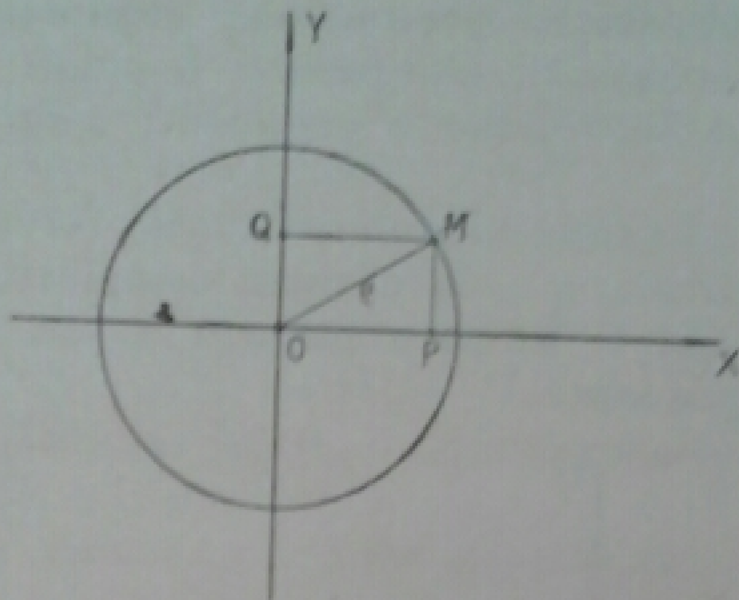
isto é:

$$OM = \sqrt{a^2 + b^2}$$

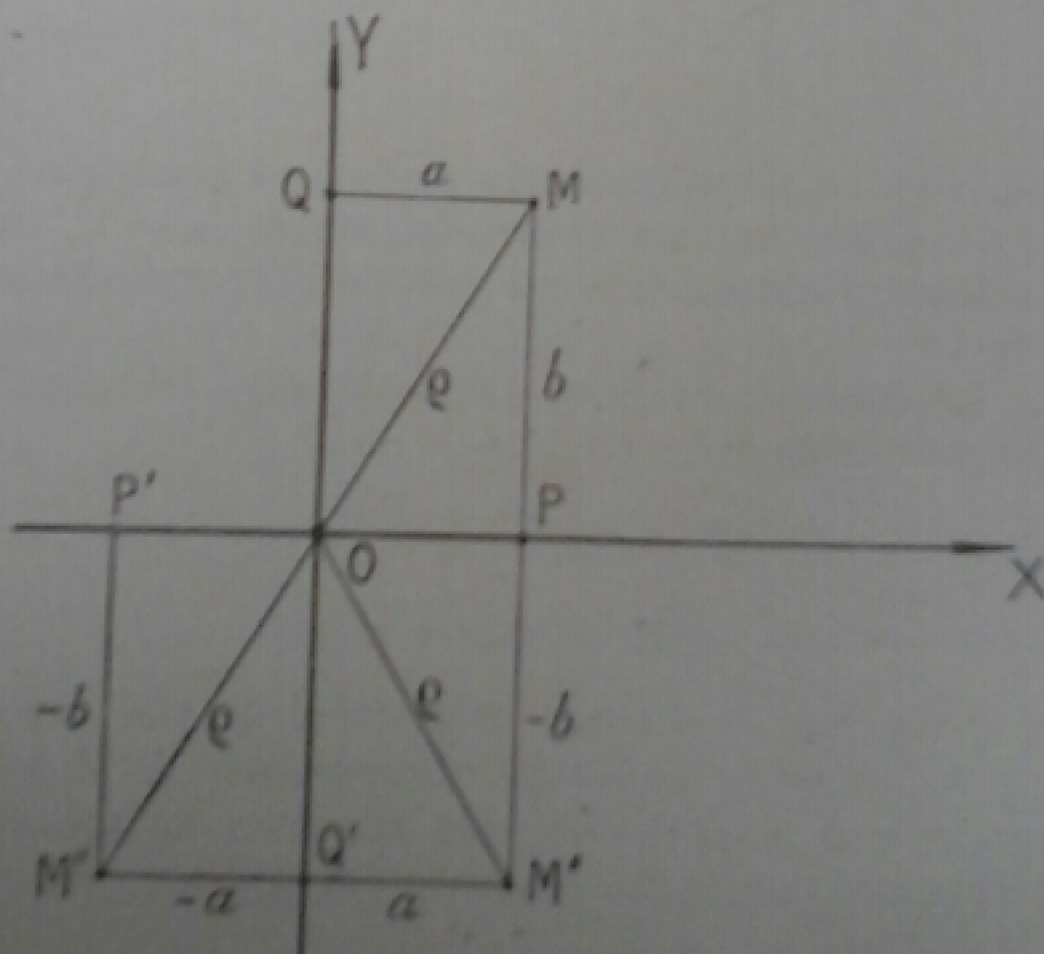
Vê-se, então, que a *medida aritmética* de OM representará o *módulo* ρ do número complexo correspondente. E conclui-se, imediatamente, que *a totalidade dos números de mesmo módulo* ρ seria representada pela circunferência com êste raio.

(*) Também chamada *índice*.

(**) Essa interpretação geométrica, de extraordinário alcance, foi adotada, simultâneamente, por G. Wessel e C. F. Gauss (1799). Só em 1831, entretanto, foi sistematizada por êsse último. Usa-se hoje, também, a *interpretação esférica* atribuída a Riemann.



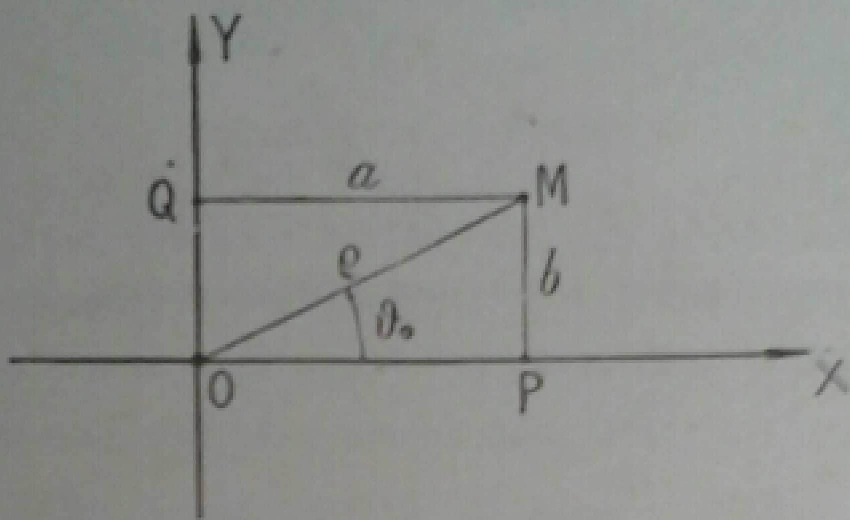
Observemos ainda, que as *imagens* de *números conjugados* serão simétricas em relação ao *eixo real* $0x$, enquanto que as de *números opostos*, o serão relativamente à origem O.



Essa interpretação geométrica permite, além disso, a introdução do conceito de *argumento de um número complexo*.

definido por um qualquer dos ângulos $\vartheta = \vartheta_0 + 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ (*).

A menor determinação, correspondente a $k = 0$, caracteriza o *argumento principal* ϑ_0.



Poderemos dizer, então, que os números de *argumento* $k\pi$ serão *reais; positivos*, quando k fôr *par* e *negativos*, quando fôr *ímpar*.

O *argumento* dos *imaginários puros* será sempre da forma $\dfrac{(2k+1)\pi}{2}$.

125 — Representação trigonométrica (**). — A interpretação geométrica dos números complexos põe em evidência as relações:

$$\left.\begin{aligned} a &= \rho \cos \vartheta \\ b &= \rho \operatorname{sen} \vartheta \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

que nos permitem escrever:

$$a + bi = \rho(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta) \qquad (20)$$

Esta clássica *expressão trigonométrica* simplifica inúmeros problemas e torna evidentes notáveis propriedades do domínio complexo.

(*) Usa-se, também, a denominação *anomalia*. Observe-se que o sentido mais geralmente adotado é o que se toma clàssicamente como direto na Trigonometria.

(**) Também chamada *fatorial*, normal ou polar. Devida a Euler (1748).

Para passar da *forma binomial* à *trigonométrica*, usam-se as relações (*).

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (21)$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (22)$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (23)$$

estas últimas, deduzidas de (19). A transformação inversa faz-se imediatamente por meio das próprias relações (19).

