UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO
FRANCISCO DE OLIVEIRA FILHO

A MATEMÁTICA DO COLÉGIO:
LIVROS DIDÁTICOS E HISTÓRIA DE UMA DISCIPLINA ESCOLAR

SÃO PAULO
2013

FRANCISCO DE OLIVEIRA FILHO

A MATEMÁTICA DO COLÉGIO:
LIVROS DIDÁTICOS E HISTÓRIA DE UMA DISCIPLINA ESCOLAR

Tese apresentada à Banca Examinadora da Universidade Anhanguera de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio

UNIAN/SÃO PAULO
2013

Oliveira Filho, Francisco.
O47m A matemática do colégio: livros didáticos e história de uma disciplina escolar. / Francisco Oliveira Filho. -- São Paulo: Universidade Anhanguera de São Paulo, 2013.
xiii, 562 f.; 30 cm.

Tese (DOUTORADO) – Universidade Anhanguera de São Paulo, 2013.
Orientadores: Prof. Dr. Ubiratan D´Ambrósio.
Referências bibliográficas: f. 181-188.

1. Disciplina escolar. 2. Matemática do colégio. 3. História das disciplinas escolares. 4. História da educação matemática. I. D´Ambrósio, Ubiratan. II. Universidade Anhanguera de São Paulo. III. Título.

CDD 510.1

FRANCISCO DE OLIVEIRA FILHO

A MATEMÁTICA DO COLÉGIO:
LIVROS DIDÁTICOS E HISTÓRIA DE UMA DISCIPLINA ESCOLAR

Aprovada em: ________/_____________/_____________

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio (Orientador)

Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente

Profa. Dra. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

Profa. Dra. Neuza Bertoni Pinto

Profa. Dra. Aparecida Rodrigues Silva Duarte

Dedico este trabalho à minha família.

Minha esposa SANDRA,

meus filhos LUÍS FERNANDO *e* PEDRO HENRIQUE,

porto seguro, para onde sempre retorno

e onde sempre aporto.

Meu pai FRANCISCO *(in memorian),*

minha mãe NADIR,

meus irmãos VERA LÚCIA, ELISABETE,

TERESINHA *e* ANTONIO MÁRCIO,

alvos de nossa estima, consideração e apreço.

AGRADECIMENTOS

– A DEUS, que me acompanha, me orienta e me acalenta nas horas de necessidade.

– Aos professores da Banca de Qualificação, Aparecida Rodrigues Silva Duarte, Neusa Bertoni Pinto, Ruy César Pietropaolo e Wagner Rodrigues Valente, que, com suas inestimáveis observações, possibilitaram a finalização deste trabalho.

– Ao Professor Ubiratan D'Ambrosio, pela orientação tranquila e autonomia fornecidas que me proporcionaram estímulo e tranquilidade para a execução da pesquisa e escrita do texto, meu fraterno abraço.

– À Professora Dra. Tânia Maria Mendonça Campos, pela luta em favor do Programa, pelo aconselhamento e carinho demonstrados ao longo de nossa convivência, meu fraterno agradecimento.

– Ao amigo, Professor Wagner Rodrigues Valente, meus agradecimentos pelo convite para fazer parte do Projeto e contatos mantidos durante a pesquisa; sempre atencioso e prestimoso em seu apoio constantes.

– À Professora Dra. Aparecida Rodrigues Silva Duarte, pela ajuda, companheirismo e carinhos demonstrados durante a realização da pesquisa, meus profundos agradecimentos.

– Aos professores do programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNIAN-SP, pelas orientações, amizade, ensinamentos, e convivência tranquila e amigável durante mais de cinco anos, meus agradecimentos.

– Aos colegas do programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNIAN-SP, pela amizade, cooperação e estímulos transmitidos durante essa jornada.

– Aos colegas do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT), pelo estímulo, companheirismo e ajuda manifestados durante essa profícua convivência.

– Ao meu querido pai, Francisco de Oliveira (*in memorian*), que nunca estudou, mas que sempre me incentivou e apoiou. Jamais esquecerei.

– À minha esposa Sandra, meus filhos Luís Fernando e Pedro Henrique, meu muito obrigado pelo apoio, incentivo e paciência sempre demonstrados.

– À minha mãe Nadir, meus irmãos, Vera Lúcia, Elisabete, Teresinha e Antonio Márcio: obrigado por tudo.

– À Equipe da Secretaria da UNIAN-SP, pela presteza no atendimento e atenção sempre demonstrados.

– À querida Professora Lulu Healy, a quem me esqueci de agradecer formalmente quando do texto do Mestrado, quero dizer que a admiro muito e que tenho um grande orgulho de ter sido seu aluno.

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo traçar a trajetória de constituição da disciplina Matemática do Colégio, no período 1930 – 1970, pela análise da produção didática do período. O período em estudo é atravessado por quatro grandes momentos/reformas educacionais: Francisco Campos, Capanema, Simões Filho e Matemática Moderna. Teve como aporte teórico principal os estudos do historiador André Chervel (1990), com seu texto *História das disciplinas escolares*: reflexões sobre um campo de pesquisa. Foram também utilizados os aportes teóricos dos historiadores Alain Choppin (*História dos livros e das edições didáticas*: sobre o estado da arte – 2004, e *Pasado y presente de los manuales escolares* – 2000), Antonio Viñao Frago (*Sistemas educativos, culturas escolares e reformas* – 2007), Dominique Julia (*A cultura escolar como objeto histórico* – 2001) e de Roger Chartier, com o conceito de Apropriação (*O mundo como representação* – 1991). Verificou-se ao final que a Matemática do Colégio teve o seguinte trajeto de constituição: não constituída no período dos Cursos Complementares (1931 – 1942); constituída no período dos Cursos Clássico e Científico (1943 – 1951); estabilizada no período do Programa Mínimo (1952 – 1960), não constituída e em busca de uma nova configuração, durante o período da Matemática Moderna (1961 – 1970).

Palavras-chave: disciplina escolar; matemática do colégio; livros didáticos; história das disciplinas escolares; história da educação matemática.

ABSTRACT

This study traces the trajectory of the constitution of the discipline High School (10-12) Mathematics in the period 1930 – 1970, analyzing the didactic production in this period. The period is crossed by four major moments of educational reforms: Francisco Campos, Capanema, Simões Filho and Modern Mathematics. The main theoretical support is the studies of the historian André Chervel (1990) with his *History of school subjects*: reflections on a field of research. We also used the theoretical contributions of historians Alain Choppin (*History of textbooks and didactic issues*: state of the art – 2004, and *Past and present of school textbooks* – 2000), Antonio Viñao Frago (*Educational systems, school cultures and reforms* – 2007), Dominique Julia (*The school culture as object history* – 2001) and Roger Chartier, with the concept of Appropriation (*The world as representation* – 1991). As a result, we verified that High School Mathematics had the following path constitution: unincorporated (as such) in the period of Complementary Courses (1931-1942); constituted in the period of the Classical and Scientific Courses (1943-1951); stabilized during the Minimum Programme (1952 to 1960) and unincorporated and in search of a new configuration during the Modern Mathematics period (1961-1970).

Keywords: scholar discipline; high school mathematics (10-12); textbooks; history of scholars disciplines; history of mathematics education

RÉSUMÉ

Cette étude vise, tracer la trajectoire de la discipline constitué comme Mathématique du lycée dans la période 1930 – 1970, em analysant la production didactique dans cette période. La période d'étude est traversé par quatre grands moments/réformes éducatives: Francisco Campos, Capanema, Simões Filho et des mathématiques modernes. J'ai utilisé comme principales études théoriques les travaux de l'historien André Chervel (1990) avec son Histoire des disciplines scolaires: réflexions sur un domaine de recherche. Nous avons également utilisé les apports théoriques des historiens Alain Choppin (Histoire du livre et les enjeux didactiques: état de l'art – 2004, et Passe et present des manuels scolaires – 2000), Antonio Viñao Frago (Systèmes éducatifs, les cultures scolaires et les réformes – 2007), Dominique Julia (La culture scolaire en histoire de l'objet – 2001) et Roger Chartier, avec le concept d'appropriation (Le monde comme représentation – 1991). Comme resultat on a vérifiée finalement que les mathématiques Du lycée se a constitué suivant le chemin: non constituée en société (n'est pas) dans la période de cours complémentaires (1931-1942), constitué dans la durée des cours classiques et scientifiques (1943-1951), se stabilise au cours du programme minimum (de 1952 a 1960) et non constituée en société et à la recherche d'une nouvelle configuration pendant la période des mathématiques modernes (1961-1970).

Mots-clés: discipline scolaire; mathématiques Du lycée, manuels scolaires, l'histoire des disciplines scolaires, l'histoire de l'enseignement des mathématiques.

LISTAGEM DE SIGLAS

ABE	–	Associação Brasileira de Educação
APER	–	Arquivo Pessoal Euclides Roxo
CAPES	–	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEMPEM	–	Centro de Estudos, Memória e Pesquisa em Educação Matemática
F.I.C	–	Frères de L'Instruction Chrétienne
GHEMAT	–	Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil
LDB	–	Lei de Diretrizes e Bases
MMM	–	Movimento da Matemática Moderna
PUC-SP	–	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
PUC-RJ	–	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
UNIAN-SP	–	Universidade Anhanguera de São Paulo
UNICAMP	–	Universidade de Campinas
USP	–	Universidade de São Paulo

ANEXOS

Anexo Descritivo – FASE 1

Anexo de Imagens – Fase 1

Anexo Descritivo – FASE 2

Anexo de Imagens – FASE 2

Anexo descritivo – FASE 3

Anexo de Imagens – FASE 3

Anexo Descritivo – FASE 4

Anexo de Imagens – FASE 4

Relação de Quadros

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Concluí a graduação em Ensino de Ciências na Universidade Salesiana (Unisal), em Lorena-SP, em 1990. De imediato, ingressei na Rede Estadual de São Paulo, atuando na rede oficial até o mês de fevereiro de 2000, e, no período de 1996 a 2000, exerci a função de Professor-Coordenador do período noturno. Saí da Rede Estadual de São Paulo em virtude de dificuldades de conciliação profissional e jurídica com a carreira que trilhei no Comando da Aeronáutica. No entanto, o desejo de retornar à sala de aula sempre permaneceu. Ao longo do período em que estive na Rede Estadual, fiz outra graduação (Pedagogia) e um curso de especialização (Modelagem Matemática em Ensino-Aprendizagem), uma vez que meu gosto e minha aptidão foram sempre a Matemática, mas uma Matemática ligada ao ensino.

Em 2007, com o objetivo de retornar à sala de aula, tomei conhecimento da abertura do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo. Fiz a inscrição no Programa, visto que a continuação dos estudos sempre foi uma de minhas metas, e o Mestrado, um sonho sempre acalentado.

Ao ingressar no curso de Mestrado em Educação Matemática em 2008, na Universidade Bandeirante de São Paulo, um grande horizonte se abriu em minha vida pessoal e profissional. De imediato percebi a grandeza do projeto da Universidade e a competência da equipe ali instalada. Desse modo, certifiquei-me de que tinha feito a escolha certa. Fiquei igualmente feliz ao perceber que o corpo discente é, em grande parte, composto de professores atuantes na área de ensino de Matemática, e muitos deles, da rede oficial. A meu ver, esse fato dá um brilho especial ao curso e maior qualidade às discussões e debates nas inúmeras disciplinas ao longo do curso, uma vez que tais profissionais trazem uma experiência carregada de práticas escolares diversas.

No Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo, escolhi a linha de pesquisa “História da Matemática

Escolar”[1] e, no decorrer do curso, tive oportunidade de participar de diversos encontros e seminários e de desenvolver trabalhos de pesquisa histórica no Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil (Ghemat), ocasião em que fui o responsável pela catalogação e organização do acervo pessoal da Professora Manhúcia Liberman. Tais experiências vividas durante o curso, na participação de seminários, no contato diário com os professores, com os colegas, na participação de eventos organizados pela Uniban (Colóquio Osvaldo Sangiorgi, I, II e III Siemat), sedimentaram em mim o gosto e o interesse pela pesquisa, sobretudo a pesquisa histórica.

Defendi a dissertação intitulada O School Mathematics Study Group e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil, no dia 30 de novembro de 2009, cujo orientador foi o Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente, e fizeram parte da banca examinadora as Professoras Doutoras Siobhan Victoria Healy e Maria Célia Leme da Silva.

A semente plantada em meu interior no decorrer do Mestrado germinou. Ao defender a dissertação, consciente e firme em meus propósitos, e com a intenção de permanecer junto ao Programa da Uniban, matriculei-me como aluno especial no Doutorado nessa instituição em 2010. Em janeiro de 2010, fui convidado pelo Professor Wagner Rodrigues Valente, coordenador do Ghemat, a desenvolver um trabalho de pesquisa histórica sobre a disciplina Matemática para o Colégio.[2]

Em 2011, como aluno regular de Doutorado, tive o prazer de participar dos cursos da Escola de Altos Estudos, dos professores Yves Chevallard, Gérard Vergnaud e Ubiratan D’Ambrosio. Além disso, uma das disciplinas que cursei dentro da linha de pesquisa “Tendências Internacionais da História e da Filosofia da Matemática e seus reflexos na Educação Matemática” foi o Tópico de Pesquisa II durante o 1.º e 2.º semestres de 2011, com o Professor Ubiratan D’Ambrosio, em que foram discutidos temas de grande relevância para a Educação Matemática.

[1] Atualmente, essa linha de Pesquisa se denomina “Tendências Internacionais da História e da Filosofia da Matemática e seus reflexos na Educação Matemática”.

[2] Matemática a ser ensinada no atual Ensino Médio, 1.ª, 2.ª e 3.ª séries.

Diante do intuito de investigar o nascimento da Matemática do Colégio, no período 1930-1970, faz-se necessário tecer alguns comentários sobre esse nível de ensino.

O nível de ensino que chamamos de Colégio, hoje Ensino Médio, 1.ª, 2.ª e 3.ª séries, recebeu muitas denominações ao longo do tempo. Para este estudo, vamos considerar o período compreendido entre 1930 e 1970. A escolha desse período se deve ao fato de que ele carrega em seu bojo quatro grandes reformas/momentos educacionais e cada qual acaba por influenciar o processo de constituição da disciplina Matemática para o Colégio. Por exemplo, o surgimento e a estruturação do Colégio ocorrem na Reforma Capanema, que será alvo de abordagem específica neste texto. Em 1980, temos o fim do Movimento da Matemática Moderna, tendo passado pelas Reformas/Momentos educacionais Francisco Campos (1931), Capanema (1942) e Simões Filho (1951). Reparemos, então, na riqueza do período.

O Colégio sofreu, no decorrer desse tempo, diferentes denominações, quais sejam:

- 1931 – Reforma Francisco Campos – Decreto n.º 19.890, de 18 de abril de 1931 – passou a chamar-se 2.º Ciclo do Ensino Secundário – *Curso Complementar* com duração de dois anos, com três modalidades: Pré-jurídico, Pré-médico e Pré-politécnico;

- 1942 – Reforma Gustavo Capanema – Decreto-lei n.º 4.244, de 9 de abril de 1942 – passou a chamar-se 2.º Ciclo do Ensino Secundário – *Cursos Clássico* ou *Científico*, com duração de três anos;

- 1961 – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – 20 de dezembro de 1961 – passou a se chamar *Colegial* com duração de três anos – 1.ª, 2.ª e 3.ª séries;

- 1971 – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – 11 de agosto de 1971 – passou a se chamar *2.º Grau* com duração de três anos – 1.ª, 2.ª e 3.ª séries.

No ano de 2010, dentro do trabalho desenvolvido com o pesquisador Wagner R. Valente já citado, elaboramos um levantamento das fontes primárias de livros didáticos relativos ao período 1930-1980 que dizem respeito à matemática do Colégio. O resultado foi o lançamento, em abril de 2011, de um DVD intitulado “A matemática do colégio: livros didáticos para a história de uma disciplina”.

Durante o trabalho de elaboração do referido DVD, acentuou-se em mim a vontade de aprofundar os estudos relativos à disciplina Matemática para o Colégio, em face do ineditismo do tema e sua importância para a História da Educação Matemática. Assim, surgiu meu tema de pesquisa para o Doutorado, e o DVD “A Matemática do Colégio: livros didáticos para a história de uma disciplina” constituiu-se base inicial de fontes de pesquisa para este estudo e irá acompanhar o texto final. Portanto, o principal escopo desta investigação é traçar a trajetória histórica de constituição da disciplina Matemática para o Colégio, por meio de análise de livros didáticos.

Na realidade, esta pesquisa, de certa maneira, é a continuação de outra realizada pelo Ghemat, denominada “A Matemática do Ginásio”,[3] do qual resultou um livro denominado O nascimento da matemática do ginásio, uma coletânea de textos organizados pelo Professor Valente, que procura mostrar a origem desse ensino, assim pontuada no texto:

> A análise da matemática escolar dos exames parcelados, exigidos para matrícula nos cursos superiores, desde a criação dos cursos jurídicos no Brasil, em 1827, será o ponto de partida deste estudo. A pesquisa seguiu a trajetória dessa matemática dos exames parcelados, a partir dos cursos preparatórios; passou pelos liceus provinciais do Império e sua organização referenciada por esses exames; pela Reforma “Rocha Vaz”, que instituiu a seriação obrigatória, em 1925; e chegou até a Reforma “Francisco Campos”, em 1931. Dessa forma, este trabalho procurará mostrar que o nascimento da “matemática do ginásio”, no Brasil, tem origem na apropriação do 1.º Movimento Internacional de Modernização do Ensino de Matemática, feita a partir da herança de mais de um século deixada pelos exames parcelados de aritmética, álgebra e geometria (VALENTE et al., 2004, p. 16).

[3] A Matemática do Ginásio é a Matemática ensinada atualmente no Ciclo II do Ensino Fundamental (6.º ao 9.º anos).

Produziu-se também um CD denominado “A matemática do ginásio”, em que constam partes de livros didáticos escaneados e textos sobre as Reformas de Ensino denominadas “Francisco Campos” e “Gustavo Capanema”, as quais serão também abordadas nesta investigação. Por meio da consulta a esse CD, o “leitor” pode conhecer a produção didática dos períodos analisados:

> A partir de uma análise dessas obras para o ensino, é possível compreender como nasceu, transformou-se e ficou estabilizada a *Matemática do Ginásio* – nome que a pesquisa deu para a matemática ensinada posteriormente às quatro primeiras séries do ensino fundamental e antes do ensino médio atual (CD- ROM – A Matemática do Ginásio, 2005).

Tomar conhecimento dessas produções a respeito da Matemática do Ginásio nos possibilitou indagar: Se existe uma Matemática do Ginásio, existe uma Matemática do Colégio? Como se deu a produção didática referente a essa Matemática do Colégio? A Matemática do Ginásio e a Matemática do Colégio têm diferentes trajetórias históricas de constituição?

Conforme salienta Valente (2011), a Matemática do Colégio,

> [...] ao que tudo indica, tem história diversa daquela do ginásio. Como compreender essa organização diferente em seus objetivos, conteúdos, formas de motivação dos alunos, exercícios, provas e outros quesitos da organização didático-pedagógica de uma disciplina escolar? A resposta pode ser encontrada, novamente, nos livros didáticos. Alguns deles são de fácil acesso através de bibliotecas e alfarrábios. Outros constituem material muito raro por sua forma material original não acartonada, por sua tiragem muito limitada, por sua publicação em casas editoras pequenas, por terem ficado guardados apenas como relíquias de arquivos pessoais de professores, dentre tantos outros fatores (VALENTE & OLIVEIRA FILHO, 2011, DVD_GHEMAT).

Portanto, este trabalho busca confirmar tais suspeitas e traçar essa trajetória de constituição da Matemática do Colégio.

Para a consecução deste estudo, notadamente de cunho histórico, fazemos uso de aportes teóricos referenciados na História Cultural. A espinha dorsal teórica desta pesquisa são os estudos do pesquisador André Chervel (1990), com seu texto *História das disciplinas escolares*: reflexões sobre um campo de pesquisa. André

Chervel defende que o processo de constituição de uma disciplina escolar ocorre no interior da escola, no seio da cultura escolar.

Para a fundamentação teórica da análise de livros didáticos é corrente o uso dos estudos do historiador Alain Choppin, notadamente as obras *História dos livros e das edições didáticas*: sobre o estado da arte (2004) e *Pasado y presente de los manuales escolares* (2000). Entretanto, nossas categorias de análise dos livros didáticos nos serão fornecidas por André Chervel, uma vez que a história que intentamos escrever é a de uma disciplina escolar, e não a dos livros didáticos.

Por que desenvolver a pesquisa por meio da análise de livros didáticos?

Livros didáticos constituem-se em uma importante fonte de pesquisa histórica, e, ao utilizá-los, conferimos a eles *status* de fonte de pesquisa.

Relativamente ao conceito de cultura escolar, fazemos uso dos trabalhos de Dominique Julia (2001), com o texto “A cultura escolar como objeto histórico”, e também dos estudos do pesquisador Antonio Viñao Frago (2007), com a obra *Sistemas educativos, culturas escolares e reformas*, pelo qual buscaremos fazer um contraponto com os historiadores André Chervel, no que se refere à disciplina escolar, e com Dominique Julia, no tocante à Cultura Escolar. Essa obra de Antonio Viñao Frago servirá de suporte teórico no capítulo que trata dos pressupostos teórico-metodológicos de uma Reforma Educacional, em que também utilizaremos o texto *“Comment* faire l´histoire des reformes de l’enseignement?”, do historiador Antoine Prost.

Ao discorrer sobre as legislações das Reformas Educacionais e a maneira como os autores e editores de livros didáticos se apropriam das determinações oficiais, adotamos os conceitos de *apropriação* cunhada pelo historiador Roger Chartier (1991), em conformidade com seu artigo intitulado “O mundo como representação”.

Trata-se, portanto, de uma pesquisa histórica, que pretende analisar a produção didática contida no período 1930-1970, bem como a legislação das reformas educacionais, inseridas nesse intervalo.

O período abarcado pela pesquisa (1930-1970) é atravessado por momentos educacionais que perpassam reformas como Francisco Campos, Gustavo Capanema, Simões Filho, bem como o Movimento da Matemática Moderna. Cada um deles será alvo de um olhar específico neste trabalho, consoante os objetivos específicos.

Nessa perspectiva, a questão central norteadora desta pesquisa é: Como se constituiu historicamente a disciplina Matemática do Colégio? O texto está estruturado da seguinte maneira: logo após a introdução, segue o primeiro capítulo em que teceremos as considerações teórico-metodológicas da pesquisa. Esse Capítulo 1 é intitulado de "Sobre as disciplinas escolares", e a questão norteadora é: "O que é uma disciplina escolar e de que maneira se dá seu processo de constituição histórica?". Esse capítulo encontra-se subdividido em três partes:

A primeira denominada "Disciplina escolar e cultura escolar: uma inter-relação muito importante", tem como objetivo discutir a inter-relação teórico-metodológica entre a disciplina escolar e a cultura escolar.

Na segunda, denominada "As Reformas Educacionais e sua influência no processo de constituição das disciplinas escolares", pretende-se apresentar os pressupostos teórico-metodológicos de uma reforma educacional e de que maneira as reformas influenciam no processo de constituição das disciplinas escolares. Já a terceira parte (livros didáticos e sua importância para a história das disciplinas escolares) procura mostrar o papel relevante dos livros didáticos no processo de constituição de uma disciplina escolar.

O segundo capítulo denomina-se "Sobre a disciplina escolar Matemática". Tendo discutido teórica e metodologicamente sobre a disciplina escolar de maneira geral, nosso foco nesse texto é tratarmos especificamente da disciplina escolar matemática. Em um primeiro item denominado "A Matemática do Ginásio", discorremos sobre o surgimento da Matemática do Ginásio, incorporando contribuições de trabalhos já realizados com o tema. Ao final desse item, mediante um texto do pesquisador Wagner Valente (2011), denominado “A Matemática do ensino secundário: duas disciplinas escolares?”, abrimos uma discussão sobre a existência ou não da Matemática do Colégio e abordamos as diferenças no processo de constituição histórica da Matemática do Ginásio e da Matemática do Colégio. Em um segundo item, já tendo discutido sobre a Matemática do Ginásio, fazendo uma revisão de literatura, traremos os trabalhos já feitos que discorrem sobre a Matemática do Colégio e as contribuições deles para a nossa pesquisa.

No terceiro capítulo, denominado “As Matemáticas e as Reformas de Ensino”, o objetivo é apresentar o surgimento desse nível de ensino, mostrando como cada reforma ou momento educacional configurou a constituição da matemática do colégio. Tem como questão norteadora a seguinte: qual a origem do Colégio?

No quarto capítulo, “Livros didáticos e a trajetória da disciplina matemática para o colégio, 1930-1970”, analisamos a produção didática do período estudado e o movimento de constituição matemática para o colégio, dando visibilidade ao processo de disciplinarização desta. Para tanto, esse capítulo está subdividido em quatro partes, que denominamos de fases:

A primeira fase trata do período de vigência dos Cursos Complementares, 1931-1942, em que mostramos os Cursos Complementares como embrião da disciplina Matemática para o Colégio. Trazemos as dissertações de Otone e Silva (*A matemática do curso complementar da Reforma Francisco Campos*), e de Denise Franco Capello Ribeiro (*Dos cursos complementares aos cursos* clássico e científico*: a mudança na organização dos ensinos de matemática*). Do confronto entre os resultados alcançados pelas autoras e da análise de livros didáticos do período que realizamos chegamos à conclusão de que nesse período a disciplina Matemática do Colégio não se constitui, mas seu processo de constituição é iniciado. Denomina-se “Os Cursos Complementares como embrião da disciplina Matemática do Colégio”.

A segunda fase é relativa ao período dos Cursos Clássico e Científico (1942-1951). Retornamos à dissertação de Denise Franco Capello Ribeiro (*Dos cursos complementares aos cursos clássico e científico*: a mudança na organização dos ensinos de matemática) e também utilizamos os estudos de sua Tese de Doutorado (2011) (Um estudo da contribuição de livros didáticos de Matemática no processo de disciplinarização da Matemática escolar do Colégio – 1943-1961), mostrando, por meio das conclusões dela e das observações obtidas pela análise da produção didática do período, que, em termos de Chervel (1990), a disciplina Matemática do Colégio fica constituída. Tem como título o seguinte: a criação do 2.º Ciclo do Curso Secundário e a consolidação da disciplina escolar matemática do colégio.

Na terceira fase dialogamos com a dissertação de Alex Sandro Marques (*Tempos pré-modernos*: a matemática escolar dos anos 1950), com a Tese de Ribeiro (*Um estudo da contribuição de livros didáticos de Matemática no processo de disciplinarização da Matemática escolar do Colégio* – 1943-1961) e a Tese de Maryneusa Cordeiro Otone (*Uma história da Constituição da Matemática do Colégio no Cotidiano Escola*r), mostrando que, em face das modificações introduzidas nos programas de matemática do 2.º ciclo do secundário, aos trabalhos acima citados e aos resultados das análises dos livros didáticos do período, a disciplina Matemática do Colégio se estabiliza. Tem como título, o seguinte: a estabilização da disciplina escolar Matemática do Colégio.

A quarta e última fase traz o Movimento da Matemática Moderna, e, pelas características do Movimento, da legislação educacional da época, da análise da produção didática, demonstramos a turbulência na organização disciplinar da matemática do colégio, chegando à conclusão de que a Matemática do Colégio se desestabiliza, se desconstitui, entrando em um processo de busca de uma nova configuração.

Nas Considerações Finais, apresentamos nossas análises, discorrendo sobre o trajeto de constituição da disciplina escolar Matemática do Colégio, entendendo que, ao buscarmos respostas a essas questões, esperamos ter contribuído para a escrita da História da Educação matemática brasileira, traçando a trajetória histórica de constituição da disciplina escolar Matemática do Colégio.

1
SOBRE AS DISCIPLINAS ESCOLARES

> "Por que são criações espontâneas e originais do sistema escolar é que as disciplinas merecem um interesse todo particular" (André Chervel).

Este capítulo destina-se a discutir as seguintes questões: o que é, como e onde surge uma disciplina escolar? São apenas três questões, mas suficientemente densas. Ao respondê-las, teremos percorrido toda a Instituição Escolar, dando fundamentação teórica à nossa pesquisa.

Quando pensamos em disciplina escolar, de imediato nos vem à mente a ideia de conteúdos de ensino, a matéria que é ensinada na escola, ligando o conceito diretamente àquilo que se ensina. Esse é o conceito que permeia o senso comum. Entretanto, o historiador André Chervel (1990), em seu texto *História das disciplinas escolares*: reflexões sobre um campo de pesquisa, chama a atenção para outros aspectos constitutivos de uma disciplina escolar, finalizando com a seguinte conceituação:

> A disciplina escolar é então constituída por uma combinação, em proporções variáveis, conforme o caso, de vários constituintes: um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e motivação e um aparelho docimológico,[4] os quais, em cada estado da disciplina, funcionam, evidentemente em estreita colaboração, de mesmo modo que cada um deles está, à sua maneira, em ligação direta com as finalidades (CHERVEL, 1990, p. 207).

Esse conceito de disciplina escolar, em conformidade com Chervel (1990), permeia todo o nosso trabalho de investigação, e a partir de agora vamos percorrê-lo e entender o porquê dessa conceituação, discutindo teoricamente, o que passamos a fazer em seguida.

---

[4] Referente à docimologia, em francês *docimologie* (estudo científico dos exames e concursos), provavelmente um neologismo nessa língua, pois o Larousse (Lexis) registra seu uso inicial em 1960. Sem registro em português, ao menos no Aurélio (CHERVEL, 1990, p. 206).

Primeiramente, é preciso entender a disciplina escolar como um processo que ocorre no interior da escola. O texto de Chervel narra esse processo de constituição das disciplinas escolares, chamado de disciplinarização, entendido como “uma ação histórica do cotidiano escolar na fabricação das diferentes disciplinas escolares” (VALENTE, 2009, p. 17). As disciplinas escolares são gestadas, produzidas no interior da escola, em uma ação do ambiente escolar, durante um tempo.

Para Chervel, o termo disciplina encerra “um modo de disciplinar o espírito, dar os métodos e as regras para abordar os diferentes domínios do pensamento, do conhecimento e da arte” (CHERVEL, 1990, p. 180). Nesse sentido, os conteúdos de ensino

> [...] são concebidos como entidades *sui generis,* próprios da classe escolar, independentes, numa certa medida, de toda a realidade exterior à escola, e desfrutando de uma organização, de uma economia interna e de uma eficácia que elas não parecem dever a nada, além delas mesmas, quer dizer, a sua própria história (CHERVEL, 1990, p. 180).

Pelo que Chervel nos coloca acima, os conteúdos de ensino são criados no interior da própria escola, em um trabalho realizado pelo próprio ambiente escolar baseado nos conhecimentos que chegam à Escola para serem transmitidos aos alunos. O saber escolar, aquele que será passado aos alunos, tem a ver, tem relação com a própria escola. Reparemos que Chervel, nas entrelinhas da citação acima, não fecha totalmente a porta para as influências externas, na medida em que colocou a frase “numa certa medida”.

Chervel vai colocar que, de maneira geral, os conteúdos de ensino são “impostos como tais à escola pela sociedade que a rodeia e pela cultura na qual ela se banha” (1990, p. 180). Nesse sentido, não haveria nenhum trabalho da escola ou do ambiente escolar sobre os conteúdos a serem administrados aos alunos. Essa concepção está diretamente ligada à pedagogia. Nessa linha de raciocínio, segundo Chervel,

> [...] a tarefa dos pedagogos, supõe-se, consiste em arranjar os métodos de modo que eles permitam que os alunos assimilem o mais rápido e o melhor possível a maior porção possível da ciência de referência (1990, p. 181).

Nessa condição, as disciplinas não teriam uma existência autônoma, “elas não seriam mais do que combinações de saberes e de métodos pedagógicos” (1990, p. 181). Não é essa a posição defendida por Chervel. A posição dele ficará clara quando, ao discorrer sobre o objeto da história das disciplinas escolares, advoga que os conteúdos de ensino não podem ser identificados como as vulgarizações ou com as adaptações. Para ele, as “disciplinas de ensino são irredutíveis por natureza a essas categorias historiográficas tradicionais” (1990, p. 183).

A partir dessa premissa, Chervel apresentará questões importantes a respeito da constituição e do funcionamento das disciplinas escolares. No tocante à gênese: “Como a escola, *sendo a partir daí desqualificada toda outra instância*, começa a agir para produzi-las?” (CHERVEL, 1990, p. 183-184) [grifo nosso].

Esse é um aspecto relevante quanto à origem das disciplinas escolares. Chervel vai pontuar com bastante ênfase (reparem em nosso grifo) a escola como única instância para a produção das disciplinas escolares.

Relativamente à função das disciplinas escolares: “Elas servem para quê? Por que a escola foi levada a tomar tais iniciativas? Em que determinada disciplina responde à expectativa dos pais, dos poderes públicos, dos que decidem?” (CHERVEL, 1990, p. 184).

A disciplina escolar, por meio do seu processo de constituição, disciplinará o ensino no interior da escola; estabelecerá o ritmo de funcionamento do ensino na escola, sendo responsável pela divisão do grupo de alunos e sua repartição em classes, pela seriação. A disciplina é que organiza o ensino no interior da escola. É possível chegar em uma sala de aula da 1.ª Série do Ensino Médio hoje e dizer o seguinte: “hoje teremos aula de Cálculo Diferencial Integral”? Não, não pode, dirão alguns. Não, a Coordenadora não deixa, dirão outros. Não pode porque o ensino está disciplinado, está em forma de disciplina. É a disciplina quem vai dizer: isso será ministrado na 1.ª Série, dessa maneira, aquilo na 2.ª Série, daquela maneira. A disciplina torna o ensino possível. O ensino é possível regularmente por meio da disciplina.

No tocante ao funcionamento das disciplinas escolares:

> Como as disciplinas funcionam? De que maneira elas realizam, sobre o espírito dos alunos, a formação desejada? Que eficácia real e concreta se lhes pode reconhecer? Ou, mais simplesmente, quais são os resultados do ensino? (CHERVEL, 1990, p. 184).

É nosso entendimento que as disciplinas escolares funcionam a partir do seu processo de constituição no interior da escola, cuja premissa é a conceituação de disciplina escolar de André Chevel, anteriormente citada. O seu funcionamento é derivado de sua composição (ensino de exposição, exercícios, práticas de incitação e motivação e aparelho docimológico) dando a formação desejada aos alunos.

Destacamos novamente, nesse momento, uma frase de André Chervel, quando se refere à gênese da disciplina escolar, já citada, ocasião em que ele menciona que só a escola é capaz de criar as disciplinas escolares, na medida em que desqualificou toda e qualquer outra instância. Em outro ponto de seu texto vai nos dizer que: "Porque são criações espontâneas e originais do *sistema escolar*[5] é que as disciplinas merecem um interesse todo particular" (1990, p. 184).

Esse ambiente que André Chervel chamou de Sistema Escolar entendemos ser o que outros historiadores denominam de Cultura Escolar. É no interior da Cultura Escolar que ocorre o processo de constituição de uma disciplina escolar. Nesse momento, julgamos conveniente abrir um parêntese em nossa discussão para discorrermos um pouco sobre a Cultura Escolar.

1.1 Disciplina escolar e cultura escolar: uma inter-relação muito importante

Para o historiador Antonio Viñao Frago (2007), a Cultura Escolar

> [...] seria constituída por um conjunto de teorias, ideias, princípios, normas, modelos, rituais, inércias, hábitos e práticas (formas de fazer

---

[5] Pelo fato de o sistema escolar ser detentor de um poder criativo insuficientemente valorizado até aqui é que ele desempenha na sociedade um papel o qual não se percebeu que era duplo: de fato ele forma não somente os indivíduos, mas também uma cultura, que vem por sua vez penetrar, moldar, modificar a cultura da sociedade global (CHERVEL, 1990, p. 184).

> e pensar, mentalidades e comportamentos) sedimentadas ao longo do tempo em forma de tradições, regularidades e regras de jogo não interditadas, e repartidas pelos seus actores, no seio das instituições educativas (FRAGO, 2007, p. 87).

É tudo o que acontece no interior da Escola, incluindo os conhecimentos produzidos, ideias, hábitos, costumes, impregnando o ambiente escolar. O historiador Dominique Julia (2001) nos diz que a História das Disciplinas Escolares é quem dá condições para o estudo e o entendimento do que acontece no interior da escola. Para ele,

> [...] ela tenta identificar, tanto através de práticas de ensino utilizadas na sala de aula como através dos grandes objetivos que presidiram a constituição das disciplinas, o núcleo duro que pode constituir uma história renovada da educação. Ela abre, em todo caso, para retomar uma metáfora aeronáutica, a "caixa preta" da escola, ao buscar compreender o que ocorre nesse espaço particular (JULIA, 2001, p. 13).

Voltemos então ao processo de constituição da disciplina escolar para dizer que esse processo, ao ser revelado, pode nos ajudar a entender o que ocorre no interior da Escola; melhor dizendo: só conseguiremos mostrar o processo de constituição da disciplina escolar se penetrarmos na *caixa preta* da Escola.

Viñao Frago ainda vai pontuar:

> As disciplinas, matérias ou cadeiras são uma das criações mais genuínas da cultura escolar. Mostram todo o seu poder criativo e, além disso, possuem sua própria história. Não são, portanto, entidades abstractas com uma essência universal e estática. Nascem e evoluem. Transformam-se ou desaparecem, afastam-se e unem-se, repelem-se e absorvem-se (FRAGO, 2007, p. 89).

A estreita relação entre a Cultura Escolar e a Disciplina Escolar acima apontada é um ponto importante para a nossa pesquisa, dado que, como já vimos, é no interior da Cultura Escolar que se dá o processo de constituição da disciplina escolar; dessa estreita relação é que construiremos nosso entendimento sobre tais conceitos.

Para Julia (2001), os elementos essenciais à constituição de uma cultura escolar são os seguintes: espaço escolar específico, cursos graduados em níveis e corpo profissional específico. Esses elementos com certeza também estão presentes no processo de constituição da disciplina escolar. O entendimento da Cultura Escolar, para o autor, passa por três vias:

> [...] a primeira via seria interessar-se pelas normas e pelas finalidades que regem a escola; a segunda, avaliar o papel desempenhado pela profissionalização do trabalho do educador e, a terceira, interessar-se pela análise dos conteúdos ensinados e das práticas escolares (JULIA, 2001, p. 19).

Na análise das normas e das finalidades que regem a escola, temos maior acesso aos textos regulares, às legislações, aos projetos pedagógicos. O acesso ao “mundo real” da escola é difícil e cheio de obstáculos. Para Julia, “A história das práticas culturais é, com efeito, a mais difícil de se reconstruir, porque ela não deixa traço: o que é evidente em um dado momento tem necessidade de ser dito ou escrito?” (JULIA, 2001, p. 15).

O fazer cotidiano da escola acaba por não ter o devido registro. O desafio para nós, pesquisadores, é o confronto entre os textos normativos e a prática efetiva na escola. Chervel ainda diz que:

> O estudo das finalidades não pode, pois, de forma alguma, abstrair os ensinos reais. Deve ser conduzido simultaneamente sobre os dois planos, e utilizar uma dupla documentação, a dos objetivos fixados e a da realidade pedagógica (1990, p. 191).

É desse confronto que podemos inferir sobre as finalidades do ensino. Para Chervel (1990), essa é a primeira documentação que se abre para o historiador das disciplinas escolares: “série de textos oficiais programáticos, discursos ministeriais, leis, ordens, decretos, acordos, instruções, circulares, fixando os planos de estudos, os programas, os métodos, os exercícios” (p. 189). O estudo das finalidades do ensino irá começar pela análise desse conjunto de documentos.

Os documentos oficiais estampam as finalidades de objetivo do ensino. As práticas escolares, as finalidades reais.

De acordo com Chervel, “a distinção entre as finalidades reais e finalidades de objetivo é uma necessidade imperiosa para o historiador das disciplinas” (p. 190). Devemos ficar atentos aos momentos de mudanças, tais como implantação de Reformas Educacionais, situações em que temos o fim de um sistema educacional e o início de outro. Julia (2001) ressalta que, “mais que nos tempos de calmaria, é nos tempos de crise e de conflitos que podemos captar melhor o funcionamento real das finalidades atribuídas à escola” (JULIA, 2001, p. 19).

Como já relatado na introdução, o período da pesquisa é perpassado por reformas/momentos educacionais, períodos de grande turbulência e modificações no sistema educacional. Cabe, nesse momento, questionar: de que maneira as Reformas Educacionais influenciam no processo de constituição de uma disciplina escolar?

1.2 As Reformas Educacionais e sua influência no processo de constituição de uma disciplina escolar

O que nos diz o termo “Reforma”? Segundo o historiador Antoine Prost (1996), “ele designa uma ação (reformar) efetuada por um ator individual ou coletivo (reformador), produzindo uma mudança” (p. 15). É importante destacarmos que o termo “mudança” não pode ser confundido com reforma. Uma mudança pode ser levada a efeito, estando desvinculada da reforma. As mudanças se caracterizam por ter uma amplitude menor de suas ações, relativamente às reformas. Por outro lado, podemos ter reformas que acabam por não mudar nada. As Reformas são, geralmente, baseadas em uma legislação.

A esse respeito, o historiador Antonio Viñao Frago (2007) acentua a “índole polissêmica do termo reforma” (p. 107), que, segundo ele, é utilizado na maneira de um guarda-chuva, dentro do qual cabe uma gama muito grande de “objetivos, iniciativas e programas, umas vezes nobres e valiosos, e outras desencaminhados e censuráveis” (KLIEBARD, 2002, p. 2 apud FRAGO, 2007, p. 107). Segundo Frago, acabamos por chamar tudo de reforma; qualquer alteração no meio escolar é chamada, erroneamente, de reforma.

Frago (2007) usa o dualismo reformas e inovações para medir o grau em que acontecem as modificações no sistema educativo. Para ele, ambas são tentativas de mudanças, mas as reformas são mais globais, atingindo "o quadro legislativo e estrutural do sistema educativo" (p. 107). As inovações, por seu turno, limitam-se mais ao currículo, abrangendo conteúdos, metodologias, estratégias de ensino-aprendizagem. As reformas seriam "esforços planificados para mudar as escolas com o fim de corrigir problemas sociais e educativos percebidos" (TYACK e CUBAN, 1995, p. 4 apud FRAGO, 2007, p. 107).

Viñao Frago busca sustentação em outros autores para diferenciar "reformas de melhoria ou primeira ordem", como aquelas que apenas se ocupam das práticas pedagógicas, daquelas "radicais ou de segunda ordem", que produzem efeitos nas tradições e crenças básicas que sustentam a organização e as práticas escolares (ROMBERG e PRICE, 1983, apud FRAGO, 2007, p. 108).

Por fim, Viñao Frago, citando Francesc Pedró e Irene Puig, ressalta que reforma é

> [...] uma alteração fundamental das políticas educacionais que pode afectar o governo e a administração do sistema educativo e escolar, a sua estrutura ou financiamento, o currículo – conteúdos, metodologia, avaliação –, o professorado – formação, selecção ou avaliação – e a avaliação do sistema educativo (PEDRÓ & PUIG, 1998, p. 44-45, apud FRAGO, 2007, p. 108).

Segundo o historiador Antoine Prost (1996), para que haja uma reforma, faz-se necessária a reunião de três condições, de maneira simultânea: um projeto de reforma; a amplitude desse projeto e a existência de um debate coletivo em torno do mesmo. O projeto de uma reforma é marcado por uma "vontade explícita, argumentada e assumida de provocar as mudanças identificadas" (p. 16). O projeto deve ter uma amplitude e uma extensão; não é uma mudança qualquer. E, quando ocorre uma reforma, ela é alvo de discussões e debates acalorados entre os reformadores e seus adversários, os críticos dela. Aliás, a reforma já nasce como oposição ao que é vigente; não faria sentido uma reforma que não alterasse nada. A reforma é

> [...] um processo social complexo, escalonado dentro de tempos, colocando em jogo uma pluralidade de atores em torno de situações (do que está em jogo), na ocorrência em torno da definição dos conteúdos concretos e dos métodos de ensino (PROST, 1996, p. 16).

Um ponto muito importante na análise de uma reforma é a identificação de seus atores, os quais assumem-na, colocando seus objetivos e justificando-os. Ao identificarmos tais atores, poderemos entender as razões e os objetivos dos projetos e seus resultados.

No tocante aos atores presentes na reforma, o historiador Viñao Frago menciona os reformadores e gestores e os professores, ambos ocupando posições importantes junto às reformas, mas com pontos de vista diferentes perante elas. Por conta de tal situação, há o estabelecimento de *duas culturas*, na medida em que os reformadores e os gestores também foram professores e, no momento da reforma, estão em posições diferentes, em perspectivas distintas.

As diferenças entre essas culturas determinarão as características marcantes nos membros pertencentes a elas.

Os reformadores, de maneira geral, “têm tendência para a uniformidade, o centralismo, a normalização e o formalismo burocráticos” (FRAGO, 2007, p. 109). Consideram que a equipe escolar (diretores e professores) não precisa ter posição crítica quanto à reforma; apenas deve aceitá-la. Gostam, de maneira incisiva e persistente, das macrorreformas, as reformas estruturais. Dão excessiva importância às tarefas administrativas dos professores em relação àquelas eminentemente educativas, exigindo empenho dos professores no registro de tais tarefas. Eis uma característica que pode ser determinante para o insucesso de algumas reformas:

> Um presentismo a-histórico para o qual as tradições e práticas da cultura escolar não existem – ou seja, não são tidas em conta –, ou se considera que podem ser eliminadas ou substituídas pelas que se ordenam ou propõem sem problema algum e num curto espaço de tempo (FRAGO, 2007, p. 109-110).

Aqui, pensamos ser cabível a seguinte questão: por que algumas reformas são malsucedidas? Conforme Frago, porque,

> [...] em virtude de sua própria natureza a-histórica, ignoram a existência desse *conjunto de tradições e regularidades institucionais sedimentadas ao longo do tempo* (grifo nosso), de regras do jogo e pressupostos repartidos, não interditados, que são os que permitem aos professores organizar a atividade acadêmica, conduzir as aulas e, dada a sucessão de reformas ininterruptas que se concretizam a partir do poder político e administrativo, adaptá-las, por intermédio da sua transformação, às exigências que se derivam de tal cultura ou gramática (FRAGO, 2007, p. 101).

As palavras de Viñao Frago, sustentadas pelo conceito de Cultura Escolar, nos mostram o porquê do insucesso das reformas. As reformas falham porque ignoram e são ignoradas pela Cultura Escolar; não conseguem se colocar temporalmente em relação a ela. As reformas educativas, não conseguindo se alinhar e penetrar na Cultura Escolar,

> [...] se limitam a roçar a epiderme da atividade educativa sem modificar, pese embora o que tinha sido por vezes manifestado, a escola real, a realidade quotidiana de tal atividade e a vida dos estabelecimentos docentes (FRAGO, 2007, p. 101).

Os reformadores têm apreço em buscar fontes acadêmicas e profissionais, inspirações para balizar suas reformas, fontes essas totalmente externas e alijadas do contexto escolar acima citado. Para finalizar, quanto às características do perfil dos reformadores, é preciso entender que eles “têm a urgência de obtenção de resultados rápidos, condicionados pelo caráter temporal de seu mandato” (FRAGO, 2007, p. 110).

Quanto aos professores, um dos principais agentes da mudança, independentemente do tipo, Viñao Frago nos reserva algumas características:

> Uma predisposição para obter informação, em relação à sua actividade docente, não do mundo acadêmico dos especialistas (livros, revistas, congressos, conferências, etc.), mas da experiência dos professores e mestres do seu centro docente ou de outros similares, ou seja, de fontes internas às instituições escolares e procedentes do grupo de iguais (FRAGO, 2007, p. 111).

A nosso ver, o relato de Viñao Frago posiciona de maneira correta e inequívoca o professor no tocante às reformas educacionais: no seio da cultura escolar; e reforça novamente um dos principais motivos para o insucesso das reformas, ao deixar claro que o professor busca auxílio junto aos seus pares e, uma vez que as reformas, em geral, ignoram o que ocorre no interior da escola, tendem ao insucesso. A cultura escolar seria, a nosso ver, a trincheira de onde os professores travam seu combate junto aos reformadores.

O historiador Antoine Prost corrobora com a visão de Viñao Frago, assim ressaltando:

> Os professores são mais difíceis de alcançar; seus porta-vozes habituais não os representam perfeitamente. Nem os sindicatos, nem os especialistas não exprimem o pensamento completo da totalidade de seus interesses. *São os atores decisivos das reformas. Para ter sucesso, uma reforma é obrigada a convencê-los* (grifo nosso) (PROST, 1996, p. 23).

Prost nos diz que as Reformas podem ser científicas, políticas ou ambas.

As reformas científicas são caracterizadas por uma vontade de aproximar, de reduzir a distância entre o que está sendo pesquisado no mundo acadêmico e o que está sendo ensinado nas salas de aulas, enfim, “ajustar os saberes escolares aos saberes dos acadêmicos” (PROST, 1996, p. 17). Neste ponto, lembremo-nos da Reforma da Matemática Moderna, abordada também nesta pesquisa. Os atores principais de tais reformas são os cientistas, uma vez que eles estão sempre na fronteira de suas disciplinas e percebem a defasagem entre o que pesquisam e o que é ensinado nas escolas.

Os pesquisadores, apesar de seu prestígio, conseguem empreender uma Reforma sozinhos? Não, eles buscam o apoio no grupo de professores, estabelecendo alianças. Tais alianças são, geralmente, carregadas de tensão, uma vez que os pesquisadores têm dificuldades de medir aquilo que efetivamente pode ser ensinado em sala de aula; eles estão fora e desconhecem o fenômeno da cultura escolar. Não que os professores saibam o conceito de forma sistemática, mas eles vivem dentro do ambiente da cultura escolar e se comportam de maneira a serem incorporados ao ambiente, fazendo parte deste.

As Reformas Políticas visam “adaptar os conteúdos ensinados às novas finalidades da instituição” (PROST, 1996, p. 19). Aqui convém abordarmos a questão do currículo.

O currículo carrega em seu bojo vieses políticos e ideológicos; representam lutas de grupos em função de poder e também questões muito importantes para a coletividade e a comunidade educacional. Normalmente as questões curriculares são muito debatidas e discutidas nos meios acadêmicos e educacionais; poderíamos dizer que é de interesse político para o educador. Quando, por exemplo, um novo Governador assume seu mandato, logo medidas são tomadas em relação a Reformas Educacionais que, evidentemente, levarão a mudanças curriculares; às vezes, tais medidas já foram alvo de discussão durante a campanha política e fazem parte do projeto político do governador e de seu partido. Cada partido político tem suas ideias e concepções educacionais, carregando também suas ideias e concepções curriculares.

Veremos, ao longo deste texto, sobretudo nos Capítulos 3 e 4, o quão importantes foram as modificações dos programas de Matemática do 2.º Ciclo do Ensino Secundário, empreendidas pelas reformas/momentos educacionais.

A Reforma Educacional poderá ser, ao mesmo tempo, política e científica e podemos entender que, no fim de tudo, a decisão de reformar é sempre política.

Tudo pode ser ensinado? Não. Uma escolha se faz necessária e tais escolhas podem ser frutos de disputas entre o interior da escola, na cultura escolar e o poder político. Aqui, a essa altura, vale questionarmos o que acontece com as reformas no interior da Escola. Segundo Faria Filho,

> [...] era no interior da sala de aula que se decidia o destino das políticas públicas, pelas resistências oferecidas por professores às mudanças e pelas alterações efetuadas nos padrões de trabalho vigentes (FARIA FILHO, 2004, p. 141).

As decisões, então, podem ser políticas, mas poderão ser fortemente combatidas no ambiente da Cultura Escolar.

Um fato importante para entender uma reforma educacional, ou se ter um entendimento sobre os motivos pelos quais ela é bem ou malsucedida, é estudar a dinâmica dela. O estudo de uma Reforma deve procurar abarcar a dinâmica temporal dela, destacando o tempo dos diferentes atores no processo. O período de estudo deve conter a trajetória inteira da reforma, levando-se em consideração que seus efeitos podem demorar a ser sentidos e observados. Nesse caso, referimo-nos às características de latência e aceleração, ou seja, dependendo da reforma, ela pode ter seu tempo, que podemos chamar de incubação, mais alongado que outras, ou ser uma reforma que tem uma dinâmica mais acelerada.

Voltando ao tempo dos atores na Reforma, é importante destacarmos a questão do tempo dos políticos. São, em geral, mais angustiados em relação aos resultados das medidas implantadas, uma vez que já vislumbram o próximo pleito eleitoral, e precisam ter resultados a serem mostrados; o tempo de latência para eles evidentemente não é interessante. Já para os pesquisadores o tempo de latência é estendido; podem amadurecer suas convicções durante mais tempo, *esticando a corda* no jogo de interesses e no debate com os grupos envolvidos. O historiador Antoine Prost,

> [...] dá forte destaque ao fator tempo em uma Reforma. Para ele, o tempo desempenha um papel decisivo, que se leva para mobilizar a opinião; quando esse objetivo é alcançado, *a batalha é decidida* (grifo nosso). O destino de uma reforma é jogado muitas vezes na capacidade de se dispor de tempo (PROST, 1996, p. 23).

Assim, as reformas educacionais, com tudo o que elas carregam e representam, são fatores importantes no processo de constituição de uma disciplina escolar.

Para Chervel, a história dos conteúdos é o componente central da história das disciplinas escolares, “o pivô ao redor do qual ela se constitui” (1990, p. 187). A história das disciplinas escolares tem o papel de “colocar os ensinos em relação com as finalidades às quais eles estão designados e com os resultados concretos que eles produzem” (1990, p. 187).

A história das disciplinas escolares irá mediar a relação entre os ensinos, suas finalidades e os resultados que eles produzirão. A nosso ver, o resultado produzido é a aprendizagem dos alunos. O ensino só é possível porque ele está na forma de uma disciplina; ele é possível porque está disciplinado. Então, a disciplina é o veículo que possibilita que o ensino chegue até o aluno, fazendo com que a aprendizagem, ao final, aconteça. A nosso ver, trata-se de uma ligação importante entre a história das disciplinas escolares e o ensino-aprendizagem e a importância do processo de constituição da disciplina escolar para a escola como um todo.

Para Chervel, o ensino escolar, isto é, a função primordial da escola, é aquela parte da disciplina "que põe em ação as finalidades impostas à escola" (1990, p. 192), tendo como resultado a *aculturação conveniente*, o que entendemos como a aprendizagem do aluno. Os conteúdos, se analisados de forma isolada, são apenas os meios pelos quais a aprendizagem acontece; o veículo por meio do qual o ensino escolar produz a aprendizagem. Por isso, é tão redutora a ideia de considerar a disciplina escolar apenas como conteúdo.

O trabalho do historiador das disciplinas escolares, para Chervel, é "o estudo dos ensinos efetivamente dispensados, sendo essa sua tarefa essencial" (1990, p. 192). Precisamos, então, entrar efetivamente na escola, compreendendo a cultura escolar e verificar o que acontece com esse ensino escolar por meio das várias etapas do processo de constituição da disciplina escolar. Cabe ao historiador das disciplinas escolares, segundo Chervel, "revelar a coerência interna dos diferentes procedimentos aos quais se apela, e estabelecer a ligação entre o ensino dispensado e as finalidades que presidem o seu exercício" (1990, p. 192).

Dado que a constituição de uma disciplina escolar é fruto de um processo, é interessante discutir como esse processo se constitui. Para Chervel (1990), "os processos de instauração e de funcionamento de uma disciplina se caracterizam por sua precaução, por sua lentidão e por sua segurança" (p. 198). Para que o ensino escolar exerça sua função, como acima descrito, é necessário que a disciplina esteja constituída e em pleno funcionamento. Assim, esse processo de estabilização de uma disciplina escolar é fruto de amplas negociações no âmbito da cultura escolar, no interior da escola, mobilizando os agentes ali estabelecidos.

A disciplina escolar vai se estabilizando por meio de longos processos de transformação, com muitas idas e vindas; não ocorre de modo estanque, abrupto. Não vemos tal processo como camadas sucessivas uma após a outra, mas, sim, camadas que se intercruzam em sua sobreposição.

No tocante à finalidade e objetivos do processo de transformação e constituição das disciplinas escolares, Chervel menciona:

> Pois a criação, assim como a transformação das disciplinas, tem um só fim: tornar possível o ensino; a função real da escola na sociedade é então dupla: a instrução das crianças e a criação das disciplinas escolares (1990, p. 199-200).

Chervel mostra-nos o papel da escola, revelado no processo de constituição das disciplinas escolares. O processo de constituição da disciplina escolar em última instância faz a mediação entre os alunos e a cultura que deve ser a eles transmitida.

Quando discorre sobre os constituintes da disciplina escolar, Chervel vai pontuar que o conteúdo de conhecimentos, a parte teórica ou expositiva da disciplina, é o “primeiro na ordem cronológica, senão na ordem de importância” (p. 202), e que esse conteúdo tem um peso específico variável, de acordo com a disciplina, sendo uma “variável histórica cujo estudo deve ter um papel privilegiado na história das disciplinas escolares” (1990, p. 202). Estudar os conteúdos explícitos do ensino disciplinar é “a primeira tarefa do historiador das disciplinas escolares” (p. 203).

Podemos imaginar, a essa altura, a importância dos conteúdos para a disciplina Matemática, uma disciplina essencialmente conteudista e livresca, que tem nos livros didáticos uma ligação muito forte, assunto que será tratado mais adiante quando discorrermos sobre os livros didáticos.

Um dos produtos originados do processo de constituição da disciplina escolar é o que Chervel chamou de *vulgata;* o processo de constituição da disciplina escolar inspira a constituição de uma vulgata. Chervel assim a conceitua:

> Em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, *grosso modo*, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do *corpus* de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas (1990, p. 203).

Quando da estabilização da disciplina escolar, é criado um padrão de referência que norteia a produção didática. Esse padrão de referência é composto por: ensino dispensado pelos professores; conceitos ensinados; terminologia adotada; coleção de rubricas e capítulos; organização do *corpus* de conhecimentos; exemplos utilizados e tipos de exercícios praticados. Para Chervel, “a descrição e a análise dessa vulgata são a tarefa fundamental do historiador de uma disciplina escolar” (1990, p. 203).

O fenômeno da vulgata vai tratar especificamente dos livros didáticos e, portanto, poderíamos questionar o seguinte: qual a importância e a influência dos livros didáticos no processo de constituição da disciplina escolar?

1.3 Livros didáticos e sua importância para a história das disciplinas escolares

Iniciaremos esse texto com uma citação do historiador Michel de Certeau, a respeito dos livros didáticos, que reflete a importância de se utilizar o livro didático como fonte de pesquisa histórica:

> O manual [escolar] continua a ser autoritário. Camufla o modo de produção das representações que fornece, a sua relação com os arquivos, com um meio histórico, com as problemáticas contemporâneas que determinam a sua fabricação, etc. Por outras palavras, o manual fala da História, mas não mostra a sua própria historicidade. Através deste défice metodológico, impede ao estudante a possibilidade de ver como tudo se origina e de ser ele próprio produtor de História e de historiografia. Impõe o saber de uma autoridade, quer dizer, uma não História. Ao nível dos manuais há, pois, um grande trabalho a fazer para introduzir o estudante,

> como actor, na cidade historiográfica. Então o manual poderia ser o cavalo de Troia de um fazer da História e de fazer a História.[6]

Fortes as palavras de De Certeau. Ao mesmo tempo em que nos diz que é difícil a interpretação do livro didático, mostra-nos também o quanto ele pode nos fornecer em termos de informação e, assim, permitir a escrita da história.

O que é o livro didático? A pergunta, a princípio, fácil de responder torna-se, para nós, difícil, causando certo embaraço. Por que isso acontece? Por que a dificuldade de definir algo que para nós parece tão próximo? Talvez porque o livro didático é um objeto *complexo; complexo* no sentido de que o livro didático se, questionado historicamente, pode fornecer informações sobre o cotidiano escolar em múltiplas e variadas dimensões.

Nesse sentido, quando se refere à abundância das pesquisas científicas sobre o livro didático, o historiador Alain Choppin (2004) aponta causas estruturais que detalham e potencializam importantes características do objeto livro didático: "a complexidade do objeto livro didático, a multiplicidade de suas funções, a coexistência de outros suportes educativos e a diversidade de agentes que ele envolve" (CHOPPIN, 2004, p. 552). Alain Choppin nos fala também da "onipresença – real ou bastante desejável – de livros didáticos pelo mundo e, portanto, o peso considerável que o setor assume na economia editorial nesses dois últimos séculos" (CHOPPIN, 2004, p. 551).

As considerações de Alain Choppin anteriormente descritas nos levam de volta à importância da pesquisa histórica sobre livros didáticos, em face das suas características e do aumento de sua presença no meio editorial e educacional.

O pesquisador Wagner Valente (2011) assim conceituou o livro didático:

> [...] um produto cultural. Como tal, é preciso compreendê-lo em seu processo de produção física, material; em seu contexto de elaboração intelectual; nas múltiplas faces que por vezes se

---

6 De Certeau. Disponível em: <http://www.historiaehistoria.com.br/materia.cfm?tb=professores&id=32>. Acesso em: 12 fev. 2013.

> entrecruzam na autoria dos textos; nas formas de circulação que os livros ganham; no uso deles em diferentes épocas; nas suas diferentes edições e em tantos outros aspectos necessários ao entendimento de um bem cultural (VALENTE & OLIVEIRA FILHO, 2011, DVD_GHEMAT).

Valente nos mostra vários caminhos metodológicos de análise para uso do livro didático como fonte de pesquisa histórica: a produção, contexto de elaboração intelectual, a autoria multifacetada, formas de circulação, uso em diferentes épocas, enfim, um objeto cultural que exige ser interrogado pelo historiador de uma maneira múltipla, variada, completa, fornecendo também informações que podem ajudar o conhecimento do cotidiano escolar e, no nosso caso específico, o processo de constituição de uma disciplina escolar.

As definições nos remetem, em geral, às funções do livro didático, definido assim pelo historiador Allain Chopin:

> São, em primeiro lugar, ferramentas pedagógicas, destinadas a facilitar a aprendizagem; o suporte, o depositário do conhecimento e das técnicas que em um dado momento, uma sociedade acredita ser oportuno que a juventude deve adquirir para a perpetuação de seus valores (CHOPPIN, 2000, p. 108-109).

A função principal e mais evidente do livro didático é ser uma ferramenta pedagógica.

Da citação acima podemos entender que o livro didático, em seu processo de circulação, vai levando com ele uma ideologia, ele é um veículo que transporta um programa, mas também "um sistema de valores, uma ideologia e uma cultura" (CHOPPIN, 2000, p. 109). Aqui, ressalta-se a característica de vetor de comunicação do livro didático; "uma forma de comunicação muito potente, cuja eficácia repousa sobre a importância de sua difusão e sobre a uniformidade do discurso que transmite" (2000, p. 109).

Tais considerações nos remetem diretamente às múltiplas funções do livro didático referenciadas por Alain Choppin, das quais ele destacou quatro: função referencial, instrumental, ideológica e cultural e documental.

A citação anterior de Choppin já contempla a função referencial. Quando dizemos que o livro didático em seu processo de circulação transmite uma ideologia, estamos nos referindo à função ideológica e cultural, que é sua função mais antiga. Nessa função, também ligada ao fato de o livro didático ser um vetor de comunicação, Choppin ressalta que, ao longo do tempo, “o livro didático se afirmou como um dos vetores essenciais da língua, da cultura e dos valores das classes dirigentes” (CHOPPIN, 2004, p. 553). Nesse caso, percebe-se o livro didático também como um objeto de poder e assumindo papel político, sendo referenciado como “símbolo da soberania nacional, assim como a moeda e a bandeira” (2004, p. 553).

A função instrumental nos liga à definição do historiador Alain Choppin, quando ele diz que o livro didático é uma *ferramenta pedagógica*. Essa função o coloca como uma ferramenta de trabalho para o professor, na medida em que

> [...] põe em prática métodos de aprendizagem, propõe exercícios ou atividades que, segundo o contexto, visam a facilitar a memorização dos conhecimentos, favorecer a aquisição de competências disciplinares [...] (2004, p. 553).

Essa função também, a nosso ver, coloca o livro didático como ferramenta de trabalho para o historiador das disciplinas escolares, na medida em que trata do trabalho do professor, exercícios, atividades, todos constituintes da disciplina escolar definida pelo historiador André Chervel. Ao investigar o trabalho do professor, os exercícios por ele ministrados e veiculados por meio dos livros didáticos, o historiador estará no caminho de revelar o processo de constituição de uma disciplina escolar.

O pesquisador Alain Choppin, relativamente à pesquisa histórica sobre os livros didáticos, não obstante reconheça a multiplicidade de aspectos que a envolve, distingue duas categorias de análise:

> Aquelas que, concebendo o livro didático como um documento histórico igual a qualquer outro, analisam os conteúdos em uma busca de informações estranhas a ele mesmo (CHOPPIN, 2004, p. 554).

O livro didático nessa situação será utilizado como uma fonte de pesquisa histórica. Nessa situação, voltaremos nosso olhar para o interior do livro didático, dirigindo questões do tipo: a quem se dirige a obra?; Quem eram os responsáveis por sua publicação?; Como se encontra em termos de apresentação?; Como está disposto o sumário?; O que diz o sumário?; Quantas e quais sessões? Quem é o autor?

No tocante à segunda categoria de pesquisa, Choppin assim se posiciona:

> Na segunda categoria, ao contrário, o historiador dirige sua atenção diretamente para os livros didáticos, recolocando-os no ambiente em que foram concebidos, produzidos, distribuídos, utilizados e “recebidos”, independentemente, arriscamos a dizer, dos conteúdos dos quais eles são portadores (CHOPPIN, 2004, p. 554).

É a análise do livro como um produto, um produto que é, como nos fala Choppin, concebido, produzido, distribuído. É preciso atentarmos para o contexto em que acontecem as etapas do livro didático, anteriormente descritas.

Essas categorias de análise identificadas por Choppin seriam utilizadas por nós se a nossa pesquisa se destinasse à história dos livros didáticos. No nosso caso, trata-se da história de uma disciplina escolar. Nesse sentido, as categorias de análise nos serão fornecidas por Chervel. É examinar os livros e verificar em que medida eles indicam a sedimentação de um corpo de conteúdos, um tipo de metodologia, um conjunto de exercícios, enfim, os constituintes da disciplina escolar, definida por Chervel.

O historiador Alain Choppin (2004) assim pontuou seus comentários em relação aos autores de livros didáticos: “os autores de livros didáticos não são simples espectadores de seu tempo; eles reivindicam outro *status*, o de agente” (p. 557). Os autores, então, ao redigirem uma obra, são dotados de uma intencionalidade, de um propósito e a obra irá refletir essa intencionalidade do autor.

Nesse ponto, cabe um parênteses, no sentido de abordarmos os processos de apropriação implícitos nas atividades de escrita e edição dos livros didáticos, uma vez que os autores e os editores se apropriam das determinações oficiais para produzirem os livros didáticos, visando cumprir as legislações vigentes. Ainda que tenham por objetivo o *cumprimento rigoroso* de tais determinações oficiais, terão certa autonomia em suas *leituras,* havendo, então, o encontro dos dois mundos: o do texto e o do leitor, como definiu Chartier (1991). Desse encontro, segundo Chartier, têm-se duas hipóteses.

A primeira irá sustentar "a operação de construção de sentido efetuada na leitura (ou na escrita) como um processo historicamente determinado cujos modos e modelos variam de acordo com os tempos, os lugares e as comunidades" (CHARTIER, 1991, p. 178).

A segunda hipótese sustenta que os significados do texto "dependem das formas por meio das quais é recebido por seus leitores (ou ouvintes)" (1991, p. 178).

Assim, os autores, bem como os editores, cada qual na sua função, *farão suas leituras das determinações oficiais,* tendo como produto final o livro didático, cujo objetivo será *atender aos ditames da Reforma.*

Choppin (2004) ainda pontua que "a imagem da sociedade apresentada pelos livros didáticos corresponde a uma reconstrução que obedece a motivações diversas, segundo época e local" (p. 557). Os autores, nesse sentido, têm participação atuante e efetiva.

Por fim, Chervel, no fechamento de seu texto, nos brindou de modo especial com essa frase, destacando, de forma inequívoca, a importância das disciplinas escolares e de sua história: "as disciplinas escolares são o preço que a sociedade deve pagar à sua cultura para poder transmiti-la no contexto da escola ou do colégio" (CHERVEL, 1990, p. 222).

Tendo discorrido sobre a disciplina escolar, com o fim de fundamentar teórica e metodologicamente nossa pesquisa, no próximo capítulo voltaremos nossa atenção para a disciplina escolar matemática.

2
SOBRE A DISCIPLINA ESCOLAR MATEMÁTICA

> "A instituição escolar é, em cada época, tributária de um complexo de objetivos que se entrelaçam e se combinam numa delicada arquitetura da qual alguns tentaram fazer um modelo. É aqui que intervém a oposição entre educação e instrução" (André Chervel).

2.1 A Matemática do Ginásio

Após a discussão e fundamentação teórica da disciplina escolar, nosso objetivo agora é discorrermos sobre a disciplina escolar matemática. Em um primeiro momento discorreremos sobre a Matemática do Ginásio,[7] mostrando, por meio de trabalhos já realizados, seu surgimento, e sua marcha de constituição disciplinar. Ao final, traremos uma discussão sobre a existência de outra disciplina, a Matemática do Colégio, objeto desta pesquisa, e que o nascimento da Matemática do Colégio está envolto em características muito diferentes da Matemática do Ginásio, e que ambas têm marchas distintas de constituição, mostrando tais diferenças. Finalizando o capítulo, apresentaremos os trabalhos já realizados que trazem contribuições importantes para nossa pesquisa, procurando mostrar a relevância de nossa investigação.

Sabemos de pesquisas anteriores[8] em que a Matemática ensinada no 1.º ciclo do ensino secundário ganhou forma de disciplina escolar, por iniciativa do Professor Euclides Roxo, sendo ele um personagem central e importante nesse processo.

---

7 Matemática a ser ensinada hoje no Ensino Fundamental II (6.º ao 9.º anos). O nome Ginásio refere-se ao 1.º ciclo do Ensino Secundário na Reforma Capanema, levada a efeito pelo Ministro da Educação e Saúde, Gustavo Capanema, por meio do Decreto n.º 4.244, de 9 de abril de 1942. Essa reforma dividiu o Ensino Secundário em dois ciclos: o Ginásio, com quatro anos, e o Colégio, com três anos, este dividido em Clássico e Científico.

8 Dentre eles, a dissertação de Bruno Alves Dassie (2001), a obra da pesquisadora Maria Ângela Miorim (1998) e do pesquisador Wagner Rodrigues Valente (2004).

Euclides Medeiros de Guimarães Roxo pode ser considerado um dos primeiros e principais educadores matemáticos brasileiros. Engenheiro formado pela Escola Politécnica, em 1914, inicia sua carreira no Colégio Pedro II,[9] em 1915, como assistente, autorizado por Floriano Peixoto, Presidente da República, e já era ex-aluno do referido colégio. Em 1919, com o falecimento do Professor Eugenio de Barros Raja Gabaglia, Euclides Roxo assume a cátedra de Matemática do colégio, após vencer uma disputa com o também Professor Arthur Thiré. É nomeado catedrático interino de Matemática do Colégio em março de 1919 e, no mesmo ano, o Presidente “Epitácio Pessoa torna Euclides Roxo professor catedrático do Colégio Pedro II” (VALENTE, 2004, p. 61).

Durante muitos anos, a referência principal do Colégio Pedro II relativamente a livros didáticos de Matemática eram os livros didáticos conhecidos por FIC (Frères de l’Instruction Chrétienne)[10] – traduzidos pelo Professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia, professor do Colégio, com vários volumes: *Elementos de Aritmética*, *Álgebra*, *Geometria*. Segundo Valente,

> [...] os manuais FIC constituíram, em seu tempo, a máxima interferência no cotidiano escolar – sob a forma de livros didáticos – na organização dos conteúdos de ensino das matemáticas, pensadas em suas partes independentes (aritmética, álgebra, geometria, trigonometria, etc.) (VALENTE, 2004, p. 49).

Dentro da coleção FIC, o didático *Elementos de Aritmética* foi adotado pelo Colégio Pedro II até o ano de 1922, quando foi substituído pelo livro *Lições de Aritmética* de Euclides Roxo. Segundo Valente, “a adoção do didático de Roxo é acompanhada por uma mudança nos programas de ensino do Pedro II” (VALENTE, 2004, p. 67). O programa é aprovado no Colégio Pedro II e isso “torna a sequência de conteúdos de aritmética do Colégio, a partir de 1923, praticamente cópia do índice do livro didático de Roxo” (VALENTE, 2004, p. 67).

---

[9] O Decreto da Regência, de 2 de dezembro de 1837, referendado pelo Ministro do Império, Bernardo Pereira de Vasconcelos, converte o Seminário de São Joaquim no Colégio Pedro II. Desde a sua fundação, o colégio torna-se referência para a constituição do ensino secundário brasileiro (VALENTE, 2004, p. 47).

[10] No final do século XIX, surge no Brasil uma literatura didática marcada sempre pela sigla FIC. As Escolas da Congregação dos *Frères de l´Instruction Chrétienne* constroem, principalmente por meio dos seus frades-professores, uma grande obra didática em vários campos do saber (VALENTE, 1999, p. 176-177).

Valente (2004) enumerou elementos que mostram que o didático de Roxo se tornou referência para o ensino de Aritmética no Brasil e também uma orientação modernizadora para o ensino de Matemática. O primeiro elemento apontado por Valente foi o sucesso de vendas do didático *Lições de Aritmética*. Relata que:

> [...] ao consultar documentos pessoais de Euclides Roxo, verificou-se uma infinidade de pedidos para envio do livro e que, em conversas com o filho do autor, Stélio Roxo, o mesmo declarou que, com a venda do livro, seu pai conseguiu comprar uma enorme casa onde passaram a residir no Bairro de Santa Tereza (VALENTE, 2004, p. 70).

O livro de Roxo também foi adotado por instituições importantes, como o Ginásio da Capital de São Paulo, denotando o sucesso alcançado por ele.

Outro elemento apontado por Valente é o fato de que o livro de Roxo inovou no que se refere ao desenvolvimento da aritmética:

> Diferentemente dos *Elementos de Aritihmetica por FIC* no qual, como norma, o desenvolvimento da aritmética se faz com exemplos numéricos, nas *Lições,* e modo igual a Tannery,[11] a apresentação e o desenvolvimento dos conteúdos utilizam notação literal (VALENTE, 2004, p. 70).

Essa inovação introduzida por Roxo em seu livro servirá mais adiante para que ele defenda “a ideia de fusão dos ramos separados da tradicional matemática, particularmente da aritmética com a álgebra” (p. 70).

Por meio de um documento assinado pelo Ministro de Estado da Justiça e Negócios Interiores, Afonso Pena, em nome do Presidente da República, em 19 de agosto de 1925 (APER),[12] Euclides Roxo é nomeado para exercer de forma interina o cargo de diretor do Externato do Pedro II. Posteriormente, Arthur Bernardes, em 3 de março de 1926, ratifica a nomeação, tornando-o diretor do externato do Pedro II.

---

[11] Matemático Jules Tannery. Com Gaston Daboux (presidente), formou a comissão que reformulou os programas de ensino de Matemática da França em 1902. Tannery publicou, em 1894, o livro didático *Leçons d´Arithmétique théorique et pratique*, um dos livros que fizeram parte da coleção *Cours complet de mathématiques élémentaires*, editada e organizada por Gaston Darboux (VALENTE, 2004, p. 64-65).

[12] O Arquivo Pessoal Euclides Roxo é uma das bases de fontes históricas disponíveis no GHEMAT (Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil), em Osasco – SP. Disponível em: <http://www.unifesp.br/centros/ghemat/images/stuffs/E_ROXO_Ficha_Tecnica.pdf>.

Euclides Roxo foi, ao longo do tempo, acumulando experiências, força e prestígio junto ao Colégio Pedro II, em face do sucesso de seu livro já citado, de sua condição de professor e diretor do Externato do Colégio, e uma outra característica profissional importante: manter-se atualizado do que era produzido no exterior em termos de livros ligados ao ensino de Matemática. Tudo isso contribuiu para que, no dia 14 de novembro de 1927, Roxo propusesse à congregação do Pedro II uma reforma radical no ensino de matemática. Segundo Valente (2004), “a proposta é elaborada a partir de vários considerandos” (p. 71). Esses “considerandos” são justificativas de Roxo às suas escolhas didático-pedagógicas.

Em um dos considerandos, destaca-se que “um dos pontos capitais da nova orientação está em acabar com a divisão da ciência matemática em partes distintas e separadas (aritmética, álgebra e geometria)” (p. 72).

O texto foi assinado por mais de dois terços dos professores, propondo ao governo

> [...] modificar a distribuição das matérias do curso secundário, do seguinte modo: o estudo da aritmética, álgebra, geometria, trigonometria se fará sob a denominação única de Matemática, do 1.º ao 4.º ano do curso (VALENTE, 2004, p. 73).

Em 1928, a congregação do Colégio Pedro II recebe um ofício do Departamento Nacional de Ensino e outro da Associação Brasileira de Educação,[13] em que manifestam apoio à iniciativa do Colégio. Segundo Valente (2004, p. 73), “o Decreto n.º 18.564, de 15 de janeiro de 1929, oficializa a aceitação da proposta modernizadora encabeçada por Roxo”.

Em 1929, Euclides Roxo lança seu livro *Curso de matemática*, em cujo prefácio ele deixa clara sua adesão ao movimento modernizador do ensino de Matemática, citando os matemáticos Poincaré e enfatizando Felix Klein. Segundo Valente:

---

[13] A Associação Brasileira de Educação (ABE) foi criada em 1924 por um grupo de educadores brasileiros que tinham ideias inovadoras sobre ensino. Faziam parte da ABE os professores Heitor Lira, José Augusto, Antonio Carneiro Leão, Venâncio Filho, Everardo Backheuser, Edgard Süsekind de Mendonça e Delgado de Carvalho (ROMANELLI, 1978, p. 128).

> O novo didático de matemática, escrito por Roxo, tinha assim a finalidade de objetivar a proposta de modernização do ensino no Brasil. A intenção principal era a da reestruturação da sequência de conteúdos a ensinar, visando à fusão dos vários ramos (aritmética, álgebra e geometria) até então separados. Estava nascendo uma nova matemática escolar: *a matemática do ginásio* (grifo nosso) e, com ela, um livro para a primeira série desse novo grau de ensino, a ser criado oficialmente com a Reforma Francisco Campos, sob a denominação de Curso Fundamental (VALENTE, 2004, p. 119-120).

Euclides Roxo deixa a direção do externato do Pedro II quando da ascensão de Getúlio Vargas à Presidência da República, via golpe militar em 1930, por não concordar com a ideologia do regime. Volta ao Colégio Pedro II, ainda em 1930, em virtude de laços familiares. Segundo Valente,

> [...] ao que tudo indica, por ingerências do tio de sua mulher Marília, Armando de Alencar, rio-grandense como Getúlio e ministro do Supremo Tribunal Federal, Roxo é reconduzido à direção do Colégio Pedro II, agora como diretor do Internato. Em 11 de dezembro de 1930, Euclides Roxo toma posse do cargo em São Cristóvão (VALENTE, 2004, p. 78).

Roxo é, então, chamado pelo primeiro ministro do então criado Ministério da Educação e Saúde, Francisco Campos,[14] para fazer parte de uma Comissão que tinha como função elaborar um projeto de reforma do ensino brasileiro.

A pesquisadora Maria Ângela Miorim menciona que

> Francisco Campos acatou, em sua reforma para o ensino secundário, todas as ideias modernizadoras presentes na proposta da Congregação do Colégio Pedro II, na parte relativa ao ensino da matemática (MIORIM, 1998, p. 93).

[14] Francisco Luis da Silva Campos, natural de Dores do Indaiá, município de Minas Gerais, nasceu em 18 de novembro de 1891 e faleceu, em Belo Horizonte, no dia 1.º de novembro de 1968. Formou-se na Faculdade Livre de Direito de Belo Horizonte, em dezembro de 1914. Além de exercer a advocacia, ocupou, entre outros, os seguintes cargos públicos: professor concursado de Direito Público Constitucional da faculdade onde se formou (1918); Deputado Federal por Minas Gerais (1921-1926); Secretário do Interior de Minas Gerais (1926-1930); Ministro da Educação e Cultura (1930 – 1932); Consultor-Geral da República (1933-1937); e finalmente Ministro da Justiça (1937-1941) (ROCHA, 2001, p. 178-179).

Assim, nasce a Matemática do Ginásio, uma disciplina que sintetiza a fusão da Aritmética, Álgebra e Geometria; uma disciplina com a marca do Professor Euclides Roxo.

O processo de constituição da disciplina Matemática do Ginásio desenvolveu-se ao longo das décadas de 1930 e 1940. Segundo Valente,

> [...] nos anos 1950, por meio das Portarias 966 e 1.054, de 02 de outubro de 1951, e 14 de dezembro de 1951, respectivamente, que a disciplina ficou estabilizada com a elaboração de um “Programa Mínimo” que parametrizou toda a produção didática para o ginásio (VALENTE, 2011, p. 648).

Entretanto, no final da década de 1950, uma vaga internacional, o Movimento da Matemática Moderna (MMM) provoca uma verdadeira revolução na Matemática Escolar. O *lócus* de recepção do Movimento no País foi justamente o Ginásio, e o protagonista principal e divulgador desse movimento foi o Professor Osvaldo Sangiorgi, um *best-seller* de obras para esse nível de ensino.[15]

Segundo Valente, “a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, de 1971, sedimentou as contribuições da Matemática Moderna ao currículo do que passou a ser denominado Ensino de 1.º Grau e Ensino de 2.º Grau” (VALENTE, 2011, p. 648-649).

Na perspectiva de nossa investigação, cabe interrogar se os processos e as dinâmicas de constituição da disciplina escolar “Matemática para o Ginásio” têm paralelo com a Matemática a ser ensinada em grau posterior de ensino, isto é, o que no âmbito da Reforma Francisco Campos recebeu o nome de Cursos Complementares, originando posteriormente, na Reforma Capanema, o Colégio nas suas feições Clássico e Científico.

Em síntese poderíamos interrogar: Uma vez que existe a Matemática do Ginásio, tem sentido em falar sobre outra disciplina, a Matemática do Colégio? Haverá, então, duas disciplinas?

---

[15] A trajetória de Osvaldo Sangiorgi no Movimento da Matemática Moderna pode ser lida em Valente (2008), entre outros.

O pesquisador Wagner Valente, com seu texto “A Matemática do ensino secundário: duas disciplinas escolares?” (2011), nos diz que sim, ao reunir nesse texto argumentos para concluir que, “efetivamente, é possível afirmar que existem duas disciplinas escolares de Matemática no mesmo ensino secundário” (VALENTE, 2011, p. 645). Essas duas disciplinas são a Matemática do Ginásio e a Matemática do Colégio. Para cada um desses ciclos de ensino há marchas diferentes de constituição disciplinar.

O texto do pesquisador, no entanto, não aprofunda a análise das dinâmicas e processos diferenciados de constituição de cada uma das duas disciplinas matemáticas; no entanto, o texto deixa pistas para uma investigação mais acurada da trajetória diferenciada do que estamos chamando nesta tese de “Matemática do Colégio”.

Assim, a marcha de constituição da Matemática do Colégio é justamente o objeto desta pesquisa e será estudada nos capítulos posteriores, sobretudo no Capítulo 4, ocasião em que faremos a análise da produção didática dos períodos em estudo. Neste ponto, cabe, no entanto, uma pequena introdução sobre o tema.

Ao que tudo indica, o atual Ensino Médio teve origem na Reforma Francisco Campos, nos Cursos Complementares, por ela criados. Essa reforma foi a primeira a dividir/separar os ensinos. O Ensino Secundário, que até então era único, foi dividido em Fundamental, com duração de cinco anos, igual e único a todos os alunos, e o Complementar, com duração de dois anos, múltiplo e com três opções: pré-jurídico, pré-médico e pré-politécnico. Tais cursos, assim especificados, funcionaram em anexos das faculdades às quais eram destinados e, na realidade, eram cursos preparatórios ao ensino superior.

Os Cursos Complementares – designação que reúne as três modalidades – tiveram grande autonomia de existência relativamente ao Curso Fundamental, não representando continuidade deles.

Para Valente:

> A matemática escolar dos cursos complementares menos serviu para complementar a Matemática do curso fundamental e mais se

> constituiu como conteúdo introdutório à Matemática presente nos cursos superiores da época, sobretudo os de Engenharia e Medicina (VALENTE, 2011, p. 652).

Em 1942, por meio da Lei Orgânica do Ensino Secundário, o Ministro Gustavo Capanema implantou a Reforma Capanema, que manteve a duração do ensino secundário em sete anos e a divisão dele em dois ciclos. O primeiro ciclo ficou com duração de quatro anos, passando a se chamar Ginásio, e o segundo ciclo, com duração de três anos, chamado de Colégio, este subdividido em Clássico e Científico. Segundo Valente,

> [...] os temas matemáticos outrora presentes nos cursos complementares sofreram alteração substantiva. Ocorreu um processo de agrupamento, seriação e criação de unidades didáticas interligadas, dentro dos ramos matemáticos da Aritmética, Álgebra e da Geometria (VALENTE, 2011, p. 654).

Observamos aqui um avanço em relação ao processo de constituição da disciplina Matemática do Colégio, iniciado na Reforma Francisco Campos, com a separação dos ensinos. Essa reforma vai também modificar o rol de conteúdos abordados no Colegial: "temas de maior aprofundamento de álgebra foram retirados e o Cálculo Vetorial foi deixado, em boa medida, para ser ensinado no ensino superior" (p. 654).

No fim dos anos 1950, "a reorganização da Matemática escolar, a partir do Movimento da Matemática Moderna, aponta para processos distintos de configuração disciplinar entre a Matemática do ginásio e aquela do colégio" (p. 659).

As diferenças nos *processos de disciplinarização* da Matemática para o ginásio e para o colégio, segundo Valente, "centram-se, além dos conteúdos escolares, no modo de amalgamar assuntos matemáticos para o ensino seriado" (p. 659).

No Capítulo 4 desta pesquisa, empreendemos uma análise da produção didática dos diferentes períodos com o objetivo de mostrar como se ocorreu esse processo de disciplinarização da Matemática do Colégio, ocasião em que ficarão mais claras e evidentes as diferenças anteriormente citadas.

O que sabemos até o momento é que não existem trabalhos de fôlego a respeito da constituição da disciplina Matemática do Colégio. Há trabalhos que apontam, que apresentam dados, elementos, que podem nos ajudar na escrita dessa história de constituição, objeto dessa pesquisa. Passaremos agora a analisar tais dados e elementos presentes nesses trabalhos, por meio da revisão de literatura.

2.2 Revisão de Literatura

Para a consecução deste estudo, efetuamos uma pesquisa nos bancos de teses e dissertações da Capes, Cenpem, USP, Unicamp, PUC-SP. Nosso objetivo foi procurar trabalhos que representassem pesquisas referentes à história das disciplinas escolares, Matemática do colégio, livro didático, e, pelo que verificamos, são raros os trabalhos que tratam do tema; a maioria deles está no âmbito do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT). Dentre eles, destacamos os trabalhos de autoria de Ribeiro (Dissertação, 2006; Tese, 2011), Otone e Silva (Dissertação, 2006) e Otone (Tese, 2011), Dassie (Dissertação) e Marques (Dissertação, 2005), os quais foram alvos de análise neste capítulo.

Apresentamos, a seguir, a revisão bibliográfica realizada.

A dissertação de mestrado de Bruno Alves Dassie, intitulada *A Matemática do Curso Secundário na Reforma Gustavo Capanema*, foi defendida no Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, em 2001. Teve por objetivo,

> [...] reconstruir a história da disciplina matemática do currículo da escola secundária brasileira, no período 1936 a 1942, apresentando os principais protagonistas presentes no âmbito das discussões sobre o ensino dessa ciência (DASSIE, 2001, p. 1).

Baseado em documentos, o autor discorre sobre os bastidores das Reformas Francisco Campos e Capanema, resultando em uma grande contribuição à pesquisa na área da História da Educação Matemática, porém não vimos no trabalho elementos que possam nos auxiliar no trabalho com nosso objeto de pesquisa, qual seja, traçar a trajetória de constituição da disciplina Matemática do Colégio.

A dissertação de mestrado de Alex Sandro Marques, intitulada *Tempos pré-modernos*: a Matemática escolar dos anos 1950, foi defendida no programa de pós-graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), no ano de 2005, sob orientação do Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente. Teve por objetivo a verificação da organização da Matemática escolar do ginásio nos anos 1950. Teve foco acentuado na Portaria Ministerial de 1951, que estabeleceu o programa mínimo e a Matemática escolar dos tempos que ele chamou de pré-modernos.

Marques nos revela que conseguiu, com seu trabalho,

> [...] enxergar o movimento feito pela disciplina matemática ao longo desses 30 anos, com seu nascimento e desenvolvimento nos anos 1930, uma modificação nos anos 1940 e um período de muita estabilidade nos anos 1950 (MARQUES, 2005, p. 101).

O autor ainda conclui que “a estrutura da matemática escolar do ginásio nos tempos pré-modernos estava muito bem definida, com o ensino prático e intuitivo nos dois primeiros anos e dedutivo a partir do 3.º ano” (MARQUES, 2005, p. 101). Para o autor, os anos 1950, não foram de revolução na disciplina; “o clima era de estabilidade e consenso entre os professores em relação aos conteúdos e metodologias de ensino” (p. 102).

Não obstante o trabalho de Marques tenha tido como objeto a disciplina escolar Matemática do Ginásio, ele guarda muita semelhança com o nosso no que se refere à trajetória percorrida pelo autor na consecução de seus objetivos: ele utilizou-se de legislação das reformas, análise de livros didáticos e teve como foco o movimento da disciplina. Voltaremos a esse trabalho de maneira mais específica no Capítulo 4.

A dissertação de mestrado de Maryneusa Cordeiro Otone e Silva, intitulada *A Matemática do Curso Complementar na Reforma Francisco Campos*, foi defendida no programa de pós-graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), no ano de 2006, sob orientação do Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente.

Teve por objetivo analisar o ensino de Matemática do Curso Complementar da Reforma Francisco Campos (1931 – 1942). A autora examinou a legislação referente à reforma Francisco Campos e arquivos do antigo Ginásio São Paulo, atual Escola Estadual São Paulo, e também no arquivo e museu da Faculdade de Direito da Universidade de São Paulo. Buscou verificar de que maneira teriam funcionado as três modalidades do Curso Complementar: Pré-Jurídico, Pré-Médico e Pré-Politécnico.

A autora, em suas considerações finais, relatou que, ao estudar a organização das categorias dos Cursos Complementares (Pré-jurídico, Pré-médico e Pré-politécnico), percebeu a existência de uma diversidade nos ensinos de Matemática. Ao efetuar a análise das provas dos Cursos Pré-médico e Pré-Politécnico referentes à Matemática, observou que elas guardavam muita semelhança, quanto à forma, com padrões parecidos de confecção. Tal semelhança, entretanto, não se mantinha quando a análise recaía sobre os conteúdos matemáticos e também relativamente à mudança desses conteúdos durante a vigência de tais cursos. Por fim, a autora, ao refletir sobre o ensino de Matemática ministrado no Curso Complementar, assim destacou:

> Essas considerações remeteram-nos a refletir sobre o ensino de Matemática ministrado no Curso Complementar, indagando – sob a ótica de Chervel – se eles configuraram um ensino disciplinar. Ao que tudo indica, isso não ocorreu. Isto é, não ficou caracterizado, no Curso Complementar, um padrão estandardizado para a Matemática escolar (OTONE E SILVA, 2006, p. 141).

Não obstante o trabalho de Otone e Silva não tivesse como foco a disciplina escolar e a análise de livros didáticos, seus estudos e suas conclusões são de muita utilidade na análise do movimento da disciplina escolar matemática do colégio que faremos no período 1930-1970, na medida em que configura um início do processo de constituição da disciplina Matemática do colégio e serão retomadas posteriormente, no Capítulo 4.

A dissertação de mestrado de Denise Franco Capelo Ribeiro, intitulada *Dos cursos complementares aos cursos clássico e científico*: a mudança na organização dos ensinos de matemática, foi defendida no programa de pós-graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), em 2006, sob orientação do Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente.

O trabalho teve por objetivo estudar as transformações ocorridas na organização dos ensinos de Matemática dos Cursos Complementares aos Cursos Clássico e Científico, criados na Reforma Capanema.

Como ponto de partida em sua pesquisa, a autora fez um estudo apurado na legislação das Reformas Francisco Campos e Capanema explicitando as finalidades do ensino presentes em cada uma delas, estabelecendo comparações. Da comparação entre tais legislações a pesquisadora percebeu que:

> Os conceitos matemáticos estavam dispostos segundo uma lógica interna, revelando unidades didáticas, que segundo Chervel indicam que a transformação sofrida na organização dos ensinos de matemática poderá levar os docentes a experiências pedagógicas semelhantes (RIBEIRO, 2006, p. 42).

E levando-a inferir que:

> [...] dada à configuração dos ensinos matemáticos, a forma de expor a teoria, a escolha dos exemplos, à utilização dos exercícios, poderão levar a uma uniformização das práticas pedagógicas, levando a constituição da disciplina matemática neste nível de ensino (p. 42).

Com o objetivo de investigar as práticas pedagógicas, a autora também se valeu de fontes históricas, como Diários Oficiais do Estado de São Paulo, no período 1942-1943, e documentos escolares do arquivo do Ginásio da Capital, hoje Escola Estadual São Paulo. Como tal documentação não foi suficiente, a autora resolveu analisar a produção didática referente aos Cursos Complementares e Clássico e Científico.

Após o exame dessa produção didática para os Cursos Complementares e Clássico e Científico, a autora identificou transformações ocorridas no ensino de Matemática (Álgebra, Geometria, Geometria Analítica, Trigonometria, Aritmética Teórica e Cálculo Vetorial).

As transformações observadas na passagem do Curso Complementar para os Cursos Clássico e Científico foram as seguintes: a mudança de apresentação dos conteúdos (passaram de itens dispersos, isolados e independentes para uma disposição que seguia uma lógica didático-matemática, agrupando-se em unidades interligadas); os conteúdos ficaram independentes e obedeciam a uma sequência de ensino serial; menor rigor matemático na apresentação dos conteúdos, com um desenvolvimento mais simples, utilizando os exercícios como um meio para o estudo e assimilação dos conteúdos; conteúdos matemáticos dos Cursos Complementares, diferentes entre si com a característica de cursos distintos, foram padronizados, tornando-se um só curso, com poucas variações; somente o Curso Complementar Pré-Politécnico apresentava a padronização dos ensinos de Matemática em Geometria e Álgebra, e para os Cursos Clássico e Científico tais ensinos foram organizados, por série, em Aritmética Teórica, Álgebra, Geometria Analítica e Trigonometria, sob a denominação Matemática.

Segundo Ribeiro:

> Os livros didáticos, antes específicos para determinado assunto, por exemplo, Geometria Analítica, com vimos para os Cursos Complementares, passaram a englobar diferentes assuntos nos Cursos Clássico e Científico, por exemplo, sob o título do livro de *Matemática 2.º ciclo,* os estudantes estudavam a Aritmética Teórica, Álgebra e Geometria (RIBEIRO, 2006, p. 115).

Depois de examinar tais transformações, Ribeiro inferiu que a coleção de livros intitulada *Matemática 2.º Ciclo*, de autoria de Euclides Roxo, Haroldo Cunha, Roberto Peixoto e Dacorso Netto, seria uma obra inovadora na medida em que estes também produziram textos para ambas as reformas nos dois níveis: Francisco Campos, *Curso fundamental e complementar e Capanema*, para os Cursos Ginasial e Colegial (Clássico e Científico). Ademais, segundo pesquisas do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT), tais autores “participaram ativamente da constituição da Matemática para o Curso Fundamental, na Reforma Francisco Campos, e Ginásio, na Reforma Capanema” (RIBEIRO, 2006, p. 115).

Outro fato apontado pela autora é que o Professor Euclides Roxo era um autor diferenciado em relação às inovações didáticas de seus textos, com metodologia peculiar. No tocante à coleção *Matemática 2.º Ciclo* de Euclides Roxo, Haroldo Cunha, Roberto Peixoto e Dacorso Netto, a autora destacou que tais livros foram editados para atenderem aos programas de Matemática para os Cursos Clássico e Científico:

> [...] respeitando tais programas e, além disso, trazendo uma proposta diferenciada para o ensino da Matemática, dividindo os conteúdos por série, contendo o estudo dos conceitos de Álgebra, Aritmética Teórica, Geometria Analítica e Trigonometria, juntos em um mesmo livro (RIBEIRO, 2006, p. 116).

Tais livros, segundo a autora, apresentam tais conteúdos de forma clara e objetiva, sem perder o rigor matemático, divididos em unidades didáticas interligadas, com exemplos de exercícios resolvidos e a resolver, porém o mesmo não acontecia com os livros editados para os Cursos Complementares.

Os livros da *Coleção dos 4 autores*, como ficou conhecida, "faziam uso constante de notas de rodapé cujo objetivo era mostrar bibliografias a consultar, dados de matemáticos ilustres e referências à História da Matemática" (RIBEIRO, 2006, p. 116). Ainda segundo a autora, os alunos da primeira, segunda e terceira séries dos Cursos Clássico e Científico estudavam os mesmos conteúdos matemáticos, apenas com pequenas alterações de aprofundamento em alguns itens. Em razão de todas essas características, a autora chegou à conclusão de que a coleção *Matemática 2.º Ciclo*, a Coleção dos quatro autores supracitada "fez escola e parametrizou a organização de outros livros didáticos, levando à formação de uma vulgata" (RIBEIRO, 2006, p. 116).

O estudo de Ribeiro anteriormente descrito traz contribuições importantes, na medida em que disponibilizou a informação de formação de uma vulgata no período estudado e também porque utilizou-se da análise de livros didáticos, o que também faremos nesta pesquisa.

Em 2011, Denise Franco Capelo Ribeiro, aproveitando-se das pesquisas efetuadas no seu mestrado, dá continuidade a elas e defende a tese intitulada *Um estudo da contribuição de livros didáticos de Matemática no processo de disciplinarização da Matemática escolar do Colégio*: 1943 – 1961, sob a orientação da Profa. Dra. Célia Maria Carolino Pires, no programa de Pós-graduação em Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

O trabalho intentou estudar a trajetória histórica de constituição da disciplina escolar Matemática para o Curso Colegial, na Reforma Gustavo Capanema. A Reforma Capanema ocorrida em 1942 trouxe a reorganização dos ensinos de Matemática para o nível colegial, ocasionando o surgimento de uma coleção de livros didáticos de Matemática intitulados *Matemática 2.º ciclo, para 1.ª, 2.ª e 3.ª séries*, editados para atender aos novos programas solicitados por tais cursos. A coleção de livros ficou conhecida como "Coleção dos 4 autores", cujos autores são os Professores Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Lisboa da Cunha e Cesar Dacorso Netto.

A hipótese da autora era a de que a "Coleção dos 4 autores" teria comandado uma vulgata no período estudado por ela (1943-1961) e servido de parâmetro para a produção didática de Matemática para o colegial.

A pesquisadora relatou nas considerações finais de seu trabalho que:

> Os resultados das análises por nós realizadas apontaram a caracterização da vulgata, pelos livros da coleção denominada *Coleção dos 4 autores,* que influenciaram a elaboração dos livros acima citados[16] e a consequente padronização da forma de apresentação dos conteúdos e a utilização e estrutura dos exemplos e exercícios, fato reforçado pela participação ativa dos seus autores nos debates em questões educacionais (RIBEIRO, 2011, p. 241).

Esse estudo de Ribeiro dá sequência ao anterior, e é igualmente importante para nosso estudo, na medida em que nos traz a informação de que a "Coleção dos 4 autores" foi a vulgata no período 1943-1961.

Entretanto, os dois trabalhos tiveram como foco principal a vulgata, e o nosso estudo é mais abrangente na medida em que trata da constituição da disciplina Matemática do Colégio no período 1930-1970; portanto, mais abrangente em relação aos objetivos e ao período de estudo.

[16] Nesse ponto, a autora se refere à coleção de livros que ela utilizou para a análise de livros didáticos dela, um rol de livros de Matemática do 2.º Ciclo do Ensino Secundário, do período 1943-1961.

Maryneusa Cordeiro Otone, utilizando-se das pesquisas realizadas em sua dissertação de mestrado já descrita, empreende outra pesquisa, dessa vez de doutorado, intitulada *Uma história da constituição da Matemática do Colégio no cotidiano escolar*, defendida na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), em 2011, sob a orientação da Profa. Dra. Célia Maria Carolino Pires.

A pesquisa empreendida pela autora restringiu-se às décadas de 1930 – 1950 e teve como foco verificar as modificações sofridas pelo currículo de Matemática do Ensino Colegial (atual Ensino Médio), da Reforma Francisco Campos (1931) para a Reforma Gustavo Capanema (1942). Buscou mostrar por que determinados conteúdos de ensino fizeram parte do ensino de Matemática no momento anterior à Universidade, na década de 1930, e foram excluídos do ensino nas décadas seguintes. Teve como objetivo o seguinte: compreender como o cotidiano escolar se organizou nas décadas de 1930 – 1950 para a produção de uma Matemática para o Ensino Colegial.

A pesquisa teve como fontes principais sua dissertação de mestrado e três tipos de fontes históricas relativas às aulas da disciplina Matemática dos Cursos Clássico e Científico do Colégio São Paulo, durante as décadas de 1940 – 1950: diários de lições (diários de classe), questões das provas e as legislações de ensino.

Da análise dos diários a autora chegou à conclusão de que as aulas eram inicialmente compostas por lições, aulas teóricas sobre o assunto e depois as aulas de exercícios. Pelos diários a autora notou também que havia exercícios orais, arguições e sabatinas. Foi também observado que a ordem dos estudos não seguiu a ordenação da legislação.

Após as análises, a autora chegou à conclusão de que, baseando-se na legislação e nas provas, os conteúdos das provas não davam garantia de que foram estudados todos os assuntos constantes na Legislação. No entanto, toda a matéria cobrada nas provas do Clássico e Científico estava disposta na legislação da década de 1940.

Em suas Considerações Finais a autora relatou que:

> Os Programas de Ensino do Curso Complementar são listas de conteúdos matemáticos organizadas para preparação ao Ensino Superior e anunciadas em suas próprias determinações: pré-jurídico, pré-médico, pré-politécnico e pré-filosófico (OTONE, 2011, p. 236).

Ela observou que, no que concerne a tais Cursos, há uma grande diferença de acordo com a modalidade deles.

No tocante aos Cursos Clássico e Científico dos anos 1940, a autora pontuou que a diferença entre os conteúdos das modalidades diminui, mas "a seleção dos conteúdos expressa na legislação mostra os conteúdos, predominantemente, do campo algébrico e do campo geométrico em que os aspectos técnicos se sobrepõem aos conceituais" (p. 236).

Para os Cursos Clássico e Científico dos anos 1950 não há aparecimento dos conteúdos de acordo com a modalidade. São enunciados todos juntos, "acrescentando-se poucos conteúdos a serem ensinados só no Científico. Entre os ramos da Matemática, há certa predominância da Álgebra" (p. 236).

Finalizando seu texto, a autora, no tocante ao ensino de Matemática ministrado nos Cursos Clássico e Científico dos anos 1950, questionou se eles, sob a ótica de Chervel, configuraram um ensino disciplinar. Sua resposta foi positiva, e completou:

> É possível dizer, então, que a Matemática dos Cursos Clássico e Científico dos anos 1950 se constituiu numa disciplina escolar sob a ótica de André Chervel, pois a partir da portaria de 1951, que traz mudanças à Reforma Capanema, se constitui na prática uma única Matemática do Colégio (OTONE, 2011, p. 248).

O trabalho de doutorado de Otone teve como foco a questão curricular da Matemática do Ensino Médio, no período 1930-1950, compreendido entre a Reforma Francisco Campos (1931) e a Reforma Capanema (1942), diferente e menos abrangente que o nosso, quer no tocante aos seus objetivos, ou em relação ao período de estudo, uma vez que buscamos traçar a trajetória de constituição da Matemática do Colégio no período 1930-1970, portanto mais amplo.

Entretanto, as conclusões da autora são de grande valia para nossos objetivos na medida em que a informação trazida por ela, anteriormente citada, de que a “a matemática dos Cursos Clássico e Científico dos anos 1950 se constituiu numa disciplina escolar”, somar-se-á aos estudos de Ribeiro, fornecendo-nos mais elementos para discutir a estabilização da disciplina escolar Matemática do Colégio, nos anos 1950. De qualquer maneira, essa discussão será retomada no Capítulo 4.

Apesar das contribuições de Denise Franco Capelo Ribeiro (2006 e 2011) relativas à confirmação de uma vulgata para o período 1943-1941 e de Otone e Silva (2006), relativamente à não configuração de uma disciplina escolar nos Cursos Complementares, e Otone (2011), relativamente à configuração de uma disciplina escolar nos Cursos Clássico e Científico, os trabalhos não têm a abrangência em termos de período relativamente ao nosso (1930-1970), bem como em relação ao objeto estudado, uma vez que o nosso trata do processo de constituição da disciplina Matemática do Colégio no período citado.

O trabalho de Marques (2005), já citado, se aproxima do nosso, na medida em que estudou o processo de constituição da Matemática do Ginásio, considerando o período 1929-1955, porém é menos abrangente.

Constituída a disciplina, em termos da Reforma Gustavo Capanema, qual teria sido a sua trajetória posterior? Como a Matemática do Colégio fez frente às vagas pedagógicas posteriores? Como a Matemática do Colégio se reconfigurou posteriormente ao que é chamado de Movimento da Matemática Moderna? Tais questões poderão ser respondidas por nossa investigação, constituindo interrogações subsidiárias à questão principal que envolve a trajetória de constituição da Matemática do Colégio, suas dinâmicas e processos.

Por esses motivos elencados, entendemos que o nosso trabalho é relevante, e, partindo dos estudos e resultados anteriormente relatados, contribuiremos para a escrita da história da Educação Matemática, preenchendo uma lacuna ora existente.

No próximo capítulo, nosso objetivo é estudarmos os momentos/reformas educacionais e verificar como cada uma separa/divide os níveis de ensino, como cada qual contribui para a configuração da disciplina Matemática do Colégio.

3
AS MATEMÁTICAS E AS REFORMAS DE ENSINO

> "A distinção entre finalidades reais e finalidades de objetivo é uma necessidade imperiosa para o historiador das disciplinas. Ele deve aprender a distingui-las, mesmo que os textos oficiais tenham tendência a misturar umas e outras" (André Chervel).

Como citado na introdução, o período de nossa pesquisa (1930-1970) é atravessado por reformas/momentos educacionais, dentre eles as Reformas Francisco Campos, Gustavo Capanema, Simões Filho e o Movimento da Matemática Moderna.

Tendo discorrido sobre a disciplina escolar Matemática no capítulo anterior, nosso objetivo neste capítulo é fazer um estudo de cada momento/reforma educacional e verificar como cada um separa os níveis de ensino, os níveis de Matemática que são ensinados. Essa divisão em níveis nos permite pensar que há matemáticas diferentes e, existindo matemáticas diferentes com constituições distintas, permite-nos dizer que nasce uma disciplina diferente, o que já comentamos no Capítulo 2.

Como já relatado, a primeira reforma que faz essa separação de níveis diferentes, com objetivos distintos, foi a reforma Francisco Campos, sendo o primeiro nível o Curso Fundamental e o outro, o Curso Complementar. As outras, anteriores a ela, tratavam o ensino secundário de uma maneira geral. Portanto, iniciaremos pelo estudo da Reforma Francisco Campos.

3.1 Reforma Francisco Campos

A Reforma Francisco Campos foi instituída, dentro do governo revolucionário de Getúlio Vargas, no recém-criado Ministério da Educação e Saúde Pública, por um conjunto de decretos que objetivou organizar, pela primeira vez, o sistema educacional brasileiro. Relativamente ao ensino secundário, foco desta pesquisa, os decretos são os seguintes: Decreto n.º 19.890, de 18 de abril de 1931 – Dispõe sobre a organização do ensino secundário; e o Decreto n.º 21.141, de 4 de abril de 1932 – Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário.

A reforma dividiu o ensino secundário[17] em dois ciclos, sendo que o 1.º Ciclo foi denominado Fundamental, comum a todos, com duração de cinco anos, e o 2.º Ciclo, denominado Complementar, com duração de dois anos, múltiplo e com três opções: Curso Pré-Jurídico, Curso Pré-Médico e Curso Pré-Politécnico. O Curso Fundamental foi iniciado em 1931, mas "somente em 1936 se fez necessária a definição dos programas dos cursos complementares, o que foi feito com assinatura do ministro Gustavo Capanema em 17 de março de 1936"[18] (BICUDO, 1942, p. 225).

É importante ressaltar que os Cursos Complementares não representavam uma continuidade do ensino ministrado no Curso Fundamental, e tiveram grande autonomia de existência em relação a estes: era múltiplo com três opções, como vimos anteriormente, e o Fundamental era comum a todos.

O texto da reforma em seu art. 12 discorre que "o ensino do curso complementar poderá ser ministrado nos estabelecimentos oficiais de ensino secundário e nos estabelecimentos sob regime de inspeção". No entanto, em seu parágrafo 1.º ressalvava:

> Enquanto não houver número suficiente de licenciados pela Faculdade de Educação, Ciências e Letras com exercício no magistério em estabelecimentos de ensino secundário sob inspeção oficial, serão mantidos anexos aos institutos superiores oficiais ou equiparados, os cursos complementares respectivos (BICUDO, 1942, pp. 10-11).

---

[17] Ensino secundário era o nível de escolarização entre o curso primário e o ensino superior, que, a partir da Reforma Francisco Campos, passou a ter duração de sete anos e dois ciclos. Tratava-se de um longo ciclo de escolarização entre a escola primária e o ensino superior, que, *grosso modo*, era dirigido às elites e partes das classes médias. Até a década de 1950, ele era o único curso pós-primário que preparava e habilitava os estudantes para o ingresso nos cursos superiores, diferenciando-se dos cursos Técnico-profissionalizantes e Normal (DALLABRIDA, 2009, p. 185).

[18] Anexo descritivo – Fase 1 – Anexos 13 (Programa de Matemática do Curso Complementar Pré-médico), p.252, e 14 (Programa de Matemática do Curso Complementar Pré-politécnico), p.254.

Pelo que observamos, os Cursos Complementares foram ministrados em anexos às faculdades a que eram destinados. Na exposição de motivos da Reforma do Ensino Secundário, Decreto n.º 19.890, de 18 de abril de 1931, o Ministro Francisco Campos explica a finalidade do ensino secundário quanto aos Cursos Complementares:

> O curso foi dividido em duas partes, a primeira de cinco anos, que é comum e fundamental, e a segunda, de dois anos, constituindo a *necessária adaptação dos candidatos aos cursos superiores* (grifo nosso) e dividida em três secções. Estas secções se constituíram de *matérias agrupadas de acordo com a orientação profissional do estudante* (grifo nosso) (Exposição de Motivos) (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E SAÚDE, 1931).

O conteúdo da citação acima, com trecho da Exposição de Motivos da reforma, vem se somar à citação anterior e atestar o caráter preparatório dos Cursos Complementares, bem como o fato de que as matérias têm de seguir a opção do estudante. Tudo isso são características que influirão no processo de constituição da disciplina Matemática do Colégio, foco desta pesquisa.

Em 1942, ocorre nova reorganização do ensino secundário, por meio de uma nova reforma, a Gustavo Capanema, que será alvo de nossa análise a seguir.

3.2 Reforma Gustavo Capanema

A Reforma Gustavo Capanema foi instituída por meio de um conjunto de "Leis Orgânicas de Ensino",[19] decretadas no período de 1942 a 1946. Para essa pesquisa, daremos atenção ao Decreto-lei 4.244, de 9 de abril de 1942 – Lei Orgânica do Ensino Secundário e legislação complementar.

A Lei Orgânica do Ensino Secundário n.º 4.244, promulgada em 9 de abril de 1942, ficou conhecida como "Reforma Capanema", em virtude do nome do Ministro

[19] Em 1942, por iniciativa do então Ministro de Vargas, Gustavo Capanema, começam a ser reformados alguns ramos do ensino. Ainda uma vez o Governo preferia conduzir-se para o terreno das reformas parciais, antes que para o da reforma integral do ensino, como exigia o momento. Essas reformas, nem todas realizadas sob o Estado Novo, tomaram o nome de Leis Orgânicas de Ensino (ROMANELLI, 1978, p. 154).

da Educação e Saúde, Gustavo Capanema, e reorganizou o ensino secundário brasileiro.

Manteve a divisão em dois ciclos: o primeiro ciclo, na Reforma Francisco Campos, denominado Curso Fundamental, com duração de cinco anos, passou a denominar-se Ginásio, ou Curso Ginasial, com quatro anos de duração.

O segundo ciclo, Curso Complementar na Reforma Francisco Campos, com dois anos de duração e com três opções (Pré-Jurídico, Pré-Médico e Pré-Politécnico), passou a se denominar Colegial, ou Curso Colegial, com três anos de duração e duas opções: Clássico e Científico. Observa-se que a duração do ensino secundário foi mantida em sete anos, mas no 2.º ciclo, objeto desta pesquisa, houve um aumento na duração do curso, de dois para três anos.

Na exposição de motivos, relativamente aos Cursos Clássico e Científico, Capanema assim pontuou:

> Quanto aos dois cursos do segundo ciclo, o clássico e o científico, é de notar que *não constituem dois rumos diferentes da vida escolar* (grifo nosso), não são cursos especializados, cada qual com uma finalidade adequada a determinado setor dos estudos superiores. A diferença que há entre eles é que, no primeiro, a formação intelectual dos alunos é marcada por um acentuado estudo das letras antigas, ao passo que, no segundo, a maior acentuação cultural é proveniente do estudo das ciências. Entretanto a *conclusão tanto de um quanto de outro dará direito ao ingresso em qualquer modalidade de curso do ensino superior* (grifo nosso) (Exposição de Motivos) (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E SAÚDE, 1942, p. 3).

Nossos grifos acima acentuam as diferenças do 2.º Ciclo nos Cursos Complementares e Clássico e Científico.

O art. 5.º da Lei Orgânica do Ensino Secundário acaba por definir e alterar a própria natureza da instituição escolar, na medida em que assim coloca:

> Art. 5.º Haverá dois tipos de estabelecimentos de ensino secundário: o ginásio e o colégio. § 1.º Ginásio será o estabelecimento de ensino secundário destinado a ministrar o curso de primeiro ciclo. § 2.º Colégio será o estabelecimento de ensino secundário destinado a

> dar, além do curso próprio de ginásio, os dois cursos de segundo ciclo (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E SAÚDE, 1942).

A Portaria Ministerial n.º 177, de 16 de março de 1943, expede os programas de matemática dos cursos clássico e científico (Anexo descritivo – Fase 2 – Anexo 7, p. 328).

Assim, o termo colégio, entendido como segundo nível de estudos a suceder o curso primário, tem origem na Reforma Capanema.

Em 1951, ocorre uma nova reformulação do programa, o que podemos chamar de Momento Educacional, não de Reforma. Que modificações tais reformulações trouxeram para o programa de Matemática do 2.º Ciclo do Ensino Secundário brasileiro?

3.3 O Programa Mínimo

No início da década de 1950, por iniciativa do Ministro da Educação e Saúde, Simões Filho, foi efetuada uma nova revisão nos Programas de conteúdos e orientações pedagógicas das disciplinas do Ensino Secundário, ginásio e colégio. Tal revisão ficou conhecida como "Programa Mínimo". Foi consolidada por meio das Portarias n.º 966 e n.º 1.054, de 2 de outubro de 1951 e 14 de dezembro de 1951, respectivamente.[20]

Em 27 de fevereiro de 1951, por meio da Portaria n.º 456, foi criada a comissão de revisão dos programas do Ensino Secundário, com várias comissões, de acordo com o número de disciplinas do curso. Tal comissão foi formada por um professor da Faculdade Nacional de Filosofia, um professor do Colégio Pedro II, um professor do Instituto de Educação do Distrito Federal e um professor do Sindicato dos professores das escolas particulares.

[20] O texto das Portarias n.º 966 e n.º 1.054, de 2 de outubro de 1951, e 14 de dezembro de 1951, encontram-se no Anexo descritivo – Fase 3 – Anexo 12 (p. 440) e Anexo 13 p.443), respectivamente.

A Congregação do Colégio Pedro II recebeu a incumbência de elaboração dos programas das diversas disciplinas do curso secundário, por meio da Portaria n.º 614, de 10 maio de 1951.

É preciso ressaltar que, a rigor, a Reforma Capanema, com os Cursos Clássico e Científico, pode ter vigorado até 1961, o que será alvo de nova abordagem mais adiante. As Portarias n.º 966 e n.º 1.054 supracitadas fizeram alterações pontuais nos programas, que serão objeto de destaque no Capítulo 4, e que se mostrarão importantes no processo de constituição da Matemática do Colégio, objeto desta pesquisa.

A Educação Matemática brasileira sofrerá um grande impacto em finais da década de 1950, com a chegada do Movimento da Matemática Moderna.

3.4 O Movimento da Matemática Moderna

O Movimento da Matemática Moderna (MMM) foi um dos mais importantes movimentos de reforma curricular da Matemática ocorrido até os dias atuais, e acreditamos que os reflexos dele ainda são sentidos. Teve caráter diverso das Reformas Educacionais já citadas neste trabalho, uma vez que não foi instituído oficialmente, via legislação; foi um movimento que teve como força impulsionadora "a disposição de renovação do ensino da matemática a partir da iniciativa dos professores, num quadro de valorização desse ensino, particularmente a nível do curso secundário" (BÚRIGO, 1989, p. 25). Talvez esse tenha sido um de seus maiores diferenciais e a principal mola propulsora do Movimento.

Falemos, agora, de legislação educacional para o período 1961-1970. No Capítulo 4, no texto da Fase 4, voltaremos a discorrer sobre o MMM.

