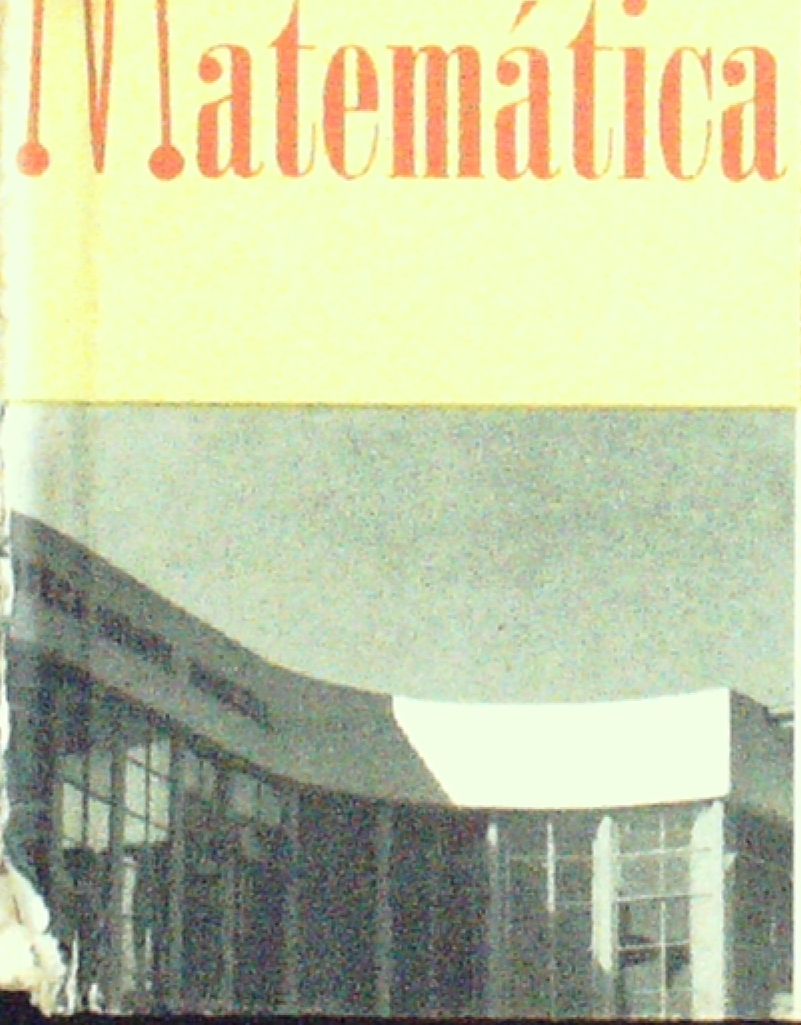
OSVALDO
SANGIORGI

Matemática e estatística



Para os Institutos
de Educação e
Escolas Normais

MATEMÁTICA

E

ESTATÍSTICA

De côrdo com os programas em vigor, conforme Portaria N.º 49, de 1/12/54, do Diretor Geral do Dep. de Educação do Estado de São Paulo.

Exemplar Nº 10143

1963

Obra executada nas oficinas da
São Paulo Editora S. A. — São Paulo, Brasil

OSVALDO SANGIORGI

Licenciado em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. Professor do Instituto Feminino de Educação "Padre Anchieta". Professor de Geometria Analítica da Faculdade de Filosofia, da Universidade Mackenzie.

MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

para os

INSTITUTOS DE EDUCAÇÃO

e

ESCOLAS NORMAIS

15.ª edição

(Revista)

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

DO MESMO AUTOR

Matemática, primeira série ginasial.
Matemática, segunda série ginasial.
Matemática, terceira série ginasial.
Matemática, quarta série ginasial.
Programa de Admissão (em colaboração).

✦

EDIÇÕES DA
COMPANHIA EDITORA NACIONAL
Rua dos Gusmões, 639 - São Paulo 2, SP

ÍNDICE

CAPÍTULO SEGUNDO

GEOMETRIA PRÁTICA

CAPÍTULO TERCEIRO

NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

CURSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSÔRES PRIMÁRIOS*

I) ARITMÉTICA PRÁTICA

1) Número inteiro: *a*) Sucessão dos números. Confronto. Sistema de numeração. Representações geométricas e literais. *b*) Operações fundamentais. Propriedades respectivas. *c*) Estabelecimento de problemas típicos. *d*) Potenciação. Propriedades. *e*) Divisibilidade aritmética, múltiplos e divisores. Critérios de divisibiliade. Números primos. Máximo divisor comum. Mínimo múltiplo comum. *f*) Aplicações.

2) Número fracionário: *a*) Noção intuitiva da fração. Frações próprias, impróprias e aparentes. Propriedades das frações. Simplificação e reduções. Confronto. *b*) Operações fundamentais. Expressões aritméticas fracionárias. *c*) Estabelecimento de problemas típicos. *d*) Frações decimais. Operações. Conversões. Números decimais periódicos. Geratrizes. *e*) Aplicações.

3) Número racional e número irracional: *a*) Grandezas comensuráveis. Números racionais. *b*) Grandezas incomensuráveis. Números irracionais. Prática de raiz quadrada.

4) Aplicações com uso da Álgebra: Métodos aritmético e algébrico, de resolução de problemas típicos.

5) Sistemas de medidas decimais e não decimais. Nomenclatura e notações oficiais.

6) Noções de aritmética comercial: *a*) Grandezas proporcionais. *b*) Regras de três. *c*) Porcentagem, taxa milesimal. *d*) Juros simples. Operações com o montante. Divisor fixo. Desconto. Moeda e Câmbio. Aplicações.

II) GEOMETRIA PRÁTICA

1) Noção de eqüivalência entre figuras geométricas planas. Áreas das principais figuras planas. Teorema de Pitágoras e suas aplicações.

2) Noção de eqüivalência entre figuras geométrica sólidas. Generalidades sôbre os principais sólidos geométricos; definições, áreas das superfícies lateral e total, volumes respectivos.

III) NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

1) Origem e natureza dos dados estatísticos.
2) Levantamento estatístico.
3) Distribuições de freqüência.
4) Processos básicos de representações gráficas. Curvas de freqüência
5) Medidas de posição: a média aritmética simples e ponderada; a mediana, os quartís, decís e percentís; a moda.
6) Medidas de dispersão: a amplitude semi-quarti, desvio médio e desvio padrão.
7) Medida de assimetria. Algumas aplicações à Educação. Simbolismo estatístico usual.

(*) *Para os Institutos de Educação e Escolas Normais Oficiais, de acôrdo com a Portaria N.º 49, de 4/12/54, do Diretor Geral do Dep. de Educação do Estado de São Paulo.*

PREFÁCIO

A missão do professor primário, entre as mais nobres, é das mais delicadas e das mais difíceis. São êstes os principais motivos que a fazem, merecidamente, ser tomada como fundamental na vida de qualquer nação. Não é fácil tornar-se bom mestre quando se não traz o espírito de abnegação e de grande paciência. É com o tempo, com o exercício, com a auto-crítica que se formam bons professôres.

Uma tarefa das mais penosas do professor primário é iniciar as crianças, em idade escolar, nos primeiros rudimentos da aritmética e da geometria práticas, cujas noções são importantíssimas em tôda a nossa vida.

Pretendemos, tanto quanto possível, com êste livro, fornecer aos futuros professores do ensino primário de nosso País os subsídios necessários para a realização de tal empreendimento. A última parte desta obra — *Noções de Estatística*, destina-se aos que se iniciam neste belo campo da matemática aplicada. Na simples exposição feita, tem-se em vista primordialmente, o campo educacional, de acôrdo com o novo programa.

Seremos gratos aos prezados colegas do magistério que apresentarem sugestões no sentido do aperfeiçoamento cada vez maior de nosso ensino.

O AUTOR

Osvaldo Sangiorgi
Rua Macapá, 17
SÃO PAULO 5, SP

CAPÍTULO PRIMEIRO

Aritmética Prática

INTRODUÇÃO

Aritmética, palavra de origem grega (*), etimològicamente, quer dizer *ciência dos números*. Juntamente com a *Geometria*, que objetiva estudar a extensão e as propriedades das figuras planas e sólidas, constitui a essência da *Matemática*.

Esta não ensina sòmente a contar, a fazer operações, a medir, a resolver problemas, como à primeira vista se poderia supor, mas — e principalmente, *disciplina a exatidão e a simplicidade do pensamento e da linguagem*. Outrossim, *possibilita a precisão nos raciocínios*, a *esperteza nas ações*, e, sobretudo, o *alcance da verdade*.

Não é ùnicamente nas coisas mais elementares da vida, como as despesas, os pagamentos, etc., que se faz sentir a necessidade da aritmética no que ela apresenta de mais simples, porém imprescindível, — as *quatro operações*. Também a interpretação do texto de um livro, matéria-prima para todo o estudante, pode aferir-se por u'a maior, ou menor, *matematização* do leitor. E o que dizer de tôdas as maravilhas do mundo moderno, impossíveis sem a contribuição constante da matemática? Em particular, para o ensino normal, não padece dúvida que *a melhor exercitação da faculdade de compreender se obtém através da vivência contínua com a aritmética*. Com tal preocupação iniciamos a aritmética prática.

No final de cada parte, encontraremos as aplicações necessárias ao seu desenvolvimento, e ressaltaremos os erros mais comumente cometidos. Em seguida, apresentaremos também jogos e recreações curiosas com o objetivo de agradar e atrair os principiantes na matéria.

(*) Αριθμητιχή

I) Número inteiro. Operações fundamentais. Problemas típicos. Divisibilidade

§ 1. Número inteiro.

1. Sucessão dos números naturais. Sempre que se, considera um conjunto de objetos da mesma espécie, como por exemplo, uma coleção de figurinhas, uma coleção de livros, um grupo de pessoas ou de animais, surge espontâneamente a idéia de *contá-los*. Recordemos que a *operação de contar* os objetos de uma coleção, ou os indivíduos de um grupo, deu origem aos números

um, dois, três, quatro, cinco, seis, ...

que se representam, no *sistema de numeração decimal*, respectivamente, pelos símbolos (arábicos) :

$$1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ \dots$$

que constituem, nessa ordem, a *sucessão dos números naturais*

Cada objeto isolado, recebe, na operação de contar, o nome de *unidade*.

Chama-se *sucessivo de um número*, o número que contém uma unidade mais que êsse outro. Por exemplo : 5 é sucessivo de 4 ; 6 é sucessivo de 5.

Como cada número da sucessão natural tem um sucessivo, diz-se que essa sucessão *é infinita*, ou também, que existem *infinitos números naturais*.

É por êsse motivo que, ao se representar a sucessão dos números naturais, escrevemos reticências à direita do último número escrito para indicar que existem outros números que o seguem.

2. Sucessão dos números inteiros. No caso de não se possuir figurinhas ou livros, ou de não existirem mais pessoas ou animais num determinado lugar, o nome usado para indicar essas ausências de objetos ou indivíduos é *zero*, e o símbolo

correspondente 0. Acrescentando aos números naturais o número 0, obtém-se a sucessão :

$$0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ \dots$$

denominada *sucessão dos números inteiros*.

3. Confronto de números inteiros. É imediato que :

1.º) Dois números são *iguais* quando ocupam a *mesma posição* na sucessão dos números inteiros. Exemplo :

cinco é *igual* a cinco

Indicação :

$5 = 5$ (O sinal lê-se : *igual a*).

2.º) Um número é *maior* que outro quando *segue* êsse outro na sucessão dos números inteiros. Caso contrário diz-se *menor*. Exemplos :

sete é *maior* que quatro (sete *vem depois* do quatro na sucessão) ;

três é *menor* que oito (três *vem antes* do oito).

Indicações :

$7 > 4$ (O sinal $>$ lê-se : *maior que*).
$3 < 8$ (O sinal $<$ lê-se : *menor que*).

Quando um número é *maior* ou *menor* que outro, costuma-se também dizer que êles são *desiguais* ou *diferentes*, usando-se a indicação $\neq$. Exemplo :

$7 \neq 4$ (7 *diferente de* 4).

Chama-se *igualdade* a relação expressa pelo sinal =. Exemplo : $a = b$. Os dois números a e b dizem-se *membros* da igualdade, sendo a o primeiro membro e, b o segundo. São óbvias as seguintes propriedades da igualdade :

1.ª) Reflexiva : todo número é igual a si mesmo. Ex. : $a = a$.

2.ª) Simétrica : se um número é igual a um segundo, êste é igual ao primeiro. Ex. : se $a = b$, é também $b = a$.

3.ª) Transitiva : se dois números são iguais a um terceiro, êsses dois números são iguais entre si. Ex. : se $a = b$ e $b = c$, é também $a = c$.

4. Numeração. Do fato de existirem infinitos números inteiros (que são o zero e os números naturais) segue-se que não se pode dar a cada número um *nome especial*, nem representar cada um dêles com um *símbolo especial* diferente, pois, seria impossível imaginar e recordar infinitas palavras e infinitos símbolos. Daí a necessidade de certas regras fixas que permitam ler e escrever um número qualquer com poucas palavras e poucos símbolos.

Chama-se ***sistema de numeração*** *o conjunto de regras baseadas na reunião de unidades em grupos especiais, denominados* ***ordens,*** *que permitem ler (numeração falada) e representar (numeração escrita) com poucas palavras e símbolos todos os números.*

Base de um sistema de numeração é o número de unidades necessárias para formar uma unidade de ordem imediatamente superior.

5. Sistema de numeração decimal: escrito e falado. E' aquele onde os grupos de unidades são formados tomando por *base* o número *dez* (*). Emprega dez símbolos diferentes para a representação de todos os números e é o mais usado pelos povos civilizados.

PRIMEIRA REGRA : *Representa-se por um símbolo e atribui-se um nome diferente a cada um dos dez primeiros números.* Êstes símbolos e nomes são, respectivamente :

0 (*zero*) ; 1 (*um*) ; 2 (*dois*) ; 3 (*três*) ; 4 (*quatro*) ; 5 (*cinco*) ; 6 (*seis*) ; 7 (*sete*) ; 8 (*oito*) ; 9 (*nove*),

chamados *algarismos* (**) *significativos*, com exceção do 0 (zero) que é denominado *não significativo*. Os números de *um* a *dez*, que se podem contar nos dedos, são chamados *dígitos*.

SEGUNDA REGRA : *Denominam-se* ***unidade simples*** *ao número um;* ***dezena*** *ao grupo de dez unidades simples ;* ***centena*** *ao grupo de dez dezenas ;* ***unidade de milhar*** *ao grupo de dez centenas ;* ***dezena de milhar*** *ao grupo de dez unidades de milhar, e assim por diante atribuindo-se* ***novo nome*** *tôda vez que se tenha* ***dez unidades*** *de uma* ***ordem imediatamente anterior.*** *As várias ordens se reagrupam por sua vez de três em três e cada grupo é denominado* ***classe.*** *Tem-se assim a* ***classe das unidades simples*** (que compreende as unidades simples, dezenas e centenas), *a* ***classe dos milhares,*** *a* ***classe dos milhões,*** etc.

(*) A contagem de ovos, por exemplo, é feita em grupos de *doze* ou *dúzias*; neste caso o sistema é de base *doze* ou *duodecimal*.

(**) Sendo de origem árabe os símbolos empregados na representação dêsses algarismos, costuma-se usar a designação *arábico* quando nos referimos a êles.

TERCEIRA REGRA : Para *escrever-se um número superior a nove, conhecidas as unidades de cada ordem, escreve-se de modo que figurem, a partir da direita, em primeiro lugar, as unidades simples, a seguir as dezenas, depois as centenas, e assim por diante. Caso o número não contenha unidades de uma determinada ordem, escreve-se no lugar correspondente das mesmas o algarismo zero.*

O princípio fundamental da numeração escrita no sistema de numeração decimal é :

> **Todo algarismo (arábico) escrito à esquerda de outro representa unidades de ordem imediatamente superior à que êste representa.**

Cada algarismo significativo de um número tem dois valores : o *valor absoluto*, que é o valor atribuído ao algarismo isolado do número ; e o *valor relativo*, que é o valor recebido pelo algarismo de acôrdo com o lugar que ocupa no número.

Exemplo :

Representar, no sistema de numeração decimal, o número que contenha 4 unidades de milhar, 6 centenas, nenhuma dezena, 2 unidades simples.

Segundo as regras estudadas, temos : 4 6 0 2

onde

2 — representa as *unidades simples*.	valor absoluto : 2	valor relativo : 2
0 — representa as *dezenas*		
6 — representa as *centenas*	valor absoluto : 6	valor relativo : 600
4 — representa as *unidades de milhar*	valor absoluto : 4	valor relativo : 4 000

Outros nomes usados na *numeração falada*, do sistema de numeração decimal, são :

onze (ao invés de se dizer *uma dezena e uma unidade*).

doze (ao invés de se dizer *uma dezena e duas unidades*),

e a seguir :

treze, quatorze, quinze, dezesseis, dezessete, dezoito, dezenove ;

vinte (ao invés de se dizer *duas dezenas*).

trinta (ao invés de se dizer *três dezenas*), e a seguir: *quarenta, cinqüenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa.*

cem ou *cento* (ao invés de se dizer *uma centena*).

duzentos (ao invés de se dizer *duas centenas*), e a seguir: *trezentos, quatrocentos, quinhentos, seiscentos, setecentos, oitocentos* e *novecentos.*

mil (ao invés de se dizer *uma unidade de milhar*), e a seguir *dois mil, três mil,* etc., até *mil mil* que é substituído pela palavra *milhão.*

bilhão, trilhão, quatrilhão, ... são os nomes seguintes, atribuídos às classes que se seguem.

O princípio fundamental da numeração falada no sistema decimal é:

Decompõe-se o número em grupos de três algarismos (se o numero possuir mais de três algarismos) **e, em seguida, a partir da esquerda *lê-se* cada grupo acrescentando-lhe o *nome* da classe a que pertence.**

A decomposição de um número em classes de três algarismos é feita com um pequeno intervalo não se devendo usar qualquer sinal, como o ponto ou a vírgula. Exemplos:

85 307 que se lê: *oitenta e cinco mil e trezentos e sete* (unidades).

9 666 201 que se lê: *nove milhões, seiscentos e sessenta e seis mil e duzentos e um* (unidades).

3 567 908 315 que se lê: *três bilhões, quinhentos e sessenta e sete milhões, novecentos e oito mil, e trezentos e quinze* (unidades) (*).