EXEMPLO I — *Escrever sob forma trigonométrica os números:*

1º) $1 + \sqrt{3}\, i$. Ora, neste caso: $a = 1$ e $b = \sqrt{3}$. Portanto:

$$\varrho = 2 \; ; \; \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ e } \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

O cálculo do *argumento* é imediato:

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2\, k\pi$$

Portanto:

$$1 + \sqrt{3}\, i = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \right]$$

Observemos que, comumente, não é necessário considerar a *expressão geral* do argumento θ; poderemos tomar o *argumento principal* $\theta_0 = \dfrac{\pi}{3}$, vindo assim:

$$1 + \sqrt{3}\, i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) \qquad (24)$$

2º) $-1 + i$ e $1 - i$. Para o primeiro, virá:

$$\varrho_1 = \sqrt{2} \; ; \; \cos \theta_1 = - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \operatorname{sen} \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para o segundo:

$$\varrho_2 = \sqrt{2} \; ; \; \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \operatorname{sen} \theta_2 = - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(*) Observe-se que a consideração simultânea, de (6) e (7), tem por fim evitar a ambigüidade na determinação de θ.

Teremos, assim:

$$\theta_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{e} \quad \theta_2 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

e, consequentemente:

$$-1+i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)\right] \qquad (25)$$

$$1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]$$

Observemos que $-1+i$ e $1-i$ são *números complexos opostos*, isto é, suas *imagens* são simétricas em relação a 0. Se tivéssemos pretendido calcular os argumentos, pelas tangentes, encontraríamos ambiguidade, pois $\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\theta_2 = -1$.

3º) i. Virá imediatamente: $\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, uma vez que a *imagem* dêsse ponto está sôbre a parte positiva do *eixo imaginário* og, à distância 1 da origem.

Teremos, então:

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

EXEMPLO II — *Escrever sob forma binomial o número:*

$$3\left[\cos\left(\frac{\pi}{8} + 2k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + 2k\pi\right)\right]$$

Teremos imediatamente:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} + 2k\pi\right) = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + 2k\pi\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Portanto:

$$a = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

mostrando que:

$$a + bi = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\, i$$

Observemos que, estando calculados sen θ e cos θ, o problema da transformação praticamente desaparece. Aliás, sendo $\rho = 1$, a *forma trigonométrica* é idêntica à *binomial*.

126 — Observação. Para os números reais, que agora surgem como meros casos particulares de números complexos, é, em muitas questões, útil essa *forma trigonométrica*.

EXEMPLOS — *Escrever, sob forma trigonométrica, os números*:

1°) 1 e -1. Para ambos, temos $\rho = 1$.

Os argumentos calculam-se imediatamente, sem necessidade das relações (6) e (7). Bastará lembrar que a imagem de 1 estará sôbre a parte positiva do *eixo real ox* e a de -1, sôbre a parte negativa.

Teremos, então: $\theta_{\cdot} = 2k\pi$ e $\theta = (2k+1)\pi$, mostrando que o *argumento principal* de 1 é 0 e o de -1, π.

Dêsse modo:

$$1 = \cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi$$

$$-1 = \cos (2k+1)\pi + i \operatorname{sen} (2k+1)\pi$$

2°) -5. Teremos $\rho = 5$: $\theta = (2k+1)\pi$ como no caso anterior. Portanto:

$$-5 = 5 \left[\cos (2k+1)\pi + i \operatorname{sen} (2k+1)\pi \right]$$

Observe-se, entretanto, que, tal como nas relações anteriores, estamos apenas escrevendo identidades.

127 — Operações sôbre números complexos. O estabelecimento da *lei geral de formação das potências de i* (**120**) e da *expressão binomial dos números complexos* (**121**) permite reduzir as operações nesse novo domínio, às regras usuais do cálculo algébrico.

Operaremos sôbre os números da forma $a + bi$ como se fôssem expressões algébricas ordinárias; nos resultados finais, trataremos as potências de i de acôrdo com as relações estabelecidas no quadro (18).

128 — Adição e subtração. Considerados os *números complexos*: $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, escreveremos, convencionalmente:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

De um modo geral, para m números complexos: $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, ..., $z_m = a_m + b_m i$, teremos anàlogamente:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_m = (a_1 + a_2 + \dots + a_m) + (b_1 + b_2 + \dots + b_m)i$$

O número $z = a + bi$, para o qual:

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_m$$

$$b = b_1 + b_2 + \dots + b_m$$

representará, então, a referida soma, isto é:

$$z = z_1 + z_2 + \dots + z_m$$

A condição para que a soma seja real é que tenhamos:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_m = 0$$

Em particular, será verificada para os *números complexos conjugados*.

Assim, para: $z_1 = 3 - 5i$ e $z_2 = 3 + 5i$, virá:

$$z_1 + z_2 = 6$$

A *diferença* de dois números complexos, que representaremos por $z_2 - z_1$, é, por definição, o número que, somado a z_1 dá z_2.

Torna-se evidente, então, que:

$$z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i$$

Essa relação mostra-nos, ainda, que, *subtrair* z_1 de z_2, equivale a *somar* a z_2 o *oposto* de z_1. E é comum representar-se êsse *oposto* por $- z_1$ (*).

(*) Aqui, o sinal é apenas convencional. Não tem sentido a idéia de número complexo negativo.

129 — Interpretação geométrica da adição e da subtração. Sejam M_1 e M_2 os pontos representativos, respectivamente, de z_1 e de z_2.

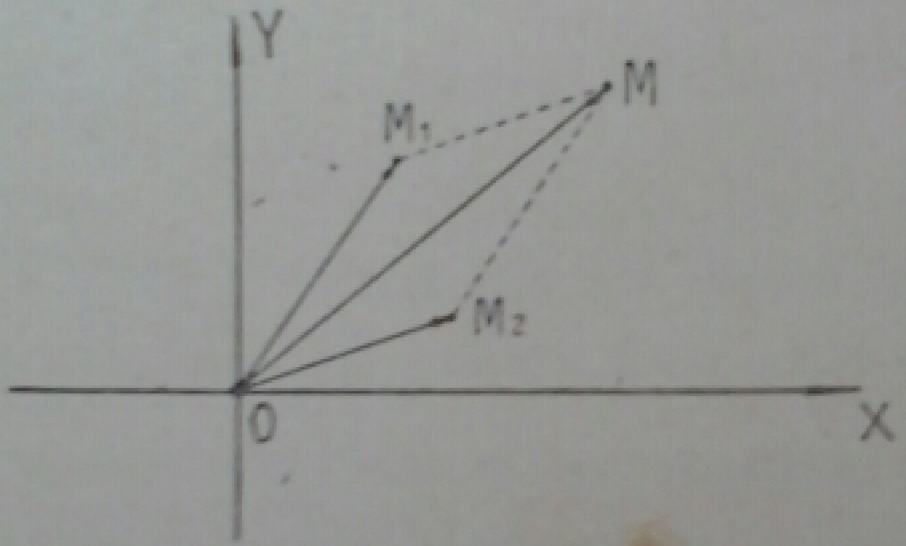
Se determinarmos o vetor:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2$$

teremos pelo *princípio de Carnot* (*):

$$\text{proj}_{\dot{ox}}\ \overrightarrow{OM} = \text{proj}_{\dot{ox}}\ \overrightarrow{OM}_1 + \text{proj}_{\dot{ox}}\ \overrightarrow{OM}_2$$

$$\text{proj}_{\dot{oy}}\ \overrightarrow{OM} = \text{proj}_{\dot{oy}}\ \overrightarrow{OM}_1 + \text{proj}_{\dot{oy}}\ \overrightarrow{OM}_2$$



Chamando de a e b as coordenadas de M, teremos:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

$$\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$$

e como, em cada uma dessas relações, os vetores são colineares, teremos algèbricamente:

$$a = a_1 + a_2$$
$$b = b_1 + b_2$$

mostrando que o número complexo, *afixo* de M, representará a *soma* $z_1 + z_2$.

A generalização para o caso de n números complexos é imediata. O *vetor soma*:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 + \ldots + \overrightarrow{OM}_n$$

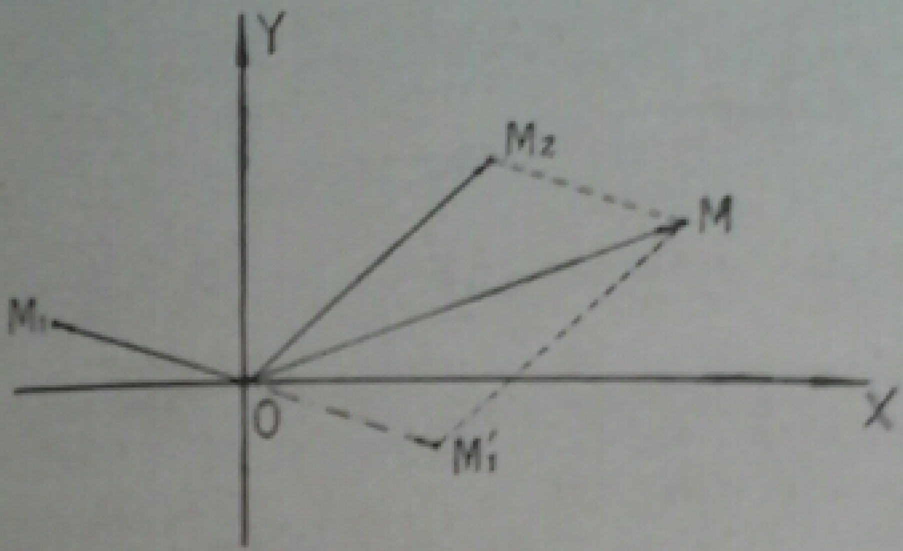
determinará o ponto M, cujo *afixo* é:

$$z = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$$

Para estabelecermos, vetorialmente, a *diferença* $z_2 - z_1$, bastará somar, a $\overrightarrow{OM}_2$, o vetor $\overrightarrow{OM'}_1$, *representativo de* — z.

