

Z. P. Dienes

da Universidade de Sherbrooke

Aprendizado Moderno da Matemática

Prefácio de Sir HERBERT READ

CIÊNCIAS DA
EDUCAÇÃO



ZAHAR



EDITORES

APRENDIZADO MODERNO DA MATEMÁTICA

O aprendizado da matemática, isto é, a efetiva compreensão de suas estruturas específicas, sempre constituiu problema pedagógico da maior importância. Os fracassos nesse campo, que invalidam por toda uma vida a aquisição oportuna de conceitos matemáticos fundamentais ministrados no período da infância, vêm provocando uma revisão total na didática da matemática.

De uma visão autoritária do ensino da matemática, meramente associativa, passa-se agora a uma tentativa fecunda de compreensão originária de mecanismos e de conceitos funcionais, assimilados pela própria vivência intransferível do aluno: a matemática está sendo, por assim dizer, redescoberta pelos que desejam aprender e entender a sua realidade originária e última. Dos fatos para os conceitos, parece, assim, ser o novo caminho para a correta assimilação das proposições e da linguagem matemática — da ciência matemática, em última análise.

O aprendizado moderno da matemática assume, ao que se registra, função criadora, pessoal, em que a intervenção da personalidade do aluno é requisito essencial à compreensão generalizada de axiomas e de princípios que funcionam ao nível da vida diária do ponto de vista psicológico e econômico.

O autor do presente livro, professor Z. P. DIENES, é um dos pioneiros desse novo aprendizado da matemática e um de seus mais eminentes teóricos e pesquisadores. Nas idéias do presente livro estão contidas — com clareza absoluta e penetração constante — as diretrizes essenciais que configuram o aprendizado moderno da ciência matemática: a destruição, por inepta, de uma metodologia meramente repetitiva, autoritária, formal, sem a característica de oferecer o verdadeiro entendimento das *efetivas conexões estruturais entre conceitos ligados à idéia de número*, para usar a definição do próprio autor deste livro revolucionário.

Deve-se assinalar, como elemento enriquecedor deste notável estudo, o importante prefácio especialmente escrito por Sir HERBERT READ, em que se mostra que de há muito o grande crítico de arte inglês já advogava, para o aprendizado das matérias abstratas — entre as quais se inclui, necessariamente, a

(continua na outra dobra)

12

J. P.

APRENDIZADO MODERNO DA MATEMÁTICA

*Oferta da
Fam. Amm*

BIBLIOTECA DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO

Z. P. DIENES

*Professor de Ensino da Matemática
na Universidade de Sherbrooke, Canadá*

APRENDIZADO MODERNO
DA MATEMÁTICA

Tradução de
JORGE ENÉAS FORTES

ZAHAR EDITORES

RIO DE JANEIRO

Estudo original:
Building Up Mathematics

Traduzido da terceira edição, revista, publicada em 1967 por
HUTCHINSON EDUCATIONAL LTD., de Londres

© 1960, Z. P. Dienes

capa de
BRICO

1970

Direitos para a língua portuguesa adquiridos por

ZAHAR EDITORES

Rua México, 31 — Rio de Janeiro

que se reservam a propriedade desta tradução

Impresso no Brasil

ÍNDICE

<i>Prefácio da Primeira Edição</i>	7
<i>Introdução à Terceira Edição</i>	9
1. Estudo da Situação Atual	15
2. Uma Teoria de Aprendizado de Matemática	30
3. Conceitos Aritméticos	46
4. Conceitos Algébricos Elementares	69
5. Algumas Idéias sobre a Álgebra Linear	98
6. Relações e Funções	125
7. O Estudo de Geometria	147
<i>Referências no Texto</i>	193
<i>Outras Referências</i>	194

PREFÁCIO DA PRIMEIRA EDIÇÃO

EM um livro com o título de *Education Through Art*, publicado pela primeira vez em 1943, sugeri que o método de educação que eu defendia — um método formal e fundamentalmente estético — fôsse aplicável a todos os assuntos do currículo, e não apenas ao ensino das Artes. “A educação integral que concebo é relativamente indiferente ao destino de cada um dos assuntos, uma vez que o pressuposto básico é que a finalidade da educação é desenvolver qualidades genéricas de percepção e sensibilidade, fundamentais até na Matemática ou na Geografia.”

O Dr. Dienes, autor deste livro, poderá fazer alguma crítica àquela pequena palavra “até”, pois o que quer provar é que, essencialmente em Matemática, aquelas qualidades são exigidas, e iria até o ponto de dizer que, se a Matemática deve ser ensinada às crianças de um modo eficiente, os meios devem ser artísticos. Minhas próprias possibilidades em Matemática foram terminantemente abafadas na infância e, por isso, sempre hesitei em me aventurar em um campo onde, porém, sempre senti que uma abordagem estética era relevante. Fiquei, portanto, satisfeito com essa demonstração científica de minha convicção intuitiva. Como diz o Dr. Dienes, o simples fato psicológico de que a construção deve preceder o julgamento ou a análise tem sido, por muito tempo, esquecida, com efeitos desastrosos sobre os métodos de ensino de Matemática (e, como eu acrescentaria, sobre todas as disciplinas que envolvam a aquisição de noções abstratas). O método alternativo de ensino, explicado de modo perfeitamente claro no segundo capítulo do livro do Dr. Dienes, depende da apreciação de alguns processos psicológicos que permitem a geração espontânea de percepção nas crianças. O processo de aprendizado como um todo, e particularmente os passos essenciais de formação do conceito, ainda é um mistério, sobre o qual, no entanto, já se fêz incidir

muita luz com as pesquisas de Piaget, Bruner e Bartlett. O Dr. Dienes levou essas pesquisas um passo adiante no campo particular da Matemática e, em outros capítulos de seu livro, mostra como o Princípio Dinâmico, que estabeleceu, pode ter aplicação prática na sala de aula (ou na sala de jogos). A formação de conceito se torna um resultado natural da experiência perceptiva. Pode parecer ao professor tradicional que a Matemática se está tornando um jogo, ou uma quantidade de jogos, e, na verdade, está. Mas há provas suficientes que levam a sugerir que, para os maiores matemáticos, ela nunca foi nada mais que isso.

A Matemática é o instrumento indispensável para o progresso científico. Daí a extraordinária importância deste livro. Se nosso progresso científico foi retardado por métodos errados de ensino (e certamente nossos principais cientistas parecem estar preocupados com o assunto), então o método apresentado pelo Dr. Dienes merece, pelo menos, a consideração urgente de todos os que são autoridade no mundo da educação. Recomendando-o a tais pessoas com a convicção de que, com base neste livro, se justifica uma reforma de importância fundamental.

