2

UMA TEORIA DE APRENDIZADO DE MATEMÁTICA

ANTES de apresentar qualquer teoria sôbre o aprendizado de Matemática, é indispensável definir claramente o que se entende aqui por Matemática. Não deve ser considerada como um conjunto de técnicas, embora tais técnicas sejam claramente essenciais para a utilização efetiva da Matemática. Esta deve ser vista antes como uma estrutura de relações. O simbolismo formal é sòmente um meio de comunicar partes da estrutura de uma pessoa para outra. Uma proposição matemática é uma proposição relativa a alguma conexão dentro da estrutura; para exprimir tal conexão temos de usar um simbolismo, que é, em suma, uma espécie de linguagem especialmente inventada para êsse fim. Por exemplo, a proposição simbólica

$$2(A + B) = 2A + 2B$$

estabelece uma conexão entre duas partes da estrutura, a que trata da adição e a da multiplicação. O conhecimento de que podemos passar dos símbolos $2(A + B)$ para os símbolos $2a + 2b$, e vice-versa, é conhecimento técnico, que *pode não incluir* qualquer conhecimento do elo efetivo simbolizado pela fórmula. Já mostrei que tais proposições formais sôbre estruturas estão sendo continuamente feitas em nossas escolas sem que as estruturas pròpriamente ditas sejam compreendidas.

Por Matemática devo, portanto, entender as *efetivas* conexões estruturais entre conceitos ligados à idéia de número (Matemática pura), ao mesmo tempo que suas aplicações a problemas tais como são postos na realidade (Matemática aplicada). Por aprendizado de Matemática, devo entender a apreensão de tais conexões, bem como de suas simbolizações, e a aquisição da capacidade de aplicar os conceitos formados a situações reais que ocorrem no mundo.

É difícil ver como qualquer teoria de aprendizado de "estímulo-reação" possa ser aplicada ao aprendizado definido dessa maneira. Tais teorias vêem o aprendizado como um processo de condicionamento de certas respostas que podem, subseqüentemente, ser evocadas por certos estímulos. Mas se formos apreciar novamente uma aula de Matemática *normal*, veremos em funcionamento justamente tal processo de condicionamento. Os estímulos são apresentados, e ligados a certas respostas chamadas de "respostas certas" por meio de alguma forma de explanação (sendo essa a única parte do processo que dá alguma atenção à estrutura). Um sistema de recompensas, em alguns casos reforçado por um de punição, condiciona os alunos a dar as "respostas certas". Na maioria dos casos, enquanto as respostas continuarem a ser "as respostas certas", nada se faz. A ênfase, em conjunto, é em "fazer certo", isto é, em estabelecer uma determinada resposta específica a um estímulo específico; e só se fazem referências à estrutura como um auxílio para pôr em execução êsse estado de coisas. Os alunos que dão, habitualmente, "respostas erradas" são normalmente aquêles cuja compreensão não se manteve a par com o desenvolvimento da estrutura. São reduzidos a aprender certos truques, com o fim de aumentar o número de "respostas certas" que são obrigados a dar dentro da situação condicionante. E não é, de modo algum, garantido que mesmo os que apresentam "respostas certas" na maioria das vêzes compreendem realmente as partes da estrutura a que aquelas respostas se referem. O que há de diferente na Matemática que torna uma situação de aprendizado de estímulo-reação menos adequada que em outros assuntos? É que a ênfase, em Matemática, é mais na estrutura e menos no conteúdo. No ensino de História, o mais importante sôbre os acontecimentos históricos é que êles ocorreram, embora, em uma fase mais avançada, sejam feitas tentativas para "estruturar" os acontecimentos, considerando-os partes de um modêlo. Essa espécie de estruturação é, por outro lado, a própria essência do pensamento matemático. E, ainda mais, os modelos estabelecidos começam, desde logo, a ser encarados como objetos matemáticos, que serão, então, adaptados em outros modelos; êstes, por sua vez, tornando-se familiares, são considerados objetos, e assim por diante. Essas superposições de modelos e de estruturas se sucedem com rapidez alarmante para os não-iniciados matemàticamente, os quais muito em breve se vêem deixados para trás na corrida.

Será conveniente examinar êsse processo um pouco mais detalhadamente. Para tornar o assunto tão claro quanto possível, usarei a terminologia gramatical, mais familiar, de "sujeito" e "predicado", em vez da linguagem lógica de "elementos" e "classes". Vejamos o conceito de número natural. O predicado "há três" se refere a uma coleção de coisas. Essa coleção de coisas é o sujeito do predicado acima, isto é, do predicado que declara que há três coisas na coleção. Indo mais além nessa fase, podemos, ao ver três maçãs e três laranjas, ser tentados a dizer: "há tantas maçãs quanto laranjas". Estamos agora aplicando um nôvo predicado: "há tantas quanto". Qual é o sujeito dêsse predicado? É o número de coisas em uma das coleções. Êsse número, o número três, estava sendo usado, agora mesmo, como um predicado aplicado a uma coleção. E, dessa vez, está sendo empregado como um sujeito, a que se aplica um nôvo predicado, "há tantas quanto". Para ser preciso, êsse predicado tem, realmente, dois sujeitos, o número de coisas na coleção de maçãs e o número de coisas na coleção de laranjas. O que estamos dizendo é que êsses números são os mesmos. Isso se tornaria ainda mais claro se considerássemos o predicado "há menos que". Se houver duas laranjas e três maçãs, podemos aplicar o predicado "há menos que" às laranjas e maçãs e dizer "há menos laranjas que maçãs". Os sujeitos são os números 2 e 3, e o predicado é "é menor que", que é escrito, simbòlicamente,

$$2 < 3$$

No início, 2 e 3 estavam dizendo algo sôbre coleções de coisas, depois os predicados "é o mesmo que" ou "é menor que" estavam dizendo algo sôbre 2 e 3. É fácil continuar a dizer coisas a respeito de "é o mesmo que". Por exemplo, para tornar claro o que significa adição, é necessário o conceito de "é o mesmo que". Quando contamos até 2, e depois contamos mais 3, verificamos que chegaremos ao "mesmo" número que se contarmos direto até 5. Da mesma forma, a multiplicação precisa da adição antes de poder ser explicada, e a fórmula $2(A + B)$ precisa tanto da adição quanto da multiplicação; isto é, essa fórmula diz algo a respeito de um enorme número de coisas, casa uma das quais diz coisas sôbre outras coisas, e assim por diante, até voltarmos aos números, que dizem algo sôbre coleção de coisas. Ou seja, sob forma gramatical, o predicado se torna sujeito de outros predicados, que por sua vez se tornam sujeitos de outros predicados, e o céu é o limite nessa corrida matemática.

As pessoas que são boas em domar predicados e a reduzi-los a um estado de sujeição são bons matemáticos. Cada vez que um matemático cria um predicado, êle quase imediatamente começa a imaginar o que pode dizer a respeito do nôvo predicado. O estabelecimento de um predicado que é aplicado a certa classe de sujeitos é uma espécie de cêrca em tôrno dêstes: uma pessoa de mentalidade matemática adquirirá, logo, claustrofobia matemática em tais espaços enclausurados e começará a imaginar o que há por fora da cêrca — em outras palavras, começará a procurar as conexões entre seus predicados. Não se pode mantê-la prêsa por muito tempo. Se essa espécie de pensamento infindàvelmente aberto é a essência do pensamento matemático, então está claro que é radicalmente diferente do tipo de pensamento diário. Os psicólogos que estudaram os problemas de aprendizagem e do pensamento raramente eram matemáticos; talvez seja esta a razão por que nenhuma teoria adequada foi ainda proposta para cuidar da espécie de aprendizagem que se realiza nesse campo bastante especial.

Há, porém, um pequeno núcleo de dados experimentais conseguidos por psicólogos matemàticamente orientados, a partir do qual é horrível basear um esbôço aceitável de teoria de aprendizado de Matemática. Muito, contudo, ainda está para ser feito. Se os problemas forem submetidos ao professorado como um todo, os mestres em exercício poderão participar ativamente da coleta de dados e, assim, ajudar a construir um fundamento sólido para uma teoria.

As fontes de onde sairá o nosso esbôço de teoria são as bem conhecidas pesquisas de Piaget, o trabalho do *Cognition Project* de Harvard, conduzido por Bruner, a fascinante obra de Sir Frederick Bartlett, e alguns de meus próprios resultados experimentais. O leitor deve consultar a bibliografia para referências detalhadas.

Alinhemos alguns esclarecimentos a respeito dessas pesquisas. Piaget foi o primeiro a perceber que o processo de formação de um conceito toma muito mais tempo do que se supunha anteriormente e que muito trabalho, aparentemente sem relação com o conceito, deve ser realizado antes que haja qualquer indício na direção que está tomando o pensamento. Essa é a fase do jôgo, estado largamente inconsciente, quando se brinca com os elementos do conceito, muito antes de haver qualquer idéia de que êsses elementos irão, um dia, ajudar a classificar os acontecimentos do mundo de um modo cômodo. O bebê brinca com sons e sílabas, muito antes de ter qualquer idéia de que, mais tarde, êsses sons serão veículos de comunicações. A criança brinca com tijolos e outros objetos, grupando-os em diferentes formas e tamanhos, muito antes de saber que está realmente praticando com os elementos que lhe permitirão formar posteriormente os conceitos de número e espaço. Temos experiência das flutuações nos preços e na renda, muito antes de tentar coordenar essas experiências de acôrdo com alguma teoria econômica. É claro que, em cada caso, jamais poderíamos ter formado os conceitos sem ter prèviamente jogado longamente com seus elementos. A segunda fase é introduzida pela lenta concretização de uma direção, ao longo da qual nossas experiências poderão transformar-se em um todo significativo. O bebê começa a perceber que certos sons ocorrem sempre que certos acontecimentos se realizam, como, por exemplo, que a irmã aparece sempre que o nome dela é pronunciado. Êle gradualmente começa a tentar produzir os sons em circunstâncias *apropriadas;* está, na realidade, tentando conscientemente deslocar-se na direção de comunicações significativas. A criança que brinca com tijolos percebe, finalmente, que aquelas coleções que contêm dois objetos têm algo em comum: por exemplo, que há um para êle e outro para a mãe. Isso é a alvorada da experiência matemática, experiência que conduzirá ao seu clímax, muito mais tarde, na apreensão do número puro. Em nossas reflexões sôbre preços e salários, chegará um momento em que pensamos que devemos tentar compreender os relacionamentos existentes e poderemos ir à biblioteca e retirar um livro sôbre Economia. Essa segunda fase, mais cedo ou mais tarde, conduz a uma terceira, quando, de algum modo, a figura fica focalizada e sentimos que "compreendemos". A conclusão do ciclo chega com a súbita percepção de um ponto final na jornada mental.* A essa fase se segue um período de prática, a fim de, presumìvelmente, apoiar mais firmemente o nôvo conceito em nossa experiência e, assim, fazê-lo parte integrante de nossa armadura operacional para lidar com as perplexidades do nosso ambiente. O bebê que aprendeu a dizer "Mamã" ficará dizendo isso inúmeras vêzes, só para ver se tem o efeito suposto. A criança que descobriu o número irá, interminàvelmente, construir quantidades de tôrres idênticas ou coisas semelhantes, e, ainda mais, insistirá com os adultos para que participem dessa repetição, embora êstes, muito ràpidamente, se cansem pela monotonia. Para compreender o ponto de vista da criança, só precisamos recordar como nós mesmos tendemos a aborrecer nossos amigos com qualquer teoria recém-descoberta e tentamos aplicá-la nas mais inoportunas situações!

* Bartlett, F. (9).

Essa é a fase da prática, que se segue à percepção de um conceito, e que, por sua vez, será a fase do jôgo para nova colheita de conceitos. Assim prosseguem os ciclos, um após outro, cada um se baseando em ciclos prèviamente executados.

O leitor não terá dificuldade em ver que essa descrição dinâmica do processo de aprendizagem ajusta-se com mais propriedade aos fatos da aprendizagem matemática do que a qualquer descrição atômica, de estímulo-reação. Mas é evidentemente apenas uma moldura que deve ser preenchida com o que se está aprendendo. As situações diferem uma da outra, por exemplo em estrutura lógica. Poderemos ter de relatar conjuntos de experiências por meio de diferentes conexões lógicas. Poderemos ter de aprender que os acontecimentos A e B sempre acontecem juntos, como, por exemplo, o soar da campainha e o início de uma aula. Associamos os dois acontecimentos juntando-os em um acontecimento combinado; fazemos a conjunção de dois acontecimentos prèviamente desconexos. Em outra situação, sabemos que se houver duas pessoas em uma pequena lista para um pôsto, apenas uma delas poderá ser designada para tal pôsto. Associamos êsses acontecimentos *disjuntando* as duas possibilidades separadas; fazemos uma disjunção de dois acontecimentos que eram desconexos antes da pequena lista ser escrita. No caso conjuntivo dizemos:

"A campainha soa *e* a aula começa."

No disjuntivo, dizemos:

"*Ou* o João consegue o pôsto *ou* José."

Há uma quantidade de outras conexões lógicas que fazemos entre conceitos já estabelecidos. Por exemplo: *Se* o Sr. A. é de Londres, *então* podemos falar com êle em inglês. Não é verdade que, se posso falar com alguém em inglês, estou, necessàriamente, em presença de um londrino — êle pode ser de Manchester ou da Escócia ou até de alguma parte remota do mundo. Êsse é um relacionamento de implicação. É evidente que êsses são todos diferentes relacionamentos lógicos, e, mesmo se forem aplicados às mesmas situações, as situações compostas formadas serão diferentes.

Por exemplo, se A são todos os números primos, e B todos os números que divididos por 4 deixam resto 1, então "A e B" significa apenas aquêles números primos que, divididos por 4, deixam resto 1; "A ou B" significa todos os números primos, bem como quaisquer outros números que existam que, divididos por 4, deixam resto 1.

Bruner, Goodnow e Austin, em um recente projeto de pesquisa na Universidade de Harvard,* estudaram as reações das pessoas a diferentes combinações lógicas de conceitos já estabelecidos. Em outras palavras, os elementos dos conceitos eram tão simples que qualquer pessoa os conhecia. A investigação estava interessada nas estratégias individuais pelas quais as pessoas tentavam descobrir os relacionamentos lógicos, que eram as únicas incógnitas dos problemas.

O procedimento, na maioria dos casos, foi a apresentação de certo número de cartões. Cada um dêles tinha triângulos, círculos ou quadrados, um ou dois ou três dêstes; e cada cartão era vermelho ou azul ou verde. Assim, havia três variáveis — número, forma e côr — cada uma com três valôres. Então, o experimentador pensava em um conceito, como triângulos vermelhos, e a pessoa escolhia cartões, ao que o experimentador respondia Sim ou Não: Sim se o cartão era vermelho *e* tinha triângulos; e Não, no caso contrário. As pessoas deveriam encontrar o conceito no menor número de tentativas. Algumas vêzes eram empregadas mais variáveis, em outras o número de escolhas era restrito. Os problemas eram suficientemente simples para que se pudessem usar estratégias matemàticamente ideais; as estratégias realmente observadas eram comparadas com elas.

O leitor verá como êsse procedimento pode fàcilmente ser adaptado ao exame da formação de conceitos conjuntivos, disjuntivos ou outros. Por exemplo, "triângulos vermelhos" é *conjuntivo,* uma vez que o cartão tem de ser vermelho e ter triângulos. Por outro lado, "vermelho *ou* triângulos" é um conceito *disjuntivo,* e qualquer cartão vermelho, tanto quanto qualquer outro com triângulos, teria provocado um Sim do experimentador.

As diferenças entre situações de aprendizagem podem não estar apenas na estrutura lógica do aprendizado. Indivíduos diferentes abordam diferentemente o mesmo problema, e isso foi claramente mostrado na pesquisa de Harvard. O tipo de problema abordado pode, de fato, influenciar o ângulo pelo qual é atacado, mas será até mais certamente influenciado pelo tipo de pensamento que as pessoas usam habitualmente. Sir Frederick Bartlett relaciona e examina uma quantidade de tais tipos diferentes de pensamento, variando desde o que êle chama de "sistema fechado de pensamento" até o totalmente

* Ver (8).

diferente pensamento do artista, que êle chama, com aptidão, de "pensamento aventureiro".*

O problema do aprendizado é essencialmente como encontrar uma espécie de "o mais adaptado" entre a estrutura da tarefa e a do pensamento da pessoa. Para que o processo seja explanado por qualquer espécie de teoria inteligível, as duas estruturas têm de ser levadas em consideração e pelo menos alguma tentativa deve ser feita para uma descrição quantitativa. É, certamente, uma tarefa muito difícil e pouco se sabe até agora, embora já tenha havido um pequeno início na recente monografia do autor, *Concept Formation and Personality.***

O leitor interessado nos pormenores da teoria e da demonstração experimental consultará com proveito as monografias relacionadas na bibliografia. Não há espaço neste pequeno capítulo para desenvolver os assuntos. Sòmente serão apresentadas as principais conclusões e as inferências resultantes, pois nelas serão baseadas as sugestões práticas seguintes sôbre o aprendizado de Matemática.

Já mencionamos as três fases de Piaget para a formação de um conceito. A cada uma delas corresponde um tipo de aprendizado muito diferente. À fase preliminar, a do jôgo, corresponde uma atividade bastante indireta, aparentemente sem finalidade — a espécie de atividade que é realizada e apreciada para o próprio bem. É essa espécie de comportamento que é normalmente chamada de jôgo. Para torná-lo possível, é necessária a liberdade de experimentar. Essa fase do aprendizado do conceito deve, portanto, ser tão livre quanto possível, com os ingredientes do conceito disponíveis como material de brinquedo. A segunda fase é mais direta e com um fim em vista, mas é caracterizada pela falta de qualquer compreensão nítida do que se está buscando. Nessa fase é conveniente certo grau de atividade estruturada. Como isso é conseguido dependerá da estrutura do conceito, tanto quanto do modo particular de pensar da pessoa a êle submetida. Até que se saiba mais a respeito dêsses fatôres, o procedimento mais seguro é conseguir um grande número de experiências de várias estruturas, tôdas conduzindo ao conceito. A terceira fase deve oferecer uma prática adequada para a fixação e aplicação dos conceitos que foram formados. Os jogos que são utilizados nessas fases serão referidos como

* Ver (9).
** Ver (10).

a) jogos preliminares
b) jogos estruturados
c) jogos de prática.

Essa classificação é, realmente, relativa a um conceito dado. É evidente que um jôgo de prática para um conceito pode servir de preliminar para um conceito posterior. Mas é importante não usar jogos de prática como preliminares para o *mesmo* conceito — êrro comum nos jardins de infância, onde se espera que as crianças aprendam por meio de jogos que não podem realmente realizar, sem conhecer antecipadamente o que se supõe que estejam aprendendo. Também é importante estar alerta sôbre o momento em que a criança está passando de uma fase para outra, para que sejam apresentadas as experiências apropriadas, para se manter a par com a situação mutável.

Voltando à pesquisa de Bruner, verificamos que um dos relevantes resultados para o aprendizado de Matemática é a dificuldade dos conceitos disjuntivos. Devemos lembrar-nos que o trabalho de Bruner é quase inteiramente baseado na dissecação lógica da situação, e uma disjunção lógica despojada de seu contexto matemático é muito mais difícil do que a mesma coisa imaginada como parte de uma estrutura em processo de construção. Por exemplo, passarmos da afirmação

$$(x - 2) \times (x - 1) = 0$$

$$\textit{seja para } (x - 2) = 0 \quad \textit{ou para } (x - 1) = 0$$

é uma tarefa muito difícil com respeito ao contexto matemático.

Mostraremos que existe um modo construtivo de chegar a essa conclusão que a torna consideràvelmente mais fácil e, assim, acessível a crianças muito mais novas. Sendo o aprendizado matemático preeminentemente de construção de predicados, seguido, só mais tarde, por um exame crítico, isto é, lógico, do que foi construído, não podemos esperar que o tipo de estudo de Bruner ilustre mais do que pequenas partes da estrutura. A construção de peças inteiras da estrutura não é uma operação lógica e, por isso, não pode ser examinada pelo método analítico de Bruner. Bartlett chega muito mais perto quando supõe que o pensamento tende, às vêzes, a surgir dos sistemas lógicos restritos a que alguns querem confiná-lo. O pensamento lógico formal é restrito, e o tipo de formação de conceitos de Bruner é daqueles que permanecem dentro de tais limites cuidadosamente restringidos e determinados. Não queremos dizer que tais estudos sejam inúteis; são apenas insuficientes para descrever o tipo de pensamento matemático, mais de caráter construtivo. Pode ser conveniente perguntar o que aconteceria se os limites, dentro dos quais opera êsse tipo de pensamento, fôssem consideràvelmente ampliados. Suponhamos que fôssemos aumentando o número de variáveis e o de valôres que cada variável pudesse assumir; que aconteceria à estratégia? Que acontece quando o total de análise necessária para avaliar uma situação, sob um ponto de vista lógico, fica além da capacidade da pessoa de guardar tôdas as possibilidades com que se defronta? Pode desistir ou fazer alguma outra coisa. Se não desistir, é muito provável que se realize alguma coisa parecida com o tipo de pensamento aventureiro de Bartlett. A essência dêsse tipo de pensamento é que a pessoa enfrenta o que Bartlett chama de "padrão", e para o qual ela trabalha. Um artista vive para o seu padrão, ou deixa de ser artista. Não poderia, provàvelmente, analisar seu problema lògicamente: o número de possibilidades é grande demais. Não é preciso muita imaginação para ver que êle tem recursos para processos de pensamento muito diferentes. Quando um artista termina uma pintura que está de acôrdo com seu padrão, não está, talvez, uma vez mais, muito longe do matemático que construiu um nôvo predicado.

Se assim é, então o pensamento matemático necessitará do tipo de investigação que toma conta do processo construtivo enquanto ainda está em desenvolvimento. O problema é idealizar situações matemáticas-padrão, em que êsse tipo aventureiro de pensamento ainda se pode apresentar. Isso foi feito por êste autor em uma série de experiências que fizeram surgir um nôvo método de investigar os processos matemáticos em estudo. Algumas tarefas estavam destinadas a ser mais sobrecarregadas do lado construtivo: quer dizer, muitos predicados tinham de ser formados uns sôbre os outros. Essas tarefas eram, ao mesmo tempo, lògicamente simples, necessitando de muito pouca análise. Outras tarefas foram traçadas com uma estrutura lógica complexa, mas onde não era necessária muito construção. Dêsse modo, esperávamos lançar alguma luz sôbre o funcionamento dos diferentes tipos de pensamento, observando a eficácia com que diferentes tipos de pessoas se comportavam nessas situações.

Verificamos, e tem sido, desde então, amplamente confirmado no trabalho com crianças escolares executando as mesmas tarefas matemáticas, que as pessoas variam, conforme o grau em que se sintam capazes ou desejosas de se engajar em pensamentos analíticos (lógicos) ou construtivos, respectivamente.

Ficou também bem claro que as crianças desenvolvem o pensamento construtivo muito antes do analítico. Assim, na criação de situações de aprendizado matemático por meio de aparelhos, devemos lembrar-nos que, embora as crianças possam não estar em condições de fazer julgamentos lógicos, poderão construir conceitos matemáticos muito mais cedo do que tem sido julgado possível. Seguir-se-á, naturalmente, a exploração lógica do que construíram, mas talvez anos depois.

Vamos, agora, entrar em detalhes a respeito do *conteúdo* do aprendizado matemático. Sabemos que as três fases de crescimento são necessárias antes que um predicado ou conceito matemático se torne totalmente operacional. Como poderemos acelerar o desenvolvimento dos conceitos, colocando as experiências mais apropriadas no caminho da criança? Um conceito matemático normalmente contém certo número de variáveis, e é a constância do relacionamento entre estas, enquanto as próprias variáveis mudam, que constitui o conceito matemático.* Para dar o máximo de experiência, estruturada de tal forma a encorajar o desenvolvimento do conceito, será desejável, *a priori*, que se façam variar *tôdas* as possíveis variáveis, enquanto se mantém intacto o conceito. Por exemplo, com o conceito de paralelogramo podemos variar a forma, mudando os ângulos e os comprimentos dos lados opostos; podemos variar a posição, contanto que mantenhamos os lados opostos paralelos. É claro que um conjunto de paralelogramos congruentes, colocados na mesma posição, não seria um conjunto de experiências apropriado para o desenvolvimento do conceito. Podemos estabelecer isso dizendo que devemos fazer variar o maior número possível de variáveis, de forma a obter a experiência ótima para o desenvolvimento do conceito.

Devemos examinar em seguida o problema da escolha de estrutura para o real conteúdo conceptual da tarefa. O resultado do trabalho experimental realizado até agora sugere que a complexidade lógica seja reduzida a um mínimo. Se existe uma escolha entre uma tarefa montada construtivamente e uma analìticamente, a primeira será, quase certamente, a mais indicada, especialmente quando as crianças são pequenas. O método analítico de avaliar crìticamente uma situação é um modo de pensar muito mais maduro e muito mais raramente ocorre em crianças antes da idade de 12 anos. Depois dessa idade, tarefas analíticas (tais como provas) começam a ser apreciadas.

* Castelnuovo, Wertheimer; ver (12) e (5).

Podem ser gradualmente introduzidas, contanto que sempre exista a construção matemática, para que haja alguma coisa para analisar.

Havendo decidido sôbre a estrutura da tarefa, como poderemos proceder para fazer face a tôdas as diferenças individuais existentes para enfrentar a formação do *mesmo* conceito? Como eu já disse antes, em nosso atual estado de conhecimento — ou antes, falta dêle — o único modo de fazer isso é conseguir tantas variações quanto possível, com diferentes meios, em relação ao mesmo tema conceptual. Isso é possível com o estabelecimento de tarefas que *parecem* muito diferentes, mas que têm, essencialmente, a mesma estrutura conceptual. Em outras palavras, podemos variar a representação perceptiva, mantendo constante a estrutura conceptual. Por exemplo, paralelogramos podem ser traçados no papel, ser construídos de dois triângulos de madeira congruentes, podem ser traçados com pinos em um eucatex, podem ser encontrados em desenhos de papel de parede etc. Muitas aplicações dêsse princípio podem ser encontradas em capítulos posteriores dêste livro. As crianças aprendem o que há em comum entre essas diferentes representações e é êsse traço comum que é o conceito matemático.

Podemos resumir da seguinte maneira:

1. *Princípio dinâmico.* Devem ser apresentados jogos preliminares, estruturados e de prática como experiências necessárias das quais os conceitos matemáticos poderão, eventualmente, ser construídos, desde que cada tipo de jôgo seja introduzido na época apropriada.

   Embora, enquanto as crianças forem pequenas, êsses jogos devam ser, forçosamente, realizados com material concreto, os jogos mentais podem ser gradualmente introduzidos para dar um gostinho dêsse mais fascinante de todos os jogos, a pesquisa matemática.

2. *Princípio da Construtividade.* Ao estruturar os jogos, a construção deve sempre preceder a análise, que está quase completamente ausente do aprendizado pelas crianças de menos de 12 anos.

3. *Princípio da Variabilidade Matemática.* Os conceitos que envolvam variáveis devem ser aprendidos por meio de experiências que incluam o maior número possível de variáveis.

4. *Princípio da Variabilidade Perceptiva.* Para permitir o maior campo possível para variações indivi-

duais na formação dos conceitos, tanto quanto induzir as crianças a perceber a essência matemática de uma abstração, a mesma estrutura conceptual deve ser apresentada na forma de tantos equivalentes perceptivos quanto possível.

Ficará claro que a espécie de aprendizado de Matemática aqui descrita não é a que se encontra comumente na sala de aula convencional. Mas não quer dizer que nunca ocorra. Há algumas crianças que são capazes de perceber certo grau de abstração em uma experiência muito limitada, o que é impossível para a maioria; a isso se deve acrescentar a possibilidade do tipo de pensamento do mestre coincidir com o do aluno, caso em que as "explanações" são capazes de surtir efeito. Mas, em conjunto, a espécie de Matemática que é aprendida não é aquela que consiste em uma série de conceitos superpostos, cada um recolhido da experiência pessoal, por intermédio de um processo psicodinâmico, descrito com tanta aptidão por Piaget. A espécie de Matemática aprendida é de um tipo associativo; isto é, as crianças associam certas situações a determinados processos e executam os processos cada vez que se encontram em situações às quais os processos foram associados. Se as situações variarem ligeiramente, como no caso de um problema formulado ligeiramente diferente, ou, muitas vêzes, pelo uso de letras diferentes, uma situação completamente nova é criada para a criança. Como não se realiza a transferência (uma vez que não há a apreensão geral da situação), os processos não se realizam, ou são usados os "errados" e, assim, a resposta será "errada". Para se estabelecer uma situação de aprendizado que se adapte às exigências fundamentais do aprendizado matemático tal como aqui definidas, são necessários uma organização de sala de aula e um sistema de comunicação diferentes.

Para fazer face às diferenças individuais das crianças, a maior parte do aprendizado deve ser realizada individualmente ou em pequenos grupos de dois ou três. Não é aconselhável que mais de três crianças trabalhem no mesmo lugar e, de modo geral, da mesma maneira. Isso significa que tôda a informação não pode vir do professor, já que êle simplesmente não pode ter tempo para se dirigir e "ensinar" separadamente a quarenta diferentes crianças, cada uma, possìvelmente, em uma fase diferente. Deve haver outras fontes de informação na sala de aula, assim como lugares onde encontrar o que fazer depois e, se possível, lugares onde verificar a precisão e a correção de uma resposta, se fôr preciso. Da mesma forma, deverá existir um sistema de cartões de distribuição de tarefas, por meio dos

quais as crianças possam trabalhar. Devem ser arrumados não só em série — construir um conceito por uma série de tarefas correlatas — como em paralelo — apresentando a mesma idéia conceptual com material diferente. Preferìvelmente, os cartões devem oferecer certo grau de escolha, e certamente grande variedade, de acôrdo com os dois princípios de variabilidade. Para tornar o aprendizado tão construtivo quanto possível, será necessária uma quantidade considerável de material concreto. A manipulação dêsse material, de acôrdo com as instruções dadas nos cartões, conduzirá as crianças através de experiências apropriadas, levando-as de conceito em conceito e ajudando-as a construir a estrutura conceptual da Matemática em seus cérebros. Os jogos estruturados, que devem conduzir à formação de conceitos abstratos, tão práticos e significativos quanto possível (não n torneiras jorrando quantidades diferentes de água em uma enorme banheira), para assegurar que os conceitos são verdadeiramente operacionais antes que outro ciclo de formação de conceito possa ser iniciado. Uma operação detalhada de vários esquemas semelhantes a êste será descrita nos dois capítulos seguintes.

Não se precisa dizer que uma atitude autoritária não ajudará numa situação de aprendizado como essa. A essência de uma situação de aprendizado criadora é a sutileza de perguntar, e autoritarismo não encoraja um espírito de pesquisa. O professor encarregado tem um papel muito diferente para desempenhar. Em primeiro lugar, êle deve verificar se as linhas de comunicação das fontes de informação às crianças são mantidas abertas. Muitas vêzes, o vocabulário dos cartões cria um bloqueio, ou uma criança pode estar tentando um cartão para o qual não está preparada, no sentido de que ainda não dominou os conceitos constituintes necessários. Uma revisão no cartão ou uma palavra ou duas para a classe em geral serão necessárias no primeiro caso; e a introdução da criança a experiências posteriores, para fortalecer os conceitos que está aprendendo, no segundo caso. O equilíbrio dinâmico dessa espécie de aprendizado pode ser muito delicado e uma palavra imprópria ou um tom de voz reprovador pode estragar o aprendizado de uma criança durante o resto da aula. Os professôres encarregados de tais aulas agem como conselheiros e auxiliares dos próprios esforços das crianças na luta com os problemas que enfrentam.

Um professor treinado convencionalmente poderá estranhar como todo êsse trabalho é mantido em andamento sem a fôrça da figura autoritária à testa da sala de aula. As crianças quererão fazer tudo isso se, de algum modo, não tiverem de fazê-lo? Êsse é o perturbador problema da motivação. Poderemos ter uma situação de aprendizado criadora na qual a disciplina é principalmente mantida pelo espírito de investigação — gerado pelo interêsse nas tarefas em que as crianças estão engajadas? Em outras palavras, a atividade automotivada conduz à autodisciplina? A resposta não é tão simples. Não é verdade que o professor encarregado se abstém do sentimento de responsabilidade pela conduta da turma. As crianças devem sentir que o professor encarregado está realmente encarregado, que as auxiliará e controlará, se fôr necessário. Mas êsse trabalho do mestre é tornado muito mais fácil pelo interêsse pelas tarefas. Se um professor que estiver administrando um esquema de aprendizado criador demonstrar, êle mesmo, sua convicção de acreditar no sistema, seu entusiasmo será transmitido às crianças, e o problema da disciplina da turma diminuirá. Como na maioria dos casos, só a experiência conduzirá à convicção. Temos, agora, bastantes provas para afirmar que qualquer bom professor que tenha um relacionamento fácil com seus alunos está perfeitamente capacitado a resolver os problemas disciplinares nesse tipo de situação, se fôr capaz de fazê-lo no outro tipo mais usual. A alegria com que é saudada a aula de Álgebra do tipo criador, a execução voluntária da atividade matemática nos momentos de folga ou nas horas de atividade livre, são suficientes indicações do caráter de automotivação da situação de aprendizado criadora.

Não propomos entrar em quaisquer teorias de motivação, pois um volume desta natureza não é, evidentemente, indicado para isso. Por outro lado, o problema tinha de ser mencionado, porque a situação social criada por êsse tipo de aprendizado matemático é muito diferente da lição convencional. Em resumo, os professôres que pretendem usar o método deverão considerar se estão de acôrdo com o tipo de situação social que a adoção provoca. Uma atitude de simpatia e amor pelos alunos é essencial, e uma atitude de humildade diante do desenvolver do poder de pensamento das crianças é extremamente desejável, tanto quanto uma orientação não-dogmática em geral.

Tais atitudes não são adquiridas em curto espaço de tempo, e estou plenamente convencido de que êsse elemento humano pode tornar-se um fator limitativo fundamental. O professor que estiver integralmente aferrado ao seu papel autoritário numa situação de ensino em classes formais não será tranformado por coisa alguma contida nestas páginas. Por outro lado, o professor cujo instinto principal é a simpatia pela criança,

e não o poder e a autoridade sôbre ela, considerará as exigências adicionais à sua sensitividade como um repto. Tal professor não terá dificuldade em compreender que, se uma criança comete um êrro, será melhor sugerir outro trabalho, que fará a criança perceber o êrro, e não apenas colocar uma cruz após o resultado. Não lhe será difícil aprender a considerar o mérito dos processos utilizados pela criança, diferentes do seu, ou verificar que a padronização de um processo poderá ser o único método de ensinar uma execução eficaz. Em resumo, aprenderá, ràpidamente, como conduzir a criança, em dezenas de modos diferentes, a uma situação mùtuamente criadora em que cada um desempenha um papel positivo, em que o do professor não é o de menor importância.

3

CONCEITOS ARITMÉTICOS

VAMOS, em primeiro lugar, fazer uma lista das principais áreas conceptuais que possam parecer razoáveis para serem abordadas em um curso de Aritmética escolar. Haverá, provàvelmente, geral concordância de que as quatro operações, adição, subtração, multiplicação e divisão, devem ser ensinadas, com números inteiros ou fracionários (tanto sob a forma ordinária quanto decimal). Deverão ser incluídas aplicações geométricas, tais como as medidas de comprimento, área e volume, assim como medidas de tempo, conduzindo à idéia de velocidade. Podem também ser dadas aplicações físicas, como a noção de pêso; e, como aplicações culturais, os sistemas de pesos e medidas, tanto nossos como das culturas vizinhas.

Os conceitos acima se dividem, naturalmente, em duas espécies: puros e aplicados. Os primeiros são os que lidam com os números em si e com suas propriedades, tanto quanto com as operações que podem ser realizadas com êles. Os aplicados são os que aplicam essas propriedades e operações às facêtas particulares do mundo real, tal como o enfrentamos. O número aplicado à linha faz surgir o conceito aplicado da medida linear; aplicado à superfície, dá origem ao conceito de área, e assim por diante. Aplicado à dificuldade variada de poder levantar um objeto, faz nascer o conceito físico aplicado de pêso. De cada vez, uma facêta de nossa experiência com o ambiente é isolada como relevante, com exclusão de tôdas as outras. É um pouco mais difícil ver de que modo aparecem os conceitos puros. À luz da teoria a seguir, devemos olhar uma série de experiências, das quais concluímos, ao final, tais conceitos, como sua essência comum. O conceito de número natural surge, certamente, de nossas experiências iniciais em manusear objetos separados e em considerá-los em grupos. Uma longa experiência em tratar com dois objetos e em considerá-los, de algum

modo, como partes de um todo maior, isto é, da coleção que consiste nos dois, fará nascer, gradualmente, alguma idéia qualitativa de dualidade. É um predicado que aprendemos a associar a tôdas as coleções de dois objetos. Quase certamente, não olhamos, a princípio, êsse predicado ou propriedade de dualidade como composto de dois objetos separados, mas como uma propriedade geral da coleção. Assim formamos idéias qualitativas de trio ou de muitos, quando os grupos não podem ser imediatamente reconhecíveis. Isso é, provàvelmente, o máximo que os animais conseguiram atingir na "contagem". Quando se argumenta que um macaco pode contar até 5, mas não até 6, o que se quer dizer é que, se lhe derem 5 bolas para brincar e tirarem 1, êle notará; mas, se lhe derem 6 e tirarem 1, êle já não perceberá. Não aprendeu a dividir quaisquer dessas propriedades dos grupos em seus componentes: na terminologia do último capítulo, êle está pensando construtivamente, mas não analìticamente. Uma criança leva alguns anos para completar êsse processo de divisão, e a noção do número natural, *tal como a conhecemos*, não se concretizará até que a criança verifique que 10 contas em um colar são exatamente o mesmo número que 10 contas espalhadas sôbre uma mesa. Tal como, conclusivamente, o demonstrou Piaget, as crianças são capazes de contar muito tempo antes de se compenetrarem da constância do número de objetos em um grupo. Devemos, por isso, ser cuidadosos em não supor que êsse "conhecimento" de contar pode ser usado para o início de outro ciclo de conceitos, tal como, por exemplo, o ciclo que leva ao conceito de adição. Justamente porque os adultos acham tão difícil entrar nesse mundo conceptual da criança, extraordinàriamente diferente, é que o ensino dos conceitos matemáticos tem sido considerado tão intratável. O objetivo dêste capítulo é esboçar certo número de tais ciclos de conceitos matemáticos no aprendizado inicial dos conceitos aritméticos — particularmente os ciclos em que a superestrutura de nosso sistema numérico é colocada acima dos conceitos aritméticos simples. A descrição e a análise dêsses ciclos, juntamente com os métodos sugeridos para sua execução mais eficaz, só podem consistir em exemplos. Não há espaço, neste pequeno volume, para enumerar todos os ciclos conceptuais incluídos no esquema conceptual esboçado no início dêste capítulo, embora venhamos a tentar apresentar, brevemente, as interligações dos conceitos relevantes.

Quais são êsses conceitos relevantes? Além do que denominamos conceitos aplicados, existem certos conceitos e processos associados que tendemos a considerar como puramente matemáticos. Tôdas as crianças devem ficar claramente familiarizadas com êles durante o início de sua vida escolar; contudo, não são, em absoluto, conceitos realmente puros. Por conceitos numéricos puros compreendemos os que lidam com o que é intrínseco ao número. Os novos conceitos mencionados, por outro lado, são os que surgem do modo pelo qual estabelecemos a comunicação entre os números: em outras palavras, são conceitos ligados à nossa notação de número. Do mesmo modo, assim como uma criança romana de há dois mil anos tinha de aprender que se um I estivesse escrito antes de X, isto é, como IX, isso significava um menos que dez, assim uma criança em nossa cultura tem de aprender que 15 significa quinze, e 51 significa cinqüenta e um. Nada a respeito dêsses "fatos" tem, intrìnsecamente, que ver com os números em questão; são inevitàvelmente ligados às notações usadas. Os fatôres biológicos e culturais fizeram finalmente surgir uma notação de número que usa valor de posição, com a base dez como um meio de comunicar números, e é essencial que as crianças aprendam o significado dessa comunicação tão eficazmente quanto possível. Aprender a contar até 50 ou 100 não implica, em nada, que aprendemos a significação de notação. Para uma criança pequena, 17 é apenas associado à palavra-número dezessete, e não é, certamente, decomposto em um dez e um sete. O mesmo se aplica aos conceitos de ordem mais elevada, da adição e das outras operações. Uma criança pode ter aprendido o conceito de que, para somar dois números, temos de *contar seguidamente*, do primeiro número, com tantos números intermediários quanto indicado no segundo. Contudo, ela poderá ficar muito longe de conceber a complicada estrutura da tarefa de 27 + 35, em que se deve realizar o grupamento e reagrupamento de dez em dez, para executar econômicamente a tarefa. Em outras palavras, os conceitos e processos matemáticos têm de ser aprendidos, primeiro, em forma pura, seguida dos mesmos conceitos e processos em forma notacional, isto é, com a estrutura do sistema decimal superimposta a êles. Devemos, portanto, estabelecer uma cuidadosa distinção entre conceitos *puro* e *notacional*, que podem ser descritos, por alguns, como conceitos *matemático* e *aritmético*.

Vamos examinar em detalhe o mais fundamental princípio de notação em Aritmética, o do valor de posição, e ver que conclusões podemos tirar sôbre os métodos de aprender êsse conceito à luz dos quatro princípios do último capítulo.

Quando escrevemos um grande número como 24.579, o que realmente queremos significar é

$$2 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$

Se olharmos êste desenvolvimento à luz do princípio da variabilidade matemática, vemos que três variáveis entram nesse arranjo numérico:

I) os algarismos; II) as potências; III) a base.

Poderíamos variar qualquer ou todos êstes, sem destruir o aspecto essencial do valor de posição. O conceito do valor de posição é independente dos valôres dos algarismos, exceto que o número dêstes é restringido em função da base. É independente do número de potências usadas, que é o que dá ao conceito sua natureza matemática caracterìsticamente aberta — é aberta em direção ao infinito. Além disso, é independente da base. Por exemplo:

$$1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

também pode ser escrito assim:

$$1 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 0 \times 3^0$$

Em outras palavras, 126, no sistema ternário, seria escrito como 11200. O que é comum a todos êsses modos possíveis de expressar números é o conceito do valor de posição. (Da mesma forma, a propriedade comum a todos os quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos com lados adjacentes, guardando razões amplamente diferentes, fazendo ângulos amplamente diferentes entre si e em tôda sorte de diferentes posições, conduzirá ao conceito matemático de um paralelogramo.) Quando tivermos variado os algarismos, as potências e a base, que restará? Qual é a abstração matemática do valor de posição? Em cada caso, arranjamos de acôrdo com as potências descendentes da base, e o valor de cada algarismo deve ser sempre menor que o valor da base: ir para a direita significa atingir a potência inferior, ir para a esquerda é encontrar a potência superior seguinte. Se um algarismo atingir ou ultrapassar a base, significa que já temos, no mínimo, mais um na potência superior seguinte.

Êsse é o "esqueleto" do conceito do valor de posição, e é com êsse grau de generalização que devemos raciocinar à luz do princípio da variabilidade matemática. Se, como parece provável, a extensão do campo de aplicabilidade de um conceito está na razão direta de sua generalização, não poderemos ficar desapontados com o resultado, quando êste fôr obtido. Uma criança que tiver dominado um conceito em uma forma mais geral será certamente capaz de aplicá-lo em um campo mais vasto, já que um conceito geral, *ipso facto*, se aplica mais geralmente que um particular.

O Princípio da Construtividade aconselha-nos a colocar os fatos ante a criança tal como foram apresentados ao leitor. O leitor tem de apreciar a estrutura interna de uma tarefa de aprendizado que pode um dia ter de supervisionar, enquanto a criança deve receber a tarefa de tal forma que possa, dos conceitos conhecidos, formar um nôvo conceito como uma verdadeira construção, cujas conexões lógicas só poderá apreciar mais tarde. Como apresentamos uma tão complicada estrutura matemática a uma criança pequena? É aí que o Princípio Dinâmico vem em nosso auxílio. Nessa fase, quando a criança estiver talvez com sete anos, alguns conceitos matemáticos estarão em uma forma operacional, isto é, os ciclos terão sido executados, e a criança saberá como manejar os conceitos. O conceito do número natural poderá ser admitido; isto é, o número cardinal pode ser admitido como um conceito operacional. Assim sendo, os *valôres* das variáveis envolvidas no conceito já estão à mão. Mas o mesmo não se dá com os conceitos de um algarismo (tendo significado diferente dependente da posição), de potência ou de um número-base. Temos de dar grandes meios para o ciclo de maturação por meio de experiência real, que conduzirá a êsses conceitos e à sua eventual integração. Tais experiências são raramente (se o forem) encontradas na vida real e, portanto, têm de ser artificialmente montadas na sala de aula. Devem ser providenciados materiais estruturados para conduzir a criança na direção indicada, primeiro numa fase de jôgo inicial, depois na fase estruturada subseqüente, atingindo a percepção final, que deve ser seguida dos jogos de prática para fixar firmemente o nôvo conceito na vida diária da criança.

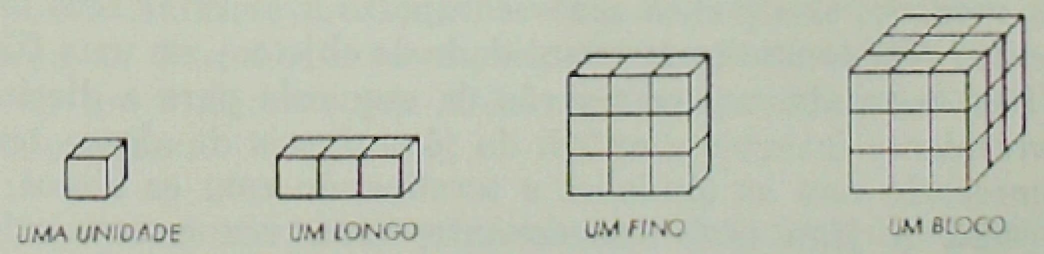
Por outro lado, não nos devemos esquecer que é pràticamente impossível fazer abstrações com um conjunto de experiências. Precisamos de variedade. Estamo-nos referindo ao Princípio da Variabilidade Perceptiva. Para desapegar a criança do material e chegar a um conceito abstrato — não uma associação formada pela criança — devemos introduzir outro material, que deve parecer o mais diferente possível, mas ter a mesma estrutura matemática essencial. Usando êsse material variado podemos, finalmente, acostumar a criança a perceber a semelhança essencial da estrutura, semelhança essa que *é* a estrutura

matemática. Quando a criança representa essa estrutura com o simbolismo matemático, estará, então, utilizando êsse simbolismo para comunicar informação sôbre a estrutura que descobriu e não apenas usando um conjunto de regras que lhe foram ensinadas, mas que não entende.

Dessa forma, aplicando os quatro princípios do último capítulo, podemos gerar uma situação criadora de aprendizado matemático na Aritmética, que não só ensina à criança as técnicas necessárias, mas tem um efeito integrante, no mesmo sentido da representação de parte de sua vida em uma pintura ou um poema. Quando tiver percorrido essa estrada, o simbolismo matemático terá para ela uma significação algo semelhante ao simbolismo da pintura e será um acontecimento com alguma importância psíquica em seu desenvolvimento.

Resta descrever em detalhe o tipo de material que foi julgado favorável para essa espécie de formação dinâmica de conceitos. Depois disso, mostrarei como os conceitos aritméticos e alguns algébricos podem ser formados com ampla generalização, usando essa espécie de material. Nunca será demais salientar que não é o material em si que cria a verdadeira situação de aprendizado matemático, mas a aplicação plena dos quatro princípios do último capítulo. Verificou-se que o material é muito útil, mas acréscimos e modificações ou adaptações a situações particulares serão necessários, sem dúvida, para manter viva a situação de aprendizado em todos os casos.

O material aritmético são os Blocos Aritméticos de Base Múltipla (Multibase Arithmetic Blocks, ou M.A.B.). Vem em várias caixas, cada uma representando um diferente valor da base. Na caixa para a base 3, por exemplo, haverá o material mostrado no diagrama abaixo:



Uma quantidade suficiente de cada tipo permitirá às crianças encontrar a solução dos problemas que possam preparar para si mesmas. Pode-se ver que os volumes das figuras sucessivas estão em progressão geométrica na razão comum 3. Na caixa para a base 4, essa razão será 4. Existem caixas para as bases 3, 4, 5, 6 e 10.

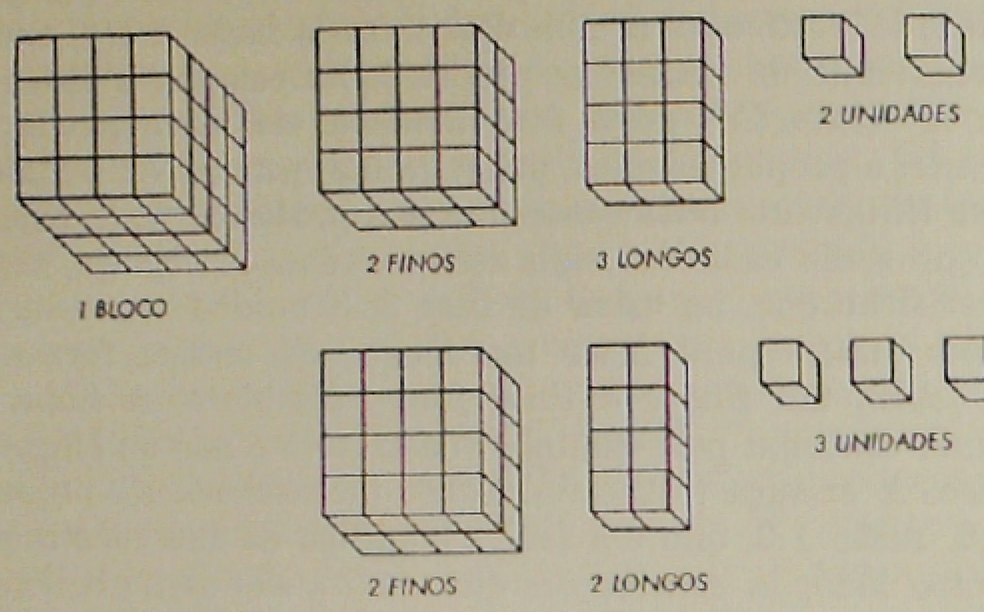
O Princípio Dinâmico exige certo período de jôgo preliminar, antes de serem tentados quaisquer exercícios estruturados. A melhor maneira de fazer isso é dar o material às crianças para brincar e permitir-lhes fazer o que quiserem. Durante êsse período de brinquedo, muito está sendo aprendido, mas nada, ou quase nada, aparece explícito às crianças. Há o perigo do professor pensar que as crianças estão perdendo tempo e que não estão chegando a coisa alguma. Na verdade, o próprio material é tão severamente dirigido para o conceito de valor de posição e para os conceitos componentes de base e potência que é quase inacreditável que um período de brinquedo não venha a resultar em experiência que, *mais tarde*, conduzirá à percepção da estrutura a ser aprendida. Quando as crianças começarem a fazer perguntas, então está na hora de ampliar a experiência que estão tendo. O seguinte jôgo, por exemplo, pode ser realizado por duas crianças com a caixa da base 3: os números 0, 1 e 2 são escritos nas faces opostas de um cubo unidade que, então, é usado como um dado. O primeiro lançamento é para a disputa dos blocos: cada criança tira da caixa o número de blocos correspondente ao que obteve no dado. Depois, elas lançam-se em disputa dos finos e, novamente, cada uma tira o número de finos que obteve. Em seguida, disputam os longos e, finalmente, as unidades. A criança que tiver a maior quantidade de objetos ganha.

Muito ràpidamente torna-se claro, principalmente para a criança que perde mais seguidamente, que o primeiro lançamento é vital e que aquêle que o ganha já venceu, na realidade, o jôgo. Se houver empate no primeiro lançamento, então, certamente, o segundo é o vital, e assim por diante. Êsse é um jôgo estruturado que leva as crianças a verificar a importância relativa dos lançamentos, a partir do da disputa dos blocos. Na verdade, elas podem ser encorajadas a escrever seus lançamentos (e a conseqüente quantidade de objetos) em uma fileira, a qual naturalmente escreverão da esquerda para a direita. É conveniente inverter a ordem do jôgo depois de algum tempo, começando com as unidades e terminando com os blocos; isso tornará o jôgo mais emocionante, uma vez que a criança não poderá saber quem o ganhará, até o último lance. Ensinará também à criança que não é o *primeiro* lançamento que faz ganhar, mas o lançamento dos blocos, e que a ordem é realmente arbitrária. De fato, conseguimos variar até outra variável: variamos a ordem, dando-lhe seus dois valôres — descendente e ascendente. Adaptando-se os dados, podem ser feitos jogos semelhantes com outras caixas.

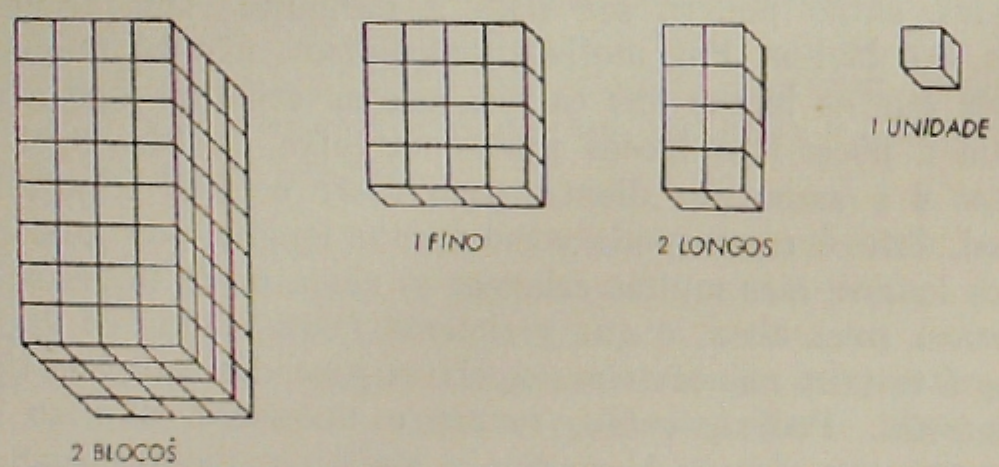
É desnecessário dizer que o acesso de cada criança a tôdas as caixas deve ser constante, para não se fixar em qualquer propriedade particular a uma determinada base, e ter, assim, a oportunidade de extrair as propriedades comuns a tôdas as caixas. A "extração", nessa fase, ainda é, em larga parte, inconsciente; à proporção que a primeira fase penetra na segunda, torna-se lentamente mais consciente, e o professor pode sugerir jogos que serão cada vez mais estruturados. A criança precisará verificar que, na caixa de base 3, 3 unidades podem ser *colocadas juntas* para fazer um longo; da mesma forma, 3 longos *fazem* um fino e 3 finos *fazem* um bloco. A linha de raciocínio continua pelo caminho construtivo e não ao longo do analítico. A criança estará felizmente inconsciente da propriedade da razão 1:3, que é a facêta analítica de sua construção. Por outro lado, as construções que realiza são os ingredientes de maior importância para a percepção *posterior* da razão e das propriedades das razões. Quando a criança tiver compreendido (sempre no caminho construtivo) a estrutura correspondente de tôdas as caixas, houver construído finos com unidades, então poderá ser feita a pergunta: Que acontece depois dos blocos? Por motivos econômicos, não há unidades maiores que os blocos nas caixas, mas as crianças logo generalizam e põem três blocos juntos na caixa da base 3, 4 na de base 4 e assim por diante, para fazer o nôvo "tipo". No manual, êste é mencionado como blocos longos, por analogia com os longos, mas muitas crianças os chamam de tôrres se os constroem para cima, o que realmente fazem, uma vez que o espaço é restrito nas carteiras escolares juncadas com êsse tipo de material. Podem, então, reunir o necessário número de blocos para formar um bloco fino, e assim por diante. Quando acaba o material, podem continuar o exercício na imaginação e a possibilidade, pelo menos teórica, de uma continuação indefinida no processo é, talvez, a primeira porta aberta para o conceito de "Infinito", que tôdas as crianças acham extremamente excitante.

Uma vez dominada completamente a estrutura do material e sua natureza aberta, as crianças passam, ràpidamente, até a exercícios mais estruturados que conduzem às quatro operações aritméticas, de adição, subtração, multiplicação e divisão. Uma adição pode ser estabelecida em uma bandeja, na carteira ou no chão, com peças de madeira em lugares apropriados, de preferência em ordem decrescente, a princípio da esquerda para a direita.

Por exemplo:



Somando as peças semelhantes e fazendo uso dos fatos de equivalência aprendidos prèviamente, o resultado será o seguinte:

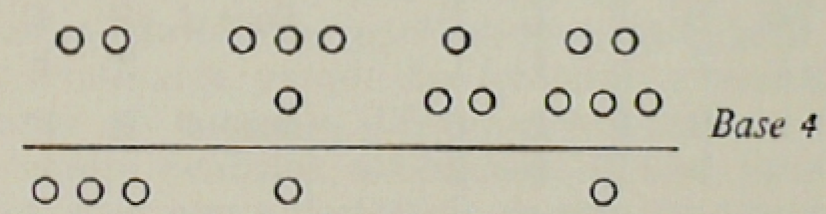


Eventualmente as crianças registrarão da seguinte forma:

	B	F	L	U	
					Caixa 4
	1	2	3	2	
+		2	2	3	
	2	1	2	1	

É importante, naturalmente, que cada criança mude de caixas tão seguidamente quanto possível, para evitar a perseverança de quaisquer propriedades das caixas individuais, não-partilhadas pelas outras. Entre outras, a caixa de base 10 deverá, naturalmente, ser usada.

Se o assunto ficar por aqui, muitas crianças irão meramente associar a representação simbólica com as ações executadas com os blocos, e não haverá nenhuma abstração. Por outro lado, não é necessário muito para fazer tais crianças compreenderem a natureza essencialmente abstrata do que aprenderam. É suficiente possuir certo número de calculadores, em quatro ou cinco côres, e decidir que, por exemplo, 5 amarelas valem 1 verde; 5 destas, 1 vermelha; 5 vermelhas, 1 azul. A soma com mudança de unidade (isto é, com mudança para a côr de maior valor) será ràpidamente executada pelas crianças por meio dêsses calculadores, e não leva muito tempo para que percebam que o que estão fazendo então é essencialmente o mesmo que faziam antes, com as peças de madeira. A maioria das crianças pode abstrair a estrutura da tarefa dêsses dois trabalhos perceptivamente muito diferentes, mas conceptualmente idênticos. Haverá, porém, crianças que precisarão ser "desmamadas" do aspecto concreto das tarefas ainda mais gradualmente. Para elas, sugere-se que a próxima fase seja a execução de operações com grupos de qualquer espécie de pequenos objetos idênticos, como, por exemplo, fichas de metal, onde as *posições* delas determinariam seu valor. Uma adição apareceria, então, assim:



quando realizada.

Sòmente a posição determina o valor de cada ficha, mas a criança continuará a ver o requisito do número de fichas em cada uma das posições. A fase seguinte seria a substituição das pilhas de fichas por, digamos, números plásticos *nas posições apropriadas* e as operações poderiam ser realizadas com essas representações simbólicas das pilhas anteriores das fichas. O passo final para escrever sem qualquer auxílio concreto (visual ou tátil) é agora tão pequeno que tôdas as crianças, nas escolas comuns, poderão realizá-lo. Deve ser compreendido que os refinamentos aqui mencionados não são, de fato, necessários para o caso da grande maioria das crianças, mas devem estar à mão para permitir que *tôdas as crianças* tirem o máximo de abstração de sua experiência. Em geral, a criança dita menos inteligente necessitará de uma experiência mais longa e mais rica, da qual possa tirar uma abstração; mas a alegria da percepção no fim do ciclo deverá dar ao professor uma ampla compensação por todo o trabalho realizado. Nesses casos, a fé do professor na habilidade de aprender da criança é um fator da maior importância para manter a situação de aprendizado viva e criadora.

A maioria das crianças descobre por si mesmas o papel especial da caixa de base 10. Compreendem que, quando escrevem 2 blocos, 6 finos, 4 longos e 8 unidades, por exemplo, estão escrevendo 2 milhares, 6 centenas e 48 unidades, isto é, 2648 unidades. Convém repetir que haverá crianças para quem a experiência variada com caixas diferentes, inclusive a de base 10, ainda não é suficiente para conseguir essa informação. Para elas sugerimos o seguinte exercício: escolher qualquer número, digamos 157; pegar a caixa de base 3 e tirar 157 unidades; fazer, com elas, quantos blocos fôr possível; com o que restar, tantos finos quanto fôr possível, e tantos longos, até que haja, no máximo, apenas 2 unidades sobrando; usar o mesmo número e fazer a mesma coisa com outra caixa, até usar a caixa da base 10.

Será encontrada a seguinte situação:

Base 3	BL	B	F	L	U	*Base 4*	B	F	L	U
	1	2	2	1	1		2	1	3	1
Base 5		B	F	L	U	*Base 6*	B	F	L	U
		1	1	1	2			3	2	1
Base 10		B	F	L	U					
			1	5	7					

Usualmente, não é necessário um grande número de exercícios para a criança verificar que, quando escrevemos grandes números, o fazemos como se estivéssemos usando a caixa de base 10. Dizem que as crianças pequenas não podem apreciar êsses números grandes, particularmente indo até os milhares. A resposta é, naturalmente, que os adultos também não podem. Não podemos ter uma impressão geral de um milhar, do mesmo modo pelo qual podemos ter a impressão de cinco ou até vinte e cinco. É o fio de *Ariadne* — sob a forma de arranjos das potências da base — que nos conduz ao conceito do milhar. Mas, para as crianças que usaram êsse tipo de aparelho, um milhar é apenas um caso particular da terceira potência e elas estão perfeitamente capacitadas para usar seu fio para achar a centena, o milhar e outras potências de dez no labirinto aritmético. Na verdade, o labirinto parece, de repente, surpreendentemente regular, uma vez compreendida a estrutura geral, e veremos as crianças ansiosas para realizar jogos matemáticos dentro dêle, tão logo tenham atingido essa posição de percepção.

Para se ter a certeza de que um ciclo conceptual terminou de fato, e que os conceitos aprendidos podem ser usados para o início de outros ciclos, é naturalmente necessária certa quantidade de prática dêsses conceitos, de acôrdo com o Princípio Dinâmico. As crianças amam a repetição, cuja finalidade psicológica é simplesmente prática. Devemos, por exemplo, esboçar a seguinte situação para elas: uma cozinheira está fazendo algumas tortas; em cada uma põe 3 ameixas; em cada bandeja põe 3 tortas, e em cada forno há lugar para 3 bandejas. Na cozinha há, ao todo, 3 fornos. Perguntas de equivalência podem ser feitas, tanto quanto de adição, derivadas de situações realistas, familiares à criança. Situações diferentes, com multiplicadores diferentes, serão ràpidamente imaginadas pelos professôres, tanto quanto pelas próprias crianças. Uma quantidade dêsses exercícios é fornecida nas instruções que acompanham o material. As crianças também estão sempre desejosas de misturar as bases e, assim, somar cruzeiros e centavos ou metros, centímetros e milímetros. O fato de que caixas com as bases pedidas não fizeram parte de sua experiência real é, no momento, irrelevante, porque elas formaram o conceito *mais geral* de grupar em tamanhos diferentes, e o tamanho real do grupo não causará nenhuma dificuldade. É isso, justamente, o que se quer dizer com a declaração de que um conceito formado de um modo mais geral será aplicável a um campo mais amplo. Economizou-se tempo, na verdade, começando com um esclarecimento total do conceito, na maneira mais geral possível para a criança.

Passemos, agora, ao conceito da subtração. Desculpe, novamente, o leitor um banho de chuveiro frio analítico, o qual, naturalmente, não deve, de modo algum, ser dado nas crianças. O conceito de subtração deve ser concebido de três diferentes formas, tôdas matemàticamente equivalentes umas às outras. Suponhamos que B seja maior que A e que queiramos subtrair A de B. Chamemos o resultado de X. Temos, matemàticamente,

$$X = B - A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

A declaração é matemàticamente equivalente a cada uma das duas seguintes:

$$B = A + X \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$A = B - X \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Embora essas três declarações sejam matemàticamente equivalentes, não se precisa dizer que são psicològicamente muito diferentes. A compreensão de sua equivalência matemática por uma criança é uma síntese de grande magnitude, mesmo sem o simbolismo acompanhante.

Consideremos a situação matemática pura antes de entrar na muito mais complicada, a notacional. Suponhamos que a criança apanhe 13 fichas de uma caixa e que eu tome outras 4. Digo, agora, à criança para colocar novamente na caixa exatamente tantas fichas, de sua mão, quantas vê na minha. Ela separa 4, uma após a outra, e, as tendo pôsto na caixa, diz-me que lhe restaram nove. A criança realizou uma tarefa simbolizada pela fórmula (1).

Suponhamos, agora, que a criança tem novamente 13 fichas e eu, outra vez, 4. Peço à criança que ponha em minha mão o número exato de fichas para que tenhamos, no fim, o mesmo número. A criança tira 9 fichas da caixa e as põe em minha mão. Realizou a tarefa simbolizada pela fórmula (2).

Façamos, outra vez, a criança tirar 13 fichas e eu, 4. Peço-lhe, agora, para pôr de volta na caixa o número de fichas necessário para que tenhamos o mesmo número, no final. Ela, com sua própria mão, põe 9 de volta na caixa. Executou a tarefa simbolizada pela fórmula (3).

Podemos referir-nos a essa operação como: 1) subtração pura, 2) adição complementar, 3) subtração complementar. É quase certo que, na idade em que a subtração é normalmente aprendida, a maioria das crianças é incapaz de compreender a equivalência das três operações. Essa é a razão por que as crianças não podem resolver problemas que envolvam essa equivalência. Por exemplo: "Há 43 crianças nessa sala e 27 são meninos, quantas são as meninas?" Nenhuma criança subtrairá, naturalmente, 27 de 43, a não ser que se lhe diga. Contará, a partir de 27, até que atinja 43 (pelos dedos, se necessário) e, depois, nos dirá que há 16 meninas. Executou uma adição complementar, com base nos primeiros princípios. Se, nessa fase, o professor disse: "Não, não é assim que se deve fazer. Subtraia 27 de 43", a criança estará a caminho de problemas futuros, perguntando: "É para somar ou para tirar?", e o desenvolvimento matemático natural estará sendo perturbado. Para a criança, uma adição complementar é uma adição e não uma subtração. Afinal, ela somou os 16 aos 27 para fazer 43. Se uma adição é, na realidade, uma subtração, então prêto pode, em determinadas circunstâncias, ser branco, e é sempre melhor perguntar ao professor.

Por isso, sugiro que, embora sejam dados exercícios paralelos como êsse, não seja forçada a progressão, de modo algum; a criança tem de amadurecer em relação à situação em que poderá fazer a síntese das três fórmulas (1), (2) e (3) em uma única estrutura. Até então, as adições complementares podem ser chamadas de "faz de conta" ou qualquer outro nome que possa ser significativo para a criança. A subtração complementar não parece ocorrer espontâneamente muito em seguida, mas, quando acontece, deve-se tomar o mesmo cuidado para não confundir o pensamento da criança.

Com relação à forma notacional do conceito de subtração, verifica-se que pelo menos dois, se não três, tipos diferentes de exercícios estruturados têm de ser apresentados com os blocos para consolidar o caminho para a aprendizagem da subtração dentro de um sistema de determinado número. A subtração pura e a adição complementar serão descritas aqui.

O tipo mais fácil de adição complementar, para começar, é aquêle em que os maiores números são apenas de blocos. Êsse é, na realidade, o tipo mais difícil de ensinar com métodos formais. Veremos que tais reversos de grau de dificuldade ocorrem freqüentemente, quando mudamos dos métodos rotineiros para os de percepção. Pedimos a uma criança para fazer uma tôrre só de blocos, mas não tão alta que constitua um "bloco longo". A outra criança se pede que faça uma tôrre cuja área da base seja um bloco, mas que seja menos alta que a da primeira criança. Podemos, então, perguntar às crianças qual é a diferença entre as duas tôrres; algumas crianças aumentarão a tôrre menor até que seja tão alta quanto a maior (adição complementar), outras decomporão a tôrre maior até que fique da altura da menor (subtração complementar). As crianças poderão ser, eventualmente, encorajadas a registrar o número de blocos, finos, longos e unidades em cada tôrre, assim como o número dêstes que tem de adicionar ou tirar, respectivamente, para tornar iguais as duas tôrres.

Quase tôdas as crianças colocam os finos em cima dos blocos e, depois, os longos sôbre os finos. Devem ser encorajadas a colocar as unidades ao lado dos longos e não em cima dêstes. Se colocam os finos e longos em pé, devem ser aconselhadas a pô-los em posição horizontal. Observadas essas precauções, a maioria das crianças primeiro une as unidades para formar um longo, depois completa um fino com os longos resultantes (se possível), depois com os finos faz a maior parte de um bloco e, se necessário, adiciona alguns blocos para formar a tôrre. Elas estarão, assim, trabalhando da direita para a esquerda, começando com as unidades. Vamos ilustrar com um exemplo. Suponhamos que a primeira criança tire 3 blocos da caixa de base 4, e a segunda, 1 bloco, 2 finos, 3 longos e 2 unidades. Ora, 2 unidades mais farão um longo, e êste com os 3 já tirados farão um fino, e, assim, não adicionaremos nenhum longo. Êsse fino com os outros 2 já tirados farão 3 finos; então teremos necessidade de mais 1 para fazer 1 bloco. Já há um bloco, então precisaremos de mais 1 bloco. Então, a diferença é 1 bloco, 2 finos, nenhum longo e 2 unidades.

O registro poderia ser algo assim:

B	F	L	U
3	0	0	0
1	2	3	2
1	1	1	
1	1	0	2

Os 1 na terceira linha indicam as peças compostas que teremos de adicionar às já existentes. Do total descobrimos quanto *mais* necessitaremos para completar uma peça do tamanho seguinte.

O próximo passo poderia ser apresentar à criança o problema de encontrar a diferença entre duas tôrres, das quais a menor tem um número menor de peças de cada espécie. Não iremos interferir em sua formação de conceito se sugerirmos que devem tentar fazer, primeiro, com que o tôpo pareça o mesmo. Isso focalizará a atenção nas unidades e nos longos, e as perguntas: "Quantas unidades devemos adicionar para fazê-los parecer o mesmo?" ou "Quantos longos precisaremos?" podem ser fàcilmente respondidas; isso será seguido ràpidamente pela construção dos finos e dos blocos.

Vejamos agora outro exemplo, com maior grau de dificuldade, com a base 5. Suponhamos que as crianças tenham escolhido as seguintes tôrres:

B	F	L	U	
3	2	3	1	Tôrre mais Alta
1	3	4	2	Tôrre mais Baixa

Há uma unidade sobrando na tôrre mais baixa, então teremos de acrescentar, a ela, 4 unidades, para fazer um longo. Êste, com os 4 existentes, farão um fino. Agora precisamos adicionar 3 longos para fazer que os topos sejam iguais. Fizemos um fino e, como já há 3 na tôrre mais baixa, ficamos com 4; precisamos de 1 para completar um bloco e de dois mais para fazer os 2 existentes na tôrre mais alta; precisamos, ao todo, de 3 finos. Com isso, já fizemos um bloco; já havia 1, então precisamos apenas de um bloco para fazer uma tôrre igual à mais alta. Ao todo, precisamos de 1 bloco, 3 finos, 3 longos e 4 unidades para adicionar à tôrre mais baixa, para que ela se emparelhe com a mais alta.

O trabalho formal posterior seria feito marcando, nos lugares apropriados, as peças maiores que tivessem sido completadas, para que não fôssem esquecidas quando chegasse a vez dessas peças serem completadas. No presente exemplo, haveria um 1 sob o B e um 1 sob o F.

Naturalmente, os problemas que envolvem adição complementar devem vir após a realização dessa percepção, assim como certa quantidade de prática da técnica. Muita pesquisa foi realizada, e está continuando, para melhorar o aprendizado das técnicas que, no entanto, não são nossa finalidade aqui. Como mencionei várias vêzes, êste volume trata, principalmente, dos métodos de promover *compreensão;* admite-se que uma facilidade *técnica* adequada será adquirida pelas crianças por meio de técnicas de ensino usuais.

A subtração pura pode ser feita muito simplesmente dentro de linhas semelhantes às do exercício usado para a adição. Certo número de blocos, finos, longos e unidades é colocado em uma linha. Outra linha é feita, paralela à primeira e mais perto da criança; uma quantidade menor de objetos deve ser colocada nessa linha que na primeira. A princípio, será provàvelmente aconselhável ter menor quantidade de cada espécie na linha menos numerosa, embora algumas crianças sejam capazes de fazer face a problemas mais complexos desde a primeira vez. Suponhamos que temos as duas linhas seguintes:

Base 6	5 blocos	3 finos	2 longos	5 unidades
	2 blocos	2 finos	1 longo	3 unidades

Dizemos à criança para não tocar na segunda linha, mas para tirar da primeira tanto quanto ela vê na segunda. Isso nada mais é que a repetição, quatro vêzes, do problema correspondente descrito com as fichas. Não há, normalmente, nenhuma dificuldade aqui, contanto que se torne bem claro que não se deve tocar na segunda linha. Mas algumas crianças parecem preferir reunir o que existe na segunda linha em uma das mãos, tirar a mesma quantidade da primeira linha com a outra mão e pôr tudo de volta na caixa. O que fica sôbre a mesa, nesse caso, é a resposta ao problema. Algumas crianças ficam assustadas com êsse método porque dizem estar realmente tirando duas vêzes mais do que deveriam. É conveniente ser guiado pelas preferências da criança nesse caso.

Vamos considerar agora o caso em que a decomposição é necessária. Por exemplo:

Base 6	5 blocos	3 finos	2 longos	5 unidades
subtrair	2 blocos	4 finos	5 longos	3 unidades

Agora deve-se, certamente, dar ênfase a que a segunda linha não seja tocada. Se uma criança não pode resolver o problema, é muitas vêzes útil que, em cada linha, se faça a aproximação das pilhas consecutivas, colocando-as em contato, mas não as duas linhas. Se, mesmo assim, a criança ainda fôr incapaz de prosseguir após algum tempo para pensar, pode ser-lhe sugerido que a madeira que deve ser tirada poderá sair de qualquer parte da primeira linha. Se ainda fôr necessária uma ajuda mais concreta, pode ser sugerido que se tirem finos dos blocos e longos dos finos, contanto que seja tirada ao todo a quantidade certa de madeira. Eventualmente, a criança executará a seguinte seqüência de acontecimentos:

a) Tira 3 unidades de 5, o que deixa 2 unidades.

b) Não pode tirar 5 longos de 2, mas pode tirá-los de 3 finos. Isso deixará 2 finos e 1 longo. Existem, agora, 2 finos, 3 longos e 2 unidades na primeira linha.

c) Não pode tirar 4 finos de 2, mas pode de 5 blocos. Isso deixa 4 blocos e 2 finos. Haverá, portanto, 4 finos ao todo no final. Existem, agora, apenas 4 blocos na primeira linha.

d) Tirando 2 blocos dos 4, ficarão 2 blocos.

Assim, o que restou foi:

2 blocos	4 finos	3 longos	2 unidades

Êsse tipo de solução conduz ao método de decomposição; tira-se da unidade de maior valor e adiciona-se o que resta ao número no lugar em que se está subtraindo. Algumas crianças, porém, preferem estabelecer seus planos mais metòdicamente, e arrumam a primeira linha de tal forma que a subtração se torna possível em qualquer ponto. Essas crianças trocam um bloco por 6 finos, e 1 fino por 6 longos e, assim, reduzem o problema ao anterior, como convém a matemáticos em embrião. Terão

	4 blocos	8 finos	8 longos	5 unidades
subtrair	2 blocos	4 finos	5 longos	3 unidades

e, agora, podem executar uma simples subtração de coisas semelhantes quatro vêzes.

Algumas vêzes êsse método não entusiasma os professôres, porque no registro serão levados a fazer uma série de riscos e acham que as crianças não estão aprendendo a fazer um trabalho limpo. Deve ser constatado que, sob o ponto de vista matemático, o segundo processo é o metódico e limpo, embora o primeiro seja igualmente correto.

Devemos notar que o método das ditas "adições iguais" não é alternativa praticável aqui. A "explanação" de pedir emprestado e pagar é falsa e, no ensino perceptivo, deve ser rigorosamente evitada. A explanação real é equivalente à identidade

$$(A - 1) - B = A - (B + 1)$$

que é uma noz difícil de partir, mesmo em uma idade mais avançada, quanto mais com sete ou oito anos. Se fôsse realizado um projeto de pesquisa para saber qual dos métodos acima tinha o melhor resultado, explicado lògica ou matemàticamente, o de adições iguais viria, com tôda a probabilidade, no fim da lista. Contudo, se os professôres conseguirem criar experiências por meio das quais a técnica de "divisões iguais" possa ser deduzida pelas crianças, não há razão para que não seja apresentada. O princípio mais importante do aprendizado dinâmico e perceptivo é que os conceitos e as técnicas resultantes surjam das conseqüências naturais das experiências das crianças; uma vez certos a êsse respeito, os outros detalhes são de menor importância.