6. Numeração escrita romana. Um outro modo de representar os números, hoje de emprêgo limitadíssimo (paginação de livros, mostradores de relógios, etc.), é o que foi introduzido pelos romanos. Os símbolos usados são letras maiúsculas do alfabeto latino às quais se atribuem determinados valores:

(*) Não se deve confundir o bilhão português que vale mil milhões com o bilhão espanhol que vale um milhão de milhões. Assim, no exemplo citado, o número 3 567 908 315 seria lido como três mil e quinhentos e sessenta e sete milhões novecentos e oito mil e trezentos e quinze unidades.

I (um); V (cinco); X (dez); L (cinqüenta); C (cem); D (quinhentos); M (mil).

As *regras* para se escrever (nesse sistema) são:

1.ª) As letras I, X, C e M podem ser repetidas no máximo três vêzes consecutivamente e são as únicas que se repetem.

2.º) Se uma letra (ou mais) escrita à direita de outra de maior ou igual valor, *somam-se* os seus valores e se fôr (com exceção de V, L, D, M) escrita à esquerda de outra, de valor imediatamente superior, *subtraem-se.*

3.ª) Para aumentar o número mil vêzes o seu valor, coloca-se um traço sôbre a letra; para aumentar um milhão de vêzes, colocam-se dois traços, e assim sucessivamente. Exemplos:

XX vale 20	IX vale 9	$\overline{\text{IV}}$DVII vale 4 507
CCC vale 300	XI vale 11	MCMLX vale 1 960

7. Outros sistemas de numeração. Um dos sistemas mais usado pelas populações primitivas é o *sistema binário*, que utiliza sòmente *dois sinais* (talvez pelo fato do corpo humano apresentar vários exemplos de pares: braços, pernas, olhos, etc.) e tendo à sua disposição ùnicamente *duas palavras*. Tomando, por exemplo, nesse sistema os sinais 0 e 1, e seguindo princípio semelhante ao usado na numeração decimal, os números dois e três serão representados por: 10 (lê-se *um-zero*), 11 (lê-se *um-um*), respectivamente. Outro sistema de numeração usado é o *sistema quinário*, que dispõe sòmente de *cinco sinais* (pelo confronto com os cinco dedos da mão) e de *cinco palavras*. Na Babilônia, foi adotado o *sistema sexagesimal*, usado ainda hoje nas medidas de ângulo e de tempo.

8. Representação geométrica dos números. É de muita conveniência associar a cada número um *segmento de reta*. Para isso considera-se um segmento qualquer $\overline{AB}$ como *unidade* para representar o número 1; o número 2 será representado por um segmento $\overline{CD}$, *duplo* da unidade $\overline{AB}$; o número 3 por um segmento $\overline{EF}$, *triplo* da unidade, e, assim por diante (fig. 1).

FIG. 1

9. Representação literal dos números. Sempre é possível, para facilidade de cálculos futuros, usar *símbolos* que possam representar *números quaisquer*. Assim podemos representar por a (ou qualquer outra letra) um número (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...).

EXERCÍCIOS(*) SÔBRE NUMERAÇÃO

1. Determinar os sucessivos dos números: 69; 8 000 000; 5 009 e 443.
2. Escrever, com algarismos arábicos, no sistema de numeração decimal, os seguintes números: três mil e trinta; quatro milhões, duzentos e cinqüenta e seis mil e trezentos e trinta e oito; três bilhões e uma unidade.
3. Quais são o maior, e o menor, número que se podem escrever com os algarismos 5, 3, 2 e 8?
4. Quantos números da sucessão dos inteiros estão compreendidos entre 13 e 39?
5. Com os algarismos 7, 1 e 3, escrever seis números dispostos em ordem decrescente.
6. O que acontece com o valor relativo de 6, no número 639, quando, entre os algarismos da centena e o das dezenas, se intercala um zero?
7. Representar geomètricamente os números 3, 4 e 5.
8. Qual o maior número de cinco algarismos significativos diferentes que se pode escrever no sistema de numeração decimal? Qual o menor?
9. Quando é que, trocando a ordem de todos os algarismos de um número, êste não muda de valor?
10. Escrever, em algarismos romanos, os números: 732, 1 409, 8 913, e 6 632 000.
11. Escrever em algarismos arábicos: DCCCIX, $\overline{\text{XI}}$CXXVIII, $\overline{\overline{\text{I}}\text{VCCC}}$LX e MMCCII.
12. Qual o sucessivo do maior número de sete algarismos no sistema de numeração decimal?
13. Determinar o número de algarismos necessários para escrever todos os inteiros de 1 a 68.

    (NOTA: de 1 a 9 temos 9 números de 1 alg. ou $9 \times 1 = 9$ (alg.).
    de 10 a 68 temos 59 números de 2 algs. ou $59 \times 2 = \underline{118}$ (alg.).
    Total de algarismos escritos........... 127 (alg.).
14. Determinar o número de algarismos necessários para escrever todos os inteiros de 32 a 176.

    (NOTA: de 32 a 99 temos 68 números de 2 algs. ou $68 \times 2 = 136$ (alg.).
    de 100 a 176 temos 77 números de 3 algs. ou $77 \times 3 = \underline{231}$ (alg.).
    Total de algarismos escritos.......... 367 (alg.).
15. Para numerar as páginas de um livro foram necessários 258 tipos. Quantas páginas tem êsse livro?

(*) Todos os *Exercícios* solicitados aos alunos (normalistas, e portanto, futuros professôres), devem ser resolvidos com as respectivas justificações.

(NOTA: para paginar as 9 primeiras usou: ......$9 \times 1 = 9$ (tipos).
para paginar as 90 seguintes usou:..... $90 \times 2 = \underline{180}$ (tipos).
n.º de tipos usado para as 99 1.as págs........ 189 (tipos).
O restante: $258 - 189 = 69$ (tipos) será empregado para numerar páginas de três algarismos, isto é, $69 : 3 = 23$ (págs.).
Logo, o livro conterá: $99 + 23 = 122$ (páginas).

16. Determinar o número de algarismos necessários para escrever todos os inteiros de 1 a 78, de 1 a 756, de 1 a 2507, de 50 a 2000.
17. Para numerar as páginas de um livro foram necessários 171 tipos. Quantas páginas tem o livro?
18. Uma pessoa, escrevendo a série dos inteiros, parou num certo número. Em que número parou se escreveu 1 506 algarismos?

RESPOSTAS:

1. 70; 8 000 001; 5 010 e 444.
2. 3 030; 4 256 338; 3 000 000 001.
3. 8 532 e 2 358.
4. 25.
5. 731, 713, 371, 317, 173 e 137.
6. Fica dez vêzes maior.
7. Fig. 2.
8. 98 765 e 12 345.
9. Quando os algarismos forem todos iguais entre si.
10. DCCXXXII, MCDIX, $\overline{\text{VIII}}$CMXIII e $\overline{\overline{\text{VI}}\text{DCXXXII}}$.
11. 809, 11 128, 4 300 060 e 2 202.
12. 10 000 000 (9 999 999 + 1).
13. 127.
14. 367.
15. 122.
16. 147, 2 160; 8 921; 6 804.
17. 90.
18. 538.

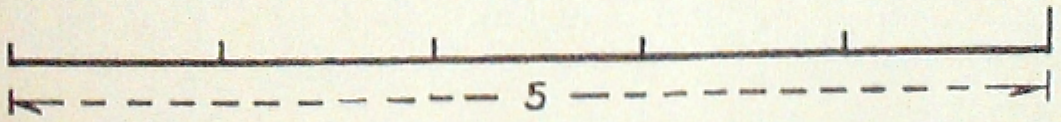


FIG. 2

§ 2. Operações fundamentais com os números inteiros.

ADIÇÃO

1. Definição. *Adição é a operação que tem por fim reunir em um só número tôdas as unidades de dois, ou mais, números dados.*

O resultado da operação chama-se *soma* ou *total*, e os números que se somam, *parcelas* ou *têrmos*. A indicação da adição é feita com o sinal + (que se lê: *mais*). Exemplos:

$$\underbrace{3 + 5 + 2}_{\text{(parcelas)}} = 10 \quad \text{(soma ou total)}$$

$a + b + c = s$ (onde a, b e c representam números quaisquer e s a soma dêles).

2. Propriedades. 1.ª) UNIFORME. *A adição conduz sempre a um só resultado.* Exemplo:

$4 + 9$ apresenta só um resultado, que é 13.

2.ª) COMUTATIVA. *A ordem das parcelas não altera a soma.* Exemplos:

$$5 + 3 = 3 + 5$$
$$6 + 8 + 1 = 8 + 6 + 1 = 1 + 8 + 6 = \ldots$$

e de um modo geral:

$$a + b + c = b + c + a = c + a + b = \ldots$$

3.ª) ASSOCIATIVA. *A soma de vários números não se altera se se substituem algumas de suas parcelas pela sua soma efetuada.*

Os sinais empregados para as associações das parcelas de uma adição são:

( ) denominado *parêntese*.

[ ] denominado *colchete*.

{ } denominado *chave*.

Exenplos: $8 + 3 + 5 = (8 + 3) + 5 = 11 + 5$

$$13 + 5 + 2 + 7 = (13 + 5) + (2 + 7) = 18 + 9$$

e, de um modo geral: $a + b + c = (a + b) + c$

4.ª) DISSOCIATIVA. *Em tôda soma pode-se substituir uma parcela por outras cuja soma seja igual a ela.* Esta propriedade é de sentido contrário da anterior. Exemplos:

$$9 + 3 + 8 = (5 + 4) + 3 + 8$$
$$(a + b) + c = a + b + c$$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Os parênteses são colocados numa adição graças à propriedade associativa, e retirados pela propriedade dissociativa.

2.ª) O zero como parcela não altera a soma e por isso pode ser retirado. Exemplo: $20 + 7 + 0 + 3 = 20 + 7 + 3$

3. Cálculo mental. É o que permite efetuar as operações sem necessidade de se escrever. No caso da adição usam-se as propriedades estudadas. Exemplo:

Efetuar a soma: $315 + 23$

Pela propriedade dissociativa, calcula-se mentalmente pela decomposição:

$310 + 5 + 20 + 3 =$

ou $= 310 + 20 + 5 + 3 =$ (propriedade comutativa)

$= 330 + 8 =$ (propriedade associativa)

$= 338$

4. Regra prática para efetuar a adição. Para somar diversos números inteiros, escrevem-se uns em baixo dos outros, de modo que fiquem dispostos em colunas os algarismos da mesma ordem; somam-se em seguida os algarismos da última coluna, à direita, escrevendo-se em baixo desta coluna o algarismo que representa as unidades simples desta soma e as dezenas, caso existam, somam-se com os algarismos da coluna das dezenas. Procede-se da mesma forma até à última coluna à esquerda quando se obtém o resultado total. Exemplo:

Efetuar a soma:

$$3\,415 + 817 + 28\,012$$

Disposição do cálculo:

$$\begin{array}{r} 3\,415 \\ 817 \\ 28\,012 \\ \hline 32\,244 \end{array}$$

5. Prova. Consiste em verificar a exatidão da operação. A prova da adição está baseada na propriedade comutativa, por meio da qual se refaz a operação, depois de se ter trocado a ordem das parcelas (na prática isto equivale a fazer a adição debaixo para cima). Se a adição estiver certa, deve-se encontrar o mesmo resultado. Exemplo:

$$\begin{array}{r} 1\,024 \\ 20\,132 + \\ 89 \\ \hline 21\,245 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 89 \\ 20\,132 + \\ 1\,024 \\ \hline 21\,245 \end{array}$$

6. Soma de grandezas(*). Dadas duas, ou mais, grandezas referidas à mesma unidade, por ex., 3m, 7m, 6m, a sua *soma* é a grandeza

(*) Ver *Elementi di aritmetica razionale*, de CIPOLLA-AMATO.

constituída de tantas unidades quantas são aquelas das grandezas dadas (*), ou seja: $3m + 7m + 6m = (3 + 7 + 6)m = 16m.$

Naturalmente só as grandezas homogêneas podem ser somadas. No caso de homogêneas, porém não referidas à mesma unidade, é necessário reduzí-las primeiramente. Por exemplo:

$$4km + 850m = 4\,000m + 850m = 4\,850m.$$

7. Erros mais comuns. As expressões:

$$8m + 5m = 13 \quad (?).$$
$$8 + 5 = 13m \ (?).$$
$$8m + 5 = 13m \ (?).$$

são *erradas*. O certo é: $8m + 5m = 13m.$

Outro êrro muito usual, ao efetuar a soma

$$12 + 34 + 5$$

é o seguinte:

$$12 + 34 = 46 + 5 = 51 \ (?)$$

Deve-se, ao invés, proceder do seguinte modo:

$$12 + 34 + 5 = 46 + 5 = 51.$$

EXERCÍCIOS SÔBRE A ADIÇÃO

1. Aplicar as três primeiras propriedades da adição na soma: $218+34+13$.
2. Usando a propriedade comutativa, de quantos modos podem somar-se os números x, y e z?
3. Que acontece a uma adição de três parcelas quando se soma 2 à primeira parcela, 3 à segunda e 4 à terceira?
4. Somando certo número a outro obtém-se como soma êsse outro. Qual o número somado?
5. Dada uma adição de cinco parcelas, de quanto aumenta a soma acrescentando 6 a cada parcela?
6. Calcular a soma dos cinco primeiros números sucessivos de 18.
7. De quanto aumenta uma soma de três números adicionando 5 aos algarismos das unidades e 4 aos algarismos das dezenas, de cada parcela?
8. Calcular a soma de quatro números, sabendo que o primeiro é 13 e os seguintes valem o dôbro do anterior.
9. Um homem aos 28 anos torna-se pai. Quantos anos terá o pai quando seu filho tiver 31?
10. Qual o número que tem 483 unidades a mais que o número 26?

(*) O conceito de grandeza será dado no capítulo relativo às medidas (V).

11. Uma loja foi adquirida por Cr\$ 380 000,00. Gastou-se em consertos Cr\$ 36 000,00 e a loja foi revendida com um lucro de Cr\$ 52 000,00. Por quanto foi vendida a loja?
12. Quantos dias existem entre 10 de março e 15 de junho, inclusive os dias extremos?

RESPOSTAS:

1. *Uniforme:* $218+34+13=265$ (resultado único);
Comutativa: $218+34+13=34+13+218=13+218+34=13+34+218$;
Associativa: $218+34+13=(218+34)+13$.
2. 6 modos.
3. Aumenta de 9.
4. 0 (zero).
5. Aumenta de 30.
6. 105 $(19+20+21+22+23)$.
7. 135.
8. 195.
9. 59 anos.
10. 509.
11. Cr\$ 468 000,00.
12. 98 dias.

SUBTRAÇÃO

1. Definição. Chama-se *diferença* de dois números, dados numa certa ordem, um *terceiro número* que, somando ao segundo, dá para resultado o primeiro.

O primeiro número chama-se *minuendo*, o segundo *subtraendo*, e a operação que permite encontrar a diferença dos dois *subtração*; e é *inversa* da adição.

O minuendo e o subtraendo dizem-se também *termos* da subtração, e a diferença é chamada *resto* ou *excesso*. A subtração é indicada com o sinal − que se lê: *menos*. Exemplos:

$$8 - 5 = 3 \quad \text{pois} \quad 3 + 5 = 8$$
$$a - b = c \quad \text{quando} \quad c + b = 8$$

2. Condição de possibilidade. Como o minuendo é a soma do subtraendo com a diferença, segue-se que o minuendo deve ser maior ou igual ao subtraendo. Logo: *a subtração de dois números só é possível se o minuendo fôr igual ou maior que o subtraendo.*

3. Propriedades. 1.ª) UNIFORME. *A subtração conduz a um único resultado.*

2.ª) *Somando, ou subtraindo, um mesmo número aos têrmos de uma subtração, a diferença não se altera.* Exemplo:

Seja a diferença: $15 - 8 = 7$

Somando 4 aos seus dois têrmos, teremos:

$$(15 + 4) - (8 + 4) = 19 - 12 = 7$$

ou, subtraindo 5 aos dois termos:

$$(15 - 5) - (8 - 5) = 10 - 3 = 7$$

Em ambos os casos, notamos que a *diferença não se alterou.*

3.ª) *A subtração é não-comutativa.* Exemplo:

$$7 - 4 \neq 4 - 7$$

4.ª) *Querendo subtrair de um número, sucessivamente, dois ou mais outros pode-se subtrair do número dado a soma dêstes outros.* Exemplo:

$$17 - 5 - 2 = 17 - (5 + 2).$$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Se o minuendo fôr igual ao subtraendo a diferença é zero. Exemplo: $6 - 6 = 0$

2.ª) Se o subtraendo fôr zero, a diferença é igual ao minuendo Exemplo: $8 - 0 = 8$

4. Regra prática para efetuar a subtração. Para efetuar a subtração de dois números, escreve-se o subtraendo por baixo do minuendo, de modo que fiquem dispostos em colunas os algarismos de mesma ordem. Em seguida subtrai-se de cada algarismo do minuendo, a partir da direita, o algarismo correspondente do subtraendo. Se o algarismo do minuendo fôr menor que o do subtraendo tomamos uma unidade de ordem imediatamente superior e juntamo-la ao algarismo da ordem em questão, podendo assim, continuar a operação. Exemplo:

Efetuar a subtração:

$$8\,563 - 3\,928$$

Disposição do cálculo: *Operações:*

$$\begin{array}{r} 8\,563 \\ 3\,928 \\ \hline 4\,635 \end{array}$$

$13 - 8 = 5$ (tomando 1 de 6, que se reduz a 5); logo $5 - 2 = 3$

$15 - 9 = 6$ (tomando 1 de 8 que se reduz logo $7 - 3 = 4$

e o resultado será: 4 635.

