

David Roza José

**MODELO DE DANO NÃO LOCAL PARA DECOESÃO
DE INTERFACES**

Dissertação submetida ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
da Universidade Federal de Santa Catarina
para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica.

Orientador: Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

Florianópolis

2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

José, David Roza
Modelo de dano não local para decoesão de interfaces /
David Roza José ; orientador, Marcelo Krajnc Alves -
Florianópolis, SC, 2014.
126 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Mecânica dos Sólidos. 3.
Mecânica do Dano. 4. Elementos Finitos. I. Alves, Marcelo
Krajnc. II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

David Roza José

MODELO DE DANO NÃO LOCAL PARA DECOESÃO DE INTERFACES

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis - SC, 17 de Dezembro de 2014.

Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.
Orientador

Lindaure Maria Steffens, Ph.D.
Universidade do Estado de Santa Catarina -
UDESC

Hazim Ali Al-Qureshi, Ph.D.
Universidade Federal de Santa Catarina -
UFSC

José Carlos de Carvalho Pereira, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina -
UFSC

Dedico este trabalho aos meus pais,
por jamais terem me deixado sem
seu apoio e seu amor;
À minha namorada, pela sempre
agradável companhia;
À ciência e ao conhecimento: úni-
cos meios de nos removerem da es-
curidão da ignorância e do precon-
ceito.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais. Sem o suporte e compreensão de ambos eu jamais teria conseguido trilhar o caminho que desejei. Apesar da sempre incômoda pergunta: “Quando terminarás o mestrado?”, jamais deixaram de acreditar que um dia chegaria ao fim. Portanto, a eles, todo o meu amor e gratidão.

Agradeço também ao Prof. Dr. Marcelo Krajnc Alves, sem o qual este trabalho não existiria. Desejo, num futuro, possuir uma parcela do profundo e extenso conhecimento em matemática aplicada e engenharia que o Prof. Marcelo possui; sendo inefável a qualidade adicionada a este trabalho oriunda da capacidade e experiência dele.

Agradeço aos demais professores do PosMec, que muito contribuíram para minha formação profissional.

Agradeço à minha namorada, Paola Borba, pelo carinho, paciência, apoio e companheirismo que sempre acompanharam nosso namoro. A felicidade e segurança emocional são ferramentas extremamente eficazes na produtividade e dedicação profissional.

Agradeço também aos companheiros do Grupo de Matemática Aplicada e Computacional - GMAC - pela parceria, conversas e risadas nestes quase três anos.

Agradeço também à comunidade Astatalk.com; e à todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para com este trabalho ou com minha formação e conhecimentos.

The headlong stream is termed violent
But the river bed hemming it in is
Termed violent by no one.
(Bertolt Brecht, 1930)

RESUMO

O objetivo do trabalho consiste em propor um modelo constitutivo e um procedimento numérico para a análise do processo de perda de adesão na interface entre os materiais constituintes, sujeita a uma condição de contato unilateral com atrito na interface. O modelo proposto considera duas variáveis de dano possibilitando não só a descrição do modo I de abertura da trinca na interface mas também o modo II de abertura e sua interação com o modo I no processo de perda de adesão. Faz-se uso de um modelo não local de dano baseado na teoria de primeiro gradiente. O modelo proposto foi inteiramente desenvolvido em um contexto da termodinâmica de processos irreversíveis assegurando assim a obtenção de um modelo constitutivo consistente termodinamicamente. Para a discretização do problema proposto foram aplicados o método da diferença finita semi-implícito na discretização do domínio temporal e o método dos elementos finitos para discretização do domínio espacial. Visando a validação do modelo e a identificação dos parâmetros materiais do mesmo, foram considerados alguns testes experimentais e alguns problemas. O modelo proposto mostrou ser capaz de reproduzir adequadamente testes do tipo DCB, que são aberturas do tipo modo I puro, com adesivos de características tanto dúctil quanto frágil; e ensaios de abertura de trinca através de flexão em três pontos.

Palavras-chave: elementos finitos, mecânica do dano, dano não local, trinca, adesão, modelo

ABSTRACT

The objective of this work is to propose a constitutive model and a numerical scheme for the analysis of the adherence loss process in the interface of different constituents, subjected to unilateral contact with friction condition on the interface. The proposed model considers two damage variables allowing not only mode I crack opening on the interface but also mode II and their interaction due to the debonding process. The proposed model employs a non local damage theory based on a gradient damage approach being entirely developed within the framework of irreversible thermodynamics, assuring the development of a consistent thermodynamic constitutive model. In the discretization of the problem one employs a semi-implicit finite difference method with respect to the time domain and the finite element method with respect to the spatial domain. In order to validate the proposed constitutive model and identify the associated material parameters, one considered some experimental tests and some proposed problems. The proposed model showed to be capable of reproducing properly experimental tests of the type DCB, with are related to mode I of crack opening, using adhesives with characteristic of quasi-brittle and ductile types, and experiments of crack opening obtained in the classical three points bending tests.

Keywords: finite element, damage mechanics, damage, non-local, crack, adhesion, model

LISTA DE FIGURAS

1.1	Redução de área útil de um VRE.	32
1.2	Ilustração esquemática do <i>Princípio da Equivalência da Deformação</i>	33
2.1	Modos de abertura de trinca.	37
2.2	Problema característico.	38
2.3	Definição do salto do deslocamento.	39
3.1	Ensaio modo I.	54
3.2	Ensaio do modo II.	56
3.3	Regularização do primeiro modelo.	63
3.4	Derivada do primeiro modelo de regularização.	63
3.5	Regularização do segundo modelo.	64
3.6	Derivada do segundo modelo de regularização.	65
3.7	Regularização do terceiro modelo.	65
3.8	Derivada do terceiro modelo de regularização.	66
3.9	Regularização do quarto modelo.	67
3.10	Derivada do quarto modelo de regularização.	67
5.1	Esquema da discretização.	80
5.2	Elemento Quad8.	81
5.3	Elemento Quad9.	81
5.4	Geometria complexa.	81
5.5	Elemento de linha.	81
5.6	Mudança de domínio.	87
5.7	Componentes de deslocamento.	88
5.8	Elemento de interface.	88
6.1	Ensaio modo I.	95
6.2	DCB #1.	99
6.3	DCB #2.	100
6.4	Flexão em três pontos.	100
6.5	Configuração geral do modelo de DCB. (CAMPILHO et al., 2011)	101
6.6	Resultado do modelo DCB #1.	102
6.7	Elementos danificados - DCB #1.	103
6.8	Resultado do modelo DCB #2.	104
6.9	Configuração geral para o modelo de flexão em três pontos.	105
6.10	Resultado do modelo de flexão em três pontos.	105
6.11	Campo de deslocamentos - flexão em três pontos.	106
6.12	Malha: DCB #1.	107

6.13	Malha: DCB #2.	107
6.14	Malha: flexão em três pontos.	107
6.15	Exemplo de inclusão.	108
6.16	Malha do exemplo de inclusão.	109
6.17	Evolução do dano normal.	110
6.18	Evolução do dano tangencial.	110
6.19	Campo de deslocamento.	111

LISTA DE SÍMBOLOS

Δt	Intervalo de tempo
δ	Espessura inicial do material adesivo
$\Delta\Sigma$	Dissipação intrínseca na interface
\dot{d}_N	Varição temporal do dano normal
\dot{d}_T	Varição temporal do dano tangencial
ε_0	Constante de regularização
ε_Y	Constante para estabilidade numérica
η_a	Penalização do dano
$\eta_{N,T}$	Funções teste normal e tangencial
η_u	Penalização de contato
Γ	Fronteira
Γ_e	Fronteira do elemento
Γ_{t_e}	Segmento da fronteira do elemento com tração prescrita
Γ_{u_e}	Segmento da fronteira do elemento com deslocamento prescrito
$\hat{P}_{(a)}$	Potência virtual das forças inerciais
$\hat{P}_{(e)}$	Potência virtual das forças externas
$\hat{P}_{(i)}$	Potência virtual das forças internas
Λ	Potencial de energia livre
Λ_Σ	Potencial de energia livre da interface adesiva
Λ_ϑ	Potencial de energia livre volumétrica
$(\gamma_N, \nabla\gamma_N)$	Par dual de grandezas virtuais termodinâmicas
(ξ, η)	Domínio natural dos elementos bidimensionais

(Y_N, \vec{J}_N)	Par dual de forças termodinâmicas
$[[\vec{u}(\vec{x}, t)]]$	Salto do campo de deslocamentos
$[[u_N]]$	Parcela normal do salto de deslocamento
$[[u_T]]$	Parcela tangencial do salto de deslocamento
$[B]$	Matriz de derivadas das funções base em relação às coordenadas cartesianas
$[K_e]$	Matriz de rigidez do elemento do problema de dano
$[K_e^{NNa}]$	Componente da matriz tangente
$[K_e^{NNb}]$	Componente da matriz tangente
$[K_e^{NNia}]$	Componente da matriz tangente
$[K_e^{NNib}]$	Componente da matriz tangente
$[K_e^{NNic}]$	Componente da matriz tangente
$[K_e^{NNid}]$	Componente da matriz tangente
$[K_e^{NT}]$	Componente da matriz tangente
$[K_e^{TNr}]$	Componente da matriz tangente
$[K_e^{TTr}]$	Componente da matriz tangente
$[K_{spring}]$	Matriz de elementos de constantes elásticas
$[K_{T_e}^u]$	Matriz de rigidez linear elástica clássica
$[M_e]$	Matriz de massa do elemento do problema de dano
$[\vec{N}_N]$	Vetor de funções base do salto de deslocamento normal dos elementos de interface
$[\vec{N}_T]$	Vetor de funções base do salto de deslocamento tangencial dos elementos de interface
$\langle \cdot \rangle^+$	Operador de Macaulay
$\{a_N, a_T\}$	Constantes que regulam o modelo adesivo

$\{b_N, b_T\}$	Constantes que regulam o modelo adesivo
$\{c_N, c_T\}$	Constantes que regulam o modelo adesivo
\mathbf{K}_Σ	Conjunto dos estados físicos admissíveis
\mathbf{V}_D	Espaço virtual de dano
\mathbf{V}_u	Espaço virtual de deslocamentos
\mathcal{F}_i	Funcionais
μ_Σ	Coeficiente de atrito
$\nabla_{\vec{x}}(\circ)$	Gradiente de (\circ) em relação às coordenadas cartesianas
Ω	Domínio
Ω_e	Domínio do elemento
Φ_Σ	Pseudo-potencial de dissipação
$\psi(\varepsilon(\vec{u}))$	Densidade de energia elástica por unidade de massa
Ψ_Σ	Potencial de densidade de energia livre da interface
Ψ_Σ^*	Potencial estendido de densidade de energia livre da interface
$\Psi_i(\tau)$	Funções de base quadráticas clássicas para elemento de linha
ρ	Densidade de massa
$\rho\psi(\varepsilon(\vec{u}))$	Energia livre
Σ	Interface
σ	Tensor tensão de Cauchy
τ	Domínio natural dos elementos de linha
\tilde{P}_i	Funções de penalização interna
$\varepsilon(\cdot)$	Operador gradiente simétrico de \cdot
$\varphi_{\Sigma i}$	Função de densidade de dissipação
$\varphi_{\Sigma i}^*$	Função de densidade de dissipação estendida
$\rho(\vartheta)$	Entropia do volume

ϑ	Região de Ω
\vec{b}	Força de corpo prescrita
\vec{t}	Tração prescrita
\vec{u}	Deslocamento prescrito
\vec{D}_N^n	Vetor de todos os valores nodais de dano normal no instante de tempo (n)
\vec{D}_T^n	Vetor de todos os valores nodais de dano tangencial no instante de tempo (n)
$\vec{e}_t(\tau)$	Vetor tangente unitário
\vec{F}_e^σ	Vetor de força do elemento
\vec{F}_e^b	Vetor de força de corpo do elemento
$\vec{F}_{N_e}^Y$	Vetor de força de dano normal do elemento
$\vec{F}_{T_e}^Y$	Vetor de força do dano tangencial do elemento
\vec{J}_N^r	Influência do dano normal na vizinhança
\vec{J}_T^r	Influência do dano tangencial na vizinhança
$\vec{n}(\tau)$	Vetor normal unitário
$\vec{n}(\vec{x}, t)$	Unidade normal à interface Σ
$\vec{n}(\vec{x}, t)$	Vetor unitário normal
$\vec{Q}_{\Sigma T}^i$	Parcela irreversível de dissipação tangencial de atrito na interface adesiva
\vec{Q}_Σ	Tração na interface
\vec{q}_e	Vetor de deslocamentos do elemento
\vec{v}	Campo vetorial de velocidades virtuais
$A_{N,T}$	Fonte volumétrica de dano
$a_{N,T}$	Fonte de dano de superfície

$D(\cdot)$	Operador gradiente simétrico de \cdot
$d_{N_n}^{e_i}$	I-ésimo valor nodal de dano normal do elemento no instante n
d_N	Dano normal
$d_{T_n}^{e_i}$	I-ésimo valor nodal de dano tangencial do elemento no instante n
d_T	Dano tangencial
e	Energia interna por unidade de massa
E_Σ	Energia interna por área de região adesiva
E_{adh}	Módulo de elasticidade do material adesivo
$F_e^{\Sigma N}$	Vetor de força normal do elemento na interface adesiva
$F_e^{\Sigma T}$	Vetor de força tangencial do elemento na interface adesiva
F_e^t	Vetor de força prescrita do elemento
G_{adh}	Módulo de cisalhamento do material adesivo
g_i	Restrições de desigualdade
$I_{\mathbf{K}_\Sigma}$	Função indicatriz do conjunto \mathbf{K}_Σ
$I_{\mathbf{K}_\Sigma}^\eta$	Função indicatriz regularizada do conjunto \mathbf{K}_Σ
J_Γ	Jacobiano do elemento de linha
k_{NT}	Constante elástica adesiva acoplada dos modos normal e tangencial da interface
k_N	Constante elástica adesiva normal da interface
k_N^b	Influência do dano normal na vizinhança
k_T	Constante elástica adesiva tangencial da interface
k_T^b	Influência do dano tangencial na vizinhança
L_e	Comprimento do elemento de linha
$N_i(\xi, \eta)$	Funções de base clássicas para um elemento Quad8 ou Quad9
$P_{(e)}$	Potência real das forças externas

P_i	Funções de penalização externa
$Q_{\Sigma N}^r$	Parcela reversível da tração normal na interface adesiva
$Q_{\Sigma N}^r$	Tração normal reversível na interface
$Q_{\Sigma T}^r$	Parcela reversível da tração tangencial na interface adesiva
$Q_{\Sigma T}^r$	Tração tangencial reversível na interface
s	Entropia por unidade de massa
S_{Σ}	Entropia por unidade de superfície
T	Temperatura absoluta
$Y_{N,T}^0$	Energia de decoesão
Y_N^i	Força termodinâmica, irreversível, de dano normal
Y_N^r	Força termodinâmica, reversível, de dano normal
Y_T^i	Força termodinâmica, irreversível, de dano tangencial
Y_T^r	Força termodinâmica, reversível, de dano tangencial
DCB	Double cantilever beam

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	MECÂNICA DO DANO EM MEIOS CONTÍNUOS	30
1.1.1	Conceitos necessários	30
1.1.2	Dano e adesão	34
2	LEIS CONSTITUTIVAS DO MODELO ADESIVO	37
2.1	OBJETIVO	37
2.2	VARIÁVEIS DE DANO	37
2.3	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	38
2.4	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	39
2.5	LEIS DA TERMODINÂMICA	41
2.5.1	Primeira lei da Termodinâmica	42
2.5.2	Segunda lei da Termodinâmica	43
2.6	MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO LOCAIS	44
3	MODELO DE DANO ADESIVO	51
3.1	DEFINIÇÃO DOS POTENCIAIS DE ENERGIA LIVRE	51
3.1.1	Definição dos termos do potencial de densidade de energia livre da interface $\Psi_{\Sigma 1}$	54
3.1.2	Definição dos termos do potencial de densidade de energia livre da interface $\Psi_{\Sigma 2}$	55
3.2	REGULARIZAÇÃO DO POTENCIAL DE ENERGIA LIVRE	56
3.3	DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO 2D	59
3.3.1	Tração normal, parcela reversível	59
3.3.2	Tração tangencial, parcela reversível	59
3.3.3	Força termodinâmica de dano normal, parcela reversível	60
3.3.4	Força termodinâmica tangencial de dano	60
3.3.5	Termo da influência do dano normal na vizinhança	60
3.3.6	Termo da influência do dano tangencial na vizinhança	61
3.4	LEIS E EQUAÇÕES COMPLEMENTARES	61
3.4.1	Regularização dos pseudo-potenciais de dissipação	62
3.4.2	Sumário das equações de estado completas	69

4	DEFINIÇÃO DAS FORMULAÇÕES FRACAS	71
4.1	FORMULAÇÃO FRACA DO EQUILÍBRIO DE FORÇAS	71
4.2	FORMULAÇÃO FRACA DA EQUAÇÃO GOVERNANTE DE DANO NORMAL	72
4.3	FORMULAÇÃO FRACA DA EQUAÇÃO GOVERNANTE DE DANO TANGENCIAL	73
4.4	FORMA FRACA DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES	74
4.5	DEFINIÇÃO DOS FUNCIONAIS	74
4.6	FORMULAÇÃO FRACA DO PROBLEMA MECÂNICO ACOPLADO	75
4.7	LINEARIZAÇÃO E MÉTODO DE NEWTON	77
5	DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS	79
5.1	INTRODUÇÃO DO DOMÍNIO NATURAL	80
5.2	DISCRETIZAÇÃO DO FUNCIONAL \mathcal{F}_2	81
5.2.1	Montagem global do problema de dano linear incremental	82
5.3	DISCRETIZAÇÃO DO FUNCIONAL \mathcal{F}_3	83
5.4	DISCRETIZAÇÃO DO FUNCIONAL \mathcal{F}_1	84
5.5	ELEMENTOS FINITOS DE GALERKIN	85
5.5.1	Contribuição dos elementos de volume	86
5.5.2	Determinação das contribuições dos elementos de interface	88
5.5.3	Montagem global do problema de deslocamento não-linear - Elementos de volume	89
5.5.4	Montagem global do problema de deslocamento não linear - Elementos de interface	89
5.6	PROBLEMAS AXISIMÉTRICOS (SEM TORÇÃO)	91
5.6.1	Discretização	92
5.6.2	Determinação das derivadas de $N_{a,r}$ e $N_{a,z}$	94
6	CALIBRAÇÃO E VALIDAÇÃO DO MODELO DE DANO	95
6.1	PRÉ-CALIBRAÇÃO	99
6.2	VALIDAÇÃO	101
6.2.1	Modelo de DCB #1	102
6.2.2	Modelo de DCB #2	103
6.2.3	Modelo de Flexão em Três Pontos	104
6.3	EXEMPLO DE INCLUSÃO	108
6.3.1	Discussão	111

7	CONCLUSÃO	113
7.1	SUGESTÃO PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	114
A	DEFINIÇÃO DAS MATRIZES UTILIZADAS NO PROBLEMA DE DESLOCAMENTO NÃO LINEAR	121
A.1	ELEMENTOS DE VOLUME	121
A.2	ELEMENTOS DE LINHA	122

1 INTRODUÇÃO

A adesão é um fenômeno bastante presente no cotidiano. Diversos produtos que se utilizam de adesão entre interfaces materiais nos são corriqueiros: o contato de um Band-Aid[®] com a pele, a camada de acabamento em um móvel feito de materiais compensados, a colocação de carpet para o revestir um pavimento e até mesmo o esmalte de unha.

Talvez devido à constante presença não se observe o real valor do fenômeno da adesão, e se esqueça suas aplicações tecnológicas e estruturais: união de camadas em materiais compósitos; a colocação de aparelhos ortodônticos; revestimento de filmes finos; estruturas do tipo fibra/matriz; estruturas do tipo sanduíche, entre outros.

Assim pode-se afirmar que o estudo de adesão entre interfaces materiais é de exímio interesse para o meio acadêmico e para a indústria. Métodos de engenharia que permitam compreender melhor o processo de adesão em interfaces materiais é, em si, melhorar a própria qualidade e projeto do que se é capaz de manufaturar.

Neste ínterim cabe ressaltar a importância do desenvolvimento de modelos numéricos para a predição e estudo do comportamento material. Diversos problemas, bastante comuns, fazem parte do cotidiano da área: problemas de união de estratos distintos através de material adesivo; relacionamento entre uma matriz e suas inclusões; escorregamento e separação, tal como a delaminação; *peeling*; entre outros.

Apesar do conhecimento atual sobre o fenômeno ser capaz de fornecer resultados satisfatórios para situações simples, este trabalho possui como meta aprofundar o conhecimento da área ao propor um modelo constitutivo e um procedimento numérico para a análise do processo de perda de adesão na interface entre os materiais constituintes; sendo a principal natureza dos problemas abordados aqueles que apresentam fronteiras bem definidas de interfaces materiais.

Através da Mecânica do Dano este trabalho desenvolverá um modelo de dano não local para descolamento de interfaces capaz de descrever os modos I e II, além do modo misto, de abertura de trinca sujeito a uma condição de contato unilateral e atrito na interface.

Este primeiro capítulo propõe-se a elucidar ao leitor conceitos básicos que serão utilizados ao longo da dissertação, além de apresentar uma breve revisão de desenvolvimentos atuais da área. O capítulo dois faz a derivação das leis constitutivas do modelo adesivo, obtendo-se a formulação forte do problema e as restrições impostas pela termodinâmica de processos irreversíveis. O capítulo três propõe os potenciais de energia livre e os pseudo-potenciais de dissipação e suas respectivas regularizações

fornecendo assim o conjunto completo de equações locais que regem o fenômeno. O capítulo quatro deriva as formulações fracas e efetua a discretização do problema no domínio temporal através de um método semi-implícito de diferenças finitas, formula o problema mecânico acoplado e propõe a linearização para resolução do problema não linear de deslocamento. No capítulo cinco utiliza-se do Método dos Elementos Finitos de Galerkin para discretizar o problema no domínio espacial e determinar as contribuições dos elementos de linha e dos elementos de volume. No capítulo seis são realizadas as pré-calibrações, calibrações e validações do modelo proposto; além da solução de um problema-exemplo do tipo inclusão. O capítulo sete traz uma breve revisão de todas as etapas de realização do trabalho, além de expor e concluir os comentários a respeito dos resultados obtidos; finalizando com uma sugestão de trabalhos futuros a serem realizados.

1.1 MECÂNICA DO DANO EM MEIOS CONTÍNUOS

Quando materiais de engenharia estão sujeitos a situações desfavoráveis, tais como: trabalho a quente ou frio, variações de temperatura, reações químicas, carregamentos mecânicos ou condições ambientais adversas, defeitos microscópicos ou trincas podem se desenvolver.

O estudo do comportamento de defeitos microscópicos e trincas dentro de materiais é de sumo interesse para diversas áreas, e em especial, à Engenharia Mecânica. A capacidade de poder simular as consequências destes defeitos nos materiais é uma ferramenta de grande valia no estudo de diversos fenômenos e nos projetos mecânicos. Porém tais defeitos ocorrem na micro-escala, inviabilizando sua abordagem direta no contexto da Mecânica do Contínuo.

A Mecânica do Dano surge para preencher este vazio e permitir a abordagem de fenômenos da micro-escala dentro da visão macroscópica da Mecânica do Contínuo. Aquela ainda fornece rotinas que podem ser inclusas dentro de procedimentos tradicionais de cálculo e projeto, tal como a sua incorporação em softwares de Elementos Finitos.

Este grande avanço possibilitado pelo conceito de dano requer somente a introdução de uma variável macroscópica e da definição de leis que regulem o seu comportamento e evolução no contexto desejado.

1.1.1 Conceitos necessários

O conceito de Volume Representativo do Elemento, ou *Representative Volume Element* em inglês, permite que materiais anisotrópicos a

nível microscópico possam - devido à distribuição aleatória do tamanho, formato e orientação de suas fases - ser tratados como homogêneos e isotrópicos (KRAJCINOVIC, 1989). A distinção entre estas escalas torna implícita a existência de um volume que as separa. Este volume define o menor tamanho deste material para o qual as teorias do contínuo ainda são válidas, ou seja: **(i)** na qual o material possua as mesmas características que um corpo de prova e; **(ii)** na qual os métodos da mecânica do contínuo baseados na média resultem em dados de precisão aceitáveis. Ou seja, este volume representativo deve satisfazer duas condições opostas: devem ser grandes o suficiente de forma a conter quantidades estatisticamente aceitáveis das fontes de heterogeneidades; e deve ser pequeno de maneira ao mapeamento do ponto material possuir significado (KRAJCINOVIC, 1989), (LEMAITRE, 1984).

É geralmente aceito que uma trinca é induzida ou formada por nucleação de micro-cavidades que estão encerradas numa região de descontinuidades ou defeitos. Estes são responsáveis não somente pelo início da trinca e pela falha subsequente, mas também pela deterioração ou dano induzidos, tais como: redução da resistência e rigidez, estabilidade, frequência, vida residual ou um aumento na tensão, deformação, resposta dinâmica ou amortecimento (ZHANG; CAI, 2010).

