

Ivan Eugênio da Cunha

## **MATÉRIA NUCLEAR NO UNIVERSO PRIMORDIAL**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física para a obtenção do Grau de Mestre em Física.  
Orientador: Prof. Dr. Celso de Carmargo Barros Junior

Florianópolis

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Cunha, Ivan Eugênio da  
Matéria Nuclear no Universo Primordial / Ivan Eugênio  
da Cunha ; orientador, Celso de Camargo Barros Junior -  
Florianópolis, SC, 2015.  
111 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.  
Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Relatividade Geral. 3. Cosmologia. 4.  
Física de Hádrons. 5. Universo Primordial. I. de Camargo  
Barros Junior, Celso. II. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Ivan Eugênio da Cunha

## **MATÉRIA NUCLEAR NO UNIVERSO PRIMORDIAL**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Física”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis, 06 de março 2015.

---

Prof. Dr. Luis Guilherme de C. Rego  
Coordenador

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Júnior  
Orientador

---

Manuel Maximo Bastos Malheiro de Oliveira  
Membro externo

---

Prof. Dr. José Ricardo Marinelli

---

Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini





## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha família, que sempre me apoiou e amou, aos meus amigos, sempre companheiros, e ao Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior, que aceitou me orientar apesar dos desafios.





*“The Riddle we can guess  
We speedily despise -  
Not anything is stale so long  
As Yesterday’s surprise -”*

(Emily Dickinson)



## RESUMO

A formulação lagrangiana para o espaço-tempo curvo é desenvolvida, derivando-se a equação de Einstein, alguns tensores energia-momento de interesse e a equação de Euler-Lagrange. Resultados básicos de cosmologia, como a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (métrica de FRW) e as equações de Friedmann, são apresentados. Férmions são incorporados na Relatividade Geral por meio do formalismo de tetradas. Buscando uma descrição da era hadrônica em termos da interação nuclear, o modelo  $\sigma - \omega - \rho$  para a matéria nuclear é aplicado de forma inédita num contexto cosmológico, adaptando-o para espaço-tempo curvo e derivando suas equações de movimento. Aplica-se a aproximação de campo médio ao modelo e obtêm-se o tensor energia-momento. A conservação da energia é utilizada junto à equação de Friedmann, à equação do campo  $\sigma$  e à conservação do número bariônico para chegar no sistema de equações a ser resolvido. Uma solução aproximada, mas analítica, é obtida para explorar alguns dos fenômenos contidos nas equações e comparar com resultados recentes. O modelo apresentado possui grande potencial de refinamento e já apresenta resultados razoáveis mesmo com as aproximações feitas.

**Palavras-chave:** Relatividade Geral, Cosmologia, Modelo  $\sigma - \omega - \rho$ , Universo Primordial, Era Hadrônica.



## ABSTRACT

The Lagrangian formulation for the curved space-time is developed, deriving Einstein's equation, energy-momentum tensor for some of interest cases, and the Euler-Lagrange equation. Basic results of cosmology, as the metric of Friedmann-Robertson-Walker (metric of FRW) and the Friedmann equations are presented. Fermions are incorporated in General Relativity through tetrads formalism. Seeking a description of hadron epoch in terms of nuclear interaction, the  $\sigma - \omega - \rho$  model for nuclear matter is applied unprecedentedly in a cosmological context, adapting it to curved space-time and deriving the equations of motion. Mean-field approximation is applied and the energy-momentum tensor is obtained. Conservation of energy is used together the Friedmann equation, the equation field  $\sigma$  and the conservation of baryon number to reach the system of equations that be solved. An approximate solution, but analytical, is obtained to explore some of the phenomena contained in the equations and compare with recent results. The model has great potential for refinement and already has reasonable results even with the approximations made.

**Keywords:** General Relativity, Cosmology,  $\sigma - \omega - \rho$  model, Early Universe, Hadron Epoch.



## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 Representação esquemática do modelo cosmológico padrão com suas fases até os dias atuais (figura extraída de <http://planck.caltech.edu/epo/epo-planckScience5.html>). A transição do plasma de quarks e glúons para a fase hadrônica ocorre em torno de  $10^{-6}$ s após o Big Bang a uma temperatura em torno de  $150\text{MeV}$ . . . . . 21
- Figura 2 Diagrama de fases da QCD (figura extraída de <https://www.jyu.fi/fysiikka/en/research/highenergy/parphen/QCD>). Os experimentos feitos no LHC e RHIC alcançam a fase de plasma de quarks e glúons e chegam próximos das condições do universo primordial (baixa densidade e alta temperatura), embora haja algumas diferenças significativas [18]. Apesar de muitos avanços experimentais e em simulações, há ainda muitas dúvidas sobre quantas fases existem realmente e por quais linhas ocorrem as transições de fase. 22
- Figura 3 Potencial químico bariônico em função da temperatura de acordo com a aproximação. . . . . 86
- Figura 4 Densidades de bárions e anti-bárions. A partir de  $45\text{MeV}$  a densidade dos anti-bárions cai rapidamente. . . . . 87
- Figura 5 Abundância dos diversos componentes hadrônicos segundo a referência [24]. . . . . 89





## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	19
<b>2</b>	<b>RELATIVIDADE GERAL</b> .....	23
2.1	FORMULAÇÃO LAGRANGIANA .....	23
2.2	ROTACIONAL E DIVERGENTE .....	25
2.3	EQUAÇÃO DE EINSTEIN .....	27
2.4	TENSORES ENERGIA-MOMENTO .....	29
2.4.1	Campo escalar .....	29
2.4.2	Campo vetorial .....	30
2.4.3	Correntes .....	31
2.5	EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE .....	32
<b>3</b>	<b>COSMOLOGIA</b> .....	35
3.1	O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO .....	35
3.2	MÉTRICA DE FRW .....	37
3.3	EQUAÇÕES DE FRIEDMANN .....	38
<b>4</b>	<b>FÉRMIONS EM ESPAÇO-TEMPO CURVO</b> ....	43
4.1	GRUPO DE LORENTZ .....	43
4.2	REPRESENTAÇÕES DO GRUPO DE LORENTZ .....	45
4.2.1	Representação $(0, 0)$ ; Escalar .....	45
4.2.2	Representações $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ ; Espinores de Weyl .	45
4.2.3	Representação $(\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2})$ ; Espinores de Dirac e Majorana .....	46
4.3	FORMALISMO DE TETRADAS .....	48
<b>5</b>	<b>O MODELO <math>\sigma - \omega - \rho</math> NA MÉTRICA DE FRW</b>	53
5.1	AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO .....	53
5.1.1	Campo escalar $\sigma$ .....	55
5.1.2	Campo vetorial $\omega$ .....	55
5.1.3	Campo vetorial $\rho$ .....	56
5.1.4	Campo eletromagnético .....	57
5.1.5	Campos fermiônicos .....	57
5.2	APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO .....	58
5.3	MATÉRIA NUCLEAR NA MÉTRICA DE FRW .....	61
5.3.1	Equações de movimento dos campos bosônicos ....	61
5.3.2	Tensor energia-momento .....	64
5.3.3	Conservação da energia .....	68
5.3.4	O sistema de equações .....	73
5.3.5	Uma solução aproximada .....	78
5.3.6	Um complemento da aproximação .....	91

6	CONCLUSÃO .....	101
	REFERÊNCIAS .....	103
	APÊNDICE A - $\delta\sqrt{-g}$ e $\delta R$ .....	107
	APÊNDICE B - Métrica de FRW em Coordena- das Cartesianas .....	111

## 1 INTRODUÇÃO

No atual modelo cosmológico, o universo passou por uma série de fases e transições de fase desde o Big Bang [1] (veja a Figura 1). Para os períodos mais primordiais e próximos do tempo de planck ( $\simeq 10^{-43}s$ ), existe uma série de especulações e a necessidade de uma teoria unificada da gravidade com a mecânica quântica. Mas nas fases subsequentes podemos nos esquivar do espinhoso terreno da gravitação quântica e buscar modelos efetivos que as descrevam satisfatoriamente.

Nessa dissertação nos atentaremos para a fase do universo logo após à fase de plasma de quarks e glúons, conhecida como *era hadrônica*. Em tal fase, os prótons e nêutrons ainda não formam núcleos atômicos e nem os elétrons estão em estados ligados junto aos prótons. Ou seja, o estudo feito aqui é da fase entre a formação dos bárions e a formação dos núcleos de hélio e está compreendida entre  $10^{-6}s$  e  $1s$  após o Big Bang ou, em termos de temperatura, entre  $T \simeq 150MeV$  e  $T \simeq 1MeV$  (usaremos o sistema de unidades naturais  $k_B = c = \hbar = 1$ ), mas há incertezas sobre qual realmente é a temperatura de transição do plasma de quarks e glúons para a fase hadrônica no universo primordial (veja a Figura 2), podendo ser entre  $T \simeq 125MeV$  e  $T \simeq 175MeV$  [1,2], apesar de ser alvo de intensa investigação tanto experimental com colisão de íons pesados (feita no LHC<sup>1</sup> e RHIC<sup>2</sup> principalmente) quanto em simulações na rede (QCD<sup>3</sup> na rede). Se trata de um dos pontos mais difíceis no quebra-cabeça do universo primordial. Em especial porque a nossa teoria atual para os quarks, a QCD, que faz parte do modelo padrão de partículas elementares, é intratável pelos métodos matemáticos conhecidos.

No entanto esses experimentos e simulações também nos servem com vasta informação sobre a matéria nuclear para testar modelos efetivos, que buscam ser aproximações da QCD para a fase hadrônica. Nesse intuito, o modelo  $\sigma - \omega - \rho$  [3] mostrou-se um bom modelo efetivo para muitas situações, sendo utilizado para modelar a matéria nuclear até em situações extremas como as da estrela de nêutrons [4] e colisões de íons pesados [5], essa sendo uma situação próxima da aqui estudada (mas não é o único modelo possível ou utilizado). Apesar disso, a modelação da era hadrônica enquanto universo em expansão tem sido feita se concentrando em equações de equilíbrio térmico e químico sem

---

<sup>1</sup>Large Hadron Collider.

<sup>2</sup>Relativistic Heavy Ion Collider.

<sup>3</sup>Quantum Chromodynamics.

levar em conta algum modelo específico para a interação nuclear. Aqui pretendemos dar alguns passos na direção de uma descrição da era hadrônica em termos de um modelo efetivo da matéria nuclear. Faremos isso através do modelo  $\sigma - \omega - \rho$  adaptado para o espaço-tempo curvo e realizando a aproximação de campo médio, tal qual feito em [4]. A partir disso, obteremos as equações a serem solucionadas simultaneamente e encontraremos uma solução aproximada a fim de poder ser comparada com a solução exata e com resultados recentes.

A dissertação foi dividida em quatro capítulos (fora a introdução e conclusão), sendo três de assuntos introdutórios e o último efetivamente com o trabalho. Abaixo segue-se o conteúdo resumido de cada capítulo.

**Capítulo 2:** Nesse capítulo vamos introduzir a formulação lagrangiana para espaço-tempo curvo e derivar a equação de Einstein nesses termos. Também vamos deduzir alguns dos tensores energia-momento de interesse, os quais serão utilizados no Capítulo 4. Além disso, derivaremos a equação de Euler-Lagrange, que também será utilizada no Capítulo 5.

**Capítulo 3:** Aqui apresentaremos resultados preliminares de cosmologia. O princípio cosmológico é apresentado com alguns detalhes formais e mostraremos que a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (ou métrica de FRW) é consistente com o princípio cosmológico. Enfim, com a equação de Einstein e a métrica de FRW, derivaremos as equações de Friedmann e discutiremos algumas de suas características.

**Capítulo 4:** Já nesse capítulo, vamos apresentar rapidamente como os férmions surgem na Relatividade Restrita e, então, nos utilizarmos disso e do princípio da equivalência para desenvolver um formalismo, conhecido como formalismo de tetradas, que insere os férmions na Relatividade Geral.

**Capítulo 5:** Por fim adaptaremos a lagrangiana do modelo  $\sigma - \omega - \rho$  para o espaço-tempo curvo e derivaremos suas equações de movimento. Faremos a aproximação de campo médio e obteremos o tensor energia-momento nessas condições. Finalmente, acrescentando a equação de Friedmann e a conservação da energia, teremos o sistema de equações a ser resolvido e obteremos uma solução aproximada com o propósito de explorar alguns dos fenômenos contidos no sistema de equações e fazer comparações.

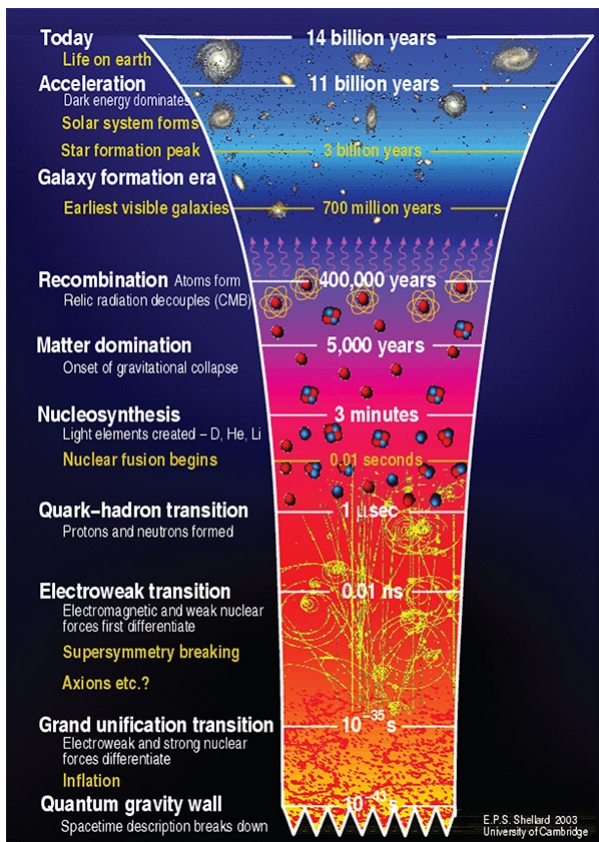


Figura 1 – Representação esquemática do modelo cosmológico padrão com suas fases até os dias atuais (figura extraída de <http://planck.caltech.edu/epo/epo-planckScience5.html>). A transição do plasma de quarks e glúons para a fase hadrônica ocorre em torno de  $10^{-6}$  s após o Big Bang a uma temperatura em torno de  $150\text{MeV}$ .

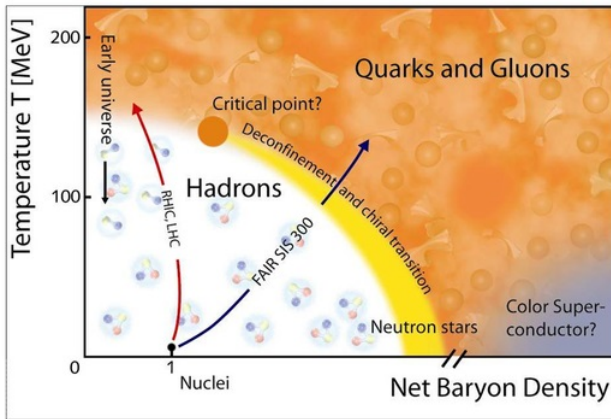


Figura 2 – Diagrama de fases da QCD (figura extraída de <https://www.jyu.fi/fysiikka/en/research/highenergy/parphen/QCD>). Os experimentos feitos no LHC e RHIC alcançam a fase de plasma de quarks e glúons e chegam próximos das condições do universo primordial (baixa densidade e alta temperatura), embora haja algumas diferenças significativas [18]. Apesar de muitos avanços experimentais e em simulações, há ainda muitas dúvidas sobre quantas fases existem realmente e por quais linhas ocorrem as transições de fase.

## 2 RELATIVIDADE GERAL

Como não é nosso objetivo uma extensa exposição da Relatividade Geral, aqui nos limitaremos a compilar alguns resultados que serão usados nos demais capítulos.

Aqui será apresentado como se pode usar a formulação lagrangiana dentro da Relatividade Geral e será feita uma derivação da equação de Einstein nesses termos. Também derivaremos a equação de Euler-Lagrange em espaço-tempo curvo, um resultado que será bastante utilizado no Capítulo 5.

### 2.1 FORMULAÇÃO LAGRANGIANA

O pilar central da Relatividade Geral (doravante RG) é o princípio da equivalência, que pode ser expresso enunciando que, dado um ponto  $X$  no espaço-tempo em qualquer campo gravitacional, existe um sistema de coordenadas, que é chamado de “sistema de coordenadas localmente inercial”, no qual vale que

$$g_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

$$\left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} \right)_{x=X} = 0, \quad (2.2)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo e  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski (com diagonal  $(1, -1, -1, -1)$ ). Ou seja, um observador no seu referencial próprio se vê como, localmente, num referencial inercial. A partir desse princípio se pode derivar outro, que lhe é equivalente: o princípio da covariância geral. Esse nos diz que as leis físicas devem ser covariantes (manter sua forma funcional) por uma mudança arbitrária de coordenadas e, na ausência de campo gravitacional, a métrica deve ser a de Minkowski. Não nos estenderemos sobre esses fundamentos da RG e maiores detalhes podem ser encontrados na literatura sobre o assunto [6,7,8].

Dada a covariância geral, devemos, então, exigir que a ação,  $S$ , do sistema físico deve ser invariante por uma mudança arbitrária de coordenadas. Tendo uma lagrangiana invariante no espaço de Minkowski, em geral se pode tornar a ação invariante por uma transformação geral de coordenadas realizando as substituições

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu} &\rightarrow g_{\mu\nu}, \\
d^4x &\rightarrow d^4x\sqrt{-g}, \\
\partial_\mu &\rightarrow \nabla_\mu, \\
S &\rightarrow S + S_g,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

onde  $g = \det g_{\mu\nu}$ ,  $\nabla_\mu$  é a derivada covariante e  $S_g$  é a ação livre do campo gravitacional.  $\nabla_\mu$  é definida a partir do fato de que devemos ter  $\nabla_\mu V_\nu = \nabla_\mu (g_{\nu\gamma} V^\gamma) \equiv g_{\nu\gamma} \nabla_\mu V^\gamma$ , pois se supõe que  $\nabla_\mu V_\nu$  seja um tensor e, portanto, valha a última identidade. Dessa última identidade e supondo a propriedade de Leibniz para a derivada, temos  $\nabla_\mu g_{\nu\gamma} = 0$ , ou seja,

$$\nabla_\mu g_{\nu\gamma} = \partial_\mu g_{\nu\gamma} - \Gamma_{\nu\mu}^\beta g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\gamma\mu}^\beta g_{\nu\beta} = 0,$$

que implica

$$\partial_\mu g_{\nu\gamma} = \Gamma_{\nu\mu}^\beta g_{\beta\gamma} + \Gamma_{\gamma\mu}^\beta g_{\nu\beta}. \tag{2.4}$$

A definição  $\Gamma_{\nu\mu}^\beta = \frac{1}{2}g^{\beta\alpha} (\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\mu})$ , quantidade conhecida como *conexão afim*, satisfaz exatamente a igualdade. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\nu\mu}^\beta g_{\beta\gamma} + \Gamma_{\gamma\mu}^\beta g_{\nu\beta} &= \frac{1}{2}g^{\beta\alpha} (\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\mu}) g_{\beta\gamma} + \\
&+ \frac{1}{2}g^{\beta\alpha} (\partial_\gamma g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha g_{\gamma\mu}) g_{\nu\beta} \\
&= \frac{1}{2}\delta_\gamma^\alpha (\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\mu}) + \\
&+ \frac{1}{2}\delta_\nu^\alpha (\partial_\gamma g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha g_{\gamma\mu}) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\nu g_{\gamma\mu} + \partial_\mu g_{\nu\gamma} - \partial_\gamma g_{\nu\mu} + \partial_\gamma g_{\nu\mu} + \partial_\mu g_{\gamma\nu} - \partial_\nu g_{\gamma\mu}) \\
&= \partial_\mu g_{\nu\gamma}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

A quantidade  $\Gamma_{\nu\mu}^\beta$  não é um tensor e se transforma como  $\Gamma'^\beta_{\nu\mu} = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\mu} \Gamma_{\sigma\omega}^\rho -$



$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\sigma \partial x^\omega}$ , fato que pode ser verificado a partir da definição após um cálculo tedioso.

Com as substituições propostas, dado um conjunto arbitrário de  $n$  campos  $(\phi_a)_{a=1}^n$  (podendo ser escalares, componentes de campos vetoriais ou tensoriais em geral), uma ação  $S = S(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$ , covariante no espaço de Minkowski, é adaptada para

$$S(\phi_a, \nabla_\mu \phi_a, g_{\mu\nu}) = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi_a, \nabla_\mu \phi_a, g_{\mu\nu}) + S_g(g_{\mu\nu}), \quad (2.6)$$

onde se omitiu dependências nas derivadas de primeira e segunda ordem de  $g_{\mu\nu}$  por brevidade.

Existem várias formas equivalentes para  $S_g$  e escolheremos a de Einstein-Hilbert, que é dada por

$$S_g(g_{\mu\nu}) = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.7)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional e  $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$  é a curvatura escalar, definida em termos do tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta. \quad (2.8)$$

Por fim, a ação em um espaço-tempo curvo é escrita, em geral, como

$$S(\phi_a, \nabla_\mu \phi_a, g_{\mu\nu}) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \mathcal{L}(\phi_a, \nabla_\mu \phi_a, g_{\mu\nu}) - \frac{R}{16\pi G} \right]. \quad (2.9)$$

## 2.2 ROTACIONAL E DIVERGENTE

Antes de prosseguirmos é pertinente que obtenhamos algumas identidades que serão utilizadas nesse e nos próximos capítulos.

Sabendo que, dado um vetor  $V_\nu$ , temos que sua derivada covariante é

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V_\alpha, \quad (2.10)$$

logo notamos que, devido à simetria  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$ , o rotacional<sup>1</sup> pode ser escrito como

$$\nabla_\mu V_\nu - \nabla_\nu V_\mu = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu. \quad (2.11)$$

No caso da divergência,

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu V^\alpha, \quad (2.12)$$

podemos simplificá-la notando que, por definição,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\mu &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \partial_\nu g_{\mu\alpha} \end{aligned} \quad (2.13)$$

e que essa expressão, através da identidade  $Tr(M^{-1}(x)\partial_\nu M(x)) = \partial_\nu \ln(\det M(x)) = \frac{1}{\det M(x)} \partial_\nu \det M(x)$  sendo  $M(x) = (g_{\mu\alpha})$ , pode ser escrita como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\mu = \frac{1}{2g} \partial_\nu g, \quad (2.14)$$

donde segue

$$\begin{aligned} \nabla_\mu V^\mu &= \partial_\mu V^\mu + \frac{1}{2g} (\partial_\mu g) V^\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} V^\mu. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Também podemos usar esse resultado para a divergência de um tensor. Com efeito,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu T^{\mu\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu T^{\mu\alpha}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

---

<sup>1</sup>Note que é um rotacional em quatro dimensões.

Em particular, se  $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$ , o último termo se anula, pois  $\Gamma_{\mu\alpha}^\nu = \Gamma_{\alpha\mu}^\nu$ , e podemos escrever

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \quad (T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}). \quad (2.17)$$

A utilidade desses resultados está em não dependerem explicitamente das conexões afim e sim do determinante  $g$ , que é muito mais simples e menos tedioso de se calcular.

