

IV — BIBLIOTECA DE EDUCAÇÃO RACIONAL

CHARLES LAISANT



Iniciação

Matematica

TRADUÇÃO DO

Dr. Henrique Schindler

OPERA ORNADA COM 163 GRAVURAS

2.ª edição



1919

GUIMARÃES & C.ª - Editores

68, RUA DO MUNDO, 70

LISBOA

Iniciação Matemática

Composto e impresso na Imprensa
♦♦ de Manuel Lucas Torres ♦♦
Rua do Diário de Notícias, 59 a 61

BIBLIOTECA DE EDUCAÇÃO RACIONAL

Colas, Junho de 1911

CHARLES LAISANT

Pro. Recife



Iniciação

Matematica

TRADUÇÃO DO

Dr. Henrique Schindler

OBRA ORNADA COM 103 GRAVURAS

2.^a edição



1919

GUIMARÃES & C.^ª - Editores

68, RUA DO MUNDO, 70

LISBOA

Preambulo

Este livrinho contem o desenvolvimento de principios expostos, sob o mesmo titulo, n'uma conferencia realisada ha annos e publicada na *Education fondée sur la science*, volume da *Bibliothèque de Philosophie Contemporaine*. Alguns amigos induziram-nos a precisar mais as nossas ideias sobre este ponto especial do grande problema da educação. Talvez tenham razão. Em todo o caso, o commettimento merece ser tentado, em face da persistencia com que se procura, ao que parece, deformar os cerebros juvenis. É á salvação da infancia que exhortamos os paes — mormente as mães — e os educadores. Desde a primeira infancia até ao inicio dos estudos — ou seja, por exemplo : dos 4 aos 11 annos — é possivel inculcar no espirito da creança um numero de cousas vinte vezes superior, ao que hoje em dia se consegue, em materia de mathematica ; e isto deleitando-a, em vez de a torturar.

Os diversos capitulos, que adeante se encontram, não formam um todo didactico ; mas, tambem não estão dispostos ao acaso. Constituem um guia deposto nas mãos do educador, em que este

pode inspirar-se, mas que nunca poderá dispensal-o do estudo do cerebro, que tem a seu cargo desenvolver. Umas vezes, é preciso ir alem ; outras, parar ou interromper se, e algumas, voltar atraz. O que é perigoso, é querer ir demasiado longe, sem se preocupar com o que precede.

Encontrareis n'estas paginas, um numero bastante grande de noções ; inspira-e-vos n'ellas, mas não vos torneis seus escravos. Procura-e, acima de tudo, interessar, divertir a creança ; NÃO LHE FAZEI APPRENDER NADA DE CÔR ; e, aos 11 annos, se ella for medianamente intelligente, saberá e comprehenderá melhor as mathematicas, do que a decima parte dos nossos bachareis. E — o que é mais importante — terá tomado gosto por ellas e encetará o seu estudo com prazer.

As *sessões de jogos* — fugamos de lhes chamar lições — nunca devem prolongar-se alem do limite em que a attenção fraqueja e a curiosidade se apaga ; de contrario, só alcançareis resultados prejudiciaes.

Muito desejamos que, para as sciencias phisicas e naturaes, possam ser levadas a cabo tentativas analogas. A tarefa não é mais difficil, muito pelo contrario ; e talvez, então, vejamos as gerações futuras, libertadas do collete de forças das que as precederam, prodigalisar largamente, em proveito da humanidade, os thesouros d'uma intelligencia deixada desabrochar livremente.

O presente livro nada tem de comum com as

Recreações mathematicas, que motivaram a publicação d'um grande numero d'obras excellentes, d'entre as quaes, para nos limitarmos ás que estão publicadas ou traduzidas na lingua franceza, citamos apenas os quatro volumes de EDUARDO LUCAS : *Arithmétique amusante* do mesmo auctor, o volume de ROUSE BALL, traduzido do inglez, e o de FOURREY, que tem principalmente por objecto questões d'arithmeticas.

Nas *Recreações mathematicas* — O nome claramente o diz — trata-se d'applicar as theorias mathematicas, já conhecidas, a assumptos graciosos : jogos varios, combinações, etc. ; mas, uma certa instrucção é necessaria, a miudo, para a simples comprehensão das explicações dadas.

Aqui, succede o inverso ; servimo-nos de questões engraçadas, como meio pedagogico, para despertar a curiosidade da creança e conseguir, assim, fazer penetrar no seu espirito, sem imposição de esforço cerebral, as primeiras e mais essenciaes noções da mathematica. E a diversidade das questões, que póde dar a impressão d'uma desordem apparente, apenas encobre uma sequencia d'ideias, propositadas, uteis e perfeitamente ordenadas.

A nossa *Iniciação* não é, pois, uma duplicação das *Recreações* ; uma e outras teem a sua razão de ser. No decurso dos seus estudos, os alumnos avidos de saber, ao lembrarem-se dos jogos da sua infancia, podem tirar grande proveito da leitura das obras, que a esse tempo são

por elles comprehendidas e lhes despertam ideias novas, aperfeiçoam e aguçam o espirito.

E, a quem lhes vier dizer que as Recreações são indignas d'elles, basta responder que os mais eminentes sabios não desdenharam occupar-se d'ellas, e que, se ás vezes os estudos mathematicos nos levam ao riso, é isso, um merito a mais, visto que, segundo a celebre phrase de Rabelais: «E' proprio do homem o rir-se».

Se, a tal respeito, os pontifices não estão contentes, saibamos consolar-nos. Aquelles, para quem a palavra «instruir» é synonyma de «enfadar» — e, muitas vezes, de «torturar» — são verdadeiros malfeitores publicos. E' tempo d'acabar com a sua dominação nefasta.

Ao escrever este voluminho, tivemos principalmente em vista a França; mas, o mal não é privativo do nosso paiz. Por toda a parte, é preciso collocarmo-nos *fóra dos programmas*, se quizermos libertar a infancia; por toda a parte — se a amamos e a prezamos — devemos contar com a hostilidade d'uma Administração, que parece apostada a estorvar o seu desenvolvimento cerebral.

Uma ultima palavra, talvez inutil. Este livro posto nas mãos da creança, é um livro sem objectivo, quasi perigoso. E' ao educador — e só ao educador — que elle se destina, para lhe servir de guia. Mas, o alumno, chegado que seja ao periodo dos estudos serios, encontrará por vezes vantagem n'esta leitura, especie de relance retrospectivo sobre a evolução primordial do seu espirito juvenil.

INICIAÇÃO MATHEMATICA

1 — Os riscos

Uma das primeiras faculdades, que devemos desenvolver na creança, desde a idade em que a sua actividade cerebral começa a despertar, é a do desenho. Dotada, quasi sempre, d'um gosto instinctivo pelo desenho, convem estimular-lh'o, muito antes de começarmos a ensinar-lhe a escrever ou a ler.

N'esse intuito, devemos principiar por dar-lhe uma ardósia ou uma folha de papel quadriculado, por collocar entre os seus pequeninos dedos primeiramente um lapis, depois, quando já estiver mais adestrada, uma penna, e fazel-a traçar simples riscos; não os classicos riscos obliquos, preparatorios da escripta inclinada, mas pequenas linhas, segundo as direcções do traçado da quadricula e muito regularmente distanciadas.

Com estas linhas, dirigidas primeiramente de cima para baixo, depois, passado algum tempo, da esquerda para a direita, o alumno forma *riscos verticaes* (fig. 1) e *riscos horizontaes* (fig. 2).

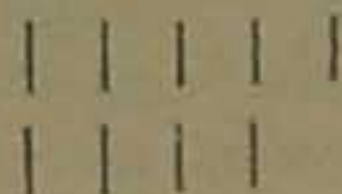


Fig. 1 — Riscos verticaes



Fig. 2 — Riscos horizontaes

Gradualmente vamos-lhe ensinando a traçar riscos mais ou menos longos, a intercalal-os nas linhas da quadricula, a traçar outros obliquos, em todas as direcções possíveis. Depois, levamo-lo a formar figuras constituídas pela reunião de riscos mais ou menos longos. Adeante diremos mais algumas palavras a este proposito.

Mais tarde, quer com o auxilio de instrumentos (regua, esquadro, compasso), quer simplesmente á mão, fazemo-lo desenhar figuras em que entrem linhas curvas. Estes exercicios, que desenvolvem a habilidade manual e a justeza da visão, nunca devem ser postos de banda durante todo o periodo educativo. Dizemos agora d'elles apenas o indispensavel á comprehensão do que segues; mas, devemos, desde já, insistir n'um facto: é que estes exercicios devem ser indicados — e nunca impostos — á creança. Se deixam de constituir uma simples brincadeira, uma distracção, o nosso fim falhará por completo. Deixe a creança rabiscar na sua ardósia, estragar algumas folhas de papel; guie-a com os vossos conselhos, que ella nunca deixará de vos pedir; mas, quando se mostrar enfasiada, deixae-a fazer outra cousa. É esta uma condição rigorosamente necessaria para desenvolver n'ella o espirito de iniciativa, para manter a sua curiosidade natural e para evitar a fadiga e tédio.

Este primeiro ensino do desenho, sobre que tivemos que dizer algumas palavras, constitue materia para um livro a fazer; a escripta e a leitura, fornecem assumpto para outros, que só devem vir mais tarde e que estão fóra do nosso objectivo. Mas, todos estes differentes ensinamentos, quando destinados á infancia, devem inspirar-se invariavelmente no mesmo principio fundamental, isto é: conservar a apparencia de brinquedo, respeitar a liberdade da creança e dar-lhe a illusão — se acaso o é — de que é ella propria quem descobre as verdades, que lhe collocamos deante dos olhos. Quanto á idade em que deve ser começada esta primeira iniciação mathematica, principiando pela do desenho e caminhando em seguida parallelamente, não ha nenhuma regra absoluta a formular. Póde-se comtudo dizer que, em geral, é muito raro que uma creança de trez annos e meio

a quatro annos, não manifeste já o seu gosto pelo manejo do lapis, e não hesitamos em affirmar que aos dez ou onze annos, se ella possui uma normal organização cerebral, é facil ter-lhe mettido na cabeça todas as materias expostas nas paginas que seguem.

Mais d'uma, passados alguns annos, talvez sinta prazer em pegar n'este livrinho, que então já não lhe é destinado. O seu espirito, cultivado por estudos ulteriores e affeito ao raciocinio consciante, encontrará certamente n'elle materia para reflexões uteis.

Para terminar com estas generalidades e não termos que nos repetir inutilmente, devo chamar a attenção das familias e dos professores, que me lerem, para o maior escolho a evitar na primeira educação da infancia: o abuso do exercicio da memoria, tão pernicioso e tão geral ainda hoje na pratica corrente. Ensinando palavras á creança e obrigando-a a repetil-as, deformamos-lhe o cerebro, aniquilamos as suas qualidades nativas, preparamos gerações de individuos sem iniciativa, sem curiosidade, sem vontade, atafalhados de formulas incomprehendidas, apagados e deprimidos.

Se amaes vossos filhos, se estimaes as creancinhas que vos confiam, se quereis que elles sejam fortes, robustos e bons, segui os principios d'esses grandes espiritos e d'esses grandes corações, que se chamaram La Chalotais¹, Froebel², Pestalozzi³. Estes benefeitores da humanidade teriam, por certo, estatuas em todos os paizes do mundo e os seus nomes estariam estampados em letras d'ouro em todas as escolas, se a terra fosse habitada por seres racionais.

¹ LA CHALOTAIS, magistrado francez, natural de Rennes (1761-1786), autor do *Essai d'éducation nationale*.

² FROEBEL, pedagogo allemão, natural de Oberweisbach (1784-1852) fundador dos *Jardins d'infancia*.

³ PESTALOZZI, educador suizo, natural de Zurich (1746-1827); o seu methodo serviu de base Falchis, como meio, para o resurgimento da Alemanha.

2 — De um a dez

Quando a creança começa a adquirir o habito de traçar os riscos com regularidade e alguma rapidez, ensinamos-lhe a contar-os á medida que os traça, pronunciando successivamente os seus nomes : *um, dois, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez.*

Em seguida, formamos grupos de riscos, separados por intervallos eguaes, e obtemos assim figuras (fig. 3 e 4), que se lêem :

um, dois, dez riscos verticaes, para a fig. 3 ;
um, dois, dez riscos horizontaes, para a fig. 4.



Fig. 3

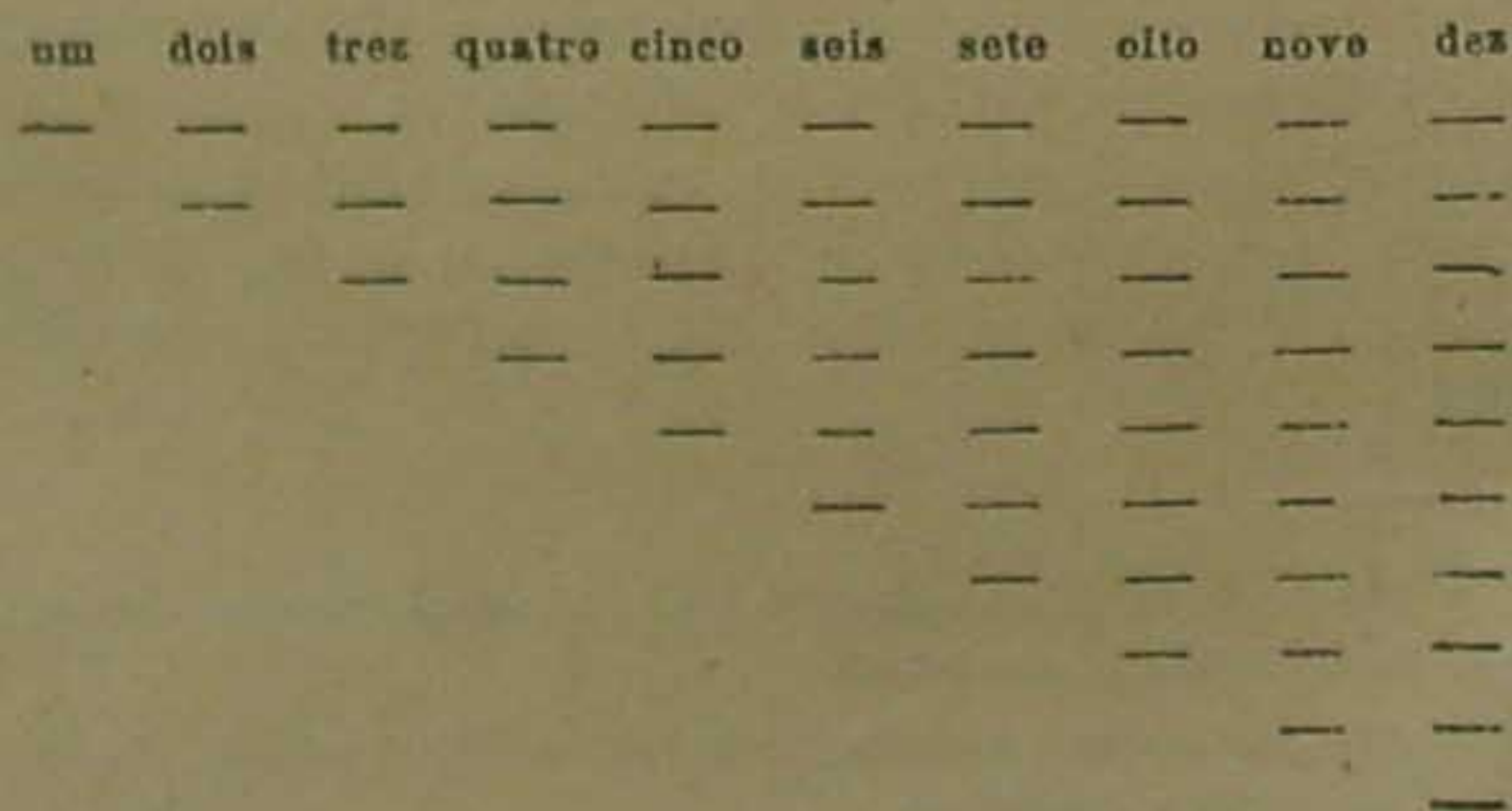


Fig. 4

Simultaneamente servimo-nos de grupos de feijões, de bagos de trigo, de tentos ou de quaesquer outros objectos e enunciamol-os assim :

um, dois, dez feijões, bagos de trigo, etc.

Em seguida, supomos que os objectos são substituidos por carneiros, cães, homens, etc., e uma vez estes exercicios sufficientemente repetidos e tornados familiares á creança, podemos então dizer-lhe que as expressões de que faz uso : tres riscos, seis bagos de trigo, oito carneiros, por exemplo, são *numeros*, e *numeros concretos*.

Considerando um grupo de cinco riscos, um outro de cinco feijões, um terceiro de cinco tentos; imaginando um de cinco cães, ou de cinco arvores, fazemos-lhe notar que n'estes diferentes casos pronuncia sempre a mesma palavra *cinco*; dizemos-lhe, então, que esta palavra, sem se lhe ajuntar mais nada, representa o que se chama um *numero abstracto*, e que póde servir-se d'ella para designar qualquer outro grupo de cinco objectos : bois, cadeiras, casas, etc.

Não é preciso muito tempo para que a creança saiba contar sem hesitação de um até dez, sejam quaes fôrem os objectos. E' tambem bom habitual-a, o mais cedo possivel, a apanhar n'um só olhar o conjuncto dos objectos, que lhe apresentamos de surpresa — tentos ou feijões, por exemplo, — sem ter necessidade de os contar um por um ; para isso, convem começar por numeros muito pequenos e proceder progressivamente.

3 — Os phosphoros ou palitos; mólhos e feixes

Além dos diversos objectos acima indicados como meios auxiliares para tornar bem comprehensivel á creança a ideia de numero concreto, e que podemos variar até ao infinito, outros existem, que não nos cançaremos de recommendar, e cujo emprego, a nosso ver, é indispensavel. São uns pequenos palitos de madeira, semelhantes aos phosphoros de pau

ordinarios, dos quaes differem apenas pela ausencia do preparado chimico inflammavel. Designamol-os, ás vezes, pelo nome de phosphoros, attenta essa semelhança; e estes phosphoros — que não se accendem — podem considerar-se como modelos dos riscos traçados na ardosia ou no papel quadriculado. Devem ter todos o mesmo comprimento.

Tendo deante de si um monte d'estes palitos e sabendo contar até dez, a creança separa successivamente dez e forma com elles um mólbino muito regular, que amarra servindo-se d'um d'esses pequenos anneis de cautchu tão commodos e de uso tão espalhado.

Fazemos-lhe vêr então que este mólho, contendo dez palitos, póde denominar-se *uma dezena de palitos*.

Em seguida, a creança arranjará ainda outros mólhos identicos, em numero bastante grande. Verificamos se ella se enganou e, se tal succedeu, mandamol-a emendar o erro comettido.

Mostrando-lhe depois dois mólhos, dizemos-lhe que ao numero de palitos d'esses dois mólhos, reunidos, se chama *vinte* e que portanto:

*um mólho, são dez palitos,
dois mólhos, são vinte palitos.*

Tomando, em seguida, trez, quatro, nove mólhos, e procedendo da mesma maneira, mostramos que

trez mólhos	são	trinta	palitos
quatro	»	»	quarenta
cinco	»	»	cincoenta
seis	»	»	sessenta
sete	»	»	setenta
oito	»	»	oitenta
nove	»	»	noventa

Depois de bem comprehendido tudo o que temos dito, e para terminar, pegamos em dez mólhos, que reunimos n'um só volume por meio d'um anel de cautchu mais

largo, formando assim um *feixe*. Explicamos, então, que um feixe é uma *centena* de palitos; que o numero de palitos contidos n'um feixe se chama *cem*, e verificamos que, constituindo dez mólhos um feixe, *dez dezenas é uma centena*.

4 — De um até cem

Tomemos ao acaso um punhado de palitos — em numero inferior a cem — e proponhâmos á creança procedermos juntos á sua contagem. Para isso, vae ella arranjando mólhos, em quanto lhe fôr possivel, pois que um momento chegará em que já não disponha de palitos bastantes para completar um mólho. Collocando, então, á sua esquerda todos os mólhos feitos e á sua direita os palitos, mandamol-a enunciar os dois numeros separadamente; depois, reunindo-os n'um só numero, terá dito assim o numero total dos palitos, que lhe tinhamos confiado.

Se, por exemplo, arranjou *trez* mólhos e sobejaram *oito* palitos, dirá, olhando para a esquerda: «*trinta*», e, olhando para a direita: «*oito*»; em seguida, sem interrupção, dirá: «*trinta e oito*».

Depois de termos repetido muitas vezes este exercicio com collecções de palitos tomadas ao acaso, desmanchamos um feixe, a fim de contar successivamente, um por um, todos os palitos. Começamos a contar um, dois, trez . . . até dez. Obtemos assim um mólho, que passamos para a nossa esquerda (sem ser necessario atal-o), e continuamos a contar:

*dez-e-um; dez-e-dois; dez-e-trez; dez-e-quatro; dez-e-cinco¹;
dezeses; dezesete; dezoito; dezenove;*

emfim, mais um palito completa um segundo mólho, que collocamos á nossa esquerda, ao lado do primeiro, dizendo: *vinte*

¹ Devemos evitar dizer: onze, doze, treze, quatorze, quinze. Estes nomes aprender-se-hão sem difficuldade alguma, em occasião opportuna. É inutil, por agora, sobrecarregar a memoria da creança.

e continuamos a proceder da mesma fôrma até ao nono mólho; depois até ao nono palito restante, no qual pegamos dizendo: *noventa e nove*; finalmente, lançamos mão do ultimo, completando o decimo mólho, que collocamos á nossa esquerda, ao lado dos nove primeiros, pronunciando a palavra: *cem*.

Nada impede que façamos notar ao nosso estudantinho que acabamos de lhe ensinar a *numeração* de um até cem; podemos mesmo dizer-lhe que quando diz: setenta e trez phosphoros ou palitos, faz o que se chama *numeração fallada*, e que quando dispõe em fila sete mólhos á sua esquerda e trez palitos á sua direita, faz *numeração figurada*. Ficarâ extremamente lisongeado por se sentir tão sabedor e erudito, tanto mais que ainda não sabe escrever uma lettra ou um algarismo, nem ler: b, a, ba. Mas, desenha riscos; tem olhos; serve-se d'elles para ver, e começa a comprehender o que vê e o que faz.

Sabemos, pois, contar de um até cem. Deyemos habituarnos a contar do mesmo modo quaesquer outros objectos, depois a contal-os mentalmente e, por ultimo, sem os ter á vista. E' o inicio do *calculo mental*, tão importante na pratica e tão facil de effectuar desde a mais tenra idade, se começarmos por cousas muito simples e se procedermos progressivamente.

Mas, ainda não é tudo. Partindo de 1, devemos habituarnos a contar de dois em dois:

um, trez,..... até noventa e nove

e explicar que todos estes numeros são *numeros impares*.

Façamos outro tanto, começando por 2:

dois, quatro, seis,..... até cem

e teremos assim *numeros pares*.

Em seguida, habituar-nos-hemos a contar de trez em trez, de quatro em quatro, partindo de um, para começar, e, depois, de um numero qualquer.

Todos estes exercicios fazem-se primeiramente com objectos — de preferencia palitos —, depois mentalmente.

N'uma palavra: esta manipulação dos numeros, de um até cem, pode-se variar indefinidamente, porque não devemos ter receio de a prolongar emquanto se não tornar fastidiosa e continuar a interessar a creança. E será bom repetil-a de tempos a tempos, mesmo quando a creança já tenha avançado um pouco mais na sua *iniciação scientifica*.

5 — A taboa d'addicção

Sobre uma meza, disponhamos em fileira, da esquerda para a direita, um, dois até nove palitos, separando estes nove grupos uns dos outros. Por baixo do palito unico, collocemos dois e formemos uma columna que, começando por um, dois, seguirâ assim até dez. Uma segunda columna, formada pelo mesmo processo, comprehenderâ dois, trez dez-e-um palitos; e, continuando da mesma maneira, teremos nove columnas; o ultimo grupo da nona columna é de dezoito palitos.

E' agora occasião de recorrermos á nossa habilidade de desenhador e á nossa grande aptidão para traçar riscos. Como, porem, é bastante enfadonho traçar os dez riscos correspondentes aos dez palitos d'um mólho, representamos este por dois traços mais grossos **H**, unidos por uma pequena barra horizontal, que lembra a presença do anel de caucho. Começamos assim a saber escrever os numeros por meio de riscos, e copiando d'este modo a figura, cuja formação acabamos de indicar, obtemos a fig. 5, pelo menos em parte. Para terminal-a, traçamos um, dois, nove riscos, a esquerda dos dois, trez, dez, da primeira columna; finalmente, separamos do resto da figura, por um traço vertical, esta nova columna e, por um traço horizontal, a primeira linha.

A figura, assim obtida, é uma *taboa d'addição*; veremos a breve trêcho porque se denomina assim.

Presta-se ella a diferentes observações interessantes, que

o constructor descobrirá em parte. Em primeiro logar, todos os numeros de cada linha obliqua, subindo da esquerda para a direita, são eguaes; depois, todos os numeros lidos da es-

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	
II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X		II
III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X		III	III
IV	V	VI	VII	VIII	IX	X		IV	IV	IV
V	VI	VII	VIII	IX	X		V	V	V	V
VI	VII	VIII	IX	X		VI	VI	VI	VI	VI
VII	VIII	IX	X		VII	VII	VII	VII	VII	VII
VIII	IX	X		VIII	VIII	VIII	VIII	VIII	VIII	VIII
IX	X		IX	IX	IX	IX	IX	IX	IX	IX
X		X	X	X	X	X	X	X	X	X

Fig. 5

querda para a direita na mesma linha horisontal, ou de cima para baixo n'uma columna, são numeros que differem entre si de uma unidade; finalmente, os numeros de cada linha obliqua, descendo da esquerda para a direita, lidos no sentido descendente, são numeros que differem entre si de duas unidades; óra são pares, óra impares.

Nada impede que se leiam estes numeros na ordem inversa, o que nos ensinará a enunciar correntemente os numeros de um em um, ou de dois em dois, no sentido opposto á ordem natural. E' este um exercicio tambem muito importante, por vezes util, de que ainda não tinhamos fallado e que podemos encetar n'esta altura, servindo-nos de numeros pequenos, que não apresentam nenhuma difficuldade séria.

6 — As sommas

Tomemos duas porções de feijões — ou d'outros objectos — e contemol-os, tanto os d'uma, como os da outra. Se os

reunirmos n'um só monte, quantos feijões teremos ao todo? Para o sabermos, basta-nos começar a contar, por sua vez, o monte formado pela reunião das duas porções. Mas, isto é muito moroso e enfadonho, e acarreta grande perda de tempo.

Expliquemos, então, que existe um meio mais rapido para alcançar o resultado desejado; que se chega a elle graças a uma operação, que se chama *addição*, e que o numero dos objectos comprehendidos no monte, e que nós queremos conhecer, se denomina *total* ou *somma*.

Tomando numeros menores do que dez, e recorrendo á fig. 5, fazemos notar que ella nos dá todas as sommas de duas porções ou lotes d'objectos, e pedimos á creança que procure lembrar-se d'ellas. Conseguimos isso repetindo estes exercicios o mais frequentemente possivel, e mandando contar directamente a somma, quando fôr esquecida.

Mesmo antes da memoria ter completamente fixado esta taboa d'addição, tomemos dois numeros quaesquer — escolhidos por forma que a sua somma seja inferior a cem — e enunciemol-os separadamente. Depois, representemol-os por meio de palitos; sejam: trinta e quatro e vinte e trez.

O primeiro numero representa-se por trez mólhos e quatro palitos; o outro por dois mólhos e trez palitos, que se collocam por baixo d'aquelles — melhor por baixo de mólhos (á esquerda) e palitos por baixo de palitos (á direita).

Perguntamos, então, á creança quantos fazem quatro e trez palitos; ella responderá sete, recorrendo, se fôr preciso, á taboa d'addição, e collocará sete palitos um pouco mais abaixo dos outros. E igualmente perguntamos: quanto fazem trez e dois mólhos? Cinco mólhos, que se collocam por baixo dos mólhos. Temos assim o total: cinco mólhos e sete palitos, ou cincoenta e sete palitos.

Recomeçamos este exercicio com outros numeros, escolhendo alguns, em que só haja mólhos, sem palitos isolados, como sessenta, vinte, oitenta; outros, em que não haja mólhos, isto é: inferiores a dez; mas, de maneira que a somma, tanto de palitos, como de mólhos, seja tambem sempre inferior a dez.

Chegados a este ponto, tomamos outros numeros com os quaes não se dê o mesmo; por exemplo: quarenta e nove e vinte e cinco.

A operação dispõe-se assim:

quatro mólhos	nove palitos,
dois mólhos	cinco palitos.

Temos então nove e cinco, ou dez-e-quatro palitos, o que nos dá um mólho — que collocamos por baixo dos mólhos — e quatro palitos. Contando os mólhos, começando pelo que acabámos de formar, temos: um e quatro, cinco; cinco e dois, sete mólhos. O total é, pois, sete mólhos e quatro palitos, ou setenta e quatro.

Este exercicio deve repetir-se, renovar-se com exemplos variados, até á saciedade; mas, apenas emquanto despertar interesse á creança, sem nunca prolongar a lição até ao ponto d'ella se aborrecer.

Passando depois ás addições de muitos numeros, procederemos do mesmo modo (dispondo sempre as cousas por fórma que o total seja inferior a cem), e faremos notar que se acha assim o numero formado pela reunião de varios lotes, quando se conhece o numero existente em cada lote ¹.

Repitamos ainda estes exercicios com numerosos e variados exemplos, emquanto não provocarem fadiga ou aborrecimento; quando nos parecer que da parte da creança ha qualquer sombra de má vontade, o castigo consistirá na ameaça — seguida de cumprimento durante alguns dias — de não continuarmos a entretel-a com os jogos de palitos, de tentos, etc., que principiamos a ensinar-lhe. Empregue-se este processo, com alguma habilidade, e ver-se-ha que não é difficil levar novamente, e de moto proprio, os *culpados* aos seus estudos. Mas, não pronunciemos esta feia palavra: estudo, que os pode enfurecer.

¹ Estes exercicios obrigam a saber sommar, sem recorrer á taboa d'addição, um numero mais pequeno do que dez com um mais pequeno do que cem por exemplo: sessenta e oito e cinco, setenta e tres. Com a pratica e um pouco de paciencia, consegue-se isto rapidamente.

7 — As differenças

D'um monte de feijões — oitenta e sete, por exemplo — tiramos, ou separamos, uma pequena porção d'elles; contados, verificamos serem vinte e cinco. Quantos ficaram? Achar este numero é fazer uma *subtracção*; o resultado é o *resto* ou *differença*. Note-se desde já que, se ajuntarmos o resto ao numero cerceado, reconstituimos o monte primitivo, isto é: o numero que soffreu a subtracção.

Para achar a differença, escrevemos com palitos o numero maior, oitenta e sete:

oitenta mólhos	sete palitos
----------------	--------------

e por baixo o mais pequeno, vinte e cinco:

dois mólhos	cinco palitos,
-------------	----------------

tendo todo o cuidado em collocar os mólhos á esquerda e os simples palitos á direita, ficando os palitos por baixo dos mólhos e os mólhos por baixo dos mólhos.

Do numero maior, tiramos cinco palitos, ficam dois; tiramos dois mólhos, ficam seis. Temos, pois, o resto:

seis mólhos	dois palitos,
-------------	---------------

ou sessenta e dois palitos.

Nada mais simples: achámos a differença desejada procurando apenas as differenças entre numeros inferiores a dez, porquanto tirámos cinco de sete e, em seguida, dois de oito.

Mas, nem sempre isto é tão facil. Supponhamos que o monte primitivo é de cincoenta e dois e o que queremos subtrahir é de dezoito — evidentemente mais pequeno do que aquelle. Procedendo como ha pouco:

cinco mólhos	dois palitos
um mólho	oito palitos,

vemos logo que não podemos tirar oito palitos de dois. Tomamos, então, um dos cinco mólhos e collocamol-o á direita, junto dos dois palitos. Quer o desatemos, quer não, vemos claramente que ficamos com dez-e-dois palitos á direita, e que, á esquerda, temos apenas quatro mólhos, em vez de cinco.

Dos dez-e-dois palitos, tiramos então oito: restam quatro; dos quatro mólhos, que ficaram á esquerda, tiramos um: restam trez.

A differença é, portanto,

trez mólhos quatro palitos,

ou trinta e quatro.

Para este caso, precisamos, pois, saber subtrahir um numero menor do que dez d'um numero maior do que dez, mas, sempre inferior a vinte.

Repetindo bastas vezes estes exercicios, variando-os o mais possivel, as differenças — que é necessario ficar sabendo — fixam-se rapidamente na memoria; mas, abste-nhamo-nos absolutamente de as fazer decorar e recitar. E' a pratica muito repetida que as fará reter para sempre.

Devemos ter em attenção nunca tomarmos, para numero maior, um numero superior a cem, visto que, por emquanto, não sabemos contar mais além.

8 — Os mil e os milhões

Até agora, sabemos contar até cem. Já é um numero bastante grande, se considerarmos a idade d'um individuo em annos; um homem, que tem cem annos, é muito velho, e os centenarios são raros. Mas, é um numero muito pequeno, se se refere a bagos de trigo; um monte de cem bagos de trigo não tem nada de grande; nem sequer chega para alimentar uma creança durante um dia. Pararmos ahí, é pois impossivel; temos que caminhar muito mais longe, o que, de resto não é difficil.

Chegámos a cem, agrupando os palitos em mólhos de dez e agrupando dez mólhos n'um feixe, que contem uma centena de palitos, ou cem palitos. Mettamos agóra dez feixes n'uma caixa; depois, com dez caixas eguaes formemos um pacote; ponhamos dez pacotes n'uma condeça; com dez condeças enchamos um caixote; com dez caixotes carreguemos uma carreta e com dez carretas, um vagão; finalmente, com dez vagões formemos um comboio.

Recapitulando tudo o que fica dito, vamos indicar as designações dos numeros, que representamos por este processo.

Um phosphoro ou um palito, é o que denominamos uma *unidade simples*;

N'um *mólho*, temos dez phosphoros ou uma *dezena*;

N'um *feixe* de dez mólhos, *cem* phosphoros ou uma *centena*;

N'uma *caixa* de dez feixes, *mil* phosphoros ou um *milhar*;

N'um *pacote* de dez caixas, *dez mil* phosphoros ou uma *dezena de milhar*;

N'uma *condeça* de dez pacotes, *cem mil* ou uma *centena de milhar*;

N'um *caixote* de dez condeças, um *milhão*;

N'uma *carreta* de dez caixotes, *dez milhões* ou uma *dezena de milhão*;

N'um *vagão* de dez carretas, *cem milhões* ou uma *centena de milhão*;

N'um *comboio* de dez vagões, *mil milhões* ou um *billião*.

Podiamos caminhar assim tão longe, quanto quizessemos; mas o numero a que chegámos: um billião, é bastante grande para satisfazer a todas as exigencias do uso corrente. Para fazermos uma ideia da grandeza d'esse numero, basta dizer que, se collocassemos encostados uns aos outros, topo a topo, um billião de phosphoros de pau ordinarios, o seu comprimento total excederia sensivelmente a circumferencia da terra. Se pretendessemos contar, um por um, um billião de phosphoros, suppondo que gastavamos um segundo com cada um e que nos occupavamos n'esta pequena contagem durante dez horas por dia, seriam precisos mais de setenta

e seis annos ; tarefa esta algo demorada, não muito divertida e fracamente instructiva.

Se agora quizermos contar um grande monte de palitos, começamos por agrupal-os em mólhos de dez, collocando em seguida, á direita, os palitos que subejarem, depois de feitos todos os mólhos : sejam *trez* palitos. Depois, formamos feixes com os mólhos, reunindo-os aos dez ; supponhamos que nos sobejaram *oito* mólhos ; collocamol-os á esquerda dos *trez* palitos e contamos os feixes aos dez e dez, para obtermos caixas. Sobejaram-nos *cinco* feixes, que collocamos á esquerda dos *oito* mólhos, e, contando as caixas, vemos serem *seis* ; collocamol-as á esquerda dos *cinco* feixes e temos, assim, o numero total de palitos :

seis caixas, *cinco* feixes, *oito* mólhos, *trez* palitos.

ou

seis mil quinhentos e oitenta e *trez* palitos.

Unicamente com os mólhos e os feixes, podemos contar e formar todos os numeros até mil, tendo sempre presente que

	feixe	mólho	palito
significa :			
	(cem	dez	um) palitos

Se no numero, que queremos escrever, não houver palitos isolados, ou mólhos, nenhum embaraço isso nos acarreta. Por exemplo :

oito feixes seis mólhos

comprehendem oitecentos e sessenta palitos,

e cinco feixes *trez* palitos

comprehendem quinhentos e *tres* palitos.

Devemos mandar formar d'este modo muitos numeros inferiores a mil e fazer muitas adições e subtracções, tal qual como indicámos precedentemente, estendendo, porém, o processo até aos feixes, em vez de nos limitarmos aos mólhos.

E' bom fazer notar que deparamos diferentes vezes com os mesmos numeros dez e cem, ou dezena e centena. Assim :

palito	}	um
mólho		uma dezena
feixe		uma centena
caixa	} querem dizer	um mil ou milhar
pacote		uma dezena de milhar
condeça		uma centena de milhar
caixote	}	um milhão
carreta		uma dezena de milhão
vagão		uma centena de milhão

Um numero, que comprehende milhares ou milhões, contar-se-ha, pois, como se contam simples palitos de um até mil. Assim :

trez vagões	duas carretas	sete caixotes
uma condeça		nove caixas
quatro feixes	cinco mólhos	

comprehendem um numero de palitos, que exprimimos d'est'arte :

trescentos e vinte sete milhões	}	palitos.
cento e nove mil		
quatrocentos e cinquenta		

Podemos mandar contar assim alguns numeros, mas sem insistir, por agóra, em numeros muito grandes ; restringir-nos-hemos aos mólhos e aos feixes, ou, quando muito, ás caixas.

Em tudo o que precede, tivemos sempre o cuidado de collocar os palitos (unidades) á direita, os mólhos (dezenas) á esquerda d'elles, os feixes (centenas) á esquerda dos mólhos, e assim por diante. Devemos notar que, em rigor, isto é inutil, mas é mais commodo, e que é bom observar sempre esta disposição, porquanto a contagem se faz assim em perfeita ordem. Mais tarde, a creança, tendo adquirido este habito, achel-o-ha natural, quando chegar o momento, em que se torna indispensavel para o calculo.

Para representar por meio de palitos todos os numeros de que temos fallado, e de que é bom fallar para fixar o espirito da creança, torna-se necessario um material um tanto empectivo e nada facil de collocar sobre uma meza ou sobre uma folha de papel, muito antes mesmo de chegarmos a empregar os vagões. Vamos ver como podemos simplificar as cousas e mostrar ao novel mathematico — que ainda não sabe ler, nem escrever, correntemente — que está perfeitamente nos casos de manejar com os seus dedinhos os numeros enormes, de que nos occupamos.

9 — Os tentos de côr

Vermo-nos já tão embaraçados com os nossos mólhos e feixes, quando temos que contar apenas um milhar de phosphoros, é deveras desagradavel. Como já sabemos que os numeros se applicam a qualquer objecto, seja elle qual fôr, substituamos os nossos phosphoros por tentos brancos, o que em nada altera as nossas contas, nem a maneira de as fazer. Substituamos, depois, os nossos mólhos por tentos vermelhos, que são de mais facil manuseamento; é claro que, sempre que nos seja preciso, podemos substituir um tento vermelho por dez tentos brancos. Continuemos: na casa dos feixes, colloquemos tentos côr de laranja; na das caixas tentos amarellos; na dos pacotes, tentos verdes; na das condeças tentos azues; na dos caixotes, tentos indigos; na das carretas, tentos violetas; na dos

vagões, tentos pretos; finalmente, na dos comboios, tentos alongados e brancos.

Os objectos e os numeros correspondem-se, pois, da seguinte fórma:

Phosphoros	Comboios, Vagões, Carretas, Caixotes, Condeças, Pacotes, Caixas, Feixes, Mólhos, Phosphoros.
Tentos	Alongados, Pretos, Violetas, Indigos, Azues, Verdes, Amarellos, Côr de laranja, Vermelhos, Brancos.
Numeros	Biliões, Centenas de milhão, Dezenas de milhão, Milhões, Centenas de milhar, Dezenas de milhar, Milhares, Centenas, Dezenas, Unidades.

Nada nos impede, pois, de escrever todos os numeros que quizermos, até um billião ou ainda além, com os nossos tentos, sem termos que recorrer aos caixotes, aos vagões e aos comboios; egualmente podemos, se isso nos interessar, fazer adições e subtracções. E' mister, porém, ter sempre bem presente que um tento vermelho vale dez brancos; um tento côr de laranja, dez vermelhos, e assim por diante.

Parece, á primeira vista, que em vez de tentos brancos poderíamos empregar moedas de cinco réis, depois substituir os tentos vermelhos por moedas de cincoenta réis e continuar assim até final; mas, isso tornar-se-hia incommodo e embaraçoso, e era necessario possuir uma bella *fortunasinha*, porquanto para representar os biliões era forçoso servirmo-nos de moedas de cinco mil contos. A Casa da Moeda não cunha dinheiro de tal typo, que seria pouco maneavel; e, decedidamente, é melhor contentarmo-nos com o tento branco alongado para representar o billião, o que de resto, é mais economico.

Como fizemos acima, collocaremos sempre os nossos tentos cuidadosamente ordenados, a começar da direita :

Alongado	Preto	Violeta	Indigo	Azul	Verde	Amarello	Côr de laranja	Vermelho	Branco

e, pela simples inspecção de cada casa, sabemos qual a côr que ella deve alojar, segundo o logar que occupa, a partir da direita.

10 — Os algarismos

Sabemos já escrever todos os numeros, pelo menos até aos billhões — e facil seria ir mais além —, com os nossos tentos redondos de differentes côres e os brancos alongados. Para isso, basta-nos collocar em cada uma das casas destinadas aos tentos brancos, vermelhos, etc., ou ás unidades, dezenas, etc., um numero de tentos sempre menor do que dez.

Se houvesse um meio, que evitasse termos que contar todas as vezes esses tentos, seria muito mais commodo. Ora n'esta altura, o nosso discipulo já sabe escrever alguma cousa ; podemos, pois, exercital-o a traçar caracteres, que representem os nove primeiros numeros de que temos necessidade, caractéres que se denominam *algarismos*.

São elles :


um dois trez quatro cinco seis sete oito nove
1 2 3 4 5 6 7 8 9










Quer com o lapis, quer com a penna, devemos habituar a creança a escrevel-os muito eguaes, sem floreados, d'um só traço, excepto o 4 e o 5, que exigem dois, servindo no começo d'uma ardosia com pauta, ou de papel pautado, para

que os algarismos tenham todos a mesma altura, o que, de futuro, é da maxima importancia na pratica do calculo.

Eis o typo que, em principio, devemos adoptar :

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Como méra curiosidade, faremos notar que todos estes algarismos, no dizer d'alguns auctores antigos, tiveram a sua origem na figura , como abaixo se vê, o que, em boa verdade, não está averiguado.

        
1 2 3 4 5 6 7 8 9

O que importa é fazer representar os numeros de palitos por tentos, os de tentos por algarismos, tendo o cuidado de não nos servirmos de numeros muito grandes, sobretudo no começo. Devemos notar que não temos necessidade de escrever os nossos algarismos com côres differentes, porquanto o logar que elles occupam facilmente nos permite saber se representam simples unidades, dezenas, centenas, etc., ou tentos brancos, vermelhos, côr de laranja, etc., ou ainda palitos, mólhos, feixes, etc.

Mas, aqui, temos uma observação importante a fazer. Ainda agóra, quando na representação d'um numero não tinhamos que empregar tentos d'uma dada côr, não collocavamos nada na respectiva casa. Como agóra não temos côres a distinguir — porquanto o logar occupado por cada um dos algarismos, que constitem o numero, diz-nos, por si só, qual a ordem da casa a que esse algarismo pertence —, se não collocamos nada, confundimos tudo, porque deviamos deixar um espaço em branco exactamente igual á largura d'um algarismo, e não somos tão habéis que escrevamos sempre com essa regularidade. Além d'isso, se a ausencia d'algarismos se dá nas unidades, como podemos saber o que significa o ultimo algarismo da direita ? Para evi-

tar todas estas difficuldades, colloca-se nas casas não occupadas, um character redondo, 0, denominado *zéro*¹, que não tem valor algum, mas que occupa a casa. E' um bom e modesto servo, que guarda a casa e que nos diz : «Aqui não está ninguém ; nada valho, sou cousa nenhuma ; mas, prohibo que se entre.»

Podemos, desde já — multiplicando e variando muito os exercicios — mandar escrever grande quantidade de numeros, mandar ler muitos numeros escriptos, empregando a miude o *zéro*. Se tivermos mais de um alumno, podemos collocar-os em competencia entre si, estimular-lhes a emulação, leval-os a ler e a escrever cada vez mais rapida e correctamente, e declarar-lhes, por fim, que já estão conhecedores da *numeração escripta*.

Chegados a este ponto, é conveniente voltarmos aos exemplos d'addições e subtracções precedentemente feitas com palitos ou tentos, servindo-nos agora dos algarismos. Temos, porém que fazer algumas observações uteis, muito uteis mesmo, que anteriormente não tinham cabimento. Uma d'ellas, concernente á addição, consiste em habituar o alumno a fallar o menos possivel, a nunca dizer : «Escrevo tal algarismo e vae tal numero.»

Para nos fazermos comprehender, basta o exemplo d'addição aqui junto, que se deve traduzir em linguagem fallada, da seguinte fórma : 7 e 4 : dez-e-um, e 8 : dezanove, e 9 : vinte e oito, e 4 : trinta e dois. Escreve-se, e, sem dizer, nada ; depois diz-se : vão 3, e 8 : dez-e-um, e 4 : dez-e-cinco, e 6 : vinte e um, e 2 : vinte e trez (escreve-se 3). Vão 2, e 9 : dez-e-um, e 5 : dezeseis, e 2 : dezoito (escreve-se 8). Vae 1, e 3 : quatro, e 6 : dez : e 2 : dez-e-dois. Escreve-se, 2, depois 1 á sua esquerda, e lê-se o total : dez-e-dois mil oitocentos e trinta e dois.

¹ Ignora-se quem foi o inventor do *zéro* ; mas, esta ideia, verdadeiramente genial, parece ser d'origem hindu.

Uma segunda observação diz respeito á pratica da subtracção, quando no numero maior se encontra, n'uma dada casa, um algarismo menor do que aquelle que se lê por baixo d'elle. Tomemos o exemplo do n.º 7 ; de 52, temos que tirar 18,

$$\begin{array}{r} 52 \\ 18 \\ \hline 34 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ 1 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ 8 \\ \hline 4 \end{array}$$

O que fizemos com os nossos palitos fica assim traduzido em algarismos. Mas, não se deve escrever nada mais do que 52 e 18, antes do resultado da operação ; pôde, porém, succeder que nos esqueçamos de que nos appossámos de uma dezena do numero de cima e que, portanto, ficaram apenas 4 em vez de 5. Deve-se, então, proceder d'outro modo, tendo em vista que : tirar 1 de 4, é o mesmo que tirar 2 de 5. Dir-se-ha, pois : 8, de dez-e-dois : 4 (escreve-se 4) ; vae 1, e 1 : 2, de 5 : 3. Adquire-se assim o habito de transportar 1, sempre que previamente se tenha ajuntado 10 ao algarismo de cima.

Devemos fazer persistentemente muitos exercicios d'addição e de subtracção. A creança interessar-se-ha por elles ; mas, não tentemos demonstrar-lhe seja o que fôr. Se algumas vezes ella se mostrar embaraçada, recorramos aos seus tentos ou aos seus palitos ; procuremos apenas ensinar-lhe a pratica do calculo e não forçal-a a apprender palavras incomprehensíveis. Se ao seu espirito occorrerem observações e se ellas nol-as communicar, escutemol-a com muita attenção. Não tenhamos receio de voltar atraz de tempos a tempos, afim de a habituar a assimilar os seus numeros, escriptos em algarismos, com as collecções de palitos, de tentos ou de quaesquer outros objectos. E, primeiro que tudo, não prolonguemos as lições ; não deixemos afrouxar o interesse e sobrevir a fadiga : é este o mais terrivel flagello do ensino.

Se nos parecer conveniente, podemos d'óra avante, embora não haja pressa alguma n'isso, iniciar o alumno no

$$\begin{array}{r} 3087 \\ 7944 \\ 560 \\ 208 \\ 29 \\ 2004 \\ 2004 \\ \hline 12852 \end{array}$$

emprego dos nomes vulgares dos numeros 11, 12, 13, 14 e 15 (onze, doze, treze, quatorze e quinze).

11 — Os palitos topo a topo

Retomemos os palitos, de que já nos temos servido tantas vezes, e supponhamos que temos, por exemplo trez lotes respectivamente de 5, 3 e 4 palitos. Se disposermos todos os palitos em seguida uns aos outros e na mesma direcção, o comprimento da fileira assim formada será de 12 palitos, isto é: dará a somma dos numeros representados pelos trez lotes.

Chegar-se-hia ao mesmo resultado, substituindo os palitos do primeiro lote por uma haste do comprimento de 5 palitos; os do segundo lote, por uma haste do comprimento de 3 palitos, e os do terceiro, por uma haste, cujo comprimento seria o de 4 palitos.

Se, em vez d'estes numeros muito pequenos, tomassemos outros maiores, e se, em lugar de trez numeros, tomassemos tantos quantos nos aprouvesse, procederíamos da mesma forma, repetiríamos tudo o que acabamos de dizer. As hastes seriam mais compridas; haveria mais de trez hastes; eis tudo.

Verificamos, assim, que um numero qualquer pôde ser representado por uma haste de conveniente comprimento, e que, para fazer a somma de varios numeros, temos apenas que collocar topo a topo, umas em seguida ás outras, as hastes que os representam. O comprimento d'esta fileira de hastes é a somma que se procura.

12 — A linha recta

Nas operações indicadas, as hastes, de que acabamos de fallar, devem sempre ser collocadas *em linha recta*, umas em seguida ás outras. O que é, pois, uma *linha recta*? O traço deixado sobre o papel por um lapis bem aparado, deslizando ao longo d'uma regua muito direita, ou um fio

extremamente fino — um cabello, por exemplo — tendido entre dois supportes, dão-nos a ideia do que seja uma linha recta. Esta noção geral basta-nos; vemos claramente que, se, por exemplo, a regua fôsse mais comprida e a folha de papel maior, podíamos prolongar o traçado da nossa linha recta, quer para um lado, quer para o outro, e, como nunca ha razão para se parar, comprehendemos que a linha recta é, como se diz, uma *figura indefinida*. Nunca nos servimos d'ella senão até ao ponto ou limite, de que carecemos; mas, este ponto ou limite, pôde ser tão afastado quanto nos convenha.

Se tomarmos uma recta (fig. 6) e se sobre ella marcarmos um ponto A e um ponto B, a porção de recta AB compre-

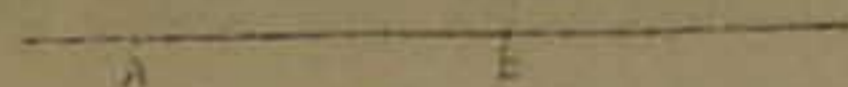


Fig. 6

hendida entre estes dois pontos, é o que se chama um *segmento de recta*.

As hastes, de que nos servimos ha pouco, applicam-se pois sobre segmentos de recta, e o comprimento d'estas hastes é o mesmo que o dos segmentos sobre que ellas se applicam.

Assim (fig. 7), para voltarmos ao exemplo do numero pre-

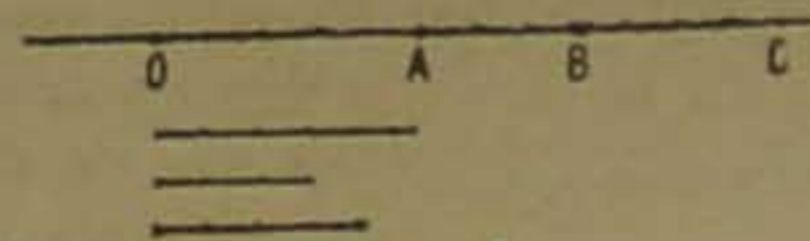


Fig. 7

cedente, tomemos uma linha recta sobre a qual marcamos, pouco importa onde, um ponto O; a partir d'este ponto, marquemos um segmento OA, do comprimento da nossa 1.^a haste: 5 palitos; a partir de A, marquemos um segmento AB, tendo o comprimento da 2.^a haste: 3 palitos; por ultimo, a partir de B, um outro BC, cujo comprimento é igual ao da 3.^a haste: 4 palitos. O segmento OC tem de compri-

mento 12 palitos (somma de 5, 3 e 4). Vêmos, pois, que o processo é sempre o mesmo, quer se adicionem números, hastes ou segmentos de recta: a addição faz-se collocando as hastes ou os segmentos, topo a topo, em seguida uns aos outros.