O trabalho pioneiro de Kachanov (KACHANOV, 1958), originalmente tratando de fluência, introduziu uma variável escalar de dano representada por ψ e chamada de continuidade, dando início a uma série de progressos na área que hoje se convencionou chamar de Mecânica do Dano em Meios Contínuos (MDMC). Este conceito permitiu exprimir por meio de uma média macroscópica os fenômenos micromecânicos e físicos que realmente ocorrem. Cerca de quinze anos após Kachanov, através de uma pequena mudança de variáveis $D = 1 - \psi$, a variável de continuidade foi elevada à categoria de variável de estado interna do ponto de vista termodinâmico, recebendo o nome de Dano (LEMAITRE, 1996). As variáveis internas são tidas como “parâmetros escondidos”, suplementando o conjunto de parâmetros termodinâmicos, ou seja, das variáveis observáveis. Durante o intervalo supracitado, a ideia introduzida por Kachanov permaneceu praticamente esquecida, exceto pelo conceito de tensão efetiva, até hoje bastante utilizado, criado por Rabotnov (RABOTNOV, 1963). Em suma, a teoria de MDMC é baseada na termodinâmica dos processos irreversíveis e na teoria das variáveis de estado internas (SIMO; JU, 1987).

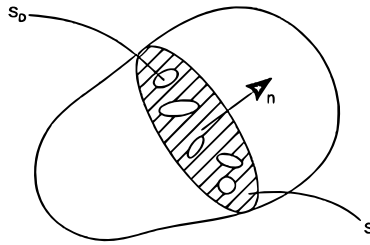
Uma das interpretações em termos de parâmetros mecânicos pode ser dada através da perda de área útil. Por definição a variável de dano

D_n , sendo S_D a área danificada e S a área total, associada à direção \vec{n} é

$$D_n = \frac{S_D}{S} = \frac{S - \tilde{S}}{S}, \quad (1.1)$$

sendo \tilde{S} a área líquida ou efetiva da seção na direção \vec{n} . Segundo pode ser observado na figure 1.1, tal que $D_n = 0$ corresponde ao estado não danificado; $D_n = D_c$, um valor crítico, correspondendo à ruptura ou falha do elemento (CHABOCHE, 1988).

Figura 1.1: Redução de área útil de um VRE.



Outro trabalho que lançou ideias que até hoje perduram é o publicado por Lemaitre em 1971, no qual postula o Princípio da Equivalência da Deformação, apresentado também em seu livro (LEMAITRE, 1996), observado na Fig. 1.2:

“Qualquer equação constitutiva de deformação para um material danificado pode ser derivada da mesma maneira que para um material virgem (não danificado), exceto que a tensão tradicional é substituída pela tensão efetiva.”

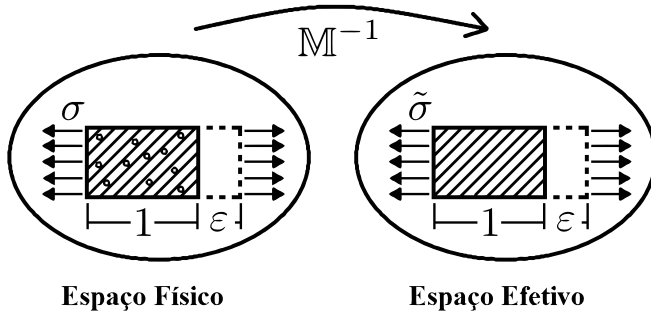
E o princípio da tensão efetiva, também enunciado em (CHABOCHE, 1988):

“Um volume de material danificado submetido a uma tensão σ apresentará a mesma resposta de deformação que um material não danificado submetido a uma tensão efetiva $\tilde{\sigma}$.”

Assim se a variável de dano D representar uma perda de área útil, que leva em conta decoesão e concentrações de tensão locais, pode-se escrever - tomando-se os princípios enunciados:

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{S}{\tilde{S}} = \frac{\sigma}{1 - D}. \quad (1.2)$$

Figura 1.2: Ilustração esquemática do *Princípio da Equivalência da Deformação*.



Independente do modelo constitutivo que se escolha, ele pode ser utilizado dentro da estrutura da mecânica do dano pela simples substituição da variável de dano e pela introdução de equações que regem a evolução do mesmo. A aplicação dos princípios anteriormente citados dá origem às formulações constitutivas de dano **baseadas na deformação** (*strain-based formulation*). Cabe notar que a MDMC já foi utilizada para modelar dano em fadiga, dano dúctil, dano em fluência (LEMAITRE, 1984) e dano frágil (SAIN; NARASIMHAN, 2011).

A partir de 1980 a teoria de dano passou a ser tratada com maior rigor pela comunidade científica, passando a ter uma base maior na micromecânica e na termodinâmica (em detrimento dos modelos heurísticos ou *ad hoc*), facilitando inclusive suas aplicações na engenharia conforme mais pesquisadores se envolviam e popularizavam o assunto.

Existem três grandes vertentes para modelar os efeitos do dano dentro da mecânica do contínuo. A primeira é através do conceito de tensão efetiva combinada com a hipótese da equivalência da deformação (enunciadas anteriormente), que é atribuída a Lemaitre e Chaboche (LEMAITRE, 1984), (LEMAITRE, 1996), (CHABOCHE, 1988). A segunda é através do conceito de deformação efetiva combinada com a hipótese da equivalência da tensão, introduzido por Simo e Ju (SIMO; JU, 1987). O último conceito, introduzido por Cordebois e Sidoroff (CORDEBOIS; SIDOROFF, 1983) faz uso das noções de deformação efetiva, tensão efetiva e requer o princípio da equivalência de energia. Uma das grandes vantagens citadas para esta última abordagem é que se lida com tensores de rigidez simétricos nas funções de energia livre quando se considera anisotropia (GRAMMENOUDIS; RECKWERTH; TSAKMAKIS, 2008).

1.1.2 Dano e adesão

Fremond versou sobre o princípio das potências virtuais (FREMOND; NEDJAR, 1996), e foi inovador ao considerar na potência das forças internas os movimentos microscópicos do qual o dano se origina; inserindo também uma regularização através do gradiente da variável interna, desvencilhou-se da incômoda sensibilidade de malha. Um dos modelos propostos pelo autor utiliza duas variáveis distintas para dano, permitindo a observação do fenômeno unilateral e recuperação microscópica da rigidez ao se alterar os esforços trativos para compressivos.

A noção de adesão baseada nos métodos da mecânica do contínuo proposta por Fremond procura não se preocupar, *per se*, com a física da adesão *stricto sensu*. Apesar disso a percepção de Fremond sobre o assunto continua geral o suficiente para poder descrever de maneira satisfatória a maioria dos problemas práticos com os quais este trabalho preocupa-se.

Na metodologia de Ladevèze (LADEVEZE, 2002), o mesmo efeito de fenômeno unilateral é obtido ao se particionar a energia (entalpia livre) e o tensor tensão numa parte “positiva” e “negativa”. Ainda neste contexto, o problema da continuidade da energia e de suas derivadas é resolvido ao se introduzir um operador positivo relacionado à energia afetada pelo dano. Numa aproximação de ordem zero envolvendo isotropia material, dois pares de variáveis escalares de dano são necessários. Na aproximação de primeira ordem, dois pares de variáveis tensoriais de dano são utilizados.

A grande gama de conceitos permitem tratar o dano tanto de maneira simples, com o uso de uma variável escalar (FREMOND, 1987), duas variáveis escalares (FREMOND; NEDJAR, 1996); ou de maneira complexa, a fim de representar fenômenos complicados de modo mais fidedigno, como através do uso de tensores de segunda e quarta ordem (LUBARDA; KRAJČINOVIC, 1993).

Uma das ideias essências de Fremond é que o campo de deslocamentos (FREMOND, 1987) normalmente utilizado para descrever contato é insuficiente para representar o fenômeno de contato adesivo. Quando dois sólidos estão em contato, eles podem ou não interagir um com o outro. Enquanto a ausência de interação é característica da abstenção de adesão, a interação é característica da presença de adesão. Nota-se que em ambos os casos o campo de deslocamentos apresentado pode ser o mesmo. Assim, para que se possa distinguir entre estes dois problemas físicos distintos um novo campo, de nome intensidade de adesão, é introduzido e representado por $\beta_{\Sigma}(\vec{x}, t)$. O campo $\beta_{\Sigma}(\vec{x}, t)$ representa a descrição

macroscópica das ligações existentes entre diferentes componentes que formam a interface Σ . Uma redução em $\beta_{\Sigma}(\vec{x}, t)$ corresponde à ruptura de algumas ligações microscópicas, então pode-se considerar $\beta_{\Sigma}(\vec{x}, t)$ como uma proporção da superfície com ligações adesivas intactas.

Raous (RAOUS; CANGEMI; COCU, 1999) considera um modelo com contato unilateral, atrito de Coulomb e adesão para a situação na qual a zona de contato é a fronteira material. Através da sugestão de potenciais de energia livre e dissipação, as leis locais são derivadas.

2 LEIS CONSTITUTIVAS DO MODELO ADESIVO

2.1 OBJETIVO

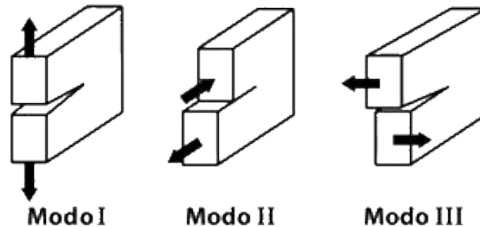
Este capítulo pretende apresentar os conceitos básicos na teoria utilizada para modelar os fenômenos de deformação e danificação de interfaces adesivas. Deseja-se definir as leis constitutivas, dentro dos parâmetros da MDMC, de um modelo para a separação de interfaces. Através do princípio das potências virtuais derivar-se-á a formulação forte das equações de governo do fenômeno estudado; seguido pela aplicação das leis da termodinâmica, que interpretam as equações de equilíbrio locais em termos energéticos e de fluxo. Através da definição genérica de potenciais de energia livre encontra-se relações entre os termos reversíveis e irreversíveis e redefine-se a desigualdade de Clausius-Duhem através da energia dissipada na interface pelos fenômenos do atrito e decoesão.

2.2 VARIÁVEIS DE DANO

Duas variáveis de dano serão utilizadas. A variável de dano normal $d_N(\vec{x}, t) \in [0, 1]$, responsável pela abertura de trinca de modo I; e a variável de dano tangencial $d_T(\vec{x}, t) \in [0, 1]$, responsável pela abertura de trinca de modo II; ambas ilustradas na Fig. 2.1. A escolha destas variáveis se dá com o objetivo de fazer uso de uma notação mais difundida pelas teorias clássicas de dano.

$$d_N(\vec{x}, t) = 1 - \beta_{\Sigma}^N(\vec{x}, t) \mid d_N(\vec{x}, t) \in [0, 1]$$
$$d_T(\vec{x}, t) = 1 - \beta_{\Sigma}^T(\vec{x}, t) \mid d_T(\vec{x}, t) \in [0, 1]$$

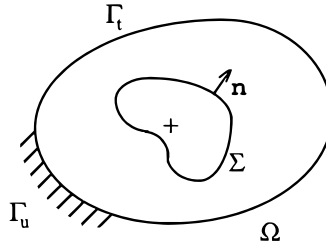
Figura 2.1: Modos de abertura de trinca.



2.3 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Os problemas de interesse são aqueles caracterizados pela Fig. (2.2). O corpo ocupa um subconjunto aberto $\Omega \subset R^2$ e possui uma interface Σ submetida a contato unilateral com adesão e atrito. O sistema está sujeito a uma força de corpo $\vec{b} : \Omega \rightarrow R^2$, tração prescrita $\vec{t} : \Omega \rightarrow R^2$ e um deslocamento prescrito $\vec{u} = \vec{u}$ em $\vec{x} \in \Gamma_u$, tal que $\partial\Omega = \Gamma_t \cup \Gamma_u$, e $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$.

Figura 2.2: Problema característico.



A introdução da interface Σ permite definir os deslocamentos superior e inferior, representados respectivamente por $\vec{u}^+(\vec{x}, t)$ e $\vec{u}^-(\vec{x}, t)$. Define-se então o salto do campo de deslocamentos, ilustrado na Fig. 2.3, como

$$[[\vec{u}(\vec{x}, t)]] = \vec{u}^+(\vec{x}, t) - \vec{u}^-(\vec{x}, t). \quad (2.1)$$

Com o objetivo de incorporar a dependência da vizinhança no processo de decoesão e reduzir a sensibilidade de malha, far-se-á uso da teoria de primeiro gradiente em relação às variáveis de dano. O salto do deslocamento $[[\vec{u}(\vec{x}, t)]]$ e os danos adesivos $d_N(\vec{x}, t)$ e $d_T(\vec{x}, t)$ estão sujeitos, em Σ , a:

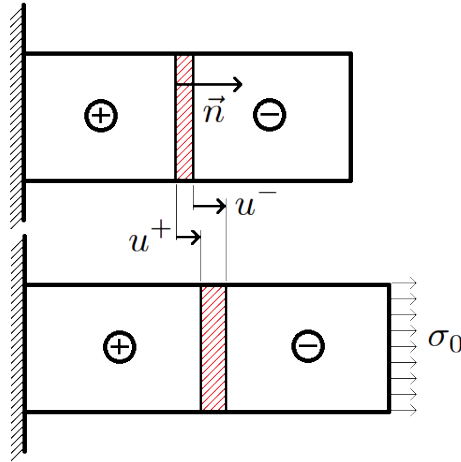
(i) Condição de razão

$$\begin{aligned} d_N(\vec{x}, t) &\in [0, 1], \\ d_T(\vec{x}, t) &\in [0, 1] \end{aligned} \quad (2.2)$$

(ii) Condição de contato unilateral

$$[[\vec{u}(\vec{x}, t)]] \cdot \vec{n}(\vec{x}, t) \leq 0, \quad (2.3)$$

Figura 2.3: Definição do salto do deslocamento.



tal que o vetor $\vec{n}(\vec{x}, t)$ representa a unidade normal à interface Σ .

Sendo $[[\vec{u}(\vec{x}, t)]] = \vec{u}^+(\vec{x}, t) - \vec{u}^-(\vec{x}, t)$ e $\|\vec{u}^-(\vec{x}, t)\| > \|\vec{u}^+(\vec{x}, t)\|$, tem-se que

$$[[\vec{u}(\vec{x}, t)]] \cdot \vec{n}(\vec{x}, t) = \{\vec{u}^+(\vec{x}, t) - \vec{u}^-(\vec{x}, t)\} \cdot \vec{n}(\vec{x}, t) \leq 0. \quad (2.4)$$

O estado físico do corpo é caracterizado por $(\vec{u}, d_N, d_T, \nabla d_N, \nabla d_T)$. Entretanto, $([[\vec{u}]], d_N, d_T, \nabla d_N, \nabla d_T)$ devem satisfazer às restrições (2.2) e (2.3) em Σ . Então, os estados físicos admissíveis devem estar contidos num conjunto \mathbf{K}_Σ , tal que :

$$\mathbf{K}_\Sigma = \left\{ ([[\vec{u}]], d_N, d_T, \nabla d_N, \nabla d_T) \mid d_N \in [0, 1], d_T \in [0, 1] \right. \\ \left. d_N(\vec{x}, t) \leq 1, d_T(\vec{x}, t) \leq 1, \text{ e } [[u_N]] = [[\vec{u}]] \cdot \vec{n} \leq 0 \text{ em } \Omega \right\}. \quad (2.5)$$

O domínio pode ser estendido para estados físicos inadmissíveis, tal como $d_N > 1$, ao se impor que a energia livre torne-se $+\infty$ neles.

2.4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O princípio das potências virtuais consiste em descrever os possíveis movimentos de um sistema mecânico, através de um espaço virtual,

chamado de “espaço dos movimentos virtuais”. Este princípio é baseado em dois axiomas (LEMAITRE; CHABOCHE, 1994):

Axioma da objetividade A potência virtual das forças internas em qualquer movimento de corpo rígido é zero.

Axioma do equilíbrio Para qualquer material identificado numa referência absoluta, em qualquer instante e para qualquer movimento virtual, a potência virtual das quantidades de aceleração (forças inerciais) $\hat{P}_{(a)}$ é igual à soma das potências das forças internas $\hat{P}_{(i)}$ e externas $\hat{P}_{(e)}$.

Assim a potência das forças internas, externas e inerciais são introduzidas e o espaço vetorial \mathbf{W} é definido. Aqui, $\mathbf{W} = \mathbf{W}_o \times \mathbf{W}_{\Sigma N} \times \mathbf{W}_{\Sigma T}$ sendo $\mathbf{W}_o = \{\vec{v} \mid v_i \in H^1(\Omega), v_i = 0 \text{ em } \Gamma_u\}$, tal que \vec{v} é o campo vetorial de velocidade.

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{\Sigma N} &= \{ \gamma_N \mid \gamma_N \in H^1(\Sigma) \text{ em } \Sigma \}, \\ \mathbf{W}_{\Sigma T} &= \{ \gamma_T \mid \gamma_T \in H^1(\Sigma) \text{ em } \Sigma \}.\end{aligned}$$

Agora, para cada parte $\vartheta \subset \Omega$ e $(\vec{v}, \gamma_N, \gamma_T) \in \mathbf{W}$ considera-se:

Potência das forças internas: Dada pela equação

$$\begin{aligned}\hat{P}_{(i)} &= - \int_{\vartheta} \sigma \cdot D(\vec{v}) \, d\vartheta \\ &\quad - \int_{\Sigma \cap \vartheta} \left\{ \vec{Q}_\Sigma \cdot [[\vec{v}]] + Y_N \gamma_N + \vec{J}_N \cdot \nabla \gamma_N + Y_T \gamma_T + \vec{J}_T \cdot \nabla \gamma_T \right\} \, d\Gamma,\end{aligned}\tag{2.6}$$

tal que $D(\vec{v})$ representa a parte simétrica do gradiente do campo \vec{v} , \vec{Q}_Σ é a tração na interface, (Y_N, \vec{J}_N) é o par dual associado a $(\gamma_N, \nabla \gamma_N)$; e (Y_T, \vec{J}_T) a $(\gamma_T, \nabla \gamma_T)$.

Potência das forças externas: Dada pela equação

$$\begin{aligned}\hat{P}_{(e)} &= \int_{\vartheta} \vec{b} \cdot \vec{v} \, d\vartheta + \int_{\partial\vartheta} \vec{t} \cdot \vec{v} \, d\Gamma + \int_{\Sigma \cap \vartheta} A_N \gamma_N \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{\partial\Sigma \cap \vartheta} a_N \gamma_N \, ds + \int_{\Sigma \cap \vartheta} A_T \gamma_T \, d\Gamma + \int_{\partial\Sigma \cap \vartheta} a_T \gamma_T \, ds,\end{aligned}\tag{2.7}$$

sendo \vec{b} são a força de corpo e \vec{t} a tração prescrita. $A_{N,T}$ e $a_{N,T}$ podem ser considerados fontes volumétricas e superficiais de dano, respectivamente.

Potência das Forças inerciais Dada pela equação

$$\hat{P}_{(a)} = \int_{\vartheta} \rho \vec{u} \cdot \vec{v} \, d\vartheta, \quad (2.8)$$

de tal forma que negligencia-se as forças inerciais relativas ao elemento adesivo.

O princípio das potências virtuais afirma que

$$\hat{P}_{(i)} + \hat{P}_{(e)} = \hat{P}_{(a)}, \quad \forall (\vec{v}, \gamma_N, \gamma_T) \in \mathbf{W}, \quad (2.9)$$

resultando em, já que $\vartheta \subset \Omega$ é arbitrário, três conjuntos de equações locais.

Formulação forte do equilíbrio de forças

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma) + \vec{b} &= \rho \vec{u} \text{ em } \Omega, \\ \vec{Q}_\Sigma &= -\sigma \vec{n} \text{ em } \Sigma, \\ \sigma \vec{n} &= \vec{t} \text{ em } \partial\vartheta \cap \Gamma_t. \end{aligned}$$

Formulação forte da equação governante de dano normal

$$\begin{aligned} -Y_N + \operatorname{div}(\vec{J}_N) + A_N &= 0 \text{ em } \Sigma, \\ \vec{J}_N \cdot \vec{n} &= a_N \text{ em } \partial\Sigma. \end{aligned}$$

Formulação forte da equação governante de dano tangencial

$$\begin{aligned} -Y_T + \operatorname{div}(\vec{J}_T) + A_T &= 0 \text{ em } \Sigma, \\ \vec{J}_T \cdot \vec{n} &= a_T \text{ em } \partial\Sigma. \end{aligned}$$

2.5 LEIS DA TERMODINÂMICA

Considera-se a existência de quatro leis termodinâmicas. A Lei Zero, que rege o equilíbrio térmico, versa que se dois corpos A e B estão em equilíbrio térmico com um terceiro corpo C, então A e B também estão em equilíbrio. Apesar de parecer óbvio, este fenômeno só foi notado em 1930, muito tempo após a primeira e a segunda lei terem sido escritas. Estas duas últimas referem-se, basicamente, à conservação de energia e

às condições nas quais as transformações termodinâmicas dar-se-ão. Por último, a terceira lei diz que é impossível, por meio de um número finito de estados ou estágios, atingir o zero absoluto da temperatura (zero Kelvin) ou $-273,15^\circ\text{C}$. Somente a primeira e a segunda lei serão discutidas aqui.

2.5.1 Primeira lei da Termodinâmica

A rigor, a primeira lei da termodinâmica representa a afirmativa do princípio da conservação da energia para um sistema termodinâmico. Num sistema termodinâmico, um corpo \mathfrak{B} pode armazenar energia de duas maneiras: energia cinética (K) e energia interna (E_{int}), que representam a capacidade total que o sistema tem de efetuar trabalho. Formalmente, esta lei pode ser escrita como:

“A taxa de variação da energia total de um sistema (energias cinética e interna) é igual à potência das forças externas ($\hat{P}_{(e)}$), aplicadas sobre um corpo \mathfrak{B} , adicionada à taxa na qual calor (Q) é recebido ou fornecido pelo sistema.”

Matematicamente, expressa-se o princípio como

$$\frac{d}{dt}(K + E_{int}) = \hat{P}_{(e)} + Q. \quad (2.10)$$

Para derivar a forma local das equações de conservação da energia, introduz-se o termo que representa a energia total do sistema, que pode ser decomposta

$$E(\vartheta) = \int_{\vartheta} \rho e \, d\vartheta + \frac{1}{2} \int_{\vartheta} \rho \vec{u} \cdot \vec{u} \, d\vartheta + \int_{\Sigma \cap \vartheta} E_{\Sigma} \, d\Gamma, \quad (2.11)$$

sendo e a energia interna por unidade de massa e E_{Σ} a energia interna por área definida na superfície adesiva. Nota-se que a energia cinética relacionada ao elemento adesivo foi negligenciada.

A equação global de balanço de energia, associada à $\vartheta \subset \Omega$, restrita a processos isotérmicos sem fonte de calor, é dada por

$$\frac{dE(\vartheta)}{dt} = P_{(e)}, \quad (2.12)$$

sendo $P_{(e)}$ a potência *real* das forças externas.

Como $\vartheta \subset \Omega$ é arbitrário, obtém-se a forma local das equações de energia, dadas por:

$$\begin{aligned} \rho \dot{e} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot D(\vec{u}) \text{ em } \Omega, \\ \dot{E}_\Sigma &= \vec{Q}_\Sigma \cdot [[\vec{u}]] + Y_N \dot{d}_N + \vec{J}_N \cdot \nabla \dot{d}_N + Y_T \dot{d}_T + \vec{J}_T \cdot \nabla \dot{d}_T \text{ em } \Sigma, \end{aligned} \quad (2.13)$$

que, em suma, formam a primeira lei da Termodinâmica para materiais danificados na interface.

2.5.2 Segunda lei da Termodinâmica

A segunda lei da termodinâmica diz que a energia possui qualidade, assim como quantidade, e os processos existentes ocorrerão somente se aumentar a entropia do sistema. Outrossim, a taxa de produção de entropia ($d\rho(\vartheta)/dt$) é sempre maior ou igual à taxa de calor dividida pela temperatura, ou seja:

$$\frac{d\rho(\vartheta)}{dt} \geq \int_\Omega \frac{\rho \bar{r}}{T} d\Omega + \int_\Omega \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} d\partial\Omega. \quad (2.14)$$

A segunda lei da termodinâmica, expressa através da desigualdade de Clausius-Duhem, é dada nos processos isotérmicos como

$$\frac{d\rho(\vartheta)}{dt} \geq 0, \quad (2.15)$$

e também considera-se a entropia do sistema, para um $\vartheta \subset \Omega$ arbitrário, decomposta como

$$\rho(\vartheta) = \int_\vartheta \rho s d\vartheta + \int_{\Sigma \cap \vartheta} S_\Sigma d\Gamma, \quad (2.16)$$

onde s é a entropia por unidade de massa e S_Σ é a entropia por unidade de superfície. Sendo

$$\frac{d}{dt} \{\Sigma \cap \vartheta\} = 0, \quad (2.17)$$

infere-se que a região de contato unilateral com atrito e adesão é fixa.