### 2.3 EQUAÇÃO DE EINSTEIN

Retornemos para a ação  $S(\phi_a, \nabla_\mu \phi_a, g_{\mu\nu})$ . Podemos agora aplicar o princípio de Hamilton (realizar a variação funcional  $\delta S$  e igualar a zero) para derivar as equações de movimento. Isto é

$$\begin{aligned} \delta S = 0 &= \int d^4x \delta \left[ \sqrt{-g} \left( \mathcal{L} - \frac{R}{16\pi G} \right) \right] \\ &= \int d^4x \left[ (\delta\sqrt{-g}) \left( \mathcal{L} - \frac{R}{16\pi G} \right) + \sqrt{-g} \left( \delta\mathcal{L} - \frac{\delta R}{16\pi G} \right) \right] \\ &= \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \left( \mathcal{L} - \frac{R}{16\pi G} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{-g} \left( \delta\mathcal{L} - \frac{\delta R}{16\pi G} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde se utilizou a identidade  $\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$  (veja (A.3)). No segundo termo dentro da integral podemos utilizar  $\delta R = -R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\alpha}^\alpha - g^{\alpha\nu} \delta\Gamma_{\nu\alpha}^\mu)$  (veja (A.8)), donde logo se percebe o termo

$$\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\alpha}^\alpha - g^{\alpha\nu} \delta\Gamma_{\nu\alpha}^\mu), \quad (2.19)$$

que, utilizando o teorema de Gauss, se reduz a uma integral sobre a fronteira

$$\frac{1}{16\pi G} \int_{\partial\Omega} d\Omega_\mu \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\alpha}^\alpha - g^{\alpha\nu} \delta\Gamma_{\nu\alpha}^\mu), \quad (2.20)$$

onde  $\partial\Omega$  é a fronteira de  $\Omega$ , que é a região sobre a qual a integral da ação é feita. Ora,  $\delta g_{\mu\nu}$  se anula nessa fronteira por hipótese e, portanto,

esse termo não contribui para a ação. Logo,

$$\delta S = 0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{1}{16\pi G} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) \right) \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.21)$$

Nesse último passo se tomou que  $\mathcal{L}$  dependa apenas da métrica e não de suas derivadas (o que pode ser falso, mas muitas vezes e, em especial, para os propósitos desse trabalho, é uma hipótese verdadeira). Além disso, se tomou como nulas as variações dos demais campos de que  $\mathcal{L}$  depende, a fim de apenas levar em conta a variação da métrica. Agora, sendo a variação  $\delta g_{\mu\nu}$  arbitrária, o integrando é nulo e, definindo o *tensor energia-momento* através de

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} T^{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

finalmente temos a equação de Einstein

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

Um resultado que ainda pode ser extraído é  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , que reflete a conservação da energia e do momento<sup>2</sup> e é condição *sine qua non* para a teoria de lagrangiana  $\mathcal{L}$  ser consistente com a RG. Isso se verifica a partir da identidade de Bianchi, que é

$$\nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R^\mu_{\nu\gamma\alpha} + \nabla_\alpha R^\mu_{\nu\beta\gamma} = 0, \quad (2.24)$$

da definição de tensor de Ricci  $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\mu\gamma\nu}$ , e das simetrias  $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) &= \nabla^\mu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu R \\ &= g^{\mu\sigma} \nabla_\sigma R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu R \\ &= g^{\mu\sigma} \nabla_\sigma g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\mu\gamma\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu R \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Esse resultado é análogo ao caso do espaço-tempo plano, onde temos  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

$$\begin{aligned}
&= g^{\mu\sigma} g^{\alpha\gamma} (-\nabla_\nu R_{\alpha\mu\sigma\gamma} - \nabla_\gamma R_{\alpha\mu\nu\sigma}) - \frac{1}{2} \partial_\nu R \\
&= \frac{1}{2} \partial_\nu R - \nabla^\alpha R_{\alpha\nu} \\
&= -\nabla^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right). \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = 0 = \nabla^\mu T_{\mu\nu}. \tag{2.26}$$

## 2.4 TENSORES ENERGIA-MOMENTO

No Capítulo 5, usaremos a lagrangiana do modelo  $\sigma - \omega - \rho$ , que envolve um campo escalar, dois vetoriais e termos de corrente (além dos campos fermiônicos). Nessa seção vamos, através de (2.22), derivar alguns dos tensores energia-momento de interesse que serão utilizados.

### 2.4.1 Campo escalar

A lagrangiana covariante para um campo escalar  $\phi$  em espaço-tempo plano é [9,10]  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - U(\phi)$ , onde  $U(\phi)$  é um potencial que depende apenas de  $\phi$  (geralmente um polinômio). Ao fazermos as substituições necessárias para torná-la covariante num espaço-tempo curvo, ela toma a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - U(\phi). \tag{2.27}$$

Para descobrir o tensor energia-momento, devemos saber  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}$ , que é definido a partir de  $\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu}$ . Fazendo a variação de (2.27), temos

$$\delta \mathcal{L} = \delta \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right) - \delta \left( \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - U(\phi) \right). \tag{2.28}$$

Como estamos variando apenas  $g_{\mu\nu}$ , o segundo termo se anula enquanto o primeiro pode ser escrito (lembrando que para um campo escalar

$\nabla_\mu = \partial_\mu$ ) como

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) \\
 &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\delta g^{\mu\nu} \\
 &= -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi\delta g_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde se usou o fato de que  $\delta\partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta\phi$  (para anular o segundo termo) e a identidade  $g_{\mu\alpha}\delta g^{\alpha\nu} = -g^{\mu\alpha}\delta g_{\alpha\nu}$ <sup>3</sup>. Logo,  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi$  e o tensor energia-momento pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \\
 &= \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - U(\phi)\right). \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

### 2.4.2 Campo vetorial

Para um campo vetorial  $A_\mu$  (a princípio, massivo), que tem lagrangiana no espaço-tempo plano da forma [9,10]  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu$ , onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , temos como adaptação para o espaço-tempo curvo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu. \tag{2.31}$$

Da mesma forma que anteriormente, devemos fazer a variação da lagrangiana (2.31) e assim temos

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}\delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}) + \\
 &\quad + \frac{1}{2}m^2A_\mu A_\nu\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2g^{\mu\nu}\delta(A_\mu A_\nu). \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Basta notar que  $0 = \delta(\delta_\nu^\mu) = \delta(g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}) = g^{\mu\alpha}\delta g_{\alpha\nu} + g_{\mu\alpha}\delta g^{\alpha\nu}$ .

O segundo e quarto termos se anulam, pois a variação é feita sobre o campo  $A_\mu$ , a qual independente da variação de  $g_{\mu\nu}$ . Portanto

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}\delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A_\nu\delta g^{\mu\nu} \\
 &= -\frac{1}{4}(g^{\nu\beta}\delta g^{\mu\alpha} + g^{\mu\alpha}\delta g^{\nu\beta})F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}m^2A^\mu A^\nu\delta g_{\mu\nu} \\
 &= -\left(\frac{1}{2}F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{2}m^2A^\mu A^\nu\right)\delta g_{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Então,  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu - \frac{1}{2}m^2A^\mu A^\nu$  e o tensor energia-momento toma a forma

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} &= F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu + m^2A^\mu A^\nu + g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}m^2A_\alpha A^\alpha\right) \\
 &= F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu + g^{\mu\nu}\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \\
 &\quad + m^2\left(A^\mu A^\nu - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}A_\alpha A^\alpha\right).
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

### 2.4.3 Correntes

É comum que as lagrangianas possuam termos do tipo  $\mathcal{L} = -A^\mu J_\mu$ , que correspondem a correntes de algum tipo. Para encontrarmos a contribuição que tal termo tem no tensor energia-momento, devemos saber como  $J_\mu$  varia em relação à métrica e, para tanto, vamos considerar que se trata de uma corrente conservada. Assim, devemos ter  $\nabla_\mu J^\mu = 0$  e, por seguinte, para qualquer região  $\Omega$ ,  $\int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu J^\mu = \int_{\partial\Omega} d\Omega_\mu\sqrt{-g}J^\mu = 0$ , onde se usou o teorema de Gauss. Obtendo a variação da última integral, temos

$$\int_{\partial\Omega} d\Omega_\mu\delta(\sqrt{-g}J^\mu) = 0. \tag{2.35}$$

Como essa integral independe de  $\Omega$ ,  $\delta(\sqrt{-g}J^\mu) = 0$  e, portanto,  $(\delta\sqrt{-g})J^\mu + \sqrt{-g}\delta J^\mu = 0$ . Finalmente temos

$$\begin{aligned}
\delta J^\mu &= -J^\mu \frac{\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \\
&= -\frac{1}{2} J^\mu g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Logo, a variação do termo da lagrangiana  $\mathcal{L} = -A^\mu J_\mu$  é

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= -(\delta A^\mu) J_\mu - A^\mu \delta J_\mu \\
&= \frac{1}{2} A_\mu J^\mu g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{2.37}$$

donde se tem  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} A_\mu J^\mu g^{\alpha\beta}$  e, assim,

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} A_\alpha J^\alpha - A_\alpha J^\alpha g^{\mu\nu} = 0, \tag{2.38}$$

o que mostra que termos de corrente não contribuem explicitamente para o tensor energia-momento.

## 2.5 EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Voltemos para a ação  $S$  e à aplicação do princípio de Hamilton, mas agora realizando as variações em relação aos campos e não mais em relação à métrica. Assim, já podemos de antemão ver que termos com  $\delta(\sqrt{-g})$  e  $\delta R$  são nulos. Logo, podemos escrever

$$\delta S = 0 = \int d^4x \sqrt{-g} \delta\mathcal{L}. \tag{2.39}$$

Como  $\mathcal{L}$  possui como variáveis independentes (fora a métrica)  $\phi_a$  e  $\nabla_\mu \phi_a$ <sup>4</sup>, temos

$$\delta S = 0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} \delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_\mu\phi_a} \delta\nabla_\mu\phi_a \right)$$

---

<sup>4</sup>É pertinente observar que, aqui,  $\phi_a$  pode ser componente de um vetor ou até mesmo de um tensor em geral e, portanto,  $\nabla_\mu \phi_a$  pode ter conexões afim.



$$\begin{aligned}
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \phi_a} \nabla_\mu \delta \phi_a \right) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \nabla_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \phi_a} \delta \phi_a \right) - \left( \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \phi_a} \right) \delta \phi_a \right) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \left( \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \phi_a} \right) \right) \delta \phi_a + \\
&\quad + \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \phi_a} \delta \phi_a \right). \tag{2.40}
\end{aligned}$$

O último termo pode, através do teorema de Gauss, ser escrito como uma integral sobre a fronteira da região integrada, onde, por hipótese,  $\delta \phi_a$  é nulo. Assim, essa segunda integral é nula e, sendo as variações  $\delta \phi_a$  arbitrárias, o integrando da primeira integral é nulo. Por fim temos a equação de Euler-Lagrange

$$\nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \phi_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0. \tag{2.41}$$

Essa equação nos fornece as equações dinâmicas dos campos, as quais devem ser solucionadas simultaneamente com a equação de Einstein. Agora podemos aplicar os resultados a casos específicos. Em especial usaremos a equação de Euler-Lagrange e os tensores energia-momento deduzidos acima quando chegarmos no Capítulo 5, enquanto a equação de Einstein já poderá ser parcialmente solucionada no caso de nosso interesse no próximo capítulo.



### 3 COSMOLOGIA

As equações de Einstein podem ser aplicadas aos objetos astrofísicos em geral, mas também podem ser aplicadas ao universo como um todo, o qual pode apresentar fenômenos (o de expansão, mais notadamente) passíveis de serem investigados. Ao estudo desses fenômenos dá-se o nome de cosmologia, área que ganhou espaço através do estudo da RG. Nesse capítulo serão apresentados alguns resultados gerais e preliminares nessa área seguindo a referência [8]. Esses resultados nos serão úteis na descrição que pretendemos fazer da era hadrônica em termos do modelo  $\sigma - \omega - \rho$ , como veremos no Capítulo 5.

#### 3.1 O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO

Desde a revolução copernicana, a percepção de que a Terra é o centro do universo foi, aos poucos, mudando para um extremo oposto: não há nenhum centro do universo, ou seja, nenhum ponto do universo possui alguma característica física especial em relação aos demais. Mais do que isso, em grande escala (comparável a de um conjunto com vários clusters de galáxias), o universo apresenta uma distribuição homogênea de matéria e é isotrópico em cada ponto.

À proposição de que o universo é homogêneo e isotrópico deu-se o nome de *princípio cosmológico* e, atualmente, há um grande número de evidências em seu favor, entre as quais, mais notadamente, a descoberta da radiação cósmica de fundo (fruto do desacoplamento matéria-radiação na juventude do universo) que apresenta uma grande isotropia.

Ponhamos em termos mais precisos o que se quer dizer com homogeneidade e isotropia. Estamos falando de um conjunto de *sistemas de coordenadas equivalentes* em que a história do universo pareça a mesma. Isto é, as quantidades  $g_{\mu\nu}$ ,  $T_{\mu\nu}$  e etc. devem ser tais que, para todo conjunto de *coordenadas*  $x^\mu = y$ , vale que

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(y) &= g'_{\mu\nu}(y), \\ T_{\mu\nu}(y) &= T'_{\mu\nu}(y), \\ &\text{etc.}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde a aspa indica as quantidades após a transformação de coordenadas

entre dois sistemas equivalentes (mas note que  $y$  é o mesmo conjunto de coordenadas e não a transformação de  $x^\mu$ ). Em particular podemos definir um escalar que apenas depende do tempo,  $S(t)$ , e, num sistema de coordenadas equivalente,  $x' = y$  devemos ter

$$S(t') = S'(x') = S(x) = S(t) \Rightarrow t = t', \quad (3.2)$$

o que estabelece um tempo padrão para os sistemas de coordenadas equivalentes.

A isotropia pode ser entendida como a existência de um conjunto equivalente de sistemas de coordenadas  $x'^\mu(x; \theta_i)$  definidas<sup>1</sup> por três parâmetros independentes  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  e com mesma origem espacial, isto é  $x'^i(t, \mathbf{0}; \theta_j) = 0$ <sup>2</sup>.

Para entender a homogeneidade, devemos imaginar que, num tempo cosmológico particular  $T$ , seja possível construir um sistema de coordenadas equivalente em qualquer outro ponto do espaço (localizados por suas coordenadas espaciais  $a^i$ ). Mas devemos notar que, dado um ponto no espaço nesse tempo  $T$ , há uma infinidade de trajetórias espaço-temporais  $X^\mu(t)$  que passam por ele e não esperamos que observadores em cada uma delas veja o universo de forma equivalente tal como pretendido aqui. Nossa exigência não é a de que todas essas trajetórias sejam equivalentes, mas que exista ao menos uma em cada ponto que seja, a qual chamaremos<sup>3</sup>  $\mathbf{X}_\mathbf{a}(t)$  com  $\mathbf{X}_\mathbf{a}(T) = \mathbf{a}$ . Isto é, o sistema de coordenadas equivalente num dado ponto espacial  $a^i$  é  $x'^\mu = x'^\mu(t, \mathbf{X}_\mathbf{a}(t); \mathbf{a})$  de forma que  $x'^i(t, \mathbf{X}_\mathbf{a}(t); \mathbf{a}) = 0$  (ou seja, que possua origem espacial na trajetória  $\mathbf{X}_\mathbf{a}(t)$ ).

Vemos, portanto, que há um conjunto privilegiado de referenciais para os quais o universo é isotrópico e homogêneo. Com boa aproximação, as galáxias em geral possuem sua trajetória espaço-temporal num desses referenciais privilegiados e, mesmo no referencial da Terra, podemos contemplar a homogeneidade e isotropia do universo nas nossas observações astronômicas de grandes distâncias. Resta agora saber que tipo de métrica essas simetrias nos permitem ter.

<sup>1</sup>A notação  $x'^\mu(x; \theta_i)$  indica que a transformação é parametrizada pelos parâmetros  $\theta_i$ .

<sup>2</sup>Adotaremos a convenção: índices latinos correspondem a coordenadas espaciais e o negrito indica a tripla ordenada de coordenadas espaciais, ou seja,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ .

<sup>3</sup> $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ .

### 3.2 MÉTRICA DE FRW

A métrica que satisfaz a isotropia espacial assim como a homogeneidade espacial é a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (ou métrica de FRW), a qual é dada por

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (3.3)$$

onde  $k$  é um parâmetro que pode ser nulo, positivo ou negativo e  $R(t)$  é o *fator de escala*. Ou seja, a métrica tem a forma

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -\frac{R^2(t)}{1-kr^2} & & \\ & & -R^2(t)r^2 & \\ & & & -R^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

com entradas nulas omitidas. Nota-se que a parte espacial da métrica sofre expansão (ou contração) a medida que o tempo cosmológico corre, mas precisamos solucionar a equação de Einstein para saber como o fator de escala evolui, ou seja, precisamos saber que matéria preenche o universo. O significado geométrico de  $k$ , por sua vez, é o de definir se a geometria é hiperbólica ( $k$  negativo), plana ( $k = 0$ ) ou esférica ( $k$  positivo).

Podemos verificar a isotropia espacial ao notar que a parte espacial da métrica mantém sua forma por rotações espaciais. Com efeito, podemos escrever a métrica como (veja (B.4))

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left( d\mathbf{x}^2 + k \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - k\mathbf{x}^2} \right), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

com produto escalar usual, o que implica, para qualquer matriz ortogonal  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{x}^2 \equiv \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \mathbf{x}'$ . Diferenciando essa expressão, temos  $d(\mathbf{x}^T \mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^T d\mathbf{x}$ , o que significa que  $\mathbf{x}^T d\mathbf{x}$  também é um invariante pela transformação ortogonal. Além disso,  $d(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}d\mathbf{x}$ , pois  $\mathbf{A}$  não depende de  $\mathbf{x}$ , e, portanto,  $d\mathbf{x}'^2 = d(\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T) d(\mathbf{A}\mathbf{x}) =$

$\mathbf{dx}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{dx} = \mathbf{dx}^2$ . Com isso podemos concluir que a métrica é invariante por transformações ortogonais (que representam rotações dos eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$ , mas não somente, pois também estão incluídas as reflexões).

Já a homogeneidade espacial se deve à invariância da métrica pela transformação (uma “quasitranslação”)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a} \left[ \sqrt{1 - k\mathbf{x}^2} - \left( 1 - \sqrt{1 - k\mathbf{a}^2} \right) \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} \right], \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{a}$  é um vetor (no sentido de que  $\mathbf{a}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{a}$ ) arbitrário, o que pode ser verificado com um cálculo direto, mas extenso<sup>4</sup>.

### 3.3 EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

Para encontrar o fator de escala  $R(t)$  devemos solucionar a equação de Einstein tomando como ansatz a métrica de FRW. Portanto, devemos calcular as conexões afim em função de  $R(t)$  e ter um tensor energia-momento<sup>5</sup> para chegar no sistema de equações a ser solucionado. Ao fazer isso, chegamos nas equações de Friedmann e no Capítulo 5 a aplicaremos usando o tensor energia-momento do nosso modelo.

Passemos a calcular as conexões afim. Pela definição de conexão afim,  $\Gamma_{\nu\mu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\mu})$ , logo podemos notar que as conexões afim não nulas são

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_0 g_{ij} = R \dot{R} \overline{g_{ij}}, \quad g_{ij} = R^2 \overline{g_{ij}} \text{ e } \dot{R} = \frac{dR}{dt}, \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \partial_0 g_{\alpha j} = \frac{\dot{R}}{R} \delta_j^i, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{i\alpha} (\partial_k g_{\alpha j} + \partial_k g_{j\alpha} - \partial_\alpha g_{jk}) \\ &= \frac{1}{2} g^{i\bar{l}} (\partial_k \overline{g_{l j}} + \partial_k \overline{g_{j l}} - \partial_l \overline{g_{j k}}) \equiv \overline{\Gamma_{jk}^i}, \quad g^{ij} = \frac{1}{R^2} \overline{g^{ij}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

<sup>4</sup>A não ser para  $k = 0$ , cuja verificação é imediata. Nesse caso podemos ainda notar que o grupo de simetria do espaço é exatamente  $E(3)$ , o grupo euclidiano de ordem 3.

<sup>5</sup>Nem todo tensor energia momento é possível, lembrando que o tensor energia-momento também deve obedecer o requerimento de homogeneidade e isotropia. Na verdade, apenas os tensores energia-momento que podem ser postos na forma de um fluido homogêneo em “repouso” (quadrivelocidade igual a  $(1, \mathbf{0})$ ) podem ser usados.

donde segue que o tensor de Ricci, (2.8), tem componentes não nulas

$$R_{00} = 3 \frac{\ddot{R}}{R}, \quad \ddot{R} = \frac{d^2 R}{dt^2}, \quad (3.10)$$

$$R_{ij} = \overline{R_{ij}} - \left( R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 \right) \overline{g_{ij}}, \quad (3.11)$$

onde

$$\overline{R_{ij}} = \partial_i \overline{\Gamma_{jk}^k} - \partial_k \overline{\Gamma_{ij}^k} + \overline{\Gamma_{il}^k \Gamma_{jk}^l} - \overline{\Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^l}. \quad (3.12)$$

Um cálculo mais demorado nos dá como resultado  $\overline{R_{ij}} = -2k\overline{g_{ij}}$  e, assim,

$$R_{ij} = - \left( R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k \right) \overline{g_{ij}}. \quad (3.13)$$

Tomaremos o tensor energia-momento de um fluido perfeito (??????),  $T_{\mu\nu} = (\epsilon + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$ , onde tal fluido é tomado como estático, ou seja, a quadrivelocidade é  $u^\mu = (1, \mathbf{0})$ . Além disso, escreveremos a equação de Einstein, (2.23), na forma<sup>6</sup>

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\alpha_\alpha \right). \quad (3.14)$$

Com o tensor energia momento na forma proposta, temos  $T^\alpha_\alpha = \epsilon - 3p$  e, dessa forma,

$$R_{00} = 3 \frac{\ddot{R}}{R} = 8\pi G \left( \epsilon - \frac{1}{2} (\epsilon - 3p) \right) = 4\pi G (\epsilon + 3p), \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= - \left( R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k \right) \overline{g_{ij}} = 8\pi G \left( -pR^2 - \frac{1}{2} (\epsilon - 3p) R^2 \right) \overline{g_{ij}} \\ &= -4\pi G (\epsilon - p) R^2 \overline{g_{ij}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Portanto temos, finalmente, as equações

---

<sup>6</sup>Para ver que essa forma está correta, basta notar que, pela equação de Einstein,  $8\pi G T^\mu_\mu = R^\mu_\mu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\mu R = g^{\mu\nu} R_{\nu\mu} - 2R = R - 2R = -R$ , onde  $R$  é a curvatura escalar.

$$\ddot{R} = \frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3p) R, \quad (3.17)$$

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k = 4\pi G (\epsilon - p) R^2, \quad (3.18)$$

que são conhecidas como *equações de Friedmann*. Substituindo a primeira equação na segunda, ficamos com apenas uma equação de primeira ordem:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \epsilon R^2 - k. \quad (3.19)$$

Além dessa equação, ainda temos a da conservação da energia e momento,

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_\mu T^{\mu\nu} &= \nabla_\mu ((\epsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}) \\ &= \nabla_\mu ((\epsilon + p) u^\mu u^\nu) - g^{\mu\nu} \partial_\mu p \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} ((\epsilon + p) u^\mu u^\nu) + \\ &\quad + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu ((\epsilon + p) u^\mu u^\alpha) - g^{\mu\nu} \partial_\mu p, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde se usou o resultado (2.16). Como  $\epsilon = \epsilon(t)$ ,  $p = p(t)$  e  $\Gamma_{00}^\nu = 0$ , a equação é trivialmente nula para  $\nu \neq 0$  enquanto para  $\nu = 0$ , observando que  $\sqrt{-g} = \sqrt{\frac{R^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}} = R^3 r^2 \sin \theta \sqrt{\frac{1}{1 - kr^2}}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 \sqrt{-g} (\epsilon + p) &= \partial_0 p, \\ \frac{r^2 \sin \theta \sqrt{\frac{1}{1 - kr^2}}}{R^3 r^2 \sin \theta \sqrt{\frac{1}{1 - kr^2}}} \frac{d}{dt} (R^3 (\epsilon + p)) &= \frac{dp}{dt}, \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (R^3 (\epsilon + p)) &= R^3 \dot{p}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

ou

$$\frac{d(\epsilon R^3)}{dR} = -3pR^2. \quad (3.22)$$



Essas equações não determinam ainda como  $R$  evolui com o tempo cosmológico. Para avançar e conseguir soluções para essas equações, se torna necessário saber a relação entre  $p$  e  $\epsilon$ , isto é, a equação de estado da matéria que forma o fluido. Dois casos particularmente interessantes são o de um gás clássico (baixa temperatura) e ultra-relativístico (ou radiação).