Esta operação deve necessariamente fazer-se collocando os segmentos sempre n'um mesmo sentido; assentemos que seja da esquerda para a direita, invariavelmente.

Sobre figura 7, podemos, assim, fazer sommas, que podem ir tão longe quanto quizermos, para a direita de O; mas, nunca para a sua esquerda.

13 — As differenças por meio de palitos

Não é mais difficil achar uma differença do que uma somma, servindo-nos dos nossos palitos. Supponhamos, por exemplo, que se trata de tirar 4 de 11. Collocamos 11 palitos, topo a topo, em linha recta; depois, começando pela extremidade da direita d'esta fileira, tiramos 4 palitos; ficamos uma fileira de 7 palitos; 7 é a differença entre 11 e 4.

Se em vez de palitos empregarmos, de começo, uma haste do comprimento de 11 palitos, é obvio que se torna necessario cortar-lhe um pedaço com o comprimento de 4 para termos a differença. Existe, porém, um outro modo de

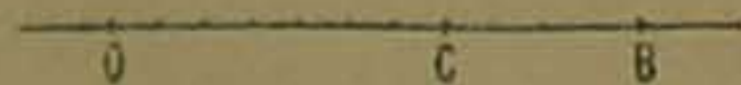


Fig. 8

resolver o problema, que consiste em substituir as hastes por segmentos, como passamos a mostrar. Sobre uma recta (fig. 8, marquemos, a partir do ponto O, um segmento OB, do comprimento de 11 palitos. A partir de B, marquemos um segmento do comprimento de 4 palitos; mas, em vez de o traçarmos da esquerda para a direita, marquemos-o ao contrario da direita para a esquerda, em BC. O segmento OC representa, na sua extensão, a differença 7.

Podemos resumir o que acima fica exposto dizendo que:

para sommar differentes segmentos, devemos marcal-os um logo em seguida aos outros, *no mesmo sentido*, e para abater um segmento d'um outro, devemos marcal-o logo em seguida a este, mas *em sentido contrario*.

Todas estas cousas são, de resto, não só faceis, mas evidentes; basta variar um pouco os exemplos para que a creança se interesse por ellas, e não nos devemos arreçar de a fazer manusear o mais possivel os palitos e as hastes (muito faceis de arranjar) e reproduzir as suas operações sobre a ardosia ou sobre o papel.

O nosso discipulosinho vae penetrar agóra nas regiões da «alta sciencia». Se elle se envaidecer com isso, calmemos e refreemos essa manifestação, lembrando-lhe, por um lado que a Algebra é uma das partes mais faceis da sciencia mathematica, e, por outro lado, que presentemente elle nada sabe, não apprende nada, senão umas brincadeiras ou passatempos, que lhe virão a aproveitar mais tarde, pela lembrança que d'ellas guardar.

14 — Entremos na Algebra

Até agóra, apprendemos a fazer addições, dando sommas, e subtracções, dando differenças. Por exemplo: a somma de 8, de 5 e de 14, é 27. Convencionou-se um signal +, que representa a addição e se denomina *mais*, e um simbolo =, que se denomina *igual a*. O exemplo, que acabamos de citar, póde, pois, escrever-se

$$8 + 5 + 14 = 27$$

e ler-se: 8 mais 5 mais 14, igual a 27.

Da mesma sorte, para a subtracção, servimo-nos d'um signal —, que se denomina *menos*; e se escrevermos

$$7 - 5 = 2,$$

leremos: 7 menos 5, igual a 2, o que quer dizer que, tirando 5 de 7, obtemos 2, como differença.

Todas as operações d'esta natureza podem traduzir-se por hastes ou segmentos, como vimos precedentemente. Assim, olhando para a Fig. 7, vemos que ella significa

$$5 + 3 + 4 = 12,$$

o que ainda póde escrever-se

$$OA + AB + BC = OC.$$

A Fig. 8 significa

$$11 - 4 = 7$$

ou ainda

$$OB - CB = OC.$$

Podemos recrear-nos a traduzir, sob estas differentes fórmas, quantas operações quizermos.

Compreende-se facilmente que em logar de 8, 5, 14, ou de 5, 3, 4, nos exemplos precedentes, podemos tomar quaesquer outros numeros. Se os denominarmos a , b , c , quando escrevermos

$$a + b + c = s$$

exprimimos sempre a somma de trez numeros; somma que é 27 no primeiro exemplo, 12 no segundo.

Da mesma fórma

$$a - b = r$$

exprime que a differença, que se obtem tirando b de a , é igual a r . Por exemplo: na Fig. 8, $a = 11$, $b = 4$ e $r = 7$.

E' de grande commodidade, muitas vezes, indicar as operações assim por signaes e substituir os numeros por letras. E' bom habituarmo-nos cedo a esta maneira de es-

crever, que é de grande vantagem para o futuro e evita muito trabalho. Precisamos tambem saber o que significa

$$() + () \text{ ou } () - ()$$

quando escrevemos alguma cousa dentro dos parentheses. Significa, pura e simplesmente, que se deve substituir cada expressão comprehendida entre parentheses pelo seu resultado effectuado. Por exemplo:

$$(a - b) - (c - d) + (e - f)$$

se a, b, c, d, e, f ,
são substituidos por 10, 2, 9, 6, 7, 5,
quer dizer $(10 - 2) - (9 - 6) + (7 - 5)$
ou $8 - 3 + 2$, isto é: 7.

Todas estas fórmas de escrever são, ás vezes, chamadas *algebricas*. Mas, as palavras pouca importancia teem; o que importa são as cousas, e as paginas, que seguem, vão dar-nos a conhecer cousas novas.

Quando estamos a sommar numeros, nada impede que continuemos a operação indefinidamente; nada nos obriga a parar em dada altura. Sempre que tivermos varios lotes de feijões, podemos reunil-os n'um só. Por outras palavras: a addição é sempre possivel, e podemos traduzil-a em algarismos, em tentos, em phosphoros, em palitos, em hastes, em segmentos de recta, como melhor nos parecer.

Outro tanto não succede com a subtracção. Se tivermos, por exemplo, um lote de 7 tentos, e quizermos tirar d'elle 10, é, como já notámos, manifestamente impossivel.

Todavia, se recorrermos ao que ficou dito mais acima e ao que a Fig. 8 traduz, vemos que, para fazer esta subtracção por meio de hastes ou segmentos de recta, temos que marcar (Fig. 9) sobre uma recta um segmento OB, do comprimento de 7 phosphoros, e,



Fig. 9

depois, a partir do topo e em sentido contrario, isto é: da direita para a esquerda, marcar um segmento, tendo por comprimento o numero a sub-

trahir. Ora, isto é sempre possível, e a Fig. 9 claramente o mostra, suppondo, como nós fizemos, que o numero a subtrahir é 10; obtemos assim — sendo o comprimento BC igual a 10 — um ponto C e temos, como resto, o segmento OC. Mas, o ponto C não está aqui, como na Fig. 8, á direita do ponto O, está á esquerda; o segmento OC é dirigido da direita para a esquerda e o seu comprimento é igual a 3.

Um numero assim, chama-se *negativo*; escreve-se -3 , e lê-se: *menos 3*. Temos, pois, o direito de escrever a nossa subtracção d'esta maneira:

$$7 - 10 = -3$$

A criação dos numeros negativos torna, portanto, possíveis todas as subtracções, que não o eram com os numeros ordinarios, que, por opposição, se chamam *numeros positivos*.

Na Fig. 10, toda a parte da recta á direita do ponto O representa o dominio dos numeros positivos, ou da Arithmetica (flecha 1); toda a parte á esquerda (flecha 2) representa o dominio dos numeros negativos, e o conjuncto das duas flechas, comprehendendo a linha recta na sua totalidade, nos dois sentidos, representa o dominio da Algebra.

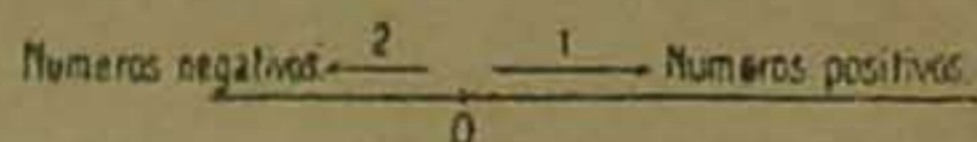


Fig. 10

Agóra, quando quizermos representar os numeros por meio de hastes ou de segmentos, temos, pois, que attentar no *sentido* d'esses segmentos, ou no *signal* do numero. Assim (Fig. 9), OB é um segmento positivo, representando o numero 7, ou $+7$; OC é um segmento negativo, representando o numero -3 , negativo tambem.

Para não nos enganarmos, somos obrigados a considerar n'um segmento os seus dois extremos, dos quaes um se denomina *origem* e o outro *extremidade* do segmento; o *sentido* do segmento é sempre o que vae da origem para a extremidade. Quando escrevemos: segmento AB, queremos sempre dizer que A é a origem e B a extremidade.

Isto obriga-nos a modificar um pouco, e d'uma maneira facil, o nosso material de palitos. Basta corar ligeiramente de preto um dos seus dois topos, mergulhando-o, por exemplo, em tinta da China, substancia corante absolutamente inoffensiva; convencionar-se-ha que o topo preto representa sempre a extremidade. De sorte que, quando collocamos trez palitos em fileira, com o topo preto para a direita, representamos assim o numero $+3$; quando dispomos em fileira dois d'elles com o topo preto para a esquerda, representamos o numero -2 ; e assim por deante.

Dir-se-ha, pois, que, para addicionar um numero a outro, se collocam sempre topo a topo, no sentido conveniente, os segmentos que os representam. Por exemplo: para sommar 11 e -4 , toma-se um segmento OB de comprimento 11, dirigido da esquerda para a direita, e a seguir um segmento BC de comprimento 4, dirigido da direita para a esquerda. Ora (Fig. 8), foi precisamente o que fizemos para obter a differença $11 - 4$. Póde-se portanto escrever $11 + (-4) = 11 - 4 = 7$, e as subtracções reduzem-se assim a addições.

Os exercicios com numeros negativos podem variar-se tanto quanto quizermos e são extremamente faceis com os nossos palitos de extremidade preta. Nada impede que arranjemos tambem hastes do comprimento de alguns palitos e que igualmente coremos de preto um dos seus topos, para distinguir a sua extremidade. Rapidamente nos familiarisamos com esta noção tão simples, e tão necessaria, do signal ou do sentido dos numeros.

Demais, se algumas vezes os numeros negativos causam surpresa á primeira vista, basta reflectir um pouco para encontrar a sua explicação perfeitamente natural. Um numero $-$ diz-se — não póde ser menor do que nada, isto é: do que zéro. Comtudo, na linguagem corrente, dizemos todos os dias que o thermometro marcou tantos graus abaixo de zéro. Quando queremos indicar a altura d'um ponto acima do nivel do mar, comprehendemos sem a menor difficuldade que, se esse ponto estivesse no fundo do mar

estaria abaixo do seu nivel. Se, partindo de nossa casa, quizermos tomar nota da extensão do percurso que faríamos n'um determinado sentido, e se caminhar-mos em sentido contrario, sabemos perfeitamente que não podemos empregar o mesmo numero para representar duas cousas oppostas. Um homem sem fortuna alguma, mas que nada deve, não é rico; se, porém, falto de fortuna, tem dividas, podemos dizer d'elle que tem menos do que nada: a sua fortuna é negativa. Uma rolha de cortiça tem um certo peso; se a abandonarmos no ar, cae. Ponhamos essa rolha de baixo d'agua e abandonemol-a; vel-a-hemos subir: o seu peso tornou-se negativo, pelo menos na apparencia. N'uma palavra, os numeros negativos, longe de terem um character mysterioso, adaptam-se da maneira mais natural a todas as quantidades, e muitas d'estas é sabido que, pela sua propria essencia, admittem duas modalidades oppostas: quente e frio, alto e baixo, credito e debito, futuro e passado, etc. Por meio de exemplos concretos, podemos fazer penetrar no cerebro das creancinhas estas noções simples, porquanto são verdadeiramente infantis. Vel-as-hemos tomar verdadeiro interesse pelas nossas explicações, se tivermos o cuidado de as amenisar com manipulações com palitos e hastes, e isto é muito mais proveitoso para a formação do seu espirito, do que a recitação monotona de regras incomprehendidas ou de definições incomprehensíveis.

Ainda não praticaram, á laia de brincadeira, senão as primeiras operações da arithmetica: a addição e a subtracção; ainda não ha muito tempo que sabem escrever algarismos ou traçar algumas letras, e cil-as já lançadas — e nós tambem — a toda a velocidade, na *Algebra*. Se pronunciar-mos deante d'ellas esta palavra tremenda, não deixemos de lhes dizer que essa sciencia, tão util e tão bella, é relativamente moderna e que pertence a Francisco Viète¹ a gloria de ter sido o seu inventor.

¹ VIÈTE; mathematico francez, natural de Fontenay-le-Comte (1540-1603).

15 — Contar, medir e comparar

Desde o começo, que o nosso proposito constante tem sido, como se tem visto, contar e medir. Se temos deante de nós um monte de bagos de trigo e se, contando-os, verificamos que são 157, este numero, como já fizemos notar, podemos servir egualmente para representar uma collecção de tentos, de phosphoros, d'arvores, de carneiros ou de qualquer outra cousa. Se, para determinar um comprimento, collocamos topo a topo uma porção de palitos, todos eguaes entre si, e se empregamos 157 para medir esse comprimento, dizemos que ella é de 157 palitos. Em todos estes differentes casos, nada podiamos avaliar, se não possuíssemos a noção do que seja um bago de trigo, um tento, uma arvore, um carneiro, um palito.

Um numero só tem razão de ser pela comparação que d'elle fazemos com o objecto unico — (bago de trigo, tento, etc.) — sem o qual não o podemos formar; este objecto unico chama-se *unidade*. Tal comparação é o que se denomina uma *relação*, e esta ideia de relação leva-nos a dizer que um numero é simplesmente a relação entre a collecção e a unidade.

E' absolutamente necessario reter bem esta noção, porquanto a unidade não é sempre a mesma. Assim, depois de termos formado *mólhos* de palitos, tomemos uma porção d'elles e contemol-os; vemos que são sete. Sete é, pois, a relação entre a nossa collecção de mólhos e um mólho, que é a unidade.

Espalhemos agora os nossos palitos, desmanchando previamente os mólhos, e contemol-os; o palito é que passa a ser a unidade. Contámos setenta; este numero é a relação entre a mesma collecção e um palito.

D'egual modo, podemos tomar trez feixes de palitos; se fizermos a contagem por mólhos, acharemos trinta mólhos; se por palitos, trezentos.

estaria abaixo do seu nivel. Se, partindo de nossa casa, quizermos tomar nota da extensão do percurso que faríamos n'um determinado sentido, e se caminhar-mos em sentido contrario, sabemos perfeitamente que não podemos empregar o mesmo numero para representar duas cousas oppostas. Um homem sem fortuna alguma, mas que nada deve, não é rico; se, porém, falto de fortuna, tem dividas, podemos dizer d'elle que tem menos do que nada: a sua fortuna é negativa. Uma rolha de cortiça tem um certo peso; se a abandonarmos no ar, cae. Ponhamos essa rolha de baixo d'agua e abandonemol-a; vel-a-hemos subir: o seu peso tornou-se negativo, pelo menos na apparencia. N'uma palavra, os numeros negativos, longe de terem um character mysterioso, adaptam-se da maneira mais natural a todas as quantidades, e muitas d'estas é sabido que, pela sua propria essencia, admittem duas modalidades oppostas: quente e frio, alto e baixo, credito e debito, futuro e passado, etc. Por meio de exemplos concretos, podemos fazer penetrar no cerebro das creancinhas estas noções simples, porquanto são verdadeiramente infantis. Vel-as-hemos tomar verdadeiro interesse pelas nossas explicações, se tivermos o cuidado de as amenisar com manipulações com palitos e hastes, e isto é muito mais proveitoso para a formação do seu espirito, do que a recitação monotona de regras incomprehendidas ou de definições incomprehensíveis.

Ainda não praticaram, á laia de brincadeira, senão as primeiras operações da arithmetica: a addição e a subtracção; ainda não ha muito tempo que sabem escrever algarismos ou traçar algumas letras, e cil-as já lançadas — e nós tambem — a toda a velocidade, na *Algebra*. Se pronunciar-mos deante d'ellas esta palavra tremenda, não deixemos de lhes dizer que essa sciencia, tão util e tão bella, é relativamente moderna e que pertence a Francisco Viète¹ a gloria de ter sido o seu inventor.

¹ VIÈTE; mathematico francez, natural de Fontenay-le-Comte (1540-1603).

15 — Contar, medir e comparar

Desde o começo, que o nosso proposito constante tem sido, como se tem visto, contar e medir. Se temos deante de nós um monte de bagos de trigo e se, contando-os, verificamos que são 157, este numero, como já fizemos notar, podemos servir egualmente para representar uma collecção de tentos, de phosphoros, d'arvores, de carneiros ou de qualquer outra cousa. Se, para determinar um comprimento, collocamos topo a topo uma porção de palitos, todos eguaes entre si, e se empregamos 157 para medir esse comprimento, dizemos que ella é de 157 palitos. Em todos estes differentes casos, nada podiamos avaliar, se não possuíssemos a noção do que seja um bago de trigo, um tento, uma arvore, um carneiro, um palito.

Um numero só tem razão de ser pela comparação que d'elle fazemos com o objecto unico — (bago de trigo, tento, etc.) — sem o qual não o podemos formar; este objecto unico chama-se *unidade*. Tal comparação é o que se denomina uma *relação*, e esta ideia de relação leva-nos a dizer que um numero é simplesmente a relação entre a collecção e a unidade.

E' absolutamente necessario reter bem esta noção, porquanto a unidade não é sempre a mesma. Assim, depois de termos formado *mólhos* de palitos, tomemos uma porção d'elles e contemol-os; vemos que são sete. Sete é, pois, a relação entre a nossa collecção de mólhos e um mólho, que é a unidade.

Espalhemos agora os nossos palitos, desmanchando previamente os mólhos, e contemol-os; o palito é que passa a ser a unidade. Contámos setenta; este numero é a relação entre a mesma collecção e um palito.

D'egual modo, podemos tomar trez feixes de palitos; se fizermos a contagem por mólhos, acharemos trinta mólhos; se por palitos, trezentos.

Trez é a relação do lote total de palitos para um feixe; trinta a relação do mesmo lote para um mólho, e trezentos a relação para um palito.

Exemplos analogos podemos apresentar tantos quantos quizermos, variando-os até ao infinito, por fórma que o alumno se familiarise intimamente com esta noção de relação, que é a base de todas as contas e de todas as medições, e que, apesar d'isso, é atirada no ensino classico para o fim da Arithmetica, não sabemos porque aberração. Não é possível contar dois feijões, sem ter a noção da relação de dois para um; de medir um comprimento de trez metros, sem comparar esse comprimento com a de um unico metro, e assim por deante.

E' este o momento de *mostrar* ao alumno — sem nenhuma explicação theorica, sem nenhuma definição, sem recorrer de nenhum modo á sua memoria — o material mais geralmente usado do systema metrico, que tivermos á mão: metros, litros, moedas, pesos, etc. Exercital-o-hemos a empregal-o, a servir-se d'elle para medir e contar, e assim a ideia de relação incrustar-se-ha no seu espirito, ficará indissoluvelmente associada á de numero, o que é essencial para uma boa comprehensão, no dia em que, de futuro, elle passar do que tem sido apenas um entretenimento, para o estudo serio. E este estudo, póde então tornar-se realmente interessante e recreativo, em vez de ter o carater d'uma penosa maçada, para não dizer d'uma tortura.

16 — A taboa de multiplicação

Vamos agora aprender a formar um quadrosinho, que nos ha de ser muito util para tudo o que segue, e cuja construcção, por si só, constitue um bom exercicio. Este quadro, sob a fórma porque o apresentamos, é geralmente denominado taboa de Pythagoras¹, quer tenha sido inven-

¹ PYTHAGORAS, philosopho grego natural de Samos, (VI seculo A. C.)

tado, ou não, por esse grande homem, o que é ponto litigioso; em todo o caso, isto prova que não é cousa nova.

Para formar a taboa de multiplicação, começamos por escrever, sobre uma folha de papel quadriculado, os 9 primeiros numeros em 9 casas seguidas:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Depois, tomando o primeiro algarismo 1, adicionamol-o a si proprio, o que faz 2, que escrevemos por baixo d'elle em seguida, adicionamos 1 a 2, o que faz 3, e assim por deante, até concluirmos a primeira columna da fig. 11.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Fig. 11

Procedemos do mesmo modo para obter as outras columnas; mas, o que é importante é conseguirmos escrever só os resultados e nada mais. Por exemplo: para a columna que começa por 7, dizemos: 7 e 7, 14; e 7, 21; e 7, 28; e 7, 35; e 7, 42; e 7, 49; e 7, 56; e 7, 63. E escrevemos successivamente 14, 21, 28, ... 63, na columna que começa por 7.

Como se vê, basta saber bem a taboa d'addição para construir rapidamente este quadro. Depois de completamente construido, notamos que as linhas e as columnas são perfeitamente eguaes. Assim, a linha, que começa por 3, comprehende, como a columna que começa pelo mesmo algarismo, os numeros 3, 6, 9, ... 27.

E' absolutamente indispensavel ter de memoria este quadro, e a melhor maneira de o conseguir é não querer apprendel-o de cór. Apprendemol-o construindo-o, verificando-o examinando-o com cuidado e fazendo uso d'elle, como mais adiante veremos. Se não o temos presente ao nosso espirito, devemos reconstruil-o, o que, de resto, não é tarefa muito demorada; d'este modo, acabamos por *vêl-o* com os olhos fechados.

Podemos, é claro, continuar a taboa além de 9; mas, se a continuassemos até 20 ou 25, a sua construcção levaria naturalmente muito mais tempo, e não é indispensavel conservar de memoria uma taboa tão extensa, embora isso não deixasse de ser util.

Tem aqui cabida algumas observações sobre certas particularidades da taboa. Assim, na columna (ou linha) que

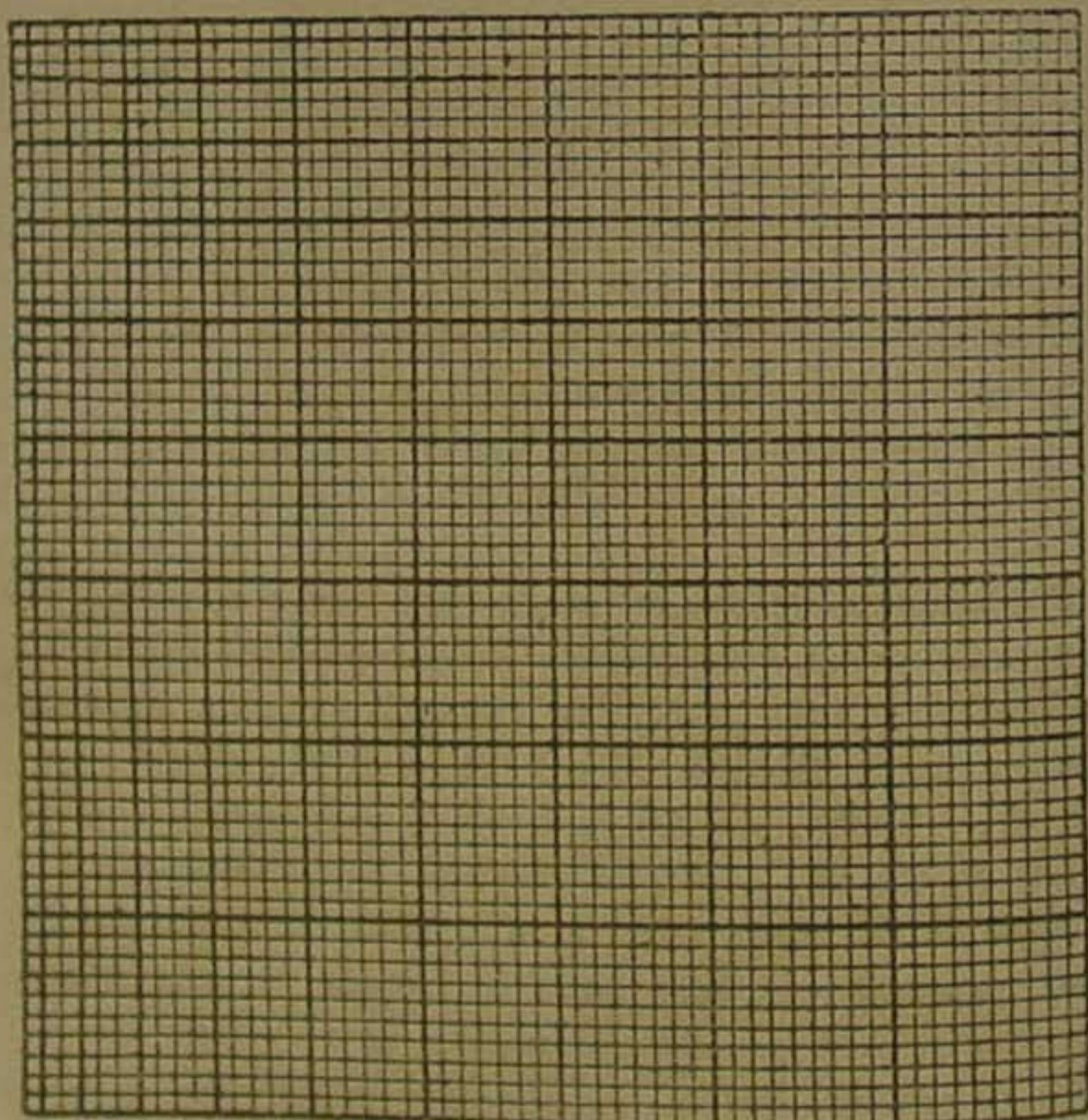


Fig. 12

começa por 5, os algarismos das unidades são alternadamente 5 e 0; na columna (ou linha) que começa por 9, os algarismos das unidades 8, 7, 6... vão diminuindo sempre de uma unidade, e os das dezenas 1, 2, 3... augmentam de 1. As explicações são faceis de achar.

Cousa muito para notar, é que podemos construir uma taboa de multiplicação sem escrever um unico algarismo. Para isso, basta termos uma folha de papel quadriculado com casas pequenas. A taboa que damos aqui vae até 10. A sua construcção consiste em contar successivamente sobre uma linha horisontal 1, 2, 3... 10 lados d'uma casa e em marcar os pontos de divisão. Em seguida, sobre uma linha vertical e tomando o mesmo ponto de partida, fazemos a mesma cousa. Cobrindo com um traço grosso as linha onde estão marcados os pontos de divisão, obtemos casas grandes, cada uma das quaes contém um numero de casas pequenas, que é precisamente o mesmo que vimos, ha pouco, na nossa taboa em algarismos. A razão d'esta identidade é simples, porquanto a taboa da fig. 12 não é mais do que a execução graphica das operações, que, na fig. 11, resultam do calculo.

17 — Os productos

Se tomarmos um lote de 7 palitos e se formarmos mais 2 lotes eguaes áquelle, podemos ter o proposito de querer saber qual é o numero total dos palitos, que os constituem. Chama-se a isto fazer a *multiplicação* de 7 por 3. O resultado, que se procura, denomina-se *producto* de 7 por 3; ao 7 chama-se *multiplicando* e ao 3, *multiplicador*. Se, em vez de misturar todos os palitos, conservassemos separados os 3 lotes, veriamos que, tomando um lote por unidade, o numero que representaria o producto seria 3, ou que a relação entre o producto e um lote seria 3; ora a relação de 3 para 1 é tambem 3.

Podemos, pois, dizer indifferentemente :

Multiplicar 7 por 3 é repetir 7, 3 vezes; é achar um numero, cuja relação para 7 seja a mesma que a de 3 para 1; Multiplicar um numero (multiplicando) por um outro

(multiplicador), é achar um terceiro (producto), que se forma repetindo o multiplicando tantas vezes quantas são as unidades do multiplicador; este producto, emfim, está para o multiplicando na mesma relação que o multiplicador para a unidade.

Isto não são formulas, que a creança deva ser obrigada a aprender; são ideias, de que precisamos compenetrar-a. Ao passo que as formulas teem uma apparencia barbara, as ideias são d'uma simplicidade primitiva, principalmente se nos dermos ao trabalho de as traduzir em bagos de trigo, palitos ou casas de papel quadriculado.

Não ha duvida que a creança depressa percebe que, para achar o producto, apenas tem que fazer uma addição; que o producto de 7 por 3 é $7 + 7 + 7$, do mesmo modo que 3 é $1 + 1 + 1$. E, como a taboa do numero precedente foi feita precisamente d'esta maneira, por isso nos dá o producto desejado 21, tomando a columna, que começa por 7 e a linha, que começa por 3, e buscando a casa de encontro, onde se lê 21.

Não nos esqueçamos de ensinar que o signal da multiplicação é \times , e que assim a phrase: «o producto de 7 por 3 é 21», se traduz por $7 \times 3 = 21$.

Em vez de 7×3 , escreve-se a miude 7.3; em vez de 7 e 3, podemos ter dois numeros quaesquer, representados por a e b . O seu producto exprime-se por $a \times b$, ou por $a.b$, ou simplesmente por ab ; escrever, por exemplo, $ab = p$, é uma maneira d'exprimir que o producto de a por b é p .

E' tambem bom saber-se, que podemos considerar productos taes como, por exemplo, $a \times b \times c \times d$, ou $abcd$. Quer isto dizer que se multiplica a por b , depois o producto obtido por c e, em seguida, o novo producto por d ; a, b, c, d , chamam-se os *factores* do producto $abcd$; podemos, assim, obter productos d'um numero qualquer de factores.

Quanto á pratica da multiplicação, devemos notar, antes de tudo, que a taboa preenche o seu fim, quando o multiplicando e o multiplicador são ambos numeros inferiores a dez. Facilmente se mostrará, depois, como se multiplica um numero por 10, 100, 1000....

Essa pratica, applicada a numerosos exemplos, conforme as regras habituaes dadas por todos os livros d'arithmetica, póde ser util, contanto que seja desacompanhada de toda e qualquer theoria. Antes, porém, não nos cançaremos de recommendar que se dê a preferencia ao *methodo musulmano*, que é quasi tão expedito como aquelle e muito mais facil de comprehender e de praticar; mas, que permanece quasi completamente desconhecido no nosso ensino, embora citado por diferentes auctores.

Vamos expol-o (fig. 13), applicando-o a este exemplo

	9	3	4	7	
8	7 2	2 4	3 2	5 6	6
5	4 5	1 5	2 0	3 5	2
2	1 8	6	8	1 4	5
	2	4	1	1	

Fig. 13

muito simples: 9347×258 . O multiplicando tem 4 algarismos e o multiplicador, 3. Sobre uma folha de papel quadriculado, tomamos 3 linhas de 4 casas cada uma; por cima d'esta figura, escrevemos os algarismos do multiplicando 9, 3, 4, 7, da esquerda para a direita; á esquerda e de baixo para cima, os do multiplicador 2, 5, 8. Depois de traçarmos as linhas pontoadas da figura, escrevemos em cada casa o producto dos dois numeros correspondentes, como se construíssemos uma taboa de multiplicação, tendo o cuidado de escrever o algarismo das dezenas do producto *por baixo* e o das unidades *por cima* da linha pontoada; por ultimo, fazemos a addição, tomando para direcção das columnas a das linhas pontoadas. Acha-se, assim, o producto 2411526. A grande vantagem d'este methodo consiste em não obrigar a fazer transportes nas multiplicações parciaes, nem a observar qualquer ordem especial. Desde que se preencham todas as casas, podemos estar certos de que nada foi esquecido.

Para o mesmo exemplo e com o mesmo methodo, indicamos (fig. 14) uma disposição levemente differente, que não obriga a fazer a addição obliquamente e é, por isso, talvez mais commoda. Desnecessaria se torna qualquer explicação, depois do que deixámos dito.

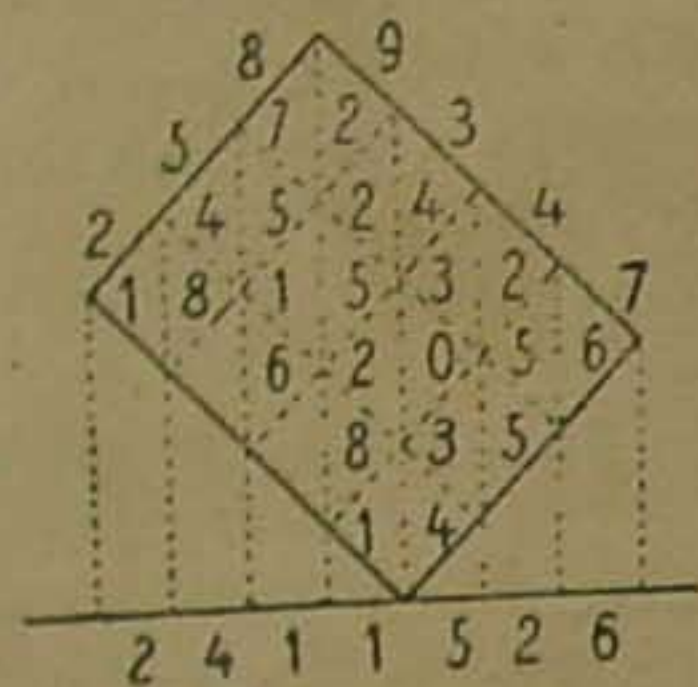


Fig. 14

Quanto á justificação d'este methodo musulmano, é ella evidente para quem conheça a theoria da multiplicação, e inutil para a creança, por agóra. Se esta fôr dotada de um espirito investigador, poderá encontrar-a por si só. O que importa é que ella possa calcular correctamente e que isso a interesse. Logo que a fadiga e o enfado se manifestem, devemos, sem tardança, passar a outra cousa.

Não deixaremos o que diz respeito á multiplicação, sem recordar que um producto

$$a \times a \times a \times \dots \times a$$

cujos factores são todos eguaes, se chama uma *potencia* de a ; que este producto se escreve a^n , sendo n o numero dos factores, e se denomina n .ª potencia de a ; que a 2.ª potencia se chama *quadrado* e a 3.ª, *cubo* (em breve veremos porquê). O numero n chama-se *expoente*.

Por exemplo: a 4.ª potencia de 2 é:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16; \text{ o expoente é } 4.$$

O cubo de 5 é:

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125; \text{ o expoente é } 3.$$

O quadrado de 7 é:

$$7 \times 7 = 7^2 = 49; \text{ o expoente é } 2.$$

18 — Operações curiosas

Ha um certo numero de resultados d'operações, que impressionam o espirito por determinadas particularidades, que chamam a nossa attenção. Teem, por isso, o grande merito de, aguçando a curiosidade, despertar o gosto pelo calculo.

Vamos dar apenas alguns exemplos, os bastantes para o fim que temos em vista.

I. — Dizei a uma creança, depois de lhe terdes entregue um sobrescripto fechado, que escreva, a seu bel prazer, um numero de 3 algarismos: seja 713; que o inverta, o que dá 317; que ache a differença, 396¹; que inverta este resultado, 693; finalmente, que faça a somma d'estes dois ultimos numeros, 1089. Feito isto, pedi-lhe que abra o sobrescripto; encontrará dentro d'elle um papel, sobre o qual d'antemão escrevestes o numero 1089. E podestes escrevel-o com toda a segurança, porque com qualquer outro numero, que não 713, chega-se ao mesmo resultado, contanto que os dois algarismos extremos sejam differentes.

II. — Se fizermos as operações $12 \times 9 + 3$; $123 \times 9 + 4$, e assim por diante até $123456789 \times 9 + 10$, obtemos os seus resultados escrevendo apenas algarismos 1.

Por outro lado, $9 \times 9 + 7$, $98 \times 9 + 6$, ... $9876543 \times 9 + 1$, dão numeros, que se escrevem sómente com algarismos 8.

III. — O producto 123456789×9 escreve-se unicamente com algarismos 1. Tomando o mesmo multiplicando 123456789 e os multiplicadores 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, obtemos ainda productos curiosos, que se escrevem todos com o mesmo algarismo repetido.

¹ Esta differença deve ter sempre tres algarismos. Se tiver apenas dois, é necessario escrever um zero na casa das centenas. Por exemplo: 716 e 617 teem por differença 099; sommando 099 e 990, achamos 1089.

IV. — Consideremos o numero 142857; se o multiplicarmos successivamente por 2, 3, 4, 5, 6, teremos :

285714, 428571, 571428, 714285, 857142,

numeros estes, que se escrevem com os mesmos algarismos que o numero dado.

Se o multiplicarmos por 7, teremos 999999.

Se o separarmos em dois, pelo meio, teremos 142 e 857; e a somma d'estes dois numeros é 999. Obtem-se o mesmo resultado tomando qualquer dos cinco productos acima escritos e separando-os em dois.

V. — Completemos este capitulo com uma indicação sobre as multiplicações por 9, por 99, por 999, etc., que se devem fazer sempre por 10, 100, 1000, etc., subtrahindo depois o multiplicando. Se este não é um numero demasiado grande, chega-se mesmo rapidamente a poder fazer mentalmente estas multiplicações.

19 — Os numeros primos

Lançando os olhos sobre uma taboa de multiplicação, vê-se que comprehende certos numeros até ao limite, que ella abrange; mas, não todos esses numeros. N'outros termos: ha numeros, que são productos, e outros, que o não são; estes chamam-se numeros *primos*; aquelles denominam-se numeros *compostos*.

Por exemplo: 2, 3, 5, 7, 29, 71, são numeros primos; 4, 6, 9, 87, 91, são numeros compostos, porquanto $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $9 = 3 \times 3$, $87 = 3 \times 29$, $91 = 7 \times 13$.

Por mais longe que avancemos na serie dos numeros, encontramos sempre numeros primos e numeros compostos. Esta distincção é capital; e, comtudo, apesar dos trabalhos dos maiores sabios, muito pouco sabemos a respeito dos numeros primos. O nosso pouco saber chega ao ponto de sermos incapazes de dizer, quando um numero

é algo grande, se é primo ou não, a menos que nos entreguemos a estimativas, que podem exigir calculos extremamente longos e difficeis. Isto nos mostra quanto a sciencia se encontra pouco adeantada no que respeita a estas questões, que parecem simples, e quanto convem sermos modestos, quando comparamos a pouca amplitude dos nossos conhecimentos com a immensidade das cousas, que ignoramos.

Contudo, desde os antigos tempos, que se conhece um meio de formar os numeros primos, até um limite tão distanciado quanto se quizer. Consiste esse meio em escrever a lista completa dos numeros, riscando depois os que são multiplos de 2, de 3, de 5, etc. Vamos fazer a sua applicação aos 150 primeiros numeros. Escrevamol-os, suprimindo o 1, por nos ser inutil:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121
122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133
134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145
146	147	148	149	150							

Partindo do 2, se percorreremos a lista caminhando de 2 em 2, encontramos os multiplos de 2, que são 4, 6, isto é: os numeros pares; não são elles, pois, numeros primos, e por isso os vamos riscando com um traço, até ao 150.

Partamos do 3, caminhando de 3 em 3, e risquemos do mesmo modo os numeros, que encontrarmos e que sejam multiplos de 3, se não estiverem já riscados.

O primeiro numero não tracejado, depois do 3, é o 5; partindo do 5, procedemos da mesma maneira, caminhando de 5 em 5. Se fizermos o mesmo para o 7, para o 11, ... veremos que, conservando apenas os numeros não tracejados, fica:

2	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149		

E' esta a lista dos numeros primos até 150.

Este processo, tão engenhoso, é conhecido pela designação de *crivo d'Eratosthenes*¹, do nome do seu inventor.

20 — Os quocientes

Depois de termos reunido diversos lotes de 7 tentos cada um, n'um unico lote contendo 56 tentos, desejamos saber quantos d'aquelles pequenos lotes foram precisos para formar o grande.

A operação, que temos que fazer para o sabermos, chama-se uma *divisão*. Póde dizer-se que ella tem por fim, dado um producto de dois factores, 56, e um dos factores, 7, achar o outro.

O producto dado, 56, chama-se *dividendo*; o factor dado, 7, chama-se *divisor*, e o resultado, que se busca, denomina-se *quociente*.

Podiamos achar o quociente fazendo simples subtracções; isto é: deduzindo o divisor do dividendo, depois o divisor do resto obtido, e assim por deante, até não ficar resto algum. Assim, subtrahindo successivamente 7 de 56, restam 49, 42, 35, 28, 21, 14, 7, e vê-se que são 8 as operações de subtracção precisas para exgotar o dividendo 56. O quociente,

¹ ERATOSTHENES, sabio alexandrino, natural de Cyrene (276-193 A. C.).

que se procura, é pois 8, o que, de resto, nos póde ser dado immediatamente pela taboa de multiplicação.

Este processo das subtracções successivas torna-se, porém, impraticavel com numeros um tanto grandes, por ser muito longo. A regra classica adoptada para fazer uma divisão, não é mais do que um meio de contar com muito maior rapidez as subtracções, que se effectuam por atacado.

Para habituar facilmente as creanças a praticarem a divisão, devemos começar invariavelmente por mandal-as formar, n'um pequeno quadro, os productos do divisor, por 2, 3... 9; evitam-se assim, em toda a sequencia da operação, as hesitações que tanto atrapalham, por vezes, os principiantes.

Vamos indicar esta pratica de operação, com o exemplo da divisão de 643734 por 273. Os productos de 273 são:

1	× 273 =	273	6	× 273 =	1638
2		546	7		1911
3		819	8		2184
4		1092	9		2457
5		1365			

Dispomos, então, a operação da maneira seguinte:

643734		273
546		2358
977		
819		
1583		
1365		
2184		
2184		
0		

No dividendo temos 643 mil; como o nosso quadrosinho nos mostra que 643 contem 2 vezes o divisor, deduzindo do

dividendo 546 mil, effectuamos d'uma só vez 2 mil subtracções. Restam 97734, que comprehende 977 centenas; 977 contem 3 vezes o divisor, e tirando 819 centenas, fazemos tambem d'uma assentada 300 subtracções. Restam 15834, contendo 1583 dezenas; 1583 comporta 15 vezes o divisor, e deduzindo 1365 dezenas, fazemos ainda 50 subtracções. Finalmente, restam 2184, que é precisamente 8 vezes o divisor. Effectuando, pois, mais 8 subtracções, temos reduzido o dividendo a zéro, e o quociente é 2358, numero total das subtracções.

A creança deve adquirir o habito de fazer as divisões d'esta maneira, sem ser necessario dar-lhe, com demasiada minucia, as explicações que precedem.

A divisão acima apresentada pode effectuar-se, porque o dividendo e o divisor foram propositadamente escolhidos; mas, se os dois numeros forem tomados ao acaso, é pouco provavel que a divisão seja possivel. Não podemos já tirar do dividendo um certo numero de vezes o divisor, por fórma que não sobeje nada. Simplesmente, se procedermos como ha pouco, deduziremos o divisor do dividendo *tantas vezes quantas fôr possivel*, e o que então fica do dividendo, é um numero menor do que o divisor. E' este numero que se denomina *resto* da divisão impossivel.

Como exemplo muito simples, supponhamos que queremos dividir 220 por 12. Reconhecemos que é impossivel, e quando tivermos subtrahido 18 vezes 12 de 220, restarão 4; segue-se que $220 - 4$, ou 216, é divisivel por 12 e que o quociente é 18. Vemos, pois, que as divisões impossiveis, as que dão um resto, podem dar logar a divisões possiveis, simplesmente pela substituição do dividendo por esse mesmo dividendo diminuido do resto.

Occupae-vos d'esta operação da divisão apenas sob o ponto de vista da pratica do calculo. As theorias são interessantes, mas só mais tarde virão utilmente a proposito; de nenhum modo tem cabida no periodo d'iniciação.

E' bom ficar sabendo que a divisão se indica pelos signaes : ou —. Assim $56 : 7$ ou $\frac{56}{7}$, exprime o quociente de

56 por 7. Póde-se, pois, escrever $56 : 7 = \frac{56}{7} = 8$. D'um mo

do geral : $\frac{a}{b} = q$ quer dizer que o quociente da divisão de a por b é o numero q .

21 — O bolo repartido ; as fracções

Supponhamos que cinco pessoas se propõem repartir igualmente entre si um bolo redondo. Cortal-o-hão em cinco pedaços perfeitamente eguaes (fig. 15), por golpes partindo do centro, e cada um d'esses pedaços — como AOB — é a parte pertencente a cada pessoa. A esta parte chama se um quinto do bolo, e representa-se AOB por $\frac{1}{5}$ de bolo.

Duas das cinco pessoas estão ausentes; mas, queremos reservar-lhes as suas partes. Pomos então de lado, por exemplo, os pedaços AOB, BOC, exactamente eguaes. Estes dois pedaços juntos dizem-se dois quintos do bolo e representam-se por $\frac{2}{5}$. Todos os numeros, taes como $\frac{2}{5}$, chamam-se *fracções*. Os numeros 2 e 5, são os dois termos; o 2, que se escreve por cima do traço, é o *numerador* e indica o numero de pedaços; o 5, por baixo do traço, é o *denominador* e indica em quantos pedaços foi repartido o bolo todo.

Se tivéssemos tomado $\frac{5}{5}$ do bolo, é claro que tomavamos todo o bolo, e se o tivéssemos dividido n'um numero qualquer de partes eguaes, para em seguida tomarmos esse mesmo numero de partes, reconstituamos igualmente o bolo; de sorte que a fracção $\frac{a}{a}$, cujos numerador e denominador são eguaes, é sempre igual a 1.

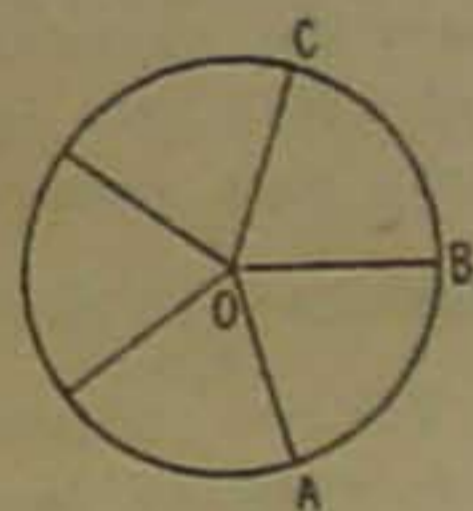


Fig. 15

No caso de serem dez — e não apenas cinco — as pessoas, que teem de repartir o bolo entre si, é necessario dividil-o em dez partes eguaes, em decimos, o que se póde fazer egualmente bem, dividindo os quintos, como AOB, em duas partes eguaes. Donde $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; e não é mais difficil veri-

ficar que, em geral, duas fracções são eguaes, quando se póde passar d'uma para a outra multiplicando os dois termos pelo mesmo numero. Este principio fundamental de toda a theoria das fracções verifica-se assim — servindo-nos de objectos concretos — com um caracter de evidencia intuitiva, e não devemos pensar em dar a demonstração.

Supponhamos agora que temos 17 bolos, todos eguaes, e que 5 pessoas querem repartil-os egualmente entre si. Ha dois meios de o conseguir. Um, consiste em dividir cada bolo em quintos e em dar a cada pessoa um quinto de cada bolo ou, ao todo, $\frac{17}{5}$. O segundo meio consiste em repartir

por todos, tanto quanto se possa, os 17 bolos inteiros; basta para isso experimentar a divisão, que é possível para 15, cabendo a cada pessoa 3 bolos. Ficam, portanto, apenas 2 bolos para repartir. Dividindo-os em quintos, cada pessoa fica com $\frac{2}{5}$, o que nos mostra que $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$.

Por este caminho, é facil iniciar a creança em todo o calculo corrente das fracções, sobre o qual nos parece inutil insistir aqui; mas, para o conseguir, é condição essencial servirmo-nos sempre de objectos concretos: bolos, maçãs, laranjas, extensões graduadas, etc. Compreenderá, assim, admiravelmente que estas novas expressões arithmeticas são numeros e que traduzem relações.

Mas, o que muito particularmente devemos dizer, e que quasi nunca se diz, é que estes numeros só se podem applicar a quantidades de sua natureza divisiveis, como as que indicámos; se, por exemplo, tivermos que resolver um problema, que implica a consideração d'um certo numero de

pessoas, a applicação dos numeros fraccionarios, em tal caso, seria um absurdo e a sua impossibilidade manifestar-se-hia no resultado.

N'outros termos: o calculo applica-se ás cousas que a elle se prestam, e são ellas em grande numero; mas, não se applica a tudo. E, maxima não menos importante, que completa aquella: é preciso reflectir sempre e recorrer ao nosso bom senso, antes de calcular.

Por exemplo, este problema, particularmente apontado por Eduardo Lucas ¹, e que póde servir de exercicio util, n'esta ordem de ideias: Um alfayate tem uma peça de panno de 16 metros; cada dia corta-lhe dois metros; ao cabo de quantos dias tem cortado toda a peça? A irreflexão, junta ao automatismo do calculo, leva-nos a responder 8, em vez de 7, que é o resultado, que o bom senso indica.

As operações sobre fracções devem ser muito variadas, pouco complicadas como calculo e tiradas o mais possível de questões concretas effectivas. E' conveniente completal-as chamando a attenção para as *fracções decimaes*, sobre a maneira como se podem escrever e sobre a parte do calculo, que lhes diz respeito.

Muitos dos bons tratados d'arithmetica podem fornecer, sobre o assumpto, as indicações necessarias. Limitamo-nos a insistir sobre a utilidade de nos servirmos das medidas de comprimento e de exemplos tirados da contagem de dinheiro.

Por ultimo, é bom notar que, se o signal da divisão e a notação das fracções são os mesmos, não é isso cousa fortuita e que possa estabelecer confusão; $\frac{15}{3}$, por exemplo, exprime egualmente bem, tanto o quociente da divisão de

¹ ED. LUCAS, mathematico francez, natural d'Amiens (1842-1891) Foi, talvez, o homem do seu tempo, que melhor conheceu a sciencia dos numeros. Viveu quasi completamente ignorado; os desgostos e as decepções contribuíram, sem duvida, para o seu fim prematuro.

15 por 3, como a fracção $\frac{15}{3}$. Vê-se isso com os objectos concretos, como é facilimo verificar.

As propriedades e o calculo das fracções tambem podem ser expostos, d'uma maneira verdadeiramente feliz, empregando o papel quadriculado. Apreciar-se-ha o processo pelas observações, que seguem e que só se patentearam ao meu espirito depois da publicação da segunda edição. Esforçar-me-hei por as indicar no menor numero de palavras possivel, desenvolvendo, porém, o meu pensamento de modo a exprimir-o com sufficiente clareza. Dirijo-me aos educadores e, se me comprehenderem bem, não terão difficuldade alguma em pôr em pratica os meios propostos, sob a fórma que melhor lhes pareça, desde que acceitem em principio a minha maneira de ver.

Representemos por um rectangulo (fig. 16 e 17) uma unidade concreta qualquer, contanto que, por sua natureza, seja divisivel.

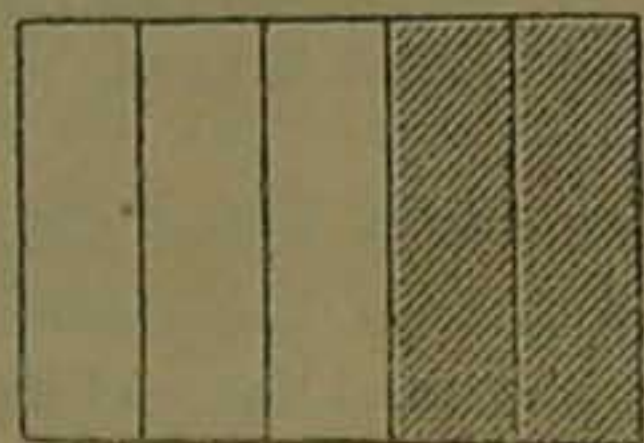


Fig. 16

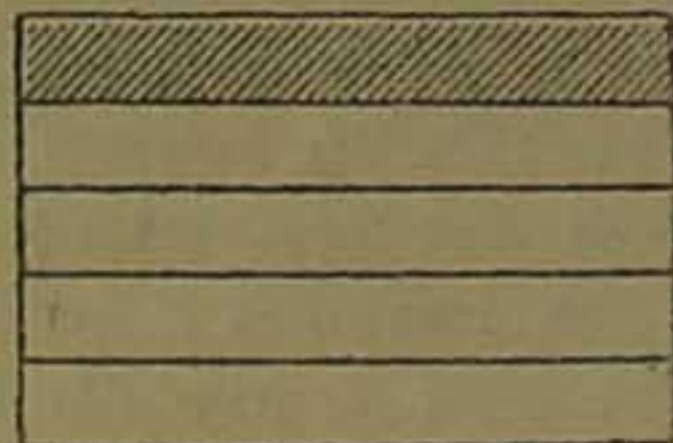


Fig. 17

Se dividirmos a base d'este rectangulo em 5 partes eguaes, podemos tambem repartil-o em 5 faixas verticaes da mesma grandeza; cada uma d'ellas é *um quinto* da unidade (fig. 16).

