

Carlos Francisco Pecapedra Souza

**ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DE MOMENTOS FLETORES  
EM PONTES BI-APOIADAS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Daniel Domingues Loriggio, Dr.

Florianópolis  
2015



Carlos Francisco Pecapedra Souza

**ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DE MOMENTOS FLETORES  
EM PONTES BI-APOIADAS**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre, e aprovado em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação.

Florianópolis, 03 de março de 2015.

---

Prof. Roberto Caldas de Andrade Pinto, Dr.  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Daniel Domingues Loriggio, Dr.  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Fernando Rebouças Stucchi, Dr.  
Universidade de São Paulo

---

Prof. Rafael Holdorf Lopez, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Marcos Aurélio Marques Noronha, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina



À minha querida L.



## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer especialmente a minha esposa Luana, que sempre me apoiou, aconselhou e incentivou a dar meu melhor. Sem você eu não teria conseguido chegar até aqui! Te amo.

À minha mãe e meu pai que sempre me incentivaram a alcançar caminhos cada vez mais distantes.

Aos pais da minha esposa, por sempre estarem presentes, aconselhando e auxiliando em todos os momentos mais importantes.

Ao professor Daniel Domingues Loriggio que considero um excelente professor e orientador e, acima de tudo, um grande amigo, sempre auxiliando de uma forma bastante criativa nas dúvidas que surgiram durante a realização deste trabalho.

Aos colegas e amigos do GRUPEX, com os quais muito aprendi, em especial ao Jeferson e sua esposa Rovana pela amizade.

Aos professores doutores Fernando Rebouças Stucchi, Rafael Holdorf Lopez, Marcos Aurélio Marques Noronha e Wellison Santana Gomes que aceitaram compor minha banca de qualificação e defesa, pelas sugestões e análises significativas às quais tentarei atender na versão definitiva do texto.

Gostaria de agradecer também à Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC), bem como a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), por contribuírem para meu aperfeiçoamento profissional.

Muito Obrigado.





## RESUMO

Neste trabalho será realizado um estudo comparativo das envoltórias dos momentos fletores ao longo das vigas principais de pontes bi-apoiadas. Para a obtenção dessas envoltórias, foi utilizada a formulação de Engesser-Courbon, que considera as transversinas infinitamente rígidas e uma análise numérica modelando a estrutura como grelha. Para a obtenção das envoltórias serão utilizados procedimentos computacionais em linguagem de programação XOJO, incluindo o programa GAP-GEL v1, permitindo uma entrada de dados paramétrica, que diminui a quantidade de dados necessários para o modelamento de diversos casos. Os casos analisados estudaram a presença de balanços e dos cortinas, a influência de elementos de laje e dos números de transversinas e longarina. Foi observado que as envoltórias de momentos fletores obtidos pelos diferentes enfoques apresentaram valores próximos para as longarinas de extremidade, porém, para as longarinas centrais, resultaram em diferenças significativas.

**Palavras-chave:** pontes; pontes bi-apoiadas; envoltória de momento fletor; Engesser-Courbon; método das grelhas; analogia das grelhas.



## ABSTRACT

This work made a comparative study of the bending moments along the girders of bi-supported bridges. To obtain the greatest moments was used the Engesser-Courbon formulation, which considers the infinitely rigid crossbeams and a numerical analysis modeling the structure as a grid of beams. To obtain the results, computational procedures were developed in XOJO programming language, and also used the GAP-GEL v1 program, allowing parametric data entry, which reduces the amount of data required for modeling many cases. The models studied the presence of cantilevers and approach consoles, the influence of slab elements and the number of crossbeams and girders. It was observed that the envelopes of bending moments obtained by different approaches exhibited similar values at the external girders, however, result in significant differences in central girders.

**Keywords:** slab-and-beam bridge; bi-supported bridges; bending moments; Engesser-Courbon; grid method; grillage analogy.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Elementos constituintes de pontes em vigas. ....	30
Figura 2 - Seção transversal de uma ponte em grelha. ....	31
Figura 3 - Corte inferior de um tabuleiro de uma ponte em grelha. ....	31
Figura 4 - Elementos constituintes de uma ponte com e sem encontro. ....	32
Figura 5 - Pontes retas. ....	35
Figura 6 - Pontes curvas. ....	35
Figura 7 - Desenvolvimento altimétrico retilíneo horizontal e em rampa. ....	36
Figura 8 - Desenvolvimento altimétrico curvilíneo convexo e côncavo. ....	36
Figura 9 - Vigas simplesmente apoiadas sobre dois apoios. ....	37
Figura 10 - Vigas simplesmente apoiadas sobre dois apoios em vários vãos com tabuleiro contínuo. ....	38
Figura 11 - Envoltória de momento fletor a uma carga uniformemente distribuída para vigas simplesmente apoiadas com balanços. ....	38
Figura 12 - Vigas contínuas. ....	38
Figura 13 - Diagrama de momento fletor a uma carga uniformemente distribuída para: a) viga simplesmente apoiada sobre dois apoios; b) viga contínua. ....	39
Figura 14 - Melhor distribuição de momentos fletores em vigas contínuas. ....	40
Figura 15 - Esquema estático de ponte em viga Gerber. ....	40
Figura 16 - Viga Gerber com elementos pré-moldados. ....	41
Figura 17 - Banzos paralelos. ....	41
Figura 18 - Banzos paralelos em declive. ....	42
Figura 19 - Banzos paralelos em curva vertical convexa. ....	42
Figura 20 - Distribuição de momentos fletores em vigas biengastadas de altura constante e variável. ....	43
Figura 21 - Variação da altura com mísulas nas vigas. ....	43
Figura 22 - Variação da altura sem mísula nas vigas. ....	43
Figura 23 - Seções transversais de pontes em vigas T: a) Ponte em duas vigas; b) Ponte em duas vigas com alargamento da parte inferior; c) Ponte em várias vigas. ....	45
Figura 24 - Detalhamento da barreira tipo New Jersey. ....	47
Figura 25 - Atuação dos empuxos do solo sobre um encontro. ....	49
Figura 26 - Disposição das cargas estáticas do trem tipo rodoviário brasileiro. ....	52
Figura 27 - Deformação da estrutura. ....	62
Figura 28 - Reações nas transversinas. ....	62
Figura 29 - Deformação da transversina fictícia. ....	66
Figura 30 - Linha de influência para uma carga concentrada. ....	68
Figura 31 - Linha de influência para uma carga uniformemente distribuída. ....	68
Figura 32 - Eixos de coordenadas de uma grelha. ....	72
Figura 33 - Graus de liberdade de uma barra de grelha. ....	73
Figura 34 - Matriz de rigidez de um elemento de grelha. ....	74
Figura 35 - (a) Laje maciça; (b) Grelha equivalente. ....	75
Figura 36 - Modelagem de uma ponte sobre múltiplas vigas pelo modelo de grelha. ....	77

Figura 37 – a) Excentricidade entre os C.G. da viga e laje; b) analogia de grelha considerando os C.G. coincidentes. ....	77
Figura 38 – Excentricidade entre o eixo da viga e o plano médio da laje. ....	78
Figura 39 - Seção T. ....	78
Figura 40 - Modelagem de grelha alçado. ....	79
Figura 41 - Largura de mesa colaborante. ....	82
Figura 42 - Elementos para uma, duas e três dimensões. ....	86
Figura 43 - Ponte discretizada por uma malha de elementos finitos retangulares. ....	87
Figura 44 - Modelagem de ponte com elementos sólidos tridimensionais. ....	88
Figura 45 - Modelagem de ponte com elementos tridimensionais do tipo SOLID45. ....	88
Figura 46 - Escolha do tipo de projeto. ....	90
Figura 47 – Espaço de trabalho. ....	90
Figura 48 – Tela inicial do programa GAP-GEL v1. ....	91
Figura 49 – Dados numéricos de entrada do GAP-GEL v1. ....	92
Figura 50 – Representação gráfica dos dados de entrada do GAP-GEL v1. ....	92
Figura 51 – Resultados numéricos do programa GAP-GEL v1. ....	93
Figura 52 – Resultados numéricos do programa GAP-GEL v1. ....	93
Figura 53 - Dados de entrada do aplicativo Estudo de Dados GAP-GEL v1. ....	94
Figura 54 - Linhas de Influência do aplicativo Estudo de dados GAP-GEL v1. ....	95
Figura 55 - Envoltória de momentos do aplicativo Estudo de dados do GAP-GEL v1. ....	95
Figura 56 – Coeficientes de distribuição transversal. ....	98
Figura 57 – Coeficientes de distribuição longitudinal. ....	99
Figura 58 – Seção transversal do vigamento do tabuleiro com contribuição da laje. ....	103
Figura 59 – Modelo base (3L1T-NNN). ....	104
Figura 60 – Modelo 3L1T-NNN. ....	107
Figura 61 – Modelagem do modelo 3L1T-NNN. ....	108
Figura 62 – Linhas de Influência do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 1, quando o carregamento varia na própria longarina. ....	109
Figura 63 – Envoltória parcial de momentos fletores do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 1, quando o carregamento varia na própria longarina. ....	110
Figura 64 – Linhas de Influência do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 1, quando o carregamento varia na longarina 2. ....	111
Figura 65 - Deformada da estrutura para o modelo 3L1T-NNN, quando o carregamento varia na longarina 2 para o modelo de grelha. ....	112
Figura 66 – Envoltória parcial de momentos fletores do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 1, quando o carregamento varia na longarina 2. ....	112
Figura 67 – Linhas de Influência do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 1, quando o carregamento varia na longarina 3. ....	113
Figura 68 – Envoltória parcial de momentos fletores do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 1, quando o carregamento varia na longarina 3. ....	114

Figura 69 - Envoltória total de momentos fletores da longarina 1 do modelo 3L1T-NNN.....	115
Figura 70 – Linhas de Influência do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 2, quando o carregamento varia na longarina 1. ....	116
Figura 71 – Envoltória parcial de momentos fletores do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 2, quando o carregamento varia na longarina 1. ....	117
Figura 72 – Linhas de Influência do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 2, quando o carregamento varia na própria longarina.....	118
Figura 73 – Envoltória parcial de momentos fletores do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 2, quando o carregamento varia na própria longarina.....	118
Figura 74 – Linhas de Influência do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 2, quando o carregamento varia na longarina 3. ....	119
Figura 75 – Envoltória parcial de momentos fletores do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 2, quando o carregamento varia na longarina 3. ....	120
Figura 76 - Envoltória total de momentos fletores da longarina 2 do modelo 3L1T-NNN.....	121
Figura 77 – Linhas de influência para a seção 5 das longarinas de extremidade dos modelos 3L(0-5)T-NNN, quando o carregamento varia na longarina em estudo. ....	123
Figura 78 – Linhas de influência para a seção 5 das longarinas de extremidade dos modelos 3L(0-5)T-NNN, quando o carregamento varia sobre a longarina de extremidade oposta. ....	124
Figura 79 – Envoltória de momentos fletores para as longarinas de extremidade dos modelos 3L(0-5)T-NNN.....	125
Figura 80 – Superposição das envoltória de momentos fletores para as longarinas de extremidade dos modelos 3L(0-5)T-NNN. ....	126
Figura 81 – Linhas de influência para a seção 5 da longarina central dos modelos 3L(0-5)T-NNN, quando o carregamento varia sobre a própria longarina. ....	127
Figura 82 – Linhas de influência para a seção 15 da longarina central dos modelos 3L(0-5)T-NNN, quando o carregamento varia sobre a própria longarina. ....	128
Figura 83 – Envoltória de momentos fletores para a longarina central dos modelos 3L(0-5)T-NNN. ....	129
Figura 84 – Superposição das envoltória de momentos fletores para a longarina central dos modelos 3L(0-5)T-NNN.....	130
Figura 85 – Modelos utilizados para o estudo da influência das lajes de pontes bi-apoiadas sem balanços.....	131
Figura 86 – Envoltória de momentos fletores para as longarinas de extremidade do modelo 3LOT-SNN com laje de 20, 25 e 30 centímetros. ....	132
Figura 87 – Envoltória de momentos fletores para a longarina central do modelo 3LOT-SNN com laje de 20, 25 e 30 centímetros. ....	133
Figura 88 – Envoltória de momentos fletores para as longarinas de extremidade do modelo 3L1T-SNN com laje de 20, 25 e 30 centímetros. ....	134

Figura 89 – Envoltória de momentos fletores para a longarina central do modelo 3L1T-SNN com laje de 20, 25 e 30 centímetros. ....	135
Figura 90 – Modelo 3L1T-NSN. ....	136
Figura 91 – Envoltória total de momentos fletores das longarinas de extremidade do modelo 3L1T-NSN. ....	137
Figura 92 – Envoltórias parciais e total dos momentos fletores para as longarinas de extremidade do modelo 3L1T-NSN através do processo de Engesser-Courbon. ....	138
Figura 93 – Envoltória total de momentos fletores para a longarina central do modelo 3L1T-NSN. ....	139
Figura 94 – Modelo 3L1T-NSS. ....	140
Figura 95 – Envoltória total de momentos fletores das longarinas de extremidade do modelo 3L1T-NSS. ....	141
Figura 96 – Envoltória de momentos fletores para a longarina central do modelo 3L1T-NSS. ....	142
Figura 97 – Envoltórias parciais e total dos momentos fletores para a longarina central do modelo 3L1T-NSS através do modelo de grelha. ....	143
Figura 98 – Modelos 3L0T-NSS e 3L0T-SSS. ....	144
Figura 99 – Envoltórias totais dos momentos fletores para as longarinas de extremidade dos modelos 3L0T-NSS e 3L0T-SSS. ....	145
Figura 100 – Envoltórias totais dos momentos fletores para a longarina central dos modelos 3L0T-NSS e 3L0T-SSS. ....	146
Figura 101 – Envoltórias totais dos momentos fletores para a longarina central dos modelos 3L0T-NSN e 3L0T-SSN. ....	147



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Coeficientes para combinação normal.....	58
Tabela 2 - Linha de influência de momentos fletores para o primeiro caso de uma carga pontual.....	100
Tabela 3 - Linha de influência de momentos fletores para o segundo caso de uma carga pontual.....	100
Tabela 4 - Linha de influência de momentos fletores para o terceiro caso de uma carga pontual.....	100
Tabela 5 - Características geométricas dos elementos.....	103
Tabela 6 – Modelos estudados.....	105



## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas  
DNER – Departamento Nacional de Estradas de Rodagem  
DNIT – Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes  
GAP – Grupo de Análise e Projeto de Estruturas  
IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística  
MEF – Método dos Elementos Finitos  
NBR – Norma Brasileira Registrada  
OAE – Obra de Arte Especial  
UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina  
PPGEC – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Romanos

$a$	Variável
$b$	Variável
$B$	Largura efetiva da carga distribuída
$B'$	Matriz das relações deformações-deslocamentos
$CIA$	Coefficiente de impacto adicional
$CIV$	Coefficiente de impacto vertical
$CNF$	Coefficiente de número de faixas
$D$	Matriz das relações constitutivas.
$e$	Excentricidade
$e_j$	Distância do início da ponte até a carga em estudo
$E$	Módulo de elasticidade
$E_a$	Empuxo ativo
$E_p$	Empuxo passivo
$F_d$	Valor de cálculo das combinações últimas normais
$F_{Gi,k}$	Valor característico das ações permanentes
$F_{Q1,k}$	Valor característico da ação variável principal
$h$	Altura da superfície de contato com o solo
$Hf$	Forças horizontais devido a frenagem e/ou aceleração
$I_i$	Momento de inércia
$L$	Comprimento do tabuleiro entre transversinas apoiadas
$L_A$	Comprimento do tabuleiro no balanço inicial
$L_B$	Comprimento do tabuleiro no balanço final
$L_c$	Comprimento concomitante da carga distribuída
$Liv$	Vão definido conforme o tipo de estrutura
$K$	Coefficiente adimensional

$k_L$	Rigidez média das longarinas
$k_T$	Rigidez média das transversinas
$n$	Número inteiro de faixas de tráfego rodoviário
$N_L$	Número de longarinas
$N_T$	Número de transversinas
$O$	Centro de gravidade da grelha
$P$	Carga concentrada sem majoração
$p$	Carga uniformemente distribuída sem majoração
$p_a$	Pressão estática equivalente
$Q$	Carga concentrada ponderada
$q$	Carga uniformemente distribuída ponderada
$R_i$	Reação
$S_i$	Seção
$T$	Largura do tabuleiro
$v_a$	Velocidade da água
$x_i$	Distância horizontal
$y_i$	Deslocamento vertical

### **Gregos**

$\gamma$	Parâmetro de rigidez
$\gamma_{gi}$	Coefficiente de ponderação das ações permanentes
$\gamma_s$	Peso específico do solo
$\eta_{ej}$	Coefficiente da linha de influência oriundo de uma carga unitária
$\phi$	Ângulo de atrito do solo
$\Psi_{0j}$	Fator de redução das ações variáveis secundárias

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>25</b>
1.1	OBJETIVOS .....	27
1.1.1	<b>Objetivo Geral</b> .....	<b>27</b>
1.1.2	<b>Objetivos Específicos</b> .....	<b>27</b>
1.2	JUSTIFICATIVA.....	28
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>29</b>
2.1	PONTES EM GRELHA .....	30
2.1.1	<b>Definições e Elementos Constituintes</b> .....	<b>30</b>
2.1.2	<b>Considerações Preliminares de Projeto</b> .....	<b>33</b>
2.1.3	<b>Classificação das Pontes em Grelha</b> .....	<b>34</b>
2.2	AÇÕES EM PONTES RODOVIÁRIAS .....	45
2.2.1	<b>Ações Permanentes</b> .....	<b>46</b>
2.2.2	<b>Ações Variáveis</b> .....	<b>51</b>
2.2.3	<b>Ações Excepcionais</b> .....	<b>56</b>
2.2.4	<b>Combinação de ações</b> .....	<b>56</b>
2.3	MÉTODOS DE ANÁLISE DE TABULEIROS.....	58
2.3.1	<b>Métodos simplificados</b> .....	<b>59</b>
2.3.2	<b>Métodos Computacionais</b> .....	<b>69</b>
2.4	PROGRAMAS COMPUTACIONAIS DESENVOLVIDOS.....	89
2.4.1	<b>Software de desenvolvimento XOJO</b> .....	<b>89</b>
2.4.2	<b>GAP-GEL v1</b> .....	<b>91</b>
2.4.3	<b>Estudo de Dados do GAP-GEL v1</b> .....	<b>94</b>
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b> .....	<b>97</b>
3.1	PROCESSO DE ENGESSER-COURBON .....	97
3.1.1	<b>Distribuição Transversal</b> .....	<b>98</b>
3.1.2	<b>Distribuição longitudinal</b> .....	<b>99</b>

3.2	MODELO DE GRELHAS E ANALOGIA DAS GRELHAS .....	100
<b>4</b>	<b>ESTUDOS DE CASOS .....</b>	<b>103</b>
<b>5</b>	<b>ANÁLISE E RESULTADOS .....</b>	<b>107</b>
5.1	MODELO BASE 3L1T-NNN.....	107
<b>5.1.1</b>	<b>Longarina 1.....</b>	<b>109</b>
<b>5.1.2</b>	<b>Longarina 2.....</b>	<b>116</b>
<b>5.1.3</b>	<b>Longarina 3.....</b>	<b>122</b>
5.2	INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE TRANSVERSINAS .....	122
<b>5.2.1</b>	<b>Longarinas de extremidade.....</b>	<b>122</b>
<b>5.2.2</b>	<b>Longarinas central.....</b>	<b>127</b>
5.3	CONTRIBUIÇÃO DA LAJE EM PONTE BI-APOIADA .....	131
<b>5.3.1</b>	<b>Modelo 3L0T-SNN .....</b>	<b>132</b>
<b>5.3.2</b>	<b>Modelo 3L1T-SNN .....</b>	<b>134</b>
5.4	PONTE BI-APIOADAS COM BALANÇOS.....	136
<b>5.4.1</b>	<b>Modelo 3L1T-NSN .....</b>	<b>137</b>
5.5	CONTRIBUIÇÃO DOS CORTINAS EM PONTES BI- APIOADAS COM BALANÇOS.....	140
<b>5.5.1</b>	<b>Modelo 3L1T-NSS.....</b>	<b>141</b>
5.6	CONTRIBUIÇÃO DOS ELEMENTOS DE LAJE EM PONTES BI-APIOADAS COM BALANÇOS.....	144
<b>5.6.1</b>	<b>Modelos 3L0T-NSS e 3L0T-SSS .....</b>	<b>145</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>149</b>
6.1	CONCLUSÕES.....	149
6.2	RECOMENDAÇÕES .....	151
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>153</b>



## 1 INTRODUÇÃO

O notável desenvolvimento das cidades na atualidade estimula a construção de pontes, estradas e túneis, com o objetivo de facilitar o transporte de pessoas e mercadorias entre cidades, estados e países, incentivando a globalização.

Esse desenvolvimento, juntamente ao acelerado avanço tecnológico na área computacional, vem trazendo a evolução das ferramentas de cálculo. Da régua de cálculo, passou-se para as máquinas de calcular comuns e programáveis, computadores de grande porte e chegou-se ao computador pessoal, que efetivamente permitiu o desenvolvimento de métodos computacionais avançados.

Com esse desenvolvimento tornou-se evidente, em áreas como a de engenharia estrutural dedicada ao projeto de obras de arte especiais, a dificuldade para adaptação e acompanhamento de todo avanço tecnológico dos profissionais e das instituições de ensino em nível de graduação. Visto que o profissional de engenharia passa do meio acadêmico ao mercado de trabalho muitas vezes sem o conhecimento de métodos computacionais mais complexos, como o Método dos Elementos Finitos, viu-se a necessidade de desenvolver estudos com a utilização de modelos computacionais mais empregados no meio acadêmico usando o método dos deslocamentos e elementos de barra, visando obter uma melhor compreensão do comportamento das pontes.

Vários métodos para análise estrutural de tabuleiros de pontes foram desenvolvidos. Suas principais diferenças estão na idealização do comportamento estrutural da ponte com modelos matemáticos. A definição do modelamento adotado depende de fatores como: a característica do tabuleiro, a precisão requerida e as ferramentas disponíveis.

Métodos manuais como de Engesser-Courbon, Leonhardt, Guyson-Massonet, Fauchart e modelos usando o método dos deslocamentos são exemplos de métodos adotados pela academia para o ensino de estruturas de obras de arte especiais. São com os métodos manuais como Engesser-Courbon, Leonhardt e Guyson-Massonet que se inicia o entendimento do comportamento de estruturas de pontes. Esses métodos apresentam simplificações, quanto a rigidez das transversinas e quanto a desconsideração da rigidez a torção.

Mas com a utilização de computadores há a possibilidade do emprego de modelos numéricos. Entre eles, estão os modelos mais simples, como o modelo de grelha, que usa método dos deslocamentos, popular devido sua fácil compreensão, utilização e custo relativamente

baixo (SADEGHI; FATHALI, 2012). Mas há também modelos mais sofisticados, que usam o Método dos Elementos Finitos.

O emprego de métodos numéricos pode apresenta resultados mais adequados ao projeto. Quanto mais complexo o modelo, em geral, maior a quantidade de efeitos que podem ser analisados, porém, maior a dificuldade para se conferir o modelo e analisar os resultados. Diante disso, estudos como Ryall, Parke e Harding (2000), Battaglia, Malerba e Sgambi (2003) e Qaqish, Fadda e Akawwi (2008) avaliaram o modelo de grelha juntamente a modelagem por Elementos Finitos e verificaram que uma correta análise utilizando analogia das grelhas fornece resultados de esforços e deslocamentos comparáveis com os obtidos utilizando Métodos dos Elementos Finitos.

Dito isto, é importante salientar que a utilização de modelos mais complexos devem sempre ser acompanhados de uma análise prévia utilizando modelos mais simples, com a finalidade de validação da modelagem proposta. Assim, o trabalho consiste no estudo do modelo manual de Engesser-Courbon e do modelo de grelha, que usa elementos de barra, sendo um modelo simples mas que já permite uma análise mais adequada da estrutura.

A adoção desses dois métodos possui o objetivo de contribuir com o meio acadêmico com ferramentas para auxiliar o entendimento do comportamento da distribuição dos esforços de momentos fletores de uma ponte bi-apoiada com e sem balanços, ajudando novos profissionais na utilização de ferramentas de cálculo mais avançadas e que demandam maior conhecimento da estrutura.

Com essa finalidade, foi feita a implementação computacional de rotinas próprias para análise de casos mais específicos, possibilitando a a visualização dos resultados de forma quase imediata, permitindo um estudo paramétrico pelo usuário.

Neste trabalho, uma ponte bi-apoiada de concreto com e sem balanços é analisada segundo o modelo de Engesser-Courbon e de grelha. Parâmetros como o número de transversinas, a influência dos elementos de laje, bem como a utilização dos encontros no modelamento são verificados. A análise do vigamento principal e secundário foi realizada com o modelo de grelha, enquanto o estudo da contribuição dos elementos de laje no modelamento foi realizado com a analogia da grelha.

São apresentadas neste trabalho, a dedução de expressões analíticas do método de Engesser-Courbon e linhas de influência, bem como as características do modelo de grelhas e analogia das grelhas utilizando o método dos deslocamentos. Com esses procedimentos pode-

se analisar o comportamento da distribuição dos esforços de momentos fletores sobre pontes bi-apoiadas com balanços. Identificando a limitação de cada enfoque, assim como a importância da utilização de modelos mais refinados.

Neste primeiro capítulo estão compreendidos os objetivos e justificativas deste trabalho. O segundo capítulo apresenta os programas desenvolvidos e uma revisão bibliográfica do tema, em que apresenta uma visão geral das pontes em grelha, juntamente às ações em pontes rodoviárias. Há uma apresentação dos métodos simplificados e computacionais de análise de tabuleiros, com ênfase no método de Engesser-Courbon e método das grelhas pelo método dos deslocamentos.

O terceiro capítulo descreve os procedimentos adotados para a obtenção dos esforços solicitantes por meio do método simplificado de Engesser-Courbon e método das grelhas.

O quarto capítulo expõe os exemplos estudados variando o número de transversinas, os elementos de laje e a presença dos balanços e cortinas de uma ponte bi-apoiada com três longarinas. A análise e os resultados são apresentados no capítulo cinco.

## 1.1 OBJETIVOS

Os objetivos geral e específicos estão descritos a seguir.

### 1.1.1 Objetivo Geral

Analisar o comportamento da distribuição dos esforços de momentos fletores pelo método de Engesser-Courbon e pelo modelo de grelha, em pontes bi-apoiadas de concreto armado, com e sem balanços.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Analisar as diferenças entre os métodos de Engesser-Courbon e das grelhas;
- Analisar o comportamento da distribuição dos esforços de momentos fletores com o aumento do número de transversinas;

- Analisar a influência dos balanços nas envoltórias dos esforços em pontes bi-apoiadas com balanços;
- Analisar a contribuição dos cortinas na distribuição dos esforços de pontes bi-apoiadas com balanço;
- Analisar a contribuição das lajes na distribuição dos esforços em pontes bi-apoiadas com três longarinas com e sem balanços.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

A necessidade de maior agilidade, flexibilidade e precisão dos resultados vêm crescendo com a exigência do mercado que está cada vez mais competitivo em decorrência da ampliação do conhecimento na área de estrutura e devido aos avanços tecnológicos e computacionais.

Vários modelos de análise estrutural, utilizando métodos mais sofisticados como o Método dos Elementos Finitos, vem sendo aplicados cada vez mais na prática da engenharia de estruturas. Porém, o profissional de engenharia passa do meio acadêmico ao mercado de trabalho muitas vezes sem o conhecimento adequado desses métodos computacionais mais complexos e sem estar familiarizado com o comportamento das estruturas.

Para isso, estudos com a utilização de modelos computacionais mais simples e empregados no meio acadêmico, como modelo de grelha, visam obter uma melhor compreensão do comportamento das pontes, formando uma consciência básica para a utilização de programas comerciais de análise estrutural, e devem ser incentivados.

A implementação computacional de rotinas próprios para análise de casos mais específicos, possui a vantagem de utilizar procedimentos conhecidos e a possibilidade de visualizar os resultados de forma quase imediata, além de permitir o estudo de variáveis desejadas pelo usuário. A comparação entre processos manuais e numéricos permite a melhor compreensão das hipóteses adotadas em cada um dos procedimentos.

Este estudo limitou-se a análise de pontes bi-apoiadas com e sem balanços, com seções de estudos a cada metro para as análises utilizando o enfoque de Engesser-Courbon e das grelhas.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As pontes ou obras de arte especiais (OAE), como são comumente conhecidas no meio técnico, representam uma das mais belas formas de demonstração da mestria da engenharia.

Desde sempre as pontes exercem certo encanto sobre o ser humano, tanto quando se trata de uma obra primitiva feita de madeira ou de cordas, na forma de vigas, vigas escoradas e vigas armadas simples, como quando se trata de grandes obras atuais apresentando imensos vãos, nos mais variados tipos (LEONHARDT, 1979).

Uma estrutura é chamada de ponte, quando ela é construída com a finalidade de vencer obstáculos dando continuidade à via na qual se insere constituindo um elemento de um sistema viário, vencendo a depressão, sem obstruir o espaço inferior da mesma, sendo esta ocupada pelo leito de um curso d'água (MARCHETTI, 2008).

Na antiguidade as pontes eram feitas de troncos de árvores ou pranchas e eventualmente de pedras, usando suportes simples e traves mestras. A necessidade do homem de ultrapassar obstáculos em busca de alimento ou abrigo deu origem às pontes (LEONHARDT, 1979).

Segundo Bernardo (1980), a origem da construção de pontes refere-se às mais antigas civilizações e os primitivos procurando imitar exemplos da natureza de vencer depressões: uma árvore tombada nas margens de um riacho mostrou a forma de poder transpor o mesmo; as erosões eólicas mostraram aos primitivos o arco como forma adequada para vencer depressões; os cipós que se entrelaçaram de uma árvore a outra nos extremos de um vale deram ao homem a intuição das estruturas pênséis.

Até os dias atuais as técnicas de construção de pontes vem sendo aprimoradas. A exigência do tráfego rodoviário moderno requer não apenas execução de várias pontes, mas também a execução dos mais variados tipos.

As pontes podem apresentar diferentes soluções estruturais, podendo ser em vigas, em arco, suspensa ou de tirantes. É possível ter pontes em variados formatos e tamanhos, dependendo do aspecto desejado, bem como da conveniência de construção da estrutura.

À vista disso, são as pontes constituídas por vigas, forma mais simples de estrutura, o tipo estrutural mais empregado atualmente no Brasil.

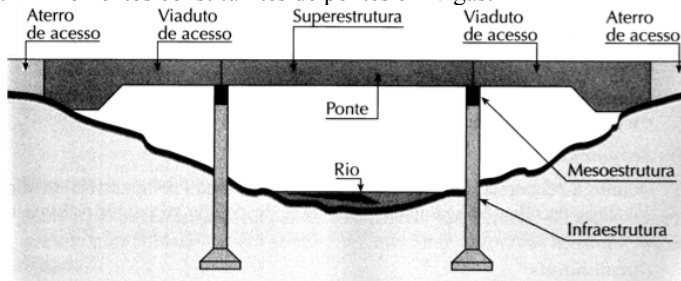
## 2.1 PONTES EM GRELHA

Pontes em grelha, pontes com mais de duas vigas principais, que são as estruturas de pontes mais comuns, se caracterizam por apresentarem vinculações que não transmitem momentos fletores da superestrutura à infraestrutura, transmitindo as cargas aos apoios através de solicitações de compressão.

### 2.1.1 Definições e Elementos Constituintes

Sob o ponto de vista funcional, superestrutura, mesoestrutura e infraestrutura são as três divisões principais de uma ponte. Os elementos constituintes das pontes em grelha estão apresentados na Figura 1.

Figura 1 - Elementos constituintes de pontes em vigas.



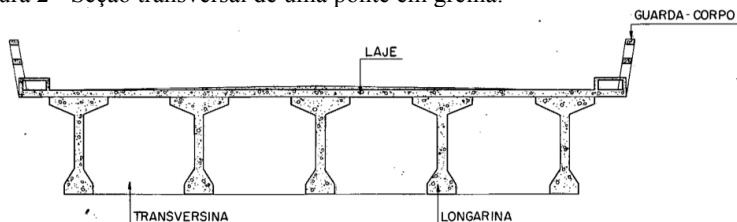
FONTE: Marchetti (2008).

A superestrutura é constituída pelos elementos destinados a vencer o obstáculo a transpor e receber as cargas dos veículos e as outras cargas que atuam sobre a ponte. A superestrutura, denominada de tabuleiro, é composta pela laje do tabuleiro, cuja função é servir de apoio direto às cargas, pelo vigamento principal, longitudinal, denominado longarinas, e pelo vigamento secundário, transversal, denominado transversinas.

A superestrutura de pontes em grelha é constituída do elemento estrutural elementar existente: a viga. As pontes mais simples são as pontes com duas vigas, também conhecida como ponte sobre duas longarinas, não possuindo transversinas. Essa solução estrutural apresenta maior facilidade na determinação da distribuição das cargas. Considerando a estrutura e carregamentos simétricos, os carregamentos serão divididos simetricamente entre as vigas sem que outras partes da ponte influenciem nessa divisão (O'CONNOR, 1976; FREITAS, 1978).

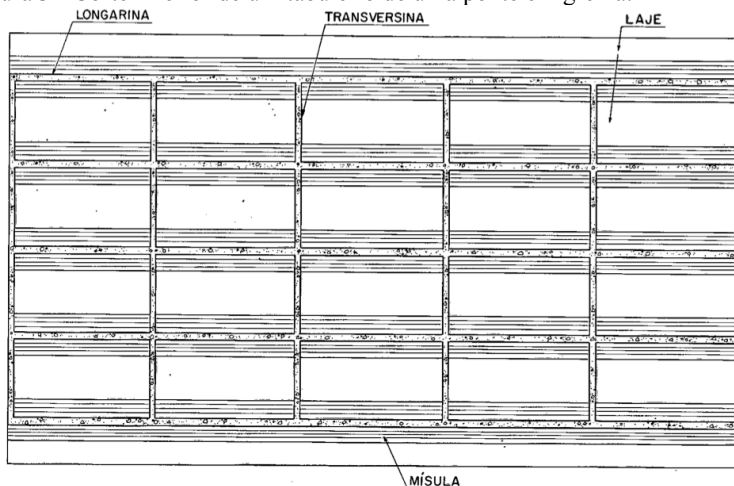
Já as pontes com mais de duas vigas, denominadas vigas múltiplas ou pontes em grelha, são formadas pelo sistema de vigas principais e secundárias. O tabuleiro, constituído por uma laje solidária à grelha, serve de superfície de rolamento e transmite as cargas do tráfego aos elementos da grelha: as transversinas recebem as cargas, regulam a distribuição do carregamento nas vigas principais e realiza o ligamento entre as longarinas; as longarinas vencem os vãos livres entre os apoios e transmitem os esforços para a mesoestrutura. Isso quer dizer que um carregamento atuante em uma determinada viga exerce influência sobre cada uma das outras estruturas da ponte (O'CONNOR, 1976; FREITAS, 1978; HAMBLY, 1991). As Figuras 2 e 3 apresentam a seção transversal de uma ponte em grelha e o corte inferior de um tabuleiro em grelha, respectivamente.

Figura 2 - Seção transversal de uma ponte em grelha.



FONTE: Longo (1979).

Figura 3 - Corte inferior de um tabuleiro de uma ponte em grelha.