Da Eq. (2.15)

$$\frac{d}{dt} \rho(\vartheta) = \int_\vartheta \rho \dot{s} d\vartheta + \int_{\Sigma \cap \vartheta} \dot{S}_\Sigma d\Gamma \quad (2.18)$$

efetua-se a decomposição:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{s}^r + \dot{s}_i, \\ \dot{S}_\Sigma &= \dot{S}_\Sigma^r + \dot{S}_\Sigma^i, \end{aligned} \quad (2.19)$$

no qual $(\cdot)^r$ e $(\cdot)^i$ representam as partes reversível e irreversível de (\cdot) . Na presença de efeitos térmicos e fontes de calor, obtém-se

$$\dot{s}^r = \int_{\vartheta} \left\{ \frac{\rho r}{T} - \operatorname{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) \right\} d\vartheta. \quad (2.20)$$

Porém o problema é isotérmico e não há fonte de calor, as parcelas reversíveis de s e S_Σ são zero. Ao se introduzir a temperatura absoluta T (não negativa), trabalhando as equações (2.15) e (2.16) resulta na forma local da desigualdade de Clausius-Duhem:

$$\begin{aligned} \rho T \dot{s} &\geq 0 \text{ em } \Omega, \\ T \dot{S}_\Sigma &\geq 0 \text{ em } \Sigma. \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.6 MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO LOCAIS

Supõe-se a existência, para cada parte de $\vartheta \subset \Omega$, de um potencial de energia livre $\Lambda(\vartheta, \vec{u}, d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T)$, decomposto por conveniência em:

$$\begin{aligned} \Lambda(\vartheta, \vec{u}, d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) \\ = \Lambda_\vartheta(\vartheta, \varepsilon(\vec{u})) + \Lambda_\Sigma(\vartheta, [[\vec{u}]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T), \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que

$$\begin{aligned} \Lambda_\vartheta(\vartheta, \varepsilon(\vec{u})) &= \int_{\vartheta} \rho \psi(\varepsilon(\vec{u})) d\vartheta, \\ \Lambda_\Sigma(\vartheta, [[\vec{u}]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) &= \int_{\Sigma \cap \vartheta} \Psi_\Sigma([[\vec{u}]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.23)$$

A função $\psi(\varepsilon(\vec{u}))$ representa a densidade de energia livre por unidade de massa, e $\Psi_\Sigma([[\vec{u}]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T)$ representa o potencial de densidade de energia livre da interface. Suas definições são dadas por

$$\begin{aligned}\psi &= e - Ts, \\ \Psi_\Sigma &= E_\Sigma - TS_\Sigma.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Os potenciais $\psi(\varepsilon(\vec{u}))$ e $\Psi_\Sigma([\vec{u}], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T)$ são definidos somente para processos reais. Entretanto, os mesmos podem ser estendidos para processos em que $([\vec{u}], d_N, d_T, \nabla d_N, \nabla d_T) \notin \mathbf{K}_\Sigma$, com \mathbf{K}_Σ definido por (2.5). Para tal, determina-se:

$$\Psi_\Sigma([\vec{u}], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) = +\infty \text{ para } ([\vec{u}], d_N, d_T, \nabla d_N, \nabla d_T) \notin \mathbf{K}_\Sigma. \quad (2.25)$$

A densidade de energia livre estendida, $\Psi_\Sigma^*([\vec{u}], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T)$, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\Psi_\Sigma^*([\vec{u}], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) &= \Psi_\Sigma([\vec{u}], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) \\ &+ I_{\mathbf{K}_\Sigma}([\vec{u}], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T),\end{aligned}\quad (2.26)$$

tal que

$$\begin{aligned}I_{\mathbf{K}_\Sigma}([\vec{u}], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) &= \begin{cases} 0 & \text{se } ([\vec{u}], d_N, d_T, \nabla d_N, \nabla d_T) \in \mathbf{K}_\Sigma, \\ +\infty & \text{se } ([\vec{u}], d_N, d_T, \nabla d_N, \nabla d_T) \notin \mathbf{K}_\Sigma, \end{cases}\end{aligned}\quad (2.27)$$

sendo $I_{\mathbf{K}_\Sigma}$ a função indicatriz do conjunto \mathbf{K}_Σ .

Trabalha-se com a hipótese de que as derivadas materiais de $\psi(\varepsilon(\vec{u}))$ e $\Psi_\Sigma^*([\vec{u}], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T)$ existem, que o potencial $\psi(\varepsilon(\vec{u}))$ é diferenciável e que $\Psi_\Sigma^*([\vec{u}], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T)$ seja localmente sub diferenciável.

Ao se considerar que $[\vec{u}], d_N, \nabla d_N, d_T$ e ∇d_T são suficientemente regulares em relação ao parâmetro de tempo t , que o processo é isotérmico e não possui fontes de calor, e que estas considerações se mantenham, obtém-se as seguintes derivadas materiais

$$\dot{\Lambda}_\vartheta(\vartheta, \varepsilon(\vec{u})) = \int_\vartheta \rho \frac{\partial \psi(\varepsilon(\vec{u}))}{\partial \varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon}(\vec{u}) \, d\vartheta \quad (2.28)$$

e

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}_\Sigma(\vartheta, [\vec{u}], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) &= \int_{\Sigma \cap \vartheta} \left\{ \vec{Q}_\Sigma^r \cdot [[\vec{u}]] + Y_N^r \dot{d}_N \right. \\ &\left. + \vec{J}_N^r \cdot \nabla \dot{d}_N + Y_T^r \dot{d}_T + \vec{J}_T^r \cdot \nabla \dot{d}_T \right\} d\Gamma, \quad (2.29)\end{aligned}$$

tal que $(\vec{Q}_\Sigma^r, Y_N^r, \vec{J}_N^r, Y_T^r, \vec{J}_T^r) \in \partial\Psi_\Sigma^*([\vec{u}], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T)$. Os elementos do conjunto $\partial\Psi_\Sigma^*([\vec{u}], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T)$ são subgradientes locais do potencial de energia livre estendido.

Trabalhando com as seguintes definições

$$\begin{aligned} Q_{\Sigma N}^r &= \vec{Q}_\Sigma^r \cdot \vec{n}, \\ Q_{\Sigma T}^r &= \vec{Q}_\Sigma^r \cdot \vec{e}_t, \\ [[u_N]] &= [[\vec{u}]] \cdot \vec{n}, \\ [[u_T]] &= [[\vec{u}]] \cdot \vec{e}_t, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde \vec{e}_t é o vetor tangente unitário, tal que $\vec{n} \cdot \vec{e}_t = 0$ e $\vec{n} \times \vec{e}_t = \vec{e}_z$. Outrossim

$$\begin{aligned} \vec{Q}_\Sigma^r \cdot [[\vec{u}]] &= \{Q_{\Sigma T}^r \vec{e}_t + Q_{\Sigma N}^r \vec{n}\} \cdot \{[[\dot{u}_T]] \vec{e}_t + [[\dot{u}_N]] \vec{n}\}, \\ \vec{Q}_\Sigma^r \cdot [[\vec{u}]] &= Q_{\Sigma N}^r [[\dot{u}_N]] + Q_{\Sigma T}^r [[\dot{u}_T]], \end{aligned} \quad (2.31)$$

permitindo reescrever a Eq. 2.29

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_\Sigma(\vartheta, [[\vec{u}]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) &= \int_{\Sigma \cap \vartheta} \left\{ Q_{\Sigma N}^r [[\dot{u}_N]] + Q_{\Sigma T}^r [[\dot{u}_T]] \right. \\ &\quad \left. + Y_N^r \dot{d}_N + \vec{J}_N^r \cdot \nabla \dot{d}_N + Y_T^r \dot{d}_T + \vec{J}_T^r \cdot \nabla \dot{d}_T \right\} d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Juntando com a Eq. 2.24, chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \dot{e} - \dot{T}s - T\dot{s}, \\ \dot{\Psi}_\Sigma &= \dot{E}_\Sigma - \dot{T}S_\Sigma - T\dot{S}_\Sigma, \end{aligned} \quad (2.33)$$

e como o processo é isotérmico, reduz-se a

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \dot{e} - T\dot{s}, \\ \dot{\Psi}_\Sigma &= \dot{E}_\Sigma - T\dot{S}_\Sigma. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Fazendo-se uso da Eq. 2.21, a desigualdade de Clausius-Duhem, resulta em:

$$\begin{aligned}\rho \dot{\epsilon} - \rho \dot{\psi} &\geq 0 \text{ em } \Omega, \\ \dot{E}_\Sigma - \dot{\Psi}_\Sigma &\geq 0 \text{ em } \Sigma.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Introduzindo 2.13 em 2.35 temos:

$$\begin{aligned}\sigma \cdot D(\vec{u}) - \rho \dot{\psi} &\geq 0 \text{ em } \Omega. \\ Q_{\Sigma N} [[\dot{u}_N]] + Q_{\Sigma T} [[\dot{u}_T]] + Y_N \dot{d}_N + \vec{J}_N \cdot \nabla \dot{d}_N + Y_T \dot{d}_T + \vec{J}_T \cdot \nabla \dot{d}_T - \dot{\Psi}_\Sigma &\geq 0 \text{ em } \Sigma.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Da Eq. 2.28

$$\rho \dot{\psi} = \rho \frac{\partial \psi(\epsilon(\vec{u}))}{\partial \epsilon} \cdot \epsilon(\vec{u}). \quad (2.37)$$

E da Eq. 2.29

$$\dot{\Psi}_\Sigma = Q'_{\Sigma N} [[\dot{u}_N]] + Q'_{\Sigma T} [[\dot{u}_T]] + Y'_N \dot{d}_N + \vec{J}'_N \cdot \nabla \dot{d}_N + Y'_T \dot{d}_T + \vec{J}'_T \cdot \nabla \dot{d}_T. \quad (2.38)$$

Inserindo 2.37 em 2.36 e notando que $D(\vec{u}) = \epsilon(\vec{u})$

$$\left\{ \sigma - \rho \frac{\partial \psi(\epsilon(\vec{u}))}{\partial \epsilon} \right\} \cdot \epsilon(\vec{u}) \geq 0, \quad (2.39)$$

o qual deve ser verdadeiro para qualquer situação de $\epsilon(\vec{u})$, deriva-se

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi(\epsilon(\vec{u}))}{\partial \epsilon}. \quad (2.40)$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned}Q_{\Sigma N} [[\dot{u}_N]] + Q_{\Sigma T} [[\dot{u}_T]] + Y_N \dot{d}_N + \vec{J}_N \cdot \nabla \dot{d}_N + Y_T \dot{d}_T + \vec{J}_T \cdot \nabla \dot{d}_T \\ - \left\{ Q'_{\Sigma N} [[\dot{u}_N]] + Q'_{\Sigma T} [[\dot{u}_T]] + Y'_N \dot{d}_N + \vec{J}'_N \cdot \nabla \dot{d}_N + Y'_T \dot{d}_T + \vec{J}'_T \cdot \nabla \dot{d}_T \right\} \geq 0,\end{aligned}\quad (2.41)$$

assim

$$\begin{aligned}
& \{Q_{\Sigma N} - Q_{\Sigma N}^r\} [[\dot{u}_N]] + \{Q_{\Sigma T} - Q_{\Sigma T}^r\} [[\dot{u}_T]] \\
& \quad + \{Y_N - Y_N^r\} \dot{d}_N + \left\{ \vec{J}_N - \vec{J}_N^r \right\} \cdot \nabla \dot{d}_N \\
& \quad + \{Y_T - Y_T^r\} \dot{d}_T + \left\{ \vec{J}_T - \vec{J}_T^r \right\} \cdot \nabla \dot{d}_T \geq 0. \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Resultando da união das Eqs. 2.36 e 2.38

$$\begin{aligned}
Q_{\Sigma N}^i &= Q_{\Sigma N} - Q_{\Sigma N}^r, \\
Q_{\Sigma T}^i &= Q_{\Sigma T} - Q_{\Sigma T}^r, \\
Y_N^i &= Y_N - Y_N^r, \\
\vec{J}_N^i &= \vec{J}_N - \vec{J}_N^r, \\
Y_T^i &= Y_T - Y_T^r, \\
\vec{J}_T^i &= \vec{J}_T - \vec{J}_T^r,
\end{aligned} \quad (2.43)$$

considerando que a dissipação está relacionada somente ao processo de decoesão, descrito por \dot{d}_N e \dot{d}_T , e ao processo de atrito, descrito por $[[\dot{u}_T]]$, infere-se que:

$$\begin{aligned}
Q_{\Sigma N}^i &= 0, \\
\vec{J}_N^i &= \vec{0}, \\
\vec{J}_T^i &= \vec{0},
\end{aligned} \quad (2.44)$$

implicando em:

$$\begin{aligned}
Q_{\Sigma N} &= Q_{\Sigma N}^r, \\
\vec{J}_N &= \vec{J}_N^r, \\
\vec{J}_T &= \vec{J}_T^r,
\end{aligned} \quad (2.45)$$

chega-se na dissipação intrínseca na interface, associada à decoesão e ao atrito

$$\Delta_{\Sigma} = Q_{\Sigma T}^i \cdot [[\dot{u}_T]] + Y_N^i \dot{d}_N + Y_T^i \dot{d}_T \geq 0 \text{ em } \Sigma. \quad (2.46)$$

Uma condição suficiente para a satisfação da desigualdade de Clausius-Duhem é supor que

$$\vec{Q}_{\Sigma T}^i \cdot [[\vec{u}_T]] \geq 0 \text{ em } \Sigma, \quad (2.47)$$

$$Y_N^i \dot{d}_N + Y_T^i \dot{d}_T \geq 0 \text{ em } \Sigma, \quad (2.48)$$

o que consiste em supor que a dissipação devido ao atrito é independente da dissipação devido ao processo de dano.

3 MODELO DE DANO ADESIVO

Após a determinação da forma local das equações de equilíbrio, da desigualdade de Clausius-Duhem e das equações de estado local, obtém-se a estrutura básica de funcionamento da parte reversível do modelo proposto. Para obtermos a forma funcional das equações de estado associadas ao modelo é necessária a definição dos potenciais de energia livre.

3.1 DEFINIÇÃO DOS POTENCIAIS DE ENERGIA LIVRE

Por simplicidade, restringe-se a análise da interface a problemas bidimensionais. Como resultado, somente os modos I e II de abertura de trinca ocorrerão no processo de decoesão. Assim define-se a função $\rho\psi(\varepsilon(\vec{u}))$ que representa a energia livre:

$$\rho\psi(\varepsilon(\vec{u})) = \frac{\lambda}{2} (\text{tr}[\varepsilon(\vec{u})])^2 + \mu \text{tr}[\varepsilon(\vec{u})^2], \quad (3.1)$$

num contexto geral 3D, sendo λ e μ parâmetros de Lamè. Entretanto algumas restrições serão impostas para torná-la apta a problemas de estado plano de tensões e deformações e problemas axisimétricos.

A função $\Psi_{\Sigma}^* ([[u_N]], [[u_T]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T)$ representa o potencial de densidade de energia livre estendido da interface, já num contexto 2D:

$$\begin{aligned} & \Psi_{\Sigma}^* ([[u_N]], [[u_T]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) \\ &= \Psi_{\Sigma} ([[u_N]], [[u_T]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) \\ & \quad + I_{K_{\Sigma}} ([[u_N]], [[u_T]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T), \end{aligned} \quad (3.2)$$

com

$$\begin{aligned} & \Psi_{\Sigma} ([[u_N]], [[u_T]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) \\ &= \Psi_{\Sigma 1} ([[u_N]], d_N) + \Psi_{\Sigma 2} ([[u_T]], d_T) + \Psi_{\Sigma 3} ([[u_N]], [[u_T]], d_N, d_T) \\ & \quad + \Psi_{\Sigma 4} (d_N, \nabla d_N) + \Psi_{\Sigma 5} (d_T, \nabla d_T) + \Psi_{\Sigma 6} (d_N) + \Psi_{\Sigma 7} (d_T). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Em que os potenciais $\Psi_{\Sigma i=1,\dots,7}(\cdot)$ são definidos como:

$$\Psi_{\Sigma 1} ([[u_N]], d_N) = \frac{1}{2} \left\{ (1 - d_N)^2 k_N \right\} [[u_N]]^2, \quad (3.4)$$

$$\Psi_{\Sigma 2} ([[u_T]], d_T) = \frac{1}{2} \left\{ (1 - d_T)^2 k_T \right\} [[u_T]]^2, \quad (3.5)$$

$$\Psi_{\Sigma 3} ([[u_{N,T}]], d_{N,T}) = \left\{ (1 - d_N)(1 - d_T) k_{NT} \right\} [[u_N]] [[u_T]], \quad (3.6)$$

$$\Psi_{\Sigma 4} (d_N, \nabla d_N) = \frac{1}{2} k_N^b \|\nabla d_N\|^2, \quad (3.7)$$

$$\Psi_{\Sigma 5} (d_T, \nabla d_T) = \frac{1}{2} k_T^b \|\nabla d_T\|^2, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\Sigma 6} (d_N) = & -(1 - d_N) Y_N^0 - Y_N^0 \left\{ d_N - \int_0^{d_N} \left[\frac{\xi}{(1 - \xi)^{a_N} + \varepsilon_Y} \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 - b_N \xi)(1 - c_N \xi) \right] d\xi \right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\Sigma 7} (d_T) = & -(1 - d_T) Y_T^0 - Y_T^0 \left\{ d_T - \int_0^{d_T} \left[\frac{\xi}{(1 - \xi)^{a_T} + \varepsilon_Y} \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 - b_T \xi)(1 - c_T \xi) \right] d\xi \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

para algum $\{a_N, a_T, b_N, b_T, c_N, c_T\} \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon_Y = 10^{-6}$.

Os termos $\Psi_{\Sigma 1} ([[u_N]], d_N)$ e $\Psi_{\Sigma 2} ([[u_T]], d_T)$ são expressões clássicas da energia livre de um material adesivo linear elástico. O termo $\Psi_{\Sigma 3} ([[u_N]], [[u_T]], d_N, d_T)$ é introduzido para acoplar os modos I e II de abertura de trinca que existe no descolamento de problemas bidimensionais de interface. Os termos $\Psi_{\Sigma 4} (d_N, \nabla d_N)$ e $\Psi_{\Sigma 5} (d_T, \nabla d_T)$ são responsáveis por introduzir o comportamento não local - ao introduzir a dependência da vizinhança - e também de fornecer um comportamento difusivo, suavizando os campos d_N e d_T na interface. Nota-se que, se $k_N^b \rightarrow 0$ e $k_T^b \rightarrow 0$ o comportamento adesivo tende a apresentar-se um pouco mais frágil e também permite que a teoria não local, reduza-se no limite, à teoria clássica de dano local.

Os termos $\Psi_{\Sigma 6} (d_N)$ e $\Psi_{\Sigma 7} (d_T)$ são introduzidos para controlar a ativação das leis de evolução do dano. Isto define o critério de descolamento. Neste caso, o descolamento só ocorrerá, ou seja $\dot{d}_N \neq 0$ e $\dot{d}_T \neq 0$, quando a densidade acumulada de energia de deformação for maior que Y_N^0 e Y_T^0 , tornando estes dois valores o limite para a densidade de ener-

gia de deformação elástica. Chama-se a parcela entre chaves destas duas funções de “função barreira”.

A obtenção desta função na forma atual foi bastante trabalhosa, envolvendo diversos testes com outras funções que normalmente mostravam-se incapazes de capturar o fenômeno da queda da resistência adesiva de maneira satisfatória. Desejava-se obter uma função que permitisse um controle fino dos comportamentos inicial, quando o dano ainda é pequeno; e do final, quando experimenta-se o decaimento. O primeiro termo, que possui a fração, é responsável pelo comportamento ao longo do decaimento; enquanto o segundo termo, do produto, é responsável pelo comportamento inicial.

A capacidade de escolher a intensidade da queda da força resistiva do adesivo quando o dano está crescendo permite que se dê ao mesmo características mais frágeis, típicas de quedas abruptas, ou mais dúcteis, típicas de quedas mais suaves; e a forma atual da função barreira possui esta característica.

Um eventual problema está relacionado ao termo que acopla ambas as modalidades de dano

$$\Psi_{\Sigma 3} ([[u_N]], [[u_T]], d_N, d_T) = \{(1 - d_N)(1 - d_T)k_{NT}\} [[u_N]] [[u_T]], \quad (3.11)$$

pois pode possuir contribuições positivas e negativas, a depender dos sinais de $[[u_N]]$ e $[[u_T]]$. Pode-se analisar melhor ao se tratar os termos

$$\Psi_{\Sigma 1} ([[u_N]], d_N) = \frac{1}{2} \left\{ (1 - d_N)^2 k_N \right\} [[u_N]]^2, \quad (3.12)$$

$$\Psi_{\Sigma 2} ([[u_T]], d_T) = \frac{1}{2} \left\{ (1 - d_T)^2 k_T \right\} [[u_T]]^2, \quad (3.13)$$

$$\Psi_{\Sigma 3} ([[u_{N,T}]], d_{N,T}) = \{(1 - d_N)(1 - d_T)k_{NT}\} [[u_N]] [[u_T]] \quad (3.14)$$

como um elemento de mola acoplado, dado por

$$\Psi_{\Sigma E} = \frac{1}{2} [\mathbf{K}_{spring}] \left\{ \begin{array}{c} [[u_N]] \\ [[u_T]] \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} [[u_N]] \\ [[u_T]] \end{array} \right\}, \quad (3.15)$$

tal que

$$[\mathbf{K}_{spring}] = \begin{bmatrix} (1 - d_N)^2 k_N & (1 - d_N)(1 - d_T)k_{NT} \\ (1 - d_N)(1 - d_T)k_{NT} & (1 - d_T)^2 k_T \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

e garante-se que $[\mathbf{K}_{spring}]$ seja positiva definida ao se impor a condição

$$k_N k_T > k_{NT}^2. \quad (3.17)$$

3.1.1 Definição dos termos do potencial de densidade de energia livre da interface Ψ_{Σ_1}

O termo $\Psi_{\Sigma_1} ([[u_N]], d_N)$ representa a expressão clássica da energia livre de uma mola, que pode ou não ser linear.

Resposta elástica linear neste caso considera-se:

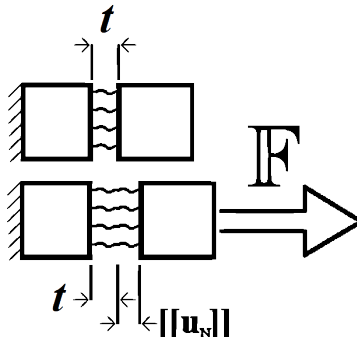
$$\Psi_{\Sigma_1} ([[u_N]], d_N) = \frac{1}{2} \left\{ (1 - d_N)^2 k_N \right\} [[u_N]]^2. \quad (3.18)$$

A determinação dos valores iniciais de k_N deve ser feita experimentalmente. Considera-se um adesivo de espessura δ , e seja F a força aplicada. A tensão média é dada por

$$\sigma_N = \frac{F}{A} \quad (3.19)$$

Enxergando este experimento como algo discreto, pode-se substituir o elemento adesivo por um elemento de mola. A rigidez da mola, de comprimento t , seção transversal A e constituída por um material de módulo de Young E_{adh} é dada por:

Figura 3.1: Ensaio modo I.



$$k_s = \frac{E_{adh}A}{t}. \quad (3.20)$$

Ao se aplicar a força F , produz-se um deslocamento axial, tal que

$$\begin{aligned}
 F &= k_s [[u_N]], \\
 F &= \frac{E_{adh}A}{t} [[u_N]], \\
 \sigma_N &= \frac{E_{adh}}{t} [[u_N]],
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
 \sigma_N &= k_N [[u_N]], \\
 k_N &= \frac{E_{adh}}{t}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

No caso de um material compósito consistindo de uma matriz com inclusões, considera-se, como uma primeira estimativa,

$$E_{adh} = \min \{E_{inclusão}, E_{matriz}\}. \tag{3.23}$$

3.1.2 Definição dos termos do potencial de densidade de energia livre da interface $\Psi_{\Sigma 2}$

O termo $\Psi_{\Sigma 2} ([[u_T]], d_T)$ representa a expressão clássica da energia livre de uma mola elástica, que pode ou não ser linear.

Resposta elástica linear neste caso considera-se:

$$\Psi_{\Sigma 1} ([[u_T]], d_T) = \frac{1}{2} \left\{ (1 - d_T)^2 k_T \right\} [[u_T]]^2. \tag{3.24}$$

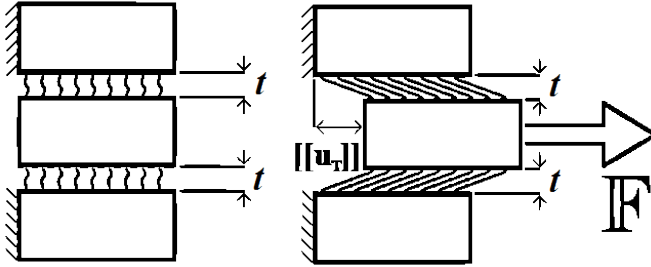
A determinação dos valores iniciais de k_T deve ser feita experimentalmente de um mecanismo de descolamento do tipo II. Entretanto para uma primeira estimativa esta constante de rigidez pode ser obtida com o procedimento descrito a seguir.