No tocante à legislação vigia a Lei n.º 4.024, de 20 de dezembro de 1961, que deu grande liberdade aos Estados brasileiros para definirem sua organização curricular.

No item “Da Educação de Grau Médio”, o Capítulo I, assim coloca alguns artigos:

> Art. 33. A educação de grau médio, em prosseguimento à ministrada na escola primária, destina-se à formação do adolescente.
>
> Art. 34. O ensino médio será ministrado em dois ciclos, o ginasial e o colegial, e abrangerá, entre outros, os cursos secundários, técnicos e de formação de professores para o ensino primário e pré-primário.
>
> Art. 35. Em cada ciclo haverá disciplinas e práticas educativas, obrigatórias e optativas.
>
> § 1.º Ao Conselho Federal de Educação compete indicar, para todos os sistemas de ensino médio, até cinco disciplinas obrigatórias, cabendo aos conselhos estaduais de educação completar o seu número e relacionar as de caráter optativo que podem ser adotadas pelos estabelecimentos de ensino.
>
> § 2.º O Conselho Federal e os conselhos estaduais, ao relacionarem as disciplinas obrigatórias, na forma do parágrafo anterior, definirão a amplitude e o desenvolvimento dos seus programas em cada ciclo.

Manteve a divisão por ciclos, o ginasial e o colegial, e o § 1.º do art. 35 dispõe que o Conselho Federal de Educação indicará cinco disciplinas obrigatórias para os sistemas de Ensino Médio e os Conselhos Estaduais de Educação completaria o restante, relacionando aquelas de caráter optativo que poderiam ser adotadas pelos estabelecimentos de ensino.

Podemos observar, a seguir, no art. 40 mais um pouco da flexibilidade da LDB:

> Art. 40. Respeitadas as disposições desta lei, compete ao Conselho Federal de Educação, e aos conselhos estaduais de educação, respectivamente, dentro dos seus sistemas de ensino:
> b) permitir aos estabelecimentos de ensino escolher livremente até duas disciplinas optativas para integrarem o currículo de cada curso.

No Capítulo II, “Do Ensino Secundário”, é assim pontuado:

> Art. 44. O ensino secundário admite variedade de currículos, segundo as matérias optativas que forem preferidas pelos estabelecimentos.
> § 1.º O ciclo ginasial terá a duração de quatro séries anuais e o colegial, de três no mínimo.

Então, podemos observar uma grande flexibilidade em termos curriculares para os Sistemas de Ensino e a manutenção da duração de sete anos para o Ensino Secundário e a divisão deste em ginasial, com duração de quatro anos, e colegial, com duração de três anos.

Assim, no Estado de São Paulo, foi editado o Decreto n.º 50.133, de 2 de agosto de 1968, que definiu um tronco comum de dois anos para o colégio e para a Matemática Escolar. Vejamos alguns artigos:

> Artigo 1.º A educação de grau médio em prosseguimento a educação primária, destina-se à formação integral da personalidade dos adolescentes por meio:
>
> I – da ampliação de sua preparação intelectual, tendo em vista, inclusive, a iniciação técnica e profissional;
>
> Artigo 3.º O ensino de grau médio divide-se em ciclos ginasial com duração de 4 anos, e colegial com duração mínima de 3 anos;
>
> Artigo 5.º O ciclo colegial, de caráter formativo e profissionalizante, diversificar-se-á em ramos e será organizado de modo a ensejar a continuidade ou a terminalidade dos estudos.
>
> Parágrafo único. Constituem ramos de ciclo colegial além de outros, os cursos secundários, técnico e de formação de professores para o ensino de grau primário.
>
> Artigo 6.º Nas duas primeiras séries anuais do curso colegial, o currículo será comum para o ensino secundário e normal, podendo sê-lo também para os demais ramos.
>
> Artigo 7.º A terceira série do ciclo colegial, secundário e normal, considerada como ano de orientação, será amplamente diversificada pela organização de áreas de estudo, diferenciais e optativas, cada uma delas correspondente a um setor integrado de conhecimento e de atividades.
>
> Parágrafo único. Os alunos, na terceira série, optarão por uma das áreas de estudo oferecidas pelo estabelecimento.

Portanto, apresentamos a espinha dorsal do Decreto n.º 50.133 que, na esteira da liberdade contida na LDB n.º 4.024/1961, mantém a duração do ensino médio em sete anos, e a divisão em dois ciclos, sendo o ginasial de quatro anos e o colegial de três anos, definindo um tronco comum para as duas primeiras séries do colegial, dizendo que *o currículo será comum para o ensino secundário e normal, podendo sê-lo também para os demais ramos.*

Desse modo, finalizamos este capítulo, cujo objetivo foi verificar como as legislações trabalharam com os níveis de ensino estabelecidos na Reforma Francisco Campos, em 1931.

O Capítulo 4 seguinte se ocupará da análise da produção didática de cada período e retornará às legislações citadas, na medida das necessidades de escrita do texto e da pesquisa.

4
LIVROS DIDÁTICOS E A TRAJETÓRIA DA DISCIPLINA MATEMÁTICA DO COLÉGIO, 1930 – 1970[21]

> "A tarefa primeira do historiador das disciplinas escolares é estudar os conteúdos explícitos do ensino disciplinar" (André Chervel).

No Capítulo 3, por meio de um estudo das Reformas e Momentos Educacionais no período 1930-1970, vimos como eles influenciaram no processo de constituição da Matemática do Colégio.

Então, este capítulo trata da análise de livros didáticos do período 1930-1970, tendo como objetivo mostrar os movimentos de constituição, caracterização, estabilização e modificação da disciplina escolar Matemática do Colégio, que será a resultante do confronto entre essa análise e o diálogo que ela manterá com alguns dos trabalhos presentes no item Revisão da Literatura. Buscamos, dessa forma, discutir o processo de disciplinarização da Matemática do Colégio, no período 1930-1970, sendo o fim principal desta investigação.

Ao balizarmos nossa análise nos estudos de André Chervel, queremos mostrar como o ensino de Matemática, por meio da caracterização da disciplina Matemática do Colégio, se comporta ao longo do tempo. Nosso objeto de pesquisa é pensarmos que o ensino de Matemática acontece de maneira disciplinar; nosso trabalho supõe que o ensino de Matemática no colegial se dá na forma de uma disciplina, a disciplina Matemática do colégio.

---

[21] Informação ao leitor: O Capítulo 4 destina-se à análise dos livros didáticos e foi dividido em quatro fases (1, 2, 3, e 4). Cada fase tem dois anexos: anexo descritivo em que colocamos a descrição da análise dos livros didáticos, mais os quadros, programas e documentos, e o anexo de imagens, em que colocamos as páginas de livros escaneados. Assim, a Fase 1 terá o Anexo Descritivo da Fase 1 e o Anexo de Imagens da Fase 1, e assim por diante. O texto principal encaminha o leitor para o Anexo descritivo e o Anexo descritivo encaminha o leitor para o Anexo de imagens. Por exemplo, o texto principal (Capítulo 4, Fases 1, 2, 3 e 4) encaminha o leitor para o Anexo descritivo e o Anexo descritivo encaminha o leitor para o Anexo de imagens, dentro de cada fase. Em qualquer situação, quando se tratar de somente "Anexo", será anexo de imagens.

Para tanto, ele foi dividido em quatro fases: os Cursos Complementares como embrião da disciplina matemática para o colégio; a criação do 2.º Ciclo do Curso Secundário e a consolidação da disciplina escolar matemática; a estabilização da disciplina escolar matemática para o colégio; o MMM e a turbulência na organização disciplinar da Matemática do Colégio.

Como será feita a análise dos livros em termos teórico-metodológicos?

Cabe relembrarmos o que comentamos no Capítulo 1: as categorias de análise de Alain Chopin, mostradas no Capítulo 1 anterior, seriam utilizadas por nós, se nosso objeto de estudo fosse a história do livro didático, porém o que estamos fazendo é a história de uma disciplina escolar e, por isso, nossas categorias de análise virão de André Chervel. Então, usaremos a análise de livro didático a favor da história das disciplinas. O trabalho que faremos é *perguntar para os livros didáticos em que medida eles indicam algum tipo de metodologia; em que medida eles apontam a sedimentação de um corpo de conteúdos; em que medida eles apresentam um aparelho, um conjunto de exercícios-padrão que vão sendo carregados.*

Basicamente nossas categorias de análise serão o que chamamos de *Estrutura Externa* do livro didático, as características físicas dele e a *Estrutura Interna* do livro didático. Entrando nele, analisando índices, prefácios e, nessa estrutura interna, destacamos o que chamamos de *metodologia de apresentação dos conteúdos* – a maneira pela qual os autores, por meio dos livros, oferecem os conteúdos aos leitores (se têm introdução, exercício de exemplo, exercícios propostos, uso de notas de rodapé), que na realidade é a espinha dorsal da disciplina, além do programa de conteúdos do período (Fase) em questão.

De imediato queremos estabelecer dois princípios básicos, duas premissas, que irão nortear a análise dos livros didáticos: a constituição de uma disciplina é um *processo*, e as fases em que dividimos nossa análise de livros didáticos mostrarão os diversos estágios desse processo, sendo uma importante para outra, como dissemos no Capítulo 1, são “camadas sucessivas e intercruzadas”; o conteúdo é item essencial no processo de constituição de uma disciplina.

Assim, a nosso ver, a questão dos conteúdos é nuclear e ponto muito importante. Chervel o define como o *primeiro na ordem cronológica, senão na ordem de importância.* Na medida em que o andar do processo de constituição da disciplina Matemática do Colégio, mostra um aperfeiçoamento, uma formação de um núcleo dos conteúdos mais estável, proporcionado pelas Reformas ou Momentos Educacionais, abre-se a possibilidade para a constituição ou até a estabilização da disciplina; ao contrário, no nosso entender, a disciplina pode perder a estabilidade ou se desconstituir; é o que procuraremos mostrar nas diversas fases adiante.

4.1 Fase 1 – Os Cursos Complementares como embrião da disciplina Matemática do Colégio

4.1.1 Panorama da disciplina escolar Matemática do Colégio no início da Fase 1

É interessante neste momento traçarmos um panorama da disciplina Matemática do Colégio, perguntando o seguinte: o que temos no início dessa fase em termos de elementos para a constituição da disciplina?

Pensando na questão dos conteúdos, como vimos no Capítulo 3, a Reforma Francisco Campos foi a primeira a fazer a divisão dos ensinos, no caso o Fundamental e o Complementar, e consideramos essa divisão o fato que tornou os Cursos Complementares o embrião da disciplina Matemática do Colégio. Então, o que dispomos em termos de conteúdo são os programas dos Cursos Complementares (Pré-politécnico, Pré-médico e Pré-jurídico) instituídos pela Reforma Francisco Campos. Teriam esses programas se constituído em um rol de conteúdos estável para o processo de constituição da disciplina Matemática do Colégio?

Dos trabalhos analisados no item Revisão de Literatura, Otone e Silva, em suas considerações finais, nos disse: “[...] o estudo da organização dos Cursos Pré-Jurídico, Pré-Médico e Pré-Politécnico mostrou uma diversidade nos ensinos de Matemática” (OTONE E SILVA, 2006, p. 141), e que, referente ao caráter disciplinar do ensino de Matemática nos Cursos Complementares, “sob a ótica de Chervel eles não configuraram um ensino disciplinar e que não ficou caracterizado, no Curso Complementar, um padrão estandardizado para a Matemática escolar” (p. 141).

É esse o panorama, o quadro de fundo, com o qual iniciaremos a análise de livros didáticos da Fase 1. Um panorama que nos mostra que dificilmente haverá condições de constituição e estabilização da Matemática do Colégio no período dos Cursos Complementares. O que os livros nos dirão?

Buscaremos, então, mediante a análise dos livros do período, encontrar um padrão em termos de produção didática, que nos dê indicativos de uma possível vulgata do período. A partir dessa informação, verificar se os livros didáticos nos mostram os constituintes da disciplina Matemática do Colégio: um padrão em termos de metodologia de apresentação dos conteúdos: como e com quais recursos (notas de rodapé, exercícios resolvidos ou de exemplo, exercícios propostos) o autor apresenta e oferece os conteúdos nos livros. Ao final, os resultados da análise e as conclusões de trabalhos já realizados nos darão condições de estabelecer um “estado” para a disciplina Matemática do Colégio no período dos Cursos Complementares.

Nessa análise verificaremos os constituintes da disciplina escolar: os conteúdos, os exercícios, a constituição ou não de uma vulgata no período. Dialogaremos com as conclusões das dissertações de Mestrado de Maryneusa Cordeiro Otone e Silva (2006) e de Denise Franco Capello Ribeiro (2006), já comentadas no item Revisão de Literatura, e com o texto do pesquisador Wagner Valente (2011).

As questões que nortearão a análise serão as seguintes: foi possível o estabelecimento de uma vulgata no período de vigência dos Cursos Complementares? Teria a disciplina Matemática para o Colégio se constituído neste período?

Como ponto de partida de nossos estudos, lançaremos mão de um texto do pesquisador Wagner Rodrigues Valente, denominado “A Matemática do Colégio por meio dos livros didáticos: subsídios para uma história disciplinar” (2009). Nele, o autor relata que, ao analisar os programas para os Cursos Complementares, definidos em 1936, percebeu que

> [...] as orientações de ensino definiram conteúdos matemáticos, a partir de grandes temas, para serem ensinados nas três modalidades: Álgebra, Álgebra Superior, Cálculo Vetorial, Geometria Analítica e Trigonometria (VALENTE, 2009, p. 4).

Os conteúdos solicitados deram origem a livros que buscavam atender tal demanda. No tocante aos tipos de produção didática, Valente ressalta que, "ao que tudo indica, duas foram as modalidades de elaboração de textos didáticos para subsidiar os Cursos Complementares" (p. 4).

Uma dessas produções, segundo Valente,

> [...] leu os programas desses cursos como "pontos", "lições", isto é, caracterizou os conteúdos matemáticos a serem ministrados nos anos terminais do curso secundário como matérias de exame a serem sorteadas (em provas escritas e orais), para as avaliações de ingresso ao ensino superior (2009, p. 4).

As características acima citadas ensejaram a produção de livros didáticos que procuravam reunir os temas matemáticos constantes do programa dos Cursos Complementares em um único livro, buscando preparar os alunos para as provas e exames. Como exemplo dessa produção, Valente citou os seguintes livros:

– CARVALHO, T.M. *Lições de matemática*, de acordo com os programas do Curso Complementar de Engenharia. Rio de Janeiro, 1938.

– LIMA, G. *Pontos de matemática*, segundo os programas dos Cursos Complementares. São Paulo: Soc. Impressora Paulista, 1938.

– SERRÃO, A, N. *Lições de matemática*, para médicos e químicos. Porto Alegre: Livraria do Globo, 1941.

Outro tipo de produção didática voltada ao atendimento dos Cursos Complementares, apontada por Valente, "tornou independente cada tema programado para ensino”, dando origem a livros que “ procuravam esgotar um dado assunto matemático” (p. 5).

Como exemplos de tal produção, Valente mencionou as seguintes obras:

– CUNHA, H.L. *Pontos de álgebra complementar.* Rio de Janeiro: Tipografia Alba, 1939.

– PEIXOTO, R. *Elementos de cálculo vetorial*. 3. ed. Rio de Janeiro: Minerva, 1943.

– PEIXOTO, R. *Elementos de geometria analítica*. Rio de Janeiro: Oscar Mano & Cia., 1938.

– RESNIK, M. *Curso de trigonometria.* Rio de Janeiro: Acadêmica, 1936.

– SERRÃO, A.N. *Lições de álgebra elementar*. Rio de Janeiro: J. R. de Oliveira & C., 1938.

Valente (2009) ainda arrolou um terceiro tipo de produção que buscou atender as demandas dos Cursos Complementares. Foram as apostilas dos cursos ministrados, as quais tinham por critério “ler os programas por temas matemáticos independentes, a serem estudados em cada etapa dos preparatórios” (p. 5). Em sua produção, Valente (2009) apontou dois textos desse tipo, ambos encontrados no Arquivo Pessoal Euclides Roxo (APER). Uma dessas apostilas discorre sobre o tema Álgebra Vetorial e a outra, Números Complexos. O autor foi o Professor Euclides Roxo.

É preciso frisar que a produção didática desse período teve origem nas aulas ministradas nos cursos complementares e, ressalvadas algumas exceções, tiveram vida curta, servindo apenas durante a vigência da Reforma Francisco Campos, sendo substituídos quando da chegada da Reforma Gustavo Capanema, em 1942.

As análises das referidas obras dos três tipos de produção didática do período dos Cursos Complementares e as conclusões tiradas da mesma serão algumas das ferramentas de argumentação nessa fase.

Como critérios norteadores para a escolha dos livros didáticos analisados, além do texto acima citado, levamos em consideração, relativamente os autores das obras: o renome, a relevância profissional e a posição política deles durante a vigência dos Cursos Complementares e o fato de muitos deles terem tido participação ativa nos bastidores das reformas Francisco Campos e Capanema. Segundo Ribeiro,

> [...] esses autores participaram ativamente nas reuniões no Ministério da Educação e Saúde, no Colégio Pedro II, e outros eventos em que eram discutidos programas e metodologias de Matemática, para o Ensino Secundário (RIBEIRO, 2006, p. 52).

Foram escolhidos os livros editados no período compreendido entre 1936 (publicação dos programas dos Cursos Complementares) e 1942 (final da vigência da Reforma Francisco Campos e dos Cursos Complementares).

A seguir, uma breve biografia de alguns dos autores utilizados, ressaltando que, em sua grande maioria, eram professores universitários, catedráticos de disciplinas Matemáticas das escolas superiores.

Euclides de Medeiros Guimarães Roxo

Euclides Roxo nasceu em Aracaju, Sergipe, em 10 de dezembro de 1890. Faleceu no Rio de Janeiro, no dia 21 de setembro de 1950.

Em 1909, bacharelou-se no Colégio Pedro II. Formou-se em engenharia em 1916 pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro. Em 1915, foi aprovado em concurso para professor substituto de Matemática no Colégio Pedro II. Posteriormente, em 1919, foi nomeado catedrático neste estabelecimento de ensino e aí foi também examinador de Francês, Latim e Matemática nos exames do Colégio Pedro II. Depois disso, foi aprovado em concurso para catedrático do Instituto de Educação.

No Colégio Pedro foi diretor de 1925 a 1935 (de 1925 a 1930 no externato e de 1930 a 1935 no Internato). Em 1937, foi nomeado Diretor do Ensino Secundário do Ministério da Educação e Saúde. Foi membro do Conselho Diretor da Associação Brasileira de Educação (ABE) de 1929 a 1931 e fez parte da comissão do ensino secundário da mesma associação fundada na 2.ª Conferência da ABE; foi presidente da Comissão Nacional do Livro Didático (*Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil*. Brasília: Editora UnB, 2004. p. 85-86).

Alberto Nunes Serrão

Professor-chefe da Seção de Matemática do Colégio Universitário da Universidade do Brasil. Engenheiro civil e geógrafo pela Escola Nacional de Engenharia. Docente-livre da Cadeira de Cálculo Infinitesimal, Geometria Analítica e Noções de Nomografia da Escola Nacional de Engenharia.

Ex-professor de Matemática do Curso Complementar do Colégio Pedro II, do Instituto de Educação do Estado do Rio de Janeiro.

Em 1942, no livro *Lições de trigonometria retilínea e de cálculo vetorial*, editado por Edições Boffoni, constava não somente a vida acadêmica acima descrita, como também outras publicações do autor: *Lições de análise algébrica*, edição da Livraria Globo, Porto Alegre, 1940. *Lições de matemática para médicos e químicos*, Edição da Livraria Globo, Porto Alegre, 1941 (*Lições de trigonometria retilínea e de cálculo vectorial*. Edições Boffoni, 1942).

Roberto José Fontes Peixoto

Professor do Instituto de Educação. Engenheiro Civil pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro, professor de Matemática das Escolas Técnicas Secundárias da Prefeitura do Distrito Federal, do Colégio Paula Freitas; do Ginásio Vera Cruz e do Instituto Superior de Preparatórios.

Do livro *Matemática 2.º ciclo* – 1.ª, 2.ª, 3.ª séries, dos Cursos Clássico e Científico, encontramos a seguinte lista de livros publicados pelo autor: *Geometria analítica a duas dimensões, Geometria analítica a três dimensões, Exercícios de geometria analítica a duas dimensões, Exercícios de geometria analítica a três dimensões, Cálculo vetoriais, questiúnculas* (esgotado) (grifo do autor). (Não havia indicações do ano, editora, e edição dos livros acima citados.) (RIBEIRO, 2006, p. 54-55.)

Haroldo Lisboa da Cunha

Engenheiro civil e eletricista. Professor catedrático de Matemática do Colégio Pedro II e Docente-livre de "Cálculo Infinitesimal" e de "Complementos de Geometria Analítica e Noções de Nomografia" da Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil. Ex-professor do Instituto de Educação.

No livro *Matemática 2.º ciclo*, 1.ª a 3.ª séries, encontramos a seguinte lista de obras publicadas pelo autor: *Sobre as equações algébricas e sua solução por meio de radicais*, Rio, 1933 (Tese), *Pontos de Álgebra Complementar* (Teoria das equações), Rio, 1939 (esgotados) (RIBEIRO, 2006, p. 55-56).

Thales Mello Carvalho

Engenheiro civil e geógrafo pela Escola Politécnica da Universidade Técnica Federal (atual Escola Nacional de Engenharia). Professor de Matemática (por concurso) do Ensino Secundário do Distrito Federal (CARVALHO, T.M. *Lições de matemática* de acordo com os programas do Curso Complementar de Engenharia. Rio de Janeiro, 1938).

Gumercindo Lima

Professor do Ginásio de Alfenas (LIMA, G., 1938).

4.1.2 Análise dos livros didáticos

Lote 1 – Livros em que os autores procuraram reunir os temas dos programas dos Cursos Complementares em um só livro.

Livros a serem analisados:

Livro 1 – Lições de matemática – Thales e Mello Carvalho – 1938 (Anexo 1).

Livro 2 – Pontos de matemática – Gumercindo Lima – 1938 (Anexo 2, p.260).

Livro 3 – Lições de matemática para médicos e químicos – Alberto Serrão – 1941 (Anexo 6, p.264).

Análise dos Livros do Lote 1 (Anexo descritivo – Fase 1 – Anexo 1, p. 189)

Quadros Comparativos da análise da estrutura externa e interna dos livros do Lote 1

Quadro Comparativo – Análise Estrutura Externa – Livros Lote 1 – Fase 1

Estrutura externa	**Livro 1**	**Livro 2**	**Livro 3**
Tipo de capa	Papel cartão (cartolina) – pouco acabamento	Capa dura – pouco acabamento	Capa dura – bem acabado – Nota-se uma preocupação com esse item
Índice	Sim	Não	Sim
Prefácio	Não	Sim	Sim
Bibliografia	Não	Não	Sim
Tamanho (cm)	(21,5 x 27,5)	(16,5 x 24)	(15,0 x 22,0)

Quadro 4 – Quadro Comparativo – Análise da Estrutura Externa – Livros do Lote 1 – Fase 1

Como podemos observar no quadro acima, os livros analisados não apresentam um padrão único no que se refere à estrutura externa.

Quadro Comparativo da análise da estrutura interna dos livros do Lote 1 – Fase 1

Estrutura interna	Livro 1	Livro 2	Livro 3
Introdução	Introduz o assunto, procurando contextualizá-lo historicamente.	Introduz o assunto, procurando contextualizá-lo historicamente.	Há uma introdução do assunto, porém **sem** viés histórico.
Exercícios de exemplo	Sim, no final do livro.	Sim. Em alguns capítulos e ao final do capítulo.	Não
Exercícios propostos com resposta	Sim, no final do livro.	Não	Sim. Ao final de cada capítulo.
Exercícios propostos sem resposta	Não	Sim, ao final do capítulo, em alguns capítulos.	Não
Notas de rodapé	Sim. Notas de rodapé bibliográficas.	Não	Não. *Entretanto apresenta algumas notas explicativas em alguns capítulos, na explicação de determinados assuntos.
Terminologia adotada	O livro apresenta uma linguagem técnica, não direta. Não é um livro que se apresente para "aprendermos por ele".	A linguagem do livro é direta, mas bem explicada. O autor vai explicando o assunto ao leitor, com o maior número de detalhes possíveis; não é um texto resumido. É um tipo de livro em que podemos aprender o assunto pelo mesmo.	A linguagem é simples e de fácil assimilação e direta. O texto vai fluindo, como se fosse o registro de uma aula ministrada.

Quadro 5 – Quadro Comparativo – Análise da Estrutura Interna – Livros do Lote 1 – Fase 1

Considerações finais a respeito da análise das estruturas externa e interna dos livros do Lote 1

Não há um consenso relativamente à análise das estruturas externa e externa dos livros do Lote 1. A estrutura externa dos três livros mostram diferenças nos itens analisados. Só um deles atende por completo os programas do Curso Complementar a que se destina (Livro 2 – Lições de Matemática, Gumercindo Lima). No tocante à metodologia de apresentação dos conteúdos e tipos de exercícios, bem como quanto à terminologia adotada na exposição dos conteúdos, os três livros apresentam diferenças.

Lote 2 – Livros em que os autores tornaram independente cada tema dos programas dos Cursos Complementares – obras que procuram esgotar um dado assunto.

Livros analisados:

Livro 1 – Pontos de álgebra complementar (Teoria das equações) – Haroldo Lisbôa da Cunha – 1939 (Anexo 14, p.273).

Livro 2 – Elementos de cálculo vetorial – Roberto Peixoto – 1943 (Anexo 20).

Livro 3 – Elementos de geometria analítica – Roberto Peixoto, 1938 (Anexo 22, p.285).

Livro 4 – Curso de trigonometria – Miron Resnik, 1936 (Anexo 28, p.293).

Livro 5 – Lições de trigonometria retilínea e de cálculo vectorial – Alberto Nunes Serrão (Anexo 35, p.303).

Análise dos livros didáticos do Lote 2 (Anexo descritivo – Fase 1 – Anexo 2, p. 205).

Quadros comparativos da análise da estrutura externa e interna dos livros do Lote 2

Quadro comparativo – Análise da Estrutura Externa – Livros do Lote 2 – Fase 1

Estrutura externa	**Livro 1**	**Livro 2**	**Livro 3**	**Livro 4**	**Livro 5**
Tipo de capa	Material tipo cartolina ou papel cartão	Material tipo cartolina ou papel cartão	Material tipo cartolina ou papel cartão	Capa dura com *design* simples e informações básicas.	Material tipo cartolina ou papel cartão
Índice	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Prefácio	Sim	Não	Não	Sim	Sim
Bibliografia	Não	Não	Sim	Não	Não
Tamanho (cm)	(16 x 23)	(16 x 22,5)	(16 x 23)	(12,5x 19,5)	(23,5x 16,5)

Quadro 6 – Quadro Comparativo – Análise Estrutura Externa – Livros Lote 2 – Fase 1

Quadro Comparativo da análise da estrutura interna dos livros do Lote 2

Estrutura interna	**Livro 1**	**Livro 2**	**Livro 3**	**Livro 4**	**Livro 5**
Introdução	Sim, sem viés histórico.	Sim, sem viés histórico.	Sim, sem viés histórico.	Sim, sem viés histórico.	Sim, sem viés histórico.
Exercícios de exemplo	Sim	Não	Não	Sim	Sim
Exercícios propostos com resposta	Não	Não	Não	Não	Sim
Exercícios propostos sem resposta	Sim, ao final dos capítulos.	Não	Não	Sim	Sim
Notas de rodapé	Sim. Faz uso de notas de rodapé.	Sim. Faz uso de notas de rodapé.	Sim. Faz uso de notas de rodapé.	Não. Não faz uso de notas de rodapé.	Não. Não faz uso de notas de rodapé.
Terminologia adotada	Linguagem simples e direta com bom encadeamento do assunto. O autor vai “ensinando” o leitor ao longo do texto. A impressão é que “podemos aprender sozinhos pelo livro”.	Linguagem simples, direta e resumida, mas bem explicada. Fica difícil aprender sozinho pelo livro.	Linguagem simples, direta e resumida, mas bem explicada. Fica difícil aprender sozinho pelo livro.	Linguagem simples, direta e resumida. No texto, fica claro o caráter preparatório do material.	Linguagem simples, tornando o texto fluente, bem explicado, dando a impressão de que conseguimos “aprender diretamente pelo livro”.

Quadro 7 – Quadro Comparativo – Análise Estrutura Interna – Livros Lote 2 – Fase 1

Considerações finais a respeito da análise das estruturas externa e interna dos livros do Lote 2

Os quadros 6 e 7 acima mostram que não há um consenso em torno de uma das estruturas externa e interna dos livros do Lote 2. Da análise da estrutura externa só o item índice (apresenta índice ou não) mostrou um consenso, e todos eles apresentaram índice.

Da análise da estrutura interna, só o item “Introdução” (como o autor introduz o assunto) mostrou consenso, e todos os livros introduzem o assunto, sem a preocupação com a interligação histórica dessa introdução. Não houve consenso relativamente aos tipos de exercícios apresentados nos livros, a terminologia adotada na exposição do texto, com o uso de notas de rodapé, terminando por apresentar diferenças na “metodologia de apresentação dos conteúdos”.

Lote 3 – Apostilas manuscritas dos cursos ministrados.

Apostilas analisadas:

Apostila 1 – “Apostila – Lições de Matemática – Noções de Álgebra Vetorial – Euclides Roxo” (Anexo 39, p.312).

Apostila 2 – “Apostila – Lições de Matemática – Números Complexos – Euclides Roxo” (Anexo 40, p.313).

Análise das apostilas do Lote 3 (Anexo descritivo – Fase 1 – Anexo 3, p. 223).

Quadros comparativos da análise da estrutura externa e interna das apostilas do Lote 3

Quadro Comparativo – Análise da estrutura externa – Apostilas – Lote 3 – Fase 1

Estrutura externa	Apostila 1	Apostila 2
Tipo de capa	Papel cartão (cartolina) – pouco acabamento	Papel cartão (cartolina) – pouco acabamento
Índice	Não	Não
Prefácio	Não	Não
Bibliografia	Sim	Não

Quadro 8 – Quadro Comparativo – Análise da Estrutura Externa – Apostilas do Lote 3

Quadro Comparativo – Análise da estrutura interna – Apostilas – Lote 3 – Fase 1

Estrutura Interna	Apostila 1	Apostila 2
Introdução	Sim, sem viés histórico.	Sim, sem viés histórico.
Exercícios de exemplo	Sim, no final da apostila	Não
Exercícios propostos com resposta	Não	Não
Exercícios propostos sem resposta	Não	Não
Notas de rodapé	Sim	Não
Terminologia adotada	A linguagem é simples e direta na explicação dos conteúdos e a impressão que se tem é a de que em aula ele ia além da apostila, uma vez que ela se apresenta resumida.	A linguagem é simples e direta na explicação dos conteúdos e a impressão que se tem é a de que em aula ele ia além da apostila, uma vez que ela se apresenta resumida.

Quadro 9 – Quadro Comparativo – Análise Estrutura Interna – Apostilas do Lote 3 – Fase 1

Considerações finais a respeito da análise das estruturas externa e interna das apostilas do Lote 3

Os quadros 8 e 9 acima mostram que há um consenso em torno de uma das estruturas externa e interna das apostilas do Lote 3, uma vez que, ao que tudo indica, foram concebidas com o mesmo objetivo e são do mesmo autor, o Professor Euclides Roxo. Entretanto, ainda assim, relativamente à estrutura externa, a apostila 2 (Números complexos) não apresenta bibliografia. Relativamente à estrutura interna, a apostila 2 (Números complexos) também não contém notas de rodapé e exercícios propostos.

No tocante à metodologia de apresentação dos conteúdos, ambas as apostilas se coincidem no básico, com introdução do assunto, sem a preocupação com a interligação histórica dessa introdução, e o desenvolvimento tema, e a apostila 1 (Noções de Álgebra Vetorial) utiliza-se de notas de rodapé, com objetivos bibliográficos e a apostila 2 (Números Complexos), não.

4.1.3 Considerações finais da Fase 1

Entendemos, baseados na análise da produção didática, resumida nos quadros 4 a 9 já apresentados, não ter sido ser possível o estabelecimento de uma vulgata referente ao período relativo aos Cursos Complementares nem um padrão referente ao que chamamos “metodologia de apresentação dos conteúdos”. Como se observou na análise da produção didática, os livros examinados mostram um padrão difuso de produção, logo de início: três tipos de produção. Ao efetuarmos a análise pelos diferentes tipos, pudemos observar também que em cada tipo de produção não é possível o estabelecimento de um padrão, seja relativo à estrutura externa, seja à estrutura interna dos livros. Isso, por si só, denota o não estabelecimento de um padrão único, a vulgata do período.

Quanto aos conteúdos, analisando os programas definidos para os Cursos Complementares,[22] podemos ver basicamente os seguintes temas matemáticos: Aritmética Teórica, Álgebra, Álgebra Vetorial, Geometria, Geometria Analítica e Trigonometria. Segundo Ribeiro (2006, p. 71), “a análise dos programas para os cursos complementares nos mostra ‘blocos de conteúdos’ a serem ministrados isoladamente”. No Anexo descritivo – Fase 1 – Anexo 15, p. 275, podemos verificar os “blocos de conteúdos” citados por Ribeiro. Esse rol de conteúdos evidentemente não pode ser considerado estável e adequado para a caracterização da disciplina.

Valente (2011), relativamente às características do ensino no período dos Cursos Complementares, assim pontuou:

> [...] a existência dos cursos complementares, como anexos das faculdades, imprimia ao ensino a preocupação com os exames, com os pontos que deveriam ser sabidos para as provas finais a serem realizadas ao término de cada um dos dois anos desses cursos. A intenção formativa, dada pelo ensino serial, não fazia parte dessas

[22] Anexo descritivo – Fase 1 – Anexos 13 e 14 (páginas 252 e 254, respectivamente).

> atividades pedagógicas. Desse modo, professores do ensino superior ao ditarem cursos de preparação ao ingresso em suas faculdades, com textos que irão fazer parte dos exames, não caracterizavam o ensino disciplinado da Matemática escolar, nos termos do pesquisador André Chervel (VALENTE, 2011, p. 651).

Esse pensamento de Valente vem ao encontro das conclusões de Otone e Silva, quando esta pontuou nas considerações finais de sua dissertação que “o estudo da organização dos Cursos Pré-Jurídico, Pré-Médico e Pré-Politécnico mostrou uma diversidade nos ensinos de Matemática” (OTONE E SILVA, 2006, p. 141), e que, referente ao caráter disciplinar do ensino de Matemática nos Cursos Complementares, “sob a ótica de Chervel, eles não configuraram um ensino disciplinar e que não ficou caracterizado, no Curso Complementar, um padrão estandardizado para a Matemática escolar” (p. 141).

Os elementos acima elencados nos apontam que a disciplina escolar Matemática para o Colégio *não se constitui* no período de vigência dos Cursos Complementares.

Por outro lado, é importante frisar as contribuições da Reforma Francisco Campos no processo de disciplinarização da disciplina Matemática do Colégio. O historiador Boris Fausto, relativamente a Reforma Francisco Campos, assim se posicionou: “[...] estabeleceu definitivamente um currículo seriado, o ensino em dois ciclos, a frequência obrigatória a exigência de nível secundário para ingresso no ensino superior” (FAUSTO, 1994, p. 338). Por seu turno, a historiadora Otaíza Romanelli, quando discorreu sobre a Reforma Francisco Campos, disse que “efetivamente credita-se-lhe, entre outros méritos, o de haver dado uma estrutura orgânica ao ensino secundário” (ROMANELLI, 1978, p. 131).

Isso nos leva a entender que o período dos Cursos Complementares podem ser considerados o “embrião” da disciplina Matemática para o Colégio, acrescentando o fato de a Reforma Francisco Campos ter sido a primeira a separar os ensinos (o ensino secundário foi dividido em Fundamental e Complementar), e podemos considerar esse fato como o início do processo de disciplinarização da Matemática do Colégio, mas não o período de sua constituição.

Por fim, podemos considerar a disciplina escolar Matemática do Colégio, no período dos Cursos Complementares como “não constituída”.

4.2 Fase 2 – A criação do 2.º Ciclo do Curso Secundário e a consolidação da disciplina escolar Matemática do Colégio

4.2.1 Panorama da disciplina escolar Matemática do Colégio no início da Fase 2

Terminamos a Fase 1, em que analisamos a produção didática do período 1931-1942, relativa aos Cursos Complementares, considerando a disciplina Matemática do Colégio como “não constituída”. Na análise da produção didática empreendida, não vimos os elementos constituintes da disciplina: a vulgata, um padrão relativo à metodologia de apresentação dos conteúdos e um rol de conteúdos também padronizado. Vimos também que, embora a Reforma Francisco Campos não tenha dado condições para a constituição da disciplina, ela teve o mérito de fazer a divisão dos ensinos, em Fundamental e Complementar, o que até então não existia. Então, começamos a Fase 2 com o que chamamos de *embrião* da disciplina, que foi a *divisão dos ensinos.*

Nessa Fase 2 estamos considerando o período 1942-1951, tendo como referência a Reforma Gustavo Capanema. No Capítulo 3, vimos que a Reforma Capanema manteve a separação dos ensinos, e o Curso Fundamental passou a se chamar Ginasial e o Complementar, Colegial, com duas opções: Clássico ou Científico.

Vamos trazer agora elementos de trabalhos já citados na revisão bibliográfica e outros que julgarmos importantes para montar esse *panorama da disciplina,* essencial para nossa argumentação sobre a constituição ou não da disciplina Matemática do Colégio, nesse período.

A pesquisadora Denise Ribeiro em sua dissertação, já citada no item Revisão de Literatura, faz uma comparação entre os Cursos Clássico e Científico e os Cursos

Complementares. Relativamente à finalidade dos ensinos em ambos, e assim se posicionou:

> Nos Cursos Complementares, o objetivo dos ensinos escolares era o de adaptar os jovens a prestação de exames para os cursos superiores e as matérias eram agrupadas de acordo com a opção do estudante (grifo nosso). Escolhida a opção correspondente a um dos três Cursos Complementares, os jovens estavam habilitados somente para o curso superior ao qual o curso complementar escolhido era orientado (grifo nosso). Nos Cursos Clássico e Científico, a finalidade principal do ensino é o desenvolvimento do sentimento patriótico, da consciência humanística (grifo nosso). Não havia grandes diferenças entre os dois cursos, como o que acontecia com os Cursos Complementares, permitindo aos jovens de ambos os cursos, quando concluídos seus estudos nesse nível, prestar exames para qualquer curso superior (grifo nosso) (RIBEIRO, 2006, p. 40).

Valente, quando discorreu sobre os programas de Matemática dos Cursos Clássico e Científico, relativamente aos programas dos Cursos Complementares, assim se posicionou:

> Na programação os temas matemáticos outrora presentes nos Cursos Complementares sofre alteração substantiva. Ocorre um processo de agrupamento, seriação e criação de “unidades didáticas” interligadas, dentro dos ramos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria. Temas de maior aprofundamento de álgebra são retirados assim como o Cálculo Vetorial, deixado para ser ensinado como matéria do ensino superior, apenas permanecendo a ideia de vetor no início do tema “Trigonometria” (VALENTE, 2008, p. 7-8).

Ribeiro se soma à fala de Valente, quando se refere à disposição dos conceitos matemáticos:

> [...] estavam dispostos segundo uma lógica interna, revelando unidades didáticas, que segundo Chervel, indicam que a transformação sofrida na organização dos ensinos de matemática poderá levar os docentes a experiências pedagógicas semelhantes (RIBEIRO, 2006, p. 42).

Quando trata dos ensinos de Matemática dos Cursos Clássico e Científico, Ribeiro comparou os programas e relatou o seguinte: “[...] notamos que os conceitos abordados eram na grande maioria os mesmos, somente no Curso Científico observamos o estudo mais aprofundado em Geometria e Trigonometria” (RIBEIRO, 2006, p. 41).

Por fim, conclui que:

> [...] dada à configuração dos ensinos matemáticos, a forma de expor a teoria, a escolha dos exemplos, à utilização dos exercícios, poderão levar a uma uniformização de práticas pedagógicas, levando a constituição da disciplina matemática nesse nível de ensino (p. 42).

Essas diferenças acima elencadas nos programas da Reforma Francisco Campos para a Reforma Capanema destacadas denotam uma evolução na disposição dos conteúdos e na configuração dos ensinos, mostrando-nos que a disciplina Matemática do Colégio já possui, no início da Reforma Capanema, um rol de conteúdos mais estruturado do que no período da Reforma Francisco Campos, o que poderá influir no processo de constituição da disciplina nesse período, ora sob análise.

Outra informação importante para a composição do nosso panorama da disciplina, já citada no item Revisão de Literatura, foi a de que a coleção de livros denominada Matemática 2.º Ciclo (coleção dos 4 autores) *teria caracterizado uma vulgata* no período 1943-1961, trazida por Ribeiro, nas considerações finais de sua Tese de Doutorado (2011).

Com esse cenário e tais características, relativas à disciplina Matemática do Colégio, vamos empreender a análise de livros didáticos do período 1943-1951, com o objetivo de *enxergar a disciplina* (grifo nosso) nessa produção didática. Se conseguirmos *enxergar a disciplina,* ou seja, se verificarmos nas coleções de livros que serão analisadas a existência de um padrão de configuração para a disciplina, poderemos dizer que ela se constituiu nesse período. Como já citamos na Fase 1, faremos uma análise de livros didáticos *a favor da disciplina,* isto é, observar se tais livros carregam um padrão relativamente a um rol de conteúdos e à metodologia de apresentação dos conteúdos: como introduzem os conteúdos, que recursos utilizam (notas de rodapé, exercícios resolvidos, exercícios propostos).

4.2.2 Análise dos livros didáticos

No tocante aos autores dos livros didáticos, relativamente aos da Fase 1, é preciso destacar que, diferentemente dos autores de livros para os Cursos Complementares, que eram em sua grande maioria professores universitários, professores do ensino secundário passam também a produzir livros para atender as novas diretrizes da Reforma Capanema. Professores que produziram livros para os Cursos Complementares se juntam e produzem coleções de livros para os Cursos Clássico e Científico, como a Coleção dos 4 autores, já citada. De outra parte, nomes já consagrados que produziam livros para o Fundamental na Reforma Francisco Campos passam agora a produzir livros para os Cursos Clássico e Científico. Um deles é Cesar Dacorso Netto, professor do Instituto de Educação do Rio de Janeiro, e outro é Algacyr Munhoz Maeder, “Lente catedrático do Colégio Estadual do Paraná, da Faculdade de Engenharia do Paraná e da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Paraná” (MAEDER, 1951).

Nossa opção foi procurar coleções de livros didáticos editados no período 1944-1951, ou seja, que refletissem as modificações impostas ao programa pela Portaria Ministerial n.º 177, de 16 de março de 1943, que fixou a programação para o 2.º Ciclo do curso secundário, no caso os Cursos Clássico e Científico.

Optamos por escolher coleções de livros, em vez de livros que trouxessem apenas um conteúdo, uma vez que as coleções tendem a refletir melhor os programas dos três anos dos Cursos Clássico e Científico.

Quanto aos livros que seriam escolhidos para análise, é preciso destacar que no período de 1944 (considerando que os programas para os Cursos Clássico e Científico foram expedidos em março de 1943) a 1951 (publicação das Portarias do Programa Mínimo), foi difícil encontrar livros em sebos e alfarrábios. Temos de levar em conta também que esse período pode ser diminuído na medida em que, provavelmente, em 1950, as Editoras, percebendo e sabendo da edição de novas alterações nos programas que viriam em 1951, deram uma “esfriada” na publicação de livros.

Nesse sentido, a tese de Ribeiro (2011), já citada na revisão bibliográfica, traz um trabalho interessante relativo à seleção de livros para análise, no período 1943-1961. Ribeiro foi aos arquivos da Escola Estadual São Paulo,[23] encontrando livros denominados *Obras Consultadas na Biblioteca,* relativos ao período de 1943-1961, excetuando-se o ano de 1948. Tais livros continham registros de livros consultados pelos alunos dos Cursos Ginasial e Colegial com os seguintes dados: nome do livro, nome e série do aluno que consultou.

Depois, Ribeiro separou só os registros de consulta dos livros de Matemática para os Cursos Clássico e Científico. Na sequência, Ribeiro fez um terceiro crivo, analisando os registros de retiradas de livros que continham o título *Matemática,* semelhante aos da coleção conhecida como a Coleção dos quatro autores, construindo a relação que reproduzimos no Anexo descritivo – Fase 2 – Anexo 5, p. 322.

Segundo Ribeiro,

> Dos 1537 registros catalogados, 535 são de livros didáticos com título semelhante ao da Coleção dos quatro autores, ou seja, *Matemática,* dando mais de 30% do total, podendo ser considerado um primeiro indício de que esses livros tomaram como referência a Coleção Matemática 2.º Ciclo para as 1.as, 2.as e 3.as dos Cursos Colegiais dos quatro autores (RIBEIRO, 2011, p. 131).

Para o nosso estudo, no tocante à dificuldade de encontrar livros referidos anteriormente, é importante observar na relação (Anexo descritivo – Fase 2 – Anexo 5, p. 322) que as consultas se avolumam a partir de 1950 (alvo de nosso realce), com um número bem maior do que do período 1944-1949, objetivo de nossa procura. Em uma conta rápida, cerca de 81% (433 livros de 535) dos registros de consulta são livros de 1950 a 1961.

Ribeiro ainda fez um outro estudo, objetivando identificar "o autor que foi consultado por um período maior de tempo" (p. 132). Fez, então, uma relação dos

---

[23] Essa escola estadual, hoje denominada Escola Estadual São Paulo, na época (década de 1940), Ginásio da Capital, localizada no Parque Dom Pedro II, no centro da cidade de São Paulo, foi o primeiro ginásio oficial e seriado do Estado de São Paulo. Inaugurada em 16 de setembro de 1984, e, em 6 de abril de 1896, equiparada ao Ginásio Nacional, e, com o Colégio Pedro II e a Escola Normal de São Paulo, tornou-se uma das principais instituições oficiais do País.

autores, respectivos livros, números de consultas por ano, a qual reproduzimos (Anexo descritivo – Fase 2 – Anexo 6, p. 323).

Segundo Ribeiro:

> Ao analisar os dados registrados na Tabela (Anexo 49), podemos constatar que, no período 1943-1961, surgiram livros didáticos com o título de *Matemática,* muitos dos quais especificavam para qual série se destinavam, consultados por alunos dos Cursos Clássico e Científico, podendo indicar a formação de uma nova *vulgata,* que, segundo Chervel (1990), traria indícios da constituição da disciplina Matemática, para este período e nível de ensino (RIBEIRO, 2011, p. 136).

Ribeiro ainda arrolou os autores mais consultados no período, com base na relação (Anexo descritivo – Fase 2 – Anexo 6, p. 323):

> - Algacyr Munhoz Maeder com consultas nos anos 1949, 1950, 1951, 1952, 1956, 1958,1959, 1960, 1961, num total de 106 registros em 11 anos;
> - Carlos Galante nos anos 1950, 1951, 1952, 1953-1954 ,1955, 1956, 1957, 1958, 1959, 1960 e 1961, com 102 registros em 11 anos;
> - Thales Mello Carvalho nos anos de 1949 a 1960 com 98 registros em 11 anos;
> - Manoel Jairo Bezerra nos anos de 1955, 1956, 1957, 1958,1959 e 1960, com 26 registros em 6 anos;
> - Ary Quintella, nos anos de 1945, 1953,1954,1955,1956,1957, com 6 registros em 5 anos (RIBEIRO, 2011, p.136).

Os estudos de Ribeiro acima descritos tinham por objetivo mostrar a formação da vulgata comandada pela coleção *Matemática 2.º Ciclo (Coleção dos quatro autores)* no período 1943-1961, já citada. Tais estudos nos ajudam na justificativa da escolha das coleções de livros para análise e, de certa forma, para mostrar que uma maior procura por livros em anos a partir de 1950 pode indicar uma produção maior de livros nessa faixa e/ou uma produção didática mais estável a partir de 1950.

No quadro do Anexo descritivo – Fase 2 – Anexo 6, p. 323, ressaltamos a pequena quantidade de consultas a livros em anos anteriores a 1950. Isso, de certa maneira, corrobora com as colocações que fizemos anteriormente e nos ajuda a entender a dificuldade de encontrarmos livros do período 1944-1949 para análise.

O DVD “A Matemática do Colégio: livros para a história de uma disciplina”, já mencionado, separou a produção didática em quatro fases, semelhante à nossa pesquisa. Na Fase que podemos também chamar de 2, ou segunda, período 1942-1950, percebemos poucas coleções de livros e mais livros avulsos, que tratam de apenas um conteúdo.

Da relação de autores mais consultados elaborada por Ribeiro, anteriormente citada, escolhemos os autores Thales Mello Carvalho, Algacyr Munhoz Maeder e Ary Quintella para a análise das Fases 2 e 3. Para a análise da Fase 2, não conseguimos os livros do Professor Ary Quintella. Os livros que serão alvo das análises foram escolhidos no acervo do Ghemat (Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática do Brasil), que deram origem ao DVD “A Matemática do Colégio: livros didáticos para a história de uma disciplina”, já referido, e adquirimos muitos livros em Sebos “físicos” e virtuais.[24]

Assim, fizemos nossa escolha, conforme segue.

Coleções de livros que serão analisadas:

– **Coleção Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – 2.ª Série – 3.ª Série – Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha, Dacorso Netto” (Coleção dos 4 autores) – Livraria Francisco Alves.**

Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 1.ª Série – 2.ª edição – 1945 (Anexo 1, p.332).

Livro 2 – Matemática – 2.º Ciclo – 2.ª Série – 1944 (Anexo 2, p.333).

Livro 3 – Matemática – 2.º Ciclo – 3.ª Série – 3.ª edição – 1949 (Anexo 3, p.334).

[24] O *site* www.estantevirtual.com.br constitui-se em uma rede de sebos interligada, sendo um grande repositório de volumes antigos, podendo ser fonte para muitos estudos históricos.

– **Coleção Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1.ª Série – 2.ª Série – 3.ª Série – Thales Mello Carvalho – Companhia Editora Nacional.**

Livro 1 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – Primeira Série – 2.ª edição – 1945 (Anexo 4,p.335).

Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – Segunda Série – 4.ª edição – 1948 (Anexo 5, p.336).

Livro 3 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – Terceira Série – 2.ª edição – 1948 (Anexo 6, p.337).

– **Coleção Curso de Matemática – 1.º Livro Ciclo Colegial – 2.º Livro Ciclo Colegial – 3.º Livro Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – Edições Melhoramentos.**

Livro 1 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 7.ª edição – 1946 (Anexo 7, p.338).

Livro 2 – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – 4.ª edição – 1951 (Anexo 8, p.339).

Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 2.ª edição – 1949 (Anexo 9, p.340).

Como será feita a análise dos livros didáticos?

Como se trata de coleções de livros, faremos uma análise de cada coleção comparando-a com a “Coleção dos 4 autores” que, nesse momento, chamamos de Coleção-base, que abordará dois aspectos, os quais denominamos de “Estrutura Externa” e “Estrutura Interna”.

A análise de estrutura externa irá analisar o formato do livro, o tipo da capa, as informações que ele traz na capa e contracapa, a existência ou não de índice, prefácio e bibliografia.

A análise de estrutura interna irá analisar a estrutura do índice, como os conteúdos são apresentados e a respectiva metodologia de apresentação; como o autor introduz os assuntos e como os desenvolve; que recursos utiliza para o desenvolvimento dos conteúdos (terminologia, notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo, exercícios propostos).

Análise da Estrutura Externa das Coleções de livros

Análise (Anexo descritivo – Fase 2 – Anexo 1, p. 314).

Quadro comparativo – Estrutura Externa dos livros da Fase 2

	Coleção-base	**Coleção 1**	**Coleção 2**
Capa	Tipo capa dura, colorida, com bom acabamento.	Tipo capa dura, colorida, com bom acabamento. Livros 2 e 3, capa tipo papel cartão, mas com bom acabamento.	Tipo capa dura, colorida, com bom acabamento
Índice	Sim. Ao final do livro.	Sim. Ao final do livro.	Sim. No início do livro.
Prefácio	Sim. Chamado advertência.	Sim. O livro 1 apresenta “Prefácio da 1.ª edição”. Os livros 2 e 3 não apresentam prefácio.	Sim – Só o Livro 1 apresenta prefácio.
Bibliografia	Não.	Não.	Não.

Quadro 10 – Quadro comparativo – Análise da estrutura externa dos livros da Fase 2

Observação:

Coleção – Base: Matemática 2.º Ciclo – “Coleção dos 4 autores”.

Coleção 1 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – Thales Mello Carvalho

Coleção 2 – Curso de Matemática – Algacyr Munhoz Maeder.

Considerações finais sobre a análise da estrutura externa das coleções

Pelo que podemos observar no quadro acima, os livros apresentam um padrão e uma regularidade em suas estruturas externas, comparativamente com a Coleção dos 4 autores, no tocante aos itens bibliografia (não possuírem), índice (possuírem) e capa (bom acabamento). Relativamente ao item prefácio, há algumas diferenças (dentro de uma mesma coleção, alguns livros possuem, outros, não). Esse padrão apresentado é um sinal de formação da vulgata apontada por Ribeiro (2011), já referida.

Análise da estrutura interna das coleções de livros

Retomando, a análise de estrutura interna tem por objetivo analisar a estrutura do índice, como os conteúdos são apresentados e a respectiva metodologia de apresentação.

Nessa análise faremos uma comparação “Série a Série” por coleções de livros, para que tenhamos uma ideia mais próxima e apurada dos itens que serão analisados, série por série. Ressaltamos que para o quesito Índice só efetuamos a análise dos índices dos livros 1.ª Série/ 1.º Ano/1.º Livro/Primeiro Ano Colegial, uma vez esse quesito apresenta constância de *layout* de coleção para coleção.

Análise do quesito Índice:

Índice 1 – Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – Coleção 4 autores – 1945 (Anexo 10, p.341).

Índice 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1.ª Série – Thales Mello Carvalho – 1945 (Anexo 11,p.343).

Índice 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 1946 (Anexo 12,p.345).

O que a configuração dos índices dos livros de 1.ª Série/1.º Ano pode nos dizer?

O Índice 1 – Anexo 10 (1.ª Série – 4 autores p.341) – faz a divisão dos temas "por partes" (Primeira Parte – Aritmética; Segunda Parte – Álgebra e Parte III – Geometria) e também divide os assuntos dentro das partes por Unidades, mas não faz referência explícita a capítulos.

O Índice 2 – Anexo 11 (1.ª Série – Carvalho, p.343) – não faz referências à divisão dos assuntos por temas (Aritmética, Álgebra e Geometria) e Unidades, fazendo alusão somente a Capítulos.

O Índice 3 – Anexo 12 (1.º Livro – Maeder, p.345) – também faz a divisão por temas (Aritmética teórica, Álgebra e Geometria) e divide os assuntos dentro dos temas em Unidades e as Unidades, em Capítulos. Interessante que, ao observarmos esse índice, temos uma ideia de como é a metodologia de apresentação dos conteúdos: Definição, exercícios.

Nos três índices, notamos as características dos programas dos Cursos Clássico Científico, já citadas anteriormente: *processo de agrupamento, seriação e criação de unidades didáticas interligadas* (grifo nosso).

Quadro Comparativo – Índices dos Livros 1.ª Série/Primeira Série Clássico-Científico/1.º Ano – Fase 2

	Índice 1	**Índice 2**	**Índice 3**
Referência explícita à Unidade	Sim. Divisão do assunto “por partes” ou “temas”.	Não	Sim
Referência explícita a Capítulo	Não	Sim	Sim
Referências a exercícios	Não	Sim	Sim
Layout do Índice	Um índice com boa organização (divisão por partes, Unidades e assuntos dentro das Unidades).	Um índice com boa organização (divisão por capítulos e assuntos dentro dos capítulos).	Um índice com boa organização (divisão por Unidades, capítulos e conteúdos dentro dos capítulos).
Metodologia de apresentação dos conteúdos via Índice	Só apresenta os conteúdos, sem sequência didática. Apresenta soluções dos exercícios ao final das Partes (temas).	Só o capítulo III (Os números fracionários) dá ideia da sequência didática.	Sim. Pelo índice temos uma noção da sequência didática: introdução, desenvolvimento e exercícios.

Quadro 11 – Quadro comparativo – Análise dos índices dos livros 1.ª Série/Primeira Série Clássico-Científico/1.º Ano – Fase 2

Considerações finais – Análise dos índices dos livros 1.ª Série/ Primeira Série Clássico-Científico /1.º Livro

De maneira geral, os índices apresentam uma boa distribuição e organização dos conteúdos e isso acabará por influenciar no processo de constituição da disciplina. O que queríamos observar é se os livros davam pistas sobre a “metodologia de apresentação dos conteúdos”, o que vamos investigar mais adiante.

Dentro ainda da categoria “Estrutura Interna”, fizemos uma análise de *outras características/informações presentes nos livros,* as quais mostraremos no quadro subsequente, com o objetivo de verificar se eles apresentam determinado padrão no tocante a tais características.

Livro 1 – Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – Coleção 4 autores – 1945 (Anexo 1, p.332).

Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – Primeira Série – Thales Mello Carvalho – 1945 (Anexo 4, p.335).

Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 1946 (Anexo 7, p.338).

Quadro Comparativo – Outras características internas – Livros 1.ª Série/Primeira Série Clássico-Científico/ 1.º Ano – Fase 2

	Livro 1	**Livro 2**	**Livro 3**
Referência à legislação da Reforma Capanema	Não	Sim. “De acordo com os Programas dos Cursos Clássico e Científico.	Sim. “De acordo com o programa oficial do Ensino Secundário expedido e posto em vigor pela Portaria ministerial n. 170, de 11 de julho de 1942”.
Referência à edição	Sim. 2.ª edição.	Sim. 2.ª edição.	Não
Traz o programa	Não	Sim. Programas do Curso Clássico e Científico.	Sim. Programa do Ciclo Colegial.
Número do exemplar	Sim. “5477”	Sim. 2171	Não.
Nome do livro	**Matemática** 2.º Ciclo – 1.ª Série.	**Matemática** para os Cursos Clássico e Científico – 1.ª Série.	Curso de **Matemática** – 1.º Livro – Ciclo Colegial.

Quadro 12 – Quadro comparativo – Outras características internas dos Livros 1.ª Série/Primeira Série Clássico-Científico/1.º Ano

Considerações a respeito da análise de "outras características internas"

Relembrando que o livro que pode ser considerado como guia da análise é o Livro 1 (Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – 4 autores), o quadro acima nos mostra que não há um padrão único dentro das características analisadas. O Livro 3, 1.º Livro da coleção "Curso de Matemática", foge um pouco aos padrões dos outros dois, relativamente ao nome, uma vez que não se refere aos Cursos Clássico e Científico, tratando-os como Colegial. Os livros, não obstante, têm certo padrão relativo ao nome deles, uma vez que incorporam a palavra Matemática, que é um item importante relativo à vulgata observada por Ribeiro (2011). Os livros 1 e 2 ostentam o número do exemplar, bem como o número da edição deles. Os livros não conservam um padrão relativamente ao fato de não fazerem referência à legislação da Reforma Capanema, o que pode ser um indicativo de que a produção didática ainda não está totalmente consolidada em torno dos ditames da legislação da Reforma.

Prefácios:

Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 1.ª Série – 1945 (p.332).

O texto chama-se Advertência. Nele os autores dizem que o volume dá início à série "MATEMÁTICA – 2.º CICLO" (grifo dos autores) e que tal série se destina aos alunos dos *Cursos científico e clássico* (grifo dos autores). Relatam que a matéria foi além dos títulos e subtítulos dos programas e foram incluídos complementos e aplicações. Explicam que as notas tiveram a dupla finalidade de "ampliar os conhecimentos do aluno e de incitar-lhe a curiosidade pela matéria". Fecham o texto dizendo que os programas do 2.º Ciclo são compostos de partes *nitidamente distintas* (grifo nosso): Aritmética Teórica, Álgebra Elementar e Complementar (incluída a teoria das equações), Geometria Elementar, Trigonometria, Álgebra Vetorial e Geometria Analítica.

Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 1946 (p.339).

O autor relata que o livro destina-se aos alunos do primeiro ano do ciclo colegial e que segue *rigorosamente* (grifo nosso) o programa oficial vigente, reunindo *toda a matéria* (grifo nosso) dos cursos clássico e científico. Diz que a matéria é dividida em *três partes distintas* (grifo nosso), Aritmética teórica, Álgebra e Geometria dedutiva e são tratadas em *partes nitidamente separadas* (grifo nosso). Menciona que alguns assuntos tratados de maneira *intuitiva* nos primeiros anos do ciclo anterior agora o são de forma *dedutiva.*

Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos relativa aos livros 1.ª Série/1.º Ano/ 1.º Livro.

Faremos a seguir uma análise de como os autores apresentam os conteúdos aos leitores, percorrendo os livros 1, 2 3 e 4, que estão sendo verificados.

Livro 1 – Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – Coleção 4 autores – 2.ª edição – 1945 – Livraria Francisco Alves (Anexo 1, p.332).

Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – 1.ª Série – Thales Mello Carvalho – 2.ª edição – 1945 – Companhia Editora Nacional (Anexo 4, p.335).

Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 1946 – Edições Melhoramentos (Anexo 7, p.338).

Análise (Anexo descritivo – Fase 2 – Anexo 2, p. 316).

Quadro comparativo da análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 1.ª Série/Primeira Série Clássico-Científico/1.º Livro – Fase 2

	Livro 1	**Livro 2**	**Livro 3**
Apresenta introdução	**Sim.** Chama-se Definições.	**Sim.** Chama-se Preliminares.	**Sim.** Chama-se Definição.
Terminologia	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.
Notas de rodapé	**Sim**. Faz uso de notas de rodapé.	**Sim.** Faz uso de notas de rodapé.	**Sim.** Faz uso de notas de rodapé.
Exercícios resolvidos de exemplo	**Sim.** Chamam-se Exercícios resolvidos.	**Sim**. Chamam-se Exercícios resolvidos.	**Sim.** Chamam-se Exercícios resolvidos.
Exercícios propostos	**Sim.** Exercícios propostos ao final de cada conteúdo. Respostas ao final da Parte ou Tema, por conteúdo.	**Sim.** Exercícios para resolver ao final de cada conteúdo. Ao final do capítulo, Exercícios para resolver acompanhados de respostas.	**Sim.** Exercícios propostos com resposta ao final do capítulo.
Resumo final da Metodologia de apresentação dos conteúdos	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos com resposta ao final do tema ou conteúdo.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos acompanhados de respostas.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos ao final do capítulo.

Quadro 13 – Quadro comparativo da análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 1.ª Série/Primeira Série Clássico-Científico/1.º Livro – Fase 2

Considerações finais sobre a análise da Metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 1.ª Série/1.ª Série Clássico-Científico/1.º Livro

Notamos pela análise dos livros empreendida e pelo quadro 13 acima apresentado que os livros contêm um padrão comportamental, relativamente à metodologia de apresentação dos conteúdos: *os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.*

Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 2.ª Série/2.º Série Clássico-Científico/ 2.º Livro

Procederemos agora a uma análise de como os autores apresentam os conteúdos aos leitores, percorrendo os livros 1, 2 e 3, a seguir discriminados:

Livro 1 – Matemática 2.º Ciclo – 2.ª Série – Coleção 4 autores – 8.ª edição – 1944 – Livraria Francisco Alves (Anexo 2, p.333).

Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – 2.º Série – Thales Mello Carvalho – 4.ª edição – 1948 – Companhia Editora Nacional (Anexo 5, p.336).

Livro 3 – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 4.ª edição – 1951 – Edições Melhoramentos (Anexo 8, p.339).

Análise (Anexo descritivo – Fase 2 – Anexo 3, p. 318).

Quadro comparativo da análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 2.ª Série/Segunda Série Clássico-Científico/2.º Livro – Fase 2

	Livro 1	Livro 2	Livro 3
Apresenta introdução	**Sim**. Chama-se Definições.	**Sim**. Chama-se Preliminares	**Sim.** Chama-se Definições.
Terminologia	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.
Notas de rodapé	**Sim**. Faz uso de notas de rodapé.	**Sim**. Faz uso de notas de rodapé.	**Sim.** Faz uso de notas de rodapé.
Exercícios resolvidos de exemplo	**Sim**. Chamam-se Exemplos.	**Sim.** Chamam-se Exercícios.	**Sim.** Chamam-se Exercícios.
Exercícios propostos	**Sim.** Exercícios propostos ao final do conteúdo. Respostas no final do livro, por Parte ou Tema, por conteúdo.	**Sim.**. Ao final do capítulo, Exercícios para resolver acompanhados de respostas.	**Sim.** Exercícios propostos com resposta ao final de cada conteúdo.
Resumo final da Metodologia de apresentação dos conteúdos	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.

Quadro 14 – Quadro comparativo da análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 2.ª Série/Segunda Série Clássico-Científico/2.º Livro

Considerações finais sobre a análise da Metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 2.ª Série/2.º Série Clássico-Científico/2.º Livro

Notamos pela análise dos livros empreendida e pelo quadro-resumo, acima apresentado, que os livros contêm um padrão comportamental, relativamente à metodologia de apresentação dos conteúdos: *os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.*

Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 3.ª Série/Terceira Série Clássico-Científico/ 3.º Livro

Agora faremos uma análise de como os autores apresentam os conteúdos aos leitores, percorrendo os livros 1, 2 e 3 , a seguir discriminados:

Livro 1 – Matemática 2.º Ciclo – 3.ª Série – Coleção 4 autores – 3.ª edição – 1949 – Livraria Francisco Alves (Anexo 3, p.334).

Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 3.ª Série – Thales Mello Carvalho – 2.ª edição – 1948 – Companhia Editora Nacional (Anexo 6, p.337).

Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 2.ª edição – 1949 – Edições Melhoramentos (Anexo 9, p.340).

Análise (Anexo descritivo – Fase 2 – Anexo 4, p. 320).

Quadro comparativo da análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 3.ª Série/Terceira Série Clássico-Científico/3.º Ano – Fase 2

	Livro 1	Livro 2	Livro 3
Apresenta introdução	Sim. Chama-se noções preliminares.	Sim. Chama-se Preliminares.	Sim. Tem o nome do conteúdo.
Terminologia	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.
Notas de rodapé	Sim. Faz uso de notas de rodapé.	Sim. Faz uso de notas de rodapé.	Sim. Faz uso de notas de rodapé.
Exercícios resolvidos de exemplo	Sim. Chamam-se Exercícios e Exemplos.	Sim. Chamam-se Exercícios.	Sim. Chamam-se Exercícios resolvidos
Exercícios propostos	Sim. Exercícios propostos ao final da Unidade. Respostas no final do livro, por Parte ou Tema, por Unidade.	Sim. Ao final do capítulo, Exercícios para resolver com resposta.	Sim. Exercícios propostos com resposta ao final do capítulo.
Resumo final da Metodologia de apresentação dos conteúdos	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.

Quadro 15 – Quadro comparativo da análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 3.ª Série/Terceira Série Clássico-Científico/3.º Ano – Fase 2

Considerações finais sobre a análise da Metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 3.ª Série/3.ª Série Clássico-Científico/3.º Livro

Notamos pela análise dos livros empreendida e pelo quadro comparativo apresentado (quadro 15), que os livros contêm um padrão comportamental, relativamente à metodologia de apresentação dos conteúdos: *os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.*

Considerações finais – Análise da Estrutura Interna – Fase 2

Observamos pela análise dos livros empreendida e pelos quadros 10 a 15 acima apresentados que os livros dispõem um padrão comportamental, relativamente à metodologia de apresentação dos conteúdos: *os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta*, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.*

Aqui a disciplina surge, nessa maneira de disciplinar o ensino, de ordenar o ensino acima resumida.

* Linguagem simples e direta: os conteúdos são apresentados de forma direta, sem a utilização de símbolos matemáticos em excesso, de modo menos complexo, sem rigor matemático.

4.2.3 Considerações finais da Fase 2

Os resultados da análise dos livros didáticos apresentados e resumidos nos quadros 10 a 15 nos mostram que é possível *ver a disciplina* nos livros analisados, o que representa um grande avanço no tocante ao período dos Cursos Complementares. A nosso ver, as alterações provocadas nos Programas de

Matemática do 2.º ciclo, pela Reforma Capanema, elencadas no Capítulo 3 e no panorama da disciplina que traçamos aqui, tornaram a organização dos programas mais estáveis, fazendo com que o processo de constituição da disciplina Matemática do Colégio contasse, nessa fase, com um rol de conteúdos mais estáveis, tornando possível o surgimento da disciplina. Colaborou também o fato de que Ribeiro já havia exposto os resultados de seus trabalhos (Dissertação e Tese), apontando a circulação de uma *vulgata* no período 1943-1961.

Entretanto, entendemos que a *vulgata* que circula no período 1943-1961, mostrada por Ribeiro, pode ter sido mais influenciada pela produção didática após 1950, sobretudo após 1952, já refletindo a influência das alterações provocadas pelas Portarias do Programa Mínimo. Essa produção didática, como apresentamos, é mais volumosa e tende a ser mais estável no período do Programa Mínimo. Dessa forma, concluímos que a disciplina Matemática do Colégio *se constitui,* ou seja, está constituída, com um *rol de conteúdos* representados pelos programas dos Cursos Clássico e Científico, já modificados e mais bem estruturados, uma maneira de apresentar os conteúdos, de *disciplinar o ensino: os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.*

Entretanto, entendemos não ser possível considerá-la *estável,* nesse período dos Cursos Clássico e Científico. Falta *um algo mais* para que ela adquira a estabilidade. Esse *algo mais* pode vir com o Programa Mínimo, alvo de nossa análise, na próxima fase, a Fase 3.

4.3 Fase 3 – A estabilização da disciplina escolar Matemática do Colégio

4.3.1 Panorama da disciplina escolar Matemática do Colégio no início da Fase 3

Depois de passar pela Fase 2, na qual chegamos à conclusão que a Matemática do Colégio se constitui. Como vimos, isso foi possível em função das modificações introduzidas pela Reforma Capanema, que levaram a uma melhor organização dos programas de matemática do Colegial, produzindo um rol de conteúdos mais estável. Comentamos, no fechamento do texto da Fase 2, que sentíamos que *faltava algo* para que pudéssemos considerar *estável* a disciplina Matemática do Colégio. Lembrando que o conteúdo é item nuclear no processo de constituição de uma disciplina, nesse momento perguntamos: teriam as modificações introduzidas nos programas de Matemática do colegial, pelas Portarias 966 e 1.054, de 1951, já citadas no Capítulo 3, fornecido condições para a estabilização da Matemática do Colégio nesse período?

Vamos, então, trazer mais alguns detalhes de trabalhos analisados na revisão de literatura, fazendo análises específicas, buscando entender melhor as modificações impostas pelas Portarias citadas e, assim, melhor fundamentarmos nossa análise sobre a Matemática do Colégio, nesse período.

Relativamente aos motivos da revisão que, pelo nome “Programa Mínimo”, já denota um “enxugamento”, uma “redução”, relativamente aos programas que estavam em andamento, os da Reforma Capanema, explicitados no item anterior, voltamos nossa direção para pontos da dissertação de Alex Sandro Marques (2005), já tratada no item Revisão de Literatura.

Marques nos relata uma entrevista concedida pelo Ministro da Educação, Simões Filho, em que ele esclarece a motivação existente por detrás da reformulação dos programas:

> A necessidade, por um lado, de aliviar os deveres escolares que congestionam os atuais programas do ensino secundário, e, de outro, atribuir maior elasticidade e rendimento à sua execução, tantas vezes reclamada, quer pelos educadores, quer por alunos e seus pais, levou o Ministério da Educação a estudar a conveniência de proceder a uma revisão da matéria neles contida, de modo a possibilitar o desenvolvimento racional de suas finalidades educativas (Ensino Secundário no Brasil, INEP, 1952. Esclarecimentos do Sr. Ministro da Educação Simões Filho, em entrevista coletiva à imprensa, p. 515 apud MARQUES, 2005, p. 51).

Marques ainda relata outros aspectos elencados pelo Ministro Simões Filho para justificar a *revisão e simplificação dos programas* (grifo nosso):

> O objetivo fundamental deste trabalho consistiu, pois, em eliminar dos programas atualmente em vigor, os excessos aludidos, reduzindo a prolixidade dos conhecimentos alinhados na estruturação das diversas disciplinas, que tornava penosa a tarefa didática. Ao mesmo tempo, verificava-se o flagrante desajustamento desses programas com o nível de assimilação da população escolar, cujas faculdades intelectuais, ainda mal desabrochadas, não a habilitavam a abranger a enorme soma de deveres e atividades de aprendizagem oferecidas ao seu conhecimento.
>
> Com efeito, a simples análise desses aspectos tornava evidente a necessidade de serem os programas vigentes imediatamente revistos, para uma simplificação mais adequada ao desenvolvimento subjetivo dos alunos e de forma a comportar certa plasticidade, a fim de ajustar-se às diferenciações regionais e às conveniências do melhor rendimento do ensino ministrado pelos docentes (INEP, 1952, p. 515, apud MARQUES, 2005, p. 52).

Marques ainda nos mostra mais uma parte do texto do INEP, em que o Ministro Simões Filho diz que “a simplificação dos programas trouxe os seguintes resultados”:

> [...] a correção das falhas, dos excessos e da rigidez observadas na estruturação inicial das disciplinas que constituem aquele ramo do ensino. Procurou-se estabelecer, na organização e coordenação dos novos programas, um roteiro disciplinador, isto é, um “programa mínimo” necessário ao desenvolvimento eficiente dos trabalhos escolares do currículo secundário, respeitadas, evidentemente, as modernas normas metodológicas que informam o sistema educacional de nosso país (INEP, 1952, p. 515 apud MARQUES, 2005, p. 52).

Segundo Marques, “o termo utilizado por Simões Filho, *Programa Mínimo,* é revelador de suas intenções: estabelecer um limite inferior ao qual *todas as instituições escolares estariam sujeitas e em condições de executá-lo”* (grifo nosso) (MARQUES, 2005, p. 53).

No tocante às modificações dos programas de Matemática do Colegial na passagem da Reforma Capanema relativamente para as Portarias n.º 966 e n.º 1.054 do Programa Mínimo, reproduzimos as tabelas elaboradas por Ribeiro (2011) em sua Tese de Doutorado,[25] em que a pesquisadora fez uma comparação dos

[25] Anexo Descritivo – Fase 3, Anexos 6 (Primeira Série), Anexo 7 (Segunda Série) e Anexo 8 (Terceira Série), páginas 413, 416 e 419, respectivamente.

programas de Matemática do Colegial da Primeira Série, Segunda Série e Terceira Série, da Reforma Capanema com os do Programa Mínimo.

Segundo Ribeiro, relativamente à área de Aritmética, 1.ª Série, as alterações são as seguintes:

> [...] foram adicionados os conceitos noções sobre o cálculo numérico aproximação e erro, algarismos exatos de um número aproximado, erro de arredondamento; permaneceram os conceitos relativos às operações de adição, subtração, divisão e multiplicação e saíram os conceitos referentes aos números fracionários, teoria das operações aritméticas sobre os números fracionários, noções sobre o cálculo numérico aproximado, erros, operações abreviadas; a divisibilidade numérica; teoremas gerais sobre a divisibilidade, caracteres de divisibilidade, teorias do m.m.c e do m.d.c., teoria dos números primos e aplicações e potenciação, da radiciação de números inteiros e sistemas de numeração (RIBEIRO, 2011, p. 222).

Para a Álgebra,

> [...] entraram os conceitos referentes a progressões aritméticas: termo geral, soma dos termos, interpolação aritmética; progressões geométricas: termo geral, soma e produto de termos, interpolação geométrica, e saíram conceitos referentes aos polinômios, operações algébricas sobre polinômios, teoria da divisão de polinômios, identidade de polinômios, método dos coeficientes a determinar, identidades clássicas, divisão de um polinômio inteiro em x por x ± a, regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini, o trinômio do 2.º grau, decomposição em fatores do 1.º grau, sinais do trinômio, desigualdades do 2.º grau, noção de variável e de função, variação do trinômio do 2.º grau, representação gráfica, noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos e nada permaneceu nos dois programas de Matemática (RIBEIRO, 2011, p. 222).

No que se refere à Geometria,

> [...] permaneceram no programa os conceitos a reta e plano, postulados, determinação, intersecção, paralelismo, distância, inclinação e perpendicularismo, diedros e triedros e ângulos sólidos em geral, os poliedros, noções gerais, estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos, estudos especial de triedros e poliedros regulares; saíram do programa os conceitos referentes ao Teorema de Euler e foram acrescidos aqueles relativos às cônicas (elipse, hipérbole, parábola, teorema de Dandelin), pertencendo à área de Geometria Analítica, não presente nos programas oficiais de Matemática expedidos em 1943 (RIBEIRO, 2011, p. 222).

Relativamente à 2.ª Série, Unidade Álgebra, as alterações foram as seguintes:

> Saíram os conceitos matemáticos relativos à progressões e logaritmos: estudo das progressões aritméticas e geométricas, teoria dos logaritmos, uso das tábuas, aplicações, resolução de algumas equações exponenciais, função exponencial e de sua inversa e noções de fração contínua. Foram adicionados os conceitos relativos ao estudo de determinantes: Regra de Sarrus, determinantes menores, desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha ou coluna, transformação dos determinantes, abaixamento da ordem de um determinante pela regra de Chió, sistemas de "n" equações lineares com "n" incógnitas (RIBEIRO, 2011, p. 225).

Relativamente à Trigonometria,

> [...] não saiu nenhum conceito. Foram adicionados os conceitos referentes ao estudo das linhas trigonométricas e permaneceram os conceitos relativos às transformações trigonométricas: adição, subtração, multiplicação de arcos. Bissecção de arcos; transformação de somas de linhas trigonométricas em produtos; disposição e uso de tábuas trigonométricas naturais e logarítmicas; equações trigonométricas simples; tipos clássicos; resoluções trigonométricas de triângulos; relações entre os elementos de um triângulos retângulos, relações entre os elementos de um triângulo qualquer, casos clássicos de resolução de triângulos quaisquer; generalização dos conceitos de arco e ângulo; ângulos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas; linhas e funções trigonométricas de um mesmo arco; problema geral da redução ao 1.º quadrante; cálculo das linhas trigonométricas dos arcos expressos pela relação π/n; grandezas escalares e vetoriais; vetores; propriedades; operações elementares com vetores; Relação de Chasles; projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. Teorema de Carnot (RIBEIRO, 2011, p. 225).

Notamos a ausência da Unidade Geometria no programa de Matemática de 1951.

Relativamente à terceira série dos Cursos Colegiais,

> [...] houve a eliminação das unidades correspondentes à Geometria e à Geometria Analítica em 1951, ficando somente conceitos matemáticos pertencentes à Álgebra, com a adição do estudo mais aprofundado da teoria das equações e a eliminação dos conceitos relacionados às séries, sucessões, cálculo aritmético dos limites, séries numéricas, principais caracteres de convergência e o estudo das integrais. Os conceitos matemáticos relacionados ao estudo das

> progressões aritméticas e geométrica migraram do segundo para o primeiro ano em 1951 (RIBEIRO, 2011, p.228).

Assim, colocadas estão as motivações envolvidas na instauração do Programa Mínimo e as modificações impostas aos programas relativamente à última modificação, a Reforma Capanema. Provavelmente tais modificações influenciaram no processo de constituição da Matemática do Colégio, o que será discutido mais adiante.

Assim, claramente o "Programa Mínimo" veio para, de certa maneira, "ajustar" os programas, torná-los mais "exequíveis", mais "realistas". Nesse momento, cabe-nos uma pergunta relativa ao processo de constituição da disciplina escolar Matemática para o Colégio, objeto dessa pesquisa: de que maneira essas alterações promovidas pelas Portarias 966 e 1.045, acima citadas, atuaram no processo de constituição da Matemática do Colégio?

4.3.2 Análise dos livros didáticos

Antes de começar a análise da produção didática dessa fase, julgamos importante fazer uma análise comparativa entre a "Coleção dos 4 autores" do Pré-Programa Mínimo (1944-1951) e "Coleção dos 4 autores" do Programa Mínimo (1952-1960), no sentido de observarmos como essas modificações supracitadas influíram na configuração da Coleção dos 4 autores, uma coleção que para essa pesquisa é muito cara e preciosa, na fase 2 (Clássico e Científico) e fase 3 (Programa Mínimo). Montamos três quadros comparativos[26] para as 1.ª , 2.ª e 3.ª Séries.

Relatamos abaixo as conclusões relativas à comparação efetuada por série:

1.ª Série (Anexo descritivo – Fase 3 – Anexo 9, p. 423): Nota-se a clara intenção de "racionalização" e "enxugamento" dos conteúdos, o que se reflete no "*layout* e configuração dos Índices". Observa-se nitidamente que o Índice do Livro de

[26] Anexo Descritivo Fase 3 – Anexo 9 (1.ª Série), Anexo 10 (2.ª Série) e Anexo 11 (3.ª Série).

1955 (Programa Mínimo) é mais enxuto, no sentido de que uniu na Parte I a Aritmética com a Álgebra e, ao final, apresenta somente cinco Unidades, sendo que o Livro de 1955 (Programa Mínimo) apresenta sete Unidades. É preciso destacar que, por si sós, em suas apresentações, os Índices dos livros (1943 e 1955) apresentam outras diferenças. No Índice do livro de 1943 (Pré-Programa Mínimo) nota-se a preocupação de dar destaque à divisão do mesmo em Partes e Unidades. O Índice do Livro de 1955 (Programa Mínimo) tem uma apresentação mais “textual”, não aparecendo a divisão “por Partes” e não identificando a palavra “Unidade” para destacar, por exemplo, “Unidade I”. A palavra “Unidade” nesse quadro de comparação foi por nós colocada.

2.ª Série (Anexo descritivo – Fase 3 – Anexo 10, p. 429) : os dois Índices (do Livro de 1944 e do Livro de 1957) por si sós já são diferentes. O Índice do Livro de 1957 (Programa Mínimo) apresenta-se mais “enxuto” no sentido de que apresenta só duas Partes (Álgebra e Trigonometria) e seis Unidades, enquanto o Livro de 1944 (Pré-Programa Mínimo apresenta três Partes (Álgebra, Geometria e Trigonometria) e onze Unidades. No Índice do Livro de 1944 (Pré-Programa Mínimo) nota-se a preocupação com a divisão “por Partes” e “por Unidades”, o que não acontece no Livro de 1957 (Programa Mínimo), que se apresenta de uma maneira “muito mais textual”, sem essa preocupação de “divisão por Partes” e “por Unidades”. A palavra “Unidade” nesse quadro comparativo foi por nós colocada.

3.ª Série (Anexo descritivo – Fase 3 – Anexo 11, p. 434): os dois Índices (do Livro de 1946 e do Livro de 1956) por si sós já são diferentes. O Índice do Livro de 1956 (Programa Mínimo) apresenta-se mais “enxuto” no sentido de que apresenta só uma Parte (Álgebra) e três Unidades, enquanto o Livro de 1946 (Pré-Programa Mínimo) contém três Partes (Álgebra, Geometria e Trigonometria) e dez Unidades. No Índice do Livro de 1946 (Pré-Programa Mínimo) nota-se a preocupação com a divisão “por Partes” e “por Unidades”, o que não ocorre no Livro de 1956 (Programa Mínimo), que se mostra de uma maneira “muito mais textual”, sem a preocupação de “divisão por Partes” e “por Unidades”. A palavra “Unidade” nesse quadro comparativo foi por nós colocada.

Importante destacar que a análise que fizemos do trabalho de Ribeiro (2011), relativamente à escolha dos livros didáticos para análise, também é utilizada aqui, uma vez que as Portarias n.º 966 e n.º 1.054 não instituíram outra Reforma, apenas fizeram modificações já citadas na Reforma Capanema, e os efeitos da Reforma Capanema continuaram vigentes, mas com as alterações das Portarias. Como já era esperado e comentado no texto da Fase 2, tivemos mais facilidade para encontrar coleções de livros para análise.

Relativamente aos autores, àqueles já citados nas Fases 1 e 2, acrescentamos o Professor Ary Quintella, sobre o qual trazemos uma pequena biografia, que segue abaixo:

> Ary Norton de Murat Quintella nasceu em 1906, em São Paulo, mas a partir do ensino secundário teve sua vida de estudante e de docente no Rio de Janeiro. Estudou no Colégio Pedro II, formou-se na Escola Militar e foi professor desde 1937 do Colégio Militar do Rio de Janeiro. Com longa trajetória nos meios educacionais, Quintella foi professor, também, do Instituto de Educação no período 1950-60. Participou da organização dos programas de Matemática para os cursos comercial básico e técnico, a convite do Ministro da Educação, além de atuar em numerosas comissões e bancas de concursos de professores de matemática (THIENGO, 2011, p. 111-114 apud VALENTE, 2011, p. 657).

Coleções de livros que serão analisadas:

– **Coleção “Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – 2.ª Série – 3.ª Série – Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha, Dacorso Netto” (Coleção dos 4 autores) – Livraria Francisco Alves”.**

Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 1.ª Série – 8.ª edição – 1955 (Anexo 1,p.444).

Livro 2 – Matemática – 2.º Ciclo – 2.ª Série – 8.ª edição – 1957 (Anexo 2, p.445).

Livro 3 – Matemática – 2.º Ciclo – 3.ª Série – 5.ª edição – 1956 (Anexo 3, p.446).

– **Coleção "Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1.º Ano Colegial – 2.º Ano Colegial – 3.º Ano Colegial – Thales Mello Carvalho – Companhia Editora Nacional".**

Livro 1 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1.º Ano Colegial – 10.ª edição – 1955 (Anexo 4, p.447).

Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 2.º Ano Colegial – 8.ª edição – 1956 (Anexo 5, p.448).

Livro 3 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 3.º Ano Colegial – 6.ª edição – 1956 (Anexo 6, p.449).

– **Coleção "Curso de Matemática – 1.º Livro Ciclo Colegial – 2.º Livro Ciclo Colegial – 3.º Livro Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – Edições Melhoramentos".**

Livro 1 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 7.ª edição – 1953 (Anexo 7, p 450).

Livro 2 – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – 9.ª edição – 1959 (Anexo 8, p.451).

Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 7.ª edição – 1959 (Anexo 9, p.452).

– **Coleção "Matemática – Para o Primeiro Ano Colegial – Para o Segundo Ano Colegial – Para o Terceiro Ano Colegial – Ary Quintella – Companhia Editora Nacional".**

Livro 1 – Matemática – Para o Primeiro Ano Colegial – 9.ª edição – 1960 (Anexo 10, p.453).

Livro 2 – Matemática – Para o Segundo Ano Colegial – 2.ª edição – 1957 (Anexo 11)

Livro 3 – Matemática – Para o Terceiro Ano Colegial – 9.ª edição – 1960 (Anexo 12, 455).

Como será feita a análise dos livros didáticos?

Como se trata de coleções de livros, faremos uma análise de cada coleção comparando-a com a “Coleção dos 4 autores” que, nesse momento, chamamos de Coleção-base. Essa análise de cada coleção abordará dois aspectos, os quais denominamos de “Estrutura Externa” e “Estrutura Interna”.

A análise de estrutura externa irá analisar o formato do livro, o tipo da capa, as informações que ele traz na capa e contracapa, a existência ou não de índice, prefácio e bibliografia.

A análise de estrutura interna irá analisar a estrutura do índice, como os conteúdos são apresentados e a metodologia de apresentação: como o autor introduz os assuntos e como os desenvolve: que recursos utiliza para o desenvolvimento dos conteúdos (terminologia, notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo, exercícios propostos).

Análise da Estrutura Externa das Coleções de livros (Anexo descritivo – Fase 3 – Anexo 1, p. 400)

Quadro Comparativo – Análise Estrutura Externa – Fase 3

	Coleção - Base	**Coleção 1**	**Coleção 2**	**Coleção 3**
Capa	Capa dura, colorida, com bom acabamento.	Capa dura, colorida, com bom acabamento.	Capa dura, colorida, com bom acabamento.	Capa dura, colorida, com bom acabamento.
Índice	Sim, ao final do livro.	Sim, ao final do livro.	Sim, no **início** do livro.	Sim, no **início** do mesmo.
Prefácio	Não	Não	Não	Não
Bibliografia	Não	Não	Não	Não

Quadro 22 – Quadro comparativo – Análise da Estrutura Externa – Fase 3

Observação:

Coleção – Base: Matemática 2.º Ciclo – “Coleção dos 4 autores”.

Coleção 1 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – Thales Mello Carvalho

Coleção 2 – Curso de Matemática – Algacyr Munhoz Maeder.

Coleção 3 – Matemática – Ary Quintella.

Considerações finais sobre a análise da estrutura externa das coleções

Pelo que podemos observar no quadro 22, os livros apresentam um padrão e uma regularidade em suas estrutura externas, comparativamente com a Coleção dos 4 autores; o único item que apresentou relativa discrepância foi o posicionamento do índice, situação em que as Coleções-Base e Coleção 1 têm o Índice no final do livro e as Coleções 2 e 3, no início do livro. Esse padrão é um indicativo da existência da vulgata citada por Ribeiro (2011).

Análise da Estrutura Interna das Coleções de livros

Retomando, a análise de estrutura interna tem por objetivo analisar a estrutura do índice, como os conteúdos são apresentados e a respectiva metodologia de apresentação.

Nessa análise faremos uma comparação “Série a Série” por coleções de livros, a fim de termos uma ideia mais próxima e apurada dos itens que serão analisados, série por série. Ressaltamos que para o quesito Índice só efetuaremos a análise dos índices dos livros 1.ª Série/1.º Ano Colegial/1.º Livro/Primeiro Ano Colegial, uma vez esse quesito apresenta constância de *layout* de coleção para coleção.

Análise do quesito **Índice** (Anexo descritivo – Fase 3 – Anexo 2, p.402)

Índice 1 – Livro 1 – Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – Coleção dos 4 autores – 1955 (Anexo 13, p.456).

Índice 2 – Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – 1.º Ano Colegial – Thales Mello Carvalho – 1955 (Anexo 14 p.458).

Índice 3 – Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 1953 (Anexo 15, p.459).

Índice 4 – Livro 4 – Matemática para o Primeiro Ano Colegial – Ary Quintella – 1960 (Anexo 16, p.467).

O que a configuração dos índices dos livros de 1.ª Série/1.º Ano/1.º Livro/Primeiro Ano pode nos dizer?

É preciso lembrarmos que uma das principais alterações nos programas introduzidas pela Reforma Gustavo Capanema foi a ocorrência de um *processo de agrupamento, seriação e criação de unidades didáticas interligadas* (grifo nosso), e isso passou a se refletir nos índices dos livros. Tomemos como exemplo o índice de um livro Matemática 2.º Ciclo, 1.ª Série (4 autores) de 1945 (Anexo 17 p.471).

Observemos que esse Índice traz a divisão dos temas por Partes (Aritmética, Álgebra e Geometria) e a distribuição deles por Unidades, dentro das Partes citadas, sem fazer referências explícitas a capítulos.

Se o compararmos com o Índice 1 (Anexo 13, p.456), ou seja, um livro "semelhante", mas de 1955, portanto já incorporando as alterações das Portarias do Programa Mínimo, vamos observar que ele tem a preocupação com essa divisão por Partes, Unidades e os conteúdos todos distribuídos dentro das Unidades, o que não acontece com o Índice do livro de 1955 (Anexo 13). O Índice do Anexo 13 não apresenta essa divisão por Partes e Unidades; ele até faz uma "divisão por Unidades", mas sem referência explícita. A nosso ver, o índice do livro de 1955 (Anexo 17, p.471) tem um *layout* mais bem organizado.

Com as modificações empreendidas pelas Portarias 966 e 1.054 de 1951, do Programa Mínimo, podem ser observadas diferenças nos índices citados, explicitadas no Anexo 2 (Anexo descritivo – Fase 3, p. 402).

As diferenças referenciadas no Anexo 2 (Anexo descritivo – Fase 3, p. 402) podem ser observadas no quadro comparativo que apresentaremos a seguir.

Quadro Comparativo – Análise dos Índices 1, 2, 3 e 4 – Fase 3

	Índice 1	**Índice 2**	**Índice 3**	**Índice 4**
Referência explícita à Unidade	Não	Não	Não	Sim
Referência explícita a Capítulo	Não	Sim	Sim	Não
Referências a exercícios	Não	**Sim. Só no Capítulo VI.	Sim. Faz referência a problemas e exercícios, à exceção do Capítulo I.	Sim. Traz um índice “separado” para os exercícios.
Layout do Índice	Um índice “descritivo”.	Um índice “resumido” e “não descritivo”.	Um índice “detalhado” e “enciclopédico”.	Um índice “detalhado” e “enciclopédico”.
Metodologia de apresentação dos conteúdos via Índice	Só apresenta os conteúdos, sem uma sequência didática*.	Só apresenta os conteúdos, sem uma sequência didática.	Apresentação dos conteúdos e exercícios ao final.	Definição e apresentação do conteúdo.

Quadro 23 – Quadro comparativo da análise dos índices dos livros 1.ª Série/1.º Ano Colegial/1.º Livro/Primeiro Ano Colegial – Fase 3

(*) Sequência didática seria o índice conter um caminho a ser percorrido pelo conteúdo (introdução, exercícios resolvidos, exercícios propostos etc.).

Considerações finais – Análise dos índices dos livros 1.ª Série/ 1.º Ano Colegial/ 1.º Livro/Primeiro Ano Colegial

Os Índices analisados mostram algumas semelhanças sem, contudo, seguir o padrão, até porque comparamos coleções diferentes e cada editora ou autor tem uma maneira de organizar os conteúdos dentro dos índices. O que notamos foi uma mudança na conformação do índice, com certo abandono relativamente à preocupação com a divisão por Partes e Unidades.

De maneira geral, podemos dizer que os índices trazem as marcas da “simplificação” e do “enxugamento” empreendidos pelas Portarias 966 e 1.045, de 02.10.1951 e 14.12.1951, respectivamente, já relatados nesse texto da Fase 3, embora dois livros apresentem índices enciclopédicos, bem detalhados.

Dentro ainda da categoria “Estrutura Interna”, fizemos uma análise de outras características/informações presentes nos livros, as quais mostraremos no quadro subsequente, com o objetivo de verificar se eles apresentam determinado padrão relativamente a tais características.

Livro 1 – Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – Coleção 4 autores – 1955 (Anexo 1, p.444).

Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – 1.º Ano – Thales Mello Carvalho – 1955 (Anexo 4, p.447).

Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 1953 (Anexo 7, p.450).

Livro 4 – Matemática – Primeiro Ano Colegial – Ary Quintella – 1960 (Anexo 10, p.453).

Quadro Comparativo – Outras características internas – Livros 1.ª Série/1.º Ano Colegial /1.º Livro/ Primeiro Ano Colegial – Fase 3

	Livro 1	**Livro 2**	**Livro 3**	**Livro 4**
Referência à Portaria do Programa Mínimo	Sim. Portaria Ministerial 1.045 de 14.12.1951	Sim. Portarias 966 e 1.045 de 02.10.1951 e 14.12.1951.	Sim. Portarias 966 e 1.045 de 02.10.1951 e 14.12.1951.	Sim. Portarias 966 e 1.045 de 02.10.1951 e 14.12.1951.
Referência à edição	Sim. 8.ª edição	Sim. 10.ª edição.	Sim. 7.ª edição.	Sim. 9.ª edição.
Traz o programa	Sim.	Não.	Sim. Traz também as instruções metodológicas.	Não.
Número do exemplar	Sim. “3.456”.	Sim. “5.737”.	Não. Traz o número do milheiro. “49.º Milheiro”.	Sim. “9.419”.
Nome do livro	**Matemática** 2.º Ciclo.	**Matemática** para os Cursos Clássico e Científico	Curso de **Matemática**	**Matemática** para o Primeiro-Segundo-Terceiro Ano Colegial

Quadro 24 – Quadro comparativo – Análise – Outras características internas – Livros 1.ª Série/1.º Ano Colegial/1.º Livro/Primeiro Ano Colegial – Fase 3

Relembrando, o livro que pode ser considerado como guia da análise é o Livro 1 (Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – 4 autores). Notamos no quadro acima que os livros guardam certo padrão de configuração, que chamamos de “interna” referente aos itens “Referências às Portarias do Programa Mínimo”, “Referências à Edição do Livro”, “Trazer o Programa do Ano/Série do Livro” , “Número do exemplar” e “palavra Matemática no nome do Livro”, relativo ao mesmo. Podemos perceber que o Livro 3, da Coleção do autor Algacyr Munhoz Maeder, foge um pouco ao padrão no que se refere aos itens “número do exemplar” e “Traz o Programa”, uma vez que ele também traz as “Instruções Metodológicas”. Os livros guardam uma semelhança nos itens analisados, sobretudo pelo fato de conterem a palavra “Matemática” no nome e de fazerem referências explícitas às Portarias do Programa Mínimo. De certa forma, há evidências da *vulgata* vigente (Coleção dos 4 autores), observada por Ribeiro (2011), já anteriormente relatada, e também, a nosso ver, denotam uma produção didática mais consolidada, o que pode ser um dos indícios sobre a formação da vulgata (maior participação de livros da faixa “acima de 1950” na formação da vulgata) e também da estabilização da Matemática do Colégio, o que será alvo de outras análises adiante.

Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos relativa aos livros 1.ª Série/1.º Ano Colegial/ 1.º Livro/ Primeiro Ano Colegial.

Agora faremos uma análise de como os autores apresentam os conteúdos aos leitores, percorrendo os livros 1, 2 3 e 4, abaixo discriminados:

Livro 1 – Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – Coleção 4 autores – 8.ª edição – 1955 – Livraria Francisco Alves (Anexo 1, p.444).

Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – 1.º Ano – Thales Mello Carvalho – 10.ª edição – 1955 – Companhia Editora Nacional (Anexo 4, p.447).

Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 7.ª edição – 1953 – Edições Melhoramentos (Anexo 7, p.450).

Livro 4 – Matemática – Primeiro Ano Colegial – Ary Quintella – 9.ª edição – 1960 – Companhia Editora Nacional (Anexo 10, p.453).

Análise (Anexo descritivo – Fase 3 – Anexo 3, p. 403).

Quadro comparativo da análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 1.ª Série/1.º Ano Colegial/1.º Livro/ Primeiro Ano Colegial – Fase 3

	Livro 1	Livro 2	Livro 3	Livro 4
Apresenta introdução	Sim. Com o nome "Definições".	Sim. Com o nome "Preliminares".	Sim. Com o nome "Definições".	Sim.Com o nome "Definições".
Terminologia	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.
Notas de rodapé	Sim. Faz uso de notas de rodapé.	Sim. Faz uso de notas de rodapé.	Não, na apresentação desse conteúdo, mas o faz na apresentação de outros.	Sim. Faz uso de notas de rodapé.
Exercícios resolvidos de exemplo	Sim. Chamam-se "Exemplos".	Sim. Chamam-se "Exercício".	Sim. Chamam-se Exercícios.	Sim. Chamam-se exemplos.
Exercícios propostos	Sim. Chamam-se Exercícios, ao final de cada conteúdo. Respostas ao final de cada tema, por conteúdo apresentado.	Sim. Chamam-se "Exercícios para resolver" e vêm acompanhado de resposta. Localizam-se ao final da apresentação de cada conteúdo.	Sim. Chamam-se "Exercícios" e trazem resposta. Localizam-se ao final de cada conteúdo.	Sim. Chamam-se Exercícios e trazem resposta. Localizam-se ao final da Unidade (tema).
Resumo final da Metodologia de apresentação dos conteúdos	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.

Quadro 25 – Quadro comparativo da análise de apresentação dos conteúdos, dos livros 1.ª Série/1.º Ano Colegial/1.º Livro/Primeiro Ano Colegial – Fase 3

Considerações finais sobre a análise da Metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 1.ª Série/1.º Ano/1.º Livro/ Primeiro Ano Colegial

Notamos pela análise dos livros empreendida e pelo quadro-resumo que os livros contêm um padrão comportamental, relativamente à metodologia de apresentação dos conteúdos: *os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.*

Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 2.ª Série/2.º Ano Colegial/ 2.º Livro/ Segundo Ano Colegial.

Empreenderemos agora uma análise de como os autores apresentam os conteúdos aos leitores, percorrendo os livros 1, 2 3 e 4, abaixo discriminados:

Livro 1 – Matemática 2.º Ciclo – 2.ª Série – Coleção 4 autores – 8.ª edição – 1957 – Livraria Francisco Alves (Anexo 2, p.445).

Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – 2.º Ano – Thales Mello Carvalho – 8.ª edição – 1956 – Companhia Editora Nacional (Anexo 5, p.448).

Livro 3 – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 9.ª edição – 1959 – Edições Melhoramentos (Anexo 8, p.451).

Livro 4 – Matemática para o Segundo Ano Colegial – Ary Quintella – 2.ª edição – 1957 – Companhia Editora Nacional (Anexo 11, p.454).

Análise (Anexo descritivo – Fase 3 – Anexo 4, p. 407).

Quadro comparativo da análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 2.ª Série/2.º Ano Colegial/2.º Livro/ Segundo Ano Colegial – Fase 3

	Livro 1	Livro 2	Livro 3	Livro 4
Apresenta introdução	Sim. Tem o nome do conteúdo.	Sim. Chamam-se Preliminares.	Sim. Chamam-se Definições.	Sim. Chama-se Definição.
Terminologia	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.
Notas de rodapé	Sim. Faz uso de notas de rodapé.	Sim. Faz uso de notas de rodapé.	Não na apresentação desse conteúdo. No entanto, o faz na apresentação de outros.	Não na apresentação desse conteúdo. No entanto,o faz na apresentação de outros.
Exercícios resolvidos de exemplo	Sim.	Sim. Chamam-se Exercícios.	Sim. Chamam-se Exemplos.	Sim. Chamam-se Exemplos.
Exercícios propostos	Sim. Chamam-se “Exercícios”. Localizam-se no final de cada conteúdo. Respostas ao final do livro, por página dos exercícios apresentados.	Sim. Chamam-se “Exercícios para resolver” e trazem resposta. Localizam-se ao final da apresentação de cada conteúdo.	Sim. Chamam-se “Exercícios propostos” e trazem resposta. Localizam-se ao final de cada conteúdo.	Sim. Chamam-se “Exercícios” e trazem resposta. Localizam-se ao final da Unidade (tema)
Resumo final da Metodologia de apresentação dos conteúdos	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.

Quadro 26 – Quadro comparativo da análise da metodologia de apresentação dos conteúdos, dos livros 2.ª Série/2.º Ano Colegial/2.º Livro/Segundo Ano Colegial – Fase 3.

Considerações finais sobre a análise da Metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 2.ª Série/2.º Ano Colegial/2.º Livro/ Segundo Ano Colegial.

Notamos pela análise dos livros empreendida e pelo quadro-resumo que os livros contêm um padrão comportamental, relativamente à metodologia de apresentação dos conteúdos: *os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.*

Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 3.ª Série/3.º Ano/ 3.º Livro/ Terceiro Ano Colegial

Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 3.ª Série – 5.ª edição – 1956 (Anexo 3, p.446).

Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 3.º Ano Colegial – 6.ª edição – 1956 (Anexo 6, p.449).

Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 7.ª edição – 1959 (Anexo 9,p.452).

Livro 4 – Matemática – Para o Terceiro Ano Colegial – 7.ª edição – 1960 (Anexo 12, p.455).

Análise (Anexo descritivo – Fase 3 – Anexo 5, p. 410).

Quadro comparativo da análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 3.ª Série/3.º Ano Colegial/3.º Livro/Terceiro Ano Colegial – Fase 3

	Livro 1	Livro 2	Livro 3	Livro 4
Apresenta introdução	Sim. Nome do conteúdo.	Sim. Nome do conteúdo.	Sim. Nome do conteúdo.	Sim. Nome do conteúdo.
Terminologia	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.	Linguagem simples, direta.
Notas de rodapé	Sim. Faz uso de notas de rodapé.	Sim. Faz uso de notas de rodapé.	Sim. Faz uso de notas de rodapé.	Sim. Faz uso de notas de rodapé.
Exercícios resolvidos de exemplo	Sim. Chamam-se exercícios ou exemplos.	Sim. Chamam-se Exercícios ou exemplos.	Sim.	Sim. Chamam-se exemplos.
Exercícios propostos	Sim. Chamam-se “Exercícios”, e vêm no final de cada conteúdo. Respostas acompanham os exercícios.	Sim. Chamam-se “Exercícios” e trazem resposta. Localizam-se ao final da apresentação de cada conteúdo.	Sim. Chamam-se “Exercícios propostos” e trazem resposta. Localizam-se ao final de cada conteúdo.	Sim. Chamam-se “Exercícios” e trazem resposta. Localizam-se ao final da Capítulo
Resumo final da Metodologia de apresentação dos conteúdos	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.	Os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.

Quadro 27 – Quadro comparativo da análise da metodologia de apresentação dos conteúdos, dos livros 3.ª Série/3.º Ano Colegial/3.º Livro/ Terceiro Ano Colegial – Fase 3.

Considerações finais – Análise da Estrutura Interna – Fase 3

Notamos pela análise dos livros empreendida e pelos quadros 22 a 27 expostos, que os livros contêm um padrão comportamental, relativamente à metodologia de apresentação dos conteúdos: *os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta*, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.*

A disciplina novamente se apresenta.

*Linguagem simples e direta: os conteúdos são apresentados de forma direta, sem a utilização de símbolos matemáticos em excesso, de modo menos complexo, sem rigor matemático.

4.3.3 Considerações finais da Fase 3

A análise das coleções de livros apresentadas anteriormente nos quadros 22 a 27 nos mostra que continuamos *enxergando a disciplina Matemática do Colégio* nos livros analisados. Temos um padrão para a apresentação dos conteúdos e também um rol de conteúdos, representado pelos Programas resultantes das Portarias 966 e 1.054, já mencionadas.

Novamente a disciplina se apresenta, dando organização, ritmo ao ensino: *os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.*

Há, nessa fase, algum avanço relativamente à Fase 2, Cursos Clássico e Científico?

Iniciamos essa Fase 3 considerando a disciplina Matemática do Colégio constituída. No texto de fechamento da Fase 2, alegamos que *faltava algo* para que a disciplina se estabilizasse. O que temos, então, nesse momento?

A circulação de uma *vulgata* do período 1943-1961, representada pela Coleção Matemática 2.º Ciclo (Coleção dos 4 autores), é evidenciada por Ribeiro em sua tese (2011), já referida no item 4.3.1. Relativamente à *vulgata,* mostramos no texto da Fase 2 que nos estudos de Ribeiro (2011), para a escolha dos livros para análise, os livros “a partir de 1950” eram muito mais abundantes, e isso nos leva a inferir que esses livros podem ter contribuído mais para a constituição de tal *vulgata,* sendo um componente que pode se somar na estabilização da disciplina nesse período.

O estudo de Maryneusa Cordeiro Otone (2011), já relatado no item revisão de literatura, nos diz que

> [...] ficou caracterizado, nos Cursos Clássico e Científico dos anos 50, um padrão estandardizado para a Matemática escolar. É possível dizer, então, que a Matemática dos Cursos Clássico e Científico dos anos 50 se constituiu numa disciplina escolar sob a ótica de André Chervel, pois a partir da portaria de 51 que traz mudanças à Reforma Capanema, se constitui na prática uma única Matemática do Colégio (OTONE, 2011, p. 248).

Temos, então, para o período 1952-1960, a característica de uma única disciplina para a Matemática do Colégio, o que foi observado nas coleções de livros analisadas, uma vez que, nesse período, fala-se em *Colegial* (grifo nosso), e não mais em Clássico e Científico, seja nos programas, seja nos livros didáticos. A única coleção que manteve o nome Clássico – Científico no nome foi a do professor Thales de Mello Carvalho.

Entendemos que o *enxugamento* e a *simplificação* promovidos pelas Portarias 966 e 1.054 provocou o estabelecimento de um rol de conteúdos estável e exequível pelos professores, que foi devidamente absorvido pelos autores dos livros didáticos em suas produções.

O estabelecimento desse rol de conteúdos estável, a se somar à característica de *única disciplina*, evidenciada por Otone, a vulgata da Coleção 4 autores, evidenciada por Ribeiro, e as conclusões a que chegamos relativas às análises de coleções de livros anteriormente mencionadas permitem-nos dizer que a disciplina Matemática do Colégio *estabilizou-se* no período 1952-1960.

No final da década de 1950, os fortes ventos da *tormenta do Movimento da Matemática Moderna* já começam a soprar aqui no Brasil, trazendo fortes mudanças nos programas e no ensino de Matemática para o Colegial. Que influência terá no processo de constituição da Matemática do Colégio, ora em estudo?

O que o Movimento da Matemática Moderna irá trazer para nós e para a disciplina Matemática do Colégio?

4.4 Fase 4 – O Movimento da Matemática Moderna (MMM) e a turbulência na organização disciplinar da Matemática do Colégio

4.4.1 Panorama da disciplina escolar Matemática do Colégio no início da Fase 4

Finalizamos a Fase 3 com a conclusão de que a disciplina Matemática do Colégio *se estabilizou*. O motivo desencadeador dessa estabilização foram, além das conquistas anteriores das Fases 1 e 2, as modificações impostas aos programas de Matemática do 2.º Ciclo do Secundário, pelas Portarias do Programa Mínimo, dada a característica nuclear dos conteúdos no processo de constituição da disciplina escolar.

Tais programas serão agora alvo do Movimento da Matemática Moderna, um Movimento de caráter internacional, cujos efeitos começaram a ser sentidos aqui no Brasil em finais da década de 1950. Julgamos importante discorrer um pouco sobre o Movimento da Matemática Moderna a fim de entendermos de que maneira ele afetou os programas de matemática do Ensino Secundário, para analisar a produção didática do período e, ao final, verificar como ficou o processo de constituição da Matemática do Colégio no período em questão.

O Movimento da Matemática Moderna foi um movimento que visava a renovação curricular, objetivando, entre outros, a aproximação entre a Matemática do Ensino Médio daquela do mundo acadêmico, dos pesquisadores.

A renovação pretendida pelo Movimento da Matemática Moderna estava baseada quase exclusivamente em mudança de conteúdo curricular, a qual cumpriria a tarefa de adequar o ensino de Matemática às novas exigências do mundo industrial e tecnológico. Dentre outros objetivos, a unificação dos três campos fundamentais da Matemática (Aritmética, Álgebra e Geometria), mediante a introdução de elementos unificadores, a Teoria dos Conjuntos, Estruturas Algébricas e Relações e Funções.

E no Brasil, como se deu a “entrada” do Movimento? Como foi sua chegada?

Não sabemos ao certo como um Movimento dessa magnitude, consideradas as dificuldades de comunicação da época, chegou ou entrou em nosso país. O que podemos fazer são inferências baseadas em pesquisas já realizadas, indicando várias portas de entradas possíveis. A pesquisadora Elisabete Zardo Búrigo, em sua dissertação de Mestrado (1989), cita aparições do tema nos primeiros Congressos Nacionais de Ensino da Matemática.

Segundo ela, no III Congresso Nacional de Ensino de Matemática, em 1959, o tema da Matemática Moderna estava presente em três teses. Em uma delas, do Professor Ubiratan D’Ambrosio, foi apresentada pelo Professor Benedito Castrucci, e “[...] foi recebida com frieza pelos congressistas. A tese propunha, como método do ensino, o uso de jogos, passatempos e experimentações com ênfase na intuição matemática” (BÚRIGO, 1989, p. 45).

A tese do Professor Osvaldo Sangiorgi,[27]

> [...] iniciando com a questão “Matemática clássica ou matemática moderna na elaboração dos programas do ensino secundário?”, era cautelosa e defendia a necessidade de que “ambas” fossem levadas em conta, de que a modelação aos tempos novos fosse gradativa, “a fim de serem evitados os malefícios decorrentes de transformações radicais” (p. 46).

Búrigo ainda trouxe um pensamento de Sangiorgi a respeito da diferença entre a Matemática Clássica e a Matemática Moderna: “a diferença residia sobretudo no fato de uma ter por base os elementos simples e a segunda um sistema operatório, isto é, uma série de estruturas (Bourbaki)[28] sobre as quais se assenta o edifício matemático” (p. 46).

A outra tese, essa mais ousada, segundo Búrigo, era a do Major Professor Jorge Emanuel Barbosa, que era professor do Colégio Militar do Rio de Janeiro, cujo “argumento central da tese era o da necessidade da atualização do ensino, fazendo referência a um texto do matemático André Lichnerowicz” (p. 46-47).

Outra porta de entrada do Movimento da Matemática Moderna no Brasil foi a participação de professores brasileiros em estágios em Universidades americanas, com o patrocínio do governo estadunidense, por meio de entidades como Fundação

---

[27] O Professor Osvaldo Sangiorgi nasceu no dia 9 de maio de 1921. Sua formação incluiu a licenciatura em Ciências Matemáticas, em 1941, conforme consta em seu diploma, outorgado pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras, Seção de Educação, da Universidade de São Paulo. Osvaldo Sangiorgi foi exemplo daqueles professores excelentes, disputados a peso de ouro pelas famílias abastadas paulistanas, para dar aulas particulares a seus filhos. O Professor Osvaldo Sangiorgi constitui-se referência para a mudança da Matemática Escolar no Brasil, em tempos do MMM (VALENTE, 2008, p. 16-17).

[28] A origem do nome de Nicolas Bourbaki é bastante curiosa. O general francês Charles Denis Sauter Bourbaki nasceu em Pau, em 22 de abril de 1816, e era descendente de uma proeminente família grega. O nome Bourbaki tornou-se famoso na França pela bravura do general e perfeita maestria na arte da guerra. Em 1923, um aluno chamado Raoul Husson, do terceiro ano de Matemática da École Normale Supérieure (ENS), entrou em uma sala de primeiro ano, disfarçado em um uniforme, e com uma grande barba branca. Ele escreveu no quadro para os alunos provarem o “Teorema de Bourbaki”. O matemático André Weil fica sabendo da façanha do aluno e gosta muito. Weil conhece um jovem matemático indiano, conta-lhe sobre a façanha do aluno Charles sobre o Teorema de Bourbaki, e propõe ao matemático escrever um artigo intitulado “A generalização do Segundo Teorema de Bourbaki”, problema fictício de Matemática a ser publicado no *Bulletin of the Academy of Sciences of the Provinces of Agra* ou *Oudh Allahabad.* O artigo foi aceito e André Weil atribuiu ao matemático fictício o nome de Nicolas. São membros do Grupo: André Weil, Szolem Mandelbrojt, Paul Dubreil, Claude Chevalley, René de Possel, Jean Dieudonné, Jean Leray, mas o nome proeminente é o de André Weil (NOVAES, 2012, p. 40-43).

Ford e *Natinonal Science Foundation* (NSF). Valente (2008) nos relata a ida dos Professores Osvaldo Sangiorgi e Lafayette de Morais[29] aos EUA:

> Em 1960, Sangiorgi e o Professor Lafayette de Moraes são enviados aos EUA para um estágio, no período de junho a agosto de 1960, por meio de uma Bolsa da Pan American Union e National Science Foundation. Sangiorgi vai para Kansas University e Lafayette de Moraes, a Nova York, para a Fourdan University. Sangiorgi entra em contato com o matemático George Springer e toma conhecimento da proposta de reformulação do ensino que estava sendo empreendida nos Estados Unidos. Sangiorgi fica maravilhado com o que vê e, no retorno, consolida ainda mais sua posição nacional e reformula por completo sua coleção de livros didáticos para ginásio (VALENTE, 2008, p. 26).

O Professor Osvaldo Sangiorgi retorna do estágio, funda o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática[30] (GEEM) e, por meio dele, passa a divulgar e trabalhar em prol do Movimento da Matemática Moderna.

O Professor Lafayette de Morais, ao voltar, traz consigo coleções de livros didáticos de matemática do *School Mathematics Study Group* (SMSG) e, com a Professora Lydia Lamparelli,[31] junto ao Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e

[29] O Professor Lafayette de Moraes nasceu em Rio Branco, capital do Acre, em 1929, onde ficou até os dez anos de idade, onde concluiu o curso primário. Veio para o Rio de Janeiro e, ao concluir o ensino médio, entrou na Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil, hoje Universidade Federal do Rio de Janeiro, para fazer o Curso de Matemática, ficando de 1949 a 1953. Vem para São Paulo, entra para o Magistério Oficial do Estado de São Paulo, onde trabalha por cerca de 30 anos. Faz graduação em Física na Universidade de São Paulo. Trabalha na Universidade de Campinas no período de 1968 a 1973 e é destacado para prestar serviços ao IBECC (Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura). No Mosteiro de São Bento começa a trabalhar a partir de 2006 como professor de Lógica no Curso de Filosofia da Faculdade de São Bento (OLIVEIRA FILHO, 2009, p. 52-53).

[30] GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática –, criado em 31 de outubro 1961 pelo Professor Osvaldo Sangirorgi, "uma proposta inspirada na existência do SMSG americano (School Mathematics Study Group) (BÚRIGO, 1989, p. 105), servindo de instrumento para divulgação do Movimento da Matemática Moderna (MMM), por meio de cursos para professores, palestras e produção de material didático, sempre liderado pelo entusiasmado Osvaldo Sangiorgi.

[31] Lydia Condé Lamparelli nasceu em São Paulo, onde deixa marcas no ensino público de São Paulo, nas décadas de 1960, 1970 e 1980. Foi membro do GEEM e comissionada junto ao Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura (IBECC). Viveu na França no período de 1973 a 1975, onde estudou no Instituto National de Recherches et Documentation Pédagogiques (INRDP). Trabalhou na CENP (Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo) no período de 1979 a 1984 (BIGODE&MEDINA, 2013, p. 147-167).

Cultura (IBECC),[32] faz um trabalho de tradução e implantação desse material didático no ensino brasileiro.

Oliveira Filho (2009), em sua dissertação, estudou o papel que tiveram os livros didáticos do *School Mathematics Study Group,* no currículo de Matemática do ensino colegial brasileiro, no período de 1960-1970.