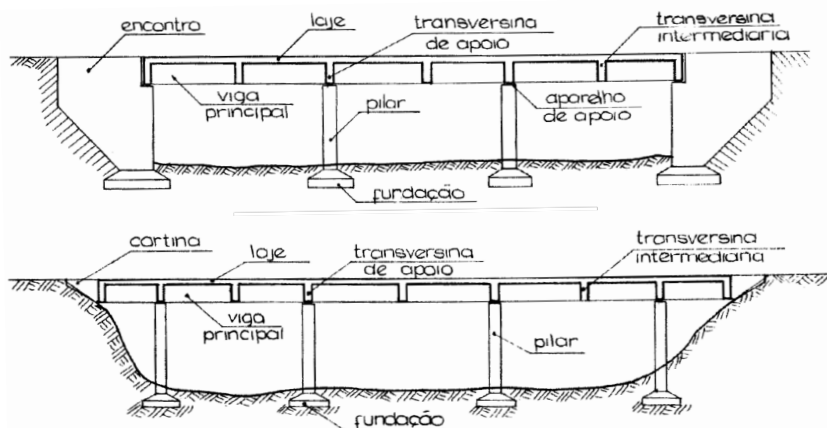
FONTE: Longo (1979).

A mesoestrutura, estrutura intermediária, é constituída pelos pilares, cuja função é transmitir os esforços da superestrutura para a infraestrutura sem obstruir totalmente o obstáculo transposto pela ponte. Esses esforços são transferidos aos pilares por meio de aparelhos de apoio, que são dispositivos encarregados de concentrar os carregamentos provenientes da superestrutura em regiões bem definidas, bem como permitir ou impedir determinadas deformações ou deslocamentos dos elementos estruturais. Essa vinculação entre a superestrutura e os pilares, para pontes em vigas, é de articulação fixa, ou móvel, podendo ser metálicas, de concreto ou até mesmo de borracha, como o policloropreno e o tetraclorofluoretileno (DNIT, 2009).

A infraestrutura é a parte da obra responsável pela transferência ao solo dos esforços recebidos da mesoestrutura por meio das fundações. As fundações podem ser superficiais ou profundas dependendo das características do solo.

Por fim, para os casos em que o aterro de acesso é descarregado sobre a estrutura se faz necessário a construção dos cortinas, os quais tem a função de conter o empuxo provocado pelo aterro, de modo que que esse empuxo não provoque solicitações no restante da ponte. Deve-se observar que há pontes que não apresentam cortinas e a retenção dos aterros nas extremidades é realizada através de cortinas diretamente ligadas à superestrutura (FREITAS, 1978). A Figura 4 apresenta os elementos constituintes de uma ponte, com e sem encontro.

Figura 4 - Elementos constituintes de uma ponte com e sem encontro.



FONTE: Freitas (1978).



## 2.1.2 Considerações Preliminares de Projeto

O projeto de uma estrutura de ponte envolve etapas que devem ser realizadas para que seja alcançado um bom resultado. A etapa inicial é a concepção estrutural, seguida da análise estrutural, dimensionamento e detalhamento (MATTOS, 2001).

- 1) Concepção Estrutural: etapa inicial em que deve ser elaborado um projeto básico, com a finalidade de definir o tipo de estrutura, os materiais a serem empregados, o traçado da ponte, a seção transversal, o perfil longitudinal, o posicionamento dos apoios, os cortinas, entre outros;
- 2) Análise Estrutural: nessa etapa adota-se o modelo estrutural que melhor represente o comportamento da estrutura sob os carregamentos atuantes e faz-se a sua análise, em que se verifica, para cada tipo de ação, os esforços solicitantes, os deslocamentos e as deformações nos elementos estruturais;
- 3) Dimensionamento: após obtidos os esforços na estrutura, faz-se o dimensionamento dos elementos em função dos esforços solicitantes;
- 4) Detalhamento: a estrutura é detalhada para que possa ser executada.

Com base nestas etapas, pode ser verificado a necessidade de dispor de uma grande quantidade de dados para o desenvolvimento do projeto de uma ponte. Segundo Leonhardt (1979), os dados necessários são:

- Planta de situação, contendo indicações das construções existentes e o obstáculo a ser transposto;
- Seção longitudinal ao longo do eixo projetado da ponte, com indicação das características do projeto geométrico;
- Largura da ponte, com indicações da largura das faixas, acostamento, passeios, etc.;
- Condições das fundações, sondagens e eventualmente, relatórios geológicos;
- Condições locais, tais como as condições de acesso, disponibilidade de materiais e serviços, impacto ambiental, agressividade do ambiente, limitações de qualquer natureza;

- Condições meteorológicas e ambientais: no caso de pontes sobre rio, informações sobre o fluxo de água, seção de vazão, níveis máximo da água, altura de lâmina de água, seca, temperaturas médias e extremas, período de congelamento.

A concepção da estrutura está condicionada às ferramentas disponíveis para análise de seu comportamento sob as ações atuantes.

### **2.1.3 Classificação das Pontes em Grelha**

As pontes em grelha podem ser classificadas segundo a natureza do tráfego, o desenvolvimento planimétrico, ao material, sistema estrutural e propriedades das vigas, como perfil longitudinal e seção transversal.

#### **2.1.3.1 Natureza do tráfego**

As pontes, classificadas segundo o tráfego principal, podem ser rodoviárias, ferroviárias, aeroviárias, ou passarelas, para pedestres. Podem também destinar-se ao suporte de tubulações para água, esgoto, gás ou ainda serem mistas, designadas a mais de um tipo de via de comunicação, como as rodoferroviárias, em que o tráfego é misto de veículos e trens.

#### **2.1.3.2 Tipo de material**

Quanto ao material, as pontes podem ser construídas de madeira, alvenaria (pedras, tijolos), concreto armado ou protendido, metálicas ou até mistas, com dois ou mais materiais diferentes. As mistas, são geralmente compostas pela associação do concreto com aço ou madeira.

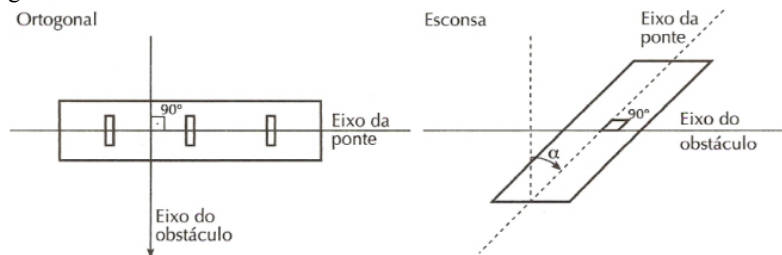
Na atualidade, madeira e alvenarias estão em desuso, utilizadas predominantemente em obras provisórias, decorrente da dificuldade relacionada a durabilidade, resistência e anisotropia.

#### **2.1.3.3 Desenvolvimento planimétrico**

As pontes, tendo-se pôr base o eixo longitudinal da ponte em um plano horizontal, se classificam em pontes retas, ortogonais ou esconsas, como apresentadas na Figura 5, ou curvas, como apresentado na Figura 6.

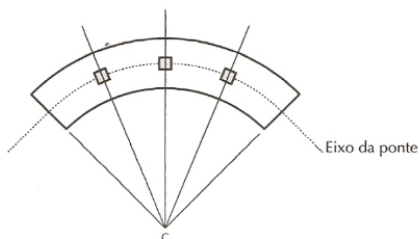
As pontes retas ortogonais apresentam seu eixo com a disposição normal ao eixo do obstáculo transposto, ao passo que as pontes retas esconsas apresentam o seu eixo formando um ângulo  $\alpha$ , diferente de  $90^\circ$ , com o eixo do obstáculo.

Figura 5 - Pontes retas.



FONTE: Marchetti (2008).

Figura 6 - Pontes curvas.



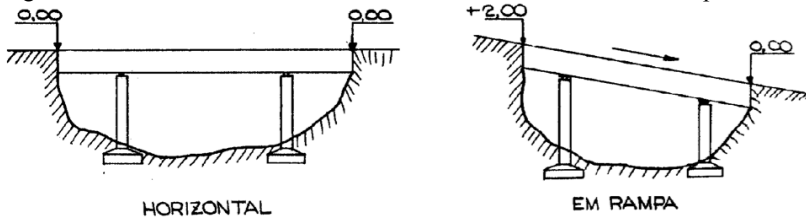
FONTE: Marchetti (2008).

#### 2.1.3.4 Desenvolvimento altimétrico

Considerando a projeção do eixo da ponte em um plano vertical longitudinal, ou seja, a elevação da ponte, pode-se classificá-la como retilíneas, horizontais ou em rampa e curvilíneas, côncavas ou convexas (FREITAS, 1978; MARCHETTI, 2008).

As pontes retilíneas apresentam eixo com projeção reta em um plano vertical longitudinal. Elas podem ser horizontais, quando essa projeção está em nível, ou em rampa, quando a projeção do eixo é inclinada. A Figura 7 apresenta os casos de pontes retilíneas horizontais e em rampa.

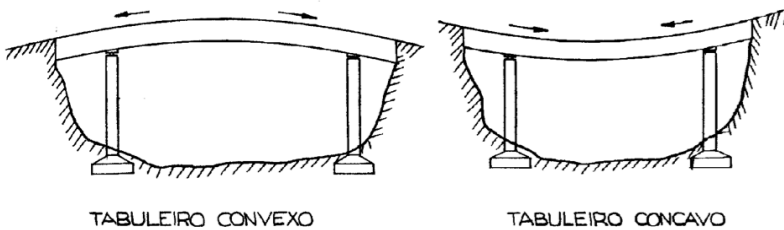
Figura 7 - Desenvolvimento altimétrico retilíneo horizontal e em rampa.



FONTE: Freitas (1978).

Por outro lado, as pontes curvilíneas, que apresentam o eixo com projeção curva em um plano vertical, podem apresentar o tabuleiro com curvatura côncava ou convexa, como ilustrado na Figura 8.

Figura 8 - Desenvolvimento altimétrico curvilíneo convexo e côncavo.



FONTE: Freitas (1978).

### 2.1.3.5 Sistema estrutural longitudinal

O sistema estrutural longitudinal de pontes em vigas pode ser bi-apoiado ou contínuo. Os sistemas mais usuais são os seguintes: vigas simplesmente apoiadas sobre dois apoios com vão único ou sucessão de vãos, vigas simplesmente apoiadas sobre dois apoios em vários vãos com tabuleiro contínuo, vigas sobre dois apoios com balanços, vigas contínuas, com dois ou mais vãos, e vigas Gerber (LEONHARDT, 1979).

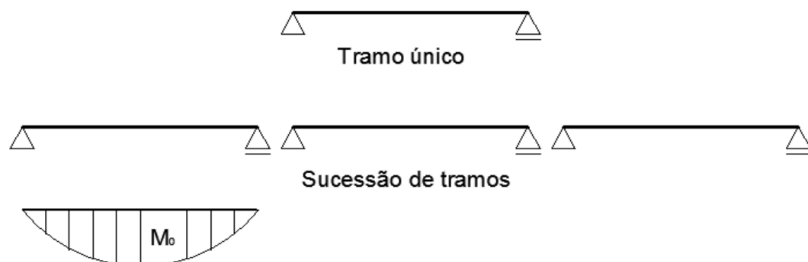
#### 2.1.3.5.1 Vigas simplesmente apoiadas sobre dois apoios

As vigas sobre dois apoios, simplesmente apoiadas, podem ser construídas com um único vão ou em uma sucessão de vãos isostáticos, como apresentados na Figura 9. Um único vão é adotado quando o vão a ser vencido é pequeno e múltiplos vãos seriam inviáveis ou desnecessários (O'BRIEN; KEOGH, 1999).

Quando o vão a ser vencido é demasiado grande para se adotar a solução de vão único, adota-se uma sucessão de vãos formados por uma série de vigas simplesmente apoiadas sobre dois apoios. Esse sistema estrutural exigem juntas em cada extremidade das vigas. Assim, estruturas com sucessão de vãos, apresentam mais juntas e rolamentos que estruturas com vão único (O'BRIEN; KEOGH, 1999).

O dimensionamento deste sistema é realizado para o momento máximo e em razão de sua estrutura base possuir um único vão, existem poucas alternativas de melhorar a distribuição dos esforços, o que torna este tipo estrutural relativamente restrito. (LEONHARDT, 1979).

Figura 9 - Vigas simplesmente apoiadas sobre dois apoios.



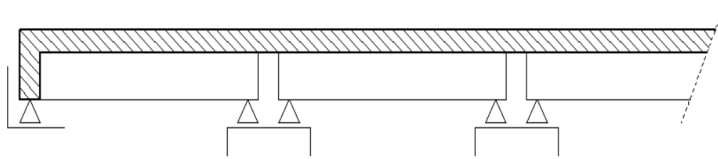
FONTE: Leonhardt (1979).

#### 2.1.3.5.2 *Vigas simplesmente apoiadas sobre dois apoios em vários vãos com tabuleiro contínuo*

Vigas simplesmente apoiadas sobre dois apoios em vários vãos, normalmente são executadas a laje do tabuleiro de forma contínua ao longo de três a quatro vãos, com a finalidade de diminuir o número de juntas e rolamentos na pista, conforme apresentado na Figura 10. Apenas um dos apoios do conjunto de vigas deve ser fixado, todos os outros devem ser deslocáveis longitudinalmente.

Convém salientar que neste tipo estrutural haverá reflexos favoráveis provenientes da distribuição de esforços nos apoios devidos às ações horizontais, como por exemplo, na ação da frenagem (LEONHARDT, 1979).

Figura 10 - Vigas simplesmente apoiadas sobre dois apoios em vários vãos com tabuleiro contínuo.

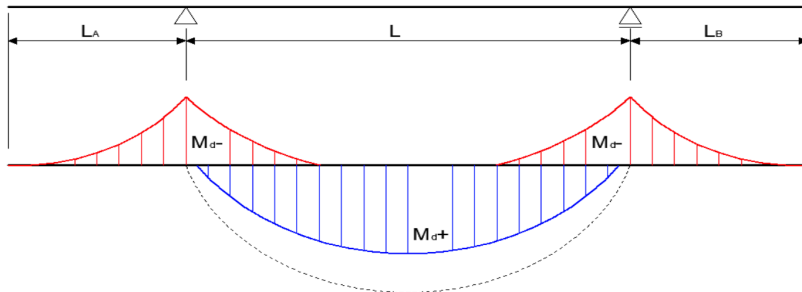


FONTE: Leonhardt (1979).

#### 2.1.3.5.3 Vigas simplesmente apoiada com balanços

Essa solução estrutural possibilita uma melhor distribuição de esforços solicitantes, pois ao introduzir momentos negativos nos apoios haverá uma diminuição dos momentos positivos no meio do vão, conforme apresentado na Figura 11.

Figura 11 – Envoltória de momento fletor a uma carga uniformemente distribuída para vigas simplesmente apoiadas com balanços.

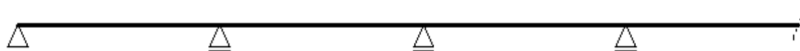


FONTE: O autor.

#### 2.1.3.5.4 Vigas contínuas

As vigas contínuas com dois ou mais vãos, ilustradas na Figura 12, apresentam uma redução significativa nas juntas e nos rolamentos, comparada com os sistemas citados anteriormente (LEONHARDT, 1979).

Figura 12 - Vigas contínuas.

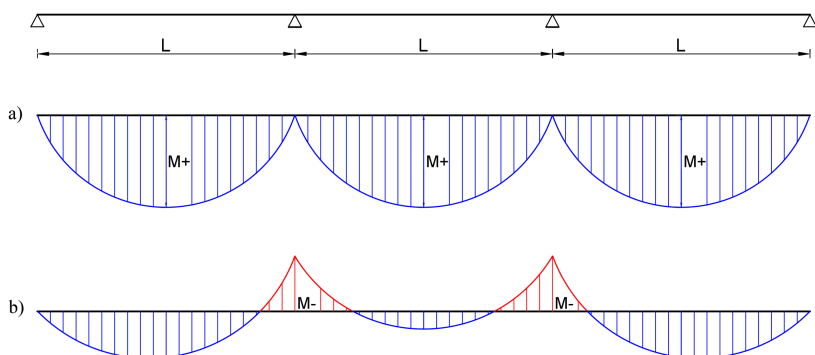


FONTE: Leonhardt (1979).

Isso ocorre pois não é necessária a realização de juntas no tabuleiro a não ser que o comprimento da ponte seja muito grande e, devido aos efeitos relevantes de variação de temperatura, é conveniente introduzir juntas. Como indicação inicial, pode ser adotado espaçamento de 100 m entre as juntas, quando empregados aparelhos de apoio comuns. Já para aparelhos de apoio especiais à base de teflon, o espaçamento entre as juntas pode ser aumentado (LEONHARDT, 1979).

Para vigas contínuas com dois ou mais vãos, é importante salientar que o valor de máximo momento fletor, comparado com as vigas simplesmente apoiadas sobre dois apoios, é menor. A Figura 13 apresenta essa propriedade. (O'BRIEN; KEOGH, 1999).

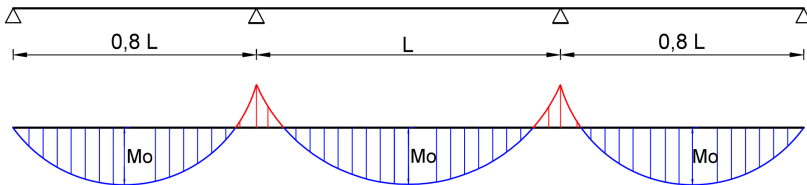
Figura 13 - Diagrama de momento fletor a uma carga uniformemente distribuída para: a) viga simplesmente apoiada sobre dois apoios; b) viga contínua.



FONTE: O autor.

Na Figura 13b) pode ser verificado um maior momento nos vãos de extremidade que nos vãos centrais devido aos momentos nulos nas extremidades. Por isso, quando possível, o vão extremo deve ser cerca de 20% menor do que os vãos intermediários, com a finalidade de se obter uma melhor distribuição dos esforços. Essa distribuição faz com que os momentos fletores nos diversos vãos sejam aproximadamente iguais, como apresentado na Figura 14, podendo assim, obter vigas com maior esbelteza que nos sistemas estruturais de vigas de um só vão (LEONHARDT, 1979).

Figura 14 - Melhor distribuição de momentos fletores em vigas contínuas.



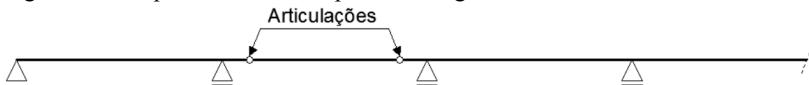
FONTE: O autor.

Cabe destacar que as pontes em vigas contínuas devem ser evitadas em situações nas quais estão previstos deslocamentos de apoio significativos, pois recalques diferenciais irão introduzir esforços adicionais neste tipo de estrutura (LEONHARDT, 1979).

#### 2.1.3.5.5 Vigas Gerber

A estrutura estática da viga Gerber está representada na Figura 15. Esta pode ser entendida como uma viga contínua com articulações dispostas na estrutura de tal forma a tornar o sistema isostático, e como consequência disto, não receberá esforços adicionais devidos aos recalques diferenciais dos apoios.

Figura 15 - Esquema estático de ponte em viga Gerber.



FONTE: Leonhardt (1979).

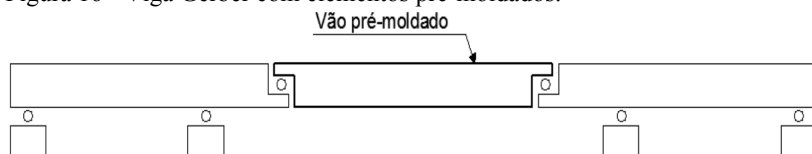
Se essas as articulações forem dispostas nos pontos de momento nulo do diagrama de momentos fletores provocados pela carga permanente, tem-se, o comportamento da viga Gerber, em relação às cargas permanentes, igual ao das vigas contínuas. Assim, para pontes de grandes vãos, em que o peso próprio representa uma grande parcela da totalidade das cargas, as vigas Gerber teriam um comportamento próximo ao das vigas contínuas, sem sofrer a influência danosa dos recalques diferenciais.

As vigas Gerber podem também ser entendidas como uma sucessão de vãos simplesmente apoiados com balanços e de vãos suspensos. Vistas desta maneira, as pontes de vigas Gerber possibilitam alternativas construtivas bastante interessantes. A Figura 16 apresenta



um esquema de viga Gerber em que os vãos laterais podem ser moldados no local, ou mesmo pré-moldados e o tramo central é pré-moldado.

Figura 16 - Viga Gerber com elementos pré-moldados.



FONTE: Leonhardt (1979).

Segundo Leonhardt (1979), é imperioso destacar que se por um lado as juntas (dentes Gerber) acarretam as vantagens já mencionadas, por outro, elas representam trechos em que devem ser tomados cuidados dobrados, tanto no detalhamento da armadura como na execução, em razão da grande redução da seção resistente ao esforço cortante que será transmitido pela articulação.

#### 2.1.3.6 Perfil longitudinal das vigas

Nas pontes em vigas, as longarinas podem possuir altura constante ou variável. A variação da altura das vigas principais ao longo do vão pode ocorrer de diversas maneiras a fim de melhorar o efeito de vãos diferentes, o aspecto estético, a variação dos momentos fletores, entre outros fatores. Dessa forma, para diferentes sistemas estruturais, há configurações mais adequadas.

Para as pontes em vigas de um só vão simplesmente apoiadas sem balanços, as quais o bordo inferior se desenvolve paralelamente à linha do greide e a altura estrutural é constante, a melhor solução é a de banzos paralelos, como apresentado na Figura 17. Essa solução para a forma das vigas também se aplica quando o greide for inclinado (i.e. declive) ou quando estiver em uma curva de concordância vertical, como apresentado na Figura 18.

Figura 17 - Banzos paralelos.



FONTE: Leonhardt (1979).

Figura 18 - Banzos paralelos em declive.



FONTE: Leonhardt (1979).

A forma de banzo paralelos é também recomendado por Leonhardt (1979) para o sistema estrutural de vigas contínuas quando os vãos são aproximadamente iguais. Isso é válido também quando a estrada apresenta desenvolvimento altimétrico curvilíneo convexo, conforme apresentado na Figura 19.

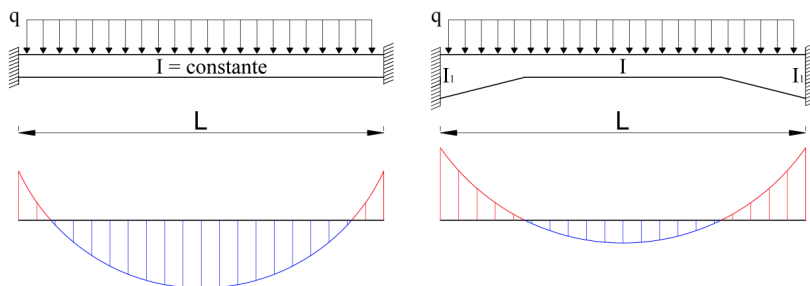
Figura 19 - Banzos paralelos em curva vertical convexa.



FONTE: Leonhardt (1979).

A utilização de vigas de alturas variáveis é uma maneira de aprimorar a distribuição de momentos fletores. O aumento do momento de inércia das seções junto aos apoios implica no aumento do momento fletor negativo nessas seções, e conseqüentemente, na redução do momento fletor positivo nas seções do meio dos vãos, o que possibilita a redução da altura das seções no meio do vão. A Figura 20 apresenta as distribuições de momentos fletores em uma viga bi-engastada com momento de inércia constante, e com momento de inércia variável (maior nas extremidades), onde pode ser observado a redução significativa do momento fletor no meio do vão da viga com inércia variável.

Figura 20 - Distribuição de momentos fletores em vigas biengastadas de altura constante e variável.



FONTE: O autor.

Essa solução é bastante aplicada para pontes fluviais, em que comumente se adota a solução de ponte em viga de três vãos com um grande vão central, pois com a redução da altura das seções das vigas no meio dos vãos, o atendimento dos gabaritos relativos à transposição de obstáculos é facilmente atendido.

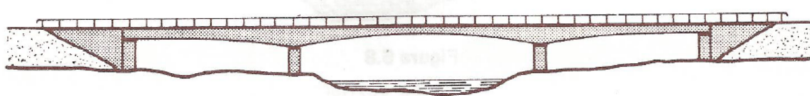
As Figuras 21 e 22 apresentam as alternativas da variação da altura para pontes em viga contínua: variação da altura com mísula, e variação da altura ao longo de todo o vão, respectivamente.

Figura 21 - Variação da altura com mísulas nas vigas.



FONTE: Leonhardt (1979).

Figura 22 - Variação da altura sem mísula nas vigas.



FONTE: Leonhardt (1979).

### 2.1.3.7 Sistema estrutural transversal

O sistema estrutural transversal ou seção transversal corresponde, graficamente, a um corte perpendicular ao sentido longitudinal da ponte. As pontes em grelha podem apresentar mais de duas vigas principais. As vigas podem ser em seção transversal T ou celular, porém as com seção T são as mais usuais.

Os fatores que influenciam na escolha da seção transversal, segundo Leonhardt (1979), são apresentados a seguir:

- Tamanho do vão a ser vencido, atribuído ao sistema estrutural adotado;
- Altura estrutural disponível ou índice de esbeltez desejado;
- Processo de construção, os meios disponíveis, equipamentos e outros fatores circunstanciais;
- Economia do sistema estrutural adotado;
- Relação entre carga móvel e peso próprio.

A seção da viga T é uma estrutura com seção transversal em forma de “T”, cuja parte superior, denominada mesa, serve como flange ou elemento de compressão na resistência aos esforços de compressão e a alma, parte inferior da viga, localizada abaixo do flange de compressão, serve para resistir ao cisalhamento e proporcionar uma maior separação das forças de flexão (SHREEDHAR; MAMADAPUR, 2012).

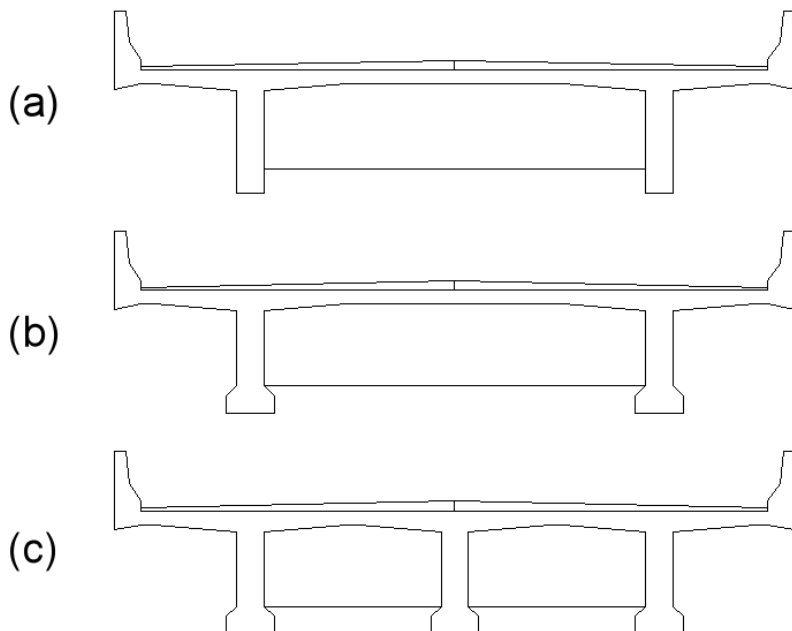
A viga de seção T é a forma que melhor aproveita a distribuição de tensões ao longo da seção transversal da estrutura. Seu formato permite absorver maiores momentos fletores positivos, pois a zona comprimida é formada pela mesa superior, sendo assim uma forma de seção transversal muito apropriada para concreto armado e uso de protensão parcial. A viga T é obtida utilizando-se a laje do tabuleiro como mesa superior e a nervura como alma. (LEONHARDT, 1979).

A alma, quando solicitada de grandes momentos fletores pode ser adotado um alargamento da parte inferior, podendo assim ser distribuída a armadura de forma a aumentar a distância da linha neutra até o centro de massa da armadura longitudinal, porém, este procedimento pode dificultar a execução quando moldado *in situ*, sendo por isto indicado somente quando a altura da nervura ultrapassar 2 m (LEONHARDT, 1979).

Quando a ponte é executada em concreto moldado *in situ* o número de vigas (i.e. longarinas) mais indicado é dois, visto que um número maior de vigas conduz a uma maior área de fôrmas. Para execução com elementos pré-moldados, que vencem todo o vão, procura-se aumentar o número das vigas com o intuito de reduzir o peso dos elementos (LEONHARDT, 1979).

A Figura 23 apresenta os tipos representativos de seções transversais das pontes em vigas em seção T moldadas no local.

Figura 23 - Seções transversais de pontes em vigas T: a) Ponte em duas vigas; b) Ponte em duas vigas com alargamento da parte inferior; c) Ponte em várias vigas.



FONTE: O autor.

## 2.2 AÇÕES EM PONTES RODOVIÁRIAS

A NBR 8681 (2003), norma que estabelece as definições e os critérios de quantificação das ações, define ações como as causas que provocam o aparecimento de esforços ou deformações nas estruturas. Porém, na prática, esses esforços e deformações ocasionadas pelas ações são consideradas como as próprias ações.

Segundo a referida norma, as ações classificam-se conforme a sua variabilidade no tempo, podendo ser permanentes, variáveis ou excepcionais. No projeto de pontes, as normas NBR 7187 (2003) e NBR 7188 (2013) prescrevem como estas ações devem ser consideradas.

## 2.2.1 Ações Permanentes

Ações permanentes são ações cuja intensidade pode ser considerada como constante ao longo da vida útil da construção. Também são consideradas permanentes as que crescem no tempo, tendendo a um valor limite constante (NBR 7187, 2003).

As ações permanentes compreendem as cargas provenientes do peso próprio dos elementos estruturais, os elementos que estão permanentemente fixos à estrutura da ponte, tais como o peso da pavimentação, dos revestimentos, das barreiras, dos guarda-rodas, dos guarda-corpos, dos dispositivos de sinalização, dos empuxos de terra e água, da força de protensão e das deformações impostas, provocadas por fluência e retração do concreto, e por deslocamentos de apoios (NBR 7187, 2003; NBR 8681, 2003).

### 2.2.1.1 Peso próprio dos elementos estruturais

O peso próprio dos elementos estruturais, em pontes de concreto armado ou protendido, é determinado pelo produto do peso específico pela unidade de volume, definido a partir de um pré-dimensionamento da ponte.

Na avaliação das cargas devidas ao peso próprio dos elementos estruturais, o peso específico deve ser tomado no mínimo igual a 22 kN/m<sup>3</sup> para o concreto simples, 25 kN/m<sup>3</sup> para o concreto armado (NBR 7187, 2003).

### 2.2.1.2 Peso próprio dos elementos não estruturais

Elementos não estruturais de uma ponte consistem em pavimentação, barreiras, guarda-rodas e guarda-corpos.

#### 2.2.1.2.1 Pavimentação

A pavimentação, estrutura de pontes rodoviárias, possui a característica de mudar ao longo da vida útil da estrutura da ponte, consequência do recapeamento.

Assim, na avaliação da carga devida ao peso da pavimentação, deve ser adotado para peso específico do material empregado o valor mínimo de 24 kN/m<sup>3</sup>, prevendo-se uma carga adicional de 2 kN/m<sup>2</sup> para atender a um possível recapeamento. A consideração desta carga

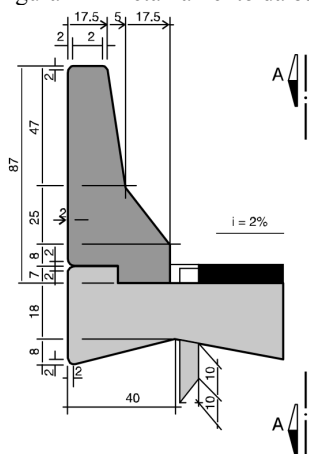
adicional pode ser dispensada, a critério do proprietário da obra, no caso de pontes de grandes vãos (NBR 7187, 2003).

### 2.2.1.2.2 Elementos de proteção

As barreiras, guarda-rodas e guarda-corpo são elementos de proteção dispostos sobre a ponte e são considerados sobrecargas fixas.

As barreiras são rígidas e devem possuir altura, capacidade resistente e perfil interno adequado para impedir a queda de veículos desgovernados, absorver choques laterais e propiciar sua recondução à faixa de tráfego. Por isso, esse dispositivo costuma ser de concreto armado. O perfil mais utilizado, segundo DNIT 122 (2009) é o tipo New Jersey, apresentado na Figura 24.

Figura 24 - Detalhamento da barreira tipo New Jersey.



FONTE: DNER-ES 335 (1997).

Os guarda-rodas são balizadores de tráfego e limitação do trecho pavimentado. Atualmente são pouco utilizados, pois possuem altura reduzida, cerca de 30 cm, oferecendo pouca proteção (DNIT 122, 2009).

Os guarda-corpos são estruturas destinadas a assegurar a proteção para pedestres e ciclistas, no caso da existência de passeios laterais. Os passeios são posicionados entre a barreira e o guarda-corpo. Os guarda-corpos podem ser constituídos de elementos pré-moldados de concreto ou de módulos metálicos, sendo indicado a escolha de elementos econômicos, que proporcionam leveza a estrutura e evitem roubos (DNIT 122, 2009).

### 2.2.1.3 Empuxo de terra e água

Elementos naturais como a terra e a água exercem pressões sobre a estrutura da ponte, originando importantes solicitações que devem ser consideradas no dimensionamento da obra.

#### 2.2.1.3.1 Empuxo de terra

Entende-se por empuxo de terra a ação produzida pelo maciço terroso sobre as obras com ele em contato. O empuxo de terra nas estruturas é determinado de acordo com os princípios da mecânica dos solos em função de sua natureza, i.e. ativo, passivo ou de repouso; das características do terreno; assim como das inclinações dos taludes e dos paramentos. O empuxo de terra é necessário para o cálculo de elementos da infraestrutura, pilares de encontro e de cortinas.

Com a finalidade de simplificar os cálculos supõe-se que o terreno não possui coesão e que não há atrito entre o terreno e a estrutura. Esta simplificação pode ser adotada desde que as solicitações determinadas estejam a favor da segurança. (NBR 7187, 2003). Obtém-se o empuxo de terra empregando a fórmula de Rankine, apresentada na Equação 1:

$$E_a = \gamma_s \cdot h \cdot \tan^2 \left( 45 - \frac{\phi}{2} \right) \quad (1)$$

onde:

- $E_a$  é o empuxo ativo do solo;
- $\gamma_s$  é o peso específico do solo;
- $h$  é a altura da superfície de contato com o solo;
- $\phi$  é o ângulo de atrito interno do solo.

Segundo a NBR 7187 (2003), o peso específico do solo úmido deve ser considerado no mínimo igual a 18 kN/m<sup>3</sup> e o ângulo de atrito interno no máximo igual a 30°. O empuxo ativo e de repouso devem ser considerados nas situações mais desfavoráveis.

