

do 1, e que são precisos 20 segundos, a partir do repouso, para chegar a adquirir toda a sua velocidade e igualmente um periodo de 20 segundos, para ir travando progressivamente até parar.

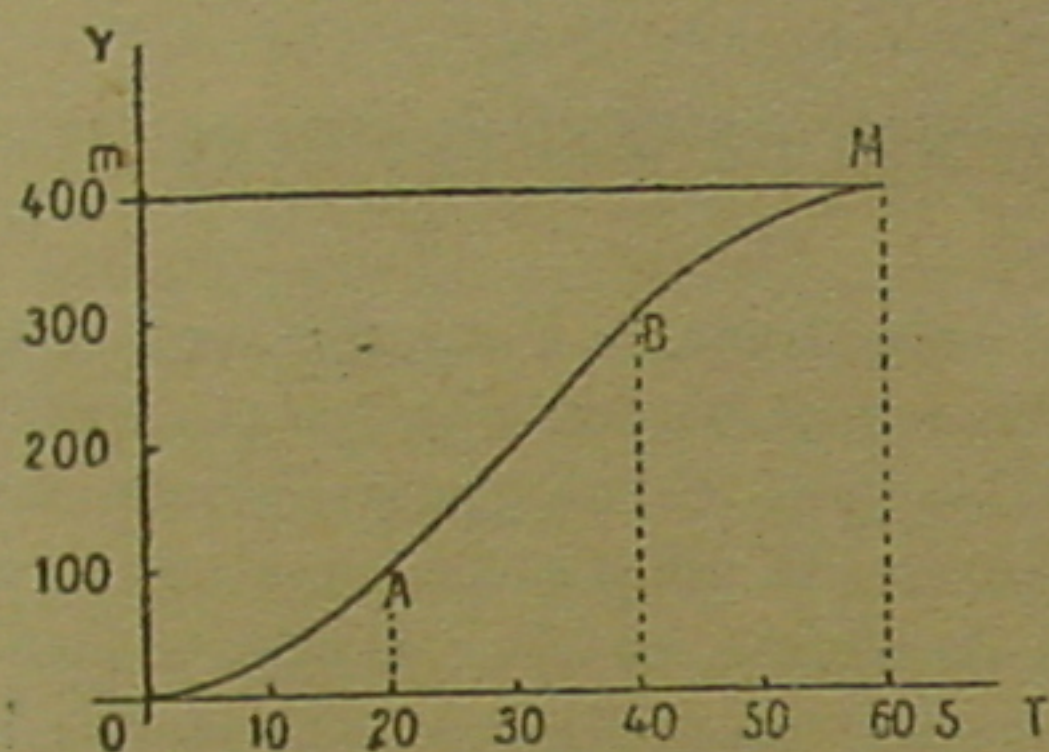


Fig. 96

Com estes dados, que correspondem aos da exploração real, um comboio, partindo do repouso, marcha primeiramente com um movimento acelerado, de maneira analoga a uma bala, que acaba de ser abandonada, que cae; percorre assim 100^m durante 20 segundos; depois, marchando em cheio, a 10^m por segundo, durante 20 segundos, percorre 200^m; então, aperta os freios, marcha com um movimento retardado, percorre 100^m em 20 segundos e pára. Encontra-se assim na estação, a que tinha de chegar e gastou 1 minuto, ou 60 segundos, a effectuar o seu trajecto.

O graphico (fig. 96) dá conta de todas estas circumstancias. De O a A, é o periodo d'entrada em marcha (100^m em 20 segundos); de A a B, o periodo de marcha em cheio (200^m em 20 segundos), e de B a M, o periodo do emprego dos freios, para determinar a paragem (100^m em 20 segundos).

¹ Uma indicação pratica, interessante e muito util, é a seguinte; Passa-se da velocidade em kilometros por hora para a velocidade em metros por segundo, multiplicando aquella por $\frac{5}{18}$. No nosso caso, $36 \times \frac{5}{18} = \frac{180}{18} = 10$.

Reciprocamente, passa-se da segunda para a primeira, multiplicando por $\frac{18}{5}$ ou $\frac{36}{10}$. Basta, para isso, subtrahir $\frac{1}{10}$ e multiplicar por 4; assim, um comboio, que anda 30 metros por segundo, tem uma velocidade de 108 kilometros por hora, porquanto: $30 - 3 = 27$, e $27 \times 4 = 108$.

Basta olhar para a figura, para fazermos ideia da importancia dos periodos d'entrada em marcha e do emprego dos freios, em percursos tão curtos. Se a distancia entre duas estações fôr de 200^m, em vez de 400^m, o periodo de marcha em cheio desaparece completamente, e são precisos 40 segundos para percorrer os 200^m.

57 — Geometria analytica

O principio geral, que preside á construcção de qualquer graphico, foi indicado no n.º 46 e applicado, sob diversas fórmulas, nos n.ºs seguintes. Recordemol-o dizendo que consiste em, depois de ter traçado duas rectas perpendiculares OX e OY, marcar sobre OX um comprimento $x = OP$ e sobre OY, um comprimento $y = OQ$ e em determinar um ponto M, fazendo passar por P e Q parallelas a OY e OX, que se cortam n'esse ponto M.

Se y é o valor d'uma função de x , que se quer representar, a linha, que se obtem ligando todos os pontos M construidos, representa as variações da função y .

A' custa de algumas denominações novas, vamos encontrar aqui tudo o que constitue a base d'uma sciencia importante e muito util, a *Geometria analytica*, devida ao genio de Descartes ¹.

E devemos acrescentar que, sem a Geometria analytica, não se teriam por certo ideado os graphicos.

As duas rectas OX e OY (fig. 97) chamam-se *eixos coordenados*. OX é o eixo dos x , ou eixo das *abscissas*; OY, o eixo dos y , ou eixo das *ordenadas*.

OP = x e OQ = y , são as *coordenadas* do ponto M; OP é a *abscissa* de M e OQ, a sua *ordenada*.

¹ RENÉ DESCARTES, illustre philosopho e sabio francez, natural da Haye, na Touraine (1596-1650).

Uma abscissa negativa marcar-se-ha na direcção OX e uma ordenada negativa, na direcção OY'.

Donde resulta que, se um ponto, como succede na figura, está no angulo XOY, o seu x e o seu y , são positivos;

se está no angulo $\left\{ \begin{array}{l} \text{YOX}', \text{ o seu } x \text{ é negativo e o seu } y \text{ é positivo;} \\ \text{X'OY}', \text{ o seu } x \text{ e o seu } y, \text{ são negativos;} \\ \text{Y'OX}, \text{ o seu } x \text{ é positivo e o seu } y \text{ é negativo.} \end{array} \right.$

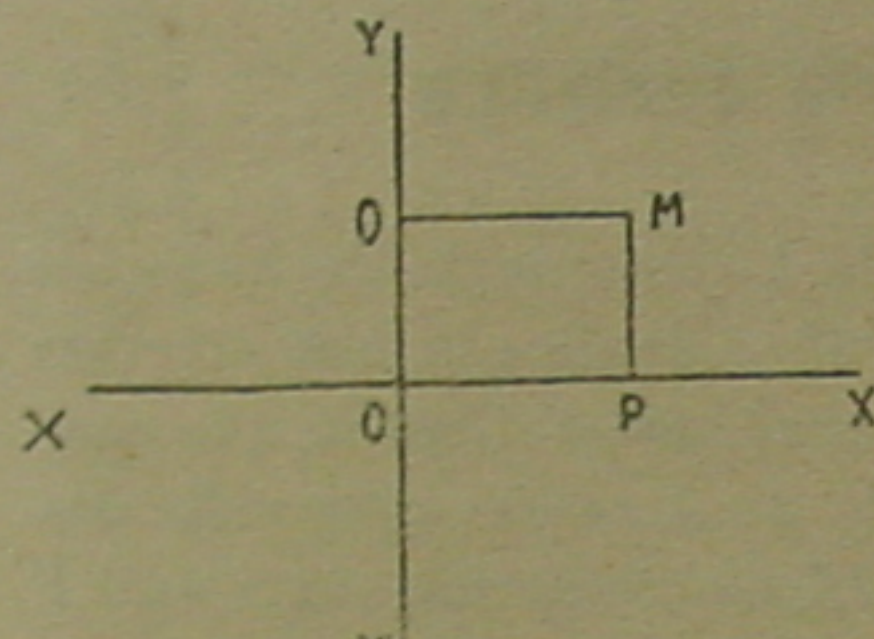


Fig. 97

Marcado um ponto no plano da figura, deduzimos as suas duas coordenadas. Dadas duas coordenadas quaesquer, deduz-se a posição do ponto correspondente.