(*) Cfr. "Matemática — 2.º Ciclo", 2.ª Série, Trigonometria, 2.ª ed., 13 (pg. 319).

Vê-se assim, que, no *plano complexo de Gauss*, as operações de *adição* e *subtração* efetuam-se vetorialmente.



130 — Módulo da soma e da diferença. Sendo ρ o *módulo* de $\overrightarrow{OM}$ e $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, respectivamente, os de $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}, \ldots, \overrightarrow{OM_m}$, teremos (*).

$$\rho < \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m$$

Mas o *módulo* de um vetor é o próprio *módulo* do número complexo correspondente. Concluímos então que: *"o módulo da soma é igual ou inferior à soma dos módulos das parcelas"*.

A igualdade se dará quando os vetores forem colineares e de mesmo sentido, isto é, quando os números complexos tiverem o mesmo argumento.

Para o caso de duas parcelas, poderemos escrever:

$$\rho_1 - \rho_2 \leqslant \rho \leqslant \rho_1 + \rho_2$$

supondo $\rho_1 - \rho_2 > 0$, isto é: *"o módulo da soma de duas parcelas está compreendido entre a soma e a diferença dos módulos das mesmas; será igual à soma, quando os argumentos forem iguais; será igual à diferença quando os complexos forem opostos"*.

Esta propriedade inclui também o *módulo da diferença* de dois números complexos. Bastará observar (**128**) que a substituição de z_2, pelo número, *de mesmo módulo*, $-z_2$, transforma a subtração em adição.

(*) Cfr. *"Matemática — 2.º Ciclo"*, *3.ª Série, Trigonometria*

131 — Multiplicação e divisão. O produto será obtido pela aplicação das regras usuais do cálculo algébrico às *formas binomiais.*

Tomando, por exemplo: $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 1 - i$ e $z_3 = 2 + 3i$, obteremos:

$$z_1 z_2 z_3 = (3 - 2i)(1 - i)(2 + 3i) = 6 - i - 11i^2 + 6i^3$$

Observando, entretanto, que $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$:

$$z_1 z_2 z_3 = 17 - 7i$$

Determinemos, agora, a condição para que o produto de dois fatores seja real.

Tomando: $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, virá:

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

exigindo, para ser real, $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$, isto é:

$$\frac{a_1}{a_2} = -\frac{b_1}{b_2}$$

Em particular, terão produto real, e igual à *norma* comum, os complexos conjugados. De fato:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Êste resultado permite que obtenhamos facilmente o *recíproco* de um número complexo, isto é, o fator que determina o produto unitário.

Supondo que o recíproco de $a + bi$ seja $x + yi$, deveremos ter, *por definição*:

$$(a + bi)(x + yi) = 1$$

Multiplicando os membros da igualdade pelo conjugado de $a + bi$, virá:

$$(a^2 + b^2)(x + yi) = a - bi$$

de onde se conclui:

$$x + yi = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

e por conseqüência (**122**):

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

O *recíproco* de $a + bi$ é representado, geralmente, pelo símbolo:

$$\frac{1}{a+bi}$$

Quando o módulo for unitário, teremos $a^2 + b^2 = 1$ e portanto:

$$\frac{1}{a+bi} = a - bi$$

isto é, o *recíproco* coincidirá com o *conjugado*.

Por definição, o *quociente* de z_1 por z_2 é o produto de z_1 pelo *recíproco* de z_2.

Teremos então:

$$\frac{z_1}{z_2} = z \times \frac{1}{z_2} = (a_1 + b_1 i)\left(\frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i\right) =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}$$

isto é:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b}{a_2^2 + b_2^2}\, i$$

132 — Observação. Para abreviar, poderemos escrever:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)\ (a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)\ (a_2 - b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}$$

o que nos mostra ser possível obter, com facilidade, o *quociente*, multiplicando o *dividendo* z_1 e o *divisor* z_2, pelo *conjugado* dêste.

EXEMPLO — *Calcular o quociente de $7 - i$ por $3 - 4i$.*

Teremos:

$$\frac{7 - i}{3 - 4i} = \frac{(7 - i)\ (3 + 4i)}{(3 - 4i)\ (3 + 4i)} = \frac{25 + 25i}{25} = 1 + i$$

OBSERVAÇÕES — Deveremos ter sempre $z_2 \neq 0$, isto é, $a^2 + b^2 \neq 0$ ou, melhor, $\varrho_2 \neq 0$.

A condição para que o quociente seja real é que se tenha $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$ e, portanto:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

133 — Módulo e argumento do produto e do quociente. Passando à expressão trigonométrica, consideremos:

$$z_1 = \varrho_1(\cos\vartheta_1 + i \operatorname{sen}\vartheta_1),\ z_2 = \varrho_2(\cos\vartheta_2 + i\operatorname{sen}\vartheta_2), \ldots, z_m = \varrho_m(\cos\vartheta_m + i\operatorname{sen}\vartheta_m)$$

Vamos demonstrar, então, que: *"o módulo de um produto é igual ao produto dos módulos dos fatores; o argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores"*.

Tomando, primeiramente, dois fatores, virá:

$$z_1z_2 = \varrho_1\varrho_2\left[(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \operatorname{sen}\vartheta_1\operatorname{sen}\vartheta_2) + i\,(\operatorname{sen}\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \operatorname{sen}\vartheta_2\cos\vartheta_1)\right] = \varrho_1\varrho_2\left[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2)\right] \qquad (26)$$

Para generalizar o resultado, admitamos que seja verdadeiro para $m - 1$ fatores, isto é:

$$z_1z_2\ldots z_{m-1} = \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_{m-1}\left[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_{m-1}) + i\operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_{m-1})\right]$$

Demonstremos que, nesse caso, o será também para m fatores.

Multiplicando por z_m, virá:

$$z_1z_2\ldots z_{m-1}\,z_m = \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_{m-1}\varrho_m\left[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_{m-1})\cos\vartheta_m - \operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_{m-1})\operatorname{sen}\vartheta_m\right] + i\left[\operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_{m-1})\cos\vartheta_m + \operatorname{sen}\vartheta_m\cos(\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_{m-1})\right]$$

isto é:

$$z_1z_2\ldots z_m = \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_m\left[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_m) + i\operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots\vartheta_m)\right] \qquad (27)$$

E uma vez que a propriedade é verdadeira para dois fatores, como mostra (26) fica provado que a fórmula (27) é geral, o que confirma o enunciado.

No cálculo do *recíproco*, $z\ (\varrho, \vartheta)$, de um número, $z_1\ (\varrho_1, \vartheta_1)$, teremos por definição (**131**):

$$zz_1 = 1$$

Ora, o *módulo* da unidade é 1 e o *argumento*, $2k\pi$. Portanto, de acôrdo com o que acabámos de ver sôbre o produto, poderemos escrever:

$$\varrho\varrho_1 = 1 \quad \text{e} \quad \vartheta + \vartheta_1 = 2k\pi$$

isto é, $\varrho = \dfrac{1}{\varrho_1}$ e $\vartheta = -\vartheta_1 + 2k\pi$; e, daí:

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\varrho_1}\Big[\cos\,(-\vartheta_1) + i\ \text{sen}\ (-\vartheta_1)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\varrho_1}\Big(\cos\vartheta_1 - i\ \text{sen}\ \vartheta_1\Big)$$

Aplicando tais resultados, ao *quociente* de dois números, $z_2 \div z_1$, teremos imediatamente:

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2 \times \frac{1}{z_1} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\Big[\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) + i\ \text{sen}(\vartheta_2 - \vartheta_1)\Big]$$

mostrando que "*o módulo do quociente de dois números complexos é igual ao quociente do módulo do primeiro pelo do segundo; o argumento, igual à diferença entre o argumento do primeiro e o do segundo* (*).