5. Prova. É feita somando o resto ao subtraendo. Se a operação estiver certa, deve obter-se o minuendo.

6. Diferença entre grandezas. *Diferença* entre duas grandezas homogêneas, caso exista, é a grandeza homogênea que, somada à segunda, dá para resultado a primeira. Exemplo:

$$7m - 4m = 3m \quad \text{porque} \quad 3m + 4m = 7m.$$

7. Erros mais comuns. Os mesmos apontados para a adição. Assim, não devemos escrever:

$$7\,m - 4\,m = 3 \quad (?), \quad \text{e sim} \quad 7\,m - 4\,m = 3\,m.$$

Expressões Aritméticas

1. Definição. *Expressão aritmética é um conjunto de números reunidos entre si por sinais de operações.* O cálculo de uma expressão aritmética (erradamente chamada "carroção") que envolve adições e subtrações, é feito efetuando as várias operações na ordem em que são indicadas, devendo notar-se que são *feitas primeiramente* as operações indicadas entre parênteses, em seguida as operações indicadas entre colchetes, depois as indicadas entre chaves, assim por diante. Exemplos:

1. Calcular o valor da expressão aritmética:

$$35 - [4 + (5 - 3)]$$

Temos: $35 - [4 + 2] =$ (efetuando $5 - 3$)
$= 35 - 6 =$ (efetuando $4 + 2$)
$= 29.$

2. Calcular o valor da expressão aritmética:

$$86 - \{26 - [8 - (2 + 5)]\}$$

Temos: $86 - \{26 - [8 - 7]\} =$ (efetuando: $2+5 = 7$)
$= 86 - \{26 - 1\} =$ (efetuando: $8-7 = 1$)
$= 86 - 25 =$ (efetuando: $26-1 = 25$)
$= 61.$

3. Calcular o valor da expressão aritmética:

$$53 - \{[48 + (7 - 3) - [(27 - 2) - (7 + 8 + 10)]\}$$

Temos : $53 - \{[48 + 4] - [25 - 25]\} =$

$= 53 - \{52 - 0\} =$

$= 53 - 52 =$

$= 1.$

EXERCÍCIOS SÔBRE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

1. Que número representam as expressões :

   1.°) $a - b$ se $a = 40$ e $b = 12$

   2.°) $a - [(b + c) + d]$ se $a = 52$, $b = 12$, $c = 8$ e $d = 5$

   3.°) $[m + (n + p)] - [(p + m) - n]$ se $m = 4$, $n = 3$ e $p = 10$

2. Nas subtrações que se seguem, colocar no lugar das letras um número tal que o resultado indicado seja verdadeiro :

   1.°) $a - 326 = 154$
   2.°) $10\,001 - x = 839$
   3.°) $0 = y - 32$
   4.°) $x - 5 = 12 - 5$

3. Calcular o valor das seguintes expressões aritméticas :

   1.°) $(12 + 3) - (4 + 8)$

   2.°) $14 + \{8 - [(48 - 3) - (38 + 1 + 5)]\} - 1$

   3.°) $\{213 - [(14 + 7) - (11 - 3)]\} - \{(8 + 5) - [6 - (10 - 9)]\}$

4. Qual o número que somado com 1 836 resulta 18 001 003 ?
5. Em que ano completou 32 anos uma pessoa que fêz 75 anos em 1960 ?
6. Se Antônio der a João Cr$ 28,00, ambos ficam com Cr$ 70,00. Quanto tinha cada um ?
7. Se Pedro der a Rubens Cr$ 50,00, ambos ficam com a mesma quantia. Se Rubens der a Pedro Cr$ 50,00 acaba ficando sem nada. Quanto possuía cada um ?
8. Devem-se repartir Cr$ 14 030,00 por três pessoas. A primeira recebe Cr$ 4 315,00, a segunda recebe Cr$ 2 400,00 mais que a primeira. Quanto deve receber a terceira ?
9. Em uma adição se subtrai 8 de duas parcelas e se soma 5 a uma outra. Que alteração sofre a adição ?
10. Exprimir por meio de símbolos os dois primeiros números inteiros sucessivos de um número inteiro qualquer a. Qual a diferença entre êles ?

RESPOSTAS:

1. 1.°) 28 ; 2.°) 27 ; 3.°) 6.
2. 1.) $a = 480$; 2.°) $x = 9\,162$; 3.°) $y = 32$; 4.°) $x = 12$.
3. 1.°) 3 ; 2.°) 20 ; 3.°) 192.
4. 17 999 167.
5. 1917.

6. Antônio Cr$ 98,00 e João Cr$ 42,00.
7. Pedro Cr$ 150,00 e Rubens Cr$ 50,00.
8. Cr$ 3 000,00.
9. Diminui de 11.
10. $a + 1$ e $a + 2$. A diferença é 1

MULTIPLICAÇÃO

1. *Multiplicar é somar parcelas iguais.* Seja por exemplo :

$$4 + 4 + 4 = 12$$

Nessa adição, a parcela que se repete ou multiplica (4) é chamada *multiplicando*, o número de vêzes que aparece (3) é chamado *multiplicador* e o resultado *produto* (12 no exemplo).

2. **Definição.** *Multiplicação é a operação que tem por fim, dados dois números, um chamado multiplicando e outro multiplicador, formar um terceiro somando o primeiro tantas vêzes quantas forem as unidades do segundo.*

A multiplicação é indicada com o sinal $\times$ que se coloca entre os dois números, chamados *fatôres*, e se lê : *multiplicado por.* Exemplo :

4×3 que se lê : *quatro multiplicado por três.*

Costuma-se, também, indicar a multiplicação de dois números por um ponto colocado entre os fatôres. Assim, no exemplo acima, temos : $4 . 3$.

3. Observações: 1.ª) Quando o multiplicando é 0 o produto é nulo. Exemplo :

$$0 \times 5 = 0, \quad \text{pois} \quad 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

2.ª) Quando o multiplicando é 1, o produto é igual ao multiplicador. Exemplo :

$$1 \times 4 = 4, \quad \text{pois} \quad 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

4. Propriedades. 1.ª) UNIFORME. *A multiplicação conduz a um só resultado.*

2.ª) COMUTATIVA. *A ordem dos fatôres não altera o produto.*

De fato : $4 \times 3 = 12$ e $3 \times 4 = 12$

e, portanto, sendo iguais os dois resultados, temos :

$$4 \times 3 = 3 \times 4$$

3.ª) Distributiva em relação à soma e à diferença. *Para multiplicar uma soma ou uma diferença indicada por um número, multiplica-se cada uma de suas parcelas ou têrmos por êsse número, e em seguida somam-se, ou subtraem-se, os resultados.* Exemplos:

1.º) $(4 + 5) \times 3 = 4 \times 3 + 5 \times 3$

2.º) $(7 - 4) \times 5 = 7 \times 5 - 4 \times 5$

Esta propriedade é chamada *distributiva* porque o multiplicador se distribui por todos os têrmos.

4.ª) *Para multiplicar uma soma por outra, pode-se multiplicar cada parcela da primeira pelas parcelas da segunda e somar os produtos obtidos.* Exemplo:

$$(6 + 3) \times (2 + 5) = 6 \times 2 + 6 \times 5 + 3 \times 2 + 3 \times 5$$

5. Regras práticas para se efetuar a multiplicação.

1.ª) A multiplicação de dois números de um só algarismo é feita de memória. Os resultados destas multiplicações encontram-se na *Tábua de multiplicar de Pitágoras* (fig. 3).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

FIG. 3

2.ª) A multiplicação de um número qualquer por um outro de um só algarismo é feita multiplicando o valor absoluto dêsse algarismo pelo de cada algarismo daquele, a partir da direita. De cada produto parcial escreve-se o algarismo das unidades enquanto as dezenas se juntam ao produto parcial sucessivo. O último produto obtido escreve-se por completo.

Disposição prática:

$$\begin{array}{r} 8\,329 \\ \times\ \ 7 \\ \hline 58\,303 \end{array}$$

3.ª) A multiplicação de um número por 10, 100, 1 000, etc., é feita escrevendo-se à sua direita 1, 2, 3, etc., zeros. Exemplos:

$$5 \times 10 = 50$$
$$5 \times 100 = 500$$
$$5 \times 1\,000 = 5\,000$$

4.ª) A multiplicação deu um número por outro, representado por um algarismo acompanhado de zeros, é feita multiplicando o número pelo valor absoluto do algarismo, escrevendo os zeros à direita do resultado. Exemplo:

$218 \times 400 = 87\,200$ (218×4 e colocam-se dois zeros)

5.ª) A multiplicação de dois números quaisquer é feita multiplicando um dêles pelo valor absoluto de cada algarismo do outro, a partir da direita (de acôrdo com a segunda regra), e dispondo-os vários produtos parciais em colunas, de modo que cada algarismo das unidades dêsses produtos parciais esteja debaixo do algarismo das dezenas do produto precedente. Em seguida somam-se os resultados dos vários produtos parciais obtidos.

Disposição prática:

$$\begin{array}{r} 56\,387 \\ \times\ \ 158 \\ \hline 451\,096 \\ 2\,819\,35 \\ 5\,638\,7 \\ \hline 8\,090\,146 \end{array}$$

6. Prova. A prova da multiplicação é feita refazendo a operação depois de trocada a ordem dos fatôres. Pela propriedade comutativa, deve encontrar-se o mesmo resultado se a operação estiver certa.

7. Produto de vários fatôres. Dados vários números, reunidos pelos sinais de multiplicação, chama-se *produto de vários fatôres* o resultado que se obtém multiplicando o primeiro fator pelo segundo, o resultado pelo terceiro, e assim por diante. Exemplo:

$$5 \times 3 \times 2 \times 6 = 15 \times 2 \times 6 = 30 \times 6 = 180$$

Num produto de vários fatôres, temos as seguintes *propriedades:*

1.ª) A ordem com que os fatôres figuram no produto não altera o resultado (propriedade comutativa). Exemplo:

$$8 \times 3 \times 5 \times 7 = 5 \times 3 \times 8 \times 7 = 7 \times 5 \times 3 \times 8$$

2.ª) Podem substituir-se dois ou mais fatôres pelo seu produto (propriedade associativa). Exemplo:

$$3 \times 5 \times 4 \times 7 = 3 \times 20 \times 7$$

3.ª) Se um dos fatôres é zero, o produto será nulo (propriedade do anulamento). Exemplo:

$$7 \times 5 \times 0 \times 8 = 0$$

De fato:

$$7 \times 5 \times 0 \times 8 = 35 \times 0 \times 8 = 0 \times 8 = 0$$

4.ª) Se um dos fatôres é 1, pode-se desprezá-lo no produto. Exemplo:

$$8 \times 5 \times 1 \times 4 = 8 \times 5 \times 4$$

8. Múltiplos de um número. Chama-se *múltiplo de um número* o produto dêste número por outro número inteiro qualquer. Exemplo:

$5 \times 4 = 20$, e portanto 20 é *múltiplo* de 5 (ou de 4).

Todos os múltiplos de um número são obtidos multiplicando-o pelos números que constituem a sucessão dos números inteiros. Assim, por exemplo, os múltiplos de 5 são:

$5 \times 0 = 0$; $5 \times 1 = 5$; $5 \times 2 = 10$; $5 \times 3 = 15$; ... ... e de um modo geral $5 \times m$, onde m é um número inteiro qualquer. Dessa forma, é fácil ver que qualquer número tem uma *infinidade de múltiplos.*

Os múltiplos de 2:

$2 \times 0 = 0$; $2 \times 1 = 2$; $2 \times 2 = 4$; $2 \times 3 = 6$; ....

e de um modo geral $2 \times m$, são chamados *pares*, e os demais múltiplos que, necessàriamente terminam em:

$$1, \ 3, \ 5, \ 7 \ \text{e} \ 9$$

são denominados *ímpares.*

Observando que cada um dos números ímpares é o *sucessivo* de um número par na *sucessão dos números inteiros*, conclui-se que a forma geral dos números ímpares é $2 \times m + 1$.

Notamos ainda que:

1.º) *O zero é múltiplo de todos os números.*

De fato: 0 é múltiplo de 2 ($2 \times 0 = 0$).
0 é múltiplo de 3 ($3 \times 0 = 0$).
etc.

2.º) *Todo número é múltiplo de si próprio e da unidade.*

De fato: 2 é múltiplo de 2 ($2 \times 1 = 2$).
2 é múltiplo de 1 ($2 \times 1 = 2$).

9. Expressões aritméticas com adições, subtrações e multiplicações. O cálculo dessas expressões é feito efetuando, *primeiramente* as *multiplicações, depois* as *adições* e *subtrações.*

Assim, na expressão:

$$4 + 7 \times 3$$

efetua-se primeiramente a multiplicação ($7 \times 3 = 21$), e, em seguida, a adição ($4 + 21 = 25$).

Logo: $4 + 7 \times 3 = 25$

No caso da expressão conter operações indicadas entre parênteses, colchetes ou chaves, efetuam-se inicialmente as operações indicadas nos parênteses mais internos, em seguida as contidas entre colchetes e depois as que estiverem entre chaves. Exemplos:

1) *Calcular o valor da expressão:*

$$5 \times (8 + 3) + 4 \times 2$$

Temos: $5 \times 11 + 8 =$
$= 55 + 8 =$
$= 63.$

2) *Calcular o valor da expressão:*

$$51 - [(7 - 3) \times 4 + 5 \times (4 + 3)]$$

Temos:

$$\begin{aligned} & 51 - [4 \times 4 + 5 \times 7] = \\ & = 51 - [16 + 35] = \\ & = 51 - [16 + 35] = \\ & = 51 - 51 = \\ & = 0. \end{aligned}$$

3) *Calcular o valor da expressão:*

$$18 - \{6 + [9 \times (5 - 2) - (10 - 3) \times 3]\}$$

Temos:

$$\begin{aligned} & 18 - \{6 + [9 \times 3 - 7 \times 3]\} = \\ & = 18 - \{6 + [27 - 21]\} = \\ & = 18 - \{6 + 6\} = \\ & = 18 - 12 = \\ & = 6. \end{aligned}$$

4) *Calcular o valor da expressão:*

$$26 + 5 \times [14 + 7 \times (8 - 2 \times 3) - (3 + 5 - 2) \times 4]$$

Temos:

$$\begin{aligned} & 26 + 5 \times [14 + 7 \times (8 - 6) - (8 - 2) \times 4] = \\ & = 26 + 5 \times [14 + 7 \times 2 - 6 \times 4] = \\ & = 26 + 5 \times [14 + 14 - 24] = \\ & = 26 + 5 \times [28 - 24] = \\ & = 26 + 5 \times 4 = \\ & = 26 + 20 = \\ & = 46. \end{aligned}$$

10. Produto de um número por uma grandeza. *Produto de um número por uma grandeza* (ou de uma grandeza por um número) é a grandeza, referida à mesma unidade, que tem por medida o produto do número dado pela medida da grandeza considerada. A grandeza resultante diz-se *grandeza múltipla* da grandeza considerada, segundo o número dado.

Exemplos:

$$3 \times 5m = (3 \times 5)m = 15m.$$
$$4 \times 7l = (4 \times 7)l = 28l.$$

11. Erros mais comuns. Os produtos de duas grandezas, como por exemplo:

$$5m \times 7l = 35m \quad (?)$$

ou

$$5m \times 7l = 35l \quad (?)$$

não têm sentido. No caso da resolução, por exemplo, da expressão

$$3 \times 8 \times 5$$

nunca se devem escrever:

$$3 \times 8 = 24 \times 5 = 120 \quad (?)$$

e, sim,

$$3 \times 8 \times 5 = 24 \times 5 = 120.$$

EXERCÍCIOS SÔBRE ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO E MULTIPLICAÇÃO

1. Aplicando as propriedades da multiplicação, efetuar, *mentalmente*, as multiplicações:

   1.ª) 150×40 3.ª) $9 \times 2 \times 5 \times 7$
   2.ª) $20 \times 32\,000$ 4.ª) $12 \times 50 \times 2$

2. Aplicar a propriedade distributiva no cálculo das seguintes expressões:

   1.ª) $(18 + 3) \times 7$ 3.ª) $(9 + 6) \times (3 + 2)$
   2.ª) $(7 + 11 - 6) \times 5$ 4.ª) $(2 + 3 + 5) \times (4 + 2 + 1)$

3. Calcular o valor das seguintes expressões:

   1.ª) $(25 - 3 \times 8) + 5 \times 2$
   2.ª) $36 + 3 \times [15 + 7 \times (3 + 2) - 12 \times (9 - 7)] + 4 \times (5 + 1 \times 4)$
   3.ª) $(25 - 3 \times 7) \times [14 + 3 \times (12 - 3 \times 3) - 4 \times 2] - 3 \times (12 - 2 \times 6)$
   4.ª) $5 + 3 \times \{11 + 6 \times [11 + 4 \times (8 - 3)] - 2 \times (7 - 5)\} - 7 \times 2$
   5.ª) $(8 + 5 \times 3) \times \{103 + 5 \times [37 - 3 \times (5 + 4)] - 53 \times (7 - 3 \times 2)\}$

4. Num produto de dois fatôres um dêles é 12. Aumentando outro de 6 unidades, que alteração sofre o produto?

5. A soma de dois números é 15. Multiplicando êsses números por 4, o que acontece a essa soma?

6. Num produto de vários fatôres, multiplicando um dêles por 3 e outro por 5, por quanto vem multiplicando o produto?

7. Qual o número que se deve somar a 69 para se ter 10 vêzes o valor de 69?

8. Quantos segundos tem um ano, sabendo que um ano tem 365 dias, o dia tem 24 horas, a hora tem 60 minutos e o minuto 60 segundos?

9. Um comerciante comprou 85 metros de fazenda a Cr$ 48,00 o metro. Revende 30 metros dessa fazenda ao preço de Cr$ 62,00 o metro e o restante a Cr$ 65,00 o metro. Quanto ganhou o comerciante nesse negócio?

10. Cai um raio e depois de 6 segundos ouve-se o estrondo. A que distância caiu o raio, sabendo que o som percorre 340 metros por segundo?

11. Tem o mesmo número de letras uma página de 38 linhas de 60 letras cada linha e outra de 60 linhas de 38 letras cada linha. Por quê?

12. Um recipiente tem a capacidade de 10 000 litros. Uma torneira despeja 30 litros de água por minuto e uma outra 28 litros. Pergunta-se: Quantos litros de água faltam para encher êsse reservatório, se a primeira torneira ficou aberta 120 minutos e a segunda 150?

RESPOSTAS:

2. 1.ª) $18 \times 7 + 3 \times 7$; 2.ª) $7 \times 5 + 11 \times 5 - 6 \times 5$;
3.ª) $9 \times 3 + 9 \times 2 + 6 \times 3 + 6 \times 2$;
4.ª) $2\times4+2\times2+2\times1+3\times4+3\times2+3\times1+5\times4+5\times2+5\times1$.
3. 1.ª) 11; 2.ª) 150; 3.ª) 60; 4.ª) 570; 5.ª) 2 300.
4. Aumenta de $6 \times 12 = 72$.
5. Passa a valer 60.
6. Por 15.
7. 621.
8. 31 536 000 segundos.
9. Cr$ 1 355,00.
10. 2 040 metros.
11. Sim. Porque $38 \times 60 = 60 \times 38$.
12. 2 200 litros.