Se as duas coordenadas x e y , não são umas quaesquer, tomadas ao acaso, mas estão ligadas entre si por

uma relação algebraica, isto é: de maneira que, sendo conhecida uma das coordenadas, a outra se pode deduzir d'ella por meio de operações de calculo bem definidas, o ponto M descreve então uma linha. Diz-se que a relação algebraica em questão é a equação da linha.

Construir uma linha e achar as suas propriedades, conhecendo a sua equação; achar a equação d'uma linha, quando esta foi definida d'uma maneira muito precisa, por um processo qualquer; eis os dois grandes problemas geraes, de que se occupa a Geometria analytica.

Não temos a pretensão d'aprender, n'este momento, seja o que fôr de Geometria analytica; mas, não deixa de ser proveitoso notar que, quando construímos os nossos differentes graphicos, fizemos, sem darmos por isso, um pouco de Geometria analytica, antes mesmo de conhecermos o nome d'esta sciencia. Tambem nos parece bom aproveitar esta occasião para saudar, de passagem, a memoria d'um dos maiores genios, de que a humanidade tem o direito de se orgulhar.

E' desde a invenção da Geometria analytica que o estudo das linhas curvas tem feito progressos enormes, graças aos novos subsidios fornecidos por esta sciencia.

Comtudo, trez d'estas linhas curvas — e ainda algumas mais — tinham já sido estudadas na antiguidade pelos geometras gregos, com o simples auxilio da Geometria. O nosso espirito sente-se perturbado ao considerar a enorme pujança intellectual, o prodigioso esforço cerebral, d'esses sabios, que, ha mais de duas dezenas de seculos, conseguiram levar a cabo descobertas, de que presentemente ainda nos utilizamos.

As trez linhas, de que queremos fallar, são ainda hoje d'um uso incessante, mesmo nas applicações praticas. E' o que nos leva a dizer algumas palavras a seu respeito, nos numeros que seguem, não para as estudar, é claro; mas, apenas, para se ficar sabendo o que ellas veem a ser e para que se possa entrever o prazer e o interesse, que o seu estudo despertará mais tarde.

58 — A parabola

Já tivemos occasião de encontrar esta curva nos graphicos da pedra que cae, da bala lançada de baixo para cima, e n'uma parte do graphico dos comboios do Metropolitano. Quando, de passeio pelo campo, succede vermos uma ponte suspensa, a fôrma curva, que affectam os cabos d'essa ponte, é a d'uma parabola.

Dá-se a definição rigorosa da parabola dizendo (fig. 98) que cada um dos seus pontos M está a igual distancia d'um ponto F e d'uma recta dada (D), de sorte que $MF = MP$. A curva tem assim a fôrma indicada na figura. Se por F, a que se chama *fóco* da parabola, se faz passar uma perpendicular á recta (D) denominada *directriz*, essa recta, FY, é o eixo da curva; esta tem a mesma fôrma d'um e d'outro lado do eixo. O eixo corta a curva em A, a meia distancia entre o fóco F e a directriz (D). O ponto A é o *vertice* da parabola.

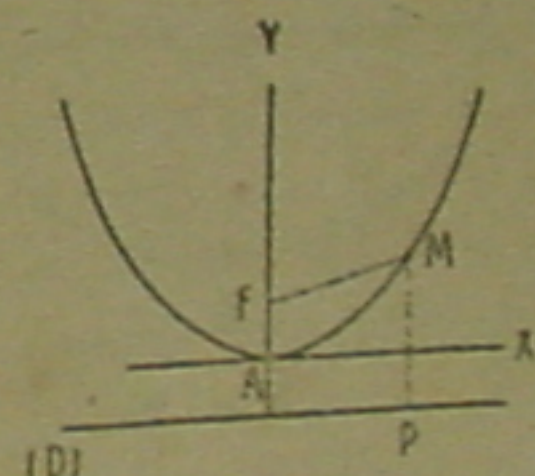


Fig. 98

Se se toma AY por eixo das ordenadas e uma perpendicular AX, por eixo das abscissas, a equação da parábola é: $y = kx^2$.

59 — A ellipse

Muitos arcos de pontes teem a fôrma d'uma meia ellipse. Quando se corta á faca obliquamente uma cenoura de fôrma um tanto regular, a secção, que se obtem, é uma ellipse. Expondo obliquamente á luz d'um candieiro a face d'um disco redondo, por exemplo: uma moeda, e projectando a sua sombra sobre uma folha de papel branco, esta sombra é tambem uma ellipse. Emfim, a Astronomia ensina-nos que todos os planetas, e o nosso em particular, giram em volta do Sol descrevendo ellipses.

Define-se a ellipse pela seguinte propriedade: a somma das distancias d'um dos seus pontos a dois pontos dados, F e F', é constante; F e F', são os fôcos da ellipse. D'onde um processo para traçar uma ellipse n'um solo arenoso:

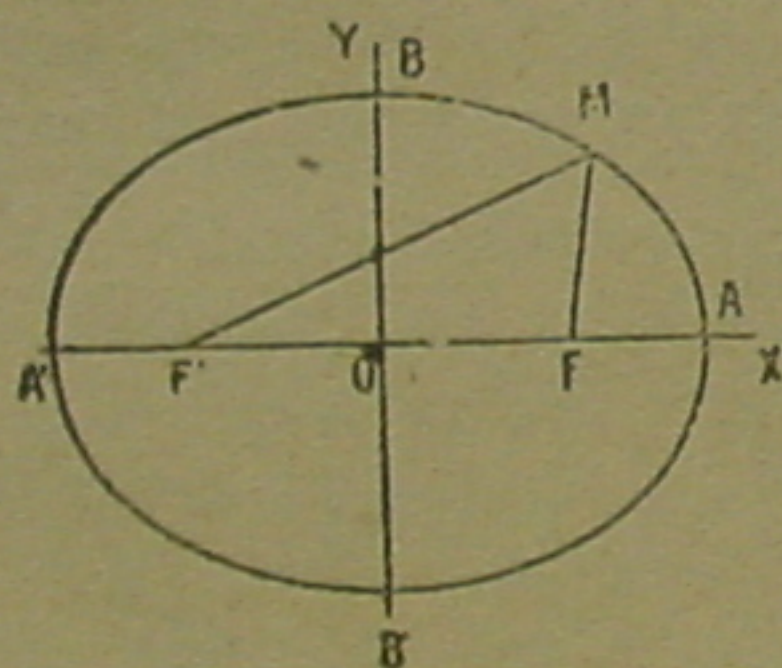


Fig. 99

de «traçado dos jardineiros».

Vê-se (fig. 99) que a ellipse é uma curva fechada. A recta FF' chama-se *eixo focal* ou *grande eixo*; o meio O de FF' é o *centro*; a perpendicular OY a FF' é o *pequeno eixo*. A curva tem uma fôrma exactamente igual acima e abaixo do grande eixo, e á direita e á esquerda do pequeno eixo.

fixam-se duas estacas em F e F', ás quaes se amarra pelas suas extremidades, um cordel, cujo comprimento foi determinado, e estica-se esse cordel por meio d'uma haste de ferro aguçada, M; fazendo girar a haste sob o solo, mantendo sempre o cordel bem tenso, ella descreve uma ellipse. Este processo é conhecido pelo nome

O grande eixo intersecta a curva em dois pontos, A e A'; o pequeno eixo, em B e B'; os quatro pontos A, A', B e B', são os *vertices* da ellipse. Vê-se facilmente que o comprimento constante MF + MF' é egual a AA' ou 2 OA, e denomina-se comprimento do grande eixo; o comprimento do pequeno eixo é BB' ou 2 OB.

Se os dois pontos F e F', estivessem confundidos n'um só, em O, a ellipse tornava-se então um circulo e teriamos OA = OB.

Se tomarmos OA e OB para eixos dos x e dos y, a equação da ellipse será, designando por a o comprimento OA e por b o comprimento OB,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A equação do circulo, se b se torna egual a a, e

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

60 — A hyperbole

Apezar d'esta curva ser tambem muito importante, é menos facil encontrar exemplos vulgares d'ella, do que das duas precedentes. Comtudo, se adaptarmos um *abat-jour* circular a um candieiro, collocando-o de maneira que a luz lhe fique por baixo, a sombra projectada pelo bordo inferior do *abat-jour*, sobre uma parede vertical, é um fragmento de hyperbole.