Evidentemente, será sempre suposto $z_1 \neq 0$, isto é, $\varrho_1 \neq 0$

134 — Observação. Na igualdade (27) o parêntese do segundo membro será sempre diferente de zero, porque não poderão ser nulos, simultâneamente, o seno e o co-seno.

Dessa maneira, para que o produto se anule, um dos módulos, pelo menos, deverá ser nulo, isto é, um dos fatores deverá ser zero. A recíproca é, evidentemente, verdadeira.

(*) Essas operações deverão ser realizadas sôbre os argumentos principais. Dispondo depois da parcela $2k\pi$, evitaremos os resultados negativos, por muitos adotados.

135 — Potenciação. Fórmula de Moivre. Para números complexos, na *forma binomial*, a potenciação de expoente inteiro resume-se na aplicação formal do desenvolvimento do *binômio de Newton*.

Assim:

$$(4 - 3i)^3 = 64 - 144i + 108i^2 - 27i^3 =$$
$$= 64 - 144i - 108 + 27i = - 44 - 117i$$

Poderemos operar ainda com expoentes negativos. Com efeito:

$$(1 - 2i)^{-4} = \frac{1}{(1 - 2i)^4} = \frac{1}{1 - 8i + 24i^2 - 32i^3 + 16i^4} =$$
$$= \frac{1}{1 - 8i - 24 + 32i + 16} = \frac{1}{-7 + 24i}$$

Aplicando a êsse resultado as considerações sôbre números recíprocos (**131**), teremos:

$$\frac{1}{-7 + 24i} = -\frac{7}{49 + 576} - \frac{24}{49 + 576}i$$

isto é:

$$(1 - 2i)^{-4} = -\frac{7}{625} - \frac{24}{625}i$$

Por convenção, teremos $(a + bi)^0 = 1$.

Considerando, entretanto, a *forma trigonométrica* dos números complexos, o estudo da potenciação apresenta uma série de resultados interessantes, de que trataremos a seguir.

Fazendo, na igualdade (11):

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_m = \theta$$
$$\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_m = \varrho$$

teremos como consequencia:

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_m = z \ (*)$$

e, daí:

$$z^m = \varrho^m \left[\cos(m\,\theta) + i \operatorname{sen}(m\,\theta) \right] \qquad (28)$$

(*) Observe-se que a recíproca não seria verdadeira. A fatores iguais corresponderiam módulos iguais e argumentos côngruos (mód 2π).

relação que define a potência n-gésima de um número complexo $z = \varrho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$, para m inteiro e positivo.

Supondo $\varrho = 1$, teremos a clássica *fórmula de Moivre* (*):

$$(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)^m = \cos(m\,\vartheta) + i \operatorname{sen}(m\,\vartheta)$$

Será fácil mostrar que esta igualdade é verdadeira ainda para m inteiro e negativo.

Com efeito, supondo $m < 0$, virá:

$$(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)^m = \frac{1}{(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)^{|m|}} =$$

$$= \frac{1}{(\cos|m|\vartheta) + i \operatorname{sen}(|m|\vartheta)} = \frac{1}{\cos(m\,\vartheta) - i \operatorname{sen}(m\,\vartheta)}$$

Portanto (**133**), teremos finalmente:

$$(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)^m = \cos(m\,\vartheta) + i \operatorname{sen}(m\,\vartheta)$$

o que demonstra a validade da fórmula para $m < 0$.

A verificação para $m = 0$ é imediata.

EXERCÍCIO I — *Calcular* $(1 + \sqrt{3}\,i)^9$.

Para expoentes elevados, será sempre preferível usar a fórmula (28).

Ora, a relação (8), nos dá:

$$1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

Portanto:

$$(1 + \sqrt{3}\,i)^9 = 2^9\left[\cos\left(9 \times \frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(9 \times \frac{\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= 2^9 (\cos 3\pi + i \operatorname{sen} 3\pi) = -\,2^9$$

isto é:

$$(1 + \sqrt{3}\,i)^9 = -512$$

EXERCÍCIO II — *Calcular* $(-1 + i)^{-10}$

De (24) nos vem, tomando o argumento principal:

$$-1 + i = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$$

(*) Publicada em sua "*Miscellanea analitica*", Londres, 1730.

Logo:

$$(-1+i)^{-10} = 2^{-5}\left[\cos\left(-10\times\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-10\times\frac{3\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 2^{-5}\left[\cos\frac{15\pi}{2} - i\,\text{sen}\frac{15\pi}{2}\right] = 2^{-5}i$$

Portanto:

$$(-1+i)^{-10} = \frac{1}{32}\,i$$

Exercicios propostos

1. Calcular:

I) $i^{11} + i^{17} - i^{22}$; Resp.: 1.

II) $\dfrac{1}{i^3} + \dfrac{1}{i}$. Resp.: 0.

2. Dar a representação trigonométrica dos números:

I) $-1 + \sqrt{3}\,i$;

Resp.: $2\left[\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)\right]$

II) $\sqrt{3} - i$;

Resp.: $2\left[\cos\left(\dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)\right]$

III) -5. Resp.: $5\,[\cos(2k+1)\pi + i\,\text{sen}\,(2k+1)\pi]$

3. Calcular o argumento do número $\dfrac{1-i}{1+i}$. Resp.: $\dfrac{3\pi}{2}$.

4. Calcular sob forma binômia:

I) $\dfrac{-9+19i}{5-3i} + \dfrac{16+3i}{2+i}$; Resp.: 4.

II) $\sqrt{-8-6i}$; Resp.: $1-3i$ e $-1+3i$.

III) $\sqrt{i}$; Resp.: $\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$ e $\dfrac{-\sqrt{2}(1+i)}{2}$

IV) $\dfrac{1}{3-4i}$. Resp.: $0{,}12 + 0{,}16i$.

5. Demonstrar que todo número da forma $\dfrac{a+bi}{a-bi}$ tem módulo 1.

Resp.: Obtém-se, imediatamente: $\dfrac{a+bi}{a-bi} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} +$

$$+ \frac{2ab}{a^2-b^2} \cdot i \text{ e daí } \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2} = 1.$$

6. Sem efetuar a operação, calcular o módulo de $\dfrac{6+8i}{1-\sqrt{24}\,i}$.

Resp.: $\rho = \dfrac{10}{5} = 2$

12. Mesma questão para $(3-4i)(\sqrt{3}-i)\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2}\right)$.

Resp.: $\rho = 5.2.1 = 10.$

8. Sem efetuar a operação, calcular o argumento principal de $\dfrac{2-\sqrt{-12}}{\sqrt{3}+\sqrt{-1}}$.

Resp.: $\vartheta = \dfrac{5\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{2}$.

9. Dado o número $z = 1 + i$, calcular z^5.

Resp.: $2^{\frac{5}{2}}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right)$

10. Demonstrar que o produto de uma soma de quatro quadrados, por uma soma de quatro quadrados, é, ainda, uma soma de quatro quadrados (*Euler*).

Resp.:

$$\begin{vmatrix} a+bi & -(c-di) \\ c+di & a-bi \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2$$

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta i & -(\gamma-\delta i) \\ \gamma+\delta i & \alpha-\beta i \end{vmatrix} = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$$

Multiplicando êsses determinantes, uma simples inspeção indicará ser do mesmo tipo o determinante obtido. Teremos, assim, como resultado, uma soma de quatro quadrados.

11. Calcular algèbricamente $(2-i)^4$. Resp.: $-7-24i$.

136 — Decomposição de um polinômio em fatores binômios. Dado um polinômio qualquer $P(x)$, aceitemos que existe sempre um número x_1, *real ou complexo*, para o qual (*):

$$P(x_1) = 0$$

Aliás, observemos que, para uma raiz complexa $x_1 = a + bi$, teremos $P(a + bi) \equiv P_1(a, b) + i\,P_2(a, b)$, tendo em vista as propriedades das operações com números complexos. Portanto, a condição $P(x_1) = 0$, desdobrar-se-á em:

$$P_1(a, b) = 0 \quad \text{e} \quad P_2(a, b) = 0.$$

Mas, neste caso, $P(x)$ será divisível por $x - x_1$ (**), isto é:

$$P(x) \equiv (x - x_1)\ P_1(x)$$

sendo $P_1(x)$ um polinômio que admite $a_0 x^{m-1}$ como termo de mais alto grau.

Se, para êsse polinômio $P_1(x)$, existe, por sua vez, um número x_2 tal que:

$$P_1(x_2) = 0$$

teremos analogamente:

$$P_1(x) \equiv (x - x_2)\ P_2(x)$$

onde o termo de mais alto grau do polinômio $P_2(x)$ será $a_0 x^{m-2}$.