Se dividirmos a sua altura em 5 partes eguaes, podemos tambem repartil-o em 5 faixas horizontaes da mesma grandeza; cada uma d'ellas é igualmente *um quinto* da unidade (fig. 17).

Se dividirmos a sua base (fig. 18) em 3 partes eguaes e a sua altura em 4 partes, tambem eguaes, podemos — por

meio de traços passando pelos pontos de divisão — dividir a unidade em 12, ou 3×4 , pequenos rectangulos, cada um dos quaes é *um duodecimo* da unidade.

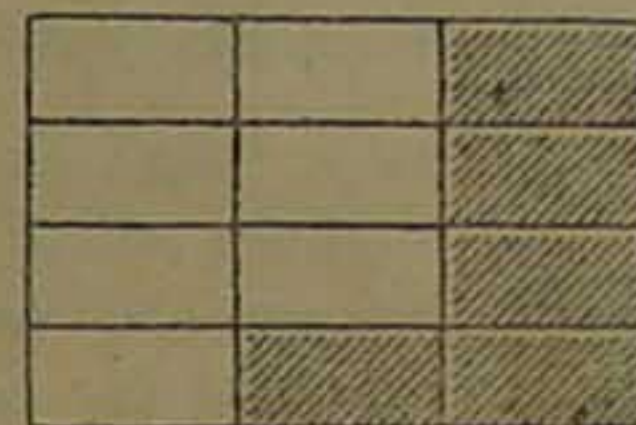


Fig. 18

Tomando um numero qualquer d'estas faixas, ou d'estes rectangulos, temos o que se chama *uma fracção*. Se o numero de faixas, ou de pequenos rectangulos, é menor do que o que constitue a unidade, temos *uma fracção propriamente dita*; se é maior, temos *uma expressão fraccionaria*. Vemos, pois, que uma fracção propriamente dita é menor do que 1, e que uma expressão fraccionaria é maior do que 1. Se tomarmos precisamente o mesmo numero de faixas, ou de rectangulos, que o dos comprehendidos na unidade, reconstituimos essa unidade; tal fracção é, por consequencia, igual a 1.

Quando empregarmos a palavra «fracção», queremos significar, d'uma maneira geral, uma fracção propriamente dita.

Se tracejarmos as faixas ou os rectangulos, que se eliminam, podemos representar uma fracção qualquer, por meio da parte da figura que permanece branca. Assim, a fig. 16 traduz a fracção trez quintos; a fig. 17, quatro quintos; a fig. 18, sete duodecimos.

O numero de rectangulos brancos (3, 4, 7, n'estes trez exemplos) chama-se *numerador*; o dos rectangulos, que constituem a unidade (5, 5, 12), diz-se *denominador*, e as trez fracções escrevem-se: $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{7}{12}$.

Principio fundamental — O valor d'uma fracção não muda

quando multiplicamos pelo mesmo numero os seus numerador e denominador.

Seja a fracção $\frac{3}{4}$ (fig. 19). Queremos demonstrar que ella é igual a $\frac{15}{20}$ ou $\frac{3 \times 5}{4 \times 5}$. A fracção $\frac{3}{4}$ está representada

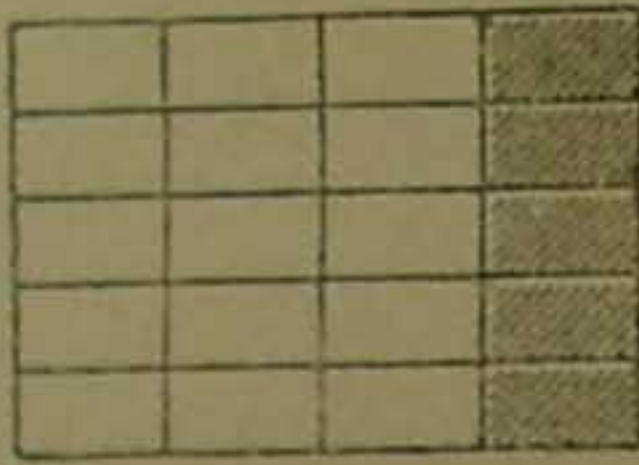


Fig. 19

pelas faixas verticaes. Dividimos a altura em 5 partes eguaes, e supomos o rectangulo unidade repartido por traços horizontaes, passando pelos pontos de divisão. Fica, assim, dividido em pequenos rectangulos eguaes, em numero de 4×5 ou 20. Vejamos agora a fracção $\frac{3}{4}$. Comprehende ella 3×5

ou 15 pequenos rectangulos; não soffreu mudança alguma; o seu denominador e o seu numerador, fôram ambos multiplicados por 5, e, assim, $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$.

Podemos reduzir graphicamente duas fracções ao mesmo denominador, ou invocando o principio precedente, ou directamente sobre as figuras.

Tomemos, por exemplo, $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{3}$, fracções representadas: a primeira, por uma faixa vertical, e a segunda, por duas faixas horizontaes (fig. 20).

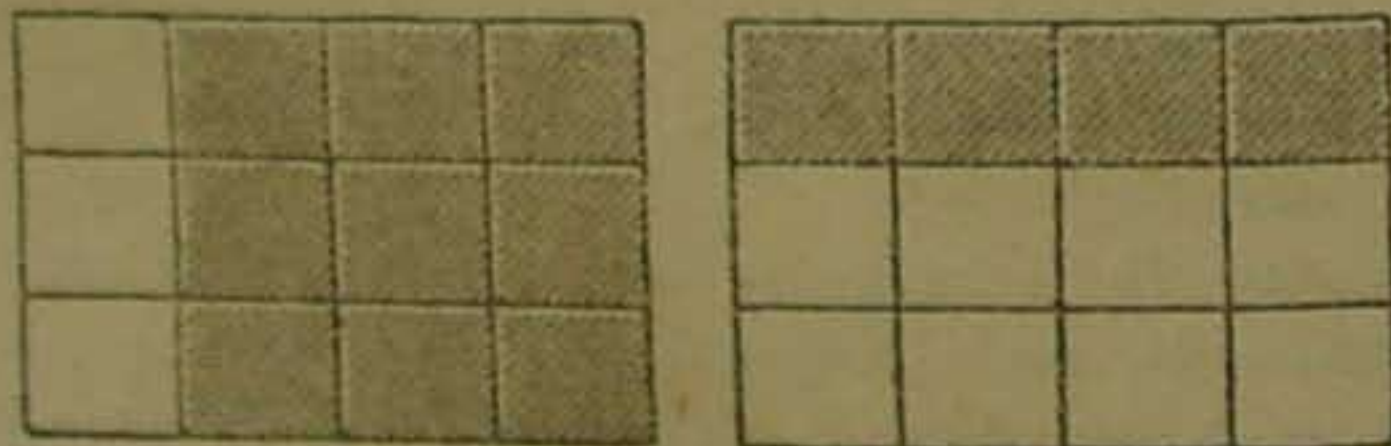


Fig. 20

Dividindo o primeiro rectangulo em trez faixas horizon-

taes eguaes e o segundo em quatro faixas verticaes, vemos que as duas fracções se lêem: $\frac{3}{12}$ e $\frac{8}{12}$.

Inspirando-nos n'estas representações concretas, podemos, em seguida, fazer uma exposição rapida e clara da adicção e da subtracção.

Para a multiplicação, a propria definição nos diz que multiplicar $\frac{2}{5}$ por $\frac{3}{4}$, é o mesmo que tomar os $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$.

Consideremos (fig. 21) a fracção $\frac{2}{5}$ representada em

ABCD por duas faixas verticaes. Dividindo a altura AD em 4 partes eguaes e traçando as linhas horizontaes, temos assim dividido $\frac{2}{5}$ em 4 partes eguaes; tomemos trez d'ellas e tracejemos horizontalmente as restantes. A parte branca é o producto ($\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$;

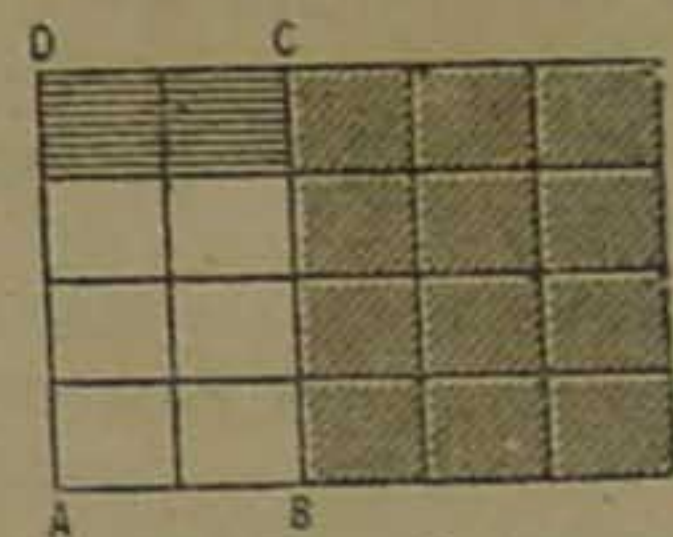


Fig. 21

comprehende 2×3 ou 6 pequenos rectangulos; a unidade comprehende 5×4 ou 20 d'esses rectangulos. Donde :

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{6}{20}$$

E' facil, por processos semelhantes, tornar nitida no espirito da creança a ideia de *relação* (sendo a relação de a para b o numero, que mede a , quando se toma b por unidade); mostrar a identidade d'esta relação e da fracção $\frac{a}{b}$;

estabelecer que $\frac{a+m}{b+m}$ se aproxima indefinidamente de 1, quando damos a m valores inteiros cada vez maiores; mostrar que uma fracção é o quociente do numerador pelo denominador; pôr em evidencia as propriedades fundamentaes das proporções; etc.

Todas estas operações podem ser executadas materialmente com o papel quadriculado, ou com pequenos rectangulos (ou quadrados) de madeira, brancos d'um lado e pretos do outro. Teem ellas um caracter cumulativamente instructivo e recreativo; despertam a attenção da creança; fixam no seu espirito verdades importantes, sem necessidade de grande esforço de memoria; ella vê estas verdades; compare-nas, por assim dizer, com as suas mãos; deixam de ser para ella phrases obscuras, repetidas sem lhes ligar um sentido preciso, para se tornarem realidades tangiveis.

A experiencia demonstra que estes methodos são d'uma pratica pedagogica efficaz, sendo para desejar que, cada dia, mais se generalisem.

22 — Tornamo-nos geometras

Já vimos o que é uma linha recta. E' a mais simples de todas as figuras geometricas. Podemos agora tratar de ampliar um pouco os nossos conhecimentos n'este campo. Comecemos, por exemplo, por adquirir a noção do que seja um plano, contemplando a superficie d'uma massa d'agua muito tranquilla, d'um espelho perfeitamente desempenado, d'um tecto, d'um pavimento, d'uma porta. Uma ardosia, uma folha de papel estendida n'uma prancheta bem aplainada, tambem nos dão a ideia d'um plano, e deixam-nos a impressão de que este — como a linha recta — póde ser prolongado mentalmente tanto quanto quizermos, indefinidamente. Sobre um plano, podemos applicar, em todos os sentidos, uma regua bem direita. Sobre uma folha de papel, podemos traçar tantas linhas rectas, quantas nos aprouvé.

Se traçamos só duas, podem estas (fig. 22) ser *parallelas*,

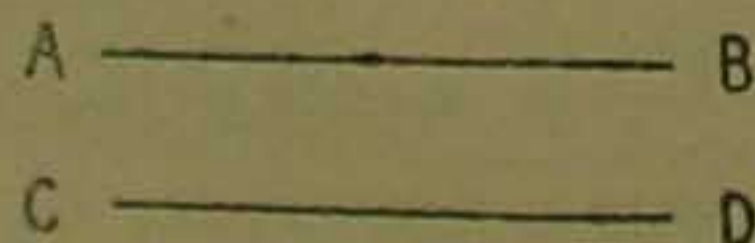


Fig. 22

como AB, CD. As linhas d'uma folha de papel pautado são

todas parallelas, e mostram-nos que duas linhas parallelas nunca se encontram.

Se, pelo contrario (fig. 23), duas rectas AB, CD se encon-

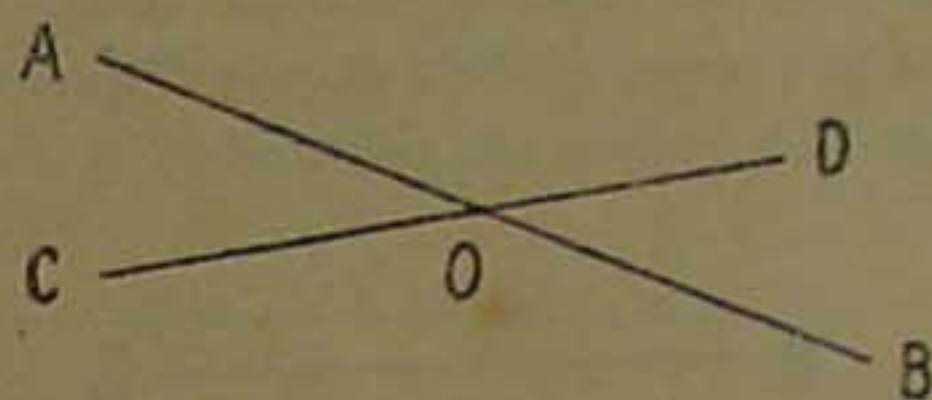


Fig. 23

tram n'um ponto O, as figuras AOC, COB, BOD, DOA, denominam-se *angulos*. Dois angulos são eguaes quando se podem sobrepôr, applicar um sobre o outro. Os angulos AOC, BOD, por exemplo, são eguaes; o mesmo acontece com COB, DOA.

Quando duas rectas (fig. 24) se cortam por fórma que os angulos DOA, AOC são eguaes, os quatro angulos em torno de O são tambem eguaes; chamam-se *angulos rectos*, e a figura formada pelas duas linhas é a d'uma cruz. No papel quadriculado, vemos angulos rectos em todos os pontos d'encontro de duas linhas. Quando duas rectas formam assim angulos rectos, dizem-se *perpendiculares*, uma em relação á outra.

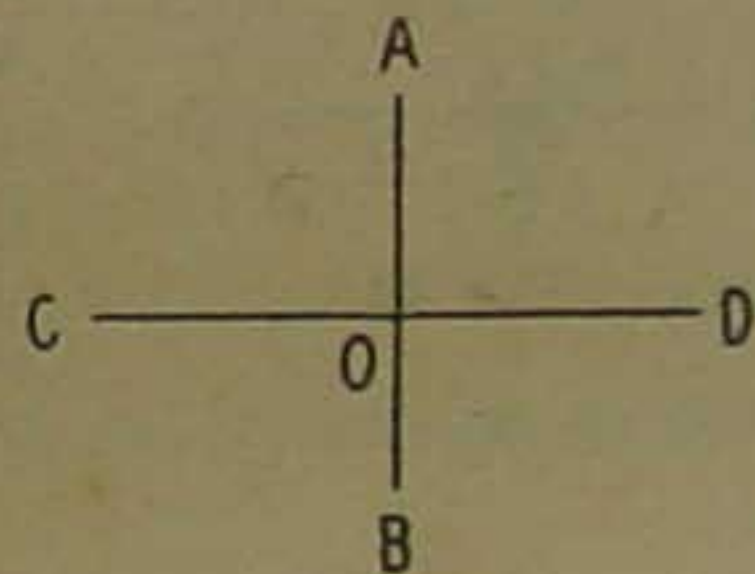


Fig. 24

Um angulo menor do que um angulo recto, como AOC (fig. 23), chama-se um angulo *agudo*; se, pelo contrario, é maior, como COB, denomina-se um angulo *obtusos*.

Um fio de prumo representa uma recta, que se chama *vertical*. Uma recta perpendicular á vertical, chama-se *horizontal*. Todas as rectas, que se applicassem sobre a superficie d'uma massa d'agua tranquilla, seriam rectas horizontaes; essa superficie é ella propria um plano, tambem denominado *horizontal*. As linhas d'uma folha de papel quadriculado dirigidas da esquerda para a direita, dizem-se ho-

rizontaes e as outras, verticaes, porque suppõe-se que a folha está collocada ao alto e applicada contra uma parede, por exemplo.

Supponhamos, agora, que traçamos sobre uma folha de papel trez linhas rectas. Podem dar-se differentes casos. As trez rectas (fig. 25) podem ser parallelas.

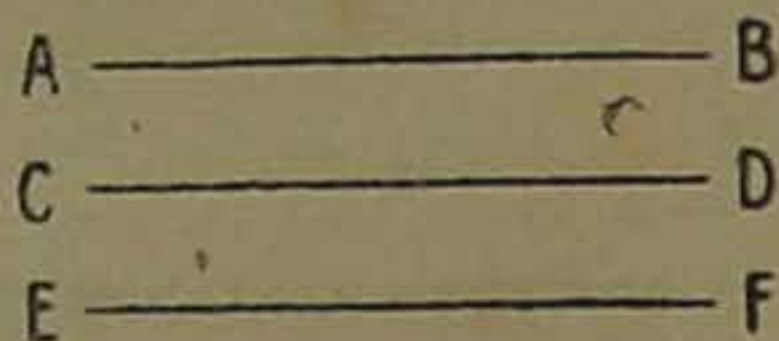


Fig. 25

Duas d'ellas, AB e CD, podem ser parallelas (fig. 26), e a terceira, EF, cortal-as em E e F. Esta terceira recta tem o nome de *secante*. N'esta figura,

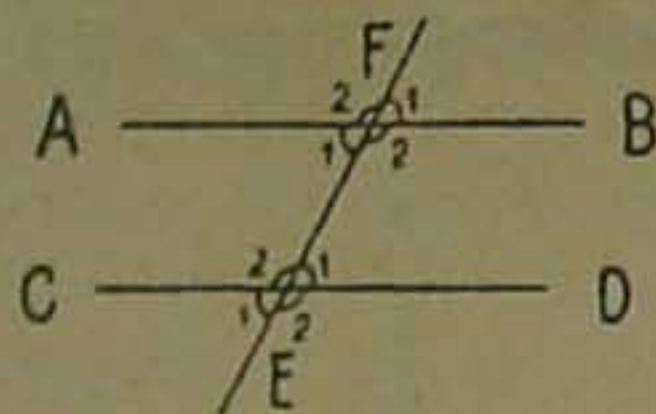


Fig. 26

todos os angulos marcados (1) são eguaes entre si; os marcados (2) tambem o são, e a somma d'um angulo (1) e d'um angulo (2) é egual a dois angulos rectos.

Póde succeder (fig. 27) que as trez rectas passem por um ponto O; diz-se então que ellas são *concorrentes*.

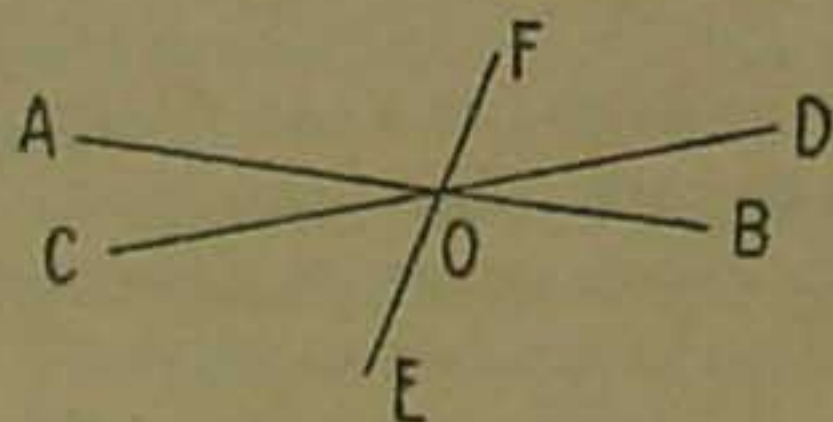


Fig. 27

Finalmente (fig. 28), se não se dá nenhuma das circumstancias precedentes, as trez rectas podem cortar-se, duas a duas, em trez pontos: A, B, C, e limitar uma porção do plano ABC, que podemos considerar á parte (fig. 29) e que se chama um *triangulo*. Os pontos A, B, C, denominam-se *ver-*

tices e os segmentos AB, BC, CA, *lados* do triangulo. Os angulos A, B, C, marcados na figura, dizem-se *angulos* do triangulo.

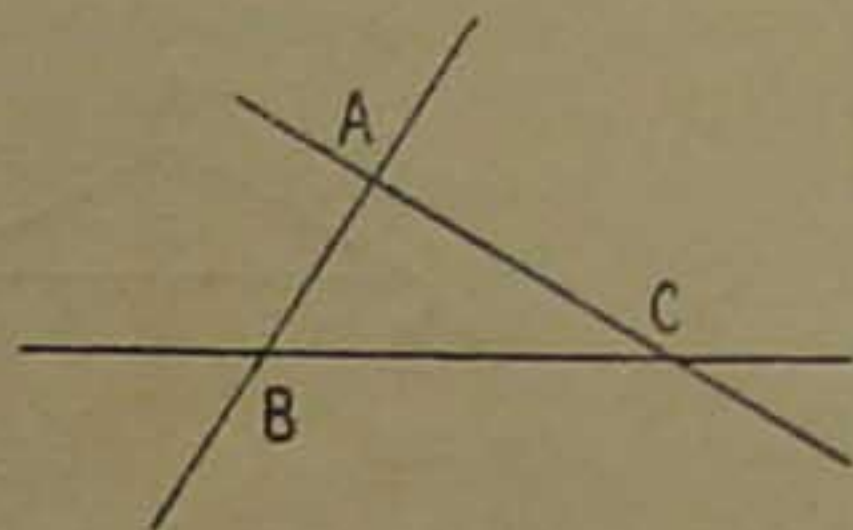


Fig. 28

Um dos angulos do triangulo, A (fig. 30), pode ser recto; diz-se então que o triangulo é *rectangulo*. Pode tambem suc-

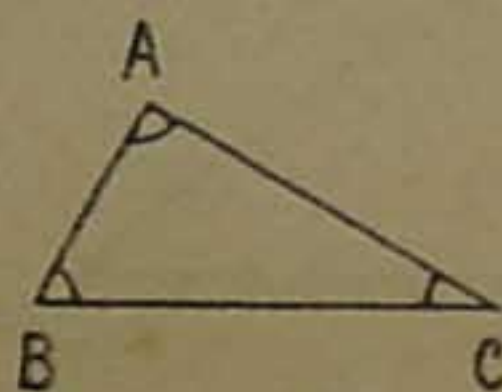


Fig. 29

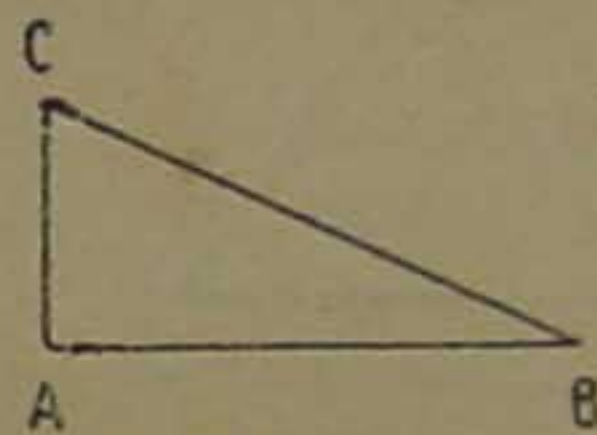


Fig. 30

ceder (fig. 31) que um dos angulos seja obtuso; n'este caso, o triangulo é *obtusangulo*.

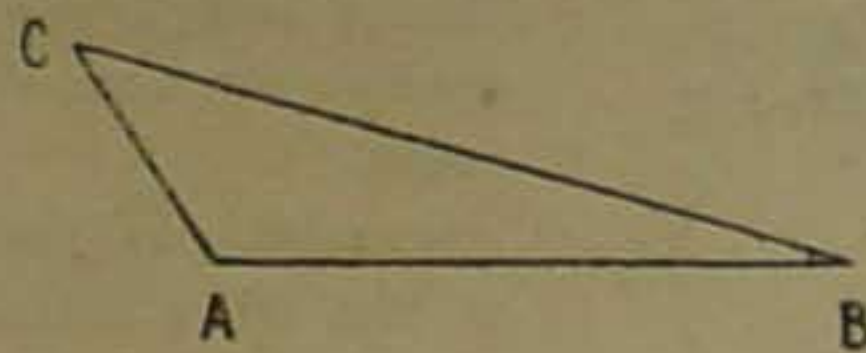


Fig. 31

Se um triangulo, como a da figura 32, tem dois lados eguaes, AB e AC, o triangulo chama-se *isosceles*. Os angulos B e C, são tambem eguaes.

Se um triangulo (fig. 33) tem os seus trez lados eguaes, diz-se *equilatero*; os seus trez angulos tambem são eguaes.

N'um triangulo ABC (fig. 34), podemos escolher um lado qualquer, BC, e chamar-lhe *base*. Se traçarmos pelo ponto

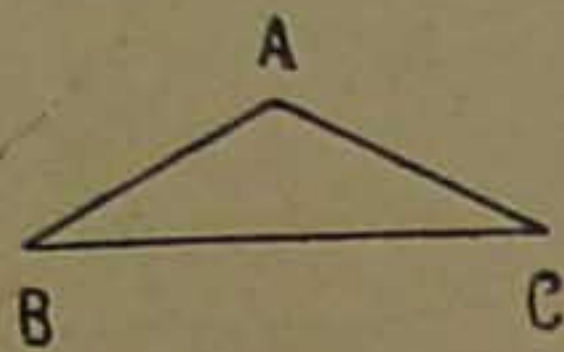


Fig. 32

A uma recta perpendicular a BC, que encontre BC em A', dizemos que AA' é a *altura* do triangulo.

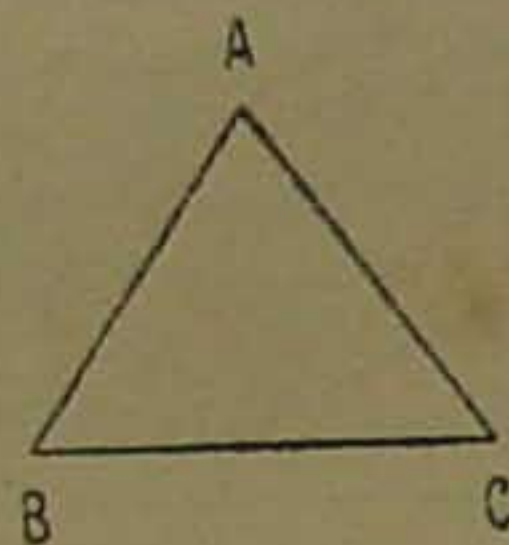


Fig. 33

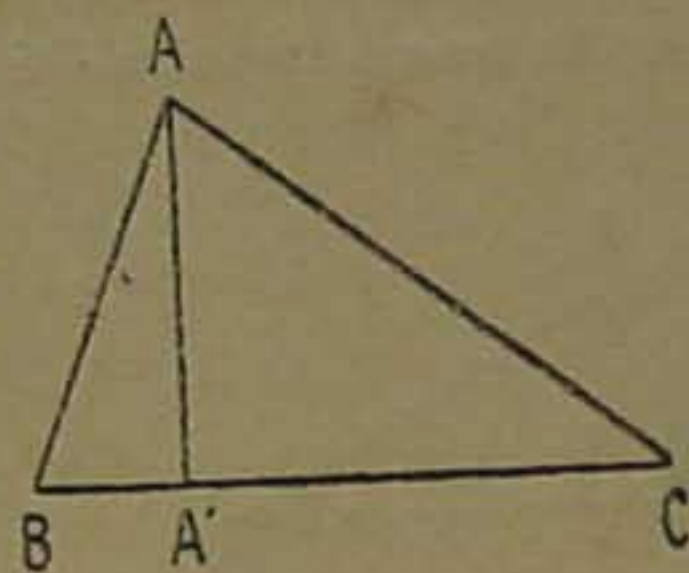


Fig. 34

Esta simples figura, o triangulo, tem innumeradas propriedades. Algumas serão estudadas mais tarde; por agora — não tenhamos illusões — não estudamos absolutamente nada; aprendemos apenas a conhecer as figuras e a saber como ellas se chamam. E já é alguma coisa.

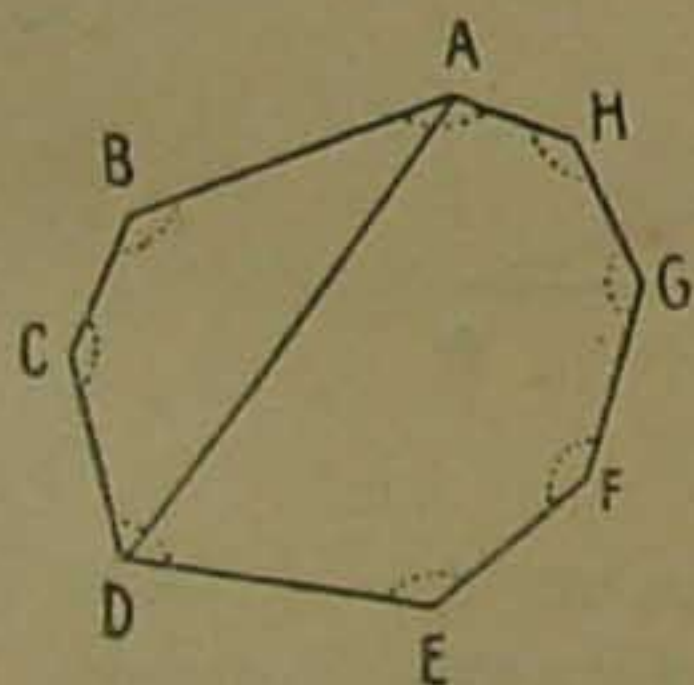


Fig. 35

Quando uma parte d'um plano (fig. 35) é limitada por diferentes rectas, ou antes por diferentes segmentos de rectas, a figura assim formada chama-se um *polygono*. Os segmentos AB, BC, HA, são os *lados*, os pontos A, B, . . . H, os *vertices*, e os angulos marcados A, B, . . . H, os *angulos*, do polygono.

Um polygono, como o da fig. 36, diz-se de *angulos reentrantes*. Quando não tem angulos reentrantes, como na figura 35, o polygono é *convexo*. Em geral, não trataremos senão de polygonos convexos.

A uma recta, como AD (fig. 35), que une dois vertices d'um polygono, e que não é lado d'elle, chama-se uma *diagonal*.

N'um polygono, o numero de vertices, o de lados e o d'angulos, são os mesmos. Deram-se nomes especiaes a alguns polygonos, segundo o numero dos seus lados. Em primeiro lugar, como já dissemos, um polygono de trez lados é um triangulo. Seguidamente

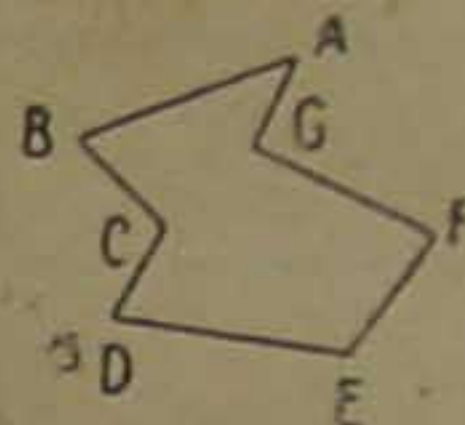


Fig. 36

Um polygono de	4	lados é um	<i>quadrilatero</i>
»	»	»	5 » » <i>pentagono</i>
»	»	»	6 » » <i>hexagono</i>
»	»	»	7 » » <i>heptagono</i>
»	»	»	8 » » <i>octogono</i>
»	»	»	10 » » <i>decagono</i>
»	»	»	12 » » <i>dodecagono</i>

Assim, a figura 35 representa um octogono convexo, e a figura 37 um heptagono de angulos reentrantes.

N'um quadrilatero, dois lados, AB e CD, podem ser paral-

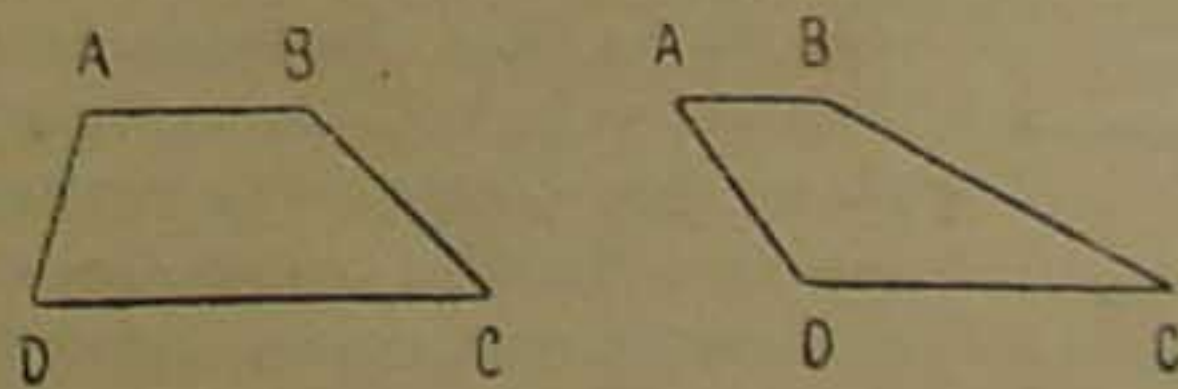


Fig. 37

lelos (fig. 37), não o sendo os outros dois; estes quadrilateros chamam-se *trapezios*. Os lados AB e CD, são as *bases* do trapezio.

Se (fig. 38) os lados AB e CD são paralelos, e, se os lados BC e DA também o são, o quadrilátero é um *parallelogrammo*.

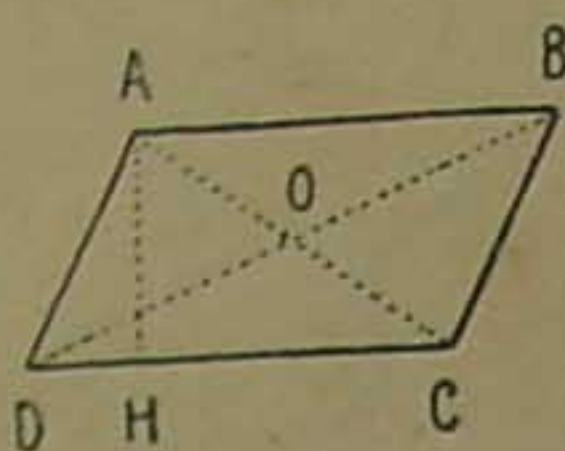


Fig. 38

Os lados AB e CD , são eguaes; outro tanto se dá com os lados BC e AD . Além d'isso, os ângulos A e C , também são eguaes, da mesma fôrma que B e D .

Se os quatro lados de um *parallelogrammo* são eguaes (fig. 39), este recebe o nome de *losango*.

Se (fig. 40) um dos ângulos é recto, os outros tres também o são, e o *parallelogrammo* é um *rectangulo*.

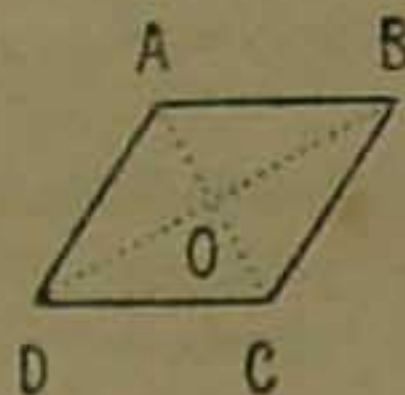


Fig. 39

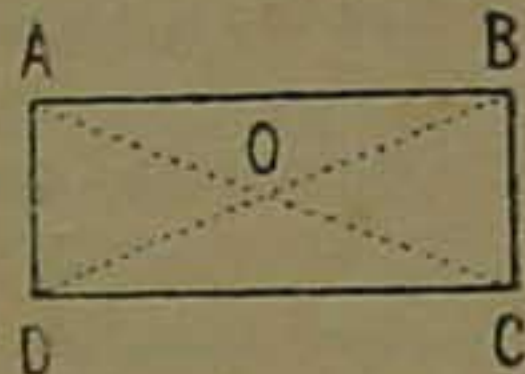


Fig. 40

Se, finalmente (fig. 41), um *rectangulo* tem todos os seus lados eguaes, chama-se um *quadrado*.

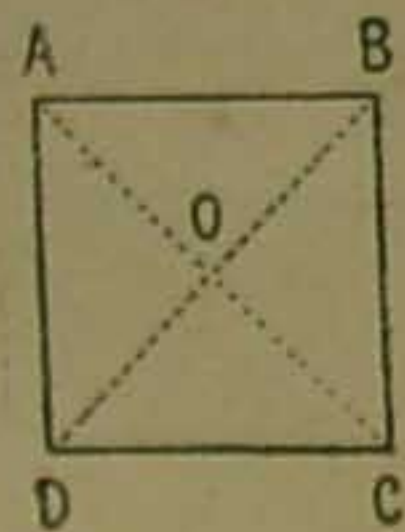


Fig. 41

Todo o quadrilátero tem duas diagonaes. Em todo o *parallelogrammo* (fig. 38, 39, 40 e 41), as duas diagonaes AC e BD , cortam-se n'um ponto O , que é o meio de cada uma d'ellas. N'um *losango* (fig. 39), as duas diagonaes são perpendiculares entre si. N'um *rectangulo* (fig. 40), as duas diagonaes são eguaes. N'um *quadrado* (fig. 41), as duas diagonaes são ao mesmo tempo, eguaes e perpendiculares.

Vemos, pois, que um *quadrado* é, ao mesmo tempo, um *losango* e um *rectangulo*.

Se, n'um *parallelogrammo* (fig. 38), tomarmos um lado, CD , que se chama *base*, e se traçarmos uma recta, AH , perpendicular a CD , esta será também perpendicular a AB ; esta

recta, ou melhor: este segmento, AH , chama-se *altura do parallelogrammo*.

N'uma folha de papel quadriculado, podemos formar tantos *rectangulos* e *quadrados*, quantos quizermos, utilizando as linhas da quadricula.

Devemo-nos exercitar também a construir, com todo o cuidado possível, as diferentes figuras de que temos fallado

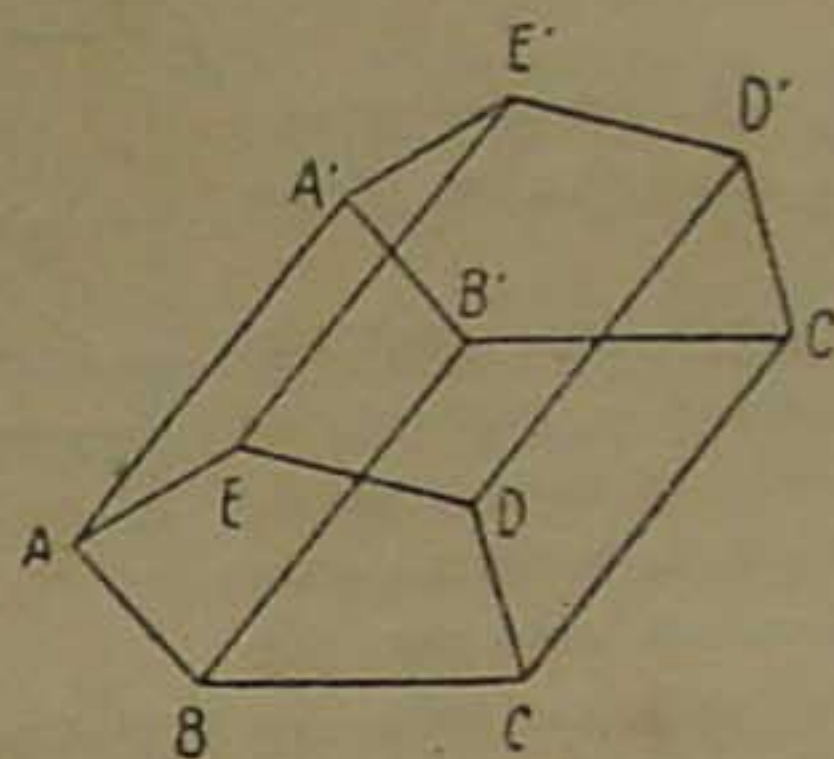


Fig. 42

e ainda outras, faceis de idear, servindo-nos do lapis, da regua, do esquadro e do duplo decimetro para medir as distancias. Depois, precisamos habituar-nos a desenhar-as convenientemente á mão, sem o auxilio de instrumentos.

Um bom exercicio consiste em desenhar a lapis — com todo o rigor e empregando os instrumentos — uma figura, e depois cobri-la á mão com tinta.

Por enquanto, nada dizemos sobre o emprego do compasso e do transferidor, reservando para mais tarde indicá-lo summariamente.

Não esqueçamos, porém, que o desenho nunca deve ter sido posto de banda, desde que começámos a traçar os nossos primeiros riscos.

Se (fig. 42), tendo um polígono $ABCDE$, n'um plano horizontal, conduzimos fóra do plano as rectas AA' , BB' , CC' , DD' e EE' , todas paralelas e eguaes entre si, as extremidades A' , B' , C' , D' e E' , são os vertices d'um outro polígono egual áquelle. Os quadriláteros AA' , BB' , etc., são parallelo-

grammos; o corpo limitado por todos estes parallelogrammos e pelos dois polygonos, chama-se um *prisma*. Os dois polygonos são as *bases* do prisma; os parallelogrammos são as suas *faces*; a distancia entre os planos das duas bases, é a sua *altura*; as rectas AA' , BB' ,... são as suas *arestas*.

Se as arestas são verticaes, suppondo as bases horizontaes, o prisma é *recto*.

Se as bases são parallelogrammos, o prisma chama-se um *parallelepipedo*.

Se, enfim, a base é um quadrado e o parallelepipedo é recto e tem por altura o lado da base, o parallelepipedo apresenta a fôrma d'um dado e chama-se um *cubo* (fig. 43).

Se (fig. 44), unirmos todos os vertices d'um polygono $ABCDE$, a um ponto S , situado fóra do plano, o corpo limitado pelo polygono e pelos triangulos SAB, SBC, \dots, SEA , chama-se uma *pyramide*. $ABCDE$ é a *base* da pyramide SA, SB, \dots são as suas *arestas*; S é o seu *vertice*; a distancia do vertice ao plano da base, que será vertical, se a base fôr horizontal, é a sua *altura*.

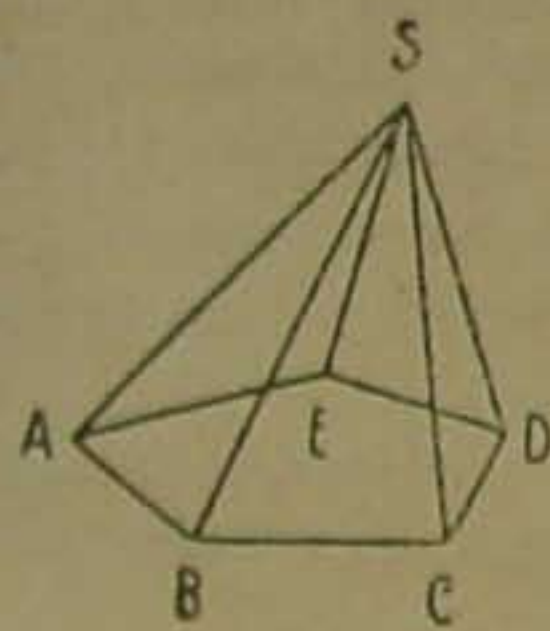


Fig. 44

Com umas hastesinhas de madeira e alguns pedaços de fio metallico, é facil construir pequenos modelos, que dêem uma ideia sufficientemente precisa das figuras, de que acabamos de fallar. Podemos tambem talhal-as á faca n'uma cenoura, ou n'uma batata.

Devemos notar que as figuras 42 e 44, em perspectiva, foram desenhadas suppondo visiveis todas as suas arestas, figura feita com hastes, ao passo que o cubo da figura 43 representa pontoada tres arestas, que não se vêem, AD, DC e DD' , o que succede quando o cubo é massiço, constituido por uma substancia qualquer.

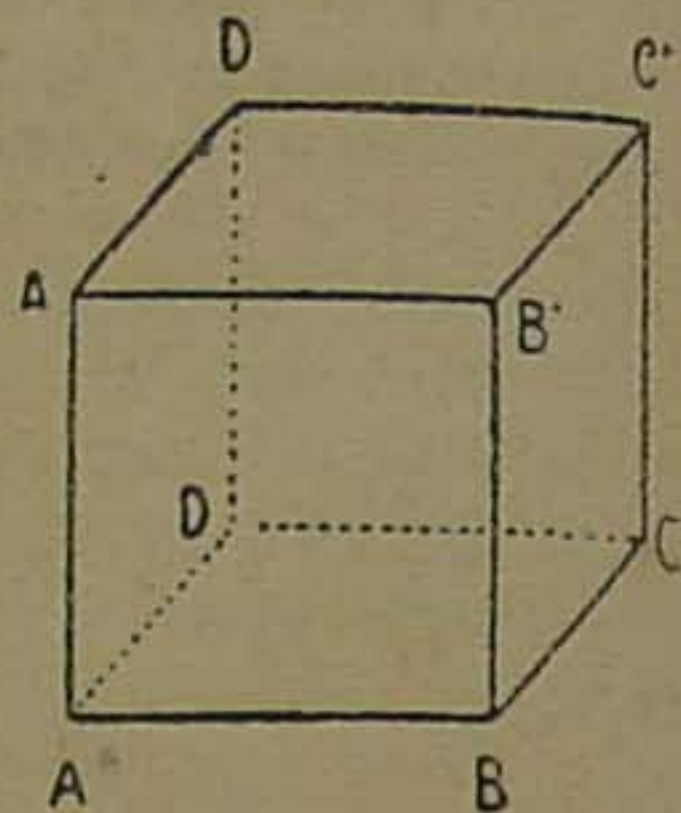


Fig. 43

23 — As areas

A palavra «Geometria» significa, pela sua etymologia: medida da Terra. Este significado não corresponde de nenhum modo á sciencia geometrica, tal como hoje a conhecemos; mas, elucida-nos sobre a origem d'esta sciencia, que, como as demais, nasceu das necessidades da humanidade. Cedo se conheceu a necessidade d'avaluar a extensão das terras e se procuraram os meios de o conseguir. As terras apresentam, no seu conjuncto, uma superficie sensivelmente plana, e são, em regra, limitadas por linhas rectas; é, pois, a extensão dos diferentes polygonos descriptos no numero precedente, que se trata de determinar, de medir, para conhecer aquella extensão.

Mas, para medir seja o que fôr, é preciso uma unidade. Sabemos medir extensões lineares ou comprimentos, tomando por unidade o metro, o palito ou o lado d'uma casa do papel quadriculado, pouco importa. Para medir um comprimento, é necessario uma unidade, que seja tambem um comprimento. Para medir uma extensão plana, que se chama *area*, é preciso uma unidade, que seja egualmente uma area.

Escolbida a unidade de comprimento, a unidade d'area será invariavelmente a area do quadrado, que tem por lado aquella unidade de comprimento.

Para medir um comprimento, basta applicar-lhe — topo a topo — a unidade de comprimento e contar o numero de vezes que a applicamos. Comprehende-se que um processo analogo é praticamente impossivel, quando se trata d'uma area; seria necessaria applicar o quadrado unidade de maneira que nenbum ponto da area deixasse de ser coberto por elle, o que não é exequivel.

Ao envez, para as figuras acima descriptas, existem processos muito simples para chegar a determinar as areas.

Occupemo-nos, em primeiro logar, do quadrado. Tomemos uma folha de papel quadriculado e supponhamos que cada

uma das suas divisões é a unidade de comprimento. Cada casa é, por consequencia, a unidade d'area.

Sobre essa folha de papel desenhamos (fig. 45) um quadrado, cujo lado comprehende 7 divisões; o comprimento d'esse lado tem, pois, por medida 7. As casas contidas n'esse quadrado, constam de 7 fileiras de 7 casas, cada uma; o seu numero total é, portanto, 7 vezes 7, ou $7 \times 7 = 7^2 = 49$. E, como se pode dizer outro tanto d'um quadrado, cujo lado tenha um numero qualquer de divisões a , em vez de 7, a area do quadrado será da mesma fórmula

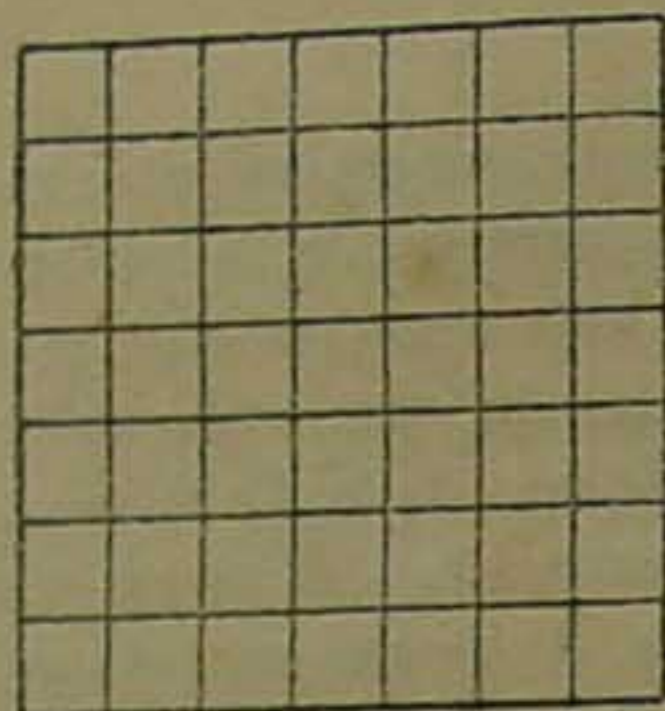


Fig. 45

$a \times a = a^2$; isto é: o numero, que mede a area do quadrado, é a 2.ª potencia do numero, que mede o lado. Eis porque se chama quadrado d'um numero á sua 2.ª potencia.

Consideremos agora (fig. 46) um rectangulo, cujos lados são 8 e 3; o numero de casas, isto é: o numero, que mede a sua area, é 8×3 . Se, em vez de 8 e 3, tivermos a e b , a area do rectangulo é dada pelo producto ab .



Fig. 46

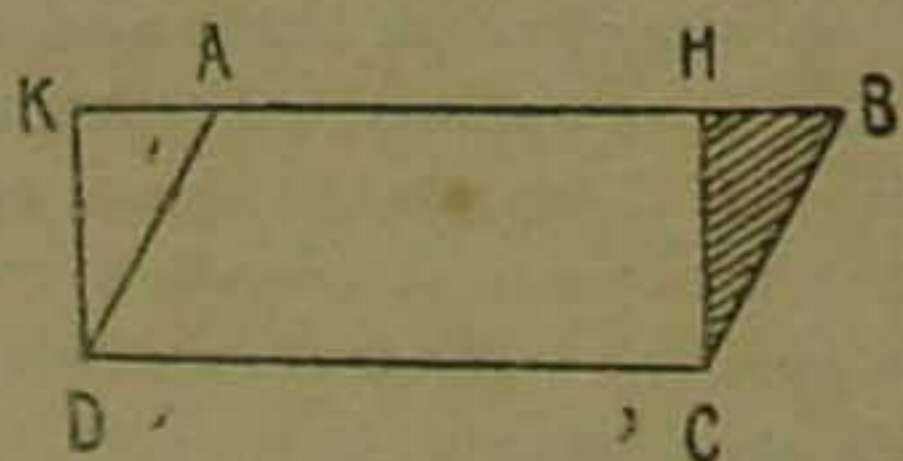


Fig. 47

Passemos a recortar um cartão com a fórmula do parallelogrammo ABCD, representado na figura 47, e marquemos

a sua altura CH. Se, com um golpe dado segundo CH, separarmos o triangulo tracejado CHB, e o ajustarmos ao lado esquerdo da figura, applicando CB sobre DA, formamos o rectangulo CDKH, cuja area é a mesma do parallelogrammo, porquanto é constituído pelos mesmos pedaços de cartão. Este rectangulo tem por lados a base CD do parallelogrammo e a sua altura CH; d'onde: a area d'um parallelogrammo tem por medida o producto dos numeros que medem a sua base e a sua altura.