No primeiro caso, a densidade de energia é praticamente só a da energia de repouso, dada por  $nm$ , onde  $n$  é a densidade de partículas e  $m$  a massa individual de cada partícula, enquanto a pressão pode ser desprezada,  $p \rightarrow 0$  (a qual se vincula, em termos gerais, com a energia cinética). Assim, a equação (3.22) nos fornece  $n \propto \frac{1}{R^3}$ , um resultado que pode ser entendido a partir da observação de que um pequeno volume<sup>7</sup>  $\delta V$  aumenta proporcionalmente a  $R^3$  (é mais fácil ver isso imaginando um pequeno cubo, onde cada aresta sofre uma expansão pelo fator  $R$ ) e, dessa forma, a multiplicação  $n\delta V$  se mantém constante. Isso nada mais significa que o número de partículas numa certa região em expansão se mantém constante, que é um resultado esperado.

Já no segundo caso, a equação de estado é  $3p = \epsilon$  e isso implica, através da equação (3.22),  $\epsilon \propto \frac{1}{R^4}$ . Uma forma de compreender esse resultado é observar que, além da diluição das partículas através da expansão, que nos fornece o fator  $\frac{1}{R^3}$ , a energia de cada partícula (quântica)<sup>8</sup> nesse caso é dada por  $E = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , onde  $k$  é o módulo do vetor de onda e  $\lambda$  é o comprimento de onda, e, como o comprimento de onda é aumentado por um fator  $R$  à medida que ocorre a expansão (a onda é “esticada”), a energia de cada partícula é diminuída por um fator  $\frac{1}{R}$ , ou seja, a densidade de energia total cai com  $\frac{1}{R^4}$ .

Como última observação, notemos que a expansão sofrida pelo fluido na métrica de FRW é adiabática por construção. Pode-se ver isso ao lembrar, da termodinâmica, que  $dE = TdS - pdV$ , ou seja,  $d(\epsilon V) = TdS - pdV$ . Assim, considerando um pequeno volume  $V \equiv \delta V = R^3\delta V_0$ , onde  $\delta V_0$  é o volume inicial, devemos ter  $\delta V_0 d(\epsilon R^3) = TdS - 3pR^2\delta V_0 dR$  e vê-se rapidamente que essa expressão se reduz à equação (3.22) quando  $dS = 0$ . Ou seja, não há, em média, transferência de energia de uma região para outra (contando a expansão) a medida que o tempo cosmológico corre, fazendo com que qualquer região dada seja, efetivamente, um sistema isolado e a densidade de entropia do fluido,

<sup>7</sup>Aqui se está usando a notação  $\delta V$  para um volume infinitesimal no lugar de  $dV$ , que significa uma pequena variação do volume  $V$ .

<sup>8</sup>Aqui se está ilustrando um caso particular. Claro, o resultado não depende necessariamente da mecânica quântica e também vale para casos em que o número de partículas não é conservado.

$s$ , evolua de forma que<sup>9</sup>  $sR^3 = cte$ .

---

<sup>9</sup>Para que  $s\delta V = \delta S$  (a quantidade de entropia em  $\delta V$ ) seja constante. Concionaremos que “*cte*” significa uma constante.

## 4 FÉRMIONS EM ESPAÇO-TEMPO CURVO

No Capítulo 2 introduzimos o formalismo lagrangiano num espaço-tempo curvo e deduzimos os tensores energia-momento de campos escalares e vetoriais. No entanto o modelo  $\sigma - \omega - \rho$ , que será apresentado e utilizado no próximo capítulo, também inclui férmions (ou espinores, como também são chamados) e o tratamento em termos do princípio da covariância geral não é capaz de, diretamente, incorporá-los. Para que possamos tratá-los dentro do arcabouço da RG, devemos, como veremos, recorrer diretamente ao princípio da equivalência, com o qual podemos construir as representações espinoriais no referencial localmente inercial e, então, passar para um sistema de coordenadas generalizadas. Tais representações aparecem no contexto de Relatividade Restrita através do Grupo de Lorentz e veremos logo abaixo como construí-las.

### 4.1 GRUPO DE LORENTZ

Antes de tentar incorporar os espinores na RG, nessa e na próxima seção vamos ver rapidamente como os espinores surgem na Relatividade Restrita [11,12,13].

Na Relatividade Restrita, postula-se que

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.1)$$

onde temos o tensor métrico (invariante)

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

As chamadas transformações de Lorentz consistem no conjunto de transformações lineares  $\Lambda^\mu{}_\nu$  tais que  $ds^2$  seja invariante, isto é,

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha dx^\alpha \Lambda^\nu{}_\beta dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = ds^2, \quad (4.3)$$

que implica

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}. \quad (4.4)$$

Na forma matricial, essa igualdade é expressa como

$$\Lambda^T\eta\Lambda = \eta. \quad (4.5)$$

Chamaremos de Grupo de Lorentz Restrito o conjunto  $L_+^\uparrow = \{\Lambda \in O(1,3) \mid \Lambda^0_0 \geq 1 \text{ e } \det \Lambda = 1\} = SO^+(1,3)$ . Esse grupo é um grupo de Lie (não compacto) e seus elementos podem ser escritos como exponenciais, as quais são

$$\Lambda^\mu_\nu = \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \omega^{\rho\sigma} \Sigma_{\rho\sigma} \right) \right]^\mu_\nu, \quad (4.6)$$

onde  $\omega^{\rho\sigma}$  são parâmetros reais e  $\Sigma_{\rho\sigma}$  são matrizes definidas por

$$(\Sigma_{\rho\sigma})^\mu_\nu = -(\delta^\mu_\rho \eta_{\nu\sigma} - \delta^\mu_\sigma \eta_{\nu\rho}). \quad (4.7)$$

Nota-se que  $\Sigma_{\rho\sigma} = -\Sigma_{\sigma\rho}$  e, portanto, há seis geradores independentes. Os geradores  $\Sigma_{0i}$  geram os boosts<sup>1</sup> enquanto os geradores  $\Sigma_{ij}$  geram o subgrupo das rotações (no caso,  $SO(3)$ ).

Essas matrizes satisfazem a relação de comutação<sup>2</sup>

$$[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\sigma} \Sigma_{\rho\nu} - \eta_{\mu\rho} \Sigma_{\sigma\nu} + \eta_{\nu\sigma} \Sigma_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho} \Sigma_{\mu\sigma}. \quad (4.8)$$

Pode-se fazer uma redefinição dessas matrizes de forma a tornar a estrutura da álgebra mais clara. Primeiro, definamos

$$N_i = \Sigma_{0i} \quad , \quad M_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Sigma_{jk} \quad (4.9)$$

e, então, passemos a definir

$$J_i = \frac{1}{2} (N_i - iM_i) \quad , \quad K_i = -\frac{1}{2} (N_i + iM_i). \quad (4.10)$$

---

<sup>1</sup>Os boosts não formam um subgrupo (a não ser boosts numa mesma direção), pois dois boosts consecutivos em direções diferentes são equivalentes a um boost combinado com uma rotação, fenômeno conhecido como *rotação de Wigner* [14].

<sup>2</sup> $[a, b] = ab - ba$ .

Essas matrizes satisfazem as relações de comutação

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k \\ [K_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk}K_k \\ [J_i, K_j] &= 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ou seja, a álgebra é a<sup>3</sup>  $su(2) + su(2)$ .

## 4.2 REPRESENTAÇÕES DO GRUPO DE LORENTZ

O Grupo de Lorentz, formado pelas matrizes  $\Lambda$ , apresentado acima é, na verdade, uma das possíveis representações do Grupo de Lorentz (quando visto como um grupo abstrato). Usamos essa representação para chegar à álgebra de Lie que o corresponde, a qual é  $su(2) \oplus su(2)$ . Podemos agora investigar diferentes representações dessa álgebra, que geram diferentes representações do Grupo de Lorentz e atuam em diferentes “objetos” correspondentes.

As diferentes representações da álgebra  $su(2) \oplus su(2)$  são denotadas como  $(n, m)$ , onde  $n$  e  $m$  correspondem, respectivamente, aos autovalores mais altos dos operadores  $J_3$  e  $K_3$ .

### 4.2.1 Representação $(0, 0)$ ; Escalar

A representação mais simples possível, chamada de representação trivial, é a que  $J_i = K_i = 0$ . Essa representação atua nos “objetos” chamados escalares, os quais são invariantes pela transformação de Lorentz. Com efeito,  $\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\Sigma_{\rho\sigma}\right) = \exp(0) = 1$  e, portanto, um “objeto”  $\phi$  no qual atue essa transformação é invariante.

### 4.2.2 Representações $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ ; Espinores de Weyl

Agora sejam  $J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$  e  $K_i = 0$ , onde  $\sigma_i$  são as matrizes de Pauli. Em termos das matrizes  $\Sigma_{\mu\nu}$ , as matrizes tomam a forma  $\Sigma_{0i}^L = \frac{1}{2}\sigma_i$  e

---

<sup>3</sup>Lembrando que  $su(2)$  é a álgebra do grupo de rotações e  $+$  significa a soma direta.

$\Sigma_{ij}^L = -\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\sigma_k$ . Já no caso em que  $J_i = 0$  e  $K_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ , tem-se  $\Sigma_{0i}^R = -\frac{1}{2}\sigma_i$  e  $\Sigma_{ij}^R = -\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\sigma_k$ . O primeiro caso apresentado corresponde à transformação de “objetos” chamados espinores de Weyl canhotos (denotados por  $\psi_L$ ) enquanto o segundo atua nos chamados espinores de Weyl destros (denotados por  $\psi_R$ ). Observemos que tanto o espinor de Weyl canhoto como o destro possuem duas componentes complexas.

### 4.2.3 Representação $(\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2})$ ; Espinores de Dirac e Majorana

Consideremos uma representação que é a soma direta das representações  $(\frac{1}{2}, 0)$  e  $(0, \frac{1}{2})$ . Tal representação atua em num espaço em que os elementos, numa escolha adequada de representação<sup>4</sup>, são da forma  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ , ou seja, os elementos de grupo que atuam nesse espaço (nessa base) são da forma:

$$S = \begin{pmatrix} \Lambda_L & 0 \\ 0 & \Lambda_R \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

onde  $\Lambda_L = \exp(\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}^L)$  e  $\Lambda_R = \exp(\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}^R)$ .

$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$  é chamado espinor de Dirac e possui quatro componentes complexas. É importante para o estudo desse espinor a definição das matrizes  $\gamma^\mu$  (quatro matrizes  $4 \times 4$  que formam um quadrivetor), que obedecem à álgebra de Clifford<sup>5</sup>  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ . Uma escolha possível para essas matrizes é<sup>6</sup>

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \text{ (sem soma)}, \quad (4.13)$$

onde  $\sigma^\mu = (1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  e  $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3)$ .

Demonstremos que essas matrizes podem ser usadas para escrever  $S$ . Para tanto, definamos  $\Sigma_{\mu\nu}^{Dir} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ . Assim,

<sup>4</sup>Conhecida como *representação quiral* ou *representação de Weyl* [13].

<sup>5</sup> $\{a, b\} = ab + ba$ .

<sup>6</sup>Quando for posto (*sem soma*) em alguma equação, se está indicando que os índices repetidos não são somados.

$$\begin{aligned}
\Sigma_{0i}^{Dir} &= \frac{1}{4} [\gamma_0, \gamma_i] = -\frac{1}{4} [\gamma^0, \gamma^i] \\
&= -\frac{1}{4} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= -\frac{1}{4} \left\{ \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sigma_i \end{pmatrix} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Sigma_{ij}^{Dir} &= \frac{1}{4} [\gamma_i, \gamma_j] = \frac{1}{4} [\gamma^i, \gamma^j] \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -[\sigma_i, \sigma_j] & 0 \\ 0 & -[\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i\epsilon_{ijk}\sigma_k & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i\epsilon_{ijk}\sigma_k \end{pmatrix}. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Ora, sabemos que  $\Sigma_{0i}^L = \frac{1}{2}\sigma_i$  e  $\Sigma_{ij}^L = -\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\sigma_k$  assim como  $\Sigma_{0i}^R = -\frac{1}{2}\sigma_i$  e  $\Sigma_{ij}^R = -\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\sigma_k$ . Dessa forma,

$$S = \exp \left( \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}^{Dir} \right) = \begin{pmatrix} \exp \left( \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}^L \right) & 0 \\ 0 & \exp \left( \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}^R \right) \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

que é o que se queria demonstrar.

Um caso mais restrito é o espinor de Majorana. Tendo as definições de conjugação de Dirac,  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ , e a de conjugação de carga,  $\psi^c = C\bar{\psi}^T$  tal que  $C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu$ ,  $C^\dagger C = 1$  e  $C^T = -C$ ,  $\psi^c$  descreve uma partícula de carga  $-q$  se  $\psi$  descreve uma de carga  $q$ , ou seja,  $\psi^c$  descreve a antipartícula de  $\psi$ . O espinor de Majorana é o que satisfaz  $\psi^c = \psi$  (a partícula é igual à antipartícula) e esse vínculo em suas componentes faz com que, numa base adequada, ele tenha quatro componentes reais.

### 4.3 FORMALISMO DE TETRADAS

Terminada a apresentação de algumas das representações espinoriais do Grupo de Lorentz, passemos a investigar como inseri-las no contexto da RG. Para tanto, vamos recorrer ao princípio da equivalência e chegar num novo formalismo para RG, chamado formalismo de tetradas [8]. Esse formalismo não apenas é útil por conseguir fazer a ponte entre os espinores da Relatividade Restrita e a RG, como também facilita a obtenção de vários resultados, que são difíceis de obter por outros meios. Além disso uma escolha especial de tetradas nos leva ainda a um outro formalismo, conhecido como formalismo de Newman–Penrose [15].

Como dito, devemos recorrer ao princípio da equivalência para incorporar os espinores e, de acordo com esse, para cada ponto  $X$  podemos escolher um sistema de coordenadas  $\xi_X^a$  tal que seja localmente inercial em  $X$ . Ou seja, qualquer que seja a métrica  $g_{\mu\nu}$ , ela pode ser escrita como<sup>7</sup>

$$g_{\mu\nu}(x) = V^a_{\mu}(x) V^b_{\nu}(x) \eta_{ab}, \quad (4.17)$$

onde

$$V^a_{\mu}(X) = \left( \frac{\partial \xi_X^a(x)}{\partial x^{\mu}} \right)_{x=X}. \quad (4.18)$$

Tendo fixado um sistema de coordenadas localmente inercial  $\xi_X^a$  em cada ponto  $X$  do espaço-tempo, ao realizarmos uma transformação geral de coordenadas  $x \rightarrow x'$ ,  $V^a_{\mu}$  se transforma como

$$V'^a_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} V^a_{\nu}, \quad (4.19)$$

pois os sistemas de coordenadas localmente inerciais não são mudados. Ou seja,  $V^a_{\mu}$  é um quadrivetor em relação à transformação geral de coordenadas.  $V^a_{\mu}$  é conhecido como *tetrada* ou *vierbein* e é a chave para toda uma nova formulação da RG.

A transformação geral de coordenadas não é a única transformação possível para a tetrada. Lembrando que a métrica  $\eta_{ab}$  é invariante por transformações de Lorentz, podemos realizar a transformação

---

<sup>7</sup>Note que estamos usando as primeiras letras do alfabeto para nos referirmos às componentes no sistema de coordenadas localmente inercial.



$$V'^a{}_\mu(x) = \Lambda^a{}_b(x) V^b{}_\mu(x). \quad (4.20)$$

Agora podemos definir para vetores e tensores em geral suas formas no sistema de coordenadas localmente inercial  $\xi_X^a$ . De fato, tendo o vierbein, podemos escrever

$$\begin{aligned} A^a &= V^a{}_\mu A^\mu, \\ T^{ab} &= V^a{}_\mu V^b{}_\nu T^{\mu\nu}, \\ &\text{etc.}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

que podem sofrer transformações de Lorentz também. Além disso, definamos o “levantamento” e “abaixamento” de índice

$$V_a{}^\mu = \eta_{ab} g^{\mu\nu} V^a{}_\nu. \quad (4.22)$$

É fácil notar que, junto com (4.17), isso implica

$$V_a{}^\mu V^b{}_\mu = \delta_a^b, \quad (4.23)$$

$$V_a{}^\mu V^\nu{}_a = \delta^\mu_\nu, \quad (4.24)$$

$$V^a{}_\mu V^b{}_\nu g^{\mu\nu} = \eta^{ab}. \quad (4.25)$$

O grupo de Lorentz, como visto anteriormente, possui diversas representações possíveis e, portanto, um campo arbitrário,  $\psi$ , no sistema de coordenadas localmente inercial se transforma como

$$\psi' = D(\Lambda) \psi, \quad (4.26)$$

onde  $D(\Lambda)$  é a matriz correspondente à representação do grupo de Lorentz que atua em  $\psi$ . Notemos que nesse formalismo temos, por um lado, quantidades que são escalares pela transformação geral de coordenadas, mas são quadri-vetores, tensores ou espinores pela transformação de Lorentz enquanto, por outro lado, temos quantidades escalares pela transformação de Lorentz, mas são quadri-vetores ou tensores pela transformação geral de coordenadas. A tetrada realiza a “tradução” de uma forma de expressar em termos da outra.

Passemos a analisar a derivada covariante por esse formalismo.

Dado um campo  $\psi$  no sistema de coordenadas localmente inercial, a derivada  $\nabla_a \psi$  deve ser tal que  $\nabla'_a \psi' = \nabla'_a (D(\Lambda) \psi) \equiv D(\Lambda) \nabla_b \psi$ . Supondo que derivada seja da forma  $\nabla_a = V_a{}^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu)$ , temos que

$$\begin{aligned} \nabla'_a (D(\Lambda) \psi) &= V_a{}^\mu \left( D(\Lambda) \partial_\mu \psi + (\partial_\mu D(\Lambda)) \psi + \Gamma'_\mu D(\Lambda) \psi \right) \\ &\equiv V_a{}^\mu D(\Lambda) (\partial_\mu \psi + \Gamma_\mu \psi) \end{aligned} \quad (4.27)$$

e isso implica<sup>8</sup>

$$\Gamma'_\mu = D(\Lambda) \Gamma_\mu D^{-1}(\Lambda) - (\partial_\mu D(\Lambda)) D^{-1}(\Lambda). \quad (4.28)$$

Para saber como são as matrizes  $\Gamma_\mu$ , é suficiente fazer uma transformação de Lorentz infinitesimal, isto é,  $D(\Lambda) \simeq 1 + \frac{1}{2} \omega^{ab} \Sigma_{ab}^D$  e  $D^{-1}(\Lambda) \simeq 1 - \frac{1}{2} \omega^{ab} \Sigma_{ab}^D$ , onde  $\Sigma_{ab}^D$  são os geradores da álgebra correspondentes à representação em questão e  $|\omega^{ab}| \ll 1$ . Assim, desprezando termos de segunda ordem,

$$\Gamma'_\mu \simeq \Gamma_\mu + \frac{1}{2} \omega^{ab} [\Sigma_{ab}^D, \Gamma_\mu] - \frac{1}{2} \Sigma_{ab}^D \partial_\mu \omega^{ab}. \quad (4.29)$$

Pode-se verificar que  $\Gamma_\mu = \frac{1}{2} \Sigma_{ab}^D V_\nu^a \nabla_\mu V^{b\nu} = \frac{1}{2} \Sigma_{ab}^D V_\nu^a (\partial_\mu V^{b\nu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu V^{b\alpha})$ <sup>9</sup> satisfaz essa condição. Definindo  $\omega_a{}^{bc} = V_a{}^\mu V_\nu^b \nabla_\mu V^{c\nu}$ , podemos, então, escrever

$$\nabla_a = V_a{}^\mu \partial_\mu + \frac{1}{2} \omega_a{}^{bc} \Sigma_{bc}^D. \quad (4.30)$$

Note ainda que  $\omega_a{}^{bc} = -\omega_a{}^{cb}$ , pois

$$\begin{aligned} V_a{}^\mu V_\nu^b \nabla_\mu V^{c\nu} &= V_a{}^\mu [\nabla_\mu (V_\nu^b V^{c\nu}) - V^{c\nu} \nabla_\mu V_\nu^b] \\ &= -V_a{}^\mu V^{c\nu} \nabla_\mu V_\nu^b = -\omega_a{}^{cb}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Agora consideremos o caso de interesse: o espinor de Dirac. Nesse caso temos  $\Sigma_{ab}^{Dir} = \frac{1}{4} [\gamma_a, \gamma_b]$  e, portanto,

---

<sup>8</sup>  $D^{-1}(\Lambda) \equiv D(\Lambda^{-1})$ .

<sup>9</sup> Observe que a transformação infinitesimal de  $V^{a\nu}$  é  $V'^{a\nu} \simeq V^{a\nu} - \frac{1}{2} \omega^a{}_b V^{b\nu}$ .

$$\nabla_a = V_a{}^\mu \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_a{}^{bc} \gamma_b \gamma_c, \quad (4.32)$$

onde já se utilizou as antissimetrias de  $[\gamma_a, \gamma_b]$  e  $\omega_a{}^{bc}$ . Podemos, por outro lado, obter a derivada covariante no referencial de coordenadas gerais, ou seja,

$$\nabla_\mu = V_\mu{}^a \nabla_a = \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{bc} \gamma_b \gamma_c, \quad (4.33)$$

onde  $\omega_\mu{}^{bc} = V_\nu{}^b \nabla_\mu V^{c\nu}$ . A quantidade  $\Gamma_\mu = \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{bc} \gamma_b \gamma_c$  é conhecida como *conexão de spin* ou *conexão de Dirac* e uma lagrangiana covariante no espaço de Minkowski que possua espinores de Dirac pode se tornar covariante por uma transformação geral de coordenadas ao fazer a substituição  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{bc} \gamma_b \gamma_c$  na derivada dos espinores e  $\gamma_a \rightarrow \gamma_\mu \equiv V_\mu{}^a \gamma_a$  nas matrizes de Dirac. Fora isso, ainda podemos notar que a álgebra de Clifford definida por  $\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}$  passa a ser, num sistema geral de coordenadas,  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ .

Com tal resultado, portanto, podemos incorporar os espinores na RG. Agora estamos em condições de adaptar o modelo  $\sigma - \omega - \rho$  para um espaço-tempo curvo e obter os resultados desejados, algo que vamos fazer no capítulo a seguir.



## 5 O MODELO $\sigma - \omega - \rho$ NA MÉTRICA DE FRW

Estamos interessados na era hadrônica do universo, compreendida entre  $10^{-6}s$  e  $1s$  após o Big Bang, quando a temperatura cai de  $T \simeq 150MeV$  para  $T \simeq 1MeV$ . Para realizar o estudo dessa fase, foram feitas algumas aproximações buscando uma boa relação entre a simplicidade do modelo e seu poder descritivo. Como primeira aproximação feita, temos a adoção de um modelo efetivo para os prótons e nêutrons, o qual é o modelo  $\sigma - \omega - \rho$ , que trata os prótons e nêutrons como um duplete de férmions que interagem através do méson escalar  $\sigma$  e os mésons vetoriais  $\omega$  e  $\rho$ . Além disso, adotamos a aproximação de campo médio, onde os campos escalares e vetoriais podem ser aproximados em campos clássicos e tratar os férmions como partículas que não interagem entre si, mas com o meio (os campos escalares e vetoriais aproximados em campos clássicos). Também aproximamos o gás de elétrons como um gás ultra-relativístico devido à alta energia térmica nessa fase em relação à sua massa ( $m_e \simeq 0,5MeV$ ). Por fim, negligenciamos as conexões de spin dos férmions e as demais partículas (hádrons com quark estranho, por exemplo), que podem ser acrescentadas num refinamento posterior do modelo.