HERBERT READ

INTRODUÇÃO À TERCEIRA EDIÇÃO

UM grande lapso de tempo já se passou desde que este livro foi escrito. Sob o ponto de vista da pesquisa moderna, está, talvez, fora de moda, no sentido de que é, agora, "um chapéu velho" para os trabalhadores em pesquisa. Apesar de tudo, algumas das proposições que apresenta ainda são controvertidas. Em particular, o princípio da múltipla personificação teve um frio acolhimento entre os devotos do método Cuisenaire, já que eles não querem aceitar a idéia de que sua personificação particular não mais ocupará o lugar de honra no campo educacional. Não quero dizer que eu seja contra o uso dos bastões de Cuisenaire, ou qualquer outro tipo de material. Podem ser muito úteis como parte de um laboratório de Matemática, onde serão usados em ligação com outras situações, outros problemas e outros materiais. Isolados, tendem a produzir um aprendizado associativo e não abstrato.

Outras partes da teoria rudimentar do ensino, sugeridas no capítulo 2, venceram o teste do tempo e foram muito menos criticadas. O princípio da disponibilidade matemática, em particular, é um dos que devem ser levados a sério, se pretendemos demonstrar às crianças que a natureza generalizada da Matemática é um dos seus atributos.

• • •

Alguns críticos têm sugerido que estou inclinado a deixar minha paixão pela Matemática se apossar de mim, e, assim, que introduzo estruturas matemáticas complicadas que não têm muito emprêgo para a maioria das crianças. Sugeriria a esses críticos que olhassem a arquitetura completa do programa de Matemática que apresento. Verificarão que nenhuma estru-

tura matemática, uma vez apresentada, é deixada de lado, mas, ao contrário, é constantemente usada em outras partes do programa. Embora alguns dos tópicos que introduzi sejam incomuns, e alguns dos métodos de introduzi-los também sejam, posso declarar com convicção, baseado na experiência em um número bastante grande de situações (salas de aula e culturas e subculturas), que as sugestões contidas no Programa de Adelaide são acessíveis à maioria das crianças. A dificuldade está, na verdade, não nas crianças, mas nos professores. Os mestres, especialmente aqueles que estão imbuídos de um método tradicional de tratar tanto o conteúdo quanto a metodologia do ensino de Matemática, são muito difíceis de mudar. Supondo, porém, que haja professores bem treinados, o programa é integralmente executável no que se refere às crianças.

No Projeto de Matemática de Adelaide, assim como no Projeto de Matemática de Sherbrooke, temos um contínuo programa de treinamento de professores, no qual centenas de mestres estão sendo treinados por meio de sessões de laboratório, com trabalho com as crianças e através de discussões e conferências. Não adianta fingir que o trabalho é fácil — é difícil para os organizadores, assim como para os professores — mas o resultado é enorme. Uma vez que o professor tenha compreendido o completo significado da arquitetura matemática nêle contida e visto a alacridade com que as crianças aprendem os assuntos do programa, não há mais problema.

Tenho sido acusado por outros críticos de ser autoritário em relação aos pontos que defendo. Muitas vezes, em revistas, tenho sido citado fora do texto como alguém que seria capaz de empurrar a Matemática pela garganta das crianças, contra a vontade delas. O ponto fundamental da crítica que me fazem é que os assuntos de Matemática a serem ensinados são determinados de antemão, isto é, que a criança é colocada em uma posição em que sabe o que vai aprender.

Parece-me, entretanto, que qualquer outro modo de agir poderia ser acimado de ficção e fraude. É impossível deixar a criança escolher seu próprio currículo matemático ou a metodologia a ser empregada. O que ela deve ter é liberdade de agir dentro de uma determinada situação de descoberta. É verdade que nenhum de nós é realmente livre, já que a maioria de nossas ações é predeterminada pelas circunstâncias e por várias restrições e ordens; apesar disso, dentro desses limites, temos capacidade de escolha. O papel do educador é dar à criança uma liberdade de escolha por meio da qual, qualquer que seja a escolha, haverá aprendizagem de Matemática.

Quanto mais o professor se capacitar do contexto matemático do programa, tanto mais capaz estará para dar à criança esse sentimento de liberdade, simplesmente porque poderá ver as possibilidades de cada jogo matemático. O jogo deve permanecer como um jogo e ser tratado como tal. O professor não deverá usar, desnecessariamente, termos matemáticos para ampliar ou generalizar o jogo, mas fazer sugestões na própria linguagem da criança. Poderá dizer, por exemplo, "Por que não botar uma janela aí? Você não acha que está muito escuro aí dentro?", em lugar de "Em vez de tirar aquele quadrado, você deveria apanhar alguns retângulos e cubos e fazer um quadrado no meio."

* * *

Durante o curso de laboratório e as experiências de sala de aula em muitas partes do mundo, e especialmente em Adelaide e Nova York, os ciclos de aprendizado foram mais cuidadosamente investigados, e certos detalhes foram acrescentados à minha teoria original do aprendizado. (Alguns desses detalhes podem ser encontrados em meu livro, *An Experimental Study of Mathematics Learning* e em *Thinking in Structures*, que escrevi com o Professor Jeeves, da Universidade de Adelaide.) Pesquisa recente nas escolas de Nova York, e em uma ou duas escolas canadenses, teve a finalidade de estabelecer se um ciclo enriquecido de aprendizado produziria resultados suficientemente diferentes. O trabalho ainda está em fase experimental, mas já está claro que o "acolchoamento" do ciclo com vários outros elementos está compensando enormemente.

O capítulo sobre Geometria, nesta terceira edição, foi escrito principalmente para dar um exemplo desse "acolchoamento". Imaginado, inicialmente, como um novo método de introduzir a Geometria sólida, iniciando com a rotação do cubo e, posteriormente, descendo a estruturas cada vez mais simples, olhando as subestruturas no conjunto de rotações do cubo, o capítulo foi-se tornando, gradualmente, mais um protótipo psicológico e educacional de um ciclo completo de aprendizado. Em tal ciclo, o processo de abstração é auxiliado pelo emprêgo do princípio de múltipla personificação e devia, em seguida, ser continuado pelo uso explícito da técnica do dicionário, descrita, pela primeira vez, em *The Power of Mathematics*. Essa técnica ajuda as crianças a perceber os aconteci-