Considera-se um paralelepípedo rígido, de seção lateral de área A , colado à duas superfícies rígidas. Considere a espessura do adesivo como t

Considerando a deformação infinitesimal, temos

$$\gamma \cong \tan(\gamma). \tag{3.25}$$

Figura 3.2: Ensaio do modo II.



tal que

$$\tan(\gamma) = \frac{[[u_T]]}{t}. \quad (3.26)$$

que dá uma aproximação de primeira ordem de

$$\gamma = \frac{[[u_T]]}{t}. \quad (3.27)$$

Supondo que o material adesivo é isotrópico linear, tem-se

$$\begin{aligned} \tau &= G_{adh}\gamma, \\ \tau &= \frac{G_{adh}}{t} [[u_T]], \\ k_T &= \frac{G_{adh}}{t}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

No caso de um material compósito consistindo de uma matriz com inclusões, considera-se, como uma primeira estimativa,

$$G_{adh} = \min \{G_{inclusão}, G_{matriz}\}. \quad (3.29)$$

3.2 REGULARIZAÇÃO DO POTENCIAL DE ENERGIA LIVRE

Para resolver o problema da não-diferenciabilidade do potencial de energia livre de Helmholtz, $\Psi_{\Sigma}^* ([[u_N]], [[u_T]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T)$, a fim de se utilizar algoritmos de solução tradicionais é necessário regularizar o potencial. O potencial regularizado é tal que:

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \Psi_{\Sigma}^{\eta} ([[u_N]], [[u_T]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) \\ = \Psi_{\Sigma}^* ([[u_N]], [[u_T]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Porém, da Eq. (3.2), nota-se que o termo $\Psi_{\Sigma} ([[u_N]], [[u_T]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T)$ é suave. É necessário regularizar somente a função indicatriz do conjunto \mathbf{K}_{Σ} , definido em (2.5), dada por $I_{\mathbf{K}_{\Sigma}} ([[u_N]], [[u_T]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T)$. A função indicatriz, dada na Eq. (2.27), é regularizada ao se aplicar métodos de penalidade. Considera-se uma aproximação diferenciável $I_{\mathbf{K}_{\Sigma}}^{\eta} ([[u]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T)$ tal que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} I_{\mathbf{K}_{\Sigma}}^{\eta} ([[u]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) = I_{\mathbf{K}_{\Sigma}} ([[u]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T). \quad (3.31)$$

Para se construir $I_{\mathbf{K}_{\Sigma}}^{\eta}(\cdot)$, representa-se o domínio viável, \mathbf{K}_{Σ} , por restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned} g_1 ([[u_N]]) &= [[u_N]] \leq 0, \\ g_2 (d_N) &= -d_N \leq 0, \\ g_3 (d_N) &= d_N - 1 \leq 0, \\ g_4 (d_T) &= -d_T \leq 0, \\ g_5 (d_T) &= d_T - 1 \leq 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

A função regularizada $I_{\mathbf{K}_{\Sigma}}^{\eta}(\cdot)$ pode ser obtida como

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{K}_{\Sigma}}^{\eta} ([[u]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) &= \frac{1}{\eta_u} P_1 (g_1 ([[u_N]])) + \frac{1}{\eta_a} P_2 (g_2 (d_N)) \\ &+ \frac{1}{\eta_a} P_3 (g_3 (d_N)) + \frac{1}{\eta_a} P_4 (g_4 (d_T)) \\ &+ \frac{1}{\eta_a} P_5 (g_5 (d_T)), \end{aligned} \quad (3.33)$$

tal que $\eta_{a,u}$ são os parâmetros de penalização adequados.

Arora (ARORA, 2004) discorre sobre os métodos de penalização classificando-os de duas maneiras: (i) funções de penalidade e (ii) funções barreira. A ideia básica da função de penalização é definir uma função P_i de tal forma que a função custo, $I_{\mathbf{K}_{\Sigma}}^{\eta}$, seja penalizada sempre que existe alguma violação de restrição. Os métodos baseados em funções de penalidade são também chamados de *métodos exteriores*, ou de *penalização externa*, porque eles ocorrem fora do que se chama de *região viável*. Por região viável entende-se, matematicamente, um conjunto S que é uma coleção de todos os pontos que satisfazem as restrições, aqui definido como

$$S = \{\mathbf{x} \mid g_i(\cdot) \leq 0, i = 1, 5\}. \quad (3.34)$$

Entre suas principais características pode-se elencar:

1. Sua aplicação a problemas gerais com restrição tanto de igualdade como de desigualdade;
2. O método itera fora da *região viável*, resultando numa - normalmente - pequena violação das restrições;
3. Se o processo iterativo termina de maneira prematura, a solução pode violar bastante a região viável.

As funções barreiras, também chamadas de métodos de *penalização interna*, possuem tal nomenclatura porque uma grande “barreira” é construída ao redor da região viável. De fato, a função P_i torna-se infinita se uma das desigualdades torna-se ativa. Assim, quando um processo iterativo é iniciado dentro da região viável, ele jamais terminará fora da mesma, pois não pode atravessar a “barreira” erguida. Entre as principais características estão:

1. O método é aplicável somente para restrições de desigualdade.
2. O método sempre itera dentro da região viável, e ao ser terminado prematuramente, a solução fornecida está dentro da região viável.

Assim, pode-se definir as funções de penalização utilizadas como sendo¹

$$P_k(g_k(\cdot)) = \frac{1}{2} (\langle g_k(\cdot) \rangle^+)^2, \quad (3.35)$$

classificada penalização externa, ou

$$\tilde{P}_k(g_k(\cdot)) = \begin{cases} -\frac{1}{g_k(\cdot)}, \\ \log[-g_k(\cdot)], \end{cases} \quad (3.36)$$

que é classificada como penalização interna.

¹A notação $\langle f(x) \rangle^+$, conhecido como operador de Macaulay, aplicada a uma função $f(x)$, denota a parte positiva da função. Sua definição matemática é dada por

$$\langle f(x) \rangle^+ = \max\{0, f(x)\} = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) < 0 \\ f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Por simplicidade, opta-se por penalizações externas, tal que

$$\begin{aligned}
 I_{\mathbf{K}_\Sigma}^\eta ([[\vec{u}]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) &= \frac{1}{2\eta_u} (\langle [[u_N]] \rangle^+)^2 \\
 &+ \frac{1}{2\eta_a} \left\{ (\langle -d_N \rangle^+)^2 + (\langle -d_T \rangle^+)^2 \right\} \\
 &+ \frac{1}{2\eta_a} \left\{ (\langle d_N - 1 \rangle^+)^2 + (\langle d_T - 1 \rangle^+)^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

No limite de $\eta \rightarrow 0$, verifica-se a Eq. (3.31). Assim tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \Psi_\Sigma^\eta ([[u_N]], [[u_T]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) \\
 &= \Psi_\Sigma ([[u_N]], [[u_T]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T) \\
 &+ I_{\mathbf{K}_\Sigma}^\eta ([[u_N]], [[u_T]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T),
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

define o potencial de densidade de energia regularizado.

3.3 DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO 2D

As equações de estado, dadas por $(Q_{\Sigma N}^r, Q_{\Sigma T}^r, Y_N^r, \vec{J}_N^r, Y_T^r, \vec{J}_T^r)$ são dadas, após o processo de regularização, pelas relações descritas a seguir.

3.3.1 Tração normal, parcela reversível

$$\begin{aligned}
 Q_{\Sigma N}^r &= \frac{\partial \Psi_\Sigma^\eta}{\partial [[u_N]]}, \\
 Q_{\Sigma N}^r &= \left\{ (1 - d_N)^2 k_N \right\} [[u_N]] + \left\{ (1 - d_N)(1 - d_T) k_{NT} \right\} [[u_T]] + \frac{1}{\eta_u} \langle [[u_N]] \rangle^+.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

3.3.2 Tração tangencial, parcela reversível

$$\begin{aligned}
 Q_{\Sigma T}^r &= \frac{\partial \Psi_\Sigma^\eta}{\partial [[u_T]]}, \\
 Q_{\Sigma T}^r &= \left\{ (1 - d_T)^2 k_T \right\} [[u_T]] + \left\{ (1 - d_N)(1 - d_T) k_{NT} \right\} [[u_N]].
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

3.3.3 Força termodinâmica de dano normal, parcela reversível

$$\begin{aligned}
 Y_N^r &= \frac{\partial \Psi_\Sigma^\eta}{\partial d_N}, \\
 Y_N^r &= -(1-d_N)k_N [[u_N]]^2 - (1-d_T)k_{NT} [[u_N]] [[u_T]] \\
 &\quad + Y_N^0 \left[\frac{d_N}{(1-d_N)^{a_N} + \varepsilon_Y} + (1-b_N d_N)(1-c_N d_N) \right] - \frac{1}{\eta_a} \langle -d_N \rangle^+ \\
 &\quad + \frac{1}{\eta_a} \langle d_N - 1 \rangle^+, \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

para algum $\{a_N, b_N, c_N\} \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon_Y = 10^{-6}$.

3.3.4 Força termodinâmica tangencial de dano

$$\begin{aligned}
 Y_T^r &= \frac{\partial \Psi_\Sigma^\eta}{\partial d_T}, \\
 Y_T^r &= -(1-d_T)k_T [[u_T]]^2 - (1-d_N)k_{NT} [[u_N]] [[u_T]] \\
 &\quad + Y_T^0 \left[\frac{d_T}{(1-d_T)^{a_T} + \varepsilon_Y} + (1-b_T d_T)(1-c_T d_T) \right] - \frac{1}{\eta_a} \langle -d_T \rangle^+ \\
 &\quad + \frac{1}{\eta_a} \langle d_T - 1 \rangle^+, \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

para algum $\{a_T, b_T, c_T\} \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon_Y = 10^{-6}$.

3.3.5 Termo da influência do dano normal na vizinhança

$$\begin{aligned}
 \vec{J}_N^r &= \frac{\partial \Psi_\Sigma^\eta}{\partial \nabla d_N}, \\
 \vec{J}_N^r &= k_N^b \nabla d_N. \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

3.3.6 Termo da influência do dano tangencial na vizinhança

$$\begin{aligned}\bar{J}_T^r &= \frac{\partial \Psi_\Sigma^\eta}{\partial \nabla d_T}, \\ \bar{J}_T^r &= k_T^b \nabla d_T.\end{aligned}\quad (3.44)$$

3.4 LEIS E EQUAÇÕES COMPLEMENTARES

Os processos dissipativos relacionados ao atrito e descolamento são descritos por equações complementares. No caso do processo de descolamento com atrito, supõe-se a existência de um pseudo-potencial de dissipação, definido em $\vartheta \cap \Sigma$ dado por $\Phi_\Sigma ([[u_N]], [[\dot{u}_T]], \dot{d}_N, \nabla \dot{d}_N, \dot{d}_T, \nabla \dot{d}_T; \circ)$, tal que $(\circ) \equiv ([[u_N]], [[\dot{u}_T]], d_N, \nabla d_N, d_T, \nabla d_T)$

$$\Phi_\Sigma ([[u_N]], [[\dot{u}_T]], \dot{d}_N, \nabla \dot{d}_N, \dot{d}_T, \nabla \dot{d}_T; \circ) = \Phi_{\Sigma 1} + \Phi_{\Sigma 2} + \Phi_{\Sigma 3}, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\Sigma 1} &= \int_{\vartheta \cap \Sigma} \varphi_{\Sigma 1} d\Gamma, \\ \Phi_{\Sigma 2} &= \int_{\vartheta \cap \Sigma} \varphi_{\Sigma 2} d\Gamma, \\ \Phi_{\Sigma 3} &= \int_{\vartheta \cap \Sigma} \varphi_{\Sigma 3} d\Gamma.\end{aligned}\quad (3.46)$$

As funções de densidade $\varphi_{\Sigma 1}$, $\varphi_{\Sigma 2}$ e $\varphi_{\Sigma 3}$ são convexas em relação às variáveis de fluxo $([[\dot{u}_N]], [[\dot{u}_T]], \dot{d}_N, \nabla \dot{d}_N, \dot{d}_T, \nabla \dot{d}_T, \circ)$, positivas e nulas na origem com o interior relativo $\text{ri}(\text{dom} \varphi_{\Sigma 1} \cap \text{dom} \varphi_{\Sigma 2} \cap \text{dom} \varphi_{\Sigma 3}) \neq \emptyset$. Supõe-se que a densidade dos pseudo-potenciais $\varphi_{\Sigma 1}$ e $\varphi_{\Sigma 2}$ são dados por:

$$\varphi_{\Sigma 1} = \frac{1}{2} c_{\Sigma N} (\dot{d}_N)^2, \quad (3.47)$$

$$\varphi_{\Sigma 2} = \frac{1}{2} c_{\Sigma T} (\dot{d}_T)^2, \quad (3.48)$$

de forma que $\mathbf{K}_{\Sigma 1}, \mathbf{K}_{\Sigma 2} = \{\dot{d}_N, \dot{d}_T \mid \dot{d}_N \geq 0, \dot{d}_T \geq 0, \vartheta \cap \Sigma \times (0, t_0)\}$. As restrições são impostas de maneira a tornar o processo irreversível.

Para descrever o processo de atrito, faz-se uso da lei clássica de Coulomb. Outrossim, a função densidade de dissipação $\varphi_{\Sigma 3}$ é dada por

$$\varphi_{\Sigma 3} = \mu_{\Sigma} |Q'_{\Sigma N} ([[u_N]], d_N, d_T)| \|[[\dot{u}_T]]\|. \quad (3.49)$$

Pode-se estender o domínio dos pseudo-potenciais ao se considerar

$$\varphi_{\Sigma 1,2} (\dot{d}_{N,T}; \circ) = +\infty, \quad (3.50)$$

para $\dot{d}_{N,T} \notin \mathbf{K}_{\Sigma 1}, \mathbf{K}_{\Sigma 2}$. Define-se então a densidade estendida dos pseudo-potenciais $\varphi_{\Sigma 1,2}$ como $\varphi_{\Sigma 1,2}^*$

$$\varphi_{\Sigma 1,2}^* (\dot{d}_{N,T}; \circ) = \varphi_{\Sigma 1,2} (\dot{d}_{N,T}; \circ) + I_{\mathbf{K}_{\Sigma 1,2}} (\dot{d}_{N,T}; \circ). \quad (3.51)$$

3.4.1 Regularização dos pseudo-potenciais de dissipação

Para evitar o problema de não-diferenciação dos pseudo-potenciais de dissipação, é necessário que se aplique um processo de regularização. Após o potencial ser regularizado, é possível utilizar algoritmos tradicionais para solução do problema.

$$\varphi_{\Sigma 1}^{\eta} (\dot{d}_N; \circ) = \frac{1}{2} c_{\Sigma N} (\dot{d}_N)^2 + \frac{1}{2\eta} \left(\langle -\dot{d}_N \rangle^+ \right)^2, \quad (3.52)$$

$$\varphi_{\Sigma 2}^{\eta} (\dot{d}_T; \circ) = \frac{1}{2} c_{\Sigma T} (\dot{d}_T)^2 + \frac{1}{2\eta} \left(\langle -\dot{d}_T \rangle^+ \right)^2. \quad (3.53)$$

Para o potencial de dissipação de atrito

$$\varphi_{\Sigma 3}^{\varepsilon} = \mu_{\Sigma} |Q'_{\Sigma N} ([[u_N]], d_N, d_T)| \phi_{\Sigma 3}^{\varepsilon_0} ([[\dot{u}_T]]), \quad (3.54)$$

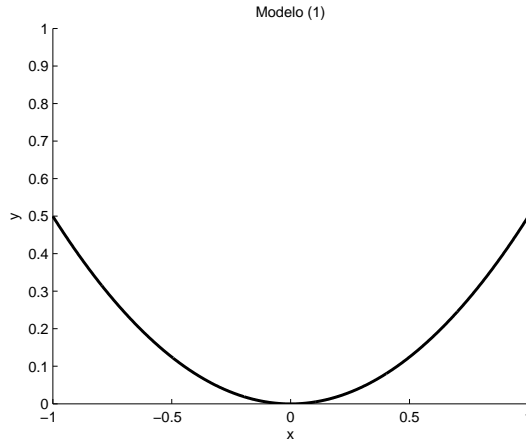
diferentes funções de regularização podem ser propostas, tais como

Modelo (1)

$$\phi_{\Sigma 3}^{\varepsilon_0} ([[\dot{u}_T]]) = \int_0^{[[\dot{u}_T]]} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \varepsilon_0}} d\xi, \quad (3.55)$$

para $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ e $-1 \leq x \leq 1$ tem-se

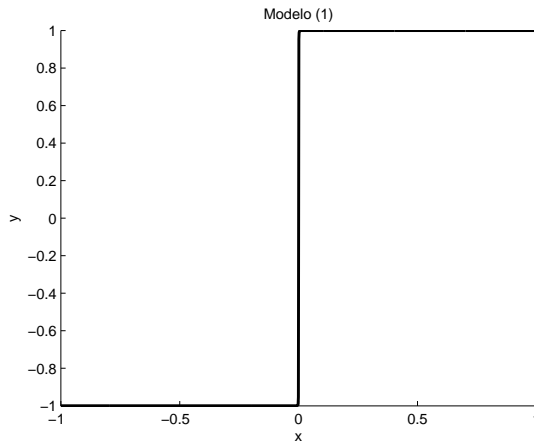
Figura 3.3: Regularização do primeiro modelo.



cuja derivada é dada por

$$\frac{\partial \phi_{\Sigma 3}^{\varepsilon_0}([\dot{u}_T])}{\partial [\dot{u}_T]} = \frac{[\dot{u}_T]}{\sqrt{[\dot{u}_T]^2 + \varepsilon_0}}. \quad (3.56)$$

Figura 3.4: Derivada do primeiro modelo de regularização.

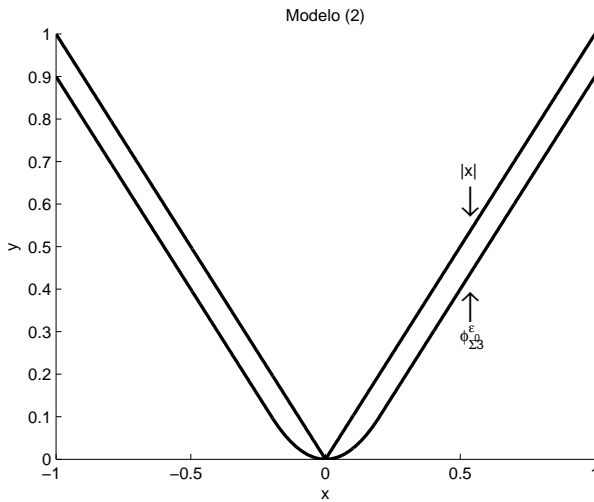


Modelo (2)

$$\phi_{\Sigma_3}^{\varepsilon_0}([\dot{u}_T]) = \begin{cases} ([\dot{u}_T] - \frac{\varepsilon_0}{2}) & \text{se } [[\dot{u}_T]] \geq \varepsilon_0, \\ \frac{1}{2\varepsilon_0} [[\dot{u}_T]]^2 & \text{se } |[[\dot{u}_T]]| < \varepsilon_0, \\ (-[\dot{u}_T] - \frac{\varepsilon_0}{2}) & \text{se } [[\dot{u}_T]] \leq -\varepsilon_0, \end{cases} \quad (3.57)$$

oriundo de Kikuchi (KIKUCHI; ODEN, 1988), para $\varepsilon_0 = 0.2$ e $-1 \leq x \leq 1$ tem-se

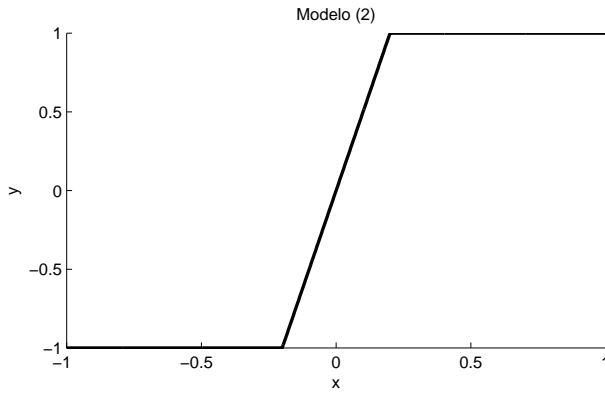
Figura 3.5: Regularização do segundo modelo.



cuja derivada é dada por

$$\frac{\partial \phi_{\Sigma_3}^{\varepsilon_0}([\dot{u}_T])}{\partial [[\dot{u}_T]]} = \begin{cases} 1 & \text{se } [[\dot{u}_T]] \geq \varepsilon_0, \\ \frac{[[\dot{u}_T]]}{\varepsilon_0} & \text{se } |[[\dot{u}_T]]| < \varepsilon_0, \\ -1 & \text{se } [[\dot{u}_T]] \leq -\varepsilon_0. \end{cases} \quad (3.58)$$

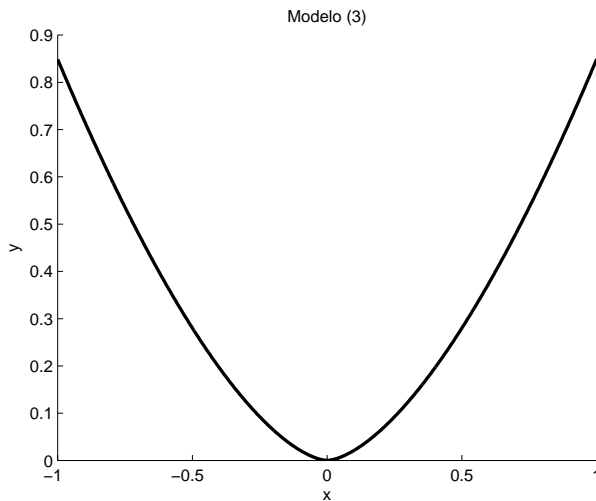
Figura 3.6: Derivada do segundo modelo de regularização.

**Modelo (3)**

$$\phi_{\Sigma 3}^{\varepsilon_0} (|[\dot{u}_T]|) = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + 1} \left(\frac{|[\dot{u}_T]|}{\varepsilon_0} \right)^{\varepsilon_0 + 1}, \quad (3.59)$$

para $\varepsilon_0 = 0.6$ e $-1 \leq x \leq 1$ tem-se

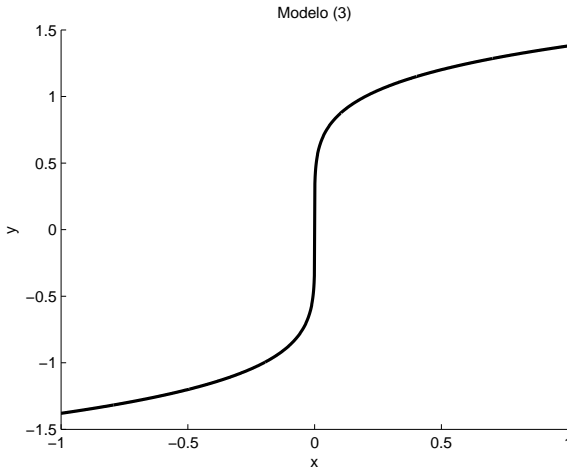
Figura 3.7: Regularização do terceiro modelo.



cuja derivada é dada por

$$\frac{\partial \phi_{\Sigma 3}^{\varepsilon_0}([\dot{u}_T])}{\partial [\dot{u}_T]} = \begin{cases} \left(\frac{[\dot{u}_T]}{\varepsilon_0}\right)^{\varepsilon_0} & \text{se } [[\dot{u}_T]] \geq 0, \\ -\left(\frac{-[[\dot{u}_T]]}{\varepsilon}\right)^{\varepsilon_0} & \text{se } [[\dot{u}_T]] < 0. \end{cases} \quad (3.60)$$

Figura 3.8: Derivada do terceiro modelo de regularização.

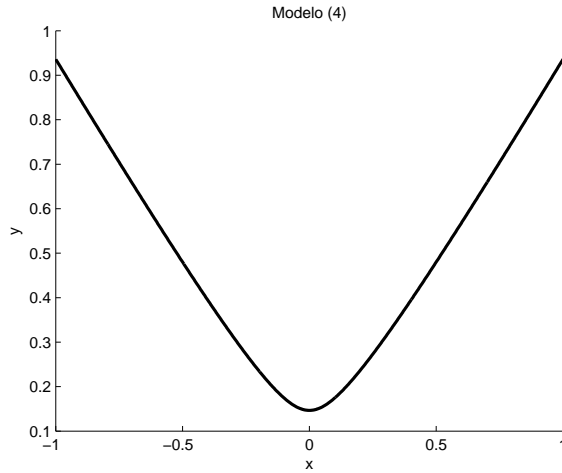


Modelo (4)

$$\phi_{\Sigma 3}^{\varepsilon_0}([\dot{u}_T]) = \frac{2}{\pi} \left([[\dot{u}_T]] \tan^{-1} \left[\frac{[[\dot{u}_T]]}{\varepsilon_0} \right] - \frac{\varepsilon_0}{2} \ln \left[[[\dot{u}_T]]^2 + \varepsilon_0^2 \right] \right), \quad (3.61)$$

para $\varepsilon_0 = 0.1$ e $-1 \leq x \leq 1$ tem-se

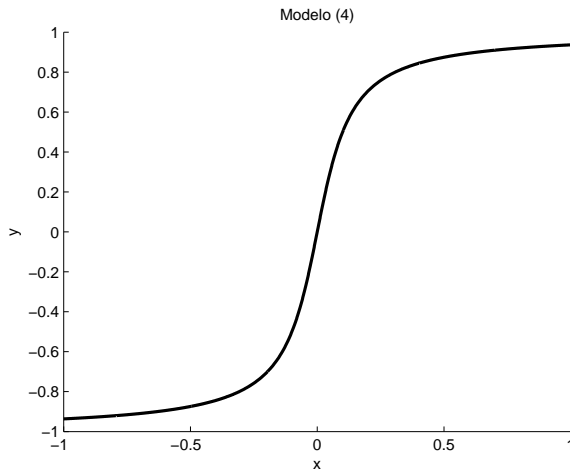
Figura 3.9: Regularização do quarto modelo.



cuja derivada é dada por

$$\frac{\partial \phi_{\Sigma 3}^{\varepsilon_0}([\dot{u}_T])}{\partial [\dot{u}_T]} = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left[\frac{[\dot{u}_T]}{\varepsilon_0} \right]. \quad (3.62)$$

Figura 3.10: Derivada do quarto modelo de regularização.



