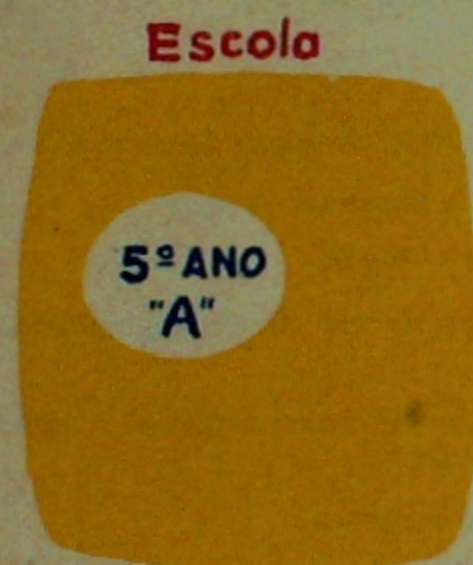


Operações direta e inversa

1. Conjunto-Universo; conceito geral de operação

Sempre que você considera um conjunto, deve ter presente que os seus elementos fazem parte de um conjunto *mais amplo*, denominado *Conjunto-Universo*.



Conjunto-Universo : Escola

Falando, por exemplo, do conjunto dos alunos que constituem o 5.º Ano "A", é necessário indicar a que conjunto de alunos nos estamos referindo.

No caso acima o *Conjunto-Universo* é o constituído por todos os alunos da *Escola* que possui tal 5.º Ano "A".

Pense, agora, no *Conjunto-Universo* de "tôdas as coisas". É nesse conjunto que você realiza uma série de *operações*. Sabe como?

Basta você considerar *dois elementos* quaisquer e, a seguir, obedecendo a uma *determinada lei*, produzir outro elemento. O elemento produzido é o *resultado* da operação.

Quer um exemplo diário?

No *Conjunto-Universo* de "tôdas as coisas", onde figuram o seu *pé* e o seu *sapato*, você efetua facilmente a operação *calçar sapatos*, obedecendo a uma lei conhecida, e obtém como resultado: *pé calçado*!



OPERAÇÃO: CALÇAR SAPATO

RESULTADO: PÉ CALÇADO

Por outro lado, ao *descalçar os sapatos*, você estará realizando a *operação inversa* de calçar sapatos. Qual é o resultado agora?

É: *pé descalço!*



OPERAÇÃO INVERSA: DESCALÇAR SAPATO RESULTADO: PÉ DESCALÇO

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 10

Diga qual a *operação inversa* de cada uma das seguintes operações:

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| 1.ª) Vestir o paletó | 6.ª) Subir a escada |
| 2.ª) Colar selos no álbum | 7.ª) Calçar luvas |
| 3.ª) Abrir um livro | 8.ª) Pôr um livro na estante |
| 4.ª) Entrar no cinema | 9.ª) Abaixar-se |
| 5.ª) Somar | 10.ª) Multiplicar |

LEMBRETE AMIGO

A realização de uma operação, bem como de sua inversa, faz parte integrante de sua *estrutura mental* ("aparelho pensante"). É assim que a mente humana age normalmente: *faz e desfaz!*

OPERAÇÃO: REUNIÃO DE CONJUNTOS

2. Conceito

Consideremos, por exemplo, os conjuntos:

- 1.º) $\{\square, \triangle, *\}$ e $\{O, \diamond\}$

A operação *reunião* ou *união*, que se indica por \cup (primeira letra da palavra *União*), é aquela que determina um conjunto cujos elementos

pertencem, cada um deles, a um ou a outro conjunto. Assim, no exemplo considerado:

$$\{\square, \Delta, *\} \cup \{0, \diamond\} = \underbrace{\{\square, \Delta, *, 0, \diamond\}}_{\text{(conjunto-reunião)}}$$

Outros exemplos:

2.º) Sejam os conjuntos numéricos:

$$A = \{3, 8\} \text{ e } B = \{0, 4, 5, 1\}$$

Temos:

$$A \cup B = \{3, 8, 0, 4, 5, 1\}$$

3.º) Sejam os conjuntos de nomes de pessoas:

$$A = \{\text{Mário, Roberto, Luís}\} \text{ e } B = \{\text{Paulo, Ricardo}\}$$

Temos:

$$A \cup B = \{\text{Mário, Roberto, Luís, Paulo, Ricardo}\}$$

4.º) Sejam os conjuntos:

$$A = \{5, 3, 2\} \text{ e } B = \{3, 1\}$$

Observe que o 3 está figurando nos dois conjuntos. Nesse caso, o 3 figurará *uma só vez* no conjunto-reunião. Logo:

$$A \cup B = \{5, 3, 2, 1\}$$

NOTA: Quando dois conjuntos não têm elementos em comum (exemplos 1.º, 2.º e 3.º), são chamados *disjuntos*. Não são disjuntos os conjuntos do exemplo 4.º, pois tais conjuntos apresentam o 3 como elemento comum.

PRÁTICAS MODERNAS — GRUPO 11

1. Determine o conjunto-reunião de:

1.º) $\{0, \square, \Delta\} \cup \{*, \square\} = \{0, \square, \Delta, *, \square\}$

2.º) $\{\Delta, \square\} \cup \{0, \square, *\} = \{\Delta, \square, 0, \square, *\}$

3.º) $\{\text{cachorro, gato}\} \cup \{\text{cavalo, vaca}\} = \{\text{cachorro, gato, cavalo, vaca}\}$

4.º) $\{\text{papagaio, beija-flor, tico-tico}\} \cup \{\text{canário}\} = \{\text{papagaio, beija-flor, tico-tico, canário}\}$

5.º) $\{\text{lápis, borracha, régua}\} \cup \{\text{apontador, compasso}\} = \{\text{lápis, borracha, régua, apontador, compasso}\}$

6.º) $\{\text{calça, paletó}\} \cup \{\text{camisa, sapatos}\} = \{\text{calça, paletó, camisa, sapatos}\}$

2. Determine o conjunto-reunião de:

1.º) $\{2, 3, 5\} \cup \{4, 8\}$

2.º) $\{0\} \cup \{1, 2, 3\}$

3.º) $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 5\}$ (cuidado!)

4.º) $\{1, 2, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4\}$

5.º) $\{0, 2\} \cup \{ \}$

6.º) $\{3\} \cup \{3, 1\}$ (cuidado!)

7.º) $\{3, 4, 5\} \cup \{5, 4, 3\}$

8.º) $\{8, 5\} \cup \{8, 5, 1\}$

3. Determine $A \cup B$ nos seguintes casos:

1.º) $A = \{0, 1, 5\}$ e $B = \{2, 7, 13\}$

2.º) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 5\}$ (cuidado!)

3.º) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2, 4\}$

4.º) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

5.º) $A = \{8\}$ e $B = \{3, 5\}$

6.º) $A = \{ \}$ e $B = \{3, 5\}$

7.º) $A = \{a, e\}$ e $B = \{i, o, u\}$

8.º) $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, e\}$ (cuidado!)

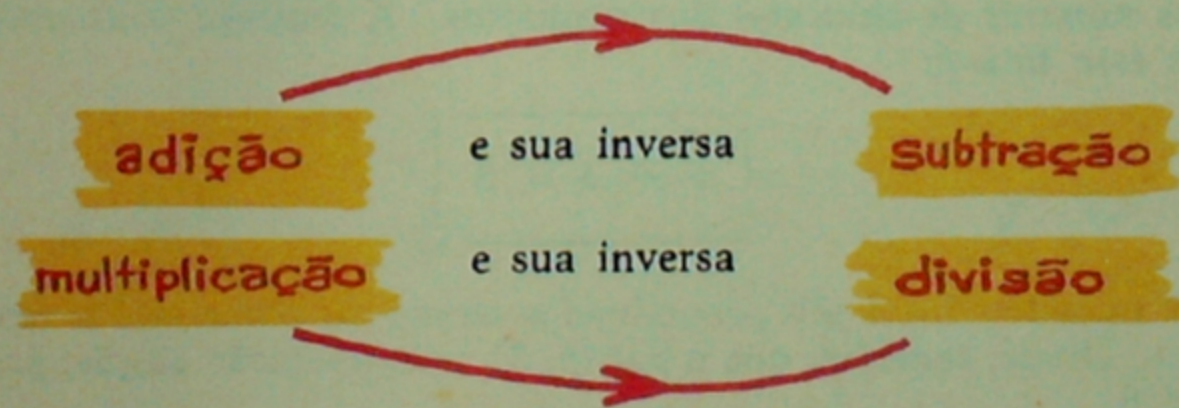
OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS

3. Operações fundamentais

Agora você vai *operar* somente com os números naturais, isto é, no conjunto:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$$

Estudará, com pormenores, as seguintes operações, já conhecidas como *fundamentais*:



ADIÇÃO

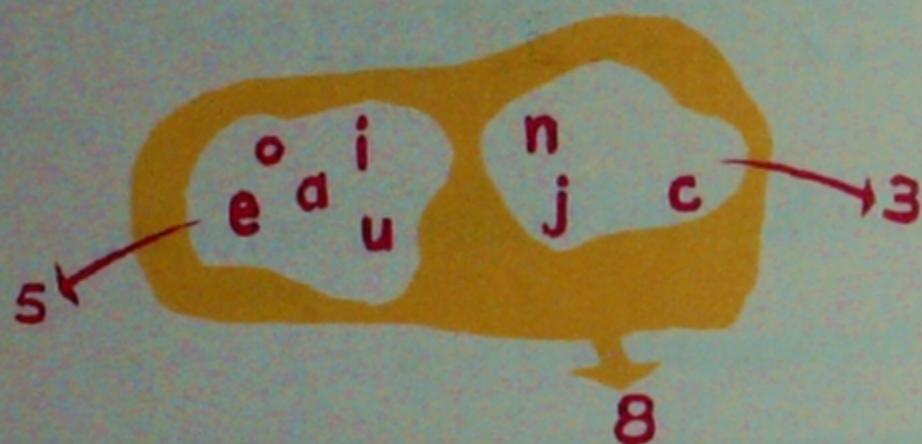
4. Operação: adição; resultado: soma

Considere, por exemplo, os dois conjuntos de letras:



um com cinco letras e outro com três letras.

Efetuada a operação reunião desses dois conjuntos:



e contando os elementos do conjunto-reunião, você encontrará oito letras.

Pois bem, a operação **adição** é aquela que, tratando com os *números de elementos* de cada conjunto, isto é, 5 e 3, determina a *soma* 8.

Note que os conjuntos acima, em vez de letras, poderiam ser de borrachas, frutas, etc., uma vez que a operação *adição* trata de operar com os *números de elementos* dos conjuntos. A *sentença matemática* que traduz esse fato é:

$$5 + 3 = 8$$

Os números 5 e 3 são denominados *têrmos* ou *parcelas* e o resultado 8, *soma*. Diz-se, também, que o par (5, 3), pela operação *adição*, produziu a *soma* 8.

Logo:

Adição de dois números naturais é a operação que produz a *soma* desses números.

Então:

- o par (5, 3), pela operação *adição*, produz a *soma* 8
- o par (1, 9), pela operação *adição*, produz a *soma* 10
- o par (7, 0), pela operação *adição*, produz a *soma* 7

LEMBRETE AMIGO

Não confunda *adição*, que é uma *operação*, com *soma*, que é o *resultado* dessa operação!

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 12

- Efetue a *adição* dos números de elementos dos seguintes conjuntos e a seguir escreva a *sentença matemática* correspondente:

1.º) Exemplo-modelo:



Sentença Matemática: $3 + 2 = 5$

2.º)



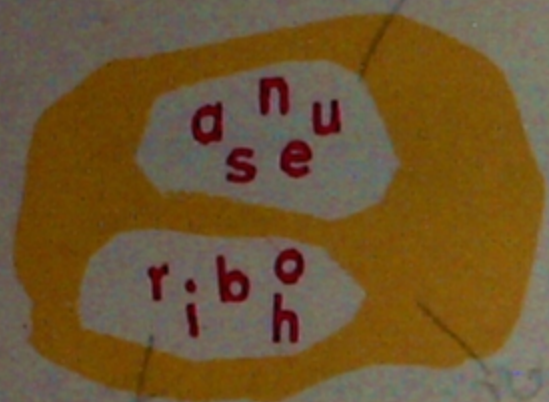
3.º)



$$7 + 1 = 8$$

$$0 + 6 = 6$$

4.º)



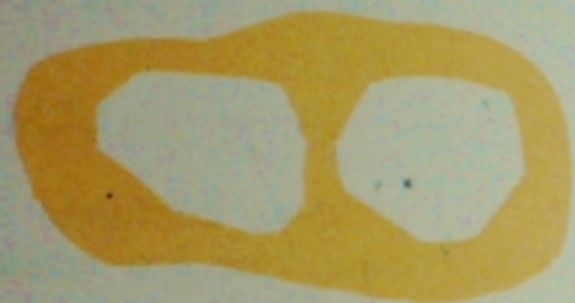
5.º)



6.º)



7.º)



2. Preencha as lacunas:

- 1.º) O par (3, 4), pela operação *adição*, produz a soma ...
- 2.º) O par (8, 0), pela operação ..., produz a soma 8
- 3.º) O par (1, 1), pela *adição*, a soma 2
- 4.º) O par (0, 9), pela ..., a soma ...

5. Tábua da adição

É a tabela que registra os *resultados* (somadas) da operação *adição*. Você já conhece as técnicas para a obtenção desses resultados. Na tábua, procura-se o *resultado* no cruzamento das linhas horizontal e vertical que "passam" pelos dois números que se pretende adicionar.

	+	0	1	2	3	4	5	6	7	8
elemento neutro → 0		0	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2		2	3	4	5	6	7	8	9	10
3		3	4	5	6	7	8	9	10	11
→ 4		4	5	6	7	8	9	10	11	12
5		5	6	7	8	9	10	11	12	13
6										
7										

6. Adição de vários números naturais

No caso de três números, efetua-se a *adição* dos dois primeiros (operação conhecida) e, a seguir, a *adição* da soma obtida com o terceiro número. A operação é facilitada pelo uso dos *sinas de associação*:

(), denominados *parênteses*[], denominados *colchêtes*{ }, denominados *chaves*

Exemplo:

Calcular a *soma* dos números: 8, 5 e 9.Temos: $8 + 5 + 9 = (8+5) + 9 = 13 + 9 = 22$.Para a soma de *mais de três números*, procede-se de forma semelhante.

Exemplo:

Calcular a soma dos números 8, 5, 12 e 3.

Temos: $[(8 + 5) + 12] + 3 = [13 + 12] + 3 = 25 + 3 = 28$.

7. Propriedades

Observando a tábua, você pode perceber as seguintes propriedades da *adição*:

- 1.º) FECHAMENTO: A soma de dois números naturais é sempre um número natural.

Abreviatura: p.f.a.(*)

Exemplo:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & + & 3 & = & 7 \\ \checkmark & & \downarrow & & \swarrow \\ \text{n.º natural} & & \text{n.º natural} & & \text{n.º natural} \end{array}$$

- 2.º) COMUTATIVA: A ordem das parcelas não altera a soma.

Abreviatura: p.c.a.

Exemplo:

$$4 + 3 = 3 + 4$$

(*) Lê-se: propriedade do fechamento da adição.

3.º) ELEMENTO NEUTRO: É o zero o único número natural cuja adição com qualquer outro número dá para soma este outro número.

Abreviatura: p.e.n.

Exemplo: $5 + 0 = 5$ e $0 + 5 = 5$

4.º) ASSOCIATIVA: É indiferente, na adição de três números naturais, associar as duas primeiras parcelas ou as duas últimas.

Abreviatura: p.a.a.

Exemplo: $(5 + 3) + 2 = 5 + (3 + 2)$

8. Prova da adição

A prova da adição é feita por meio da propriedade comutativa. Refaz-se a operação, depois de trocadas as ordens das parcelas, o que na prática equivale a "somar de baixo para cima". Exemplo:

$$\begin{array}{r} 1.024 \\ 20.132 \\ \underline{89} \\ 21.245 \end{array}$$

Se a soma obtida for a mesma, tudo indica que a operação está correta.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 13

A operação adição permite resolver todos os problemas práticos nos quais ocorre reunir, ou juntar, objetos de mesma espécie, como nos exemplos seguintes:

1.º) Papai comprou 28 livros, em seguida comprou mais 4 livros e depois mais 3. Qual foi o total de livros que papai comprou?

Temos: $28 + 4 + 3 = 35$

Logo, papai comprou 35 livros.

2.º) Uma pessoa nasceu em 1908 e morreu com 50 anos. Em que ano morreu?

Temos: $1908 + 50 = 1958$

Logo, morreu em 1958.

3.º) Depois de ter pago NCr\$ 60,00 restou-me importância igual à que paguei e mais NCr\$ 25,00. Quanto possuía?

Temos: paguei... 60

restaram... $60 + 25 = 85$

possuía... $60 + 85 = 145$

Logo, possuía NCr\$ 145,00.

4.º) Calcule a soma dos três primeiros números naturais sucessivos de 8.

Temos: os três primeiros números sucessivos de 8 são 9, 10 e 11.

Logo: $9 + 10 + 11 = 30$

5.º) Calcule o valor da soma: $[12 + [5 + (3 + 9)]]$

Calcula-se, primeiramente, a soma indicada entre parênteses, depois a que estiver entre colchêtes e, a seguir, entre chaves:

$$[12 + [5 + (3 + 9)]] = [12 + [5 + 12]] = [12 + 17] = 29$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

29 é o numeral mais simples de escrever $[12 + [5 + (3 + 9)]]$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 14

1. Diga qual a propriedade que está sendo aplicada em:

1.º) $3 + 5 = 5 + 3$

4.º) $0 + 1 = 1$

2.º) $8 + 0 = 8$

5.º) $28 + 12 = 40$ (Fechamento)

3.º) $(7 + 2) + 6 = 7 + (2 + 6)$

6.º) $5 + 13 = 18$

2. Preencha as reticências (...) com um numeral que torne verdadeira cada uma das seguintes sentenças:

1.º) $7 + \dots = 7$

4.º) $0 + 8 = \dots$

2.º) $8 + 5 = 5 + \dots$

5.º) $5 + \dots = 5 + \dots$ (cuidado!)