Prosseguindo nesse raciocínio, obteremos, finalmente:

$$P_{m-1}(x) \equiv (x - x_m)\ a_0$$

reduzindo-se o quociente à constante a_0.

(*) *Este princípio constitui o teorema fundamental da Álgebra*; é devido a D'Alembert e Gauss. Estabelecido, pelo primeiro, em 1746, foi demonstrado com relativa exatidão, pelo segundo, em 1799. Sua dedução rigorosa é cas sativa e exige o conhecimento prévio do *teorema de Weierstrass sôbre as funções reais*. Não caberia, portanto, neste trabalho (Cfr. Haroldo Lisbôa da Cunha, "*Pontos de álgebra complementar*", Rio de Janeiro, 1933, pg. 37). Gauss chegou a dar, ao todo, três demonstrações diferentes. A original poderá ser vista em H. Weber, "*Traité d'algèbre supérieure*", trad. J. Griess, Paris, 1898, pg. 150.

(**) Será necessário ter em vista que, mesmo para x_1 complexo, a conclusão aplicar-se-á. Isto porque, para o domínio complexo, subsistem as propriedades formais do cálculo algébrico racional do domínio real.

Reunindo as identidades assim obtidas, teremos a quadro.

$$P(x) \equiv (x - x_1)\ P_1(x)$$
$$P_1(x) \equiv (x - x_2)\ P_2(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{m-1}(x) \equiv (x - x_m)\ a_0$$

Multiplicando-as, membro a membro, virá:

$$P(x)\ P_1(x)\ \ldots\ P_{m-1}(x) \equiv$$
$$\equiv a_0(x - x_1)(x - x_2)\ \ldots\ (x - x_m)\ P_1(x)\ P_2(x)\ \ldots\ P_{m-1}(x)$$

E, simplificando:

$$P(x) \equiv a_0(x - x_1)(x - x_2)\ \ldots\ (x - x_m)$$

Nem sempre, entretanto, os números $x_1, x_2, \ldots, x_m$ serão todos distintos.

Suponhamos, dentre êles, α iguais a x_1, β iguais a x_2, ..., λ iguais a x_t. Teremos, então, de um modo geral:

$$P(x) \equiv a_0(x - x_1)^\alpha\ (x - x_2)^\beta\ \ldots\ (x - x_t)^\lambda$$

onde, evidentemente: $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m$

137 — Número de raízes de uma equação; raízes múltiplas e raízes nulas. Tendo em vista a última identidade, a equação $P(x) = 0$ poderá ser escrita:

$$a_0(x - x_1)^\alpha\ (x - x_2)^\beta\ \ldots\ (x - x_t)^\lambda = 0$$

Os números $x_1, x_2, \ldots, x_t$ anulam seu primeiro membro; representam, portanto, suas raízes.

Diz-se, então, que x_1 *é múltipla de ordem* α; x_2 *múltipla de ordem* β; ... e x_t, *múltipla de ordem* λ. E por convenção, contam-se, α raízes iguais a x_1; β, iguais a x_2, ... e λ, iguais a x_t (*).

Vê-se, assim, que toda equação do grau m, admite, precisamente, m raízes, pois, $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m$ da última igualdade.

(*) Por extensão, aceitam-se as *raízes simples*, como múltiplas de ordem 1. Neste caso, a *multiplicidade de ordem zero*, caracterizaria a não existência da raiz.

Se supusermos $x_1 = 0$, aparecerá, no primeiro membro de o fator x^α. E, reciprocamente, tal fator indicará a existência de α raízes nulas.

Portanto, considerada a equação $P(x) = 0$, torna-se evidente que as relações:

$$a_m = a_{m-1} = \ldots = a_{m-\alpha+1} = 0; \; a_{m-\alpha} \neq 0$$

exprimem a condição necessária e suficiente para que tenhamos, precisamente, α raízes nulas. Com efeito, dêsse modo, viria:

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-\alpha}x^\alpha =$$

$= x^\alpha (a_0x^{m-\alpha} + a_1x^{m-\alpha-1} + a_2x^{m-\alpha-2} + \ldots + a_{m-\alpha}) = 0$ mostrando a existência de tal fatr x^α.

Em todos os problemas sôbre equações, poderemos, por conseguinte, supor excluídas as raízes nulas. Dessa maneira, teremos sempre $a_m \neq 0$.

Assim, para:

$$3x^5 - 7x^4 + 8x^2 = 0$$

assinalando a existência de *duas raízes nulas*, passaremos à equação:

$$3x^3 - 7x^2 + 8 = 0$$

133 — Raízes complexas conjugadas. *É evidente que se $a + bi$ fôr raiz de um polinômio real $P(x)$, $a - bi$ também o será.*

Com efeito, substituindo x, sucessivamente, por $a + bi$ e $a - bi$, obteremos duas expressões conjugadas.

$$P(a + bi) = P_1(a, b) + i\, P_2(a, b)$$
$$P(a - bi) = P_1(a, b) - i\, P_2(a, b)$$

Uma vez, entretanto, que $a + bi$ é, por hipótese, raiz de $P(x)$, deveremos ter:

$$P(a + bi) = P_1(a, b) + i\, P_2(a, b) = 0,$$

condição essa que exige, separadamente:

$$P_1(a, b) = 0$$
$$P_2(a, b) = 0$$

E' claro, então, que teremos também:

$$P(a - bi) = P_1(a, b) - i\, P_2(a, b) = 0$$

provando ser $a - bi$ raiz de $P(x)$.

Ora, visto que estamos supondo de 1ª *classe* a equação (47), teremos $a_m = a_0$ e, portanto:

$$b'_{m-1} = a_m = a_0 = b'_0$$

mostrando que será, ainda, de *1.ª classe, mas de grau par* (*).

Concluímos, agora, que *toda equação recíproca de 1ª classe, e de grau impar, admite a raiz* — 1, cuja *eliminação dá lugar a uma equação recíproca, ainda de 1.ª classe, mas de grau par* (**).

Poderemos, portanto, reduzir nosso estudo, ao caso das *equações recíprocas de 1ª classe de grau par*, cujo tipo geral:

$$a_0x^{2p} + a_1x^{2p-1} + a_2x^{2p-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0 \qquad (51)$$

caracteriza a *forma normal* das *equações recíprocas*.

155 — Abaixamento do grau das equações recíprocas. D'oravante admitiremos as *equações recíprocas*, dadas sempre sob a *forma normal*.

Ponhamos, então, em evidência, no primeiro membro de (51), o fator x^p. Virá:

$$x^p \left[a_0x^p + a_1x^{p-1} + a_2x^{p-2} + \ldots + a_{p-1}\, x + a_p + \right.$$

$$\left. + \frac{a_{p-1}}{x} + \frac{a_{p-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_2}{x^{p-2}} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \frac{a_0}{x^p} \right] = 0$$

Mas, uma vez que, para as *equações recíprocas*, tem-se sempre $x \neq 0$ (***), os valores de x que anularem a expressão entre parênteses serão as raízes de (51). Grupando, então, os

---

(*) *Com efeito, sendo m impar, m — 1 será par.*

(**) *Conclui-se, assim, que tôda equação de 2.ª classe e de grau par é* divisível pelo produto $(x - 1)(x + 1) \equiv x^2 - 1$. Com efeito, sendo de 2ª classe, é divisível por $x - 1$ e dá lugar a uma de 1ª classe e de grau impar, que ainda o é por $x + 1$.

(***) Bastará ver que sempre se tem $a_m \neq 0$ (134), pois $a_m = \pm a_0$ e, por hipótese, $a_0 \neq 0$. Aliás, o fato decorre da própria definição.

termos *equidistantes* dos extremos, passemos a considerar a equação:

$$a_0\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right) + a_1\left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right) + a_2\left(x^{p-2} + \frac{1}{x^{p-2}}\right) +$$
$$+ \ldots + a_{p-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_p = 0$$

Será fácil verificar de um modo geral, a identidade:

$$x^{h+1} + \frac{1}{x^{h+1}} = \left(x^h + \frac{1}{x^h}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{h-1} + \frac{1}{x^{h-1}}\right)$$

E tomando, simbolicamente:

$$X_h = x^h + \frac{1}{x^h}$$

poderemos escrevê-la:

$$X_{h+1} = X_h X_1 - X_{h-1} \qquad (52)$$

Em particular, vê-se que:

$$X_0 = 2 \text{ e } X_1 = x + \frac{1}{x}$$

Fazendo, em (52), $h = 1, 2, 3, 4$ etc. e levando em conta, sucessivamente, os valores achados, obteremos:

$$\left\{\begin{array}{l} X_2 = X_1^2 - X_0 = X_1^2 - 2 \\ X_3 = X_2 X_1 - X_1 = X_1^3 - 3X_1 \\ X_4 = X_3 X_1 - X_2 = X_1^4 - 4X_1^2 + 2 \\ X_5 = X_4 X_1 - X_3 = X_1^5 - 5X_1^3 + 5X_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \qquad (53)$$

Considerados êsses resultados e a identidade (52), verificamos que X_p e, portanto, a equação:

$$a_0 X_p + a_1 X_{p-1} + a_2 X_{p-2} + \ldots + a_{p-1} X_1 + a_p = 0 \qquad (54)$$

serão sempre do grau p em relação a X_1. Mas, partindo da expressão de X_1 em função de x, teremos:

$$x^2 - X_1 x + 1 = 0 \qquad (55)$$

e, daí:

$$x = \frac{X_1 \pm \sqrt{X_1^2 - 4}}{2} \qquad (56)$$

A resolução da equação (51), do grau $2p$ decorrerá, assim, da resolução de (54), do grau p, e de (55), do 2.º grau. Cada valor de X_1, obtido em (54), fornecerá dois valores de x, na fórmula (56).