Da aplicação da hipótese da dissipação normal, temos que

$$\begin{aligned} Y_N^i &\in \partial \varphi_{\Sigma 1}^\eta (\dot{d}_N) \\ Y_T^i &\in \partial \varphi_{\Sigma 2}^\eta (\dot{d}_T) \\ Q_{\Sigma}^i &\in \partial \varphi_{\Sigma 3}^\varepsilon ([[\dot{u}_T]]]; [[u_N]], d_N, d_T) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Resultando, para os potenciais de dissipação regularizados associados ao processo de descolamento, em

$$\begin{aligned} Y_N^i &= \frac{\partial \varphi_{\Sigma 1}^\eta}{\partial \dot{d}_N} \\ Y_T^i &= \frac{\partial \varphi_{\Sigma 2}^\eta}{\partial \dot{d}_T} \\ Q_{\Sigma T}^i &= \frac{\partial \varphi_{\Sigma 3}^\varepsilon}{\partial [[\dot{u}_T]]} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Tal que

$$\begin{aligned} Y_N^i &= c_{\Sigma N} \dot{d}_N + \frac{1}{\eta} \langle -\dot{d}_N \rangle^+ \\ Y_T^i &= c_{\Sigma T} \dot{d}_T + \frac{1}{\eta} \langle -\dot{d}_T \rangle^+ \\ Q_{\Sigma T}^i &= \mu_{\Sigma} |Q_{\Sigma N}^r| ([u_N], d_N, d_T) \left| \frac{\partial \varphi_{\Sigma 3}^{\varepsilon_0} ([[u_T]])}{\partial [[\dot{u}_T]]} \right| \end{aligned} \quad (3.65)$$

em que o termo $\frac{\partial \varphi_{\Sigma 3}^{\varepsilon_0} ([[u_T]])}{\partial [[\dot{u}_T]]}$ fornece para cada um dos diferentes modelos. Optou-se pela escolha do **Modelo (2)**, pois a imagem da função aproxima-se bastante da obtida de $|x|$, além de sua derivada ser contínua e suave. O **Modelo (1)** possui derivada não definida em $x = 0$, enquanto o **Modelo (3)** possui uma inclinação muito tímida em valores ao redor de $x = 0$; assim ambos os modelos apresentariam problemas de convergência. Apesar do **Modelo (4)** também cumprir os requisitos de suavidade e continuidade da derivada, este modelo foi preterido devido à uma maior dificuldade de implementação.

3.4.2 Sumário das equações de estado completas

Pode-se definir então

$$\begin{aligned}
 Y_N &= Y_N^r + Y_N^i, \\
 Y_T &= Y_T^r + Y_T^i, \\
 Q_{\Sigma N} &= Q_{\Sigma}^r, \\
 Q_{\Sigma T} &= Q_{\Sigma T}^r + Q_{\Sigma T}^i,
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

tal que

$$\begin{aligned}
 Y_N &= -(1 - d_N)k_N [[u_N]]^2 - (1 - d_T)k_{NT} [[u_N]] [[u_T]] \\
 &+ Y_N^0 \left\{ \frac{d_N}{(1 - d_N)^{a_N} + \varepsilon_Y} + (1 - b_N d_N)(1 - c_N d_N) \right\} \\
 &- \frac{1}{\eta_a} \langle -d_N \rangle^+ + \frac{1}{\eta_a} \langle d_N - 1 \rangle^+ + c_{\Sigma N} \dot{d}_N + \frac{1}{\eta} \langle -\dot{d}_N \rangle^+,
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}
 Y_T &= -(1 - d_T)k_T [[u_T]]^2 - (1 - d_N)k_{NT} [[u_N]] [[u_T]] \\
 &+ Y_T^0 \left\{ \frac{d_T}{(1 - d_T)^{a_T} + \varepsilon_Y} + (1 - b_T d_T)(1 - c_T d_T) \right\} \\
 &- \frac{1}{\eta_a} \langle -d_T \rangle^+ + \frac{1}{\eta_a} \langle d_T - 1 \rangle^+ + c_{\Sigma T} \dot{d}_T + \frac{1}{\eta} \langle -\dot{d}_T \rangle^+,
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{\Sigma N} &= \left\{ (1 - d_N)^2 k_N \right\} [[u_N]] \\
 &+ \left\{ (1 - d_N)(1 - d_T)k_{NT} \right\} [[u_T]] + \frac{1}{\eta_u} \langle [[u_N]] \rangle^+,
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{\Sigma T} &= \left\{ (1 - d_T)^2 k_T \right\} [[u_T]] + \left\{ (1 - d_N)(1 - d_T)k_{NT} \right\} [[u_N]] \\
 &+ \mu_{\Sigma} |Q_{\Sigma N}^r ([[u_N]], d_N, d_T)| \frac{\partial \phi_{\Sigma 3}^{\varepsilon_0} ([[u_T]])}{\partial [[\dot{u}_T]]},
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

com $\frac{\partial \phi_{\Sigma 3}^{\varepsilon_0} ([[u_T]])}{\partial [[\dot{u}_T]]}$ determinado pelo **Modelo (2)**.

Impondo $A_N = A_T = 0$ e $a_N = a_T = 0$ obtém-se

$$\begin{aligned} -Y_N + \operatorname{div} \left(\vec{J}_N \right) &= 0 \text{ em } \Sigma, \\ \vec{J}_N \cdot \vec{n} &= 0 \text{ em } \partial\Sigma, \\ -Y_T + \operatorname{div} \left(\vec{J}_T \right) &= 0 \text{ em } \Sigma, \\ \vec{J}_T \cdot \vec{n} &= 0 \text{ em } \partial\Sigma. \end{aligned} \tag{3.71}$$

4 DEFINIÇÃO DAS FORMULAÇÕES FRACAS

É comum falar-se de formulação *forte* e *fraca*. Cada uma destas formulações parte de pressupostos e objetivos de certa forma distintos; aos quais elenca-se as seguintes minúcias:

1. Como se obtém a solução para tal formulação;
2. A regularidade da solução para a formulação em questão (o quão suave esta solução é em termos de integração e derivação);
3. Em qual sentido a solução satisfaz a equação.

Em se tratando de formulações e soluções para o método dos elementos finitos, as equações diferenciais parciais - oriundas da formulação forte - devem ser reescritas numa forma integral chamada de *forma fraca*. A formulação fraca possui entre seus objetivos reduzir a ordem e tornar simétricas as derivadas (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

Ao se comparar a formulação fraca com a formulação forte, aquela possui menos exigências às funções candidatas a serem potenciais soluções do problema - tais como os requisitos de suavidade e continuidade.

Assim, considera-se que os requisitos para a solução do problema foram “enfraquecidos”. Apesar da nomenclatura sugerir uma certa inferioridade da formulação fraca, reforça-se que ambas são formulações válidas do mesmo problema. Em suma, as funções que satisfazem a formulação fraca de um problema são a solução da própria formulação forte (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

4.1 FORMULAÇÃO FRACA DO EQUILÍBRIO DE FORÇAS

Deve-se determinar o \vec{u} tal que satisfaça a seguinte formulação forte

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\sigma) + \vec{b} &= \rho \vec{u} \text{ em } \Omega, \\ \vec{Q}_\Sigma &= -\sigma \vec{n} \text{ em } \Sigma, \\ \sigma \vec{n} &= \vec{t} \text{ em } \Gamma_t.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Seja então o problema quasi-estático, de forma que $\rho \vec{u} \cong 0$, obtém-se o equilíbrio em t_{n+1}

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) + \vec{b}_{n+1} &= 0 \text{ em } \Omega, \\
\vec{Q}_{\Sigma_{n+1}} &= -\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \vec{n} \text{ em } \Sigma, \\
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \vec{n} &= \vec{t}_{n+1} \text{ em } \Gamma_t.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Para derivar a formulação fraca associada ao problema de evolução local, deve-se efetuar uma discretização no tempo. Neste caso, um método semi-implícito de diferenças finitas será utilizado. A ideia é discretizar um sistema que depende do tempo utilizando um esquema implícito para alguns termos e explícito para os restantes. O objetivo é dividir os termos de tal maneira que o maior passo de tempo possível é significativamente maior que o de uma discretização explícita, de maneira a reduzir o tempo de cálculo necessário para resolver as equações (FULTON; JUNE, 2004).

Obtém-se então

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\omega}) \, d\Omega + \int_{\Sigma} \vec{Q}_{\Sigma_{n+1}} \cdot [[\vec{\omega}]] \, d\Gamma \\
= \int_{\Gamma_t} \vec{t}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, d\Omega, \quad \forall \vec{\omega} \in \mathbf{V}_u.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

4.2 FORMULAÇÃO FRACA DA EQUAÇÃO GOVERNANTE DE DANO NORMAL

Deve-se determinar d_N tal que satisfaça a seguinte formulação forte

$$-Y_N + \operatorname{div}(\vec{J}_N) = 0 \text{ em } \Sigma, \tag{4.4}$$

$$\vec{J}_N \cdot \vec{n} = 0 \text{ em } \partial\Sigma \tag{4.5}$$

que pode ser reescrito, utilizando $Y_N = Y_N^i + Y_N^r$, $Y_N^i = c_{\Sigma N} \dot{d}_N + \frac{1}{\eta} \langle -\dot{d}_N \rangle^+$ e $\vec{J}_N = k_N^b \nabla d_N$, resultando em

$$c_{\Sigma N} \dot{d}_N - k_N^b \operatorname{div}(\nabla d_N) = -Y_N^r \text{ em } \Sigma, \tag{4.6}$$

$$k_N^b \nabla d_N \cdot \vec{n} = 0 \text{ em } \partial\Sigma. \tag{4.7}$$

Para garantir que $\dot{d}_N \geq 0$, pode-se efetuar a seguinte modificação

$$\begin{aligned} c_{\Sigma N} \dot{d}_N - k_N^b \operatorname{div}(\nabla d_N) &= \langle -Y_N^r \rangle^+ \text{ em } \Sigma, \\ k_N^b \nabla d_N \cdot \vec{n} &= 0 \text{ em } \partial \Sigma. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Com a discretização no tempo, a Eq. (4.8) torna-se

$$c_{\Sigma N} \frac{d_{N_{n+1}} - d_{N_n}}{\Delta t} - k_N^b \operatorname{div}(\nabla d_{N_{n+1}}) = \langle -Y_{N_n}^r \rangle^+ \text{ em } \Sigma, \quad (4.9)$$

$$k_N^b \nabla d_{N_{n+1}} \cdot \vec{n} = 0 \text{ em } \partial \Sigma, \quad (4.10)$$

sendo reescrita como

$$\frac{d_{N_{n+1}} - d_{N_n}}{\Delta t} - \frac{k_N^b}{c_{\Sigma N}} \operatorname{div}(\nabla d_{N_{n+1}}) = \frac{1}{c_{\Sigma N}} \langle -Y_{N_n}^r \rangle^+ \text{ em } \Sigma, \quad (4.11)$$

$$k_N^b \nabla d_{N_{n+1}} \cdot \vec{n} = 0 \text{ em } \partial \Sigma. \quad (4.12)$$

Dado o espaço vetorial $\mathbf{V}_D = (\eta_N \mid \eta_N \in H^1(\Sigma) \text{ em } \Gamma_u)$, a forma fraca pode ser computada como

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} d_{N_{n+1}} \eta_N \, d\Gamma + \frac{k_N^b \Delta t}{c_{\Sigma N}} \int_{\Sigma} \nabla \eta_N \cdot \nabla d_{N_{n+1}} \, d\Gamma \\ = \frac{\Delta t}{c_{\Sigma N}} \int_{\Sigma} \langle -Y_{N_n}^r \rangle^+ \eta_N \, d\Gamma + \int_{\Sigma} d_{N_n} \eta_N \, d\Gamma, \quad \forall \eta_N \in \mathbf{V}_D. \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.3 FORMULAÇÃO FRACA DA EQUAÇÃO GOVERNANTE DE DANO TANGENCIAL

Por analogia ao deduzido anteriormente, obtemos, para um $\mathbf{V}_D = (\eta_T \mid \eta_T \in H^1(\Sigma) \text{ em } \Gamma_u)$

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} d_{T_{n+1}} \eta_T \, d\Gamma + \frac{k_T^b \Delta t}{c_{\Sigma T}} \int_{\Sigma} \nabla \eta_T \cdot \nabla d_{T_{n+1}} \, d\Gamma = \\ \frac{\Delta t}{c_{\Sigma T}} \int_{\Sigma} \langle -Y_{T_n}^r \rangle^+ \eta_T \, d\Gamma + \int_{\Sigma} d_{T_n} \eta_T \, d\Gamma, \quad \forall \eta_T \in \mathbf{V}_D. \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.4 FORMA FRACA DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

Equilíbrio de forças

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\omega}) \, d\Omega + \int_{\Sigma} \vec{Q}_{\Sigma_{n+1}} \cdot [[\vec{\omega}]] \, d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_t} \vec{t}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, d\Omega, \quad \forall \vec{\omega} \in \mathbf{V}_u. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dano normal

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} d_{N_{n+1}} \eta_N \, d\Sigma + \frac{k_N^b \Delta t}{c_{\Sigma N}} \int_{\Sigma} \nabla \eta_N \cdot \nabla d_{N_{n+1}} \, d\Sigma \\ = \frac{\Delta t}{c_{\Sigma N}} \int_{\Sigma} \langle -Y_{N_n}^r \rangle^+ \eta_N \, d\Sigma + \int_{\Sigma} d_{N_n} \eta_N \, d\Sigma, \quad \forall \eta_N \in \mathbf{V}_D. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dano tangencial

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} d_{T_{n+1}} \eta_T \, d\Sigma + \frac{k_T^b \Delta t}{c_{\Sigma T}} \int_{\Sigma} \nabla \eta_T \cdot \nabla d_{T_{n+1}} \, d\Sigma = \\ \frac{\Delta t}{c_{\Sigma T}} \int_{\Sigma} \langle -Y_{T_n}^r \rangle^+ \eta_T \, d\Sigma + \int_{\Sigma} d_{T_n} \eta_T \, d\Sigma, \quad \forall \eta_T \in \mathbf{V}_D. \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.5 DEFINIÇÃO DOS FUNCIONAIS

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\omega}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\vec{u}_{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\omega}) \, d\Omega \\ + \int_{\Sigma} \vec{Q}_{\Sigma_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) \cdot [[\vec{\omega}]] \, d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_t} \vec{t}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, d\Omega = 0, \quad \forall \vec{\omega} \in \mathbf{V}_u, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \eta_N) = \int_{\Sigma} d_{N_{n+1}} \eta_N \, d\Gamma + \\ \frac{k_N^b \Delta t}{c_{\Sigma N}} \int_{\Sigma} \nabla \eta_N \cdot \nabla d_{N_{n+1}} \, d\Gamma - \frac{\Delta t}{c_{\Sigma N}} \int_{\Sigma} \langle -Y_{N_n}^r(\vec{u}_n, d_{N_n}, d_{T_n}) \rangle^+ \eta_N \, d\Gamma \\ - \int_{\Sigma} d_{N_n} \eta_N \, d\Gamma = 0, \quad \forall \eta_N \in \mathbf{V}_D, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\eta}_T) &= \int_{\Sigma} d_{T_{n+1}} \eta_T d\Gamma \\
&+ \frac{k_T^b \Delta t}{c_{\Sigma T}} \int_{\Sigma} \nabla \eta_T \cdot \nabla d_{T_{n+1}} d\Gamma - \frac{\Delta t}{c_{\Sigma T}} \int_{\Sigma} \langle -Y_{T_n}^r(\vec{u}_n, d_{N_n}, d_{T_n}) \rangle^+ \eta_T d\Gamma \\
&- \int_{\Sigma} d_{T_n} \eta_T d\Gamma = 0, \quad \forall \eta_T \in \mathbf{V}_D, \quad (4.20)
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\vec{Q}_{\Sigma_{n+1}} &= [Q_{\Sigma N_{n+1}}, Q_{\Sigma T_{n+1}}], \\
[[\vec{\omega}]] &= [[[\omega_N]], [[[\omega_T]]]. \quad (4.21)
\end{aligned}$$

4.6 FORMULAÇÃO FRACA DO PROBLEMA MECÂNICO ACOPLADO

Para a formulação fraca do problema mecânico acoplado, considera-se conhecida a solução no intervalo $[0, t_n]$ e se impõe a equação de equilíbrio em t_{n+1} . Assim, ao se adicionar a formulação fraca associada às equações de evolução do adesivo pode-se derivar a formulação incremental do problema mecânico acoplado. Como consequência do esquema de discretização adotado, os dois problemas de dano tornam-se desacoplados.

Considera-se que

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \Delta \vec{u}_n, \quad (4.22)$$

$$d_{N_{n+1}} = d_{N_n} + \Delta d_{N_n}, \quad (4.23)$$

$$d_{T_{n+1}} = d_{T_n} + \Delta d_{T_n}, \quad (4.24)$$

tal que, em t_{n+1} , a formulação fraca do problema mecânico acoplado pode ser escrita como

Problema (i) Dados $(\vec{u}_n, d_{N_n}, d_{T_n})$, determinar $d_{N_{n+1}} \in \mathbf{V}_D$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \eta_N) &= \int_{\Sigma} d_{N_{n+1}} \eta_N d\Gamma + \\
\frac{k_N^b \Delta t}{c_{\Sigma N}} \int_{\Sigma} \nabla \eta_N \cdot \nabla d_{N_{n+1}} d\Gamma - \frac{\Delta t}{c_{\Sigma N}} \int_{\Sigma} \langle -Y_{N_n}^r(\vec{u}_n, d_{N_n}, d_{T_n}) \rangle^+ \eta_N d\Gamma \\
- \int_{\Sigma} d_{N_n} \eta_N d\Gamma &= 0, \quad \forall \eta_N \in \mathbf{V}_D. \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Cabe notar que o problema descrito é linear e desacoplado em $d_{N_{n+1}}$, podendo ser diretamente resolvido em termos de $d_{N_{n+1}}$. De maneira a impor a irreversibilidade do processo de descolamento, efetua-se uma operação de projeção, que pode ser descrita como: Quando $(d_{N_{n+1}} < d_{N_n})$, $d_{N_{n+1}}$ recebe o valor de d_{N_n} .

Problema (ii) Dados $(\vec{u}_n, d_{N_n}, d_{T_n})$, determinar $d_{T_{n+1}} \in \mathbf{V}_D$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \eta_T) &= \int_{\Sigma} d_{T_{n+1}} \eta_T d\Gamma \\
+ \frac{k_T^b \Delta t}{c_{\Sigma T}} \int_{\Sigma} \nabla \eta_T \cdot \nabla d_{T_{n+1}} d\Gamma - \frac{\Delta t}{c_{\Sigma T}} \int_{\Sigma} \langle -Y_{T_n}^r(\vec{u}_n, d_{N_n}, d_{T_n}) \rangle^+ \eta_T d\Gamma \\
- \int_{\Sigma} d_{T_n} \eta_T d\Gamma &= 0, \quad \forall \eta_T \in \mathbf{V}_D. \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Assim como o **Problema (i)**, este também é linear e desacoplado em $d_{T_{n+1}}$, podendo ser diretamente resolvido em termos de $d_{T_{n+1}}$. De maneira a impor a irreversibilidade do processo de descolamento, efetua-se uma operação de projeção, que pode ser descrita como: Quando $d_{T_{n+1}} < d_{T_n}$, $d_{T_{n+1}}$ recebe o valor de d_{T_n} .

Problema (iii) Dados $(\vec{u}_n, d_{N_n}, d_{T_n})$ e $(d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}})$, sendo estes determinados pela solução dos problemas **(i)** e **(ii)**, determinar $\vec{u}_{n+1} \in \mathbf{V}_u$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\omega}) &= \int_{\Omega} \sigma_{n+1}(\vec{u}_{n+1}) \cdot \varepsilon(\vec{\omega}) d\Omega \\
+ \int_{\Sigma} \vec{Q}_{\Sigma_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) \cdot [[\vec{\omega}]] d\Gamma \\
- \int_{\Gamma_t} \vec{t}_{n+1} \cdot \vec{\omega} d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{\omega} d\Omega &= 0, \quad \forall \vec{\omega} \in \mathbf{V}_u. \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Sendo o problema associado a \vec{u}_{n+1} não-linear, o método de Newton será aplicado para se calcular uma solução aproximada.

4.7 LINEARIZAÇÃO E MÉTODO DE NEWTON

Para determinar a solução do problema não-linear **(iii)**, aplica-se o método de Newton. O esquema iterativo empregado na solução do problema **(iii)** requer a determinação de um operador tangente consistente, que será determinado nesta seção.

O problema não-linear **(iii)** pode ser escrito como: Dados $(\vec{u}_n, d_{N_n}, d_{T_n})$ e $(d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}})$, este obtido da solução dos problemas **(i)** e **(ii)**, determinar $\vec{u}_{n+1} \in \mathbf{V}_u$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\omega}) &= \int_{\Omega} \sigma_{n+1}(\vec{u}_{n+1}) \cdot \varepsilon(\vec{\omega}) \, d\Omega \\ &+ \int_{\Sigma} Q_{\Sigma T_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [[\omega_T]] \, d\Gamma \\ &+ \int_{\Sigma} Q_{\Sigma N_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [[\omega_N]] \, d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_t} \vec{t}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, d\Omega = 0, \quad \forall \vec{\omega} \in \mathbf{V}_u. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Seja

$$\vec{u}_{n+1}^0 = \vec{u}_n, \quad k = 0, \quad (4.29)$$

no qual k é o número da iteração no procedimento de Newton. A cada passo emprega-se como estimativa inicial a solução convergida a iteração anterior. Assim, para a iteração $k + 1$

$$\vec{u}_{n+1}^{k+1} = \vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k. \quad (4.30)$$

E para se calcular $(\Delta \vec{u}_{n+1}^k)$, a seguinte condição é imposta

$$\mathcal{F}_1(\vec{u}_{n+1}^{k+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\omega}) = 0, \quad \forall \vec{\omega} \in \mathbf{V}_u, \quad (4.31)$$

ou seja

$$\mathcal{F}_1(\vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\omega}) = 0, \quad \forall \vec{\omega} \in \mathbf{V}_u. \quad (4.32)$$

Considerando-se que $\mathcal{F}_1(\cdot)$ é suficientemente regular, pode-se expandir $\mathcal{F}_1(\cdot)$ numa série de Taylor em função dos termos $(\vec{u}_{n+1}^k, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\omega})$ e encontrar uma aproximação de primeira ordem, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1\left(\vec{u}_{n+1}^k + \Delta\vec{u}_{n+1}^k, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\omega}\right) &\simeq \mathcal{F}_1\left(\vec{u}_{n+1}^k, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\omega}\right) \\ &+ D\mathcal{F}_1\left(\vec{u}_{n+1}^k, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\omega}\right) \left[\Delta\vec{u}_{n+1}^k\right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

do qual infere-se

$$D\mathcal{F}_1\left(\vec{u}_{n+1}^k, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\omega}\right) \left[\Delta\vec{u}_{n+1}^k\right] = -\mathcal{F}_1\left(\vec{u}_{n+1}^k, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\omega}\right), \quad (4.34)$$

a qual fornece os termos adequados para o cálculo de $[\Delta\vec{u}_{n+1}^k]$.

5 DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

O objetivo é aplicar o método Galerkin conjuntamente com o Método dos Elementos Finitos na discretização do problema. Segundo (ZENKIEWICZ; TAYLOR, 2005), a aproximação de um problema é iniciada ao se dividir o domínio de interesse Ω em um conjunto de subdomínios Ω_e , tal que

$$\Omega \approx \hat{\Omega} = \sum_e \Omega_e, \quad (5.1)$$

e de maneira similar a fronteira também é dividida

$$\Gamma \approx \hat{\Gamma} = \sum_e \Gamma_e = \sum_{et} \Gamma_{te} + \sum_{eu} \Gamma_{ue}, \quad (5.2)$$

onde Γ_{te} é o segmento de fronteira nos quais a tração é dada e Γ_{ue} é onde os deslocamentos são dados, conforme ilustrado na Fig. 5.1. Nota-se que o domínio geral de uma análise de elementos finitos é uma aproximação do domínio *de facto* que depende do formato da fronteira dos elementos escolhidos.

A forma fraca das equações de governo é escrita para o domínio do problema $\hat{\Omega}$, também como uma soma ao redor dos elementos do domínio.

Uma solução por Galerkin é obtida ao se usar aproximações das variáveis dependentes e de seus formatos virtuais. Para que um teorema variacional ou forma fraca possam ser divididos numa soma aditiva, a maior derivada presente deve ser, no mínimo, contínua ao longo dos elementos de tal forma que todas as integrais existam e nenhuma contribuição inter-elementos ocorra.

Para que uma função contenha uma variável com a mais alta derivada de ordem $m + 1$, as funções utilizadas para aproximar a variável devem possuir as derivadas de ordem m contínuas em todo o domínio $\hat{\Omega}$, e são definidas como C^m .

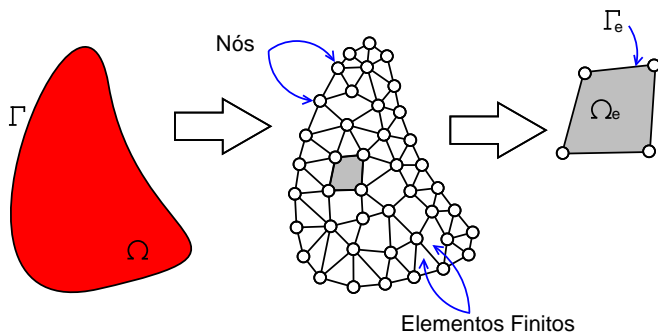
Em adição à necessidade de continuidade, é necessário que funções C^m possuam polinômios completos de ordem $m + 1$ para garantir que as derivadas de ordem $m + 1$ possuam valores constantes.

Enfim, o essencial das aproximações do tipo Galerkin é que explore-se o fato que o espaço de infinitas dimensões de Hilbert possui um conjunto de bases $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$, se se puder expandir u na seguinte forma:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \phi_i, \quad (5.3)$$

fazendo-se com que a função teste v também varie pelas mesmas funções ϕ_j somente com um índice distinto. O método dos elementos finitos essencialmente escolhe um subespaço dimensional finito $V_h \subset V$, de forma que se aproxima a solução neste subespaço dimensional finito V_h .

Figura 5.1: Esquema da discretização.



5.1 INTRODUÇÃO DO DOMÍNIO NATURAL

A fim de se resolver os problemas de evolução de dano, deve-se efetuar uma partição do domínio de interface $\Sigma \subset R^2$ por elementos de linha, Γ_e . A fim de determinar as contribuições de cada elemento deve-se introduzir uma mudança de variáveis, dada por

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) = x_{e_i} N_i(\xi, \eta), \\ y &= y(\xi, \eta) = y_{e_i} N_i(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (5.4)$$

e considera-se um elemento Quad8 ou Quad9 conforme demonstrados nas Fig. 5.2 e Fig. 5.3.