Quando a superestrutura tem a função de conter os aterros de acesso, a ação do empuxo de terra, proveniente desses aterros pode ser considerada simultaneamente em ambas as extremidades no caso em que não existam juntas intermediárias do tabuleiro e seja feita a verificação para a hipótese da estrutura em construção e quando existir a ação em



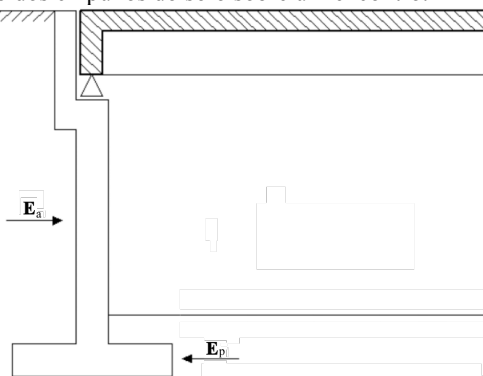
apenas uma das extremidades, agindo isoladamente (sem outras forças horizontais). Nos casos de tabuleiro em curva ou esconço, deve ser considerada a atuação simultânea dos empuxos em ambas as extremidades, quando for mais desfavorável (NBR 7187, 2003).

Pode ser prescindida a consideração da ação do empuxo de terra sobre os elementos estruturais implantados em terraplenos horizontais de aterros previamente executados, desde que sejam adotadas precauções especiais no projeto e na execução tais como: compactação adequada, inclinações convenientes dos taludes, distâncias mínimas dos elementos às bordas do aterro, terreno de fundação com suficiente capacidade de suporte, entre outras (NBR 7187, 2003).

A atuação estabilizante do empuxo passivo só pode ser levada em conta quando sua ocorrência puder ser garantida ao longo de toda a vida útil da obra.

No esquema indicado na Figura 25 há um exemplo em que o empuxo passivo ( $E_p$ ) não deve ser considerado, pois existe a possibilidade do solo ser retirado (NBR 7187, 2003).

Figura 25 - Atuação dos empuxos do solo sobre um encontro.



FONTE: O autor

### 2.2.1.3.2 Empuxo da água

As solicitações que a água exerce, empuxo da água e sub-pressão, devem ser consideradas nas situações mais desfavoráveis para a verificação dos estados limites. Aplica-se importância aos estudo dos níveis máximo e mínimo dos cursos d'água e do lençol freático (NBR 7187, 2003).

A NBR 7187 (2003) alude a obrigação da consideração da

hipótese de submersão na avaliação do peso no caso de utilização de contrapeso enterrado. Apenas pode ser desconsiderada se comprovada a impossibilidade de ocorrência dessa situação.

A fim de evitar situações de pressão hidrostática, em muros de arrimo deve ser prevista, em toda a altura da estrutura, uma camada filtrante contínua, na face em contato com o solo contido, associada a um sistema de drenos. Caso não haja essa drenagem, deve ser considerado nos cálculos o empuxo d'água resultante (NBR 7187, 2003).

#### 2.2.1.4 Força de protensão

De acordo com a NBR 6118 (2014), a ação da protensão deve ser considerada em todas as estruturas protendidas, incluindo, além dos elementos protendidos propriamente ditos, aqueles que sofrem a ação indireta da protensão.

O valor da força de protensão deve ser calculado segundo a NBR 6118 (2014).

#### 2.2.1.5 Deformações impostas

Deformações internas como deslocamentos de fundações, fluência e retração, são resultado de ações indiretas, denominadas deformações impostas (NBR 8681, 2003).

##### 2.2.1.5.1 *Deslocamentos de fundações*

Se a natureza do terreno e o tipo de fundações permitirem a ocorrência de deslocamentos que induzam efeitos apreciáveis na estrutura, como por exemplo, obras situadas em encostas sujeitas a deslizamentos lentos, as deformações impostas decorrentes devem ser levadas em consideração no projeto (NBR 7187, 2003).

##### 2.2.1.5.2 *Fluência*

A fluência é o aumento de uma deformação com o tempo sob a ação de cargas de longa duração, acarretando acréscimo de deformação nas estruturas de concreto armado ou protendido. Este acréscimo de deformação deve ser considerado na verificação do estado limite de deformações excessivas. Estas considerações devem ser realizadas segundo a NBR 6118 (2014).

### 2.2.1.5.3 Retração

A retração provoca o aparecimento de solicitações quando as deformações impostas pela retração da estrutura são impedidas. Isso ocorre em pontes com o sistema estrutural longitudinal hiperestático.

Para pontes com sistemas estruturais longitudinais isostáticos, a deformação imposta pela retração deve ser considerada no projeto dos aparelhos de apoio, a fim de não ocorrer esforços adicionais.

Segundo a NBR 6118 (2014), para os casos de obras em concreto armado, em função da restrição à retração do concreto, imposta pela armadura, considera-se a deformação específica por retração igual a  $-15 \times 10^{-5}$ . Esse valor admite elementos estruturais de dimensões usuais, entre 10 cm e 100 cm sujeitos a umidade ambiente não inferior a 75%.

## 2.2.2 Ações Variáveis

Consideram-se como ações variáveis as cargas acidentais das construções (NBR 8681, 2003).

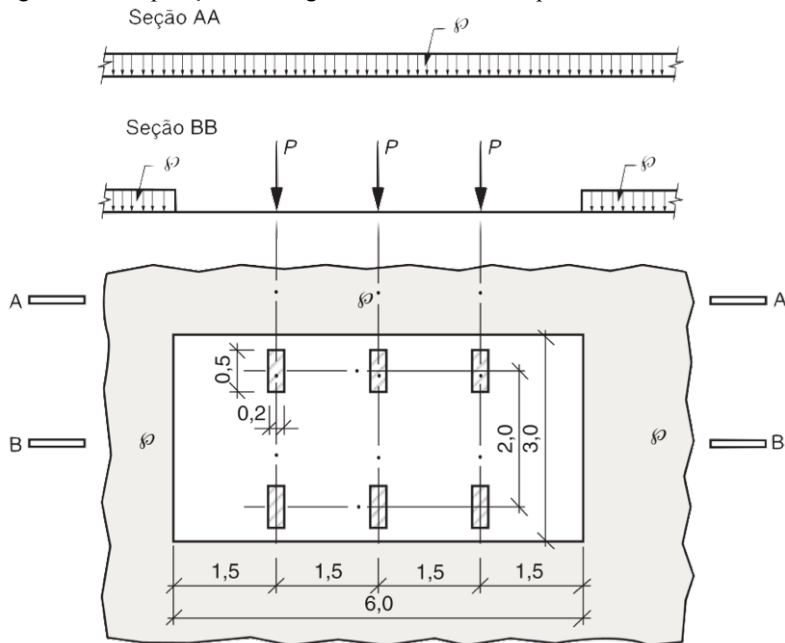
As ações verticais de caráter transitório que devem ser consideradas em projetos de pontes são as cargas móveis e as cargas de construção, enquanto as ações horizontais de caráter transitório a serem consideradas são a força centrífuga, a força devido a frenagem e/ou aceleração, as cargas de vento, o empuxo de terra provocado por cargas móveis, a pressão da água em movimento e as variações de temperatura (NBR 7187, 2003).

### 2.2.2.1 Cargas móveis

As cargas móveis, cargas que possuem posição variável sobre o tabuleiro da ponte, são fixadas pela norma NBR 7188 (2013).

Segundo a NBR 7188 (2013), as cargas móveis de uma ponte rodoviária são constituídas por um veículo e cargas uniformemente distribuídas. As cargas móveis, sem majoração, são representadas por cargas concentradas ( $P$ ) e cargas uniformemente distribuídas ( $p$ ) aplicadas no nível do pavimento. A área ocupada pelo veículo é considerada retangular, com três metros de largura e seis de comprimento, como apresentadas na Figura 26.

Figura 26 - Disposição das cargas estáticas do trem tipo rodoviário brasileiro.



FONTE: NBR 7188 (2013).

A carga móvel rodoviária padrão, TB-450, é definida pelo veículo tipo com peso de 450 kN, com seis rodas, resultando em  $P = 75$  kN, três eixos de carga afastados entre si em 1,5 m, com área de  $18 \text{ m}^2$ , circundada por uma carga uniformemente distribuída constante  $p = 5 \text{ kN/m}^2$  (NBR 7188, 2013).

Para obras em estradas vicinais municipais de uma faixa e obras particulares, pode ser adotado uma carga móvel rodoviária de no mínimo igual ao tipo TB-240, que possui veículo de 240 kN, com seis rodas, resultando em  $P = 40$  kN, com três eixos de cargas afastados entre si de 1,5 m, com área de ocupação de  $18 \text{ m}^2$ , circundada por uma carga uniformemente distribuída constante  $p = 4 \text{ kN/m}^2$  (NBR 7188, 2013).

Esse carregamento assume posição qualquer por toda a pista rodoviária, com as rodas na posição mais desfavorável, incluindo acostamento e faixas de segurança e o carregamento distribuído aplicado na posição mais desfavorável, sendo independente das faixas rodoviárias. A carga concentrada é admitida com uma distribuição espacial no elemento estrutural a partir de sua superfície de contato em um ângulo de  $45^\circ$ .

Concomitante com essa carga móvel rodoviária, nos passeios para pedestres, deve ser adotado uma carga uniformemente distribuída de  $3 \text{ kN/m}^2$  na posição mais desfavorável. Essa ação nos passeios não são ponderados, diferentemente das cargas móveis (NRB 7188, 2013).

Para cálculo, segundo a NBR 7188 (2013), a carga móvel deve ser ponderada por três diferentes coeficientes: coeficiente de impacto vertical (CIV), número de faixas (CNF) e impacto adicional (CIA). Assim, as cargas  $P$  e  $p$  ponderadas são denominadas de  $Q$  e  $q$ , respectivamente, apresentadas na equação 2 e 3.

$$Q = P \cdot CIV \cdot CNF \cdot CIA \quad (2)$$

$$q = p \cdot CIV \cdot CNF \cdot CIA \quad (3)$$

O coeficiente de impacto vertical, definido pela NBR 7188 (2013), é em função do tamanho do vão da estrutura. Para estruturas com vão menor que 10 m, CIV é igual a 1,35, enquanto para estruturas com vão entre 10 e 200 m, o CIV é definido pela equação 4.

$$CIV = 1 + 1,06 \cdot \left( \frac{20}{Liv + 50} \right) \quad (4)$$

Onde,  $Liv$  é o vão, definido conforme o tipo de estrutura. Para estruturas de vão isostático,  $Liv$  é a média aritmética dos vãos nos casos de vãos contínuos, já para estruturas em balanço,  $Liv$  é o comprimento do próprio balanço.

O coeficiente de número de faixas ajusta o valor das cargas móveis em função no número inteiro de faixas de tráfego rodoviário ( $n$ ) a serem carregadas sobre o tabuleiro transversalmente contínuo da ponte. A equação 5 apresenta a fórmula para cálculo do CNF.

$$CNF = 1 - 0,05 \cdot (n - 2) > 0,9 \quad (5)$$

Convém salientar que acostamentos e faixas de segurança não são faixas de tráfego da rodovia e este coeficiente, segundo a NBR 7188 (2013), não se aplica ao dimensionamento de elementos estruturais transversais ao sentido do tráfego, que é o caso das transversinas e lajes.

O coeficiente de impacto adicional tem a função de majorar as cargas móveis nas regiões de juntas estruturais e extremidades da obra. Esse coeficiente deve ser considerado para elementos estruturais a uma distância horizontal normal à junta, inferior a 5 m para cada lado dessa

junta ou descontinuidade estrutural. O CIA assume os valores de 1,25 para obras em concreto ou mistas e 1,15 para obras em aço (NBR 7188, 2013).

Há ainda o transporte de cargas especiais, que a critério do órgão com jurisdição sobre a rodovia, as obras a serem implantadas devem ser verificadas para esse carregamento conforme o Anexo A da NBR 7188 (2013).

Vale ressaltar que estas cargas são fictícias, e procuram levar em consideração a ação de multidão e de outros veículos mais leves ou mais afastados das zonas onde as cargas produzem maiores esforços solicitantes, com um esquema de carregamento mais cômodo para o cálculo.

#### 2.2.2.2 Cargas de construção

As ações das cargas que ocorrem durante o período da construção, devem ser consideradas no projeto estrutural de uma ponte. Cabe ressaltar aquelas devido ao peso de equipamentos e estruturas auxiliares, à montagem e lançamento de elementos estruturais, além dos seus efeito em cada etapa executiva da obra (NBR 7187, 2003).

#### 2.2.2.3 Cargas de vento

Para pontes, segundo a NBR7187 (2003), as ações provenientes das cargas do vento devem ser consideradas de acordo com a NBR 6123 (1988).

A pressão do vento depende da sua localização geográfica, da situação topográfica da obra, forma da superfície e da sua posição quanto à direção do vento, entre outros aspectos. Pode ser verificada que estruturas com maior altitude apresentam maior influência dessa carga horizontal NBR 6123 (1988).

#### 2.2.2.4 Força centrífuga

Nas pontes rodoviárias em curva, a força centrífuga normal ao seu eixo deve ser considerada atuando na superfície de rolamento, devido ao atrito entre as rodas e o pavimento. As forças horizontais provenientes da força centrífuga nas obras em curva horizontal são um percentual da carga do veículo tipo aplicado sobre o tabuleiro (NBR 7187, 2003; NBR 7188, 2013).

Admite-se a forças horizontais, provenientes da força centrífuga, uniformemente distribuída ao longo do eixo da estrutura, e a intensidade é avaliada de maneira aproximada de acordo com as prescrições da norma NBR 7187 (2003) e NBR 7188 (2013). Nestas normas essa força é considerada em função do trem tipo de tráfego e do raio de curvatura da ponte.

#### 2.2.2.5 Força de frenagem e/ou aceleração

As forças horizontais devido à frenagem e/ou aceleração, definidas segundo a NBR 7188 (2013), aplicadas no nível do pavimento, são determinadas a partir de um percentual da carga característica dos veículos aplicados sobre o tabuleiro, na posição mais desfavorável, simultaneamente com a carga  $H_f$ , definida pela equação 6:

$$H_f = 0,25 \cdot B \cdot L_c \cdot CNF \geq 135 \text{ kN} \quad (6)$$

onde:

- $B$  é a largura efetiva da carga distribuída  $p$ ;
- $L_c$  é o comprimento concomitante da carga distribuída.

#### 2.2.2.6 Pressão da água em movimento

O movimento da água resulta em pressão da água sobre pilares e elementos e fundação, esse efeito está descrito na NBR 7187 (2003). A pressão da água em movimento pode ser determinada através da equação 7.

$$p_a = k \cdot v_a^2 \quad (7)$$

Onde:  $p_a$  é a pressão estática equivalente, em  $\text{kN/m}^2$ ,  $v_a$  é a velocidade da água, em  $\text{m/s}$  e  $k$  é um coeficiente dimensional, cujo valor é 0,34 para elementos com seção circular e para seção retangular,  $k$  é função do ângulo de incidência do movimento das águas em relação ao plano da face do elemento, conforme descrito na NBR 7187 (2003).

A consideração da pressão de água estática equivalente se dá sobre uma área igual à da projeção do elemento em um plano perpendicular à direção do movimento da água (NBR 7187, 2003).

### 2.2.2.7 Variação de temperatura

A variação da temperatura nas estruturas de concreto é descrita na NBR 6118 (2014). Quando causada globalmente pela variação da temperatura da atmosfera e pela insolação direta, essa variação é considerada uniforme. Esse efeito depende do local de implantação da construção e das dimensões dos elementos estruturais que a compõem.

### 2.2.3 Ações Excepcionais

As ações excepcionais são ações que possuem duração extremamente curta e muito baixa probabilidade de ocorrência durante a vida da construção. Nas estruturas de pontes, compreendem as colisões de veículos, explosões, fenômenos naturais pouco frequentes, como ventos, enchentes e sismos (NBR 7187, 2003; NBR 8681, 2003; NBR 7188, 2013).

Os danos por colisões, além de serem evitados por meio de dispositivos de proteção, considera cargas horizontais atuando nas estruturas como medida de mitigar eventuais impactos.

Nos pilares situados junto a faixas rodoviárias devem ser verificados para uma sollicitação horizontal de colisão de 1000 kN na direção do tráfego e 500 kN perpendicular ao tráfego. No tabuleiro, a ação é aplicada em um comprimento de 50 cm, no topo do elemento, com distribuição espacial a 45°. Como também são consideradas cargas adicionais para o dimensionamento de diversos outros elementos de proteção da ponte (NBR7188, 2013).

Para outras ações excepcionais, segundo a NBR 7187 (2003), a verificação da segurança deve ser realizada a critério do proprietário. Faz-se importante salientar que a verificação no dimensionamento é realizado apenas para o estado limite último.

### 2.2.4 Combinação de ações

As ações, para a verificação da segurança, devem ser combinadas, com a aplicação de coeficientes que consideram a probabilidade de ocorrência simultânea. As combinações são realizadas a fim de se obter os efeitos mais desfavoráveis na estrutura.

A segurança da estrutura deve ser verificada segundo possíveis estados em que a estrutura apresenta desempenho inadequado às finalidades da construção, estados limites, definidos como último e de serviço, especificado na NBR 8681 (2003).



O estado limite último é o estado que a estrutura fica comprometida, sendo necessário a paralização do uso da construção, enquanto o estado limite de serviço ocorre quando a estrutura apresenta condições que não respeitam as condições especificadas para uso normal da construção (NBR 8681, 2003).

As combinações das ações para o estado limite último se divide em combinação última normal, especiais ou de construção e excepcionais, enquanto para os estados limites de serviço, se dividem em curta, média e longa duração.

A aplicação desses estados limites ocorre em três situações de projeto que podem ser consideradas: duradouras, transitórias e excepcionais.

Nas situações duradouras, são verificados os estados limites últimos, nas condições normais de carregamento, e de utilização, para longa e média duração. Nas situações transitórias, ou seja, quando a duração das ações for menor que o período de vida da construção, se verifica o estado limite último especiais ou de construção e o estado limite de serviço de curta duração. Já para as situações excepcionais, em que as ações possuem duração extremamente curta, são verificadas apenas para os estados limites últimos excepcionais (NBR 8681, 2003).

As ações consideradas nesse trabalho são as referentes às condições normais de carregamentos, ou seja, para situações duradouras, em que o carregamento é admitido podendo ter duração igual ao período de referência da estrutura.

#### 2.2.4.1 Estado limite último – Combinação última normal

As combinações últimas das ações normais, descritas na NBR 8681 (2003), consideram o seguintes critérios:

- a) As ações permanentes devem figurar em todas as combinações de ações;
- b) Em cada combinação última, uma das ações variáveis é considerada principal, atuando com o seu valor característico ( $F_k$ ) e as demais ações variáveis são consideradas como secundárias, admitindo-se que atuem com seus valores reduzidos pelo fator  $\Psi_0$ .

Desta forma, o valor de cálculo das combinações últimas normais ( $F_d$ ) é dado pela equação 8:

$$F_d = \sum_{i=1}^m \gamma_{gi} \cdot F_{Gi,k} + \gamma_q \left[ F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n \Psi_{0j} \cdot F_{Qj,k} \right] \quad (8)$$

onde:

- $\gamma_{gi}$  é o coeficiente de ponderação das ações permanentes;
- $F_{Gi,k}$  é o valor característico das ações permanentes;
- $F_{Q1,k}$  é o valor característico da ação variável, considerada como a ação principal;
- $\Psi_{0j} \cdot F_{Qj,k}$  é o valor reduzido de combinação de cada ação variável secundária.

O valor dos coeficientes descritos na NBR 8681 (2003), utilizados neste trabalho estão indicados na Tabela 1.

Tabela 1 - Coeficientes para combinação normal.

Coeficiente	Tipo	Valor do Coeficiente
$\gamma_g$	Grandes pontes	1,3 <sup>(1)</sup> 1,0 <sup>(2)</sup>
$\gamma_q$	Ações variáveis em geral	1,5
$\Psi_0$	Cargas móveis para pontes rodoviárias	0,7

<sup>(1)</sup> Efeito desfavorável.

<sup>(2)</sup> Efeito favorável.

FONTE: NBR 8681 (2003).

## 2.3 MÉTODOS DE ANÁLISE DE TABULEIROS

A obtenção de solicitações e reações de apoio em tabuleiros de vigas múltiplas pode ser realizada a partir de métodos simplificados e métodos computacionais.

A análise da superestrutura realizada por métodos simplificados é concebida por um modelo de vigas, em que métodos tradicionais, como o de Engesser-Courbon, são aplicados para a obtenção das parcelas de carregamento correspondente à cada longarina. A determinação dos

esforços seccionais e reações de apoio nas longarinas é realizado por meio do conceito de linhas de influência.

Para os métodos computacionais, desenvolvidos a partir da vinda dos computadores, o Método dos Deslocamentos e o Método dos Elementos Finitos são os que se destacam na área de engenharia.

### **2.3.1 Métodos simplificados**

Na época anterior à difusão dos computadores, muitos métodos de cálculo foram desenvolvidos por diversos autores para o dimensionamento de estruturas em grelha.

Durante anos o dimensionamento de pontes foi realizado manualmente com o auxílio de tabelas e procedimentos manuais. Devido à elevada hiperestaticidade da estrutura de uma ponte, a análise e o cálculo tornavam-se muito difíceis, motivando o desenvolvimento de diversos processos de cálculos que originaram os métodos clássicos, e.g. Engesser-Courbon e Leonhardt.

O estudo do comportamento de uma ponte em grelha, considerando a influência da distribuição de cargas, deu início com Zschetzsche no ano de 1893, com base no método das forças, não obtendo êxitos maiores em aplicações práticas, devido às dificuldades e complexidade numéricas de cálculo (LONGO, 1979; ALVES; ALMEIDA; JUDICE, 2004).

Nestas estruturas, a aplicação da teoria das placas ortotrópicas, ou seja, análise das lajes de concreto armado com propriedades elásticas diferentes em duas direções ortogonais, só foi estudada em 1914 por Huber.

Com base nas teorias de Huber, originou-se o Método de Equivalência Elástica, que consiste em substituir a estrutura real por uma placa ortótropa equivalente.

Estudos posteriores propuseram diversos métodos de análise com base nos princípios de resistência dos materiais, com a finalidade de simplificação. Diversos processos que facilitavam o cálculo foram estabelecidos, mas muitas vezes prejudicavam a precisão dos resultados (LONGO, 1979; ALVES; ALMEIDA; JUDICE, 2004).

Em 1938, Leonhardt apresentou um importante trabalho sobre grelhas apoiadas em dois bordos. Estudos dos coeficientes de distribuição transversal, desprezando a torção do conjunto e considerando a laje apenas como uma parcela colaboradora na inércia das vigas, foram realizados. Só em 1940 o trabalho estendeu o método

às grelhas engastadas e contínuas arquitetando o Método de Leonhardt (LONGO, 1979; ALVES; ALMEIDA; JUDICE, 2004).

Igualmente em 1940, Engesser-Courbon desenvolveu o método dos coeficientes de distribuição transversal para grelhas, constituídas por transversinas com rigidez infinita. Este método é conhecido como Método de Engesser-Courbon.

Mais tarde, em 1946, Guyon deu continuidade ao estudo de Huber para grelhas compostas por elementos sem rigidez torcional. Com a hipótese de um elevado número de longarinas e transversinas, a grelha foi assimilada a um sistema contínuo (i.e., placa ortotrópicas). Em 1950, Massonet prosseguiu o estudo, incluindo a rigidez à torção das vigas, resultando Método dos Coeficientes de Distribuição Transversal de Guyon-Massonet (LONGO, 1979; ALVES; ALMEIDA; JUDICE, 2004).

As equações diferenciais do problema da placa ortotrópica equivalente a uma grelha foi solucionado por Ferraz (1951) fazendo uso de funções ortogonais, desenvolvendo em series de Fourier para as cargas, esforços e deformações ao longo das vigas principais. Posteriormente, em 1956, o estudo foi abordado por Homberg e Weinmeister, e em 1962 Homberg e Trenks apresentaram o trabalho incluindo os efeitos de torção (ALVES; ALMEIDA; JUDICE, 2004).

Fauchart, (1975) sugeriu um método simplificado de cálculo para a superestrutura de pontes, o qual utiliza uma faixa da laje de largura unitária na direção transversal do tabuleiro que substitui os apoios das longarinas por apoios de molas.

A aplicação desses métodos clássicos se estendeu mundialmente e, segundo Longo (1979), “As investigações experimentais em modelos reduzidos e em estruturas reais, mostraram uma precisão satisfatória para estes métodos.”

No sul do Brasil, estudos relevantes relacionados a obtenção de esforços em pontes, fazendo uso desses métodos, se destacam alguns trabalhos. Oliveira (2010), na Universidade Regional de Blumenau, realizou o dimensionamento da superestrutura de uma ponte em concreto armado utilizando o método de Engesser-Courbon para obtenção do trem-tipo linearizado nas longarinas e para o dimensionamento, utilizou programas e planilhas eletrônicas. No mesmo período, Andrade (2010), na Universidade Federal do Paraná, determinou diretrizes para o dimensionamento da superestrutura de pontes de concreto armado com tabuleiro apoiado em duas vigas.

Posteriormente, Souza (2011), na Universidade Federal de Santa Catarina, desenvolveu um programa para a obtenção dos esforços

solicitantes em pontes bi-apoiadas de concreto armado constituída por duas longarinas através de procedimentos manuais. Este foi o primeiro trabalho desenvolvido pelo Grupo de Análise e Projeto de Estruturas (GAP) e está impulsando novos estudos na área.

### 2.3.1.1 Método de Engesser-Courbon

O método simplificado de Engesser-Courbon é um método destinado a prescindir do cálculo completo da grelha, permitindo determinar, de forma aproximada, o modo como uma carga se distribui sobre as longarinas de um tabuleiro monolítico. O método tem a hipótese básica que as transversinas são consideradas com rigidez infinita sem o efeito de torção (MARTIN, 1981).

Este processo, se caracteriza pela sua simplicidade e se aplica ao caso de pontes em grelha onde são respeitadas as seguintes condições:

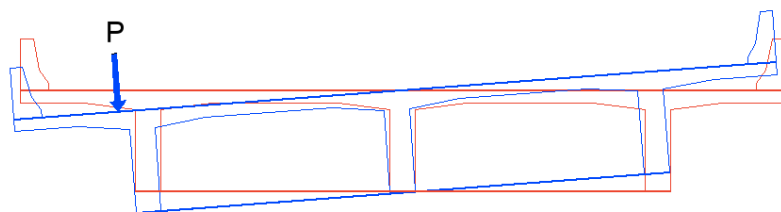
- O vão da ponte é superior a duas vezes a sua largura;
- A altura das transversinas é da ordem de grandeza das longarinas;

Respeitadas essas condições e as hipóteses básicas da teoria das estruturas, i.e. comportamento elástico-linear, pequenas deformações, seções planas e princípio de Saint-Venant, admite-se que:

- É possível transformar o tabuleiro monolítico em uma malha ortogonal constituída por longarinas, vigas longitudinais, e transversinas, vigas perpendiculares ao eixo da ponte;
- As transversinas estão simplesmente apoiadas nas longarinas e são consideradas infinitamente rígidas à flexão;
- É desprezada a resistência à torção das transversinas e longarinas;

Considerando as simplificações mencionadas anteriormente é possível afirmar que as transversinas comportam-se como barras rígidas. Desta forma, após a deformação, o eixo da transversina na configuração deformada tem comportamento linear como ilustrado na Figura 27, podendo ser expressa pela equação 9:

Figura 27 – Deformação da estrutura.

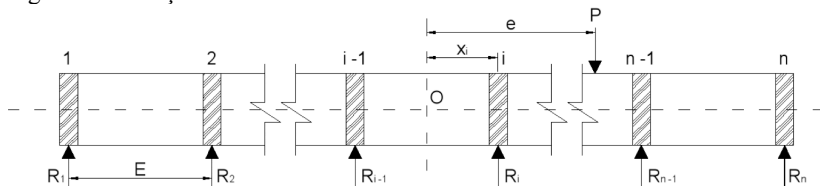


FONTE: O autor.

$$y_i = a + b \cdot x_i \quad (9)$$

Nestas condições o problema fundamental do método consiste em determinar as reações,  $R_i$ , que traduzem a ação do carregamento incidente sobre as vigas principais, a partir do carregamento do tabuleiro da ponte. Para uma carga pontual  $P$ , aplicada com excentricidade  $e$ , em relação ao centro de gravidade da grelha  $O$ , conforme Figura 28, as reações são calculadas utilizando as equações de equilíbrio de forças.

Figura 28 - Reações nas transversinas.



FONTE: modificado de Martin (1981).

Desta maneira, as reações são calculadas de forma proporcional ao deslocamento vertical,  $y_i$ , relativo a um eixo baricentro horizontal e ao momento de inércia,  $I_i$ , correspondente a cada longarina, expressas na equação 10 a seguir:

$$R_i = I_i \cdot y_i \quad (10)$$

Substituindo a equação 10 na equação 9 temos a equação 11:

$$R_i = I_i \cdot (a + b \cdot x_i) \quad (11)$$

Das equações da estática temos as equações 12 e 13:

$$\sum F_v = 0 \rightarrow P = \sum_{i=1}^{i=n} R_i \rightarrow P = \sum_{i=1}^{i=n} I_i \cdot y_i$$

$$\therefore P = \sum_{i=1}^{i=n} I_i \cdot (a + b \cdot x_i) \quad (12)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow P \cdot e = \sum_{i=1}^{i=n} R_i \cdot x_i \rightarrow P \cdot e = \sum_{i=1}^{i=n} I_i \cdot y_i \cdot x_i$$

$$\therefore P \cdot e = \sum_{i=1}^{i=n} I_i \cdot (a \cdot x_i + b \cdot x_i^2) \quad (13)$$

Caso as longarinas possuam inércia desigual e estejam desigualmente espaçadas, tomando como origem o centro de gravidade das seções das longarinas, supostas afetadas de massas proporcionais aos momentos de inércia correspondentes, pode-se obter a equação 14.

$$\sum_{i=1}^{i=n} I_i \cdot x_i = 0 \quad (14)$$

A partir dessa consideração podem ser determinadas as variáveis  $a$ , substituindo a equação 14 na equação 12, e  $b$ , substituindo a equação 14 na equação 13, expressas nas equações 15 e 16 descritas a seguir:

$$a = \frac{P}{\sum_{i=1}^{i=n} I_i} \quad (15)$$

$$b = \frac{P \cdot e}{\sum_{i=1}^{i=n} (I_i \cdot x_i^2)} \quad (16)$$

Desta forma, substituindo as variáveis obtidas nas equações 15 e 16 na equação 11, pode ser obtida a reação  $R_i$ , expressa pela equação 17:

$$R_i = I_i \cdot \left( \frac{P}{\sum_{i=1}^{i=n} I_i} + \frac{P \cdot e}{\sum_{i=1}^{i=n} (I_i \cdot x_i^2)} \cdot x_i \right)$$

$$\therefore R_i = P \cdot \frac{I_i}{\sum_{i=1}^{i=n} (I_i)} \cdot \left( 1 + \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (I_i) \cdot e \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} (I_i \cdot x_i^2)} \right) \quad (17)$$

É sobretudo importante assinalar que nos pontos de cruzamento entre as longarinas e transversinas não carregadas, nenhuma reação é considerada. O tabuleiro se comporta como se não possuísse transversinas e desta forma a carga  $P$  se distribui entre as longarinas, proporcionalmente a um coeficiente de distribuição transversal, conforme a equação 18.

$$R_i = P \cdot r_{ie}$$

$$\therefore r_{ie} = \frac{I_i}{\sum_{i=1}^{i=n} (I_i)} \cdot \left( 1 + \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (I_i) \cdot e \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} (I_i \cdot x_i^2)} \right) \quad (18)$$

Quando a ponte é solicitada por uma carga uniformemente distribuída, sua influência sobre cada longarina é obtida através do produto da mesma com a área formada entre os coeficientes de repartição transversal na posição inicial e final da atuação da carga.

Segundo o método, os resultados obtidos aplicando-o serão mais satisfatórios na medida em que o parâmetro  $\gamma$ , apresentado na equação 19, for menor:

$$\gamma = \frac{T}{2 \cdot L} \cdot \sqrt[4]{\frac{L}{T} \cdot \frac{N_L}{N_T} \cdot \frac{\kappa_L}{\kappa_T}} \quad (19)$$

onde:

- $L$  é o comprimento do tabuleiro;
- $T$  é a largura do tabuleiro;
- $N_L$  é o número de longarinas;
- $N_T$  é o número de transversinas;
- $\kappa_L$  é a rigidez média das longarinas ( $E \cdot I$ );
- $\kappa_T$  é a rigidez média das transversinas ( $E \cdot J_p$ ).



Observa-se que ao aumentar o vão (i.e., comprimento do tabuleiro) o parâmetro  $\gamma$  aumenta, e como consequência, os resultados são menos satisfatórios. Kalyanshetti e Shriram (2013) ao verificar que a formulação de Engesser-Courbon não leva em consideração o comprimento do vão, propuseram um fator de correção para comparar os resultados obtidos pela formulação de Engesser-Courbon com o método de grelha.

Quando maior o número de transversinas ( $N_T$ ) menor é o parâmetro  $\gamma$ , fornecendo resultados mais satisfatórios. Na prática da engenharia, a utilização das mesmas vem sendo questionada devido a dificuldade na sua execução, também influenciado por um custo considerável. Fulgêncio, Paula e Azevedo (2014) verificaram que a utilização de transversinas aumenta a solicitação das longarinas, porém reduz as deformações da ponte, concluindo, assim como Alves (2010), que a utilização das transversinas não é compensadora.

Por outro lado, Sieffert et al. (2006) justifica que o uso de transversinas aumenta a resistência da ponte para o caso de cargas laterais, assim como a estabilidade das longarinas durante a construção.

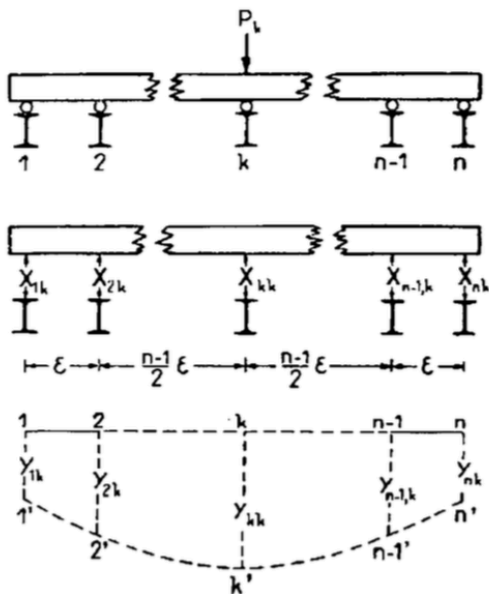
### 2.3.1.2 Método de Leonhardt

No método de Leonhardt, além das hipóteses básicas da teoria das estruturas, foram ainda admitidas as seguintes hipóteses:

- Todas as transversinas do tabuleiro são representadas por uma única transversina fictícia, apoiada nos pontos médios das diversas longarinas, paralelas e igualmente espaçadas;
- A transversina fictícia é considerada como simplesmente apoiada nas longarinas e é suposta flexível;
- Desprezam-se os efeitos a torção das vigas.

De acordo com a Figura 29, sob ação de uma carga unitária, o conjunto se deforma, originando nos pontos de cruzamento as reações, denominadas coeficientes de repartição transversal.

Figura 29 – Deformação da transversina fictícia.



FONTE: Martin (1981).