Teremos, dessa forma, as $2p$ raízes da equação dada.

EXERCÍCIO I — *Calcular as raízes da equação:*

$$12x^6 - 4x^5 - 53x^4 + 53x^2 + 4x - 12 = 0 \quad (*)$$

Verifica-se logo que é *recíproca de 2ª classe,* porque os coeficientes dos termos *equidistantes* dos extremos têm valores absolutos iguais e sinais contrários. Como é do grau *par,* admitirá as raízes 1 e —1. Eliminando-as pela divisão por $x^2 - 1$, encontramos:

$$12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12 = 0$$

que é *recíproca de forma normal.*

Virá então:

$$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 41 = 0$$

ou:

$$12\,X_2 - 4\,X_1 - 41 = 0$$

Ora, de (7), tiramos $X_2 = X_1^2 - 2$. E, substituindo êsse valor, teremos a equação do 2º grau em X_1:

$$12X_1^2 - 4\,X_1 - 65 = 0$$

de onde tiraremos: $X'_1 = \frac{5}{2}$ e $X''_1 = -\frac{13}{6}$.

Substituídos êsses valores em (9), teremos as equações:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{e} \quad 6x^2 + 13x + 6 = 0$$

Na primeira, obteremos: $x_1 = 2$ e $x_2 = \frac{1}{2}$; na segunda: $x_3 = -\frac{2}{3}$ e $x_4 = -\frac{3}{2}$.

(*) Observe-se que, nas equações de 2.ª classe, de grau par, falta sempre o termo médio. É uma consequência da condição $a_k = -a_{n-k}$. No presente exemplo, deveríamos ter $a_3 = -a_3$, de onde se conclui $a_3 = 0$.

Acrescentando as raizes excluídas inicialmente, teremos: $x_5 = 1$ e $x_6 = -1$, isto é, as seis raizes da equação dada.

EXERCÍCIO II — *Calcular as raizes da equação:*

$$x^5 - 1 = 0.$$

É *recíproca de 2ª classe.* E eliminada a raiz unitária, teremos, sob a *forma normal*, a *equação recíproca:*

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Dai virá:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

ou, ainda:

$$X_1^2 + X_1 - 1 = 0$$

e, por conseguinte:

$$X_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Substituídos êsses dois valores em (10), teremos:

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\; i}{4}$$

$$z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\; i}{4}$$

$$z_3 = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\; i}{4}$$

$$z_4 = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\; i}{4}$$

e a quinta raiz, achada inicialmente, $x_5 = 1$ (*).

EXERCÍCIO III — *Determinar as condições para que a equação recíproca:*

$$x^8 + a_1 x^7 + a_2 x^6 + \ldots + a_1 x + 1 = 0$$

possa ser resolvida por meio de equações do 2º grau.

(*) Constituirá uma verificação interessante a resolução dessa equação $x^5 - 1 = 0$, trigonomètricamente (121).

Já estando sob a *forma normal*, teremos:

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + a_1\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + a_2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) +$$

$$+ a_3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

Recorrendo às expressões (7), virá então:

$$X^4_1 + a_1 X^3_1 + (a_2 - 4) X^2_1 + (a_3 - 3a_1) X_1 + (a_4 - 2a_2 + 2) = 0$$

Mas, para que a equação dada seja resoluvel por meio de equações do 2º grau, essa deverá ser *recíproca de 1ª classe.* Portanto, teremos:

$$a_4 - 2a_2 + 2 = 1$$

$$a_3 - 3a_1 = a_1$$

isto é, $a_3 = 4a_1$ e $a_4 = 2a_2 - 1$.

156 — Observação. Uma equação diz-se *recíproca generalizada*, quando é *equivalente* à *transformada* obtida pela função:

$$y = \frac{k}{x}$$

O estudo dêsse tipo geral é, em tudo, análogo ao que desenvolvemos (*).

Em particular, para $k = -1$, têm-se as *equações recíprocas* ditas *de 2.ª espécie* (**). Em relação a essas, as que estudamos, e que correspondem a $k = 1$, são chamadas de 1ª *espécie.*

(*) *Cfr.* Carnoy, "*Cours d'algèbre supérieure*", Louvain-Paris, 1892, página 256.

(**) Estudadas por Ch. de Comberousse ("*Nouvelles Annales de Mathématiques*", Paris, 1889).

6 — Cálculo das raízes inteiras. Determinação das cotas pelo método de Laguerre-Thibault. Regras de exclusão de Newton. Algoritmo de Peletarius.

157 — Determinação das cotas pelo método de Laguerre-Thibault. A simples observação da identidade.

$$P(x) \equiv (x-b)\ Q(x) + P(b)$$

que define a divisão de $P(x)$ por $x-b$, permite a resolução do problema da determinação dos intervalos onde se encontram as *raízes inteiras* de uma equação.

Com efeito, se escolhermos b de tal forma que, para $x \geq b$, tenhamos $P(x) > 0$, é claro que nenhuma raiz ultrapassará b, pois, por hipótese, o polinômio real $P(x)$ não mais se anulará para valores superiores a b.

Mas a determinação de um número b satisfazendo a essa condição é imediata. Bastará, por tentativas, procurar o divisor para o qual sejam positivos os coeficientes de $Q(x)$ e o resto de $P(b)$.

O *dispositivo de Ruffini* conduz fàcilmente ao resultado procurado.

A substituição de x por $-x$, na equação considerada, permitirá, de modo análogo, a determinação de um número a delimitando as raízes no sentido negativo.

O intervalo (a, b) assim achado conterá as raízes reais da equação.

Os números a e b são chamados *cotas*; o caminho seguido, para a determinação dos mesmos, define um método clássico, devido a Laguerre e Thibault.

EXEMPLO — *Delimitar as raízes reais da equação:*

$$3x^4 - 2x^3 - 21x^2 - 4x + 12 = 0$$

Para as positivas, teremos:

	3	— 2	— 21	— 4	12
1	3	1	—		
2	3	4	—		
3	3	7	0	—	
4	3	10	19	+	+

Como se vê, abandonam-se as indagações ao surgir o primeiro resultado negativo. Dispensamo-nos, também, dos cálculos finais, para o número 4, que representa a *cota superior das raízes positivas*. Os resultados positivos são evidentes.

Dessa forma $b = 4$.

Substituindo, agora x por $-x$, na *equação*, virá:

$$3x^4 + 2x^3 - 21x^2 + 4x + 12 = 0$$

Teremos, portanto, para as raízes negativas:

	3	2	-21	4	12
1	3	5	—		
2	3	8	—		
3	3	11	12	+	+

mostrando que $a = -3$.

Dessa forma, poderemos afirmar que tôdas as raízes reais da equação dada estarão contidas no intervalo $(-3, 4)$.

158 — Algoritmo de Peletarius. Não há regra geral para investigar as *raízes inteiras* de uma equação *de coeficientes reais ros* (*):

$$P(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0 \qquad (57)$$

será sempre possível, mediante certo número de tentativas sistemáticas, calcular tais raízes.

O problema que se apresenta é o de reduzir ao mínimo essas tentativas.

As raízes inteiras de (57), como já sabemos (**143** e **157**), deverão ser procuradas entre os divisores, positivos e negativos, do número a_m, compreendidos entre as cotas a e b de suas raízes reais.

Ora, a condição necessária e suficiente para que x_1 seja raiz de (1) *é que* tenhamos $P(x_1) = 0$, em outras palavras, que $P(x)$ seja *divisível* por $x - x_1$.

Mas, no caso das *raízes inteiras*, em vez do cálculo direto de $P(x_1)$, em geral trabalhoso (**), será preferível desdobrar essa condição em várias outras condições, necessárias em separado e suficientes em conjunto.

Dêsse modo, a exclusão de muitos divisores será conseguida sem levar a pesquisa até o fim.