Segundo Oliveira Filho,

> Em 1962, durante o IV Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática em Belém (PA), o professor Sangiorgi apresenta uma proposta curricular para o Ginásio e para o Colégio para aprovação no evento. Tal proposta, que foi aprovada, era chamada de “Assuntos Mínimos para um moderno programa de Matemática para o Ginásio e Colégio – Orientação e Sugestões para o seu desenvolvimento”, e ficou conhecida como “Proposta do GEEM” (OLIVEIRA FILHO, 2009, p. 131).

Oliveira Filho apresentou também um quadro comparativo entre a “Proposta do GEEM”, relativo ao ensino colegial, e a relação dos conteúdos constantes da coleção de livros traduzidos do SMSG, denominada *Matemática Curso Colegial,* Volumes I, II e III. O quadro indica em sua coluna da esquerda conteúdos do ensino colegial, contidos na “Proposta do GEEM” e, na coluna da direita, os conteúdos do ensino colegial constantes nos livros traduzidos do SMSG, *Matemática Curso Colegial,* Volumes I, II e III (Anexo descritivo – Fase 4 – Anexo 4, p. 532).

Oliveira Filho ainda relatou que:

> Da análise preliminar dos livros produzidos pelo SMSG e traduzidos no Brasil para o Ensino Colegial comparativamente com a Proposta do GEEM (Anexo 7), percebe-se que quase a totalidade dos assuntos contidos na Proposta foi contemplada pelo rol de conteúdos constantes Volumes I, II e III da Coleção *Matemática Curso Colegial* e outros foram parcialmente contemplados (itens 1, 2, 10). Destacamos que somente o conteúdo Equações Algébricas, item 17

[32] IBECC – Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura. É uma Comissão Nacional da Unesco no Brasil. Cada Estado-membro da Unesco deve ter uma Comissão Nacional e, no Brasil, era o IBECC, cuja função é gerenciar os projetos da Unesco nos Estados-membros. Foi criado no Rio de Janeiro, com sede no Palácio Itamaraty, pelo Decreto 9.355, de 13 de junho de 1946, e tinha por finalidade melhorar a qualidade do ensino de ciências experimentais (ABRANTES, 2008, p. 74).

> da “Proposta do GEEM”, não foi encontrado (OLIVEIRA FILHO, 2009, p. 131).

Oliveira Filho inferiu que a “Proposta do GEEM” foi resultado de apropriações feitas pelo Professor Sangiorgi dos livros do SMSG originais, quando da realização de seu estágio nos EUA, já citado.

Por fim, em suas considerações finais, concluiu que “os livros didáticos do SMSG serviram de parâmetro curricular para o ensino de Matemática do colegial no Brasil, no período de 1964-1970” (OLIVEIRA FILHO, 2009, p. 144).

Então, na realidade, podemos inferir que os programas para o Colegial contidos nos livros da coleção *Matemática Curso Colegial,* Volumes I, II e III, funcionaram como um *programa oficioso* àquele momento.

Elaboramos um quadro comparativo (Anexo descritivo – Fase 4 – Anexo 5, p. 538) entre o Programa Mínimo para o Colegial e a “Proposta do GEEM” para o Colégio. O que se pode observar é que os programas são muito diferentes e podemos até considerá-lo como um rompimento com uma estrutura de programa que consideramos estável, que nasceu na Reforma Francisco Campos e foi *aperfeiçoada* via sucessivas(os) Reformas/Momentos Educacionais.

O Professor Sangiorgi, por sua vez, ao retornar do IV Congresso de Ensino da Matemática, em Belém (PA), o faz com um programa referendado pelos pares e “parametriza as suas obras pelo programa levado ao IV Congresso, que após o Evento, ganhou *status* de um programa nacional para o ensino de matemática moderna no Brasil” (VALENTE, 2010, p. 27-28).

No fim do ano de 1963, Sangiorgi já lança pela Editora Nacional, sua coleção para o ginásio, uma obra de quatro volumes que, de maneira sucessiva, são lançados ao mercado, ano a ano: 1964 – primeiro volume utilizado para o 1.º Ano; 1965 – 2.º Ano; 1966 – 3.º Ano; e, em 1967, o último volume, para o 4.º Ano ginasial.

Villela (2008), em seu estudo, por meio dos Mapas mensais de publicações da Cia. Editora Nacional, nos diz que a coleção de Sangiorgi, chegou à marca de 4.336.087 (quatro milhões, trezentos e trinta e seis mil e oitenta e sete) exemplares.

E para o Colegial, o que os *best-sellers* Sangiorgi e Editora Nacional produziram? Era de esperar que em 1968 já saísse pelo menos um volume de uma coleção de Sangiorgi e Cia. Editora Nacional para o Colegial. Entretanto, não foi o que aconteceu.

Valente, em seu texto "Osvaldo Sangiorgi: um *best-seller* para o ginásio, um fracasso editorial no colégio", vai nos dizer que

> [...] Osvaldo Sangiorgi e Cia. Editora Nacional, ao que tudo indica, não se mobilizaram para o lançamento de uma coleção para as séries seguintes, os anos colegiais, como poder-se-ia esperar, dada a grande receptividade da coleção ginasiana (VALENTE, 2010, p. 27).

Quais seriam, então, os motivos de tal desinteresse? Valente (2010), menciona que

> [...] pode-se inicialmente, considerar que havia uma certa instabilidade na época, com relação à definição curricular para os ensinos do clássico e científico. A própria ramificação representava um elemento complicador para a elaboração de um texto didático único (VALENTE, 2010, p. 27).

Apontamos no Capítulo 3 o fato de a LDB 4.024/1961 ter dado grande liberdade aos Estados brasileiros para definirem sua organização curricular, e o fato de o governo paulista publicar o Decreto 50.133, de agosto de 1968, definindo um tronco comum de dois anos para o colégio e a Matemática escolar.

Valente (2010) também se refere a uma falta de *know-how* por parte de Sangiorgi na escrita de textos para o Colegial: "[...] elaborar textos para o colégio exigiria uma outra forma de escrita, uma nova sequência didático-pedagógica, para dar conta dos três anos terminais do colégio" (p. 28).

A partir de 1964, começa a circular a coleção “Matemática – Curso Colegial”, obra de 3 volumes, resultado da tradução das obras do *School Mathematics Study Group* (SMSG), pelo IBECC. Tais livros, aparentemente, não tiveram grande aceitação no mercado brasileiro. Dentre os motivos, podemos citar o fato de ser uma obra com uma materialidade diferente da que circulava na produção didática brasileira. Valente (2008) a seguir faz alusão à materialidade da coleção para o Ginasial, do Professor Sangiorgi, lançada em 1963, já citada:

> O novo livro didático, para a nova matemática, foi também novo em sua materialidade. Nova diagramação na apresentação dos conteúdos escolares, no uso de tipos de letras e números de diferentes tamanhos e formas; inclusão de cores nas páginas internas, fotografias, desenhos. Para trás ficou a estética dos livros de matemática dos anos 1950. A nova coleção, dentre outros elementos, adotou, também, a cor como informação (VALENTE, 2008, p. 30).

Nossa produção didática, à época, ganhava qualidade e sofisticação, com livros com capa dura, muitas imagens coloridas. Os livros do SMSG eram textuais e carregavam uma linguagem técnica.

Assim, em 1967, é lançada uma outra coleção para suprir a falta de didáticos de Matemática para o Colegial, assim relatada por Valente:

> Face à coleção do SMSG e praticamente inexistência de outras publicações para a matemática moderna do colégio, o IBEP – Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas lançou, em 1967, a coleção “Matemática – Curso Colegial Moderno” dos autores Scipione de Pierro Neto, Luiz Mauro Rocha e Ruy Madsen Barbosa. Três professores de matemática dos cursos colegiais, ligados ao GEEM, pelo menos durante os primeiros anos de sua existência (VALENTE, 2009, p. 15).

Relativamente a esse fato, os autores da coleção *Curso Colegial Moderno* supracitada, no Prefácio do Volume I, assim se posicionaram:

> A ideia da publicação de uma série de “Matemática Moderna” tomou forma e se concretizou durante o transcurso do V Congresso de Ensino de Matemática, realizado em S. José dos Campos, no Centro Técnico de Aeronáutica, em 1966. Naqueles dias, em contato com professores de quase todos os Estados, sentimos bem de perto a angústia com que os nossos colegas ser referiam à dificuldade que encontravam para a atualização do ensino da matemática no colégio,

> dada a inexistência, ao seu alcance, de obras nacionais e estrangeiras (PIERRO NETO; ROCHA; BARBOSA, 1967).

A Cia. Editora Nacional lança em 1970 uma obra assinada pelos Professores Osvaldo Sangiorgi, Renate Watanabe e Jacy Monteiro, intitulada *Matemática – Curso Moderno – 2.º Ciclo*, que resulta em um fracasso editorial.

Para se ter uma ideia, Villela (2008) nos diz que a vendagem da obra foi da ordem de 85.000 (oitenta e cinco mil) exemplares. É importante relembrar que a obra de Sangiorgi para o ginásio ostentou a marca de mais de 4.000.000 de exemplares vendidos.

Assim, o período 1961-1970, pelo que vimos, caracterizou-se por uma certa instabilidade curricular para o nível colegial, acarretando desestímulo à produção didática, situação em que tínhamos em andamento o Movimento da Matemática Moderna e, ao que tudo indica, os Cursos Clássico e Científico.

Em face do exposto sobre o período da Matemática Moderna no Capítulo 3 e do panorama da disciplina Matemática do Colégio que acima descrevemos, cabem algumas questões:

– É possível dizer que o rol de conteúdos estabilizado no Programa Mínimo se manteve nesse patamar nesse período? É possível falarmos no estabelecimento de uma *vulgata* para esse período? Seria possível a disciplina Matemática do Colégio se manter estabilizada, ou ao menos constituída, nas condições tão adversas anteriormente citadas?

4.4.2 Análise dos livros didáticos

Que livros analisar? Que caminho percorrer nessa análise?

O período que estamos considerando é 1961-1970. É preciso destacar e relembrar que o Movimento da Matemática Moderna no Brasil foi recepcionado no Ginasial. Como já citamos, em 1963 começa a circular a coleção do Professor

Sangiorgi para o Ginasial; em 1964, a Coleção Matemática Curso Colegial (livros traduzidos do SMSG); e, em 1967, tivemos o lançamento da coleção dos Professores Luiz Mauro Rocha, Ruy Madsen Barbosa e Scipione de Pierro Neto.

Fizemos uma procura em sebos (físicos e virtuais) e tivemos dificuldade de encontrar livros do período 1961-1970, sobretudo e, principalmente, coleções de livros. Na verdade, no planejamento desta pesquisa essa busca já havia sido feita; essa procura foi apenas a repetição da outra. Em nossa busca, sobretudo relativamente aos autores que utilizamos nas Fases 2 e 3, observamos livros do Professor Thales de Mello Carvalho, mas que se destinavam a atender o conteúdo Matemática Comercial e/ou Financeira e isso, à frente de 1971, em face das modificações impostas pela LDB 5.692/1971.

Entendemos que esse fato se refletiu, de certa maneira, no rol de livros analisados no período 1964-1980, para a confecção do DVD "A Matemática do Colégio: livros didáticos para a história de uma disciplina", já mencionado. Em uma rápida observação nos livros constantes do período 1964-1980,[33] pode-se notar a existência de muitos livros avulsos, de conteúdos soltos, traduções de livros estrangeiros, enfim, um *mix* do que circulava no período.

Encontramos nos arquivos do GHEMAT uma coleção do Professor Ary Quintella, chamada *Matemática* (Primeiro, Segundo e Terceiro Ano Colegial), a qual foi alvo de nossa análise na Fase 3. A seguir, a descrição da mesma:

- Livro 1 – Matemática para o Primeiro Ano Colegial – Ary Quintella – 21.ª edição – Companhia Editora Nacional – 1965

- Livro 2 – Matemática para o Segundo Ano Colegial – Ary Quintella – 21.ª edição – Companhia Editora Nacional – 1969

- Livro 3 – Matemática para o Terceiro Ano Colegial – Ary Quintella – 16.ª edição – Companhia Editora Nacional – 1968

[33] Essa relação de livros pode ser observada no seguinte endereço: <http://www.unifesp.br/centros/ghemat/DVD_s/HISTORIA/64_80.htm>. Acesso em: 6 nov. 2013.

A referida coleção é semelhante à do Professor Ary Quintella analisada na Fase 3, porém com edição no período 1965-1969, como podemos ver acima. Vamos comparar os programas das duas coleções e verificar semelhanças e diferenças, no sentido de observar se a coleção *mais nova* foi influenciada pelo Movimento da Matemática Moderna e carrega marcas de tais influências em seus programas constantes dos índices.

A seguir, a descrição da coleção analisada na Fase 3:

Livro 1 – Matemática – Para o Primeiro Ano Colegial – 9.ª edição – 1960 (p.453).

Livro 2 – Matemática – Para o Segundo Ano Colegial – 2.ª edição – 1957 (p.454).

Livro 3 – Matemática – Para o Terceiro Ano Colegial – 9.ª edição – 1960 (p.455)

Após a análise, concluímos que as duas coleções são semelhantes e apresentamos na sequência as “discrepâncias observadas” para poupar os leitores de uma análise demorada, em face da evidência dos fatos.

Discrepâncias observadas:

– Os volumes *mais novos* (período da Matemática Moderna) não trazem mais referências às Portarias do Programa Mínimo, existente nos volumes pré-Matemática Moderna;

– Observando os índices dos dois volumes (Pré e Matemática Moderna), destinados ao Primeiro Ano Colegial, notamos que o livro do período da Matemática Moderna suprimiu o item “Cálculo Aproximado” e já inicia o livro no item “Progressões”, que é o 2.º item do livro Pré-Matemática Moderna (Anexo de imagens – Fase 4 – Anexo 1, p. 544).

Isso nos leva a inferir que, em razão da falta de livros de Matemática para o Colegial no período da Matemática Moderna, os livros foram reeditados para atender tal demanda e, mais do que isso, “concorrendo” com o programa da Matemática Moderna, que, como vimos, teve início no 1.º Ciclo, o ginasial. Tudo leva a crer, e temos informações até de familiares nossos, que, na verdade, o Curso Clássico e Científico perdurou até a entrada em vigor da LDB 5692/1971, situação em que o 2.º Ciclo do Colegial se tornou 2.º Grau. Aqui temos mais um fator de desestabilização da Matemática do Colégio, uma situação em que deixamos de ter um só ensino de Matemática, com dois tipos de curso vigorando em conjunto: o Clássico e Científico, resultante de 1942, modificado depois pelo Programa Mínimo, e uma proposta em vias de instalação, que era o Movimento da Matemática Moderna.

Não há necessidade de comparação dos Volumes II e III das citadas coleções. Os livros são praticamente idênticos, e em termos de conteúdo não se alteram.

Ficamos, então, com duas coleções de livros a serem analisadas:

– **Coleção "Curso Colegial" – Volumes I, II e III – School Mathematics Study Group – tradução dos livros do SMSG no Brasil.**

- Livro 1 – Matemática – Curso Colegial – Volume I – Editora Universidade de Brasília – 1964 (Anexo 2, p.545).

- Livro 2 – Matemática – Curso Colegial – Volume II – 2.ª edição – EDART – Livraria Editora Ltda. – S. Paulo – 1966 (Anexo 3, p.546).

- Livro 3 – Matemática – Curso Colegial – Volume III – 1.ª edição – EDART – Livraria Editora Ltda. – S. Paulo – 1966 (Anexo 4, p.547).

– **Coleção Matemática – Curso Colegial Moderno – Scipionne di Pierro Neto; Luiz Mauro Rocha; Ruy Madsen Barbosa – IBEP – Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas.**

- Livro 1 – Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 1 – 1967 (p.548)

- Livro 2 – Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 2 – 1968 (Anexo 6, 549).

- Livro 3 – Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 3 – 1970 (p.550).

Análise da Estrutura Externa das Coleções do Volume I das coleções (Anexo Descritivo – Fase 4 – Anexo 1, p. 528).

Quadro comparativo – Análise da Estrutura Externa – Livros Volume I – Fase 4

	Livro 1	Livro 2
Capa	Capa de material tipo papel cartão ou cartolina, clássica, com *layout* moderno, porém simples (inclusão de figura geométrica para dar ar moderno).	Capa de material tipo papel cartão ou cartolina, com *layout* moderno.
Índice	Sim. Localiza-se no início do livro.	Sim. Localiza-se no final do livro.
Prefácio	Sim. Possui dois prefácios.	Sim.
Bibliografia	Não	Não

Quadro 33 – Quadro comparativo – Análise da Estrutura Externa – Livros Volume I – Fase 4

Livros analisados:

- Livro 1 – Matemática – Curso Colegial – Volume I – Editora Universidade de Brasília – 1964 (Anexo 2,p. 545).

- Livro 2 – Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 1 – 1967 (p.548).

Considerações finais da análise da estrutura externa dos livros "Volume I"

O quadro anterior (quadro 33) confirma o que já dissemos a respeito da materialidade dos livros do *School Mathematics Study Group* (SMSG). Mostra-nos que os livros são muito distintos em suas estruturas externas; são livros de tipos diferentes em suas intenções comerciais: os livros do SMSG tinham, originalmente, objetivos experimentais. Ainda que, depois de traduzidos e dispostos à venda no Brasil, essa intenção possa ter sido alterada, seu aspecto, que chamamos "externo", denuncia e confirma a intenção inicial. Os livros do IBEP eram aqueles que tinham intenções e objetivos comerciais, com apelo de *layout* mais chamativo e aspecto "externo" mais "palatável" aos leitores.

Análise da estrutura interna dos livros Volume I.

A análise de estrutura interna nessa Fase 4 será um pouco diferente da que realizamos nas Fases 2 e 3. Temos fortes indícios já relatados no item 4.4.1 (panorama da disciplina) de que não temos oferta, ou temos pouca oferta, de livros didáticos de Matemática para o Colegial, no período da Matemática Moderna que estamos considerando (1961-1970). O que faremos, então, é analisar a estrutura dos índices de um lote de livros (os de Volume I) e, depois, analisar os conteúdos dos índices série a série (volume a volume) das duas coleções em busca de semelhanças/discrepâncias que nos ajudem em nossa análise.

Para o quesito Índice, só efetuaremos a análise dos índices dos livros Volume I, uma vez ele apresenta constância de *layout* de coleção para coleção.

Análise do quesito **Índice.**

Índice 1 – Livro 1 – Matemática – Curso Colegial – Volume I – Editora Universidade de Brasília – 1964 (Anexo 8, p.551).

Índice 2 – Livro 2 – Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 1 – 1967 (Anexo 9, p.553).

Análise dos Índices (Anexo descritivo Fase 4 – Anexo 2, p. 529)

Quadro Comparativo – Análise dos índices dos livros Volume I – SMSG e IBEP – Fase 4

	Índice 1	Índice 2
***Layout* do índice**	Bem estruturado, dividindo os conteúdos por capítulos.	Bem estruturado. Divide os conteúdos por partes e capítulos .
Referências à exercícios	Só nos capítulos 10 e 11.	Sim. Bem organizado. Todo capítulo tem sua série de exercícios, chamado de "sequência", ao final do capítulo e um item chamado "respostas".
Metodologia de apresentação de conteúdos via índice	Não é possível observar esse quesito via índice.	Dá para observar a intercalação do assunto tratado, com exercícios em uma sequência de apresentação dos conteúdos, porém sem introdução.

Quadro 34 – Quadro comparativo – Análise dos índices dos Livros Volume I – SMSG e IBEP – Fase 4

Considerações finais a respeito da análise dos índices 1 e 2

Ao analisarmos o quadro acima (quadro 34), percebe-se que os índices apresentam diferenças em vários itens, não sendo possível dizer que eles têm um padrão comum.

Na sequência, fizemos uma análise comparativa entre os índices, série a série, volume a volume, com o objetivo de verificar se apresentam os mesmos conteúdos e em mesma ordem de apresentação.[34]

Partindo do pressuposto de que são livros bem diferentes em suas materialidades, como já mencionamos, provavelmente o serão em suas concepções

[34] Os quadros com as análises citadas se encontram no Anexo descritivo – Fase 4 – Anexo 6 (Volume I), Anexo 7 (Volume II) e Anexo 8 (Volume III), páginas 540, 541 e 542, respectivamente.

internas e intenções didáticas. Observamos que poucos conteúdos didáticos coincidem e que os programas contidos nos índices são diferentes.

Por exemplo, no Anexo 6 do Anexo descritivo – Fase 4 (p.540), podemos verificar, na comparação dos índices dos Volumes I, que no livro do SMSG o item relativo a conjuntos recebeu o nome de “Conjuntos, números reais e retas” e no livro do IBEP, “Conjuntos e lógica matemática”.

O conteúdo Matrizes é chamado de “Matrizes e Sistemas Lineares” no livro do SMSG e tratado no volume III, e no livro do IBEP é chamado de “Matrizes”, e abordado no Volume 2.

Resumindo, os livros não guardam um mesmo rol de conteúdos volume a volume. Como já foi relatado, os conteúdos dos livros traduzidos do SMSG (Matemática Curso Colegial, Volumes I, II e III) guardam certa semelhança com o rol de conteúdos da “Proposta do GEEM” (quadro comparativo no Anexo descritivo Fase 4 – Anexo 4, p. 532). Pelo que observamos, os autores da coleção Matemática – Curso Colegial Moderno não seguiram com fidelidade a proposta. Isso pode ser explicado pelo hiato entre a “proposta do G.E.E.M” e a publicação dos livros, ou também pelo que Valente coloca a respeito da perda de influência do GEEM em 1970: “[...] ao final, o resultado mostrou que propostas diferentes vindas da cúpula do G.E.E.M, tomaram lugar no colégio. Aliás, é preciso dizer, que a partir dos anos 1970, o Grupo não mais continua a ter o destaque que teve na década anterior” (VALENTE, 2010, p. 36).

Tudo isso nos mostra que as duas coleções mais citadas no período, por exemplo, 1963-1970, não guardavam semelhanças, divergiam e disputavam a entrada na Cultura Escolar para serem apresentadas e utilizadas por professores e alunos. Uma (SMSG), por representar o “novo” e outra (IBEP), por ser outra opção em um momento de absoluta falta de oferta de manuais didáticos para o Colegial.

Vamos analisar a *metodologia de apresentação dos conteúdos* de alguns itens coincidentes nas citadas coleções (Anexo descritivo – Fase 4 – Anexo 3, p. 530).

Quadro comparativo – Análise de metodologia de apresentação dos conteúdos – livros SMSG e IBEP – Fase 4

	Livro – Matemática- Curso Colegial – Vol.I- SMSG – 1964	**Livro – Matemática – Curso Colegial Moderno – Vol.1 – IBEP – 1967**
Apresenta introdução	Não. Sem parte introdutória direta; definição.	Sim. Há uma preocupação em definir; introduzir diretamente.
Terminologia	Linguagem mais técnica; mais textual, intenção de contextualizar.	Linguagem simples direta.
Notas de rodapé ou explicativas	Sem uso de notas de rodapé ou explicativas	Com uso de notas explicativas
Exercícios resolvidos de exemplo	Não.	Sim. Há exemplos.
Exercícios propostos	Sim. Exercícios propostos sem resposta ao final de cada item.	Sim. Exercícios propostos com respostas ao final do capítulo
Resumo final da Metodologia de apresentação dos conteúdos	O conteúdo é introduzido de uma forma descritiva, exemplificada, contextualizada, sem uma parte introdutória direta, concisa. Depois, é desenvolvido sem o uso de notas de rodapé ou explicativas, sem o uso de exercícios resolvidos de exemplos e com exercícios propostos sem resposta.	O conteúdo é apresentado com uma definição *via sinônimo,* mas notamos uma preocupação de “introduzir” o conteúdo. Depois, é desenvolvido em uma linguagem direta, com o uso de “notas explicativas”, uso de exemplos e exercícios propostos ao final do capítulo com resposta.

Quadro 35 – Quadro Comparativo – Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos – Livro Matemática – Curso Colegial – Vol. I – SMSG – 1964 e Livro – Matemática – Curso Colegial Moderno – Vol. I – 1967 – Fase 4

Considerações finais – Análises da Estrutura Interna – Livros SMSG e IBEP

Como já esperávamos, os livros não têm um padrão de metodologia de apresentação dos conteúdos. São livros que tiveram depois de suas concepções objetivos diferentes. Os livros do SMSG, por seus objetivos experimentais, apresentam e oferecem os conteúdos aos leitores de uma maneira mais formal, ainda que utilizando uma linguagem até simples. Os livros do IBEP apresentam os conteúdos de uma maneira mais simples, direta e objetiva. São diferentes também no uso das notas de rodapé e no oferecimento dos exercícios.

Não há mais condições de *ver a disciplina.*

4.4.3 Considerações finais da Fase 4

Entendemos que o texto panorama da disciplina (item 4.4.1) e a análise dos livros didáticos (item 4.4.2) reúnem elementos suficientes para adotarmos uma posição concernente ao processo de constituição da disciplina Matemática do Colégio, nesse período (1961-1970).

A nosso ver, a espinha dorsal da disciplina, os conteúdos, é rompida e desestabilizada quando da entrada do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Aquele rol de conteúdos estabilizado, resultado das modificações introduzidas pelas Portarias do Programa Mínimo, sofre uma desestruturação e acaba por se romper. Essa instabilidade curricular, originada pelo Movimento da Matemática Moderna, já relatada, acaba por comprometer a produção didática de Matemática para o Colegial, comprometendo também a constituição de uma *vulgata.*

Sem um programa de conteúdos estável, sem uma *vulgata,* sem um padrão que chamamos de *metodologia de apresentação dos conteúdos,* concluímos que nessa fase a disciplina *perde a estabilidade e se desconstitui, indo buscar uma nova configuração.*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> "As disciplinas escolares são o preço que a sociedade deve pagar à sua cultura para poder transmiti-la no contexto da escola ou do colégio" (André Chervel).

Essa não foi uma história dos livros didáticos de Matemática do Colegial no período 1930-1970, tampouco foi a história do ensino de Matemática do Colegial no período 1930-1970; foi, sim, a história de constituição de uma disciplina, a Matemática do Colégio no período 1930-1970, por meio dos livros didáticos. É importante dizer isso, no sentido de melhor justificar nossas escolhas teórico-metodológicas, sobretudo metodológicas. Livrou-nos de uma investigação aprofundada pelas legislações e arquivos e também de um mergulho profundo e detalhado nos livros didáticos em si, por eles mesmos, empreitas que foram tomadas a bom termo pelos pesquisadores Maryneusa Cordeiro Otone, Denise Franco Capello Ribeiro e Alex Sandro Marques, e os resultados de suas pesquisas foram fundamentais, como potentes ferramentas argumentativas, por nós escolhidas e utilizadas.

Fomos aos livros didáticos para, neles, *enxergarmos a disciplina,* a *maneira como os conteúdos eram neles apresentados e oferecidos aos leitores, alunos,* o que chamamos de *metodologia de apresentação dos conteúdos.* As categorias de análise dos livros didáticos nos foram dadas por Chervel (1990), uma vez que buscávamos a disciplina nos livros didáticos, e não a história dos livros didáticos, por eles mesmos, como um fim específico.

O período escolhido para a pesquisa, 1930-1970, é muito rico e importante para a Educação Matemática brasileira por conter relevantes Reformas/Momentos educacionais que deixaram fortes marcas no ensino de Matemática, sentidas, acreditamos, até os dias atuais.

Nossa escolha de fracionar o período foi feita com o objetivo de nos alinharmos às Reformas/Momentos educacionais e podermos mostrar algumas nuances das transformações sofridas no processo de constituição da Matemática do Colégio.

A pesquisadora Denise Franco Capello Ribeiro tomou o período 1943-1961 como um só, acertadamente, uma vez que os efeitos da Reforma Capanema se estenderam até 1961, ano da decretação da LDB n.º 4.024/1961. Como citamos, na realidade os Cursos Clássico e Científico praticamente se estenderam por três décadas, 1940, 1950 e 1960, chegando até 1971, ano da LDB n.º 5.692. As alterações impostas pelas Portarias do Programa Mínimo (966 e 1.054) foram pontuais, porém importantes, nos programas vigentes da Reforma Capanema, mas os Cursos Clássico e Científico continuaram. Nossa opção por fracionar o período 1943-1961 foi interessante porque tivemos condições de mostrar a constituição da Matemática do Colégio no período 1943-1951, que chamamos de Clássico e Científico, demonstrando que houve condições para a constituição da disciplina, mas não de sua estabilização, o que também indicamos, que irá ocorrer no período do Programa Mínimo, que entendemos como 1952-1960.

É preciso um olhar semântico relativamente aos períodos. Por exemplo, a Reforma Capanema foi instituída em 1942, mas os programas para o 2.º Ciclo do Ensino Secundário só foram publicados em 1943. Em termos de análise de livros didáticos – o que fizemos –, é interessante utilizar na análise livros a partir de 1944 ou 1945, que já carregam os efeitos da Reforma. Entendemos o período do Programa Mínimo como 1952-1960, uma vez que as Portarias foram publicadas em 1951, o que só iria refletir na produção didática em 1952. Em finais dos anos 1950, já começamos a sentir os efeitos do Movimento da Matemática Moderna. Não influenciaram os livros didáticos, mas já causavam debates e reuniões, como relatamos. No período que chamamos de Matemática Moderna, 1961-1970, só houve publicações de livros para o Colegial, a partir de 1964. O mais importante, para nós, em termos de análise, sobretudo dos livros didáticos, era entender o que se passava dentro dos períodos e escolher os livros, tendo ciência de que os livros escolhidos representassem adequadamente o que se queria medir.

Os pilares de sustentação de nossa análise foram duas características do processo de constituição de uma disciplina escolar, elencadas por Chervel: o fato de *ser um processo* e o fato de *o conteúdo ser nuclear.* O processo de constituição da Matemática do Colégio foi crescendo, tomando corpo, na medida em que as

Reformas/Momentos educacionais introduziram alterações nos programas, que por sua vez influenciaram a produção didática, que provocaram modificações no ensino.

Antes de trazermos para este texto o histórico de nossa pesquisa, pensamos ser interessante analisarmos o que se passou com o conteúdo, esse item tão importante no processo de constituição de uma disciplina.

Em primeiro lugar, é preciso pensarmos que o nível de ensino do qual tratamos (Colegial) teve, tem e, a nosso ver, sempre terá, um *apelo,* um *direcionamento* para os exames vestibulares. O que se altera um pouco é na *maneira com que esse apelo, esse direcionamento se manifesta.* De outro modo, podemos dizer que a Matemática do Colégio sempre teve proximidade com o Curso Superior. Então, no período dos Cursos Complementares (1931-1942), o apelo aos exames vestibulares era muito forte, sendo que os cursos complementares funcionavam *nos anexos das faculdades* e *imprimia ao ensino a preocupação com os exames,* realizados ao término dos anos dos cursos. Não havia uma *intenção formativa,* uma vez que não havia a seriação. Os professores lecionavam, em sua grande maioria, nos cursos superiores aos quais se destinavam os candidatos, bem como os autores dos livros didáticos. Esse era, então, o ritmo do ensino.

Verificamos que os programas (Anexo descritivo – Fase 1 – Anexos 13 e 14, p. 252 e 254) eram compostos de blocos de conteúdos (Anexo descritivo – Fase 1 – Anexo 15, p.257), que seriam ministrados separadamente de acordo com a opção de curso dos alunos: Pré-jurídico, Pré-médico e Pré-politécnico. Podem ser vistos, basicamente, os seguintes temas matemáticos: Aritmética Teórica, Álgebra, Álgebra Vetorial, Geometria, Geometria Analítica e Trigonometria. Não havia naquele momento, em face da realidade dos Cursos Complementares e do *layout* dos programas, uma separação do que era conteúdo de ensino superior e o que era conteúdo do ensino do 2.º ciclo do secundário, o que estava em consonância com a realidade supracitada.

Em um rápido exame no programa de Matemática do Curso Complementar Pré-politécnico (Anexo descritivo – Fase 1 – Anexo 14, p. 254), podemos ver que uma parte aprofundada da Álgebra, relativa, era prevista para ser ministrada na 1.ª

Série (Teorema de Bolzano-Weierstrass, Teorema de Rolle, Fórmula dos acréscimos finitos,Fórmulas de Taylor e Maclaurim). Relativamente à Álgebra Vetorial: escalares e vetores, adição e subtração de vetores, produtos escalares, vetoriais e mistos.

A Reforma Capanema, como vimos, veio com uma mudança nas finalidades do ensino, com uma *intenção mais formativa.* Houve a *criação dos Colégios.* Os programas sofreram modificações substanciais, apresentando um *layout* de curso seriado, com a divisão dos conteúdos em Unidades e Capítulos. Os conteúdos estavam dispostos, *obedecendo uma lógica interna, mostrando unidades didáticas.* Os conteúdos são *agrupados, seriados,* formando *unidades didáticas,* visando o atendimento aos ramos da Aritmética, Álgebra e Geometria. Relembremos que no início da Fase 2 relatamos uma mudança no perfil dos autores dos livros didáticos, havendo uma mescla entre os antigos autores do período dos Cursos Complementares e os novos autores, que foram surgindo, professores de Matemática dos Cursos Clássico e Científico.

Relativamente aos temas matemáticos constantes dos programas dos Cursos Clássico e Científico (Anexo descritivo – Fase 2 – Anexo 7, p. 327), basicamente podemos ver o seguinte: os temas de maior complexidade da Álgebra foram retirados, bem como o Cálculo Vetorial. Do Cálculo Vetorial permanece apenas a ideia de vetor, essa, por sua vez, incorporada ao tema Trigonometria.

Esse parágrafo acima nos trouxe a informação de que na Reforma Capanema, com sua intenção formativa, com a implantação da seriação e todas as modificações supracitadas, acontece a *separação dos conteúdos* que *permaneceriam no 2.º Ciclo do Secundário* e aqueles que *iriam para o Curso Superior,* contribuindo sobremaneira para *modelagem* da Matemática do Colégio e sua *constituição,* o que concluímos ao final da Fase 2.

Percorrendo rapidamente o programa de Matemática do Curso Científico (Anexo descritivo – Fase 2 – Anexo 7, p. 327), notamos a ausência de itens da Álgebra como "Noções sobre os conjuntos lineares – Teorema do Bolzano-Weierstrass", "Diferenças, derivadas e diferenciais sucessivas"; da Álgebra Vetorial, vemos na parte relativa à Trigonometria, as Unidades VI e VII, abordando noções de vetores. Como mais um exemplo relativamente à Geometria Analítica, notamos a Ausência dos itens “Coordenadas retilíneas e polares no espaço de três dimensões”, “Transformação de coordenadas no espaço de três dimensões”, o que futuramente irá compor o conteúdo “Álgebra Linear”, a ser ministrada no Curso Superior. Todos os conteúdos *ausentes* no programa de Matemática do Curso Científico evidentemente constavam dos programas dos Cursos Complementares, especificamente do Complementar Pré-politécnico.

O Programa Mínimo, como mostramos, utilizando-nos da pesquisa de mestrado de Marques (2005) e Ribeiro (2011), veio para *enxugar* o currículo de Matemática dos Cursos Clássico e Científico, *retirando os excessos,* contribuindo para tornar os programas *executáveis* pelos professores, tornar o *rol de conteúdos mais estável,* a *produção didática mais robusta* e, ao final, a nosso ver, *contribuiu decisivamente* para a *estabilização* da Matemática do Colégio.

Relativamente aos conteúdos, indicamos os estudos de Ribeiro (2011), em que ela fez a comparação entre os programas de Matemática do Clássico e Científico com os programas de Matemática do Programa Mínimo (Anexo descritivo Fase 3 – Anexos, 6, 7 e 8, p. 413, 416 e 419). Para citar alguma parte, podemos nos ater à 3.ª Série, em que foram eliminados os conceitos relacionados às *séries, sucessões, cálculo aritmético de limites, séries numéricas, principais caracteres de convergência e o estudo das integrais.*

O Movimento da Matemática Moderna (MMM) tinha como uma de suas finalidades *uma maior aproximação da Matemática do Colégio da Matemática do Ensino Superior.* Irá, por exemplo, dar uma forma matricial ao conteúdo determinantes, e tentar trazer para a Matemática do Colégio um pouco da parte de Álgebra Linear.

Assim, essas foram algumas nuances observadas durante a pesquisa, relativamente ao item conteúdo.

Nossa intenção agora é percorrer o texto pelos capítulos, trazendo para o leitor uma ideia do que foi a pesquisa.

O Capítulo 1, “Sobre as disciplinas escolares”, dedicou-se a apresentar teórica e metodologicamente a disciplina escolar para os leitores, tendo como alicerce teórico principal o historiador André Chervel, já incorporando as influências das reformas educacionais e dos livros didáticos, no processo de constituição de uma disciplina escolar.

No Capítulo 2, “Sobre a disciplina escolar Matemática”, procuramos discutir particularmente sobre a disciplina escolar matemática. Iniciamos discorrendo um pouco sobre a Matemática do Ginásio, sua origem e constituição e, ao final, partimos para a discussão sobre a existência ou não de outra disciplina, a Matemática do Colégio, concordando com Valente (2011), no sentido de que, de fato, era possível a existência da duas disciplinas: a Matemática do Ginásio e a Matemática do Colégio e que ambas tinham diferentes trajetórias de constituição. Concluímos o texto com a Revisão de Literatura, trazendo um pouco dos trabalhos que, de uma maneira ou de outra, trataram da Matemática do Colégio.

No Capítulo 3, “As Matemáticas e as reformas de ensino”, procuramos analisar as reformas/momentos educacionais do período considerado da pesquisa (1930-1970), visando trazer os pontos em que tais reformas/momentos educacionais fazem alterações na Matemática do Colégio.

O coração da pesquisa foi o Capítulo 4, chamado “Livros didáticos e a trajetória da disciplina Matemática do Colégio, o qual dividimos em quatro fases, sendo que a Fase 1 compreendeu 1930-1942, de vigência dos Cursos Complementares; a Fase 2, compreendeu 1943-1951, de vigência dos Cursos Clássico e Científico; a Fase 3, compreendeu 1952-1960, de vigência do Programa Mínimo; e a Fase 4, 1961-1970, relativa ao Movimento da Matemática Moderna.

Em cada fase, produzimos um texto chamado “Panorama da disciplina escolar Matemática do Colégio nas Fases 1, 2, 3 ou 4”, em que procuramos mostrar *como estava a disciplina* no início da fase, relativamente ao seu processo de constituição. Nesse texto, retornamos a pontos específicos dos trabalhos já tratados no item Revisão de Literatura e outros, de maneira a mostrar como estava o processo de constituição da Matemática do Colégio, antes da análise dos livros didáticos, ajudando-nos a melhor fundamentar nossas conclusões sobre o estado da disciplina, após a análise de livros didáticos, ao final da fase.

A análise da produção didática das fases constou de um estudo da Estrutura Externa e outra da Estrutura Interna dos livros didáticos.

Na Fase 1, o que percebemos foi uma produção didática difusa, com três tipos, não sendo possível o estabelecimento de uma *vulgata* do período.

Sem a *vulgata,* com uma *diversidade de ensinos*, um r*ol de conteúdos não estável*, a conclusão a que chegamos relativamente a esse período foi a de que a disciplina era considerada como não constituída. Entretanto, o fato de ter sido a primeira Reforma que fez a *divisão dos ensinos* tornou o período dos Cursos Complementares *o embrião da disciplina Matemática do Colégio.*

A Fase 2, dos Cursos Clássico e Científico, irá trazer a mudança nas finalidades do ensino, proporcionada pela Reforma Capanema. Ao iniciarmos a análise da produção didática, o fizemos já com as informações de trabalhos examinados na Revisão de Literatura da *possibilidade de constituição da Matemática do Colégio* e da *circulação de uma vulgata no período 1943-1961.*

Tivemos certa dificuldade de encontrar livros no período 1944-1951, considerando que os programas foram publicados em 1943 (Portaria Ministerial n.º 177, de 16 de março de 1943). No trabalho de Ribeiro (2011), examinado, ela mostra um rol de livros consultados por alunos da Escola Estadual São Paulo, e percebemos, na análise desse quadro, um número maior de livros na fase "acima de 1950". Inferimos, então, que a *vulgata* citada por Ribeiro pode ter sido mais influenciada por livros dessa fase, e entendemos melhor a dificuldade de encontrarmos os livros que procurávamos.

Analisamos três coleções de livros: a coleção Matemática 2.º Ciclo (4 autores), Curso de Matemática (Algacyr Munhoz Maeder) e Matemática para os Cursos Clássico e Científico (Thales Mello Carvalho). Na análise, detectamos um padrão para o que chamamos de Estrutura Externa e um para a "metodologia de apresentação dos conteúdos", conseguindo, assim, *enxergar, visualizar a disciplina Matemática do Colégio.* A disciplina Matemática do Colégio, que denominamos *metodologia de apresentação dos conteúdos,* assim se manifestou: *os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta* (os conteúdos são apresentados de forma direta, sem a utilização de símbolos matemáticos em excesso, de modo menos complexo, sem rigor matemático)*, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.*

Com um *rol de conteúdos mais estável* e conseguindo *visualizar a disciplina,* chegamos à conclusão de que a Matemática do Colégio *se constitui,* no período dos 1943-1951, o que chamamos de Clássico-Científico.

Poderíamos considerar a Matemática do Colégio *estabilizada?* No nosso entender, não. Reputamos ser necessário um *tempo maior* para que a disciplina se estabilize. Esse tempo é preciso para que as alterações nos programas possam ser feitas nos livros didáticos. Esses livros didáticos vão para as salas de aula, submetendo-se à cultura escolar, e mostramos no texto "Panorama da disciplina escolar Matemática do Colégio" na Fase 3, por meio do trabalho de Marques (2005), que existia um desejo de mudança, de enxugamento dos programas no final da década de 1940, no sentido de que o programa era extenso, *era muita coisa e precisava diminuir*. Então, tais informações podem ser consideradas *o retorno da cultura escolar sobre o que lhes foi oferecido*.

É interessante destacar que os quadros de números 10 (Quadro comparativo – Análise da Estrutura Externa dos Livros da Fase 2, p.114), 11 (Quadro comparativo – Analise dos Índices dos livros 1.ª Série/Primeira Série Clássico-Científico/1.º Ano/ – Fase 2, p.117) e 12 (Quadro comparativo – Outras características internas – Livros 1.ª Série/Primeira Série Clássico-Científico/1.º Ano – Fase 2, p.118) nos apontam uma certa falta de padrão único, o que pode ser sinal de que a produção didática ainda não estava consolidada e/ou equilibrada.

Esse conjunto de fatores nos ajudou a considerar que a disciplina é *constituída* no período dos Cursos Clássico-Científico, mas de uma maneira inicial, e que precisa de um *algo mais* para sua estabilização.

A Fase 3 engloba o período 1952-1961, que poderíamos chamar de 2.ª fase dos Cursos Clássico-Científico, ou Programa Mínimo. Entramos na Fase 3 com *os ensinos divididos,* com *um rol de conteúdos mais organizado,* com *a informação de que havia uma vulgata em circulação no período 1943-1961* e com a Matemática do Colégio *constituída.* Esse quadro já preparava o caminho e era propício para a estabilização da disciplina.

No texto "Panorama da disciplina escolar Matemática do Colégio no início da Fase 3" trouxemos novamente o trabalho de Marques (2005), com partes específicas do mesmo, em que o autor traz as motivações em torno da elaboração do Programa Mínimo, ou seja, o porquê das modificações nos programas da Reforma Capanema, dando origem ao Programa Mínimo. Isso se somou, para nós, ao clima de *estabilização da disciplina* reinante.

Trouxemos do trabalho de Ribeiro (2011) os quadros em que ela faz uma comparação entre os Programas de Matemática para o Colegial de 1943 e 1951, da 1.ª Série (Quadro 16, p.413), 2.ª Série (Quadro 17, p.416) e 3.ª Série (Quadro 18, p.419), mostrando as modificações ocorridas nos programas.

Antes de iniciar a análise dos livros didáticos, elaboramos três quadros (de números 19 a 21, páginas 423 a 439), em que comparamos os índices (1.ª, 2.ª e 3.ª séries) de duas coleções Matemática 2.º Ciclo (coleções dos 4 autores) de 1943 (Pré-programa mínimo) e 1951 (Programa Mínimo), com o objetivo de verificar as alterações ocorridas com os "programas contidos nos livros" relativas ao Programa Mínimo. Foi possível observar um *enxugamento* nos programas, confirmando as informações de Marques (2005).

Os quadros de números 22 (Análise da Estrutura Externa – Fase 3, p.136), 23 (Quadro comparativo da análise dos índices dos livros 1.ª Série/1.º Ano Colegial/1.º Livro/Primeiro Ano Colegial – Fase 3, p.139) e 24 (Quadro comparativo – Análise –

Outras características internas – Livros 1.ª Série/1.º Ano Colegial/1.º Livro/Primeiro Ano Colegial – Fase 3, p.141), diferentemente da Fase 2, já nos mostram um padrão mais estável. Destaque-se o fato de que “todos os livros analisados” fazem referência direta às Portarias n.º 966 e n.º 1.054 do Programa Mínimo.

Para a análise, incorporamos mais uma coleção de livros, a coleção “Matemática” para o Primeiro, Segundo e Terceiro Ano Colegial, do Professor Ary Quintella.

A análise das estruturas externa e interna e a metodologia de apresentação dos conteúdos nos mostrou um padrão, e a disciplina, via *metodologia de apresentação dos conteúdos,* apresentou-se novamente: *os conteúdos são apresentados em uma linguagem simples e direta (*os conteúdos são apresentados de forma direta, sem a utilização de símbolos matemáticos em excesso, de modo menos complexo, sem rigor matemático)*, com introdução, desenvolvimento dos conteúdos com o uso de notas de rodapé, uso de exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos.*

De certa maneira, a análise dos livros didáticos (análise da metodologia de apresentação dos conteúdos), resumida nos quadros 25 (Quadro comparativo da análise de apresentação dos conteúdos, dos livros 1.ª Série/1.º Ano Colegial/1.º Livro/Primeiro Ano Colegial – Fase 3, p.143), 26 (Quadro comparativo da análise da metodologia de apresentação dos conteúdos, dos livros 2.ª Série/2.º Ano Colegial/2.º Livro/Segundo Ano Colegial – Fase 3, p.145) e 27 (Quadro comparativo da análise da metodologia de apresentação dos conteúdos, dos livros 3.ª Série/3.º Ano Colegial/3.º Livro/ Terceiro Ano Colegial – Fase 3, p.147), ajuda a confirmar a *vulgata* evidenciada por Ribeiro (2011), e nos permite novamente *enxergar a Matemática do Colégio,* agora, a nosso ver, sob condições mais estáveis e favoráveis.

O *algo mais* que faltava para a estabilização da disciplina, no nosso entender, foram as mudanças empreendidas nos programas de Matemática dos Cursos Clássico e Científico, possibilitando um *rol de conteúdos estável,* que por sua vez *incentivou e estabilizou também a produção didática,* originando a *vulgata* e, no fim, *tornou também o ensino mais estável.*

Assim, à luz de tudo o que foi exposto e nos resultados da análise dos livros didáticos, concluímos que *a Matemática do Colégio se estabilizou* no período do Programa Mínimo.

A Fase 4 considerou o período 1961-1970, um período caracterizado pela *turbulência do MMM.* Esse quadro todo de estabilidade da Fase 3, acima apresentado, é submetido aos *fortes ventos do MMM,* que *começaram a soprar nos finais da década de 1950.* Tais ventos chegaram por meio dos Congressos Nacionais de Ensino da Matemática e também da ida de professores brasileiros para participarem de cursos no exterior.

No texto “Panorama da disciplina escolar Matemática do Colégio no início da Fase 4”, intentamos mostrar que, de imediato, perde-se a referência curricular, por meio dos quadros de números 28 (Quadro Comparativo de Conteúdos – Proposta do GEEM e Livros traduzidos do SMSG para o Colegial, p.532) e 29 (Quadro Comparativo – Programa Mínimo – Curso Colegial e “Proposta do GEEM” – Colégio, p.538), na medida em que os programas estabilizados, vindos do Programa Mínimo, são questionados pelos *novos parâmetros da Matemática Moderna,* de início, no ciclo ginasial e, um pouco mais tarde, em 1964, no ciclo colegial.

Nosso entendimento é de que, na realidade, os Cursos Clássico e Científico estiveram em funcionamento até 1971, ano da LDB n.º 5.692/1971; nessa situação havia dois sistemas de ensino e dois modelos curriculares convivendo conflituosamente, em uma *batalha no interior da Cultura Escolar.*

A LDB n.º 4.024/1961 deu liberdade curricular aos Estados, e todo esse clima gerou muita instabilidade no meio editorial do colegial, desencorajando, de certa maneira, dois *best-sellers,* o Professor Osvaldo Sangiorgi e a Companhia Editora Nacional, a produzir didáticos para esse nível de ensino.

Para nós, sinais fortes de perda da estabilidade curricular e disciplinar, construída a partir de um processo desde 1931, como foi mostrado.

Comparamos os índices dos livros de duas coleções, Matemática para o Primeiro, Segundo e Terceiro Ano Colegial, Ary Quintella, uma do período Programa Mínimo e outra do período da Matemática Moderna (quadros de números 30, 31 e 32, páginas 540, 541 e 542, respectivamente). Percebemos que são idênticos, com apenas uma diferença nos livros de Primeiro Ano Colegial. Inferimos que, provavelmente, diante da falta de didáticos para o Colegial, os livros foram reeditados, confirmando, de certa maneira, a informação acima citada relativa à *existência de dois sistemas de ensino e dois modelos curriculares, convivendo conflituosamente no período 1961-1970.*

Para análise, ficamos com duas coleções: a coleção Matemática Curso Colegial, volumes I, II e III, do SMSG, e a coleção Matemática Curso Colegial Moderno, volumes 1, 2 e 3, editada pelo IBEP.

As análises das Estruturas Externa e Interna, evidenciadas nos quadros 33 (Quadro comparativo – Análise da Estrutura Externa – Livros Volume I – Fase 4, p.162), 34 (Quadro comparativo – Análise dos índices dos Livros Volume I – SMSG e IBEP – Fase 4,p.164) e 35 (Quadro Comparativo – Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos – Livro Matemática – Curso Colegial – Vol. I – SMSG – 1964 e Livro – Matemática – Curso Colegial Moderno – Vol. I – 1967 – Fase 4, p.166), confirmaram nossas suspeitas: a falta de um padrão, uma vez que os livros eram diferentes em suas materialidades e concepções didáticas, e não foi mais possível *enxergarmos a disciplina.*

Entendemos, então, em face do que vimos no período 1961-1970, que houve uma *alteração significativa* no programa de conteúdos que vinha do Programa Mínimo, com *novas finalidades do ensino* trazidas pelo Movimento da Matemática Moderna. O continuar das pesquisas para além de 1971, abrangendo as modificações impostas pela LDB n.º 5.692/1971, poderá mostrar o novo *layout* desse programa de conteúdos.

Assim, ao final da Fase 4, concluímos que a Matemática do Colégio *perde a estabilidade e se desconstitui*, e ela sofrerá um processo de *reconfiguração* que poderá ser mostrado com o avanço das pesquisas acima citado.

Voltemos nossa atenção nesse momento à questão central desta pesquisa: Como se constituiu historicamente a disciplina Matemática do Colégio?

A Matemática do Colégio *não se constitui* no período dos Cursos Complementares (1931-1942), *se constitui* no período dos Cursos Clássico e Científico (1943-1951), *estabiliza-se* no período do Programa Mínimo (1952-1960), *perde a estabilidade e se desconstitui* no período da Matemática Moderna (1961-1970), e entendemos que *ela vai buscar uma nova configuração.*

Julgamos importante e interessante a continuação das pesquisas além de 1971, ano da LDB n.º 5.692/1971. Conforme mencionado, essa disciplina terá *uma nova configuração,* e a descoberta dessa configuração dará condições de entender a continuidade desse processo de constituição da disciplina. Na medida em que *a disciplina torna o ensino possível, entender o processo disciplinar nos leva a compreender o ensino, podendo nos ajudar a melhor trabalhar as questões educacionais, tão urgentes e vigentes nos dias atuais.*

REFERÊNCIAS

ABRANTES, A.C.S. de. *Ciência, educação e sociedade:* o caso do Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura (IBECC) e da Fundação Brasileira de Ensino de Ciências (FUNBEC). 2008. 312 f. Tese (Doutorado em História das Ciências) – Casa de Oswaldo Cruz, Fiocruz, Rio de Janeiro.

BRASIL. Decreto-lei n.º 4.244, de 09 de abril de 1942. Lei Orgânica do Ensino Secundário. Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=7108&tipoDocumento=DEL&tipoTexto=PUB>. Acesso em: 5 maio 2013.

———. Decreto n.º 19.890, de 04 de abril de 1931. Dispõe sobre o funcionamento do Ensino Secundário. Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=40440&tipoDocumento=DEC&tipoTexto=PUB>. Acesso em: 5 maio 2013.

BÚRIGO, E.Z. *Movimento da Matemática Moderna no Brasil(porque itálico?):* estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. 229 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

CARVALHO, T.M. *Lições de matemática*. Rio de Janeiro: Casa Mattos, 1938. 64 p.

CERTEAU,M. de. *A invenção do cotidiano*: artes de fazer. Petrópolis: Vozes, 2008. 351 p.

CHARTIER, R. O mundo como representação. Tradução de Andréa Daher e Zenir Campos Reis. *Estudos Avançados*, São Paulo: USP, 11(5), p. 173-191, 1991.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, Porto Alegre: Panonina, n. 2, 1990.

CHOPPIN, A. Pasado y presente de los manuales escolares. In: BERRIO, J.R. *La cultura escolar de Europa*: tendências históricas emergentes. Madrid: Biblioteca Nueva, 2000. cap. 3, p. 107-141.

———. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 30, p. 549-566, set.-dez. 2004.

CUNHA, H.L. *Pontos de álgebra complementar*. Rio de Janeiro: Typografia Alba, 1939. 281 p.

DALLABRIDA, N. A reforma Francisco Campos e a modernização nacionalizada do ensino secundário. *Educação* (PUC/RS, Impresso), v. 32, p. 185-191, 2009.

DASSIE, B.A. *A matemática do Curso Secundário na Reforma Gustavo Capanema*. 2001. 266 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

DVD. A *Matemática do Colégio*: livros didáticos para a história de uma disciplina. Organização de Wagner Rodrigues Valente e Francisco Oliveira Filho. GHEMAT, 2011.

D’AMBRÓSIO, B. S. *The dynamics and consequences of the modern Mathematics Reform Movement for Brazilian Mathematics Education. 1*987. 257 p. Tese (Doutorado em Filosofia) – Indiana University, Indiana.

FARIA FILHO, L.M. de; GONÇALVES, I.A; VIDAL, D.G.; PAULILO, A.L. A cultura escolar como categoria de análise e como campo de investigação na história da educação brasileira. *Educação e Pesquisa* (USP, Impresso), São Paulo, v. 30, n. 1, p. 139-159, 2004.

FRAGO, A.V. *Sistemas educativos, culturas escolares e re*formas. Portugal: Edições Pedago, 2007. 154 p.

GUIMARÃES, H. M. Por uma matemática nova nas escolas secundárias – perspectivas e orientações curriculares da matemática moderna. In: MATOS, J.M.; VALENTE, W.R. *A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal*: primeiros estudos. São Paulo: Da Vinci, 2007. Parte 1, p. 21-45.

JULIA, D. A Cultura escolar como objeto histórico*. Revista Brasileira de História da Educação*, Sociedade Brasileira de História da Educação, Curitiba, p. 9-43, jan.-jun. 2001.

LIMA, G. *Pontos de matemática*. São Paulo: Impressora Paulista, 1938. 375 p.

MARQUES, A.S. *Tempos pré-modernos*: a matemática nas escolas dos anos 1950. 2005. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MIORIM, A.M. *Introdução à história da educação matemática*. São Paulo: Atual, 1998. 121 p.

NUNES, M.T. *Ensino Secundário e sociedade brasileira*. São Cristóvão: Editora da UFS, 1999.

OLIVEIRA FILHO, F. *O School Mathematics Study Group e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil*. 2009. 204 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo.

OTONE E SILVA, M.C. A matemática do Curso Complementar da Reforma Francisco Campos. 2006. 211 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

———. *Uma história da constituição da Matemática do Colégio no Cotidiano Escolar*. 2011. 294 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PROST, A. Comment faire l´histoire des réformes de l´enseignement? In: BELHOSTE, B; GISPERT, H; HULIN, N. *Un siècle de reformes des mathématiques et de la physique en France et à l´étranger*. Paris. LIbrarie Vuibert, 1996. p. 15-25.

RIBEIRO, D.F.C. *Dos Cursos Complementares aos Cursos Clássico e Científico*: a mudança na organização dos ensinos de matemática. 2006. 243 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

———. *Um estudo da contribuição de livros didáticos de matemática no processo de disciplinarização da matemática escolar do colégio – 1943 a 1961*. 2011. 266 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

ROMANELLI, O.O. *História da educação no Brasil*. 5. ed. Petrópolis: Vozes, 1984. 268. p.

SERRÃO, A.N. *Lições de matemática para médicos e químicos*. Porto Alegre: Globo, 1941. 348 p.

———. *Lições de trigonometria retilínea e de cálculo vectorial*. Rio de Janeiro: Boffoni, 1942. 240 p.

SOUZA, G.L.D. *Educação matemática na CENP*: um estudo histórico sobre condições institucionais de produção cultural por parte de uma comunidade de prática. 2005. 432 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

VALENTE, W. R. *Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil*. Brasília: UnB, 2004a.

——— (Org.). *O nascimento da matemática do ginásio*. São Paulo: Annablume, 2004b. 156. p.

———. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. *Zetetiké* – Cempem – FE – Unicamp, v.16, n. 30, p. 149-171, jul.-dez. 2008.

———. DVD. IV Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática, Belém do Pará, 22 a 28 de junho de 1962 (Documentos). GHEMAT, 2009.

——— (Org.) *Osvaldo Sangiorgi*: um professor moderno. São Paulo: Anablume, 2008. 248 p.

———. A matemática do colégio através dos livros didáticos: subsídios para uma história disciplinar. In: IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2009, Brasília. *Anais*... UCB-2009 IV SIPEM. Brasília: SBEM-UCB, 2009. v. 1.

———. A Matemática do ensino secundário: duas disciplinas escolares?. *Revista Diálogo Educacional* (PUCPR, Impresso), v. 11, p. 645-662, 2011.

Livros analisados

CARVALHO, T, M. *Lições de matemática*. Rio de Janeiro: Casa Mattos, 1938.

———. *Matemática para os Cursos Clássico e Científico, Primeira Série*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1945.

———. *Matemática para os Cursos Clássico e Científico, Segunda Série*. 4. ed. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1948.

———. *Matemática para os Cursos Clássico e Científico, Terceira Série*. 2. ed. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1948.

———. *Matemática para os Cursos Clássico e Científico, 1.º Ano Coleg*ial. 10. ed. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1955

———. *Matemática para os Cursos Clássico e Científico, 2.º Ano Colegial*. 8. ed. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1956.

———. *Matemática para os Cursos Clássico e Científico, 3.º Ano Co*legial. 6. ed. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1956.

CUNHA, H. L. *Pontos de álgebra complementar* (teoria das equações). Rio de Janeiro, 1939.

LIMA, G. *Pontos de Matemática*. São Paulo: Impressor Paulista, 1938.

MAEDER, A. M. *Curso de Matemática* – 1.º Livro – Ciclo Colegial. 7. ed. São Paulo: Melhoramentos, 1946.

———. *Curso de Matemática* – 2.º Livro – Ciclo Colegial. 4. ed. São Paulo: Melhoramentos, 1951.

———. *Curso de Matemática* – 3.º Livro – Ciclo Colegial. 2. ed. São Paulo: Melhoramentos, 1949.

———. *Curso de Matemática* – 1.º Livro – Ciclo Colegial. 7. ed. São Paulo: Melhoramentos, 1953.

———. *Curso de Matemática* – 2.º Livro – Ciclo Colegial. 9. ed. São Paulo: Melhoramentos, 1959.

———. *Curso de Matemática* – 3.º Livro – Ciclo Colegial. 7. ed. São Paulo: Melhoramentos, 1959.

PEIXOTO, R. *Elementos de cálculo vetorial*, Rio de Janeiro: Minerva, 1943.

———. *Elementos de geometria analítica*. Rio de Janeiro: Editora Oscar Mano & Cia., 1938.

PIERRO NETO, S.; ROCHA, L. M.; BARBOSA, R. M. *Curso colegial moderno*. São Paulo: IBEP, 1967. v. 1.

———; ———; ———. *Curso colegial moderno*. São Paulo: IBEP,1968. V. 2.

———; ———; ———. *Curso colegial moderno*. São Paulo: IBEP,1970. v. 3.

QUINTELLA, A. *Matemática* – para o primeiro ano colegial. 9. ed. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1960.

———. *Matemática* – para o segundo ano colegial. 2. ed. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1957.

———. *Matemática* – para o terceiro ano colegial. 9. ed. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1960.

RESNIK, M. *Curso de trigonometria*. São Paulo: Acadêmica, 1936.

ROXO, E. *Lições de matemática* (números complexos).

ROXO, E. *Lições de matemática* (noções de álgebra vetorial).

———; PEIXOTO, R.; CUNHA, H. L.; NETTO, D. *Matemática, 2.º Ciclo, 2.ª Série*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1944.

———; ———; ———; ———. *Matemática, 2.º Ciclo, 1.ª Série*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1945.

———; ———; ———; ———. *Matemática, 2.º Ciclo, 3.ª Série*. 3. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1949.

———; ———; ———; ———. *Matemática, 2.º Ciclo, 1.ª Série*. 8. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1955.

———; ———; ———; ———. *Matemática, 2.º Ciclo, 2.ª Série*. 8. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1957.

———; ———; ———; ———. *Matemática, 2.º Ciclo, 3.ª Série*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1956.

SERRÃO, A. N. *Lições de matemática para médicos e químicos*, 1941.

———. *Lições de trigonometria retilínea e de cálculo* vectorial, 1942.

SMG. *Matemática curso colegial*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1964. v. 1.

———. *Matemática curso colegial.* 2. ed. São Paulo: Livraria Editora Ltda. 1966. v. 2.

———. *Matemática curso colegial.* 1. ed. São Paulo: Livraria Editora Ltda. 1966. v. 3.

ANEXO DESCRITIVO FASE 1

Anexo 1
Análise dos livros didáticos – Lote 1

Lote 1 – Livros em que os autores procuraram reunir os temas dos programas dos Cursos Complementares em um só livro.

Livros a serem analisados:

Livro 1 – Lições de Matemática – Thales e Mello Carvalho – 1938 (Anexo 1, p.259).

Livro 2 – Pontos de Matemática – Gumercindo Lima – 1938 (Anexo 2, p.260).

Livro 3 – Lições de Matemática para Médicos e Químicos – Alberto Serrão – 1941 (Anexo 6, p.264).

Análise do Livro 1 – Lições de Matemática – Thales Mello Carvalho – 1938

O que se pode observar pela análise do "Quadro comparativo – programa do Curso Complementar Pré-politécnico e conteúdos Livro 1" (p.229), é que uma grande quantidade de conteúdos do programa deixou de ser atendida (p.231), por um tipo de produção que se propôs a "reunir os temas constates do programa dos cursos complementares, num único livro". Temos que considerar que o livro em estudo é o "1.º fascículo" e, na existência de outros fascículos, componentes da obra, os conteúdos podem vir a atender ao Programa. De qualquer maneira, vamos levar em consideração só os conteúdos desse fascículo.

Análise da estrutura externa do Livro 1

Tamanho: (21,5 x 27.5) cm.

O material da capa (Anexo 1, p.259) do livro é similar a um papel-cartão (cartolina), com acabamento simples, contendo as seguintes informações:

– Na parte superior o nome do autor, “Thales de Mello Carvalho”, seguida de uma biografia do mesmo: “Engenheiro Civil e geógrafo pela Escola Politécnica da Universidade Técnica Federal (atual Escola Nacional de Engenharia). Professor de Matemática (por concurso) do Ensino Secundário do D. Federal”.

– No meio da capa, as informações do nome do livro: “Lições de Matemática”, seguida das seguintes informações: “De acordo com o programa do Curso Complementar de Engenharia, 6.ª Tiragem, acrescida de um capítulo contende exercícios resolvidos e para resolver”.

– Na parte inferior, as seguintes informações: 1.º Fascículo, Preço...15$000.

A primeira página traz as mesmas informações da capa, já citadas.

A página seguinte traz o Prefácio e na seguinte o Índice.

O livro não apresenta bibliografia.

O livro contém 64 páginas.

Análise da estrutura interna do Livro 1

No prefácio, o autor usa de uma fábula, envolvendo Ptolomeu e Euclides, para dizer que o livro tem o objetivo de “tornar mais acessível o caminho a ser percorrido pelos alunos nos estudos”. O autor data o prefácio da seguinte maneira: “Rio, Agosto de 1938, O AUTOR”.

Índice – Anexo descritivo Fase 1 – Anexo 6, p.233.

No capítulo I, Números irracionais, o autor apresenta o assunto em 6 (seis) subitens, assim discriminados: 1. A evolução do conceito de número (esboço ligeiro); 2. A generalização algébrica da noção de número; 3. Concepção de Dedekind; 4. Definições de igualdade e ordem na classe dos números reais; 5. Operações sobre irracionais e 6. Noção de intervalo, Continuidade das operações aritméticas.

No subitem 1, " A evolução do conceito de número", o autor faz uma contextualização histórica do conceito de número. Observa-se que o autor serve-se de notas de rodapé sempre que quer acrescentar uma informação relevante (definições, nomes de livros, comentários sobre autores) a seu texto. Exemplo de uma nota de rodapé na página 4, quando ele iniciou a explicação do subitem "A evolução do conceito de número":

> Em sua simplicidade primitiva, é a relação de correspondência entre objetos de duas coleções, na qual a análise requintada reconhece a essência da noção de número (AMOROSO COSTA – As ideias fundamentais da Matemática, p. 73) (CARVALHO, T,M. 1938, p.4).

Ao conceituar os números irracionais o autor cita que a descoberta deles veio destruir a crença dos gregos de que "a cada relação entre grandezas geométricas deveria corresponder uma relação entre números inteiros" (p. 5).

Observação: Na página 5 existem 5 (cinco) notas de rodapé, revelando a bibliografia por ele consultada, sendo 3 (três) delas, livros estrangeiros, as quais serão transcritas, uma vez que o mau estado do livro não permitiu a digitalização da página.

> (1) H. WIELEITNER – "Der Begriff der Zahl" – Leipzig und Berlin – 1927, pag. 9.
> (2) F. KLEIN – "Elementary Mathematics form an advanced Standpoint" – Translated by Hedrick and Noble – N.Y. Macmillan – 1932 – pag. 24.
> (3) Veja CURIOSIDADES MATEMÁTICAS de T.M.C. COLEÇÃO PORTATIL.
> (4) H. WIELEITNER – op. cit. pag. 6.
> (5) Veja RAJA GABAGLIA – O mais antigo documento matemático conhecido(CARV ALHO, T, M, 1938, p.5).

Em termos de metodologia para a abordagem dos conteúdos, o autor, no capítulo 1, faz uma introdução histórica do assunto e discorre sobre o mesmo, utilizando-se de notas de rodapé, mas sem utilizar-se de exemplos e apresentar exercícios, resolvidos ou a resolver, com respostas ou sem respostas.

Capítulo II – Análise Combinatória – contém 36 (trinta e seis) subitens.

Percebemos que a partir do item 14 (Exercício), é apresentado um exercício resolvido dos seguintes temas: fórmula dos arranjos; fórmula dos arranjos com repetição; fórmula das permutações; permutações com repetição; números binominais. Abaixo transcrevemos o item 14, exercício resolvido relativo ao item 13, “Fórmula dos arranjos”.

> 14 – Exercício
> Quantos arranjos ternários se podem formar com 8 objetos?
> Solução: São dados do problema, m = 8 e p = 3. Logo, m – p + 1 = 8-3+1 = 6.
> Portanto $A_8{}^3$ = 8 x 7 x 6 = 336.(CARVALHO, T. M, 1938, p.14)

Nesse capítulo não foi utilizado o recurso das notas de rodapé.

Na página 58 são apresentados oito exercícios resolvidos de assuntos diversos num item denominado “Exercícios resolvidos”, numerados de 1 a 8. Abaixo foram transcritos 2 (dois) deles, uma vez que, pelo mau estado do livro não conseguimos bom resultado com a digitalização da página.

> Exercícios resolvidos
> 2 – Com os algarismos significativos quantos números de 9 algarismos se podem formar de modo que os algarismos pares fiquem sempre juntos?
> Solução:
> Consideremos os quatro algarismos pares como formando um só elemento, 1, 3, 5, 7, 9, (2,4,6,8). Devemos, então, calcular o número de permutações de 6 elementos ou 6 ! , e em seguida multiplicá-lo por 4 ! , porque de cada grupo de permutações de 6 elementos, podemos formar 4 ! grupos diferentes, permutando somente os algarismos pares. A resposta é, pois, 6 ! x 4 ! = 17.280.
> 3- De quantas maneiras é possível permutar as letras da palavra MATEMÁTICA de modo que as vogais ocupem sempre os lugares pares?
> Solução:
> Basta formar separadamente as permutações das consoantes e as das vogais.
> (1) M T M T C P = 5 ! / 2 ! x 2 ! = 30
> (2) A E A I A P = 5 !
> A solução é dada pelo produto 20 x 30 = 600, porque a cada grupo de permutações de (1) devemos juntar todas as permutações de (2)(CARVALHO, T, M, 1938, p.58)

Na página 61, em um item denominado "Exercícios para resolver", são apresentados 28 (vinte e oito) exercícios propostos com respostas, numerados de 9 a 36. Fizemos a transcrição de alguns deles abaixo.

> Exercícios para resolver
> 9. O número de combinações de 8 elementos n + 1 a n + 1 é igual à metade do número de combinações de 8 elementos n + 2 a n + 2. Determinar "n".
>
> Resp.: n = 1
>
> 10. Com os algarismos significativos quantos números pares de 3 algarismos sem repetição se podem formar?
>
> Resp.: 224.
>
> 11. O número de arranjos simples de n-1 elementos 3 a 3 está para o número de arranjos de n+1 elementos 3 a 3 assim como 7 está para 15. Determinar "n".
>
> Resp.: 9.
>
> (CARVALHO, T, M, 1938, p.61)

Em termos de metodologia para a abordagem dos conteúdos, o autor, no capítulo 2 faz uma introdução e desenvolve o conteúdo, sendo que a partir do item 13, como já relatado, usa mão do recurso de exercício de exemplo.

Observações finais sobre o livro:

O livro apresenta uma linguagem técnica, não muito direta, dando a entender que o aluno entenderia melhor o assunto, quando do acompanhamento das aulas. Não é um livro que se apresente pronto para o aluno aprender pelo mesmo, sem o acompanhamento das aulas (um livro em que o assunto é desenvolvido de modo explicativo ou autoexplicativo).

O livro não apresenta diretamente uma bibliografia, mas as notas de rodapé, constantes no interior do livro, já dão pistas de parte da bibliografia utilizada pelo autor.

Embora o livro não apresente uma mesma estrutura interna em todos os capítulos, relativamente à metodologia de apresentação dos conteúdos, poderíamos resumi-la da seguinte forma: introdução e desenvolvimento dos conteúdos, com exercícios resolvidos e a resolver com respostas ao final do livro.

Análise Livro 2 – Pontos de Matemática (segundo os programas dos Cursos Complementares) – Gumercindo Lima – 1938

Analisando o quadro comparativo (p.234) entre os conteúdos do Livro 2 e o programa do Curso Complementar Pré-politécnico e Pré-médico, podemos dizer que o livro Pontos de Matemática (segundo os programas dos Cursos Complementares) – Gumercindo Lima, atende tanto a programa do Curso Complementar Pré-médico, quanto ao do Pré-politécnico. Observa-se que o livro tem um índice enciclopédico e extenso.

Análise da Estrutura externa do Livro 2

Tamanho: (16,5 x 24,0) cm

Livro com capa dura, cor verde, sendo que na lombada encontramos o nome do livro e do autor, mas nenhuma informação sobre o livro na capa. Abrindo o livro, temos uma página em branco. A página seguinte apresenta uma página onde temos todas as informações do livro: em cima o nome do autor, Gumercindo Lima, com a observação: Professor do Ginásio de Alfenas. Logo abaixo, o nome do livro "Pontos de Matemática", descendo, temos a observação "Segundo os programas dos Cursos Complementares" e embaixo, temos os detalhes da editora assim disposto:

Imprimiu: Soc. IMPRESSORA PAULISTA Ltda.

RUA SCUVERO, 152 – SÃO PAULO – CAIXA POSTAL 2497

1938

Tais informações nos levam a inferir que a capa original do livro teve esse formato e que a capa verde, hoje existente, foi depois colocada no mesmo, por desgaste da capa original (Anexo de Imagens – Fase 1 – Anexo 2, p.260).

Temos na parte traseira desta página uma tira, onde há uma mensagem sobre outra obra do autor: "Do mesmo autor: Curso de Física, Para os Cursos Complementares – Em preparação" (LIMA, G, 1938).

Após a página citada acima que contém uma "tira" anunciando outra obra do autor, temos uma página dobrada chamada "errata", onde constam erros do livro.

Atrás dessa página, uma dedicatória do autor: “Ao Dr. ROQUE N. TAMBURINI, paladino da instrução secundária em Minas Gerais, dedico este trabalho. G. Lima” (LIMA, G, 1938).

A próxima página repete a contracapa do livro onde constam o nome e pequena biografia do autor, o nome do livro, a Editora e o ano de edição.

Na próxima página um prefácio assinado pelo autor, chamado “AO LEITOR”.

No texto do prefácio do autor e nos grifos impingimos ao mesmo, nota-se o forte caráter preparatório da obra.

Na próxima página um texto denominado “Prefácio” assinado por dois professores, Christovam Colombo dos Santos, professor catedrático da Escola Nacional de Minas e Metalurgia da Universidade do Brasil e da Escola de Engenharia da Universidade de Minas Gerais; e Miguel Mauricio da Rocha, catedrático da Escola Nacional de Minas e Metalurgia da Universidade do Brasil.

O livro não tem Índice nem bibliografia. O índice apresentado no “quadro comparativo” (p.234), foi retirado do livro após percorrermos os capítulos do mesmo.

O livro contém 375 (trezentas e setenta e cinco) páginas.

Análise da estrutura interna do Livro 2

O prefácio do autor, texto denominado “Ao leitor” é abaixo reproduzido:

> O que se vai ler não constitui propriamente um livro. É uma *compilação* (grifo nosso) de pontos exigidos pelos programas dos Cursos Complementares, para admissão às Faculdades de Medicina, Farmácia, Odontologia e Engenharia. Nada encerra de meu a não ser simplificação cuidadosa e resumo conciso de teorias desenvolvidas magistralmente em obras como o **“Cours de Mathématiques Spéciales” de H.Commissaire e Cagnac** (grifo do autor). Limitei-me a joeirar em seara alheia, notadamente em **Boutroux** (grifo do autor) -, mestre a quem devo minha formação intelectual – cujos ensinamentos, com a devida licença, vou reproduzindo em muitas passagens do livro. Não caberá aqui a aplicação do provérbio chinês, citado por **Silvanus Thompson** (grifo do autor): “Aquilo que um imbecil pode fazer, outro também pode”,

> justamente porque nada fiz senão condensar em um pequenino volume, de fácil manuseio e custo reduzido, a matéria esparsa em excelentes tratados especializados mas de difícil ou quase proibitiva aquisição por parte da maioria de nossos estudantes. É óbvio dizer que o presente livrinho destina-se apenas àqueles que não podem adquirir outros melhores, visto não ter eu a pretensão de impingi-lo como cousa original ou repositório de erudição. Longe disso: *os "Pontos" nada mais querem ser do que um "aide-mémoire" para os alunos que realmente desejam seguir com proveito as lições ministradas pelo professor,* sem os embaraços da consulta a autores estrangeiros de tão difícil assimilação, para quem não versa com habilidade o francês, o inglês ou o alemão. Outro mérito não tem o livro que o do desejo de ser útil à mocidade estudiosa do Brasil, facilitando-lhe a tarefa e poupando-lhe tempo na execução dos atuais programas (LIMA, G, 1938).

O sentido do texto do autor e os grifos impingidos por nós ao mesmo, nota-se o forte caráter preparatório da obra, uma das marcas do período dos Cursos Complementares.

No texto denominado "Prefácio" assinado por dois professores, Christovam Colombo dos Santos, professor catedrático da Escola Nacional de Minas e Metalurgia da Universidade do Brasil e da Escola de Engenharia da Universidade de Minas Gerais; e Miguel Mauricio da Rocha, catedrático da Escola Nacional de Minas e Metalurgia da Universidade do Brasil. O professor Christovam tece elogios à obra de Gumercindo Lima, dizendo que a mesma "quebra um rigoroso jejum a que têm sido condenados os estudantes dos Cursos Complementares" e dizem que a obra seja talvez "o maior e o mais louvável esforço levado a efeito no sentido de dotar a ciência indígena de um compêndio onde professores e estudantes encontrem amplamente explanado todo o assunto a versar". O professor Miguel Mauricio fecha o texto, concordando com o professor Christovam e exaltando as qualidades do professor Gumercindo Lima.

O capítulo I inicia-se com o assunto Cálculo Combinatório. É feita uma introdução do assunto com uma introdução histórica, constando de quatro parágrafos, fechando com a frase: "O verdadeiro interesse do Cálculo Combinatório reside nos serviços prestados à Álgebra e, sobretudo, ao Cálculo das Probabilidades" (LIMA G, 1938, p.9). Depois, seguem-se os demais itens.

O primeiro item “Permutações”, o autor conceitua o termo “permutações” e termina pela definição de “fatorial de m”, como resultante do número de permutações de “m” elementos. A linguagem é simples e direta, não sendo uma linguagem muito técnica em termos matemáticos. Depois, os seguintes itens: permutações com repetição; arranjos; arranjos com repetição e combinações.

Observação: No capítulo I não são observados exemplos, exercícios resolvidos ou propostos sobre os temas tratados.

No capítulo II o assunto é Determinantes. É feito uma introdução histórica do assunto, onde o autor explica, utilizando-se de uma citação de J. Tropfke:

> Os primórdios da teoria dos Determinantes se encontram numa carta de Leibnitz a L’Hospital. A teoria foi desenvolvida por Cramer e o nome determinante foi introduzido na linguagem matemática por Cauchy (J.TROPFKE, apud LIMA, G, 1938, p. 14).

Depois, seguem-se a conceituação de determinante, determinante menor, Regra de Sarrus, propriedades dos determinantes. Por exemplo, propriedade 8: Pode-se transformar um determinante em outro no qual os elementos de uma linha ou coluna sejam o número 1. Podemos observar dois exemplos no Anexo 3 (p.261).

No final do capitulo, após o último assunto (Sistema de Equações Lineares homogêneas), existe um item denominado “Aplicações”, onde constam 3 (três) exercícios resolvidos de sistemas de equações lineares (Anexo 4, p.262).

Por fim, o capítulo é fechado com cinco exercícios propostos visando a abranger o conteúdo todo do capítulo. No Anexo 5 (p.263), podemos ver alguns deles.

O capítulo X, já na “Parte Segunda” do livro, o item “Noções de Geometria Analítica” inicia-se com um texto grande, mais ou menos uma página, intitulado “Concepção de Descartes”, onde o autor discorre sobre René Descartes. A primeira frase é assim colocada pelo autor: “A reforma da figuração geométrica do mecanismo algébrico, foi obra de René Descartes, que em 1629 imaginou os princípios da Mathesis universalis” (LIMA, G, 1938, p. 304).

Na sequência, discorre sobre a obra “Discurso do Método” e no último parágrafo fala sobre a fundamentação da geometria de Descartes: “A Geometria de Descartes funda-se na representação das funções por meio de um sistema de coordenadas” (p. 305). Depois vai apresentando os demais itens do capítulo e após o item “Coordenadas Polares no Espaço” apresenta uma série de exercícios chamada “Exercícios de Aplicação” (página 308), com nove exercícios, mas são “exercícios propostos sem respostas". Transcrevemos abaixo alguns deles.

> EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO
> 1- Em que eixo está um ponto de abscissa igual a zero?
> 2- Um ponto move-se paralelamente ao eixo dos X; pergunta-se qual das coordenadas é constante?
> 3- Marcar os pontos cujas coordenadas são:
> P { x = 2 e y = 3 ; P_1 { x = – 3 e y = 3 ; P_2 { x = 2 e y = -5
> 4- Construir um triângulo cujos vértices A, B e C têm, respectivamente as coordenadas: (3, 2) ; (-1, -3) e (2, -4) (LIMA, G, 1938, p.308).

Essa situação se repete também com os itens “Transformação de coordenadas no plano” (10 exercícios propostos), “Equação da reta, dadas as intersecções” (10 exercícios propostos); equação da circunferência (5 exercícios); equação da hipérbole – equação da parábola (10 exercícios).

No item, Geometria Analítica no Espaço (p.333), não foram observados exercícios de exemplo e/ou resolvidos. Fechando o capítulo, existem 9 exercícios propostos sem resposta, também chamados de “Exercícios de Aplicação” como podemos ver abaixo, na reprodução de alguns deles (não foi possível a digitalização da página em função do mau estado do livro).

> EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO
> 1- Determinar o comprimento do raio vetor de coordenadas (2,1,3), (2,-2,-1), (4,-3,-2).
> 2- Calcular os cossenos diretores de uma reta cujas coordenadas são: (3,2,1), (3,-1,2) e (-4,-2,-3).
> 3- Determinar os cossenos diretores do ponto (3,3,4) de um raio vetor.
> 4- Determinar os cossenos diretores da intersecção dos planos
> $2x + 2y - 2z = -2$
> $8x + 2y - 4z = -4$
>
> (LIMA, G, 1938, p.345)

Observações finais sobre o livro:

A linguagem do livro é direta, bem explicada. O autor vai explicando o assunto ao leitor, com o maior número de detalhes possíveis; não é um texto resumido. É um tipo de livro em que, aparentemente “podemos aprender o assunto pelo mesmo”.

O que se pode observar quanto à metodologia de apresentação do conteúdo do livro pelo autor, é que o mesmo não segue um padrão no que se refere à apresentação de exemplos e exercícios nos capítulos. Alguns capítulos apresentam exercícios resolvidos no item nomeado “Exercícios de Aplicação”.

O que é consenso é uma parte introdutória no início de cada capítulo, procurando dar um enfoque histórico do conteúdo que será apresentado, o desenvolvimento do assunto e exercícios propostos sem resposta ao final do capítulo.

Análise Livro 3 – Lições de Matemática para Médicos e Químicos – Alberto Nunes Serrão – 1941

O Quadro comparativo (Anexo 8,p.239), mostra os conteúdos do Livro 3 e programa do Curso Complementar Pré-Médico. Dessa comparação, observa-se que o livro, que se destina a atender ao Curso Complementar Pré-Médico (seu nome atesta isso), atende alguns pontos do programa do Curso Complementar Pré-Médico; outros deixaram de ser atendidos, como podemos observar na relação do Anexo 9 (p.242).

Análise da estrutura externa do Livro 3

Tamanho: (15 x 22,0) cm.

- Livro de capa dura e bem acabada, de cor verde. Na capa (p.264) temos as seguintes informações: nome do autor, Alberto Nunes Serrão, na parte de cima, no centro, o nome do livro, “Lições de Matemática para Médicos e Químicos” e na parte de baixo, “de acordo com o Programa dos Cursos Complementares” e “Edição da Livraria do Globo, Porto Alegre”, como podemos observar no Anexo 6 (p.264).

Na capa final, uma relação de livros da mesma editora, com o nome "Novos livros didáticos" e outra relação com o título "a sair".

A página após a capa tem um título no meio dela, "Lições de Matemática para Médicos e Químicos". Atrás dessa página há o seguinte texto:

"Do mesmo autor "Lições de Análise Algébrica", contendo todo o programa de Álgebra da 1.ª e 2.ª séries do Curso Complementar, Secção de Engenharia. Edições da Livraria do Globo, Porto Alegre".

A próxima página traz as informações da capa, já citadas, acrescidas de uma pequena biografia do autor, Alberto Nunes Serrão na parte de cima, assim escrita:

> Professor-chefe da secção de Matemática do Colégio Universitário da Universidade do Brasil. Engenheiro Civil e Geógrafo pela Escola Nacional de Engenharia. Docente-livro da Cadeira de Cálculo Infinitesimal, Geometria Analítica e Noções de Nomografia da Escola Nacional de Engenharia. Ex-professor de Matemática do Curso Complementar do Colégio Pedro II, do Instituto de Educação do Estado do Rio de Janeiro, etc. (SERRÃO, A N, 1941).

No meio da página, temos o nome do livro, "Lições de Matemática para Médicos e Químicos", seguida da frase "De acordo com o Programa dos Cursos Complementares". Logo abaixo um logotipo da Editora Globo e logo abaixo a frase "Edição da Livraria do Globo, Porto Alegre". No verso dessa página temos as seguintes informações, na parte de baixo da página: Edição n.º 1203 A, o ano , 1941 e as informações da Editora: Of. Gráf. da Livraria do Globo – Barcellos, Bertaso & Cia. Porto Alegre. Filiais: Santa Maria, Pelotas, Rio Grande e Rio de Janeiro.

A próxima página, contém o Prefácio, que traz ao final do mesmo o nome de 5(cinco) livros na bibliografia. Logo na página seguinte o Índice do livro, ocupando frente e verso.

No final do livro são apresentadas informações sobre a edição e informações sobre como solicitar a compra de volumes:

> Edição 1203A. Para pedidos telegráficos deste livro, basta indicar o número 1203A, antepondo a esse número a quantidade. Exemplo:

> para pedir 5 exemplares do presente livro basta indicar: GLOBO – Porto Alegre – 51203 A. Quando a quantidade a pedir for 10 ou mais exemplares não é necessário transmitir a letra A (SERRÃO, A, N, 1941).

O livro contém 348 (trezentas e quarenta e oito) páginas.

Análise da estrutura interna do Livro 3

O prefácio inicia-se com o autor citando um parágrafo de um grande fisiologista inglês, em que ele lamentava que livros de Bioquímica continham conteúdos importantes "encobertos sobre o véu da Matemática". No parágrafo, o biólogo que não tinha conhecimento suficiente de matemática para fazer críticas e que também a maioria dos alunos e fisiologistas também não teriam condições de fazer tal crítica. Depois o autor segue dizendo que o legislador, em face dessa realidade introduziu o ensino da matemática no primeiro ano dos Cursos Complementares de Medicina e também nas Faculdades de Filosofia.

Relata que, a despeito do número de horas destinado a tal ensino não seja suficiente para provocar resultados grandes, os estudantes reconhecem a valia quando estudam posteriormente Física, Química, Biologia e ciências correlatas. O autor diz que, à exceção da parte de Estatística, o livro segue o ensino de Matemática das classes de Medicina do Colégio Universitário da Universidade do Brasil, durante os períodos letivos de 1938, 1939 e 1940.

O autor justifica o afastamento da ordem dos programas oficiais, explicando que isso visou facilitar a compreensão dos assuntos pelos alunos. Revela que não teve preocupação de fundamentar conceitualmente os assuntos tratados e que se valeu em muitos casos da intuição, quando tratou de proposições de demonstrações rigorosas e difíceis. Fechando o prefácio o autor apresenta a seguinte bibliografia e a data do Prefácio, a qual foi transcrita abaixo:

> **Feldman, W.M. – Biomathematics,** being the principles of mathematics for students of biological science. 1935.
> **Scheffers, G. – Lehrbuch der Mathematik,** zum Selbstunterricht und für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. 1938.
> **Verriest, G. – Cours de Mathématiques Générales,** à l´usage des étudiants en sciences naturelles. 1935.

Mellor, J.W. – Higher Mathematics, for students of chemistry and physics. 1926.
Iniguez Almech – Matemáticas para Químicos. 1931.
Rio de Janeiro, 15 de abril de 1941.
(SERRÃO, A, N. 1941)

Índice (Anexo de Imagens – Fase 1 – Anexo 7, p.265).

Após o Índice tem um página em branco e no meio da mesma, a frase: Parte I – Elementos de Álgebra.

Dentro dessa Parte I, Elementos de Álgebra, o Capítulo I é dedicado à Análise Combinatória.

No item 1 o assunto a ser tratado é "Arranjos". O autor assim define: "Chamam-se arranjos de n objetos distintos tomados p a p aos diferentes grupos contendo p objetos e diferindo entre si, seja pela ordem, seja pela natureza dos objetos" (p. 11). Depois o assunto é assim desenvolvido: "Assim, com as três letras a, b, c tomadas duas a duas podemos formar os seis arranjos seguintes: ab, ba, ac, ca, bc, cb. O número de arranjos possíveis será anotado por meio do símbolo A^p_n. Escreveremos $A^2_3 = 6$" (p.11).

Os demais assuntos tratados no capítulo são: formação do quadro e dedução da fórmula dos arranjos; permutações; determinação do número de permutações; formação do quadro; combinações; formação do quadro; dedução da fórmula e teorema. Durante o desenvolvimento dos assuntos acima citados o autor, no final de cada um deles, à exceção de "Arranjos", há um exercício resolvido, num item chamado "Aplicação". O Capítulo I é encerrado com exercícios propostos com resposta, como podemos ver no Anexo 8 (p.267).

O Capítulo III é dedicado ao assunto "Teoria dos limites. Infinitamente pequenos". O item 1 dedica-se a uma introdução/definição, apresentada no Anexo 9 (p.268).

Ao longo do desenvolvimento desse capítulo, são apresentados dois exemplos (exercícios resolvidos), quando ele discorre sobre o seguinte princípio:

“Quando duas quantidades variáveis são constantemente iguais em todos os seus estados de variação, e uma tende para determinado limite a outra também tenderá para um dado limite e eles são iguais” (SERRÃO, A, N, 1941, p. 24) (Anexo 9,p.268).

Depois são apresentados três teoremas, com seus respectivos desenvolvimentos e ao final uma série de exercícios propostos com resposta intitulada “Exercícios relativos ao Capítulo III” contendo 2 exercícios com 3 itens cada, num total de 6 exercícios (Anexo 10, p.269).

A Parte V – Elementos de Cálculo Integral, inicia-se com o Capítulo XXIV, “Integrais indefinidas. Métodos gerais de integração”.

O mesmo inicia-se (item 1) com um texto destinado a mostrar a função do Cálculo Integral:

> O problema fundamental do Cálculo Diferencial consiste em determinar a derivada de uma dada função. O problema inverso da derivação pertence ao Cálculo Diferencial e se resume no seguinte: *Dada uma função y = f(x), determinar uma outra cuja derivada seja igual à função proposta.* A função assim determinada, toma o nome de *primitiva* da função considerada (SERRÃO, A, N, 1941, p. 244).

Segue-se um exemplo: Seja f(x) = x^3. Sua primitiva tem para expressão $x^4/4$. Por outro lado, a função f(x) = cos x em para primitiva sen x, pois a derivada desta última reproduz a primeira. Essa parte introdutória é fechada com a seguinte frase: “Os símbolos D (derivação) e $\int$ (integração) exprimem operações inversas” (p.245). O objetivo dele foi introduzir os conceitos de integração mostrando o que ela representa em relação à derivação. Observamos que nesse capítulo o autor lança mão de “notas explicativas” para reforçar um ou outro ponto ou conceito (p.270).

No final do capítulo, o autor apresenta 5 (cinco) exercícios resolvidos chamados por ele de “Exemplos” sobre cálculos de Integral (Anexo 12,p.271). Fechando o texto deixa quatro exercícios propostos sem respostas, com vários itens em cada um deles, totalizando 25 exercícios (Anexo 13,p.272).

Observações finais sobre o livro:

Percebemos que a estrutura interna do livro, relativamente à metodologia de apresentação dos conteúdos, não tem um padrão fixo dentro de cada capítulo. No geral cada capítulo apresenta a introdução do assunto, o desenvolvimento do mesmo e exercícios ao final.

Alguns capítulos têm exercícios resolvidos chamados de “Aplicação”, outros chamados de “Exemplos” com exercícios propostos com respostas. Esse capítulo que analisamos por último, apresentou notas explicativas ao longo do texto, uma “série de exercícios resolvidos ao final do capítulo” e uma “série de exercícios propostos sem resposta” também ao final.

A linguagem é simples e de fácil assimilação, e o texto vai fluindo, como se fosse o registro de uma aula ministrada.

Anexo 2
Análise dos livros didáticos – Lote 2

Lote 2 – Livros em que os autores tornaram independente cada tema dos programas dos Cursos Complementares – obras que procuram esgotar um dado assunto.

Livros analisados:

Livro 1 – Pontos de Álgebra Complementar (Teoria das Equações) – Haroldo Lisbôa da Cunha – 1939 (Anexo 14, p.273).

Livro 2 – "Elementos de Cálculo Vetorial" – Roberto Peixoto – 1943 (Anexo 20, p.283).

Livro 3 – Elementos de Geometria Analítica – Roberto Peixoto, 1938 (Anexo 22, p.285).

Livro 4 – Curso de Trigonometria – Miron Resnik, 1936 (Anexo 28, p.293).

Livro 5 – Lições de Trigonometria Retilínea e de Cálculo Vectorial – Alberto Nunes Serrão (Anexo 35, p.303).

Análise do Livro 1 – "Pontos de Álgebra Complementar (Teoria das Equações)" – Haroldo Lisbôa da Cunha.

Análise da Estrutura externa do Livro 1

Tamanho: (16 x 23) cm.

Livro com capa de um material tipo cartolina ou papel cartão. Acabamento simples. Na capa do mesmo (p.273), encontramos as seguintes informações:

– Na parte superior o nome do autor, Haroldo Lisbôa da Cunha, e uma breve biografia:

“Engenheiro civil e eletricista. Professor catedrático de Matemática do Colégio Pedro II e Docente-livre de Cálculo Infinitesimal e de Complementos de Geometria Analítica e Noções de Nomografia da Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil. Ex-professor de Educação, etc..”.

No meio da capa temos o nome do livro, “Pontos de Álgebra Complementar (teoria das equações)” e a observação: De acordo com o programa do Curso Complementar. Na parte inferior, “Rio de Janeiro – 1939”

A próxima página após a capa apresenta no meio da mesma o nome do livro: Pontos de Álgebra Complementar.

No verso desta página, a seguinte informação: “Todos os exemplares serão numerados e rubricados pelo autor”, e a assinatura do autor logo abaixo. Mais embaixo, temos o número deste exemplar: 2326. Na parte inferior da página, as informações sobre a Editora: “Composto e impresso na typografia ALBA, de Moreira, Cardoso & Freitas, Ltda. – Rua do Lavradio, 60 – Rio”.

Na próxima página uma dedicatória do autor: “A meu eminente mestre e dedicado amigo Ignacio M. Azevedo do Amaral”.

A próxima página apresenta um texto do autor com o título de “Advertência”, dando a entender que é o prefácio do livro.

O livro apresenta o Índice em duas páginas ao final do mesmo. Na última página, no meio da mesma, encontramos um símbolo (logo) da Editora, com a frase: “alba – oficinas gráficas = Lavradio 60 rio”.

O livro não apresenta bibliografia.

O livro compõe-se de 281 páginas.

Análise da estrutura interna do livro

O prefácio do livro recebeu o nome de “Advertência” e o autor inicia o texto dizendo que o conteúdo do livro refere-se apenas as aulas do professor no Colégio Pedro II e o livro tem por objetivo somente facilitar a vida do estudante, colocando-os a par dos conhecimentos teóricos essenciais e dando-lhes acesso a exercícios metódicos e aplicações. Relata que o programa de Álgebra da 2.ª Série do Curso Complementar visa apenas “um aspecto parcial da teoria das equações” e que o autor o seguiu *pari passu*. Destaca que as notas explicativas contidas no livro tiveram por objetivo “abrir campo maior ao estudioso e facilitar a revisão dos assuntos já conhecidos”. Com relação à revisão, disse que procurou fazer referência aos cursos de Niewenglowski e Comberousse, que são mais conhecidos dos alunos. Concluindo seu texto agradece aos alunos Francisco Kauffman e Maurício Matos Peixoto, que o ajudaram na revisão das questões propostas. Assina o texto como “O Autor”.

O Índice do livro (Anexo 15,p.274), que se localiza ao final do mesmo, é composto de um item chamado de “Advertência (prefácio)”, a Introdução e 12 (doze) capítulos, intercalados por exercícios. Ao final um item denominado “Nota” e outro, “Soluções dos Exercícios Propostos”.

Observação: Pelo próprio Índice acima descrito pode se notar a estruturação dos capítulos: noções preliminares, desenvolvimento dos assuntos e exercícios.

O livro tem seu início em um texto denominado “Introdução”, onde o autor busca definir, conceituar a *equação algébrica* em dois itens. No item 1, o autor assim se posiciona: “Uma equação é dita *algébrica,* quando as incógnitas que nela figuram estão sujeitas somente a operações algébricas (*) em número limitado” (CUNHA, H, L, 1939, p.9). Observa-se a seguinte nota de rodapé: “(*) Soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação” (CUNHA, H, L, 1939, p.9)

Segue-se uma descrição de um trecho do Capítulo I:

Capítulo I – Propriedades gerais dos polinômios. Princípio fundamental da teoria das equações

Noções preliminares

3. Dada uma equação sob forma canônica, para maior brevidade, representaremos por P(x) o polinômio que constitui seu primeiro membro, isto é, tomaremos: $P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_m$, ou melhor:

$P(x) = \Sigma_0^m a_i x^{m-i}$

Observação 1: a numeração do item (no caso esse item é o 3), segue a que foi iniciada na introdução (parou no 2).

Observação 2: neste capítulo, quando trata do “Algoritmo de Ruffini-Horner”, o autor apresenta 3 (três) exercícios resolvidos a título de exemplo (exemplos I, II e III). No Anexo 16 (p.278) , podemos ver os exemplos I e II. Esse recurso também é utilizado em outro item (Propriedades peculiares aos polinômios de coeficientes reais).

Uso de nota de rodapés: o autor lança mão de notas de rodapé quando quer esclarecer pontos de vista e bibliografias utilizadas.

No item 17 (p.37), “Princípio fundamental da teoria das equações”, o autor assim enuncia o “Teorema de D’Alembert-Gauss”: “Toda equação algébrica racional e inteira admite, pelo menos, uma raiz” (CUNHA, H, L, 1939, p.37). A essa enunciação e ao desenvolvimento dela, são relacionadas duas notas de rodapé. Esse item, seu desenvolvimento e as notas de rodapé podem ser observados no Anexo 17 (p.280).

Observação: Nesse item o autor inicia o assunto com uma citação, desenvolve o mesmo utilizando-se de notas de rodapé para melhor alicerçar sua linha de raciocínio.

Dadas às más condições do livro, reproduzimos as notas de rodapé citadas:

> (*) D´Alembert enunciou o teorema, apresentando uma demonstração imperfeita (“*Histoire de l´Academie Royal des Sciences”,* Berlim, 1746, pgs 182-191). A primeira demonstração rigorosa coube a Gauss, na memória: “*Demonstratio nova theorematis,* etc.”, Helmstedt, 1799, dando, além dessa, duas outras.

> (**) Argand, "*Essart sur une maniére de représenter lês quantités imaginaires,* etc.", Paris, 1806, e Cauchy, "*Cours d´Analyse de l´Ecole Polytechnique"* Paris, 1821 (CUNHA, H, L, 1939, p.37)

Ao final do capítulo é apresentada uma série de dez exercícios propostos, sem resposta, alguns deles com vários itens (Anexo 18, p.281).

O capítulo IV é dedicado ao "Cálculo das raízes comuns de duas equações".

Temos uma pequena introdução (p. 96), com o item 48:

> Consideremos as equações:
> $P_1 (x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ...+ a_m = 0$ (1)
> $P_2 (x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + ...+ b_n = 0$ (2)
> Representemos por Δ (x) o *maior divisor comum* (m.d.c) dos polinômios P_1 (x) e P_2 (x). É claro que, no caso especial de serem esses polinômios primos entre si, teremos Δ (x) = k (constante numérica) (CUNHA, H, L, 1939, p. 96)

O assunto é desenvolvido nas páginas 96 e 97, sendo fechado com esse parágrafo: "Portanto, a determinação do m.d.c. Δ (x) bastará para a solução do problema do cálculo das raízes comuns de duas equações" (*) (CUNHA, H, L, 1939,p.97). Reproduzimos aqui a nota de rodapé: " (*) – Em nada difere das raízes comuns de mais de duas equações" (CUNHA, H, L, 1939, p.97).

Seguem-se dois exercícios resolvidos como exemplo (Exemplo I e II), e ao final do capítulo, uma série de quatro exercícios propostos (Anexo 19,p.282).

Observações finais sobre o livro:

Com relação à estrutura interna de apresentação dos conteúdos o autor utiliza-se de noções preliminares, com uma introdução sem viés histórico; desenvolvimento do assunto; exercícios resolvidos como exemplo e exercícios propostos sem resposta ao final do capítulo. Utiliza-se também de notas de rodapé para relatar bibliografia ou para fixar pontos do conteúdo explicado. A linguagem utilizada é simples e direta com um bom encadeamento do assunto. O autor vai ensinando o leitor ao longo do texto. A impressão que se tem é a de que podemos aprender sozinhos pelo livro.

Análise do Livro 2 – "Elementos de Cálculo Vetorial" – Roberto Peixoto.

Análise da estrutura externa do Livro 2

Tamanho: (16 x 22,5) cm.

O material da capa assemelha-se a um papel-cartão. Na capa (Anexo 26), na parte superior, encontramos o nome do autor, Roberto Peixoto e a observação, "Do Instituto de Educação". Mais abaixo o nome do livro, "Elementos de Calculo Vetorial", com a observação, "De acordo com os programas dos Cursos Complementares". Mais abaixo a edição do livro: 3.ª Edição. Na parte inferior, o ano do livro, "1943" e a Editora: "Editora Minerva, Ltda. Rua do Ouvidor n.º 145 – Rio de Janeiro.

Na página seguinte, repete-se o nome do livro no meio da página: "Elementos de Calculo Vetorial" e, no caso desse exemplar que estamos analisando, essa página vem autografada pelo autor.

Na página seguinte uma dedicatória do autor no meio da página: "À memória de meus pais" (PEIXOTO, R, 1943).

A página seguinte repete os dados constantes da capa do livro, com o seguinte detalhe: na parte superior, onde aparece o nome do autor, a observação é "Prof. do Instituto de Educação". No verso dessa página, na parte inferior, a seguinte observação: "Comp. e impresso nas Oficinas ALBA, de A.M.CARDOSO – Lavradio, 60 – Rio".

O Índice do livro encontra-se ao final do mesmo, e é composto de 8 (oito) capítulos. O livro se apresenta com 90 páginas; não possui bibliografia, nem prefácio.

Análise da Estrutura Interna do livro

Índice (Anexo Descritivo – Fase 1 – Anexo 10, p.243).

Observação: o índice do livro tem um item chamado "Geometria Analítica de uma dimensão da reta ou do Eixo", apresentado no Capítulo VIII.

O Capítulo I (p. 7) já se inicia logo após a página em que se repete os dados da capa, com o item "Grandezas escalares e vetoriais. Vetores. Soma de um ponto e um vetor".

Os itens 1 e 2, pelo que percebemos são introdutórios em relação às grandezas escalares e vetoriais e elas são definidas no item 1:

> Grandezas escalares são as grandezas algébricas ordinárias que ficam perfeitamente determinadas, nos seus diferentes estados, por um número real, independentemente da noção de orientação. São a densidade de uma substância, o trabalho de uma força, o número de habitantes de uma cidade, etc. (PEIXOTO, R, 1943, p.7)
>
> Grandezas vetoriais são as grandezas que além de um valor quantitativo, exigem, para sua perfeita determinação, as noções de direção e sentido. São s forças, as velocidades, as acelerações, o fluxo magnético, etc. (PEIXOTO, R, 1943, p.7)

Item 2) A cada grandeza vetorial fazemos corresponder um vetor, elemento geométrico abstrato que está para a grandeza vetorial como o número está para a grandeza escalar (*). Reproduzimos aqui a nota de rodapé: " (*) – RAOUL BRICARD – Le Calcul Vectoriel" (PEIXOTO, R, 1943, p.7).

O assunto continua a ser desenvolvido nos itens já relatados no Índice, mas observa-se que o autor lança mão de notas de rodapé para reforçar alguns assuntos abordados e também para citar bibliografias consultadas. Por exemplo, no Anexo 21,p.284, podemos observar o desenvolvimento dos assuntos " Representação e Característicos de um vetor" e 'Classificação dos Vetores".

Na sequência a transcrição de duas notas de rodapé contidas no Anexo 21 (p.284), em virtude da baixa qualidade apresentada pela digitalização da página.

> (*) "O vetor é um conjunto ordenado de dois pontos" – R. ESTÈVE et H.MITAULT – **Cours de Géométrie**.
> (**) Número aritmético é o resultado da comparação (razão) da grandeza (segmento AB) com a unidade (segmento utilitário ou estado padrão da grandeza) (PEIXOTO, R, 1943, p.8)

Não foram observados exercícios resolvidos ou propostos.

O Capítulo III (p. 37) – Produto escalar de dois vetores – se inicia no item 54, e assim se apresenta:

“Chamamos *produto escalar de dois vetores livres* $U^{\rightarrow}$ e $V^{\rightarrow}$, escrevendo $U^{\rightarrow} \times V^{\rightarrow}$ e lendo $U^{\rightarrow}$ escalar $V^{\rightarrow}$, o número relativo igual ao produto dos módulos destes vetores e do cosseno do ângulo que eles formam” (PEIXOTO, R, 1943, p.37).

Os itens, a partir do item 1, no Capítulo I, são numerados sequencialmente, na medida em que o texto evolui e de desenvolve.

O assunto continua a ser desenvolvido, sem apresentar exercícios resolvidos ou propostos durante o desenvolvimento ou ao final dos capítulos e a manutenção das notas de rodapé com comentários adicionais e/ou bibliografia.

Observações finais sobre o livro:

A linguagem observada no livro é direta, técnica, apresentada de forma resumida, mas bem explicada. Fica difícil aprender sozinho pelo livro.

Com relação à metodologia de apresentação dos conteúdos, notamos a seguinte: uma introdução do assunto sem viés histórico, o desenvolvimento do mesmo, não possuindo exercícios resolvidos ou propostos, com o uso de notas de rodapé para comentários adicionais e/ou bibliografia.

Análise do Livro 3 – Lote 2 – “Elementos de Geometria Analítica” – Roberto Peixoto.

Análise da estrutura externa do Livro 3

Tamanho: (16 x 23,0) cm.

O material da capa (Anexo 22,p.285) assemelha-se a um papel-cartão. Na capa na parte superior, encontramos o nome do autor, Roberto Peixoto. Mais abaixo o nome do livro, “Elementos de Geometria Analítica”, com as observações: “Geometria de três dimensões”; “De acordo com os programas do exame vestibular da Escola Politécnica e dos Cursos Complementares” e “Segunda Parte”.

Na parte inferior dados da Editora: “Editores OSCAR MANO & CIA. Rio”.

Na próxima página no centro da mesma o nome do livro: “Elementos de Geometria Analítica”. A próxima página nos traz quase as mesmas informações da capa, acrescidas do seguinte:

– Na parte superior, onde aparece o nome do autor há uma pequena biografia do mesmo: “Roberto Peixoto – Engenheiro civil pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro, professor de Matemática das Escolas Técnicas Secundárias da Prefeitura do Distrito Federal, do Colégio Paula Freitas, do Ginásio Vera-Cruz e do Instituto Superior de Preparatórios”.

– Na parte inferior, relativamente aos dados da Editora temos a seguinte informação: 1938 – OSCAR MANO & CIA – Editores – Rio de Janeiro.

Na página seguinte, novamente o nome do livro no centro da página: Geometria Analítica de três dimensões.

O índice do livro, bem como a bibliografia (Anexo 23, p.286), encontram-se no final do livro, constando de duas páginas o índice, e uma, a bibliografia.

O livro não apresenta Prefácio.

A capa final do livro apresenta informações de outras publicações do autor e outras da Editora, trazendo inclusive os preços das obras (Anexo 24).

O livro contém 138 páginas.

Análise da estrutura interna do livro.

Índice (Anexo 25, p.288).

O Capítulo I (p. 7), denominado “Coordenadas”, tem início no item 1, com uma conceituação de Coordenadas: “A posição de um ponto no espaço fica determinada por meio de três grandezas denominadas *coordenadas”* (PEIXOTO, R, 1938, p.7). Depois são definidas as Coordenadas retilíneas ou cartesianas, como podemos ver no Anexo 26 (p.291).

Seguem-se o desenvolvimento dos demais itens: tipos de coordenadas (Coordenadas polares, Coordenadas esféricas ou geográficas, Coordenadas semipolares ou cilíndricas). Não foram observados exercícios resolvidos ou exercícios propostos, com ou sem resposta.

O Capítulo II (p. 14), “ Determinação de uma direção” – item 17, tem uma parte introdutória do assunto, assim colocada: “Tracemos pela origem das coordenadas uma semirreta OL paralela à semirreta D do espaço e dirigida no mesmo sentido (fig. 5)” (PEIXOTO, R, 1939,p.14). O Anexo 27 (p.292), mostra a página 14 e podemos também observar o uso do recurso das notas de rodapé, no caso com uma indicação de bibliografia, a qual aqui transcrevemos: “(*) Elementos de Geometria Analítica – Primeira Parte – 38” (PEIXOTO, R, p.14).

Observação: Os itens, a partir do item 1 do Capítulo I, são numerados sequenciamente, de acordo com a evolução do texto e dos capítulos.

O autor faz uso das notas de rodapé com comentários adicionais (explicativas) e/ou com fins bibliográficos.

Observações finais sobre o livro:

A linguagem observada no livro é direta, técnica, apresentada de forma resumida, mas bem explicada. Fica difícil aprender sozinho pelo livro.

Com relação à metodologia de apresentação dos conteúdos, observamos o seguinte: parte introdutória sem viés histórico, o desenvolvimento do assunto, sem utilização de exercícios propostos ou resolvidos, com uso de notas de rodapé para comentários adicionais e/ou bibliografia.

Análise do Livro 4 – Lote 2 – "Curso de Trigonometria" – Miron Resnik.

Análise da Estrutura externa do Livro 4

Tamanho: (12,5 x 19,5) cm.

O livro apresenta capa dura, com design simples e com informações básicas na capa (Anexo 28,p.293). Na parte superior da capa , o nome do autor: Miron Resnik. No meio da capa, o nome do livro: "Curso de Trigonometria" com as seguintes informações: "Plana, Esférica, Complementos". Na parte inferior temos o logotipo da Editora Saraiva e os dados da edição e da Editora: 1936 – Editores: Livraria Acadêmica – Largo Ouvidor, 15 – São Paulo. Saraiva & Comp.

A próxima página após a capa é "em branco" e a próxima, contém o nome do livro no meio da página: "Curso de Trigonometria".

A próxima página traz as mesmas informações da capa, já citadas.

As próximas duas páginas seguintes trazem um texto denominado "Programas de Ensino".

A próxima página traz o Índice, onde se nota que a Primeira, Segunda e Terceira Partes tem os Capítulos numerados sequencialmente a partir do Capítulo I, indo até o Capítulo XVI. Depois no conteúdo "Trigonometria Esférica", começa-se novamente a numeração dos capítulos, indo até o Capítulo VIII e no conteúdo "Complementos de Trigonometria", volta-se novamente à numeração dos capítulos, indo do Capítulo I até o Capítulo V.

A próxima página é dedicada ao Prefácio.

Depois temos uma página em branco, com a indicação ao centro de "Primeira Parte".

O livro não apresenta bibliografia e contém 237 páginas

A capa final apresenta uma relação de “Obras didáticas Editadas pela Livraria Acadêmica” e o preço do exemplar, na parte inferior dessa capa.

Análise da Estrutura Interna do livro.

A primeira página do livro apresenta um item denominado “Programas de Ensino”, onde constam os programas do “Curso Ginasial” (*) e os programas do “Colégio Universitário” e as páginas onde são localizados cada item no livro (Anexo 29,p.294).

(*) Observemos que ele chama o Curso Fundamental de Curso Ginasial.

O Índice (Anexo 30, p.297) é o composto de 3 Partes (Primeira, Segunda e Terceira), sendo que na primeira parte temos os capítulos de I a V, na segunda, de VI a XII e a terceira, de XIII a XVI. Depois temos a parte denominada de Trigonometria Esférica com os capítulos de I a VIII e a relativa a Complementos de Trigonometria, com os capítulos de I a V.

Prefácio:

O prefácio é assinado pelo Prof. Dr. Paulo Mesquita, Lente adjunto das cadeiras de Topografia, Geodesia, Astronomia da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, e datado de Junho de 1934. O autor do prefácio declara que a obra preenche uma lacuna na bibliografia matemática brasileira, uma vez que satisfaz os programas de matemática do secundário e do curso do Colégio Universitário. Relata que acha interessante que alguns temas do programa de matemática, sejam tratados em obras separadas. Para o prof. Paulo Mesquita, o autor do livro conseguiu imprimir ao mesmo a simplicidade, o bom encadeamento das ideias por meio de exemplos práticos, fazendo com que os alunos sejam conduzidos de forma gradual, dos conhecimentos mais simples, para os mais complexos.

O Capítulo I (p. 7) é dedicado às funções trigonométricas, como podemos ver no (Anexo 31,p.299).

Por meio da semelhança de triângulos são tiradas as relações (Seno, Cosseno, Tangente, Cotangente, Secante, Cossecante) entre os lados (Anexo 32,p.300), e na página seguinte (p.9) o autor já apresenta um exercício resolvido como exemplo (Anexo 33,p.301).

Depois apresenta mais um exercício resolvido e no final do capítulo uma série de exercícios propostos, sem resposta.

O Capítulo II (p. 12) é dedicado às “Fórmulas fundamentais da Trigonometria”. Tem início em um parágrafo introdutório: “Existem relações fundamentais entre as funções trigonométricas de um ângulo que determinam fórmulas denominadas fundamentais da trigonometria”.

Depois, enuncia a primeira relação: “A soma dos quadrados do seno e do cosseno de um ângulo é igual à unidade”. Desenvolve a prova da mesma por meio do Teorema de Pitágoras. E assim o faz com as outras relações.

Apresenta dois exercícios (com vários itens) resolvidos e deixa uma série de 10 (dez) exercícios propostos sem resposta ao final do capítulo.

O capítulo XVI (p. 113) é dedicado às “Funções Trigonométricas Inversas ou Ciclométricas”. A introdução do mesmo é assim colocada:

> Seja y = tg x; y é uma função trigonométrica do ângulo x. O ângulo x é igual a uma função ciclométrica de y. As funções ciclométricas ou funções trigonométricas inversas são arco-seno, arco-cosseno, arco-tangente, arco-cotangente, arco-secante, arco-cossecante. As suas abreviaturas são: arc sem, arc cos, arc tg, arc cotg, arc sec, arc csc (RESNIK, M, 1936, p.113)

Após essa introdução e um pequeno desenvolvimento do assunto, já na página 114, o autor apresenta 11 (onze) exercícios resolvidos, sendo 7 relacionados diretamente com função inversa e 4 relativos ao mesmo assunto só que são do tipo “identidades”, servindo de exemplos do assunto tratado.

Ao final desse capítulo, o autor apresenta 20 (vinte) exercícios propostos sem resposta, relativos ao assunto tratado (Funções trigonométricas inversas ou ciclométricas), como podemos ver no Anexo 34 (p.302).

Observações finais sobre o livro:

Apresenta linguagem simples, direta e resumida.

Relativamente à metodologia de apresentação dos conteúdos, observamos o seguinte: parte introdutória bem resumida, sem viés histórico; exercícios resolvidos e exercícios propostos sem resposta. Nota-se fortemente o caráter preparatório do material, que é muito parecido com “notas de aula”. Não faz uso de notas de rodapé.

Análise do Livro 5 , Lote 2 – “Lições de Trigonometria Retilínea e de Cálculo Vectorial” – Alberto Nunes Serrão.

Análise da estrutura externa do Livro 5 , Lote 2

Tamanho: (23,5 x 16,5) cm.

O material da capa do livro se assemelha a um papel-cartão. Uma capa simples com as informações básicas (nome do autor, nome do livro, ano, editora).

Na parte superior da capa (Anexo 35,p.303) o nome do autor, “Alberto Nunes Serrão”. Logo abaixo, o nome do livro, “Lições de Trigonometria Retilínea e de Cálculo Vectorial”, seguida da observação: “Para os cursos complementares e candidatos às escolas militares. Contendo numerosos exercícios”.

Na parte inferior, os dados da Editora e o ano: “Edições Boffoni, 1942”.

A próxima página é em branco e a seguinte repete as informações da capa, acrescentando na parte superior, uma pequena biografia do autor, após seu nome: “Professor-chefe da secção de Matemática do Colégio Universitário da Universidade do Brasil. Engenheiro civil e geógrafo pela Escola Nacional de Engenharia. Docente-livre da Cadeira de Cálculo Infinitesimal, Geometria Analítica e Noções de

Nomografia da Escola Nacional de Engenharia. Ex-professor de Matemática do curso complementar do Colégio Pedro II, do Instituto de Educação do Estado do Rio de Janeiro, etc.”.

No verso dessa página, a seguinte informação: “Do mesmo autor: Lições de Análise Algébrica – Edição da Livraria Globo – Porto Alegre, 1940; Lições de Matemática para Médicos e Químicos – Edição da Livraria Globo – Porto Alegre, 1941”.

A próxima página apresenta o Prefácio.

O Índice do livro é apresentado ao final do mesmo, sendo longo, ocupando 3 (três) páginas, frente e verso (Anexo 36, p.304).

O livro não apresenta bibliografia.

Na capa final, na parte externa, no centro da mesma, há a seguinte informação: “Jornal do Commercio. RODRIGUES & CIA. Avenida Rio Branco, n.º 117. Rio de Janeiro – 1942”.

O livro possui 240 (duzentos e quarenta) páginas.

Análise da Estrutura Interna do livro.