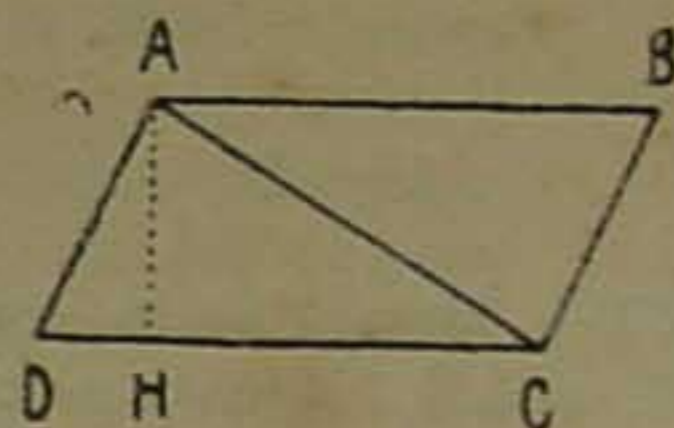


Fig. 48

Cortando um parallelogrammo (fig. 48) segundo a diagonal AC, os dois triangulos resultantes, CBA e ADC, applicam-se exactamente um sobre o outro. D'onde: o parallelogrammo tem uma area dupla do triangulo ADC, ou a area d'este é metade da do parallelogrammo. Multiplicando a base DC pela altura AH, e tomando a metade do producto, temos o numero que mede a area do triangulo.

Um trapezio decompõe-se, da mesma fórmula, em dois trian-

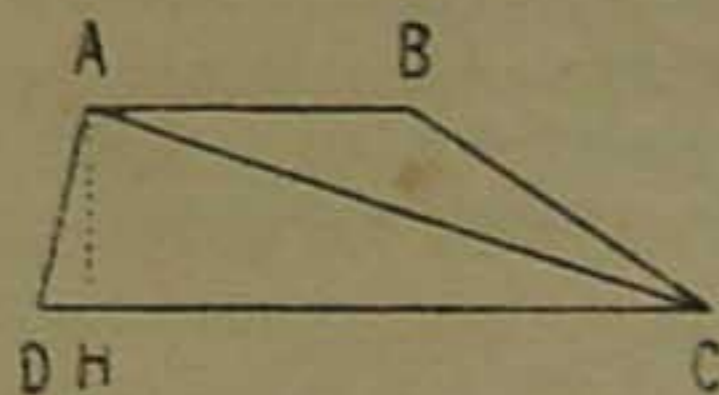


Fig. 49

gulos. Deduz-se d'ahi que: para obter o numero, que mede a sua area, temos que multiplicar a altura AH pela metade da somma das bases AB e DC.

Tambem se pode (fig. 50 a) transformar um trapezio n'um rectangulo da mesma area; basta traçar pelos pontos L e M, meios dos lados AD e BC, as alturas HK e IJ. Os triangulos tracejados LDH e MCI, applicam-se exactamente

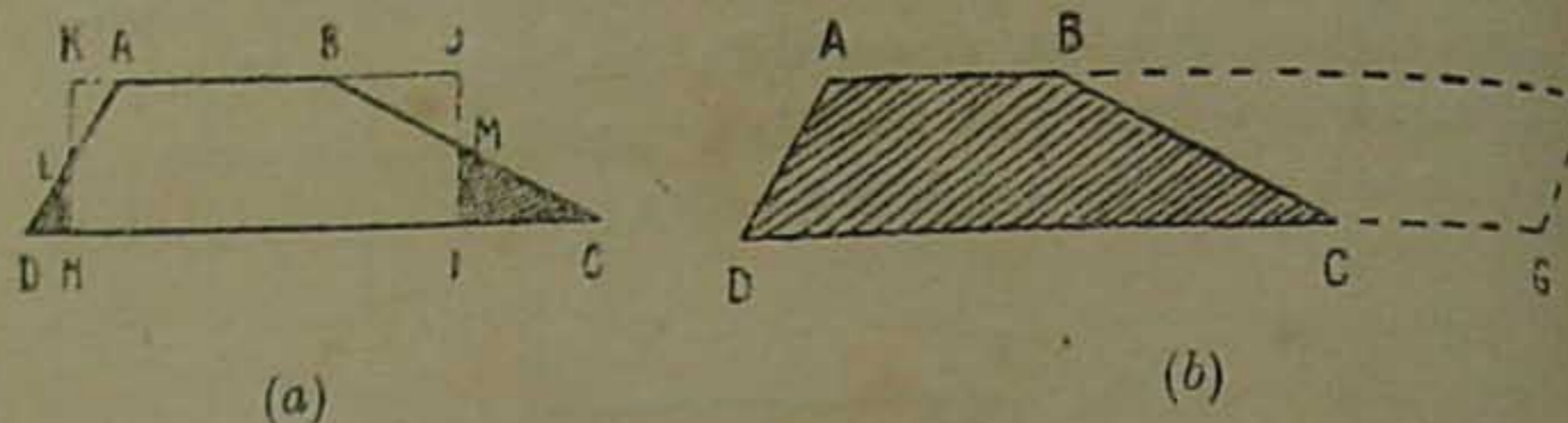


Fig. 50

sobre LAK e MBI, e formam assim o rectangulo; o que demonstra que HI, ou LM, é igual a metade da somma das bases AB e CD.

Por ultimo (fig. 50 b), se prolongarmos o lado AB d'um comprimento, BF, igual a DC, e o lado DC d'um comprimento, CH, igual a AB, a figura AFGD é um parallelogrammo; cortando-o segundo BC, obtemos dois trapezios, que se sobrepõem exactamente. Cada um d'elles é, pois, metade do parallelogrammo, o que nos dá ainda a area do trapezio por um novo processo: um simples golpe de thesoura n'um parallelogrammo de cartão.

Podemos resumir abreviadamente o que precede, nas formulas seguintes:

Quadrado. — Lado a	Area a^2
Rectangulo. — Lados a, b	Area ab
Parallelogrammo. — Base a ; altura h	Area ah
Triangulo. — Base a ; altura h	Area $\frac{ah}{2}$
Trapezio. — Bases a, b ; altura h	Area $\frac{(a+b)h}{2}$

De resto, desde que saibamos medir a area d'um trian-

gulo, podemos determinar a d'um polygono qualquer ABCDEF (fig. 51); porquanto, por meio das diagonaes AC, AD e AE, partindo d'um mesmo vertice, podemos decompor um polygono em triangulos, ABC, ACD, ADE e AEF.

Devemos exercitar-nos muito a determinar, d'esta fórma, areas regulares, taes como: a d'uma porta, d'uma janella, d'uma meza, do pavimento ou do tecto d'um compartimento, d'um pateo, etc. Uma simples fita metrica basta para esse fim. Segundo os objectos, tomamos por unidade de comprimento o metro, o decimetro ou o centimetro. Sem possuirmos ainda nenhuma noção theorica, familiarisamo-nos, assim, com as applicações as mais simples do systema metrico; temos a intuição d'ellas; adquirimos a noção justa do emprego das diferentes unidades; e esta aquisição, já util por si só, torna-se mais tarde, no periodo dos estudos serios, um auxiliar valiosissimo.

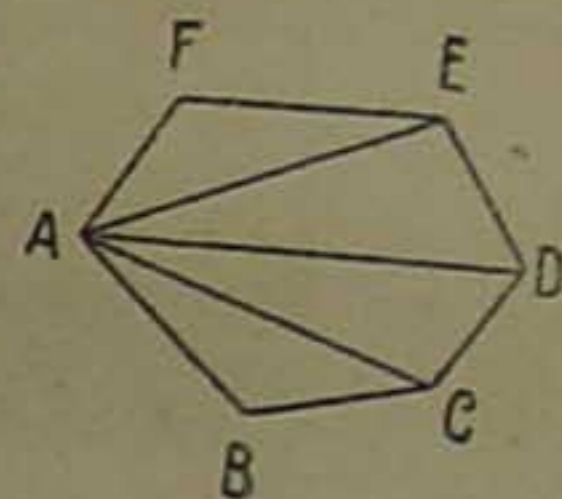


Fig. 51

24 — O quadrado da hypotenusa

Existe em geometria um theorema importante e celebre, que tem sido o tormento de muitas gerações de estudantes, porquanto a demonstração classica, habitualmente dada, é pouco natural e difficil de reter. Diversos são os nomes porque é conhecido; chamam-lhe *O quadrado da hypotenusa*, *O theorema de Pythagoras* — apezar de já conhecido muitos seculos antes de Pythagoras — e ainda *A ponte dos burros*, sem duvida por os alumnos mediocres tropeçarem n'elle e ser com difficuldade que vencem esta travessia.

Já sabemos o que é um triangulo rectangulo. O lado maior, BC (fig. 52), opposto ao angulo recto, chama-se *hypotenusa*. Se construirmos tres quadrados, BDEC, CFGA e

AHIB, tendo por lados a hypotenusa e os outros dois lados do triangulo, a area do primeiro será egual á somma das areas dos outros dois. Tal é o enunciado da famosa *Ponte dos burros*.

Ora, ha um meio muito simples de verificar esta proposição, meio inventado na India, na mais remota antiguidade, e de que nos podemos servir para fazer uma demonstração

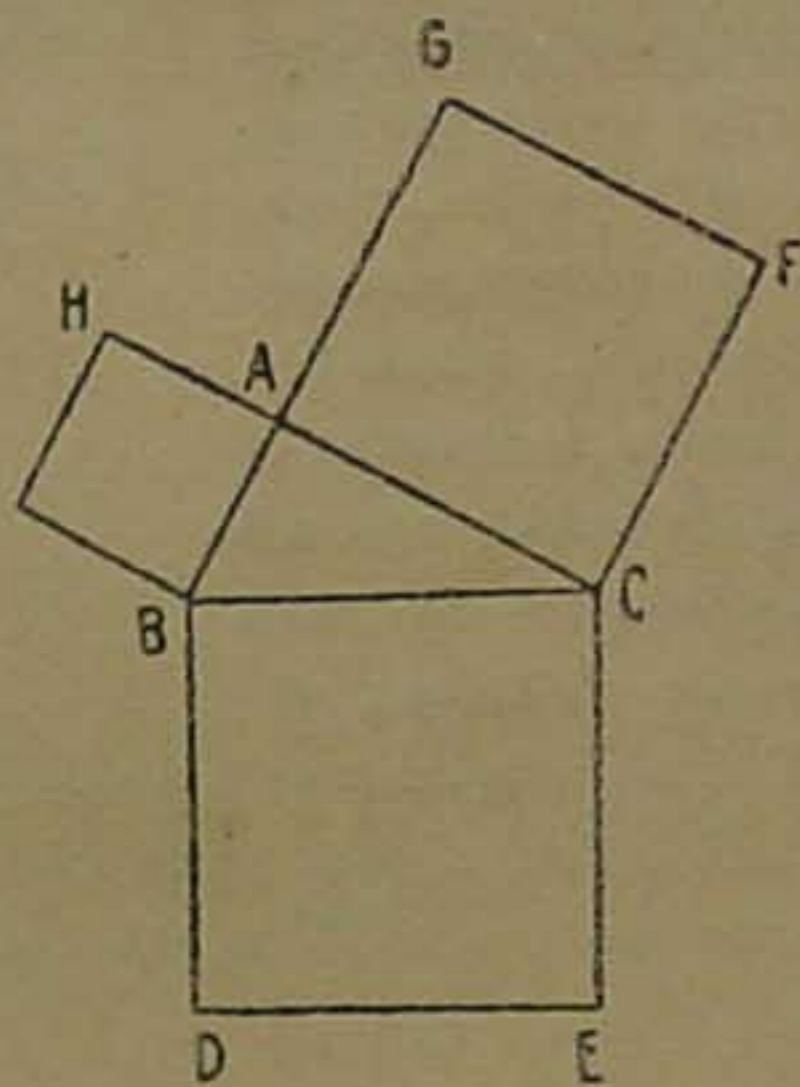


Fig. 52

muito correcta, quando estudarmos Geometria — o que aqui não fazemos.

Consideremos um quadrado (fig. 53-1), cujo lado é AB. Marquemos um ponto C entre A e B, e construamos em madeira, ou em cartão, triangulos rectangulos, tendo AC e CB por comprimento dos lados do angulo recto; basta construir quatro. Disponhamol-os, designando-os por 1, 2, 3 e 4, como se vê na fig. 53 (1), em que estão representados pelas partes tracejadas. Vemos que formam um desenho, que nos mostra no seu interior um quadrado, que tem justamente por lado a hypotenusa. Este quadrado é, pois, o que resulta, quando cobrimos uma parte do quadrado grande com os quatro triangulos. Disponhamos agora estes de maneira que occupem a posição indicada na fig. 53 (2). Temos

então, dois quadrados — os dois quadrados construidos sobre os lados do angulo recto. D'onde: os dois reunidos teem a mesma area que o quadrado da hypotenusa da fig. 53 (1). É um quebra-cabeça dos mais simples; a creança, que o tenha

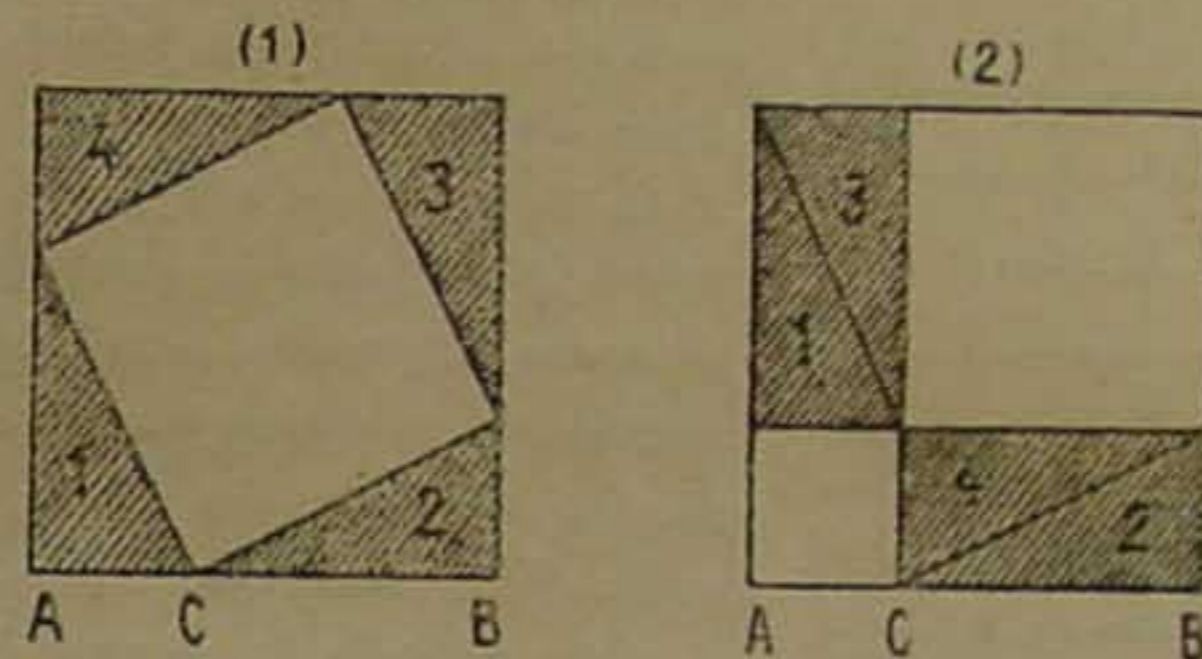


Fig. 53

feito uma ou duas vezes, nunca mais o esquece e não se assusta, nem se atrapalha, ao aproximar-se da *Ponte dos Burros*. A maior das burrices é complicar as cousas simples e tornar difficil o que é comesinho.

25 — Alguns quebra-cabeças; miscellanea mathematica

Sobre um segmento ABC (fig. 54), construimos o quadrado ACIG. Tomando, depois, $CF = BC$, traçamos FD parallela a AC, e BH parallela a CI; o quadrado fica, assim, dividido em 4 partes pelas linhas BH e FD. Com dois golpes de tesoura, podemos separar essas partes, que são:

- 1.º—BCFE, quadrado tendo por lado BC;
- 2.º—EHGD, " " " " DE, que é egual a AB;
- 3.º—EFIH, rectangulo tendo os seus lados eguaes a AB e BC;
- 4.º—ABED, rectangulo egual ao precedente.

Acabamos, assim, de verificar este theorema de Geometria: «O quadrado, construído sobre a somma de duas linhas, é equivalente ao quadrado construído sobre a primeira, mais o quadrado construído sobre a segunda, mais duas vezes o rectângulo construído sobre estas duas linhas, como lados.»

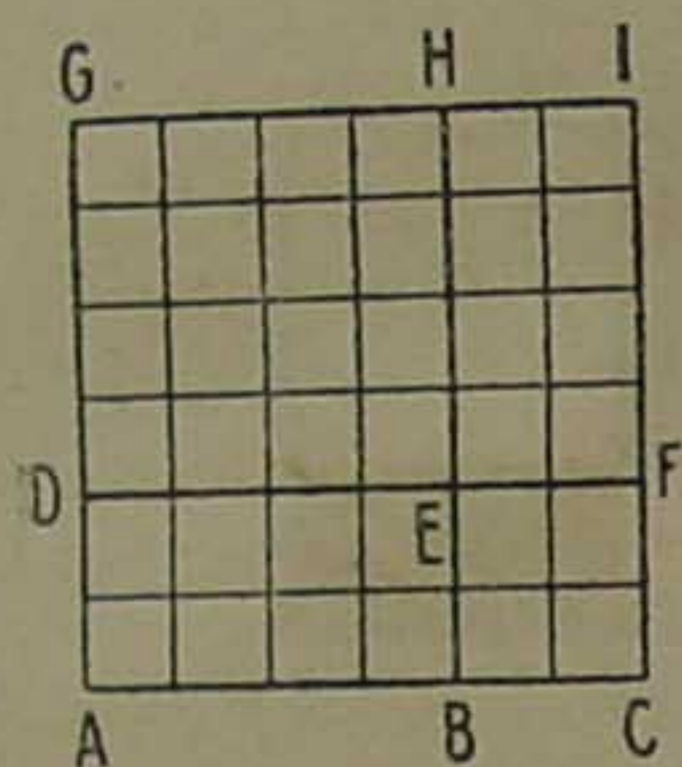


Fig. 54

Se traçarmos a fig. 54 sobre papel quadriculado e avaliarmos as áreas de todas estas figuras, contando as casas do papel, temos a confirmação d'este theorema d'Arithmetica:

«O quadrado da somma de dois numeros é igual á somma dos quadrados d'esses numeros, mais o dobro do seu producto.»

Se designamos AB por a e BC por b , temos, por ultimo, esta formula d'Algebra:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Aqui estão trez verdades, com que por trez vezes se sobrecarrega a memoria das creanças desprevenidas, quando, de facto, constituem uma só e tão evidente, que salta aos olhos. As apparencias, os trajos, são differentes; mas, a pessoa é a mesma. Sabendo-o d'antemão, poupa-se muito tempo perdido, muito esforço inutil, além de se ficar sabendo que as classificações da sciencia são necessarias, mas muitas vezes artificiaes pela força das cousas, e que é preciso habituar-mo-nos cedo a conhecer as analogias, que se nos deparam.

Vamos indicar mais algumas. Formemos (fig. 55), sobre o

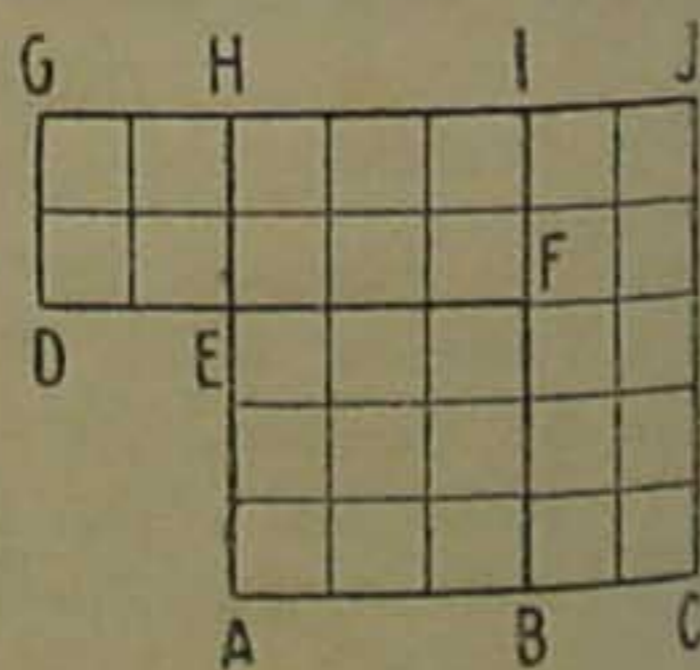


Fig. 55

segmento ABC, um quadrado tendo por lado AB, que é ABFE, e um quadrado, ACJH, cujo lado é AC. Prolonguemos BF até I, e, sobre EH, construamos o quadrado EHGD.

Para termos o quadrado ABFE, é preciso separar da figura total os rectangulos BCJI e FIGD; a figura total consta da reunião de dois quadrados, cujos lados são eguaes a AC e BC; os dois rectangulos são eguaes e os seus lados eguaes a AC e BC; finalmente, AB é a differença entre AC e BC. D'onde:

Geometria — O quadrado, construído sobre a differença de dois segmentos, é equivalente á somma dos quadrados construídos sobre esses segmentos, menos duas vezes o rectângulo construído sobre os dois segmentos como lados.

Arithmetica — O quadrado da differença de dois numeros é igual á somma dos quadrados d'esses numeros, menos o dobro do seu producto.

Algebra — Temos a formula:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

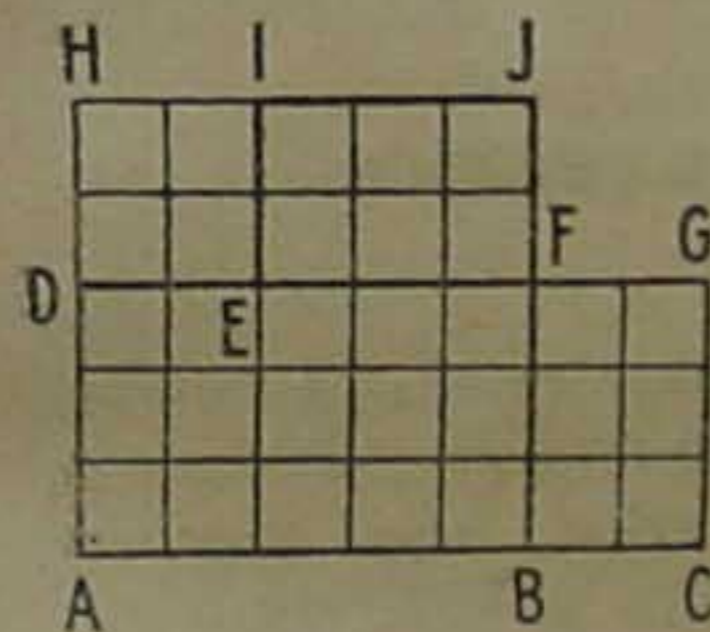


Fig. 56

Ainda um exemplo, que nos é dado pela figura 56. ABJH é um quadrado e ACGD um rectângulo; FG, FJ e DE, são eguaes a BC; DEIH é um quadrado.

O rectângulo ACGD tem, pois, por lados $AB + BC$ e $AB - BC$; como os dois rectangulos BCGF e FJIE são eguaes, separando o primeiro e collocando-o no lugar do segundo, temos ABJIED, que é a differença dos quadrados ABJH e DEIH, construídos sobre AB e $DE = BC$. Assim:

Geometria — O rectângulo, tendo por lados a somma e a differença de dois segmentos, é equivalente á differença dos quadrados, tendo por lados os mesmos segmentos.

Arithmetica — O producto da somma de dois numeros pela sua differença, é igual á differença dos quadrados d'esses numeros.

Algebra — Temos a formula :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

E para comprovar tantas proposições, respeitantes a tantas sciencias, basta recortar com cuidado alguns pedaços de cartão, depois de ter desenhado cuidadosamente algumas figuras!

Tem-se dado, por vezes, o nome de quebra-cabeças a estes jogos de recorte. E' uma injustiça, porque, pelo contrario, empregados como acabamos de dizer, evitam muita quebra-deira de cabeça, instruindo pelos olhos.

26 — O cubo em oito pedaços

Tomemos (fig. 57) um cubo de madeira e, a partir d'um dos seus verticees O, marquemos, sobre as tres arestas que d'elle partem, tres distancias eguaes entre si, OA, OB e OC. Supponhamos que, por cada um dos tres pontos assim obtidos, fazemos passar um corte feito com uma serra, AAA, BBB, CCC.

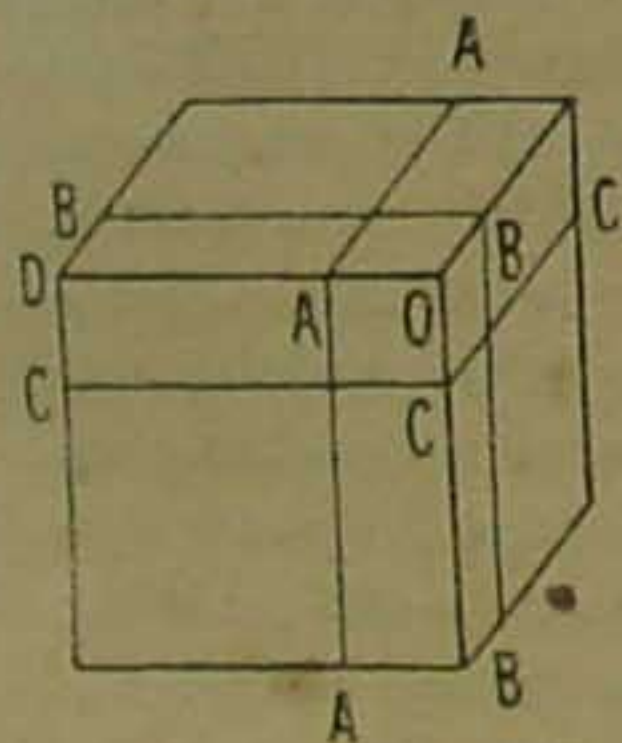


Fig. 57

Cortamos, assim, o cubo em oito pedaços. Para fazer ideia do que estes sejam — o que melhor veríamos sobre o proprio cubo — chamemos (fig. 57) a á distancia DA e b á distancia AO, e construamos a figura 58. As duas partes, que se compõem, representam o que se vê depois dos cortes segundo AAA e BBB, quando o cubo é visto por cima. Além d'isso, as letras (a) e (b), entre pa-

renteses, indicam a espessura, depois do corte segundo CCC. A figura da esquerda representa o que está abaixo de CCC e a da direita, o que fica acima.

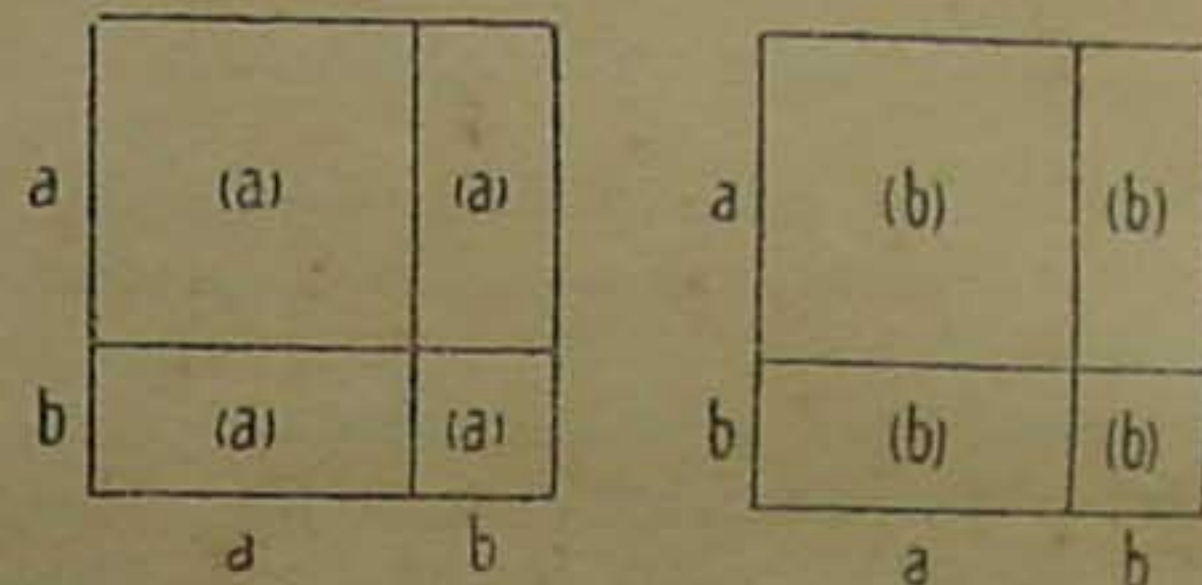


Fig. 58

Vemos, assim, que temos oito paralelepipedos, cujas dimensões são:

fig. da esquerda	aaa	aba	bba	baa
fig. da direita	aab	abb	bbb	bab;

o que nos dá:

1	cubo,	cuja	aresta	é	a ;
1	»	»	»	»	b ;
3	paralelepipedos	tendo	por	dimensões	a, a, b ;
3	»	»	»	»	a, b, b ;

A aresta do cubo, que cortámos em oito pedaços, era $a + b$.

Verificamos, assim, que o cubo construido sobre a somma de dois segmentos a e b , compõem-se :

1.º da somma dos cubos construidos sobre cada um dos segmentos;

2.º de 3 vezes um paralelepipedo tendo por base um quadrado de lado a e por altura b ;

3.º de 3 vezes um paralelepipedo tendo por base um quadrado de lado b e por altura a .

Isto é Geometria.

A mesma figura mostra-nos que, em Arithmetica: o cubo da somma de dois numeros é egual á somma dos cubos d'es-

Algebra — Temos a formula :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

E para comprovar tantas proposições, respeitantes a tantas sciencias, basta recortar com cuidado alguns pedaços de cartão, depois de ter desenhado cuidadosamente algumas figuras!

Tem-se dado, por vezes, o nome de quebra-cabeças a estes jogos de recorte. E' uma injustiça, porque, pelo contrario, empregados como acabamos de dizer, evitam muita quebra-deira de cabeça, instruindo pelos olhos.

26 — O cubo em oito pedaços

Tomemos (fig. 57) um cubo de madeira e, a partir d'um dos seus verticees O, marquemos, sobre as tres arestas que d'elle partem, tres distancias eguaes entre si, OA, OB e OC. Supponhamos que, por cada um dos tres pontos assim obtidos, fazemos passar um corte feito com uma serra, AAA, BBB, CCC.

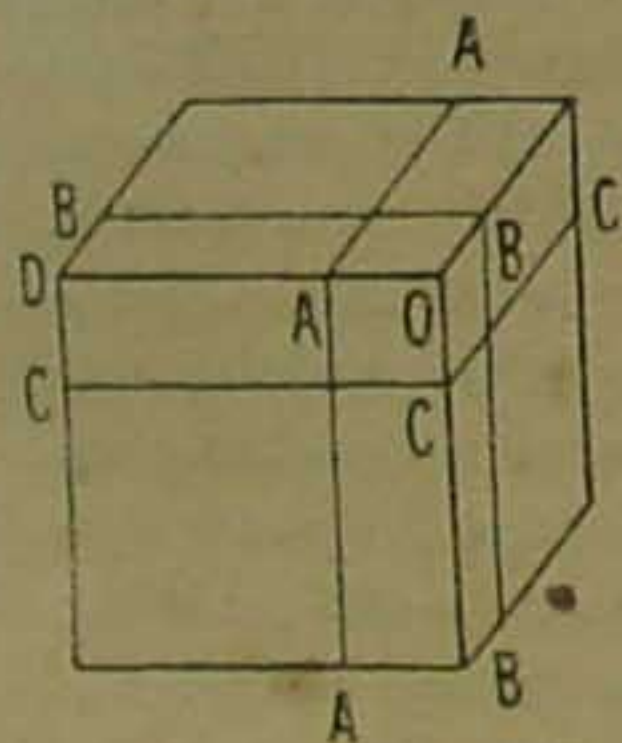


Fig. 57

Cortamos, assim, o cubo em oito pedaços. Para fazer ideia do que estes sejam — o que melhor veriamos sobre o proprio cubo — chamemos (fig. 57) a á distancia DA e b á distancia AO, e construamos a figura 58. As duas partes, que se compõem, representam o que se vê depois dos cortes segundo AAA e BBB, quando o cubo é visto por cima. Além d'isso, as letras (a) e (b), entre pa-

renteses, indicam a espessura, depois do corte segundo CCC. A figura da esquerda representa o que está abaixo de CCC e a da direita, o que fica acima.

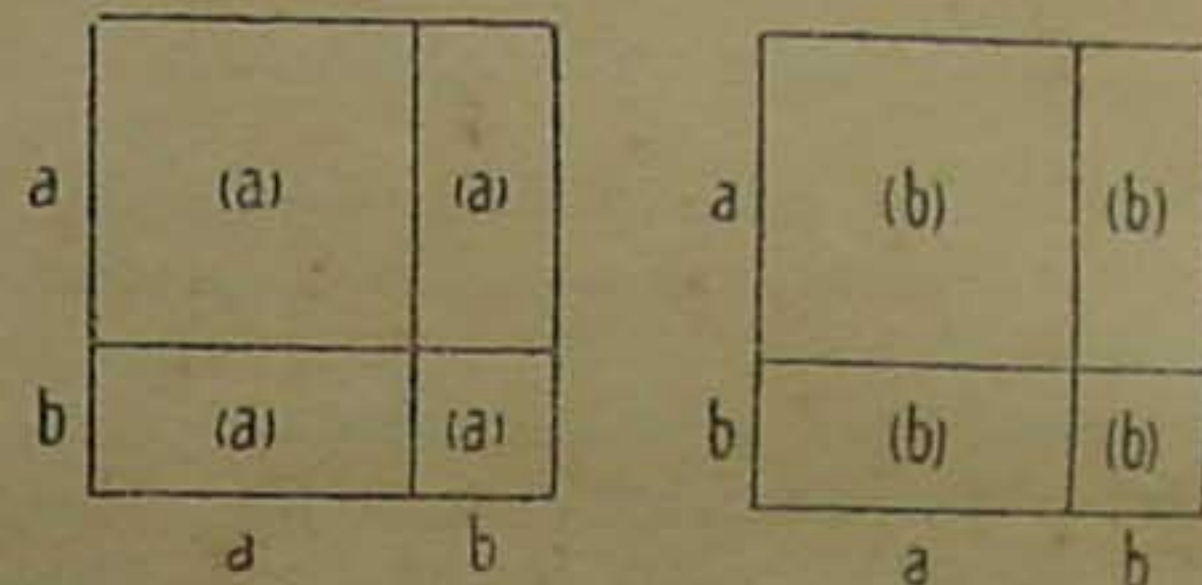


Fig. 58

Vemos, assim, que temos oito paralelepipedos, cujas dimensões são:

fig. da esquerda	aaa	aba	bba	baa
fig. da direita	aab	abb	bbb	bab

o que nos dá:

	1	cubo,	cuja	aresta	é	a	;
	1	»	»	»	»	b	;
	3	paralelepipedos	tendo	por	dimensões	a, a, b	;
	3	»	»	»	»	a, b, b	;

A aresta do cubo, que cortámos em oito pedaços, era $a + b$.

Verificamos, assim, que o cubo construido sobre a somma de dois segmentos a e b , compõem-se :

1.º da somma dos cubos construidos sobre cada um dos segmentos;

2.º de 3 vezes um paralelepipedo tendo por base um quadrado de lado a e por altura b ;

3.º de 3 vezes um paralelepipedo tendo por base um quadrado de lado b e por altura a .

Isto é Geometria.

A mesma figura mostra-nos que, em Arithmetica: o cubo da somma de dois numeros é egual á somma dos cubos d'es-

ses numeros, mais tres vezes o producto do primeiro pelo quadrado do segundo, mais tres vezes o producto do segundo pelo quadrado do primeiro.

Finalmente, em Algebra, dá-uos a formula:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 ab^2 + 3 ba^2 + b^3$$

O que acabamos de expor é perfeitamente analogo ao que dissemos no n.º precedente, com respeito ao quadrado d'uma somma.

Com pequenos cubos de madeira, podemos fazer a construcção indicada e ainda muitas outras. São pequenos jogos de construcção que, dirigidos com um pouco de methodo, ajudam muito a criança a ver as figuras no espaço, e despertam a sua attenção.

Podemos, com toda a precisão, talhar o cubo n'um pedaço de sabão, cortando-o cuidadosamente com um fio metallico, que substitue a serra; mas, o cubo de madeira é preferivel e não é, por certo, difficil, nem dispendioso, de arranjar.

27 - Os numeros triangulares — O vôo dos groues

Eduardo Lucas attribue á observação do vôo de certas aves a origem dos numeros denominados *triangulares*. Na testada vôa uma unica ave; atraz d'ella, em linha, vôam duas; n'uma terceira linha, trez, e assim por diante, de maneira que a disposição geral da columna volante tem a apparencia d'um triangulo.

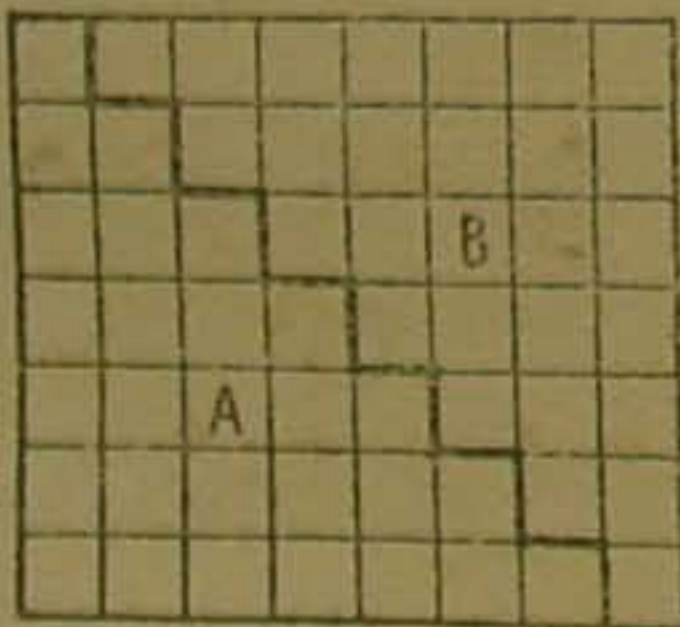


Fig. 59

E' facil fazer uma ideia precisa d'estes numeros e represental-os n'um desenho quadriculado, olhando, por exemplo, para a figura 59 e tomando primeiramente apenas em consideração

a parte A, que nos mostra, em cima, 1 casa, depois 2 casas na segunda linha e 3, 4, 5, 6, 7 casas nas linhas seguintes até á 7.ª.

Temos pois, assim, o 7.º numero triangular :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7.$$

Para o determinar, podiamos fazer a addição, o que nos dava 28; isto, porém, nada nos ensinaria a respeito d'outros numeros triangulares. Se, por exemplo, quizessemos conhecer o 1000º, tinhamos que sommar todos os numeros de 1 até 1000, o que seria demorado e fastidioso. Em vez d'isso, consideremos agora a figura 59 na sua totalidade. A parte B, se a olharmos de baixo para cima, ou a voltarmos de cima para baixo, representa ainda, pelo numero das suas casas, o mesmo numero triangular. A figura completa representa pois, duas vezes o numero triangular em questão; e, como comprehende sete linhas de oito casas cada uma, o numero total de casas é 7×8 , e o numero, que se procura, será a metade d'este producto, isto é : 28.

Temos, pois, n'outros termos :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{7 \times 8}{2} = 28.$$

Se quizessemos obter o 1000º numero triangular, suppondo que procediamos do mesmo modo, tinhamos :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1000 = \frac{1000 \times 1001}{2} = 500500,$$

o que é muito mais rapido do que fazer a addição.

Como, em vez de 1000, podemos ter um numero inteiro qualquer n , temos tambem :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

expressão esta, que nos permite achar o n° numero triangular, que podemos representar por T_n .

O numero total das casas da figura 59 é $2T_n$. Se tirarmos a ultima columna, fica um quadrado de 7 linhas, contendo cada uma 7 casas. Vemos, tambem, que a nova figura é formada pela reunião dos numeros triangulares T_6 e T_7 . Temos, pois,

$$2 T_7 - 7 = 7^2 = T_7 + T_6.$$

Se acrescentarmos em baixo uma nova linha de 8 casas, vemos do mesmo modo, pela simples inspecção da figura que temos :

$$2 T_7 + 8 = 8^2 = T_8 + T_7.$$

E como, em vez de 7, podiamos ter tomado qualquer outro numero n ,

$$\begin{aligned} 2 T_n - n &= n^2 = T_n + T_{n-1}, \\ 2 T_n + n + 1 &= (n+1)^2 = T_{n+1} + T_n. \end{aligned}$$

Estas formulas, que parecem muito scientificas, nem sequer exigem o mais insignificante calculo, porque as vemos nas figuras, porque as vemos, porque as podemos construir por nossas mãos com pequenos quadrados de madeira, ou até com simples tentos, collocando um em cada casa.

28 — Os numeros quadrados

Consideremos (fig. 60) um quadrado composto de 7 linhas de 7 casas cada uma, ou sejam ao todo $7 \times 7 = 7^2 = 49$ ca-

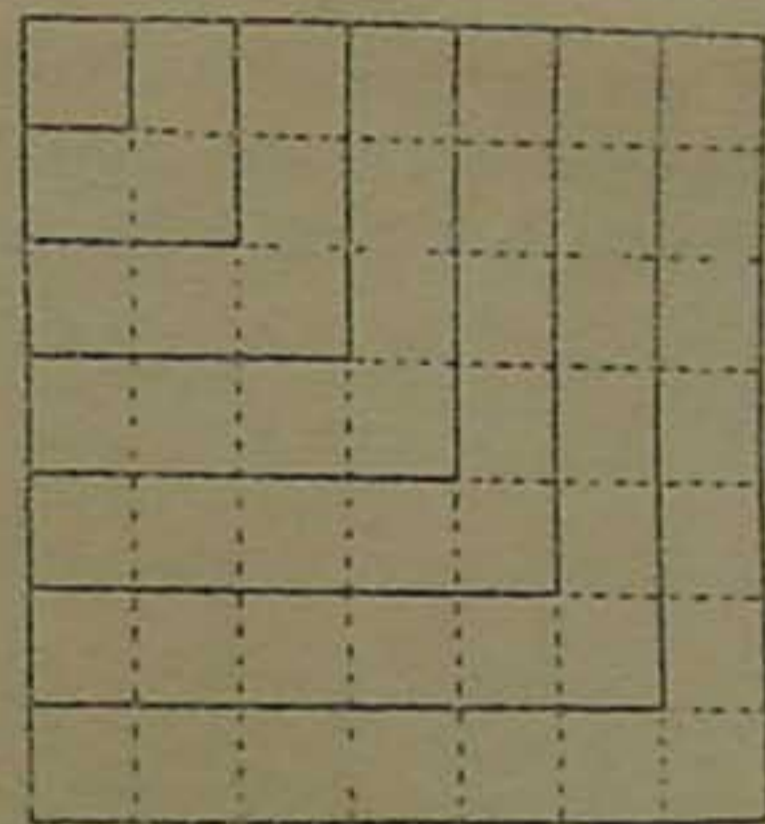


Fig. 60

sas. N'esta figura, vemos traçados, com linhas cheias, quadrados successivos de 1, 2^2 , 3^2 , 4^2 , 5^2 e 6^2 casas.

O primeiro quadrado de 1 casa, é representado pela casa do alto, á esquerda. Para passar d'este quadrado para o de 2^2 ou 4 casas, notamos que foi necessario ajuntar 3 casas, de sorte que $1 + 3 = 2^2$; para passar para o quadrado seguinte, de 9 casas, é preciso ajuntar duas á direita, duas em baixo e uma á direita e em baixo, o que faz 5; e, continuando da mesma maneira, concluimos que :

$$7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13,$$

isto é: que o quadrado de 7 é igual á somma dos 7 primeiros numeros impares.

Em vez de 7, tomemos um numero inteiro qualquer, n . Os primeiros numeros impares são 1, 3, 5..., e o n° é $2n - 1$. Como a figura poude ser feita até este numero n , temos :

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1,$$

o que não é mais do que a traducção do que vemos na figura 60.

Isto mostra-nos que ha uma outra maneira de representar os numeros quadrados; é a que indica a figura 61, em que vemos os quadrados de 1, de 2, de 3 e de 4. Com peque-

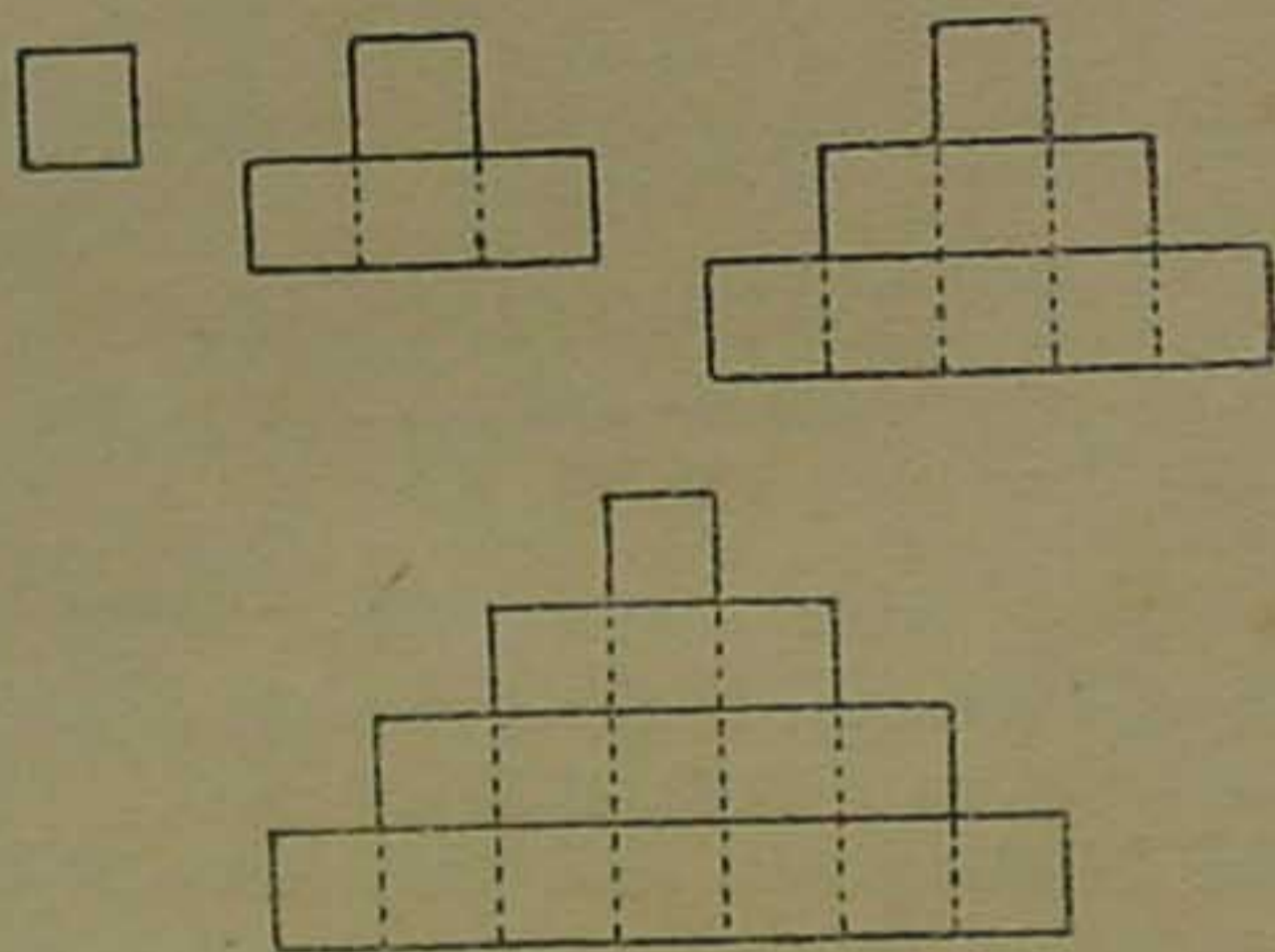


Fig. 61

nos quadrados de madeira, é facil construir e transformar estas differentes figuras.

Chegamos agora, sem embaraço algum, a resolver uma questão muito mais difficil: achar a somma dos quadrados de 1, 2, 3 e 4, por exemplo. Recorrendo á figura 60 e dispondo os quadrados de 1, 2, 3 e 4, de baixo para cima, temos immediatamente a figura 62, que dispensa qualquer explicação, Servindo-nos dos differentes elementos da fig. 61, vemos que ella comprehende :

4 linhas de 1 casa
3 linhas de 3 casas
2 linhas de 5 casas
1 linha de 7 casas

que, reunidas, sobrepondo-se umas ás outras, dão a fig. 63.

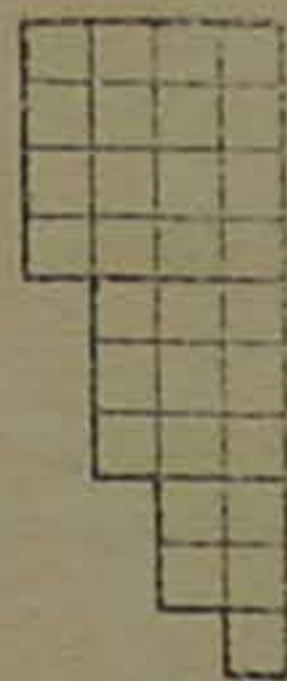


Fig. 62

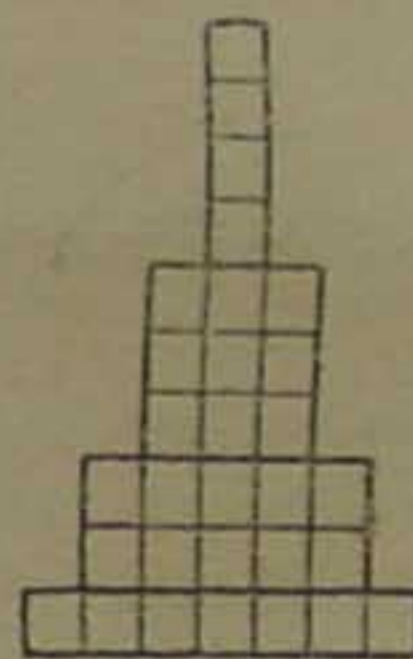


Fig. 63

Reunamos agora (fig. 64) a figura 62, esta mesma figura voltada e a figura 63. Obtemos um rectangulo, que contem tres vezes o numero de casas, que se busca.

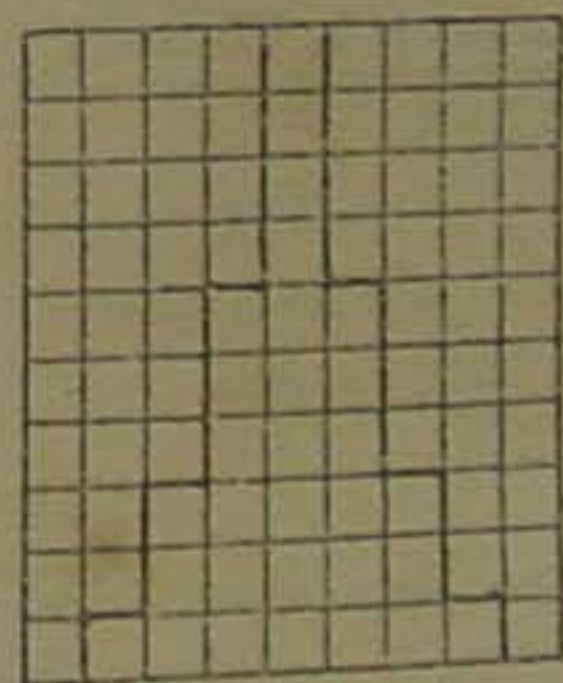


Fig. 64

O numero de linhas d'este rectangulo é :

$$1 + 2 + 3 + 4, \text{ ou } \frac{4 \times 5}{2} = 10$$

O numero de casas contidas em cada linha é, como podemos ver na primeira linha,

$$4 + 1 + 4, \text{ ou } 2 \times 4 + 1 = 9.$$

O numero total de casas é, pois, $10 \times 9 = 90$, e o numero, que se procura, é o terço de 90, isto é: 30. Com effeito, verificamos que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Mas se, em vez de 4, tivéssemos tomado um numero qualquer n , e se tivéssemos procedido da mesma fórma, o rectangulo da figura 64 teria

$$1 + 2 + 3 + \dots + n, \text{ ou } \frac{n(n+1)}{2} \text{ linhas}$$

e $2n + 1$ columns.