DIVISÃO

1. Divisão exata. Definição. *Divisão exata é a operação que tem por fim, dados dois números, numa certa ordem, determinar um terceiro que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro.*

A indicação dessa operação é feita com os sinais : ou ÷ que se lê: *dividido por*. O primeiro número chama-se *dividendo*, o segundo *divisor* e o resultado da operação, *quociente*. Exemplo:

$$15 : 3 = 5 \quad \text{pois} \quad 5 \times 3 = 15 \quad \text{onde:} \begin{cases} 15 \text{ é o dividendo.} \\ 3 \text{ é o divisor.} \\ 5 \text{ é o quociente.} \end{cases}$$

Para a *divisão exata*, temos, portanto, a seguinte *relação fundamental*:

$$\boxed{\textit{dividendo} = \textit{quociente} \times \textit{divisor}}$$

2. Condições de possibilidade. 1.ª) Sendo o dividendo igual ao produto do divisor pelo quociente, segue-se que *o dividendo deve ser múltiplo do divisor*;

2.ª) O *divisor* deve ser *maior que zero*, em virtude de não ter sentido dividir-se um número dado por 0, pois, não existe

nenhum número (portanto quociente) que, multiplicado por 0, reproduza o número dado. Assim, por exemplo: $7 : 0 = ?$ (*impossível*), pois, não existe número algum que, multiplicado por 0, dê 7. No caso de $0 : 0$, qualquer número, poderia figurar como quociente, em virtude de ser nulo o produto de qualquer número por zero.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Quando o dividendo é zero, o quociente será zero. Exemplo:

$$0 : 5 = 0 \quad \text{pois} \quad 0 \times 5 = 0$$

2.ª) Quando o dividendo e o divisor são iguais entre si, o quociente será igual a 1. Exemplo:

$$7 : 7 = 1 \quad \text{pois} \quad 1 \times 7 = 7$$

3.ª) Quando o divisor é igual a 1, o quociente será igual ao dividendo. Exemplo:

$$9 : 1 = 9 \quad \text{pois} \quad 9 \times 1 = 9$$

3. Propriedades da divisão exata. 1.ª) UNIFORME. Isto é, a divisão conduz sempre a um único resultado.

2.ª) É NÃO-COMUTATIVA. De fato, $15 : 3 = 5$; trocando o dividendo pelo divisor, temos: $3 : 15$, que não tem sentido, com os números inteiros, pois, 3 *não é múltiplo de* 15. Logo:

$$15 : 3 \neq 3 : 15$$

3.ª) DISTRIBUTIVA. Para dividir uma *soma*, ou *diferença*, por um *número*, pode-se dividir cada um dos têrmos pelo número, e, em seguida, somar, ou subtrair, os quocientes obtidos, desde que cada um dêsses termos seja *múltiplo do divisor*. Exemplos:

$$(18 + 12 + 15) : 3 = 18 : 3 + 12 : 3 + 15 : 3$$
$$(42 - 14) : 7 = 42 : 7 - 14 : 7$$

4. Divisão aproximada. No caso de se querer dividir, por exemplo, 53 por 6, observa-se que não se encontra um número inteiro que, multiplicado por 6, reproduza 53, pois,

$$8 \times 6 = 48 \quad \text{é } \textit{menor} \text{ que } 53$$
$$9 \times 6 = 54 \quad \text{é } \textit{maior} \text{ que } 53$$

O número 8, que é o *maior* número que multiplicado por 6 não ultrapassa o dividendo 53, é denominado *quociente aproximado a menos de uma unidade por falta*, porque o êrro que se comete, quando se toma o número 8 para quociente, é *menor* que *uma unidade*. Temos, assim, a seguinte *definição*:

Divisão aproximada de um número por outro, dados numa certa ordem, é a operação que tem por fim determinar o maior número que, multiplicado pelo segundo, dê um resultado menor que o primeiro.

Chama-se *resto* de uma *divisão aproximada* a diferença entre o dividendo e o produto do quociente aproximado pelo divisor.

A indicação dessa operação é feita:

$$\begin{array}{l|l} \textit{dividendo} & \textit{divisor} \\ \hline \textit{resto} & \textit{quociente apr.} \end{array} \qquad \text{e o exemplo acima} \qquad \begin{array}{r|l} 53 & 6 \\ \hline 5 & 8 \end{array}$$

onde:

$$\boxed{\textit{dividendo} = \textit{quociente} \times \textit{divisor} + \textit{resto}}$$

$$\boxed{53 = 8 \times 6 + 5}$$

que é a *relação fundamental* entre o dividendo, o divisor, o quociente aproximado e o resto para as *divisões aproximadas*.

Do estudo feito, observamos que:

1.º) *O resto de uma divisão aproximada é sempre menor que o divisor.*

2.º) *O resto de uma divisão exata é zero.* Exemplos:

$$\begin{array}{r|l} 39 & 5 \\ \hline 4 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 8 \\ \hline 0 & 3 \end{array}.$$

5. Regras práticas para efetuar as divisões. 1.ª) Lembrando a tábua de multiplicar de Pitágoras, podem fazer-se de memória as divisões em que *o divisor tem um só algarismo e o quociente é menor que* 10. Assim, por exemplo, na divisão de 30 por 4, o quociente é 7 e o resto 2, porque $30 = 7 \times 4 + 2$.

2.ª) Para dividir um *número qualquer* por *outro*, separa-se no dividendo, a partir da esquerda, um número que contenha o divisor no mínimo uma vez, e, no máximo, nove vêzes. A parte separada é o *primeiro dividendo parcial*. Divide-se êste pelo divisor, obtendo-se o primeiro algarismo do quociente.

A seguir multiplica-se o valor absoluto dêsse algarismo pelo divisor e subtrae-se o produto do primeiro dividendo parcial. À direita do resto obtido, escreve-se (ou se baixa) o algarismo seguinte do dividendo, e obtém-se assim o *segundo dividendo parcial*. Divide-se êste pelo divisor e encontra-se o segundo algarismo do quociente, que de novo se multiplica pelo divisor, subtraindo-se a seguir o produto do segundo dividendo parcial. Procede-se a seguir da mesma forma até baixar todos os algarismos do dividendo. O último resto obtido é o resto da divisão. Exemplo:

Dividir 5 639 por 15.

A disposição prática é a seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 5\,639 & 15 \\ \cline{2-2} \underline{4\,5} & 375 \text{ (quociente)} \\ 1\,13 & \\ \underline{1\,05} & \\ 0\,089 & \\ \underline{75} & \\ 14 & \text{(resto)} \end{array}$$

6. Prova. A prova da divisão é feita multiplicando o quociente pelo divisor e somando êste produto com o resto. Se a operação estiver certa, deve encontrar-se o dividendo. Exemplo:

Prova da divisão do exemplo acima:

$$375 \times 15 = 5\,625$$
$$5\,625 + 14 = 5\,639 \text{ (dividendo)}$$

7. Expressões aritméticas com as quatro operações. O cálculo das expressões aritméticas que contenham as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) é feito na seguinte ordem:

Em *primeiro lugar*, as *multiplicações e divisões* e, em seguida, as *adições* e *subtrações*, respeitando-se a ordem de se iniciar com os parênteses mais internos, a seguir os colchetes e depois as chaves, se os houver. Exemplo:

Calcular o valor das seguintes expressões:

1.ª) $54 - 3 \times [(7 + 6 : 2) - (4 \times 3 - 5)]$

Temos: $54 - 3 \times [(7 + 3) - (12 - 5)]$
$= 54 - 3 \times [10 - 7] =$
$= 54 - 9 =$
$= 45.$

2.ª) $[36 : 2 \times (3 + 3 \times 5)] : \{27 - [3 + (8 - 4 : 2)]\}$

Temos: $[18 \times (3 + 15)] : \{27 - [3 + (8 - 2)\} =$

$= [18 \times 18] : \{27 - [3 + 6]\} =$

$= 324 : \{27 - 9\} =$

$= 324 : 18 =$

$= 18.$

3.ª) $\{[(8\times4+3) : 7+(3+15 : 5)\times3]\times2-(19-7) : 6\}\times2+12$

Temos: $\{[(32+3) : 7+(3+3)\times3]\times2 - 12 : 6 \quad \times2+12=$

$= \{[35 : 7 + 6 \times 3] \times 2 - 2\} \times 2 + 12 =$

$= \{[5 + 18] \times 2 - 2\} \times 2 + 12 =$

$= \{23 \times 2 - 2\} \times 2 + 12 =$

$= \{46 - 2\} \times 2 + 12 =$

$= 44 \times 2 + 12 =$

$= 88 + 12 =$

$= 100.$

8. Quociente e resto de uma grandeza por um número. *Quociente de uma grandeza por um número* (diferente de zero) é a grandeza, referida à mesma unidade, que tem por medida o quociente da medida da grandeza considerada pelo número dado. A diferença entre a grandeza e o produto do número pelo quociente definido diz-se *resto* da divisão da grandeza por aquêle número. Indicações (exemplos):

Quoc. (100m : 5) = 20m e resto (100m : 5) = 0.
Quoc. (8*l* : 5) = 1*l* e resto (8*l* : 5) = 3*l*.

9. Quociente e resto de uma grandeza por outra. *Quociente de uma grandeza por outra* (homogênea e não nula), referidas à mesma unidade, é o quociente das medidas dessas grandezas na ordem em que foram consideradas. A diferença entre a primeira grandeza e o produto da segunda pelo quociente entre elas chama-se *resto* da divisão da primeira grandeza pela segunda. Indicações (exemplos):

Quoc. (20m : 5m) = 4 e resto (20m : 5m) = 0m.
Quoc. (25*l* : 8*l*) = 3 e resto (25*l* : 8*l*) = 1*l*.

10. Erros mais comuns. Não tem sentido a expressão:

30m : 5*l* = 6m (?).

Por outro lado, emquanto é verdadeira a relação:

50 : 5 = 10,

está errada esta outra:

52 : 5 = 10 (?),

pois, 10 × 5 não é evidentemente, 52. Devemos, ainda, frizar que

$$\frac{5}{5} \text{ não é zero,}$$

mas 1, pela 2.ª obs. sôbre a divisão. Também não confundir a ***divisão impossível*** 5 : 0 com a divisão possível 0 : 5 = 0 (porque 0×5=0) ou com a divisão 5 : 1 = 5 (porque 5×1=5).

EXERCÍCIOS SÔBRE AS QUATRO OPERAÇÕES

Prova sexta-feira

1. Efetuar mentalmente as divisões:
   1.ª) 37 000 : 500
   2.ª) 420 000 : 70 000.
2. Aplicar a propriedade distributiva nas expressões aritméticas:
   1.ª) $(36 + 42 - 54) : 6$
   2.ª) $(99 - 55) : 11.$
3. Calcular o valor das expressões aritméticas:
   1.ª) $(1 + 3 \times 5) \times (15 - 6 : 2)$
   2.ª) $\{[32 - (11 - 5) \times 2] + 12\} : [4 + 4 \times (7 - 2 \times 3)]$
   3.ª) $[3 \times (7 - 5) \times (1 + 3 \times 8)] : [25 \times 3 \times (17 - 3 \times 5)]$
   4.ª) $\{130 - 2 \times [24 - 6 \times (10 - 2 \times 3)] : (15 \times 2 - 3)\} - 130$
   5.ª) $\{18 + 7 \times [28 - (4 \times 3) : (1 + 5)] - 48 : 6\} : [28 - 4 \times 5]$
4. Determinar o número que, dividido por 213, dá o quociente 401 e resto 127.
5. Numa divisão, o dividendo é 17 648, o quociente 82 e o resto 18. Determinar o valor do divisor.
6. Pensei em certo número. Multipliquei-o por 72 e resultou 1 080. Qual o número pensado?
7. João e seu pai fizeram um trato: cada vez que João acertasse um problema, receberia de seu pai Cr$ 3,00 e cada vez que errasse daria Cr$ 2,00. Tendo João recebido Cr$ 21,00, depois de resolver 12 problemas, pergunta-se quantos acertou.
8. Uma lesma sobe, durante o dia, 3 metros duma parede e, durante a noite, o seu próprio pêso faz descer 1,20 metros. Quanto tempo levará para fixar-se nos 5,4m dessa parede?
9. Um comerciante comprou 180 pares de sandálias. Vendeu 60 pares por Cr$ 9 000,00 ganhando Cr$ 35,00 em cada par. Quanto lhe custaram os pares de sandálias?
10. Sabendo que um corredor vai de um lugar a outro em 9 horas, fazendo 16 quilômetros por hora, quer-se conhecer quantas horas empregaria para percorrer o mesmo caminho se fizesse 18 quilômetros por hora.

RESPOSTAS:

2. 1.ª) 36 : 6 + 42 : 6 − 54 : 6;
   2.ª) 99 : 11 − 55 : 11.
3. 1.ª) 192;
   2.ª) 4;
   3.ª) 1;
   4.ª) 0;
   5.ª) 24.
4. 85 540.
5. 215.
6. 15.
7. 9.
8. 3 dias.
9. Cr$ 20 700,00.
10. 8 horas.

PROBLEMAS TÍPICOS SÔBRE AS QUATRO OPERAÇÕES

Estudaremos alguns processos resolutivos de problemas de aritmética que envolvam as quatro operações. São êsses problemas que dão a ginástica mental indispensável àquêles que se destinam à arte de ensinar. Existe uma série de problemas, chamados *típicos*, cujos processos de resolução se aplicam na solução de outros problemas de aritmética. Vejamos alguns dêles

PRIMEIRO TIPO: *A soma de dois números é* 76 *e o maior dêles é* 18 *vêzes o outro. Quais os dois números?*

Representando o *menor* dos números por 1 (1 vez),
o *maior* dêles será representado por... 18 (18 vêzes o menor);
E a *soma* dêsses números será representada por...................... 19 (19 vêzes o menor)

Valendo a soma 76 (que representa 19 vêzes o menor) o menor dêsses números será obtido dividindo 76 por 19. Logo:

$$76 : 19 = 4 \text{ (menor) e o maior, será: } 18 \times 4 = 72.$$

SEGUNDO TIPO: *Dois chapéus custaram* Cr$ 366,00. *Um dêles custou* Cr$ 36,00 *mais do que o outro. Qual é o preço de cada um?*

Se, do total de Cr$ 366,00, subtrairmos Cr$ 36,00, que é a diferença entre os preços, obteremos Cr$ 330,00 que representaria o valor dos dois chapéus, caso custassem o mesmo preço, isto é, Cr$ 330,00 : 2 = Cr$ 165,00 cada um. Logo:

um chapéu custa Cr$ 165,00
e o outro....... Cr$ 165,00 + Cr$ 36,00 = Cr$ 201,00

TERCEIRO TIPO: *Repartir* Cr$ 4 317,00 *entre três pessoas, de modo que a segunda receba* Cr$ 528,00 *mais que a primeira e a terceira* Cr$ 315,00 *mais que a segunda.*

Faremos a seguinte representação:

$$1.^{a}) \rightarrow 1.^{a}$$
$$2.^{a}) \rightarrow 1.^{a} + \text{Cr\$ } 528{,}00$$
$$3.^{a}) \rightarrow \underbrace{1.^{a} + \text{Cr\$ } 528{,}00}_{2.^{a}} + \text{Cr\$ } 315{,}00$$

Logo:

$$1.^{a} + \underbrace{1.^{a} + \text{Cr\$ } 528{,}00}_{2.^{a}} + \underbrace{1.^{a} + \text{Cr\$ } 528{,}00 + \text{Cr\$ } 315{,}00}_{3.^{a}}$$

equivale à importância de Cr$ 4 317,00, que deve ser repartida.

Essa distribuição equivale também à seguinte:

$$1.^{a} + 1.^{a} + 1.^{a} + \underbrace{\text{Cr\$}528{,}00 + \text{Cr\$}528{,}00 + \text{Cr\$}315{,}00}_{\text{Cr\$ } 1\,371{,}00} \rightarrow \text{Cr\$}4317{,}00$$

ou 3 vêzes a 1.ª + Cr$ 1 371,00........... → Cr$ 4 317,00
e 3 vêzes a 1.ª...... (4 317,00 − 1 371,00) → Cr$ 2 946,00
e, portanto, a 1.ª...... (2 946,00 : 3) ..... → Cr$ 982,00

Logo:

1.ª → Cr$ 982,00
2.ª → Cr$ 982,00 + Cr$ 528,00 = Cr$ 1 510,00
3.ª → Cr$ 1 510,00 + Cr$ 315,00 = Cr$ 1 825,00

QUARTO TIPO: *Um aluno recebe* Cr$ 3,00 *por problema que acerta e paga* Cr$ 2,00 *por problema que erra. Fêz* 50 *problemas e recebeu* Cr$ 85,00. *Quantos acertou?*

Se o aluno acertasse todos os 50 problemas, receberia Cr$ 150,00 (50×3,00). Como só recebeu Cr$ 85,00, a diferença 150,00 − 85,00 = 65,00 representa a quantia que o aluno deixou de ganhar por ter errado alguns problemas. Como cada problema errado acarreta um prejuízo de: Cr$ 5,00, pois

Cr$ 3,00 (que deixou de ganhar)
Cr$ 2,00 (que deve pagar)
Cr$ 5,00

segue-se que, dividindo Cr$ 65,00 por Cr$ 5,00 teremos o número dos problemas errados, isto é, Cr$ 65,00 : Cr$ 5,00 = 13.

Portanto: o aluno errou 13 problemas e acertou 37 (50 − 13).

Prova:

Acertando 37 problemas recebeu,	Cr$ 111,00	(37 × Cr$ 3,00)
errando 13 problemas pagou	Cr$ 26,00	(13 × Cr$ 2,00)
Quantia recebida..........	Cr$ 85,00	

QUINTO TIPO: *Um negociante inescrupuloso compra 450 litros de vinho a Cr$ 25,00 o litro. Junta ao vinho 50 litros de água e quer ganhar na venda Cr$ 4 750,00 Por quanto deve vender o litro?*

O vinho custou para êsse negociante: 450 × Cr$ 25,00 = = Cr$ 11 250,00. Para ter um lucro de Cr$ 1 200,00 o cálculo será feito sôbre:

Cr$ 11 250,00 + Cr$ 4 750,00 = Cr$ 16 000,00

Tendo acrescentado 50 litros de água, para saber o preço do litro da mistura (500 litros), basta dividir Cr$ 16 000,00 por 500, isto é,

Cr$ 16 000,00 : 500 = Cr$ 32,00

Logo: o negociante deve vender o litro por Cr$ 32,00 para lucrar Cr$ 4 750,00.