### 5.1 AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

A lagrangiana do modelo  $\sigma - \omega - \rho$  adaptada para um espaço-tempo curvo é [3]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\nu + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_g. \quad (5.1)$$

Os termos dessa lagrangiana estão explicitados abaixo. O termo  $\mathcal{L}_b$  se refere aos bárions (prótons e nêutrons) e, de forma semelhante, os termos  $\mathcal{L}_e$  e  $\mathcal{L}_\nu$  se referem aos elétrons e neutrinos respectivamente. Já o termo  $\mathcal{L}_\sigma$  é a lagrangiana livre do bóson escalar  $\sigma$ , o qual descreve a atração de longo alcance entre os núcleons. Os termos  $\mathcal{L}_\omega$  e  $\mathcal{L}_\rho$  são as lagrangianas livres dos bósons vetoriais massivos  $\omega$  e  $\rho$ , que, respectivamente, descrevem a repulsão de curto alcance entre os núcleons e a assimetria de isospin. O termo  $\mathcal{L}_\gamma$  por sua vez é a lagrangiana livre da interação eletromagnética. Por fim, o termo  $\mathcal{L}_{int}$  contém as diversas

interações do modelo e  $\mathcal{L}_g$  é a lagrangiana livre do campo gravitacional. Deve-se notar que as quantidades  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$ ,  $g_\rho$  são as constantes de acoplamento do modelo, as quais serão apresentadas mais adiante neste capítulo, e  $e$  é a carga elétrica do próton.

$$\mathcal{L}_b = \bar{\Psi} \left( i\gamma^\mu \nabla_\mu - \widetilde{M}_b \right) \Psi, \quad (5.2)$$

$$\mathcal{L}_e = \bar{\psi}_e (i\gamma^\mu \nabla_\mu - m_e) \psi_e, \quad (5.3)$$

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2} \nabla_\mu \sigma \nabla^\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - U(\sigma), \quad (5.4)$$

$$\mathcal{L}_\omega = -\frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu, \quad (5.5)$$

$$\mathcal{L}_\rho = -\frac{1}{4} \Xi_{\mu\nu} \Xi^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu \rho^\mu, \quad (5.6)$$

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & -g_\omega \bar{\Psi} \gamma^\mu \omega_\mu \Psi - \frac{1}{2} g_\rho \bar{\Psi} \gamma^\mu \sigma_3 \rho_\mu \Psi - e \bar{\Psi} \gamma^\mu \left( \frac{1 + \sigma_3}{2} \right) A_\mu \Psi + \\ & + e \bar{\psi}_e \gamma^\mu A_\mu \psi_e, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\mathcal{L}_g = -\frac{R}{16\pi G} \quad (5.9)$$

com

$$\widetilde{M}_b = \begin{pmatrix} m_p - g_\sigma \sigma & 0 \\ 0 & m_n - g_\sigma \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{m}_p & 0 \\ 0 & \widetilde{m}_n \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu, \quad (5.11)$$

$$\Xi_{\mu\nu} = \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu, \quad (5.12)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (5.13)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad p \rightarrow \text{próton}, \quad n \rightarrow \text{nêutron} \quad (5.14)$$

$$U(\sigma) = \frac{1}{3} g_2 \sigma^3 + \frac{1}{4} g_3 \sigma^4. \quad (5.15)$$

Aqui devemos fazer algumas observações. Originalmente, o modelo  $\sigma - \omega - \rho$  não leva em conta a diferença de massa entre os núcleons, e, assim possui simetria de isospin, mas aqui a estamos levando em

conta, pois esperamos verificar a disparidade entre a abundância de prótons e nêutrons a medida que a temperatura cai [8,19]. Fora isso, não explicitamos a parte da lagrangiana  $\mathcal{L}_\nu$ , a qual se refere aos neutrinos (os três sabores junto com os anti-neutrinos), já que há controvérsias quanto a sua natureza que não nos são relevantes, além do fato de não possuírem interação (fora a fraca) com as demais partículas. Logo adiante aproximaremos a contribuição dos neutrinos como um gás ultra-relativístico com potencial químico nulo e só será relevante o número de graus de liberdade que acrescentarão.

### 5.1.1 Campo escalar $\sigma$

Para obter a equação de movimento do campo escalar  $\sigma$ , basta aplicar a equação de Euler-Lagrange (2.41). Buscando os termos que dependam de  $\sigma$  na lagrangiana, facilmente se percebe que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = -m_\sigma^2 \sigma - \frac{\partial U}{\partial \sigma} + g_\sigma \bar{\Psi} \Psi \quad (5.16)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \sigma} = \nabla^\mu \sigma. \quad (5.17)$$

Portanto

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma + \frac{\partial U}{\partial \sigma} = g_\sigma \bar{\Psi} \Psi, \quad (5.18)$$

que é a equação procurada.

Utilizando a identidade  $\nabla_\mu \nabla^\mu \sigma = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \sigma)$  (veja (2.15)), a equação se torna

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \sigma) + m_\sigma^2 \sigma + \frac{\partial U}{\partial \sigma} = g_\sigma \bar{\Psi} \Psi. \quad (5.19)$$

### 5.1.2 Campo vetorial $\omega$

Nesse caso, ao buscarmos os termos que dependem do campo vetorial  $\omega$ , temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_\lambda} = m_\omega^2 \omega^\lambda - g_\omega \bar{\Psi} \gamma^\lambda \Psi \quad (5.20)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\delta \omega_\lambda} &= -\frac{\partial}{\partial \nabla_\delta \omega_\lambda} \left( \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial \nabla_\delta \omega_\lambda} \\ &= -\frac{1}{2} \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial (\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu)}{\partial \nabla_\delta \omega_\lambda} \\ &= -\frac{1}{2} \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial (\nabla_\mu \omega_\nu - \nabla_\nu \omega_\mu)}{\partial \nabla_\delta \omega_\lambda} \\ &= -\frac{1}{2} \Omega^{\mu\nu} (\delta_\mu^\delta \delta_\nu^\lambda - \delta_\nu^\delta \delta_\mu^\lambda) \\ &= -\frac{1}{2} (\Omega^{\delta\lambda} - \Omega^{\lambda\delta}) \\ &= -\Omega^{\delta\lambda} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Dessa forma, a equação de Euler-Lagrange nos fornece

$$\nabla_\mu \Omega^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\nu = g_\omega \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi. \quad (5.22)$$

Dado que  $\Omega^{\mu\nu}$  é antissimétrico, ainda podemos simplificar a expressão usando a identidade (2.17), obtendo

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \Omega^{\mu\nu}) + m_\omega^2 \omega^\nu = g_\omega \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi. \quad (5.23)$$

### 5.1.3 Campo vetorial $\rho$

Em relação ao campo anterior, a obtenção da equação do campo vetorial  $\rho$  apenas tem uma pequena alteração no primeiro cálculo, ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_\lambda} = m_\rho^2 \rho^\lambda - \frac{1}{2} g_\rho \bar{\Psi} \gamma^\lambda \tau_3 \Psi, \quad (5.24)$$



enquanto o segundo cálculo é idêntico, levando-nos a

$$\nabla_\mu \Xi^{\mu\nu} + m_\rho^2 \rho^\nu = \frac{1}{2} g_\rho \bar{\Psi} \gamma^\nu \sigma_3 \Psi. \quad (5.25)$$

Também podemos fazer a mesma simplificação de antes e ter

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \Xi^{\mu\nu}) + m_\rho^2 \rho^\nu = \frac{1}{2} g_\rho \bar{\Psi} \gamma^\nu \sigma_3 \Psi. \quad (5.26)$$

### 5.1.4 Campo eletromagnético

Para o campo eletromagnético  $A_\mu$  temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} = -e \bar{\Psi} \gamma^\lambda \left( \frac{1 + \sigma_3}{2} \right) \Psi + e \bar{\psi}_e \gamma^\lambda \psi_e \quad (5.27)$$

e o segundo cálculo também é análogo ao de  $\omega$ . Dessa forma

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = e \bar{\Psi} \gamma^\nu \left( \frac{1 + \sigma_3}{2} \right) \Psi - e \bar{\psi}_e \gamma^\nu \psi_e, \quad (5.28)$$

que também pode ser escrito como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = e \bar{\Psi} \gamma^\nu \left( \frac{1 + \sigma_3}{2} \right) \Psi - e \bar{\psi}_e \gamma^\nu \psi_e. \quad (5.29)$$

### 5.1.5 Campos fermiônicos

Para os campos fermiônicos (fora os neutrinos), os quais são  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$  e  $\psi_e$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} &= \left[ \gamma^\mu \left( i \nabla_\mu - g_\omega \omega_\mu - \frac{1}{2} g_\rho \sigma_3 \rho_\mu - e \left( \frac{1 + \sigma_3}{2} \right) A_\mu \right) - \widetilde{M}_b \right] \Psi, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_e} &= [\gamma^\mu (i \nabla_\mu + e A_\mu) - m_e] \psi_e \end{aligned} \quad (5.30)$$

enquanto

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \bar{\Psi}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \psi_e} = 0. \quad (5.31)$$

e, portanto, a equação de Euler-Lagrange nos fornece

$$\left[ \gamma^\mu \left( i\nabla_\mu - g_\omega \omega_\mu - \frac{1}{2} g_\rho \sigma_3 \rho_\mu - e \left( \frac{1 + \sigma_3}{2} \right) A_\mu \right) - \widetilde{M}_b \right] \Psi = 0, \\ [\gamma^\mu (i\nabla_\mu + eA_\mu) - m_e] \psi_e = 0 \quad (5.32)$$

ou

$$\left[ \gamma^\mu (i\nabla_\mu - \chi_\mu) - \widetilde{M}_b \right] \Psi = 0 \quad , \quad [\gamma^\mu (i\nabla_\mu + eA_\mu) - m_e] \psi_e = 0, \quad (5.33)$$

onde

$$\chi_\mu = g_\omega \omega_\mu + \frac{1}{2} g_\rho \sigma_3 \rho_\mu + e \left( \frac{1 + \sigma_3}{2} \right) A_\mu. \quad (5.34)$$

Devido à complexidade que acrescentaria ao problema, optamos por desprezar as conexões de spin e, dessa forma, as derivadas acima podem ser passadas para a usual, isto é,  $\nabla_\mu \rightarrow \partial_\mu$ . O mesmo procedimento foi feito em [4] e o acréscimo das conexões de spin pode ser feito numa continuação desse trabalho como um refinamento do modelo.

## 5.2 APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO

O sistema que será tratado, a evolução da matéria nuclear na métrica FRW, é homogêneo e, assim, justifica-se a utilização da aproximação de campo médio [16,17]. Nesse caso, as equações passam a ser equações de valores esperados das fontes, as quais calculadas no estado fundamental. Ou seja, as equações (5.19), (5.23), (5.26) e (5.29) passam a ser

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \langle \sigma \rangle) + m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle + \left\langle \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right\rangle = g_\sigma \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle, \quad (5.35)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\langle\Omega^{\mu\nu}\rangle) + m_\omega^2\langle\omega^\nu\rangle = g_\omega\langle\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi\rangle \quad (5.36)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\langle\Xi^{\mu\nu}\rangle) + m_\rho^2\langle\rho^\nu\rangle = \frac{1}{2}g_\rho\langle\bar{\Psi}\gamma^\nu\sigma_3\Psi\rangle, \quad (5.37)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\langle F^{\mu\nu}\rangle) = e\left\langle\bar{\Psi}\gamma^\nu\left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right)\Psi\right\rangle - e\langle\bar{\psi}_e\gamma^\nu\psi_e\rangle, \quad (5.38)$$

Ao definirmos

$$\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle = \rho_s, \quad (5.39)$$

$$\langle\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\rangle = J_b^\mu = J_p^\mu + J_n^\mu \quad (5.40)$$

$$\langle\bar{\Psi}\gamma^\mu\tau_3\Psi\rangle = J_3^\mu = J_p^\mu - J_n^\mu \quad (5.41)$$

$$\left\langle\bar{\Psi}\gamma^\mu\left(\frac{1+\tau_3}{2}\right)\Psi\right\rangle = J_p^\mu \quad (5.42)$$

$$\langle\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e\rangle = J_e^\mu \quad (5.43)$$

$$\langle\sigma\rangle = \phi \quad (5.44)$$

$$\langle\Omega^{\mu\nu}\rangle = V^{\mu\nu}, \langle\omega^\mu\rangle = V^\mu, \langle\Xi^{\mu\nu}\rangle = B^{\mu\nu}, \langle\rho^\mu\rangle = B^\mu, \quad (5.45)$$

$$\langle F^{\mu\nu}\rangle = F^{\mu\nu}, \langle A_\mu\rangle = A_\mu, \quad (5.46)$$

onde as duas últimas definições foram apenas simplificações de notação e os índices  $b$ ,  $p$ ,  $n$  e  $e$  correspondem a bárion, próton, nêutron e elétron respectivamente, podemos reescrever as equações como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi) + m_\phi^2\phi + \frac{\partial U}{\partial\phi} = g_\phi\rho_s, \quad (5.47)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}V^{\mu\nu}) + m_V^2V^\nu = g_VJ_b^\nu = g_Vn_bu^\nu \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}B^{\mu\nu}) + m_B^2B^\nu &= \frac{1}{2}g_B(J_p^\nu - J_n^\nu) \\ &= \frac{1}{2}g_B(n_p - n_n)u^\nu, \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) &= e(J_p^\nu - J_e^\nu) \\ &= e(n_p - n_e)u^\nu, \end{aligned} \quad (5.50)$$

onde  $u^\mu$  é a quadrivelocidade média dos portadores de carga e

$$\rho_s = \sum_{p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\tilde{m}_i}{\sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2}} (f_{i+} + f_{i-}), \quad (5.51)$$

$$n_b = \sum_{p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k (f_{i+} - f_{i-}) = n_p + n_n, \quad (5.52)$$

$$n_e = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k (f_{e+} - f_{e-}), \quad (5.53)$$

com<sup>1</sup>

$$f_{i\pm} = \frac{1}{e^{\beta(E_i \mp \nu_i)} + 1}, \quad i = p, n \quad (5.54)$$

$$f_{e\pm} = \frac{1}{e^{\beta(E_e \mp \nu_e)} + 1}, \quad (5.55)$$

as quais são as distribuições de Fermi-Dirac correspondentes com índice “+” para partículas e “-” para anti-partículas e  $\nu_i$  junto com  $\nu_e$  são os potenciais químicos efetivos, que tomam a forma

$$\nu_p = \mu_p - g_V V^0 - \frac{1}{2} g_B B^0, \quad (5.56)$$

$$\nu_n = \mu_n - g_V V^0 + \frac{1}{2} g_B B^0, \quad (5.57)$$

$$\nu_e = \mu_e \quad (5.58)$$

num sistema homogêneo e localmente neutro (em relação à carga elétrica) e com  $u^\mu = (1, \mathbf{0})$  (que é o caso aqui estudado). Note que o fator “2” em cada densidade se deve à degenerescência de spin e que acrescentamos nas equações (5.47)-(5.50) modificações nos índices das constantes para evitar confusão. Junto com a equação (5.32) e a equação de Einstein (2.23), as equações (5.47)-(5.50) formam o sistema a ser solucionado.

---

<sup>1</sup>Sempre que houver somatório com soma em  $p, n$ , o índice  $i$  irá se referir ao índice somado.

## 5.3 MATÉRIA NUCLEAR NA MÉTRICA DE FRW

### 5.3.1 Equações de movimento dos campos bosônicos

Na métrica de FRW, a qual tomada no referencial onde há um tempo cosmológico padrão, exige-se que o tensor energia-momento seja da forma de um fluido perfeito. Isso faz com que os tensores antisimétricos  $V^{\mu\nu}$ ,  $B^{\mu\nu}$  e  $F^{\mu\nu}$  sejam nulos<sup>2</sup>. Além disso, a quadrivelocidade média dos portadores de carga deve ser ( $u^0 = 1, u^i = 0$ ), ou seja, não há, em média, deslocamento de carga de uma região para outra do universo, fazendo com que a densidade de carga (de qualquer tipo) em cada lugar se mantenha a mesma que em qualquer outro lugar num mesmo tempo cosmológico. Fora isso, podemos exigir que o número de prótons seja a mesmo que o de elétrons e, assim,  $0 = (J_p^\nu - J_e^\nu)$ , o que implica  $n_p = n_e$ . Dessa forma, as equações dos campos bosônicos, (5.47)-(5.50), passam a ser

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0(\sqrt{-g}\partial^0\phi) + m_\phi^2\phi + \frac{\partial U}{\partial\phi} = g_\phi\rho_s, \quad (5.59)$$

$$m_V^2 V^0 = g_V J_b^0 = g_V n_b, \quad (5.60)$$

$$m_B^2 B^0 = g_B J_3^0 = g_B (n_p - n_n), \quad (5.61)$$

onde já se suprimiu a equação do campo eletromagnético, cujos termos identicamente se anulam. Como  $\sqrt{-g} = \sqrt{\frac{R^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}} = R^3 r^2 \sin \theta \sqrt{\frac{1}{1 - kr^2}}$ , temos que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0(\sqrt{-g}\partial^0\phi) = \frac{r^2 \sin \theta \sqrt{\frac{1}{1 - kr^2}}}{R^3 r^2 \sin \theta \sqrt{\frac{1}{1 - kr^2}}} \frac{d}{dt} \left( R^3 \frac{d\phi}{dt} \right)$$

---

<sup>2</sup>Para os campos massivos logo vemos que  $0 = T^{0i} = F^{0j} F_j^i + m^2 A^0 A^i = m^2 A^0 A^i$ , donde segue que  $A^i = 0$  se  $A^0$  não é nulo. Já para o campo não massivo temos  $T^{ij} = F^{i0} F_0^j + g^{ij} \frac{1}{2} F_{0k} F^{0k}$ . Se  $i \neq j$ , segue que  $T^{ij} = 0 = F^{i0} F_0^j$  que implica que ao menos duas componentes  $F^{i0}$  são nulas. Suponhamos que a componente não nula seja  $F^{10}$ . Então  $T^{11} = F^{10} F_0^1 + g^{11} \frac{1}{2} F_{01} F^{01} = -g^{11} F^{10} F_{10} + g^{11} \frac{1}{2} F_{01} F^{01} = g^{11} \left( -\frac{1}{2} F_{01} F^{01} \right)$  ao passo em que  $T^{22} = g^{22} \frac{1}{2} F_{01} F^{01}$  e deveríamos ter  $-\frac{1}{2} F_{01} F^{01} = \frac{1}{2} F_{01} F^{01}$ . Logo, a componente é nula. Aqui já se usou o fato de que  $F^{ij} = 0$ , pois a parte espacial de um tensor na métrica de FRW deve ser proporcional à parte espacial da métrica.

$$= \frac{d^2\phi}{dt^2} + 3\frac{\dot{R}}{R}\frac{d\phi}{dt}, \quad (5.62)$$

com  $\frac{dR}{dt} = \dot{R}$ . Portanto,

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + 3\frac{\dot{R}}{R}\frac{d\phi}{dt} + m_\phi^2\phi + \frac{\partial U}{\partial\phi} = g_\phi\rho_s. \quad (5.63)$$

Notemos ainda que, pelo fato do número bariônico ser conservado, devemos ter

$$\begin{aligned} \nabla_\mu J_b^\mu &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}J_b^\mu) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0(\sqrt{-g}J_b^0) \\ &= \frac{dn_b}{dt} + 3\frac{\dot{R}}{R}n_b = 0, \end{aligned} \quad (5.64)$$

onde se usou o fato de que  $J_b^i = 0$ . A solução dessa equação é

$$n_b = n_{b0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \quad (5.65)$$

com  $n_{b0}$  e  $R_0$  estabelecido por condições iniciais. Tal resultado não é uma surpresa e reflete o fato de que o número de bárions num determinado volume em expansão é constante. Logo, através da equação (5.60), temos

$$V^0 = \frac{g_V}{m_V^2} n_{b0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^3. \quad (5.66)$$

Além disso, agora podemos ter o espectro de energia dos férmions. Com os resultados e aproximações acima, podemos escrever

$$\begin{aligned} \left[ \gamma^\mu \left( i\partial_\mu - g_\omega V_0 - \frac{1}{2}g_B\sigma_3 B_0 \right) - \tilde{m}_N \right] \Psi &= 0, \\ (\gamma^\mu i\partial_\mu - m_e) \psi_e &= 0, \end{aligned} \quad (5.67)$$

ou, na base dos momentos,

$$\left[ \gamma^\mu \left( k_\mu - g_\omega V_0 - \frac{1}{2} g_B \sigma_3 B_0 \right) - \tilde{m}_N \right] \Psi = 0, \quad (5.68)$$

$$(\gamma^\mu k_\mu - m_e) \psi_e = 0, \quad (5.69)$$

donde segue que

$$0 = \left[ \gamma_\mu \left( k^\mu - g_V V^0 - \frac{1}{2} g_B \sigma_3 B^0 \right) - \tilde{m}_N \right] \times \quad (5.70)$$

$$\times \left[ \gamma^\nu \left( k_\nu - g_\omega V_0 - \frac{1}{2} g_B \sigma_3 B_0 \right) - \tilde{m}_N \right] \Psi$$

$$= \left[ \left( k^0 - g_V V^0 - \frac{1}{2} g_B \sigma_3 B^0 \right) \times \quad (5.71)$$

$$\times \left( k_0 - g_V V_0 - \frac{1}{2} g_B \sigma_3 B_0 \right) + (k^i k_i - \tilde{m}_N^2) \right] \Psi$$

$$= \left[ \left( \mathcal{E}_b - g_V V^0 - \frac{1}{2} g_B \sigma_3 B^0 \right) \times \quad (5.72)$$

$$\times \left( \mathcal{E}_b - g_V V^0 - \frac{1}{2} g_B \sigma_3 B^0 \right) - (k^2 + \tilde{m}_N^2) \right] \Psi, \quad (5.73)$$

onde

$$k^2 = -k_i k^i, \quad \mathcal{E}_b = k^0. \quad (5.74)$$

Logo,

$$\mathcal{E}_b = \pm \sqrt{k^2 + \tilde{m}_N^2} + g_\omega V^0 + \frac{1}{2} g_B \sigma_3 B^0 = \pm E_b + g_\omega V^0 + \frac{1}{2} g_B \sigma_3 B^0, \quad (5.75)$$

com sinal positivo para partículas e negativo para anti-partículas. Já para os elétrons, o resultado é semelhante

$$\mathcal{E}_e = \pm \sqrt{k^2 + m_e^2} = \pm E_e. \quad (5.76)$$

### 5.3.2 Tensor energia-momento

Precisamos do tensor energia-momento do sistema para podermos aplicar as equações de Friedmann, (3.19). Através de (2.30) podemos calcular as componentes do tensor energia-momento associado ao campos  $\phi$ , as quais são

$$\begin{aligned} T_{\phi}^{00} &= \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m_{\phi}^2 \phi^2 - U(\phi) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_{\phi}^2 \phi^2 + U(\phi), \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$T_{\phi}^{ii} = -g^{ii} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m_{\phi}^2 \phi^2 - U(\phi) \right), \quad (\text{sem soma}) \quad (5.78)$$

Queremos que a forma do tensor energia-momento possa ser escrita como  $T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^{\mu} u^{\nu} - p g^{\mu\nu}$  e de fato as componentes podem ser dispostas nessa forma ao observar que, no referencial comovel,  $u^{\mu} = (1, \mathbf{0})$  e, portanto,

$$\epsilon_{\phi} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_{\phi}^2 \phi^2 + U(\phi), \quad (5.79)$$

$$p_{\phi} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m_{\phi}^2 \phi^2 - U(\phi). \quad (5.80)$$

Já as componentes do tensor energia-momento associado ao campo  $V^{\mu}$  podem ser calculadas através de (2.34) e são

$$T_V^{00} = m_V^2 \left[ (V^0)^2 - \frac{1}{2} (V^0)^2 \right] = \frac{m_V^2}{2} (V^0)^2, \quad (5.81)$$

$$T_V^{ii} = m_V^2 \left[ 0 - \frac{1}{2} g^{ii} (V^0)^2 \right] = -g^{ii} \frac{m_V^2}{2} (V^0)^2, \quad (\text{sem soma}) \quad (5.82)$$

Semelhantemente, para o campo  $B^{\mu}$  temos



$$T_B^{00} = \frac{m_B^2}{2} (B^0)^2, \quad (5.83)$$

$$T_B^{ii} = -g^{ii} \frac{m_B^2}{2} (B^0)^2, \quad (\text{sem soma}). \quad (5.84)$$

Novamente queremos encontrar a densidade de energia e pressão ao escrevermos na forma  $T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}$  com  $u^\mu = (1, \mathbf{0})$  e, pelas equações, temos

$$\epsilon_V = \frac{m_V^2}{2} (V^0)^2 = \frac{1}{2} \frac{g_V^2}{m_V^2} n_{b0}^2 \left( \frac{R_0}{R} \right)^6, \quad (5.85)$$

$$p_V = \frac{m_V^2}{2} (V^0)^2 = \frac{1}{2} \frac{g_V^2}{m_V^2} n_{b0}^2 \left( \frac{R_0}{R} \right)^6, \quad (5.86)$$

$$\epsilon_B = \frac{m_B^2}{2} (B^0)^2 = \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2, \quad (5.87)$$

$$p_B = \frac{m_B^2}{2} (B^0)^2 = \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2, \quad (5.88)$$

onde utilizamos o resultado da seção anterior para escrever  $\epsilon_V$  e  $p_V$  em função de  $R$ .