Estes elementos, de maneira geral, podem possuir geometrias complexas tal como ilustrado na Fig. 5.4.

As funções de dano $d_{N_{n+1}}(x(\tau), y(\tau))$ e $d_{N_n}(x(\tau), y(\tau))$ e a função teste $\eta_N(x(\tau), y(\tau))$ são aproximadas, dentro de cada elemento de linha Γ_e como

Figura 5.2: Elemento Quad8.

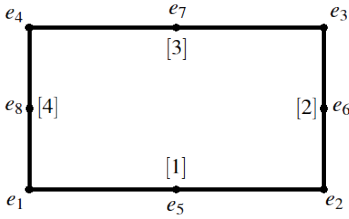


Figura 5.3: Elemento Quad9.

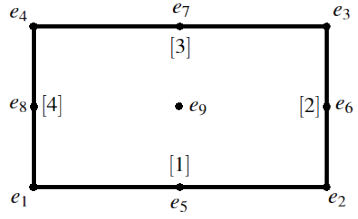
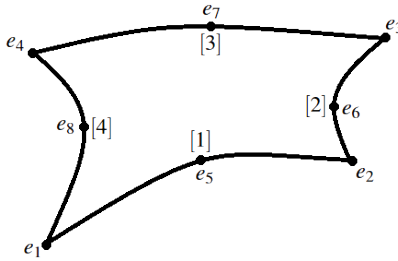


Figura 5.4: Geometria complexa.



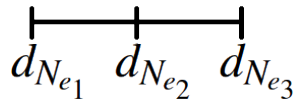
$$d_{N_{n+1}}(x(\tau), y(\tau)) = d_{N_{n+1}}^{e_i} \Psi_i(\tau), \tag{5.5}$$

$$d_{N_n}(x(\tau), y(\tau)) = d_{N_n}^{e_i} \Psi_i(\tau), \tag{5.6}$$

$$\eta_N(x(\tau), y(\tau)) = \eta_N^{e_i} \Psi_i(\tau), \tag{5.7}$$

conforme demonstrados na Figura 5.5.

Figura 5.5: Elemento de linha.



5.2 DISCRETIZAÇÃO DO FUNCIONAL \mathcal{F}_2

A forma fraca associada com a equação de evolução incremental para o dano normal, cujo problema pode ser apresentado como: Dados

$(\vec{u}_n, d_{N_n}, d_{T_n})$, determinar $d_{N_{n+1}} \in \mathbf{V}_D$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \eta_N) &= \int_{\Sigma} d_{N_{n+1}} \eta_N d\Gamma + \\ \frac{k_N^b \Delta t}{c_{\Sigma N}} \int_{\Sigma} \nabla \eta_N \cdot \nabla d_{N_{n+1}} d\Gamma - \frac{\Delta t}{c_{\Sigma N}} \int_{\Sigma} \langle -Y_{N_n}^r(\vec{u}_n, d_{N_n}, d_{T_n}) \rangle^+ \eta_N d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Sigma} d_{N_n} \eta_N d\Gamma = 0, \quad \forall \eta_N \in \mathbf{V}_D. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Cabe notar que para impor a irreversibilidade do processo de descolamento, efetua-se uma operação de projeção, que pode ser enunciada como: Quando $(d_{N_{n+1}} < d_{N_n})$, $d_{N_{n+1}}$ recebe o valor de d_{N_n} .

Para resolver este problema, efetua-se uma partição do domínio de interface $\Sigma \subset R^2$ por elementos de linha, Γ_e . Como resultado

$$\int_{\Sigma} (d_{N_{n+1}} - d_{N_n}) \eta_N d\Gamma = \sum_e \int_{\Gamma_e} (d_{N_{n+1}} - d_{N_n}) \eta_N d\Gamma, \quad (5.9)$$

$$\int_{\Sigma} \nabla \eta_N \cdot \nabla d_{N_{n+1}} d\Gamma = \sum_e \int_{\Gamma_e} \nabla \eta_N \cdot \nabla d_{N_{n+1}} d\Gamma \quad (5.10)$$

$$\int_{\Sigma} \langle -Y_{N_n}^r(\vec{u}_n, d_{N_n}, d_{T_n}) \rangle^+ \eta_N d\Gamma = \sum_e \int_{\Gamma_e} \langle -Y_{N_n}^r(\vec{u}_n, d_{N_n}, d_{T_n}) \rangle^+ \eta_N d\Gamma. \quad (5.11)$$

5.2.1 Montagem global do problema de dano linear incremental

Sejam \vec{D}_N^{n+1} e \vec{D}_N^n os vetores de todos os valores nodais nos passos de tempo $(n+1)$ e (n) , respectivamente.

$$\vec{D}_N^{n+1} = \cup_{e=1}^n \{\vec{q}_e^{n+1}\}, \quad (5.12)$$

$$\vec{D}_N^n = \cup_{e=1}^n \{\vec{q}_e^n\}, \quad (5.13)$$

$$\delta \vec{D}_N = \cup_{e=1}^n \{\delta \vec{q}_e\}, \quad (5.14)$$

então, ao se somar a contribuição de todos os elementos

$$\vec{F}_N^Y = \check{\bigwedge}_e \left\{ \vec{F}_{N_e}^Y \right\}, \quad (5.15)$$

$$[\mathbf{K}] = \bigwedge_e [\mathbf{K}_e], \quad (5.16)$$

$$[\mathbf{M}] = \bigwedge_e [\mathbf{M}_e], \quad (5.17)$$

em que $\check{\bigwedge}_e(\circ)$ representa o operador de montagem de vetores, $\bigwedge_e(\circ)$ representa o operador de montagem de matrizes, \vec{F}_N^Y representa o vetor global de forças nodais; $[\mathbf{K}]$ e $[\mathbf{M}]$ são as matrizes globais de “rigidez” e “massa”.

Como resultado, o problema discreto pode ser formulado como: Dado \vec{D}_N^n e (\vec{u}_n, d_{T_n}) , determinar \vec{D}_N^{n+1}

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}] \left\{ \vec{D}_N^{n+1} - \vec{D}_N^n \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{D}_N \right\} + \frac{k_N^b \Delta t}{c_{\Sigma N}} [\mathbf{K}] \left\{ \vec{D}_N^{n+1} \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{D}_N \right\} \\ - \frac{\Delta t}{c_{\Sigma N}} \left\{ \vec{F}_N^Y \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{D}_N \right\} = 0 \quad \forall \left\{ \delta \vec{D}_N \right\} \in R^N. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ou seja

$$\left\{ \vec{D}_N^{n+1} \right\} = \left[[\mathbf{M}] + \frac{k_N^b \Delta t}{c_{\Sigma N}} [\mathbf{K}] \right]^{-1} \left[\frac{\Delta t}{c_{\Sigma N}} \left\{ \vec{F}_N^Y \right\} + [\mathbf{M}] \left\{ \vec{D}_N^n \right\} \right], \quad (5.19)$$

tal que

$$\begin{aligned} \vec{F}_N^Y &= \check{\bigwedge}_e \left\{ \vec{F}_{N_e}^Y \right\}, \\ \vec{F}_{N_e}^Y &= \int_{\Gamma_e} \left\langle -Y_{N_n}^r(\vec{u}_n, d_{N_n}, d_{T_n}) \right\rangle^+ \vec{\Psi} \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$[\mathbf{K}_e] = \int_{\Gamma_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{B}] \, d\Gamma, \quad (5.21)$$

$$[\mathbf{M}_e] = \int_{\Gamma_e} \left(\vec{\Psi} \otimes \vec{\Psi} \right) \, d\Gamma. \quad (5.22)$$

5.3 DISCRETIZAÇÃO DO FUNCIONAL \mathcal{F}_3

De forma análoga ao funcional \mathcal{F}_2 , pode-se enunciar a montagem global do problema de dano linear incremental como:

Sejam \vec{D}_T^{n+1} e \vec{D}_T^n os vetores de todos os valores nodais nos passos de tempo $(n+1)$ e (n) , respectivamente.

$$\vec{D}_T^{n+1} = \cup_{e=1}^n \{ \vec{q}_e^{n+1} \}, \quad (5.23)$$

$$\vec{D}_T^n = \cup_{e=1}^n \{ \vec{q}_e^n \}, \quad (5.24)$$

$$\delta \vec{D}_T = \cup_{e=1}^n \{ \delta \vec{q}_e \}. \quad (5.25)$$

O problema discreto pode ser formulado como: Dado \vec{D}_T^n e (\vec{u}_n, d_{N_n}) , determinar \vec{D}_T^{n+1} onde

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}] \left\{ \vec{D}_T^{n+1} - \vec{D}_T^n \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{D}_T \right\} + \frac{k_T^b \Delta t}{c_{\Sigma T}} [\mathbf{K}] \left\{ \vec{D}_T^{n+1} \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{D}_T \right\} \\ - \frac{\Delta t}{c_{\Sigma T}} \left\{ \vec{F}_T^Y \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{D}_T \right\} = 0 \quad \forall \left\{ \delta \vec{D}_T \right\} \in R^N. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Ou seja

$$\left\{ \vec{D}_T^{n+1} \right\} = \left[[\mathbf{M}] + \frac{k_T^b \Delta t}{c_{\Sigma T}} [\mathbf{K}] \right]^{-1} \left[\frac{\Delta t}{c_{\Sigma T}} \left\{ \vec{F}_T^Y \right\} + [\mathbf{M}] \left\{ \vec{D}_T^n \right\} \right]. \quad (5.27)$$

5.4 DISCRETIZAÇÃO DO FUNCIONAL \mathcal{F}_1

Dados $(\vec{u}_n, d_{N_n}, d_{T_n})$ e $(d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}})$, obtidos da solução dos problemas (i) e (ii), deve-se determinar $\vec{u}_{n+1} \in \mathbf{V}_u$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\omega}) &= \int_{\Omega} \sigma_{n+1}(\vec{u}_{n+1}) \cdot \varepsilon(\vec{\omega}) \, d\Omega \\ &+ \int_{\Sigma} Q_{\Sigma T_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [[\omega_T]] \, d\Gamma \\ &+ \int_{\Sigma} Q_{\Sigma N_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [[\omega_N]] \, d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_t} \vec{t}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, \Gamma_t - \int_{\Omega} \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, d\Omega, \quad \forall \vec{\omega} \in \mathbf{V}_u. \end{aligned} \quad (5.28)$$

É claro, pela forma deste funcional, que \mathcal{F}_1 é um problema não-linear transcendental, e, dentro do contexto de matemática computacional, a utilização de um processo iterativo é necessária para a obtenção de uma sequência de soluções aproximadas do mesmo.

Outrossim, a aplicação do método de Newton é uma das abordagens possíveis na resolução de problemas não-lineares transcendentais.

Pode-se então reescrever o problema como: Dados $(\vec{u}_{n+1}^k, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}})$, determinar \vec{u}_{n+1}^{k+1} que resolva

$$D\mathcal{F}_1\left(\vec{u}_{n+1}^k, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\omega}\right) \left[\Delta\vec{u}_{n+1}^k\right] = -\mathcal{F}_1\left(\vec{u}_{n+1}^k, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}; \vec{\omega}\right). \quad (5.29)$$

5.5 ELEMENTOS FINITOS DE GALERKIN

Para se resolver o problema de deslocamento não-linear, utiliza-se duas classes de elementos, que são

1. Elementos **Quad8** ou **Quad9** para tratar das contribuições volumétricas e das condições de contorno de tração prescritas, envolvendo os termos

$$\int_{\Omega} \vec{\sigma}\left(\vec{u}_{n+1}^k\right) \cdot \vec{\varepsilon}(\vec{\omega}) \, d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \vec{\sigma}\left(\vec{u}_{n+1}^k\right) \cdot \vec{\varepsilon}(\omega) \, d\Omega \quad (5.30)$$

$$\int_{\Gamma_t} \vec{t}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, d\Gamma = \sum_e \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} \vec{t}_{n+1} \cdot \omega \, d\Gamma, \quad (5.31)$$

$$\int_{\Omega} \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \vec{b}_{n+1} \cdot \omega \, d\Omega, \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D\vec{\sigma}\left(\vec{u}_{n+1}^k\right) \left[\Delta\vec{u}_{n+1}^k\right] \cdot \vec{\varepsilon}(\omega) \, d\Omega \\ &= \sum_e \int_{\Omega_e} D\vec{\sigma}\left(\vec{u}_{n+1}^k\right) \left[\Delta\vec{u}_{n+1}^k\right] \cdot \vec{\varepsilon}(\omega) \, d\Omega. \end{aligned} \quad (5.33)$$

2. Um elemento linear de linha para tratar das contribuições da interface, envolvendo os termos

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} Q_{\Sigma T_{n+1}}\left(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}\right) [[\omega_T]] \, d\Gamma \\ &= \sum_e \int_{\Gamma_e} Q_{\Sigma T_{n+1}}\left(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}\right) [[\omega_T]] \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} Q_{\Sigma N_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [[\omega_N]] d\Gamma \\ &= \sum_e \int_{\Gamma_e} Q_{\Sigma N_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [[\omega_N]] d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} DQ_{\Sigma N_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k] [[\omega_N]] d\Gamma = \\ &= \sum_e \int_{\Gamma_e} DQ_{\Sigma N_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k] [[\omega_N]] d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} DQ_{\Sigma T_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k] [[\omega_T]] d\Gamma = \\ &= \sum_e \int_{\Gamma_e} DQ_{\Sigma T_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k] [[\omega_T]] d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.37)$$

5.5.1 Contribuição dos elementos de volume

Efetua-se a discretização do domínio Ω por elementos Ω_e como demonstrado na Fig. 5.1. Assim, deve-se calcular as seguintes contribuições

$$(1) = \int_{\Omega_e} \sigma(\vec{u}_{n+1}^k) \cdot \varepsilon(\omega) d\Omega, \quad (5.38)$$

$$(2) = \int_{\Omega_e} \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{\omega} d\Omega, \quad (5.39)$$

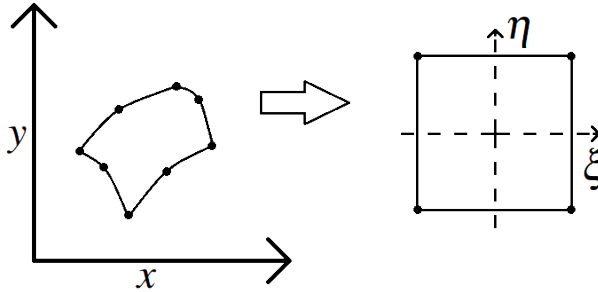
$$(3) = \int_{\Omega_e} D\sigma(\vec{u}_{n+1}^k) \cdot [\Delta \vec{u}_{n+1}^k] \cdot \varepsilon(\omega) d\Omega, \quad (5.40)$$

$$(4) = \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_i} \vec{t}_{n+1} \cdot \omega d\Gamma \quad (5.41)$$

Para determinar a contribuição de cada elemento finito das integrais supracitadas, introduz-se uma mudança de variáveis dada por

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) = x_{e_i} N_i(\xi, \eta), \\ y &= y(\xi, \eta) = y_{e_i} N_i(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (5.42)$$

Figura 5.6: Mudança de domínio.



ilustrada na Fig. 5.6

tal que $N_i(\xi, \eta)$ são as funções de base clássicas de elementos finitos (FISH; BELYTCHKO, 2007).

Os elementos do tipo **Quad8**, sem a presença de um nó interno, são conhecidos na literatura como do tipo "*serendipity*". As funções de forma para esta família de elementos não pode ser construída por um produto tensorial de funções de forma unidimensionais como as da família Lagrangeana. As funções de forma da família *serendipity* são obtidas por um produto tensorial de funções cuidadosamente escolhidas para satisfazer as propriedades do delta de Kronecker (FISH; BELYTCHKO, 2007).

Zienkiewicz (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005) afirma que tal família de funções é normalmente mais eficiente pois as funções dependem somente dos valores nodais presentes nas fronteiras do elemento. Para esta família também é possível gerar elementos com números distintos de nós em cada um dos lados do elemento, tornando possível a realização de transições entre elementos de diferentes ordens.

Já os elementos do tipo **Quad9** fazem parte da família Lagrangeana e são amplamente conhecidos.

As componentes de deslocamento u e v e a função teste $\vec{w} = (\delta u, \delta v)$ são aproximadas, dentro de cada elemento finito Ω_e , como

$$u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = u_{e_i} N_i(\xi, \eta), \quad (5.43)$$

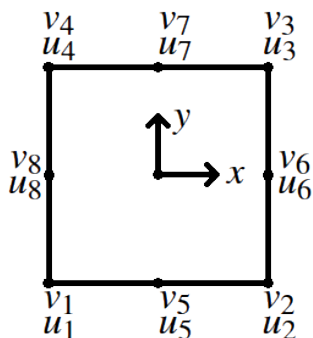
$$v(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = v_{e_i} N_i(\xi, \eta), \quad (5.44)$$

$$\delta u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \delta u_{e_i} N_i(\xi, \eta), \quad (5.45)$$

$$\delta v(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \delta v_{e_i} N_i(\xi, \eta), \quad (5.46)$$

conforme Fig. 5.7.

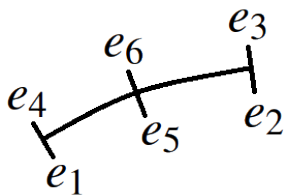
Figura 5.7: Componentes de deslocamento.



5.5.2 Determinação das contribuições dos elementos de interface

Efetua-se a discretização do domínio Σ por elementos Γ_e como mostrado na Fig. 5.8.

Figura 5.8: Elemento de interface.



Neste caso, deve-se calcular as seguintes contribuições

$$(1) = \sum_e \int_{\Gamma_e} Q_{\Sigma T_{n+1}} (\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [[\omega_T]] d\Gamma, \quad (5.47)$$

$$(2) = \sum_e \int_{\Gamma_e} Q_{\Sigma N_{n+1}} (\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [[\omega_N]] d\Gamma, \quad (5.48)$$

$$(3) = \sum_e \int_{\Gamma_e} DQ_{\Sigma N_{n+1}} (\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k] [[\omega_N]] d\Gamma, \quad (5.49)$$

$$(4) = \sum_e \int_{\Gamma_e} DQ_{\Sigma T_{n+1}} (\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k] [[\omega_T]] d\Gamma. \quad (5.50)$$

Para se determinar a contribuição de cada elemento finito nas integrais, introduz-se uma mudança de variáveis, dada por

$$x(\tau) = \Psi_1(\tau)x_{e_1} + \Psi_2(\tau)x_{e_2} + \Psi_3(\tau)x_{e_3}, \quad (5.51)$$

$$y(\tau) = \Psi_1(\tau)y_{e_1} + \Psi_2(\tau)y_{e_2} + \Psi_3(\tau)y_{e_3}. \quad (5.52)$$

5.5.3 Montagem global do problema de deslocamento não-linear - Elementos de volume

Sejam \vec{U}_{n+1} e \vec{U}_n os vetores de deslocamento de todo o conjunto de nós nos instantes de tempo $(n+1)$ e (n) respectivamente

$$\begin{aligned} \vec{U}_{n+1} &= U_{e=1}^n \{ \vec{q}_e^{n+1} \}, \\ \vec{U}_n &= U_{e=1}^n \{ \vec{q}_e^n \}, \\ \delta \vec{U} &= U_{e=1}^n \{ \delta \vec{q}_e \}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Então, ao se somarem todas as contribuições de elementos, obtém-se

$$\vec{F}^\sigma = \check{\bigwedge}_e \{ \vec{F}_e^\sigma \}, \quad (5.54)$$

$$\vec{F}^b = \check{\bigwedge}_e \{ \vec{F}_e^b \}, \quad (5.55)$$

$$\vec{F}^t = \check{\bigwedge}_e \{ \vec{F}_e^t \}, \quad (5.56)$$

$$[\mathbf{K}_T] = \bigwedge_e \{ [\mathbf{K}_{T_e}^u] \}, \quad (5.57)$$

em que $\check{\bigwedge}_e(\circ)$ representa o operador de montagem de vetores, $\bigwedge_e(\circ)$ representa o operador de montagem de matrizes, \vec{F}^σ , \vec{F}^b e \vec{F}^t representam, respectivamente, os vetores globais de força associados à tensão interna, forças de corpo e forças prescritas; $[\mathbf{K}_T]$ representa a matriz de rigidez global.

5.5.4 Montagem global do problema de deslocamento não linear - Elementos de interface

Sejam \vec{U}_{n+1} e \vec{U}_n os vetores de deslocamento de todo o conjunto de nós nos instantes de tempo $(n+1)$ e (n) respectivamente

$$\begin{aligned}
\vec{U}_{n+1} &= U_{e=1}^n \{ \vec{q}_e^{n+1} \}, \\
\vec{U}_n &= U_{e=1}^n \{ \vec{q}_e^n \}, \\
\delta \vec{U} &= U_{e=1}^n \{ \delta \vec{q}_e \}.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Então, ao se somarem todas as contribuições de elementos, obtém-se

$$\vec{F}^{\Sigma N} = \check{\bigwedge}_e \{ \vec{F}_e^{\Sigma N} \}, \tag{5.59}$$

$$\vec{F}^{\Sigma T} = \check{\bigwedge}_e \{ \vec{F}_e^{\Sigma T} \}, \tag{5.60}$$

$$[\mathbf{K}_T] = [\mathbf{K}_T] + \bigwedge_e \{ [\mathbf{K}_e^N] + [\mathbf{K}_e^T] \}, \tag{5.61}$$

$$[\mathbf{K}_e^N] = [\mathbf{K}_e^{NNa}] + [\mathbf{K}_e^{NNb}] + [\mathbf{K}_e^{NT}], \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_e^T] &= [\mathbf{K}_e^{TTr}] + [\mathbf{K}_e^{TNr}] + \\
&+ [\mathbf{K}_e^{NNia}] + [\mathbf{K}_e^{NNib}] + [\mathbf{K}_e^{TTic}] + [\mathbf{K}_e^{TTid}],
\end{aligned} \tag{5.63}$$

em que $\check{\bigwedge}_e(\circ)$ representa o operador de montagem de vetores, $\bigwedge_e(\circ)$ representa o operador de montagem de matrizes, $\vec{F}^{\Sigma N}$ e $\vec{F}^{\Sigma T}$ representam os vetores globais de força associados aos modos I e II do mecanismo de descolamento; $[\mathbf{K}_T]$ representa a matriz tangente global. As matrizes estão definidas no Apêndice A.

Ao se combinar as contribuições dos elementos de volume e dos elementos de interface pode-se determinar o problema iterativo não-linear. O problema discreto não-linear pode ser enunciado da seguinte forma: Dado \vec{U}_n e $(\vec{D}_N^{n+1}, \vec{D}_T^{n+1})$, determinar \vec{U}_{n+1} , solução do problema, que pode ser obtido do seguinte procedimento iterativo

$$\begin{aligned}
&\text{Seja } \vec{U}_{n+1}^{(0)} = \vec{U}_n \\
&\text{Encontrar } \vec{U}_{n+1}^{(i+1)} \text{ tal que } \left\| \vec{R} \left(\vec{U}_{n+1}^{(i+1)} \right) \right\| \leq \text{Tol}, \text{ onde} \\
&\left[\mathbf{K}_T \left(\vec{U}_{n+1}^{(i)} \right) \right] \Delta \vec{U}_{n+1}^{(i)} = -\vec{R} \left(\vec{U}_{n+1}^{(i)} \right) \\
&\vec{U}_{n+1}^{(i+1)} = \vec{U}_{n+1}^{(i)} + \Delta \vec{U}_{n+1}^{(i)} \text{ no qual}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{R} \left(\vec{U}_{n+1}^{(i)} \right) &= \vec{F}^\sigma \left(\vec{U}_{n+1}^{(i)}, \vec{U}_n \right) + \vec{F}^{\Sigma N} \left(\vec{U}_{n+1}^{(i)}, \vec{U}_n \right) + \\ &\vec{F}^{\Sigma T} \left(\vec{U}_{n+1}^{(i)}, \vec{U}_n \right) - \vec{F}_{n+1}^b - \vec{F}_{n+1}^t \text{ e} \\ \left[\mathbf{K}_T \left(\vec{U}_{n+1}^{(i)} \right) \right] &= \wedge_e \left\{ \left[\mathbf{K}_{T_e}^u \right] + \left[\mathbf{K}_e^N \right] + \left[\mathbf{K}_e^T \right] \right\} \text{ onde} \\ \left[\mathbf{K}_e^N \right] &= \left[\mathbf{K}_e^{NNa} \right] + \left[\mathbf{K}_e^{NNb} \right] + \left[\mathbf{K}_e^{NT} \right] \text{ e} \\ \left[\mathbf{K}_e^T \right] &= \\ \left[\mathbf{K}_e^{TTT} \right] &+ \left[\mathbf{K}_e^{TNr} \right] + \left[\mathbf{K}_e^{NNia} \right] + \left[\mathbf{K}_e^{NNib} \right] + \left[\mathbf{K}_e^{TTic} \right] + \left[\mathbf{K}_e^{TTid} \right]. \end{aligned}$$

5.6 PROBLEMAS AXISIMÉTRICOS (SEM TORÇÃO)

No caso de axisimetria, assume-se que as propriedades materiais, carregamentos e condições de contorno sejam independentes de θ , num sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . Aqui, considerar-se-á o caso de problemas axisimétricos.