mentos em uma personificação que corresponde exatamente a acontecimentos em outra personificação. Em seguida, sugere-se que uma "representação" seja dada, ou tirada, às crianças. Representações típicas são as estruturas de setas mostradas no capítulo da Geometria. Nelas, faz-se abstração das personificações particulares que foram utilizadas, e são representadas apenas as condições de relação entre as personificações. Ainda não é uma língua, porque a representação é apenas um meio físico de levar à mente, quase simultaneamente, as diferentes relações que existem em uma estrutura abstrata que foi construída com o uso de personificações múltiplas. Quando a representação está completa, e a criança está bastante familiarizada com ela para ser capaz de dizer, seguindo um modo determinado, que conjunto de acontecimentos está sendo representado por qualquer personificação, pode começar a olhar a representação de um modo crítico e analítico. Estará em condições, neste ponto, de começar a descrever suas propriedades. A descrição será, inicialmente, em frases em português, mas estas serão, eventualmente, reduzidas a frases matemáticas, mais conhecidas como axiomas. A etapa seguinte será o uso do sistema de axiomas. A representação pode ser examinada a fim de determinar-se qual a espécie de relações que devem ser verdadeiras nela. Em seguida, pode-se fazer um jogo com os axiomas, para ver se são suficientemente extensivos para permitir que a verdade, tirada da representação, possa ser demonstrada por meio deles, pelo uso de algumas regras de manipulação já aceitas. Essas regras admitidas são: a) que a seqüência dos acontecimentos seja capaz de ser associada ou grupada de qualquer maneira sem afetar o resultado (princípio associativo); b) que qualquer seqüência de movimentos equivalentes ao movimento neutro, isto é, ao não-movimento, possa ser transformada em qualquer posição entre os movimentos, contanto que seja tratada como um bloco. Com essas regras, é possível construir demonstrações e, assim, atingir a etapa analítica do ciclo.

Outros jogos, naturalmente, podem ser organizados com os próprios sistemas de axiomas, e uma quantidade de diferentes abstrações pode ser comparada. Uma turma de crianças com que tenho trabalhado já durante cerca de dois anos em Sherbrooke (idade média de onze anos; limites de idade: dez a doze) está nesse momento em condições de manipular os sistemas de axiomas dessa maneira. Em outras palavras, elas podem dizer-se uma estrutura está incluída em outra, estabelecendo equações de transformação entre os elementos geradores das estru-

turas. A existência dessa turma de crianças é uma indicação de que uma forma complexa de pensamento matemático é acessível às crianças, bastando que tenham uma fase de experiência matemática suficientemente variada.

* * *

Pode-se verificar que, agora, trato a idéia de função como um caso particular da idéia de relação. Deve-se levar em consideração que, em 1960, quando este livro foi publicado pela primeira vez, a própria idéia de tratar com funções na escola primária era encarada com horror pela maioria dos educadores, mesmo os mais esclarecidos. Agora, somos censurados se não incluimos toda a gama de conjuntos, operações de conjuntos, correspondências biunívocas, noções de lógica, relações, funções e tudo o mais. Pensei que seria útil, portanto, incluir o conceito de função em seu contexto matemático mais genérico.

Uma relação, então, é uma correspondência de um-para-muitos — em outras palavras, de cada ponto que represente a variável independente, não apenas um, mas muitos modos alternativos podem ser usados para atingir o próximo ponto — a variável dependente. (Estes não são os termos apropriados, na verdade, porque variáveis dependentes e independentes são termos usualmente reservados para funções.) No caso de uma função, de cada variável independente só podemos realizar um único movimento. Em outras palavras, o movimento, uma vez dado o ponto de partida inicial, está completamente determinado. Por exemplo, "maior que" é uma relação porque, começando do número cinco, "maior que" nos pode levar a seis ou sete, ou a uma quantidade de outros números (supondo que se usem números para aplicar essa relação). Por outro lado, "mais que" é uma função porque, seja qual for o número natural pelo qual começemos, se aplicarmos "mais que" a êle, só há um movimento possível. É claro que as idéias de relação e função são muito ligadas. Uma é apenas mais geral que a outra. Dentro do princípio de atirar as pessoas na parte mais funda para que aprendam a nadar, talvez as relações devam ser apresentadas em primeiro lugar e, depois, as funções. Esta é a ordem adotada no Programa de Adelaide. A Parte I de *An Introduction to Algebra* começa com o estudo de relações, seguindo-se o das funções. A multiplicação é considerada como um caso particular de função. Na antiga orientação, a adição e a multiplicação (isto é, as operações aritméticas) eram consideradas como as pedras fundamentais,

sobre as quais se construía o resto da Matemática. Agora usamos uma visão mais ampla e começamos com a idéia de relações.

* * *

Devemos lembrar ao leitor que, quando este livro foi escrito, não havia nenhum projeto de Matemática moderna, a não ser o *University of Illinois Committee on School Mathematics* (U.I.C.S.M.) e o projeto de Matemática de Leicestershire. O U.I.C.S.M. se interessava exclusivamente pelo trabalho em nível de escola secundária e, assim, o projeto de Leicestershire era praticamente o único na tarefa de reformular o ensino da Matemática nas escolas primárias. A primeira necessidade era rever os métodos de ensino do assunto tradicional. Por isso, na versão original dos cartões de instrução para os blocos aritméticos de base múltipla e do material de experiência de Álgebra, o objetivo não era a metodologia, mas o próprio assunto. Hoje, estamos prontos para uma reorganização completa, e a metodologia terá de ser reorganizada também. Assim, os atuais capítulos 3 e 4, que tratam de Aritmética e Álgebra, terão de ser lidos dentro de seu contexto histórico, mais do que em um contexto moderno. São os capítulos 5, 6 e 7 que representam tendências mais modernas. Todo o programa está sendo radicalmente revisto e, posteriormente, outro livro será publicado, com a inclusão de todas as revisões feitas. Tais revisões levam um longo tempo para serem completadas, se se baseiam em experiências adequadas e em demonstração nas salas de aula. Isso está sendo realizado com alguns projetos matemáticos, em diferentes partes do mundo. Os resultados serão apresentados em detalhes, periodicamente, no boletim do International Study Group for Mathematics Learning, publicado agora pelo escritório central do I.S.G.M.L., na Universidade de Sherbrooke, em Sherbrooke, no Canadá.

Z. P. DIENES

* * *

Gostaria de reconhecer, com gratidão, o auxílio incalculável que me foi dado pela Leicestershire Education Authority — conselheiros, catedráticos, professores e crianças — sem cujo apoio entusiástico o trabalho, em que se baseou originalmente este livro, nunca poderia ter sido realizado.

I

ESTUDO DA SITUAÇÃO ATUAL

No momento atual, dificilmente encontramos um único membro da comunidade de mestre, interessado no ensino de Matemática em qualquer grau, que possa dizer a si mesmo, honestamente, que tudo vai bem com o ensino de Matemática. Há um número demasiado grande de crianças que não gosta de Matemática — sentimento que cresce com a idade — e muitos são os que encontram grandes dificuldades com o que é muito simples. Encaremos a realidade: a maioria das crianças jamais consegue compreender o verdadeiro significado dos conceitos matemáticos. No máximo, tornam-se destros técnicos na arte de manipular complicados conjuntos de símbolos; na pior hipótese, elas ficam confusas com situações impossíveis em que as atuais exigências matemáticas na escola tendem a colocá-las. Uma atitude muito cômoda é “passar no exame”, depois do qual não dedicam nenhum outro pensamento à Matemática. Com relativamente poucas exceções, essa situação é bastante geral e passou a ser admitida como normal. A Matemática é geralmente encarada como difícil e ardilosa, exceto em alguns casos isolados, quando professores entusiasmados infundiram vida ao assunto, tornando-o excitante e muito menos difícil. A não ser esse esforço individual ou alguns mais concentrados, aos quais nos referiremos depois, muito pouco tem sido feito para alterar esse estado de coisas que é considerado como natural.