Além dos campos escalar e vetoriais, temos os campos fermiônicos e termos de corrente. Pelo resultado (2.38) sabemos que os termos de corrente não contribuem explicitamente para o tensor energia-momento, então nos basta encontrar agora as contribuições para a densidade de energia e pressão associadas aos férmions.

Como a energia térmica da fase do universo estudada aqui é grande em relação à massa do elétron, trataremos os elétrons como um gás ultra-relativístico, o qual tem equação de estado  $\epsilon_e = 3p_e$  e, como  $E_e = k e^3$   $\mu_e = 0$ , tem densidade de energia escrita na forma

---

<sup>3</sup> Isso, rigorosamente, entra em contradição com a afirmação de que  $n_e = n_p$ , mas, como a temperatura é grande para os elétrons, um  $\mu_e$  pequeno é capaz de fazer  $n_e = n_p$  enquanto  $\mu_p$  ainda seja muito maior que  $\mu_e$ . Vale observar que a energia de fermi dos elétrons é  $E_F = \sqrt{k_F^2 + m_e^2}$  com  $k_F$  definido por  $n_e = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \frac{k_F^3}{3} \Rightarrow k_F = \sqrt[3]{3\pi^2 n_e}$ . Como a densidade bariônica quando a temperatura é  $150 \text{ MeV}$  é aproximadamente [18]  $0,32 \text{ MeV}^3$ , temos, ao considerar  $n_p = n_n$  nessa temperatura,  $n_e \simeq 0,16 \text{ MeV}^3$  e, portanto,  $k_F \simeq 1,68 \text{ MeV} \ll T$ .

$$\begin{aligned}
\epsilon_e &= \frac{16\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 k \frac{1}{e^{\beta k} + 1} \\
&= \frac{1}{\beta^4} \frac{16\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d(\beta k) \frac{(\beta k)^3}{e^{\beta k} + 1} \\
&= T^4 \frac{16\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x + 1}. \tag{5.89}
\end{aligned}$$

Para os neutrinos o mesmo vale, mas esses não possuem degenerescência e, assim, o resultado para cada neutrino é metade do resultado do elétron. Ou seja, a contribuição dos neutrinos é

$$\epsilon_\nu = \frac{3}{2} \epsilon_e. \tag{5.90}$$

Não podemos fazer a aproximação de gás ultra-relativístico para os bárions (prótons e nêutrons), pois a energia térmica é da ordem da massa deles. No entanto podemos adotar  $\nu_p = \nu_n$  (ou  $z_p = z_n$ ), já que, pelo equilíbrio- $\beta$  devemos ter  $\nu_n = \nu_p + \mu_e$  ao passo que a aproximação feita para os elétrons implica  $\mu_e = 0$ . Assim, sendo os bárions tratados como um gás de férmions livres, a densidade de energia total deles é

$$\epsilon_b = \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} (f_{i+} + f_{i-}), \tag{5.91}$$

com os potenciais químicos e temperaturas iguais. A pressão por sua vez é dada por<sup>4</sup>

$$p_b = \frac{1}{3} \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2}} (f_{i+} + f_{i-}). \tag{5.92}$$

Até o momento não mencionamos fótons em nosso modelo, pois, ao tomarmos a métrica como rigorosamente a de FRW, somos levados a  $F^{\mu\nu} = 0$ , como visto. No entanto devemos acrescentar a contribuição dos fótons e isso pode ser feito considerando que são um gás de bósons de massa nula e potencial químico nulo, ou seja<sup>5</sup>,

<sup>4</sup>Obtida através do resultado geral  $p = \frac{1}{3(2\pi)^3} \int d^3k k \frac{\partial E}{\partial k} (f_+ + f_-)$  [19].

<sup>5</sup>Note que o fator a frente da integral é metade do fator dos elétrons, pois a anti-partícula do fóton é ele mesmo ao passo que também tem dois estados possíveis para cada energia (as duas helicidades).

$$\begin{aligned}
\epsilon_\gamma &= \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 k \frac{1}{e^{\beta k} - 1} \\
&= T^4 \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1}.
\end{aligned} \tag{5.93}$$

Assim como para os elétrons,  $\epsilon_\gamma = 3p_\gamma$ . Como  $\epsilon_e = T^4 \frac{16\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x + 1}$  e consideraremos que os elétrons estejam em equilíbrio térmico com os fótons assim como com os neutrinos, podemos ainda juntar as expressões dessas partículas ao notar que<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x + 1} &= \int_0^\infty dx \left( \frac{x^3}{e^x - 1} - \frac{2x^3}{e^{2x} - 1} \right) \\
&= \frac{7}{8} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1}
\end{aligned} \tag{5.94}$$

e, portanto, que  $\epsilon_e = \frac{7}{4}\epsilon_\gamma$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\epsilon_e + \epsilon_\nu + \epsilon_\gamma &= T^4 \frac{16\pi}{(2\pi)^3} \left( \frac{1}{2} + \frac{7}{8} \left( 1 + \frac{3}{2} \right) \right) \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} \\
&= T^4 \frac{43\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1}.
\end{aligned} \tag{5.95}$$

Sendo  $\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$ , temos, finalmente,

$$\epsilon_e + \epsilon_\nu + \epsilon_\gamma = \epsilon_r = \frac{43}{120} \pi^2 T^4. \tag{5.96}$$

Por fim temos a expressão para a densidade de energia e pressão completas

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \epsilon_\phi + \epsilon_V + \epsilon_B + \epsilon_e + \epsilon_\nu + \epsilon_\gamma + \epsilon_b \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + U(\phi) + \frac{1}{2} \frac{g_V^2}{m_V^2} n_{b0}^2 \left( \frac{R_0}{R} \right)^6 + \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2 +
\end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Veja que  $\frac{1}{e^x - 1} - \frac{2}{e^{2x} - 1} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1} = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x - 1)^2 (e^x + 1)} = \frac{1}{(e^x + 1)}$ .

$$+ \frac{43}{120} \pi^2 T^4 + \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3 k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} (f_{i+} + f_{i-}), \quad (5.97)$$

$$\begin{aligned} p &= p_\phi + p_V + p_B + p_e + p_\nu + p_\gamma + p_b \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 - U(\phi) + \frac{1}{2} \frac{g_V^2}{m_V^2} n_{b0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^6 + \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2 + \\ &+ \frac{43}{360} \pi^2 T^4 + \frac{1}{3} \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3 k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2}} (f_{i+} + f_{i-}). \end{aligned} \quad (5.98)$$

### 5.3.3 Conservação da energia

Podemos agora aplicar a conservação da energia, (3.22). Inicialmente devemos notar que a parte correspondente ao campo  $V^\mu$  satisfaz exatamente a conservação da energia. Com efeito, sendo  $\epsilon = \frac{a}{R^6} = p$  com  $a$  constante,  $\frac{d(\epsilon R^3)}{dR} = a \frac{d(R^{-3})}{dR} = -3aR^{-4} = -3 \frac{a}{R^6} R^2 = -3pR^2$ . Dessa forma, a equação remanescente é

$$\frac{d((\epsilon_\phi + \epsilon_b + \epsilon_B + \epsilon_r) R^3)}{dR} = -3 \left( p_\phi + p_b + p_B + \frac{\epsilon_r}{3} \right) R^2. \quad (5.99)$$

No lado esquerdo, calculemos  $\frac{d(\epsilon_\phi R^3)}{dR}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d(\epsilon_\phi R^3)}{dR} &= \frac{d \left( \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + U \right] R^3 \right)}{dR} \\ &= 3R^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + U \right] + R^3 \left[ \frac{d\phi}{dt} \frac{d^2\phi}{dR dt} + m_\phi^2 \phi \frac{d\phi}{dR} + \frac{dU}{dR} \right] \\ &= 3R^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + U \right] + R^3 \left[ \frac{d\phi}{dR} \frac{d^2\phi}{dt^2} + m_\phi^2 \phi \frac{d\phi}{dR} + \frac{dU}{d\phi} \frac{d\phi}{dR} \right] \\ &= 3R^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + U \right] + R^3 \frac{d\phi}{dR} \left[ \frac{d^2\phi}{dt^2} + m_\phi^2 \phi + \frac{dU}{d\phi} \right] \end{aligned} \quad (5.100)$$

Podemos juntar com o termo  $3p_\phi R^2$  e obter

$$\begin{aligned}
\frac{d(\epsilon_\phi R^3)}{dR} + 3p_\phi R^2 &= 3R^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + U \right] + \\
&+ R^3 \frac{d\phi}{dR} \left[ \frac{d^2\phi}{dt^2} + m_\phi^2 \phi + \frac{dU}{d\phi} \right] + \\
&+ 3R^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 - U \right] \\
&= 3R^2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + R^3 \frac{d\phi}{dR} \left[ \frac{d^2\phi}{dt^2} + m_\phi^2 \phi + \frac{dU}{d\phi} \right] \\
&= 3R^3 \frac{\dot{R}}{R} \frac{d\phi}{dR} \frac{d\phi}{dt} + R^3 \frac{d\phi}{dR} \left[ \frac{d^2\phi}{dt^2} + m_\phi^2 \phi + \frac{dU}{d\phi} \right] \\
&= R^3 \frac{d\phi}{dR} \left[ \frac{d^2\phi}{dt^2} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \frac{d\phi}{dt} + m_\phi^2 \phi + \frac{dU}{d\phi} \right] \\
&= g_\phi \rho_s \frac{d\phi}{dR} R^3, \tag{5.101}
\end{aligned}$$

onde foi utilizada a equação de movimento do campo  $\phi$ , (5.63). Dessa forma

$$\frac{d((\epsilon_b + \epsilon_B + \epsilon_r) R^3)}{dR} + g_\phi \rho_s \frac{d\phi}{dR} R^3 = -3 \left( p_b + p_B + \frac{\epsilon_r}{3} \right) R^2. \tag{5.102}$$

Notemos que, no caso limite em que não temos a interação  $B^\mu$  e a densidade de energia  $\epsilon_r$  e os bárions estão em baixíssima temperatura ( $T \ll \tilde{m}_i$ ) e densidade, temos  $\tilde{m}_i \gg k_F$  ( $k_F$  sendo o momento de Fermi e  $i = p, n$ ),  $p_b \rightarrow 0$  e  $\epsilon_b = \sum_{p,n} n_i \tilde{m}_i = \sum_{p,n} n_{i0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 [m_i - g_\phi \phi]$ . Portanto,  $\frac{d(\epsilon_b R^3)}{dR} = \sum_{p,n} n_{i0} \left[ 3R^2 \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \tilde{m}_i - R^3 \left( \frac{3}{R} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \tilde{m}_i + \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 g_\phi \frac{d\phi}{dR} \right) \right] = -n_b g_\phi \frac{d\phi}{dR} R^3$ . Disso obtemos que  $\rho_s = n_b$ , o que é um resultado esperado, pois a diferença entre as duas densidades é um fenômeno relativístico<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup>Para ver isso, note que, para temperatura nula e baixa densidade ( $\tilde{m}_i \gg k_F$ ), podemos fazer a aproximação  $\rho_s = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \sum_{n,p} \int_0^{k_F} dk k^2 \frac{\tilde{m}_i}{\sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2}} \simeq \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \sum_{n,p} \int_0^{k_F} dk k^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{k_F}{\tilde{m}_i} \right)^2 \right) \simeq \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \sum_{n,p} \int_0^{k_F} dk k^2 = \frac{16\pi}{(2\pi)^3} \frac{k_F^3}{3}$  ao

Podemos continuar o desenvolvimento da equação (5.102) e expressá-la em termos das variáveis de interesse, que são a temperatura (ou  $\beta = 1/T$ ) e a fugacidade ( $z = e^{\beta\mu_b}$ ). Ou seja<sup>8</sup>, sendo  $\epsilon_b + \epsilon_B + \epsilon_r = \epsilon_T$  e  $p_b + p_B + \frac{\epsilon_r}{3} = p_T$ ,

$$\begin{aligned}
-3(p_T + \epsilon_T) &= \left( \frac{d\epsilon_T}{dR} + g_\phi \rho_s \frac{d\phi}{dR} \right) R \\
&= R \left[ \left( \frac{\partial \epsilon_T}{\partial \beta} \right)_{z,\phi} \frac{d\beta}{dR} + \left( \frac{\partial \epsilon_T}{\partial z} \right)_{\beta,\phi} \frac{dz}{dR} + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial \epsilon_T}{\partial \phi} \right)_{\beta,z} \frac{d\phi}{dR} + g_\phi \rho_s \frac{d\phi}{dR} \right] \\
&= R \left\{ \left( \frac{\partial \epsilon_T}{\partial \beta} \right)_{z,\phi} \frac{d\beta}{dR} + \left( \frac{\partial \epsilon_T}{\partial z} \right)_{\beta,\phi} \frac{dz}{dR} + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \left( \frac{\partial \epsilon_T}{\partial \phi} \right)_{\beta,z} + g_\phi \rho_s \right] \frac{d\phi}{dR} \right\} \\
&= \frac{R}{\dot{R}} \left\{ \left( \frac{\partial \epsilon_T}{\partial \beta} \right)_{z,\phi} \frac{d\beta}{dt} + \left( \frac{\partial \epsilon_T}{\partial z} \right)_{\beta,\phi} \frac{dz}{dt} + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \left( \frac{\partial \epsilon_T}{\partial \phi} \right)_{\beta,z} + g_\phi \rho_s \right] \frac{d\phi}{dt} \right\}. \tag{5.103}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left( \frac{\partial \epsilon_T}{\partial \beta} \right)_{z,\phi} \frac{d\beta}{dt} + \left( \frac{\partial \epsilon_T}{\partial z} \right)_{\beta,\phi} \frac{dz}{dt} + \left[ \left( \frac{\partial \epsilon_T}{\partial \phi} \right)_{\beta,z} + g_\phi \rho_s \right] \frac{d\phi}{dt} = -3 \frac{\dot{R}}{R} (p_T + \epsilon_T). \tag{5.104}$$

Tendo as equações (5.87), (5.88), (5.91), (5.92) e (5.96), chegamos em

$$A \frac{d\beta}{dt} + B \frac{dz}{dt} + C \frac{d\phi}{dt} + D \frac{dR}{dt} = 0, \tag{5.105}$$

---

passo em que a densidade de bárions é  $n_b = \frac{16\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} dk k^2 = \frac{16\pi}{(2\pi)^3} \frac{k_F^3}{3}$ , mostrando o que se queria.

<sup>8</sup>Os índices nas derivadas indicam as quantidades mantidas constantes.

com

$$A = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} (f_{i+} + f_{i-}) + \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2 \right]_{z,\phi} - \frac{43}{30} \frac{\pi^2}{\beta^5}, \quad (5.106)$$

$$B = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} (f_{i+} + f_{i-}) + \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2 \right]_{\beta,\phi}, \quad (5.107)$$

$$C = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} (f_{i+} + f_{i-}) + \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2 \right]_{\beta,z} + \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \frac{g_\phi \tilde{m}}{\sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2}} (f_{i+} + f_{i-}), \quad (5.108)$$

$$D = \frac{2}{R(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} \left( 3 + \frac{k^2}{k^2 + \tilde{m}_i^2} \right) (f_{i+} + f_{i-}) + 3 \frac{g_B^2}{R m_B^2} (n_p - n_n)^2 + \frac{43}{30R} \frac{\pi^2}{\beta^4}. \quad (5.109)$$

Recapitulando as equações que temos, elas são: a equação de movimento do campo  $\phi$ , a equação de Friedmann, (3.19), e a que acabamos de obter. Isso não é suficiente, pois temos as variáveis  $R$ ,  $\phi$ ,  $\beta$  e  $z$  em função de  $t$  enquanto temos apenas três equações. A última equação é obtida a partir de  $n_b = n_{b0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^3$ , a qual pode ser escrita como

$$\frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \left( \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2}} + 1} - \frac{1}{z e^{\beta \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2}} + 1} \right) = n_{b0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3, \quad (5.110)$$

onde

$$n_{b0} = \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \left( \frac{1}{z_0^{-1} e^{\beta_0} \sqrt{k^2 + \tilde{m}_{i0}^2} + 1} - \frac{1}{z_0 e^{\beta_0} \sqrt{k^2 + \tilde{m}_{i0}^2} + 1} \right). \quad (5.111)$$

Essa é uma equação autoconsistente que deve ser satisfeita para as variáveis  $R$ ,  $\phi$ ,  $\beta$  e  $z$  em função de  $t$ .

Façamos um caso limite para termos mais segurança em relação a essas equações. Se  $\tilde{m}_i = 0$ ,  $z = 1$  e  $n_p = n_n$ , ou seja, um gás ultra-relativístico livre, logo notamos que  $f_{i+} = f_{i-}$  (implicando  $n_b = 0$ ) e, além disso, que  $E_i = k$  e  $B = C = 0$ . Dessa forma temos como equação restante  $A \frac{d\beta}{dt} + D \frac{dR}{dt} = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{4}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dk \frac{2k^3}{e^{\beta k} + 1} \right) - \frac{43 \pi^2}{30 \beta^5} \right] = \\ - \frac{\dot{R}}{R} \left( \frac{4}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dk \frac{8k^3}{e^{\beta k} + 1} + \frac{43 \pi^2}{30 \beta^4} \right) \end{aligned} \quad (5.112)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{\beta^4} \frac{4}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty d(\beta k) \frac{(\beta k)^3}{e^{\beta k} + 1} \right) - \frac{43 \pi^2}{30 \beta^5} \right] = \\ - \frac{\dot{R}}{R} \left( \frac{4}{\beta^4} \frac{4}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty d(\beta k) \frac{(\beta k)^3}{e^{\beta k} + 1} + \frac{43 \pi^2}{30 \beta^4} \right) \\ \frac{d\beta}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{\beta^4} \frac{4}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x + 1} \right) - \frac{43 \pi^2}{30 \beta^5} \right] = \\ - \frac{\dot{R}}{R} \left( \frac{1}{\beta^4} \frac{16}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^{\beta k} + 1} + \frac{43 \pi^2}{30 \beta^4} \right), \end{aligned} \quad (5.113)$$

donde se tem

$$- \frac{1}{\beta^5} \frac{d\beta}{dt} \left( \frac{16}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x + 1} + \frac{43 \pi^2}{30 \beta^5} \right) =$$



$$-\frac{\dot{R}}{R} \frac{1}{\beta^4} \left( \frac{16}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^{\beta k} + 1} + \frac{43}{30} \frac{\pi^2}{\beta^4} \right), \quad (5.114)$$

que, finalmente, implica

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\dot{R}}{R} \beta, \quad (5.115)$$

cuja solução é  $\beta = \beta_0 \left( \frac{R}{R_0} \right)$ , que corresponde ao resultado conhecido de que, para um gás ultra-relativístico livre, a temperatura cai proporcionalmente a  $\frac{1}{R}$ .

