

um número inteiro qualquer se obtem somando o número ímpar que lhe corresponde ao quadrado do número inteiro precedente. Se adiante de 1 escrevermos, numa coluna II, o seu quadrado que é 1, somando-o ao segundo número da coluna III, obtemos 4, que é o quadrado de 2; este, por sua vez, somado ao terceiro número ímpar dá 9, que é o quadrado de 3 e, continuando assim, iremos obtendo na coluna II os quadrados de todos os números inteiros, por simples adições, pois podemos prolongar indefinidamente as duas colunas I e III, isto é, a série dos números inteiros e a dos números ímpares. Por esse modo de formação dos quadrados, vê-se claramente que *o quadrado de um número qualquer n é igual à soma dos n primeiros números ímpares.*

EXEMPLO. A diferença entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos é 237. Quais são esses números?

— A diferença entre os quadrados de dois números consecutivos é o dobro do menor mais um; logo 237 representa o dobro do menor dos números considerados, acrescido de uma unidade. O dobro do menor, é, pois, 236 e o menor é igual a $236 \div 2 = 118$. Os números são 118 e 119.

5. REGRA PRÁTICA PARA EXTRAÇÃO DE RAIZ QUADRADA. APROXIMAÇÃO NO CÁLCULO DA RAIZ

101. — Raiz quadrada. Chama-se RAIZ QUADRADA EXATA, ou simplesmente RAIZ QUADRADA, de um número, outro número que, elevado ao quadrado, reproduz o primeiro.

Assim, a raiz quadrada de 49 é 7, porque 7 elevado ao quadrado é igual a 49; $\frac{2}{3}$ é a raiz quadrada de $\frac{4}{9}$ porque $\frac{2}{3}$ elevado ao quadrado é igual a $\frac{4}{9}$; 0,5 é a raiz quadrada de 0,25 porque 0,5 elevado ao quadrado é igual a 0,25.

Indica-se a raiz quadrada de um número escrevendo-o embaixo do sinal $\sqrt{\quad}$ que se chama radical. O traço horizontal desse sinal e que se chama vinculo deve ser prolongado até abranger todo o número, ou expressão, cuja raiz se quer indicar. Esse traço produz o mesmo efeito de um parêntesis.

Assim, a igualdade:

$$\sqrt{49} = 7$$

que se lê “raiz quadrada de 49 é igual a 7”, equivale à seguinte:

$$7^2 = 49$$

Do mesmo modo, as igualdades:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} ; \quad \sqrt{0,25} = 0,5$$

equivalem a:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} ; \quad (0,5)^2 = 0,25$$

Se, dado um número inteiro ou fracionário, existir outro número, inteiro ou fracionário que, elevado ao quadrado, reproduza o número dado, diz-se que o número dado é um *quadrado*.

Assim, 49, $\frac{4}{9}$, 0,25 são *quadrados*.

Tratando-se de números inteiros, usa-se geralmente a expressão *quadrado perfeito*.

Diz-se, ainda, no caso referido, que o número dado *admite uma raiz (quadrada) exata*.

102 — Quadrados perfeitos. Há números que não tem raiz quadrada (exata). Exemplo: não há número inteiro que, elevado ao quadrado dê 40. Não há, tampouco, nenhuma fração que elevada ao quadrado dê 40. Com efeito: qualquer fração pode sempre ser reduzida à expressão mais simples, isto é, substituída por uma fração irredutível igual. Vimos, (nº 95 Ob. II) por outro lado, que o quadrado de uma fração irredutível é uma fração irredutível e não pode, pois, ser igual a 40.

Dai resulta que os únicos números inteiros que tem uma raiz quadrada exata são os quadrados dos números inteiros. Tais números chamam-se *quadrados perfeitos*. Em conclusão:

Dado um número inteiro, dois casos se podem apresentar: ou esse número é quadrado de outro número inteiro, caso em que se diz *quadrado perfeito*, ou esse número não tem raiz qua-

drada exata, isto é, não há número nenhum, inteiro ou fracionário, cujo quadrado seja igual ao número dado.

103. — Raiz quadrada inteira. Chama-se RAIZ INTEIRA de um número o maior número inteiro cujo quadrado está contido nesse número.

Exemplo: é fácil verificar-se que 36 é o maior quadrado perfeito contido em 40; sendo $36 = 6^2$, concluímos que 6 é a raiz quadrada inteira de 40.

No caso em que o número dado é quadrado perfeito, ele tem uma raiz quadrada exata, que é também a sua raiz inteira. Assim, 8 é a raiz quadrada exata de 64; 8 é também a raiz inteira de 64.

Chama-se RESTO DA RAIZ QUADRADA de um número inteiro, o excesso desse número sobre o maior quadrado nele contido.

Assim, 4 é o resto da raiz quadrada de 40, visto que se tem:

$$40 - 36 = 4$$

Esta igualdade equivale a:

$$40 = 36 + 4 = 6^2 + 4$$

Vemos, assim, que, chamando a a raiz quadrada de um número inteiro N , e r o resto da raiz, temos entre esses três números a seguinte relação:

$$N = a^2 + r$$

OBSERVAÇÃO. — Em o nº 100 vimos que a diferença entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos é igual ao dobro do menor mais 1.

Tomemos, por exemplo, o número 48, imediatamente inferior a 49, e, portanto, compreendido entre 36 e 49. A raiz quadrada inteira de 48 é 6 e o resto é $12 = 2 \times 6$.

O resto da raiz quadrada de um número imediatamente inferior a um quadrado perfeito é igual ao dobro da raiz.

Para que o resto fosse igual ao dobro da raiz mais um, o número dado deveria ter mais uma unidade; mas então seria

igual ao quadrado perfeito imediatamente superior e a sua raiz inteira seria exata.

Conclusão: o resto da raiz quadrada de um número não pode exceder o dobro da raiz.

104. — Raiz inteira por excesso. Chama-se raiz inteira por excesso de um número dado a sua raiz inteira aumentada de uma unidade.

Assim, a raiz inteira por excesso de 40 é 7.

A raiz por excesso de um número é a raiz exata do quadrado perfeito imediatamente superior a esse número. O resto por excesso da raiz de 40 é $49 - 40 = 9$.

Quando há necessidade de se evitar confusão, dá-se à raiz inteira e ao resto, que definimos no nº 103, o nome de raiz inteira por falta e resto por falta.

105. — Cálculo da raiz inteira de um número. EXTRAIR a raiz quadrada de um número inteiro é calcular a sua raiz quadrada inteira e o resto dessa raiz.

Tal como acontece para as demais operações, existe uma regra para a extração da raiz inteira de um número. Analogamente ao que fizemos na divisão, começaremos por determinar o número de algarismos da raiz.

NÚMERO DE ALGARISMOS DA RAIZ. — Da lista dos quadrados dos números dígitos, que sabemos de cor, vê-se que o quadrado de um número que só tem um algarismo, possui um ou dois algarismos.

Formemos os quadrados das potências de 10. É evidente que se tem: $10^2 = 100$; $100^2 = 10000$; $1000^2 = 1000000$ e assim por diante.

Daí resulta que, se um número tem 2 algarismos, isto é, acha-se compreendido entre 10 e 100, o seu quadrado terá 3 ou 4 algarismos, pois estará compreendido entre 100 e 10000; se um número tem 3 algarismos, isto é, está compreendido entre 100 e 1000, o seu quadrado terá 5 ou 6 algarismos, pois estará compreendido entre 10000 e 1000000; e assim por diante.

Temos que, para cada algarismo a mais em um número, haverá mais dois algarismos no seu quadrado.

Se, portanto, separarmos os algarismos de um dado número em classes de dois algarismos a partir da direita, o número de classes obtidas será o número de algarismos da raiz do número dado. Se o número dado tiver um número ímpar de algarismos, a última classe terá um só algarismo.

Assim, as raízes quadradas dos números 78.39 e 4.38.75 terão, respectivamente 2 e 3 algarismos.

Consideremos agora vários casos de extração da raiz.

1º CASO: o número dado é menor do que 100. — Como sabemos de cor os quadrados perfeitos menores do que 100, vemos logo qual o maior quadrado perfeito contido no número dado e cuja raiz é a raiz procurada.

Assim, a raiz quadrada de 29 é 5, pois 29 está compreendido entre 25, quadrado de 5, e 36, quadrado de 6.

2º CASO: o número dado está entre 100 e 10000. — Seja, por exemplo, achar a raiz quadrada inteira de 5329.

Separando-se os algarismos em classes de 2, tem-se 53.29; por onde se vê que a raiz tem dois algarismos. Vamos supor que já conhecemos esta raiz, a qual é 73, e procuremos um processo para achar sucessivamente o algarismo das dezenas e o das unidades.

De acordo com o que vimos em o nº 99, I, podemos escrever:

$$73^2 = (70 + 3)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 3 + 3^2$$

ou, efetuando-se os quadrados de 73 e de 70 e pondo-se o fator 3 em evidência nos dois últimos termos:

$$5329 = 4900 + (2 \cdot 70 + 3) \cdot 3$$

Esta última igualdade nos mostra que o quadrado de 7 dezenas sendo 49 centenas, esse quadrado está contido nas centenas do número dado, isto é, em 53.

Acharemos, então, o primeiro algarismo da raiz, procurando a raiz quadrada inteira do número formado pela primeira classe à esquerda.

A mesma igualdade pode ser escrita, ainda, do seguinte modo:

$$5329 - 4900 = (2 \cdot 70 + 3) \cdot 3$$

ou, efetuando-se a subtração,

$$429 = (2 \cdot 70 + 3) \cdot 3$$

Se suprimirmos a segunda parcela, 3, do fator entre parêntesis, diminuiremos esse fator. O produto $(2 \cdot 70) \cdot 3$, que ficará no segundo membro, será, portanto, menor do que o primeiro membro 429. Podemos, então, escrever:

$$429 > (2 \cdot 70) \cdot 3$$

ou

$$429 > 140 \cdot 3$$

o que é evidente. Vemos que 3, algarismo das unidades da raiz, é o quociente inteiro de 429 por 140. Notemos que 429 é o excesso do número proposto sobre o quadrado das dezenas da raiz.

Obtivemos, pois, o algarismo das unidades dividindo o excesso do número dado, sobre o quadrado das dezenas da raiz, pelo dobro das dezenas da raiz.

As operações feitas estão resumidas na disposição abaixo.

5 3.2 9	73
4 9 0 0	2.70 = 140
4 2 9	(2.70 + 3) . 3 = 143.3 = 429
4 2 9	
0	

Depois de achar o algarismo das unidades da raiz, fizemos uma verificação, calculando a expressão $(2 \cdot 70 + 3) \cdot 3$ e mostrando que o resultado é igual ao excesso do número dado sobre o quadrado das dezenas.

O cálculo dessa expressão é indispensável: 1º porque não se tem certeza de que o quociente inteiro do excesso referido pelo dobro das dezenas seja de fato o algarismo das unidades. Com efeito, tal quociente pode ser superior ao algarismo das unidades, do que nos certificaremos achando, pelo cálculo da expressão em apreço, um valor maior do que o excesso mencionado; 2º porque o número dado pode não ser quadrado perfeito e neste caso o valor da expressão será menor que o excesso, e a diferença obtida será o resto da raiz.

As duas hipóteses consideradas acima ocorrem no cálculo, feito pelo mesmo processo acima, da raiz inteira de 789.

7.89	28
400	2.20 = 40
389	(2.20 + 9).9 = 49.9 = 441
384	(2.20 + 8).8 = 48.8 = 384
5	

Achamos o algarismo das dezenas, 2, e calculamos o excesso do número dado sobre o quadrado das dezenas, 400. Achamos 389 para tal excesso. O quociente inteiro de 389 por 40, dobro das dezenas, é 9. Calculamos a expressão: $(2.20 + 9).9$ e achamos 441, número superior ao excesso 389. Daí concluímos que o algarismo das unidades não pode ser 9. Experimentamos o algarismo imediatamente inferior, calculando a expressão $(2.20 + 8).8$ e achamos 384, número inferior a 389; logo o algarismo das unidades é 8, mas a raiz não é exata. A diferença $389 - 384 = 5$ é o resto da raiz.

DISPOSITIVO ABREVIADO. — Retomemos o exemplo acima. Para se efetuar a subtração $789 - 400$, basta subtrair-se 4 do algarismo 7 do minuendo, o qual constitui a primeira classe à esquerda, e à direita do resto escrever 89, isto é, a segunda classe.

7.89	2
4	
389	

Para se achar o quociente inteiro de 389 por 40, basta que se dividam as dezenas do dividendo por 4. Separemos, então, por um ponto, o último algarismo à direita de 389 e dividamos a parte à esquerda, 38, por 4.

