

RUY MADSEN BARBOSA

MATEMÁTICA, METODOLOGIA
E
COMPLEMENTOS
para Professores Primários

VOL. I

ARITMÉTICA TEÓRICO-PRÁTICA

LIVRARIA NOBEL S. A.
SÃO PAULO

RUY MADSEN BARBOSA

(Doutor em Ciências Matemáticas, Livre Docente de Cálculo Numérico e Observações da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Araraquara, Membro Diretor do G. E. E. M. de São Paulo).

**MATEMÁTICA, METODOLOGIA
E
COMPLEMENTOS**

para Professores Primários

*5^a Rota
1903.198.1*

VOL. I

ARITMÉTICA TEÓRICO-PRÁTICA

TERCEIRA EDIÇÃO

1967



LIVRARIA NOBEL S. A.
RUA DA CONSOLAÇÃO, 49
SÃO PAULO

É vedada a reprodução total ou parcial
deste trabalho, sob as penas da lei.

A meus pais

meu reconhecimento

A minha esposa

companheira e incentivadora

A meus filhos

alegria de nosso lar

PROFESSOR sou há anos,

MESTRE pretendo ser !

I N T R O D U Ç Ã O

Entregamos aos atuais e aos futuros professores primários esta nova edição do Volume I da nossa coleção, completamente revista para melhor atingir os objetivos propostos na primeira edição.

Procuramos aumentar as explicações do texto, insistindo em pontos importantes ou mais difíceis.

Reorganizamos a disposição dos capítulos, ampliando as suas seqüências de exercícios, fornecendo ao final de cada um, uma lista de respostas.

Com a finalidade do livro servir a diferentes níveis de estudo atenuamos a sua parte teórica indicando os tópicos teóricos que poderão ficar para um segundo estudo.

Aproveitamos para agradecer a todos quantos enviaram sugestões, quer professores primários, quer professores de matemática. De maneira especial agradecemos aos professores de prática de ensino e metodologia da aritmética que nos enviaram palavras de aplausos e estímulos à nossa idéia da coleção julgando-a necessária ao estudo relacionado da teoria e metodologia, até então, em geral, divorciados.

O Autor

CAPÍTULO I
NOÇÕES DE CONJUNTOS
E
CORRESPONDÊNCIA BIÚNVOCA

A. CONJUNTOS

A.1. NOÇÃO - REPRESENTAÇÃO - PERTINÊNCIA

Estamos familiarizados com a palavra CONJUNTO; pois, na vida diária, o homem constantemente encontra-se em situações com: -conjunto de livros, -conjunto dos habitantes de uma cidade, etc.

Na linguagem comum, conjunto, coleção, classe, grupo, etc. são sinônimos; pois, é costume também dizer-se: grupo de rapazes, coleção de figurinhas, classe dos operários, etc.

Para representação dos conjuntos é usual o emprego das letras latinas maiúsculas: A, B, C, etc.; e, diremos conjunto A; conjunto B, etc.

Quando conhecemos os elementos constituintes de um conjunto, usa-se suas representações numa lista, e as colocamos entre os sinais de chaves { }, como nos exemplos seguintes:

- a) { Elóisa, Eliana, Eliete }
- b) { a, b, c, d, e }
- c) { □, Δ, • }

Muitas vezes, para facilidade de estudo, usa-se desenhos, colocando as representações dos elementos num diagrama (retangular, circular, etc.)

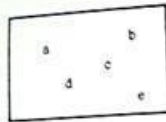


Fig. 1



Fig. 2

Pertinência:

Quando um elemento x pertence a um conjunto A , indicamos com o símbolo \in ; e, em caso contrário com \notin .

Exemplos:

- Luis \in {Maria, Pedro, Luis, Bete}
- Roger \notin {Mário, Ricardo}
- $d \in$ {a, e, d, f}
- São Paulo \in Conjunto das capitais de estados do Brasil; que podemos escrever assim:
{ $x \mid x$ é capital de estado do Brasil }

A.2. CONJUNTO UNITÁRIO

A palavra conjunto é empregada na linguagem corrente quando se refere a mais de um elemento, às vezes como coletivo; entretanto, em matemática, por razões de generalização, utiliza-se conjunto quando nos referimos também a um só elemento.

Esclarecemos que a rigor a noção de conjunto com um só elemento, conjunto unitário como é chamado, também é usual nas situações comuns:

- admite-se que dispomos de um conjunto de alunos, pretende-se separar o conjunto de alunos que usam óculos, e verifica-se que só um usa óculo; temos, portanto, conjunto unitário;
- admite-se que um professor formulou a seguinte questão: escreva o conjunto dos dias da semana que

começam com a letra d ; teremos o conjunto unitário { domingo };

c) nos exemplos anteriores, o aluno verificou que é comum o conjunto unitário em situações com verificações "a posteriori" dos elementos pertencentes a um conjunto; vejamos um caso "a priori": Um senhor aproxima-se de outro e diz: - A fila de ônibus é aqui? Responde o outro que estava sozinho: - Sim, eu estou na fila.

A.3. CONJUNTO VAZIO

Da mesma forma que o conjunto unitário, considera-se também o conjunto sem elementos, denominado conjunto vazio.

Muitas vezes, a propriedade ou regra que caracteriza o conjunto, que determina quais os elementos que pertencem, é tal que, o conjunto não possui elementos.

a) o conjunto dos brasileiros eleitores com menos de dezoito anos;

b) numa classe separam-se os alunos por notas obtidas, e verifica-se que o conjunto dos alunos que obteve uma certa nota, não possui elementos;

c) admita que as crianças vão retirando balas de um "vidro de balas" até esvaziá-lo; poderemos dizer "o vidro de balas está vazio", ou "vidro de balas vazio", o que significa conjunto (vidro) vazio (de elementos, no caso, balas), idem em "estôjo de lápis vazio", "garagem de autos vazia", "carteira vazia", etc.;

d) o exemplo da fila de ônibus, também aqui se aplica: -Por obséquio, onde é a fila de ônibus? -Ali no poste, não há pessoas esperando o ônibus.

Indica-se o conjunto vazio com \emptyset ; também se emprega, mas pouco, as chaves sozinhas: { }.

A.4. SUBCONJUNTO

Quando um conjunto A, possui todos os seus elementos pertencentes a um conjunto B, diz-se que A é subconjunto de B

Indica-se $A \subset B$

Pode-se também dizer que A está contido em B, ou A é parte de B.

Alguns autores, dizem que B é superconjunto de A, e indica-se $B \supset A$; podendo também se ler: B contem A.

Dados dois conjuntos A e B, se A é subconjunto de B, e B não é subconjunto de A, dizemos que A é subconjunto próprio, parte própria, ou contido propriamente.

Exemplos:

- $\{Maria, Lourdes\} \subset \{Elza, Lourdes, Maria\}$
- $\{a, b\} \subset \{a, c, b, e, d\}$
- $\{c, a, f\} \subset \{a, f, c\}$
- conjunto dos Estados do Sul \subset Conjunto dos estados do Brasil
- $\{a, f, g\} \not\subset \{a, b, f\}$

NOTA: Como o conjunto vazio \emptyset não possui elementos, ele é contido em qualquer conjunto: $\emptyset \subset A$.

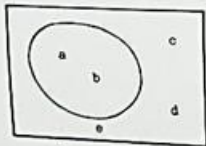


Fig. 3

A.5. IGUALDADE

Conjuntos que possuem os mesmos elementos são iguais.

Dados os conjuntos iguais A e B, qualquer um é subconjunto do outro.

Indicamos $A = B$

A rigor se dois conjuntos são iguais, constituem o mesmo conjunto; o aluno observa que na representação de um conjunto não interessa a ordem que são indicados os elementos, e sim os elementos pertencentes:

- $\{a, c, b\} = \{b, a, c\}$
- $\{João, Maria\} = \{Maria, João\}$
- $\{Luís, Márcia\} \neq \{Pedro, Márcia\}$

A.6. CONJUNTOS DISJUNTOS

Conjuntos A e B que não possuem qualquer elemento em comum, são denominados conjuntos disjuntos ou conjuntos separados

Indicamos: $A \parallel B$ ou $A \supset \subset B$, em caso contrário indicamos $A \nparallel B$

- $\{a, c\} \parallel \{h, b, m, g\}$ Fig. 4
- $\{Manoel\} \parallel \{Antônio, Marcos\}$ Fig. 5
- $\{Roberto, Carlos\} \nparallel \{Carlos, Roni, Renato\}$

A.7. CONJUNTOS CRUZADOS

Conjuntos A e B que possuem algum elemento em comum e cada um possui elemento não comum, são chamados conjuntos cruzados ou que se cruzam.

Indicamos: $A \cap B$, e em caso contrário $A \not\cap B$

a) $\{a, c, b\} \cap \{a, b, f, g\}$ Fig. 6

b) $\{\square \Delta \circ\} \cap \{\square \Delta \circ\}$ Fig. 7

c) $\{a, c, g\} \not\cap \{c, g\}$

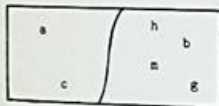


Fig. 4



Fig. 5

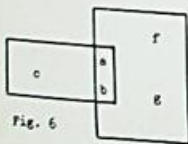


Fig. 6

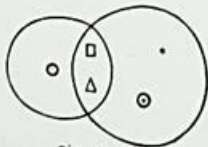


Fig. 7

A.8. EXERCÍCIOS - SEQUÊNCIA I

- Dê quatro exemplos de conjuntos
- Dê dois exemplos de conjunto unitário
- Dê dois exemplos de conjunto vazio
- Complete a lista (ról) dos elementos dos conjuntos:
 - Conjunto dos dias da semana:
{segunda, ...}
 - Conjunto dos estados da região nordeste:
{Pernambuco, ...}
 - Conjunto dos governadores Gerais do Brasil:
{Duarte da Costa, ...}
 - Conjunto das caravelas da frota de Colombo:
{Nina, ...}
 - Conjunto dos estados brasileiros não litorâneos:
{Goiás, ...}
 - Conjunto das Zonas Climáticas da Terra:
{Pólo Ártico, Temperada do Norte, ...}
- Complete com o símbolo: ou \subset , ou $\not\subset$.
 - Cachorro Conjunto dos animais domésticos
 - Santos Conjunto das capitais brasileiras
 - Tozé de Souza Conjunto dos imperadores do Brasil
 - Marechal Deodoro Conjunto dos presidentes do Brasil
 - Silvério dos Reis Conjunto dos traidores da Inconfidência Mineira
 - Membros Conjunto das partes do Corpo Humano
 - Papagaio Conjunto dos mamíferos
 - Rio Tietê Bacia Amazônica
 - Ilha de São Sebastião Conjunto das Ilhas Brasileiras
- Dê dois exemplos de subconjuntos e represente-os em diagramas
- Complete com os símbolos: ou \subset , ou $\not\subset$.
 - $\{b, c\} \subset \{g, h, a, m, c\}$
 - $\{\text{Cabral, Vasco da Gama}\} \subset \text{Conjunto de navegadores portugueses}$

- c) {Luis, Pedro} Conjunto dos alunos de sua classe
 d) {Ana} Conjunto dos alunos de sua classe
 e) {Português, Inglês} Conjunto das matérias da 1ª série
 f) {Matemática, Português} Conjunto das disciplinas importantes
 g) {Tiradentes, Tomás Antônio Gonzaga} Conjunto dos inconfidentes
 h) {Faranapanema, Grande, Tietê} Bacia de São Francisco
8. Complete com o símbolo: ou = ou ≠
 a) {m, n, o} {n, m, o, p}
 b) {Carlos, Pedro} {Pedro, Carlos}
 c) {Lus} Conjunto dos satélites da Terra
 d) Cariocas Conjunto dos nascidos na cidade do Rio de Janeiro
 e) Fluminenses Conjunto dos habitantes do estado do Rio
 f) Tricórdianos Conjunto dos habitantes da cidade de Três Corações
 g) Paulistas Conjunto dos habitantes da cidade de São Paulo
 h) Paulistanos Conjunto dos habitantes do Estado de São Paulo
 i) Gaúchos Conjunto dos habitantes do Paraná
 j) {Hermes da Fonseca, Venceslau Braz} Conjunto dos presidentes brasileiros de 1910 a 1918
 k) {D. Pedro I, D. João, D. Manoel} Conjunto dos Imperadores Brasileiros
 l) {Martim Afonso de Souza, Antônio Cardoso de Barros} Conjunto dos donatários das Capitanias que prosperaram
 m) {Amazonas, Mato Grosso, Pará} Conjunto dos estados brasileiros, com mais de 1 milhão de quilômetros quadrados
9. Dados os conjuntos: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c, f\}$
 $C = \{m, n\}$, $D = \{p, m, q\}$ e $E = \{b, f, c\}$ escreva com os símbolos: || #
 a) A com B b) C com D c) D com E d) C com D
 e) A com E f) B com C g) D com B h) A com D
10. Idem com II ou III para
 a) A com B b) C com D c) D com E
 d) B com C e) E com B f) E com A

B - CORRESPONDÊNCIA BIÚNIVOCA

B.1. NOÇÕES

Para entendermos êsse conceito, consideremos o seguinte:

a) um guarda do tempo antigo, para verificar se os prisioneiros não fugiam, fazia-os passar por uma porta, e, para cada preso que passava, colocava uma pequena pedra numa sacola, na manhã seguinte repetia a operação, mas retirando as pedras da sacola. Não sobrando pedra na sacola, sabia que não houve fuga.

b) Também, o pastor usava dêste procedimento, para verificar o desgarramento de uma ovelha do rebanho, ou com pedras numa sacola, ou efetuando marcas numa vara, ou no seu bordão.

c) Idem, em jogos de pingue-pongue, de voleibol, de bilhar, marca-se com giz no quadro um risco, ou empurra-se uma bolinha de um cordel, a cada ponto assinalado.

Em todos êstes exemplos, e em muitos outros que o leitor facilmente encontrará, o que se faz é, inteligentemente, colocar os elementos de um conjunto, em correspondência com os elementos de outro conjunto.

Observemos no entanto, que tanto o guarda, como o pastor, sem mesmo saber "contar", descobriam a falta de um prisioneiro, ou de uma ovelha, pois a cada prisioneiro (ou ovelha), correspondia uma pedra (ou marca), mas deveria também, a cada pedra (ou marca) corresponder um prisioneiro (ou ovelha); utilizavam a correspondência nos dois sentidos, dizemos correspondência biúnivoca.

Também nos jogos, a cada ponto corresponde uma marca (ou uma bolinha); e, reciprocamente, a cada marca corresponde um ponto (exceto se houve desonestidade).

De uma maneira geral, dados os conjuntos A e B, dizemos que entre os elementos dos conjuntos A e B foi fixada uma correspondência biúnivoca, se for possível associar a cada elemento de A um elemento de B, e, re-

reciprocamente, associar a cada elemento de B, esse elemento de A e somente esse.

Esquemas:

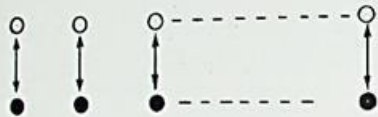


Fig. 8

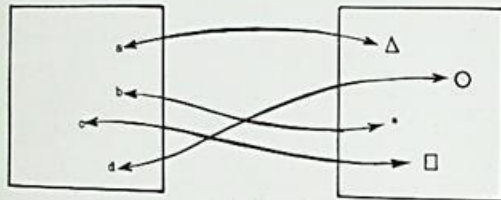


Fig. 9

Fixada uma correspondência biunívoca entre os elementos dos conjuntos, diz-se também que eles estão em correspondência biunívoca, ou correspondência um x um (um por um).

Assim, se temos, um conjunto de discos, podemos associar a cada disco uma só capa, e a cada capa um só disco. Mas observemos que se tivermos muitos discos e poucas capas, não podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos dos conjuntos, entendemos a correspondência um x um para conjuntos se considerarmos todos os seus elementos.

A relação entre marido e mulher é um x um, mais precisamente maridos vivos e mulheres vivas, para países cristãos e outros.

Caso todos países não usassem poligamia ou poliandria, teríamos a correspondência um x um em todos,

mas por exemplo, no Tibete, a correspondência é muitos para um; nos maometanos é um para muitos.

B.2. RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Para conjuntos A e B que podem ser colocados em correspondência biunívoca, é interessante observar que em geral podemos estabelecer outras correspondências biunívocas, mudando os elementos que se correspondem; diz-se então que A é coordenável com B, ou que são similares.

Usamos a seguinte indicação: $A \sim B$

É fácil observar que valem as seguintes propriedades:

a) Lei Reflexiva: $A \sim A$

Todo conjunto pode ser colocado em correspondência biunívoca (ou coordenável) com ele próprio. De fato, entre outras coordenações podemos associar a cada elemento o próprio elemento.

b) Lei Simétrica:

Se $A \sim B$ então $B \sim A$

O que é evidente do próprio conceito de correspondência biunívoca, que é um conceito simétrico.

c) Lei Transitiva:

Se $A \sim B$, e $B \sim C$, então $A \sim C$

Quando uma relação entre conjuntos goza dessas três propriedades, dizemos que a relação é de equivalência; de onde, a possibilidade de dizermos para conjuntos coordenáveis que se equivalem; entendemos bem, se equivalem mediante a correspondência biunívoca estabelecida.

B.3. PREVALÊNCIA E SUPERVALÊNCIA

No exemplo dos discos e das capas, pode acontecer o seguinte:

a) É possível a correspondência biunívoca (caso já estudado)

b) É possível colocar todos os elementos do conjunto de discos em correspondência com elementos do conjunto de capas, sem repetição (biunívoca) mas não reciprocamente, pois, sobram capas.

Observemos que podemos transformar no caso a) considerando um subconjunto do conjunto de capas

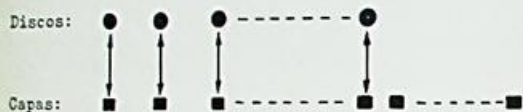


Fig. 10

Dizemos que o conjunto de discos é prevalente ao conjunto de capas (é equivalente a um subconjunto próprio).

c) Não é possível colocar todos os elementos do conjunto de discos em correspondência biunívoca com as capas, entretanto, todas as capas podem ser colocadas em correspondência biunívoca com discos.



Fig. 11

Dizemos que o conjunto de discos é supervalente ao conjunto de capas.

B.1. EXERCÍCIOS - SEQUÊNCIA II

- Como são os conjuntos (na sua classe)
 - de estudantes e a de carteiras (nessa e na outra ordem)
 - de carteiras e a de livros (nessa e na outra ordem)
 - de professores e a de matérias?
- Dizer se há correspondência biunívoca entre:
 - conjunto de cartas e conjunto de seus selos (cuidado)!
 - conjunto de professores da escola e o conjunto de matérias.
 - conjunto de rapazes e conjunto de moças que estão dançando num baile
 - conjunto de rapazes e moças de um baile.
 - conjunto de dedos da mão esquerda e os da mão direita
- Estabelecer todas as correspondências biunívocas possíveis entre os conjuntos:
 - $\{a, b, c\}$ e $\{m, n, p\}$
 - $\{x, y\}$ e $\{x, y\}$
- Estabelecer uma correspondência que não seja biunívoca:
 - De $\{a, b, c\}$ para $\{m, n, p\}$
 - De $\{x, y\}$ para $\{a, b, c\}$
- Sabe-se que $A \sim B$, $B \sim C$, $C \sim D$, $E \sim F$ por que podemos afirmar que $A \sim F$?
- Faça diagramas para os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{x, y, z, u\}$ Estabeleça com setas uma correspondência biunívoca.

RESPOSTAS SELECIONADAS DA SEQUÊNCIA I

4. b) { Duarte de Costa, Mem de Sá, Tomé de Souza }
 f) { P. Ártico, T. do Norte, P. Antártico, T. do Sul, Intertropical }
5. a) E b) F c) G d) H e) I f) J
 g) K h) L i) M
7. b) C e) C h) F
8. c) = d) = e) = f) = g) ≠ h) ≠
 i) ≠ j) = k) ≠ l) ≠ m) =
9. a) H b) H c) // d) H e) H f) //
 g) // h) //
10. a) IX b) IX c) IX d) IX e) IX f) IX

RESPOSTAS SELECIONADAS DA SEQUÊNCIA II

2. a) Em geral não, pois as cartas podem ter vários sôlos.
 b) Em geral não, pois para cada matéria a escola pode possuir vários professores.
 c) Sim, exceto se estão dançando jovens do mesmo sexo.
 d) é interessante analisar as várias possibilidades.
 e) sim, admitindo que cada pessoa tenha os dedos normais.
3. a) são 6 possíveis. b) são 2 possíveis.
4. a) por exemplo: a com m, b com n, c com m
5. De A - B, B - C, pela transitiva A - C, de A - C, C - D, pela transitiva A - D, e assim sucessivamente.

CAPÍTULO II

NÚMERO - NUMERAIS
 E

NUMERAÇÃO

A. NÚMERO

A.1. O QUE É NÚMERO ?

Todos nós passamos pela fase de contagem e operações com números; desde crianças, muitas vezes nos foi dito para "contar números até cinco, até dez, etc.", mas o que é número ?

Alguns procuram explicar número utilizando a idéia de "pluralidade", encontra-se mesmo expressões como essa: "número é o que contém uma ou várias unidades", em qualquer caso substitui-se elementos por números, não são a mesma coisa. Assim dois meninos não é número dois, por outro lado, número "dois" não "contém" duas unidades, número dois é número dois, "dentro" dêle não pode existir "um" e outro "um".

Lembremos entretanto, que no capítulo anterior, vimos que com a correspondência biunívoca, o guarda, ou o pastor, talvez mesmo sem saberem contar, sabiam que "o número dos conjuntos era o mesmo". No caso dos discos e capas, havendo correspondência biunívoca sabemos que "o número" é o mesmo, etc.

Em outras palavras, a noção de correspondência biunívoca nos leva imediatamente a aceitar que a quantidade de elementos de um conjunto A é igual a quantidade de elementos de um conjunto B.

Este caráter comum aos conjuntos A e B, nos dá a idéia de número, mais precisamente de número natural.

Dizemos que conjuntos A e B, que podem ser colocados em correspondência biunívoca, têm o mesmo número de elementos.

Caso os números de elementos dos conjuntos A e

B equivalentes sejam "a" e "b", respectivamente, dizemos que "a" e "b" representam o mesmo número, ou que são iguais, e escrevemos $a = b$.

É conveniente ainda observar que número é um ente abstrato, é uma característica comum a conjuntos equivalentes, a todos êles; é uma propriedade do conjunto de todos conjuntos equivalentes entre si e somente desse conjunto. Assim, o número chamado quatro, é característica do conjunto constituído do conjunto de "quatro" livros, conjunto de "quatro" cadernos e assim por diante.

Insistimos ainda que número independe da natureza dos elementos constituintes dos conjuntos, bem como independe da ordem dos elementos.

Procurar definir número por contagem, como por exemplo, número é o resultado da contagem, leva a círculo vicioso. A operação de contar utiliza a correspondência biunívoca, do conjunto que está sendo "contado" com o conjunto.

{um, dois, quatro, seis, três, ...}

mas numa ordem pré-fixada: um, dois, três, quatro, ..., portanto utiliza dois conceitos: correspondência biunívoca e ordenação.

É em resumo, a contagem uma operação logicamente mais difícil.

A.2. LEIS DA IGUALDADE PARA NÚMEROS

Para a igualdade de números naturais são válidas as leis seguintes, as quais são conseqüências diretas de leis para conjuntos equivalentes.

a) Lei Reflexiva:

Todo número natural é igual a si mesmo.

b) Lei Simétrica: Se $a = b$ então $b = a$.

c) Lei transitiva: Se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$.

A.3. NÚMERO INTEIRO

Estendemos a noção de número a conjunto vazio, e dizemos que o número de elementos do conjunto vazio é zero.

O conjunto dos números naturais e, do número zero, constitui o conjunto dos números inteiros, ou simplesmente, conjuntos dos inteiros.

A.4. DESIGUALDADE

Dados os conjuntos A e B, vimos que pode acontecer os três casos:

Caso a: A equivalente a B - $A = B$

Caso b: A prevalente a B - $A \supset B$, $B \subsetneq A$

Caso c: A supervalente a B - $A \supsetneq B$, $B \subset A$

Dizemos nos casos b e c, que os números são desiguais ou diferentes e indicamos $a \neq b$.

No caso b dizemos que o número de elementos do conjunto A é menor que o número de elementos do conjunto B, e indicamos $a < b$.

No caso c, dizemos que o número de elementos de A é maior que o número de B, e, indicamos $a > b$.

Essas relações são denominadas, relações de desigualdade, e vale a seguinte lei:

Lei da Tricotomia:

Dados os números inteiros "a" e "b" sempre existe uma e uma só das relações:

$$a = b, \quad a < b, \quad a > b$$

Para a desigualdade são válidas ainda as leis:

a) Lei Irreflexiva

É falso que a é maior que a, e é falso que a é

menor que a.

b) Lei Assimétrica:

Se $a < b$ então $b > a$

c) Lei Transitiva:

Se $a < b$, e $b < c$ então $a < c$

NOTA: $a \leq b$ entendemos como $a < b$ ou $a = b$; idem para $a \geq b$.

B. NUMERAL

B.1. O QUE É NUMERAL ?

Aprendemos o que é número, o seu conceito, e lembramos que é abstrato; de onde o interesse em utilizar-se uma sua representação; ou ao conceito de numeral, é qualquer representação de um número, pode ser falada ou escrita, assim quando dizemos ou escrevemos dois, temos um numeral, o numeral do número do conjunto de todos os pares de coisas.

Dessa maneira o nome de um número é um numeral, é uma designação; quando empregamos um numeral, estamos dizendo ou falando um número, mas não esqueçamos que qualquer sinal, símbolo empregado para representar um número é também um numeral.

O sinal 5 é numeral, o sinal V é outro numeral do mesmo número, idem são os numerais cinco, cinq, five, go, cinque, etc.; e nada impede de se convencionar qualquer outro vocabulo ou sinal.

Os sinais são chamados algarismos, de onde a conclusão imediata: os algarismos são numerais.

B.2. ALGUNS NUMERAIS

Temos aprendido o número zero; no caso do conjunto unitário, dizemos que o número é um.

Vejamos como introduzir os outros numerais.

Pela lei de tricotomia, sabemos que dados os números a e b desiguais, ou $a < b$, ou $b > a$; seja $a < b$, diremos a precede b, ou que b sucede a, caso não exista número inteiro que seja maior que a e menor que b, dizemos que b é sucessor ou sucessivo de a, e a é antecessor de b.

Denominamos então:

<u>dois</u>	ao sucessivo de	<u>um</u>
<u>três</u>	ao sucessivo de	<u>dois</u>
<u>quatro</u>	ao sucessivo de	<u>três</u>
<u>cinco</u>	ao sucessivo de	<u>quatro</u>
<u>seis</u>	ao sucessivo de	<u>cinco</u> , etc.

Com o conjunto de naturais podemos agora utilizá-lo como referência para correspondências biunívocas.

Para representação dos elementos desse conjunto utilizam-se as palavras dadas, ou os algarismos, no nosso caso os algarismos hindú-árabes:

um	dois	três	quatro	cinco...
1	2	3	4	5 ...

O algarismo do número zero é 0

Temos também usado para representar os números as letras: a, b, c, etc. São também numerais, e prefere-se distingui-los dos outros numerais, denominando-os de literais (palavra que vem de letras).

B.3. CONTAGEM - NÚMERO CARDINAL E NÚMERO ORDINAL

Consideremos um conjunto de n elementos.

Separaremos do conjunto um elemento, que diremos elemento um ou primeiro.

Separaremos ainda do conjunto um elemento, que diremos elemento dois ou segundo e juntemos ao primeiro, teremos um conjunto de dois elementos.

Continuemos este procedimento:

elemento três ou terceiro,
elemento quatro ou quarto,
elemento cinco ou quinto, etc., até que
chegaremos a utilizar um elemento ficando vazio o conjunto, isto é, teremos o último elemento, que será o elemento n ou enésimo, o qual irá reconstituir com os outros o conjunto de n elementos.

A este processo chamamos de: contagem ou contar, ou enumeração.

Observemos que em contagem, está em verdade, colocando-se um conjunto em correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais, porém, em ordem (como dizemos comumente, na ordem natural). A cada elemento do conjunto corresponde um número natural, um número de ordem, mais precisamente um número ordinal.

O conjunto assim considerado é dito ordenado ou uma sucessão.

Chegamos à conclusão de que um número natural possui dois sentidos: um cardinal e outro ordinal. Evidentemente, os sentidos estão ligados: caso um conjunto possua cinco elementos (cinco número cardinal), contando, o último elemento será o elemento cinco, ou quinto (número ordinal).

Reciprocamente, se o último elemento de um conjunto ordenado é o elemento cinco, o conjunto possui cinco elementos.

Insistimos, que essa ordenação é irrelevante para obtenção do número de elementos do conjunto (número cardinal).

Consideremos, a exemplo, o conjunto de crianças de uma família:

{Luís, Roberto, Elizabeth, Cláudia}

Podemos por este conjunto em correspondência biunívoca com o conjunto:

{um, dois, quatro, três}

Verificaremos, que o conjunto de crianças é constituído de quatro crianças, fazendo por exemplo as seguintes correspondências de pares:

Luís	um
Cláudia	dois
Elizabeth	três
Roberto	quatro

Porém, caso a correspondência seja feita atendendo a nascimentos (idades) poderemos ter:

Elizabeth (mais velha)	um
Roberto	dois
Luís	três
Cláudia (mais nova)	quatro

temos, o mesmo número quatro, mas fornecido a cada criança, outro número de ordem, que indica a posição do elemento na sucessão.

B.4. EXERCÍCIOS - SEQÜÊNCIA III

1. Responda as seguintes questões:

- o que existe de comum entre dois conjuntos coordenáveis ou equivalentes?
 - pode um número ser segurado nas mãos?
 - os números de conjuntos equivalentes podem ser desiguais? E os numerais?
 - pode um numeral ser segurado nas mãos?
 - se você souber que um número a não é menor que um número b, o que pode afirmar? Por que?
2. Dê outros numerais dos mesmos números dados pelo numeral citado:
- 4
 - três
 - seven (inglês)
3. Dê dois elementos do número (isto é, dois representantes do conjunto dos conjuntos equivalentes entre si)
- três
 - dois
 - quatro
 - um
4. É costume dizer-se que os telefones de São Paulo, possuem na maioria seis números. Está correto?
5. Nas camisas de jogadores nós vemos números ou algarismos?
6. Qual o número maior: 8 ou 4? E o algarismo maior 8 ou 4?
7. Escreva um número e depois um algarismo maior que ?
8. Qual o numeral menor: quatro ou seis?
9. Tirando o algarismo 3 de 34 o que fica?

C. NUMERAÇÃO

C.1. O QUE É UM SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Vimos que podemos com o conceito de sucessor irmos obtendo os numerais; entretanto, como de imediato se verifica, desta maneira, teríamos que criar numerais (falados ou escritos) para todos eles, o que seria impossível, pois sempre teremos um sucessor para qualquer número já com seu numeral. Além disso, se possível fosse, haveria tremenda dificuldade para memorizá-los.

Dá a necessidade dos sistemas de numeração, isto é, de um conjunto de numerais e um conjunto de regras que possibilitem a obtenção de todos numerais; e, evidentemente, sistemas, que facilitem inclusive a fala, a escrita e os cálculos.

Existem e podemos criar vários sistemas de numeração, alguns antigos, já não empregados, outros como o romano utilizados raramente, outros empregados para situações ou cálculos especiais.

Nós empregamos o sistema de numeração decimal, como quase todas as nações.

Alguns sistemas são aditivos por justaposição e outros são posicionais.

Os aditivos por justaposição utilizam alguns sinais especiais, e com repetição obtém-se os outros numerais, essa repetição pode-se dar à direita, à esquerda, ou em vertical, ou por agrupamento. Os romanos por exemplo, usavam a repetição à direita, e ainda empregavam uma mistura com o processo subtrativo à esquerda, enquanto os babilônios por exemplo, usavam o aditivo com repetição por agrupamento. O antigo povo etrusco utilizava o aditivo à direita.

Os gregos utilizavam sistema aditivo por justaposição e também o sistema semi-posicional, mas os algarismos (que eram as próprias letras do alfabeto) que entravam para formar dezenas só entravam para formar dezenas de milhar, e não para centenas ou unidades, etc.

C. 2. SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

C. 2.1 SISTEMA DE BASE b OU b-ádico

Um sistema de numeração de base b consiste de b -sinais; sendo um sinal para o zero, utiliza valor de posição, e a seguinte regra: um sinal colocado a esquerda de outro, representa um número b vezes mais se estivesse naquela posição, e, o valor do sinal da direita é adicionado.

Em resumo é um sistema posicional, aditivo por justaposição à direita, mas por ser posicional é multiplicativo.

Existem quantos sistemas nessas condições quisermos, nós empregamos o sistema de base dez (sucessivo de nove) com os dez algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e, os nove primeiros números naturais são denominados unidades.

Cada dez números de sucessão constitui uma dezena, com os seguintes nomes: vinte (duas), trinta (três), quarenta (quatro), cinquenta (cinco) ou cinquenta, sessenta (seis), setenta (sete), oitenta (oitenta), noventa (nove).

Os números compreendidos entre o dez e o vinte possuem os seguintes numerais: o sucessivo de dez é o onze, o sucessivo de onze é o doze, e sucessivamente treze, catorze ou quatorze, quinze, dezesseis, ou dezasseis, dezessete ou dezassete, dezoito e dezanove ou dezanove.

Os compreendidos entre vinte e trinta, trinta e quarenta, etc., são formados com anexação das unidades às dezenas: vinte e um, vinte e dois, ..., vinte e nove; trinta e um, trinta e dois, ... trinta e nove; noventa e nove.

O sucessivo do noventa e nove é o cem.

Cada cem unidades, portanto dez dezenas, constitui uma centena ou cento, com os seguintes nomes: cem, cento, centena (uma) duzentos (duas), trezentos (três), quatrocentos (quatro), quinhentos (cin-

co), seiscentos (seis), setecentos (sete), oitocentos (oito), novecentos (nove).

Os compreendidos entre cem e duzentos, duzentos e trezentos, etc., formam-se com os numerais já dados: cento e um, cento e dois, etc., até novecentos e noventa e nove; o sucessivo é o mil, ou milhar ou milheiro.

Cada mil unidades formam uma milhar, e dizemos um mil ou mil, dois mil, três mil, etc., ou mesmo um milhar, dois milhares, etc.

Os compreendidos entre os milhares são formados pelo processo de anexação (justaposição) dos numerais já dados; assim, o sucessivo do oitenta e três mil é o oitenta e três mil e um, etc.

O sucessivo do novecentos e noventa e nove mil, é novecentos e noventa e nove, é o milhão, que corresponde a mil milhares.

Depois termos mil milhões, é o bilhão, mil bilhões é o trilhão, mil trilhões é o quatrilhão, e sucessivamente, quintilhão, sextilhão ou sextilhão, sétilhão ou setilhão, octilhão ou octilhão, etc.

Aos agrupamentos de mil em mil do tipo anterior, chamam-se classes: classe das unidades simples, classe dos milhares, classe dos milhões, dos bilhões, dos trilhões, etc.

Cada classe é separada em três ordens, de dez em dez do tipo anterior: ordem das unidades, ordem das dezenas e ordem das centenas.

Para a numeração com algarismos usa-se:

1. Em qualquer classe:

- a) o algarismo representativo das dezenas fica à esquerda do algarismo das unidades.
- b) o algarismo das centenas fica à esquerda do algarismo das dezenas.

2. Para as classes:

- a) a classe dos milhares fica à esquerda da classe das unidades simples.

- b) a classe dos milhões fica à esquerda da classe dos milhares, etc.

Sendo sistema posicional cada algarismo pode representar dois valores:

Valor absoluto, que é o valor do algarismo isolado do numeral, como se estivesse somente representando um dos dez primeiros números.

Valor relativo ou posicional, que é o valor do algarismo dependente de sua posição no numeral.

Assim, o número representado pelo numeral 8304 (oito mil, e trezentos e quatro), constituído de oito milhares, três centenas, nenhuma (ou zero) dezena e quatro unidades simples, possui:

algarismo 4 com:	valor absoluto - quatro
	valor relativo - quatro
algarismo 0 com:	valor absoluto - zero
	valor relativo - zero
algarismo 3 com:	valor absoluto - três
	valor relativo - três centos ou trezentos
algarismo 8 com:	valor absoluto - oito
	valor relativo - oito milhares

Pela Portaria nº 36/65 e nº 13/67 do Instituto Nacional de Pesos e Medidas, a parte inteira deverá ser separada em classes de 3 algarismos da direita para a esquerda com um ponto intercalado; com exceção: indicativos de ano, telefones, placas, identificações de fabricação, quadros e tabelas.

A numeração escrita (com palavras) deve ser condecorde com aquela de algarismos, de onde a necessidade para a separação das classes com vírgulas, e, na leitura, com pequena pausa na voz, também, entre a penúltima e última classe sugerimos o uso da conjunção e. Exemplo: 2.325.708: dois milhões, trezentos e vinte e cinco mil, e setecentos e oito.

Para a numeração dos ordinais, usa-se o mesmo procedimento dos cardinais, com as denominações:

- a) primeiro, segundo, terceiro, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo, nono;
- b) décimo, vigésimo, trigésimo, quadragésimo, quinquagésimo, sexagésimo, septuagésimo, octagésimo, nonagésimo;
- c) centésimo, ducentésimo, tricentésimo, quadringentésimo, etc.

C.3. EXERCÍCIOS - SEQUÊNCIA IV

1. Faça um estudo sobre o sistema de numeração romana e redija: algarismos, regras, origem, exemplificações, se possível faça um comentário comparativo com o sistema decimal.
2. Faça um estudo sobre outros sistemas de numeração antigos e redija.
3. Faça um estudo sobre a proveniência dos numerais cardinais (origem latina), e, outro sobre ordinais, fracionários e multiplicativos.
4. Estude as formas numéricas indicativas de idades, de ascendência e descendência.
5. Escreva os numerais em outras bases. Exemplifiquemos, para o número 37 para passar à base 5 pelo processo chamado de Embalagem.

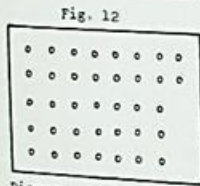


Diagrama 1

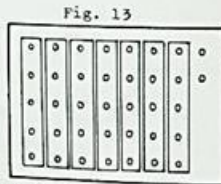


Diagrama 2 - separamos de 5 em 5, já temos o algarismo das unidades que é o 2.

$$37_{10} = 122_5$$

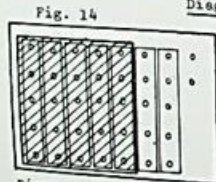


Diagrama 3 - Separamos de 5 em 5, e obtemos o 2º algarismo 2 e no caso também o 3º 1

- a) 43 base 5
- b) 28 base 5
- c) 37 base 4
- d) 31 base 3
- e) 9 base 2
- f) 12 base 2
- g) 32 base 2
- h) 24 base 3

6. Escreva os numerais na base 10. Exemplifiquemos para o número 123_4 , pelo processo chamado de Desenbalagem

Diagrama 1

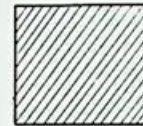


Fig. 15

Diagrama 2

Desenbrulha-se o primeiro pacote e obtemos 4 pacotes menores internos.

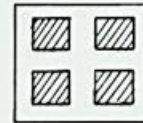


Fig. 16

Diagrama 3

Desenbrulha-se cada pacote menor e devemos encontrar em cada um, 4 elementos.

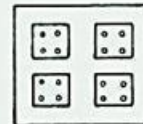


Fig. 17

Em seguida passa-se para a base 10 (embalando agora em pacotes de 10 em 10), chegaremos a obter $123_4 = 27_{10}$ ou simplesmente 27.

- a) 211_4
 - b) 101_4
 - c) 21_5
 - d) 31_5
 - e) 42_5
 - f) 222_3
 - g) 101_2
7. Resolva o exercício 6 usando multiplicações e adições.
Exemplo: 123_4 --- $1 \times 4 = 4$, mais 2 temos 6, $6 \times 4 = 24$, mais 3 temos 27.
8. Resolva o exercício 5 usando divisões

Exemplos:
$$\begin{array}{r} 37 \\ 5 \\ \hline 7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 7 \\ 5 \\ \hline 1 \end{array}$$

8. Faça um estudo sobre o sistema duodesimal (sugerido pelo francês BRÉVIE RUFFIN):
- seja algumas situações em que as unidades são de duas em duas ou múltiplos de duas;
 - analise o dois e o dez em relação a divisores, verifique vantagens ou desvantagens para frações duodecimais, e) simplificações.
10. Escreva as numerais com algarismos dos números:
- oitenta e dois mil, e setenta e seis;
 - quatro milhões, duzentos milhões, e quinhentos e setenta e dois;
 - cinco milhões, e trinta;
 - setenta milhões, e quinze.
11. Escreva (ou leia) as numerais dadas pelos numerais com algarismos:
- 14
 - 8790
 - 33498
 - 7021055926
12. Indique as quantidades de cada ordem dos números:
- 5026
 - 37509
 - 718
 - 31072423
13. Escreva as numerais por palavras:
- seis unidades de milhão, cinco centenas de milhar, duas dezenas de milhar, quatro unidades de milhar, três centenas, quatro dezenas e seis unidades simples;
 - seis centenas de milhar, quatro dezenas de milhão, sete centenas de milhar, oito dezenas e quatro unidades simples.
14. Faça montagens nos sistemas de numeração de uma certa base com a "tábua de numeração" de conjuntos de tampinhas, de algarismos, de livros, etc., de um sistema.
- Notas: a) coloque fichas (fajãs, miolo) em a, m, na parte de direita de cada (18 posições) correspondendo a cada elemento do conjunto a ser montado; b) quando tivermos colocado na 18ª posição um número de fichas igual a base, retire-as todas e passe-as um para a esquerda, assim sucessivamente; c) o número de fichas de cada posição indica o algarismo da posição. No exemplo, construímos um conjunto com 25 elementos (decimal) e montamos 212₃.

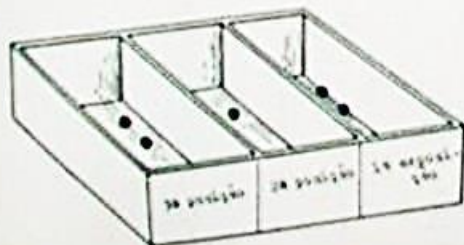


Fig. 16

15. Passe para a numeração romana: a) 525 b) 810 c) 796 d) 5126
e) 4209 f) 5000 g) 4 h) 15000 590
16. Passe para a numeração decimal:
- CCXIV
 - MCCCVII
 - IIICCCXX
 - CCIX

OBSERVAÇÃO:

Para os exercícios 1, 2, 3, 4 sugerimos consultar além do nosso livro - vol. III, Complementos (com ampla bibliografia), as seguintes obras: Enciclopédias, Dicionários, Almanaque.

RESPOSTAS SELECIONADAS - SEQUÊNCIA III

- a) o número b) não, é abstrato c) não - sim d) sim e) que é igual ou maior, pela lei de tricotomia.
- a) {2040, Pedro, João} [Presidente, vice-presidente, secretário]
- 800, possuem na maioria seis algarismos
- seis
- filas 4.

RESPOSTAS SELECIONADAS - SEQUÊNCIA IV

- a) 155₃ c) 211₄ e) 1001₂
- b) 17 d) 16 f) 26
- a) entre outras situações lembramos: dez borras, de duas em duas, dez minutos de aumento em exatidão, que é múltiplo de dezesseis horas, e mesmo de grossa, que é dois dias (48), dez minutos ingleses, duas lanchas (pologais) e um foot (pe), e dez unidades monetárias inglesas; b) o dois possui mais divisores que o 10, portanto nas frações duodecimais, haverá vantagem, isto é, mais exatidão como 2/3 em decimal fornece a dízima 0,666..., mas em duodecimal é equivalente a 8/12 que fornece a duodecimal exata 0,8; c) lembrou-se de criar seis dois algarismos um para o dez e outro para o onze.
- a) 32087 e) 5000005
- b) oito mil, e setecentas e cinquenta d) sete milhões, vinte e um milhões, trinta e cinco mil, e noventa e seis e vinte e seis.
- a) três unidades de milhar, sete centenas, duas dezenas e seis unidades simples.
- a) CCCXIV d) MCCCXVI ou IIIICXVI e) IV (III pode ser a)
- a) 144 e) 2000 250

CAPÍTULO III

ADIÇÃO

A. A OPERAÇÃO

Consideremos dois conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{m, n, o, p\}$, disjuntos, representados na fig. 19,

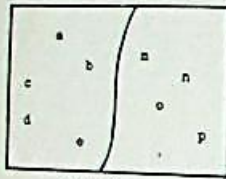


Fig. 19

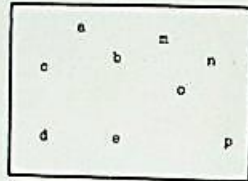


Fig. 20

aos quais correspondem os inteiros 5 e 4, respectivamente.

Podemos agora considerar o conjunto $C = \{a, b, c, d, e, m, n, o, p\}$ constituído dos elementos que são de A ou de B (fig. 20) ao qual corresponde o número 9.

Ao conjunto C chamamos união dos conjuntos A e B, e representa-se por $A \cup B$.

Chamamos ao número 9, soma dos números 5 e 4, e indicamos: $5 + 4 = 9$.

Caso tivéssemos usado outros conjuntos A' e B' , também disjuntos tais que $A' = A$, e $B' = B$, portanto, possuindo os mesmos números teríamos encontrado um conjunto $C' = C$, isto é, também com 9 elementos.

Observemos ainda que se tivéssemos considerado outros conjuntos E e F, com 5 e 4 elementos respectivamente, mas não disjuntos, o conjunto 6 obtido não teria 9 elementos, dependendo de quantos são comuns:

$$E = \{a, b, c, d, e\}$$

$$F = \{c, d, e, m\}$$

Aliás, essa operação de união (ou reunião) de conjuntos é muito simples, qualquer criança costuma fazer isso, tomar o conjunto dos seus brinquedos e "juntar" (unir, reunir) com o conjunto de brinquedos do seu colega.

DEFINIÇÃO DE SOMA

Dados dois números inteiros "a" e "b", a eles podemos sempre considerar associados conjuntos A e B, disjuntos, que tenham "a" e "b" elementos.

Chamamos soma dos inteiros "a" e "b" a um número inteiro "c", número de elementos de conjunto C, união dos conjuntos A e B.

$$\text{Indicamos: } a + b = c$$

DEFINIÇÃO DE ADIÇÃO

A operação que ao par (a,b) faz corresponder o inteiro "c" igual a sua soma é denominada adição.

Dizemos também, quando estamos operando, que estamos adicionando ou somando.

O sinal + lê-se mais, mas pode-se ler adicionado com, ou somado com.

Os números "a" e "b" são os têrmos ou parcelas, ou adendos.

O "c" que é o resultado da adição, que é a soma, é também chamado total.

B. PROPRIEDADES

B.1. PROPRIEDADE COMUTATIVA:

$$a + b = b + a$$

B.2. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

B.3. EXISTÊNCIA DO ELEMENTO NEUTRO (ou INDIFERENTE)

$$a + 0 = 0 + a = a$$

A primeira é consequência imediata da união de conjuntos ser comutativa, o resultado é o mesmo se unirmos o conjunto A com o conjunto B, ou o B com A, é importante pois permite mudar a ordem das parcelas sem alterar a soma.