Ultimamente, contudo, nota-se certo sentimento de mal-estar entre aqueles que se interessam pelo ensino de Matemática. O rumor do descontentamento tem-se tornado cada vez mais alto, embora se tenha mantido relativamente descoordenado. As recentes orientações do Governo sobre o ensino da Matemática e o Seminário Internacional da O.E.E.C., recentemente realizado na França, sobre esse mesmo assunto, podem ajudar a orientar o sentimento geral de insatisfação para caminhos mais construtivos. Espera-se que alguma forma de

teoria e prática do ensino da Matemática venha a surgir dessas discussões, e que o presente volume contribua para este aparecimento. Isso pode ser conseguido pela análise dos problemas, tanto do ponto de vista matemático quanto do psicológico, e assim, invocando os resultados de recentes pesquisas sobre o pensamento humano, dar uma orientação construtiva ao debate nacional dos problemas em questão. A longo prazo, torna-se missão geral dos professores de Matemática, em todas as fases, desenvolver um esquema praticável de ensino de Matemática, partindo do que está sendo realizado. Somente um esforço de grupo, de âmbito nacional, pode dar o resultado de fornecer maior número de matemáticos treinados e, em geral, maior profundidade de entendimento de Matemática nas mentes dos que estudam.*

Poderíamos começar nossa análise perguntando-nos: Quais são os objetivos do estudo da Matemática? O que é, exatamente, que pretendemos conseguir ao fazer crianças aprender Matemática? Não há dúvida de que muitas respostas diferentes poderiam ser dadas a essa pergunta, se fosse feita em uma escola. Mas os objetivos tenderiam a se agrupar em dois tipos principais: econômicos e pessoais. As diferenças de opinião podem simplesmente ser devidas a variações de ênfase que se dê a esses dois tipos de objetivos: alguns dariam mais importância à utilidade econômica, outros à satisfação pessoal de um trabalho bem feito e apreciado. Os primeiros iriam, provavelmente, chamar os últimos de sentimentalistas, e estes tachariam aqueles de utilitaristas e materialistas. Em nossa civilização, os argumentos utilitários têm mais peso. Há, em geral, maior oportunidade de começar alguma coisa, se podemos provar que é economicamente vantajosa, do que se apenas se destinar a tornar as pessoas felizes. No caso da Matemática, o valor intrínseco do assunto não é geralmente reconhecido. Como poderia o conhecimento de Matemática tornar alguém feliz, a não ser trazendo mais para o bolso? Mas será demonstrado, pelo que se segue, que o aprendizado de idéias matemáticas pode contribuir para a realização pessoal mais do que a prática das artes.

Para conseguir isso, precisamos criar situações de aprendizado de Matemática, em parte como se estivéssemos praticando uma arte, e, em parte, como se estivéssemos visando uma situação original de pesquisa.

* Ver (11).

Vamos analisar resumidamente a situação atual em nossas escolas, sob três aspectos principais:

- 1) Matemático
- 2) Educativo
- 3) Psicológico.

A situação, sob o aspecto *matemático*, pode ser examinada de dois diferentes pontos de vista: *a)* aquisição de técnicas; *b)* compreensão de idéias.

Muito já foi feito e está sendo feito para melhorar a eficiência na aquisição de técnica. Muitos estudos têm sido conduzidos por psicólogos educacionais sobre os diversos métodos de ensino de processos aritméticos e muitos autores de livros escolares, se não todos, têm sempre em mente a obtenção de técnica. Certamente a maior parte, tanto do trabalho para casa como do realizado nas salas de aula, é devotada ao melhoramento da habilidade em aplicar a técnica. Apesar de todos esses esforços, contudo, ainda existem muitos pontos de estrangulamento, e aquela situação matemática bastante incerta descrita anteriormente não parece ter sido substancialmente alterada. Não parece provável que esforços mais intensos, dirigidos a problemas específicos, venham a melhorar substancialmente o assunto. Se existe uma solução, deve ser procurada em outros campos.

A situação, no campo da compreensão das idéias, só pode ser descrita como séria, talvez até desesperada. É verdade que uma atenção não muito convicta tem sido dada à necessidade de compreender a Matemática; permanece o fato de que o atual sistema de difundir informação matemática falha a respeito na grande maioria dos casos. Basta que perguntemos ao homem de rua comum se entendeu Matemática quando a estudou na escola: a resposta será que seguiu as instruções do professor, mas que o porquê e o para quê nunca foram suficientemente claros. Existe, é claro, uma diferença entre compreender a técnica e entender o assunto. Uma criança pode conhecer bastante toda a técnica das equações lineares sem ter muita noção do que venha a ser uma equação linear. Em outras palavras, uma criança pode, muito bem, ter a impressão de que entende Matemática, quando, na realidade, tal não se dá. Nessa situação, falta-lhe qualquer apreciação real da interconexão dos vários processos que conhece. Também é muito fácil para um profes-

ser ficar com a impressão de que uma criança entende alguma coisa, quando, de fato, tal não acontece, porque a criança aprende facilmente as respostas-padrão às perguntas-padrão e, assim, dá a impressão de saber um conceito. Uma pergunta menos padronizada revela, muitas vezes, uma situação diferente. É provável, na verdade, que a extensão do conhecimento dos conceitos matemáticos seja ainda menor do que pareça à primeira vista. Tal declaração pode, realmente, ser apenas a expressão de uma opinião, já que os fatos não podem ser averiguados em escala estatisticamente válida. O entendimento matemático não pode, no momento, ser testado ou medido, de modo algum, por testes de grupo, próprios para serem administrados a grandes grupos da população infantil. Esses testes estão sendo preparados agora, contudo, e poderão já estar disponíveis para projetos de pesquisa quando este livro for publicado.

Vejam, agora, o aspecto *educativo* da situação. A técnica mais comum de educação matemática é a lição do dia, em que o professor age como a fonte autoritária de informação, da qual o "know-how" de Matemática é, de alguma maneira, transmitido aos alunos pelo processo conhecido como ensino. Essa transmissão não parece funcionar bem de modo algum, se usarmos a compreensão matemática autêntica como unidade de medida. As falhas podem estar na fonte de informação, no processo de transmissão, ou na extremidade recebedora. Ou pode ser que todo o sistema de lição do dia seja um veículo inadequado para a transmissão da informação matemática. Embora a qualidade do professor esteja sujeita a variações, podemos anular o mau ensino como uma causa regular que contribua para o presente estado de coisas. A fase de transmissão do processo (isto é, os métodos de comunicação da informação do professor aos alunos) vem sendo examinada atualmente com grande detalhe e muitos melhoramentos têm sido sugeridos, alguns dos quais com inegável êxito.