Esses coeficientes de repartição transversal dependem nos casos normais das seguintes grandezas: da relação entre inércia da transversina e das longarinas e da relação entre o afastamento recíproco das longarinas e o vão. Esses coeficientes de repartição transversal foram tabelados, apresentadas na bibliografia de Martin (1981), e possuem como parâmetro de entrada o grau de rigidez da estrutura, expresso pela equação 20.

$$\zeta = \frac{\eta}{(2 \cdot \lambda)^3} = \frac{J_T}{J_L} \cdot \left( \frac{L}{2 \cdot \varepsilon} \right)^3 \quad (20)$$

onde:

- $L$  é o comprimento do tabuleiro;
- $\varepsilon$  é o afastamento recíproco das longarinas;
- $J_T$  é a inércia das transversinas;
- $J_L$  é a inércia das longarinas;

### 2.3.1.3 Método de Guyson-Massonet

Este método baseia-se na teoria geral das lajes ortotrópicas, na qual se admitem as hipóteses descritas a seguir:

- O tabuleiro é transformado numa placa ortótropa equivalente, a qual apresenta as mesmas rigidezes médias de flexão e torção;
- A distribuição de qualquer carregamento é substituído por um carregamento equivalente que tem a forma senoidal na direção longitudinal;

Considerando as hipóteses descritas é possível expressar o funcionamento estático do tabuleiro pela equação diferencial indicada na equação 21.

$$\rho_x \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \varphi \cdot \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \rho_y \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho(x, y) \quad (21)$$

Onde:

- Rigidez à flexão das longarinas  $\rho_x = \frac{E \cdot J_x}{L_x}$ ;
- Rigidez à flexão das transversinas  $\rho_y = \frac{E \cdot J_y}{L_y}$ ;
- Parâmetro de torção  $\varphi = \frac{\rho_x + \rho_y}{2 \cdot \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}}$ .

Guyson e Massonet conduziram a solução do problema mediante a utilização de coeficientes de repartição transversal, que dependem dos seguintes parâmetros:

- Coeficiente de travejamento  $\theta = \frac{b}{L} \cdot \sqrt[4]{\frac{\rho_x}{\rho_y}}$ ;
- Parâmetro de torção, definido anteriormente;
- A posição da carga, definida por sua excentricidade;
- A posição da viga.

### 2.3.1.4 Linhas de Influência

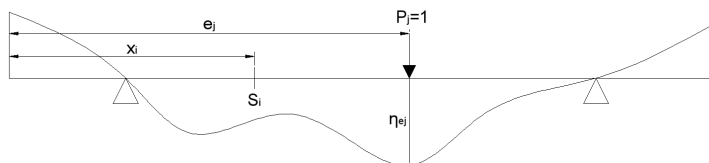
Obtidos os carregamentos sobre as vigas principais, as solicitações, nas diversas seções das vigas principais, são determinadas através do procedimento das linhas de influência.

As linhas de influência, utilizadas pela primeira vez pelo professor E. Winkler em Berlin no ano de 1867, mostram graficamente como o movimento de uma carga ao longo da estrutura influencia nas reações, nos diagramas de esforços cortantes e momentos fletores da estrutura (MCCORMAC, 2007).

A linha de influência é utilizada para determinar a posição da carga móvel que causa a maior solicitação na estrutura e também pode ser utilizada para computar esse efeito.

O efeito produzido por uma carga pontual  $P_j$ , localizada a uma distância  $e_j$  do início da ponte, em uma seção  $S_i$ , localizada a uma distância  $x_i$  do início da ponte, é resultante do produto dessa carga pelo coeficiente  $\eta_{ej}$ , como ilustrado na Figura 30. Esse coeficiente é o valor da linha de influência produzida por uma carga unitária na posição da carga pontual  $P_j$ .

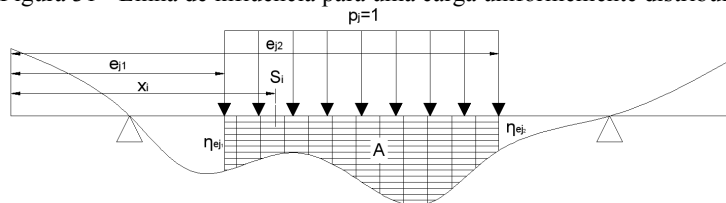
Figura 30 - Linha de influência para uma carga concentrada.



FONTE: O autor.

Para uma carga uniformemente distribuída  $p_j$ , o efeito produzido é resultante do produto desta carga pela área sob o diagrama de linha de influência delimitada pela posição do carregamento na viga, conforme apresentado na Figura 31.

Figura 31 - Linha de influência para uma carga uniformemente distribuída.



FONTE: O autor.

Com base no traçado da linha de influência, é possível obter as envoltórias limites de esforços, de momentos fletores ou cortantes, necessários para o dimensionamento de estruturas submetidas a cargas móveis.

### **2.3.2 Métodos Computacionais**

Nos dias atuais, com o avanço tecnológico e o uso de computadores, surgiram programas computacionais capazes de realizar a análise estrutural em tabuleiros. Na sua maioria, os programas tem finalidade comercial, possuindo um alto custo de aquisição, manuais pouco detalhados e muitas vezes apresentam problemas na modelagem que exigem grande experiência profissional para utilizá-los. Isto os tornam inviáveis para o setor educacional e entendimento dos procedimentos envolvidos.

A grande velocidade com que as mudanças, decorrentes do avanço tecnológico, ocorreram, causou dificuldades para adaptação e acompanhamento. Além do engenheiro estrutural dever se adaptar a novos processos e conceitos da engenharia, há a necessidade de adaptação dos currículos universitários, que por sua vez não acompanharam, de uma forma geral, as mudanças ocorridas na prática da engenharia.

Com a vinda do computador, a programação foi consequência. Surgiu a possibilidade de realizar cálculos tradicionais de maneira mais rápida e desenvolver métodos específicos para análise. Diversos métodos analíticos e numéricos, desenvolvidos antes da era computacional, vieram a ser adaptados para serem utilizados em computadores (e.g. método das diferenças finitas, mínimos quadrados e método de Ritz), e juntamente, alguns métodos, como o método dos deslocamentos e Método dos Elementos Finitos, foram produtos da era digital (ALVES, ALMEIDA, JUDICE, 2004).

Desta forma, tornou-se possível a utilização de modelos mais refinados de cálculo para aproximar o modelo estudado à realidade da estrutura.

O aparecimento dos computadores motivou a análise estrutural de tabuleiros de pontes. Luiz Eloy Vaz, em 1973, estudou a estrutura de grelha utilizando o Método dos Elementos Finitos, porém sem determinar os esforços para as cargas móveis.

Logo em 1979, Longo desenvolveu uma programação para determinar os esforços máximos em pontes rodoviárias fazendo uso da analogia de grelhas.

Em 1994, Alves analisou a estrutura de pontes em grelha de concreto protendido fazendo uso do Método dos Elementos Finitos, com o objetivo de modelar esse tipo de ponte e transformar os efeitos da protensão em ações externas via MEF. Ao longo do trabalho, para atingir seus objetivos, comparou os coeficientes de distribuição do métodos clássicos com os obtidos com um programa de elementos finitos.

Mattos (2001), na Universidade Federal do Rio de Janeiro, desenvolveu um programa para análise estrutural, dimensionamento e verificação para pontes e viadutos de concreto armado ou protendido, através da análise de pórticos planos, utilizando a análise pelo método da rigidez.

Alves (2010) estudou a distribuição transversal das cargas em tabuleiros de pontes em grelha de concreto armado, variando a quantidade de transversinas, fazendo uso de programa de elementos finitos.

Segundo Vaz (2011), a análise matricial de estruturas reticuladas sistematizou o método clássico dos deslocamentos e unificou a metodologia para a análise de diferentes tipos de estruturas reticuladas, enquanto o Método dos Elementos Finitos permite formular problemas de análise de estruturas reticuladas, como também estruturas contínuas bi e tridimensionais.

Ainda que o Método dos Elementos Finitos seja mais aprimorado, a analogia das grelhas ao ser avaliada juntamente a esse método forneceu resultados de esforços e deslocamentos adequados (RYALL, PARKE; HARDING, 2000; BATTAGLIA; MALERBA; SGAMBI, 2003; QAQISH; FADDA; AKAWWI, 2008). Além disso, segundo Sadeghi e Fathali (2012), que avaliaram experimentalmente o comportamento de pontes, concluíram que os dados teóricos obtidos pela analogia das grelhas comparados aos dados de ensaios de campo apresentam grau satisfatório de compatibilidade.

### 2.3.2.1 Método dos deslocamentos

O método dos deslocamentos, também conhecido como método da rigidez, as incógnitas são os deslocamentos dos nós. Estes deslocamentos são obtidos a partir de um sistema de equações formada a partir da rigidez dos elementos. Fazendo uso desses deslocamentos são obtidos os esforços nos elementos.

Inicialmente a estrutura é modificada introduzindo-se fixações (i.e., vínculos fictícios) nos nós de maneira que os deslocamentos,

translações e rotações, estejam impedidos, tornando a estrutura cinematicamente determinada. A estrutura, com todos os nós fixados, constitui o sistema principal, o qual é único. Desta forma, para programação, o método dos deslocamentos da análise matricial apresenta melhor condicionamento.

A análise de uma estrutura pelo método dos deslocamentos pode ser descrita, matricialmente, pelas seguintes etapas:

- 1) A estrutura deve ser discretizada, ou seja, dividida em de dimensão finita, denominados de elementos de barra. Para cada elemento de barra devem ser definidas as propriedades físicas e geométricas, as vinculações e os carregamentos;
- 2) Definição e numeração dos nós e elementos de barras;
- 3) Para cada barra, inicialmente deve ser definida a matriz de rigidez no sistema local  $[S_L]$ , assim como a matriz de rotação  $[T]$  e a matriz de rotação transposta  $[T]^t$ .
- 4) Determinar para cada barra, a matriz de rigidez no sistema global,  $[S_G] = [T]^t \cdot [S_L] \cdot [T]$ ;
- 5) Montagem da matriz de rigidez da estrutura não restringida  $[S]$ ;
- 6) Definir os vetores de engastamento perfeito no sistema local  $\{EP_L\}$ , assim como o vetor de ações nodais no sistema local  $\{A_L\}$ , dos nós de cada barra.
- 7) Determinar os vetores de engastamento perfeito no sistema global  $\{EP_G\}$  e o vetor de ações nodais no sistema global  $\{A_G\}$ , pré-multiplicando os vetores no sistema local pela matriz de rotação transposta;
- 8) Montagem dos vetores de engastamento perfeito  $\{EP\}$  e ações nodais  $\{A\}$  da estrutura não restringida;
- 9) Montagem do sistema de equação da estrutura em relação aos graus de liberdade originais,  $[S] \cdot \{D\} = \{A\} - \{EP\}$ . Onde  $\{D\}$  é o vetor de deslocamentos.
- 10) Reordenar o sistema de equações deixando as direções restringidas para o final, conforme apresentado a seguir:

$$\begin{bmatrix} K_{FF} & K_{FR} \\ K_{RF} & K_{RR} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_F \\ D_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_F \\ A_R \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} EP_F \\ EP_R \end{Bmatrix}$$

- 11) Obter os deslocamentos correspondentes às direções livres,  $\{D_F\} = [K_{FF}]^{-1} \cdot (\{A_F - EP_F\} - [K_{FR}] \cdot \{D_R\})$
- 12) Calcular o vetor de reações de apoio nas direções restringidas,  $\{A_R\} = [K_{RF}] \cdot \{D_F\} + [K_{RR}] \cdot \{D_R\} + \{EP_R\}$

- 13) Separar para cada elemento de barra o vetor de deslocamentos no sistema global  $\{D_G\}$ ;
- 14) Calcular os vetores de esforços solicitantes de cada elemento de barra no sistema global,  $\{R_G\} = [S_G] \cdot \{D_G\} + \{EP_G\}$ . Em seguida transforma-se os esforços para o sistema local,  $\{R_L\} = [T] \cdot \{R_G\}$ .

A análise é finalizada quando todos os deslocamentos e reações de apoio são obtidos.

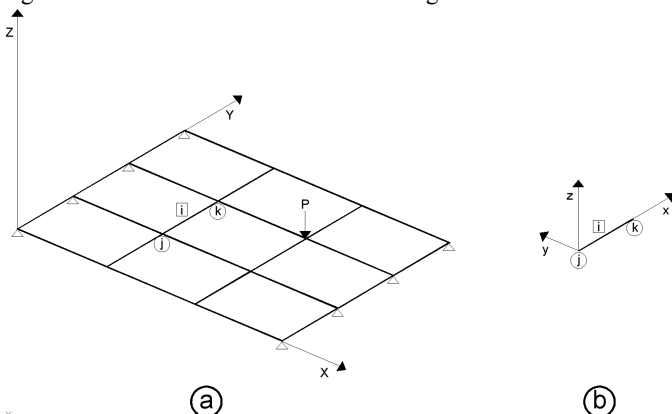
### 2.3.2.2 Grelhas Planas

Uma grelha é uma estrutura plana composta de barras contínuas que se interceptam ou se cruzam mutuamente. Todas as barras estão contidas no mesmo plano e estão rigidamente ligadas nos nós.

As cargas da grelha atuam normalmente ao plano da mesma e todos os binários têm seus vetores, com seta dupla, no mesmo plano da grelha. Os efeitos de flexão são predominantes nessa estrutura, porém os efeitos de torção são também importantes.

Para a modelagem e posterior obtenção dos resultados da grelha torna-se necessária a adoção de dois sistemas de coordenadas, um para a estrutura como um todo, apresentado na Figura 32a, que é conhecido como sistema de coordenadas globais da estrutura, e um outro para cada barra, apresentado na Figura 32b, conhecido como sistema de coordenadas locais.

Figura 32 - Eixos de coordenadas de uma grelha



Fonte: O autor.

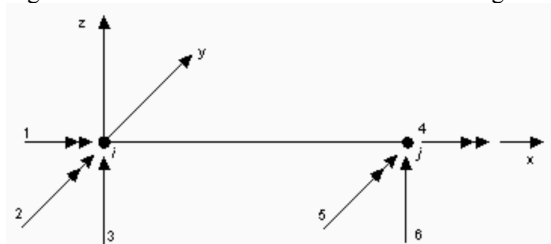


Para o sistema local, os eixos denominados  $x$ ,  $y$  e  $z$  estão dispostos da seguinte maneira:

- A direção do eixo  $x$  coincide com o eixo da barra e com o sentido orientado do nó inicial  $i$  para o nó final  $j$ ;
- O eixo  $z$  é perpendicular ao plano da grelha, dirigido para cima;
- O eixo  $y$  é perpendicular ao plano formado pelos eixos  $x$  e  $z$ , com sentido positivo obedecendo a regra da mão direita.

Os elementos de grelha possuem 3 graus de liberdade por nó, duas rotações e uma translação, resultando em um total de seis graus de liberdade por barra. Os graus de liberdade (deslocamentos possíveis) podem ser observados na Figura 33. A razão para numerar os giros antes das translações em cada nó é para manter uma analogia com a análise de um pórtico plano.

Figura 33 - Graus de liberdade de uma barra de grelha



Fonte: Hambly (1991).

Para obter os coeficientes da matriz de rigidez da barra da grelha, a barra deve ser totalmente restringida e devem ser aplicados deslocamentos unitários nos seis graus de liberdade, um de cada vez. As reações que surgem devido a esses deslocamentos unitários são os coeficientes de rigidez da barra. Quando agrupados esses coeficientes formam uma matriz de ordem  $6 \times 6$  (6 graus de liberdade) que é a chamada “matriz de rigidez” da barra da grelha (no sistema local). Esses coeficientes estão mostrados na Figura 34.

Figura 34 - Matriz de rigidez de um elemento de grelha

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{G \cdot J_p}{L} & 0 & 0 & -\frac{G \cdot J_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \\ -\frac{G \cdot J_p}{L} & 0 & 0 & \frac{G \cdot J_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \end{bmatrix}$$

Fonte: Hambly (1991).

Onde:

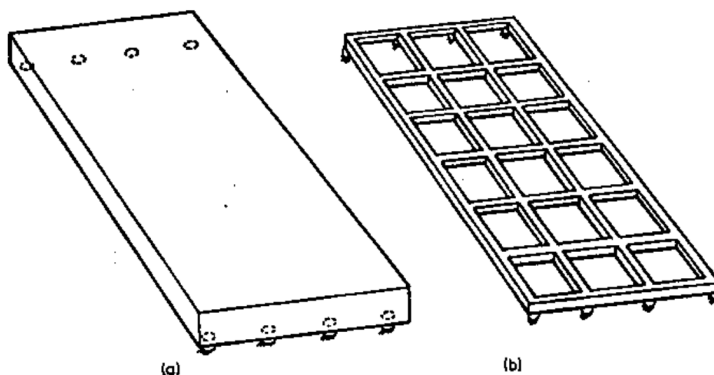
- $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal;
- $G$  é o módulo de elasticidade transversal;
- $J_p$  é o momento de inércia à torção da barra da grelha;
- $I$  é momento de inércia à flexão da seção da barra em relação ao eixo  $y$ ;
- $L$  é o comprimento da barra.

### 2.3.2.3 Analogia das grelhas

Segundo Hambly (1991) a analogia das grelhas é um dos métodos computacionais mais populares para a análise de tabuleiros de pontes, por ser um método de fácil compreensão e baixo custo computacional, além de obter resultados satisfatórios para uma grande variedade de tabuleiros.

Esta técnica foi idealizada por Marcus em 1932, porém seu uso computacional iniciou em 1959 com Lightfoot e Sawko, os quais representaram o tabuleiro por um sistema de grelha equivalente como apresentado na Figura 35.

Figura 35 – (a) Laje maciça; (b) Grelha equivalente.



Fonte: Hambly (1991).

Para fins de análise, as rigidezes à torção e flexão de cada região do tabuleiro, são assumidas como concentradas nos feixes de barra da grelha equivalente mais próximo. As rigidezes longitudinais do tabuleiro são concentradas nas barras longitudinais enquanto a rigidezes transversais são concentradas nas barras transversais.

Idealmente, os valores assumidos para a rigidez das barras da grelha equivalente devem ser tal que, a deformação desta grelha seja idêntica à deformação do tabuleiro quando submetidos pelo mesmo carregamento. Entretanto, esta aproximação se dá somente de forma aproximada, devido às diferentes características desses dois tipos de estrutura.

Para isso, o equilíbrio de qualquer elemento da laje requer que os momentos torcionais e as distorções angulares sejam iguais nas duas direções ortogonais. Porém, no caso da grelha equivalente, não existe nenhum princípio físico ou matemático que garanta esta igualdade nas direções ortogonais nos pontos de intersecção. Entretanto se a malha da grelha for suficientemente refinada, a grelha vai se deformar como uma superfície lisa com os momentos torsores e distorções aproximadamente iguais nas direções ortogonais.

Outro inconveniente da grelha é que o momento em uma barra depende apenas de sua curvatura, enquanto que em uma laje, o momento em qualquer direção depende da curvatura naquela direção e na direção ortogonal.

Entretanto, segundo Ryall, Parke e Harding (2000) apesar da analogia de grelha ser um método aproximado, apresenta a vantagem de

uma quase completa generalidade. Hambly (1991) depois de comparar os resultados das lajes maciças, obtidos através do processo de analogia de grelha, com os resultados fornecidos através do cálculo como placa pela teoria da elasticidade, pode-se dizer que os resultados obtidos com essa analogia são satisfatórios. Além disso, Battaglia, Malerba e Sgambi (2003) e Qaqish, Fadda e Akawwi (2008) verificaram que uma correta análise utilizando analogia das grelhas fornece resultados de esforços e deslocamentos comparáveis com os obtidos utilizando Métodos dos Elementos Finitos.

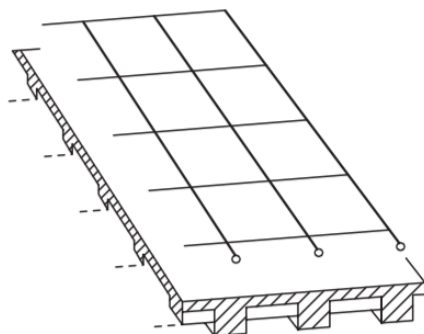
#### *2.3.2.3.1 Modelagem da grelha*

Segundo Hambly (1991) a modelagem das grelhas devem seguir as recomendações descritas a seguir:

- Depende do comportamento que o usuário quer analisar, porém, é usual serem distribuídas barras paralelas aos elementos de borda;
- Deve ser analisada a posição dos elementos da grelha, afim de serem obtidos os esforços desejados. Lembrando que os esforços nos elementos de grelha, são obtidos nos pontos de extremidade das barras;
- O espaçamento entre as barras longitudinais deve ser maior do que 2 ou 3 vezes a altura da laje, porém menor do que  $\frac{1}{4}$  do vão efetivo;
- O espaçamento entre as barras transversais deve ser suficiente para apresentar uma distribuição satisfatória dos esforços nos elementos longitudinais. Para casos usuais, recomenda-se um espaçamento menor do que  $\frac{1}{4}$  do vão, no entanto, para elementos com variação de seção ou regiões com carregamentos variáveis é necessário um espaçamento menor;
- O espaçamento entre os elementos longitudinais e transversais devem ser semelhantes, permitindo uma melhor distribuição dos esforços;
- Os elementos longitudinais e transversais devem ser perpendiculares entre si;
- O carregamento atuante sobre os tabuleiros devem ser concentrados sobre os elementos da grelha.

Um tabuleiro de ponte com múltiplas vigas modelado pelo método das grelhas, geralmente é analisado de maneira similar a um tabuleiro laje maciça (O'BRIEN; KEOGH; O'CONNOR, 2015). A Figura 36 apresenta a grelha equivalente para uma ponte com múltiplas vigas (i.e., longarinas e transversinas).

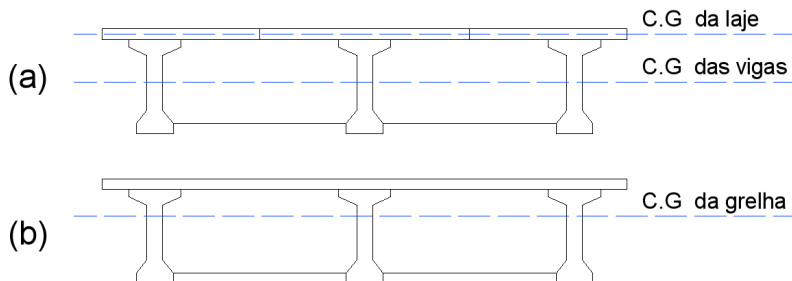
Figura 36 - Modelagem de uma ponte sobre múltiplas vigas pelo modelo de grelha.



FONTE: Hambly (1991).

Além das recomendações realizadas por Hambly (1991), para a aplicação da analogia da grelha e modelo de grelha, o efeito da excentricidade existente entre o centro de gravidade da laje e da viga pode ser desconsiderado usando a inércia de seção T com a consideração da largura colaborante da laje. Desta forma, é possível colocar a viga e a laje num mesmo plano, conforme apresenta a Figura 37 (KLINSKY, 1999).

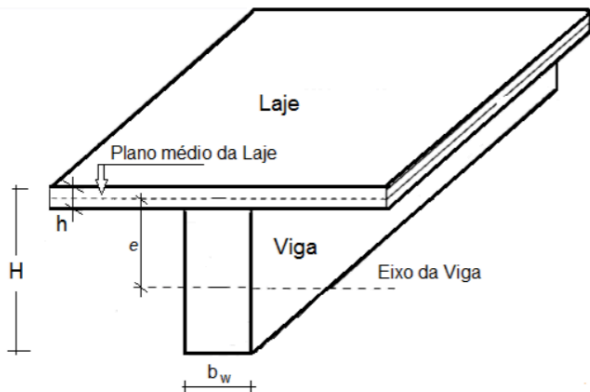
Figura 37 – a) Excentricidade entre os C.G. da viga e laje; b) analogia de grelha considerando os C.G. coincidentes.



Fonte: adaptado de Klinsky (1999).

Uma outra maneira de tentar simular o efeito da excentricidade é usar o teorema de Steiner (i.e., teorema dos eixos paralelos) para calcular o momento de inércia das vigas, como mostra a equação 22 e Figura 38.

Figura 38 – Excentricidade entre o eixo da viga e o plano médio da laje.

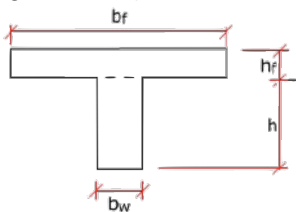


FONTE: Bueno (2014).

$$I = \frac{b_w \cdot H^3}{12} + b_w \cdot H \cdot \left(\frac{H - h}{2}\right)^2 \quad (22)$$

O cálculo da rigidez de lajes nervuradas ortotrópicas pode ser realizado segundo algumas expressões analíticas apresentadas por Kennedy e Bali (1979). Os autores propõem o cálculo do momento de inércia à flexão da seção T, apresentada na Figura 39, considerando a influência do coeficiente de Poisson na mesa, como apresentado na equação 23:

Figura 39 - Seção T.



FONTE: Bueno (2014).

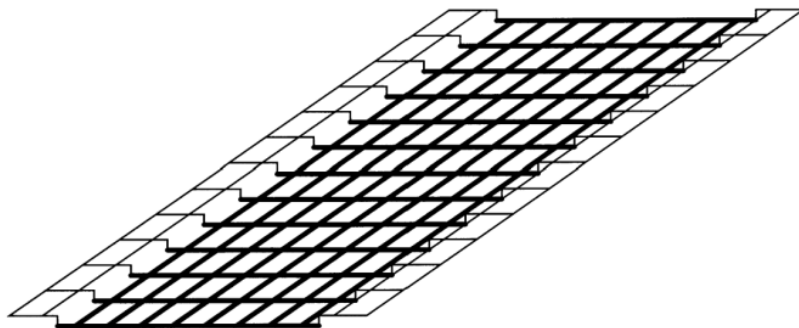
$$I_T = \frac{b_f \cdot h_f^3}{12(1 - \nu^2)} + \frac{A_f \cdot (y_{cg} - \frac{h_f}{2})^2}{(1 - \nu^2)} + I + A_h (h_f + \frac{h}{2} - y_{cg})^2 \quad (23)$$

onde:

- $A_f = b_f \cdot h_f$  é a área da seção da mesa;
- $I = \frac{b_w \cdot h^3}{12}$  é o momento de inércia da seção de viga abaixo da laje;
- $y_{cg}$  é a ordenada do centroide de seção T, medido a partir da face superior da laje.

Uma extensão para análise de pontes com múltiplas vigas através do modelo de grelha e da analogia das grelhas é utilizá-lo alçado. Nesta forma há a consideração das propriedades de cada parte do tabuleiro em relação aos seus próprios centroides. Conseqüentemente, não há necessidade de fazer uma hipótese sobre a localização do eixo neutro da ponte global. Podendo, então, o tabuleiro ser modelado segundo apresentado na Figura 40.

Figura 40 - Modelagem de grelha alçado.



FONTE: O'Brien, Keogh e O'Connor (2015).

Segundo O'Brien, Keogh e O'Connor (2015), embora esse modelo alçado pareça ser um modelo relativamente simples e poderoso, dificuldades surgem quando efeitos no plano são considerados. Ao contrário do modelo de grelha em um só plano, a natureza tridimensional desse modelo alçado provoca distorções locais no plano nos elementos da grelha, que são claramente incompatíveis com o comportamento do tabuleiro da ponte. Concluindo, assim, que essa

abordagem não é recomendada, uma vez que, os modelos alçados com o Método dos Elementos Finitos são amplamente disponíveis e não são suscetíveis a tais distorções.

### 2.3.2.3.2 Propriedades físicas e geométricas

Os resultados obtidos mediante a analogia das grelhas depende diretamente da rigidez à flexão, da rigidez à torção e do momento de inércia à torção das barras.

#### a) Rigidez à flexão das barras

Cada barra da grelha irá representar uma certa “faixa” da placa, com altura igual a espessura da laje e a largura dependente da malha da grelha. Desta forma o momento de inércia à flexão das barras longitudinais e transversais será calculado pela equação 24:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (24)$$

onde:

- $b$  é a largura da barra da grelha;
- $h$  é a altura da barra da grelha.

#### b) Rigidez à torção das barras da grelha

O parâmetro de rigidez à torção  $G.J$  é composto pelo módulo de elasticidade transversal ( $G$ ) do material, que pode ser medido ou calculado, em função do módulo de elasticidade longitudinal ( $E_c$ ) e pelo momento de inércia à torção da seção transversal da barra ( $J$ ).

O módulo de elasticidade transversal segundo a lei de Hooke, para materiais isotrópicos homogêneos, é dada pela equação 25 descrita a seguir.

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (25)$$

Para aplicações em concreto armado, a NBR 6118 (2014) fixa o valor do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) igual a 0,2.



c) Momento de inércia à torção das barras da grelha

O valor do momento de inércia à torção a ser utilizado neste trabalho segue a recomendação feita por Hambly (1991). O qual propõe que a inércia à torção das barras da grelha deve ser o dobro de sua inércia à flexão, como apresentado na equação 24.

$$J = 2 \cdot I = \frac{b \cdot h^3}{6} \quad (26)$$

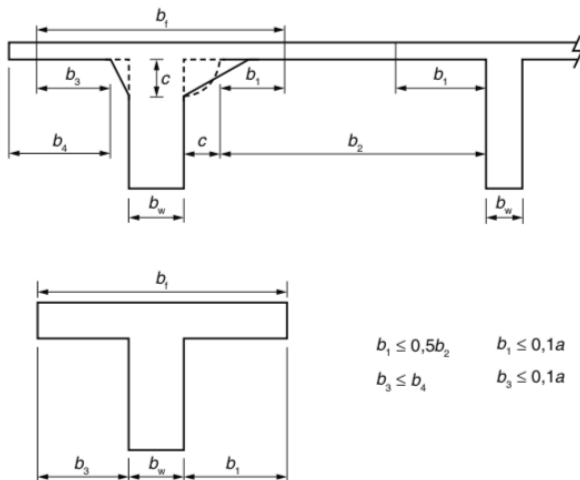
d) Largura colaborante da laje

De acordo com a NBR 6118 (2014), a largura colaborante  $b_f$  deve ser dada pela largura da viga ( $b_w$ ) acrescida de no máximo 10% da distância  $a$  entre pontos de momento fletor nulo, para cada lado da viga em que houver laje colaborante. A distância ( $a$ ) pode ser estimada, em função do comprimento ( $l$ ) do tramo considerado, como se apresenta a seguir:

- viga simplesmente apoiada:  $a = 1,00 \cdot l$
- tramo com momento em uma só extremidade:  $a = 0,75 \cdot l$
- tramo com momentos nas duas extremidades:  $a = 0,60 \cdot l$
- tramo em balanço:  $a = 2,00 \cdot l$

No caso de vigas contínuas, permite-se calculá-las com uma largura colaborante única para todas as seções, inclusive nos apoios sob momentos negativos, desde que ela seja calculada a partir do trecho de momentos positivos onde resulte mínima. Devem ser respeitados os limites  $b_1$  e  $b_3$  conforme indicado na Figura 41.

Figura 41 - Largura de mesa colaborante.



Fonte: NBR 6118 (2014).

### 2.3.2.4 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) foi desenvolvido nos anos de 1950 pela indústria aeroespacial. As principais indústrias envolvidas foram a Boeing e a Bell Aeroespacial. Esse método é uma técnica utilizada para obter soluções aproximadas de problemas rígidos por uma ou mais equações diferenciais parciais (FISH, BELYTCHKO, 2009).

Muitos fenômenos em engenharia podem ser descritos em termos de equações diferenciais parciais, tal como análise de tensões. As equações diferenciais para problemas de engenharia relacionados à análise estrutural, podem ser as equações de equilíbrio ou de compatibilidade.

A ideia básica do MEF é dividir a estrutura em elementos finitos, a partir do qual todo o domínio do problema pode ser representado, conectados por nós e obter uma solução aproximada, chamada de malha de elementos finitos. O número de elementos e nós, é um fator responsável pela exatidão da solução de um problema. Para problemas lineares, o número nodal equivale ao número de incógnitas que um sistema de equações lineares possui. Assim, quanto maior o número de elementos e nós, geralmente, maior a exatidão dos resultados (FISH, BELYTCHKO, 2009).

O MEF, segundo Fish e Belytschko (2009), consiste em seguir cinco passos:

1. Pré-processamento: onde ocorre a subdivisão do problema em elementos finitos, podendo ser executada automaticamente gerando as malhas;
2. Formulação dos elementos: há o desenvolvimento das equações que regem os elementos;
3. Montagem: obtenção do sistema global de equações;
4. Resolução das equações;
5. Pós-processamento: determina-se os valores de interesse, tais como tensões, deformações e a obtenção visual da solução.

O primeiro passo para a aplicação do MEF é dividir a estrutura em elementos, quadriláteros ou triangulares, que formarão a malha. Esses elementos podendo variar as dimensões e características elásticas de um elemento para outro.

O comportamento desse elemento pode ser estudado a partir dos princípios fundamentais derivados do conceito de energia potencial, podendo ser realizado aplicando o princípio da energia potencial total estacionária, que é a forma correspondente ao método da rigidez.

Esse princípio vem se prevalecendo na prática devido ao seu método empregar como estrutura básica um modelo cinematicamente determinado, podendo assim, ser automatizada (ALVES, ALMEIDA, JUDICE, 2004).

A aplicação do MEF pode ser subdividida em duas etapas: definir a relação entre força e deslocamento e elaborar o sistema global da estrutura.

Para a primeira etapa, expressa-se as relações forças-deslocamentos pela transformação linear apresentada na equação 27:

$$F^e = K^e \cdot U^e \quad (27)$$

onde:  $F^e$  é o vetor das forças nodais,  $K^e$  é a matriz de rigidez do elemento e  $U^e$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

A matriz de rigidez do elemento ( $K^e$ ) tem as seguintes propriedades: quadrada, que relaciona o mesmo número de forças e deslocamentos; simétrica; singular, o determinante é igual a zero e não pode ser invertida e positiva semidefinida. Em geral, segundo Bathe (1982) é definida pela equação 28:

$$K^e = \int_{vol} B'^t \cdot D \cdot B' \, dvol \quad (28)$$

onde:  $B'$  é a matriz das relações deformações-deslocamentos e  $D$  é a matriz das relações constitutivas.

Associando os elementos que constituem o sistema estrutural, forma-se o sistema de equações de equilíbrio relativo à estrutura, apresentado na equação 29:

$$F = K \cdot U \quad (29)$$

onde:  $F$  é o vetor das forças nodais da estrutura,  $K$  é a matriz de rigidez da estrutura e  $U$  é o vetor de deslocamentos nodais da estrutura.

A segunda etapa consiste basicamente em transformar coordenadas para que as contribuições de cada elemento possam ser adicionadas à matriz global da estrutura. Para que os graus de liberdade estejam referidos a um mesmo sistema de eixos, aplica-se a equação 30:

$$K^g = R^t \cdot K^e \cdot R \quad (30)$$

onde:  $K^g$  é a matriz de rigidez do elemento em relação aos eixos globais e  $R$  é a matriz de rotação do elemento referente a sua posição em relação ao sistema global de eixos.