### 5.3.4 O sistema de equações

Enfim coloquemos todas as equações a serem solucionadas simultaneamente. Elas são

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \epsilon R^2 + k, \quad (5.116)$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \frac{d\phi}{dt} + m_\phi^2 \phi + \frac{\partial U}{\partial \phi} = g_\phi \rho_s, \quad (5.117)$$

$$A \frac{d\beta}{dt} + B \frac{dz}{dt} + C \frac{d\phi}{dt} + D \frac{dR}{dt} = 0, \quad (5.118)$$

$$\frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \left( \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2}} + 1} - \frac{1}{z e^{\beta \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2}} + 1} \right) = n_{b0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3, \quad (5.119)$$

em que

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + U(\phi) + \frac{1}{2} \frac{g_V^2}{m_V^2} n_{b0}^2 \left( \frac{R_0}{R} \right)^6 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{43}{120} \frac{\pi^2}{\beta^4} + \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} (f_{i+} + f_{i-}), \quad (5.120)$$

$$U(\phi) = \frac{1}{3} g_2 \phi^3 + \frac{1}{4} g_3 \phi^4, \quad (5.121)$$

$$\rho_s = \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \frac{\tilde{m}_i}{\sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2}} (f_{i+} + f_{i-}), \quad (5.122)$$

$$A = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} (f_{i+} + f_{i-}) + \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2 \right]_{z,\phi} - \frac{43}{30} \frac{\pi^2}{\beta^5}, \quad (5.123)$$

$$B = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} (f_{i+} + f_{i-}) + \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2 \right]_{\beta,\phi}, \quad (5.124)$$

$$C = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} (f_{i+} + f_{i-}) + \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2 \right]_{\beta,z} + \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \frac{g_\phi \tilde{m}_i}{\sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2}} (f_{i+} + f_{i-}), \quad (5.125)$$

$$D = \frac{2}{R(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} \left( 3 + \frac{k^2}{k^2 + \tilde{m}_i^2} \right) (f_{i+} + f_{i-}) + 3 \frac{g_B^2}{R m_B^2} (n_p - n_n)^2 + \frac{43}{30R} \frac{\pi^2}{\beta^4}, \quad (5.126)$$

$$n_{b0} = \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \left( \frac{1}{z_0^{-1} e^{\beta_0} \sqrt{k^2 + \tilde{m}_{i0}^2} + 1} - \frac{1}{z_0 e^{\beta_0} \sqrt{k^2 + \tilde{m}_{i0}^2} + 1} \right). \quad (5.127)$$

Para solucionar exatamente essas equações, devemos ter as condições iniciais (condições em  $t = 0$ , quando ocorre a transição de fase para a era hadrônica), ou seja,  $R_0$ ,  $\phi_0$ ,  $\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_0$ ,  $T_0 (= 1/\beta_0)$  e  $z_0$ .  $T_0$  é a tem-

peratura da transição de fase, a qual estamos tomando como  $150\text{MeV}$ , e  $z_0$  pode ser conhecido sabendo  $T_0$ ,  $\phi_0$  e  $n_{b0}$  [18]. As quantidades  $\phi_0$  e  $\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_0$  podem ser conhecidas (a princípio) e as discutiremos mais abaixo. No entanto, não temos como saber exatamente  $R_0$  sem ter mais conhecimento sobre todas as fases anteriores do universo. Mas isso não é realmente um problema para nossos propósitos, pois nenhuma outra variável depende essencialmente do valor de  $R$  (e sim de como ele evolui) e  $k$  pode ser aproximado (se não é) 0 devido à alta densidade de energia nessa fase do universo [1,2,7,8,18]. Assim, podemos solucionar as equações trocando  $R$  pelo valor relativo  $\frac{R}{R_0} = \mathcal{R}$ , cuja condição inicial é  $\mathcal{R} = 1$  por definição. Com essa substituição podemos reescrever as equações como

$$\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{8\pi G}{3} \epsilon \mathcal{R}^2, \quad (5.128)$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + 3\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}}\frac{d\phi}{dt} + m_\phi^2\phi + \frac{\partial U}{\partial\phi} = g_\phi\rho_s, \quad (5.129)$$

$$A\frac{d\beta}{dt} + B\frac{dz}{dt} + C\frac{d\phi}{dt} + D\frac{d\mathcal{R}}{dt} = 0, \quad (5.130)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \left( \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\sqrt{k^2+\tilde{m}_i^2}} + 1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{ze^{\beta\sqrt{k^2+\tilde{m}_i^2}} + 1} \right) = \frac{n_{b0}}{\mathcal{R}^3}, \end{aligned} \quad (5.131)$$

com

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + U(\phi) + \frac{1}{2} \frac{g_V^2}{m_V^2} \frac{n_{b0}^2}{\mathcal{R}^6} + \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2 \\ & + \frac{43}{120} \frac{\pi^2}{\beta^4} + \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} (f_{i+} + f_{i-}), \end{aligned} \quad (5.132)$$

$$\rho_s = \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \frac{\tilde{m}_i}{\sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2}} (f_{i+} + f_{i-}), \quad (5.133)$$

$$U(\phi) = \frac{1}{3} g_2 \phi^3 + \frac{1}{4} g_3 \phi^4, \quad (5.134)$$

$$A = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} (f_{i+} + f_{i-}) + \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2 \right]_{z,\phi} - \frac{43}{30} \frac{\pi^2}{\beta^5}, \quad (5.135)$$

$$B = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} (f_{i+} + f_{i-}) + \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2 \right]_{\beta,\phi}, \quad (5.136)$$

$$C = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} (f_{i+} + f_{i-}) + \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2 \right]_{\beta,z} + \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \frac{g_\phi \tilde{m}_i}{\sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2}} (f_{i+} + f_{i-}), \quad (5.137)$$

$$D = \frac{2}{\mathcal{R} (2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2} (3 + \frac{k^2}{k^2 + \tilde{m}_i^2}) (f_{i+} + f_{i-}) + \quad (5.138)$$

$$+ 3 \frac{g_B^2}{\mathcal{R} m_B^2} (n_p - n_n)^2 + \frac{43}{30 \mathcal{R}} \frac{\pi^2}{\beta^4}, \quad (5.139)$$

$$n_{b0} = \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int d^3k \left( \frac{1}{z_0^{-1} e^{\beta_0} \sqrt{k^2 + \tilde{m}_{i0}^2} + 1} - \frac{1}{z_0 e^{\beta_0} \sqrt{k^2 + \tilde{m}_{i0}^2} + 1} \right). \quad (5.140)$$

Até este momento, não apresentamos os parâmetros do modelo  $\sigma-\omega-\rho$ . Existem vários conjuntos de parâmetros utilizados, tendo cada conjunto pontos fortes e fracos em relação a descrição dos fenômenos. Abaixo segue a tabela com alguns dos conjuntos de parâmetros que comumente se utiliza, que são o NL3 [20], NL-SH [21], TM1 [22] e TM2 [23].

	NL3	NL-SH	TM1	TM2
$m_\phi$ (MeV)	508, 194	526, 059	511, 198	526, 443
$m_V$ (MeV)	782, 501	783, 000	783, 000	783, 000
$m_B$ (MeV)	763, 000	763, 000	770, 000	770, 000
$g_\phi$	10, 2170	10, 4440	10, 0289	11, 4694
$g_V$	12, 8680	12, 9450	12, 6139	14, 6377
$g_B$	4, 4740	4, 3830	4, 6322	4, 6783
$g_2$ (fm <sup>-1</sup> )	10, 4310	6, 9099	7, 2325	4, 4440
$g_3$	28, 8850	15, 8337	0, 6183	4, 6076

Deixamos de discutir as quantidades  $\phi_0$  e  $\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_0$  logo acima. Por ora podemos fazer algumas considerações razoáveis, deixando uma determinação mais fundamentada delas para outra ocasião. Primeiramente, como esperamos uma sucessão de estados de equilíbrio termodinâmico, não esperamos ajustes bruscos de  $\phi$ . Portanto devemos escolher  $\phi_0$  de forma a “minimizar” a discrepância de  $\frac{d\phi}{dt}$  a medida que o sistema evolui. Dentro desse espírito, agora notemos que [2]  $8\pi G = 1,687 \cdot 10^{-43} \text{MeV}^{-2}$  e, além disso, que  $\epsilon$  inicialmente (em  $T = 150 \text{MeV}$ ) não deve passar de  $10^9 \text{MeV}^4$ . Logo, através de (5.128),  $\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}}$  deve ser da ordem de  $10^{-18} \text{MeV}$ . Fora isso, a unidade de tempo usada é  $\frac{1}{\text{MeV}}$  e essa corresponde algo em torno de  $10^{-20} \text{s}$ . Ou seja, em 1s, que é o tempo estimado como duração do período da história do universo aqui estudado, temos ao menos  $10^{20}$  unidades de tempo contados em  $\frac{1}{\text{MeV}}$ . Como, na mais extrema das hipóteses, a ordem de grandeza de  $\dot{\phi}$  seria de  $10^2 \text{MeV}$ , logo vemos que sua derivada não deve ser expressiva e  $3\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}}\frac{d\phi}{dt}$  (assim como a segunda derivada) fica várias ordens de grandeza inferior aos termos de massa e de interação. Dentro dessas considerações, podemos desprezar as derivadas na equação (5.129). Assim,  $\phi_0$  (e a evolução desse) fica determinado pela equação auto-consistente remanescente. Note que isso possibilita que desacoplemos as equações (5.129), (5.130) e (5.131) da equação de Friedmann e que solucionemos elas em função de  $\mathcal{R}$ .

Além das considerações acima, podemos ainda vislumbrar a possibilidade de que os resultados, efetivamente, sejam independentes da escolha inicial de  $\phi_0$  e  $\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_0$ . Com efeito, para cada temperatura, existe  $\phi$  tal que satisfaz a equação  $m_\phi^2\phi + \frac{\partial U}{\partial \phi} = g_\phi\rho_s$ . Chamaremos esse de  $\phi^*(T)$  e o conjunto desses pontos formam uma curva no diagrama  $\phi \times T$ . Se  $\phi(T)$  for maior que  $\phi^*(T)$  em alguma temperatura

<sup>9</sup>Essa estimativa leva em conta que o termo untra-relativístico  $\frac{43}{120} \frac{\pi^2}{\beta^4}$  é dominante.

$T$ ,  $m_\phi^2 \phi + \frac{\partial U}{\partial \phi} > g_\phi \rho_s$  e, portanto,  $\frac{d^2 \phi}{dt^2} + 3 \frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \frac{d\phi}{dt}$  deve ser negativo. Se, além disso,  $\frac{d\phi}{dt} > 0$ , automaticamente  $\frac{d^2 \phi}{dt^2} < 0$  até que pelo menos o sinal de  $\frac{d\phi}{dt}$  se inverta. Analogamente, para  $\phi(T) < \phi^*(T)$  o caso é de que  $m_\phi^2 \phi + \frac{\partial U}{\partial \phi} < g_\phi \rho_s$  e, portanto, se  $\frac{d\phi}{dt} < 0$ , devemos ter  $\frac{d^2 \phi}{dt^2} > 0$ . Ou seja,  $\phi$  tende a convergir para a curva dada por  $\phi^*(T)$ . Dado que  $\phi$  é no máximo  $10^2 MeV$ , qualquer ajuste com derivada expressiva dele deve ocorrer muito rapidamente (em muito menos que uma unidade de tempo) e, se ele oscilar em torno da curva dada por  $\phi^*(T)$  e for “amortecido” rápido o suficiente, a convergência para  $\phi^*(T)$  deve ocorrer também rapidamente. No entanto não podemos dar maiores certezas quanto a essa independência.

### 5.3.5 Uma solução aproximada

O sistema de equações (5.128)-(5.140) é bastante complicado, pois envolve equações diferenciais acopladas com coeficientes definidos por integrais, mas, ao fazermos algumas aproximações, podemos explorar um pouco alguns dos fenômenos contidos nelas sem recorrer ao cálculo numérico. Notemos que a densidade bariônica é baixa (??) e esperamos que todos os termos da densidade de energia referentes aos bárions e suas interações sejam da ordem (ou próximos da ordem) de  $n_b$  implicando que o termo de radiação (o com  $T^4$ ) seja muito maior que esses<sup>10</sup>. Assim, podemos aproximar a densidade de energia para apenas  $\frac{43}{120} \pi^2 T^4$ , algo feito usualmente<sup>11</sup>. Dessa forma, pode-se solucionar exatamente a equação de Friedmann. Com efeito, a conservação da energia nos fornece  $\frac{d\left[\left(\frac{43}{120} \pi^2 T^4\right) \mathcal{R}^3\right]}{d\mathcal{R}} = -\frac{43}{120} \pi^2 T^4 \mathcal{R}^2$  e, portanto,  $T = \frac{T_0}{\mathcal{R}}$ . Segue-se disso que

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{R}} &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \frac{43}{120} \pi^2 \frac{T_0^4}{\mathcal{R}^4}} \\ &\simeq 0,35 \cdot \pi \frac{T_0^2}{\mathcal{R}} \sqrt{8\pi G} \end{aligned} \quad (5.141)$$

<sup>10</sup>Essa aproximação pode ser frustrada dependendo de quão pequeno ficar o potencial químico dos bárions, mas tomaremos a aproximação em busca de resultados analíticos.

<sup>11</sup>Diz-se que esse período da história do universo é dominado pela radiação [1,8,18].

e, como  $T_0 = 150MeV$  e [2]  $8\pi G = 1,687 \cdot 10^{-43}MeV^{-2}$ , temos, dessa forma,

$$\dot{\mathcal{R}} \simeq \frac{5,1 \cdot 10^{-17}}{\mathcal{R}}, \quad (5.142)$$

cuja solução é

$$\mathcal{R} = \sqrt{5,1 \cdot 10^{-17}t + 1} \quad (5.143)$$

com  $t = 0$  quando  $\mathcal{R} = 1$  e o tempo medido em  $1/MeV$ . Mas é mais conveniente escrever a equação contando o tempo em segundos e podemos fazer isso ao notar que  $1MeV = 8065,73 \cdot 10^8 m^{-1}$  e  $t$  passa a ser  $ct$  nas novas unidades. Assim,  $5,1 \cdot 10^{-17}MeV \simeq 4,1 \cdot 10^{-5}m^{-1}$  e, sendo  $c \simeq 3 \cdot 10^8 m/s$ , temos

$$\mathcal{R} = \sqrt{12,3 \cdot 10^3 t + 1}. \quad (5.144)$$

Note que, sendo  $\mathcal{RT} = cte$ , para a temperatura cair de  $150MeV$  para  $1MeV$ ,  $\mathcal{R}$  aumenta cento e cinquenta vezes e, assim, o tempo aproximado da era hadrônica é de<sup>12</sup>  $t = \frac{150^2 - 1}{12,3 \cdot 10^3} \simeq 1,8s$ . Ou seja, um volume  $V$ , o qual cresce com  $\mathcal{R}^3$ , cresce cerca de 3,3 milhões de vezes em 1,8s! De  $\mathcal{RT} = cte$  obtemos também a relação da temperatura com o tempo,

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{12,3 \cdot 10^3 t + 1}}. \quad (5.145)$$

Na aproximação que estamos fazendo, podemos ainda desprezar a contribuição de  $\phi$ , pois esperamos que a massa efetiva seja praticamente a dos bárions. Fora isso, consideraremos que a temperatura (que é uma fração da massa dos bárions) não é alta o suficiente para que efeitos relativísticos sejam relevantes. Nesse caso, nos será útil a expansão [19]

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1} dx}{z^{-1}e^x + 1} = z - \frac{z^2}{2^\lambda} + \frac{z^3}{3^\lambda} - \dots, \quad (5.146)$$

---

<sup>12</sup>Podemos obter o 1s, aproximadamente, que normalmente se coloca como duração da era hadrônica ao colocar a temperatura final em torno de  $1,35MeV$ , o que não é uma grande diferença.

onde  $\Gamma(\lambda)$  é uma função gama.

Sendo a temperatura não muito alta, podemos considerar  $E_i \simeq m_i + \frac{1}{2} \frac{k^2}{m_i}$  e  $\nu_i \simeq m_i + \nu_i^{NR}$ , onde  $\nu_i^{NR}$  é o potencial químico não relativístico (quando não há criação e aniquilação de partículas). Dessa forma, as distribuições de Fermi-Dirac dos prótons e nêutrons são aproximadas para

$$f_{i+} \simeq \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_i} - \nu_i^{NR}\right)} + 1}, \quad i = p, n. \quad (5.147)$$

$$f_{i-} \simeq \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_i} + \nu_i^{NR} + 2m_i\right)} + 1}. \quad (5.148)$$

Com essas distribuições e a aproximação feita para a energia individual dos bárions, a densidade de energia bariônica se torna

$$\begin{aligned} \epsilon_b &\simeq \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \sum_{p,n} \int_0^\infty dk k^2 \left( m_i + \frac{1}{2} \frac{k^2}{m_i} \right) \left[ \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_i} - \nu_i^{NR}\right)} + 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_i} + \nu_i^{NR} + 2m_i\right)} + 1} \right] \\ &\simeq \sum_{p,n} \left( m_i \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{e^{\beta\left(\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_i} - \nu_i^{NR}\right)} + 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2m_i} \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dk k^4}{e^{\beta\left(\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_i} - \nu_i^{NR}\right)} + 1} \right) + \\ &\quad + \sum_{p,n} \left( m_i \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{e^{\beta\left(\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_i} + \nu_i^{NR} + 2m_i\right)} + 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2m_i} \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dk k^4}{e^{\beta\left(\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_i} + \nu_i^{NR} + 2m_i\right)} + 1} \right) \end{aligned} \quad (5.149)$$

Ora, como  $\frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_i} - \nu_i^{NR}\right)} + 1} = n_{i+}$  (densidade dos prótons



e nêutrons) e  $\frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dkk^2}{e^{\beta\left(\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_i} + \nu_i^{NR} + 2m_i\right)} + 1} = n_{i-}$  (densidade dos anti-prótons e anti-nêutrons), o primeiro termo dentro de cada somatório, ao serem juntados, formam  $\sum_{p,n} m_i (n_{i+} + n_{i-})$ , que é a densidade de energia de repouso e pode ser aproximado em primeira ordem usando (5.146) com  $x = \frac{\beta}{2} \frac{k^2}{m_i}$  e  $z = z_i^{NR} = e^{\beta\nu_i^{NR}}$  (para  $n_{i+}$ ) ou  $z = z_{i-} = e^{-\beta(\nu_i^{NR} + 2m_i)}$  (para  $n_{i-}$ ). Com efeito, sendo  $x = \frac{\beta}{2} \frac{k^2}{m_i}$ , temos  $\frac{m_i}{\beta} dx = kdk$  e  $k^3 = \left(\frac{2m_i x}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}$  e podemos escrever  $n_{i+}$  como

$$\begin{aligned} n_{i+} &= \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{e^{\beta\left(\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_i} - \nu_i^{NR}\right)} + 1} \\ &= \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(z_i^{NR})^{-1} e^{\frac{\beta}{2}\frac{k^2}{m_i}} + 1} \\ &\simeq \frac{2}{(2\pi)^3} \left(\frac{2\pi m_i}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} z_i^{NR} \end{aligned} \quad (5.150)$$

ao passo em que  $n_{i-}$  pode ser escrito, por via semelhante, na forma

$$n_{i-} \simeq \frac{2}{(2\pi)^3} \left(\frac{2\pi m_i}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} z_{i-} \quad (5.151)$$

Multiplicando e dividindo por  $e^{\beta m_i}$  e lembrando que<sup>13</sup>  $e^{\beta m_p} z_p^{NR} = e^{\beta(m_p + \nu_p^{NR})} = z_p = z_n = z$ , temos que  $n_{i\pm}$  são

$$\begin{aligned} n_{i+} &\simeq \frac{2(2\pi m_i)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} z T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_i}{T}}, \\ n_{i-} &\simeq \frac{2(2\pi m_i)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} z^{-1} T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_i}{T}}. \end{aligned} \quad (5.152)$$

Já o segundo termo dentro de cada somatório em (5.149), que são a densidade de energia cinética, podem ser escritos na mesma aproximação como

---

<sup>13</sup>Para  $n_{i-}$  fica  $e^{\beta m_p} z_{p-} = e^{-\beta(\nu_p^{NR} + 2m_p - m_p)} = z^{-1}$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m_i} \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{e^{\beta\left(\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_i} - \nu_i^{NR}\right)} + 1} = \\ & \frac{1}{2m_i} \frac{8\pi}{(2\pi)^3} 2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_i}{\beta}\right)^{\frac{5}{2}} \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(z_i^{NR})^{-1} e^x + 1}, \end{aligned} \quad (5.153)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m_i} \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{e^{\beta\left(\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_i} + \nu_i^{NR} + 2m_i\right)} + 1} = \\ & \frac{1}{2m_i} \frac{8\pi}{(2\pi)^3} 2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_i}{\beta}\right)^{\frac{5}{2}} \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(z_{i-})^{-1} e^x + 1}. \end{aligned} \quad (5.154)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{(2m_i)^{\frac{3}{2}}}{\beta^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(z_i^{NR})^{-1} e^x + 1} & \simeq \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{(2m_i)^{\frac{3}{2}}}{\beta^{\frac{5}{2}}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) z_i^{NR} \\ & \simeq \frac{3\pi}{(2\pi)^3} \frac{(2m_i)^{\frac{3}{2}}}{\beta^{\frac{5}{2}}} \sqrt{\pi} z_i^{NR} \\ & \simeq \frac{3(2\pi m_i)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} T^{\frac{5}{2}} z_i^{NR} \\ & \simeq \frac{3(2\pi m_i)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} T^{\frac{5}{2}} z e^{-\frac{m_i}{T}} \end{aligned} \quad (5.155)$$

e

$$\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{(2m_i)^{\frac{3}{2}}}{\beta^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(z_{i-})^{-1} e^x + 1} \simeq \frac{3(2\pi m_i)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} T^{\frac{5}{2}} z^{-1} e^{-\frac{m_i}{T}}. \quad (5.156)$$

Dessa forma, a densidade de energia total dos bárions nessa aproximação é

$$\epsilon_b = \sum_{p,n} \frac{(2\pi m_i)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} T^{\frac{3}{2}} (z + z^{-1}) (2m_i + 3T). \quad (5.157)$$

A pressão por sua vez é dada por<sup>14</sup>  $p_b = \frac{2}{3}\epsilon^{NR}$ , onde

$$\epsilon^{NR} = 3 (z + z^{-1}) T^{\frac{5}{2}} \sum_{p,n} \frac{(2\pi m_i)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} e^{-\frac{m_i}{T}}, \quad (5.158)$$

ou seja,

$$p_b = 2 (z + z^{-1}) T^{\frac{5}{2}} \sum_{p,n} \frac{(2\pi m_i)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} e^{-\frac{m_i}{T}}. \quad (5.159)$$

Aqui já podemos tirar um resultado interessante ao fazermos a razão  $\frac{n_n}{n_p} = \frac{n_{n+} - n_{n-}}{n_{p+} - n_{p-}}$ . De fato, a equação (5.152) nos dá

$$n_{i+} - n_{i-} = \frac{2(2\pi m_i)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} (z - z^{-1}) T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_i}{T}} \quad (5.160)$$

e, portanto, segue-se

$$\frac{n_n}{n_p} = \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}}. \quad (5.161)$$

Isso significa que, a medida que a temperatura cai, a densidade de nêutrons cai exponencialmente em relação à densidade de prótons. Tal fato se deve, como a equação indica, à diferença de massa entre os prótons e nêutrons enquanto estão em equilíbrio químico ( $z_p = z_n$ , que expressa o equilíbrio- $\beta$  quando consideramos  $z_e = 1$ ) e não encontraríamos esse fenômeno se negligenciássemos essa diferença de massa. Os processos que participam desse equilíbrio são [8,19]

$$\begin{aligned} n + v_e &\leftrightarrow p + e^- + \gamma, \\ n + e^+ &\leftrightarrow p + \bar{v}_e + \gamma, \end{aligned}$$

---

<sup>14</sup>Lembrando que  $p = \frac{1}{3(2\pi)^3} \int d^3k k \frac{\partial E}{\partial k} \left( \frac{1}{z^{-1} e^{\beta E} + 1} + \frac{1}{z e^{\beta E} + 1} \right)$ .

$$n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e + \gamma, \quad (5.162)$$

onde  $n$ ,  $p$ ,  $e^-$ ,  $e^+$ ,  $\gamma$ ,  $\nu_e$  e  $\bar{\nu}_e$  são os nêutrons, prótons, elétrons, pósitrons, fótons, neutrinos do elétron e anti-neutrinos do elétron respectivamente. Nota-se que  $z_p = z_n$  é o resultado quando podemos desprezar os potenciais químicos dos (anti-)neutrinos, elétrons e pósitrons<sup>15</sup>. Enfim, com (5.161) e observando que  $\frac{n_n}{n_b} = \frac{n_n}{n_n+n_p} = \frac{1}{1+\frac{n_p}{n_n}}$  temos que a fração de nêutrons evolui com a temperatura como

$$\frac{n_n}{n_b} = \frac{1}{1 + \left(\frac{m_p}{m_n}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{(m_n-m_p)}{T}}}, \quad (5.163)$$

Assim, dado que  $m_n - m_p = 1,293MeV$  e  $\frac{m_p}{m_n} \simeq 1$ , temos que durante a era hadrônica a fração de nêutrons cai de  $\frac{n_n}{n_b} \simeq 0,5$  (quando  $T = 150MeV$ ) para<sup>16</sup>  $\frac{n_n}{n_b} \simeq 0,2$  (quando  $T = 1MeV$ ), ou seja, se trata de um fenômeno significativo nessa fase do universo. Enfim, como  $n_b = \frac{n_{b0}}{\mathcal{R}^3} = n_{b0} \left(\frac{T}{T_0}\right)^3$ , a densidade de nêutrons em função da temperatura é

$$n_n = \frac{n_{b0} \left(\frac{T}{T_0}\right)^3}{1 + \left(\frac{m_p}{m_n}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{(m_n-m_p)}{T}}} \quad (5.164)$$

ao passo em que a densidade de prótons é dada por

$$n_p = \frac{n_{b0} \left(\frac{T}{T_0}\right)^3}{1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n-m_p)}{T}}}. \quad (5.165)$$

Podemos ainda descrever a evolução dos campos vetoriais nessa aproximação. O campo  $V^\mu$  pode ser escrito em função da temperatura como

$$V^0 = \frac{1}{2} \frac{g_V^2}{m_V^2} n_{b0}^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^6. \quad (5.166)$$

Já o campo  $B^\mu$ , com auxílio de (5.164) e (5.165), é dado por

<sup>15</sup>Observe que o potencial químico dos fótons é identicamente nulo.