SEXTO TIPO: *Tenho que distribuir entre alguns pobres uma certa quantia. Se der Cr$ 2,00 a cada pobre, ficarei com Cr$ 25,00; e se der Cr$ 3,00, faltam-me Cr$ 15,00. Quantos são os pobres e qual a quantia que tenho?*

Dando Cr$ 2,00 a cada pobre *sobram* → Cr$ 25,00
Dando Cr$ 3,00 a cada pobre *faltam* → Cr$ 15,00

Logo: uma diferença de Cr$ 1,00 (3,00 − 2,00) acarreta uma despesa de Cr$ 40,00 (25,00 + 15,00), pois, deixam de sobrar Cr$ 25,00 e ainda faltam Cr$ 15,00. Portanto, o número de pobres será dado pela divisão:

Cr$ 40,00 : Cr$ 1,00 = 40

A quantia que tenho será dada pelo produto:

número de pobres × Cr$ 2,00 + Cr$ 25,00 (sobra)
ou 40 × Cr$ 2,00 + Cr$ 25,00 = Cr$ 80,00 + Cr$ 25,00 = Cr$ 105,00.

Prova:

40 × Cr$ 2,00 =	Cr$ 80,00	40 × Cr$ 3,00 =	Cr$ 120,00
sobram.....	Cr$ 25,00	faltam......	Cr$ 15,00
tenho.......	Cr$ 105,00	tenho........	Cr$ 105,00

SÉTIMO TIPO: *Uma pessoa tem Cr$ 4 679,00 e outra tem Cr$ 3 415,00. A primeira economiza Cr$ 438,00 e a segunda Cr$ 754,00 por mês. No fim de quantos meses terão quantias iguais?*

Diferença das quantias:

Cr$ 4 679,00 − Cr$ 3 415,00 = Cr$ 1 264,00

Diferença das economias:

Cr$ 754,00 − Cr$ 438,00 = Cr$ 316,00

Dividindo-se Cr$ 1 264,00 por Cr$ 316,00, obteremos o quociente 4, que representa o número de meses necessários para que as quantias sejam iguais.

OITAVO TIPO: *Pensei em certo número, a seguir acrescentei 7 a êsse número e multipliquei o resultado por 4. Subtraí depois 6 e obtive o número 310. Que número pensei?*

Basta, para resolver o problema, partir do resultado encontrado (310) e fazer as operações inversas das que foram indicadas. Assim:

$$310 + 6 = 316; \quad 316 : 4 = 79; \quad 79 - 7 = 72$$

Logo: o número pensado foi 72.

Prova: $72; \ 72 + 7 = 79; \ 79 \times 4 = 316; \ 316 - 6 = 310$

PROBLEMAS PARA SEREM RESOLVIDOS

1. Dois números têm por soma 120 e o maior vale 11 vêzes o menor Quais os números?
2. Determinar dois números, sabendo que a sua diferença é 128 e que o maior é 5 vêzes o menor.
3. Dois alunos têm juntos 21 anos. O mais velho tem três anos a mais que o mais moço. Qual a idade de cada um?
4. Um operário ganha Cr$ 96,00 por dia de trabalho e paga a multa de Cr$ 24,00 por dia de falta injustificada. Depois de 25 dias recebe Cr$ 2 040,00. Quantos dias trabalhou?
5. Se eu tivesse Cr$ 9 804,00 mais do que tenho no momento, poderia comprar um terreno que custa Cr$ 32 154,00 e me sobrariam ainda Cr$ 3 491,00. Quanto possuo?
6. Achar três números tais que a soma do primeiro com o segundo seja 200, a do primeiro com o terceiro seja 208 e a do segundo com o terceiro 216.

7. A soma de dois números é 366 e a sua diferença é 86. Determinar êsses números.

8. Antônio comprou dois frangos, pagando pelo primeiro Cr$ 6,00 mais que pelo segundo. Dizer quanto custou cada frango, sabendo que duas vêzes o preço do segundo menos uma vez o preço do primeiro é igual a Cr$ 22,00.

9. Uma herança de Cr$ 132 000,00 foi dividida entre três pessoas, de modo que a segunda e a terceira receberam, respectivamente, o dôbro e o triplo do que recebeu a primeira. Quanto recebeu cada pessoa?

10. Dois recipientes podem conter juntos 3 415 litros de água. Qual a capacidade de cada um dêles, sabendo que a capacidade do primeiro é quatro vêzes a do segundo?

11. Uma pessoa comprou galinhas e coelhos num total de 48 cabeças e 130 pés. Quantas galinhas e quantos coelhos comprou?

12. Pensei em um número, multipliquei-o por 2 e subtraí 13 dêsse resultado, obtendo 45. Qual o número pensado?

13. A soma das idades de três pessoas é 75 anos. Juntando-se 6 anos à idade da primeira, 12 anos à idade da terceira e tirando-se 3 anos da idade da segunda, obtém-se três números iguais. Qual a idade de cada pessoa?

14. De uma estação parte um trem que faz 50 quilômetros por hora. Depois de duas horas, parte um outro trem no mesmo sentido alcança o primeiro depois de 5 horas. Quantos quilômetros por hora faz o segundo trem?

15. Um negociante comprou certo número de metros de fazenda, contando revendê-la a Cr$ 156,00 o metro, a fim de ganhar Cr$ 6 120,00. Como sòmente foi possível revender a Cr$ 138,00 o metro, ficou ganhando nessa transação Cr$ 3 960,00. Quantos metros comprou êsse negociante?

16. Multiplicando um número por 8 e aumentando êsse produto de 1 215, obtém-se 1 575. Qual o número?

17. A diferença entre dois números é 144 e o maior dêles vale 7 vêzes o menor. Determinar êsses números.

18. A soma de dois números é 242 e a sua diferença contém 9 vêzes o menor. Qual o maior?

19. A soma de dois números é 392 e o quociente entre êles 13. Determinar êsses números.

20. Dividir 12 em duas partes tais que uma, mais o triplo da outra, dê um total igual a 24.

21. Tem-se quatro números: a soma dos três primeiros é 843; a soma dos três últimos é 1 217; a soma dos dois primeiros e o último 941 e a do primeiro e os dois últimos 1 028. Quais os números?

22. Dividir Cr$ 1 300,00 entre três pessoas de modo que a primeira tenha Cr$ 10,00 mais que a segunda e esta Cr$ 120,00 mais que a terceira.

23. Repartir Cr$ 63 000,00 entre três pessoas de modo que a segunda tenha quatro vêzes mais que a primeira e a terceira quatro vêzes mais que a segunda.

24. Uma pessoa dá esmolas a um certo número de pobres. Dando Cr$ 5,00 a cada um, sobram-lhe Cr$ 12,00 e, dando Cr$ 8,00 faltam-lhe Cr$ 6,00, Quanto tem a pessoa e quantos são os pobres?

25. Um negociante comprou 20 metros de linho e 30 metros de casimira, pagando por tudo Cr$ 25 600,00. Um metro de casimira custa o dôbro do preço do metro de linho. Qual o preço do metro de cada espécie de tecido?

26. A idade de um pai e a de seu filho somam 90 anos. Tirando 15 anos da idade do pai e acrescentando-os à idade do filho, ambas as idades ficam iguais. Qual é a idade de cada um?

27. Dois entregadores ganham juntos Cr$ 240,00 por dia. No fim de 18 dias o primeiro recebe Cr$ 1 620,00 e o segundo Cr$ 2 700,00. Quanto recebe cada um dêles por dia?

28. Com refresco de Cr$ 20,00 o litro e refresco de Cr$ 30,00 o litro, encheu-se uma pipa que contém 50 litros. Quantos litros há de cada espécie, se a pipa cheia de refresco vale Cr$ 1 200,00?

29. Um ciclista persegue outro. A distância que os separa é de 6 quilômetros. Pergunta-se em quanto tempo o segundo alcançará o primeiro, se o segundo corre 48 quilômetros por hora e o outro 36 quilômetros por hora.

30. Um barbeiro cortou 13 cabelos e fêz 21 barbas num dia. Cada barba custou Cr$ 50,00 e sabe-se que êle recebeu ainda, nêsse dia, Cr$ 250,00 de gorjeta. Tendo ganho no fim do dia a quantia total de Cr$ 2 600,00, pergunta-se o preço do corte de cabelo.

RESPOSTAS:

1. 110 e 10.
2. 160 e 32.
3. 9 e 12 anos.
4. 22 dias.
5. Cr$ 25 841,00.
6. 96, 104 e 112.
7. 226 e 140.
8. Cr$ 34,00 e Cr$ 28,00.
9. Cr$ 22 000,00; Cr$ 44 000,00 e Cr$ 66 000,00.
10. 683 litros e 2 732 litros.
11. 31 galinhas e 17 coelhos.
12. 29.
13. 24, 33 e 18 anos.
14. 70 quilômetros por hora.
15. 120 metros.
16. 45
17. 168 e 24.
18. 220 e 22.
19. 364 e 28.
20. 6 cada parte.
21. 126, 315, 402 e 500.
22. Cr$ 350,00; Cr$ 470,00 e Cr$ 480,00.
23. 1.ª) Cr$ 3 000,00;
 2.ª) Cr$ 12 000,00 e
 3.ª) Cr$ 48 000,00.
24. Cr$ 42,00 e 6 pobres.
25. Cr$ 320,00 e Cr$ 640,00.
26. 60 anos e 30 anos.
27. Cr$ 90,00 e Cr$ 150,00
28. 20*l* e 30*l*.
29. $\frac{1}{2}$ h.
30. Cr$ 100,00.

POTENCIAÇÃO

1. Se numa multiplicação, todos os fatôres são iguais, como por exemplo em

$$3 \times 3 \times 3 \times 3$$

pode indicar-se êste produto, abreviadamente, escrevendo o fator igual *uma só vez*, e, a seguir, um pouco mais acima, em *tamanho menor*, o número de fatôres que se toma e que se denomina *expoente*. Assim:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

que se lê; "3 elevado à quarta potência".

Êstes produtos especiais dão lugar a uma nova operação, denominada *potenciação* e cujo resultado se chama *potência*. O fator que se repete é chamado *base*; e o número de vêzes *que a base* é escrita, como fator, chama-se *grau da potência*, que é representado pelo *expoente*.

2. **Definição.** *Chama-se potência de um número a um produto de fatôres iguais a êsse número.*

A segunda potência de um número é também denominada *quadrado* e a terceira *cubo*. Exemplos:

4^2 que se lê: "quatro ao quadrado" e se calcula $4^2 = 4 \times 4 = 16$

2^3 que se lê: "dois ao cubo" e se calcula $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

Em particular: $5^1 = 5$

isto é, *um número pode ser considerado como potência de expoente* 1.

Chama-se *potência zero* de um número qualquer (diferente de zero), ao número 1. Exemplo:

$8^0 = 1$ e de um modo geral: $a^0 = 1 \ (a \neq 0)$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) *As potências de 0 são tôdas iguais a zero.* Exemplo:

$$0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$$

2.ª) *As potências de 1 são tôdas iguais a 1.* Exemplo:

$$1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

3.ª) *As potências de 10 são iguais à unidade seguida de tantos zeros quantas são as unidades do expoente.* Exemplos:

$$10^2 = 100; \quad 10^3 = 1\,000; \quad 10^4 = 10\,000$$

3. **Tábua das primeiras potências sucessivas dos números dígitos.** É muito útil, para os cálculos que se seguem, guardar de memória as primeiras potências sucessivas.

Assim:

$2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$; $2^5 = 32$; ...
$3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $3^4 = 81$; ...
$4^2 = 16$; $4^3 = 64$; ...
$5^2 = 25$; $5^3 = 125$; ...
$6^2 = 36$; $6^3 = 216$; ...
$7^2 = 49$; $7^3 = 343$; ...
$8^2 = 64$; $8^3 = 512$; ...
$9^2 = 81$; $9^3 = 729$; ...
$10^2 = 100$; $11^2 = 121$; $12^2 = 144$; ...

4. **Propriedades.** 1.ª) UNIFORME. Conduz, a potenciação, a um só resultado.

2.ª) É NÃO-COMUTATIVA, isto é, $2^3 \neq 3^2$, pois $2^3 = 8$ e $3^2 = 9$.

3.ª) DISTRIBUTIVA EM RELAÇÃO AO PRODUTO. Para elevar um produto indicado a uma potência, pode-se elevar cada um dos fatôres a essa potência e depois efetuar o produto das potências obtidas. Exemplo:

$(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2$ que, efetuado, é igual a $9 \times 16 = 144$

Êsse mesmo resultado pode ser obtido, efetuando primeiramente o produto indicado entre parênteses. Assim:

$$(3 \times 4)^2 = (12)^2 = 144$$

Com relação à soma (ou diferença) *não vale* a propriedade distributiva. Assim:

$(4 + 3)^2$ *não é igual* a $4^2 + 3^2$

pois, enquanto

$(4 + 3)^2 = 7^2 = 49$ temos que $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

5. **Regras das operações sôbre potências de mesma base.**

1.ª) *O produto de potências da mesma base é uma potência de mesma base, que tem por expoente a soma dos expoentes.* Exemplo: $4^3 \times 4^2 = 4^{3+2} = 4^5$

2.ª) *O quociente de duas potências da mesma base é uma potência de mesma base, que tem expoente a diferença dos expoentes.* Exemplo:

$$4^5 : 4^2 = 4^{5-2} = 4^3$$

Se as potências têm o mesmo expoente, temos:

$$3^2 : 3^2 = 3^0 = 1 \text{ (como já vimos)}$$

3.ª) *Para elevar uma potência a uma potência, multiplicam-se entre si os expoentes.* Exemplos:

$$(5^2)^3 = 5^6; \qquad (2^4)^2 = 2^8$$

6. Cálculo de expressões aritméticas contendo potências. É feito na seguinte ordem:

1.º) as potências;

2.º) as multiplicações e divisões;

3.º) as adições e subtrações,

respeitando-se a ordem de se iniciar com os parênteses, a seguir os colchetes e depois as chaves. Exemplos:

1.º) $[3^2 + (5 - 2)^3] : (4 - 1)^2$

Temos:
$$\begin{aligned} &[9 + 3^3] : 3^2 = \\ &= [9 + 27] : 9 = \\ &= 36 : 9 = \\ &= 4. \end{aligned}$$

2.º) $7 + (2^3 \times 3 + 4^2 : 8) : 13 - 3^2$

Temos:
$$\begin{aligned} &7 + (8 \times 3 + 16 : 8) : 13 - 9 = \\ &= 7 + (24 + 2) : 13 - 9 = \\ &= 7 + 26 : 13 - 9 = \\ &= 7 + 2 - 9 = \\ &= 9 - 9 = \\ &= 0. \end{aligned}$$

3.º) $\{5 + [4^3 : (3^2 - 1) + 1^5 \times 3]\} : (6 - 2)^2$

Temos:
$$\begin{aligned} &\{5 + [64 : (9 - 1) + 1 \times 2]\} : 4^2 = \\ &= \{5 + [64 : 8 + 3]\} : 16 = \\ &= \{5 + [8 + 3]\} : 16 = \\ &= \{5 + 11\} : 16 = \\ &= 16 : 16 = \\ &= 1. \end{aligned}$$

7. Erros mais comuns. É preciso atenção para não escrever

$$2^3 = 6 \quad (?)$$

que é igual a 8; nem escrever que:

$$1^3 = 3 \quad (?)$$

que é 1. Nem tão pouco que

$$2^3 \times 2^4 = 2^{12} \quad (?)$$

pois, êsse produto é igual a 2^7. Também são diferentes as expressões:

$$(2^3)^2 \text{ e } 2^{3^2}$$

pois,

$$(2^3)^2 = 2^6 \text{ e } 2^{3^2} = 2^9.$$

EXERCÍCIOS SÔBRE POTÊNCIAS

1. Escrever, sob a forma de multiplicação, as seguintes potências:
   1.º) 2^3; 2.º) 8^2; 3.º) 1^5; 4.º) 10^4; 5.º) 100^3.
2. Escrever, sob a forma de potências, os produtos seguintes:
   1.º) $5 \times 5 \times 5$; 2.º) $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$; 3.º) 1×1;
   4.º) $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$; 5.º) $8 \times 8 \times 5 \times 5 \times 5 \times 11 \times 11$.
3. Calcular as potências: 1^8; 2^3; 3^2; 4^5; 6^2; 7^1; 8^0; 9^2; 10^6.
4. Calcular os quadrados e os cubos dos números compreendidos entre 5 e 10.
5. Qual a diferença entre o cubo de 12 e o quadrado de 13?
6. Qual o resultado de:
   1.º) $(5 + 3)^2$; 2.º) $(12 - 8)^3$; 3.º) $(4 + 3 + 5)^2$;
   4.º) $(5 + 2)^2 - (9 - 7)^4$.
7. Escrever as quatro primeiras potências de 5.
8. Efetuar: 1.º) $2^3 \times 2^2$; 3.º) $6^3 \times 6 \times 6^2$; 5.º) $8^3 : 8^2$;
   2.º) $3 \times 3^2 \times 3^5$; 4.º) $a^m \times a^n$; 6.º) $5^4 : 5^2$.
9. Aplicar as propriedades da potenciação em:
   1.º) $(2 \times 3 \times 4)^2$; 2.º) $(3^2 \times 2^3 \times 4)^3$; 3.º) $(4^3 \times 2^2)^2 : (4^5 \times 2^4)$.
10. Calcular o valor das expressões aritméticas:
    1.º) $2^3 + 5 \times (4 \times 3^2 - 6^2 : 12)$
    2.º) $\{3^4 : (5 - 2)^3 \times [15 - 2 \times (9 - 2^3)] - 6^2\} : 3^0$
    3.º) $\{(7^2 - 5 \times 3^2 + 1)^3 : [(2^3 - 6)^2 + 7 \times 3]\}^2 : [2^2 + (5 - 4)^3]$.