3.º) $2 + (3 + \dots) = (2 + 3) + 4$

6.º) $3 + \dots \neq 4 + \dots$ (cuidado!)

3. Calcule:

1.º) $3 + [(8 + 5) + 0]$

2.º) $1 + [1 + [1 + (1 + 1)]]$

3.º) $57 + [30 + [28 + (0 + 179)]]$

4.º) $93 + [8 + [(5 + 1 + 3) + (1 + 0)] + 89]$

5.º) $3.215 + [(2.139 + 0) + [(12 + 100 + 99) + 1]]$

4. Resolva os seguintes problemas:

1.º) Numa adição de duas parcelas adiciona-se 3 à primeira e 5 à segunda parcela. De quanto aumentou a soma?

2.º) De quanto aumenta uma soma de quatro parcelas quando se acrescenta 6 a cada uma das parcelas?

3.º) Somando certo número a outro, obtém-se como soma esse outro. Qual o número somado?

4.º) Calcule a soma dos cinco primeiros números naturais sucessivos de 18.

5.º) Aos 28 anos um homem torna-se pai. Quantos anos terá esse pai quando seu filho tiver 31 anos?

- 6.º) A fundação de uma vila se deu em 1815. Passados 55 anos, a vila passou à categoria de cidade. Qual foi a data deste acontecimento?
- 7.º) A mais alta montanha da Terra é o Everest, que possui 8.882m de altura. A maior profundidade marítima conhecida é de 10.794m. De quanto é o desnível entre o ponto mais alto e o mais profundo?
- 8.º) Por quanto se deve vender um objeto que havia custado NCr\$ 9.000,00, para se ganhar NCr\$ 1.500,00?
- 9.º) Uma loja foi adquirida por NCr\$ 3.800,00. Gastaram-se em consertos NCr\$ 360,00 e a loja foi revendida com um lucro de NCr\$ 520,00. Por quanto foi vendida a loja?
- 10.º) Combinei pagar uma dívida em quatro prestações. Na primeira pagaria NCr\$ 1.250,00 e, nas seguintes, NCr\$ 350,00 a mais que a primeira. De quanto era a dívida?
- 11.º) Elza-Maria tem NCr\$ 82,00. Sílvia tem NCr\$ 23,00 a mais que Elza Maria, e Dorina tem tanto quanto Elza Maria e Sílvia juntas. Quanto possuem Sílvia e Dorina? E as três juntas?
- 12.º) Depois de pagar NCr\$ 29,00 no armazém; NCr\$ 7,00 no açougue e outras despesas que totalizaram NCr\$ 18,00, papai ainda ficou com NCr\$ 8,00. Qual a quantia que papai possuía antes de fazer todas essas despesas?

SUBTRAÇÃO

9. Operação: subtração; resultado: diferença

Considere dois números naturais com a condição de o primeiro deles ser maior ou igual ao segundo, como por exemplo: 8 e 5.

Chama-se *diferença* entre o primeiro número e o segundo, um terceiro número que adicionado ao segundo dá por soma o primeiro. No exemplo estudado a *diferença* (ou *resto*) entre 8 e 5 é 3, pois: $3 + 5 = 8$.

A operação que permite achar a diferença (3, no exemplo) é denominada **subtração**. Indicação e nomes dos "personagens" da subtração:

$$\begin{array}{ccccc} 8 & - & 5 & = & 3 \\ \swarrow & & \downarrow & & \searrow \\ \text{minuendo} & & \text{subtraendo} & & \text{resto} \end{array}$$

O sinal -, que indica a operação *subtração*, é lido "menos".

Então:

$$8 - 5 = 3 \text{ porque } 3 + 5 = 8$$

$$8 - 8 = 0 \text{ porque } 0 + 8 = 8$$

Esta é a razão por que a subtração é a *operação inversa* da adição.

E se o minuendo fosse *menor* que o subtraendo, como por exemplo:

$$5 - 8 ?$$

A diferença *não existe* e, portanto, a subtração *nem sempre é possível* no conjunto dos números naturais (N).

Logo:

Subtração de dois números naturais, com o primeiro maior ou igual ao segundo, é a operação que produz a *diferença* desses números.

Então:

o par (8, 5), pela operação *subtração*, produz a *diferença* 3
o par (8, 8), pela operação *subtração*, produz a *diferença* 0

LEMBRETE AMIGO

A operação subtração nem sempre é possível com dois números naturais quaisquer; é necessário que o primeiro deles seja *maior* ou *igual* ao segundo!

10. Símbolo da equivalência, que liga a subtração à adição

Você pode usar um novo símbolo: \Leftrightarrow (lê-se: "equivale a") para relacionar a subtração com a adição, da seguinte maneira:

$$8 - 5 = 3 \Leftrightarrow 3 + 5 = 8$$

$$8 - 8 = 0 \Leftrightarrow 0 + 8 = 8$$

$$12 - 2 = 10 \Leftrightarrow 10 + 2 = 12$$

De um modo geral, pode-se escrever:

$$\text{minuendo} - \text{subtraendo} = \text{diferença} \Leftrightarrow \text{diferença} + \text{subtraendo} = \text{minuendo}$$

11. Prova da subtração

A igualdade:

$$\boxed{\text{diferença} + \text{subtraendo} = \text{minuendo}}$$

que constitui uma *relação fundamental* da operação subtração, permite "tirar" a *prova* dessa operação. Exemplo:

$$\begin{array}{r} 3.503 \\ - 1.869 \\ \hline 1.634 \end{array} +$$

OBSERVAÇÃO: A técnica operatória da subtração já foi aprendida no Curso Primário.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 15

1. Preencha as lacunas:

- 1.º) $7 - 2 = 5$ porque $5 + 2 = 7$.
- 2.º) $4 - 4 = 0$ porque $0 + 4 = 4$.
- 3.º) $12 - 6 = 6$ porque $6 + 6 = 12$.
- 4.º) $8 - 1 = 7 \iff 7 + 1 = 8$.
- 5.º) $100 - 10 = 90 \iff 90 + 10 = 100$.
- 6.º) $3 - 3 = 0 \iff 0 + 3 = 3$.

2. Calcule o valor de \square em:

1.º) $\square - 5 = 12$ (Modelo)

Temos: $\square - 5 = 12 \iff \square = 12 + 5$

ou $\square = 17$

NOTA: Esta aplicação equivale à resolução do problema: "determinar o minuendo de uma subtração, sabendo-se que o subtraendo é igual a 5 e a diferença, 12", onde o minuendo foi representado por \square .

2.º) $\square - 3 = 8$

3.º) $\square - 1 = 0$

4.º) $\square - 3 = 50$

5.º) $\square - 0 = 0$

3. Calcule o valor de Δ tal que: $\Delta + 4 = 9$

NOTA: Usando a noção de *equivalência*, estudada entre a operação *adição* e sua inversa, *subtração*, você pode escrever, por exemplo:

$$8 - 5 = 3 \iff 3 + 5 = 8$$

$$\text{e } 3 + 5 = 8 \iff \begin{cases} 3 = 8 - 5 \\ 5 = 8 - 3 \end{cases}$$

No exercício em questão, temos:

$$\Delta + 4 = 9 \iff \begin{cases} \Delta = 9 - 4 \\ \text{ou } \Delta = 5 \end{cases}$$

Esta aplicação resolve o problema "qual o número que adicionado com 4 dá para soma 9?". O número procurado foi representado por Δ .

4. Calcule o valor do \square ou do Δ em:

1.º) $\square + 12 = 19$

3.º) $5 + \Delta = 10$

2.º) $8 + \Delta = 13$

4.º) $\square + 1 = 11$

5. Será que a subtração é uma operação *comutativa*?

Observe que: $5 - 3 = 2$ e $3 - 5 = ?$ (não existe!)

Logo: a subtração *não* é comutativa.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 16

- 1.º) Qual o valor do minuendo de uma subtração em que o subtraendo vale 1.836 e a diferença, 17.999.167?
- 2.º) O minuendo de uma subtração é igual a 1.000. Quanto vale a soma da diferença com o subtraendo dessa subtração? Por quê?
- 3.º) Qual o número que, adicionado a 13.001, tem por soma 1.000.000?
- 4.º) Pedro nasceu em 1921. Que idade terá em 1968?
- 5.º) Em que ano completou 32 anos uma pessoa que fez 75 anos em 1956?
- 6.º) Quer-se repartir NCr\$ 140,00 entre três pessoas. A primeira deve receber NCr\$ 43,00 e, a segunda, NCr\$ 24,00 a mais que a primeira. Qual a parte da terceira?
- 7.º) Se Antônio der a Mário NCr\$ 280,00, cada um fica com NCr\$ 700,00. Quanto possuía cada um?
- 8.º) Paulinho, num jogo de bolinhas, ganhou a princípio 8 bolinhas; depois perdeu 12 e, em seguida, ganhou 6. No fim do jogo, Paulinho tinha 42 bolinhas. Com quantas bolinhas ele começou o jogo?
- 9.º) O apogeu do satélite "A" foi 42km menos do que o apogeu do satélite "B", que foi de 242km. Qual o apogeu do satélite "A"?
- 10.º) Na 1.ª Feira da Bondade, realizada em S. Paulo, a Barraca da Criança fez um movimento de NCr\$ 7.100,00 e a Barraca do Encontro, NCr\$ 10.200,00. Sabendo-se que o total arrecadado pela Feira foi de NCr\$ 188.000,00, quanto arrecadaram as demais barracas?

EXPRESSÕES NUMÉRICAS — “PONTUAÇÃO”

12. Expressões numéricas; “pontuação”

Considere, por exemplo:

$$5 + 8$$

que é uma soma indicada, cujo numeral mais simples é 13. Também em:

$$5 + 8 - 6$$

você tem uma soma e uma diferença indicadas, cujo numeral mais simples é 7.

O mesmo se dá com:

$$12 - 7 + 3$$

pois, desde que se efetuem as operações na ordem indicada (primeiramente $12 - 7 = 5$ e, a seguir, $5 + 3 = 8$), essa expressão pode ser substituída por 8, que é o seu numeral mais simples. Indicações como:

$$\left. \begin{array}{l} 5 + 8 \\ 5 + 8 - 6 \\ 12 - 7 + 3 \end{array} \right\} \text{ são denominadas expressões numéricas}$$

e podem ser substituídas por um numeral mais simples, quando se efetuam as operações na ordem em que figuram.

Todavia, o uso dos sinais de associação (parênteses, colchêtes, chaves, ...), que permitem “pontuar” a expressão, dão maior precisão à referida ordem. Tal como você aprendeu em Português, onde a “pontuação” de uma sentença, por meio da vírgula, é de suma importância, — pois pode-se mudar por completo o sentido de uma sentença mudando a posição da vírgula; — o mesmo ocorre nas sentenças matemáticas, nas quais as vírgulas são substituídas por parênteses (são “vírgulões” ...), que permitem “pontuar” as expressões numéricas.

Veja, por exemplo, como a posição da vírgula na sentença decide se você “come” ou “não come” doce ...:

TITIA FAZ DOCE; EU, NÃO COMO.

TITIA FAZ DOCE; EU NÃO, COMO.

Da mesma forma, a “pontuação” de uma expressão numérica é decisiva para o resultado que se procura. Exemplos:

1.º Usando parênteses, “pontuar” convenientemente a sentença:

$$9 - 5 + 4 = 0$$

de modo a torná-la verdadeira.

Você logo percebe que, se colocar os parênteses envolvendo $9 - 5$, obterá:

$$\underbrace{(9 - 5)}_4 + 4 = 8, \text{ que é diferente de } 0.$$

Porém, se envolverem $5 + 4$, você encontrará o resultado procurado, pois:

$$9 - \underbrace{(5 + 4)}_9 = 0$$

2.º “Pontuar”, usando parênteses, a expressão:

$$10 - 6 - 3$$

de modo que o seu valor seja igual a 7. Temos:

$$\begin{array}{ll} (10 - 6) - 3 = 1 & \text{(não serve!)} \\ 10 - (6 - 3) = 7 & \text{(é a pontuação procurada)} \end{array}$$

13. Expressões numéricas pontuadas com parênteses, colchêtes, chaves

Se, além de conter operações indicadas entre parênteses, a expressão numérica possui indicações entre colchêtes, chaves, ..., o seu valor (que é o numeral mais simples que a representa) pode ser calculado efetuando-se primeiramente as operações indicadas entre parênteses, em seguida as que estão entre colchêtes e depois as que estão entre chaves, sempre de “dentro” para “fora”. Exemplos:

1.º $12 - [7 + (8 - 6)]$

Temos:

$$12 - [7 + \underbrace{(8 - 6)}_2] = 12 - [\underbrace{7 + 2}_9] = 12 - 9 = 3$$

2.º $25 - \{26 - [8 - (2 + 5)]\}$

Temos:

$$25 - \{26 - [8 - \underbrace{(2 + 5)}_7]\} = 25 - \{26 - [\underbrace{8 - 7}_1]\} = 25 - \{\underbrace{26 - 1}_{25}\} = 25 - 25 = 0$$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 17

- Usando parênteses, "pontue" a expressão $10 - 2 + 5$, de modo a obter dois resultados diferentes.
- Torne verdadeira cada uma das seguintes sentenças, "pontuando-as" convenientemente com parênteses:

1.ª) $15 - 8 + 7 = 0$ 3.ª) $35 - 35 + 35 = 35$
 2.ª) $15 - 8 + 7 = 14$ 4.ª) $18 - 5 - 4 + 3 = 6$
 (usar duas vezes os parênteses)

- Calcule o valor das seguintes expressões numéricas, ou seja, o numeral mais simples que representa cada uma delas:

1.ª) $(15 + 8) - (8 - 1)$ 16
 2.ª) $72 - [12 + (11 - 11)]$ 60
 3.ª) $(500 - 100) + (1.000 - 100) + (10.000 - 100)$ 11.200
 4.ª) $14 + [8 - [(48 - 3) - (38 + 1 + 5)]] - 1$ 20
 5.ª) $5 - [7 - (6 - 4)] + [13 - [5 + (5 - 2)]]$ 5
 6.ª) $(33 - 8) - [(21 + 5) - (13 - 8)]$ 4
 7.ª) $(6 + 9 + 5) - [7 + (6 - 4) - (13 - 6)]$
 8.ª) $130 - [15 + (11 - 7) - [9 - (7 - 3)]]$
 9.ª) $21 - [22 - (4 + 5 + 2)] - [15 - [(19 - 4) - (7 - 3)]]$
 10.ª) $[213 - [(14 + 7) - (11 - 3)]] - [(8 + 5) - [6 - (10 - 9)]]$

MULTIPLICAÇÃO

14. Operação: multiplicação; resultado: produto

Você pode considerar adições de parcelas tôdas iguais, como por exemplo:

$$3 + 3 + 3 + 3 \text{ (quatro parcelas iguais: 3)}$$

Nesse caso, tais adições constituem uma multiplicação e são indicadas com o símbolo \times (lê-se: "vezes"). No exemplo acima, temos:

$$4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

e diz-se que se efetuou a multiplicação dos fatores 4 e 3.

O resultado 12 é denominado produto; o fator 4, que representa o número de parcelas repetidas, é denominado multiplicador, e o fator 3, que é a parcela que se repete, multiplicando.

Outros exemplos:

$$5 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \text{ (cinco vezes o 7)}$$

$$3 \times 2 = 2 + 2 + 2 \text{ (três vezes o 2)}$$

OBSERVAÇÃO: Convencionou-se que:

- Se o multiplicador é 0, então o produto é 0.
Exemplo: $0 \times 3 = 0$
- Se o multiplicador é 1, então o produto é o próprio multiplicando.
Exemplo: $1 \times 3 = 3$

Logo:

Multiplicação de dois números naturais é a operação que produz o produto desses números.

Então:

o par (4, 3), pela operação multiplicação, produz o produto 12
 o par (9, 1), pela operação multiplicação, produz o produto 9
 o par (0, 8), pela operação multiplicação, produz o produto 0

ATENÇÃO: Não confunda multiplicação, que é uma operação, com produto, que é o resultado dessa operação!

15. Tábua da multiplicação

Com a técnica que você já conhece (a célebre "tabuada" do Curso Primário), pode-se construir a seguinte tábua:

				↓										
	\times	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...		
	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...		
	2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	...		
	3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	...		
	4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	...		
	5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	...		
	6		
	7		

16. Multiplicação de vários números naturais

No caso de três números, efetua-se a *multiplicação* dos dois primeiros (operação conhecida) e, a seguir, a multiplicação do produto obtido pelo terceiro número. O uso de parênteses facilita a indicação. Exemplo:

$$3 \times 5 \times 8 = (3 \times 5) \times 8 = 15 \times 8 = 120$$

Da mesma forma se procede para o *produto de quatro ou mais fatores*. O uso dos colchêtes e das chaves facilita a indicação. Exemplo:

$$2 \times 7 \times 4 \times 5 = [(2 \times 7) \times 4] \times 5 = [14 \times 4] \times 5 = 56 \times 5 = 280$$

17. Propriedades

1.ª) FECHAMENTO: O produto de dois números naturais quaisquer é sempre um número natural.

Abreviatura: p.f.m. (*)

Exemplo:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & \times & 3 & = & 12 \\ \swarrow & & \downarrow & & \searrow \\ \text{n.º natural} & & \text{n.º natural} & & \text{n.º natural} \end{array}$$

2.ª) COMUTATIVA: A ordem dos fatores não altera o produto.

Exemplo:

$$4 \times 3 = 3 \times 4$$

3.ª) ELEMENTO NEUTRO: É o um o único número natural que, multiplicado por qualquer outro número, tem como produto esse outro número.