A hyperbole acha-se definida por esta propriedade: a differença das distancias de um qualquer dos seus pontos a dois pontos fixos, F e F', denominados *fôcos*, é constante.

Como, ha pouco, para a ellipse, a recta FF' (fig 100) e a perpendicular OY, levantada sobre o meio de FF', são os *eixos* da curva. Esta tem a mesma fôrma acima e abaixo de

FF' , e á direita e á esquerda de OY . O eixo FF' intersecta a curva em dois pontos, A e A' , que são os *verticaes*, e chama-se-lhe *eixo transverso*; o eixo OY não encontra a curva. O segmento $A'A$ tem um comprimento igual á diferença constante das distancias d'um ponto da curva a F e a F' .

O que aqui nos apparece de novo, é que a curva, que de resto pode prolongar-se tanto quanto quizermos, se compõe de duas partes, de dois *ramos* — como se diz — completamente separados um do outro.

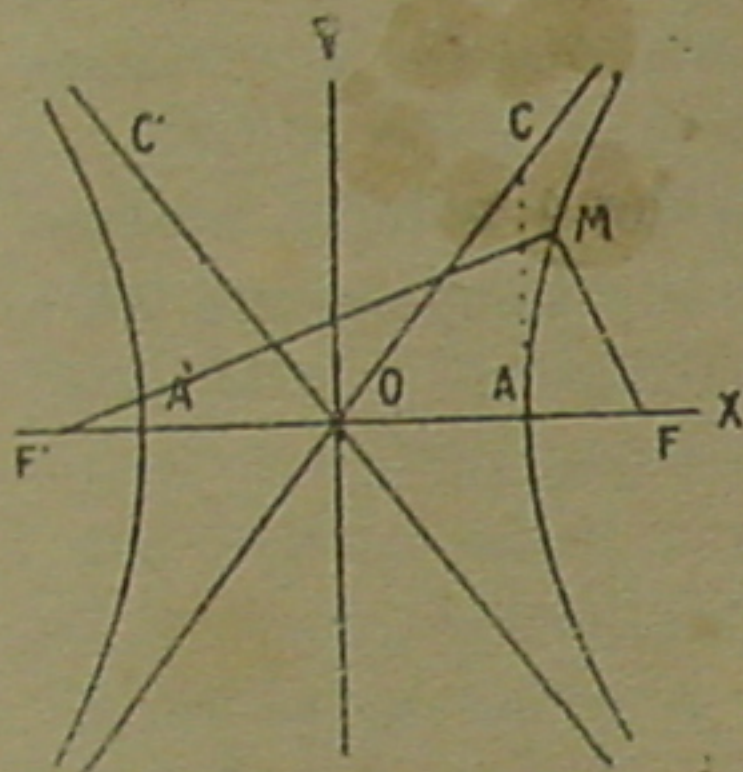


Fig. 100

Devemos notar a existencia de duas rectas, OC e OC' , chamadas *asymptotas*, que teem a particularidade de, prolongadas ellas e prolongada tambem a construcção da curva, as vemos aproximar-se indefinidamente d'esta, sem nunca se confundirem com ella. Podemos construir facilmente as *asymptotas*, sabendo que o ponto C é tal, que CA é perpendicular a FF' e que $OC = OF$. Se $OA = a$ e $OC = c$, segue-se que $AC^2 = c^2 - a^2$; fazendo $AB = b$ e tomando OA e OY para eixos dos x e dos y , a equação da hyperbole será:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

O que principalmente devemos conservar na memoria d'estas indicações ultra-summarias sobre as trez curvas importantissimas, de que acabamos de fallar, é que ellas podem fornecer materia para construcções numerosas e variadas e contribuir para adquirir a destreza manual necessaria para o traçado de curvas geometricas. Tambem aqui é preciso fazer uso, successivo ou alternado, do papel quadriculado, dos instrumentos usuaes do dezenho, esboços á mão, etc.

61 — O segmento dividido

Seja AB um segmento de recta, que supponmos prolongado nos dois sentidos (fig. 101), e M um ponto movel sobre a recta AB . Se, por exemplo, o ponto M está situado entre A e B , divide AB em dois segmentos, AM e BM , e é a relação $y = \frac{AM}{MB}$ d'estes dois segmentos, que queremos estudar. E' evidente que ella varia, segundo a posição de M .

Colloquemos primeiramente M em A ; a relação é zero, porquanto MA é zero. Se M se move de A para B , a relação augmenta; quando M está a meio de AB , a relação y é

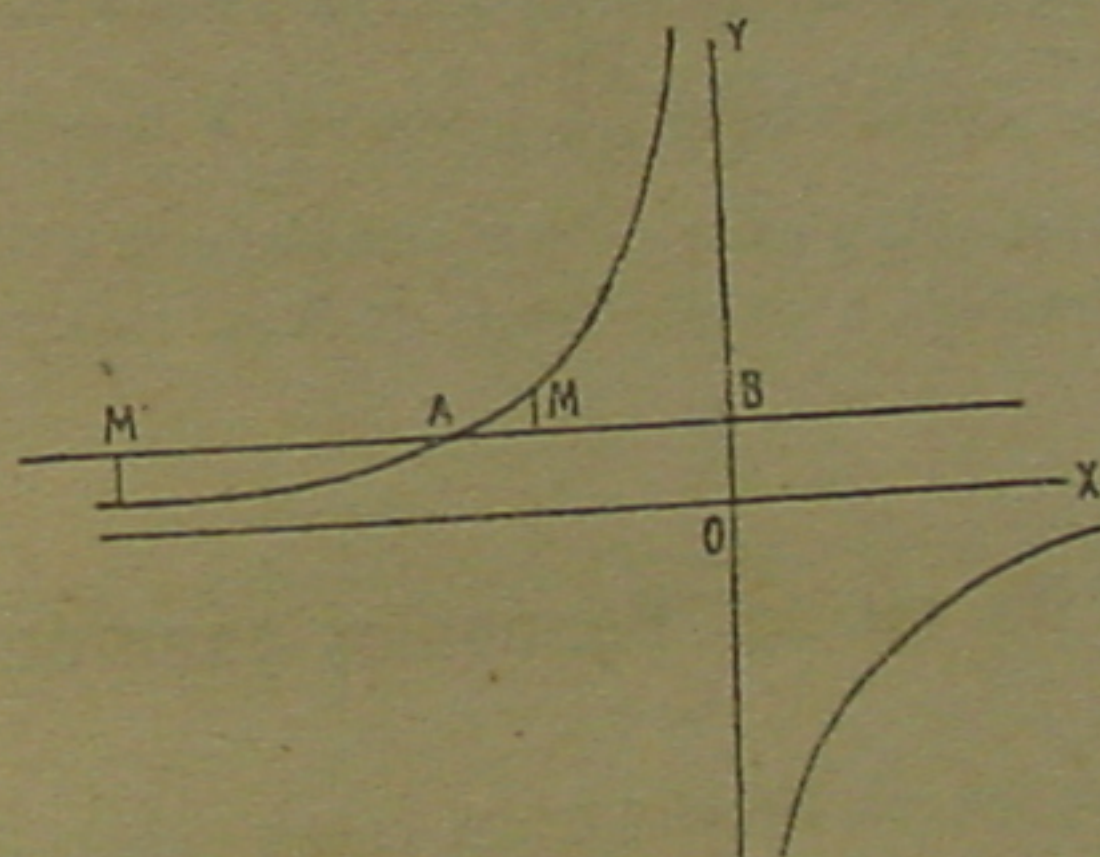


Fig. 101

igual a 1; quando M se approxima de B , y adquire valores, que se tornam cada vez maiores, e dizemos que, quando M chega a B , a relação é infinita, o que é apenas uma maneira de fallar.

Se, agora, M passa um pouco para além do ponto B , AM será sempre positivo, MB será negativo e muito pequeno; d'onde y , isto é: $\frac{AM}{MB}$, será negativo e muito grande. Afastando-se M cada vez mais de B , a relação permanecerá ne-

gativa, a sua grandeza diminuirá, ficando sempre maior que 1, mas aproximando-se mais e mais de 1.

Se, agora, tendo sempre o ponto M situado em A, o fazemos mover para a esquerda, a relação $\frac{AM}{MB}$ é ainda negativa; a sua grandeza é menor que 1 e aproxima-se cada vez mais de 1, á medida que M se afasta de A.

Representando, para cada posição do ponto M, o valor da relação y por uma ordenada levantada perpendicularmente á recta AB, obtemos, como graphico representando as variações d'esta relação, a curva traçada na figura 101. Esta curva é uma hyperbole, cujas asymptotas são BY, perpendicular a AB, e OX, parallelá a AB, a uma distancia marcada pela unidade, e abaixo d'ella, isto é: no sentido negativo.

A propria fórma da figura mostra que não ha dois pontos M, para os quaes a relação $\frac{AM}{MB}$ possa ser a mesma. Desde que seja conhecido o valor y d'esta relação, com o seu signal, está determinada a posição exacta de M sobre a recta AB.

62 — Dó, mi, sol. Harmonias geometricas

Dissemos que na figura 101 não podem existir dois pontos M differentes e taes, que a relação $\frac{AM}{MB}$ seja a mesma. Mas, dado um ponto M, podemos achar um outro e só um, M', tal que as duas relações $\frac{AM}{MB}$ e $\frac{AM'}{M'B}$ tenham a mesma grandeza. Como então os signaes são contrarios, temos pois

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{AM}{MB}$$

Quando quatro pontos d'uma recta, M', A, M e B, são taes que este caso se dá, diz-se que formam uma *divisão harmonica*.

A expressão pode parecer estranha; antes, porém, de a explicar, vamos escrever a proporção $\frac{M'A}{M'B} = \frac{AM}{MB}$ d'uma maneira um pouco differente. Designemos por a, m e b , os segmentos M'A, M'M e M'B; temos, então, $AM = m - a$ e $MB = b - m$, e a relação torna-se em

$$\frac{a}{b} = \frac{m - a}{b - m} \text{ ou ainda } \frac{m - a}{a} = \frac{b - m}{b};$$

$$\frac{m}{a} - 1 = 1 - \frac{m}{b}; m \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} \right) = 2; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m}.$$

Por outro lado, é sabido — desde que a acustica começou a ser estudada — que os comprimentos d'uma corda vibrante dando as trez notas *dó, mi, sol*, que constituem o accorde maior, perfeito, são proporcionaes a

$$1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$$

Os comprimentos inversos são, pois, proporcionaes a

$$1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$$

ou

$$4, 5, 6;$$

e, como $4 + 6 = 2 \times 5$, os trez comprimentos de cordas a, m e b , satisfazem á relação

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m},$$

que acima escrevemos.

E' d'esta approximação, que deriva a designação de *divisão harmonica*.

D'um modo mais geral: quando temos uma progressão arithmetica qualquer

$$a \quad b \quad c \quad \dots$$

e dividimos 1 por cada um dos termos, a serie

$$\frac{1}{a} \quad \frac{1}{b} \quad \frac{1}{c}$$

que se obtem, denomina-se uma *progressão harmonica*.

Uma das propriedades mais notaveis das divisões harmonicas, que desempenham um papel importante em Geometria, é a seguinte:

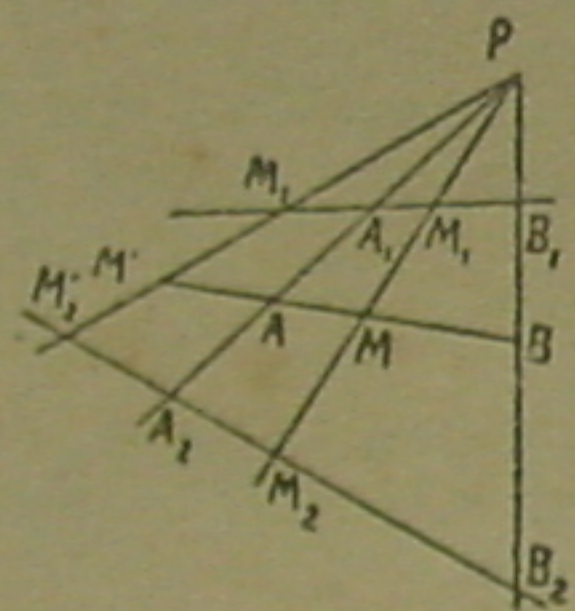


Fig. 102

Seja (fig. 102) $M'AMB$ uma divisão harmonica. Se ligarmos os 4 pontos, que a compõem, a um ponto qualquer, e se cortarmos as 4 rectas PM' , PA , PM e PB , por uma recta qualquer, temos ainda uma divisão harmonica; assim, na figura, $M'_1A_1M_1B_1$ e $M'_2, A_2M_2B_2$, são divisões harmonicas.

Ao systema das 4 rectas PM' , PA , PM e PB , chama-se um *feixe harmonico*.

63 — Um paradoxo: $64 = 65$

Em mathematica encontram-se a meude paradoxos; isto é: resultados que se obteem por meio de operações reputadas feitas com rigor, e que, apesar d'isso, são notoriamente falsos.

Todo o paradoxo não explicado é perigoso, porquanto lança no espirito a confusão e a duvida.

Pelo contrario, todo o paradoxo explicado é instructivo,

porque chama a attenção de uma cilada e mostra de que illusões podemos ser victimas. Uma vez, é um raciocinio incorrecto; outras, é uma construcção feita com demasiada irreflexão, que levam a um absurdo flagrante.

Mas, se os paradoxos, bem apresentados e explicados, teem tambem o seu logar no ensino, deve-se guardar, sobre esta materia, a mais prudente reserva na *iniciação*, durante a qual não se trata de profundar as cousas, mas apenas de as mostrar e as fazer apalpar.

Foi isto que nos determinou a não apresentar, até aqui, questão alguma d'este genero. Chegamos, porém, ao termo, ou quasi,

da nossa tarefa, não vemos nenhum inconveniente grave — muito pelo contrario — em abrir excepção para uma unica questão, de resto muito divulgada hoje em dia, que se pode mesmo deixar — não por muito tempo — o alumno procurar resolver. É pouco provavel que descubra sozinho o segredo; e não tardará que tenhaes que ir em seu auxilio.

Tomemos (fig. 103) um quadrado de 64 casas de papel quadriculado e collemol-o sobre um cartão. Feito isto, traçamos as linhas marcadas na figura; dividem estas o quadrado em dois rectangulos, tendo 8 lados de casa por base e, por altura, 5 e 3 lados respectivamente; em seguida, o rectangulo grande é dividido em dois trapezios e o pequeno, em dois triangulos. Cortemos, em seguida o nosso cartão, com um canivete ou uma tesoura, segundo as trez linhas traçadas, o que nos dará os 4 pedaços A, B (trapezios) e C, D (triangulos).

Ajuntemos agora os 4 pedaços, como indica a 2.ª parte da

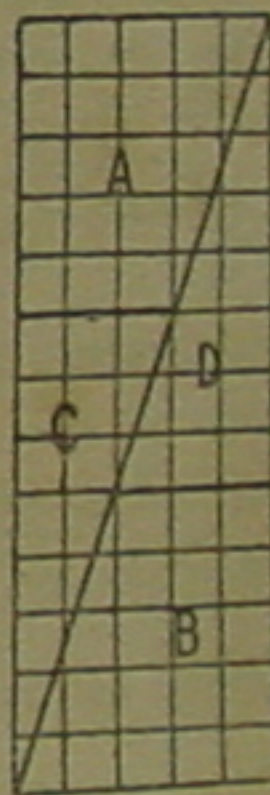
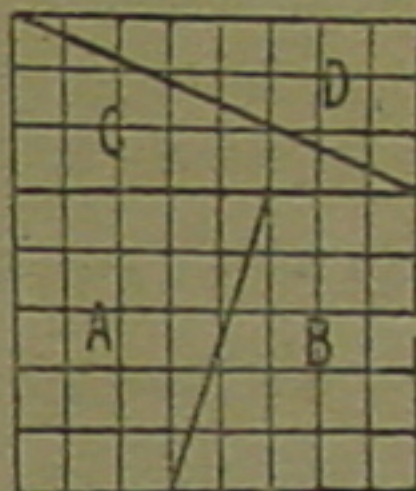


Fig. 103

figura. Temos assim um rectangulo, que apresenta 5 columnas de 13 casas cada uma; vemos, pois, 5×13 ou 65 casas, com esta segunda disposição; no quadrado, não havia senão 8×8 ou 64. E é com os mesmos pedaços de cartão que se obteem estes dois resultados differentes.

Sentimo-nos impellidos, julgando ver que $64 = 65$, a perguntar a nós proprios, se não enlouquecemos.

Uma vez conhecida, a explicação não é muito complicada; mas, é necessario reflectir um pouco para a descobrir.

Olhando para a grande diagonal do rectangulo, que constitue a 2.^a parte da figura, somos levados a perguntar a nós proprios se ella é realmente uma linha recta. Compõe-se de duas partes: a hypotenusa do triangulo rectangulo C e o lado do trapezio A. Segundo o traçado, a inclinação da hypotenusa sobre o grande lado é $\frac{3}{8}$; a do lado do trapezio é $\frac{2}{5}$. Se

estas duas fracções fossem exactamente eguaes, teriamos uma recta. Mas, ellas são $\frac{15}{40}$ e $\frac{16}{40}$; a primeira é um pouco mais pequena que a segunda, e o que parecia uma recta, é realmente um quadrilatero muito estreito e alongado, que corresponde á area da casa accrescentada. O ajustamento parecia realizar-se; mas, na realidade, não se faz exactamente.

Se tomassemos um quadrado de $21 \times 21 = 441$ casas e dividissemos o seu lado em 13 e 8, teriamos apparentemente, por uma construcção semelhante, $441 = 442$. Unicamente, as duas fracções, cuja egualdade é necessaria para um ajustamento perfeito, seriam $\frac{8}{21}$ e $\frac{5}{13}$; differem apenas de $\frac{1}{273}$, de sorte que a concordancia pareceria ser completa.

64 — Quadrados magicos

Se escrevermos os 9 primeiros numeros, 1, 2, ... 9, nas casas d'um quadrado, da maneira seguinte:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

podemos verificar que, sommando os numeros comprehendidos n'uma linha, n'uma columna ou n'uma qualquer das diagonaes, encontramos sempre $4 + 9 + 2 = 3 + 5 + 7 = 8 + 1 + 6 = 4 + 3 + 8 = 9 + 5 + 1 = 2 + 7 + 6 = 4 + 5 + 6 = 2 + 5 + 8 = 15$.

Uma figura assim, é o que se chama um *quadrado magico* de 3; a somma 15 é a *somma magica constante*. Se subtrañissemos 1 de cada numero, o que daria

3	8	1
2	4	6
7	0	5

o quadrado seria ainda magico, mas, a constante seria então 12 em vez de 15.

Tomando os numeros 0, 1, 2, ... 24, e dispondo-os n'um quadrado de 25 casas, teremos, satisfazendo ás mesmas condições, um quadrado magico de 5; a constante será 60.

Eis um exemplo, em que podemos verificar que todas as condições exigidas estão plenamente satisfeitas:

0	19	8	22	11
23	12	1	15	9
16	5	24	13	2
14	3	17	6	20
7	21	10	4	18

Mas, ha mais: se cortarmos o quadrado por uma recta

vertical entre duas columnas quaesquer, e se fizermos a permutação dos dois pedaços, teremos ainda um quadrado magico; se o cortamos por uma recta horisontal entre duas linhas, e se procedermos da mesma fôrma á permutação, teremos ainda um quadrado magico.

Eduardo Lucas deu o nome de «diabolicos» aos quadrados, que gozam d'esta propriedade.

Os quadrados magicos teem sido o assumpto de numerosos trabalhos. Embora possam parecer um simples passatempo, dão origem a questões, que apresentam grandes difficuldades, e os mais illustres mathematicos, Fermat entre outros, não desdenharam de se occupar d'ellas.

Uma das mais notaveis obras publicadas em nossos dias, sobre esta materia, é a do sr. G. ARNOUX: *Arithmétique graphique; Les Espaces arithmétiques hypermagiques*; Paris, Gauthier-Villars, 1894.

Como méra curiosidade, entendemos dever referirmo-nos aqui a estas figuras, cuja existencia de nenhum modo é permittido ignorar.

65 — Discurso final

Se acaso tivéssemos tido que iniciar algumas creanças no conhecimento das cousas essenciaes da mathematica, examinadas nas paginas que precedem, eis, pouco mais ou menos, o que lhes diríamos, chegados ao termo da nossa jornada:

Ides começar a vossa instrucção no campo da mathematica. Segundo as vossas disposições naturaes, segundo a direcção que, mais tarde, sereis chamados a seguir na vida, essa instrucção será mais ou menos vasta; mas, restricta a certos limites, é indispensavel a todos.

Até agora, não estudastes nada; mas, aprendestes, recreando-vos, um certo numero de coisas uteis. Se, da vossa parte, houve qualquer esforço, nunca deixou de ser um esforço voluntario; nada vos foi exigido, e mormente nada se exigiu da vossa memoria.

Antes mesmo de saberdes ler ou escrever, pdestes formar

numeros com diversos objectos e fazer algumas operações simples. Quando o emprego dos algarismos veio a ser possivel, a pratica do calculo tornou-se-vos mais correntia. Graças ao habito de vos reportardes aos proprios objectos e de não considerar unicamente os algarismos, que não fazem mais do que traduzil-os, cedo conseguistes possair a noção dos numeros negativos e a tornal-a absolutamente familiar. Algumas noções de Geometria — comprovadas, mas não demonstradas — bastaram para começar a mostrar-vos o estreito laço, que une a sciencia dos numeros á da extensão.

O estudo das fracções não o fizestes, como não fizeste nenhum outro; mas, sabeis o que é uma fracção e conheceis sufficientemente bem a pratica corrente do calculo, que lhe diz respeito.

Algumas progressões, de fôrma simples primeiramente, depois um pouco mais generalizadas, levaram-vos em seguida, com o auxilio de varios exemplos, á concepção de numeros enormes. Outros numeros grandes appareceram deante dos vossos olhos, quando vistes o que são as permutações.

Com algumas noções praticas complementares de Geometria e de desenho, podestes formar uma ideia da construcção e do emprego dos graphics, e realisar algumas das suas applicações, particularmente a questões de movimento. Chegastes assim até ás portas da Geometria analytica; divisastes, pelo menos, a fôrma das trez curvas principaes, que a Geometria analytica permite estudar com maior profundeza, mas que já eram conhecidas dos antigos.

Tenha ficado, de todas estas noções, muito ou pouco na vossa memoria, alguma cousa sempre arrecadastes. Adquiristes, ao mesmo tempo e muito certamente sem dar por tal, habitos de espirito, que vos hão de ser preciosissimos.

D'ora avante, não se trata mais de brincadeiras, de passatempos, mas de estudo. Tendes que vos sujeitar a esforços intellectuaes, talvez mesmo a alguns esforços de memoria. Serão, porém, tanto mais attenuados, quanto, mais oupadas foram, até aqui, as vossas forças, e ainda porque,

apezar d'isso, sabeis muitas mais cousas, do que sabiam as creanças da vossa idade, que eram instruidas submettendo-as a uma verdadeira tortura, que eram obrigadas a decorar palavras, sem nada comprehenderem.

Na maior parte das materias dos vossos estudos, ides encontrar antigos conhecimentos; a perturbação, que a novidade acarreta, terá desaparecido as mais das vezes. Não julgae, comtudo, que não encontrareis difficuldades; haveis de encontral-as, mas vereis que proveem da propria natureza das cousas, que é indispensavel vencel-as para alcançar resultados uteis e interessantes, e isso dar-vos-ha a coragem precisa. Por assim dizer brincando, adquiristes muitas noções, que facilitarão os vossos estudos futuros. Pelo trabalho, de hoje em diante, ides tirar partido do que sabeis; empregareis a vossa razão; ampliareis o ambito dos vossos conhecimentos. Mas, esse trabalho, se deixou de ser um divertimento, não será tão pouco uma maçada! Reconhecendo a sua utilidade, tomareis gosto por elle; pouco a pouco, tornar-se-ha para vós uma necessidade da vida; ser-vos-ha não só facil, mas preciso.

Todavia, quando encontrardes qualquer difficuldade tendes os vossos mestres, verdadeiros guias, que vos dirigirão; mas, não exige mais nada d'elles. O esforço individual, o esforço livre, sómente, pode dar bons resultados. Inconscientemente, habituastes-vos a elle com os jogos da vossa infancia. Compete-vos agora tirar d'isso todo o proveito, empregando vós proprios, na obra, da vossa instrucção, tudo o que possuides em paciencia, em vontade e em energia tida de reserva.

Eis, pouco mais pouco menos — salvo numerosas variantes — o que devemos dizer á creança, chegada ao termo da sua iniciação e na vespera de encetar os seus estudos. Não é com um discurso, mas com dez ou cem sessões, conforme a necessidade, que conseguiremos imbuil-a d'estas ideias. Compete ao iniciador utilizar-se agora d'ellas para orientar a creança pelas novas veredas, que é chamadas a percorrer.

Este iniciador, em minha opinião, deve ser principalmente

a familia; e mesmo, quando por quaesquer razões, individuos ou sociaes, tal não succeda, o pae e a mãe devem compenetrar-se de que o seu primeiro dever é não se desinteressarem pela evolução cerebral da creança e serem, pelo menos, os auxiliares do educador, se não podem ser elles proprios os educadores.

E, terminada a tarefa da iniciação, devendo começar ámanhã a da instrucção, os deveres dos paes tornam-se ainda mais imperiosos, se é possível; a sua responsabilidade é pesada, porquanto a decisão, que vão tomar, pode influir sobre toda a vida do filho, quer para bem, quer para mal.

E', pois, ás familias que agora nos dirigimos, para lhes dar alguns conselhos, a nosso ver uteis, expostos ao correr da penna, dos quaes cada um aproveitará o que tiver por bom.

Comecemos por dizer que estamos d'accordo n'este ponto: a *iniciação* mathematica é *indispensavel* a todas as creanças, sem distincção alguma de condições de fortuna, de situação social, de sexo. Agora, porém, affirmamos que — sempre sem distincção, sem reserva alguma — a *instrucção* mathematica é egualmente *indispensavel*. As mulheres precisam tanto d'ella, como os homens; a vida usual, a economia domestica, da mesma fórma que a industria, cujas applicações envolvem todo o nosso viver, exigem de nós conhecimentos sobre a sciencia das grandezas e da extensão.

Surge aqui uma objecção, que temos refutado mais d'uma centena de vezes, mas que não deixaremos de refutar ainda. «Terá meu filho disposição para os estudos mathematicos? Se não tem, é pura perda de tempo dirigil-o n'esse sentido; não pretendo fazer d'elle um mathematico.»

Simplesmente prodigioso! Acaso, quando ensinastes á mesma creança a leitura e a escripta, procurastes saber se ella era dotada de disposições naturaes para estes ramos de estudo? Quando lhe ensinastes as primeiras noções de desenho, pensastes, por ventura, que ella estava reservada para vir a ser um pintor celebre? Nada pode contestar a utilidade para qualquer, homem ou mulher, de saber exprimir

correctamente as suas ideias na sua lingua materna; e não se imagina, por isso, que cada alumno esteja destinado a ser um Paulo Luiz Courier, um Goethe ou um Shakespeare.

Tanto em mathematica, como em tudo o mais, a instrução não *faz* sabios; nem se trata de os fazer; mas, existe em todas as disciplinas um fundo geral de conhecimentos uteis, necessarios mesmo a toda a gente e de facil aquisição para todo o individuo, cujo cerebro esteja isento de tára.

O conjunto d'esses conhecimentos, graças á iniciação prévia, pode ser assimilado em muito menos tempo, do que o que lhe é consagrado no ensino corrente.

Esta bagagem, no que respeita ao nosso assumpto, está pouco mais ou menos representada, em França, pelo que se denomina as mathematicas elementares. Qualquer creança, dotada, ou não, d'aptidão especial, pode assimilar o conjunto d'estes conhecimentos, da mesma fórma que pode chegar a ler e a escrever com correcção, senão com elegancia. Se tem o gosto innato pelas mathematicas, cultivar-as ha depois, por si só; se é litterato por temperamento, escreverá. O ensino nunca fez sabios, nem artistas; o seu fim deve ser preparar homens.

Portanto, sobre este ponto, não ha hesitação possivel. O vosso filho deve adquirir as noções fundamentaes de mathematica, necessarias a todos. Mas, segundo a vossa situação, as vossas preferencias, o vosso feitio de espirito, onde e como, vae elle receber essa instrução?

Não podemos fallar, aqui, senão da França. Com pequenas variantes, o problema apresentar-se ha d'egual modo, por quasi toda a parte. Temos: um Ensino primario, do qual uma boa parte tem, ou devia ter, por objecto a iniciação; um Ensino primario superior, que o completa; um Ensino secundario dividido em numerosos e variados escaninhos. D'entre tudo isto, torna-se necessario fazer uma selecção, e sois vós quem tem que escolher; porquanto, sobre estes pontos precisos, não posso infelizmente dar-vos algum conselho proveitoso.

O nosso Ensino primario é supportavel; o Ensino primario superior seria o menos mau de todos, se muitas familias

não ficassem hypnotisadas pelo attractivo das «carreiras liberaes» e do funcionalismo.

Quanto ao Ensino secundario, para não nos alongarmos demasiado, limitamo-nos a citar um pequeno trecho d'um estudo do sr. Ascoli; podemos ver n'elle a mais encantadora das ironias, e talvez não nos enganemos:

«O que se teve em vista, augmentando a importancia das sciencias no Ensino secundario, foi conceder-lhes o bom quinão que, de direito, a ellas compete na formação dos espiritos. Até aqui, este papel estava reservado ás lettras, emquanto que as sciencias constituíam principalmente disciplinas d'exames, destituídas de qualquer character educativo.»

Traduzie: *até aqui*, o nosso ensino secundario teve por missão embrutecer a mocidade, *ao passo que*, no futuro, succederá o mesmo.

E, quando pensamos que os professores d'Ensino secundario são homens de vasta instrução, dedicados á sua missão, conscienciosos quanto se pode ser, estremecemos ao pensar no damno que pode produzir o espirito de rotina, servido por uma Administração monstruosa, que só usa do poder para fazer mal.

Em todo o caso, seja qual fôr a decisão tomada, não deixae um só instante de fiscalisar a educação de vosso filho. Antes mesmo de o confiar a um estabelecimento qualquer d'instrução, tendes o direito e o dever de vos informar do espirito do ensino, dos methodos seguidos, das condições de trabalho, sem que para isso seja mister que sejaes mathematicos vós proprios.

E, acima de tudo, não vos deixae intimidar pelo director, provedor, reitor — pouco importa o titulo — que tiver a petulancia de dizer que vos metteis onde não sois chamados. Duas observações, apenas, vão dar-vos uma ideia da maneira como vos podeis defender.

Para ensinar o systema metrico, ha lyceus em que não se encontra um só instrumento de medição: metro, litro, pesos, etc.

No ensino da Geometria, adopta-se, desde seculos — poder-se-hia dizer: desde os geometras gregos — um method

fatigante, antiracional, que desanima e desgosta os alumnos, mormente os principiantes. Todavia, ha mais de trinta annos, em 1874, um sabio de alto valor, o sr. Carlos Méray, professor da Universidade de Dijon, publicou, com o titulo *Nouveaux éléments de Géométrie*, um livro verdadeiramente notavel, em que se faz simultaneamente o estudo do plano e do espaço, pondo em evidencia as verdades d'ordem experimental, que o methodo classico dissimula com hypocrisia. A Administração Universitaria enfureceu-se; depois, favorecido pelo progresso e com o decorrer do tempo, o novo methodo introduziu-se n'um grande numero de escolas, principalmente no Ensino primario superior. Por toda a parte, está dando os mais notaveis resultados; mas, a porta do Ensino secundario, tem-lhe ficado tapada até hoje, como os ouvidos d'um surdo, que não quer ouvir, apesar de ter sido publicada uma 2.^a edição do livro ¹.

Por consequencia, quando tratardes de colher informações sobre a entrada de vosso filho para um collegio ou lyceu, pedi licença para ver o material d'ensino dos pesos e medidas, os instrumentos d'agrimensura, etc. Se vos responderem que, na casa, nada d'isso existe, fugie para não mais voltar.

Fazei tambem, muito simplesmente, esta pergunta: «No ensino da Geometria, empregam o methodo de Méray?» — Tres são as respostas possiveis: «Sim; Não; Não sei o que isso é.» No primeiro caso, podeis continuar a informar-vos; no segundo, cumprimentae muito cortezmente a personagem e procurae não tornar a vel-a; no terceiro caso, dae-lhe o bom conselho de aprender o que diz respeito á sua profissão, e dizei-lhe claramente, que só podereis continuar a conversação quando ella tiver concluido a sua aprendizagem; antes, não.

¹ Isto foi escripto em maio de 1905. Posteriormente, um decreto de 27 de julho, completado pelas instrucções publicadas em 9 de setembro, modificou os programmas das Mathematicas do Ensino secundario.

Foram introduzidos em Geometria os principios do methodo do sr. Méray, pelo que devemos felicitar o ministro d'Instrucção publica. Mas, o nome do inventor nem sequer foi citado, o que é, ao mesmo tempo, um acto d'ingratidão e uma injustiça.

Se os paes e as mães acabassem, d'uma vez para sempre, por ter a maxima cautela com o futuro intellectual dos filhos, fallariam claro, exigiriam o que teem o direito d'exigir, e muitas resistencias obstinadas desapareceriam como por encanto.

Temos fé que tal virá a succeder, um dia. Mas, para isso, é preciso que esteja mais profundamente gravado nos cerebros este pensamento tão justo e verdadeiro, enunciado pelo sr. Emilio Borel n'uma conferencia notavel, e sob cuja impressão queremos deixar-vos:

«Uma educação mathematica, ao mesmo tempo theorica e pratica, pode exercer a mais benefica influencia sobre a formação do espirito.»

Nota sobre «O iniciador mathematico» do sr. J. Camescasse

Os meios educativos, que tentámos expor n'este livro são, como se viu, essencialmente concretos. Aconselhamos que se variem o mais possivel e que se recorra ao emprego dos palitos, dos feijões, dos tentos, etc., assim como ao uso do papel quadriculado; mas, sempre pensámos que a organização d'um material apropriado aos methodos, que indicamos, seria muito util, especialmente no ensino collectivo.

Praticamente, a questão não estava isenta de difficuldades; o sr. Camescasse, porém, conseguiu vencel-as da maneira mais engenhosa possivel, e deu-nos, sob o nome de *Iniciador mathematico*, um jogo de pequenos cubos de madeira, de 1 centimetro de aresta, brancos uns, vermelhos os outros, que se podem agrupar, ajustar entre si, prestando-se, assim, ás mais variadas combinações. ¹

¹ JACQUES CAMESCASSE: *L'Initiateur mathématique. Jeu de petits cubes, rendant facile dans la Famille et à l'École la mise en pratique de l'Initiation mathématique de C.-A. Laisant*. Librairie Hachette & C.^a, Boulevard Saint Germain, 79, Paris.

Um jogo consta d'uma caixa contendo 600 cubos brancos, 600 cubos vermelhos, 144 regrestas e uma «Nota explicativa» de 32 paginas, com 15 figuras no texto e 1 plancha a duas cores; preço: 12 francos. A «Nota explicativa» vende-se separadamente; preço: 1 franco.

Alem da formação dos numeros na numeração decimal, do estudo das medidas d'areas e de volume no systema metrico, dos exercicios de desenho ornamental ou de construção, que podem ter cabida nas escolas maternas, existe um grande numero de materias acima tratadas, a cujo estudo o *Iniciador* do sr. Camescasse presta valioso auxilio. Permite elle, com effeito, executar materialmente, pela propria mão da creança, todas as figuras, que implantam solidamente no seu cerebro as propriedades dos numeros, e, isso, sem esforço algum.

Citaremos, em especial, os n.ºs 16, 21, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33 e 34, como contendo questões, a que o *Iniciador mathematico* se applica com verdadeira felicidade. Mas, é provavel que, na pratica, muitas outras applicações se revelem por si proprias.

E' um material de que podemos tirar grande proveito: tanto no ensino nas familias, como nas escolas, sobretudo, quando nos dirigimos simultaneamente a varias creanças; porquanto, o tempo necessario para as construcções é assim consideravelmente reduzido.

Por todas estas razões, sentimos verdadeiro prazer em tornar conhecida uma tentativa, que tem por objecto delectar a creança, instruindo-a, e instruil-a, delectando-a. No fundo, os dois fins são identicos; não se aprende bem e não se retem fielmente, senão o que dá gosto aprender. Isto é verdade em todas as edades, e ainda o é mais especialmente, quando se trata da infancia.

INDICE ALPHABETICO

	Pag.		Pag.
Abscissa.....	152	Balas (Pilha de).....	89
Abstractos (Numeros)...	13	Base d'um cone.....	123
Adição.....	19	» d'um parallelo-	
Adição (Taboa d').....	17	grammo.....	68
Agudo (Angulo).....	63	» d'uma pyramide...	70
Algarismos.....	28	» d'um systema de	
Algebra.....	35	numeração.....	96
Algebricas (Notações)...	37	» d'um triangulo....	66
» (Funcções)...	130	Bases d'um cylindro....	126
Altura d'um cone.....	126	» d'um prisma.....	70
» d'um cylindro....	126	» d'um trapezio....	67
» d'um parallelo-		Binaria (Numeração)...	101
grammo.....	69		
» d'um prisma.....	70	Calculo mental.....	16
» d'uma pyramide..	70	Centena.....	15
» d'um triangulo...	66	Centro (Angulo ao)....	120
Angulo.....	63	» d'um circulo.....	119
» agudo.....	63	» d'uma ellipse....	152
» ao centro.....	120	» d'uma esphera....	126
» inscripto.....	120	Circulo.....	119
» obtuso.....	63	» (Arco de).....	119
» recto.....	63	» (Area do).....	121
Angulos d'um polygono..	66	» (Centro d'um)...	119
» reintrantes....	67	» (Diametro d'um). 119	
Area.....	71	» m a x i m o d'uma	
» d'um circulo.....	127	esphera.....	126
» d'um parallelo-		» (Raio d'um)....	119
grammo.....	73	» (Segmento d'um)	119
» d'um quadrado....	72	Circumferencia.....	120
» d'um rectangulo...	72	Comboios.....	133
» d'um trapezio....	73	» do Metropoli-	
» d'um triangulo....	73	tano.....	147
» (Unidade d').....	71	Compasso.....	118
Arestas d'um prisma...	70	Compostos (Numeros)...	50
» d'uma pyramide	70	» (Juros).....	110
Asymptotas d'uma hy-		Comprimento (Unidade	
perbole.....	154	de).....	7

	Pag.		Pag.
Concorrentes (Rectas)...	64	Ellipse (Centro d'uma)...	152
Concretos (Numeros)....	13	» (Eixos d'uma)....	152
Cone.....	126	» (Equação d'uma)...	153
» (Altura d'um).....	126	» (Focos d'uma) .	152
» (Base d'um).....	126	» (Grande eixo	
» (Vertice d'um)....	126	d'uma).....	152
Contacto (Ponto de)....	120	» (Pequeno eixo	
Convexo (Polygono)....	67	d'uma).....	152
Coordenadas.....	152	» (Vertices d'uma).	153
Crescente (Progressão)..	106	Equação d'um circulo... 153	
Crivo d'Eratosthenes....	52	» d'uma ellipse..	153
Cubo.....	70	» d'uma hyper-	
» d'um numero.....	48	bole.....	155
» d'uma somma.....	51	» d'uma linha....	152
Cylindro.....	125	» d'uma parabola.	151
» (Altura d'um)..	126	Equilatero (Triangulo)..	65
» (Bases d'um)..	126	Espheira.....	126
D ecagono.....	67	» (Centro d'uma).	126
Decrescente (Progres-		» (Circulos maxi-	
são).....	106	mos d'uma)....	126
Denominador.....	55	» (Diam. ^{os} d'uma)	126
Dezena.....	14	» (Raios d'uma)..	126
Diabolicos (Quadrados).	161	Expoente.....	48
Diagonaes d'um polygo-		Extremidade d'um seg-	
no.....	67	mento.....	38
Diametro d'um circulo..	119	F aces d'um prisma.....	70
» d'uma esphera	126	» d'uma pyramide.	70
Diferença.....	21	Factores.....	46
» (Quadrado		Fallada (Numeração)...	16
d'uma)....	79	Feixe harmonico.....	156
Directriz d'uma parabola	151	Figurada (Numeração)..	16
Dividendo.....	52	Figuradas (Permuta-	
Divisão.....	52	ções).....	113
» harmonica... 158		Foco d'uma parabola....	151
» (Restos d'uma)..	54	Focos d'uma ellipse....	152
Divisor.....	52	» d'uma hyperbole..	153
Dodecagono.....	67	Fracção.....	55
E ixo d'uma parabola... 151		» (Termos d'uma).	55
» transverso d'uma		Fracções decimaes.....	57
hyperbole.....	153	Funcção.....	129
Eixos coordenados... 151		Funcções algebraicas....	130
» d'uma ellipse....	152	G eometria.....	62, 71
» d'uma hyperbole..	153	» analytica... 149	
Ellipse.....	152	Grados.....	118

