

Algebra — Temos a formula :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

E para comprovar tantas proposições, respeitantes a tantas sciencias, basta recortar com cuidado alguns pedaços de cartão, depois de ter desenhado cuidadosamente algumas figuras!

Tem-se dado, por vezes, o nome de quebra-cabeças a estes jogos de recorte. E' uma injustiça, porque, pelo contrario, empregados como acabamos de dizer, evitam muita quebra-deira de cabeça, instruindo pelos olhos.

26 — O cubo em oito pedaços

Tomemos (fig. 57) um cubo de madeira e, a partir d'um dos seus vertices O, marquemos, sobre as tres arestas que d'elle partem, tres distancias eguaes entre si, OA, OB e OC. Supponhamos que, por cada um dos tres pontos assim obtidos, fazemos passar um corte feito com uma serra, AAA, BBB, CCC.

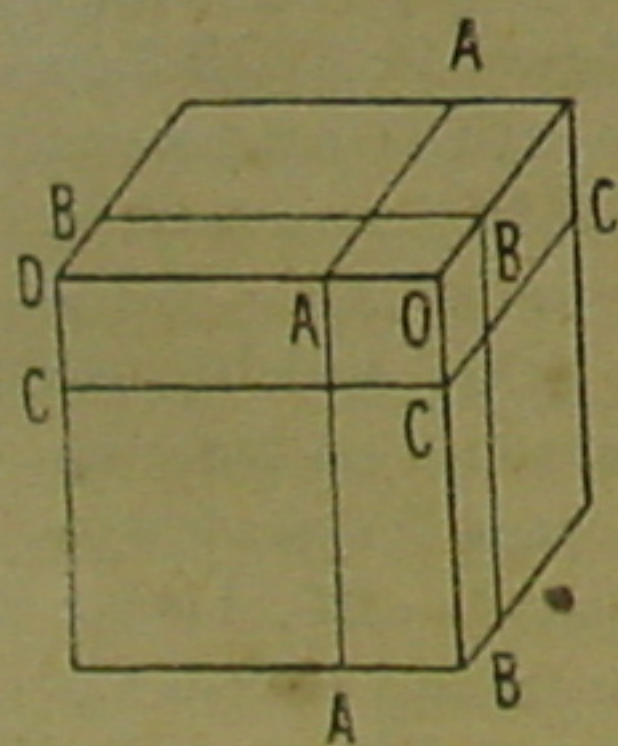


Fig. 57

Cortamos, assim, o cubo em oito pedaços. Para fazer ideia do que estes sejam — o que melhor veriamos sobre o proprio cubo — chamemos (fig. 57) a á distancia DA e b á distancia AO, e construamos a figura 58. As duas partes, que se compõem, representam o que se vê depois dos cortes segundo AAA e BBB, quando o cubo é visto por cima. Além d'isso, as letras (a) e (b), entre pa-

renteses, indicam a espessura, depois do corte segundo CCC. A figura da esquerda representa o que está abaixo de CCC e a da direita, o que fica acima.

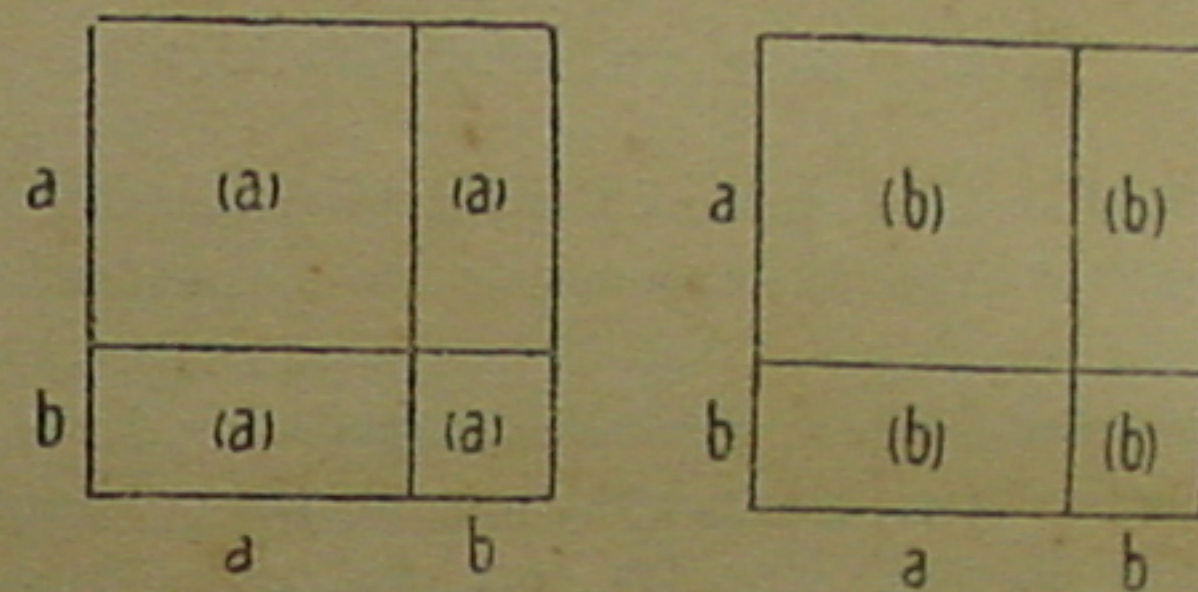


Fig. 58

Vemos, assim, que temos oito paralelepipedos, cujas dimensões são:

fig. da esquerda $aaa \quad aba \quad bba \quad baa$
fig. da direita $aab \quad abb \quad bbb \quad bab$;

o que nos dá:

1 cubo, cuja aresta é a ;
1 " " " " b ;
3 paralelepipedos tendo por dimensões a, a, b ;
3 " " " " a, b, b ;

A aresta do cubo, que cortámos em oito pedaços, era $a + b$.

Verificamos, assim, que o cubo construido sobre a somma de dois segmentos a e b , compõem-se :

- 1.º da somma dos cubos construidos sobre cada um dos segmentos;
- 2.º de 3 vezes um paralelepipedo tendo por base um quadrado de lado a e por altura b ;
- 3.º de 3 vezes um paralelepipedo tendo por base um quadrado de lado b e por altura a .

Isto é Geometria.

A mesma figura mostra-nos que, em Arithmetica: o cubo da somma de dois numeros é igual á somma dos cubos d'es-

ses numeros, mais tres vezes o producto do primeiro pelo quadrado do segundo, mais tres vezes o producto do segundo pelo quadrado do primeiro.

Finalmente, em Algebra, dá-uos a formula:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3ba^2 + b^3$$

O que acabamos de expor é perfeitamente analogo ao que dissemos no n.º precedente, com respeito ao quadrado d'uma somma.

Com pequenos cubos de madeira, podemos fazer a construcção indicada e ainda muitas outras. São pequenos jogos de construcção que, dirigidos com um pouco de methodo, ajudam muito a criança a ver as figuras no espaço, e despertam a sua attenção.

Podemos, com toda a precisão, talhar o cubo n'um pedaço de sabão, cortando-o cuidadosamente com um fio metallico, que substitue a serra; mas, o cubo de madeira é preferivel e não é, por certo, difficil, nem dispendioso, de arranjar.

27 — Os numeros triangulares — O vôo dos grous

Eduardo Lucas attribue á observação do vôo de certas aves a origem dos numeros denominados *triangulares*. Na testa vòta uma unica ave; atraz d'ella, em linha, vòam duas; n'uma terceira linha, trez, e assim por deante, de maneira que a disposição geral da columna volante tem a apparencia d'um triangulo.

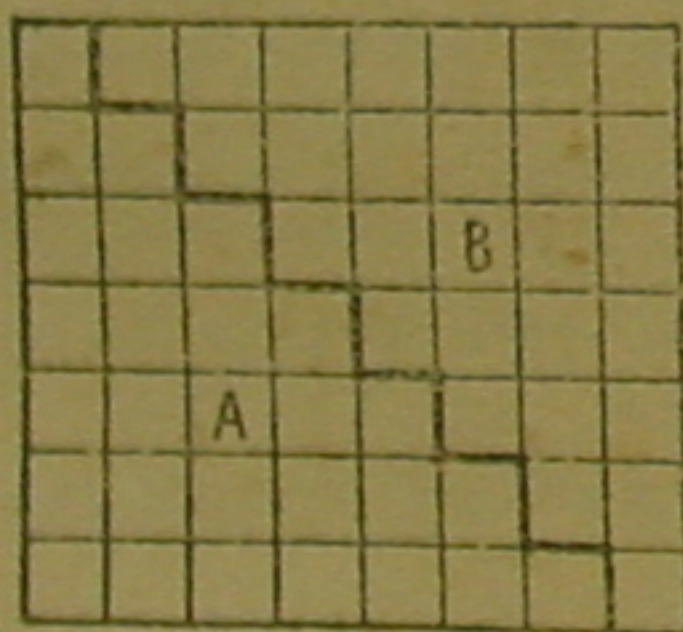


Fig. 59

E' facil fazer uma ideia precisa d'estes numeros e represental-os n'um desenho quadriculado, olhando, por exemplo, para a figura 59 e tomando primeiramente apenas em consideração

a parte A, que nos mostra, em cima, 1 casa, depois 2 casas na segunda linha e 3, 4, 5, 6, 7 casas nas linhas seguintes até á 7.ª.

Temos pois, assim, o 7.º numero triangular :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7.$$

Para o determinar, podiamos fazer a addição, o que nos dava 28; isto, porém, nada nos ensinaria a respeito d'outros numeros triangulares. Se, por exemplo, quizessemos conhecer o 1000º, tinhamos que sommar todos os numeros de 1 até 1000, o que seria demorado e fastidioso. Em vez d'isso, consideremos agora a figura 59 na sua totalidade. A parte B, se a olharmos de baixo para cima, ou a voltarmos de cima para baixo, representa ainda, pelo numero das suas casas, o mesmo numero triangular. A figura completa representa pois, duas vezes o numero triangular em questão; e, como comprehende sete linhas de oito casas cada uma, o numero total de casas é 7×8 , e o numero, que se procura, será a metade d'este producto, isto é : 28.

Temos, pois, n'outros termos :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{7 \times 8}{2} = 28.$$

Se quizessemos obter o 1000º numero triangular, suppondo que procediamos do mesmo modo, tinhamos :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1000 = \frac{1000 \times 1001}{2} = 500500,$$

o que é muito mais rapido do que fazer a addição.