Prefácio:

No prefácio, o autor diz que a trigonometria é uma das partes mais atraentes da Matemática, face às inúmeras aplicações e que seu estudo não pode prescindir de noções relativas à grandeza vetorial: vetores, arcos e ângulos dirigidos, soma de vetores... Relata que foi seu objetivo apresentar um capítulo à parte com os tipos mais comuns de produtos vetoriais, de maneira a interligar o estudo da Trigonometria com os elementos do Cálculo Vetorial. O livro não traz as tabelas trigonométricas, segundo o autor, porque existia grande variedade delas e os alunos poderiam fazer uso, sem haver necessidade de colocá-las no livro. Quanto aos exercícios, o autor diz que são agrupados em duas classes: os da primeira classe são numerados em tipo corrente, podendo ser resolvidos em um primeiro estudo, sendo com frequência acompanhados de resposta. Os da segunda classe, estão em negrito, são mais difíceis, sendo propostos como exercícios de revisão.

O autor fecha seu texto dizendo que àqueles que desejarem estudar somente trigonometria, podem deixar de lado os parágrafos 3 e 4 do cap. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 do cap. V e todo o cap. VI.

Índice (Anexo 36, p.304).

O Capítulo I (p.5) é denominado “Vectores Colineares. Arcos e Ângulos”.

É iniciado com o item 1, Grandezas e é assim apresentado:

> Para lidar com determinadas grandezas, tem a Matemática necessidade de conceitos mais precisos tais como a definição de *igualdade e desigualdade* de duas grandezas de *grandeza soma* de duas outras, bem como dos axiomas da *possibilidade de divisão em um número qualquer de partes iguais,* de *Archimedes* e da *continuidade.* Nestas condições se torna então possível atribuir à grandeza considerada um número que representará a sua *medida* (SERRÃO, 1942, p. 5).

Seguem-se o desenvolvimento do assunto com os demais itens: determinação de um ponto sobre uma reta; determinação de um ponto do plano; determinação de um ponto do espaço; grandezas escalares e vectoriais; vectores; nota; propriedades dos vectores; soma dos vectores colineares; relações entre vectores colineares; medida dos ângulos; sistema circular; problema, arcos dirigidos; circulo unitário; variação dos arcos e ângulos; arcos complementares ou suplementares; arcos congruentes; ângulos; relações entre ângulos orientados.

O item 12, “Problema” apresenta um exercício resolvido, assim descrito: “Conhecendo a medida de um arco de circunferência em um determinado sistema, achar a sua expressão em um outro sistema” (p. 16-17). É o único exercício resolvido do capítulo. O problema é resolvido pelo autor de forma bem explicada (Anexo 37, p.310).

Ao final do capítulo (p.23-24), são apresentados 15 exercícios propostos, sendo dois deles com resposta (7.º e o 9.º), sendo que os 10 primeiros são mais simples, de resolução mais direta e os 5 últimos, em forma de problema, com um texto um pouco mais elaborado (Anexo 38,p.311). Fizemos abaixo a transcrição de alguns dos exercícios dos dois tipos, uma vez que a as imagens digitalizadas dos mesmos não apresentaram qualidade, em face do mau estado do livro.

> 4) Construir os ângulos expressos pelos números:
> a) 6 retos b) – 3 retos c) 2 1/2 retos
> 5) Construir os seguintes ângulos:
> π/2; – π/3; π/4; 5 π/2
> 6) Exprimir em graus os ângulos seguintes, medidos em radianos,
> π/3; π; 2/3 π; 7/4 π; 2; 5; -3
> (SERRÃO, A, N, 1942, p.23)

> 2) Um ângulo é tal que a diferença dos recíprocos dos números de graus e grados nele contidos equivale ao número que o mede no sistema circular, dividido por 2 π. Determinar esse ângulo.
> 3) Os ângulos de um quadrilátero plano estão em progressão aritmética. A diferença entre o maior e o menor vale um ângulo reto. Achar o número de graus de cada ângulo e também sua expressão no sistema circular.
> 4) Em cada um de dois triângulos, os ângulos se acham em progressão geométrica. O ângulo menor de um iguala três vezes o ângulo menor do outro e a soma dos ângulos maiores vale 240º. Determinar os ângulos no sistema circular (SERRÃO, A, N, 1942, p. 24).

O Capítulo II (p. 25) é denominado “Definição das Funções Circulares Diretas”.

Inicia-se com o item 1 (a numeração dos itens não é sequencial a partir do Capítulo I), denominado Funções Circulares. Tem uma parte introdutória, assim apresentada:

> Vamos caracterizar as *funções circulares diretas* também denominadas *linhas trigonométricas* ou *relações trigonométricas,* cujo estudo constitui o objeto fundamental da Trigonometria. Elas são em número de seis, respectivamente denominadas: *seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante* (SERRÃO, 1942, p.25).

Seguem-se os demais itens do Capítulo e, ao final (p.34), são apresentados 10 (dez) exercícios propostos, sendo dois deles com resposta. Não são apresentados exercícios resolvidos. Fizemos abaixo a transcrição de alguns dos exercícios, uma vez que as imagens digitalizadas dos mesmos não apresentaram qualidade, face ao mau estado do livro.

> Exercícios
> 1) Construir os arcos que tem seno igual a ½.
> 2) Construir os arcos que possuem cosseno igual a – 1/5.
> 3) Quais são os arcos que possuem cosseno igual a zero?
> 9) O arco “x” termina no terceiro quadrante. Qual o sinal da expressão:
> cos x . cosec x / se x . tg x R: Menos.
> 10) O arco “x” termina no segundo quadrante. Determinar o sinal da expressão:
> sen x + cosec x / tg x . cos x R: Mais.

(SERRÃO, A, N, 1942, p.94)

Observações finais sobre o Livro 5 – Lote 2:

O texto é bem fluente, bem explicado e a impressão que se tem é que “conseguimos aprender diretamente pelo livro”.

Relativamente à metodologia de apresentação dos conteúdos, foi observado que o mesmo segue dois padrões distintos: parte introdutória, desenvolvimento do assunto, exercício resolvido, exercícios propostos com e sem respostas; parte introdutória, desenvolvimento do assunto, exercícios propostos com e sem respostas. Não faz uso de notas de rodapé.

Anexo 3
Análise dos livros didáticos – Lote 3

Lote 3 – Apostilas manuscritas dos cursos ministrados.

Apostilas analisadas:

Apostila 1 – “Apostila – Lições de Matemática – Noções de Álgebra Vetorial – Euclides Roxo” (Anexo 39, p.312).

Apostila 2 – “Apostila – Lições de Matemática – Números Complexos – Euclides Roxo” (Anexo 40, p.313)

Análise da “Apostila – Lições de Matemática – Noções de Álgebra Vetorial – Euclides Roxo”.

Análise da estrutura externa da Apostila

Tamanho: (21,5 x 33,0) cm.

Trata-se de um material que foge aos padrões dos demais já analisados. O material da capa (Anexo 39, p.312) é semelhante a um papel-cartão, com acabamento simples.

Na parte superior, o nome do autor, Euclides Roxo. Na parte central o nome da apostila, “Lições de Matemática”, com a observação logo abaixo: “Professadas no Curso Complementar (Cursos de Engenharia) do Colégio Pedro II”. Mais abaixo já na parte inferior o algarismo “II”, denunciando ser o 2.º exemplar e o assunto tratado na apostila: “Noções de Álgebra Vetorial”. O material não apresenta qualquer informação relativa à data em que foi confeccionado ou impresso.

A apostila não apresenta Índice nem Prefácio. A Bibliografia encontra-se no final da apostila.

Pela observação, notamos que são notas de aula manuscritas do professor transformadas em apostila, como o nome já denuncia: “Lições de Matemática Professadas no Curso Complementar – Cursos de Engenharia”. São as anotações de aulas do professor Euclides Roxo no Curso Complementar, no caso, o Pré-Politécnico, do Colégio Pedro II.

A apostila, compõe-se de 32 páginas.

Análise da estrutura interna da apostila:

Não há índice. Percorrendo a apostila, foi possível montá-lo, pelos itens encontrados na mesma, mostrando os assuntos ministrados (Anexo 11, p.245).

Fizemos abaixo a transcrição da bibliografia, uma vez que a imagem digitalizada da mesma não apresentou qualidade, face ao mau estado da apostila.

> Bibliografia:
> Appel, Paul, – Traité de Mécanique rationelle, I
> Bricard, Raoul, – Le calcul vectoriel
> Boulert, Carlo, – Leçons de Trigonométrie rectiligne
> Burali, Forti, C er R. Marcolongo – Eléments de Calcul vectoriel.
> Burgathi – Calcolo vettoriale e omografico
> Commisssaire, H et Cognac, G – Cours de Mathématiques Spéciales
> Peixoto, Roberto, – Elementos de Calculo Vetorial
> Ramos, T.A, – Leços sur le Calcul Vectoriel.
> Silberstein, H. – Eléments d´Algèbre Vectorielle et d´Analyse Vectorielle
>
> (ROXO, s/d, p.32)

No que denominamos de Capítulo I, ele define Grandezas escalares:

> Chamam-se grandezas escalares, ou simplesmente, escalares, aquelas que um simples número basta para determinar. Tais são em Geometria, um comprimento, um ângulo, uma área, um volume. Em Mecânica: uma massa, uma densidade, um trabalho. Em Física, uma quantidade de eletricidade, um potencial elétrico ou magnético, a resistência de um condutor (ROXO, s/d p. 1).

No Capítulo II, ele define Grandezas vetoriais:

> Chamam-se grandezas vetoriais, aquelas a que se liga a ideia de direção e de sentido. Dizendo, por exemplo, que uma força é de 5

> kg, damos uma indicação incompleta. Precisamos ainda indicar a direção dessa força, isto é, a direção para a qual ela solicita seu ponto de aplicação. Outros exemplos de grandezas vetoriais são: a velocidade de translação de um sólido, um deslocamento, uma aceleração, o momento de uma força,um momento magnético (ROXO, s/d p. 1).

O assunto é desenvolvido conforme o "índice" e, ao final da apostila, são apresentados 5 (cinco) exercícios resolvidos (ver figura abaixo), onde o professor Euclides Roxo explica como fazer cada um deles de uma forma resumida (na verdade, entendemos que ele aponta só aponta o caminho para resolução). Os exercícios não abrangem todo o conteúdo visto na apostila. Fizemos abaixo a transcrição de alguns dos exercícios citados, uma vez que a as imagens digitalizadas dos mesmos não apresentaram qualidade, face ao mau estado da apostila.

> 3) Demonstrar que a soma dos quadrados das diagonais de x, y, de um paralelogramo ABCD, é igual à soma dos quadrados dos quatro lados.
> [Pondo B – A = C – D = $\mathbf{a}^{\rightarrow}$; D – A = C B = $\mathbf{b}^{\rightarrow}$; C – A = $x^{\rightarrow}$ e B – D = $\mathbf{y}^{\rightarrow}$, elevam-se ao quadrado e somam-se as igualdades que exprimem $x^{\rightarrow}$ e $\mathbf{y}^{\rightarrow}$ em função de $\mathbf{a}^{\rightarrow}$ e $\mathbf{b}^{\rightarrow}$].
> 4) Se num tetraedro ABCD, dois pares de arestas opostas são retangulares, o mesmo acontece com as arestas que formam o terceiro par.
> [Começa-se por estabelecer a identidade (D – A). (B – C) + (D – B) . (C – A) + (D – C) . (A – B) = 0]
> **5)** Demonstrar a fórmula fundamental da trigonometria esférica: **cos a = cos b . cos c + sen b . sen c . cos A**
> [Considerando o triângulo ABC traçado sobre uma esfera de centro O e de raio 1, chamando ß e δ as projeções de B e C sobre AO, multiplicam-se escalarmente membro a membro, as identidades
> ß – 0 = (ß – 0) + (B – ß), C – 0 = (δ – 0 + (C – δ)].
> (ROXO, s/d, p.32)

Notamos que no decorrer da apostila o autor fez uso de notas de rodapé, para fins bibliográficos.

Observações finais sobre a Apostila 1, Lote 3

A linguagem é simples e direta na explicação dos conteúdos e a impressão que se tem é a de que em aula ele ia além da apostila, uma vez que a mesma apresenta-se resumida.

A metodologia de apresentação dos conteúdos poderia ser assim descrita: introdução e desenvolvimento dos conteúdos, uso de notas de rodapé com dados bibliográficos e exercícios resolvidos ao final da apostila, com a ressalva de que não representativos de todos os conteúdos trabalhados.

Análise da “Apostila – Lições de Matemática – Números Complexos – Euclides Roxo”.

Análise da estrutura externa da Apostila 2

Tamanho: (21,5 x 33,0) cm.

Trata-se de um material que foge aos padrões dos demais já analisados. O material da capa (Anexo 40, p.313) é semelhante a um papel-cartão, com acabamento simples.

Na parte superior, o nome do autor, Euclides Roxo. Na parte central o nome da apostila, “Lições de Matemática”, com a observação logo abaixo: “Professadas no Curso Complementar (Cursos de Engenharia) do Colégio Pedro II”. Mais abaixo já na parte inferior o algarismo “III”, denunciando ser o 3.º exemplar e o assunto tratado na apostila: “Números Complexos”.

A apostila não apresenta: Índice, prefácio, data, bibliografia. Compõe-se de 20 páginas numeradas.

Análise da Estrutura Interna da Apostila 2

Não há índice. Percorrendo a apostila, foi possível montá-lo, pelos itens encontrados na mesma, mostrando os assuntos ministrados (Anexo 12, p.249).

O item que denominamos por Capítulo I (p. 1), chama-se “Necessidade de uma nova extensão da ideia de número”. Nele, o autor justifica a necessidade de se ter uma extensão do Conjunto R (reais). Assim, se inicia o capítulo:

> As equações $7 + x = 4$; $5\ x = 28$; $x^2 = 10$, são, respectivamente impossíveis no campo dos números positivos, no dos números inteiros, no dos racionais. Graças a oportunas extensões da ideia de um número, com a criação das classes (das classes) dos números negativos, dos fracionários e dos irracionais, tornaram-se possíveis as equações consideradas. O campo que abrange todas essas classes constitui, como sabemos, o campo dos números reais (ROXO, s/d p. 1).

Na continuação de sua exposição, o autor assim se coloca: “Não existe, por exemplo, nenhum número real que satisfaça à equação $x^2 = -9$, isto é, os números negativos não têm raiz quadrada, nem nenhuma raiz de ordem par no campo real” (p.1).

O Capítulo I é fechado com o seguinte parágrafo: “A teoria dos números complexos que passamos a expor, mostra de que modo podemos realizar tal alargamento da ideia de número” (p. 1).

No capítulo II (definições), ele irá assim definir o número complexo:

> Chama-se número complexo ao conjunto $z = (x,y)$ de dois números algébricos x e y, tomados numa certa ordem. Esta definição será completada pela de igualdade dos números complexos e pela definição das operações relativas a esses números (ROXO, s/d p. 1).

No capítulo XXII, ele vai definir complexos conjugados: “Diz-se que dois complexos são conjugados quando suas imagens são simétricas em relação ao eixo x´x” (p.8).

Não foram observadas notas de rodapé.

Não são apresentados exercícios resolvidos ou propostos.

Observações finais sobre a Apostila 2, Lote 3

A linguagem é simples e direta na explicação dos conteúdos e a impressão que se tem é a de que em aula ele ia além da apostila, uma vez que a mesma apresenta-se resumida.

A metodologia de apresentação dos conteúdos poderia ser assim descrita: introdução e desenvolvimento dos conteúdos, sem o uso do recurso das notas de rodapé e sem exercícios resolvidos ou propostos (com ou sem respostas).

Anexo 4
Quadro comparativo – programa do Curso Complementar Pré-politécnico e conteúdos Livro 1 – Lições de Matemática – Thales Mello Carvalho – 1938

Programa do Curso Complementar Pré-politécnico	Índice – Conteúdos Livro 1
Números irracionais. Operações. Expoente irracional **tem contemplado no programa**	**Capítulo I – Números irracionais** A evolução do conceito de número. A generalização algébrica da noção de número. Concepção de Dedekind. Definições de igualdade e ordem na classe dos números reais. Operações sobre irracionais. Noção de intervalo. Continuidade das operações aritméticas
Análise combinatória – Teoria e aplicações **Item contemplado no programa**	**Capítulo II – Análise Combinatória** Agrupamentos. Arranjos. Arranjos com repetição. Permutações. Permutações com repetição. Combinações. Números binominais. Combinações com repetição. Teoremas relativos às combinações. Triângulo de Pascal. Noções sobre substituições.
Propriedades gerais dos polinômios **Item contemplado no programa**	**Capítulo III – Potências de polinômio** Produto de binômios. Fórmula do Binômio de Newton. Aplicação do Triângulo de Pascal. Soma de potências semelhantes dos números

	naturais. Potenciação de polinômios. Fórmula de Leibniz
Determinantes: teoria e aplicações **Item contemplado no programa**	**Capítulo IV – Teoria dos Determinantes** Preliminares. Definição. Regra de Sarrus. Propriedades dos determinantes. Determinantes menores. Desenvolvimento de um determinante. Teorema de Laplace. Produto de dois determinantes. Determinante de Vandermonde.
Formas Lineares. Equações lineares **Item contemplado no programa**	**Capítulo V – Equações Lineares** Resolução geral. Regra de Cramer. Sistema de 3 equações lineares com 3 incógnitas. Sistema de 3 equações lineares com 2 incógnitas. Sistema de "n" equações lineares com "n" incógnitas. Sistema de "n" equações lineares homogêneas com "n" incógnitas. Teorema de Rouché. Formas lineares.

Quadro 1 – Quadro comparativo – programa do Curso Complementar Pré-politécnico e conteúdos Livro 1 – Lições de Matemática – Thales Mello Carvalho – 1938

Anexo 5
Conteúdos do programa do Curso Complementar pré-politécnico que deixaram de ser atendidos pelo Livro 1 – Lote 1 – “Lições de Matemática” – Thales de Mello Carvalho”.

Matemática 1.ª Série:

- Logaritmos. Teoria.Prática do sistema decimal; Linhas trigonométricas. Número. Operações sobre linhas trigonométricas. Equações trigonométricas. Resolução de triângulos; Números complexos. Operações. Expoente imaginário. Representações trigonométrica e exponencial. Logaritmos e linhas trigonométricas de números complexos. Aplicação às operações vetoriais no plano; Frações contínuas. Aplicação à representação dos números irracionais. Frações contínuas periódicas; Séries numéricas. Principais caracteres de convergência; Operações sobre séries. Cálculo numérico; Noções sobre os conjuntos lineares. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Extremo superior e inferior. Limites máximo e mínimo; Funções de variável real. Teorema de Weierstrass; Limites; Número e limite de U. Tipo 1 x infinito; Funções contínuas. Noções da continuidade uniforme. Propriedades fundamentais. Operação sobre funções contínuas; Funções elementares; Diferença finita, derivada, diferencial; Cálculo das derivadas e das diferenciais; Aplicação às funções elementares; Diferenças, derivadas e diferenciais sucessivas; Aplicação às funções elementares; Teorema de Rolle. Fórmulas dos acréscimos finitos e de Cauchy. Fórmulas de Taylor e Maclaurin. Aplicação ao Cálculo Numérico aproximado; Desenvolvimento em série. Séries de potência. Aplicação às funções elementares; Formas indeterminadas. Regra de L´Hopital. Comparação das funções exponencial e logarítmica com os polinômios; Cálculo numérico das raízes das equações algébricas ou transcendentes. Métodos clássicos de aproximação; Máximos e mínimos; Estudo da variação de uma função. Representação cartesiana; Funções elementares; Funções primitivas. Aplicações elementares.

Geometria

Relações métricas nos polígonos, no círculo, nos poliedros e nos corpos redondos; Quadratura e cubatura; Transformação das figuras; Homotetia e semelhança;

Relação anharmônica. Homografia involução; Propriedades principais das cônicas; Polos e polares.

Álgebra vetorial

Escalares e vetores; Adição e subtração de vetores; Produtos escalares, vetoriais e mistos; Aplicações.

Matemática 2.ª Série:

Álgebra Superior; Principio fundamental da teoria das equações; Composição das equações; Noções sobre a teoria das funções simétricas; Transformações das equações; Cálculo das raízes comuns de duas equações; Teoria das raízes iguais; Eliminação; Separação das raízes reais; Limites das raízes de uma equação; Cálculo das raízes reais; Cálculo das raízes imaginárias.

Elementos de geometria analítica

Concepção de Descartes. Coordenadas retilíneas e polares no plano; Transformação de coordenadas no plano; Lugares geométricos no plano. Problemas; Teoria da linha reta no plano. Problemas; Circunferência, elipse, hipérbole e parábolas. Suas equações retilíneas e polares; Coordenadas retilíneas e polares no espaço de três dimensões; Transformação de coordenadas no espaço de três dimensões; Lugares geométricos. Generalidades sobre linhas e superfícies; Teoria da linha reta e do plano. Problema. Esfera; Superfícies do 2.º grau (equações simplificadas).

Anexo 6
Índice – Livro 1 – Lote 1 – Lições de Matemática – Thales Mello Carvalho, 1938

Anexo 7

Quadro comparativo – Programa do Curso Complementar Pré-politécnico e Pré-Médico e conteúdos Livro 2 – Pontos de Matemática – Gumercindo Lima – 1938

Livro – Conteúdos – Índice	**Programa do Curso Complementar Pré-Médico**	**Programa do Curso Complementar Pré-Politécnico**
Capítulo I – Cálculo Combinatório	Complementos de análise combinatória **Item contemplado no programa*	Análise combinatória. Teoria e aplicações **Item contemplado no programa*
Capítulo II – Determinantes	Noções de teoria dos determinantes. Aplicações **Item contemplado no programa*	Determinantes. Teoria e aplicações **Item contemplado no programa*
Capítulo III – Operações aproximadas	Noções de cálculo numérico. Valores exatos e aproximados. **Item contemplado no programa*	Cálculo Numérico **Item contemplado no programa*
Capítulo IV – Noções sobre conjuntos	Não previsto no programa	Noções sobre os conjuntos lineares. Teorema de Bolzano – Weierstrass. Extremos superior e inferior. Limites máximos e mínimos. Funções de uma variável real. **Item contemplado no programa*
Capítulo VI – Logaritmos	Não previsto no programa	Logaritmos. Teoria. Prática do sistema decimal **Item contemplado no programa*
Capítulo VII – Frações contínuas	Não previsto no programa	Frações contínuas. Aplicação à representação dos números irracionais. Frações contínuas periódicas **Item contemplado no programa*
Capítulo VII – Números irracionais	Números irracionais. Operações Aplicações. **Item contemplado no programa*	Números irracionais. Operações. Expoente irracional. **Item contemplado no programa*

Capítulo VIII – Resumo de trigonometria	Não previsto no programa	Linhas trigonométricas. Número. Operações sobre linhas trigonométricas. **Item contemplado no programa*
Capítulo IX – Equações trigonométricas	Não previsto no programa	Equações trigonométricas. Resolução de triângulos **Item contemplado no programa*
Capítulo X – Transformação de figuras	Não previsto no programa	Transformação de figuras. Homotetia, semelhança. **Item contemplado no programa*
Capitulo XI – Polo e polar	Não previsto no programa	Polos e polares **Item contemplado no programa*
Capítulo XII – Relação Anharmônica	Não previsto no programa	Relação harmônica. **Item contemplado no programa*
Capítulo XIII – Homografia	Não previsto no programa	Homografia **Item contemplado no programa*
Capítulo XIV – Involução	Não previsto no programa	Involução **Item contemplado no programa*
Capítulo XV – Propriedades principais das cônicas		Propriedades principais das cônicas **Item contemplado no programa*
Parte Segunda		
Capítulo I – Noções gerais sobre funções	Funções. Evoluções do conceito de função; ponto de vista atual. Continuidade. Estudo elementar das funções exponencial e logarítmica. Derivadas e diferenciais das funções de uma variável; definições, notações e interpretação geométrica. Derivadas e diferenças parciais. Diferença total. **Item contemplado no programa*	Funções contínuas. Noção de continuidade uniforme. Propriedades fundamentais. Operações sobre funções contínuas. Funções elementares. Diferença finita, derivada diferencial. Cálculo das derivadas e das diferenciais. Aplicação às funções elementares. Diferenças, derivadas e diferenciais sucessivas. Aplicação às funções elementares. **Item contemplado no programa*

Capítulo II – Estudo das Séries	Estudo complementar das séries. Caracteres de convergência. Séries de termos positivos, séries e alternadas séries de termos quaisquer. **Item contemplado no programa*	Séries numéricas. Principais caracteres de convergência. Operações sobre séries. Cálculo numérico. Fórmulas de Taylor e Maclaurin. Aplicação ao cálculo numérico aproximado. Desenvolvimento em série. Séries de potência. Aplicação às funções elementares. **Item contemplado no programa*
Capítulo III – Aplicações da Derivada	Não previsto no programa	Não previsto no programa
Capítulo IV – Noções de Cálculo Integral	Integrais definidas e indefinidas. Integrais imediatas. Integração por partes, por substituição. **Item contemplado no programa*	Não previsto no programa
Capítulo V – Equações diferenciais	Equações diferenciais, ordinárias e de derivadas parciais; sua formação. Equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes. Equações de derivadas parciais. **Item contemplado no programa*	Não previsto no programa
Capítulo VI – Noções de cálculo gráfico	Noções de cálculo gráfico. Operações gráficas. Representações gráficas das expressões algébricas. Aplicações **Item contemplado no programa*	Formas lineares. Equações lineares. **Item contemplado no programa*
Capítulo VII – Noções de Álgebra Superior – Teoria geral das equações – Propriedades gerais	Não previsto no programa	Teorema de Rolle. Fórmula de acréscimos finitos e de Cauchy. Propriedades gerais dos polinômios; princípio geral da teoria das equações; composição das equações; noções sobre a teoria das funções simétricas; cálculo das raízes comuns de duas equações; teoria das raízes iguais; eliminação; separação das raízes reais; limites

		das raízes de uma equação; cálculo das raízes reais; cálculo das raízes imaginárias **Item contemplado no programa*
Capítulo VIII – Diferenças	Não previsto no programa	Não previsto no programa
Capítulo IX – Resolução de equações transcendentes	Não previsto no programa	Cálculo numérico das raízes de equações algébricas ou transcendentes. **Item contemplado no programa*
Capítulo X – Noções sobre cálculo de probabilidades	Noções de cálculo das probabilidades e teoria dos erros. **Item contemplado no programa*	Não previsto no programa
Capítulo XI – Noções de Geometria Analítica	Concepção de Descartes. Sistema de coordenadas, no plano e no espaço de três dimensões; coordenadas retilíneas e polares. Representação geométrica das equações de duas e de três variáveis. **Item contemplado no programa*	Elementos de geometria analítica: Concepção de Descartes; coordenadas retilíneas e polares no plano; lugares geométricos no plano; lugares geométricos no plano – problemas; teoria da linha reta no plano – problemas; circunferência, elipse, hipérbole e parábola – suas equações retilíneas e polares; coordenadas retilíneas e polares no espaço de três dimensões; transformação de coordenadas no espaço de três dimensões; lugares geométricos – generalidades sobre linhas e superfícies; teoria da linha reta e do plano – problema; esfera; superfícies do 2.º grau (equações simplificadas). **Item contemplado no programa*
Capítulo XII – Noções de Cálculo Vectorial	Noções de cálculo vetorial. Operações sobre escalares e vetores. Aplicações	Escalares e vetores. Adição e subtração de vetores. Produtos escalares, vetoriais e

	**Item contemplado no programa*	mistos. Aplicações **Item contemplado no programa*
Capítulo XIII – Números complexos	Não previsto no programa	Números complexos. Operações. Expoente imaginário. Representações trigonométricas e exponenciais. Logaritmos e linhas trigonométricas de números complexos. Aplicações às operações vetoriais no plano **Item contemplado no programa*
Capítulo XIV – Força e Movimento	Movimento e força. Velocidade e aceleração. Composição de forças de equilíbrio. Movimento retilíneo. Movimento curvilíneo. Composição de translações e rotações. Problemas e aplicação.	Não previsto no programa

Quadro 2 – Quadro comparativo – Programa do Curso Complementar Pré-politécnico e Pré-Médico e conteúdos Livro 2 – Pontos de Matemática – Gumercindo Lima – 1938

Anexo 8
Quadro comparativo – Programa do Curso Complementar Pré-médico e conteúdos do Livro 3 – Lições de Matemática para Médicos e Químicos – 1941

Livro – Conteúdos – Índice	Programa do Curso Complementar Pré-Médico
Parte I **Elementos de Álgebra**	
Capítulo I – Análise Combinatória	Complementos de análise combinatória e noções de teoria dos determinantes. Aplicações **Item contemplado no programa*
Capítulo II – Binômio de Newton	Propriedades gerais dos polinômios **Item contemplado no programa*
Capítulo III – Teoria dos Limites. Infinitamente pequenos	Não previsto no programa
Capítulo IV – Séries numéricas. Números Limites notáveis – Séries numéricas – Número E – Limites notáveis	Estudo complementar das séries. Caracteres de convergência. Séries de termos positivos, séries e alternadas séries de termos quaisquer. O número “e”. Limite $(1 + 1/m)^m$, quando m tende para o infinito; a – 1/h quando h tende para zero; (1 + a) 1/a quando a tende para zero; $(1 + x/m)^m$ quando m tende para o infinito. **Item contemplado no programa*
Capítulo V – Noção de função. Logaritmos	Funções. Evolução do conceito de função; ponto de vista atual. Classificação das funções; pontos de vista que podem ser adotados. Estudo elementar das funções exponencial e logarítmica. Funções circulares, diretas e inversas. **Item contemplado no programa*
Parte II – Elementos de trigonometria e cálculo vectorial	
Capítulo VI – Generalidades. Operações sobre vectores	Noções de cálculo vetorial. Operações sobre escalares e vetores. Aplicações. **Item contemplado no programa*
Capítulo VII – Linhas trigonométricas. Teoria das projeções	Não previsto no programa
Capítulo VIII – Operações sobre arcos. Triângulos	Não previsto no programa
Capítulo IX – Produto escalar e vectorial	Noções de cálculo vetorial. Operações sobre escalares e vetores. Aplicações **Item contemplado no programa*

Parte III – Elementos de geometria analítica a duas e três dimensões	
Capítulo X – Generalidades. Sistemas de coordenadas	Concepção de Descartes. Sistema de coordenadas, no plano e no espaço de três dimensões; coordenadas retilíneas e polares. **Item contemplado no programa*
Capítulo XI – Transformação de coordenadas	Transformação de coordenadas no plano. Transformação de coordenadas no espaço de três dimensões. **Item contemplado no programa*
Capítulo XII – Linha reta. Problemas	Teoria do plano e da linha reta; problemas. **Item contemplado no programa*
Capítulo XIII – Lugares geométricos	Não previsto no programa
Capítulo XIV – Sistemas de coordenadas no espaço de três dimensões. Capítulo XV – Plano e linha reta, Problemas Capítulo XVI – Lugares geométricos usuais só no espaço	Teoria da linha reta no plano. Problemas. **Item contemplado no programa*
Parte IV	
Capítulo XVII – Continuidade – Aplicações Capítulo XVIII – Derivadas e diferenciais das funções de uma variável A – Definição e interpretação B – Cálculo das derivadas Capítulo XIX – Funções crescentes e decrescentes. Máximos e mínimos Capítulo XX – Desenvolvimento em série Capítulo XXI – Derivadas e diferenciais das funções de várias variáveis Capítulo XXII – Representações gráfica da variação das funções Capítulo XXIII – Aplicações geométricas do cálculo diferencial	Continuidade. Derivadas e diferenciais das funções de uma variável; definições, notações e interpretação geométrica. Funções de mais de uma variável. Derivadas e diferenças parciais. Diferença total. Derivadas e diferenciais sucessivas. Desenvolvimento em série das funções de uma só variável. Fórmula de Taylor. Resto da fórmula de Taylor; expressão de Lagrange. Fórmula de Mac. Laurin. Aplicações às funções elementares. Formas indeterminadas. Regra de L'Hopital. Indagação das raízes numéricas das equações com uma aproximação dada. Métodos usuais. Processos gráficos. **Item contemplado no programa*
Parte V – Elementos do cálculo integral	
Capítulo XXIV – Integrais indefinidas. Métodos gerais de integração Capítulo XXV – Cálculo de integrais indefinidas A – Integração de frações racionais B – Integração de funções trigonométricas C – Integração de funções irracionais Capítulo XXVI – Integrais definidas e suas aplicações A – Trabalho B – Velocidade das reações químicas Capítulo XXVII – Equações diferenciais Capítulo XXVIII – Interpolação – Aplicações A – Teoria das diferenças Capítulo XXIX – Noções de cálculo das probabilidades e estatística A – Cálculo das probabilidades B – Tabelamento e representação gráfica	Integrais definidas e indefinidas. Integrais imediatas. Integração por partes, por substituição. Equações diferenciais, ordinárias e de derivadas parciais; sua formação. Principais tipos integráveis, por quadraturas, de equações diferenciais ordinárias de 1.ª ordem. Equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes. Equações de derivadas parciais. Interpolação. Diferenças finitas sucessivas. Fórmula de Newton. Fórmula de interpolação de Lagrange. Aplicação da fórmula de Taylor à interpolação. Cálculo da função interpolatriz no caso dos fenômenos periódicos; aplicação da fórmula de Fourier. Extrapolação. Noções de cálculo das probabilidades e teoria

C – Valores centrais D – Medidas de variação E – Correlação	dos erros. Noções de estatística; suas aplicações à biologia e à medicina. **Item contemplado no programa*
Logaritmos Antilogaritmos	Não previsto no programa

Quadro 3 – Quadro comparativo – Programa do Curso Complementar Pré-médico e conteúdos do Livro 3 – Lições de Matemática para Médicos e Químicos – Alberto Nunes Serrão – 1941

Anexo 9
Conteúdos do programa do Curso Complementar pré-médico que deixaram de ser atendidos pelo Livro 3 – Lote 1 – "Lições de Matemática (para Médicos e Químicos) – Alberto Nunes Serrão".

Números irracionais; operações. Aplicações

Noções de cálculo numérico. Valores exatos e aproximados. Erro absoluto; erro relativo. Operações efetuadas com uma dada aproximação.

Noções de cálculo gráfico. Operações gráficas. Representações gráficas das expressões algébricas. Aplicações.

Noções de cálculo instrumental. Régua de cálculo; seu emprego. Máquinas de calcular.

Aplicações lineares.

Homogeneidade das fórmulas. Sistema de unidades. Unidades derivadas. Equações de dimensão.

Esfera. Superfícies do 2.º grau; suas equações reduzidas.

Movimento e força. Velocidade e aceleração. Composição de forças. Equilíbrio.

Movimento retilíneo. Movimento curvilíneo. Composição de translações e rotações. Problemas e aplicação.

Anexo 10
Índice – Livro 2 – Lote 2 – Elementos de Cálculo Vetorial – Roberto Peixoto

(PEIXOTO, R, 1943)

Anexo 11
Índice – Apostila 1 – Lote 3 (Parte 1) – Lições de Matemática – Noções de Álgebra Vetorial – Euclides Roxo

Ìndice – Apostila 1 – Lote 3 (Parte 2)

Ìndice – Apostila 1 – Lote 3 (Parte 3)

Ìndice – Apostila 1 – Lote 3 (Parte 4)

ANEXO 12
Índice – Apostila 2 – Lote 3 (Parte 1) – Lições de Matemática – Números Complexos – Euclides Roxo

Índice – Apostila 2 – Lote 3 (Parte 2)

Índice – Apostila 2 – Lote 3 (Parte 3)

Anexo 13
Programa de Matemática do Curso Complementar Pré-Médico (Medicina, Farmácia, Odontologia)

1. Números irracionais; operações. Aplicações.

2. Noções de cálculo numérico. Valores exatos e aproximados. Erro absoluto; erro relativo. Operações efetuadas com uma dada aproximação. Aplicações.

3. Noções de cálculo gráfico. Operações gráficas. Representações gráficas das expressões algébricas. Aplicações.

4. Noções de cálculo instrumental. Régua de cálculo; seu emprego. Máquinas de calcular.

5. Complementos de análise combinatória e noções de teoria dos determinantes. Aplicações.

6. Aplicações lineares.

7. Noções de cálculo vetorial. Operações sobre escalares e vetores. Aplicações.

8. Estudo complementar das séries. Caracteres de convergência. Séries de termos positivos, séries e alternadas séries de termos quaisquer.

9. O número "e". Limite $(1 + 1/m)^m$, quando "m" tende para o infinito; a – 1/h quando "h" tende para zero; (1 + a) . 1/a quando "a" tende para zero; $(1 + x/m)^m$ quando "m" tende para infinito.

9.a Homogeneidade das fórmulas. Sistemas de unidades. Unidades derivados. Equações de dimensão.

10. Concepção de Descartes. Sistemas de coordenadas, no plano e no espaço de três dimensões; coordenadas retilíneas e polares.

11. Representação geométrica das equações de duas e de três variáveis. Representação algébrica das linhas e das superfícies. Feixe de linhas e de superfícies.

12. Transformação de coordenadas no plano.

13. Teoria da linha reta no plano; problemas.

14. Circunferência, elipse, hipérbole e parábola; suas equações retilíneas e polares.

15. Transformação de coordenadas no espaço de três dimensões.

16. Teoria do plano e da linha reta; problemas.

17. Esfera. Superfícies do 2.º grau; suas equações reduzidas.

18. Funções. Evolução do conceito de função; ponto de vista atual. Continuidade. Classificação das funções; pontos de vista que podem ser adotados. Estudo elementar das funções exponencial e logarítmica. Funções circulares, diretas e inversas.

19. Derivadas e diferenciais das funções de uma variável; definições, notações e interpretação geométrica.

20. Funções de mais de uma variável; derivadas e diferenças parciais. Diferença total.

21. Derivadas e diferenciais sucessivas.

22. Desenvolvimento em série das funções de uma só variável. Fórmula de Taylor. Resto da fórmula de Taylor; expressão de Lagrange. Fórmula de Mac-Laurin. Aplicações às funções elementares.

23. Formas indeterminadas. Regra de L´Hopital.

24. Estudo das curvas definidas por equação de duas variáveis resolvidas em relação a uma delas. Tangentes e normais. Assíntotas. Concavidade. Máxima e Mínima. Pontos de inflexão. Pontos notáveis.

25. Indagação das raízes numéricas das equações com uma aproximação dada. Métodos

26. Integrais definidas e indefinidas. Integrais imediatas, Integração por partes, por substituição.

27. Equações diferenciais, ordinárias e de derivadas parciais; sua formação.

28. Principais tipos integráveis, por quadraturas, de equações diferenciais ordinárias de 1.ª ordem.

29. Equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes.

30. Equações de derivadas parciais.

31. Interpolação. Diferenças finitas e sucessivas. Fórmula de Newton. Fórmula de interpolação de Lagrange. Aplicação da fórmula de Taylor à interpolação. Cálculo da função interpolatriz no caso dos fenômenos periódicos; aplicação da fórmula de Fourier. Extrapolação.

32. Noções de cálculo das probabilidades e teoria dos erros.

33. Noções de estatística; suas aplicações à biologia e à medicina.

34. Movimento e força. Velocidade e aceleração. Composição de forças de equilíbrio.

35. Movimento retilíneo. Movimento Curvilíneo. Composição de translações e rotações. Problemas e aplicação (OTONE e SILVA, 2006, pp. 183 – 185).

Observação: No Curso Complementar Pré-médico, não estavam previstas aulas de matemática na 2.ª série.

Anexo 14
Programa de Matemática do Curso Complementar Pré-Politécnico (Engenharia, Química Industrial, Arquitetura)

1.ª Série:

1. Números irracionais. Operações. Expoente irracional.

2. Logaritmos. Teoria. Prática do sistema decimal.

3. Linhas trigonométricas. Número. Operações sobre linhas trigonométricas.

4. Equações trigonométricas. Resolução de triângulos.

5. Números complexos. Operações. Expoente imaginário. Representações trigonométricas e exponenciais. Logaritmos e linhas trigonométricas de números complexos. Aplicação às operações vetoriais no plano.

6. Análise Combinatória. Teoria e aplicações.

7. Determinantes. Teoria e aplicações.

8. Formas lineares. Equações lineares.

9. Frações contínuas. Aplicação à representação dos números irracionais.

10. Frações contínuas periódicas.

11. Séries numéricas. Principais caracteres de convergência.

12. Operações sobre séries. Cálculo numérico.

13. Noções sobre os conjuntos lineares. Teorema de Bolzano-Weierstrass.

14. Extremos superior e inferior. Limites máximos e mínimos.

15. Funções de uma variável real. Teorema de Weirestrass.

16. Limites.

17. Número e limite de U; tipo 1 x infinito.

18. Funções contínuas. Noção de continuidade uniforme.

19. Propriedades fundamentais. Operações sobre funções contínuas.

20. Funções elementares.

21. Diferença finita, derivada, diferencial.

22. Cálculo das derivadas e das diferenciais.

23. Aplicação às funções elementares.

24. Diferenças, derivadas e diferenciais sucessivos.

25. Aplicação às funções elementares.

26. Teorema de Rolle. Fórmulas dos acréscimos finitos e de Cauchy. Fórmulas de Taylor e Mac-Laurin. Aplicação ao Cálculo Numérico Aproximado.

27. Desenvolvimento em série. Séries de potência. Aplicação às funções elementares.

28. Formas indeterminadas. Regra de L´Hopital. Comparação das funções exponenciais e logarítmicas com os polinômios.

29. Cálculo numérico das raízes de equações algébricas ou transcendentes.

30. Métodos clássicos de aproximação.

31. Máximos e mínimos.

32. Estudo das variação de uma função. Representação cartesiana.

33. Funções elementares.

34. Funções primitivas. Aplicações elementares.

Geometria:

1. Relações métricas nos polígonos, no círculo, nos poliedros e nos corpos redondos.

2. Quadratura e curvatura.

3. Transformação e figuras.

4. Homotetia e semelhança.

5. Relação harmônica. Homografia. Involução.

6. Propriedades principais das cônicas.

7. Polos e polares.

Álgebra Vetorial:

1. Escalares e vetores.

2. Adição e subtração de vetores.

3. Produtos escalares, vetoriais e mistos.

4. Aplicações.

2.ª Série:

Álgebra superior:

1. Propriedades gerais dos polinômios.

2. Princípio fundamental da teoria das equações.

3. Composição das equações.

4. Noções sobre a teoria das funções simétricas.

5. Cálculo das raízes comuns de duas equações.

6. Teoria das raízes iguais.

7. Eliminação.

8. Separação das raízes reais.

9. Limites das raízes de uma equação.

10. Cálculo das raízes reais.

11. Cálculo das raízes imaginárias.

Elementos da Geometria Analítica:

1. Concepção de Descartes.

2. Coordenadas retilíneas e polares no plano.

3. Transformação de coordenadas no plano.

4. Lugares geométricos no plano; problemas.

5. Teoria da linha reta no plano; problemas.

6. Circunferência, elipse, hipérbole e parábolas; suas equações retilíneas e polares.

7. Coordenadas retilíneas e polares no espaço de três dimensões.

8. Transformação de coordenadas no espaço de três dimensões.

9. Lugares geométricos. Generalidades sobre linhas e superfícies.

10. Teoria da linha reta e do plano; problema. Esfera.

11. Superfícies do 2.º grau (OTONE e SILVA, 2006, pp. 186-188).

Anexo 15
Blocos de Conteúdos – Programas dos Cursos Complementares

Blocos de Conteúdos – Programas para os Cursos Complementares

Aritmética Teórica: números irracionais; noções de cálculo numérico, valor exato e aproximado; erro absoluto e relativo; operações efetuadas com uma dada aproximação, aplicações; noções de cálculo instrumental, régua de cálculo, seu emprego e máquinas de calcular.

Álgebra: cálculo numérico das raízes de equações algébricas ou transcendentes, métodos clássicos de aproximação, máximos e mínimos; estudo da variação de uma função, representação cartesiana; funções de uma variável real, teorema de Weierstrass; teoria dos logaritmos; prática do sistema decimal; análise combinatória, teoria e aplicações; funções contínuas, noções de continuidade uniforme, propriedades fundamentais, operações sobre funções contínuas; diferença finita, derivada diferencial, definições, notações e interpretação geométrica; cálculo das derivadas e das diferenciais, aplicação às funções elementares; equações diferenciais, ordinárias e de derivadas parciais, sua formação; equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes; diferenças, derivadas e diferenciais sucessivos, aplicação às funções elementares; homogeneidade das fórmulas, sistemas de unidades, unidades derivadas, equações de dimensão; teorema de Rolle, fórmula dos acréscimos finitos e de Cauchy; fórmulas de Taylor e Maclaurin, aplicação ao cálculo numérico aproximado, expressão de Lagrange; interpolação, diferenças finitas sucessivas, fórmulas de Newton, fórmulas de interpolação de Lagrange, aplicação da fórmula de Taylor à interpolação, cálculo da função interpolatriz no caso dos fenômenos periódicos, aplicação à fórmula de Fourier, extrapolação; desenvolvimento em série, séries de potência, aplicação às funções elementares; funções elementares; funções primitivas, aplicações elementares; limites máximos e mínimos, extremos superior e inferior; limites; número e limite U, tipo 1 x infinito; formas indeterminadas, regra de L´Hopital, comparação das funções exponenciais e logarítmicas com os polinômios; determinantes, teoria, aplicações, formas lineares, equações lineares; frações contínuas, aplicação à representação dos números irracionais, frações contínuas periódicas; séries numéricas; principais caracteres de convergência; operações sobre séries, cálculo numérico; números complexos, operações; expoente imaginário, representações trigonométricas e exponenciais; representações algébricas das linhas e das superfícies, feixe de linhas e das superfícies, logaritmos e linhas trigonométricas de números complexos, aplicações às operações vetoriais no espaço; conjuntos lineares, noções, teorema de Bolzano-Weierstrass; indagação das raízes numéricas das equações com um aproximação dada, métodos usuais, processos gráficos; integrais definidas e indefinidas, integrais imediatas, integração por partes e por substituição; principais tipos integráveis, por quadraturas, de equações diferenciais ordinárias de 1.ª ordem;noções de cálculo de probabilidade e teoria dos erros; noções de estatística, suas aplicações à Biologia e à Medicina; propriedades gerais dos polinômios; princípio fundamental da teoria das equações; composição das equações; cálculo das raízes comuns de duas equações; teoria das raízes iguais, eliminação; separação das raízes reais; limites das raízes de uma equação; teoria das funções simétricas; cálculo das raízes imaginárias.

Álgebra Vetorial: escalares e vetores; movimento e força, velocidade e aceleração, composição de forças de equilíbrio, movimento retilíneo e curvilíneo; composição de translações e rotações.

Geometria: teoria da linha reta no plano, problemas; transformação de coordenadas no plano; transformação de coordenadas no espaço de três dimensões; esfera, superfícies do 2.º grau, suas equações reduzidas; circunferência, equação retilínea e polar; elipse, equação retilínea e polar; hipérbole, equação retilínea e polar; parábola, equação retilínea e polar; propriedades gerais das cônicas; relações métricas nos polígonos, no círculo, nos poliedros e nos corpos redondos; transformação de figuras, homotetia e semelhança; quadratura e cubatura; relação harmônica, homografia, involução; polos e polares; estudos das curvas definidas por equação de duas variáveis resolvidas em relação a uma delas, tangentes e normais, assíntotas, concavidade; máxima e mínima, pontos de inflexão e pontos notáveis.

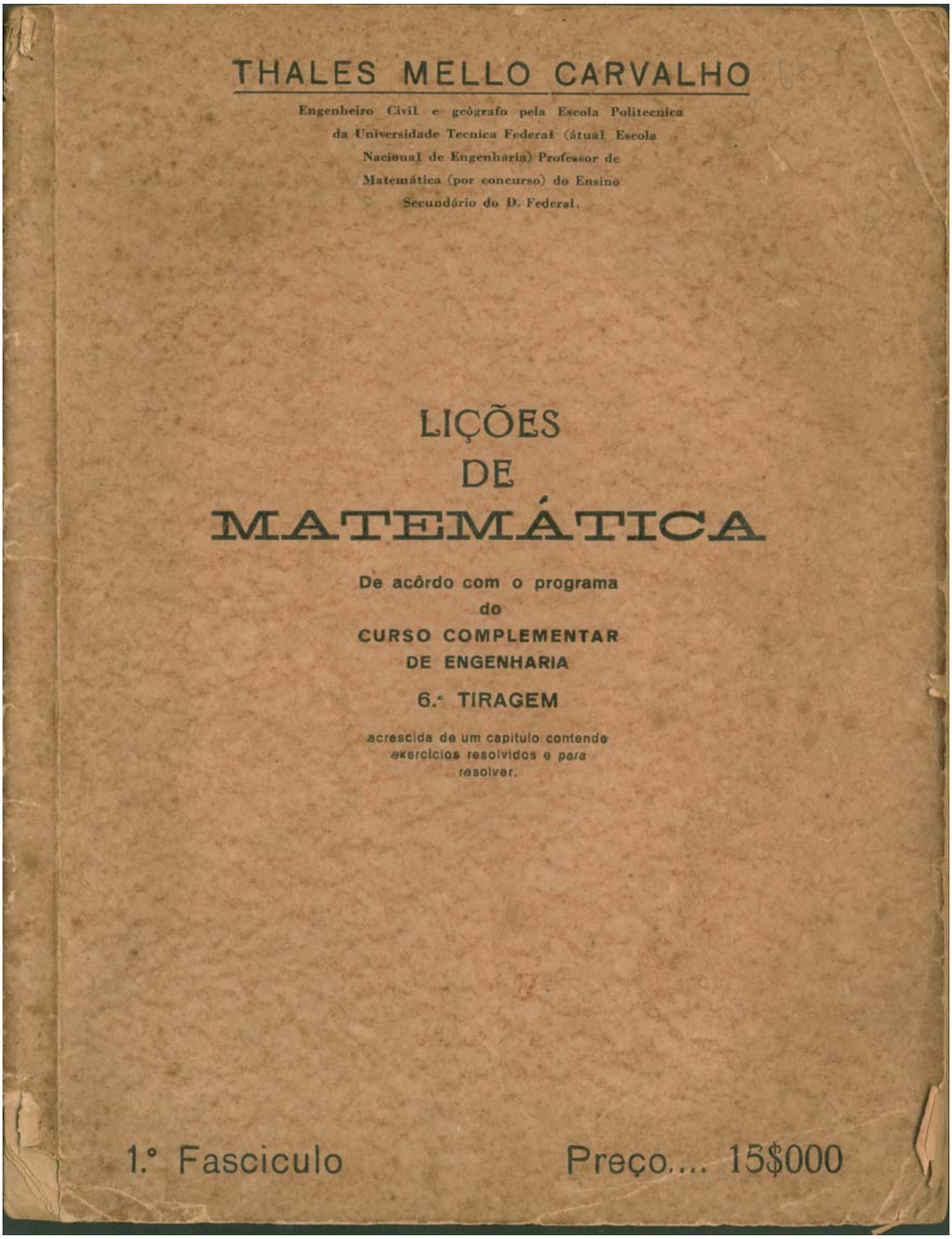
Geometria Analítica: concepção de Descartes, sistemas de coordenadas, no plano e no espaço de três dimensões, coordenadas retilíneas e polares; teoria da linha reta no plano; teoria da linha reta e do plano, problemas; esfera; coordenadas retilíneas e polares no plano; transformação de coordenadas no plano; transformação de coordenadas no espaço de três dimensões; lugares geométricos no plano, problemas; equações retilíneas e polares na circunferência, elipse, hipérbole e parábola; superfícies de 2.º grau, equações simplificadas; representação geométrica das equações de duas e de três variáveis.

Trigonometria; resolução de triângulos; linhas trigonométricas, número, operações com linhas trigonométricas.

(RIBEIRO, 2006, pp. 72-73)

ANEXO DE IMAGENS – FASE 1

Anexo 1
Capa – Livro 1 – Lições de Matemática – Thales Mello Carvalho – 1938


THALES MELLO CARVALHO

Engenheiro Civil e geógrafo pela Escola Politecnica da Universidade Tecnica Federal (átual Escola Nacional de Engenharia) Professor de Matemática (por concurso) do Ensino Secundário do D. Federal.

LIÇÕES DE MATEMÁTICA

De acôrdo com o programa do CURSO COMPLEMENTAR DE ENGENHARIA

6.ª TIRAGEM

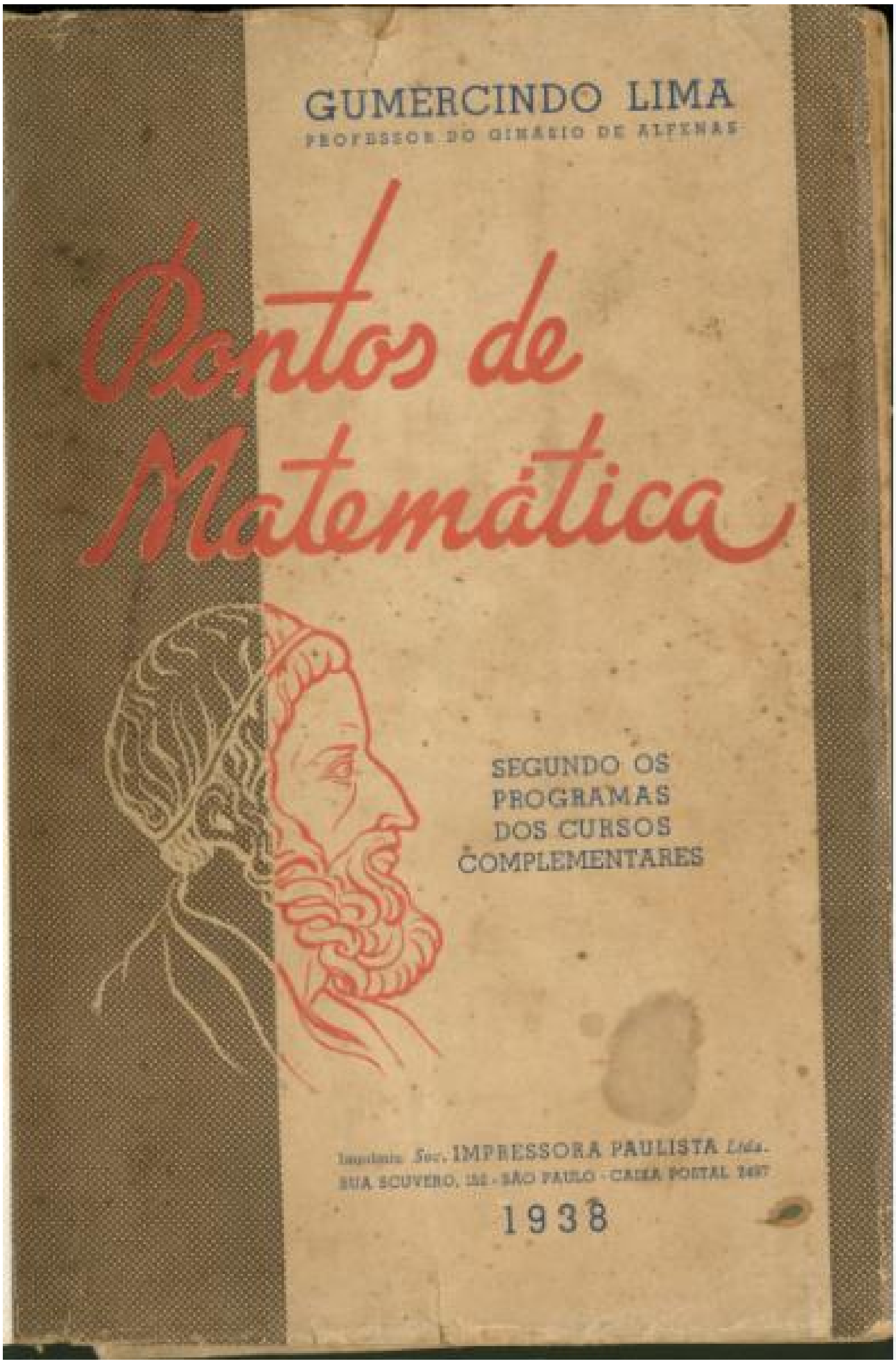
acrescida de um capitulo contendo exercicios resolvidos e para resolver.

1.° Fasciculo

Preço.... 15$000

(CARVALHO, T, M, 1938)

Anexo 2
Capa (provável) – Livro 2 – Pontos de Matemática – Gumercindo Lima, 1938



(LIMA, G, 1938)

Anexo 3
Ex.Res.Ex.Determinantes – Livro 2 – Pontos de Matemática – Gumercindo Lima – 1938

Pondo nos segundos, b_m em fator e fazendo o mesmo para os termos que contem c_m ... l_m teremos:

$$\Delta = Aa_m + A_1b_m + A_2c_m \ldots\ldots A_nl_m \quad \text{onde}$$

A, A_1, ... A_m são termos desprovidos do fator que está ao lado de cada um deles.

6 — Multiplicando-se ou dividindo-se por um mesmo numero todos os elementos de uma mesma linha ou coluna, o determinante é multiplicado ou dividido por esse numero.

Ordenando o determinante do n.º 5 em relação aos elementos da linha **m**, teremos:

$$\Delta = Aa_m + A_1b_m + \ldots A_nl_m$$

Multiplicando por α todos os elementos da linha, obtemos o novo determinante

$$\Delta' = \alpha Aa_m + \alpha A_1b_m + \ldots + \alpha A_nl_m$$

7 — Um determinante não muda de valor multiplicando-se ou dividindo-se cada elemento de uma linha ou de uma coluna por um mesmo numero, contanto se divida ou se multiplique o determinante por esse numero.

Exemplo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 16 & 7 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

Aqui dividimos os elementos da 2.ª coluna por 4 e multiplicamos o determinante por esse numero.

8 — Pode se transformar um determinante em outro no qual os elementos de uma linha ou coluna sejam 1.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \\ 5 & 8 & 11 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 10 \\ 5 & 8 & 11 \end{vmatrix} = 3 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \frac{7}{4} & \frac{10}{4} \\ 5 & 8 & 11 \end{vmatrix} = 3 \times 4 \times 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \frac{7}{4} & \frac{10}{4} \\ 1 & \frac{8}{5} & \frac{11}{5} \end{vmatrix}$$

Basta, como se vê, tirar dos traços os elementos da coluna ou linha.

9 — Si os elementos de duas linhas ou duas colunas são proporcionais, o determinante é nulo.

(LIMA, G, 1938, p.17)

Anexo 4
Ex.Res.Ex. Livro 2. Sistemas de Equações Lineares – Pontos de Matemática – Gumercindo Lima – 1938

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$$

as duas equações lineares

$$a\frac{x}{z} + b\frac{y}{z} + c = 0 \quad \text{e} \quad a_1\frac{x}{z} + b_1\frac{y}{z} + c_1 = 0 \qquad (2$$

admitem, então, um sistema de soluções unico.

Sendo $\triangle = 0$, essas soluções verificam tambem a terceira equaçã

$$a_2\frac{x}{y} + b_2\frac{y}{z} + c_2 = 0$$

Dessa forma, o sistema proposto admite uma infinidade de siste mas de soluções; pode-se escolher arbitrariamente **z**, e os valores da incognitas **x** e **y** serão dados pelas duas equações (2) que dão a co nhecer os valores de **x** para **z** e de **y** para **z**.

APLICAÇÕES

(I)

Resolver o sistema $\begin{matrix} 5x + 2y = 29 \\ 2x - 3y = 4 \end{matrix}$

teremos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 29 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{29\times(-3)-(2\times4)}{5(-3)-(2\times2)} = \frac{95}{19} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 29 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{5\times40-2\times29}{5\times(-3)-(2\times2)} = \frac{38}{19} = 2$$

.... (F. G. M.)

(II)

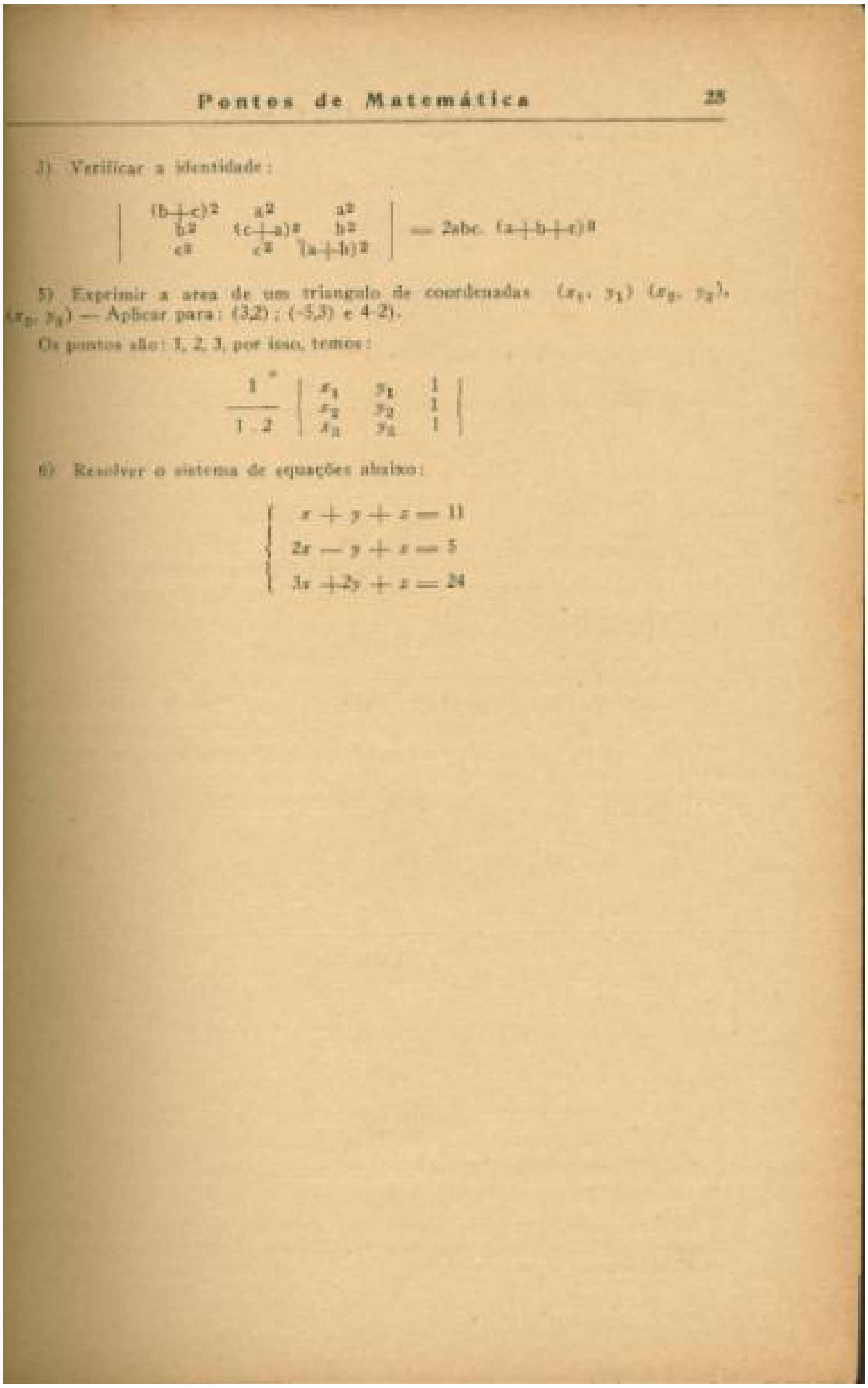
Resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{matrix} 2x+3y+4z = 53 \\ 3x+5y-4z = 2 \\ 4x+7y-2z = 31 \end{matrix}$$

(F. G. M.)

(LIMA, G, 1938, p.22)

Anexo 5
Ex.Prop. Livro 2 – Pontos de Matemática – Gumercindo Lima – 1938



4) Verificar a identidade:

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc.\ (a+b+c)^3$$

5) Exprimir a area de um triangulo de coordenadas (x_1, y_1) (x_2, y_2), (x_3, y_3) — Aplicar para: (3,2) ; (-5,3) e 4-2).

Os pontos são: 1, 2, 3, por isso, temos:

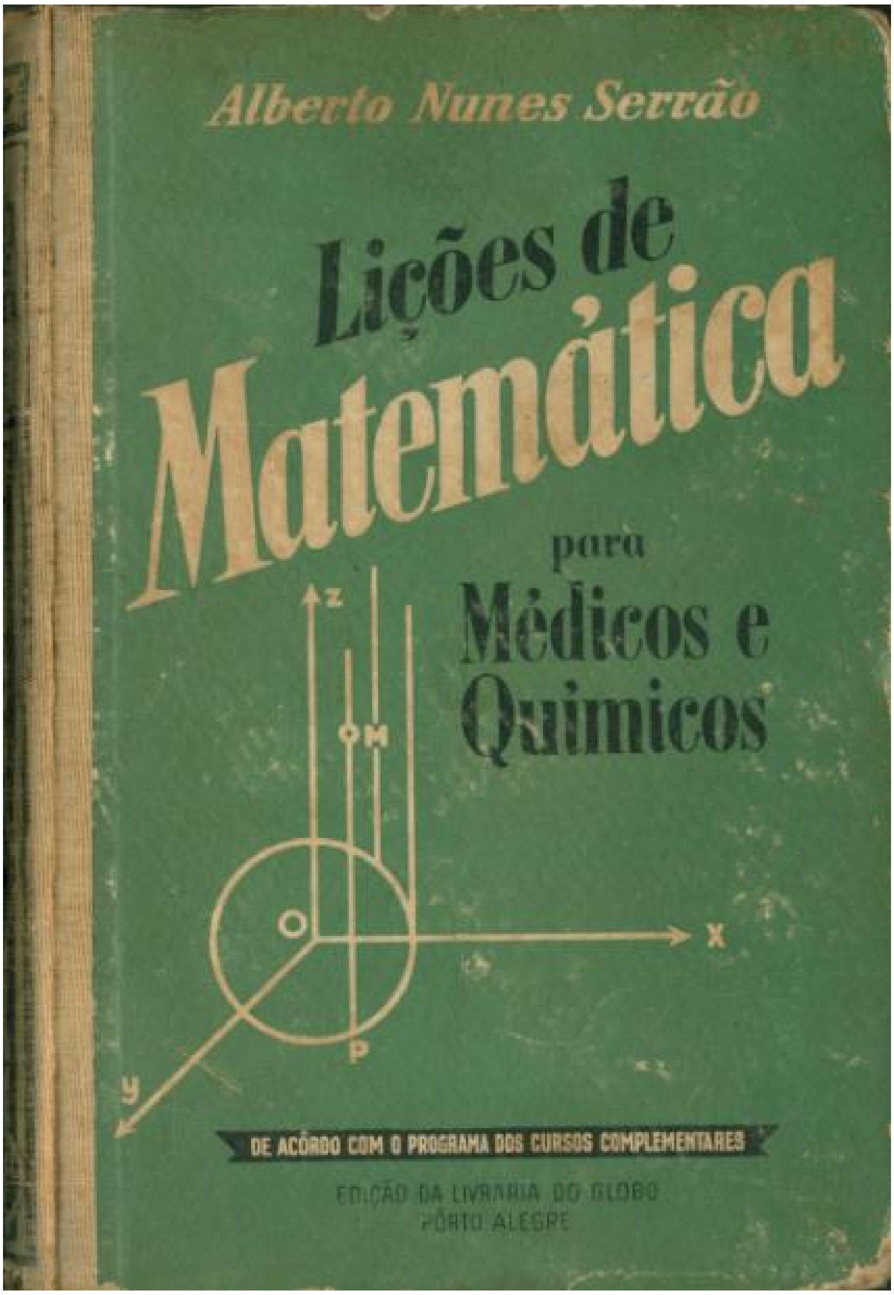
$$\frac{1}{1 \cdot 2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

6) Resolver o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$$

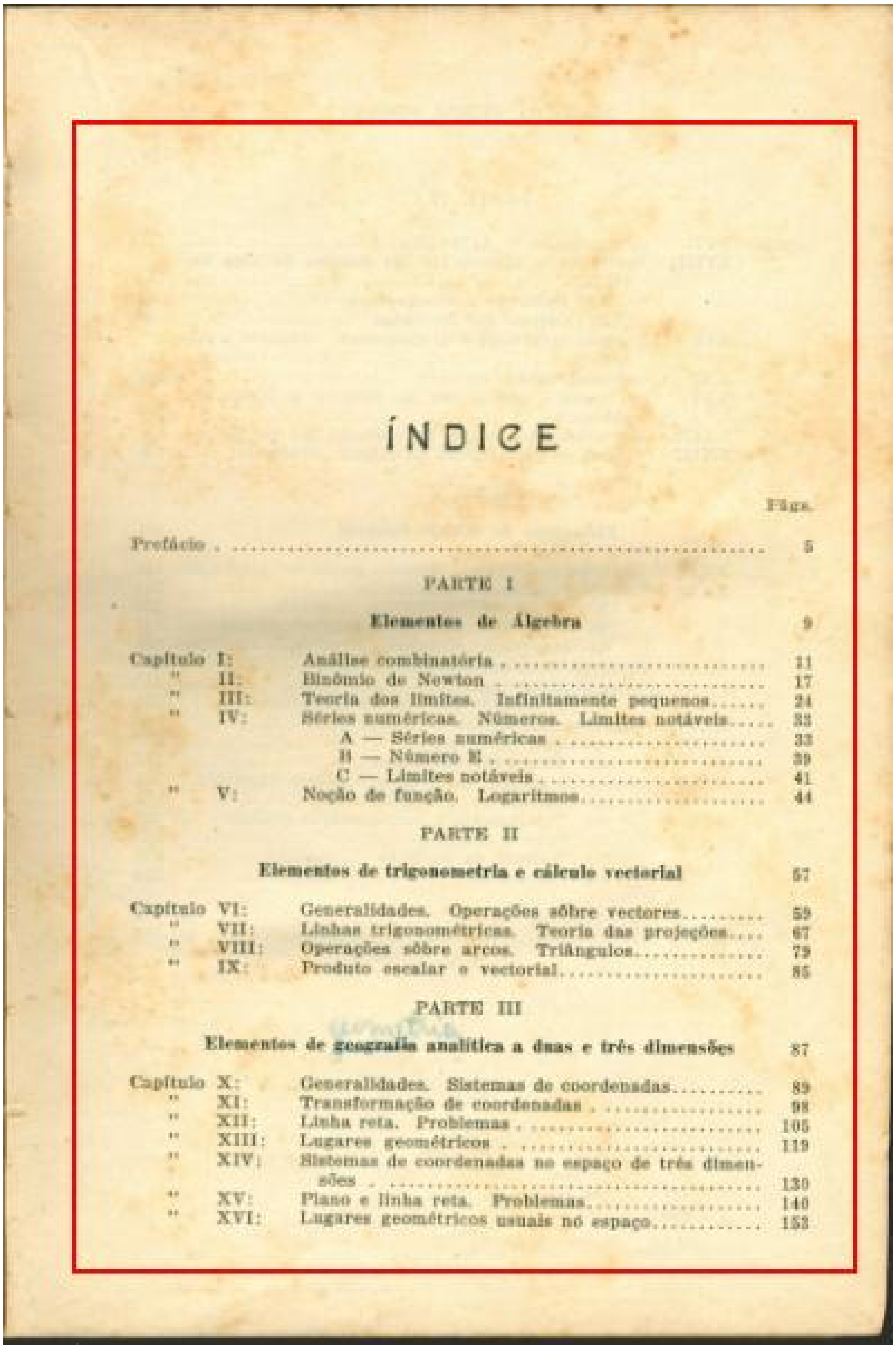
(LIMA, G, 1938, p.25)

Anexo 6
Capa – Livro 3 – Lições de Matemática para Médicos e Químicos – Alberto Nunes Serrão – 1941



(SERRÃO, A, N, 1941)

Anexo 7
Índice – Livro 3 – Lote 1(Parte 1) – Lições de Matemática para Médicos e Químicos – Alberto Nunes Serrão, 1941.



ÍNDICE

Índice – Livro 3 – Lote 1(Parte 2)

Págs.

PARTE IV

PARTE V

(SERRÃO, A, N, 1941)

Anexo 8
Ex.Prop.Capítulo I – Livro 3 – Lições de Matemática para Médicos e Químicos – 1941

9. Teorema. — *O número de combinações de* n *objetos tomados* p *a* p *é igual ao número de combinações dêsses mesmos* n *objetos tomados* n–p *a* n–p.

Com efeito, suponhamos dado o conjunto dos n objetos. Cada vez que separamos p para formar uma combinação p a p sobrarão $n-p$ que constituirão uma combinação dos n objetos tomados $n-p$ a $n-p$.

Pela correspondência existente, concluímos que o número de grupos é o mesmo em ambos os casos.

A proposição acima é empregada no estudo das propriedades dos coeficientes do binômio.

EXERCÍCIOS RELATIVOS AO CAPÍTULO I

1) Dadas sete letras, a, b, c, d, e, f, g, quantas são as permutações que começam por ab?

R. 120.

2) Dada a relação $\dfrac{A^3_n}{A^3_{n+2}} = \dfrac{5}{12}$, determinar o valor de n.

R. 7.

3) Sabendo que $\dfrac{C^4_{n+2}}{C^2_n} = 11$, pede-se n.

R. 10.

4) Demonstrar diretamente a relação $C^p_n = C^{p-1}_{n-1} + C^{p-1}_n$.

5) Provar diretamente a relação $C^p_n = C^{n-p}_n$.

6) Uma urna contém 12 bolas vermelhas e 16 bolas pretas. De quantas formas pode-se tirar 7 bolas, compreendendo 3 vermelhas e 4 pretas?

R. $C^3_{12} \cdot C^4_{16}$.

SERRÃO, A, N, 1941, p.16)

Anexo 9
Introdução – Capítulo III – Livro 3 – Lições de Matemática para Médicos e Químicos – Alberto Nunes Serrão – 1941

CAPÍTULO III

Teoria dos limites. Infinitamente pequenos.

1. Diz-se que uma quantidade variável X tem para *limite* uma quantidade fixa L quando se verifica a relação

$$| L - X | < \varepsilon$$

sendo ε um número positivo tão pequeno quanto se queira.

Escreve-se

$$\lim X = L$$

ou então

$$X \rightarrow L$$

que se lê:

X tende para L.

2. Quando uma quantidade variável tem para limite *zero*, isto é, pode tornar-se tão pequena quanto se queira, diz-se um **infinitamente pequeno.**

Uma quantidade variável diz-se **infinitamente grande** quando pode tornar-se e ficar superior a uma quantidade dada arbitrariamente grande. Diz-se ainda que ela tende para **infinito** ou que tem para limite infinito.

3. No estudo dos limites consideraremos como evidente o princípio seguinte:

Quando duas quantidades variáveis são constantemente iguais, em todos os seus estados de variação, e uma tende para determinado limite a outra também tenderá para um dado limite e êles são iguais.

(SERRÃO, A, N, 1941, p.24)

Anexo 10
Ex.Res. Exemplo – Capítulo III – Livro 3 – Lições de Matemática para Médicos e Químicos – Alberto Nunes Serrão – 1941

4. Exemplo I. — *Seja determinar o limite da expressão* $\frac{n+1}{n}$ *quando n cresce indefinidamente.*

Podemos escrever

$$\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

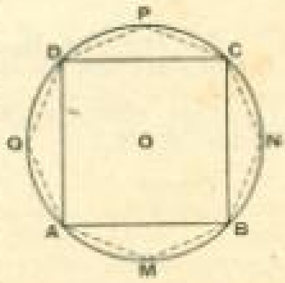
ou seja

$$\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$$

Ora, quando n cresce indefinidamente a fração $\frac{1}{n}$ diminue cada vez mais tendendo para zero, logo podemos escrever

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{n+1}{n}\right] = 1$$

Exemplo II. — *Seja C uma circunferência de raio dado.* Inscrevendo-se um polígono regular, o quadrado ABCD, por exemplo, seu perímetro representará um valor grosseiro da circunferência, pois equivale a substituir o arco pela corda correspondente. Baixando entretanto do centro O, perpendiculares aos lados, elas passarão pelo meio de cada um dêles e dos arcos que os subentendem, determinando o octógono AMBNCPDQ cujo perímetro representará um valor mais aproximado da circunferência.



Executando a mesma operação sôbre os lados do octógono, obtemos o polígono de dezesseis lados cujo perímetro representará um valor mais aproximado ainda da circunferência e assim sucessivamente.

Vê-se que denominando C o valor da circunferência e P_{2n} os perímetros dos polígonos de $2^2, 2^3, \ldots 2^n$ lados, a diferença

$$C - P_{2n}$$

pode tornar-se *tão pequena quanto se queira.*

A circunferência é o limite para o qual tendem os perímetros dos polígonos regulares inscritos, quando se duplica indefinidamente o número de lados.

5. Passemos agora ao estudo das propriedades clássicas dos limites.

Teorema I. — *O limite da soma algébrica de um número finito de parcelas variáveis, tendendo cada uma para um limite dado, iguala a soma algébrica dos limites das parcelas.*

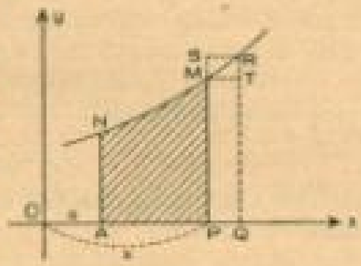
Com efeito, sejam três quantidades variáveis X_1, X_2, X_3 e L_1, L_2, L_3 os seus limites.

(SERRÃO, A, N, 1941, p.25)

Anexo 11
Nota Explicativa – Capítulo XXIV – Livro 3 – Lições de Matemática para Médicos e Químicos – Alberto Nunes Serrão – 1941

4. Podemos demonstrar a existência da primitiva a que aludimos anteriormente, do modo seguinte:

Seja uma função contínua, $y = f(x)$, representada pela curva C e consideremos a área delimitada pela curva, uma ordenada fixa $x = a$, o eixo dos x e uma ordenada variável $x = x$.



Evidentemente, a área hachurrada depende da posição da ordenada variável.

Atribuindo a x um acréscimo Δx, ela ocupará a posição QR e a área experimentará um acréscimo ΔA, o qual é representado pelo trapézio curvilíneo MPQR. Ora, considerando também os retângulos PMTQ, PSRQ vem:

$$\text{área } MTQP < \text{área } MRQP < \text{área } SRQP$$

ou seja

$$PM \times PQ < \Delta A < RQ \,.\, PQ.$$

$$\text{Observando que} \begin{cases} PQ = RS = MT = \Delta x \\ PM = y \\ QR = y + \Delta y \end{cases}$$

deduz-se

$$y\,\Delta x < \Delta A < (y + \Delta y)\,\Delta x$$

isto é, dividindo por Δx

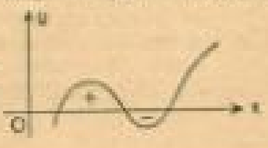
$$y < \frac{\Delta A}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Obrigando Δx a tender para zero, o mesmo acontece a Δy, pois a função é contínua, e virá

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta A}{\Delta x} \right) = y = f(x).$$

Concluímos assim a proposição:

Dada uma função contínua $y = f(x)$ e construída a curva representativa da sua variação, a área delimitada pela curva, o eixo dos x, uma ordenada fixa e uma ordenada variável tem para derivada a função $f(x)$.



Nota. — Tendo em vista as aplicações, convenciona-se em atribuir o sinal *mais* (+) às áreas situadas acima do eixo dos x e o sinal *menos* (—), àquelas que estão situadas abaixo do mesmo.

(SERRÃO, A, N, 1941, p.245)

Anexo 12
Ex.Res.Ex – Cap.XXIV – Livro 3 – Lições de Matemática para Médicos e Químicos” – Alberto Nunes Serrão – 1941

Exemplo I — *Calcular a integral* $I = \int xe^x \, dx$.

Ponhamos $u = x, \quad v' = e^x$

donde $u' = 1. \quad v = e^x$

Substituindo

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x . 1 . dx = xe^x - e^x$$

Logo

$$I = e^x (x - 1).$$

Exemplo II — *Calcular a integral* $I = \int Lx \, dx$.

Observando que

$$Lx = 1 \times Lx,$$

podemos pôr

$$u = Lx, \quad v' = 1$$

donde

$$u' = \frac{1}{x}, \quad v = x$$

Logo $\int Lx \, dx = x\,Lx - \int x . \frac{1}{x} dx = x\,Lx - x + C.$

Finalmente,

$$I = x\,(Lx - 1) + C.$$

10. III) **Mudança de variável.** — O método da mudança de variável é um dos mais empregados na prática.

Êle se aplica a integrais da forma

$$\int f\,[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx$$

as quais, mediante a mudança de variável $\varphi(x) = u$, donde $\varphi'(x)\,dx = du$ transformam-se em

$$\int f(u)\,du$$

Esta última, em geral, é mais simples que a proposta.

Exemplo I — *Calcular a integral* $I = \int \cos \frac{7}{2} x . dx$.

Pondo $\frac{7}{2} x = u$, temos $dx = \frac{2}{7} du$.

(SERRÃO, A, N, 1941, p.249)

Anexo 13
Ex.Prop.Cap XXIV – Livro 3 – Lições de Matemática para Médicos e Químicos – Alberto Nunes Serrão – 1941

EXERCICIOS RELATIVOS AO CAPÍTULO XXIV

1) Calcular as seguintes integrais imediatas:

a) $\int x^4 \, dx = \frac{x^5}{5} + C$

b) $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C$

c) $\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$

d) $\int 2y^{\frac{1}{2}} \, dy = \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} + C$

e) $\int \sqrt[3]{x} \, dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$

f) $\int 5^x \, dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$

2) Calcular, empregando a decomposição em elementos simples, as integrais seguintes:

a) $\int (x-1) \, dx = \frac{x^2}{2} - x + C$

b) $\int (x^3 + 4x^2 - 7x + 5) \, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 5x + C$

c) $\int \frac{(x^2 + 2x + 1) \, dx}{x + 1} = \frac{x^2}{2} + x + C$

d) $\int \frac{(2 + x - 3x^2) \, dx}{\sqrt{x}} = 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{6}{5}\sqrt{x^5} + C.$

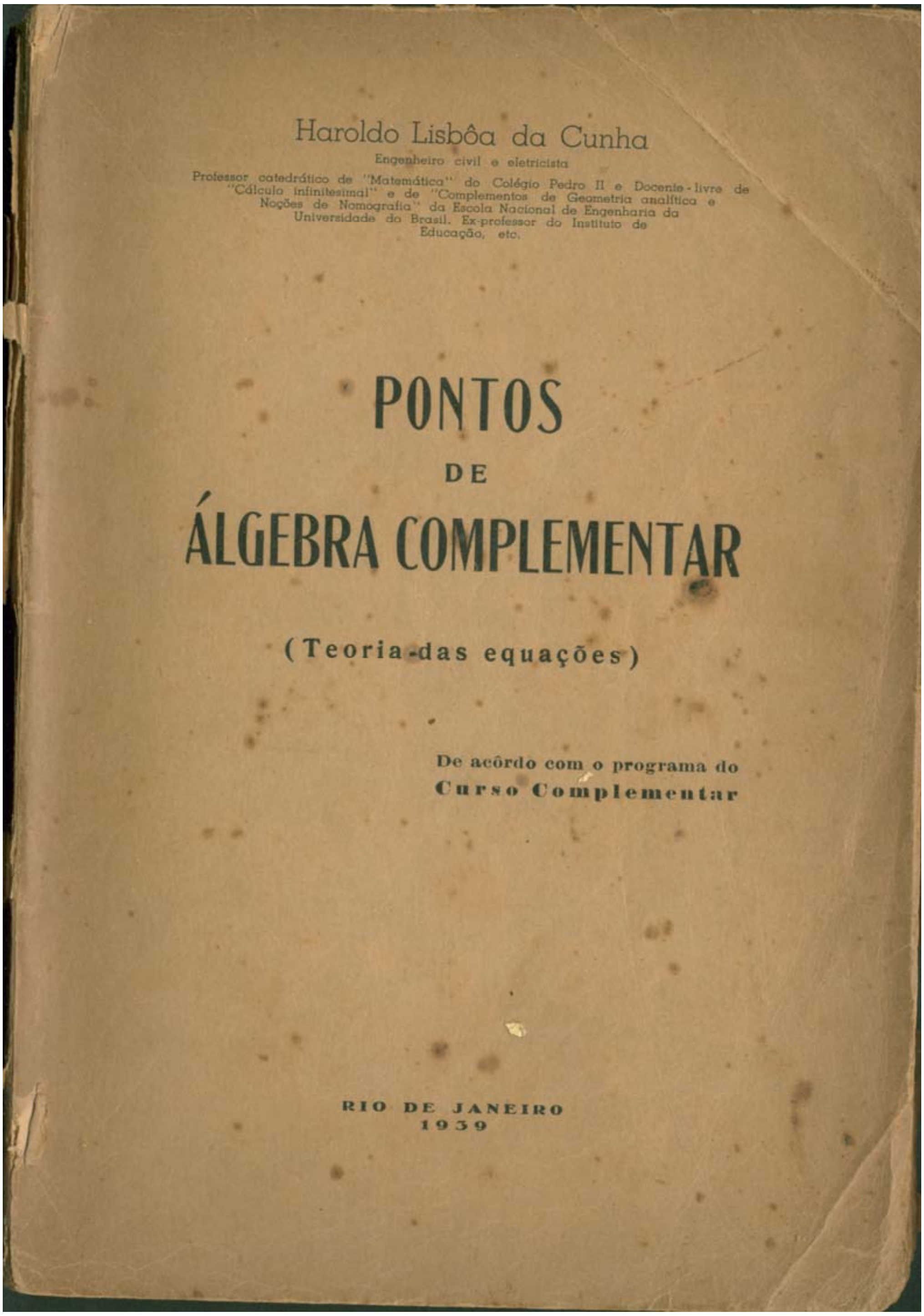
3) Calcular, empregando as fórmulas de integração por partes, as integrais seguintes:

a) $\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

b) $\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$

(SERRÃO, A, N, 1941, p.251)

Anexo 14
Capa – Pontos de Álgebra Complementar – Haroldo Lisboa da Cunha – 1939



(CUNHA, H, L, 1939)

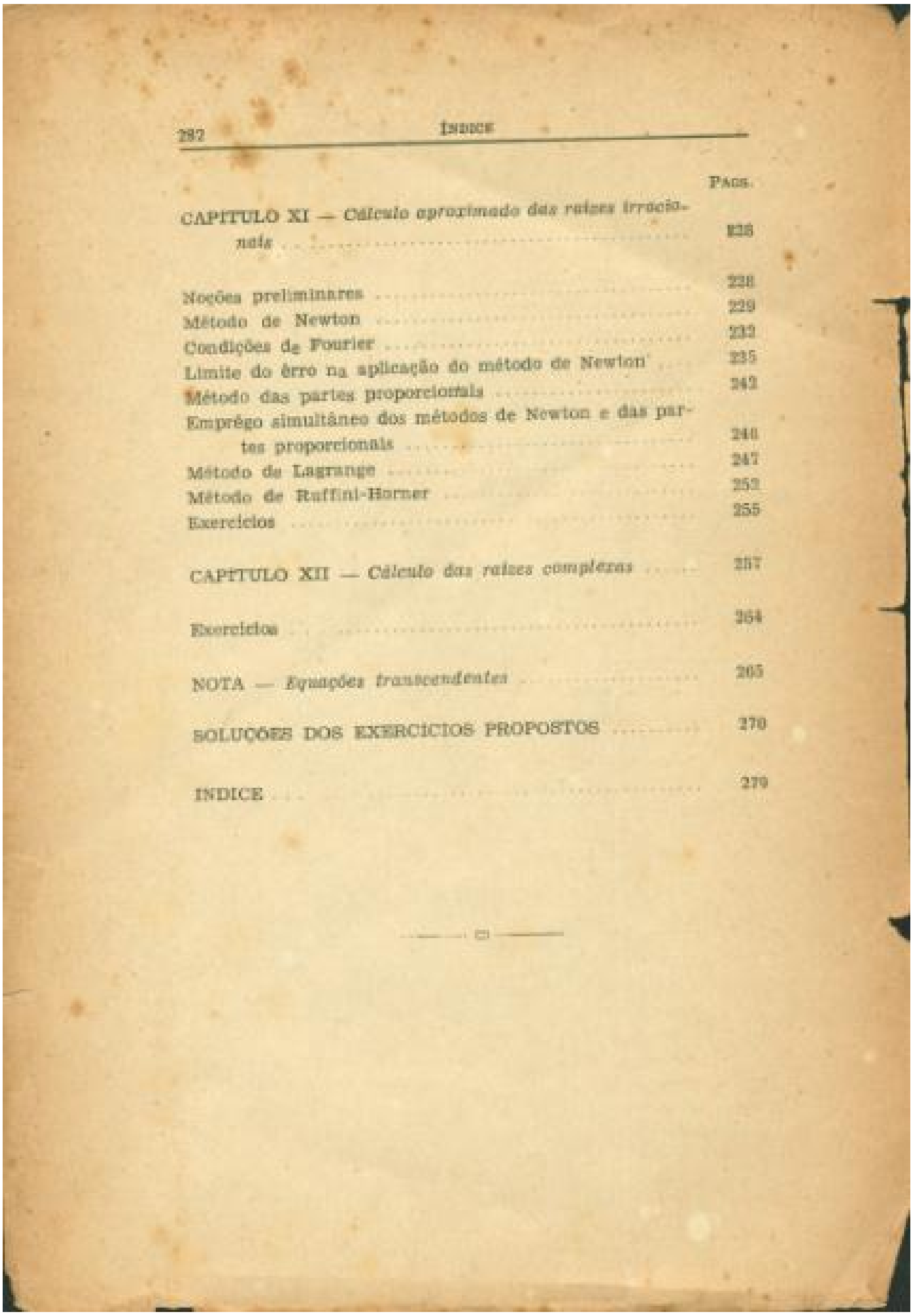
Anexo 15
Índice Livro 1 – Lote 2 – (Parte 1) – Pontos de Álgebra Complementar – Haroldo Lisboa da Cunha – 1939

ÍNDICE

Índice Livro 1 – Lote 2 – (Parte 2)

Índice Livro 1 – Lote 2 – (Parte 3)

Fig. Índice Livro 1 – Lote 2 – (Parte 4)



(CUNHA, H, L, 1939, p. 279-282)

Anexo 16
Ex. res. Cap. I – Livro 1 – Lote 2 (Parte 1) – Haroldo Lisboa da Cunha – 1939

EXEMPLO I ' — "Obter, para $x = 2$, o valor numérico do polinômio:

$$P(x) \equiv 5x^4 - 12x^3 + x^2 - x + 15$$

e de todas as suas derivadas".

Neste caso, o divisor sendo $x - 2$, teremos o seguinte quadro de Ruffini-Horner:

	5	— 12	1	— 1	15
$x_0 = 2$	5	— 2	— 3	— 7	1
	5	8	13	19	
	5	18	49		
	5	28			
	5				

A primeira linha é constituida pelos coeficientes de $P(x)$. Os primeiros elementos da segunda linha correspondem aos coeficientes do polinômio que representámos por $Q_1(x)$. Isto é:

$$Q_1(x) \equiv 5x^3 - 2x^2 - 3x - 7$$

Seu último elemento nos dá o resto $P(x_0)$. Portanto:

$$P(2) = 1$$

Pela terceira linha, concluimos que:

$$Q_2(x) \equiv 5x^2 + 8x + 13$$

sendo:

$$P'(2) = 19$$

Além disso, teremos:

$$Q_3(x) \equiv 5x + 18$$

e:

$$Q_4(x) \equiv 5$$

Ex. res. Cap. I – Livro 1 – Lote 2 (Parte 2)

sendo:

$$\frac{1}{2!}P''(2) = 49 \quad ; \quad \frac{1}{3!}P'''(2) = 28 \quad \text{e} \quad \frac{1}{4!}P^{\text{IV}}(2) = 5$$

Daí, tiraremos finalmente:

$$P''(2) = 98 \quad ; \quad P'''(2) = 168 \quad \text{e} \quad P^{\text{IV}}(2) = 120$$

EXEMPLO II — "Dado o polinômio:

$$P(x) \equiv x^5 - 10x^4 + 25x^3 + 50x - 200$$

desenvolvê-lo segundo as potências crescentes de $x - 4$".

Pela fórmula de Taylor, escreveremos logo:

$$P(x) \equiv P(x_0) + (x - x_0)P'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}P''(x_0) +$$

$$+ \frac{(x-x_0)^3}{3!}P'''(x_0) + \frac{(x-x_0)^4}{4!}P^{\text{IV}}(x_0) + \frac{(x-x_0)^5}{5!}P^{\text{V}}(x_0)$$

onde deveremos fazer $x_0 = 4$, calculando os coeficientes $P(x_0)$, $P'(x_0)$, $\frac{1}{2!}P''(x_0)$, $\frac{1}{3!}P'''(x_0)$, $\frac{1}{4!}P^{\text{IV}}(x_0)$ e $\frac{1}{5!}P^{\text{V}}(x_0)$.

Aplicando o algoritmo de Ruffini-Horner, teremos o quadro:

	1	— 10	25	0	50	— 200
$x_0 = 4$	1	— 6	1	4	66	64
	1	— 2	— 7	— 24	— 30	
	1	2	1	— 20		
	1	6	25			
	1	10				
	1					

(CUNHA, H, L, 1939, p. 26-27)

Anexo 17
Desenvolvimento do Item 17 – Cap. I – Livro 1 – Lote 2 – Pontos de Álgebra Complementar – Haroldo Lisboa da Cunha – 1939

Portanto:

$$|x| \geqslant \frac{6 \times 24}{2} \quad \text{ou} \quad |x| \geqslant 72$$

Observação — As considerações feitas não impedem que um valor menor que E satisfaça a condição imposta. Raciocinámos, sempre, além do estritamente necessário.

Princípio fundamental da teoria das equações

17. Teorema de D'Alembert-Gauss (*): — *"Toda equação algébrica racional e inteira admite, pelo menos, uma raiz"*.

Vamos seguir, em linhas gerais, a demonstração devida a Argand e Cauchy (**), de carater puramente analítico.

Consideremos uma equação algébrica:

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_m = 0 \quad (28)$$

no caso mais geral em que os coeficientes são números complexos.

Representemos seu primeiro membro por $P(z)$ e admitamos $z = x + iy$.

18. Lema de Gauss — *"Se, para um dado valor $z = z_0$, tivermos:*

$$|P(z_0)| > 0$$

(*) D'Alembert enunciou o teorema, apresentando uma demonstração imperfeita (*"Histoire de l'Académie Royal des Sciences"*, Berlim, 1746, pgs. 182-191). A primeira demonstração rigorosa coube a Gauss, na memória: *"Demonstratio nova theorematis, etc."*, Helmstedt, 1799, dando, além dessa, duas outras.

(**) Argand, *"Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, etc."*, Paris, 1806, e Cauchy, *"Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique"*, Paris, 1821.

(CUNHA, H, L, 1939, p.37)

Anexo 18
Ex. Prop.Cap. I – Livro 1 – Lote 2 – Pontos de Álgebra Complementar – Haroldo Lisbôa da Cunha – 1939

2. Desenvolver os polinômios abaixo, segundo as potências decrescentes de $(x - 2)$:

a) $7x^4 - 40x^3 + 14x^2 + 4x + 33$
b) $x^4 - 1$
c) $x^4 - 10x^2 + 5$
d) $4 + 6x - 5x^2 - 2x^3$

3. Desenvolver os polinômios abaixo, segundo as potências crescentes de $(x + 1)$:

a) $6x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 7$
b) $- 4x^4 + 2x^3 - 2x + 8$
c) $x^3 + 1$
d) $- 2x^3 + 6x - 5$

4. Calcular, para os polinômios abaixo, o valor numérico das derivadas de primeira, segunda e terceira ordem, para $x = 4$:

a) $- 3x^5 + 13x^4 - 6x^3 + 188x^2 - 720x + 5$
b) $x^4 - 13x^3 - 50x^2 + 10$
c) $2x^4 - 10x^3 - 8x^2 - 7x + 1$
d) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

5. Dado o polinômio $5x^4 - 10x^3 + 7x - 8$, calcular um número positivo ε tal que para $|x| < \varepsilon$ o sinal do mesmo coincida com o do seu termo independente.

6. Idêntica questão para o polinômio: $4x^5 - 8x^4 + 7x^2 + 2x - 10$.

7. Dado o polinômio: $- 2x^7 - 21x^4 + 30x^3 + 4x - 5$.

8. Idêntica questão para o polinômio $24x^3 - 2x^2 + 3$. determinar um número positivo E tal que, para $|x| > E$ o sinal do mesmo coincida com o de seu termo de mais alto grau.

9. Dado o polinômio $P(x) = - 5x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 5x$, determinar $|x|$ de tal forma que seja $|P(x)| < 0{,}09$.

10. Dado o polinômio $P(x) = 3x^5 + 2x^3 - 7x^2 + 9x$, determinar $|x|$ de tal forma que seja $|P(x)| < 0{,}5$.

(CUNHA, H, L, 1939, p.53)

Anexo 19
Ex.Res. Ex. Prop. – Cap IV – Livro 1 – Lote 2 – Pontos de Álgebra Complementar – Haroldo Lisboa da Cunha – 1939

EXEMPLO II — "Calcular as raízes comuns às equações:

$$4x^{5} + 11x^{4} + 81 = 0$$
$$2x^{5} - 11x^{2} - 9 = 0"$$

Teremos:

$$\Delta(x) = x^{2} + 2x + 3$$

As raízes comuns procuradas serão fornecidas, então, por:

$$x^{2} + 2x + 3 = 0$$

isto é, teremos: $x_1 = -1 + i\sqrt{2}$ e $x_2 = -1 - i\sqrt{2}$.

EXERCICIOS

1. Calcular as raízes comuns às equações:

$$2x^{4} - 6x^{3} + 3x^{2} + 3x - 2 = 0$$
$$x^{3} - 2x^{2} - x + 2 = 0$$

2. Calcular as raízes comuns às equações:

$$x^{6} - 1 = 0$$
$$x^{10} - 1 = 0$$

3. Calcular as raízes comuns às equações:

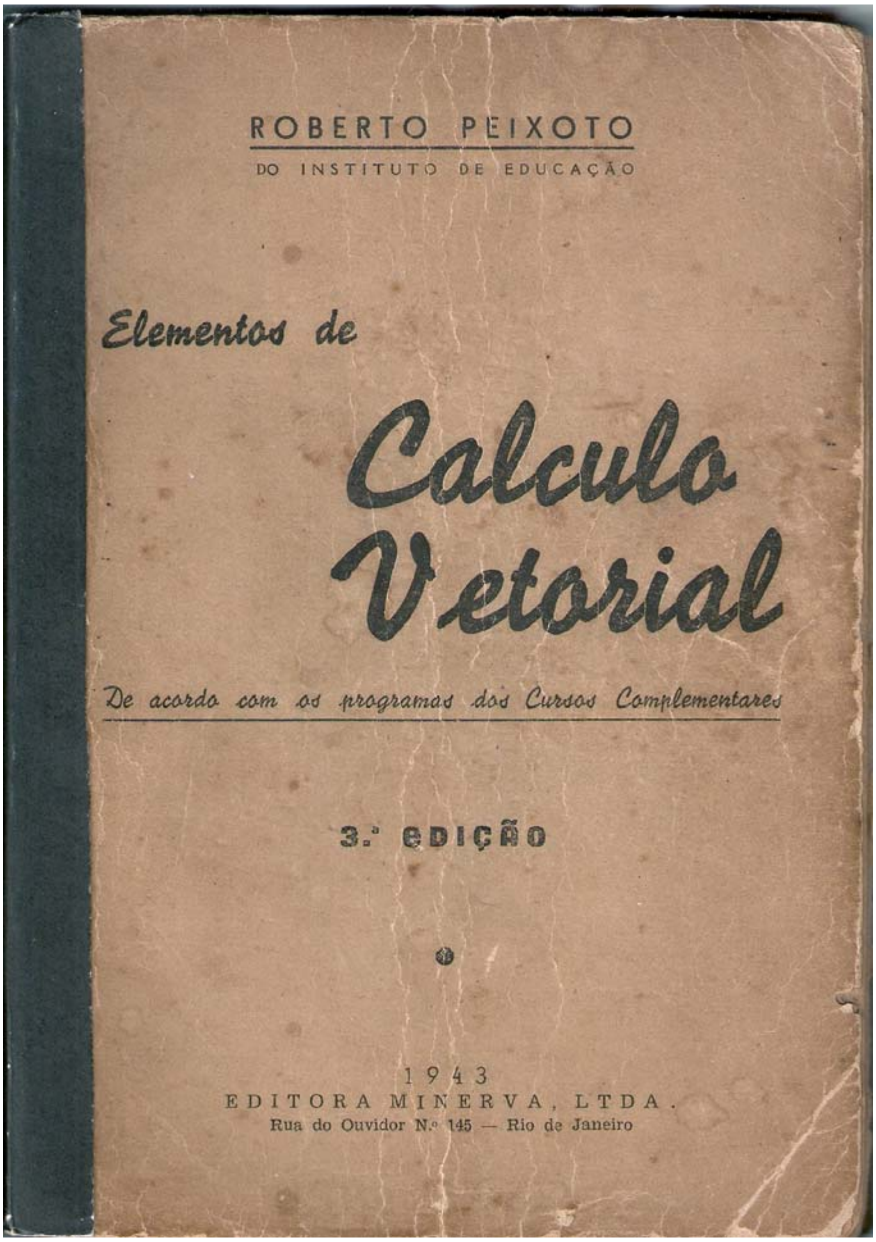
$$x^{4} + 2x^{2} - 3 = 0$$
$$x^{3} + 2x^{2} - x - 2 = 0$$

4. Calcular as raízes comuns às equações:

$$x^{4} - 16x^{3} + 91x^{2} - 216x + 180 = 0$$
$$x^{4} - 22x^{3} + 179x^{2} - 638x + 840 = 0$$

(CUNHA, H, L, 1939. p. 98)

Anexo 20
Capa – Livro 2 – Lote 2 – Elementos de Cálculo Vetorial – Roberto Peixoto – 1943



(PEIXOTO, R, 1943)

Anexo 21

Des.Carac. de um vetor – Class.de vetores – Livro 2 – Lote 2 – Elementos de Cálculo Vetorial – Roberto Peixoto – 1943

REPRESENTAÇÃO E CARACTERÍSTICOS DE UM VETOR

3) Um vetor $\overrightarrow{AB}$ (*) é representado geometricamente por uma flecha (fig. 1) e é caracterizado por:

I. — *Grandeza* ou *módulo*, que é o número aritmético (**) que mede o segmento de reta AB;

II. — *Direção* ou *suporte* que é a reta indefinida $x'x$ que contém o vetor;

(Fig. 1)

III. — *Sentido* que é o de um movel que se desloque da origem A à extremidade B do vetor.

4) Um vetor de origem A e extremidade B é designado por $\overrightarrow{AB}$, lendo-se *vetor AB*. Grassmann (1844) propoz representar o vetor $\overrightarrow{AB}$ pela notação $B - A$ (***).

CLASSIFICAÇÃO DOS VETORES

5) Podemos classificar os vetores da seguinte forma:

$$\textit{Vetores} \begin{cases} \textit{Livres} \\ \textit{Localizados em um} \begin{cases} \textit{ponto} \\ \textit{eixo} \end{cases} \end{cases}$$

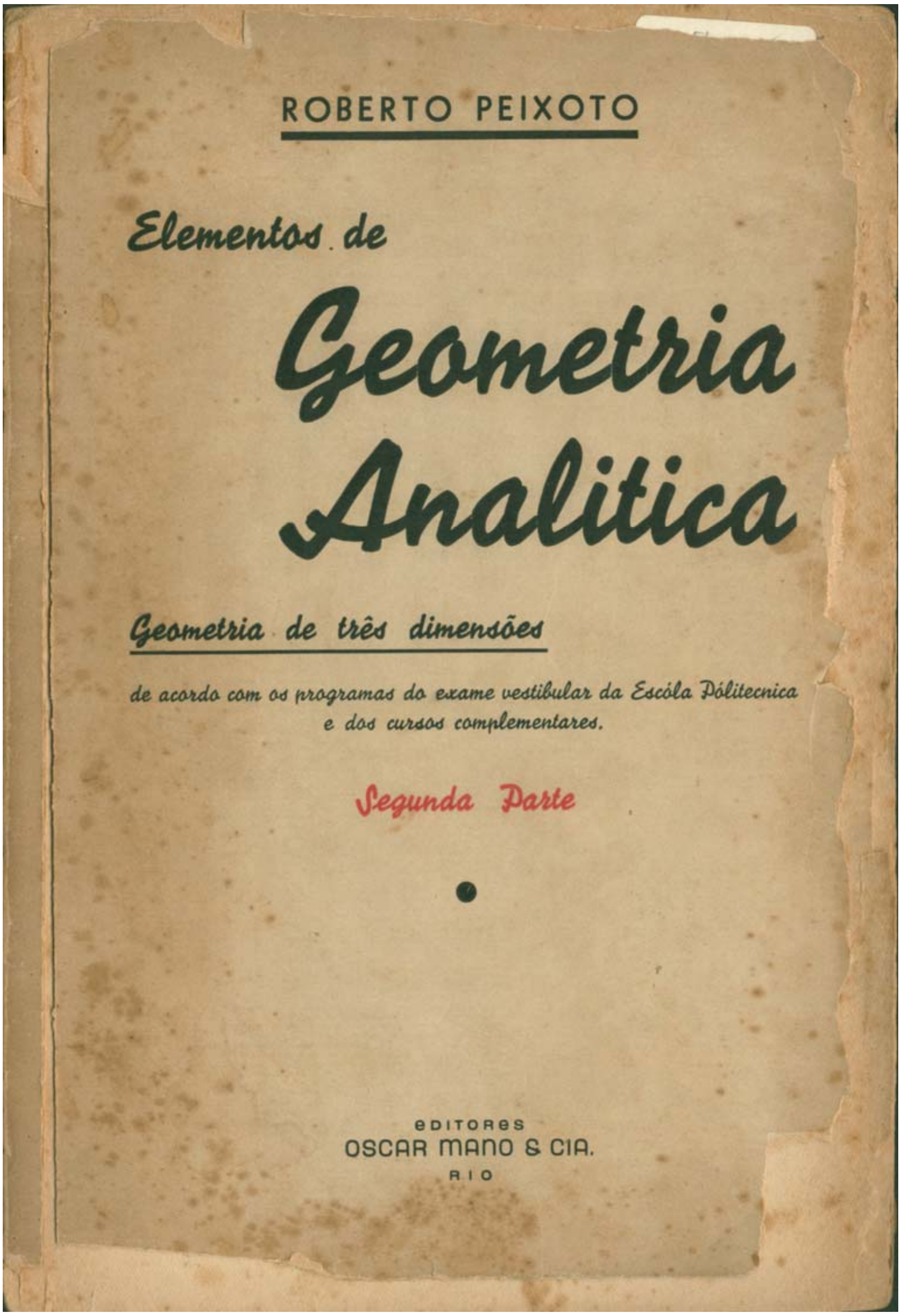
(*) "O vetor é um conjunto ordenado de dois pontos" — R. ESTEVE et H. MITAULT — Cours de Géométrie.

(**) Número aritmético é o resultado da comparação (razão) da grandeza (segmento AB) com a unidade (segmento unitário ou estado padrão da grandeza).

(***) Ver § 19.

(PEIXOTO, R, 1943, p.8)

Anexo 22
Capa – Livro 3 – Lote 2 – Elementos de Geometria Analítica – Roberto Peixoto – 1938



(PEIXOTO, R, 1938)

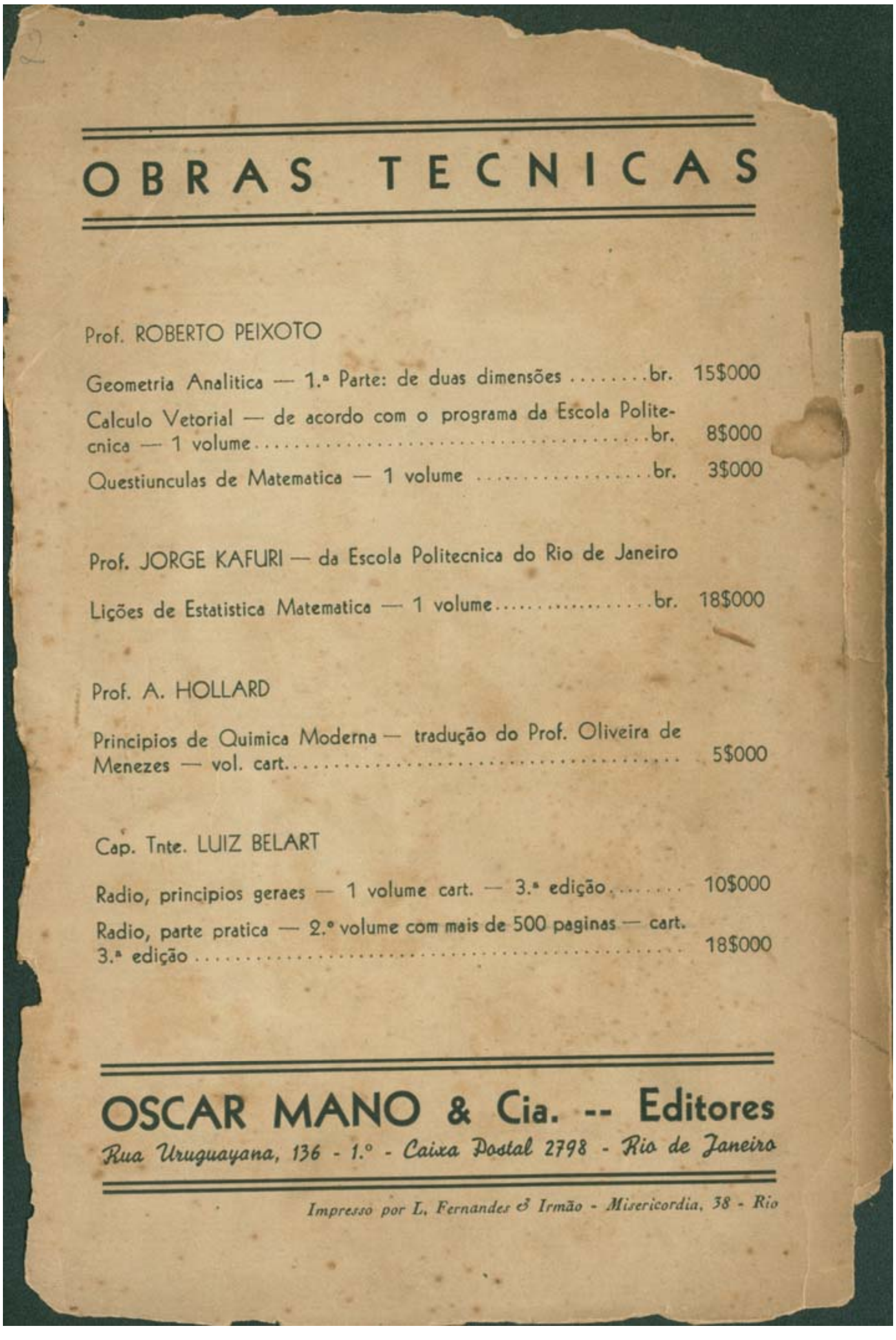
Anexo 23
Bibliografia – Livro 3 – Lote 2 – Elementos de Geometria Analítica – Roberto Peixoto – 1938

Bibliografia

B. Niewenglowski — "Cours de Géométrie Analytique".
E. Combette — "Compléments du Cours D'Algèbre".
Abbé Th. Moreux — "Pour Comprendre la Géométrie Analytique à Deux Dimensions".
L. De Fourcy — "Géométrie Analytique".
Sonnet & Frontera — "Eléments de Géométrie Analytique".
P. Appel — "Eléments de la Théorie des Vecteurs et de la Géométrie Analytique".
L. Silberstein — "Eléments D'Algèbre Vectorielle et D'Analyse Vectorielle".
Robert Fricke — "Geometria Analitica" (tradução do alemão).
Alberto Serrão — A parte vaga da cadeira de Calculo Infinitesimal da Escola Politecnica do Rio de Janeiro.
Polli Coelho — Primeiras noções de Calculo Vectorial.
Woods et Bailey — "Mathématiques Générales".
H. Bouasse — "Mathématiques Générales".
A. Tresse & A. Thybaut — "Géométrie Analytique".
René Garnier — "Mathématiques Générales".
Percey F. Smith et Arthur Sullivan Gale — "Eléments de Géometrie Analytique".
Briot & Boquet — "Géométrie Analytique".
G. Papelier — "Géométrie Analytique".
E. Combette — "Géométrie Elémentaire".
F. G. M. — "Cours de Géométrie".
F. G. — "Exercices d'Algèbre".
R. Trompowski — Lições de Geometria Algebrica.
G. Papelier — "Formulaire".

(PEIXOTO, R, 1938, p.137)

Anexo 24
Capa Final (Contracapa) – Livro 3 – Lote 2 – Elementos de Geometria Analítica – Roberto Peixoto – 1938



OBRAS TECNICAS

Prof. ROBERTO PEIXOTO

Geometria Analitica — 1.ª Parte: de duas dimensões ....br. 15$000

Calculo Vetorial — de acordo com o programa da Escola Politecnica — 1 volume ....br. 8$000

Questiunculas de Matematica — 1 volume ....br. 3$000

Prof. JORGE KAFURI — da Escola Politecnica do Rio de Janeiro

Lições de Estatistica Matematica — 1 volume ....br. 18$000

Prof. A. HOLLARD

Principios de Quimica Moderna — tradução do Prof. Oliveira de Menezes — vol. cart. .... 5$000

Cap. Tnte. LUIZ BELART

Radio, principios geraes — 1 volume cart. — 3.ª edição .... 10$000

Radio, parte pratica — 2.º volume com mais de 500 paginas — cart. 3.ª edição .... 18$000

OSCAR MANO & Cia. -- Editores

Rua Uruguayana, 136 - 1.º - Caixa Postal 2798 - Rio de Janeiro

Impresso por L. Fernandes & Irmão - Misericordia, 38 - Rio

(PEIXOTO, R, 1938)

Anexo 25

Índice – Livro 3 – Lote 2 (Parte 1) – Elementos de Geometria Analítica –Roberto Peixoto

INDICE

GEOMETRIA ANALITICA DE TRES DIMENSÕES

Capitulo I

Capitulo II

Capitulo III

Capitulo IV

Capitulo V

Capitulo VI

Índice – Livro 3 – Lote 2 (Parte 2)

Capitulo VII

Capitulo VIII

Capitulo IX

Capitulo X

Capitulo XI

Capitulo XII

Capitulo XIII

Capitulo XIV

Capitulo XV

Capitulo XVI

Índice – Livro 3 – Lote 2 (Parte 3)

Impresso por L. Fernandes & Irmão – [illegible], Misericordia, [illegible] - RIO

(PEIXOTO, R, 1938, p. 139-141)

Anexo 26
Intr. – Capítulo I – Livro 3 – Lote 2 – Elementos de Geometria Analítica – Roberto Peixoto – 1938

CAPITULO I

Coordenadas

1) — A posição de um ponto no espaço fica determinada por meio de tres grandezas denominadas *coordenadas*.

COORDENADAS RETILINEAS OU CARTESIANAS

2) — Consideremos tres retas x'x, y'y e z'z (fig. 1), não situadas no mesmo plano, passando por um mesmo ponto O. Escolhamos sobre cada uma dessas retas um sentido positivo, de x' para x na primeira, de y' para y na segunda e de z' para z na terceira. Ficará determinado assim um *sistema de coordenadas*. As retas x'x, y'y e z'z são os *eixos coordenadas*, sendo ditos abreviadamente *eixo dos* x, *eixo dos* y e *eixo dos* z. Os planos xOy, yOz e zOx, são os *planos coordenados*, chamados *planos dos* xy, *dos* yz e *dos* zx. O ponto O é a *origem das coordenadas*.

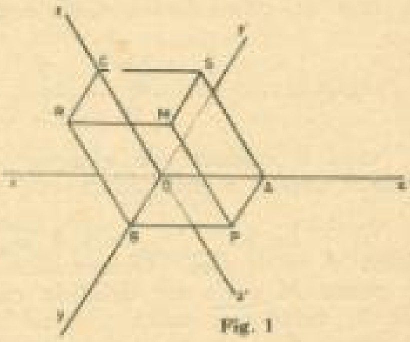


Fig. 1

(PEIXOTO, R, 1938, p.7)

Anexo 27
Introdução – Capítulo II – Livro 3 – Lote 2 – Elementos de Geometria Analítica – Roberto Peixoto – 1938

CAPITULO II

Determinação de uma direção

17) — Tracemos pela origem das coordenadas uma semi-reta OL paralela, á semi-reta D do espaço e dirigida no mesmo sentido (fig. 5).

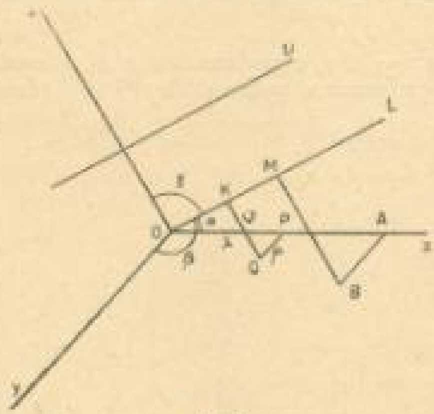


Fig. 5

Chamamos *parametros diretores* da direção D as coordenadas de um ponto qualquer M da semi-reta OL, excluida a origem. O ponto M é denominado *ponto diretor*.

Si tomarmos um ponto K de OL, á unidade de distancia da origem O, chamalo-emos *ponto diretor principal* da semi-reta D. Suas coordenadas λ, μ, ν são os *parametros diretores principais* ou *coeficientes diretores* de D. O vetor $\overline{OK}$ é denominado *vetor diretor* ou *vetor unitario* (*)

(*) Elementos de Geometria Analitica — Primeira Parte — 38.