A segunda também é consequência da associatividade da união (o que o aluno poderá verificar com exemplos de união de conjuntos ou exemplos de adição); é importante pois permite adicionar as parcelas agrupando-as conforme nos convenha; e em outras palavras permite suprimir o sinal () escrevendo simplesmente:

$$a + b + c$$

A terceira é consequência da união de um conjunto com o conjunto vazio ser o próprio conjunto.

C. TÁBUA DA ADIÇÃO

Da definição dada, de adição, verificamos que para se achar a soma de dois inteiros reúne-se num só conjunto os elementos e contam-se os elementos, portanto, sob certo aspecto, adição, é fazer uma contagem. Deste fato resulta da conveniência de se obter certas somas mais simples e retê-las na memória.

C.1. UMA PARCELA É NULA

Pela propriedade que o zero é o elemento neutro temos:

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1, \quad 0 + 2 = 2 + 0 = 2, \text{ etc.}$$

C.2. UMA PARCELA É UM

Pela definição de sucessivo

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 2 \\ 2 + 1 &= 3 \\ 3 + 1 &= 4 \\ 4 + 1 &= 5, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Pela comutatividade

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= 3 \\ 1 + 3 &= 4 \\ 1 + 4 &= 5, \text{ etc.} \end{aligned}$$

C.3. UMA PARCELA É DOIS

a) $2+2 = 2+(1+1)$ (2 é o sucessivo de 1)
 mas: $2+(1+1)=(2+1)+1$ (propriedade associativa)
 mas: $(2+1)+1 = 3+1$ (o 3 é sucessivo de 2)
 mas: $3+1 = 4$ (o 4 é o sucessivo de 3)
 logo: $2+2 = 4$ (lei transitiva da igualdade)

b) $2+3 = 2+(2+1)$ (3 é o sucessivo de 2)
 mas: $2+(2+1)=(2+2)+1$ (propriedade associativa)
 mas: $(2+2)+1 = 4+1$ (resultado anterior)
 mas: $4+1 = 5$ (5 é o sucessivo de 4)
 logo: $2+3 = 5$ (transitiva de igualdade)

como
 $2+3 = 3+2$ (propriedade comutativa da adição)
 $3+2 = 5$ (transitiva da igualdade)

Analogamente mostrar-se-ia que:

$$\begin{array}{lll} 2+4 = 6 & \text{e} & 4+2 = 6 \\ 2+5 = 7 & \text{e} & 5+2 = 7 \\ 2+6 = 8 & \text{e} & 6+2 = 8 \\ 2+7 = 9 & \text{e} & 7+2 = 9 \\ 2+8 = 10 & \text{e} & 8+2 = 10 \end{array}$$

De maneira análoga estudar-se-ia as adições com o 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; e, estaremos aptos a construir a tábua (tabela) da adição, onde a soma está localizada no cruzamento da linha e coluna das parcelas:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	.	.	.
2	2	3	4	5	6
3	3	4	5
4	4	5	6
5	5	11
6	6
.
.

D. EXERCÍCIOS - SEQUÊNCIA V

1. Faça a união dos pares de conjuntos disjuntos:
 - a) $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{m, n\}$
 - b) $C = \{a, f, g, h\}$ e $D = \{p, q, r\}$
2. Faça a união dos pares de conjuntos não disjuntos:
 - a) $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f\}$
 - b) $C = \{m, n, p\}$ e $D = \{m, n, p, q\}$
 - c) $E = \{a, b, c\}$ e \emptyset
 - d) $F = \{x\}$ e $G = \{x, y\}$
3. Faça a união de dois conjuntos A e B quaisquer, disjuntos, depois faça também, de dois outros C e D, disjuntos mas com $C = A$ e $D = B$. Verifique que o número de elementos do primeiro é igual ao número de elementos do segundo.
4. Mostre através de exemplos que o número de elementos do conjunto união de dois conjuntos:
 - a) cruzados, é inferior à soma do número de elementos dos conjuntos
 - b) um subconjunto de outro, é igual ao número de elementos do superconjunto.
5. Faça exemplos para esclarecer as propriedades (estruturais) comutativa, associativa e do elemento neutro, com conjuntos e com exemplos numéricos.

6. Responda as questões:
 - a) Por que $5+3 = 3+5$?
 - b) Por que $6+0 = 6$?
 - c) Por que $7+(2+3) = (7+2)+3$?
 - d) Por que $8+1 = 9$?
 - e) Por que $1+8 = 9$?
 - f) Por que $7>6$, $7>5$, $0<3$, $2<3$?
 - g) Por que $6+2>6$?
7. Mostre as somas da tábua da adição com a parcela 3 (faça como procedemos para a parcela 2).
8. Mostre as somas da tábua da adição com uma parcela 4 (pode aproveitar o resultado da adição com parcela 0,1,2,3 se julgar conveniente).
9. Mostre que: a) $3 = 1+1+1$ b) $4 = 1+1+1+1$
10. Verifique, que para dois números quaisquer desiguais, que o maior é a soma do segundo com um outro diferente de zero.
11. Testes verdadeiro-falso:
 - a) Se $a < b$ então $a+3 < b+3$
 - b) Se $a+x = b+x$ então $a = b$
 - c) Se $a+m = p$, e $r+m < p$ então $a < r$
 - d) Se $a = b$, $b < c$ então $a = c$
12. Testes de múltipla-escolha: (indique a resposta certa)
 - a) a propriedade associativa permite escrever: $a+b+c$ do seguinte modo: I $c+b+a$ II $a+(c+b)$ III $(a+b)+c$ IV nenhuma é certa
 - b) Se $a+m = a$, então: I: a é o triplo de m , II: m é um, III: $a = 0$, IV: $m = 0$
 - c) Se $a < b$, então: I: $a = b+0$, II: $b = a+m$, $m \neq 0$ III: $a = b+m$, $m \neq 0$ IV: $a+m = b+m$, $m \neq 0$
13. Faça os seguintes cálculos:
 - a) $(6+2)+(4+3)$
 - b) $\{7+(3+1)\} + (5+0)$
 - c) $\{(8+0)+1\} + \{3+(2+4)\}$
 - d) $2 + \{4 + \{3+(2+4)\} + 2\}$
14. Teste de completamento

Complete com numerais que formem as sentenças verdadeiras:

 - a) $7+... = 7$
 - b) $5+... \neq ...+5$
 - c) $0+... = ...$
 - d) $4+(2+3)=(4+...)+3$
 - e) $...+5 < 3+5$
 - f) $2+... \neq 8$
 - g) $3+... > 4$
 - h) $4+... > 5+...$
15. Exercícios teóricos (para um segundo estudo)
 - a) Prove a lei do Corte (ou do cancelamento da adição)

$$a+b = a+c \implies b=c$$
 - b) Prove que: $(a+b)+c = (c+b)+a$
 - c) Prove que: $b+(a+c) = (c+b)+a$
 - d) Prove que: $\{(a+b)+c\} + d = a + \{b+(c+d)\}$
 - e) Prove que: Se $a < b$ e $c+d$ então $a+c < b+d$

RESPOSTAS SELECIONADAS - SEQUÊNCIA V

1. a) $A \cup B = \{a, b, c, m, n\}$ b) $C \cup D = \{a, f, g, h, p, g, r\}$
 2. a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$ b) $C \cup D = \{m, n, p, q\}$
 c) $E \cup \emptyset = E$ d) $F \cup G = \{x, y\} = G$
 6. c) associativa d) sucessivo de 8
 e) porque $8+1=9$ e, pela comutativa
 f) Porque 7 é o sucessivo de 6; e 6 é sucessivo de 5, etc.
 9. a) $3 = 2+1$ (suc.), $3 = (1+1)+1$ (suc. de 2), $3 = 1+1+1$ (permissão pela associatividade)
 11. VVFF
 12. a) III b) IV c) II
 14. a) 0 c) 2 e) ou 0, ou 1, ou 2 f) $\neq 6$

CAPÍTULO IV

SUBTRAÇÃO

A. A OPERAÇÃO

Consideremos um conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, no caso, com nove elementos, e um subconjunto $B = \{e, f, i\}$ por exemplo, de três elementos.

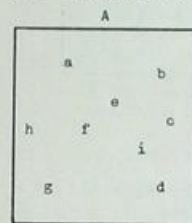


Fig. 21

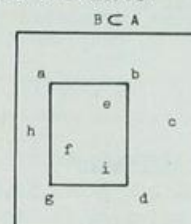


Fig. 22

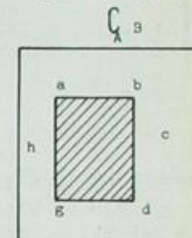


Fig. 23

Ao subconjunto B corresponde um outro subconjunto C de A: $C = \{a, b, c, d, g, h\}$, denominado complementar de B em relação a A, formado pelos elementos do conjunto A que não pertencem ao conjunto B. Indicamos:

$$\complement_A B \text{ ou } \text{Comp}_A B$$

e lemos: Complemento de B em relação a A.

Ao número 6, de elementos de C, chamamos diferença dos inteiros 9 e 3, nessa ordem, e indicamos:

$$9 - 3 = 6$$

Caso tivéssemos usado outros conjuntos A' e B' , também $B' \subset A'$, com B' e A' equivalentes a B e a A, obteríamos um conjunto C' , também com 6 elementos.

É interessante observar que esta definição é válida, mesmo no caso $B=A$, quando C é o conjunto vazio, portanto a diferença é zero.

Essa operação de complementação de conjuntos é

também muito simples, ao nível de crianças, pois, elas utilizam-na nos seus brinquedos, quando uma "tira" parte dos seus brinquedos e dá a outra para brincar.

PRIMEIRA DEFINIÇÃO DE DIFERENÇA:

Dados dois números inteiros $a \geq b$, a eles podemos considerar associados conjuntos A e B, B subconjunto de A, que tenham "a e b" elementos.

Chamamos diferença dos inteiros "a e b", ($a \geq b$), nessa ordem, ao número "c" de elementos do conjunto C, complementar de B em relação a A.

Indicamos: $a - b = c$

SEGUNDA DEFINIÇÃO DE DIFERENÇA:

Como a união de C e B é o conjunto A, e C e B são disjuntos, pela definição de soma, temos:

$$c + b = a,$$

de onde, uma outra definição:

Chamamos diferença dos inteiros "a e b", ($a \geq b$), nessa ordem, ao número "c", que adicionado ao segundo número, fornece o primeiro.

Desta definição resulta a equivalência fundamental da subtração:

$$a - b = c \iff c + b = a$$

isto é, toda vez que tivermos $a - b = c$, podemos escrever $c + b = a$, e quando tivermos $c + b = a$ também teremos $a - b = c$.

DEFINIÇÃO DE SUBTRAÇÃO OU DIMINUIÇÃO

A operação que ao par (a;b) faz corresponder o inteiro c, igual à diferença de a e b, é denominada subtração ou diminuição.

Dizemos também, quando estamos operando, que estamos subtraindo ou diminuindo.

O sinal - lê-se menos.

Os termos "a e b", nessa ordem, recebem nomes especiais: o primeiro é o diminuendo (ou minuendo), o segundo é o diminuidor (ou subtraendo). O resultado é a diferença, (ou resto, ou excesso).

B. PROPRIEDADES

B.1. PROPRIEDADE NÃO-COMUTATIVA

A subtração não goza da propriedade comutativa, pois, impôs-se a condição de existência da operação: o diminuendo maior ou igual ao diminuidor; portanto, mudando a ordem não será em geral possível a operação.

Assim: $5 - 2 = 3$, mas $2 - 5 = ?$ não tem significado.

Frizamos no entanto, que a subtração é não-comutativa e não anti-comutativa, pois há casos em que podemos permutar, basta que $a = b$.

B.2 PROPRIEDADE NÃO-ASSOCIATIVA

A subtração é não associativa, é fácil dar contra-exemplo:

$$(9-4)-1 = 5-1 = 4$$

mas, $9-(4-1) = 9-3 = 6$ que é resultado diferente do anterior.

Também, não é anti-associativa pois há casos em que vale a associatividade:

$$(8-2)-0 = 8-(2-0) = 6$$

B.3. ELEMENTO NEUTRO

Como $a-0=a$ para qualquer número a, mas, $0-a$ em geral não tem sentido, só podemos dizer que a subtração possui elemento neutro à direita, que é o zero.

C. TÁBUA DE SUBTRAÇÃO

A tábua de subtração pode ser obtida daquela da adição; vejamos um exemplo:

$$6-4 = ?$$

Como $4+2 = 6$ (ver a tábua de adição), pela propriedade fundamental obtemos:

$$2+4 = 6 \iff 6-4 = 2$$

30 20 10 10 20 30

D. OPERAÇÃO INVERSA

Em vista da existência das equivalências fundamentais da subtração

$$c + b = a \iff \begin{cases} a-b = c \\ a-c = b \end{cases}$$

diz-se que a subtração é a operação inversa da adição; pois, numa adição quando se procura uma parcela, conhecendo-se uma parcela e a soma, obtém-se por uma subtração.

Procuremos a inversa da subtração mas observemos a necessidade de se estudar dois casos: à esquerda e à direita:

a) busca-se o diminuendo x :

$$x-b = c$$

Pela equivalência temos:

$$x-b = c \iff c+b = x$$

isto é, a inversa da subtração é a adição.

b) busca-se o diminuidor y :

$$a-y = c$$

Pela equivalência fundamental temos:

$$a-y = c \iff c+y = a$$

que não fornece ainda y , usando-a novamente:

$$c+y = a \iff a-c = y$$

isto é, a inversa da subtração é outra subtração.

Exemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } x-3 &= 4 \\ x-3 &= 4 \iff 4+3 = x \\ &\implies x = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 8-y &= 2 \\ 8-y &= 2 \iff 2+y = 8 \\ &\iff 8-2 = y \\ &\implies y = 6 \end{aligned}$$

E. EXERCÍCIOS - SEQUÊNCIA VI

- Dados os conjuntos, determine o conjunto complementar:
 - $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{b, d\}$
 - $C = \{m, n, p, q, r\}$ e $D = \{m, q\}$
 - $E = \{x, y, z\}$ e $F = \{x, z, y\}$
 - $G = \{a, b, c\}$ e \emptyset
 - $H = \{a, b, c\}$ e $I = \{b, e, g\}$
- Um conjunto A possui 8 elementos, um seu subconjunto B possui 5 elementos, pede-se:
 - numero de elementos do conjunto complementar C de B em relação a A ;
 - o nome desse numero, e como indica;
 - fazendo a união de B com C o que obtemos;
 - o número de elementos de A o que é em relação aos números de B e de C ;
 - a equivalência fundamental existente.
- Responda:
 - Por que $7-2 = 5$?
 - Por que $6-0 = 6$?
 - Por que $5-5 = 0$?
- Numa diminuição (subtração), o diminuendo é 7, e a diferença é 3, qual é o diminuidor? Por que?
- Dê exemplos de:
 - não-comutatividade;
 - não associatividade.
- Dê exemplos em que a subtração é:
 - comutativa,
 - associativa.
- Faça uma tábua de subtração até 9, utilizando o diminuendo na primeira coluna e o diminuidor na primeira linha. Verifique se a tábua não terá números acima da diagonal.
- Mostre que
 - se $x-4=0$ então $x=4$
 - $x-3 = [(x-1)-1] -1$
- Faça os seguintes cálculos:
 - $8 - (5-3)$
 - $(8-5)-3$
 - $(12-10) + (16-8)$
 - $\{40 - (50-12)\} + \{60 - (12+5)\}$
 - $\{120 - [70 - (50-10)]\} - \{50 - (70-40)\}$
- Teste de Múltipla escolha:
 - Se $a-b=0$ então: I: $a>b$ II: $a<b$ III: $a=b$
 - Se $x>y$ então: I: $x-3>y-3$ II: $x-3=y-3$ III: $x-3<y-3$

- c) Se $x = a - (b+c)$ então: I $x = (a+b) - c$, II $x = (a-b) + c$ III $x = (a-b) - c$
 d) Se $y = a - (b-c)$ então: I $y = (a-b) + c$, II $y = (a-b) - c$ III $y = (a+b) - c$

11. Testes verdadeiro-falso

- a) Se $x < y$ então $x-3 < y-3$
 b) Se $a-x = b-x$ então $a=b$
 c) Se $a=b$, $d > c$, então $a-c > b-d$
 d) Se $a > b$, $d = c$, então $b-d > a-c$

12. Teste de completamento

- a) $8+3=11 \Leftrightarrow 11-...=8$
 b) $8+3=11 \Leftrightarrow ...+...=11 \Leftrightarrow 11-...=3$
 c) $7+2=9 \Leftrightarrow 9-7=...$
 d) $6+0=6 \Leftrightarrow 6-...=0$
 e) $7+...=12 \Leftrightarrow 12-7=...$

13. Se $6-x=2$, mostre que x deve ser 4, usando a equivalência fundamental b) idem calcule y em: $7-y=5$.

14. Exercícios teóricos (para um segundo estudo)

- a) Mostre que: $(a+b)-b = a$
 b) Mostre que: $(a-b)+b = a$
 c) Mostre que: $(a+c)-b = (a-b)+c$
 d) Mostre que: $a-(b+c) = (a-b)-c$
 e) Mostre que: $(a-b)-c = (a-c)-b$
 f) Mostre que: $a-(b-c) = (a-b)+c$
 g) Mostre que: $a-b = (a+c)-(b+c)$
 h) Mostre que: $a-b = (a-c)-(b-c)$
 i) Mostre que: Se $a-b=c-d$ então $a+d=b+c$

RESPOSTAS SELECIONADAS - SEQÜÊNCIA VI

1. a) $\{a, c\}$ b) $\{n, p, r\}$ c) \emptyset
 d) $\{a, b, c\}$ e) não é possível: $I \not\subseteq H$
2. a) 5 b) diferença de 8 e 5, $8-5=3$
 c) 1 d) soma e) $8-5=3 \Leftrightarrow 3+5=8$
3. a) Porque $5+2=7$ b) Porque $6+0=6$ c) $0+5=5$, ou explicando com os conjuntos complementares
4. É 4, $7-y=3 \Leftrightarrow 3+y=7$, $3+y=7 \Leftrightarrow 7-3=y$, ou então: Porque a inversa da subtração quando se procura o diminuendo é subtração
8. a) $x-4 = 0 \Leftrightarrow x=0+4 \Rightarrow x=4$
 b) Podemos $x-3=y$, $x-3=y \Leftrightarrow x-y+3 \Leftrightarrow x=y+(1+2) \Leftrightarrow x=(y+1)+2$, etc.
 $x = \{(y+1)+1\} + 1 \Leftrightarrow x-1=(y+1)+1 \Leftrightarrow (x-1)-1=y+1 \Leftrightarrow \{(x-1)-1\} - 1 = y$

10. a) III b) I c) III d) I

11. a) V b) V c) V d) F

14. a) $a+b=a+b \Leftrightarrow (a+b)-b=a$

$$c) a+c=a+c \Leftrightarrow a+c = [b+(a-b)] + c \quad (\text{ex. 14 a.})$$

$$\Leftrightarrow a+c=b+[(a-b)+c] \quad (\text{assoc.})$$

$$\Leftrightarrow (a+c)-b = (a-b)+c \quad (\text{Equiv. fundamental})$$

CAPÍTULO V
MULTIPLICAÇÃO

A. A OPERAÇÃO

A.1. PRODUTO CARTESIANO DE CONJUNTOS

Consideremos dois conjuntos:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{1, 2\}$$

e formemos todos os pares possíveis, tendo só um elemento do conjunto A e um elemento do conjunto B, mas onde se distingue um como primeiro e o outro como segundo.

Dizemos que êses pares são pares ordenados e indicamos entre parênteses e os separamos por ponto e vírgula, ou mesmo só vírgula. Exemplos:

$$(a;1), (c;2), (b;1), (c;1)...$$

ou em outra ordem

$$(1;a), (2;c), (1;b), (1;c)...$$

Formando o conjunto de todos os pares ordenados tendo o 1º elemento do conjunto A e o 2º elemento do conjunto B, dizemos que formamos o Produto Cartesiano de A por B, e indicamos

$$A \times B$$

$$A \times B = \{(a;1), (b;1), (c;1), (d;1), (a;2), (b;2), (c;2), (d;2)\}$$

portanto, o produto cartesiano de B por A será:

$$B \times A = \{(1;a), (1;b), (1;c), (1;d), (2;a), (2;b), (2;c), (2;d)\}$$

A.2 PRODUTO ARITMÉTICO

Consideremos o seguinte problema:

Numa sala estão

2 rapazes:	R_1 e R_2
3 moças:	$M_1, M_2,$ e M_3

Pergunta-se quais e quantos casais diferentes poderemos formar ?

É um problema simples, e facilitará entendermos o conceito de produto.

Coloquemos em termos de conjuntos: R o conjunto dos rapazes, e M o de moças:

$$R = \{R_1, R_2\} \quad M = \{M_1, M_2, M_3\}$$

Para responder a primeira pergunta é claro que devemos formar o produto cartesiano do conjunto R pelo conjunto M:

$$R \times M = \{(R_1;M_1), (R_1;M_2), (R_1;M_3), (R_2;M_1), (R_2;M_2), (R_2;M_3)\}$$

A segunda parte da pergunta será respondida com o número 6, número de elementos do conjunto $R \times M$, que é o número de elementos do produto cartesiano de R por M.

A êste número 6 denominamos produto do número 2 pelo número 3, ou produto aritmético de 2 por 3, e indicamos:

$$2 \times 3 = 6 \quad \text{ou} \quad 2.3 = 6$$

DEFINIÇÃO I

Dados dois números inteiros "a" e "b", a êles podemos associar dois conjuntos A e B, que tenham "a" e "b" elementos respectivamente, portanto:

Produto de dois inteiros "a" e "b" é um inteiro "c", número de elementos do conjunto C, produto cartesiano dos conjuntos A e B.

Indicamos:

$$a \times b = c \quad \text{ou} \quad a . b = c$$

A operação que ao par de inteiros (a;b) faz corresponder o inteiro "c" igual ao seu produto é denominada multiplicação.

NOTA: Com a definição dada verifica-se que a multiplicação com um dos termos igual a zero é igual a zero, pois fazendo o produto cartesiano de um conjunto qualquer com o conjunto vazio, o produto cartesiano é o conjunto vazio que possui zero elementos.

A.3. RELAÇÃO DA MULTIPLICAÇÃO COM A ADIÇÃO

No problema de rapazes e moças separemos o produto cartesiano em conjuntos, tendo cada um, só pares com um determinado rapaz.

Teremos os conjuntos parciais:

$$\{(R_1;M_1), (R_1;M_2), (R_1;M_3)\}$$

$$\{(R_2;M_1), (R_2;M_2), (R_2;M_3)\}$$

Cada conjunto parcial possui 3 elementos (3 pares), pois, consta dos pares de um rapaz fixado com qualquer das moças, logo possui o número de elementos do conjunto de moças.

O produto cartesiano, total, é a união desses conjuntos, portanto, pela definição de soma, vemos que o produto 6 é igual à soma de parcelas iguais a 3, e o número de parcelas é igual ao número 2 de rapazes:

$$3 + 3 = 6 \quad \text{ou} \quad 3 + 3 = 2 \times 3$$

De uma maneira geral podemos dar uma segunda definição de produto.

DEFINIÇÃO II

Chama-se produto de dois inteiros "a e b", à soma de "a" parcelas iguais a "b".

$$a \times b = \underbrace{b + b + \dots + b}_a$$

Chamamos multiplicação à operação de adicionar parcelas iguais (ou que consiste em determinar-se o produto).

Observemos que se usarmos esta definição II quando $a=1$, ou $a=0$, a definição é defeituosa, pois não existe soma de 1 ou 0 parcelas, precisando então fazer as seguintes extensões: $1 \times a = a$ e $0 \times a = 0$. Também, não é correto tentar explicar $1 \times a$ ou $0 \times a$ por $a \times 1$ ou $a \times 0$, pois não se sabe da validade da propriedade comutativa.

A.4. ELEMENTOS DE UMA MULTIPLICAÇÃO

Quando estamos operando para determinar o produto, dizemos que estamos multiplicando.

O sinal \times (ou \cdot), que é o símbolo operatório pode ser lido: "vêzes".

O resultado, como vimos, chama-se produto.

O "a e o b" são os termos da multiplicação, onde o "a" é o multiplicador e o "b" o multiplicando. Denominações que preferimos utilizar conforme a função específica de cada um, assim o multiplicador é atuante, o multiplicando é o paciente.

O primeiro, usamos como atuante (definição II), indica o número de parcelas a serem tomadas para com elas adicionarmos; o multiplicador é mais um operador.

O segundo, usamos como paciente, é a parcela repetitiva, é a que recebe a ordem de ser adicionada.

Lembramos, em decorrência, que se tivéssemos usado na definição II

$$a \times b = a + a + \dots + a$$

b parcelas

o multiplicador seria o segundo e o multiplicando o primeiro.

De onde, o interesse em se destacar na leitura o atuante e o paciente.

$$4 \text{ vêzes o } 3 \text{ entendemos como } 3+3+3+3$$

$$4 \text{ multiplicado por } 3 \text{ entendemos como } 4+4+4$$

$$4, \text{ vêzes } 3 \text{ entendemos como } 4+4+4$$

B. PROPRIEDADES

B.1. PROPRIEDADE COMUTATIVA

$$a \times b = b \times a$$

Exemplo: $3 \times 4 = 12$

$$4 \times 3 = 12$$

Essa propriedade é importantíssima e nos permite, agora, utilizar uma denominação comum aos termos de uma multiplicação:

fatores

pois, qualquer um pode ser atuante, de onde a conhecida regra "a ordem dos fatores não altera o produto".

B.2. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Exemplo: $(4 \times 2) \times 3 = 8 \times 3 = 24$

$$4 \times (2 \times 3) = 4 \times 6 = 24$$

A sua importância, reside em podermos operar associando convenientemente, como em

$$(19 \times 5) \times 2$$

é preferível fazer $5 \times 2 = 10$, e portanto o produto é 190.

Também nos permite suprimir o sinal parêntesis, já que não há perigo em obtermos resultados desiguais:

$$a \times b \times c$$

B.3. EXISTÊNCIA DO ELEMENTO NEUTRO

$$1 \times a = a \times 1 = a$$

Exemplo: $1 \times 6 = 6$
 $6 \times 1 = 6$

O número um é elemento neutro (indiferente) na multiplicação, operamos com ele e obtemos o mesmo resultado.

C. TÁBUA DA MULTIPLICAÇÃO

C.1. UM FATOR É NULO

$$a \times 0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \quad (a \neq 0)$$

a parcelas

$0 \times a = 0$? só se fosse válida a propriedade comutativa, então, se usamos a definição II devemos aceitar que

$$0 \times a = 0$$

e a propriedade também será válida.

Pela definição I, $a \times 0 = 0$, $0 \times a = 0$ e $0 \times 0 = 0$, pois,

$$A \times \emptyset = \emptyset, \quad \emptyset \times A = \emptyset \quad \text{e} \quad \emptyset \times \emptyset = \emptyset$$

em vista do que o produto cartesiano não terá pares constituintes.

C.2. UM FATOR É A UNIDADE (UM)

$$a \times 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = a \quad (a \neq 1)$$

a parcelas

$1 \times a = a$? temos o mesmo problema anterior, só se houvesse comutativa também aqui, portanto se usarmos a definição II, somos obrigados a aceitar (estender a definição) que

$$1 \times a = a$$

e a propriedade será válida.

Pela definição I, tem-se:

$$A \times \{p\}, \text{ ou } \{p\} \times A,$$

terá sempre o número de elementos de A que formarão pares só com o elemento "p" do conjunto unitário $\{p\}$.

C.3. UM FATOR É 2

a) $2 \times 2 = ?$
 $2 \times 2 = 2 + 2$ (definição II)
 $= 4$ pela tabua da adição

b) $2 \times 3 = ?$
 $2 \times 3 = 3 + 3$ (definição II)
 $= 6$ tábua da adição
 $3 \times 2 = 6$ (propriedade comutativa)

idem: $2 \times 4 = 4 \times 2 = 8$
 $2 \times 5 = 5 \times 2 = 10 \dots$

c) $3 \times 3 = ?$
 $3 \times 3 = 3 + 3 + 3$ (definição II)
 $= (3 + 3) + 3$ (associatividade)
 $= 6 + 3$ (tábua da adição)
 $= 9$ (tábua da adição)

idem, para as outras multiplicações.

NOTA: Os produtos de um inteiro por 2, por 3, por 4, por 5, etc., são chamados respectivamente, dobro, triplo, quádruplo, quintuplo, etc., do inteiro.

D. OUTRAS PROPRIEDADES

D.1. LEI DO CÔRTE

Numa multiplicação, se tivermos

$$a \times b = a \times c$$

não podemos, como na adição, sempre afirmarmos que

$b = c$, pois, se $a \times b = a \times c = 0$ esta igualdade não implica $b = c$, como nos mostra o contra-exemplo:

$$0 \times 2 = 0 \times 4.$$

D.2. DISTRIBUTIVA EM RELAÇÃO À ADIÇÃO

$$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$$

e

$$(b+c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$

Exemplo:

$$1 - 4 \times (3+7) = 4 \times 10 = 40$$

$$(4 \times 3) + (4 \times 7) = 12 + 28 = 40$$

$$2 - (5+6) \times 3 = 11 \times 3 = 33$$

$$(5 \times 3) + (6 \times 3) = 15 + 18 = 33$$

NOTA: Quando num cálculo temos adições e multiplicações é costume fazer-se primeiro a multiplicação: $3+4 \times 2 = 3+8=11$, que corresponde a $3+(4 \times 2)$, mas poderá ser $3+4 \times 2 = 7 \times 2 = 14$, correspondendo a $(3+4) \times 2$.

Nada diz que o primeiro procedimento é o correto, invocando que a multiplicação é uma operação mais "avançada" (!) do que a adição; ou para o segundo, argumentando que se deve fazer os cálculos na ordem indicada. Parece-nos que é de maior uso o primeiro, mas julgamos de todo conveniente empregar-se uma escrita ou fala adequada ao cálculo utilizado, deixando a multiplicação indicada com os elementos mais próximos, e na leitura, fazendo a pausa conveniente. (que corresponde à colocação de uma vírgula)

$$3 + 4 \times 2 = 3 + 8 = 11$$

ou: três mais, quatro vêzes dois.

D.3. DISTRIBUTIVA EM RELAÇÃO À SUBTRAÇÃO

$$\boxed{ax(b-c) = (axb) - (axc)} \quad \text{e} \quad \boxed{(b-c)xa = (bxa) - (cxa)}$$

Exemplo: $7 \times (8-2) = 7 \times 6 = 42$
 $(7 \times 8) - (7 \times 2) = 56 - 14$

NOTA: É conveniente adotar-se o mesmo procedimento entre multiplicação e adição. $17 - 2 \times 4 = 17 - 8 = 9$, lendo-se: dezessete menos, dois vezes quatro.

E. EXERCÍCIOS - SEQUÊNCIA VII

- Dados os conjuntos, determine o produto cartesiano (na ordem dada)

a) $A = \{a, b, c\}$	b) $C = \{1, 2, 3, 4\}$	c) $E = \{p, q, r\}$
$B = \{m, n\}$	$D = \{x, y\}$	$F = \{s\}$
d) $G = \{a, b\}$	e) $I = \{x\}$	f) $K = \emptyset$
$H = \emptyset$	$J = \{a, b\}$	$L = \emptyset$
- Quanto elementos possuem os conjuntos do ex. 1 e seu respectivo produto cartesiano?
- Como são chamados os números dos produtos cartesianos? E as operações aritméticas correspondentes? Indique-as para o ex. 2.
- Escreva as adições em forma de multiplicação:

a) $2+2+2$	b) $4+4$	c) $5+5+5+5$	d) $0+0+0$
e) $1+1+1+1+1$	f) $8+8$	g) $a+a+a+a+a$	h) $b+b+b$
i) $c+c+c+\dots+c$ (com x parcelas)			
- Dê exemplos numéricos para elucidar a propriedade comutativa, a associativa, e a de existência do elemento neutro.
- Responda: a) com a definição de multiplicação como adição, tem sentido $0 \times a$ ou $1 \times a$, usando o primeiro termo como multiplicador? b) Que é preciso fazer?
- Responda: a) Quantos elementos tem o produto cartesiano quando um dos conjuntos é unitário? b) Idem, quando um dos conjuntos é vazio? c) Idem, quando ambos são unitários? d) Idem, quando ambos são vazios?
- Mostre os seguintes cálculos da tabela de multiplicação usando a definição de multiplicação como adição:

a) 2×6	b) 3×4	c) 5×1	d) 6×0
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------
- Dos resultados anteriores obtenha: a) 6×2 b) 4×3 usando uma das propriedades estruturais.
- Dê exemplos esclarecedores da propriedade distributiva:

a) em relação à adição,	b) em relação à subtração
-------------------------	---------------------------

11. Faça os seguintes cálculos:

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| a) $7 \times 3 + 4$ | b) $6 \times 2 - 3$ |
| c) $7 + 3 \times 4$ | d) $6 + 3 \times 4$ |
| e) $(7 + 3) \times 4$ | f) $(6 + 3) \times 4$ |
| g) $\{ [8 + 2 \times (3+4)] - [7 + 2 \times (6-3)] \} \times [9 \times 3 - (2 \times 5 + 4)]$ | |

12. Rápido, quais os valores dos seguintes cálculos:

- | |
|-------------------------------------------------------------------------------|
| a) $6 \times 4 \times 0 \times 7 \times 1 \times 3$ |
| b) $7 \times 2 \times 0 + 3 \times 0 \times 4 - 8 \times 0 \times 2 \times 6$ |
| c) $6 \times 1 + 5 \times 0$ |
| d) $1 \times 8 - 0 \times 2 + 0 \times 0$ |
| e) $25 \times 1 \times 4$ |
| f) $8 \times 2 \times 5$ |

13. Mostre usando a propriedade comutativa ou associativa que:

- | |
|----------------------------------------------------------------------------|
| a) $(5 \times 4) \times 2 = (2 \times 5) \times 4 = (4 \times 2) \times 5$ |
| b) $[a \times (b \times c)] \times d = (d \times b) \times (a \times c)$ |

14. Teste Verdadeiro-Falso:

- | | |
|-----------------------------------------------------|-----|
| a) $4 \times (2 + 6) = (4 \times 2) + (4 \times 6)$ | () |
| b) $4 + (2 \times 6) = (4 + 2) \times (4 + 6)$ | () |
| c) $7 \times 5 = 5 \times 7$ | () |
| d) $a \times 0 = b \times 0 \Rightarrow a = b$ | () |
| e) $a \times 5 = b \times 5 \Rightarrow a = b$ | () |

15. Teste de Completamento:

- | | |
|----------------------------------------------------|----------------------------------|
| a) $5 \times (\dots+6) = 15 + 30$ | e) $\dots \times 2 \times 4 = 8$ |
| b) $8 \times \dots \times 7 = 7 \times 8 \times 6$ | f) $(7 - \dots) \times 3 = 6$ |
| c) $3 \times 4 = 4 + \dots + 4$ | g) $(0 + \dots) \times 7 = 42$ |
| d) $7 \times \dots \times 4 \times 3 = 0$ | h) $(8 - \dots) \times 3 = 24$ |

16. Mostre utilizando a propriedade distributiva que:

- | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) Adicionada duas unidades a um fator o produto fica adicionado do dobro do outro fator. |
| b) Subtraindo três unidades a um fator o produto fica subtraído do triplo do outro fator. |

17. Mostre que: $(a+b) \times (c+d) = (a \times c) + (a \times d) + (b \times c) + (b \times d)$

18. Testes de múltipla escolha:

- | |
|---------------------------------------------------------------------------------|
| a) Se $x < y$ e $a \neq 0$ então: I: $ax < ay$, II: $ax = ay$, III: $ax > ay$ |
| b) Se $x > y$ e $a = 0$: I: $ax > ay$, II: $ax < ay$, III: $ax = ay$ |
| c) Se $a < b$ então: I: $3.a < 3.b$, II: $3.a > 3.b$, III: $3.a = 3.b$ |

19. Exercícios Teóricos: (para um segundo estudo)

- | |
|----------------------------------------------------------------------------------|
| a) Prove que $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ (usando a def. II) |
| b) Prove que $(b+d) \times a = (b \times a) + (d \times a)$ |
| c) Prove que $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (usando a def. II) |
| d) Prove que $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (usando a def. I) |
| e) Prove que $a \times b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$ |

RESPOSTAS SELECIONADAS - SEQUÊNCIA VII

1. a) $\{(a;m), (a;n), (b;m), (b;n), (c;m), (c;n)\}$
 d) \emptyset e) $\{(x;a), (x;b)\}$ f) \emptyset
6. a) não b) colocar por extensão as definições: $0 \times a = 0$
 e $1 \times a = a$
9. Pela propriedade comutativa.
11. a) 25 c) 19 e) 40 f) 97
 12. a) 0 b) 0 c) 6 d) 8 e) 100 f) 80
 14. a) V b) F c) V d) F e) V
 15. a) 3 b) 6 c) 4 d) 0 e) 1 f) 5
 g) 6 h) 0
16. a) escrever $a \times (b+2)$ e aplicar a distributiva
 b) idem: $a \times (b-2)$
17. Escrever m no lugar de $c + d$, aplicar a distributiva, substituir m por $c + d$, e novamente usar a distributiva.
18. a) I b) III c) II

CAPÍTULO VI

DIVISÃO

A. MÚLTIPLOS

Consideremos um inteiro qualquer a , e os produtos deste inteiro pela sucessão dos naturais $1, 2, 3, 4, \dots$

$$1 \times a, 2 \times a, 3 \times a, 4 \times a, \dots$$

A êsses produtos denominamos múltiplos do inteiro a .

Toma-se também como múltiplo de um inteiro o seu produto por 0; isto é, o 0 é múltiplo de qualquer número inteiro.

Exemplo: O conjunto dos múltiplos de 3.

$$\{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$$

é obtido da seguinte maneira

$$1 \times 3 = 3, 2 \times 3 = 6, 3 \times 3 = 9, 4 \times 3 = 12, \text{etc.}$$

O conjunto dos múltiplos de 2:

$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots\}$ recebe o nome especial de conjunto dos números pares.
 $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots\}$ é denominado conjunto dos números ímpares.

Um inteiro que seja um dos fatores de um produto é chamado sub-múltiplo de produto; disto resulta que se um inteiro " a " é múltiplo de um inteiro " b ", " b " é sub-múltiplo do inteiro " a ".

Exemplo: 8 é múltiplo de 2 porque $4 \times 2 = 8$

logo 2 é sub-múltiplo de 8.

B. OPERAÇÃO INVERSA DA MULTIPLICAÇÃO - DIVISÃO EXATA

Admitamos que é dado o produto

$$a = bxc$$

dos inteiros "b e c", e que se conhece um dos fatores "b" por exemplo.

O problema da determinação do outro fator "c" leva-nos a operação inversa da multiplicação.

Ao resultado desta operação denominamos quociente (ou cociente) e indicamos:

$$a : b = c, \text{ ou } a \div b = c$$

Assim, o quociente de 6 por 2 é 3 porque $2 \times 3 = 6$.

DEFINIÇÃO

Chamamos quociente de dois inteiros "a e b", nessa ordem "a" múltiplo de "b", a um inteiro "c", que multiplicado por "b" fornece o produto "a".

A operação que ao par de inteiros (a;b), faz corresponder o inteiro "c" igual ao seu quociente é denominada divisão.

Quando estamos operando para determinarmos o quociente, diz-se que estamos dividindo.

O sinal \div (ou :), é o símbolo da operação de dividir, e lê-se "dividido por".

O "a" é chamado dividendo,

O "b" é chamado divisor,

O "c" que é o resultado da divisão, é denominado quociente.

NOTA: Como o quociente não é definido para qualquer par (a;b) de inteiros, pois existe a restrição de "a" ser múltiplo de "b", a rigor não existe a operação para os outros casos.

Da definição resulta a equivalência fundamental da divisão:

$$a : b = c \Leftrightarrow b \times c = a \Leftrightarrow \underbrace{b+b+\dots+b}_{c \text{ parcelas}} = a$$

Desta equivalência segue dois aspectos para divisão:

- 1) obtenção do número de vezes que deve ser adicionado o divisor para se obter o dividendo.
- 2) Obtenção do número de vezes que se pode subtrair o divisor do dividendo.

De fato: $a : b = c \Leftrightarrow \underbrace{(b+b+\dots+b)}_{c \text{ parcelas}} + b = a$

ou

$$a : b = c \Leftrightarrow \underbrace{(b+b+\dots+b)}_{c-1 \text{ parcelas}} + b = a - b$$

ou

$$a : b = c \Leftrightarrow \underbrace{(b+b+\dots+b)}_{c-2 \text{ parcelas}} + b = (a-b) - b$$

e, sucessivamente:

$$a : b = c \Leftrightarrow (a-b) - b - \dots - b$$

c subtrações de diminuidor b.

C. OPERAÇÕES INVERSAS DA DIVISÃO

a) Seja a determinação do dividendo : x

$$x : b = c$$

Pela equivalência fundamental da divisão temos:

$$x : b = c \Leftrightarrow b \times c = x$$

b) Seja a determinação do divisor y :

$$a : y = c$$

teremos $a : y = c \Leftrightarrow y \times c = a$

Novamente, pela equivalência fundamental da divisão
 $y \times c = a \Leftrightarrow y = a : c$

No caso a) a operação inversa é a multiplicação, mas, no caso b) a operação inversa é a própria divisão; diremos como o dissemos para a subtração, "a operação inversa à esquerda da divisão é a multiplicação", e "a operação inversa à direita da divisão é a divisão".

Exemplos:

1. Qual é o dividendo sabendo-se que o divisor é 2 e o quociente é 4?

$$\text{Temos: } x : 2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \times 4 = 8$$

2. Qual é o divisor sabendo-se que o dividendo é 10 e o quociente é 5?

$$\text{Temos: } 10 : y = 5 \Leftrightarrow y \times 5 = 10$$

$$\text{mas: } y \times 5 = 10 \Leftrightarrow 10 : 5 = y$$

portanto $y = 2$.

D. PROPRIEDADES

D.1. PROPRIEDADE NÃO-COMUTATIVA

$$a : b \neq b : a$$

A divisão não goza da propriedade comutativa, o que decorre da condição do dividendo ser múltiplo do divisor; logo mudando a ordem, em geral, o dividendo não será mais múltiplo do divisor.

Exemplo:

$$8 : 2 = 4, \text{ mas } 2 : 8 = ? \text{ (não tem sentido, não existe)}$$

Observemos entretanto que a divisão não é anti-comutativa, pois,

$$a : b = b : a, \text{ quando } a = b.$$

D.2. PROPRIEDADE NÃO-ASSOCIATIVA

$$(a : b) : c \neq a : (b : c)$$

Para mostrarmos que a divisão não goza da propriedade associativa basta darmos um contra exemplo:

$$12 : (4 : 2) = 12 : 2 = 6$$

$$\text{mas } (12 : 4) : 2 = 3 : 2 = ?$$

Observemos também aqui, que a divisão não é anti-associativa, pois há os casos em que é associativa como no exemplo seguinte:

$$8 : (4 : 1) = 8 : 4 = 2$$

$$(8 : 4) : 1 = 2 : 1 = 2$$

E. ELEMENTO NEUTRO

Como $1 \times a = a$

segue pela equivalência que:

$$a : 1 = a$$

para qualquer inteiro a .

Mas como $1 : a$ em geral não é possível, concluímos que:

"A divisão possui elemento neutro à direita"

NOTA: Como $1 \times a = a$ para qualquer inteiro, o 1 é denominado sub-múltiplo universal pois é divisor de qualquer inteiro (analogamente o zero é múltiplo universal).

F. DIVISÕES PARTICULARES

1. DIVIDENDO 0

Pela equivalência

$$0 \times b = 0 \Leftrightarrow 0 : b = 0$$

2. DIVISOR 0

Seja "c" o quociente:

$$a : 0 = c$$

Pela equivalência temos:

$$0 \times c = a$$

mas, $0 \times c = 0$ (tábua de multiplicação) mas, como "a" em geral é diferente de zero, temos um absurdo.

Concluimos portanto, que não existe inteiro "c" que satisfaça a definição de quociente. Dizemos que a divisão é impossível, ou em outras palavras, não existe divisão com divisor nulo.

Do raciocínio anterior segue, também se $a = 0$, teríamos:

$$0 \times c = 0$$

que é uma igualdade sempre verdadeira, independente do valor inteiro "c"; isto é, qualquer inteiro satisfaz neste caso a definição de quociente.

Dizemos então, quando o dividendo e o divisor são nulos que a divisão é indeterminada.

G. TÁBUA DE DIVISÃO

Com recursos da tábua de multiplicação é fácil construir a tábua de divisão seguinte onde colocamos o dividendo na primeira coluna e o divisor na primeira linha, e já excluímos o divisor nulo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1
2	1
3	.	1
4	4	2
5	5	.	.	1
6	6	3	2	.	1
7	7	1	.	.	.
8	8	4	1	.	.
9	9	.	3	1	.
10	10	5	1
...	.	.	.	2

Da dificuldade de leitura desta tabela, por causa dos espaços em branco, onde não existe o quociente dos inteiros; prefere-se subdividi-la em tabelas parciais para cada divisor, como são as tabelas seguintes, onde para dividendo só se escreve aqueles que são múltiplos dos divisores:

÷	3	÷	4	÷	5
0	0	0	0	0	0
3	1	4	1	5	1
6	2	8	2	10	2
9	3	12	3	15	3
12	4	16	4	20	4
15	5	20	5	25	5
18	6	24	6	30	6
21	7	28	7	35	7
24	8	32	8	40	8
27	9	36	9	45	9
30	10	40	10	50	10

H. EXERCÍCIOS - SEQUÊNCIA VIII

- Calcule múltiplos dos números
a) 4 b) 3 c) 5 d) 6 e) 7
- O que são números pares? O que são ímpares? Qual é a operação inversa da multiplicação?
- Escreva as multiplicações em que se busca um dos fatores em notação de divisão:
a) $6 \times X = 18$ b) $y \times 5 = 40$ c) $X \times a = c$
d) $1 \times z = 10$ e) $0 \times a = 0$ f) $4 \times m = 0$
- Escreva as divisões em notação de multiplicação:
a) $8 : 2 = x$ b) $16 : 2 = y$ c) $12 : 3 = z$
d) $20 : x = 4$ e) $25 : y = 5$ f) $10 : z = 10$
g) $w : 4 = 6$ h) $t : 3 = 9$ i) $u : 5 = 3$
- Mostre usando a equivalência fundamental da divisão que o dividendo x da divisão $x : 3 = 5$ é 15, e que a inversa é a multiplicação.
- Mostre usando a equivalência fundamental da divisão que o divisor y na divisão $30 : y = 6$ é 5, e que a inversa é outra divisão.