O numero total das suas casas seria, pois,

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

e para achar o numero, que se procura, teriamos que tomar o terço d'elle. Isto mostra-nos que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

E' esta uma formula, que os candidatos á Escola Polytechnica nem sempre sabem demonstrar — apesar de muito se affligirem e de muito calcularem — e que se estabelece a brincar com pequenos quadrados de madeira, como as que já vimos.

Esta determinação da somma dos quadrados dos n primeiros numeros inteiros teve outr'ora uma applicação pratica bastante importante, na artilheria, quando se empregavam projecteis esphericos (balas e granadas). Era frequente, nos arsenaes, disporem estes sobre o solo, formando um quadrado; depois, formavam por cima d'este, um novo quadrado mais pequeno, e assim successivamente até ao vertice, que era constituido por uma unica bala. Chamava-se a isto uma *pilha de balas de base quadrada*. Dada esta disposição, para contar as balas comprehendidas n'uma pilha, basta contar o numero n de balas d'um lado da base e applicar a formula supra. Por exemplo: se $n = 17$, a somma que se busca, é

$$\frac{17 \times 18 \times 35}{6} \text{ ou } 1785.$$

Podemos recrear-nos a formar, d'aquella maneira, pilhas de laranjas — contanto que estas sejam todas aproximadamente do mesmo tamanho — ou, ainda mais facilmente, de bolas de jogar, dispondo-as sobre uma camada d'areia, para evitar que se desloquem, o que acarretaria o desmoronamento do edificio.

29 — A somma dos cubos

Para representar um numero elevado ao cubo, como $2^3 = 2 \times 2 \times 2$, $3^3 = 3 \times 3 \times 3$, etc., é de grande vantagem ter um numero avultado de pequenos cubos de madeira — pouco maiores do que os dados de jogar — destinados a fazer as construcções, de que ha pouco fallámos, e as differentes operações, que passamos a indicar.

Pode-se, porém, passar sem elles, e representar cada unidade por um pequeno quadrado de madeira ou de cartão, ou mesmo por um simples tento. E' esta ultima maneira, que nós adoptamos; e depois de vermos como são faceis estas

operações, executamol-as, com mais forte razão, empregando os quadrados e os cubos; quem pode o mais, pode o menos.

Comecemos por ver como podemos representar, com os tentos, os cubos successivos. O cubo de 1 é 1; um unico tento o representa.

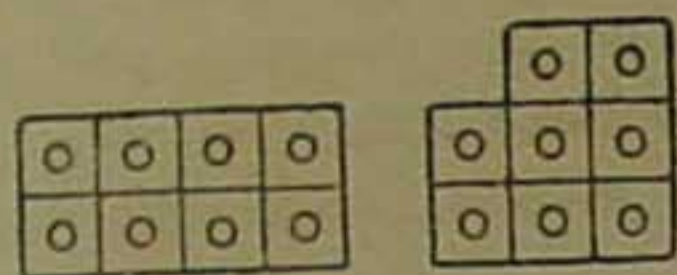


Fig. 65

tos, na primeira parte da figura. Mas, como se vê na segunda parte, os 8 tentos podem ser dispostos d'outra maneira, conservando as trez primeiras columnas e sobrepondo-lhes a quarta horizontalmente.

Passemos ao cubo de 3, que é $3 \times 3 \times 3$, ou 27. Representa-se (fig. 66) por 3 quadrados de 9 tentos cada um, justapostos na primeira parte da figura. Obtem-se a segunda

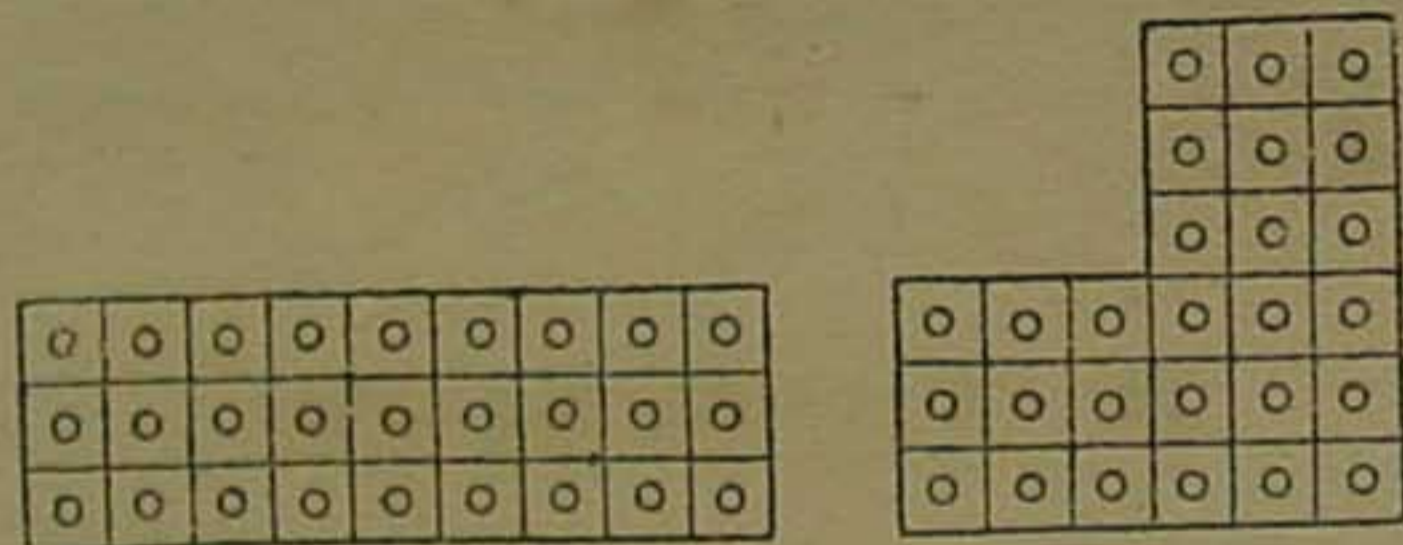


Fig. 66

parte, mantendo as 6 primeiras columnas e sobrepondo-lhes as 3 ultimas horizontalmente.

Finalmente, para o cubo de 4, procedemos da mesma maneira, conservando (fig. 67) as 10 primeiras columnas da primeira parte e collocando por cima d'ellas as 6 ultimas, dispostas horizontalmente, para termos a segunda parte da figura.

Se reunirmos agora (fig. 68) as segundas partes das figuras 65, 66 e 67, ajuntando-lhe mais um tento em cima e é

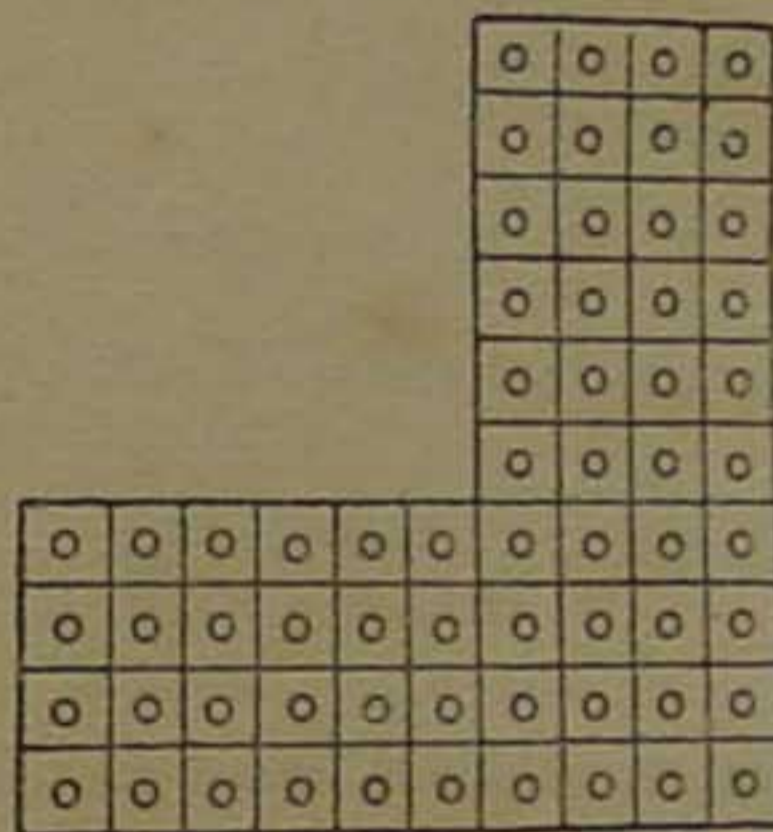
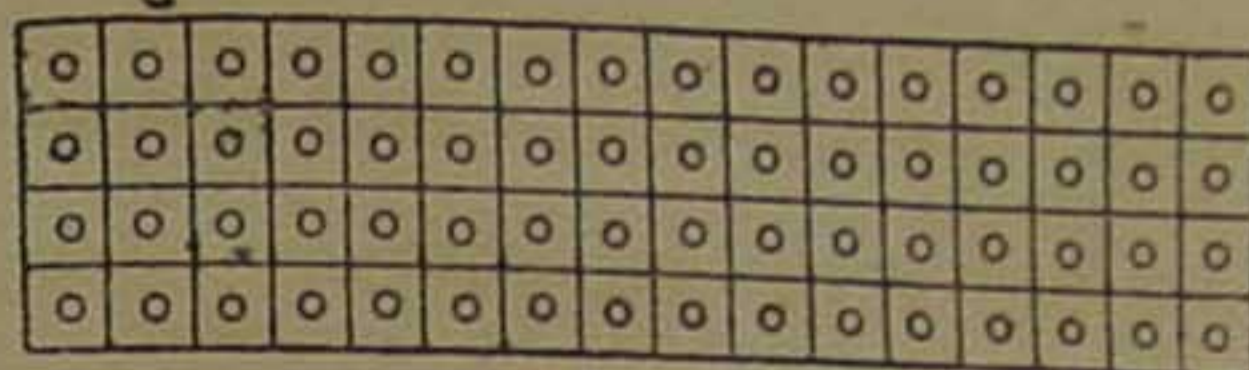


Fig. 67

esquerda, que representa o quadrado de 4, temos a somma dos cubos de 1, 2, 3 e 4, sob a fôrma d'um quadrado, no



Fig. 68

qual o numero de tentos d'uma linha, ou d'uma columna, é $1 + 2 + 3 + 4$ ou 10. A somma d'estes cubos é, portanto, 100.

Ha vantagem em empregar tentos de côres differentes para representar cada um dos cubos; a figura torna-se, assim, muito mais suggestiva.

O processo de construcção, que acabamos de indicar, pôde ser continuado até ao cubo d'um numero qualquer n , e mostra-nos que: *A somma dos cubos dos n primeiros numeros inteiros é igual ao quadrado da somma d'esses numeros; o que se traduz pela formula:*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

Esta expressão pode tambem escrever-se:

$$(Tn)^2 \text{ ou } \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Aqui temos mais um resultado, que é muito mais incommodo e difficil de obter pelo calculo. Nós conseguimos-o por meio d'um simples jogo de construcção.¹

¹ Talvez não seja inoportuno notar que, na nossa taboa de multiplicação sem algarismos (fig. 12), encontramos precisamente os cubos successivos $2^3, 3^3, \dots$, como numero de casas nos recintos que separam os quadrados de $1, 1+2, 1+2+3, \dots$. Pode-se pois, em rigor, verificar sobre aquella simples taboa, tudo o que acabamos de ver.

30 — As potencias de 11

Se tomarmos o numero 11 e quizermos achar o seu quadrado, a multiplicação a fazer é sobremodo facil:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 121 \end{array} \quad 11^2 = 121$$

Para obter o cubo, temos:

$$\begin{array}{r} 121 \\ 11 \\ \hline 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \end{array} \quad 11^3 = 1331$$

À 4.^a potencia dá logar á seguinte multiplicação:

$$\begin{array}{r} 1331 \\ 11 \\ \hline 1331 \\ 1331 \\ \hline 14641 \end{array} \quad 11^4 = 14641.$$

Fixemos a nossa attenção n'estes algarismos:

$$1, 2, 1; \quad 1, 3, 3, 1; \quad 1, 4, 6, 4, 1;$$

com que se escrevem as poteneias.

Podiamos tel-os alcançado, escrevendo menos sem estabelecer as multiplicações, se tivessemos notado: primeira-mente, que se começa e se acaba sempre por 1, e em se-

gundo logar, que basta sommar dois algarismos, que se seguem, para obter um algarismo da potencia seguinte.

Assim: de 11 resulta 121, porque $1 + 1 = 2$;

De 121 resulta 1331, porque $1 + 2 = 3, 2 + 1 = 3$;

De 1331 resulta 13641, porque $1 + 3 = 4, 3 + 3 = 6, 3 + 1 = 4$.

Estas observações foram o ponto de partida de processos extremamente facéis para obter aquelles algarismos — e muitos outros numeros — como veremos no n.º seguinte.

Isto é muito util, porquanto os numeros, de que se trata, teem grande importancia na Algebra, onde os vamos encontrar mais tarde, por pouco que estudemos as mathematicas.

31 — Triangulo e quadrado arithmeticos

Comecemos por escrever (fig. 69), uns por baixo dos outros, tantos algarismos 1 quantos quizermos. Depois, imaginemos que, á direita do primeiro 1, em cima, existem zéros, que nos dispensamos de escrever. Posto isto, forma-

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Fig. 69

mos a 2.ª linha sommando 1 e 0, o que dá 1, e escrevemos este 1 á direita do que já se acha escripto. Passemos á 3.ª linha; lêmos na 2.ª: 1 e 1, 2, que escrevemos á direita do 1; depois, 1 e 0, 1, que escrevemos á direita do 2. Do mesmo modo, partindo da 3.ª linha formamos a 4.ª: 1 e 2, 3; 2 e 1, 3; 1 e 0, 1. E assim por deante, emquanto nos aprouvér. As primeiras linhas da figura dão-nos

os algarismos das potencias de 11, ha pouco achados.

Este quadro é o chamado *triangulo arithmetico de Pascal*, do nome do seu illustre inventor ¹.

¹ Blaise PASCAL, sabio e litterato francez, natural do Clermont-Ferran (1623-1662).

Encontramos (fig. 70) os mesmos numeros n'uma figura, que apenas differe da precedente pela sua disposição. Escreve-se o algarismo 1 em todas as casas d'uma primeira linha e nas de uma primeira columna d'um quadrado quadriculado. Em seguida, preenche-se successivamente todas as outras casas, escrevendo em cada uma a somma do numero, que se lê por cima e do que se lê á esquerda.

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35	56	84	
1	5	15	35	70			
1	6	21	56				
1	7	28	84				
1	8	36					

Fig. 70

Aqui, os algarismos 1, 1; 1, 2, 1; 1, 3, 3, 1; . . . não apparecem nas linhas horizontaes, mas nas obliquas, subindo da esquerda para a direita.

Este quadrado da figura 70 denomina-se *quadrado arithmetico de Fermat* ¹.

Se (fig. 71), n'um taboleiro de xadrez ordinario, considerarmos a casa do canto esquerdo O e uma casa qualquer X,

O						
				X		

Fig. 71

podemos formular a seguinte pergunta: Por quantos caminhos diferentes pode uma torre mover-se de O para X, sem nunca retrogradar, isto é, caminhando sempre da esquerda para a direita e de cima para baixo? O quadrado arithmetico de Fermat dá-nos a resposta, se o applicarmos sobre o taboleiro. Assim, para a figura 71, tal como n'ella está indicado, uma torre pôde mover-se

por 84 caminhos diferentes para passar de O para X.

Os numeros d'estes quadrados gosam ainda d'outras propriedades curiosas e numerosas. Mas, é prematuro occupar-nos d'ellas, por agora.

¹ Pedro FERMAT, mathematico francez, natural de Beaumont de Lomagne (1601-1665). É, talvez, sob o ponto de vista da arithmetica, o mais possante genio, que tem existido em todos os tempos.

32 — As diversas numerações

Quando começámos (n.º 3) a formar os números com palitos, depois com mólhos, com feixes, etc., o que conduz ao conhecimento da numeração, podíamos ter tomado igualmente bem, em vez de dez, qualquer outro número de palitos para constituir um mólho.

Podíamos ter convencionado, por exemplo, que 8 palitos formavam um mólho, 8 mólhos um feixe, e assim por diante; donde teria resultado que os algarismos necessários para escrever um número qualquer (n.º 10) seriam apenas 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, aos quaes — é claro — tornar-se-hia necessário ajuntar o zéro.

A semelhante methodo de escrever os números chama-se um *systema de numeração*, e o número escolhido denomina-se *base* do *systema*.

Assim, o *systema*, que temos visto até aqui e que é universalmente usado, chama-se *systema decimal* e tem por base 10. O que acabámos de indicar tinha por base 8 e podia ser chamado *systema octaval*.

Se tomássemos 12 para base d'um *systema*, que se denominaria *duodecimal*, teríamos que ajuntar 12 palitos para formar um mólho, 12 mólhos para formar um feixe, e assim por diante. Seria então preciso ter, além do zéro, onze algarismos, a saber: os nove da numeração decimal e dois outros para representar o 10 e o 11.

Um *systema de numeração*, que tem por base um número B, exige sempre B — 1 algarismos, sem contar com o zero, e o número B escreve-se invariavelmente: 10.

Não é mau, e é extremamente facil, saber escrever um número n'um determinado *systema de numeração*, quando nol-o dão escripto n'um outro.

Dão-nos, por exemplo, 374 escripto no *systema de base 8*. Procuremos escrevel-o no *systema decimal*. Se nos lem-

brarmos dos nossos palitos, veremos que o número em questão comprehende

4 palitos.....	4
7 mólhos de 8 palitos.....	56
3 feixes de 8×8 palitos.....	192
	<hr/> 252

Na pratica, chega-se ainda mais depressa ao mesmo resultado, partindo da esquerda para a direita, dizendo: 3 feixes de 8 mólhos, mais 7 mólhos, são 31 mólhos; 31 mólhos de 8 palitos são 248 palitos, e mais 4 dá 252.

Se, ao contrario, queremos escrever, no *systema de base 8*, o número 598 do *systema decimal*, temos apenas que subtrair 8, em quanto o podermos fazer, e o resto é o ultimo algarismo da direita. Temos, pois, que fazer a divisão de 598 por 8, e tomar o resto, que é 6. Esta operação dá-nos tambem o número, 74, de mólhos de 8; dividindo-o por 8, temos o número de feixes, 9, e restam 2 mólhos; é o 2.º algarismo. Dividindo 9 por 8, vemos, finalmente, que resta 1 feixe (1 é o 3.º algarismo) e que temos 1 caixa (1 é o 4.º algarismo).

A operação dispõe-se como segue:

$$\begin{array}{r} 598 \mid 8 \\ 38 \overline{) 74} \mid 8 \\ 6 \quad 2 \overline{) 9} \mid 8 \\ \quad \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

e 1126 é o número pedido, escripto no *systema de base 8*.

Se quizessemos escrever este mesmo número no *systema de base 12*, tínhamos:

$$\begin{array}{r} 498 \mid 12 \\ 118 \overline{) 49} \mid 12 \\ 10 \quad 1 \quad 4 \end{array}$$

e o resultado era 41 (10), representando por (10) o algarismo 10 do *systema decimal*.

Vimos acima que 374 do *systema 8*, se escreve 252 no

systema decimal. No systema de base 12, escrever-se-hia 190, como é facil verificar.

Passa-se, assim, d'um systema para outro á nossa escolha, por intermedio do systema decimal.

Com um pouco de pratica, conseguimos calcular em qualquer numeração. O ponto essencial está em não nos esquecermos de que os transportes, os *quantos vão*, se fazem não por dezenas, mas por grupos de B, se B é a base; para isso, é preciso um certo habito.

Damos, em seguida, o numero 1000 da numeração decimal, escripto nos systemas de numeração de base 3, 4, 5.... até 12.

B = 3.....	1101001
4.....	33220
5.....	13000
6.....	4344
7.....	2626
8.....	1750
9.....	1331
10.....	1000
11.....	82(10)
12.....	6(11)4

Uma applicação do systema de numeração de base 3 combinado com o emprego dos numeros negativos, verdadeiramente digna de nota, é a que vamos referir. N'ella, os algarismos reduzem-se a 0, +1 e -1; e não é só esta particularidade, que a torna interessante, mas ainda o facto de se prestar a um emprego pratico, em certas questões relativas aos ascensores hydraulicos.

O sr. Marcel Deprez, membro do Instituto de França, a quem se deve o transporte da energia pela electricidade, teve a amabilidade de me communicar uma observação curiosa sobre o systema de pesos a empregar, para effectuar pesagens com uma balança. Parte-se do principio de que se podem collocar pesos nos dois pratos da balança. N'estas condições, o problema proposto consiste em determinar um systema de pesos (um unico peso de cada especie) a partir

de 1 gramma, por exemplo, de maneira que seja possível equilibrar, por este meio, corpos que pesem 1, 2, 3... grammas, até um determinado limite.

Vemos que, com os dois pesos: 1 gramma e 3 grammas, se podem fazer pesagens até 4 grammas, porquanto $2 = 3 - 1$ e $4 = 3 + 1$.

Tomando os tres pesos: 1, 3 e 9 grammas, podemos pesar até 13 grammas.

D'uma maneira geral: se se tomam n pesos, 1, 3,, $3n - 1$ grammas, podem-se fazer pesagens até $\frac{3n - 1}{2}$ gram-

mas. Por exemplo: com os 7 pesos 1, 3, 9, 27, 81, 243 e 729 grammas, pode-se pesar desde 1 até 1093 grammas.

Esta questão, como é facil de verificar, reduz-se a escrever os numeros successivos no systema de base 3, utilizando os algarismos negativos. Assim, em vez dos algarismos 1, 2, empregam-se 1, $\bar{1}$; este $\bar{1}$ indica que o peso correspondente deve ser collocado no segundo prato da balança. Por exemplo: 59 escreve-se n'este systema, $1\bar{1}1\bar{1}\bar{1}$, porque $59 = 81 - 27 + 9 - 3 - 1$. Para pesar 59 grammas, collocar-se-hão, pois os pesos 81 e 9 n'um dos pratos, e os 27, 3 e 1, no outro; collocando então n'est'ultimo um corpo, que pese 59 grammas, estabelecer-se ha o equilibrio.

Póde ter interesse acrescentar aqui algumas observações referentes á numeração romana. Actualmente a sua importancia mathematica é mediocre; emprega-se apenas para marcar as horas nos mostradores dos relógios. Também é bom conhecer-a para decifrar as datas das inscrições antigas; e eis tudo. Outro é, porém, o seu valor, se a encaramos sob o ponto de vista pedagogico. Limitar-me-hei a resumir as observações, que, sobre o assumpto, me foram apresentadas ha muitos annos, pelo sr. Godar, então director da Escola Monge.

Se, sobre um quadro negro, traçarmos um grupo de riscos muito eguaes e regularmente distanciados, e se perguntarmos bruscamente, a um observador desprevenido, quantos riscos constituem aquelle grupo, a resposta será immediata, se o grupo fôr de dois, tres ou quatro; alem d'este numero,

isto é: de cinco e d'ahi para cima, torna-se necessaria uma operação preliminar do espirito — que pode ser muito rapida —, uma decomposição mental do numero, e a resposta deixa de ser, na realidade, o resultado da visão directa. É este um facto, que parece bem averiguado e que experiencias muito numerosas confirmam.

Por outro lado, vemos que o numero cinco desempenha um papel capital na numeração romana.

D'ahi o perguntar-se: se esta numeração não terá tido por origem primeira o facto physiologico, que acabamos de indicar, e ido buscar os symbolos da sua escripta ás disposições anatomicas da mão do homem.

Os numeros um, dois, trez e quatro, serão representados por um, dois, trez e quatro dedos levantados:

I, II, III, IIII

Cinco é a mão toda, que, se o pollegar estiver levantado e afastado dos outros dedos, reproduz muito aproximadamente a forma da letra V. Dez, é a reunião de duas mãos, dirigidas uma para cima, V, a outra para baixo, Λ , o que dá a letra X.

Não tratamos agora senão dos principios basilares da numeração romana, e abtemo-nos de fallar dos outros symbolos: L, C, M, ... Notaremos, comtudo, que se evita sempre a repetição consecutiva d'um mesmo signal alem de quatro vezes.

Para obter os numeros comprehendidos entre cinco e dez, collocam-se as unidades á direita do signal V:

VI, VII, ...

Da mesma maneira se procede para os numeros superiores a dez:

XI, XII, ...

E' muito verosimil que, por um aperfeiçoamento ulterior, mas certamente muito antigo, occorresse a ideia de indicar a subtracção collocando a unidade, ou outros symbolos, á es-

querda d'um determinado signal numerico, em vez de os pôr á direita, o que representa a addição. Foi assim que se estabeleceu esta maneira de escrever, e muitas outras analogas:

IV, IX, XL, ...

que significa: cinco menos um, ou quatro; dez menos um, ou nove; cincoenta menos dez, ou quarenta. E cousa muito para notar: encontramos aqui, sob uma forma por assim dizer embryonaria, a primeira tentativa de traducção graphica do signal pelo sentido.

Estas observações afiguram-se-nos bastante curiosas para merecerem ser mencionadas. Parece deduzir-se d'ellas que a numeração romana era uma numeração de base cinco, mas incompleta, porque não se servia de symbolos differentes para representar os quatro primeiros numeros e, muito principalmente, porque não possuia o recurso precioso do zéro, esse eixo central de toda a numeração racional, esse nada, que é tudo, em Arithmetica.

33 — A numeração binaria

Vimos, no numero precedente, que, se B é a base d'um systema de numeração, esse systema exige $B - 1$ algarismos, além do zéro. Se tomarmos 2 por base, apenas podemos empregar um unico algarismo: o algarismo 1.

A ideia d'esta numeração, em que todos os numeros se escrevem com dois caracteres apenas, 1 e 0, parece ser de Leibniz¹, embora se diga que os chinezes, em tempos muito remotos, fizeram uso d'ella.

Este systema, se fosse usado na pratica habitual do calculo, apresentaria o inconveniente de alongar muito a escripta dos numeros. Assim, o numero 1000, da numeração deci-

¹ LEIBNIZ, mathematico e philosopho allemão, natural de Leipsig (1646-1716).

mal, escrever-se-hia 1111101000 no systema binario; seria um numero de dez algarismos. Mas, a numeração binaria encontra emprego util e interessante em algumas applicações scientificas, e dá-nos tambem a explicação de certos jogos, como o *Baguenaudier*¹ e a Torre de Hanoi. Baseado n'ella, inventou-se até um pequeno jogo de sala, que Eduardo Lucas descreve na sua *Arithmétique amusante*, sob o nome de *Leque mysterioso*.

Para ficarmos sabendo no que elle consiste, supponhamos que temos os 31 primeiros numeros escriptos em numeração binaria:

1	1				
2	10	12	1100	22	10110
3	11	13	1101	23	10111
4	100	14	1110	24	11000
5	101	15	1111	25	11001
6	110	16	10000	26	11010
7	111	17	10001	27	11011
8	1000	18	10010	28	11100
9	1001	19	10011	29	11101
10	1010	20	10100	30	11110
11	1011	21	10101	31	11111

¹ Jogo da paciência, ou quebra-cabeça, muito antigo, pois parece datar do XVI seculo; mas, pouco conhecido em Portugal.

Consta de duas peças distintas: 1.^a — uma lamina rectangular alongada de metal ou d'osso, com orificios (geralmente em numero de onze), por cada um dos quaes passa um arame, tendo uma das extremidades achatada, como a cabeça d'um prego, para não poder escapar se do orificio, e a outra ligada a uma argola ou anel, tambem de metal ou d'osso; 2.^a — um arame dobrado em fórma de rectangulo, de dimensões eguaes ás da lamina, fixo a um pequeno cabo de madeira, pelo qual se segura na mão.

O passatempo consiste em enfiar e desenfiar, segundo uma determinada ordem, todas as argolas da primeira peça no rectangulo d'arame da segunda. — N. DO T.

Depois, sobre um cartão A, escrevemos no systema decimal todos os numeros d'esta serie, que terminam em 1 no systema binario:

A	B	C	D	E
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Sobre um segundo cartão B, escrevemos da mesma maneira os numeros, cujo 2.^o algarismo, a partir da direita, é um 1 na numeração binaria; em seguida, procedemos de egual modo (cartões C, D e E) para os 3.^o, 4.^o e 5.^o algarismos.

Se, tendo entregue estes cinco cartões a uma pessoa, lhe pedirmos que pense n'um numero e que nos indique os cartões, em que esse numero está inscripto — e só esses —, é o mesmo que pedir-lhe que nos aponte os algarismos com que se escreve, em numeração binaria, o numero em questão. E' facilimo verificar que, para achar esse numero, basta sommar os numeros, que figuram na primeira linha

d'aquelles cartões. Seja, por exemplo, 25 o numero em que se pensou; os cartões, que nos indicam, são o A, o D e o E, que começam por 1, 8 e 16; óra, $1 + 8 + 16 = 25$.

Com 6 cartões, em lugar de 5, pode-se prolongar a serie numerica até 63, em vez de ficarmos em 31; com 7 cartões, chega-se a 127. Tambem se póde dar á adivinhação uma apparencia ainda mais mysteriosa, substituindo os numeros por nomes proprios. Organisa-se, d'uma vez para sempre, uma li-ta de concordancia dos nomes e numeros, e tem-se sempre presente que os differentes cartões começam por 1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64.

Cada um de nós pode confeccionar muito facilmente um jogo d'estes cartões, até 7, por exemplo. E, se não conseguirmos assim passar por feiticeiro, tiramos pelo menos, de tudo isto, o proveito de nos exercitar a fazer sommas de cabeça, com rapidez e segurança; sem o que, expor-nos-iamos a perder todo o prestigio.

34 — As progressões por differença

Tomemos uma serie de numeros, por exemplo :

$$4 \quad 7 \quad 10 \quad 13$$

em que a differença entre dois numeros consecutivos é sempre a mesma :

$$7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 3$$

A uma serie assim, chama-se *uma progressão por differença* ou *uma progressão arithmetica*.

A differença constante 3, — n'este exemplo — é a *razão* da progressão.

Os numeros 4, 7, 10 e 13, são os *termos* da progressão. Escrevemos aqui apenas quatro; mas, podem formar-se tantos, quantos quizermos.

E' de notar que a serie de numeros inteiros, 1, 2, 3, ... forma uma progressão por differença, cuja razão é 1, e que a serie dos numeros impares, 1, 3, 5, ... constitue uma progressão por differença de razão 2.

Vejam os (fig. 66) como se pode representar graphicamente a progressão 4, 7, 10 e 13, acima tomada para exemplo. N'uma folha de papel quadriculado, marcamos com

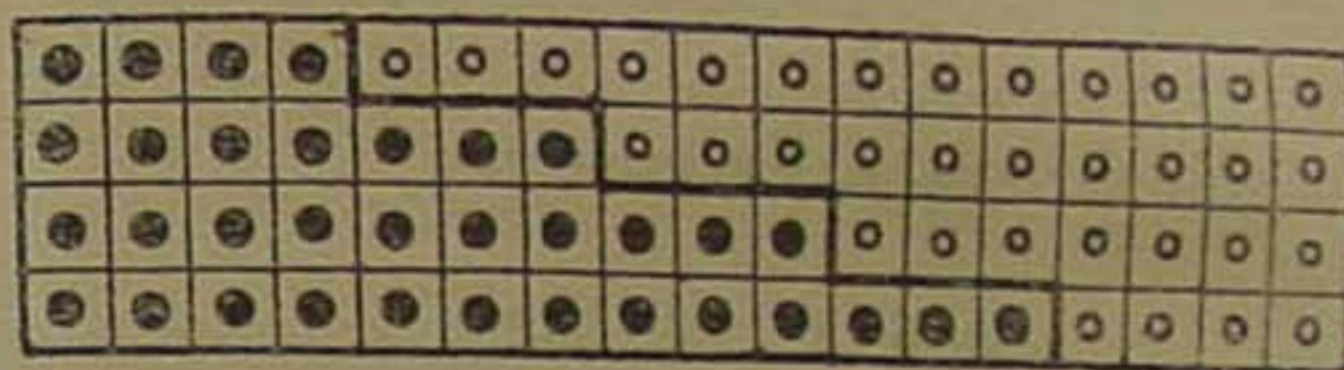


Fig. 66

tentos pretos 4 casas na primeira linha, 7 na 2.^a linha, 10 na 3.^a e 13 na 4.^a. Depois, acrescentando 4 casas a esta ultima linha e completando o rectangulo, vemos que este comprehende o dobro dos termos da progressão, representados por tentos pretos e brancos.

Verificamos mais que a somma dos termos equidistantes dos extremos é igual á somma dos mesmos extremos. Por ultimo, vemos que a somma dos termos da progressão é igual a metade do numero de casas do rectangulo, isto é :

$$\frac{17 \times 4}{4}$$

D'uma maneira geral, se a e l são os dois termos extremos e se n é o numero dos termos, esta somma exprime-se por :

$$\frac{(a + l) n}{2}$$

Se $a = 1$ e se a razão é 1, será $l = n$, e teremos $\frac{n(n+1)}{2}$.

Se $a = 1$ e se a razão é 2, será $l = 2n - 1$, e teremos n^2 . Achamos, assim, resultados já encontrados mais acima.

Notêmos a analogia que existe entre a formula supra $\frac{(a + l) n}{2}$ e a da area do trapezio.

Se r é a razão de uma progressão por diferença, podemos representar sempre essa progressão por :

$$a \quad a + r \quad a + 2r \dots a + (n - 1)r.$$

35 — As progressões por quociente

Se uma serie de numeros, por exemplo :

$$2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 162,$$

é tal que o quociente de qualquer d'elles dividido pelo precedente tem sempre o mesmo valor, esses numeros formam uma *progressão por quociente* ou *geometrica*. O quociente constante é a *razão* da progressão. Pode tambem dizer-se que, n'uma progressão por quociente, a relação entre qualquer termo e o precedente é constante e chama-se razão. No nosso exemplo, a razão é 3, o primeiro termo é 2 e o numero de termos é 5.

Os numeros 1, 10, 100, 1000..., no systema decimal, formam uma progressão por quociente, cuja razão é 10. Os mesmos numeros, escriptos n'um systema de numeração de base B, formam uma progressão por quociente de razão B.

A razão tanto pode ser uma fracção, como um numero inteiro. Se é maior do que 1, os termos vão augmentando sempre e a progressão diz-se *crescente*. Se a razão é menor do que 1, a progressão é *decrecente* e os seus termos vão diminuindo successivamente.

Tem interesse poder achar-se a somma dos termos d'uma progressão por quociente. Tomemos o exemplo de ha pouco :

$$2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 162.$$

Se multiplicamos um termo qualquer pela razão 3, te-

mos o termo seguinte. Se o multiplicarmos por 3 - 1 ou 2, teremos, pois, a differença dos dois termos consecutivos :

$$\begin{aligned} 2(3 - 1) &= 6 - 2, & 6(3 - 1) &= 18 - 6, \\ 18(3 - 1) &= 54 - 18, & 54(3 - 1) &= 162 - 54, \\ 162(3 - 1) &= 486 - 162. \end{aligned}$$

Fazendo a addição, se a somma é s , temos :

$$s(3 - 1) = 486 - 2; \quad s = \frac{486 - 2}{3 - 1} = 242.$$

D'um modo geral : seja

$$a \quad b \quad c \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad k$$

a progressão de razão q , cuja somma s se pretende achar. Se lhe accrescentarmos mais um termo : $l = kq$, teremos

$$\begin{aligned} a(q - 1) &= b - a, & b(q - 1) &= c - b, & \dots \\ k(q - 1) &= l - k, \end{aligned}$$

donde

$$s(9 - 1) = l - a \quad e \quad = s \frac{l - a}{9 - 1}.$$

Se a progressão é decrecente, temos, pela mesma razão:

$$\frac{a - l}{1 - q}.$$

As progressões por quociente desempenham um papel muito importante, no calculo ; tem numerosas applicações.

Mesmo quando a razão é pouco maior do que 1, se o numero de termos é um tanto elevado, as progressões conduzem a numeros de tamanha grandeza, que, á primeira vista, provocam espanto em quem esteja desprevenido. D'isso, vamos encontrar alguns exemplos, nos numeros seguintes.

E' conveniente fazer notar á creança que, se a é o primeiro

termo d'uma progressão por quociente, q a razão e n o numero de termos, podemos escrever a progressão assim :

$$a \quad aq \quad aq^2 \quad \dots \quad aq^{n-1}$$

36—Os bagos de trigo e o taboleiro do xadrez

Não se sabe ao certo quem foi o inventor do jogo do xadrez; mas, a este proposito, existe uma velha lenda hindu, que merece ser conhecida.

Encantado com este novo jogo, o monarcha, segundo a lenda, mandou chamar o inventor para lhe dizer que indicasse elle proprio a recompensa que desejava.

«Solicito apenas — respondeu o interessado — que vos dignaes dar-me um bago de trigo para ser collocado na 1.^a casa do meu taboleiro; 2 para pôr na 2.^a, 4 na 3.^a e continuar assim, sempre a dobrar, até á 64.^a casa.»

A modestia de tal pedido encheu de assombro o monarcha, que deu ordem para que fôsse satisfeito sem demora. Mas, ainda mais estupefacto ficou, quando o vieram informar da impossibilidade absoluta d'executar a sua ordem. Para isso, era preciso cerca de oito colheitas annuaes produzidas pela superficie da terra, suppondo-a semeada de trigo na sua totalidade.

O numero de bagos de trigo reclamado é a somma dos termos da progressão

$$1 \quad 2 \quad 2^2 \quad \dots \quad 2^{63},$$

o que dá $2^{64} - 1$. Esse numero, escripto no systema decimal, é :

$$18446744073709551615$$

Tem, como se vê, vinte algarismos. Não procuraremos lê-lo; as palavras, que pronunciaríamos, pouco diriam ao nosso espirito. E, comtudo, vamos encontrar, dentro em pouco, outros numeros ainda muito maiores.

37 — Uma casa barata

Um amigo nosso, por certo conhecedor da historia do inventor do jogo do xadrez, mandou construir uma pequena casa d'um andar. Dava ingresso no rez-do-chão, que era um pouco alto, uma escada exterior de 7 degraus; a escada interior, que conduzia ao andar, tinha 19 degraus.

Passados alguns annos, teve que vender a casinhola, de resto bem conservada e d'aspecto agradável. Ao primeiro comprador, que appareceu, Felix — devia chamar-se Felix — fez a seguinte proposta :

«Não sou muito exigente e tenho pressa de vender. O senhor põe 5 réis sobre o 1.^o degrau da escada exterior, 2 sobre o 2.^o, 4 sobre o 3.^o e vae dobrando sempre até ao fim da escada interior. E' um ovo por um real; são apenas 25 degraus, ao todo.»

«Está dito! Negocio fechado», exclamou Pancrácio, radiante d'alegria por tamanha pechincha — o comprador chamava-se com certeza Pancrácio.

No dia seguinte, Pancrácio, tendo previamente offerecido um esplendido almoço ao Felix, encaminhou-se para a escada exterior a fim de se desobrigar dos $2^{26} - 1$ cinco réis, que devia pagar.

Até ao topo da escada exterior, tudo correu perfeitamente; os primeiros degraus da escada interior ainda não custaram muito a subir; mas, dentro em pouco, a bolsa de Pancrácio esvasiava-se mais do que elle tinha previsto.

Muito gentilmente, o vendedor offereceu-se para lhe mostrar o resultado do calculo, tornando-se assim desnecessario continuar a ascensão. — «Meu caro Pancrácio, disse-lhe, deve-me 335 514 5315 réis; mas, d'um amigo como o senhor, não quero acceitar os 15 réis; faço-lhe esse abatimento.»

Ao ouvir estas palavras, Pancrácio ficou com uma cara de palmo e meio! Desde esta epocha, parece que teve o maior cuidado em que não deixassem de ensinar a seus filhos o que seja uma progressão.

Elle sabia-o regularmente bem; mas, pareceu-lhe que a lição lhe havia ficado um pouco cara.

38 — Um real posto a render

Uma das mais importantes applicações praticas das progressões é a que diz respeito aos *juros compostos*. Se pozermos 1 tostão a render durante um anno, a 5 por cento, dá-nos de lucro 5 réis. Se, em vez de recebermos estes 5 réis, os ajuntarmos ao tostão, teremos 105 réis, que podemos collocar a render durante um 2.º anno, e assim por diante. Quando o numero d'annos é consideravel, o accrescimento do capital, pela regra de juros compostos, é verdadeiramente phantastico.

Suppondo, por exemplo, que, no começo da era de Christo, 1 real foi posto a render a juros compostos e á taxa de 5 por cento, o calculo diz-nos que, em fins do seculo XIX, o valor accumulado seria representado por mais de quinhentos milhões de esferas d'ouro puro do tamanho da Terra.

Um resultado assim — diga-se de passagem — mostra claramente a impossibilidade d'uma applicação geral da regra de juros a todos os casos, que se apresentam na pratica. A sua propria enormidade impede que façamos uma ideia exacta de tal somma.

Em vez d'isto, podemos formular a seguinte pergunta: Durante quanto tempo precisa ser posto a render 1 real, a juros compostos e á taxa de 5 por cento, para que o valor accumulado atinja 100 contos de réis?

A resposta é: 378 annos. De maneira que, se um dos vossos antepassados do tempo de D. João III, ahí por 1527, tivesse tido a feliz ideia de collocar a render, em vosso proveito, o valor de um tostão a 5 por cento e a juros compostos, esse tostão valeria hoje 10.000 contos de réis.

Se esta operação tivesse sido realisada no anno 59 da nossa era, ao juro de 1 por cento apenas, ter-se-hia obtido o mesmo resultado em 1907, isto é: o tostão posto a render assim, teria attingido n'esse anno um valor de 10 000

contos — resalvando, é claro, os accidentes que podessem sobrevir n'esse intervallo de tempo.

39 — O jantar de cerimonia

N'uma bella tarde de verão, doze amigos resolveram jantar juntos. Eram todos pessoas, que ligavam grande importancia á etiqueta, e, como os logares não tivessem sido marcados d'antemão, estabeleceu-se uma discussão muito cortez, mas sem resultado algum, no momento de se assentarem á mesa. Alguem propoz, para vencer a difficuldade, que se tentassem successivamente todas as maneiras possiveis de resolver a questão; depois, restaria apenas escolher a disposição julgada mais feliz. Assim se fez durante alguns minutos; mas, as cousas em vez de se resolverem, mais se enredaram.

Felizmente, entre os convivas, encontrava-se um professor do collegio da localidade, que possuia algumas noções de mathematica. — «Meus bons amigos, disse elle, a sopa começa a arrefecer. Tiremos os logares á sorte; é muito mais expedito.» Este sabio conselho foi seguido, e o jantar terminou no meio da mais franca cordialidade. A' sobrezeza o professor perguntou: «Sabeis quanto tempo era preciso para realisar todas as maneiras possiveis de nos distribuirmos em volta d'esta mesa, levando apenas um segundo para passar d'uma distribuição para outra?» Como todos ficassem calados, proseguiu: «Executando esta pequena tarefa, noite e dia, sem pararmos um unico instante, gastaríamos n'isso mais de 15 annos e 2 mezes, mesmo sem nos occuparmos em saber quantos annos bissextos haveria n'esse periodo de tempo. Vêem portanto que, se o assado corria risco de se queimar, nós tínhamos a certeza de morrer todos de fome, de exaustão e de privação de somno. Sejammos pois, cerimoniaes, se o animo nol-o pedir; mas, sem exaggeros.»

E era verdade; o numero exacto das differentes maneiras

como 12 pessoas podem tomar logar a uma mesa de 12 ta-
lheres, é 479001600 — lêde bem : mais de 479 milhões.

Este resultado causa verdadeira surpresa, quando se
pensa que, para 2 convivas, não são precisos mais do que
2 segundos, e que, para 4, as operações concluem-se em
menos de meia hora.

Os grandes numeros, que se nos deparam aqui, são devi-
dos a permutações, e o computo é facil de fazer.

Quando temos um certo numero d'objectos differentes e
os queremos alinhar collocando-os em logares differeates
previamente marcados, qualquer das disposições adoptadas
é uma *permutação* d'esses objectos.

Se se trata apenas de dois objectos differentes, que deno-
minaremos *a* e *b* e de dois logares differentes, as duas unicas
permutações possiveis são *a b* e *b a*.

Para formar as permutações de trez objectos, *a*, *b*, *c*, po-
demos tomar a permutação *a b* e ajuntar-lhe *c* em trez loga-
res differentes : depois de *b*, entre *a* e *b* e antes de *a*.

A permutação *b a* tambem dá outras trez, ajuntando-lhe *c*;
de maneira que teremos o quadro geral das permutações
de *a*, *b*, *c*, escrevendo :

<i>a b c</i>	<i>b a c</i>
<i>a c b</i>	<i>b c a</i>
<i>c a b</i>	<i>c b a</i>

o que dá 2×3 ou 6 permutações.

Se tomarmos uma qualquer d'estas permutações, por
exemplo : *a b c*, e se lhe ajuntarmos uma 4.^a letra, *d*, tere-
mos 4 permutações :

a b c d *a b d c* *a d b c* *d a b c*

e cada permutação de 3 lettras, dando assim 4 de 4 let-
tras, o numero de permutações de 4 lettras será 6×4 ou
 $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Continuando da mesma fórma, veremos que o numero das
permutações de 5 lettras será $2 \times 3 \times 4 \times 5$, e, d'um mo-
do geral, o numero das permutações de *n* lettras será
 $2 \times 3 \times 4 \dots n$; que se representa frequentemente por *n!*

Pelos resultados que seguem, vê-se com que rapidez
crescem estes numeros *n!* de permutações, quando *n* au-
gmenta.

<i>n</i>	<i>n!</i>
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600

As permutações tem uma grande importancia em mathe-
matica, e applicam-se a diversos jogos e passatempos, taes
como os anagrammas. Teem-se publicado numerosissimos
trabalhos sobre as permutações, alguns d'elles muito te-
chnicos e eruditos. Não temos que nos occupar d'elles n'este
logar ; mas, é bom deixar aqui registada a ideia genial, que
teve Ed. Lucas, de representar graphicamente, por um de-
senho, as permutações de varios objectos ; é o que elle de-
nominou *permutações figuradas*. Para comprehendermos bem
no que estas consistem, suppunhamos que, sobre um papel
quadriculado, formamos um quadrado de *n* linhas de *n* ca-
sas cada uma, e, limitando-nos ás permutações de 4 obje-
ctos, fazemos *n* = 4. Teremos um quadrado de 16 casas. Se
substituírmos os nossos 4 objectos, *a*, *b*, *c*, *d*, pelos 4 nume-
ros 1, 2, 3, 4, uma permutação qualquer, *c b d a* por exem-
plo, escrever-se-ha 3 2 4 1. Na 1.^a columna do quadrado,
marcamos então a 3.^a casa e tracejemol-a ; fazemos outro
tanto á 2.^a casa da 2.^a columna, á 4.^a da 3.^a columna e á 1.^a
da 4.^a columna. As quatro casas tracejadas representam,
assim, a permutação *c b d a*.

A figura 73 mostra-nos as 24 permutações de 4 objectos.
Para facilitar a sua comprehensão e leitura, reproduzimos,

por baixo do quadro, as permutações correspondentes, com a mesma disposição.

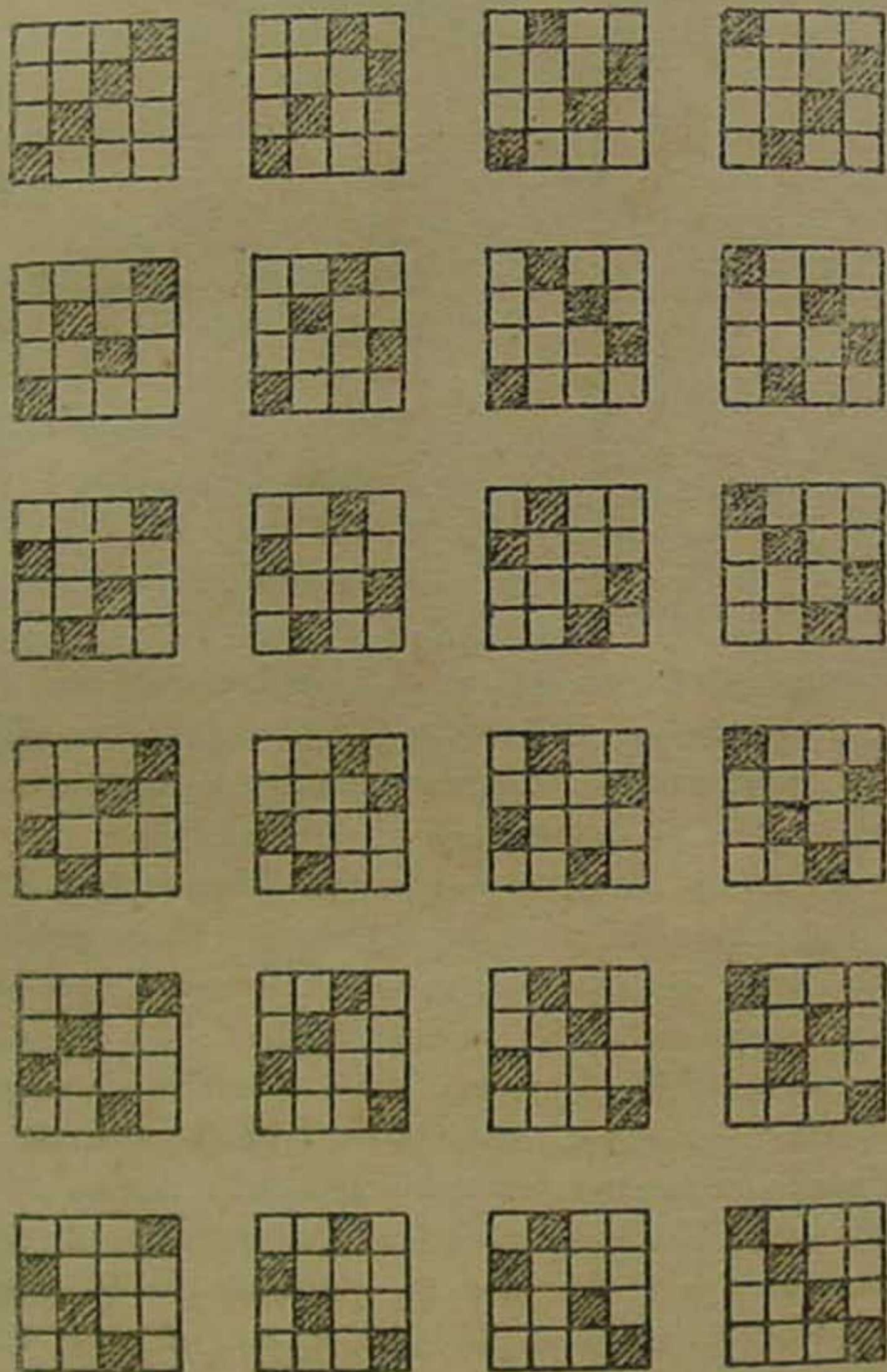


Fig. 73

<i>deba</i>	<i>cdba</i>	<i>bdca</i>	<i>adcb</i>
<i>dbca</i>	<i>cbda</i>	<i>bcda</i>	<i>acdb</i>
<i>dacb</i>	<i>cadb</i>	<i>badc</i>	<i>abdc</i>
<i>dcab</i>	<i>cdab</i>	<i>bdac</i>	<i>adbc</i>
<i>dbac</i>	<i>cbad</i>	<i>bcad</i>	<i>acbd</i>
<i>dabc</i>	<i>cabd</i>	<i>bacd</i>	<i>abcd</i>

Se considerarmos qualquer dos quadrados da figura 73 como um taboleiro de xadrez, as casas tracejadas representam as posições de torres, que não estão em cheque entre si, e isto é extensivo a todos os quadrados analogos. Segue-se d'aqui que, sobre um taboleiro ordinario de 64 casas, podem-se collocar oito torres de 40320 maneiras diferentes e por fôrma que não estejam reciprocamente em cheque. Sobre um taboleiro de 100 casas, poder-se-hiam collocar dez torres, nas mesmas condições, de 3628800 maneiras diferentes. Consulte-se o quadro da pagina 113, para os numeros que indicamos. São questões estas, que não se resolveriam facilmente sem o auxilio das permutações, e que se tornam facilimas, graças a esse auxilio.

Podemos tambem procurar conhecer de quantas maneiras diferentes se podem ordenar as cartas d'um baralho do jogo do piquet: $n! = 32!$, ou as d'um baralho do jogo do whist: $n! = 52!$; mas, não nos deixemos arrastar pela tentação de escrever esses numeros no systema decimal. Procuremos antes saber de quanto tempo precisaríamos para effectuar todas essas disposições, gastando um segundo com cada uma d'ellas. Deixamos esse prazer aos nossos leitores, ou melhor aos seus alumnos. Mas, não tentem tambem escrever esses numeros, nem mesmo avaliados em secalos; isso em nada contribuiria para a formação do espirito.