Exemplo:

$$5 \times 1 = 5 \text{ e } 1 \times 5 = 5$$

4.ª) ASSOCIATIVA: É indiferente, na multiplicação de três números naturais, associar os dois primeiros fatores ou os dois últimos.

Exemplo:

$$(4 \times 3) \times 7 = 4 \times (3 \times 7)$$

Propriedade que relaciona a multiplicação com a adição e a subtração:

5.ª) DISTRIBUTIVA: O produto de um número por uma soma (ou diferença) pode ser obtido multiplicando-se o número, cada vez, pelos termos da soma (ou diferença) e adicionando-se (ou subtraindo-se) os produtos obtidos.

Exemplos:

$$\begin{array}{l} 4 \times (5 + 3) = 4 \times 5 + 4 \times 3 \\ 4 \times (5 - 3) = 4 \times 5 - 4 \times 3 \end{array} \begin{array}{l} \text{(propriedade distributiva da multi-} \\ \text{plicação em relação à adição)} \\ \text{(...idem, em relação à subtração)} \end{array}$$

(*) Lê-se: propriedade do fechamento da multiplicação.

18. Prova da multiplicação

Para fazê-la, usa-se a propriedade *comutativa*. Refazendo-se a operação com os fatores noutra ordem, deve-se encontrar o mesmo resultado.

Assim, por exemplo:

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 35 \\ \hline 130 \\ 78 \\ \hline 910 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35 \\ \times 26 \\ \hline 210 \\ 70 \\ \hline 910 \end{array}$$

19. Múltiplos de um número; números pares e números ímpares

Chama-se *múltiplo* de um número natural o produto desse número por um número natural qualquer.

Exemplo:

$$3 \times 4 \text{ é um múltiplo de } 3 \text{ (e de } 4)$$

Todos os múltiplos de um número são obtidos multiplicando-o pelos números que constituem o conjunto dos números naturais (N).

Assim, temos:

$$\begin{array}{l} \text{múltiplos de } 2: 2 \times 0 = 0; 2 \times 1 = 2; 2 \times 2 = 4; \dots \\ \text{múltiplos de } 3: 3 \times 0 = 0; 3 \times 1 = 3; 3 \times 2 = 6; \dots \\ \text{múltiplos de } 4: 4 \times 0 = 0; 4 \times 1 = 4; 4 \times 2 = 8; \dots \end{array}$$

Os múltiplos de 2: {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...} constituem o conjunto dos números **pares**; a terminação dos numerais desses números é:

$$0, 2, 4, 6 \text{ e } 8$$

Os números que não são múltiplos de 2, terminam necessariamente em: 1, 3, 5, 7 e 9, e constituem o conjunto dos números **ímpares**:

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$$

OBSERVAÇÃO: Os produtos (múltiplos) de um número por 2, 3, 4, 5, ... chamam-se, respectivamente: *dôbro, triplo, quádruplo, quántuplo, ...*

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 18

1. Escreva de outra maneira as seguintes adições:

1.ª) $5 + 5 + 5$

4.ª) $3 + 3 + 3$

2.ª) $0 + 0 + 0 + 0 + 0$

5.ª) $a + a + a + a$

3.ª) $1 + 1$

6.ª) $(8 + 8 + 8) - (4 + 4 + 4 + 4)$

2. Escreva de dois modos diferentes a multiplicação de 5 por 4.

3. Diga qual a propriedade que está sendo aplicada em:

1.º) $6 \times 5 = 5 \times 6$

4.º) $(7 \times 3) \times 5 = 7 \times (3 \times 5)$

2.º) $7 \times 1 = 7$

5.º) $1 \times 20 = 20$

3.º) $8 \times 4 = 32$ (fechamento)

6.º) $3 \times 6 = 18$

4. Complete, de modo a tornar verdadeira, cada uma das seguintes igualdades:

1.ª) $8 \times 0 = \dots$

3.ª) $8 \times \dots = 8$

2.ª) $\dots \times 1 = 5$

4.ª) $\dots \times 0 = 0$ (cuidado!)

5. Diga qual é o resultado de:

1.ª) $3 \times 8 \times 5 \times 0 = \dots$

2.ª) $8 \times 0 \times 5 \times 3 = \dots$

Por quê?

6. Escreva um produto de dois fatores quaisquer. Multiplique o primeiro fator por 5 e o segundo por 2. De quanto ficou multiplicado tal produto?

20. Cálculo de expressões numéricas;
novas "pontuações"

Seja, por exemplo, a expressão:

$$5 + 3 \times 6$$

que envolve uma adição e uma multiplicação. Tal expressão pode ser "pontuada" com parênteses, que passam a indicar a ordem em que serão efetuadas aquelas operações. Assim:

$$5 + (3 \times 6) = 5 + 18 = 23$$

$$(5 + 3) \times 6 = 8 \times 6 = 48$$

No caso de a expressão não estar "pontuada", fazemos o seguinte "acôrdo":

Efetuamos, primeiramente, as multiplicações (consideradas operações "mais fortes") e, a seguir, as adições e as subtrações, na ordem em que figuram.

Então, o numeral mais simples que representa a expressão:

$$5 + 3 \times 6$$

que não está "pontuada", é $5 + 18 = 23$, pois efetuamos em primeiro lugar a multiplicação 3×6 e, a seguir, a adição de 5 com 18.

Você seria capaz de, usando parênteses convenientemente, isto é, "pontuando", tornar verdadeira a sentença matemática:

$$3 + 4 \times 2 - 1 = 13 ?$$

Ora, você pode "pontuá-la", colocando parênteses das seguintes maneiras:

$$(3 + 4) \times 2 - 1 \quad \text{que é igual a } 13$$

$$3 + (4 \times 2) - 1 \quad \text{que é igual a } 10$$

$$(3 + 4) \times (2 - 1) \quad \text{que é igual a } 7$$

Logo, a sentença matemática verdadeira é:

$$(3 + 4) \times 2 - 1 = 13$$

Quando, além de parênteses, a expressão numérica contiver colchêtes e chaves, você já sabe como proceder. Exemplo:

Calcular o valor da expressão:

$$18 - \{6 + [9 \times (5 - 2) - (10 - 3) \times 3]\}$$

Temos:

$$18 - \{6 + [9 \times 3 - 7 \times 3]\} =$$

$$= 18 - \{6 + [27 - 21]\} =$$

$$= 18 - \{6 + 6\} =$$

$$= 18 - 12 =$$

$$= 6$$

- Qual o número que se deve adicionar a 50 para se obter dez vezes o valor de 50?
- Quanto custam duas dúzias de lenços, sabendo-se que cada lenço custa NCr\$ 2,00?
- Caiu um raio e depois de 5 segundos ouviu-se o estrondo. A que distância caiu o raio, sabendo-se que o som percorre 340m por segundo?
- Uma torneira despeja num tanque 10 litros de água por minuto. Quantos litros despejará em 3 horas?
- Duas páginas, uma com 38 linhas de 60 letras cada linha e outra com 60 linhas de 38 letras cada linha, têm o mesmo número de letras. Por quê?
- Quantos segundos há numa hora? E num dia?
- A velocidade da luz é, aproximadamente, igual a 300.000km por segundo. Qual a distância entre o Sol e a Terra, sabendo-se que a luz do Sol demora cerca de 8 minutos para chegar à Terra?
- Os alunos das 5 classes de Admissão da nossa Escola, com 35 alunos cada, compraram a rifa de uma coleção de livros a ser sorteada na Semana da Criança. Tendo custado NCr\$ 2,00 cada cartão da rifa e sabendo-se que cada aluno ficou com um cartão, quanto rendeu tal rifa?
- Um comerciante comprou 85 metros de fazenda a NCr\$ 8,00 o metro. Revendeu 30m a um negociante de uma certa cidade ao preço de NCr\$ 10,00 o metro e o restante a um negociante de outra cidade, mais distante, a NCr\$ 11,00 o metro. Qual foi o lucro total desse comerciante?
- Calcule o valor (*numeral mais simples*) das seguintes expressões:
 - $(18 + 12) \times 30$
 - $18 + (12 \times 30)$
 - $100 - [12 + (2 \times 44)]$
 - $(5 \times 8) \times 4 \times 1$
 - $0 \times 18 + (13 - 1)$
 - $(1 - 1) \times 8.435.609$
- "Pontuando" com parênteses, torne verdadeira cada uma das seguintes sentenças:
 - $4 + 5 \times 3 - 3 = 24$
 - $4 + 5 \times 3 - 3 = 0$
 - $4 + 5 \times 3 - 3 = 16$
- Calcule o valor (*numeral mais simples*) das seguintes expressões:
 - $8 + 5 \times 3$ (Não se esqueça: a *multiplicação* antes!)
 - $60 - (4 + 7 \times 2)$
 - $12 + 5 \times (48 - 8 \times 5)$
 - $[3 + (4 - 3) \times 6] \times 2$
 - $36 + 3 \times [(15 + 7) \times (3 + 2) - 12 \times (9 - 7)]$
 - $48 - 3 \times [15 + (8 - 1 \times 7)]$
 - $50 \times 2 - [5 \times 4 \times 3 - (10 \times 5 - (10 \times 3 - 16))] + 76$

21. Operação: divisão exata; resultado: quociente exato

Considere dois números naturais com a condição de o *segundo deles ser diferente de zero*, como por exemplo: 20 e 5.

Chama-se *quociente* do primeiro número pelo segundo um terceiro número que, multiplicado pelo segundo, dá como produto o primeiro. No exemplo estudado, o *quociente* de 20 por 5 é 4, pois: $4 \times 5 = 20$

A *operação* que permite achar o quociente (4, no exemplo) é denominada **divisão**. Indicação e nomes dos "personagens" da divisão:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{l} \text{dividendo} \\ \text{divisor} \end{array} \\
 & & \begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ 20 \quad | \quad 5 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \\
 20 : 5 = 4 & \text{ou} & \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow & & \swarrow \\
 \text{dividendo} \quad \text{divisor} \quad \text{quociente} & & \text{quociente}
 \end{array}$$

O sinal (:) que indica a operação *divisão* é lido "dividido por":

Então: $20 : 5 = 4$ porque $4 \times 5 = 20$

e, usando o símbolo da equivalência, \iff :

$$20 : 5 = 4 \iff 4 \times 5 = 20$$

fica ressaltado que a divisão é a *operação inversa* da multiplicação.

Como na subtração, *nem sempre* é possível determinar o *quociente* de dois números naturais trabalhando no conjunto dos números naturais (N). É necessário que o primeiro deles (dividendo) seja *múltiplo* do segundo (divisor) para que exista o quociente. Assim, por exemplo, no conjunto dos números naturais *não existe* o quociente de 20 por 3:

$$20 : 3 = ?$$

porque *não há* número natural que, multiplicado por 3, dê como resultado 20.

Logo:

Divisão de dois números naturais, com o segundo diferente de zero, e sendo o primeiro número múltiplo do segundo, é a operação que produz o quociente do primeiro pelo segundo.

Então:

o par (20, 5), pela operação *divisão*, produz o *quociente* 4
o par (32, 4), pela operação *divisão*, produz o *quociente* 8

LEMBRETE AMIGO

Não é possível, em nenhum caso, dividir-se um número por zero! Zero, como divisor, é elemento IMPOSSÍVEL!

7 : 0 ??????????????????

De um modo geral, se existir o quociente entre dois números naturais, temos que:

$dividendo : divisor = quociente$

 \iff

$quociente \times divisor = dividendo$

relação que permite "tirar" a *prova* da operação *divisão*.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 20

1. Preencha as lacunas:

- 1.º) $12 : 3 = 4$ porque $4 \times \dots = 12$
- 2.º) $8 : 8 = 1$ porque $\dots \times 8 = 8$
- 3.º) $30 : 6 = 5$ porque $\dots \times \dots = 30$
- 4.º) $15 : 1 = 15 \iff 15 \times \dots = 15$
- 5.º) $100 : 10 = 10 \iff \dots \times \dots = 100$
- 6.º) $0 : 9 = 0 \iff 0 \times \dots = 0$

2. Calcule o valor de \square em:

- 1.º) $\square : 5 = 12$ (Modelo)
- Temos: $\square : 5 = 12 \iff \square = 12 \times 5$
ou $\square = 60$

NOTA: Esta aplicação equivale à resolução do problema: "determinar o *dividendo* de uma *divisão*, sabendo-se que o *divisor* é 5 e o *quociente* 12", onde o *dividendo* foi representado por \square .

- 2.º) $\square : 3 = 18$ 3.º) $\square : 1 = 100$
- 4.º) $\square : 10 = 5$ 5.º) $\square : 13 = 1$

3. Calcule o valor de Δ , tal que: $\Delta \times 4 = 20$

NOTA: Com a equivalência estudada entre a operação *multiplicação* e sua inversa, *divisão*, você pode escrever, por exemplo:

$$12 : 3 = 4 \iff 4 \times 3 = 12$$

$$\text{e } 4 \times 3 = 12 \iff \begin{cases} 4 = 12 : 3 \\ 3 = 12 : 4 \end{cases}$$

No exercício em questão, temos:

$$\Delta \times 4 = 20 \iff \Delta = 20 : 4$$

$$\text{ou } \Delta = 5$$

Esta aplicação resolve o problema "qual o número que, multiplicado por 4, dá como produto 20?". O número procurado foi representado por Δ .

4. Calcular o valor do \square ou do Δ em:

- 1.º) $\square \times 8 = 96$ 3.º) $11 \times \Delta = 77$
- 2.º) $10 \times \Delta = 40$ 4.º) $\square \times 1 = 200$

5. Será a *divisão* uma operação *comutativa*?

Observe que: $12 : 3 = 4$ e $3 : 12 = ?$

Logo, a *divisão* não é *comutativa*.

22. Operação: *divisão aproximada*; resultado: *quociente aproximado*

Pode-se estender a noção de *divisão* estudando as *divisões por aproximação*, que permitem resolver problemas da vida prática, tais como: repartir 53 selos igualmente por 6 coleguinhas. Como você resolveria?

Como não é possível encontrar um número natural que, multiplicado por 6, dê como produto 53, pois:

$$8 \times 6 = 48 \text{ (é menor que 53)}$$

$$9 \times 6 = 54 \text{ (é maior que 53)}$$

você só poderá resolver o problema por *aproximação*, uma vez que o "quociente" procurado não é o número natural 8 nem o número natural 9.

O número 8, que é o maior número natural que, multiplicado por 6, não ultrapassa 53, é denominado *quociente aproximado por falta* e, a operação que o determina, *divisão aproximada*.

Os números 53 e 6 continuam recebendo os nomes de *dividendo* e *divisor*, respectivamente. A *diferença* entre o dividendo e o produto do quociente aproximado pelo divisor é denominada *resto* da divisão aproximada. Indicação:

$$\begin{array}{r} \text{dividendo} \quad \text{divisor} \\ 53 \quad | \quad 6 \\ \underline{5 \quad 8} \\ \text{resto} \quad \text{quociente (aprox.)} \end{array} \quad \text{onde} \quad \boxed{53 = 8 \times 6 + 5}$$

De um modo geral, temos a seguinte *relação fundamental* numa divisão aproximada:

$$\boxed{\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor} + \text{resto}}$$

onde o *resto* é sempre menor que o divisor!

No caso de o resto ser igual a zero a divisão é *exata*.

Você já conhece as técnicas operatórias para realizar as divisões aproximadas. A *prova* é feita de acordo com a relação fundamental: multiplicando-se o quociente aproximado pelo divisor e somando-se o produto com o resto, deve-se encontrar o dividendo.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 21

1. Preencha os claros das seguintes divisões aproximadas:

	DIVIDENDO	DIVISOR	QUOCIENTE	RESTO
1.ª)	256	12	...	4
2.ª)	...	400	1	32
3.ª)	17.648	215	82	...
4.ª)	277	...	18	7

- Quais os restos possíveis numa divisão aproximada de divisor 4?
- Na divisão aproximada indicada por: $26 = 3 \times 7 + 5$, qual o quociente e qual o resto?
(Não se esqueça de que o resto deve ser sempre menor que o divisor!)
- Qual o número que, dividido por 213, dá como quociente 401 e resto 127?
- Em $54 \overline{) 9}$, qual é a *relação fundamental*?

23. Cálculo de expressões numéricas; novas "pontuações"

O cálculo do valor (ou do *numeral mais simples*) de expressões numéricas que contenham *adições*, *subtrações*, *multiplicações* e *divisões*, caso não contenham sinais de associação, é feito na seguinte ordem:

- 1.º multiplicações e divisões
- 2.º adições e subtrações

Havendo *sinais de associação*, você já sabe como agir. Exemplos:

1.º $6 + 12 : 3$ (não contém parênteses; portanto, efetua-se a *divisão* primeiramente)

$$\text{Logo: } 6 + 12 : 3 = 6 + 4 = 10$$

2.º $(6 + 12) : 3$ (contém parênteses)

$$\text{Logo: } (6 + 12) : 3 = 18 : 3 = 6$$

3.º $54 - 3 \times [(7 + 6 : 2) - (4 \times 3 - 5)]$

$$\begin{aligned} \text{Temos: } 54 - 3 \times [(7 + 3) - (12 - 5)] &= \\ &= 54 - 3 \times [10 - 7] = \\ &= 54 - 3 \times 3 = \\ &= 54 - 9 = \\ &= 45 \end{aligned}$$

Atenção

O exercício seguinte não é resolvido por *adivinhação* e, sim, aplicando os resultados que você aprendeu até agora acerca das operações:

"Pensei em um número (que, logicamente, não vou dizer qual é...), multipliquei-o por 15 e ao produto obtido somei 20. Obtive como resultado 170. Qual foi o número pensado?"

Representando por \square o número pensado, pode-se "armar" a seguinte sentença matemática:

$$(\square \times 15) + 20 = 170$$

Basta, agora, aplicar as operações *inversas* das operações indicadas, para ir "desfazendo" as operações efetuadas no problema. Então:

$$(\square \times 15) = 170 - 20 \text{ ("desfazendo" a adição)}$$

$$\text{ou } \square \times 15 = 150 \iff \square = 150 : 15 \text{ ("desfazendo" a multiplicação)}$$

$$\text{ou } \square = 10$$

Logo, o número que pensei é o 10.