(PEIXOTO, R, 1939, p.14)

Anexo 28
Capa – Livro 4 – Lote 2 – Curso de Trigonometria – Miron Resnik – 1936

(RESNIK, M, 1936)

Anexo 29
Programas de Ensino – Livro 4 – Lote 2 (Parte 1) – Curso de Trigonometria – Miron Resnik – 1936

PROGRAMAS DE ENSINO

CURSO GINASIAL

SEGUNDA SERIE

QUARTA SERIE

QUINTA SERIE

COLEGIO UNIVERSITARIO

PRIMEIRA SERIE

Trigonometria plana. O grão, o grado e o radiano. As funções circulares. Sinaes e variação das funções trigonometricas. Graficos . . .	37-50
Redução ao primeiro quadrante	51-56
Funções circulares inversas	113-120
Formulas fundamentaes e outras	12-17
Formulas para adição, subtração, multiplicação, e divisão de arcos	57-67
Metodos de adatação das formulas trigonometricas ao calculo logaritmico	68-70
Construção das taboas trigonometricas naturaes e logaritmicas das funções circulares. Equações e identidades trigonometricas . . .	99-112
Resolução de um triângulo retangulo. Teoremas fundamentaes. Aplicações	30-34
Resolução de um triângulo qualquer. Teoremas fundamentais. Aplicações	73-91

SEGUNDA SERIE

Numeros complexos. Definições. Operações racionaes sobre numeros complexos. Forma trigonometrica dos numeros complexos. Formula de Moivre. Representação geometrica dos numeros complexos. Interpretação geometrica das operações racionaes sobre numeros complexos. Raiz de indice *n* dos numeros complexos. Po-

Programas de Ensino – Livro 4 – Lote 2 (Parte 3)

(RESNIK, M, 1936)

Anexo 30
Índice – Livro 4 – Lote 2 (Parte 1) – Curso de Trigonometria – Miron Resnik – 1936

INDICE

PRIMEIRA PARTE

SEGUNDA PARTE

TERCEIRA PARTE

Índice – Livro 4 – Lote 2 (Parte 2)

INDICE

TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

COMPLEMENTOS DE TRIGONOMETRIA

(RESNIK, M, 1936)

Anexo 31
Intr. – Capítulo I – Livro 4 – Lote 2 – Curso de Trigonometria – Miron Resnik – 1936

CAPITULO I

Funções Trigonométricas

Se considerarmos um ângulo agudo *A* e sôbre um dos seus lados tomarmos três pontos X, Y, Z, dos quais nos abaixamos perpendiculares sôbre o outro lado

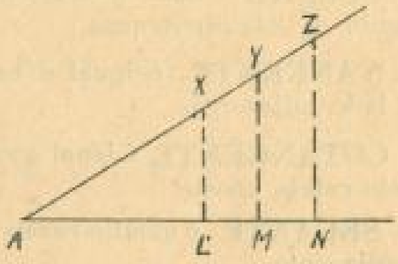


Fig. 1

teremos determinado três triângulos retângulos semelhantes.

Os triângulos AXL, AYM, AZN são semelhantes, portanto pela Geometria temos

$$\frac{AX}{XL} = \frac{AY}{YM} = \frac{AZ}{ZN}$$

(RESNIK, M, 1936)

Anexo 32
Capítulo I – Livro 4 – Lote 2 – Curso de Trigonometria – Miron Resnik – 1936

$$\frac{AX}{AL} = \frac{AY}{AM} = \frac{AZ}{AN}$$

$$\frac{XL}{AL} = \frac{YM}{AM} = \frac{ZN}{AN}$$

donde concluímos:

"As relações entre os lados homólogos de triângulos semelhantes são constantes".

"Á um ângulo agudo A correspondem certos números que exprimem os valores das relações dos lados em todos os triângulos retângulos que podem ser construídos sôbre êste ângulo A".

Um triângulo retângulo possue sómente seis relações diferentes entre os seus lados que são:

1.º) O **SENO** é igual a razão do cateto oposto ao ângulo A pela hipotenusa.

2.º) O **COSENO** é igual a razão do cateto adjacente ao ângulo A pela hipotenusa.

3.º) A **TANGENTE** é igual a razão do cateto oposto pelo lado adjacente.

4.º) A **COTANGENTE** é igual a razão do cateto adjacente pelo cateto oposto.

5.º) A **SECANTE** é igual a razão da hipotenusa pelo cateto adjacente.

6.º) A **COSECANTE** é igual a razão da hipotenusa pelo cateto oposto.

Estas seis relações são denominadas *funções trigonométricas de um ângulo agudo A*.

Representamos as funções trigonométricas de um ângulo A abreviadamente por sen A, cos. A, tg. A, cotg A, sec A, csc A.

(RESNIK, M, 1936, p.8)

Anexo 33
Ex . Res.Ex. – Cap. I – Livro 4 – Lote 2 – Curso de Trigonometria – Miron Resnik – 1936

EXERCÍCIOS

I

Achar as funções do ângulo *A* se a = 6, b = 10, c = 8.

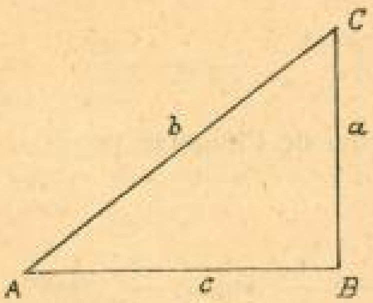


Fig. 2

$$\text{sen } A = \frac{a}{b} = \frac{6}{10}$$

$$\cos A = \frac{c}{b} = \frac{8}{10}$$

$$\text{tg } A = \frac{a}{c} = \frac{6}{8}$$

$$\text{cotg } A = \frac{c}{a} = \frac{8}{6}$$

$$\sec A = \frac{b}{c} = \frac{10}{8}$$

$$\text{csc } A = \frac{b}{a} = \frac{10}{6}$$

(RESNIK, M, 1936, p.9)

Anexo 34
Ex. Prop. – Cap XVI – Curso de Trigonometria – Miron Resnik – 1936

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\left(\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)}}=\sqrt{\frac{x}{y-x}}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{x}{y}}}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}=\sqrt{\frac{x}{y-x}}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y-x}}=\sqrt{\frac{x}{y-x}}$$

EXERCICIOS

Achar os valores das seguintes funções:

1) arc sen 0,3651	4) arc cos 0,9007	7) arc sec 2
2) arc sen 0,9313	5) arc cos 0,6078	8) arc csc $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
3) arc sen 0,4344	6) arctg 0,6078	9) arc cotg 1,0786

10) Se x = arc sen 0,5937 achar o valor da tg x

11) Se x = arc cos 0,7806 achar o valor da sec x

12) Se x = arc tg 0,2376 achar o valor do sen x

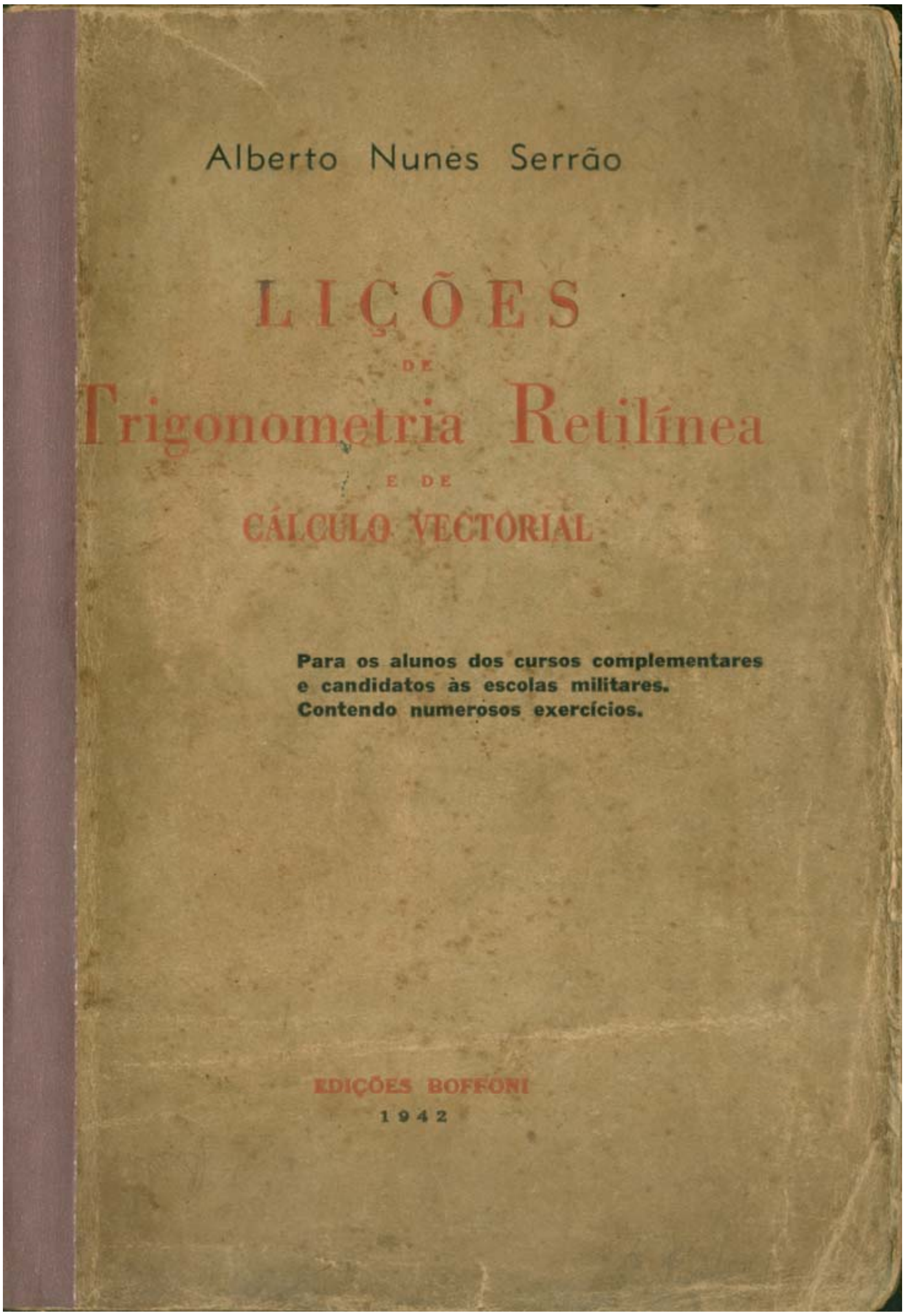
13) Se x = arc sen 0,1472 achar o valor da tg x

14) Se x = arc cos 0,9891 achar o valor do sen x

15) Se x = arc cotg 4,21[illegible]3 achar o valor da csc x

(RESNIK, M, 1936, p.119)

Anexo 35
Capa – Livro 5 – Lote 2 – Lições de Trigonometria Retilínea e de Cálculo Vectorial – Alberto Nunes Serrão – 1942



(SERRÃO, A, N, 1942)

Anexo 36
Índice – Livro 5 – Lote 2 (Parte 1) – Lições de Trigonometria Retilínea e de Cálculo Vectorial – Alberto Nunes Serrão – 1942

INDICE

CAPITULO I

VECTORES COLINEARES. ARCOS E ANGULOS

PÁGS.

CAPITULO II

DEFINIÇÃO DAS FUNÇÕES CIRCULARES DIRETAS

Índice – Livro 5 – Lote 2 (Parte 2)

CAPÍTULO III

ARCOS SATISFAZENDO DETERMINADAS CONDIÇÕES

CAPÍTULO IV

FÓRMULAS FUNDAMENTAIS DA TRIGONOMETRIA. VARIAÇÃO DAS LINHAS TRIGONOMÉTRICAS

Índice – Livro 5 – Lote 2 (Parte 3)

CAPÍTULO V

Soma de vectores. Projeções

CAPÍTULO VI

Produtos de vectores. Expressões analíticas

CAPÍTULO VII

Adição e subtração de arcos

Índice – Livro 5 – Lote 2 (Parte 4)

CAPITULO VIII

Multiplicação e divisão de arcos

CAPITULO IX

Transformações logarítmicas. Identidades condicionais

CAPITULO X

Valores aproximados das linhas trigonométricas

Índice – Livro 5 – Lote 2 (Parte 5)

CAPITULO XI

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

CAPITULO XII

RELAÇÕES ENTRE OS LADOS E ÂNGULOS DE UM TRIÂNGULO

CAPITULO XIII

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

CAPITULO XIV

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS QUAISQUER

Índice – Livro 5 – Lote 2 (Parte 6)

PÁGS.

CAPÍTULO XV

APLICAÇÕES DIVERSAS

JORNAL DO COMMERCIO - Rodrigues & C. - Av. Rio Branco, 117 - Rio de Janeiro - 1942

(SERRÃO, A, N, 1942, p. 235-240)

Anexo 37
Ex.Res.Ex. Cap.I – Livro 5 – Lote 2 – Lições de Trigonometria Retilínea e de Cálculo Vectorial – Alberto Nunes Serrão – 1942.

12) **PROBLEMA** — *Conhecendo a medida de um arco de circunferência em um determinado sistema, achar a sua expressão em um outro sistema.*

O problema se resolve facilmente empregando a seguinte proposição, estudada em Aritmética: *a razão das medidas de duas grandezas é independente da unidade adotada para medi-las.*

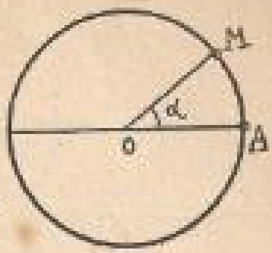
Designemos então pelas letras:

G a medida de um certo arco $\widehat{AM}$ em graus;

G' a medida dêsse mesmo arco em grados

ρ a sua medida no sistema circular

e notemos que a semi-circunferência *ABA* é expressa por



180° no sistema sexagesimal
200ᵍ no sistema centesimal
π no sistema circular

A relação do arco *AM* para a semi-circunferência *AA'* será pois definida em cada um dos sistemas por

$$\frac{G}{180°}, \quad \frac{G'}{200}, \quad \frac{\rho}{\pi}$$

Ora, em virtude do teorema mencionado, as três relações acima devem ser iguais, donde a igualdade

$$\frac{G}{180°} = \frac{G'}{200} = \frac{\rho}{\pi}$$

que soluciona o problema.

Com efeito, tirando o valor de G, vem

$$G = \frac{9}{10} G', \quad G = 180° \cdot \rho \cdot \frac{1}{\pi}$$

as quais permitem determinar o valor de um ângulo em graus quando conhecida a sua medida em *grados* ou *radianos*.

Analogamente,

$$G' = \frac{10}{9} G, \quad G' = 200 \cdot \rho \cdot \frac{1}{\pi}$$

Finalmente

$$\rho = \frac{\pi G}{180°}, \quad \rho = \frac{\pi G'}{200}$$

Para as transformações práticas é útil conhecer os valores

$$\pi = 3{,}1416 \qquad \frac{1}{\pi} = 0{,}3183$$

(SERRÃO, A, N, 1942, p. 16-17)

Anexo 38
Ex.Prop.Cap. I – Livro 5 – Lote 2 – Lições de Trigonometria Retilínea e de Cálculo Vectorial – 1942

EXERCÍCIOS

1) Qual é a abcissa de todos os pontos situados sobre o eixo dos y? Qual é a ordenada de todos os pontos situados sobre o eixo dos x?

2) Seja r a distância, sempre positiva, de um ponto P à origem. Determinar o sinal das relações

$$\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}, \frac{r}{x}, \frac{r}{y}$$

em cada um dos quatro quadrantes.

3) Marcar sobre o círculo trigonométrico as extremidades dos arcos

$$a\ , \ a + \frac{\pi}{2}\ , \ a + \frac{3\pi}{2}\ , \ a - \frac{\pi}{6}$$

que teem todos a mesma origem.

4) Construir os ângulos expressos pelos números

a) 6 *rétos* b) -3 *rétos* c) $2\frac{1}{2}$ *rétos*

5) Construir os seguintes ângulos

$$\frac{\pi}{2}\ , \ -\frac{\pi}{3}\ , \ \frac{\pi}{4}\ , \ \frac{5\pi}{2}$$

6) Exprimir em graus os ângulos seguintes, medidos em radianos,

$$\frac{\pi}{3}\ , \ \pi\ , \ \frac{2}{3}\pi\ , \ \frac{7}{4}\pi\ , \ 2\ , \ 5\ , \ -3$$

7) Em um círculo de raio *12 ms.*, determinar o comprimento do arco interceptado por um ângulo central de 18°.

R. 3,76 ms.

8) Achar o comprimento dos arcos a) 25° b) 42° 18′ c) 54,^{g}12 quando o raio do círculo é tomado para unidade.

9) Exprimir em radianos a soma dos ângulos internos de um polígono convexo tendo n lados.

R. $2\pi\ (n - 2)$

10) Calcular os complementos e suplementos dos ângulos abaixo:

a) 49° 21′ 37″ b) 84° 32′ 53″ c) 174° 36′ 11″

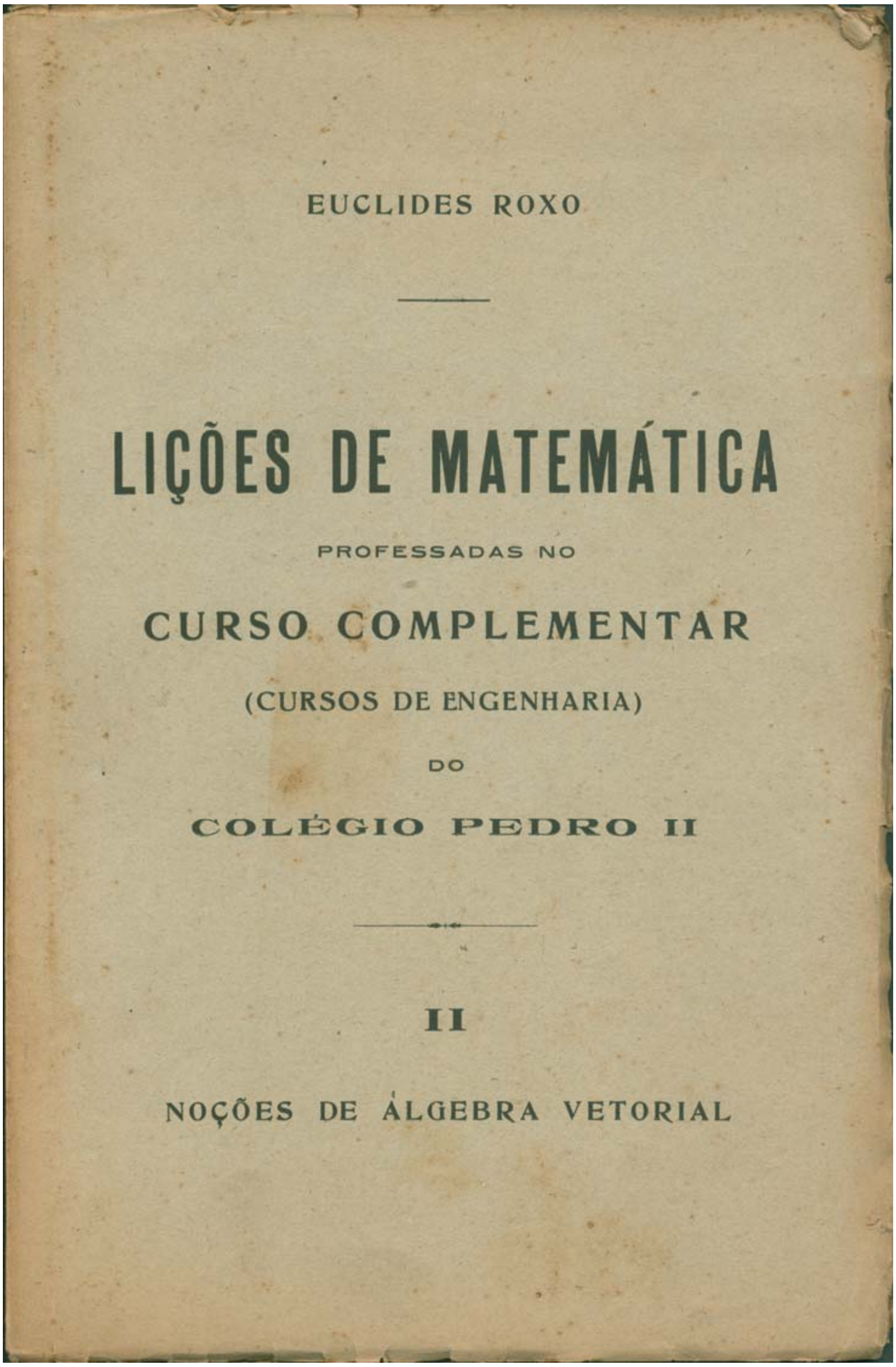
d) $\frac{22\pi}{19}$ *rad* e) $-\frac{113}{47}\pi$ *rad*

f) 39,^{g}745

1) Qual deve ser a unidade de medida a adotar afim de que o número correspondente a medida de um ângulo seja igual à diferença entre os

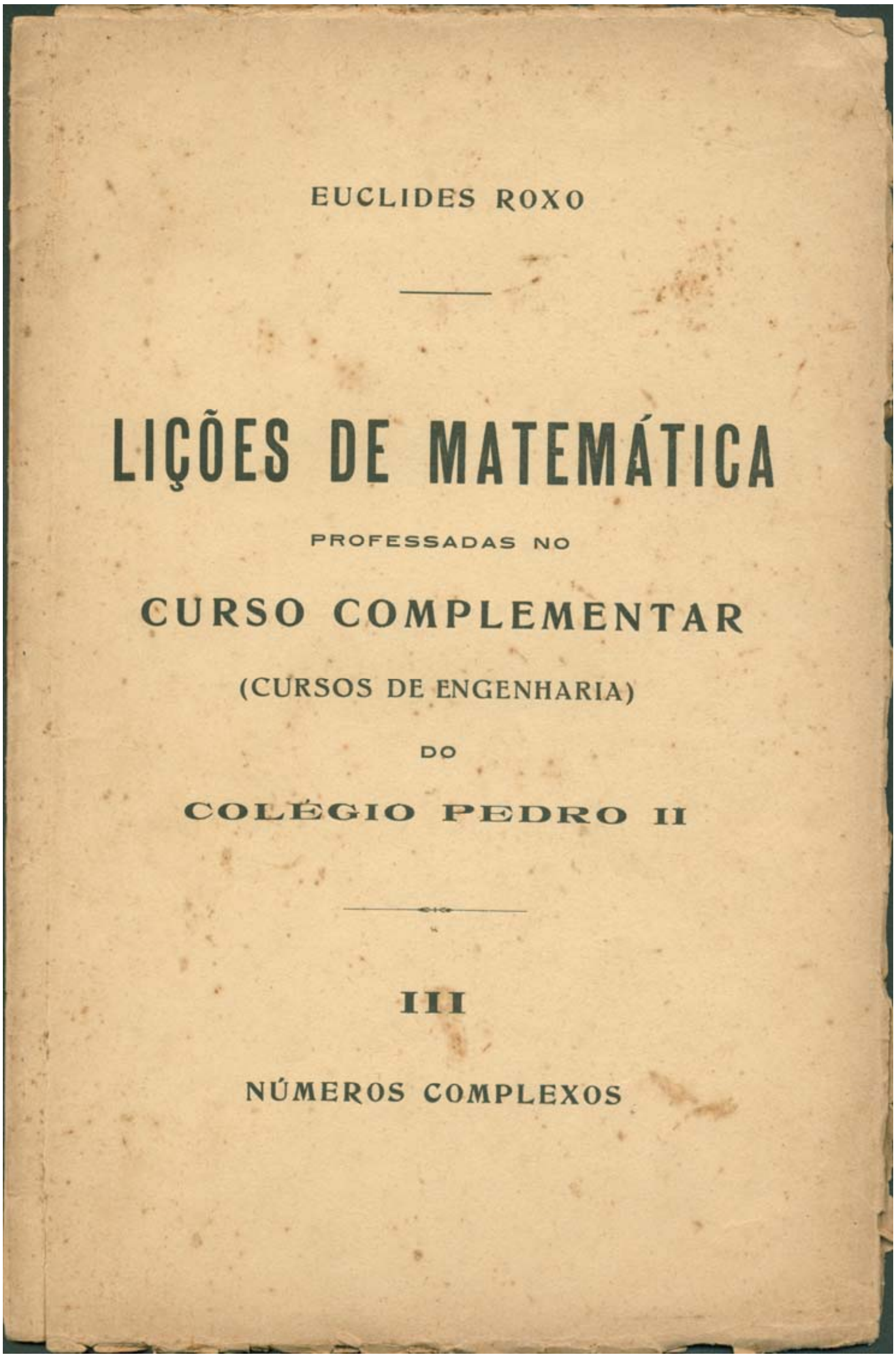
(SERRÃO, A, N, 1942, p.23)

Anexo 39
Capa. Apostila 1 – Lote 3 – Lições de Matemática – Noções de Álgebra Vetorial – Euclides Roxo



(ROXO, s/d)

Anexo 40
Capa – Apostila 2 – Lote 3 – Lições de Matemática – Números Complexos – Euclides Roxo



EUCLIDES ROXO

LIÇÕES DE MATEMÁTICA

PROFESSADAS NO

CURSO COMPLEMENTAR

(CURSOS DE ENGENHARIA)

DO

COLÉGIO PEDRO II

III

NÚMEROS COMPLEXOS

(ROXO, s/d)

ANEXO DESCRITIVO – FASE 2

Anexo 01
Análise da Estrutura Externa das Coleções de livros

Coleção- base – Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – 2.ª Série – 3.ª Série – Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha, Dacorso Netto (Coleção dos 4 autores) – Livraria Francisco Alves.

Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 1.ª Série – 2.ª Edição – 1945 (Anexo 1, p.332)

Livro 2 – Matemática – 2.º Ciclo – 2.ª Série – 1944 (Anexo 2, p.333)

Livro 3 – Matemática – 2.º Ciclo – 3.ª Série – 3.ª Edição – 1949 (Anexo 3, p.334)

Apresentam capa, tipo capa dura colorida com bom acabamento.

Observação: o Livro 2, embora tenha uma capa diferenciada dos livros 1 e 3, apresenta também bom acabamento.

Os livros apresentam o Índice no final dos mesmos.

Os livros apresentam prefácio chamado de “Advertência”.

Os livros não apresentam bibliografia.

- Coleção 1 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1.ª Série – 2.ª Série – 3.ª Série – Thales Mello Carvalho – Companhia Editora Nacional.

Livro 1 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – Primeira Série – 2.ª Edição – 1945 (Anexo 4, p.335)

Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – Segunda Série – 4.ª Edição – 1948 (Anexo 5, p.336)

Livro 3 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – Terceira Série – 2.ª Edição – 1948 (Anexo 6, p.337)

Capa:

- Livro 1 – tipo cada dura, colorida e com bom acabamento.

- Livros 2 e 3 – tipo papel cartão, colorida em com bom acabamento

Os livros apresentam o Índice no final dos mesmos.

Prefácio:

- O livro 1 apresenta um prefácio intitulado “Prefácio da Primeira Edição”. Os livros 2 e 3 não apresentam prefácio.

Os livros não apresentam bibliografia.

- Coleção 2 – Curso de Matemática – 1.º Livro Ciclo Colegial – 2.º Livro Ciclo Colegial – 3.º Livro Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – Edições Melhoramentos.

Livro 1 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 7.ª Edição – 1946 (Anexo 7, p.338)

Livro 2 – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – 4.ª Edição – 1951 (Anexo 8, p.339)

Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 2.ª Edição – 1949 (Anexo 9, p.340)

Apresentam capa, tipo capa dura colorida, com bom acabamento.

Os livros apresentam o Índice no início dos mesmos.

Prefácio: Só o Livro 1 apresenta prefácio.

Os livros não apresentam bibliografia.

Anexo 2
Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos relativa aos livros 1.ª Série/Primeira Série Clássico-Científico/ 1.º Livro

Livro 1- Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – Coleção 4 autores – 2.ª Edição – 1945 – Livraria Francisco Alves (Anexo 01, p.332)
Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – Primeira Série– Thales Mello Carvalho – 2.ª Edição – 1945 – Companhia Editora Nacional (Anexo 04, p.335)
Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 1946 – Edições Melhoramentos (Anexo 7, p.338)
Vamos analisar o conteúdo **"Divisibilidade Numérica"**.

Livro 1- Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – Coleção 4 autores – 2.ª Edição – 1945 – Livraria Francisco Alves.

O assunto é tratado na Primeira Parte, destinada a Aritmética, na Unidade II, chamada de "Divisibilidade Numérica".Está contido no item 1, denominado Teoremas gerais sobre divisibilidade. Tem início no item 51. Definições, que reproduzimos no Anexo 13 (p.349)

Observemos no Anexo 13 o uso de notas de rodapé, que é de uso constante. Reproduzimos a nota de rodapé de n.º 36, citada com o objetivo de dar maior visibilidade à mesma: "(36) De um modo geral, representamos os múltiplos de um número "a" (grifo nosso) pela notação m.a". (22) (ROXO et al., 1945, p.68)

São desenvolvidos os demais itens da Unidade: caracteres de divisibilidade; teoria do m.d.c e m.m.c; teoria dos números primos; aplicações. Foi observada a apresentação de exercícios resolvidos de exemplo. Após o item caracteres de divisibilidade, foram apresentados 5(cinco) exercícios resolvidos (Anexo 14,p.350) e, logo após, uma série de 17 (dezessete) exercícios propostos sem resposta (Anexo 15,p.352). As respostas dos exercícios propostos se encontram ao final da Primeira Parte (Aritmética Teórica), separados por conteúdo tratado (Anexo 16,p.353).

O conteúdo é apresentado em uma linguagem simples, direta, com uso de introdução, notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos com respostas ao final da Parte ou Tema, separados por conteúdo tratado.

Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – 1.ª Série – Thales Mello Carvalho – 2.ª Edição – 1945 – Companhia Editora Nacional.

O assunto é tratado no Capítulo II, chamado de "A Divisibilidade Numérica", item "Teoremas gerais sobre Divisibilidade". Tem início no item 1. Preliminares, que foi apresentado no Anexo 17 (p.354).

São desenvolvidos os demais itens do Capítulo: caracteres de divisibilidade; teorias do m.d.c e do m.m.c e teoria dos números primos, aplicações. No decorrer do desenvolvimento notamos a utilização de notas de rodapé (podem ser observadas nos Anexos 17 e 18), exercícios resolvidos como exemplo (Anexo 18, p.357), exercícios propostos e, ao final do capítulo, uma série de 28 (vinte e oito) exercícios propostos com resposta, com graus diferenciados de dificuldade (Anexo 19, p.358).

O conteúdo é apresentado em uma linguagem simples, direta, com uso de introdução, notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos com resposta (junto com os exercícios).

Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 1946 – Edições Melhoramentos

O assunto é tratado no Capítulo VIII, denominado “A Divisibilidade Numérica”. Tem início no item 77, Definição (Anexo 20, p.360).

Seguem-se o desenvolvimento dos demais itens do capítulo: teoremas gerais; caracteres de divisibilidade; teorema sobre restos; provas das operações fundamentais.

Ao longo do desenvolvimento dos demais itens, são observados a utilização de notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo (Anexo 21, p.362) e exercícios propostos com respostas ao final do capítulo (Anexo 22, p.364).

É preciso destacar que, particularmente neste capítulo, não foram observados o uso de notas de rodapé. Entretanto elas são utilizadas ao longo de outros capítulos.

O conteúdo é apresentado em uma linguagem simples, direta, com uso de introdução, notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos com respostas ao final do capítulo.

Anexo 3
Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos relativa aos livros 2.ª Série/Segunda Série Clássico-Científico/ 2.º Livro.

Livro 1- Matemática 2.º Ciclo – 2.ª Série – Coleção 4 autores – 1944 – Livraria Francisco Alves (Anexo 2, p.333)
Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – Segunda Série – Thales Mello Carvalho – 4.ª Edição – 1948 – Companhia Editora Nacional (Anexo 5, p.336)
Livro 3 – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 4.ª Edição – 1951 – Edições Melhoramentos (Anexo 8, p.339)
Vamos analisar o conteúdo **Progressões Geométricas**
Livro 1- Matemática 2.º Ciclo – 2.ª Série – Coleção 4 autores – 1944 – Livraria Francisco Alves.
Esse conteúdo faz parte da Primeira Parte, Álgebra e Unidade I. Tem início no item 16, chamado Definições (Anexo 23, p.365).
Seguem-se o desenvolvimento dos demais itens do conteúdo: expressão do enegésimo termo; produto de termos de uma progressão geométrica; interpolação geométrica; soma dos termos de uma progressão geométrica; problemas sobre progressões geométricas. Ao longo do desenvolvimento foram observados o uso de notas de rodapé (podem ser observadas nos Anexos 23 e 24, p.365 e 366), exercícios resolvidos de exemplo (Anexo 24, p.366) e uma série de 45 (quarenta e cinco) exercícios propostos sem resposta ao final do capítulo (Anexo 25,p.368), onde podem ser observados exercícios com graus variados de dificuldade. As respostas dos exercícios propostos se encontram no final do livro, divididos por Partes (temas) e Conteúdos (Anexo 26, p.370).
Observação: ainda são apresentados uma série de 20 (vinte) exercícios propostos mesclando PA e PG (Anexo 25,p368) ao final da apresentação do conteúdo de PG.
O conteúdo é apresentado em uma linguagem simples, direta, com uso de introdução, notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos, com respostas ao final do livro, divididas por Partes (temas) e conteúdos.
Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – 2.ª Série – Thales Mello Carvalho – 1948 – Companhia Editora Nacional.
O conteúdo faz parte do Capítulo I, chamado "Progressões e Logaritmos". Tem início no item 23, Preliminares (Anexo 27, p.371).
Seguem-se o desenvolvimento dos demais itens do conteúdo: fórmula do termo geral; inserção de meios geométricos; soma dos termos; termos equidistante dos extremos; produto dos termos. Ao longo do desenvolvimento são observados o uso de notas de rodapé (Anexos 27 e 28, páginas 371 e 372), exercícios resolvidos de exemplo (Anexo 28,p.373) e uma série de 25 (vinte e cinco) exercícios propostos com resposta (Anexo 29, p.375)
Reproduzimos abaixo as notas de rodapé supracitadas, face às más condições de reprodução das mesmas.
(*) No presente estudo consideraremos apenas as progressões geométricas de razão positiva.
(*) É conveniente lembrar que o presente estudo se refere a progressões de termos positivos (CARVALHO, T, M, 1948, pp. 16-20).

O conteúdo é apresentado em uma linguagem simples, direta, com uso de introdução, notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos com resposta (respostas junto com o exercício).

Livro 3 – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 1951 – Edições Melhoramentos

O assunto é tratado no Capítulo II, Progressões Geométricas. É importante destacar que esse livro dedica um capítulo todo ao assunto diferente dos demais. Tem início no item 17, Definições (Anexo 30, p.377).

São desenvolvidos os demais itens do capítulo: progressão crescente e decrescente; progressão limitada e progressão ilimitada; expressão do termo de ordem n; cálculo do primeiro termo; propriedade; produto dos termos de uma progressão geométrica; soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente ilimitada;aplicação; interpolação geométrica; problemas.

Ao longo do desenvolvimento são observadas a utilização de notas de rodapé (Anexo 31, p.378), exercícios resolvidos de exemplo (Anexo 31, p.378) e, ao final, uma série de 30 (trinta) exercícios propostos com respostas (Anexo 32, p.380).

O conteúdo é apresentado em uma linguagem simples, direta, com uso de introdução, notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos com respostas (respostas junto com os exercícios).

Anexo 4
Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos, relativa aos livros da 3.ª Série/Terceira Série Clássico-Científico/ 3.º Livro.

Livro 1- Matemática 2.º Ciclo – 3.ª Série – Coleção 4 autores – 3.ª Edição – 1949 – Livraria Francisco Alves (Anexo 3, p.334).
Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – 3.ª Série – Thales Mello Carvalho – 2.ª Edição – 1948 – Companhia Editora Nacional (Anexo 6, p,337).
Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 2.ª Edição – 1949 – Edições Melhoramentos (Anexo 9, p.340).

Vamos analisar o conteúdo **Sucessões**

Livro 1- Matemática 2.º Ciclo – 3.ª Série – Coleção 4 autores – 3.ª Edição – 1949 – Livraria Francisco Alves

O assunto é tratado na Unidade I, denominada Sucessões. Inicia-se no item 1, Noções preliminares (Anexo 33, p.382).

Seguem-se o desenvolvimento dos demais itens do conteúdo: limite de uma sucessão; sucessões convergentes e divergentes, regulares e oscilantes; consequências; sucessões monótonas; sucessões monótonas contíguas, fronteira; números reais. Ao longo do desenvolvimento foram observados o uso constante de notas de rodapé (Anexos 33 e 34). Reproduzimos aqui a nota de rodapé de n.º 1, citada, com o objetivo de dar maior clareza à mesma: "(1) Estamos adstritos ao domínio real. Observemos, além disso, que só nos interessam as *sucessões infinitas* (grifo do autor)" (ROXO et al., 1949, p.9).

Observamos também exercícios resolvidos de exemplo (Anexo 34, p.384) e, ao final da Unidade, foi apresentada uma série de 15 (quinze) exercícios propostos sem resposta (Anexo 35, p.386). As respostas dos exercícios propostos se encontram no final do livro, divididas por Unidade (Anexo 36, p.388).

O conteúdo é apresentado em uma linguagem simples, direta, com uso de introdução, notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos com respostas ao final do livro, divididas por Temas ou conteúdos tratados e Unidades.

Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – 3.ª Série – Thales Mello Carvalho – 2.ª Edição – 1948 – Companhia Editora Nacional

O assunto é tratado no Capítulo I, dedicado à Álgebra, na Unidade I, Séries. Cumpre ressaltar que, antes é apresentada uma parte introdutória denominada "Noções elementares sobre conjuntos. O item "Sucessões – Limites" , tem início no item 11, Preliminares (Anexo 37, p.389).

Seguem-se o desenvolvimento dos demais itens do conteúdo: limite de uma sucessão; cálculo Aritmético dos limites (princípios fundamentais – limite de uma soma, limite de uma diferença, limite de um produto, extensões dos princípios anteriores, limite de uma potência, limite de $a^u n$, limite de $\log^u n$), o número "e", limites singulares, sucessões cujos termos gerais são funções racionais de n.

No desenvolvimento observamos o uso de notas de rodapé (Anexo 37), exercícios resolvidos de exemplo (Anexo 38, p.391) e uma série de 12 (doze) exercícios propostos com resposta ao final do conteúdo (Anexo 39, p.392).

Observação: face às más condições da reprodução da nota de rodapé, resolvemos por reproduzi-la aqui: "(*) Este estudo acha-se, naturalmente, limitado ao campo real. O leitor só conhecerá os números complexos na Unidade IV" (CARVALHO, T, M, 1948, p.12).

O conteúdo é apresentado em uma linguagem simples, direta, com uso de introdução, notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos com respostas (respostas junto com os exercícios).

Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 2.ª Edição – 1949 – Edições Melhoramentos

O assunto é tratado no Capítulo I, "Sucessões, Cálculo Aritmético dos Limites". Tem início no item 1, Sucessões indefinidas (Anexo 40, p.393).

Seguem-se o desenvolvimento dos demais itens do conteúdo: limite de uma sucessão; limites infinitos; sucessões convergentes; sucessões divergentes; sucessões oscilantes; sucessões monótonas; sucessões monótonas contíguas; cálculo aritmético dos limites; limite de uma diferença; limite de um produto; limite de um quociente;limite de uma potência; limite de uma raiz; limites de expressões racionais; o número "e".

No desenvolvimento, observamos a utilização de notas de rodapé (Anexo 41, p.395), exercícios resolvidos de exemplo (Anexo 42, p.396) e, ao final, uma série de 20 (vinte) exercícios propostos com respostas (Anexo 43, p.398).

O conteúdo é apresentado em uma linguagem simples, direta, com uso de introdução, notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos com respostas (respostas junto com os exercícios).

Anexo 5
Relação do número de registros de consultas a livros de Matemática com título *Matemática,* dos alunos dos Cursos Colegiais, na Biblioteca da Escola Estadual São Paulo – 1943 – 1961

ANO – CONSULTA	**TOTAL DE REGISTROS**
1943	0
1944	5
1945	2
1946	7
1947	-
1948	Não encontrado o livro de consultas
1949	13
1950	50
1951	12
1952	14
1953-54	13
1955	22
1956	24
1957	29
1960	240
1961	29
Total	535

(RIBEIRO, 2011, p.131)

Anexo 6
Relação dos autores, livros de matemática, número de consultas e ano das consultas no período 1943 – 1961

Nome do autor	Nome do Livro	Número de consultas	Ano(s) em que foi consultado
Algacyr Munhoz Maeder	Matemática	03	1949
		14	1950
		01	1951
		03	1952
		03	1956
		01	1958
		14	1959
		28	1960
		01	1961
	Curso de Matemática	04	1951
		15	1950
		02	1951
		01	1953-1954
		02	1956
		04	1957
		07	1960
		01	1961
	Matemática difícil	01	1951
	Curso de Matemática 2.ª Série	01	1951
Total		**106**	**11 anos**
Ary Quintella	Matemática	01	1945
		01	1953-1954
		01	1955
		02	1956
		01	1957
Total		**06**	**5 anos**
C.Décourt	Matemática	01	
		01	
Total		**02**	**2 anos**
Carlos Galante	Matemática	01	1950

		04	1952
		01	1953-1954
		03	1955
		01	1956
		03	1957
		06	1958
		07	1959
		57	1960
		18	1961
	Matemática 2.ª Série	01	1951
Total		**09**	**2 anos**
Cecil Thiré	Matemática	01	1952
		01	1955
	Manual de Matemática	01	1953-1954
Total		**03**	**3 anos**
Cunha	Matemática	01	1959
Total		**01**	**1 ano**
D.L.Menezes	Matemática	01	1959
Total		**01**	**1 ano**
F.I.C.	Matemática	01	1957
		01	**1 ano**
F.T.D	Matemática	01	1958
Total		**01**	**1 ano**
J.Peterson	Matemática	01	1957
		01	**1 ano**
Jacomo Stavale	Matemática	01	1950
Total		**02**	**2 anos**
Lacroix	Matemática	01	1944
Total		**01**	**1 ano**
Leo Bonfim	Matemática	02	1946
		02	**1 ano**
Lucas Junot	Matemática	02	1945
Total		**02**	**1 ano**
Manoel Jairo Bezerra	Curso de Matemática – 2.º	04	1955

	Colegial		
		01	
	Matemática	01	1955
		03	1956
		02	1957
		03	1958
		02	1959
		04	1960
	Curso de Matemática	04	1956
		01	
		01	
		01	
Total		**26**	**6 anos**
Osvaldo Sangiorgi	Matemática	01	1956
		01	1959
		08	1960
	Matemática 3.ª Série	01	1959
		02	1961
Total		**13**	**4 anos**
R.Comberousse	Cours de Mathematique	02	1957
Total		**02**	**1 ano**
Sinésio de Farias	Matemática	01	1953-1954
		01	1956
Total		**02**	**3 anos**
Teixeira	Matemática	15	1960
		02	1961
Total		**17**	**2 anos**
Teixeira, Galante	Matemática	01	1961
Total		**01**	**1 ano**
Thales Mello Carvalho	Matemática 2.º Colegial	01	1949
		02	1955
	Matemática 3.ª Série	02	1949

		01	1950
	Matemática 2.ª Série	01	1949
		01	1950
	Matemática	01	1949
		10	1950
		05	1951
		02	1952
		06	1956-1953-1954
		08	1955
		06	1956
		15	1957
		15	1958
		04	1959
		11	1960
	Matemática 2.º Livro	01	1950
	Matemática para o Clássico/Científico	01	1951
	Matemática 3.º Científico	02	1958
	Matemática 3.º Ano	03	1958
Total		**98**	**11 anos**

(RIBEIRO, 2011, pp. 132-135)

Anexo 7
Programas de Matemática para os Cursos Clássico e Científico

Em 16 de março de 1943, foi expedida a Portaria Ministerial n.º 177, publicada no Diário Oficial em 18 de março do referido ano, que continha os programas de matemática para os cursos clássico e científico.

Programa de Matemática do Curso Clássico

Primeira Série

Aritmética Teórica

Unidade I – A divisibilidade numérica: 1- Teoremas gerais sobre divisibilidade. 2- Caracteres de divisibilidade. 3- Teorias do m.m.c. e do m.d.c. 4- Teoria dos números primos; aplicações.

Álgebra

Unidade II – Os polinômios: 1- Operações algébricas sobre polinômios. 2- Teoria da divisão de polinômios. 3- Divisão de um polinômio inteiro em x por x ± a; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Unidade III – O trinômio do 2.º grau: 1- Decomposição em fatores do 1.º grau; sinais do trinômio; desigualdades do 2.º grau. 2- Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2.º grau; representação gráfica.

Geometria

Unidade IV – O plano e a reta no espaço: 1- Determinação de um plano. 2- Intersecção de plano e retas. 3- Paralelismo de retas e planos. 4- Reta e plano perpendiculares. 5- Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6- Diedros, planos e perpendiculares entre si. 7- Noções sobre ângulos poliédricos.

Unidade V – Os poliedros: 1- Noções gerais. 2- Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos.

Segunda Série

Álgebra

Unidade I – Progressões e logaritmos: 1- Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2- Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 3- Resolução de algumas equações exponenciais simples.

Unidade II – Binômio de Newton: 1- Noções sobre análise combinatória. 2- Binômio de Newton.

Geometria

Unidade III – Os corpos redondos: 1- Noções sobre geração e classificação das superfícies. 2- Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3- Estudo da área; área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera.

Trigonometria

Unidade IV – Vetor: 1- Grandezas escalares e vetoriais. 2- Noção de vetor; equipolência. 3- Resultante ou soma geométrica de vetores. 4- Vetores deslizantes sobre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.

Unidade V – Projeções: 1- Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. 2- Teorema de Carnot. 3- Valor da projeção de um vetor.

Unidade VI – Funções circulares: 1- Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2- Funções circulares ou trigonométricas; definição, variação, redução ao primeiro quadrante. 3- Relações entre funções circulares de um mesmo arco. 4- Cálculo das funções circulares dos arcos de 30º, 45º e 60º.

Unidade VII – Resolução de triângulos: 1- Relações entre os elementos de um triângulo. 2- Uso das tábuas trigonométricas. 3- Resolução de triângulos retângulos.

Terceira série

Álgebra

Unidade I – Funções: 1- Noção de função de variável real. 2- Representação cartesiana. 3- Noção de limite e de continuidade.

Unidade II – Derivadas: 1- Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2- Cálculo das derivadas. 3- Derivação das funções elementares. 4- Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.

Geometria

Unidade III – Curvas usuais: 1- Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2- As secções cônicas. 3- Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica.

Geometria Analítica

Unidade IV – Noções fundamentais: 1- Concepção de Descartes. 2- Coordenadas: abscissas sobre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3- Distância de dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4- Determinação de uma direção; ângulo de duas direções.

Unidade V – Lugares geométricos: 1- Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2- Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3- Equação da reta. 4- Equação do círculo. 5- Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.

Programa de Matemática do Curso Científico

Primeira Série

Aritmética Teórica

Unidade I – As operações aritméticas fundamentais: 1- Teoria da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão, da potenciação e da radiciação de inteiros. 2- Sistemas de numeração.

Unidade II – A divisibilidade numérica: 1- Teorema gerais sobre divisibilidade. 2- Caracteres de divisibilidade. 3- Teorias do m.d.c. e do m.m.c. 4- Teoria dos números primos; aplicações.

Unidade III – Os números fracionários: 1- Teoria das operações aritméticas sobre números fracionários. 2- Noções sobre cálculo numérico aproximado. Erros. Operações abreviadas.

Álgebra

Unidade IV – Os polinômios: 1- Operações algébricas sobre polinômios. 2- Teoria da divisão de polinômios. 3- Identidade de polinômios; método dos coeficientes a determinar; identidades clássicas. 4- Divisão de um polinômio inteiro em x por x ± a; regra e dispositivo de Briot-Ruffini.

Unidade V – O trinômio do 2.º grau: 1- Decomposição em fatores do 1.º grau; sinais do trinômio; equações do 2.º grau. 2- Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2.º grau; representação gráfica. 3- Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos.

Geometria

Unidade VI – O plano e a reta no espaço: 1- Determinação de um plano. 2- Intersecção de planos e retas. 3- Paralelismo de retas e planos 4- Reta e plano perpendiculares. 5- Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6- Diedros; planos perpendiculares entre si. 7- Ângulos poliédricos; estudo especial dos triedros.

Unidade VII – Os poliedros: 1- Noções gerais. 2- Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos; Teorema de EULER; noções sobre os poliedros regulares.

Segunda Série

Álgebra

Unidade I – A função exponencial: 1- Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2- Noção de função exponencial e de sua função inversa. 3- Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 4- Resolução de algumas equações exponenciais.

Unidade II – O binômio de Newton: 1- Noções sobre análise combinatória. 2- Binômio de Newton.

Unidade III – Determinantes: 1- Teoria dos determinantes. 2- Aplicação aos sistemas de equações lineares; regra de Crammer; teorema de Rouché.

Unidade IV – Frações contínuas: Noções sobre frações contínuas.

Geometria

Unidade V – Os corpos redondos: 1- Noções sobre geração e classificação das superfícies. 2- Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3- Estudo da esfera; área da esfera, da zona, do fuso esférico; volume da esfera.

Trigonometria

Unidade VI – Vetor: 1- Grandezas escalares e vetoriais. 2- Noção de vetor; equipolência. 3- Resultante ou soma geométrica de vetores. 4- Vetores deslizantes sobre um eixo; medida algébrica, teorema de Chasles.

Unidade VII – Projeções: 1- Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. 2- Teorema de Carnot, 3- Valor da projeção de um vetor.

Unidade VIII – Funções circulares: 1- Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2- Funções circulares ou trigonométricas: definição, variação, redução ao primeiro quadrante. 3- Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4- Cálculo das funções circulares dos arcos π/n.

Unidade IX – Transformações trigonométricas: 1- Fórmulas de adição, subtração, multiplicação e divisão de arcos: aplicações. 2- Transformação de somas em produtos; aplicação ao cálculo numérico. 3- Uso de tábuas trigonométricas.

Unidade X – Equações trigonométricas: Resolução e discussão de algumas equações trigonométricas simples.

Unidade XI – Resolução de triângulos: 1- Relações entre os elementos de um triângulo. 2- Resolução de triângulos retângulos. 3- Resolução de triângulos obliquângulos. 4- Aplicações imediatas à Topografia.

Terceira Série

Álgebra

Unidade I – Séries: 1- Sucessões. 2- Cálculo aritmético dos limites. 3- Séries numéricas. 4- Principais caracteres de convergência.

Unidade II – Funções: 1- Função de uma variável real. 2- Representação cartesiana. 3- Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidades de uma função racional.

Unidade III – Derivadas: 1- Definição, interpretação geométrica e cinemática. 2- Cálculo das derivadas. 3- Derivação de funções elementares. 4- Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.

Unidade IV – Números complexos: 1- Definição; operações fundamentais. 2- Representação trigonométrica e exponencial. 3- Aplicação à resolução das equações binômias.

Unidade V – Equações algébricas: 1- Propriedades gerais dos polinômios. 2- Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica; aplicação à composição das equações. 3- Noções sobre transformações das equações; equações recíprocas; equações de raízes iguais.

Geometria

Unidade VI – Relações métricas: 1- Teorema de Sewtart e suas aplicações no cálculo de linhas notáveis no triângulo. 2- Relações métricas nos quadriláteros; teorema de Ptolomeu ou Hiparco. 3- Potência de um ponto; eixos radicais; planos radicais.

Unidade VII – Transformação de figuras: 1- Deslocamentos, translação, rotação, simetria. 2- Homotetia e semelhança nos espaços de duas e de três dimensões. 3- Inversão pelos raios vetores recíprocos.

Unidade VIII – Curvas usuais: 1- Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2- As secções cônicas. 3- Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica.

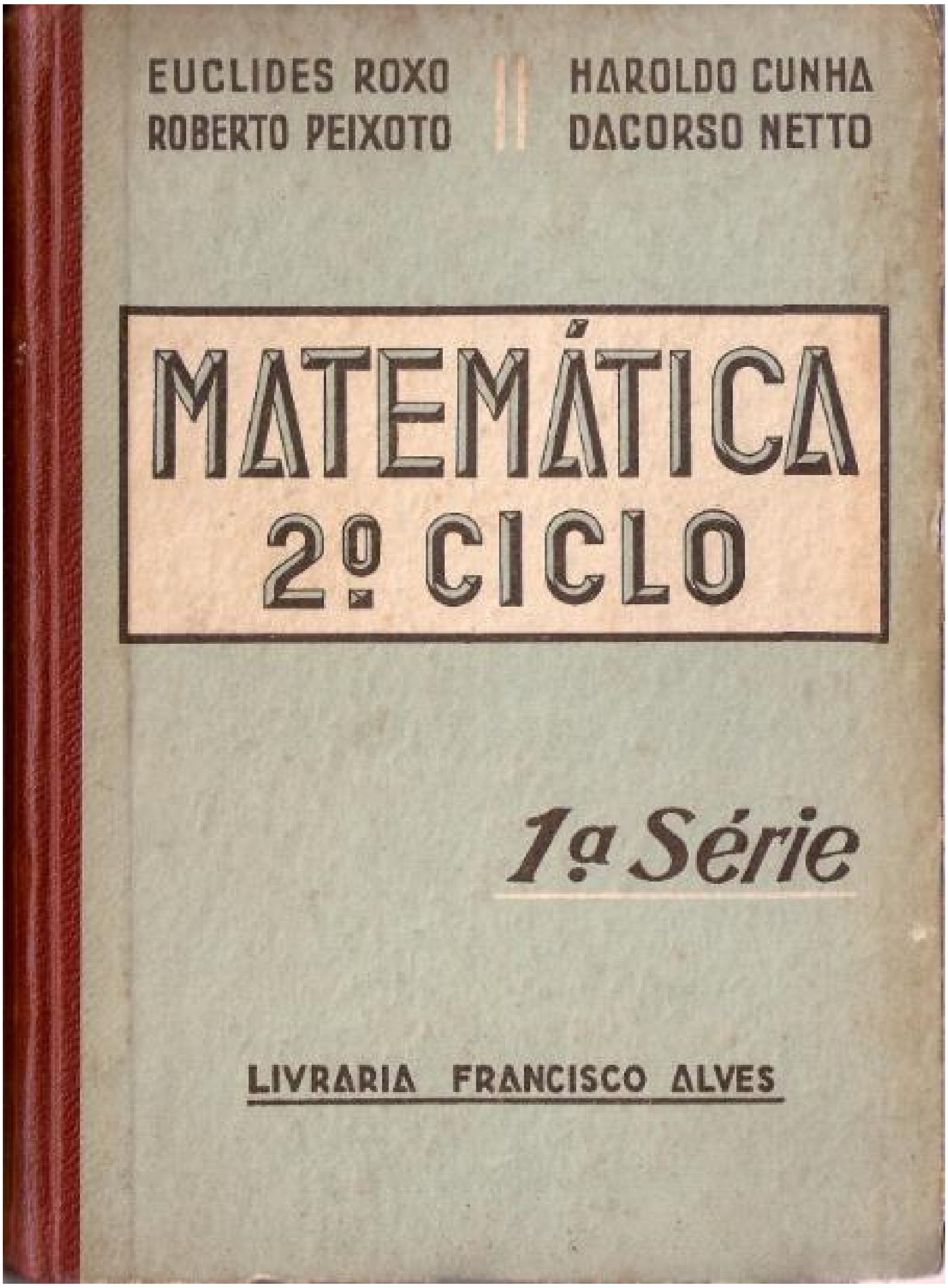
Geometria Analítica

Unidade IX – Noções fundamentais: 1- Concepção de Descartes. 2- Coordenadas, abscissas de dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4- Determinação de uma direção; ângulo de duas direções.

Unidade X – Lugares geométricos: 1- Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2- Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3- Equação da reta. 4- Equação do círculo. 5- Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.

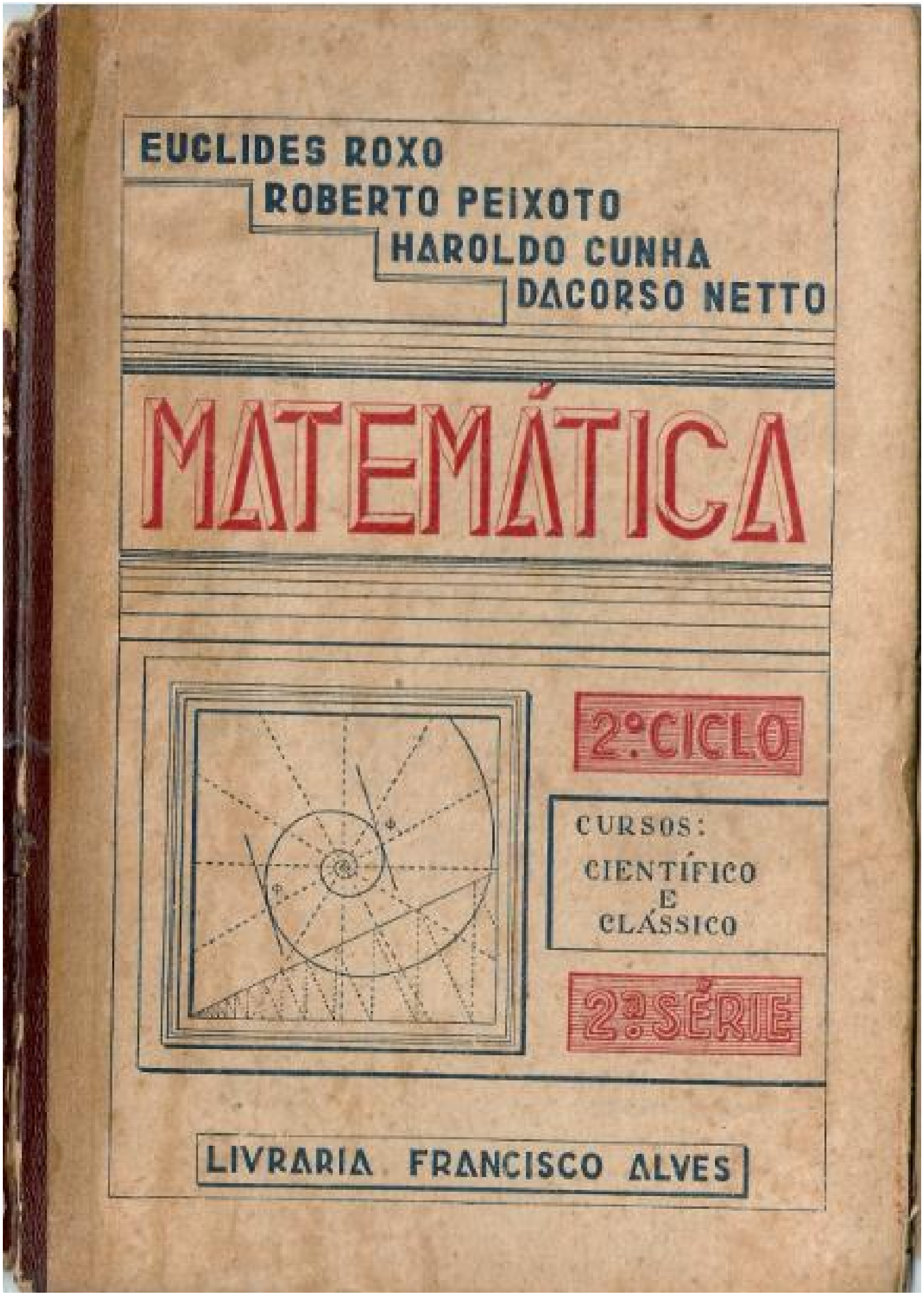
ANEXO DE IMAGENS – FASE 2

Anexo 01
Capa. Livro 1 – Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – 1945



(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1945)

Anexo 02
Capa. Livro 2 – Matemática 2.º Ciclo – 2.ª Série – 1944

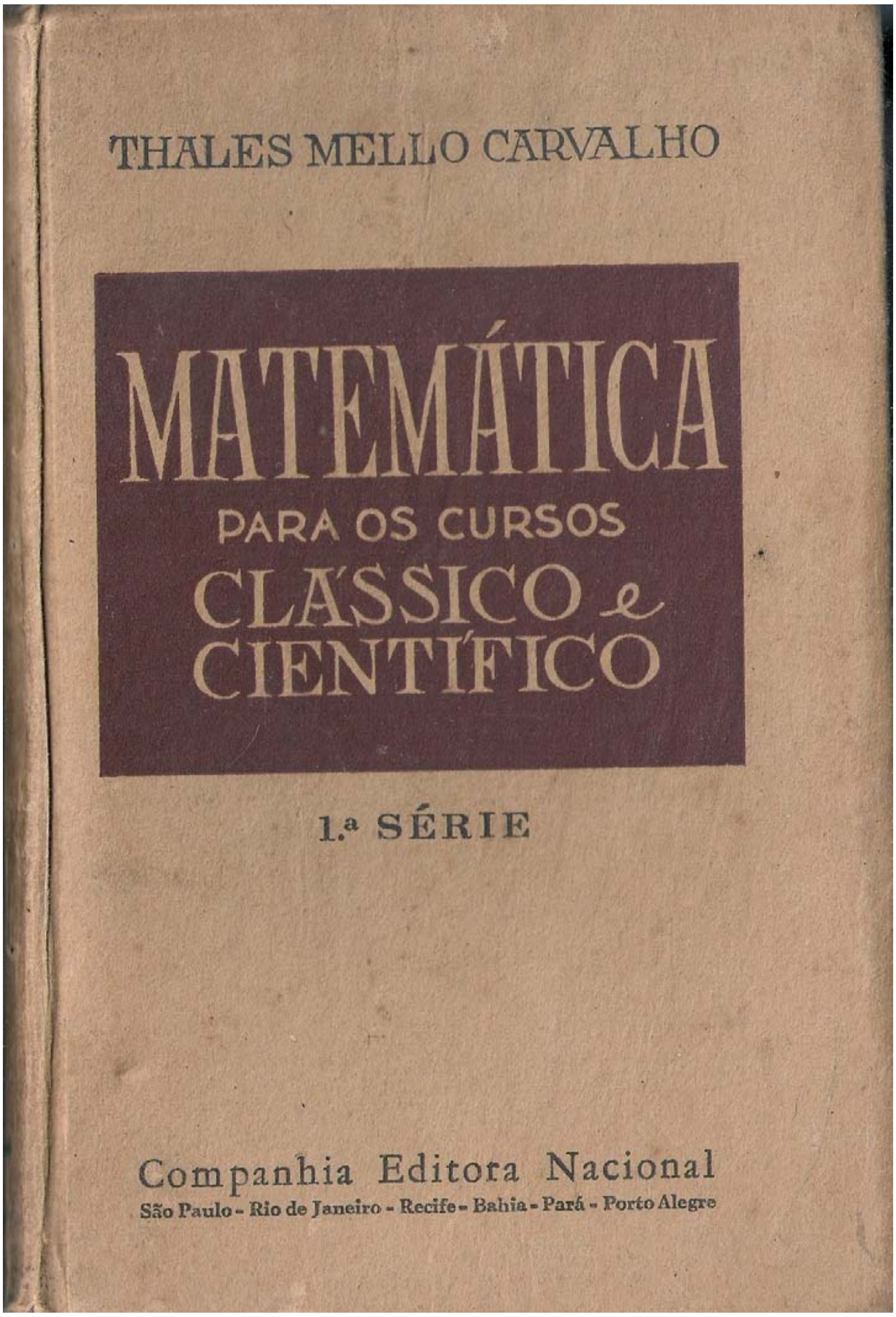


(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1944)

Anexo 03
Capa. Livro 3 – Matemática 2.º Ciclo – 3.ª Série – 1949

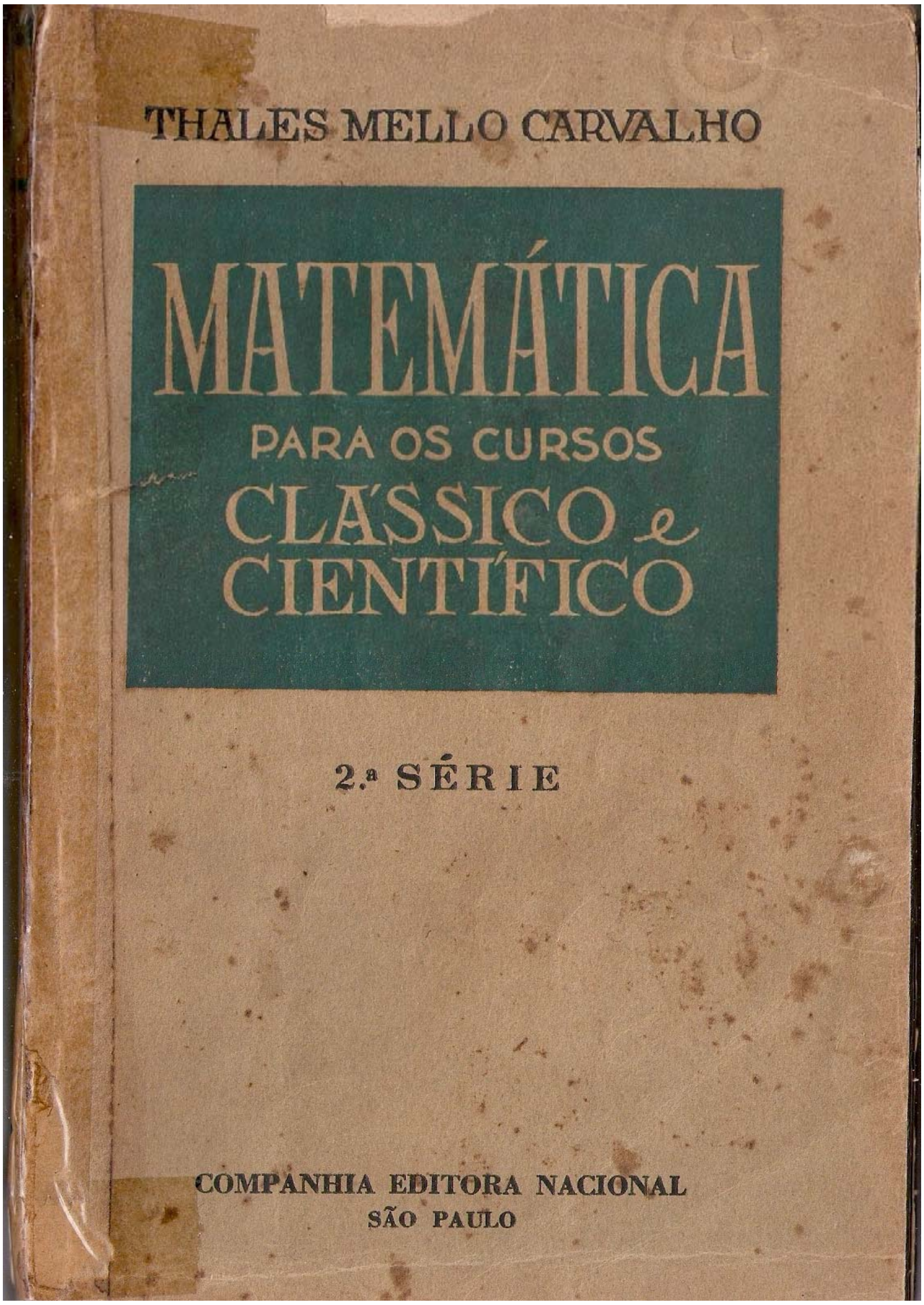
(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA H, L; NETTO, D, 1949)

Anexo 04
Capa. Livro 1 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – Primeira Série – 1945



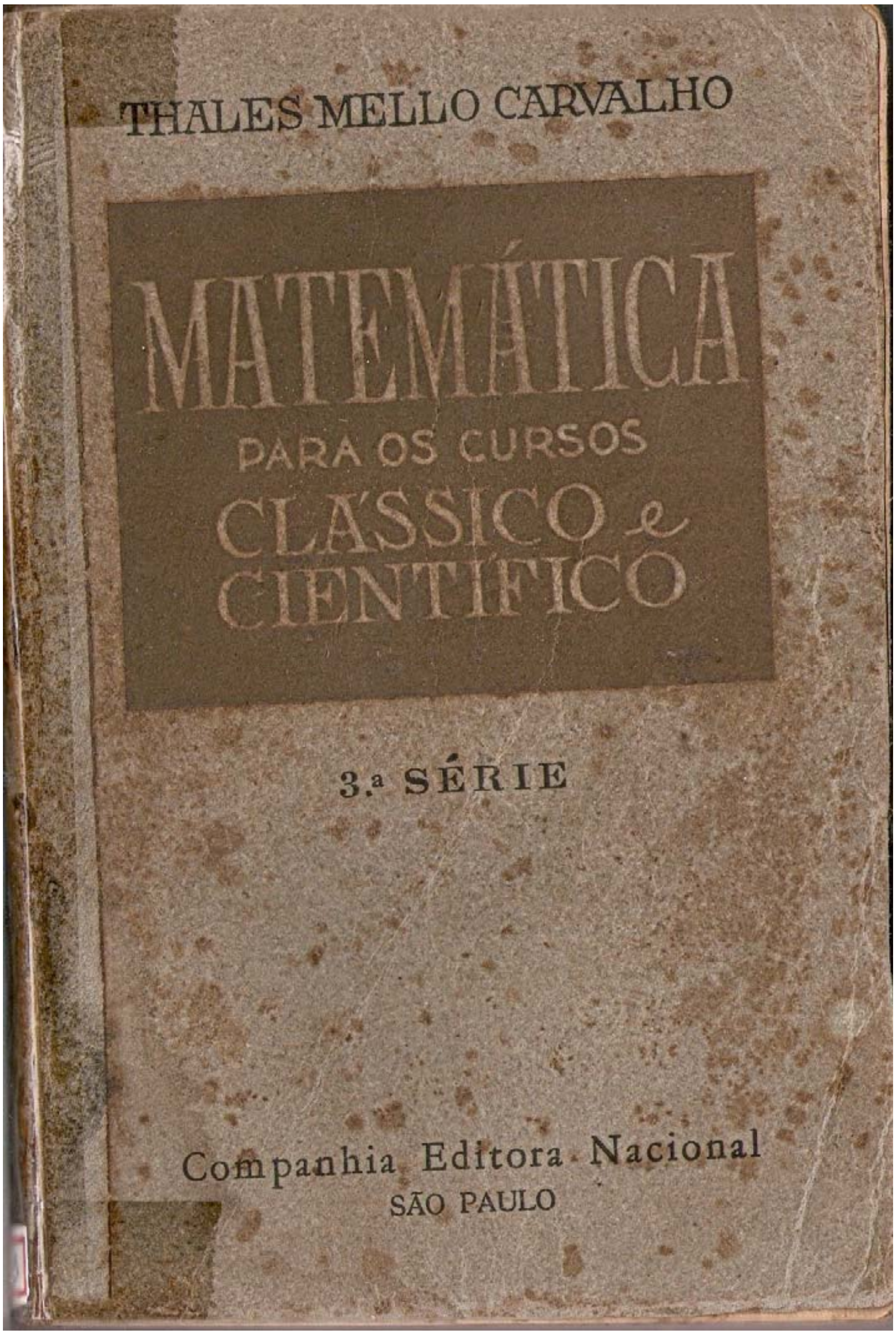
(CARVALHO, T, M, 1945).

Anexo 05
Capa. Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 2.ª Série – 1948



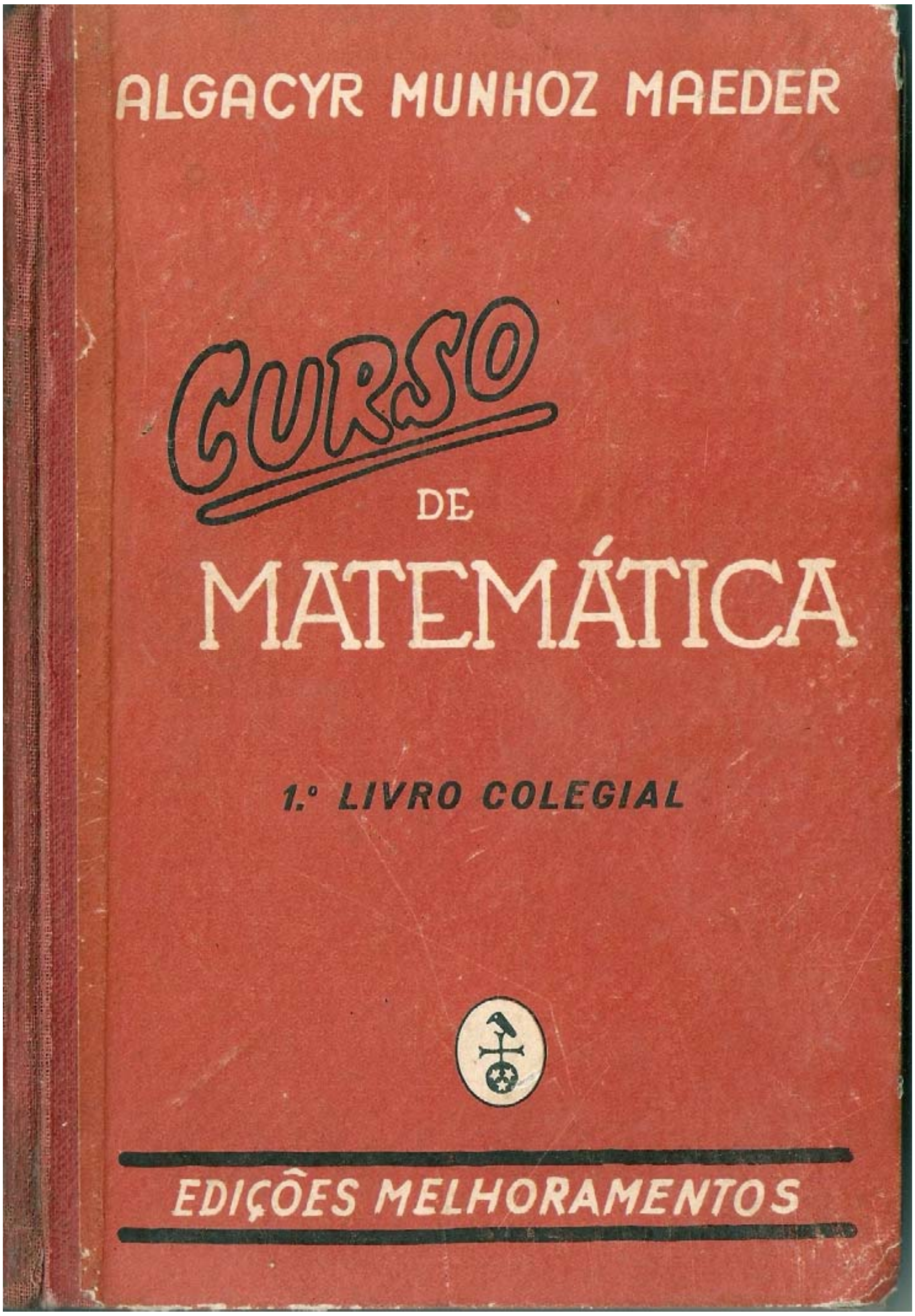
(CARVALHO, T, M, 1945)

Anexo 06
Capa. Livro 3 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – Terceira Série – 1948



(CARVALHO, T, M, 1948)

Anexo 07
Capa. Livro 1 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 1946

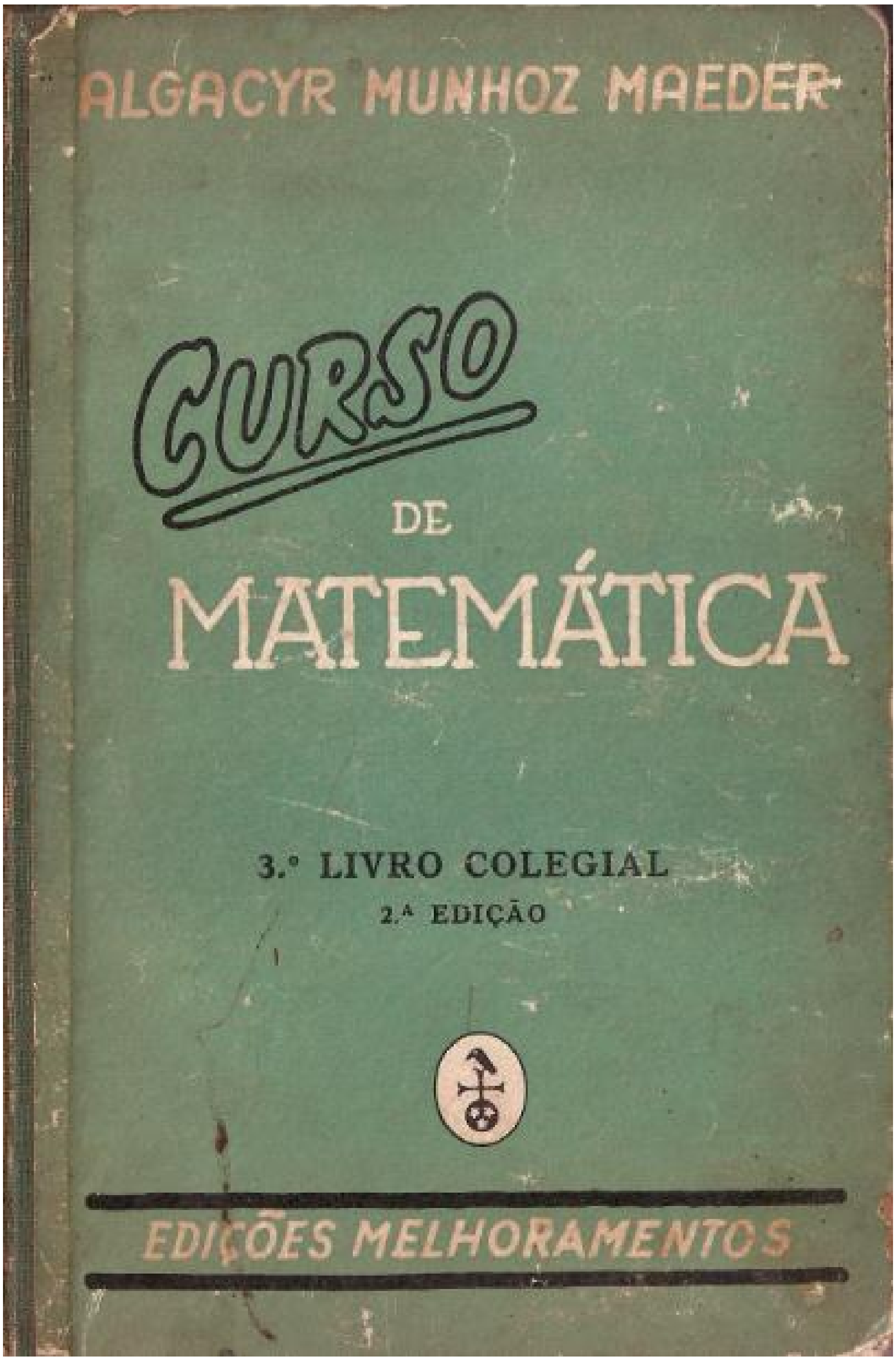


(MAEDER, A, M, 1946)

Anexo 08
Capa. Livro 2 – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – 1951

(MAEDER, A, M, 1951)

Anexo 9
Capa. Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 1949

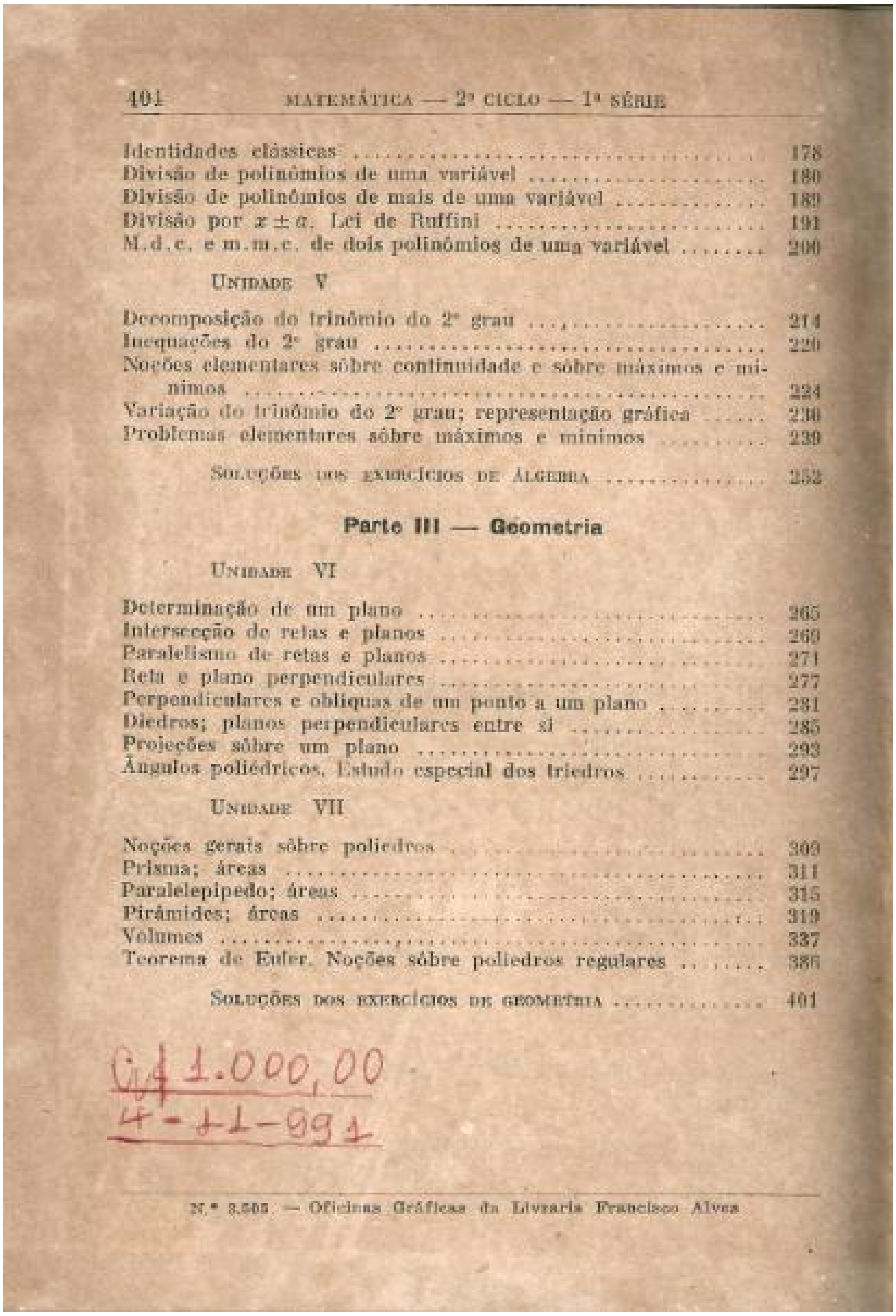


(MAEDER, A, M, 1949)

Anexo 10
Índice 1 (Parte 1) – Matemática – 2.º Ciclo – 4 Autores – 1.ª Série – 1945

ÍNDICE

Índice 1 (Parte 2)



Cr$ 1.000,00
4-11-991

N.º 3.505 — Oficinas Gráficas da Livraria Francisco Alves

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1945, p. 403-404)

Anexo 11
Índice – Livro 2 (Parte 1) – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – Thales Mello Carvalho – 1.ª Série – 1945

ÍNDICE

Índice – Livro 2 (Parte 2)

Cap. IV: OS POLINÔMIOS

Cap. V: O TRINÔMIO DO 2.º GRAU

Cap. VI: O PLANO E A RETA NO ESPAÇO

Cap. VII: OS POLIEDROS

APÊNDICE

(CARVALHO, T, M, 1945, p. 469-470)

Anexo 12
Índice – Livro 3 (Parte 1) – Curso de Matemática – Algacyr Munhoz Maeder – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 1946

ÍNDICE

ARITMÉTICA TEÓRICA

UNIDADE I

Índice – Livro 3 (Parte 2)

Capítulo IX: *Máximo divisor comum*

Capítulo X: *Mínimo múltiplo comum*

Capítulo XI: *Números primos*

Capítulo XII: *Os números fracionários*

Capítulo XIII: *Números decimais*

Capítulo XIV: *Noções sôbre cálculo numérico aproximado*

ALGEBRA

UNIDADE II

Capítulo XV: *Os polinômios; operações algébricas sôbre polinômios*

Índice – Livro 3 (Parte 3)

Capítulo XVI: *Divisão de polinômios*

Capítulo XVII: *Identidade de polinômio*

Capítulo XVIII: *Divisão por* $x + a$

UNIDADE III

Capítulo XIX: *O trinômio do 2.º grau: decomposição em fatôres; sinais*

Capítulo XX: *Inequações do 2.º grau*

Capítulo XXI: *Noção de variável e de função*

Capítulo XXII: *Variação do trinômio do 2.º grau; representação gráfica*

Capítulo XXIII: *Noções elementares sôbre continuidade e sôbre máximos e mínimos*

Índice- Livro 3 (Parte 4)

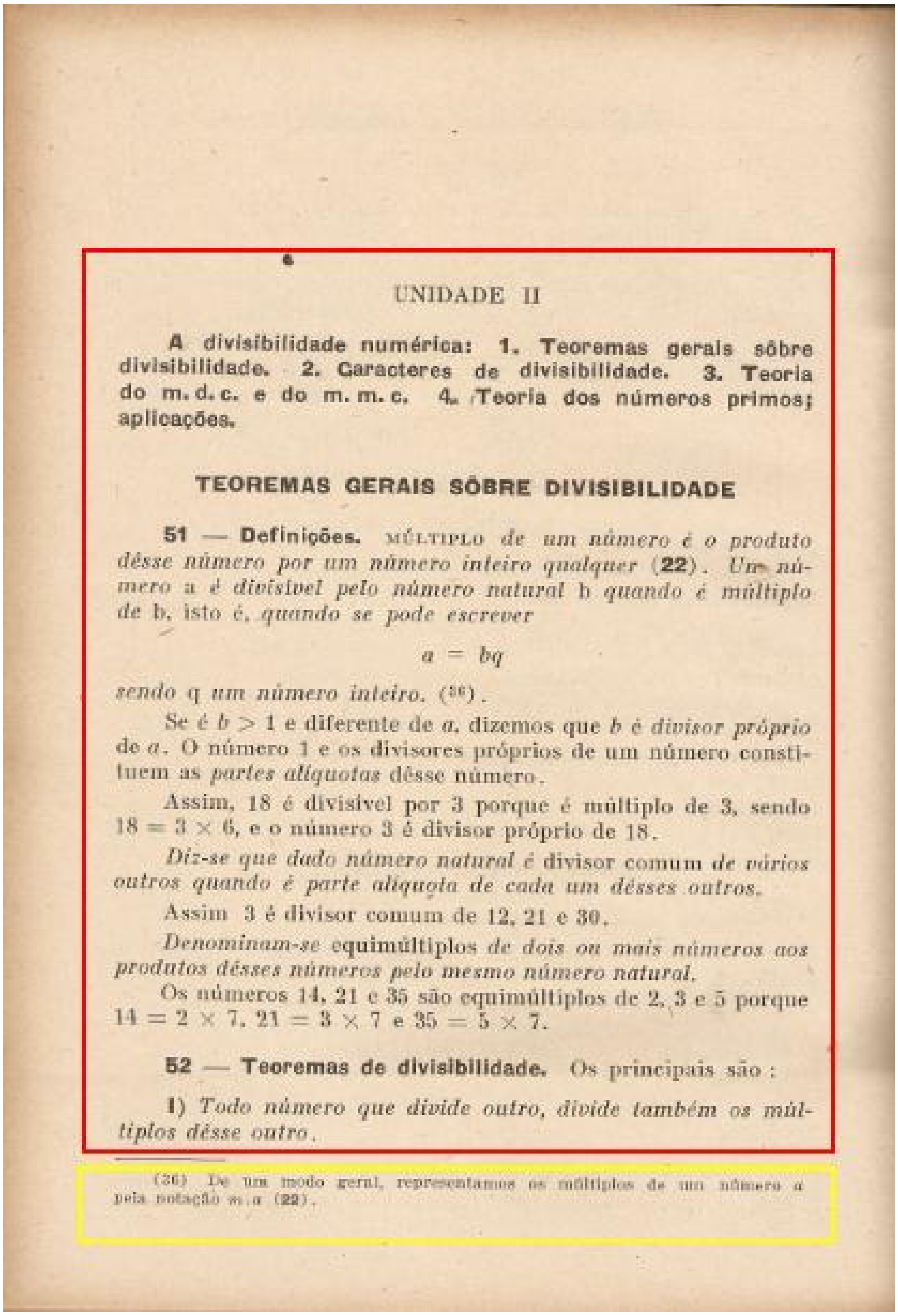
GEOMETRIA

UNIDADE IV

UNIDADE V

(MAEDER, A, M, 1946, p. 5-8)

Anexo 13
Intr.Divisibilidade Numérica – Unidade II – Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 1.ª Série – 1945



UNIDADE II

A divisibilidade numérica: 1. Teoremas gerais sôbre divisibilidade. 2. Caracteres de divisibilidade. 3. Teoria do m. d. c. e do m. m. c. 4. Teoria dos números primos; aplicações.

TEOREMAS GERAIS SÔBRE DIVISIBILIDADE

51 — Definições. MÚLTIPLO *de um número é o produto dêsse número por um número inteiro qualquer* (**22**). *Um número* a *é divisível pelo número natural* b *quando é múltiplo de* b, isto é, *quando se pode escrever*

$$a = bq$$

sendo q *um número inteiro.* (26).

Se é $b > 1$ e diferente de a, dizemos que b *é divisor próprio* de a. O número 1 e os divisores próprios de um número constituem as *partes alíquotas* dêsse número.

Assim, 18 é divisível por 3 porque é múltiplo de 3, sendo $18 = 3 \times 6$, e o número 3 é divisor próprio de 18.

Diz-se que dado número natural é divisor comum *de vários outros quando é parte alíquota de cada um dêsses outros.*

Assim 3 é divisor comum de 12, 21 e 30.

Denominam-se equimúltiplos *de dois ou mais números aos produtos dêsses números pelo mesmo número natural.*

Os números 14, 21 e 35 são equimúltiplos de 2, 3 e 5 porque $14 = 2 \times 7$, $21 = 3 \times 7$ e $35 = 5 \times 7$.

52 — Teoremas de divisibilidade. Os principais são:

1) *Todo número que divide outro, divide também os múltiplos dêsse outro.*

(26) De um modo geral, representamos os múltiplos de um número a pela notação $m.a$ (**22**).

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1945, p.68)

Anexo 14
Ex.Res.Ex. Divisibilidade Numérica (Parte 1) – Unidade II – Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 1.ª Série – 1945

A diferença de dois números côngruos módulo d, é um número côngruo com zero, segundo o mesmo módulo.

De fato, sendo

$$a \equiv b, \ |d|$$

a diferença $a - b$ é divisível por d e, portanto,

$$a - b \equiv 0, \ |d|$$

Exercícios resolvidos

1. *Um número dividido por 5, dá resto 2 e dividido por 7, dá resto 6. Determinar o resto da divisão dêsse número por* $5 \times 7 = 35$.

Designando-se o número por n, tem-se

$$n = 35 \times q + r = 5 \times 7 \times q + r$$

donde

$$n = m.5 + r \qquad (1)$$

$$n = m.7 + r \qquad (2)$$

sendo, porém,

$$r < 35 \qquad (3)$$

Por hipótese

$$n = m.5 + 2 \qquad (4)$$

Comparando (1) e (4) :

$$m.5 + r = m.5 + 2$$

ou

$$r = m.5 + 2$$

e, atendendo à condição (3), podemos ter :

$$r = 7, 12, 17, 22, 27, 32 \qquad (5)$$

Por outro lado, também

$$n = m.7 + 6 \qquad (6)$$

Ex.Res.Ex. Divisibilidade Numérica (Parte 2)

Comparando (2) e (6) :

$$m.7 + r = m.7 + 6$$

ou

$$r = m.7 + 6$$

e atendendo a (3) podemos ter :

$$r = 13, 20, 27, 34 \qquad (7)$$

Os dois grupos de valores (5) e (7) têm um elemento comum, 27, que é a solução.

2. *Determinar os algarismos* a *e* b *de modo que o número* 54a8b *seja divisível por* 5 *e por* 9.
Para que o número seja divisível por 5 devemos ter $b = 0$ ou $b = 5$.
Por outro lado, para que seja divisível por 9 :

$$5 + 4 + a + 8 + b = m.9$$

ou

$$a = m.9 - (5 + 4 + 8 + b)$$

Suposto $b = 0$, vem

$$a = m.9 - 8$$

e, como $a < 10$, só poderá ser $a = 1$. Temos, assim, uma solução : $a = 1$ e $b = 0$, donde o número 54180.

Suposto $b = 5$, vem

$$a = m.9 - 4$$

e só poderá ser $a = 5$. Temos, então, outra solução : $a = 5$ e $b = 5$, donde o número 54585.

3. *Um número é divisível por* 4 *se a soma do valor absoluto do algarismo das unidades com o dôbro do valor absoluto do algarismo das dezenas for múltipla de* 4.
Designando-se por c o número das centenas, por d o algarismo das dezenas e por u o algarismo das unidades de um número n, tem-se

$$n = 100\,c + 10\,d + u = 100\,c + 8\,d + 2\,d + u$$

Mas

$$100\,c + 8\,d = m.4$$

logo

$$n = m.4 + (2d + u)$$

de modo que n será divisível por 4 se a soma $2d + u$ for múltipla de 4.

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1945, p. 78-79)

Anexo 15
Ex.Prop.Divisibilidade Numérica – Unidade II – Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 1.ª Série – 1945

4. *Determinar o número de múltiplos de 12 compreendidos entre 163 e 329.*

Temos

$$163 = 12 \times 13 + 7$$
$$329 = 12 \times 27 + 5$$

Logo o múltiplo de 12 imediatamente superior a 163 é 12×14 e o imediatamente inferior a 329 é 12×27. O número pedido é $(27 - 14) + 1 = 14$.

5. *Dados dois números quaisquer, um dêles, a soma ou a diferença entre êles é divisível por 3.*

De fato um número qualquer pertence a uma das formas

$$m.3, \quad m.3 + 1, \quad m.3 - 1$$

Excluído o caso em que um dos números dados seja da forma $m.3$, os dois podem ser da forma $m.3+1$ ou da forma $m.3-1$. Neste caso, a diferença dos dois é divisível por 3.
Se um dos números for da forma $m.3+1$ e o outro $m3-1$, a sua soma

$$m.3 + 1 + m.3 - 1 = m.3$$

é, como vemos, divisível por 3.

Exercícios propostos

6. Quais os números que divididos por 5, dão resto 3 ?

7. Pode uma soma ser divisível por um número, mesmo que nenhuma das parcelas seja divisível por êsse número ?

8. Um número dividido por 3 dá resto 2 e, dividido por 5 dá resto 4. Determinar o resto da divisão dêsse número por $3 \times 5 = 15$

9. Determinar, sem efetuar as divisões, os restos que se obtém dividindo o número 618079 por 2, 3, 5, 8, 9, 11 e 25.

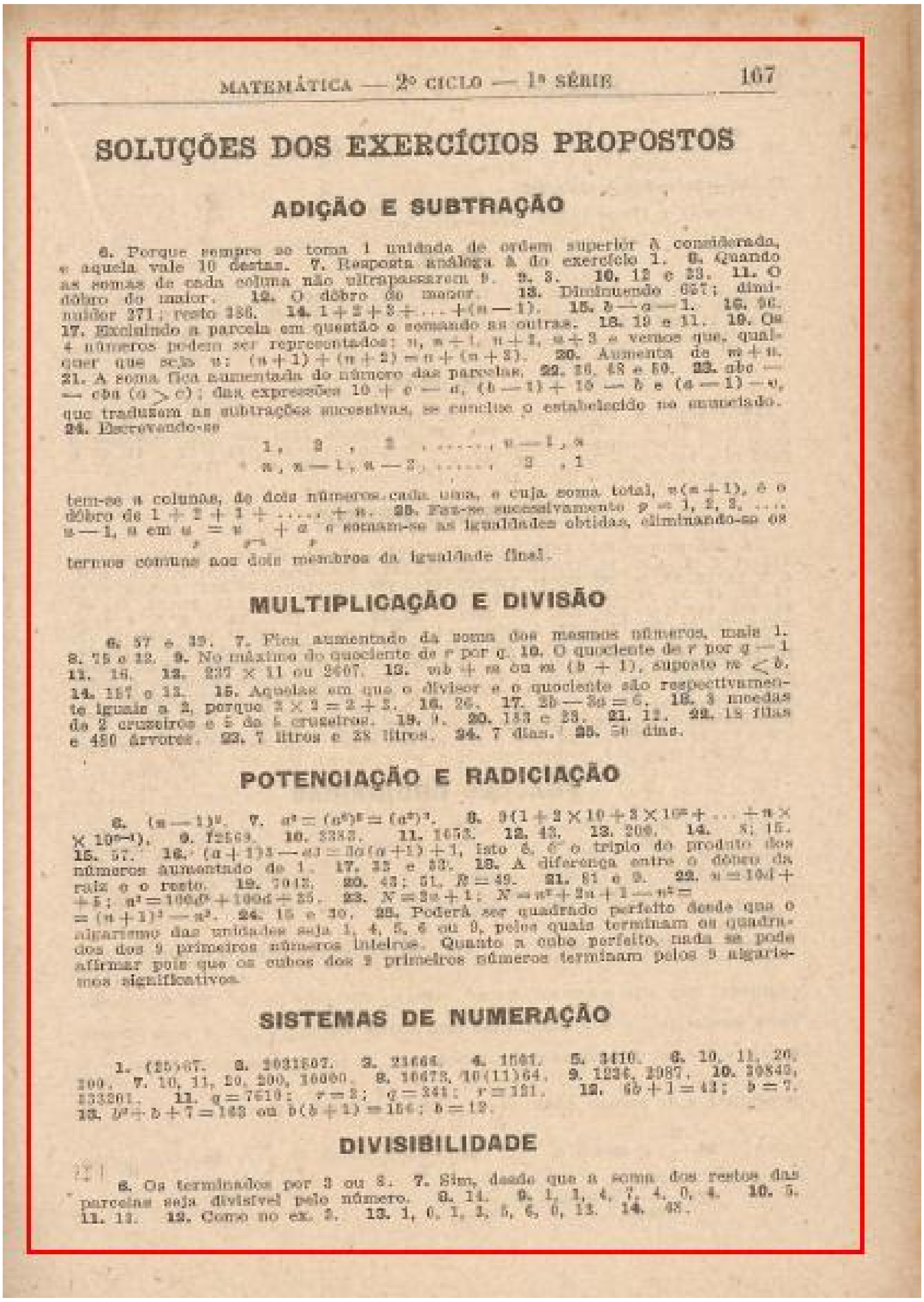
10. Determinar a de modo que o número $734a2$ seja divisível por 3 e por 4.

11. Determinar o número de múltiplos de 8 compreendidos entre 100 e 200.

12. O resto da divisão de um número por 8 se obtém dividindo por 8 a soma do algarismo das unidades, com o dôbro do das dezenas e com o quadruplo do das centenas, tomados êsses algarismos em valor absoluto.

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA,H, L; NETTO, D, 1945, p.80)

Anexo 16
Res.Ex.Prop. – Primeira Parte – Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 1.ª Série – 1945



MATEMÁTICA — 2º CICLO — 1ª SÉRIE 167

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

6. Porque sempre se toma 1 unidade de ordem superior à considerada, e aquela vale 10 destas. **7.** Resposta análoga à do exercício 1. **8.** Quando as somas de cada coluna não ultrapassarem 9. **9.** 3. **10.** 12 e 23. **11.** O dôbro do maior. **12.** O dôbro do menor. **13.** Diminuendo 657; diminuidor 271; resto 386. **14.** $1+2+3+\ldots+(n-1)$. **15.** $b-a-1$. **16.** 96. **17.** Excluindo a parcela em questão e somando as outras. **18.** 19 e 11. **19.** Os 4 números podem ser representados: n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ e vemos que, qualquer que seja n: $(n+1)+(n+2)=n+(n+3)$. **20.** Aumenta de $m+n$. **21.** A soma fica aumentada do número das parcelas. **22.** 26, 48 e 50. **23.** $abc - cba$ $(a > c)$; das expressões $10+c-a$, $(b-1)+10-b$ e $(a-1)-c$, que traduzem as subtrações sucessivas, se conclue o estabelecido no enunciado. **24.** Escrevendo-se

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots, & n-1, & n \\ n, & n-1, & n-2, & \ldots\ldots, & 2, & 1 \end{array}$$

tem-se n colunas, de dois números cada uma, e cuja soma total, $n(n+1)$, é o dôbro de $1+2+3+\ldots\ldots+n$. **25.** Faz-se sucessivamente $p=1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ em $u_p = u_{p-1} + a_p$ e somam-se as igualdades obtidas, eliminando-se os termos comuns aos dois membros da igualdade final.

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

6. 57 e 39. **7.** Fica aumentado da soma dos mesmos números, mais 1. **8.** 75 e 12. **9.** No máximo do quociente de r por q. **10.** O quociente de r por $q-1$. **11.** 18. **12.** 237×11 ou 2607. **13.** $mb+m$ ou $m(b+1)$, suposto $m < b$. **14.** 157 e 13. **15.** Aquelas em que o divisor e o quociente são respectivamente iguais a 2, porque $2 \times 2 = 2 + 2$. **16.** 26. **17.** $2b - 3a = 6$. **18.** 3 moedas de 2 cruzeiros e 5 de 5 cruzeiros. **19.** 9. **20.** 133 e 23. **21.** 12. **22.** 18 filas e 450 árvores. **23.** 7 litros e 28 litros. **24.** 7 dias. **25.** 50 dias.

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

6. $(n-1)^2$. **7.** $a^6=(a^3)^2=(a^2)^3$. **8.** $9(1+2\times 10+3\times 10^2+\ldots+n\times 10^{n-1})$. **9.** 12569. **10.** 3383. **11.** 1653. **12.** 43. **13.** 209. **14.** 8; 15. **15.** 57. **16.** $(a+1)^3-a^3=3a(a+1)+1$, isto é, é o triplo do produto dos números aumentado de 1. **17.** 33 e 53. **18.** A diferença entre o dôbro da raiz e o resto. **19.** 7043. **20.** 43; 51, $R=49$. **21.** 81 e 9. **22.** $n=10d+5$; $n^2=100d^2+100d+25$. **23.** $N=2n+1$; $N=n^2+2n+1-n^2=(n+1)^2-n^2$. **24.** 15 e 30. **25.** Poderá ser quadrado perfeito desde que o algarismo das unidades seja 1, 4, 5, 6 ou 9, pelos quais terminam os quadrados dos 9 primeiros números inteiros. Quanto a cubo perfeito, nada se pode afirmar pois que os cubos dos 9 primeiros números terminam pelos 9 algarismos significativos.

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

1. (25)67. **2.** 2031507. **3.** 21666. **4.** 1501. **5.** 3410. **6.** 10, 11, 20, 100. **7.** 10, 11, 20, 200, 10000. **8.** 10673, 10(11)64. **9.** 1236, 2087. **10.** 29842, 133201. **11.** $q=7610$; $r=3$; $q=344$; $r=121$. **12.** $6b+1=43$; $b=7$. **13.** $b^2+b+7=163$ ou $b(b+1)=156$; $b=12$.

DIVISIBILIDADE

6. Os terminados por 3 ou 8. **7.** Sim, desde que a soma dos restos das parcelas seja divisível pelo número. **8.** 14. **9.** 1, 1, 4, 7, 4, 0, 4. **10.** 5. **11.** 11. **12.** Como no ex. 5. **13.** 1, 0, 1, 3, 5, 6, 0, 12. **14.** 48.

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1945, p.167)

Anexo 17
Intr.Divisibilidade Numérica – Livro 2 (Parte 1) – Matemática para os Cursos Clássico e Científico –Primeira Série – 1945

TEOREMAS GERAIS SÔBRE DIVISIBILIDADE

1. Preliminares. — Diz-se que um número é *múltiplo* de outro, quando contém êsse outro, como parcela, um certo número de vezes exatamente, ou, o que é o mesmo, quando é igual ao produto dêsse outro por um número inteiro. Assim, 28 é *múltiplo* de 7, porque contém 7, como parcela, quatro vezes exatamente, ou porque é igual ao produto de 7 por 4.

Exprime-se, ainda, que um número é múltiplo de outro, dizendo-se que êle é *divisível* por êsse outro.

Um número é *submúltiplo, divisor, fator* ou *parte alíquota* de outro quando está contido nêsse outro um certo número de vezes exatamente, ou, o que é o mesmo, quando é o quociente exato da divisão dêsse outro por um número inteiro. No exemplo dado acima, 7 é *submúltiplo, divisor, fator* ou *parte alíquota* de 28, porque é o quociente exato da divisão de 28 por 4.

Exprime-se, ainda, que 7 é *submúltiplo* de 28, dizendo-se que 7 *divide* 28.

Resumindo as definições acima, podemos dizer que, se um número A é o produto de outro número B por um número inteiro, A é *múltiplo* de B, ou A é *divisível* por B, e, recìprocamente B é *submúltiplo* de A, ou B *divide* A.

Observe-se assim, que qualquer número tem um número ilimitado de *múltiplos*. Ao contrário, todo número tem um número limitado de *submúltiplos*, conforme veremos mais adiante.

Diz-se que dois ou mais números são *eqüimúltiplos* de outros números dados, quando são respectivamente iguais aos

Intr.Divisibilidade Numérica – Livro 2 (Parte 2)

produtos dêsses números por um mesmo número inteiro. Assim, os números

$$20,\ 32,\ 40 \ \text{ e } \ 48$$

são *eqüimúltiplos* dos números

$$5,\ 8,\ 10 \ \text{ e } \ 12$$

porque são respectivamente iguais aos produtos dêstes por 4. Recìprocamente, diz-se que os números 5, 8, 10 e 12 são *eqüi-submúltiplos* dos números 20, 32, 40 e 48.

Representaremos, para simplicidade de notação, a expressão *múltiplo de A* por $m.\ A$. Assim, $m.\ 11$ significará *múltiplo de* 11.

Feitas estas considerações preliminares, passemos ao estudo dos teoremas gerais sôbre divisibilidade.

2. Teorema. — *Todo número que divide as parcelas de uma soma, divide a soma.*

Seja a um número que divide as parcelas $A_1, A_2, \ldots A_n$ da soma

$$S = A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n$$

Queremos demonstrar que a divide a soma S.

Realmente se a divide as parcelas $A_1, A_2, \ldots A_n$, estas são iguais aos produtos de a por números inteiros que designaremos respectivamente por $q_1, q_2, \ldots q_n$, ou

$$\begin{aligned} A_1 &= aq_1 \\ A_2 &= aq_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ A_n &= aq_n \end{aligned}$$

Somando, membro a membro, essas n igualdades, e pondo a em evidência, podemos escrever

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = a(q_1 + q_2 + \ldots + q_n)$$

ou

$$S = a(q_1 + q_2 + \ldots + q_n)$$

Como $q_1, q_2, \ldots q_n$ são números inteiros, sua soma é também um número inteiro. Logo S é o produto de a por um número inteiro, isto é, S é múltiplo de a, ou, o que é o mesmo, a divide S, C. Q. D. (*)

(*) *Como queriamos demonstrar* será de agora em diante, assim representado.

(CARVALHO, T, M, 1945, p. 113-114)

Anexo 18
Fig. Ex.Res. Ex. Divisibilidade Numérica (Parte 1). Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1945

RESOLUÇÃO. — Façamos as operações indicadas na regra:

Primeira classe: $5 + 3 \times 1 + 2 \times 3 = 14$
Segunda classe: $8 + 3 \times 6 + 2 \times 2 = 30$
Terceira classe: $2 + 3 \times 6 + 2 \times 4 = 28$
Quarta classe: $3 + 3 \times 9 = 30$

Sendo impossível a subtração

$$(14 + 28) - (30 + 30) = 42 - 60$$

adicionamos 21 ao minuendo, obtendo

$$(42 + 21) - 60 = 63 - 60 = 3$$

Concluímos, então, que o número dado não é divisível por 7, sendo 3 o resto desta divisão.

Na prática, pode-se substituir cada têrmo da subtração anterior pelo seu resto da divisão por 7. Assim, em vez de $42 - 60$, teríamos a diferença, $0 - 4$ ou, somando 7 ao minuendo, $7 - 4 = 3$.

25. Exercícios resolvidos(*).

1. *Demonstrar que um número é divisível por 4, se a soma do valor absoluto de seu algarismo das unidades e do dôbro do valor absoluto de seu algarismo das dezenas é divisível por.* 4.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam C, d e u respectivamente o número de centenas, o algarismo das dezenas e o algarismo das unidades de um número N. Em virtude do que já temos visto, podemos escrever

$$N = 100\,C + 10d + u$$

ou

$$N = 100\,C + 8d + 2d + u$$

Sendo, porém,

$$100\,C + 8d = 4(25C + 2d) = m.4$$

resulta

$$N = m.4 + (2d + u)$$

o que demonstra a condição pedida.

(*) Os exercícios que se seguem são sôbre *Divisibilidade* de um modo geral.

Ex.Res.Ex. Divisibilidade Numérica (Parte 2)

2. *Demonstrar que todo número divisível por 4 é a soma de dois números ímpares consecutivos.*

Demonstração: Todo número divisível por 4 é da forma $4a$, sendo a um número inteiro. A seguinte identidade(*)

$$4a \equiv (2a + 1) + (2a - 1)$$

demonstra, então, o teorema.

3. *Demonstrar que a soma dos quadrados de dois números só é divisível por* 11, *se êsses números são múltiplos de* 11.

Demonstração: Todo número não divisível por 11 é da forma $m.11 + a$, sendo a um dos números

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \text{ou}\ 10 \qquad (1)$$

O quadrado dêsse número será, então,

$$(m.11 + a)^2 = (m.11)^2 + 2(m.11)a + a^2 =$$
$$= m.11 + m.11 + a^2 = m.11 + a^2$$

Então, o resto da divisão dêsse quadrado por 11 será o mesmo resto da divisão por 11 de a^2 (ou o próprio a^2 se $a^2 < 11$). Como os restos das divisões por 11 dos quadrados dos números (1) são respectivamente

$$1,\ 4,\ 9,\ 5,\ 3,\ 3,\ 5,\ 9,\ 4,\ \text{ou}\ 1$$

concluimos que o quadrado de todo número não divisível por 11 é da forma

$$m.11 + r \text{ sendo } r = 1,\ 3,\ 4,\ 5 \text{ ou } 9$$

Assim, sendo A e B dois números não divisíveis por 11, seus quadrados serão

$$A^2 = m.11 + r \quad \text{sendo} \quad r = 1, 3, 4, 5 \text{ ou } 9$$
$$B^2 = m.11 + r' \quad \text{sendo} \quad r' = 1, 3, 4, 5 \text{ ou } 9$$

Como nenhuma das somas de dois quaisquer dos números

$$1,\ 3,\ 4,\ 5 \text{ ou } 9$$

é múltiplo de 11, concluimos que a soma $A^2 + B^2$ não será divisível por 11.

(*) *Identidade* é uma igualdade que contém letras (ou uma só letra) e é verificada para quaisquer valores atribuídos a essas letras (ou a essa letra).

(CARVALHO, T, M, 1945, p. 131-132)

Anexo 19
Ex.Prop.Divisibilidade Numérica (Parte 1) – Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1945

Demonstremos que $a + 1$ e $2a + 1$ são primos entre si. Realmente qualquer divisor comum dêles é divisor de sua diferença

$$(2a + 1) - (a + 1) = a$$

Como a e $a + 1$ são primos entre si (**n.º 81**), o único divisor comum de $a + 1$ e $2a + 1$ só poderá ser, então, 1. Logo $a + 1$ e $2a + 1$ também são primos entre si.

15. *Demonstrar que a soma dos quadrados de dois números primos com 3 não é divisível por 3.*

DEMONSTRAÇÃO: Sendo os números não divisíveis por 3 da forma $m. 3 \pm 1$, representando por a e b os números dados, tres são os casos que se podem apresentar:

$$1.^{\circ})\quad a = m. 3 + 1, \quad b = m. 3 + 1$$
$$2.^{\circ})\quad a = m. 3 + 1, \quad b = m. 3 - 1$$
$$3.^{\circ})\quad a = m. 3 - 1, \quad b = m. 3 - 1$$

É fácil ver que, em qualquer dos casos, a soma $a^2 + b^2$ será da forma

$$m. 3 + 2$$

o que demonstra o teorema.

119. Exercícios para resolver. —

1. Dados os números:

409, 413, 433, 437, 463, 493, 521, 529, 547, 587, 611, 617, 641, 691, 703 e 961 dizer:

a) quais entre êles são primos;

b) qual o menor divisor primo (diferente da unidade) de cada número não primo;

Resp.: 409, 433, 463, 521, 547, 587, 617, 641, 691 são primos. Os menores divisores de 413, 437, 493, 529, 611, 703 e 961 são respectivamente 7, 19, 17, 23, 13, 19 e 31.

2. Achar os divisores de 72.

Resp.: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 e 72.

3. Achar o número de divisores e os divisores de 90.

Resp.: 12 divisores: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 e 90.

Ex.Prop.Divisibilidade Numérica (Parte 2)

4. Achar o número de divisores e os divisores de 135.
Resp.: 8 divisores: 1, 3, 5, 9, 15, 27, 45 e 135.

5. Achar os divisores comuns dos números 770 e 1 320.
Resp.: 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55 e 110.

6. Achar os divisores comuns dos números 600, 720 e 1 080.
Resp.: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 e 120.

7. Achar os divisores comuns dos números 2 322, 2 700 e 3 294.
Resp.: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 e 54.

8. Achar os divisores comuns dos números 1 728, 1 812 e 2 676.
Resp.: 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

9. Determinar os números primos com 891 que dividem o produto 891×300.
Resp.: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100.

10. Determinar os números primos com 880 que dividem o produto 880×648.
Resp.: 1, 3, 9, 27 e 81.

11. Determinar todos os números ímpares que dividem o produto 256×600.
Resp.: 1, 3, 5, 15, 25 e 75.

12. Determinar o menor número que tem 12 divisores.
Resp.: 60.

13. Determinar o menor número que tem 20 divisores.
Resp.: 240.

14. Determinar o menor número que admite 36 divisores.
Resp.: 1 260.

15. Achar os números que tenham 14 divisores e sejam divisíveis por 2 e por 3.
Resp.: 1 458 e 192.

16. Determinar os números pelos quais dividindo-se 118 se obtém resto 8.
Resp.: 10, 11, 22, 55 e 110.

17. Determinar os números pelos quais dividindo-se 102 se obtém resto 12.
Resp.: 15, 18, 30, 45, 90.

18. Demonstrar que o produto de cinco números inteiros e consecutivos é divisível por 120.

19. Demonstrar que todo número que é um quadrado perfeito tem um número ímpar de divisores.

20. Demonstrar que todo número que não é um quadrado perfeito tem um número par de divisores.

21. Demonstrar que o quadrado de qualquer número primo maior do que 3 é um múltiplo de 24, mais 1.

(*Nota:* Basear a demonstração no princípio demonstrado no exercício 10 do **n.º 118**).

22. Demonstrar que, dados dois números inteiros quaisquer, o número formado adicionando-se uma unidade ao seu produto é primo com qualquer um dêles.

(CARVALHO, T, M, 1945, p. 195-196)

Anexo 20
Intr. A Divisibilidade Numérica (Parte 1) – Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 1946

CAPÍTULO VIII

A DIVISIBILIDADE NUMÉRICA

77. **Definição.** — *Múltiplo de um número é o produto dêsse número por um número inteiro qualquer* (n.º 23).

Assim, dada a igualdade

$$a = bq,$$

sendo q número inteiro, a é múltiplo de b.

Quando um número é múltiplo de outro número natural, diz-se que o primeiro é divisível pelo segundo.

Assim, dada a igualdade

$$a = bq,$$

sendo b número natural, a é divisível por b.

Os múltiplos de um número a são indicados pela notação

$$m.a.$$

Como vimos, existindo a igualdade,

$$a = bq,$$

dizemos também que b é *divisor* de a ou que b é *submúltiplo* de a (n.º 35).

Um número é divisor comum de vários outros quando é divisor de cada um dêles.

Exemplo: 5 é divisor comum dos números

10, 125 e 200.

78. **Teoremas gerais.** — I. *Todo número que divide as parcelas de uma soma divide também a soma.*

Consideremos a soma

$$S = a + b + c,$$

admitindo que a, b e c sejam divisíveis por d.

Intr. A Divisibilidade Numérica (Parte 2)

–

Os quocientes dessas divisões, que representaremos respectivamente por q, q' e q'', são números inteiros e temos

$$a = dq, \quad b = dq' \quad \text{e} \quad c = dq''.$$

Somando membro a membro essas igualdades, vem

$$a + b + c = dq + dq' + dq'',$$

expressão que equivale à seguinte:

$$S = (q + q' + q'')\, d,$$

de onde se deduz

$$S : d = q + q' + q''.$$

Sendo q, q' e q'' números inteiros, também o será a sua soma. Logo, S é divisível por d (n.º 35).

II. *Todo número que divide outro divide também os múltiplos dêsse outro.*

Esta proposição pode ser demonstrada como corolário do teorema precedente.

Com efeito, se d divide a, dividirá também

$$m.a,$$

uma vez que $m.a$ é a soma de m parcelas iguais a a, e estas, por hipótese, são divisíveis por d.

III. *Todo número que divide dois outros divide também a sua diferença.*

Seja a diferença

$$a - b = D.$$

Admitindo que a e b sejam divisíveis por d e designando por q e q' os respectivos quocientes, temos

$$a = dq \quad \text{e} \quad b = dq'.$$

Subtraindo a segunda igualdade da primeira, vem

$$a - b = dq - dq',$$

expressão que equivale à seguinte:

$$a - b = (q - q')\, d.$$

Sendo q e q' números inteiros, também o será a sua diferença. Logo, D é divisível por d (n.º 35).

(MAEDER, A,M, 1946, p. 81-82)

Anexo 21
Ex.Res.Ex. A Divisibilidade Numérica (Parte 1) – Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 1946

Dividindo por 9 cada um dos fatôres e multiplicando os restos obtidos, vem

$$
\begin{array}{l}
5\,718 : 9, \ldots\ldots r = 3 \\
76 : 9, \ldots\ldots R = 4 \\
\hline
34\,308 \\
400\,26 \\
\hline
434\,568 \ldots 4 \times 3 = 12.
\end{array}
$$

Dividindo por 9 o produto dos números dados e o dos restos dos fatôres, vem

$$434\,568 : 9,\ r = 3 \ldots 12 : 9,\ r = 3.$$

IV. *Prova por 9 da divisão.*

Da igualdade fundamental da divisão,

$$D = dq + r,$$

deduz-se

$$D - r = dq.$$

Assim, para se fazer a prova por 9 da divisão, basta subtrair o resto do dividendo, considerar o resultado obtido como o produto do divisor pelo quociente e proceder como na multiplicação.

88. **Exercícios resolvidos.** — 1.º *Demonstrar que, sendo o número N igual a um múltiplo de n mais 1, o quadrado do primeiro é também igual a um múltiplo de n mais 1.*

Temos

$$N = m.n + 1.$$

Elevando ao quadrado os membros da igualdade, vem

$$N^2 = (m.n)^2 + 2m.n + 1.$$

Notando que os dois primeiros têrmos do segundo membro são múltiplos de n, podemos escrever

$$(m.n)^2 + 2m.n = m.n.$$

Portanto:

$$N^2 = m.n + 1.$$

2.º *Demonstrar que um número é divisível por 4 quando a soma do valor absoluto do algarismo das unidades e do dôbro do valor absoluto do algarismo das dezenas é divisível por 4.*

Dado um número N, designando por c o total das suas centenas, por d o algarismo das dezenas e por u o das unidades, temos

$$N = 100c + 10d + u,$$

Fig. Ex.Res Ex. A Divisibilidade Numérica (Parte 2)

expressão que equivale à seguinte:

$$N = 100c + 8d + 2d + u.$$

Notando que $100c + 8d = m.4,$

segue-se que $N = m.4 + 2d + u.$

Essa igualdade demonstra a proposição.

3.º *Instituir o critério de divisibilidade por 7.*

Procurando os restos das divisões por 7 das potências sucessivas de 10, encontramos

$$\begin{array}{l|l} 1 = m.7 + 1 & 10^3 = m.7 - 1 \\ 10 = m.7 + 3 & 10^4 = m.7 - 3 \\ 10^2 = m.7 + 2 & 10^5 = m.7 - 2. \end{array}$$

Consideremos, agora, um número qualquer, 752 645, por exemplo. Temos

$$752\,645 = 5 + 4 \times 10 + 6 \times 10^2 + 2 \times 10^3 + 5 \times 10^4 + 7 \times 10^5.$$

Substituindo as potências de 10 que figuram no segundo membro dessa expressão pelas relações acima estabelecidas, vem

$$752\,645 = 5\,(m.7 + 1) + 4\,(m.7 + 3) + 6\,(m.7 + 2) + \\ + 2\,(m.7 - 1) + 5\,(m.7 - 3) + 7\,(m.7 - 2).$$

Efetuando os produtos indicados, encontramos

$$752\,645 = m.7 + 5 + m.7 + 4 \times 3 + m.7 + 6 \times 2 + \\ + m.7 - 2 + m.7 - 5 \times 3 + m.7 - 7 \times 2,$$

expressão que equivale à seguinte:

$$752\,645 = m.7 + (5 + 4 \times 3 + 6 \times 2) - (2 + 5 \times 3 + 7 \times 2).$$

Assim, o número dado será divisível por 7 se o fôr a diferença das somas contidas nos parênteses.

De modo geral, para verificarmos se um número é divisível por 7, separam-se os seus algarismos em classes de três, a partir da direita; em cada classe, soma-se o primeiro algarismo da direita com o triplo do segundo e o dôbro do terceiro; somam-se os resultados obtidos nas classes ímpares, a partir da direita, com os obtidos nas classes pares; subtrai-se a segunda soma da primeira; se essa diferença fôr divisível por 7 também o será o número dado. Não sendo possível a subtração, deve-se juntar à primeira soma um múltiplo de 7 suficiente para torná-la maior que a segunda.

89. Exercícios propostos.

1. Qual o número de dois algarismos que dividido por 9 dá o resto 2 e dividido por 11 dá o resto 8? R. 74.

2. Achar o algarismo u, de modo que o número $934u$ seja divisível por 3 e por 4. R. 8.

(MAEDER, A, M, 1946, p. 92-93)

Anexo 22
Ex.Prop.Divisibilidade Numérica – Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 1946

94 ALGACYR MUNHOZ MAEDER

3. Achar o algarismo d, de modo que o número $457d6$ seja divisível por 3 e por 4. R. 5.

4. Achar os algarismos d e u, de modo que o número $124du$ seja divisível por 8 e por 5. R. 4 e 0 ou 8 e 0.

5. Achar os algarismos d e u, de modo que o número $390du$ seja divisível por 8 e por 9. R. 2 e 4 ou 9 e 6.

6. Quais os números de três algarismos divisíveis por 4 e por 9, nos quais o algarismo das dezenas é 3? R. 432 e 936.

7. Quais os números de três algarismos divisíveis por 4 e por 11, nos quais o algarismo das dezenas é 2? R. 220, 528 e 924.

8. Certo número dividido por 3 dá o resto 2 e dividido por 4 dá o resto 3. Achar o resto da divisão dêsse número por 3×4. R. 11.

9. Certo número dividido por 3 dá o resto 1 e dividido por 7 dá o resto 5. Achar o resto da divisão dêsse número por 3×7. R. 19.

10. Demonstrar que a soma de dois números pares consecutivos é divisível por 4.

11. Demonstrar que, sendo o número N igual a um múltiplo de n menos um, o quadrado de N é igual a um múltiplo de n mais um.

12. Demonstrar que, sendo o número N igual a um múltiplo de n menos um, o cubo de N é também igual a um múltiplo de n menos um.

13. Demonstrar que um número é divisível por 8 quando a soma do algarismo das unidades com o dôbro do algarismo das dezenas e o quádruplo do algarismo das centenas é divisível por 8.

14. Demonstrar que um número é divisível por 6 quando a soma do algarismo das unidades com o quádruplo da soma de todos os outros é divisível por 6.

15. Demonstrar que um número é divisível por 7 quando, decomposto em grupos de 3 algarismos a partir da direita, a diferença entre a soma dos grupos de ordem ímpar e a soma dos grupos de ordem par é divisível por 7.

(MAEDER, A, M, 1946, p.94)

Anexo 23
Intr.PG. – Unidade I – Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 2.ª Série – 1944

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

16 — Definições. *Denomina-se* PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (30) *a toda sucessão de números*:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$$

na qual é constante o quociente de cada termo pelo precedente. Esse quociente constante é a *razão* da progressão.

Assim, a sucessão :

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ \ldots.$$

é uma progressão geométrica de razão igual a 3. Na progressão :

$$8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \ldots.$$

a razão é $\frac{1}{2}$.

A progressão é *crescente* ou *decrescente* conforme a sucessão a_1, a_2, a_3, ..., a_n ... seja crescente ou decrescente.

Limitando-nos ao estudo das progressões geométricas de termos positivos, é claro que na progressão crescente a razão é maior do que 1, e menor do que 1 na progressão decrescente.

A progressão é *limitada* quando a sucessão a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... se compõe de um número finito de termos; *ilimitada* quando a sucessão a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... é infinita.

Para indicar que os números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ estão em progressão geométrica, escreve-se :

$$\div\div\ a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n : \ldots$$

Designa-se a razão pela letra q.

(30) Encontram-se progressões geométricas em trabalhos dos Babilônios e Egipcios (sec. XVII a. C.), os quais consideraram problemas relativos à interpolação geométrica e à soma de termos consecutivos de progressões geométricas.

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1944, p.32)

Anexo 24
Ex.Res.Ex. PG – Livro 1 (Parte 1) – Matemática – 2.º Ciclo – 2.ª Série – 1944

17 — Expressão do enegésimo termo. Dada a progressão :

$$\div\, a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : \ldots : a_{n-2} : a_{n-1} : a_n : \ldots .$$

tem-se, por definição :

$$a_2 = a_1 q$$
$$a_3 = a_2 q$$
$$a_4 = a_3 q$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} q$$
$$a_n = a_{n-1} q$$

Multiplicando-se, membro a membro, estas $n - 1$ igualdades e suprimindo-se os fatores comuns aos dois membros da igualdade resultante, vem :

$$a_n = a_1\, q^{n-1} \qquad (12)$$

Exemplos:

1º) *Calcular o 6º termo da progressão:*

$$\div\, 7 : 14 : 28 : \ldots .$$

Tem-se:

$$a_1 = 7\,,\ q = 2\,,\ n = 6$$

A fórmula (12) dá:

$$a_6 = 7 \times 2^5 = 224$$

Assim, o sexto termo da progressão é 224.

2º) *Numa progressão geométrica, a soma do quarto termo com o sexto é 120, e a soma do sétimo com o nôno é 960. Dar essa progressão.*

Tem-se (**12**):

$$a_1\, q^6 + a_1\, q^8 = 960$$
$$a_1\, q^3 + a_1\, q^5 = 120$$

ou:

$$a_1\, q^6\, (1 + q^2) = 960$$
$$a_1\, q^3\, (1 + q^2) = 120$$

Ex.Res.PG (Parte 2)

número de termos da progressão, o *termo do meio é a média geométrica dos extremos* [32].

20 — Produto de termos de uma progressão geométrica. Seja a progressão:

$$\div\, a_1 : a_2 : \ldots . : a_{n-1} : a_n : \ldots .$$

Designando-se por P_n o produto dos n primeiros termos:

vem:

$$P_n = a_1\, a_2 \ldots . \, a_{n-1}\, a_n$$

ou, escrevendo os fatores em ordem inversa :

$$P_n = a_n\, a_{n-1} \ldots . \, a_2\, a_1$$

Multiplicando-se estas igualdades, membro a membro, e encerrando num parênteses os fatores que se correspondem nos segundos membros, tem-se :

$$P_n^2 = (a_1 a_n)\,(a_2 a_{n-1}) \ldots . \,(a_{n-1}\, a_2)\ \ (a_n\, a_1)$$

Como os produtos entre parênteses são iguais a $a_1\ a_n$ (**19**),

$$P_n^2 = (a_1 a_n)(a_1 a_n) \ldots . \ (a_1\, a_n)\ (a_1\, a_n)$$

ou :

$$P_n^2 = (a_1\, a_n)^n$$

donde :

$$P_n = \sqrt{(a_1\, a_n)^n} \qquad (17)$$

Exemplo: *Numa progressão geométrica de 6 termos, o produto dos dois primeiros termos é* $\frac{1}{2}$, *e o produto dos dois últimos é* 128. *Dar o produto dos termos dessa progressão.*

É evidente que o produto $\frac{1}{2} \times 128 = 64$ representa o quadrado do produto dos extremos (**19**). Logo:

$$a_1 \cdot a_6 = 8$$

e (17):

$$P = \sqrt{(a\ a\ )^6} = \sqrt{8^6} = 8^3 = 512$$

(32) Em particular, cada termo de uma progressão é média geométrica dos dois termos que o compreendem.

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1944, p. 33-36)

Anexo 25
Ex.Prop.PG. – Livro 1 (Parte 1) – Matemática – 2.º Ciclo – 2.ª Série – 1944

Substituindo-se, na segunda equação, a_3 por sua expressão indicada na primeira, vem:

$$234 = \frac{18\,q^2 \cdot q - 18}{q - 1}$$

ou:

$$234 = \frac{18\,(q^3 - 1)}{q - 1}\,.$$

isto é:

$$234 = 18\,(q^2 + q + 1)$$

Resolvendo, esta equação, tem-se:

$$q' = 3\,, \quad q'' = -4$$

Como nos limitámos às progressões geométricas de termos positivos, tomamos apenas a primeira raiz, isto é:

$$q = 3$$

e, por conseguinte:

$$a_3 = 18 \times 9 = 162$$

Exercícios

1. Calcular o 5º termo da progressão $\div\!\div$ 81 : 27 : . . .
2. Calcular o 10º termo da progressão $\div\!\div \dfrac{a}{b} : a : ab : \ldots$
3. Dados $a_7 = 1458$ e $q = 3$, calcular a_1.
4. Dados $a_9 = 640$ e $q = 2$, calcualr a_1.
5. Dados $a_1 = 3$ e $a_6 = 3072$, calcular q.
6. Dados $a_1 = 40$ e $a_4 = 5$, calcular q.
7. Achar 4 números em progressão geométrica, sabendo-se que a soma dos dois primeiros é 20, e a soma dos dois últimos 45.
8. Dividir o número 147 em três partes que formem uma progressão geométrica, cujo 3º termo excede o 1º de 105.
9. Dada a progressão $\div\!\div\ 7 : 7\sqrt{3} : \ldots\ldots$, calcular a diferença entre o 9º termo e o 5º.
10. Calcular x de modo que os números $1 + x$, $13 + x$ e $49 + x$ estejam em progressão geométrica.

Ex.Prop.PG. – Livro 1 (Parte 2)

38. Dados, numa progressão geométrica ilimitada, $a_1 = 1$ e $S = \frac{7}{4}$, calcular q.

39. A soma dos termos de uma progressão geométrica ilimitada é 20, e a soma dos dois primeiros termos é $8\frac{3}{4}$. Dar essa progressão.

40. Achar os 4 ângulos de um quadrilátero sabendo-se que estão em progressão geométrica, e que o último é igual ao quádruplo do segundo.

41. Num paralelepípedo retângulo de $216m^3$ de volume, a soma de todas as arestas é igual a 104m. Calcular as dimensões desse paralelepípedo, sabendo-se que elas estão em progressão geométrica.

42. Achar 4 números em progressão geométrica sabendo-se que a diferença dos dois primeiros é 3, a diferença dos dois últimos 12, e a soma dos quadrados dos quatro números 765.

43. Os três algarismos de certo número, tomados a partir da esquerda, estão em progressão geométrica. Dar êsse número, sabendo-se que a soma dos dois últimos algarismos é 12, e que, trocando-se os algarismos extremos, o novo número excede o primitivo de 792.

44. Dar o primeiro termo e a razão da progressão geométrica de $n + 1$ termos, na qual a soma dos n primeiros termos é A e a soma dos n últimos é B.

45. Achar 4 números em progressão geométrica, conhecendo-se a soma, a, dos extremos e a soma, b, dos outros dois.

Exercícios sôbre progressões aritméticas e geométricas

1. Achar a soma dos 30 primeiros números naturais.

2. Achar a soma dos 20 primeiros números pares.

3. Ligando-se os meios dos lados de um quadrado, cujo lado é a, obtem-se outro quadrado com o qual se procede do mesmo modo, e assim indefinidamente. Achar a soma das áreas de todos os quadrados.

4. Quantas pancadas dá em 24 horas um relógio que só bate as horas?

5. Do Rio parte para São Paulo um trem com a velocidade de 42 quilômetros por hora; 2 horas depois parte do Rio outro trem, no mesmo sentido, percorrendo 30 quilômetros na primeira hora,

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1944, p. 42-45)

Anexo 26
Res.Ex.Prop. Livro 1 – Matemática 2.º Ciclo – 2.ª Série – 1944

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

ÁLGEBRA

Progressões aritméticas

1. 36. **2.** 17. **3.** 0. **4.** 8. **5.** 48. **6.** $\frac{3}{4}$. **7.** 10. **8.** 15. **9.** 16. **10.** —3. **11.** 7. **12.** $1\frac{1}{2}$. **13.** 5. **14.** 30. **15.** $\div$ 10.13.16..... **16.** 85. **17.** $\div$ 8.14.20.26.32.38. **18.** 5. **19.** —2. **20.** $\div$ —10.—6.—2.2.6. **21.** 3,5,7. **22.** 1170 **23.** 45. **24.** —4165. **25.** 572. **26.** 12 ou 5. **27.** 10. **28.** I) $\frac{1-n}{2}$; II) $\frac{1+3n}{2}$. **29.** $\div$ —8.1.10.19.28.37.46. **30.** $\div$ 12.14....18.20.22....82.84. **31.** $\div 3x+y \,.\, 2x+y \,.\, x+y \,.\, y \,.\, y-x$. **32.** 21. **33.** $a_1 = 3$, $n = 7$. **34.** $n = 10$, $a_{10} = 21$. **35.** $n = 8$. $r = -4$. **36.** $a_1 = 16$, $a_7 = 10$. **37.** 182. **38.** $\div$ 4.10.16..... **39.** Tem-se $\frac{12-3}{m+1} < \frac{1}{10^3}$.:. $m > 10^3 . 4 - 1$ ou $m > 3999$. **40.** 9, 12, 15. **41.** Designando-se os lados por $a-r$, $a, a+r$, respectivamente, o teorema de Pitágoras conduz ao seguinte resultado: $a = 4r$. Os lados passam a ser representados por $3r$, $4r$, $5r$, e, sendo R o raio do círculo inscrito, tem-se:

$$R = \frac{S}{p} = \frac{6r^2}{6r} = r$$

42. 2,5,8. **43.** Tem-se: $(x-1)^2 + (x+5)^2 = 2(x+3)^2$.:. $x = 2$. **44.** 3795. **45.** De fato, designando-se por r a razão da progressão $\div a.b.c.d\ldots$, verifica-se que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer da sucessão $b^2 - a^2$, $c^2 - b^2$, $d^2 - c^2$, ..., é constante e igual a $2r^2$. **46.** A diferença dos valores do trinômio, para $x = n$ e para $x = n + 1$, é $(a+b) + 2an$. Desse modo, as diferenças consideradas formam uma progressão aritmética cujo 1º termo é $a+b$, e cuja razão é $2an$ $(n = 0,1\ldots)$. **47.** $3m$, $4m$ e $5m$. **48.** $a_1 = 4$, $r = 8$. **49.** Designando-se por a o 1º termo e por r a razão, da relação $a + B = a + nr + A$ tira-se $r = \frac{B-A}{n}$ (α). A relação $a + B = \frac{(2a+nr)(n+1)}{2}$, combinada com (α) dá: $a = \frac{(3-n)B + (n-1)A}{2n}$ (β). As relações (α) e (β) resolvem o problema. **50.** Designando-se por a o 1º termo e por r a razão, teem-se as equações:

$$na + r(2 + 4 + \ldots + \overline{2n-2}) = A$$

$$na + r(1 + 3 + \ldots + \overline{2n-1}) = B$$

donde se concluem:

$$r = \frac{B-A}{n}, \quad a = A - \frac{n-1}{n} B$$

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1944, p. 439-455)

Anexo 27
Intr.PG – Cap. I – Livro 2 (Parte 1) – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 2.ª Série – 1948

21. O primeiro têrmo de uma progressão aritmética é 5 e o último 35. Escrever essa progressão sabendo-se que a razão é igual ao número de têrmos. *Resp.:* ÷5 . 11 . 17 . 23 . 29 . 35

22. Numa progressão aritmética a soma do primeiro e do terceiro têrmos é 20 e a soma do quarto e do quinto é 50. Escrever a progressão. *Resp.:* ÷4 . 10 . 16 . 22 . 28 . 34 . . .

23. A diferença entre o 5.º têrmo e o 2.º têrmo de uma progressão aritmética é 24. Escrever essa progressão, sabendo-se que o primeiro têrmo é a quarta parte da razão. *Resp.:* ÷2 . 10 . 18 . 26 . . .

24. O primeiro têrmo de uma progressão aritmética é 4 e o último 60. Escrever essa progressão, sabendo-se que a razão é igual ao número de têrmos. *Resp.:* ÷4 . 12 . 20 . 28 . 36 . 44 . 52 . 60

25. A soma do segundo têrmo e do quinto têrmo de uma progressão aritmética é 25. Escrever essa progressão, sabendo-se que o sexto têrmo é o quádruplo do primeiro. *Resp.:* ÷5 . 8 . 11 . . .

26. A soma dos nove primeiros têrmos de uma progressão aritmética é 216. Escrever essa progressão, sabendo-se que o nono têrmo é igual 11 vêzes o primeiro. *Resp.:* ÷4 . 9 . 14 . . .

27. A soma do segundo e do quarto têrmos de uma progressão aritmética é 40. Achar a soma dos 10 primeiros têrmos dessa progressão, sabendo-se que a razão é ¾ do primeiro têrmo.

Resp.: 350

28. A soma dos cinco primeiros têrmos de uma progressão aritmética é 55. Escrever essa progressão, sabendo-se que o quinto têrmo excede o primeiro de 12. *Resp.:* ÷5 . 8 . 11 . . .

29. Sendo S a soma dos têrmos de uma progressão aritmética de n têrmos e de razão r e a_1 o primeiro têrmo dessa progressão, demonstrar que se tem

$$a_1 = \frac{S}{n} - \frac{(n-1)r}{2}$$

30. Sendo S a soma dos têrmos de uma progressão aritmética de razão r e a_1 e a_n respectivamente o primeiro e o último têrmo dessa progressão, demonstrar que se tem

$$S = \frac{a + a_n}{2} - \frac{a^2 - a_n^2}{2r}$$

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

23. Preliminares. Chama-se *progressão geométrica* ou *por quociente* uma sucessão de números, (denominados *têrmos*), tais que a razão (por quociente) de cada têrmo, a partir do segundo, para o têrmo anterior seja uma constante positiva ou negativa. Esta constante denomina-se *razão* da progressão (*).

(*) No presente estudo consideraremos apenas as progressões geométricas de razão positiva.

Intr.PG – Cap. I – Livro 2 (Parte 2)

Representa-se uma progressão geométrica fazendo-se preceder ao primeiro têrmo um dos sinais $\div\!\div$ ou : : e separando-se cada dois têrmos consecutivos por dois pontos.

Sendo, então $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_{n-1},\ a_n,\ \ldots$ números tais que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ldots = q \qquad (1)$$

a progressão geométrica de razão q, cujos têrmos são êsses números, pode ser assim representada

$$: : a_1 : a_2 : a_3 : \ldots\ a_{n-1} : a_n : \ldots \qquad (2)$$

Conforme tenha ou não um número limitado de têrmos, a progressão denomina-se *limitada* ou *ilimitada*. Por exemplo

$$: : 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : 160$$

$$: : 18 : 6 : 2 : \frac{2}{3} : \ldots$$

são progressões geométricas de razões 2 e $\frac{1}{3}$ respectivamente, sendo a primeira limitada e a segunda ilimitada.

24. Observações.

I. *Cada têrmo de uma progressão geométrica, a partir do segundo, é igual ao produto do têrmo precedente pela razão.*

Realmente, das igualdades (1) a que satisfazem os têrmos da progressão (2), resulta

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= a_{n-1} q \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

II. As igualdades (3) mostram que, se a_1 é positivo, cada têrmo de uma progressão geométrica é maior ou menor do que o precedente, conforme a razão q seja superior ou inferior a 1. No primeiro caso diz-se que a progressão é *crescente* e, no segundo, que é *decrescente*. Concluimos, pois:

Uma progressão geométrica é crescente ou decrescente conforme sua razão seja superior ou inferior a 1.

(CARVALHO, T, M, 1948, p. 16-17)

Anexo 28
Ex.Res. Ex. PG.Cap. I – Livro 2 (Parte 1) – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 2.ª Série – 1948

25. Propriedade. *Cada têrmo de uma progressão geométrica (a partir do segundo) é a média geométrica entre o têrmo precedente e o seguinte.*

Realmente, sendo a_{n-1}, a_n e a_{n+1} três têrmos consecutivos de uma progressão geométrica, podemos, de acôrdo com a definição do **n.° 25,** escrever a proporção contínua

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

donde resulta

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

26. Fórmula do têrmo geral. Seja a progressão geométrica (2) cujos n primeiros têrmos, como já vimos (**n.° 24**), verificam as relações (3). Multiplicando, membro a membro, essas $n - 1$ igualdades e eliminando os fatores comuns a ambos os membros, obtemos a fórmula do têrmo de ordem n

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \qquad (4)$$

que traduz o seguinte teorema:

Cada têrmo de uma progressão geométrica é igual ao produto do primeiro têrmo por uma potência da razão, cujo expoente é igual ao número de têrmos que o precedem.

27. Exercício. *Achar o décimo têrmo da progressão*

$$:: 16 : 24 : 36 : \ldots$$

RESOLUÇÃO: Temos, usando as notações anteriores, $a_1 = 16$, $n = 10$ e $q = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$. O décimo têrmo será, então, de acôrdo com o teorema anterior

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \frac{19683}{32}$$

28. Fórmulas derivadas. A fórmula (4) estabelece uma relação entre os quatro elementos de uma progressão geométrica: *primeiro têrmo* (a_1), *têrmo de ordem n* (a_n), *razão* (q) *e número de têrmos* (n). Conhecidos, então, três dêstes elementos, pode-

Ex.Res. Ex. PG.Cap. I – Livro 2 (Parte 2)

Substituindo êsses valores na fórmula (4), obtemos

$$3072 = 3 \times 4^{n-1}$$

Dividindo ambos os membros dessa igualdade por 3 resulta

$$1024 = 4^{n-1}$$

Se o problema tem solução, 1024 deve ser uma potência perfeita de 4. Realizando, então, uma decomposição análoga à decomposição de um número em fatores primos, achamos $1024 = 4^5$, o que nos permite escrever

$$4^5 = 4^{n-1}$$

donde resulta $n - 1 = 5$ e, portanto, $n = 6$.

32. Inserção de meios geométricos. Inserir *n meios geométricos* entre dois números dados A e B é formar uma progressão geométrica de $n + 2$ têrmos cujo primeiro têrmo é A e cujo último têrmo é B.

A resolução do problema consiste inicialmente em calcular a razão da progressão, o que se obtém fàcilmente pela aplicação da fórmula (6). Conhecida esta, escrevem-se os n têrmos (entre A e B) de acôrdo com a observação I do **n.º 24.**

33. Exercício. *Inserir 4 meios geométricos entre 7 e 1701.*

RESOLUÇÃO: De acôrdo com o que foi dito no número anterior, é preciso calcular a razão de uma progressão geométrica de 6 têrmos, começada por 7 e terminada por 1701. Logo, são dados $a_1 = 7$, $a_6 = 1701$ e $n = 6$. A razão será

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{a_6}{a_1}} = \sqrt[5]{\frac{1701}{7}} = \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$$

e a progressão pedida será $\because$ 7 : 21 : 63 : 189 : 567 : 1701.

34. Teorema. *Dada uma progressão geométrica crescente e um número A arbitrário, existe um número n tal que o têrmo de ordem n da progressão seja superior a A* (*).

Realmente, sejam a_{k-1}, a_k e a_{k+1} três têrmos consecutivos de uma progressão geométrica de razão q. Sendo, pela própria definição,

$$a_{k+1} = a_k \cdot q$$
$$a_k = a_{k-1} \cdot q$$

(*) É conveniente lembrar que o presente estudo se refere a progressões de têrmos positivos.

(CARVALHO, T, M, 1948, p. 18-20)

Anexo 29
Ex.Prop.PG. Cap. I – Livro 2 (Parte 1) – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1948

De acôrdo com o enunciado do problema, podemos escrever

$$\begin{cases} a \,.\, aq \,.\, aq^2 = 1000 \\ a \,.\, aq + a \,.\, aq^2 + aq \,.\, aq^2 = 350 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} a^3q^3 = 1000 \\ a(aq) + (aq)^2 + (aq)^2q = 350 \end{cases}$$

A primeira equação dá $aq = 10$. Substituindo êste valor na segunda e efetuando as simplificações, obtemos

$$a + 10q = 25$$

Resulta, então, o sistema do 2.º grau

$$\begin{cases} a + 10q = 25 \\ aq = 10 \end{cases}$$

cujas soluções são

$$\begin{cases} q = 2 \\ a = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ a = 20 \end{cases}$$

e às quais correspondem respectivamente as progressões

$$:: 5 : 10 : 20 : \ldots$$
$$:: 20 : 10 : 5 : \ldots$$

49. Exercícios para resolver.

1. Calcular o oitavo têrmo da progressão $:: 12 : 36 : 108 : \ldots$ *Resp.:* 26 244

2. Calcular o décimo têrmo da progressão $:: 1152 : 576 : 288 : \ldots$ *Resp.:* $\dfrac{9}{4}$

3. Calcular o oitavo têrmo da progressão $:: \dfrac{1}{16} : \dfrac{1}{8} : \dfrac{1}{4} : \ldots$ *Resp.:* 8

4. Calcular o primeiro têrmo de uma progressão geométrica de 6 têrmos, cuja razão é 3 e cujo último têrmo é 8748.
Resp.: 36

5. Calcular o primeiro têrmo de uma progressão geométrica de 9 têrmos cuja razão é 2 e cujo último têrmo é 1280.
Resp.: 5

6. O oitavo têrmo de uma progressão geométrica é 64. Achar o primeiro têrmo sabendo-se que a razão é 2.
Resp.: $\dfrac{1}{2}$

Ex.Prop.PG. Cap. I – Livro 2 (Parte 2)

7. Numa progressão geométrica de 6 têrmos o primeiro têrmo é $\frac{1}{9}$ e o último 27. Achar a razão.

Resp.: 3

8. Achar a razão de uma progressão geométrica cujo primeiro têrmo é $\frac{7}{8}$ e cujo nono têrmo é 224.

Resp.: 2

9. Numa progressão geométrica, cuja razão é 2, o primeiro têrmo é 5 e o último 320. Achar o número de têrmos.

Resp.: 7

10. O primeiro têrmo de uma progressão geométrica é 243 e o último 32. Achar o número de têrmos, sabendo-se que sua razão é $\frac{2}{3}$.

Resp.: 6

11. Inserir quatro meios geométricos entre 18 e 576.

Resp.: $::18:36:72:144:288:576$

12. Inserir seis meios geométricos entre 512 e 4.

Resp.: $::512:256:128:64:32:16:8:4$

13. Inserir quatro meios geométricos entre 7 e 224.

Resp.: $::7:14:28:56:112:224$

14. Achar o limite da soma dos têrmos da progressão

$$::\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\dots$$ *Resp.:* 1

15. Achar o limite da soma dos têrmos da progressão

$$::4:\frac{8}{3}:\frac{16}{9}:\dots$$ *Resp.:* 12

16. Achar a soma dos dez primeiros têrmos da progressão

$$::\frac{1}{20}:\frac{1}{10}:\frac{1}{5}:\dots$$ *Resp.:* $\frac{1023}{20}$

17. Calcular o produto dos dez primeiros têrmos da progressão

$$::\frac{1}{8}:\frac{1}{4}:\frac{1}{2}:\dots$$ *Resp.:* 32 768

18. O terceiro têrmo de uma progressão geométrica é 20 e o sétimo 320. Achar a soma dos nove primeiros têrmos dessa progressão.

Resp.: 2555

19. O sexto têrmo de uma progressão geométrica é 729. Achar a soma dos têrmos dessa progressão, sabendo-se que o primeiro têrmo é igual à razão. *Resp.:* 1092

20. Numa progressão geométrica o primeiro têrmo é 18 e o quociente da divisão do sétimo têrmo pelo quarto é 8. Calcular o décimo primeiro têrmo *Resp.:* 18 432

21. Que número se deve somar aos números 4, 8 e 14 para que os resultados fiquem em progressão geométrica?

Resp.: 4

(CARVALHO, T, M, 1948, p. 27-28)

Anexo 30
Intr.PG. Cap. II – Livro 3 – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – 1951

CAPÍTULO II

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

17. Definições. — Dá-se a denominação de *progressão geométrica* a toda sucessão de números na qual o quociente de cada um pelo precedente é constante.

Os números que formam a progressão denominam-se *termos* da progressão, e o quociente constante de cada termo pelo precedente chama-se *razão* da progressão.

Assim, dizemos que a sucessão

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16, \ldots$$

é uma progressão geométrica de razão igual a 2.

Indica-se que os números a, b, $c, \ldots l$ estão em progressão geométrica pela notação

$$::a:b:c:\ldots:l:\ldots$$

e designa-se a razão pela letra q.

18. Progressão crescente e progressão decrescente. — Considerando sòmente as progressões geométricas de termos positivos, quando a razão é maior que um, dizemos que a progressão é *crescente;* quando a razão é menor que um, a progressão diz-se *decrescente.*

Exemplos: a progressão

$$::1:3:9:27:81:\ldots \qquad (q=3).$$

é crescente, e a progressão

$$::9:3:1:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}:\ldots \qquad \left(q=\frac{1}{3}\right)$$

é decrescente.

19. Progressão limitada e progressão ilimitada. — Dizemos que a progressão

$$::a:b:c:\ldots:l:\ldots$$

(MAEDER, A, M, 1951, p.23)

Anexo 31
Ex.Res.Ex.PG – Cap. II – Livro 3 (Parte 1) – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – 1951

de onde se deduz

$$\boxed{q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}},} \qquad (3)$$

fórmula que fornece o valor de q em função de l, a e n.

23. EXERCÍCIOS.

1.º *Calcular o sétimo termo da progressão geométrica na qual o primeiro é 3 e a razão 2.*

Temos

$$a = 3, \quad q = 2 \quad \text{e} \quad n = 7.$$

Aplicando a fórmula (1)

$$l = aq^{n-1},$$

encontramos

$$l = 3 \times 2^6,$$

$$l = 192.$$

2.º *Calcular a razão da progressão geométrica na qual o primeiro termo é 1, o último 729 e o número de termos 7.*

Temos

$$a = 1, \quad l = 729 \quad \text{e} \quad n = 7.$$

Aplicando a fórmula (3)

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}},$$

encontramos

$$q = \sqrt[6]{729}.$$

Decompondo o radical, vem

$$q = \sqrt[3]{\sqrt{729}},$$

$$q = \sqrt[3]{27},$$

$$q = 3.$$

3.º *Em uma progressão geométrica, a soma do segundo termo com o terceiro é 30 e a soma do quinto com o sexto é 240. Calcular a razão dessa progressão.*

Temos

$$aq + aq^2 = 30$$

$$aq^4 + aq^5 = 240.$$

Colocando em evidência aq na primeira igualdade e aq^4 na segunda, vem

$$aq^4\,(1 + q) = 240$$

$$aq\,(1 + q) = 30.$$

Ex.Res.Ex.PG – Cap. II – Livro 3 (Parte 2)

$$\boxed{S = \frac{lq - a}{q - 1},} \qquad (6)$$

fórmula que fornece o valor de S em função de a, l e q.

29. Observação. — O valor de S pode ser também expresso em função de a, n e q.

Com efeito, substituindo, na fórmula (6), l por

$$aq^{n-1},$$

obtemos

$$S = \frac{aq^{n-1}q - a}{q - 1},$$

$$S = \frac{aq^{n} - a}{q - 1},$$

$$\boxed{S = \frac{a(q^{n} - 1)}{q - 1},} \qquad (7)$$

fórmula que permite calcular S quando são dados a, q e n.

30. **EXERCÍCIO.**

Calcular a soma dos termos de uma progressão geométrica crescente, em que o primeiro é 1, o último 1 953 125 e a razão 5.

Temos

$$a = 1, \quad l = 1\,953\,125 \quad \text{e} \quad q = 5.$$

Aplicando a fórmula (6)

$$S = \frac{lq - a}{q - 1},$$

encontramos

$$S = \frac{1\,953\,125 \times 5 - 1,}{5 - 1},$$

$$S = 2\,441\,406.$$

31. Soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente ilimitada. — Consideremos a progressão decrescente

$$\div\, a : b : c : \ldots$$

cuja soma dos termos é dada pela expressão

$$S = \frac{lq - a}{q - 1},$$

(MAEDER, A, M, 1951, p. 25-29)

Anexo 32
Ex.Prop.PG. Cap. II – Livro 3 (Parte 1) – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – 1951

Substituindo, vem

$$\begin{cases} 315 = \dfrac{2l - a}{2 - 1} \\ l = a \times 2^5, \end{cases}$$

ou, efectuando

$$\begin{cases} 2l - a = 315 \\ 32a = l. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos

$$64a - a = 315,$$
$$a = 5,$$
$$l = 32 \times 5,$$
$$l = 160.$$

36. Exercícios propostos.

1. Dados: $a = 1$, $q = 4$ e $n = 5$, calcular l. R. 256.
2. Dados: $a = 40$, $q = \frac{1}{2}$ e $n = 4$, calcular l. R. 5.
3. Dados: $q = 6$, $n = 4$ e $l = 432$, calcular a. R. 2.
4. Dados: $q = \frac{3}{2}$, $n = 4$ e $l = 3$, calcular a. R. $\frac{8}{9}$.
5. Dados: $n = 5$, $l = 405$ e $a = 5$, calcular q. R. 3.
6. Dados: $n = 7$, $l = \frac{32}{729}$ e $a = \frac{1}{2}$, calcular q. R. $\frac{2}{3}$.
7. Calcular a soma do terceiro termo com o quinto da progressão geométrica na qual $a = 5$ e $q = \sqrt{5}$. R. 150.
8. Calcular a diferença entre o sétimo termo e o quinto da progressão geométrica na qual $a = 3$ e $q = \sqrt{3}$. R. 54.
9. Dados: $a = 7$, $l = 189$ e $n = 4$, calcular P. R. 1 750 329.
10. Dados: $a = 1$, $n = 6$ e $q = 2$, calcular P. R. 32 768.
11. Dados: $a = 5$, $l = 160$ e $q = 2$, calcular S. R. 315.
12. Dados: $a = 3$, $q = 5$ e $n = 4$, calcular S. R. 468.
13. Calcular o limite da soma dos termos da progressão geométrica, na qual $a = 10$ e $q = \frac{1}{2}$. R. 20.

Ex.Prop.PG. Cap. II – Livro 3 (Parte 2)

CURSO DE MATEMÁTICA — 2.º LIVRO COLEGIAL 35

14. Calcular o limite da soma dos termos da progressão geométrica, na qual $a = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{5}$. R. $\frac{5}{8}$.

15. Calcular a geratriz da dízima periódica 0,777... R. $\frac{7}{9}$.

16. Calcular a geratriz da dízima periódica 0,363 636... R. $\frac{4}{11}$.

17. Calcular a geratriz da dízima periódica 0,455 5... R. $\frac{41}{90}$.

18. Inserir três meios geométricos entre 3 e 768. R. $q = 4$.

19. Calcular a soma dos termos da progressão que se obtém, inserindo quatro meios geométricos entre $\frac{16}{3}$ e $\frac{81}{2}$. R. $110\frac{5}{6}$.

20. Dados: $a = 1$, $l = 729$ e $n = 7$, calcular q e S. R. 3 e 1 093.

21. Dados: $l = 192$, $q = 2$ e $n = 7$, calcular a e S. R. 3 e 381.

22. Dados: $a = 2$, $n = 5$ e $q = 3$, calcular l e S. R. 162 e 242.

23. Dados: $n = 4$, $q = \frac{1}{3}$ e $S = \frac{40}{81}$, calcular a e l. R. $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{81}$.

24. Escrever a progressão geométrica de quatro termos, na qual a soma dos dois primeiros seja 8 e a dos dois últimos 72. R. $\div\div$ 2 : 6 : 18 : 54.

25. Em uma progressão geométrica de quatro termos, a soma do primeiro com o terceiro termo é 30 e a do segundo com o quarto é 90. Escrever essa progressão. R. $\div\div$ 3 : 9 : 27 : 81.

26. Calcular a razão da progressão geométrica, na qual a soma do oitavo com o décimo termo é 640 e a soma do quinto com o sétimo termo é 80. R. 2.

27. Calcular a razão de uma progressão geométrica, sabendo-se que o seu primeiro termo é o dobro da razão e que a soma dos dois primeiros termos é 24. R. 3.

28. Em uma progressão geométrica, o primeiro termo é igual aos dois terços da razão e o excesso do segundo termo sobre o primeiro é 4. Calcular o quinto termo dessa progressão. R. 162.

29. Calcular a razão da progressão geométrica de 6 termos, na qual a soma dos cinco primeiros é 121 e a dos cinco últimos termos é 363. R. 3.

30. Calcular o primeiro termo da progressão geométrica de 7 termos, na qual a soma dos seis primeiros termos é 315 e a dos seis últimos é 630. R. 5.

(MAEDER, A, M, 1951, p. 34-35)

Anexo 33
Intr.Sucessões. Un. I – Livro 1 (Parte 1) – Matemática – 2.º Ciclo – 3.ª Série – 1949

UNIDADE I

SUCESSÕES

1 — Noções preliminares. Considerada uma sucessão de números quaisquer (1):

$$a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n \quad \ldots$$

onde a_n caracteriza o *termo geral*, para representá-la usaremos o símbolo $[\, a_n \,]$.

Diremos que $[\, a_n \,]$ é *dada*, ou melhor, *determinada*, quando soubermos escrever qualquer termo de ordem arbitrariamente escolhida.

Em certos casos, poderemos obter o elemento assim prefixado, sem o conhecimento dos que o precedem; em outros não.

Tomemos, como primeiro exemplo, a sucessão:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \ldots \quad \frac{n}{n+1} \qquad (1)$$

O termo geral, $\dfrac{n}{n+1}$, define a *lei de formação* de seus elementos e permite escrever, imediatamente, qualquer termo de ordem dada. A sucessão é, portanto, *determinada*. Mas, embora não conhecendo a expressão do *termo geral*, poderemos ter, em muitos casos, *sucessões determinadas*.

Consideremos, por exemplo, os valores aproximados de $\sqrt{3}$, por falta e, respectivamente, a menos de: 1, 1/10, 1/100,...

A sucessão obtida:

$$1 \quad 1{,}7 \quad 1{,}73 \quad 1{,}732 \ldots \qquad (2)$$

é, ainda, *determinada*, pois conhecemos o algoritmo para o cálculo de seus sucessivos elementos.

---

(1) Estamos adstritos ao domínio real. Observemos, além disso, que só nos interessam as *sucessões infinitas*.

Intr.Sucessões. Un. I – Livro 1 (Parte 2)

Outro exemplo interessante de *sucessão determinada* obtem-se quando se consideram os números primos na ordem natural:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \ldots \qquad (3)$$

Para essa sucessão não foi encontrado, até hoje, o *termo geral,* nem se tem uma lei qualquer para o cálculo de seus elementos sucessivos. São, entretanto, conhecidos critérios pelos quais poderemos prolongá-la indefinidamente (2). É, pois, uma *sucessão determinada.*

2 — Limite de uma sucessão. Consideremos um número ε positivo e tão pequeno quanto quisermos. Poderemos, por exemplo, imaginar: $\varepsilon = 10^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-5}$, etc.

Se, a cada valor atribuido a ε, corresponder um índice n_0 tal que tenhamos :

$$| a_n - a | < \varepsilon \qquad (4)$$

para $n \geqq n_0$, diremos que a é o *limite* para o qual *tende* a sucessão $[\ a_n\ ]$. Escreveremos então:

$$lim\ a_n = a \ (3)$$

Equivale isto a dizer que, por menor que admitamos ε, existirá sempre, no intervalo $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, uma infinidade de elementos de $[\ a_n\ ]$, isto é :

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \qquad (5)$$

para $n \geqq n_0$.

Dessa maneira, fora do referido intervalo, só encontraremos os elementos :

$$a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{n_0 - 1}$$

que são em número determinado.

(2) Cfr. *"Matemática — 2º Ciclo"*, 1ª *Série,* 2ª ed., *Aritmética teórica,* **74** e **75** (pgs. 99 e 100).

(3) O número a é chamado, também, *ponto de acumulação* ou *ponto-limite* da sucessão e é usual escrever-se $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Salvo indicação em contrário, admití-lo-emos, sempre, *finito*.

(ROXO; PEIXOTO,R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1949, p. 9-10)

Anexo 34
Ex.Res. Ex. Sucessões – Un. I – Livro 1(Parte 1) – Matemática – 2.º Ciclo – 3.ª Série – 1949

Ora, por definição:

$$\left[\sqrt[q]{a_n}\right]^q = a_n$$

Portanto:

$$\lim \left[\sqrt[q]{a_n}\right]^q = \lim a_n = a$$

Então, de acôrdo com o princípio VII, poderemos escrever:

$$\lim \left[\sqrt[q]{a_n}\right]^q = \left[\lim \sqrt[q]{a_n}\right]^q$$

isto é:

$$\lim \sqrt[q]{a_n} = \sqrt[q]{a}$$

ou, melhor:

$$\lim a_n^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{q}}$$

Observação — É claro, então, que:

$$\lim a_n^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}$$

EXERCÍCIO I — *Calcular lim λ^n, onde λ é um número real* (16).

Deverão ser feitas cinco hipóteses diferentes.

a) $\lambda > 1$. Poderemos escrever:

$$\lambda^n \equiv [1 + (\lambda - 1)]^n \equiv 1 + n(\lambda - 1) + \frac{n(n-1)}{2!}(\lambda - 1)^2 + \ldots + (\lambda - 1)^n \qquad (10)$$

Sendo $\lambda > 1$, teremos $\lambda - 1 > 0$ e, por conseguinte:

$$\lambda^n > 1 + n(\lambda - 1) \qquad (11)$$

visto que todos os termos desprezados no segundo membro de (10) eram forçosamente positivos.

---

(16) O conceito de *potência*, com base e expoente *reais*, poderá ser estabelecido, por etapas, partindo-se da definição de número real que adotámos (8). Deixamos, ao leitor, tais detalhes, chamando sua atenção para as considerações já feitas na *"Matemática — 2º Ciclo"*, 2ª *Série*, 2ª ed. — *Algebra*, 6 e 8 (pgs. 17 e 19).

Ex.Res. Ex. Sucessões – Un. I – Livro 1(Parte 2)

OBSERVAÇÃO — Generalizando êste resultado, teremos para:

$$a_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \dots + a_{k-1} n + a_k$$

$$\lim a_n = \lim a_0 n^k. \qquad (26)$$

EXEMPLO II — "*Calcular* lim a_n, *sendo*:

$$a_n = \frac{4n^2 - 5n + 3}{7n^2 + 2n - 1}\text{''}$$

Poderemos escrever:

$$\lim a_n = \lim \frac{4n^2}{7n^2} \cdot \frac{1 - \dfrac{5}{4n} + \dfrac{3}{4n^2}}{1 + \dfrac{2}{7n} - \dfrac{1}{7n^2}} \qquad (27)$$

onde o limite do primeiro fator é $\frac{4}{7}$ e o do segundo, 1. Portanto:

$$\lim a_n = \frac{4}{7} \qquad (28)$$

EXEMPLO III — "*Calcular* lim a_n, sendo:

$$a_n = \frac{5n^2 + 2n - 1}{3n^3 - 2n^2 + 9}\text{''}$$

Procedendo analogamente, virá:

$$\lim a_n = \lim \frac{5n^2}{3n^3} \cdot \frac{1 + \dfrac{2}{5n} - \dfrac{1}{5n^2}}{1 - \dfrac{2}{3n} + \dfrac{3}{n^3}} \qquad (29)$$

isto é:

$$\lim a_n = \lim \frac{5}{3n} = 0 \qquad (30)$$

EXEMPLO IV — "*Calcular* lim a_n, *sendo*:

$$a_n = \frac{-8n^4 + 5n^3 + 2n^2 - 5}{9n^2 - 8n + 5}\text{''}$$

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1949, p. 25-32)

Anexo 35
Ex.Prop.Sucessões (Parte 1) – Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 3.ª Série – 1949

Exercícios propostos

1 — Estudar a natureza das seguintes sucessões:

I) $\left[(-1)^n \dfrac{n}{n+1} \right]$;

II) $[2^{n(-1)^n}]$;

III) $[\,(-1)^n \log n\,]$;

2 — Calcular:

I) $\lim \left(1 + \dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n}$, sabendo que $\lim a_n = \pm \infty$.

II) $\lim\,[\,\log (n+1) - \log n\,]$;

III) $\lim\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Sugestão: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \equiv \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\,(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$;

IV) $\lim\,(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n})$.

3 — Sabendo que $\lim a_n = 0$, calcular:

I) $\lim\,(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}}$;

II) $\lim \dfrac{a_n}{l\,.\,(1+a_n)}$

4 — Calcular:

I) $\lim \dfrac{3\,a^n + 2}{5\,a^n + 1}$

II) $\lim\,(-1)^n \dfrac{n + (-1)^n}{n}$

5 — Calcular:

I) $\lim \dfrac{6\,n^5 - 4\,n^3 + 3\,n - 2}{5\,n^3 - 2\,n^2 + 3\,n - 1}$;

Ex.Prop.Sucessões – Un. I – (Parte 2)

II) $\lim \dfrac{2n^2+1}{3n^3+2n-4}$

III) $\lim \dfrac{5n^2+2n-1}{7n^2+3}$

IV) $\lim \dfrac{2n^2+\sqrt{n}}{3n^2-\sqrt[3]{n+1}}$

6 — Calcular: $\lim \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n}$

7 — Calcular:

I) $\lim \dfrac{l\,.\,(n+1)}{l\,.\,(n+2)}$ *Sugestão*: Calcular $\lim \left(\dfrac{l\,.\,(n+1)}{l\,.\,(n+2)} - 1 \right)$

II) $\lim \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\dfrac{n-1}{n} \right)^n}$

8 — Calcular:

I) $\lim \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1}{l\,.\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$

Sugestão: fazer, em 3, II, $1 + a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}$;

II) $\lim\ n \left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1 \right]$

Sugestão: partir de $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1}{\dfrac{1}{n}} \equiv \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1}{l\,.\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} \cdot \dfrac{l\,.\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}$

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA,H, L; NETTO, D, 1949, p. 52-53)

Anexo 36
Res..Ex.Prop.- Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 3.ª Série – 1949

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

ÁLGEBRA

Unidade I

1. I) oscilante (1 e —1); II) oscilante (0 e $+\infty$); III) oscilante ($-\infty$ e $+\infty$).

2. I) e; II) 0; III) 0; IV) $+\infty$.

3. I) e; II) 1.

4. I) $|a| > 1 \ldots \frac{3}{5}$; $a = 1 \ldots \frac{5}{6}$; $|a| < 1 \ldots 2$; II) não existe.

5. I) $+\infty$; II) 0; III) $\frac{5}{7}$; IV) $\frac{2}{3}$.

6. 0.

7. I) 1; II) 0.

8. I) α; II) α.

9. λ^2.

10. I) $S = \frac{1}{k}$; II) $S = \frac{3}{4}$; III) $S = \frac{1}{4}$.

11. I) e II) *divergentes,* porque $\lim a_n \neq 0$.

12. I), II) e III) *divergentes,* porque $a_n > \frac{1}{n}$ (a segunda, para $n > e$);

13. I), II) e III) *convergentes,* porque $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

14. *Divergente,* porque: $\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} > \frac{1}{n+\sqrt{n^2}} \equiv \frac{1}{2n}$.

15. $S_n \equiv \sqrt{n+1} - 1$.

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1949, p. 451)

Anexo 37
Intr.Sucessões.Limites – Cap. I – Livro 2 (Parte 1) – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – Terceira Série – 1948

Se o extremo superior (ou inferior) E (ou e) é um ponto de acumulação do conjunto, pode não pertencer a êste. Por exemplo, o extremo inferior do conjunto (6) é o ponto de acumulação *zero* que não pertence ao conjunto.

Admitiremos, sem demonstração, a seguinte proposição: *Todo conjunto linear, limitado à direita (ou à esquerda), admite um extremo superior (ou inferior).*

10. Intervalo. Dados dois números reais a e b, sendo $a < b$, chama-se *intervalo fechado* de extremos a e b e representa-se por um dos símbolos $[a, b]$ ou $a \,|\!\!-\!\!|\, b$, o conjunto de todos os números reais x tais que

$$a \leq x \leq b$$

Se o extremo a (ou b) não está incluido, diz-se que o intervalo é *aberto à esquerda* (ou *à direita*) e representa-se por um dos símbolos

$$(a, b] \text{ ou } [a, b) \quad \text{e} \quad a \!-\!\!|\, b \text{ ou } a \,|\!\!-\, b$$

Se os extremos a e b não estão incluidos, o intervalo diz-se *aberto* e representa-se por (a, b) ou $a — b$.

Por exemplo o conjunto dos números reais não inferiores a 2 e não superiores a 3 é o intervalo fechado $[2, 3]$, porque contém os extremos 2 e 3; o conjunto dos números reais positivos inferiores a 2 é o intervalo aberto $(0, 2)$, porque não contém os extremos 0 e 2; o conjunto dos números reais negativos não inferiores a -1 é o intervalo $[-1, 0)$ aberto à direita, visto não conter o extremo superior 0, etc.

SUCESSÕES. LIMITES

11. Preliminares. Denomina-se *sucessão indefinida* ou simplesmente *sucessão* a todo conjunto de números reais (*) que pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos números inteiros 1, 2, 3, ..., n, ... Dêsse modo, uma sucessão constitui um conjunto numerável (n.º 3) e pode ser representada por

$$u_1, \; u_2, \; \ldots . \; u_n, \; \ldots . \qquad (1)$$

onde u_i representa o têrmo de ordem i da sucessão.

(*) Êste estudo acha-se, naturalmente, limitado ao campo real. O leitor só conhecerá os números complexos na Unidade IV.

Intr.Sucessões.Limites – Cap. I – Livro 2 (Parte 2)

Uma sucessão fica determinada quando se estabelece uma condição necessária e suficiente que permita estabelecer se um dado número real pertence ou não a ela. São, por exemplo, sucessões determinadas a sucessão dos números ímpares, a sucessão dos números primos, etc.

Para algumas sucessões determinadas é possível estabelecer uma fórmula geral que permita calcular o têrmo de uma ordem n qualquer dessa sucessão. Esta fórmula denomina-se *têrmo geral* da sucessão. Por exemplo, as sucessões

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad \ldots . \qquad (2)$$

$$1, \quad —4, \quad 9, \quad —16, \quad \ldots . \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \ldots . \qquad (4)$$

têm para têrmo geral, respectivamente, $2n—1$, $(—1)^{n+1}n^2$ e $\dfrac{n}{n+1}$.

Conhecido o têrmo geral u_n de uma sucessão, pode-se representá-la pelo símbolo (u_n).

12. Limite de uma sucessão. Diz-se que uma sucessão (u_n) é *limitada* se o conjunto constituido por seus elementos é limitado (**n.º 5**), ou, em outras palavras, se existe um número positivo L tal que, qualquer que seja n, se tenha $| u_n | < L$. Não se verificando esta condição, a sucessão (u_n) denomina-se *ilimitada*. Por exemplo, a sucessão (4) é limitada e as sucessões (2) e (3) são ilimitadas; o conjunto dos elementos da sucessão (2) é limitado à esquerda e o conjunto dos elementos da sucessão (3) é ilimitado tanto à esquerda como à direita.

I. Diz-se que uma sucessão limitada (u_n) tem para limite um número (finito) L se, dado um número ε arbitràriamente pequeno, existe um inteiro n' tal que, qualquer que seja $n > n'$, se tenha $| u_n — L | < \varepsilon$.

Por exemplo, a sucessão (4) tem para limite 1, porque a diferença $1 — \dfrac{n}{n+1}$, ou seja $\dfrac{1}{n+1}$, para n suficientemente grande, se pode tornar menor do que qualquer quantidade positiva arbitràriamente pequena. Para que esta diferença seja, por exemplo, inferior a 0,000 001, basta tomar $n = 1000000$.

As sucessões que têm limite finito denominam-se *convergentes*.

(CARVALHO, T, M, 1948, p. 12-13)

Anexo 38
Ex.Res.Ex. Sucessões.Limites. Cap. I – Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – Terceira Série – 1948

e observando que, quando n cresce indefinidamente, o limite do segundo fator do segundo membro é igual a 1, resulta

$$\lim u_n = \lim \frac{a_0 n^p}{b_0 n^q}$$

Temos, então, três casos a considerar:

1) $p = q$. Nêsse caso será

$$\lim u_n = \lim \frac{a_0 n^p}{b_0 n^p} = \frac{a_0}{b_0}$$

2) $p > q$. Será, então,

$$\lim u_n = \lim \frac{a_0 n^{p-q}}{b_0} = \pm \infty$$

dependendo o sinal dos sinais de a_0 e b_0.

3) $p < q$. Será, nêsse caso

$$\lim u_n = \lim \frac{a_0}{b_0 n^{q-p}} = 0$$

Exemplos:

$$\lim \frac{2n^3 + 5n - 1}{4n^3 + n^2 - n} = \lim \frac{2n^3}{4n^3} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{n^2}{3n^3 + 5} = \lim \frac{n^2}{3n^3} = 0, \text{ etc.}$$

29. Exercício. *Calcular o limite da sucessão cujo têrmo geral é* $\frac{a^n}{n!}$, *sendo* $a > 0$.

Escrevamos a identidade

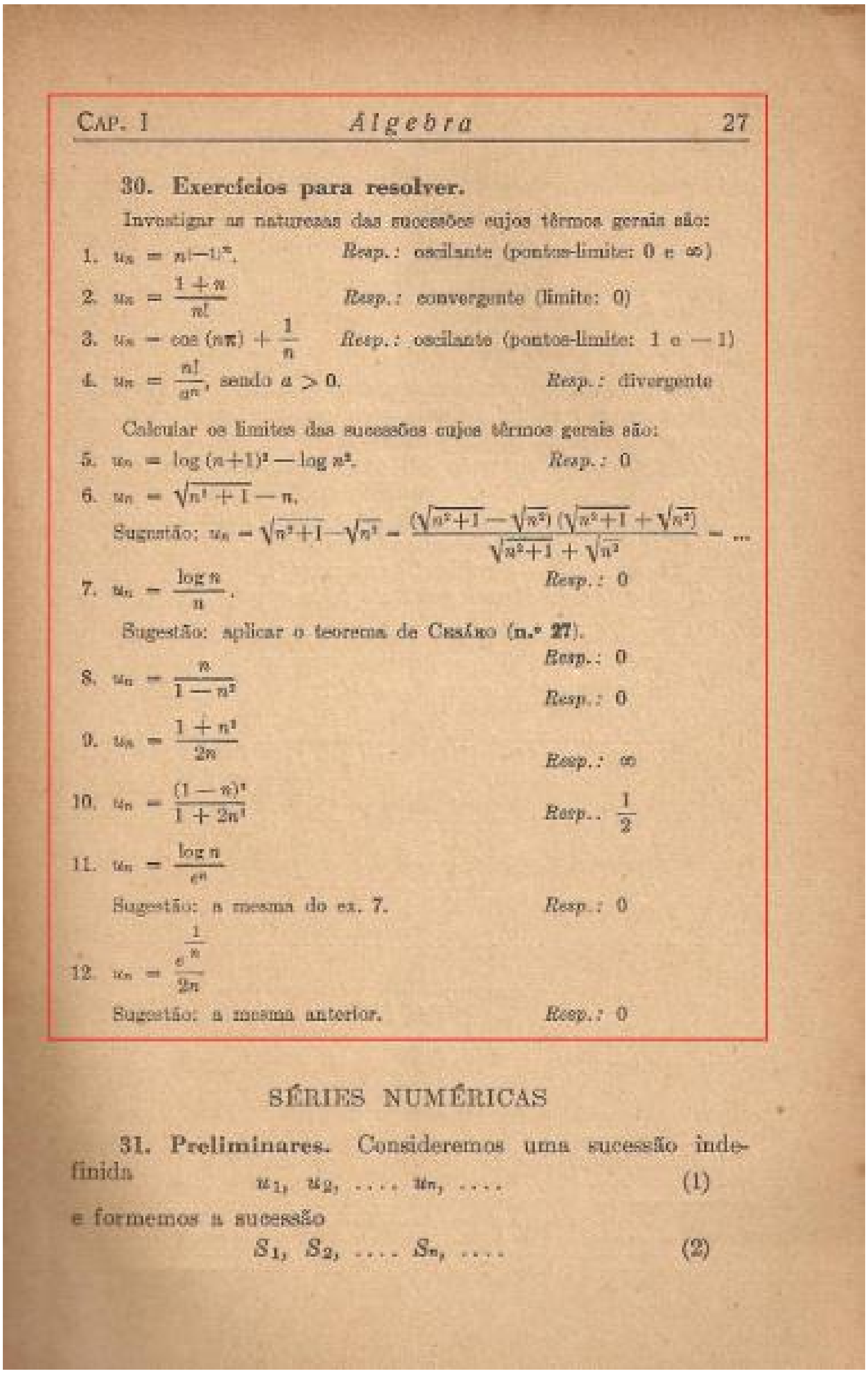
$$\frac{a^n}{n!} \equiv \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{a}{n}$$

Observemos que $\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$ é positivo e decresce logo que seja $n - 1 > a$. Então, a sucessão cujo têrmo geral é aquela expressão é monótona decrescente e limitada, tendo, portanto, um limite finito $L \geq 0$, (**n.° 15, II**). Sendo $\lim \frac{a}{n} = 0$, concluimos que

$$\lim \frac{a^n}{n!} = L \times 0 = 0$$

(CARVALHO,T, M, 1948, p. 26)

Anexo 39
Ex.Prop. Sucessões.Limites. Cap. I – Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – Terceira Série – 1948



CAP. I — *Algebra* — 27

30. Exercícios para resolver.

Investigar as naturezas das sucessões cujos têrmos gerais são:

1. $u_n = n^{(-1)^n}$. — *Resp.:* oscilante (pontos-limite: 0 e ∞)
2. $u_n = \dfrac{1+n}{n!}$ — *Resp.:* convergente (limite: 0)
3. $u_n = \cos(n\pi) + \dfrac{1}{n}$ — *Resp.:* oscilante (pontos-limite: 1 e -1)
4. $u_n = \dfrac{n!}{a^n}$, sendo $a > 0$. — *Resp.:* divergente

Calcular os limites das sucessões cujos têrmos gerais são:

5. $u_n = \log(n+1)^2 - \log n^2$. — *Resp.:* 0
6. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$.

   Sugestão: $u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2} = \dfrac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2}} = \ldots$ — *Resp.:* 0
7. $u_n = \dfrac{\log n}{n}$.

   Sugestão: aplicar o teorema de CESÁRO (n.º 27). — *Resp.:* 0
8. $u_n = \dfrac{n}{1-n^2}$ — *Resp.:* 0
9. $u_n = \dfrac{1+n^2}{2n}$ — *Resp.:* ∞
10. $u_n = \dfrac{(1-n)^3}{1+2n^3}$ — *Resp.:* $\dfrac{1}{2}$
11. $u_n = \dfrac{\log n}{e^n}$

    Sugestão: a mesma do ex. 7. — *Resp.:* 0
12. $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{2n}$

    Sugestão: a mesma anterior. — *Resp.:* 0

SÉRIES NUMÉRICAS

31. Preliminares. Consideremos uma sucessão indefinida

$$u_1,\ u_2,\ \ldots.\ u_n,\ \ldots. \qquad (1)$$

e formemos a sucessão

$$S_1,\ S_2,\ \ldots.\ S_n,\ \ldots. \qquad (2)$$

(CARVALHO, T, M, 1948, p.27)

Anexo 40
Intr.Sucessões. Cap. I. – Livro 3 (Parte 1) – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 1949

CURSO DE MATEMÁTICA

CAPÍTULO I

SUCESSÕES. CÁLCULO ARITMÉTICO DOS LIMITES

1. **Sucessões indefinidas.** — Em lições anteriores dêste curso, tivemos oportunidade de considerar algumas sucessões indefinidas, como a dos números primos, as progressões aritméticas e geométricas, as raízes aproximadas dos números irracionais, etc.

Vimos, então, que os têrmos das progressões aritméticas e geométricas se formam segundo *leis determinadas*, e bem assim que há um critério mediante o qual se podem obter os números primos em sua ordem natural.

A lei de formação dos elementos de uma sucessão é dada pela expressão do seu *têrmo geral*.

Assim é que, na sucessão

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{4}, \ldots$$

por exemplo, a lei de formação dos elementos é dada por

$$a_n = \frac{n+1}{n},$$

em que a_n designa o seu têrmo geral.

A sucessão de números reais

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots a_n, \ldots$$

pode ser simbòlicamente representada do modo seguinte:

$$[a_n].$$

2. **Limite de uma sucessão.** — Diz-se que uma sucessão indefinida de números reais,

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots . a_n, \ldots . ,$$

Intr.Sucessões.Cap. I – Livro 3 (Parte 2)

12 ALGACYR MUNHOZ MAEDER

tendo para o *limite* a, quando o valor absoluto da diferença

$$a - a_n,$$

para n suficientemente grande, chega a ser tão pequeno quanto se queira.

Em têrmos mais precisos, diremos que a sucessão

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots a_n, \ldots$$

tem para *limite* a, quando, dado um número positivo arbitràriamente pequeno ε, existe um valor do índice n, tal que, para $n \geq n'$, o valor absoluto da diferença $a_n - a$ seja menor que ε, a saber,

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad |a - a_n| < \varepsilon.$$

Assim, a partir de certo valor de n em diante, temos

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon,$$

de onde se deduz

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

Para indicar que a sucessão

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots a_n, \ldots$$

tem o limite a, escrevemos

$$a_n \rightarrow a \quad \text{ou} \quad \lim a_n = a.$$

Por outro lado, diz-se também que a é o limite da variável a_n.

3. **Exemplo**. — Na conversão de frações ordinárias em decimais, quando aparecem as dízimas periódicas simples e compostas, é que se apresenta pela primeira vez na Aritmética o conceito de limite.

Com efeito, consideremos a dízima periódica

$$x = 0{,}4999\ldots$$

Os valores aproximados de x formam a sucessão

$$0{,}4, \quad 0{,}49, \quad 0{,}499, \quad 0{,}4999, \ldots$$

À proporção que o número de algarismos decimais cresce, os valores de x se aproximam, cada vez mais, de 0,5.

(MAEDER, A, M, 1949, pp.11-12)

Anexo 41
Nota de rodapé. Sucessões. Cap. I – Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 1949

Dividamos, porém, os têrmos da fração por n^2, que é a potência de maior grau em n nêles contida:

$$\frac{6+\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{2+\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}}.$$

Crescendo n indefinidamente, as frações

$$\frac{4}{n},\quad \frac{5}{n^2},\quad \frac{5}{n}\quad \text{e}\quad \frac{3}{n^2}$$

tenderão para zero. — Portanto:

$$\lim \frac{6+\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{2+\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}}=\frac{6}{2}=3.$$

E, como essa expressão é igual à primitiva, segue-se que, para $n\longrightarrow\infty$,

$$\lim\frac{6n^2+4n+5}{2n^2+5n+3}=3.$$

Em geral, para obter o limite de uma expressão da forma (1)

$$\frac{a_0n^h+a_1n^{h-1}+\ldots+a_h}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\ldots+b_k},$$

em que $a\neq 0$ e $b\neq 0$, quando $n\longrightarrow\infty$, dividimos os têrmos da fração pela menor das duas potências de n que nêles têm o maior expoente.

Para $k>h$, encontramos

$$X_n=\frac{a_0+\dfrac{a_1}{n}+\ldots+\dfrac{a_h}{n_h}}{b_0n^{k-h}+b_1n^{k-h-1}+\ldots+\dfrac{b_k}{n_k}},$$

e portanto:
$$\lim X_n=0.$$

(1) Cfr. J. Rey Pastor, « *Elementos de Análisis Algebraico* », 5.ª edição, Madrid, 1939, pág. 357.

(MAEDER, A, M, 1949, p.25)

Anexo 42
Ex.Res.Ex. Sucessões. Cap. I – Livro 3 (Parte 1) – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 1949

Para $k = h$, vem

$$X_n = \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_h}{n^h}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_h}{n^h}}.$$

Portanto:

$$\lim X_n = \frac{a_0}{b_0}.$$

Finalmente, para $k < h$, obtemos

$$X_n = \frac{a_0 n^{h-k} + a^{h-k-1} + \ldots + \frac{a_h}{n_h}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_k}{n_k}}.$$

Logo:

$$\lim X_n = \infty.$$

Ficam, dêsse modo, resolvidos os casos de indeterminação mencionados no parágrafo precedente.

22. **Exercícios resolvidos.** — 1.º *Calcular o limite de*

$$\frac{n^3 + 3}{n^3},$$

quando x *tende para o infinito.*

Evidentemente, para

$$x \to \infty,$$

o limite da expressão se apresenta sob a forma

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Verificaremos, entretanto, que essa indeterminação pode ser levantada fàcilmente.

Com efeito, dividindo os têrmos da fração por n^2, vem

$$\frac{n^2 + 3}{n^3} = \frac{1 + \frac{3}{n^2}}{n}.$$

Notando que, crescendo n indefinidamente,

$$\lim \frac{3}{n^2} = 0,$$

Ex.Res.Sucessões. Cap. I – Livro 3 (Parte 2)

podemos escrever

$$\lim \frac{1 + \frac{3}{n^2}}{n} = \lim \frac{1}{n} = 0.$$

Portanto:

$$\lim \frac{n^2 + 3}{n} = 0,$$

para $n \to \infty$.

2.º *Calcular o limite de*

$$\frac{n^2 + 3n - 5}{n^2 + 2n + 3},$$

para $n \to \infty$.

Dividindo os têrmos da fração por n^2, vem

$$\frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}.$$

Crescendo n indefinidamente, as frações que figuram no numerador e denominador da expressão tendem para zero. Assim:

$$\lim \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} = 1.$$

Como essa expressão é igual à primitiva, segue-se que

$$\lim \frac{n^2 + 3n - 5}{n^2 + 2n + 3} = 1.$$

3.º *Calcular o limite de*

$$\frac{5n^3 + 3n^2 + 2n + 4}{4n^2 + 3n + 5},$$

para $n \to \infty$.

Dividindo os têrmos da fração por n^2, vem

$$\frac{5n + 3 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}.$$

Notando que, para $n \to \infty$, as frações que figuram nos têrmos dessa expressão tendem para zero, e bem assim que

$$\lim \frac{5n + 3}{4} = \infty,$$

(MAEDER, A, M, 1949, pp. 26-27)

Anexo 43
Ex.Prop. Sucessões. Cap. I – Livro 3 (Parte 1) – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 1949

Ademais, se notarmos que, para $n=1$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2,$$

podemos escrever

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Êste limite tem emprêgo constante na Matemática superior, sendo designado pela letra e. — Assim:

$$\boxed{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,}$$

para $n \longrightarrow \infty$.

Considerando os primeiros algarismos decimais, o valor de e é o seguinte:

$$e=2{,}718\,821\,828\ldots$$

24. **Exercícios propostos.**

Calcular os limites seguintes para $n \rightarrow \infty$:

1. $\lim \dfrac{3n^2+2n+5}{4n^2+3n+2}$. R. $\dfrac{3}{4}$.
2. $\lim \dfrac{5n^2-3n-8}{7n^2-2n-6}$. R. $\dfrac{5}{7}$.
3. $\lim \dfrac{an^2+bn+c}{a'n^2+b'n+c'}$. R. $\dfrac{a}{a'}$.
4. $\lim \dfrac{n^3-6n+5}{n^2-8n+3}$. R. ∞.
5. $\lim \dfrac{2n^3+5n^2+3n}{4n^2-3n+2}$. R. ∞.
6. $\lim \dfrac{an^3+bn^2+cn+d}{a'n^2+b'n+c'}$. R. ∞.
7. $\lim \dfrac{n^2-7n+5}{n^3+2n-3}$. R. 0.
8. $\lim \dfrac{2n^2-5n+4}{3n^3-7n^2+2n-5}$. R. 0.
9. $\lim \dfrac{an^2+bn+c}{a'n^3+b'n^2+c'n+d}$. R. 0.

Ex.Prop. Sucessões. Cap. I – Livro 3 (Parte 2)

10. $\lim \left(\dfrac{2n-1}{n-2} + \dfrac{2n-3}{n-4}\right)$. R. 4.

11. $\lim \left(\dfrac{3n+2}{2n-1} + \dfrac{2n+5}{4n-3}\right)$. R. 2.

12. $\lim \left(\dfrac{n-1}{2n+1} + \dfrac{3n-2}{2n-3} + \dfrac{2n-5}{3n+2}\right)$. R. $\dfrac{8}{3}$.

13. $\lim \left[\dfrac{(3n+1)^2-(3n-1)^2}{4n+1}\right]$. R. 3.

14. $\lim \left(5n - \sqrt{n^2+2n+1}\right)$. R. ∞.

15. $\lim \left(\sqrt{3n^2+2n-1} - n\sqrt{3}\right)$. R. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

16. $\lim \left(\sqrt{5n^2+3n-1} - n\sqrt{5}\right)$. R. $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

17. $\lim \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+3}\right)$. R. 0.

18. $\lim \dfrac{n+2\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+5n}$. R. $\dfrac{1}{5}$.

19. $\lim \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$. R. $\dfrac{1}{e}$.

20. $\lim \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$. R. e.

(MAEDER, A, M, 1949, pp. 31-32)

ANEXO DESCRITIVO FASE 3

Anexo 1
Análise da Estrutura Externa das Coleções de livros – Fase 3

Coleção “Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – 2.ª Série – 3.ª Série – Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha, Dacorso Netto” (Coleção dos 4 autores) – Livraria Francisco Alves.

Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 1.ª Série – 8.ª Edição – 1955 (Anexo 1, p.444).

Livro 2 – Matemática – 2.º Ciclo – 2.ª Série – 8.ª Edição – 1957 (Anexo 2, p.445).

Livro 3 – Matemática – 2.º Ciclo – 3.ª Série – 5.ª Edição – 1956 (Anexo 3, p.446).

Apresentam capa, tipo capa dura colorida com bom acabamento.

Os livros apresentam o Índice no final dos mesmos.

Os livros não apresentam prefácio, nem bibliografia.

- Coleção “Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1.º Ano Colegial – 2.º Ano Colegial – 3.º Ano Colegial – Thales Mello Carvalho – Companhia Editora Nacional.

Livro 1 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1.º Ano Colegial – 10.ª Edição – 1955 (Anexo 4, p.447).

Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 2.º Ano Colegial – 8.ª Edição – 1956 (Anexo 5, p.448).

Livro 3 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 3.º Ano Colegial – 6.ª Edição – 1956 (Anexo 6, p.449).

Apresentam capa, tipo capa dura colorida com bom acabamento.

Os livros apresentam o Índice no final dos mesmos.

Os livros não apresentam prefácio, nem bibliografia.

- Coleção “Curso de Matemática – 1.º Livro Ciclo Colegial – 2.º Livro Ciclo Colegial – 3.º Livro Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – Edições Melhoramentos.

Livro 1 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 7.ª Edição – 1953 (Anexo 7, p.450).

Livro 2 – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – 9.ª Edição – 1959 (Anexo 8, p.451).

Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 7.ª Edição – 1959 (Anexo 9, p.452).

Apresentam capa, tipo capa dura colorida com bom acabamento.

Os livros apresentam o Índice no início dos mesmos.

Os livros não apresentam prefácio, nem bibliografia.

- Coleção "Matemática – Para o Primeiro Ano Colegial – Para o Segundo Ano Colegial – Para o Terceiro Ano Colegial – Ary Quintella – Companhia Editora Nacional.

Livro 1 – Matemática – Para o Primeiro Ano Colegial – 9.ª Edição – 1960 (Anexo 10, p.453).

Livro 2 – Matemática – Para o Segundo Ano Colegial – 2.ª Edição – 1957 (Anexo 11, p.454).

Livro 3 – Matemática – Para o Terceiro Ano Colegial – 7.ª Edição – 1960 (Anexo 12, p.455).

Apresentam capa, tipo capa dura colorida com bom acabamento.

Os livros apresentam o Índice no início dos mesmos.

Os livros não apresentam prefácio, nem bibliografia.

Anexo 2
Relato da Análise dos Índices (Índices 1, 2, 3 e 4) dos Livros de 1.ª Série/1.º Ano /1.º Livro / Primeiro Ano Colegial.

Índice 1 – Livro 1- Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – Coleção 4 autores (Anexo 13, p.456).

Índice 2 – Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – 1.º Ano – Thales Mello Carvalho (Anexo 14, p.458).
Índice 3 – Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder (Anexo 15, p.459).
Índice 4 – Livro 4 – Matemática – Primeiro Ano Colegial – Ary Quintella (Anexo 16, p.467).

O único índice que faz referência explícita à "Unidade", é o "Índice 4 (Anexo 16, p.467)" do livro do Ary Quintella, Matemática para o Primeiro Ano Colegial, mas não faz referência a capítulos, sendo um índice bem detalhado que poderíamos chamar de *enciclopédico.* Esse livro, diferentemente dos outros, traz um "Índice específico para os exercícios divididos pelos conteúdos" (Anexo 16,p.467).

Nosso livro que chamamos de "base", Matemática 2.º Ciclo, 1.ª Série, traz um índice (Anexo 13), que poderíamos chamar de "descritivo", uma vez que "não faz referências explícitas a Unidades ou Capítulos", só descreve os conteúdos, numerando-os. Esse índice não traz referências a exercícios (resolvidos ou propostos).

O livro Matemática para os Cursos Clássico e Científico, 1.º Ano, traz um índice (Anexo 14, p.458) em que faz referência explícita aos Capítulos, sendo um índice bem resumido. O único capítulo que traz referência a exercícios é o Capítulo VI (Corpos Redondos), que traz o item "Exercícios sobre poliedros e corpos redondos".

O livro Curso de Matemática, 1.º Livro, Ciclo Colegial, traz um índice (Anexo 15, p.459) que também faz referências explícitas a Capítulos, mas um índice bem *detalhado*, que poderíamos também chamar de *enciclopédico.* Esse índice, traz em cada capítulo, à exceção do Capítulo I (Noções sobre o cálculo aritmético aproximado), itens relativos a exercícios e problemas.

Anexo 3
Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 1.ª Série/1.º Ano Colegial/1.º Livro/Primeiro Ano Colegial

Livro 1- Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – Coleção 4 autores – 8.ª Edição – 1955 – Livraria Francisco Alves (Anexo 1, p.444).
Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – 1.º Ano – Thales Mello Carvalho – 10.ª Edição – 1955 – Companhia Editora Nacional (Anexo 4,p.447).
Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 7.ª Edição – 1953 – Edições Melhoramentos (Anexo 7,p.450).
Livro 4 – Matemática – Primeiro Ano Colegial – Ary Quintella – 9.ª Edição – 1960 – Companhia Editora Nacional (Anexo 10,p.453).
Vamos analisar o conteúdo **Progressões aritméticas.**
Livro 1 – Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – Coleção 4 autores – 1955
Faz parte da "Unidade II" (o livro não faz referência ao termo Unidade), chamada "Progressões". O item 1 ou Capítulo 1 (o livro não faz referência ao termo capítulo) se propõe a trabalhar os conteúdos "Progressões aritméticas; termo geral; soma dos termos, interpolação aritmética.
Tem início no subitem 14, Definições, assim, apresentado:

14 – Definições. Denomina-se PROGRESSÃO ARITMÉTICA ([15]) a toda sucessão de números: a_1, a_2, a_3,....,a_n,... *na qual é constante a diferença entre cada termo e o precedente.* Essa diferença constante é a *razão* da progressão. Assim, a sucessão 5, 9, 13, 17, 21....é uma progressão aritmética de razão igual a 4. Na progressão 11, 6, 1, -4, -9, ...a razão é -5 (ROXO et all, 1955, pp. 27-28).

Podemos observar a utilização da nota de rodapé n.º 15, que pode ser observada ao longo do desenvolvimento dos conteúdos ao longo do livro, assim apresentada:

(15) A palavra *progressão* (progressio) apareceu pela primeira vez, com o significado de operação (adições de sucessões particulares), no "*Tractatus* de arte *numerandi*" de J. Hollywood (Sacrobosco), escrito por volta de 1249 e publicado em 1488. Progressões aritméticas muito simples se encontram no *Papiro Rhind* (Ahmés, sec. XVII a.C). (ROXO et all, 1955, p. 28).

Podemos considerar essa nota de rodapé como histórica, explicativa e bibliográfica.
Seguem-se o desenvolvimento dos demais itens do conteúdo: expressão do termo geral; observação; observação; teorema; soma de termos de uma progressão aritmética; interpolação aritmética e problemas sobre progressões aritméticas. Ao longo do desenvolvimento, notamos a utilização de exercícios resolvidos de exemplo, como podemos ver abaixo, 2 (dois exercícios) resolvidos de exemplos, referentes ao item 15, "Expressão do termo geral".
Exemplos:

1.º) Calcular o 54.º número ímpar.
Como a sucessão dos números ímpares constitui uma progressão aritmética, de razão 2, temos:
$a_1 = 1$; $r = 2$; $n = 54$ e, pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n – 1)\ .\ r$, $a_{54} = 1 + 53 \times 2 = 107$.
2.º) Numa progressão aritmética a soma do terceiro termo com o oitavo é 37, e a soma do quinto com o décimo segundo é 55. Dar essa progressão.
Tem se $a_n = a_1 + (n – 1)$. R :
$(a_1 + 2r) + (a_1 + 7r) = 37$ e $(a_1 + 4r) + (a_1 + 11r) = 55$, ou

$2.a_1 + 9r = 37$ e $2.a_1 + 15r = 55$. Resolvendo o sistema formado por essas equações, obtém-se $a_1 = 5$ e $r = 3$. A progressão procurada é, então: 5, 8, 11... (ROXO et al., 1955, p.30).

No Anexo 18 (p.473) podemos observar outros exercícios resolvidos e também o uso de notas de rodapé.

O conteúdo Progressão Aritmética é fechado com uma série de 50 (cinquenta) exercícios propostos sem resposta (Anexo 19, p.474). Podemos observar que contempla exercícios de aplicação direta e também alguns mais elaborados, dos conteúdos trabalhados.

Após o tratamento da Progressão Aritmética, o autor apresenta o conteúdo Progressão Geométrica, sendo que, ao final é apresentada uma série de 31 (trinta e um) exercícios propostos sem resposta e, logo após uma série conjunta de PA e PG de exercícios propostos sem resposta (Anexo 20, p.476).

As respostas dos exercícios propostos de todos os assuntos trabalhados estão colocadas ao final da Parte I, que aglutina os temas Aritmética e Álgebra (Anexo 21, p.477) bem como ao longo das outras partes do Livro.

Os conteúdos são apresentados em linguagem simples e direta, e desenvolvidos com introdução, utilização de notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos sem respostas – as respostas se encontram ao final da Parte ou Tema, divididas por conteúdos.

Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1.º Ano – Thales Mello Carvalho – 1955.

O conteúdo Progressão Aritmética faz parte do Capítulo II, denominado Progressões. Tem início com o item 1, Preliminares, assim apresentado:

1.Preliminares. Chama-se *progressão aritmética* ou *por diferença* uma sucessão de números denominados *termos,* tais que a diferença entre um termo qualquer, a partir do segundo, e o termo precedente seja constante. Esta diferença constante chama-se *razão* da progressão (CARVALHO, T, M, 1955, p.44).

Seguem-se o desenvolvimento dos demais itens do conteúdo: fórmula do termo geral, fórmulas derivadas; exercício; inserção de meios aritméticos; exercício; teorema; termos equidistantes dos extremos; propriedade; corolário, soma de termos; observação; soma dos “n” primeiros números naturais; soma dos “n” primeiros números ímpares; exercício; exercícios para resolver.

Ao longo do desenvolvimento, notamos a utilização de exercícios resolvidos de exemplo, logo após cada item como podemos ver abaixo: 1 (um) exercício (item 5) referente ao assunto “fórmula do termo geral” e 1 (um) exercício (item 7) referente ao assunto “fórmulas derivadas”.

5. Exercício. Achar o trigésimo termo da progressão: 5, 7, 7, 11...
Resolução: Temos, usando as notações anteriores, $a_1 = 5$, $n = 30$ e $r = 7 – 5 = 2$. O trigésimo termo a_{30} será, então, de acordo com o princípio anterior
$a_{30} = a_1 + 29r = 5 + 29 \times 2 = 63$.
7. Exercício. Calcular o primeiro termo de uma progressão aritmética de 10 termos cuja razão é 4 e cujo último termo é 43.
Resolução: São dados $r = 4$, $n = 10$ e $a_{10} = 43$. Aplicando a fórmula $a_1 = a_n – (n – 1) .r$, obtemos: $a_1 = a_{10} – 9\,r = 43 – 9 \times 4 = 7$. 9 (CARVALHO, T,M, 1955, pp.45 -46).

Observamos ao longo do desenvolvimento dos conteúdos, a utilização de notas de rodapé, como o exemplo abaixo, quando o autor relata sobre soma de termos equidistantes: “(*) Se a progressão tem um número ímpar de termos, a soma dos meios representa o dobro do termo do meio da progressão, sendo, também, em virtude do corolário anterior, igual à soma dos extremos” (CARVALHO, T, M, 1955, p.50).

No Anexo 22 (p.478) podemos observar um Exercício resolvido e o uso de nota de rodapé.

Ao final, são apresentados 36 (trinta e seis) exercícios propostos com respostas (Anexo 23, p.479), no item 24, chamado “Exercícios pra resolver”. Nota-se a presença de exercícios de aplicação direta dos assuntos trabalhados e também, exercícios mais elaborados, exigindo mais dedicação por parte dos alunos para resolvê-los.

O conteúdo é apresentado em uma linguagem simples e direta, com introdução, utilização de notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos acompanhados de respostas.

Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 1953

O assunto é abordado no Capítulo III, Progressões Aritméticas e tem início no item 16, Definições, assim apresentado:

16. Definições. – Dá-se a denominação de *progressão aritmética* a toda sucessão de números na qual a diferença entre cada número e o precedente é constante. Os números que formam a progressão denominam-se *termos,* e a diferença constante entre cada termo e o precedente chama-se *razão* da progressão (MAEDER, A, M, 1953, p.31).

Seguem-se o desenvolvimento dos demais itens do conteúdo: progressão crescente e progressão decrescente; progressão limitada e progressão ilimitada; termo geral; cálculo da razão; cálculo do número de termos; exercícios, cálculo da razão; cálculo do número de termos, exercícios; propriedade; soma de termos de uma progressão aritmética; exercícios, interpolação aritmética; exercícios.

Ao longo do desenvolvimento, notamos a utilização de exercícios resolvidos de exemplo, logo após cada item. No Anexo 24 (p.481), podemos ver 2(dois) exercícios relativos ao item “cálculo do número de termos”.

Observação: no desenvolvimento do conteúdo Progressão aritmética, não foi observada a utilização de notas de rodapé. Entretanto percebemos tal utilização no desenvolvimento de outros conteúdos ao longo do livro.

O desenvolvimento do conteúdo Progressão Aritmética é encerrado com uma série de 40(quarenta) exercícios propostos com resposta, sendo em sua grande maioria, de aplicação direta dos conceitos ensinados, mas também podem ser observados exercícios mais elaborados, exigindo mais dedicação por parte dos alunos para resolvê-los (Anexo 25, p.482).

O conteúdo é apresentado em uma linguagem simples e direta, com introdução, utilização de notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos, acompanhados de respostas.

Livro 4 – Matemática – Primeiro Ano Colegial – Ary Quintella – 1960.

O assunto é abordado na Unidade II, denominada Progressões. O Capítulo I (assim o chamamos) é dedicado as Progressões Aritméticas, e tem início no item 1, Definições, apresentado da seguinte maneira:

Definições

1.ª) ***Sucessão*** *é todo conjunto numérico, cujos elementos estão em correspondência biunívoca com os números naturais.* Isto é, conjunto tal que, a cada um de seus elementos corresponde um único número natural e, reciprocamente, a cada número natural corresponde um único elemento do conjunto (QUINTELLA, A, 1960, p.37)

Em seguida, define a Progressão Aritmética: “2.ª) ***Progressão aritmética*** é a sucessão em que a diferença entre cada termo e o precedente é constante” (p.37).

Logo, em seguida, define a razão: "3.ª) A *diferença constante entre cada termos e seu precedente denomina-se **razão** da progressão aritmética."*(p.38).

Seguem-se o desenvolvimento dos demais itens do conteúdo: termo geral; fórmula do termo geral; problemas decorrentes do termo geral; propriedades das progressões aritméticas; problemas; interpolação aritmética.

Ao longo do desenvolvimento, notamos a utilização de "exercícios de exemplo". No Anexo 26 (p.484), mostramos alguns desses exercícios.

Observamos ao longo do desenvolvimento da Unidade Progressões o uso de notas de rodapé com fins bibliográficos, como a referente ao exercício n.º 63 (Anexo 27, p.486), constante da série de exercícios propostos de Progressões. Reproduzimos a seguir, o exercício 63 e a nota de rodapé citada.

63. Instituir a fórmula que dá a soma dos quadrados dos "n" primeiros números ímpares (E.Militar, 1939)(*)

(*) A.Quintella e V. Alves: *Questões de Concursos nas Escolas Superiores* (pág. 90) (Cia. Editora Nacional) (QUINTELLA, A, 1960, p.65).

A Unidade Progressões é fechada com uma série de exercícios propostos referentes às progressões aritmética e geométrica, constando de 112 (cento e doze) exercícios, onde se pode observar exercícios de aplicação direta dos conceitos ensinados e alguns mais elaborados, com grau maior de dificuldade de resolução dos mesmos, por parte dos alunos (Anexo 27, p.486).

Observação: optamos por digitar algumas partes dos livros (textos, notas de rodapé, exercícios), face ao mau estado de alguns deles, objetivando dar maior clareza ao que foi mostrado.

O conteúdo é apresentado em uma linguagem simples e direta, com a utilização de notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos, acompanhados de respostas.

Anexo 4
Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 2.ª Série/2.º Ano Colegial/ 2.º Livro/ Segundo Ano Colegial.

Agora faremos uma análise de como os autores apresentam os conteúdos aos leitores, percorrendo os livros 1, 2 3 e 4, abaixo discriminados:
Livro 1- Matemática 2.º Ciclo – 2.ª Série – Coleção 4 autores – 8.ª Edição – 1957 – Livraria Francisco Alves (Anexo 2, p.445).
Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – 2.º Ano – Thales Mello Carvalho – 8.ª Edição – 1956 – Companhia Editora Nacional (Anexo 5, p.448).
Livro 3 – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 9.ª Edição – 1959 – Edições Melhoramentos (Anexo 8, p.451).
Livro 4 – Matemática – Primeiro Ano Colegial – Ary Quintella – 2.ª Edição – 1957 – Companhia Editora Nacional (Anexo 11, p.454).
Vamos analisar o conteúdo **Equações trigonométricas**

Livro 1- Matemática 2.º Ciclo – 2.ª Série – Coleção 4 autores – 8.ª Edição – 1957 – Livraria Francisco Alves

O conteúdo Equações trigonométricas simples: tipos clássicos, faz parte da Unidade V (assim chamamos), Capítulo 3 (também assim chamamos) e tem início no item 72, chamado de Equações trigonométricas, assim apresentado:

> 72 – Equações trigonométricas. *Equação trigonométrica* é a igualdade que contém uma ou mais linhas trigonométricas de arcos ou ângulos e que só se verifica para valores particulares atribuídos a estes arcos ou ângulos. Estes valores são as soluções das equações.*Resolver a equação* é calcular as suas soluções (ROXO et all, 1957, p.187).

Seguem-se o desenvolvimento dos demais itens do conteúdo: equações trigonométricas com uma incógnita; resolução e discussão de algumas equações trigonométricas. Ao longo do desenvolvimento foram observados exercícios resolvidos de exemplo. O item 74 contém 6 (seis) exercícios resolvidos. Mostramos um deles no Anexo 28(p.488), onde podemos observar também a nota de rodapé n.º 38, a qual reproduzimos agora, para dar mais visibilidade a seu conteúdo: “(38) cos x tem que ser diferente de zero, porque na eliminação dos denominadores multiplicamos ambos os membros da equação por cos x” (ROXO et all, 1957, p.188).

O desenvolvimento do conteúdo é encerrado com uma série de 47 (quarenta e sete) exercícios propostos sem respostas, sendo que alguns deles de resolução direta com a aplicação dos conceitos trabalhados e outros ,mais elaborados, ensejando um grau maior de dificuldade na resolução dos mesmos, por parte dos alunos (Anexo 29, p.490)

A solução dos exercícios propostos é apresentada ao final da “Unidade”, por página (Anexo 30, p.492).

O conteúdo é apresentado com uma linguagem simples e direta, com introdução, uso de notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos sem respostas. .As respostas se encontram no final da Unidade.

Livro 2 – Matemática para os Curso Clássico e Científico – 2.º Ano – Thales Mello Carvalho – 8.ª Edição – 1956 – Companhia Editora Nacional.

O assunto Equações Trigonométricas é título do Capítulo X. Tem início no item 1, Preliminares, assim apresentado:

1. Equação trigonométrica é uma igualdade que contém funções circulares de arcos (ou ângulos) e que só é verificada para determinados valores desses arcos (ou ângulos). Esses valores dos arcos (ou ângulos), que verificam uma equação trigonométrica denominam-se *soluções* da equação (CARVALHO, T, M, 1956, p.213).

O conteúdo é desenvolvido e, ao longo desse desenvolvimento, notamos a utilização de exercícios resolvidos de exemplo (Anexo 31). No Anexo 31 (p.493) podemos observar a nota de rodapé (*) relativa ao exercício 3, a qual reproduzimos agora, com o objetivo de dar mais clareza ao que foi exposto: “(*) Para que a equação do 2.º grau $ax^2 + bx + c = 0$ de coeficientes a, b, e c, reais tenha raízes reais é preciso que $b^2 - 4ac \geq 0$” (CARVALHO, T, M, 1956, p.214). É importante observar que o uso de notas de rodapé ocorre também em outras partes do livro, no desenvolvimento de outros assuntos.

O desenvolvimento do assunto é encerrado com a apresentação de uma série de 25 (vinte e cinco) exercícios propostos com resposta, onde podemos ver que a grande maioria deles é de aplicação direta dos conceitos trabalhados (Anexo 32, p. 495).

O conteúdo é apresentado com uma linguagem simples e direta, com introdução, uso de notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos, acompanhados de respostas.

Livro 3 – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 9.ª Edição – 1953 – Edições Melhoramentos.

O assunto é tratado no Capítulo XIV, que tem por título “Equações trigonométricas simples”. Inicia-se com o item 205, Definições, assim apresentado: “205. **Definições.** – Dá-se a denominação de *equação trigonométrica* a toda equação que contém uma ou várias funções trigonométricas de arcos desconhecidos, e que somente se verifica para certos valores desses arcos” (MAEDER, A, M, 1959, p.196).

Segue-se o item 207, chamado “Equações trigonométricas com uma incógnita” e depois segue-se a apresentação de 8 (oito) exercícios resolvidos como exemplo (itens 208 a 215) (Anexo 33, p.497).

Observação: no desenvolvimento desse conteúdo, não foi observado a utilização de notas de rodapé, por parte do autor. Entretanto, folheando o volume, o uso de tal recurso foi observado.

O desenvolvimento do conteúdo Equações trigonométricas é encerrado com a apresentação de 24 (vinte e quatro) exercícios propostos com resposta, sendo que a maioria deles, de aplicação imediata dos conceitos trabalhados e alguns, mais elaborados, ensejando um grau maior de dificuldade por parte dos alunos, na resolução dos mesmos (Anexo 34, p.499).

Observação: no desenvolvimento desse conteúdo, particularmente, não foi observado o uso de notas de rodapé. Entretanto, observamos que no desenvolvimento de outros conteúdos, tais recursos foram utilizados.

O conteúdo é apresentado com uma linguagem simples e direta, com introdução, uso de notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos, acompanhados de respostas.

Livro 4 – Matemática – Primeiro Ano Colegial – Ary Quintella – 2.ª Edição – 1957 – Companhia Editora Nacional.

O conteúdo Equações trigonométricas é o título da Unidade VIII, e tem início no item 1, Definição, assim apresentado: "**1.Definição.** Uma equação diz-se trigonométrica quando contém um ou mais arcos incógnitos que nela figuram por intermédio das funções circulares" (QUINTELLA, A, 1957, p.159).

O conteúdo continua o seu desenvolvimento através dos seguintes itens: resolução das equações de uma incógnita; primeiro caso – equações com uma única função; segundo caso – a equação contém várias funções circulares do arco incógnito.

Ao longo do desenvolvimento são apresentados 6 (seis) exercícios resolvidos de exemplo. No Anexo 35 apresentamos alguns deles.

Observação: no desenvolvimento desse conteúdo, não foi observado a utilização de notas de rodapé, por parte do autor. Entretanto, folheando o volume, o uso de tal recurso foi observado.

O desenvolvimento do conteúdo Equações trigonométricas é encerrado com a apresentação de 35 (trinta e cinco) exercícios propostos com resposta (Anexo 36, p.503).

O conteúdo é apresentado com uma linguagem simples e direta, com introdução, uso de notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos, acompanhados de respostas.

Anexo 5
Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos dos livros 3.ª Série/3.º Ano Colegial/ 3.º Livro/ Terceiro Ano Colegial.

Agora faremos uma análise de como os autores apresentam os conteúdos aos leitores, percorrendo os livros 1, 2 3 e 4, abaixo discriminados:
Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 3.ª Série – 5.ª Edição – (Coleção dos 4 autores) – 1956 (Anexo 3, p.446).

Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 3.º Ano Colegial – 6.ª Edição – (Thales Mello Carvalho) – 1956 (Anexo 6, p.449).

Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 7.ª Edição – Algacyr Munhoz Maeder – 1959 (Anexo 9, 452).

Livro 4 – Matemática – Para o Terceiro Ano Colegial – 7.ª Edição – Ary Quintella – 1960 (Anexo 12, p.455).

Vamos analisar o conteúdo **Limite de uma variável**

Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 3.ª Série – 5.ª Edição – (Coleção dos 4 autores) – 1956

Esse conteúdo está incluso no "Capítulo 3" (assim chamamos) – Limite de variáveis e de funções; limites infinitos. Propriedades fundamentais. Exemplos elementares de descontinuidade de uma função em um ponto. Descontinuidade das funções racionais fracionárias, da "Unidade I" (assim chamamos) – Conceito de função; representação cartesiana; reta e círculo; noção intuitiva e de continuidade.

Tem início no item 26, Limite de uma variável apresentado no Anexo 37 (p.505).

São desenvolvidos os demais itens do Capítulo: ponto de acumulação; limites infinitos; limite de uma função; limite de sucessão; limite à direita e à esquerda; classificação das descontinuidades.

Ao longo do desenvolvimento observa-se a utilização de exercícios resolvidos de exemplo (Anexo 38, p.507).

Foi observado a utilização de notas de rodapé no desenvolvimento dos assuntos. Reproduzimos a frase que originou a nota e a mesma aqui: "Ora, quando um polinômio se anula para $x = x_0$ (*), é divisível por $x – x_0$. (*) De fato, se $f(x)$ é divisível por $x – x_0$, temos $f(x) \equiv (x – x_0) . f_1(x)$ e, para $x = x_0$ esta igualdade ficará $f(x_0) \equiv 0$. Ver adiante § 105" (ROXO et all, 1956, p.41).

Ao final, são apresentados 17 (dezessete) exercícios propostos com resposta, sendo que alguns deles mais simples, de aplicação direta dos conceitos ensinados e outros mais elaborados, com maior grau de dificuldade de resolução, por parte dos alunos (Anexo 39, p.509).

O conteúdo é apresentado com uma linguagem simples e direta, com introdução, uso de notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos, acompanhados de respostas.

Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 3.º Ano Colegial – 6.ª Edição – Thales Mello Carvalho – 1956

O assunto é tratado no Capítulo III, Limites e continuidade. Tem início no item 1, Limite de uma variável, apresentado no Anexo 40 (p.511)

Seguem-se o desenvolvimento de outros assuntos do capítulo: limite de uma função; generalização; limites unilaterais; continuidade; unicidade do limite; permanência do sinal em torno do limite; propriedades dos limites; critérios de confronto de limites; outras propriedades dos limites; aplicações; limite de um polinômio inteiro e racional; limite de uma função racional; propriedades das funções contínuas; teorema da permanência do sinal; teorema da existência do zero e teorema de Weierstrass.

Ao longo do desenvolvimento, observamos a utilização de notas de rodapé (Anexos 41 e 42, páginas 513 e 515), e exercícios resolvidos de exemplo (Anexo 41, p.513,).

Optamos por reproduzir aqui a nota de rodapé observada no Anexo 42 (p.515), para dar maior visibilidade à mesma: “(*) As demonstrações dos teoremas da existência do zero e de Weierstrass estão, a nosso ver, acima do nível do Curso Colegial, razão por que, preferimos suprimi-las” (CARVALHO, T, M, 1956, p.68).

Ao final, é apresentada uma série de 26 (vinte e seis) exercícios propostos com resposta, uns mais simples e outros mais complexos, com maior grau de dificuldade de resolução por parte dos alunos (Anexo 42, p.515).

O conteúdo é apresentado com uma linguagem simples e direta, com introdução, uso de notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos, acompanhados de respostas.

Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 7.ª Edição – 1959

O assunto é tratado no Capítulo V, denominado Limite de variáveis e de funções, tendo início no item 66, o qual apresentamos no Anexo 43 (p.517).

Seguem-se o desenvolvimento dos demais itens do Capítulo: limite de uma função; limite de uma soma; limite de uma potência; limite de uma raiz; passagem ao limite; funções contínuas; propriedades das funções contínuas; continuidade dos polinômios; descontinuidade de uma função em um ponto.

Ao longo do desenvolvimento, notamos a utilização de notas de rodapé (Anexo 43, p.517) e exercícios resolvidos de exemplo (Anexo 44,p.519).

Ao final do desenvolvimento do Capítulo, o autor apresenta uma série de 36 (trinta e seis) exercícios propostos com resposta. No Anexo 45 (p.521), podemos ver alguns deles.

O conteúdo é apresentado em uma linguagem simples, direta, com uso de notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos, acompanhados de respostas.

Livro 4 – Matemática – Para o Terceiro Ano Colegial – 7.ª Edição – Ary Quintella – 1960

O assunto é tratado no "Capítulo 2", chamado de "Limites – Continuidade". Tem início no item 2.1, o qual reproduzimos no Anexo 46 (p.522).

Segue-se o desenvolvimento dos demais itens do capítulo: tendência da variável para seu limite; limite infinito; infinitésimos; propriedades dos limites; operações com limites; limite de uma função; limites fundamentais; limites laterais de uma função; função contínua no ponto "a"; continuidade num intervalo; pontos de descontinuidade; classificação das descontinuidades.

Ao longo do desenvolvimento, observamos a utilização de notas de rodapé e exercícios resolvidos de exemplo (Anexo 47, p.524)

No Anexo 48 (p.525), mostramos um exemplo da utilização do recurso da nota de rodapé.

O capítulo é fechado com a apresentação de uma série de 60 (sessenta) exercícios propostos com resposta, com diferenciados graus de dificuldade de resolução (Anexo 49, p.526).

O conteúdo é apresentado em uma linguagem simples, direta, com uso de notas de rodapé, exercícios resolvidos de exemplo e exercícios propostos, acompanhados de respostas.

Anexo 6
Comparação entre os programas de Matemática para a Primeira Série dos Cursos Colegiais expedidos em 1943 e 1951

1943	1951
ARITMÉTICA	**ARITMÉTICA**
A divisibilidade numérica: teoremas gerais sobre a divisibilidade, caracteres de divisibilidade, teorias do m.m.c e do m.d.c, teoria dos números primos e aplicações	Noções sobre o cálculo numérico, aproximação e erro, algarismos exatos de um número aproximado, erro de arrendondamento
Operações aritméticas fundamentais, teoria da adição, da subtração, da potenciação, da radiciação de números inteiros e sistemas de numeração.	Adição, subtração, multiplicação, divisão com números aproximados, o cálculo da aproximação de resultados e seu problema inverso, método dos erros absolutos.
Os números fracionários, teoria das operações aritméticas sobre os números fracionários, noções sobre o cálculo numérico aproximado, erros, operações abreviadas.	
ÁLGEBRA	**ÁLGEBRA**
Os polinômios, operações algébricas sobre polinômios, teoria da divisão de polinômios, identidade de polinômios, método dos coeficientes a determinar, identidades clássicas, divisão de um polinômio inteiro x por x ± a, regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini.	Progressões aritméticas: termo geral, soma dos termos, interpolação aritmética. Progressões geométricas: termo geral, soma e produto dos termos, interpolação geométrica.
O trinômio do 2.º grau, decomposição em fatores do 1.º grau, sinais do trinômio, desigualdades do 2.º grau, noção de variável e de função, variação do trinômio do 2.º grau, representação gráfica, noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos.	Logaritmos: cálculo logaritmo como operação inversa da potenciação; propriedades gerais, mudanças de base, característica e mantissa, cologaritmo. Logaritmos decimais, propriedades, disposição e uso das tábuas de logaritmos, aplicação ao cálculo numérico, equações exponenciais simples, resolução com o emprego de logaritmos.

GEOMETRIA	GEOMETRIA
O plano e a reta no espaço, determinação de um plano, intersecção de planos e retas, paralelismo de retas e planos, reta e plano perpendiculares: perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano, diedros, planos perpendiculares entre si, noções sobre ângulos poliédricos;	Reta e plano, postulados, determinação, intersecção, paralelismo, distância, inclinação e perpendicularismo, diedros e triedros e ângulos sólidos em geral.
os poliedros, noções gerais, estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos, estudo especial de triedros. Teorema de Euler, noções sobre poliedros regulares	Generalidades sobre os poliedros em geral, poliedros regulares, indicações gerais. Prismas: propriedades gerais e, em especial, dos paralelepípedos, área lateral, área total e volume. Pirâmides: propriedades gerais, área, área lateral, área total, volume, troncos de prisma e troncos de pirâmide.
	Estudo sucinto das superfícies em geral: superfícies retilíneas e superfícies curvilíneas. Superfícies desenvolvíveis e superfícies reversas. Superfícies de revolução. Exemplos elementares dos principais tipos da classificação de Monge.
	Cilindros: propriedades gerais, área lateral, área total, volume. Tronco de cilindro.
	Cones: propriedades gerais, área lateral, área total, volume, troncos de cone de bases paralelas.
	Esfera: propriedades gerais, área e volume da esfera e das suas diversas partes.
	GEOMETRIA ANALÍTICA
	Elipse: definição e traçado; círculo principal e círculo diretores; excentricidade; tangente
	Hipérbole: definição e traçado; assíntotas; círculo principal e círculos

	diretores; excentricidade, tangente.
	Parábola: definição e traçado; diretriz; tangente
	As seções determinadas por um plano numa superfície cônica de revolução; teorema de Dandelin.

(Ribeiro, 2011, pp. 220-221)

Quadro 16 – Comparação entre os programas de Matemática para a Primeira Série dos Cursos Colegiais expedidos em 1943 e 1951.

Anexo 7
Comparação entre os programas de Matemática para a segunda série dos Cursos Colegiais expedidos em 1943 e 1951

1943	**1951**
ÁLGEBRA	**ÁLGEBRA**
Progressões e logaritmos: Estudo das progressões aritméticas e geométricas. Teria dos logaritmos, uso das tábuas, aplicações; resolução de algumas equações exponenciais.	
Binômio de Newton, noções sobre análise combinatória. Binômio de Newton.	Análise combinatória simples: Arranjos de objetos distintos, formação e cálculo do número de agrupamentos. Permutação de objetos distintos: formação e cálculo do número de agrupamentos, inversão, classe de uma permutação, teorema de Bézout. Permutações simples com objetos repetidos: cálculo do número de agrupamentos. Combinações de objetos distintos: formação e cálculo do número de agrupamentos. Relações de Stifel, triângulo aritmético de Pascal. Binômio de Newton: lei de formação do produto de binômios distintos, fórmula para o desenvolvimento binomial no caso de expoente inteiro e positivo, lei recorrente de formação dos termos. Aplicação do desenvolvimento binomial ao problema de somação de potências semelhantes de uma sucessão de números naturais.
A função exponencial e sua inversa	
Determinantes: teoria, aplicação aos	Determinantes e matrizes quadradas,

sistemas de equações lineares, regras de Cramer e Teorema de Rouché.	propriedades fundamentais. Regra de Sarrus. Determinantes menores. Desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha ou coluna. Transformação dos determinantes. Abaixamento da ordem de um determinante pela regra de Chió. Sistemas de “n” equações lineares com “n” incógnitas, Teorema de Rouché
Frações contínuas; noções.	
GEOMETRIA	
Os corpos redondos: noções sobre geração e classificação das superfícies, estudo do cilindro e do cone, áreas e volumes desses sólidos, estudo da esfera, área da esfera, da zona e do fuso esférico, volume da esfera.	
TRIGONOMETRIA	
Vetor: grandezas escalares e vetoriais, noção de vetor, equipolência, resultante ou soma geométrica de vetores, vetores deslizantes sobre um eixo, medida algébrica e teorema de Chasles, projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. Teorema de Carnot, valor da projeção de um vetor.	Vetor: grandezas escalares e vetoriais. Vetores: propriedades. Operações elementares com vetores. Relação de Chasles. Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. Teorema de Carnot.
Funções circulares: generalização das noções de arco e ângulo, arcos côngruos, arcos de mesma origem e extremidades associadas, funções circulares ou trigonométricas, definição, variação, redução ao primeiro quadrante, relações entre funções circulares de um mesmo arco, cálculo das funções circulares dos arcos de 30º, 45º e 60º, cálculo das funções circulares dos arcos p/n.	Generalização dos conceitos de arco e ângulo. Ângulos côngruos. Arcos de mesma origem e extremidades associadas. Linhas e funções trigonométricas diretas; definições e variações. Relações entre linhas trigonométricas de um mesmo arco. Problema geral da redução ao 1.º quadrante. Cálculo das linhas trigonométricas dos arcos expressos pela relação π/n
.Resolução de triângulos: relações entre os elementos de um triângulo, uso das	Resoluções trigonométricas de triângulos. Relações entre os elementos de um

tábuas trigonométricas, resolução de triângulos retângulos, resolução de triângulos obliquângulos, aplicações imediatas à Topografia.	triângulo retângulo, casos clássicos de resolução de triângulos retângulos, relações entre os elementos de um triângulo qualquer, Lei dos senos, casos clássicos de resolução de triângulos quaisquer.
Equações trigonométricas, resolução e discussão de algumas equações trigonométricas simples.	Equações trigonométricas simples: tipos clássicos
Transformações trigonométricas: fórmulas de adição, subtração, multiplicação e divisão de arcos, aplicações. Transformação de somas em produtos, aplicação ao cálculo numérico e uso de tábuas trignométricas.	Transformações trigonométricas: adição, subtração, multiplicação de arcos. Bissecção de arcos. Transformação de somas de linhas trigonométricas em produtos. Disposição e uso de tábuas trigonométricas naturais e logarítmicas.

(Ribeiro, 2011, pp. 223-224)

Quadro 17 – Comparação entre os programas de Matemática para a segunda série dos Cursos Colegiais expedidos em 1943 e 1951

Anexo 8
Comparação entre os programas de Matemática para a Terceira Série dos Cursos Colegiais expedidos em 1943 e 1951

1943	**1951**
ÁLGEBRA	**ÁLGEBRA**
Noção de função de variável real, representação cartesiana e noção de limite e continuidade. Continuidade, pontos de descontinuidade, descontinuidade de uma função racional	Conceito elementar de variável e de função. Variável progressiva e variável contínua, intervalos. Noção intuitiva de limite de uma sucessão, exemplos clássicos elementares e convergência. Funções elementares: classificação. Representação cartesiana de uma função e equação de uma curva. Curvas geométricas e curvas empíricas. Noção intuitiva de continuidade. Representação gráfica de funções usuais, função exponencial, função logarítmica e funções trigonométricas diretas. Acréscimo de uma função num ponto, funções crescentes e funções decrescentes, tangente e inclinação da tangente. Limites de variáveis e de funções, limites infinitos. Propriedades fundamentais, exemplos elementares de descontinuidade de uma função em um ponto, descontinuidade das funções racionais fracionárias. A função linear e a linha reta em coordenadas cartesianas. Parâmetro angular e parâmetro linear. Formas diversas da equação da linha reta. Representação paramétrica; área do triângulo em função das coordenadas dos vértices. Os problemas clássicos de inclinação, intersecção, passagem e distâncias, relativos à linha reta.

	Equação geral do 2.º grau com duas variáveis e a circunferência de círculo em coordenadas cartesianas. Formas diversas das equação da circunferência de círculo. Intersecção de retas e circunferências.
Derivadas: definição, interpretação geométrica e cinemática, cálculo das derivadas, derivação das funções elementares, aplicação e determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.	Definição de derivada em um ponto; notações; derivada infinita. Interpretação geométrica e cinemática da derivada. Diferença e diferencial; interpretação geométrica. Funções derivadas. Derivada sucessiva.Regras de derivação; derivada de uma constante, de uma função de função, de funções inversas. Aplicação à derivação de funções elementares. Aplicação da teoria das derivadas ao estudo da variação de uma função, funções crescentes e decrescentes, máximos e mínimos relativos, interpretação geométrica. Funções primitivas, integral definida, constante de integração, primitiva imediatas, regras simples de integração. Integral definida, aplicação ao cálculo de áreas e volumes, exemplos elementares.
Séries: sucessões, cálculo aritmético dos limites, séries numéricas, principais caracteres de convergência.	
Números complexos: definição, operações fundamentais, representação trigonométrica e exponencial, aplicação à resolução das equações binômias.	Conceito elementar de número complexo, forma binominal, complexos conjugados, módulo, representação geométrica.
Equações algébricas: propriedades gerais dos polinômios, relações entre coeficientes e as raízes de uma equação algébrica, aplicação à composição das equações, noções sobre transformações das equações, equações recíprocas e equações de raízes iguais.	Polinômios de uma variável, identidade. Aplicação ao método dos coeficientes a determinar, divisibilidade de um polinômio inteiro por x, por x±a, regra e dispositivo prático de Ruffini. Fórmula de Taylor para os polinômios. Algoritmo de Ruffini-Horner. Polinômios e equações algébricas em geral, raízes ou zeros.

	Operações racionais. Decomposição de um polinômio em fatores binômios, número der raízes de uma equação, raízes múltiplas e raízes nulas. Raízes complexas conjugadas, indicação do número de raízes reais contidas em um dado intervalo. Teorema de Bolzano, consequências. Relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação, aplicação à composição das equações, propriedades das raízes racionais inteiras e fracionárias. Transformação das equações, transformações de primeira ordem aditivas, multiplicativas e recíprocas. Equações recíprocas, classificação, forma normal, abaixamento do grau. Cálculo das raízes inteiras, determinação das cotas pelo método de Laguerre-Thibault, Regras de Exaustão de Newton. Algoritmo de Peletarius.
GEOMETRIA	**GEOMETRIA**
Relações métricas. Teorema de Stwart e suas aplicações no cálculo de linhas notáveis no triângulo. Relações métricas nos quadriláteros. Teorema de Ptolomeu ou Hiparco. Potência de um ponto, eixos radicais, planos radicais.	
Transformação de figuras: deslocamentos, translação, rotação, simetria. Homotetia e semelhança nos espaços de duas e três dimensões. Inversão pelos raios vetores recíprocos.	
Curvas usuais: definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. As seções cônicas.	

Definições e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica.	
GEOMETRIA ANALÍTICA	
Noções fundamentais: concepção de Descartes, coordenadas, abscissas de dois pontos, ponto que divide um segmento numa razão dada, determinação de uma direção e um ângulo de duas direções.	
Lugares geométricos: equação natural de um lugar geométrico, sua interpretação. Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. Equação da reta. Equação do círculo. Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.	

(RIBEIRO, 2011, pp. 226-228)

Quadro 18 – Comparação entre os programas de Matemática para a Terceira Série dos Cursos Colegiais expedidos em 1943 e 1951

Anexo 9
Análise comparativa – Índices – “Coleção dos 4 autores pré-Programa Mínimo” e “Coleção dos 4 autores Programa Mínimo” 1.ª Série – Cursos Clássico e Científico

Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – 1943	**Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – 8.ª edição – 1955**
1.ª Série	
Parte I – Aritmética	**Parte 1* – Aritmética e Álgebra**
Unidade I – As operações aritméticas fundamentais	**Unidade I** – Noções sobre cálculo aritmético aproximado; erros**
Adição	
Subtração	
Multiplicação	
Divisão	
Potenciação	
Radiciação	
Sistemas de Numeração	
Unidade II – A divisibilidade numérica	
Teoremas gerais sobre divisibilidade	
Caracteres de divisibilidade	
Máximo divisor comum	
Mínimo múltiplo comum	
Teoria dos números primos	
Unidade III – Números fracionários	
Números fracionários	
Operações sobre frações	

Frações decimais	
Conversão de frações ordinárias em dízimas	
Noções sobre cálculo numérico aproximado. Erros, operações abreviadas.	Aproximação e erro. Valor por falta ou por excesso. Erro absoluto e erro relativo. Algarismos exatos de um número aproximado. Erro de arredondamento. Adição, subtração, multiplicação e divisão com números aproximados. O cálculo da aproximação dos resultados e seu problema inverso; método dos erros absolutos.
Soluções dos exercícios de aritmética	
Observações sobre a Aritmética: Nota-se que o Livro de 1955 (Programa Mínimo) faz um "enxugamento" de conteúdos relativamente ao Livro de 1943 (Pré-Programa Mínimo). Acompanhando pelos livros, notamos que o Livro "Programa Mínimo", relativamente aos conteúdos coincidentes, traz um item denominado "Erro relativo" após o item "Erro absoluto", o que não ocorre no Livro "Pré Programa Mínimo".	
Parte II – Álgebra	
Unidade IV – Os polinômios	**Unidade II – Progressões**
Identidade de polinômios de uma variável	
Identidade de polinômios de mais de uma variável	
Método dos coeficientes a determinar	
Identidades clássicas	
Divisão de polinômios de uma variável	
Divisão de polinômios de mais de uma variável	
Divisão por x ± a. Lei de Ruffini	
M.d.c e m.m. c de dois polinômios de uma variável	
Unidade V – O trinômio do 2.º grau	

Decomposição do trinômio do 2.º grau	
Inequações do 2.º grau	
Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos	
Variação do trinômio do 2.º grau; representação gráfica	
Problemas elementares sobre máximos e mínimos	
Soluções de exercícios de Álgebra	
	Progressões aritméticas; termo geral; soma dos termos. Interpolação aritmética
	Progressões geométricas; termo geral; soma e produto dos termos. Interpolação geométrica
	Unidade III – Logaritmos
	O cálculo logaritmo como operação inversa da potenciação. Propriedades gerais dos logaritmos; mudança de base. Característica e mantissa. Cologaritmo
	Logaritmos decimais; propriedades. Disposição e uso das tábuas de logaritmos. Aplicação ao cálculo numérico
	Equações exponenciais simples; sua resolução com o emprego de logaritmos
Observações sobre a Álgebra: Podemos observar divergências entre os programas dos dois livros (1943 e 1955). A parte de Álgebra de 1943 consta Polinômios e Trinômio do 2.º grau. O livro de 1955 traz os conteúdos de Progressões e Logaritmos. Ambos os livros trazem no final das Partes (Álgebra e Aritmética) os resultados dos exercícios propostos por Unidade.	
Parte III – Geometria	**Parte II – Geometria**
Unidade VI – O plano e a reta no espaço	**Unidade IV – Retas e planos; superfícies e poliedros em geral; corpos redondos usuais; definições e propriedades; áreas e volumes**

Determinação de um plano	Reta e plano; postulados; determinação; intersecção; paralelismo; distância; inclinação e perpendicularismo. Diedros e triedros. Ângulos sólidos em geral
Intersecção de retas e planos	
Paralelismo de retas e planos	
Reta e plano perpendiculares	
Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano	
Diedros; planos perpendiculares entre si	
Projeções sobre um plano	
Ângulos poliédricos. Estudo especial dos triedros	
Unidade VII – Os poliedros	
Noções gerais sobre poliedros	Generalidades sobre os poliedros em geral. Poliedros regulares; indicações gerais
Prisma; áreas	Prismas; propriedades gerais e, em especial, dos paralelepípedos; área lateral; área total, volume.
Paralelepípedo; áreas	
Pirâmides; áreas	Pirâmides; propriedades gerais; área lateral; área total; volume. Troncos de prisma e troncos de pirâmide.
Volumes	
Teorema de Euler. Noções sobre poliedros regulares	
Soluções dos exercícios de geometria	
	Estudo sucinto das superfícies em geral. Superfícies retilíneas e superfícies curvilíneas. Superfícies desenvolvíveis e superfícies reversas. Superfícies de revolução. Exemplos elementares dos principais tipos da classificação de Monge.

	Cilindros; propriedades gerais, área lateral; área total; volume. Troncos de cilindro.
	Cones; propriedades gerais; área lateral; área total; volume. Troncos de cone de bases paralelas.
	Esfera; propriedades gerais. Área e volume da esfera e das suas diversas partes
	Unidade V – Seções cônicas; definições e propriedades fundamentais.
	Elipse; definição e traçado; círculo principal e círculos diretores; excentricidade; tangente
	Hipérbole; definição e traçado; assíntotas; círculo principal e círculos diretores; excentricidade; tangente
	Parábola; definição e traçado; diretriz; tangente
	As seções determinadas por um plano numa superfície cônica de revolução; teorema de Dandelin
Observações sobre a Geometria: Notamos, observando o posicionamento dos conteúdos nos dois livros, que no livro de 1943 (Pré-Programa Mínimo), o item “Teorema de Euler” localiza-se ao final da Unidade “Os Poliedros” e no livro de 1955 (Programa Mínimo) o item “Teorema de Euler” vem no início do item “Poliedros – Noções Gerais”. É de observar também que o livro de 1955 (Programa Mínimo) faz a junção dos conteúdos “O plano e a reta no espaço” e “Os Poliedros” em uma só Unidade. O Livro de 1955 (Programa Mínimo) traz uma unidade denominada “Seções cônicas; definições e propriedades fundamentais”que se localiza na Parte III, Geometria, mas na realidade ela marca a entrada da área “Geometria Analítica”, que não existe no Livro de 1943 (Pré-Programa Mínimo).	
Observações finais: Nota-se a clara intenção de “racionalização” e “enxugamento” dos conteúdos, o que se reflete no “layout e configuração dos Índices”. Observa-se claramente que o Índice do Livro de 1955 (Programa Mínimo) é mais enxuto, no sentido de que uniu na Parte I, a Aritmética com a Álgebra e, ao final, apresenta somente 5 (cinco) Unidades, sendo que o Livro de 1955 (Programa Mínimo) apresenta 7 (sete) Unidades. È preciso destacar que, por si só, em suas apresentações, os Índices dos livros (1943 e 1955) apresentam outras diferenças. No Índice do livro de 1943 (Pré-Programa Mínimo) nota-se a preocupação de dar	

destaque à divisão do mesmo em Partes e Unidades. O Índice do Livro de 1955 (Programa Mínimo), tem uma apresentação mais "textual", não aparecendo a divisão "por Partes" e não aparecendo a palavra "Unidade" para destacar, por exemplo, "Unidade I". A palavra "Unidade" que aparece nesse quadro de comparação foi por nós colocada.

Quadro 19 – Análise comparativa – Índices – "Coleção dos 4 autores pré-Programa Mínimo" e "Coleção dos 4 autores Programa Mínimo" 1.ª Série – Cursos Clássico e Científico

Anexo 10
Análise comparativa – Índices – “Coleção dos 4 autores pré-Programa Mínimo” e “Coleção dos 4 autores pós-Programa Mínimo” 2.ª Série – Cursos Clássico e Científico

Matemática 2.º Ciclo – 2.ª Série – 2.ª edição – 1944	**Matemática 2.º Ciclo – 2.ª Série – 2.ª edição – 1957**
2.ª Série	
Parte I – Álgebra	**Parte I Álgebra**
Unidade I – A função exponencial	**Unidade I – Análise combinatória simples**
Potências de expoente real	
Progressões aritméticas	
Progressões geométricas	
Noção de função exponencial e de função inversa	
Teoria dos logaritmos. Aplicações	
Resolução de algumas equações exponenciais	
Unidade II – O binômio de Newton	
Noções sobre análise combinatória	Arranjos de objetos distintos; formação e cálculo do número de agrupamentos Permutações de objetos distintos; formação e cálculo do número de agrupamentos. Inversão. Classe de uma permutação; teorema de Bézout Permutações simples com objetos repetidos; cálculo do número de agrupamentos Combinações de objetos distintos; formação e cálculo do número de agrupamentos. Relação de Stifel; triângulo aritmético de Pascal.

	Unidade II – Binômio de Newton
Potenciação de polinômios	Lei de formação do produto de binômios distintos. Fórmula para o desenvolvimento binomial no caso de expoente inteiro e positivo; lei recorrente de formação dos termos. Aplicação do desenvolvimento binomial ao problema da somação de potências semelhantes de um sucessão de números naturais.
Unidade III – Determinantes	**Unidade III – Determinantes; sistemas lineares.**
Teoria dos determinantes	Determinantes e matrizes quadradas; propriedades fundamentais. Regra de Sarrus. Determinantes menores. Desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha ou coluna. Transformação dos determinantes. Abaixamento da ordem de um determinante pela regra de Chió.
Determinantes especiais	
Aplicação aos sistemas de equações lineares. Regra de Cramer. Teorema de Rouché	Sistemas de “n” equações lineares com “n” incógnitas. Regra de Cramer. Sistemas de “m” equações lineares com “n” incógnitas; Teorema de Rouché Soluções de exercícios propostos.
Observações sobre a Álgebra: os conteúdos de Progressões Aritméticas e Geométricas no livro de 1944 (Pré-Programa Mínimo) são trabalhados agora no livro da 2.ª série, mas foram trabalhados no livro da 1.ª Série no livro de 1957 (Pós-Programa Mínimo)	
Unidade IV	
Frações contínuas. Noções sobre frações contínuas	
Frações contínuas periódicas	
Parte II – Geometria	

Unidade V	
Noções sobre geração e classificação das superfícies	
Estudo do cilindro e do cone. Áreas e volumes	
Estudo da esfera. Área da esfera, da zona e do fuso.	
Volume da esfera.	
Observações sobre a Geometria: O livro de 1957 (Programa Mínimo) não traz a Parte relativa à Geometria. Os conteúdos constantes no livro de 1944 (Pré-Programa Mínimo), já foram trabalhados no livro de 1.ª Série "Programa Mínimo".	
Parte III – Trigonometria	**Parte II – Trigonometria**
Unidade VI	**Unidade IV – Noções sobre vetores; projeções; arcos e ângulos; linhas e relações trigonométricas.**
Grandezas escalares e vetoriais. Noção de vetor; equipolência	Grandezas escalares e vetoriais. Vetores; propriedades. Operações elementares com vetores. Relação de Chasles.
Adição de vetores	
Subtração de vetores	
Produto de um vetor por um número real	
Quociente de um vetor por um número real	
Unidade VII	
Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo	
Teorema de Carnot	Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. Teorema de Carnot.
Projeção de um vetor deslizante	
Unidade VIII	
Generalização das noções de arco e de	Generalização dos conceitos de arco e

ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidade e de extremidades associadas	ângulo. Arcos côngruos. Arcos de mesma origem e de extremidades associadas.
Linhas trigonométricas de um arco	Linhas e funções trigonométricas diretas; definições e variação. Arcos correspondentes à mesma linha trigonométrica.
Relações entre as linhas trigonométricas de um arco	Relações entre as linhas trigonométricas de um arco. Problema geral da redução ao 1.º quadrante.
	Cálculo das linhas trigonométricas dos arcos expressos pela relação π/n
Unidade IX	**Unidade V – Transformações trigonométricas em geral; equações trigonométricas simples.**
Adição de arcos	Adição, subtração e multiplicação de arcos. Bissecção de arcos.
Multiplicação e divisão de arcos	
Transformação de produtos em somas e de somas em produtos	Transformação de somas de linhas trigonométricas em produtos
Tábuas trigonométricas	Disposição e uso de tábuas trigonométricas naturais e logarítmicas
Tornar uma fórmula calculável por logaritmos	
Unidade X	
Equações trigonométricas	Equações trigonométricas simples; tipos clássicos
Unidade XI	**Unidade VI – Resolução trigonométrica de triângulos**
Relação entre os elementos de um triângulo retângulo	Relações entre os elementos de um triângulo retângulo
Resolução dos triângulos retângulos (casos clássicos)	Casos clássicos de resolução de triângulos retângulos

Relações entre os elementos de um triângulo	Relações entre os elementos de um triângulo qualquer.
Resolução dos triângulos obliquângulos (casos clássicos)	. Lei dos senos. Relações dos co-senos. Expressão trigonométrica da área. Caos clássicos de resolução de triângulos quaisquer
Aplicações à Topografia	
Soluções dos exercícios propostos no livro	Soluções dos exercícios propostos.
Tábuas dos senos, cossenos e tangentes	
Observações sobre a Trigonometria: Nota-se certa coincidência entre os conteúdos relativos aos livros de 1944 (Pré-Programa Mínimo) e 1957 (Programa Mínimo), à exceção do item "Aplicações à Topografia", presente só no livro de 1944 (Pré-Programa Mínimo).	
Observações finais: Os dois Índices (do Livro de 1944 e do Livro de 1957) por si só já são diferentes. O Índice do Livro de 1957 (Programa Mínimo) apresenta-se mais "enxuto" no sentido de que apresenta só 2 (duas) Partes (Álgebra e Trigonometria) e 6 (seis) Unidades, enquanto que o Livro de 1944 (Pré-Programa Mínimo apresenta 3 (três) Partes (Álgebra, Geometria e Trigonometria) e 11 (onze) Unidades. No Índice do Livro de 1944 (Pré-Programa Mínimo) nota-se a preocupação com a divisão "por Partes" e "por Unidades", o que não acontece no Livro de 1957 (Programa Mínimo), que, apresenta-se de uma maneira "muito mais textual", sem essa preocupação de "divisão por Partes" e "por Unidades". A palavra "Unidade" que aparece nesse quadro comparativo foi por nós colocada.	

Quadro 20 – Análise comparativa – Índices – "Coleção dos 4 autores pré-Programa Mínimo" e "Coleção dos 4 autores Programa Mínimo" 1.ª Série – Cursos Clássico e Científico

Anexo 11
Análise comparativa – Índices – "Coleção dos 4 autores pré-Programa Mínimo" e "Coleção dos 4 autores pós-Programa Mínimo" 3.ª Série – Cursos Clássico e Científico

Matemática 2.º Ciclo – 3.ª Série – 2.ª edição – 1946	**Matemática 2.º Ciclo – 3.ª Série – 5.ª edição – 1956**
3.ª Série	
Parte I – Álgebra	**Parte I – Álgebra**
Unidade I	**Unidade I – Conceito de função; representação cartesiana; reta e círculo; noção intuitiva e de continuidade**
Sucessões	
Cálculo aritmético dos limites	
Séries numéricas	
Estudo da natureza de algumas séries clássicas	
Principais caracteres de convergência	
Unidade II	
Função de uma variável real	Conceito elementar de variável e de função. Variável progressiva e variável continua, intervalos. Noção intuitiva de limite de uma sucessão; exemplos clássicos elementares; convergência. Funções elementares; classificação. Representação gráfica de funções usuais; função exponencial, função logarítmica e funções trigonométricas diretas. Acréscimo de uma função num ponto; funções crescentes e funções decrescentes. Tangente; inclinação da tangente.
Representação cartesiana	

Teoria geral dos limites	Limite de variáveis e de funções; limites infinitos. Propriedades fundamentais.
Continuidade; pontos de descontinuidade	Exemplos elementares de descontinuidade de uma função em um ponto.
Descontinuidade de uma função racional	Descontinuidade de funções racionais fracionárias.
Unidade III	**Unidade II – Noções sobre derivadas e primitivas; interpretações; aplicações**
Derivadas; definição; interpretação geométrica e cinemática	Definição de derivada em um ponto; notações; derivada infinita. Interpretação geométrica e cinemática da derivada. Diferença e diferencial; interpretação geométrica.
Cálculo das derivadas	
Aplicação às funções elementares	Regras de derivação: derivada de uma constante; de uma função de função; de funções inversas; da soma, do produto e do quociente de funções. Aplicação à derivação de funções elementares
Derivadas e diferenciais sucessivas	Funções derivadas. Derivação sucessiva.
Máximos e mínimos	Aplicação da teoria das derivadas ao estudo da variação de uma função. Funções crescentes e funções decrescentes; máximos e mínimos relativos; interpretação geométrica
Estudo da variação de algumas funções simples	
	Funções primitivas; integral definida; constante de integração. Primitivas imediatas; regras simples de integração. Integral definida. Aplicação ao cálculo de áreas e de volumes; exemplos elementares
Unidade IV	
Definição de um número complexo	

Representação trigonométrica e exponencial	
Operações fundamentais	
Resolução de equações binômias	
Unidade V	**Unidade III – Introdução à teoria das equações; polinômios; propriedades; divisibilidade por x ± a; problemas de composição, transformação e pesquisa de raízes; equações de tipos especiais**
Propriedades gerais dos polinômios; equações algébricas	Polinômios de uma variável; identidade. Aplicação ao método dos coeficientes a determinar. Divisibilidade de um polinômio inteiro em x por x ± a; regra e dispositivo prático de Ruffini. Fórmula de Taylor para os polinômios; algoritmo de Ruffini-Horner
Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica; aplicação à composição das equações	Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação; aplicação à composição das equações. Propriedades das raízes racionais inteiras e fracionárias
Noções sobre transformações das equações	Transformações das equações; transformações de primeira ordem aditivas, multiplicativas e recíprocas
Equações recíprocas	Equações recíprocas; classificação; forma normal; abaixamento do grau
Equações de raízes iguais	
	Polinômios e equações algébricas em geral; raízes ou zeros. Operações racionais. Decomposição de um polinômio em fatores binômios; número de raízes de uma equação; raízes múltiplas e raízes nulas. Raízes complexas conjugadas. Indicação sobre o número de raízes reais contidas em um dado intervalo; teorema de Bolzano;

	consequências.
	Cálculo das raízes inteiras. Determinação das cotas pelo método de Laguerre-Thibault. Regras de exclusão de Newton. Algoritmo de Peletarius
	Conceito elementar de número complexo; forma binomial; complexos conjugados; módulo; representação geométrica.
Observações sobre a Álgebra: O livro de 1946 (Pré-Programa Mínimo) inicia com o conteúdo "Sucessões", séries numéricas, caracteres de convergência para, só depois introduzir o conceito de 'Função de variável real". O Livro de 1956 (Programa Mínimo) inicia diretamente com o "Conceito de Função", não apresentando o conteúdo "Sucessões".	
Parte II – Geometria	
Unidade VI	
Teorema de Stewart e suas aplicações ao cálculo das linhas notáveis do triângulo	
Relações métricas nos quadriláteros	
Teorema de Hiparco ou Ptolomeu	
Potência de um ponto em relação a um círculo	
Eixos radicais; centro radical	
Planos radicais	
Unidade VII	
Transformação de figuras	
Translação	
Rotação	
Simetria	
Homotetia e semelhança nos espaços de duas e três dimensões	
Inversão pelos valores recíprocos	

Unidade VIII	
Curvas usuais	
Elipse	
Hipérbole	
Parábola	
As seções cônicas	
Definições e propriedades essenciais da hélice cilíndrica	
Observações sobre a Geometria: O Livro de 1956 (Programa Mínimo) não apresenta a Parte de Geometria e seus conteúdos. Os conteúdos da Unidade VIII do Livro de 1946 foram trabalhados no Livro da 1.ª Série de 1955 que apresentamos no quadro comparativo dos Livros de 1.ª Série (Pré e Programa Mínimo)	
Parte III – Geometria Analítica	
Unidade IX	
Noções fundamentais; concepção de Descartes	
Abscissa de um ponto de um eixo	
Coordenadas; coordenadas retilíneas no plano	
Determinação de uma direção; ângulo de duas direções	
Distância de dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada	
Unidade X	
Lugares geométricos	
Equação natural; sua interpretação; passagem da equação natural para a equação retilínea retangular	
Círculo	
Elipse	

Hipérbole	
Parábola	
Linha reta	
Problemas sobre a linha reta	
Equações de grau superior que representam a linha reta; sistemas e feixes de retas; classificação das curvas planas	
Soluções dos exercícios	
Observações sobre a Geometria Analítica: O livro de 1956 (Programa Mínimo) não apresenta a Parte Geometria Analítica. A parte de Geometria Analítica em livros do Programa Mínimo, foi apresentada no Livro da 1.ª Série 1955 na Unidade "Seções Cônicas" (Elipse, Hipérbole, Parábola).	
Observações finais: Os dois Índices (do Livro de 1946 e do Livro de 1956) por si só já são diferentes. O Índice do Livro de 1956 (Programa Mínimo) apresenta-se mais "enxuto" no sentido de que apresenta só 1 (uma) Parte(Álgebra) e 3 (três) Unidades, enquanto que o Livro de 1946 (Pré-Programa Mínimo apresenta 3 (três) Partes (Álgebra, Geometria e Trigonometria) e 10 (dez) Unidades. No Índice do Livro de 1946 (Pré-Programa Mínimo) nota-se a preocupação com a divisão "por Partes" e "por Unidades", o que não acontece no Livro de 1956 (Programa Mínimo), que, apresenta-se de uma maneira "muito mais textual", sem essa preocupação de "divisão por Partes" e "por Unidades". A palavra "Unidade" que aparece nesse quadro comparativo foi por nós colocada.	

Quadro 21 – Análise comparativa – Índices – "Coleção dos 4 autores pré-Programa Mínimo" e "Coleção dos 4 autores pós-Programa Mínimo" 3.ª Série – Cursos Clássico e Científico

Anexo 12
PORTARIA 966, DE 2 DE OUTUBRO DE 1951

O Ministro da Educação e Saúde, tendo em vista os termos da Portaria n.º 614, de 10 de maio de 1951, eu incumbiu a Congregação do Colégio Pedro II da elaboração dos programas das diversas disciplinas do curso secundário,

Resolve:

Art. 1.º Ficam aprovados os programas que a esta acompanham, para o ensino de Português, Francês, Inglês, Latim, Grego, Espanhol, Geografia Geral e do Brasil, Matemática, Ciências Físicas e Naturais, Desenho, Física, Química, História Natural, Filosofia, História Geral e do Brasil, Economia Doméstica e Trabalhos Manuais no ensino secundário.

Art. 2.º Os programas aprovados pela presente portaria serão adotados por todos os estabelecimentos de ensino secundário do país e entrarão em vigor progressivamente, a começar do ano vindouro, pela primeira série ginasial e colegial.

Art. 3.º As instruções metodológicas para a execução dos programas das disciplinas a que se refere o art. 1.º, redigidas pela Congregação do Colégio Pedro II, serão entregues dentro de trinta dias, ao Ministro da Educação, que as expedirá.

Art. 4.º Os programas das diversas disciplinas do curso secundário serão cumpridos no Colégio Pedro II e nos demais estabelecimentos de ensino secundário do país com desenvolvimento adequado às diversas regiões, tendo-se sempre em vista as conveniências didáticas.

Art. 5.º Para efeito do estabelecido no artigo anterior, a Congregação do Colégio Pedro II, no prazo de trinta dias, apresentará os planos de desenvolvimento desses programas mínimos ao Ministro da Educação, que os expedirá.

Art. 6.º Os planos de desenvolvimento expedidos nos termos do artigo anterior são extensivos a todos os estabelecimentos de ensino secundário, salvo aos que se regerem por planos estaduais próprios, os quais deverão ser aprovados pelo Ministro da Educação, na forma do disposto nos artigos seguintes dessa Portaria.

Art. 7.º Aos Governos estaduais e dos Territórios ficará facultada a elaboração de planos de desenvolvimento próprios, que poderão ser adotados nos estabelecimentos de ensino secundário equiparados ou particulares do respectivo Estado, depois de aprovados pelo Ministro da Educação.

§ 1.º Os Governos estaduais e dos Territórios que desejarem adotar plano de desenvolvimento próprio deverão apresentá-lo ao Ministro da Educação até o dia 30 de novembro de cada ano, para ser examinado pela Diretoria do Ensino Secundário.

§ 2.º A Diretoria do Ensino Secundário, depois de verificar se o plano apresentado pelo Governo Estadual está de acordo com os programas mínimos e com as respectivas instruções metodológicas, encaminhará o pedido ao Ministro até o dia 31 de janeiro, com o parecer circunstanciado sobre a conveniência ou não de sua aprovação.

§ 3.º Se não for concedida a autorização pleiteada ficarão os estabelecimentos, localizados nesse Estado, obrigados a adotar o plano de desenvolvimento em vigor no Colégio Pedro II.

Art. 8.º Os estabelecimentos de ensino secundário poderão optar entre o plano de desenvolvimento elaborado pela Congregação do Colégio Pedro II e o organizado pelo Governo do respectivo Estado.

Parágrafo único. Nos Estados ou Territórios, em que não houver plano de desenvolvimento aprovado nos termos do art. 7.º desta Portaria, todos os estabelecimentos de ensino secundário ficarão sujeitos ao plano aplicado no Colégio Pedro II.

Art. 9.º O número mínimo de horas semanais para execução dos programas de cada disciplina obedecerá à distribuição constante dos quadros anexos.

Parágrafo único. Será facultado, aos estabelecimentos de ensino secundário elevar o número de horas de aulas semanais de cada disciplina, desde que o total não ultrapasse o máximo permitido pelo art. 39 da Lei Orgânica do Ensino Secundário (Decreto-lei n.º 4.244, de 9 de abril de 1942).

Art. 10. Revogam-se as disposições em contrário.

Simões Filho

PROGRAMA DE MATEMÁTICA

CURSO COLEGIAL

1.ª Série

Noções sobre o cálculo aritmético aproximado; erros.

Progressões

Logaritmos.

Retas e planos; superfícies e poliedros em geral; corpos redondos usuais; definições e propriedades; áreas e volumes.

Seções cônicas; definições e propriedades fundamentais.

2.ª Série

Análise combinatória simples.

Binômio de Newton.

Determinantes; sistemas lineares.

Noções sobre vetores; projeções; arcos e ângulos; linhas e relações trigonométricas.

Transformações trigonométricas em geral; equações trigonométricas simples.

Resolução trigonométrica de triângulos.

3.ª Série

Conceito de função; representação cartesiana; reta e círculo; noção intuitiva de limite e continuidade.

Noções sobre derivadas e primitivas; interpretações; aplicações.

Introdução à teoria das equações; polinômios, propriedades, divisibilidade por x ± a; problemas de composição, transformação e pesquisa de raízes; equações de tipos especiais.

Disponível em: http://www.jusbrasil.com.br/diarios/2825451/pg-19-secao-1-diario-oficial-da-uniao-dou-de-26-11-1951/pdfView. Acesso em 15/10/2013.

Anexo 13
PORTARIA N.º 1045, DE 14 DE DEZEMBRO DE 1951

Expede os planos de desenvolvimento dos programas mínimos de ensino secundário e respectivas instruções metodológicas

O Ministro de Estado da Educação e Saúde, tendo em vista os termos da Portaria n.º 966, de outubro de 1951, resolve:

Art. 1.º Ficam aprovados os planos anexos de desenvolvimento dos programas mínimos de Português, Francês, Inglês, Espanhol, Latim, Grego, Geografia Geral e do Brasil, Matemática, Desenho, Física, Química, Filosofia, História Geral e do Brasil e Economia Doméstica no curso secundário, elaborados pela Congregação do Colégio Pedro II, de acordo com o disposto no art. 5.º da Portaria ministerial n.º 966, de 2 de outubro de 1951, publicada no Diário oficial de 26 de novembro último.

Art. 2.º Ficam igualmente aprovadas as considerações preliminares e as instruções metodológicas que a esta acompanham, para execução dos programas mínimos de Português, Francês, Inglês, Latim, Espanhol, Grego, Geografia Geral e do Brasil, Matemática, Desenho, Física, Química, Filosofia, História Geral e do Brasil, no curso secundário, elaboradas ex-vi do art. 3.º da referida Portaria ministerial 966.

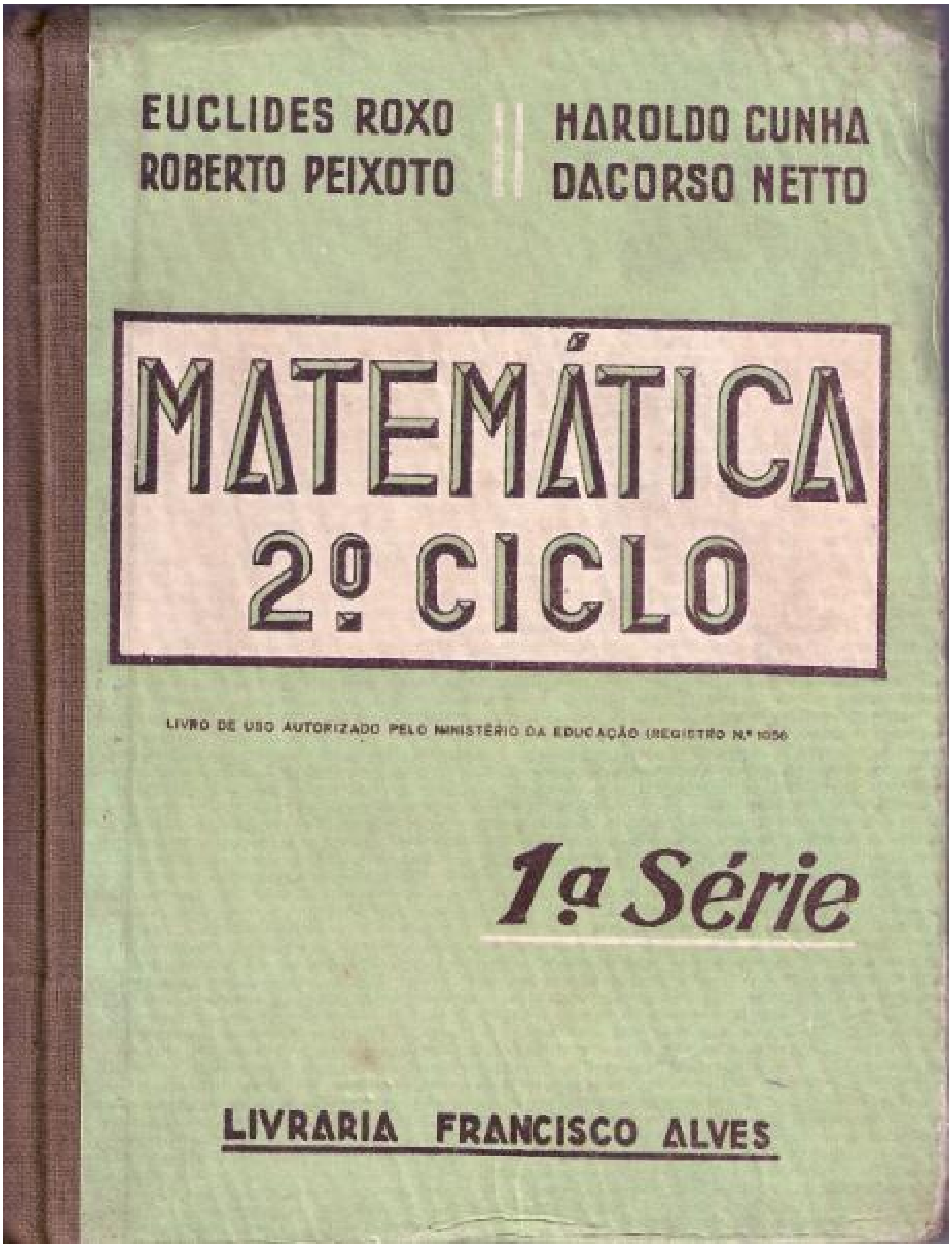
Art. 3.º Revogam-se as disposições em contrário.

Simões Filho

Disponível em: http://www.jusbrasil.com.br/diarios/2375333/pg-65-secao-1-diario-oficial-da-uniao-dou-de-22-02-1952/pdfView, acesso em 14/10/2013.

ANEXO DE IMAGENS FASE 3

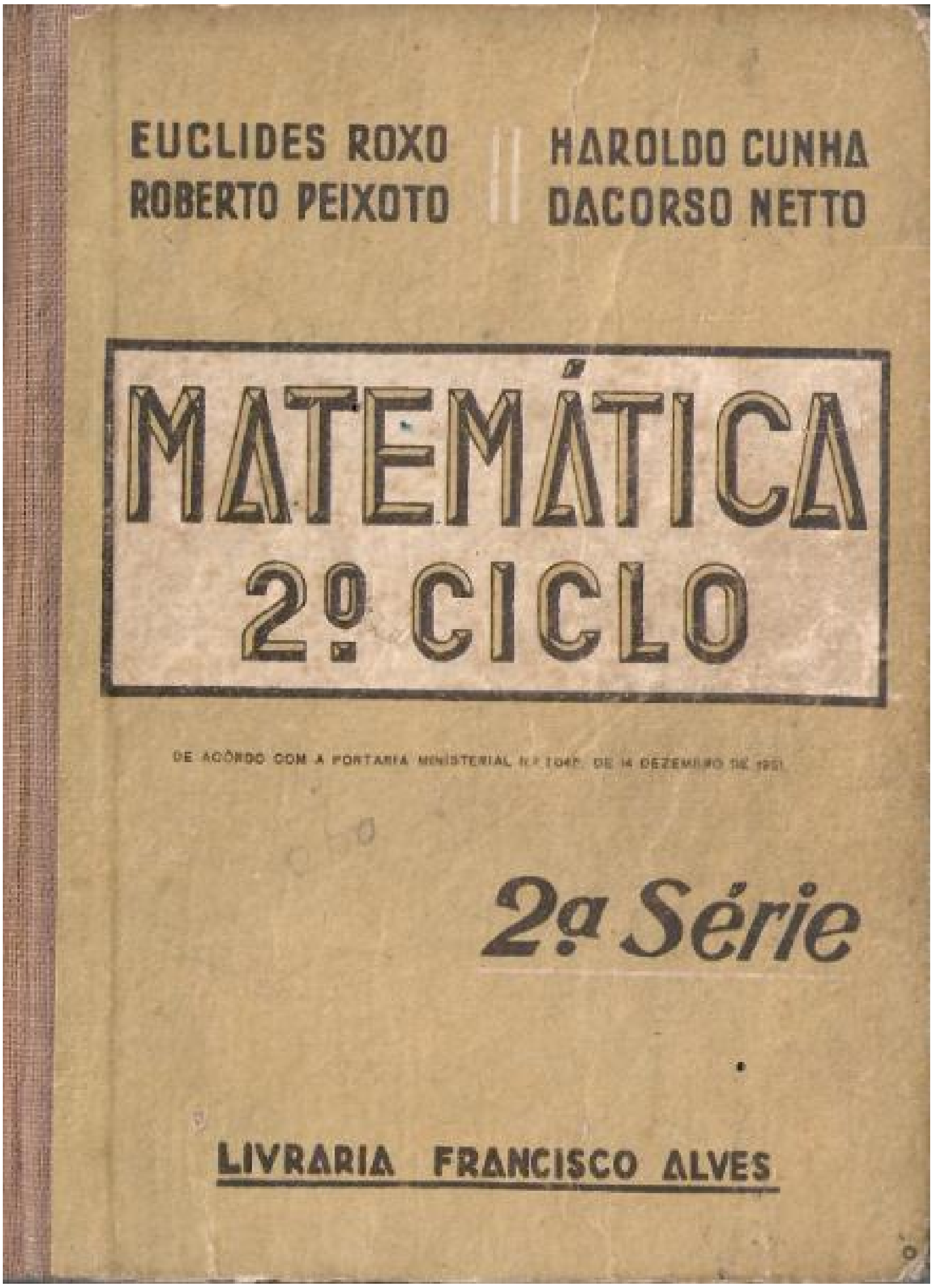
Anexo 1
Capa. Livro 1 – Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – 1955



(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1955)

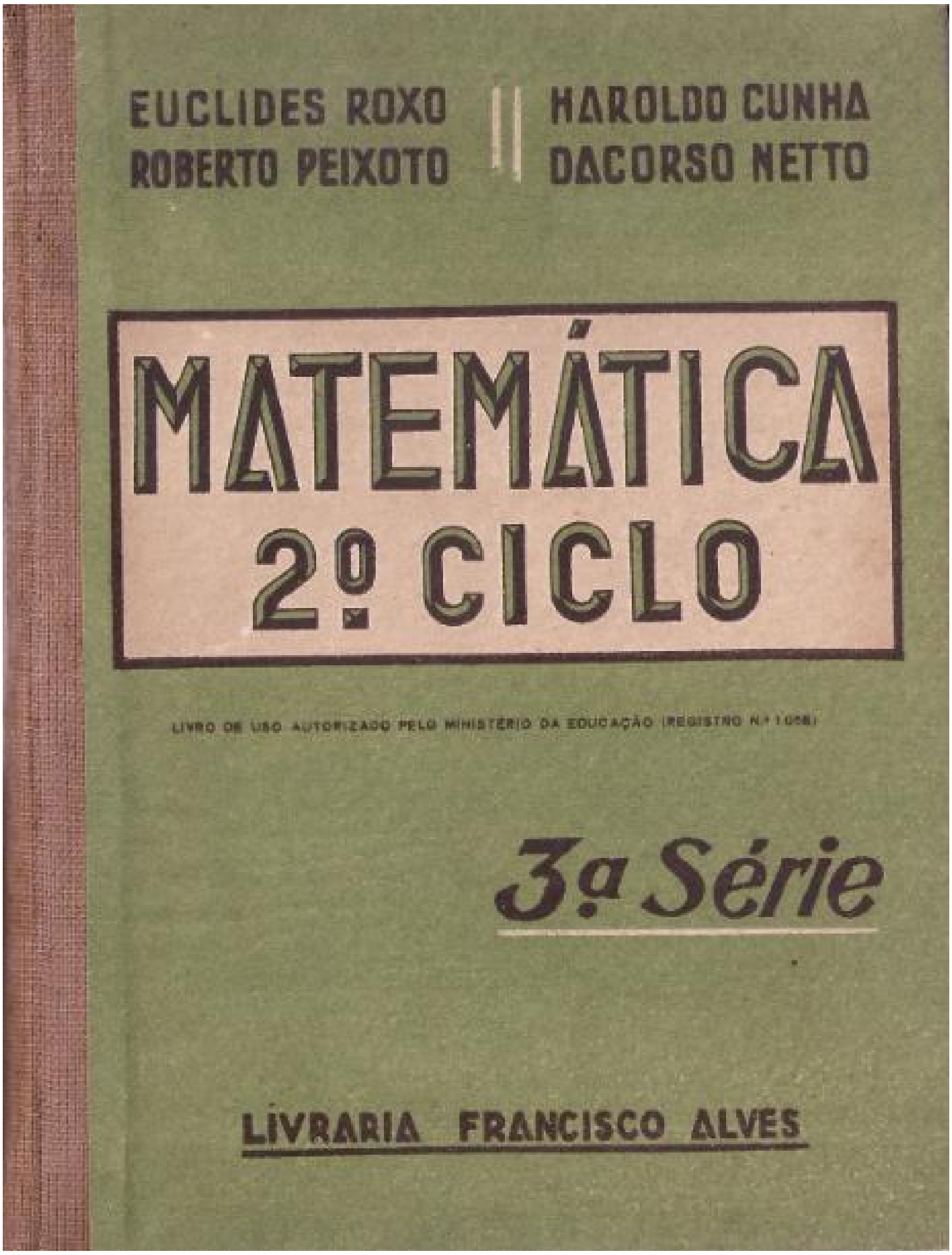
Anexo 2

Capa. Livro 2 – Matemática 2.º Ciclo – 2.ª Série – 1957



(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1957)

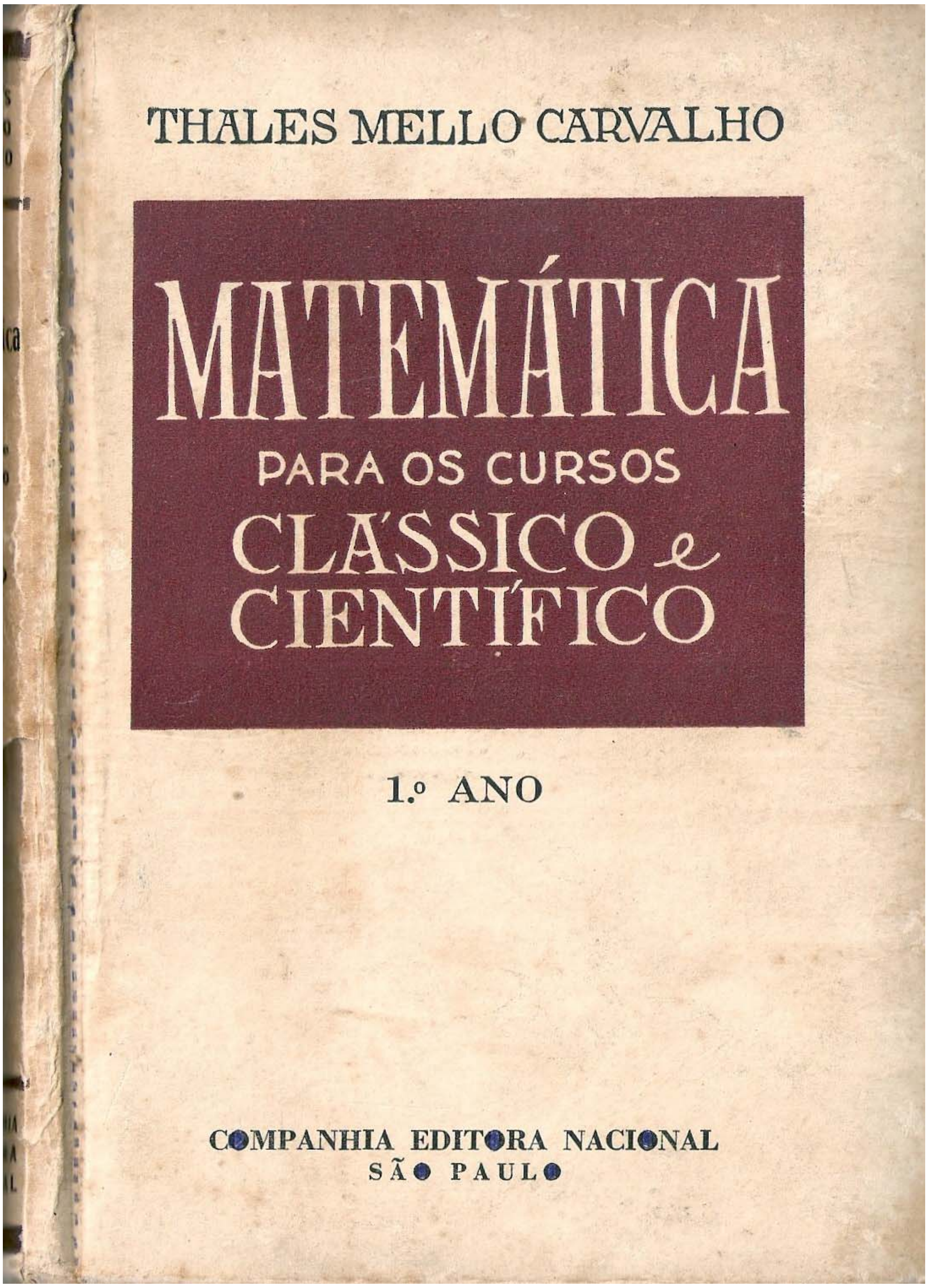
Anexo 3
Capa. Livro 3 – Matemática 2.º Ciclo – 3.ª Série – 1956



(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1956)

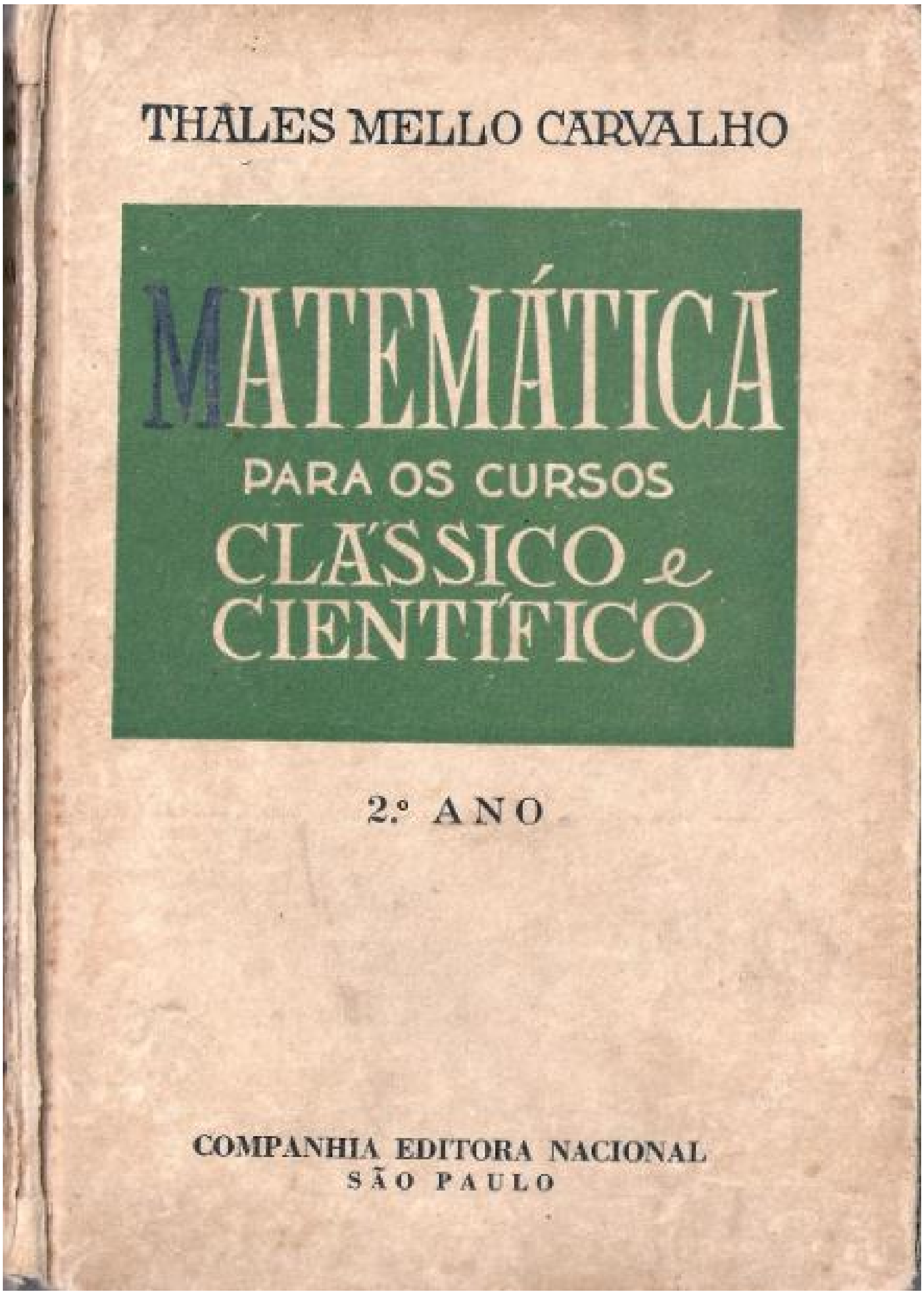
Anexo 4

Capa. Livro 1 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1.º Ano Colegial – 1955



(CARVALHO, T,M, 1955)

Anexo 5
Capa. Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 2.º Ano Colegial – 1956



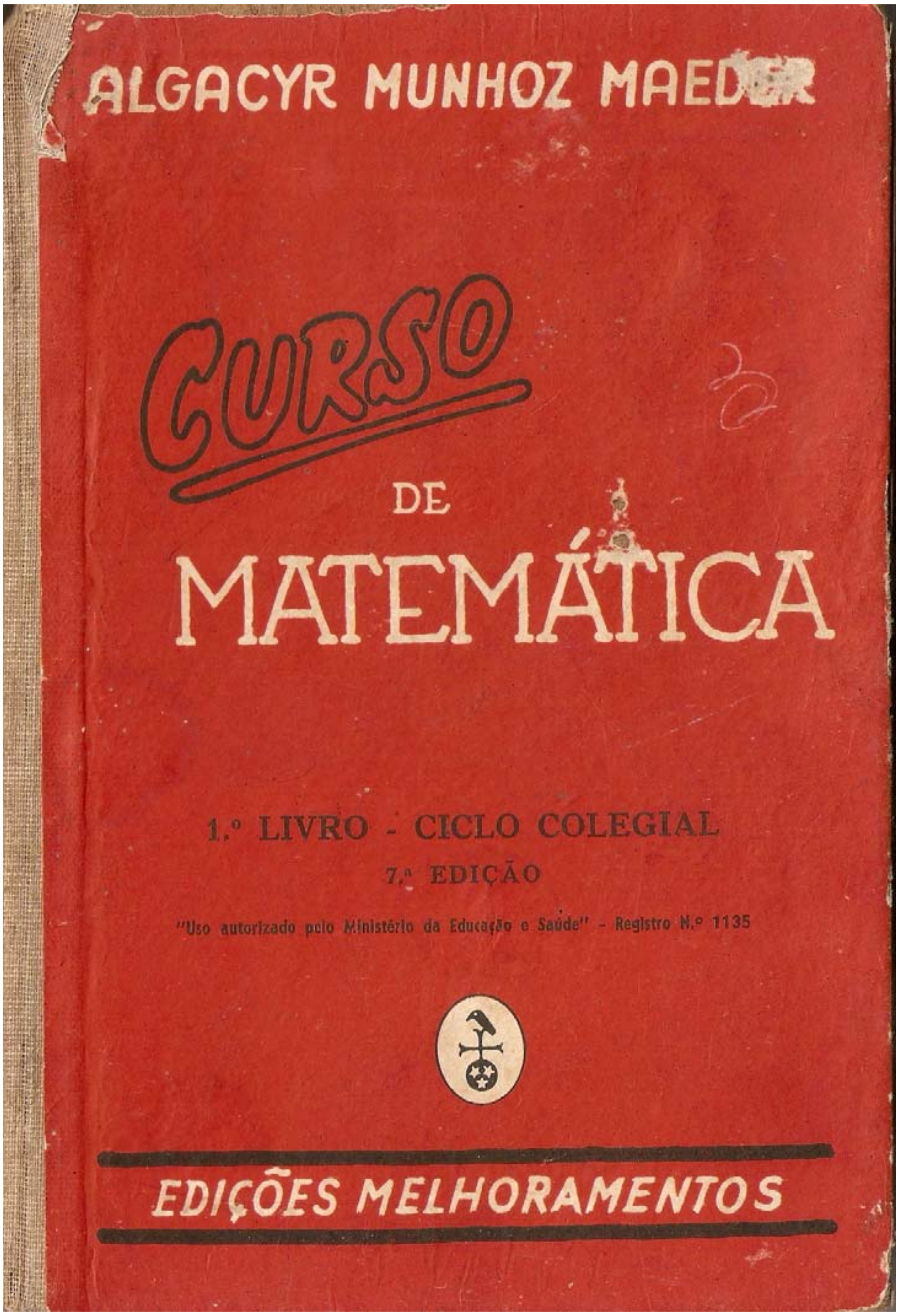
(CARVALHO, T, M, 1956)

Anexo 6

Capa. Livro 3 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 3.º Ano Colegial – 1956

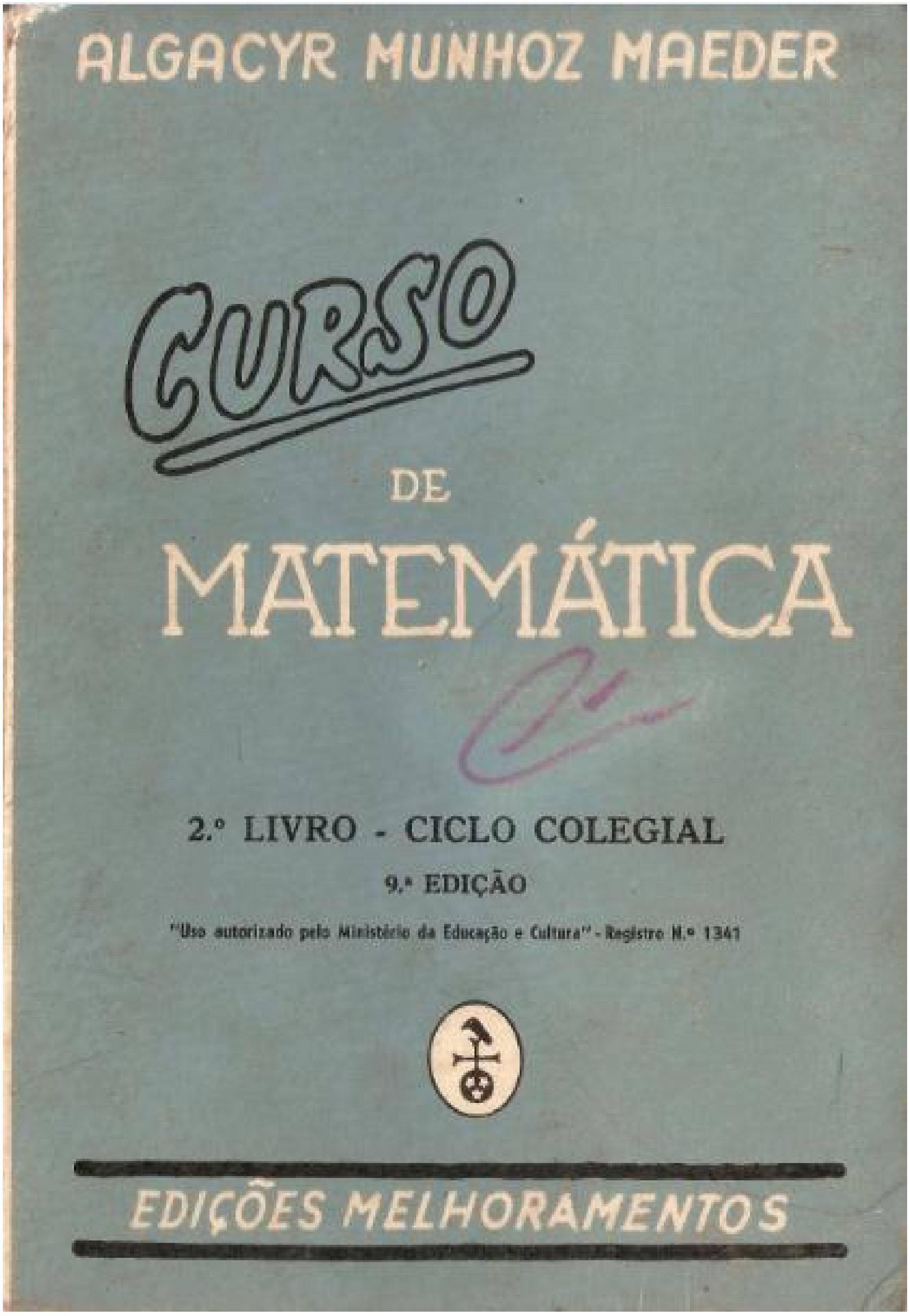
(CARVALHO, T, M, 1956)

Anexo 7
Capa. Livro 1 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 1953



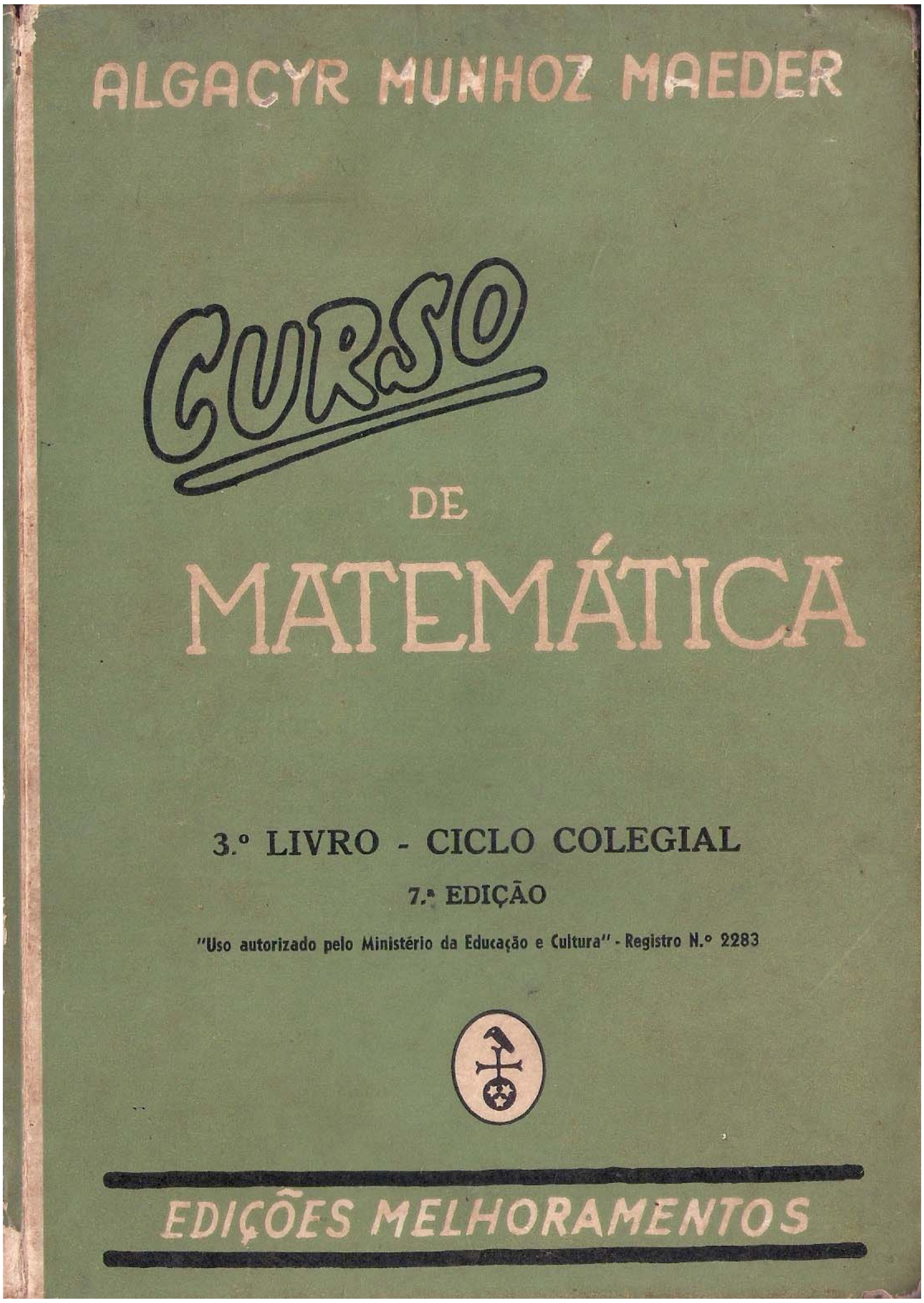
(MAEDER, A, M, 1953)

Anexo 8
Capa. Livro 2 – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – 1959



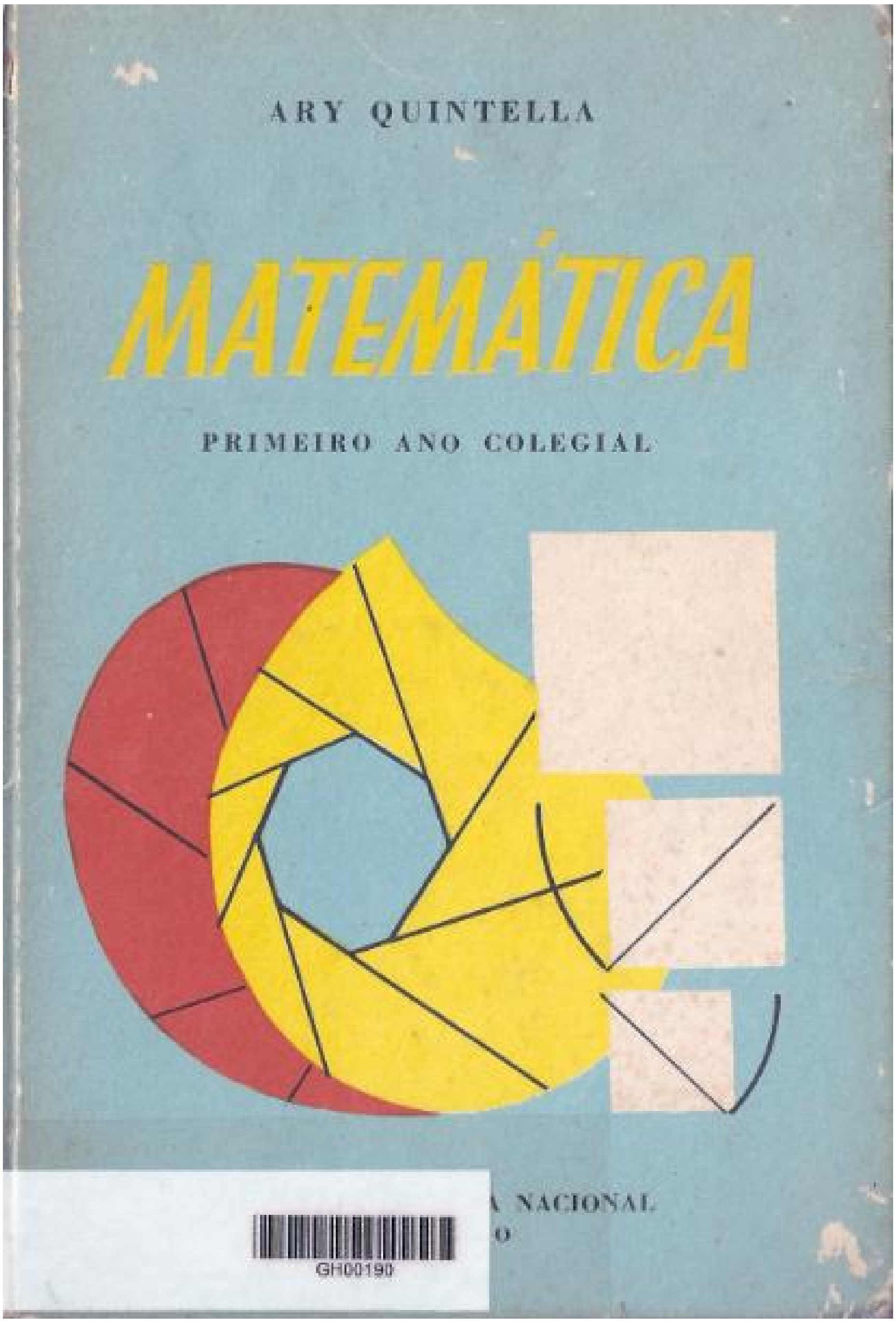
(MAEDER, A, M, 1959)

Anexo 9
Capa. Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 1959



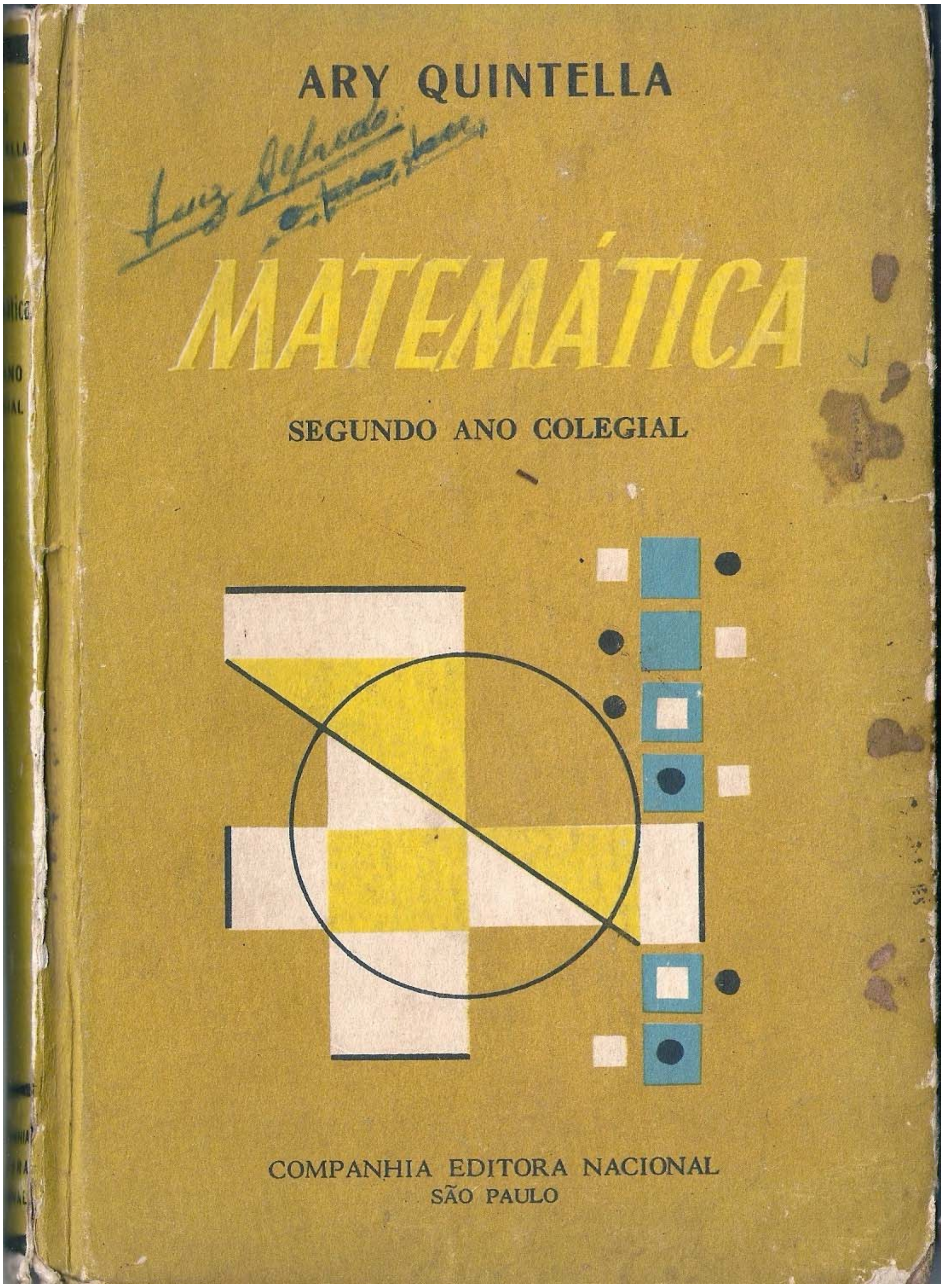
(MAEDER, A, M, 1959)

Anexo 10
Capa. Livro 1 – Matemática para o Primeiro Ano Colegial – 1960



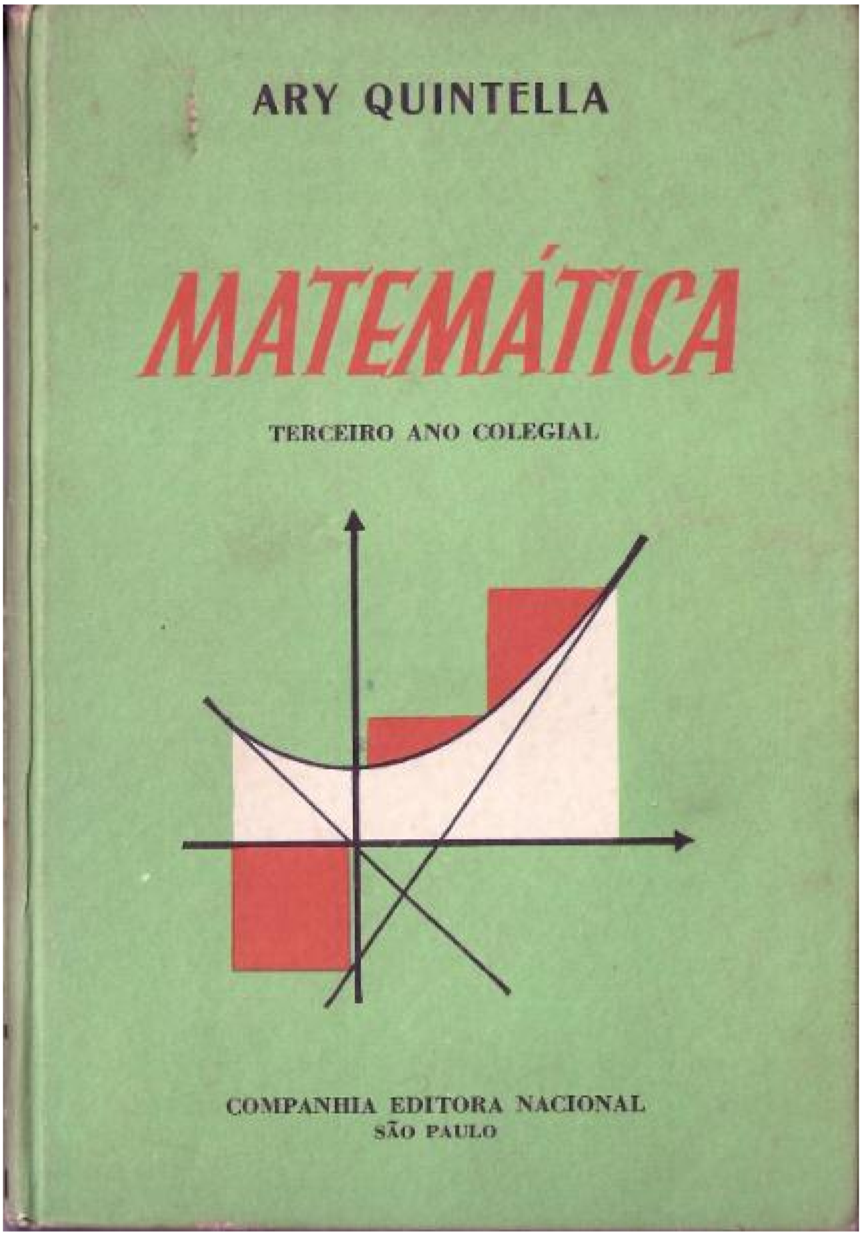
(QUINTELLA, A, 1960)

Anexo 11
Capa. Livro 2 – Matemática para o Segundo Ano Colegial – 1957



(QUINTELLA, A, 1957)

Anexo 12
Capa. Livro 3 – Matemática para o Terceiro Ano Colegial – 1960



(QUINTELLA, A, 1960)

Anexo 13
Índice 1 – Livro 1 (Parte 1) – Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – 1955

ÍNDICE

Índice 1 – Livro 1 (Parte 2)

N.º 4.554 — Oficinas Gráficas da Livraria Francisco Alves

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1955, p. 377-378)

Anexo 14
Índice 2 . Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1.º Ano – 1955

ÍNDICE

(CARVALHO, T, M, 1955)

Anexo 15
Índice 3. Livro 3 (Parte 1) – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 1953

ÍNDICE

Índice 3. Livro 3 (Parte 2)

4 CURSO DE MATEMÁTICA — 1.ª SÉRIE — COLEGIAL

Índice 3. Livro 3 (Parte 3)

Índice 3. Livro 3 (Parte 4)

6 CURSO DE MATEMÁTICA — 1.ª SÉRIE — COLEGIAL

Índice 3. Livro 3 (Parte 5)

Índice 3. Livro 3 (Parte 6)

Índice 3. Livro 3 (Parte 7)

Índice 3. Livro 3 (Parte 8)

(MAEDER, A, M, 1953, pp. 4-10)

Anexo 16
Índice 4. Livro 4 (Parte 1) – Matemática – Primeiro Ano Colegial

ÍNDICE GERAL

Índice 4. Livro 4 (Parte 2)

Unidade IV: Retas e planos; superfícies e poliedros em geral; corpos redondos usuais; definições e propriedades; áreas e volumes.

Capítulo I: RETA E PLANO. DIEDROS

Capítulo II: POLIEDROS

Índice 4. Livro 4 (Parte 3)

CAPÍTULO III: PRISMA

CAPÍTULO IV: PIRÂMIDE; TRONCOS

I) **Pirâmide**

II) **Troncos**

CAPÍTULO V: SUPERFÍCIES

CAPÍTULO VI: CILINDRO

CAPÍTULO VII: CONE

Índice 4. Livro 4 (Parte 4)

CAPÍTULO VIII: ESFERA

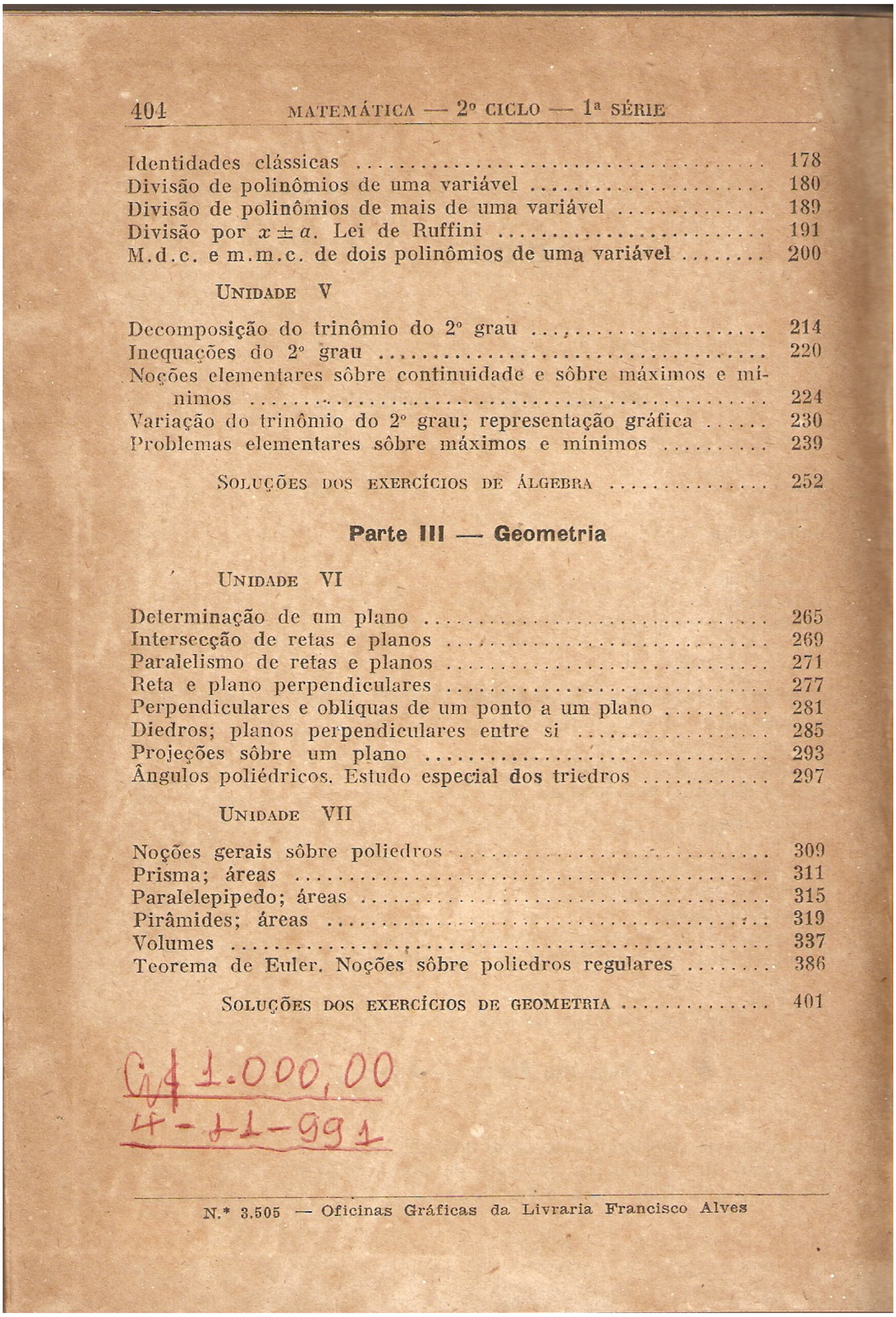
UNIDADE V: **Secções cônicas**

(QUINTELLA, 1960, p. 7-10)

Anexo 17
Índice (Parte1) . Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – 1945

ÍNDICE

Índice (Parte 2)



Cr$ 1.000,00
4-11-991

N.º 3.505 — Oficinas Gráficas da Livraria Francisco Alves

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1945, p.403-404)

Anexo 18
Ex.Res.Ex. PA. Nota de rodapé – Un. II – Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 1.ª Série – 1955

OBSERVAÇÃO — Exprime-se S em função de a_1, r e n, substituindo, em (7), a_n pelo valor dado em (1). Obtém-se, então:

$$S_n = \frac{\left[2\,a_1 + (n-1)r\right]n}{2} \quad (21) \qquad (8)$$

Exemplos:

1º) *Achar a soma dos* n *primeiros números naturais.*
Fazendo-se, na fórmula (9), $a_1 = 1$ e $a_n = n$, vem:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Assim, a soma dos 20 primeiros números naturais é:

$$S_{20} = \frac{20 \times 21}{2} = 210$$

2º) *Dar a progressão aritmética cuja soma dos* n *primeiros termos é igual a* n², *qualquer que seja* n.
Da fórmula (8), em virtude do enunciado, conclui-se:

$$\frac{[2\,a + (n-1)\,r]\,n}{2} = n^2$$

ou:

$$2\,a_1 + (n-1)\,r - 2\,n = 0$$

que pode escrever-se:

$$2\,a_1 - r + n\,(r-2) = 0$$

Como êste resultado deve verificar-se, *qualquer que seja* n, tem-se (22):

$$2\,a_1 - r = 0,\ r - 2 = 0$$

isto é:

$$r = 2,\ a_1 = 1$$

(21) No caso particular de $a_1 = 1$, diz-se que S_n é o *enegésimo número poligonal* de $r+2$ lados, devendo-se essa denominação à interpretação geométrica correspondente; designa-se êsse número pelo símbolo $P_n^{(r+2)}$. Estende-se a fórmula:

$$P_n^{(r)} = n + \frac{1}{2}\,n(n-1)(r-2)$$

ao caso de n negativo ou nulo, supondo-se $r \geqslant 3$ e inteiro.

(22) A nulidade de $2a_1 - r$ e $r - 2$ corresponde à condição de indeterminação de x na equação $b + ax = 0$, isto é, $a = 0$ e $b = 0$.

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1955, p.33)

Anexo 19
Ex.Prop.PA. Un. II. Livro 1(Parte 1) – Matemática – 2.º Ciclo – 1.ª Série – 1955

Daí:

$$\begin{cases} a_{10} = 51 + (10 - 1) \ . \ 17 \\ S_{10} = \dfrac{(51 + a_{10}) \ . \ 10}{2} \end{cases}$$

A primeira equação dá $a_{10} = 204$; substituindo-se, na segunda, a_{10} pelo valor obtido, vem:

$$S_{10} = (51 + 204) \ . \ 5 = 1275$$

Exercícios

1. Calcular o 12º termo da progressão $\div$ 3.6.9....
2. Calcular o 29º termo da progressão $\div$ 3 . $3\dfrac{1}{2}$. 4....
3. Calcular o 11º termo da progressão $\div$ 20.18.16....
4. Dados $a_{20} = 65$ e $r = 3$, calcular a_1.
5. Dados $a_{10} = 12$ e $r = -4$, calcular a_1.
6. Dados $a_{14} = 4$ e $r = \dfrac{1}{4}$, calcular a_1.
7. Dados $a_1 = 27$, $a_n = 45$ e $r = 2$, calcular n.
8. Dados $a_1 = 2{,}2$, $a_n = -2$ e $r = -0{,}3$, calcular n.
9. Dados $a_1 = 3\dfrac{1}{2}$, $a_n = 11$ e $r = 0{,}5$, calcular n.
10. Dados $a_1 = 67$ e $a_{23} = 1$, calcular r.
11. Dados $a_1 = 12$ e $a_{20} = 145$, calcular r.
12. Dados $a_1 = 5$ e $a_9 = 17$, calcular r.
13. Dados $a_3 = 4$ e $a_{31} = 18$, calcular a_5.
14. A razão de uma progressão aritmética é 6. Calcular a diferença entre o 12º termo e o 7º termo.
15. Numa progressão aritmética, a soma do 3º termo com o 17º é 74, e a soma do 8º termo com o 20º é 98. Escrever essa progressão.
16. Sendo 5 a razão de uma progressão aritmética de 18 termos, qual é a diferença entre os termos extremos?
17. Tem-se $a_1 = 8$ e $a_n = 38$. Escrever a progressão, sabendo-se, ainda, que a razão é igual ao número de termos.

Ex.Prop.PA. Un. II. Livro 1(Parte 2)

35. Dados $a_1 = 29$, $a_n = 1$ e $S_n = 120$, calcular n e r.

36. Dados $r = -1$ e $S_7 = 91$, calcular a_1 e a_7.

37. Numa progressão aritmética de 7 termos e razão igual a -3, a soma do 1º termo com o penúltimo é 55. Calcular S_7.

38. Dar a progressão aritmética cuja soma dos n primeiros termos é igual a $n\,(3\,n + 1)$, qualquer que seja o valor de n.

39. Quantos meios aritméticos se devem inserir entre 3 e 12, para que a progressão obtida tenha razão inferior a $\dfrac{1}{10^3}$?

40. Achar os lados de um triângulo retângulo, sabendo-se que a área é de 54 m² e que êsses lados estão em progressão aritmética.

41. Demonstrar que o raio do círculo inscrito no triângulo retângulo cujos lados estão em progressão aritmética, é igual à razão dessa progressão.

42. Achar três números, em progressão aritmética, cuja soma é 15, e cuja soma dos quadrados é 93.

43. Calcular x de modo que os quadrados dos números $x - 1$, $x + 3$ e $x + 5$ estejam em progressão aritmética.

44. Calcular a soma dos termos da progressão que se obtem inserindo 20 meios aritméticos entre 36 e 309.

45. Se os números $a, b, c, d, \ldots$, estão em progressão aritmética, também o estão os números $b^2 - a^2$, $c^2 - b^2$, $d^2 - c^2, \ldots$.

46. Fazendo-se x, sucessivamente, igual a $0, 1, 2, 3, \ldots$, os valores do trinômio $ax^2 + bx + c$ formam uma sucessão na qual as diferenças entre os termos consecutivos estão em progressão aritmética.

47. Num paralelepípedo retângulo de 94 m² de área total, a soma de todas as arestas é igual a 48m. Calcular as dimensões desse paralelepípedo, sabendo-se que estão em progressão aritmética.

48. Dar o primeiro termo e a razão da progressão aritmética cuja soma dos n primeiros termos é igual a $4\,n^2$, qualquer que seja o valor de n.

49. Dar o primeiro termo e a razão da progressão aritmética de $n + 1$ termos, na qual a soma dos n primeiros termos é A e a soma dos n últimos é B.

50. Dar o primeiro termo e a razão da progressão aritmética de $2\,n$ termos, na qual a soma dos termos de ordem ímpar é A e a soma dos termos de ordem par é B.

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1955, p. 37-39)

Anexo 20
Ex.Prop.PA.PG. Un. II. – Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 1.ª Série – 1955

ARITMÉTICA E ÁLGEBRA 53

Exercícios sôbre progressões aritméticas e geométricas

1. Achar a soma dos 30 primeiros números naturais.

2. Achar a soma dos 20 primeiros números pares.

3. Ligando-se os meios dos lados de um quadrado, cujo lado é a, obtem-se outro quadrado com o qual se procede do mesmo modo, e assim indefinidamente. Achar a soma das áreas de todos os quadrados.

4. Quantas pancadas dá em 24 horas um relógio que só bate as horas?

5. Do Rio parte para São Paulo um trem com a velocidade de 42 quilômetros por hora; 2 horas depois parte do Rio outro trem, no mesmo sentido, percorrendo 30 quilômetros na primeira hora, 38 na segunda, e assim sucessivamente, de modo que a velocidade aumenta, constantemente, de 8 quilômetros por hora. No fim de quantas horas o segundo trem alcança o primeiro?

6. Qual a relação existente entre três números que estão, simultâneamente, em progressão aritmética e em progressão geométrica ?

7. De um trem que sobe certa serra, desprende-se um vagão. Êsse vagão desce percorrendo 0,25m no 1º segundo, $3 \times 0{,}25$m no 2º, $5 \times 0{,}25$m no 3º, e assim por deante. Que distância percorreu em 1 minuto ?

8. 20 pessôas compareceram, *sucessivamente*, a uma assembléia. Sabendo-se que cada pessôa cumprimentou separadamente, os que já se encontravam reunidos, quantos cumprimentos houve ?

9. Em um círculo de raio r inscreve-se um quadrado, neste quadrado inscreve-se um círculo, neste um outro quadrado, e assim indefinidamente. Calcular: 1º) a soma das áreas de todos os círculos; 2º) a soma das áreas de todos os quadrados.

10. Quantos múltiplos de 17 há desde 34 até 680 inclusive?

11. Quantos números há, entre 100 e 400, que não são divisíveis por 13 ?

12. Um cruzador persegue um navio inimigo que se acha a 30 milhas de distância. Sabendo-se que a velocidade do cruzador é dupla da do navio, que distância deverá aquele percorrer até alcançar êste ?

13. Calcular a soma de todos os números de dois algarismos que divididos por 5 dão o resto 2.

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1955, p.53)

Anexo 21
Res. Ex.Prop.Parte I – Livro 1 – Matemática – 2.º Ciclo – 1.ª Série – 1955

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Cálculo aritmético aproximado

1. 3,1416 e 3,14. **2.** 3 e 2,718. **3.** 3,702 com êrro inferior a 0,0015. **4.** 3,704. **5.** 6,315; sendo 0,0005 o êrro sôbre cada parcela, o êrro da soma é inferior a 0,0015 ou 0,002. **6.** 7,731. **7.** 2,285 com êrro, por excesso, inferior a 0,001. **8.** 1,431 com êrro inferior a 0,0015. **9.** 1,110. **10.** 40,53 com êrro inferior a 0,04. **11.** 38,7 com êrro inferior a 1 unidade. **12.** 38,14 com êrro inferior a 0,09. **13.** 125,13. **14.** 43m². **15.** I) 6,76; II) 1103279,77; III) 9,934; IV) 441; V) 0,48;. **16.** 0,9000 com êrro inferior a 0,0003. **17.** 2,19 com êrro inferior a 0,025. **18.** 3,14 m. **19.** 0,64 m. **20.** 0,55. **21.** 0,119; 143,54; 3,89. **22.** 0,52 com êrro inferior a 0,05. **23.** 0,736 com êrro inferior a 0,007. **24.** 0,52. **25.** 1,83.

Progressões aritméticas

1. 36. **2.** 17. **3.** 0. **4.** 8. **5.** 48. **6.** $\frac{3}{4}$. **7.** 10. **8.** 15. **9.** 16. **10.** -3.

11. 7. **12.** $1\frac{1}{2}$. **13.** 5. **14.** 30. **15.** $\div\ 10.13.16\ldots.$ **16.** 85.
17. $\div\ 8.14.20.26.32.38.$ **18.** 5. **19.** -2. **20.** $\div -10.-6.-2.2.6.$ **21.** 3,5,7.
22. 1170 **23.** 45. **24.** -4165. **25.** 572. **26.** 12 ou 5. **27.** 10. **28.** I) $\frac{1-n}{2}$; II) $\frac{1+3n}{2}$. **29.** $\div -8.1.10.19.28.37.46.$ **30.** $\div\ 12.14\ldots18.20.22\ldots82.84.$
31. $\div\ 3x+y\,.\,2x+y\,.\,x+y\,.\,y\,.\,y-x.$ **32.** 21. **33.** $a_1=3$, $n=7$. **34.** $n=10$, $a_{10}=21$. **35.** $n=8$. $r=-4$. **36.** $a_1=16$, $a_7=10$. **37.** 182. **38.** $\div\ 4.10.16\ldots.$
39. Tem-se $\frac{12-3}{m+1} < \frac{1}{10^3}$ $\therefore$ $m > 10^3.4-1$ ou $m > 3999$. **40.** 9, 12, 15.
41. Designando-se os lados por $a-r$, $a, a+r$, respectivamente, o teorema de Pitágoras conduz ao seguinte resultado: $a=4r$. Os lados passam a ser representados por $3r$, $4r$, $5r$, e, sendo R o raio do círculo inscrito, tem-se:

$$R = \frac{S}{p} = \frac{6r^2}{6r} = r$$

42. 2,5,8. **43.** Tem-se: $(x-1)^2+(x+5)^2=2(x+3)^2$ $\therefore$ $x=2$. **44.** 3795.
45. De fato, designando-se por r a razão da progressão $\div\ a.b.c.d\ldots$, verifica-se que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer da sucessão b^2-a^2, c^2-b^2, d^2-c^2, ..., é constante e igual a $2r^2$. **46.** A diferença dos valores do trinômio, para $x=n$ e para $x=n+1$, é $(a+b)+2an$. Desse modo, as diferenças consideradas formam uma progressão aritmética cujo 1º termo é $a+b$, e cuja razão é $2an$ $(n=0,1\ldots)$. **47.** $3m$, $4m$ e $5m$. **48.** $a_1=4$, $r=8$.
49. Designando-se por a o 1º termo e por r a razão, da relação $a+B=a+nr+A$ tira-se $r=\frac{B-A}{n}$ (α). A relação $a+B=\frac{(2a+nr)(n+1)}{2}$, combinada com (α) dá: $a=\frac{(3-n)B+(n-1)A}{2n}$ (β). As relações (α) e (β) resolvem o problema. **50.** Designando-se por a o 1º termo e por r a razão, teem-se as equações:

$$na + r(2+4+\ldots+\overline{2n-2}) = A$$
$$na + r(1+3+\ldots+\overline{2n-1}) = B$$

donde se concluem:

$$r=\frac{B-A}{n}, \quad a = A - \frac{n-1}{n}B$$

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1955, p.95)

Anexo 22
Ex.Res.Ex.PA;Nota de rodapé.Cap.II – Livro 2 – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1.º Ano – 1955

Observando que as n expressões entre parêntesis são somas de têrmos eqüidistantes dos extremos (*) e, portanto, em virtude da propriedade anterior, iguais à soma dos extremos, podemos escrever

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

donde

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}} \qquad (8)$$

17. Exercício. *Achar a soma dos* 20 *primeiros têrmos da progressão* : 4 . 10 . 16 . . .

RESOLUÇÃO: Calculemos o vigésimo têrmo. Temos $a_1 = 4$, $n = 20$ e $r = 10 - 4 = 6$. Aplicando a fórmula (4), obtemos

$$a_{20} = a_1 + 19r = 4 + 19 \times 6 = 118$$

Aplicando a fórmula (8), obtemos a soma procurada

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(4 + 118)20}{2} = 1220$$

18. Observação. A aplicação da fórmula (8), como vimos, exige o conhecimento do têrmo a_n. Podemos, entretanto, por uma simples transformação, exprimir S_n em função de a_1, n e r. Para isso, substituamos em (8) a_n por seu valor dado em (4). Obtemos, após ligeira transformação, a fórmula

$$\boxed{S_n = na_1 + \frac{n(n - 1)}{2}r} \qquad (9)$$

Aplicando-a, por exemplo, à resolução do exercício anterior, obtemos

$$S_{20} = 20 \times 4 + \frac{20 \times 19}{2} \times 6 = 1220$$

(*) Se a progressão tem um número ímpar de têrmos, a soma dos meios representa o dôbro do têrmo do meio da progressão, sendo, também, em virtude do corolário anterior, igual à soma dos extremos.

(CARVALHO, T, M, 1955,p.50)

Anexo 23
Ex.Prop.PA.Cap.II – Livro 2 (Parte 1) – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1.º Ano – 1955

RESOLUÇÃO: Sejam a_1 e r, respectivamente, o primeiro têrmo e a razão da progressão. Em virtude do enunciado, podemos, utilizando a fórmula (9) do **n.º 18**, escrever

$$na_1 + \frac{n(n-1)r}{2} = n(2n+3)$$

ou, após as simplificações,

$$(2a_1 - r - 6) = n(4 - r)$$

Para que esta igualdade se verifique para qualquer valor de n, devemos ter

$$2a_1 - r - 6 = 0$$
$$4 - r = 0$$

donde resultam $r = 4$, $a_1 = 5$. A progressão pedida é, pois,

$$: 5 . 9 . 13 . \ldots\ldots$$

24. Exercícios para resolver.

1. Achar o décimo segundo têrmo da progressão $:11 . 16 . 21 \ldots$
Resp.: 66

2. Calcular o vigésimo têrmo da progressão $:5 . 9 . 13 \ldots$
Resp.: 81

3. Achar a razão de uma progressão aritmética de 11 têrmos cujo primeiro têrmo é 10 e cujo último têrmo é 40.
Resp.: 3

4. Numa progressão aritmética de 10 têrmos o primeiro têrmo é 5 e o último 77. Calcular a razão.
Resp.: 8

5. Achar o número de têrmos de uma progressão aritmética cuja razão é 4 e cujos têrmos extremos são 5 e 61.
Resp.: 15

6. Achar o número de têrmos de uma progressão aritmética cuja razão é 11, sabendo-se que o primeiro têrmo é 9 e o último têrmo 86.
Resp.: 8

7. Achar o primeiro têrmo de uma progressão aritmética de 14 têrmos cujo último têrmo é 41 e cuja razão é 4.
Resp.: — 11

8. Achar o primeiro têrmo de uma progressão aritmética de 10 têrmos, sabendo-se que o último têrmo é 12 e a razão — 5.
Resp.: 57

9. Quantos múltiplos de 7 há entre 20 e 1000?
Resp.: 140

Ex.Prop.PA.Cap.II – Livro 2 (Parte 2)

27. A soma do segundo e do quarto têrmos de uma progressão aritmética é 40. Achar a soma dos 10 primeiros têrmos dessa progressão, sabendo-se que a razão é $\frac{3}{4}$ do primeiro têrmo.

Resp.: 350

28. A soma dos cinco primeiros têrmos de uma progressão aritmética é 55. Escrever essa progressão, sabendo-se que o quinto têrmo excede o primeiro de 12. *Resp.:* $\div 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \ldots$

29. Sendo S a soma dos têrmos de uma progressão aritmética de n têrmos e de razão r, e a_1 o primeiro têrmo dessa progressão, demonstrar que se tem

$$a_1 = \frac{S}{n} - \frac{(n-1)r}{2}$$

30. Demonstrar que, se os números que medem os lados de um triângulo retângulo, formam uma progressão aritmética, êsses números são proporcionais a 3, 4 e 5.

31. Calcular a expressão geral da soma dos n primeiros têrmos da progressão $\div 4 \,.\, 4\frac{1}{2} \,.\, 5 \ldots\ldots$

Resp.: $\dfrac{n(n+15)}{4}$

32. Escrever a progressão, cuja soma dos n primeiros têrmos é $\dfrac{n(23-n)}{4}$, qualquer que seja n (inteiro e positivo).

Resp.: $\div 6 \,.\, 5\frac{1}{2} \,.\, 5 \ldots\ldots\ldots$

33. Calcular x de modo que os números x^2, $(x+a)^2$, $(x+b)^2$ formem uma progressão aritmética.

Resp.: $x = \dfrac{b^2 - 2a^2}{2(2a-b)}$

34. Calcular a soma dos n primeiros têrmos da progressão aritmética, cujo têrmo de ordem n é $5 + 2n$.

Resp.: $n(n+6)$

35. Calcular r de modo que a soma dos n primeiros têrmos da progressão $\div a \,.\, a+r \,.\, a+2r \ldots\ldots$ seja igual a $n^2 a$, qualquer que seja n (inteiro e positivo).

Resp.: $r = 2a$

36. Demonstrar que, em tôda progressão aritmética de número ímpar de têrmos, o têrmo central é a diferença entre a soma dos têrmos de ordem ímpar e a soma dos têrmos de ordem par.

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

25. Preliminares. Chama-se *progressão geométrica* ou *por quociente* uma sucessão de números (denominados *têrmos*), tais que a razão (por quociente) de cada têrmo, a partir do

(CARVALHO, T,M, 1955, p. 53-55)

Anexo 24
Ex.Res.PA. Cap. III. Livro 3 – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 1953

obtemos, com auxílio da fórmula (1),

$$l = a + (n - 1)r,$$
$$l = 2 + (12 - 1) \times 3,$$
$$l = 35.$$

2.º *Calcular o número de têrmos da progressão aritmética na qual o primeiro têrmo é 10, o último 60 e a razão 5.*

Temos
$$a = 10, \quad r = 5 \quad \text{e} \quad l = 60.$$

Aplicando a fórmula (4)
$$n = \frac{l - a}{r} + 1,$$
encontramos
$$n = \frac{60 - 10}{5} + 1,$$
$$n = 11.$$

3.º *Calcular a razão da progressão aritmética na qual a soma do terceiro têrmo com o sétimo é 30 e a soma do quarto com o nono é 36.*

Temos
$$a_3 = a + 2r$$
$$a_7 = a + 6r$$
$$a_4 = a + 3r$$
$$a_9 = a + 8r.$$

Somando a primeira igualdade com a segunda e depois a terceira com a quarta, vem
$$a_3 + a_7 = 2a + 8r$$
$$a_4 + a_9 = 2a + 11r.$$

Substituindo as somas indicadas nos primeiros membros pelos valores dados e invertendo as igualdades, temos
$$2a + 8r = 30$$
$$2a + 11r = 36.$$

Subtraindo a primeira igualdade da segunda, encontramos
$$3r = 6,$$
$$r = 2.$$

24. **Propriedade.** — *Em tôda progressão aritmética limitada a soma de dois têrmos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.*

Consideremos a progressão
$$\div a . b . c . d \ldots h \ldots h' \ldots m . n . p . l,$$
na qual os têrmos c e n são eqüidistantes dos extremos.

(MAEDER, A, M, 1953, p.34)

Anexo 25
Ex.Prop.PA.Cap.III. – Livro 3 (Parte 1) – Curso de Matemática – 1.º Livro – Ciclo Colegial – 1953

Notando que apenas a primeira raiz convém ao problema, pois o número de têrmos de uma progressão não pode ser negativo, segue-se que

$$n = 7.$$

Substituindo n por 7 na equação

$$l = 3n + 3,$$

vem

$$l = 24.$$

31. **EXERCÍCIOS.**

1. Dados: $a = 0$, $r = 4$ e $n = 15$, calcular l. R. 56.
2. Dados: $a = 35$, $r = -3$ e $n = 7$, calcular l. R. 17.
3. Dados: $r = 2$, $n = 8$ e $l = 16$, calcular a. R. 2.
4. Dados: $r = \frac{1}{2}$, $n = 10$ e $l = 5$, calcular a. R. $\frac{1}{2}$.
5. Dados: $n = 10$, $l = 15$ e $a = 42$, calcular r. R. -3.
6. Dados: $n = 15$, $l = 41$ e $a = 13$, calcular r. R. 2.
7. Dados: $l = 13$, $a = 3$ e $r = \frac{1}{2}$, calcular n. R. 21.
8. Dados: $l = 38$, $a = 5$ e $r = 3$, calcular n. R. 12.
9. Dados: $a = 2$, $l = 20$ e $n = 7$, calcular S. R. 77.
10. Dados: $a = 5$, $l = 65$ e $n = 21$, calcular S. R. 735.
11. Dados: $a = \frac{3}{2}$, $l = \frac{1}{6}$ e $n = 5$, calcular S. R. $\frac{25}{6}$.
12. Dados: $a = 2$, $n = 11$ e $r = 5$, calcular S. R. 297.
13. Dados: $a = 3$, $n = 24$ e $r = \frac{22}{23}$, calcular S. R. 336.
14. Dados: $a = -20$, $n = 37$ e $r = \frac{5}{2}$, calcular S. R. 925.
15. Dados: $a = 3$, $l = 198$ e $n = 40$, calcular r e S. R. 5 e 4 020.
16. Dados: $a = 2$, $l = 24$ e $r = 2$, calcular n e S. R. 12 e 156.
17. Dados: $a = 80$, $l = 50$ e $S = 455$, calcular n e r. R. 7 e -5.
18. Dados: $a = 71$, $n = 17$ e $r = -3$, calcular l e S. R. 23 e 799.
19. Dados: $a = 3$, $n = 30$ e $S = 1\,395$, calcular l e r. R. 90 e 3.
20. Dados: $a = 5$, $r = 7$ e $S = 3\,861$, calcular l e n. R. 229 e 33.

Ex.Prop.PA.Cap.III. – Livro 3 (Parte 2)

21. Dados: $l = 32$, $r = -8$ e $n = 6$, calcular a e S. R. 72 e 312.

22. Dados: $l = 70$, $n = 5$ e $S = 200$, calcular a e r. R. 10 e 15.

23. Dados: $l = 123$, $r = 5$ e $S = 1\,572$, calcular a e n. R. 8 e 24.

24. Dados: $n = 35$, $r = 12$ e $S = 7\,805$, calcular a e l. R. 19 e 427.

25. Calcular a diferença entre o décimo e o sexto têrmo de uma progressão aritmética, na qual a razão é 5. R. 20.

26. Calcular a diferença entre os têrmos extremos de uma progressão aritmética, na qual a razão é 3 e o número de têrmos 10.

27. Calcular a razão de uma progressão aritmética, na qual a soma do quinto com o sétimo têrmo é 80 e a soma do terceiro com o oitavo têrmo é 73. R. 7.

28. Em uma progressão aritmética, o primeiro têrmo é 5, o último 61 e a razão igual ao número de têrmos. Calcular a razão. R. 8.

29. Em uma progressão aritmética, o primeiro têrmo é 4, o último 74 e o número de têrmos é igual ao triplo da razão. Calcular a razão. R. 5.

30. Em uma progressão aritmética, a razão, o número de têrmos e o último têrmo são números consecutivos. Calcular o último têrmo dessa progressão, sabendo-se que o seu primeiro têrmo é -4. R. 5.

31. Quantos são os múltiplos de 7 compreendidos entre 10 e 100? R. 13.

32. Calcular a soma dos números pares desde 2 até 100. R. 2 550.

33. Calcular a soma dos números ímpares compreendidos entre 20 e 110. R. 2 925.

34. Calcular a soma dos 50 primeiros números ímpares. R. 2 500.

35. Calcular a soma dos 100 primeiros números pares, a partir de 2. R. 10 100.

36. Calcular a soma dos múltiplos de 7 inferiores a 50. R. 196.

37. Calcular a soma dos têrmos da progressão que se obtém, inserindo 4 meios aritméticos entre 5 e 40. R. 135.

38. A soma de três números em progressão aritmética é 15 e a soma dos seus quadros, 83. Quais são? R. 3, 5 e 7.

39. Estabelecer a expressão da soma dos n primeiros números naturais. R. $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

40. Estabelecer a expressão da soma dos n primeiros números pares, a partir de 2. R. $S = n(n+1)$.

(MAEDER, A, M, 1953, pp.41-42)

Anexo 26
Ex.Res.Ex.PA. Un. II. Livro 4 (Parte 1) – Matemática para o Primeiro Ano Colegial – 1960

Temos: $r = 3$, $n = 11$ e $a_n = 17{,}5$. Substituindo os valores na fórmula (I), obtemos a equação do primeiro grau em a_1:

$$17{,}5 = a_1 + 10 \times 3$$

donde resulta: $a_1 = 17{,}5 - 30 = -12{,}5$

3.º) Cálculo de r.

Exemplo:

Achar a razão de uma progressão aritmética, cujo primeiro têrmo é — 37 e o décimo sétimo é 11.

Temos: $a_1 = -37$, $n = 17$ e $a_n = 11$. Substituindo em (I) obteremos a equação:

$$11 = -37 + 16 \cdot r$$

donde:

$$r = \frac{37 + 11}{16} = 3$$

4.º) Cálculo de n.

Exemplo:

Numa progressão cujo primeiro têrmo é 3 e a razão, 2, qual o têrmo que vale 75?

Temos: $a_1 = 3$, $r = 2$ e $a_n = 75$. A fórmula (I) dá a equação em n:

$$75 = 3 + (n - 1) \times 2.$$

donde:

$$n - 1 = \frac{75 - 3}{2} = 36 \quad \text{e} \quad n = 37.$$

7. Propriedades das progressões aritméticas.

1.ª) **Em qualquer progressão aritmética, cada têrmo é média aritmética entre o antecedente e o conseqüente.**

Demonstração.

Consideremos os três têrmos consecutivos, a_{h-1}, a_h e a_{h+1}, da progressão geral

$$\div a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots a_{h-1} \,.\, a_h \,.\, a_{h+1} \ldots$$

Teremos, por definição de progressão aritmética:

$$a_h - a_{h-1} = r$$

e

$$a_{h+1} - a_h = r.$$

Ex.Res.Ex.PA. Un. II. Livro 4 (Parte 2)

De acôrdo com a segunda propriedade, todos os parênteses são iguais a $a_1 + a_n$. Como são n parênteses, conclui-se:

$$2S = (a_1 + a_n) \cdot n$$

donde:
$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

que é a fórmula procurada.

Exemplos:

1.º) Achar a soma dos cinco têrmos de uma progressão em que os extremos são *4* e *210*.

$$S = \frac{(4 + 210)\, 5}{2} = 535$$

2.º) Achar a soma dos n primeiros números pares.

Os números pares formam uma progressão aritmética de razão 2 onde se tem:

$$a_1 = 2 \text{ e } a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2 + 2n - 2 = 2n$$

Aplicando a fórmula (II), teremos, então:

$$S = \frac{(2 + 2n) \cdot n}{2} \quad \text{ou} \quad S = (n + 1)n$$

Assim, a soma dos sete primeiros números pares, por exemplo, será:
$$8 \times 7 = 56$$

9. Problemas. As fórmulas (I) e (II) formam o sistema de equações:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n - 1)\, r \\ S = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \end{cases}$$

onde figuram cinco elementos: a_1, a_n, r, n e S.

Assim, se forem dados três dêsses elementos, poderemos, por intermédio do mesmo sistema, calcular os outros dois.

(QUINTELLA, A, 1960, p.42-45)

Anexo 27
Ex.Prop.PA.Un,II. Livro 4 (Parte 1) – Matemática para o Primeiro Ano Colegial – 1960

6. Calcular o número de têrmos de uma progressão aritmética limitada, de razão -3, cujos têrmos extremos valem $4\frac{2}{3}$ e $-\frac{40}{3}$. *Resp.:* 7.
7. Calcular a razão de uma progressão aritmética de 7 têrmos, cujos extremos valem respectivamente 4 e 8. *Resp.:* 2/3.
8. O terceiro têrmo de uma progressão aritmética é 10 e o oitavo, 40. Achar a razão. *Resp.:* 6.
9. O quarto têrmo de uma progressão aritmética é 30 e o segundo, 18. Achar a soma dos 10 primeiros têrmos. *Resp.:* 390.
10. Numa progressão aritmética o quinto têrmo é 27 e o décimo, 52. Qual a razão? *Resp.:* 5.
11. Numa progressão aritmética o primeiro têrmo é 8 e a diferença entre o vigésimo e o décimo segundo é 16. Achar o terceiro têrmo. *Resp.:* 12.
12. Achar a soma dos 30 primeiros números ímpares. *Resp.:* 900.
13. A soma dos têrmos de uma progressão aritmética limitada é 105 e a soma do primeiro e último têrmos é 30. Achar o número de têrmos. *Resp.:* 7.
14. A soma dos têrmos de uma progressão aritmética de 7 têrmos é 77. O último têrmo é 10 vêzes o primeiro. Escrever a progressão. *Resp.:* 2 . 5 . 8.
15. Achar a soma dos 15 primeiros têrmos da progressão: 4 . 7 . 10... *Resp.:* 375.
16. Achar a soma dos 10 primeiros têrmos da progressão: $3 \,.\, 5\frac{2}{3} \ldots$ *Resp.:* 150.
17. Achar a soma dos 20 primeiros têrmos da progressão : $x \,.\, x-y \ldots$ *Resp.:* $20x - 190y$.
18. Achar a soma de 7 números em progressão aritmética, cujo primeiro têrmo é 3 e a razão, 5. *Resp.:* 126.
19. Sendo $a_1 = 7$, $n = 8$ e $a_n = 28$, achar r e S. *Resp.:* 3 e 140.
20. Sendo $a_1 = -5$, $n = 7$ e $r = 2$, achar a_n e S. *Resp.:* 7 e 7.
21. Sendo $a_n = 19$, $n = 6$ e $r = 3$, achar a_1 e S. *Resp.:* 4 e 69.
22. Sendo $S = 63$, $a_1 = 3$ e $r = 2$, achar a_n e n. *Resp.:* 15 e 7.
23. Sendo $S = 87$, $n = 6$ e $r = 3$, achar a_1 e a_n *Resp.:* 7 e 22.
24. Sendo $a_n = 44$, $n = 9$ e $S = 216$, achar a_1 e r. *Resp.:* 4 e 5.
25. Sendo $a_1 = 4$, $a_n = 19$ e $r = 3$, achar n e S. *Resp.:* 6 e 69.
26. Sendo $a_1 = -5$, $a_n = 7$ e $S = 7$, achar n e r. *Resp.:* 7 e 2.
27. Sendo $a_n = -17$, $r = -4$ e $S = -35$, achar a_1 e n. *Resp.:* 7 e 7.
28. Sendo $a_1 = 21$, $n = 5$ e $S = 35$, achar r e a_n. *Resp.:* -7 e -7.
29. Deduzir a fórmula para o cálculo de n, sendo dados a_1, r e S.

Resp.: $\dfrac{r - 2a_1 + \sqrt{8rS + (r-2a_1)^2}}{2r}$

Ex.Prop.PA.Un,II. Livro 4 (Parte 2)

63. Instituir a fórmula que dá a soma dos quadrados dos n primeiros números ímpares (E. Militar, 1939) (*) *Resp.:* $\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$.

64. Achar o quinto têrmo de $::3:9:\ldots$ *Resp.:* 243.

65. Numa progressão geométrica de razão 3, cujo primeiro têrmo é 4, qual o têrmo que vale 324? *Resp.:* 5.º

66. Qual o primeiro têrmo de uma progressão geométrica, cujo sétimo têrmo é 384 e a razão, 2? *Resp.:* 6.

67. Achar o sétimo têrmo de $::9b:6a^2b^2:\ldots$ *Resp.:* $\frac{64}{81}a^{12}b^7$

68. O terceiro têrmo de uma progressão geométrica de razão 3 é 45. Calcular o primeiro e o sexto têrmos. *Resp.:* 5 e 1 215.

69. Qual a razão de uma progressão geométrica de cinco têrmos, cujos extremos são 3 e 48? *Resp.:* 2.

70. Achar a expressão de têrmo geral das progressões:

a) $::6:4:\ldots$ *Resp.:* $a_n = \frac{2^n}{3^{n-2}}$

b) $::1:x:x^2:\ldots$ *Resp.:* $a_n = x^{n-1}$

c) $::\frac{n}{n+1}:\frac{n}{(n+1)^2}:\ldots$ *Resp.:* $a_n = \frac{n}{(n+1)^n}$

71. Calcular o primeiro têrmo e a soma de uma progressão geométrica de cinco têrmos, onde o último têrmo é 4 e a razão, 1/2. *Resp.:* 64 e 124.

72. Dados $a_1 = 7$, $n = 3$ e $S = 147$, calcular a_n e q. *Resp.:* 112 e 4.

73. Calcular a soma dos quatro primeiros têrmos da progressão geométrica, cujo têrmo geral é $a_n = 3 \cdot 2^n$. *Resp.:* 90.

74. Achar a soma ao infinito $50 + 10 + 2 + \ldots$ *Resp.:* 62,5.

75. Achar, aplicando a fórmula da soma, a geratriz da dízima 0,32626 ...

Resp.: $\frac{323}{990}$

76. Achar, aplicando a fórmula da soma, geratriz d dízima 2,3737 ...

Resp.: $\frac{235}{99}$

77. Inserir três meios geométricos entre 14 e 224. *Resp.:* 28, 56 e 112.

78. Achar os têrmos extremos de uma progressão geométrica de cinco têrmos sendo a soma dos têrmos $147\frac{8}{9}$ e a razão, 3. *Resp.:* 11/9 e 99.

(*) A. Quintella e V. Alves: *Questões de Concurso nas Escolas Superiores* (pág. 90) (Cia. Editora Nacional).

(QUINTELLA, A, 1960, p.61-67)

Anexo 28
Ex.Res.Ex.Eq.Trig. Nota de rodapé. Livro 1(Parte 1) – Matemática – 2.º Ciclo – 2.ª Série – 1957

Como todas as linhas trigonométricas de um arco se exprimem racionalmente em função da tangente da metade deste arco, (**60**), é preferivel muitas vezes substituir todas as que entram na equação em função dessa tangente que passará a ser a nova incógnita. Resolvida a equação resultante, tratada como equação algébrica, obteremos a tangente da metade do arco e consequentemente o arco.

Além dêstes dois métodos, que são gerais, utilizamos também propriedades já deduzidas e artifícios particulares de cálculo para resolver um ou outro tipo especial.

74 — Resolução e discussão de algumas equações trigonométricas. I) — *Resolver a equação*

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\cot^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\operatorname{cossec}^2 x} = -3$$

Se bem que no primeiro método que citamos, devamos exprimir todas as linhas trigonométricas por uma delas, julgamos que, em casos como o desta equação, em que se apresentam muitas linhas trigonométricas, é preferivel exprimir todas estas linhas primeiramente, em função do seno e do cosseno, simplificar, se possível, a equação resultante, e depois empregar na realidade o método citado.

A equação dada ficará então :

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = -3$$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = -3$$

$$1 - 1 - \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = -3$$

$$\frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 3$$

$$1 + \operatorname{sen}^2 x = 3\cos^2 x$$

$$\cos x \neq 0 \ \therefore \ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (38)$$

(38) $\cos x$ tem que ser diferente de zero porque na eliminação dos denominadores multiplicamos ambos os membros da equação por $\cos x$.

Ex.Res.Ex.Eq.Trig. – Livro 1(Parte 2)

$$1 + \text{sen}^2 x = 3(1 - \text{sen}^2 x)$$

$$4\,\text{sen}^2 x = 2$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\, x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Os menores arcos para os quais $\text{sen}\, x = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$ são $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. Logo, os valores de x, soluções da equação, estarão contidos nas fórmulas **(44)**:

$$\text{para } \alpha = \frac{\pi}{4} \qquad \begin{cases} a = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ a = (2k+1)\pi - \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{para } \alpha = -\frac{\pi}{4} \qquad \begin{cases} a = 2k\pi - \dfrac{\pi}{4} \\ a = (2k+1)\pi + \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Estes resultados podem ser resumidos na expressão

$$a = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

II) — *Resolver a equação* $2\cos^2 x = 1 - \text{sen}\, x$.

Exprimindo $\cos^2 x$ em função de $\text{sen}\, x$ temos:

$$2(1 - \text{sen}^2 x) = 1 - \text{sen}\, x$$

$$2\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x - 1 = 0 \qquad \text{sen}\, x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{4}$$

$$\text{sen}\, x = \frac{1 \pm 3}{4}.$$

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1957, pp. 188-189)

Anexo 29
Ex. Prop.Eq.Trig. – Livro 1 (Parte 1) – Matemática – 2.º Ciclo – 2.ª Série – 1957

2. — Sendo $\operatorname{tg} a = \frac{5}{12}$ e $\operatorname{tg} b = \frac{12}{5}$, calcular $\operatorname{tg}(a+b)$.

3. — Verificar as identidades

$$\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b$$
$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b$$

4. — Verificar as identidades

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5} + \operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

5. — Verificar a identidade

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}(60^\circ + a) + \operatorname{sen}(60^\circ - a) = \cos a$$

6. — Demonstrar que sendo $A + B + C = \pi$, temos $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$.

7. — Demonstrar que sendo $A + B + C = \pi$, temos $\cot A \cot B + \cot A \cot C + \cot B \cot C = 1$.

8. — Demonstrar que sendo $A + B + C = \pi$, temos $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{C}{2}$.

9. — Demonstrar que sendo $A + B + C = \pi$, temos

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 1.$$

10. — Demonstrar que sendo $A + B + C = \pi$, temos $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$.

11. — Demonstrar que sendo $A + B + C = \pi$, temos $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

12. — Demonstrar que sendo $A + B + C = \pi$, temos $\cos A + \cos B + \cos C = 1 = 4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$

Ex. Prop.Eq.Trig. – Livro 1 (Parte 2)

13. — Verificar as identidades:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} + \cot\frac{a}{2} = \frac{2}{\operatorname{sen} a}$$

$$\frac{\sqrt{1-\cos a}}{\sqrt{1+\cos a}} + \frac{\sqrt{1+\cos a}}{\sqrt{1-\cos a}} = \frac{2}{\operatorname{sen} a}$$

$$\cot 2a = \frac{1}{2}(\cot a - \operatorname{tg} a)$$

$$\sec 2a = \frac{\cot^2 a + 1}{\cot^2 a - 1}$$

$$(\cos a + \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)^2 = 4\cos^2\frac{a-b}{2}$$

14. — Calcular sen 15º, cos 15º e tg 15º, conhecendo $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

15. — Calcular sen 9º e cos 9º partindo de $\operatorname{sen} 18^\circ = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

16. — Sendo $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{5}$, calcular sen x, cos x e tg x.

17. — Verificar a identidade $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}}$.

18. — Sendo $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ calcular o seno, o cosseno e a tangente de $\dfrac{3\pi}{8}$.

19. — Calcular as expressões de sen $3a$ e cos $3a$ em função de sen a e cos a, respectivamente.

20. — Calcular tg $3a$ em função de tg a.

21. — Calcular $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$ conhecendo tg a.

22. — Sendo $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, calcular os senos e cossenos dos arcos $\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{16}, \ldots$

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1957, p.196-200)

Anexo 30
Res..Ex.Prop. – Livro 1 – Matemática 2.º Ciclo – 2.ª Série – 1957

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Pág. 108

1. 10 ; **2.** 0,6 ; **3.** $\sqrt{85}$; **4.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; **5.** $\sqrt{61}$; **6.** $3\sqrt{2}$; **7.** $\sqrt{13+6\sqrt{2}}$; **8.** $2(1+\sqrt{6})$; **9.** $\sqrt{25+12\sqrt{2}}$; **10.** $\sqrt{25-12\sqrt{2}}$; **11.** $3(1+\sqrt{2})$; **12.** 8.

Pág. 112

2. 10,5 ; **3.** $-6,9$

Pág. 157

1. 36° e 40g ; **2.** 1,8587rd ; **3.** 2,5rd ; **4.** $\frac{\pi}{4}$; **5.** 22°30′ ; **6.** 150g ; **7.** 210° e 570° ; **8.** $2\pi(k-2)$; **9.** $2k\pi - \frac{\pi}{3}$; **10.** A função é negativa de 0° a 45° e de 225° a 360° ; é positiva de 45° a 225°. Para $x = 45°$ e $x = 225°$ a função é nula ; **11.** Os arcos de 0 a $\frac{\pi}{4}$, de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{4}$, de π a $\frac{5\pi}{4}$, de $\frac{3\pi}{2}$ a $\frac{7\pi}{4}$. Para $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$, a função é nula. **12.** $(2k-1)\frac{\pi}{8}$; **13.** $\frac{\pi}{5}(k-1)$; **14.** 45°, 225°, 405°, 585° ; **15.** $(4k+1)\frac{\pi}{4}$; **16.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **17.** 70°, 130°, 190°, 250°, 310° ; **18.** $(2k-1)\frac{\pi}{12}$; **19.** -1 ; **20.** $-\operatorname{sen}^2 x$; **21.** $1 - \frac{2}{\cos^2 x}$; **22.** $\frac{2+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; **25.** $\pm\frac{4}{5}$, $\pm\frac{3}{4}$, $\pm\frac{4}{3}$, $\pm\frac{5}{4}$, $\frac{5}{3}$; **26.** $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, 2, $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$; **27.** $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{13}{5}$, $\frac{13}{12}$; **28.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 2, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; **29.** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$; **30.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $2-\sqrt{3}$; **31.** $\cos^2 a - \cos^2 b$ ou $\operatorname{sen}^2 b - \operatorname{sen}^2 a$; **32.** $\frac{\pm\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x}$, $\frac{1}{\sec x}$, $\pm\sqrt{\sec^2 x - 1}$; **33.** $\frac{1}{\operatorname{cossec} x}$, $\frac{\pm\sqrt{\operatorname{cossec}^2 x - 1}}{\operatorname{cossec} x}$, $\frac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cossec}^2 x - 1}}$; **34.** $\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$, $\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$, $\frac{1}{\cot x}$; **36.** $\frac{m}{\pm\sqrt{m^2+n^2}}$, $\frac{n}{\pm\sqrt{m^2+n^2}}$; **37.** As linhas trigonométricas são si-

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1957, p. 229-231)

Anexo 31
Ex.Res.Ex.Eq.Trig. – Livro 2 (Parte 1) – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 2.º Ano – 1956

2. Exercício. *Resolver a equação* $\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$.

RESOLUÇÃO: Tomando $\operatorname{tg} x$ para incógnita auxiliar, a equação anterior fornece as duas seguintes soluções:

$$\operatorname{tg} x = +1 \qquad (1)$$
$$\operatorname{tg} x = -1 \qquad (2)$$

Como $\operatorname{tg} 45^\circ = +1$ (**Cap. VII, n.º 64**) e, portanto, $\operatorname{tg}(-45^\circ) = -1$ (**Cap. VII, n.º 46**), podemos tomar para as equações (1) e (2), respectivamente, as soluções particulares $x = 45^\circ$ e $x = -45^\circ$.

As demais soluções são dadas pelas fórmulas (**Cap. VII, n.º 42**)

$$x = 180^\circ k + 45^\circ \quad \text{e} \quad x = 180^\circ k - 45^\circ$$

3. Exercício. *Resolver a equação*

$$a \cos x + b \operatorname{sen} x = c \qquad (3)$$

RESOLUÇÃO. 1. *Primeiro método:* Substituamos $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ por suas expressões em função de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (**Cap. VIII, n.º 17**). Fazendo, para simplicidade de notação, $t = tg \frac{x}{2}$, obtemos

$$a \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + b \frac{2t}{1 + t^2} = c$$

ou, eliminando os denominadores e ordenando a equação resultante em relação a t

$$(c + a)t^2 - 2b\,t + c - a = 0 \qquad (4)$$

Como a tangente pode assumir qualquer valor real, para que a equação dada tenha solução é preciso que a equação (4) tenha raizes reais, ou (*)

$$4b^2 - 4(c + a)(c - a) \geqq 0$$

o que dá, feitas as simplificações, a condição

$$a^2 + b^2 \geqq c^2 \qquad (5)$$

(*) Para que a equação do 2.º grau $ax^2 + bx + c = 0$ de coeficientes a, b, c, reais tenha raizes reais é preciso que $b^2 - 4ac \geq 0$.

Ex.Res.Ex.Eq.Trig. – Livro 2 (Parte 2)

Satisfeita esta condição, resolve-se a equação (4), obtendo-se um ou dois valores reais para t, conforme seja $a^2 + b^2 = c^2$ ou $a^2 + b^2 > c^2$. Conhecidos êstes, determinam-se os valores dos arcos correspondentes.

EXEMPLO NUMÉRICO: *Resolver a equação*

$$\cos x + \text{sen}\, x = 1$$

RESOLUÇÃO: Como, nêste caso, $a = b = c = 1$, a condição (5) é verificada e, portanto, a equação tem solução. Fazendo as substituições indicadas no exemplo anterior, obtemos a equação $$2t^2 - 2t = 0$$

que, resolvida, dá $t' = 1$ e $t'' = 0$, ou

$$\text{tg}\,\frac{x}{2} = 1 \qquad (6)$$

$$\text{tg}\,\frac{x}{2} = 0 \qquad (7)$$

Sendo 45° o arco do 1.° quadrante cuja tangente é 1 (**Cap. VII, n.° 64**), todas as soluções da equação (6) são da forma

$$\frac{x}{2} = 180^\circ k + 45^\circ \text{ ou } x = 360^\circ k + 90^\circ$$

Anàlogamente, sendo 0° o arco do 1.° quadrante cuja tangente é zero (**Cap. VII, n.° 26**), todas as soluções da equação (7) são da forma

$$\frac{x}{2} = 180^\circ k \text{ ou } x = 360^\circ k$$

As soluções da equação dada são, portanto,

$$x = 360^\circ k + 90^\circ \quad \text{e} \quad x = 360^\circ k$$

2. *Segundo método:* Quando os coeficientes a, b, c não são números simples, o processo anterior é muito trabalhoso, convindo, então, adotar um método diferente que passaremos a explicar.

(CARVALHO, T, M, 1956, pp. 214-215).

Anexo 32
Ex.Prop.Eq.Trig.- Livro 2 (Parte 1) – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 2.º Ano – 1956

Como as menores determinações (em valor absoluto) de $arc\ sen \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $arc\ sen \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são 45° e — 45°, respectivamente, as soluções procuradas são

$$x = 180^\circ k + (-1)^k 45^\circ \quad \text{e} \quad x = 180^\circ k - (-1)^k 45^\circ$$

ou simplesmente $x = 180^\circ k \pm 45^\circ$.

8. Exercício. *Resolver a equação*

$$\text{sen } 3x + \text{sen } x = \text{sen } 2x$$

RESOLUÇÃO: Transformando em produto a soma de senos do primeiro membro (**Cap. VIII, n.º 21**), vem

$$2\text{sen } 2x \cdot \cos x = \text{sen } 2x$$

Dividindo ambos os membros da equação por sen$2x$, separamos uma solução

$$\text{sen } 2x = 0 \qquad (12)$$

e a equação fica $2 \cos x = 1$, fornecendo, portanto, outra solução

$$\cos x = \frac{1}{2} \qquad (13)$$

Sendo, respectivamente, 0° e 60° as menores determinações positivas de $arc\ sen\ 0$ e $arc\ cos \frac{1}{2}$, as equações (12) e (13) fornecem, respectivamente, as soluções

$$2x = 180^\circ k \quad \therefore \quad x = 90^\circ k$$
$$x = 360^\circ k \pm 60^\circ$$

9. Exercícios para resolver.

Resolver as equações:

1. $3\text{tg}^2 x - 4 \text{ sen}^2 x = 1.$

   Resp.: $x = 180^\circ \pm 45^\circ$

2. $2 \sec x = \text{tg } x + \text{cotg } x.$

   Resp.: $x = 180^\circ k + (-1)^k 30^\circ$

Ex.Prop.Eq.Trig.- Livro 2 (Parte 2)

3. $\sqrt{3}\sec x = 2 \operatorname{tg} x.$

Resp.: $x = 180^\circ k + (-1)^k 60^\circ$

4. $\operatorname{cotg}^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 3.$

Resp.: $x = 180^\circ k \pm 145^\circ.$

5. $2 \operatorname{cotg} x = \operatorname{cosec} x.$

Resp.: $x = 360^\circ k \pm 60^\circ$

6. $\dfrac{1}{\cos^2 x} + 1 = 3 \operatorname{tg}^2 x.$

Resp.: $x = 180^\circ k \pm 45^\circ$

7. $2 \operatorname{tg} x - 2\cos x = \sec x\,(2 \operatorname{sen}^2 x - 1).$

Resp.: $x = 180^\circ k + (-1)^k 30^\circ$

8. $\cos^2 x - 2 = \operatorname{sen}^2 x - 5\cos x.$

Resp.: $x = 360^\circ k \pm 60^\circ$

9. $6 \operatorname{sen}^2 x + 17 \cos x = 13.$

Resp.: $x = 360^\circ k \pm 60^\circ$

10. $4 \operatorname{cosec} x + 2 \operatorname{sen} x = 9.$

Resp.: $x = 180^\circ k + (-1)^k 30^\circ$

11. $5 \operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x = 6.$

Resp.: $x = 180^\circ k + 45^\circ$
$x = \operatorname{arc\,tg} 5$

12. $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Resp.: $x = 180^\circ k + 60^\circ$
$x = 180^\circ k + 30^\circ$

13. $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x = 1.$

Resp.: $x = 360^\circ k + 90^\circ$
$x = 360^\circ k - 30^\circ$

14. $\cos^2 x + 5 \operatorname{sen} x \cos x = 3.$

Resp.: $x = 180^\circ k + 45^\circ.$
$x = \operatorname{arc} . \operatorname{tg} \dfrac{2}{3}$

15. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} + 1 = \operatorname{cotg}^2 x.$

Resp.: $x = 180^\circ k + (-1)^k 30^\circ$
$x = 360^\circ k - 90^\circ$

16. $\operatorname{cotg}^2 x + \dfrac{3}{\operatorname{cotg}^2 x} = 4.$

Resp.: $x = 180^\circ k \pm 30^\circ$
$x = 180^\circ k \pm 45^\circ$

(CARVALHO, T, M, 1956, p. 220-222)

Anexo 33
Ex.Res.Ex.Eq.Trig. – Livro 3 (Parte 1) – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – 1959

das as linhas trigonométricas de um arco podem ser expressas *racionalmente* em função daquela tangente.

Há, ainda, outros modos de resolver as equações trigonométricas, mediante artifícios de cálculo, conforme o tipo especial que se apresenta.

A seguir, resolveremos algumas equações trigonométricas simples.

208. **Exemplo I.** — *Procurar o menor valor de* x *que satisfaz a equação*

$$\operatorname{sen} x = \cos x.$$

Tendo em vista as relações das linhas trigonométricas dos arcos complementares, podemos escrever

$$\cos(90^\circ - x) = \cos x,$$

de onde se deduz

$$90^\circ - x = x.$$

Resolvendo essa equação, vem

$$2x = 90^\circ,$$

$$x = 45^\circ.$$

209. **Exemplo II.** — *Resolver a equação*

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1.$$

Exprimindo $\cos x$ em função de $\operatorname{sen} x$, temos

$$\operatorname{sen} x + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = 1.$$

Isolando o radical no primeiro membro, vem

$$\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = 1 - \operatorname{sen} x.$$

Elevando ao quadrado, temos

$$1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x.$$

ou

$$1 - 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - 1 + \operatorname{sen}^2 x = 0.$$

Reduzindo os têrmos semelhantes, resulta

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x = 0,$$

Ex.Res.Ex.Eq.Trig. – Livro 3 (Parte 2)

ou, eliminando o fator comum,

$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0.$$

Para resolver essa equação, que é incompleta do 2.º grau, podemos transformá-la na seguinte:

$$\operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - 1) = 0. \qquad (1)$$

Anulando o primeiro fator, vem

$$\operatorname{sen} x = 0,$$

e portanto,

$$x = 0^\circ.$$

Anulando, agora, o segundo fator da equação (1), temos

$$\operatorname{sen} x - 1 = 0,$$

de onde se deduz

$$\operatorname{sen} x = 1.$$

Notando que $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$, vem

$$x = 90^\circ.$$

Obtemos, dêsse modo, as raízes

$$x = 0^\circ \quad \text{e} \quad x = 90^\circ,$$

as quais, como é fácil verificar, satisfazem a equação proposta.

A equação dada admite, pois, infinidade de soluções, filiadas aos dois grupos

$$\begin{cases} x = 360^\circ n, \\ x = 360^\circ n + 90^\circ. \end{cases}$$

Observação: empregamos a substituição irracional

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x},$$

por isso que a resolução da equação resultante não apresenta dificuldade.

210. **Exemplo III.** — *Resolver a equação*

$$\operatorname{tg} x + \cot x = 2.$$

(MAEDER, A, M, 1959, pp. 198-199)

Anexo 34
Ex.PropEq.Trig.. – Livro 3 (Parte 1) – Curso de Matemática – 2.º Livro – Ciclo Colegial – 1959

Mas, para que se verifique essa condição devemos ter

$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2 m \leq 1. \qquad (3)$$

Por outro lado, notando que

$$\cos^2 m = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 m},$$

temos, em vista da expressão (1),

$$\cos^2 m = \frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}},$$

de onde se deduz

$$\cos^2 m = \frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

Substituindo em (3), vem

$$\frac{c^2}{a^2}\times\frac{a^2}{a^2+b^2}\leq 1,$$

ou, eliminando o fator comum,

$$\frac{c^2}{a^2+b^2}\leq 1,$$

isto é,

$$c^2 \leq a^2+b^2.$$

Assim, para que a equação

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c,$$

admita solução, é necessário e suficiente que

$$c^2 \leq a^2+b^2.$$

216. Exercícios propostos.

Achar os valores de x, no intervalo de 0° a 90°, que satisfazem as equações seguintes:

1. $\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x = 0.$ R. $x = 0°.$
2. $\operatorname{tg} x - \cot x = 0.$ R. $x = 45°.$
3. $\cos x - \cot x = 0.$ R. $x = 90°.$

Ex.PropEq.Trig.. – Livro 3 (Parte 2)

4. $\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0.$ R. $x = 90°.$

5. $\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0.$ R. $x = 45°.$

6. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = 0.$ R. $x = 0°.$

7. $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0.$ R. $x = 0°,\ x = 60°.$

8. $\cos x - \operatorname{sen} 2x = 0.$ R. $x = 30°,\ x = 90°.$

9. $2 \operatorname{sen} x - \cos x = 0.$ R. $x = 26°34'.$

10. $\operatorname{sen} x - \cos x = 1.$ R. $x = 90°.$

Achar os valores de x, no intervalo de 0° a 360°, que satisfazem as equações seguintes:

11. $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x = 0.$ R. $x = 22°30',\ x = 180°.$

12. $\operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} 5x = 0.$ R. $x = 15°,\ x = 180°.$

13. $3 \operatorname{tg} x + 3 \cot x = 4\sqrt{3}.$ R. $\begin{cases} x = 30°, & x = 210°. \\ x = 60°, & x = 240°. \end{cases}$

14. $\cos x + \operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{tg} x = 2.$ R. $x = 60°.$

15. $\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 2.$ R. $x = 60°.$

16. $8 \operatorname{sen} x - 4 \cos^2 x = 1.$ R. $x = 30°,\ x = 150°.$

17. $\operatorname{tg} x + \cot x = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos x}.$ R. $x = 45°.$

18. $1 + \sec^2 x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2 \cos x}.$ R. $x = 45°,\ x = 315°.$

19. $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0.$ R. $x = 0°,\ x = 180°.$

20. $2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \cos^2 x + \dfrac{1}{2} = 0$ R. $x = 45°,\ x = 315°.$

21. Resolva a equação

$$\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}(x + a) \,.\, \operatorname{tg}(x - a).$$

(Escola Nacional de Engenharia, 1958).

R. $x = \pi n \pm \dfrac{\pi}{4}.$

22. Resolva a equação

$$\operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen} 5x + 2 \operatorname{sen}^2 x = 1.$$

(Escola Fluminense de Engenharia, 1958).

R. $x = \dfrac{2\pi n}{7} + \dfrac{\pi}{14}.$

(MAEDER, A, M, 1959, p. 205-207)

Anexo 35
Ex.Res.Ex.Eq.Trig. – Livro 4 (Parte 1) – Matemática – Segundo Ano Colegial – 1957

Resolvendo a equação do segundo grau, em sen x, obtemos:

$$\text{sen } x = 1 \quad \text{e} \quad \text{sen } x = \frac{3}{2}.$$

Convindo apenas a raiz 1, temos:

$$x = \text{arc sen } 1 \quad \text{ou} \quad x = k.\ 360^\circ + 90^\circ$$

4. Segundo caso: **A equação contém várias funções circulares do arco incógnito.** O método geral consiste em reduzir ao caso anterior, tomando uma certa função circular por incógnita auxiliar e substituindo, em função dela, as várias outras.

A dificuldade única que se apresenta é a *escolha da incógnita auxiliar* a adotar, com o *fim principal* de evitar equações algébricas irracionais, cujas raízes, na maioria dos casos, exigem verificações trabalhosas.

É útil assinalar que tôdas as funções podem ser substituidas em função racional do seno e do co-seno; todavia, nos casos simples, pode ser tomada imediatamente uma outra função como incógnita auxiliar.

Primeiro exemplo: Resolver a equação **tan x + 4 cot x = 5.**

Temos (Quadro I):

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

Substituindo na equação, a incógnita auxiliar será tan x:

$$\tan x + \frac{4}{\tan x} = 5$$

Donde a equação do segundo grau em tan x:

$$\tan^2 x - 5 \tan x + 4 = 0,$$

cujas raízes são: $\tan x' = 1$ e $\tan x'' = 4$

De tan x′ = 1, conclui-se: $x' = k.\ 180^\circ + 45^\circ$

De tan x″ = 4, conclui-se: $x'' = k.\ 180^\circ + 75^\circ\ 57'\ 50''$

Ex.Res.Ex.Eq.Trig. – Livro 4 (Parte 2)

Segundo exemplo: Resolver $\mathbf{tan^2}\, x + \mathbf{sec}\, x = 0$

Temos (Quadro I): $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \;\therefore\; \tan^2 x = \sec^2 x - 1$

Substituindo na equação:

$$\sec^2 x + \sec x - 1 = 0$$

Donde:

$$\sec x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 \pm 2{,}236}{2}$$

As raizes são: $0{,}618$ e $-1{,}618$.

A primeira raiz não convém, pois a secante tem valor absoluto maior que um.

Temos à raiz única: $\sec x = -1{,}618$

A menor determinação de x é do 2.º quadrante, a tábua dá o associado x_1, do 1.º quadrante, que é o suplemento, e temos:

$$\log \sec x_1 = \log 1{,}618 = 0{,}2089 \text{ e } \log \cos x_1 = \bar{1}{,}7910.$$

$$\therefore\; x_1 = 51^\circ\, 50'$$

A menor determinação de x será: $x = 180^\circ - 51^\circ\, 50' = 128^\circ\, 10'$.

A solução geral será: $x = k.\, 360^\circ \pm 128^\circ\, 10'$

Terceiro exemplo: ***Equação do primeiro grau em seno e co-seno.***

$$\cos x + \sqrt{3}\, \text{sen}\, x = 1. \qquad \text{(E. M. — 1938)}$$

Resolução.

Evitam-se radicais, transformando o primeiro membro em produto, por intermédio do ângulo auxiliar.

As transformações são as seguintes:

a) Divide-se a equação pelo coeficiente $\sqrt{3}$:

$$\text{sen}\, x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) Faz-se:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \alpha} \qquad (1)$$

(QUINTELLA, A, 1957, p. 160-161)

Anexo 36
Ex.Prop.Eq.Trig. – Livro 4 (Parte 1) – Matemática – Segundo Ano Colegial – 1957

De $y = 0$, ou $\tan \frac{x}{2} = 0$, conclui-se:

$$\frac{x}{2} = k.\ 180^\circ \quad \therefore \quad x = \boldsymbol{k.\ 360^\circ} \qquad (1)$$

De $y = \pm\sqrt{3}$ ou $\tan \frac{x}{2} = \pm\sqrt{3}$, conclui-se:

$$\frac{x}{2} = k.\ 180^\circ \pm 60^\circ \quad \therefore \quad x = \boldsymbol{k.\ 360^\circ \pm 120^\circ}$$

Observação: Poderíamos resolver a equação, substituindo $\tan x$, o que daria:

$$2 \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \ \text{ e } \ 2 \operatorname{sen} x . \cos x + \operatorname{sen} x = 0 \ (\cos x \neq 0).$$

Donde: $\operatorname{sen} x\,(2 \cos x + 1) = 0$

Obteríamos, então:

1.º) $\operatorname{sen} x = 0 \quad \therefore \quad x = k.\ 180^\circ \qquad (1)$

2.º) $2 \cos x + 1 = 0 \quad \therefore \quad \cos x = -\frac{1}{2} \ \text{ e } \ x = k.\ 360^\circ \pm 120^\circ$

Comparando as soluções (1), obtidas pelos dois métodos, observa-se que o primeiro exclui a solução dos arcos côngruos de 180°, dando apenas os de 360°. Isto ocorre porque quando a solução é da forma $k.\ 360^\circ + 180^\circ$, a tangente da metade não é definida.

Ao aplicar o método da tangente da metade é, pois, indispensável, verificar se o arco $k.\ 360^\circ + 180^\circ$ é raiz.

EXERCÍCIOS

Resolver as equações:

1. $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ *Resp.:* $k.\ 360^\circ$, $k.\ 360^\circ \pm 120^\circ$
2. $3\,(1 - \cos x) = \operatorname{sen}^2 x$ *Resp.:* $k.\ 360^\circ$.
3. $\sec^2 x + \tan x = 1$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ + 135^\circ$; $k.\ 180^\circ$.
4. $4 \operatorname{sen}^2 x - 8 \operatorname{sen} x + 3 = 0$ *Resp.:* $k.\ 360^\circ + 30^\circ$, $k.\ 360^\circ + 150^\circ$
5. $\csc x - \sec x = 0$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ + 45^\circ$
6. $\sec x - \cos x = \operatorname{sen} x$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ$, $k.\ 180^\circ + 45^\circ$
7. $3 \tan^2 x + 5 = 7 \sec x$ *Resp.:* $k.\ 360^\circ \pm 60^\circ$
8. $2 \cos^2 x + 7 \operatorname{sen} x = 5$ *Resp.:* $k.\ 360^\circ + 30^\circ$, $k.\ 360^\circ + 150^\circ$.

Ex.Prop.Eq.Trig. – Livro 4 (Parte 2)

9. $\tan x + \cot x = 2$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ + 45^\circ$.
10. $3 \tan^4 x - 4 \tan^2 x + 1 = 0$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ \pm 45^\circ$; $k.\ 180^\circ \pm 30^\circ$
11. $\text{sen}\ x . \cos x = \tan x$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ$
12. $2 \text{sen}^4 x - 3 \text{sen}^2 x + 1 = 0$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ + 90^\circ$; $k.\ 180^\circ \pm 45^\circ$
13. $\sqrt{3} . \text{sen}\ x + \cos x = \sqrt{3}$ *Resp.:* $k.\ 360^\circ + 30^\circ$; $k.\ 360^\circ + 90^\circ$
14. $\text{sen}\ x + 3 \cos x = 3$ *Resp.:* $k.\ 360^\circ$; $k.\ 360^\circ + 36^\circ 52'$
15. $\cos 3x + \cos x = \cos 2x$ *Resp.:* $k.\ 360^\circ \pm 60^\circ$; $k.\ 90^\circ + 45^\circ$
16. $\text{sen}\ 2x + \text{sen}\ x = \cos 2x + \cos x$ *Resp.:* $k.\ 360^\circ + 180^\circ$, $k.\ 120^\circ + 30^\circ$.
17. $\text{sen}\ 7x - \text{sen}\ x = \text{sen}\ 3x$ *Resp.:* $k.\ 60^\circ$, $k.\ 90^\circ \pm 15^\circ$
18. $2 \cos^2 x = 3 \cos 2x$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ \pm 30^\circ$
19. $\tan 2x = 3 \tan x$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ$; $k.\ 180^\circ \pm 30^\circ$
20. $\tan x = 2 \text{sen}\ x$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ$; $k.\ 360^\circ \pm 60^\circ$
21. $\cos 2x + 2 \text{sen}^2 \frac{x}{2} = 1$ *Resp.:* $k.\ 360^\circ$; $k.\ 360^\circ \pm 120^\circ$
22. $\text{sen}\ x - \cos 2x = \text{sen}\ 3x$ *Res.:* $k.\ 90^\circ + 45^\circ$; $k.\ 360^\circ + 330^\circ$, $k.\ 360^\circ + 210^\circ$
23. $2 \cos x + 3 = 4 \cos \frac{x}{2}$ *Resp.:* $k.\ 720^\circ \pm 120^\circ$
24. $\cos x + \cos 2x = 2$ *Resp.:* $k.\ 360^\circ$
25. $\text{sen}\ 3x = \text{sen}\ x$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ$, $k.\ 90^\circ + 45^\circ$
26. $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ$, $k.\ 60^\circ$ $k.\ 90^\circ$
27. $\text{sen}\ 5x = \text{sen}\ 7x$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ$; $k.\ 30^\circ + 15^\circ$
28. $\text{sen}\ x + \text{sen}\ 2x + \text{sen}\ 3x = 0$ *Resp.:* $k.\ 90^\circ$; $k.\ 360^\circ \pm 120$
29. $\text{sen}\ 2x = \cos 3x$ *Resp.:* $k.\ 360^\circ - 90$; $k.\ 72^\circ + 18^\circ$
30. $\tan (x + 45^\circ) = 1 + \text{sen}\ 2x$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ - 45^\circ$
31. $\text{sen}\ x + \text{csc}\ x = 2$ *Resp.:* $k.\ 360^\circ + 90^\circ$
32. $\tan x + \cot x = 2$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ + 45^\circ$
33. $\text{sen}\ x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ *Resp.:* $k.\ 360^\circ - 15^\circ$; $k.\ 360^\circ + 75^\circ$
34. $\tan x = 4 . \text{sen}^2 x$ *Resp.:* $k.\ 180^\circ$; $k.\ 180^\circ + 15^\circ$; $k.\ 180^\circ + 75^\circ$
35. $\tan x = - \cot x$ *Resp.:* Impossível.

(QUINTELLA, A, 1957, p.164-165)

Anexo 37
Intr.Limite. Livro 1 (Parte 1) – Matemática – 2.º Ciclo – 3.ª Série – 1956

Se fizermos, agora, a secante M_0M_1 girar em tôrno de M_0 de forma a M_1 tender a confundir-se com M_0, essa secante tenderá para a tangente à curva em M_0, e o ângulo β da secante com o eixo dos x tenderá para o ângulo α da tangente com o eixo dos x. Poderemos, então, escrever:

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = \operatorname{tg} \alpha$$

O valor $\operatorname{tg} \alpha$ é denominado *declividade* ou *inclinação* da tangente à curva com o eixo dos x no ponto $M_0(x_0, y_0)$.

3 — Limite de variáveis e de funções; limites infinitos. Propriedades fundamentais. Exemplos elementares de descontinuidade de uma função em um ponto. Descontinuidade das funções racionais fracionárias.

26 — Limite de uma variável. Seja C o *campo de variabilidade* de x, isto é, seja C o conjunto de números que x poderá representar.

Diz-se que x *tende* para um número x_0, quando é possível atribuir-lhe valores satisfazendo à condição:

$$| x - x_0 | < \varepsilon \qquad (1)$$

para todo e qualquer número aritmético ε, tão pequeno quanto quisermos, ou, em outras palavras, quando os valores de x podem tornar-se tão próximos de x_0 quanto desejarmos.

O número x_0 poderá pertencer, ou não, a C. No primeiro caso, diz-se ser possível atingir o limite.

Admitamos, por exemplo, o *campo de variabilidade* C constituido pelo conjunto de números racionais do *intervalo aberto* (1,3), isto é, x só poderá ser um número racional satisfazendo à condição: $1 < x < 3$.

Examinemos três hipóteses diferentes:

1.º) $x_0 = 2$. É evidente a possibilidade da condição:

$$| x - 2 | < \varepsilon$$

pois, como se sabe, existem, no intervalo, números racionais tão próximos de 2 quanto desejarmos.

Intr.Limite. Livro 1 (Parte 2)

Poderemos portanto fazer x *tender* para 2 e tomar, também, $x = 2$, porquanto 2 é um número do intervalo.

2ª) $x_0 = \sqrt{3}$, isto é, x é um *número irracional* compreendido entre 1 e 2.

Concluiremos ainda pela possibilidade da condição:

$$| x - \sqrt{3} | < \varepsilon$$

pois existem números racionais que diferem do irracional dado, tão pouco quanto quisermos.

Vemos, assim, que x poderá *tender* para $\sqrt{3}$, mas sem atingir o limite, porquanto, por hipótese, é sempre racional.

3ª) $x = 1$, isto é, tomámos, agora, a extremidade inferior do intervalo.

A condição:

$$| x - 1 | < \varepsilon$$

será evidentemente satisfeita, pois, no intervalo, existem números tão próximos da extremidade 1 quanto desejarmos. Mas, tal como no caso anterior, êsse limite não poderá ser atingido, embora se trate, agora, de um número racional. Bastará ver que admitimos inicialmente: $1 < x < 3$.

27 — Ponto de acumulação. É usual chamar-se o limite x_0 de *ponto de acumulação* ou de *ponto limite* de C, porquanto, em tôrno do valor x_0, existe sempre uma infinidade de valores de x, isto é, uma infinidade de números do conjunto C.

É prático e comum escrever $x \to x_0$, para afirmar que x tende para x_0.

28 — Limites infinitos. Em particular, quando os valores assumidos por uma variável são tais que é sempre satisfeita a condição

$$| x | > E \qquad (2)$$

para todo e qualquer número aritmético E, tão grande quanto se imagine, diz-se, por extensão, que o *limite de x é infinito.*

Em particular, para valores positivos de x, escreveremos:

$$x \to +\infty$$

e, para valores negativos:

$$x \to -\infty.$$

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H,L; NETTO, D, 1956, p. 30-31)

Anexo 38
Ex.Res.Ex.Limite. Livro 1 (Parte 1) – Matemática – 2.º Ciclo – 3.ª Série – 1956

Assim sendo, só deveremos deixar de especificar o limite, quando fôr indiferente considerá-lo à direita ou à esquerda.

33 — Propriedades fundamentais. De um modo geral, poderemos aceitar o cálculo de limites, como uma operação *reversível* em relação às operações elementares.

Assim, via de regra, teremos:

$$\lim (A + B) = \lim A + \lim B$$

$$\lim AB = \lim A \,.\, \lim B$$

$$\lim \sqrt{A} = \sqrt{\lim A}$$

. . . .

mas há restrições que só um estudo meticuloso da teoria dos limites poderia evidenciar.

EXERCÍCIO I — "*Calcular* $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x$ *e* $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$".

Ora, para $x \neq k\pi$ sabemos que:

$$0 < |\operatorname{sen} x| < |x|$$

E, como $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, virá $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

Por outro lado:

$$1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$$

e, de acôrdo com o que acabámos de ver acima:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} < \left(\frac{x}{2}\right)^2 (x \neq k\pi)$$

Virá, assim:

$$0 < |1 - \cos x| < \frac{x^2}{2}$$

onde $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{2} = 0$. Logo: $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

EXERCÍCIO II — "*Calcular* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$".

Ex.Res.Ex.Limite. Livro 1 (Parte 2)

Na figura abaixo, tomando $\overset{\frown}{AM} = x$, teremos, *aritmèticamente*:

$MM' = 2\,PM$

$\overset{\frown}{MAM'} = 2\,\overset{\frown}{AM}$

$MS + SM' = TT' = 2\,AT$

E, visto que:

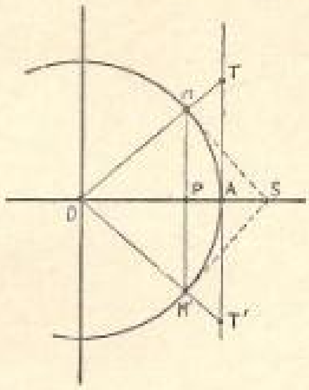
$MM' < \overset{\frown}{MAM'} < MS + SM$

concluímos ser:

$PM < \overset{\frown}{AM} < AT$

ou, melhor:

$$\frac{PM}{OA} < \frac{\overset{\frown}{AM}}{OA} < \frac{AT}{OA}$$



De um modo geral, teremos então:

$$|\operatorname{sen} x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$$

para $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$.

Escrevendo, sucessivamente, as razões de $|\operatorname{sen} x|$ para o próprio $|\operatorname{sen} x|$, $|x|$ e $|\operatorname{tg} x|$, virá, em virtude das últimas relações estabelecidas:

$$1 > \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| > |\cos x|$$

Ora, sabemos que $\lim\limits_{x \to 0} |\cos x| = 1$, logo:

$$\lim_{x \to 0} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = 1$$

Mas, na vizinhança do valor $x_0 = 0$, x e $\operatorname{sen} x$ têm sempre o mesmo sinal. Portanto, poderemos escrever de um modo mais geral que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

34 — Descontinuidade de uma função. Uma função $y = f(x)$, definida em um intervalo (a, b), é *contínua*, para um valor x_0 dêsse intervalo, quando:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA,H, L; NETTO, D, 1956, p. 34-35)

Anexo 39
Ex.Prop.Limites. (Parte 1) – Livro 1 – Matemática 2.º Ciclo – 3.ª Série – 1956

grau em $P(x)$ e $Q(x)$, quando o grau do numerador é igual ao grau do denominador.

b) *zero* (0) quando o grau do numerador fôr menor que o do denominador.

c) ∞ (infinito) quando o grau do numerador fôr maior que o do denominador.

EXERCÍCIOS

1. Determinar o *campo de definição* das funções:

$$y = \sqrt{2 + x\,(1 - x)}$$
$$y = \sqrt[4]{(x - 3)\,(x - 5)^2}$$
$$y = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$$
$$y = \text{arc sen }(x^2 + x - 1)$$
$$y = \sqrt{\text{sen } x + \cos x}$$

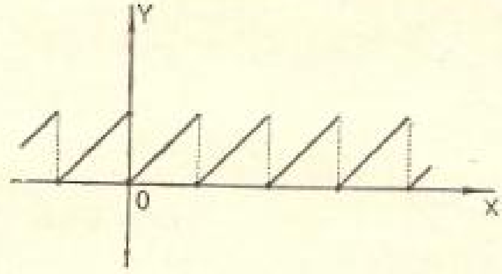
Resp.: $-1 \leq x \leq 2$; $x \geq 3$; $x \leq 1$ ou $x \geq 4$;

$-2 \leq x \leq -1$ e $0 \leq x \leq 1$ para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$;

$x = \frac{(8k+1)\pi}{4} + \frac{\theta\pi}{2}$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$ e $-1 < \theta < 1$.

2. Estudar a representação gráfica da função $y = x - E\,(x)$.

Resp.:



3. Estudar a representação gráfica das funções inversas:

$y = x^m$ e $y = \sqrt[m]{x}$ (*m* inteiro)

$y = e^x$ e $y = l.\,x$

Fig. Ex.Prop.Limites. Livro 1 (Parte 2)

$$\lim_{x\to 1+}\left[x - E(x)\right] \qquad \lim_{x\to 1-}\left[x - E(x)\right]$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x} \qquad \lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}$$

Resp.: Indeterminado; 0; 0; ∞; 0; 1; 1; — 1.

10. Calcular:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{3}}{x-3}$$ (*Sugestão*: tomar $x = t^4$ e $3 = a^4$)

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{1-\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$$ (*Sugestão*: exprimir a relação em função de $\frac{\varphi}{2}$).

Resp.: $\frac{1}{4\sqrt[4]{27}}$; 0.

11. Sendo $f(x) = \frac{1}{2x-5}$, calcular $f(\frac{5}{2}+0)$ e $f(\frac{5}{2}-0)$.

Resp.: ∞ e $-\infty$.

12. Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}$.

$$\textit{Sugestão}: \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)} = \frac{ax}{bx}\cdot\frac{\dfrac{\operatorname{sen} ax}{ax}}{\dfrac{\operatorname{sen} bx}{bx}}$$

Resp.: $\frac{a}{b}$

13. Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} 3x}{x\cos x}$. Resp.: 4.

14. Estudar a continuidade de $y = a^x$.

Resp.: A função é contínua para $-\infty < x < \infty$, visto como qualquer que seja x_0 tem-se sempre $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

15. Calcular os pontos de descontinuidade da função

$y = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{x+1}$ Resp.: $x = \frac{1+2k}{1-2k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

(ROXO; PEIXOTO, R; CUNHA, H, L; NETTO, D, 1956, p. 44-49)

Anexo 40
Intr.Limites. Livro 2 (Parte 1) – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 3.º Ano – 1956

CAPÍTULO III

LIMITES E CONTINUIDADE

1. Limite de uma variável. Suponhamos que uma variável x assuma sucessivamente os valores

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \qquad (1)$$

de um conjunto numerável de elementos de seu domínio C. Se a sucessão (1) *é convergente*, isto é, tem um limite finito a (**Cap. I, n.º 20**) diz-se que a variável x *tem para limite* a e escreve-se

$$\lim x = a \qquad \text{ou} \qquad x \to a \qquad (2)$$

Por exemplo, uma variável real, que assuma sucessivamente os têrmos de uma qualquer das sucessões (9), (10) ou (11) do **Cap. I**, tem para limite *1*.

Sem nos prendermos à maneira particular pela qual a variável *se aproxima* do limite, podemos dar a seguinte

Definição : *Uma variável x tem um limite finito a, se o valor absoluto da diferença $a - x$ (ou $x - a$) pode tornar-se inferior a qualquer número positivo ε, arbitràriamente escolhido, ou*

$$|a - x| < \varepsilon \qquad (3)$$

A condição (3) caracteriza, pois, o limite (2).

Se a sucessão (1) *é crescente* ou *não decrescente*, diz-se que x tende para o limite a *pela esquerda;* se (1) *é decrescente* ou *não crescente*, diz-se que x tende para o limite a *pela direita*.

Se a sucessão (1) *é divergente*, seu limite poderá ser $+\infty$ ou $-\infty$ (**Cap. I, n.º 21**). Na primeira hipótese será

$$\lim x = +\infty$$

limite êsse caracterizado pela condição de poder x tornar-se superior a qualquer número positivo N, arbitràriamente escolhido, ou

$$x > N$$

Intr.Limites. Livro 2 (Parte 2)

Isto equivale a dizer que todos os têrmos da sucessão (1), *a partir de uma certa ordem*, estão contidos no entôrno $(N, +\infty)$ do ponto impróprio $+\infty$ (**Cap. I, n.º 21**), ou que êste entôrno contém uma infinidade de valores de x.

Se o limite da sucessão (1) é $-\infty$, então,

$$\lim x = -\infty$$

sendo êsse limite caracterizado pela condição

$$x < -N$$

sendo N um número positivo, arbitràriamente escolhido, o que equivale a afirmar que todos os têrmos da sucessão (1), a partir de uma certa ordem estão contidos no entôrno $(-\infty, -N]$ do ponto impróprio $-\infty$.

2. Limite de uma função. Consideremos a função

$$f(x) = 2x - 2 \qquad (4)$$

e observemos seus valores quando x tende para um limite finito, como, por exemplo, 3. Admitamos que x tenda para 3, assumindo sucessivamente os valores

$$2{,}9\ ;\ 2{,}99\ ;\ 2{,}999\ ;\ 2{,}9999\ ;\ \ldots.$$

Então, os valores correspondentes de y constituirão a sucessão crescente

$$3{,}8\ ;\ 3{,}98\ ;\ 3{,}998\ ;\ 3{,}9998\ ;\ \ldots.$$

cujo limite é 4.

Se x tender para 3 mediante os valores

$$3{,}1\ ;\ 3{,}01\ ;\ 3{,}001\ ;\ 3{,}0001\ ;\ \ldots.$$

os valores correspondentes de y constituirão a sucessão decrescente

$$4{,}2\ ;\ 4{,}02\ ;\ 4{,}002\ ;\ 4{,}0002\ ;\ \ldots.$$

cujo limite, também, é 4.

Diz-se, então, que o limite da função (4), quando x tende para 3, é 4 e escreve-se

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 4 \qquad (5)$$

(CARVALHO, T,M, 1956, p. 43-44)

Anexo 41
Ex.Res.Ex. Limites – Livro 2 (Parte 1) – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 3.º Ano – 1956

16. Número e. Outro limite importante a considerar é o limite da função $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ quando x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$. Como sua demonstração (rigorosa e completa) é, a nosso ver, extremamente fastidiosa para o estudante do curso colegial, limitamo-nos a indicar o resultado

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}71828 \; \ldots .$$

isto é, que o limite considerado é um número irracional, usualmente designado pela letra e, cujo valor aproximado se vê acima. O número e é a base do sistema de logaritmos neperianos (*).

Êsse limite é, também, apresentado sob a forma

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

17. Exercício. *Calcular o limite da função* $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x \operatorname{sen} x}$ *quando x tende para zero.*

RESOLUÇÃO: Com a substituição de x por seu limite zero recai-se na forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Tomemos, então, outro caminho. Fazendo, na expressão da função, as substituições (**)

$$1-\cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

obtemos, após a simplificação

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{x \cos \frac{x}{2}}$$

(*) Vol I. Cap. III, n.º 11.
(**) Vol. II, Cap. VIII, números 14 e 15.

Ex.Res.Ex.Limite – Livro 2 (Parte 2)

Temos, então,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} \right] = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

18. Exercício. *Calcular o limite, quando $x \to 0$, da função unívoca*

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+4} - \sqrt{x+4}}{2x}$$

na qual os radicais são considerados em seu valor aritmético.

RESOLUÇÃO: Com a substituição de x por seu limite zero, recai-se na forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Multiplicando, então, ambos os têrmos da fração por $\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+4}$ e simplificando a fração obtida, temos

$$f(x) = \frac{1}{2[\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+4}]}$$

donde resulta

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2[\sqrt{4} + \sqrt{4}]} = \frac{1}{8}$$

19. Exercício. *Calcular o limite* $\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a}$, *sendo m inteiro e positivo.*

RESOLUÇÃO: Como a substituição de x por a nos leva à forma $\frac{0}{0}$, efetuando a divisão de $x^m - a^m$ por $x - a$, obtemos

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = \lim_{x \to a} [x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}] =$$

$$= a^{m-1} + a^{m-1} + \ldots + a^{m-1} = ma^{m-1}$$

20. Exercícios. *Calcular o limite da função*

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^6 - 3} + \sqrt[3]{x^2 + 2x}}{\sqrt{4x^3 + 1}} \qquad (25)$$

(CARVALHO, T, M, 1956, p.64 – 65)

Anexo 42
Ex.Prop.Limites.Livro 2 (Parte 1) – Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 3.º Ano – 1956

a função $y = x - I(x)$ vista no n.º 5, num qualquer dos intervalos $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ etc., tem para extremo superior 1, mas não atinge êsse extremo, pois, para $x = 1$, $x = 2$, ... se tem $y = 0$.

Se, entretanto, a função é contínua, o teorema de WEIERSTRASS afirma que ela atinge, no intervalo $[a, b]$, os extremos F e f que se denominam, então, respectivamente, *máximo* e *mínimo* da função naquêle intervalo. (*)

25. Exercícios.

1. Mostrar que a função $f(x) = I(x) + I(-x)$, onde $I(x)$ significa *maior inteiro não superior a x*, é descontínua nos pontos que correspondem a valores inteiros (positivos ou negativos) de x e caracterizar essa descontinuidade.

   (SUGESTÃO: Mostrar que $f(x) = 0$ para qualquer valor inteiro de x e $f(x) = -1$ para qualquer valor não inteiro de x.)

   Resp.: Para cada valor inteiro n, tem-se
   $$f(n) = 0 \quad \lim_{x \to n+} f(x) = \lim_{x \to n-} f(x) = -1.$$

2. Estudar, na origem, a função
   $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|} \\ f(o) = 0 \end{cases}$$

   Resp.: É descontínua, pois o limite à direita é $+1$ e o limite à esquerda é -1.

3. Alterar a definição da função anterior de modo que ela seja *contínua à direita* do ponto $x = 0$.

   Resp.: Basta substituir a correspondência $f(o) = 0$ por $f(o) = 1$.

Calcular os limites:

4. $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{tgx}{x}$ *Resp.:* 1

5. $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\operatorname{sen}(rx)}{x}$ $(r \neq 0)$ *Resp.:* r

6. $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ *Resp.:* $\dfrac{1}{2}$

(*) As demonstrações dos teoremas da existência do zero e de WEIERSTRASS estão, a nosso ver, acima do nível do Curso Colegial, razão por que, preferimos suprimi-las.

Ex.Prop.Limites.Livro 2 (Parte 2)

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\,(ax)}{bx}$ $(a \neq 0 \ \text{e} \ b \neq 0)$ *Resp.:* $\dfrac{a}{b}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x}$ *Resp.:* 2

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{tg\,x}$ *Resp.:* 2

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$ *Resp.:* 0

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$ (n inteiro e positivo) *Resp.:* n

(SUGESTÃO: Desenvolver $(1+x)^n$ pela fórmula da potência do binômio).

12. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{\alpha}{x}\right)^x$ (α real e não nulo) *Resp.:* e^{α}

(SUGESTÃO Fazer $x = \alpha y$ e utilizar o resultado do n.º 16)

13. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$ (suposto $a > 0$ se n é par) *Resp.:* $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{na}$

(SUGESTÃO: Fazer $\sqrt[n]{x} = y$ e $\sqrt[n]{a} = b$ e seguir a marcha indicada no exercício do n.º 19).

14. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{a}}$ (suposto $a > 0$ se um, pelo menos, dos expoentes n e p é par) *Resp.:* $\dfrac{p\sqrt[n]{a}}{n\sqrt[p]{a}}$

(SUGESTÃO: Dividir ambos os têrmos da fração por $x - a$ e utilizar o resultado do exercício anterior).

15. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$ *Resp.:* 0

16. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$ *Resp.:* 1

17. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 11x^2 + 39x - 45}{x^2 - 6x + 9}$ *Resp.:* -2

18. $\lim\limits_{x \to +\infty} [+\sqrt{x^2 + 3x} - x]$ *Resp.:* $\dfrac{3}{2}$

(SUGESTÃO: Multiplicar e dividir por $+\sqrt{x^2 + 3x} + x$; dividir ambos os membros da fração resultante por x e passar ao limite.)

(CARVALHO, T, M, 1956, p. 68-69)

Anexo 43
Intr.Limites. Livro 3 (Parte 1) – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 1959

CAPÍTULO V

LIMITE DE VARIÁVEIS E DE FUNÇÕES

66. **Limite de uma variável.** — Admitamos que a variável x, recebendo infinidade de valores sucessivos, crescentes ou decrescentes, se aproxima indefinidamente de um valor A, de modo que a diferença

$$A - x$$

se possa tornar e conservar, em valor absoluto, menor que qualquer número positivo arbitràriamente dado.

Diz-se, nesse caso, que x tende para A ou que A é o *limite* de x, escrevendo-se

$$x \to A \quad \text{ou} \quad \lim x = A.$$

O limite de uma variável pode pertencer ou não ao seu domínio. No primeiro caso a variável atinge o limite; no segundo caso não o atinge.

Acentuemos, ademais, que o limite de uma variável é sempre uma constante.

Conforme a definição, designando por A o limite da variável x, temos

$$|A - x| < \epsilon,$$

em que ϵ representa um número positivo tão pequeno quanto se queira.

67. **Infinitamente pequenos.** — Dá-se a denominação de *infinitamente pequeno* ou infinitésimo a uma variável que tem como limite zero.

Representando por v um infinitamente pequeno, escrevemos

$$\lim v = 0.$$

De acôrdo com a definição, um infinitésimo não tem valor determinado: é *essencialmente variável.*

Estabelecem-se *ordens* entre os infinitamente pequenos.

Intr.Limites. Livro 3 (Parte 2)

Assim, designando por x um infinitamente pequeno, dizemos que

$$x, \quad x^2, \quad x^3, \quad x^4, \ldots$$

são infinitamente pequenos de primeira ordem, de segunda ordem, de terceira ordem, etc.

Os infinitamente pequenos apresentam as propriedades que damos a seguir.

I. *O produto de um infinitamente pequeno por número finito, diferente de zero, é também um infinitamente pequeno.*

Com efeito, designando por x um infinitamente pequeno e por k um número finito, diferente de zero, o produto

$$kx$$

se pode tornar menor que qualquer quantidade dada, desde que se atribua um valor conveniente para x.

II. *A soma algébrica de um número finito de infinitamente pequenos é também um infinitamente pequeno.*

Com efeito, sendo a soma algébrica de k infinitamente pequenos menor que o produto do maior dêles pelo número de têrmos, segue-se, de acôrdo com a primeira propriedade, que essa soma é número infinitamente pequeno [1].

68. **Limites infinitos.** — Admitamos que os valores recebidos pela variável x sejam maiores que um número E, tão grande quanto se queira

$$|x| > E.$$

Por extensão, diz-se nesse caso que o limite de x é infinito, escrevendo-se

$$\lim x = \infty.$$

69. **Limite de uma função.** — Diz-se que a função

$$y = f(x)$$

tem o limite b quando, ao tender x para a, o valor absoluto da diferença

$$y - b$$

pode se tornar tão pequeno quanto se queira para valores de x suficientemente próximos de a.

(1) A propriedade é verdadeira para um número finito de parcelas.

(MAEDER, A, M, 1959, p. 74-75)

Anexo 44
Ex.Res.Ex. Limites (Parte 1) – Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 1959

Mas, notando que os têrmos da fração são divisíveis por

$$x - a,$$

cuidemos, preliminarmente, de eliminar êsse fator:

$$\frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = x + a.$$

Por outro lado, como

$$\lim_{x \to a} (x + a) = 2a,$$

segue-se que

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a.$$

2.º *Calcular o limite de*

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6},$$

quando x *tende para* 2.

Substituindo diretamente na função dada x por 2, chegaríamos à forma de indeterminação

$$\frac{0}{0}.$$

Observemos, porém, que os têrmos da fração podem ser decompostos em fatôres binômios:

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} = \frac{(x + 5)(x - 2)}{(x + 3)(x - 2)}.$$

Eliminando o fator comum, vem

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} = \frac{x + 5}{x + 3}.$$

Por outro lado, notando que

$$\lim_{x \to 2} \frac{x + 5}{x + 3} = \frac{7}{5},$$

Ex.Res.Ex. Limites (Parte 2)

segue-se que

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} = \frac{7}{5}.$$

3.º *Calcular o limite de*

$$\frac{6x^2 + 4x + 5}{2x^2 + 5x + 3},$$

quando x *tende para o infinito.*

Para $x \to \infty$, o limite da função dada se apresenta, à primeira vista, sob a forma de indeterminação

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Dividamos, porém, os têrmos da fração por x^2, que é a potência de maior grau em x nêles contida:

$$\frac{6 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x^2}}{2 + \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{x^2}}.$$

Crescendo x indefinidamente, as frações

$$\frac{4}{x}, \quad \frac{5}{x^2}, \quad \frac{5}{x} \quad \text{e} \quad \frac{3}{x^2}$$

tenderão para zero. — Portanto:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x^2}}{2 + \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{x^2}} = \frac{6}{2} = 3.$$

E, como a função acima é igual à primitiva, temos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 + 4x + 5}{2x^2 + 5x + 3} = 3.$$

(MAEDER, A, M, 1959, p. 84-85)

Anexo 45
Ex.Prop.Limites. Livro 3 – Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – 1959

Portanto:

$$\lim_{h \to 0} a^x (a^h - 1) = 0.$$

Como a função dada satisfaz a condição (1), segue-se que a mesma é contínua.

89. Exercícios propostos.

Achar os valores de x para os quais são definidas as funções seguintes:

1. $y = \dfrac{2}{x-3}$. R. $x \neq 3$.
2. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$. R. $x \geq 0$.
3. $y = \sqrt{x-1}$. R. $x \geq 1$.
4. $y = \sqrt{x^2-4}$. R. $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2. \end{cases}$
5. $y = \sqrt{x^2-x-6}$. R. $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -2. \end{cases}$
6. $y = \sqrt{x^2-2x-15}$ R. $\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -3. \end{cases}$
7. $y = \dfrac{x}{1-x^2}$. R. $|x| \neq 1$.
8. $y = \dfrac{3x}{x^2-4x+4}$. R. $x \neq 2$.

Calcular os limites das funções seguintes:

9. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$. R. 4.
10. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2-a^2}{x+a}$. R. 0.
11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$. R. 2.
12. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$. R. 12.
13. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}$. R. 2.

(MAEDER, A, M, 1959, p.99)

Anexo 46
Intr.Limites. Livro 4 (Parte 1) – Matemática – Terceiro Ano Colegial – 1960

2

limites . continuidade

2.1 – Limite de uma variável. Consideremos uma variável x que assuma uma sucessão de valores de seu domínio: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, de tal modo que o valor absoluto da diferença $x - a$, torne-se e permaneça menor que um número positivo, ϵ, tão pequeno quanto quisermos, isto é:

$$|x - a| < \epsilon$$

Diz-se, então, que *a variável x tem para limite a* ou *x tende para a.*

Escreve-se: $\lim x = a$ ou $x \to a$

e lê-se: *o limite de x é igual a a* ou *x tende para a.*

Assim, para indicar que o limite da variável x é a constante a, podemos escrever com o mesmo sentido:

$$\lim x = a, \quad x \to a, \quad |x - a| < \epsilon \quad \text{ou} \quad -\epsilon < x - a < \epsilon$$

Exemplos:

1.º) Suponhamos que a variável x assuma valores de seu domínio representados pela dízima periódica 2,99 . . . , quando acrescentamos sempre um período a mais.

Consideremos a constante 3 e formemos as diferenças

$$3 - 2{,}9 = 0{,}1$$
$$3 - 2{,}99 = 0{,}01$$
$$3 - 2{,}999 = 0{,}001$$

Assim, por menor que seja ϵ, podemos ter:

$$|3 - x| < \epsilon$$

Intr.Limites. Livro 4 (Parte 2)

34 *Matemática — 3.º Ano Colegial*

bastando tomar na variável x um número suficiente de períodos e, portanto, teremos:

$$\lim x = 3 \quad \text{ou} \quad \lim 2{,}99\ldots = 3$$

2.º) Seja a variável x assumindo os valores de seu domínio 2,1; 2,01; 2,001; ...

Se considerarmos a constante 2, poderemos formar as diferenças:

$$2{,}1 - 2 = 0{,}1$$
$$2{,}01 - 2 = 0{,}01$$
$$2{,}001 - 2 = 0{,}001$$

Por menor que seja ϵ, poderemos ter:

$$|x - 2| < \epsilon$$

bastando, para isso, tomar um número suficiente de zeros.

2 . 2 – Tendência da variável para seu limite. Uma variável pode tender para o limite de três modos diferentes:

1.º) *Por valores sempre inferiores ao limite.* Como no nosso primeiro exemplo em que $2{,}99\ldots < 3$.

Indica-se essa tendência por valores inferiores com o símbolo:

$$x \to 3^-$$

2.º) *Por valores sempre superiores ao limite.* Como no nosso segundo exemplo em que $2{,}0\ldots01 > 2$.

Indica-se essa tendência com o símbolo:

$$x \to 2^+$$

3.º) *Por valores ora superiores ora inferiores ao limite.*

Consideremos a soma, variável com o número de têrmos:

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$$

cujas parcelas estão em progressão geométrica de razão $-\frac{1}{3}$.

O limite de S será (1.ª Série, progressões):

$$\lim S = \lim\left(1 + \frac{1}{9} + \ldots\right) - \lim\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{27} + \ldots\right)$$

(QUINTELLA, A, 1960, p. 33-35)

Anexo 47
Ex.Res.Ex. Limites. – Livro 4 – Matemática – Terceiro Ano Colegial – 1960

Limites. Continuidade **47**

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1}$$

Aplicações.

O limite estudado tem larga aplicação no cálculo do limite de funções transcendentes onde figuram funções circulares.

Exemplos:

1.º) Calcular: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x}$.

Temos: $\dfrac{\text{tg } x}{x} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \dfrac{\text{sen } x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

Logo, vem:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \times \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$$

2.º) Calcular: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } ax}{bx}$.

O arco do seno é ax; logo, para aparecer a razão entre o seno e arco, devemos ter no denominador o arco ax. Com êste fim, multipliquemos os dois têrmos da razão pela constante a, teremos:

$$\frac{\text{sen } ax}{bx} = \frac{a \text{ sen } ax}{abx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\text{sen } ax}{ax}$$

Logo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } ax}{bx} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } ax}{ax} = \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$$

3.º) Calcular: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ (Altamiro Tibiriçá, *Cálculo*, pág. 95)

A função não é definida no ponto 0.

Temos: $\dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} = \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} =$

$$= \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \cos x}$$

(QUINTELLA, A, 1960, p. 47)

Anexo 48
Ex.Notas de rodapé. Livro 4 – Matemática – Terceiro Ano Colegial – 1960

2.º) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^5 - 7x^3 + 8x - 2}{x^2 - 5x - 7} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^5}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$

3.º) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - 5x + 7}{x^3 + x + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{x} = \dfrac{4}{\infty} = 0$

2 . 8 – 3) *Limite da razão $\dfrac{\text{sen } x}{x}$ quando $x \to 0$, sendo x medido em radianos.* (*)

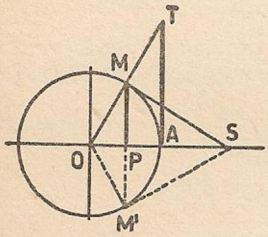


Fig. 12

Seja $0 < \overset{\frown}{AM} < \dfrac{\pi}{2}$ (fig. 12) e x, a medida de $\overset{\frown}{AM}$ em radianos.

A congruência dos triângulos retângulos permite concluir:

$$AT = MS = SM' \qquad (1)$$

e, pelo teorema da envolvente:

$$MM' < \overset{\frown}{MM'} < MS + SM' \quad \text{ou} \quad 2MP < 2AM < 2MS$$

Da figura e da igualdade (1) conclui-se, então:

$$2 \operatorname{sen} x < 2x < 2 \operatorname{tg} x$$

Dividindo por $2 \operatorname{sen} x > 0$:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

ou, invertendo as razões:

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$$

Quando o arco tende para zero o co-seno tende para 1; logo, a razão $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ fica compreendida entre 1 e uma quantidade que tende para 1 e podemos concluir:

(*) Na demonstração são considerados os valores absolutos dos segmentos e arcos.

(QUINTELLA, A, 1960, p.46)

Anexo 49
Ex.Prop.Limites. Livro 4 (Parte 1) – Matemática – Terceiro Ano Colegial – 1960

EXERCÍCIOS

1. LIMITES

Verificar os limites indicados:

1. $\lim_{x\to 1} (x^3 + x^2 + 5x + 1) = 8$
2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x^2 + 3x + 1} = \dfrac{3}{5}$
3. $\lim_{x\to 3} \sqrt{\dfrac{3x}{x+6}} = 1$
4. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} = -3$
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{\tan x} = 2$
6. $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
7. $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{2x}} = \sqrt{e}$
8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Calcular os limites:

9. $\lim_{x\to 3} (x^3 - 4x^2 + 2x + 16)$
10. $\lim_{x\to +\infty} (3x^4 - 5x^2 + 8)$
11. $\lim_{x\to -\infty} (2x^3 + 5x^2 - 8x + 93)$
12. $\lim_{x\to -\infty} (-4x^2 - 5x + 7)$
13. $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 + 3}$
14. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 + 5x - 4}{x^2 - 5}$
15. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$
16. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$
17. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$
18. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{3x^3 - 5x^2 + 2x + 1}{9x^3 - 7x^2 - 5x + 8}$
19. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{5x^3 + 2x^2 - 1}{x + 7}$
20. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 8}{4x^5 - 8x + 7}$
21. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{5}{2x - 6}$
22. $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{3}{x - 1}$ (gráfico no ponto 1)
23. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 16}}$
24. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{4x^2 - 7x + 1}{\sqrt{x^4 + 16}}$
25. $\lim_{x\to +\infty} 7^x$
26. $\lim_{x\to -\infty} 7^x$

Ex.Prop.Limites. Livro 4 (Parte 2)

Examine a continuidade das funções seguintes nos pontos indicados. Classifique as descontinuidades quando fôr o caso. Trace o gráfico nos pontos de descontinuidade:

48. $\dfrac{3-x}{x+2}$ em $x = 5,\ x = 3,\ x = -2$

49. $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ em $x = -2$

50. $\tan x$ em $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

51. $\cot x$ em $x = k\pi$

52. $y = 10^{\frac{1}{x}}$ em $x = 0$

53. $y = \dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}$ em $x = 0$

54. $y = \dfrac{x+5}{x-3}$ em $x = 3$

55. $y = \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-7x+10}$ em $x = 2$

Achar todos os pontos de descontinuidade das funções seguintes e traçar o gráfico em cada um dêsses pontos.

56. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}$

57. $\dfrac{x^2-4}{x^2+6x+11}$

58. $\dfrac{3x+5}{x^2+4x+4}$

59. $\dfrac{x^2+5x+4}{4x^2-8x+3}$

60. *a)* $y = \sec x$ *b)* $y = \csc x$

Respostas:

9. 13	16. $-1/4$	23. 0	40. 0
10. $+\infty$	17. -3	24. 4	41. e^2
11. $-\infty$	18. $1/3$	25. $+\infty$	42. e^2
12. $-\infty$	19. $+\infty$	26. 0	43. e^{ab}
13. 0	20. 0	27. 0	44. 0
14. 5	21. $+\infty$	28. ∞	45. $2\sqrt{2}$
15. ∞	22. $-\infty$	39. ∞	46. $-1/4$

48. Descontinuidade da 1.ª espécie, passagem ao infinito ($-\infty$ a $+\infty$)
49. Descontinuidade evitável
50. Descontínua, passagem ao infinito ($+\infty$ a $-\infty$)
51. Descontínua: $-\infty$ a $+\infty$
52. Descontínua, salto infinito (0 a $+\infty$)
53. Salto finito igual a um
54. Descontínua: $-\infty$ a $+\infty$
55. Descontin. evitável ($y = 2/3$)
56. -1 e 3
57. Não tem
58. -2
59. $1/2$ e $3/2$
60. a) $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ b) $x = k\pi$

(QUINTELLA, A, 1960, p. 56-58)

ANEXO DESCRITIVO – FASE 4

Anexo 1
Análise da Estrutura Externa – Livros Volume I – Fase 4

Vamos analisar a Estrutura Externa dos Volumes I das duas coleções:

- Livro 1 – Livro 1 – Matemática – Curso Colegial – Volume I – 1964 (Anexo 2, p.545).

- Livro 2 – Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 1 – 1967 (Anexo 5, p.548).

Livro 1:

Capa: capa (Anexo 2, p.545) de material tipo cartolina ou papel cartão, colorida, clássica, com layout moderno, mais simples ; houve a intenção de colocar figuras geométricas na capa dando um ar moderno à mesma.

Tamanho: (18,5 x 24,5) cm.

Prefácio: o livro traz dois prefácios – Prefácio da Edição Norte Americana e Prefácio da Edição Brasileira

Índice: possui índice no início do livro.

Bibliografia: não traz bibliografia.

Contém 254 (duzentas e cinquenta e quatro) páginas.

Livro 2 –

Capa – capa (Anexo 5, p.548) de material tipo cartolina ou papel cartão, colorida, com layout moderno.

Tamanho (15,0 x 21,0).

Prefácio: Sim, com o nome “apresentação”.

Índice: possui índice no final do livro.

Bibliografia: não apresenta bibliografia.

Contém 270 (duzentos e setenta) páginas.

Anexo 2
Análise dos Índices – Livros Volume I – Fase 4

Índices que serão analisados:

Índice 1 – Livro 1 – Matemática – Curso Colegial – Volume I – Editora Universidade de Brasília – 1964 (Anexo 8, p.551).

Índice 2 – Livro 2 – Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 1 – 1967 (Anexo 9, p.553).

O índice 1 (p.551) apresenta os conteúdos dividindo os mesmos por Partes e dentro das Partes, tem-se os capítulos. Primeira Parte, Fundamentos; Segunda Parte, Funções elementares; Terceira Parte, Funções elementares e Quarta Parte, Geometria. É bem estruturado, com layout da divisão das partes, capítulos e conteúdos. Pelo índice, percebe-se que não há introdução e depois da apresentação dos conteúdos, há uma série de exercícios (chamado de sequência) ao final do capítulo, acompanhado de um item chamado "respostas"

O índice 2 (p.553) apresenta os conteúdos dividindo os mesmos por Capítulos. O índice é bem organizado na distribuição dos conteúdos dentro dos capítulos. Pelo índice, não se percebe se há introdução, à exceção do capítulo 8, "Geometria Analítica Plana".

Anexo 3
Análise da metodologia de apresentação dos conteúdos das coleções Matemática – Curso Colegial (SMSG) e Matemática – Curso Colegial Moderno (IBEP)

Faremos a análise de alguns conteúdos coincidentes dos índices analisados dos volumes I, II e III das coleções.

Por exemplo, vamos analisar o item "Conjuntos", que, no livro do SMSG faz parte de um item chamado "Conjuntos, Números Reais e Retas", constante do Capítulo 2 e no livro do IBEP faz parte de um item chamado "Conjuntos e Lógica Matemática", constando do capítulo I.

Livro Matemática – Curso Colegial – Volume I – SMSG – 1964 (Anexo 2, p.545)

Faz parte do item 2.1. Conjuntos (Anexo 10, p.556). Os autores iniciam o assunto procurando contextualizar o mesmo, fazendo um link entre o conjunto e a família, relacionando os membros familiares com os elementos do conjunto, já introduzindo as relações entre elementos e conjuntos. Depois, definem e introduzem o conceito de subconjunto, já também introduzindo as relações entre conjuntos e subconjuntos. Depois irá relacionar ponto, reta e plano com esses conceitos de conjunto, trabalhados (Anexo 10, p.556).

Não há a utilização de exercícios resolvidos de exemplo e depois é apresentada uma série de 12 (doze) exercícios propostos sem resposta, sendo alguns deles com vários itens (Anexo 11, p.558).

Livro Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 1 – IBEP – 1967 (Anexo 5. ´p.548)

O Capítulo I chama-se "Conjuntos e Lógica Matemática". Inicia-se no item "A" chamado "Matemática Antiga e Matemática Moderna", onde os autores procuram explicar os temos "antiga" e "moderna" usados para a matemática da época. Nas palavras deles, relativamente a matemática moderna,

> [...] o que ser pretende é estudar as mesmas coisas, e alguns tópicos de maior importância para as ciências modernas, através de uma linguagem mais fácil e precisa, capaz de penetrar todos os ramos da matemática. Essa linguagem geral e adequada foi encontrada, principalmente na *Teoria dos Conjuntos* e na *Lógica Matemática* (PIERRO NETO; ROCHA, L, M; BARBOSA, R, M, 1967, p.11).

Depois os autores apresentam 2 (dois) quadros onde, de uma certa maneira, relacionam os "símbolos da teoria dos conjuntos" com os "símbolos da lógica" (Anexo 12, p.559).

O assunto é iniciado no item “Conjuntos” (Anexo 12, p.559). Os autores conceituam “conjunto” como um “conceito primitivo” e depois passam as relações entre elementos e conjuntos (e e ∉) e as relações entre conjuntos e subconjuntos (C e Ɔ). Depois os autores trabalham a representação de conjuntos e os conjuntos numéricos fundamentais.

No Anexo 12 (p.559), podemos observar também o uso de uma “nota explicativa”.

Podemos observar um exemplo relativo aos números reais no Anexo 13 (p.560).

Depois os autores apresentam um item chamado “Um pouco de lógica”, trabalhando os seguintes itens: o modificador negação; sentenças abertas; conexões lógicas; implicação e equivalência. Terminam o capítulo trabalhando “Operações com conjuntos” e “Propriedades das operações com conjuntos”.

Ao final do capítulo são apresentadas 2(duas) series de exercícios propostos chamadas “Sequência 1” e “Sequência 2”, relativas aos assuntos tratados (conjuntos e lógica) (Anexo 14, p.561). O capítulo é fechado com um item contendo as respostas e resolução dos exercícios propostos.

Considerações finais – analise da metodologia de apresentação dos conteúdos – Curso Colegial Moderno – Volume 1 – IBEP – 1967

O conteúdo é apresentado com uma definição *via sinônimo,* mas notamos uma preocupação de “introduzir” o conteúdo. Depois, é desenvolvido em uma linguagem direta, com o uso de “notas explicativas”, uso de exemplos e exercícios propostos ao final do capítulo com resposta.

Anexo 4
Quadro Comparativo de Conteúdos – Proposta do GEEM e Livros traduzidos do SMSG para o Colegial

Assuntos referentes ao Colegial – Proposta do GEEM	**Localização dos assuntos na Coleção Matemática Curso Colegial, Volumes 1, 2 e 3**
1- Função do 2.º grau – Estudo completo do trinômio do 2° grau e aplicações	**Volume 1 – Capítulo 10** – Funções e Equações Quadráticas 10.1 Funções quadráticas 10.2 A função definida por $y = x^2$ 10.3 A função definida por $y = ax^2$ 10.4 A função definida por $y = ax^2 + c$ 10.5 A função definida por $y=a(x-k)^2$ 10.6 A função definida por $y=a(x-k)^2+p$ 10.7 A função definida por $y=ax^2+bx+c$ 10.8 Funções quadráticas com valores determinados 10.9 Equações equivalentes; a equação $ax^2+bx+c = 0$ 10.10 Solução de $ax^2+bx+c = 0$ por Complementação do Quadrado Perfeito 10.11 Solução de Equações Quadráticas por Fatoração 10.12 Algumas Propriedades das Raízes de uma Equação Quadrática 10.13 Equações que podem ser transformadas em Equações Quadráticas 10.14 Inequações quadráticas 10.15 Aplicações

Página 2.

Assuntos referentes ao Colegial – Proposta do GEEM	**Localização dos assuntos na Coleção Matemática Curso Colegial, Volumes 1, 2 e 3**
2- Coordenadas de um ponto da circunferência com centro na origem. Funções trigonométricas	**Volume 2 – Capítulo 13 – Introdução à Trigonometria** 13.1 Arcos e percursos 13.2 Ângulos orientados 13.3 Medida em radianos 13.4 Outras medidas de ângulos 13.5 Definições das Funções Trigonométricas; 13.6 Algumas Propriedades Básicas do Seno e do Cosseno 13.7 Funções Trigonométricas e Ângulos Especiais 13.8Tábuas de Funções Trigonométricas 13.9Gráficos de Funções Trigonométricas
3- Identidade, equações e inequações trigonométricas simples	**Volume 2 – Capítulo 13 – Introdução à Trigonometria** 13.13 Identidades e Equações
4- Lei dos Senos e Cossenos ; aplicações entidade, equações e inequações trigonométricas simples	**Volume 2 – Capítulo 13 – Introdução à Trigonometria**

	13.10 A Lei dos Cossenos 13.11 A Lei dos Senos
5- Introdução à Geometria Espacial; espaço e semi-espaço; paralelismo e perpendicularismo de retas e planos	**Volume 1 – Capítulo 3 – Retas, Planos e Divisão** 3.1 Retas e Planos no Espaço 3.2 Teoremas na Forma de Hipótese e Tese 3.3 Conjuntos Convexos

Página 3.

Assuntos referentes ao Colegial – Proposta do GEEM	**Localização dos assuntos na Coleção Matemática Curso Colegial, Volumes 1, 2 e 3**
5- Introdução à Geometria Espacial; espaço e semi-espaço; paralelismo e perpendicularismo de retas e planos	**Volume 1 – Capítulo 5 – Retas e Planos Perpendiculares** 5.1 Definição Fundamental 5.2 Teorema Fundamental 5.3 Teoremas de Existência e Unidade Apêndice – Demonstrações dos Teoremas Sobre Perpendicularismo
6- Diedros, triedros e ângulos poliédricos	**Volume 1 – Capítulo 6 – Paralelismo no espaço** 6.2 Ângulos diedros, Planos Perpendiculares

7- Poliedros: Prismas, pirâmides e troncos. Propriedades geométricas	**Volume 1 – Capítulo 7 – Volume dos Sólidos** 7.1 Prismas 7.2 Pirâmides 7.3 Volume do Prisma e da Pirâmide. Princípio de Cavalieri **Volume 1 – Capítulo 7 – Volume dos Sólidos** 7.4 Cilindros e Cones
8- Corpos Redondos	7.5 Esfera : Volume e Área
9- Noções de Sequência de Números Reais – Progressões	**Volume 2 – Capítulo 15 – Sucessões e Séries** 15.1 Introdução 15.2 Sucessões e Séries Aritméticas 15.3 Sucessões e Séries Geométricas

Página 4.

Assuntos referentes ao Colegial – Proposta do GEEM	**Localização dos assuntos na Coleção Matemática Curso Colegial, Volumes 1, 2 e 3**
16- Estudo dos polinômios	**Volume 3 – Capítulo 24 – Funções Polinomiais** 24.1 Introdução e Notação 24.2 Valor de f(x) para x = c 24.3 Gráfico de Funções polinomiais 24.4 Teoremas sobre polinômios 24.5 Localização dos zeros das funções polinomiais
17- Equações Algébricas	Não encontrado
18- Noção de Limite, Continuidade, Derivadas. Elementos de Cálculo Integral, aplicações ao cálculo de áreas e volumes	**Volume 2 – Capítulo 15 -Sucessões e Séries** 15.4 Limite de uma sucessão 15.5 Soma de uma série infinita 15.6 As séries geométricas infinitas **Volume 3 – Capítulo 25 – Tangentes aos Gráficos de Funções Polinomiais** 25.4 O Comportamento do Gráfico Próximo a P 25.5 A Tangente ao Gráfico num Ponto Qualquer P e a Forma do Gráfico nas Proximidades de P

	25.7 A função declividade 25.8 Problemas de Máximo e Mínimo 25.9 O Método de Newton 25.10 O Gráfico de Funções Polinômias nas Proximidades dos Zeros de Multiplicidade Maior que Um

Quadro 28 – Quadro Comparativo de Conteúdos – Proposta do GEEM e Livros traduzidos do SMSG para o Colegial

(OLIVEIRA FILHO, 2009, p. 196-201)

Anexo 5
Quadro Comparativo – Programa Mínimo – Curso Colegial e "Proposta do GEEM" – Colégio

Programa Mínimo	**Proposta do GEEM**
ARITMÉTICA	
Noções sobre o cálculo numérico, aproximação e erro, algarismos exatos de um número aproximado, erro de arrendondamento	
Adição, subtração, multiplicação, divisão com números aproximados, o cálculo da aproximação de resultados e seu problema inverso, método dos erros absolutos.	
ÁLGEBRA	
Progressões aritméticas: termo geral, soma dos termos, interpolação aritmética. Progressões geométricas: termo geral, soma e produto dos termos, interpolação geométrica.	Função do 2.º grau. Estudo completo do trinômio do 2.º grau e aplicações.
Logaritmos: cálculo logaritmo como operação inversa da potenciação; propriedades gerais, mudanças de base, característica e mantissa, cologaritmo. Logaritmos decimais, propriedades, disposição e uso das tábuas de logaritmos, aplicação ao cálculo numérico, equações exponenciais simples, resolução com o emprego de logaritmos.	Coordenadas de um ponto da circunferência com centro na origem. Funções trigonométricas.
	Identidades, equações e inequações trigonométricas simples.

	Lei dos senos e cossenos; aplicações.
GEOMETRIA	
Reta e plano, postulados, determinação, intersecção, paralelismo, distância, inclinação e perpendicularismo, diedros e triedros e ângulos sólidos em geral	Introdução à Geometria Espacial; espaço e semi-espaço; paralelismo e perpendicularismo de retas e planos.
Generalidades sobre os poliedros em geral, poliedros regulares, indicações gerais. Prismas: propriedades gerais e, em especial, dos paralelepípedos, área lateral, área total e volume.	Diedros, triedros e ângulos poliédricos.
Estudo sucinto das superfícies em geral: superfícies retilíneas e superfícies curvilíneas. Superfícies desenvolvíveis e superfícies reversas. Superfícies de revolução. Exemplos elementares dos principais tipos da classificação de Monge.	Poliedros: prismas, pirâmides e troncos. Propriedades geométricas.
Cilindros: propriedades gerais, área lateral, área total, volume. Tronco de cilindro.	Corpos redondos
Cones: propriedades gerais, área lateral, área total, volume, troncos de cone de bases paralelas.	
Esfera: propriedades gerais, área e volume da esfera e das suas diversas partes.	

Quadro 29 – Quadro Comparativo – Programa Mínimo – Curso Colegial e “Proposta do GEEM” – Colégio

Anexo 6
Quadro comparativo – Índice – Matemática – Curso Colegial – Volume I – SMSG e Matemática – Curso Colegial Moderno Volume 1

Matemática – Curso Colegial – Volume I – SMSG	**Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 1 – IBEP**
Capítulo 1- Bom senso e ciência organizada	
Capítulo 2 – Conjuntos, números reais e retas	Capítulo I – Conjuntos e Lógica Matemática
Capítulo 3 – Retas, planos e divisão	
Capítulo 4 – Ângulos e triângulos	
Capítulo 5 – Retas e planos perpendiculares	
Capítulo 6 – Paralelismo no espaço	
Capítulo 7 – Volumes dos sólidos	
Capítulo 8 – Geometria Analítica plana	
Capítulo 9 – O conceito de função e a função linear	Capítulo II – Produto Cartesiano; relações binárias; aplicações e funções Capítulo III – Função Linear
Capítulo 10 – Funções e equações quadráticas	Capítulo IV – Função quadrática
Capítulo 11 – Equações do primeiro e segundo graus em duas variáveis	
	Capítulo V – Função exponencial e função logarítmica
	Capítulo VI – Funções trigonométricas
	Capítulo VII – Relações entre lados e ângulos de um triângulo
	Capítulo VIII – Introdução à geometria no espaço

Quadro 30 – Quadro comparativo – Índice – Matemática – Curso Colegial – Volume I – SMSG e Matemática – Curso Colegial Moderno Volume 1

Anexo 7
Quadro comparativo – Índice – Matemática – Curso Colegial – Volume II – SMSG e Matemática – Curso Colegial Moderno Volume 2

Matemática – Curso Colegial – Volume II – SMSG	**Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 2 – IBEP**
Capítulo 12 – Logaritmos e expoentes	
Capítulo 13 – Introdução à trigonometria	
Capítulo 14 – Sistema dos Números complexos	
Capítulo 15 – Sucessões e séries	Capítulo I – Sequências e séries
Capítulo 16 – Permutações, combinações e teorema do binômio	
	Capítulo II – Progressões aritméticas
	Capítulo III – Progressões geométricas
	Capítulo IV – Logaritmos decimais
	Capítulo V – Matrizes
	Capítulo VI – Sistemas lineares
	Capítulo VII – Sistemas não Lineares
	Capítulo VIII – Geometria
	Capítulo IX – Superfícies
	Capítulo X – Prismas
	Capitulo XI – Os corpos redondos
	Capítulo XII – Poliedros

Quadro 31 – Quadro comparativo – Índice – Matemática – Curso Colegial – Volume II – SMSG e Matemática – Curso Colegial Moderno Volume 2

Anexo 8
Quadro comparativo – Índice – Matemática – Curso Colegial – Volume III – SMSG e Matemática – Curso Colegial Moderno Volume 3

Matemática – Curso Colegial – Volume III – SMSG	**Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 3 – IBEP**
Capítulo 17 – Operações com matrizes	
Capítulo 18 – A álgebra das matrizes	
Capítulo 19 – Matrizes e sistemas lineares	
Capítulo 20 – Representação de matrizes coluna por vetores geométricos	
Capítulo 21 – Transformações no plano	
Capítulo 22 – Forma polar dos números complexos	
Capítulo 23 – Funções	
Capítulo 24 – Funções polinômias	
Capítulo 25 – Tangentes aos gráficos de funções polinômias	
	Capítulo I – Regras de contagem
	Capítulo II – Probabilidades
	Capítulo III – Fórmulas do cálculo combinatório
	Capítulo IV – Expansão binomial
	Capítulo V – Elementos
	Capítulo VI – Reta
	Capítulo VII – Transformações

	geométricas
	Capítulo VIII – Circunferência; Parábola; Elipse; Hipérbole
	Capítulo IX – Estruturas algébricas
	Capítulo X – Números reais e complexos
	Capítulo XI – Noções de Cálculo Infinitesimal
	Capítulo XII – Noções sobre derivadas
	Capítulo XIII – Polinômios – Equações algébricas
	Capítulo XIV – Função Polinômio
	Capítulo XV – Equações algébricas.

Quadro 32 – Quadro comparativo – Índice – Matemática – Curso Colegial – Volume III – SMSG e Matemática – Curso Colegial Moderno Volume 3

ANEXO DE IMAGENS – FASE 4

Anexo 1
Índices – Matemática para o Primeiro Ano Colegial 1960 – Matemática para o Primeiro Ano Colegial 1965

ÍNDICE GERAL

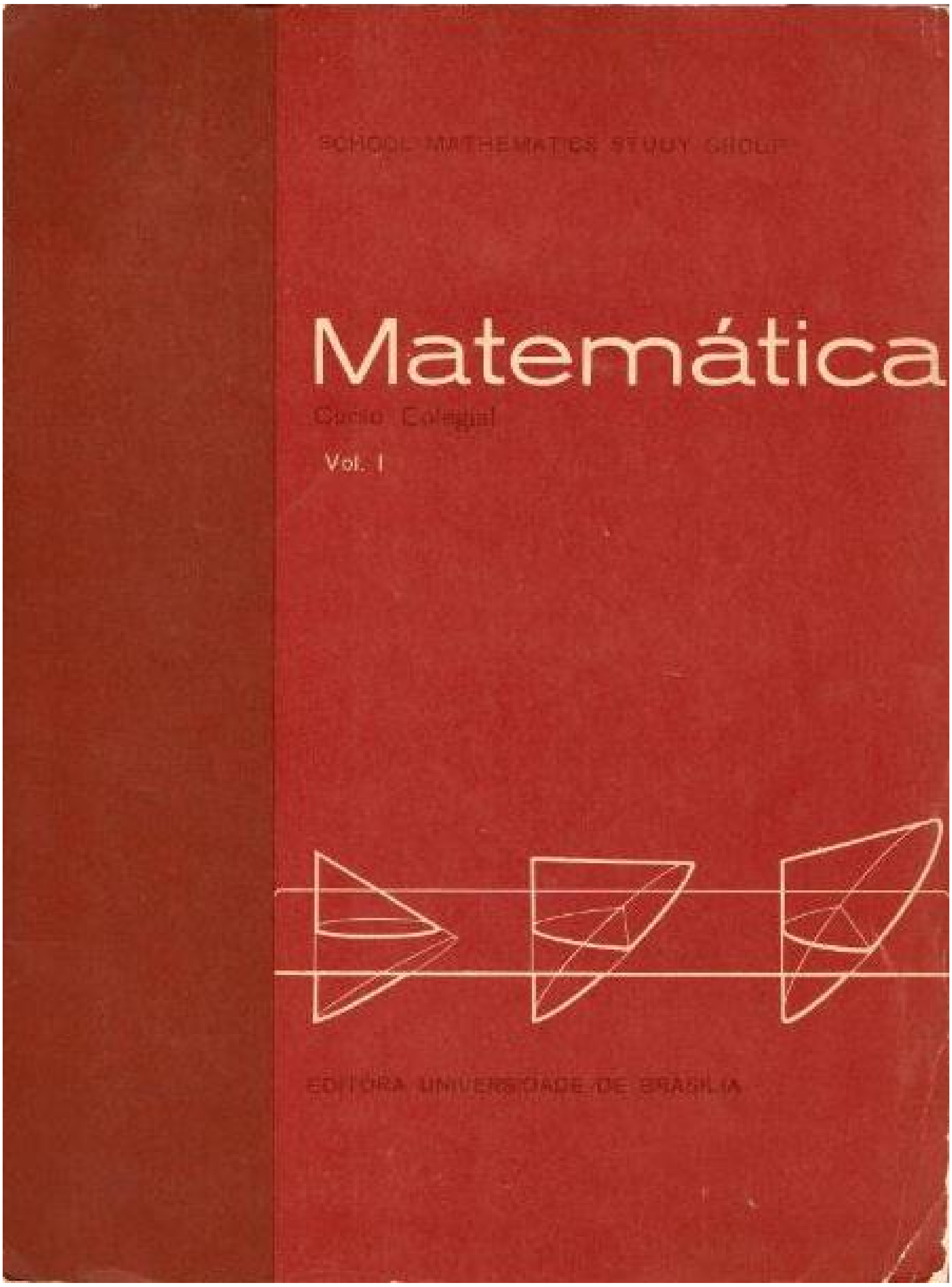
(QUINTELLA, A, 1960)

Parte do Índice – Matemática para o Primeiro Ano Colegial 1965

ÍNDICE GERAL

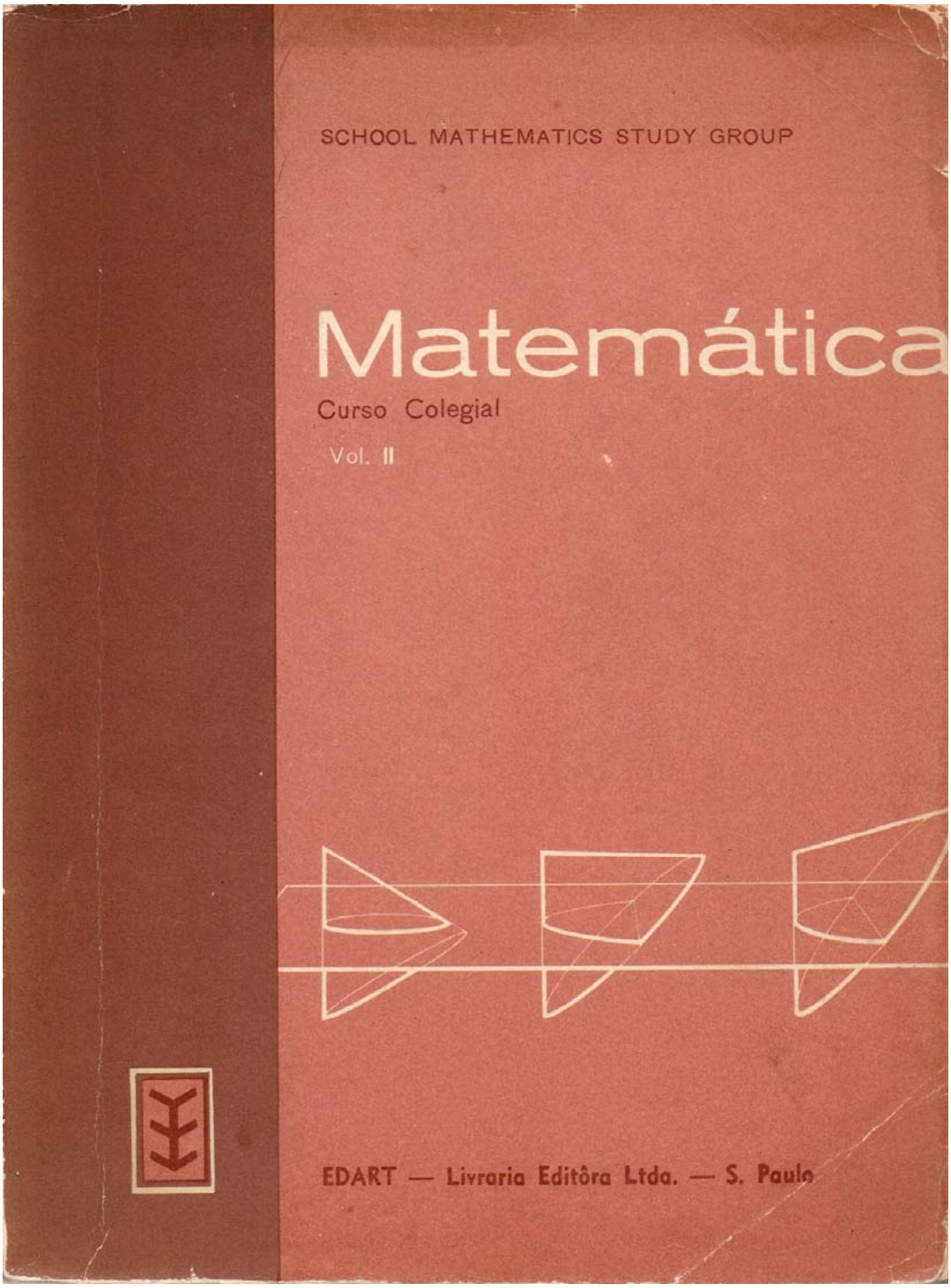
(QUINTELLA, A, 1965)

Anexo 2
Capa. Matemática – Curso Colegial – Volume I – SMSG – 1964



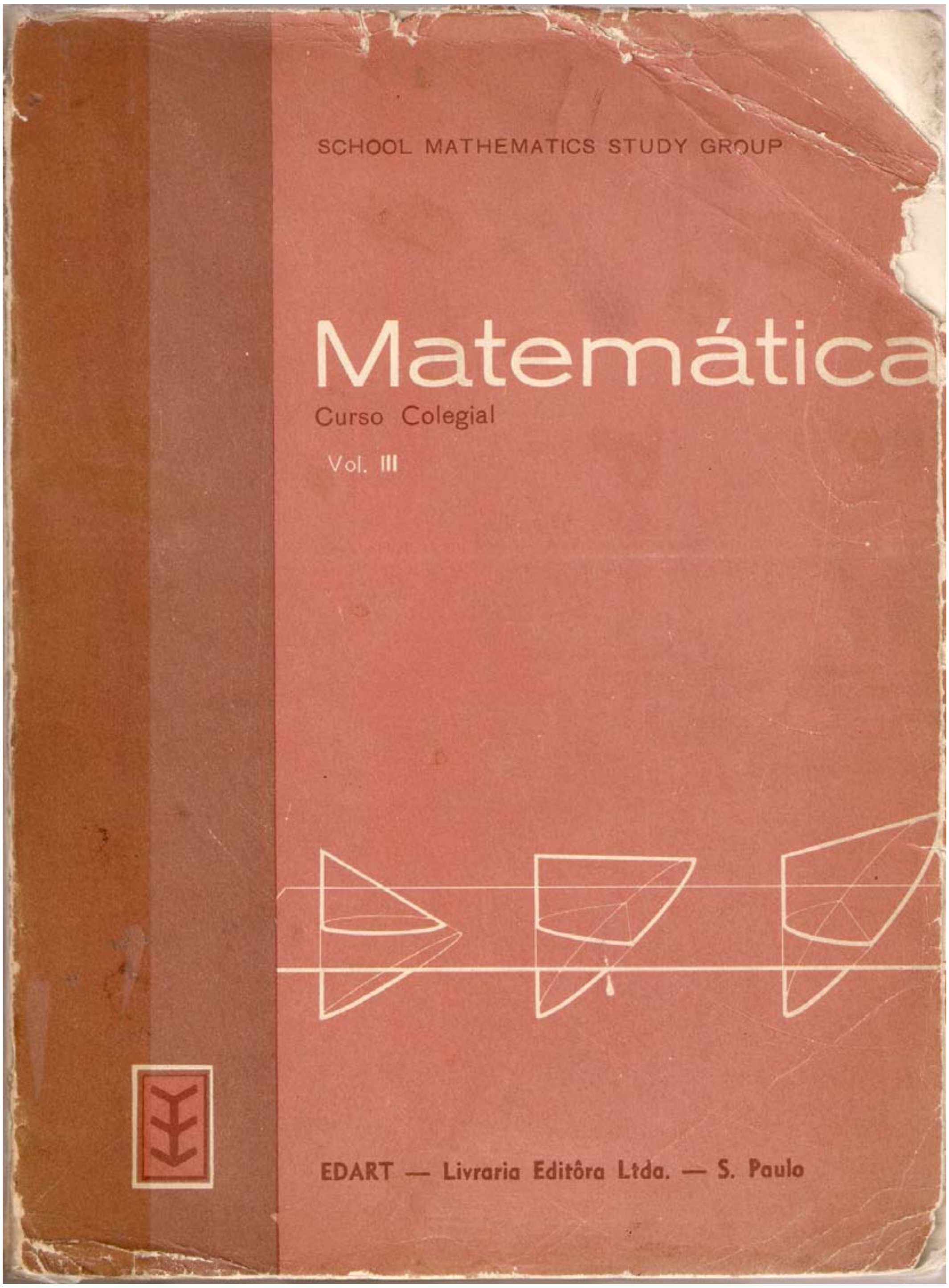
(SMSG, 1964)

Anexo 3
Capa. Matemática – Curso Colegial – Volume II – SMSG – 1966



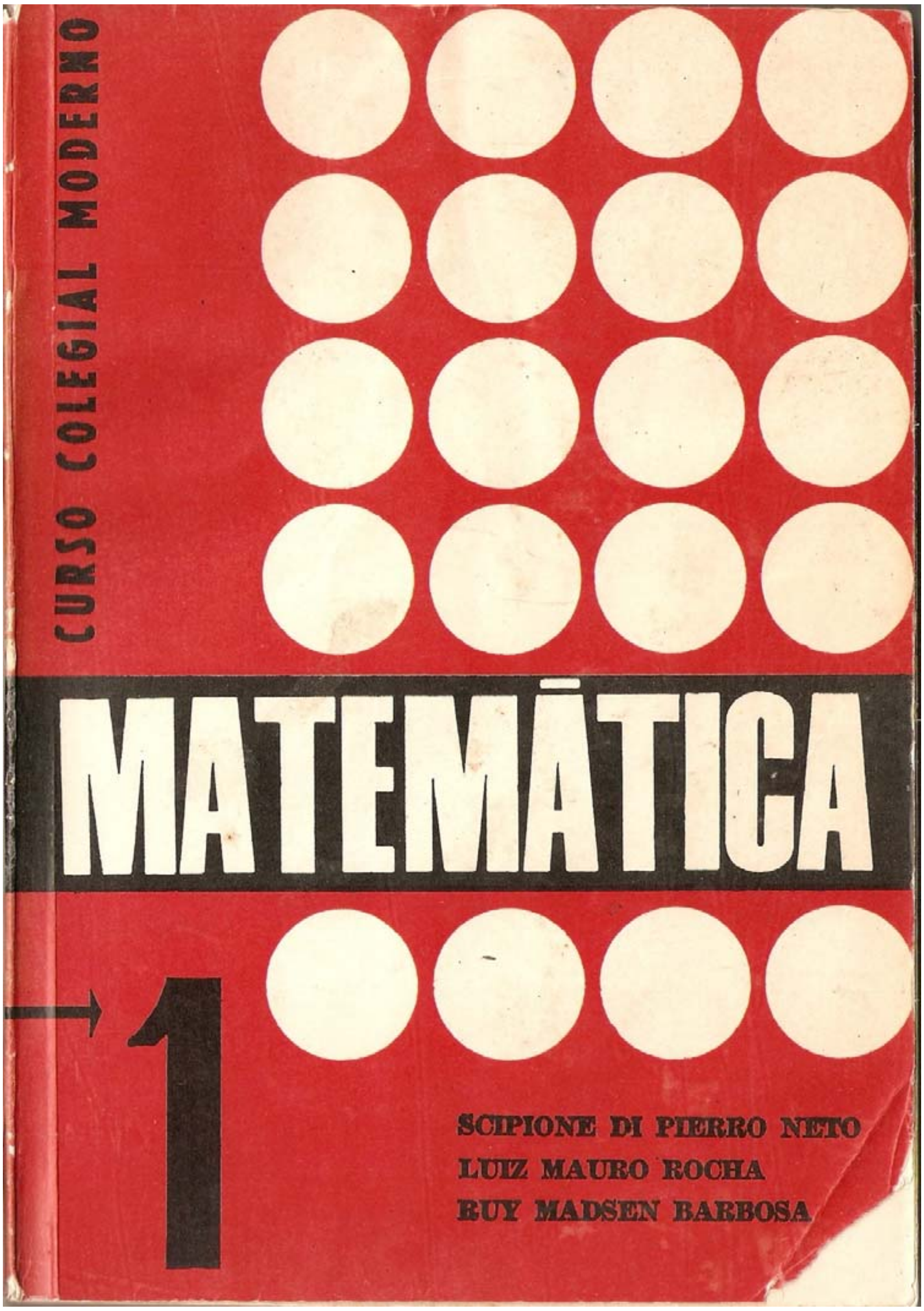
(SMSG, 1966)

Anexo 4
Capa. Matemática – Curso Colegial – Volume III – SMSG – 1966



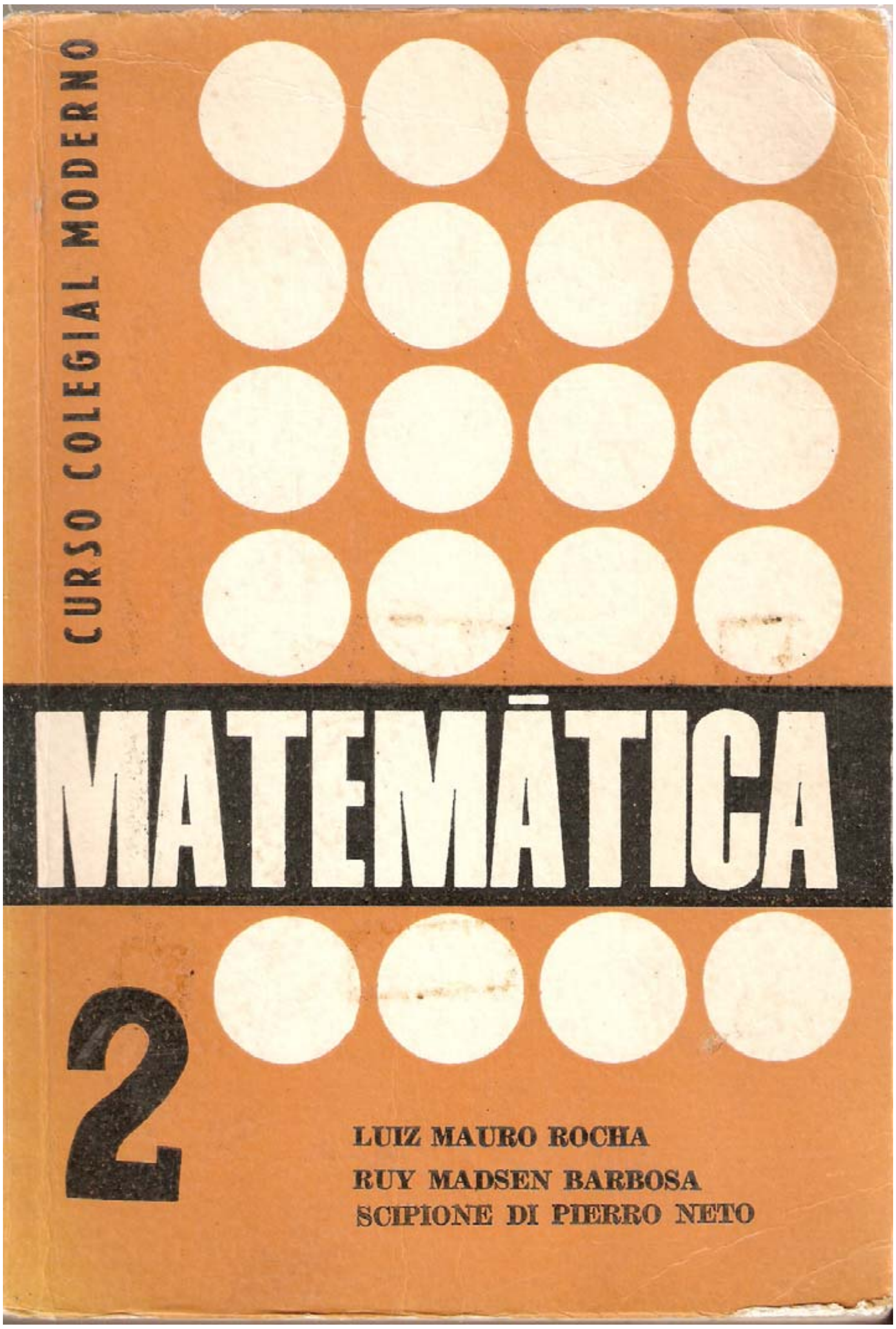
(SMSG, 1966)

Anexo 5
Capa. Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 1 – 1967



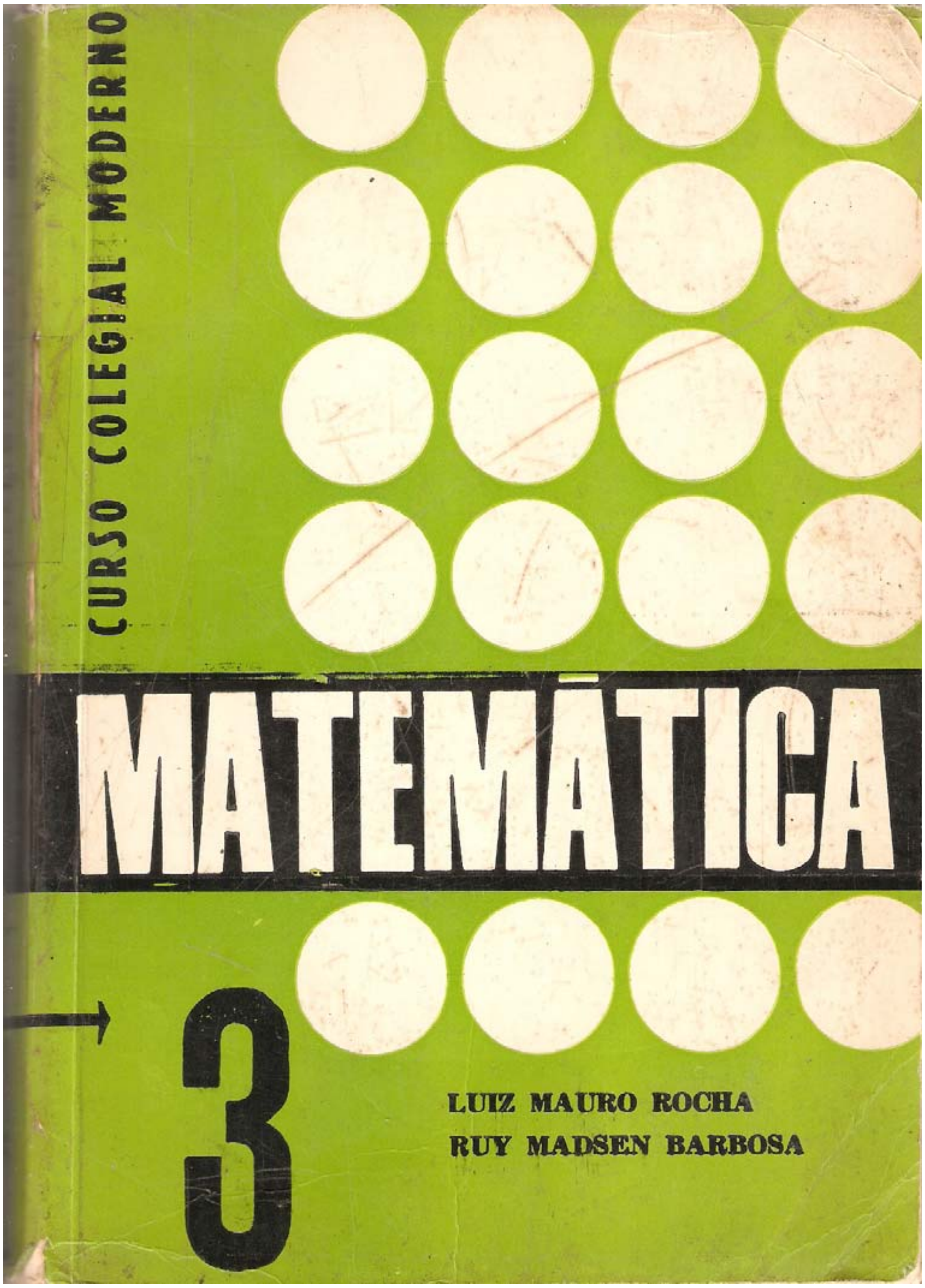
(PIERRO NETO; ROCHA, L, M; BARBOSA, R, M, 1967)

Anexo 6
Capa. Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 2 – 1968



(PIERRO NETO; ROCHA, L, M; BARBOSA, R, M, 1968)

Anexo 7
Capa. Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 3 – 1970



(ROCHA, L, M; BARBOSA, R, M, 1970)

Anexo 8
Índice. Livro 1 (Parte 1) – Matemática – Curso Colegial – Volume I – 1964

ÍNDICE

Índice. Livro 1 (Parte 2)

(SMSG, 1964)

Anexo 9
Índice. Livro 2.(Parte 1) – Matemática – Curso Colegial Moderno – Volume 1 – 1967

ÍNDICE

PRIMEIRA PARTE

FUNDAMENTOS

CAPÍTULO I

CAPÍTULO II

Índice. Livro 2.(Parte 2)

SEGUNDA PARTE

FUNÇÕES ELEMENTARES

TERCEIRA PARTE

TRIGONOMETRIA

Índice. Livro 2.(Parte 3)

CAPÍTULO VII

QUARTA PARTE

GEOMETRIA

CA-ÍTULO VIII

(PIERRO NETO; ROCHA, L,M; BARBOSA, R,M, p. 268-270)

Anexo 10
Intr. Conjuntos (Parte 1) – Matemática – Curso Colegial – Vol. I – SMSG – 1964

Capítulo 2

Conjuntos, Números Reais e Retas

2-1. Conjuntos

Você pode não ter ouvido antes o emprêgo da palavra conjunto em matemática, mas a idéia é bem conhecida. Sua família é um conjunto de pessoas formado por você, seus pais, seus irmãos e irmãs (se você tiver algum). Estas pessoas são os membros do conjunto. - Sua classe é um conjunto de estudantes: seus membros são você e seus colegas. Num clube esportivo uma equipe é um conjunto de jogadores. Dizemos que um membro de um conjunto pertence ao conjunto. Por exemplo você pertence à sua família e à sua classe, e assim por diante. Os membros de um conjunto são frequentemente chamados seus elementos; os dois têrmos, membros e elementos significam exatamente a mesma coisa. Se a um conjunto pertencem todos os elementos de outro conjunto, então dizemos que o primeiro conjunto contém o segundo e que o segundo conjunto é um sub-conjunto do primeiro. Por exemplo, o corpo - discente de sua escola contém sua classe e sua classe é um sub-conjunto do corpo discente. Dizemos que o sub-conjunto está contido no conjunto que o contém. Por exemplo o conjunto de todos os violinistas está contido no conjunto de todos os músicos.

Nêste livro, retas e planos serão considerados como conjuntos de pontos. Na verdade, tôdas as figuras geométricas sôbre as quais falamos são conjuntos de pontos. (Se achar conveniente, você pode considerar isto como um postulado).

Quando dizemos que dois conjuntos são iguais, ou quando escrevemos uma igualdade $A = B$ entre dois conjuntos A e B, queremos dizer simplesmente que os dois conjuntos têm precisamente os mesmos elementos. Suponhamos ser A o conjunto de todos os números inteiros entre $\frac{1}{2}$ e $5\frac{1}{2}$, e ser B o conjunto de todos os números inteiros entre $\frac{1}{3}$ e $5\frac{1}{3}$. Então $A = B$, porque cada um dos conjuntos A e B é constituído pelos elementos 1, 2, 3, 4, e 5. De fato, acontece frequentemente que o mesmo conjunto pode ser descrito de dois modos distintos; se as descrições tiverem aspectos diferentes, isto não - significa necessàriamente que os conjuntos sejam diferentes.

Dois conjuntos se interceptam se houver um ou mais elementos que pertençam aos dois conjuntos. Por exemplo, sua família e sua classe se interceptam, porque você pertence aos dois conjuntos. Porém duas classes que estejam assistindo aula a uma mesma hora não se interceptam. A intersecção de dois conjuntos é o conjunto de todos os elementos que pertencem a ambos. Por exemplo, a intersecção do conjunto de todos os homens e o conjunto de todos os músicos é o conjunto de todos os homens músicos.

Passando para assuntos matemáticos, vemos que o conjunto de todos os números ímpares é o conjunto cujos elementos são

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots$$

e assim por diante. O conjunto de todos os múltiplos de 3 é o conjunto cujos elementos são

$$3, 6, 9, 12, 15, \ldots$$

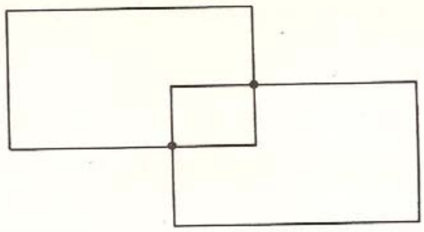
e assim por diante. A intersecção dêstes dois conjuntos é

$$3, 9, 15, 21, \ldots$$

e assim por diante; seus elementos são os múltiplos ímpares de 3.

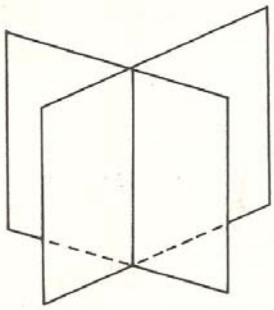
Na figura abaixo, cada um dos dois retângulos é um conjunto de pontos, e sua intersecção contém precisamente dois pontos.

Intr. Conjuntos (Parte 2)



Da mesma maneira, cada uma das regiões retangulares correspondentes é um conjunto de pontos, e a sua intersecção é a pequena região retangular no meio da figura. Na figura seguinte, cada uma das duas retas é um conjunto de pontos, e sua intersecção consiste de um só ponto.

A seguir, vemos dois conjuntos de pontos, cada um dos quais é uma superfície retangular. A intersecção dêstes dois conjuntos de pontos é uma parte de uma reta.



A reunião de dois conjuntos é o conjunto de todos os elementos que pertencem a um dos conjuntos ou a ambos. Por exemplo, a reunião do conjunto de todos os homens e o conjunto de tôdas as mulheres é o conjunto de todos os adultos.

A intersecção ou reunião de três ou mais conjuntos é definida do mesmo modo. Por conseguinte um triângulo é a reunião de três conjuntos, cada um dos quais é um subconjunto de uma reta.

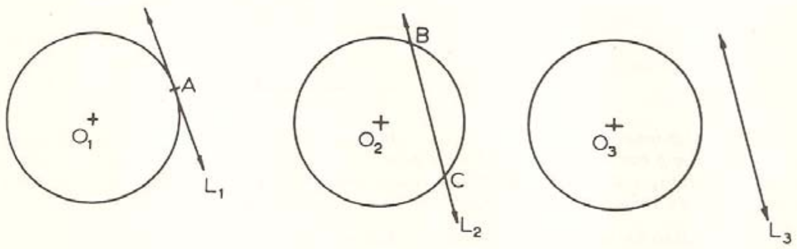
(SMSG, 1964, pp. 10-11)

Anexo 11
Ex.Prop.Conjuntos – Matemática – Curso Colegial – Vol. I – SMSG – 1964

S_3 é o conjunto de tôdas as meninas de seu corpo discente.
S_4 é o conjunto de todos os membros do corpo docente de sua escola.
S_5 é o conjunto cujo único elemento é você mesmo, um estudante da referida escola.

a. Quais pares de conjuntos se interceptam?
b. Qual é o conjunto reunião de S_2 e S_3 ?
c. Qual é o conjunto reunião de S_1 e S_5 ?
d. Descreva a reunião de S_1 e S_4 .
e. Quais dos conjuntos são subconjuntos de S_1 ?

3. Nas figuras seguintes, considerar a reta e o círculo como conjuntos de pontos. Em cada caso, qual é a intersecção dêles?



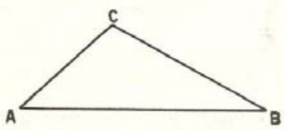
Caso I Caso II Caso III

4. Considere um conjunto de três meninos, $\{A, B, C,\}$. Qualquer conjunto de meninos escolhidos dêstes três será chamado uma comissão.
a. Quantas comissões diferentes, de dois membros, podem ser formadas com os três meninos?
b. Mostre que duas quaisquer das comissões de (a) se interceptam.
O que significa a expressão "se interceptam" ?

5. Considere o conjunto de todos os números pares positivos e o conjunto de todos os números ímpares positivos. Indique o conjunto reunião dêstes dois conjuntos.

6. Indique a intersecção dos dois conjuntos mencionados no Problema 5.

7. Na figura abaixo, qual é a intersecção do triângulo ABC e o segmento BC? Qual é a sua reunião?



8. Seja A o conjunto dos pares de números (m, n) que satisfazem a equação 4m n=9.
Seja B o conjunto dos pares de números (m, n) que satisfazem a equação 2m n=5.
Ache a intersecção dos conjuntos A e B.

9. Seja A o conjunto dos pares (x, y) para os quais $x + y = 7$.
Seja B o conjunto dos pares (x, y) para os quais $x - y = 1$.
Qual é a intersecção de A e B?

10. Seja A o conjunto dos pares (x, y) para os quais $x + y = 3$.
Seja B o conjunto dos pares (x, y) para os quais $2x + 2y = 7$.
Qual é a intersecção de A e B?

(SMSG, 1964, p.12)

Anexo 12
Intr.Conjuntos – Matemática – Curso Colegial Moderno – Vol. 1 – IBEP – 1967

2. Símbolos da teoria dos conjuntos:

«pertence a»	$\in$
«não pertence a»	$\notin$
«contido em» (estritamente)	$\subset$
«contém» (estritamente)	$\supset$
«contido» (sentido amplo)	$\subseteq$
«contém» (sentido amplo)	$\supseteq$
«inter»	$\cap$
«união» (ou «reunião»)	$\cup$
«não está contido»	$\not\subset$
«não contém»	$\not\supset$

3. Símbolos da Lógica:

«não», «é falso que»	$\sim$
«e»	$\wedge$
«ou»	$\vee$
«se... então», «condicionado a»	$\rightarrow$
«se e sòmente se», «bicondicionado a»	$\longleftrightarrow$
«tal que»	$\mid$
«implica»	$\Rightarrow$
«equivale»	$\Leftarrow\Rightarrow$
«existe»	$\exists$
«não existe (nenhum)»	$\nexists$
«existe um e um só»	$\exists\mid$
«qualquer que seja», «para todo», «para cada»	$\forall$

Conjuntos

A palavra *conjunto* é sinônimo "até certo ponto" de *coleção, classe, grupo,* no sentido usado na linguagem comum.

No entanto, no decorrer dêste estudo, veremos que a noção matemática de conjunto envolve certas ampliações, como "conjunto unitário", "conjunto vazio" e "conjunto infinito".

Consideraremos primitivo o conceito de conjunto, isto é, aceito sem definição. Mas ilustraremos a idéia com exemplos.

NOTA: No curso secundário é feita, apenas, uma teoria «intuitiva» ou «ingênua» dos conjuntos. Sòmente no curso superior, é possível apresentar a teoria lógica ou axiomática, desenvolvida admitindo certas noções como primitivas e certas proposições como axiomas.

(PIERRO NETO; ROCHA, L, M; BARBOSA, R, M, 1967, p.12)

Anexo 13
Exemplo.Conjuntos. – Matemática – Curso Colegial Moderno – Vol. 1 – IBEP – 1967

Conjuntos Numéricos Fundamentais

Nas exemplificações, usaremos constantemente os elementos dos seguintes conjuntos numéricos:

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ = conj. dos números *naturais*.
2. $\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ = conjunto dos números *inteiros*.
3. $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ = conj. dos números *inteiros positivos*.
4. $\mathbb{Q} = \{\ldots -\frac{1}{2}, -0, 2, 0, 0{,}333\ldots, 5, \ldots\}$ = conj. dos números *racionais*.
5. $\mathbb{R} = \{\ldots -0, 8, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, 3, \frac{3}{4}, \ldots\}$ = conj. dos números *reais*.

Você deve ter em mente a idéia prática de que número real é todo número que tem representação decimal, em algarismos hindu-arábicos.

Exemplos:

$2 = 2{,}000 \ldots$

$\frac{2}{3} = 0{,}666 \ldots = 0{,}6$ (dízima periódica)

-30

$23 . 10^{-2} = 0{,}23$

$\sqrt{2} = 1{,}4142 \ldots$

$0{,}27\ 22\ 77\ 222\ 777\ 2222 \ldots$

Os dois últimos são *irracionais* (têm infinitas "casas decimais" e não são periódicos).

A representação gráfica dos números reais como abscissas dos pontos de uma *reta orientada* ou *eixo* é também bastante útil; pois ilustra a noção, de *ordem* ("menor do que" e "maior do que") entre os números reais.

−3 −2 −1 0 1 2 3 x

P

FIGURA 2

(PIERRO NETO; ROCHA, L, M; BARBOSA, R, M, 1967, p.15)

Anexo 14
Ex.Prop.Conjuntos-Lógica.(Parte 1). Matemática – Curso Colegial Moderno – Vol.1 – IBEP – 1967

4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Associatividade)
5. $A \cap A = A$ (Idempotência)
6. $A \cup A = A$ (Idempotência)
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Distributividade)
8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributividade)
9. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (De Augustus de Morgan)
10. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (De Augustus de Morgan)
11. $\bar{\bar{A}} = A$ (Involução)
12. $A \cup \bar{A} = U$ (Lei do Meio-excluído)
13. $A \cap \bar{A} = \varnothing$ (Lei da Contradição)
14. $A \cap U = A$ (Lei do Universo)
15. $A \cup \varnothing = A$ (Lei do Vazio)
16. $A \cap \varnothing = \varnothing$ (Lei do Vazio)
17. $A \cup U = U$ (Lei do Universo)

NOTA: O aluno interessado poderá também verificar essas propriedades construindo os diagramas dos dois membros das igualdades.

13. Exercícios — Seqüência 1

I. LÓGICA:

1. Com recursos da tábua de valores lógicos (ou tabela verdade), prove tôdas as leis da Lógica relacionadas às páginas 22 e 23.

2. Com recurso das tábuas, prove as implicações ou equivalências seguintes:

a) $p \wedge q \Rightarrow p$

b) $p \rightarrow q \Longleftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$

c) $p \leftrightarrow q \Longleftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

d) $p \rightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \vee q$

e) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$

f) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$

g) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \Longleftrightarrow [\sim r \rightarrow (p \rightarrow \sim q)]$

h) $(p \rightarrow q) \wedge (\sim r \rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim r \rightarrow \sim p$

3. Mostre que a prova de um teorema pode ser substituída por uma prova indireta, provando-se o Teorema Contra-positivo:

$$\sim T \rightarrow \sim H \Longleftrightarrow H \rightarrow T$$

Ex.Prop.Conjuntos-Lógica.(Parte 2)

c. A proposição $A \subset \overline{B}$ é *equivalente* a:

I. $A \cap B = \varnothing$ II. $A \cup B = U$ III. $A = \varnothing$ IV. $B = \varnothing$

d. O conjunto $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{A}) \cap (B \cup \overline{B}) \cap (A \cap \overline{B})$ é igual a:

I. A II. $A \cup B$ III. $A \cap B$ IV. $\varnothing$ V. universo

C. *De Concordância*

a. É falso que; «para todo x pertencente ao conjunto A, x é maior que 5».

b. É falso que; «existe pelo menos um x pertencente ao conjunto A, x é menor que 5».

c. «Existe um x pertencente ao conjunto A, tal que x é maior ou igual a 5.»

d. «Para todo x pertencente a A, x é igual a 5.»

com:

a'. «Para qualquer x pertencente ao conjunto A, é falso que x é menor que 5».

b'. «O conjunto A é unitário e seu elemento é 5.»

c'. «É falso que, para cada x de A, x é menor que 5».

d'. «Existe algum x pertencente ao conjunto A, tal que x é menor ou igual a 5».

14. Exercícios — Seqüência 2

1. Escreva as negações de:

a) $\forall_{x \in A}\ ,\ x - 2 > 8$

b) $\exists_{x \in A}\ ,\ x - 2 = 7$

c) $\exists_{x \in A}\ ,\ x - 1 \neq 3$

d) $\forall_{x \in A}\ ,\ x \geq 5$

2. Definindo *conjunto das partes* $P(A)$ de um conjunto A o conjunto de todos subconjuntos de A (inclusive o vazio e êle próprio), escreva os diversos conjuntos das partes para cada conjunto dado:

$A = \{a, b\}$, $B = \{\triangle, \square, \bigcirc\}$, $C = \varnothing$, $D = \{\square\}$

3. Usando as propriedades das operações de conjuntos, verifique as igualdades:

a) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$

b) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

c) $A \cup (A \cap B) = A$

d) $A \cap (A \cup B) = A$

e) $(A \cap \varnothing) \cup (A \cup U) = U$

f) $(A \cup U) \cap (A \cap \varnothing) = \varnothing$

g) $(A \cup \varnothing) \cup (U \cap \overline{A}) = U$

h) $(A \cap U) \cap (\overline{A} \cup \varnothing) = \varnothing$

(PIERRO NETO; ROCHA, L, M; BARBOSA, R, M, 1967, pp. 32-36)