Incluem os meios audiovisuais, modelos, filmes de Matemática e o uso da televisão. É necessário pesquisar muito ainda para assegurar de que modo, por exemplo, os métodos audiovisuais — além do tradicional quadro-negro — melhoram a eficácia do ensino em uma sala de aula. Os professores que acreditam que esse meio de abordagem do assunto seja o melhor, provavelmente não encontrarão nas páginas seguintes muito com o que concordar. Minha tese é que há deficiências fundamentais no presente sistema, que não podem ser remediadas pelos novos métodos de comunicação, por mais engenhosos que

sejam. Em resumo, tais meios podem demonstrar-se *necessários* para uma eficiente situação de ensino e aprendizagem, mas não podem considerar-se *suficientes*. Na extremidade final da comunicação, o problema poderá ser que um aluno não é capaz de receber a informação por alguma razão fora de seu controle, ou contra a sua vontade. Para lutar contra a inabilidade do aluno, a inteligência geral e a rapidez de assimilação são consideradas, *grosso modo*, como equivalentes, e as turmas são organizadas em função da capacidade. Como existe forte correlação positiva entre a inteligência geral e a facilidade em apreender as noções matemáticas, supõe-se que, juntando crianças com aproximadamente a mesma inteligência, as discrepâncias na rapidez da assimilação serão reduzidas ao mínimo. Assim, o professor pode estabelecer uma velocidade constante de ensino, não muito lenta, nem muito rápida, para a maioria da turma. O problema da falta de vontade de aprender é normalmente enfrentado pela criação de um sistema de punições e recompensas à base de notas, prêmios e penalidades; essa espécie de motivação artificial provoca, de fato, o aprendizado de alguma maneira, mas é lógico que a criança, nessa situação, não tem realmente nenhuma opção a não ser tentar. A ausência de sucesso, se prolongada, leva ao conflito, tanto externo quanto interno, e ao desgosto pelo estudo. O que é absolutamente certo é que tal motivação artificial não desenvolve nenhum amor ao assunto, mas amor ao ego, já que a luta por maiores notas ou a defesa contra as punições tendem a dar ênfase à importância do ego e não ao assunto. Felizmente, esse não é o único tipo de motivação em uso, embora a grande maioria de nossas escolas opere realmente no sistema punição-recompensa para apoiar o estudo. Sempre houve os chamados "professores natos", que saberão explorar as tendências naturais das crianças a serviço do estudo da Matemática, mas há poucos assim. Como o número e a qualidade dos novos professores continuam a cair, tendo em vista melhores condições de trabalho e de pagamento em outros campos, haverá um número cada vez menor deles para animar nossas aulas de Matemática. O problema da motivação é muito real; embora as crianças de menos idade possam encontrar alguma satisfação no próprio mecanismo dos processos que lhes são ensinados, seu interesse logo se esvai, e o encanto do assunto declina à proporção que a criança cresce. A sobrecarga à memória aumenta além do suportável, sem uma compreensão das conexões entre os temas que são aprendidos.

Apesar de toda a organização das turmas, dos sistemas de notas e punições e dos esforços dos professores, a atitude das crianças, em muitos casos, ainda é absolutamente negativa; ou,

se há uma atitude positiva, ela é devida, na maioria das vezes, a uma sensação de realização ou ao prazer da manipulação de um conjunto ordenado de regras, sem muita compreensão daquilo que as regras efetivamente lhes permitem fazer. As exceções a esse quadro melancólico são dignas de nota, e voltaremos mais tarde a uma exame delas. Parecem ocorrer, em grande parte, quando são criadas situações de aprendizagem onde o estudo é motivado por si próprio, quando a informação atinge a criança de tal forma que ela, tanto quanto possível, pode formulá-la *em sua própria linguagem*. Tal situação de aprendizagem deve ser, em grande parte, individual, encontrando-se ainda quando pequenos grupos trabalham juntos.

Os métodos empregados habitualmente para tentar suscitar a vontade de aprender Matemática não levam em consideração um fator muito sério: as diferenças qualitativas na capacidade de aprender. A organização da turma eliminará, em grande parte, pelo menos em teoria, as diferenças muito acentuadas na cadência de progressão da aprendizagem, e o sistema de punição-recompensa garante que o aluno aprenda alguma coisa, ainda que seja compulsoriamente. Existindo, porém, diferentes maneiras de compreender um mesmo assunto de Matemática, capacidade que varia largamente de criança para criança, a organização da turma não tornará a situação homogênea, e sérios problemas ainda surgirão, como sói acontecer. Pesquisa recente parece indicar que há, de fato, diferenças individuais nas maneiras de formar não só os conceitos matemáticos mas também outros conceitos abstratos,* e as dificuldades do professor de Matemática podem, em grande parte, ser devidas à falta de conhecimento dessas diferenças.

Isso nos conduz diretamente ao exame da situação *psicológica* do aprendizado da Matemática. Estamos apenas começando a compreender a mecânica do pensamento abstrato. Embora já se tenha pesquisado muito neste setor, os problemas são tão numerosos e muitas vezes tão difíceis de tratar que, mesmo se todo o conhecimento psicológico disponível fôsse colocado, de uma vez, em prática na sala de aula, pode-se duvidar de que ainda assim fôssem resolvidos. No momento, há três assuntos principais que são objeto de pesquisas: I) diferenças individuais no modo de formar idéias abstratas e variações no mesmo indivíduo, à proporção que cresce; II) detalhes do mecanismo do processo de abstração; III) o problema da motivação. À

* Ver (10) e (11).

medida que se acumula o conhecimento psicológico a respeito do processo do pensamento, parece desejável colocá-lo à disposição dos professores sob uma forma que lhes permita aplicá-lo em uma situação de aprendizagem. Não é necessário dizer que nada disso está acontecendo na proporção desejada.

No próximo capítulo será delineada uma teoria simples sobre o aprendizado dos conceitos matemáticos, baseada no conhecimento psicológico até agora disponível. Naturalmente, uma tal teoria deve ser considerada provisória e sujeita a modificações na medida em que progrida a pesquisa no domínio dos processos mentais em causa.