RESPOSTAS:

1. 1.º) $2 \times 2 \times 2$; 3.º) $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$; 5.º) $100 \times 100 \times 100$.
   2.º) 8×8; 4.º) $10 \times 10 \times 10 \times 10$;
2. 1.º) 5^3; 2.º) 9^7; 3.º) 1^2; 4.º) $3^2 \times 2^3$; 5.º) $8^2 \times 5^3 \times 11^2$.
3. 1; 8; 9; 1 024; 36; 7; 1; 81; 1 000 000.
4. Quadrados: 36, 49, 64, 81; Cubos: 216, 343, 512, 729.
5. 1 559.
6. 1.º) 64; 2.º) 64; 3.º) 144; 4.º) 33.
7. 5, 5^2, 5^3, 5^4.
8. 1.º) 2^5; 2.º) 3^8; 3.º) 6^6; 4.º) a^{m+n}; 5.º) 8; 6.º) 5^2.
9. 1.º) $2^2 \times 3^2 \times 4^2$; 2.º) $3^6 \times 2^9 \times 4^3$; 3.º) 4.
10. 1.º) 173; 2.º) 3; 3.º) 5.

§ 3. Divisibilidade aritmética.

1. Definição. Um número é *divisível* por outro quando sua divisão por êsse outro é exata, isto é, o resto é zero. Quando um número é divisível por outro, diz-se também que êle é *múltiplo* dêsse outro, o qual passa a ser seu *divisor* ou *sub-múltiplo*.

Assim, por exemplo, o número 20 é *divisível* por 5, pois

$$20 : 5 = 4$$

5 é *divisor* de 20 ou *divide* 20.

2. Critérios de divisibilidade. A verificação de que um número é divisível por outro é feita, geralmente, efetuando a divisão para se ter conhecimento de sua exatidão ou não. Existem, porém, alguns *divisores especiais*, que permitem reconhecer se um número é divisível por outro *sem efetuar a divisão*, bem como determinar o valor do *resto*, caso contrário. Para isso temos diversas regras que constituem os *critérios* ou *caracteres de divisibilidade*. Os critérios mais importantes serão *justificados* no fim dêste parágrafo.

1.º) ***Divisibilidade por 2.*** Um número é divisível por 2 quando *é par*. Exemplos:

324 é divisível por 2 porque é par.
84 105 não é divisível por 2 porque não é par.

NOTA: O resto da divisão de um número por 2 pode ser obtido dividindo o *último* algarismo da direita por 2. Exemplo:
3 853 que não é divisível por 2, deixa na divisão por 2, o resto 1, que é o mesmo resto da divisão por 2 do último algarismo (3).

2.º) ***Divisibilidade por 3.*** Um número é divisível por 3 quando a *soma* dos valores absolutos dos seus algarismos fôr divisível por 3. Exemplos:

7 536 é divisível por 3 porque a soma $7 + 5 + 3 + 6 = 21$ é divisível por 3.
893 não é divisível por 3 porque a soma $8 + 9 + 3 = 20$ não é.

NOTA: O resto da divisão de um número por 3 pode ser obtido dividindo a soma dos valores absolutos dos seus algarismos por 3: Exemplo.
893 que não é divisível por 3, deixa na sua divisão por 3 o resto 2 (resto da divisão da soma 20 por 3).

3.º) ***Divisibilidade por 4.*** Um número é divisível por 4 quando o número formado pelos seus *dois últimos* algarismos da direita fôr divisível por 4. Exemplos:

1 916 é divisível por 4 porque 16, que é o número formado pelos dois últimos algarismos da direita, é divisível por 4.
46 335 não é divisível por 4, pois, *35* não é.

NOTA: O resto da divisão de um número por 4 pode ser obtido dividindo o número formado pelos seus *dois últimos algarismos* da direita por 4. Exemplo:
46 335 que não é divisível por 4, deixa na sua divisão por 4, o resto 3 (resto da divisão de 35 por 4).

4.º) ***Divisibilidade por 5*** (*). Um número é divisível por 5 quando termina em *zero* ou *cinco*. Exemplos:

12 385 é divisível por 5 porque termina em 5.
218 430 é divisível por 5 porque termina em 0.
723 não é divisível por 5 porque não termina em 5 ou 0.

NOTA: O resto da divisão de um número por 5 pode ser obtido dividindo o *último* algarismo da direita por 5. Exemplo:
723 que não é divisível por 5 deixa, na sua divisão por 5, o resto 3 (resto da divisão do último algarismo por 5).

5.º) ***Divisibilidade por 6.*** Um número é divisível por 6 quando *fôr divisível* por *2* e por *3*. Exemplos:

384 é divisível por 6, porque é divisível por 2 (par) e por 3 (soma 15).
1 412 não é divisível por 6, porque apesar de par não é divisível por 3 (soma 8).

6.º) ***Divisibilidade por 7.*** Destacamos três casos:

1) *O número é formado sòmente de dois algarismos.* O número é divisível por 7 se o número formado pelo algarismo das unidades mais três vêzes o algarismo das dezenas fôr divisível por 7.

Exemplos:

84 é divisível por 7, pois,
4 (alg. das unidades).
24 (3 vêzes alg. dezenas).
$\overline{28}$ que é divisível por 7.

95 não é divisível por 7, pois,
5 (unidades).
27 (3×9)
$\overline{32}$ que não é divisível.

(*) *Divisibilidade por 25*: Um número é divisível por 25 quando o número formado pelos seus *dois últimos* algarismos da direita fôr divisível por 25. Exemplos:
4 275 é divisível por 25 (pois, 75 é divisível por 25);
12 315 não é divisível por 25 (pois, 15 não é divisível por 25).

2) *O número é formado sòmente de três algarismos.* O número é divisível por 7 se o número formado pelo algarismo das unidades, mais três vêzes o algarismo das dezenas e mais duas vêzes o algarismo das centenas fôr divisível por 7.

Exemplos:

504 é divisível por 7, pois,
4 (unidades).
0 (3×0)
10 (2×5)
14 que é divisível por 7.

817 não é divisível por 7, pois,
7 (unidades).
3 (3×1)
16 (2×8)
26 que não é divisível.

3) *O número é formado por mais de três algarismos.* O número é divisível por 7 se, separando-o em classes de três algarismos, a partir da direita, o número formado pela diferença entre as somas das classes de ordem ímpar e as das de classe par fôr divisível por 7. São de classe ímpar o 1.°, 3.°, 5.°, ... grupos e de classe par o 2.°, 4.°, 6.°, ... grupos, a partir da direita. Exemplos:

10 451 é divisível por 7, pois,
451 (classe ímpar, 1.° grupo).
− 10 (classe par, 2.° grupo).
441 que é divisível por 7.
(regra anterior)
1 (unidade)
12 (3×4)
8 (2×4)
21 (é divisível por 7)

12 345 678 não é divisível por 7, pois,
678
12
690 (soma das classes ímpares); 345 (classe par).
690
− 345
345 que não é divisível por 7 (regra anterior).

NOTA: No caso da primeira soma (classes de ordem ímpar) ser menor que a segunda (classes de ordem par), acrescenta-se à primeira soma um múltiplo de 7 oportuno, a fim de tornar possível a subtração.

7.°) ***Divisibilidade por 8.*** Um número é divisível por 8, quando o número formado pelos seus *três últimos algarismos* da direita fôr divisível por 8. Exemplos:

6 104 é divisível por 8 porque 104, que é o número formado pelos seus *três últimos algarismos*, é divisível por 8.

21 417 não é divisível por 8 porque 417 não é.

NOTA: O resto da divisão de um número por 8 pode ser obtido dividindo por 8 o número formado pelos seus três últimos algarismos. Exemplo:

21 417 que não é divisível por 8, deixa na sua divisão por 8 o resto 1 (resto da divisão de 417 por 8).

8.°) ***Divisibilidade por 9.*** Um número é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos fôr divisível por 9. Exemplos:

738 é divisível por 9 porque a soma $7+3+8=18$ é divisível por 9.

44 319 não é divisível por 9 porque a soma $4+4+3+1+9=21$ não é.

NOTA: O resto da divisão de um número por 9 pode ser obtido dividindo por 9 a soma dos valores absolutos dos seus algarismos. Exemplo:

44 319 que não é divisível por 9, deixa na sua divisão por 8 o resto 3 (resto da divisão da soma 21 por 9).

9.°) ***Divisibilidade por 10.*** Um número é divisível por 10 quando *termina* em *zero*. Exemplos:

8 530 é divisível por 10 porque termina em 0.

39 726 não é divisível por 10.

NOTA: O resto da divisão de um número por 10 é igual ao algarismo das unidades dêsse número. Exemplo:

39 726 que não é divisível por 10, deixa na sua divisão por 10 o resto 6 (que representa o algarismo das unidades).

Generalização: Um número é divisível por 100 quando *termina* em *dois zeros*; por 1 000 quando *termina* em *três zeros*; etc.

10.°) ***Divisibilidade por 11.*** Um número é divisível por 11 quando a *diferença* entre as *somas* dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a dos de ordem par, fôr divisível por 11.

Os algarismos de ordem ímpar são os que ocupam o 1.°, 3.°, 5.°, ... lugares e os de ordem par o 2.°, 4.°, 6.°, ... lugares, a partir da direita. Exemplos:

95 568 é divisível por 11, pois, a soma dos algarismos de ordem ímpar (1.°, 3.°, 5.°) vale: $8 + 5 + 9 = 22$; a soma dos algarismos de ordem par (2.°, 4.°), vale $6 + 5 = 11$
e a *diferença* entre essas somas:
$$\begin{array}{r} 22 \\ -11 \\ \hline 11 \end{array}$$
que é divisível por 11.

735 não é divisível por 11 porque:
soma dos algar. de ordem ímpar: $5+7=12$
soma dos algar. de ordem par: 3
diferença: 9 que não é divisível por 11.

NOTAS:

1.ª) O resto da divisão de um número por 11, pode ser obtido dividindo por 11 a diferença entre aquelas duas somas. Exemplo:

735 que não é divisível por 11, deixa na sua divisão por 11 o resto 9 (resto da divisão da diferença entre as somas por 11).

2.ª) No caso da primeira soma (algarismos de ordem ímpar) ser menor do que a segunda (algarismos de ordem par) acrescenta-se à primeira soma um múltiplo de 11 conveniente, a fim de tornar possível a subtração (aritmética) entre elas. Exemplo:

419 085 não é divisível por 11 porque resta 7 da divisão.
De fato: soma dos algarismos ordem ímpar: $5 + 0 + 1 = 6$
soma dos algarismos ordem par: $8 + 9 + 4 = 21$
diferença entre as somas: $6 - 21 = ?$
acrescentando um conveniente multiplo de 11 à primeira soma (22 por exemplo), temos:
$$6 + 22 = 28$$
e a diferença: $28 - 21 = 7$ já é possível.

11.°) ***Divisibilidade por 12.*** Um número é divisível por 12 quando *fôr divisível* por 3 e por 4. Exemplo:

324 é divisível por 12 porque é divisível por 3 (soma 9) e por 4 (os dois últimos algarismos formam o número 24).

4 618 não é divisível por 12 porque não é divisível por 3 (e nem por 4).

3. Justificações dos critérios de divisibilidade. Das propriedades estudadas na divisão decorre que:

PRIMEIRA RELAÇÃO: *Se dois, ou mais, números são divisíveis por um mesmo número também a soma (ou a diferença) será divisível por êsse número.*

Assim, por exemplo, sendo $12 : 3$ e $18 : 3$, temos $(12+18) : 3$.

SEGUNDA RELAÇÃO: *Se um número é divisível por um segundo número, todo múltiplo do primeiro também é divisível pelo segundo.*

De fato, $9 : 3$ e, portanto, um seu múltiplo, por ex., 36 também é.

Divisibilidade por 2, 5 e 10: Consideremos, por exemplo, o número 2 348, que pode ser escrito sob a forma:

$$2\,348 = 2\,340 + 8$$
ou
$$2\,348 = 234 \times 10 + 8$$
ou
$$2\,348 = 234 \times 2 \times 5 + 8.$$

isto é, 2 340 é divisível por 10 e, portanto, por 2 e 5 (2.ª Relação). Resta saber se o último algarismo da direita (8) também é, pois, sendo as parcelas ($234\times2\times5$ e 8) divisíveis por um mesmo número, a soma também será. (1.ª Relação). Logo, os critérios de divisibilidade enunciados separadamente por 2, 5 e 10, podem ser sintetizados num único: *um número é divisível por* 2, 5 *e* 10 *se o último algarismo da direita* (o das unidades) *fôr divisível por* 2, 5 *e* 10.

Divisibilidade por 4, 25 e 100: Considerando o mesmo exemplo, 2 348, que também pode ser escrito sob a forma:

$$2\,348 = 2\,300 + 48$$
temos
$$2\,348 = 23 \times 100 + 48$$
ou
$$2\,348 = 23 \times 4 \times 25 + 48,$$

isto é, 2 348 é divisível por 100 e, portanto, por 4 e 25 (2.ª Relação). Do mesmo modo a divisibilidade de 2 348 por 4, 25 e 100 vai depender do segundo número da decomposição (48) (1.ª Relação). Logo: *um número é divisível por* 4, 25 *e* 100 *se o número formado pelos dois últimos algarismos da direita fôr divisível por* 4, 25 *e* 100.

Divisibilidade por 9 e por 3: Dado o exemplo 2 348, que poderá ser ainda escrito sob a forma:

$$2\,348 = 2\,000 + 300 + 40 + 8$$
vem
$$2\,348 = 2 \times 1\,000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 8$$
ou
$$2\,348 = 2 \times (999 + 1) + 2 \times (99 + 1) + 4 \times (9 + 1) + 8$$

e pela propriedade distributiva do produto em relação à soma, temos:
$$2\,348 = 2 \times 999 + 2 + 3 \times 99 + 3 + 4 \times 9 + 4 + 8$$
e pela propriedade associativa da soma:
$$2\,348 = (2 \times 999 + 3 \times 99 + 4 \times 9) + (2 + 3 + 4 + 8).$$

Observamos, assim, que 2 348 (ou qualquer outro número) pode ser sempre decomposto em duas partes, das quais a primeira é sempre divisível por 9 (e, portanto, por 3) e a segunda parte é formada pela soma dos valores absolutos de seus algarismos (2+3+4+8). O critério respectivo é, então: *um número é divisível por* 9 (ou por 3) *quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos fôr divisível por* 9 (ou por 3).

OBSERVAÇÃO: Todo número divisível por 9 é também divisível por 3, mas *nem todo número divisível por 3 é por 9.*

4. Propriedades elementares dos restos. Provas por um divisor. Podemos resumir as propriedades elementares dos restos nas seguintes:

1.ª) *O resto que se obtém na divisão de uma soma por um número é igual ao resto que se obtém na divisão da soma dos restos das parcelas pelo mesmo número.*

2.ª) *O resto que se obtém na divisão de um produto por um número é igual ao resto que se obtém na divisão do produto dos restos dos fatôres pelo mesmo número.*

Como aplicação dessas propriedades, costuma-se verificar a exatidão das operações fundamentais mediante as *provas por um divisor*, de critério de divisibilidade já estudado. Pelas vantagens que oferecem, os divisores mais empregados são 9 e 11.

Deve-se, contudo, notar que estas provas oferecem uma *probabilidade de acerto* das operações, sem todavia garantir que estejam absolutamente certas, como veremos adiante.

Exemplos:

1. Prova da *adição* usando o divisor 9 (Prova dos nove).

$$\begin{array}{rl} 4\,318 & (\text{soma } 16 : 9) \to \text{resto } 7 \\ 2\,593 & (\text{soma } 19 : 9) \to \text{resto } 1 \\ \underline{1\,876} & (\text{soma } 22 : 9) \to \text{resto } 4 \\ 8\,787 & (\text{soma } 30 : 9) \to \textit{resto } 3 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \to (\text{soma } 12 : 9) \to \textit{resto } 3$$

NOTA: Não podemos com essa prova garantir que a operação esteja absolutamente certa, pois, caso no resultado da soma figurasse, por engano, 7 887, ainda assim a prova pelo divisor 9 daria certa (a ordem das parcelas não altera a soma).

2. Prova da *subtração*, usando o divisor 11. (Prova dos 11).

$$\begin{array}{rl} 4\,531 & \text{o resto da divisão por 11 é } 10 \\ \underline{2\,982} & \text{o resto da divisão por 11 é } 1 \\ 1\,549 & \text{o resto da divisão por 11 é } 9 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \to 9 + 1 = 10$$

3. Prova da *multiplicação* usando o divisor 9.

$$\begin{array}{rl} 5\,713 & \text{o resto da divisão por 9 é } 7 \\ \underline{\times 32} & \text{o resto da divisão por 9 é } \underline{5 \times} \\ 11\,426 & \qquad\qquad\qquad\quad 35 \quad \text{o resto por 9 é 8} \\ \underline{17\,139} & \\ 182\,816 & \text{o resto da divisão por 9 é } 8 \end{array}$$

4. Prova da *divisão* usando o divisor 11.

$$\begin{array}{r|l} 62\,452 & 29 \\ \cline{2-2} 04\,4 & 2\,153 \\ 1\,55 & \\ 102 & \\ 15 & \end{array} \qquad \text{ou } \begin{array}{ccccc} 62\,452 & = & 29 \times 2\,153 & + & 15 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{resto por 11} & & \text{resto por 11} & & \text{resto por 11} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 & = & 1 & + & 4 \\ 5 & = & 5 & & \end{array}$$

EXERCÍCIOS SÔBRE A DIVISIBILIDADE ARITMÉTICA

1. Verificar se são divisíveis por: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 os números: 21 540; 8 433; 7 777; 194 180; 1 001; 397; 3 600; 12 349
2. Que restos pode dar na divisão por 5, um número que não seja divisível por 5?
4, 3, 2, 1
3. Escrever à direita de 36 um algarismo tal que o número formado seja divisível por 3 e por 11.
4. Indicar quais os algarismos de menor valor absoluto que devem ser colocados no lugar dos pontos para que:

532. seja divisível por 3 e por 9;	1.89 seja divisível por 11;
143.5 seja divisível por 3 e por 5;	892.6 seja divisível por 4;
512. seja divisível por 8;	6.724 seja divisível por 2 e por 11.