40 — Um numero bastante grande

Por um lado, com as progressões e por outro, com as permutações, acabamos de subir a alturas bastante grandes na escala dos numeros.

Na esperança de voltar a uns limites mais razoaveis e de evitar assim a vertigem, pedie a qualquer pessoa que vos escreva, com trez 9, o maior numero possivel. A resposta mais frequente será:

999

numero com effeito, modesto, commedido e honesto, que não tem a pretensão de vos pôr a cabeça a arder.

Mas, se por um mau acaso o vosso interlocutor é um mathematico consciencioso, que deseja responder á vossa pergunta nos termos em que a formulastes, dar-se-ha uma pequenissima modificação na maneira de escrever os algarismos, e lereis, então

99^9

o que quer dizer que é preciso elevar 9 a uma potencia designada pelo numero 9^9 . Este numero é facil de obter em poucos minutos; o vosso alumno achal-o-ha sem hesitação alguma, se não o quizerdes calcular vós mesmo. E'

387 420 489

e este resultado é devéras interessante, porquanto sabeis que, devido a elle, tendes apenas que fazer 387420488 multiplicações, para terdes o numero desejado, escripto no systema decimal. São multiplicações muito simples, não tendo senão 9 por multiplicador; mas, o seu numero é talvez sufficientemente grande, para vos deixar um tanto hesitantes.

Decididamente, não nos atrevemos a animar-vos a emprender essa tarefa. Deixae-nos apenas dizer-vos — e repeti-o ao vosso alumno, que mais tarde verificará o facto — que o numero 99^9 , se fosse escripto em numeração decimal, teria

369693100 algarismos.

Para o escrever sobre uma unica tira de papel, suppondo que cada algarismo occupa uma extensão de 4 millimetros, bastaria que essa tira tivesse o comprimento de

1478 kilometros 772 metros e 40 centimetros.

E' um pouco mais que a distancia de Paris a Avinhão, em caminho de ferro.

Para escrever 10^{10} , nas mesmas condições, seria preciso

uma tira de papel, que desse uma volta completa em torno da Terra. ¹

O tempo materialmente necessario para escrever o numero 99^9 , gastando um segundo por algarismo e trabalhando 10 horas por dia, não excederia, de nenhum modo, 23 annos e 48 dias, supprimidos que fossem todos os domingos e dias feriados, isto é: contanto que não houvesse nenhum dia de descanso.

Ainda como esclarecimento, podemos affirmar-vos que o primeiro algarismo do numero, que buscamos, é 4 e que o ultimo é 9. Falta-nos, portanto, achar apenas 369693098 algarismos. Talvez vos pareça de pouca monta esta simplificação; francamente, somos da mesma opinião. Em compensação, esperamos que concordeis que o titulo d'este n.º: «Um numero bastante grande», está plenamente justificado.

Uma ultima observação — e bastante curiosa — é que 11^1 é simplesmente 1, que $2^2 = 16$ e que 3^3 é um numero de 13 algarismos:

7625597484987 ²

¹ Esta observação foi feita pelo sr. CH.-ED. GUILLAUME, n'um artigo muito interessante da *Revue générale des sciences* (30 d'outubro de 1906).

² Apesar das explicações dadas, diferentes leitores foram victimas d'uma confusão a proposito da significação de 3^{13} , e alguns escreveram-nos dizendo terem achado, como resultado, 19083 e não um numero de 13 algarismos. Provem isso d'uma falsa interpretação do symbolo a^{bc} em que se póde ver $(a^b)^c$ ou $a^{(bc)}$. Esta ultima interpretação é a unica racional, visto $(a^b)^c = a^{bc}$. Seria pouco logico empregar a forma escripta a^{bc} para representar a operação mais simples a^{bc} . Posto isto, 99^9 só pode significar $9^{(99)}$ e 3^3 quer dizer 3^{21} e não 27^1 .

41. — Compasso e transferidor

Nos nossos exercicios de desenho, que nunca devem ter soffrido interrupção, talvez já se nos tenham deparado circulos e fragmentos de linhas circulares, que nos contentámos de traçar á mão, d'uma maneira approximada.

Querendo, porém, executar o seu traçado com uma certa precisão, é chegado o momento de habituar a creança ao emprego do compasso. Exercitar-se-ha a traçar arcos de circulo, depois circulos completos, primeiro a lapis e, mais tarde, a tinta. Seguindo os processos indicados em todos os tratados classicos, aprenderá a traçar perpendiculares a rectas, a construir triangulos e outras figuras, etc.

Estas construcções, para serem executadas com algum rigor, exigem ainda o emprego d'outro instrumento chamado *transferidor*, tambem muito simples e que presta serviços pouco mais ou menos equivalentes, sob as differentes fórmulas que apresenta: semi-circular ou rectangular, metalico ou de escama, etc.

Quanto ao modo de divisão do transferidor, deve dar-se a preferencia á divisão em *grados*, na qual o angulo recto é dividido em 100 grados e o grado em decimos, centesimos, etc. Esta fórmula de medida dos angulos tinha sido instituida ao mesmo tempo que o *systema metrico*; mas foi abandonada, voltando-se ao antigo *systema dos graus*, minutos, etc. Hoje — e com razão — torna a empregar-se, figurando mesmo em certos programmas officiaes, e diversos serviços publicos importantes teem adoptado constantemente esta divisão em grados. Convem, pois, logo de começo, tornal-a familiar às creanças e mostrar-lhes, sob o nome de 50 grados — de preferencia ao de 45 graus —, a metade d'um angulo recto.

As construcções a fazer devem ser muito simples e deixadas, a miude, á iniciativa da creança, e o que é muito importante, é mandal-a executar a mesma construcção em escalas differentes; adquire, assim, por si só, independente-

mente de qualquer definação doutrinal, a noção de figuras tendo a mesma fórmula e grandezas differentes, isto é: de figuras semelhantes.

A breve trecho, a creança vê que a escala escolhida para fazer uma construcção em nada altera os angulos, que, pelo contrario, se se adopta uma escala dupla ou tripla, todas as extensões correspondentes tornam-se tambem duplas ou triplas. N'uma palavra: sem fazer, por agora, nenhum estudo geometrico, a creança toma, pela experiencia, conhecimento — acompanhado de certeza — de muitas verdades, cuja demonstração será mais tarde tanto mais facilmente assimilavel.

Existem outras propriedades, que é util conhecer, certas denominações, que convem fixar; mas, para fallar d'ellas, torna-se necessario, por agora, pedir provisoriamente ao nosso alumno que nos acredite sob palavra e que confie em nós. Estes assumptos fazem o objecto dos n.º seguintes.

42 — O circulo

O *circulo* é a figura redonda (fig 74) que se traça com o compasso, mantendo fixa uma das suas pontas. O ponto O onde se fixa esta ponta é o *centro*; a distancia do centro a um ponto qualquer M do circulo, é o *raio*. O dobro do raio é o *diametro*; qualquer recta MM', passando pelo centro, é um diametro; o comprimento do segmento MM' é o dobro do raio. Quando se consideram dois pontos, A e B, sobre um circulo, a porção do circulo limitada por A e B, tanto n'um sentido, como no outro, denomina-se um *arco de circulo*. O segmento de recta AB é uma *corda*, que subtende os dois arcos A B. A porção do plano, comprehendida entre a corda e o arco, chama-se um *segmento de circulo*. Quando se une o ponto O a dois pontos



Fig. 74

A e B do círculo, o angulo AOB denomina-se *angulo ao centro*. O angulo AMB, cujos lados passam por A e B e cujo vertice está em M, sobre o círculo, é um *angulo escripto* no segmento AMB; este angulo é metade do angulo AOB. Unindo o centro e o meio C do arco AB, a recta OC é perpendicular á corda AB e corta-a ao meio, em D.

Se tomamos, sobre o círculo, um ponto N situado abaixo da corda AB da figura, a somma dos dois angulos AMB e ANB, é igual a dois angulos rectos.

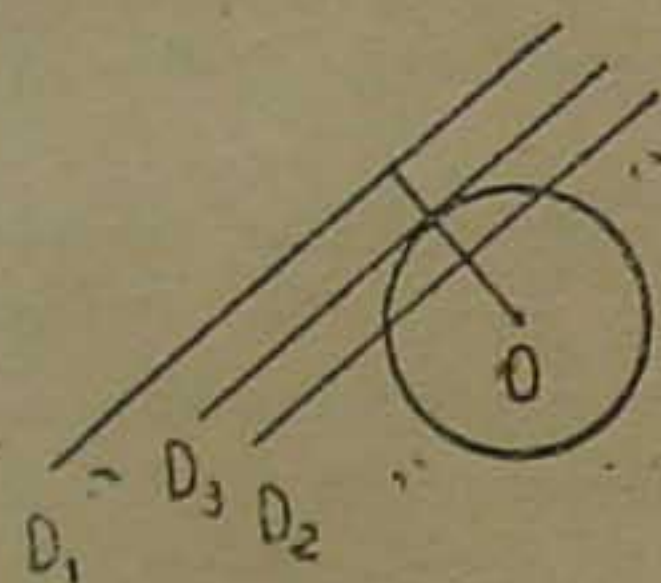


Fig. 75

Quando consideramos (fig. 75) um círculo e uma recta, esta pode (D_1) ser exterior ao círculo; ou (D_2) cortar o em dois pontos: diz-se, então, que é uma *seccante*; ou, finalmente, tocar o círculo n'um só ponto: n'este caso é *tangente* ao círculo. A distancia do centro á recta é

maior que o raio,	para uma recta exterior
menor » » » »	» » secante
igual ao raio	» » tangente.

O ponto commum á tangente e ao círculo é o *ponto de contacto*. A tangente é perpendicular ao raio, que une o centro ao ponto de contacto.

Qualquer círculo dá-nos a noção de comprimento, que pode ser, por exemplo, o de um fio muito fino, que circunde toda a rodella. Embora falha em rigor, esta ideia geral constitue uma imagem e falla ao espirito; mais tarde se tornará exacta, precisa. O comprimento do círculo, a que acabamos de nos referir, chama-se *circumferencia*.

Se (fig. 76) consideramos dois círculos quaesquer, O e O', a relação das circumferencias entre si é igual á dos diâmetros, tambem entre si. Quer isto dizer que a relação entre o comprimento da circumferencia e do diâmetro é a mesma em cada um dos dois círculos, e, por consequencia, em to-

dos os círculos. Esta relação entre a circumferencia e o diâmetro, que não se pode exprimir exactamente por quaesquer fracções, é maior que 3,14 e menor que 3,1416; designa-se pela letra grega π . Para um grande numero d'applicações correntes, 3,14 é um valor sufficientemente approximado, e 3,1416 satisfaz em quasi todos os casos, que exigem uma maior precisão.

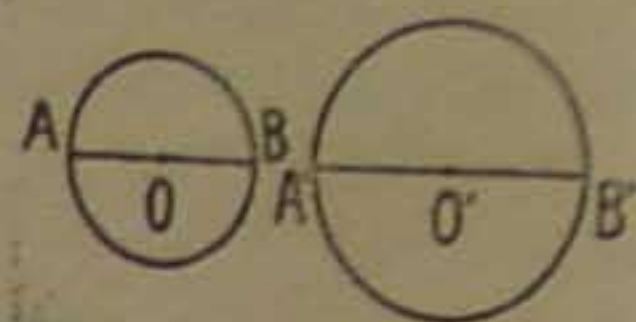


Fig. 76

Se C é o comprimento da circumferencia, e se $D = 2R$ é o diâmetro, sendo R o raio, a relação $\frac{C}{D}$ é, portanto, π , o que quer dizer que $C = \pi D = 2\pi R$. Na pratica corrente, $C = 3,14 \times D = 6,28 \times R$.

Estas formulas permitem conhecer facilmente a circumferencia de qualquer objecto circular, quando se conhece o raio ou o diâmetro, e tambem achar o diâmetro, por exemplo, d'uma torre redonda, d'um tronco d'arvore, d'uma columna, quando se pode medir a periphéria com uma fita metrica, ou de qualquer outra maneira. Levae as creanças, tanto quanto puderdes, a realisar estes exercicios sobre objectos reaes, e, quando fôr possivel medir ao mesmo tempo a circumferencia e o diâmetro, não deixeis de aproveitar a occasião para verificar o valor approximado de π , que foi empregado.

43 — A area do círculo

Assim como temos a intuição do comprimento da circumferencia, tambem sentimos que a porção do plano, comprehendido no interior da linha, tem uma certa extensão, uma *area*, que deve ser possivel medir. Estabeleceu-se que esta area se obtem multiplicando o comprimento da circumferencia pela metade do raio. E como vimos que $C = 2\pi R$, segue-se que a area $S = \pi R^2$ ou, ainda, que

$S = \frac{\pi}{4} D^2$. D'aqui resulta, tambem, que a relação entre as areas de dois circulos é a mesma que entre os quadrados dos raios, ou dos diâmetros.

Exemplos praticos, tão variados quanto possivel, podem, tambem aqui, servir de thema para exercicios sobre estas questões de areas: canteiros circulares d'um jardim, lagos dos jardins publicos, picadeiros em que se quer cobrir de areia o solo, pintura d'uma mesa redonda, avaliação de corôas circulares pela differença entre dois circulos, etc.

44 — Lunulas e rosaceas

Na maioria dos tratados de desenho, encontram-se modelos de figuras formadas d'elementos circulares, que podem ser traçadas com o auxilio do compasso e que constituem exercicios interessantes.

Unicamente como specimen, indicamos aqui apenas um pequeno numero d'estas figuras, algumas das quaes são classicas.

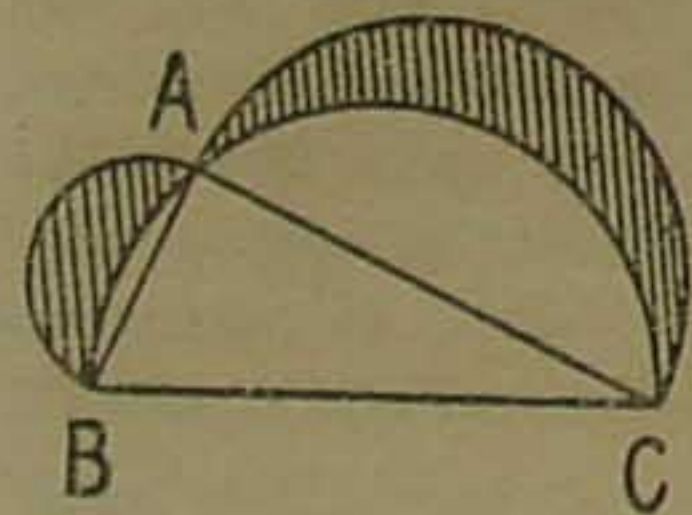


Fig. 77

Se desenharmos (fig. 77) uma semi-circumferencia tendo por diametro BC e se tomarmos, sobre essa linha, um ponto qualquer A, o triangulo ABC é sempre rectangulo, sendo o angulo A o recto. Descrevamos, agora, duas outras semi-circumferencias sobre AB e sobre AC, como diâmetros. Temos, assim, duas especies de crescentes — tracejados na figura. O interesse d'esta figura está na somma das areas dos dois crescentes, ou *lunulas*, ser precisamente igual á area do triangulo ABC. Esta propriedade já era conhecida na antiguidade grega, e a construcção, que acabamos de indicar, tornou-se classica sob o nome de *lunulas de Hippocrates*.¹

¹ HIPPOCRATES de Chio, geometra grego (V seculo a J. C).

Outra construcção interessante é a que indica a figura 78. N'um circulo, tendo por diametro AB, dividiu-se este diametro em cinco partes eguaes, pelos pontos C, D, E e F. Tomando AC, AD, AE e AF, como diâmetros, traçam-se semi-circumferencias da banda de cima de AB; depois, to-

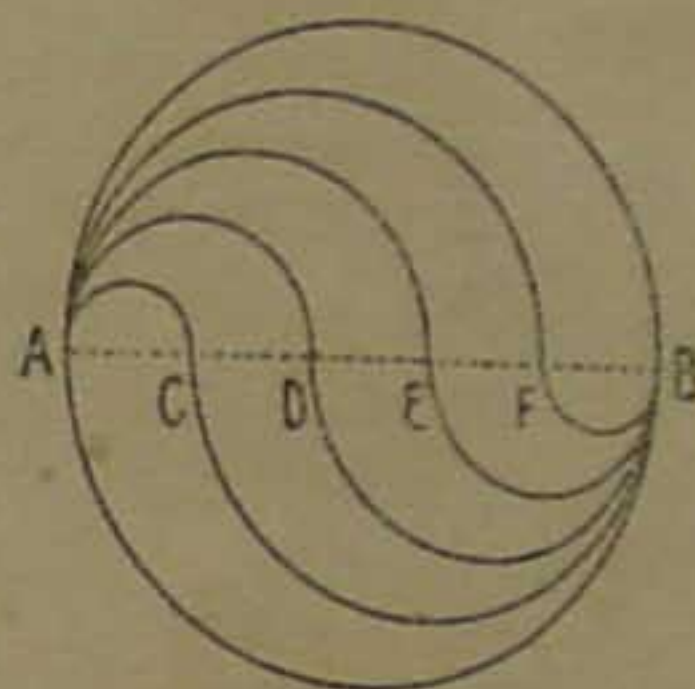


Fig. 78

mando CB, DB, EB e FB, semi-circumferencias do lado de baixo. O conjunto d'estas linhas circulares divide o circulo em cinco partes, que teem todas a mesma area. Em vez de cinco, pode-se escolher qualquer outro numero n ; basta dividir o diametro AB em n partes eguaes.

N'um outro circulo (fig. 79), tomemos dois diâmetros perpendiculares entre si, AB e CD. Depois de formarmos o quadrado OBEC, traçamos de B para C um quarto de circulo, tendo E por centro; da mesma maneira traçamos mais tres quartos de circulo, CA, AD e DB, e o conjunto — parte tracejada — forma uma especie de estrella de quatro raios. A area d'esta estrella é $(4 - \pi) R^2$, ou seja aproximadamente $0,86 \times R^2$.

Se (fig. 80) tomamos ainda dois diâmetros perpendiculares entre si, AB e CD, e se traçamos as semi-circumferencias tendo por diâmetros BC, CA, AD e DB, obtemos uma rosacea de quatro folhas. A area desta rosacea é $(\pi - 2) R^2$ ou

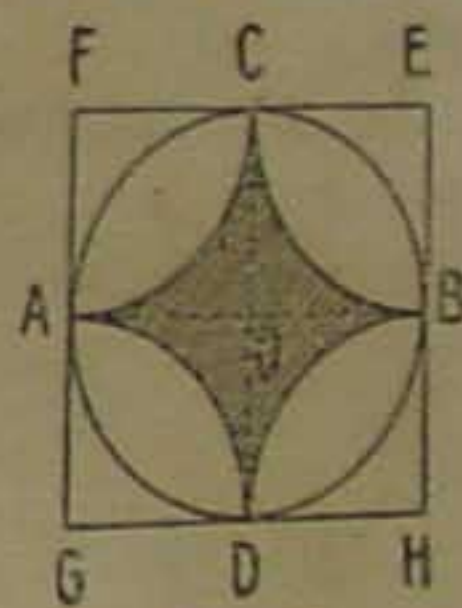


Fig. 79

pouco mais ou menos $1,14 \times R^2$, sendo o raio representado sempre por R .

Dando ao compasso uma abertura igual ao comprimento do raio, se marcamos esse comprimento (fig. 81) sucessivamente sobre o circulo em B, C, ... cabimos exactamente sobre o ponto A ao cabo da 6.^a operação, depois de termos marcado os pontos A, B, C, D, E, e F. Se, de B, D e F, como centros, e com o raio R , descrevemos arcos de circulo, AC, CE e EA, passando todos pelo centro, temos uma

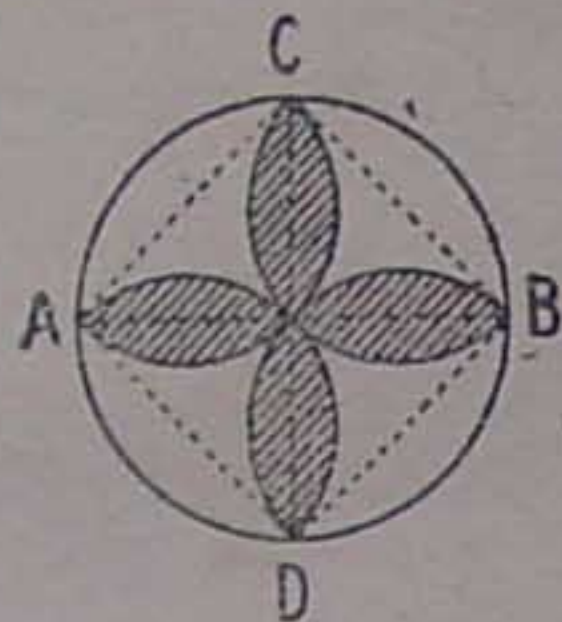


Fig. 80

rosacea de trez folhas.

Traçando (fig. 82), com a mesma construcção, os seis arcos de circulo com os centros A, B, C, D, E e F, obtem-se uma rosacea de seis folhas.

Terminamos aqui estas indicações, apresentadas unicamente como exemplos.

Devemos variar-as, na pratica, e levar a creança a imaginar espontaneamente formas novas.

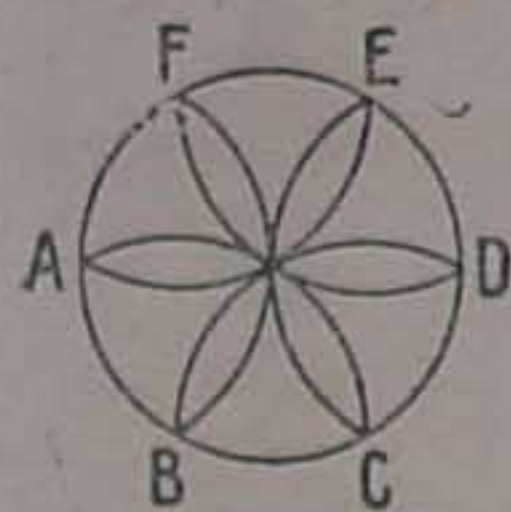


Fig. 82

Logo que tenha adquirido um pouco de habilidade no manejo do compasso e dos differentes instrumentos elementares de desenho, tomará gosto por estas construcções e dedicar-lhes-ha todos os seus cuidados e toda a sua attenção ¹.

¹ Para tudo que diz respeito aos exercicios de desenho geometrico, bem como para começar o estudo da Geometria, não nos cançaremos de recomendar a obra do sr. C. Bourlet: *Cours abrégé de Géométrie; Géométrie plane*; Paris, Hachette, 1906. Poder-se-hia dizer que o auctor attingiu a perfeição pedagogica, se a perfeição fosse cousa humanamente possível. Em todo o caso, passar-so-ha muito tempo, primeiro que se faça melhor n'esta materia. Pena é que os programmas impedissem o sr. Bourlet de fazer conjunctamente o estudo da Geometria no espaço e o da Geometria plana, pelo menos, no que respeita ás translações rectilíneas.

45 — Alguns volumes

Se é importante determinar as areas das superficies, não o é menos, na pratica, determinar os volumes dos corpos. Para isso, torna-se necessario uma *unidade de volume*, assim como para os comprimentos foi preciso uma unidade de comprimento e para as areas, uma unidade d'area. Essa unidade de volume é invariavelmente o volume d'um cubo, que tem por lado a unidade de comprimento.

Partindo d'esta base, acharam-se, para um certo numero de corpos regulares, meios muito simples de obter os seus volumes.

Vamos resumil-os dentro em pouco, e por forma que não seja necessario proceder a quaesquer investigações, para podermos resolver certas questões usuas. Antes, porém, recordemos os corpos que definimos precedentemente e indiquemos mais trez, que se nos deparam, com frequencia, nas applicações correntes.

Vimos o que é um *cubo*, um *parallelepipedo*, um *prisma* e uma *pyramide*.

Em todos estes corpos, que tem a designação geral de *polyédros*, encontramos unicamente linhas rectas e planos. Com os outros trez, de que passamos a fallar, não succede outro tanto.

Supponhamos (fig. 83) que um rectangulo AOO'A' gira sobre o seu lado OO'; gera assim um corpo, que se denomina um *cylindro recto*. Uma caixa de chapen ou de regalo de senhora, uma chaminé de candieiro, o interior d'um litro de metal ou um decalitre de madeira, mostram-nos qual é a forma geral d'um cylindro. Os dois lados OA e O'A' do rectangulo descrevem dois circulos eguaes, de raios $OA = O'A'$, que se chamam as *bases* do cylindro; OO', que não se moveu, re-

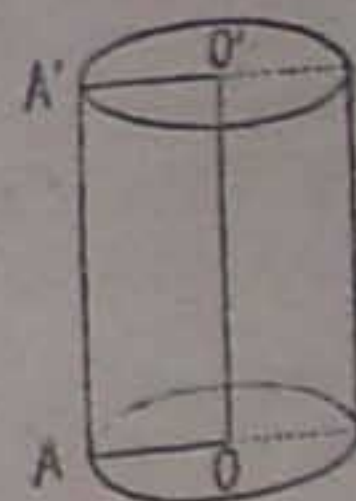


Fig. 83

presenta a distancia dos planos das duas bases: é a *altura* do cylindro.

Consideremos agora (fig. 84) um triangulo rectangulo AOS, em que O é o angulo recto, e suponhamos que esse triangulo gira em torno de SO; gera, assim, um corpo que se chama um *cone* recto. Um pão d'assucar, um funil, uma cenoura, affectam a fôrma geral d'um cone. O lado OA do triangulo descreve um circulo, que se denomina a *base* do cone; o ponto S, que não se desloca é o *vertice*; o comprimento SO, distancia de S ao plano da base, é a *altura* do cone.

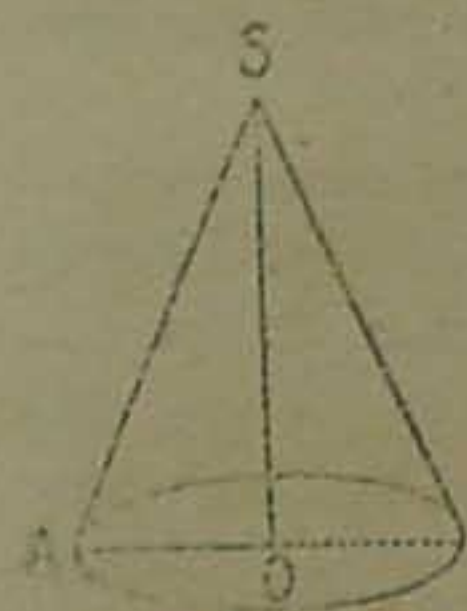


Fig. 84

Finalmente, se um circulo gira em torno d'um diametro, o corpo assim gerado tem o nome de *esphera*. A fôrma da esphera é a d'uma bola redonda. O centro do circulo é o *centro* da esphera, e o raio do circulo é o *raio* da esphera. Um plano qualquer, que passe pelo centro, corta a esphera segundo um circulo de raio igual ao d'esta e que se chama *circulo maximo*. Uma recta qualquer, que passe pelo centro, corta a esphera em dois pontos equidistantes do centro; o segmento determinado por esses dois pontos é um *diametro*, cujo comprimento é o dobro do do raio.

Notemos que se pode determinar um cylindro, quando se conhece o raio da sua base e a sua altura; que succede o mesmo com um cone, e que uma esphera se determina conhecido que seja o seu raio.

Uma vez tudo isto bem assente, teremos o volume:

d'um cubo, multiplicando duas vezes o comprimento do seu lado por elle proprio. Se a é o numero, que mede esse comprimento, teremos $a \times a \times a$ ou a^3 ; donde a Formula: $V = a^3$;

d'um parallelepipedo, multiplicando a area da base pela altura; sendo a propria area B da base um producto, $a \times b$, se a é um lado do parallelogrammo de base, tendo b por altura, deve-se formar o producto $a \times b \times h$ pela altura do parallelepipedo; donde a Formula: $V = Bh = a \times b \times h$;

d'um prisma — de que o parallelepipedo não passa d'um caso particular — multiplicando a area da base pela altura; donde a Formula: $V = Bh$;

d'uma pyramide, tomando o terço do producto da area da base pela altura — esta determinação do volume da pyramide foi dada, pela primeira vez, por Archimedes¹ — donde a Formula: $V = \frac{Bh}{3}$;

d'um cylindro, multiplicando a area da base pela altura; como a base é um circulo de raio r , se a altura é h , temos a Formula: $V = \pi r^2 h$;

d'um cone, tomando o termo do producto da area da base pela altura; donde a Formula: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$;

d'uma esphera multiplicando o cubo do raio por $\frac{4}{3}$ de π ; donde a Formula: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Tambem se assentou que a area d'uma esphera é igual a 4 vezes a de um circulo maximo ou $4\pi r^2$. Pode-se, por consequencia, dizer ainda que: o volume d'uma esphera é igual á sua area multiplicada pelo terço do raio.

Por ultimo, o volume d'uma esphera tambem pode determinar-se pela formula: $V = \frac{1}{6} \pi d^3$, e a sua area por πd^2 , designando por d o diametro.

¹ ARCHIMEDES, celebre geometra, natural de Syracusa (287-212 a. J. C.).

Todos estes resultados serão obtidos e demonstrados mais tarde; presentemente, só se apresentam á creança para que possa executar certos exercicios praticos. Mas, não exigue d'ella que sobreçarregue a memoria com todas estas formulas. Mostrae-lh'as de novo, cada vez que d'ellas careça. Se, com a continuação se fixarem no seu espirito, tanto melhor; mas, se tal não succeder, não vos dê isso cuidado.

46. — Os graphics; algebra sem calculo

N'um grande numero de revistas e jornaes, encontram-se hoje *graphics*; figuras estas, de que podemos tirar grande partido para a educação mathematica das creanças. Devemos fazer-lhes comprehender o que estas figuras significam e leval-as, em seguida, a construir ellas proprias outras analogas.

Ordinariamente os graphics, de que se trata, representam as variações d'observações meteorologicas, por exemplo: altura barometrica, temperatura, etc., ou as da cotação na Bolsa d'um determinado valor, durante um certo periodo de tempo. Vem a proposito lembrar que, na exploração dos caminhos de ferro, os graphics servem tambem, para representar a marcha dos comboios e que é mesmo o unico meio verdadeiramente pratico de se fazer uma ideia exacta d'essa marcha.

Mas, o que principalmente importa, é fazer notar que os mesmos processos podem servir para representar as variações de seja qual fôr a especie de grandeza mensuravel, dependente d'outra grandeza, quer esta seja um tempo, quer seja outra cousa qualquer.

Por exemplo: quando se suspende um pezo por um fio de catchu, o fio alonga-se. Pode-se traçar um graphico, que permitta saber qual é o comprimento do fio, quando se conheça o pezo. Quando se comprime um gaz, o seu volume diminue; um graphico permittirá saber qual é o volume do gaz, quando se conheça a pressão. Quando se aquece o va-

por d'agua, a sua pressão augmenta; um graphico permittirá conhecer a pressão, quando se souber qual é a temperatura.

N'estes differentes exemplos, o comprimento do fio depende do pezo suspenso: diz-se que é uma *função* d'esse pezo; o volume do gaz depende da pressão: é uma *função* da pressão; a pressão do vapor d'agua depende da temperatura: é uma *função* da temperatura. Nos exemplos anteriores, a altura barometrica, o caminho percorrido por um comboio, etc., dependem da epocha, isto é: do tempo decorrido desde uma data fixa; são *funções* do tempo.

Esta ideia de *função* é, em si, o que ha de mais natural, de mais simples, e uma creança apossar-se-ha d'ella facilmente, se houver algum cuidado na maneira de lh'a apresentar, recorrendo o mais possivel aos exemplos. Quando uma grandeza Y depende d'uma grandeza X , e quando ambas são mensuraveis, a primeira é uma *função* da segunda.

Os graphics teem por fim representar á simples vista as *funções* por meio de figuras, cuja construção assenta invariavelmente sobre os mesmos principios. Vejamos como.

Consideremos (fig. 85), n'uma folha de papel quadriculado, duas linhas perpendiculares, OX e OY . Para representar um dado valor x da quantidade variavel X , marcamos sobre OX um comprimento OP , que, empregando uma determinada unidade de comprimento, tem por medida o mesmo numero que x . Ao valor de x , corresponde um dado valor y de Y , que representamos por OQ , sobre OY , tomando a unidade de comprimento que quizermos. Posto isto, traçamos as rectas PM , parallela a OY , e QM , parallela a OX , que se cortam n'um ponto M ; este ponto representa a conjugação dos dois valores correspondentes x e y . Constituindo assim tantos pontos como quizermos e ligando-os por um traço continuo, teremos um graphico, que é a pintura das variações da *função* Y .

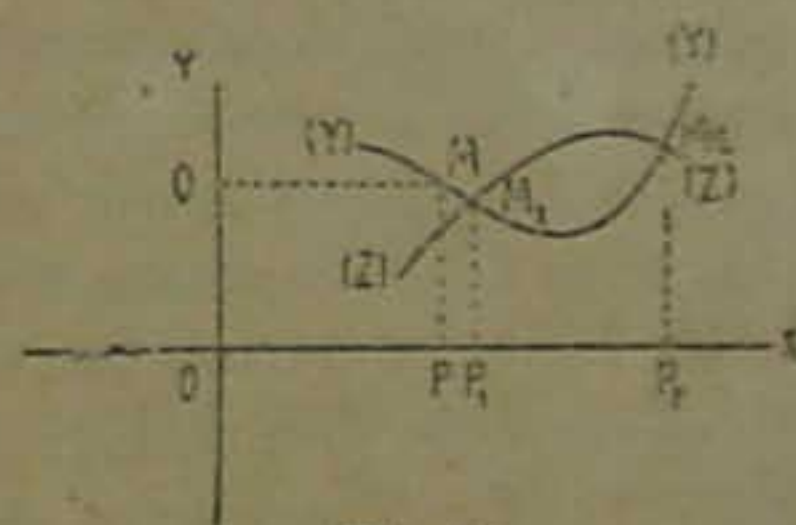


Fig. 85

Se a quantidade X comporta valores negativos, e se x é um d'elles, o ponto P , em vez de estar á direita de O , encontra-se á esquerda, sobre OX .

Se a quantidade Y comporta valores negativos, e se y é um d'elles, o ponto Q , em vez de estar acima de O , encontra-se abaixo, sobre OY .

Para dois valores quaesquer, x e y , que se correspondem, isto é: para dois pontos, P e Q , teremos sempre um unico ponto, M .

Se os pontos M , que se obtêm, não são muito proximos uns dos outros, podem ligar-se por segmentos de rectas; n'este caso, nem se pensa, sequer, em representar por uma curva a funcção Y . Mas, os pontos, que marcam esse traçado em segmentos de rectas, dão, comtudo, uma ideia geral do modo como varia esta funcção.

Em Algebra, como se verá mais tarde, não se faz outra cousa senão estudar funcções, que podem ser determinadas pelo calculo e que, por esse motivo, se denominam *funcções algebraicas*. O problema fundamental da Algebra consiste, de facto, em achar os valores de X taes que duas funcções, Y e Z , de X se tornem eguaes entre si. Vemos (fig. 85) que tendo traçado os dois graphics (Y) e (Z) das funcções Y e Z , essas linhas se cortam nos pontos M_1 e M_2 ; traçando até OX as rectas M_1P_1 e M_2P_2 , parallelas a OY , os comprimentos OP_1 e OP_2 , dão-nos, pois, com a unidade adoptada para medir os comprimentos sobre OX , os dois numeros x_1 e x_2 , que se buscavam.

E' n'este sentido que se pode dizer que os graphics permitem fazer Algebra sem calculo e ainda mais alguma cousa, porquanto tem sido possivel construir graphics para funcções, que não são algebraicas. E' dever accrescentar que todos os resultados alcançados assim, são apenas aproximados, não são rigorosos; mas na pratica, se os graphics são feitos com cuidado, esses resultados podem satisfazer n'um grande numero de casos. Existem, pois, muitas questões a que se applicam com proveito estes traçados, que tem ainda a vantagem de fallar ao espirito por intermedio dos olhos, de figurar as proprias cousas. E' esta uma qualidade preciosa em materia de pedagogia.

Nos n.ºs seguintes, alguns exemplos acabarão de nos elucidar sobre a construcção e emprego dos graphics. A sua applicação mais natural parece encontrar-se no typo de problemas conhecidos sob o nome de *problemas dos postilhões*; é pois d'estes, sob suas diversas fórmulas, que nos occuparemos principalmente.

47 — Os dois caminheiros

Vejamos, sob uma das suas fórmulas mais simples, em que consiste o problema dos postilhões: Um caminheiro parte, a uma dada hora, d'um ponto determinado, com uma certa velocidade conhecida. Passado algum tempo, um segundo caminheiro, marchando com uma velocidade maior, parte na mesma direcção, seguindo pela mesma estrada. Quando encontrará este o primeiro, e a que distancia do ponto de partida?

Para resolver esta questão, bem como outras da mesma natureza, precisamos ver como se constroe o graphico d'um caminheiro. Para isso, tracemos no papel quadriculado (fig. 86) as duas rectas perpendiculares OT , sobre a qual marcamos os tempos, e OY , sobre a qual marcamos as distancias. Correspon-

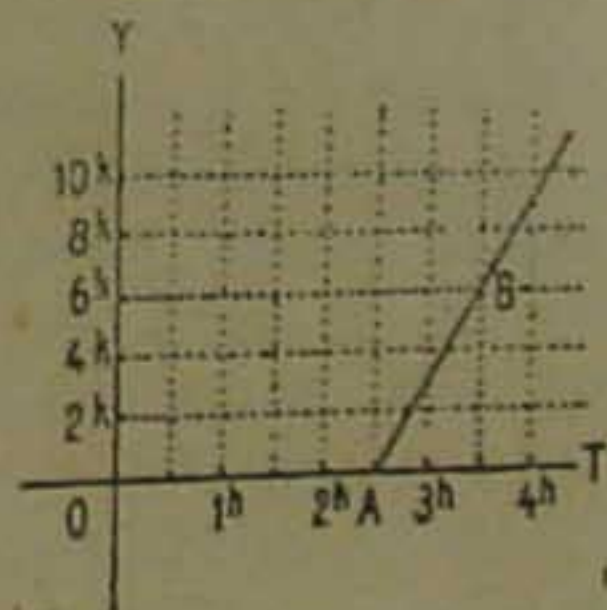


Fig. 68

dendo o ponto O ao meio dia, por exemplo, tomemos 2 divisões para representar uma hora e marquemos sobre OT , $1h$, $2h$, $3h$,.... Partindo tambem de O , tomemos sobre OY meia divisão para representar um kilometro e marquemos $2k$, $4k$, $6k$,.... Se um caminheiro parte ás $2 \frac{1}{2}$ horas com uma velocidade de 6 kilometros por hora, vemos, em primeiro lugar, que o graphico regista o ponto A sobre OT ; depois, que ás $3 \frac{1}{2}$ horas tem andado 6 kilometros, o que dá o ponto B ; finalmente, como o caminheiro continua a fazer sempre regularmente 6 kilometros por hora, a recta AB é o graphico que

buscamos. Vemos, por exemplo, que ás 4 horas estará a 9 kilometros do seu ponto de partida, e que o simples traçado da recta AB nos mostra a que distancia se encontra o caminheiro a uma dada hora, e que horas são, quando elle tenha percorrido uma certa distancia.

Voltemos agora á nossa questão e precisemol-a, dizendo que o primeiro caminheiro tem uma velocidade de 4 kilo-

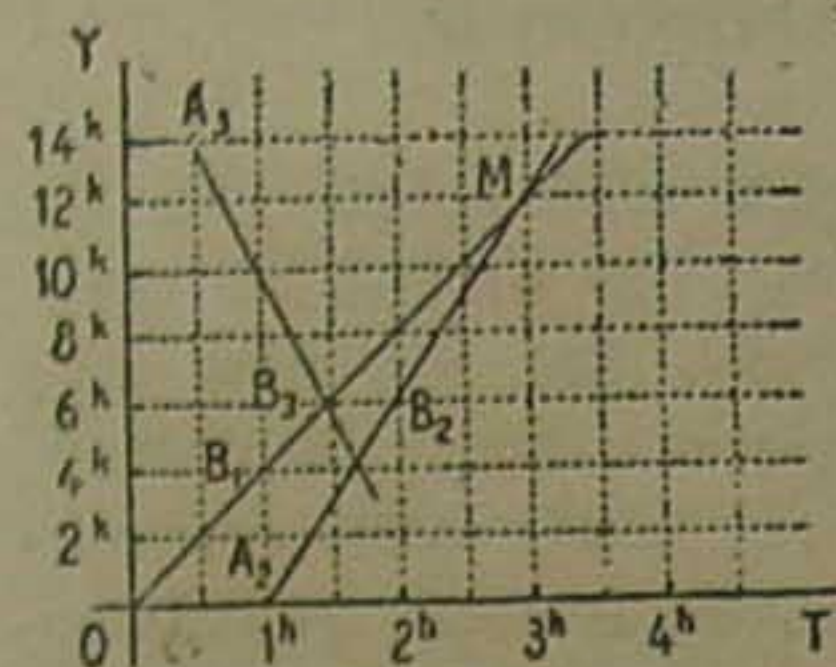


Fig. 87

metros por hora e que o segundo parte 1 hora depois d'aquelle e tem uma velocidade de 6 kilometros por hora. Tomemos (fig. 87) as mesmas unidades, que ha pouco, e contemos o tempo a partir da abalada do primeiro caminheiro. A recta OB_1 é, portanto, o graphico do primeiro caminheiro, e A_2B_2 é o graphico do segundo. Estas

rectas cortam-se em M, que corresponde a 3^h e a 12^k ; o encontro dar-se-ha, pois, a 12 kilometros do ponto de partida e 3 horas depois da partida do primeiro caminheiro.

Podemos agora completar o problema, complicando-o um pouco. D'uma localidade, distante 14 kilometros do ponto de partida, sae uma carruagem ao encontro dos dois viajantes, isto é: em sentido contrario. A carruagem sae meia hora depois do primeiro e percorre 8 kilometros por hora. Onde e a que horas encontrará cada um d'elles? A_3B_3 é o graphico da carruagem. Esta recta intersecta OB no ponto B_3 , que corresponde á $1\frac{1}{2}^h$ e a 6^k , o que nos dá o encontro com o primeiro caminheiro. O ponto d'encontro com A_2B_2 corresponde aproximadamente a pouco menos de $1\frac{3}{4}^h$ e a pouco mais de $4\frac{1}{4}^k$.

Tratando a questão pelo calculo, achariamos, pouco mais ou menos, 1 hora e 43 minutos, para o tempo, e 4 kilometros e 286 metros, para a distancia. Vê-se, pois, como a nossa figura 87, apesar das suas pequenas dimensões, nos dá á simples vista resultados, que muito se aproximam da exactidão e que, na pratica, satisfazem perfeitamente.

48 — De Paris a Marselha

Do movimento de comboios entre Paris e Marselha, escolhemos, no principio do anno de 1905, o rapido 1, de Paris a Marselha, e o rapido 16, de Marselha a Paris, para apresentar os respectivos graphics n'uma só figura (fig. 88).

Para se poder cotejar as diversas circumstancias da marcha d'estes comboios com a realidade dos factos, apesar das dimensões muito reduzidas da figura, damos, em seguida, a tabella das horas exactas, que definem essas marchas.

Rapido 1		Rapido 16	
Chegadas	Partidas	Chegadas	Partidas
Paris	9 ^h 20 m.	Marselha	11 ^h 53 m.
Laroche	11 ^h 34	Avinhão	1 ^h 20
Dijon	1 ^h 59	Valence	2 ^h 51
Mâcon	3 ^h 51	Lyão	4 ^h 08
Lyão	4 ^h 57	Mâcon	5 ^h 10
Valence	6 ^h 39	Dijon	6 ^h 40
Avinhão	8 ^h 16	Laroche	8 ^h 31
Tarrascon	8 ^h 45	Paris	10 ^h 20 t.
Marselha	10 ^h 11 t.		

Aproveitamos a occasião para fazer sentir quanto é para desejar que se adquira o habito de, nos caminhos de ferro, indicar as horas de 0 a 24, a partir da meia noute, afim de evitar as designações de *manhã* e *tarde*, que são uma causa frequente de confusões e enganos. N'alguns paizes civilizados já isso se faz; mas em França, ainda não.

Devemos acalentar a esperanza de que, d'aqui a um ou dois seculos, sejamos capazes de comprehender que é pelo menos tão facil dizer «17 horas», como «5 horas da tarde».

Não me causarei de recommendar a construcção, pelas creanças, de graphics d'esta natureza, servindo-se para isso dos horarios dos caminhos de ferro e escolhendo de preferen-

cia regiões visinhas da que habitam, localidades que lhes sejam conhecidas, pelo menos de nome. Empregando o papel quadriculado e fazendo os traçados á mão, pouco tempo se gasta e executam-se exercicios de grande utilidade.

As linhas d'uma só via dão logar a observações interessantes sobre o traçado dos graphicos, motivadas pelo cruzamento de comboios, que marcham em sentido contrario.

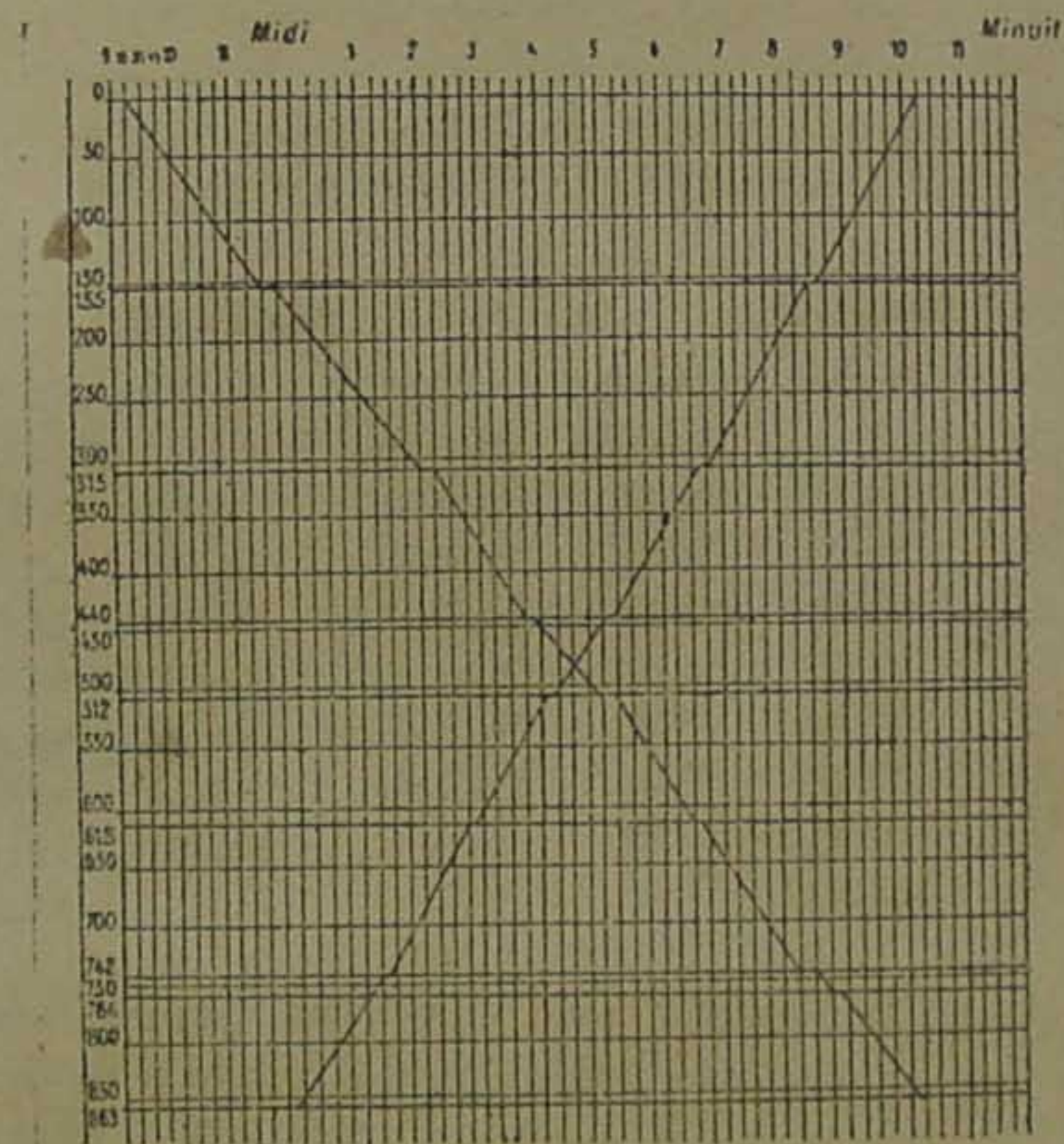


Fig. 88

Offerecem tambem ensejo de observar como um comboio, caminhando mais depressa do que outro, que partiu antes d'elle, lhe pode passar para deante, tendo o primeiro entrado na via de resguardo d'uma estação, onde permanecerá o tempo, que fôr necessario para esse effeito. Não nos é possível indicar os mil pormenores interessantes, que a construção e o exame dos graphicos suggerem.

49 — Do Havre a Nova-York

Ha já bastantes annos, por occasião d'um congresso scientifico e no fim d'um almoço, em que se encontravam reunidos varios mathematicos conhecidos, alguns d'elles illustres, pertencentes a diversas nacionalidades, Eduardo Lucas annunciou-lhes inesperadamente que lhes ia propor uma questão das mais difficeis.

«Supponho, disse elle — é infelizmente uma simples sup-

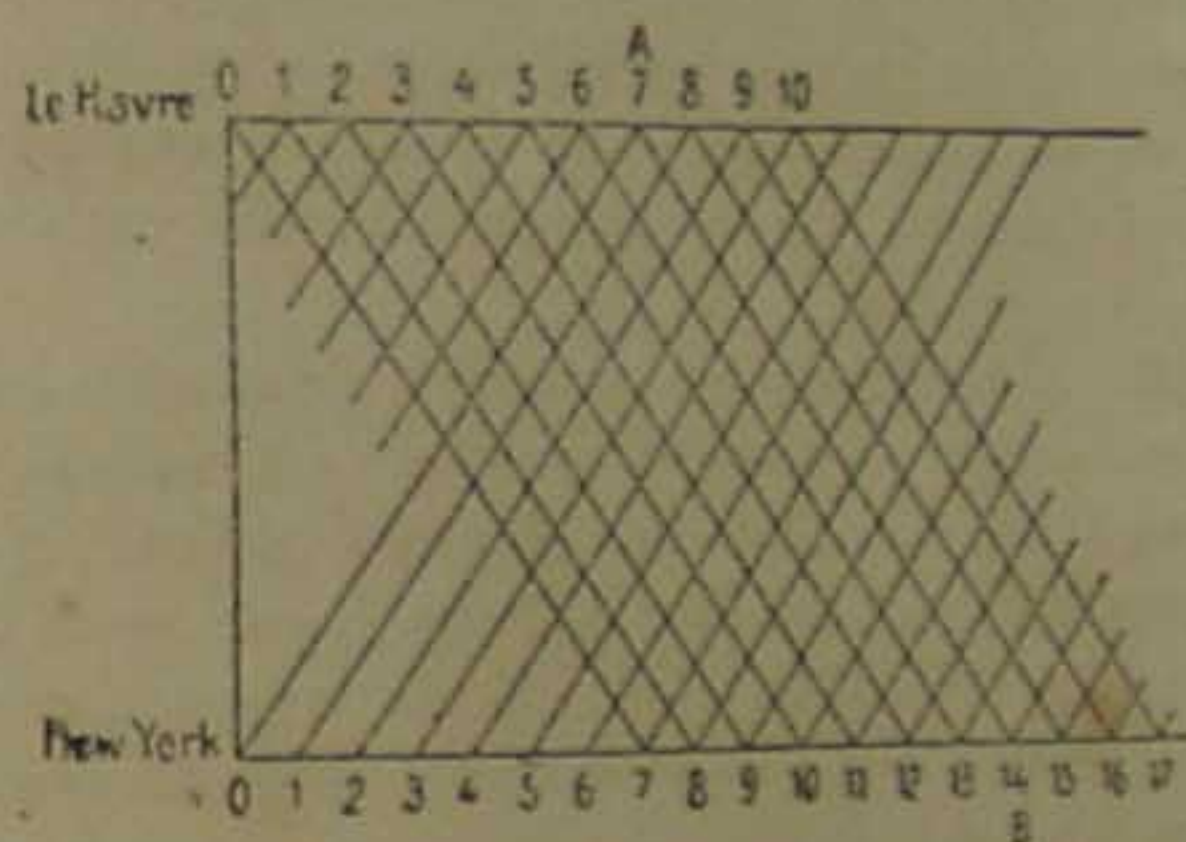


Fig. 89

posição — que todos os dias, ao meio dia, parte do Havre para Nova-York um paquete e que, á mesma hora, um paquete da mesma Companhia parte de Nova-York para o Havre. A travessia faz-se em sete dias exactos, tanto n'um sentido, como no outro. Quantos navios da sua Companhia, seguindo a rota opposta, encontra no caminho o paquete que parte do Havre ao meio dia de hoje?»