Trabalhando com material concreto, é mais fácil introduzir a divisão antes da multiplicação, porque o material está todo sôbre a mesa. Tudo que a criança tem de fazer é *construir* certo número de pilhas iguais. É importante observar que a maioria das crianças pequenas não olha a estrutura interna do que tem de dividir; na realidade, tende a ver uma massa amorfa, da qual, digamos, devem ser feitas três tôrres iguais. Também, à proporção que elas constroem as tôrres, não verificam quanto cada tôrre será capaz de ter como sua parte; ao contrário, vão dando uma peça a cada tôrre, até que elas acabem. Em certas fases, serão naturalmente reduzidas a trocar peças maiores por menores, mas, nessa época, a equivalência deve estar firmemente estabelecida e não causará quaisquer dores de cabeça analíticas. Dar a cada tôrre certa quantidade de cada espécie é, lògicamente, a apresentação construtiva da multiplicação. Nessa época, elas já devem ter tido certa experiência com a multiplicação "pura", isto é, com a multiplicação sem ter a estrutura notacional superposta. Na maioria dos casos, depois da aquisição do conceito e da técnica da divisão simples, isto é, divisão por um número menor ou igual à base, as crianças devem estar prontas para a tarefa muito difícil de adquirir o conceito de multiplicação dentro de um sistema numeral. Antes de prosseguir, porém, é absolutamente essencial ter certeza de que sabem o significado de "duas vêzes mais", "três vêzes mais", e assim por diante.

Para a multiplicação simples, uma criança pode receber a tarefa de construir uma tôrre (ou arrumar uma linha), e outra deverá construir uma tôrre duas ou três vêzes maior. Na fase de registro, elas devem ser lembradas de que, na tôrre duas vêzes maior, as peças menores devem ser trocadas por outras maiores, sempre que possível, antes de ser escrito o total da quantidade de madeira necessária. Deve-se também ter o cuidado de avisar às crianças sôbre a possível presença de "blocos longos" depois da multiplicação.

A multiplicação pelo número-base é muito instrutiva. Suponhamos, por exemplo, que a linha estabelecida por uma criança tenha sido

Base 3   2 finos   1 longo   2 unidades

Para fazê-la três vêzes maior, obter-se-á o seguinte resultado:

2 blocos   1 fino   2 longos   nenhuma unidade

A multiplicação, aí, foi pela base, isto é, por 1 longo e nenhuma unidade, e, portanto, a representação poderia parecer assim:

Base 3	B	F	L	U
		2	1	2
		×	1	0
	2	1	2	0

onde o 1 longo escrito no multiplicador será lido pelas crianças como um 3 assim como, quando estão trabalhando com o sistema decimal, será lido como 10 e não como 1. As crianças descobrem, logo, que essa transformação "mágica" de algarismos pelo zero no final ocorre sempre que multiplicam pela base. Assim, a regra imprópria de "acrescentar um zero" é substituída pela verdadeira base matemática da regra, e as crianças descobrem isso por si mesmas como uma emocionante descoberta pessoal. O ato de a ter aprendido torna-se permanentemente valioso para elas. Não a esquecem nem a confundem com outras regras.

Deve ser compreendido que a lei distributiva da multiplicação já foi usada na adição. Ao empregar a regra

três vêzes (algo + algo mais) =
= três vêzes algo + três vêzes algo mais

já operaram, na realidade, três dos quatro têrmos do parênteses. É, portanto, conveniente que essa regra já tenha sido descoberta antes, com o auxílio de exercícios simples com a balança ou usando pinos, faixas e quadrados ou mesmo os triângulos (ver capítulo seguinte). Também é importante compreender que as duas leis distributivas

$$K \times (A + B) = K \times A + K \times B$$
$$(K + L) \times A = K \times A + L \times A$$

embora matemàticamente equivalente, tendo em vista a lei comutativa

$$A \times B = B \times A$$

não são, em absoluto, psicològicamente equivalentes para as crianças. A primeira forma é, sem dúvida alguma, a mais fácil das duas; mesmo que as crianças estejam perfeitamente conscientes da primeira forma e da lei comutativa, não serão capazes de deduzir a segunda, embora esta seja a conseqüência *lógica*. Na idade com que estamos lidando, as crianças não são capazes de raciocínio lógico, de modo algum; tôdas as leis devem ser construídas para elas pela sua própria experiência pessoal.

A multiplicação composta depende da segunda forma da lei distributiva, onde o multiplicador, e não o multiplicando, é dividido. É, portanto, necessário, se quisermos conseguir percepção completa da estrutura matemática da multiplicação, dar às crianças experiências das quais possam deduzir a segunda lei distributiva. Isso também pode ser conseguido com a balança ou qualquer outro objeto que o professor possa ter à mão para mostrar as conexões matemáticas essenciais inerentes à lei.

Tendo aprendido as duas leis distributivas, as crianças estarão prontas para fazer multiplicações como esta:

$$\textit{Base 10} \qquad \begin{array}{r} 567 \\ \times\ 17 \\ \hline \end{array}$$

porque elas saberão que 17 vêzes algo é 10 vêzes êsse algo + 7 vêzes aquêle algo, pela segunda lei distributiva, e que 10 vêzes 567 é o mesmo que 10 vêzes 500 + 10 vêzes 60 + 10 vêzes 7, pela primeira lei distributiva, e, da mesma forma, para 7 vêzes. O padrão da multiplicação, então, se tornará claro. O leitor pode imaginar que chegamos ao fim das dificuldades referentes à multiplicação. Infelizmente não é assim. Há dificuldades na multiplicação, digamos, por 30. Se uma criança souber, realmente, multiplicar por 30, então — o que julgamos agora que ela sabe — será capaz de multiplicar por 37. O que há de especial na multiplicação por 30? O leitor deverá imaginar uma criança se confrontando, pela primeira vez, com o problema de saber quanto é

$$\begin{array}{r} 567 \\ \times\ 37 \\ \hline \end{array}$$

Pode multiplicar por 7. Então, se vê frente a uma multiplicação de 30 vêzes 7. É realmente uma tarefa enorme ter 30 vêzes 7. Seria muito pior se fôssem 90 ou 500. Tècnicamente, a tarefa se torna mais fácil se a criança pensar na lei comutativa e inverter a ordem. Mas, mesmo assim, como pode saber quanto é 7 × 30? É lógico que, agora, pode usar os primeiros

princípios e somar 30 sete vêzes. Na verdade, é o que fazem as muitas que pensam na inversão da ordem. Não têm outra escolha, a não ser que trabalhem de cor, uma vez que, para fazer isso de outro qualquer modo, terão de compreender que

$$7 \times 30 = 7 \times (3 \times 10) = (7 \times 3) \times 10 = 21 \times 10 = 210$$

e elas não são capazes de passar da segunda forma para a terceira, porquanto não conhecem a *lei associativa* de multiplicação, isto é, que, para três números A, B, C

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

De fato, se souberem essa lei, não precisarão inverter a multiplicação, mas podem dizer

$$30 \times 7 = (10 \times 3) \times 7 = 10 \times (3 \times 7) = 10 \times 21 = 210$$

Pode-se concluir que, antes das crianças poderem perceptivamente multiplicar um número composto geral por outro, têm de saber as duas formas da lei distributiva e da lei associativa; e a lei comutativa é, certamente, um grande auxílio.

Para dar às crianças experiências das quais possam perceber a lei associativa, o melhor a fazer talvez seja dar-lhes números que se decomponham em três fatôres primos, como 30 ou 42, e fazê-las construir uma casa com 30 ou 42 pequenas unidades, de todos os modos que puderem. Depois podemos pedir-lhes que registrem o número de paredes que construíram, o número de tôrres em cada parede e o número de unidades em cada tôrre; e também o número de camadas que construíram, o número de linhas em cada camada e o número de unidades em cada linha. É melhor repetir o exercício com algum outro material. Êsses jogos são também jogos estruturados para a descoberta da medida de volume. Se as crianças realmente souberem o que é a multiplicação (em vez de apenas serem capazes de recitar suas tabuadas), não levarão muito tempo para descobrir a lei associativa por meio das experiências da espécie sugerida.

O que foi dito poderá ter dado uma idéia dos modos pelos quais os quatro princípios do último capítulo podem ser postos em prática durante uma aula de Aritmética. Não se pode dizer muito seguidamente, contudo, que a novidade da orientação não consiste no uso de qualquer aparelho especial, mas uma atitude modificada em relação às crianças que estão aprendendo. Uma atitude de humildade, ou até de admiração, face a um ato de criação por uma criança, é necessária por parte do professor. Há uma grande diferença entre ensinar crianças e ajudá-las a aprender. Podemos estar certos de que, se pusermos *todos* os tijolos em frente delas, construirão, não só sua Matemática, com os tijolos de madeira, mas, em seus cérebros, uma Matemática verdadeiramente abstrata, apesar de pessoal, por meio de tijolos mentais que confeccionaram para elas mesmas, durante o brinquedo.

4

CONCEITOS ALGÉBRICOS ELEMENTARES

Não há razão, hoje, para qualquer tentativa de separar diferentes ramos da Matemática, tais como Aritmética e Álgebra; há tanta conexão entre êles que é impossível falar sôbre um dêles sem apresentar alguns dos outros. A sugestão de que alguns fatos algébricos devem ser conhecidos antes de certas operações aritméticas serem verdadeiramente dominadas pode parecer revolucionária. Mas os professôres sensíveis às exigências do aprendizado de crianças sempre tentaram alguma forma de esclarecimento de conceitos subjacentes, antes de iniciar um nôvo processo. Quero apenas sugerir que êsses esclarecimentos sejam colocados em uma base apropriada, e organizados em conjuntos de experiências, das quais as crianças possam extrair a informação algébrica necessária ao desenvolvimento de sua Aritmética. Não há estrita necessidade no simbolismo de forma algébrica; quando os conceitos correspondentes forem realmente apreendidos, uma forma de simbolizá-los não só será possível como será pedida pelas crianças. Assim, a Álgebra aparecerá como uma parte natural da experiência matemática, e será enxertada no edifício matemático das crianças.

Imaginemos uma primeira aula de Álgebra convencional, em uma escola secundária, e uma criança que não tenha tido nenhuma experiência algébrica anterior. Os AA e os BB que são escritos no quadro se tornarão cada vez mais confusos, particularmente quando lhe dizem que essas letras são realmente números. Quando ela pergunta por que se parecem tanto com letras, na melhor das hipóteses receberá uma explicação de que uma letra é usada porque poderia ser qualquer número, ou um número desconhecido; mas, na pior das hipóteses, dir-lhe-ão para não fazer perguntas estúpidas. No primeiro caso, ela não conseguirá compreender por que, se podia ser *qualquer* número, o professor não escreve qualquer número. Afinal, se-