7.89	2
4	
38.9	

O valor da expressão $(2.20 + 9).9$ se obtém facilmente escrevendo-se 9 à direita de 4, que representa o dobro da raiz achada e multiplicando-se o número assim formado, 49, por 9. Analogamente, obtemos $48.8 = 384$, que escrevemos sob 389, para subtrair.

7.89	2
4	48.8 = 384
38.9	49.9 = 441
384	
5	

3.º CASO: o número dado é superior a 10000 e, portanto, a raiz tem mais de dois algarismos. Seja extrair a raiz quadrada de 287838.

Dividimos o número em classes de dois algarismos da direita para a esquerda.

28.78.38	5
25	
378	

Achamos a raiz inteira da primeira classe à esquerda, 5. Dessa primeira classe subtraímos o maior quadrado perfeito contido nela, 25, e à direita do 1.º resto parcial, 3, escrevemos a classe seguinte. Separamos, por um ponto, o último algarismo, 8, à direita do número assim formado e dividimos a parte à esquerda pelo dobro, 10, da raiz achada.

O quociente inteiro, 3, poderá ser o segundo algarismo da raiz. Para verificar se 3 é o segundo algarismo da raiz, escrevemo-lo à direita de 10, dobro da raiz anteriormente achada e multiplicamos o número assim formado, 103, pelo mesmo quociente, 3, verificando mentalmente se é possível subtrair o produto do número formado pelo 1.º resto seguido da 2.ª classe.

28.78.38	5
25	103 × 3
378	

Neste caso, a subtração é possível e nos fornece o 2.º resto parcial, 69. Escrevemos 3 na raiz.

28.78.38	53
25	103 × 3
37.8	
309	
693.8	

À direita deste 2.º resto, escrevemos a 3.ª classe, 38, e separamos, por um ponto, o último algarismo à direita.

28.78.38	53
25	103 × 3
37.8	106
309	
693.8	

Dividimos a parte à esquerda, 693, pelo dobro da raiz achada, 106. O quociente inteiro, 6, poderá ser o 3.º algarismo da raiz.

28.78.38	53
25	103 × 3
37.8	1066 × 6
309	
693.8	
6396	
542	

Para verificar, escrevemo-lo à direita do dobro da raiz achada e multiplicamos o número assim formado por 6. Uma vez que é possível subtrair o produto de 6938, número formado pelo 2.º resto parcial seguida da 3.ª classe, 6 é o 3.º algarismo

da raiz. Feita a subtração, achamos o resto da raiz, 542, e a operação está terminada.

Seja, ainda, extrair a raiz quadrada de 3252484. A raiz inteira de 3 é 1, cujo quadrado, 1, subtraído de 3 nos dá o 1.º resto parcial, 2. À direita deste, escrevemos a 2.ª classe, 25, e separamos o último algarismo à direita, 5. O quociente inteiro de 22 por 2, dobro da raiz achada, é 11. Começamos por experimentar 9, pois 11 e 10 não são algarismos.

3.25.24.84	1803
225	29 × 9
224	28 × 8
1248.4	3603 × 3
10809	
1675	

Verificamos mentalmente que o produto 29 × 9 não pode ser subtraído de 225. Experimentamos 8. De 225 subtraímos 224 = 28 × 8. À direita do 2.º resto parcial, 1, escrevemos a 3.ª classe, 24, e separamos o último algarismo à direita. O quociente inteiro da parte à esquerda, 12, pelo dobro da raiz achada é zero; 0 será, pois, o 3.º algarismo da raiz. Não há necessidade de efetuar-se nenhuma operação para se verificar que o 3.º resto parcial é 124. À direita deste número escrevemos, então, a última classe 84, separamos o último algarismo e dividimos 1248 por 360, dobro da raiz achada, 180. A raiz é 1803 e o resto 1675.

106. — Prova da raiz quadrada. Tira-se a prova da extração da raiz verificando-se se a raiz achada e o resto satisfazem a relação

$$N = a^2 + r$$

dada em o n.º 103.

Assim, no último exemplo apresentado, devemos ter:

$$3252484 = 1803^2 + 1675$$

Em vez de efetuar as operações aí indicadas, podemos verificar se são iguais os restos dos dois membros dessa igualdade por 9. Temos, com efeito:

resto de 3252484 por 9	...	1
" " 1803 " 9	...	3
" " 1803 ² " 9	= resto de 3 ² por 9	= 0
" " 1675 " 9	=	1
resto do 2.º membro	= resto 1 + 0 por 9	= 1

Podemos dar a seguinte disposição, aproveitando a operação feita para a extração:

$$\begin{array}{r|l} 1 \dots 3252484 & 1803 \dots 3^2 = 9 \dots 0 \\ \dots & \\ \dots & \\ \dots & \\ \dots & \\ \hline & 1675 \dots 1 + 0 = 1 \end{array}$$

107. — Raiz quadrada de produtos, quocientes e frações.
À vista das propriedades estudadas em os ns. **90** e **93**, temos:

$$(3 \times 5)^2 = 3^2 \times 5^2 = 9 \times 25$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

Logo, de acôrdo com a definição de raiz, temos:

$$\sqrt{9 \times 25} = 3 \times 5 \quad ; \quad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

ou

$$\sqrt{9 \times 25} = \sqrt{9} \times \sqrt{25} \quad ; \quad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$$

I. A raiz quadrada de um produto é o produto das raízes quadradas dos fatores.

II. A raiz quadrada de um quociente é o quociente da raiz quadrada do dividendo pela raiz do divisor.

III. A raiz quadrada de uma fração é igual à raiz quadrada do numerador dividida pela raiz quadrada do denominador.

Exemplos:

I. $\sqrt{49 \times 64} = 7 \times 8$

II. $\sqrt{1,44 \times 36} = 1,2 \times 6$

III. $\sqrt{810000} = \sqrt{81 \times 10000} = 9 \times 100$

IV. $\sqrt{\frac{16}{225}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{225}} = \frac{4}{15}$

V. $\sqrt{2,25 \times 0,36} = 1,5 \times 0,6$

108. — Aproximação no cálculo da raiz quadrada. Consideremos o número 60, que não é quadrado perfeito. A raiz quadrada inteira de 60 é 7, porque se tem

$$49 < 60 < 64$$

ou

$$7^2 < 60 < 8^2$$

isto é, 60 está compreendido entre o quadrado de 7 e o de 8.

E' natural, portanto, que se escreva:

$$7 < \sqrt{60} < 8$$

Dai resulta que, se substituirmos o símbolo $\sqrt{60}$ por 7 ou 8, cometemos um erro menor do que uma unidade. Diremos, então, que a raiz inteira de um número representa a raiz quadrada desse número *com erro menor do que uma unidade*, ou *a menos de uma unidade*, ou, ainda, *aproximada de uma unidade*, acrescentando-se — *por falta* — quando houver necessidade de evitar confusão. Diremos que a raiz inteira por excesso é a raiz quadrada *com erro menor do que uma unidade por excesso*, ou *a menos de uma unidade por excesso* ou, ainda, *aproximada de uma unidade por excesso*.

Tomemos agora os dois números decimais 7,7 e 7,8, cujos quadrados são, respectivamente, 59,29 e 60,84. Podemos, pois, escrever:

$$59,29 < 60 < 60,84$$

ou

$$7,7^2 < 60 < 7,8^2$$

e, por conseguinte,

$$7,7 < \sqrt{60} < 7,8$$

Substituindo $\sqrt{60}$ por 7,7 ou 7,8, cometemos, então um erro menor do que 0,1. Diremos que 7,7 (ou 7,8) é a raiz quadrada de 60 aproximada de 0,1 por falta (ou por excesso).

Analogamente, diremos que 7,74 (ou 7,75) é a raiz quadrada de 60 com aproximação de 0,01 por falta (ou por excesso), pois que se tem $7,74^2 = 59,9076$ e $7,75^2 = 60,0625$; logo:

$$7,74^2 < 60 < 7,75^2$$

À vista dos exemplos apresentados, podemos dar a seguinte definição:

Chama-se RAIZ QUADRADA APROXIMADA de um décimo, de um centésimo, de um milésimo... ao maior número de décimos, de centésimos, de milésimos... cujo quadrado está contido em o número dado.

Assim, 7,74 é o maior número de centésimos cujo quadrado está contido em 60, visto que $7,75^2 > 60$.

Em vez de raiz aproximada de um décimo, etc., pode-se dizer a menos de um décimo ou com erro menor do que 0,1.

Em qualquer dessas formas subentende-se a expressão por falta.

CÁLCULO DA RAIZ APROXIMADA. — Seja calcular a raiz, aproximada, de 5. Para se obter o maior número de décimos cujo quadrado está contido em 5, lembremos que um certo número de décimos ao quadrado dá um certo número de centésimos, assim, $0,7^2 = 0,49$.

Em vez de 5, consideremos, então, 500 centésimos e procuremos a raiz inteira de 500:

$$\begin{array}{r|l} 5.00 & 22 \\ \hline 100 & 42 \times 2 \\ 16 & \end{array}$$

O maior número inteiro cujo quadrado está contido em 500 é 22, isto é:

$$22^2 < 500 < 23^2$$

ou

$$484 < 500 < 529$$

Considerando-se que esses três números representam centésimos, podemos escrever:

$$4,84 < 5 < 5,29$$

Mas, $4,84 = 2,2^2$ e $5,29 = 2,3^2$. Assim, o maior número de décimos, cujo quadrado está contido em 5 é 2,2; 2,2 é a raiz quadrada de 5 a menos de 0,1 por falta e 2,3 é a raiz quadrada a menos de 0,1 por excesso.

Vamos supor que se queira melhorar a aproximação, obtendo-se valores aproximados a menos de 0,01. Bastará evidentemente procurar-se o maior número de centésimos cujo quadrado não excede 5, ou 50000 deci-milésimos

Temos, apenas, de acrescentar mais um par de zeros à direita de 500 e extrair a raiz inteira, continuando a operação anterior, como se vê ao lado.

$$\begin{array}{r|l} 5.0000 & 223 \\ \hline 100 & 42 \times 2 \\ 1600 & 443 \times 3 \\ 271 & \end{array}$$

Obtemos, assim, a raiz inteira de 50000, por falta, que é 223 e por excesso, que é 224. Dividindo-se essas raízes por 100, ou separando-se-lhes 2 casas decimais à direita, obtemos 2,23 e 2,24 para raízes aproximadas, por falta e por excesso, a menos de 0,01, do número 5.

Como o raciocínio que fizemos, neste exemplo, é geral, podemos enunciar a seguinte regra:

Para se obterem as raízes quadradas a menos de (ou aproximadas de) um décimo, de um centésimo, etc., de um número inteiro, extrai-se a sua raiz quadrada inteira, à direita da qual se põe uma vírgula. À direita do resto acrescenta-se um par de zeros e prossegue-se na extração da raiz, obtendo-se assim o algarismo dos décimos. À direita do novo resto, acrescenta-se outro par de zeros e prossegue-se na extração, obtendo-se o algarismo dos centésimos. Continua-se de modo análogo até se alcançar a ordem de aproximação prefixada.

Damos abaixo a disposição do cálculo feito para se obter a raiz de 5 a menos de 0,00001:

5	2,23606
10.0	42 × 2
160.0	443 × 3
2710.0	4466 × 6
3040.00.0	447206 × 6
356764	

109. — Raiz quadrada dos números decimais. 1º *Seja calcular a raiz quadrada de 0,1849.* Extraímos a raiz quadrada inteira de 1849 e achamos 43, que é também raiz exata; logo:

$$(0,43)^2 = 0,1849$$

e

$$\sqrt{0,1849} = 0,43$$

2º *Seja, agora, extrair a raiz quadrada de 0,3468.* Extraímos a raiz inteira de 3468 e achamos 58, que não é raiz exata; logo:

$$58^2 < 3468 < 59^2$$

e, portanto,

$$(0,58)^2 < 0,3468 < (0,59)^2$$

Vemos, então, que 0,58 é a raiz, aproximada de 0,01, do número decimal 0,3468.

Se quiséssemos melhorar a aproximação, teríamos de acrescentar um par de zeros ao resto da raiz inteira de 3468 e prosseguir na operação. Acharemos, assim, 0,588 para raiz a menos de 0,001, e assim por diante.

3º *Seja, ainda, extrair a raiz de 0,144.* Embora 144 seja o quadrado de 12, o número 0,144 não é quadrado. Com efeito, quando elevamos ao quadrado um número decimal, duplicamos o número de zeros. Como evidentemente um número decimal só pode ser quadrado de outro número decimal, segue-se que um número decimal só poderá ser quadrado se tiver um número par de algarismos decimais; 0,144 não é quadrado.