Alguns dos illustres auditores responderam estouvadamente: «Sete»; a maioria d'elles, porém, ficou silenciosa, mostrando-se surprehendida. Nem um só deu a solução exacta, que a figura 89 nos patenteia com uma nitidez perfeita.

Este episodio, absolutamente authentico, encerra dois ensinamentos. Mostra-nos, em primeiro logar, quanta indulgencia

e quanta paciência devemos ter com os alumnos que não comprehendem, logo á primeira, as cousas que constituem novidade para elles; depois, torna bem visível a grandissima utilidade das representações graphicas. Com effeito, se o mais vulgar dos mathematicos possuísse esta noção, a figura 89 ter-se-hia formado espontaneamente no seu espirito; tel-a-hia visto e não teria hesitado. Os auditores de Lucas, pelo contrario, não pensavam senão nos navios que deviam partir, e esqueciam-se dos que já iam a caminho; raciocinavam, mas não viam.

E', pois, certo que qualquer vapor, cujo graphico é AB encontra-se no mar com 13 barcos, mais o que entra no Havre no momento da partida, e mais o que sae de Nova-York no momento da chegada, isto é: 15 ao todo. O graphico mostra, ao mesmo tempo, que os encontros se dão cada dia ao meio dia e á meia noite.

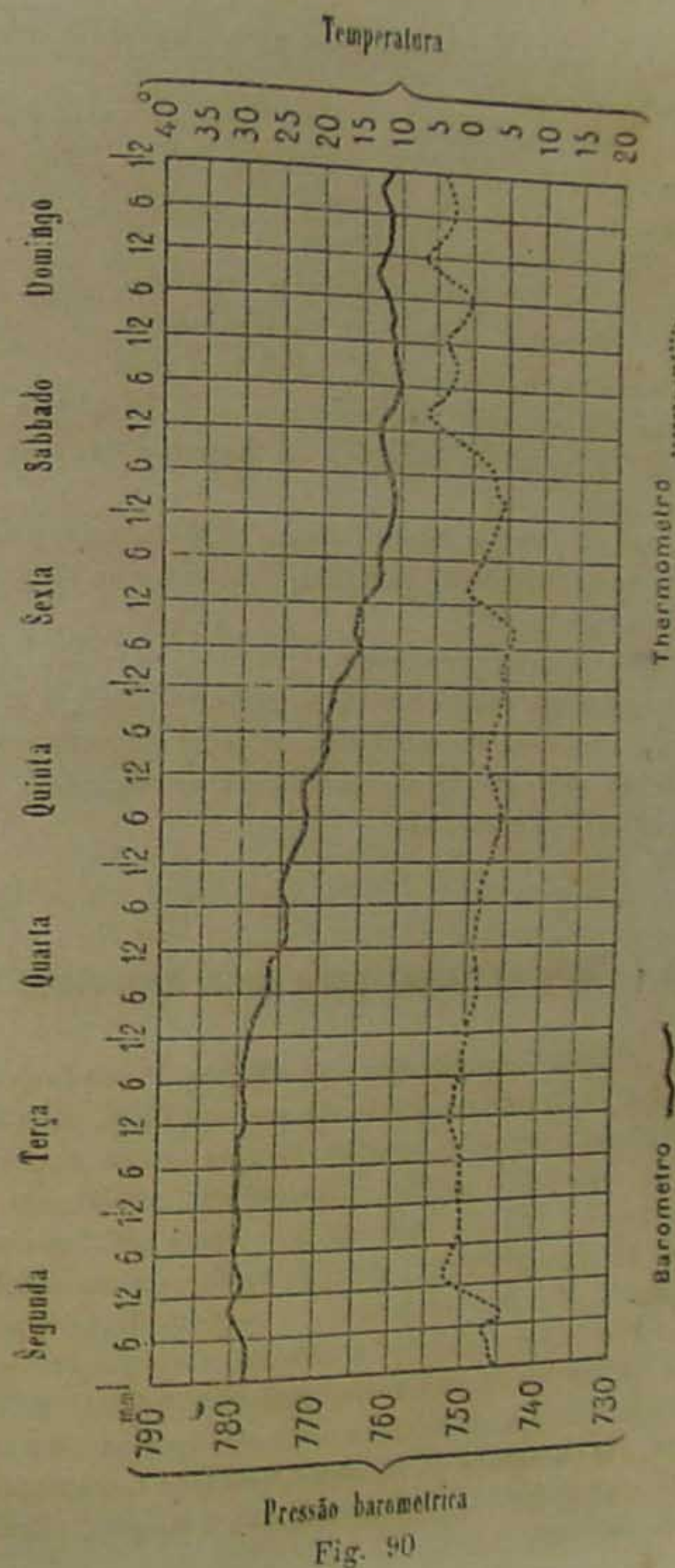
E' egualmente a Lucas que se deve o problema, que vem na sua *Arithmétique amusante* com o titulo «A ballada do caracol retrogrado», enunciado nos seguintes termos:

«Um caracol levanta-se n'um domingo ás seis horas da manhã e começa a subir pelo tronco d'uma arvore. Durante o dia, isto é: até ás seis horas da tarde, sobe cinco metros; mas, durante a noite, desce dois metros. Ao cabo de quanto tempo terá subido nove metros?»

É ainda um problema de postilhões — de postilhões ronceiros. Uma creança estouvada responderá: «quarta feira de manhã», o que é errado. Deixamos aos nossos leitores, e principalmente aos seus alumnos, o prazer de achar a solução, construindo o graphico da marcha do caracol retrogado.

50 — Como está o tempo?

Damos aqui (fig. 90) dois graphicos conjuntamente: um diz respeito á pressão barometrica, o outro á temperatura, durante a ultima semana de 1881. Fomos buscal-os ao jornal



La Nature, tendo porê m eliminado, para simplificar, varias outras indicações.

O nosso fim é unicamente mostrar como as variações de funcções, sobre as quaes não possuímos outros dados, que não sejam os da experiencia, podem ser vantajosamente representadas pelo methodo graphico.

Afigura-se-nos interessante mostrar, tambem, como duas funcções differentes podem ser representadas ao mesmo tempo, com uma claresa perfeita, n'uma só figura.

A linha das variações do barometro está desenhada com um traço cheio; a das variações do thermometer, com um traço pontuado.

Para ler as pressões barometricas, temos que as referir á escala do lado esquerdo da figura, e para ler as temperaturas, á do lado direito.

Nenhuma confusão é possível.

Estes graphics teem prestado os maiores serviços á meteorologia e contribuido poderosamente para vulgarizar esta sciencia tão util, que se encontra ainda no seu inicio, mas que progride de dia para dia.

51 — Dois cyclistas para uma bicycleta

Dois cyclistas emprehendem uma viagem. Passado pouco, um d'elles encontra-se privado da sua machina, de que só poderá tornar a servir-se ao cabo d'algum tempo, depois de feitas as reparações precisas. Entretanto, resolveram não interromper a viagem, continuando-a ora a pé, ora em bicycleta, da seguinte fórma: partirão juntos, um na machina e o outro a pé; n'um certo ponto, o cyclista deixará a machina n'uma valleta, á beira da estrada, e continuará a jornada a pé. O seu companheiro, uma vez chegado ao local combinado, montará na machina e irá alcançar assim o outro viajante. No momento do encontro, mudarão novamente de meio de transporte e poderão continuar a viagem, seguindo o mesmo processo.

Hoje teem que percorrer apenas 40km; cada um delles anda em bicycleta 15km por hora, e 5km a pé. Em que sitio deve o primeiro viajante abandonar a machina — suppondo que não se dá mais nenhuma troca — para que os dois viajantes cheguem juntos ao seu destino?

A resposta é evidente. Como cada um tem que andar o mesmo a pé e de bicycleta, para chegarem ao mesmo tempo, é evidentemente a meio caminho, isto é: a 20km do ponto de partida, que a machina deve ser deposta.

A figura 91 dá-nos os graphics das marchas dos dois viajantes: o primeiro, a traço cheio e o segundo, a traço pontuado. Para facilitar a exposição, supponhamos que a partida se realisou ao meio dia. O cyclista chega a meio do caminho á 1 hora e 20 minutos; larga a machina e segue a pé; faltam-lhe percorrer 20km e deve chegar ás 5 horas e 20 minutos. O seu companheiro, que partiu a pé, está ás 4 horas a meio do caminho; monta então na bicycleta e chega igualmente ás 5 horas e 20 minutos.

Em summa, ambos gastaram 5 horas e 20 minutos a percorrer 40km, o que representa 7km por hora. E' esta, como se vê, uma fórma de locomoção que realisa um acrescimo sensível de velocidade sobre a d'um peão e que pode ser vantajosamente utilizada por dois rapazes, que, reunindo as suas economias, conseguem apenas dispor da quantia precisa para adquirir uma unica machina.

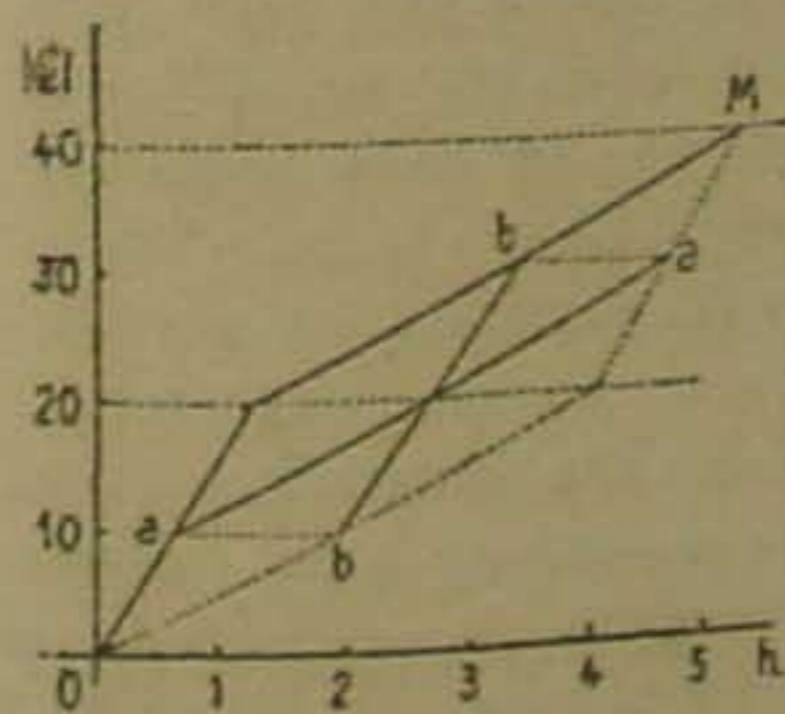


Fig. 91

Para que este processo seja verdadeiramente pratico, é necessario, a menos que a região seja deserta ou d'uma honestidade excepcional, tornar bastante frequentes as trocas da machina, para que ella não fique muito tempo abandonada á beira da estrada. Na propria figura 91, indicámos esta variante; suppondo que a machina foi abandonada a 10km, depois a 30km, do ponto de partida, O a e M é o graphico de

um dos viajantes e O b b M , o do outro. Aqui os dois companheiros encontram-se a meio do caminho; mas, o cyclista continua, tomando a dianteira ao outro. Os graphics dão conta de todas estas circumstancias.

Os graphics podem applicar-se egualmente a dois viajantes, que não tenham as mesmas velocidades medias, quer como peões, quer como cyclistas. Resolvem-se assim facilmente questões, que, embora se prestem ao calculo sem grande difficuldade, exigem contudo conhecimentos mathematicos, que, nem sequer em quantidade minima, possuímos ainda.

52 — A carruagem insufficiente

Quatro viajantes (o sr. e a sr.^a Almeida, e o sr. e a sr.^a Barros), que chegaram no comboio da manhã, á estação de X ..., tinham projectado ir n'esse mesmo dia a Y ..., pequena cidade distante 63km , aonde tencionavam chegar á hora do jantar. Tinham-lhes dito que podiam encontrar um automovel de aluguer, que os conduzisse rapidamente por uma estrada linda. A informação era exacta; simplesmente o unico carro, que havia disponivel na localidade, tinha logar apenas para duas pessoas, além do *chauffeur*. A sua velocidade era de 30km por hora.

Avalia-se bem a difficuldade da situação. Os nossos viajantes não se tinham na conta de andadores emeritos, pois só podiam caminhar modestamente 4km por hora. Combinaram entre si que dois d'elles, o casal Almeida (a que chamaremos abreviadamente: viajantes A), partiriam em automovel, e que, á mesma hora, o sr. e a sr.^a Barros (viajantes B) metter-se-hiam a caminho, a pé. A certa distancia, o carro deixaria os A , que continuariam o trajecto a pé, voltaria para traz ao encontro dos B e tomal-os-hia, conduzindo-os ao seu destino. Como dispôr as cousas para que todos cheguem ao mesmo tempo? Quanto tempo se gasta, ao todo, para fazer a viagem? Questões estas, não muito embaraçosas; mas, que é util saber resolver.

Este problema, salvo modificações insignificantes nos seus dados, tem sido proposto em alguns concursos. Tem uma certa analogia com o do numero precedente, apresentando a mais uma pequena complicação, proveniente do facto do carro ter que retroceder para ir buscar os viajantes B .

Se designarmos por P o ponto da estrada onde o carro deixa os A , por Q aquelle onde encontra os B , os quatro pontos X , Q , P e Y , estarão escalonados n'esta ordem: os A vão de X a P , em automovel, e de P a Y , a pé; os B vão de X a Q , a pé, e de Q a Y , em automovel. Para que todos cheguem ao mesmo tempo, é preciso que $XP = QY$ e, consequentemente, $XQ =$

PY ; donde resulta que, como ha pouco, o graphico da marcha dos A e o da marcha dos B formam, os dois, um parallelogramo (fig. 92). Mas, ao passo que na fig. 91 a diagonal d'este parallelogramo era parallelá ao eixo onde estão marcados os tempos, visto a bicycleta permanecer immovel na valleta, aqui dá-se cousa inteiramente differente: a diagonal CD não é mais do que o graphico da marcha do automovel, quando este volta ao encontro dos viajantes B .

Na figura 92, XCM representa, pois, a marcha dos A , XDM a dos B e $XCMD$ é um parallelogramo. Esta observação fornece-nos o meio de construir a figura muito facilmente. Para isso, basta traçar, em primeiro logar, as duas rectas XC e XD , o que se faz rapidamente, pois conhecemos a velocidade do automovel (30km por hora) e a dos peões (4km por hora). Tomando então um ponto qualquer

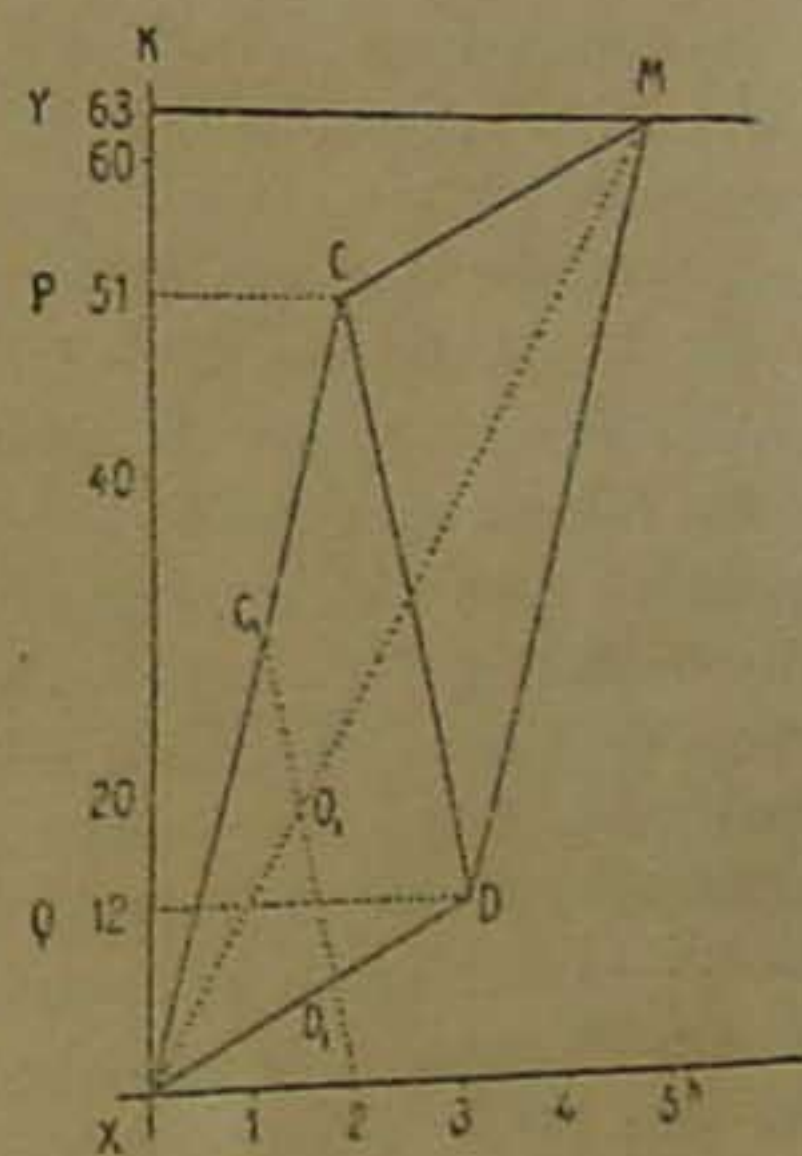


Fig. 92

C_1 , sobre XC — por exemplo: o correspondente a 1 hora e a 30km —, traça-se C_1D_1 , que representa o graphico do retrocesso do automovel, se elle volta para traz a partir do ponto C_1 ; esta recta corta a recta XD em D_1 . Toma-se o meio O_1 de C_1D_1 e, unindo X e O_1 , a recta XO_1 prolongada até ao ponto M , que corresponde a uma distancia de 63km , dá-nos a extremidade M dos dois graphics. Traça-se, então, MC ; paralela a XD e MD paralela a XC ; o parallelogramo fica, assim, completamente desenhado, e $XCDM$ representará o graphico do automovel. Vê-se então, na figura, que D corresponde a 3^h e a 12km ; C aproximadamente a $1^h \frac{3}{4}$ e a 51km ; M a $4^h \frac{3}{4}$ e, naturalmente, a 63km .

Por consequencia: o automovel deverá deixar os A a 51km , cerca da $1^h \frac{3}{4}$; retrocederá ao encontro dos B , que alcançará ás 3^h , a 12km do ponto de partida, e chegará ao seu destino ás $4^h 45^m$, ao mesmo tempo que os A .

Um calculo rigoroso dá $4^h 42^m$ em vez de $4^h 45^m$; differença esta verdadeiramente insignificante, na pratica.

Em resumo: os viajantes tiveram que andar 51km em automovel e 12km a pé, e o trajecto total effectuou-se em $4^h 42^m$. A velocidade media é aproximadamente de $13\text{km} 400$; isto é: chega-se ao termo da jornada á mesma hora, em que se chegaria, se se fizesse todo o trajecto n'um trem com uma velocidade de $13\text{km} 400$ por hora. Os viajantes — tanto os A como os B — caminharam a pé durante 3^h , andando assim 12km e o resto da distancia de automovel; quanto a este, percorreu ao todo 141km , a saber: 51 avançando, 39 retrocedendo e ainda 51 avançando novamente.

Este exemplo, tratado com alguns pormenores e tomando outros dados, pode servir de thema a tantos exercicios analogos, quantos quizermos.

53 — O cão e os dois viajantes

Dois viajantes seguem por uma estrada, a pé e no mesmo sentido. O primeiro, A , leva 8km d'avanzo sobre o outro e anda 4km por hora; o segundo, B , percorre 6km por hora.

Um d'elles tem um cão, que, no momento preciso do começo da nossa observação, corre até junto do outro viajante, com uma velocidade de 15km por hora, voltando immediatamente para ao pé do seu dono; tendo alcançado este, recomeça a mesma manobra, continuando assim, n'este vae-vem de um para outro, até que os dois viajantes se encontram. Trata-se de saber qual o caminho percorrido pelo animal, até ao momento do encontro.

Parece que a questão pode ser posta de duas maneiras, segundo o cão pertence a um dos viajantes, ou ao outro. Na figura 93, conta-se o tempo a partir do momento em que se larga o cão. Os graphics dos dois viajantes são OM e SM , e

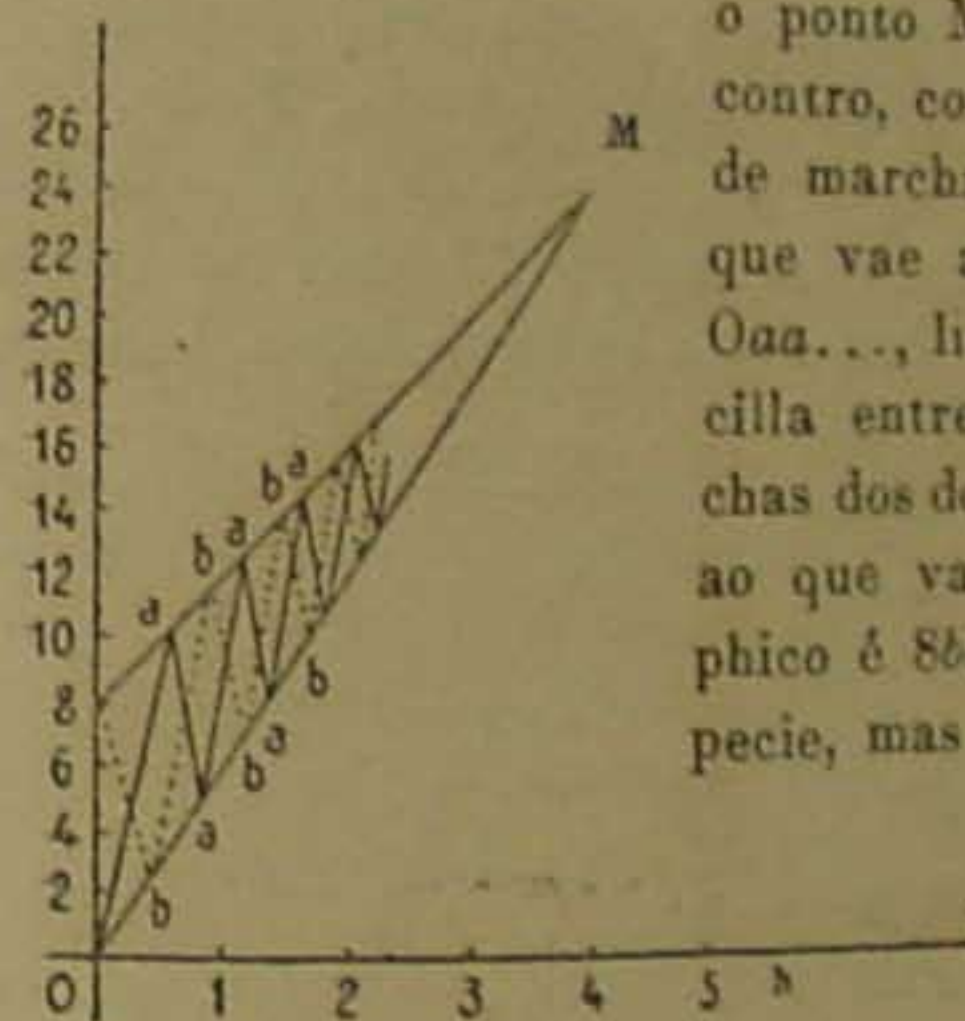


Fig. 93

o ponto M , que representa o encontro, corresponde a 24km e a 4^h de marcha. Se o cão pertence ao que vae atraz, o seu graphico é $Oaa...$, linha em zig-zag, que oscilla entre os graphics das marchas dos dois viajantes; se pertence ao que vae na frente, o seu graphico é $Sbb...$, linha da mesma especie, mas differente da primeira.

Nos dois casos, porém, o animal não deixou de correr durante 4^h e, como caminha 15km por hora, terá d'est'arte per-

corrido 60km . Vê-se, pois, que o resultado é o mesmo, nas duas hypotheses.

Servimo-nos de dados excepcionalmente simples, para tornar mais faceis as explicações. Convem variar esses dados nos exercicios, que se podem formular sobre este problema. Pode se tambem suppor que os viajantes caminham ao encontro um do outro, e não no mesmo sentido.

54 — A pedra que cae

Nos graphicos de marcha, que temos visto até aqui, quer se trate de peões, de carros, de comboios ou de cães, o caminho percorrido n'um dado tempo, n'um segundo por exemplo, é sempre o mesmo; donde resulta que o graphico é sempre uma linha recta. Isto mesmo se exprime tambem, dizendo que a velocidade é constante, ou que o movimento é uniforme.

Outro tanto não succede com o movimento d'uma pedra, que se larga d'uma certa altura e se deixa cair. A experiencia ensina que, não tomando em consideração a resistencia opposta pelo ar ao movimento, a pedra tem descido, *tem cahido*, cerca de 4^m,90, ao cabo d'um segundo. No fim de 2 segundos, terá percorrido 19^m,60 e passados 3 segundos, 44^m,10. Mostra-nos isto, que o grafico d'este movimento (fig. 94) terá a fôrma d'uma curva e não a d'uma linha recta. Esta curva é, pouco mais ou menos, a indicada na figura; é um fragmento d'uma linha, sobre que adeante diremos algumas palavras e que se denomina *parabola*.

Escrevendo a formula $y = 4,9 \times t^2$, temos a distancia y percorrida pela pedra na sua queda, quando esta levou um certo tempo t a effectuar-se, contanto que o tempo seja medido tomando o segundo por unidade; então, o numero y , que se obtem, é um numero de metros.

Por exemplo: em $\frac{1}{10}$ de segundo, a pedra abandonada a si propria não desce, não *cae*, senão 49 millimetros, e, como acabamos de dizer, ao cabo d'um segundo tem chegado a 4^m,90; em 10 segundos, terá percorrido 490 metros. Vê-se, pois, que ella se desloca com uma rapidez cada vez maior; diz-se que o seu movimento é *acelerado*.

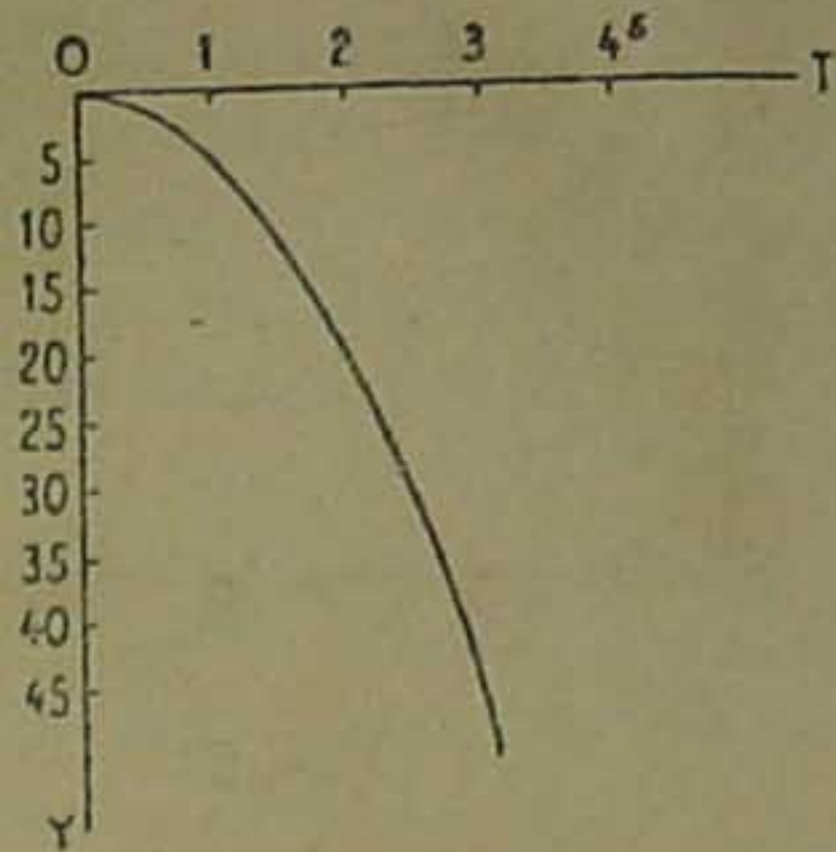


Fig. 94

Uma pedra para cair d'uma altura de 300^m, ou seja do cume da Torre Eiffel, gastaria, até tocar o solo, pouco menos de 8 segundos, cerca de 7 segundos e 8 decimos, suppondo sempre que não se toma em linha de conta a resistencia do ar. Na pratica, esta resistencia importa muito pouco, para as pequenas alturas; mas, quando a duração da queda se prolonga, torna-se muito apreciavel e não devemos julgar, então, que o nosso graphico representa a realidade das cousas.

55 — A bala lançada de baixo para cima

Uma bala de chumbo, arremessada de baixo para cima, eleva-se até uma certa altura e, depois cae. Seguindo-a com olhos attentos, não é difficil verificar que o movimento vae afrouxando cada vez mais, emquanto se dá a ascensão, ao passo que contrariamente, durante a descida da bala, esta se move cada vez mais com a maior rapidez. No primeiro periodo, o movimento é *retardado*; no segundo, é *acelerado*.

Se, em vez de nos servirmos da mão para atirar a bala, empregarmos um instrumento — por exemplo: uma arma de fogo, cujo cano tenha uma direcção perfeitamente vertical — reproduzir-se-hão, no todo, os mesmos factos, com esta unica differença: quanto maior fôr a velocidade, com que a bala é projectada, tanto mais alto ella subirá e tanto mais tempo decorrerá até que ella caia no solo.

E' interessante conhecer as diversas circumstancias do movimento; isto é: saber especialmente a que altura subirá a bala, qual o tempo preciso para attingir essa altura e qual o necessario para descer.

Quando é conhecida a velocidade a , com que é projectada a bala e que se denomina *velocidade inicial*, todas as respostas a estas perguntas são dadas pela formula

$$y = at - 4,9 \times t^2.$$

Para comprehender o que ella significa e poder empregal-a convenientemente, é necessario saber:

- 1.º Que a altura y é avaliada em metros;
- 2.º Que a velocidade inicial a é avaliada em metros, por segundo; isto é: que a bala é projectada de modo que, se nada houvesse que afrouxasse a sua marcha, ella percorreria indefinidamente a metros por segundo;
- 3.º Que o tempo t é avaliado em segundos.

Por mais simples que possam ser os calculos a que esta formula conduz, ficamos fazendo uma ideia ainda mais exacta do movimento, recorrendo a um graphico (fig. 95). Foi este construido suppondo que $a = 20$; isto é: que a bala foi projectada d'uma maneira tal, que percorreria 20 metros por segundo, se cousa alguma se oppozesse ao seu movimento.

Se traçarmos a recta OA, que é o graphico d'este movimento uniforme de 20 metros por segundo, teremos um meio muito simples de obter o que buscamos; consiste elle em — considerando novamente a figura 94 — marcar exactamente as mesmas alturas para 1 segundo, 2 segundos, 3 segundos, etc., mas abaixo de OA (fig. 95) em vez de as marcar abaixo de OT (fig. 94).

Um outro meio é servirmo-nos da formula supra:

$$at - 4,9 \times t^2,$$

para obter cada um dos valores de y .

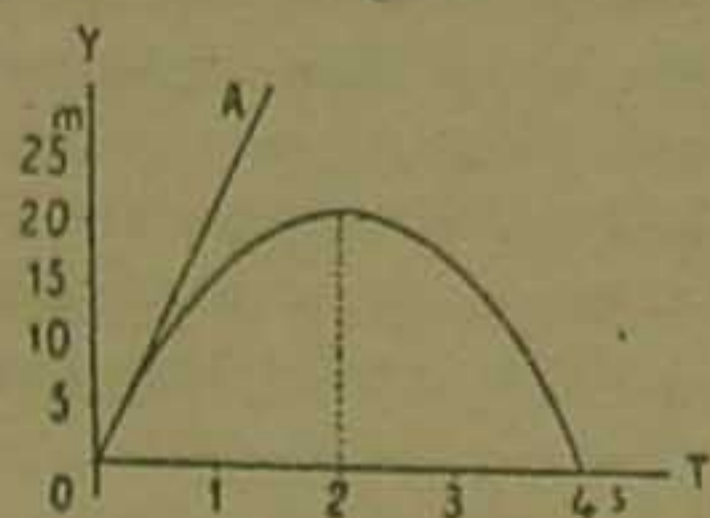


Fig 95

a fórma d'uma parabola.

D'um modo geral, o tempo gasto na descida é sempre igual ao empregado na subida. e a altura a que a bala se eleva é sempre $\frac{a^2}{19,6}$, expressa em metros.

Aqui, como no numero anterior, está entendido que não se toma em consideração a resistencia do ar, que, para as velocidades iniciaes um tanto grandes, tem uma acção sensivel, tanto na subida como na descida.

56 — Os comboios do Metropolitano

O caminho de ferro Metropolitano de Paris apresenta condições d'exploração muito especiaes, impostas pelas exigencias d'um serviço de passageiros n'uma grande cidade. Em primeiro logar, as estações são muitissimo proximas, em geral algumas centenas de metros, apenas; depois, os comboios succedem-se com curtos intervallos de tempo; d'onde resulta que a paragem d'um comboio, em cada estação, deve ser reduzida á minima demora possivel.

Em taes condições, uma boa parte do tempo necessario para ir d'uma estação á estação seguinte é empregado, na occasião da partida, a acelerar o movimento, e, um pouco antes da chegada, a retardal-o, fazendo uso dos freios, porquanto, querendo parar muito bruscamente, dar-se-hiam accidentes.

Dir-se-ha que o mesmo succede com todos os comboios de qualquer linha ferrea. Isto é verdade, em parte; mas, como as distancias entre duas estações são bastante grandes, os periodos de tempo para entrar em marcha e para travar o comboio, são cousa bem pouca, comparada com a duração total do trajecto. E' por isso que podemos, sem nos afastarmos muito da verdade pratica, representar por uma linha recta o graphico da marcha d'um comboio entre duas estações.

A marcha d'um comboio do Metropolitano é, pois, interessante, em virtude d'estas particularidades e da fórma do graphico correspondente, que a figura 96 representa.

Para construir este graphico, supozemos duas estações distantes 400^m uma da outra, uma velocidade de marcha em cheio de 36^{km} por hora, o que corresponde a 10^m por segun-

do ¹, e que são precisos 20 segundos, a partir do repouso, para chegar a adquirir toda a sua velocidade e igualmente um período de 20 segundos, para ir travando progressivamente até parar.

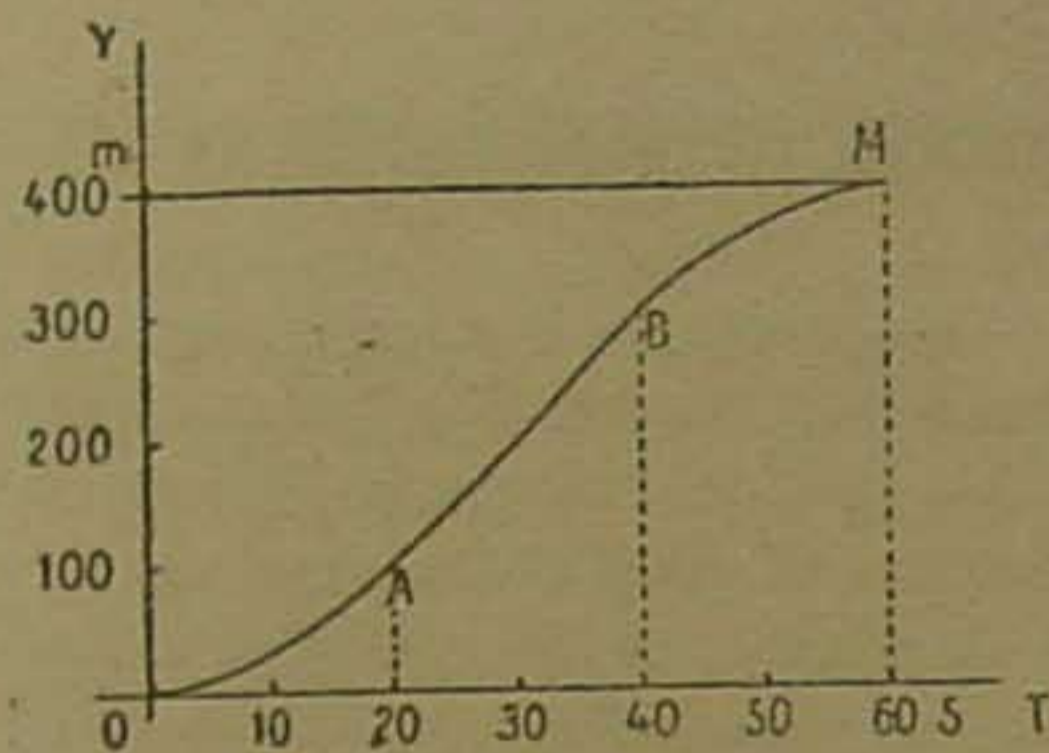


Fig. 96

marchando em cheio, a 10^m por segundo, durante 20 segundos, percorre 200^m; então, aperta os freios, marcha com um movimento retardado, percorre 100^m em 20 segundos e pára. Encontra-se assim na estação, a que tinha de chegar e gastou 1 minuto, ou 60 segundos, a effectuar o seu trajecto.

O graphico (fig. 96) dá conta de todas estas circumstancias. De O a A, é o período d'entrada em marcha (100^m em 20 segundos); de A a B, o período de marcha em cheio (200^m em 20 segundos), e de B a M, o período do emprego dos freios, para determinar a paragem (100^m em 20 segundos).

¹ Uma indicação pratica, interessante e muito util, é a seguinte; Passa-se da velocidade em kilometros por hora para a velocidade em metros por segundo, multiplicando aquella por $\frac{5}{18}$. No nosso caso, $36 \times \frac{5}{18} = \frac{180}{18} = 10$.

Reciprocamente, passa-se da segunda para a primeira, multiplicando por $\frac{18}{5}$ ou $\frac{36}{10}$. Basta, para isso, subtrahir $\frac{1}{10}$ e multiplicar por 4; assim, um comboio, que anda 30 metros por segundo, tem uma velocidade de 108 kilometros por hora, porquanto: $30 - 3 = 27$, e $27 \times 4 = 108$.

Com estes dados, que correspondem aos da exploração real, um comboio, partindo do repouso, marcha primeiramente com um movimento acelerado, de maneira analogo a uma bala, que acaba de ser abandonada, que cae; percorre assim 100^m durante 20 segundos; depois,

Basta olhar para a figura, para fazermos ideia da importancia dos periodos d'entrada em marcha e do emprego dos freios, em percursos tão curtos. Se a distancia entre duas estações fôr de 200^m, em vez de 400^m, o período de marcha em cheio desaparece completamente, e são precisos 40 segundos para percorrer os 200^m.

57 — Geometria analytica

O principio geral, que preside á construcção de qualquer graphico, foi indicado no n.º 46 e applicado, sob diversas fórmas, nos n.ºs seguintes. Recordemol-o dizendo que consiste em, depois de ter traçado duas rectas perpendiculares OX e OY, marcar sobre OX um comprimento $x = OP$ e sobre OY, um comprimento $y = OQ$ e em determinar um ponto M, fazendo passar por P e Q parallelas a OY e OX, que se cortam n'esse ponto M.

Se y é o valor d'uma funcção de x , que se quer representar, a linha, que se obtem ligando todos os pontos M construidos, representa as variações da funcção y .

A' custa de algumas denominações novas, vamos encontrar aqui tudo o que constitue a base d'uma sciencia importante e muito util, a *Geometria analytica*, devida ao genio de Descartes ¹.

E devemos acrescentar que, sem a Geometria analytica, não se teriam por certo ideado os graphicos.

As duas rectas OX e OY (fig. 97) chamam-se *eixos coordenados*. OX é o eixo dos x , ou eixo das *abscissas*; OY, o eixo dos y , ou eixo das *ordenadas*.

OP = x e OQ = y , são as *coordenadas* do ponto M; OP é a *abscissa* de M e OQ, a sua *ordenada*.

¹ RENE DESCARTES, illustre philosopho e sabio francez, natural da Haye, na Touraine (1596-1650).

do ¹, e que são precisos 20 segundos, a partir do repouso, para chegar a adquirir toda a sua velocidade e igualmente um periodo de 20 segundos, para ir travando progressivamente até parar.

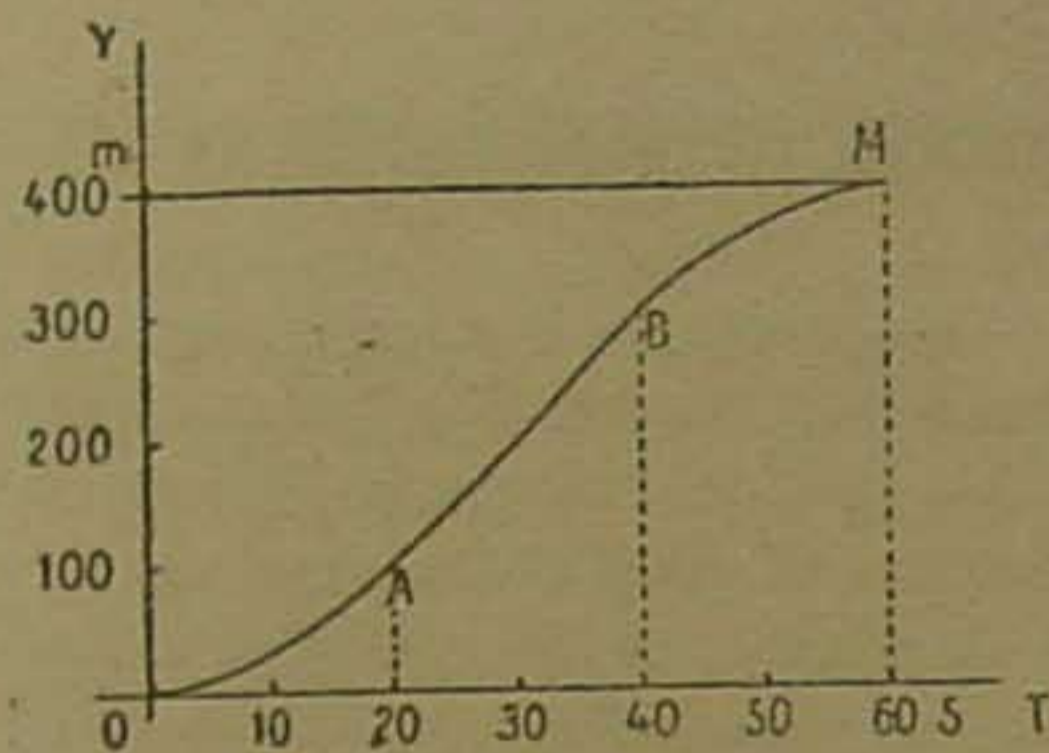


Fig. 96

marchando em cheio, a 10^m por segundo, durante 20 segundos, percorre 200^m; então, aperta os freios, marcha com um movimento retardado, percorre 100^m em 20 segundos e pára. Encontra-se assim na estação, a que tinha de chegar e gastou 1 minuto, ou 60 segundos, a effectuar o seu trajecto.

O graphico (fig. 96) dá conta de todas estas circumstancias. De O a A, é o periodo d'entrada em marcha (100^m em 20 segundos); de A a B, o periodo de marcha em cheio (200^m em 20 segundos), e de B a M, o periodo do emprego dos freios, para determinar a paragem (100^m em 20 segundos).

¹ Uma indicação pratica, interessante e muito util, é a seguinte; Passa-se da velocidade em kilometros por hora para a velocidade em metros por segundo, multiplicando aquella por $\frac{5}{18}$. No nosso caso, $36 \times \frac{5}{18} = \frac{180}{18} = 10$.

Reciprocamente, passa-se da segunda para a primeira, multiplicando por $\frac{18}{5}$ ou $\frac{36}{10}$. Basta, para isso, subtrahir $\frac{1}{10}$ e multiplicar por 4; assim, um comboio, que anda 30 metros por segundo, tem uma velocidade de 108 kilometros por hora, porquanto: $30 - 3 = 27$, e $27 \times 4 = 108$.

Com estes dados, que correspondem aos da exploração real, um comboio, partindo do repouso, marcha primeiramente com um movimento acelerado, de maneira analogo a uma bala, que acaba de ser abandonada, que cae; percorre assim 100^m durante 20 segundos; depois,

Basta olhar para a figura, para fazermos ideia da importancia dos periodos d'entrada em marcha e do emprego dos freios, em percursos tão curtos. Se a distancia entre duas estações for de 200^m, em vez de 400^m, o periodo de marcha em cheio desaparece completamente, e são precisos 40 segundos para percorrer os 200^m.

57 — Geometria analytica

O principio geral, que preside á construcção de qualquer graphico, foi indicado no n.º 46 e applicado, sob diversas fórmas, nos n.ºs seguintes. Recordemol-o dizendo que consiste em, depois de ter traçado duas rectas perpendiculares OX e OY, marcar sobre OX um comprimento $x = OP$ e sobre OY, um comprimento $y = OQ$ e em determinar um ponto M, fazendo passar por P e Q parallelas a OY e OX, que se cortam n'esse ponto M.

Se y é o valor d'uma funcção de x , que se quer representar, a linha, que se obtem ligando todos os pontos M construidos, representa as variações da funcção y .

A' custa de algumas denominações novas, vamos encontrar aqui tudo o que constitue a base d'uma sciencia importante e muito util, a *Geometria analytica*, devida ao genio de Descartes ¹.

E devemos acrescentar que, sem a Geometria analytica, não se teriam por certo ideado os graphicos.

As duas rectas OX e OY (fig. 97) chamam-se *eixos coordenados*. OX é o eixo dos x , ou eixo das *abscissas*; OY, o eixo dos y , ou eixo das *ordenadas*.

OP = x e OQ = y , são as *coordenadas* do ponto M; OP é a *abscissa* de M e OQ, a sua *ordenada*.

¹ RENE DESCARTES, illustre philosopho e sabio francez, natural da Haye, na Touraine (1596-1650).

Uma abscissa negativa marcar-se-ha na direcção OX e uma ordenada negativa, na direcção OY'.

Donde resulta que, se um ponto, como succede na figura, está no angulo XOY, o seu x e o seu y , são positivos;

se está no angulo $\left\{ \begin{array}{l} \text{YOX}', \text{ o seu } x \text{ é negativo e o seu } y \text{ é positivo;} \\ \text{X'OY}', \text{ o seu } x \text{ e o seu } y, \text{ são negativos;} \\ \text{Y'OX}, \text{ o seu } x \text{ é positivo e o seu } y \text{ é negativo.} \end{array} \right.$

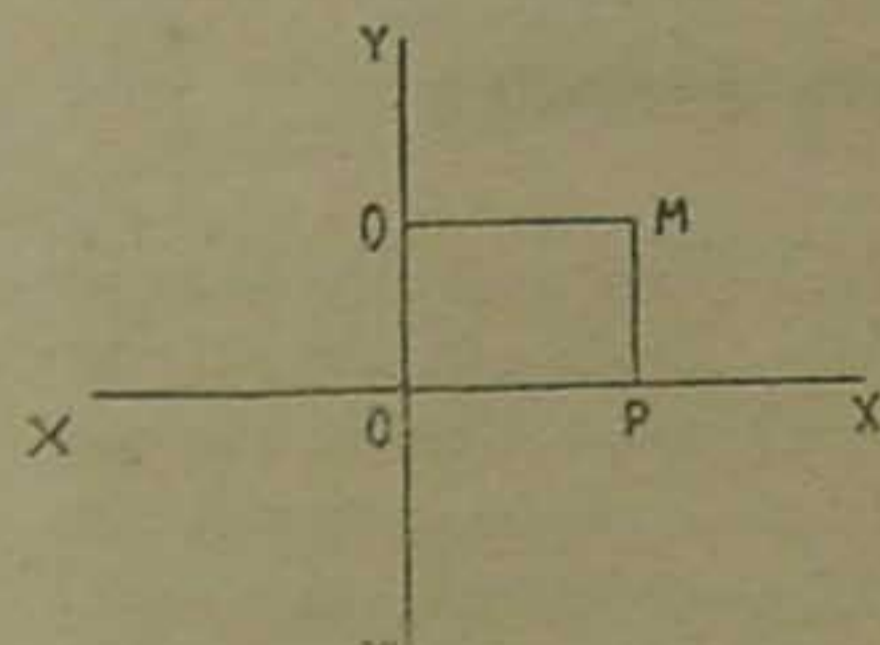


Fig. 97

Marcado um ponto no plano da figura, deduzimos as suas duas coordenadas. Dadas duas coordenadas quaesquer, deduz-se a posição do ponto correspondente.

Se as duas coordenadas x e y , não são umas quaesquer, tomadas ao acaso, mas estão ligadas entre si por

uma relação algebraica, isto é: de maneira que, sendo conhecida uma das coordenadas, a outra se pode deduzir d'ella por meio de operações de calculo bem definidas, o ponto M descreve então uma linha. Diz-se que a relação algebraica em questão é a *equação* da linha.

Construir uma linha e achar as suas propriedades, conhecendo a sua equação; achar a equação d'uma linha, quando esta foi definida d'uma maneira muito precisa, por um processo qualquer; eis os dois grandes problemas geraes, de que se occupa a Geometria analytica.

Não temos a pretensão d'aprender, n'este momento, seja o que fôr de Geometria analytica; mas, não deixa de ser proveitoso notar que, quando construímos os nossos differentes graphicos, fizemos, sem darmos por isso, um pouco de Geometria analytica, antes mesmo de conhecermos o nome d'esta sciencia. Tambem nos parece bom aproveitar esta occasião para saudar, de passagem, a memoria d'um dos maiores genios, de que a humanidade tem o direito de se orgulhar.

E' desde a invenção da Geometria analytica que o estudo das linhas curvas tem feito progressos enormes, graças aos novos subsidios fornecidos por esta sciencia.

Comtudo, trez d'estas linhas curvas — e ainda algumas mais — tinham já sido estudadas na antiguidade pelos geometras gregos, com o simples auxilio da Geometria. O nosso espirito sente-se perturbado ao considerar a enorme pujança intellectual, o prodigioso esforço cerebral, d'esses sabios, que, ha mais de duas dezenas de seculos, conseguiram levar a cabo descobertas, de que presentemente ainda nos utilizamos.

As trez linhas, de que queremos fallar, são ainda hoje d'um uso incessante, mesmo nas applicações praticas. E' o que nos leva a dizer algumas palavras a seu respeito, nos numeros que seguem, não para as estudar, é claro; mas, apenas, para se ficar sabendo o que ellas veem a ser e para que se possa entrever o prazer e o interesse, que o seu estudo despertará mais tarde.

58 — A parabola

Já tivemos occasião de encontrar esta curva nos graphicos da pedra que cae, da bala lançada de baixo para cima, e n'uma parte do graphico dos comboios do Metropolitano. Quando, de passeio pelo campo, succede vermos uma ponte suspensa, a fôrma curva, que affectam os cabos d'essa ponte, é a d'uma parabola.

Dá-se a definição rigorosa da parabola dizendo (fig. 98) que cada um dos seus pontos M está a igual distancia d'um ponto F e d'uma recta dada (D), de sorte que $MF = MP$. A curva tem assim a fôrma indicada na figura. Se por F, a que se chama *fóco* da parabola, se faz passar uma perpendicular á recta (D) denominada *directriz*, essa recta, FY, é o eixo da curva; esta tem a mesma fôrma d'um e d'outro lado do eixo. O eixo corta a curva em A, a meia distancia entre o fóco F e a directriz (D). O ponto A é o *vertice* da parabola.

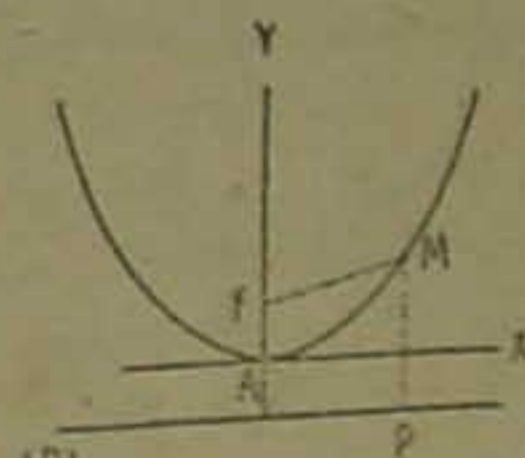


Fig. 98

Se se toma AY por eixo das ordenadas e uma perpendicular AX, por eixo das abscissas, a equação da parábola é: $y = kx^2$.