Em sólidos de revolução, o campo de deslocamentos é dado por

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z, \quad (5.64)$$

tal que

$$u_r = u_r(r, z), \quad (5.65)$$

$$u_\theta = 0, \quad (5.66)$$

$$u_z = u_z(r, z). \quad (5.67)$$

As componentes do tensor de deformação são dadas por

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \gamma_{r\theta} = 0, \quad (5.68)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \gamma_{z\theta} = 0, \quad (5.69)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (5.70)$$

Observação Em $r = 0$ deve ser imposto que $u_r = 0$ (o material é sólido, em contrapartida de estruturas ocas). E para o caso de deformação plana efetua-se as seguintes substituições

$$\begin{aligned} (r \leftrightarrow x) \quad (z \leftrightarrow y) \quad (\theta \leftrightarrow) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} \neq 0. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Das considerações anteriores, obtém-se

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\omega}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \{ \boldsymbol{\sigma}_{rr}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{rr}(\vec{\omega}) + \boldsymbol{\sigma}_{zz}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\omega}) + \boldsymbol{\sigma}_{\theta\theta}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta\theta}(\vec{\omega}) + \boldsymbol{\sigma}_{rz}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\gamma}_{rz}(\vec{\omega}) \} \, d\Omega. \quad (5.72)$$

Define-se os vetores

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \{ \boldsymbol{\sigma}_{rr}, \boldsymbol{\sigma}_{zz}, \boldsymbol{\sigma}_{rz}, \boldsymbol{\sigma}_{\theta\theta} \}, \quad (5.73)$$

$$\vec{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{ \boldsymbol{\varepsilon}_{rr}, \boldsymbol{\varepsilon}_{zz}, \boldsymbol{\gamma}_{rz}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta\theta} \}, \quad (5.74)$$

tal que

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}(\vec{u}_{n+1}) = [\mathbb{D}_0] \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}(\vec{u}_{n+1}), \quad (5.75)$$

em que

$$[\mathbb{D}_0] = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}. \quad (5.76)$$

5.6.1 Discretização

Para se aplicar o método dos elementos finitos, efetua-se a partição do domínio Ω em elementos Ω_e . Já que o problema é independente de θ , obtém-se

$$\begin{aligned} d\Omega &= 2\pi r dr dz = 2\pi dA, \\ dA &= r dr dz. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Como consequência da partição do domínio, obtém-se

$$\int_{\Omega} \vec{\boldsymbol{\sigma}}(\vec{u}_{n+1}^k) \cdot \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}(\vec{\omega}) \, d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \vec{\boldsymbol{\sigma}}(\vec{u}_{n+1}^k) \cdot \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega) \, d\Omega, \quad (5.78)$$

$$\int_{\Gamma_i} \vec{t}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, d\Gamma = \sum_e \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_i} \vec{t}_{n+1} \cdot \omega \, d\Gamma, \quad (5.79)$$

$$\int_{\Omega} \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{\omega} \, d\Omega, \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D\vec{\sigma}(\vec{u}_{n+1}^k) [\Delta\vec{u}_{n+1}^k] \cdot \varepsilon(\omega) \, d\Omega \\ = \sum_e \int_{\Omega_e} D\vec{\sigma}(\vec{u}_{n+1}^k) [\Delta\vec{u}_{n+1}^k] \cdot \varepsilon(\omega) \, d\Omega. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Para efetuar as integrais supracitadas, na partição de elementos Ω_e , utiliza-se uma mudança de variáveis dada por

$$r = r(\xi, \eta) = r_i N_i(\xi, \eta), \quad (5.82)$$

$$z = z(\xi, \eta) = z_i N_i(\xi, \eta), \quad (5.83)$$

tal que N_i são as funções base clássicas.

As componentes do campo de deslocamento são interpoladas em Ω_e , no caso isoparamétrico, como

$$u_r(\xi, \eta) = u_{r_i} N_i(\xi, \eta), \quad (5.84)$$

$$u_z(\xi, \eta) = u_{z_i} N_i(\xi, \eta). \quad (5.85)$$

Seja $\{\vec{q}_e\}^T = \{u_{r1}, v_{z1}, u_{r2}, v_{z2}, \dots, u_{r8}, v_{z8}\}$ tal que (u_{ri}, v_{zi}) representam o i -ésimo valor nodal da componente de deslocamento, pode-se expressar os campos do vetor de deslocamento \vec{u} e da variação de deslocamento $\delta\vec{u}$ como

$$\left\{ \begin{array}{c} u_r \\ u_z \end{array} \right\} = [\mathbf{N}] \vec{q}_e, \quad (5.86)$$

em que

$$\vec{\omega} = [\mathbf{N}] \delta\vec{q}_e, \quad (5.87)$$

tal que

$$[\mathbf{N}_a] = \left[\begin{array}{cc} N_a(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_a(\xi, \eta) \end{array} \right]. \quad (5.88)$$

As componentes do vetor de deformação podem ser expressas de forma matricial

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(u) &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{Bmatrix} \\ &= [\mathbf{B}] \vec{q}_e,\end{aligned}\quad (5.89)$$

e

$$\vec{\varepsilon}(\vec{\omega}) = [\mathbf{B}] \delta \vec{q}_e, \quad (5.90)$$

tal que

$$\begin{aligned}[\mathbf{B}] &= [\mathbf{B}_a \mid a = 1, \dots, \text{nós}], \\ [\mathbf{B}_a] &= \begin{bmatrix} N_{a,r} & 0 \\ 0 & N_{a,z} \\ N_{a,z} & N_{a,r} \\ \frac{N_a}{r} & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (5.91)$$

5.6.2 Determinação das derivadas de $N_{a,r}$ e $N_{a,z}$

$$\langle N_{a,r} \mid N_{a,z} \rangle = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \langle N_{a,\xi} \mid N_{a,\eta} \rangle \begin{bmatrix} z,\eta & -z,\xi \\ -r,\eta & r,\xi \end{bmatrix}. \quad (5.92)$$

O elemento de área, devido à mudança do sistema de coordenadas, é dado por

$$\begin{aligned}d\Omega &= dx dy \\ &= \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta,\end{aligned}\quad (5.93)$$

consequentemente

$$\int_{\Omega_e} f(x,y) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r(\xi,\eta), z(\xi,\eta)) \det[\mathbf{J}] r(\xi,\eta) d\xi d\eta. \quad (5.94)$$

6 CALIBRAÇÃO E VALIDAÇÃO DO MODELO DE DANO

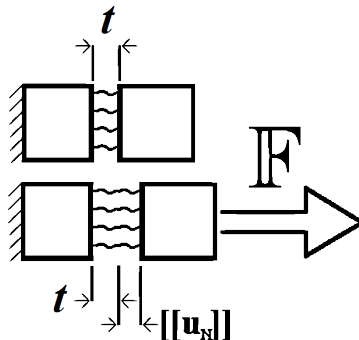
Modelos utilizam dados e conhecimento para representar matematicamente um protótipo da realidade a ser estudada. O conhecimento é composto dos processos físicos que reconhecidamente determinam o comportamento do sistema.

A calibração de um modelo consiste em mudar parâmetros de entrada do mesmo com o intuito de reproduzir um comportamento específico dentro de um critério mínimo de aceitação. Estuda-se a influência e o comportamento que a variação de cada parâmetro de entrada exerce no modelo proposto para que se possa reproduzir as curvas obtidas em ensaios reais.

A calibração do modelo de dano proposto ocorreu em duas etapas. Na primeira delas, considera-se uma análise 1D simplificada com intuito de avaliar os modos de dano em tração e em cisalhamento separadamente. Desta maneira observa-se de maneira objetiva os efeitos das principais variáveis do modelo, a saber: $\{a_N, a_T, b_N, b_T, c_N, c_T\} \in \mathbb{R}, Y_N^0, Y_T^0$ e $c_{\Sigma N}, c_{\Sigma T}$. Ensaios de modelos adesivos normal são feitos do tipo modo I puro ou modo II puro. Estes envolvem, normalmente, um gráfico que relaciona a abertura de dois materiais unidos por um adesivo com a força necessária para produzir aquela abertura.

Considera-se, para efeitos da análise simplificada, o problema 1D apresentado na Figura 6.1.

Figura 6.1: Ensaio modo I.



Nota-se que, neste caso

$$[[u_T]] = 0, \quad (6.1)$$

$$\nabla d_N = \vec{0}, \quad (6.2)$$

$$\nabla d_T = \vec{0}. \quad (6.3)$$

Como resultado, o processo de descolamento é governado pela seguinte equação

$$-Y_N + \text{div}(\vec{J}_N) = 0 \text{ em } \Sigma, \quad (6.4)$$

$$\vec{J}_N \cdot \vec{n} = 0 \text{ em } \partial\Sigma, \quad (6.5)$$

$$Y_N = Y_N^r + Y_N^i, \quad (6.6)$$

e

$$-Y_T + \text{div}(\vec{J}_T) = 0 \text{ em } \Sigma, \quad (6.7)$$

$$\vec{J}_T \cdot \vec{n} = 0 \text{ em } \partial\Sigma, \quad (6.8)$$

$$Y_T = Y_T^r + Y_T^i. \quad (6.9)$$

Entretanto, já que

$$\vec{J}_N^r = k_N^b \nabla d_N, \quad (6.10)$$

$$\vec{J}_T^r = k_T^b \nabla d_T, \quad (6.11)$$

deriva-se

$$\vec{J}_N^i = 0, \quad (6.12)$$

$$\vec{J}_T^i = 0, \quad (6.13)$$

o que resulta em

$$Y_N^i = -Y_N^r, \quad (6.14)$$

tal que

$$\begin{aligned} Y_N^r = & -(1 - d_N)k_N [[u_N]]^2 - (1 - d_T)k_{NT} [[u_N]] [[u_T]] \\ & + Y_N^0 \left[\frac{d_N}{(1 - d_N)^{a_N} + \epsilon_Y} + (1 - b_N d_N)(1 - c_N d_N) \right] \\ & - \frac{1}{\eta_a} \langle -d_N \rangle^+ + \frac{1}{\eta_a} \langle d_N - 1 \rangle^+, \end{aligned} \quad (6.15)$$

e

$$Y_T^i = -Y_T^r, \quad (6.16)$$

tal que

$$\begin{aligned} Y_T^r = & -(1 - d_T)k_T [[u_T]]^2 - (1 - d_N)k_{NT} [[u_N]] [[u_T]] \\ & + Y_T^0 \left[\frac{d_N}{(1 - d_T)^{a_T} + \varepsilon_Y} + (1 - b_T d_T)(1 - c_T d_T) \right] \\ & - \frac{1}{\eta_a} \langle -d_T \rangle^+ + \frac{1}{\eta_a} \langle d_T - 1 \rangle^+. \end{aligned} \quad (6.17)$$

No caso particular de uma carga que aumenta monotonicamente, com as condições iniciais de $d_N(0) = 0$ e $d_T(0) = 0$, as expressões anteriores para Y_N^r e Y_T^r reduzem-se a

$$Y_N^r = -(1 - d_N)k_N [[u_N]]^2 + Y_N^0 \left[\frac{d_N}{(1 - d_N)^{a_N} + \varepsilon_Y} + (1 - b_N d_N)(1 - c_N d_N) \right], \quad (6.18)$$

$$Y_T^r = Y_T^0 \left[\frac{d_T}{(1 - d_T)^{a_T} + \varepsilon_Y} + (1 - b_T d_T)(1 - c_T d_T) \right], \quad (6.19)$$

e também

$$Y_N^i = c_{\Sigma N} \dot{d}_N, \quad (6.20)$$

$$Y_T^i = c_{\Sigma T} \dot{d}_T, \quad (6.21)$$

tal que, com as projeções ortogonais,

$$\langle -Y_N^r \rangle^+ = c_{\Sigma N} \dot{d}_N, \quad (6.22)$$

$$\langle -Y_T^r \rangle^+ = c_{\Sigma T} \dot{d}_T, \quad (6.23)$$

e

$$\begin{aligned} c_{\Sigma N} \dot{d}_N = & \left\langle (1 - d_N)k_N [[u_N]]^2 \right. \\ & \left. - Y_N^0 \left[\frac{d_N}{(1 - d_N)^{a_N} + \varepsilon_Y} + (1 - b_N d_N)(1 - c_N d_N) \right] \right\rangle^+, \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$c_{\Sigma T} \dot{d}_T = \left\langle -Y_T^0 \left[\frac{d_T}{(1-d_T)^{a_T} + \varepsilon_Y} + (1-b_T d_T)(1-c_T d_T) \right] \right\rangle^+ . \quad (6.25)$$

Nota-se que, como $-Y_T^0 \left[\frac{1}{(1-d_T)^{a_T} + \varepsilon_Y} + (1-b_T d_T)(1-c_T d_T) \right] \leq 0$, isso implica em $\langle -Y_T^0 \rangle^+ = 0 \iff c_{\Sigma T} \dot{d}_T = 0$, fornecendo $d_T(t) = 0 \forall t \geq 0$. Outrossim

$$c_{\Sigma N} \dot{d}_N = \left\langle (1-d_N) k_N [[u_N]]^2 - Y_N^0 \left[\frac{1}{(1-d_N)^{a_N} + \varepsilon_Y} + (1-b_N d_N)(1-c_N d_N) \right] \right\rangle^+ , \quad (6.26)$$

assumindo um aumento linear monotônico de $[[u_N(t)]]$ do tipo

$$[[u_N(t)]] = \alpha t, \quad (6.27)$$

pode-se resolver a equação para $d_N(t)$. Assim que $d_N(t)$ e $d_T(t)$ são calculados, as componentes de tensão e deformação

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \sigma \vec{n} \cdot \vec{n}, \\ &= - \left\{ (1-d_N)^2 k_N \right\} [[u_N]], \end{aligned} \quad (6.28)$$

ou seja

$$k_N = \frac{E_{adh}}{t}, \quad (6.29)$$

resultando em

$$\begin{aligned} \sigma_N &= -(1-d_N)^2 \frac{E_{adh}}{t} [[u_N]] \\ &= -(1-d_N)^2 E_{adh} \varepsilon(t). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Aqui nota-se que o sinal significa que $\sigma_N(t)$ está na direção de $-\vec{e}_x$, com $\vec{n} = \vec{e}_x$. Isto está de acordo se a parte positiva é dada pela parte da estrutura engastada na parede.

6.1 PRÉ-CALIBRAÇÃO

Utilizando-se o modelo simplificado proposto anteriormente, efetuou-se uma pré-calibração utilizando o software MatLab®. Tomou-se como base os ensaios experimentais do tipo DCB e Three-Point Bending, respectivamente (CAMPILHO et al., 2011) e (ALFAIATE; SIMONE; SLUYS, 2003). Estes papers foram escolhidos por trazerem descrições detalhadas dos experimentos físicos feitos, tais como geometrias, cotas e valores de propriedades materiais. As curvas obtidas em relação às trazidas pelos papers podem ser observadas nas Figuras 6.2, 6.3 e 6.4.

Os dados principais para a obtenção do ajuste podem ser observados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Propriedades utilizadas na simulação do MatLab®

	Y_N	a	b	c	d_{crit}
DCB #1	15	2.5	-4	-4	0.75
DCB #2	8.3	0.1	-2	-5	0.65
Three-Point	1.7	1.8	-5	-5	0.80

Figura 6.2: DCB #1.

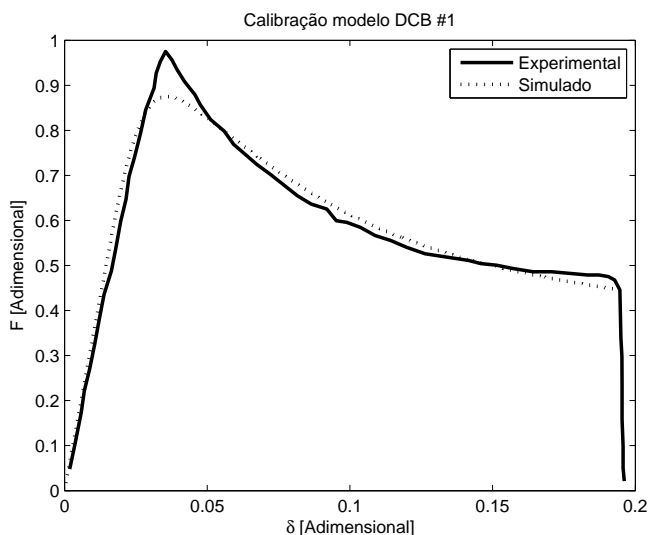


Figura 6.3: DCB #2.

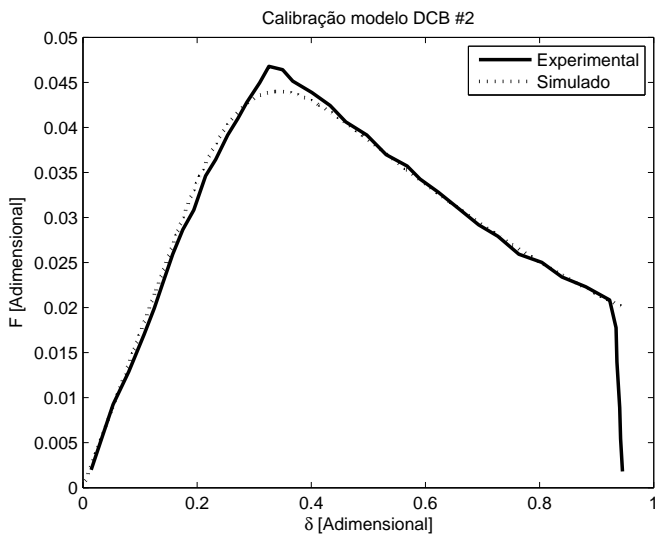
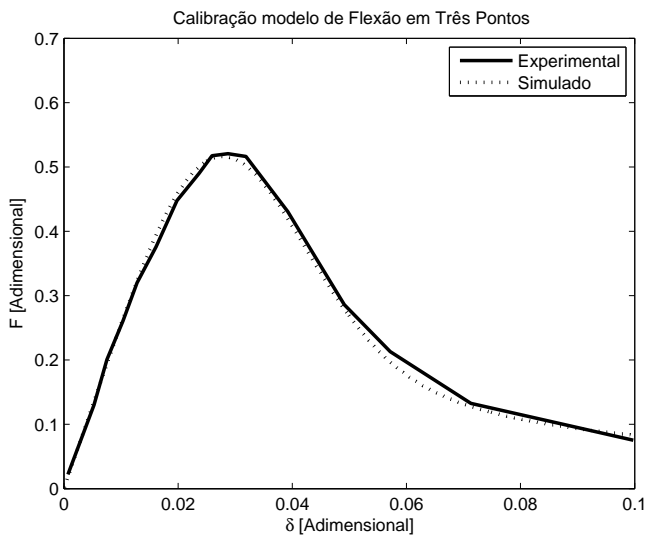


Figura 6.4: Flexão em três pontos.



6.2 VALIDAÇÃO

A validação é o processo no qual demonstra-se que o modelo proposto é capaz de reproduzir com boa qualidade resultados experimentais. Apesar da pré-calibração fornecer bons resultados iniciais para a estimativa dos parâmetros de entrada, o modelo de elementos finitos possui diferenças em relação ao modelo simplificado. Entre estas pode-se listar: **(i)** como o modelo de dano é não local, cada elemento de adesão sofre influência do dano apresentado pelo elemento vizinho; **(ii)** singularidade de tensão na ponta de abertura da trinca; **(iii)** efeito da flexão no modo de abertura I dos modelos de DCB. Cabe notar que os elementos de volume utilizados foram Quad9.

Os modelos de DCB possuem a configuração geral apresentada na Fig. 6.5. Os dados para ambos os modelos são apresentados na Tabela 6.3, com todas as dimensões em milímetros.

Para todos os três modelos os parâmetros da Tabela 6.2 foram comuns.

Tabela 6.2: Parâmetros gerais de todos os modelos

η_{u}	$1E - 13$	k_N^b	0.2
η_a	$1E - 8$	k_N^p	0.2
	μ_Σ		0.12

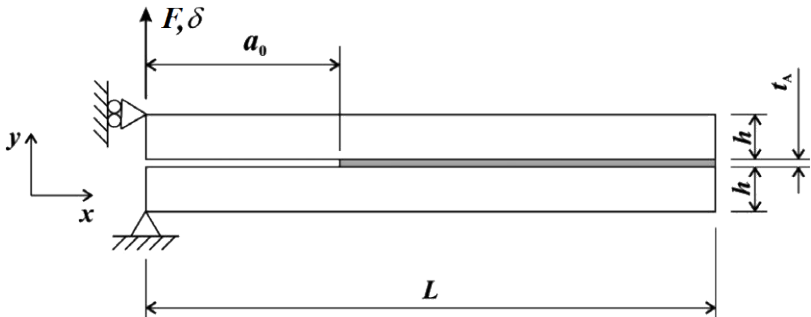


Figura 6.5: Configuração geral do modelo de DCB. (CAMPILHO et al., 2011)

Tabela 6.3: Características dimensionais, em mm, para as configurações do modelo de DCB #1 e #2.

	Configuração #1	Configuração #2
L	192.7	140
h	12.7	2.4
t_a	0.2	0.2
a_0	65	55
Adesivo	XN1244	Araldite® 2015

6.2.1 Modelo de DCB #1

A malha para este modelo foi gerada com 2142 nós, 472 elementos de volume e 39 elementos de adesão, conforme ilustrada na Fig. 6.12; os detalhes hachurados são os elementos de adesão. O resultado da análise de força por abertura pode ser visto na Fig. 6.6. As propriedades materiais do meio foram $E = 205 \text{ GPa}$ e $\nu = 0.3$, os parâmetros utilizados para o adesivo podem ser vistos na Tab. 6.4. Valores idênticos foram utilizados para as variáveis normais e tangenciais.

Figura 6.6: Resultado do modelo DCB #1.

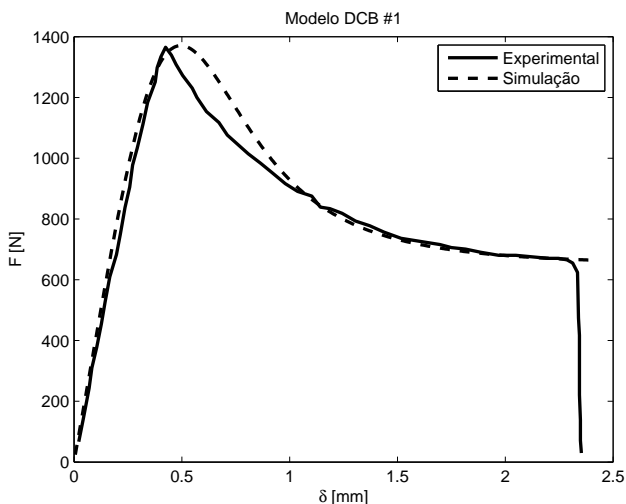
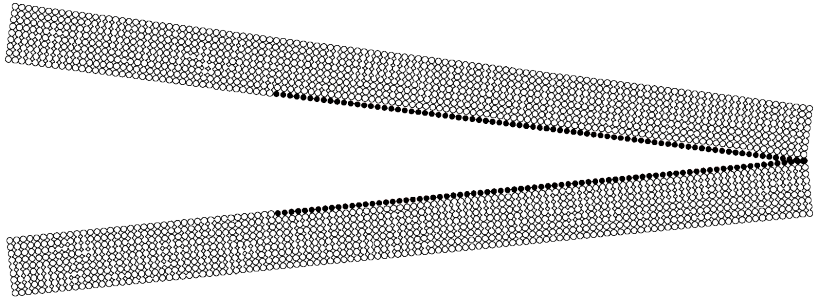


Tabela 6.4: Parâmetros do modelo DCB #1.

$K_{N,T} = 2.5 \times E8 \text{ N/m}$	$a_{N,T} = 3.5$
$K_{NT} = 2.5 \times E7 \text{ N/m}$	$b_{N,T} = -6.0$
$c_{\Sigma N, \Sigma T} = 1.0$	$c_{N,T} = -7.0$
$Y_{N,T}^0 = 1.0$	

Detalhe da simulação pode ser visto na Fig. 6.7, que mostra o campo de deslocamentos num dado instante de tempo, ampliado 50 vezes, com os nós danificados do material adesivo representados pelas circunferências cheias.

Figura 6.7: Elementos danificados - DCB #1.



6.2.2 Modelo de DCB #2

A malha para este modelo foi gerada com 2810 nós, 560 elementos de volume e 85 elementos de adesão, conforme ilustrada na Fig. 6.13; os detalhes em vermelho são os elementos de adesão. O resultado da análise de força por abertura pode ser visto na Fig. 6.8. As propriedades materiais do meio foram $E = 205 \text{ GPa}$ e $\nu = 0.3$, os parâmetros utilizados para o adesivo podem ser vistos na Tab. 6.5. Valores idênticos foram utilizados para as variáveis normais e tangenciais.

Figura 6.8: Resultado do modelo DCB #2.

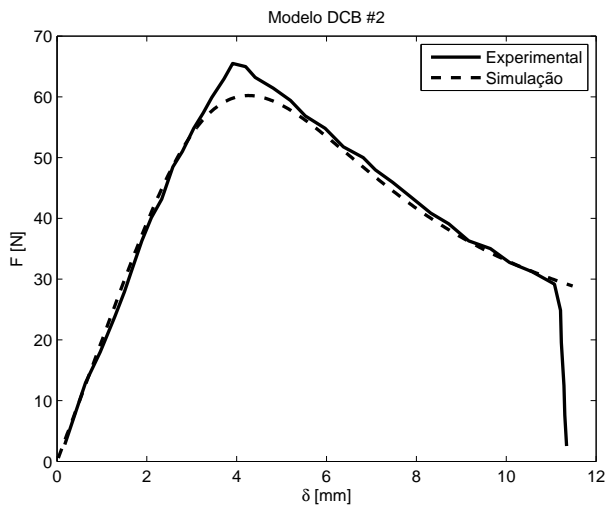


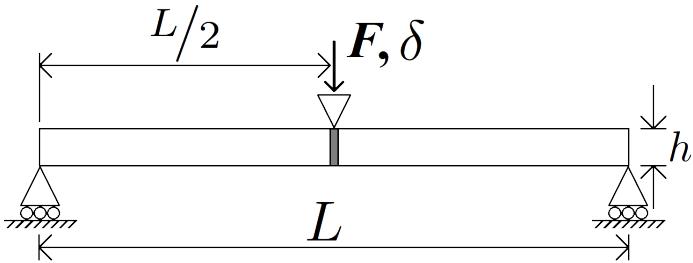
Tabela 6.5: Parâmetros do modelo DCB #2.