<sup>16</sup>Isto é,  $\frac{n_p}{n_b} \simeq 0,8$  quando  $T = 1MeV$ .

$$\begin{aligned}
B^0 &= \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} (n_p - n_n)^2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} n_{b0}^2 \left( \frac{T}{T_0} \right)^6 \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}}} - \frac{1}{1 + \left( \frac{m_p}{m_n} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{(m_n - m_p)}{T}}} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} n_{b0}^2 \left( \frac{T}{T_0} \right)^6 \left( \frac{\left( \frac{m_p}{m_n} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{(m_n - m_p)}{T}} - \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}}}{2 + \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}} + \left( \frac{m_p}{m_n} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{(m_n - m_p)}{T}}} \right)^2 \\
&\simeq \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} n_{b0}^2 \left( \frac{T}{T_0} \right)^6 \left( \frac{\sinh \left( \frac{(m_n - m_p)}{T} \right)}{1 + \cosh \left( \frac{(m_n - m_p)}{T} \right)} \right)^2 \\
&\simeq \frac{1}{2} \frac{g_B^2}{m_B^2} n_{b0}^2 \left( \frac{T}{T_0} \right)^6 \tanh^2 \left( \frac{(m_n - m_p)}{2T} \right), \tag{5.167}
\end{aligned}$$

onde se tomou  $\frac{m_p}{m_n} \simeq \frac{m_n}{m_p} \simeq 1$ , o que é válido na temperatura em questão<sup>17</sup>. Vê-se que, mesmo com a diferença de densidade aumentando, o crescimento de  $\tanh^2 \left( \frac{(m_n - m_p)}{2T} \right)$  não é capaz de contrapor a queda devida a  $\left( \frac{T}{T_0} \right)^6$ , fazendo a contribuição desse campo, que já é pequena devido à baixa diferença de densidade  $n_p - n_n$  em  $T = 150 \text{ MeV}$ , fique ainda menor a medida que a temperatura cai.

Agora, usando (5.152), (5.164) e observando que  $z - z^{-1} = 2 \sinh(\beta \nu_b)$ , podemos escrever o potencial químico dos bárions como

$$\nu_b = T \text{Arcsinh} \left[ \frac{(2\pi)^3 n_{b0} \left( \frac{T}{T_0} \right)^3 e^{\frac{m_n}{T}}}{4(2\pi m_n T)^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \left( \frac{m_p}{m_n} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{(m_n - m_p)}{T}} \right)} \right], \tag{5.168}$$

cujos gráfico, ao tomarmos [18]  $n_{b0} = 0,32 \text{ MeV}$  e  $T_0 = 150 \text{ MeV}$ , é dado na Figura 3. O gráfico foi feito já com base na aproximação,

<sup>17</sup>Tem-se que  $n_p = n_n$  quando  $T \simeq 866 \text{ MeV}$  e só com a proximidade dessa temperatura que a razão  $\frac{m_p}{m_n}$  se torna significativa para diferenciar a função aproximada da original.

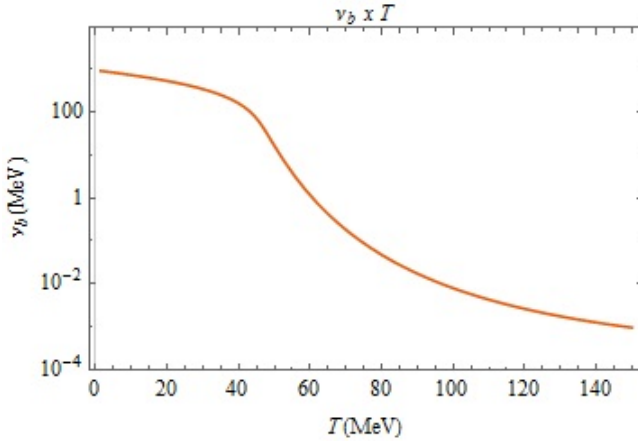


Figura 3 – Potencial químico bariônico em função da temperatura de acordo com a aproximação.

mas mostra que ela é consistente, pois o potencial químico total não chega a ser a massa do nêutron quando  $T = 1\text{MeV}$ , possibilitando que tomemos  $z_n^{NR} = e^{-\frac{m_n}{T}} z$  como pequeno. Mas, além disso, nos mostra que os anti-bárions se tornam bastante significativos até<sup>18</sup> de cerca de  $45\text{MeV}$ . Para ver mais claramente isso, devemos escrever as densidades individuais (não “líquidas”) dos bárions e anti-bárions. Isso pode ser feito através da expressão encontrada para o potencial químico e (5.152). Com efeito, sendo

$$\alpha = \frac{(2\pi)^3 n_{b0} \left(\frac{T}{T_0}\right)^3 e^{\frac{m_n}{T}}}{4 (2\pi m_n T)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \left(\frac{m_p}{m_n}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{(m_n - m_p)}{T}}\right)} \quad (5.169)$$

e  $z = e^{\text{arcsinh}(\alpha)}$ , as densidades são

$$n_{i+} = \frac{2 (2\pi m_i)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_i}{T} + \text{arcsinh}(\alpha)}, \quad (5.170)$$

<sup>18</sup>Deve-se ter em mente que estamos tomando os eventos em sequência cronológica.

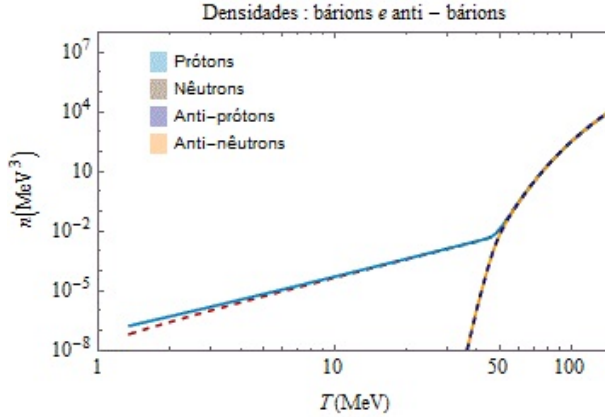


Figura 4 – Densidades de bárions e anti-bárions. A partir de  $45\text{MeV}$  a densidade dos anti-bárions cai rapidamente.

$$n_{i-} = \frac{2(2\pi m_i)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_i}{T} - \text{arcsinh}(\alpha)}. \quad (5.171)$$

O gráfico apresentado na Figura 4 nos dá como a densidade de cada partícula evolui com a temperatura. Nota-se, como antevisto, que a contribuição dos anti-bárions é bastante significativa até que, em cerca de  $45\text{MeV}$ , a densidade dos anti-bárions cai rapidamente. Ou seja, em  $T = 45\text{MeV}$  ocorre a aniquilação dos anti-bárions. Além disso, a diferença de densidade entre prótons e nêutrons fica clara na parte final do gráfico.

Esse caso aproximado que acabamos de fazer é bastante simples em comparação ao modelo original, cujas equações são especialmente complicadas, mas, ao obter a solução numérica das equações (5.128)-(5.140), podemos compará-la com o resultado analítico aqui exposto e verificar se se trata de uma boa aproximação em relação à solução exata.

Vamos, logo abaixo, comparar nossos resultados com um resultado recente obtido na referência [24], mas antes é interessante fazermos uma análise qualitativa do potencial químico que obtivemos, (5.168). Observemos que toda expressão do potencial químico vem unicamente da aproximação feita de energia individual dos (anti-)bárions como não relativística exceto o fator  $n_{b0} \left(\frac{T}{T_0}\right)^3$ , o qual veio de  $n_b = \frac{n_{b0}}{\mathcal{R}^3}$  junto

com a conservação da energia. Se deixarmos em aberto a solução da conservação da energia junto com a conservação do número bariônico, o potencial químico é, em geral (para a aproximação de energia não relativística), dado por

$$\nu_b = T \operatorname{arcsinh} \left[ \frac{(2\pi)^3 n_{b0} \mathcal{R}^{-3}(T) e^{\frac{m_n}{T}}}{4 (2\pi m_n T)^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \left( \frac{m_p}{m_n} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{(m_n - m_p)}{T}} \right)} \right]. \quad (5.172)$$

Isso nos indica que: o quão depressa o potencial químico cresce a medida que a temperatura cai está essencialmente ligado com como a temperatura cai a medida que ocorre a expansão (regida pelo fator de expansão  $\mathcal{R}$ ). Ora, a obtenção de  $\mathcal{R}(T)$  se relaciona com a significância de cada termo na densidade de energia. No caso da nossa aproximação, apenas o termo de gás ultra-relativístico foi tomado como relevante e, assim, obtivemos  $T\mathcal{R} = cte$ . No entanto, se algum termo de partícula massiva for significativo na densidade de energia, devemos esperar que  $\mathcal{R}$  aumente mais lentamente com a queda de  $T$ . Com efeito, consideremos um caso limite em que só haja um gás não relativístico, cuja densidade de energia é  $nm + \frac{3}{2}nT$ , com  $n = \frac{n_0}{\mathcal{R}^3}$  sendo a densidade e  $m$  a massa individual dos constituintes (para efeito de argumento, seja  $n_0 \gg n_{b0}$ ). Por conseguinte, a pressão é  $p = nT$ . Dessa forma, a conservação da energia nos dá

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{n_0}{\mathcal{R}^3} \left(m + \frac{3}{2}T\right) \mathcal{R}^3\right)}{d\mathcal{R}} &= -3 \frac{n_0}{\mathcal{R}^3} T \mathcal{R}^2 \\ \frac{3}{2} n_0 \frac{dT}{d\mathcal{R}} &= -3 \frac{n_0}{\mathcal{R}} T \end{aligned} \quad (5.173)$$

e a solução dessa equação é  $T = \frac{T_0}{\mathcal{R}^2}$ . Como se pode ver,  $\mathcal{R} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{2}}$ , que é uma função que aumenta mais lentamente com a queda de  $T$ . Com essa observação, segue-se que, ao termos contribuição significativa de partículas massivas na densidade de energia, devemos esperar a diminuição mais lenta de  $\mathcal{R}^{-3}(T)$  com a temperatura, fazendo o potencial químico ser maior do que seria sem presença significativa de partículas massivas na densidade de energia. Essa análise foi feita dentro da aproximação, mas podemos ter a expectativa de que essa característica (dependência do potencial químico com a abundância de



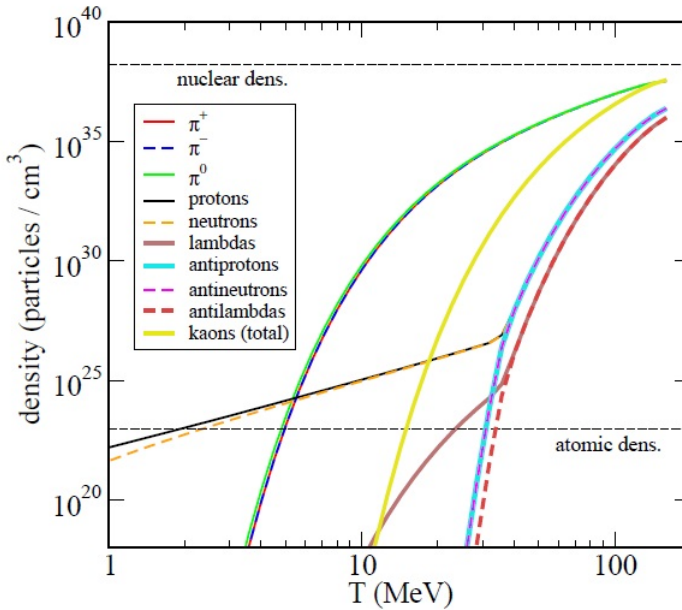


Figura 5 – Abundância dos diversos componentes hadrônicos segundo a referência [24].

partículas massivas) se mantenha no caso geral.

Agora, Rafelski *et al.*, através da resolução numérica de equações de equilíbrio químico dos diversos componentes dessa fase do universo (através de uma modelação distinta da feita aqui), obteve o gráfico apresentado na Figura 5 [24], onde estão expressas as abundâncias dos componentes hadrônicos. Dentre os diversos componentes expressos no gráfico, estão os (anti-)prótons e (anti-)nêutrons, que nos são de interesse. Para fazermos a comparação entre o gráfico nas figuras 4 e 5, tenhamos em mente que  $1MeV^3 \simeq 5,2 \cdot 10^{29}cm^{-3}$ . Podemos comparar três características dos dois gráficos: as densidades iniciais, as densidades finais e a temperatura em que ocorre a aniquilação dos anti-bárions.

Em relação às densidades iniciais (em  $T = 150MeV$ ), no gráfico em Figura 4 notemos que as densidades dos (anti-)bárions começa na ordem de  $10^4MeV^3$ , o que corresponde a algo em torno e  $5,2 \cdot 10^{33}cm^{-3}$ , enquanto no da Figura 5 elas começam em torno de  $10^{36}cm^{-3}$ . São quase três ordens de grandeza de discrepância, mas, ao menos parte

dela, pode ser explicada pelo fato de usarmos uma aproximação de energia não relativística nesse trecho, afinal a densidade bariônica é da forma  $n_b = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \sum_{n,p} \left( \int dk \frac{k^2}{z^{-1} e^{\beta E_i} + 1} - \int dk \frac{k^2}{z e^{\beta E_i} + 1} \right)$  e uma expansão incluindo termos de ordem maior na energia individual  $E_i = \tilde{m}_i \left( 1 + \frac{k^2}{2\tilde{m}_i^2} - \dots \right)$  implicaria em um  $z$  menor<sup>19</sup> do que na aproximação de primeira ordem para descrever a mesma densidade bariônica, a qual fizemos acima<sup>20</sup>. Com efeito, através de (5.140) e dispensando o campo escalar, podemos obter o potencial químico  $\nu_{b0}$  numericamente para a temperatura inicial ( $150 MeV$ ) e esse é dado por

$$\nu_{b0} \simeq 7,09 \cdot 10^{-4} MeV. \quad (5.174)$$

Com esse potencial químico, uma integração numérica nos fornece que a densidade inicial dos prótons é aproximadamente  $1,7 \cdot 10^4 MeV^3$ , que corresponde algo em torno de  $8,8 \cdot 10^{33} cm^{-3}$ . Isso satisfaz nossas expectativas de uma correção para cima na densidade ao levarmos em conta que a energia das partículas é relativística, embora ainda fique duas ordens de grandeza distante do resultado apresentado na Figura 5. Atentemos, no entanto, que foi dispensado o campo escalar e esse ainda pode influenciar o resultado ao diminuir a massa efetiva do próton, tornando possível um potencial químico ainda menor.

Voltando a atenção agora para as densidades finais (em  $T = 1 MeV$ ), os dois gráficos estão mais em acordo. Com efeito, no gráfico da Figura 4, a densidade final dos prótons é pouco abaixo de  $10^{-7} MeV^3$  e corresponde algo um pouco menor que  $5,2 \cdot 10^{22} cm^{-3}$  enquanto a densidade de prótons no gráfico da Figura 5 também está um pouco acima de  $10^{22} cm^{-3}$ . Quanto à densidade de nêutrons, ambos descrevem a diferença de forma semelhante, não chegando a uma ordem de grandeza. A concordância aqui exposta também pode ser explicada pela aproximação de energia não relativística para a energia individual dos

---

<sup>19</sup>E, portanto,  $\nu_b$  menor, pois  $z = e^{\beta \nu_b}$ .

<sup>20</sup>Para ver isso, observe que  $\sqrt{k^2 + \tilde{m}_i^2}$  cresce mais lentamente que  $\tilde{m}_i \left( 1 + \frac{k^2}{2\tilde{m}_i^2} \right)$ , fazendo com que, ao abandonarmos a aproximação, as duas integrais na densidade fiquem maiores se mantivermos o  $z$  e  $T$  constantes. Mais que isso, como as duas integrais tem a mesma forma e foram “reescaladas”, a diferença entre elas aumenta, dando um  $n_b$  maior. Para voltarmos a ter o mesmo  $n_b$  de antes na mesma temperatura,  $z$  deve ser mudado de forma a diminuir a primeira integral enquanto aumenta a segunda até que a diferença seja o  $n_b$  inicialmente dado. Ou seja,  $z$  deve ser diminuído.

(anti-)bárions, pois nessa temperatura ( $T = 1MeV$ ) os termos de ordem maior na expansão  $E_i = \tilde{m}_i \left( 1 + \frac{k^2}{2m_i^2} - \dots \right)$  realmente se tornam menos significantes.

Por fim, analisemos a temperatura em que ocorre a aniquilação dos anti-bárions. No gráfico da Figura 4, a temperatura em que a aniquilação começa é em torno de  $45MeV$  e, no gráfico da Figura 5, a temperatura que começa a aniquilação é em torno de  $35MeV$ . Há duas correções contrárias que podemos levar em conta, o que torna difícil de ver se a disparidade pode ser diminuída ao solucionarmos o sistema de equações do nosso modelo sem aproximação. A primeira é a relevância de termos relativísticos na energia individual dos (anti-)bárions que, como já visto, tendem a diminuir o potencial químico em relação à aproximação de primeira ordem (energia não relativística), fazendo com que a temperatura em que ocorre a aniquilação seja menor do que na aproximação de primeira ordem. A segunda é o fato de a densidade dos (anti-)píons, que são massivos, ser suficiente para se tornarem relevantes na densidade de energia até essa temperatura, fazendo, como já explicado mais acima, o potencial químico bariônico ser maior do que seria no caso em que fosse apenas relevante o gás ultra-relativístico. No entanto pode-se verificar, para essa última correção, que entre os dois casos extremos apresentados mais acima, os quais são  $n_b = n_{b0} \left( \frac{T}{T_0} \right)^3$  (apenas o gás ultra-relativístico é relevante) e  $n_b = n_{b0} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}}$  (o gás é de partículas massivas e se comporta como um gás ideal clássico), a diferença no potencial químico expresso em (5.172) é tal que a temperatura de aniquilação do segundo caso é só  $5MeV$  superior a do primeiro e, dessa forma, talvez seja o fenômeno menos significativo. Apesar disso, os dois gráficos estão em maior acordo quanto a que densidade a aniquilação ocorre. De fato, notemos que no gráfico da Figura 4, a aniquilação ocorre quando a densidade dos prótons chega em torno de  $10^{-2}MeV^3$ , que corresponde algo em torno de  $5,2 \cdot 10^{27}cm^{-3}$  e no gráfico da Figura 5, a aniquilação ocorre quando a densidade dos prótons chega em torno de  $10^{27}cm^{-3}$ .

### 5.3.6 Um complemento da aproximação

Em toda a aproximação feita acima, notemos que a densidade de energia do termo ultra-relativístico ofuscou os demais termos e a aproximação, portanto, não dá conta de mostrar como a conversão de

nêutrons em prótons afeta a densidade de energia dos bárions e demais partículas. Embora seja um efeito pequeno, vamos buscar uma perspectiva melhor dele. Para tanto, consideremos que o gás de bárions seja desacoplado do gás ultra-relativístico (não troquem energia entre si) e dispenseemos por simplicidade o campo  $B^\mu$  e os anti-bárions. Assim, a equação (5.130) só terá termos com densidade de energia e pressão dos bárions, pois o termo ultra-relativístico satisfará a conservação da energia independentemente, fazendo com que continuemos tendo a validade de (5.143) ao desprezarmos a densidade de energia dos bárions na equação de Friedmann<sup>21</sup>.

Tendo (5.161), é mais simples escrevermos a densidade de energia e pressão dos bárions em termos de  $n_p$  e  $T$ , o que pode ser feito facilmente e nos dá como resultado<sup>22</sup>

$$\begin{aligned}\epsilon_b &= m_n n_n + m_p n_p + \frac{3}{2} n_b T \\ &= n_p \left[ \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}} \left( m_n + \frac{3}{2} T \right) + \right. \\ &\quad \left. + m_p + \frac{3}{2} T \right],\end{aligned}\tag{5.175}$$

$$\begin{aligned}p_b &= \frac{2}{3} n_p \left[ \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}} \left( m_n + \frac{3}{2} T \right) + \right. \\ &\quad \left. + m_p + \frac{3}{2} T \right].\end{aligned}\tag{5.176}$$

Além disso, é melhor usar como variáveis independentes  $T$  e  $n_p$  na equação (5.130). Dessa forma, essa equação pode ser escrita como

$$\mathcal{R} \left[ \left( \frac{\partial \epsilon_b}{\partial T} \right)_{n_p} \frac{dT}{d\mathcal{R}} + \left( \frac{\partial \epsilon_b}{\partial n_p} \right)_T \frac{dn_p}{d\mathcal{R}} \right] = -3(p_b + \epsilon_b).\tag{5.177}$$

---

<sup>21</sup>O fato dos dois gases poderem evoluir independentemente faz com que seja possível cada um ter sua própria temperatura.

<sup>22</sup>Note que a aproximação em primeira ordem feita torna o gás de férmions num gás ideal clássico. Isso não é uma surpresa, pois, sendo a densidade baixa, mas a temperatura não tanto, existem muito mais estados de energia acessíveis do que partículas no gás, fazendo com que o princípio de exclusão de Pauli não atue significativamente.

Um cálculo direto nos fornece

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \epsilon_b}{\partial T}\right)_{n_p} &= \frac{3}{2}n_b + n_p \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{(m_n - m_p)}{T^2} \times \\ &\times e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}} \left(m_n + \frac{3}{2}T\right) \end{aligned} \quad (5.178)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \epsilon_b}{\partial n_p}\right)_T &= \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}} \left(m_n + \frac{3}{2}T\right) + \\ &+ m_p + \frac{3}{2}T = \frac{\epsilon_b}{n_p}. \end{aligned} \quad (5.179)$$

Mas ainda temos a equação  $n_p + n_n = n_b = \frac{n_b 0}{\mathcal{R}^3}$  e, ao derivarmos em relação a  $\mathcal{R}$ , ela nos dá

$$\begin{aligned} \frac{dn_p}{d\mathcal{R}} \left(1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}}\right) + \\ + n_p \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{(m_n - m_p)}{T^2} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}} \frac{dT}{d\mathcal{R}} = -3 \frac{n_b}{\mathcal{R}}. \end{aligned} \quad (5.180)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \epsilon_b}{\partial T}\right)_{n_p} \frac{dT}{d\mathcal{R}} = \frac{3}{2}n_b \frac{dT}{d\mathcal{R}} - \\ - \left[3 \frac{n_b}{\mathcal{R}} + \frac{dn_p}{d\mathcal{R}} \left(1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}}\right)\right] \left(m_n + \frac{3}{2}T\right) \end{aligned} \quad (5.181)$$

e a equação (5.177) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \left[ \frac{3}{2}n_b \left(\frac{dT}{d\mathcal{R}} - 3\frac{T}{\mathcal{R}}\right) - (m_n - m_p) \frac{dn_p}{d\mathcal{R}} \right] = \\ -3 \left(\frac{5}{2}n_b T - n_p (m_n - m_p)\right) \end{aligned} \quad (5.182)$$

ou, ao juntarmos os dois lados,

$$\frac{3}{2}n_b \left( \frac{dT}{d\mathcal{R}} + 2\frac{T}{\mathcal{R}} \right) - (m_n - m_p)n_p \left( \frac{1}{n_p} \frac{dn_p}{d\mathcal{R}} + \frac{3}{\mathcal{R}} \right) = 0. \quad (5.183)$$

Notando que  $\frac{n_b}{n_p} \left( \frac{1}{n_p} \frac{dn_p}{d\mathcal{R}} + \frac{3}{\mathcal{R}} \right) = -\frac{d\left(\frac{n_b}{n_p}\right)}{d\mathcal{R}} = -\frac{d\mathcal{N}}{d\mathcal{R}}$  com  $\mathcal{N} = \frac{n_b}{n_p}$ , ainda podemos escrever

$$\frac{3}{2}\mathcal{N} \left( \frac{dT}{d\mathcal{R}} + 2\frac{T}{\mathcal{R}} \right) + (m_n - m_p) \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{d\mathcal{N}}{d\mathcal{R}} = 0. \quad (5.184)$$

A equação agora está mais simples, no entanto as variáveis ainda não estão separadas. Podemos solucionar isso observando que  $n_p + n_n = n_b$  pode ser usada para diretamente isolar  $\frac{n_b}{n_p} = \mathcal{N}$ . De fato,

$$n_p + n_p \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}} = n_b \quad (5.185)$$

implica

$$\mathcal{N} = 1 + \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}}. \quad (5.186)$$

Dessa forma,

$$\frac{d\mathcal{N}}{d\mathcal{R}} = \frac{(m_n - m_p)}{T^2} \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}} \frac{dT}{d\mathcal{R}}. \quad (5.187)$$

Agora podemos substituir (5.186) e (5.187) em (5.184) e obter

$$\begin{aligned} & \frac{dT}{d\mathcal{R}} \left[ \left( \frac{(m_n - m_p)^2}{T^2} \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}}}{1 + \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \left( 1 + \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}} \right) \right] + 3 \left( 1 + \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}} \right) \frac{T}{\mathcal{R}} = 0 \end{aligned} \quad (5.188)$$

Fazendo a substituição  $\mathcal{B} = -\frac{(m_n - m_p)}{T}$ , a equação se torna

$$\mathcal{R} \frac{d\mathcal{B}}{d\mathcal{R}} \left[ \mathcal{B}^2 \left( \frac{\left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}}{1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}} \right) + \frac{3}{2} \left( 1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}} \right) \right] - 3 \left( 1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}} \right) \mathcal{B} = 0. \quad (5.189)$$

Dividindo por  $\left( 1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}} \right)$  temos

$$\mathcal{R} \frac{d\mathcal{B}}{d\mathcal{R}} \left[ \mathcal{B}^2 \frac{\left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}}{\left( 1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}} \right)^2} + \frac{3}{2} \right] - 3\mathcal{B} = 0. \quad (5.190)$$

Isolando  $\mathcal{R}$ , podemos encontrar a solução dessa equação. De fato, ao fazermos isso e, em seguida, integrarmos, a expressão fica

$$\int_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} d\mathcal{B} \left[ \mathcal{B} \frac{\left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}}{\left( 1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}} \right)^2} + \frac{3}{2\mathcal{B}} \right] = 3 \int_1^{\mathcal{R}} \frac{d\mathcal{R}}{\mathcal{R}}, \quad (5.191)$$

donde se tem<sup>23</sup>

$$\frac{3}{2} \ln \left( \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}_0} \right) - \left[ \frac{\mathcal{B}}{1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}} \right]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} + \int_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} d\mathcal{B} \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}} \right) = \ln(\mathcal{R}^3). \quad (5.192)$$

---

<sup>23</sup>Veja que  $d\mathcal{B} \frac{\left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}}{\left( 1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}} \right)^2} = -d \left( \frac{\mathcal{B}}{1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}} \right) + d\mathcal{B} \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}} \right)$ .