5. Qual o menor número que se deve somar a 4 831 para que resulte um número divisível por 3?
6. Qual o menor número que se deve somar a 12 318 para que resulte um número divisível por 5?
7. Sem efetuar a divisão, escrever os restos das divisões dos números:
   1.º) 81 345 786 por 9 e por 11;
   2.º) 18 315 por 4, 5 e 8;
   3.º) 303 171 por 2, 3 e 10.
8. Verificar que a diferença entre dois números constituídos pelos mesmos algarismos, mas escritos em ordem inversa, é divisível por 9.
9. Verificar que a soma de dois números pares é um número par, que a soma de dois números ímpares é um número par e que a soma de um número par com um número ímpar é ímpar.

10. Numa caixa existem menos de 60 bolinhas. Se elas forem contadas de 9 em 9 não sobra nenhuma e se forem contadas de 11 em 11 sobra uma. Quantas são as bolinhas?

11. Verificar a exatidão, usando os divisores 9 e 11, das seguintes operações:

1.ª) $8\,503 + 7\,128 + 456 = 1\,6387$;	3.ª) $4\,301 \times 45 = 192\,145$;
2.ª) $4\,018 - 3\,297 = 721$;	4.ª) $11\,414 : 26 = 439$.

RESPOSTAS:

1. 21 540 é por 2, 3, 4, 5, 6, 10 e 12; 8 433 é por 3 e 9; 7 777 é por 7 e 11; 194 180 é por 2, 4, 5, 7, 10; 1 001 é por 7 e 11; 397 por nenhum; 3 600 é por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 e 12; 12 349 por nenhum.
2. Os restos podem ser: 1, 2, 3 e 4.
3. Deve ser escrito o algarismo 3.
4. Os números, depois de colocados os algarismos, são: 5 32*8*; 1 *0*89; 14 325; 89 *2*1*6*; 5 12*0*; 6*4* 724.
5. O menor número é 2.
6. O menor número é 2.
7. 1.º) O resto por 9 é 6 e por 11, 5. 2.º) O resto por 4 é 3, por 5 é 0 e por 8, 3. 3.º) O resto por 2 é 1, por 3 é 0 e por 10 é 1.
10. São 45 bolinhas.
11. 1.ª) Errada; 2.ª) Certa; 3.ª) Errada; 4.ª) Certa.

§ 4. Números primos. 1 número especial

1. Definição. Um número é *primo* quando é divisível *sòmente* por si e pela unidade. Caso contrário diz-se *composto*. Exemplos:

O número 13 é *primo* porque só é divisível por 13 e por 1; os números 4, 6, 8, 9, 10, ... são *compostos*, pois, admitem outros divisores além da unidade e do próprio número considerado.

Os primeiros números primos dispostos em ordem crescente, isto é,

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ \ldots$$

constituem a *sucessão dos números primos* que é infinita ou seja é sempre possível encontrar *novos* números primos.

2. Tábua dos números primos. Para a construção de uma tábua de números primos até um número qualquer, usa-se um processo atribuído a Eratóstenes, denominado *Crivo de Eratóstenes.*

Apliquemos êsse processo na construção da tábua dos números primos até 50.

Riscam-se todos os múltiplos de 2, a partir de 2;

Riscam-se todos os múltiplos de 3, a partir de 3;

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

Riscam-se todos os múltiplos de 5, a partir de 5;

31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

e assim por diante até o número 29 (que não foi riscado) e cujo primeiro múltiplo 58 ultrapassa 50.

Os números que não foram riscados:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43 \text{ e } 47$$

são os números primos existentes até 50. No fim dêste parágrafo encontra-se uma *tábua* de todos os números primos menores que 1 000. Pg 70

3. Reconhecimento de um número primo. É sempre possível saber se um dado número é primo com a seguinte

REGRA: *Divide-se o número dado, sucessivamente, pelos números primos* 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... *até encontrar um quociente menor ou igual ao divisor. Se nenhuma dessas divisões fôr exata, o número dado é primo.* Exemplos:

1) Reconhecer se o número 173 é primo.

Divide-se 173, respectivamente, pelos números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... Algumas dessas divisões podem ser evitadas com a aplicação dos critérios de divisibilidade. Assim, não serão feitas as divisões por 2, 3, 5, 7 e 11, pois, é fácil reconhecer que 173 não é divisível por êles. As outras divisões serão:

Dividendo	Divisor	Quociente	Restos
173	13	13	43, 4
173	17	10	03

Como já foi encontrado um quociente (13) *igual* ao divisor, e a divisão não é *exata* (resto 4) conclui-se que 173 *é primo*.

2) Reconhecer se o número 641 é primo.

Dividendo	Divisor	Quociente	Restos
641	13	49	121, 4
641	17	37	131, 12
641	19	33	71, 14
641	23	27	181, 20
641	29	22	61, 3

Observamos, nessas divisões, que enquanto os divisores vão aumentando (13, 17, 19, 23 e 29) os quocientes vão diminuindo (49, 37, 33, 27 e 22). Como foi encontrado um quociente (22) *menor* que o divisor (29) e a divisão *não é exata*, concluímos ser 641 um número primo.

3) Reconhecer se 5 277 é primo.

Sendo êsse número divisível por 3, segue-se que não é primo.

4) Reconhecer se 1 027 é primo.

Por 2, 3, 5, 7 e 11 não é divisível. Por 13, temos:

$$\begin{array}{r|l} 1\,027 & 13 \\ \cline{2-2} 117 & 79 \\ 00 & \end{array}$$

isto é, 1 027 é múltiplo de 13, portanto não é primo.

4. Decomposição de um número em fatôres primos. Todo número, que não é primo, pode ser *decomposto* num produto de fatôres primos. Assim, por exemplo, o número 60, que não é primo, pode ser decomposto primeiramente em

$$60 = 2 \times 30 \text{(*)}$$

Por sua vez o número 30, que não é primo, pode ser decomposto em 2×15.

Logo: $60 = 2 \times 2 \times 15$

O número 15 pode ser ainda decomposto em 3×5 e teremos assim a decomposição final:

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ (todos os fatôres são primos)

ou pelas propriedades da potenciação (produto de potências de mesma base): $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

A decomposição de um número em fatôres primos, obedece à seguinte

REGRA: *Divide-se o número pelo seu menor divisor primo, diferente da unidade, em seguida divide-se o quociente pelo menor divisor e assim por diante até se encontrar o quociente 1. O número dado será igual ao produto de todos os divisores encontrados, que são números primos.*

Na prática dispõem-se os quocientes e os divisores respectivos em duas colunas separadas por um traço vertical. Dêsse modo a decomposição de 60 em seus fatôres primos terá a seguinte disposição:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Escrevendo-se a seguir: $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

ou $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

(*) Não colocamos o fator primo 1, de acôrdo com a 4.ª Regra do Produto de vários fatôres (pág. 36).

Exemplos:

1) Decompor os números 1 144 e 2 532 em seus fatôres primos.

$$\begin{array}{r|l} 1144 & 2 \\ 572 & 2 \\ 286 & 2 \\ 143 & 11 \text{ (Ver nota)} \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\,532 & 2 \\ 1\,266 & 2 \\ 633 & 3 \\ 211 & 211 \text{ (Ver nota)} \\ 1 & \end{array}$$

$1\,144 = 2^2 \times 11 \times 13$ $\qquad$ $2\,532 = 2^2 \times 3 \times 211$

NOTA: É necessário verificar, com as regras já estudadas, se os números 143 ou 211 são ou não primos, pois, à primeira vista podem enganar.

5. Determinação de todos os divisores de um número. A decomposição de um número em seus fatôres primos permitiu que se determinassem alguns de seus divisores. Assim, o número 60 que, decomposto em seus fatôres primos, apresentou como seus divisores sòmente os fatôres primos 1, 2, 3 e 5 *admite outros divisores* tais como 4, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60.

Todos os divisores de um número, que são em *número limitado*, pois, devem ser *menores* que o número dado e o maior dêles é o próprio número, podem ser obtidos com a seguinte

REGRA: *Decompõe-se o número em fatôres primos e faz-se à direita dêsses fatôres um traço vertical. A seguir o traço escreve-se a unidade um pouco acima da direção do primeiro fator primo do número dado. Os demais divisores do número são obtidos a partir da unidade, multiplicando-se cada um dos fatôres primos* (que estão à esquerda do traço) *pelos números que vêm à direita do traço e situados acima dêle. Os divisores obtidos mais de uma vez não são repetidos.*

Exemplos:

1) Determinar os divisores de 60.

$$\begin{array}{r|c|l} & & 1 \\ 60 & 2 & 2 - \\ 30 & 2 & 4 - \\ 15 & 3 & 3 - \ 6 - 12 \\ 5 & 5 & 5 - 10 - 20 - 15 - 30 - 60 \end{array}$$

Os cálculos efetuados para obter os divisores do quadro acima foram feitos na seguinte ordem:

Produto do primeiro fator primo 2 com o único número que vem à direita e acima dêle (1)	$2 \times 1 = 2$
Produtos do segundo fator primo 2 com os números que vêm à direita e acima dêle: 1 e 2...........	$2 \times 1 = 2$ (já obtido) $2 \times 2 = 4$
Produtos do fator primo 3 com os números que vêm à direita e acima dêle: 1, 2 e 4	$3 \times 1 = 3$ $3 \times 2 = 6$ $3 \times 4 = 12$
Produtos do fator primo 5 com os números que vêm à direita e acima dêle: 1, 2, 4, 3, 6 e 12........	$5 \times 1 = 5$ $5 \times 2 = 10$ $5 \times 4 = 20$ $5 \times 3 = 15$ $5 \times 6 = 30$ $5 \times 12 = 60$

Logo, os divisores de 60 são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60.

2) Determinar os divisores de 144.

		1
144	2	2
72	2	4
36	2	8
18	2	16
9	3	3 – 6 – 12 – 24 – 48
3	3	9 – 18 – 36 – 72 – 144

Os divisores de 144 são: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72 e 144.

6. Número de divisores de um número. Mesmo não se conhecendo todos os divisores de um número, pode-se determinar o *número* dêles com a seguinte

REGRA: *O número total de divisores de um número é igual ao produto dos expoentes dos seus fatôres primos aumentados cada expoente de* 1. Exemplos:

1) Determinar o total dos divisores de 60.

Temos: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Os expoentes de seus fatôres primos são, respectivamente:

2, 1, 1

aumentando-se 1 em cada um dêles temos:

3, 2, 2

e, efetuando-se o produto dêsses números:

$$3 \times 2 \times 2 = \mathbf{\mathit{12}}$$

que é o *total* de divisores de 60.

(Êsses divisores já foram determinados em exercícios anteriores).

2) Determinar o total dos divisores de 180.

Decompondo primeiramente em fatôres primos, temos:

180	2	
90	2	$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
45	3	expoentes: 2, 2, 1
15	3	aumentando 1: 3, 3, 2
5	5	n.º de divisores: $3 \times 3 \times 2 = \mathbf{\mathit{18}}$

7. Divisibilidade de um número por outro, mediante seus fatôres primos. Dados dois números é possível saber se um dêles é divisível pelo outro usando as decomposições dêsses números em seus fatôres primos. Basta aplicar o seguinte

CRITÉRIO: *Decompostos dois números em seus fatôres primos, o primeiro é divisível pelo segundo, se contiver, pelo menos, os fatôres primos do segundo com expoentes iguais ou maiores.*

Exemplos:

1) Verificar se 1 008 é divisível por 24.

Decompondo êsses números em seus fatôres primos, temos:

$$1\,008 = 2^4 \times 3^2 \times 7 \qquad 24 = 2^3 \times 3$$

Logo, 1 008 é *divisível* por 24, pois, contém todos os fatôres primos de 24 com expoentes maiores.

2) Verificar se 360 é divisível por 108.

Como: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ e $108 = 2^2 \times 3^3$

segue-se que 360 *não é divisível* por 108, pois, embora 360 contenha todos os fatôres primos de 108, possui um dêles (3) com expoente menor (3^2).

3) Determinar qual o menor número pelo qual se deve multiplicar 540 para se obter um número divisível por 126?

Decompondo êsses números em seus fatôres primos:

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \qquad 126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

Como o único fator que consta de 126 e não consta de 540 é o 7, basta multiplicar 540 por 7 para se obter um número divisível por 126.

TÁBUA DOS NÚMEROS PRIMOS MENORES QUE 1 000

1	43	107	181	263	349	433	521	613	701	809	887
2	47	109	191	269	353	439	533	617	709	811	907
3	53	113	193	271	359	443	541	519	719	821	911
5	59	127	197	277	367	449	547	631	727	823	919
7	61	131	199	281	373	457	557	641	733	827	929
11	67	137	211	283	379	461	563	739	643	829	937
13	71	139	223	293	383	463	569	647	743	839	941
17	73	149	227	307	389	467	571	653	751	853	947
19	79	151	229	311	397	479	577	659	757	857	953
23	83	157	233	313	401	487	587	661	761	859	967
29	89	163	239	317	409	491	593	673	769	863	971
31	97	167	241	331	419	499	599	677	773	877	977
37	101	173	251	337	421	503	683	683	787	881	893
41	103	179	257	347	431	509	607	681	797	883	991
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	997

EXERCÍCIOS SÔBRE NÚMEROS PRIMOS

1. Construir uma tábua dos números primos até 100.
2. Sem usar a tábua dos números primos, dizer entre os números 109, 197, 283, 267, 373, 641, 761, 863, 957, 1 181, 4 313 e 12 349 quais os primos.
3. Decompor em fatôres primos os seguintes números: 210, 312, 540, 750, 1 001, 1 331, 5 250, 7 007, 14 157, 28 413, 256 000 e 12 349.
4. Decompor 144^2 em fatôres primos, sem efetuar a potência.
5. Usando a decomposição em fatôres primos efetuar a divisão de 1 280 por 32.

6. Determinar todos os divisores (e o total) dos números: 68, 114, 148, 306, 581, 1 200, 1 331 e 4 332.
7. Achar todos os divisores comuns aos números 630 e 990 (são os divisores ao mesmo tempo de 630 e 990).
8. Mediante a decomposição em fatôres primos, verificar se: 2 016 é divisível por 48; 360 é divisível por 54; 1 890 é divisível por 108; 5 250 é divisível por 1 320.
9. Qual o menor número pelo qual se deve multiplicar 1 080 para se obter um número divisível por 252?
10. Qual o menor número pelo qual se deve multiplicar 2 205 para se obter um número divisível por 1 050?

RESPOSTAS:

1. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97.
2. São primos: 109, 197, 283, 373, 641, 761, 863 e 1 181.
3. $210=2\times3\times5\times7$; $312=2^3\times3\times13$; $540=2^2\times3^3\times5$; $750=2\times3\times5^3$; $1\,331 = 11^3$; $5\,250 = 2\times3\times5^3\times7$; $7\,007 = 7^2\times11\times13$; $14\,157 = 3^2\times11^2\times13$; $1\,001 = 7\times11\times13$; $28\,413 = 3^2\times7\times11\times41$; $256\,000 = 2^{11}\times5^3$; $12\,349 = 53\times233$.
4. $144^2 = (2^4\times3^2)^2 = 2^8\times3^4$.
5. $2^3 \times 5 = 8 \times 5 = 40$.
6. 68 – 6 divisores (1, 2, 4, 17, 34, 68); 114 – 8 divisores (1, 2, 3, 6, 19, 38, 57, 114); 148 – 6 divisores (1, 2, 4, 37, 74, 148); 306 – 12 divisores (1, 2, 3, 6, 9, 17, 18, 34, 51, 102, 153, 306); 581 – 4 divisores (1, 7, 83, 581); 1 200 – 30 divisores (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 25, 30, 40, 48, 50, 60, 75, 80, 100, 120, 150, 200, 240, 300, 400, 600, 1 200); 1 331 – 4 divisores (1, 11, 121, 1 331); 4 332 – 18 divisores (1, 2, 3, 4, 6, 12, 19, 38, 57, 76, 114, 228, 361, 722, 1 083, 1 444, 2 166 e 4 332).
7. Os divisores comuns são: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 e 90.
8. Sòmente 2 016 é divisível por 48.
9. O número é 7.
10. O número é $10 = 2 \times 5$.

§ 5. Máximo divisor comum.

1. Divisor comum de dois ou mais números. Chama-se *divisor comum* de dois ou mais números a um número que seja *divisor, ao mesmo tempo*, de todos os números dados.

Exemplo:

Determinar os divisores comuns dos números 42 e 70.

Os divisores de 42 são: **1, 2**, 3, 6, **7, 14**, 21 e 42.

Os divisores de 70 são: **1, 2**, 5, **7**, 10, **14**, 35 e 70.

Os *divisores comuns* de 42 e 70 são os que figuram ao mesmo tempo em 42 e 70, isto é : 1, 2, 7 e 14.

É evidente que a *unidade* é divisor comum de todos os números. Quando dois ou mais números têm *sòmente* a unidade para divisor comum êles são chamados de *primos entre si*. Assim, por exemplo, os números 12 e 7, cujo único divisor comum é 1, são primos entre si.

2. Máximo divisor comum de dois, ou mais, números. Chama-se *máximo divisor comum de dois, ou mais, números ao maior dos divisores comuns a êsses números.*

No exemplo anterior, o número 14, que é o maior dos divisores comuns de 42 e 70, é o seu máximo divisor comum.

Indicação: m.d.c. (42, 70) = 14

3. Determinação do m.d.c. de dois, ou mais, números. Temos dois métodos :

1.º) Método da decomposição em fatôres primos ;
2.º) Método das divisões sucessivas.

Método da decomposição em fatôres primos: *O m.d.c. de dois ou mais números, decompostos em seus fatôres primos, é dado pelo produto dos fatôres primos* ***comuns*** *tomados como seus* ***menores*** *expoentes.* Exemplo :

Determinar o m.d.c. dos números 168, 180 e 300.

$$\begin{array}{r|l}168&2\\84&2\\42&2\\21&3\\7&7\\1&\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}180&2\\90&2\\45&3\\15&3\\5&5\\1&\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}300&2\\150&2\\75&3\\25&5\\5&5\\1&\end{array}$$

Temos :

$$168 = 2^3 \times 3 \times 7$$
$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$
$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

Os fatôres primos *comuns*, isto é, que entram ao mesmo tempo nos três números, são : 2 e 3.

Êsses fatôres com seus menores expoentes são : 2^2 e 3.

Logo : m.d.c. (168, 180, 300) = $2^2 \times 3 = 4 \times 3 =$ ***12***.