#### 2.3.2.4.1 Modelagem com Método dos Elementos Finitos

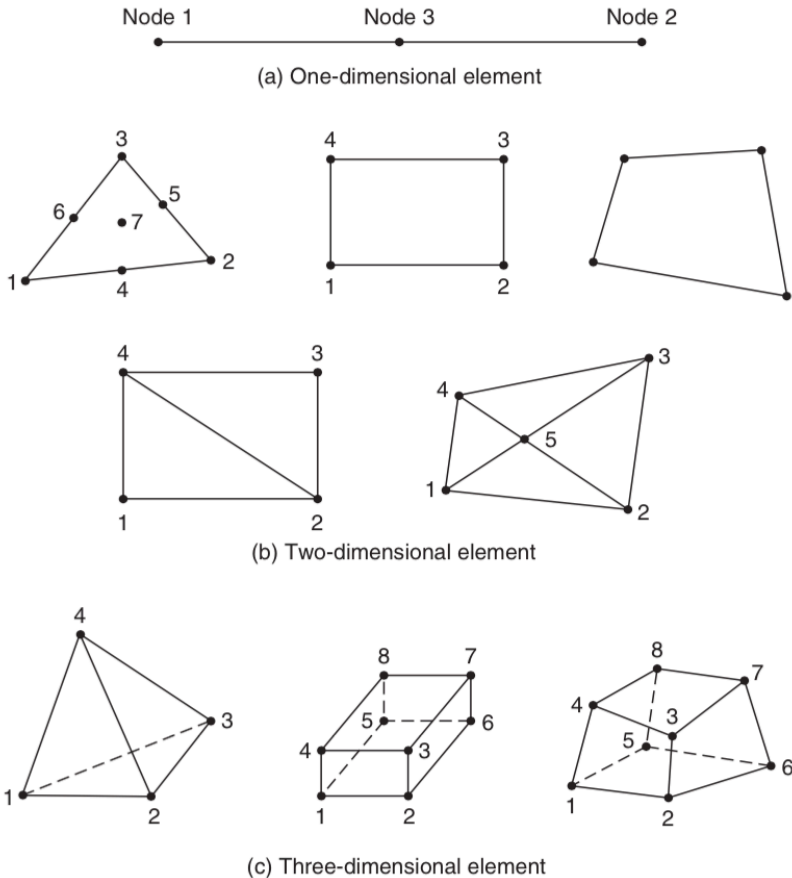
O Método dos Elementos Finitos compreende em elementos unidos por nós, e o método da rigidez deve assegurar a compatibilidade de deslocamentos entre os elementos em cada nó. Para isso, há a representação da estrutura por um conjunto de subdivisões, definidos como elementos finitos.

Qualquer estrutura complexa pode ser encarado como sendo edificada de unidades mais simples denominados elementos. De um modo geral, segundo Parke e Hewson (2008), estes podem ser classificados em três categorias:

1. Elementos na qual uma dimensão (i.e., comprimento) é muito maior do que as outras duas (i.e., largura e altura). Tal elemento de linha é denominado como barra, viga ou coluna. Com esse elemento, uma variedade de estruturas podem ser obtidas ligando-os em conjunto, utilizando ligações rígidas ou articuladas. Caso todos os eixos dos elementos estão situados em um mesmo plano, as estruturas são denominadas planas. Caso os elementos não estejam em um mesmo plano, as estruturas são denominadas espaciais.
2. Elementos na qual duas dimensões (i.e., comprimento e largura) são da mesma ordem, mas muito maior que a terceira dimensão (i.e., espessura). Tais elementos estruturais são chamados de estruturas laminares, sendo classificados como placas ou cascas, dependendo se são planas ou curvas, respectivamente.
3. Elementos que possuem as três dimensões (i.e., comprimento, largura e profundidade) da mesma ordem de grandeza. A análise das estruturas tridimensionais é complexa, mesmo quando várias hipóteses simplificadoras são realizadas.

O processo de subdivisão de um meio contínuo em elementos é um exercício de julgamento de engenharia. Um elemento finito geralmente tem uma configuração simples de uma, duas ou três dimensões, apresentadas na Figura 42.

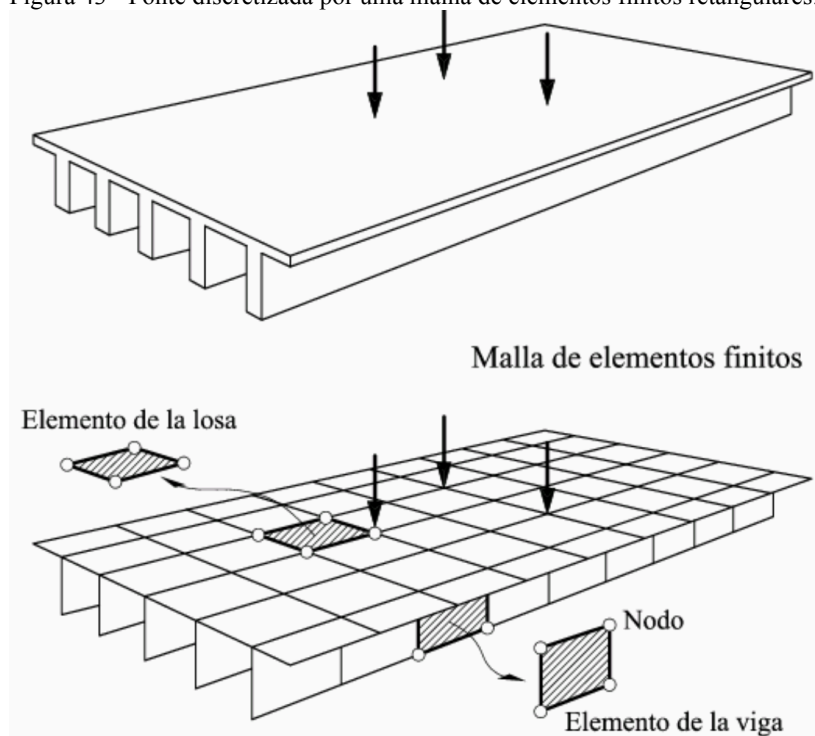
Figura 42 - Elementos para uma, duas e três dimensões.



FONTE: Parke e Hewson (2008).

A forma mais simples de um elemento é a viga. Porém, para tabuleiros de pontes, os elementos de placa e casca são mais utilizados para análise bi e tridimensional, em que as suas formas mais empregadas são retangulares e paralelogramos (O'BRIEN; KEOGH; O'CONNOR, 2015). A Figura 43 apresenta uma ponte cujas laje e vigas são discretizadas por uma malha de elementos finitos retangulares.

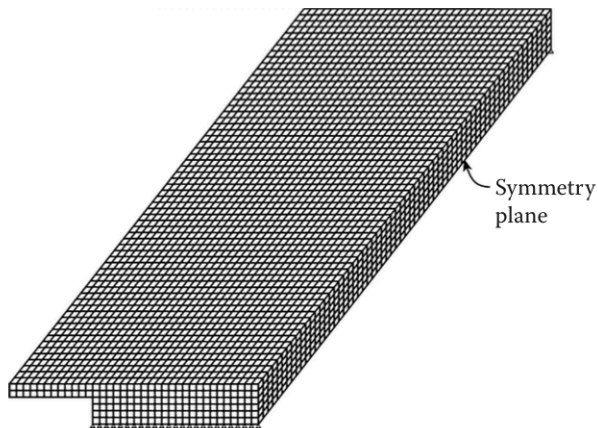
Figura 43 - Ponte discretizada por uma malha de elementos finitos retangulares.



FONTE: Navarra (2006).

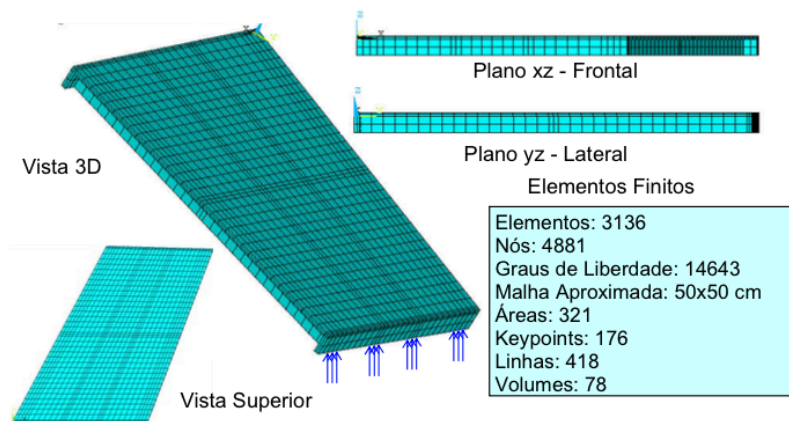
Uma análise bidimensional pode ser empregada em diversos casos de tabuleiros de pontes, porém, pontes com grandes balanços, segundo O'Brien, Keogh e O'Connor (2015), são problemas que requerem uma análise tridimensional. Dois exemplos de simulação tridimensional de pontes estão apresentados nas Figuras 44 e 45.

Figura 44 - Modelagem de ponte com elementos sólidos tridimensionais.



FONTE: Parke e Hewson (2008).

Figura 45 - Modelagem de ponte com elementos tridimensionais do tipo SOLID45.



FONTE: Ahi (2009).

Recomendações para utilização do MEF em tabuleiros de pontes podem ser encontrados com detalhes nas literaturas de Parke e Hewson (2008, p. 94) e O'Brien, Keogh e O'Connor, (2015, p. 180).



## 2.4 PROGRAMAS COMPUTACIONAIS DESENVOLVIDOS

Os aplicativos desenvolvidos neste trabalho para auxiliar no manuseio dos dados foram desenvolvidos utilizando o programa XOJO.

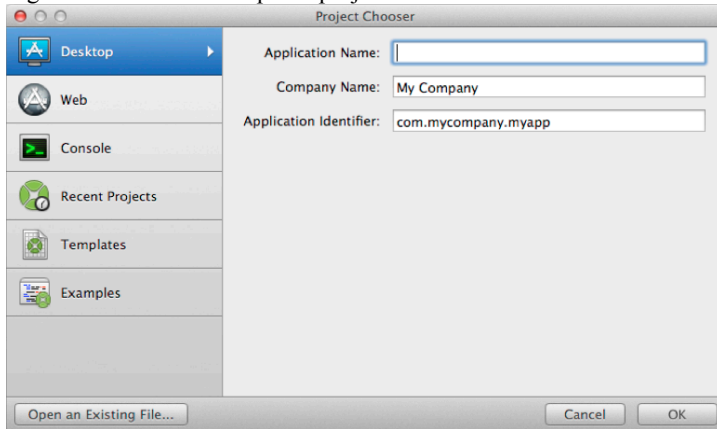
### 2.4.1 Software de desenvolvimento XOJO

Os aplicativos foram desenvolvidos utilizando a linguagem de programação XOJO. Essa linguagem foi adotada por ser multi-plataforma projetada para facilitar a criação de aplicativos de software que rodam em *Macintosh*, *Windows* e *Linux*. Também é uma excelente escolha para ser uma primeira linguagem de programação, pois possui uma linguagem visual (i.e. a interface gráfica do projeto pode ser criada visualmente, arrastando e soltando controles com o uso do mouse e teclado), facilitando o aprendizado. (XOJO, 2014).

#### 2.4.1.1 Escolha do tipo de projeto

A escolha do tipo de projeto a ser desenvolvido utilizando a linguagem de programação XOJO, se dá ao iniciar o programa. Ao ser iniciado o XOJO é exibida uma janela para escolher o tipo de projeto a ser desenvolvido, como apresentada na Figura 46. A partir desta janela, é possível criar um novo projeto tanto para *Desktop*, *Web* ou *Console* ou abrir um projeto já desenvolvido. Nesta janela também há a opção de escolher a seção de exemplos, os quais foram projetados para demonstrar como utilizar as ferramentas e funções do XOJO (XOJO, 2014).

Figura 46 - Escolha do tipo de projeto.

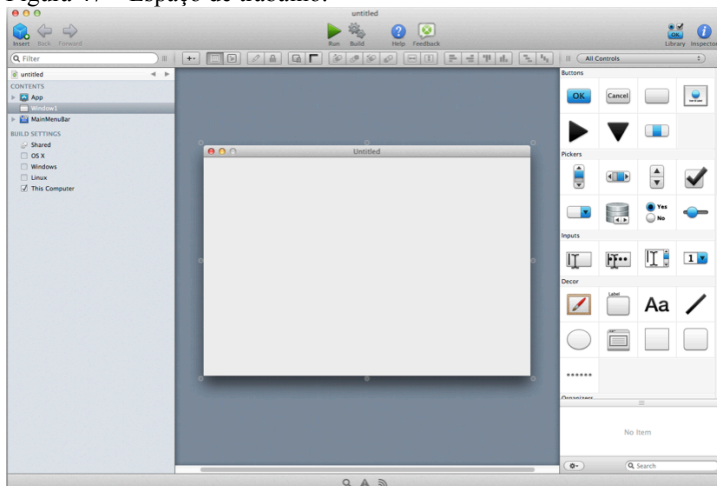


FONTE: Xoco (2014).

#### 2.4.1.2 Espaço de trabalho

Após a escolha do tipo de projeto, é aberta uma nova janela, o espaço de trabalho, como apresentado na Figura 47, onde se desenvolve todo o projeto. Nesta etapa é possível a abertura de mais de um projeto simultaneamente.

Figura 47 – Espaço de trabalho.



FONTE: Xoco (2014).

## 2.4.2 GAP-GEL v1

O programa GAP-GEL v1 foi desenvolvido pelo Professor Daniel Domingues Loriggio com o objetivo de obter os esforços de momentos fletores de uma ponte em grelha submetida a cargas pontuais. A Figura 48 apresenta a tela de apresentação do programa.

Figura 48 – Tela inicial do programa GAP-GEL v1.



FONTE: GAP-GEL v1.

Para dar início ao programa deve ser escolhido um arquivo de dados contendo o número de nós, o número de elementos, o número de carregamentos, as coordenadas nodais, as restrições de cada nó, os carregamentos e as propriedades geométricas dos elementos.

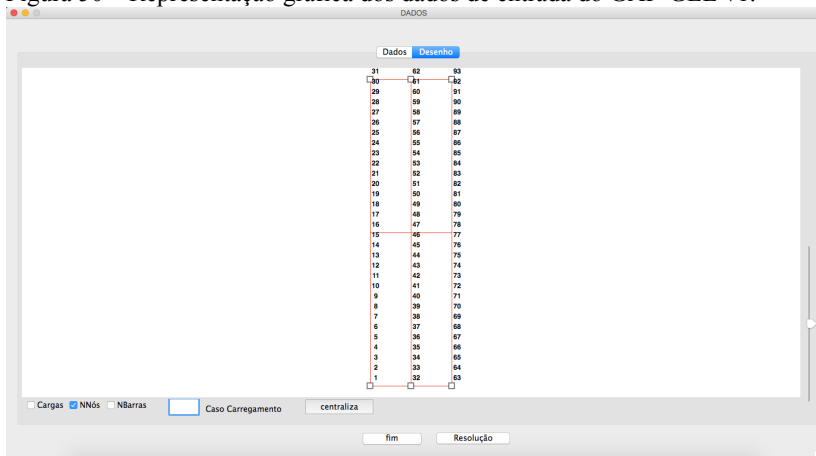
Após escolhido o arquivo de dados contendo as informações necessárias, o programa lê as informações e as apresenta em um quadro, acionando a opção Dados, como ilustrado na Figura 49, ou graficamente, acionando a opção Desenho, como apresentado na Figura 50. Na opção desenho é possível ver a numeração dos nós, a numeração das barras, além dos casos de carregamentos. A possibilidade de visualizar os dados contidos no arquivo de forma gráfica é de grande importância, pois permite a identificação de possíveis erros de modelagem.

Figura 49 – Dados numéricos de entrada do GAP-GEL v1.

nnos	X	Y	tp1	tp2	tp3	Rx ou Kx	Ry ou Ky	Rz ou Kz
1	0	0	L	L	L	0	0	0
2	0	1	L	L	L	0	0	0
3	0	2	L	L	L	0	0	0
4	0	3	L	L	L	0	0	0
5	0	4	L	L	L	0	0	0
6	0	5	L	L	L	0	0	0
7	0	6	L	L	L	0	0	0
8	0	7	L	L	L	0	0	0
9	0	8	L	L	L	0	0	0
10	0	9	L	L	L	0	0	0
11	0	10	L	L	L	0	0	0
12	0	11	L	L	L	0	0	0
13	0	12	L	L	L	0	0	0
14	0	13	L	L	L	0	0	0
15	0	14	L	L	L	0	0	0
16	0	15	L	L	L	0	0	0
17	0	16	L	L	L	0	0	0
18	0	17	L	L	L	0	0	0
19	0	18	L	L	L	0	0	0
20	0	19	L	L	L	0	0	0
21	0	20	L	L	L	0	0	0
22	0	21	L	L	L	0	0	0
23	0	22	L	L	L	0	0	0
24	0	23	L	L	L	0	0	0
25	0	24	L	L	L	0	0	0
26	0	25	L	L	L	0	0	0
27	0	26	L	L	L	0	0	0
28	0	27	L	L	L	0	0	0
29	0	28	L	L	L	0	0	0
30	0	29	L	L	L	0	0	0
31	0	30	L	L	R	0	0	0
32	4	0	L	L	R	0	0	0
33	2	1	L	L	R	0	0	0

FONTE: GAP-GEL v1.

Figura 50 – Representação gráfica dos dados de entrada do GAP-GEL v1.



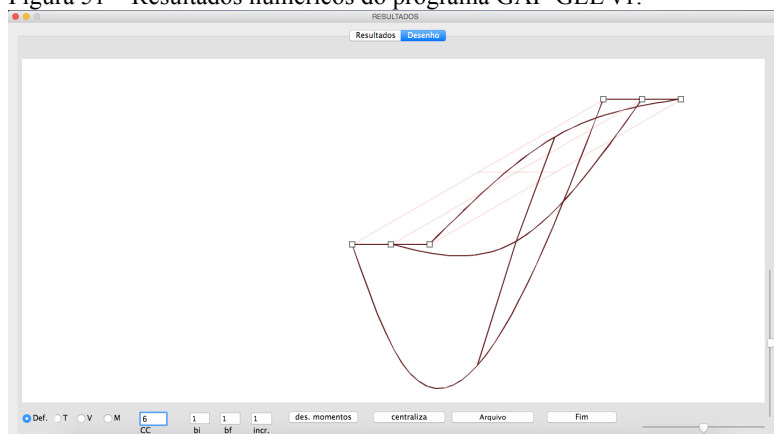
FONTE: GAP-GEL v1.

Após conferidos os dados de entrada, é iniciado o processamento de dados acionando o botão Resolução.

Finalizando o processo, é exibida uma nova janela com os resultados obtidos. Estes resultados são apresentados em forma de tabela, acionando a opção Dados, ou graficamente, acionando a opção Desenho.

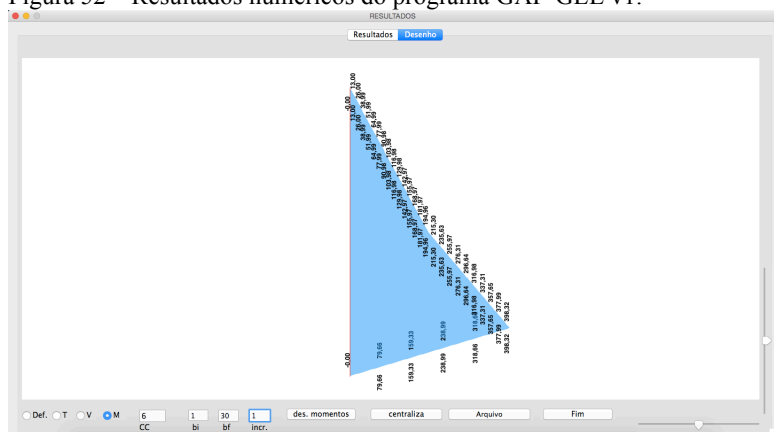
Na opção desenho é possível alternar entre a representação das deformadas, esforços de torção, esforços cortantes e momentos fletores acionando a opção desejada no canto inferior esquerdo. As Figuras 51 e 52, apresentam respectivamente a deformada da estrutura e os diagramas de momentos fletores.

Figura 51 – Resultados numéricos do programa GAP-GEL v1.



FONTE: GAP-GEL v1.

Figura 52 – Resultados numéricos do programa GAP-GEL v1.



FONTE: GAP-GEL v1.

Para serem obtidos os resultado em um arquivo de texto deve ser acionado o botão Arquivo e escolhido o nome e pasta destino do arquivo.

### 2.4.3 Estudo de Dados do GAP-GEL v1

O aplicativo Estudo de Dados do GAP-GEL v1 foi desenvolvido pelo autor para analisar a distribuição dos esforços de momentos fletores nas longarinas, provenientes de cargas pontuais atuantes sobre o tabuleiro de uma ponte bi-apoiada com e sem balanços.

Ao iniciar o aplicativo é exibida a janela apresentada na Figura 53, na qual, devem ser inseridos os dados da ponte a ser analisada.

Figura 53 - Dados de entrada do aplicativo Estudo de Dados GAP-GEL v1.

FONTE: O autor.

Vale salientar que as informações inseridas, como o número de longarinas, a distância entre as longarinas, a largura do vão inicial, central e final e a posição da carga unitária, são dados utilizados para a obtenção das linhas de influência e envoltórias de momentos fletores através do processo de Engesser-Courbon.

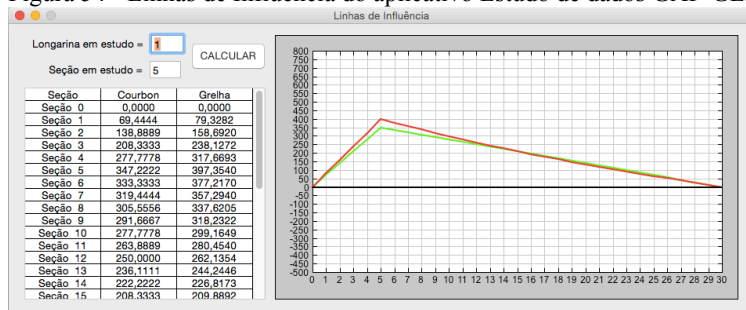
Já as informações utilizadas para a formação das linhas de influência e envoltórias de momentos fletores referente ao método das grelhas são obtidas a partir do arquivo de dados exportado do programa GAP-GEL v1. Este arquivo é lido acionando o botão Ler Arquivo GAP-GEL v1 ilustrado na Figura 53.

É importante inserir as informações do mesmo modelo para ambos os enfoques. Um outro ponto relevante nos dados de entrada é referente a inclusão dos elementos de laje no modelo de grelha. Este campo deve ser ativado nos modelos em que são considerados os elementos de laje e desativado nos modelos sem a consideração desses elementos.

Após inseridos os dados de entrada, o aplicativo permite obter as linhas de influência, acionando o botão Linhas de Influência, e as envoltórias de momentos fletores, acionando o botão Envoltória de Esforços, das longarinas da ponte em estudo para ambos os enfoques.

Para a análise das linhas de influência, deve ser informada a longarina e a seção para a qual se deseja obter os esforços e, posteriormente, acionar o botão calcular, como ilustrado na Figura 54. Quando acionado o botão calcular, os resultados numéricos são apresentados em tabela e graficamente. Nesses gráficos, os valores obtidos pelo procedimento de Engesser-Courbon são representados por um traçado contínuo verde e os valores obtidos pelo modelo de grelha por um traçado contínuo vermelho.

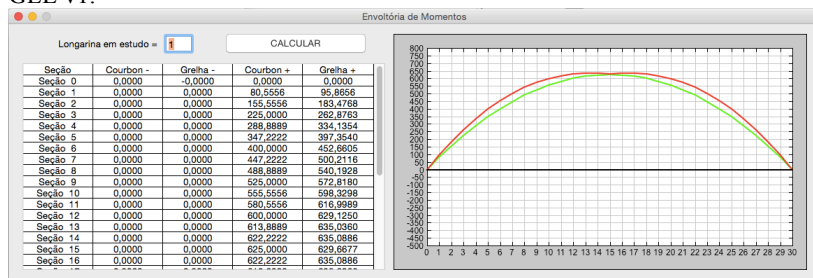
Figura 54 - Linhas de Influência do aplicativo Estudo de dados GAP-GEL v1.



FONTE: O autor.

Para a análise das envoltórias de momentos, deve ser informada a longarina em estudo e acionar o botão calcular, como ilustrado na Figura 55.

Figura 55 - Envoltória de momentos do aplicativo Estudo de dados do GAP-GEL v1.



FONTE: O autor.

Se faz importante salientar que, decorrente de limitações de programação, os momentos fletores positivos estão apresentados na parte superior do gráfico, oposto ao convencionalmente nacionalmente.





### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

Os estudos desenvolvidos neste trabalho consistem na obtenção e análise das linhas de influência e envoltórias de momentos fletores de pontes bi-apoiadas com e sem balanço, provenientes de cargas pontuais unitárias atuando sobre o tabuleiro. Para a realização destes estudos optou-se pela utilização do modelo de grelhas, por ser um modelo simples é capaz de reproduzir os principais efeitos da estrutura real. Além deste modelo foram utilizados os procedimentos propostos por Engesser-Courbon, por serem muito utilizados no meio acadêmico, para facilitar a compreensão e validação dos resultados.

A obtenção das linhas de influências e das envoltórias de momentos fletores, atuantes nos elementos longitudinais do tabuleiro de uma ponte, pelo processo de Engesser-Courbon, foi realizada por rotinas computacionais, inseridas no aplicativo Estudo de Dados GAP-GEL v1, desenvolvido em linguagem de programação XOJO.

Enquanto para o modelo de grelha, para a obtenção dos esforços atuantes em cada elemento da grelha, fez-se o uso do programa GAP-GEL v1, desenvolvido pelo professor Daniel Domingues Loriggio, em linguagem de programação XOJO. O traçado das linhas de influência e das envoltórias de momentos fletores atuantes nos elementos longitudinais, para o modelo das grelhas são obtidas fazendo uso do aplicativo Estudos de Dados GAP-GEL v1.

Neste capítulo é apresentado o processo de Engesser-Courbon e os procedimentos necessários para a obtenção das envoltórias de esforços através do modelo de grelha.

#### 3.1 PROCESSO DE ENGESSER-COURBON

A obtenção da envoltória de momentos fletores por meio da formulação de Engesser-Courbon consiste em determinar, inicialmente, a parcela do carregamento inicial que atua sobre cada longarina do tabuleiro da ponte (i.e., a distribuição transversal do carregamento sobre o tabuleiro) para depois fazer a análise longitudinal de cada longarina.

A análise longitudinal é realizada através do conceito de linha de influência, a qual retrata como é afetada uma seção em estudo por uma carga que varia ao longo da viga longitudinal. Fazendo uso dessas linhas de influência resulta fácil obter os valores extremos, obtendo-se assim, as envoltórias de momentos fletores para cada longarina.

Neste trabalho foi elaboradas rotinas computacionais, em linguagem de programação XOJO, para o desenvolvimento do procedimento descrito acima.

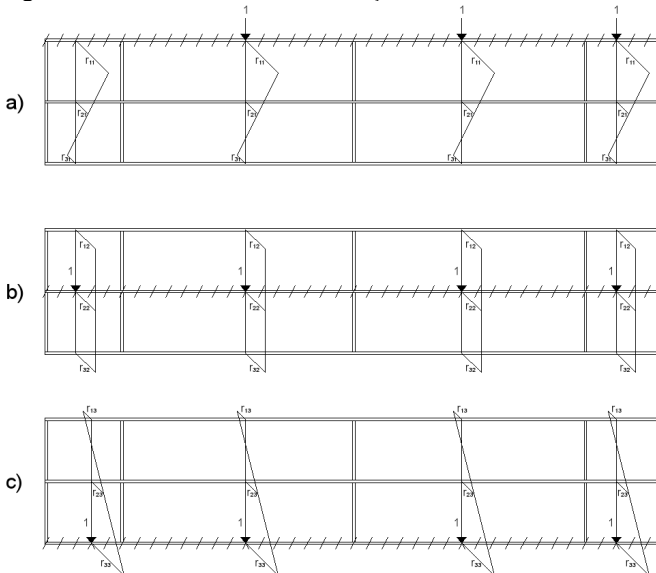
### 3.1.1 Distribuição Transversal

A distribuição transversal do carregamento é realizada através da formulação de Engesser-Courbon por meio da obtenção dos coeficientes de repartição transversal obtidos por meio da Equação 18, apresentada na revisão bibliográfica deste trabalho.

Esta distribuição transversal foi realizada para cada situação de cálculo, ou seja, para cada posição de carregamento, considerando o mesmo como uma carga unitária.

Como o processo de Engesser-Courbon considera o tabuleiro infinitamente rígido e despreza a rigidez à torção, a medida que o carregamento varia na longarina, a distribuição dos esforços é linear e constante ao longo das seções. Por outro lado, os coeficientes de distribuição variam quando o carregamento varia de uma longarina para outra. As Figuras 56a 56b e 56c apresentam o coeficiente de distribuição transversal para o carregamento atuando nas diversas longarinas.

Figura 56 – Coeficientes de distribuição transversal.



FONTE: O autor.

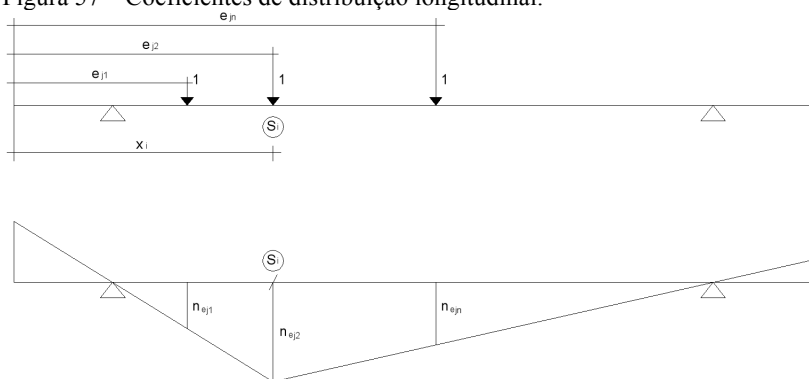
A parcela da carga transmitida para cada longarina em estudo é igual ao produto do coeficiente transversal, obtido a partir da carga unitária, pelo módulo da carga pontual atuante sobre o tabuleiro.

### 3.1.2 Distribuição longitudinal

Após a realização da distribuição transversal dos carregamentos é realizada a distribuição longitudinal dos carregamentos, nos casos mais gerais, é empregado o conceito de linha de influência. Esse conceito é baseado em diagramas que permitem definir as posições mais desfavoráveis do carregamento e calcular suas respectivas solicitações.

Para cargas pontuais, o traçado das linhas de influência para os esforços de momentos fletores em uma determinada seção  $S_i$ , a uma distância  $x_i$  do início das longarinas, é realizado a partir dos coeficientes  $n_{ej}$ , provenientes de cargas unitárias a uma distância  $e_j$  do início das longarinas como apresentado na Figura 57.

Figura 57 – Coeficientes de distribuição longitudinal.



FONTE: O autor.

Os coeficientes  $n_{ej}$ , são obtidos a partir da definição de linha de influência analisadas para três casos distintos. O primeiro caso ocorre quando a seção encontra-se no balanço inicial  $L_A$ , apresentado na Tabela 2, o segundo caso, quando a seção encontra-se no vão central  $L$ , apresentado na Tabela 3, e o terceiro caso, quando a seção encontra-se no balanço final  $L_B$ , apresentado na Tabela 4.

Tabela 2 - Linha de influência de momentos fletores para o primeiro caso de uma carga pontual.

<b>Balço Inicial (<math>x_i \leq L_A</math>)</b>	
$0 \leq e_j \leq x_i$	$x_i \leq e_j \leq L_A + L + L_B$
$\eta_{e_j} = \frac{x_i - e_j}{L}$	$\eta_{e_j} = 0$

FONTE: O autor.

Tabela 3 - Linha de influência de momentos fletores para o segundo caso de uma carga pontual.

<b>Vão Central (<math>L_A \leq x_i \leq L_A + L</math>)</b>	
$0 \leq e_j \leq x_i$	$x_i \leq e_j \leq L_A + L + L_B$
$\eta_{e_j} = \frac{[(L + L_A - x_i) \cdot (e_j - L_A)]}{L^2}$	$\eta_{e_j} = \frac{[(L + L_A - e_j) \cdot (x_i - L_A)]}{L^2}$

FONTE: O autor.

Tabela 4 - Linha de influência de momentos fletores para o terceiro caso de uma carga pontual.

<b>Balço Final (<math>L_A + L \leq x_i \leq L_A + L + L_B</math>)</b>	
$0 \leq e_j \leq x_i$	$x_i \leq e_j \leq L_A + L + L_B$
$\eta_{e_j} = 0$	$\eta_{e_j} = \frac{e_j - x_i}{L}$

FONTE: O autor.

Com os valores extremos dos coeficientes de distribuição longitudinal, calculados nas diversas seções de cálculo da viga, é possível traçar as envoltórias dos momentos fletores. Estas envoltórias são obtidas pelo produto destes coeficientes, do módulo da parcela da carga do carregamento e do vão central.

### 3.2 MODELO DE GRELHAS E ANALOGIA DAS GRELHAS

O modelo de grelha e a analogia das grelhas foram modeladas segundo uma grelha plana, desconsiderando a excentricidade existente entre o centro de gravidade da laje e da viga, como apresentado no capítulo 2 do presente trabalho. O efeito da excentricidade da laje é

levado em conta incluindo a mesa colaborante nas propriedades da longarina.

A obtenção da envoltória de momentos fletores por meio do modelo de grelhas e analogia das grelas requer, inicialmente, obter os esforços de momentos fletores para cada caso de carregamento. Esses esforços foram obtidos utilizando o programa GAP-GEL v1, baseado no método dos deslocamentos, desenvolvido pelo professor Daniel Domingues Loriggio, Dr.

O programa GAP-GEL v1 possui a entrada de dados realizada a partir de um arquivo de texto contendo o número de nós, o número de elementos, o número de carregamentos, as coordenadas nodais, as restrições de cada nó, os carregamentos e as propriedades geométricas de cada elementos.

Como o número de casos de carregamentos para cada estudo excedeu ao limite do programa GAP-GEL v1, o qual apresenta a limitação de 85 casos de carregamento por vez, fez-se necessário a utilização de um arquivo de texto por longarina carregada. O programa lê o arquivo de texto e exporta um novo arquivo de texto com os esforços de momentos fletores na estrutura para cada caso de carregamento.

Esses arquivos de texto contendo os esforços de momentos fletores são utilizados pelo aplicativo Estudo de Dados do GAP-GEL v1 para obter as linhas de influência e as envoltórias parciais de esforços de momento fletores. O traçado das linhas de influência, realizado para cada seção das longarinas, é obtido fixando a seção desejada e computados os esforços na seção, a medida que o carregamento varia na longarina carregada.

O programa desenvolvido além do traçado das linhas de influência para cada seção, exporta os máximos esforços positivos e negativos de cada seção. Os quais são utilizados para o traçado das envoltórias parciais de momentos fletores para cada longarina em estudo. O traçado das envoltórias é realizado com o auxílio de planilhas eletrônicas. Nas quais são inseridos os máximos esforços positivos e negativos obtidos para a longarina em estudo, provenientes das cargas variando ao longo de cada longarina.



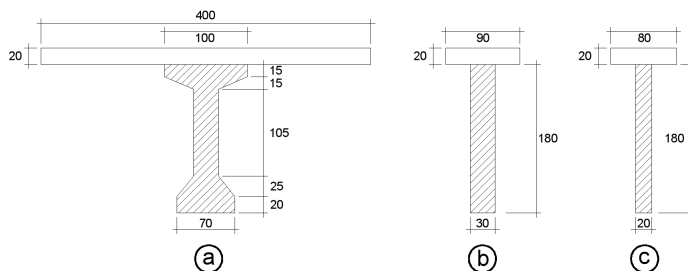
## 4 ESTUDOS DE CASOS

O número de transversinas, o número de longarinas, os elementos de laje e a presença dos balanços e das cortinas foram as variáveis estudadas para analisar como o modelamento de tabuleiros de pontes bi-apoiadas influenciam nas envoltórias de momentos fletores.