59 — A ellipse

Muitos arcos de pontes teem a fôrma d'uma meia ellipse. Quando se corta á faca obliquamente uma cenoura de fôrma um tanto regular, a secção, que se obtem, é uma ellipse. Expondo obliquamente á luz d'um candieiro a face d'um disco redondo, por exemplo: uma moeda, e projectando a sua sombra sobre uma folha de papel branco, esta sombra é tambem uma ellipse. Emfim, a Astronomia ensina-nos que todos os planetas, e o nosso em particular, giram em volta do Sol descrevendo ellipses.

Define-se a ellipse pela seguinte propriedade: a somma das distancias d'um dos seus pontos a dois pontos dados, F e F', é constante; F e F', são os fôcos da ellipse. D'onde um processo para traçar uma ellipse n'um solo arenoso:

fixam-se duas estacas em F e F', ás quaes se amarra pelas suas extremidades, um cordel, cujo comprimento foi determinado, e estica-se esse cordel por meio d'uma haste de ferro aguçada, M; fazendo girar a haste sob o solo, mantendo sempre o cordel bem tenso, ella descreve uma ellipse. Este processo é conhecido pelo nome

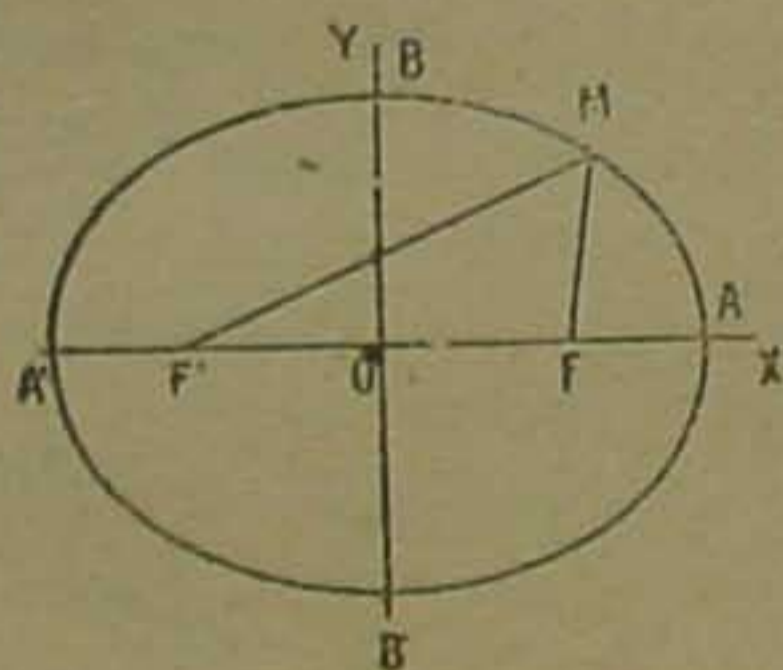


Fig. 99

de «traçado dos jardineiros».

Vê-se (fig. 99) que a ellipse é uma curva fechada. A recta FF' chama-se *eixo focal* ou *grande eixo*; o meio O de FF' é o *centro*; a perpendicular OY a FF' é o *pequeno eixo*. A curva tem uma fôrma exactamente igual acima e abaixo do grande eixo, e á direita e á esquerda do pequeno eixo.

O grande eixo intersecta a curva em dois pontos, A e A'; o pequeno eixo, em B e B'; os quatro pontos A, A', B e B', são os *vertices* da ellipse. Vê-se facilmente que o comprimento constante $MF + MF'$ é egual a AA' ou 2 OA, e denomina-se comprimento do grande eixo; o comprimento do pequeno eixo é BB' ou 2 OB.

Se os dois pontos F e F', estivessem confundidos n'um só, em O, a ellipse tornava-se então um circulo e teriamos $OA = OB$.

Se tomarmos OA e OB para eixos dos x e dos y, a equação da ellipse será, designando por a o comprimento OA e por b o comprimento OB,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A equação do circulo, se b se torna egual a a, e

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

60 — A hyperbole

Apezar d'esta curva ser tambem muito importante, é menos facil encontrar exemplos vulgares d'ella, do que das duas precedentes. Comtudo, se adaptarmos um *abat-jour* circular a um candieiro, collocando-o de maneira que a luz lhe fique por baixo, a sombra projectada pelo bordo inferior do *abat-jour*, sobre uma parede vertical, é um fragmento de hyperbole.

A hyperbole acha-se definida por esta propriedade: a differença das distancias de um qualquer dos seus pontos a dois pontos fixos, F e F', denominados *fôcos*, é constante.

Como, ha pouco, para a ellipse, a recta FF' (fig 100) e a perpendicular OY, levantada sobre o meio de FF', são os *eixos* da curva. Esta tem a mesma fôrma acima e abaixo de

FF' , e á direita e á esquerda de OY . O eixo FF' intersecta a curva em dois pontos, A e A' , que são os *verticaes*, e chama-se-lhe *eixo transverso*; o eixo OY não encontra a curva. O segmento $A'A$ tem um comprimento igual á diferença constante das distancias d'um ponto da curva a F e a F' .

O que aqui nos apparece de novo, é que a curva, que de resto pode prolongar-se tanto quanto quizermos, se compõe de duas partes, de dois *ramos* — como se diz — completamente separados um do outro.

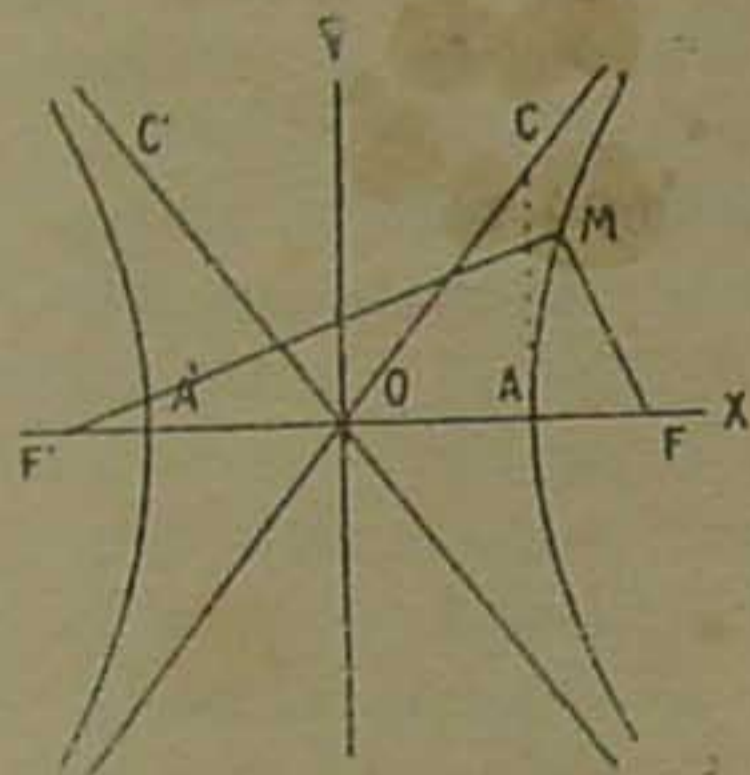


Fig. 100

Devemos notar a existencia de duas rectas, OC e OC' , chamadas *asymptotas*, que teem a particularidade de, prolongadas ellas e prolongada tambem a construcção da curva, as vermos aproximar-se indefinidamente d'esta, sem nunca se confundirem com ella. Podemos construir facilmente as *asymptotas*, sabendo que o ponto C é tal, que CA é perpendicular a FF' e que $OC = OF$. Se $OA = a$ e $OC = c$, segue-se que $AC^2 = c^2 - a^2$; fazendo $AB = b$ e tomando OA e OY para eixos dos x e dos y , a equação da hyperbole será:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

O que principalmente devemos conservar na memoria d'estas indicações ultra-summarias sobre as trez curvas importantissimas, de que acabamos de fallar, é que ellas podem fornecer materia para construcções numerosas e variadas e contribuir para adquirir a destreza manual necessaria para o traçado de curvas geometricas. Tambem aqui é preciso fazer uso, successivo ou alternado, do papel quadriculado, dos instrumentos usuaes do dezenho, esboços á mão, etc.

61 — O segmento dividido

Seja AB um segmento de recta, que supponhamos prolongado nos dois sentidos (fig. 101), e M um ponto movel sobre a recta AB . Se, por exemplo, o ponto M está situado entre A e B , divide AB em dois segmentos, AM e BM , e é a relação $y = \frac{AM}{MB}$ d'estes dois segmentos, que queremos estudar. E' evidente que ella varia, segundo a posição de M .

Colloquemos primeiramente M em A ; a relação é zero, porquanto MA é zero. Se M se move de A para B , a relação augmenta; quando M está a meio de AB , a relação y é

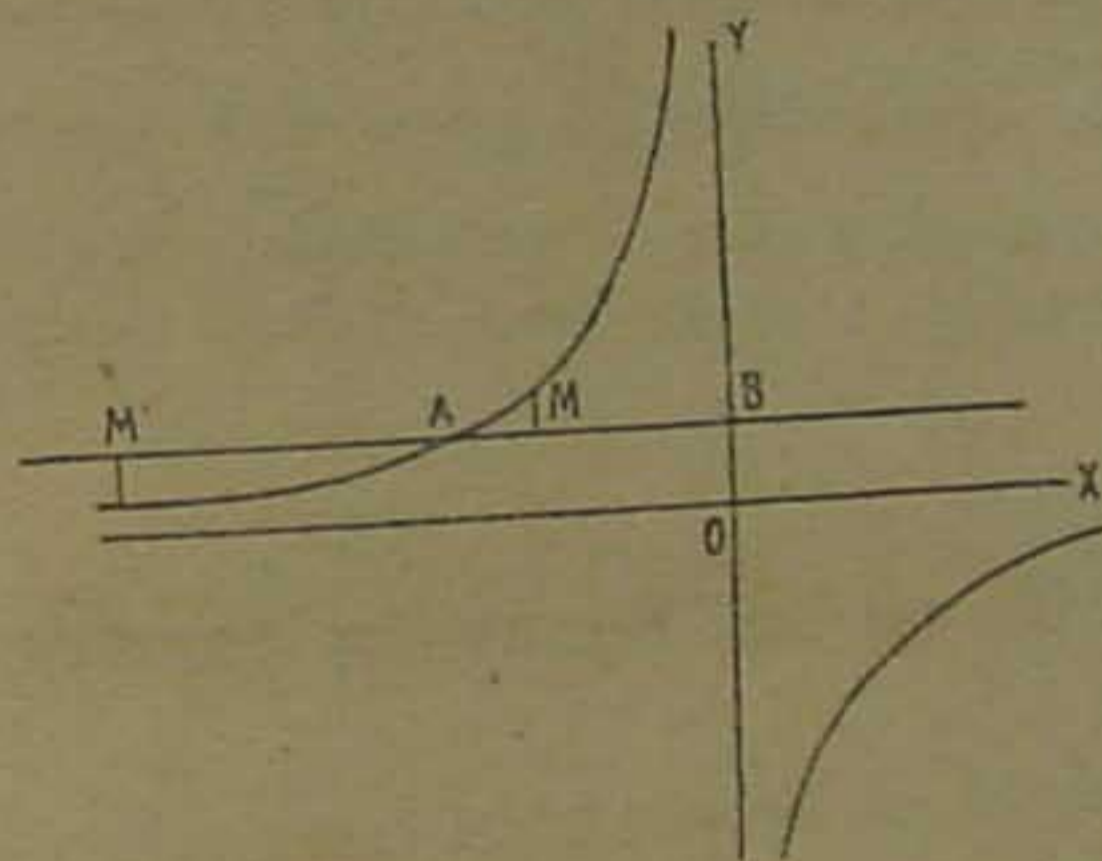


Fig. 101

igual a 1; quando M se approxima de B , y adquire valores que se tornam cada vez maiores, e dizemos que, quando M chega a B , a relação é infinita, o que é apenas uma maneira de fallar.

Se, agora, M passa um pouco para além do ponto B , AM será sempre positivo, MB será negativo e muito pequeno; d'onde y , isto é: $\frac{AM}{MB}$ será negativo e muito grande. Afastando-se M cada vez mais de B , a relação permanecerá ne-

gativa, a sua grandeza diminuirá, ficando sempre maior que 1, mas aproximando-se mais e mais de 1.

Se, agora, tendo sempre o ponto M situado em A, o fazemos mover para a esquerda, a relação $\frac{AM}{MB}$ é ainda negativa; a sua grandeza é menor que 1 e aproxima-se cada vez mais de 1, á medida que M se afasta de A.

Representando, para cada posição do ponto M, o valor da relação y por uma ordenada levantada perpendicularmente á recta AB, obtemos, como graphico representando as variações d'esta relação, a curva traçada na figura 101. Esta curva é uma hyperbole, cujas asymptotas são BY, perpendicular a AB, e OX, parallela a AB, a uma distancia marcada pela unidade, e abaixo d'ella, isto é: no sentido negativo.

A propria fórma da figura mostra que não ha dois pontos M, para os quaes a relação $\frac{AM}{MB}$ possa ser a mesma. Desde que seja conhecido o valor y d'esta relação, com o seu signal, está determinada a posição exacta de M sobre a recta AB.

62 — Dó, mi, sol. Harmonias geometricas

Dissemos que na figura 101 não podem existir dois pontos M differentes e taes, que a relação $\frac{AM}{MB}$ seja a mesma. Mas, dado um ponto M, podemos achar um outro e só um, M', tal que as duas relações $\frac{AM}{MB}$ e $\frac{AM'}{M'B}$ tenham a mesma grandeza. Como então os signaes são contrarios, temos pois $\frac{M'A}{M'B} = \frac{AM}{MB}$.

Quando quatro pontos d'uma recta, M', A, M e B, são taes que este caso se dá, diz-se que formam uma *divisão harmonica*.

A expressão pode parecer estranha; antes, porém, de a explicar, vamos escrever a proporção $\frac{M'A}{M'B} = \frac{AM}{MB}$ d'uma maneira um pouco differente. Designemos por a , m e b , os segmentos M'A, M'M e M'B; temos, então, $AM = m - a$ e $MB = b - m$, e a relação torna-se em

$$\frac{a}{b} = \frac{m - a}{b - m} \text{ ou ainda } \frac{m - a}{a} = \frac{b - m}{b};$$

$$\frac{m}{a} - 1 = 1 - \frac{m}{b}; m \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} \right) = 2; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m}.$$

Por outro lado, é sabido — desde que a acustica começou a ser estudada — que os comprimentos d'uma corda vibrante dando as trez notas *dó*, *mi*, *sol*, que constituem o accorde maior, perfeito, são proporcionaes a

$$1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$$

Os comprimentos inversos são, pois, proporcionaes a

$$1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$$

ou 4, 5, 6;

e, como $4 + 6 = 2 \times 5$, os trez comprimentos de cordas a , m e b , satisfazem á relação

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m},$$

que acima escrevemos.

E' d'esta approximação, que deriva a designação de *divisão harmonica*.

D'um modo mais geral: quando temos uma progressão arithmetica qualquer

$$a \quad b \quad c \quad \dots$$

e dividimos 1 por cada um dos termos, a serie

$$\frac{1}{a} \quad \frac{1}{b} \quad \frac{1}{c}$$

que se obtem, denomina-se uma *progressão harmonica*.

Uma das propriedades mais notaveis das divisões harmonicas, que desempenham um papel importante em Geometria, é a seguinte:

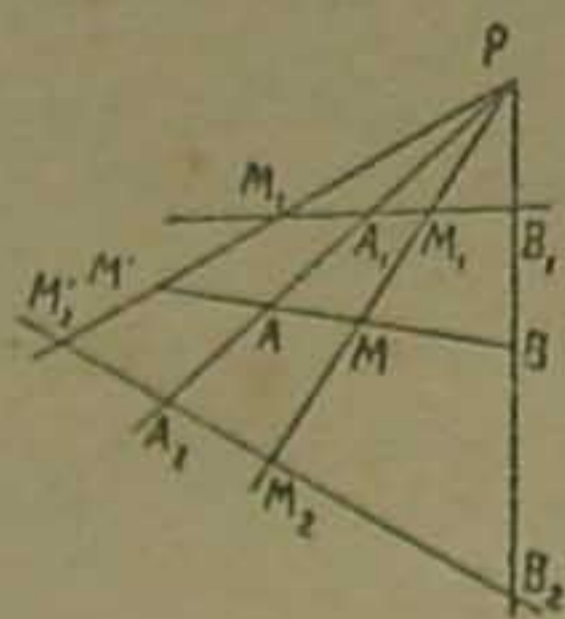


Fig. 102

Seja (fig. 102) $M'AMB$ uma divisão harmonica. Se ligarmos os 4 pontos, que a compõem, a um ponto qualquer, e se cortarmos as 4 rectas PM' , PA , PM e PB , por uma recta qualquer, temos ainda uma divisão harmonica; assim, na figura, $M'_1A_1M_1B_1$ e $M'_2A_2M_2B_2$, são divisões harmonicas.

Ao systema das 4 rectas PM' , PA , PM e PB , chama-se um *feixe harmonico*.

63 — Um paradoxo: $64 = 65$

Em mathematica encontram-se a meude paradoxos; isto é: resultados que se obteem por meio de operações reputadas feitas com rigor, e que, apesar d'isso, são notoriamente falsos.

Todo o paradoxo não explicado é perigoso, porquanto lança no espirito a confusão e a duvida.

Pelo contrario, todo o paradoxo explicado é instructivo,

porque chama a attenção de uma cilada e mostra de que illusões podemos ser victimas. Uma vez, é um raciocinio incorrecto; outras, é uma construcção feita com demasiada irreflexão, que levam a um absurdo flagrante.

Mas, se os paradoxos, bem apresentados e explicados, teem tambem o seu logar no *ensino*, deve-se guardar, sobre esta materia, a mais prudente reserva na *iniciação*, durante a qual não se trata de profundar as cousas, mas apenas de as mostrar e as fazer apalpar.

Foi isto que nos determinou a não apresentar, até aqui, questão alguma d'este genero. Chegados, porém, ao termo, ou quasi, da nossa tarefa, não vemos nenhum inconveniente grave — muito pelo contrario — em abrir excepção para uma unica questão, de resto muito divulgada hoje em dia, que se pode mesmo deixar — não por muito tempo — o alumno procurar resolver e' pouco provavel que descubra sozinho o segredo; e não tardará que tenhaes que ir em seu auxilio.

Tomemos (fig. 103) um quadrado de 64 casas de papel quadriculado e collemol-o sobre um cartão. Feito isto, traçamos as linhas marcadas na figura; dividem estas o quadrado em dois rectangulos, tendo 8 lados de casa por base e, por altura, 5 e 3 lados respectivamente; em seguida, o rectangulo grande é dividido em dois trapezios e o pequeno, em dois triangulos. Cortemos, em seguida o nosso cartão, com um canivate ou uma tesoura, segundo as trez linhas traçadas, o que nos dará os 4 pedaços A, B (trapezios) e C, D (triangulos).

Ajuntemos agora os 4 pedaços, como indica a 2.^a parte da

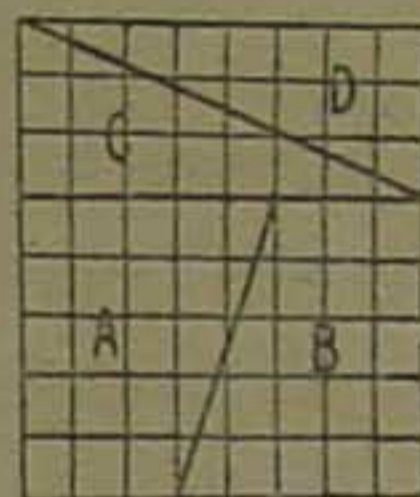


Fig. 103

figura. Temos assim um rectangulo, que apresenta 5 columnas de 13 casas cada uma; vemos, pois, 5×13 ou 65 casas, com esta segunda disposição; no quadrado, não havia senão 8×8 ou 64. E é com os mesmos pedaços de cartão que se obteem estes dois resultados differentes.

Sentimo-nos impellidos, julgando ver que $64 = 65$, a perguntar a nós proprios, se não enlouquecemos.

Uma vez conhecida, a explicação não é muito complicada; mas, é necessario reflectir um pouco para a descobrir.

Olhando para a grande diagonal do rectangulo, que constitue a 2.^a parte da figura, somos levados a perguntar a nós proprios se ella é realmente uma linha recta. Compõe-se de duas partes: a hypotenusa do triangulo rectangulo C e o lado do trapezio A. Segundo o traçado, a inclinação da hypotenusa sobre o grande lado é $\frac{3}{8}$; a do lado do trapezio é $\frac{2}{5}$. Se

estas duas fracções fossem exactamente eguaes, teriamos uma recta. Mas, ellas são $\frac{15}{40}$ e $\frac{16}{40}$; a primeira é um pouco mais pequena que a segunda, e o que parecia uma recta, é realmente um quadrilatero muito estreito e alongado, que corresponde á area da casa accrescentada. O ajustamento parecia realizar-se; mas, na realidade, não se faz exactamente.

Se tomassemos um quadrado de $21 \times 21 = 441$ casas e dividissemos o seu lado em 13 e 8, teriamos apparentemente, por uma construcção semelhante, $441 = 442$. Unicamente, as duas fracções, cuja egualdade é necessaria para um ajustamento perfeito, seriam $\frac{8}{21}$ e $\frac{5}{13}$; differem apenas de $\frac{1}{273}$, de sorte que a concordancia pareceria ser completa.

64 — Quadrados magicos

Se escrevermos os 9 primeiros numeros, 1, 2, ... 9, nas casas d'um quadrado, da maneira seguinte:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

podemos verificar que, sommando os numeros comprehendidos n'uma linha, n'uma columna ou n'uma qualquer das diagonaes, encontramos sempre $4 + 9 + 2 = 3 + 5 + 7 = 8 + 1 + 6 = 4 + 3 + 8 = 9 + 5 + 1 = 2 + 7 + 6 = 4 + 5 + 6 = 2 + 5 + 8 = 15$.

Uma figura assim, é o que se chama um *quadrado magico* de 3; a somma 15 é a *somma magica constante*. Se subtrahissemos 1 de cada numero, o que daria

3	8	1
2	4	6
7	0	5

o quadrado seria ainda magico, mas, a constante seria então 12 em vez de 15.

Tomando os numeros 0, 1, 2, ... 24, e dispendo-os n'um quadrado de 25 casas, teremos, satisfazendo ás mesmas condições, um quadrado magico de 5; a constante será 60.

Eis um exemplo, em que podemos verificar que todas as condições exigidas estão plenamente satisfeitas:

0	19	8	22	11
23	12	1	15	9
16	5	24	13	2
14	3	17	6	20
7	21	10	4	18

Mas, ha mais: se cortarmos o quadrado por uma recta

vertical entre duas columnas quaesquer, e se fizermos a permutação dos dois pedaços, teremos ainda um quadrado magico; se o cortamos por uma recta horisontal entre duas linhas, e se procedermos da mesma fôrma á permutação, teremos ainda um quadrado magico.

Eduardo Lucas deu o nome de «diabolicos» aos quadrados, que gozam d'esta propriedade.

Os quadrados magicos teem sido o assumpto de numerosos trabalhos. Embora possam parecer um simples passatempo, dão origem a questões, que apresentam grandes difficuldades, e os mais illustres mathematicos, Fermat entre outros, não desdenharam de se occupar d'ellas.

Uma das mais notaveis obras publicadas em nossos dias, sobre esta materia, é a do sr. G. ARNOUX: *Arithmétique graphique; Les Espaces arithmétiques hypermagiques*; Paris, Gauthier-Villars, 1894.

Como méra curiosidade, entendemos dever referirmo-nos aqui a estas figuras, cuja existencia de nenhum modo é permitido ignorar.

65 — Discurso final

Se acaso tivéssemos tido que iniciar algumas creanças no conhecimento das cousas essenciaes da mathematica, examinadas nas paginas que precedem, eis, pouco mais ou menos, o que lhes diríamos, chegados ao termo da nossa jornada:

Ides começar a vossa instrucção no campo da mathematica. Segundo as vossas disposições naturaes, segundo a direcção que, mais tarde, sereis chamados a seguir na vida, essa instrucção será mais ou menos vasta; mas, restricta a certos limites, é indispensavel a todos.

Até agora, não estudastes nada; mas, aprendestes, recreando-vos, um certo numero de coisas uteis. Se, da vossa parte, houve qualquer esforço, nunca deixou de ser um esforço voluntario; nada vos foi exigido, e mormente nada se exigiu da vossa memoria.

Antes mesmo de saberdes ler ou escrever, psdestes formar

numeros com diversos objectos e fazer algumas operações simples. Quando o emprego dos algarismos veio a ser possível, a pratica do calculo tornou-se-vos mais correntia. Graças ao habito de vos reportardes aos proprios objectos e de não considerar unicamente os algarismos, que não fazem mais do que traduzil-os, cedo conseguistes possuir a noção dos numeros negativos e a tornal-a absolutamente familiar. Algumas noções de Geometria — comprovadas, mas não demonstradas — bastaram para começar a mostrar-vos o estreito laço, que une a sciencia dos numeros á da extensão.

O estudo das fracções não o fizestes, como não fizeste nenhum outro; mas, sabeis o que é uma fracção e conheceis sufficientemente bem a pratica corrente do calculo, que lhe diz respeito.

Algumas progressões, de fôrma simples primeiramente, depois um pouco mais generalizadas, levaram-vos em seguida, com o auxilio de varios exemplos, á concepção de numeros enormes. Outros numeros grandes appareceram deante dos vossos olhos, quando vistes o que são as permutações.

Com algumas noções praticas complementares de Geometria e de desenho, podestes formar uma ideia da construcção e do emprego dos graphics, e realizar algumas das suas applicações, particularmente a questões de movimento. Chegastes assim até ás portas da Geometria analytica; divisastes, pelo menos, a fôrma das trez curvas principaes, que a Geometria analytica permite estudar com maior profundeza, mas que já eram conhecidas dos antigos.

Tenha ficado, de todas estas noções, muito ou pouco na vossa memoria, alguma cousa sempre arrecadastes. Adquiristes, ao mesmo tempo e muito certamente sem dar por tal, habitos de espirito, que vos hão de ser preciosissimos.

D'ora avante, não se trata mais de brincadeiras, de passatempos, mas de estudo. Tendes que vos sujeitar a esforços intellectuaes, talvez mesmo a alguns esforços de memoria. Serão, porém, tanto mais attenuados, quanto, mais oupadas foram, até aqui, as vossas forças, e ainda porque,

apezar d'isso, sabeis muitas mais cousas, do que sabiam as creanças da vossa idade, que eram instruidas submettendo-as a uma verdadeira tortura, que eram obrigadas a decorar palavras, sem nada comprehenderem.

Na maior parte das materias dos vossos estudos, ides encontrar antigos conhecimentos; a perturbação, que a novidade acarreta, terá desapparecido as mais das vezes. Não julgae, comtudo, que não encontrareis difficuldades; haveis de encontral-as, mas vereis que proveem da propria natureza das cousas, que é indispensavel vencel-as para alcançar resultados uteis e interessantes, e isso dar-vos-ha a coragem precisa. Por assim dizer brincan-lo, adquiristes muitas noções, que facilitarão os vossos estudos futuros. Pelo trabalho, de hoje em diante, ides tirar partido do que sabeis; empregareis a vossa razão; ampliareis o ambito dos vossos conhecimentos. Mas, esse trabalho, se deixou de ser um divertimento, não será tão pouco uma maçada! Reconhecendo a sua utilidade, tomareis gosto por elle; pouco a pouco, tornar-se-ha para vós uma necessidade da vida; ser-vos-ha não só facil, mas preciso.

Todavia, quando encontrardes qualquer difficuldade tendes os vossos mestres, verdadeiros guias, que vos dirigirão; mas, não exige mais nada d'elles. O esforço individual, o esforço livre, sómente, pode dar bons resultados. Inconscientemente, habituastes-vos a elle com os jogos da tenisa infancia. Compete-vos agora tirar d'isso todo o proveito, empregando vós proprios, na obra, da vossa instrucção, tudo o que possuirdes em paciencia, em vontade e em energia tida de reserva.

Eis, pouco mais pouco menos — salvo numerosas variantes — o que devemos dizer á creança, chegada ao termo da sua iniciação e na vespera de encetar os seus estudos. Não é com um discurso, mas com dez ou cem sessões, conforme a necessidade, que conseguiremos imbuil-a d'estas ideias. Compete ao iniciador utilizar-se agora d'ellas para orientar a creança pelas novas veredas, que é chamadas a percorrer.

Este iniciador, em minha opinião, deve ser principalmente

a familia; e mesmo, quando por quaesquer razões, individuos ou sociaes, tal não succeda, o pae e a mãe devem compenetrar-se de que o seu primeiro dever é não se desinteressarem pela evolução cerebral da creança e serem, pelo menos, os auxiliares do educador, se não podem ser elles proprios os educadores.

E, terminada a tarefa da iniciação, devendo começar ámanhã a da instrucção, os deveres dos paes tornam-se ainda mais imperiosos, se é possível; a sua responsabilidade é pesada, porquanto a decisão, que vão tomar, pode influir sobre toda a vida do filho, quer para bem, quer para mal.

E', pois, ás familias que agora nos dirigimos, para lhes dar alguns conselhos, a nosso ver uteis, expostos ao correr da penna, dos quaes cada um aproveitará o que tiver por bom.

Comecemos por dizer que estamos d'accordo n'este ponto: a *iniciação mathematica* é *indispensavel* a todas as creanças, sem distincção alguma de condições de fortuna, de situação social, de sexo. Agora, porém, affirmamos que — sempre sem distincção, sem reserva alguma — a *instrucção mathematica* é egualmente *indispensavel*. As mulheres precisam tanto d'ella, como os homens; a vida usual, a economia domestica, da mesma fórma que a industria, cujas applicações envolvem todo o nosso viver, exigem de nós conhecimentos sobre a sciencia das grandezas e da extensão.

Surge aqui uma objecção, que temos refutado mais d'uma centena de vezes, mas que não deixaremos de refutar ainda. «Terá meu filho disposição para os estudos mathematicos? Se não tem, é pura perda de tempo dirigil-o n'esse sentido; não pretendo fazer d'elle um mathematico.»

Simplemente prodigioso! Acaso, quando ensinastes á mesma creança a leitura e a escripta, procurastes saber se ella era dotada de disposições naturaes para estes ramos de estudo? Quando lhe ensinastes as primeiras noções de desenho, pensastes, por ventura, que ella estava reservada para vir a ser um pintor celebre? Nada pode contestar a utilidade para qualquer, homem ou mulher, de saber exprimir

correctamente as suas ideias na sua lingua materna; e não se imagina, por isso, que cada alumno esteja destinado a ser um Paulo Luiz Courier, um Goethe ou um Shakespeare.

Tanto em mathematica, como em tudo o mais, a instrução não *faz* sabios; nem se trata de os fazer; mas, existe em todas as disciplinas um fundo geral de conhecimentos uteis, necessarios mesmo a toda a gente e de facil aquisição para todo o individuo, cujo cerebro esteja isento de tãra.

O conjunto d'esses conhecimentos, graças á iniciação prévia, pode ser assimilado em muito menos tempo, do que o que lhe é consagrado no ensino corrente.

Esta bagagem, no que respeita ao nosso assumpto, está pouco mais ou menos representada, em França, pelo que se denomina as mathematicas elementares. Qualquer creança, dotada, ou não, d'aptidão especial, pode assimilar o conjunto d'estes conhecimentos, da mesma fôrma que pode chegar a ler e a escrever com correcção, senão com elegancia. Se tem o gosto innato pelas mathematicas, cultival-as-ha depois, por si só; se é litterato por temperamento, escreverá. O ensino nunca fez sabios, nem artistas; o seu fim deve ser preparar homens.

Portanto, sobre este ponto, não ha hesitação possivel. O vosso filho deve adquirir as noções fundamentaes de mathematica, necessarias a todos. Mas, segundo a vossa situação, as vossas preferencias, o vosso feitio de espirito, onde e como, vae elle receber essa instrução?

Não podemos fallar, aqui, senão da França. Com pequenas variantes, o problema apresentar-se-ha d'egual modo, por quasi toda a parte. Temos: um Ensino primario, do qual uma boa parte tem, ou devia ter, por objecto a iniciação; um Ensino primario superior, que o completa; um Ensino secundario dividido em numerosos e variados escaninhos. D'entre tudo isto, torna-se necessario fazer uma selecção, e sois vós quem tem que escolher; porquanto, sobre estes pontos precisos, não posso infelizmente dar-vos algum conselho proveitoso.

O nosso Ensino primario é supportavel; o Ensino primario superior seria o menos mau de todos, se muitas familias

não ficassem hypnotisadas pelo attractivo das «carreiras liberaes» e do funcionalismo.

Quanto ao Ensino secundario, para não nos alongarmos demasiado, limitamo-nos a citar um pequeno trecho d'um estudo do sr. Ascoli; podemos ver n'elle a mais encantadora das ironias, e talvez não nos enganemos:

«O que se teve em vista, augmentando a importancia das sciencias no Ensino secundario, foi conceder-lhes o bom quinhão que, de direito, a ellas compete na formação dos espiritos. Até aqui, este papel estava reservado ás letras, emquanto que as sciencias constituíam principalmente disciplinas d'exames, destituídas de qualquer character educativo.»

Traduzie: *até aqui*, o nosso ensino secundario teve por missão embrutecer a mocidade, *ao passo que*, no futuro, succederá o mesmo.

E, quando pensamos que os professores d'Ensino secundario são homens de vasta instrução, dedicados á sua missão, conscienciosos quanto se pode ser, estremecemos ao pensar no damno que pode produzir o espirito de rotina, servido por uma Administração monstruosa, que só usa do poder para fazer mal.

Em todo o caso, seja qual fôr a decisão tomada, não deixae um só instante de fiscalisar a educação de vosso filho. Antes mesmo de o confiar a um estabelecimento qualquer d'instrução, tendes o direito e o dever de vos informar do espirito do ensino, dos methodos seguidos, das condições de trabalho, sem que para isso seja mister que sejaes mathematicos vós proprios.

E, acima de tudo, não vos deixae intimidar pelo director, provedor, reitor — pouco importa o titulo — que tiver a petulancia de dizer que vos metteis onde não sois chamados.

Duas observações, apenas, vão dar-vos uma ideia da maneira como vos podeis defender.

Para ensinar o systema metrico, ha lyceus em que não se encontra um só instrumento de medição: metro, litro, pesos, etc.

No ensino da Geometria, adopta-se, desde seculos — poder-se-hia dizer: desde os geometras gregos — um method

fatigante, antirracional, que desanima e desgosta os alumnos, mormente os principiantes. Todavia, ha mais de trinta annos, em 1874, um sabio de alto valor, o sr. Carlos Méray, professor da Universidade de Dijon, publicou, com o titulo *Nouveaux éléments de Géométrie*, um livro verdadeiramente notavel, em que se faz simultaneamente o estudo do plano e do espaço, pondo em evidencia as verdades d'ordem experimental, que o methodo classico dissimula com hypocrisia. A Administração Universitaria enfureceu-se; depois, favorecido pelo progresso e com o decorrer do tempo, o novo methodo introduziu-se n'um grande numero de escolas, principalmente no Ensino primario superior. Por toda a parte, está dando os mais notaveis resultados; mas, a porta do Ensino secundario, tem-lhe ficado tapada até hoje, como os ouvidos d'um surdo, que não quer ouvir, apesar de ter sido publicada uma 2.^a edição do livro 1.

Por consequencia, quando tratardes de colher informações sobre a entrada de vosso filho para um collegio ou lyceu, pedi licença para ver o material d'ensino dos pesos e medidas, os instrumentos d'agrimensura, etc. Se vos responderem que, na casa, nada d'isso existe, fugie para não mais voltar.

Fazei tambem, muito simplesmente, esta pergunta: «No ensino da Geometria, empregam o methodo de Méray?» — Trez são as respostas possiveis: «Sim; Não; Não sei o que isso é.» No primeiro caso, podeis continuar a informar-vos; no segundo, cumprimentae muito cortezmente a personagem e procurae não tornar a vel-a; no terceiro caso, dae-lhe o bom conselho de aprender o que diz respeito á sua profissão, e dizei-lhe claramente, que só podereis continuar a conversação quando ella tiver concluido a sua aprendizagem; antes, não.

¹ Isto foi escripto em maio de 1905. Posteriormente, um decreto de 27 de julho, completado pelas instrucções publicadas em 9 de setembro, modificou os programmas das Mathematicas do Ensino secundario.

Foram introduzidos em Geometria os principios do methodo do sr. Méray, pelo que devemos felicitar o ministro d'Instrucção publica. Mas, o nome do inventor nem sequer foi citado, o que é, ao mesmo tempo, um acto d'ingratidão e uma injustiça

Se os paes e as mães acabassem, d'uma vez para sempre, por ter a maxima cautela com o futuro intellectual dos filhos, fallariam claro, exigiriam o que teem o direito d'exigir, e muitas resistencias obstinadas desapareceriam como por encanto.

Temos fé que tal virá a succeder, um dia. Mas, para isso, é preciso que esteja mais profundamente gravado nos cerebros este pensamento tão justo e verdadeiro, enunciado pelo sr. Emilio Borel n'uma conferencia notavel, e sob cuja impressão queremos deixar-vos:

«Uma educação mathematica, ao mesmo tempo theorica e pratica, pode exercer a mais benefica influencia sobre a formação do espirito.»

Nota sobre «O iniciador mathematico» do sr. J. Camescasse

Os meios educativos, que tentámos expor n'este livro são, como se viu, essencialmente concretos. Aconselhamos que se variem o mais possivel e que se recorra ao emprego dos palitos, dos feijões, dos tentos, etc., assim como ao uso do papel quadriculado; mas, sempre pensámos que a organização d'um material apropriado aos methodos, que indicamos, seria muito util, especialmente no ensino collectivo.

Praticamente, a questão não estava isenta de difficuldades; o sr. Camescasse, porém, conseguiu vencel-as da maneira mais engenhosa possivel, e deu-nos, sob o nome de *Iniciador mathematico*, um jogo de pequenos cubos de madeira, de 1 centimetro de aresta, brancos uns, vermelhos os outros, que se podem agrupar, ajustar entre si, prestando-se, assim, ás mais variadas combinações.¹

¹ JACQUES CAMESCASSE: *L'Initiateur mathématique. Jeu de petits cubes, rendant facile dans la Famille et à l'École la mise en pratique de l'Initiation mathématique de C.-A. Laisant.* Livreria Hachette & C.^{ie}, Boulevard Saint Germain, 79, Paris.

Um jogo consta d'uma caixa contendo 600 cubos brancos, 600 cubos vermelhos, 144 regrotas e uma «Nota explicativa» de 32 paginas, com 15 figuras no texto e 1 plancha a duas cores; preço: 12 francos. A «Nota explicativa» vende-se separadamente; preço: 1 franco.

Alem da formação dos numeros na numeração decimal, do estudo das medidas d'areas e de volume no systema metrico, dos exercicios de desenho ornamental ou de construcção, que podem ter cabida nas escolas maternas, existe um grande numero de materias acima tratadas, a cujo estudo o *Iniciador* do sr. Camescasse presta valioso auxilio. Permite elle, com effeito, executar materialmente, pela propria mão da creança, todas as figuras, que implantam solidamente no seu cerebro as propriedades dos numeros, e, isso, sem esforço algum.

Citaremos, em especial, os n.ºs 16, 21, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33 e 34, como contendo questões, a que o *Iniciador mathematico* se applica com verdadeira felicidade. Mas, é provavel que, na pratica, muitas outras applicações se revelem por si proprias.

E' um material de que podemos tirar grande proveito: tanto no ensino nas familias, como nas escolas, sobretudo, quando nos dirigimos simultaneamente a varias creanças; porquanto, o tempo necessario para as construcções é assim consideravelmente reduzido.

Por todas estas razões, sentimos verdadeiro prazer em tornar conhecida uma tentativa, que tem por objecto deleitar a creança, instruindo-a, e instruil-a, deleitando-a. No fundo, os dois fins são identicos; não se aprende bem e não se retem fielmente, senão o que dá gosto aprender. Isto é verdade em todas as edades, e ainda o é mais especialmente, quando se trata da infancia.

INDICE ALPHABETICO

	Pag.		Pag.
Abscissa.....	152	Balas (Pilha de).....	89
Abstractos (Numeros)...	13	Base d'um cone.....	126
Adição.....	19	» d'um parallelo-	
Adição (Taboa d').....	17	grammo... ..	68
Agudo (Angulo).....	63	» d'uma pyramide...	70
Algarismos.....	28	» d'um systema de	
Algebra.....	35	numeração.....	96
Algebricas (Notações)...	37	» d'um triangulo....	66
» (Funcções)...	150	Bases d'um cylindro....	126
Altura d'um cone	126	» d'um prisma.....	70
» d'um cylindro....	126	» d'um trapezio....	67
» d'um parallelo-		Binaria (Numeração)...	101
grammo.....	69		
» d'um prisma.....	70	Calculo mental.....	16
» d'uma pyramide..	70	Centena.....	15
» d'um triangulo...	66	Centro (Angulo ao)....	120
Angulo.....	63	» d'um circulo	119
» agudo..	63	» d'uma ellipse....	152
» ao centro.....	120	» d'uma esphera... ..	126
» inscripto.....	120	Circulo..	119
» obtuso.	63	» (Arco de).....	119
» recto.	63	» (Area do).....	121
Angulos d'um polygono..	66	» (Centro d'um)...	119
» reintrantes....	67	» (Diametro d'um)...	119
Area.....	71	» m a x i m o d'uma	
» d'um circulo.	127	esphera	126
» d'um parallelo-		» (Raio d'um).....	119
grammo	73	» (Segmento d'um)	119
» d'um quadrado....	72	Circumferencia	120
» d'um rectangulo...	72	Comboios.....	133
» d'um trapezio....	73	» do Metropoli-	
» d'um triangulo....	73	tano.....	147
» (Unidade d').....	71	Compasso.....	118
Arestas d'um prisma.. .	70	Compostos (Numeros)...	50
» d'uma pyramide	70	» (Juros).....	110
Asymptotas d'uma hy-		Comprimento (Unidade	
perbole.....	154	de).....	7

	Pag.		Pag.
Concorrentes (Rectas)...	64	Ellipse (Centro d'uma)...	152
Concretos (Numeros)....	13	» (Eixos d'uma)....	152
Cone.....	126	» (Equação d'uma)...	153
» (Altura d'um).....	126	» (Focos d'uma) ..	152
» (Base d'um).....	126	» (Grande eixo	
» (Vertice d'um)....	126	d'uma).....	152
Contacto (Ponto de)....	120	» (Pequeno eixo	
Convexo (Polygono)....	67	d'uma).....	152
Coordenadas.....	152	» (Vertices d'uma).	153
Crescente (Progressão)..	106	Equação d'um circulo...	153
Crivo d'Eratosthenes....	52	» d'uma ellipse..	153
Cubo.....	70	» d'uma hyper-	
» d'um numero.....	48	bole.....	155
» d'uma somma.....	51	» d'uma linha....	152
Cylindro.....	125	» d'uma parabola.	151
» (Altura d'um)..	126	Equilatero (Triangulo)..	65
» (Bases d'um)..	126	Esphera.....	126
		» (Centro d'uma).	126
Decagono	67	» (Circulos maxi-	
Decrescente (Progres-		mos d'uma)....	126
são).....	106	» (Diam. ^{os} d'uma)	126
Denominador	55	» (Raios d'uma)..	126
Dezena	14	Expoente.....	48
Diabolicos (Quadrados).	161	Extremidade d'um seg-	
Diagonaes d'um polygo-		mento.....	38
no.....	67	Faces d'um prisma....	70
Diametro d'um circulo..	119	» d'uma pyramide.	70
» d'uma esphera	126	Factores	46
Diferença	21	Fallada (Numeração)....	16
» (Quadrado		Feixe harmonico	156
d'uma)....	79	Figurada (Numeração)..	16
Directriz d'uma parabola	151	Figuradas (Permuta-	
Dividendo	52	ções).....	113
Divisão	52	Foco d'uma parabola...	151
» harmonica ..	158	Focos d'uma ellipse....	152
» (Restos d'uma)..	54	» d'uma hyperbole..	153
Divisor	52	Fracção	55
Dodecagono	67	» (Termos d'uma).	55
Eixo d'uma parabola...	151	Fracções decimaes....	57
» transverso d'uma		Funcção	129
hyperbole.....	153	Funcções algebraicas....	130
Eixos coordenados...	151	Geometria	62, 71
» d'uma ellipse....	152	» analytica...	149
» d'uma hyperbole..	153	Grados	118
Ellipse	152		

	Pag.		Pag.
Grande eixo d'uma elli-		Movimento d'uma bala	
pse.....	152	de baixo para cima.	146
Graphicos	128	Multiplicação	45
» dos caminhos		» (Methodo	
de ferro....	133	musulma-	
» meteorologi-		no de)....	47
cos.....	137	» (Taboa de).	42
Harmonica (Divisão)...	157	Multiplicador	45
» (Progressão)	158	Multiplicando	45
Harmonico (Feixe)....	158	Negativos (Numeros)...	38
Heptagono	67	Notações algebraicas....	37
Hexagono	67	Numeração	16
Horizontal (Plano)....	63	» binaria.....	101
» (Recta).....	63	» escripta....	30
Hyperbole	153	» fallada....	16
» (Asymptotas		» figurada....	16
d'uma).....	154	» romana....	99
» (Eixo trans-		» (Systemas	
verso d'uma).	154	de).....	96
» (Eixos d'uma)	153	Numerações diversas...	96
» (Equação de		Numerador	55
uma).....	154	Numeros	13
» (Focos d'uma)	153	» abstractos....	13
» (Ramos de		» compostos....	50
uma).....	129	» concretos....	13
» (Vertices de		» impares....	16
uma).....	154	» negativos....	38
Hypotenusa	76	» pares.....	16
» (Quadrado		» positivos.....	38
da).....	75	» primos.....	50
Impares (Numeros)....	16	» quadrados....	85
Inscripto (Angulo)....	110	» triangulares...	82
Isosceles (Triangulo)....	65	Obtuso (Angulo).....	63
Juros compostos.....	120	Obtusangulo (Triangulo)	65
Lados d'um polygono..	66	Octogono	67
» d'um triangulo..	65	Ordenada	150
Linha recta.....	32	Origem d'um segmento..	38
Losango	68	Parabola	151
Lunulas de Hippocrates.	122	» (Directriz de	
Magicos (Quadrados)...	158	uma).....	151
Mental (Calculo).....	16	» (Eixo d'uma).	151
		» (Equação de	
		uma).....	152

	Pag.		Pag.
Parabola (Foco d'uma)	151	Progressões arithmeti-	
» (Vertice d'uma)	151	cas.	104
Paradoxos	158	» crescentes	106
Parallelas (Rectas)	62	» decrescen-	106
Parallelepipedo	70	tes	106
Parallelogrammo	68	» geometricas	106
» (Altura d'um)	69	» harmonicas	158
» (Area d'um)	73	» por differença	104
» (Bases d'um)	68	» por quociente	106
Pentagono	67	Pyramide	70
Pequeno eixo d'uma ellipse	152	» (Altura d'uma)	70
Permutações	112	» (Arestas de uma)	70
» figuradas	113	» (Base d'uma)	70
Perpendiculares (Rectas)	63	Pyramide (Faces d'uma)	66
Pilha de balas	89	» (Vertice d'uma)	66
Plano	62	Quadrado	68
» horizontal	63	» (Area d'um)	72
Polyedro	125	» arithmetico de Fermat	95
Polygono	66	» diabolico	161
» (Angulos d'um)	66	» d'uma differença	79
» convexo	67	» da hypotenusa	75
» (Diagonaes de um)	67	» magico	160
» (Lados d'um)	66	» d'um numero	48
» (Vertices de um)	66	» d'uma somma	78
Ponto de contacto	120	Quadrilatero	67
Positivos (Numeros)	38	Queda d'uma pedra	145
Postilhões (Problemas dos)	131	Quociente	52
Potencia	48	Razão d'um circulo	119
Primos (Numeros)	50	» d'uma esfera	126
Prisma	70	Razão d'uma progressão	104, 106
» (Altura d'um)	70	Recta	32
» (Arestas d'um)	70	» horizontal	63
» (Bases d'um)	70	» vertical	63
» (Faces d'um)	70	» (Segmento de)	63
» recto	70	Rectangulo	68
Problemas dos postilhões	131	» (Area d'um)	72
Productos	45	Rectas concorrentes	64
		» parallelas	62

Rectas perpendiculares	63	Taboa d'addição	17
Recto (Angulo)	63	Taboa de multiplicação	42
Reintrans (Angulos)	67	Tangente a um circulo	120
Relação	41	Termos d'uma fracção	55
» da circumferencia com o diametro (π)	121	» d'uma progressão	104, 106
Resto	21	Total	19
Resto d'uma divisão	54	Transferidor	118
Romana (Numeração)	99	Trapezio	67
Rosacea	123	» (Area d'um)	73
		» (Bases d'um)	67
Secante a um circulo	120	Triangulares (Numeros)	82
» a duas parallelas	64	Triangulo	74
Segmento de circulo	119	» (Altura d'um)	64
» (Divisão d'um)	157	» (Area d'um)	73
» (Extremidade d'un)	38	» arithmetico de Pascal	94
» (Origem d'um)	38	» (Base d'um)	66
» de recta	33	» equilatero	65
» (Sentido d'um)	38	» isosceles	65
Sentido d'um segmento	38	» (Lados d'um)	65
Signaes	35	» obtusangulo	65
Somma	18	» rectangulo	65
» (Cubo d'uma)	81	» (Vertices de um)	64
» Quadrado d'uma)	78	Unidade	41
» dos cubos dos n primeiros numeros	92	» d'area	71
» dos n primeiros numeros impares	83	» de comprimento	71
» dos n primeiros numeros	86	» de volume	125
» dos quadrados dos n primeiros numeros	88	Vertice d'um cone	126
» dos termos d'uma progressão magica constante	105, 107, 163	» d'uma parabola	153
Subtracção	21	» d'uma pyramide	70
Systemas de numeração	96	Vertices d'uma ellipse	153
		» d'uma hyperbole	154
		» d'um polygono	66
		» d'um triangulo	64
		Volumes	126
		Zéro	30

Armando Ferreira

Contos maduros, 1 vol. \$50

Luís da Câmara Reis

Contos de março, (Lendas-Sonhos-Amores-Ironias), 1 vol. \$60

Azevedo Neves

A mascara de um actor (Cabeças de expressão) Desenhos originaes e interpretações, de Roque Gameiro, 1 grosso volume edição de grande luxo, br. 3\$00. Encad. 4.80

Doutor H. Schaefer

I. Pereira de Sampaio (Bruno)

Historia de Portugal, 5 grossos vols. 13.50

Oldemiro Cesar

Comedia da vida, 1 vol. il. . . . \$60

Alberto Pimentel

A corte de D. Pedro IV. 1 vol. \$80

Do portal á claraboia, 1 vol. \$40

Notas sobre o «Amor de Perdicação», 1 vol. \$60

A primeira mulher de Camillo, 1 vol. \$60

O Arco de Vandoma, (romance), 1 vol. 1.00

A princesa de Boavão, (romance), 1 vol. nova ed., no prelo.

A porta do Paraíso, (romance), 1 vol. 3.^a grande. il. br. 2.60

Um promettido (romance) . . . 1.00

Augusto Gil

De palmo e m.ão. \$30

da cigarra, 3.^a ed., no

Albino Forjaz de Sampaio

O Livro das Cortezãs, 2.^a ed., no prelo.

Tiberio, filósofo e moralista, 2.^a ed. \$80

Os Barbaros. I. Antonio Nobre, 1 vol. \$50

A. Hamon

As lições da guerra mundial, 1 vol. de 440 pag. 1.00

Brito Camacho

D. Carlos Intimo. \$60

Impressões de Viagem. \$80

Ao de leve. \$80

Por ahí fora. \$80

Longe da vista. \$80

André Brun

Dez contos em papel. \$80

Cada vez peor. \$80

Soldados de Portugal. \$80

Praxedes, mulher e filhos. \$60

Almas de um outro mundo. \$60

Outra vez Praxedes. \$60

A malta das trincheiras (migalhas da grande guerra) 3.^a ed., no prelo.

D. João da Camara

Dôr Bemdita, trad. \$60

A Cidade. \$30

Contos. 2.^a ed., no prelo.

Meia Noite.

Alteia na Corte.

Eduardo Noronha

Diario de um policia, 1 vol. . . . 1.00

Americo Olavo

Na grande guerra, 1 vol. 1.00

Carlos Olavo

Jornal d'un prisioneiro de guerra na Alemanha, 1 vol.