7. Dê exemplos numéricos que mostrem para a divisão:
- a) não comutatividade b) não-associatividade c) existência do neutro só pela direita.
8. Mostre com exemplos numéricos que quando o dividendo é zero, e o divisor não é nulo, o quociente é zero.
9. Mostre com exemplos numéricos que quando o divisor é nulo a divisão é impossível.
10. Mostre que: a) $5 : 5 = 1$ b) $12 : 3 = 4$ c) $20 : 4 = 5$
11. Coloque os parênteses ou colchetes adequadamente.
- a) $36 : 6 : 2 = 12$ b) $20 : 4 : 2 = 10$
 c) $24 : 6 : 2 = 2$ d) $48 : 12 : 8 : 2 = 1$
 e) $18 + 2 : 5 = 4$ f) $60 - 10 : 5 = 58$
 g) $5 \times 2 + 15 : 3 = 15$ h) $5 \times 2 + 15 : 3 = 35$
 i) $4 \times 2 + 12 : 4 = 20$ j) $4 \times 2 + 12 : 4 = 5$
 k) $5 \times 3 + 9 : 4 = 15$
12. Teste Verdadeiro-Falso
- a) A divisão com divisor nulo e dividendo não nulo é impossível ()
 b) A inversa da divisão é a multiplicação ()
 c) Multiplicando-se o dividendo por um inteiro o quociente fica multiplicado pelo inteiro ()
 d) Multiplicando-se o divisor por um inteiro o quociente fica multiplicado pelo inteiro ()
 e) Dividindo-se o dividendo e o divisor por um mesmo número o quociente é o mesmo ()
 f) Multiplicando-se o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente fica multiplicado pelo número ()
13. Faça os seguintes cálculos:
- a) $(30 + 4 \times 5) : 10$ b) $(8 : 2 + 5 \times (4 - 2)) \times (80 : 8 + 3)$
 c) $\{((200 : 4) \times 3) + 8 : 8$ d) $0 : \{5 + [3 \times (2 + 4 \times 6) - 8 : 4]\}$
14. Exercícios teóricos (para um segundo estudo)
- a) Mostre que se as parcelas são múltiplos do divisor, temos a distributiva pela direita:

$$(a+b) : c = (a:c) + (b:c)$$

SUGESTÃO: Coloque $a:cy$ e $b:cw$, obtenha pela equivalência fundamental a soma $a+b$, use a distributiva da multiplicação em relação à adição e novamente equivalência fundamental da divisão:

b) Mostre que: $a : (b \times c) = (a : b) : c$
 c) Mostre que: $(a:y) : (b:y) = a:b$
 d) Mostre que: $a:(b:c) = (a:b) \times c$
 e) Mostre que: $(a:c) : b = (a:b) : c$
 f) Mostre que: $(a \times c) : b = (a:b) \times c$

SUGESTÃO para f):
 mostre que $(a \times c) : b$ e $(a:b) \times c$ multiplicados por b são iguais, a primeira é simples, faremos a segunda:

$$((a:b) \times c) \times b = ((a:b) \times (c \times b)) = (a:b) \times (b \times c) = ((a:b) \times b) \times c = a \times c$$

I. DIVISÃO GERAL

I.1. INTRODUÇÃO:

Temos definido divisão como a operação que determina o quociente de dois inteiros, mas, no caso do primeiro inteiro (dividendo), ser múltiplo do segundo (divisor).

Na vida diária, entretanto, existem problemas análogos ao da operação de divisão, problemas denominados de repartição, ou mesmo de divisão, que necessitam ser resolvidos para o caso de inteiros, mesmo que um não seja múltiplo do outro.

Por exemplo, todos nós já passamos por situações como a seguinte: "tem-se 38 objetos (38 balas, 38 lápis, etc.) para repartir igualmente por 7 pessoas".

É claro, que devemos encontrar um número (quociente), que multiplicado por 7 seja igual ao total 38, mas, no caso, 38 não é múltiplo de 7, logo, não existe o quociente.

Mas, este é um problema que deve ser resolvido, pelo menos satisfatoriamente. A solução é a seguinte: darmos 5 objetos para cada pessoa, e, separar 3 objetos, os quais não serão repartidos, ou dados a algumas pessoas atendendo a outros critérios de privilégio.

$$\text{Temos: } 7 \times 5 + 3 = 38$$

I.2 DEFINIÇÃO

Dados dois inteiros "a e b" ($b \neq 0$), chamamos quociente dos inteiros, nessa ordem o inteiro "q", tal que:

$$a = b \times q + r$$

com

$$0 \leq r < b$$

A operação, que ao par (a;b) faz corresponder o inteiro "q", igual ao seu quociente, é denominada Divisão Geral.

O inteiro "r" é chamado resto.

Quando $r = 0$, teremos: $a = b \times q$; e portanto " a " é múltiplo de " b ", que é a Divisão anteriormente definida. Concluímos que a Divisão Geral, generaliza, como indica o nome, o conceito de Divisão.

Diremos conforme o resto r :

$r = 0$ ----- Divisão ou Divisão exata (quociente exato)

$0 < r < b$ -- - Divisão Aproximada (quociente aproximado).

Exemplo:

5 é o quociente (quociente aproximado) de 38 por 7 e o resto é 3; pois, 6 já forneceria a igualdade:

$$38 = 6 \times 7 - 4$$

e o resto precisa ser adicionado e não subtraído.

4 também não pode ser o quociente, desde que teríamos:

$$38 = 4 \times 7 + 10$$

e, então $r = 10$, que é maior que o divisor 7.

NOTA: A definição dada implica que o inteiro " q " seja o maior inteiro que satisfaça a:

$$b \times q \leq a$$

Assim, no exemplo: 6 não pode ser o quociente, pois $6 \times 7 = 42 > 38$; e, 4 não é o maior inteiro que a satisfaz.

É importante observar que esta operação conduz à determinação de dois inteiros " q " e " r ", e, que dado o par $(a; b)$ existe sempre um único par $(q; r)$ que satisfaz a definição (propriedade uniforme).

CÁLCULO DE QUOCIENTE APROXIMADO:

Dados os inteiros " a " e " b ", a não múltiplo de b , a determinação do quociente se faz por processo análogo ao do quociente exato.

Procuramos o inteiro " q " que multiplicado por " b " forneça quase " a ", isto é, tal que o inteiro " $q+1$ " multiplicado por " b " ultrapasse " a ".

Exemplo:

Seja a determinação do quociente de 27 por 6:

Temos: $6 \times 1 = 6$
 $6 \times 2 = 12$
 $6 \times 3 = 18$
 $6 \times 4 = 24$
 $6 \times 5 = 30$ (ultrapassou)

logo, 4 é o quociente aproximado, e, o resto é

$$27 - 24 = 3$$

1.3 PROPRIEDADES

Como a divisão exata não goza da associatividade e comutatividade, com maior razão a divisão aproximada não goza dessas propriedades; o que é visível pelo fato da divisão aproximada conduzir à determinação de dois inteiros (quociente e resto).

Podemos, no entretanto, acrescentar a seguinte propriedade:

"Multiplicando-se o dividendo e o divisor por um inteiro, o quociente é o mesmo, mas o resto fica multiplicado pelo inteiro."

De fato:

Sejam " a " e " b ", dividendo e divisor. Temos o quociente " q " e o resto dados por: $a = b \times q + r$ com $0 \leq r < b$.

Multiplicamos o dividendo " a " por um inteiro " d ";

$$a \times d = (b \times q + r) \times d$$

$$\text{ou } a \times d = (b \times q) \times d + r \times d \quad (\text{distributividade})$$

$$\text{ou } a \times d = (b \times d) \times q + r \times d \quad (\text{associatividade e comutatividade})$$

Nesta expressão o antigo dividendo está multiplicado por " d ", e o dividendo também, provemos que $r \times d$ satisfaz a condição de novo resto:

$$0 \leq r \times d < b \times d ;$$

o que de fato se verifica, pois o resto anterior satisfaz à desigualdade: $0 \leq r < b$, logo, multiplicando por "d", obtemos a condição procurada.

J. EXERCÍCIOS - SEQÜÊNCIA IX

- Mostre que o quociente de: a) 45 por 8 é 5 (resto 5)
b) 39 por 9 é 4 (resto 3) c) 26 por 6 é 4 (resto 2).
- Qual o maior inteiro que pode ser adicionado ao dividendo sem alterar o quociente? Qual será o resto? Idem, subtrair?
- Numa divisão conhece-se: b = divisor, c = quociente, e r = resto, calcule o dividendo.
a) b = 3, c = 5, r = 2
c) b = 6, c = 1, r = 3
b) b = 8, c = 3, r = 4
d) b = 9, c = 4, r = 0
- Mostre com um exemplo numérico que multiplicando-se o dividendo, e o divisor por um inteiro, o quociente é o mesmo, mas o resto, fica multiplicado pelo inteiro.
- Numa divisão (divisão geral) o quociente é 12 e o resto é 5, determine o dividendo e o divisor sabendo-se que a sua soma é 96.
- Numa divisão o quociente é 14 e o resto é 3, determine o dividendo e o divisor sabendo-se que a sua diferença é 68.
- Numa divisão exata o quociente é 21. Adicionando-se 12 ao dividendo o quociente será 24. Qual é o dividendo e qual é o divisor?
- Numa divisão exata o quociente é 26. Subtraindo-se 24 do dividendo o quociente será 18. Qual é o dividendo e qual é o divisor?
- Numa divisão exata o quociente é 27. Adicionando-se 3 ao divisor, o quociente será 18. Qual é o dividendo e qual é o divisor?
- Numa divisão, o quociente é 15, e o resto é 1. Adicionando-se 15 ao dividendo, o quociente será 20, e o resto é ainda 1. Qual é o dividendo e o divisor?
- Numa divisão, o quociente é 9, e o resto é 3. Subtraindo-se 13 ao dividendo o quociente é 7, e o resto é 2. Qual é o dividendo e o divisor?
- Multiplicou-se o dividendo e o divisor pelo número 5, sabendo-se que o resto e o quociente serão respectivamente 8 e 12, pede-se o novo quociente e o novo resto?

13. Teste de Completamente

	Dividendo	Divisor	Quociente	resto
a)	655	...	20	15
b)	8737	56	..	1
c)	...	21	18	19
d)	523	46	11	...

14. Teste Verdadeiro-Falso

- O resto da divisão de um número por 7 foi 9 ()
- Na divisão exata o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente ()
- Na divisão geral, a diferença entre o dividendo e o resto é igual ao produto do quociente pelo divisor ()
- Numa divisão que possuía o resto uma unidade menor que o divisor, teve o dividendo aumentado em uma unidade e terá o mesmo resto ()

RESPOSTAS SELECIONADAS - SEQÜÊNCIA VIII

- a) 0,4,8,12... b) 0,3,6,...
- a) $18 : 6 = x$ b) $40 : 5 = y$ c) $0 : a = x$
d) $10 : 1 = z$ e) $0 : 0 = a$ f) $0 : 4 = m$
- a) $8 = x \cdot 2$ b) $16 = 2 \cdot y$ c) $12 = 3 \cdot z$
d) $20 = x \cdot 4$ e) $25 = 5 \cdot y$ f) $10 = 10 \cdot z$
g) $w = 6 \cdot 4$ h) $t = 3 \cdot 9$ i) $u = 5 \cdot 3$
- a) $36 : (6:2)$ b) $20 : (4:2)$ c) $(24:6) : 2$
d) $(48:12) : (8:2)$ e) $(18+2) : 5$ f) $60 - (10 : 5)$
g) $(5 \times 2) + (15 : 3)$ h) $5 \times [2 + (15 : 3)]$ i) $4 \times [2 + (12:4)]$
- a) V b) F c) V d) F e) V f) F
- a) 5 b) 182 c) 151 d) 0

RESPOSTAS SELECIONADAS - SEQÜÊNCIA IX

- O maior número menor que a diferença entre o divisor e o resto, o novo será um. O próprio resto.
- a) 17 b) 28 c) 9 d) 36
- divisor = 7 e dividendo = 89
- 5 e 73
- 4 e 84
- 3 e 78
- 6 e 162
- 3 e 46
- 6 e 57
- 40 e 12
- a) 32 b) 156 c) 397 d) 17
- a) F b) V c) V d) F

CAPÍTULO VII

POTENCIAÇÃO

A. A OPERAÇÃO

A.1. PRELIMINARES

Consideremos uma multiplicação de vários fatores iguais, por exemplo:

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

De maneira análoga à adição de parcelas iguais:

$$4+4+4 = 12 \iff 3 \times 4 = 12$$

passamos a definir uma nova operação: potenciação.

Assim, a multiplicação anterior escrevemos também numa nova forma, mais prática:

$$4^3 = 64$$

portanto, temos as equivalências:

$$4^3 = 64 \iff 4 \times 4 \times 4 = 64$$

3 fatores

$$5^2 = 25 \iff 5 \times 5 = 25$$

$$1^4 = 1 \iff 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

A.2. DEFINIÇÃO

Dados dois números inteiros "a e b" (com $b > 1$), chamamos potência "b de a", o produto "c" de "b" fatores iguais "a".

Indicamos: $a^b = c$

A operação que ao par de inteiros (a;b) faz corresponder o inteiro "c", igual à sua potência é denominada potenciação.

Quando estamos operando para determinarmos a potência, diz-se que estamos potenciando.

Nota-se que para a potenciação não se usa um símbolo indicativo da operação; e, sim, uma disposição adequada dos termos, coloca-se o número indicativo do número de fatores à direita e pouco acima do fator repetitivo.

O "a" (fator repetitivo) é chamado base.

O "b" (número indicativo de fatores) é chamado grau ou expoente.

O "c" (resultado) é chamado potência.

É costume representar-se o expoente com algarismos um pouco menores que a base.

Na potência a^b lemos $\begin{cases} a \text{ elevado ao grau } b \\ a \text{ elevado a } b \\ a \text{ elevado ao expoente } b. \end{cases}$

Exemplos:

- a) $7^2 = 7 \times 7 = 49$
 7^2 lemos também 7 ao quadrado(*) ou 7 elevado à segunda potência
- b) $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$
 7^3 lemos também 7 ao cubo(**) ou elevado à terceira potência.

Da definição resulta a equivalência fundamental da potenciação:

$$a^b = c \iff a \times a \times a \times \dots \times a = c$$

b fatores

(*) Quando o expoente é 2, pode-se ler sempre ao quadrado; por razões da área.

(**) Quando o expoente é 3 pode-se ler sempre "ao cubo"; por razões de volume.

A.3. EXTENSÕES

Como não tem sentido multiplicação com um só fator, e também multiplicação sem fatores, os símbolos: a^1 e a^0 são desprovidos de sentido.

Entretanto, por razões que ainda justificaremos, estende-se a definição tomando:

$$\begin{array}{l} a^1 = a \\ a^0 = 1, \text{ com } a \neq 0 \end{array}$$

B. PROPRIEDADESB.1. PROPRIEDADE NÃO-COMUTATIVA

Em geral $a^b \neq b^a$

Basta fornecermos um contra-exemplo:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

entretanto, caso $a = b$, é válida a propriedade.

B.2. PROPRIEDADE NÃO-ASSOCIATIVA

Em geral $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$

Também aqui é fácil dar um contra-exemplo

$$(2^2)^3 = 4^3 = 64$$

$$\text{mas, } 2^{(2^3)} = 2^8 = 256$$

B.3. ELEMENTO NEUTRO

Pela extensão dada, a potenciação só possui elemento neutro à direita, que é o um,

Exemplo: $5^1 = 5$

B.4. PROPRIEDADE DISTRIBUTIVAa) Não-distributiva em relação à adição ou subtração.

Em geral $(a + b)^c \neq a^c + b^c$

Contra-exemplos:

$$(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$$

$$\text{mas } 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$(5 - 2)^2 = 3^2 = 9$$

$$\text{mas } 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$$

b) Distributiva pela direita em relação à multiplicação.

$$(a \times c)^b = a^b \times c^b$$

Exemplo: $(4 \times 3)^2 = 4^2 \times 3^2 = 16 \times 9 = 144$

Esta propriedade é verdadeira para multiplicação de vários fatores.

c) Não-distributiva pela esquerda em relação à multiplicação.

Em geral: $a^{b \times c} \neq a^b \times a^c$

Contra-exemplo: $3^{2 \times 3} = 3^6 = 729$

mas $3^2 \times 3^3 = 9 \times 27 = 243$

d) Distributiva pela direita em relação à divisão.

$$(a : c)^b = a^b : c^b$$

Exemplo: $(8 : 2)^3 = 8^3 : 2^3 = 512 : 8 = 64$

e $(8 : 2)^3 = 4^3 = 64$

e) Não-distributividade pela esquerda

$$a^{b:c} \neq a^b : a^c$$

Contra-exemplo: $2^6 : 2 = 2^3 = 8$
 mas $2^6 : 2^2 = 64 : 4 = 16$

B.5. OPERAÇÕES COM POTÊNCIAS DA MESMA BASE

1) Multiplicação

$$a^b \times a^c = a^{b+c}$$

REGRA: "O produto de potências da mesma base é igual à potência da base cujo expoente é a soma dos expoentes" (Lei dos Índices).

Exemplo: $3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$

2) Divisão:

$$a^b : a^c = a^{b-c}$$

com $b > c$

REGRA: "O quociente, de potências da mesma base, é igual à potência da base cujo expoente é a diferença dos expoentes".

Exemplo: $2^6 : 2^2 = 2^{6-2} = 2^4 = 16$

3) Potenciação

$$(a^b)^c = a^{b \times c}$$

REGRA: "Para se elevar uma potência a outra potência, multiplica-se os expoentes e conserva-se a base".

Exemplo: $(3^2)^3 = 3^{2 \times 3} = 3^6 = 729$

B.6. JUSTIFICATIVAS DAS EXTENSÕES

a) Consideremos o quociente:

$$a^b : a^b$$

pela definição de divisão $a^b : a^b = 1$, admitindo que a regra B.5.2 possa ser aplicada também neste caso teremos:

$$a^b : a^b = a^{b-b} = a^0$$

o que justifica a extensão $a^0 = 1$

b) Consideremos a potência a^b

e, multipliquemos por a , temos $a^b \times a$

pela definição de potência $a^b \times a = (a \times a \dots \times a) \times a$
 b fatores

$$\text{logo } a^b \times a = a \times a \dots \times a$$

$b+1$ fatores

$$\text{ou que } a^b \times a = a^{b+1}$$

Usando a regra de multiplicação de potência da mesma base, temos:

$$a^{b+1} = a^b \times a^1$$

de onde teríamos a igualdade

$$a^b \times a = a^b \times a^1$$

e, sendo $a^b \neq 0$, pela lei do corte, teremos: $a^1 = a$

C. EXERCÍCIOS - SEQUÊNCIA X

- Escreva as multiplicações na forma de potenciações:
 a) 3×3 b) $5 \times 5 \times 5$ c) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ d) $0 \times 0 \times 0$
- Calcule as potências transformando-as em multiplicações:
 a) 3^4 b) 4^3 c) 5^4 d) 1^8 e) 0^5 f) 2^5 g) 10^4
- Construa as seguintes tábuas:
 a) de quadrados b) de cubos c) de quartas potências
- Mostre que se a base é zero e o expoente é diferente de zero qualquer potência é zero.
- Mostre com exemplos numéricos esclarecedores que a potenciação:
 a) é não-comutativa, b) é não distributiva em relação à adição e à subtração, c) é distributiva pela direita em relação à multiplicação, d) não distributiva pela esquerda em relação à multiplicação, e) idem, para a divisão.
- Calcule usando as regras práticas:
 a) $2^3 \times 2^4$ b) $3^4 \times 3 \times 3^5$ c) $8^5 : 8^2$
 d) $9^6 \times (9^4 : 9)$ e) $(5^4 \times 5^6) : (5^2 \times 5)$ f) $(2^3)^4$
 g) $(2^2)^3 \times (2^4)^2$ h) $(3^2)^3 : (3^2)^2$
- Faça, os seguintes cálculos:
 a) $5^2 + 5^1 + 5^0$ b) $2^1 + 3^2 + 1^4 + 0^4$ c) $(6^3 \times 6^2)^3 : 6^{15}$

d) $(12 \times 2^5)^2 : 2^{18}$

e) $[5^2 + (3^2 \times 3)]^2$

8. Teste verdadeiro-falso:

- a) para se elevar a base 10 a um expoente natural, coloca-se a unidade seguida de tantos zeros quanto é o expoente ()
 b) A unidade elevada a 5 é igual a 5 ()
 c) Todo número elevado a zero é igual a zero ()
 d) O cubo de 9 é igual a 729 ()
 e) $(3^2)^4$ é igual a 3^{2^4} ()

9. Teste de múltipla escolha

- a) $5^6 : 5^3$ é igual a I: 5^2 , II: 125 III: 25 IV: 5^9
 b) 2^{3^2} é igual a: I: 2^6 , II: 2^{3^2} III: 2^9 IV: 6^2
 c) 0^4 é igual a: I: 4 II: 1 III: 0 IV: nenhuma é correta

10. Teste de completamento:

- a) $(6 \times 5)^3 = (... \times 5^3)$
 b) Em potências de 6 temos: $36 + 6 + 1 = 6^2 + 6^1 + ...$
 c) Em potências de 5 temos: $1 + ... + ... = 5^0 + 5^1 + 5^3$

11. Exercícios Teóricos (para um segundo estudo)

a) Prove que: $(a \times c)^b = a^b \times c^b$

SUGESTÃO: desenvolva $(a \times c)^b$ pela definição, use as propriedades associativa e comutativa (multiplicação) agrupando os fatores a e c . Use novamente a definição.

b) Prove que: $(a : c)^b = a^b : c^b$

SUGESTÃO: use a equivalência fundamental da divisão, obtendo: $a = (a : c) \times c$, eleve à potência b e use o exercício anterior, e novamente use a equivalência fundamental da divisão.

c) Prove que: $a^b \times a^c = a^{b+c}$

SUGESTÃO: Aplique a definição e observe que se tem uma multiplicação com $b+c$ fatores iguais.

d) Prove que: $a^b : a^c = a^{b-c}$

SUGESTÃO: Pelo exercício anterior $a^b = a^{b-c} \times a^c$, aplique a equivalência fundamental da divisão.

e) Prove que: $(a^b)^c = a^{b \times c}$

SUGESTÃO: Aplique a definição em $(a^b)^c$ e depois o exercício 11c, e depois a definição de multiplicação.

RESPOSTAS SELECIONADAS - SEQUÊNCIA

- | | | | |
|--------------|-------------|-------------|----------------------|
| 1. a) 3^2 | b) 5^3 | c) 4^5 | d) 0^3 |
| 6. a) 2^7 | b) 3^{10} | c) 8^3 | d) 9^9 |
| | e) 5^7 | f) 2^{12} | g) 2^{14} h) 3^2 |
| 7. a) 31 | b) 12 | c) 1 | d) 64 e) 2704 |
| 8. a) V | b) F | c) F | d) V e) F |
| 9. a) II | b) III | c) III | |
| 10. a) 6^3 | b) 6^0 | c) 5 e 125 | |

CAPÍTULO VIII

RADICIAÇÃO

A. A OPERAÇÃO

Consideremos a potenciação $3^2 = 9$, pode acontecer de termos um problema em que possuímos o expoente e a potência e estamos interessados em obtermos a base. Estamos num caso de operação inversa da potenciação.

Essa operação denominamos de radiciação e indicamos: $3 = \sqrt[2]{9}$, e lemos 3 é a raiz de índice 2 do número 9.

De uma maneira geral, dados dois números a e n , onde a é uma potência de algum número natural de grau n , definimos:

Raiz de índice n de um número a , é um número b , tal que a potência de b de grau n é o número a .

A operação que ao par $(a;n)$, verificadas as condições de potência, faz corresponder a raiz, é a radiciação.

Quando se procura a raiz, dizemos que esta nos extraiu a raiz ou radiciando.

Existe, portanto, a equivalência fundamental da radiciação com a potenciação:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

NOTA: A potenciação possui outra operação inversa, que é aquela da busca do expoente, chama-se logaritmização, mais complicada.

Exemplos:

$$\sqrt[3]{16} = 4 \text{ porque } 4^2 = 16$$

$$\sqrt[2]{49} = 7 \text{ porque } 7^2 = 49$$

$$\sqrt[3]{27} = 3 \text{ porque } 3^3 = 27$$

$$\sqrt[4]{10000} = 10 \text{ porque } 10^4 = 10000$$

B. ELEMENTOS

Em $\sqrt[n]{a} = b$ temos:

b = raiz, que é o resultado.

a = radicando, ou sub-radical, é o número do qual vamos extrair a raiz.

n = índice da raiz.

$\sqrt{}$ = sinal da raiz ou radical.

A raiz conforme o índice recebe denominações especiais: $n = 1$, raiz idêntica; $n = 2$, raiz quadrada; $n = 3$, raiz cúbica; $n = 4$, raiz quarta ou biquadrada, etc.

No caso da raiz quadrada é dispensável o índice:

$$\sqrt[2]{9} \text{ escreveremos } \sqrt{9}.$$

C. RAÍZES QUADRADAS E CÚBICAS PRINCIPAIS

É interessante conhecer-se algumas raízes quadradas e cúbicas, as quadradas dos números menores que 100 e as cúbicas dos menores que 1000. Tal conhecimento corresponde em verdade em saber os quadrados e os cubos dos números de 1 a 10.

nº	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Raiz quadrada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

nº	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
Raiz cúbica	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

D. RADICIAÇÃO GERAL

Como para a divisão, temos também a radiciação geral, quando se permite extrair a raiz de índice n de um número, mesmo que ele não seja uma potência de grau n de um outro número.

Consideremos o nº 27, como:

$$25 < 27 < 36 \\ \Leftrightarrow 5^2 < 27 < 6^2$$

dizemos que a raiz quadrada de 27 é 5, aproximada por falta, ou 6 aproximada por excesso.

Como $16 < 27$ ou $4^2 < 27$

poderíamos também dizer que 4 é a raiz quadrada de 27, mas não tão próxima como 5, por isso definimos: raiz geral:

DEFINIÇÃO: Dados números a e n (não nulo) dizemos que b é a raiz de índice n de a caso b é o maior inteiro tal que $b^n \leq a$

Indicamos: $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$
 $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n < a$

Sendo $b^n \leq a$, podemos escrever $r = a - b^n$, denominando resto, e teremos:

$$a = b^n + r$$

isto é, numa radiciação geral o radicando é igual à potência n da raiz mais o resto.

Exemplo: $\sqrt{27} = 5$ e $27 = 5^2 + 2$

Quando $r \neq 0$ a raiz é inexata ou aproximada, e quando $r = 0$, a raiz é exata.

NOTA: Em outro capítulo aprenderemos a extrair a raiz quadrada de números maiores que 100, e depois que estudarmos a decomposição de um número em fatores primos, teremos mais um recurso auxiliar para raízes quadradas, cúbicas e outras.

E. EXERCÍCIOS - SEQÜÊNCIA XI

- Quais são as operações inversas da potenciação?
- Escreva em notação de radiciação as potenciações:
 - $3^2 = 9$
 - $5^3 = 125$
 - $8^3 = 512$
 - $10^4 = 10\,000$
 - $9^1 = 9$
 - $6^4 = 1\,296$
- Porque temos:
 - $\sqrt{36} = 6?$
 - $\sqrt{81} = 9?$
 - $\sqrt[3]{1\,000} = 10?$
 - $\sqrt[4]{256} = 4?$
 - $\sqrt[4]{2\,401} = 7?$
 - $\sqrt{1} = 1?$
- Construa uma tabela de raízes quadradas de números entre 100 e 400.
- Construa uma tabela de raízes cúbicas de números entre 1\,000 e 8\,000.
- Calcule:
 - $(\sqrt{16})^2$
 - $(\sqrt{9})^2$
 - $(\sqrt{36})^2$
 - $(\sqrt{1})^2$
- Calcule as raízes gerais e os respectivos restos de:
 - $\sqrt{54}$
 - $\sqrt{88}$
 - $\sqrt{200}$
 - $\sqrt{169}$
 - $\sqrt[3]{10}$
 - $\sqrt[3]{68}$
 - $\sqrt[3]{729}$
 - $\sqrt[4]{17}$
- Calcule as raízes de:
 - $\sqrt{16 \times 9}$
 - $\sqrt{36 \times 49}$
 - $\sqrt{100 \times 81}$
 - $\sqrt[4]{3^4 \times 2^4}$
 - $\sqrt[5]{5^5 \times 2^6}$
 - $\sqrt[3]{2^6 \times 3^9}$

RESPOSTAS SELECIONADAS - SEQÜÊNCIA XI

- a) 7 e 5 b) 9 e 7
- a) $\sqrt{144} = 12$ ou $\sqrt{16} \times \sqrt{9} = 4 \times 3 = 12$
 b) 42 c) 90 d) $3^2 \times 2^2 = 9 \times 4 = 36$
 e) $5^4 \times 2^3 = 5\,000$ f) $2^2 \times 3^3 = 108$

CAPÍTULO IX

CÁLCULO PRÁTICO DAS OPERAÇÕES

A OUTRA FORMA DOS NÚMEROS

O princípio fundamental do Sistema de Numeração Decimal permite escrever os números de uma maneira compacta, assim, o número oitocentos e trinta e quatro, nós o escrevemos simplesmente 834. Vimos para isto, que na representação de um número, cada algarismo possui dois valores: absoluto e relativo. O valor relativo, que é o de posição, é que vamos realçar, para firmarmos melhor os nossos conhecimentos sobre a numeração escrita. Poderemos deste modo obter as regras operacionais.

Retomemos o número 834, temos:
valor de posição do 8 = 800
valor de posição do 3 = 30
valor de posição do 4 = 4

então, temos: $834 = 800 + 30 + 4$

ou: $834 = 8 \times 100 + 3 \times 10 + 4$
 $834 = 8 \times 10^2 + 3 \times 10 + 4$

onde o leitor observa claramente que o sistema de numeração utilizado é um sistema posicional multiplicativo e aditivo por justaposição a direita.

Exemplos: a) $759 = 700 + 50 + 9$
 $= 7 \times 100 + 5 \times 10 + 9$
 $= 7 \times 10^2 + 5 \times 10 + 9$
b) $8326 = 8000 + 300 + 20 + 6$
 $= 8 \times 1000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 6$
 $= 8 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 6$
c) $25042 = 20000 + 5000 + 40 + 2$
 $= 2 \times 10000 + 5 \times 1000 + 0 \times 100 + 4 \times 10 + 2$
 $= 2 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10 + 2$

$$\begin{aligned} \text{d) } 2007 &= 2000 + 7 \\ &= 2 \times 1000 + 0 \times 100 + 0 \times 10 + 7 \\ &= 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10 + 7 \end{aligned}$$

indicando para facilidade, a base 10 do sistema com y^* teremos por exemplo:

$$759 = 7 \times y^2 + 5 \times y + 9$$

ou, simplesmente, suprimindo o sinal de multiplicação:

$$759 = 7y^2 + 5y + 9$$

De maneira geral o número abcd constituído dos algarismos a, b, c, d, nessa ordem, seria escrito na nova forma:

$$abcd = a y^3 + b y^2 + c y + d$$

Exemplos: 1) $ab = a y + b$

$$2) abc = a y^2 + b y + c$$

$$3) abcd = a y^3 + b y^2 + c y + d$$

Muitas vezes prefere-se utilizar para explicações, algarismos indicativos das próprias ordens que representam, assim, para as centenas, teremos:

$$cdu = c \times 10^2 + d \times 10 + u$$

B. ADIÇÃO

Sejam os números N e N' que se pretenda adicionar:

$$\begin{aligned} N &= abcd \\ N' &= a'b'c'd' \end{aligned}$$

escritos na nova forma teremos:

$$N = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$$

$$N' = a' \times 10^3 + b' \times 10^2 + c' \times 10 + d'$$

Adicionando:

$$N+N' = (ax10^3+bx10^2+cx10+d)+(a'x10^3+b'x10^2+c'x10+d')$$

(*) O leitor deverá observar que esta forma é válida para qualquer base y.

Aplicando a propriedade comutativa e associativa várias vezes, conseguiremos reunir as parcelas do seguinte modo:

$$N+N' = (ax10^3 + a'x10^3) + (bx10^2 + b'x10^2) + (cx10 + c'x10) + (d+d')$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição podemos escrever:

$$N+N' = (a+a')x10^3 + (b+b')x10^2 + (c+c')x10 + (d+d')$$

De onde se conclui que devemos adicionar separadamente:

os algarismos das unidades: $d + d'$
 os algarismos das dezenas: $c + c'$
 os algarismos das centenas: $b + b'$
 os algarismos das unidades de milhar: $a + a'$, etc.

para obtermos, respectivamente: o algarismo das unidades, o das dezenas (coeficiente de dez), o das centenas (coeficiente de dez ao quadrado), o das unidades de milhar (coeficiente de dez ao cubo).

Entretanto, pode acontecer que em alguma destas adições parciais, a soma supere ou iguale a base (no caso base 10).

Seja por exemplo:

$$b + b' = 10 + m \quad (m \text{ pode ser } 0)$$

Teremos:

$$N+N' = (a+a')x10^3 + (10+m)x10^2 + (c+c')x10 + (d+d')$$

ou pela distributividade e pela regra de multiplicação de potências da mesma base:

$$N+N' = (a+a')x10^3 + 10^3 + mx10^2 + (c+c')x10 + (d+d')$$

ou, ainda pela distributividade, considerando $10^3 = 1x10^3$

$$N+N' = (a+a'+1)x10^3 + mx10^2 + (c+c')x10 + (d+d')$$

de onde tiramos as regras operacionais:

REGRA I

Para se adicionar dois números, adiciona-se os valores dos algarismos de uma ordem para se obter o algarismo da mesma ordem da soma.

REGRA II

Caso a soma dos valores dos algarismos, de uma ordem iguale ou supere a base, do valor do algarismo "m", transporta-se uma unidade para ser adicionada aos valores dos algarismos da ordem imediatamente superior, e toma-se "m" para algarismo da ordem.

Exemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } 358 + 236 &= (3+2)x10^2 + (5+3)x10 + (8+6) \\ &\text{como } 8 + 6 = 14 = 10 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 358 + 236 &= (3+2)x10^2 + (5+3+1)x10 + 4 \\ &= 5x10^2 + 9x10 + 4 \\ &= 594 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 270 + 432 &= (2+4)x10^2 + (7+3)x10 + 2 \\ &\text{como } 7 + 3 = 10 = 10 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 270 + 432 &= (2+4+1)x10^2 + 0x10 + 2 \\ &= 7x10^2 + 0x10 + 2 \\ &= 702 \end{aligned}$$

Na prática colocam-se os números de tal forma que os algarismos de mesma ordem (e da mesma classe) fiquem na mesma coluna, e a unidade transportada pode ser escrita ao alto, em cima dos algarismos da ordem superior imediata.

Exemplos: a) $358 + 236$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 358 \\ + 236 \\ \hline 594 \end{array}$$

b) $3270 + 2432$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3270 \\ + 2432 \\ \hline 5702 \end{array}$$

ADIÇÕES DE VÁRIAS PARCELAS:

Para adicionar várias parcelas, o procedimento é o mesmo. No lugar de se aplicar a propriedade associativa aos números, aplica-se para os valores dos algarismos de mesma ordem, portanto, adiciona-se toda a coluna de cada ordem, o transporte pode dar, agora de mais de uma unidade (ver segundo exemplo).

		12
<u>Exemplos:</u>	123	53
	245	38
	<u>136</u>	426
	504	<u>347</u>
		864

PROVA DE CÁLCULO

Para efeito de verificação da adição, é costume utilizar-se:

- Propriedade comutativa: troca-se as parcelas e efetua-se o cálculo novamente.
- Propriedade associativa: no caso de adição de várias parcelas, pode-se aplicar esta propriedade como prova de cálculo, assim, adiciona-se as parcelas reunindo-as de maneiras diferentes.
- Prova dos nove: será aprendida quando cuidarmos da divisibilidade aritmética, em capítulos posteriores.
- Prova de Cauchy: baseia-se na seguinte propriedade:

"A soma de todos os valores dos algarismos das parcelas e dos algarismos transportados é igual a soma dos valores dos algarismos da soma, mais o produto por 10 da soma dos valores dos algarismos transportados".

<u>Exemplo:</u>	12	1 + 2	= 3
	235	--- 2 + 3 + 5	= 10
	358	--- 3 + 5 + 8	= 16
	<u>169</u>	--- 1 + 6 + 9	= 16
	762		<u>45</u>

mas: $7 + 6 + 2 = 15$

$15 + 3 \times 10 = 45$ (também), logo o cálculo está certo.

O leitor deve fazer os cálculos mentalmente, e não como fizemos, separando as somas, vai-se adicionando todos os valores dos algarismos:

$1 + 2 + 2 + 3 + 5 + 3 + 5 + 8 + 1 + 6 + 9 = 45$, etc.

C. SUBTRAÇÃO

Dados os números: $N = abcd$
 $N' = a'b'c'd'$

seja a diferença: $N'' = N - N' = a''b''c''d''$

Pela equivalência fundamental da subtração devemos ter:

$$N = N'' + N'$$

ou que:

$$ax10^3 + bx10^2 + cx10 + d = (a''x10^3 + b''x10^2 + c''x10 + d'') + (a'x10^3 + b'x10^2 + c'x10 + d')$$

e, aplicando a Regra Prática de Adição:

$$ax10^3 + bx10^2 + cx10 + d = (a'' + a')x10^3 + (b'' + b')x10^2 + (c'' + c')x10 + (d'' + d')$$

Caso as somas parciais não ultrapassem (ou não igualem) a base, devemos ter evidentemente:

$a = a'' + a'$	que indicam ser:	$a \geq a'$
$b = b'' + b'$		$b \geq b'$
$c = c'' + c'$		$c \geq c'$
$d = d'' + d'$		$d \geq d'$

e, novamente, pela equivalência fundamental da subtração, temos:

$$\begin{aligned} a - a' &= a'' \\ b - b' &= b'' \\ c - c' &= c'' \\ d - d' &= d'' \end{aligned}$$

expressões que nos indicam a seguinte regra operacional:

REGRA I

Quando o valor do algarismo do diminuendo, de dada ordem, é maior ou igual ao valor do algarismo do diminuidor de ordem correspondente, subtrai-se os valores dos algarismos para se obter o algarismo de mesma ordem da diferença.

Caso alguma soma parcial, ultrapasse (ou iguale) a base não é possível identificar com o algarismo da

mesma ordem como fizemos anteriormente, pois, o seu valor é inferior a dez.

Seja para exemplo o caso da soma dos valores dos algarismos das dezenas ultrapassando a base 10 em "m" unidades:

$$c' + c'' = 10 + m \text{ aplicando a Regra II da adição:}$$

$$ax10^3 + bx10^2 + cx10 + d = (a' + a'')x10^3 + (b' + b'' + 1)x10^2 + ax10 + (d' + d'')$$

Agora, podemos identificar os valores dos algarismos:

$$\begin{aligned} a &= a' + a'' \\ b &= b' + b'' + 1 \\ c &= m \text{ ou } c' + c'' = 10 + m \\ d &= d' + d'' \end{aligned}$$

De $c' + c'' = 10 + m$, obtemos: $c' + c'' = 10 + c$ (que indica ser $c < c'$) e, pela equivalência fundamental da subtração:

$$c' + c'' = 10 + c \iff c'' = (10 + c) - c'$$

igualdade que nos indica a regra operacional:

REGRA II

Quando o valor do algarismo do diminuendo, de dada ordem, é menor que o valor do algarismo do diminuidor da ordem correspondente, adiciona-se dez unidades ao diminuendo para efetuar a subtração.

A igualdade:

$$b = (b' + b'') + 1 = (b' + 1) + b''$$

fornece também pela equivalência:

$$b = (b' + b'') + 1 \quad b - 1 = b' + b''$$

$$e, \quad b - 1 = b' + b'' \quad (b - 1) - b'' = b'$$

$$ou, \quad b = (b' + 1) + b'' \quad b - (b' + 1) = b''$$

Igualdades que fornecem as regras (alternativas) complementares à REGRA II:

REGRA COMPLEMENTAR

Subtraímos uma unidade ao valor do algarismo do diminuendo na ordem imediatamente superior.

ou alternativamente:

Adiciona-se uma unidade ao valor do algarismo do diminuidor na ordem imediatamente superior.

Na prática procede-se como na adição, escrevendo os algarismos de mesma ordem (e de mesma classe) em coluna, e utilizam-se as regras anteriores mentalmente.

Exemplos:

$$a) \quad \begin{array}{r} 358 \\ - 215 \\ \hline 143 \end{array}$$

$$b) \quad \begin{array}{r} 2627 \\ - 1374 \\ \hline 1253 \end{array}$$

Neste segundo exemplo usamos:

para as dezenas: 12 no lugar de 2 (10+2), para poder subtrair o 7

para as centenas: 5 no lugar de 6 (6-1)
ou: 4 no lugar de 3 (3+1)

PROVA:

É geralmente usada a "prova real", que nada mais é que utilizar a definição (equivalência fundamental da subtração):

A soma do diminuidor com a diferença é igual ao diminuendo.

$$\text{Exemplo: } \begin{array}{r} 283 \\ - 136 \\ \hline 147 \end{array} \quad \text{prova: } \begin{array}{r} 136 \\ + 147 \\ \hline 283 \end{array}$$

D. MULTIPLICAÇÃO

D.1. CASO I:

Sejam os números N e N' que se pretende multiplicar:

$$\begin{aligned} N &= abcd \\ N' &= u \quad (\text{de um só algarismo}) \end{aligned}$$

Pela definição de multiplicação devemos tomar:

$$N \times N' = \underbrace{N + N + N + \dots + N}_{N' \text{ parcelas}}$$

$$\text{ou} = \underbrace{N + N + N + \dots + N}_u \text{ parcelas}$$

Entretanto, para adicionar, já vimos que se deve adicionar os valores dos algarismos de cada ordem, para se obter o algarismo da mesma ordem da soma, logo:

$$N \times N' = (a+a+\dots+a)x10^3 + (b+b+\dots+b)x10^2 + (c+c+\dots+c)x10 + (d+d+\dots+d)$$

$$\text{como} \quad \begin{cases} d + c + \dots + d = d \times u \\ c + c + \dots + c = c \times u \\ b + b + \dots + b = b \times u \\ a + a + \dots + a = a \times u \end{cases}$$

$$\text{temos: } N \times N' = (axu)x10^3 + (bxu)x10^2 + (cxu)x10 + (dxu)$$

resultado ao qual podemos chegar de outra maneira:

$$N \times N' = (ax10^3 + bx10^2 + cx10 + d) \times u$$

$$N \times N' = (ax10^3) \times u + (bx10^2) \times u + (cx10) \times u + dxu \text{ (pela Prop. distributiva)}$$

$$N \times N' = (ax(10^3 \times u) + bx(10^2 \times u) + cx(10 \times u) + dxu) \text{ (pela Prop. associativa)}$$

$$N \times N' = ax(ux10^3) + bx(ux10^2) + cx(ux10) + dxu \text{ (pela Prop. comutativa)}$$

$$N \times N' = (axu)x10^3 + (bxu)x10^2 + (cxu)x10 + dxu \text{ (pela Prop. associativa)}$$

de onde concluímos a regra operacional seguinte:

REGRA I:

Para se multiplicar um número de vários algarismos por um número de um só algarismo, multiplica-se o valor de cada algarismo para se obter o valor do algarismo da mesma ordem do produto.

Exemplo: 132×3

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times 3 \\ \hline 396 \end{array}$$

É claro que quando se faz um produto parcial, ele pode ultrapassar uma dezena, o procedimento é o mesmo da adição como veremos:

$$\text{Seja: } c \times u = n \times 10 + m$$

Substituindo:

$$N \times N' = (axu)x10^3 + (bxu)x10^2 + (nx10+m)x10 + (dxu)$$

pela propriedade distributiva podemos escrever:

$$N \times N' = (axu)x10^3 + (bxu)x10^2 + (nx10)x10 + mx10 + (dxu)$$

e, pela propriedade associativa e pela definição de potenciação:

$$N \times N' = (axu)x10^3 + (bxu)x10^2 + nx10^2 + mx10 + (dxu)$$

e, novamente pela propriedade distributiva:

$$N \times N' = (axu)x10^3 + (bxu+n)x10^2 + mx10 + (dxu)$$

de onde concluímos a regra operacional:

REGRA II

Quando se multiplica o valor de um algarismo de dada ordem pelo valor de um algarismo e resultar um número de dois algarismos, escreve-se o algarismo das unidades para aquela ordem, e transporta-se o valor do algarismo das dezenas para a ordem imediatamente superior.

Exemplo numérico: 283×3

$$\begin{aligned} 283 \times 3 &= (2 \times 3) \times 10^2 + (8 \times 3) \times 10 + (3 \times 3) \\ &= 6 \times 10^2 + 24 \times 10 + 9 \\ &= 6 \times 10^2 + (2 \times 10 + 4) \times 10 + 9 \\ &= 6 \times 10^2 + 2 \times 10^2 + 4 \times 10 + 9 \\ &= (6 + 2) \times 10^2 + 4 \times 10 + 9 \\ &= 8 \times 10^2 + 4 \times 10 + 9 = 849 \end{aligned}$$

ou, de modo prático:

$$\begin{array}{r} 283 \\ \times 3 \\ \hline 849 \end{array}$$

D.2. CASO II

Sejam N e N' dois números quaisquer, que para facilidade de explicações usaremos ambos com 4 algarismos:

$$\begin{aligned} N &= abcd \\ N' &= a'b'c'd' \end{aligned}$$

Temos: $N \times N' = N \times (a'x10^3 + b'x10^2 + c'x10 + d')$

pela propriedade distributiva (à esquerda):

$$N \times N' = Nx(a'x10^3) + Nx(b'x10^2) + Nx(c'x10) + Nxd'$$

e, pela propriedade associativa:

$$N \times N' = (Nxa')x10^3 + (Nxb')x10^2 + (Nxc')x10 + (Nxd')$$

onde Nxa', Nxb' e Nxd' são produtos do número N por números de um só algarismo, logo, podemos aplicar em cada caso a regra anterior como indica a regra operacional seguinte:

REGRA III

Para multiplicar números quaisquer, multiplica-se o valor de cada algarismo do segundo fator, da direita para a esquerda, pelo primeiro número, acrescentando-se a partir do segundo produto, um zero, dois zeros, três zeros, etc., e adiciona-se os produtos parciais.

Exemplo: 325×246

$$\begin{aligned} 325 \times 246 &= (325 \times 2) \times 10^2 + (325 \times 4) \times 10 + 325 \times 6 \\ &= 650 \times 10^2 + 1\,300 \times 10 + 1\,950 \\ &= 65\,000 + 13\,000 + 1\,950 \\ &= 79\,950 \end{aligned}$$

ou de modo prático:

$$\begin{array}{r} 325 \\ \times 246 \\ \hline 1\,950 \\ 13\,000 \text{ (x 10)} \\ 65\,000 \text{ (x 100)} \\ \hline 79\,950 \end{array}$$

Costuma-se suprimir os zeros das multiplicações por 10, por 100, etc, simplesmente deslocando os produtos parciais de: um algarismo, dois algarismos, etc., para a esquerda, ou, cada vez um algarismo (ou espaço) para a esquerda.

$$\begin{array}{r} 325 \\ \times 246 \\ \hline 1\,950 \\ 13\,00 \\ 65\,0 \\ \hline 79\,950 \end{array}$$

No caso de algum algarismo ser o 0, é claro que a regra ainda é válida e aplicável, entretanto na prática passa-se ao produto parcial com o algarismo seguinte deslocando-se mais um algarismo (ou espaço) para a esquerda.

Exemplos: a) 348×205

$$\begin{array}{r} 348 \\ \times 205 \\ \hline 1\,740 \\ 69\,6 \text{ -- (dois espaços)} \\ \hline 71\,340 \end{array}$$

b) $1\,593 \times 3\,008$

$$\begin{array}{r} 1\,593 \\ \times 3\,008 \\ \hline 12\,744 \\ 4\,779 \text{ --- (três espaços)} \\ \hline 4\,791\,744 \end{array}$$

PROVA: Utiliza-se a propriedade comutativa (ou a prova dos nove):

$$348 \times 205 = 205 \times 348$$

$$\begin{array}{r} 205 \\ \times 348 \\ \hline 1\,640 \\ 8\,20 \\ 61\,5 \\ \hline 71\,340 \end{array}$$

E. DIVISÃOE.1. CASO I

O dividendo possui o mesmo número de algarismos que o divisor, ou somente um a mais, mas, tal que, multiplicando o divisor por 10 supere o dividendo.

Exemplos: a) Dividendo $D = 834$
 Divisor $d = 325$
 b) Dividendo $D = 3\ 356$
 Divisor $d = 863$ ($8\ 630 > 3\ 356$)

Neste caso o quociente, q , é um número de um só algarismo, pois em caso contrário, se $q \geq 10$, teríamos: $d \times q \geq d \times 10 > D$

O valor deste algarismo " q " multiplicado pelo divisor " d " deve ser inferior ou igual ao dividendo D .

Aprendemos que para multiplicar um número por um outro de um só algarismo multiplica-se o valor de cada algarismo para se obter o valor do algarismo de mesma ordem do produto, portanto:

a) mesmo número de algarismos:

multiplicando-se o valor do algarismo de maior ordem do divisor (primeiro algarismo da esquerda) devemos obter um valor inferior ou igual ao valor do algarismo também de maior ordem do dividendo.

b) o dividendo possui um algarismo a mais:

o produto do quociente pelo valor do algarismo de maior ordem do divisor deve ser inferior ou igual ao número constituído pelos dois primeiros algarismos do dividendo.

Entretanto, no cálculo do produto, pode acontecer de haver transporte de unidades da ordem anterior que adiciona-se ao último produto, e, portanto pode su-

perar, (como é o segundo exemplo), disto resulta a regra para determinação de uma cota superior para o valor do algarismo do quociente:

REGRA DA COTA:

Dividindo-se o número constituído pelo primeiro algarismo do dividendo (ou pelos dois primeiros algarismos se o dividendo possui um a mais que o divisor) pelo número constituído pelo primeiro algarismo do divisor, obtém-se uma cota superior do algarismo do quociente.

REGRA DO TENTEIO:

Na prática, utiliza-se a regra da cota e tenteio:

"Determinada a cota, experimenta-se multiplicando-se a cota pelo divisor, se o produto é igual ou inferior ao dividendo, a cota é o próprio quociente, se o produto é superior abaixa-se uma unidade e multiplica-se novamente, e, assim sucessivamente."

Exemplos: a) $834 : 325$
 cota : 8 por 3 é 2, experimentemos

$$\begin{array}{r} 325 \\ \times 2 \\ \hline 650 < 834 \end{array}$$

logo o quociente é 2 e o resto é dado por:

$$\begin{array}{r} 834 \\ \underline{650} \\ 184 \end{array}$$

b) $3\ 356 : 863$
 cota : 33 por 8 é 4, experimentemos;

$$\begin{array}{r} 863 \\ \times 4 \\ \hline 3\ 452 > 3\ 356 \end{array}$$

Reduzimos 4 para 3, experimentemos; 863

$$\begin{array}{r} \times 3 \\ 2\ 589 < 3\ 356 \end{array}$$

logo, o quociente é 3 e o resto é dado por:

$$\begin{array}{r} 3\ 356 \\ - 2\ 589 \\ \hline 767 \end{array}$$

Na prática utiliza-se o dispositivo denominado: "Divisão com Chave", onde já se efetua a subtração (*) e, quando se efetua uma redução apaga-se os cálculos anteriores:

a) $834 \overline{) 325}$
 $184\ 2$

b) $3\ 356 \overline{) 1863}$
 $767\ 3$

E.2. CASO II

O dividendo possui mais algarismos que o divisor

Primeiramente mostraremos a seguinte propriedade de que nos vai ser bastante útil:

PROPRIEDADE:

Dada uma Divisão Geral de dividendo D, divisor d, quociente q, e resto r:

Adicionando-se um inteiro "m" ao dividendo, o quociente fica aumentado do quociente "q'" da divisão de (r+m) por "d", e, o novo resto r' é igual ao resto desta divisão.

Dispositivos: $D \overline{) d}$ $r + m \overline{) d}$
 $r\ q$ $r'\ q'$

(*) Na parte metodológica (vol II) tratar-se-á novamente desta questão com o cuidado que a operação requer

De fato: Temos $D = d \times q + r$ (com $r < d$)
 $r + m = d \times q' + r$ (com $r' < d$)

O novo dividendo é D + m, substituindo o valor de D anterior:

$$D + m = d \times q + d \times q' + r' \quad (\text{com } r' < d)$$

ou, pela propriedade distributiva:

$$D + m = d \times (q + q') + r' \quad (\text{com } r' < d)$$

que prova a propriedade.

Exemplo: $34 \overline{) 4}$
 $2\ 8$

logo: $34 + 9 = 43$, terá o quociente 8 aumentado do quociente 2 de $2+9 = 11$ por 4: $11 \overline{) 4}$
 $3\ 2$

isto é, o quociente de 43 por 4 é $8 + 2 = 10$ e o resto 3 é o mesmo desta divisão anterior.

Consideremos agora um dividendo qualquer N, por exemplo de 6 algarismos:

$$N = abcdef$$

e, o divisor d.

Admitamos que precisamos separar os quatro primeiros algarismos (abcd) para obtermos um número D maior que d, portanto d deverá ter também 4 algarismos (ou 3).

Exemplo: $N = 342\ 845$ o número D será $3\ 428$
 $d = 546$

Pela Regra da Cota do caso I, podemos determinar o quociente q (6 no caso) de D por d e o resto r (152 no caso).

ESQUEMA: $D \overline{) d}$ ou $3\ 428 \overline{) 546}$
 $r\ q$ $152\ 6$

COTA: 34 por 5 é 6.

Mostremos agora, que acrescentando-se à direita do número D o algarismo seguinte "e" de N ($e = 4$ no exemplo), o quociente anterior ficará acrescido também à direita de um só algarismo x , que pode ser obtido dividindo-se o resto "r" anterior (152) acrescido à direita do mesmo algarismo "e", e, que o resto r' é o resto desta divisão.

$$\text{ESQUEMAS: } \begin{array}{r} \bar{D} \text{ e } \underline{d} \\ r' \text{ } qx \end{array} \quad \begin{array}{r} r \text{ e } \underline{d} \\ r' \text{ } x \end{array}$$

De fato: $\bar{D} e = abcde$

logo: $\bar{D} e = D \times 10 + e$

mas como $D = d \times q + r$ teremos substituindo:

$$\bar{D} e = (d \times q + r) \times 10 + e$$

ou $\bar{D} e = d \times q \times 10 + r \times 10 + e$

ou $\bar{D} e = d \times q \times 10 + \bar{r} e$

$$\begin{aligned} \text{No exemplo: } 34\ 284 &= 3\ 428 \times 10 + 4 \\ &= 546 \times 6 + 152 \times 10 + 4 \\ &= 546 \times 6 \times 10 + 152 \times 10 + 4 \\ &= 546 \times 6 \times 10 + 1\ 524 \end{aligned}$$

A igualdade anterior nos mostra que o número $\bar{D} e$ é igual ao número $d \times (q \times 10)$ aumentado do número $\bar{r} e$; portanto, pela propriedade, anteriormente explicada, o quociente de $\bar{D} e$ por d é igual à soma do quociente de $d \times (q \times 10)$ com o quociente de $\bar{r} e$ adicionado com o resto anterior.

Vejamos cada dividendo:

1º $d \times (q \times 10)$ é múltiplo de d , logo o resto é 0 e o quociente é $q \times 10$

2º $\bar{r} e + 0 = \bar{r} e$

mas, $r e = r \times 10 + e \leq r \times 10 + 10 = (r+1) \times 10$ e, como $r < d$ será $(r+1) = d$, ou $(r+1) \times 10 \leq d \times 10$ que indica ser: $\bar{r} e < d \times 10$

Isto é, dividindo-se $\bar{r} e$ por d obtém-se um só algarismo x (CASO I) e um resto r' .

$$\text{ESQUEMA: } \begin{array}{r} \bar{r} \text{ e } \underline{d} \\ r' \text{ } x \end{array}$$

Pela propriedade o quociente será: $q' = qx10 + x$
ou: $q' = qx$

$$\text{No exemplo: } \begin{array}{r} 1\ 524 \quad \underline{546} \\ 432 \quad 2 \end{array}$$

COTA: 15 por 5 é 3, passa, reduzimos para 2.

Portanto o quociente de 34 284 por 546 é 62 e o resto é o número 432.

Aplicamos novamente o raciocínio utilizando o próximo algarismo da direita $f = 5$ de N :

$$\begin{array}{r} 4\ 325 \quad \underline{546} \quad \text{COTA: } 43 \text{ por } 5 \text{ é } 8, \text{ passa, redu-} \\ 503 \quad 7 \quad \text{zimos para } 7. \end{array}$$

Portanto o quociente de 342 845 por 546 é 627 e o resto é o número 503.

Do raciocínio empregado segue o algarismo prático seguinte:

E.3. ALGORITMO DA DIVISÃO:

1. Separa-se no dividendo, da esquerda para a direita, os algarismos necessários para superar ou igualar o divisor, obtendo-se o 1º dividendo parcial.
2. Determina-se pela Regra da Cota e Tenteio o primeiro algarismo do quociente.
3. Multiplica-se o valor do algarismo pelo divisor e subtrai-se do dividendo parcial.
4. Acrescenta-se à direita do resto parcial o próximo algarismo do dividendo depois do último dividendo parcial, obtendo-se novo dividendo parcial.
5. Pela Regra da Cota e Tenteio obtém-se o próximo algarismo do quociente.

6. Repete-se as fases 3, 4 e 5 sucessivamente,

7. O último resto parcial é o resto da divisão,

8. Na aplicação da Regra da Cota e Tenteio pode se dar o caso de um dividendo parcial ser inferior ao divisor, então, o algarismo do quociente será 0, e, passa-se à fase 4 acrescentando-se o próximo algarismo à direita do último dividendo.

Na prática fazemos todos os cálculos numa só divisão com chave:

Exemplos: a)
$$\begin{array}{r} \overline{342} \overline{845} \overline{546} \\ 15 \ 24 \ 627 = \text{quociente} \\ \underline{4 \ 325} \\ \text{resto} = 503 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \overline{373} \overline{936} \overline{42} \\ 37 \ 9 \ 8 \ 903 \\ \underline{136} \\ \text{resto} = 10 \end{array}$$

E.4. PROVA:

Utiliza-se como contrôles de cálculo a prova real, que consiste em verificar a definição (ou a prova dos nove).

Exemplo:
$$\begin{array}{r} 8 \ 903 \\ \times 42 \\ \hline 17 \ 806 \\ 356 \ 12 \\ \hline 373 \ 926 \end{array} \quad \begin{array}{r} 373 \ 926 \\ + 10 \\ \hline 373 \ 936 \end{array}$$

F. RADICIAÇÃO - RAIZ QUADRADA

F.1. SUCESSÃO DE ÍMPARES

Estudaremos rapidamente alguns elementos das sucessões de ímpares que possibilitarão encontrarmos facilmente a raiz quadrada de números quaisquer.

a) somas de sucessões de ímpares

Façamos as somas de ímpares

$$\begin{aligned} 1 + 3 &= 4 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25 = 5^2 \end{aligned}$$

Verificamos que a soma:

de 2 ímpares é 4, quadrado de 2,
de 4 ímpares é 16, quadrado de 4,
de 5 ímpares é 25, quadrado de 5,

portanto, a soma de 6 ímpares deve ser $6^2 = 36$, de 7 ímpares deve ser $7^2 = 49$, o que o leitor poderá verificar.

PROPRIEDADE:

A soma dos ímpares é igual ao quadrado do número de ímpares considerados.

b) ímpar sucessivo

Sejam as sucessões:

1	de 1 ímpar
1,3	de 2 ímpares
1,3,5	de 3 ímpares
1,3,5,7	de 4 ímpares

Observamos que em cada sucessão, para calcularmos o ímpar seguinte, podemos obtê-lo adicionando 2, ou então, multiplicamos por 2 a quantidade de ímpares já escritos e adicionar uma unidade.

Assim, da primeira para a segunda:

temos 1 ímpar $2 \times 1 + 1 = 3$, que é o ímpar sucessivo, da 2a. para a 3a.
temos 2 ímpares $2 \times 2 + 1 = 5$, que é o ímpar sucessivo, da 3a. para a 4a.

temos 3 ímpares - $2 \times 3 + 1 = 7$, que é o ímpar sucessivo.

O leitor poderá verificar novamente, temos 4 ímpares, logo o ímpar sucessivo será:

$$2 \times 4 + 1 = 9, \text{ etc.}$$

F.2. EXTRAÇÃO DA RAIZ QUADRADA

a) Preliminares: Lembremos primeiro que raiz quadrada de um número é o maior número cujo quadrado é menor ou igual ao número dado.

Seja a seguinte questão:

Qual é a raiz quadrada de 27 ?

que corresponde em sucessão de ímpares à questão:

Quantos ímpares podemos escrever sem que a soma ultrapasse 27 ?

Podemos portanto responder a primeira pergunta resolvendo a segunda.

ímpares	1	3	5	7	9	11 . . .
quadrado ou soma	1	4	9	16	25	36 . . .
					↓ 27	

Respostas: 1) Podemos escrever 5 ímpares, e sobram 2 unidades.

2) A raiz de 27 é 5, e o resto é 2.

Outro Exemplo: $\sqrt{53} = ?$

ímpares	1	3	5	7	9	11	13	15
quadrado ou soma	1	4	9	16	25	36	49	64
						↓ 53		

Respostas: 1) Podemos escrever 7 ímpares, e sobram 4

2) $\sqrt{53} = 7$, resto = 4

b) Usando as propriedades:

Consideremos o problema de extrairmos a raiz quadrada de 92.

Consideremos a sucessão de ímpares até atingirmos um quadrado qualquer, por exemplo, 25.

	1º intervalo					2º intervalo					
ímpares	1	3	5	7	9						
soma de quadrados	1	4	9	16	25						

92

Teremos formado dois intervalos, o 1º com 5 ímpares, se descobirmos quantos ímpares podemos escrever no 2º intervalo teremos encontrado a raiz de 92 sem escrevermos todos ímpares.

O primeiro ímpar do 2º intervalo, é o sucessivo, que aprendemos calcular:

$$2 \times 5 + 1 = 11$$

Os outros são:

11, 13, 15, etc.

No segundo intervalo deveremos ter uma soma inferior a $92 - 25 = 67$.

Vamos então subtraindo os ímpares do 2º intervalo:

$$\begin{array}{r} 67 \\ \underline{11} - \\ 56 \end{array} \quad \begin{array}{r} 56 \\ \underline{13} - \\ 43 \end{array} \quad \begin{array}{r} 43 \\ \underline{15} - \\ 28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ \underline{17} - \\ 11 \end{array}$$

Em resumo, o 2º intervalo possui 4 ímpares com 5 do 1º intervalo, temos 9, logo:

$$\sqrt{92} = 9, \text{ com resto} = 11$$

c) Algoritmo:

Exemplo: 1) Seja $\sqrt{308}$

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{308} \quad \begin{array}{l} 10 + 7 = 17 \\ \times 2 \\ 20 + 1 = 21 \end{array} \\
 10 \text{ int. } 100 \\
 20 \text{ int. } 208 \\
 10 \text{ ímpar } 21 \\
 \hline
 187 \\
 20 \text{ ímpar } 23 \\
 \hline
 164 \\
 30 \text{ ímpar } 25 \\
 \hline
 139 \\
 40 \text{ ímpar } 27 \\
 \hline
 112 \\
 50 \text{ ímpar } 29 \\
 \hline
 83 \\
 60 \text{ ímpar } 31 \\
 \hline
 52 \\
 70 \text{ ímpar } 33 \\
 \hline
 19
 \end{array}$$

Exemplo 2: $\sqrt{308}$

É claro que podemos escolher outro quadrado para soma do 10 intervalo, por exemplo:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{308} \quad \begin{array}{l} 15 + 2 = 17 \\ \times 2 \\ 30 + 1 = 31 \text{ (10 ímpar)} \end{array} \\
 225 \\
 \hline
 83 \\
 31 \\
 \hline
 52 \\
 33 \\
 \hline
 19
 \end{array}$$

- 10) escrevemos 10 na chave, cujo quadrado é 100, que corresponde ao 10 intervalo com 10 ímpares.
- 20) escrevemos o quadrado 10 embaixo de 308 e subtraímos.
- 30) resto parcial 208 para o 20 intervalo.
- 40) calculamos o ímpar sucessivo $2 \times 10 + 1 = 21$, que é o 10 ímpar do 20 intervalo.
- 50) subtraímos de 208.
- 60) subtraímos o outro ímpar 23 do novo resto 187.
- 70) e, assim sucessivamente.
- 80) subtraímos 7 ímpares.
- 90) raiz = $10 + 7 = 17$.
- 100) resto = 19 (último resto)

Exemplo 3: $\sqrt{5\,263}$

Como 5 263 tem 4 algarismos, sua raiz deve ter 2 algarismos, pois se tivesse 3 seria maior que 100 e $100^2 = 10\,000$ que é maior que 5 263.

Escolhemos um número de 2 algarismos fácil de trabalhar, por exemplo, serviria 60, pois $60^2 = 3\,600$, 70 pois $70^2 = 4\,900$, mas não serviria 80, pois $80^2 = 6\,400$ que ultrapassa 5 263.

Usaremos 70, aliás, o aluno observa que 7 é a raiz quadrada aproximada de 52, de onde ele tirara uma regra prática.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{5\,263} \quad \begin{array}{l} 70 + 2 = 72 \\ \times 2 \\ 140 + 1 = 141 \end{array} \\
 4\,900 \\
 \hline
 0\,363 \\
 141 \\
 \hline
 222 \\
 143 \\
 \hline
 79
 \end{array}$$

$$\sqrt{5\,263} = 72, \text{ resto } 79$$

c) Processo abreviado (para um segundo estudo)

Pode-se para abreviar o cálculo, estudar-se um processo que permita descobrir quantos ímpares podemos subtrair.

Consideremos novamente 92, onde colocamos 5 ímpares no 10 intervalo, portanto com soma $5^2 = 25$.

Teremos para o 20 intervalo $92 - 25 = 67$.

O 10 ímpar do 20 intervalo é: $2 \times 5 + 1 = 11 = 10 + 1$, os outros serão $13 = 10 + 3$, $15 = 10 + 5$, etc. Teremos vários números 10 (dóbro de 5) e uma nova sucessão de ímpares.

ímpares	1	3	5	7	9	10	10	10	...
soma	25					92			

Vejam quantos 10 podemos escrever no segundo intervalo: Veremos que 6 não serve pois $6^2 > 7$ (saldo).

$$\begin{array}{r}
 67 \quad \begin{array}{l} 10 \\ 5 \end{array} \quad \text{(5 ímpares)} \\
 -50 \\
 \hline
 \text{saldo} = 17 \\
 \text{Novamente, 5 ímpares terá por soma } 5^2 = 25 > 17, \text{ não é possível:} \\
 67 \quad \begin{array}{l} 10 \\ 4 \end{array} \quad \text{sona de 4 ímpares } 4^2 = 16 \\
 -40 \\
 \hline
 \text{saldo} = 27 \\
 \text{resto} = 11
 \end{array}$$

Concluimos que podemos escrever $5 + 4 = 9$ ímpares, logo $\sqrt{92} = 9$, resto 11.

Observemos que se subtrairmos de $67 =$

$$10 \times 4 + 4 \times 4 = (10 + 4) \times 4 = 14 \times 4$$

o que poderá ser feito simultaneamente.

DISPOSITIVO: $\sqrt{92} \quad 5 + 4 = 9$

1º int.	$\frac{25}{67}$	$\frac{x2}{10}$
	$\frac{56}{14}$	$\frac{4}{4}$
	resto 11	$14 \times 4 = 56$

Exemplos:

$\begin{array}{r} \sqrt{308} \\ 100 \\ \underline{208} \\ 189 \\ \text{resto} = 19 \end{array}$ <p>$10 + 7 = 17$</p> <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\frac{x2}{20}$</td> <td style="padding-left: 5px;">$\frac{x2}{20}$</td> <td style="padding-left: 5px;">$\frac{x2}{20}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\frac{9^*}{29 \times 9 = 261}$</td> <td style="padding-left: 5px;">$\frac{8^*}{28 \times 8 = 224}$</td> <td style="padding-left: 5px;">$\frac{7^*}{27 \times 7 = 189}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">(muito apaga-se)</td> <td style="padding-left: 5px;">(muito apaga-se)</td> <td></td> </tr> </table>	$\frac{x2}{20}$	$\frac{x2}{20}$	$\frac{x2}{20}$	$\frac{9^*}{29 \times 9 = 261}$	$\frac{8^*}{28 \times 8 = 224}$	$\frac{7^*}{27 \times 7 = 189}$	(muito apaga-se)	(muito apaga-se)			
$\frac{x2}{20}$	$\frac{x2}{20}$	$\frac{x2}{20}$									
$\frac{9^*}{29 \times 9 = 261}$	$\frac{8^*}{28 \times 8 = 224}$	$\frac{7^*}{27 \times 7 = 189}$									
(muito apaga-se)	(muito apaga-se)										

$\begin{array}{r} \sqrt{5873} \\ 4900 \\ \underline{973} \\ 876 \\ 97 \end{array}$ <p>$70 + 6 = 76$</p> <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\frac{x2}{140}$</td> <td style="padding-left: 5px;">$\frac{6^*}{146 \times 6 = 876}$</td> </tr> </table>	$\frac{x2}{140}$	$\frac{6^*}{146 \times 6 = 876}$	$\begin{array}{r} \sqrt{12436} \\ 10000 \\ \underline{2436} \\ 2321 \\ 115 \end{array}$ <p>$100 + 11 = 111$</p> <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\frac{x2}{200}$</td> <td style="padding-left: 5px;">$\frac{11^*}{211 \times 11 = 2321}$</td> </tr> </table>	$\frac{x2}{200}$	$\frac{11^*}{211 \times 11 = 2321}$	
$\frac{x2}{140}$	$\frac{6^*}{146 \times 6 = 876}$					
$\frac{x2}{200}$	$\frac{11^*}{211 \times 11 = 2321}$					

NOTA: O processo que o Autor expôs foi imaginado por seu irmão Newton e recebeu contribuições de vários professores.

G. EXERCÍCIOS - SEQUÊNCIA XII

SUB-SEQUÊNCIA I

- Escreva os números na forma polinômica
a) 73 b) 528 c) 6 008 d) 35 437
- Faça as adições seguintes escrevendo os números na forma polinômica, explicando as passagens:
a) $37 + 21$ b) $162 + 124$ c) $76 + 17$
d) $285 + 327$ e) $406 + 289$ f) $3 286 + 7 254$
- Faça as adições do ex. 2 com o dispositivo prático.
- Idem, as adições de várias parcelas:
a) $325 + 579 + 384$ b) $4 236 + 1 527 + 8 709 + 73$
- Aplique a propriedade comutativa ao ex. 3, como controle de cálculo.
- Aplique a propriedade associativa como controle de cálculo no ex. 4.
- Aplique a Regra de CAUCHY aos exs. 3 e 4.

SUB-SEQUÊNCIA II

- Calcule as diferenças escrevendo na forma polinômica:
a) $768 - 234$ b) $639 - 263$ c) $2 873 - 1 149$
- Faça as subtrações anteriores com o dispositivo prático.
- Aplique a prova real ao ex. 2 (Eq. Fund.)

SUB-SEQUÊNCIA III

- Calcule os produtos escrevendo os números na forma polinômica:
a) 342×2 b) 392×3 c) $4 086 \times 4$
- Efetue as multiplicações do ex. 1, aplicando a definição como adição.
- Efetue as multiplicações do ex. 1, aplicando o dispositivo prático.
- Calcule os produtos na forma polinômica:
a) 48×35 b) 326×654 c) 73×49
- Calcule os produtos anteriores escrevendo um só fator na forma polinômica.
- Calcule os produtos do ex. 4, com o dispositivo prático.
- Aplique a propriedade comutativa ao ex. 6 como prova de cálculo.

SUB-SEQUÊNCIA IV

- Determine as cotas em separado e efetue as divisões com o dispositivo da "divisão com chave":
a) $326 : 213$ b) $964 : 236$ c) $1 235 : 408$
d) $3 806 : 784$ e) $4 398 : 856$ f) $4 689 : 1 527$
- Sabendo que o quociente de 9 por 2 é 4 e o resto é 1, qual é o quociente e o resto de 15 por 2 e por que?
- Faça as divisões:
a) $3 872 : 46$ b) $23 568 : 423$ c) $203 570 : 362$
d) $10 082 : 39$ e) $4 000 : 120$ f) $2 379 : 34$
- Faça os controles de cálculo do ex. 3 com a prova real (Eq. Fund.)

SUB-SEQUÊNCIA V

- Qual é a soma de uma sucessão dos primeiros:
a) 7 ímpares b) 20 ímpares c) 10 pares
d) 50 ímpares e) 80 ímpares f) 100 ímpares
- Calcule o ímpar sucessivo de uma sucessão de ímpares da qual já foram escritos:
a) 8 b) 10 c) 20 d) 100 e) 200 f) 50
- Calcule a raiz de 43 escrevendo uma sucessão de ímpares para o 1º intervalo com 4 ímpares.
- Calcule a raiz de 86 escrevendo uma sucessão de ímpares para o 1º intervalo com 6 ímpares.
- Calcule a raiz quadrada de 150 escrevendo uma sucessão de ímpares no 1º intervalo com 8 ímpares (e depois com 10 ímpares).

Exemplos:

- a) $3 \mid 12$ pois $3 \times 4 = 12$
 b) $2 \mid 20$ pois $2 \times 10 = 20$
 c) $3 \nmid 10$ pois, não existe um inteiro y tal que
 $3 \times y = 10$

A.3. PROPRIEDADES:1. Reflexiva

$$a \mid a$$

De fato: $a \times 1 = a \Rightarrow a \mid a$

Exemplo: 5 divide 5

2. Transitiva

Se $a \mid b$, e $b \mid c$ então $a \mid c$

Demonstração (para um 2º estudo)

$a \mid b \Leftrightarrow$ existe um inteiro y , $a \times y = b$

$b \mid c \Leftrightarrow$ existe um inteiro z , $b \times z = c$

multiplicando a primeira igualdade por z obtemos:

$$(a \times y) \times z = b \times z$$

$$\text{ou } a \times (y \times z) = c$$

$$\text{ou } a \times w = c \Rightarrow a \mid c$$

Exemplo: Se $2 \mid 6$ e $6 \mid 18$, então $2 \mid 18$

A.4. DIVISORES PRÓPRIOS, PRIMEIRO E ÚLTIMO DIVISOR

Da igualdade $1 \times a = a$ concluímos que $1 \mid a$ qualquer que seja a , logo:

"1 é divisor de qualquer inteiro"

de onde, a denominação de Primeiro Divisor ou Divisor Universal.

Da igualdade $a \times 0 = 0$, concluímos, como já observamos anteriormente, que $a \mid 0$, qualquer que seja o inteiro "a", logo:

"0 é múltiplo de qualquer inteiro"

de onde, a denominação de Último Divisor ou Múltiplo Universal.

Da propriedade reflexiva $a \mid a$, e de $1 \mid a$, concluímos que, todo inteiro diferente de 1 e de 0, sempre possui dois divisores: o 1 e ele próprio, disto resulta que esses números são chamados divisores impróprios.

Todo divisor que não é divisor impróprio é chamado divisor próprio (ou propriamente divisor), logo, divisor próprio de um número inteiro é todo divisor do inteiro que chamamos divisores impróprios.

B. DIAGRAMAS DE DIVISORES

Denominamos divisor intermediário de dois outros "a" e "b" a todo inteiro "c" diferente de "a" e de "b", tal que:

$$a \mid c, \text{ e } c \mid b \text{ (no caso de } a < b)$$

Denominamos também: Divisor imediato de "b" a todo inteiro "c" (diferente de b), divisor de b, tal que "c" e "b" não possuam divisores intermediários. O número "b" é então denominado múltiplo imediato de "a".

- Assim: a) 6 é divisor intermediário de 2 e 18
 b) 9 é divisor imediato de 18
 c) 18 é múltiplo imediato de 9.

As definições anteriores são restringidas também a um conjunto de inteiros, assim, seja dado o conjunto de inteiros:

$$\{2, 3, 5, 18\}$$

Exemplos: 3 e 18 são possuem divisor intermediário (no conjunto). Logo 3 é o divisor imediato de 18 (que lhe é múltiplo imediato).

É interessante e nos será útil em capítulos posteriores a representação gráfica dos inteiros de um conjunto segundo as definições de divisor intermediário e de divisor imediato.

Essa representação gráfica recebe o nome de Diagrama de Hasse, e segue a seguinte regra:

1. Cada inteiro do conjunto é representado por um ponto (ou pequeno círculo), denominado afixo ou imagem do inteiro.

2. Os afixos de dois inteiros do conjunto são ligados por um segmento somente quando um é divisor imediato do outro no conjunto.

3. Faz-se o Diagrama constando o afixo do múltiplo imediato de um inteiro acima do afixo desse inteiro.

Exemplos:

$$a) A = \{1, 2, 4, 6, 12\}$$

$$b) B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 15, 18, 24\}$$

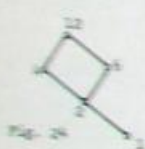


Fig. 24

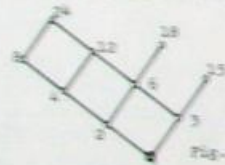


Fig. 25

$$c) C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15\}$$



Fig. 26

C. EQUIMÚLTIPLOS E EQUIDIVISORES

Definição I: Dois ou mais números são equimúltiplos de outros números quando são iguais aos produtos destes números por um mesmo inteiro.

Definição II: Dois ou mais números são equidivisores de outros números, quando são iguais aos quocientes exatos desses números por um mesmo inteiro.

Exemplos: 20 e 30 são equimúltiplos de 4 e 6
4 e 6 são equidivisores de 20 e 30

D. PROPRIEDADES OPERACIONAIS DA DIVISIBILIDADE

Quadramos em seguida, de propriedades de divisibilidade, que nos serão duplamente necessárias: para a determinação dos critérios e para as provas das operações.

E.1. EM RELAÇÃO À ADIÇÃO:

Todo número que é divisor das parcelas é divisor da soma, ou:

A soma de múltiplos de um número é ainda múltiplo do mesmo número.

Demonstração (para um 2º estudo)

De fato: Seja para facilitar as explicações uma adição de três parcelas:

$$S = a + c + d$$

Faça hipótese feita seja "a" o divisor de cada parcela, temos:

$$a | b \Leftrightarrow \text{existe um inteiro } y, a \cdot y = b$$

$$a | c \Leftrightarrow \text{existe um inteiro } z, a \cdot z = c$$

$$a | d \Leftrightarrow \text{existe um inteiro } w, a \cdot w = d$$

Por isso:

$$S = b + c + d$$

$$\text{Será: } S = a \cdot y + a \cdot z + a \cdot w$$

e, aplicando a propriedade distributiva à esquerda: $S = a \cdot (y+z+w)$ ou: S

$$\text{Ex.: } 3 | 15 \text{ e } 3 | 27 \Rightarrow 3 | 42 \text{ pois } 15+27 = 42$$

E.2. COMPLEMENTAR EM RELAÇÃO À ADIÇÃO

FORMA A: Todo número que é divisor de uma parcela e não é divisor da outra, não é divisor da soma, e, o resto da divisão da soma por este número é o mesmo resto da divisão da parcela não divisível.

Demonstração (para um segundo estudo)

De fato: Seja a soma $S = b + c$, e "a" o divisor de "b" e não divisor de "c", temos:

$$a \nmid b \Leftrightarrow \text{existe um inteiro } y, a \times y = b$$

$$a \nmid c \Leftrightarrow a \times z + r = c, \text{ com } r < a$$

adicionando:

$$b + c = a \times y + a \times z + r$$

ou pela propriedade distributiva:

$$S = a \times (y + z) + r$$

chamando o inteiro $y + z$ de t , temos: $S = a \times t + r$ com $r < a$
 igualdade que implica $a \nmid S$ e o resto é r .

Exemplo: $3 \nmid 15$

$3 \nmid 20$ e o resto é 2,

logo $3 \nmid 35$ é o resto também é 2.

NOTA: Pode-se dar outra forma a esta propriedade:

FORMA B: Dividindo-se uma soma por um inteiro o resto é igual ao resto da divisão da soma dos restos de cada parcela pelo mesmo número.

Demonstração (para um segundo estudo)

De fato: Seja para facilidade, a soma de duas parcelas:
 $S = b + c$

Temos: $a \nmid b \Leftrightarrow b = a \times y + r$

$$a \nmid c \Leftrightarrow c = a \times z + r'$$

Adicionando: $b + c = a \times y + r + a \times z + r'$

$$S = a \times (y + z) + (r + r')$$

Como a primeira parcela é divisível por "a", aplicando a Forma A concluímos que o resto da divisão de "S" por "a" é o mesmo resto da divisão de $r + r'$ por "a".

Exemplo: $10 : 3$ dá resto 1
 $16 : 3$ dá resto 1
 $20 : 3$ dá resto 2

logo, $10 + 16 + 20 = 46$ dá resto 1 igual ao resto da divisão de $1 + 1 + 2 = 4$ por 3.

NOTA: Esta forma B nos mostra também que as parcelas de uma soma podem não ser divisíveis por um número, mas que podem ter a soma divisível, como nos mostra o exemplo:

$$9 : 2 \text{ dá resto } 1$$

$$5 : 2 \text{ dá resto } 1$$

mas $9 + 5 = 14$ é divisível por 2, pois $1 + 1 = 2$.

E.3. EM RELAÇÃO À MULTIPLICAÇÃO

Todo número que é divisor de um dos fatores é divisor do produto, ou:

Todo número que é divisor de outro é divisor de todos seus múltiplos.

Demonstração (para um 2º estudo)

De fato: Seja uma multiplicação de dois fatores

$$P = b \times c$$

Pela hipótese feita, seja "a" o divisor de um fator, por exemplo de "b":

$$a \nmid b \Leftrightarrow \text{existe um inteiro } y, a \times y = b$$

$$\text{será } P = (a \times y) \times c$$

e, pela associativa: $P = a \times (y \times c)$

$$p = a \times t \Rightarrow a \mid P$$

Exemplo: a) $3 \mid 12$ logo $3 \mid 48$ pois $48 = 12 \times 4$
 b) $3 \mid 9$ logo $3 \mid 45$ pois $45 = 9 \times 5$

E.4. COMPLEMENTAR EM RELAÇÃO À MULTIPLICAÇÃO

Dividindo-se o produto por um número, o resto é igual ao resto da divisão do produto dos restos de cada fator pelo mesmo número.

Demonstração (para um 2º estudo)

De fato: Seja o produto: $P = b \times c$

temos: $a \mid b \Leftrightarrow b = ax + r$

$a \mid c \Leftrightarrow c = ax + r'$

Multiplicando: $b \times c = (ax + r) \times (ax + r')$
e, aplicando a propriedade distributiva à esquerda e depois à direita:

$$P = (ax) \times (ax) + rx \times (ax) + (ax) \times r' + rx \times r'$$

Pela propriedade 3 as três primeiras parcelas são divisíveis por "a", portanto, pela propriedade 1 a sua soma é divisível por "a", e pela propriedade 2 o resto da divisão de P por "a" é o mesmo da divisão de $rx \times r'$ por "a", como pretendíamos mostrar.

Exemplo: $8 : 3$ dá resto 2
 $17 : 3$ dá resto 2

logo $8 \times 17 = 136$ dá resto 1, igual ao da divisão de $2 \times 2 = 4$ por 3 que é 1.

NOTA: Esta propriedade complementar nos mostra também que os fatores de um produto podem não ser divisíveis por um número; mas, que podem ter o produto divisível.

Exemplo: $42 : 10$ dá resto 2; $55 : 10$ dá resto 5, mas o produto 42×55 é divisível por 10, pois $2 \times 5 = 10$ e 10 é divisível por 10.

E.5. EM RELAÇÃO À SUBTRAÇÃO:

"Todo número que é divisor de dois termos é divisor de sua diferença".

Demonstração (para um 2º estudo)

Seja $b \geq c$, e "a" o divisor comum, temos:

$a \mid b \Leftrightarrow$ existe um inteiro y, $ax + y = b$

$a \mid c \Leftrightarrow$ existe um inteiro z, $ax + z = c$

Seja a diferença d:

$$d = b - c \text{ ou } d = ax + y - ax - z$$

Pela distributividade da multiplicação em relação à subtração:

$$d = a \times (y - z)$$

Por ser $y - z$ igual a um inteiro t:

$$d = a \times t \Rightarrow a \mid d$$

Exemplo: Se sabemos que $2 \mid 12$ e $2 \mid 20$ podemos afirmar que $2 \mid 8$ pois $20 - 12 = 8$.

E.6. EM RELAÇÃO À DIVISÃO:

"Todo número que é divisor do dividendo e do divisor (ou Quociente) de uma divisão, é divisor do resto."

Demonstração (para um 2º estudo)

Sejam: dividendo D, divisor d, quociente q e resto r, e, seja "a" o divisor do dividendo e do divisor:

Como $D = d \times q + r$ é $D - d \times q = r$

Como $\left\{ \begin{array}{l} a \mid d \text{ por hipótese, } a \mid d \times q \text{ (propriedade 3)} \\ a \mid D \text{ por hipótese, dividirá a diferença (propriedade 5),} \end{array} \right.$

logo: $a \mid r$

Exemplo: $\left\{ \begin{array}{l} 3 \mid 180 \\ 3 \mid 24 \text{ e, } 180 : 24 \text{ é } 7 \text{ e o resto é } 12, \text{ e} \end{array} \right.$
de fato $3 \mid 12$ que é o resto.

F. NÚMEROS CÔNGRUOS OU CONGRUENTES

"Dois números são denominados cômgruos em relação a um inteiro (ou segundo um inteiro), quando divididos por esse inteiro fornecem o mesmo resto."

Exemplo: 20 e 44 são números cômgruos (ou congruentes) segundo o inteiro 6, pois: $20 : 6$ é 3 e o resto é 2
 $44 : 6$ é 7 e o resto também é 2.

Indicamos: $20 \equiv 44 \pmod{6}$

De uma maneira geral indicamos: $a \equiv b \pmod{d}$

e lemos, a cômgruo com b, segundo o divisor ou módulo d.

NOTA: Não desenvolvemos este tópico, pela extensão e complexidade que fugiriam ao nível deste trabalho; mas, aconselhamos aos interessados consultarem a bibliografia, pois, o conhecimento da teoria das congruências facilitaria muitíssimo a determinação dos critérios de divisibilidade.

G. CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

G.1. PRELIMINARES:

Muitas vezes é útil saber se um número é ou não divisível por outro sem efetuar a divisão e, outras vezes é também importante a determinação do resto sem efetuar a divisão.

Destas necessidades decorre o estudo para a determinação de regras práticas que forneçam as respostas anteriores.

Essas regras são denominadas: "Crítérios de Divisibilidade" ou "Caracteres de Divisibilidade", quando a regra fornece também o resto e claro que ela é uma regra mais completa, por isso ela é então denominada

nada "Crítério-Resto de Divisibilidade"

Nos itens seguintes nós procuraremos dar as explicações gerais que permitam extrair essas regras.

G.2. FORMA GERAL REDUZIDA CONGRUENTE

O raciocínio, que faremos em seguida, será utilizado à determinação de um número mais simples do que um número dado qualquer, e, que seja congruente com ele, o qual será muitíssimo útil para a obtenção dos critérios de divisibilidade.

Consideremos o número N (para simplicidade com 4 algarismos) e o divisor "a":

$$N = mcd u$$

ou na forma polinômica:

$$N = m \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10 + u$$

Sejam: 1) r' o resto da divisão de 10 por "a", portanto, 10 é um múltiplo de "a" mais r':
 ou, indicando qualquer múltiplo de a por A:

$$10 = A + r'$$

2) r'' o resto da divisão de 10^2 por "a", portanto:

$$10^2 = A + r''$$

3) r''' o resto da divisão de 10^3 por a, portanto:

$$10^3 = A + r'''$$

e, análogamente se o número N tivesse mais algarismos.

Substituímos na forma polinômica do número N:

$$N = m \times (A + r''') + c \times (A + r'') + d \times (A + r') + u$$

Pela propriedade distributiva:

$$N = m \times A + m \times r''' + c \times A + c \times r'' + d \times A + d \times r' + u$$

Sendo A múltiplo de a, pela propriedade da divisibilidade em relação à multiplicação:

$m \times A$, $c \times A$, $d \times A$ são também múltiplos de A, e, de a, podemos escrever:

$N = A + m \times r''' + A + c \times r'' + A + d \times r' + A + u$
 e, pela propriedade da divisibilidade em relação à adição:
 $A + A + A$ é ainda múltiplo de a :

$$N = A + (m \times r''' + c \times r'' + d \times r' + u)$$

Pela propriedade complementar da divisibilidade em relação à adição o resto da divisão do número

$$R = m \times r''' + c \times r'' + d \times r' + u$$

por " a " é o mesmo resto da divisão do número N por " a ", logo, N é congruente com R , segundo o número " a ":

$$N \equiv R \quad (a)$$

Esta congruência nos permite portanto estudar a divisibilidade de um número N por " a " através do número congruente R . Ao número R chamamos Forma Geral Reduzida Congruente.

Obtida a Forma Geral Reduzida Congruente de um número pode-se passar a raciocinar, não sobre o número dado, mas sobre este número R .

G.3. DIVISIBILIDADE POR 10

$$\begin{aligned} \text{Sendo: } 10 : 10 &= 1, & \text{ e o resto } r' &= 0 \\ 10^2 : 10 &= 10, & \text{ e o resto } r'' &= 0 \\ 10^3 : 10 &= 10^2, & \text{ e o resto } r''' &= 0 \end{aligned}$$

e assim, sucessivamente, substituindo na Forma Geral Reduzida Congruente obtemos:

$$\begin{aligned} R &= 0 + 0 + 0 + u \\ \text{ou } R &= u \end{aligned}$$

$$\text{isto é: } N \equiv u \quad (10)$$

de onde deriva o critério-resto seguinte:

CRITÉRIO-RESTO POR 10:

O resto da divisão de um número por 10 é igual ao valor do algarismo das unidades.

Com conseqüência resulta que um número é divisível por 10 se o último algarismo é 0.

Exemplos: a) 3 450 é divisível por 10
 b) 8 434 é divisível por 10 e o resto é 4.

G.4. DIVISIBILIDADE POR 2 (OU POR 5)

$$\text{Sendo: } 10 : 2 = 5 \text{ e o resto } r' = 0$$

$$\text{ou } 10 : 5 = 2 \text{ e o resto } r' = 0$$

$$10^2 : 2 = 50 \text{ e o resto } r'' = 0$$

$$\text{ou } 10^2 : 5 = 20 \text{ e o resto } r'' = 0$$

e, assim sucessivamente, substituindo na Forma Geral Reduzida Congruente, obtemos: $R = u$

$$\text{isto é: } N \equiv u \equiv (2 \text{ ou } 5)$$

de onde concluímos o critério:

CRITÉRIO-RESTO POR 2 (OU 5)

O resto da divisão de um número por 2 (ou 5) é igual ao resto da divisão do valor do algarismo das unidades.

Como conseqüência:

a) Um número é divisível por 2 se o último algarismo é: 0, 2, 4, 6 ou 8; e, caso não seja divisível, o resto é sempre igual à unidade.

b) Um número é divisível por 5 se o último algarismo é 0 ou 5.

Exemplos: a) 3 854 é divisível por 2
 b) 7 327 não é divisível por 2 e o resto é 1

c) 470 é divisível por 5

d) 325 é divisível por 5

e) 828 não é divisível por 5 e o resto é 3, pois $8 : 5$ é 1 e o resto é 3 (ou $8 - 5 = 3$).

G.5. DIVISIBILIDADE POR 4

O resto de 10 por 4 igual a $r' = 2$

O resto de 10^2 por 4 igual a $r'' = 0$

O resto de 10^3 por 4 igual a $r''' = 0$

e, assim sucessivamente, substituindo na Forma Geral Reduzida Congruente obtemos:

$$R = d \times 2 + u$$

isto é: $N \equiv d \times 2 + u \quad (4)$

de onde concluímos o critério:

CRITÉRIO-RESTO POR 4

O resto da divisão de um número por 4 é igual ao resto da divisão do número formado pelo dobro do valor do algarismo das dezenas mais o valor do algarismo das unidades pelo número 4.

Exemplos: a) 7 256 é divisível por 4, pois, $2 \times 5 + 6 = 16$, e 16 é divisível por 4.

b) 3 427 não é divisível por 4, e o resto é 3, pois, $2 \times 2 + 7 = 11$, e 11 dividido por 4 dá resto 3. Aliás, pode-se aplicar novamente o critério: $2 \times 1 + 1 = 3$.

NOTA: Como a divisão por 2 é prática, a divisibilidade por 4 não é muito empregada, pois, divide-se o número por 2, e depois, aplica-se o critério por 2 (não vale o critério-resto).

G.6. DIVISIBILIDADE POR 6

O resto de 10 por 6 igual a $r' = 4$

O resto de 10^2 por 6 igual a $r'' = 4$, e, assim sucessivamente, substituindo obtemos a seguinte Forma Geral Reduzida Congruente:

$$R = m \times 4 + c \times 4 + d \times 4 + u$$

$$\text{ou } R = (m + c + d) \times 4 + u$$

isto é: $N \equiv (m + c + d) \times 4 + u \quad (6)$

que nos fornece o seguinte critério:

CRITÉRIO-RESTO POR 6

O resto da divisão de um número por 6 é igual ao resto da divisão do número formado pelo valor do algarismo das unidades mais quatro vezes a soma dos valores dos outros algarismos.

Exemplos: a) 34 212 é divisível por 6, pois, $(3+4+2+1) \times 4 + 2 = 42$, e, novamente: $4 \times 4 + 2 = 18$, e, novamente $1 \times 4 + 8 = 12$, é claro que não é prático aplicar novamente.

b) 2 306 não é divisível por 6 e o resto é 2, pois $(2+3+0) \times 4 + 6 = 26$ e, 26 dividido por 6 dá resto 2.

G.7. DIVISIBILIDADE POR 9 (OU 3)

O resto de 10 por 9 (ou 3) igual a $r' = 1$

O resto de 10^2 por 9 (ou 3) igual a $r'' = 1$,

e, assim sucessivamente, substituindo na Forma Geral Reduzida Congruente, obtemos:

$$R = m+c+d+u$$

isto é:

$$N \equiv m+c+d+u \pmod{9, \text{ ou } 3}$$

de onde concluímos a regra:

CRITÉRIO-RESTO POR 9 (OU 3):

O resto da divisão de um número por 9 (ou 3), é igual ao resto da divisão da soma dos valores dos seus algarismos por 9 (ou 3).

Exemplos: a) 21 687 é divisível por 3, pois,
 $2+1+6+8+7 = 24$,
 e 24 é divisível por 3, logo, não é divisível por 9, e o resto é 6, pois 24 dividido por 9 dá resto 6.

Na prática, para a divisibilidade por 9, faz-se uso da chamada regra dos "nove fora":

$$\begin{aligned} 2 + 1 &= 3 \\ 3 + 6 &= 9, \text{ "nove fora" } = 0 \\ 0 + 8 &= 8 \\ 8 + 7 &= 15, \text{ "nove fora" } = 6. \end{aligned}$$

O leitor nota que o cálculo pode ser feito muito facilmente de maneira mental.

G.8. DIVISIBILIDADE POR 7

O resto de 10^0 por 7 igual a 1, (corresponde ao u sózinho)
 O resto de 10^1 por 7 igual a $r' = 3$,
 O resto de 10^2 por 7 igual a $r'' = 2$,
 O resto de 10^3 por 7 igual a $r''' = 6$,
 O resto de 10^4 por 7 igual a 4,
 O resto de 10^5 por 7 igual a 5, e, novamente os restos 1,3,2,6,4,5, e, como a sucessão dos restos pode ser tomada como:

1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, ...
 pois: $6 = 7-1$, $4 = 7-3$, $5 = 7-2$, o critério pode ser o seguinte:

CRITÉRIO-RESTO POR 7

Separa-se o número em classes de 3 algarismos, adiciona-se as classes de ordem ímpar e as classes de ordem par em separado, subtrai-se as somas nessa ordem (não sendo possível a subtração, acrescenta-se um múltiplo de 7 suficiente). Adiciona-se os produtos do valor do algarismo da unidade por 1, o valor do algarismo das dezenas por 3, e o valor do algarismo das centenas por 2. O resto da divisão por 7 é o mesmo resto da divisão do número dado.

Exemplo: Seja o número 723 426 821 628

Ordem ímpar	Ordem par		
426	821	1 054	
628 +	723 +	700 +	(múltiplo qual-
1 054	1 544	1 754	quer de 7 sufi-

$$\begin{array}{r} 1\ 754 \\ - 1\ 544 \\ \hline 210 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} 1 \times 0 = 0 \\ 3 \times 1 = 3 \\ 2 \times 2 = 4 \\ \hline 7 \end{array} \quad \text{logo, o número é divi-}$$

sível por 7.

Neste exemplo era fácil observar que era divisível, pois 210 é visivelmente múltiplo de 7.

Quando o número possui poucos algarismos pode ser usado os outros algarismos 6, 5, 4, etc. com facilidade:

Exemplo: 4 825

$$\begin{array}{r} 1 \times 5 = 5 \\ 3 \times 2 = 6 \\ 2 \times 8 = 16 \\ 6 \times 4 = 24 \\ \hline 51 \end{array} \quad \text{e} \quad 51 : 7 \text{ dá resto } 2,$$

portanto, 4 825 não é divisível por 7 e o resto é 2.

Dos exemplos resultará possivelmente ao leitor que o critério resto por 7 não é prático, nós concordaremos com o raciocínio, mas então lembraremos ao

leitor para aplicar parte do critério-resto: separe em classes, adicione-as em separado e depois subtraia simplesmente, sem se preocupar com os algarismos 1,3,2, etc., efetue então a divisão por 7, isto é, no nosso exemplo nós paráramos no 210 e já dividiríamos por 7. Concordaremos então que o critério não é prático para um número de poucos algarismos, que aliás é o caso mais freqüente.

G.9. DIVISIBILIDADE POR 11:

O resto de 10 por 11 é igual a 10

O resto de 10^2 por 11 é igual a 1 ,

O resto de 10^3 por 11 é igual a 10 ,

O resto de 10^4 por 11 é igual a 1 ,

e, assim sucessivamente obtemos substituindo na Forma Geral Reduzida Congruente:

$$R = m \times 10 + c \times 1 + d \times 10 + u$$

isto é:

$$N \equiv m \times 10 + c + d \times 10 + u \quad (11)$$

e, como $10 = 11 - 1$

podemos também escrever:

$$N \equiv u - d + c - m + \text{múltiplo de } 11 \quad (11)$$

ou

$$N \equiv u - d + c - m \quad (11)$$

de onde concluímos a regra:

CRITÉRIO-RESTO:

O resto da divisão de um número por 11 é igual ao resto da divisão por 11 do número formado pela soma dos valores dos algarismos de ordem ímpar com a soma dos valores dos algarismos de ordem par multiplicados por 10 .

ou:

Adiciona-se em separado os valores dos algarismos de ordem ímpar e de ordem par, subtrai-se nessa ordem, (se não é possível, acrescenta-se um múltiplo de 11 suficiente), o resto da divisão por 11 dessa diferença é igual ao resto da divisão por 11 do número dado.

Exemplo: Seja $N = 423\ 825$

$$5+8+2 = 15$$

$$2+3+4 = \frac{9}{6}$$

Pela regra primeira:

$$15 + 9 \times 10 = 15 + 90 = 105$$

e, 105 dividido por 11 dá resto 6 , ou aplicando novamente a regra:

$$5+1 = 6$$

$$0 = 0$$

$$6+0 \times 10 = 6$$

Pela segunda regra:

$$15 - 9 = 6$$

portanto, N não é divisível por 11 e o resto é 6 .

H. OUTROS CRITÉRIOS

Daremos a seguir outros critérios, sendo que alguns não são critérios-resto, para os quais daremos apenas as linhas gerais de demonstração:

H.1. OUTRO CRITÉRIO POR 4 (OU 25)

Se D o número constituído pelos algarismos exceto os dois últimos d e u , teremos:

$$N = D \cdot 100 + d \cdot 10 + u$$

Como $100 = 4 \times 25$, então N é constituído de uma parcela divisível por 4 (ou 25) e outra "du" constituída pelos dois últimos algarismos, logo:

$$N \equiv du \quad (4, \text{ ou } 25)$$

de onde o critério:

CRITÉRIO-RESTO POR 4 (OU 25)

O resto da divisão de um número por 4 (ou 25) é o mesmo resto deixado pela divisão do número formado pelos 2 últimos algarismos.

Exemplos: a) 43 964 é divisível por 4, pois 64 é divisível por 4.
b) 35 257 não é divisível por 25, e o resto é 7, pois 57 dividido por 25 dá resto 7, idem, não é divisível por 4, pois 57 não é divisível por 4 e dá resto 1.

Em particular, um número é divisível por 25 se terminar em 00, 25, 50 ou 75.

H.2. OUTRO CRITÉRIO POR 6

Por ser: $2 \times 3 = 6$, se um número N é divisível por 2 e também por 3, então:

$$N = 2 \times 3 \times d = 6 \times d$$

logo, 6 divide N , e onde o critério:

CRITÉRIO POR 6

Um número que é divisível por 2 é também por 3, é divisível por 6.

Exemplo: $N = 4 \ 314$, é divisível por 2 (o último algarismo é 4), é divisível por 3 (a soma dos valores é 12), portanto é divisível por 6.

H.3. OUTRO CRITÉRIO POR 7

$$\text{Seja } N = D u = 10 \times D + u$$

Multipliquemos por 5:

$$\begin{aligned} 5 \times N &= 50 \times D + 5 \times u \\ &= 7 \times 7 \times D + (D + 5 \times u) \end{aligned}$$

Como 5 não é divisível por 7 e a parcela $7 \times 7 \times D$ é múltiplo de 7, segue que:

$$5 \times N \equiv D + 5 \times u \quad (?)$$

de onde o critério:

CRITÉRIO POR 7:

Um número é divisível por 7 quando o número de suas dezenas mais o quintuplo do valor do algarismo das unidades é divisível por 7.

Na prática usa-se o critério sucessivamente:

$$\text{Seja } N = 4 \ 825$$

$$5 \times 5 = \frac{482}{507} \quad 5 \times 7 = \frac{50}{85} \quad 5 \times 5 = \frac{8}{33}$$

portanto, o número não é divisível por 7, pois 33 dividido por 7 dá resto 5, é claro que já poderíamos ter dividido o número 85.

NOTA: Como $5 = 7 - 2$, pode-se em lugar de multiplicar por 5 e adicionar, multiplicar por 2 e subtrair.

H.4. OUTRO CRITÉRIO POR 8

Demonstração (para um segundo estudo)

$$\text{Sendo } N = D du = D \times 100 + du$$

Como $100 = 8 \times 12 + 4$, substituindo teremos:

$$N = D \times 8 \times 12 + D \times 4 + du$$

Caso D é par será $D \times 4 =$ múltiplo de 8
 Caso D é ímpar $D \times 4 =$ múltiplo de 8 mais 4, substituindo

$$N = \text{múltiplo de } 8 + du \text{ (D par)}$$

$$N = \text{múltiplo de } 8 + 4 + du \text{ (D ímpar)}$$

Seja "du" divisível por 4(*): $du = 4 \times q$

teremos: $du = 4 \times (2 \times k) \quad (q \text{ é par})$
 $du = 4 \times (2 \times k + 1) \quad (q \text{ é ímpar})$

ou: $du = \text{múltiplo de } 8$
 $du = \text{múltiplo de } 8 + 4$

Substituindo estas duas expressões respectivamente nas duas expressões anteriores de N, teremos:

$$N = \text{múltiplo de } 8 \quad (D \text{ par e } q \text{ par})$$

$$N = \text{múltiplo de } 8 \quad (D \text{ ímpar e } q \text{ ímpar})$$

de onde concluímos a regra:

CRITÉRIO POR 8

Um número é divisível por 8 se o quociente do número formado pelos dois últimos algarismos por 4 é de mesma paridade que o algarismo das centenas.

Exemplos: a) $N = 537\ 212$

12 dividido por 4 é 3 (ímpar), mas o algarismo das centenas é 2 (par), portanto o número não é divisível por 8.

b) $N = 63\ 536$

36 dividido por 4 é 9 (ímpar), e, o algarismo das centenas é 5 (ímpar), portanto o número N é divisível por 8.

(* Se não e, N também não é divisível por 8.

H.5. CRITÉRIOS VÁRIOS:

Como curiosidade acrescentamos aos interessados os seguintes critérios sem a devida demonstração:

1. POR 11: Separa-se o número em classes de 2 algarismos e adiciona-se. O resto é o mesmo da divisão por 11 dessa soma.

Exemplo: $N = 5\ 342\ 824 \quad 24+28+34+5 = 91$

91 por 11 dá resto 3, portanto N não é divisível por 11.

2. POR 13 (OU 7, OU 11): Separa-se o número em classes de 3 algarismos e adiciona-se as classes ímpares e pares em separado, subtrai-se O resto é o mesmo da divisão por 13(ou 7, ou 11) da diferença.

Exemplo: $N = 23\ 428\ 659$

$$\begin{array}{r} 659 \\ 23+ \\ \hline 682 \end{array} \quad \begin{array}{r} 682 \\ 428- \\ \hline 254 \end{array}$$

254: 13 dá resto 7, $254:7$ dá resto 2, portanto: o resto de N por 13 é 7, e o resto por 7 é 2.

3. POR 19: Um número é divisível por 19, se é exata a divisão por 19 do número de dezenas (D) com o dôbro do valor do algarismo das unidades.

Exemplo: $N = 32\ 587$

$$2 \times 7 = \frac{3\ 258}{3\ 272} \quad 2 \times 2 = \frac{327}{331} \quad 2 \times 1 = \frac{33}{35}$$

portanto, N não é divisível por 19, pois 35 dá resto 16.

4. POR 7 (CRITÉRIO-RESTO DE Ibn al-Banna): Multiplica-se o valor do primeiro algarismo (da esquerda) por 3, adiciona-se com o valor do segundo, multiplica-se por

3, adiciona-se com o terceiro; e, assim sucessivamente; caso o último resultado é divisível por 7 o número também é divisível.

Na prática, após cada cálculo usa-se a regra do "setes fora".

Exemplo: $N = 23\ 428\ 659$

$2 \times 3 + 3 = 9$ (setes fora) 2,
 $2 \times 3 + 4 = 10$, setes fora 3,
 $3 \times 3 + 2 = 11$, setes fora 4,
 $4 \times 3 + 8 = 20$, setes fora 6,
 $6 \times 3 + 6 = 24$, setes fora 3,
 $3 \times 3 + 5 = 14$, setes fora 0,
 $0 \times 3 + 9 = 9$, setes fora 2, logo o número

$N = 23\ 428\ 659$ não é divisível por 7, e o resto também é 2.

I. APLICAÇÃO DA DIVISIBILIDADE NUMÉRICA À VERIFICAÇÃO DE CÁLCULOS

I.1. PRELIMINARES

Temos dado vários processos de verificação de cálculos, voltamos agora ao assunto, visto que, os critérios-resto de divisibilidade fornecem interessantes e úteis controles de prova das operações.

Outras aplicações da divisibilidade numérica o leitor terá nos capítulos posteriores.

I.2. ADIÇÃO

Pela propriedade Complementar da divisibilidade Numérica em Relação à Adição: "Dividindo-se uma soma por um inteiro o resto é igual ao resto da divisão da soma dos restos de cada parcela pelo mesmo número", tiramos a seguinte REGRA DE PROVA:

Aplica-se o critério-resto de divisibilidade a cada parcela e, novamente à soma dos restos, o resto final deve ser igual ao resto da soma.

Utiliza-se evidentemente um critério-resto que empregue todos os algarismos, como é o caso da "prova dos nove", e "prova dos onze", etc.

Exemplos: a) $\begin{array}{r} 3\ 285 \\ 4\ 736 \\ \hline 8\ 021 \end{array}$ 1ª parcela 0
 Prova dos nove 2ª parcela 2⁺
 soma = 2

b) 1ª parcela $(7 + 11) - 11 = 7$
 2ª parcela $13 - 7 = 6^+$
 $13 - 11 = 2$

soma = $(1 + 11) - 10 = 2$

Os exemplos seguintes são para evidenciar que essas provas não são suficientes em alguns casos, assim, a prova dos nove falha quando o erro é de múltiplo de 9 ou troca de algarismos:

$\begin{array}{r} 321 \\ 493 \\ 272^+ \\ 195 \\ \hline 1\ 191 \end{array}$ 1ª parcela 6
 2ª parcela 7⁺
 3ª parcela 2⁺
 4ª parcela 6
 $\frac{6}{21} \rightarrow 3$ soma 3

A prova dá o cálculo como certo, no entanto a soma é na verdade 1 281, houve possivelmente o esquecimento de adicionar na 2ª coluna o valor 9.

A "prova dos cinco" por exemplo só verifica a soma no último algarismo:

$\begin{array}{r} 423 \\ 268 + \\ 176 \\ \hline 867 \end{array}$ 1ª parcela 3
 2ª parcela 3⁺
 3ª parcela 1
 $\frac{1}{7} \rightarrow 2$ soma = 2

A prova dá o cálculo como certo, no entanto a soma correta é 867, disto resulta que devemos dizer simplesmente após a verificação:

"A prova não revela erro"

I. 3. SUBTRAÇÃO

Como o diminuendo é igual à soma do diminuidor com a diferença, a prova é análoga à da adição.

Exemplos: a) Prova dos nove:

$$\begin{array}{r} 486 \text{ diminuendo} \quad 0 \\ 138 \text{ diminuidor} \quad 3 \\ \hline 348 \text{ diferença} \quad 6 \end{array} + \begin{array}{r} 0 \\ 3 \\ 6 \\ \hline 9 \end{array} \rightarrow 0$$

portanto concluímos que: a prova não revela erro.

b) Prova dos nove:

$$\begin{array}{r} 343 \quad 1 \\ 125 \quad 8 \\ \hline 226 \quad 1 \\ \quad \quad 9 \end{array} \rightarrow 0 \text{ portanto o cálculo deve conter erro.}$$

I. 4. MULTIPLICAÇÃO

Pela propriedade complementar da Divisibilidade Numérica em Relação à Multiplicação: "Dividindo-se o produto por um número, o resto é igual ao resto da divisão do produto dos restos de cada fator pelo mesmo número", tiramos a Regra da Prova:

Aplica-se o critério-resto a cada fator, e novamente ao produto dos restos, o resto final deve ser igual ao resto do produto dos fatores.

Exemplo: Prova dos nove:

$$\begin{array}{r} 422 \rightarrow 8 \\ \times 25 \rightarrow \times 7 \\ \hline 2110 \\ 844 \\ \hline 10550 \end{array} \rightarrow 2$$

portanto, a prova não revela erro.

I. 5. DIVISÃO

Como na Divisão Geral de dividendo "a", divisor "b", quociente "q" e resto "r", devemos ter:

$$a = b \times q + r$$

a regra deve se basear na multiplicação e adição:

O resto do dividendo deve ser igual ao resto da soma do resto do produto do divisor pelo quociente com o resto da própria divisão.

Exemplo: Prova dos nove:

$$\begin{array}{r} 4863 \quad \underline{138} \\ 106 \quad 127 \\ \hline 303 \\ 37 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{divisor} \quad 2 \\ \text{quociente} \quad 1 \\ \text{produto} \quad 2 \\ \text{resto} \quad 1 \\ \text{soma} \quad 3 \\ \text{dividendo} \quad 3 \end{array} \times$$

portanto a prova não revela erro.

J. EXERCÍCIOS - SEQUÊNCIA XIII

1. Dados os conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 6, 13\} & B &= \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\} \\ C &= \{1, 2, 4, 8, 16, 3, 6, 9, 12, 24, 48\} \\ D &= \{2, 3, 5, 7, 10, 21, 30, 210\} \end{aligned}$$

construa os respectivos Diagramas de MASSE.

2. Determine os equimúltiplos de 7, 12 e 18, segundo o número 5, idem segundo o número 7;
3. Sabendo-se que o número 7 é divisor de A, não é divisor de B, deixando resto 3, e que também é divisor de C, deixando resto 6, pede-se o resto da divisão de:
- a) $A + B + C$ por 7, b) $A \times B + C$ por 7,
 c) $A + B \times C$ por 7, d) $A \times B \times C$ por 7,
 e) $A \times C + B$ por 7.

4. Com os dados do exercício 3 responda se podem estar certos os cálculos: a) $A + B = C$ b) $B \times C + B = A$ c) $C - B = B$
d) $C \times C + B = B \times C$
5. Utilizando a igualdade: $1000 = 8 \times 125$, e a expressão
 $N = D \times 100 + cdu$,
determine um critério-resto para o 8 (ou 125).
6. Verifique se os números:
a) 435 286 b) 12 380 c) 3 275 d) 4 266
e) 245 619 f) 103 425 g) 3 926 h) 178
são divisíveis por: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, e determine os restos.
7. Quais algarismos podemos colocar no lugar de "X" para que o número 3 58X seja divisível: a) por 2 e 5 b) por 4 e 5
c) por 2 e 9 d) por 3 e 5 e) por 11 f) por 6
g) por 6 e 9.
8. Numa urna existem menos de 40 bolas. Contando-as de 9 em 9 não sobra bola, mas, contando-as de 11 em 11 sobram 5. Quantas são as bolas?
9. Faça os cálculos e depois tire: a "prova dos nove" e "prova dos onze"
a) $35 + 68 + 125$ b) $7\ 296 + 5\ 417$
c) $382 - 145$ d) 248×34 f) $2\ 157 \times 19$
g) $5\ 286 : 45$ h) $1\ 234\ 321 : 11$
10. Sem efetuar os cálculos indicados determine o resto do valor da expressão seguinte quando se dividir por:
a) 9 b) por 11 c) por 5:
a') $((32 \times 48) + 180) - 73$
b') $8\ 292 + 35 \times 384 \times 12 - (63 : 7 + 84 \times 12)$
c') $(756 \times 325 - 2\ 048 : 16) \times 143$

EXERCÍCIOS ESPECIAIS (para um 2º estudo)

- Prove que se a soma de dois números quaisquer é divisível por 2, sua diferença também é.
SUGESTÃO: utilize $(a+b) - 2 \times b = a - b$
- Prove que o quadrado de um número ímpar é múltiplo de 8 mais uma unidade. SUGESTÃO: utilize para ímpar a forma: $2 \times k + 1$
- Prove que todo múltiplo de 4 é igual à soma de dois ímpares consecutivos. SUGESTÃO: utilize: $(2 \times k + 1) + (2 \times k - 1)$.
- Prove que se: $a \times b \mid a \times c$ então $b \mid c$.
- Prove que se $a \mid b$ e $c \neq 0$ então $a \times c \mid b \times c$.
- Quais os algarismos que devemos colocar no lugar de "x" e "y" no número $1x4y2$, para que:
a) seja divisível por 4 e 9
b) seja divisível por 9 e 11
- Prove que dados dois números pares consecutivos um é sempre divisível por 4.
SUGESTÃO: utilize para pares: $2 \times k$ e $2 \times k + 2$
- Prove que a soma dos n primeiros naturais é divisível pelo inteiro seguinte, caso ele seja ímpar.

- Prove que o produto de três inteiros consecutivos é divisível por 6. SUGESTÃO: indique-os com k , $k+1$, e $k+2$, estude os casos de k ser par ou ímpar.
- Prove que a soma dos quadrados de três números não divisíveis por 3 é múltiplo de 3. SUGESTÃO: indique as suas formas possíveis com $3 \times k + 1$ e $3 \times k' + 2$, ou $3 \times k - 1$ e $3 \times k' + 1$
- Prove que a diferença dos quadrados de dois números não divisíveis por 3 é múltiplo de 3.
- Prove a propriedade antisimétrica da Divisibilidade:
 $a \mid b$ e $b \mid a \Rightarrow a = b$

RESPOSTAS SELECIONADAS - SEQUÊNCIA XIII

- 35, 60, 90 e 49, 84 e 126
- a) 2 b) 6 c) 4 d) 0 e) -3
- a) não b) pode c) pode d) pode
- a) 0 b) $\{0, 4\}$ c) 2 d) 5 e) 6 f) $\{2, 8\}$ g) 2
- 27 10. a) a') 5, o') 2

CAPÍTULO XI

NÚMEROS PRIMOS E NÚMEROS COMPOSTOS

A. DEFINIÇÃO:

Aprendemos que um número pode ter divisores próprios e divisores impróprios (o próprio número e a unidade); disto resultam as duas definições:

DEFINIÇÃO I: Número Primo:

Um número inteiro, diferente da unidade, é primo se, e somente se, possui por únicos divisores os divisores impróprios.

NOTA: Da definição resulta que o zero não é primo; acrescentamos na definição: "diferente da unidade", para deixarmos claro que um não é primo.

DEFINIÇÃO II: Número Composto:

Um número inteiro diferente de zero e da unidade, é composto se, e somente se, possui pelo menos um divisor próprio.

Exemplos:

- a) 5 é primo, pois os únicos divisores são 1 e 5.
- b) 6 é composto, pois possui os divisores próprios 2 e 3.

Das definições, e do que já vimos anteriormente, resulta que os números inteiros podem ser classificados do seguinte modo:

Número Inteiro:

- 1 - Primeiro divisor, ou divisor universal
- p - Primos (divisores: 1 e p),
- c - Compostos (divisores: 1, c e outros),
- 0 - Último divisor, ou múltiplo universal.

DEFINIÇÃO III:

Dois ou mais inteiros são chamados primos entre si caso admitam como único divisor comum a unidade.

Exemplo:

Os números inteiros 15 e 56 são primos entre si, pois o único divisor comum é a unidade.

B. TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

"Todo número composto é igual a um produto de fatores primos".

Seja o número composto 120.

Sendo composto o número 120, possui pelo menos um divisor próprio, por exemplo temos: 60, 20, 30, etc.

Tomemos o menor divisor próprio; se 20 é o menor, é primo, pois em caso contrário admite um divisor próprio (menor que ele), que é também divisor de 120, por exemplo o 10.

Logo, 20 não é o menor divisor próprio de 120; e de fato o menor divisor próprio de 120 é o 2; e 2 é primo.

Concluimos que:

$$120 = 2 \times 60$$

Nesta oportunidade o número 120 já está fatorado, mas a fatoração não é completa.

Raciocinando novamente com 60, chegaremos à conclusão que 60 possui como menor divisor próprio um número primo, que é no caso, novamente o 2:

$$120 = 2 \times (2 \times 30) = 2 \times 2 \times 30$$

Novamente, para o 30, o menor divisor próprio deve ser primo, que é ainda o 2:

$$120 = 2 \times 2 \times (2 \times 15) = 2 \times 2 \times 2 \times 15$$

e, sucessivamente, teremos:

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Chegamos então ao quociente 5 que é primo, e teremos decomposto o 120 em fatores só primos.

De uma maneira geral, teremos:

$$N = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_n$$

com todos fatores primos.

C. FORMA GERAL DE DECOMPOSIÇÃO

No produto anterior, é claro, que algum dos fatores primos podem ser iguais, o que se verificou no exemplo numérico:

$$\begin{aligned} 120 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \\ \Leftrightarrow 120 &= 2^3 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

De uma maneira geral, qualquer número composto N pode ser escrito na seguinte Forma Geral de Decomposição:

$$N = p_1^a \times p_2^b \times p_3^c \times \dots \times p_m^m$$

onde p_1, p_2, \dots, p_m , são primos; e, a, b, c, ... m são números inteiros.

Exemplo:

Na decomposição utiliza-se a obtenção dos mesmos em ordem crescente, por divisões sucessivas; aliás, segundo o próprio raciocínio empregado nas explicações; e, na prática adota-se um dispositivo prático:

Seja $N = 360$	360	2	$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
	180	2	
	90	2	
	45	3	
	15	3	
	5	5	
	1		

D. TEOREMA DA ILIMITAÇÃO

"A sucessão dos números primos é ilimitada".

Demonstração (para um 2º estudo)

Mostraremos que dado um número primo "p" qualquer, sempre existe um número primo maior que ele.

Para isso façamos o produto de todos os primos desde 2 até

$$P: \quad P = 2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p$$

e, em seguida, adicionemos a unidade:

$$N = P + 1$$

Pode-se dar dois casos:

$$\begin{cases} N \text{ é primo} \\ N \text{ é composto} \end{cases}$$

Se N primo, já está provado, pois N+1 é maior que p, e p foi um primo qualquer escolhido.

Admitamos a segunda hipótese: N composto; portanto N admite um divisor primo "q", mas q deve ser diferente de 2, 3, 5, ... p, pois esses números dividindo exatamente P, não dividem N, pois não dividem a unidade:

$$N = P + 1$$

Se N o número "q" primo, diferente dos primos 2, 3, 5, ... p, deve ser maior que p, como pretendíamos provar.

E. OBTENÇÃO DE NÚMEROS PRIMOS:

E.1. CRIVO DE ERATÓSTENES(*)

Consiste de um simples processo de eliminação de números compostos sucessivamente, eliminando:

- a) o número 1,
- b) os múltiplos de 2, cancelando de 2 em 2, a partir do 4,
- c) os múltiplos de 3, cancelando de 3 em 3, a partir do 9,

(*) Ver nota histórica no vol. III da coleção.

- d) os múltiplos de 5, cancelando de 5 em 5, a partir do 25,
 e) os múltiplos de 7, cancelando de 7 em 7, a partir do 49, etc.

No quadro seguinte obtivemos os primos entre 1 e 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

E.2. VERIFICAÇÃO SE UM NÚMERO É OU NÃO PRIMO

O crivo de Eratóstenes apresenta defeito, pois, para se obter um primo é necessário trabalhar com muitos números da tabela; ou então, iniciar no meio desta, começando o cancelamento com o primeiro quadrado de primo possível. Pode acontecer também, de se ter necessidade de saber se um número é primo ou é composto; então é claro que não iríamos construir a tabela, ou mesmo parte dela para a eliminação.

Usamos então o seguinte critério de Verificação de Primos:

Toma-se o número e efetua-se divisões sucessi-

vas pelos primos: 3, 5, 7, 11, ...(*) :

- a) sendo divisão exata o número é composto,
 b) sendo inexata, faz-se a divisão pelo primo seguinte,
 c) repete-se as regras a) e b) até que o quociente de uma divisão seja igual ou inferior ao divisor; quando isto acontecer, o número é primo.

O critério está baseado na seguinte propriedade:

PROPRIEDADE:

Um número é primo quando não é divisível por nenhum primo cujo quadrado não o exceda.

Demonstração (para um 2º estudo)

Seja N o número e p o maior número primo tal que seu quadrado não exceda N :

$$p^2 < N$$

e, que N não seja divisível por p e por nenhum primo menor que p :

$$N = p \times q + r$$

Seja p_1 o primeiro primo divisor de N tal que:

$$p_1 > p$$

$$N = p_1 \times q$$

Como $p_1 > p$, pela hipótese feita, o seu quadrado excede N :

$$p_1^2 > N$$

mas, neste caso, será $p_1 > q$, isto é, como q_1 é também divisor de N , existe um divisor de N menor que p_1 , que é contra a hipótese, logo, não existe um número que divide N .

(*) Por 2 é fácil, basta observar o último algarismo.

Exemplo: Verificar se os números:

a) 143; b) 367; c) 113 são primos.

$$\begin{array}{r} \text{a) } 143 \overline{) 3} \\ 23 \quad 47 \\ \underline{2} \end{array} \quad \begin{array}{r} 143 \overline{) 5} \\ 43 \quad 28 \\ \underline{3} \end{array} \quad \begin{array}{r} 143 \overline{) 7} \\ 03 \quad 20 \\ \underline{0} \end{array} \quad \begin{array}{r} 143 \overline{) 11} \\ 33 \quad 13 \\ \underline{0} \end{array}$$

portanto, 143 é composto.

$$\begin{array}{r} \text{b) } 367 \overline{) 3} \\ 06 \quad 122 \\ 07 \\ \underline{1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 367 \overline{) 5} \\ 17 \quad 73 \\ \underline{2} \end{array} \quad \begin{array}{r} 367 \overline{) 7} \\ 17 \quad 52 \\ \underline{3} \end{array} \quad \begin{array}{r} 367 \overline{) 11} \\ 37 \quad 33 \\ \underline{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 367 \overline{) 13} \\ 107 \quad 28 \\ \underline{3} \end{array} \quad \begin{array}{r} 367 \overline{) 17} \\ 27 \quad 21 \\ \underline{10} \end{array} \quad \begin{array}{r} 367 \overline{) 19} \\ 177 \quad 19 \\ \underline{6} \end{array}$$

portanto, 367 é primo, pois não é divisível por nenhum primo cujo quadrado não o excede.

$$\begin{array}{r} \text{c) } 113 \overline{) 3} \\ 23 \quad 37 \\ \underline{2} \end{array} \quad \begin{array}{r} 113 \overline{) 5} \\ 13 \quad 22 \\ \underline{3} \end{array} \quad \begin{array}{r} 113 \overline{) 7} \\ 43 \quad 16 \\ \underline{1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 113 \overline{) 11} \\ 03 \quad 10 \\ \underline{0} \end{array}$$

portanto, já podemos afirmar que 113 é primo, pois o quociente é inferior ao divisor, e nenhuma divisão é exata.

F. DIVISORES DE UM NÚMERO COMPOSTO:

Do teorema da decomposição de um número num produto de primos, resultam algumas aplicações que veremos a seguir (*).

F.1. PROPRIEDADE DOS EXPOENTES:

Vimos que um número composto N pode ser escrito na Forma Geral de Decomposição:

(*) Serão feitas aplicações também ao cálculo do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, por exemplo.

$$N = p_1^a \times p_2^b \times p_3^c \times \dots \times p_m^m$$

portanto, qualquer número M que possua os mesmos fatores primos, afetados de expoentes menores ou iguais aos de N , será divisor de N , como é fácil verificar.

Seja para exemplo:

$$N = 360$$

$$\text{temos: } N = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$\text{e, seja: } M = 2^2 \times 3^2$$

que satisfaz a condição.

$$\text{Como } N = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$\text{será: } N = 2^2 \times 2 \times 3^2 \times 5$$

$$\text{ou: } N = (2^2 \times 3^2) \times (2 \times 5)$$

$$\text{ou: } N = M \times (2 \times 5)$$

o que implica ser $M \mid N$, o que de fato se verifica, pois: $M = 2^2 \times 3^2 = 36$ e $36 \mid 360$.

F.2. DISPOSITIVO PRÁTICO

Primeiramente determina-se a Forma Geral de Decomposição, operação denominada Decomposição em Fatores Primos.

Seja o caso da determinação dos divisores de 360; como já vimos antes:

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Escreve-se os fatores primos numa coluna (pode ser a mesma obtida no dispositivo prático da decomposição).

Os divisores são obtidos multiplicando-se os primos colocados à esquerda, pelos números que estejam à direita, e colocados acima deles próprios; escrevendo-se os produtos em frente, na sua linha horizontal. Para início, escreve-se a unidade, visto que é divisor universal. Os produtos repetidos não se escrevem.

1	1								
2	2								
2	4								
2	8								
3	3	6	12	24					
3	9	18	36	72					
5	5	10	20	40	15	30	60	120	
					45	90	180	360	

F.3. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA:

Os Diagramas de HASSE, que aprendemos no capítulo anterior, fornecem interessante representação do Conjunto de Divisores de um Número.

Exemplo:

N = 60	60	2	1						
	30	2	4						
	15	3	3	6	12				
	5	5	5	10	20	15	30	60	
	1								

Conjunto de Divisores:

{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 }

Representação pelo Diagrama de HASSE:

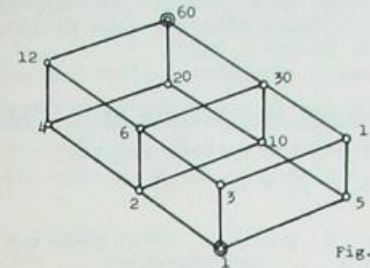


Fig. 27

O leitor observará o aspecto geométrico de um paralelogramo; assim, um número na Forma Geral:

- a) com 1 fator primo - terá representação em linha reta,
- b) com 2 fatores primos - terá representação em forma de paralelogramo,
- c) com 3 fatores primos - terá representação na forma de paralelepípedo, etc.

Exemplos:

a) $16 = 2^4$
{ 1, 2, 4, 8, 16 }

b) $72 = 2^3 \times 3^2$
{ 1, 2, 4, 3, 6, 8, 9, 12, 18, 36, 24, 72 }

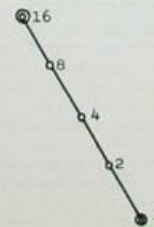


Fig. 28

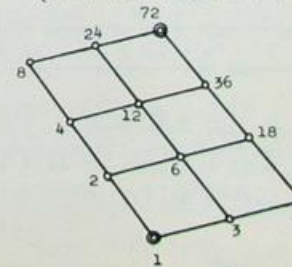


Fig. 29

NOTA: Com habilidade e prática o Diagrama de HASSE pode ser empregado como dispositivo para obtenção de todos os divisores de um número (SUGESTÃO da matemática francesa LUCIËNNE FELIX - curso ministrado para o G.E.E.M.- São Paulo- 1 962).

G. CÁLCULO DO NÚMERO DE DIVISORES DE UM NÚMERO:

Seja a Forma Geral de Decomposição:

$$N = p_1^a \times p_2^b \times \dots \times p_m^m$$

Um divisor M qualquer, de N, pode ter na sua Forma Geral o fator p_1 com expoente:

$$1, 2, 3, \dots, a$$

ou, mesmo com expoente 0, portanto de "a+1" maneiras diferentes. Idem, pode ter o fator primo p_2 com expoente:

$$1, 2, 3, \dots, b$$

ou, com expoente 0; portanto, de "b+1" maneiras diferentes.

Analogamente, os outros fatores; portanto podemos formar um divisor M qualquer de:

$$(a + 1) \times (b + 1) \times \dots \times (m + 1)$$

maneiras diferentes, logo, a fórmula do Número D de divisores(*) é dada por:

$$D = (a + 1) \times (b + 1) \times \dots \times (m + 1)$$

Exemplo: $N = 72 = 2^3 \times 3^2$

Temos: $D = (3 + 1) \times (2 + 1) = 4 \times 3 = 12$

isto é, o número de divisores de 72 é 12.

(*) Sugere-se consultar nosso livro: Combinatória e Probabilidades.

H. CÁLCULO DA SOMA DOS DIVISORES DE UM NÚMERO

Sendo:

$$N = p_1^a \times p_2^b \times \dots \times p_m^m$$

a soma dos divisores é dada pela fórmula(*)

$$S = \frac{p_1^{a+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{b+1} - 1}{p_2 - 1} \times \dots \times \frac{p_m^{m+1} - 1}{p_m - 1}$$

Exemplo:

$$N = 72 = 2^3 \times 3^2$$

temos:

$$S = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \times \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = \frac{15}{1} \cdot \frac{26}{2} = 15 \times 13$$

ou:

$$S = 195$$

I. EXERCÍCIOS - SEQÜÊNCIA XIV

- Qual é o número par que é primo ?
- Pode ser primo um múltiplo de um número "a" primo ?
- Pode ser primo um múltiplo de um número "b" composto ?
- Porque no Crivo de Eratóstenes não cancelamos:
 - os múltiplos de 9 ?
 - os múltiplos de 6 ?
 - os múltiplos de 15 ?
 - os múltiplos de 10 ?
- Construa uma tabela de primos de 1 a 400 com o auxílio do Crivo.
- Sem usar a tabela anterior, reconheça se os números seguintes são primos ou compostos:

a) 149	b) 373	c) 137	d) 361	e) 389	f) 367
--------	--------	--------	--------	--------	--------

 Verifique pela tabela.
- Idem para os números: a) 881 b) 2209 c) 977 d) 5001
- O produto de dois números é um número primo. Qual é um dos fatores ?
- Determine a Forma Geral de Decomposição em primos dos números:

a) 180	b) 270	c) 2205	d) 1000	e) 1600	f) 1800
--------	--------	---------	---------	---------	---------
- Determine os divisores dos números do exercício 9.
- Represente graficamente em Diagramas de HASSE os conjuntos de divisores dos números do exercício 9.
- Calcule o número de divisores de: a) 80 b) 50 c) 48 d) 480

(*) A demonstração foi retirada nesta nova edição, em vista de não ser ao nível do livro; forneceremos-la aos interessados.

13. Determine os divisores dos números do exercício 12, com utilização do Diagrama de HASSE para obtenção.
14. Determine o menor número com 6 divisores, que só possui fatores primos 2 e 3.
15. Idem ao exercício 14, para o maior número.
16. Determine o menor número com 12 divisores, que só possui os fatores primos 2, 3 e 5.
17. Idem ao exercício 16, mas o maior.
18. Verifique se os pares de números seguintes são primos entre si (sugestão: Utilize fatoração):
 a) 18 e 125 b) 48 e 45 c) 3600 e 3773
 d) 216 e 1125
19. Extraia as raízes usando fatoração:
 a) $\sqrt{144}$ b) $\sqrt{1024}$ c) $\sqrt[3]{8000}$ d) $\sqrt{441}$

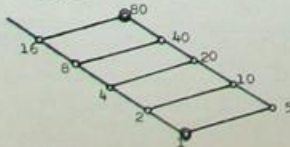
EXERCÍCIOS ESPECIAIS (para um 2º estudo):

- Determine o menor número que admite 20 divisores.
- Idem ao exercício 1, mas o maior.
- Idem ao exercício 1, mas com 24 divisores.
- Idem ao exercício 3, mas o maior.
- O que assegura o processo de cancelamento para obtenção do Crivo de Eratóstenes fornecer só primos?
- Mostre que um número primo maior que 3 pode sempre ser escrito nas formas: ou $mx6 + 1$ ou $mx6 - 1$.
- Faça a demonstração do Teorema da Decomposição, seguindo o raciocínio empregado em particular para o número 120.

RESPOSTAS SELECIONADAS - SEQUÊNCIA XIV

CAPÍTULO XI - Número Primos e Números Compostos

- 1) 2 2) sim, o múltiplo que seja ele próprio 3) não
 4) a) porque já foram cancelados, quando se fez de 3 em 3
 7) a) sim c) sim
 8) a unidade
 9) a) $2^2 \times 3^2 \times 5$
 c) $3^2 \times 5 \times 7^2$
 10) a) {1,2,4,3,6,12,9,18,36,5,10,20,15,30,60,45,90,180}
 12) a) 10 c) 10 13) a



- 14) 12
 15) 18
 16) 60
 17) 150
 18) a) sim d) não
 b) 32 c) 20 d) 21
 19) a) 12



CAPÍTULO XII

MAXIMIZAÇÃO E MINIMIZAÇÃO

A. PRELIMINARES:

Estudaremos a seguir duas operações bastante semelhantes; e, por isso vamos procurar estudá-las simultaneamente. O leitor observará que a forma que apresentaremos não é usual nos livros de Aritmética até então; isto é, cuidando das operações que conduzem a determinar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum, cujo processo é vantajoso, entre outros méritos, pela uniformização dos conceitos.

B. DIVISORES E MÚLTIPLOS COMUNS:

B.1. DIVISORES COMUNS:

Consideremos os números 18 e 12; determinemos os seus conjuntos de divisores:

$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$$

Observamos que existem elementos comuns aos dois conjuntos A e B; o conjunto constituído pelos elementos comuns a A e B chama-se Conjunto Intersecção ou simplesmente Intersecção de A e B, e representa-se por $A \cap B$.

Teremos:

$$C = A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$$

O conjunto C é o conjunto dos divisores comuns dos números 18 e 12; isto é, o conjunto dos números que dividem os números dados 18 e 12.

Como consequência, pelo que vimos no capítulo XI, caso houver dois números cujo conjunto de divisores comuns seja o conjunto unitário constituído da uni-

dade, sabemos, por definição, que os números são primos entre si.

Exemplo: 15 e 28

$$A = \{1, 3, 5, 15\}$$

$$B = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

$$C = A \cap B = \{1\}$$

B.2. MÚLTIPLOS COMUNS:

Consideremos agora, os mesmos números 18 e 12; mas, determinemos os seus conjuntos de múltiplos, com exclusão do zero(*), por exemplo, multiplicando os números dados pela sucessão de naturais: 1, 2, 3, 4, ... (**)

$$A' = \{18, 36, 54, 72, 90, 108, \dots\}$$

$$B' = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, \dots\}$$

Da mesma forma anterior, procuremos o conjunto-intersecção (também conjunto-infinito):

$$C' = A' \cap B' = \{36, 72, 108, \dots\}$$

O conjunto-intersecção C' encontrado é o conjunto dos múltiplos comuns, de 18 e 12; isto é, o conjunto dos números que gozam da propriedade de serem divisíveis pelos números dados 18 e 12.

(*) zero é múltiplo universal.

(**) a sucessão é ilimitada portanto o conjunto é infinito.

C. OPERAÇÃO DE MAXIMIZAÇÃO DO DIVISOR COMUM:

No conjunto dos divisores comuns existe um que é o maior de todos; assim, no exemplo dado, o número 6 é o maior, isto é: máximo divisor comum, e indicamos

$$18 \text{ D } 12 = 6$$

de onde seguem as definições:

DEFINIÇÃO a):

Dados dois inteiros "a e b" (não simultaneamente nulos), ao número "c", que seja o maior número do conjunto de divisores comuns, denominamos máximo divisor comum.

Indicamos: $a D b = c$
 ou $\max(a;b) = c$
 ou $m.d.c.(a;b) = c$

Definição b):

A operação, que ao par $(a;b)$ faz corresponder o inteiro "c" igual ao seu máximo divisor comum, é chamada maximização ou maximização do divisor comum.

D. OPERAÇÃO DE MINIMIZAÇÃO DO MÚLTIPLO COMUM:

De maneira análoga a anterior, o conjunto dos múltiplos comuns possui um menor que todos; assim, no exemplo dado, o número 36 é o menor, isto é: mínimo múltiplo comum de 18 e 12; e, indicamos

$$18 M 12 = 36$$

DEFINIÇÕES

a) Dados dois inteiros "a e b", ao número "c" diferente de zero, que seja o menor número do conjunto de múltiplos comuns de a e b, denominamos mínimo múltiplo comum.

Indicamos: $a M b = c$
 ou $\min(a;b) = c$
 ou $m.m.c.(a;b) = c$

b) A operação, que ao par $(a;b)$ faz corresponder o inteiro "c", igual ao seu mínimo múltiplo comum, é chamada minimização ou minimização do múltiplo comum.

E. PROPRIEDADE PARTICULAR:

E.1. DA MAXIMIZAÇÃO:

"Quando um dos números divide o outro, o máximo divisor comum é o menor".

De fato: Seja b divisor de a: $b|a$.

Pela propriedade reflexiva: $b|b$; é claro que então "b" é divisor comum de "a" e "b"; e como é o maior, pois não pode existir número maior que divida o próprio b, b é o máximo divisor comum.

Exemplo: Sejam os números 12 e 48.

Temos:

$$12 | 48$$

$$12 | 12, \text{ logo: } 12 D 48 = 12$$

E.2. DA MINIMIZAÇÃO:

"Quando um dos números é múltiplo do outro, o mínimo múltiplo comum é o maior".

De fato: Seja b divisor de a.

Pela propriedade reflexiva $a|a$; é claro então que "a" é múltiplo comum de "a e b"; e como é o menor, pois não pode existir número menor que a, que seja seu próprio múltiplo (excluimos o zero), "a" é o mínimo múltiplo comum.

Exemplo:

No exemplo anterior, como $12|48$, temos:

$$12 M 48 = 48$$

F. DETERMINAÇÃO DO MÁXIMO DIVISOR COMUM E DO MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

F.1. PELO PROCESSO ESPONTÂNEO:

O procedimento que vimos para introduzir as duas operações, serve como processo de cálculo para a determinação do máximo divisor comum, e do mínimo comum; processo que denominamos espontâneo, pois, surge da própria definição.

a) MÁXIMO DIVISOR COMUM:

1. Determina-se os conjuntos de divisores de cada número, por fatoração em primos,

2. Determina-se, por intersecção de conjuntos, o conjunto de divisores comuns,

3. Toma-se o maior número do conjunto de divisores comuns.

Exemplo: 60 e 45

60	2	1
30	2	2
15	3	3-6-12
5	5	5-10-20-15-30-60
1		

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

45	3	1
15	3	3
5	5	5-15-45
1		

$$B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

$$C = A \cap B = \{1, 3, 5, 15\}$$

Conclusão: 60 D 45 = 15

b) MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM:

1. Determina-se os conjuntos de múltiplos de cada número por multiplicação, pela sucessão dos naturais,

2. Determina-se, por intersecção de conjuntos, o conjunto dos múltiplos comuns,

3. Toma-se o menor número do conjunto de múltiplos comuns.

Exemplo: 60 e 45

$$60 \times 1 = 60$$

$$60 \times 2 = 120$$

$$60 \times 3 = 180$$

$$60 \times 4 = 240$$

$$60 \times 5 = 300$$

$$60 \times 6 = 360$$

$$60 \times 7 = 420, \text{ etc.}$$

$$45 \times 1 = 45$$

$$45 \times 2 = 90$$

$$45 \times 3 = 135$$

$$45 \times 4 = 180$$

$$45 \times 5 = 225$$

$$45 \times 6 = 270$$

$$45 \times 7 = 315$$

$$45 \times 8 = 360, \text{ etc.}$$

$$A' = \{60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, \dots\}$$

$$B' = \{45, 90, 135, 180, 225, 270, 315, 360, \dots\}$$

$$C' = A' \cap B' = \{180, 360, \dots\}$$

Conclusão: 60 M 45 = 180

NOTA: Na prática, quando se determina o segundo conjunto de múltiplos, pode-se parar quando encontrarmos o primeiro múltiplo comum; o qual, será o mínimo múltiplo comum.

F.2. ALGORITMO DE EUCLIDES PARA O MÁXIMO DIVISOR COMUM:

O processo que vamos expor consiste de um processo de divisões sucessivas, chamado comumente Algoritmo de EUCLIDES para a determinação do máximo divisor comum.

O estabelecimento do processo está baseado numa propriedade da Divisão Geral, que procuraremos explicar em seguida:

"O máximo divisor comum de dois números é igual ao máximo divisor comum do menor e do resto da divisão do maior pelo menor".

Demonstração (para um 2º estudo)

De fato: Seja $a > b$.

Dividamos "a" por "b", temos a expressão da Divisão Geral:

$$a = b \times q + r$$

e, admitamos a divisão não exata.

Seja "d" um divisor comum qualquer de "a" e "b":

$$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow d \mid b \times q$$

Da definição de subtração, temos:

$$a = b \times q + r \Leftrightarrow a - b \times q = r$$

portanto, pela propriedade da divisibilidade em relação à subtração, podemos garantir que:

$$d \mid r$$

ou que:

todo divisor comum de "a e b" é divisor de "r", portanto de "b e r".

Reciprocamente, seja "d" um divisor comum de "b e r"; temos:

$$\begin{cases} d \mid b \Rightarrow d \mid b \times q \\ d \mid r \end{cases}$$

e, como $a = b \times q + r$, pela propriedade da divisibilidade em relação à adição, podemos garantir que:

$$d \mid a$$

ou que:

todo divisor comum de "b e r" é divisor de "a", portanto de "a e b".

Reunindo as duas pequenas conclusões, podemos afirmar:

O conjunto de divisores comuns de "a e b" é igual ao conjunto de divisores comuns de "b e r".

E, finalmente, como consequência:

O máximo divisor comum de "a e b" é igual ao máximo divisor comum de "b e r".

Exemplo:

Sejam os números 36 e 20

Temos:

Conjunto dos divisores de 36:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Conjunto dos divisores de 20:

$$B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

Conjunto dos divisores comuns de 36 e 20:

$$C = A \cap B = \{1, 2, 4\}$$

Dividamos 36 por 20:

$$36 : 20 = 1$$

e sobra resto 16:

$$36 = 20 \times 1 + 16$$

Conjunto de divisores do resto 16:

$$R = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

Conjunto de divisores comuns de 20 e 16:

$$C' = B \cap R = \{1, 2, 4\}$$

que é igual ao conjunto C; e, o máximo divisor comum 4 de 36 e 20 é portanto o máximo divisor comum de 20 e 16.

PROCESSO:

O leitor observa que a propriedade pode continuar a ser aplicada até que se obtenha um resto nulo, pois então, pela propriedade dada em E.1., o máximo divisor comum é o menor da última divisão efetuada. Segue então o Algoritmo:

1. Divide-se o maior "a" pelo menor "b",
2. Se o resto r é zero, o máximo divisor comum é b,
3. Se o resto não é zero, divide-se b por r,
4. Se o novo resto é zero, o máximo divisor comum é o resto anterior,
5. Se o novo resto não é zero, divide-se o resto anterior pelo novo resto; e, assim sucessivamente.

NOTA: É claro que o processo possui um número limitado de operações, pois a sucessão dos restos é decrescente.

DISPOSITIVO PRÁTICO

	q	q'	q''	
a	b	r	r'
bxq	rxq'	r'xq''
r	r'	r''

Exemplo: a = 400, b = 280

	1	2	3
400	280	120	40
280	240	120	
120	40	0	

CONCLUSÃO: 400 D 280 = 40

F.3. PROCESSO DA DECOMPOSIÇÃO EM FATÔRES PRIMOS

A decomposição de um número em fatores primos possui várias aplicações, das quais já vimos algumas; faremos agora aplicações às operações de maximização e minimização.

Recordemos que um número é divisor de outro, se possui os seus fatores primos, também fatores primos do outro; e, afetados de expoentes menores ou iguais aos expoentes correspondentes.

Exemplo: $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

Qualquer número N' da forma:

$$N' = 2^a \times 3^b \times 5^c$$

com $a \leq 4$, $b \leq 2$, $c \leq 1$, é divisor de $N = 720$.

Por exemplo, com $a = 4$, $b = 1$ e $c = 0$,

$$N' = 2^4 \times 3 \times 5^0 = 16 \times 3 \times 1 = 48$$

e, de fato, 48 é divisor de 720, o que facilmente pode

ser verificado por divisão direta.

PROCESSOS:a) De maximização:

Da propriedade resulta que se tivermos dois números "a e b" na Forma Geral de Decomposição, um divisor comum de "a e b" é qualquer número que satisfaça, como divisor, a propriedade para ambos os números dados.

Exemplo:

Sejam os números 48 e 180.

Temos:

$$\begin{cases} 48 = 2^4 \times 3 \\ 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \end{cases}$$

Os divisores comuns são da forma

$$N = 2^x \times 3^y$$

com $x \leq 2$ (do fator primo 2 de 180)

$y \leq 1$ (do fator primo 3 de 48)

É evidente, então, que o máximo divisor comum é dado pela forma anterior, quando tomamos os maiores expoentes permitidos pelas condições.

No caso:

$$x = 2 \text{ e } y = 1$$

teremos:

$$N = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$$

ou que:

$$48 \text{ D } 180 = 12$$

de onde resulta a regra.

REGRA:

"O máximo divisor comum de dois números, é igual ao produto dos seus fatores primos comuns, tomados com os menores expoentes que estão nas suas formas gerais de decomposição".

Exemplo: 240 e 360.

240 2	360 2	
120 2	180 2	$240 = 2^4 \times 3 \times 5$
60 2	90 2	$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
30 2	45 3	$240 \text{ D } 360 = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$
15 3	15 3	
5 5	5 5	
1	1	

b) De minimização:

Ainda, da propriedade, resulta que um múltiplo comum de dois números "a e b" é qualquer que satisfaça, como múltiplo, a propriedade para "a" e para "b".

Por exemplo:

Sejam os números anteriores: 48 e 180.

Temos:

$$\begin{cases} 48 = 2^4 \times 3 \\ 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \end{cases}$$

Os múltiplos comuns são da forma

$$N = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times 11^e \times \dots$$

com: $\begin{cases} a \geq 4 & (\text{do fator } 2 \text{ de } 48) \\ b \geq 2 & (\text{do fator } 3 \text{ de } 180) \\ c \geq 1 & (\text{do fator } 5 \text{ de } 180) \\ d \geq 0 \\ e \geq 0, \text{ etc.} \end{cases}$

É claro, também aqui, que o mínimo múltiplo comum é dado pela forma anterior, quando tomamos os menores expoentes permitidos pelas condições.

No caso:

$$a = 4, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad d = 0, \quad e = 0, \dots$$

teremos:

$$N = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$$

ou que:

$$48 \text{ M } 180 = 720$$

Do raciocínio concluímos a regra seguinte:

REGRA:

"O mínimo múltiplo comum de dois números, é igual ao produto dos seus fatores primos, tomados com os maiores expoentes que estão nas suas formas gerais de decomposição".

Exemplo: $\begin{cases} a = 240 \\ b = 360 \end{cases}$

$$\begin{cases} 240 = 2^4 \times 3 \times 5 \\ 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \end{cases}$$

$$240 \text{ M } 360 = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$$

DISPOSITIVOS PRÁTICOS:

Os processos estudados de maximização e de minimização podem ser aplicados de uma maneira mais simples, com a utilização de um dispositivo prático:

a) De maximização

Na prática, coloca-se os números dados em coluna, simultaneamente para a pesquisa dos fatores.

Opera-se por divisões sucessivas de cada número pelos fatores primos comuns; para isto, pode-se empre-

gar para facilidade os critérios de divisibilidade. Desta forma passa-se ao fator primo seguinte sempre que houver um número não divisível pelo fator primo testado.

Exemplo:
$$\begin{cases} a = 240 \\ b = 360 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 240 - 360 & 2 \\ 120 - 180 & 2 \\ 60 - 90 & 2 \\ 30 - 45 & 3 \text{ (o segundo número não é divisível por 2)} \\ 10 - 15 & 5 \text{ (o primeiro número não é divisível por 3)} \\ 2 - 3 & - \text{ (não há mais fator primo comum)} \\ \hline & 2^3 \times 3 \times 5 = 120 \end{array}$$

Conclusão: $240 \text{ D } 360 = 120$

b) De minimização

O procedimento é análogo ao anterior; mas, passa-se ao fator primo seguinte somente quando nenhum dos números é divisível pelo fator primo testado; e, quando não é possível a divisão de um deles, copia-se novamente o número.

Exemplo:

$$\begin{cases} a = 240 \\ b = 360 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 240 - 360 & 2 \\ 120 - 180 & 2 \\ 60 - 90 & 2 \\ 30 - 45 & 2 \text{ (o 30 ainda é divisível por 2)} \\ 15 - 45 & 3 \text{ (copiou-se o 45)} \\ 5 - 15 & 3 \text{ (15 ainda é divisível por 3)} \\ 5 - 5 & 5 \text{ (copiou-se o 5)} \\ 1 - 1 & 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720 \end{array}$$

Conclusão:

$$240 \text{ M } 360 = 720$$

G. PROPRIEDADES GERAIS:

G.1. DO DIVISOR DO MÁXIMO DIVISOR COMUM:

"Todo divisor comum de dois números é divisor do máximo divisor comum".

A propriedade é evidente em exemplos numéricos, veja-se o seguinte:

$$\begin{cases} a = 18 \\ b = 12 \end{cases}$$

O conjunto dos divisores comuns C:

$$C = \{1, 2, 3, 6\}$$

possui todos os elementos, divisores do 6, que é o máximo divisor comum de 12 e 18.

Demonstração (para um 2º estudo)

A prova da propriedade está baseada no próprio Algoritmo das Divisões Sucessivas.

Assim, vimos que os divisores comuns de "a e b" são divisores comuns de "b e r"; ora, se "r" é o máximo divisor comum, já está provado.

Caso "r" não seja o máximo divisor comum, todo divisor de "b e r" é divisor comum de r e r', onde r' é o segundo resto; se r' é o máximo, está provado; se não é, podemos continuar com o raciocínio. Obrigatoriamente um resto deverá ser o máximo; e, portanto, divisível pelo divisor comum de "a e b".

NOTA: Pode-se mostrar a veracidade também, raciocinando com o processo da decomposição em fatores primos.

G.2. DOS MÚLTIPLOS DO MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM:

"Todo múltiplo comum de dois números é múltiplo do mínimo múltiplo comum".

Também aqui, a propriedade é facilmente verificável através de exemplo numérico:

Sejam os números 18 e 12; o conjunto dos múltiplos comuns

$$C' = \{36, 72, 108, \dots\}$$

possui todos os elementos múltiplos de 36, que é o mínimo múltiplo comum.

Demonstração (para um 2º estudo)

A prova da veracidade da propriedade baseia-se na expressão da divisão geral, como veremos a seguir.

Seja N um múltiplo, e " m " o mínimo múltiplo comum. Dividindo N por m , teremos um quociente q e um resto r :

$$N = m \times q + r \quad (r < m)$$

Caso N não seja múltiplo de m , o resto r não é nulo.

Como " a e b " são divisores dos seus múltiplos comuns, " N e m " serão também de " N e $m \times q$ "; e, como $N - m \times q = r$, pela propriedade da divisibilidade em relação à subtração, podemos afirmar que " a e b " serão divisores de " r "; ou que " r " é múltiplo comum de " a e b ", o que é absurdo, pois $r < m$, e " m " é o menor múltiplo comum.

G.3. DOS NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI:

a) De maximização:

"O máximo divisor comum de dois números primos entre si é a unidade".

De fato, é consequência da própria definição de números primos entre si; pois, estes são os números que possuem por divisor comum somente a unidade.

$$12 \text{ D } 35 = 1$$

pois 12 e 35 são primos entre si.

b) De minimização:

"O mínimo múltiplo comum de números primos entre si é igual ao produto dos números".

De fato, as formas gerais de decomposição em fatores primos possuem os fatores primos todos diferentes (pela própria definição de números primos entre si); logo, o mínimo múltiplo comum será constituído pelo produto de todos fatores primos com os respectivos expoentes; e, portanto, igual ao seu produto.

Exemplo:

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$35 = 5 \times 7$$

portanto:

$$12 \text{ M } 35 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 12 \times 35 = 420$$

G.4. DOS QUOCIENTES PRIMOS ENTRE SI:

a) De maximização:

"Dividindo-se dois números pelo seu máximo divisor comum os quocientes são primos entre si".

Demonstração (para um 2º estudo)

Seja " a e b " os números dados e " d " o máximo divisor comum.

Temos:

$$\begin{cases} a = d \times q \\ b = d \times q' \end{cases}$$

Caso " q e q' " não fossem primos entre si, admitiriam um divisor comum diferente da unidade; por exemplo " m "; isto é:

$$\begin{cases} q = m \times q'' \\ q' = m \times q''' \end{cases}$$

Substituindo, teríamos:

$$\begin{cases} a = (d \times m) \times q'' \\ b = (d \times m) \times q''' \end{cases}$$

isto é, $(d \times m)$ seria divisor comum de " a e b ", e maior que o próprio máximo divisor comum " d ", o que é absurdo.

Exemplo: $12 \text{ D } 54 = 6$

$$\text{Temos: } \begin{cases} 12 : 6 = 2 \\ 54 : 6 = 9 \end{cases}$$

e, de fato, 2 e 9 são primos entre si.

b) De minimização:

"Dividindo-se o mínimo múltiplo comum pelos números dados, os quocientes obtidos são primos entre si".

Demonstração (para um 2º estudo)

Sejam "a e b" os números e "m" o mínimo múltiplo comum.

Temos:

$$\begin{cases} m = a \times q \\ m = b \times q' \end{cases}$$

Caso "q e q'" não sejam primos entre si, admitem um divisor comum "d" diferente da unidade; isto é:

$$\begin{cases} q = q'' \times d \\ q' = q''' \times d \end{cases}$$

portanto:

$$\begin{cases} m = (a \times q'') \times d \\ m = (b \times q''') \times d \end{cases}$$

ou que, "m" é igual ao produto de $a \times q''$ por d, ou de $b \times q'''$ por d; portanto:

$$a \times q'' = b \times q'''$$

e, seja m' igual a este produto:

$$m = m' \times d$$

verificamos então, que m' que é múltiplo comum de "a e b" é menor que "m", que é o mínimo múltiplo comum, o que é absurdo.

Exemplo: $12 \text{ M } 40 = 120$

$$\text{Temos: } \begin{cases} 120 : 12 = 10 \\ 120 : 40 = 3 \end{cases}$$

e, de fato, 10 e 3 são primos entre si.

G.5. DO PRODUTO DOS NÚMEROS:

"Multiplicando-se o máximo divisor comum pelo mínimo múltiplo comum de dois números, obtem-se o produto dos dois números".

Demonstração (para um 2º estudo)

$$\text{Sejam } \begin{cases} a \text{ D } b = d \\ a \text{ M } b = m \end{cases}$$

Pela propriedade G.4. a os números

(a : d) e (b : d) são primos entre si.

Pela propriedade G.3.b. o mínimo múltiplo comum de primos entre si é igual ao produto, portanto:

$$(a : d) \text{ M } (b : d) = (a : d) \times (b : d)$$

Mas, multiplicando dois números por um mesmo número o mínimo fica multiplicado por este número (As Formas Gerais de Decomposição em Fatores Primos ficarão acrescidas dos fatores desse número).

$$a \text{ M } b = [(a:d) \text{ M } (b:d)] \times d$$

logo: $a \text{ M } b = [(a:d) \times (b:d)] \times d$

e, pela propriedade associativa:

$$a \text{ M } b = (a:d) \times [(b:d) \times d]$$

ou:

$$a \text{ M } b = (a:d) \times b$$

e, ainda:

$$a \text{ M } b = (a \times b) : d$$

e, pela definição de divisão:

$$(a \text{ M } b) \times d = a \times b$$

ou, finalmente:

$$(a \text{ M } b) \times (a \text{ D } b) = a \times b$$

Exemplo:

$$\begin{cases} 12 D 18 = 6 \\ 12 M 18 = 36 \end{cases}$$

$$(12 D 18) \times (12 M 18) = 6 \times 36 = 216$$

que é igual ao produto $12 \times 18 = 216$.

H. PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DA MAXIMIZAÇÃO E DA MINIMIZAÇÃO

H.1. PROPRIEDADE COMUTATIVA:

a) $a D b = b D a$

b) $a M b = b M a$

Esta propriedade resulta da comutatividade da intersecção de conjuntos. Assim, teremos:

$$A \cap B = B \cap A$$

onde, A e B são os conjuntos de divisores (ou múltiplos) comuns de "a" e "b" respectivamente.

Exemplos:

a) $12 D 18 = 6$ e $18 D 12 = 6$

b) $12 M 18 = 36$ e $18 M 12 = 36$

H.2. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA:

a) $(a D b) D c = a D (b D c)$

b) $(a M b) M c = a M (b M c)$

Provemos a segunda (para um 2º estudo):

Temos por definição de Minimização:

(1) $a M b \mid [(a M b) M c]$

(2) $c \mid [(a M b) M c]$

(3) $a \mid a M b$

(4) $b \mid a M b$

Pela propriedade transitiva da divisibilidade em (3) e (1),
(4) e (1):

(5) $a \mid [(a M b) M c]$

(6) $b \mid [(a M b) M c]$

Pela propriedade G.2., todo múltiplo comum de "b" e "c" é múltiplo do mínimo $b M c$; portanto, por (2) e (6):

(7) $b M c \mid [(a M b) M c]$

idem, por (5) e (7):

(8) $[a M (b M c)] \mid [(a M b) M c]$

Na parte seguinte procuraremos provar a (8) no outro sentido, pois então, pela propriedade anti-simétrica estará provada a associatividade. De fato:

(1') $b M c \mid [a M (b M c)]$

(2') $a \mid [a M (b M c)]$

(3') $b \mid b M c$

(4') $c \mid b M c$

Por (3') e (1'), (4') e (1'), temos:

(5') $b \mid [a M (b M c)]$

(6') $c \mid [a M (b M c)]$

Por (2') e (5'):

(7') $a M b \mid [a M (b M c)]$

Por (6') e (7'), temos

(8') $[a M (b M c)] \mid [a M (b M c)]$

Pela (8) e (8') resulta finalmente que:

$$(a M b) M c = a M (b M c).$$

Exemplo (De maximização)

Sejam os números 36, 24 e 18.

$$\begin{cases} 36 \text{ D } 24 = 12 \\ 12 \text{ D } 18 = 6 \end{cases}$$

portanto:

$$(36 \text{ D } 24) \text{ D } 18 = 6$$

Temos:

$$\begin{cases} 24 \text{ D } 18 = 6 \\ 36 \text{ D } 6 = 6 \end{cases}$$

e, então:

$$36 \text{ D } (24 \text{ D } 18) = 6$$

ou que:

$$(36 \text{ D } 24) \text{ D } 18 = 36 \text{ D } (24 \text{ D } 18)$$

NOTA: Esta propriedade permite trabalharmos sem os sinais de reunião.

H.3. ELEMENTO NEUTRO:

a) "0 zero é o elemento neutro da maximização".

$$a \text{ D } 0 = 0 \text{ D } a = a$$

b) "A unidade é o elemento neutro da minimização".

$$a \text{ M } 1 = 1 \text{ M } a = a$$

São conseqüências imediatas dos fatos de serem:

zero = múltiplo universal

um = divisor universal

I. NOTAS COMPLEMENTARES:

Muitas vezes se tem necessidade de extrair, ou o máximo divisor comum, ou o mínimo múltiplo comum de vários números. O leitor observará que a definição dada é a mesma; e portanto, o processo espontâneo é aplicável, bem como os outros processos.

O processo das divisões sucessivas fornece o máximo só de dois números, portanto, deverá ser aplicado sucessivamente; entretanto, o calculista deverá fazer bom uso das propriedades gerais e estruturais para diminuir o número de operações.

Faremos a seguir um exemplo de maximização e um de minimização para três números pelos vários processos.

Sejam os números: 120, 80 e 60.

a) Espontâneo:

Conjuntos de divisores (pode ser usada a fatoração em primos):

$$\text{De } 120: A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$$

$$\text{De } 80: B = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80\}$$

$$\text{De } 60: C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

$$A \cap B \cap C = \{1, 2, 5, 10, 20\}$$

$$120 \text{ D } 80 \text{ D } 60 = 20$$

Conjuntos de múltiplos:

$$\text{De } 120: A' = \{120, 240, 360, 480, \dots\}$$

$$\text{De } 80: B' = \{80, 160, 240, 320, 400, 480, \dots\}$$

$$\text{De } 60: C' = \{60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, \dots\}$$

$$A' \cap B' \cap C' = \{240, 480, \dots\}$$

$$120 \text{ M } 80 \text{ M } 60 = 240$$

b) Por Decomposição em Fatores Primos:

120		2
60		2
30		2
15		3
5		5
1		1

80		2
40		2
20		2
10		2
5		5
1		1

60		2
30		2
15		3
5		5
1		1

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$
 $80 = 2^4 \times 5$
 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$$120 \text{ D } 80 \text{ D } 60 = 2^2 \times 5 = 20$$

$$120 \text{ M } 80 \text{ M } 60 = 2^4 \times 3 \times 5 = 240$$

c) Dispositivo Prático:

Maximização:

120	-	80	-	60		2
60	-	40	-	30		2
30	-	20	-	15		5
6	-	4	-	3		5
						$2^2 \times 5 = 20$

Minimização:

120	-	80	-	60		2
60	-	40	-	30		2
30	-	20	-	15		2
15	-	10	-	15		2
15	-	5	-	15		3
5	-	5	-	5		5
1	-	1	-	1		5
						$2^4 \times 3 \times 5 = 240$

d) Maximização por Divisões Sucessivas:

120		80 ¹		40 ²
80		80		
40		0		

 $120 \text{ D } 80 = 40$

60		40 ¹		20 ²
40		40		
20		0		

 $60 \text{ D } 40 = 40 \text{ D } 60 = 20$

Conclusão: $(120 \text{ D } 80) \text{ D } 40 = 20$

NOTA I: Mas como $60|120$, podemos eliminar 120 do processo, fazemos só com 60 e 80.

80		60 ¹		20 ³
60		60		
20		0		

portanto: $120 \text{ D } 80 \text{ D } 60 = 80 \text{ D } 60 = 20$

NOTA II: Para a minimização, como $60|120$, podemos eliminar o 60 do processo; e, fazemos só com 120 e 80: $120 \text{ M } 80 \text{ M } 60 = 120 \text{ M } 80$.

J. EXERCÍCIOS - SEQUÊNCIA XV

- Dados os pares de números, determine pelo processo espontâneo o seu máximo divisor comum:
 - 80 e 60;
 - 120 e 75;
 - 140 e 125;
 - 35 e 48.
- Idem, ao exercício 1, o seu mínimo múltiplo comum.
- Determine, pelo processo de divisões sucessivas, o máximo divisor comum dos pares:
 - 400 e 360;
 - 380 e 150;
 - 240 e 539.
- Determine, pelo processo de decomposição em fatores primos, o máximo divisor comum dos pares de números do exercício 1, e também de:
 - 90 e 140;
 - 48 e 60;
 - 72 e 24;
 - 36 e 108.
- Mostre, com os conjuntos de divisores dos números 480 e 90, que o máximo divisor comum de dois números é igual ao máximo divisor comum do menor com o resto da divisão do maior pelo menor. Continue a aplicar o raciocínio com os novos restos.
- Idem, ao exercício 4, o seu mínimo múltiplo comum.
- O que você pode afirmar em relação ao m.d.c. e ao m.m.c. dos pares de números seguintes, e por que?
 - 120 e 40;
 - 32 e 32;
 - 1 e 12;
 - 11 e 7;
 - 12 e 77;
 - 20 e 80.

8. Escreva regras especiais para o exercício 7b, 7c, 7d, 7e; análogas a que empregou para o exercício 7a e 7f; que, aliás, foi dada no texto. Aplique-as a exemplos escolhidos por você mesmo.
9. Calcule o m.d.c. e o m.m.c. pelo dispositivo prático dos fatores primos, para os pares:
a) 54 e 36; b) 70 e 80; c) 36 e 60.
10. O m.d.c. e o m.m.c. de dois números são respectivamente 12 e 72; um dos números é 24, qual é o outro?
11. O m.d.c. de dois números é 36, e o maior 288. Determine o menor. SUGESTÃO: Empregue a propriedade da maximização dos quocientes primos entre si; pode haver várias soluções.
12. O m.m.c. de dois números é 48, e um deles é 24. Calcule o outro. SUGESTÃO: Empregue a propriedade da minimização dos quocientes primos entre si.
13. Calcular dois números conhecendo sua soma e seu m.d.c.:
a) Soma = 60 b) Soma = 108
a D b = 12 a D b = 12
14. Calcular dois números conhecendo sua diferença e seu m.d.c.:
a) Diferença = 40 b) Diferença = 15
a D b = 10 a D b = 15
15. Calcular dois números conhecendo só seu m.d.c. e m.m.c.:
a) a D b = 15 b) a D b = 4
a M b = 180 a M b = 24
16. Na pesquisa do m.d.c. por divisões sucessivas, obteve-se os quocientes: 1, 2, 2, 3, 2. Calcular os números sabendo-se o m. d. c.:
a) a D b = 15 b) a D b = 20
17. Aplicando as propriedades, e sem efetuar os cálculos de maximização ou minimização, mostre que:
a) (12 D 36) D 6 = 6
b) 15 D (30 D 45) = 15
c) (60 M 20) D (15 M 5) = 15
18. Idem, determine:
a) (0 D 50) D 10 b) (1 D 20) M 10
c) (1 M 8) M (12 D 4) d) (11 D 7) M (8 D 2)
19. Verifique, através de exemplos, que a maximização é distributiva em relação à minimização:
a) a D (b M c) = (a D b) M (a D c)
b) (a M b) D c = (a D c) M (b D c)
20. Idem, através de exemplos, que a minimização é distributiva em relação à maximização:
a) a M (b D c) = (a M b) D (a M c)
b) (a D b) M c = (a M c) D (b M c)
21. Calcule o m.d.c. e o m.m.c. dos números:
a) 48, 60 e 36 b) 60, 150 e 180
c) 120, 240, 80 e 360 d) 45, 105, 135 e 180

PROBLEMAS:

1. Deseja-se dividir 4 peças de fazenda de comprimento: 64 m, 80 m, 120 m e 160 m, em peças menores, todas com o mesmo comprimento e de maior comprimento possível. Calcule o número de peças e o comprimento de cada uma.
2. Um sítio quer dividir dois róis de arame farpado de 40 m e 50 m, em pedaços iguais e de maior tamanho possível. Calcule o comprimento e quantos róis obterá.
3. Dois andarilhos partiram juntos de uma cidade com mesmo destino. Um anda 15 horas seguidas e descansa 6 horas; o outro, anda 18 horas seguidas, mas descansa 9 horas. Quando que ambos partirão novamente juntos? Quantas horas descansou cada um?
4. Um letreiro luminoso possui 2 palavras. A primeira acende cada 12 segundos, e a outra, cada 15 segundos. Quantos segundos decorrem para que ambas palavras sejam acendidas simultaneamente? Quantas vezes acende cada uma no intervalo?
5. Uma floricultura possui 120 cravos, 180 rosas e 90 orquídeas. Como poderá formar ramalhêtes com o mesmo maior número de flores de cada espécie? Quantos ramalhêtes formará?
6. Uma companhia de aviação mantém aviões que saem do Brasil para 4 países; os quais saem respectivamente cada 6 dias, cada 8 dias, cada 10 dias e cada 7 dias. Num certo dia partiram todos; depois de quantos dias tornarão a partir juntos e quantas viagens terá feito cada um?
7. Uma escada dá certo, subindo de 6 em 6 degraus e de 4 em 4; qual é o menor número de degraus que a escada pode possuir?
8. Numa corrida de bicicletas, o mais rápido dá cada volta em 18 segundos, o segundo dá cada volta em 24 segundos, e o terceiro em 30 segundos. Partindo juntos, e admitindo que mantenham a mesma velocidade, depois de quanto tempo passarão juntos e quantas voltas terá dado cada um?

RESPOSTAS SELECIONADAS - SEQUÊNCIA XV

CAPÍTULO XIII - MAXIMIZAÇÃO E MINIMIZAÇÃO

- 1) a) 20 c) 5 2) a) 240 c) 1 750
3) a) 40 4) e) 10 h) 36
7) a) 120 D 40 = 40 e 120 M 40 = 120, pois 40 | 120
d) 11 D 7 = 1 e 11 M 7 = 77, pois 7 e 11 são primos
9) b) 10 e 560 10) 36 11) 36, ou 180, ou 252
12) 48 ou 16 13) b) 12 e 96, ou 24 e 84, ou 48 e 60
14) a) 50 e 10, 70 e 30, etc.
15) a) 15 e 180, ou 45 e 60
16) a) 825 e 585
17) a) (12 D 36) D 6 = 12 D 6 = 6

- 17) b) $15 D (30 D 45) = (15 D 30) D 45 = 15 D 45 = 15$
 17) c) $(60 M 20) D (15 M 5) = 60 D 15 = 15$
 18) a) $(0 D 50) D 10 = 50 D 10 = 10$
 18) b) 10 18) c) 4 18) d) 2
 21) a) 12 e 720

PROBLEMAS:

- 1) 8m e 53 peças
 3) 189 h e descanso: 54 h e 63 h
 5) 30 flôres, formará 13
 7) 12

CAPÍTULO XIII.

NÚMEROS RACIONAISA. PRELIMINARES:

Os números fracionários são conhecidos desde à antigüidade; e, parece, sua introdução é devida à necessidade de se exprimir a medida de algumas grandezas. Os egípcios tinham já conhecimento das frações, como atesta o famoso Papiro de Rhind, datando de 1 500 a 2 000 a.C., o Papiro de Ahmés, como outras documentações egípcias, indicam que eles utilizaram frações de numerador unitário e raramente outro numerador.

Outra causa para o estudo dos novos números, e análoga é a da operação de dividir ser só possível quando o primeiro número é múltiplo do segundo.

A aprendizagem inicial das frações se faz por forma intuitiva, baseando-se principalmente em considerações geométricas da medição, do confronto de uma grandeza em várias grandezas iguais que são tomadas como unidades fracionárias.

Um desenvolvimento teórico baseado em grandezas assume várias dificuldades, a introdução do conceito de grandezas homogêneas, para as quais se deverá definir a relação de igualdade, a operação de adição, gozando da unicidade, comutatividade e associatividade, e as relações de supervalência e prevalência, o conceito de grandeza múltipla e de grandeza sub-múltipla. Para a introdução do conceito de grandeza sub-múltipla se faz necessário "aceitar" o princípio de divisibilidade indefinida, que consiste em "aceitar" que para qualquer grandeza A e para qualquer número natural n existe uma outra grandeza B, tal que seja:

$$n \cdot B = A$$

Só depois de tal aparato se poderá definir as grandezas do tipo B como sub-múltiplas de A, ou como enésimas parte de A, se adotará a notação simbólica:

$$B = \frac{1}{n} A$$

com as leituras: um meio, um terço,..... denominadas unidades fracionárias.

Quando $n = 1$, se terá

$$B = \frac{1}{1} A$$

que equivale a 1. $B = A$, ou $B = 1$, que leva a tomar o símbolo $1/1$ como 1, isto é, unidade inteira, ou inteiro simplesmente.

Para o símbolo geral de fração $\frac{m}{n}$, se definirá

$$\frac{m}{n} A = m \left(\frac{1}{n} A \right)$$

isto é, a fração m/n da grandeza A , é igual à m grandezas iguais a $\frac{1}{n}$ ésima parte de A ; e, para resultados operacionais, é necessário a demonstração de que:

$$m \left(\frac{1}{n} A \right) = \frac{1}{n} (m A)$$

isto é, m grandezas iguais à $\frac{1}{n}$ ésima parte de A é igual à $\frac{1}{n}$ ésima parte de m grandezas A .

Pelas dificuldades inerentes a este desenvolvimento teórico, que recorre ao método sintético, julgamos preferível e muito mais formador desenvolvermos a teoria das frações pelo método analítico, para cujas definições lançaremos mão dos dados intuitivos dos leitores, em particular dos normalistas, futuros professores primários.

B. NÚMEROS RACIONAIS

B.1. INTRODUÇÃO

Para a equação $b \cdot x = a$, nem sempre há solução, visto que para a solução é exigido que b seja divisor de a ($b \mid a$), como em $3x = 9$, e por exemplo em $3x = 2$, 3 não é divisor de 2.

Nós sabemos, da vida prática, que é necessária a sua resolução; assim, como no 1º caso, admita-se termos 9 doces para repartirmos por 3 meninos.

Indicando com x o número de doces de cada menino, teremos evidentemente a equação:

$$3x = 9$$

cujas resolução se obtém dividindo 9 por 3:

$$x = 9 : 3$$

$$\text{ou } x = 3$$

No segundo caso, teríamos à imagem, 2 doces para repartir por 3 meninos, e a equação seria:

$$3x = 2$$

É evidente que deveríamos dividir 2 por 3, o que não é possível trabalhando só com inteiros; mas na prática, como em outras situações, o problema é resolvido repartindo os 2 doces em partes menores, por exemplo:

a) dividindo cada doce em 3 partes, ficando portanto com 6 partes e dando 2 partes a cada um; ou b) dividindo cada doce em 2 partes, uma grande e uma pequena, a grande o dobro da menor, e dando a cada menino uma parte grande ou então 2 partes pequenas.

Sabemos então que a equação possui sempre solução, não com um inteiro, mas de qualquer forma, utilizando os dois inteiros: 9 e 3 ou 2 e 3, de onde a sugestão para definirmos um novo tipo de número, ao qual denominamos número racional, ampliando o conceito de número.

B.2. DEFINIÇÃO 1

Número racional, ou número fracionário x , é o número que satisfaz a equação $bx = a$, onde " a e b " são inteiros, e $b \neq 0$.

Adotaremos as seguintes notações simbólicas, para o número racional, isto é, o seu númeral é:

$$(a, b) \quad \text{ou} \quad a/b \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}$$

onde, a primeira componente do par é denominado numerador, e a segunda denominador, do número racional. Denominamos também fração ao numeral do número fracionário.

O leitor observa que a referência à equação nos indica somente um ponto de apoio mais concreto; entretanto, na verdade, estamos definindo número fracionário de um par de números inteiros, com o segundo não nulo, de onde a definição equivalente mais abstrata:

DEFINIÇÃO 10

Número racional (ou número fracionário) é um número representado por um par ordenado de números inteiros, com a segunda componente não nula, satisfazendo determinadas condições.

Estas condições iremos fornecendo por intermédio de novas definições:

OBSERVAÇÃO:

É importante que se observe que o número racional, o número fracionário, é definido, portanto, por um par ordenado de inteiros; assim, na equação: um é o produto e o outro é o multiplicador, o que nos leva à notação com ordenação dos inteiros.

Nos exemplos, o número racional que resolve a nossa equação $3x = 9$, não é o inteiro 3, mas constituído do par (9;3) ou o par $9/3$; e na segunda equação: $3x = 2$, o número racional solução é constituído do par, ou mesmo o par (2;3) ou $2/3$.

Como sabemos que a solução da primeira equação é também, quando trabalhamos com números inteiros, igual ao inteiro 3, quociente de 9 e 3, e $4 : 1 = 3$, isto sugere a colocar os inteiros como números racionais; assim o inteiro 3, nos o colocaríamos como racional identificando-o com o número racional (3;1) ou $3/1$.

De uma maneira geral, isto sugere a identificar

os inteiros "a" com os números racionais tendo a primeira componente igual a "a" e a segunda componente igual a "1".

Mas para isto é necessário que adotemos definições para as operações com os números racionais, que sejam consistentes com a identificação dos inteiros com o caso particular.

B.3. IGUALDADE E EQUIVALÊNCIA

B.3.1. RELAÇÕES

Aprendemos no capítulo I o conceito de produto cartesiano de dois conjuntos; faremos uma rápida revisão, para depois introduzirmos a noção de relação e, de modo especial, as relações de equivalências.

Recordemos:

Dados dois conjuntos A e B, chamamos produtos cartesianos dos conjuntos, nessa ordem, ao conjunto de todos pares ordenados que possuem a primeira coordenada pertencente ao conjunto A e a segunda coordenada pertencente ao conjunto A e a segunda coordenada pertencente ao conjunto B.

Entre alguns elementos dos conjuntos sempre existe alguma particularidade que os relacione.

Vejamos alguns exemplos:

a) Tomemos os conjuntos:

$$A = \{2, 1, 3\}$$

$$B = \{5, 7, 4, 10, 8\}$$

formando o produto cartesiano, vamos encontrar um conjunto de pares ordenados, onde a segunda coordenada está ligada à primeira por duas operações: multiplicação e adição; de fato, o conjunto de pares:

$$\{(2,7), (1,4), (3,10)\}$$

que é sub-conjunto do produto cartesiano $A \times B$ possui a segunda coordenada igual ao triplo da primeira mais uma unidade.

Com o mesmo produto cartesiano poderemos encontrar outros conjuntos de pares com outras relações, como é o caso do conjunto: $(2,5), (3,7)$, onde multiplicando-se o primeiro elemento por 2 e adicionando uma unidade, obtêm-se o segundo elemento do par.

b) Tomemos os conjuntos:

$$C = \{\text{Segismundo, João, Luiz}\}$$

$$D = \{\text{Lúcia, Maria, Eurico, Pitico, Filipin}\}$$

formando o produto cartesiano $C \times D$ poderemos encontrar entre alguns pares várias ligações, de comparação, sociais, preferências, dominâncias, etc...

Assim, admite-se que Segismundo seja gordo, ou baixo, ou rico, etc.; é bem possível que o conjunto de pares:

$$\{(\text{Segismundo, Eurico}), (\text{Segismundo, Pitico}), (\text{Segismundo, Filipin})\}$$

seja o conjunto dos pares para os quais é válida a relação: "é mais gordo que", ou "é mais baixo que", etc.; portanto um sub-conjunto de um produto cartesiano define uma relação.

Em geral estuda-se as relações dos elementos de um conjunto com os próprios elementos do conjunto, isto é, faz-se o produto cartesiano de um conjunto por si mesmo: $A \times A$.

Muitas vezes o relacionamento se faz verificando-se, se para elementos x e y do conjunto, é válida uma propriedade, um critério, etc.

Assim, se os pares ordenados $(x;y)$ de elementos de um conjunto A satisfazem ou não uma propriedade R , diremos que está definida sobre o conjunto A uma relação binária R .

Quando a relação R é verificada para um par

$(x;y)$, indicamos:

$$x R y \quad \text{para } (x;y) \in R$$

Em caso contrário, indicamos:

$$x \bar{R} y \quad \text{ou} \quad x \not R y .$$

B.3.2. PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES:

a) Quando para todo elemento x do conjunto A é verificado $x R x$, dizemos que a relação R é reflexiva em A .



Fig. 30

EXEMPLOS:

A relação de divisibilidade definida sobre o conjunto de inteiros goza da propriedade reflexiva, pois todo número é divisor de si mesmo: $x | x$; mas a relação "maior que" é irreflexiva.

b) Quando para todo par $(x;y)$ do conjunto A , se tivermos $x R y$ então se terá $y R x$, dizemos que a relação R é simétrica em A .

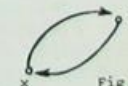


Fig. 31

Exemplos:

A relação de divisibilidade não é simétrica; a relação "par de" não é simétrica, a relação "disjuntido de" é simétrica, a relação de paralelismo entre retas é simétrica, etc.

c) Quando para todos elementos x, y e z do conjunto A , se tivermos $x R y$ e $y R z$, então se terá $x R z$, dizemos que a relação R é transitiva em A .

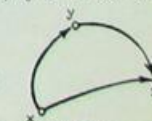


Fig. 32

Exemplos:

A relação de desigualdade "maior que" é transitiva, a relação de divisibilidade "é múltiplo de" é também transitiva, mas a relação "tio de" não é tran-

sitiva; a relação "disjunto de" pode ser ou não transitiva, conforme o conjunto de conjuntos considerado.

B.3.3. RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA E CLASSE DE EQUIVALÊNCIA

Entre as relações, algumas gozam de três propriedades, neste caso diremos que a relação é relação de equivalência; portanto, uma relação de equivalência possui as três propriedades abaixo resumidas:

Reflexibilidade

Simetria

Transitividade

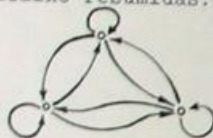


Fig. 33

O exemplo mais simples e importante é o da relação de igualdade "igual a" de símbolo " $=$ ".

É útil observar que a denominação está de acordo com a noção intuitiva que temos de equivalência; assim, entende-se, que debaixo daquela relação, daquela propriedade, daquele critério, os elementos se equivalem. No próprio início da Aritmética temos visto conjuntos equivalentes, no sentido numérico, portanto equivalentes pela relação numérica, isto é, de possuem o mesmo número de elementos.

A relação de congruência é um exemplo de relação de equivalência que já nos foi importante. De fato, o leitor deve estar lembrado que dois números " a " e " b " são congruos segundo um determinado número d , quando divididos por esse número deixam o mesmo resto; e indicamos a relação de congruência por:

$$a \equiv b \pmod{d}$$

para a qual é fácil ver que:

a) $a \equiv a \pmod{d}$

b) Se $a \equiv b$ então $b \equiv a \pmod{d}$

c) Se $a \equiv b$ e $b \equiv c$ então $a \equiv c \pmod{d}$;

quando, para estabelecermos os princípios de divisibilidade, para as provas das operações, trabalhamos com os próprios números, mas com os seus congruos, pois são equivalentes segundo esta relação.

Quando tomamos um conjunto de elementos e separamos os seus elementos conforme verificamos ou não uma dada propriedade, portanto, classificando os seus elementos, na verdade, os elementos que pertencem a um mesmo sub-conjunto, estamos considerando equivalentes.

De uma maneira geral, se um conjunto é separado em sub-conjuntos por meio de uma relação de equivalência, então cada sub-conjunto é denominado Classe de Equivalência.

Consideremos, para exemplo, um conjunto de homens e separemos os seus elementos em sub-conjuntos, por meio da relação "possui a mesma profissão que"; teremos por exemplo sub-conjuntos de engenheiros, de médicos, de professores, etc... Esta relação é uma relação de equivalência, o que é fácil verificar pelas três propriedades; e cada sub-conjunto é denominado classe de equivalência, isto é, os elementos de uma mesma classe de equivalência se "equivalem" sob este tipo de relação.

B.4. EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES

B.4.1 PRELIMINARES

Intuitivamente, chegamos a verificar que a fração $9/12$ equivale a $6/8$; por exemplo, tomando um inteiro e dividindo-o em 12 partes e tomando 9, e comparando com o inteiro dividido em 8 partes e tomando 6 delas. Ou mesmo, raciocinando que a equação: $12x = 9$, possui a mesma solução que a equação: $8x = 6$, pois "podemos" dividir ambos os membros da primeira igualmente por 3 e depois multiplicar por 2 obtendo a segunda igualdade.

Sabemos portanto que as frações $9/12$ e $6/8$ não são iguais mas se equivalem; representam o mesmo número racional, o mesmo número fracionário; são nume-

rais do mesmo número, são representantes do mesmo número.

Estas noções nos levam a tomar a seguinte definição de frações equivalentes:

B.4.2 DEFINIÇÃO 2

Definimos para as frações a relação "-" por:
 $(a,b) \sim (c,d)$ ou $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ se e somente se: $a \times d = b \times c$, com $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Lemos: $\frac{a}{b}$ é til com $\frac{c}{d}$

Exemplos: $\frac{9}{12} \sim \frac{6}{8}$ pois $9 \times 8 = 6 \times 12$

$\frac{3}{5}$ não é til com $\frac{4}{8}$ pois $3 \times 8 = 24$ e $5 \times 4 = 20$

B.4.3. TEOREMA 1

A relação "-" é uma relação de equivalência.

Devemos mostrar as propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva.

a) Reflexibilidade:

É claro que para qualquer fração, teremos:

$\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b}$; assim: $\frac{3}{5} \sim \frac{3}{5}$ pois:

$$3 \times 5 = 3 \times 5.$$

b) Simetria:

Também, se soubermos que a fração $\frac{a}{b}$ é til com $\frac{c}{d}$ podemos afirmar que $\frac{c}{d}$ é til com $\frac{a}{b}$, porque de qualquer forma teremos a igualdade dos produtos:

$$a \times d = b \times c$$

d) Transitividade:

Se $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$, $\frac{c}{d} \sim \frac{e}{f}$ então: $\frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$

Vejamos um exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} \sim \frac{9}{12} \text{ pois } \begin{array}{l} 3 \times 12 = 36 \\ 4 \times 9 = 36 \end{array} \\ \frac{9}{12} \sim \frac{6}{8} \text{ pois } \begin{array}{l} 9 \times 8 = 72 \\ 12 \times 6 = 72 \end{array} \end{array} \right\} \text{então } \frac{3}{4} \sim \frac{6}{8}.$$

e, é certo, pois $3 \times 8 = 4 \times 6 = 24$

OBSERVAÇÃO: Dêste teorema podemos ler a expressão:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$$

como: a fração $\frac{a}{b}$ é equivalente à fração $\frac{c}{d}$.

B.4.4. CLASSE DE EQUIVALÊNCIA

Separando o conjunto de frações em sub-conjuntos, sendo que cada sub-conjunto colocamos as frações equivalentes a uma dada fração sob a relação de equivalência "-", formamos, conforme vimos anteriormente, classes de equivalência.

Em outras palavras, formamos conjuntos de frações equivalentes; assim, a classe de equivalência, correspondendo à fração $\frac{3}{4}$, por exemplo, é dada por:

$$\left\{ \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \dots \right\}$$

que indicamos com $\left[\frac{3}{4} \right]$ ou $\boxed{\frac{3}{4}}$, isto é:

$$\left[\frac{3}{4} \right] = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \dots \right\}$$

É importante ter em mente que qualquer fração de uma classe de equivalência representa o mesmo número racional ou número fracionário; dizemos que cada fração é um representante da classe de equivalência. Utiliza-se, em geral, as frações equivalentes como iguais, isto é, satisfazendo a relação de igualdade " $=$ ", por isso se escreve:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ no lugar de } \frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

entretanto, tal substituição de uma relação por outra, em cálculos, não afeta, visto que, qualquer representante que se utilize, o número fracionário é o mesmo, o que veremos quando tratarmos das operações. O leitor observa que a rigor frações iguais possuem os seus elementos iguais e na mesma ordem, isto é, a fração $\frac{2}{3}$ é igual à fração $\frac{2}{3}$. Vários exemplos banais elucidarão o leitor, mesmo intuitivamente; sugerimos o seguinte: pense uma barra metálica em 3 partes das quais tomamos 2; e depois, a barra dividida em 6 partes das quais tomamos 4; serão iguais as grandezas obtidas? Pense agora que não se divida realmente a barra, mas sim fazendo pequenas marcas, e depois tomando um comprimento de barra que contenha duas partes ou 6 partes serão agora iguais?

B.4.5. TEOREMA 2

Multiplicando-se (ou dividindo-se) o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número material, obtém-se uma fração equivalente.

$$\frac{a}{b} = \frac{K \times a}{K \times b}$$

$$K \neq 0.$$

Exemplos: a) $\frac{3}{7} = \frac{2 \times 3}{2 \times 7}$

De fato: $\frac{2 \times 3}{2 \times 7} = \frac{6}{14}$ e $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$ pois $\begin{cases} 3 \times 14 = 42 \\ 7 \times 6 = 42 \end{cases}$

b) $\frac{12}{28} = \frac{12 : 4}{28 : 4}$, isto é: $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

de fato: $\begin{cases} 12 \times 7 = 84 \\ 28 \times 3 = 84 \end{cases}$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Este simples teorema permite de maneira fácil passar de uma fração a uma fração equivalente, isto é, trocando o representante da classe de equivalência, por um representante mais adequado, o que será de grande utilidade na adição e subtração.

C. OPERAÇÕES COM OS NÚMEROS FRACIONÁRIOS

C.1. ADIÇÃO:

As considerações intuitivas sobre números fracionários com base nas grandezas fornecem o processo para se adicionar.

Assim, tomando uma grandeza que seja $\frac{3}{7}$ de outra, e uma segunda grandeza $\frac{2}{7}$ da mesma $\frac{3}{7}$ (inteiro),

reunindo (somando) as grandezas, verificamos facilmente que se obtém uma grandeza-soma que é igual a $\frac{5}{7}$ da grandeza fundamental.

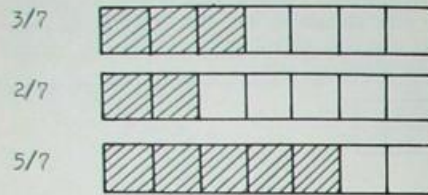


Fig. 34

De onde se induz a regra para se adicionar frações com o mesmo denominador, adicionando os numeradores. Idem, para o caso de frações de denominadores desiguais, reduzindo-os aos mesmo denominador.

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b} = \frac{a + a'}{b}$$

Raciocinando com a equação $bx = a$ ($b \neq 0$), também se induz a regra; assim, seja x o número fracionário solução da equação $bx = a$, e y o número fracionário solução da equação $by = a'$.

Das igualdades anteriores, encontramos ainda a seguinte igualdade:

$$bx + by = a + a'$$

e, "considerando" válida para os números fracionários a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, em analogia com os inteiros, podemos escrever:

$$b(x + y) = a + a'$$

Esta equação nos indica, também, que o número fracionário soma dos números fracionários x e y , deve ser dado pelo par $(a + a', b)$, ou com a notação fracionária:

$$\frac{a + a'}{b}$$

Idem, as equações:

$$bx = a$$

$$dy = c$$

por "Multiplicação" por inteiros nos fornecem as igualdades:

$$dbx = ad$$

$$bdy = bc$$

e portanto, a igualdade:

$$dbx + bdy = ad + bc$$

e "considerando" válida a distributividade:

$$db(x+y) = ad + bc$$

que sugere a soma dos fracionários x e y por :

$$\frac{ad + bc}{db}$$

DEFINIÇÃO 3

Dados dois números fracionários representados pelas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, definimos soma dos dois números fracionários a um terceiro número fracionário dado pela fração.

$$\frac{axd + bxc}{dxb}$$

Escrevemos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{axd + bxc}{dxb}$$

Exemplos:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4 + 1 \times 3}{3 \times 4} = \frac{11}{12}$$

OBSERVAÇÃO: Esta definição pode dar a impressão que é de todo livre, arbitrária; por exemplo, que poderíamos ter definido:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Façamos então algumas considerações a respeito.

ESTABILIDADE DA DEFINIÇÃO DE ADIÇÃO

A definição dada foi concorde com o nosso raciocínio sobre grandezas e com a equação $b \times a = a$; mas de qualquer maneira foi relativamente arbitrária. É importante, no entanto, que ela esteja de acordo (consistente) com a definição de frações equivalentes (a relação til).

Dizemos que a operação definida goza de estabilidade com a relação de equivalência, caso operando com outros representantes obtemos resultados pela definição também equivalentes.

Usou-se na definição particulares representantes, por isso deve-se verificar com outros representantes a equivalência dos resultados.

TEOREMA 3.

A operação de adição está bem-definida

$$\text{Se } \frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'}$$

$$\text{então: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \sim \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$$

Exemplo:

$$\text{Sejam } \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad \frac{5}{6}$$

$$\text{Pela definição: } \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3 \times 6 + 5 \times 4}{4 \times 6} = \frac{38}{24}$$

Sejam outros representantes:

$$\frac{6}{8} \quad \text{e} \quad \frac{15}{18}$$

respectivamente equivalentes às duas primeiras frações.

$$\text{Pela definição: } \frac{6}{8} + \frac{15}{18} = \frac{6 \times 18 + 8 \times 15}{8 \times 18} = \frac{228}{144}$$

$$\text{mas: } \frac{228}{144} \sim \frac{114}{72} \sim \frac{57}{36} \sim \frac{19}{12} \quad (\text{Simplificando- Teorema 2})$$

$$\text{e } \frac{19}{12} \sim \frac{38}{24} \quad (\text{Multiplicando-teorema 2})$$

ou usando os produtos cruzados:

$$228 \times 24 = 38 \times 144$$

NOTA: Com o Teorema podemos escrever:

$$\left[\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right] = \left[\frac{a \times d + b \times c}{b \times d} \right]$$

CONSEQÜÊNCIA:Redução ao mesmo denominador

O teorema da estabilidade nos permite um processo de cálculo uniforme, trocando frações com denominadores desiguais por frações com denominadores iguais.

Assim, se tínhamos que adicionar:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

podemos adicionar

$$\frac{a'}{m} + \frac{c'}{m}$$

onde m é múltiplo comum de b e de d

$$\frac{a'}{m} + \frac{c'}{m} = \frac{a' \times m + c' \times m}{m \times m} \text{ (pela definição 3)}$$

No numerador podemos usar a propriedade distributiva:

$$= \frac{(a' + c') \times m}{m \times m}$$

e, usando o teorema 2, podemos simplificar e obtermos:

$$\frac{a'}{m} + \frac{c'}{m} = \frac{a' + c'}{m}$$

Resultado que fornece a regra prática usual:

"Para se adicionar números fracionários, dados com o mesmo denominador, adiciona-se os numeradores e conserva-se o denominador".

Exemplos:

$$1) \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

$$2) \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{4}{24} + \frac{18}{24} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}$$

$$3) \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

É claro que, para não operarmos com números grandes podemos usar para denominador comum não um múltiplo qualquer dos denominadores mas sim o mínimo múltiplo comum.

No exemplo 2) usamos o múltiplo 24 de 6 e do 4; mas poderíamos ter usado o mínimo múltiplo comum 12

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{2}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$$

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

A adição de números fracionários goza das mesmas propriedades da adição de inteiros:

a) Comutatividade: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

b) Associatividade: $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f})$

c) Existência do elemento neutro: $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a}{b}$,

como $\frac{0}{1}$ é equivalente a qualquer fração com numerador nulo, o elemento neutro é o número fracionário cujos representantes possuem numeradores nulos; de onde chamá-lo número fracionário Zero ou Nulo.

C.2. MULTIPLICAÇÃO

Definição 4

Dados dois números fracionários pelas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, definimos produto a um terceiro número fracionário, dado pela fração:

$$\frac{a \times c}{b \times d}$$

Escrevemos: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Exemplo: $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$

ESTABILIDADE DA DEFINIÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO

Teorema 4. A Operação de Multiplicação está bem definida.

$$\text{Se } \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} - \frac{c'}{d'}$$

$$\text{então: } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} - \frac{a'}{b'} \times \frac{c'}{d'}$$

Exemplo: $\frac{3}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{72}$ (Pela definição 4)

Façamos o cálculo com outros representantes, por exemplo,

$$\frac{6}{16} \text{ e } \frac{8}{18}$$

$$\frac{6}{16} \times \frac{8}{18} = \frac{48}{288} \text{ (Pela definição 4)}$$

Mas: $\frac{48}{288} - \frac{24}{144} - \frac{12}{72}$ (Pelo teorema 2 simplificação)

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

a) Comutatividade: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$

b) Associatividade: $(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times (\frac{c}{d} \times \frac{e}{f})$

c) Existência do Neutro: $\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$

Como $\frac{1}{1}$ é equivalente a qualquer fração com numerador e denominador iguais, o elemento neutro é o número fracionário cujos representantes possuem numerador e denominador iguais.

d) Existência do inverso

Sendo $\frac{a}{b}$ com $a \neq 0$, existe a fração $\frac{b}{a}$

Façamos a multiplicação:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = \frac{1}{1} \text{ (que é o neutro)}$$

logo, a fração $\frac{b}{a}$ é o elemento inverso (ou recíproco) de $\frac{a}{b}$.

Exemplo: O inverso de $\frac{3}{5}$ é $\frac{5}{3}$ (e reciprocamente)

e) Distributiva em relação à adição

$$\frac{a}{b} \times (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$$

Exemplo:

a) $\frac{3}{4} \times (\frac{3}{5} + \frac{1}{10}) = \frac{3}{4} \times (\frac{6}{10} + \frac{1}{10}) = \frac{3}{4} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{40}$

b) $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{20} + \frac{3}{40} = \frac{18}{40} + \frac{3}{40} = \frac{21}{40}$

C.4. SUBTRAÇÃO

Definição 5

Dados dois números fracionários pelas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $a \times d \geq b \times c$, definimos diferença, nessa ordem, a um terceiro número fracionário dado pela fração:

$$\frac{a \times d - b \times c}{b \times d}$$

Indicamos: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{b \times d}$

Exemplo: $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3 - 2 \times 5}{5 \times 3} = \frac{2}{15}$

onde observamos que a condição de possibilidade
 $4 \times 3 \geq 2 \times 5$

tem sua razão, pois em caso contrário não existiria a subtração dos inteiros do numerador.

ESTABILIDADE DA OPERAÇÃO DE SUBTRAÇÃO

Teorema 5. A subtração está bem definida

Se $\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} - \frac{c'}{d'}$

então: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{a'}{b'} - \frac{c'}{d'}$

Exemplo: $\frac{6}{8} - \frac{1}{4} = \frac{6 \times 4 - 8 \times 1}{8 \times 4} = \frac{16}{32}$

e: $\frac{9}{12} - \frac{2}{8} = \frac{9 \times 8 - 2 \times 12}{12 \times 8} = \frac{48 - 16}{96} = \frac{16}{96}$

CONSEQÜÊNCIA I: Redução ao mesmo denominador

O Teorema da estabilidade permite, para subtrairmos, trocarmos as frações por frações equivalentes com denominadores iguais, bastando para isso empregarmos um múltiplo comum dos denominadores; e, se quisermos podemos trabalhar com o mínimo múltiplo comum.

$$\frac{5}{12} - \frac{4}{15} = \frac{25}{60} - \frac{16}{60} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$$

CONSEQÜÊNCIA II: Subtração como operação inversa.

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ equivale a:

$$\frac{e}{f} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

isto é, a subtração de números fracionários é ainda operação inversa da adição.

Exemplo:

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{6} = \frac{9}{24} - \frac{4}{24} = \frac{5}{24}$$

$$\frac{5}{24} + \frac{1}{6} = \frac{5}{24} + \frac{4}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

C.5. DIVISÃO

Definição 6:

Dados dois números fracionários pelas frações a/b e c/d , o segundo não nulo, definimos o quociente, nessa ordem, a um terceiro número fracionário dado pela fração

$$\frac{a \times d}{b \times c}$$

Indicamos: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$

Exemplo: $\frac{3}{5} : \frac{1}{2} = \frac{3 \times 2}{5 \times 1} = \frac{6}{5}$

ESTABILIDADE DA OPERAÇÃO DE DIVISÃO

Teorema 6: A divisão está bem definida

se: $\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} - \frac{c'}{d'}$ então $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} : \frac{c'}{d'}$

Deixamos a cargo do leitor escolher frações equivalentes, fazer o cálculo com a definição e verificar que os resultados são equivalentes.

CONSEQUÊNCIA I: Redução ao mesmo denominador

Dados as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ podemos usar as frações equivalentes com o mesmo denominador.

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{m} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} = \frac{c'}{m}$$

bastante escolher um múltiplo comum dos denominadores, que pode ser o mínimo múltiplo comum.

$$\frac{a'}{m} : \frac{c'}{m} = \frac{a' \times m}{c' \times m} \quad (\text{Pela definição})$$

mas: $\frac{a' \times m}{c' \times m} = \frac{a'}{c'}$ (Simplificação)

de onde obtemos uma regrinha:

"O quociente de frações com o mesmo denominador é uma fração em que o numerador é o numerador da primeira e o denominador é o numerador da segunda".

Exemplo:

$$\frac{3}{8} : \frac{5}{8} = \frac{3}{5}$$

CONSEQUÊNCIA II: Divisão como operação inversa

A divisão conforme foi definida ainda é inversa da multiplicação, como é fácil verificar:

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{9} = \frac{3 \times 9}{5 \times 2} = \frac{27}{10}$$

$$\frac{27}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{54}{90} = \frac{27}{45} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \quad (\text{que é a primeira})$$

portanto, também aqui temos:

"dividendo = divisor x quociente"

C.6. POTENCIAÇÃO:

Dado um número fracionário pela fração $\frac{a}{b}$ a potenciação se faz usando a mesma definição dada por inteiros

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \dots \times \frac{a}{b}}_{n \text{ frações}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a \times a \times a \times \dots \times a}{b \times b \times b \times \dots \times b}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

que fornece a regra prática:

"Para se elevar uma fração a uma potência, eleva-se o numerador e o denominador a mesma potência".

Exemplo: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

C.7. RADICIAÇÃO

O procedimento é o mesmo que o da potenciação; isto se for possível a raiz

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemplo: $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$

No caso de não serem quadrados pode-se dividir e depois extrair a raiz aproximada.

D. EQUIVALÊNCIAS E IGUALDADE

Temos chamado a atenção que frações equivalentes em geral não são frações iguais, mas pelo fato de representarem o mesmo número, e também porque operando com uma ou com outra os resultados também se equivalem, portanto representam o mesmo número, usa-se no lugar da notação de equivalência " ~ " a notação de igualdade de " = " .

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{por} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

e se lê também "fração a/b igual à fração c/d".

Não esqueçamos no entanto que a rigor

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

indica que $\left\{ \frac{a}{b} \right\} = \left\{ \frac{c}{d} \right\}$

Exemplo: Se $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

então o número fracionário $\left\{ \frac{3}{5} \right\}$ é igual ao número fracionário

$$\left\{ \frac{6}{10} \right\} .$$

$$\left\{ \frac{3}{5} \right\} = \left\{ \frac{6}{10} \right\} = \left\{ \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{18}{30}, \dots \right\}$$

NOTA: Tal substituição não apresenta perigo.

E. ISOMORFISMO

Consideramos no conjunto dos números fracionários o sub-conjunto constituído das classes de equivalência $\{ a/1 \}$; isto é, tomemos para estudo, em particular, o conjunto A dos números fracionários que possuem por representantes frações com denominador igual à unidade.

Exemplos

$$\{ 1/1 \} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \dots \right\}$$

$$\{ 2/1 \} = \left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \dots \right\}$$

$$\{ 3/1 \} = \left\{ \frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \dots \right\}$$

.....

e, também: $\{ 0/1 \} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \dots \right\}$

logo:

$$A = \{ \{ 1/1 \}, \{ 2/1 \}, \{ 3/1 \}, \dots \}$$

Façamos operações de adição e multiplicação (*) com elementos quaisquer desse conjunto A:

$$1) \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1}$$

$$2) \frac{a}{1} \times \frac{b}{1} = \frac{a \times b}{1 \times 1} = \frac{a \times b}{1}$$

isto é, elas são efetuadas como se operássemos só com numeradores, portanto com números inteiros, então os números fracionários desse particular conjunto A se comportam como se fossem números inteiros.

Sabemos também, que as propriedades operacionais dos números fracionários são as mesmas dos números inteiros.

Intuitivamente, toma-se os números fracionários desse conjunto como inteiros; assim, por exemplo, para o número fracionário dado pela fração $\frac{6}{2}$, imagina-se dividir grandezas inteiras iguais em duas partes iguais cada uma, e identifica-se $\frac{6}{2}$ com o número 3.

Dadas frações equivalentes do tipo $\frac{2 \times y}{y}$, para qualquer a, sabemos que forçosamente segue a igualdade dos números inteiros "a", isto é:

$$\frac{a \times y}{y} = \frac{a' \times y}{y} \Rightarrow a = a'$$

Destas considerações verificamos que podemos por em correspondência(**) que conserva as operações, os números fracionários do conjunto A com o conjunto dos números inteiros:

$$\begin{array}{l} \left(\frac{a}{1} \right) \longleftrightarrow a \\ \left(\frac{b}{1} \right) \longleftrightarrow b \end{array} \Rightarrow \left(\frac{a}{1} + \frac{b}{1} \right) \longleftrightarrow a + b$$

(*) Subtração e Divisão não são necessárias pois são operações inversas.

(**) O leitor que tem conhecimentos de Aplicações, verifica que existe uma Aplicação Bijetora do conjunto A no conjunto dos inteiros que conserva as operações elementares.

$$\begin{array}{l} \left(\frac{a}{1} \right) \longleftrightarrow a \\ \left(\frac{b}{1} \right) \longleftrightarrow b \end{array} \Rightarrow \left(\frac{a}{1} \times \frac{b}{1} \right) \longleftrightarrow a \times b$$

Observemos que:

1. A correspondência é de tal forma que a cada número fracionário corresponde um só número inteiro.

2. A correspondência é também no outro sentido, a um número inteiro corresponde um só número fracionário, do conjunto A.

3. Todo número inteiro é correspondente de um número fracionário.

Em vista dessa notável correspondência, podemos dizer que os dois conjuntos de números, de um ponto de vista abstrato, possuem a mesma estrutura, a estrutura aritmética é a mesma; dizemos ainda que existe um isomorfismo, ou que os dois conjuntos munidos das operações elementares são isomorfos.

Aceito este isomorfismo entre o conjunto dos números fracionários, que um dos representantes possui denominador igual a unidade, e o conjunto dos números inteiros, é justificável convencionarmos que:

$$\left(\frac{a}{1} \right) = a$$

e, escrevemos também:

$$\frac{a}{1} = a \quad \text{ou} \quad \frac{a \times y}{a} = a$$

Exemplos:

$$\frac{3}{1} = 3 \quad \frac{0}{1} = 0 \quad \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{4}{1} = 4 \quad \frac{0}{1} = 0 \quad \frac{12}{3} = 4$$

Façamos operações de adição e multiplicação (*) com elementos quaisquer desse conjunto A:

$$1) \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1}$$

$$2) \frac{a}{1} \times \frac{b}{1} = \frac{a \times b}{1 \times 1} = \frac{a \times b}{1}$$

isto é, elas são efetuadas como se operássemos só com numeradores, portanto com números inteiros, então os números fracionários desse particular conjunto A se comportam como se fossem números inteiros.

Sabemos também, que as propriedades operacionais dos números fracionários são as mesmas dos números inteiros.

Intuitivamente, toma-se os números fracionários desse conjunto como inteiros; assim, por exemplo, para o número fracionário dado pela fração $\frac{6}{2}$, imagina-se dividir grandezas inteiras iguais em duas partes iguais cada uma, e identifica-se $\frac{6}{2}$ com o número 3.

Dadas frações equivalentes do tipo $\frac{2 \times x \times y}{y}$, para qualquer a, sabemos que forçosamente segue a igualdade dos números inteiros "a", isto é:

$$\frac{a \times x \times y}{y} = \frac{a' \times x \times y}{y} \Rightarrow a = a'$$

Destas considerações verificamos que podemos por em correspondência(**) que conserva as operações, os números fracionários do conjunto A com o conjunto dos números inteiros:

$$\begin{array}{l} \left\{ \frac{a}{1} \right\} \longleftrightarrow a \\ \left\{ \frac{b}{1} \right\} \longleftrightarrow b \end{array} \Rightarrow \left\{ \frac{a}{1} + \frac{b}{1} \right\} \longleftrightarrow a + b$$

(*) Subtração e Divisão não são necessárias pois são operações inversas.

(**) O leitor que tem conhecimentos de Aplicações, verifica que existe uma Aplicação Bijetora do conjunto A no conjunto dos inteiros que conserva as operações elementares.

$$\begin{array}{l} \left\{ \frac{a}{1} \right\} \longleftrightarrow a \\ \left\{ \frac{b}{1} \right\} \longleftrightarrow b \end{array} \Rightarrow \left\{ \frac{a}{1} \times \frac{b}{1} \right\} \longleftrightarrow a \times b$$

Observemos que:

1. A correspondência é de tal forma que a cada número fracionário corresponde um só número inteiros.

2. A correspondência é também no outro sentido, a um número inteiro corresponde um só número fracionário, do conjunto A.

3. Todo número inteiro é correspondente de um número fracionário.

Em vista dessa notável correspondência, podemos dizer que os dois conjuntos de números, de um ponto de vista abstrato, possuem a mesma estrutura, a estrutura aritmética é a mesma; dizemos ainda que existe um isomorfismo, ou que os dois conjuntos munidos das operações elementares são isomorfos.

Aceito este isomorfismo entre o conjunto dos números fracionários, que um dos representantes possui denominador igual à unidade, e o conjunto dos números inteiros, é justificável convencionarmos que:

$$\left[\left(\frac{a}{1} \right) = a \right]$$

e, escrevemos também:

$$\frac{a}{1} = a \quad \text{ou} \quad \frac{a \times y}{a} = a$$

Exemplos:

$$\frac{3}{1} = 3 \quad \frac{0}{1} = 0 \quad \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{4}{1} = 4 \quad \frac{0}{1} = 0 \quad \frac{12}{3} = 4$$

Desta identificação resulta que o conjunto dos inteiros passa a ser um sub-conjunto do conjunto dos números fracionários, isto é, uma parte dos números fracionários são números inteiros. Surge também uma nova denominação: se as frações do particular conjunto são iguais a números inteiros, no aspecto intuitivo, não são mais partes do inteiro, são inteiros, de onde o nome: frações aparentes (aparentemente-frações).

CONSEQÜÊNCIA I: Fração como quociente indicado

Consideremos dois inteiros a e b , $b \neq 0$.

$$\text{Como: } a = \frac{a}{1} \quad b = \frac{b}{1}$$

$$\text{teremos: } a : b = \frac{a}{1} : \frac{b}{1}$$

$$\Rightarrow a : b = \frac{a \times 1}{1 \times b} \quad (\text{Def. 6})$$

$$\Rightarrow \boxed{a : b = \frac{a}{b}}$$

$$\text{Exemplos: } 3 : 5 = \frac{3}{5}$$

$$8 : 4 = \frac{8}{4} = 2$$

CONSEQÜÊNCIA II. Número misto

Da identificação surge a necessidade de se operar com números inteiros indicados e frações; assim:

$$1. \text{ De } \frac{a}{1} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c}{d}$$

$$\text{surge: } a + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c}{d}$$

e, à soma indicada: $a + \frac{c}{d}$, passamos a indicar mais simplesmente $a \frac{c}{d}$ ou $a \frac{c}{d}$.

Exemplo: $3 + \frac{2}{5}$ indicamos com $3 \frac{2}{5}$ ou $3 \frac{2}{5}$

$$\text{e temos: } 3 \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

$$2. \text{ De } \frac{a}{1} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$$

$$\text{surge: } a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$$

Exemplo(*):

$$3 \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5}$$

$$3. \text{ De } \frac{a}{1} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - c}{d}$$

$$\text{surge: } a - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - c}{d}$$

$$\text{Exemplo: } 5 - \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4 - 3}{4} = \frac{17}{4}$$

$$\text{ou } 5 - \frac{3}{4} = 4 + 1 - \frac{3}{4} = 4 + \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 4 + \frac{1}{4} = 4 \frac{1}{4}$$

$$4. \text{ a) De } \frac{a}{1} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{1 \times c} = \frac{a \times d}{c}$$

$$\text{surge: } a : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{c}$$

$$\text{b) De } \frac{c}{d} : \frac{a}{1} = \frac{c \times 1}{d \times a} = \frac{c}{d \times a}$$

$$\text{surge: } \frac{c}{d} : a = \frac{c}{d \times a}$$

(*) Observe-se que o uso, no ensino, da escrita do denominador 1, não é descabido.

Exemplos: $3 : \frac{6}{5} = \frac{3 \times 5}{6} = \frac{15}{6}$

$$\frac{6}{5} : 3 = \frac{6}{5 \times 3} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

F. DESIGUALDADE

F.1. INTRODUÇÃO

Na teoria de números inteiros temos estudado a equivalência de conjuntos, a prevalência e supervalência de um conjunto em relação a outro, utilizando a noção de correspondência biunívoca entre os conjuntos. Tais comparações nos levaram às relações de igualdade e desigualdade entre números inteiros.

Estudando a subtração de inteiros vimos que ela era definida com a condição de que o primeiro número fosse maior ou igual ao segundo número, isto é:

Se $a \geq b$ (a maior ou igual a b) existia um terceiro número inteiro c tal que $b + c = a$, ao qual denominamos diferença de a e b, nessa ordem.

Para números fracionários aparece a mesma questão:

Dados dois números fracionários pelos representantes $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, verificamos que a subtração era possível se $a \times d \geq d \times c$; e, também que o terceiro número fracionário denominado diferença, adicionado ao segundo é igual ao primeiro.

Desta noção, somos levados à desigualdade entre números fracionários.

Definição 7

Diremos que o número fracionário dado pela fração $\frac{a}{b}$ é maior que o número fracionário dado pela fração $\frac{c}{d}$, se e somente se

$$a \times d > b \times c$$

Diremos que a fração $\frac{a}{b}$ é supervalente à fração $\frac{c}{d}$, e indicamos:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

Definição

Diremos que o número fracionário dado pela fração $\frac{a}{b}$ é menor que o número fracionário dado pela fração $\frac{c}{d}$ se e somente se

$$a \times d < b \times c$$

Diremos que a fração $\frac{a}{b}$ é prevalente à fração $\frac{c}{d}$, e indicamos:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Exemplos:

a) $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$ pois $3 \times 3 = 9$ e $5 \times 2 = 10$,

logo $3 \times 5 < 5 \times 2$

b) $\frac{4}{5} > \frac{1}{3}$ pois $4 \times 3 = 12$ e $5 \times 1 = 5$,

logo $4 \times 3 > 5 \times 1$

F.2. ESTABILIDADE DA DESIGUALDADE

Se $\frac{a'}{b'}$ e $\frac{c'}{d'}$ e $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$

e tivermos $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, teremos $\frac{a'}{b'} < \frac{c'}{d'}$

Exemplo numérico:

$$\frac{3}{5} < \frac{2}{3} \quad \text{pois} \quad \begin{cases} 3 \times 3 = 9 \\ 5 \times 2 = 10 \end{cases} \implies 3 \times 3 < 5 \times 2$$

Tomemos frações respectivamente equivalentes:

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} 6 \times 12 &= 72 \\ 10 \times 8 &= 80 \implies 6 \times 12 < 10 \times 8 \\ &\implies \frac{6}{10} < \frac{8}{12} \end{aligned}$$

O teorema prova que a relação de desigualdade está bem-definida, como para as operações; é útil, pois permite trabalharmos com as frações que nos convierem.

F.3. CONSEQUÊNCIA I

Como para frações equivalentes consideramos a equivalência como igualdade, substituindo o sinal " = " por " = ", nós consideraremos a prevalência e a supervalência de frações como desigualdade, substituindo o sinal " < " por " < ", e o sinal " > " por " > ". Também diremos: fração menor que, ou fração maior que.

Em resumo:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c \\ \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff a \times d < b \times c \\ \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \iff a \times d > b \times c \end{cases}$$

F.4. CONSEQUÊNCIA II: Transformação ao mesmo Denominador

Pelo teorema da estabilidade podemos usar frações equivalentes para verificar a desigualdade, então podemos entre outras usar frações com denominadores comuns, que pode ser o próprio mínimo múltiplo comum:

$$\frac{a}{m} \quad \text{e} \quad \frac{b}{m}$$

$$\text{Como } a \times m < b \times m \iff a < b.$$

concluimos que para compararmos números fracionários podemos:

Transformar as frações ao mesmo denominador e comparar só os numeradores, o de menor numerador é a menor.

Exemplos: $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{6}$

transformamos:

$$\frac{3}{8} = \frac{9}{24} \quad \frac{5}{6} = \frac{20}{24}$$

Como $9 < 20$ podemos afirmar que $\frac{3}{8} < \frac{5}{6}$

F.5. CONSEQUÊNCIA III. Transformação ao mesmo numerador

Pelo mesmo motivo podemos para compararmos frações com o mesmo numerador compararmos os denominadores:

$$\frac{n}{c} \quad \text{e} \quad \frac{n}{d}$$

$$\text{Como } n \times d < n \times c \iff d < c,$$

de onde a regra:

Transformar as frações ao mesmo numerador, e comparar só os denominadores, a que tiver menor denominador será a maior

Exemplo: $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{6}$

$$\frac{3}{8} = \frac{15}{40} \quad \text{e} \quad \frac{5}{6} = \frac{15}{18}$$

Como $18 < 40$ podemos afirmar que $\frac{3}{8} < \frac{5}{6}$

F.6. CONSEQUÊNCIA IV. Comparação de números fracionários e inteiros

Seja comparar $\frac{a}{b}$ e o inteiro c

como $c = \frac{c}{1}$

$$\frac{a}{b} < c \iff a \times 1 < b \times c \iff a < b \times c$$

$$\frac{a}{b} = c \iff a \times 1 = b \times c \iff a = b \times c$$

$$\frac{a}{b} > c \iff a \times 1 > b \times c \iff a > b \times c$$

Uma fração é "menor que", "igual a", ou "maior que", um inteiro, se o numerador é menor, igual ou maior, que o produto do denominador pelo inteiro.

Exemplo: $\frac{8}{3} > 2$ porque $8 > 2 \times 3$

no caso do inteiro ser a unidade, teremos:

$$\frac{a}{b} < 1 \iff a < b \times 1 \iff a < b$$

$$\frac{a}{b} = 1 \iff a = b \times 1 \iff a = b$$

$$\frac{a}{b} > 1 \iff a > b \times 1 \iff a > b$$

As frações maiores que a unidade denomina-se frações impróprias (imprópriamente frações); e, às menores que a unidade, de frações próprias (própriamente frações).

Dos resultados anteriores concluímos:

Uma fração é imprópria (ou própria) se o numerador é maior (ou menor) que o denominador.

Exemplo: $\frac{5}{3}$ é imprópria, pois $5 > 3$

$\frac{1}{4}$ é própria, pois $1 < 4$

Para as frações impróprias pode-se transformá-las em números mistos, operação denominada EXTRAÇÃO DE INTEIROS:

Seja $\frac{a}{b} > 1$

Dividimos a por b

$$a = b \times q + r$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b \times q + r}{b} = \frac{b \times q}{b} + \frac{r}{b}$$

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$

e, escreveremos

$$\frac{a}{b} = q \frac{r}{b}$$

Exemplo: $\frac{7}{3} > 1$ $\begin{array}{r} 7 \overline{) 3} \\ 1 \quad 2 \end{array}$

$$\frac{7}{3} = 2 \frac{1}{3}$$

Reciprocamente, pode-se transformar um número misto em fração imprópria:

$$q \frac{r}{b} = \frac{q \times b + r}{b} = \frac{a}{b}$$

Exemplo: $3 \frac{1}{4} = \frac{3 \times 4 + 1}{4} = \frac{13}{4}$

F.7. DENSIDADE DO CONJUNTO DOS FRACIONÁRIOS

Entre dois números fracionários sempre existe um outro, isto é, se tivermos dois números fracionários, o 1º menor que o 2º, dados pelas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sempre encontraremos um outro dado pela fração $\frac{x}{y}$ tal que:

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$$

É fácil verificar que poderíamos por exemplo usar:

$$\frac{x}{y} = \frac{a + c}{b + d}$$

Exemplo: $\frac{3}{8} < \frac{5}{6}$

$$\frac{x}{y} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

teremos: $\frac{3}{8} < \frac{4}{7} < \frac{5}{6}$

novamente: $\frac{x}{y} = \frac{3+4}{8+7} = \frac{7}{15}$ e $\frac{x'}{y'} = \frac{4+5}{7+6} = \frac{9}{13}$

teremos: $\frac{3}{8} < \frac{7}{15} < \frac{4}{7} < \frac{9}{13} < \frac{5}{6}$

e assim sucessivamente; portanto, entre dois números fracionários existem quantos números fracionários quisermos. Diremos intuitivamente, que entre dois fracionários está "cheio" de outros números fracionários. Rigorosamente se diz que o conjunto dos números fracionários é denso.

F.8. RELAÇÃO DE ORDEM

A relação de desigualdade goza da transitividade, da irreflexibilidade e da assimetria.

Transitiva: Se $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ então: $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$

Exemplo: $\frac{3}{5} < \frac{6}{7}$ e $\frac{6}{7} < \frac{8}{9}$

podemos garantir que $\frac{3}{5} < \frac{8}{9}$ o que é fácil verificar, pois $3 \times 9 < 5 \times 8$.

Irreflexiva: É falso que $\frac{a}{b} < \frac{a}{b}$

De todo qualquer que seja fração $\frac{a}{b}$ caso houvesse a reflexividade deveríamos ter: $a \times b < b \times a$ o que é falso.

A rigor a irreflexibilidade deve ser considerada para frações equivalentes:

Se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ então é falso que $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$

Assimetria:

Se $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ então é falso que $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$

NOTA: As propriedades anteriores estão colocadas em termos de prevalência (ou supervalência) de frações, mas correspondem às propriedades em termos de menor que (ou maior) para números fracionários; e, é costume usar uma no lugar da outra indistintamente.

F.8.4 ORDENAÇÃO

É natural, que na ordenação de um conjunto, se estabeleça um critério de precedência, o qual determinará o elemento que vem antes e o que vem depois, dizendo que um elemento precede e o outro sucede.

No conjunto dos inteiros já vimos a ordenação natural: 0, 1, 2, 3, 4, 5, com o critério "menor que": $0 < 1 < 2 < 3, \dots$

Nas palavras dos dicionários, na indicação de capítulos, de parágrafos, etc., é costume adotar-se a ordenação lexicográfica, fornecida pela ordem das letras do alfabeto.

Em concursos adota-se critérios diversos, como "critérios de beleza", "critérios de simpatia", "critérios fotogênicos", etc.

Para os números fracionários podemos adotar a relação "menor que" ou "maior que", o que equivale a tomar para as frações a relação de "prevalência" ou "supervalência".

Como haveria frações que não poderiam ser ordenadas, pois teríamos frações que no confronto com outras, não poderíamos afirmar que precede ou que sucede outra. Isto ocorreria sempre que comparássemos frações equivalentes, e elas não poderiam ser ordenadas.

Em outras palavras, o critério de prevalência não utiliza todas frações, e o conjunto seria parcialmente ordenado.

Para afastar este inconveniente adota-se o critério "prevalente ou equivalente a" ou "supervalente ou equivalente a", ficando o conjunto de frações totalmente ordenado; idem, em correspondência, adota-se o critério "menor que ou igual a" ou "maior que ou igual a", para os números fracionários.

Desta forma, a relação seria indicada para frações com os símbolos " $<$ " ou " $-$ " ou " $>$ " ou " $-$ ". Da mesma maneira como temos procedido anteriormente, indicaremos esta relação com os sinais " \leq " " \geq " ou " \geq " " \leq " :

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \quad \text{se e somente se} \quad a \times d \leq b \times c;$$

ou

$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \quad \text{se e somente se} \quad a \times d \geq b \times c;$$

e, leremos também: "fração a/b menor ou igual à fração c/d " ou "fração a/b maior ou igual a fração c/d ".

Pela primeira relação (idem para a segunda) são válidas as seguintes propriedades:

1. Reflexibilidade: $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$
2. Anti-simetria: $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
3. Transitividade: $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$
4. Propriedade da Conexão (ou Conectividade)

Qualquer que sejam as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, teremos:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$$

Dizemos que a ordenação é crescente quando utilizamos a relação " \leq ", e que a ordenação é decrescente

cente quando a relação usada é " \geq ".

Exemplos: Seja o conjunto de frações:

$$\left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{6}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4} \right\}$$

temos:

1. Em ordenação crescente:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{2}{4} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3} \leq \frac{6}{9} \leq \frac{3}{4}$$

ou:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{2}{4} \leq \frac{6}{9} \leq \frac{2}{3} \leq \frac{3}{4}$$

Usa-se também escrever, o que não é melhor:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} = \frac{2}{4} < \frac{2}{3} = \frac{6}{9} < \frac{3}{4}$$

2. Em ordenação decrescente:

$$\frac{3}{4} \geq \frac{6}{9} \geq \frac{2}{3} \geq \frac{1}{2} \geq \frac{2}{4} \geq \frac{1}{4}, \text{ etc...}$$

G. EXERCÍCIOS - SEQUÊNCIA XVI

1. Teste verdadeiro-falso:

- a) $\frac{3}{4} = \frac{2}{3}$ () b) $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ () c) $\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ ()
 d) $\frac{5}{1} = \frac{4}{1}$ () e) $\frac{0}{8} = \frac{0}{8}$ () f) $\frac{3}{3} = \frac{5}{5}$ ()
 g) $\frac{9}{3} = \frac{6}{2}$ () h) $\frac{10}{8} = \frac{20}{8}$ ()

2. Teste de Completamento:

a) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{c}{d} - \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = ?$ b) $\frac{2}{5} - \frac{2}{x} \Rightarrow x = ?$

c) $\frac{3}{12} - \frac{x}{16} \Rightarrow x = ?$ d) $\frac{a}{c} - \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} = ?$

e) $\frac{0}{3} - \frac{x}{9} \Rightarrow x = ?$ f) $\frac{x}{18} - \frac{15}{30} \Rightarrow x = ?$

3. Forne as classes de equivalência:

a) $\{1/3\}$ b) $\{2/3\}$ c) $\{0/4\}$ d) $\{5/6\}$

e) $\{1/1\}$ f) $\{4/1\}$ g) $\{3/2\}$ h) $\{5/1\}$

4. Quais são os representantes das classes de equivalência seguintes, com denominador 12?

a) $\{1/2\}$ b) $\{1/3\}$ c) $\{2/3\}$ d) $\{1/6\}$

e) $\{5/6\}$ f) $\{1/1\}$ g) $\{0/3\}$ h) $\{1/4\}$

5. Determine as frações equivalentes às frações dadas, com denominadores iguais quaisquer; e, depois, com o menor:

a) $\frac{3}{4} = \frac{1}{8}$ b) $\frac{4}{9} = \frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

d) $\frac{2}{3} = \frac{1}{12}$ e) $\frac{1}{30} = \frac{1}{20}$ f) $\frac{5}{24} = \frac{7}{36}$

6. Calcular as somas indicadas pela Def. 3:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{9}$ b) $\frac{4}{5} + \frac{3}{20}$ c) $\frac{6}{9} + \frac{2}{12}$ d) $\frac{2}{18} + \frac{1}{2}$

7. Faça o exercício 6 usando outros representantes, verifique a estabilidade da definição.

8. Faça o exercício 6 usando representantes com o mesmo denominador.

9. Calcule os produtos com a Def. 4:

a) $\frac{1}{8} \times \frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{12} \times \frac{1}{9}$ d) $\frac{2}{15} \times \frac{10}{8}$

10. Faça o exercício 9 usando outros representantes, e verifique a estabilidade da Def. 4.

11. Faça exemplos para mostrar a associatividade da adição e da multiplicação usando as Def. 3 e 4.

12. Dê exemplos para mostrar a existência de elemento neutro na adição e na multiplicação.

13. Qual é o inverso de:

a) $3/7$ b) $2/3$ c) $1/5$ d) $0/6$!

14. Faça exemplos mostrando a distributividade da multiplicação em relação à adição.

15. Calcule usando a Def. 5:

a) $\frac{3}{8} - \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ c) $\frac{8}{9} - \frac{3}{9}$ d) $\frac{2}{3} - \frac{3}{6}$

e) $\frac{4}{5} - \frac{8}{10}$ f) $\frac{1}{6} - \frac{1}{4}$ g) $\frac{4}{7} - \frac{0}{2}$ h) $\frac{4}{4} - \frac{2}{2}$

16. Faça o exercício 15 usando outros representantes e verifique a estabilidade da Def. 5.

17. Faça o exercício 15 usando representantes com denominadores iguais.

18. Mostre com exemplos que a subtração é operação inversa da adição.

19. Faça os quocientes usando a Def. 6:

a) $\frac{3}{4} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$ c) $\frac{2}{9} : \frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{3} : \frac{0}{4}$

e) $\frac{0}{2} : \frac{3}{4}$ f) $\frac{3}{5} : \frac{3}{5}$ g) $\frac{8}{3} : \frac{2}{2}$ h) $\frac{4}{5} : \frac{8}{10}$

20. Faça o exercício 19 usando outros representantes e verifique a estabilidade da Def. 6.

21. Mostre que a divisão é operação inversa da multiplicação.

22. Calcule:

a) $(\frac{3}{5})^2$ b) $(\frac{2}{3})^3$ c) $(\frac{1}{4})^3$ d) $(\frac{2}{5})^4$

23. É preciso verificar a estabilidade da potenciação definida?

24. Calcule:

a) $\sqrt{\frac{25}{36}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{8}{64}}$ c) $\sqrt{\frac{1}{100}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{1000}{729}}$

25. Indique o significado de:

a) $3 \frac{2}{5}$ b) $2 \frac{1}{3}$ c) $1 \frac{1}{4}$ d) $3 \frac{2}{3}$

e de:

e) $3 \times \frac{2}{5}$ f) $2 \times \frac{1}{3}$ g) $1 \times \frac{1}{4}$ h) $3 \times \frac{2}{3}$

26. Estude prevalência, equivalência e supervalência:

a) $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{8}$ b) $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{7}$ c) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{6}$ e) $\frac{3}{6}$ e $\frac{6}{12}$

usando a Def. 7.

27. Faça o exercício 26 usando outros representantes e verifique a estabilidade da Def. 7.

28. Escreva as relações de desigualdade correspondentes do exercício 26 para os números fracionários representados.

29. Faça o exercício 26 usando representantes com o mesmo denominador.

30. Faça o exercício 26 usando representantes com o mesmo numerador.

31. Compare as frações e os inteiros (pode escrever $<$, $=$ ou $>$):

a) $\frac{2}{3}$ e 4 b) $\frac{8}{3}$ e 2 c) $\frac{18}{4}$ e 3 d) $\frac{25}{5}$ e 5 e) $\frac{12}{12}$ e 1

f) $\frac{0}{3}$ e 2

32. Denomine as frações, comparando-as com a unidade:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{12}{4}$ e) $\frac{6}{6}$ f) $\frac{5}{8}$

33. Extraia os inteiros:

a) $\frac{30}{4}$ b) $\frac{25}{3}$ c) $\frac{18}{6}$ d) $\frac{20}{3}$

34. Faça as ordenações crescente e depois decrescente:

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$

b) $\frac{4}{3}, \frac{4}{1}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{4}{6}$

c) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{4}, \frac{8}{12}, \frac{2}{8}, \frac{8}{9}, \frac{6}{10}$

35. Uma fração equivalente a outra com numerador menor é dita reduzida da primeira, ou simplificada; quando não é possível simplificar ela é denominada irredutível.

Transforme tornando irredutível:

a) $\frac{200}{360}$ b) $\frac{15}{60}$ c) $\frac{84}{168}$ d) $\frac{36}{120}$

36. Determine 3 frações intermediárias de:

a) $\frac{3}{8}$ e $\frac{7}{9}$ b) $\frac{1}{6}$ e $\frac{5}{8}$

37. Faça os seguintes cálculos:

a) $(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{6}) \times 2\frac{1}{2}$

b) $(5 - (2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{3})) : 3\frac{1}{3}$

c) $(\frac{3}{5} + (2\frac{1}{3} \times 5)) \times (20 - \frac{1}{4} : (\frac{2}{4} \times \frac{3}{8}))$

H. PROBLEMAS

H.1. PROBLEMAS COM SUGESTÕES

- De um barril com 60 litros de vinho retirou-se $\frac{3}{4}$. Quanto se retirou? SUGESTÃO: 1. Resolva reduzindo à unidade fracionária.
2. Resolva como simples multiplicação, interpretando a partícula "de".
- De um saco de feijão de 45 quilos retirou-se $\frac{2}{5}$. Quanto sobrou? SUGESTÃO: 1. Resolva calculando $\frac{2}{5}$ de 45 e depois subtraindo.
2. Resolva calculando a fração resto.

3. De um saco de arroz de 60 quilos vendeu-se $\frac{1}{6}$ para uma pessoa e $\frac{3}{4}$ para outra pessoa. Quantos quilos foram vendidos?

- SUGESTÃO: 1. Resolva calculando os quilos de cada venda.
2. Resolva calculando primeiramente a fração total vendida.

4. Um senhor ganhou NCr\$ 120,00. Deu $\frac{3}{8}$ para um filho, e do resto deu $\frac{4}{15}$ para outro filho. Quanto deu?

- SUGESTÃO: 1. Resolva calculando a quantia dada ao primeiro filho, depois o resto, para então calcular a quantia do segundo filho, e finalmente a doação total.
2. Resolva calculando $\frac{4}{15}$ da fração restante, depois adicionando as frações, para então calcular a quantia doada.

5. Resolva o problema anterior para a quantia de NCr\$ 180,00 com as duas sugestões; mas, no caso da pergunta ser: Com quanto ficou? SUGESTÃO 3. Resolva seguindo a sugestão 2, mas calculando a fração restante, para então calcular o restante sobre NCr\$180,00

6. Um menino possui $\frac{3}{4}$ da altura de seu pai. Sua irmã possui $\frac{2}{3}$ da sua altura. Qual é a altura da menina, sabendo-se que a altura do pai é de 180 cm?

- SUGESTÃO: 1. Resolva calculando sucessivamente as alturas.
2. Resolva calculando primeiramente a fração da altura da irmã em relação ao pai.

7. Resolva o problema 6, no caso da altura ser 160 cm, seguindo as duas sugestões; mas, no caso da pergunta ser: Quanto o pai é mais alto que sua filha?

- SUGESTÃO 3: Resolva seguindo a sugestão 2, mas calculando a fração correspondente à diferença das alturas.

8. Sabendo-se que $\frac{3}{5}$ de meu peso é igual a 48 quilos, qual é meu peso?

- SUGESTÃO: 1. Resolva reduzindo à unidade fracionária, para depois calcular o inteiro.
2. Resolva com simples divisão, raciocinando como se o enunciado fosse por exemplo: "Sabendo-se que o triplo do meu peso é igual a 48".

9. Caio ganhou mais $\frac{2}{3}$ das bolinhas que possuía e ficou com 30 bolinhas. Quantas bolinhas possuía? SUGESTÃO: Resolva calculando a fração equivalente a 30 bolinhas; e, depois, aplique as sugestões do exercício 8.

10. Resolva o problema 9, no caso de ter ficado com 80 bolinhas, e sendo a pergunta: "Quantas bolinhas ganhou?"

- SUGESTÃO: Utilize a mesma sugestão e calcule a fração $\frac{2}{3}$ correspondente.

11. Marcos perdeu $\frac{2}{7}$ das figurinhas e ficou com 60 figurinhas. Quantas figurinhas possuía?

SUGESTÃO: Resolva calculando a fração equivalente a 60 figurinhas (portanto subtraindo).

12. Repartir 36 bolinhas por dois meninos, de tal forma que o primeiro receba $\frac{1}{3}$ do que o segundo.

SUGESTÃO: 1. Aplicar o raciocínio usado no problema 9.
2. Transforme o problema em problema de inteiros, pela multiplicidade do segundo em relação ao primeiro.