Como, em vez de 1000, podemos ter um numero inteiro qualquer n , temos tambem :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

expressão esta, que nos permite achar o n° numero triangular, que podemos representar por T_n .

O numero total das casas da figura 59 é $2T_n$. Se tirarmos a ultima columna, fica um quadrado de 7 linhas, contendo cada uma 7 casas. Vemos, tambem, que a nova figura é formada pela reunião dos numeros triangulares T_6 e T_7 . Temos, pois,

$$2 T_7 - 7 = 7^2 = T_7 + T_6.$$

Se acrescentarmos em baixo uma nova linha de 8 casas, vemos do mesmo modo, pela simples inspecção da figura que temos:

$$2 T_7 + 8 = 8^2 = T_8 + T_7.$$

E como, em vez de 7, podiamos ter tomado qualquer outro numero n ,

$$\begin{aligned} 2 T_n - n &= n^2 = T_n + T_{n-1}, \\ 2 T_n + n + 1 &= (n+1)^2 = T_{n+1} + T_n. \end{aligned}$$

Estas formulas, que parecem muito scientificas, nem sequer exigem o mais insignificante calculo, porque as vemos nas figuras, porque as vemos, porque as podemos construir por nossas mãos com pequenos quadrados de madeira, ou até com simples tentos, collocando um em cada casa.

28 — Os numeros quadrados

Consideremos (fig. 60) um quadrado composto de 7 linhas de 7 casas cada uma, ou sejam ao todo $7 \times 7 = 7^2 = 49$ ca-

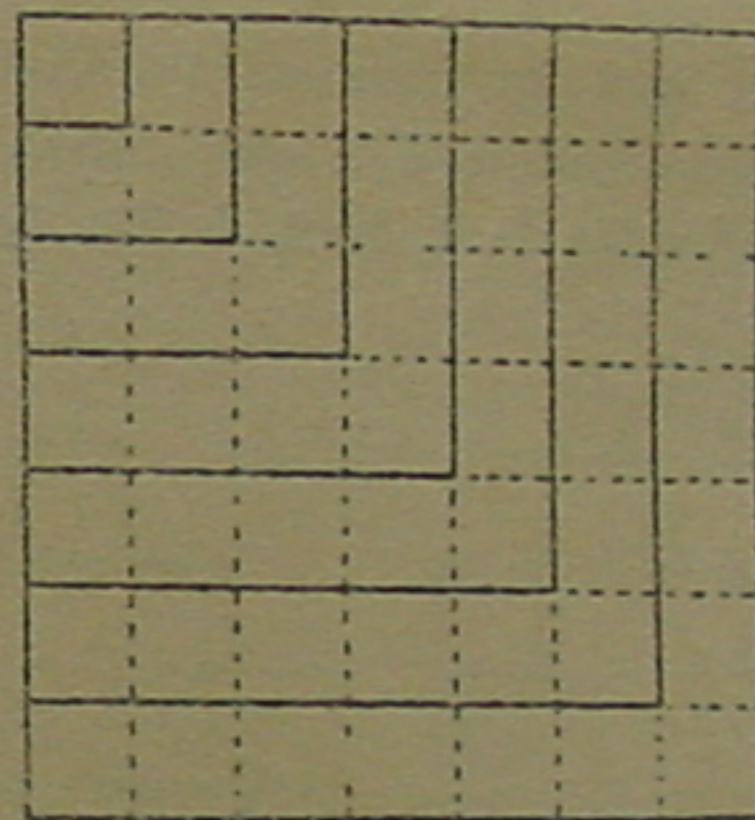


Fig. 60

sas. N'esta figura, vemos traçados, com linhas cheias, quadrados successivos de 1, 2^2 , 3^2 , 4^2 , 5^2 e 6^2 casas.

O primeiro quadrado de 1 casa, é representado pela casa do alto, á esquerda. Para passar d'este quadrado para o de 2^2 ou 4 casas, notamos que foi necessario ajuntar 3 casas, de sorte que $1 + 3 = 2^2$; para passar para o quadrado seguinte, de 9 casas, é preciso ajuntar duas á direita, duas em baixo e uma á direita e em baixo, o que faz 5; e, continuando da mesma maneira, concluimos que:

$$7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13,$$

isto é: que o quadrado de 7 é igual á somma dos 7 primeiros numeros impares.

Em vez de 7, tomemos um numero inteiro qualquer, n . Os primeiros numeros impares são 1, 3, 5..., e o n° é $2n - 1$. Como a figura poude ser feita até este numero n , temos :

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1,$$

o que não é mais do que a traducção do que vemos na figura 60.

Isto mostra-nos que ha uma outra maneira de representar os numeros quadrados; é a que indica a figura 61, em que vemos os quadrados de 1, de 2, de 3 e de 4. Com peque-

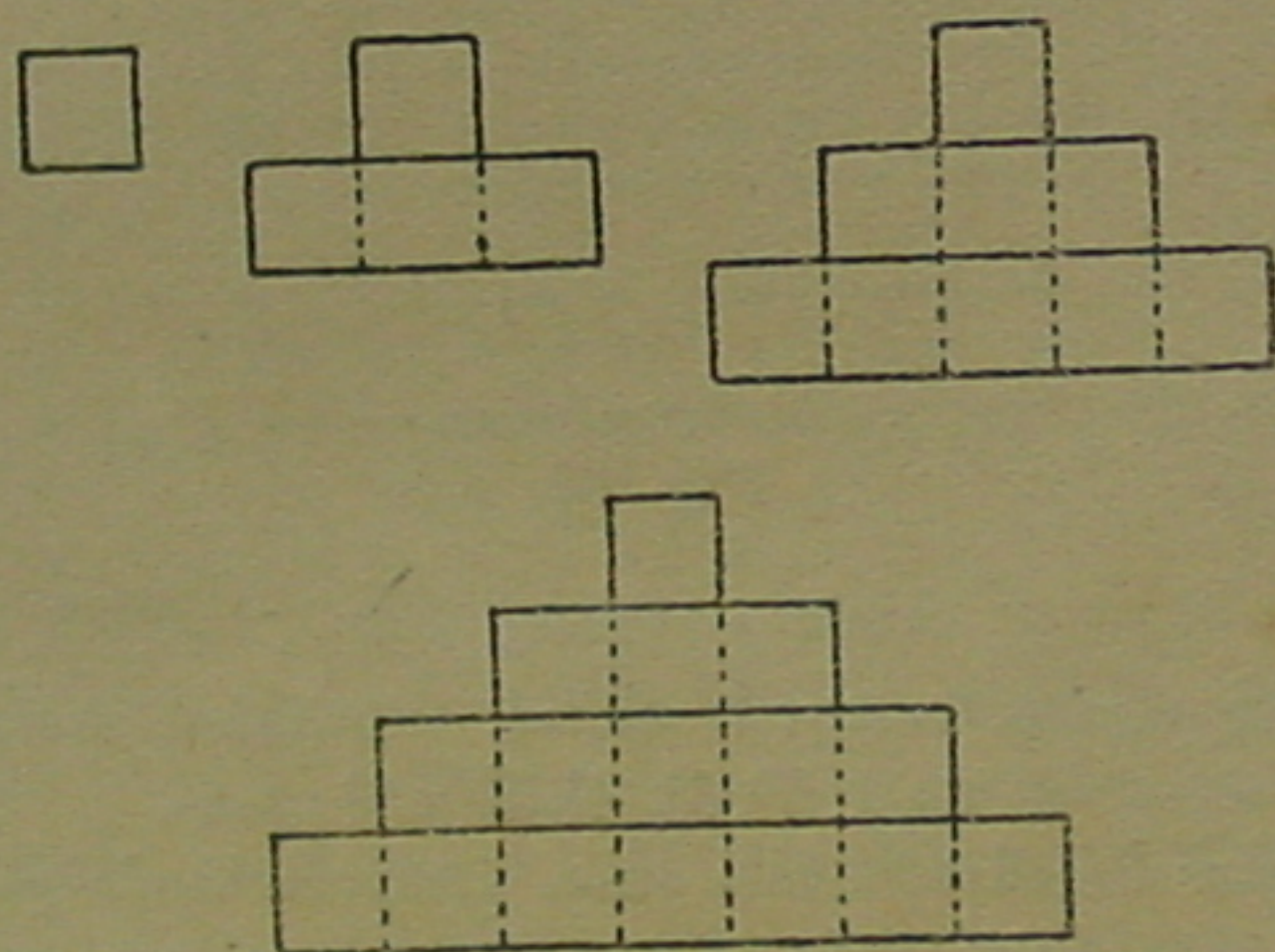


Fig. 61

nos quadrados de madeira, é facil construir e transformar estas diferentes figuras.

Chegamos agora, sem embaraço algum, a resolver uma questão muito mais difficil: achar a somma dos quadrados de 1, 2, 3 e 4, por exemplo. Recorrendo á figura 60 e dispondo os quadrados de 1, 2, 3 e 4, de baixo para cima, temos immediatamente a figura 62, que dispensa qualquer explicação, Servindo-nos dos diferentes elementos da fig. 61, vemos que ella comprehende :

4 linhas de 1 casa
3 linhas de 3 casas
2 linhas de 5 casas
1 linha de 7 casas

que, reunidas, sobrepondo-se umas ás outras, dão a fig. 63.

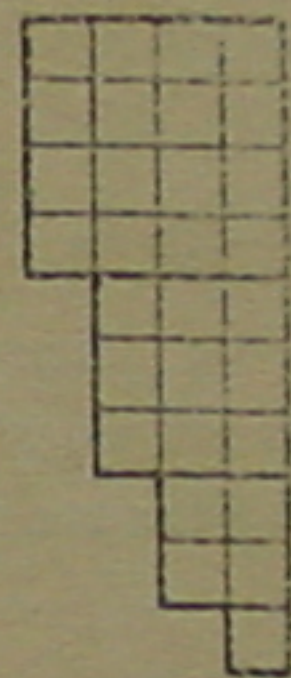


Fig. 62

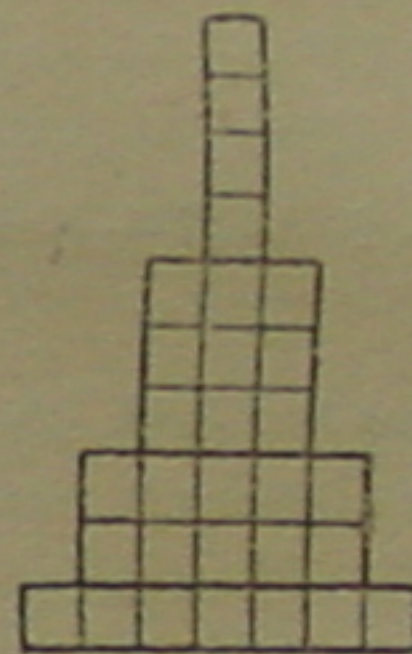


Fig. 63

Reunamos agora (fig. 64) a figura 62, esta mesma figura voltada e a figura 63. Obtemos um rectangulo, que contem tres vezes o numero de casas, que se busca.