(*) Inclui-se o caso dos *coeficientes fracionários*: bastaria a multiplicação por um fator conveniente para torná-los *inteiros*. Aliás, além de inteiros, poderemos sempre supor que são primos entre si.

(**) Alguns autores, entretanto, usam essa verificação direta pelo dispositivo de *Ruffini*.

Se x_1 fôr uma *raiz inteira* de (1), teremos:

$$P(x) \equiv (x - x_1)\,(b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + b_2 x^{m-3} + \dots + b_{m-2}\,x + b_{m-1})$$

onde, pela *lei de Ruffini*:

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= b_0 x_1 + a_1 \\ b_2 &= b_1 x_1 + a_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m-1} &= b_{m-2} x_1 + a_{m-1} \\ R &= b_{m-1} x_1 + a_m = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Partindo, entretanto, da última relação, oberemos, por substituições sucessivas, as expressões:

$$\left.\begin{aligned} -b_{m-1} &= \frac{a_m}{x_1} \\ -b_{m-2} &= \frac{-b_{m-1} + a_{m-1}}{x_1} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -b_1 &= \frac{-b_2 + a_2}{x_1} \\ -b_0 &= \frac{-b_1 + a_1}{x_1} = -a_0 \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

que patenteiam a possibilidade de obter os coeficientes do quociente, em ordem inversa daquela em que surgem quando se emprega a lei de Ruffini.

Apenas os sinais virão trocados.

O quadro (59) define o clássico *algoritmo de Peletarius* (*).

(*) Indevidamente denominado *regra de Clairaut*, que apenas fêz uso generalizado das *regras de exclusão de Newton* (**187**). (Cfr. Clairaut, "*Elementos de álgebra*", trad. Villeroy, Rio, pg. 1909). A Peletier (*Peletarius*, lat.) deve-se o teorema em que se baseia (**188**); daí a denominação acima citada em Rey Pastor.

Observando que, em (58), são *inteiros*, por hipótese, x_1 e os coecientes da equação dada, concluiremos que os números, b_0, b_1, b_2, ..., b_{m-2} e b_{m-1} só poderão ser, também, *inteiros*.

Dêsse modo, na aplicação do *algoritmo de Peletarius*, o ensaio de um divisor será abandonado, ao surgir a primeira divisão inexata.

Aliás, mesmo que se obtenham quocientes inteiros, o número não será raiz, se não fôr satisfeita a última condição expressa em (59).

Determinada, entretanto, uma raiz qualquer, passaremos a operar com os novos coeficientes obtidos; os sinais invertidos em nada influirão. E o ensaio de cada uma deverá ser repetido, para a verificação de sua ordem de multiplicidade.

159 — Regras de exclusão de Newton. A fim de reduzir o quanto possível o número de experimentações, poderemos aplicar, de antemão, certos critérios de exclusão, que traduzem condições *necessárias, mas não suficientes*, para que um número seja raiz.

Tomando por exemplo uma *raiz inteira* x_1, virá:

$$P(x) = (x - x_1)\,Q(x)$$

onde, como já vimos, são *inteiros* os coeficientes do polinômio $Q(x)$.

Para os valores 1 e —1 de x, tiraremos, respectivamente (*).

$$\frac{P(1)}{x_1 + 1} = -\,Q(1)$$

$$\frac{P(-1)}{x_1 + 1} = -\,Q(-1)$$

relações onde os segundos membros são, forçosamente, *números inteiros*.

Portanto, *um número inteiro que, diminuído de uma unidade, não divide* P(1) *ou que, aumentado de uma unidade, não divida* P(—1), *não poderá ser raiz*; deveremos excluí-lo.

Tais são as clássicas regras de exclusão de Newton ((**).

(*) De um modo geral, teremos $\frac{P(n)}{x_1 - n} = -\,Q(n)$, sendo n um inteiro qualquer; poderemos, portanto, ampliar as *regras de exclusão de Newton*, à vontade.

(**) Também atribuídas a Wassenaar e a Bézout.

EXERCÍCIO — *Calcular as raízes racionais da equação* (*):

$$x^5 - 4x^4 - 12x^3 - 31x^2 - 188x - 252 = 0.$$

Os divisores de 252 são: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 7, ± 9, ± 12, ± 14, ± 18, ± 21, ± 28, ± 36, ± 42, ± 63, ± 84, ± 126, ± 252.

Para cotas, temos, entretanto (**157**): $b = 8$ e $a = -4$. Restarão, dessa forma, os divisores: ± 1, ± 2, ± 3, 4, 5, 6 e 7. Apliquemos, então, as regras de exclusão de Newton.

Teremos: $P(1) = -486$ e $P(-1) = -88$. Os divisores ficarão reduzidos a 3, 7 e -2 (**).

Os cálculos serão dispostos como se vê abaixo:

1	-4	-12	-31	-188	-252	
					-84	3
	-1	-3	-9	-32	-36	7 (1.ª raiz)
						7
		1	1	7	18	-2 (2.ª raiz)
			-1	1	-9	-2 (3.ª raiz)
						-2

As *raízes racionais* são, portanto: 7, -2, -2. E o próprio quadro nos mostra que, eliminadas as mesmas, obteremos a equação:

$$x^2 - x + 9 = 0$$

que, como se vê, admite *raízes complexas*, que ainda poderíamos calcular.

160 — Observação. O cálculo das *raízes fracionárias* reduz-se, sem dificuldade, ao das *inteiras*, mediante uma *transformação multiplicativa* que conduza a uma equação em que se tenha $a_0 = 1$.

EXEMPLO — *Calcular as raízes racionais da equação:*

$$3x^4 - 2x^3 - 21x^2 - 4x + 12 = 0.$$

Tomando $y = 3x$, virá a *transformada*:

$$y^4 - 2y^3 - 63y^2 - 36y + 324 = 0$$

que não poderá admitir raízes racionais que não sejam inteiras, porque $a_0 = -1$.

(*) Visto que se tem $a_0 = 1$, só poderão ser inteiros (**144**).

(**) Se tivéssemos, por exemplo, $P(1) = 0$, excluindo a raiz $x_1 = 1$, abaixaríamos o grau da equação. O mesmo se aplicaria, se fôsse $P(-1) = 0$.

Calculando-as, encontraremos: $y_1 = 2$, $y_2 = 9$, $y_3 = -3$ e $y_4 = -6$.

Para a equação dada, as raízes serão: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$ e $x_4 = -2$.

OBSERVAÇÃO — Em geral, é cômodo eliminar as *raízes inteiras* da equação dada. Dessa forma, evitam-se os coeficientes muito elevados que, às vêzes, se apresentam na *transformada* e, ao mesmo tempo, obtêm-se equações de menor grau.

O cálculo das *raízes fracionárias* poderá, entretanto, ser feito diretamente e simultâneamente com o das *raízes inteiras*.

Exercícios propostos

1. Desenvolver os polinômios abaixo, segundo as potências de $x - 2$:

I) $7x^5 - 40x^3 + 14x^2 + 4x + 33$;
II) $x^4 - 1$;
III) $x^4 - 10x^2 + 5$;
IV) $4 + 6x - 5x^2 - 2x^3$.

Resp.: I) $7(x-2)^5 + 70(x-2)^4 + 240(x-2)^3 +$
$+ 334(x-2)^2 + 140(x-2) + 1$;
II) $(x-2)^4 + 8(x-2)^3 + 24(x-2)^2 +$
$+ 32(x-2) + 15$;
III) $(x-2)^4 + 8(x-2)^3 + 14(x-2)^2 -$
$- 8(x-2) - 19$;
IV) $-2(x-2)^3 - 17(x-2)^2 - 38(x-2) - 20$.

2. Desenvolver os polinômios abaixo, segundo as potências de $y + 1$:

I) $6y^5 - 5y + 2y^3 + 4y - 7$;
II) $-4y^5 + 2y^3 - 2y + 5$;
III) $y^3 + 1$;
IV) $-2y^2 + 6y - 5$.

Resp.: I) $6(y+1)^5 - 30(y+1)^4 + 55(y+1)^3 -$
$- 43(y+1)^2 + 15(y+1) - 10$;
II) $-4(y+1)^5 + 20(y+1)^4 - 38(y+1)^3 +$
$+ 34(y+1)^2 - 16(y+1) + 9$;
III) $(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 3(y+1)$;
IV) $-2(y+1)^2 + 10(y+1) - 13$.

3. Obter o desenvolvimento do polinômio $3\varphi^5 - 44\varphi^2 + 5$:

I) para $\varphi = 2 - \delta$;
II) para $\varphi = -1 + \delta$;
III) para $\varphi = 3 + \delta$.

Resp.: I) $-3\delta^5 + 30\delta^4 - 120\delta^3 + 196\delta^2 - 64\delta - 75$;
II) $3\delta^5 - 15\delta^4 + 74\delta^2 + 103\delta - 42$;
III) $3\delta^5 + 45\delta^4 + 270\delta^3 + 766\delta^2 + 951\delta + 388$.