Os modelos das pontes estudados apresentam as mesmas propriedades das seções transversais para todos os elementos. Essas seções transversais seguem as recomendações da NBR 6118 (2014), porém, a inércia à torção adotada é igual a duas vezes a inércia à flexão, segundo Hambly (1991).

Portanto, para as longarinas, transversinas apoiadas e transversinas intermediárias, adota-se seção transversal T, como apresentadas nas Figura 58a, 58b e 58c, respectivamente. Para o estudo da contribuição da laje, esses elementos de laje foram considerados com seção retangular com 1 metro de largura e altura variável entre 20 e 30 centímetros. A Tabela 5 apresenta as características geométricas dessas seções transversais.

Figura 58 – Seção transversal do vigamento do tabuleiro com contribuição da laje.



FONTE: O autor.

Tabela 5 - Características geométricas dos elementos.

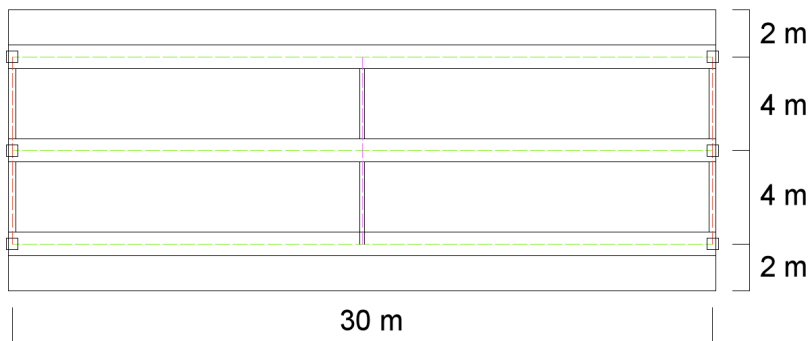
Elementos	Características Geométricas			
	A (cm <sup>2</sup> )	Y <sub>CG</sub> (cm)	I (cm <sup>4</sup> )	J (cm <sup>4</sup> )
(a)	1,6275	1,4091	0,6948	0,000001
(b)	0,7400	1,1703	0,2924	0,000001
(c)	0,5600	1,2571	0,2264	0,000001

FONTE: O autor.

Os modelos apresentados neste trabalho estão denominados conforme o exemplo a seguir: 3L1T-SNN, onde, 3L indica o número de longarinas e 1T, o número de transversinas intermediárias. As três letras finais, após o hífen, são referentes a consideração na modelagem de elementos de laje, de balanços e de cortinas, nesta ordem. A letra S indica que o elemento é considerado no modelamento, enquanto a letra N, indica que o elemento não é considerado na modelagem. É importante ressaltar que todos os modelos estudados apresentam transversinas apoiadas, isto é, vigas no sentido vertical localizadas nos pontos de apoio dos elementos longitudinais.

O estudo compreende em analisar a adição dos diferentes elementos de forma progressiva. Desta forma, o modelo base é constituído de três longarinas bi-apoiadas de 30 metros de vão, espaçadas de 4 metros, uma transversina intermediária, localizada no meio do vão, e duas transversinas apoiadas (i.e., 3L1T-NNN), como apresentado na Figura 59.

Figura 59 – Modelo base (3L1T-NNN).



FONTE: O autor.

A partir desse modelo base, os modelos desenvolvidos para o estudo da influência do número de transversinas, do número de longarinas, das lajes, dos balanços e dos cortinas, com e sem as lajes, estão descritos na Tabela 6.



Tabela 6 – Modelos estudados.

<b>Estudo</b>	<b>Modelos</b>
Influência do número de transversinas	3L0T-NNN 3L1T-NNN 3L2T-NNN 3L3T-NNN 3L4T-NNN 3L5T-NNN
Contribuição das lajes	3L0T-SNN com laje de 20 cm 3L0T-SNN com laje de 25 cm 3L0T-SNN com laje de 30 cm 3L1T-SNN com laje de 20 cm 3L1T-SNN com laje de 25 cm 3L1T-SNN com laje de 30 cm
Influência dos balanços e cortinas com e sem laje	3L0T-NSN 3L0T-SSN 3L0T-NSS 3L0T-SSS

FONTE: O autor.



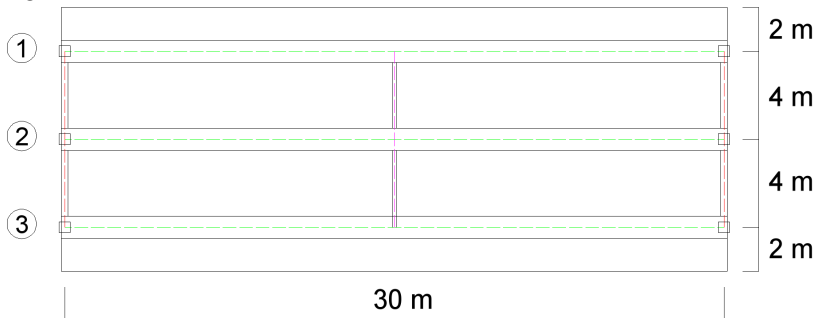
## 5 ANÁLISE E RESULTADOS

Este capítulo contém as análises e os resultados obtidos para os modelos apresentados no capítulo de estudos de casos. Os resultados obtidos para a formulação de Engesser-Courbon são apresentados graficamente por um traçado contínuo verde, enquanto o método das grelhas é apresentado por um traçado tracejado vermelho. Vale salientar que os estudos neste trabalho foram realizados para uma carga pontual unitária e os resultados de momentos fletores estão apresentados em kN.cm.

### 5.1 MODELO BASE 3L1T-NNN

Este modelo é constituído por três longarinas, numeradas de cima para baixo, as transversinas apoiadas e uma transversina intermediária, localizada no meio do vão como apresentado na Figura 60. Vale salientar que as longarinas 1 e 3 são denominadas de longarinas de extremidade e a longarina 2 é denominada de longarina central.

Figura 60 – Modelo 3L1T-NNN.



FONTE: O autor.

O modelo base foi discretizado como apresentado na Figura 61, onde os elementos longitudinais foram divididos em elementos reticulares de um metro de vão, e os elementos transversais, em elementos reticulares unitários, enumerados de esquerda a direita de cima para baixo.



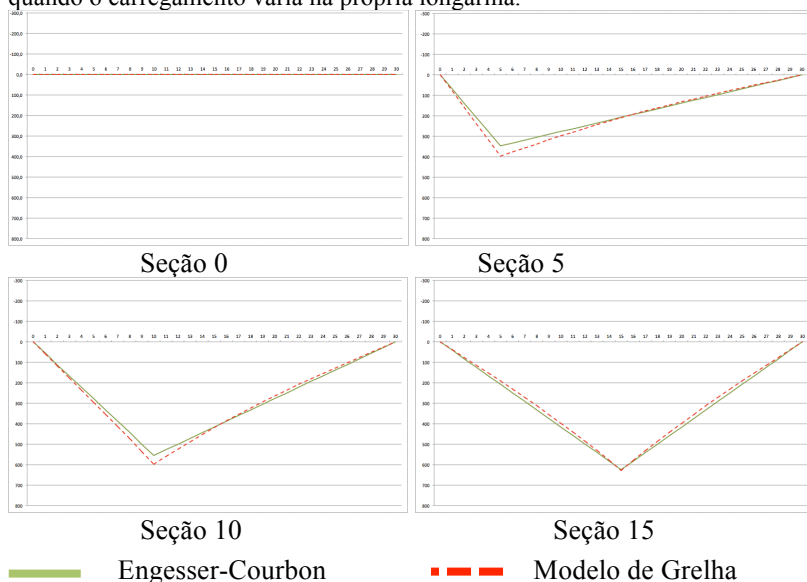
## 5.1.1 Longarina 1

Para cada longarina carregada será realizado o traçado das linhas de influência das seções localizadas a 0, 5, 10 e 15 metros a partir do início da ponte e a partir destas as envoltórias parciais. Após o traçado das envoltórias parciais é apresentada a envoltória total.

### 5.1.1.1 Carregamento variando sobre a longarina 1.

As linhas de influência para as seções em estudo da longarina 1, quando o carregamento pontual unitário varia sobre a longarina 1 estão apresentadas na Figura 62.

Figura 62 – Linhas de Influência do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 1, quando o carregamento varia na própria longarina.



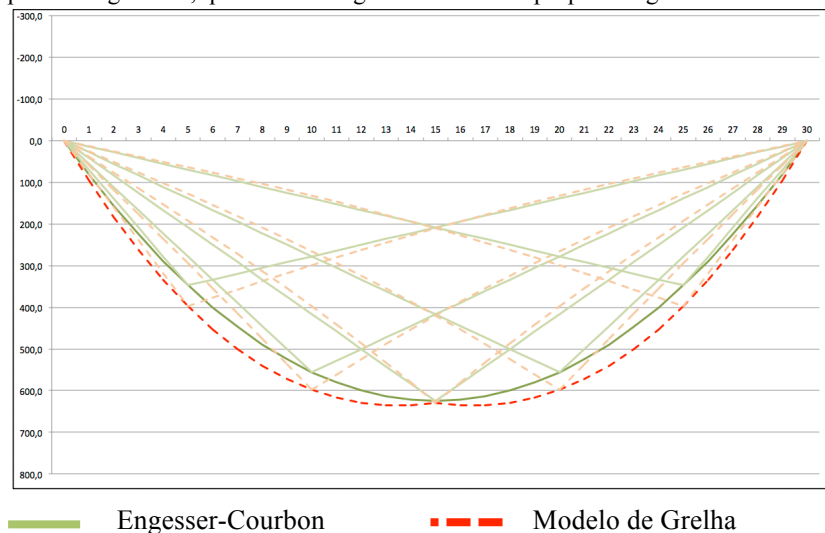
FONTE: O autor.

Podem ser observados na Figura 62 um comportamento semelhante entre os enfoques quanto ao traçado das linhas de influência e a posição da carga que provoca o maior esforço na seção. Porém, o traçado da linha de influência obtida para o modelo de grelhas apresenta uma leve concavidade em seu traçado, enquanto o traçado da linha de influência obtido pelo processo de Engesser-Courbon é linear. Com isso, o modelo

de grelhas apresenta valores maiores que o processo de Engesser-Courbon para as seções próximas a seção em estudo e valores menores para seções mais afastadas.

Na Figura 63 é apresentada a envoltória parcial dos momentos fletores da longarina 1 para uma carga pontual unitária variando sobre a própria longarina.

Figura 63 – Envoltória parcial de momentos fletores do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 1, quando o carregamento varia na própria longarina.



FONTE: O autor.

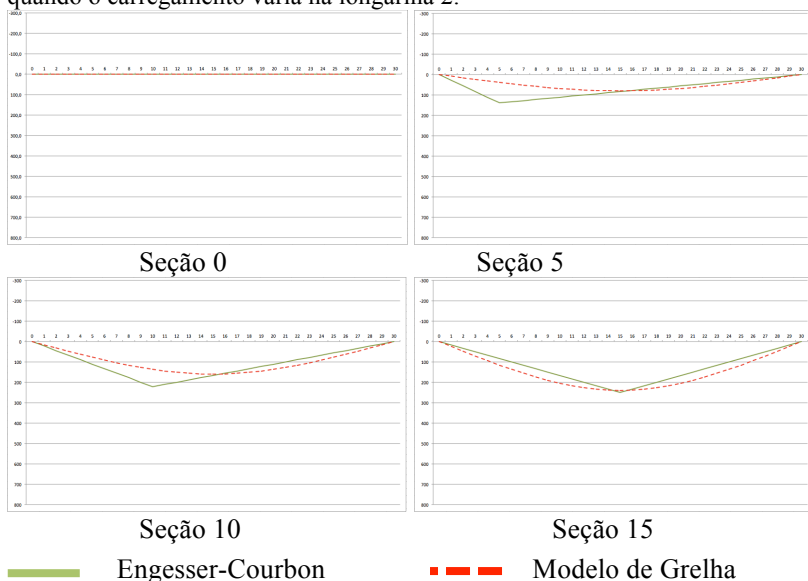
É observado na Figura 63 uma diferença quanto aos valores máximos, os quais foram maiores para o modelo de grelha. Também é observado uma diminuição dos esforços obtidos através do modelo de grelhas nas seções próximas a posição da transversina intermediária, o que indica, um ponto de distribuição de esforços.

Se faz importante salientar que a envoltória apresentada é referente a uma carga pontual unitária na posição mais crítica.

#### 5.1.1.2 Carregamento variando sobre a longarina 2.

As linhas de influência para as seções em estudo da longarina 1, quando o carregamento pontual unitário varia sobre a longarina 2 estão apresentadas na Figura 64.

Figura 64 – Linhas de Influência do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 1, quando o carregamento varia na longarina 2.



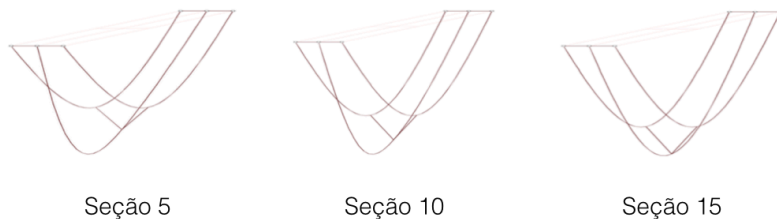
FONTE: O autor.

É observado na Figura 64 uma diferença quanto ao formato das linhas de influência para cada enfoque. Esta diferença é decorrente da forma como são transmitidos os carregamentos.

No procedimento de Engesser-Courbon é considerado o tabuleiro com rigidez infinita, portanto o carregamento atuante sobre a longarina 2 é transferido de forma direta para longarina 1. Fazendo com que o máximo esforço de momento fletor na seção em estudo da longarina 1, ocorra quando o carregamento esteja localizado na mesma seção da longarina 2.

Já para o modelo de grelha, o carregamento que atua sobre a longarina 2, desloca-se até a posição da transversina intermediária para ser transferido a seção em estudo da longarina 1. Fazendo com que o máximo esforço de momento fletor nas seções em estudo da longarina 1 estejam localizados no meio do vão. Este comportamento é observado na deformada da estrutura, para o carregamento atuante na longarina 2, nas seções localizadas a 5, 10 e 15 metros do início da ponte, apresentadas na Figura 65.

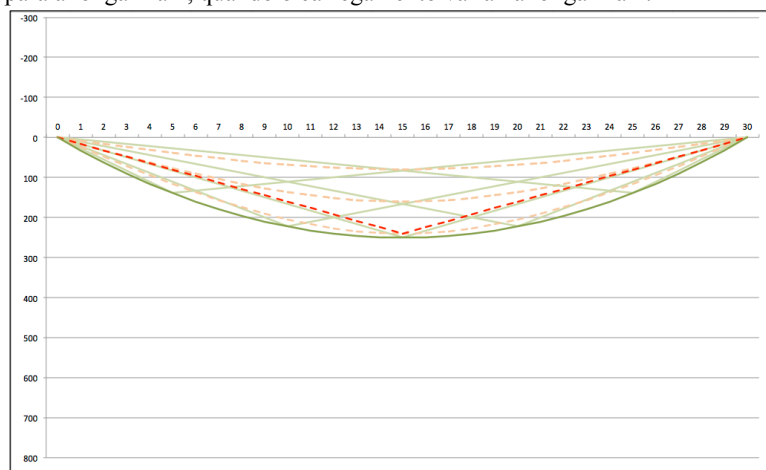
Figura 65 - Deformada da estrutura para o modelo 3L1T-NNN, quando o carregamento varia na longarina 2 para o modelo de grelha.



FONTE: O autor.

Na Figura 66 é apresentada a envoltória parcial dos momentos fletores da longarina 1 quando o carregamento varia sobre a longarina 2.

Figura 66 – Envoltória parcial de momentos fletores do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 1, quando o carregamento varia na longarina 2.



— Engesser-Courbon

- - - Modelo de Grelha

FONTE: O autor.

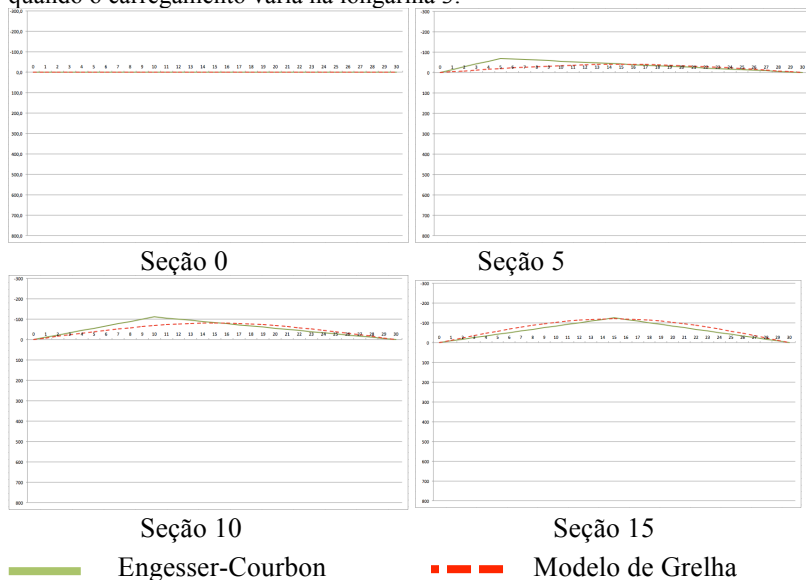
Observa-se na Figura 66 que a envoltória obtida para o modelo de grelha possui valor máximo na posição da longarina intermediária e diminui de forma linear até os apoios. Já a envoltória obtido através do processo de Engesser-Courbon possui valor máximo no meio do vão e possui um traçado parabólico. Além destas diferenças, é observado que os valores obtidos através do modelo de grelha resultaram menores aos valores obtidos pelo método de Engesser-Courbon.



### 5.1.1.3 Carregamento variando sobre a longarina 3.

As linhas de influência para as seções em estudo da longarina 1, quando o carregamento varia sobre a longarina 3 estão apresentadas na Figura 67.

Figura 67 – Linhas de Influência do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 1, quando o carregamento varia na longarina 3.

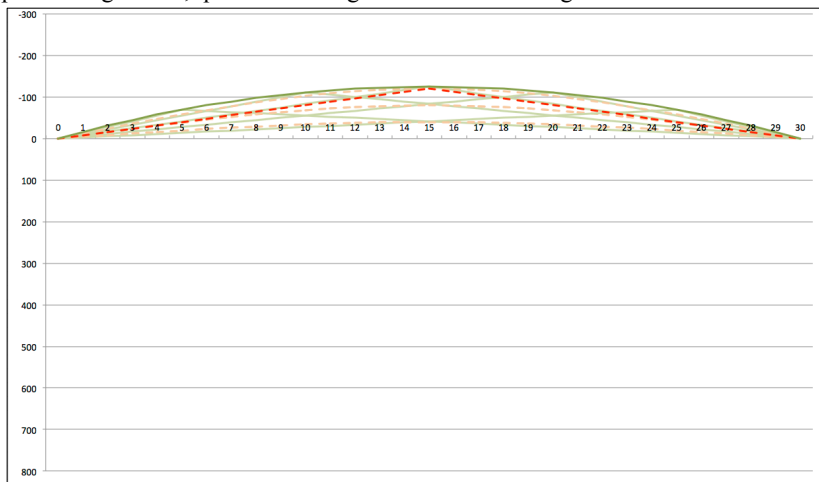


FONTE: O autor.

Na Figura 67 é observado o mesmo comportamento quanto ao formato das linhas de influência, obtidos para o carregamento variando sobre a longarina 2. Porém, para o carregamento variando sobre a longarina 3, os esforços de momentos fletores obtidos na longarina 1, resultaram em esforços negativos.

Na Figura 68 é apresentada a envoltória parcial dos momentos fletores da longarina 1 quando o carregamento varia sobre a longarina 3.

Figura 68 – Envoltória parcial de momentos fletores do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 1, quando o carregamento varia na longarina 3.



— Engesser-Courbon      - - - Modelo de Grelha

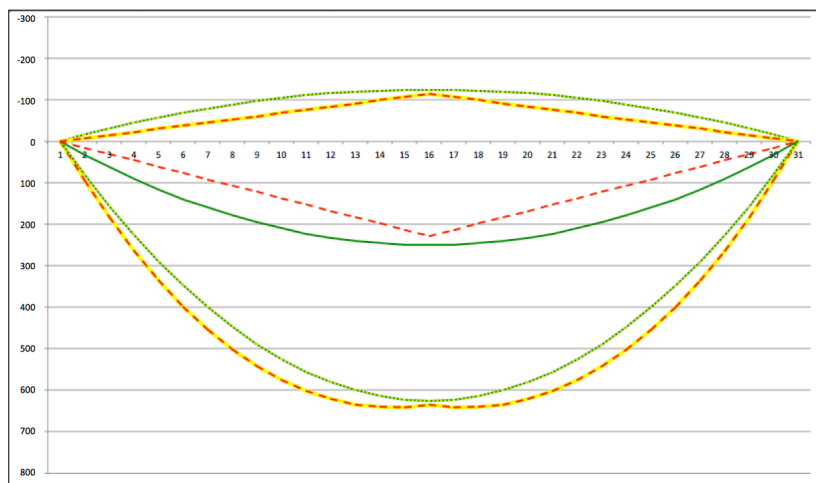
FONTE: O autor.

É observado na Figura 68 uma semelhança, quanto ao formato da distribuição dos esforços, em relação ao traçado obtido para a longarina 1 quando o carregamento percorre a longarina 2. Porém os esforços obtidos na longarina 1 quando o carregamento percorre a longarina 3 são negativos para ambos os enfoques. Estes esforços resultaram maiores para o procedimento de Engesser-Courbon.

#### 5.1.1.4 Envoltória total de momentos fletores da longarina 1.

Na Figura 69 é apresentada a envoltória total de momentos fletores da longarina 1, para o modelo de grelha, através de um traçado contínuo amarelo, e para o processo de Engesser-Courbon, através de um traçado pontilhado amarelo. Estas envoltórias foram obtidas a partir dos máximos esforços das envoltórias parciais apresentadas para o modelo de grelhas por um traçado pontilhado vermelho e para o processo de Engesser-Courbon por um traçado contínuo verde.

Figura 69 - Envoltória total de momentos fletores da longarina 1 do modelo 3LIT-NNN.



— Engesser-Courbon      - - - Modelo de Grelha

FONTE: O autor.

Analisando a Figura 69 é possível afirmar que os máximos esforços positivos atuantes na longarina 1 ocorrem quando o carregamento percorre a longarina 1. Enquanto os máximos esforços negativos atuantes na longarina 1 ocorrem quando o carregamento percorre a longarina 3. Os esforços atuantes na longarina 1 proveniente dos carregamentos atuantes sobre a longarina 2, resultaram em momentos positivos, porém com valores inferiores aos obtidos para o carregamento variando sobre a longarina 1.

A partir das envoltórias totais obtidas por ambos os enfoques, pode-se concluir que o processo de Engesser-Courbon resulta em esforços negativos mais conservadores aos obtidos pelo modelo de grelha, porém os esforços positivos obtidos pelo modelo de grelha resultaram mais conservadores aos obtidos pelo procedimento de Engesser-Courbon.

É possível concluir que quando o carregamento não percorre a longarina em estudo, a distribuição mediante o método de grelha tem picos na posição da longarina intermediária.

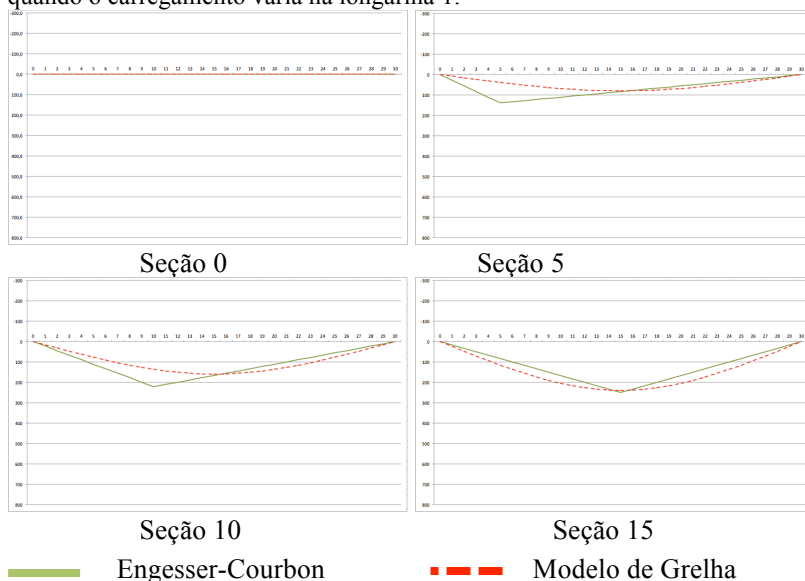
## 5.1.2 Longarina 2

Para cada longarina carregada será realizado o traçado das linhas de influência das seções localizadas a 0, 5, 10 e 15 metros a partir do início da ponte e a partir destas as envoltórias parciais. Após o traçado das envoltórias parciais é apresentada a envoltória total.

### 5.1.2.1 Carregamento variando sobre a longarina 1.

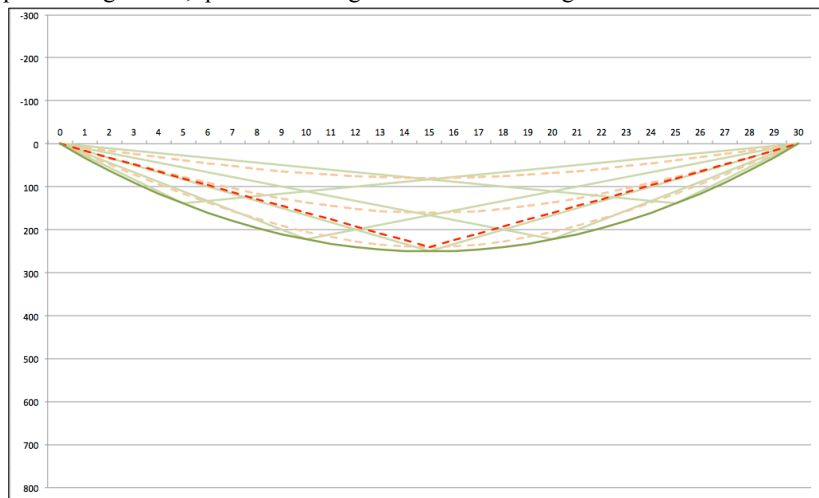
As linhas de influência para as seções em estudo da longarina 2, quando o carregamento pontual unitário varia sobre a longarina 1 estão apresentadas na Figura 70 e a envoltória parcial dos momentos fletores da longarina 2 quando o carregamento varia sobre a longarina 1 está apresentada na Figura 71.

Figura 70 – Linhas de Influência do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 2, quando o carregamento varia na longarina 1.



FONTE: O autor.

Figura 71 – Envoltória parcial de momentos fletores do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 2, quando o carregamento varia na longarina 1.



— Engesser-Courbon      - - - Modelo de Grelha

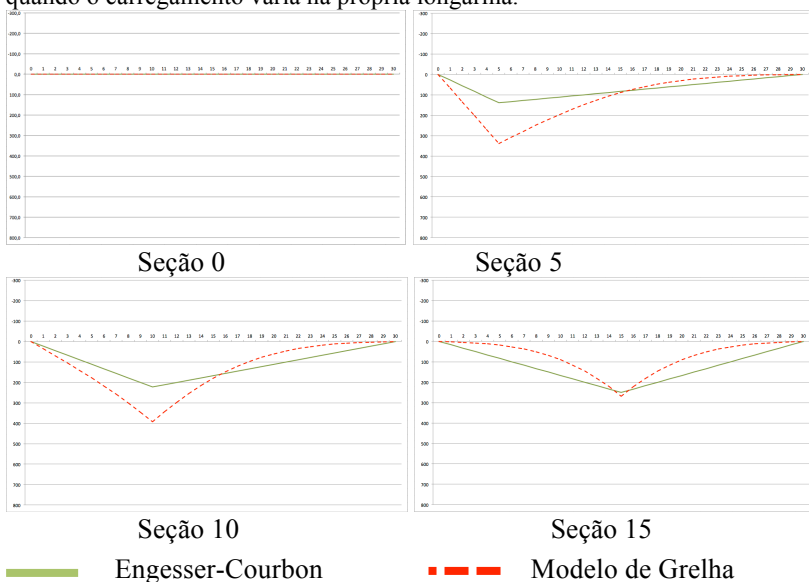
FONTE: O autor.

Na Figura 71 são observados valores mais conservadores para a longarina 2 utilizando o procedimento de Engesser-Courbon.

### 5.1.2.2 Carregamento variando sobre a longarina 2

As linhas de influência para as seções em estudo da longarina 2, quando o carregamento pontual unitário varia sobre a própria longarina estão apresentadas na Figura 72 e a envoltória parcial dos momentos fletores da longarina 2 quando o carregamento varia sobre a própria longarina está apresentada na Figura 73.

Figura 72 – Linhas de Influência do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 2, quando o carregamento varia na própria longarina.

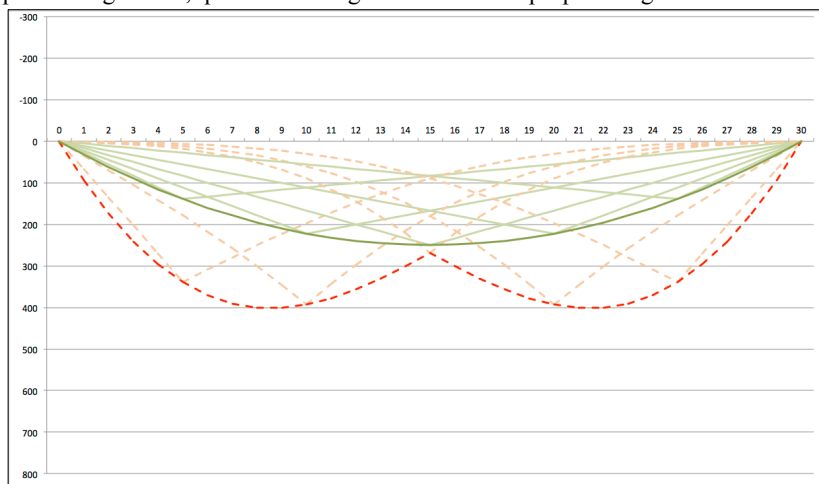


— Engesser-Courbon

- - - Modelo de Grelha

FONTE: O autor.

Figura 73 – Envoltória parcial de momentos fletores do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 2, quando o carregamento varia na própria longarina.



— Engesser-Courbon

- - - Modelo de Grelha

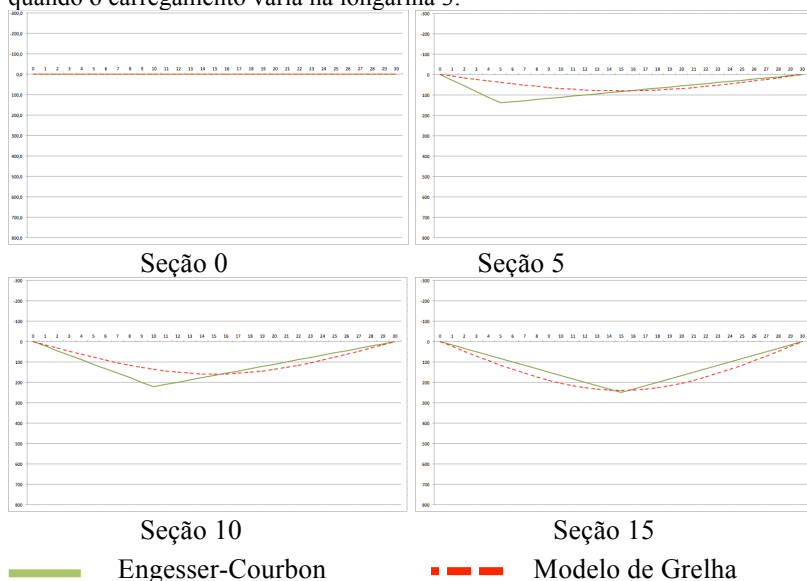
FONTE: O autor.

Na Figura 73 é observado grandes diferenças de esforços obtidos entre os enfoques, chegando a atingir próximo aos 100%. Estas diferenças tendem a diminuir nas seções próximas a posição da transversina intermediária, o que comprova mais uma vez que a transversina intermediária funciona como elemento de distribuição de esforços.

### 5.1.2.3 Carregamento variando sobre a longarina 3.

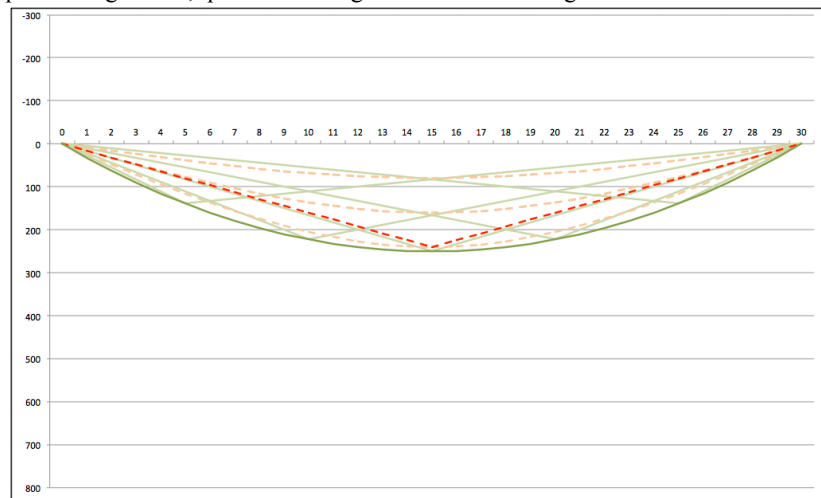
As linhas de influência para as seções em estudo da longarina 2, quando o carregamento varia sobre a longarina 3 estão apresentadas na Figura 74 e a envoltória parcial dos momentos fletores da longarina 2 quando o carregamento varia sobre a longarina 3 está apresentada na Figura 75.

Figura 74 – Linhas de Influência do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 2, quando o carregamento varia na longarina 3.



FONTE: O autor.

Figura 75 – Envoltória parcial de momentos fletores do modelo 3L1T-NNN, para a longarina 2, quando o carregamento varia na longarina 3.



— Engesser-Courbon      - - - Modelo de Grelha

FONTE: O autor.

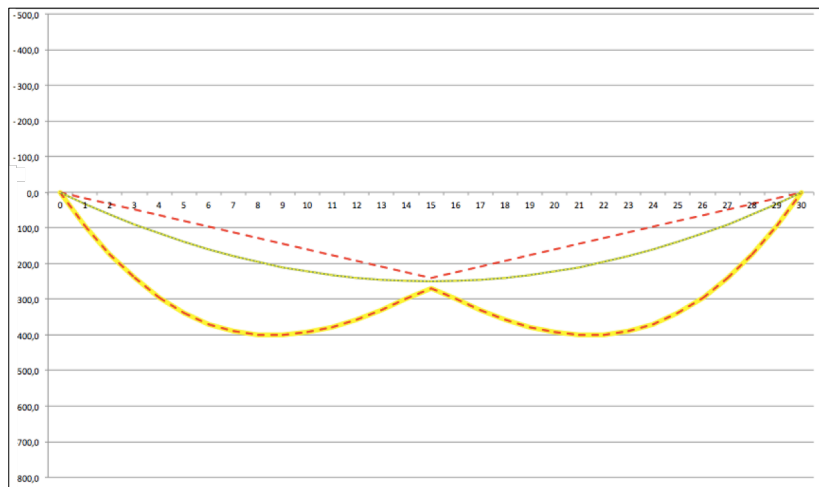
Os resultados obtidos para a longarina 2 quando os carregamentos percorrem a longarina 3, apresentados nas Figuras 66 e 67, são os mesmos quando o carregamento percorre a longarina 1, apresentados nas Figuras 65 e 66. Podendo assim ser concluído que os esforços obtidos na longarina 2 (i.e. longarina central) são os mesmos, independente se os esforços percorrerem a longarina 1 ou 3 (i.e. longarinas externas).

#### 5.1.2.4 Envoltória total de momentos fletores da longarina 2.

Na Figura 76 é apresentada a envoltória total de momentos fletores da longarina 2, para o modelo de grelha, através de um traçado contínuo amarelo, e para o processo de Engesser-Courbon, através de um traçado pontilhado amarelo. Estas envoltórias foram obtidas a partir dos máximos esforços das envoltórias parciais apresentadas para o modelo de grelhas por um traçado pontilhado vermelho e para o processo de Engesser-Courbon por um traçado contínuo verde.



Figura 76 - Envoltória total de momentos fletores da longarina 2 do modelo 3LIT-NNN.



— Engesser-Courbon      - - - Modelo de Grelha

FONTE: O autor.

Analisando a Figura 76 é possível afirmar que a envoltória total da longarina 2 obtida para o método de Engesser-Courbon é igual as envoltórias parciais da longarina 2 para os carregamentos variando nas longarinas 1, 2 e 3, ou seja, independente da posição do carregamento a envoltória de momentos fletores obtida pelo método de Engesser-Courbon é sempre igual. Já para o modelo de grelha a envoltória total da longarina 2 resultou igual a envoltória parcial da longarina 2 quando o carregamento varia sobre a longarina 2, as demais envoltórias resultaram em valores menores.

### 5.1.3 Longarina 3

Por simetria pode ser afirmado que a envoltória total da longarina 1 é idêntica a envoltória da longarina 3. Portanto para o estudo de um tabuleiro de uma ponte constituída por três longarinas é necessário realizar somente o estudo de uma das longarinas de extremidade.

## 5.2 INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE TRANSVERSINAS

Este estudo consiste em analisar a influência do número de transversinas na distribuição dos esforços de momentos fletores. Para isso foram analisados os modelos 3L(0-5)T-NNN. Modelos baseados em uma ponte bi-apoiada sem balanços, com três longarinas, duas transversinas apoiadas e transversinas intermediárias variando de 0 a 5.

Os estudos foram realizados em dois grupos, um para as longarinas de extremidade e outro para a longarina central. Para cada grupo foi analisado o comportamento das linhas de influência e as envoltórias totais.

Nos gráficos, os resultados obtidos através do processo de Engesser-Courbon foram apresentados por um traçado contínuo verde. Já para os diversos estudos de casos baseados no modelo de grelha foram utilizados traçados tracejados de diferentes tons de vermelho. Onde o tom mais fraco representa o modelo 3L0T-NNN e o tom mais forte representa o modelo 3L5T-NNN.

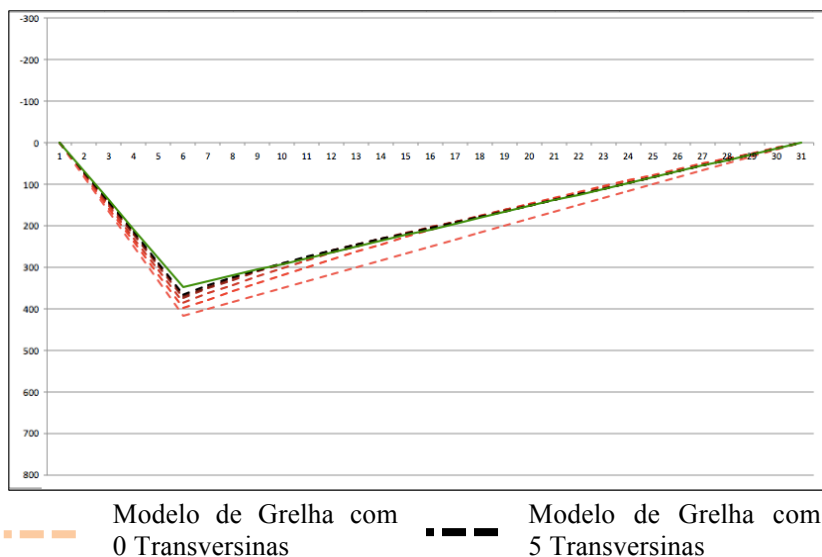
### 5.2.1 Longarinas de extremidade

Para analisar as longarinas de extremidade, foi analisado o comportamento da mesma quando o carregamento varia sobre a longarina de extremidade em estudo e na longarina de extremidade oposta, por serem as duas situações mais críticas para as longarinas de extremidade. Para cada longarina carregada foi realizado o traçado da linha de influência da seção localizada a 5 metros a partir do início da ponte para cada modelo em estudo. Também, foi realizada a envoltória total da longarina de extremidade para cada modelo em estudo.

### 5.2.1.1 Carregamento variando sobre a longarina de extremidade em estudo.

Na Figura 77 estão apresentadas as linhas de influência para a seção 5 dos modelos 3L(0-5)T-NNN, quando o carregamento varia sobre a longarina de extremidade em estudo.

Figura 77 – Linhas de influência para a seção 5 das longarinas de extremidade dos modelos 3L(0-5)T-NNN, quando o carregamento varia na longarina em estudo.



FONTE: O autor.

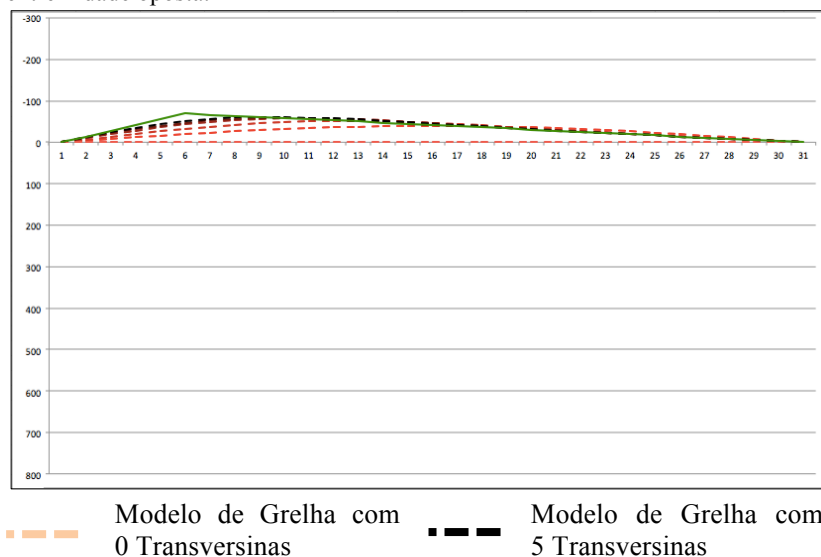
Na Figura 77, observa-se que para as longarinas de extremidade quando submetidas por cargas sobre as mesmas, o traçado das linhas de influência não modificam de formato ao aumentar o número de transversinas. Porém o aumento do número de transversinas, provoca uma redução dos valores obtidos pelo modelo de grelha.

### 5.2.1.2 Carregamento variando sobre a longarina de extremidade oposta

Na

Figura 78 estão apresentadas as linhas de influência para a seção 5 dos modelos 3L(0-5)T-NNN, quando o carregamento varia sobre a longarina de extremidade oposta.

Figura 78 – Linhas de influência para a seção 5 das longarinas de extremidade dos modelos 3L(0-5)T-NNN, quando o carregamento varia sobre a longarina de extremidade oposta.



FONTE: O autor.

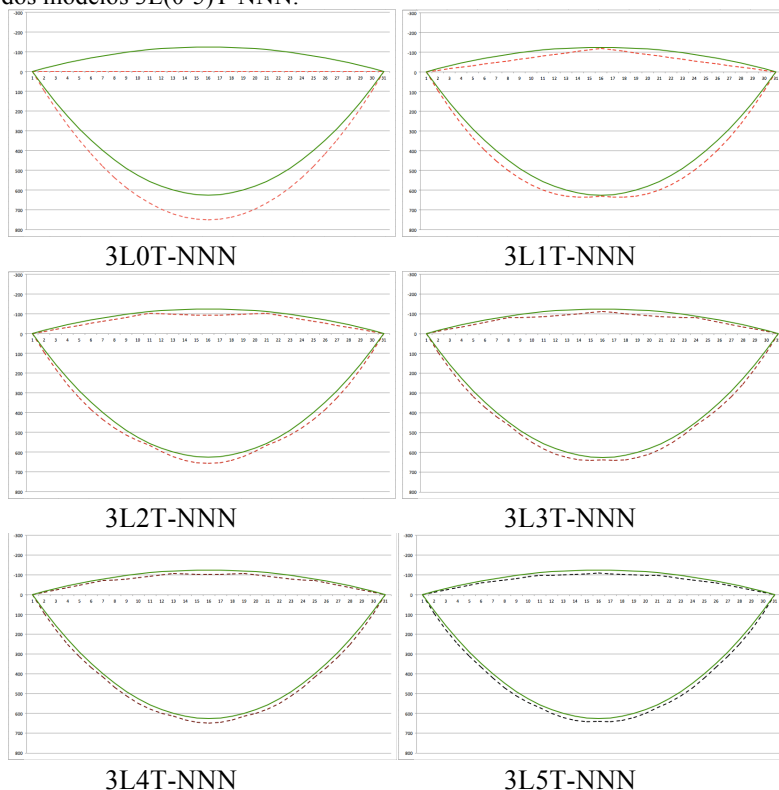
Os resultados apresentados na

Figura 78 apresentam o mesmo comportamento do modelo base. Porém o máximo esforço na seção de estudo para o modelo de grelha não mais ocorreu no meio do vão. A posição que provoca o máximo esforço encontra-se deslocada do centro na direção da seção em estudo, variando segundo o número de transversinas. Quando maior o número de transversinas, mais próximo da seção em estudo. Constatou-se também um aumento nos esforços de momentos fletores negativos obtidos pelo modelo de grelha a medida que o número de transversinas aumentou.

### 5.2.1.3 Envolvórias de momentos fletores

As envoltórias de momentos fletores das longarinas de extremidade para cada um dos modelos 3L(0-5)T-NNN estão apresentadas na Figura 79.

Figura 79 – Envolvória de momentos fletores para as longarinas de extremidade dos modelos 3L(0-5)T-NNN.



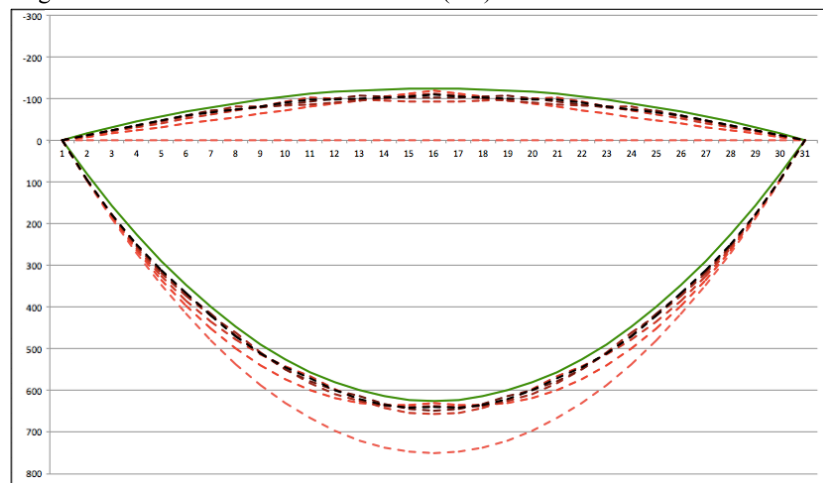
FONTE: O autor.

É observado no modelo 3L0T-NNN, apresentado na Figura 79 que a ausência de elementos transversais faz com que não sejam transmitidos os esforços de uma longarina a outra. Fazendo com que os esforços determinados para cada longarina sejam equivalentes aos esforços obtidos para uma viga bi-apoiada.

Para os demais modelos, apresentado na Figura 79, ocorreu a transferência de esforços de momentos fletores, fazendo com que na envoltória surgissem momentos negativos. Estes momentos negativos, ocorrem quando o carregamento percorre a longarina de extremidade oposta.

Na Figura 79, é observado uma melhor distribuição dos esforços quando há o aumento das transversinas, porém os valores não diminuíram significativamente. Essa observação é demonstrada mediante a superposição das envoltórias apresentada na Figura 80.

Figura 80 – Superposição das envoltória de momentos fletores para as longarinas de extremidade dos modelos 3L(0-5)T-NNN.



— Modelo de Grelha com 0 Transversinas      - - - Modelo de Grelha com 5 Transversinas

FONTE: O autor.

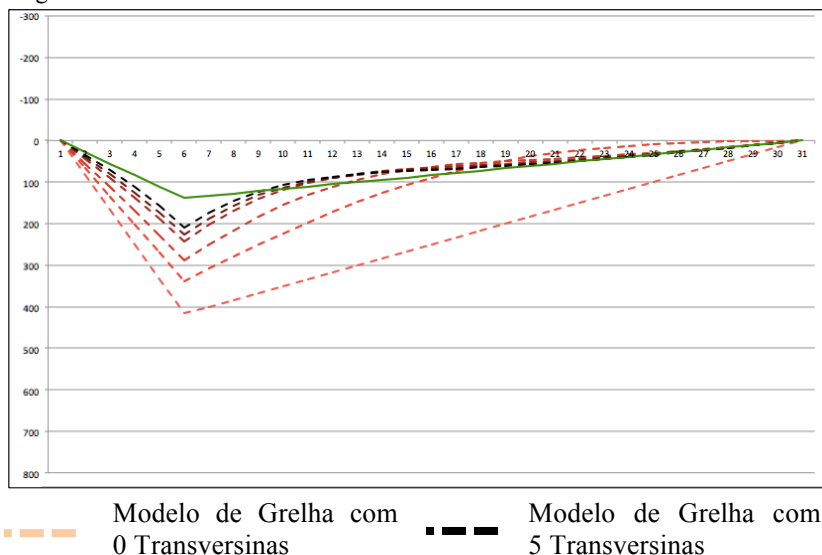
## 5.2.2 Longarinas central

Para o estudo da longarina central, foi analisado o comportamento da mesma quando o carregamento varia sobre a própria longarina, por ser a situação mais crítica para a longarina central. Para isso, foi realizado o traçado da linha de influência da seção localizada a 5 e 15 metros a partir do início da ponte para cada modelo em estudo. Também, foi realizada a envoltória total da longarina central para cada modelo em estudo.

### 5.2.2.1 Linhas de influência

Na Figura 81 e 82 estão apresentadas as linhas de influência para a seção 5 e 15, respectivamente, dos modelos 3L(0-5)T-NNN, quando o carregamento varia sobre a longarina central.

Figura 81 – Linhas de influência para a seção 5 da longarina central dos modelos 3L(0-5)T-NNN, quando o carregamento varia sobre a própria longarina.

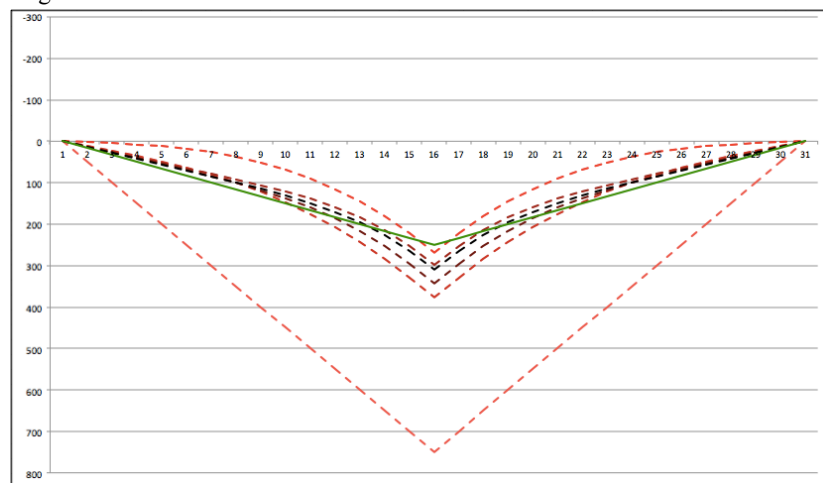


FONTE: O autor.

Na Figura 81, observa-se que as linhas de influência tenderam a ser mais retilíneas com o aumento do número de transversinas, porém continuaram apresentando uma concavidade próximo a seção em

estudo. Vale salientar que este comportamento fez com que a região que o modelo de grelha apresentava esforços maiores aos obtidos pelo processo de Engesser-Courbon diminuísse.

Figura 82 – Linhas de influência para a seção 15 da longarina central dos modelos 3L(0-5)T-NNN, quando o carregamento varia sobre a própria longarina.



— — — Modelo de Grelha com 0 Transversinas     
 — — — Modelo de Grelha com 5 Transversinas

FONTE: O autor.

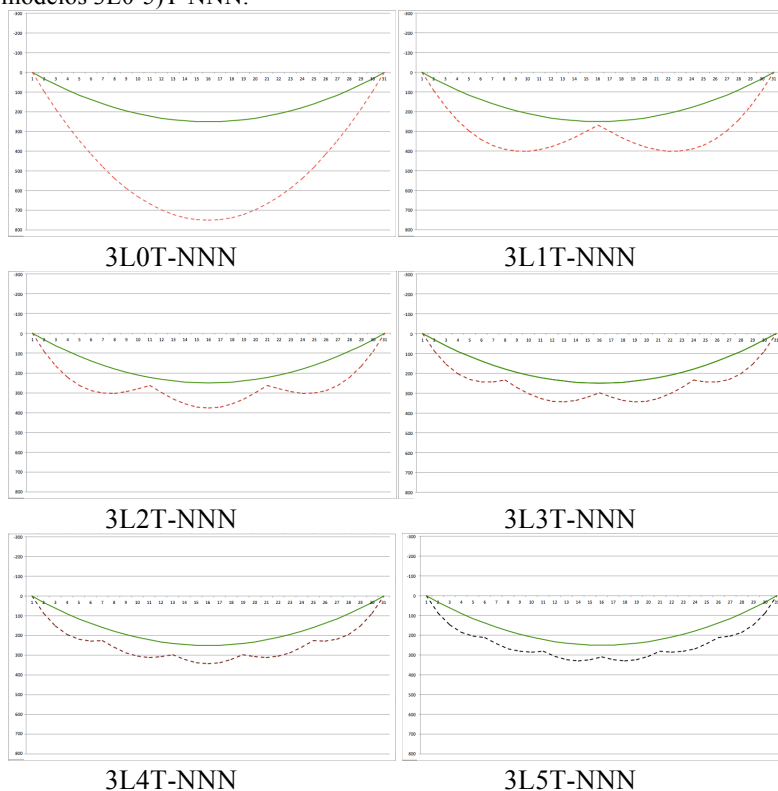
Na seção 15, apresentada na Figura 82, é possível observar o mesmo comportamento da seção 5, apresentada na Figura 81, quanto a tendência de linearidade do diagrama obtido pelo método de grelha. Porém os esforços máximos não tenderam a diminuir com o aumento do número de transversinas, senão que os esforços máximos tenderam a um valor médio entre os modelos.



### 5.2.2.2 Envolvórias de momentos fletores.

As envoltórias de momentos fletores da longarina central para cada um dos modelos 3L(0-5)T-NNN estão apresentadas na Figura 83.

Figura 83 – Envolvória de momentos fletores para a longarina central dos modelos 3L0-5)T-NNN.



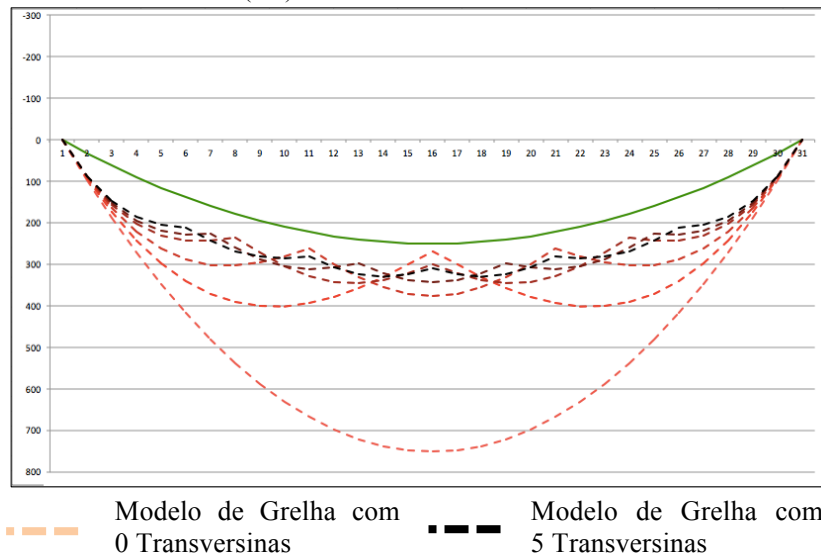
FONTE: O autor.

A Figura 83 confirma a observação de que os esforços nas longarinas do modelo 3L0T-NNN são equivalentes a uma viga bi-apoiadas.

É observado na Figura 83 uma melhor distribuição dos esforços quando há o aumento das transversinas, porém os valores não diminuíram significativamente a partir do tabuleiro com 2 transversinas.

Essa observação é demonstrada mediante a superposição das envoltórias apresentada na Figura 84.

Figura 84 – Superposição das envoltória de momentos fletores para a longarina central dos modelos 3L(0-5)T-NNN.



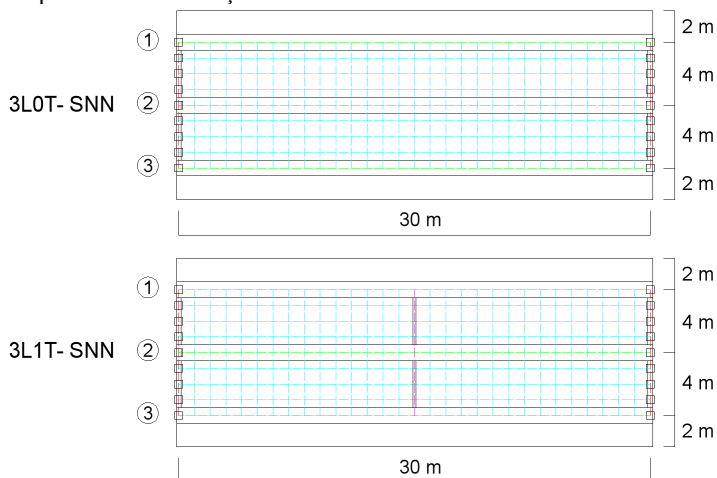
FONTE: O autor.

Além disso, o aumento do número de transversinas intermediárias reduziu as solicitações tanto na longarina central como nas longarinas de extremidade. Esse comportamento também foi observado Alves (2010).

### 5.3 CONTRIBUIÇÃO DA LAJE EM PONTE BI-APOIADA

Para o estudo da contribuição dos elementos de laje na distribuição dos esforços de momentos fletores foram analisados 2 modelos. Um primer modelo baseado em uma ponte bi-apoiada sem balanços, com três longarinas, duas transversinas apoiadas, nenhuma transversina intermediária e elementos de laje, denominado de modelo 3L0T-SNN, apresentado na Figura 85. O segundo modelo foi baseado em uma ponte bi-apoiada sem balanços, com três longarinas, duas transversinas apoiadas, uma transversina intermediária, localizada no meio do vão, e elementos de laje, denominado de modelo 3L1T-SNN, apresentado na Figura 85.

Figura 85 – Modelos utilizados para o estudo da influência das lajes de pontes bi-apoiadas sem balanços.



FONTE: O autor.

Nos gráficos, os resultados obtidos através do processo de Engesser-Courbon foram apresentados por um traçado contínuo verde, os resultados obtidos através do modelo de grelha sem a consideração dos elementos de laje foram apresentados por um traçado tracejado vermelho e os resultados para os estudos de casos baseados no modelo de grelha variando a altura de laje foram utilizados traçados pontilhados de diferentes tons de azul. Onde o tom mais fraco representa o modelo com laje de 20 centímetros e o tom mais forte representa o modelo com laje de 30 centímetros.

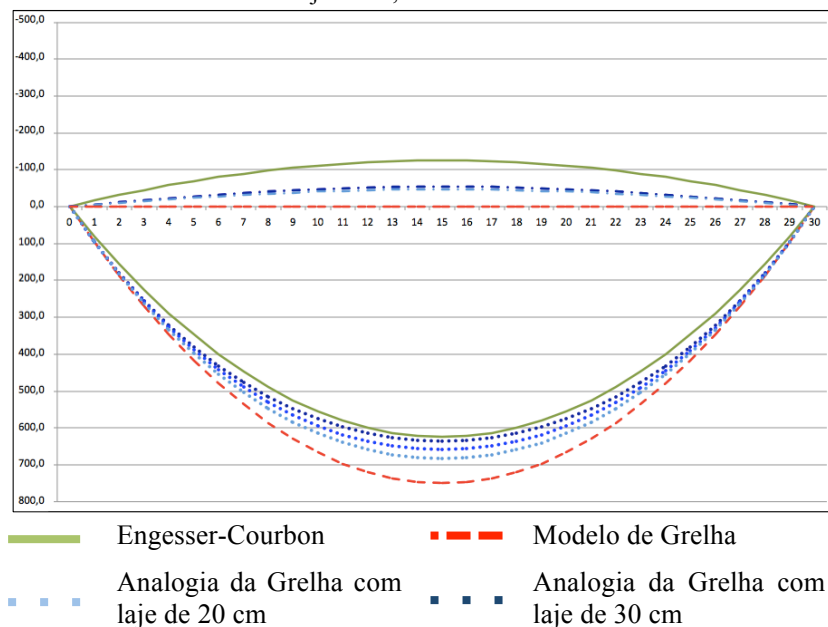
### 5.3.1 Modelo 3LOT-SNN

Para este modelo foram analisadas as envoltórias totais das longarinas de extremidade e da longarina central.

#### 5.3.1.1 Longarinas de extremidade

Na Figura 86 está apresentada a envoltória total das longarinas de extremidade para o modelo 3LOT-SNN com laje variando entre 20 e 30 centímetros.

Figura 86 – Envoltória de momentos fletores para as longarinas de extremidade do modelo 3LOT-SNN com laje de 20, 25 e 30 centímetros.



FONTE: O autor.

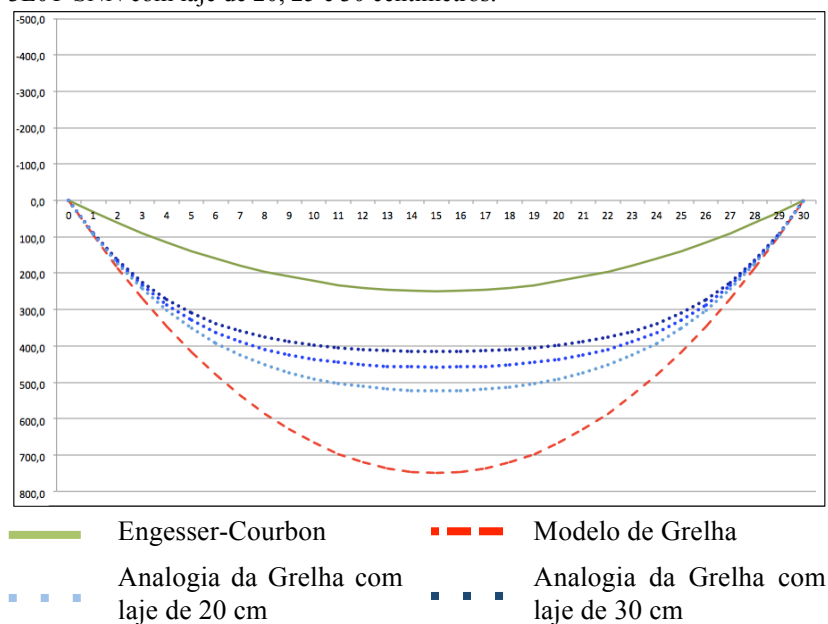
Na Figura 86 é possível observar uma redução de 9% nos esforços de momentos fletores positivos atuantes nas longarinas de extremidade com a consideração de elementos de laje de 20 centímetros no modelamento, atingindo uma redução de 15% com elementos de laje de 30 centímetros de altura.

Observou-se também o surgimento de esforços negativos com a contribuição dos elementos de laje, os quais não sofreram grandes alterações nos valores com o aumento da altura da laje.

### 5.3.1.2 Longarina central

Na Figura 87 está apresentada a envoltória total da longarina de central para o modelo 3LOT-SNN com laje variando entre 20 e 30 centímetros.

Figura 87 – Envoltória de momentos fletores para a longarina central do modelo 3LOT-SNN com laje de 20, 25 e 30 centímetros.



FONTE: O autor.

É observado na Figura 87 uma redução de 30% nos esforços de momentos fletores positivos atuantes na longarina central com a consideração de elementos de laje de 20 centímetros no modelamento, atingindo uma redução de 45% com elementos de laje de 30 centímetros de altura.

A partir destes resultados é possível afirmar que a laje tem rigidez suficiente para realizar a distribuição dos esforços atuantes sobre o tabuleiro de uma ponte bi-apoiada. Além de uma considerável redução

dos esforços de momento fletor atuantes nas longarinas de uma ponte bi-apoiada sem transversinas.

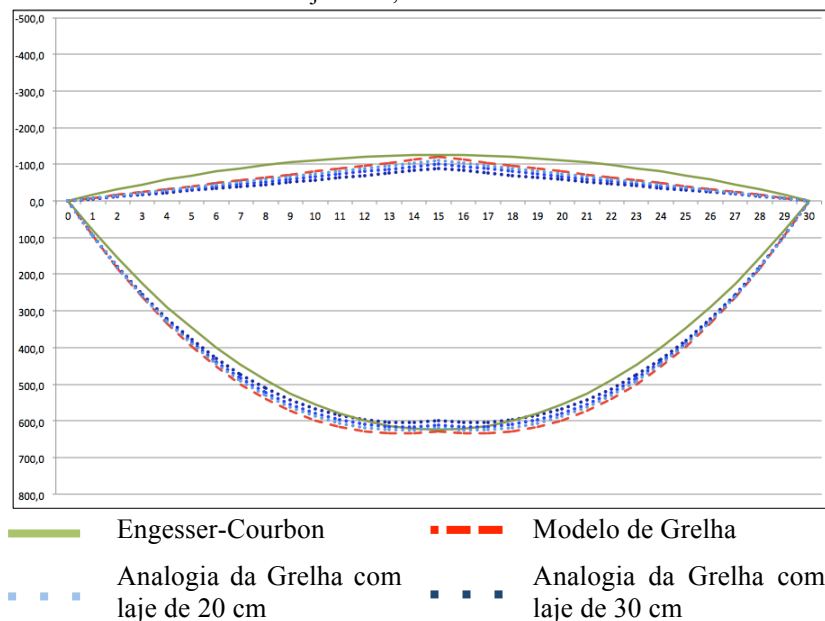
### 5.3.2 Modelo 3LIT-SNN

Para este modelo foram analisadas as envoltórias totais das longarinas de extremidade e da longarina central.

#### 5.3.2.1 Longarinas de extremidade

Na Figura 88 está apresentada a envoltória total das longarinas de extremidade para o modelo 3LIT-SNN com laje variando entre 20 e 30 centímetros.

Figura 88 – Envoltória de momentos fletores para as longarinas de extremidade do modelo 3LIT-SNN com laje de 20, 25 e 30 centímetros.



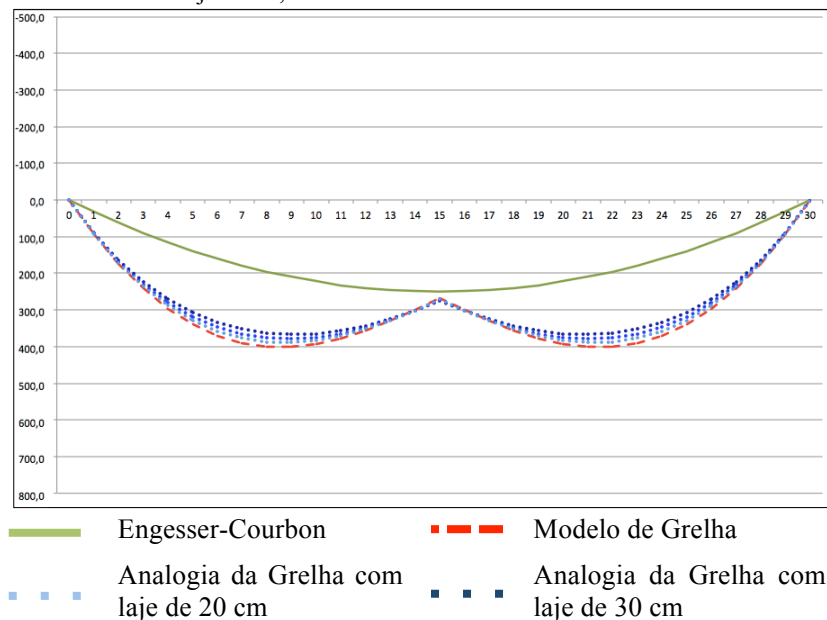
FONTE: O autor.

Na Figura 88 é possível observar uma pequena redução nos esforços de momentos fletores positivos e negativos atuantes nas longarinas de extremidade com a consideração dos elementos de laje.

### 5.3.2.2 Longarina central

Na Figura 89 está apresentada a envoltória total da longarina de central para o modelo 3L1T-SNN com laje variando entre 20 e 30 centímetros.

Figura 89 – Envoltória de momentos fletores para a longarina central do modelo 3L1T-SNN com laje de 20, 25 e 30 centímetros.



FONTE: O autor.

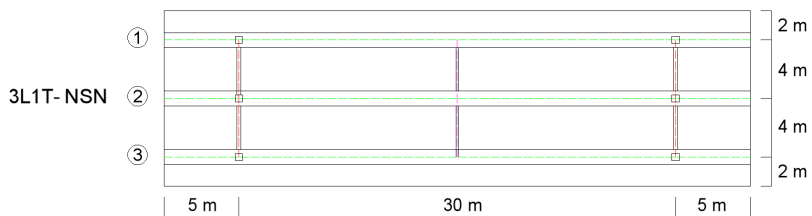
É observado na Figura 89 uma redução dos esforços de momentos fletores máximos obtidos no vão entre a transversina apoiada e transversina intermediária a medida que aumenta a altura da laje. Porém comparando os valores obtidos para o modelo com uma transversina intermediária sem a consideração dos elementos de laje com o modelo que leva em consideração elementos de laje de 30 centímetros a redução foi inferior a 9%.

A partir destes resultados é possível afirmar que não é obtida uma redução considerável nos esforços de momentos fletores nas longarinas de uma ponte bi-apoiada com transversinas intermediárias com a consideração dos elementos de laje.

#### 5.4 PONTE BI-APIODADAS COM BALANÇOS

Para o estudo da influência dos balanços nos diagramas de esforços de momentos fletores, foram adicionados balanços de 5 metros em cada extremidade do modelo base, resultando em um modelo com tabuleiro de 40 metros, denominado modelo 3L1T-NSN, apresentado na Figura 90.

Figura 90 – Modelo 3L1T-NSN.



FONTE: O autor.



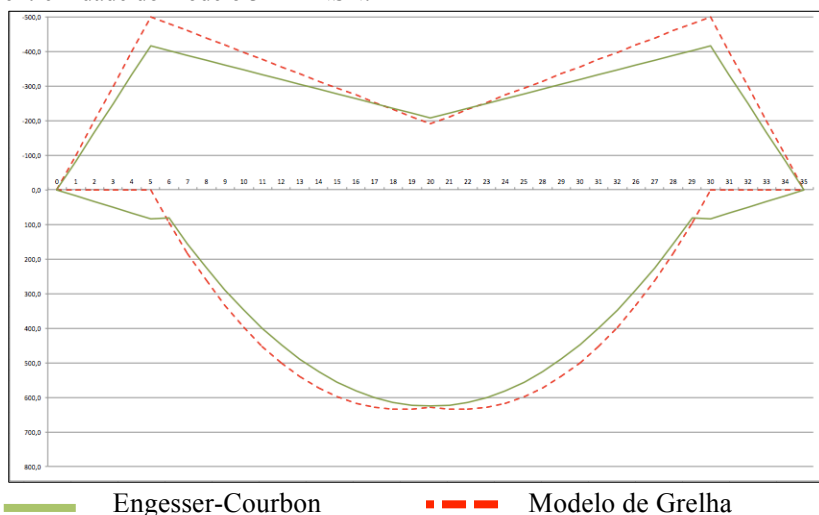
### 5.4.1 Modelo 3L1T-NSN

Para este modelo foram analisadas as envoltórias totais das longarinas de extremidade e da longarina central.

#### 5.4.1.1 Longarinas de extremidade

Na Figura 91 está apresentada a envoltória total das longarinas de extremidade para o modelo 3L1T-NSN.

Figura 91 – Envoltória total de momentos fletores das longarinas de extremidade do modelo 3L1T-NSN.



FONTE: O autor.

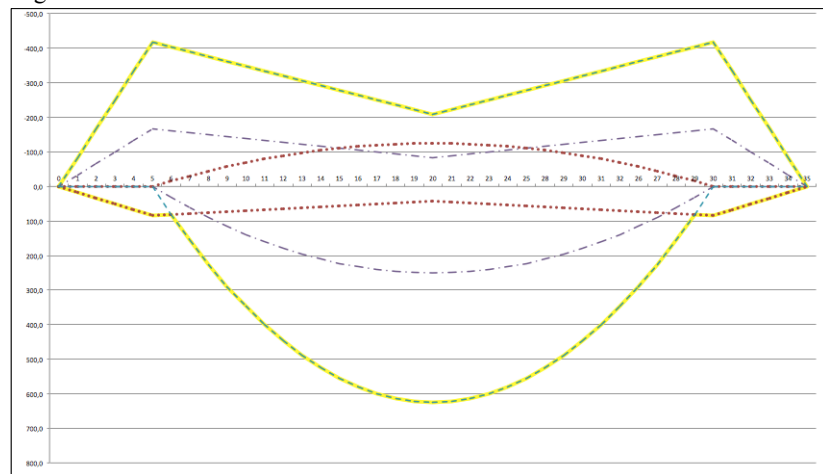
Analisando a Figura 91, observa-se o aparecimento de momentos negativos sobre os apoios, comportamento esperado para vigas com balanços. Comparando os esforços obtidos por cada um dos enfoques, obteve-se maiores negativos utilizando o modelo de grelha.

Ao comparar o traçado das envoltórias das longarinas de extremidade para o modelo 3L1T-NSN, com traçado das envoltórias das longarinas de extremidade obtidas para o modelo base, observa-se uma grande semelhança no traçado das envoltórias positivas, obtidas pelo modelo de grelha. Porém, para o traçado obtido pelo processo de Engesser-Courbon observam-se momentos positivos nos balanços. Esse

comportamento é compreendido na Figura 92, quando analisadas as envoltórias parciais para o método de Engesser-Courbon.

A Figura 92 apresenta as envoltórias parciais obtidas pelo método de Engesser-Courbon para as longarinas de extremidade quando o carregamento varia sobre: a longarina de extremidade em estudo, traçado tracejado azul, a longarina central, traçado tracejado e pontilhado em lilás e a longarina de extremidade oposta, traçado pontilhado vermelho. O traçado contínuo amarelo representa a envoltória total de momentos fletores para a longarina de extremidade obtidos através do processo de Engesser-Courbon.

Figura 92 – Envoltórias parciais e total dos momentos fletores para as longarinas de extremidade do modelo 3L1T-NSN através do processo de Engesser-Courbon.



- ■ ■ Carregamento sobre a própria longarina
- ■ ■ Carregamento sobre a longarina central
- ■ ■ Carregamento sobre a longarina oposta
- ■ ■ Envoltória total da longarina de extremidade

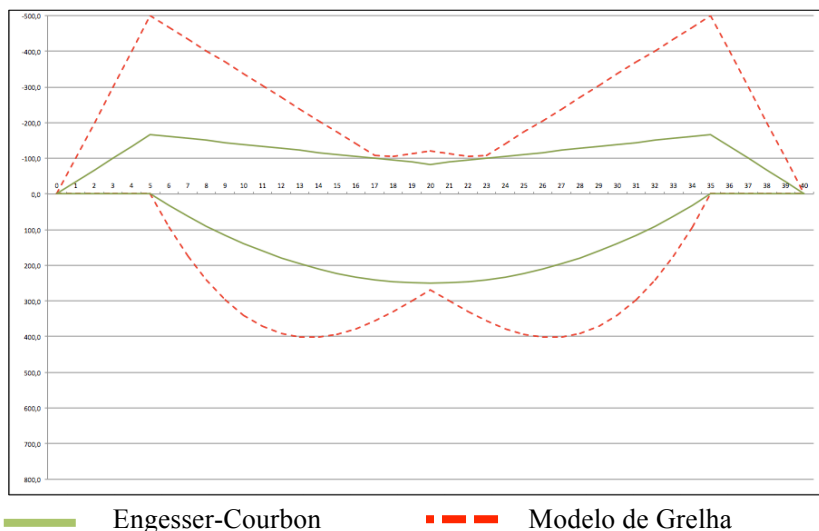
FONTE: O autor.

Analisando a Figura 92, conclui-se que o esforço positivo no balanço da longarina de extremidade ocorre devido ao carregamento variando na longarina de extremidade oposta a longarina em estudo.

### 5.4.1.2 Longarina central

A envoltória total de momentos fletores para a longarina central do modelo 3L1T-NSN, está apresentada na Figura 93.

Figura 93 – Envoltória total de momentos fletores para a longarina central do modelo 3L1T-NSN.



FONTE: O autor.

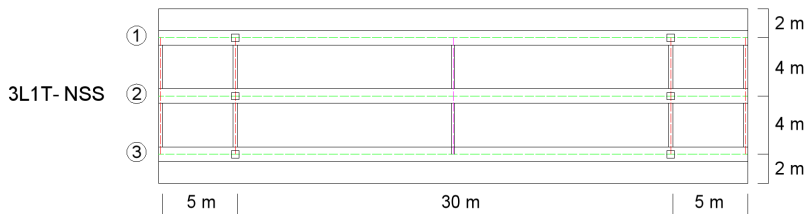
Na Figura 93, é observado que os momentos negativos, sobre os balanços da longarina central, obtidos através do modelo de grelha, resultou nos mesmos valores obtidos para as longarinas de extremidade. Isto significa que não ocorreram distribuição dos carregamentos entre as longarinas nos balanços, comportamento esperado devido a ausência de elementos transversais para transmitir o carregamento entre as longarinas.

A envoltória de momentos fletores positivos no vão central, obtida por ambos os enfoques, para o modelo 3L1T-NSN, resultou igual a envoltória de momentos fletores obtida para o modelo 3L1T-NNN. Os momentos fletores positivos obtidos nos balanços, resultaram em valores nulos por ambos os enfoques.

## 5.5 CONTRIBUIÇÃO DOS CORTINAS EM PONTES BI-APIOADAS COM BALANÇOS

Para o estudo da contribuição dos cortinas na distribuição dos esforços de momentos fletores foram adicionados ao modelo 3L1T-NSN os cortinas, resultando no modelo 3L1T-NSS, apresentado na Figura 94.

Figura 94 – Modelo 3L1T-NSS.



FONTE: O autor.

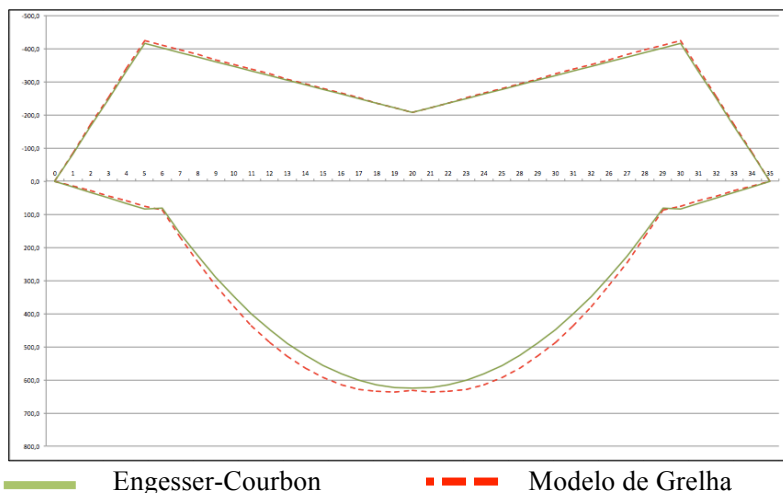
### 5.5.1 Modelo 3L1T-NSS

Para este modelo foram analisadas as envoltórias totais das longarinas de extremidade e da longarina central.

#### 5.5.1.1 Longarinas de extremidade

Na Figura 95 está apresentada a envoltória total de momentos fletores positivos e negativos das longarinas de extremidade do modelo 3L1T-NSS.

Figura 95 – Envoltória total de momentos fletores das longarinas de extremidade do modelo 3L1T-NSS.



FONTE: O autor.

Comparando os valores obtidos para a envoltória total do modelo 3L1T-NSS, apresentada na Figura 95, com a envoltória total do modelo 3L1T-NSN, apresentada na Figura 91, é possível afirmar que a consideração dos cortinas fez com que os esforços de momentos fletores negativos diminuíssem de valor chegando a valores muito semelhantes aos obtidos pelo procedimento de Engesser-Courbon.

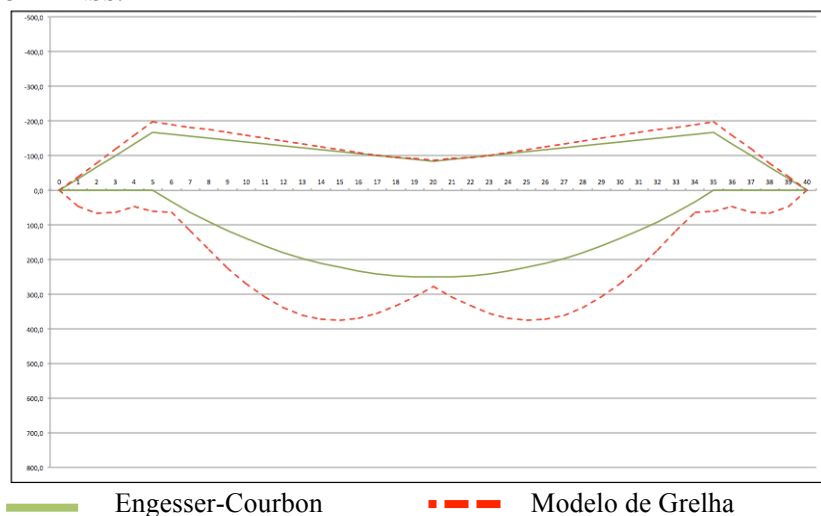
Na Figura 95 também é possível observar o aparecimento de esforços de momentos fletores positivos nos balanços, que, como visto anteriormente, são provenientes da distribuição, realizada através dos

cortinas, dos carregamentos atuantes na longarina de extremidade oposta.

### 5.5.1.2 Longarina central

Na Figura 96 está apresentada a envoltória total de momentos fletores positivos e negativos para a longarina central do modelo 3L1T-NSS.

Figura 96 – Envoltória de momentos fletores para a longarina central do modelo 3L1T-NSS.



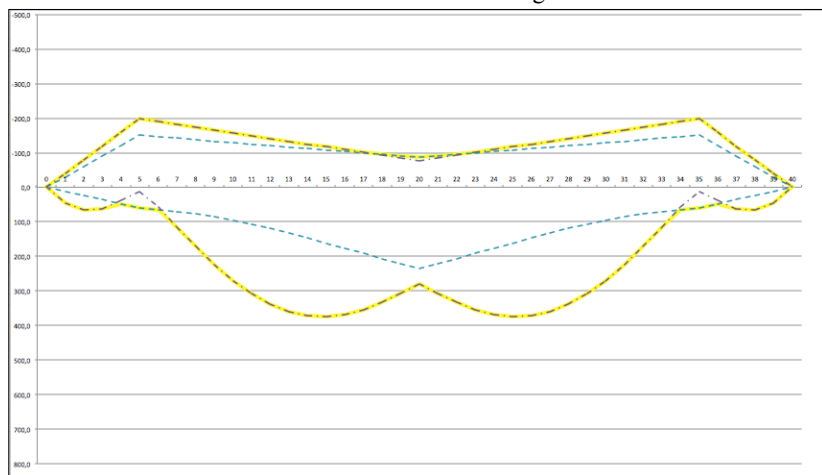
FONTE: O autor.

Quando há a consideração dos cortinas, é observado uma redução de mais de 100% dos momentos negativos obtidos pelo modelo de grelha. Isso pode ser visto comparando a envoltória de momentos fletores negativos do modelo 3L1T-NSS, apresentada na Figura 95, com a obtida no modelo 3L1T-NSN, apresentada na Figura 91. Ratificando a importância da consideração dos cortinas na modelagem, utilizada no modelo de grelha, para a obtenção das envoltórias de esforços.

Os momentos positivos sofreram redução de valores para algumas seções intermediárias, porém, nos balanços surgiram momentos positivos. Os quais não foram contabilizados fazendo uso do procedimento de Engesser-Courbon.

Para identificar a origem dos esforços positivos nos balanços, utilizando o modelo de grelha, foram analisadas as envoltórias parciais obtidas para a longarina central através do modelo de grelha, apresentadas na Figura 97. Nessa figura, os valores obtidos para a longarina central, quando o carregamento varia sobre as longarinas de extremidade, estão apresentadas pelo traçado tracejado azul, e os valores obtidos para a longarina central, quando o carregamento varia sobre a própria longarina, estão apresentados pelo traçado tracejado e pontilhado lilás e o traçado contínuo amarelo representa a envoltória total dos momentos fletores da longarina central.

Figura 97 – Envoltórias parciais e total dos momentos fletores para a longarina central do modelo 3L1T-NSS através do modelo de grelha.



■ Carregamento sobre a longarina 2  
 ■ Carregamento sobre a longarina 1 e 3  
 — Envoltória total da longarina central

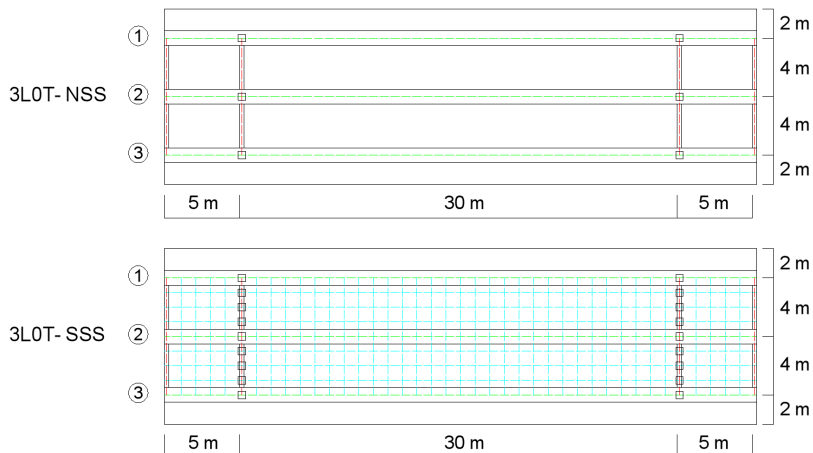
FONTE: O autor.

A Figura 97 mostra que os esforços positivos sobre o balanço são maiores para algumas seções quando o carregamento percorre a longarina central e para outras quando o carregamento percorre as longarinas de extremidade. A partir dessa observação, é possível afirmar que o trajeto mais crítico, nos balanços, não ocorre quando o carregamento percorre somente uma longarina.

## 5.6 CONTRIBUIÇÃO DOS ELEMENTOS DE LAJE EM PONTES BI-APOIADAS COM BALANÇOS

Para a análise da contribuição dos elementos de laje na distribuição dos esforços de momentos fletores em pontes bi-apoiadas com balanços foram estudadas as diferenças entre os modelos 3LOT-NSS e 3LOT-SSS, apresentados na Figura 98.

Figura 98 – Modelos 3LOT-NSS e 3LOT-SSS.



FONTE: O autor.



### 5.6.1 Modelos 3L0T-NSS e 3L0T-SSS

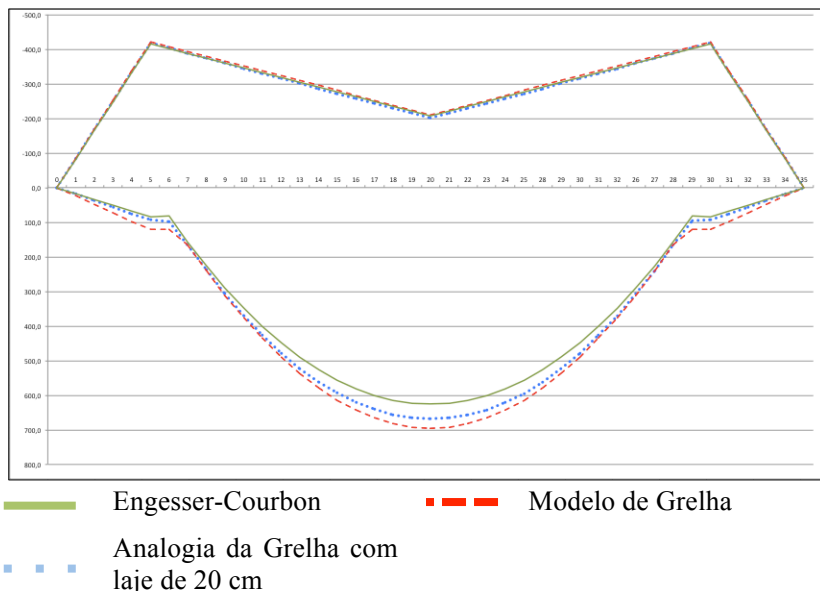
Para estes modelos foram analisadas as envoltórias totais das longarinas de extremidade e da longarina central.

Nos gráficos apresentados para este estudo, a envoltória total de momentos fletores, obtida através do processo de Engesser-Courbon, foi apresentada por um traçado contínuo verde. Já a envoltória total de momentos fletores, utilizando o modelo de grelha, obtida para o modelo 3L0T-NSS, foi apresentada por um traçado tracejado vermelho, e a envoltória total de momentos fletores utilizando a analogia das grelhas para o modelo 3L0T-SSS, utilizou-se um traçado pontilhado azul.

#### 5.6.1.1 Longarinas de extremidade

Na Figura 99 são apresentadas as envoltórias totais, obtidas utilizando o processo de Engesser-Courbon e o modelo de grelha, dos modelos 3L0T-NSS e 3L0T-SSS para as longarinas de extremidade.

Figura 99 – Envoltórias totais dos momentos fletores para as longarinas de extremidade dos modelos 3L0T-NSS e 3L0T-SSS.



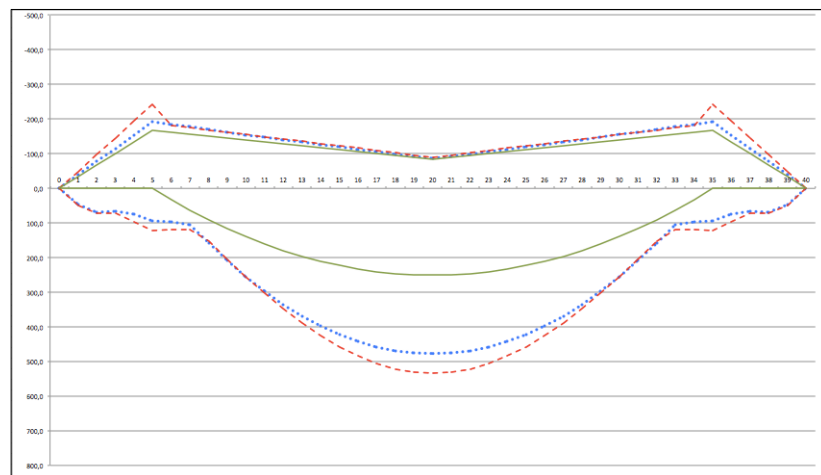
FONTE: O autor.

O uso de elementos de laje, quando considerados os cortinas na modelagem de pontes bi-apoiadas com balanço, não provocou grandes mudanças na envoltória de esforços de momentos fletores, principalmente na envoltória de esforços negativos.

### 5.6.1.2 Longarina central

Na Figura 100 são apresentadas as envoltórias totais, obtidas utilizando o processo de Engesser-Courbon e o modelo de grelha, dos modelos 3LOT-NSS e 3LOT-SSS para a longarina central.

Figura 100 – Envoltórias totais dos momentos fletores para a longarina central dos modelos 3LOT-NSS e 3LOT-SSS.



— Engesser-Courbon      - - - Modelo de Grelha  
. . . Analogia da Grelha com laje de 20 cm

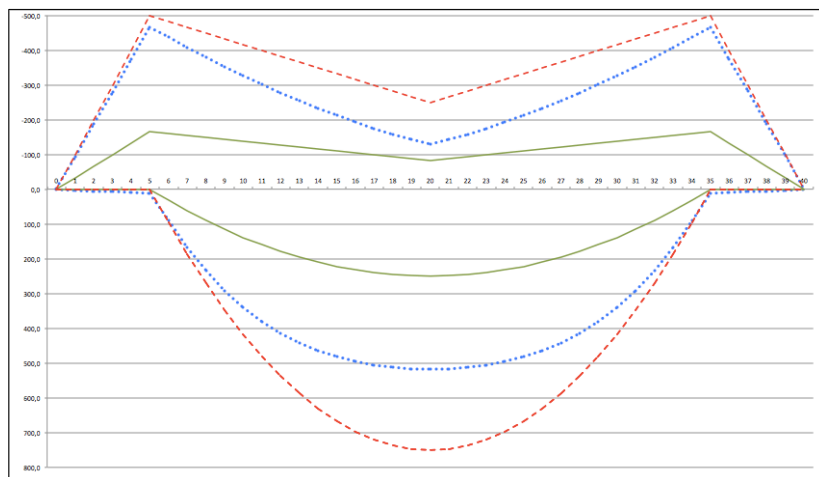
FONTE: O autor.

Na Figura 100 é possível observar um "pico" de momento negativo para o modelo sem a consideração dos elementos de laje. Enquanto no modelo com a consideração dos elementos de laje a envoltória de momentos negativos resultou mais estável. A diferença entre os valores máximos negativos entre os modelos chegou a 20%.

A redução da envoltória de momentos fletores positivos, devido a consideração dos elementos de laje em uma ponte bi-apoiada com

balanços e cortinas, foi de apenas a 10%. Enquanto para uma ponte bi-apoiada com balanços e sem cortinas, a redução chegou a 30%. A Figura 101 apresenta a envoltória de momentos fletores para o modelo 3LOT-NSN, por um traçado tracejado vermelho, e para o modelo 3LOT-SSN, por um traçado pontilhado azul.

Figura 101 – Envoltórias totais dos momentos fletores para a longarina central dos modelos 3LOT-NSN e 3LOT-SSN.



— Engesser-Courbon      - - - Modelo de Grelha  
 ■ ■ ■ Analogia da Grelha com  
 laje de 20 cm

FONTE: O autor.

Analisando a Figura 101, conclui-se que as cortinas colaboram não só com a distribuição dos esforços negativos, mas também na distribuição dos esforços positivos.



## 6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Este capítulo apresenta as conclusões e recomendações deste trabalho.

### 6.1 CONCLUSÕES

Após serem analisados os comportamentos da distribuição dos esforços de momentos fletores pelo método de Engesser-Courbon com um modelo de grelha, em pontes bi-apoiadas, com e sem balanços, considerando a influência de elementos de laje e dos cortinas, observou-se as considerações, segundo a linha de influência e envoltórias de momentos fletores, que se seguem.

As linhas de influência, para o processo de Engesser-Courbon, independente da posição do carregamento no tabuleiro, mostraram que os maiores esforços ocorrem na seção em estudo e variam linearmente da seção em estudo até os apoios. Já, para o modelo de grelha, a posição do carregamento e o número de transversinas mostraram influência no comportamento da linha de influência.

Para o modelo de grelha, quando o carregamento está na própria longarina em estudo, a posição de máximo esforço da linha de influência ocorre na seção em estudo e seu traçado apresenta uma concavidade. O aumento do número de transversinas aproxima os valores obtidos pelo modelo das grelhas aos obtidos por Engesser-Courbon, fazendo com que, parte das envoltórias do modelo de grelha apresentem valores menores aos de Engesser-Courbon. Quanto maior o número de transversinas, maior a região em que o modelo de grelha apresenta valores inferiores aos de Engesser-Courbon.

Por outro lado, quando o carregamento está posicionado em outra longarina, a distribuição ocorre de forma parabólica. O número de transversinas influencia na posição do máximo esforço nessa situação. Quanto maior o número de transversinas, mais próximo da seção em estudo ocorre o maior esforço.

Os diferentes enfoques estudados apresentaram resultados de envoltórias de momentos semelhantes para as longarinas de extremidades, porém para a longarina central, as envoltórias de momentos apresentam diferenças significativas. Essas diferenças tendem a diminuir próximo aos apoios e nas seções próximas a posição das transversinas intermediárias, o que comprova que as transversinas intermediárias funcionam como pontos de distribuição de esforços. Portanto, quanto maior o número de transversinas intermediárias, a

envoltória de esforços, pelo modelo de grelha, resulta em um traçado mais uniforme, porém com valores maiores aos obtidos pelo processo de Engesser-Courbon.

Nas pontes bi-apoiadas sem balanços verificou-se que os esforços de momentos fletores positivos foram maiores para o modelo de grelha, porém, para os momentos negativos, o processo de Engesser-Courbon resultou em valores mais críticos. Já para pontes bi-apoiadas com balanços, ambos esforços, positivos e negativos, foram maiores, em módulo, para o modelo de grelha. Com exceção aos esforços positivos atuantes nos balanços para o modelo de ponte bi-apoiada com balanço e sem cortinas.

Para os esforços positivos nos balanços da longarina central pelo método das grelhas, se demonstrou importante conhecer qual o posicionamento do carregamento que ocasiona os maiores esforços. Isso ocorre, pois, para algumas seções, os esforços são maiores quando o carregamento varia na longarina central e para outras, os esforços são maiores quando o carregamento varia nas longarinas de extremidade.

A consideração dos elementos de laje na modelagem de pontes bi-apoiadas mostraram grande importância quanto aos esforços de momentos fletores positivos nos modelos sem transversinas intermediárias. Apresentando uma redução de 15% dos esforços positivos atuantes nas longarinas de extremidade e uma redução de 45% dos esforços positivos nas longarinas centrais. Porém para os modelos com transversinas intermediárias a inclusão dos elementos de laje no modelamento não mostraram grandes variações nas envoltórias. Em relação aos esforços negativos, os elementos de laje, para pontes bi-apoiadas com balanços, não apresentaram contribuição significativa quando considerados os cortinas no modelamento.

Por fim, o estudo verificou que o emprego do método de grelha e da analogia das grelhas geram bons resultados. Desta forma, sendo indicados para serem utilizados com a finalidade de validação de modelos mais complexos.

## 6.2 RECOMENDAÇÕES

As recomendações para trabalhos futuros são:

- Ampliar os estudos utilizando o trem-tipo e o peso próprio da estrutura, além de determinar quais os trajetos mais críticos para cada longarina;
- Avaliar o comportamento de pontes bi-apoiadas com e sem balanços, com um número maior de longarinas;
- Estudar o comportamento de pontes bi-apoiadas com e sem balanços segundo os esforços cortantes;
- Verificar como o número de longarinas e transversinas intermediárias influenciam na redução dos deslocamentos;
- Realizar modelos variando o espaçamento das malhas das lajes;
- Estudar a rigidez dos elementos de borda para a analogia das grelhas.





## 7 REFERÊNCIAS

A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) elaborou as seguintes normas que servem como referência para a execução de pontes em concreto armado:

NBR 6118 - Projeto de estrutura de concreto (ABNT, 2014);

NBR 6123 - Forças devidas ao vento em edificações (ABNT, 1988);

NBR 7187 - Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido (ABNT, 2003);

NBR 7188 - Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas (ABNT, 2013);

NBR 8681 - Ações e segurança nas estruturas (ABNT, 2003).

AHI, A. J. F. **Análise de Fadiga em Pontes Rodoviárias de Concreto Armado**. 2009. 154 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

ALVES, E. V. **Análise Estrutural de Pontes em Vigas Múltiplas de Concreto Protendido**. 1994. 166 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1994.

ALVES, M. S. **Avaliação da Distribuição Transversal de Cargas em Tabuleiros de Pontes em Vigas Múltiplas, com e sem Transversinas Internas**. 2010. 78 p. Monografia (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Católica do Salvador, Bahia, 2010.

ALVES, E. V.; ALMEIDA, S. M. F.; JUDICE, F. M. S. Métodos de Análise Estrutural de Tabuleiros de Pontes em Vigas Múltiplas de Concreto Protendido. *Engevista*. v. 6, n. 2, p. 48-58, 2004.

ANDRADE, T. C. M. **Diretrizes para o Dimensionamento da Superestrutura de Pontes de Concreto Armado com Tabuleiro Apoiado em Duas Vigas**. 2010. 124 p. Monografia (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Católica do Salvador, Bahia, 2010.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, 1982.

BATTAGLIA, G. ; MALIERBA, P.G. ; SGAMBI, L. Bridge Deck

Analysis thought the use of grillage models. In INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL AND CONSTRUCTION ENGINEERING, 2., 2003, Rome. **Proceeding ...** Rome, p. 981-987, 2003.

BERNARDO, G. **Pontes**. 3 ed. São Paulo: Grêmio Politécnico, 1980.

BUENO, J. R. **Influência da Flexibilidade de Vigas de Apoio no Projeto de Lajes Maciças de Concreto Armado**. 2014. 196 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.

DEPARTAMENTO NACIONAL DE ESTRADAS DE RODAGEM. **DNER – ES 335**: Manual de Projeto de Obras-de-arte Especiais. Rio de Janeiro, 1997.

DEPARTAMENTO NACIONAL DE INFRAESTRUTURA DE TRANSPORTE. **DNIT 122 – ES – Pontes e viadutos rodoviários – Estruturas de concreto armado – Especificações de serviços**. Rio de Janeiro, 2009.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **Um Primeiro Curso em Elementos Finitos**. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

FULGÊNCIO, J. P. T. O. R.; PAULA, F. A.; AZEVEDO, C. P. B. Análise do Uso de Vigas Transversinas em Pontes de Concreto Armado. **Engenharia Estudo e Pesquisa**. ABPE, v. 14, n. 1, p.26-33, 2014.

HAMBLY, E. C. **Bridge Deck Behaviour**. 2 ed. London: Chapman & Hall, 1991.

KALYANSHETTI, M. G.; SHRIRAM, R. P. Study of Effectiveness of Courbon's Theory in the Analysis of T-beam Bridges. **International Journal of Scientific & Engineering Research**, v. 4, n. 3, 2013.

KENNEDY, J. B.; BALI, S. K. Rigidities of concrete waffle-type slab structures. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 6, n. 1, p. 65-74, 1979.

KLINSKY, G.E.R.G. **Uma Contribuição ao Estudo das Pontes Mistas**. 1999. 232 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) –

Universidade de São Carlos, São Carlos, 1999.

LEONHARDT, F. **Construções de concreto: Princípios básicos da construção de pontes de concreto.** v. 6. Rio de Janeiro: Interciência, 1979.

LONGO, H. I. **Esforços Máximos em Pontes Tipo Grelha.** 1979. 217 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1979.

LIGHTFOOT, E. e SAWKO, F. Structural frame analysis by electronic computer: grid frameworks resolved by generalized slope deflection. **Engineering**, p. 18-20, 1959.

MARCHETTI, O. **Pontes de Concreto Armado.** São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

MARCUS, H. **Die Teory Elastisher Gewebe und Ihre Anwendung auf die Berechnung Biegsamer Platen.** Berlin: Julius Springer, 1932.

MARTIN, F. J. S. **Cálculo de Tabuleiro de Pontes.** São Paulo: Livraria Ciência e Tecnologia, 1981.

MATTOS, T. S. **Programa para Análise de Superestruturas de Pontes de Concreto Armado e Protendido.** Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

MCCORMAC, J. C. **Structural Analysis: Using Classical and Matrix Methods.** United States of America: John Wiley & Sons, 2007.

NAVARRO, E. O. I. Possibilidades de los Métodos Numéricos en el Mundo Industrial. **Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas**, 2006.

O'BRIEN, E. J.; KEOGH, D. L. **Bridge Deck Analysis.** London: E&FN Spon, 1999.

O'BRIEN, E. J.; KEOGH, D. L.; O'CONNOR, A. J. **Bridge Deck Analysis.** 2 ed. London: CRC Press, 2015.

O'CONNOR, C. **Pontes**: superestruturas. São Paulo: EDUSP, 1976.

PARKE, G.; HEWSON, N. **ICE Manual of Bridge Engineering**. 2 ed. London: Thomas Telford Ltd., 2008.

PFEIL, W. **Pontes em Concreto Armado**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

QAQISH, M.; FADDA, E.; AKAWWI, E. Desing of Beam Bridge by Finite Element Method and AASHTO Specification. **KMITL Science Journal**. v. 8, n. 1, 2008.

RYALL, M. J.; PARKE, G. A. R.; HARDING, J. E. **The manual of bridge engineering**. Longo: Thomas Telford, 2000.

SADEGHI, J.; FATHALI, M. Grillage Analogy Applications in Analysis of Bridge Decks. **Australian Journal of Civil Engineering**, v.10, n. 1, p. 23-36, 2012.

SHREEDHAR, R. MAMADAPUR, S. Analysis of T-beam Bridge Using Finite Element Method. **International Journal od Engineering Innovative Technology**. v. 2, n. 3, p. 340-346, 2012.

SIEFFERT, Y.; MICHEL, G.; RAMONDENC, P.; JULLIEN, J.-F. Effects of the Diaphragm at Midspan on Static and Dynamics Behaviour of Composite Railway Bridge: A Case Study. **Engineering Structures**, v. 28, p.1543-1554, 2006.

SOUZA, C. F. P. **Programa para Obtenção de Esforços Solicitantes em Pontes de Concreto Armado**. 2011. 75 p. Monografia (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

XOJO, Inc. **Xojo User Guide**: Book 1: Fundamentals. 2014. Disponível em: <<https://itun.es/br/GJL6N.l>>. Acesso em: 20 jan. 2014.