Perceba ainda que usamos a notação  $[f(x')]_{x_0}^x = f(x) - f(x_0)$ .

Observando que<sup>24</sup>  $\int_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} d\mathcal{B} \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}} \right) = \ln \left( \frac{1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}_0}}{1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}} \right) + (\mathcal{B} - \mathcal{B}_0)$ , a expressão pode ser escrita na forma

$$\frac{3}{2} \ln \left( \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}_0} \right) - \left[ \frac{\mathcal{B}}{1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}} \right]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} + \ln \left( \frac{1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}_0}}{1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}} \right) + (\mathcal{B} - \mathcal{B}_0) = \ln(\mathcal{R}^3). \quad (5.193)$$

Ou seja, sendo  $\left(1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}\right) = \frac{n_b}{n_p} = \frac{1}{\mathcal{F}_p}$ , onde  $\mathcal{F}_p = \frac{n_p}{n_b}$  é a fração de prótons, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^3 &= \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{n_{b0}n_p}{n_{p0}n_b}\right) e^{[-(\mathcal{B}\frac{n_p}{n_b} - \mathcal{B}_0\frac{n_{p0}}{n_{b0}}) + \mathcal{B} - \mathcal{B}_0]} \\ &= \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mathcal{F}_p}{\mathcal{F}_{p0}} e^{(m_n - m_p) \left(\left(\frac{1}{T}\mathcal{F}_p - \frac{1}{T_0}\mathcal{F}_{p0}\right) - \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right)}. \end{aligned} \quad (5.194)$$

Como<sup>25</sup>  $\frac{\mathcal{F}_p}{\mathcal{F}_{p0}} e^{(m_n - m_p) \left(\left(\frac{1}{T}\mathcal{F}_p - \frac{1}{T_0}\mathcal{F}_{p0}\right) - \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right)} > 1$ , nota-se que  $\mathcal{R}$  cresce (a medida que a temperatura cai) de forma “reforçada” pela diferença de massa ( $m_n - m_p$ ) e quão grande se torna<sup>26</sup>  $\mathcal{F}_p$ . No entanto, nessa aproximação, a evolução de  $\mathcal{R}$  com o tempo é governada por (5.143) e, dessa forma, não é  $\mathcal{R}$  que possui sua evolução com o tempo acelerada pelo fenômeno de conversão de nêutrons em prótons e sim a tempe-

<sup>24</sup>Pode-se verificar isso notando que  $\int_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} d\mathcal{B} \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}} \right) = \int_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} d\mathcal{B} \left( \frac{e^{-\mathcal{B}}}{e^{-\mathcal{B}} + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}}} \right)$ , cuja integração é simples, ou derivando a expressão.

<sup>25</sup>Note que o integrando original no expoente é  $\mathcal{B} \frac{\left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}}{\left(1 + \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\mathcal{B}}\right)^2}$ , que é negativo

devido ao fato de que  $\mathcal{B} = -\frac{(m_n - m_p)}{T}$ . Mas devido ao mesmo fato  $\mathcal{B} < \mathcal{B}_0$  nos limites da integral, fazendo a integral ser positiva.

<sup>26</sup>Como a fração de nêutrons diminui a medida que a temperatura cai, a fração  $\frac{n_p}{n_b}$  aumenta a medida que a temperatura cai.



ratura<sup>27</sup> que cai mais lentamente do que cairia se não houvesse essa conversão<sup>28</sup>.

Por fim, tendo  $n_b = \frac{n_{b0}}{\mathcal{R}^3}$  e a equação (5.194), a densidade bariônica cai com a temperatura de acordo com

$$n_b = n_{b0} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mathcal{F}_{p0}}{\mathcal{F}_p} e^{-(m_n - m_p) \left( \left( \frac{1}{T} \mathcal{F}_p - \frac{1}{T_0} \mathcal{F}_{p0} \right) - \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right)}. \quad (5.195)$$

Mas a aproximação feita aqui para os prótons e nêutrons é a de que formam um gás ideal clássico sem graus de liberdade internos e sabemos que a expansão desse gás na métrica de FRW é adiabática por construção. Ou seja, deveríamos esperar que os prótons e nêutrons obedecessem a relação  $TV^{\frac{2}{3}} = cte$  ou, ao elevar essa expressão a  $\frac{3}{2}$  e dividir por  $N_b$  (número total de bárions em  $V$ ),  $\frac{T^{\frac{3}{2}}}{n_b} = cte$ . Essa aparente contradição é sanada ao observar que, quando um nêutron se converte em próton por algum dos processos (5.162), a diferença de massa ( $m_n - m_p$ ) é convertida em energia cinética para os prótons e nêutrons. Isso explica porque a temperatura, numa dada densidade  $n_b$ , é maior do que seria sem a conversão de nêutrons em prótons, pois, a medida que a  $\mathcal{R}$  aumenta, a fração de prótons  $\frac{n_p}{n_b}$  aumenta e, assim, aumenta a energia cinética em relação ao que seria sem essa mudança de fração, o que implica num aumento de temperatura (em relação ao que seria) de acordo com<sup>29</sup>  $\epsilon_b^{NR} = \frac{3}{2} n_b T$ . No caso em que não impedíssemos a troca de energia entre os bárions e as demais partículas, essa energia cinética acabaria distribuída também nas demais partículas, mantendo o equilíbrio térmico.

Podemos verificar explicitamente que a densidade de entropia  $s$  continua tal que  $s\mathcal{R}^3 = cte$ , isto é, que a expansão desse gás é de fato adiabática como se supõe. Com efeito, ao lembrarmos que a entropia é dada por [19]

<sup>27</sup>É pertinente lembrar que a temperatura dos neutrinos, elétrons e fótons evolui independentemente dessa, já que impedimos a troca de energia entre os bárions e esses.

<sup>28</sup>Para ver isso, note que, dado um  $\mathcal{R}_r^3$  fixo, sem o fenômeno de conversão teríamos  $\mathcal{R}_r^{\frac{3}{2}} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{3}{2}}$  enquanto que, com o fenômeno de conversão, temos um fator multiplicativo maior que um e a temperatura deve ser maior para que  $\left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{3}{2}}$  multiplicado pelo o fator em questão dê o mesmo  $\mathcal{R}_r$ .

<sup>29</sup>Lembrando que  $\epsilon_b^{NR}$  é a densidade de energia cinética do gás.

$$S = \frac{U_b - N_b \nu_b - p_b V}{T}, \quad (5.196)$$

onde  $U_b$ ,  $N_b$ ,  $\nu_b$ ,  $p_b$  e  $V$  são a energia interna, número de bárions, potencial químico, pressão e volume respectivamente, e, portanto, podemos escrever a densidade de entropia como

$$s = \frac{\epsilon_b - p_b}{T} - n_b \ln z. \quad (5.197)$$

Assim, sendo  $\epsilon_b = n_p m_p + n_n m_n + \frac{3}{2} n_b T$  e  $p_b = n_b T$ , temos

$$\begin{aligned} s &= \frac{n_p m_p + n_n m_n}{T} + n_b \left( \frac{1}{2} - \ln z \right) \\ &= \frac{n_p (m_p - m_n) + n_b m_n}{T} + n_b \left( \frac{1}{2} - \ln z \right). \end{aligned} \quad (5.198)$$

Logo, usando (5.152), podemos escrever  $z = n_n \frac{(2\pi)^3}{2(2\pi m_n)^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{m_n}{T}} = a n_n \frac{e^{\frac{m_n}{T}}}{m_n^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}}}$  com  $a = \frac{(2\pi)^3}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$  e obter

$$\begin{aligned} s &= \frac{n_p (m_p - m_n) + n_b m_n}{T} + n_b \left( \frac{1}{2} - \ln \left( \frac{a n_n}{m_n^{\frac{3}{2}}} \right) - \frac{m_n}{T} + \ln T^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= -n_p \frac{(m_n - m_p)}{T} + n_b \left( \frac{1}{2} - \ln \left( \frac{a n_n}{m_n^{\frac{3}{2}}} \right) + \ln T^{\frac{3}{2}} \right). \end{aligned} \quad (5.199)$$

Além disso, podemos isolar  $T^{\frac{3}{2}}$  em (5.194), donde se tem

$$\begin{aligned} T^{\frac{3}{2}} &= \frac{T_0^{\frac{3}{2}} \mathcal{F}_p}{\mathcal{R}^3 \mathcal{F}_{p0}} e^{(m_n - m_p) \left( \left( \frac{1}{T} \mathcal{F}_p - \frac{1}{T_0} \mathcal{F}_{p0} \right) - \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right)}, \\ &= b \frac{\mathcal{F}_p}{\mathcal{R}^3} e^{\frac{(m_n - m_p)}{T} (\mathcal{F}_p - 1)}, \end{aligned} \quad (5.200)$$

com  $b = \frac{T_0^{\frac{3}{2}}}{\mathcal{F}_{p0}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T_0} (\mathcal{F}_{p0} - 1)}$ , e reescrever a densidade de entropia

---

<sup>30</sup>Veja que  $p_b = \frac{2}{3} \epsilon^{NR}$ .

como

$$\begin{aligned}
s &= -n_p \frac{(m_n - m_p)^3}{T} + n_b \left[ \frac{1}{2} - \ln \left( \frac{an_n}{m_n^{\frac{3}{2}}} \right) + \ln \left( b \frac{\mathcal{F}_p}{\mathcal{R}^3} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(m_n - m_p)}{T} \left( \frac{n_p}{n_b} - 1 \right) \right] \\
&= n_b \left[ \frac{1}{2} - \ln \left( \frac{an_n}{m_n^{\frac{3}{2}}} \right) - \ln \left( b \frac{\mathcal{F}_p}{\mathcal{R}^3} \right) - \frac{(m_n - m_p)}{T} \right] \\
&= n_b \left[ \frac{1}{2} - \ln \left( \frac{an_n}{m_n^{\frac{3}{2}}} \frac{\mathcal{R}^3}{b\mathcal{F}_p} \right) - \frac{(m_n - m_p)}{T} \right] \\
&= n_b \left[ \frac{1}{2} - \ln \left( \frac{a}{m_n^{\frac{3}{2}} b} n_b \mathcal{R}^3 \frac{n_n}{n_p} \right) - \frac{(m_n - m_p)}{T} \right]. \quad (5.201)
\end{aligned}$$

Agora, de (5.161) sabemos que  $\frac{n_n}{n_p} = \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}}$  e, portanto, devemos ter

$$\begin{aligned}
s &= n_b \left[ \frac{1}{2} - \ln \left( \frac{a}{m_n^{\frac{3}{2}} b} n_b \mathcal{R}^3 \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{T}} \right) - \frac{(m_n - m_p)}{T} \right] \\
&= n_b \left[ \frac{1}{2} - \ln \left( \frac{a}{m_n^{\frac{3}{2}} b} n_b \mathcal{R}^3 \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{(m_n - m_p)}{T} - \frac{(m_n - m_p)}{T} \right] \\
&= n_b \left[ \frac{1}{2} - \ln \left( \frac{a}{b m_n^{\frac{3}{2}}} n_b \mathcal{R}^3 \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right]. \quad (5.202)
\end{aligned}$$

Enfim, sendo  $n_b \mathcal{R}^3$  constante pela conservação do número bariônico, a expressão dentro dos colchetes é constante e, por conseguinte,  $s \propto n_b \propto \frac{1}{\mathcal{R}^3}$ , mostrando o que pretendíamos.

Com isso encerramos a exploração das equações (5.128)-(5.140) sem recorrer à solução numérica. Mesmo que de forma limitada, conseguimos analisar alguns dos fenômenos contidos nelas e soluções que poderão ser comparadas com a solução numérica. Fora isso, também conseguimos ter uma perspectiva de quais correções a solução numérica poderá fazer em relação ao caso aproximado, que poderá se aproximar dos resultados obtidos em [24].



## 6 CONCLUSÃO

Nessa dissertação nos propusemos a dar alguns passos iniciais na descrição da era hadrônica (compreendida entre  $10^{-6}s$  e  $1s$  da história do universo ou, em termos de temperatura, entre  $T = 150MeV$  e  $T = 1MeV$ ) em termos de um modelo efetivo da matéria nuclear. Para isso desenvolvemos o formalismo lagrangiano em espaço-tempo curvo e obtivemos a equação de Einstein, de Euler-Lagrange e, além disso, obtivemos tensores de energia-momento que foram utilizados posteriormente. Em seguida desenvolvemos alguns resultados gerais e preliminares de cosmologia, onde solucionamos parcialmente a equação de Einstein obtendo as equações de Friedmann. Encerrando os assuntos introdutórios, vimos brevemente como férmions aparecem na Relatividade Restrita para, então, através do formalismo de tetradas, inseri-los na RG. Enfim utilizamos esses resultados para adaptar a lagrangiana do modelo  $\sigma - \omega - \rho$  (que já foi utilizado na descrição de situações extremas como estrelas de nêutrons [4] e colisão de íons pesados [5]) às exigências da RG, obter as equações de movimento gerais e, após utilizar a aproximação de campo médio, obter as equações a serem solucionadas exigindo que a métrica seja a de FRW, que era o resultado inédito almejado nessa dissertação. Depois de termos tais equações, buscamos uma solução aproximada (mas analítica) e exploramos alguns dos fenômenos contidos nelas. Comparamos os resultados com os da referência [24] e adquirimos perspectivas quanto às correções que a solução numérica fará em relação à aproximação feita. Agora, o próximo passo natural é buscar a solução numérica das equações (5.128)-(5.140) e comparar tanto com a aproximação feita como com os resultados de [24]. Os passos seguintes serão na direção de refinar o modelo (acrescentar partículas aqui ignoradas, as conexões de spin, etc.) e acreditamos que os resultados obtidos possam motivar avanços nessa direção. Além disso, o caminho aqui traçado também pode ser adaptado para outros modelos de interação nuclear se algum se mostrar mais apropriado na descrição desse período do universo.



## REFERÊNCIAS

- [1] Schwarz, Dominik J. “The first second of the Universe”. *Annalen Phys.*12, 220-270 (2003)
- [2] Tawfik, A. e Harko, T. “Quark-Hadron Phase Transitions in Viscous Early Universe”. *Phys. Rev. D* 85, 084032 (2012)
- [3] Boguta, J. e Bodmer, A.R. “Relativistic calculation of nuclear matter and the nuclear surface”. *Nucl.Phys.A* 292, 413-428 (1977)
- [4] Belvedere, R., Pugliese, D., Ruela, Jorge A., Ruffini, Remo e Xue, She-Sheng. “Neutron star equilibrium configurations within a fully relativistic theory with strong, weak, electromagnetic, and gravitational interactions”. *Nucl.Phys.A* 883, 1-24 (2012)
- [5] Menezes, D. P., Providência, C., Chiapparini, M., Bracco, M. E., Delfino, A. e Malheiro, M. “Constraining relativistic models through heavy ion collisions”. *Phys.Rev.C*.76.064902 (2007)
- [6] Landau, L. e Lifchitz, E. “Teoria do Campo”. Hemus editora (2004)
- [7] Carroll, Sean. “Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity”. Benjamin Cummings (2003)
- [8] Weinberg, S. “Gravitation and Cosmology”. John Wiley and Sons, New York (1972)
- [9] Ryder, L.H. “Quantum Field Theory”. Cambridge University Press (1985)
- [10] Rubakov, V. “Classical Theory of Gauge Fields”. Princeton University Press (2002)
- [11] Fuchs, J. e Schweigert, C. “Symmetries, Lie algebras and Representations”. Cambridge University Press (1997)
- [12] Tung, Wu-Ki. “Group Theory in Physics”. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1985)
- [13] Pal, Palash B. “Dirac, Majorana and Weyl fermions”. *Am. J. Phys.*79, 485-498 (2011)

- [14] Ferraro, Rafael e Thibeault, Marc. “Generic composition of boosts: an elementary derivation of the Wigner rotation”. *Eur.J.Phys.*20, 143-151 (1999)
- [15] Chandrasekhar, Subrahmanyan. “The Mathematical Theory of Black Holes”. Chicago: University of Chikago Press (1983)
- [16] Serot, Brian D. “Quantum hadrodynamics”. *Rep.Prog.Phys.*55, 1855-1946 (1992).
- [17] Serot, Brian D. e Walecka, John D. “Recent Progress in Quantum Hadrodynamics”. *Int.J.Mod.Phys.E6*, 515-631 (1997)
- [18] Rafelski, Johann. “Connecting QGP-Heavy Ion Physics to the Early Universe”. *Nuclear Physics B Proceedings Supplement* 00, 1-8 (2013)
- [19] Pathria, R.K. e Beale, P.D. “Statistical Mechanics”. Elsevier Ltd. (2011)
- [20] Lalazissis, G.A., König, J. e Ring, P. “New parametrization for the Lagrangian density of relativistic mean field theory”. *Phys.Rev.C*55, 540 (1997)
- [21] Sharma, M.M., Nagarajan, M.A. e Ring, P. *Phys.Lett.B*312, 377 (1993)
- [22] Sugahara, Y. e Toki, H. “Relativistic mean-field theory for unstable nuclei with non-linear  $\sigma$  and  $\omega$  terms”. *Nucl.Phys.A*579, 557-572 (1994)
- [23] Hirata, D., Toki, H., Tanihata, I. “Relativistic mean-field theory on the xenon, cesium and barium isotopes”. *Nucl.Phys.A*589, 239-248 (1995)
- [24] Fromerth, M. J., Kuznetsova, I., Labun, L., Letessier, J. e Rafelski, J., “From Quark-Gluon Universe to Neutrino Decoupling:  $200 > T > 2MeV$ ”. *Acta Phys.Polon.*B43,12, 2261 (2012)



**APÊNDICE A -  $\delta\sqrt{-g}$  e  $\delta R$**



### A.1 $\delta\sqrt{-G}$

Da álgebra de matrizes temos que, para uma matriz  $M$  com determinante diferente de zero,  $\ln(\det M) = \text{Tr}(\ln M)$ <sup>1</sup>. Realizando a variação nessa expressão, obtemos

$$\frac{\delta \det M}{\det M} = \text{Tr}(M^{-1} \delta M). \quad (\text{A.1})$$

Sendo  $M = g_{\mu\nu}$  e, portanto,  $M^{-1} = g^{\mu\nu}$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{\delta g}{g} &= \text{Tr}(g^{\mu\alpha} \delta g_{\alpha\nu}) = g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ \Rightarrow \delta g &= g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta(-g) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} (-g) g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

### A.2 $\delta R$

Como  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , segue-se

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.4})$$

Pela definição de  $R_{\mu\nu}$ , temos

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \delta \left( \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \right) \\ &= \partial_\mu \delta \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \delta \Gamma_{\nu\alpha}^\beta + \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \delta \Gamma_{\mu\beta}^\alpha - \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>O que vem da identidade  $\det e^A = e^{\text{Tr}A}$ .

$$-\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}. \quad (\text{A.5})$$

Por outro lado<sup>2</sup>

$$\nabla_{\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta} \delta\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} \delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}. \quad (\text{A.6})$$

Dessa forma, podemos reescrever (A.5) como

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} \delta\Gamma_{\nu\alpha}^{\alpha} - \nabla_{\alpha} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \quad (\text{A.7})$$

e finalmente temos

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \left( \nabla_{\mu} \delta\Gamma_{\nu\alpha}^{\alpha} - \nabla_{\alpha} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \right) \\ &= -R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \nabla_{\mu} \left( g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\alpha}^{\alpha} \right) - \nabla_{\alpha} \left( g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \right) \\ &= -R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \nabla_{\mu} \left( g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\alpha}^{\alpha} - g^{\alpha\nu} \delta\Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} \right), \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

onde se usou o resultado  $g_{\mu\alpha} \delta g^{\alpha\nu} = -g^{\nu\alpha} \delta g_{\alpha\mu}$  no primeiro termo e  $\nabla_{\mu} g^{\lambda\nu} = \mathbf{0}$  no segundo.

---

<sup>2</sup>Deve-se notar que, embora  $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$  não seja um tensor,  $\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ , que é a diferença entre duas conexões afins, é um tensor.

**APÊNDICE B - Métrica de FRW em Coordenadas  
Cartesianas**



Tendo a métrica

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (\text{B.1})$$

podemos escrevê-la como

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - R^2(t) \left[ dr^2 + dr^2 \left( \frac{1}{1 - kr^2} - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \\ &= dt^2 - R^2(t) \left[ dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{kr^2 dr^2}{1 - kr^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Os primeiros três termos dentro do colchete reproduzem a métrica usual de um espaço plano em coordenadas esféricas e logo podemos identificar essa parte com  $\mathbf{dx}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , onde  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$  e  $z = r \cos \theta$ . Observando que  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \mathbf{x}^2$  e, portanto, que  $dr = \frac{1}{r} (\mathbf{x}d\mathbf{x} + \mathbf{y}d\mathbf{y} + \mathbf{z}d\mathbf{z})$ , temos que o último termo no colchete pode ser posto na forma

$$\begin{aligned} \frac{kr^2 dr^2}{1 - kr^2} &= \frac{k}{1 - kr^2} r^2 \frac{1}{r^2} (\mathbf{x}d\mathbf{x} + \mathbf{y}d\mathbf{y} + \mathbf{z}d\mathbf{z})^2 \\ &= \frac{k}{1 - kr^2} (\mathbf{x}d\mathbf{x} + \mathbf{y}d\mathbf{y} + \mathbf{z}d\mathbf{z})^2 \\ &= \frac{k (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - k\mathbf{x}^2} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

e, assim, a métrica de FRW em coordenadas cartesianas é

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left( d\mathbf{x}^2 + k \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - k\mathbf{x}^2} \right). \quad (\text{B.4})$$