Podemos agora, vantajosamente, voltar nossa atenção para o problema dos objetivos. A Matemática que nossos filhos estão aprendendo e o modo pelo qual estão aprendendo são, até certo ponto, determinados por objetivos conscientes, embora a tradição também desempenhe papel importante. A maioria de nós se declara francamente a favor dos argumentos econômicos quando se trata de justificar o aprendizado da Matemática. Esse aspecto da opinião deve ter um efeito decisivo na Matemática que é ensinada e como é ensinada. Será possível que tenhamos sido apressados demais no nosso afã de ser utilitários e práticos? Esqueçemo-nos de que uma sala de aula tem crianças reais, com necessidades reais, que esperam dos professores que lhes desvendem as maravilhas do mundo, que jamais perguntarão se alguma coisa é útil, desde que seja interessante? Nossa civilização materialista nos levou ao ponto em que o que *temos* é muito mais importante do que o que *fazemos*. O estudo é apenas um meio de comprar carros maiores e melhores, geladeiras e aparelhos de televisão? Ao contrário, o principal motivo do aprendizado de Matemática ainda deve ser a emoção da descoberta, não a dúbia finalidade de conseguir graus mais altos que algum outro aluno ou a gloriola de um prêmio. É possível que, encorajando mais as alegrias de fazer do que as de ter, estejamos auxiliando a criação de homens cuja conduta não seja inteiramente determinada pelo interesse pessoal (por mais sublime que seja); homens que estarão interessados demais no que estão fazendo para se incomodarem com o fato de os vizinhos os haverem superado na corrida econômica.

Consideremos mais especificamente os diversos objetivos, tanto econômicos quanto pessoais, habitualmente apresentados sempre que se pergunta pela finalidade do estudo da Matemática. Os objetivos econômicos parecem estar compreendidos em dois grupos:

- a) as necessidades da vida diária,
- b) as necessidades do progresso científico.

Se considerarmos o primeiro deles, em si mesmo, seremos forçados a concluir que poucas situações na vida exigem o emprego de técnicas de cálculo ou das propriedades dos números. Quantas vezes o leitor já efetuou uma multiplicação esta semana, fora da sala de aula? Ou uma divisão? Que situações na vida exigem essas aperfeiçoadas formas de cálculo? E mesmo que assim fôsse, quantas delas não poderiam ser resolvidas, quase tão facilmente, com os princípios básicos, por sucessivas adições e subtrações? É quase desnecessário indagar-se quantas vezes, esta semana, o leitor estêve em situações em que fôsse essencial a extração de uma raiz quadrada ou de uma raiz cúbica. Terá tido ocasião de resolver mesmo a mais simples das equações no decorrer de suas atividades diárias? Certamente que a pequena economia de tempo resultante de tais técnicas não parece valer suficientemente os anos de agonia que tão grande número de crianças atravessa para adquiri-las. Se as necessidades de nossa vida diária determinassem o conteúdo de nossos programas de Matemática, haveria muito pouca Matemática nêles. A rápida disseminação das máquinas de calcular, de contabilidade e dos computadores eletrônicos fará o conhecimento de técnicas matemáticas ainda menos essencial à pessoa comum. Por que iria ela gastar tantos anos para fazer algo, bastante ineficientemente, quando a máquina pode fazê-lo muito melhor, em uma fração de segundo? Ninguém mais, agora, exalta as virtudes da vassoura contra o aspirador, e parece que a habilidade de calcular se tornará cada vez menos uma vantagem, à medida que a mecanização progrida. Os defensores do utilitarismo no aprendizado da Matemática vão ter momentos difíceis, muito em breve, para persuadir os pais a transformarem os filhos em calculadores bastante medíocres.

Alguns leitores podem estar pensando que ignorei uma das mais importantes razões pelas quais a lição diária de Matemática, por mais desagradável que seja para alguns, tem valor real duradouro. O aprendizado de Matemática é justificado porque "treina a mente", da mesma maneira que o da gramática latina ou dos verbos irregulares franceses também supostamente "treinam a mente". Com que finalidade, exatamente, essas coisas treinam a mente, se é que realmente o fazem? Para resolver equações ainda mais difíceis ou para aprender pontos de gramática ainda mais intrincados? Não, alegam que treinam a mente para pensar logicamente. Mas o que poderia ser menos

lógico do que realizar um grande número de acrobacias, bem ininteligíveis, com símbolos, pela simples razão de que você será punido se não as executar? Temos de encarar o fato, por mais desagradável que seja: para a grande maioria das crianças, a maior parte dos processos matemáticos que aprendem a manipular não tem significação real, além das propriedades dos processos em si mesmas. Longe de treinar a mente, treinam as crianças a serem hipócritas! Qual a criança que teria a coragem de declarar frontalmente ao seu professor que considera tudo isso bastante incompreensível e que ela vê muito pouca conexão entre o que aprende em Matemática e o resto do mundo? Contudo, a maioria dos adultos admitirá que é, precisamente, isso que sente a respeito. Mas podemos, certamente, argumentar que mesmo que essas coisas não sejam lógicas ou não pareçam lógicas às crianças, talvez venham a ensinar a estas como abordar problemas que são, de algum modo, análogos aos que surgem nas situações matemáticas abstratas. Isso pode realmente acontecer se o que aprendem é verdadeiramente abstrato e geral, ou melhor, se eles as deduzissem como propriedade comum de um certo número de diferentes situações concretas. Contudo, não pode ser assim, em geral, nas escolas, uma vez que as situações concretas, das quais as crianças têm de passar à abstração, são meramente o que é pôsto no quadro-negro. A criança não aprende nada abstrato dessa maneira, por mais impressionantes que suas fórmulas pareçam aos seus pais inocentes. Fazer pres-tidigitação com símbolos não é mais abstrato que o fazer com bolas coloridas; e, se as situações matemáticas não forem assimiladas como generalidades, sua "essência" não será conhecida, e situações a elas semelhantes não serão reconhecidas. Em outras palavras, a transferência não se realizará.

Podemos concluir que a ênfase na utilidade excluiu o estudo da "teoria" e, assim, tornou difícil as aplicações e praticamente impossível a fertilização de idéias. Em outras palavras, muita ênfase na utilidade teve, provavelmente, o efeito de diminuir a eficácia do que tem sido aprendido, e certamente resultou no decréscimo de sua generalidade.

Voltemo-nos, agora, para as necessidades do progresso científico. A Matemática é um dos auxiliares essenciais por meio dos quais as outras ciências, puras ou aplicadas, podem progredir. A técnica matemática está sendo constantemente desenvolvida para atender às mutáveis exigências da Física, da Química, da Biologia, da Psicologia e da Engenharia, para só mencionar algumas. Para compreender as novas técnicas, é essencial que as mais elementares, em que se baseiam, sejam per-

feitamente dominadas. A Matemática escolar consiste, ou devia consistir, justamente nesses elementos básicos. É, portanto, possível aprender simples regras matemáticas que irão servir a tôdas as situações-padrão; mas, se surgir uma situação que não esteja coberta por tais regras, as técnicas aprendidas serão mais do que inúteis, porque o técnico pode, sem querer, usar uma técnica que não é aplicável — possivelmente com desastrosos resultados práticos. Se a justificação da Matemática está em suprir os estabelecimentos de pesquisa com pessoal adequado, então as regras simples não irão ser suficientes; somente uma completa familiarização com todos os segredos das técnicas será aceitável. A falta de entendimento dos processos matemáticos que prevalece em nossas escolas, hoje, não é uma boa preparação para uma carreira científica.

Poder-se-á alegar, certamente, que apenas uma proporção muito pequena da população escolar necessitará saber Matemática até o ponto de, posteriormente, ser capaz de fazer julgamentos independentes sobre aplicações de qualquer importância, e, assim, o tempo despendido no ensino de todos os porquês e para quês é realmente um tempo perdido na maioria dos casos. É claro que, para suprir a indústria e as ciências com matemáticos qualificados, deveríamos ensinar mais Matemática a menos pessoas e, dêsse modo, dar padrões mais elevados a nossos futuros peritos. Os de mentalidade não-matemática podem ser transferidos mais cedo da Matemática para outros assuntos que lhes poderão ser mais proveitosos. Já existe uma tendência bastante visível a êsse respeito; em muitas escolas, as crianças sendo aconselhadas a abandonar a Matemática, já que nunca poderão esperar atingir um padrão que as leve ao nível superior; as classes superiores são confiadas aos professores mais competentes, conquanto os alunos dessas classes são os que podem trabalhar independentemente; as demais classes são “abandonadas” nas mãos de professores estagiários ou do ensino elementar. Dentro da idéia utilitária, só se pode aprovar essa tendência. O matematicamente capaz sobrevive pela seleção natural; o resto vai sendo gradualmente relegado ao depósito matemático, como cidadãos de segunda classe, contra-indicados para a iniciação nos mistérios.

Então, a utilidade econômica indica uma redução no volume de Matemática ensinada ao aluno médio ou ao menos capaz, e uma ampliação da reflexão sobre princípios, no caso do aluno mais capaz. Em outras palavras, esta política utilitária levada muito longe não somente perde todo o caráter utilitário como vai de encontro mesmo a seus objetivos.

Observemos, agora, os objetivos pessoais do ensino de Matemática. Podemos formulá-los sob o título bastante vago de *construção da personalidade*, onde a palavra “personalidade” deve ser entendida em seu sentido técnico de “estrutura da pessoa”. Há um princípio psicológico geralmente aceito de que a personalidade se desenvolve por meio de um processo de integração; isto é, pela reunião progressiva das diferentes partes de uma pessoa até chegar-se finalmente à construção de um conjunto coerente e equilibrado. Uma personalidade integrada adotará, na maioria das questões, um ponto de vista mais amplo, oposto ao pessoal ou regional. Estará bastante seguro de seu próprio valor para não ter de se pavonear em demonstrações artificiais de força; será mais construtivo que crítico em uma situação difícil. Em outras palavras, êle antes unirá que separará as coisas. Procurará mais as conexões que as diferenças e — talvez o mais importante de tudo — êle se terá ajustado bem ao ambiente pelo estabelecimento de uma identidade fundamental de interesse entre êle mesmo e seus companheiros. É, evidentemente, dever do educador garantir que as crianças tenham tôdas as possibilidades de conseguir um grau de integração tão completo quanto sejam capazes de obter, assim como é seu dever, também, garantir que as crianças realizem em grau máximo suas virtualidades no domínio intelectual. Se a matemática pudesse prover qualquer meio pelo qual êsse processo de integração seja auxiliado, isso seria, certamente, uma das razões válidas por que as crianças devam estudar o assunto.

Existem atualmente tais condições para as crianças nas aulas de Matemática? no momento presente? O estudo da Matemática está, de algum modo, auxiliando a formação das personalidades de nossas crianças? É difícil imaginar como um resultado positivo e construtivo possa decorrer de uma atitude negativa. Em outras palavras, para crianças que continuam a não ter gosto pela Matemática há muito pouca razão, *a priori*, para crer que o estudo da Matemática venha a ter por resultado alguma forma de integração. A rejeição ou o desgosto de uma atividade é a rejeição ou o desgosto da parte de nós mesmos que está engajada nessa atividade, e uma atitude negativa no estudo da Matemática só pode entrar o processo de integração. Alguns podem argumentar que é um bom treinamento de caráter para a criança aceitar a disciplina externa e ser obrigada, para seu próprio bem, a fazer coisas de que não goste. É difícil ver como tal assertiva poderá ser confirmada ou não pela experiência. Se, porém, os princípios democráticos são válidos, então a autodisciplina deve ser considerada superior à disciplina exterior, uma vez que, sem autodisciplina, a demo-

eracia desapareceria. Fazer que as crianças façam coisas de que não gostam pode, certamente, ser conseguido sem causar muito mal ao desenvolvimento da autodisciplina; é suficiente assinalar vantagens futuras ou, o que é o mesmo, aplicando a política de "geléia amanhã". Isso certamente é preferível à perpetuação da necessidade de disciplina exterior, que conduz muito facilmente àquela espécie de movimento de grupo vigente na Alemanha nazista. Pesquisa feita na América depois da guerra* a respeito da estrutura da personalidade imbuída de preconceito e sobre "rigidez mental" indica claramente essa direção. O potencial antidemocrático existe em tôdas as pessoas, e uma estrita disciplina exterior de um tipo rígido contribui para formar o nódulo de uma personalidade do tipo fascista, desde a mais tenra infância.

Já vimos que a situação de punição-recompensa só produz, na maioria dos alunos, uma situação compulsória de aprendizado, e é difícil ver como êste, nessas condições, possa ter um efeito integrante. Tem o efeito usualmente descrito como o envolvimento em si mesmo; isto é, a importância do ego se acentua e o indivíduo tende a separar-se dos outros.

Qual é a posição de crianças que gostam de aprender as técnicas sem se compenetrarem de sua significação, isto é, de suas conexões com o resto da realidade? Obviamente, estão aprendendo a operar dentro de restritos sistemas de conjuntos de técnicas, e, assim, não integram o que aprendem com as outras partes de seu conhecimento. Parece improvável que o aprendizado de tais grupos isolados de informação possa ter um efeito integrador. O efeito integrador da busca da criação artística consiste, presumivelmente, na capacidade que uma pessoa tem de consubstanciar suas próprias experiências sob alguma forma especial, seja uma pintura, ou um poema ou uma estória qualquer. Tal pessoa projeta sua organização pessoal do seu ambiente no veículo que emprega, e torna esta organização mais explícita, tornando-a uma parte mais integrada de sua personalidade. A manipulação pura e simples das técnicas matemáticas não pode cristalizar nenhuma experiência prática da vida além do aprendizado dessas técnicas; se essa experiência é estranha ao que aprende, não será integrada. Não haverá nenhuma síntese criadora da experiência da vida, tal como se pode encontrar ao pintar um quadro. Pode-se imaginar que o aprendizado de uma técnica formal não tem outro efeito integrador apreciável além de servir de instru-

* Adorno, T. W., e outros (7).

mento de construção do relacionamento entre a criança e o professor. E mesmo essa construção seria obtida mais eficazmente por meio de outras vias de maior interesse pessoal para a criança.