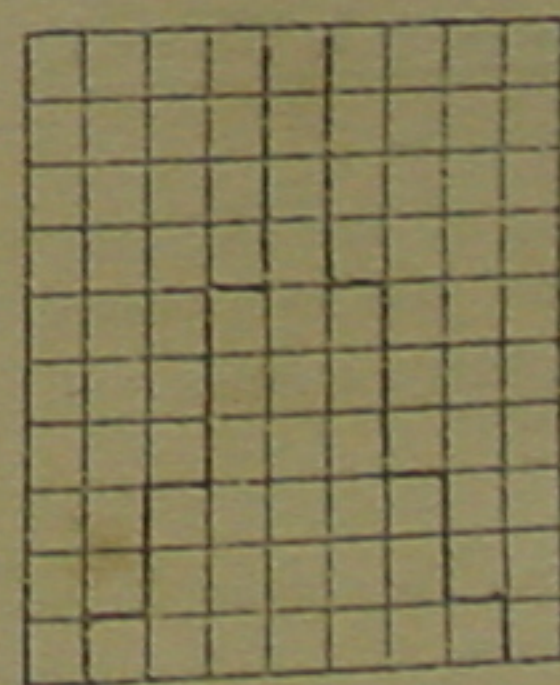


Fig. 64

O numero de linhas d'este rectangulo é :

$$1 + 2 + 3 + 4, \text{ ou } \frac{4 \times 5}{2} = 10$$

O numero de casas contidas em cada linha é, como podemos ver na primeira linha,

$$4 + 1 + 4, \text{ ou } 2 \times 4 + 1 = 9.$$

O numero total de casas é, pois, $10 \times 9 = 90$, e o numero, que se procura, é o terço de 90, isto é: 30. Com effeito, verificamos que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Mas se, em vez de 4, tivéssemos tomado um numero qualquer n , e se tivéssemos procedido da mesma fórma, o rectangulo da figura 64 teria

$$1 + 2 + 3 + \dots + n, \text{ ou } \frac{n(n+1)}{2} \text{ linhas}$$

e $2n + 1$ columns.

O numero total das suas casas seria, pois,

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

e para achar o numero, que se procura, teriamos que tomar o terço d'elle. Isto mostra-nos que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

E' esta uma formula, que os candidatos á Escola Polytechnica nem sempre sabem demonstrar — apesar de muito se affligirem e de muito calcularem — e que se estabelece a brincar com pequenos quadrados de madeira, como as que já vimos.

Esta determinação da somma dos quadrados dos n primeiros numeros inteiros teve outr'ora uma applicação pratica bastante importante, na artilheria, quando se empregavam projecteis esfericos (balas e granadas). Era frequente, nos arsenaes, disporem estes sobre o solo, formando um quadrado; depois, formavam por cima d'este, um novo quadrado mais pequeno, e assim successivamente até ao vertice, que era constituido por uma unica bala. Chamava-se a isto uma *pilha de balas de base quadrada*. Dada esta disposição, para contar as balas comprehendidas n'uma pilha, basta contar o numero n de balas d'um lado da base e applicar a formula supra. Por exemplo: se $n = 17$, a somma que se busca, é

$$\frac{17 \times 18 \times 35}{6} \text{ ou } 1785.$$

Podemos recrear-nos a formar, d'aquella maneira, pilhas de laranjas — contanto que estas sejam todas aproximadamente do mesmo tamanho — ou, ainda mais facilmente, de bolas de jogar, dispondo-as sobre uma camada d'areia, para evitar que se desloquem, o que acarretaria o desmoronamento do edificio.

29 — A somma dos cubos

Para representar um numero elevado ao cubo, como $2^3 = 2 \times 2 \times 2$, $3^3 = 3 \times 3 \times 3$, etc., é de grande vantagem ter um numero avultado de pequenos cubos de madeira — pouco maiores do que os dados de jogar — destinados a fazer as construcções, de que ha pouco fallámos, e as differentes operações, que passamos a indicar.

Pode-se, porém, passar sem elles, e representar cada unidade por um pequeno quadrado de madeira ou de cartão, ou mesmo por um simples tento. E' esta ultima maneira, que nós adoptamos; e depois de vermos como são faceis estas

operações, executamol-as, com mais forte razão, empregando os quadrados e os cubos; quem pode o mais, pode o menos.

Comecemos por ver como podemos representar, com os tentos, os cubos successivos. O cubo de 1 é 1; um unico tento o representa.

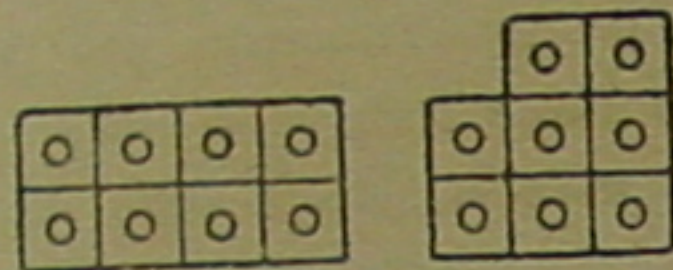


Fig. 65

tos, na primeira parte da figura. Mas, como se vê na segunda parte, os 8 tentos podem ser dispostos d'outra maneira, conservando as tres primeiras columnas e sobrepondo-lhes a quarta horizontalmente.

Passemos ao cubo de 3, que é $3 \times 3 \times 3$, ou 27. Representa-se (fig. 66) por 3 quadrados de 9 tentos cada um, justapostos na primeira parte da figura. Obtem-se a segunda

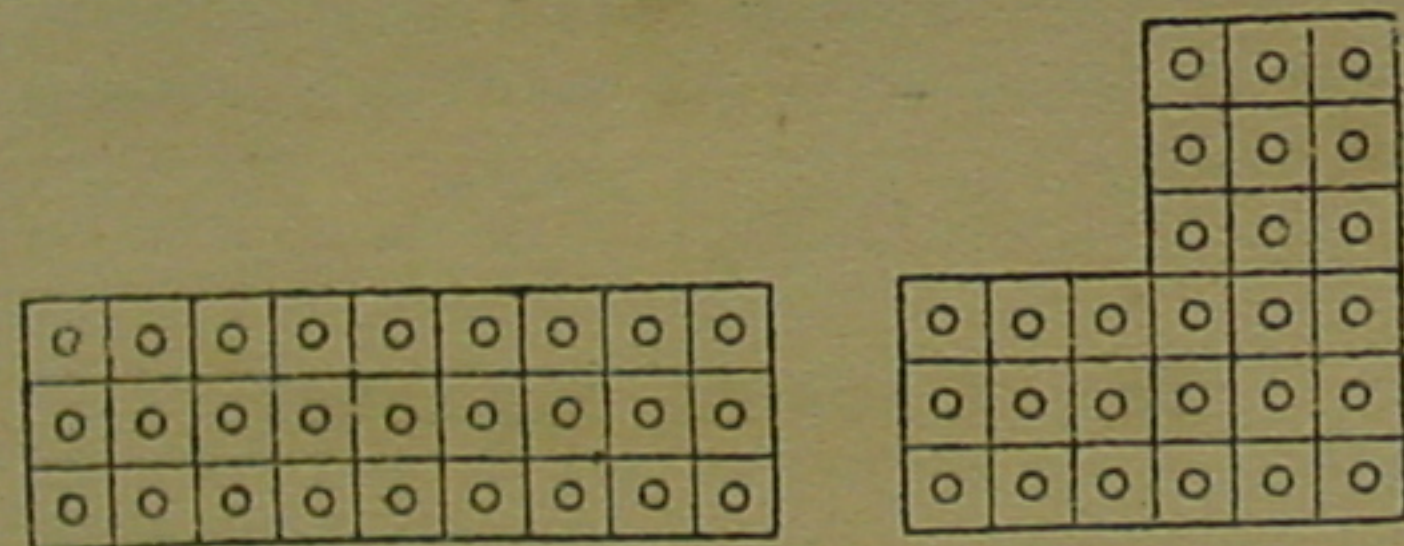


Fig. 66

parte, mantendo as 6 primeiras columnas e sobrepondo-lhes as 3 ultimas horizontalmente.

Finalmente, para o cubo de 4, procedemos da mesma maneira, conservando (fig. 67) as 10 primeiras columnas da primeira parte e collocando por cima d'ellas as 6 ultimas, dispostas horizontalmente, para termos a segunda parte da figura.

Se reunirmos agora (fig. 68) as segundas partes das figuras 65, 66 e 67, ajuntando-lhe mais um tento em cima e á

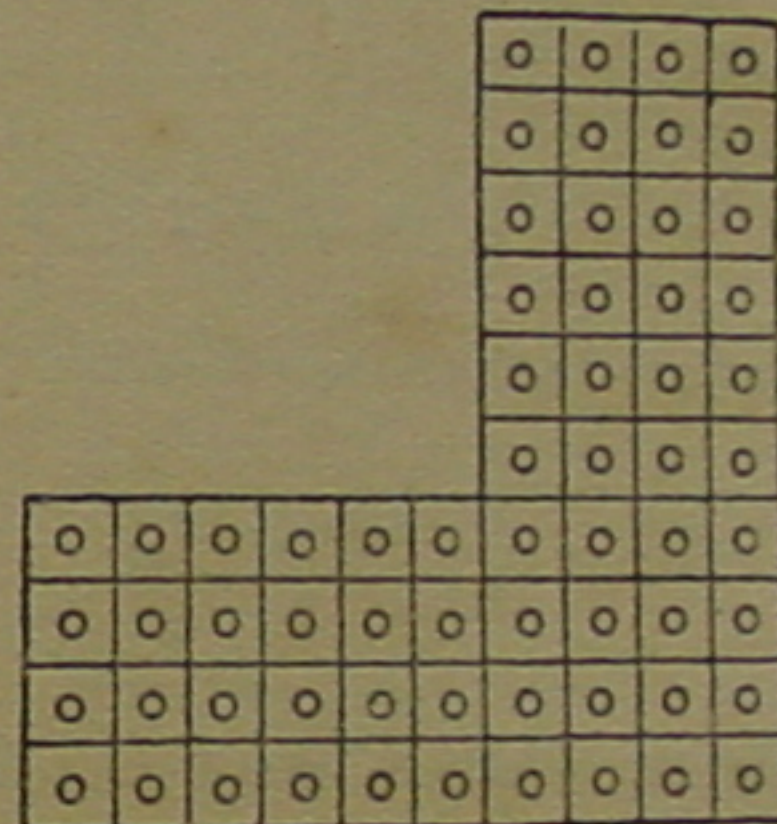
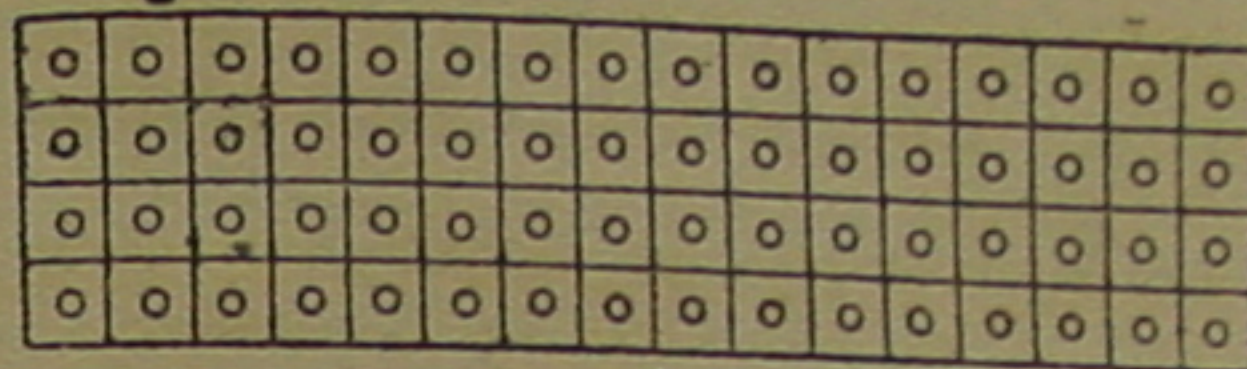


Fig. 67

esquerda, que representa o quadrado de 1, temos a somma dos cubos de 1, 2, 3 e 4, sob a fórma d'um quadrado, no

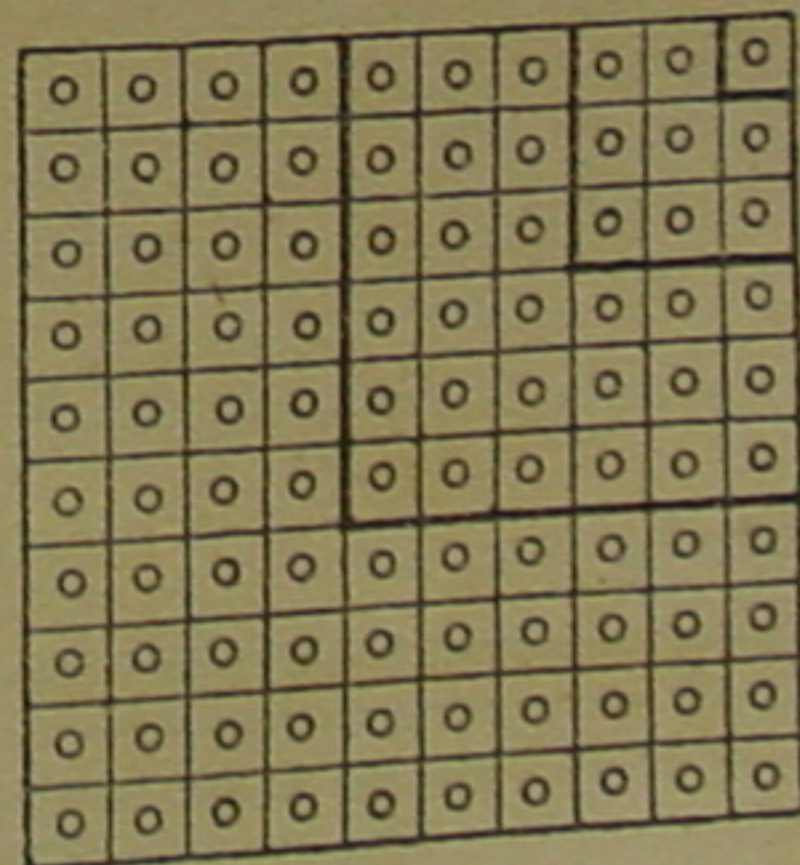


Fig. 68

qual o numero de tentos d'uma linha, ou d'uma columna, é $1 + 2 + 3 + 4$ ou 10. A somma d'estes cubos é, portanto, 100.

Ha vantagem em empregar tentos de côres differentes para representar cada um dos cubos; a figura torna-se, assim, muito mais suggestiva.

O processo de construcção, que acabamos de indicar, pôde ser continuado até ao cubo d'um numero qualquer n , e mostra-nos que: *A somma dos cubos dos n primeiros numeros inteiros é igual ao quadrado da somma d'esses numeros*; o que se traduz pela formula:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

Esta expressão pode tambem escrever-se:

$$(Tn)^2 \text{ ou } \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Aqui temos mais um resultado, que é muito mais incommodo e difficil de obter pelo calculo. Nós conseguimos-o por meio d'um simples jogo de construcção.¹

¹ Talvez não seja inoportuno notar que, na nossa taboa de multiplicação sem algarismos (fig. 12), encontramos precisamente os cubos successivos $2^3, 3^3, \dots$, como numero de casas nos recintos que separam os quadrados de $1, 1+2, 1+2+3, \dots$. Pode-se pois, em rigor, verificar sobre aquella simples taboa, tudo o que acabamos de ver.

30 — As potencias de 11

Se tomarmos o numero 11 e quizermos achar o seu quadrado, a multiplicação a fazer é sobremodo facil:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 121 \end{array} \quad 11^2 = 121$$

Para obter o cubo, temos:

$$\begin{array}{r} 121 \\ 11 \\ \hline 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \end{array} \quad 11^3 = 1331$$

À 4.^a potencia dá logar á seguinte multiplicação:

$$\begin{array}{r} 1331 \\ 11 \\ \hline 1331 \\ 1331 \\ \hline 14641 \end{array} \quad 11^4 = 14641.$$

Fixemos a nossa attenção n'estes algarismos:

$$1, 2, 1; \quad 1, 3, 3, 1; \quad 1, 4, 6, 4, 1;$$

com que se escrevem as poteneias.

Podiamos tel-os alcançado, escrevendo menos sem estabelecer as multiplicações, se tivéssemos notado: primeira-mente, que se começa e se acaba sempre por 1, e em se-

gundo logar, que basta sommar dois algarismos, que se seguem, para obter um algarismo da potencia seguinte.

Assim: de 11 resulta 121, porque $1 + 1 = 2$;

De 121 resulta 1331, porque $1 + 2 = 3$, $2 + 1 = 3$;

De 1331 resulta 13641, porque $1 + 3 = 4$, $3 + 3 = 6$, $3 + 1 = 4$.

Estas observações foram o ponto de partida de processos extremamente faceis para obter aquelles algarismos — e muitos outros numeros — como veremos no n.º seguinte.

Isto é muito util, porquanto os numeros, de que se trata, tem grande importancia na Algebra, onde os vamos encontrar mais tarde, por pouco que estudemos as mathematicas.

31 — Triangulo e quadrado arithmeticos

Comecemos por escrever (fig. 69), uns por baixo dos outros, tantos algarismos 1 quantos quizermos. Depois, imaginemos que, á direita do primeiro 1, em cima, existem zéros, que nos dispensamos de escrever. Posto isto, forma-

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		

Fig. 69

os algarismos das potencias de 11, ha pouco achados.

Este quadro é o chamado *triangulo arithmetico de Pascal*, do nome do seu illustre inventor ¹.

¹ Blaise PASCAL, sabio e litterato francez, natural do Clermont-Ferrand (1623-1662).

Encontramos (fig. 70) os mesmos numeros n'uma figura, que apenas differe da precedente pela sua disposição. Escreve-se o algarismo 1 em todas as casas d'uma primeira linha e nas de uma primeira columna d'um quadrado quadriculado. Em seguida, preenche-se successivamente todas as outras casas, escrevendo em cada uma a somma do numero que se lê por cima e do que se lê á esquerda.

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35	56	84	
1	5	15	35	70			
1	6	21	56				
1	7	28	84				
1	8	36					

Fig. 70

Aqui, os algarismos 1, 1; 1, 2, 1; 1, 3, 3, 1; . . . não apparecem nas linhas horizontaes, mas nas obliquas, subindo da esquerda para a direita.

Este quadrado da figura 70 denomina-se *quadrado arithmetico de Fermat* ¹.

Se (fig. 71), n'um taboleiro de xadrez ordinario, considerarmos a casa do canto esquerdo O e uma casa qualquer X,

O							
				X			

Fig. 71

podemos formular a seguinte pergunta: Por quantos caminhos diferentes pode uma torre mover-se de O para X, sem nunca retrogradar, isto é, caminhando sempre da esquerda para a direita e de cima para baixo? O quadrado arithmetico de Fermat dá-nos a resposta, se o applicarmos sobre o taboleiro. Assim, para a figura 71, tal como n'ella está indicado, uma torre pôde mover-se

por 84 caminhos diferentes para passar de O para X.

Os numeros d'estes quadrados gosam ainda d'outras propriedades curiosas e numerosas. Mas, é prematuro occupar-nos d'ellas, por agora.

¹ Pedro FERMAT, mathematico francez, natural de Beaumont de Lomagne (1601-1665). É, talvez, sob o ponto de vista da arithmetica, o mais possante genio, que tem existido em todos os tempos.

32 — As diversas numerações

Quando começámos (n.º 3) a formar os numeros com palitos, depois com mólhos, com feixes, etc., o que conduz ao conhecimento da numeração, podíamos ter tomado igualmente bem, em vez de dez, qualquer outro numero de palitos para constituir um mólho.