13. Repartir 51 tampinhas por três meninos, de tal forma que o segundo receba $\frac{1}{4}$ do primeiro, e o terceiro receba $\frac{2}{3}$ do segundo.

SUGESTÃO: 1. Aplique o mesmo raciocínio do problema 9.
2. Organize um esquema estrutural (ver capítulo de problemas da parte metodológica) e pratique o ensino!

H.2. PROBLEMAS SEM SUGESTÃO:

- Teodoro teria 35 anos se vivesse mais $\frac{3}{4}$ do que já viveu. Qual a sua idade?
- Zenaide perdeu $\frac{2}{11}$ do que possuía e ainda ficou com R\$ 0,27. Quanto possuía?
- Repartir 240 bolinhas entre 2 meninos, recebendo o segundo $\frac{1}{6}$ do primeiro.
- Repartir 59 lápis por 2 meninos, recebendo o segundo 31 lápis mais que $\frac{1}{3}$ do primeiro.
- Repartir R\$ 0,20 entre três pessoas, recebendo o segundo a metade do primeiro, e o terceiro $\frac{1}{6}$ do primeiro.
- Repartir 1960 figurinhas entre 3 meninos, recebendo o segundo $\frac{2}{3}$ do primeiro, e o terceiro $\frac{3}{4}$ do segundo.
- Dividiu-se medalhas por duas crianças; a primeira recebeu $\frac{3}{5}$ e a segunda ficou com o resto. Sabendo-se que $\frac{2}{3}$ das medalhas são 600 medalhas, pergunta-se quanto recebeu cada uma.
- Uma peça de fazenda se tivesse mais um sexto do seu comprimento custaria R\$ 42,00. Sendo o preço do metro R\$ 1,20, quantos metros possui o comprimento da peça?
- Dois meninos juntaram os seus dinheiros para comprar um brinquedo. O primeiro possui $\frac{1}{3}$ do dinheiro, e o segundo possui $\frac{1}{8}$. Verificaram no entanto que ainda lhes faltam R\$ 6,50. Qual o preço do brinquedo? Quanto possuía cada menino?

10. Um grupo de crianças estava brincando. Um senhor aproximou-se e perguntou-lhes quantas eram. Uma bela garota respondeu: - Se ao nosso grupo viesse juntar-se outro igual, mais outro igual à metade, mais outro igual à terça parte, mais outro igual à sexta parte; e, se contássemos ainda o senhor, teríamos 55. Ajude o senhor a descobrir quantas crianças estavam no grupo.

11. Sabendo-se que $\frac{1}{4}$ de um número é igual a $\frac{1}{5}$ de outro número; e, que os dois números possuem por soma 135, calcule-os.

12. Qual é o número que dividido por 8, diminui em 42 unidades?

13. Qual é o número que dividido por $\frac{3}{4}$, aumenta em 6 unidades?

RESPOSTAS SELECIONADAS - SEQUÊNCIA XVI

CAPÍTULO - NÚMEROS RACIONAIS

- a) F b) V c) V d) F e) F f) V g) V h) V
- a) $\frac{8}{7}$ b) 5 c) 4 d) $\frac{8}{6}$ e) 0 f) 9
- a) $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{4}, \frac{4}{12}, \dots \right\}$
b) $\left\{ \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{2}{3}, \dots \right\}$
c) $\left\{ \frac{0}{2}, \frac{0}{4}, \frac{0}{7}, \dots \right\}$
f) $\left\{ \frac{8}{2}, \frac{16}{4}, \frac{4}{1}, \dots \right\}$
- a) $\frac{6}{12}$ b) $\frac{4}{12}$ f) $\frac{12}{12}$ g) $\frac{0}{12}$
- a) $\frac{18}{24} = \frac{4}{24}$; $\frac{9}{12} = \frac{2}{12}$
o) $\frac{8}{240} = \frac{12}{240}$; $\frac{2}{60} = \frac{3}{60}$
- a) $\frac{21}{27}$ c) $\frac{90}{108}$
- a) $\frac{3}{40}$ b) $\frac{5}{108}$

13. a) $\frac{7}{3}$ d) não possui
15. a) $\frac{4}{32}$ b) $\frac{8}{14}$ h) $\frac{0}{8}$
19. a) $\frac{9}{4}$ d) não existe operação e) $\frac{0}{6}$
22. a) $\frac{9}{25}$ c) $\frac{1}{64}$
23. Não, pois é multiplicação (já estudada)
24. a) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{10}$
25. a) $3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$ c) $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ e) $\frac{3}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$
26. a) $\frac{3}{4} > \frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$
28. a) $\left[\frac{3}{4}\right] > \left[\frac{1}{8}\right]$ c) $\left[\frac{1}{4}\right] < \left[\frac{1}{3}\right]$
31. a) $\frac{2}{3} < 4$ c) $\frac{18}{4} > 3$
32. a) própria d) imprópria
33. a) $7\frac{1}{2}$ c) 3
35. a) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{1}{2}$

CAPÍTULO XIV

NÚMEROS DECIMAIS

A. PRELIMINARES

Procurando dar um tratamento aos números fracionários idêntico àquele usado para os números inteiros, os matemáticos e físicos antigos, evidentemente, foram levados a cuidar das frações com o inteiro dividido em 10 partes, ou em potências de 10, visto que o sistema de numeração empregado é decimal, de base dez.

SIMON STEVIN, parece ter sido o primeiro a utilizar sistematicamente a forma numérica decimal. O holandês STEVIN trabalhava para a marinha e foi ministro dos negócios da fazenda; seu trabalho data de 1585, sob o nome "La Disme".

A notação usada por STEVIN não era muito prática; assim, empregava por exemplo, para o número 32,453 a notação:

$$32(0)4(1)5(2)3(3)$$

Outras indicações foram usadas, como as seguintes:

$$123$$

$$32453$$

$$32/4^0_5^{00}3^{000}$$

$$32,4^0_5^{00}3^{000}$$

$$32,453 \text{ ou } 32.453 \text{ ou } 32|453$$

$$32.453 \text{ ou } 32|453, \text{ etc.}$$

A notação com ponto ainda é usada em vários países, sendo que, muitas vezes para os decimais sem parte inteira, suprime-se o algarismo 0:

Exemplo: 0,34 0.34 ou .34

B. NÚMEROS FRACIONÁRIOS DECIMAIS

Dizemos que um número fracionário é decimal quando possui um dos representantes com a segunda componente igual a uma potência de 10. Isto é, um número fracionário decimal é dado por uma fração cujo denominador é potência de 10.

A fração representante de um número fracionário decimal é denominada fração decimal.

Exemplos:

$$\frac{3}{10} \quad \frac{5}{10^3} \quad \frac{4}{10^1} \quad \frac{2}{10^0} \quad \frac{0}{10^4} \quad \frac{6}{10^2}$$

que lemos: três décimos, cinco milésimos, quatro décimos, 2 inteiros, 0 décimos milésimos, 6 centésimos.

Como $10^0 = 1$, concluímos que a definição dada engloba os números inteiros; assim, o número inteiro 2, que identificamos com $\frac{2}{1}$, pode ser dado também pela fração $\frac{2}{10^0}$; e, portanto, é número fracionário decimal.

Como os números fracionários são dados por classes de equivalência, isto é, um número fracionário pode ser representado por várias frações equivalentes, concluímos que os números fracionários decimais podem ser decimal da classe de equivalência do número.

Assim, como a classe de equivalência $\left\{ \frac{3}{10} \right\}$ é o conjunto:

$$\left\{ \frac{3}{10}, \frac{6}{20}, \frac{9}{30}, \dots, \frac{30}{100}, \dots \right\}$$

o número fracionário decimal dado pela fração decimal $\frac{3}{10}$ pode ser representado por qualquer outra fração da classe; por exemplo, por $\frac{6}{20}$, $\frac{9}{30}$, ou mesmo por frações decimais: $\frac{30}{100}$, $\frac{300}{1000}$, etc.

Denominamos frações basimais às frações equivalentes a frações decimais.

No exemplo: $\frac{6}{20}$ é fração basimal, pois:

$$\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Elementarmente, diremos que uma fração basimal é qualquer fração transformável em decimal.

TEOREMA: A condição necessária e suficiente para que uma fração seja basimal, é que, depois de reduzida aos menores termos possíveis, o seu denominador só tenha fatores 2 ou 5.

Demonstração (para um 2º estudo)

Seja: $\frac{A}{B}$ a fração dada, e que reduzida é a fração $\frac{a}{b}$, isto é: $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ com a e b primos entre si.

Condição necessária:

Seja a fração $\frac{a}{b}$ basimal, então por definição é equivalente a uma decimal.

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{10^k}$$

e, portanto: $a \times 10^k = a' \times b$.

Como a e b não possuem fatores comuns, por ser $\frac{a}{b}$ irredutível, $a' \times 10^k$ são equimúltiplos de a e b:

$$a' = m \times a$$

$$10^k = m \times b \quad \text{ou} \quad 2^k \times 5^k = m \times b$$

ou que b é divisor de $2^k \times 5^k$; de onde

$$b = 2^{k'} \times 5^{k''} \quad \text{com:} \quad 0 \leq k' \leq k$$

$$0 \leq k'' \leq k$$

portanto b só possui fatores 2 ou 5, com $b = 2^{k'} \times 5^{k''}$

Condição suficiente:

Seja a fração $\frac{a}{b}$ com $b = 2^{k'} \times 5^{k''}$
com $k' \geq 0$ e $k'' \geq 0$.

1. Caso $k' = k'' = k$, então teríamos:

$$b = 2^k \times 5^k = (2 \times 5)^k = 10^k$$

e, a fração $\frac{a}{b}$ já seria decimal, então a fração dada seria basimal.

2. Caso $k' > k''$, existe um k''' tal que
 $k''' = k' - k''$.

Multiplicando b e a por $5^{k'''}$, teremos:

$$b = 2^{k'} \times 5^{k''} \times 5^{k'''} = 2^{k'} \times 5^{k''+k'''} = 2^{k'} \times 5^{k'} = 10^{k'}$$

e teríamos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times 5^{k'''}}{10^{k'}}$$

ou que $\frac{a}{b}$ é basimal, e portanto a fração dada $\frac{A}{B}$ também é basimal.

3. Se $k'' > k'$, existe um k''' tal que $k''' = k'' - k'$.

Multiplicando b e a por $2^{k'''}$, teremos:

$$b = 2^{k'} \times 5^{k''} \times 2^{k'''} = 2^{k'+k'''} \times 5^{k''} \times 5^{k''} = (2 \times 5)^{k''} = 10^{k''}$$

e, teríamos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times 2^{k'''}}{10^{k''}}$$

ou que $\frac{a}{b}$ é basimal, e portanto a fração dada $\frac{A}{B}$ também é basimal.

Exemplos:

1) $\frac{3}{12}$ é basimal, pois: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ e $4 = 2^2$

De fato:

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1 \times 5^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{5^2}{10^2} = \frac{25}{100}$$

2) $\frac{12}{40}$ é basimal, pois:

$$\frac{12}{40} = \frac{3}{10} \text{ e } \frac{3}{10} \text{ já é decimal.}$$

3) $\frac{16}{40}$ é basimal, pois: $\frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

4) $\frac{3}{60}$ é basimal, pois:

$$\frac{3}{60} = \frac{1}{20} \text{ e } 20 = 2^2 \times 5$$

5) $\frac{16}{70}$ não é basimal, pois:

$$\frac{16}{70} = \frac{8}{35} \text{ e } 35 = 5 \times 7$$

6) $\frac{10}{12}$ não é basimal, pois:

$$\frac{10}{12} = \frac{5}{6} \text{ e } 6 = 2 \times 3$$

7) $\frac{8}{132}$ não é basimal, pois:

$$\frac{8}{132} = \frac{2}{33} \text{ e } 33 = 3 \times 11$$

8) $\frac{6}{200}$ é basimal, pois:

$$\frac{6}{200} = \frac{3}{100} \text{ e } 100 = 2^2 \times 5^2 = 10^2$$

- 9) $\frac{3}{200}$ é basimal, pois é irredutível e o seu denominador é $200 = 2^3 \times 5^2$.

C. NÚMEROS DECIMAIS

Consideremos um número fracionário decimal dado por uma fração decimal $\frac{a}{b}$; portanto $b = 10^k$.

Sejam os algarismos de a : a_r, a_{r-1}, \dots, a_1 e a_0 .

Escrevamos o numerador na forma polinômica com base 10:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{10^k} = \frac{a_r \times 10^r + a_{r-1} \times 10^{r-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0}{10^k}$$

ou, pela definição de soma:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_r \times 10^r}{10^k} + \frac{a_{r-1} \times 10^{r-1}}{10^k} + \dots + \frac{a_1 \times 10}{10^k} + \frac{a_0}{10^k}$$

Pode-se dar três casos:

1. $r > k$, então $r - k = n$

Teremos:

$$(I) \frac{a}{b} = a_r \times 10^n + a_{r-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_k + \frac{a_{k-1}}{10} + \dots + \frac{a_1}{10^{k-1}} + \frac{a_0}{10^k}$$

ou

$$(II) \frac{a}{b} = a_r a_{r-1} \dots a_k + \frac{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0}{10^k}$$

Exemplo:

$$\text{Seja } \frac{a}{b} = \frac{35238}{1000} = \frac{35238}{10^3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 8}{10^3}$$

Como $4 > 3$, teremos:

$$\frac{a}{b} = 3 \times 10 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{8}{10^3} \quad (I')$$

$$\text{ou: } \frac{a}{b} = 35 + \frac{238}{10^3} = 35 + \frac{238}{1000} \quad (II')$$

A expressão II (ou II') sugere uma escrita para o número misto, onde fique separado o número inteiro, da parte fracionária. A expressão I (ou I') sugere melhor que essa escrita pode ser análoga à usada no sistema de numeração decimal, colocando os algarismos um ao lado do outro, com valor posicional; de tal forma, que um algarismo escrito a esquerda de outro vale dez vezes mais.

Passamos então à notação seguinte:

$$\frac{a}{b} = a_r a_{r-1} \dots a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0$$

ou, no exemplo: 35,238.

2. $r = k$

Teremos:

$$\frac{a}{b} = a_r + \frac{a_{r-1}}{10} + \frac{a_{r-2}}{10^2} + \dots + \frac{a_1}{10^{k-1}} + \frac{a_0}{10^k} \quad (I)$$

$$\text{ou: } \frac{a}{b} = a_r + \frac{a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1 a_0}{10^k} \quad (II)$$

Exemplo: $\frac{a}{b} = \frac{346}{100} = \frac{346}{10^2}$

$$\frac{a}{b} = \frac{3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 6}{10^2}$$

ou: $\frac{a}{b} = 3 + \frac{4}{10} + \frac{6}{10^2}$ (I')

ou: $\frac{a}{b} = 3 + \frac{46}{10^2} = 3 + \frac{46}{100}$ (II')

Novamente se verificam as mesmas idéias: separar o número inteiro, o que fizemos com uma vírgula, e escrever os algarismos simplesmente um ao lado do outro, estendendo o sistema de numeração decimal de posição:

$$\frac{a}{b} = a_r \cdot a_{r-1} a_{r-2} \cdots a_1 a_0$$

e, no exemplo: 3,46

3. $r < k$, então $k - r = m$

Teremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_r}{10^m} + \frac{a_{r-1}}{10^{m-1}} + \cdots + \frac{a_1}{10^{k-1}} + \frac{a_0}{10^k} \quad (I)$$

ou simplesmente como era:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0}{10^k} \quad (II)$$

Exemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{27}{1000} = \frac{27}{10^3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2 \times 10 + 7}{10^3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{10^2} + \frac{7}{10^3} \quad (I')$$

Neste caso, sendo a fração própria, evidentemente não há parte inteira; mas, para identificarmos as notações, podemos pensar o número inteiro zero, para isso colocando o algarismo 0;

$$\frac{a}{b} = 0 + \frac{a_r}{10^m} + \frac{a_{r-1}}{10^{m+1}} + \cdots + \frac{a_1}{10^{k-1}} + \frac{a_0}{10^k}$$

e, no exemplo:

$$\frac{a}{b} = 0 + \frac{2}{10^2} + \frac{7}{10^3}$$

Entretanto, com este procedimento fica restaurado só a existência das duas partes: número inteiro a parte fracionária; mas, o princípio de posição não seria válido; para uniformizarmos, escrevemos colocando frações adicionais com numeradores nulos:

$$\frac{a}{b} = 0 + \frac{0}{10} + \frac{0}{10^2} + \cdots + \frac{0}{10^{m-1}} + \frac{a_r}{10^m} + \frac{a_{r-1}}{10^{m+1}} + \cdots + \frac{a_1}{10^{k-1}} + \frac{a_0}{10^k}$$

e, no exemplo:

$$\frac{a}{b} = 0 + \frac{0}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{7}{10^3}$$

e, agora sim, podemos usar a mesma notação:

$$\frac{a}{b} = 0,00 \dots 0a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0$$

e, no exemplo:

$$\frac{a}{b} = 0,027$$

Definição:

Definimos número decimal ou numeral decimal à nova notação dos números fracionários decimais.

Adotamos a seguinte convenção:

1. Escreve-se só os algarismos do numerador da fração decimal.
2. Separa-se o número inteiro do número fracionário menor que a unidade por uma vírgula.
3. Acrescenta-se algarismos 0 para restaurar o valor de posição do sistema de numeração decimal.

Em todo número decimal ficam portanto separados pela vírgula dois conjuntos de algarismos, os quais denominam-se: parte inteira e parte decimal.

A leitura é conforme com a representação, lê-se a parte inteira, agregando a palavra inteiros, e em seguida lê-se a parte decimal, agregando-se a palavra décimos, ou centésimos, ou milésimos, etc. conforme a parte decimal possua 1 algarismo, ou 2, ou 3, etc.; e, também em conformidade com a leitura do número misto correspondente.

Exemplos:

- a) 45,3 - quarenta e cinco inteiros, e três décimos;
- b) 7,84 - sete inteiros, e oitenta e quatro centésimos;
- c) 0,372 - zero inteiros, e trezentos e setenta e dois milésimos;

d) 0,038 - zero inteiros, e trinta e oito milésimos.

Costuma-se também ler sem a agregação das palavras, mas pronunciando a palavra vírgula separando as partes:

- a') quarenta e cinco, vírgula três;
- b') sete, vírgula oitenta e quatro;
- c') zero vírgula, trezentos e setenta e dois;
- d') zero vírgula, zero, trinta e oito.

Adota-se ainda outra forma, análoga à anterior; lê-se a parte inteira, pronuncia-se vírgula, e passa-se à leitura da parte decimal, lendo sucessivamente as classes.

Como para os numerais de números inteiros, os números decimais (numerais decimais) também são separados em classes de três algarismos, ou três ordens; assim, a parte inteira é separada da direita para a esquerda conforme os números inteiros; mas, a parte decimal é separada da esquerda para a direita, mas a primeira classe é constituída de uma ordem da parte inteira(*).

Esquema:

| 1ª classe | 2ª classe | 3ª classe |

Cada classe é separada em três ordens:

- 1ª ordem: ordem das unidades;
- 2ª ordem: ordem dos décimos;
- 3ª ordem: ordem dos centésimos.

- 1ª Classe: classe das unidades decimais simples
- 2ª Classe: classe dos milésimos;
- 3ª Classe: classe dos milionésimos;
- 4ª Classe: classe dos bilionésimos, etc.

(*) A razão é dada pelas frações decimais de denominador $10^0 = 1$.

Exemplo:

4,2762580209

Temos:

- 4 unidades decimais simples ou 4 unidades simples;
- 2 décimos de unidades ou 2 décimos;
- 7 centésimos de unidades ou 7 centésimos;
- 6 milésimos;
- 2 décimos de milésimos;
- 5 centésimos de milésimos;
- 8 milésimos (milésimo de milésimo);
- 0 décimos de milionésimos;
- 2 centésimos de milionésimos;
- 0 bilionésimos (milésimo de milionésimo);
- 9 décimos de bilionésimos.

É usada também a separação das classes em 3 ordens mas só da parte decimal, o que não achamos o melhor, pois, neste caso, as classes não estarão em conformidade com as classes dos números inteiros; deverá se dizer neste caso:

- 1ª ordem: ordem dos décimos;
- 2ª ordem: ordem dos centésimos;
- 3ª ordem: ordem dos milésimos.

Da propriedade de um número fracionário decimal pode ser representado por várias frações decimais, equivalentes entre si, como:

$$\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}, \text{ etc.}$$

resulta que é permitido acrescentar algarismos 0 à direita de um número decimal, a adição e a subtração com números decimais pode sempre corresponder à adição de frações decimais, com o mesmo denominador:

$$\frac{a}{10^k} + \frac{b}{10^k} + \frac{a+b}{10^k}$$

De onde, a adição ou subtração com números decimais é feita operando como se inteiros fossem, tomando-os com o mesmo número de algarismos na parte deci-

mal, o que corresponde a tomar o mesmo denominador:

Exemplos:

a) $3,2 + 14,58$

Como $3,2 = \frac{32}{10} = \frac{320}{100}$

e $14,58 = \frac{1458}{100}$

teremos:

$$3,2 + 14,58 = \frac{320}{100} + \frac{1458}{100} \quad \text{ou} \quad 3,20 + 14,58$$

$$= \frac{320 + 1458}{100}$$

$$= \frac{1778}{100} = 17,78$$

ou: $3,2 = 3 + \frac{20}{100}$

$$14,48 = 14 + \frac{58}{100}$$

$$= 17 + \frac{78}{100} = 17,78$$

Na prática faz-se:

$$\begin{array}{r} 3,20 \\ 14,58 + \\ \hline 17,78 \end{array}$$

Costuma-se também, para simplicidade, não anexar os algarismos 0, mas tomando o cuidado equivalente de se colocar as vírgulas em correspondência, de tal forma que se adicione (ou subtraia) para inteira com parte inteira, para decimal com parte decimal, unidade de uma ordem com a unidade da mesma orde:

$$\begin{array}{r} 3,2 \\ 14,58 \\ \hline 17,78 \end{array}$$

$$\text{b) } 38,65 - 14,3 \quad \begin{array}{r} 38,65 \\ -14,30 \\ \hline 24,35 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 38,65 \\ -14,3 \\ \hline 24,35 \end{array}$$

$$\text{c) } 25,2 - 7,683 \quad \begin{array}{r} 25,200 \\ -7,683 \\ \hline 17,517 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 25,2 \\ -7,683 \\ \hline 17,517 \end{array}$$

D. 2. MULTIPLICAÇÃO

$$\text{Como } \frac{a}{10^k} \times \frac{b}{10^{k'}} = \frac{a \times b}{10^{k+k'}}$$

a multiplicação com números decimais também é feita como se fossem números inteiros; depois, coloca-se a vírgula separando tantos algarismos na parte decimal quanto é a soma dos números de algarismos das partes decimais dos fatores.

Exemplos:

$$\text{a) } 2,5 \times 3,4 \quad \begin{array}{r} 2,5 \\ \times 3,4 \\ \hline 100 \\ 75 \\ \hline 8,50 \end{array}$$

$$\text{b) } 0,3 \times 1,42 \quad \begin{array}{r} 1,42 \\ \times 0,3 \\ \hline 0,426 \end{array}$$

D. 3. DIVISÃO

Consideremos a divisão:

$$0,3 : 0,2$$

Teremos com a notação de frações decimais:

$$\frac{3}{10} : \frac{2}{10} = \frac{3 \times 10}{10 \times 2} = \frac{3}{2}$$

$\frac{3}{2}$ é fração basimal, portanto transformável em decimal:

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \times 5}{2 \times 5} = \frac{15}{10} = 1,5$$

logo: $0,3 : 0,2 = 1,5$

Façamos o cálculo de outra maneira:

$$\frac{3}{2} = 3 : 2 \quad \begin{array}{r} 3 \overline{) 2} \\ 1 \quad 1 \end{array}$$

$$\text{mas } 1 : 2 = \frac{10 : 2}{10} \quad \begin{array}{r} 10 \overline{) 2} \\ 0 \quad 5 \end{array}$$

$$= \frac{5}{10} = 0,5$$

isto é: $\frac{3}{2} = 1 + 0,5 = 1,5$

Observemos ainda que este segundo cálculo poderia ser feito continuando o algoritmo da divisão, pois bastaria ter acrescentado um algarismo 0 ao lado do algarismo 1, transformando-o em décimos, por isso colocando já uma vírgula no quociente:

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 2} \\ 10 \quad 1,5 \\ 0 \end{array}$$

Consideremos agora a divisão:

$$0,5 : 0,3$$

$$0,5 : 0,3 = \frac{5}{10} : \frac{3}{10} = \frac{5}{3}$$

temos: $5 : 3$ ou
$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 3} \\ 2 \quad 1 \end{array}$$

Sabemos que $\frac{5}{3}$ não é basal, isto é, o quociente de números decimais não é decimal; estamos na mesma situação que na divisão de inteiros(*):

$$5 : 3$$

cujo quociente não é número inteiro, é fracionário.

Vamos no entanto aplicar o mesmo procedimento que empregamos para a divisão anterior.

$$\frac{5}{3} = 5 : 3 \quad \begin{array}{r} 5 \overline{) 3} \\ 2 \quad 1 \end{array}$$

ou que $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$ ou $1 + 2 : 3$

$$2 : 3 = \frac{20 : 3}{10} \quad \begin{array}{r} 20 \overline{) 3} \\ 2 \quad 6 \end{array}$$

ou que: $2 : 3 = \frac{6}{10} + \frac{2 : 3}{10} = 0,6 + \frac{2 : 3}{10}$

Apliquemos novamente o processo:

$$\frac{2 : 3}{10} = \frac{20 : 3}{100} \quad \begin{array}{r} 20 \overline{) 3} \\ 2 \quad 6 \end{array}$$

ou que: $\frac{2 : 3}{10} = \frac{6}{100} + \frac{2 : 3}{100} = 0,06 + \frac{2 : 3}{100}$

(*) Dizemos que a divisão sobre o conjunto de inteiros, ou que a divisão sobre o conjunto de números decimais não goza da propriedade de fechamento.

com estes resultados temos sucessivamente:

$$\begin{aligned} 0,5 : 0,3 &= 1 + 2 : 3 \\ &= 1 + 0,6 + \frac{2 : 3}{10} = 1,6 + \frac{2 : 3}{10} \\ &= 1 + 0,6 + 0,06 + \frac{2 : 3}{100} = \\ &= 1,66 + \frac{2 : 3}{100} \end{aligned}$$

isto é, nós vamos determinando um quociente cada vez melhor, pois as frações:

$$2 : 3 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2 : 3}{10} = \frac{2}{30}$$

$$\frac{2 : 3}{100} = \frac{2}{300}$$

são cada vez menores.

Dizemos que o quociente de 0,5 por 0,3 é:

1 aproximado por falta a menos de uma unidade

ou: 1,6 aproximado por falta a menos de um décimo

ou: 1,66 aproximado por falta a menos de um centésimo, etc.

Cujo cálculo podíamos ter feito num só dispositivo, para isso acrescentando algarismos 0 ao lado dos restos:

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 3} \\ 20 \quad 1,66 \\ 20 \\ 2 \end{array}$$

Este exemplo e o anterior sugere a utilização para os números decimais do mesmo algoritmo de cálculo usado para divisão de números inteiros, determinando quocientes exatos, ou aproximados por falta conforme a aproximação desejada.

Exemplos:

a) $3,4 : 1,25$

$$3,4 = \frac{34}{10} = \frac{340}{100}$$

$$1,25 = \frac{125}{100}$$

logo: $3,4 : 1,25 = \frac{340}{100} : \frac{125}{100} = 340 : 125$

$$\begin{array}{r} 340 \quad \overline{) 125} \\ 900 \quad 2,72 \\ 250 \\ 00 \end{array}$$

b) $5,36 : 0,8$

$$5,36 = \frac{536}{100}$$

$$0,8 = \frac{8}{10} = \frac{80}{100}$$

logo: $5,36 : 0,8 = \frac{536}{100} : \frac{80}{100} = 536 : 80$

$$\begin{array}{r} 536 \quad \overline{) 80} \\ 560 \quad 6,7 \\ 00 \end{array}$$

c) $12,6 : 0,72$

$$12,6 = \frac{126}{10} = \frac{1260}{100}$$

$$0,72 = \frac{72}{100}$$

logo: $12,6 : 0,72 = \frac{1260}{100} : \frac{72}{100} = 1260 : 72$

$$\begin{array}{r} 1260 \quad \overline{) 72} \\ 540 \quad 17,5 \\ 360 \\ 00 \end{array}$$

d) $2,8 : 1,7$

ou: $2,8 : 1,7 = 28 : 17$

$$\begin{array}{r} 28 \quad \overline{) 17} \\ 11 \quad 1 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 28 \quad \overline{) 17} \\ 110 \quad 1,6 \\ 0,8 \end{array}$$

$$\text{ou} \quad \begin{array}{r} 28 \quad \overline{) 17} \\ 110 \quad 1,64 \\ 080 \\ 12 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 28 \quad \overline{) 17} \\ 110 \quad 1,647 \\ 080 \\ 120 \\ 01 \end{array}$$

Desta extensão resulta o processo prático de igualar o número de casas decimais para se efetuar a divisão.

Outros processos podem ser obtidos; vejamos o seguinte raciocínio que conduz ao mesmo algoritmo de divisão usado para números inteiros:

Tomemos o exemplo (b) $5,36 : 0,8$.

Teremos: $5,36 : 0,8 = \frac{536}{100} : \frac{8}{10}$

$$= \frac{536}{10} : 8 = \left(53 + \frac{6}{10} \right) : 8$$

$$= 53 : 8 + \frac{6}{10} : 8 \text{ e, como } \begin{array}{r} 53 \quad \overline{) 8} \\ 5 \quad 6 \end{array}$$

$$= 6 + 5 : 8 + \frac{6}{10} : 8$$

$$= 6 + \frac{50}{10} : 8 + \frac{6}{10} : 8$$

$$= 6 + \frac{56 : 8}{10} \quad \text{e, como} \quad \begin{array}{r} 56 \\ 0 \end{array} \overline{) 8}$$

$$= 6 + \frac{7}{10}$$

$$= 6,7$$

cujos dois cálculos podemos fazer num só dispositivo :

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 3,6} \quad \overline{) 8} \\ 5 \ 6 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 7 \end{array}$$

isto é:

Transformando-se o divisor em inteiro multiplicando-se, por uma potência de dez conveniente, o divisor e o dividendo. Coloca-se no quociente a vírgula quando é empregado o primeiro algarismo da parte decimal do dividendo.

Exemplo: $4,5694 : 0,25$

Como o divisor possui dois algarismos na parte decimal, o transformamos em inteiro multiplicando-o por 100, e idem multiplicamos o dividendo, logo:

$$4,5694 : 0,25 = 456,94 : 25$$

$$\begin{array}{r} 4 \ 5 \ 6,9 \ 4 \quad \overline{) 25} \\ 2 \ 0 \ 6 \quad \quad \quad 18,27 \text{ (aproximado)} \\ 0 \ 6 \ 9 \\ 1 \ 9 \ 4 \\ 1 \ 9 \end{array}$$

ou continuando o cálculo por anexação de algarismos 0, pois sabemos que sendo $25 = 5^2$, a divisão é exata se prolongarmos o cálculo suficientemente:

$$\begin{array}{r} 4 \ 5 \ 6,9 \ 4 \quad \overline{) 25} \\ 2 \ 0 \ 6 \quad \quad \quad 18,2776 \\ 0 \ 6 \ 9 \\ 1 \ 9 \ 4 \\ 1 \ 9 \ 0 \\ 1 \ 5 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{array}$$

NOTA: Na parte metodológica do livro o leitor encontrará um estudo comparativo dos vários processos.

E. GERATRIZES E DÍZIMAS PERIÓDICAS

Temos visto que as divisões de decimais era possível em alguns casos, mas em outros não, e fizemos uma extensão do algoritmo da divisão de inteiros.

A extensão do algoritmo da divisão serviu para determinar quocientes ou quocientes aproximados; sendo que há divisões em que podemos melhorar a aproximação dos quocientes tanto quanto queiramos, para isto prolongando suficientemente o cálculo com anexação de zeros.

Estas dificuldades surgiram do fato de existirem frações não-decimais que são não-basimais.

Como uma fração qualquer a/b pode ser interpretada como o quociente $a : b$, há frações com as quais, efetuando a divisão do numerador pelo denominador, o quociente obtido é exato, ou o quociente obtido é aproximado. Diremos que a fração gerou um número decimal ou que gerou um número decimal indefinido. Diremos também que a fração é geratriz ou geradora do número decimal.

No caso da divisão não ser exata, os algarismos

forçosamente se repetirão sistematicamente; por isso, dizemos que se tem número decimal periódico, ou dízima periódica ou decimal periódica.

O conjunto ordenado de algarismos que se repetem é denominado período da dízima.

Há dois tipos de números decimais periódicos:

1. O período imediato à virgula,
2. Há um conjunto de algarismos depois da virgula, antes do período; é denominado parte não-periódica ou não-período ou ante-período.

O primeiro tipo é chamada simples e o segundo é chamada composta.

Exemplos:

$$\text{a) } \frac{3}{4} \quad \begin{array}{r} 30 \overline{) 4} \\ 20 \quad 0,75 \\ 0 \end{array} \quad \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\text{b) } \frac{23}{3} \quad \begin{array}{r} 23 \overline{) 3} \\ 20 \quad 7,6 \\ 2 \end{array}$$

Escrevemos: $\frac{23}{3} = 7,\overline{6}$

ou: 7,666...

ou: 7,6̇

ou: 7,(6)

ou: 7,161

$$\text{c) } \frac{52}{7} \quad \begin{array}{r} 52 \overline{) 7} \\ 30 \quad 7,428571 \\ 20 \\ 60 \\ 40 \\ 50 \\ 10 \\ 3 \end{array}$$

escrevemos:

$$\frac{52}{7} = 7,\overline{428571}$$

$$\text{d) } \frac{8}{15} \quad \begin{array}{r} 80 \overline{) 15} \\ 50 \quad 0,5\overline{3} \\ 5 \end{array}$$

escrevemos:

$$\frac{8}{15} = 0,5\overline{3}$$

onde, $0,5\overline{3}$ é uma dízima periódica composta de período 3 e de não-período 5.

Transformada a fração em irredutível, caso o denominador só possua fatores 2 ou 5, já sabemos que ela é basal, portanto o quociente é número decimal exato ou decimal exata. Caso possua outros fatores, é decimal periódica. Quando possui fatores diferentes de 2 ou 5, gera decimal periódica simples; e, quando possui fatores 2 ou 5 e outros fatores, gera decimal periódica composta.

Exemplos:

$$\text{a) } \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

Como $4 = 2^2$, $30/40$ é basal, logo é geradora de decimal exata:

$$30 \overline{) 40} \quad \text{ou} \quad 30 \overline{) 4} \\ \underline{20} \quad 0,75 \\ 0$$

então:

$$\frac{30}{40} = 0,75$$

$$b) \frac{30}{110} = \frac{3}{11}$$

Como $11 \neq 2$ e $11 \neq 5$, a fração é não-basimal; portanto, é geradora de dízima periódica simples:

$$30 \overline{) 11} \\ \underline{80} \quad 0,27 \\ 3$$

$$\text{então: } \frac{30}{110} = 0,2\overline{7}$$

$$c) \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$$

Como $22 = 2 \times 11$, a fração é não-basimal, e o denominador possui fatores 2 e fator 11 que é diferente de 2 ou 5; portanto, a fração é geratriz de dízima periódica composta:

$$30 \overline{) 22} \\ \underline{80} \quad 0,136 \\ 140 \\ 8$$

$$\text{então: } \frac{30}{220} = 0,1\overline{36}$$

OBTENÇÃO DAS GERATRIZES

Conhecendo-se o número decimal, exato ou periódico, é possível determinar facilmente uma fração geratriz.

1. GERATRIZ DE DECIMAL EXATA

Este caso é o mais simples, pois sendo rigorosamente número decimal, basta colocar todos algarismos para numerador e colocar para denominador uma potência de dez igual ao número de algarismos da parte decimal.

Exemplos:

$$a. \quad 2,3 = \frac{23}{10}$$

$$b. \quad 0,45 = \frac{45}{100}$$

$$c. \quad 0,450 = \frac{450}{1000}$$

2. GERATRIZ DE DÍZIMA PERIÓDICA SIMPLES

É bastante fácil a determinação da geratriz; faremos através de um exemplo.

$$\text{Seja: } 0,4\overline{2}$$

$$\text{Temos: } 100 \times 0,4\overline{2} - 1 \times 0,4\overline{2} = 42,4\overline{2} - 0,4\overline{2}$$

$$\text{ou: } 99 \times 0,4\overline{2} = 42$$

$$\text{ou que: } 0,4\overline{2} = 42/99$$

Fazendo novos exemplos com outros números de algarismos no período, o leitor chegará a encontrar a regra seguinte, mas é aconselhável que o professor não aplique a regra e sim saiba utilizar o processo.

REGRA: "Uma geratriz de uma dízima periódica simples (de parte inteira nula) é uma fração que tem para numerador o período e para denominador um número formado por tantos nozes quantos forem os algarismos do período".

Exemplos:

$$a. \quad 2,\overline{5} = 2 + 0,\overline{5} = 2 + \frac{5}{9} = 2 \frac{5}{9} \quad (*) = \frac{23}{9}$$

$$b. \quad 0,\overline{428} = \frac{428}{999}$$

3. GERATRIZ DE UMA DÍZIMA PERIÓDICA COMPOSTA

Seja: $0,\overline{342}$

Temos:

$$1000 \times 0,\overline{342} - 10 \times 0,\overline{342} = 342,\overline{42} - 3,\overline{42}$$

$$\text{ou: } 990 \times 0,\overline{342} = 339$$

$$\text{ou: } 0,\overline{342} = 339/990$$

O leitor poderá fazer novos exemplos e determinará a regra seguinte, mas valem as mesmas recomendações anteriores.

REGRA: "Uma geratriz de uma dízima periódica composta (de parte inteira não nula) é uma fração que tem para numerador o número constituído de não-período, seguido do período, menos o não-período; e, para denominador, um número formado de tantos nozes quantos são os algarismos do não-período".

$$\text{Exemplos: } a. \quad 0,4\overline{62} = \frac{462 - 46}{900} = \frac{416}{900}$$

$$b. \quad 2,4\overline{3} = 2 + 0,4\overline{3} = 2 + \frac{43-4}{90} = 2 + \frac{39}{90} = 2 \frac{39}{90} = \frac{219}{90} \quad (**)$$

(*) Utilize também o processo de multiplicar por 10 diretamente o número 2,5. (**) Idem ao (*), 2,43

NOTA: O leitor poderá empregar uma fórmula básica para obter geradoras, fórmula que fornece o limite da soma de uma progressão geométrica decrescente ilimitada:

$$S = \frac{a}{1 - q}$$

onde: $a = 1^o$ termo

$q =$ razão ou quociente entre dois termos consecutivos.

Exemplos:

$$a) \quad 0,\overline{2} = 0,2 + 0,02 + 0,002 + \dots$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \dots$$

$$S = \frac{a}{1 - q} = \frac{2/10}{1 - 1/10} = \frac{2/10}{9/10} \quad \text{logo: } 0,\overline{2} = 2/9.$$

$$b) \quad 0,\overline{34} = 0,34 + 0,0034 + 0,000034 + \dots$$

$$= \frac{34}{100} + \frac{34}{10000} + \frac{34}{1000000} + \dots$$

$$S = \frac{a}{1 - q} = \frac{34/100}{1 - 1/100} = \frac{34/100}{99/100} \quad \text{logo: } 0,\overline{34} = \frac{34}{99}$$

$$c) \quad 0,2\overline{5} = 0,2 + 0,05 + 0,005 + 0,0005 + \dots$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \dots$$

$$S = \frac{a}{1 - q} = \frac{5/100}{1 - 1/10} = \frac{5/100}{9/10} = \frac{5}{90}$$

$$\text{logo: } 0,2\bar{5} = \frac{2}{10} + \frac{5}{90} = \frac{18 + 5}{90} = \frac{23}{90}$$

F. EXERCÍCIOS - SEQUÊNCIA XVII

- Forme os conjunto de frações basimais das seguintes frações:
a) $2/10$ b) $5/10$ c) $8/10$ d) $0/10$
e) $1/100$ f) $4/100$ g) $23/100$ h) $18/1000$
- Calcule uma outra fração decimal e equivalente a cada fração dada:
a) $6/10$ b) $5/100$ c) $8/100$ d) $10/100$
e) $24/100$ f) $200/1000$ g) $3/1000$ h) $126/100$
- Determine quais frações são basimais ou não-basimais:
a) $5/12$ b) $16/60$ c) $69/150$ d) $14/320$
e) $15/99$ f) $23/273$ g) $28/88$ h) $2400/6000$
- Escreva as frações do exercício 1 na forma de numerais decimais.
- Escreva os numerais decimais das frações basimais do exercício 3.
- Quais frações do exercício 3 são representantes de números fracionários decimais?
- Faça as adições seguintes, transformando os números decimais em frações decimais:
a) $2,4 + 1,8$ b) $21,73 + 5,4$
c) $0,652 + 2,3045$ d) $1,02 + 3,541$
- Faça as adições do exercício 7 na própria forma decimal.
- Faça as subtrações seguintes, transformando os números decimais em frações decimais:
a) $8,4 - 2,3$ b) $25,34 - 12,15$
c) $8,7 - 1,54$ d) $12,6 - 0,758$

- Faça as subtrações do exercício 9 na própria forma decimal.
- Faça as multiplicações transformando em frações decimais:
a) $0,4 \times 0,8$ b) $2,5 \times 1,6$
c) $1,32 \times 3,4$ d) $4,5 \times 25,238$
- Faça o exercício 11 na própria forma decimal.
- Faça as divisões seguintes, transformando em frações decimais, obtendo para quociente uma fração basimal; transforme-a em fração decimal e depois em numeral decimal:
a) $0,5 : 0,2$ b) $1,4 : 0,5$
c) $1,2 : 0,7$ d) $0,6 : 0,25$
- Tome a questão 13a e resolva-a determinando:
a) $0,5 : 0,2 = 5 : 2$,
b) o quociente e o resto inteiros,
c) considere o quociente indicado do resto pelo divisor como sendo uma fração de denominador 10,
d) efetue a divisão indicada no numerador,
e) adicione os dois quocientes e confira os resultados encontrados,
f) Faça todo o cálculo anterior num só dispositivo de divisão, estude bem cada passagem prática comparando as passagens anteriores.
- Faça a mesma coisa que fez no exercício 14 com as questões 13b e 13d. Qual regra prática você conclui do exercício 13d a respeito das casas decimais? Essa regra já estava verificada nos exercícios a) e b)?
- Calcule os quocientes indicados com o dispositivo prático, empregando a regra de igualação do número de casas decimais:
a) $1,54 : 0,8$ b) $23,4 : 0,02$
c) $42,8 : 1,25$ d) $386,952 : 62,5$

17. Aplique na questão 13c) o processo sugerido no exercício 14; como não dará exata a divisão sugerida na alínea d), depois de aplicar a alínea e), utilize novamente a alínea c); assim sucessivamente.

Resposta: Quocientes aproximados:

1; 1,7; 1,71; 1,714; etc.

18. Faça todo cálculo do exercício anterior num só dispositivo de divisão.

19. Faça as divisões seguintes num só dispositivo de divisão; continue a empregar a regra de igualação do número de casas decimais:

a) $5,32 : 0,3$ com aproximação a menos de um décimo,

b) $0,85 : 1,3$ com aproximação a menos de um centésimo,

c) $34,6 : 0,75$ com aproximação a menos de um milésimo.

20. Faça as divisões do exercício 19 aplicando o processo de transformação do divisor em inteiro.

21. Verifique se as frações seguintes são geradoras de números decimais ou de números decimais periódicos:

a) $3/8$ b) $15/6$ c) $18/7$

d) $12/15$ e) $10/60$ f) $40/250$

22. No exercício 21, quais são geradoras de dízimas periódicas simples ou compostas?

23. Obtenha os números decimais gerados por tôdas frações do exercício 21.

24. Obtenha frações geradoras (ou geratrizes) dos números decimais seguintes:

a) $32,4$ b) $2,3$ c) $0,26$ d) $0,35$ e) $0,46$
 f) $0,238$ g) $1,025$ h) $0,54$ i) $0,20$ j) $0,20$
 k) $0,02$ l) $0,020$

25. Faça os seguintes cálculos:

a) $2,34 + 1,6 + 2,846 + 7,2 + 9$

b) $(2,5 - 0,42) + (2,63 - 1,8)$

c) $(12,5 \times 1,43) + (5,6 - 1,35)$

d) $(2,01 - 1,3) \times 0,46$ e) $(3,58 - 0,4) - 2,003$

f) $5,23 \times 100$ g) $42,4 \times 10$ h) $0,023 \times 1000$

i) $3,52 \times 1000$ j) $0,4 \times 100$ k) $5,23 \times 0,1$

l) $3,8 \times 0,01$ m) $25,6 \times 0,001$

n) $(3,8 + \frac{5}{10}) + (1,53 - \frac{2}{10})$

o) $[(0,3 + 2,4) \times 0,1] - 0,2$ (transformado em fração e depois com decimais)

RESPOSTAS SELECIONADAS - SEQUÊNCIA XVII

1. a) $\left\{ \frac{1}{5}, \frac{4}{20}, \frac{6}{30}, \dots \right\}$ c) $\left\{ \frac{4}{5}, \frac{16}{20}, \frac{24}{30}, \dots \right\}$

3. a) não-basimal h) basimal

4. a) $0,2$ g) $0,23$

6. As basimais

7. b) $\frac{5713}{100} = 57,13$

9. c) $\frac{716}{100} = 7,16$ 11a) $\frac{32}{100} = 0,32$

13. a) $\frac{50}{20} = \frac{250}{100} = 2,5$

21. c) periódica simples e) periódica composta

24. a) $\frac{324}{10}$ d) $\frac{35}{99}$ h) $\frac{2}{90}$

25. b) $2,91$ o) $\frac{46}{900}$ ou $0,05\bar{1}$

Í N D I C E

A - Oferecimento.....	pg. 3
B - Pensamento.....	4
C - Introdução.....	5
CAPÍTULO I - Noções de Conjuntos e Correspondência Biunívoca.....	7
CAPÍTULO II- Número, Numerais e Numeração.....	21
CAPÍTULO III- Adição.....	36
CAPÍTULO IV - Subtração.....	43
CAPÍTULO V - Multiplicação.....	50
CAPÍTULO VI - Divisão.....	61
CAPÍTULO VII- Potenciação.....	74
CAPÍTULO VIII- Radiciação.....	82
CAPÍTULO IX - Cálculo Prático das Operações.....	86
CAPÍTULO X - Divisibilidade Numérica.....	113
CAPÍTULO XI - Números Primos e Números Compostos	142
CAPÍTULO XII- Maximização e Minimização.....	156
CAPÍTULO XIII- Números Racionais.....	183
CAPÍTULO XIV - Números Decimais.....	233
Í N D I C E.....	264

OBRAS DO AUTOR

Elementos de Lógica Aplicada ao Ensino Secundário (em preparo)
Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares (em coautoria)
Matemática, Metodologia e Complementos
para Professores Primários - vols. 2 e 3
Análise Combinatória e Probabilidades
Geometria Analítica Moderna (Plano)
Estatística Elementar - vols. 1 e 2

Gráfica Benetti Ltda.
Rua João Alves, 193 - C. 3
São Paulo