	Pag.		Pag.
Grande eixo d'uma elli-		Movimento d'uma bala	
pse.....	152	de baixo para cima.	146
Graphics.....	128	Multiplicação.....	45
» dos caminhos		» (Methodo	
de ferro....	133	musulma-	
» met eorologi-		no de)....	47
cos.....	137	» (Taboa de).	42
H armonica (Divisão)... 157		Multiplicador.....	45
» (Progressão) 158		Multiplicando.....	45
Harmonico (Feixe)....	158	N egativos (Numeros)... 38	
Heptagono.....	67	Notações algebraicas....	37
Hexagono.....	67	Numeração.....	16
Horizontal (Plano)....	63	» binaria.....	101
» (Recta).....	63	» escripta.....	30
Hyperbole.....	153	» fallada.....	16
» (Asymptotas		» figurada.....	16
d'uma).....	154	» romana.....	99
» (Eixo trans-		» (Systemas	
verso d'uma).	154	de).....	96
» (Eixos d'uma)	153	Numerações diversas... 96	
» (Equação de		Numerador.....	55
uma).....	154	Numeros.....	13
» (Focos d'uma)	153	» abstractos.....	13
» (Ramos de		» compostos.....	50
uma).....	129	» concretos.....	13
» (Vertices de		» impares.....	16
uma).....	154	» negativos.....	38
Hypotenusa.....	76	» pares.....	16
» (Quadrado		» positivos.....	38
da).....	75	» primos.....	50
I mpares (Numeros)....	16	» quadrados....	85
Inscripto (Angulo)....	110	» triangulares... 82	
Isosceles (Triangulo)...	65	O btuso (Angulo).....	63
J uros compostos.....	120	Obtusangulo (Triangulo)	65
L ados d'um polygono..	66	Octogono.....	67
» d'um triangulo..	65	Ordenada.....	150
Linha recta.....	32	Origem d'um segmento..	38
Losango.....	68	P arabola.....	151
Lunulas de Hippocrates.	122	» (Directriz de	
M agicos (Quadrados)... 158		uma).....	151
Mental (Calculo).....	16	» (Eixo d'uma).	151
		» (Equação de	
		uma).....	152

	Pag.		Pag.
Parabola (Foco d'uma)	151	Progressões arithmeti-	
» (Vertice d'uma)	151	cas.	104
Paradoxos	158	» crescentes	106
Parallelas (Rectas)	62	» decrescen-	
Parallelepipedo	70	tes	106
Parallelogrammo	68	» geometricas	106
» (Altura		» harmonicas	158
d'um)	69	» por diffe-	
» (Area		rença	104
d'um)	73	» por quo-	
» (Bases		ciente	106
d'um)	68	Pyramide	70
Pentagono	67	» (Altura d'uma)	70
Pequeno eixo d'uma elli-		» (Arestas de	
pse	152	uma)	70
Permutações	112	» (Base d'uma)	70
» figuradas	113	Pyramide (Faces d'uma)	66
Perpendiculares (Re-		» (Vertice d'uma)	66
ctas)	63	Quadrado	68
Pilha de balas	89	» (Area d'um)	72
Plano	62	» arithmetico de	
» horizontal	63	Fermat	95
Polyedro	125	» diabolico	161
Polygono	66	» d'uma diffe-	
» (Angulos d'um)	66	rença	79
» convexo	67	» da hypotenusa	75
» (Diagonaes de		» magico	160
um)	67	» d'um numero	48
» (Lados d'um)	66	» d'uma somma	78
» (Vertices de		Quadrilatero	67
um)	66	Queda d'uma pedra	145
Ponto de contacto	120	Quociente	52
Positivos (Numeros)	38	Raio d'um circulo	119
Postilhões (Problemas		» d'uma esfera	126
dos)	131	Razão d'uma progres-	
Potencia	48	são	104, 106
Primos (Numeros)	50	Recta	32
Prisma	70	» horizontal	63
» (Altura d'um)	70	» vertical	63
» (Arestas d'um)	70	» (Segmento de)	33
» (Bases d'um)	70	Rectangulo	68
» (Faces d'um)	70	» (Area d'um)	72
» recto	70	Rectas concorrentes	64
Problemas dos posti-		» parallelas	62
lhões	131		
Productos	45		

Rectas perpendiculares	63	Taboa d'addição	17
Recto (Angulo)	63	Taboa de multiplicação	42
Reintrantes (Angulos)	67	Tangente a um circulo	120
Relação	41	Termos d'uma fracção	55
» d'a circumferen-		» d'uma progres-	
cia com o dia-		são	104, 106
metro (π)	121	Total	19
Resto	21	Transferidor	118
Resto d'uma divisão	54	Trapezio	67
Romana (Numeração)	99	» (Area d'um)	73
Rosacea	123	» (Bases d'um)	67
Secante a um circulo	120	Triangulares (Numeros)	82
» a duas paralle-		Triangulo	74
las	64	» (Altura d'um)	65
Segmento de circulo	119	» (Area d'um)	73
» (Divisão d'um)	157	» arithmetico de	
» (Extremidade		Pascal	94
d'un)	38	» (Base d'um)	66
» (Origem d'um)	38	» equilatero	65
» de recta	33	» isosceles	65
» (Sentido d'um)	38	» (Lados d'um)	65
Sentido d'um segmento	38	» obtusangulo	65
Signaes	35	» rectangulo	65
Somma	18	» (Vertices de	
» (Cubo d'uma)	81	um)	64
» Quadrado d'uma)		Unidade	41
dos cubos dos n		» d'area	71
primeiros nume-		» de comprimento	71
ros	92	» de volume	125
» dos n primeiros		Vertice d'um cone	126
numeros impares	83	» d'uma parabola	153
» dos n primeiros		» d'uma pyramide	70
numeros	86	Vertices d'uma ellipse	153
» dos quadrados		» d'uma hyper-	
dos n primeiros		bole	154
numeros	88	» d'um polygono	66
» dos termos d'uma		» d'um triangulo	64
progressão	105, 107	Volumes	126
» magica constante		Zéro	30
Subtracção	21		
Systemas de numeração			
96			

Livraria Editora Guimarães & C.^a

68 - RUA DO MUNDO - 70

Armando Ferreira

Contos maduros, 1 vol. \$50

Luís da Camara Reys

Contos de março, (Lendas-Sonhos-Amores-Ironias), 1 vol. \$60

Azevedo Neves

A mascara de um actor (Cabeças de expressão) Desenhos originaes e interpretações, de Roque Gameiro, 1 grosso volume edição de grande luxo, br. 3\$00. Encad. 4.80

Doutor H. Schaefer

I. Pereira de Sampaio (Bruno)

Historia de Portugal, 5 grossos vols. 13.50

Oldemiro Cesar

Comedia da vida, 1 vol. il. . . . \$60

Alberto Pimental

A corte de D. Pedro IV. 1 vol. \$80

Do portal á claraboia, 1 vol. \$40

Notas sobre o «Amor de Perdição», 1 vol. \$60

A primeira mulher de Camillo, 1 vol. \$60

O Arco de Vandoma, (romance), 1 vol. 1.00

A mocidade de Boavão, (romance), 1 vol. nova ed., no prelo.

A porta do paraiso, (romance), 1 vol. 1.^a grande. il. br. 2.60

1.^a ed., enc. 1.00

Um promettido (romance)

Augusto Gil

De palmo e maço. \$30
da cigarra, 3.^a ed., no

Albino Forjaz de Sampaio

O Livro das Cortezãs, 2.^a ed., no prelo.

Tiberio, filósofo e moralista, 2.^a ed. \$80

Os Barbaros. I. Antonio Nobre, 1 vol. \$50

A. Hamon

As lições da guerra mundial, 1 vol. de 440 pag. 1.00

Brito Camacho

D. Carlos Intimo. \$60

Impressões de Viagem. \$80

Ao de leve \$80

Por ahí fora. \$80

Longe da vista. \$80

André Brun

Dez contos em papel. \$80

Cada vez peor. \$80

Soldados de Portugal. \$80

Praxedes, mulher e filhos. \$60

Almas de um outro mundo. \$60

Outra vez Praxedes \$60

A malta das trincheiras (migalhas da grande guerra) 3.^a ed., no prelo.

D. João da Camara

D.ªr Bemdita, trad. \$60

A Cidade. \$30

Contos. 2.^a ed., no prelo.

Meia Noite

Alteia na Corte.

Eduardo Noronha

Diario de um policia, 1 vol. . . . 1.00

Americo Olavo

Na grande guerra, 1 vol. 1.00

Carlos Olavo

Jornal d'um prisioneiro de guerra na Alemanha, 1 vol.