Podemos, entretanto, calcular a raiz de 0,144 com certa aproximação. Sem alterar o número dado, podemos acrescentar

tar um zero à sua direita e temos 0,1440. Calculamos a raiz inteira de 1440 e achamos 37, isto é:

$$37^2 < 1440 < 38^2$$

Logo:

$$0,37^2 < 0,1440 < 0,38^2$$

Vemos, então, que 0,37 é a raiz aproximada de 0,01 por falta, do número decimal 0,144; 0,38 é a raiz a menos de 0,01 por excesso.

Se quiséssemos melhorar a aproximação, procederíamos como no exemplo anterior e obteríamos sucessivamente 0,379; 0,3794; 0,37947, etc.

Dos exemplos apresentados, concluímos a seguinte regra:

Para se extrair a raiz quadrada, aproximada de 0,1, de 0,01, de 0,001 . . . , de um número decimal:

1º *divide-se o número em classes de dois algarismos a partir da vírgula e nos dois sentidos, completando-se com um zero a última classe à direita, se esta só tiver um algarismo;*

2º *opera-se como se se tratasse da extração da raiz inteira; logo que se tiverem utilizado todas as classes da parte inteira do número dado, põe-se vírgula na raiz e continua-se a operação, baixando-se sucessivamente as classes da parte decimal, até se obter na raiz o algarismo da ordem indicada pela aproximação.*

3º *se depois de se baixar a última classe, não se tiver alcançado a ordem indicada pela aproximação, acrescenta-se um par de zeros à direita do último resto e prossegue-se até se obter a aproximação desejada. (11).*

EXEMPLOS. — I. *Calcular a raiz quadrada de 3,4873275 a menos de 0,01.*

3,48.73	1,86
24.8	28 × 8
247.3	366 × 6
277	

A raiz deverá ter duas decimais; basta, pois, que conservemos quatro decimais em o número dado.

A raiz procurada é 1,86.

(11) A regra para se obter a raiz quadrada com a aproximação que se quiser é de origem árabe e foi exposta por Juan de Sevilha em 1140.

II. Calcular $\sqrt{2,431}$ com aproximação de 0,001.

Acrescentamos um zero para tornar par o número de decimais.

2,43,10	1,559
143	25 × 5
181.0	305 × 5
2850.0	3109 × 9
519	

A raiz procurada é 1,559.

110. — Raiz quadrada das frações ordinárias. I. Uma fração irredutível só pode ser quadrado de outra fração. Para que uma fração irredutível seja o quadrado de outra fração é necessário que ambos os seus termos sejam quadrados perfeitos. Neste caso, obtem-se a raiz quadrada exata extraindo-se as raízes de ambos os termos. Exemplo:

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

Uma fração qualquer, cujos termos não são quadrados perfeitos, pode ser igual a uma fração irredutível de termos quadrados e terá, então, uma raiz quadrada exata. Exemplo:

$$\sqrt{\frac{3}{48}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

II. Se um ou ambos os termos de uma fração não forem quadrados perfeitos, a fração não será quadrado de nenhuma fração, nem de nenhum inteiro. Só podemos calcular a raiz aproximada a menos de 1, de 0,1, de 0,01, etc., cuja definição é a mesma que foi dada para os números decimais. Exemplos:

I. Seja calcular a raiz quadrada de $\frac{243}{8}$ a menos de uma unidade.

O quociente de 243 por 8 a menos de uma unidade é 30. Temos então:

$$\sqrt{\frac{243}{8}} \text{ a menos de } 1 = \sqrt{30} \text{ a menos de } 1 = 5.$$

II. Calcular a raiz quadrada de $\frac{53}{72}$ a menos de 0,001.

Temos:

$$\frac{53}{72} = 0,736111 \text{ a menos de } 0,000001$$

Então, vem:

$$\sqrt{\frac{53}{72}} \text{ a menos de } 0,001 = \sqrt{0,736111} \text{ a menos de } 0,001 = 0,857$$

111. — Cubo. CUBO ou terceira potência de um número é um produto de três fatores iguais a esse número.

I. Convém reter de cor os cubos dos números de 1 a 10:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

II. O cubo de uma potência de 10 se obtem triplicando os zeros. Assim:

o cubo de	10	é	1000
" "	"	100	" 100000
" "	"	1000	" 1000000000
.....			

Para se elevar ao cubo um número formado pela unidade seguida de zeros, basta elevar-se ao cubo a parte que termina no último algarismo significativo e acrescentar-se-lhe o triplo de zeros que há em o número dado. Assim:

$$200^3 = (2 \times 100)^3 = 2^3 \times 100^3 = 8 \times 1000000 = 8000000$$

III. Para se elevar uma fração ao cubo, elevam-se ambos os seus termos ao cubo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

Para se elevar ao cubo um número decimal, basta elevar-se ao cubo o número que se obtem fazendo-se abstração da vírgula e no resultado separar-se o triplo de decimais que há em o número dado:

$$0,07^3 = 0,000343$$

112. — Raiz cúbica. RAIZ CÚBICA de um número é outro número que elevado ao cubo reproduz o número dado.

Assim, a raiz cúbica de 343 é 7, porque $7^3 = 343$; a raiz cúbica de 0,008 é 0,2 porque $0,2^3 = 0,008$.

Indica-se a raiz cúbica de um número com o sinal $\sqrt[3]{\quad}$, isto é, o radical com o índice 3. Assim:

$$\sqrt[3]{343} = 7 \quad ; \quad \sqrt[3]{0,008} = 0,2$$

Se, dado um número inteiro ou fracionário, existir outro número, inteiro ou fracionário, que, elevado ao cubo, reproduza o número dado, diz-se que o número dado é um *cubo*. Assim, 343, $\frac{27}{125}$, 0,008 são cubos. Diz-se, ainda, neste caso, que o número dado *admite uma raiz cúbica exata*. No caso dos números inteiros, usa-se geralmente a expressão *cubo perfeito*.

Dado um número inteiro, dois casos se podem apresentar: ou esse número é cubo de outro número inteiro, caso em que ele se diz *cubo perfeito*, ou esse número não tem raiz cúbica exata, isto é, não existe nenhum número, inteiro ou fracionário, cujo cubo seja igual ao número dado.

113. — Raiz cúbica inteira. As definições de *raiz cúbica inteira*, por falta ou por excesso, e *resto da raiz cúbica* são análogas às definições relativas à raiz quadrada.

O processo para o cálculo da raiz cúbica inteira é demasiado trabalhoso para ser usado na prática, pelo que se prefere achar a raiz cúbica com auxílio de tábuas, como veremos adiante.

114. — Aproximação no cálculo da raiz cúbica. A respeito da aproximação no cálculo da raiz cúbica, poderíamos fazer considerações análogas às que fizemos sobre a aproximação da raiz quadrada. Também a definição de *raiz cúbica aproximada* de uma unidade, de um décimo, de um centésimo... é análoga à de raiz quadrada aproximada.

115. — Raiz cúbica dos números decimais. Para se obter a raiz cúbica de um número decimal com certo número de decimais, devemos conservar em o número dado o *triplo* de decimais que se deseja ter na raiz, acrescentando-se, se necessário, zeros à direita para se tornar múltiplo de três o número de algarismos da parte decimal.

Se conhecermos a raiz inteira do número inteiro que se obtem por abstração da vírgula, depois de tornado triplo o número de decimais, acharemos a raiz aproximada do número dado, separando, em tal raiz inteira, um terço do número de decimais que há em o número dado.

Exemplos: I. Calcular $\sqrt[3]{0,064}$ a menos de 0,1. Sabemos que $\sqrt[3]{64} = 4$, logo $\sqrt[3]{0,064} = 0,4$.

II. Calcular $\sqrt[3]{0,000125}$ a menos de 0,01. Sabemos que $\sqrt[3]{125} = 5$, logo $\sqrt[3]{0,000125} = 0,05$.

III. Calcular $\sqrt[3]{0,00027}$ a menos de 0,01. Acrescentando um zero para tornar triplo o número de decimais, obtemos $\sqrt[3]{0,000270}$. A raiz cúbica inteira de 270 é 6, pois

$$216 < 270 < 343$$

ou

$$6^3 < 270 < 7^3$$

logo:

$$\sqrt[3]{0,00027} = \sqrt[3]{0,000270} \text{ a menos de } 0,01 = 0,06$$

IV. Calcular $\sqrt[3]{0,00009875}$ a menos de 0,01.

Precisamos conservar, na raiz, apenas, o triplo de decimais indicadas pela aproximação, isto é, $3 \times 2 = 6$ decimais. Temos, então:

$$\sqrt[3]{0,00009875} \text{ a menos de } 0,01 = \sqrt[2]{0,000098} \text{ a menos de } 0,01 = 0,04, \text{ pois sabemos que a raiz inteira de } 98 \text{ é } 4.$$

116. — Raiz cúbica das frações ordinárias. Uma fração irredutível só pode ser cubo de outra fração. Para isto é necessário que seus termos sejam ambos cubos perfeitos. Assim:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$$

No caso contrário, não haverá número nenhum, inteiro ou fracionário, que elevado ao cubo reproduza a fração dada.

Para se obter a raiz cúbica, aproximada de 1, de 0,1, de 0,01, ... calcula-se o quociente do numerador pelo denominador a menos de 1, de 0,001, de 0,000001, ... e extrai-se a raiz cúbica desse quociente a menos de 1, de 0,1, de 0,01.

EXEMPLO. I. Calcular $\sqrt[3]{\frac{847}{3}}$ a menos de 1.

O quociente inteiro de 847 por 3 é 282 e a raiz inteira de 282 é 6 logo:

$$\sqrt[3]{\frac{847}{3}} \text{ a menos de } 1 = \sqrt[3]{282} \text{ a menos de } 1 = 6$$

II. Calcular $\sqrt[3]{\frac{1}{2750}}$ a menos de 0,01.

O quociente de 1 por 2750 a menos de 0,000001 é 0,000363 e a raiz cúbica inteira de 363 é 7. Temos, então:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2750}} \text{ a menos de } 0,01 = \sqrt[3]{0,000363} \text{ a menos de } 0,01 = 0,07$$

6. USO DAS TÁBUAS PARA A OBTENÇÃO DO QUADRADO, DO CUBO, DA RAIZ QUADRADA E DA RAIZ CÚBICA DOS NÚMEROS INTEIROS E DECIMAIS

117. — Noção sobre tábuas numéricas. A *tabela* ou *tábua de Pitágoras* ou *tábua de multiplicar* nos forneceu um exemplo de tábua numérica, isto é, um conjunto de valores numéricos que correspondem a valores dados, mediante uma certa operação.

Os valores dados são aí os dois números inteiros e a operação é a multiplicação. Para obter o produto, temos de *entrar* com um dos fatores na 1ª coluna vertical e com o outro na 1ª linha horizontal; por isso dizemos que essa tábua é de *dupla entrada*.

Na página 130 reproduzimos trecho de uma tábua de quadrados, cubos, raiz quadrada e raiz cúbica dos números.

A 1ª coluna da tábua completa contém os números inteiros em ordem crescente de 1 até a um certo limite, que pode ser 1000, 10000, etc.

Essa coluna é designada pela letra *N* colocada no alto da mesma.

Adiante de cada número encontra-se na 2ª coluna (N^2) o respectivo quadrado, na 3ª (N^3) o cubo, na 4ª ($\sqrt{\quad}$) e na 5ª ($\sqrt[3]{\quad}$), respectivamente, a sua raiz quadrada e a sua raiz cúbica, exatas quando o número é quadrado ou cubo e aproximadas de 0,001 quando não o é.

118. — Uso das tábuas. OBSERVAÇÕES. Para conveniente utilização das tábuas convem ter presente as seguintes observações, que decorrem do que vimos sobre potências e raízes:

I. Quando, em um número, se desloca a vírgula 1, 2, 3, ... casas para a direita, ou para a esquerda, no quadrado desse número a vírgula fica deslocada 2, 4, 6, ... casas para a direita, ou para a esquerda.

II. Quando, em um número, se desloca a vírgula 2, 4, 6, ... casas para a direita, ou para a esquerda, na raiz quadrada desse número a vírgula fica deslocada 1, 2, 3, ... casas para a direita, ou para a esquerda.

N	N ²	N ³	\sqrt{N}	$\sqrt[3]{N}$	N	N ²	N ³	\sqrt{N}	$\sqrt[3]{N}$
1	1	1	1,000	1,000	60	3 600	216 000	7,746	3,915
2	4	8	1,414	1,260	1	3 721	226 981	7,810	3,936
3	9	27	1,732	1,442	2	3 844	238 328	7,874	3,958
4	16	64	2,000	1,587	3	3 969	250 047	7,937	3,979
5	25	125	2,236	1,710	4	4 096	262 144	8,000	4,000
6	36	216	2,449	1,817	5	4 225	274 625	8,062	4,020
7	49	343	2,616	1,913	6	4 356	287 496	8,124	4,041
8	64	512	2,828	2,000	7	4 489	300 763	8,185	4,061
9	81	729	3,000	2,080	8	4 624	314 432	8,246	4,081
10	100	1 000	3,162	2,154	9	4 761	328 509	8,306	4,101
11	121	1 331	3,316	2,224	70	4 900	343 000	8,366	4,121
12	144	1 728	3,464	2,289	1	5 041	357 911	8,426	4,141
13	169	2 197	3,605	2,351	2	5 184	373 248	8,485	4,160
14	196	2 744	3,741	2,410	3	5 329	389 017	8,544	4,179
15	225	3 375	3,873	2,466	4	5 476	405 224	8,602	4,198
16	256	4 096	4,000	2,520	5	5 625	421 875	8,660	4,217
17	289	4 913	4,123	2,571	6	5 776	438 976	8,717	4,236
18	324	5 832	4,242	2,620	7	5 929	456 533	8,775	4,254
19	361	6 859	4,359	2,668	8	6 084	474 552	8,831	4,272
20	400	8 000	4,472	2,714	9	6 241	493 039	8,888	4,291
21	441	9 261	4,582	2,759	80	6 400	512 000	8,944	4,309
22	484	10 648	4,690	2,802	1	6 561	531 441	9,000	4,326
23	529	12 167	4,796	2,844	2	6 724	551 368	9,055	4,344
24	576	13 824	4,899	2,884	3	6 889	571 787	9,110	4,362
25	625	15 625	5,000	2,924	4	7 056	592 704	9,165	4,379
26	676	17 576	5,099	2,962	5	7 225	614 125	9,219	4,397
27	729	19 683	5,196	3,000	6	7 396	636 056	9,273	4,414
28	784	21 952	5,291	3,036	7	7 569	658 503	9,327	4,431
29	841	24 389	5,385	3,072	8	7 744	681 472	9,380	4,448
30	900	27 000	5,477	3,107	9	7 921	704 969	9,434	4,464
31	961	29 791	5,567	3,141	90	8 100	729 000	9,487	4,481
32	1 024	32 768	5,657	3,175	1	8 281	753 571	9,539	4,498
33	1 089	35 937	5,744	3,207	2	8 464	778 688	9,591	4,514
34	1 156	39 304	5,831	3,239	3	8 649	804 357	9,643	4,530
35	1 225	42 875	5,916	3,271	4	8 836	830 584	9,695	4,547
36	1 296	46 656	6,000	3,302	5	9 025	857 375	9,746	4,563
37	1 369	50 653	6,082	3,332	6	9 216	884 736	9,798	4,579
38	1 444	54 872	6,164	3,362	7	9 409	912 673	9,849	4,594
39	1 521	59 319	6,245	3,391	8	9 604	941 192	9,899	4,610
40	1 600	64 000	6,324	3,420	9	9 801	970 299	9,950	4,626
41	1 681	68 921	6,403	3,448	100	10 000	1 000 000	10,000	4,641
42	1 764	74 088	6,480	3,476	1	10 201	1 030 301	10,050	4,657
43	1 849	79 507	6,557	3,503	2	10 404	1 061 208	10,099	4,672
44	1 936	85 184	6,633	3,530	3	10 609	1 092 727	10,149	4,687
45	2 025	91 125	6,708	3,557	4	10 816	1 124 864	10,198	4,702
46	2 116	97 336	6,782	3,583	5	11 025	1 157 625	10,247	4,717
47	2 209	103 823	6,855	3,609	6	11 236	1 191 016	10,295	4,732
48	2 304	110 592	6,928	3,634	7	11 449	1 225 043	10,344	4,747
49	2 401	117 649	7,000	3,659	8	11 664	1 259 712	10,392	4,762
50	2 500	125 000	7,071	3,684	9	11 881	1 295 029	10,440	4,777
51	2 601	132 651	7,141	3,708	110	12 100	1 331 000	10,488	4,791
52	2 704	140 608	7,211	3,732	1	12 321	1 367 631	10,535	4,806
53	2 809	148 877	7,280	3,756	2	12 544	1 404 928	10,583	4,820
54	2 916	157 464	7,348	3,780	3	12 769	1 442 897	10,630	4,834
55	3 025	166 375	7,416	3,803	4	12 996	1 481 544	10,677	4,848
56	3 136	175 616	7,483	3,826	5	13 225	1 520 875	10,723	4,863
57	3 249	185 193	7,549	3,848	6	13 456	1 560 896	10,770	4,877
58	3 364	195 112	7,615	3,871	7	13 689	1 601 613	10,816	4,891
59	3 481	205 379	7,681	3,893	8	13 924	1 643 032	10,862	4,905
					9	14 161	1 685 159	10,908	4,918

III. Quando, em um número, se desloca a vírgula 1, 2, 3, ... casas para a direita, ou para a esquerda, no cubo desse número a vírgula fica deslocada 3, 6, 9, ... casas para a direita, ou para a esquerda.

IV. Quando, em um número, se desloca a vírgula, 3, 6, 9, ... casas para a direita, ou para a esquerda, na raiz cúbica desse número a vírgula fica deslocada 1, 2, 3, ... casas para a direita, ou para a esquerda.

Os exemplos que apresentamos a seguir esclarecem o modo de utilizar a tábua em todos os casos possíveis.

I. *Obter pela tábua o quadro de 7,8.*

Procuramos na coluna N o número inteiro 78 e encontramos na coluna N², o seu quadrado que é 6048. Separamos neste quadrado o duplo de decimais que há em o número dado. Tem-se $7,8^2 = 60,84$.

II. *Obter pela tábua a $\sqrt{47}$ a menos de 0,001.*

Adiante de 47, tomado na coluna N, encontramos na coluna $\sqrt{\quad}$, o valor procurado: $\sqrt{47} = 6,855$.

III. *Obter pela tábua $\sqrt{7225}$.*

Como a tábua de que dispomos só vai até a 119, não podemos encontrar o número dado na coluna N. Podemos, entretanto, notar que o número dado é inferior ao maior quadrado que figura na coluna N². Procurando-o nesta coluna, encontramos-lo aí e verificamos que corresponde ao número 85. Temos, então, $\sqrt{7225} = 85$.

IV. *Obter pela tábua $\sqrt{5837}$.*

O número 5837 excede o limite da tábua e também não se acha entre os números da coluna N², mas é inferior ao último número dessa coluna; logo ele se acha entre dois números da coluna N², que são $5776 = 76^2$ e $5929 = 77^2$. Concluimos que 76 é a raiz quadrada inteira de 5837.

V. *Calcular, com auxílio da tábua, $\sqrt{0,39}$.*

Deslocando-se a vírgula 2 casas para a direita, tem-se o número inteiro 39, para o qual a tábua nos dá a raiz 6,245 a menos de 0,001. Em virtude da OBSERVAÇÃO II deste parágrafo, a vírgula ficou deslocada 1 casa para a direita na raiz do número 0,39; a raiz procurada é, pois, 0,6245, ou 0,624 a menos de 0,001.

VI. *Calcular, com auxílio da tábua, $\sqrt{0,073}$.*

Deslocando-se a vírgula 4 casas para a direita, tem-se o número inteiro 730, cuja raiz quadrada a menos de 1 (Exemplo III), forne-

cida pela tábua, é 27. Em virtude da OBSERVAÇÃO II, a vírgula ficou deslocada 2 casas para a direita na raiz do número dado. A raiz procurada é, pois, 0,27 a menos de 0,01.

VII. Calcular, com a tábua, o cubo de 5,3.

Procuramos, na coluna N, o número inteiro 53 e encontramos, na coluna N^3 , o seu cubo, que é 2809. Separamos, neste cubo, o triplo de decimais que há em o número dado. Tem-se $5,3^3 = 2,809$.

VIII. Obter, pela tábua, a $\sqrt[3]{68}$ a menos de 0,001

Adiante de 68, encontrado na coluna N, achamos, na coluna $\sqrt[3]{\quad}$, a raiz procurada, 4,081.

IX. Achar, com a tábua, $\sqrt[3]{592704}$.

Como a tábua de que dispomos só vai até a 119, não podemos encontrar o número dado na coluna N. Podemos, entretanto, notar que esse número é inferior ao maior cubo que figura na coluna N^3 . Procurando-o nesta coluna, encontramos-lo aí e verificamos que corresponde ao número 84. Temos, então, $\sqrt[3]{592704} = 84$.

X. Obter, pela tábua, $\sqrt[3]{158600}$.

O número 158600 excede o limite da tábua e também não se encontra entre os números da coluna N^3 , mas é inferior ao último número dessa coluna; logo ele se acha entre dois números dessa coluna, que são $157464 = 54^3$ e $166375 = 55^3$. Concluimos que 54 é a raiz cúbica inteira de 157664.

XI. Calcular, pela tábua, $\sqrt[3]{0,047}$.

Deslocando-se a vírgula 3 casas para a direita, tem-se o número inteiro 47, para o qual a tábua nos dá a raiz cúbica 3,609 a menos de 0,001. De acôrdo com a OBSERVAÇÃO II, a vírgula ficou deslocada 1 casa para a direita na raiz do número 0,047. A raiz procurada é, pois, 0,3609, ou 0,361 a menos de 0,001.

XII. Calcular, pela tábua, $\sqrt[3]{0,0011}$.

Deslocando-se a vírgula 6 casas para a direita, tem-se o número inteiro 110, cuja raiz cúbica, fornecida pela tábua, é 4,791. Como, em vista da OBSERVAÇÃO II, a vírgula ficou deslocada 2 casas para a direita na raiz do número dado, esta é 0,04791 ou, a menos de 0,001, 0,048.

XIII. Calcular, com a tábua, $\sqrt[3]{0,8434}$.

Deslocando-se a vírgula 6 casas para a direita, tem-se o número inteiro 843400. Este não se acha na coluna N, mas está compre-

endido entre dois números consecutivos da coluna N^3 e que são $830584 = 94^3$ e $857375 = 95^3$; logo, a raiz cúbica inteira de 843400 é 94 e $\sqrt[3]{0,8433} = 0,94$.

119 — Problemas resolvidos. I. Qual é o menor número que se tem de somar a 750 para se ter um quadrado?

— O número pedido é o que falta a 750 para o quadrado perfeito imediatamente superior a 750. Extraíndo-se a raiz quadrada inteira de 750, acha-se 27 e resta 21. Daí concluímos ser $27^2 < 750 < 28^2$ e que o excesso de 750 sobre 27^2 é 21. Por outro lado, sabemos que a diferença entre 28^2 e 27^2 (nº **100**) é $2 \cdot 27 + 1 = 55$. Logo o que falta a 750 para 28^2 é a diferença $55 - 21 = 34$. De fato, somando-se 34 a 750 tem-se 784, que é o quadrado de 28.

II. A raiz quadrada inteira de um número é 74 e o resto é o maior possível. Qual é esse número?

— O resto, sendo o maior possível, é igual ao dobro da raiz, isto é, 148. Como o número é igual ao quadrado da sua raiz inteira mais o resto (nº **103**), será igual a $74^2 + 148 = 5624$.

III. Qual é o menor número que se tem de subtrair de 0,4488 para se ter um quadrado?

Extraíndo-se a raiz quadrada de 0,4488 a menos de 0,01 acha-se para raiz 0,66 e para resto 0,0132. Subtraindo-se este resto do número dado, tem-se pois, o quadrado de 0,66; logo, 0,0132 é o número procurado.

IV. Calcular o comprimento que deve ter o lado de um quadrado para que sua área meça 7225 m².

— Sabemos que a área de um quadrado é igual ao quadrado do lado: $S = l^2$. De acôrdo com a definição de raiz quadrada, o lado será, pois, a raiz quadrada da área: $l = \sqrt{S}$. O comprimento procurado será, então, $l = \sqrt{7225} = 85$ m.

V. Calcular o comprimento que se deve dar ao raio de um círculo para que a área deste tenha 50 cm².

— A área do círculo se obtém pela fórmula $S = \pi r^2$ isto é, a área do círculo é igual ao produto do quadrado da medida do raio por π . Daí se conclue que o quadrado da medida do raio se obtém dividindo-se a área por π e o raio será, então, a raiz quadrada desse quociente:

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Em vez, porém, de dividir a área por π é mais comodo multiplicá-la pelo inverso de π :

$$r = \sqrt{S \times \frac{1}{\pi}}$$

O comprimento procurado será, então,

$$r = \sqrt{50 \times 0,31831} = \sqrt{15,9155} = 3,98 \text{ cm}$$

VI. A base de um retângulo é igual a $1/4$ da altura. Calcular as dimensões do retângulo, sabendo que a sua área é de 1600 m^2

A área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura; sendo a base $1/4$ da altura, a área será igual ao produto de $1/4$ da altura pela altura ou, seja $1/4$ do quadrado da altura. O quadrado da altura é, pois, o quádruplo da área, isto é, 4×1600 ou 6400 . A altura é, então, igual a $\sqrt{6400} = 80 \text{ m}$; a base é igual a $1/4$ de $80 \text{ m} = 20 \text{ m}$.

VII. Os catetos de um triângulo retângulo medem 51 m e 68 m . Calcular a hipotenusa.

Sabemos que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos (nº 22). Chamando a a hipotenusa, temos, então, $a^2 = 51^2 + 68^2 = 2601 + 4624 = 7225$ e $a = \sqrt{7225} = 85 \text{ m}$.

OBSERVAÇÃO. No exemplo apresentado, encontramos um valor exato para a hipotenusa, porque a soma dos quadrados de 51 e 68 é um quadrado perfeito. Isto raramente acontece; em geral, a soma dos quadrados dos catetos não é um quadrado e o valor de hipotenusa tem de ser calculado com certa aproximação.

VIII. A hipotenusa de um triângulo retângulo tem $4,7 \text{ cm}$ e um dos catetos, $2,9 \text{ cm}$. Calcular o outro cateto.

O quadrado do cateto desconhecido, c , é o excesso do quadrado da hipotenusa sobre o do cateto dado:

$$c^2 = 4,7^2 - 2,9^2 = 22,09 - 8,41 = 13,68 \text{ e } c = \sqrt{13,68} = 3,698 \text{ cm.}$$

IX. Quer-se fazer uma vasilha cilíndrica com 40 cm de altura e uma capacidade de 50 litros. Calcular o raio que deve ter a base.

— O volume do cilindro é igual ao produto da área da base pela altura. Dividindo-se o volume, reduzido a cm^3 , pela altura em cm , tem-se a área da base: $50 \text{ cm}^3 \div 40 \text{ cm} = 1,25 \text{ cm}^2$. A base é um círculo, cuja área se obtém, multiplicando-se π pelo quadrado do raio;

este quadrado é, então, igual ao quociente da área por π , ou melhor, ao produto da área por $1/\pi$: $r^2 = S \times 1/\pi$; logo

$$r = \sqrt{S \times 1/\pi} = \sqrt{1,25 \times 0,318} = \sqrt{0,3975} = 0,63 \text{ m.}$$

X. Quer-se construir um reservatório retangular com a capacidade de 72000 litros, cuja largura seja $2/3$ do comprimento e cuja altura seja $3/4$ da largura. Calcular as dimensões do reservatório.

— A capacidade é igual ao volume de um paralelepípedo retângulo, o qual se obtém multiplicando as três dimensões do sólido ($V = cla$). A altura (a) sendo $3/4$ da largura (l) e esta, por sua vez, $2/3$ do comprimento (c), a altura será $3/4 \times 2/3$ ou $1/2$ do comprimento $\frac{c}{2}$. O volume será, então, igual ao produto do comprimento, por $1/2$ deste e por $2/3$ do mesmo ou, ($V = c \times 1/2 c \times 2/3 c$) ainda, $1/2 \times 2/3 = 1/3$ do cubo do comprimento ($1/3 c^3$). Este cubo é, pois, o triplo do volume ($c^3 = 3V$), e o comprimento será a raiz cúbica do triplo do volume:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt[3]{3V} = \\ &= \sqrt[3]{3 \times 72000 \text{ dm}^3} = \\ &= \sqrt[3]{216000 \text{ dm}^3} = 60 \text{ dm} = 6 \text{ m.} \end{aligned}$$

O comprimento deve ter, assim, 6 m , a largura, $2/3$ de $6 \text{ m} = 4 \text{ m}$ e a altura, $3/4$ de $4 \text{ m} = 3 \text{ m}$.

Exercícios

QUADRADO E RAIZ QUADRADA

1. Extrair a raiz quadrada de: a) 9409 b) 369664 c) 737881 d) 22867524.
2. Calcular a raiz quadrada inteira de a) 488 b) 693 c) 824 d) 2688 e) 45600 f) 2106000 g) 5000000 h) 22071204 i) 25075000.
3. Extrair a raiz quadrada a menos de 1 dos números: a) 115500 b) 1196649 c) 307,28 d) 795,75 e) $\frac{775}{3}$ f) $\frac{1288248}{13}$.

4. Extrair a raiz quadrada a menos de 0,1 de a) 87 b) 118
c) 21,6 d) 451,4376 e) $\frac{423}{7}$ f) $\frac{5}{3}$.
5. Extrair a raiz quadrada a menos de 0,01 de a) 4278
b) 1,005 c) 230,129 d) 54,7 f) 0,034 g) 0,06125625 h) $\frac{10000}{3}$
i) $\frac{8}{11}$ j) $4\frac{5}{21}$ k) $\frac{5}{8}$ l) $\frac{7}{8}$ m) $\frac{5}{3}$.
6. Calcular, com aproximação de 0,001, a raiz quadrada de:
a) 0,0273 b) 0,386 c) 0,00487 d) 0,0000774 e) 0,345 f) $\frac{7}{8}$
g) $\frac{8}{11}$ h) $\frac{4}{7}$ i) $2\frac{45}{59}$ j) $\frac{1}{0,4}$ k) $\frac{2,5}{0,16}$.
7. Calcular a raiz quadrada, aproximada de 0,001, de:
a) 0,00000961 b) 0,0247 c) 0,0000001849 d) $\frac{5}{12}$ e) $6\frac{2}{5}$
f) $9\frac{1}{2}$ g) $\frac{4}{7}$ h) $4\frac{5}{21}$.
8. Calcular a raiz quadrada, a menos de 0,00001 por excesso, de:
a) 0,0008783 b) 0,000075328 c) 0,0000005184 d) 0,0000063001
e) 0,0003272481 f) $1\frac{5}{18}$ g) $\frac{7}{19}$ h) $3\frac{2}{29}$.
9. Achar, com auxílio de uma tábua, o quadrado de a) 527
b) 1340 c) 24900 d) 639000 e) 8734 f) 54327000 g) 3,7 h) 0,43
i) 0,083 j) 0,0034 k) $19/43$ l) $17/20$ m) $7\frac{35}{80}$.
10. Achar, com auxílio de uma tábua, a raiz quadrada inteira de:
a) 138427 b) 248250 c) 539428 d) 1007800 e) 542007 f) 59438400
g) 148593000.
11. Obter, com auxílio de uma tábua, a raiz quadrada a menos de 0,001 de a) 547 b) 638 c) 23,47 d) 37,8 e) 7,93 f) 0,87
g) 0,009 h) 0,049 i) 0,37845 j) 0,000043 k) $5/8$ l) $3/7$ m) $5/9$
n) $7/11$ o) $3\frac{2}{3}$ p) $5\frac{5}{6}$ q) $7\frac{1}{3}$ r) $2 - \sqrt{2}$ s) $2 - \sqrt{3}$
t) $10 - 2\sqrt{5}$.

12. Obter, com auxílio de uma tábua, a raiz quadrada, a menos de 0,01 de a) 83,7848 b) 4238,352 c) 89,47358 d) 381,429.
13. Achar, com auxílio de uma tábua, o cubo de:
a) 67 b) 9,3 c) 0,35 d) 0,17 e) 3,58 f) 15,7 g) 0,413 h) 0,019
i) $17/45$ j) $5\frac{3}{7}$ k) $7\frac{5}{8}$ l) $9\frac{1}{4}$.
14. Achar, com auxílio, de uma tábua, a raiz cúbica inteira de:
a) 925478 b) 197837 c) 54936 d) 813840 e) 13459878
f) 150078378000 g) 389785679000000.
15. Obter, com auxílio de uma tábua, a raiz cúbica, aproximada de 0,001, de: a) 87 b) 139 c) 428 d) 5,985 e) 15,593 f) 0,058427
g) 0,00000594 h) 0,00000093 i) $3/4$ j) $7/8$ k) $1\frac{3}{4}$ l) $5\frac{1}{2}$
m) $6\frac{5}{8}$.
16. Obter, com auxílio de uma tábua, a raiz cúbica, a menos de 0,01, de a) 593847 b) 0,0384 c) 0,0034275 d) 57,32 e) 23,6
f) 585,93.
17. Qual é o menor número que se tem de somar a a) 850
b) 1327 c) 12432839 d) 90000000 e) 4,35 f) 0,4837 g) 0,0398756
para se ter um quadrado?
18. A raiz quadrada inteira de um número é a) 73 b) 336
c) 907 d) 4003 e) 5050 e o resto é o maior possível. Qual é esse número?
19. Qual é o menor número que se tem de subtrair de a) 5507
b) 9,9359 c) 839,6 d) 0,00783 e) 0,000587955 f) 5,0000 para se ter um quadrado?
- 19a. Calcular o comprimento que deve ter o lado de um quadrado para que a sua área meça a) 17689 m^2 b) $127734,76\text{ cm}^2$
c) $17,35\text{ ha}$ d) 39 ha 40 a.
20. Calcular o comprimento que deve ter o raio de um círculo para que sua área tenha a) 12 m^2 b) 1282 cm^2 c) 924 cm^2 .
21. A altura de um retângulo é a) $2/5$ b) $7/12$ c) $3/4$ da base. Calcular as dimensões, sabendo que a área tem a) 360 m^2
b) 8400 m^2 c) $2,16\text{ cm}^2$
22. A altura de um triângulo é a) $3/4$ b) $5/24$ c) $3/7$ da base. Calcular a base e a altura, sabendo que a área do triângulo mede a) $2,16\text{ cm}^2$ b) 15 cm^2 c) 10 ha 50 a.
23. A altura de um trapézio é metade da base menor e esta é $5/8$ da base maior. Calcular a altura e as bases, sabendo que a área tem 260 m^2 .
24. A altura de um trapézio é $2/5$ da base maior e esta excede a menor de $1/5$ do seu comprimento. Calcular a altura e as bases, sabendo que a área tem $13,20\text{ cm}^2$.

25. Os catetos de um triângulo retângulo medem a) 39 cm e 52 cm b) 3,06 m e 5,48 m c) 56,1 cm e 69,5 cm. Calcular a hipotenusa.

26. A hipotenusa e um dos catetos de um triângulo retângulo medem respectivamente a) 39 m e 15 m b) 3,5 m e 2,8 m c) 0,58 m e 0,40 m. Calcular o outro cateto.

27. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 6 cm e um dos catetos 4,8 cm. Calcular a área.

28. Calcular a área de um triângulo retângulo isósceles, cuja hipotenusa tem 30 cm.

29. Calcular a área de um quadrado cuja diagonal tem 8 cm.

30. Qual é a fração que dividida pelo seu inverso dá:

$$a) \frac{529}{1764} \quad b) \frac{3721}{7056} \quad c) \frac{9025}{12769} ?$$

31. O hectolitro de madeira é um cilindro de diâmetro igual a altura. Calcular as dimensões dessa medida efetiva.

32. A área total de um cubo mede 0,12 m². Calcular o volume.

33. O volume de um cubo mede a) 150 cm³ b) 0,027 m³. Calcular a área total.

34. Calcular o raio de uma esfera cujo volume mede:

$$a) 904,32 \text{ cm}^3 \quad b) 381,151 \text{ m}^3$$

35. A altura e a largura de um paralelepípedo retângulo são, respectivamente, o terço e a metade do comprimento. Calcular as dimensões, sabendo que o volume do sólido tem 36 m³.

36. O volume de um bloco retangular é 7680 cm³. A altura é $\frac{3}{5}$ da largura e $\frac{3}{8}$ da base. Calcular a área total do sólido.

37. O volume de um prisma reto mede 552 dm³. A base é um retângulo cuja largura é $\frac{3}{4}$ do comprimento e a altura do sólido é $\frac{2}{7}$ do comprimento da base. Calcular as dimensões do sólido.

38. O volume de um cilindro reto é 2262 cm³. Calcular a altura do sólido sabendo que esta é $\frac{5}{3}$ do diâmetro da base.

39. O volume de um cilindro é 1507,2 dm³ e o raio da base é $\frac{5}{24}$ da altura. Calcular as dimensões.

40. Calcular o raio da base do cilindro equilátero (diâmetro igual à altura), cujo volume é de 35,62496 m³.

41. O volume de um cone é 6,284 dm³ e a altura é $\frac{15}{16}$ do raio da base. Calcular essas dimensões.

UNIDADE V

RAZÕES E PROPORÇÕES

1. RAZÃO DE DUAS GRANDEZAS

120. — Razão de dois números. Chama-se RAZÃO DE DOIS NÚMEROS ABSTRATOS, tomados numa certa ordem, o quociente exato do primeiro pelo segundo.

Assim, a razão de 12 para 4 é 3, pois 12 dividido por 4 dá para quociente 3; a razão de 5 para 7 é $\frac{5}{7}$.

A razão de $\frac{3}{4}$ para $1\frac{1}{8}$ é a fração $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9}$ ou $\frac{2}{3}$,

que representa o quociente de $\frac{3}{4}$ por $1\frac{1}{8}$.

A razão de a para b representa-se por $\frac{a}{b}$ e lê-se “ a sobre b ” ou “ a para b ”. Também se pode representar por $a : b$.

O número a , que figura como dividendo, ou como numerador, chama-se *antecedente*. O número b , que figura como divisor, ou como denominador, chama-se *consequente*, ou melhor, *subsequente*. Esses dois números são os *termos da razão*.

Chama-se *valor* de uma razão o número inteiro ou decimal, ou a fração irredutível, que lhe é igual.

Avaliar uma razão é achar o seu valor.

Assim, a razão de 4,5 para 20 se representa ou se exprime por $\frac{4,5}{20}$. Avaliando essa razão, tem-se:

$$\frac{4,5}{20} = \frac{45}{200} = \frac{9}{40}$$

(12) O primeiro sinal usado para indicar uma razão foi introduzido na Europa pelo árabe andaluz Alkasadi (sec. XV), considerado o iniciador do simbolismo matemático nos tempos modernos. Esse sinal era \dots , mais tarde substituído por um traço indicado, /, (Targaglia, 1557).

121. — Razão de duas grandezas. No estudo das frações (1ª S. A., nº 132) tivemos ensejo de explicar o que se deve entender quando dizemos que um segmento b é três quintos de outro segmento c ou, usando notações conhecidas:

$$b = \frac{3}{5} \text{ de } c$$

Queremos, com isso, exprimir que $\frac{3}{5}$ é a medida do segmento b quando se toma para unidade o segmento c .

Ainda de acordo com as noções adquiridas no estudo das frações, a igualdade acima exprime que o segmento b é o produto do segmento c por $\frac{3}{5}$ e, portanto, $\frac{3}{5}$ é o número pelo qual devemos multiplicar o segmento c para obter b . É natural, portanto, que se considere $\frac{3}{5}$ como sendo o quociente exato de b por c , ou, de acordo com a definição do nº 120, a razão de b para c .

Chama-se **RAZÃO** de uma grandeza para outra de mesma espécie o número que mede a primeira quando se toma a segunda para unidade.

Exprime-se a razão de uma grandeza a para outra grandeza b , de mesma espécie, escrevendo-se $a:b$ ou $\frac{a}{b}$ que se lê "a para b" ou "a sobre b".

122. — Cálculo da razão de duas grandezas homogêneas. Consideremos dois segmentos: a , com 4 cm e b com 5 cm. Do fato de se acharem os dois segmentos medidos com a mesma unidade, o centímetro, concluimos imediatamente que o segmento a contém um certo número de vezes uma parte alíquota de b . No caso apresentado, vemos, então, que a é $\frac{4}{5}$ de b , ou que a razão de a para b é $\frac{4}{5}$, isto é, é igual à razão do número que mede a para o número que mede b , com a mesma unidade que, no nosso caso, é o centímetro.

Vamos, agora, supor que, ao invés do centímetro, tomamos para unidade, o milímetro. As medidas de a e de b em milímetros se obtêm multiplicando-se, por 10, as medidas desses segmentos em centímetros. A razão dessas medidas, expressa agora pela fração $\frac{40}{50}$, é evidentemente igual a $\frac{4}{5}$. Se adotásemos, ainda, como unidade, o metro, as medidas seriam 0,04 m e 0,05 m, cuja razão tem ainda o mesmo valor, $\frac{4}{5}$.

Designando por $\frac{a}{b}$ a razão do segmento a para o segmento b , podemos, à vista do que acabamos de ver, escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{0,04 \text{ m}}{0,05 \text{ m}} = \frac{40 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = \frac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \frac{4}{5}$$

Conclusão: I. A razão de uma grandeza para outra da mesma espécie é igual à razão da medida da primeira para a medida da segunda, feitas essas medidas com a mesma unidade.

II. Para calcular a razão de uma grandeza para outra, basta medirem-se ambas com a mesma unidade, escolhida arbitrariamente, e calcular o quociente exato da primeira medida pela segunda.

III. O valor da razão de duas grandezas de mesma espécie é um número abstrato (inteiro, decimal ou fração ordinária irredutível), o qual não depende da unidade com que foram medidas as duas grandezas.

EXEMPLOS. — I. A altura do monte Itatiaia é 2800 m e a do Aconcágua 7200 m. Calcular a razão da primeira para a segunda.

Temos:

$$\frac{\text{alt. do Itatiaia}}{\text{alt. do Aconcágua}} = \frac{2800 \text{ m}}{7200 \text{ m}} = \frac{7}{18}$$

$\frac{7}{18}$ é o valor procurado.

II. Calcular a razão de um segmento de 2 jardas para um segmento de 15 pés.

Devemos reduzir os dois comprimentos à mesma unidade:

$$2 \text{ jardas} = 2 \times 3 \text{ ft.} = 6 \text{ ft.}$$

Temos, então:

$$2 \text{ yd.} : 15 \text{ ft.} = 6 \text{ ft.} / 15 \text{ ft.} = 6/15 = 2/5$$

123. — Razões inversas. Dadas duas grandezas, a e b , de mesma espécie, podemos considerar a razão de a para b , que se representa por $\frac{a}{b}$ ou a razão de b para a , que se representa por $\frac{b}{a}$.

As duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$ tais, que o antecedente de uma é o conseqüente da outra e vice-versa, dizem-se *inversas* ou *recíprocas*, uma da outra.

Os valores dessas razões são evidentemente números inversos ou recíprocos. Se a primeira for, por exemplo, igual a $2/5$, a segunda será igual a $2 \frac{1}{2}$.

124 — Noção de grandezas incomensuráveis e de números irracionais. Em todos os exemplos acima apresentados, de comparação de duas grandezas de mesma espécie, temos sempre suposto que uma delas é múltiplo de uma parte alíquota da outra. Isso equivale a dizer que existe uma certa unidade arbitrária que se contém exatamente nas duas grandezas. Expressimos tal fato dizendo que as grandezas dadas *aditem u'a medida comum* ou que são *comensuráveis*. Nesse caso, a medida de uma das grandezas é igual à medida da outra multiplicada por um número inteiro ou fracionário, isto é, um número racional. Também o valor da razão de uma para a outra é um número racional.

É fácil de compreender, porém, que isso nem sempre acontece. Há inúmeros casos em que duas grandezas homogêneas *não admitem u'a medida comum* ou são *incomensuráveis*. É o que acontece, por exemplo, com o lado de um quadrado e a diagonal do mesmo quadrado. A figura ABC formada por dois lados do quadrado e pela diagonal é um triângulo retângulo. Chamando-se de l o comprimen-

to do lado e de d a diagonal, tem-se, então, de acordo com o *teorema de Pitágoras* (nº 22).

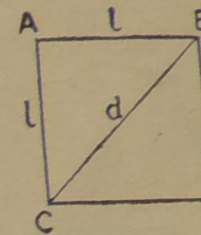
$$d^2 = l^2 + l^2$$

ou

$$d^2 = 2 \times l^2$$

ou ainda,

$$\frac{d^2}{l^2} = 2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d}{l}\right)^2 = 2$$



Verificamos assim, que a razão do lado do quadrado para a diagonal é o número cujo quadrado é 2. Ora, sabemos que não existe número nenhum, inteiro ou fracionário, que elevado ao quadrado dê 2. Logo, o valor da razão da diagonal para o lado não pode ser expressa por nenhum número racional.

Em outras palavras a diagonal do quadrado não é múltiplo de nenhuma parte alíquota do lado, o que se exprime dizendo que a diagonal e o lado são *incomensuráveis*, isto é, não admitem medida comum.

125. — Propriedades das razões. A razão de duas quantidades homogêneas ou de duas grandezas de mesma espécie sendo igual à razão dos números abstratos que exprimem essas quantidades, usaremos doravante a palavra *razão* para indicar em geral a razão de quantidades ou de números abstratos.

As razões gozam das propriedades gerais das frações. Assim:

I. *Uma razão não se altera quando se multiplicam o antecedente e o conseqüente pelo mesmo número.*

II. *Torna-se uma razão um certo número de vezes maior, multiplicando-se o antecedente ou dividindo-se o conseqüente por esse número.*

III. *Torna-se uma razão um certo número de vezes menor, multiplicando-se o conseqüente, ou dividindo-se o antecedente, por esse número.*

PROPORÇÕES; MÉDIAS

126. — Proporções. Definições. Consideremos as razões $\frac{8}{12}$ e $\frac{10}{15}$. Avaliando cada uma dessas razões, achamos para ambas, o mesmo valor, $\frac{2}{3}$.

Podemos, então, escrever:

$$\frac{8}{12} = \frac{10}{15} \text{ ou } 8 : 12 = 10 : 15 \quad (1)$$

Tomemos, ainda, a razão de $2\frac{1}{2}$ ft. para $3\frac{3}{4}$ ft. e a

razão de 3,4 kg. para 5,1 kg. Avaliando a primeira, achamos:

$$2\frac{1}{2} \div 3\frac{3}{4} = \frac{5}{2} \div \frac{15}{4} = \frac{2}{3}$$

Avaliando a segunda, achamos:

$$3,4 \div 5,1 = \frac{3,4}{5,1} = \frac{2}{3}$$

Podemos, então, escrever:

$$\frac{2\frac{1}{2} \text{ ft.}}{3\frac{3}{4} \text{ ft.}} = \frac{3,4 \text{ kg}}{5,1 \text{ kg}} \quad (2)$$

$$\text{ou } 2\frac{1}{2} \text{ ft.} : 3\frac{3}{4} \text{ ft.} = 3,4 \text{ kg} : 5,1 \text{ kg}$$

As igualdades (1) e (2) que exprimem, cada uma, a igualdade de duas razões chamam-se *proporções*.

PROPORÇÃO é a expressão da igualdade de duas razões.

A primeira das proporções acima lê-se "8 sobre 12 igual a 10 sobre 15" ou "8 está para 12 assim como 10 está para 15".

As proporções consideradas também se podem escrever do seguinte modo, menos usado atualmente

$$8:12::10:15$$

e

$$2\frac{1}{2} \text{ ft.} : 3\frac{3}{4} \text{ ft.} :: 3,4 \text{ kg} : 5,1 \text{ kg}$$

Dizemos que *quatro números formam uma proporção* na ordem em que se acham escritos ou enunciados, quando a razão do primeiro para o segundo é igual à razão do terceiro para o quarto.

Assim, de um modo geral, os números a, b, c, d formarão uma proporção, se tivermos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Do mesmo modo, dizemos que *quatro grandezas, das quais as duas primeiras são de mesma espécie e bem assim as duas últimas, são proporcionais* quando a razão da primeira para a segunda é igual à razão da terceira para a quarta.

No estudo das proporções de grandezas, suporemos sempre as grandezas substituídas pelos números que as medem.

As propriedades que vamos estudar mais adiante referem-se a proporções entre números abstratos.

Os números que formam uma proporção chamam-se *termos* dessa proporção. Chamam-se *antecedentes* e *consequentes*, respectivamente, os *antecedentes* e os *consequentes* das razões que formam a proporção. O primeiro consequente e o segundo antecedente chamam-se *meios*; o primeiro antecedente e o segundo consequente chamam-se *extremos*.

Assim, na proporção abaixo, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ou

$$a:b::c:d$$

termos: a, b, c e d
 antecedentes: a e c
 consequentes: b e d
 meios: b e c
 extremos: a e d

Uma proporção se diz *continua* quando ela tem os meios iguais, ou os extremos iguais:

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} \quad \text{e} \quad \frac{0,3}{5} = \frac{0,018}{0,3}$$

são proporções contínuas.

127. — Propriedade fundamental das proporções. Consideremos a seguinte proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Multipliquemos ambos os termos da primeira razão por d (que é o denominador da segunda) e ambos os termos da segunda por b . Temos:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

Vamos obter, assim, duas razões iguais; como os consequentes são iguais, é evidente que os antecedentes também o serão:

$$ad = bc$$

ad representa o produto dos extremos; bc representa o produto dos meios:

$$\begin{array}{ccc} ad & = & bc \\ \text{(produto dos extremos)} & & \text{(produto dos meios)} \end{array}$$

Conclusão: em toda proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Exemplo: da proporção $\frac{a}{10} = \frac{m}{55}$ tiramos com o auxílio da propriedade fundamental a seguinte relação $55a = 10m$.

128. — Recíproca da propriedade fundamental. Sejam quatro números

$$4, 7, 12 \text{ e } 21$$

tais que o produto de dois deles (7 e 12) seja igual ao produto dos outros dois (4 e 21).

Escrevamos a igualdade:

$$4 \times 21 = 7 \times 12$$

Dividamos ambos os membros dessa igualdade pelo produto 21×12 formado pelo fator 21 do primeiro membro e o fator 12 do segundo.

Temos:

$$\frac{4 \times 21}{21 \times 12} = \frac{7 \times 12}{21 \times 12}$$

Cancelando o fator comum, temos:

$$\frac{4}{12} = \frac{7}{21}$$

isto é, uma proporção cujos termos são os números dados.

Conclusão: quando o produto de dois números é igual ao produto de outros dois, podemos com esses quatro números formar uma proporção, na qual os meios são os fatores de um produto e os extremos, os fatores do outro produto.

Exemplos. I. Entre os números

$$8, 16, 20 \text{ e } 40$$

existe a relação $8 \times 40 = 16 \times 20$.

Os quatro números dados formam a seguinte proporção:

$$\frac{8}{16} = \frac{20}{40}$$

II. Escrever a igualdade

$$ax = by$$

sab a forma de uma proporção, sendo cada termo representado por uma letra.

A proporção será: $\frac{a}{b} = \frac{y}{x}$.

129. — Transposição de termos de uma proporção. Dada uma proporção qualquer:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

podemos, trocando a posição de seus termos, escrevê-la, de oito maneiras diferentes.

Com efeito. Consideremos a proporção:

$$\frac{4}{12} = \frac{7}{21} \quad \text{ou} \quad \frac{7}{21} = \frac{4}{12}$$

Trocando a posição dos meios ou alternando:

$$\frac{4}{7} = \frac{12}{21} \quad \text{ou} \quad \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

Trocando a posição dos extremos:

$$\frac{21}{12} = \frac{7}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{7}{4} = \frac{21}{12}$$

Invertendo as razões:

$$\frac{12}{4} = \frac{21}{7} \quad \text{ou} \quad \frac{21}{7} = \frac{12}{4}$$

Para qualquer dessas formas verifica-se a propriedade fundamental.

130. — Quarta proporcional. Consideremos a proporção

$$\frac{8}{20} = \frac{12}{30}$$

O número 30, quarto termo dessa proporção, é a *quarta proporcional* dos números 8, 20 e 12.

Chamamos *QUARTA PROPORCIONAL* de três números, *a*, *b* e *c*, dados nessa ordem, a um quarto número *x* que forme com os números dados a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

131. — Cálculo da quarta proporcional. Seja determinar a quarta proporcional dos números 8, 6 e 12.

Chamando *x* essa quarta proporcional, devemos ter:

$$\frac{8}{6} = \frac{12}{x}$$

Sendo o produto dos extremos igual ao produto dos meios temos:

$$8x = 72$$

Esta igualdade mostra que, de acordo com a definição de divisão (1ª S. A. ns. **74** e **75**) *x* é o quociente de 72 por 8:

$$x = \frac{72}{8} \quad \text{ou} \quad x = 9$$

A quarta proporcional dos números 8, 6 e 12 é igual a 9.

Em geral: a quarta proporcional dos números *a*, *b* e *c* é igual ao produto *bc* dividido por *a*.

Chamando *x* a quarta proporcional, tem-se:

$$x = \frac{bc}{a}$$

OBSERVAÇÃO. A transformação que consiste em passar da igualdade $8x = 72$ para $x = \frac{72}{8}$ é designada pela expressão “tirar o valor de *x*”.

EXEMPLO. Achar a quarta proporcional dos números 6, 48 e 28.

Chamando *x* a quarta proporcional pedida, temos:

$$\frac{6}{48} = \frac{28}{x}$$

Dessa proporção tiramos:

$$6x = 1344$$

Tirando o valor de *x*, acha-se:

$$x = \frac{1344}{6} \text{ ou } x = 224$$

A quarta proporcional dos números 6, 48 e 28 é 224.

132. — Cálculo de um termo qualquer de uma proporção.

O cálculo de um termo qualquer de uma proporção — quando conhecemos os outros três — é uma simples aplicação da propriedade fundamental.

Seja, por exemplo, calcular o valor de x na proporção:

$$\frac{7}{12} = \frac{x}{60}$$

Em virtude da propriedade fundamental temos:

$$12x = 7 \times 60$$

Tirando o valor de x , vem:

$$x = \frac{7 \times 60}{12} \text{ ou } x = 35$$

Conclusão: numa proporção qualquer, um meio desconhecido é igual ao produto dos extremos dividido pelo meio conhecido.

Analogamente será fácil demonstrar o seguinte: numa proporção qualquer, um extremo desconhecido é igual ao produto dos meios dividido pelo extremo conhecido.

EXEMPLO. Calcular x na proporção:

$$\frac{12}{x} = \frac{20}{35}$$

Da proporção dada, tiramos:

$$x = \frac{12 \times 35}{20}$$

Efetuando, vem: $x = 21$.

133. — Propriedades das proporções. As propriedades que passamos a apresentar nos mostram como é possível, combinando por meio de operações os termos de uma ou várias proporções, obter uma nova proporção.

PRIMEIRA PROPRIEDADE. — Em toda proporção a soma ou diferença dos dois primeiros termos está para o segundo assim como a soma ou diferença dos dois últimos está para o quarto.

Consideremos uma proporção qualquer:

$$\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$$

Somando uma unidade a ambos os membros dessa proporção, temos:

$$\frac{15}{5} + 1 = \frac{12}{4} + 1$$

Efetuando:

$$\frac{15 + 5}{5} = \frac{12 + 4}{4}$$

Conclusão: a soma dos dois primeiros termos ($15 + 5$) está para o segundo (5), assim como a soma dos dois últimos ($12 + 4$) está para o último (4).

Analogamente mostraríamos que, da proporção dada, se tira:

$$\frac{15 - 5}{5} = \frac{12 - 4}{4}$$

Em geral: da proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ tiramos, em virtude dessa propriedade:

$$\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d} \text{ e } \frac{a - b}{b} = \frac{c - d}{d}$$

CONSEQUÊNCIA. — Em toda proporção a soma dos dois primeiros termos está para a soma dos dois últimos assim como o segundo está para o quarto.

Aplicando à proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a primeira propriedade, temos:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Alternando, vem:

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}$$

EXEMPLO. Calcular a e b na proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{9}$$

sabendo-se que $a + b = 64$.

Na proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{9}$$

a soma dos dois primeiros termos sendo $a + b$, temos:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{7+9}{9}$$

Substituindo-se $a + b$ por seu valor dado 64, vem:

$$\frac{64}{b} = \frac{16}{9}$$

Tirando o valor de b nessa proporção, obtemos:

$$b = \frac{9 \times 64}{16} = 36$$

Sendo b igual a 36, o valor de a será $64 - 36$, isto é, 28.

SEGUNDA PROPRIEDADE. — Em toda proporção a soma ou diferença dos antecedentes está para a soma ou diferença dos consequentes, como qualquer antecedente está para o seu consequente.

Consideremos a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

Alternando, temos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

Com auxílio da primeira propriedade podemos escrever:

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \text{ ou } \frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$$

Alternando, vem:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \text{ ou } \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$$

Esse resultado demonstra a 2ª propriedade.

CONSEQUÊNCIA. — Seja, em vez de uma simples proporção, uma série de razões iguais:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \dots$$

Aplicando a 2ª propriedade à proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

temos:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$$

Substituindo-se a razão $\frac{a}{b}$ por sua igual $\frac{e}{f}$, vem:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{e}{f}$$

Aplicando-se novamente a propriedade, vem:

$$\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{e}{f}$$

Continuando, de modo análogo, mostrariamos ser:

$$\frac{a+c+e+g+\dots}{b+d+f+h+\dots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \dots$$

Conclusão: numa série de razões iguais, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, como qualquer antecedente está para o seu consequente.

TERCEIRA PROPRIEDADE. — Se multiplicarmos termo a termo duas ou mais proporções os produtos obtidos formarão ainda uma proporção.

Sejam as proporções

$$\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$$

$$\frac{7}{35} = \frac{3}{15}$$

$$\frac{12}{3} = \frac{8}{2}$$

Multiplicando membro a membro essas igualdades, temos:

$$\frac{3}{8} \times \frac{7}{35} \times \frac{12}{3} = \frac{9}{24} \times \frac{3}{15} \times \frac{8}{2}$$

ou:

$$\frac{3 \times 7 \times 12}{8 \times 35 \times 3} = \frac{9 \times 3 \times 8}{24 \times 15 \times 2}$$

Como vemos, os produtos obtidos formam uma proporção.

134. — Valor médio. Dados vários números:

a, b, c, d

escritos em ordem crescente de grandeza, chama-se *valor médio* ou *média* desses números a um número qualquer calculado por meio desses números e compreendido entre o menor (a) e o maior (d).

Para os números:

3 5 11 42

o número 8 será um valor médio, pois 8 está compreendido entre 3 e 42.

Qualquer número inteiro ou fracionário compreendido entre 3 e 42 será um *valor médio* dos números:

3 5 11 42

E' evidente que dois ou mais números desiguais admitem uma infinidade de valores médios.

135. — Média aritmética. Consideremos, por exemplo, cinco números quaisquer:

4 7 19 23 27

e dividamos a soma desses números por cinco:

$$80 \div 5 = 16$$

O valor médio assim obtido é denominado *média aritmética* dos números dados.

Média aritmética de n números é o quociente da divisão da soma desses números por n.

A média aritmética de vários números é, em geral, denominada abreviadamente *média* desses números.

EXEMPLO. I. Calcular a média aritmética dos números

8 9,4 13,7 20,1.

A soma desses quatro números é 51,2. Dividindo-se essa soma por 4, vem:

$$\frac{51,2}{4} = 12,8.$$

12,8 será a média dos números dados.

II. Um aluno obteve, durante um certo periodo, em seus estudos as seguintes notas:

8 7 9 7,5 9,5

Qual é a nota mais provavel para representar a aplicação desse aluno?

O valor mais provável ⁽¹³⁾ será a média aritmética das notas. A soma das cinco notas é 41; a média será $\frac{41}{5}$ ou 8,2.

III. A tiragem de certo jornal foi, durante uma semana, a seguinte:

16.200	exemplares
20.000	"
18.000	"
16.000	"
19.000	"
26.000	"

Qual foi, durante essa semana, a tiragem média desse jornal? A soma das tiragens no prazo considerado é 115200 exemplares.

A tiragem média será: $\frac{115200}{6} = 19200$.

Resposta: 19200 exemplares.

136. — Média aritmética ponderada. Consideremos o seguinte problema: dois candidatos A e B foram submetidos a três provas. As notas dadas, segundo o mesmo critério, nessas provas foram as seguintes:

	1ª prova	2ª prova	3ª prova
A	8	5	7
B	4	9	6

Como apreciar o merecimento de cada candidato se admitirmos que a 2ª prova é três vezes mais difícil do que a 1ª, e que a 3ª prova é cinco vezes mais difícil do que a 1ª?

Afim de levar em conta o grau de dificuldade das provas, calcula-se o grau de cada candidato do seguinte modo: multiplica-se a nota da 1ª prova por 1, o da segunda por 3 e o da terceira por 5; somam-se esses produtos e divide-se a soma por 9, que é a soma dos multiplicadores: $1 + 3 + 5$.

Tem-se:

$$\frac{8 \times 1 + 5 \times 3 + 7 \times 5}{9} = \frac{8 + 15 + 35}{9} = 6,4$$

para grau do candidato A; e

(13) Admitimos que as notas foram dadas seguindo um critério constante, justo e razoável.

$$\frac{4 \times 1 + 9 \times 3 + 6 \times 5}{9} = \frac{4 + 27 + 30}{9} = 6,7$$

para grau do candidato B.

Convém observar que a soma das notas de A é maior do que a soma das notas de B.

No cálculo dessas médias, atribuímos à nota da 2ª prova um peso triplo do da 1ª prova e à da 3ª prova um peso quíntuplo do da 1ª prova, isto é, atribuímos às provas os pesos 1, 3 e 5. Por isso, a média assim calculada chama-se *média aritmética ponderada* (do latim *pondus, eris*, o peso).

Deum modo geral, dados os n números a, b, c, \dots, l a sua média aritmética ponderada segundo os pesos $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ é dada pela fórmula:

$$m = \frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + \dots + lp_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}$$

EXEMPLO. Achar a média aritmética ponderada dos números

5 8 4 6,5

atribuindo-se ao primeiro o peso 1, ao segundo o peso 2, ao terceiro o peso 3 e ao último o peso 4.

Efetuem os produtos dos números dados pelos respectivos pesos:

$$\begin{aligned} 5 \times 1 &= 5 \\ 8 \times 2 &= 16 \\ 4 \times 3 &= 12 \\ 6,5 \times 4 &= 26 \end{aligned}$$

Somemos esses produtos:

$$5 + 16 + 12 + 26 = 59$$

Dividamos o resultado (59) assim obtido pela soma dos pesos:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\text{Temos: } \frac{59}{10} = 5,9.$$

A média ponderada que queremos determinar é 5,9.

137. — Média proporcional. Sejam a e b dois números quaisquer.

Formemos uma proporção contínua na qual a e b são os extremos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

O valor de x que figura nessa proporção é a *média proporcional* dos números a e b .

A média proporcional é também denominada *média geométrica*.

Da proporção contínua:

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$$

concluimos que 6 é a média proporcional dos números 4 e 9.

Chama-se *MÉDIA PROPORCIONAL* ou *GEOMÉTRICA* de dois números o valor dos meios de uma proporção contínua, cujos extremos sejam os dois números dados.

138. — Cálculo da média geométrica de dois números. Sejam a e b dois números quaisquer. Chamemos x a média geométrica desses números. Temos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Em virtude da propriedade fundamental, temos:

$$x^2 = ab$$

e daí tiramos:

$$x = \sqrt{ab}$$

Conclusão: a média geométrica de dois números é igual à raiz quadrada do produto desses números.

EXEMPLO. Calcular a média geométrica dos números 48 e 3.

Sendo x a média geométrica procurada, temos:

$$x = \sqrt{48 \times 3} = \sqrt{144} = 12$$

A média geométrica dos números 48 e 3 é igual a 12, isto é:

$$\frac{48}{12} = \frac{12}{3}$$

139. — Terceira proporcional. Chama-se *terceira proporcional* de dois números dados, a e b , um número x tal que se tenha:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

A terceira proporcional (dos números a e b , dados nessa ordem, é o quarto termo de uma proporção contínua, na qual os dois meios são iguais a b .

EXEMPLO: calcular a terceira proporcional dos números 12 e 60.

Chamemos x a terceira proporcional e notemos, pela ordem em que os números são dados, que 60 será a média proporcional.

Segundo a definição dada, podemos escrever:

$$\frac{12}{60} = \frac{60}{x}$$

Dessa proporção tiramos:

$$x = \frac{60 \times 60}{12} \text{ ou } x = 300$$

300 será o valor da terceira proporcional pedida.

Exercícios.

Calcular a razão:

1. a) de 128 para 480. 2. b) de 350 para 810. 3. c) de 8,4 para 1,2. d) de $\frac{3}{4}$ para $\frac{9}{20}$.

4. Um negociante comprou um rádio por Cr\$ 1.400,00 e vendeu-o por Cr\$ 2.000,00. Achar a razão do lucro para o custo.

5. A população de Belo Horizonte é de 240000 habitantes e a de São Paulo é de 1000000 de habitantes. Qual é a razão das populações dessas duas capitais?

6. Achar o valor da razão $a:b$, supondo:

$$a) \quad a = \frac{2}{5} + 2 \frac{1}{2} \quad e \quad b = 3 \frac{3}{4} - 2 \frac{5}{8}$$

7. Escrever uma razão a) igual a $\frac{2}{3}$ e cujo antecedente seja 10.

b) igual a $\frac{3}{5}$ e cujo conseqüente seja 20.

8. Calcular a razão a) de um segmento de 54 cm para outro de 72 cm. b) de um peso de 24 kg para outro de 80 kg.

9. Calcular a razão de a) uma área de 150 m² para 45 ares. b) de um volume de 240 l para outro de 3 cm³.

10. Avaliar a razão a) de 2 meses 20 dias para 4 meses 8 dias. b) de 3 horas 45 minutos para 6 horas.

11. Dois ângulos estão entre si na razão a) 1:4 b) 1:5. O maior tem a) 5° 22' b) 87° 48' 20". Quanto mede o menor?

12. Escrever uma razão igual a $\frac{1}{4}$ e cujo antecedente é 2 $\frac{1}{8}$.

13. Escrever uma razão igual a $\frac{1}{5}$ e cujo conseqüente é 4 $\frac{1}{6}$.

14. Verificar si as razões a) $\frac{2 \frac{1}{2}}{3 \frac{3}{4}}$ e $\frac{0,09}{0,135}$

b) $\frac{5 \frac{1}{4}}{4 \frac{3}{8}}$ e $\frac{0,144}{0,12}$ são iguais.

15. Verificar si a razão de 25 kg para 40 kg é igual à razão de 1 hora 40 minutos para 2 horas 40 minutos.

16. Verificar si a razão de 640 l para 2 m³ é igual à razão de 6 meses 20 dias para 3 anos 5 meses 20 dias.

17. Escrever uma proporção cujas razões sejam iguais a $\frac{1}{3}$ e cujos antecedentes sejam 4 e 5.

18. Escrever uma proporção cujas razões sejam iguais a $\frac{1}{4}$ e cujos conseqüentes sejam 28 e 36.

19. Escrever uma proporção cujos meios sejam 8 e 15 e cujas razões sejam iguais a $\frac{1}{4}$.

20. Escrever uma proporção cujos extremos sejam 18 e 90 e cujas razões sejam iguais a $\frac{1}{3}$.

21. 45 kg de certa mercadoria custam 240 cruzeiros; 72 kg custam 384 cruzeiros. Verificar si a razão dos pesos é igual à razão dos preços.

22. 54 m de certo fio custam 8 s. 4 d.; 810 m custam £ 6-5-0. Verificar si a razão dos comprimentos é igual à razão dos preços.

23. Escrever a proporção que resulta da verificação feita no exercício 21.

24. Escrever a proporção que resulta da verificação feita no exercício 22.

25. Dada a proporção $\frac{18}{40} = \frac{810}{1800}$, dividir os antecedentes por 9 e os conseqüentes por 10 e verificar si se tem uma nova proporção.

26. Dada a proporção $\frac{4}{15} = \frac{56}{270}$, dividir os antecedentes por 8 e os conseqüentes por 100 e verificar si se tem uma nova proporção.

27. Os meios de uma proporção são $3 \frac{1}{5}$ e $4 \frac{3}{8}$; calcular o produto dos extremos.

28. Os extremos de uma proporção são $5 \frac{1}{4}$ e $6 \frac{2}{7}$; calcular o produto dos meios.

29. Sabendo que $\frac{a}{0,4} = \frac{3,5}{b}$, calcular o valor de ab .

30. Sabendo que $\frac{0,03}{x} = \frac{y}{2,5}$, calcular o valor de xy .

31. Calcular o valor de x na proporção:

$$a) \frac{14}{32} = \frac{56}{x} \quad b) \frac{135}{420} = \frac{810}{x}$$

32. Dada a proporção $\frac{a}{7} = \frac{b}{19}$, escrever outra proporção com os mesmos antecedentes e cujo 2º termo seja 14.

33. Dada a proporção $\frac{3a}{48} = \frac{6b}{75}$, escrever outra proporção com os mesmos consequentes e que comece por a .

34. Calcular o valor de x na proporção $\frac{3,5}{0,9} = \frac{0,42}{x}$.

35. Calcular y na proporção $\frac{0,64}{3,3} = \frac{y}{0,176}$.

36. Calcular o valor de x na proporção:

$$a) \frac{3\frac{3}{4}}{x} = \frac{4\frac{1}{6}}{5\frac{1}{3}}$$

$$b) \frac{x}{5\frac{1}{7}} = \frac{3\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}}$$

37. Calcular o valor de x na proporção:

$$a) \frac{2\frac{3}{4} + 3\frac{1}{2}}{5\frac{3}{8} - 4\frac{1}{6}} = \frac{2\frac{3}{5} - 1\frac{2}{5}}{x}$$

$$b) \frac{1\frac{1}{4} + 5\frac{1}{3}}{5\frac{2}{3} - 3\frac{2}{5}} = \frac{x}{2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2}}$$

$$c) \frac{\sqrt{0,1296}}{2,43:0,9} = \frac{\frac{3}{8} \times 8 \frac{1}{3}}{x}$$

38. Calcular o valor de x na proporção:

$$a) \frac{75}{x} = \frac{x}{27} \quad b) \frac{0,008}{x} = \frac{x}{9,8}$$

39. Determinar a quarta proporcional de a) 15; 20 e 27.
b) 0,006; 0,4 e 9.

40. Calcular a terceira proporcional de:

$$a) 4 \text{ e } 12 \quad b) 0,18 \text{ e } 0,042.$$

41. Calcular a média proporcional de:

$$a) 48 \text{ e } 147 \quad b) 75 \text{ e } 192.$$

42. Calcular a média proporcional de:

$$a) 3\frac{1}{8} \text{ e } 5\frac{5}{9} \quad b) 3\frac{5}{9} \text{ e } 12\frac{1}{2}$$

$$c) 0,008 \text{ e } 9,8 \quad d) 0,00045 \text{ e } 0,125.$$

43. Achar dois números, sabendo que estão entre si como 3 e 4 e que a sua soma é 119.

44. Achar dois números, sabendo que a razão deles é 5:8 e que a sua soma é 169.

45. Achar dois números sabendo que estão entre si como 4 e 9 e que a sua diferença é 65.

46. Achar dois números sabendo que estão entre si como 5 e 7 e que a sua diferença é 0,38.

47. Achar os antecedentes de uma proporção, a) sabendo que sua soma é 187 e que os consequentes são 5 e 12; b) sabendo que sua soma é 1870 e que os consequentes são 3 e 8.

48. Achar os antecedentes de uma proporção a) sabendo que sua diferença é 0,065 e que os consequentes são 4 e 9; b) sabendo que sua diferença é 4,98 e que os consequentes são 0,8 e 2,4.

49. Achar os consequentes de uma proporção a) sabendo que sua soma é $2\frac{1}{2}$ e que os antecedentes são $4\frac{1}{2}$ e $5\frac{1}{3}$.

b) sabendo que sua soma é $3\frac{1}{4}$ e que os antecedentes são $2\frac{1}{2}$ e $3\frac{1}{8}$.

50. Achar dois números sabendo a) que seu produto é 1470 e que estão entre si como 3 e 10; b) que estão entre si como 2 e 9 e que seu produto é 16200.

3. GRANDEZAS PROPORCIONAIS

140 — **Números proporcionais.** Consideremos as razões iguais:

$$\frac{7}{21} = \frac{9}{27} = \frac{10}{30} = \frac{18}{54}$$

e escrevamos os numeradores numa linha e, por baixo de cada numerador, o denominador correspondente:

$$\begin{array}{cccc} 7 & 9 & 10 & 18 & (A) \\ 21 & 27 & 30 & 54 & (B) \end{array}$$

Dizemos, nesse caso, que os números que figuram na linha de cima (A) são *diretamente proporcionais* aos números que figuram na linha (B).

De um modo geral, dizemos que *vários números são proporcionais a outros tantos números quando é constante a razão de cada número do primeiro grupo para o número correspondente do segundo.*

Assim, os números a, b, c, d, \dots serão proporcionais aos números a', b', c', d', \dots se tivermos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots$$

OBSERVAÇÃO — É evidente que dadas as razões iguais:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

podemos escrever, invertendo-as:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Assim quando os números

$$a \quad b \quad c$$

são proporcionais aos números

$$a' \quad b' \quad c'$$

podemos assegurar que os números

$$a' \quad b' \quad c'$$

também são proporcionais aos números

$$a \quad b \quad c$$

COEFICIENTE DE PROPORCIONALIDADE. — Consideremos os números proporcionais, citados no exemplo anterior:

$$\begin{array}{cccc} 7 & 9 & 10 & 18 & (A) \\ 21 & 27 & 30 & 54 & (B) \end{array}$$

Vemos que os números da linha (B) podem ser obtidos multiplicando-se por **3** os números da linha (A).

Esse fator, pelo qual devemos multiplicar vários números, para obter os números proporcionais correspondentes é denominado *coeficiente de proporcionalidade*.

CÁLCULO DO COEFICIENTE DE PROPORCIONALIDADE. Sejam os números

$$8 \quad 6 \quad 10 \quad (A)$$

proporcionais a

$$4 \quad 3 \quad 5 \quad (B)$$

Dividamos um termo qualquer da linha (B) pelo termo correspondente da linha (A).

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Daí resulta que, se multiplicarmos cada número da linha (A) por $\frac{1}{2}$ vamos obter o número correspondente da linha (B).