4. Calcular o valor numérico do polinômio $z^4 + 3z^2 - 6z + 10$:

I) para $z = 1 + i$;
II) para $z = -1 - 2i$.

Resp.: I) 6; II) 6.

5. Calcular as raizes da equação $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$, sabendo que estão em progressão aritmética.

Resp.: -2, 1 e 4.

6. Calcular as raizes da equação $3x^3 - 13x^2 + 18x - 8 = 0$, sabendo que uma das raizes é média harmônica das outras.

Resp.: 1, $\dfrac{4}{3}$ e 2.

7. Determinar a condição para que a equação $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ tenha duas raizes cuja soma seja a unidade.

Resp.: $(a_0 + a_1 + a_2)(a_0 + a_1) - a_0 a_3 = 0$.

8. Obter, para as equações abaixo, as *transformadas* desprovidas do segundo têrmo.

I) $ax^2 + bx + c = 0$;
II) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Resp.: I) $ax^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \left(h = \dfrac{b}{2a}\right)$

II) $ax^3 + \left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)x + \left(d - \dfrac{bc}{3a} + \dfrac{2b^3}{27a^2}\right) = 0 \left(h = \dfrac{3a}{b}\right)$

9. Obter, de um modo geral, para a equação $a_0x^m + a_1x^{m-1} = + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$, o valor de h que determina, na *transformada de raizes diminuidas de h*, o desaparecimento do segundo têrmo.

Resp.: $h = -\dfrac{a_1}{ma_0}$

10. Dada a equação $2x^4 - 3x^2 + 8x - 10 = 0$, obter:

I) a transformada de raizes aumentadas de 1;
II) a transformada de raizes divididas por 2;
III) a transformada de raizes simétricas;
IV) a transformada de raizes inversas.

Resp.: $2x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 6x - 9 = 0$; II) $16x^4 - 6x^2 + 8x - 5 = 0$; III) $2x^4 - 3x^2 - 8x - 10 = 0$; IV) $10x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2 = 0$.

11. Dada a equação $k^3 - 3k^2 - 9k + 5 = 0$, obter:

I) a transformada desprovida do segundo têrmo;
II) a transformada desprovida do terceiro têrmo.

Resp.: I) $k^2 - 12k - 6 = 0$; II) $k^3 - 6k^2 - 22 = 0$ ou $k^3 - 6k^2 + 10 = 0$.

12. Obter, para as equações abaixo, transformadas que não possam admitir raizes fracionárias:

I) $4t^3 - 12t^2 + 11t - 3 = 0$;
II) $2a^3 - 11a^2 + 18a - 9 = 0$.

Resp.: I) $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$; II) $a^3 - 11a^2 + 36a - 36 = 0$.

13. Obter para a equação $\varrho^3 - 9\varrho^2 + 15\varrho + 2 = 0$, a transformada desprovida do têrmo do 1.º grau.

Resp.: $\varrho^3 - 6\varrho^2 + 9 = 0$ ou $\varrho^3 + 6\varrho^2 - 23 = 0$

14. Reduzir à *forma normal* as *equações recíprocas*:

I) $x^6 - 3x^5 + x^4 - x^2 + 3x - 1 = 0$;
II) $5x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$.

Resp.: I) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$; II) $5x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 5 = 0$.

15. Calcular as *raizes racionais* das equações:

I) $6x^6 - 7x^5 - 76x^4 + 91x^3 + 190x^2 - 252x + 72 = 0$;
II) $3y^4 - 2y^3 - 21y^2 - 4y + 12 = 0$.

Resp.: I) $-3, -2, \dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{3}, 2, 3$; II) $-2, -1, \dfrac{2}{3}, 3$.

ÍNDICE

PÁGS.

I — *Conceito de função; representação cartesiana; reta e círculo; noção intuitiva e de continuidade.*

1. Conceito elementar de variável e de função. Variável progressiva e variável contínua; intervalos. Noção intuitiva de limite de uma sucessão; exemplos clássicos elementares; convergência . . . 7
2. Funções elementares; classificação. Representação cartesiana de uma função e equação de uma curva. Curvas geométricas e curvas empíricas; noção intuitiva de continuidade. Representação gráfica de funções usuais; função exponencial, função logarítmica e funções trigonométricas diretas. Acréscimo de uma função num ponto; funções crescentes e funções decrescentes. Tangente; inclinação da tangente . . . 13
3. Limite de variáveis e de funções; limites infinitos. Propriedades fundamentais. Exemplos elementares de descontinuidade de uma função em um ponto. Descontinuidade das funções racionais fracionárias . . . 30
4. A função linear e a linha reta em coordenadas cartesianas. Parâmetro angular e parâmetro linear. Formas diversas da equação da linha reta. Representação paramétrica; área de um triângulo em função das coordenadas dos vértices. Os problemas clássicos de inclinação, interseção, passagem e distâncias, relativos à linha reta . . . 50
5. A equação geral do 2.º grau com duas variáveis e a circunferência de círculo em coordenadas cartesianas. Formas diversas da equação da circunferência de círculo. Interseção de retas e circunferências . . . 78

II — *Noções sôbre derivadas e primitivas; interpretações; aplicações.*

1. Definição da derivada em um ponto; notações; derivada infinita. Interpretação geométrica e cinemática da derivada. Diferença e diferencial; interpretação geométrica. Funções derivadas. Derivação sucessiva . . . 85
2. Regras de derivação; derivada de uma constante; de uma função de função; de funções inversas; da soma, do produto e do quociente de funções. Aplicação à derivação de funções elementares . . . 92
3. Aplicação da teoria das derivadas ao estudo da variação de uma função. Funções crescentes e funções decrescentes; máximos e mínimos relativos; interpretação geométrica . . . 104
4. Funções primitivas; integral definida; constante de integração. Primitivas imediatas; regras simples de integração . . . 119
5. Integral definida. Aplicação ao cálculo de áreas e de volumes; exemplos elementares . . . 123

III — *Introdução à teoria das equações; polinômios; propriedades; divisibilidade por $x \pm a$; problemas de composição, transformação e pesquisa de raízes; equações de tipos especiais.*

1. Polinômios de uma variável; identidade. Aplicação ao método dos coeficientes a determinar. Divisibilidade de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Ruffini. Fórmula de Taylor para os polinômios; algoritmo de Ruffini-Horner . . . 139

PÁGS.

2. Polinômios e equações algébricas em geral; raízes ou zeros. Conceito elementar de número complexo; forma binomial; complexos conjugados; módulo; representação geométrica. Operações racionais. Decomposição de um polinômio em fatores binômios; número de raízes de uma equação; raízes múltiplas e raízes nulas. Raízes complexas conjugadas. Indicação sôbre o numero de raízes reais contidas em um dado intervalo; teorema de Bolzano; conseqüências 145
3. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação; aplicação à composição das equações. Propriedades das raízes racionais inteiras e fracionárias 173
4. Transformação das equações; transformações de primeira ordem aditivas, multiplicativas e recíprocas 186
5. Equações recíprocas; classificação; forma normal; abaixamento do grau 187
6. Cálculo das raízes inteiras. Determinação das cotas pelo método de Laguerre-Thibault. Regras de exclusão de Newton. Algoritmo de Peletarius 195

N.º 4.550 — Oficinas Gráficas da Livraria Francisco Alves

Extrato do Catálogo da Livraria Francisco Alves

FAUSTO BARRETO e CARLOS LAET

Antologia Nacional (adaptada aos cursos clássico e científico por Daltro Santos)

BLANCHE THIRY JACOBINA

Le Français au Second Cycle

JOSÉ OITICICA

Manual de Análise
Manual do Estilo

E. ROXO, R. PEIXOTO, H. CUNHA e C. DACORSO

Matemática — 2.º Ciclo — Primeira Série
" — " " — Segunda "
" — " " — Terceira "

BASÍLIO DE MAGALHÃES

História do Brasil (para os Cursos Clássico e Científico
História administrativa e econômica do Brasil

MELLO CUNHA

Desenho Geométrico

WALDEMIRO POTSCH

Zoologia
Botânica

MARIO FACCINI

Física — 1.ª Série

OSVALDO SERPA — MACHADO DA SILVA

An Advanced English Course (Cursos Clássico e Científico — (1.ª Série)
An Advanced English Course (Cursos Clássico e Científico — (2.ª Série)

R. S. HULL e MACHADO SILVA

English Litterature

HENRI DE LANTEUIL

O Francês do exame de licença
Manuel de Français (Second Cycle)

MATHILDE MATTARAZZO GARGIÚLO

Pagine Italiane

Remetemos nosso catálogo gratis, a quem o

Cr$