Podemos concluir que a maior parte do aprendizado de Matemática de nossas crianças não tem efeito integrador em suas personalidades, e não é provável conseguir tal efeito enquanto continuar o sistema atual de estudo. Podemos também concluir que as formas de disciplina puramente exteriores e os incentivos artificiais, sejam positivos (recompensas) ou negativos (punições), não serão, na melhor das hipóteses, proveitosos para a integração de uma pessoa e, na pior, tenderão a desintegrá-la, fazendo-a egocêntrica e deixando-a necessitada da presença da autoridade externa para auxiliar seu ego imaturo. A política de "geléia amanhã" é menos prejudicial, mas não é apropriada para resultar em qualquer integração positiva.

De fato, quando há uma compreensão deficiente da estrutura matemática, é parcialmente porque a realização pessoal não foi um dos objetivos do ensino da Matemática.

Felizmente, a situação não é tão negra assim em todos os lugares. Em muitos círculos educacionais, os objetivos da educação matemática estão sendo reexaminados, e está-se realizando pesquisa no sentido de pôr o aprendizado da Matemática a serviço da realização pessoal. A necessidade de uma reflexão matemática mais penetrante está começando a ser sentida; o aprendizado superficial que agora se processa sob o nome de compreensão da Matemática é considerado, de modo cada vez mais patente, como incapaz de dar muito benefício pessoal ao aluno. Aquêles que estão engajados nessa orientação compreenderam que a percepção matemática raramente nasce dos quadros-negros, especialmente tratando-se de crianças menores, e começaram a sentir a necessidade de um material matemático mais especialmente concebido para êste fim.

Tal material é indispensável para conseguir que as crianças fixem os conceitos de Física e Química. Já que os conceitos matemáticos, por consenso geral, são mais difíceis, é patente a necessidade ainda mais premente de instrumentos especiais. Muitas tentativas têm sido feitas ultimamente para atender a essa necessidade e para ajudar as crianças a ultrapassar determinadas etapas *particulares* de seus estudos de Matemática. As principais tentativas bem sucedidas foram as de Montessori, Cuisenaire e Stern. Algumas das instruções para o uso desses materiais parecem, ao autor, muito rígidas, e isso faz que

desapareçam muitas das vantagens de seu uso. Os métodos, porém, representam, realmente, um significativo passo à frente. Uma grande parte dessa espécie de trabalho é baseada em motivação espontânea: o método é pôsto em prática sem recorrer-se ao sistema de punição-recompensa para apoiar o estudo; inquéritos independentes são conduzidos por crianças, individualmente ou em pequenos grupos. É preferível manter a situação de aprendizado tão fluida e tão individual quanto possível, deixando cada criança avançar com sua própria velocidade e de seu próprio modo.* Os professores podem pensar que esse objetivo seja impossível: eu responderia que é um grave erro olhar para tão baixo. Em capítulos posteriores, descreveremos métodos que permitirão a criação de situações de aprendizado de Matemática que não ficam muito aquém desse ideal.

É impossível, até o momento, fornecer uma avaliação final, estatisticamente válida, a respeito dos vários métodos, sejam os advogados por Montessori, Cuisenaire e Stern, sejam os descritos neste livro. A Fundação Nacional para a Pesquisa Educativa na Inglaterra e no País de Gales está conduzindo um levantamento nacional da situação da Matemática em nossas escolas. Esta pesquisa incluirá a medida da atual compreensão matemática e, quando os resultados estiverem disponíveis, será mais fácil fazer declarações estatisticamente válidas sobre a eficiência ou não dos diferentes métodos.

Ao abandonar o aprendizado matemático tradicional, poderão ser cometidos vários erros, e serão necessários muitos anos para que fique claro qual é a melhor "mistura matemática", se realmente houver uma melhor. Certo grau de rigidez pode surgir rapidamente do uso de qualquer espécie de aparelho, quando se fica viciado com ele. Devemos estar bem alertas para esse perigo. Devemos perguntar-nos quais serão os efeitos a longo prazo, assim como as vantagens imediatas. Também é importante não perder de vista a unidade do pensamento matemático. Ao planejar um conjunto de experiências matemáticas, uma delas pode ter efeitos sobre o aprendizado de conceitos em muitos ramos bem diferentes da Matemática, e os efeitos podem não ser observados durante um longo tempo, talvez anos, após a experiência.

Tentarei especificar brevemente o que considero serem as necessidades fundamentais para um aprendizado proficiente de Matemática:

* Campedelli, L. (12).

a) Os planejadores devem estar conscientes da unidade da estrutura matemática. O curso das experiências matemáticas deve ser encarado como um todo, a partir da idade de cinco anos, com observância total dos processos matemáticos, lógicos e psicológicos nêle envolvidos.

b) Deve haver uma rica variedade de experiências matemáticas, a partir das quais os conceitos matemáticos possam ser construídos pelas próprias crianças. Muitas experiências serão necessárias para cada conceito; de outro modo, só ocorrerá associação e não generalização.

c) O professor encarregado deve estar consciente da dinâmica geral do processo de aprendizagem, tanto quanto da fase particular atingida pelas crianças, individualmente. Deve estar ciente das diferenças individuais nas maneiras de aprender; e, acima de tudo, deverá ter consciência da delicadeza emocional de uma situação de aprendizagem verdadeiramente criadora e, por conseqüência, da possibilidade que tem de favorecer ou frustrar os processos de aprendizagem em tal situação.

Quais são os métodos que têm possibilidade de ser eficientes, atendendo a essas três exigências? Devem certamente existir experiências de caracteres bem diversos, algumas tiradas de situações reais, outras artificialmente engendradas pelo uso de materiais diferentes. Será, provavelmente, necessário abolir quase completamente o atual método de ensino em classe, com o professor pontificando de uma posição central de poder, e substituí-lo pelo aprendizado individual ou em pequenos grupos, por meio de material concreto e instruções escritas, com o professor agindo como um guia e conselheiro. O material e as tarefas terão de ser estabelecidos para a fase pela qual a criança está passando, e o professor terá de aprender a ser sensível às exigências de uma situação sempre mutável.

Creio ser possível estabelecer situações de aprendizagem da Matemática totalmente criadoras em tôdas as fases desse estudo. Quando uma criança houver efetivamente formado um conceito por meio de suas próprias experiências, terá criado algo que não estava lá antes, e esse algo será elaborado em sua personalidade, no sentido psicológico, do mesmo modo que as substâncias essenciais de seu alimento são elaboradas em seu corpo. O valor dessa parte do saber será, para ela, semelhante a pintar um quadro satisfatório, ou a escrever uma boa estória ou a inventar uma peça de teatro agradável para representar com seus amigos. Terá valor intrínseco, como parte do verdadeiro material de que a vida é feita.