Prova: número que pensei 10

$$\text{multipliquei-o por 15} \dots 10 \times 15 = 150$$

$$\dots \text{ somei 20} \dots \dots \dots 150 + 20 = 170 \text{ (resultado obtido)}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 22

- Um metro de certa fazenda custa NCr\$ 4,00. Quantos metros se pode comprar com NCr\$ 24,00?
- Qual é o número cujo quíntuplo é 4.280?
- O produto de dois números é 342 e um dos fatores é 18. Calcule o outro.
- Se ao dobro de um número fôr acrescentado 200, obtém-se 840. Qual é esse número?
- Quanto tempo emprega um trem para percorrer a distância de 420km, se a sua velocidade média é de 70km por hora?
- Entrei numa papelaria com NCr\$ 6,00 e comprei 5 lápis de côr. Tendo-me sobrado NCr\$ 1,00, quanto paguei por cada lápis?
- Calcule o número 1.200 vêzes menor que 2.766.000.
- A importância de NCr\$ 3.200,00 foi dividida em duas partes iguais. A primeira metade foi repartida igualmente entre quatro lavradores e a segunda metade entre oito instituições de caridade. Quanto recebeu cada lavrador e cada instituição de caridade?
- Calcule o valor (*numeral mais simples*) das seguintes expressões:
 - $15 - 6 : 3$
 - $12 : 4 + 2$
 - $41 - (8 + 6 : 2)$
 - $(40 : 5) \times 8$
 - $36 : 2 \times (3 + 3 \times 5) : [27 - [3 + (8 - 4 : 2)]]$
 - $[(8 \times 4 + 3) : 7 + (3 + 15 : 5) \times 3] \times 2 + 4 : 50$
 - $30 : (2 \times 3)$
 - $(26 - 24 : 3) : 6$
 - $220 - 5 \times (48 - 8 : 2)$
 - $13 - [12 + (9 - 3 \times 2) : 3]$
- "Montando" sentenças matemáticas, resolva:
 - Adicionando 15 a um número e subtraindo 8 do resultado, você obtém 50. Qual é esse número?
 - Pensei em um número, multipliquei-o por 10 e, ao produto obtido, somei 250. Obtive como resultado 500. Qual foi o número pensado?

- Pensei em um número, a seguir subtraí 3 e multipliquei por 8 o resultado. Depois, dividi por 5 este resultado, encontrando 24. Qual o número pensado?
- Multipliquei por 70 um número e depois dividi por 70 o resultado, obtendo 10. Qual é esse número?

TESTE DE ATENÇÃO SÔBRE AS QUATRO OPERAÇÕES — GRUPO 23

NÚMEROS OPERADOS	RESULTADO	OPERAÇÃO	SENTENÇA MATEMÁTICA
(5, 3)	8	adição	$5 + 3 = 8$
(11, 4)	...	adição
(9, 5)	4	subtração
(7, 1)	7	$7 \times 1 = 7$
(12, 3)	...	divisão
(5, 3)	$5 - 3 = 2$
(8, 0)	8
(0, 8)	...	multiplicação
(6, 1)	$6 : 1 = 6$
(5, 5)	0

PROBLEMAS SÔBRE AS QUATRO OPERAÇÕES

24. Sentenças de mesma estrutura, em Português e Matemática

Você sabe que as "operações" de formar o *plural* ou o *singular* em Português têm suas equivalentes em Matemática? Sabe quais são?

A operação que, em Matemática, forma o *plural* é a **multiplicação**, e a que forma o *singular* é a **divisão**. Nestas condições você pode considerar sentenças, quer em Português, quer em Matemática, de **mesma estrutura**. Exemplo:

1 livro (que é um *singular*) custa..... NCr\$ 2,00

4 livros (que é um *plural*) custam..... $4 \times 2,00 = \text{NCr\$ } 8,00$

Assim, enquanto em Português a passagem para o *plural* é feita acrescentando-se *s* (em livro) ou *m* (em custa), em Matemática tal passagem é feita pela operação *multiplicação*.

Como seria feita a passagem do *plural* para o *singular* (operação inversa da primeira)?

Em Português: basta retirar o *s* (de livros) e *m* (de custam) — que é a operação inversa de acrescentar.

Em Matemática: basta dividir NCr\$ 8,00 por 4 — que é a operação inversa de multiplicar. Logo:

4 livros (que é um plural) custam NCr\$ 8,00
1 livro (que é um singular) custa $\text{NCr\$ } 8,00 : 4 = \text{NCr\$ } 2,00$

LEMBRETE AMIGO

Em Matemática:

a passagem do singular para o plural é feita pela operação multiplicação;

a passagem do plural para o singular é feita pela operação divisão.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 24

1.º (Modelo). Comprei 5 cadernos por NCr\$ 5,00. Quanto pagaria por 8 cadernos do mesmo tipo?

Conhecido um plural (preço de 5 cadernos), pede-se um outro plural (preço de 8 cadernos). Basta, portanto, sair do primeiro plural, que é dado, passar para o singular (preço de 1 caderno) e, a seguir, passar para o plural pedido.

Representando por \square o preço de 1 caderno, a sentença matemática correspondente ao problema é:

$$5 \times \square = 5 \quad (\text{plural dado})$$

portanto: $\square = 5 : 5$

ou $\square = 1$ (singular)

O preço de 8 cadernos será dado por:

$$8 \times \square = 8 \times 1$$

ou $8 \times \square = 8$ (plural pedido)

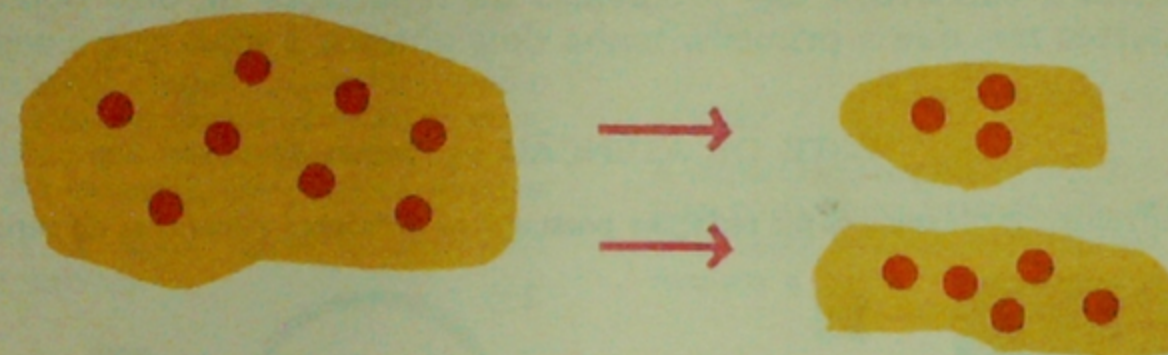
Resposta: Pagaria NCr\$ 8,00 por 8 cadernos do mesmo tipo.

- 2.º Comprei 8 canetas por NCr\$ 16,00. Quanto pagaria por três dúzias?
3.º Quatro dúzias de fechaduras custaram NCr\$ 960,00. Qual o preço de uma dezena?
4.º 13 caixas de bombons custam NCr\$ 65,00. Quanto devo gastar para comprar 20?
5.º O triplo de um número é 75. Qual é a quinta parte desse número?

25. Estrutura da repartição

Repartir os objetos de um determinado conjunto é das primeiras operações que fazemos, desde criança.

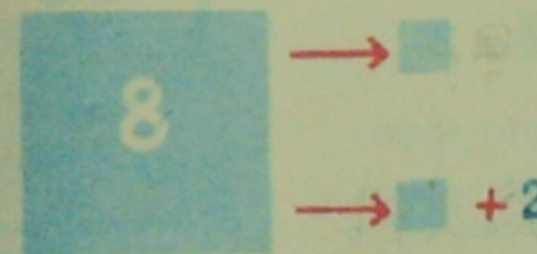
No desenho:



temos a repartição de um conjunto de oito objetos em partes desiguais por dois conjuntos, sendo que um deles possui dois objetos mais que o outro.

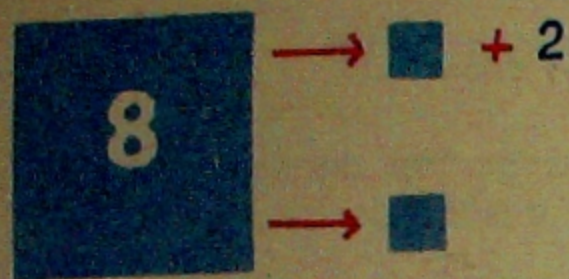
Nesse desenho você está vendo a “tradução” de milhares de problemas de repartição, não importando que se repartam bolinhas, selos, cadernos, ... nem o idioma em que se está exprimindo tal problema.

Trabalhando agora não mais com conjuntos e, sim, com o número de elementos desses conjuntos, você fará um primeiro “polimento” nessa representação. Assim, por exemplo, não mais levando em conta a natureza dos oito objetos que se quer repartir entre duas pessoas, de modo que a segunda receba dois a mais que a primeira, a representação de tal problema, onde \square indica a parte recebida pela primeira, será:



Dizemos que o desenho acima é a estrutura de milhões de problemas de repartição, redigidos em qualquer idioma, pois está sempre traduzindo a repartição de oito objetos em duas partes tais que a segunda tenha dois objetos a mais que a primeira!

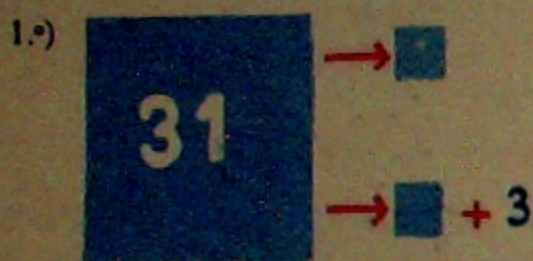
Já o desenho:



representa a **estrutura** dos problemas da repartição de oito objetos em duas partes tais que a primeira tenha dois objetos a mais que a segunda.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 25

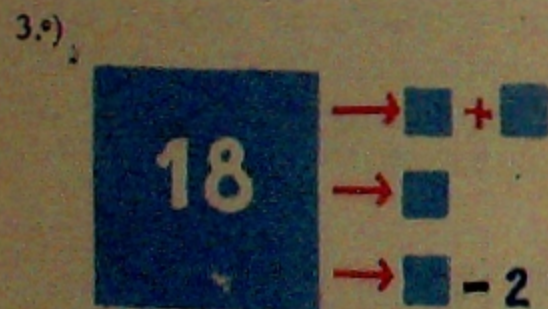
"Invente" problemas cujas redações possuam as seguintes *estruturas* da repartição:



Modelo:

Repartir um pacote de 31 balas entre duas meninas, de modo que uma delas receba 3 balas a mais que a outra.

"Invente" você outro problema que possua essa *estrutura*.

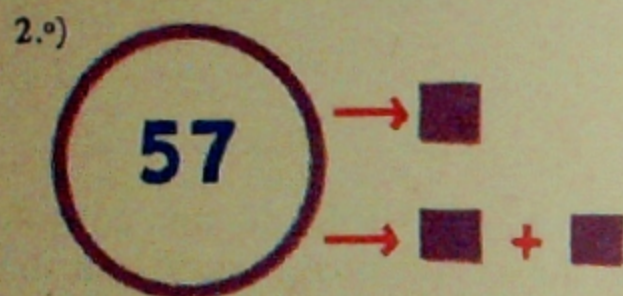


Modelo:

Repartir 18 lápis entre três alunas, de modo que a primeira receba o dobro do que recebe a segunda, e a terceira receba a parte da segunda *menos* dois lápis.

"Invente" outro...

NOTA: Na estrutura, a "saída" foi dada pela segunda, que recebe \square .

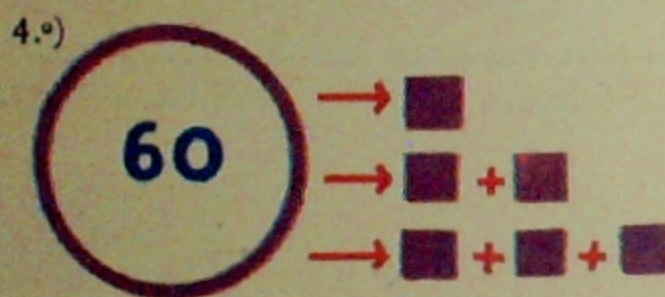


Modelo:

Distribuir 57 selos entre Antônio e Paulinho, de modo que Paulinho receba o dobro do que recebe Antônio.

"Invente" outro...

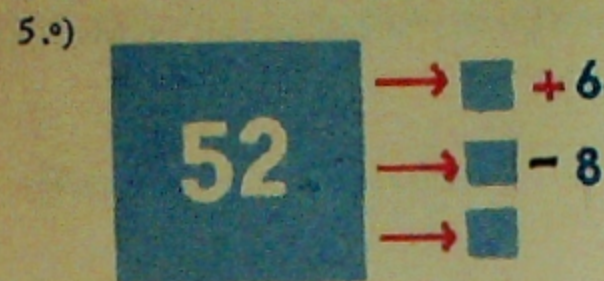
NOTA: Não confunda a representação do dobro ($\square + \square$) com a de receber *dois a mais* ($\square + 2$).



Modelo:

60 revistinhas foram distribuídas entre três jovens: Aninha, Glória e Luluzinha. Glória recebeu o dobro do que recebeu Aninha, e Luluzinha o triplo do que recebeu Aninha.

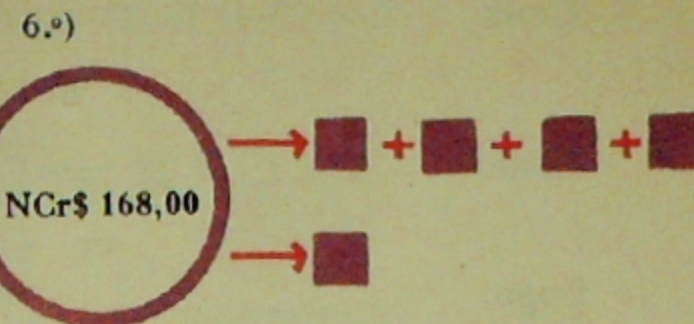
NOTA: Quantas revistinhas recebeu cada uma delas você aprenderá a encontrar daqui a pouco...



Modelo:

52 figurinhas foram repartidas entre três meninos, tal que: o primeiro recebeu 6 a mais do que recebe o terceiro e, o segundo, 8 a menos do que recebe o terceiro

NOTA: ... a "saída" agora foi dada pelo terceiro.

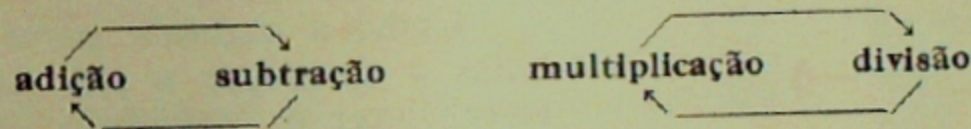


Modelo:

A importância de NCr\$ 168,00 foi repartida entre duas pessoas, de modo que uma delas recebeu o quádruplo do que recebeu a outra.

26. Resolução dos problemas; justificações e técnicas

Agora você vai resolver os problemas da *estrutura da repartição* usando as *propriedades* das operações estudadas:

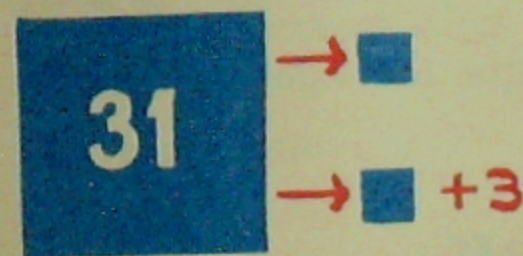


A seguir, usará de *técnicas* para obter mais rapidamente a solução.

Exemplos:

1.º Repartir um pacote de 31 balas entre duas meninas, de modo que uma delas receba 3 balas a mais que a outra. Dizer a parte que coube a cada menina.

Temos:



onde procuramos o valor de \square

Sentença matemática correspondente: $\square + (\square + 3) = 31$

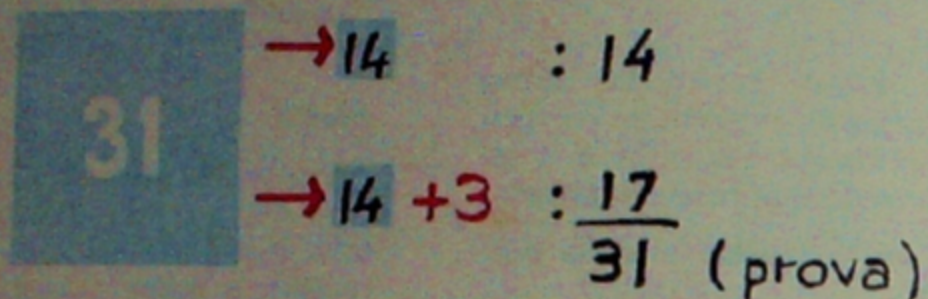
A propriedade associativa da adição permite "associar" os quadradinhos: $(\square + \square) + 3 = 31$

ou $2 \times \square + 3 = 31$

Como: $2 \times \square + 3 = 31 \iff 2 \times \square = 31 - 3$ ("desfazendo" a *adição*)
ou $2 \times \square = 28$

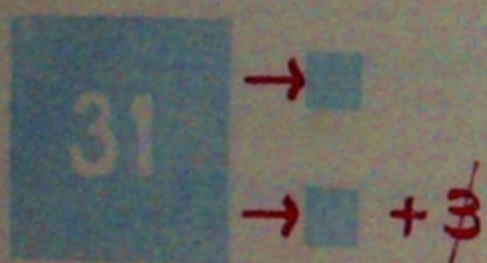
Como: $2 \times \square = 28 \iff \square = 28 : 2$ ("desfazendo" a *multiplicação*)
ou $\square = 14$

Logo:



Resposta: Uma das meninas recebeu 14 balas e a outra 17.

TÉCNICA: *Atenção* — se você quiser "andar mais depressa" para encontrar o valor do \square , basta usar da seguinte *técnica operatória*, que se vale de todas as propriedades já estudadas:



Como a segunda parte recebeu 3 balas *a mais* que a primeira, pode-se restabelecer o "equilíbrio" da repartição, *subtraindo* 3 do total 31, isto é, desfazendo a *adição*:

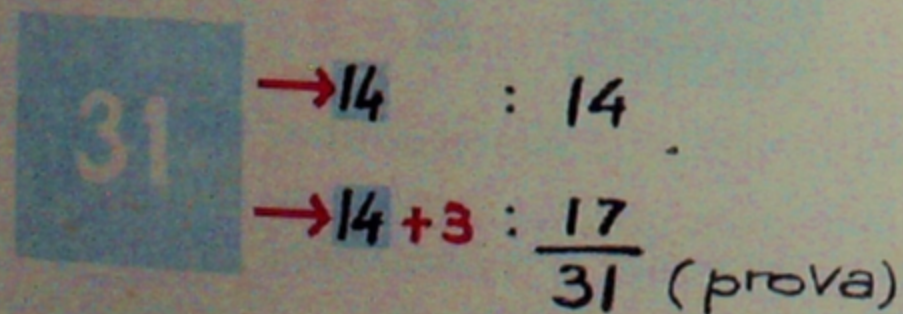
$$31 - 3 = 28$$

Dividindo 28 por 2 (pois temos dois \square), obtém-se:

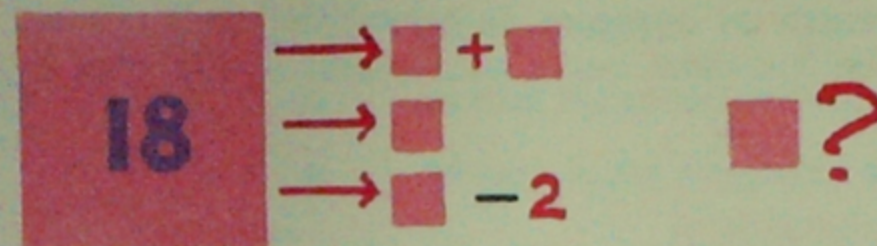
$$28 : 2 = 14$$

que é o valor de um \square .

Logo:



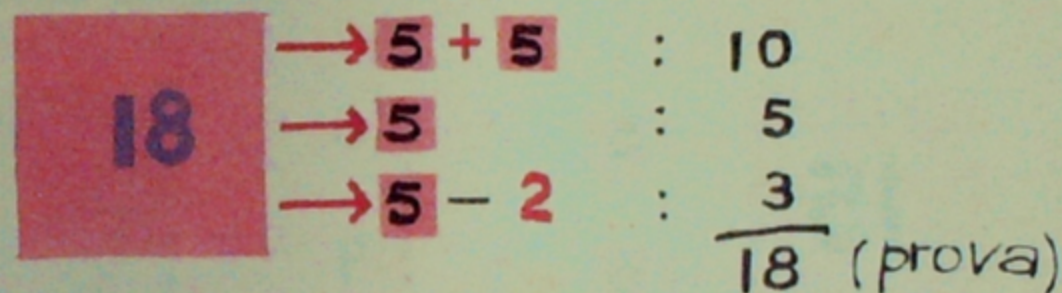
2.º) Resolver o problema que possua a seguinte estrutura:



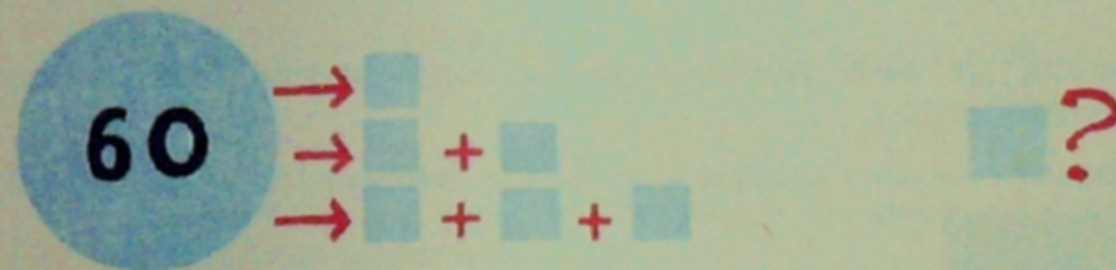
Usando a *técnica*: $18 + 2 = 20$ ("desfazendo" a subtração de 2 da parte do terceiro)

$$20 : 4 = 5 \text{ (... porque são 4 quadradinhos)}$$

Logo, o $\square = 5$, e portanto:

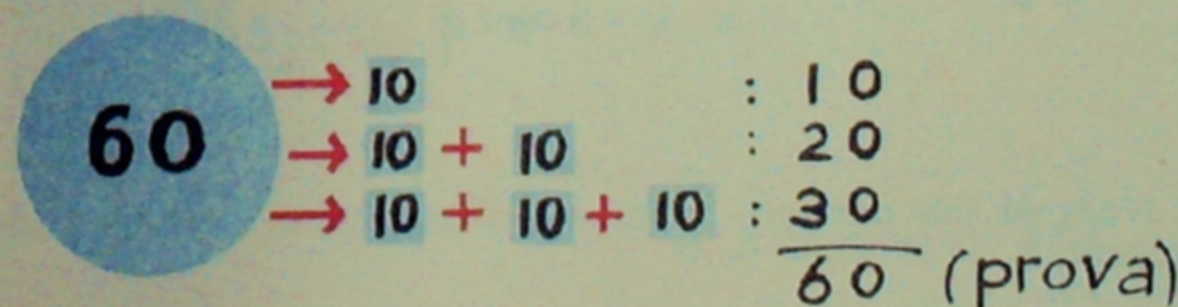


3.º) Determinar o valor de \square na seguinte estrutura:



Neste caso, usando da *técnica*, basta *dividir* 60 por 6, pois são seis quadradinhos e não há nenhum deles recebendo unidades a mais ou a menos que outro. Logo:

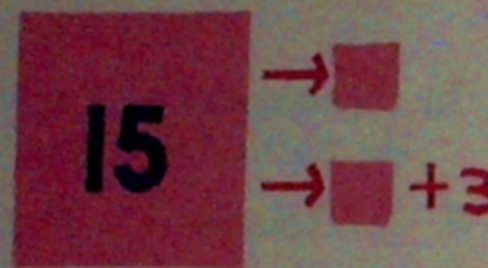
$$60 : 6 = 10, \text{ e portanto:}$$



4.º) A soma de dois números é 15, e a diferença entre eles é 3. Quais são esses números?

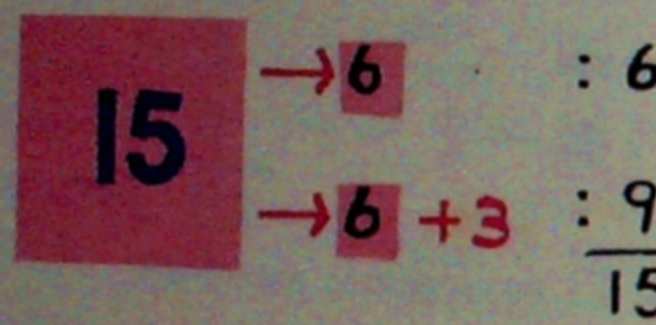
Estamos dentro da *estrutura da repartição*, onde o total é 15 e uma das partes recebe 3 a mais que a outra, pois a diferença entre elas é 3.

Logo:



$$\begin{array}{r} 15 \\ -3 \\ \hline 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \overline{) 15} \\ \underline{0} \quad 6 \\ \underline{12} \quad 2 \\ \hline 12 \end{array}$$

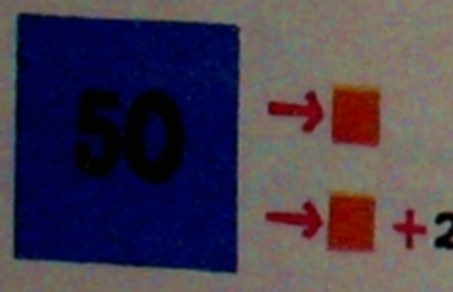
Portanto:



$$\begin{array}{l} 15 \rightarrow 6 : 6 \\ 15 \rightarrow 6 + 3 : 9 \\ \hline 15 \text{ (prova)} \end{array}$$

5.º) A soma de dois números pares consecutivos é 50. Determinar esses números.

Temos:




(número par)
(número par consecutivo de □)

$$\begin{array}{r} 50 \\ -2 \\ \hline 48 \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \overline{) 50} \\ \underline{0} \quad 24 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\text{Logo } \begin{cases} \square : 24 \\ \square + 2 : 26 \\ \hline 50 \text{ (prova)} \end{cases}$$

6.º) A soma de três números ímpares consecutivos é 39. Quais são esses números?

Temos:



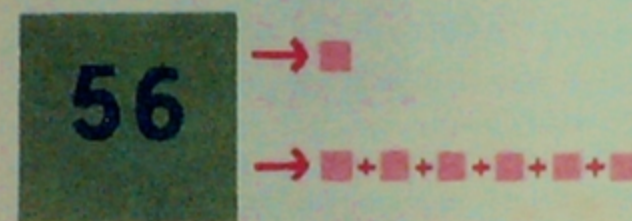
(número ímpar)
(número ímpar consecutivo de □)
(número ímpar consecutivo de □ + 2)

$$\begin{array}{r} 39 \\ -6 \\ \hline 33 \end{array} \quad \begin{array}{r} 33 \overline{) 39} \\ \underline{0} \quad 11 \\ \hline 33 \end{array}$$

$$\text{Logo } \begin{cases} \square : 11 \\ \square + 2 : 13 \\ \square + 4 : 15 \\ \hline 39 \text{ (prova)} \end{cases}$$

7.º) A soma de dois números é 56 e um deles é o sêxtuplo do outro. Quais são esses números?

Temos:



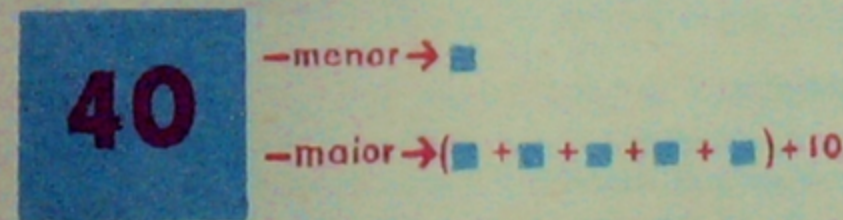
$$56 \overline{) 56} \begin{array}{r} 7 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\text{Logo } \begin{cases} \square \text{ (1º número)} : 8 \\ \square + \square + \square + \square + \square + \square \text{ (2º nº)} : 48 \\ \hline 56 \text{ (prova)} \end{cases}$$

NOTA: Esse mesmo problema poderia ter a seguinte redação: "A soma de dois números é 56, e o quociente da divisão do maior pelo menor é 6. Quais são os números?"

8.º) A soma de dois números é 40. O maior é o quádruplo do menor, mais 10. Quais são esses números?

Temos:



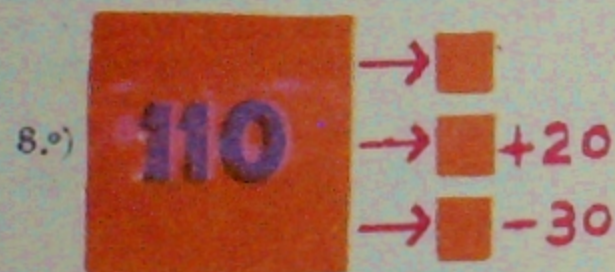
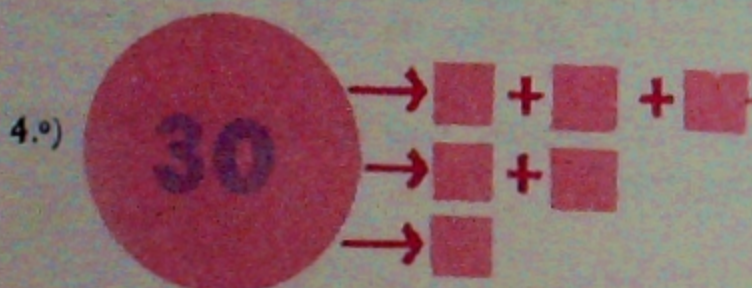
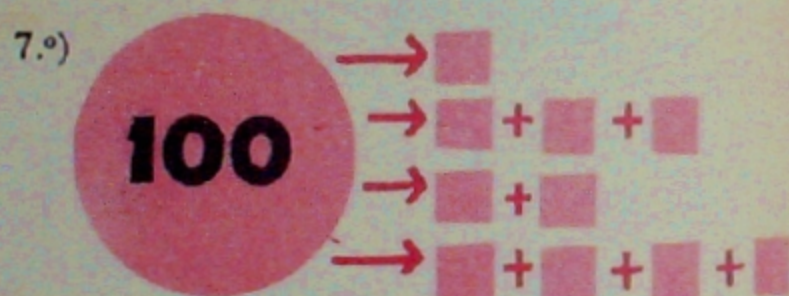
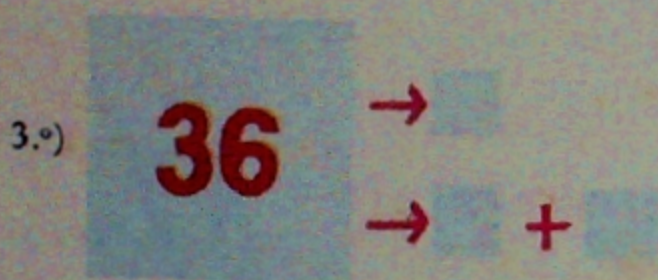
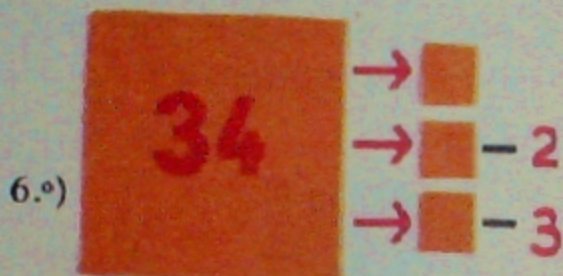
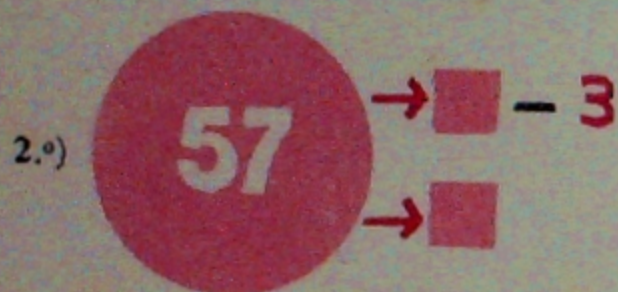
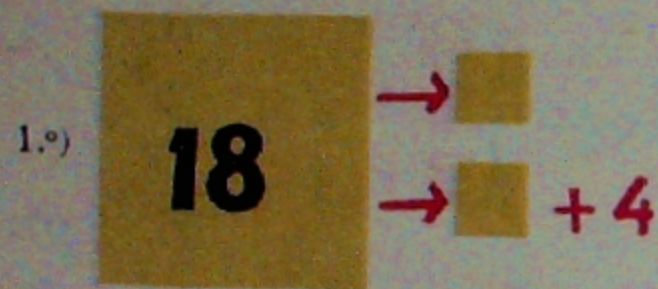
$$\begin{array}{r} 40 \\ -10 \\ \hline 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \overline{) 40} \\ \underline{0} \quad 5 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$\text{Logo } \begin{cases} \text{menor } \square : 5 \\ \text{maior } (\square + \square + \square + \square + \square) + 10 : 35 \\ \hline 40 \text{ (prova)} \end{cases}$$

NOTA: Esse mesmo problema poderia ter o seguinte enunciado: "A diferença de dois números é 10, e o maior é o quántuplo do menor. Quais são esses números?"

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 26

1. Determine o valor de \square nas seguintes estruturas:



2. Resolva os seguintes problemas:

- 1.º) Reparta uma coleção de 26 discos entre Américo e João, de modo que João receba dois discos a mais que Américo.
- 2.º) Reparta uma coleção de 27 figurinhas entre Néelson e Roberto, de modo que Roberto receba o quábro do que recebe Néelson.
- 3.º) Um pacote de 38 balas vai ser distribuído entre três meninas. A primeira deve receber o quábro do que recebe a segunda e, a terceira, deve receber duas a mais do que a segunda.

- 4.º) Reparta 56 moedas entre Aristides, Sílvio e Pedro, de modo que Aristides e Pedro recebam quantias iguais e Sílvio, o quábro do que recebe cada um dos outros.
- 5.º) A sua bicicleta custou NCr\$ 150,00 mais do que a minha. Ambas custaram NCr\$ 550,00. Qual o preço de cada uma?
- 6.º) Distribua 15 romelos de lã entre Mindu e Lolita, de modo que Mindu receba três romelos a mais que Lolita.
- 7.º) O meu terno custou NCr\$ 9,00 menos que o seu. Os dois juntos custaram NCr\$ 51,00. Qual o preço de cada um?
- 8.º) Divida uma coleção de 126 figurinhas entre três meninas, de modo que as duas primeiras recebam o quábro do que recebe a terceira.
- 9.º) Dois alunos do Curso de Admissão têm juntos 21 anos. O mais velho tem 3 anos a mais que o mais moço. Qual a idade de cada um?
- 10.º) Papai comprou três dicionários por NCr\$ 102,00. Dois deles custaram o mesmo preço e o terceiro custou NCr\$ 12,00 a mais. Qual o preço de cada dicionário?
- 11.º) A soma de dois números é 366 e a sua diferença, 86. Determine esses números.
- 12.º) A soma de dois números é 1.002 e um deles tem 2 unidades a mais que o outro. Quais são os números?
- 13.º) Dois números têm por soma 120 e o maior vale 11 véses o menor. Quais são os números? (Nota: se um deles vale \square , o outro vale $11 \times \square$.)
- 14.º) A soma de dois números pares consecutivos é 58. Determine esses números.
- 15.º) A soma de três números ímpares consecutivos é 57. Determine esses números.
- 16.º) O diretor de um Ginásio vai repartir um prêmio de NCr\$ 145,00 entre os alunos classificados nos dois primeiros lugares, de modo que a diferença entre as importâncias por distribuir seja de NCr\$ 25,00. Quanto cabe a cada um dos alunos?
- 17.º) Reparta NCr\$ 13.000,00 entre três pessoas de modo que a primeira reciba NCr\$ 100,00 a mais que a segunda e esta NCr\$ 1.200,00 a mais do que a terceira.
- 18.º) O dono de uma cantina escolar compra 35 dúzias de litros de água mineral a NCr\$ 2,00 a dúzia. Junta a essa água 40 litros de groselha a NCr\$ 4,00 o litro; para obter um lucro de NCr\$ 230,00, por quanto deverá vender o litro de refrêscos?
- 19.º) Um negociante comprou certo número de automóveis, contando revendê-los a NCr\$ 1.560,00 cada um, a fim de lucrar NCr\$ 61.200,00. Todavia, como só conseguiu revendê-los a NCr\$ 1.380,00 cada um, ganhou apenas NCr\$ 39.600,00. Quantos automóveis comprou?
- 20.º) Um negociante comprou 20 peças de linho e 30 de casimira, pagando por tudo NCr\$ 12.800,00. As peças de casimira custaram o quábro das peças de linho. Qual o preço de cada tecido?
- 21.º) Um ciclista persegue outro ciclista. A distância que os separa é 6km. Pergunta-se em quanto tempo o primeiro alcançará o segundo, sabendo-se que o segundo corre 48km por hora e, o outro, 36.
- 22.º) Um barbeiro cortou 13 cabelos e fez 21 barbas num dia. Cada barba custou NCr\$ 1,00 e sabe-se que ele ainda recebeu nesse dia NCr\$ 14,00 de gorjeta. Tendo ganho no fim do dia a quantia total de NCr\$ 61,00, pergunta-se o preço do corte de cabelo.
- 23.º) Dois entregadores percorrem juntos por dia 144km. No fim de 18 dias o primeiro deles percorreu 972km. Quanto andou o segundo dos entregadores?
- 24.º) Dois operários ganham juntos por semana NCr\$ 135,00. No fim de 9 semanas de trabalho o primeiro recebe NCr\$ 675,00. Quanto recebe o segundo por semana?

- 25.º) No parquinho de diversões paga-se NCr\$ 2,00 por cada tiro que se erra e recebe-se NCr\$ 5,00 por cada tiro que se acerta. Depois de dar 13 tiros, Luís recebeu NCr\$ 30,00. Quantos tiros êle acertou?
- 26.º) Vovô tem 74 anos e nós — seus quatro netos — temos respectivamente 12, 11, 7 e 5 anos. No fim de quantos anos a idade do vovô sera igual à soma de nossas idades?
- 27.º) Quando os gêmeos Rômulo e Remo nasceram, Cícero tinha 7 anos. Atualmente a soma das idades dos três é 76 anos. Qual é a idade atual de Cícero?
- 28.º) Um fazendeiro compra um lote de 30 vacas e 20 cavalos, tudo por NCr\$ 4.600,00. Determine o preço pago por uma vaca e por um cavalo, sabendo-se que o preço deles juntos é NCr\$ 180,00.
- 29.º) Quais são os três números que satisfazem as seguintes condições: a soma dos dois primeiros é 200; a soma dos dois últimos é 150 e a soma do primeiro com o último é 190?
- 30.º) Tem-se quatro números tais que: a soma dos três primeiros é 843; a soma dos três últimos é 1.217; a soma dos dois primeiros e o último é 941, e a do primeiro e os dois últimos, 1.028. Quais são os números?
- 31.º) A soma de dois números é 242 e a sua diferença contém 9 vezes o menor. Qual é o número maior?
- 32.º) "Invente" pelo menos um problema para cada uma das oito estruturas desenhadas no Exercício 1 deste Grupo e, a seguir, resolva-os.

POTENCIAÇÃO

27. Operação: potenciação; resultado: potência

Produtos que apresentam fatores todos iguais, como por exemplo:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3$$

podem ser indicados, abreviadamente, escrevendo-se o fator igual uma só vez e, a seguir, um pouco mais acima, em tamanho menor, o número de fatores iguais. Assim:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

que se lê: "três elevado à quarta potência" ou "quarta potência de três".

O fator que se repete é chamado *base* da potência e o número de fatores repetidos, *expoente*. Estes produtos especiais dão lugar a uma nova operação, denominada *potenciação*, e cujo resultado (81, no exemplo), se chama *potência*.

$$\begin{array}{c} \text{expoente} \\ \nearrow \\ 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \\ \downarrow \\ \text{base} \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \qquad \qquad \qquad \text{potência} \end{array}$$

A segunda potência de um número é também denominada *quadrado* e a terceira, *cubo*. Exemplos:

4^2 , que se lê: "quatro ao quadrado", e se calcula:

$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$

2^3 , que se lê: "dois ao cubo", e se calcula:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

3^5 , que se lê: "três à quinta potência", e se calcula:

$$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Os símbolos, tais como: 5^1 ou 5^0 , não teriam significado de acordo com a definição dada de *potência*, por não existirem produtos com um só fator ou nenhum. Todavia, convencionou-se que:

1.º) $5^1 = 5$; isto é, a *potência de expoente 1 é igual à própria base*.

Nestas condições, todo número pode ser considerado como *potência de expoente 1*. Assim, por exemplo, escreve-se:

$$7 \text{ em vez de } 7^1; 12 \text{ em vez de } 12^1$$

2.º) $5^0 = 1$, isto é, a *potência de expoente 0 é igual a 1*. Outros exemplos:

$$7^0 = 1; 12^0 = 1; 8^0 = 1$$

Você pode concluir rapidamente, pelo cálculo das seguintes potências, que:

$$\left. \begin{array}{l} 0^5 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0 \\ 0^2 = 0 \times 0 = 0 \end{array} \right\} \text{as potências de } 0 \text{ são iguais a } 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 \\ 1^8 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 \end{array} \right\} \text{as potências de } 1 \text{ são iguais a } 1$$

ATENÇÃO: Ao símbolo: 0^0 , não se atribui significado algum.

Logo:

Potenciação de dois números naturais, ordenados e não-nulos simultaneamente, é a operação que produz a potência do primeiro desses números.

Então:

o par (5, 2) produz, pela operação *potenciação*, a *potência* 25

↙ ↘
base expoente

o par (2, 5) produz, pela operação *potenciação*, a *potência* 32

↙ ↘
base expoente

- Escreva, sob a forma de *potência indicada*, os seguintes produtos:
1.ª) $2 \times 2 \times 2$; 2.ª) $0 \times 0 \times 0 \times 0$; 3.ª) 8; 4.ª) 1×1 5.ª) $3 \times 3 \times 3 \times 3$
- Escreva, sob a forma de produto de *fatores iguais*, as seguintes potências:
1.ª) 3^2 ; 2.ª) 8^3 ; 3.ª) 10^3 ; 4.ª) 0^8 ; 5.ª) 9^4 ; 6.ª) 1^{10}
- Calcule o valor das potências indicadas:
1.ª) 4^4 ; 2.ª) 1^{30} ; 3.ª) 6^1 ; 4.ª) 2^3 ; 5.ª) 0^8 ; 6.ª) 9^0 (cuidado!)
- Qual é a *soma* da quinta potência de 1 com a terceira potência de 0?
- Qual é a diferença entre o quadrado de 3 e o cubo de 2?

28. Expressões numéricas contendo potências indicadas

No cálculo dessas expressões, caso não estejam “pontuadas”, efetuam-se em *primeiro lugar* as *potenciações* e, a seguir, obedece-se à *ordem* já estabelecida para as outras operações. Exemplos:

Calcular o valor das seguintes *expressões*:

1.ª) $4 + 3^2 \times 5$ (não está “pontuada”)

Temos:

$$\begin{aligned} 4 + 3^2 \times 5 &= \\ &= 4 + 9 \times 5 = \\ &= 4 + 45 = 49 \end{aligned}$$

2.ª) $(2^3 + 4) \times 2 - 24$ (está “pontuada”)

Temos:

$$\begin{aligned} (2^3 + 4) \times 2 - 24 &= \\ &= (8 + 4) \times 2 - 24 = \\ &= 12 \times 2 - 24 = \\ &= 24 - 24 = 0 \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 28

Calcule o valor (*numeral mais simples*) das seguintes expressões:

- | | |
|---|--|
| 1.ª) $3^5 + 2^3 \times 1^{10}$ | 6.ª) $(5 + 2)^2 + [3^4 - (2^4 + 3^3)]$ |
| 2.ª) $10^0 - 1 \times 1^5$ | 7.ª) $[7^2 - (3 \times 2^2)] \times 0^3$ |
| 3.ª) $(3^2 - 5) \times 2^2 + 2^3 : 4$ | 8.ª) $[7^2 - (3 \times 2^2)] - 3^3$ |
| 4.ª) $[5^3 - (1^8 \times 5^2)] \times 13^0$ | 9.ª) $1^{10} - [1^0 - [1^8 - (1^7 - 1^6)]]$ |
| 5.ª) $[3^4 + (5 \times 2)^2] - (2^5 \times 1^{10})$ | 10.ª) $9^3 - [3^2 + [(2^4 - 4^2) \times 5^5 + 8^1]]$ |

Divisibilidade

1. Noções gerais; múltiplos e divisores de um número

Um número é divisível por outro quando a sua divisão por esse outro é *exata*. Exemplo:

$$20 \text{ é divisível por } 5 \text{ porque } 20 : 5 = 4$$

Quando um número é *divisível* por outro, diz-se também que ele é *múltiplo* desse outro (expressão, aliás, já estudada por você); o outro, por sua vez, passa a ser seu *divisor* ou *submúltiplo* ou, ainda, *fator*. Assim, por exemplo, de:

$$20 : 5 = 4 \text{ temos } \begin{cases} 20 \text{ é múltiplo tanto de } 5 \text{ como de } 4 \\ 4 \text{ e } 5 \text{ são divisores de } 20 \end{cases}$$

Você já viu que, multiplicando-se um número sucessivamente por: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., isto é, pelos elementos do conjunto N , obtém-se o *conjunto dos múltiplos* desse número, que é um *conjunto infinito*. Exemplos:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

múltiplos de 1: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$
(\times por 1 os elementos de N)

múltiplos de 2: $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots\}$
(\times por 2 os elementos de N) (números pares)

múltiplos de 3: $\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \dots\}$
(\times por 3 os elementos de N)

múltiplos de 4: $\{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, \dots\}$
(\times por 4 os elementos de N)

múltiplos de 5: $\{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, \dots\}$
(\times por 5 os elementos de N)

Você está observando na construção dos múltiplos de um número que:

- 1.º o conjunto dos múltiplos de um número(*) é infinito;
- 2.º 0 é múltiplo de todos os números;
- 3.º todo número é sempre múltiplo de si mesmo e de 1.

Construindo, agora, os divisores de um número, que também constituem um conjunto, como por exemplo:

divisores de 1: {1}	divisores de 7: {1, 7}
divisores de 2: {1, 2}	divisores de 8: {1, 2, 4, 8}
divisores de 3: {1, 3}	divisores de 9: {1, 3, 9}
divisores de 4: {1, 2, 4}	divisores de 10: {1, 2, 5, 10}
divisores de 5: {1, 5}	divisores de 11: {1, 11}
divisores de 6: {1, 2, 3, 6}	divisores de 12: {1, 2, 3, 4, 6, 12}

você conclui que:

- 1.º o conjunto dos divisores de um número é finito;
- 2.º o 1 é divisor de todos os números;
- 3.º o menor divisor de qualquer número é o 1 e o maior é o próprio número.

Assim, por exemplo, temos para o número 12:

12	• múltiplos: {0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...} (conjunto infinito)
	• divisores: {1, 2, 3, 4, 6, 12} (conjunto finito)

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 29

1. Assinale com V as afirmações verdadeiras e com F as falsas:

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1.ª) 12 é divisível por 3 (V) | 6.ª) 323 é múltiplo de 19 |
| 2.ª) 12 é divisível por 5 | 7.ª) 17 é submúltiplo de 323 |
| 3.ª) 3 é divisor de 12 | 8.ª) $42 \begin{array}{r} 7 \\ 0 \ 6 \end{array}$; logo, 42 é múltiplo de 7 |
| 4.ª) 5 é divisor de 12 (F) | 9.ª) $8 : 8 = 1$; logo, 8 é divisor de 1 |
| 5.ª) 323 é múltiplo de 18 | 10.ª) $8 : 8 = 1$; logo, 8 é divisor de 8 |

(*) O zero é exceção, pois o único múltiplo de zero é o próprio zero.

2. Indique o conjunto dos múltiplos de:

- 1.º 7 (Modelo: múltiplos de 7: {0, 7, 14, 21, 28, 35, ...})
- 2.º 8 3.º 10 4.º 15 5.º 2 6.º 3 7.º 6 8.º 17

3. Indique o conjunto dos divisores de:

- 1.º 18 (Modelo: divisores de 18: {1, 2, 3, 6, 9, 18})
- 2.º 8 3.º 11 4.º 15 5.º 20 6.º 2 7.º 24 8.º 17

2. Critérios de divisibilidade

São regras simples que permitem estabelecer rapidamente se um número é ou não divisível por outro, sem fazer a divisão. Estudaremos os critérios de divisibilidade por 2, 3, 5, 9 e 10.

1.º **DIVISIBILIDADE POR 2:** Um número é divisível por 2 quando é **par**, isto é, quando o algarismo das unidades é: 0, 2, 4, 6 ou 8. Exemplos:

12.476 é divisível por 2, porque é par;

829 não é divisível por 2, porque não é par (é ímpar).

OBSERVAÇÃO: Não se esqueça de que 0 é um número par!

2.º **DIVISIBILIDADE POR 3:** Um número é divisível por 3 quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisível por 3. Exemplos:

6.537 é divisível por 3, porque a soma: $6 + 5 + 3 + 7 = 21$, é divisível por 3;

12.653 não é divisível por 3, pois a soma: $1 + 2 + 6 + 5 + 3 = 17$, não o é.

3.º **DIVISIBILIDADE POR 5:** Um número é divisível por 5 quando o algarismo das unidades é zero ou cinco. Exemplos:

13.895, 240, 75, 214.408.120 são números divisíveis por 5 (por quê?), enquanto que 124, 3.677, 168.100.033 não o são (por quê?).

4.º **DIVISIBILIDADE POR 9:** Um número é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisível por 9. Exemplos:

738 é divisível por 9 porque a soma: $7 + 3 + 8 = 18$, é divisível por 9;

44.378 não é divisível por 9, porque a soma: $4 + 4 + 3 + 7 + 8 = 26$, não o é.

NOTA: Todo número que é divisível por 9 é também divisível por 3, mas nem todo número divisível por 3 é divisível por 9. Assim, por exemplo:

738 é divisível por 9 e por 3;
44.373 é divisível por 3 e não o é por 9.

5.º) DIVISIBILIDADE POR 10: Um número é divisível por 10 quando o algarismo das unidades é zero. Exemplos:

12.420 é divisível por 10, enquanto que 3.609 não o é.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 30

1. Verifique se o número 3.615 é divisível por 2, 3, 5, 9 e 10.

Temos:

3.615 • $\left\{ \begin{array}{l} \text{não é divisível por 2, porque não é par;} \\ \text{é divisível por 3, porque a soma } 3 + 6 + 1 + 5 = 15 \text{ o é;} \\ \text{é divisível por 5, porque o algarismo das unidades é 5;} \\ \text{não é divisível por 9, porque a soma (15) não o é;} \\ \text{não é divisível por 10, porque o algarismo das unidades não é 0.} \end{array} \right.$

2. Indique qual o algarismo, de menor valor absoluto, que deve ser colocado no lugar de \square para que: $1\square9$, resulte um número divisível por 3.

Temos: como a soma dos valores absolutos dos algarismos dados é $1 + 9 = 10$, segue-se que, sendo 12 o primeiro número que, depois de 10, é divisível por 3, no lugar de \square deve-se colocar o algarismo 2.

Então, o número procurado é: 129.

3. Indique qual é o menor número que se deve somar ao número 4.437 para se obter um número divisível por 5.

Temos: como o algarismo das unidades de um número, que é divisível por 5, deve ser 0 ou 5, somando 3 ao número obtemos um número divisível por 5, pois: $4.437 + 3 = 4.440$.

4. Que restos pode dar, na divisão por 5, um número que não seja divisível por 5?

Temos: como o resto de uma divisão deve ser sempre menor que o divisor, então os restos da divisão por 5 (de um número que não seja divisível por 5) são: 1, 2, 3 e 4.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 31

1. Verifique se são divisíveis, respectivamente, por 2, 3, 5, 9 e 10 os seguintes números:

1.º) 168 2.º) 459 3.º) 3.600 4.º) 8.433 5.º) 12.349 6.º) 21.540

2. Indique quais os algarismos, de menor valor absoluto, que devem ser colocados no lugar de \square a fim de que:

1.º) $36\square$ seja divisível por 3;
2.º) $3.5\square0$ seja divisível por 9;

3.º) $4.31\square$ seja divisível por 5;
4.º) $67\square.024$ seja divisível por 2 e 3;
5.º) $14.3\square5$ seja divisível por 3 e 5.

3. Qual o menor número que se deve somar a 453 para obter um número divisível por 9?

4. Escreva o menor e o maior número de três algarismos, com exceção do 0, e verifique se são divisíveis por 3.

5. Escreva um número qualquer que comece por 9 e termine por 5. Escreva-o em ordem inversa. Subtraia o segundo do primeiro e verifique se a diferença é divisível por 9.

6. Dentre os seguintes números assinale com V aquele que é divisível por 2 e 3, ao mesmo tempo:

1.º) 344 2.º) 342 3.º) 675 4.º) 12.041 5.º) 36.006

7. Verifique, com exemplos, que:

1.º) a soma de dois números pares é um número par;
2.º) a soma de dois números ímpares é um número par;
3.º) a soma de um número par com um número ímpar é um número ímpar.

8. Que restos pode dar;

1.º) na divisão por 9, um número que não seja divisível por 9?
2.º) na divisão por 9, um número que seja divisível por 9?

NÚMEROS PRIMOS

3. Que é número primo?

Você já sabe que entre os números que existem:

- 1.º) um possui somente um divisor: é o número 1.
- 2.º) outros possuem somente dois divisores diferentes, que são o 1 e o próprio número: como, por exemplo:

números primos	{	2 — divisores: {1, 2}
		3 — divisores: {1, 3}
		5 — divisores: {1, 5}
		7 — divisores: {1, 7}
		11 — divisores: {1, 11}
		13 — divisores: {1, 13}
	
	

3.º) outros, ainda, possuem mais de dois divisores, como por exemplo:

números compostos	{	4 — divisores: [1, 2, 4]
		6 — divisores: [1, 2, 3, 6]
		8 — divisores: [1, 2, 4, 8]
		9 — divisores: [1, 3, 9]
		12 — divisores: [1, 2, 3, 4, 6, 12]

Os números que possuem somente dois divisores diferentes são denominados **Primos**. Portanto, o 1 não é primo, porque possui somente um divisor (ele próprio).

Os números que, além de serem divisíveis por 1 e por si mesmos, são divisíveis por outros números denominam-se **Compostos**.

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 32

- Assinale com (x) os números *primos* e com (xx) os números *compostos*, dizendo por quê:
1.º) 2 2.º) 9 3.º) 15 4.º) 29 5.º) 31 6.º) 33 7.º) 41 8.º) 49
- Além do número 2 existem outros números primos pares? Por quê?
- Qualquer número ímpar é primo? Por quê?
- Escreva quatro números primos menores que 16.
- Escreva cinco números primos maiores que 10.

4. Quantos números primos existem?

O menor número primo é o 2. E o maior? Não existe o maior número primo, isto é, a sucessão dos números primos é **ilimitada** e, portanto, o conjunto dos números primos é **infinito**!

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

5. Reconhecimento de um número primo; processo do crivo; processo geral

Desde a Antiguidade conhecem-se *tábuas* onde são registrados, ordenadamente, todos os números primos menores que um certo número dado. A mais antiga é atribuída a *Eratóstenes*, famoso matemático grego

que viveu antes de Cristo, conhecida pelo nome de **Crivo de Eratóstenes**. Apliquemos esse processo na construção da *tábua dos números primos até 50*:

Escrevem-se todos os números de 2 a 50;

riscam-se todos os múltiplos de 2, a partir de 2;

riscam-se todos os múltiplos de 3, a partir de 3;

riscam-se todos os múltiplos de 5, a partir de 5 (observe que o primeiro múltiplo que ainda não foi riscado é o $25 = 5^2$);

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

e assim da mesma forma com o número 7, onde o primeiro múltiplo que não foi riscado é o $49 = 7^2$. Nessa hora, temos que "parar", pois o primeiro múltiplo ainda não riscado do 11 (número primo seguinte ao 7) seria $11^2 = 121$, que está fora do quadro dos 50 números.

Os números que não foram riscados:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47

constituem o conjunto dos *números primos menores que 50*.

A seguir você encontrará uma *tábua* de números primos menores que 1.000:

TÁBUA DOS NÚMEROS PRIMOS MENORES QUE 1.000

	43	107	181	263	349	433	521	613	701	809	887
2	47	109	191	269	353	439	533	617	709	811	907
3	53	113	193	271	359	443	541	619	719	821	911
5	59	127	197	277	367	449	547	631	727	823	919
7	61	131	199	281	373	457	557	641	733	827	929
11	67	137	211	283	379	461	563	643	739	829	937
13	71	139	223	293	383	463	569	647	743	839	941
17	73	149	227	307	389	467	571	653	751	853	947
19	79	151	229	311	397	479	577	659	757	857	953
23	83	157	233	313	401	487	587	661	761	859	967
29	89	163	239	317	409	491	593	673	769	863	971
31	97	167	241	331	419	499	599	677	773	877	977
37	101	173	251	337	421	503	601	683	787	881	983
41	103	179	257	347	431	509	607	691	797	883	991
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	997

Como você faria para saber se um dado número é *primo*?

Consultando a *tábua de números primos*, por exemplo, seria uma boa resposta. Porém, a *tábua* que consta deste livro só poderá ser útil para números menores que 1.000. Será, pois, necessário consultar *tábuas maiores*, para números maiores que 1.000. Todavia, pode-se reconhecer se *qualquer* número é *primo*, dispensando o emprêgo da *tábua* e usando os conhecimentos que você já tem da *divisibilidade*, por intermédio da seguinte *Regra*:

Divide-se o número dado, sucessivamente, pelos números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Se nenhuma divisão for exata e o quociente obtido for igual ou menor que o divisor, então o número dado é *primo*.

Exemplos:

1. Reconhecer se o número 173 é primo.

Divide-se 173, respectivamente, pelos números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... Algumas dessas divisões podem ser evitadas com a aplicação dos critérios de divisibilidade. Assim, não serão feitas as divisões por 2, 3, 5, pois é fácil reconhecer que 173 não é divisível por eles. As outras divisões serão:

$$\begin{array}{r} 173 \overline{) 7} \\ 33 \quad 24 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 173 \overline{) 11} \\ 63 \quad 15 \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 173 \overline{) 13} \\ 43 \quad 13 \\ \hline 4 \text{ (resto)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \text{ iguais}$$

Como já foi encontrado um quociente (13) igual ao divisor, e a divisão não é exata (resto 4), conclui-se que 173 é *primo*.

2. Reconhecer se o número 641 é primo.

$$\begin{array}{r} 641 \overline{) 7} \\ 11 \quad 91 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 641 \overline{) 11} \\ 91 \quad 58 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 641 \overline{) 13} \\ 121 \quad 49 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 641 \overline{) 17} \\ 131 \quad 37 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 641 \overline{) 19} \\ 71 \quad 33 \\ \hline 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} 641 \overline{) 23} \\ 181 \quad 27 \\ \hline 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 641 \overline{) 29} \\ 61 \quad 22 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \text{ (menor que o divisor 29)}$$

Observamos, nessas divisões, que enquanto os divisores vão aumentando (7, 11, 13, 17, 19, 23 e 19) os quocientes vão diminuindo (91, 58, 49, 37, 33, 27 e 22). Como foi encontrado um quociente (22) menor que o divisor (29) e a divisão não é exata, concluímos ser 641 um número primo.

3. Reconhecer se 5.277 é primo.

Sendo esse número divisível por 3, segue-se que não é primo.

4. Reconhecer se 1.027 é primo.

Por 2, 3, 5, 7 e 11, as divisões feitas não são exatas. Por 13, temos:

$$\begin{array}{r} 1\ 027 \overline{) 13} \\ 117 \quad 79 \\ \hline 00 \end{array} \quad \text{divisão exata}$$

isto é, 1.027 é múltiplo de 13, portanto não é primo.

LEMBRETE AMIGO

O número 1 não é primo.

No processo geral de reconhecimento de um número primo, por intermédio das divisões sucessivas, não basta encontrar um quociente que seja igual ou menor que o divisor; é necessário que a divisão não seja exata!

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 33

- Construa uma *tábua* de números primos até 100.
- Qual é o menor número primo de dois algarismos? Será que se poderia procurar o maior número primo de dois algarismos? Por quê?
- Usando a *tábua* dos números primos, reconheça quais dos seguintes números são primos:
1.º) 119 2.º) 773 3.º) 998 4.º) 997 5.º) 229 6.º) 387
- Sem usar a *tábua* reconheça, aplicando o método geral, quais dos seguintes números são primos:
1.º) 199 2.º) 211 3.º) 373 4.º) 8.758 5.º) 1.181 6.º) 4.313 7.º) 2.349 8.º) 323
9.º) 1.379 10.º) 9.823
- Assinale com (x) os números primos e com (xx) os não-primos:
1.º) 1 2.º) 11 3.º) 111 4.º) 1.111
5.º) 2 6.º) 22 7.º) 222 8.º) 2.222
9.º) 3 10.º) 33 11.º) 333 12.º) 3.333

FATORAÇÃO COMPLETA DE UM NÚMERO

6. Decomposição de um número composto em fatores primos; fatoração completa

Todo número, não-primo, pode ser *decomposto* num *produto de fatores primos*. Assim, por exemplo, o número 60, que é *composto*, é igual ao produto:

$$60 = 2 \times 30$$

Por sua vez, o número 30, que é *composto*, é igual a 2×15 ; logo:

$$60 = 2 \times 2 \times 15$$

Como 15 ainda é número *composto*, pois: $15 = 3 \times 5$, temos, finalmente:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

ou $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Dessa maneira, obteve-se a *fatoração completa de 60*, porque todos os fatores da decomposição são *primos*.

Na prática, você pode fatorar *completamente* um número composto dividindo-o pelo seu *menor divisor primo*: dividindo a seguir o quociente obtido pelo seu *menor divisor primo*, e assim por diante até encontrar o quociente 1. O número composto será igual ao *produto de todos os divisores primos encontrados*.

A disposição prática dessas divisões é a seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \\ 60 = 2^2 \times 3 \times 5 \end{array}$$

Outros exemplos:

Decompor os números 1.144 e 2.532 em seus fatores primos (fatoração completa):

$$\begin{array}{r|l} 1.144 & 2 \\ 572 & 2 \\ 286 & 2 \\ 143 & 11 \text{ (Ver nota)} \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$1.144 = 2^3 \times 11 \times 13$$

$$\begin{array}{r|l} 2.532 & 2 \\ 1.266 & 2 \\ 633 & 3 \\ 211 & 211 \text{ (Ver nota)} \\ 1 & \end{array}$$

$$2.532 = 2^2 \times 3 \times 211$$

NOTA: É necessário verificar, com as regras já estudadas (ou com a tábua), se os números 143 ou 211 são ou não primos, pois, à primeira vista, podem enganar.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 34

Decomponha em fatores primos (*fatoração completa*) os seguintes números:

1.º) 72	2.º) 89	3.º) 128	4.º) 243	5.º) 750
6.º) 1.001	7.º) 1.260	8.º) 1.500	9.º) 991	10.º) 7.007

7. Aplicações: Quantos divisores tem um número? Quais são eles?

Lembre-se, sempre, de que um número possui um *conjunto finito de divisores*. A decomposição de um número em seus fatores primos permite determinar o *total* de seus divisores e *quais* são eles.

O *total* de divisores de um número é dado pela seguinte Regra:

Decompõe-se o número em fatores primos (em forma de potência indicada); soma-se 1 a cada expoente das potências e multiplicam-se os resultados.

Exemplos: Determinar o *total* de divisores de:

1.º) 60

Temos: $\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ Como: $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$
e os expoentes das potências indicadas são:
 $\begin{array}{ccc} & 2 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 & 1 \\ & 3 & 2 & 2 \end{array}$
soma-se 1 a cada um deles:
 $\begin{array}{ccc} & 3 & 2 & 2 \end{array}$
e multiplicam-se os resultados:
 $3 \times 2 \times 2 = \boxed{12}$

Concluimos que 12 é o *total* de divisores de 60.

2.º) 144

Temos: $\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}$ $144 = 2^4 \times 3^2$
expoentes: $\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ + 1 & \swarrow \searrow \\ & 5 & 3 \end{array}$

Logo, 144 possui um *total* de $5 \times 3 = 15$ divisores.

Para obter, agora, um a um, *todos os divisores* de um número, por exemplo de 60, aplica-se o seguinte *dispositivo prático*:

60	2	2
30	2	4
15	3	3 - 6 - 12
5	5	5 - 10 - 20 - 15 - 30 - 60
1		

Faz-se um traço vertical à direita dos fatores da decomposição e escreve-se 1 um pouco acima da linha do primeiro fator primo (2, no exemplo). Os divisores serão obtidos, a partir de 1, multiplicando cada um dos fatores primos (que estão à esquerda do traço) pelos números que estiverem à direita do traço e situados acima dele. Os divisores obtidos mais de uma vez não são repetidos.

Os 12 divisores de 60, escritos em ordem, são pois: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60.

Quais são todos os divisores de 144?

Temos:

144	2	2
72	2	4
36	2	8
18	2	16
9	3	3 - 6 - 12 - 24 - 48
3	3	9 - 18 - 36 - 72 - 144
1		

Portanto, os 15 divisores de 144 são: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72 e 144.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 35

- Quantos divisores (dê somente o total) tem cada um dos seguintes números:
1.º) 30 2.º) 72 3.º) 180 4.º) 210 5.º) 380 6.º) 490 7.º) 581 8.º) 1.200
- Quais são os divisores (dê o conjunto de todos os divisores) de cada um dos seguintes números:
1.º) 36 2.º) 48 3.º) 90 4.º) 150 5.º) 180 6.º) 240 7.º) 320 8.º) 1.000

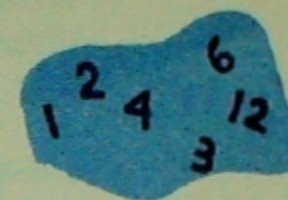
OPERAÇÃO: INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

8. Conceito

Consideremos, por exemplo, os conjuntos dos:

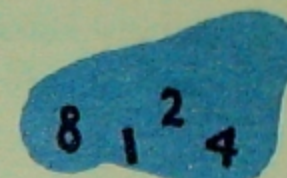
divisores de 12: {1, 2, 3, 4, 6, 12}

divisores de 8: {1, 2, 4, 8}

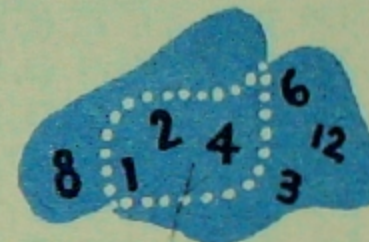


Quais são os *divisores comuns* de 12 e 8?

São aqueles que pertencem, *ao mesmo tempo*, aos dois conjuntos de divisores, ou seja, os que formam o conjunto: {1, 2, 4}, pois 1, 2 e 4 figuram nos dois conjuntos. O conjunto {1, 2, 4} é denominado *conjunto-intersecção* dos conjuntos dados.



Portanto, a operação *intersecção*, que se indica por \cap (lê-se: "inter"), entre dois conjuntos é aquela que determina um conjunto cujos elementos pertencem a um e ao outro conjunto ao mesmo tempo.



No exemplo considerado, temos:

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cap \{1, 2, 4, 8\} = \{1, 2, 4\}$$

É óbvio que você pode falar na operação *intersecção* de dois conjuntos quaisquer. Assim, por exemplo:

$$\{a, b, e, m, n\} \cap \{a, c, d, e\} = \{a, e\}$$

$$\{3, 12, 25, 8\} \cap \{5, 10, 25\} = \{25\}$$

$$\{\text{Manuel, João, Maria}\} \cap \{\text{João, Luís, Manuel}\} = \{\text{Manuel, João}\}$$

$$\{\text{Humberto, Juraci}\} \cap \{\text{Carlos, Ademar}\} = \{\} = \emptyset \text{ (vazio, porque não há nome comum)}$$

$$\{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{\} = \emptyset \text{ (vazio, porque não há número comum, isto é, que seja ímpar e par ao mesmo tempo!)}$$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 36

- Determine pela operação *intersecção* os *divisores comuns* de:

1.º) 12 e 18

Modêlo: divisores de 12: {1, 2, 3, 4, 6, 12}

divisores de 18: {1, 2, 3, 6, 9, 18}

$$\text{divisores comuns: } \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cap \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \{1, 2, 3, 6\}$$

2.º) 27 e 10

Modelo: divisores de 27 : {1, 3, 9, 27}
divisores de 10 : {1, 2, 5, 10}
divisores comuns : {1, 3, 9, 27} \cap {1, 2, 5, 10} = {1}

3.º) 27, 18 e 36

Modelo: divisores de 27 : {1, 3, 9, 27}
divisores de 18 : {1, 2, 3, 6, 9, 18}
divisores de 36 : {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}
divisores comuns: {1, 3, 9, 27} \cap {1, 2, 3, 6, 9, 18} \cap {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36} = {1, 3, 9}

4.º) 16 e 8

5.º) 12, 16 e 24

6.º) 15 e 7

7.º) 25, 45, 15 e 30

2. Determine o conjunto-intersecção de:

- 1.º) $\{x, y, z, t\} \cap \{x, a, y\} =$
- 2.º) $\{3, 5, 7, 9\} \cap \{3, 5, 7\} =$
- 3.º) $\{3, 5, 7, 9\} \cap \{3, 5, 7, 9\} =$
- 4.º) $\{8, 9\} \cap \{8\} \cap \{7, 8, 9\} =$
- 5.º) $\{1, 3, 5\} \cap \{0, 2\} \cap \{7, 8, 9\} =$ (cuidado!)
- 6.º) $\{\text{Lucília, Ana, Elza, Renata}\} \cap \{\text{Ana, Renata}\} =$
- 7.º) $\{\text{paletó, camisa, calça}\} \cap \{\text{calça}\} =$
- 8.º) $\{\text{Alcides, Benedito}\} \cap \{\text{Benedito, Orlando, Rui}\} =$

3. Determine $A \cap B$ nos seguintes casos:

- 1.º) $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 5\}$
- 2.º) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7\}$
- 3.º) $A = \{0\}$ e $B = \{0\}$
- 4.º) $A = \{ \}$ e $B = \{a, b\}$ (cuidado!)
- 5.º) $A = \{0, 2\}$ e $B = \{ \}$ (cuidado!)
- 6.º) $A = \{1, 2, 4\}$ e $B = \{1\}$

9. Divisores comuns; números primos entre si

Você já sabe que:

- 1.º) os divisores comuns de dois (ou mais) números são aqueles que são divisores, ao mesmo tempo, desses números;
- 2.º) a operação intersecção de conjuntos permite determinar os divisores comuns de dois (ou mais) números;

e observou que o 1 é o único divisor comum de todos os números.

Se dois ou mais números têm somente o 1 como divisor comum, então os números são denominados *primos entre si*. Assim, por exemplo, os números 12 e 7, cujo único divisor comum é 1, são *primos entre si*, pois:

divisores de 12: {1, 2, 3, 4, 6, 12}

divisores de 7: {1, 7}

e $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cap \{1, 7\} = \{1\}$

NOTA: Dois números podem ser *primos entre si* sem que, necessariamente, cada um deles seja primo. No exemplo dado, 12 e 7 são primos entre si e o 12 não é primo.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 37

Assinale com (x) o grupo constituído por números primos entre si:

- | | |
|-----------------|----------------------|
| 1.º) 4 e 12 | 5.º) 3, 9, 18 e 20 |
| 2.º) 4, 12 e 15 | 6.º) 236 e 7 |
| 3.º) 6, 7 e 8 | 7.º) 231, 14 e 7 |
| 4.º) 6, 8 e 10 | 8.º) 10, 100 e 1.000 |

MÁXIMO DIVISOR COMUM

10. Operação: maximização; resultado: máximo divisor comum

Chama-se *máximo divisor comum* de dois ou mais números ao maior dos divisores comuns desses números. No exemplo considerado, onde os divisores comuns de 12 e 8 formavam o conjunto: {1, 2, 4}, o *máximo divisor comum* é o 4 (que é o maior elemento do conjunto-intersecção).

A operação que permite determinar o *máximo divisor comum* de dois ou mais números é denominada **Maximização**. Indicação:

$$\text{m.d.c. } (12, 8) = 4$$

$$\text{ou } 12 \text{ D } 8 = 4$$

Logo:

Maximização de dois números naturais(*) é a operação que produz o *máximo divisor comum* desses números.

(*) Os números são supostos não simultaneamente nulos.

Então:

o par (12, 8), pela operação *maximação*, produz o *máximo divisor comum* 4
o par (7, 3), pela operação *maximação*, produz o *máximo divisor comum* 1
(Verifique!)

Outros exemplos:

1. Determinar o *máximo divisor comum* dos números 12 e 18.

Temos:

divisores de 12: {1, 2, 3, 4, 6, 12}

divisores de 18: {1, 2, 3, 6, 9, 18}

divisores comuns: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cap \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \{1, 2, 3, 6\}$
↓
máximo divisor comum

Logo: $12 \text{ D } 18 = 6$

2. Determinar o *máximo divisor comum* dos números 4 e 5.

Temos:

divisores de 4: {1, 2, 4}

divisores de 5: {1, 5}

divisores comuns: $\{1, 2, 4\} \cap \{1, 5\} = \{1\}$ (*único divisor comum e máximo*)
↓
máximo divisor comum

Logo: $4 \text{ D } 5 = 1$

NOTA: Outra maneira de você dizer que dois números são *primos entre si* (4 e 5, por exemplo) é dizer que o *máximo divisor comum* entre eles é 1.

3. Determinar o *máximo divisor comum* dos números 30, 24 e 18.

Temos:

divisores de 30: {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}

divisores de 24: {1, 2, 3, 4, 6, 12, 24}

divisores de 18: {1, 2, 3, 6, 9, 18}

divisores comuns:
 $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\} \cap \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \{1, 2, 3, 6\}$
↓
máximo divisor comum

Logo: $\text{m.d.c.}(30, 24, 18) = 6$

ou $30 \text{ D } 24 \text{ D } 18 = 6$

1. Escreva o conjunto dos divisores de cada um dos números:

1.º) 6 2.º) 14 3.º) 15 4.º) 18 5.º) 21 6.º) 28 7.º) 30 8.º) 48

2. Usando a operação *intersecção*, determine o conjunto dos *divisores comuns* dos seguintes números:

1.º) 6 e 15 2.º) 6, 30 e 48 3.º) 28, 21 e 14 4.º) 48, 28, 14 e 6

3. Qual é o *máximo divisor comum* dos números dos exercícios 1.º, 2.º, 3.º e 4.º do exercício 2?

4. Calcule:

1.º) $24 \text{ D } 16$ (o mesmo que: $\text{m.d.c.}(24, 16)$)

2.º) $9 \text{ D } 12$ 3.º) $8 \text{ D } 6 \text{ D } 4$ 4.º) $20 \text{ D } 15 \text{ D } 25 \text{ D } 30$

11. Técnicas de cálculo para determinar o máximo divisor comum

Destacamos duas:

1.ª) *fatoração completa*

2.ª) *divisões sucessivas*

1.ª) *Fatoração completa*: Decompõem-se os números em seus fatores primos e, a seguir, multiplicam-se os *fatores primos comuns*, tomados cada um com o *menor dos expoentes*.

Exemplos:

1. Calcular o *m.d.c.* (18, 24, 30)

Como: $\left. \begin{array}{l} 18 = 2^1 \times 3^2 \\ 24 = 2^3 \times 3^1 \\ 30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{fatores primos comuns (2 e 3) com os menores expoentes: } 2^1 \text{ e } 3^1$

Logo: $\text{m.d.c.}(18, 24, 30) = 2^1 \times 3^1 = 6$

2. Calcular o *m.d.c.* (693, 108, 90)

Como: $\left. \begin{array}{l} 693 = 3^2 \times 7^1 \times 11^1 \\ 108 = 2^2 \times 3^3 \\ 90 = 2 \times 3^2 \times 5^1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{fatores primos comuns (o único é o 3) com os menores expoentes: } 3^2$

Portanto: $\text{m.d.c.}(693, 108, 90) = 3^2 = 9$

2.ª) *Divisões sucessivas*: Se forem dois números, divide-se o maior pelo menor; se a divisão fôr exata, o *máximo divisor comum* será o *menor* deles. Se a divisão não fôr exata, divide-se o menor pelo *resto* da divisão anterior, e assim sucessivamente. O *último divisor* será o *máximo divisor comum* procurado.

Exemplos:

1.º) Calcular o m.d.c. (693, 108, 90)

Primeiramente calcula-se o máximo divisor comum entre 693 e 108:

$$\begin{array}{r} 693 \overline{) 108} \\ \underline{45} \\ 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 108 \overline{) 45} \\ \underline{18} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \overline{) 18} \\ \underline{9} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \overline{) 9} \\ \underline{0} \\ 2 \end{array}$$

disposição prática:

693	108	45	18	9
45	18	9	0	

A seguir, determina-se o máximo divisor comum de 90 e do primeiro resultado encontrado: 9, isto é:

$$\begin{array}{r} 90 \overline{) 9} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array} \quad \text{Portanto: m.d.c. (693, 108, 90) = } \boxed{9}$$

2.º) Calcular o m.d.c. (12, 7)

Temos:

12	7	5	2	1
5	2	1	0	

CASOS PARTICULARES:

1.º) O *máximo divisor comum* de dois números, em que o maior é *divisível* pelo menor, é o *menor* deles. Exemplos:

$$\text{m.d.c. (8, 4) = 4; m.d.c. (1.296, 2) = 2}$$

2.º) *Não se esqueça*: o m.d.c. de dois números *primos entre si* é 1! Exemplos:

$$\text{m.d.c. (34, 35) = 1; m.d.c. (8, 5) = 1}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 39

1. Usando as técnicas: 1.ª) da fatoração completa, 2.ª) das divisões sucessivas, calcule o *máximo divisor comum* dos seguintes grupos de números:

- a) 30, 16 b) 60, 35 c) 120, 384
d) 144, 256, 120 e) 185, 222, 259 f) 128, 136, 256, 440

2. Complete as seguintes sentenças, aplicando resultados conhecidos (casos particulares):

- 1.ª) m.d.c. (4, 7) = ... 4.ª) m.d.c. (3, 6, 9) = ...
2.ª) m.d.c. (10, 5) = ... 5.ª) m.d.c. (3.816, 2) = ...
3.ª) m.d.c. (8, 9, 10) = ... 6.ª) m.d.c. (111, 112) = ...

3. No cálculo do m.d.c. de dois números pelas divisões sucessivas, conhece-se o esquema:

	1	2	6	
	432	72	0	Quais são os números?

4. Resolva os seguintes problemas de aplicação do m.d.c.:

- 1.º) Paulinho possui três pedaços de madeira que medem, respectivamente: 36cm, 60cm e 48cm, e quer cortá-las em pedaços iguais e do *maior comprimento possível*. Qual deve ser o comprimento de cada parte?
(Sugestão: Basta determinar o m.d.c. (36, 60, 48) = 12, para saber que é de 12cm o comprimento da parte procurada, pois 12 é o *maior* dos divisores comuns a 36, 60 e 48.)
- 2.º) Um terreno de forma retangular tem as dimensões: 24m de frente e 56m de fundo. Qual deve ser o comprimento da *maior corda* que sirva para medir *exatamente* as duas dimensões?
- 3.º) Quer-se repartir três peças de fazenda que medem, respectivamente, 90m, 108m e 144m, em partes iguais e do maior tamanho possível. Determine o comprimento de cada parte e o número de partes que cada peça contém.

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

12. Múltiplos comuns; intersecção de conjuntos infinitos

Com exceção do zero, que é *múltiplo* de todos os números, qual é o conjunto dos múltiplos de 4?

Temos:

múltiplos de 4: {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ...} (é um conjunto *infinito*...)

E os múltiplos de 6?

Temos:

múltiplos de 6: {6, 12, 18, 24, 30, 36, ...} (idem)

Os múltiplos comuns de 4 e 6 são aqueles que pertencem, ao mesmo tempo, aos dois conjuntos e, portanto, formam o conjunto-intersecção:
 $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \dots\} \cap \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots\} = \{12, 24, 36, \dots\}$

Observe que o conjunto dos múltiplos comuns de dois números é infinito, razão por que não pode existir o "maior múltiplo comum"; existe, porém, o *mínimo múltiplo comum*, que será definido a seguir.

13. Operação: minimização; resultado: mínimo múltiplo comum

O menor dos múltiplos comuns (com exceção do zero) de dois (ou mais) números é denominado *mínimo múltiplo comum* desses números. No exemplo considerado, onde os múltiplos comuns de 4 e 6 formam o conjunto infinito: {12, 24, 36, ...}, o *mínimo múltiplo comum* é o 12 (que é o menor elemento do conjunto-intersecção).

A operação que permite determinar o *mínimo múltiplo comum* de dois ou mais números é denominada **Minimização**. Indicação:

$$\begin{aligned} \text{m.m.c. (4, 6)} &= 12 \\ \text{ou } 4 \text{ M } 6 &= 12 \end{aligned}$$

Logo:

Minimização de dois números naturais(*) é a operação que produz o *mínimo múltiplo comum* desses números.

Então:

o par (4, 6) pela operação *minimização*, produz o *mínimo múltiplo comum* 12
o par (7, 3) pela operação *minimização*, produz o *mínimo múltiplo comum* 21
(Verifique!)

(*) Os números são supostos não simultaneamente nulos.

Outros exemplos:

1. Determinar o *mínimo múltiplo comum* dos números 4 e 5.

Temos:

múltiplos de 4: {4, 8, 12, 16, 20, 24, ...}

múltiplos de 5: {5, 10, 15, 20, 25, 30, ...}

múltiplos comuns: {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, ...} \cap
 \cap {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, ...} = {20, 40, ...}

↓
mínimo múltiplo comum

Logo: $4 \text{ M } 5 = 20$

NOTA: Observe que os números 4 e 5, primos entre si, têm por *mínimo múltiplo comum* o produto deles (20).

2. Determinar o *mínimo múltiplo comum* de 4, 6 e 8.

Temos:

múltiplos de 4: {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, ...}

múltiplos de 6: {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ...}

múltiplos de 8: {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, ...}

múltiplos comuns:

{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, ...} \cap
 \cap {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ...} \cap {8, 16, 24, 32, 40, 48, ...} =
= {24, 48, ...}

↓
mínimo múltiplo comum

Logo: $4 \text{ M } 6 \text{ M } 8 = 24$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 40

- Escreva o conjunto dos múltiplos (com exceção do 0) de cada um dos números
1.º) 3 2.º) 5 3.º) 10 4.º) 2 5.º) 4 6.º) 6 7.º) 12 8.º) 15
- Usando a operação *intersecção*, determine o conjunto dos múltiplos comuns (com exceção do 0) dos seguintes números:
1.º) 3 e 6 2.º) 4, 6 e 12 3.º) 5, 10 e 15 4.º) 4, 6 e 24
- Qual é o *mínimo múltiplo comum* em cada um dos exercícios do exercício 2?
- Calcule:
1.º) 6 M 9 (o mesmo que m.d.c. (6, 9))
2.º) 5 M 2 M 6 3.º) 4 M 8 M 12 4.º) 3 M 6 M 9 M 18

14. Técnicas de cálculo para determinar o mínimo múltiplo comum

É usual a técnica da *fatoração completa*:

Decompõem-se os números em fatores primos e, a seguir, multiplicam-se os fatores primos *comuns* e *não-comuns*, tomados cada um com o maior dos expoentes.

Exemplo: Calcular o m.m.c. (30, 12)

Temos:

$$\begin{array}{l} 30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \\ 12 = 2^2 \times 3^1 \end{array} \quad \text{onde } \bullet \begin{cases} \text{fatores com o maior expoente: } 2^2 \text{ e } 3^1 \\ \text{fator não-comum: } 5^1 \end{cases}$$

Logo: $\text{m.m.c. (30, 12)} = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60$

Esse cálculo pode ser efetuado com o seguinte *dispositivo prático*:

30, 12	2	onde m.m.c. (30, 12) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 4 \times 3 \times 5 = 60$
15, 6	2	
15, 3	3	
5, 1	5	
1, 1		

CASOS PARTICULARES:

1.º O *mínimo múltiplo comum* de dois números, em que o maior é *divisível* pelo menor, é o maior deles. Exemplos:

$$\text{m.m.c. (8, 4)} = 8 \quad \text{m.m.c. (1.296, 2)} = 1.296$$

2.º *Não se esqueça*: o *mínimo múltiplo comum* de dois números *primos* entre si é o *produto* deles! Exemplos:

$$\text{m.m.c. (8, 5)} = 40 \quad \text{m.m.c. (34, 35)} = 1.190$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 41

1. Usando a técnica da *fatoração completa*, calcule o *mínimo múltiplo comum* dos seguintes grupos de números:

- | | | |
|---------------------|-------------------|----------------------|
| a) 24, 30 | b) 15, 8, 12 | c) 45, 75, 84 |
| d) 48, 120, 96, 144 | e) 16, 30, 50, 12 | f) 8, 20, 32, 16, 10 |

2. Complete as seguintes sentenças:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1.ª) m.m.c. (4, 7) = ... | 4.ª) m.m.c. (3, 6, 9) = ... |
| 2.ª) m.m.c. (10, 5) = ... | 5.ª) m.m.c. (3.816, 2) = ... |
| 3.ª) m.m.c. (8, 9, 10) = ... | 6.ª) m.m.c. (11, 12) = ... |

3. Determine os dois *menores números* pelos quais devemos multiplicar, respectivamente, 24 e 36, a fim de obtermos *produtos iguais*.

(*Modelo*) Sendo o m.m.c. (24, 36) = 72

e como: $72 : 24 = 3$ e $72 : 36 = 2$

conclui-se que 2 e 3 são os números procurados. Por quê?)

4. Calcule os dois *menores números* pelos quais devemos multiplicar os números 60 e 78, a fim de obtermos *produtos iguais*.

5. Determine todos os números compreendidos entre 1.000 e 3.000, e que sejam *múltiplos comuns* de 48, 60 e 72.

(*Sugestão*: Basta determinar o m.m.c. (48, 60, 72) = 720 e procurar os múltiplos de 720 compreendidos entre 1.000 e 3.000, isto é: $720 \times 2 = 1.440$, $720 \times 3 = 2.160$ e $720 \times 4 = 2.880$. Os demais múltiplos ultrapassam 3.000.)

6. Calcule todos os números compreendidos entre 500 e 2.000, e que sejam *múltiplos comuns* de 25, 50 e 60.

7. Numa República em que o presidente permanece 4 anos em seu cargo, os senadores 6 anos e os deputados 3, se em 1.960 houve eleições para os três cargos, qual é o próximo ano em que se realizarão novamente as eleições para esses cargos *simultaneamente*?

(*Sugestão*: Como o m.m.c. (4, 6, 3) = 12, segue-se que depois de decorridos 12 anos se realizarão novamente as eleições simultâneas para os três cargos, isto é: 1972.)

8. Três navios fazem viagens entre dois portos nacionais. O primeiro cada 4 dias, o segundo cada 6 e o terceiro cada 9 dias. Tendo esses navios partido juntos, depois de quantos dias voltarão a sair novamente juntos, pela primeira vez?

9. Duas rodas de uma engrenagem têm 14 e 21 dentes, respectivamente. Cada roda tem um dente estragado. Se num dado instante estão em contacto os dois dentes estragados, depois de quantas voltas se repete novamente esse encontro, pela primeira vez?

10. Dois ciclistas percorrem uma pista circular no mesmo sentido. O primeiro a percorre em 36 segundos e o segundo em 30 segundos. Tendo os ciclistas partido juntos, pergunta-se quando se encontrarão novamente no ponto de partida pela primeira vez e quantas voltas dará cada um.