Método das divisões sucessivas: *Divide-se o maior número pelo menor, em seguida o menor pelo resto, depois o resto pelo novo resto e assim por diante até chegar a uma divisão exata.* ***O último divisor*** *será o m.d.c. procurado.* Exemplo :

Determinar o m.d.c. dos números 216 e 624.

Efetuam-se as seguintes divisões :

$$\begin{array}{r|l}624&216\\\hline 192&2\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}216&192\\\hline 24&1\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}192&24\\\hline 00&8\end{array}$$

O último divisor 24 é o m.d.c. procurado.

Costuma-se usar a seguinte disposição prática :

$$\begin{array}{c|c|c|c}&2&1&8\\624&216&192&24\\\hline 192&24&00&\end{array}\qquad \text{m.d.c. } (216,\ 624) = 24$$

Para o caso de *mais de dois números*, determina-se, inicialmente, o m.d.c. dos dois primeiros, depois o m.d.c. entre o terceiro e o resultado que já foi encontrado e assim sucessivamente. Exemplo :

Determinar o m.d.c. dos números 168, 216 e 372.

Primeiramente determina-se o m.d.c. dos dois primeiros :

$$\begin{array}{c|c|c|c}&1&3&2\\216&168&48&24\\\hline 48&24&00&\end{array}\qquad \text{m.d.c. } (168,\ 216) = 24$$

em seguida determina-se o m.d.c. entre 372 e 24 :

$$\begin{array}{c|c|c}&15&2\\372&24&12\\\hline 12&00&\end{array}\qquad \text{Logo: m.d.c. } (168,\ 216,\ 372) = \mathbf{12}$$

4. Propriedades do m.d.c. de dois números.

1.ª) O m.d.c. de dois números primos entre si é a unidade. Exemplo :

$$\text{m.d.c. } (12{,}7) = 1 \qquad \begin{array}{c|c|c|c|c}&1&1&2&2\\12&7&5&2&1\\\hline 5&2&1&0&\end{array}$$

2.ª) O m.d.c. de dois números em que o maior é divisível pelo menor, é o menor dêles. Exemplos :

$$\text{m.d.c. } (8,\ 4) = 4 \qquad \begin{array}{c|c}&2\\8&4\\\hline 0&\end{array}$$

$$\text{m.d.c. } (3\,486{,}2) = 2 \qquad \begin{array}{c|c}&1\,743\\3\,486&2\\\hline 0{,}000&\end{array}$$

3.º) Multiplicando ou dividindo dois números por um outro número, diferente de zero, o m.d.c. dos dois primeiros aparece multiplicado ou dividido por êsse outro. Exemplo:

Sendo o m.d.c. (18, 12) = 6

Multiplicando 18 e 12 por 2, tem-se:

$$\text{m.d.c.}\ (18 \times 2,\ 12 \times 2) = 6 \times 2.$$

No caso de se *dividir* os dois números pelo seu próprio m.d.c., os quocientes obtidos são *primos entre si*. Exemplo:

Sendo o m.d.c. (18, 12) = 6

Dividindo 18 e 12 por 6 (que é o m.d.c.,) tem-se:

$$\text{m.d.c.}\ (18 : 6,\ 12 : 6) = 6 : 6$$

ou

$$\text{m.d.c.}\ (3, 2) = 1$$

isto é, os quocientes obtidos 3 e 2 são primos entre si.

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DO M.D.C.

1. Determinar os dois *menores* números pelos quais devemos dividir 144 e 160, a fim de obter quocientes iguais.

   Primeiramente, determina-se o m.d.c. (144, 160) = 16.

   Como 144 : 16 = 9 e sendo 16 o *maior* divisor de 144 o *menor* quociente será 9.
   160 : 16 = 10 também 16 é o *maior* divisor de 160 e 10 o *menor* quociente.

   Logo, os números procurados são: 9 e 10, pois,

   $$144 : 9 = 16$$
   $$160 : 10 = 16$$

2. Na procura do m.d.c. de dois números, pelo método das divisões sucessivas, encontram-se os quocientes 1, 2 e 6 e os restos 432, 72, 0. Determinar os dois números.

   Do problema, tem-se o seguinte quadro:

	1	2	6
?	?	432	72
432	72	0	

   Procedendo inversamente na ordem que se emprega no método das divisões sucessivas, temos que 72, por ser o penúltimo resto (o último é 0), é o m.d.c. dos dois números procurados.

   Logo:

   $2 \times 432 + 72 = 936$ (segundo número procurado),
   $1 \times 936 + 432 = 1\,368$ (primeiros número procurado).

3. Um terreno de forma retangular tem as dimensões: 24 metros de frente e 56 metros de fundo. Qual deve ser o comprimento do *maior cordel* que sirva para medir exatamente as duas dimensões?

   Determinando-se o m.d.c. (56, 24) = 8, segue-se que o maior cordel que pode ser usado na medida das dimensões do terreno deve ter 8 metros de comprimento, pos, 8 é o *maior* dos divisores comuns de 56 e 24.

EXERCÍCIOS SÔBRE O M.D.C.

1. Dos divisores comuns aos números 48 e 72, determinar: 1.º) o maior dêles (m.d.c.); 2.º) os pares; 3.º) os que são divisíveis por 3.
2. Calcular: 1.º) m.d.c. (120, 384); 2.º) m.d.c. (3 600, 4 050); 3.º) m.d.c. (185, 222, 259); 4.º) m.d.c. (128, 136, 256, 440); 5.º) m.d.c. (3 234, 4 158); 6.º) m.d.c. (504, 672, 882, 546); 7.º) m.d.c. (6 804, 47 952, 228 456).
3. Usando as propriedades do m.d.c. calcular: 1.º) m.d.c. (7, 9, 12); 2.º) m.d.c. (2, 48 384); 3.º) m.d.c. (36, 18, 6); 4.º) m.d.c. (13, 26, 29).
4. Encontrar todos os números compreendidos entre 100 e 500 que tenham 102 por m.d.c..
5. Na procura do m.d.c. de dois números, pelo método das divisões sucessivas, encontram-se os quocientes 1, 3 e 2 e os restos 48, 24 e 0. Determinar os dois números.
6. Calcular os dois menores números pelos quais devemos dividir 180 e 204, a fim de que os quocientes sejam iguais.
7. Determinar os divisores comuns aos números 80 e 130 múltiplos de 5.
8. Dados os dois números: 182 e 238, verificar que o m.d.c. entre êles é também o m. d. c. entre o menor (182) e a sua diferença (238 − 182 = 56).
9. Quer-se dividir três peças de fazenda que medem, respectivamente, 90, 108 e 144 metros, em partes iguais e do *máximo tamanho possível*. Determinar o número das partes de cada peça e os comprimentos de cada uma.
10. Quer-se circundar de árvores, plantadas à *máxima distância comum*, um terreno de forma quadrilátera. Quantas árvores são necessárias, se os lados do terreno têm 3 150, 1 980, 1 512 e 1 890 metros?

RESPOSTAS:

1. 1.º) 24 (m.d.c.); 2.º) 2, 4, 6, 8, 12, 24; 3.º) 3, 6, 12, 24.
2. 1.º) 24; 2.º) 450; 3.º) 37; 4.º) 8; 5.º) 462; 6.º) 42; 7.º) 36.

3. 1.º) 1; 2.º) 2; 3.º) 6; 4.º) 1.
4. 102 (102×1), 204 (102×2), 306 (102×3) e 408 (102×4).
5. 216 e 168.
6. 15 e 17.
7. 5 e 10.
8. O m.d.c. (14) é o mesmo.
9. 8, 6 e 5 partes, valendo cada uma 18 metros.
10. São necessárias 474 árvores, distanciando-se 18 metros uma da outra.

§ 6. Mínimo múltiplo comum.

1. Múltiplo comum de dois, ou mais, números. Chama-se *múltiplo comum* de dois, ou mais, números a um número que seja *divisível*, ao *mesmo tempo*, por todos os números dados. Exemplo:

Determinar os múltiplos comuns dos números 2 e 3.

Excluindo-se o zero, que é múltiplo de todos os números, temos:

múltiplos de 2: 2, 4, *6*, 8, 10, *12*, 14, 16, *18*, . . .
múltiplos de 3: 3, *6*, 9, *12*, 15, *18*, 21, 24, 27, . . .

Os *múltiplos comuns* de 2 e 3 são:

6, *12*, *18*, . . .

isto é, êsses números são *divisíveis* tanto por 2 como por 3. Os demais múltiplos são denominados *não comuns*.

Os múltiplos comuns de dois ou mais números são *infinitos*. Daí o fato de não existir o máximo múltiplo comum. Existe, porém, o *menor* dos múltiplos comuns denominado *mínimo múltiplo comum*.

2. Mínimo múltiplo comum de dois, ou mais, números. Chama-se *mínimo múltiplo comum de dois, ou mais, números ao menor dos múltiplos* (diferente de zero) *comuns dêsses números*.

No exemplo dado, o número 6 é o menor dos múltiplos comuns dos números 2 e 3.

Indicação: m.m.c. (2, 3) = 6.

3. Determinação do m.m.c. de dois, ou mais, números. O m.m.c. de dois, ou mais, números, decompostos em seus fatôres primos, é dado pelo produto dos fatôres primos *comuns* e *não comuns* tomados com os seus *maiores* expoentes.

Exemplo:

Determinar o m.m.c. dos números 90, 150 e 168.

90	2	150	2	168	2
45	3	75	3	84	2
15	3	25	5	42	2
5	5	5	5	21	3
1		1		7	7
				1	

Temos:

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$
$150 = 2 \times 3 \times 5^2$
$160 = 2^3 \times 3 \times 7$

Os fatôres primos *comuns*, tomados com os seus *maiores expoentes* são: 2^3 e 3^2

Os fatôres primos *não comuns*, tomados com os seus *maiores expoentes* são: 5^2 e 7

Multiplicando êsses fatôres, temos:

m.m.c. $(90, 150, 168) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 8 \times 9 \times 25 \times 7 = 12\,600$

Êsse cálculo pode ser feito ràpidamente com a seguinte disposição prática, onde os fatôres primos comuns e não comuns são dispostos à direita de um traço vertical até à obtenção de quocientes iguais a 1.

Assim, para o exemplo que está sendo estudado, a disposição prática é:

90,	150,	168	2
45,	75,	84	2
45,	75,	42	2
45,	75,	21	3
15,	25,	7	3
5,	25,	7	5
1,	5,	7	5
1,	1,	7	7
1,	1,	1	

e o

m.m.c. $(90,150,168) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 8 \times 9 \times 25 \times 7 = $ ***12 600***

4. Propriedades do m.m.c. de dois números. 1.ª) O m.m.c. de dois números primos entre si é o produto dêles. Exemplo:

m.m.c. (6, 11) = 66

6,	11	2
3,	11	3
1,	11	11
1,	1	2×3×11 = 66

2.ª) O m.m.c. de dois números em que o maior é divisível pelo menor é o maior dêles. Exemplo:

m.m.c. (8, 4) = 8

$$\begin{array}{rr|l} 8, & 4 & 2 \\ 4, & 2 & 2 \\ 2, & 1 & 2 \\ \hline 1, & 1 & 2^3 = 8 \end{array}$$

3.ª) Multiplicando ou dividindo dois números por um outro número, diferente de zero, o m.m.c. aparece multiplicando ou dividido por êsse outro. Exemplo:

Sendo o m.m.c. (12, 18) = 36

Multiplicando 12 e 18 por 2, tem-se:

$$\text{m.m.c. } (12 \times 2,\ 18 \times 2) = 36 \times 2$$

5. Propriedade entre o m.d.c. e o m.m.c. de dois números. *Multiplicando o m.d.c. de dois números dados pelo m.m.c. dêsses dois números, obtém-se o produto dos números dados.*

Assim, dados os números 18 e 90, onde

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 18 = 2 \times 3^2 \\ 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \end{array}$$

temos:

$$\text{m.d.c. } (18,\ 90) = 2 \times 3^2$$

$$\text{m.m.c. } (18,\ 90) = 2 \times 3^2 \times 5$$

e o produto:

$$18 \times 90 = \boldsymbol{2 \times 3^2 \times 2 \times 3^2 \times 5}$$

como:

$$\text{m.d.c. } (18, 90) \times \text{m.m.c. } (18, 90) = \boldsymbol{2 \times 3^2 \times 2 \times 3^2 \times 5}$$

segue-se que os produtos são iguais, isto é:

$$\text{m.d.c. } (18, 90) \times \text{m.m.c. } (18, 90) = 18 \times 90.$$

APLICAÇÕES:

1.ª) Sabendo-se que o produto de dois números é 120 e que o m.d.c. entre êles é 4, pergunta-se qual o valor do m.m.c. dêsses números.

Como: $\quad \text{m.d.c.} \times \text{m.m.c.} = 120$

e sendo o m.d.c. igual a 4, segue-se que: m.m.c. = 120 : 4 = ***30***

2.ª) Determinar o m.m.c. dos números 12 e 18, usando o m.d.c. entre êles.

Como: $\quad \text{m.d.c.} \times \text{m.m.c.} = 12 \times 18 = 216$

e sendo o m.d.c. (12, 18) = 6 segue-se que : m.m.c. = 216 : 6 = 36.

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DO M.M.C.

1. Determinar os dois menores números pelos quais devemos multiplicar os números 24 e 36, a fim de obter produtos iguais.

   Sendo o m.m.c. (24, 36) = 72, e as divisões 72 : 24 = 3 e 72 : 36 = 2, segue-se que 2 e 3 são os menores números que, multiplicados, respectivamente, por 24 e 36, dão produtos iguais (72).

2. Determinar todos os números compreendidos entre 1 000 e 3 000 e que sejam divisíveis, ao mesmo tempo, por 48, 60 e 72.

   O primeiro múltiplo comum de 48, 60 e 72 é 720 (que é o m.m.c.) e portanto o problema estará resolvido procurando-se os múltiplos de 720 compreendidos entre 1 000 e 3 000, isto é, 720×2 = 1 440; 720×3 = 2 160; 720×4 = = 2 880. (Os demais múltiplos de 720 ultrapassam 3 000).

3. Três navios fazem viagens entre dois portos. O primeiro cada 4 dias, o segundo, cada 6 e o terceiro cada 9 dias. Tendo êsses navios partido juntos, depois de quantos dias voltarão a sair juntos novamente?

   O primeiro múltiplo dêsses números 4, 6 e 9, é 36 (que é o m.m.c.). Logo, depois de 36 dias êsses navios partirão juntos novamente.

EXERCÍCIOS SÔBRE O M.M.C.

1. Calcular: 1.º) m.m.c. (45, 12); 2.º) m.m.c. (96, 144); 3.º) m.m.c., (36, 96, 112); 4.º) m.m.c. (4 320), 6 480); 5.º) m.m.c. (48, 120, 96, 144); 6.º) m.m.c. (123, 205, 287); 7.º) m.m.c. (61, 306, 189, 252);
2. Usando as propriedades do m.m.c., determinar: 1.º) m.m.c. (4, 5). 2.º) m.m.c. (12, 3); 3.º) m.m.c. (4, 1 853 916); 4.º) m.m.c. (6, 11, 12).
3. Qual é a diferença entre o m.m.c. e o m.d.c. dos números 101 e 337?
4. O m.m.c. de dois números é 11 352 e o m.d.c. é 6. Se um dos números é 264 qual é o outro?

5. Qual o produto de dois números se o m.d.c. é 8 e o m.m.c. é 48?
6. Determinar todos os números compreendidos entre 1 000 e 4 000 que sejam divisíveis ao mesmo tempo, por 75, 150 e 180.
7. Calcular os dois menores números pelos quais devemos multiplicar os números 60 e 78, a fim de obter produtos iguais.
8. Numa república o presidente deve permanecer 4 anos em seu cargo, os senadores 6 anos e os deputados 3. Se em 1929 houve eleições para os três cargos, em que ano deverão se realizar novamente as eleições para êsses cargos?
9. Duas rodas de uma engrenagem tem 14 e 21 dentes respectivamente. Cada roda tem um dente estragado. Se num dado instante estão em contato os dois dentes estragados, depois de quantas voltas repete-se novamente êsse encontro?
10. Dois ciclistas percorrem uma pista circular no mesmo sentido. O primeiro a percorre em 36 segundos e o segundo em 30 segundos. Tendo os ciclistas partido juntos, pegunta-se depois de quanto tempo se encontrarão novamente no ponto de partida e quantas voltas dará cada um.

RESPOSTAS:

1. 1.°) 180; 2.°) 288; 3.°) 2 016; 4.°) 12 960; 5.°) 1 440; 6.°) 4 305; 7.°) 783 972.
2. 1.°) 20; 2.°) 12; 3.°) 1 853 916; 4.°) 132.
3. A diferença é 34 036.
4. 258.
5. 384.
6. 1 800, 2 700 e 3 600.
7. 10 e 13.
8. 1941.
9. 2 voltas da maior ou 3 voltas da menor.
10. Encontrar-se-ão depois de 180 segundos. O primeiro ciclista dará 5 voltas e o segundo 6 voltas.

II) Número fracionário. Operações fundamentais. Problemas típicos. Número decimal

§ 1. Números fracionários.

1. Noção intuitiva de fração. A primeira idéia de fração nos é dada quando se divide um objeto (que nesse instante representa uma unidade) em um número qualquer de partes iguais e se considera uma ou algumas dessas partes.

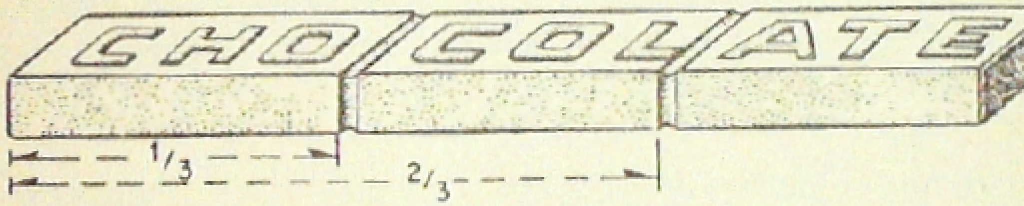


FIG. 4

Assim, por exemplo, dividindo-se um tablete de chocolate (fig. 4) em três partes iguais, temos que:

1) uma dessas partes representa uma fração do chocolate, que chamaremos *um têrço* e indicamos por $\frac{1}{3}$;

2) duas dessas partes representam outra fração, que chamaremos *dois terços* e indicamos por $\frac{2}{3}$;

2. Definição.

Número fracionário ou fração é um número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais.