UNIVERSIDADE DO RECIFE
FACULDADE DE FILOSOFIA DE PERNAMBUCO
CURSO DE MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO À TEORIA DAS

CÔNICAS

MANUEL ZALUAR NUNES
MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO

PUBLICAÇÃO DO DIRETÓRIO ACADÊMICO
RECIFE — 1957

UNIVERSIDADE DO RECIFE
FACULDADE DE FILOSOFIA DE PERNAMBUCO
CURSO DE MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO À TEORIA DAS

CÔNICAS

MANUEL ZALUAR NUNES
MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO

PUBLICAÇÃO DO DIRETÓRIO ACADÊMICO
RECIFE — 1957

- P R E F Á C I O -

*

A pedido dos alunos acedeu o Dr. Manfredo Perdigão do Carmo, Assistente da Universidade do Recife, a redigir algumas das lições feitas em 1956 e 1957 na cadeira de GEOMETRIA ANALÍTICA E PROJETIVA a meu cargo na Faculdade de Filosofia de Pernambuco.

Segui nessas lições o excelente curso de Geometria Analítica do Prof. F. Conforto da Universidade de Roma.

Os elementos da teoria geral das cônicas que se apresenta, são precedidos na exposição de outros assuntos : coordenadas cartesianas homogêneas, elementos imaginários em Geometria Analítica e estudo elementar das cônicas como lugares geométricos de pontos. Os conhecimentos de Matemática Elementar dos alunos e o tempo de que se dispõe não permite infelizmente tratar de algumas propriedades interessantes e focar outros aspectos da teoria das cônicas.

O Dr. Manfredo Perdigão, que vem com muita dedicação, inteligência e competência cooperando como meu Assistente nas três cadeiras de Geometria da Faculdade, ampliou as lições expostas com algumas demonstrações, notas históricas e exercícios dados na aula prática.

Ao Prof. Newton Maia e ao Dr. Roberto Ramalho nossos agradecimentos pelas observações na leitura do manuscrito. Ao aluno Rands Barros o nosso reconhecimento pela gentileza de datilografar o original. Finalmente ao Dire-

tório Acadêmico da Faculdade de Filosofia os melhores agradecimentos por ter-se encarregado de mimeografar o trabalho.

Manuel Zaluar Nunes
Prof. da Universidade do Recife
Novembro de 1957

- C A P Í T U L O I -

§ 1 - Introdução dos pontos impróprios; plano projetivo.

É uma proposição fundamental da geometria que 2 retas de um plano se interceptam em um ponto, exceto se as retas são paralelas. O fato de termos de abrir uma exceção num enunciado tão simples e fundamental, traz como consequência uma progressiva complicação em uma certa classe de problemas muito importantes.

Suponhamos, por exemplo, que dadas duas retas (r) e (r') e um ponto O não pertencente a nenhuma das retas, façamos corresponder a cada ponto P de (r) o ponto P' de (r'), obtido como intercessão de OP com (r') (fig. 1). Essa operação é chamada projeção central de (r) sôbre (r'). O ponto O é dito centro da projeção. Podemos então dizer que

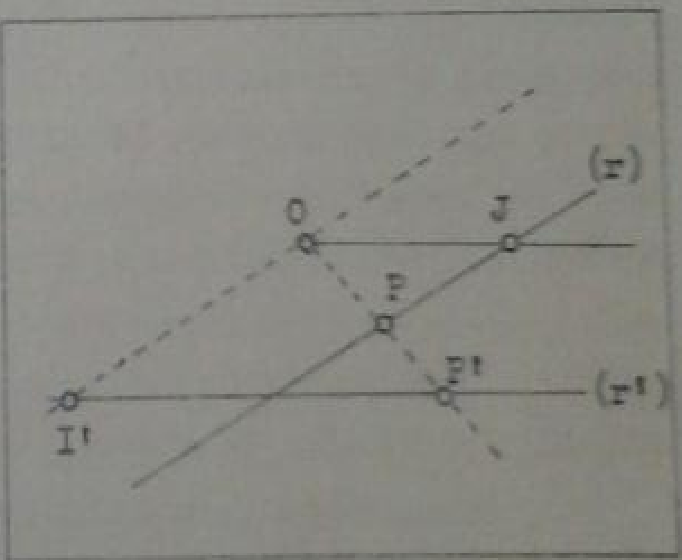

Fig. 1

a projeção central de (r) sôbre (r') faz corresponder a cada ponto de (r) um ponto de (r'). É entretanto, necessário abrir uma exceção nesse enunciado. Ao ponto J de (r), tal que OJ seja paralelo a (r') não corresponde nenhum ponto de (r'), precisamente pela razão que OJ não tem nenhum ponto em comum com (r').

Ao leitor já é familiar o fato de que certas assimetrias nos enunciados matemáticos levaram a criação de novos entes que permitiram aos resultados se exprimirem com maior generalidade. Assim, o fato de dados 2 números naturais a e b ser possível efetuar a operação a - b, exceto quando a ≤ b, levou a criação dos números negativos. No campo dos números inteiros, positivos e negativos, é sempre possível efetuar a operação a - b. Analogamente o fato de dado o número real a ser possível a operação $\sqrt{a}$, exceto quando é negativo, levou a criação dos números complexos. No campo dos números complexos é sempre possível a operação de radiciação. Quando as exceções afetam enunciados de importância fundamental, a simplificação trazida pela introdução dos novos entes vem refletir profundamente na estrutura dos resultados posteriores. Assim no campo complexo, tôda equação algébrica de coeficientes reais, de gráu n, tem n raízes. Êsse resultado no campo real apresenta tantas exceções que o torna quasi inexprimível.

Estamos, no caso da intersessão de duas retas, diante de um problema semelhante. O enunciado é fundamental e afeta todos os problemas relacionados com projeções, problemas cuja importância para a geometria foi posta em fôco por Poncelet (francês 1788,1867). Será útil introduzir no plano, novos pontos de modo que o enunciado fundamental referido, e consequentemente todos os que dele dependem , possa ser expresso sem restrições.

Ora, a dificuldade radica precisamente na inexistência de pontos de intercessão de retas paralelas. O processo evidente de contornar a dificuldade consiste em criar êsses "pontos".

Procederemos da maneira seguinte. Fixada no plano uma direção traçamos tôdas as retas nessa direção. Não existe no plano nenhum ponto comum a essas retas (fig. 2). Juntemos então ao plano um novo ponto e diremos que a propriedade característica dêsse ponto é ser comum a tôdas as retas naquela direção.

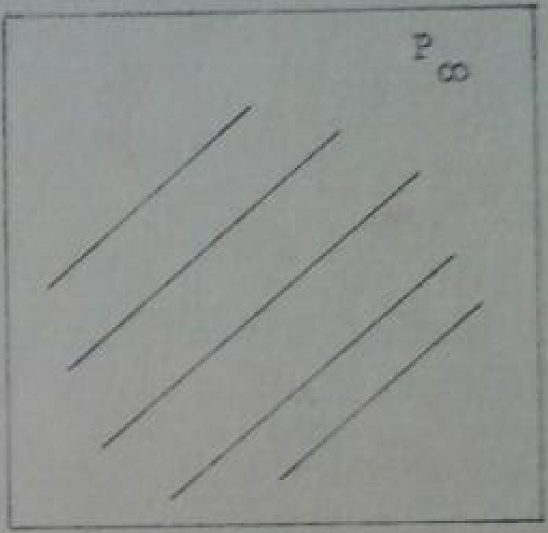

Fig. 2

Êsse novo ponto será chamado de ponto impróprio , P_∞, em oposição aos já existentes ditos próprios. Embora os pontos impróprios não tenham uma interpretação tão a vista como os pontos próprios, sua definição lógica permite-nos trabalhar com êles perfeitamente a vontade. É conveniente lembrar que a verdade das proposições geométricas não depende das figuras, que servem unicamente de guia à intuição, mas dos postulados fundamentais sôbre os quais se apoia o raciocínio. A cada direção do plano faremos corresponder, da maneira indicada um ponto impróprio. Ao plano, considerado com os pontos impróprios, chamaremos de plano projetivo em oposição ao plano dos pontos próprios, dito euclideano.

Em base ao que foi estabelecido, podemos agora dizer que duas retas de um plano projetivo têm sempre um ponto em comum. Não há restrições ao enunciado. Si as retas forem paralelas o ponto é impróprio, caso contrário o ponto é próprio. Anàlogamente no plano projetivo uma projeção central entre as retas (r) e (r') (fig. 1) estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos de (r) e (r'). Não há restrições. Ao ponto J corresponde o ponto impróprio de (r'). O ponto I' é o correspondente do ponto impróprio de (r). Si, em particular, o centro da projeção é um ponto impróprio, obtemos a conhecida projeção paralela (fig. 3).

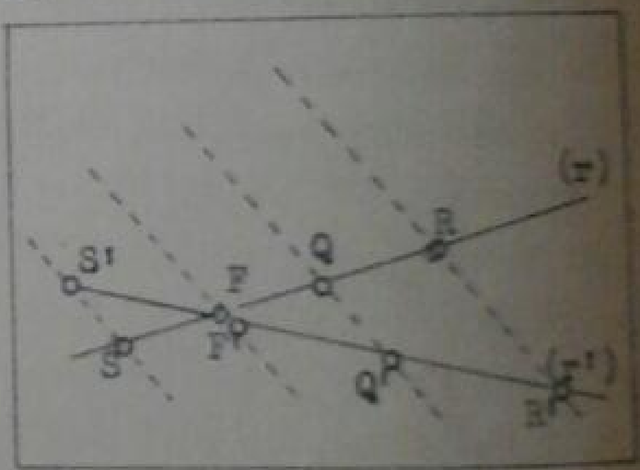

Fig. 3

Observa-se nesse caso, a repetição de uma situação típica já mencionada quando tratamos dos números complexos. A criação dos pontos impróprios permitiu dar ao enunciado das projeções uma generalidade não prevista. Um outro exemplo dessa situação aparece quando dizemos que no plano projetivo dois pontos determinam uma reta. Si em particular um ponto é impróprio, obtemos a conhe representação que sirva igualmente bem para os pontos próprios e impróprios. Adotaremos a seguinte definição.

Definição 1.2.1 - Ao ponto P de coordenadas cartesianas x, y, faremos corresponder três números x_1, x_2, x_3, não simultâneamente nulos, tais que $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$. Os números x_1, x_2, x_3 são chamados coordenadas homogêneas de P, relativamente ao sistema cartesiano dado.

Observe que se (x_1, x_2, x_3) é um terno de coordenadas para um ponto P, (kx_1, kx_2, kx_3), qualquer que seja k real e não nulo, são ainda coordenadas homogêneas do mesmo ponto P. Quer dizer, os três números x_1, x_2, x_3 são determinados a menos de um fator constante. Por exemplo o ponto $P(5,3)$ tem por coordenadas homogêneas $(5,3,1)$ ou $(10,6,2)$ ou $(30,18,6)$ etc.

Como serão representados em coordenadas homogêneas os pontos impróprios, e como serão por elas diferenciados, os pontos impróprios de direções distintas? Seja P um ponto de coordenadas cartesianas x, y e de coordenadas homogêneas x_1, x_2, x_3. Determinemos a reta OP, em que O é a origem do sistema cartesiano (fig. 5). Essa reta tem coeficiente angular $\frac{y}{x} = \frac{x_2}{x_1}$. Si P se desloca sôbre OP para o ponto impróprio P_∞ da direção de OP, $\frac{x_2}{x_1}$ permanece constantemente igual ao coeficiente angular de $\overline{OP}$ e x_3 tende para zero. Concluimos então que o ponto impróprio da direção de coeficiente angular $\frac{x_2}{x_1}$ é representado em coordenadas homogêneas por $(x_1, x_2, 0)$. Por exemplo, o ponto impróprio do eixo OX é representado por (1, 0, 0). Ainda (1,2, 0) e (2, 4, 0) representam um mesmo ponto impróprio, a saber, o ponto impróprio da direção de coeficiente angular igual a 2.

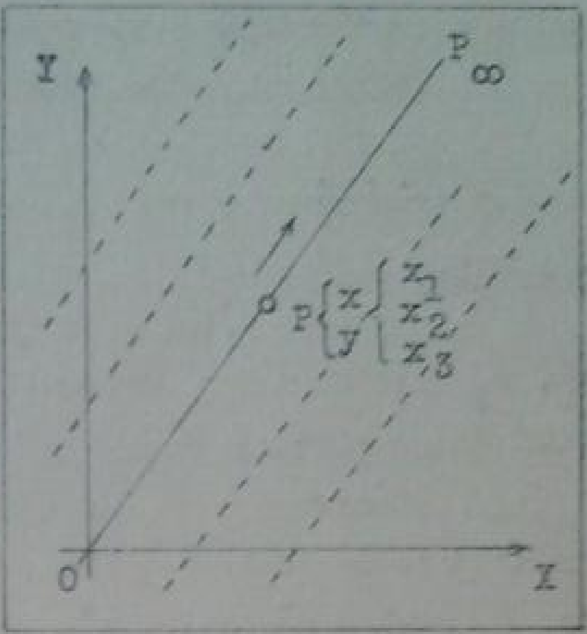

Fig.

O raciocínio acima não tem lugar si a direção considerada for a do eixo OY. Porém nesse caso vê-se diretamente e sem dificuldade que o ponto impróprio é (0, 1, 0).

Considere uma reta no plano projetivo. Considere o plano euclideano obtido dêsse plano projetivo, isto é, o plano obtido "extraindo" os pontos impróprios. Seja nesse plano euclidiano $ax + by + c = 0$ (1.2.1), a e b não simultâneamente nulos, a equação da reta dada relativamente a um sistema de coordenadas XOY. A equação (1.2.1) é portanto satisfeita pelos pontos próprios da reta e sòmente por êsses. Introduzindo coordenadas homogêneas a equação (1.2.1) se transforma em $a(\frac{x_1}{x_3}) + b(\frac{x_2}{x_3}) + c = 0$ ou, como $x_3 \neq 0$, $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ (2.2.1). Conside ro a equação (2.2.1) no plano projetivo, o que equivale a levantar a restrição $x_3 \neq 0$. Nessas condições a equação (2.2.1) é não só satisfeita pelos pontos próprios da reta dada, mas ainda pelo único ponto impróprio $(1, -\frac{a}{b}, 0)$, ponto impróprio da reta dada. A equação (2.2.1) é então a equação da reta dada no plano projetivo. Concluímos

<u>Teorema 1.2.1</u> - <u>A equação $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, a e b não simultâneamente nulos, representa no plano projetivo uma reta cujos pontos próprios são dados em coordenadas cartesianas pela equação $ax + by + c = 0$.</u>

Si a e b, são simultâneamente nulos e $c \neq 0$, a equação (2.2.1) reduz-se a $x_3 = 0$, isto é, representa o lugar geométrico dos pontos impróprios do plano projetivo. Si queremos que ainda nesse caso a equação (2.2.1) represente uma reta devemos convencionar que os pontos impróprios "enchem" uma reta do plano projetivo que será chamada <u>reta imprópria</u>, de equação $x_3 = 0$. Essa convenção, que se revelará extremamente útil, permite afirmar que tôda equação do 1º gráu em coordenadas homogêneas cujos coeficientes não sejam todos nulos, representa no plano projetivo uma reta (própria ou imprópria).

Mais geralmente, seja um lugar geométrico no plano euclideano representado pela equação algébrica do gráu n $\sum_{rs} a_{rs}x^r y^s = 0$, $r + s \leq n$, em coordenadas cartesianas, ou em coordenadas homogêneas por $\sum_{rs} a_{rs}x_1^r x_2^s x_3^{n-(r+s)} = 0$ (3.2.1) em que $x_3 \neq 0$. A equação (3.2.1) considerada no plano projetivo representa um lugar geométrico cujos pontos próprios são os pontos do lugar geométrico dado no plano euclideano. É natural dar a êsse lugar geométrico no plano projetivo a mesma denominação que tinha no plano euclideano. Assim o lugar geométrico no plano projetivo cujos pontos próprios são os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ é ainda chamado hipérbole e representado por $x_1^2 - x_2^2 = x_3^2$. No plano projetivo essa hipérbole possue os pontos impróprios $(1,1,0)$ e $(1,-1,0)$ como se verifica fàcilmente.

Note que a equação (3.2.1) tem como primeiro membro um polinômio homogêneo, o que justifica a denominação de coordenadas homogêneas.

O teorema seguinte fornece uma forma de representação da reta em coordenadas homogêneas de que faremos uso no capítulo II.

Teorema 2.2.1 - As equações de uma reta que passa por $P'(x_1', x_2', x_3')$ e $P''(x_1'', x_2'', x_3'')$ são dadas por $x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1''$, $x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2''$, $x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3''$ em que $P(x_1\ x_2\ x_3)$ é o ponto corrente da reta, λ e μ são números reais que determinam a posição do P sôbre a reta.

Demonstração: Seja $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ (4.2.1) a reta procurada. Como ela passa por P' e P'' o sistema constituido de (4.2.1), $a_1x_1' + a_2x_2' + a_3x_3' = 0$ (5.2.1) $a_1x_1'' + a_2x_2'' + a_3x_3'' = 0$ (6.2.1) admite uma solução não nula, isto é, existem números a_1, a_2, a_3 não todos nulos, que satisfaçam o sistema.

Como o sistema é homogêneo isso equivale a que

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0 .$$

Mas a nulidade de Δ implica na existência de números λ e μ tais que

$$x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1''$$
$$x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2''$$
$$x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3''.$$

A medida que $P(x_1\ x_2\ x_3)$ percorre a reta os números λ e μ variam e é evidente que para cada par λ, μ há um ponto sôbre a reta, o que termina a demonstração.

<u>Observação:</u> Note que os números λ e μ são determinados a menos de um fator constante. O ponto determinado sôbre a reta pelo par λ, μ é o mesmo que o determinado por $k\lambda$, $k\mu$ sendo k um número real não nulo.

EXERCÍCIOS

1)- Determinar coordenadas homogêneas para os pontos seguintes $(0,0)$ $(-2,3)$ $(\frac{2}{3}, \frac{3}{5})$ $(0,1)$.

2)- Determinar coordenadas homogêneas para o ponto impróprio da direção cujo coeficiente angular é $3/4$.

3)- Determinar as coordenadas não homogêneas, se existem, dos pontos seguintes: $(2,4,-1)(3,4,2)(2,1,0)(0,1,0)$.

4)- Que representam no plano projetivo as seguintes equações?

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 = 0$$
$$x_2 - 3x_3 = 0$$
$$x_1^2 - x_2^2 = 4x_3^2$$
$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$$
$$3x_1^2 + 2x_2^2 = x_3^2$$
$$x_1^2 x_3 = x_2^2$$
$$x_2 x_3^2 = x_1^3$$
$$x_1^2 = 8x_1 x_2$$

5)- Determinar os pontos impróprios dos lugares geométricos representados no Ex. 4.

6)- Demonstre que três retas $a^i_1 x_1 + a^i_2 x_2 + a^i_3 x_3 = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ são concorrentes se e só se

$$a^1_j = \lambda a^2_j + \mu a^3_j$$

$$j = 1,2,3 .$$

(<u>Sugestão</u>: Utilize a técnica de demonstração do teorema 2.2.1).

- C A P Í T U L O II -

§ 1.2 - Definição de cônica.

As cônicas constituem um dos assuntos mais estudados da Matemática. Nos trabalhos de Matemática dos Gregos que foram preservados até nós, encontra-se uma classe de curvas, definidas como seções planas de um cone de revolução. Estas seções cônicas foram denominadas por Apolônio de Perga (II A.C.) simplesmente de cônicas e por êle detalhadamente estudadas em oito livros. No livro I encontra-se a classificação das cônicas em elípse, hipérbole e parábola e são deduzidos os respectivos processos de geração. (*)

Séculos mais tarde, quando os progressos da Álgebra permitiram o aparecimento da Geometria Analítica, isto é, a redução de problemas de Geometria a problemas de Álgebra, verificou-se que as cônicas de Apolônio satisfaziam num plano cartesiano a uma equação algébrica, de coeficientes reais, do 2º gráu; reciprocamente, tôda equação dêsse tipo, se é satisfeita por pontos reais, representa uma cônica no sentido de Apolônio. Desde então, no tratamento analítico das cônicas, elas são definidas como curvas do 2º gráu.

(*)- Para maiores detalhes V. por exemplo, História de la Matemática - REY PASTOR - Espasa Calpe 1951 - pgs. 85 a 92.

Por influência da Geometria Projetiva, outras definições de cônicas foram propostas. Não faremos menção delas. Nosso ponto de partida será a equação do 2º gráu num plano que consideraremos extendido de modo a conter os pontos impróprios. Adotaremos, portanto, a definição:

<u>Definição 1.1.2</u>- A equação $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 +$
$$+ 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1.1.2)$$
em que os coeficientes a_{ij} são supostos reais, representa no plano um lugar geométrico que chamaremos cônica.

O uso de índices para distinguir os coeficientes da equação (1.1.2) e o fator 2 usado em alguns deles apresenta vantagens para a simetria das fórmulas, como veremos oportunamente.

Introduzindo coordenadas homogêneas $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ a equação (1.1.2) fica $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 +$ $+ a_{22}x_2^2 + 2\,a_{13}x_1x_3 + 2\,a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$ (2.1.2) que fazendo $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$, poderá tomar a forma mais simétrica $a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 +$ $+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 = a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3x_3 =$ $= 0$, (3.1.2). Note-se que em (3.1.2) o coeficiente de x_ix_j é a_{ij}. Em base a essa observação (3.1.2) pode ser mais compactamente escrita $\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$, em que $a_{ij} = a_{ji}$. O determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |a_{ij}| \text{ é dito determinan-}$$

to da cônica. Utilizaremos com freqüência a expressão
(2.1.2) quando nos referimos a uma cônica.

É útil notar que a definição analítica adotada con
tém alguma coisa mais que a definição sintética de Apolô -
nio (*). Com efeito, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ é uma cônica no
sentido analítico. Entretanto sua representação no plano
real é impossível. Nenhum ponto real satisfaz a equação
dada. Sòmente no plano complexo podemos dar uma interpreta
ção a essa equação. Resulta, que das cônicas aquí considera-
das, algumas, ditas cônicas complexas, não terão inter-
pretação geométrica como seções planas de um cône.

Por outro lado, limitando-nos ao plano real, a de-
finição analítica contém alguns casos limites da definição
de Apolônio. Primeiro, se a expressão (1.1.2) puder ser es
crita na forma $(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0$, em que
os coeficientes são reais, representa duas retas reais,
distintas ou coincidentes. Isso corresponde geomètricamen-
te ao caso em que o plano contém o vértice do cône e lhe é
secante (duas retas distintas) ou tangente (duas retas coin
cidentes). Segundo, a equação (1.1.2) pode se reduzir a
$x^2 + y^2 = 0$. No plano real, isso representa um único pon
to. Corresponde ao caso em que o plano passa pelo vértice

(*)- Por método sintético entendemos, em oposição aos méto
dos analíticos, aqueles que não fazem uso de nenhum
dos recursos da Álgebra e da Análise, apoiando-se ex-
clusivamente nos postulados geométricos fundamen -
tais.

do cône e não o encontra em nenhum outro ponto.

De uma maneira mais geral, tôda vez que a decomposição de (1.1.2) em fatôres do 1º gráu, reais ou complexos, puder ser feita diremos que a cônica é degenerada. Veremos em breve que as cônicas degeneradas se caracterizam por uma condição muito simples sôbre os coeficientes de (1.1.2).

§ 2.2 - Intercessão de uma cônica com uma reta.

Vamos analizar o que se passa quando uma reta do plano intercepta a cônica (1.1.2). Antes introduziremos algumas notações que serão úteis para simplificar os cálculos. Seja $\bar{P}(\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3)$ um ponto do plano. Escreveremos abreviadamente

$$a_{11}\bar{x}^2 + 2\,a_{12}\bar{x}_1\bar{x}_2 + a_{22}\bar{x}_2^2 + 2\,a_{13}\bar{x}_1\bar{x}_3 + 2\,a_{23}\bar{x}_2\bar{x}_3 + a_{33}\bar{x}_3^2 = f(\bar{P})$$

$$a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3 = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}\bar{x}_j = f_1(\bar{P})$$

$$a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{23}\bar{x}_3 = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}\bar{x}_j = f_2(\bar{P})$$

$$a_{31}\bar{x}_1 + a_{32}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3 = \sum_{j=1}^{3} a_{3j}\bar{x}_j = f_3(\bar{P})$$

Ainda, se $P'(x_1'\ x_2'\ x_3')$ e $P''(x_1''\ x_2''\ x_3'')$ são dois pontos do plano, escreveremos

$$f_1(P')\,x_1'' + f_2(P')\,x_2'' + f_3(P')\,x_3'' = \varphi(P'P'')$$

$$f_1(P'')\,x'_1 + f_2(P'')\,x'_2 + f_3(P'')\,x'_3 = \varphi(P''P')$$

Verifica-se fàcilmente que $\varphi(P'P'') = \varphi(P''P')$.

Essas notações serão no que se segue usadas sem maiores observações. Assim, ao nos referirmos a cônica $a_{11}x_1^2 + 2\,a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2\,a_{13}x_1x_3 + 2\,a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$, diremos simplesmente a cônica $f(P) = 0$.

Voltemos ao problema proposto. Seja (r) a reta que passa por P' e P''. Suas equações são (Teorema 2.2.1) $x_1 = \lambda x'_1 + \mu x''_1$, $x_2 = \lambda x'_2 + \mu x''_2$, $x_3 = \lambda x'_3 + \mu x''_3$, em que $P(x_1\ x_2\ x_3)$ é o ponto genérico da reta, determinado pelo valor de $\frac{\lambda}{\mu}$. Substituindo êsses valores na cônica $f(P) = 0$ obteremos:

$$\lambda^2 f(P') + \mu^2 f(P'') + \mu\lambda\,\varphi(P'P'') + \lambda\mu\,\varphi(P''P') = \lambda^2 f(P') + \mu^2 f(P'') + 2\lambda\mu\,\varphi(P'P'') = 0.$$

Se a equação do 2º grau em $\frac{\mu}{\lambda}$,

$f(P'')(\frac{\mu}{\lambda})^2 + 2(\frac{\mu}{\lambda})\varphi(P'P'') + f(P') = 0$ (4.2.2) (ou a equação em $\frac{\lambda}{\mu}$, $(\frac{\lambda}{\mu})^2 f(P') + 2(\frac{\lambda}{\mu})\varphi(P'P'') + f(P'') = 0$ (4'2.2)), fôr satisfeita identicamente, todos os pontos da reta pertencem a cônica. A cônica é, portanto, degenerada. Caso contrário a equação (4.2.2) (ou (4'.2.2)) terá duas raizes que poderão ser reais e distintas, reais e coincidentes ou imaginárias. Diz-se que a reta é respectivamente secante, tangente (*) ou exterior a cônica.

(*)- Essa designação será justificada no próximo parágrafo.

§ 3.2 - Tangente em um ponto da cônica.

Sabemos que a tangente a uma curva qualquer em um ponto P da curva, é a posição limite da secante que passa por P e um ponto vizinho quando êste último tende para P. No caso particular das cônicas não degeneradas, a secante não encontra a curva em nenhum outro ponto, pois o número de pontos em que uma reta pode encontrar uma cônica não degenerada é no máximo dois. Quando os dois pontos são levados a coincidir a equação que dá os pontos de intersecção dessa reta com a cônica terá uma raiz dupla. Essa observação será útil para a demonstração do

Teorema 1.3.2 - A tangente a cônica $f(P) = 0$, suposta não degenerada, no ponto P'', é dada por $f_1(P'')x_1 + f_2(P'')x_2 + f_3(P'')x_3 = 0$.

Demonstração: Utilizando as notações e os resultados do § 2.2, sabemos que uma reta passando por P' e P'' intercepta a cônica em pontos dados pelos valores de $\frac{\lambda}{\mu}$ que satisfazem a equação $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 f(P') + 2\frac{\lambda}{\mu}\varphi(P'P'') + f(P'') = 0$. No caso de P'' pertencer a cônica a equação reduz-se a $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 f(P') + 2\frac{\lambda}{\mu}\varphi(P''P') = 0$ (1.3.2). De acôrdo com a observação anterior a equação (1.3.2) tem uma raiz dupla o que equivale a $\varphi(P'P'') = 0$. Quer dizer, a condição para que a reta por $P'P''$ seja tangente a cônica em P'' é que P' satisfaça a equação $\varphi(P''P) = 0$. Mas essa última equação é $\varphi(P''P) = f_1(P'')x_1 + f_2(P'')x_2 + f_3(P'')x_3 = 0$ a equação de uma reta passando por P'' e um ponto P' tal que $\varphi(P''P') = 0$. É, portanto, a tangente à cônica em P''.

Deixamos de lado o caso em que os três coeficientes $f_1(P'')$ $f_2(P'')$ $f_3(P'')$ da equação da tangente se anulem simultaneamente. Se isso acontece $\varphi(P''P) = 0$ q.q.s. (*) P. Tomando $P = P'$ sôbre a cônica vemos que os três coeficientes de (4.2.2) são iguais a zero e a cônica é degenerada.

§ 4.2 - Critério de degenerescência.

Estamos finalmente em condições de estabelecer um critério para que uma cônica seja degenerada. Com efeito, pelo dito anteriormente, vemos que se existe um ponto P'' da cônica tal que $f_1(P'') = f_2(P'') = f_3(P'') = 0$ a cônica é degenerada. A recíproca será verdadeira? - De fato é, pois se a cônica é degenerada tomemos o ponto de encontro das retas componentes (se forem as retas distintas) ou um ponto qualquer das retas coincidentes. Seja P'' êsse ponto. Evidentemente qualquer reta passando por P'' encontra a cônica duplamente nesse ponto, isto é, $\varphi(P''P) = 0$ qualquer que seja P. Mas isso implica que $f_1(P'') = f_2(P'') = f_3(P'') = 0$, o que demonstra a recíproca.

Por outro lado

(*)- q.q.s. = qualquer que seja.

$$f_1(P'') = a_{11}x_1'' + a_{12}x_2'' + a_{13}x_3'' = 0$$
$$f_2(P'') = a_{21}x_1'' + a_{22}x_2'' + a_{23}x_3'' = 0$$
$$f_3(P'') = a_{31}x_1'' + a_{32}x_2'' + a_{33}x_3'' = 0$$

formam um sistema homogêneo. A existência de uma solução $(x_1'' \; x_2'' \; x_3'')$ distinta da solução $(0, 0, 0)$ equivale a que o determinante do sistema seja nulo. Mas êsse determinante é precisamente Δ, o determinante da cônica.

Concluimos então o

Teorema 1.4.2 - A condição necessária e suficiente para que uma cônica seja degenerada é que o seu determinante seja nulo.

É interessante notar que êsse resultado pode ser interpretado em termos puramente algébricos. O teorema 1.4.2 significa que uma forma quadrática (*) a três variáveis é fatorável se e só se o seu determinante é nulo.

Como consequência imediata do teorema (1.4.2) segue-se que uma cônica do tipo $a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ (1.4.2) é degenerada. A determinação das retas componentes faz-se fàcilmente fatorando o primeiro membro de (1.4.2) considerada como uma equação do 2º grau em $\frac{x}{y}$.

Si a cônica degenerada não é do tipo (1.4.2) a determinação das componentes pode ser feita como segue. A equação $a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2\,a_{13}x + 2\,a_{23}y + a_{33} = 0$

(*)- Uma forma quadrática é um polinômio homogêneo do 2º grau.

(2.4.2), supondo a_{11} (ou a_{22}) não nulo, é resolvida em ordem a x (ou a y) obtendo-se

$$x = \frac{1}{a_{11}} \left[-(a_{12}y + a_{13}) \pm \sqrt{(a_{12}y + a_{13})^2 - a_{11}(a_{22}y^2 + 2\,a_{23}y + a_{33})} \right]$$

O radicando dessa expressão é um quadrado perfeito, como se vê fàcilmente calculando seu discriminante e levando em conta que $\Delta = 0$. Então chamando êsse quadrado de $(\alpha\, y + \beta)^2$ podemos escrever

$$x = \frac{1}{a_{11}} \left[-(a_{12}y + a_{13}) \pm (\alpha\, y + \beta) \right]$$

que para cada escolha do sinal fornece uma reta componente.

Si $a_{11} = a_{22} = 0$, podemos supor $a_{12} \neq 0$ e a cônica reduz-se a

$$2\,a_{12}\left(xy + \frac{a_{13}x}{a_{12}} + \frac{a_{23}y}{a_{12}} + \frac{a_{33}}{2\,a_{12}}\right) =$$

$$= 2\,a_{12}\left[y\left(x + \frac{a_{23}}{a_{12}}\right) + \frac{a_{13}}{a_{12}}\left(x + \frac{a_{33}}{2\,a_{13}}\right) \right] = 0 \qquad (2.4.2)$$

Mas, da hipótese $\Delta = 0$ concluimos $\frac{a_{33}}{2\,a_{13}} = \frac{a_{23}}{a_{12}}$

que substituida em (2.4.2) dá a fatoração procurada

$$2\,a_{12}\left(x + \frac{a_{23}}{a_{12}}\right)\left(y + \frac{a_{13}}{a_{12}}\right) = 0$$

De agora por diante, salvo menção expressa em contrário, as cônicas consideradas têm $\Delta \neq 0$. Equivale a dizer que nos descartamos das cônicas degeneradas. Essas cônicas apresentam uma série de propriedades patológicas e necessitam um estudo à parte.

EXERCÍCIOS

1)- Determinar as retas componentes da cônica degenerada $2x^2 - 11xy - 21y^2 = 0$.

R. $3y + 2x = 0 \quad 7y - x = 0$

2)- Verificar que a cônica $2x^2 - 3xy - 2y^2 - x + 2y = 0$ é degenerada e determinar suas retas componentes.

R. $2x + y = 1 \quad 2y - x = 0$

3)- Verificar que a cônica $2x^2 - 3ay^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ é degenerada para $a = -\frac{2}{3}$. Para $a \neq \frac{2}{3}$ a cônica será uma hipérbole, elipse ou parábola conforme seja a positivo, negativo ou nulo.

4)- Verificar que $\varphi(P'P'') = \varphi(P''P')$.

5)- Determinar as retas componentes das cônicas

a) $3x^2 - 4xy + 20y^2 = 0$ R. $2y+x=0$, $3x-10y = 0$

b) $15x^2 - 20y - 8y^2 = 0$ R. $3x+2y=0$, $5x-4y = 0$

c) $3x^2 - 4xy = 0$ R. $x = 0$, $3x-y = 0$

6)- Determinar a de modo que a cônica $4x^2 - 2xy - y^2 - 6x + 4y + a = 0$ seja degenerada e achar suas retas componentes.

R. $a = 1$, $y = (\sqrt{5} - 1)x + (2 - \sqrt{5})$,

$y = (2 + \sqrt{5}) - x(1 + \sqrt{5})$

7)- Dada a cônica $2x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$, verificar a posição da reta que passa por $P'(0, 1)$ e $P''(1/3, 0)$ em relação a cônica dada.

R. A reta é exterior a cônica.

8)- Achar a equação da tangente a cônica $2x^2 + 4xy - y^2 + 4x - 5y - 16 = 0$ no ponto $(2,3)$.

R. $8x - y = 13$.

***

§ 5.2 - Classificação das cônicas.

Consideremos a intercessão de uma cônica com a reta imprópria $x_3 = 0$. Como a curva e a reta imprópria têm significado geométrico independente do sistema de coordenadas escolhido, a posição relativa da reta imprópria e da cônica é também independente do sistema de coordenadas. Quer dizer, essa posição relativa depende só da cônica (a reta imprópria é sempre a mesma). Podemos então utilizá-la para uma classificação das cônicas.

Levando $x_3 = 0$ em $f(P) = 0$ obtemos $a_{11}x_1^2 + 2\,a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ ou seja $a_{11}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2\,a_{12}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + a_{22} = 0$. Essa equação do 2º gráu não é identicamente satisfeita, pois nesse caso todos os pontos da reta imprópria pertenceriam a cônica, ela seria degenerada, caso que excluimos.

Si a equação não tem raizes reais, todos os pontos reais são próprios. A cônica será dita elipse. Si a equação tem duas raízes reais distintas, a cônica terá dois pontos impróprios reais. A cônica é dita hipérbole. Finalmente, se a equação tem duas raízes reais iguais, a cônica é chamada parábola.

Analíticamente, cada caso corresponde, respectivamente, a ser $a_{11}a_{22}$ -

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

positivo, negativo ou nulo.

EXERCÍCIOS

1)- Classificar as cônicas seguintes:

$2x^2 + xy + y^2 - 6x + 8y - 1 = 0$ R: elipse

$x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0$ R: parábola

$x^2 - 2xy - y^2 + x - y + 8 = 0$ R: hipérbole

$x^2 + xy - y^2 + 2x + 1 = 0$ R: hipérbole

***

§ 6.2 - Polaridade.

Um dos fatos que se revelaram mais férteis para o estudo das cônicas, foi que fixada uma cônica não degenerada num plano, fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre os pontos e as retas dêsse plano.

Definição 1.6.2 - Dada a cônica C de equação $f(P) = 0$ com $\Delta \neq 0$, ela associa ao ponto $P'(x_1' \; x_2' \; x_3')$ a reta p' de equação

$f_1(P')x_1 + f_2(P')x_2 + f_3(P')x_3 = 0.$

Essa correspondência é dita <u>polaridade</u> (*) relativamente a C. A reta p' é dita <u>polar</u> do ponto P. (fig. 6).

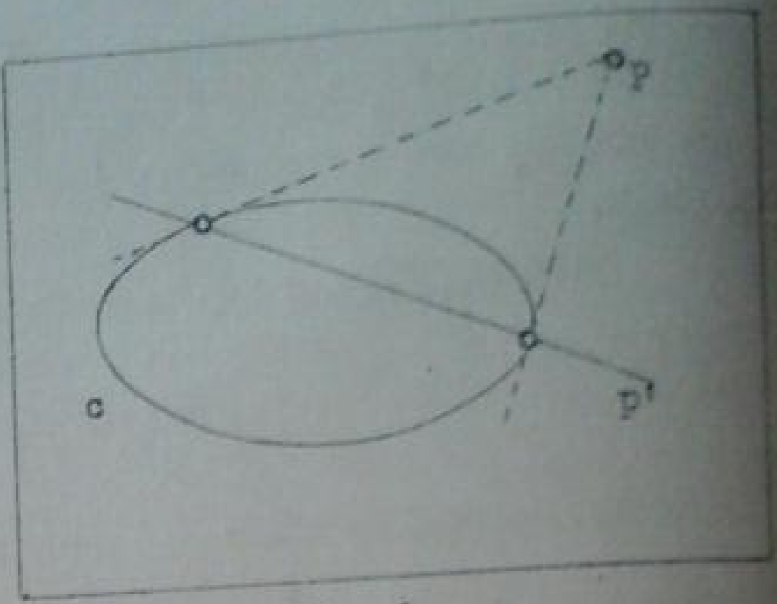

Fig. 6

<u>Teorema 1.6.2</u> - A polaridade relativamente a C é uma correspondência biunívoca entre os pontos e as retas do plano.

<u>Demonstração</u>: Como C é não degenerada, $\Delta \neq 0$, e os coeficientes $f_1(P')$, $f_2(P')$, $f_3(P')$ não são simultaneamente nulos. Então a polar p' é única para cada P'. Reciprocamente, dada uma reta $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ existe um único ponto que tem essa reta por polar. Pois para que a reta seja a polar de um ponto P', P' deve satisfazer o sistema $f_1(P') = \lambda u_1$, $f_2(P') = \lambda u_2$, $f_3(P') = \lambda u_3$, que por ter determinante $\Delta \neq 0$ tem uma solução única.

<u>Observação</u>: O ponto P assim obtido é dito <u>polo</u> da reta dada.

(*)- Poncelet (1810).

Quando P' está sôbre a cônica a equação coincide com a tangente a cônica em P', isto é, a polar passa por P'. De uma maneira mais completa podemos afirmar o

Teorema 2.6.2 - A condição necessária e suficiente para que a polar de um ponto relativamente a uma cônica passe pelo ponto, é que o ponto dado pertença a cônica.

Demonstração: Vimos que a condição é suficiente. Para verificar a necessidade suponhamos que a polar de P', $f_1(P')x_1 + f_2(P')x_2 + f_3(P')x_3 = 0$ passe por $P'(x_1' \; x_2' \; x_3')$. Então verifica-se $f_1(P')x_1' + f_2(P')x_2' + f_3(P')x_3' = 0$. Mas o primeiro membro da última equação é $f(P')$. Então P' pertence a cônica, o que termina a demonstração.

Definição 2.6.2 - Si o ponto P'' pertence a polar p' de P' diz-se que P'' é conjugado de P'.

Observação: Com a notação que introduzimos no §2.2 podemos dizer que P'' é conjugado de P' se e só se $\varphi(P'P'') = 0$.

Teorema 3.6.2 - Si P'' pertence a polar de P', P' pertence a polar de P''. Em outras palavras, a relação "ser conjugado de" é simétrica, isto é, si P'' é conjugado de P' então P' é conjugado de P''. (fig. 7)

Demonstração: Si P'' pertence a polar de P', P'' é conjugado de P', $\varphi(P'P'') = 0$.

Mas $\varphi(P(P'')=\varphi(P''P')$
Então $\varphi(P''P')=0$, P' é conjugado de P'', logo pertence a polar do P''.

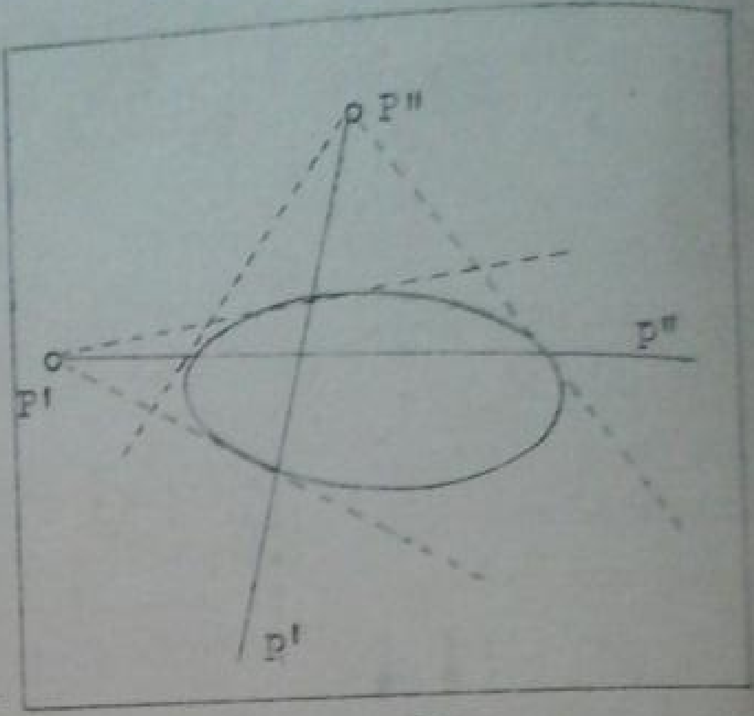

Fig. 7

<u>Corolário 1</u>: Si a reta p' (polar do P') passa pelo polo do p'' (polar do P'') então p'' passa pelo polo do p'.

Pois se a reta p' passa pelo polo P'' do p'', P'' pertence a polar do P'; pelo teorema isso implica em que P' pertença a polar do P'', isto é, P' pertence a p'', ou seja, p'' passa pelo polo de p' (fig. 7).

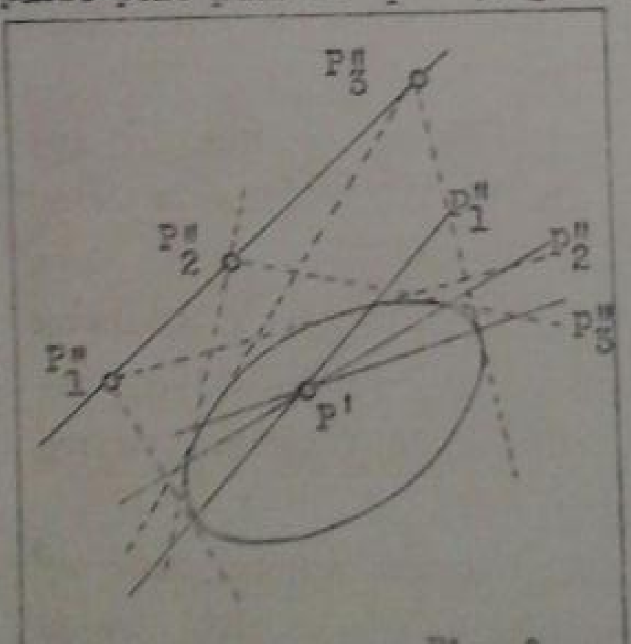

Fig. 8

<u>Corolário 2</u>: Si P'' descreve a reta p', p'' descreve um feixe de retas com centro em P' (fig. 8).

A polar de um ponto relativamente a uma cônica pode ser obtida por uma construção geométrica que apresenta um certo interesse para nós. Seja C a cônica, P' um ponto do plano e p' sua polar (fig. 9). Quando o ponto Q percorre p' a polar de Q descreve um feixe de retas em torno de P' (Corolário 2). Em particular quando Q estiver sôbre a cônica, posições Q_1 e Q_2 da figura 9, as polares serão as tangentes à cônicas tiradas por êsses pontos (retas q_1 e q_2).

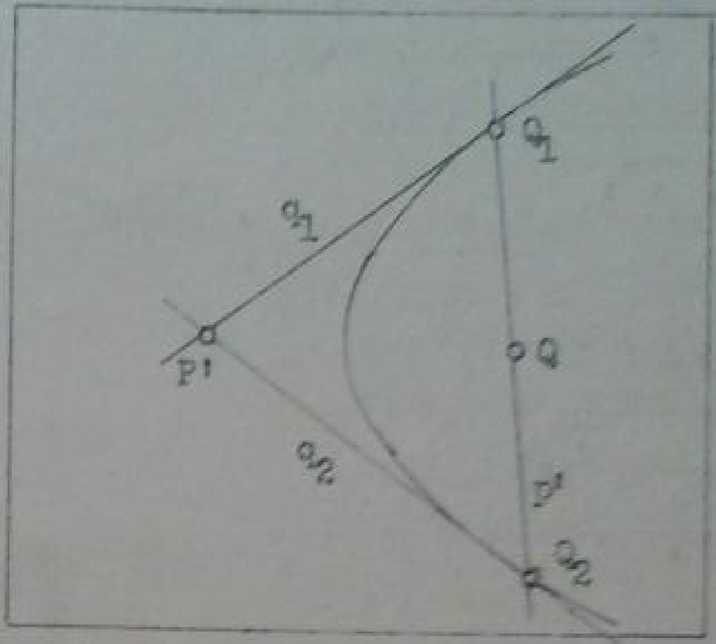

Fig. 9

Conclue-se que tirando por P' tangentes às cônicas, a reta que une os dois pontos de contacto dessas tangentes com a cônica é a polar de P'.

Para nós, o maior interesse dêsse processo é que êle incidentalmente evidencia um método analítico de determinar as tangentes a uma cônica tiradas de um ponto fora dessa cônica. Basta, com efeito, determinar as intercessões da polar dêsse ponto com a cônica. As retas que ligam essas intercessões com o ponto dado são as tangentes procuradas.

Na construção feita admitimos que a polar interceptava a cônica em pontos reais, isto é, era possível traçar do ponto dado tangentes reais às cônicas,(*) Si isso não fôr possível, traçamos por P' duas retas arbitrárias p''_1 e p''_2 (fig. 10), determinamos os seus polos P''_1, P''_2 e a reta que une P''_1 e P''_2 é pelo Corolário 3 a polar de P'.

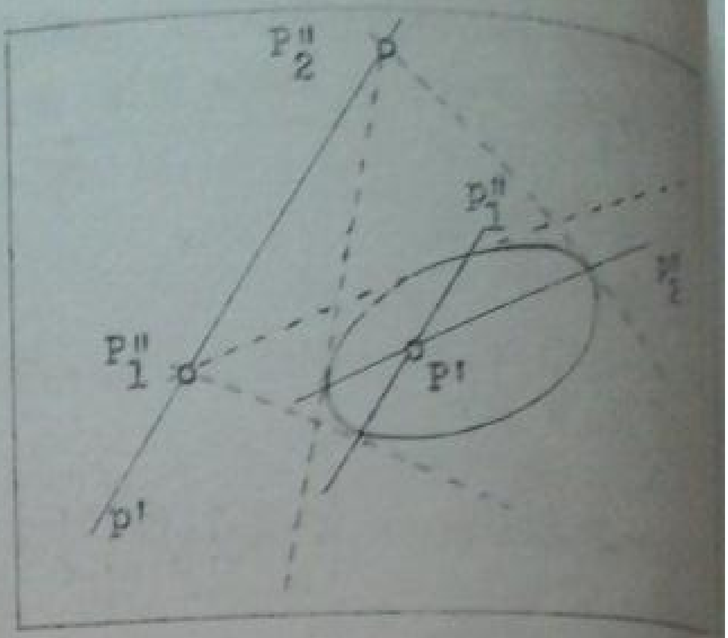

Fig. 10

EXERCÍCIOS

1)- Determinar o polo da reta $3x + 3y + 1 = 0$ relativamente a cônica $x^2 - y^2 - 2xy - 4x + 1 = 0$. Achar o ponto dessa reta de modo que a polar dêsse ponto seja paralela a $y = 0$.

R: $(1,2,1)$ $(5,-7,4)$

2)- Determinar as tangentes traçadas do ponto $(1,2)$ à cônica $x^2 + xy - y^2 + 2x + 1 = 0$.

R: $2(\sqrt{2} - 4)x - (\sqrt{2} - 6)y + ...$
$2(\sqrt{2} + 4)x - (\sqrt{2} + 6)y + ...$

(*)- Um ponto nessas condições é dito exterior à cônica.

5)- Achar a polar do ponto $P'(1,2)$ em relação a cônica $x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$.

R: $5x - 4y + 4 = 0$

* * *

§ 7.2 - Diâmetros, centro, eixos.

Os diâmetros das cônicas podem ser definidos de uma maneira muito simples em termos da correspondência polo-polar do parágrafo anterior.

Definição 1.7.2 - Dada a cônica $f(P) = 0$ e uma direção $P\infty$, o diâmetro de $f(P) = 0$ conjugado a $P\infty$ é a polar de $P\infty$ relativamente a cônica $f(P) = 0$.

Os diâmetros de uma cônica possuem a propriedade métrica afirmada pelo

Teorema 1.7.2 - O diâmetro de $f(P) = 0$ conjugado a $P\infty$ bissecta as cordas de $f(P) = 0$ na direção $P\infty$.

Demonstração: - Seja $f(P) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$ e $P\infty(\lambda, \mu, 0)$. O diâmetro conjugado a $P\infty$ tem por equação $(a_{11}\lambda + a_{12}\mu)x_1 + (a_{21}\lambda + a_{22}\mu)x_2 + (a_{31}\lambda + a_{32}\mu)x_3 = 0$.

Queremos provar que qualquer corda da cônica que tenha coeficiente angular $\frac{\mu}{\lambda}$, tem seu ponto médio nas se diâmetro. Os cálculos ficarão mais simples se passarmos para coordenadas não homogêneas:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3} \quad .$$

bastam-nos provar que dados

Em têrmos mais precisos, basta-nos provar que dados $P'(x'\ y')$ e $P''(x''\ y'')$ pertencentes a cônica e tais que $\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{\mu}{\lambda}$. (1.7.2), o ponto $P\left(\frac{x' + x''}{2} ; \frac{y' + y''}{2}\right)$ pertence ao diâmetro $(a_{11}\lambda + a_{12}\mu)x + (a_{21}\lambda + a_{22}\mu)y +$ $+ (a_{31} + a_{32}) = 0$ (2.7.2). Para isso levamos a (2.7.2) os valores $\lambda = k(x'' - x')$, $\mu = k(y'' - y')$ tirados de (1.7.2) e obtemos $[a_{11}(x'' - x') + a_{12}(y'' - y')]x +$ $+ [a_{21}(x'' - x') + a_{22}(y'' - y')]y + [a_{31}(x'' - x') +$ $+ a_{32}(y'' - y')] = 0$ (2'.7.2). Substituindo as coordenadas do ponto $P\left(\frac{x' + x''}{2}, \frac{y' + y''}{2}\right)$ na equação do diâmetro (2'.7.2) temos $[a_{11}(x''- x')+ a_{12}(y''-y')]\left(\frac{x'+x''}{2}\right) +$

$$+ [a_{21}(x'' - x') + a_{22}(y'' - y')]\left(\frac{y' + y''}{2}\right) +$$

$$+ [a_{13}(x'' - x') + a_{23}(y'' - y') = \frac{1}{2}\left[a_{11}(x''^2 - x'^2) +\right.$$

$$+ a_{22}(y''^2 - y'^2) + 2\,a_{12}(y''x'' - y'x') + 2\,a_{13}(x'' - x') +$$

$$\left.+ 2\,a_{23}(y'' - y')\right] = \frac{1}{2}\left[f(P'') - a_3 - f(P') + a_3\right].$$

Mas essa última expressão se anula de vez que, como P' e P'' pertencem a cônica, $f(P') = f(P'') = 0$. Então o ponto P pertence a polar (2'.7.2) que é o que queriamos provar.

De acôrdo com o corolário 2 do Teorema 3.8.2 quer do o ponto $P\infty$ descreve a reta imprópria o diâmetro descreve um feixe de retas com centro no polo da reta imprópria. Si o polo da reta imprópria fôr um ponto próprio, existe um ponto próprio do plano que pertence a todos os diâmetros e consequentemente bissecta qualquer corda da cônica. Êsse ponto é portanto um centro de simetria da cônica. Adotaremos a definição

<u>Definição 2.7.2</u> - Si relativamente a uma cônica C, o polo da reta imprópria é um ponto próprio, êsse ponto é dito centro da cônica. Caso contrário, a cônica é dita sem centro.

<u>Teorema 2.7.2</u> - A única cônica sem centro é a parábola.

<u>Demonstração</u> - Basta notar que a condição necessária e suficiente para que a cônica seja uma parábola é que a reta imprópria seja tangente a cônica no seu ponto impróprio, ou seja, que o polo da reta imprópria seja um ponto impróprio.

<u>Corolário I</u> - Qualquer diâmetro da parábola passa pelo ponto impróprio dessa parábola.

Pois como o polo de um diâmetro está na reta imprópria, o polo da reta imprópria está nesse diâmetro (Teor. 3.6.2). Mas, para a parábola o polo da reta imprópria é o ponto impróprio da parábola.

<u>Definição 3.7.2</u> - Seja C uma cônica, $P\infty$ uma direção e $\underline{d}$ o diâmetro de C conjugado a direção $P\infty$. Chamemos de $P'\infty$ a direção de $\underline{d}$.

O diâmetro $\underline{d}'$ do C, conjugado a direção $P'\infty$ é dito diâmetro conjugado do $\underline{d}$. (ver fig. 11)

<u>Teorema 3.7.2</u> - Si d' é o conjugado de $\underline{d}$, então $\underline{d}$ é o conjugado de $\underline{d}'$.

<u>Demonstração</u> - Si $\underline{d}'$ é conjugado de $\underline{d}$, então a polar de $P\infty$ passa por $P'\infty$ (Def. 3.7.2). Mas pelo corolário 1 do Teorema 3.6.2, a polar de $P'\infty$ passará por $P\infty$, isto é, d' tem a direção $P\infty$. Então o conjugado de d', que é a polar de $P\infty$, é $\underline{d}$.

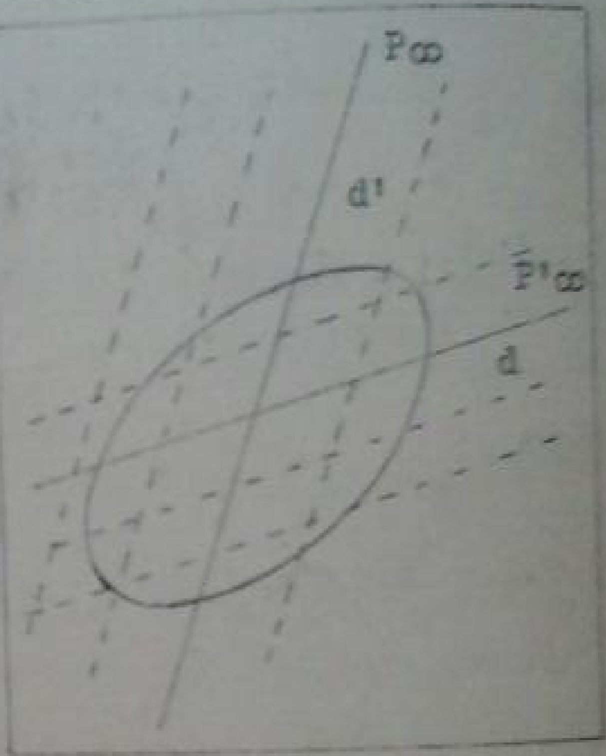

Fig. 11

Vamos agora verificar se, dada uma cônica, existe algum diâmetro que seja perpendicular às cordas que êle bissecta. Pelo visto anteriormente, é claro que se um diâmetro possuir essa propriedade o mesmo se dará com seu diâmetro conjugado (ver fig. 12).

A importância de um tal diâmetro, se existir, é que êle é um eixo de simetria para a cônica (ver fig. 12).

Seja C a cônica $a_{11}x_1^2 + 2\,a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2\,a_{13}x_1x_3 + 2\,a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$ e $P\infty(\lambda, \mu, 0)$ uma direção. O diâmetro conjugado a essa direção será

$(a_{11}\lambda + a_{12}\mu)x_1 + (a_{21}\lambda + a_{22}\mu)x_2 + (a_{31}\lambda + a_{32}\mu)x_3 = 0$ (3.7.2). Para que êsse diâmetro seja perpendicular a direção $(\lambda, \mu, 0)$ seu coeficiente angular $-\dfrac{a_{11}\lambda + a_{12}\mu}{a_{21}\lambda + a_{22}\mu}$ deve ser igual a $-\dfrac{\lambda}{\mu}$, ou seja, $(a_{21}\lambda + a_{22}\mu)\lambda = (a_{11}\lambda + a_{12}\mu)\mu$, que reduz-se a $a_{12}(\frac{\mu}{\lambda})^2 + (a_{11} - a_{22})(\frac{\mu}{\lambda}) - a_{21} = 0$ (4.7.2)

Si a cônica reduzir-se a uma circunferência $a_{12} = 0$ $a_{11} = a_{22}$ e (4.7.2) é identicamente satisfeita. Êsse resultado traduz o conhecido fato geométrico que numa circunferência qualquer diâmetro é um eixo de simetria.

Em qualquer outro caso, supondo $a_{12} \neq 0$, (*) (4.7.2) toma a forma

$$(\frac{\mu}{\lambda})^2 + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}}(\frac{\mu}{\lambda}) - 1 = 0,$$

cujo discriminante, $(\dfrac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}})^2 + 4$ é sempre positivo. Então existem sempre 2 diâmetros reais que são perpendiculares às cordas que bissectam. Como o produto das raizes de (4.7.2) é -1 êsses diâmetros são perpendiculares entre si, e portanto conjugados, o que já haviamos previsto.

Verificada a existência e o número dêsses diâmetros

(*)- Si $a_{12} = 0$, $\frac{\mu}{\lambda} = 0$ e $\frac{\lambda}{\mu} = 0$ são soluções evidentes. Os eixos coordenados são eixos de simetria.

adotaremos a

Definição 4.7.2 - Numa cônica, exceção feita da circunferência, existem dois diâmetros conjugados perpendiculares que são chamados eixos da cônica. Os pontos de intercessão dos eixos com a cônica são ditos vértices da cônica.

Relativamente aos eixos a parábola possue a propriedade afirmado pelo

Teorema 4.7.2 - Um dos eixos da parábola é a reta imprópria.

Demonstração - Si a cônica C for uma parábola $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ (§ 5.2).

Então $\frac{\mu}{\lambda} = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$ é uma solução de(4.7.2), como se verifica fàcilmente. Levando êsse valor em (3.7.2), anulam-se os coeficientes de x_1 e x_2, quer dizer, um dos diâmetros procurados é a reta imprópria.

Observação - Por abuso de linguagem, é usual dizer-se que a parábola tem um só eixo, considerando como tal só o eixo próprio.

EXERCÍCIOS

1)- Dada a cônica $x^2 - 2xy + 3y^2 - 3x - 1 = 0$ determinar o diâmetro conjugado do diâmetro que passa por (1, -1).

R: $4x - 32y + 15 = 0$

2)- Determinar os centros das cônicas seguintes:

$2x^2 + xy + y^2 - 6x + 8y - 1 = 0$ R: $(-\frac{20}{7}, -\frac{38}{7})$

$x^2 - 2xy - y^2 + x - y + 8 = 0$ R: $(-\frac{1}{2}, 0)$

$x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0$ R: não tem centro.

3)- Determinar os eixos das cônicas seguintes:

$x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0$ R: $4x - 4y + 1 = 0$ e a reta imprópria.

$x^2 - 2xy - y^2 + x - y + 8 = 0$ R: $2(-2 \pm \sqrt{2})x \pm 2\sqrt{2}y - (2 \pm \sqrt{2}) = 0$

***

§ 8.2 - __Assíntotas.__

__Definição 1.8.2__ - Seja C uma cônica e d e d' dois diâmetros conjugados de C. Se $d = d'$, d é dito __assíntota__ à cônica C.

Dessa definição decorre imediatamente que a assíntota a uma cônica C passa pelo centro de C.

__Teorema 1.8.2__ - __Uma reta p é assíntota à cônica C se e só se p é tangente a C em seu ponto impróprio.__

__Demonstração__ - Se p é assíntota a C, ela coincide com seu diâmetro conjugado p'. Como o ponto impróprio P_∞ de p pertence a p', então P_∞ pertence a p. De acôrdo com o Teorema 2.6.2 isso significa que P_∞ pertence a C e que p é tangente a C

em P_∞. Reciprocamente, se p é tangente a C em P_∞, p é a polar do P_∞, logo um diâmetro de C. É evidente que o diâmetro conjugado de p coincide consigo próprio, o que conclue a demonstração:

A caracterização das assintotas pelo teorema anterior permite-nos afirmar que a elipse não admite assintotas reais, uma vez que não tem pontos próprios reais. Analogamente, a hipérbole possue exatamente duas assintotas reais. Em particular quando essas assintotas são perpendiculares a hipérbole é dita equilátera. A parábola possue uma única assíntota. Como a reta imprópria é tangente a cônica no seu ponto impróprio (Compare com Teor. 2.7.2) essa assintota única é a reta imprópria.

EXERCÍCIOS.

1)- Determinar as assintotas das cônicas seguintes:

a) $2x^2 - xy - 3y^2 + x - y - 5 = 0$

R: $x - y = 0$, $2x + 3y + 1 = 0$

b) $x^2 - xy - 2y^2 + x + 4y = 0$

R: $x + y - 1 = 0$, $x - 2y + 2 = 0$

c) $x^2 - 2xy + 3y^2 - 3x - 1 = 0$

R: Não possue assintotas reais.

2)- Dada a cônica $f(P) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ demonstrar que as retas passando pelo centro de $f(P) = 0$ e paralelas as componentes da cônica degenerada $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ são as assintotas a $f(P) = 0$.

- C A P Í T U L O III -

§ 1.3 - Equações reduzidas; invariantes ortogonais.

A equação geral de uma cônica $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}x^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ (1.1.3) pode, por uma escolha conveniente do sistema de coordenadas, ser posta em uma forma mais simples.

Consideremos o caso em que a cônica (1.1.3) tenha centro. Sabemos que os diâmetros de (1.1.3) conjugados às direções dos eixos x e y são respectivamente $a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$ (2.1.3) e $a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$ (3.1.3). Se para eixos coordenados forem escolhidos os eixos de (1.1.3), as retas (2.1.3) e (3.1.3) devem representar respectivamente os eixos y e x, donde $a_{13} = a_{23} = a_{21} = a_{12} = 0$. Concluimos que uma cônica com centro pode ser escrita $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$ (4.1.3). A expressão (4.1.3) é dita forma reduzida da cônica (1.1.3) suposta com centro.

Si a cônica (1.1.3) não tem centro, toma-se para eixo dos x o eixo da cônica e para origem o vértice da cônica. O eixo dos y é uma perpendicular a Ox passando em O. Nessas condições, a reta (3.1.3) que é o diâmetro conjugado a Oy coincide com o eixo dos x, isto é, $a_{21} = a_{23} = 0$. Ademais $a_{33} = 0$ pois a cônica passa pela origem O. A equação (1.1.3) fica reduzida a $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$ (5.1.3). Mas numa cônica sem centro (parábola) o eixo con-tem o ponto impróprio dessa cônica. Para o nosso caso isto significa que o ponto impróprio de Ox, $(1,0,0)$ satisfaz a (5.1.3) escrita em coordenadas homogêneas, $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 = 0$, ou seja, que $a_{11} = 0$. Conclue-se que as cônicas sem centro podem ser postas na forma $\underline{a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0}$ (6.1.3), que chamaremos forma reduzida das cônicas sem centro.

É evidente que se pudermos obter, por um processo cômodo, a equação reduzida de uma cônica dada por sua equação geral, êsse processo terá uma importância fundamental para a prática de determinação dos elementos de uma cônica.

Necessitaremos do seguinte teorema:

<u>Teorema 1.1.3</u> - Dada uma cônica $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, as seguintes funções dos coeficientes:

$$A_1 = a_{11} + a_{22}, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{e}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ são invariantes}$$

em relação a uma mudança de coordenadas.

O teorema afirma que tomando a mesma cônica em relação a um outro sistema de coordenadas $x'O'y'$ e sendo $a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$ a equação da cônica no novo sistema então $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$,

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{e}$$

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

A_1, A_2 e Δ são chamados <u>invariantes ortogonais</u> da cônica.

Antes de demonstrar o teorema vamos mostrar por alguns exemplos como êle permite resolver o problema proposto, isto é, a passagem da equação geral de uma cônica para sua equação reduzida.

<u>Exemplo 1</u> - Seja a cônica $2x^2 + 5xy + 7y^2 - 6x + 8y$. Calculemos seus invariantes:

$$A_1 = 2 + 7 = 9; \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 7 \end{vmatrix} = 31/4$$

e

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5/2 & -3 \\ 5/2 & 7 & 4 \\ -3 & 4 & 10 \end{vmatrix} = -\frac{155}{2}$$. Como $A_2 \neq 0$

a cônica dada tem centro e poderá ser escrita, num sistema de coordenadas $x'O'y'$ convenientemente escolhido, $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33} = 0$. De acôrdo com a invariância afirmada pelo Teorema 1 teremos $A'_1 = a'_{11} + a'_{22} = 9$; $A'_2 = a'_{11}a'_{22} = 31/4$; $\Delta' = a'_{11}a'_{22}a'_{33} = -\frac{155}{2}$.

O problema resume-se em determinar a'_{11}, a'_{22} e a'_{33} destas equações. Para isso note-se que $\frac{\Delta'}{A'_2} = a'_{33} = \frac{-155/2}{31/4} = -10$. Por outro lado como $a'_{11} + a'_{22} = 9$ e $a'_{11} \cdot a'_{22} = 31/4$, a'_{11} e a'_{22} são as soluções da equação em λ, $\lambda^2 - 9\lambda + \frac{31}{4} = 0$ ou seja, $a'_{11} = \frac{9 - \sqrt{50}}{2}$ $a'_{22} = \frac{9 + \sqrt{50}}{2}$.

É fácil de ver que o mesmo processo se aplicaria a qualquer cônica com centro.

Exemplo 2: Seja a cônica $x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 8y + 11 = 0$. Seus invariantes são $A_1 = 5$; $A_2 = 0$ $\Delta = -4$. Como $A_2 = 0$ a cônica é uma parábola. Num sistema conveniente $x'O'y'$ pode ser escrita $a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' = 0$. Pelo Teorema 1 $A'_1 = a'_{22} = 5$. $\Delta' = -a'_{13}a'_{22}a'_{13} = -4$. Então $a'_{13} = \sqrt{\frac{4}{5}}$. É evidente que o processo é válido para qualquer cônica sem centro.

Demonstração do Teorema 1: Sejam xOy e $x'O'y'$ dois sistemas de coordenadas e $f(P) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, $f'(P') = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$ as equações de uma mesma cônica nos dois sistemas considerados. Uma mudança de coordenadas pode ser decomposta em uma rotação e em uma translação. Consideremos primeiro o caso da rotação, isto é, suponhamos que $x'Oy'$ proveio de xOy por uma rotação. Como a distância de O a um ponto qualquer é a mesma nos dois sistemas $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$. Então as duas equações $f(P) + \lambda(x^2 + y^2) = 0$ $f'(P') + \lambda(x'^2 + y'^2) = 0$ representam a mesma cônica, respectivamente em xOy e $x'Oy'$, para cada valor de λ. Procuremos os valores de λ que tornem $f(P) = \lambda(x^2 + y^2) = 0$ uma parábola. Êles satisfarão a equação $(a_{11} + \lambda)(a_{22} + \lambda) - a_{12}^2 = 0$, ou seja, $\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 = 0$. Êsses mesmos valores de λ tornarão evidentemente $f'(P') + \lambda(a'^2 + y'^2) = 0$ também uma parábola, isto é, satisfarão a $\lambda^2 + A_1'\lambda + A_2' = 0$. Conclue-se que $A_1 = A_1'$ e $A_2 = A_2'$.

Si procurarmos agora os valores de λ que tornem $f(P) + \lambda(x^2 + y^2)$ uma cônica degenerada veremos que eles satisfazem a

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} + \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

ou seja, $a_{33}\lambda^2 + K\lambda + \Delta = 0$, em que a expressão de K não nos interessa. Os mesmos valores de λ satisfarão a equação $a_{33}'\lambda^2 + K'\lambda + \Delta' = 0$. Concluímos que $\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{a_{33}}{a_{33}'}$. Mas a rotação como transformação homogênea, não afeta o têrmo independente da $f(P) = 0$, isto é, $a'_{33} = a_{33}$. Então $\Delta = \Delta'$ e o teorema está demonstrado para as rotações.

Se a transformação considerada é uma translação $x = x' + \alpha$ $\quad y = y' + \beta$, substituido êsses valores em $f(P) = 0$ temos $a_{11}(x' - \alpha)^2 + 2a_{12}(x' - \alpha)(y' - \beta) + a_{22}(y' - \beta)^2 + 2a_{13}(x' - \alpha) + 2a_{23}(y' - \beta) + a_{33} = 0$ (7.1.3).

Como a expressão (7.1.3) e $f'(P') = 0$ representam a mesma cônica concluimos $a'_{11} = a_{11}$, $a'_{22} = a_{22}$, $a'_{12} = a_{12}$, $a'_{13} = a_{13} + \alpha a_{11} + \beta a_{12}$, $a'_{23} = a_{23} + \alpha a_{12} + \beta a_{22}$, $a'_{33} = a_{33} + a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha - 2a_{23}\beta = a'_{13}\alpha + a'_{23}\beta + (a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33})$. Nestas condições, é evidente que $A_1 = A'_1$ $\quad A_2 = A'_2$. Ainda

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}$$

Se agora em Δ' subtrairmos da terceira coluna a primeira multiplicada por α e a segunda multiplicada por β e no determinante assim obtido subtrairmos da terceira linha a primeira multiplicada por α e a segunda multiplicada por β teremos finalmente $\Delta' = \Delta$.

Como as quantidades A_1, A_2 e Δ permanecem invariáveis para as rotações e translações permanecerão também invariáveis para qualquer mudança de coordenadas ortogonais.

EXERCÍCIOS

1)- Reduzir a forma normal as seguintes cônicas:

a) $xy + x + y + 6 = 0$ R: $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{10} = -1$

b) $40x^2 + 36xy + 25y^2 + 8x - 64y - 101 = 0$

R: $\frac{x^2}{13} + \frac{y^3}{\frac{13}{4}} = 1$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ R: $y^2 = 2ax\sqrt{2}$

***

§2.3 - Determinação de cônicas; método do feixe.

Consideremos as cônicas $f_1(P) = 0$ e $f_2(P) = 0$. A equação $f_1(P) + \lambda f_2(P) = 0$ (1.2.3) define para cada valor de λ uma cônica: é a equação de uma família de cônicas a um parâmetro λ. Adotaremos a seguinte definição:

Definição: A família $f_1(P) + \lambda f_2(P) = 0$ é dita um feixe de cônicas de base $f_1(P) = 0$ e $f_2(P) = 0$.

Em particular, si $\lambda = 0$, obtem-se $f_1(P) = 0$ como uma cônica do feixe.

Teorema 1.2.3 - Os pontos de intercessão das cônicas do feixe $f_1(P) + \lambda f_2(P) = 0$ são os pontos de intercessão das cônicas de base $f_1(P) = 0$ $f_2(P) = 0$.

<u>Demonstração 1.2.3</u>: Si P pertence a intercessão de $f_1(P) = 0$ com $f_2(P) = 0$, satisfaz simultâneamente essas duas equações, logo satisfaz $f_1(P) + \lambda f_2(P) = 0$ q.q.s. λ. Por outro lado si P pertence a intercessão de tôdas as cônicas do feixe satisfaz $f_1(P) + \lambda f_2(P) = 0$ q.q.s. λ e satisfaz portanto a $f_1(P) = 0$ e $f_2(P) = 0$.

O teorema 1.2.3 fornece um processo para determinar os pontos de intercessão de duas cônicas dadas $f_1(P) = 0$, $f_2(P) = 0$. Para isso determinamos um valor de λ que torne a cônica $f_1(P) + \quad f_2(P) = 0$ degenerada, isto é, um par de retas. Pelo teorema anterior os pontos de intercessão das cônicas $f_1(P) = 0$ e $f_2(P) = 0$ são os pontos de intercessão da cônica $f_1(P) = 0$ com as retas obtidas. Note que mais uma vez resolvemos um problema algébrico, isto é, a determinação das soluções de um sistema de duas equações do 2º grau, por via geométrica.

Conclue-se ainda que duas cônicas tem quatro pontos em comum (reais, imaginários, próprios ou impróprios) de vez que a cônica $f_1(P) = 0$ tem dois pontos em comum com cada uma das retas em que se decompõe a cônica degenerada do feixe. Essa conclusão falha sòmente no caso em que as cônicas de base são degeneradas e possuem uma reta comum. Podemos portanto enunciar:

<u>Teorema 2.2.3</u> - Duas cônicas distintas se encontram em 4 pontos, exceção feita o caso em que as cônicas são degeneradas e têm uma reta comum.

As considerações sôbre feixes de cônicas aquí desenvolvidas serão utilizadas para a determinação de uma cônica dada por certas condições. Antes porém vamos ver de que maneira devem ser dadas essas condições afim de que a cônica procurada seja única.

Sabemos que uma cônica $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ fica perfeitamente determinada quando conhecemos números proporcionais aos seis coeficientes $a_{11}, a_{12}, \dots a_{33}$. Como pelo menos um dêles, por exemplo a_{11}, é diferente de zero basta o conhecimento das cinco relações $\frac{a_{12}}{a_{11}}, \frac{a_{22}}{a_{11}}, \dots \frac{a_{33}}{a_{11}}$ para a determinação da cônica. Se são dadas cinco equações lineares e homogeneas independentes (*) sôbre os seis coeficientes, a resolução do sistema permite determinar univocamente as cinco relações mencionadas e portanto existe uma e uma única cônica satisfazendo as condições expressas pelas equações. Resumindo temos o teorema:

<u>Teorema 3.2.5</u>: Cinco condições lineares independentes determinam uma cônica.

Uma das maneiras de dar essas condições lineares independentes é exigir que a cônica passa por cinco pontos do

---

(*)- Isto é nenhuma delas é combinação linear das outras. Como é sabido isso implica em que o determinante dos coeficientes de $\frac{a_{12}}{a_{11}}, \dots, \frac{a_{33}}{a_{11}}$ considerados como incognitas seja diferente de zero.

plano. Para que a condição de independência seja verificada é necessário e suficiente que quatro quaisquer dêsses cinco pontos não estejam em linha reta. Para demonstrar essa afirmação basta notar que a condição de independência das equações lineares é equivalente ao fato de que a cônica que passa pelos cinco pontos é única. Mas se quatro dos cinco pontos estão alinhados existe uma infinidade de cônicas degeneradas passando pelos cinco pontos. Por exemplo, as duas cônicas $lm = 0$ e $ln = 0$ em que $l = 0$ é a reta contendo $P_1 P_2 P_3 P_4$, $n = 0$ é a reta $P_2 P_5$ e $m = 0$ é a reta $P_4 P_5$, passam pelos pontos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 em que os quatro primeiros estão alinhados (ver figura 12).

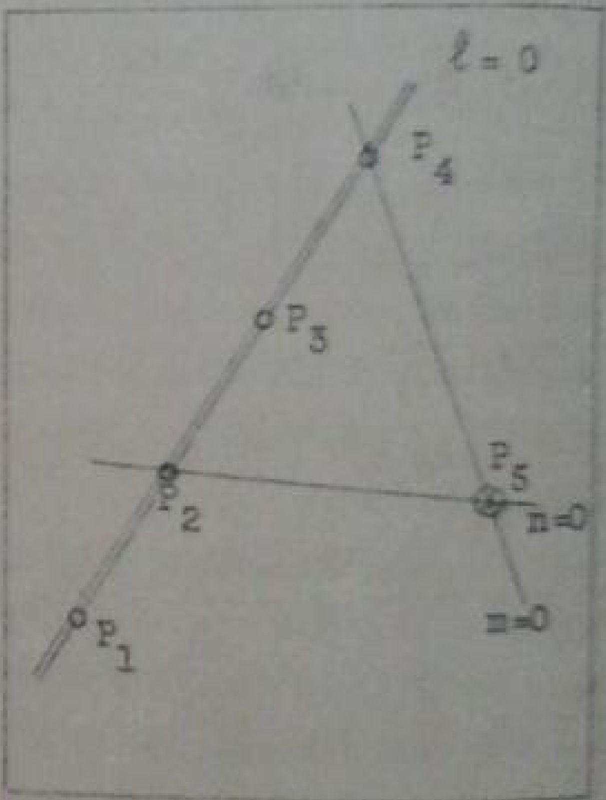

Fig. 12

Por outro lado se a cônica determinada pelos cinco pontos não é univoca, duas cônicas distintas teriam cinco pontos de intercessão o que só é possível se são degeneradas e têm uma reta comum. Então existe um único ponto de intercessão fora da reta comum. (ver fig. 12). Como devem existir cinco pontos em comum entre as duas cônicas os outros quatro pertencem a reta comum e estão por conseguinte alinhados.

Exemplo 1 - Determinar a cônica que passa pelos pontos $P_1(0,0)$, $P_2(0,-2)$, $P_3(4,0)$, $P_4(1,1)$ e $P_5(5,7)$.

Seja $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ a cônica procurada. A condição de passar pelos pontos indicados fornece o sistema:

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases}
a_{33} = 0 & (1) \\
4a_{22} - 4a_{23} + a_{33} = 0 & (2) \\
16a_{11} + 8a_{13} + a_{33} = 0 & (3) \\
a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + 2a_{13} + 2a_{23} + a_{33} = 0 & (4) \\
25a_{11} + 70a_{12} + 49a_{22} + 10a_{13} + 14a_{23} + a_{33} = 0 & (5)
\end{cases}
$$

Dividindo as equações do sistema (I) por a_{11} obtemos um sistema de Cramer relativamente às incognitas $\frac{a_{21}}{a_{11}}, \frac{a_{22}}{a_{11}}, \dots, \frac{a_{33}}{a_{11}}$. Isto significa que as condições dadas são independentes. Resolvido o novo sistema obteremos

$$
\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{-51}{21}, \quad \frac{a_{22}}{a_{11}} = \frac{55}{21}, \quad \frac{a_{13}}{a_{11}} = -\frac{42}{21},
$$

$$
\frac{a_{23}}{a_{11}} = \frac{55}{21}, \quad \frac{a_{33}}{a_{11}} = 0 .
$$

Dividindo a equação da cônica por a_{11} e substituindo os valores achados, teremos a equação da cônica pedida.

A resolução de um sistema de cinco equações lineares a cinco incógnitas não é em geral um trabalho agradável. Procuraremos resolver êsse problema por um método mais cômodo para o que faremos uso dos feixes de cônicas mencionados no começo dêsse parágrafo.

Consideremos os quatro pontos P_1 P_2 P_3 e P_4 e determinemos as retas: P_1P_2, $x = 0$; P_3P_4, $x + 3y - 4 = 0$; P_1P_3, $y = 0$; P_2P_4, $3x - y - 2 = 0$. As duas cônicas degeneradas $x(x + 3y - 4) = 0$ e $y(3x - y - 2) = 0$ se interceptam nos quatro pontos P_1 P_2 P_3 P_4. O feixe de cônicas que tem essas duas cônicas como base se escreve $x(x + 3y - 4) + \lambda\, y(3x - y - 2) = 0$. As cônicas dêsse feixe passam por P_1 P_2 P_3 P_4. Determinemos o λ de modo que a cônica corréspondente passe por P_5, o que dá $\lambda = \frac{-55}{21}$. Êsse valor de λ levado na equação do feixe dá o resultado achado anteriormente.

O segundo processo de resolução, que chamaremos <u>método do feixe</u>, pode ser empregado vantajosamente em vários problemas. Utilizado com engenho êle economiza um volume razoável de cálculos. Para fixar algumas técnicas gerais daremos alguns exemplos.

<u>Exemplo 2</u>: Escrever a equação da cônica que tem as retas $x + y - 5 = 0$ e $3x + y - 7 = 0$ como assíntotas e passa pela origem.

Dizer que a reta $x + y - 5 = 0$ é assíntota a uma cônica é dizer que ela é tangente a cônica no ponto impróprio. Decorre que o ponto impróprio $P'_\infty(1,-1,0)$ da reta $x + y - 5 = 0$ é um ponto duplo da cônica pedida. Por um raciocínio análogo vê-se que $P''_\infty(1,-3,0)$ é também um ponto duplo. Podemos tratar êsses quatro pontos impróprios P'_∞,

P'_∞, P''_∞ P''_∞, os dois primeiros e os dois últimos dos quais coincidem, como os pontos próprios do exemplo anterior. Para isso determinaremos as retas: $P'_\infty P'_\infty$, $x + y - 5 = 0$; $P''_\infty P''_\infty$, $3x + y - 7 = 0$; $P'_\infty P''_\infty$, $x_3 = 0$. O feixe de cônicas que tem por base as cônicas degeneradas $(x + y - 5)(3x + y - 7) = 0$ e $x_3^2 = 0$ se escreve em coordenadas homogêneas $(x_1 + x_2 - 5x_3)(3x_1 + x_2 - 7x_3) + \lambda x_3^2 = 0$. Qualquer cônica dêsse feixe passa pelos quatro pontos indicados, isto é, tem por assíntotas $x + y - 5 = 0$ e $3x + y - 7 = 0$. Passando a equação do feixe para coordenadas cartesianas e determinando λ de modo que a cônica correspondente passe pela origem obteremos $3x^2 + 4xy + y^2 - 22x - 12y = 0$.

<u>Exemplo 3</u>: Escrever a equação da cônica que tem a reta $y = 1$ como assíntota, é tangente a reta $y = 3x$ na origem e passa pelo ponto $(1,2)$.

Dizer que a cônica é tangente a $y = 3x$ na origem é dizer que a origem é um ponto duplo da cônica. Raciocinando como no exemplo anterior vemos que a cônica passa pelos quatro pontos $O(0,0,1)$, $O(0,0,1)$, $P_\infty(1,0,0)$, $P_\infty(1,0,0)$ e as cônicas degeneradas do feixe de cônicas que passam por êsses quatro pontos são $(y - 3x)(y - 1) = 0$ e $y^2 = 0$. Então a equação do feixe se escreve $(y - 3x)(y - 1) + \lambda y^2 = 0$. Determinando λ de modo que a cônica passe pelo ponto $(1, 2)$ obtem-se $\lambda = -\frac{1}{4}$ e a cônica pedida tem por equação $12xy - 5y^2 - 12x + 4y = 0$.

<u>Exemplo 4</u>: Escrever a equação da parábola pas -

sando pelos pontos $O(0, 0)$ $P_1(0, 1)$ $P_2(4, 0)$ e pelo pon to impróprio $P_\infty(2, 1, 0)$.

Tratando-se de uma parábola sabemos que a reta imprópria é tangente a cônica no ponto P_∞. Então a cônica pedida fará parte do feixe que passe pelos pontos $O\,P_1$ $P_\infty\,P_\infty$. As cônicas degeneradas dêsse feixe são, em coordenadas homogêneas, $x_1 x_3 = 0$, $(x_1 - 2x_2)(x - 2x_2 + 2x_3) = 0$. Determinando na equação do feixe $\lambda x + (x - 2y)(x - 2y + 2) = 0$ o valor de λ de modo que a cônica passe pelo ponto $P_2(4, 0)$ obtem-se finalmente $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 4y = 0$.

EXERCÍCIOS

1)- Determinar a cônica que passa pelos pontos $P_1(1, 0)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(1, 1)$ e tem assíntotas cujos coeficientes angulares são $1/2$ e 2.

2)- Determinar a cônica que passa pelos pontos $P_1(-1,0,1)$, $P_2(-1, 1, 1)$, $P_3(0, 0, 1)$ e é tangente a reta $x + y - 1 = 0$ no ponto $(0, 1, 1)$.

3)- Determinar a parábola que passa pelos pontos $O(0, 0)$, $P_1(1, 0)$, $P_2(0, 1)$ e cujo eixo tem coeficiente angular igual a 1.

4)- Determinar a cônica que passa pelo ponto $P(3, 2)$ e é tangente às retas $x + y = 1$ no ponto $(1, 0)$, $x - y = 0$ no ponto $(0, 0)$.

5)- Determinar a cônica que passa pelos pontos $P_1(1, 0)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(0, 4)$ e tem a reta $4x - 2y + 5 = 0$ como assíntota.

- B I B L I O G R A F I A -

Os livros seguintes influenciaram sensivelmente a exposição e a redação do presente curso. O principiante interessado poderá consultá-los com proveito. Em (3) se encontrará uma bibliografia mais detalhada.

*

1) - Fábio Conforto - Geometria Analítica - Docet Edizione Universitario - Roma - 1950.

2) - Guido Castelnuovo - Lecciones de Geometria Analitica- Tradução em espanhol da sétima edição italiana - Editorial "Mundo Científico", Cidade Eva Peron - Argentina - 1952.

3) - William C. Granstein - Introduction to higher geometry - Mac Millan - New York - 1949.

***

- ÍNDICE -

*

*

Trabalho mimeográfico
de
FERNANDO FIGUEIRÊDO
Rua Pe. Gabriel Mousinho n.º 47
Transv. à Estrada dos Remédios
Madalena