Podíamos ter convencionado, por exemplo, que 8 palitos formavam um mólho, 8 mólhos um feixe, e assim por diante; donde teria resultado que os algarismos necessarios para escrever um numero qualquer (n.º 10) seriam apenas 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, aos quaes — é claro — tornar-se-hia necessario ajuntar o zéro.

A semelhante methodo de escrever os numeros chama-se um *systema de numeração*, e o numero escolhido denomina-se *base* do *systema*.

Assim, o *systema*, que temos visto até aqui e que é universalmente usado, chama-se *systema decimal* e tem por base 10. O que acabámos de indicar tinha por base 8 e podia ser chamado *systema octaval*.

Se tomassemos 12 para base d'um *systema*, que se denominaria *duodecimal*, teríamos que ajuntar 12 palitos para formar um mólho, 12 mólhos para formar um feixe, e assim por diante. Seria então preciso ter, além do zéro, onze algarismos, a saber: os nove da numeração decimal e dois outros para representar o 10 e o 11.

Um *systema de numeração*, que tem por base um numero B, exige sempre B — 1 algarismos, sem contar com o zero, e o numero B escreve-se invariavelmente: 10.

Não é mau, e é extremamente facil, saber escrever um numero n'um determinado *systema de numeração*, quando nol-o dão escripto n'um outro.

Dão-nos, por exemplo, 374 escripto no *systema de base 8*. Procuremos escrevel-o no *systema decimal*. Se nos lem-

brarmos dos nossos palitos, veremos que o numero em questão comprehende

4 palitos.....	4
7 mólhos de 8 palitos.....	56
3 feixes de 8×8 palitos.....	192
	<hr/> 252

Na pratica, chega-se ainda mais depressa ao mesmo resultado, partindo da esquerda para a direita, dizendo: 3 feixes de 8 mólhos, mais 7 mólhos, são 31 mólhos; 31 mólhos de 8 palitos são 248 palitos, e mais 4 dá 252.

Se, ao contrario, queremos escrever, no *systema de base 8*, o numero 598 do *systema decimal*, temos apenas que subtrair 8, em quanto o podermos fazer, e o resto é o ultimo algarismo da direita. Temos, pois, que fazer a divisão de 598 por 8, e tomar o resto, que é 6. Esta operação dá-nos tambem o numero, 74, de mólhos de 8; dividindo-o por 8, temos o numero de feixes, 9, e restam 2 mólhos; é o 2.º algarismo. Dividindo 9 por 8, vemos, finalmente, que resta 1 feixe (1 é o 3.º algarismo) e que temos 1 caixa (1 é o 4.º algarismo).

A operação dispõe-se como segue:

$$\begin{array}{r} 598 \mid 8 \\ 38 \overline{) 74} \mid 8 \\ 6 \quad 2 \quad 9 \mid 8 \\ \quad \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

e 1126 é o numero pedido, escripto no *systema de base 8*.

Se quizessemos escrever este mesmo numero no *systema de base 12*, tínhamos:

$$\begin{array}{r} 498 \mid 12 \\ 118 \overline{) 49} \mid 12 \\ 10 \quad 1 \quad 4 \end{array}$$

e o resultado era 41 (10), representando por (10) o algarismo 10 do *systema decimal*.

Vimos acima que 374 do *systema 8*, se escreve 252 no

systema decimal. No systema de base 12, escrever-se-hia 190, como é facil verificar.

Passa-se, assim, d'um systema para outro á nossa escolha, por intermedio do systema decimal.

Com um pouco de pratica, conseguimos calcular em qualquer numeração. O ponto essencial está em não nos esquecermos de que os transportes, os *quantos vão*, se fazem não por dezenas, mas por grupos de B, se B é a base; para isso, é preciso um certo habito.

Damos, em seguida, o numero 1000 da numeração decimal, escripto nos systemas de numeração de base 3, 4, 5... até 12.

B = 3.....	1101001
4.....	33220
5.....	13000
6.....	4344
7.....	2626
8.....	1750
9.....	1331
10.....	1000
11.....	82(10)
12.....	6(11)4

Uma applicação do systema de numeração de base 3 combinado com o emprego dos numeros negativos, verdadeiramente digna de nota, é a que vamos referir. N'ella, os algarismos reduzem-se a 0, +1 e -1; e não é só esta particularidade, que a torna interessante, mas ainda o facto de se prestar a um emprego pratico, em certas questões relativas aos ascensores hydraulicos.

O sr. Marcel Deprez, membro do Instituto de França, a quem se deve o transporte da energia pela electricidade, teve a amabilidade de me communicar uma observação curiosa sobre o systema de pesos a empregar, para effectuar pesagens com uma balança. Parte-se do principio de que se podem collocar pesos nos dois pratos da balança. N'estas condições, o problema proposto consiste em determinar um systema de pesos (um unico peso de cada especie) a partir

de 1 gramma, por exemplo, de maneira que seja possível equilibrar, por este meio, corpos que pesem 1, 2, 3... grammas, até um determinado limite.

Vemos que, com os dois pesos: 1 gramma e 3 grammas, se podem fazer pesagens até 4 grammas, porquanto $2 = 3 - 1$ e $4 = 3 + 1$.

Tomando os tres pesos: 1, 3 e 9 grammas, podemos pesar até 13 grammas.

D'uma maneira geral: se se tomam n pesos, 1, 3, ..., 3^{n-1} grammas, podem-se fazer pesagens até $\frac{3^n - 1}{2}$ grammas.

Por exemplo: com os 7 pesos 1, 3, 9, 27, 81, 243 e 729 grammas, pode-se pesar desde 1 até 1093 grammas.

Esta questão, como é facil de verificar, reduz-se a escrever os numeros successivos no systema de base 3, utilizando os algarismos negativos. Assim, em vez dos algarismos 1, 2, empregam-se 1, $\bar{1}$; este $\bar{1}$ indica que o peso correspondente deve ser collocado no segundo prato da balança. Por exemplo: 59 escreve-se n'este systema, $1\bar{1}1\bar{1}\bar{1}$, porque $59 = 81 - 27 + 9 - 3 - 1$. Para pesar 59 grammas, collocar-se-hão, pois os pesos 81 e 9 n'um dos pratos, e os 27, 3 e 1, no outro; collocando então n'est'ultimo um corpo, que pese 59 grammas, estabelecer-se ha o equilibrio.

Póde ter interesse acrescentar aqui algumas observações referentes á numeração romana. Actualmente a sua importancia mathematica é mediocre; emprega-se apenas para marcar as horas nos mostradores dos relógios. Tambem é bom conhecê-la para decifrar as datas das inscrições antigas; e eis tudo. Outro é, porém, o seu valor, se a encaramos sob o ponto de vista pedagogico. Limitar-me-hei a resumir as observações, que, sobre o assumpto, me foram apresentadas ha muitos annos, pelo sr. Godar, então director da Escola Monge.

Se, sobre um quadro negro, traçarmos um grupo de riscos muito eguaes e regularmente distanciados, e se perguntarmos bruscamente, a um observador desprevenido, quantos riscos constituem aquelle grupo, a resposta será immediata, se o grupo fôr de dois, tres ou quatro; alem d'este numero,

isto é: de cinco e d'ahi para cima, torna-se necessaria uma operação preliminar do espirito — que pôde ser muito rapida —, uma decomposição mental do numero, e a resposta deixa de ser, na realidade, o resultado da visão directa. É este um facto, que parece bem averiguado e que experiencias muito numerosas confirmam.

Por outro lado, vemos que o numero cinco desempenha um papel capital na numeração romana.

D'ahi o perguntar-se: se esta numeração não terá tido por origem primeira o facto physiologico, que acabamos de indicar, e ido buscar os symbolos da sua escripta ás disposições anatomicas da mão do homem.

Os numeros um, dois, trez e quatro, serão representados por um, dois, trez e quatro dêdos levantados:

I, II, III, IIII

Cinco é a mão toda, que, se o pollegar estiver levantado e afastado dos outros dêdos, reproduz muito aproximadamente a fórma da letra V. Dez, é a reunião de duas mãos, dirigidas uma para cima, V, a outra para baixo, Δ , o que dá a letra X.

Não tratamos agora senão dos principios basilares da numeração romana, e abstermo-nos de fallar dos outros symbolos: L, C, M, ... Notaremos, comtudo, que se evita sempre a repetição consecutiva d'um mesmo signal alem de quatro vezes.

Para obter os numeros comprehendidos entre cinco e dez, collocam-se as unidades á direita do signal V:

VI, VII, ...

Da mesma maneira se procede para os numeros superiores a dez:

XI, XII, ...

E' muito verosimil que, por um aperfeiçoamento ulterior, mas certamente muito antigo, occorresse a ideia de indicar a subtracção collocando a unidade, ou outros symbolos, á es-

querda d'um determinado signal numerico, em vez de os pôr á direita, o que representa a addição. Foi assim que se estabeleceu esta maneira de escrever, e muitas outras analogas:

IV, IX, XL, ...

que significa: cinco menos um, ou quatro; dez menos um, ou nove; cincoenta menos dez, ou quarenta. E cousa muito para notar: encontramos aqui, sob uma fórma por assim dizer embryonaria, a primeira tentativa de traducção graphica do signal pelo sentido.

Estas observações afiguram-se-nos bastante curiosas para merecerem ser mencionadas. Parece deduzir-se d'ellas que a numeração romana era uma numeração de base cinco, mas incompleta, porque não se servia de symbolos differentes para representar os quatro primeiros numeros e, muito principalmente, porque não possuia o recurso precioso do zéro, esse eixo central de toda a numeração racional, esse nada, que é tudo, em Arithmetica.

33 — A numeração binaria

Vimos, no numero precedente, que, se B é a base d'um systema de numeração, esse systema exige B — 1 algarismos, além do zéro. Se tomarmos 2 por base, apenas podemos empregar um unico algarismo: o algarismo 1.

A ideia d'esta numeração, em que todos os numeros se escrevem com dois caracteres apenas, 1 e 0, parece ser de Leibniz¹, embora se diga que os chinezes, em tempos muito remotos, fizeram uso d'ella.

Este systema, se fosse usado na pratica habitual do calculo, apresentaria o inconveniente de alongar muito a escripta dos numeros. Assim, o numero 1000, da numeração deci-

¹ LEIBNIZ, mathematico e philosopho allemão, natural de Leipsig (1646-1716).

mal, escrever-se-hia 1111101000 no systema binario; seria um numero de dez algarismos. Mas, a numeração binaria encontra emprego util e interessante em algumas applicações scientificas, e dá-nos tambem a explicação de certos jogos, como o *Baguenaudier*¹ e a Torre de Hanoi. Baseado n'ella, inventou-se até um pequeno jogo de sala, que Eduardo Lucas descreve na sua *Arithmétique amusante*, sob o nome de *Leque mysterioso*.

Para ficarmos sabendo no que elle consiste, supponhamos que temos os 31 primeiros numeros escriptos em numeração binaria:

1	1				
2	10	12	1100	22	10110
3	11	13	1101	23	10111
4	100	14	1110	24	11000
5	101	15	1111	25	11001
6	110	16	10000	26	11010
7	111	17	10001	27	11011
8	1000	18	10010	28	11100
9	1001	19	10011	29	11101
10	1010	20	10100	30	11110
11	1011	21	10101	31	11111

¹ Jogo da paciência, ou quebra-cabeça, muito antigo, pois parece datar do XVI seculo; mas, pouco conhecido em Portugal.

Consta de duas peças distinctas: 1.^a — uma lamina rectangular alongada de metal ou d'osso, com orificios (geralmente em numero de onze), por cada um dos quaes passa um arame, tendo uma das extremidades achatada, como a cabeça d'um prego, para não poder escapar se do orificio, e a outra ligada a uma argola ou anel, tambem de metal ou d'osso; 2.^a — um arame dobrado em fórma de rectangulo, de dimensões eguaes ás da lamina, fixo a um pequeno cabo de madeira, pelo qual se segura na mão.

O passatempo consiste em enfiar e desenfiar, segundo uma determinada ordem, todas as argolas da primeira peça no rectangulo d'arame da segunda. — N. DO T.

Depois, sobre um cartão A, escrevemos no systema decimal todos os numeros d'esta serie, que terminam em 1 no systema binario:

A	B	C	D	E
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Sobre um segundo cartão B, escrevemos da mesma maneira os numeros, cujo 2.^o algarismo, a partir da direita, é um 1 na numeração binaria; em seguida, procedemos de igual modo (cartões C, D e E) para os 3.^o, 4.^o e 5.^o algarismos.

Se, tendo entregue estes cinco cartões a uma pessoa, lhe pedirmos que pense n'um numero e que nos indique os cartões, em que esse numero está inscripto — e só esses —, é o mesmo que pedir-lhe que nos aponte os algarismos com que se escreve, em numeração binaria, o numero em questão. E' facilimo verificar que, para achar esse numero, basta sommar os numeros, que figuram na primeira linha

d'aquelles cartões. Seja, por exemplo, 25 o numero em que se pensou; os cartões, que nos indicam, são o A, o D e o E, que começam por 1, 8 e 16; óra, $1 + 8 + 16 = 25$.

Com 6 cartões, em lugar de 5, pode-se prolongar a serie numerica até 63, em vez de ficarmos em 31; com 7 cartões, chega-se a 127. Tambem se póde dar á adivinhação uma apparencia ainda mais mysteriosa, substituindo os numeros por nomes proprios. Organisa-se, d'uma vez para sempre, uma lista de concordancia dos nomes e numeros, e tem-se sempre presente que os diferentes cartões começam por 1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64.

Cada um de nós pode confeccionar muito facilmente um jogo d'estes cartões, até 7, por exemplo. E, se não conseguirmos assim passar por feiticeiro, tiramos pelo menos, de tudo isto, o proveito de nos exercitar a fazer sommas de cabeça, com rapidez e segurança; sem o que, expor-nos-iamos a perder todo o prestigio.

34 — As progressões por differença

Tomemos uma serie de numeros, por exemplo:

$$4 \quad 7 \quad 10 \quad 13$$

em que a differença entre dois numeros consecutivos é sempre a mesma:

$$7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 3$$

A uma serie assim, chama-se *uma progressão por differença* ou *uma progressão arithmetica*.

A differença constante 3, — n'este exemplo — é a *razão* da progressão.

Os numeros 4, 7, 10 e 13, são os *termos* da progressão. Escrevemos aqui apenas quatro; mas, podem formar-se tantos, quantos quizermos.

E' de notar que a serie de numeros inteiros, 1, 2, 3, ... forma uma progressão por differença, cuja razão é 1, e que a serie dos numeros impares, 1, 3, 5, ... constitue uma progressão por differença de razão 2.

Vejamos (fig. 66) como se pode representar graphicamente a progressão 4, 7, 10 e 13, acima tomada para exemplo. N'uma folha de papel quadriculado, marcamos com

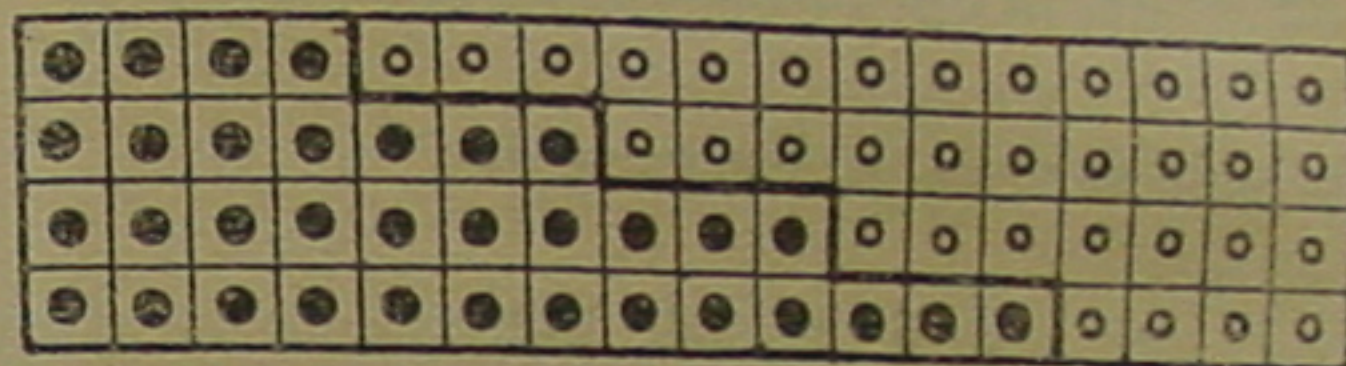


Fig. 66

tentos pretos 4 casas na primeira linha, 7 na 2.^a linha, 10 na 3.^a e 13 na 4.^a. Depois, acrescentando 4 casas a esta ultima linha e completando o rectangulo, vemos que este comprehende o dobro dos termos da progressão, representados por tentos pretos e brancos.

Verificamos mais que a somma dos termos equidistantes dos extremos é igual á somma dos mesmos extremos. Por ultimo, vemos que a somma dos termos da progressão é igual a metade do numero de casas do rectangulo, isto é:

$$\frac{17 \times 4}{4}$$

D'uma maneira geral, se a e l são os dois termos extremos e se n é o numero dos termos, esta somma exprime-se por:

$$\frac{(a + l) n}{2}$$

Se $a = 1$ e se a razão é 1, será $l = n$, e teremos $\frac{n(n+1)}{2}$.

Se $a = 1$ e se a razão é 2, será $l = 2n - 1$, e teremos n^2 . Achamos, assim, resultados já encontrados mais acima.

Notemos a analogia que existe entre a formula supra $\frac{(a + l) n}{2}$ e a da area do trapezio.

Se r é a razão de uma progressão por diferença, podemos representar sempre essa progressão por :

$$a \quad a+r \quad a+2r \dots a+(n-1)r.$$

35 — As progressões por quociente

Se uma serie de numeros, por exemplo :

$$2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 162,$$

é tal que o quociente de qualquer d'elles dividido pelo precedente tem sempre o mesmo valor, esses numeros formam uma *progressão por quociente* ou *geometrica*. O quociente constante é a *razão* da progressão. Pode tambem dizer-se que, n'uma progressão por quociente, a relação entre qualquer termo e o precedente é constante e chama-se razão. No nosso exemplo, a razão é 3, o primeiro termo é 2 e o numero de termos é 5.

Os numeros 1, 10, 100, 1000..., no systema decimal, formam uma progressão por quociente, cuja razão é 10. Os mesmos numeros, escriptos n'um systema de numeração de base B, formam uma progressão por quociente de razão B.

A razão tanto pode ser uma fracção, como um numero inteiro. Se é maior do que 1, os termos vão augmentando sempre e a progressão diz-se *crescente*. Se a razão é menor do que 1, a progressão é *decrecente* e os seus termos vão diminuindo successivamente.

Tem interesse poder achar-se a somma dos termos d'uma progressão por quociente. Tomemos o exemplo de ha pouco :

$$2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 162.$$

Se multiplicamos um termo qualquer pela razão 3, te-

mos o termo seguinte. Se o multiplicarmos por 3 - 1 ou 2, teremos, pois, a diferença dos dois termos consecutivos :

$$\begin{aligned} 2(3-1) &= 6-2, & 6(3-1) &= 18-6, \\ 18(3-1) &= 54-18, & 54(3-1) &= 162-54, \\ & & 162(3-1) &= 486-162. \end{aligned}$$

Fazendo a addição, se a somma é s , temos :

$$s(3-1) = 486-2; \quad s = \frac{486-2}{3-1} = 242.$$

D'um modo geral : seja

$$a \quad b \quad c \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad k$$

a progressão de razão q , cuja somma s se pretende achar. Se lhe acrescentarmos mais um termo : $l = kq$, teremos

$$\begin{aligned} a(q-1) &= b-a, & b(q-1) &= c-b, \dots \\ & & k(q-1) &= l-k, \end{aligned}$$

donde

$$s(9-1) = l-a \quad e \quad = s \frac{l-a}{9-1}$$

Se a progressão é decrecente, temos, pela mesma razão: $\frac{a-l}{1-q}$.

As progressões por quociente desempenham um papel muito importante, no calculo ; teem numerosas applicações.

Mesmo quando a razão é pouco maior do que 1, se o numero de termos é um tanto elevado, as progressões conduzem a numeros de tamanha grandeza, que, á primeira vista, provocam espanto em quem esteja desprevenido. D'isso, vamos encontrar alguns exemplos, nos numeros seguintes.

E' conveniente fazer notar á creança que, se a é o primeiro

termo d'uma progressão por quociente, q a razão e n o numero de termos, podemos escrever a progressão assim :

$$a \quad aq \quad aq^2 \quad \dots \quad aq^{n-1}$$

36—Os bagos de trigo e o taboleiro do xadrez

Não se sabe ao certo quem foi o inventor do jogo do xadrez; mas, a este proposito, existe uma velha lenda hindu, que merece ser conhecida.

Encantado com este novo jogo, o monarcha, segundo a lenda, mandou chamar o inventor para lhe dizer que indicasse elle proprio a recompensa que desejava.

«Solicito apenas — respondeu o interessado — que vos dignaes dar-me um bago de trigo para ser collocado na 1.^a casa do meu taboleiro; 2 para pôr na 2.^a, 4 na 3.^a e continuar assim, sempre a dobrar, até á 64.^a casa.»

A modestia de tal pedido encheu de assombro o monarcha, que deu ordem para que fôsse satisfeito sem demora. Mas, ainda mais estupefacto ficou, quando o vieram informar da impossibilidade absoluta d'executar a sua ordem. Para isso, era preciso cerca de oito colheitas annuaes produzidas pela superficie da terra, suppondo-a semeada de trigo na sua totalidade.

O numero de bagos de trigo reclamado é a somma dos termos da progressão

$$1 \quad 2 \quad 2^2 \quad \dots \quad 2^{63},$$

o que dá $2^{64} - 1$. Esse numero, escripto no systema decimal, é :

$$18446744073709551615$$

Tem, como se vê, vinte algarismos. Não procuraremos lê-lo; as palavras, que pronunciaríamos, pouco diriam ao nosso espirito. E, comtudo, vamos encontrar, dentro em pouco, outros numeros ainda muito maiores.

37 — Uma casa barata

Um amigo nosso, por certo conhecedor da historia do inventor do jogo do xadrez, mandou construir uma pequena casa d'um andar. Dava ingresso no rez-do-chão, que era um pouco alto, uma escada exterior de 7 degraus; a escada interior, que conduzia ao andar, tinha 19 degraus.

Passados alguns annos, teve que vender a casinhola, de resto bem conservada e d'aspecto agradável. Ao primeiro comprador, que appareceu, Felix — devia chamar-se Felix — fez a seguinte proposta :

«Não sou muito exigente e tenho pressa de vender. O senhor põe 5 réis sobre o 1.^o degrau da escada exterior, 2 sobre o 2.^o, 4 sobre o 3.^o e vae dobrando sempre até ao fim da escada interior. E' um ovo por um real; são apenas 25 degraus, ao todo.»

«Está dito! Negocio fechado», exclamou Pancrácio, radiante d'alegria por tamanha pechincha — o comprador chamava-se com certeza Pancrácio.

No dia seguinte, Pancrácio, tendo previamente offerecido um esplendido almoço ao Felix, encaminhou-se para a escada exterior a fim de se desobrigar dos $2^{25} - 1$ cinco réis, que devia pagar.

Até ao topo da escada exterior, tudo correu perfeitamente; os primeiros degraus da escada interior ainda não custaram muito a subir; mas, dentro em pouco, a bolsa de Pancrácio esvasiava-se mais do que elle tinha previsto.

Muito gentilmente, o vendedor offereceu-se para lhe mostrar o resultado do calculo, tornando-se assim desnecessario continuar a ascensão. — «Meu caro Pancrácio, disse-lhe, deve-me 335 544 315 réis; mas, d'um amigo como o senhor, não quero acceitar os 15 réis; faço-lhe esse abatimento.»

Ao ouvir estas palavras, Pancrácio ficou com uma cara de palmo e meio! Desde esta epocha, parece que teve o maior cuidado em que não deixassem de ensinar a seus filhos o que seja uma progressão.

Elle sabia-o regularmente bem; mas, pareceu-lhe que a lição lhe havia ficado um pouco cara.

38 — Um real posto a render

Uma das mais importantes applicações praticas das progressões é a que diz respeito aos *juros compostos*. Se pozermos 1 tostão a render durante um anno, a 5 por cento, dá-nos de lucro 5 réis. Se, em vez de recebermos estes 5 réis, os ajuntarmos ao tostão, teremos 105 réis, que podemos collocar a render durante um 2.º anno, e assim por diante. Quando o numero d'annos é consideravel, o accrescimento do capital, pela regra de juros compostos, é verdadeiramente phantastico.

Suppondo, por exemplo, que, no começo da era de Christo, 1 real foi posto a render a juros compostos e á taxa de 5 por cento, o calculo diz-nos que, em fins do seculo XIX, o valor accumulado seria representado por mais de quinhentos milhões de esferas d'ouro puro do tamanho da Terra.

Um resultado assim — diga-se de passagem — mostra claramente a impossibilidade d'uma applicação geral da regra de juros a todos os casos, que se apresentam na pratica. A sua propria enormidade impede que façamos uma ideia exacta de tal somma.

Em vez d'isto, podemos formular a seguinte pergunta: Durante quanto tempo precisa ser posto a render 1 real, a juros compostos e á taxa de 5 por cento, para que o valor accumulado atinja 100 contos de réis?

A resposta é: 378 annos. De maneira que, se um dos vossos antepassados do tempo de D. João III, ahí por 1527, tivesse tido a feliz ideia de collocar a render, em vosso proveito, o valor de um tostão a 5 por cento e a juros compostos, esse tostão valeria hoje 10.000 contos de réis.

Se esta operação tivesse sido realisada no anno 59 da nossa era, ao juro de 1 por cento apenas, ter-se-hia obtido o mesmo resultado em 1907, isto é: o tostão posto a render assim, teria attingido n'esse anno um valor de 10 000

contos — resalvando, é claro, os accidentes que podessem sobrevir n'esse intervallo de tempo.

39 — O jantar de cerimonia

N'uma bella tarde de verão, doze amigos resolveram jantar juntos. Eram todos pessoas, que ligavam grande importancia á etiqueta, e, como os logares não tivessem sido marcados d'antemão, estabeleceu-se uma discussão muito cortez, mas sem resultado algum, no momento de se assentarem á mesa. Alguem propoz, para vencer a difficuldade, que se tentassem successivamente todas as maneiras possiveis de resolver a questão; depois, restaria apenas escolher a disposição julgada mais feliz. Assim se fez durante alguns minutos; mas, as cousas em vez de se resolverem, mais se enredaram.

Felizmente, entre os convivas, encontrava-se um professor do collegio da localidade, que possuia algumas noções de mathematica. — «Meus bons amigos, disse elle, a sopa começa a arrefecer. Tiremos os logares á sorte; é muito mais expedito.» Este sabio conselho foi seguido, e o jantar terminou no meio da mais franca cordialidade. A' sobrezeza o professor perguntou: «Sabeis quanto tempo era preciso para realisar todas as maneiras possiveis de nos distribuirmos em volta d'esta mesa, levando apenas um segundo para passar d'uma distribuição para outra?» Como todos ficassem calados, proseguiu: «Executando esta pequena tarefa, noite e dia, sem pararmos um unico instante, gastaríamos n'isso mais de 15 annos e 2 mezes, mesmo sem nos occuparmos em saber quantos annos bissextos haveria n'esse periodo de tempo. Vêem portanto que, se o assado corria risco de se queimar, nós tinhamos a certeza de morrer todos de fome, de exaustão e de privação de somno. Sejamos pois, cerimoniaes, se o animo nol-o pedir; mas, sem exaggeros.»

E era verdade; o numero exacto das differentes maneiras

como 12 pessoas podem tomar logar a uma mesa de 12 ta-
lheres, é 479001600 — lêde bem : mais de 479 milhões.

Este resultado causa verdadeira surpresa, quando se
pensa que, para 2 convivas, não são precisos mais do que
2 segundos, e que, para 4, as operações concluem-se em
menos de meia hora.

Os grandes numeros, que se nos deparam aqui, são devi-
dos a permutações, e o computo é facil de fazer.

Quando temos um certo numero d'objectos differentes e
os queremos alinhar collocando-os em logares differentes
previamente marcados, qualquer das disposições adoptadas
é uma *permutação* d'esses objectos.

Se se trata apenas de dois objectos differentes, que deno-
minaremos *a* e *b* e de dois logares differentes, as duas unicas
permutações possiveis são *a b* e *b a*.

Para formar as permutações de trez objectos, *a*, *b*, *c*, po-
demos tomar a permutação *a b* e ajuntar-lhe *c* em trez loga-
res differentes : depois de *b*, entre *a* e *b* e antes de *a*.

A permutação *b a* tambem dá outras trez, ajuntando-lhe *c*;
de maneira que teremos o quadro geral das permutações
de *a*, *b*, *c*, escrevendo :

<i>a b c</i>	<i>b a c</i>
<i>a c b</i>	<i>b c a</i>
<i>c a b</i>	<i>c b a</i>

o que dá 2×3 ou 6 permutações.

Se tomarmos uma qualquer d'estas permutações, por
exemplo : *a b c*, e se lhe ajuntarmos uma 4.^a letra, *d*, tere-
mos 4 permutações :

<i>a b c d</i>	<i>a b d c</i>	<i>a d b c</i>	<i>d a b c</i>
----------------	----------------	----------------	----------------

e cada permutação de 3 letras, dando assim 4 de 4 let-
tras, o numero de permutações de 4 letras será 6×4 ou
 $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Continuando da mesma fórmula, veremos que o numero das
permutações de 5 letras será $2 \times 3 \times 4 \times 5$, e, d'um mo-
do geral, o numero das permutações de *n* letras será
 $2 \times 3 \times 4 \dots n$; que se representa frequentemente por *n!*

Pelos resultados que seguem, vê-se com que rapidez
crescem estes numeros *n!* de permutações, quando *n* au-
menta.

<i>n</i>	<i>n!</i>
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600

As permutações tem uma grande importancia em mathe-
matica, e applicam-se a diversos jogos e passatempos, taes
como os anagrammas. Teem-se publicado numerosissimos
trabalhos sobre as permutações, alguns d'elles muito te-
chnicos e eruditos. Não temos que nos occupar d'elles n'este
logar ; mas, é bom deixar aqui registada a ideia genial, que
teve Ed. Lucas, de representar graphicamente, por um de-
senho, as permutações de varios objectos ; é o que elle de-
nominou *permutações figuradas*. Para comprehendermos bem
no que estas consistem, suppunhamos que, sobre um papel
quadriculado, formamos um quadrado de *n* linhas de *n* ca-
sas cada uma, e, limitando-nos ás permutações de 4 obje-
ctos, fazemos *n* = 4. Teremos um quadrado de 16 casas. Se
substituírmos os nossos 4 objectos, *a*, *b*, *c*, *d*, pelos 4 nume-
ros 1, 2, 3, 4, uma permutação qualquer, *c b d a* por exem-
plo, escrever-se-ha 3 2 4 1. Na 1.^a columna do quadrado,
marcamos então a 3.^a casa e tracejemol-a ; fazemos outro
tanto á 2.^a casa da 2.^a columna, á 4.^a da 3.^a columna e á 1.^a
da 4.^a columna. As quatro casas tracejadas representam,
assim, a permutação *c b d a*.

A figura 73 mostra-nos as 24 permutações de 4 objectos.
Para facilitar a sua comprehensão e leitura, reproduzimos,
8

por baixo do quadro, as permutações correspondentes, com a mesma disposição.

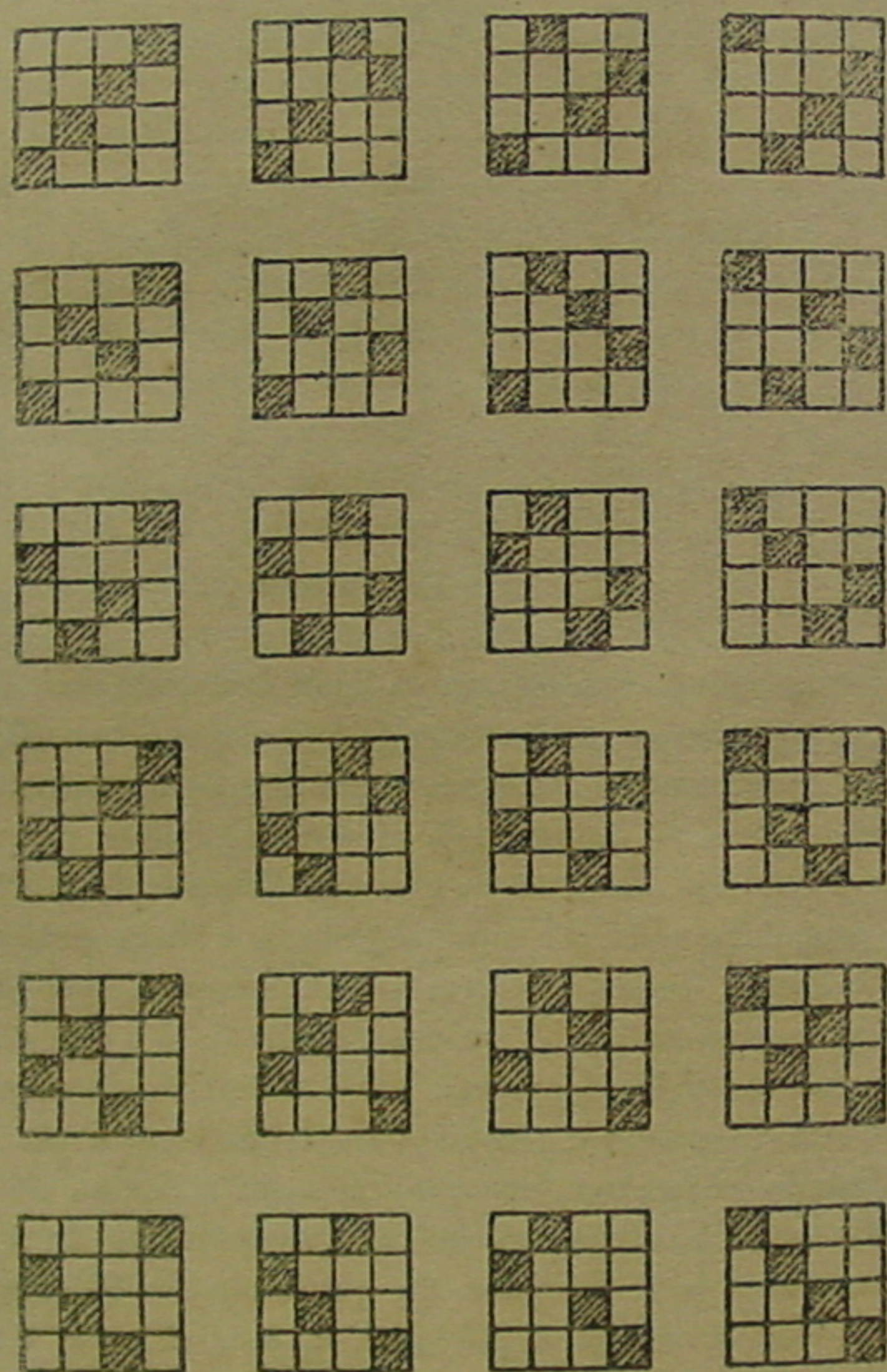


Fig. 73

<i>dcb</i>	<i>cdb</i>	<i>bdca</i>	<i>adcb</i>
<i>dbca</i>	<i>cbda</i>	<i>bcda</i>	<i>acdb</i>
<i>dacb</i>	<i>cadb</i>	<i>badc</i>	<i>abdc</i>
<i>dcab</i>	<i>cdab</i>	<i>bdac</i>	<i>adbc</i>
<i>dbac</i>	<i>cbad</i>	<i>bcad</i>	<i>acbd</i>
<i>dabc</i>	<i>cabd</i>	<i>bacd</i>	<i>abcd</i>

Se considerarmos qualquer dos quadrados da figura 73 como um taboleiro de xadrez, as casas tracejadas representam as posições de torres, que não estão em cheque entre si, e isto é extensivo a todos os quadrados analogos. Segue-se d'aqui que, sobre um taboleiro ordinario de 64 casas, podem-se collocar oito torres de 40320 maneiras diferentes e por fórma que não estejam reciprocamente em cheque. Sobre um taboleiro de 100 casas, poder-se-hiam collocar dez torres, nas mesmas condições, de 3628800 maneiras diferentes. Consulte-se o quadro da pagina 113, para os numeros que indicamos. São questões estas, que não se resolveriam facilmente sem o auxilio das permutações, e que se tornam facilimas, graças a esse auxilio.

Podemos tambem procurar conhecer de quantas maneiras diferentes se podem ordenar as cartas d'um baralho do jogo do piquet: $n! = 32!$, ou as d'um baralho do jogo do whist: $n! = 52!$; mas, não nos deixemos arrastar pela tentação de escrever esses numeros no systhema decimal. Procuremos antes saber de quanto tempo precisaríamos para effectuar todas essas disposições, gastando um segundo com cada uma d'ellas. Deixamos esse prazer aos nossos leitores, ou melhor aos seus alumnos. Mas, não tentem tambem escrever esses numeros, nem mesmo avaliados em secalos; isso em nada contribuiria para a formação do espirito.

40 — Um numero bastante grande

Por um lado, com as progressões e por outro, com as permutações, acabamos de subir a alturas bastante grandes na escala dos numeros.

Na esperança de voltar a uns limites mais razoaveis e de evitar assim a vertigem, pedie a qualquer pessoa que vos escreva, com trez 9, o maior numero possivel. A resposta mais frequente será:

999

numero com effeito, modesto, comedido e honesto, que não tem a pretensão de vos pôr a cabeça a arder.

Mas, se por um mau acaso o vosso interlocutor é um mathematico consciencioso, que deseja responder á vossa pergunta nos termos em que a formulastes, dar-se-ha uma pequenissima modificação na maneira de escrever os algarismos, e lereis, então

$$99^9$$

o que quer dizer que é preciso elevar 9 a uma potencia designada pelo numero 9^9 . Este numero é facil de obter em poucos minutos; o vosso alumno achal-o-ha sem hesitação alguma, se não o quizerdes calcular vós mesmo. E'

387 420 489

e este resultado é devéras interessante, porquanto sabeis que, devido a elle, tendes apenas que fazer 387420488 multiplicações, para terdes o numero desejado, escripto no systema decimal. São multiplicações muito simples, não tendo senão 9 por multiplicador; mas, o seu numero é talvez sufficientemente grande, para vos deixar um tanto hesitantes.

Decididamente, não nos atrevemos a animar-vos a emprender essa tarefa. Deixae-nos apenas dizer-vos — e repeti-o ao vosso alumno, que mais tarde verificará o facto — que o numero 99^9 , se fosse escripto em numeração decimal, teria

369693100 algarismos.

Para o escrever sobre uma unica tira de papel, suppondo que cada algarismo occupa uma extensão de 4 millimetros, bastaria que essa tira tivesse o comprimento de

1478 kilometros 772 metros e 40 centimetros.

E' um pouco mais que a distancia de Paris a Avinhão, em caminho de ferro.

Para escrever 10^{10} , nas mesmas condições, seria preciso

uma tira de papel, que desse uma volta completa em torno da Terra. ¹

O tempo materialmente necessario para escrever o numero 99^9 , gastando um segundo por algarismo e trabalhando 10 horas por dia, não excederia, de nenhum modo, 23 annos e 48 dias, supprimidos que fossem todos os domingos e dias feriados, isto é: contanto que não houvesse nenhum dia de descanso.

Ainda como esclarecimento, podemos affirmar-vos que o primeiro algarismo do numero, que buscamos, é 4 e que o ultimo é 9. Falta-nos, portanto, achar apenas 369693098 algarismos. Talvez vos pareça de pouca monta esta simplificação; francamente, somos da mesma opinião. Em compensação, esperamos que concordeis que o titulo d'este n.º: «Um numero bastante grande», está plenamente justificado.

Uma ultima observação — e bastante curiosa — é que 11^4 é simplesmente 1, que $2^2 = 16$ e que 3^3 é um numero de 13 algarismos:

7625597484987 ²

¹ Esta observação foi feita pelo sr. CH.-ED. GUILLAUME, n'um artigo muito interessante da *Revue générale des sciences* (30 d'outubro de 1906).

² Apesar das explicações dadas, diferentes leitores foram victimas d'uma confusão a proposito da significação de 3^{33} , e alguns escreveram-nos dizendo terem achado, como resultado, 19683 e não um numero de 13 algarismos. Provem isso d'uma falsa interpretação do symbolo a^{bc} em que se póde ver $(a^b)^c$ ou $a^{(bc)}$. Esta ultima interpretação é a unica racional, visto $(a^b)^c = a^{bc}$. Seria pouco logico empregar a forma escripta a^{bc} para representar a operação mais simples a^{bc} . Posto isto, 99^9 só pode significar $9^{(99)}$ e 3^3 quer dizer 3^{27} e não 27^3 .