$K_{N,T} = 2.4 \times E6 \text{ N/m}$	$a_{N,T} = 2.7$
$K_{NT} = 2.4 \times E5 \text{ N/m}$	$b_{N,T} = -5.0$
$c_{\Sigma N, \Sigma T} = 1.0$	$c_{N,T} = -6.0$
$Y_{N,T}^0 = 0.8$	

6.2.3 Modelo de Flexão em Três Pontos

O modelo de flexão em três pontos possui o esquema delineado pela Fig. 6.9, sendo $L = 2 \text{ m}$; $h = 2.0 \text{ mm}$.

Figura 6.9: Configuração geral para o modelo de flexão em três pontos.



A malha para este modelo foi gerada com 6642 nós, 1600 elementos de volume e 20 elementos de adesão, conforme ilustrada na Fig. 6.14; os detalhes hachurados são os elementos de adesão. O resultado da análise de força por abertura pode ser visto na Fig. 6.10. As propriedades materiais do meio foram $E = 30 \text{ GPa}$ e $\nu = 0.3$, os parâmetros utilizados para o adesivo podem ser vistos na Tab. 6.6. Valores idênticos foram utilizados para as variáveis normais e tangenciais.

Figura 6.10: Resultado do modelo de flexão em três pontos.

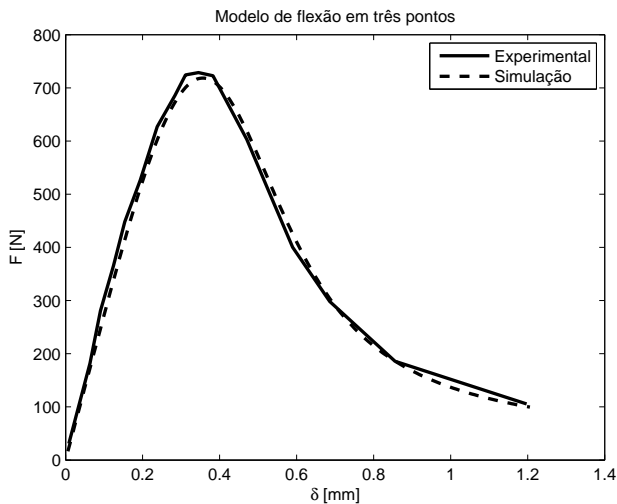
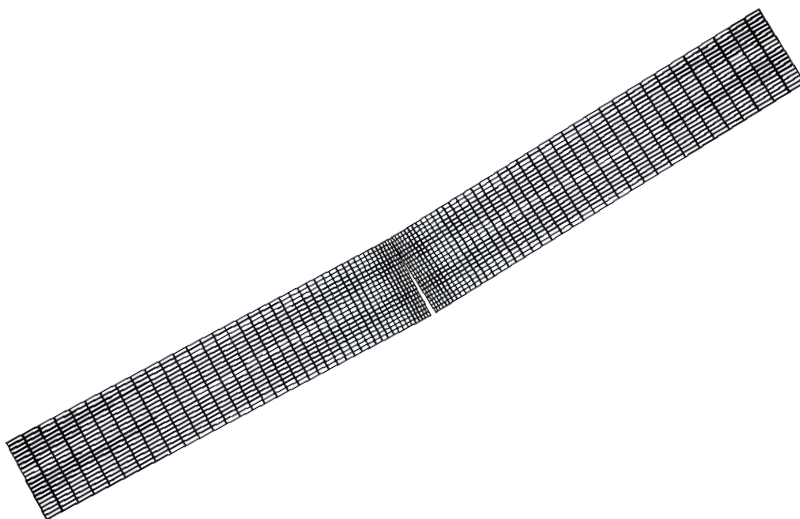


Tabela 6.6: Parâmetros do modelo de flexão em três pontos.

$K_{N,T} = 8.7 \times E8 \text{ N/m}$	$a_{N,T} = 0.1$
$K_{NT} = 8.7 \times E7 \text{ N/m}$	$b_{N,T} = -1.0$
$c_{\Sigma N, \Sigma T} = 0.4$	$c_{N,T} = -2.0$
$Y_{N,T}^0 = 0.5$	

Detalhe da simulação pode ser visto na Fig. 6.11, que mostra o campo de deslocamentos no instante no qual a ruptura ocorre. Pode ser observado claramente a separação entre as duas partes do corpo de prova gerada pela perda de rigidez do material adesivo devido à danificação.

Figura 6.11: Campo de deslocamentos - flexão em três pontos.



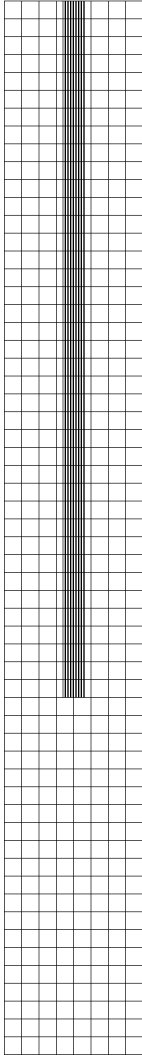


Figura 6.12: Malha: DCB #1.

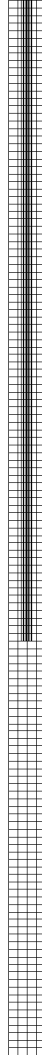


Figura 6.13: Malha: DCB #2.

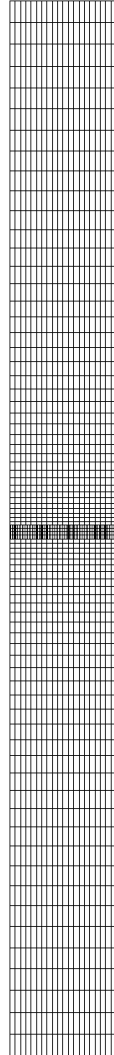
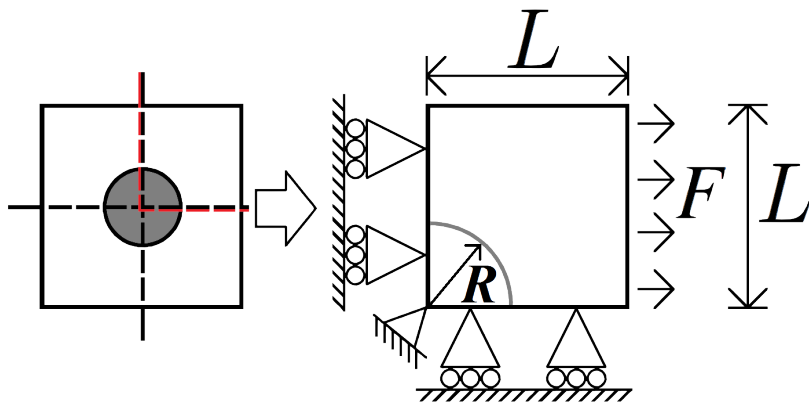


Figura 6.14: Malha: flexão em três pontos.

6.3 EXEMPLO DE INCLUSÃO

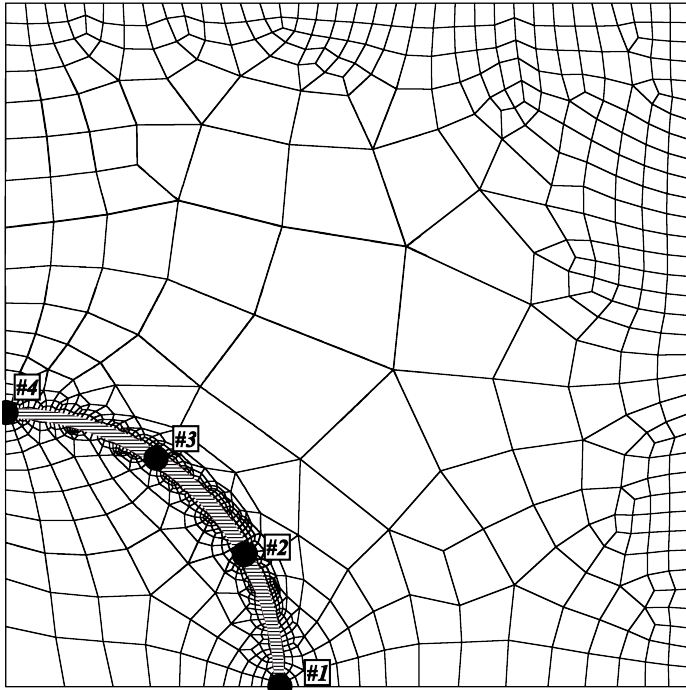
Com o modelo de adesão validado e de posse de três conjunto de dados adesivos consistentes, realizou-se a simulação de um exemplo de um modelo do tipo inclusão. A situação física que se enfrenta é descrita na Fig. 6.15, sendo $L = 0,5 m$ e a inclusão $R = 0,2 m$. Existe uma matriz de determinado material com uma inclusão do mesmo material no centro, ambas as partes unidas por um adesivo. Aplica-se o conceito de um quarto de simetria para se chegar à situação ilustrada no lado direito da figura. Aplica-se uma força F até que a ruptura do material adesivo ocorra.

Figura 6.15: Exemplo de inclusão.



A malha utilizada possui 5074 nós, com 1186 elementos de volume e 100 elementos de adesão, conforme ilustrada na Fig. 6.16; os detalhes em hachurados são os elementos de adesão. Os dados para adesivo foram os mesmos do modelo de DCB #1, presentes na Tab. 6.4. Apesar da malha não ser estruturada, procurou-se aumentar significativamente a densidade de elementos na área circundante à interface adesiva. Ainda que uma quantidade menor de elementos de adesão fosse suficiente para capturar o fenômeno do descolamento, conforme os exemplos da validação demonstraram, deseja-se tornar esta análise o mais fidedigna possível.

Figura 6.16: Malha do exemplo de inclusão.



O interessante, neste modelo, é acompanhar a evolução do dano conforme o deslocamento imposto pela força F . Para isto quatro nós foram selecionados, marcados por pequenos círculos cheios na Fig. 6.16. A escolha deu-se de forma a contemplar de maneira mais isonômica todo o comprimento do material adesivo.

A fim de identificar a representação dos resultados, os nós selecionados foram numerados de #1 a #4, partindo do nó mais inferior, em uma das extremidades, em direção ao nó mais superior, na outra extremidade, seguindo o sentido anti-horário. Os valores da evolução do dano normal d_N , e do dano tangencial d_T , são apresentados, respectivamente, nas Fig. 6.17e 6.18.

Figura 6.17: Evolução do dano normal.

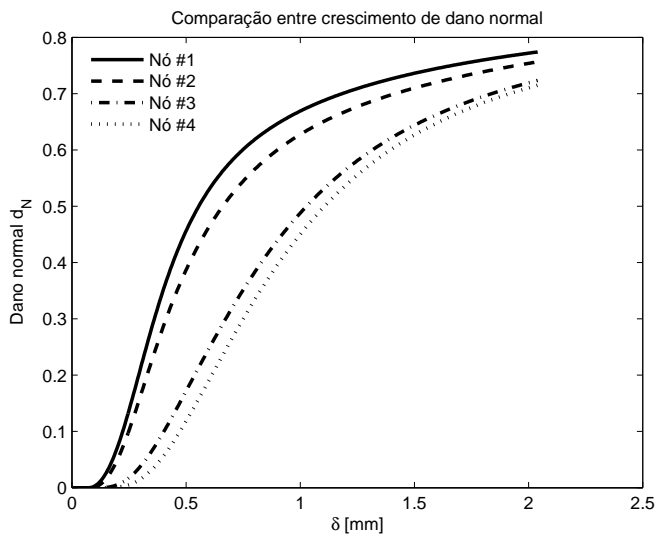
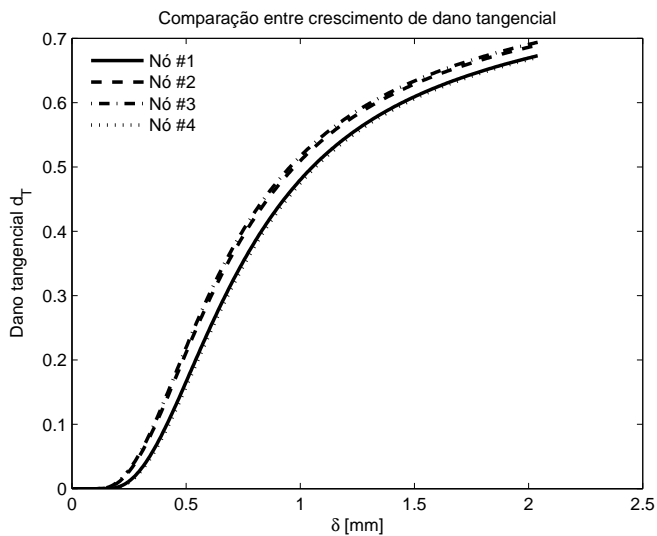


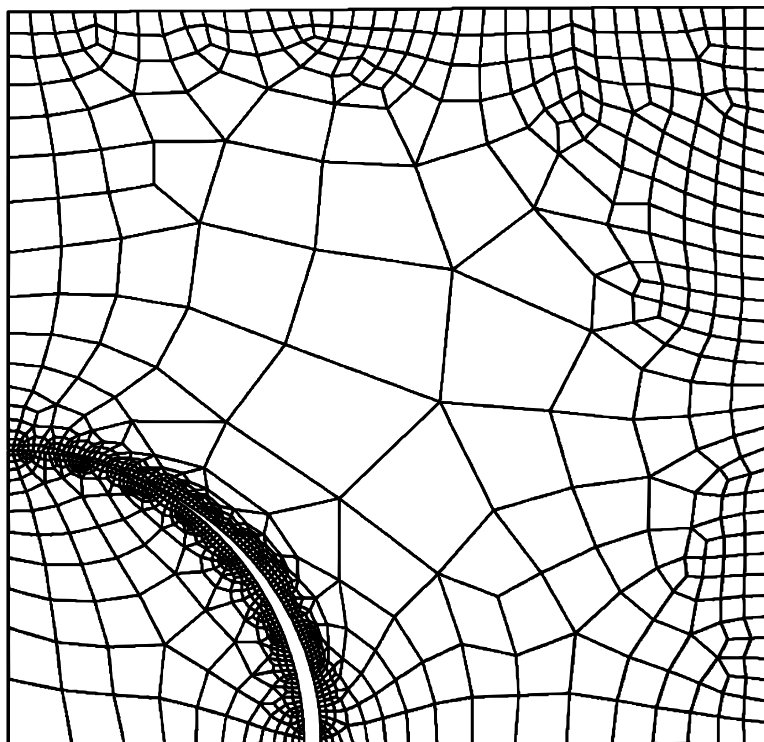
Figura 6.18: Evolução do dano tangencial.



6.3.1 Discussão

Utilizando-se como critério de ruptura um valor de dano crítico de $d_c = 0,73$; similar ao valor crítico do modelo de DCB #1, observa-se pelos gráficos que a falha do material adesivo dá-se pela ruptura devido ao dano normal. Porém como a normal, geométrica, dos nós não coincide com a direção horizontal existe também crescimento do dano tangencial. O descolamento completo ocorre quando o deslocamento prescrito na fronteira está em $\delta = 2,1 \text{ mm}$, considerando-se o dano crítico como sendo $0,73$. Pode ser observado na Fig. 6.19, com ampliação de 10 vezes do campo de deslocamento, o descolamento da inclusão.

Figura 6.19: Campo de deslocamento.



7 CONCLUSÃO

A proposta desta dissertação de mestrado foi o desenvolvimento de um modelo de dano não local para separação de interfaces. O modelo foi feito pensando-se em abertura de trincas do tipo I, tipo II e modo misto de abertura; e para isso utilizou-se duas variáveis macroscópicas de dano, a saber d_N e d_T . Efetuou-se a formulação forte das equações de equilíbrio considerando-se a situação clássica de forças e também considerando-se a existência de forças termodinâmicas de dano; etapa que forneceu uma estrutura básica de funcionamento do modelo sem a especificação das relações funcionais. A partir disto foram propostos potenciais de energia livre e potenciais de dissipação, ou seja, definiu-se o próprio “DNA” do modelo que a partir de então passa a funcionar segundo as regras definidas pelas formulações fortes.

As grandes inovações ocorreram na definição do potencial de energia que acopla os modos de abertura I e II; e na definição do potencial de energia livre que dá origem à função barreira. Esta é de suma importância na definição de como as forças normal e tangencial se comportam durante a etapa de descolamento das interfaces adesivas. Na etapa subsequente foram considerados os casos omissos, tais como a possibilidade da redução do nível de danificação do material; e para evitar esta situação física impossível foram impostas penalizações para manter o modelo verossímil. As equações de estado foram então derivadas e também regularizadas quanto a problemas de não diferenciabilidade local.

Para permitir a utilização computacional do modelo, derivou-se as formulações fracas juntamente com a discretização no tempo. Optou-se por um método de discretização no tempo semi-implícito de diferenças finitas com fins de maximizar os incrementos de tempo. Outro efeito obtido com a discretização foi desacoplar os problemas de dano normal e tangencial. Como o problema do campo de deslocamentos é transcendental foi necessário linearizá-lo para poder resolvê-lo pelo método iterativo de Newton.

Em seguida efetuou-se a discretização das formulações fracas pelo método dos elementos finitos e as contribuições dos elementos de volume e dos elementos de linha foram determinadas. Agora com um modelo completo passível de implementação computacional passou-se à etapa de validação do modelo. Ensaio de abertura pura de tipo I, DCB, foram reproduzidas com perfeição pelo modelo. Nota-se também que os dois modelos de DCB validados possuíam características bastante distintas: um era um adesivo de comportamento dúctil e o outro de comportamento frágil. Ensaio de propagação de trinca do tipo flexão em três pontos também

foi reproduzido satisfatoriamente. A capacidade de reproduzir ensaios bastante distintos, ou seja, de comportamentos díspares - com o mesmo modelo a partir da mudança de três parâmetros ($a_{N,T}$; $b_{N,T}$ e $c_{N,T}$) foi um fato que chamou a atenção e que demonstra a robustez e versatilidade do modelo proposto.

A simulação de um caso do tipo matriz-inclusão unidos por um material adesivo a partir de um conjunto de dados já validados demonstra uma das possíveis aplicações do vasto campo de estudos para o qual este modelo pode contribuir. Mesmo com um número não tão elevado de elementos de adesão foi possível capturar com boa qualidade o fenômeno da decoesão.

Como legados desta dissertação ao GMAC ficam uma interface completa para geração de malha e ajuste total e completo das variáveis de entrada integrados ao programa principal de solução de elementos finitos.

7.1 SUGESTÃO PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Nota-se que em alguns momentos durante esta dissertação fala-se em decoesão e em abertura de trinca como se fossem sinônimos. Do ponto de vista físico as duas nomenclaturas descrevem situações análogas. A diferença é que a decoesão já possui um caminho pré-determinado de abertura, enquanto que uma trinca não o possui. O modelo aqui descrito para decoesão não foi feito *ad hoc*, e portanto pode ser generalizado também para trincas *strictu sensu*. Outrossim, através da implementação de um critério de escolha de direção de propagação de trinca e da adição de elementos de adesão na direção de propagação da trinca poder-se-ia ter um bom modelo que também trate do problema de abertura e propagação de trincas *per se*.

O grande foco deste trabalho foi o de capturar o fenômeno da separação de interfaces, e não em reproduzir com perfeição o desenvolvimento dos campos de tensão. Assim a captura de detalhes da singularidade da ponta de trinca - fenômeno presente nos modelos de DCB - ou da análise do campo de tensões no elemento de adesão com dano próximo do máximo ficaram relegados ao segundo plano. Neste ínterim a adição da técnica de Elementos Finitos eXtendidos (X-FEM) resolveria o problema da análise dos campos de tensão na singularidade da ponta de trinca, contribuindo também na precisão dos campos de tensão circundantes, tornando o modelo e o programa de elementos finitos mais completos.

Outra direção interessante de abordagem seria a inclusão do fenômeno de fadiga. Asas de aviões contruídas em estruturas de materiais

compósitos acabam sofrendo fadiga por flexão durante vôo, e esta pode implicar uma falha no material adesivo ao invés de uma falha na lâmina em si.

REFERÊNCIAS

- ALFAIATE, J.; SIMONE, a.; SLUYS, L. Non-homogeneous displacement jumps in strong embedded discontinuities. *International Journal of Solids and Structures*, v. 40, n. 21, p. 5799–5817, out. 2003. ISSN 00207683. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S002076830300372X>>.
- ARORA, J. *Introduction to optimum design*. 2nd. ed. [S.l.]: Academic Press, 2004. 728 p. ISBN 0120641550.
- CAMPILHO, R. et al. eXtended Finite Element Method for fracture characterization of adhesive joints in pure mode I. *Computational Materials Science*, Elsevier B.V., v. 50, n. 4, p. 1543–1549, fev. 2011. ISSN 09270256. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0927025610006695>>.
- CHABOCHE, J. L. Continuum Damage Mechanics: Part I - General Concepts. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, v. 55, n. 1, p. 59, 1988. ISSN 00218936. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?AMJ/55/59/1>>.
- CORDEBOIS, J.-P.; SIDOROFF, F. Damage Induced Elastic Anisotropy. *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*, p. 761–774, 1983.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. *A First Course in Finite Elements*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2007. ISBN 9780470510858. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/9780470510858>>.
- FREMOND, M. Adhérence des solides. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, v. 6, p. 383–407, 1987.
- FREMOND, M.; NEDJAR, B. Damage, gradient of damage, and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, v. 33, n. 8, p. 1083–1103, 1996.
- FULTON, S. R.; JUNE, R. Semi-Implicit Time Differencing. p. 1–34, 2004.
- GRAMMENOUDIS, P.; RECKWERTH, D.; TSAKMAKIS, C. *Continuum Damage Models based on Energy Equivalence: Part I – Isotropic Material Response*. [s.n.], 2008. 31–63 p. ISSN 1056-7895. ISBN 1056789508090. Disponível em: <<http://ijd.sagepub.com/cgi/doi/10.1177/1056789508090466>>.

KACHANOV, L. M. On rupture time under condition of creep. *Izvestia Akademi Nauk SSSR*, v. 8, p. 26–31, 1958.

KIKUCHI, N.; ODEN, J. T. *Contact Problems in Elasticity*. 1st. ed. Philadelphia: SIAM, 1988. 4985 p. ISBN 0898714680.

KRAJCINOVIC, D. 1. 1 Continuum damage mechanics : What , when and why ? *Mechanics of Materials*, v. 8, p. 117–197, 1989.

LADEVEZE, P. An anisotropic damage theory with unilateral effects: applications to laminates and to three and four-dimensional composites. In: *Continuum damage mechanics of materials and structures*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 214–242.

LEMAITRE, J. How to use damage mechanics. *Nuclear Engineering and Design*, v. 80, p. 233–245, 1984.

LEMAITRE, J. *A Course on Damage Mechanics*. 2nd. ed. [S.l.]: Springer Verlag, 1996.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. *Mechanics of Solid Materials*. 1994. 584 p.

LUBARDA, V. A.; KRAJCINOVIC, D. Damage tensors and the crack distribution density. *International Journal of Solids and Structures*, v. 30, n. 20, p. 2859–2877, 1993.

RABOTNOV, Y. N. On the equation of state for creep. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. [S.l.: s.n.], 1963. p. 2–117–2–122.

RAOUS, M.; CANGEMI, L.; COCU, M. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 177, n. 3-4, p. 383–399, jul. 1999. ISSN 00457825. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782598003892>>.

SAIN, T.; NARASIMHAN, R. Constitutive modeling of ice in the high strain rate regime. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier Ltd, v. 48, n. 5, p. 817–827, mar. 2011. ISSN 00207683. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020768310004154>>.

SIMO, J. C.; JU, J.-W. W. Strain-and stress-based continuum damage models - Formulation. *International Journal of Solids*, v. 23, p. 821–869, 1987.

ZHANG, W.; CAI, Y. *Continuum Damage Mechanics and Numerical Applications*. [S.l.]: Zhejiang University Press, Hangzhou, 2010. ISBN 9787308065894.

ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Sixth edit. [S.l.]: Elsevier, 2005. 631 p. ISBN 0750663219.

A DEFINIÇÃO DAS MATRIZES UTILIZADAS NO PROBLEMA DE DESLOCAMENTO NÃO LINEAR

A.1 ELEMENTOS DE VOLUME

Deve-se determinar as contribuições dos seguintes termos

$$(1) = \int_{\Omega_e} \vec{\sigma} \left(\vec{u}_{n+1}^k \right) \cdot \vec{\varepsilon}(\omega) d\Omega \quad (\text{A.1})$$

$$(2) = \int_{\Omega_e} \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{\omega} d\Omega \quad (\text{A.2})$$

$$(3) = \int_{\Omega_e} D\vec{\sigma} \left(\vec{u}_{n+1}^k \right) \left[\Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] \cdot \vec{\varepsilon}(\omega) d\Omega \quad (\text{A.3})$$

$$(4) = \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_i} \vec{t}_{n+1} \cdot \omega d\Gamma \quad (\text{A.4})$$

Determinação de (1)

$$(1) = \int_{\Omega_e} \sigma \left(\vec{u}_{n+1}^k \right) \cdot \varepsilon(\omega) d\Omega \quad (\text{A.5})$$

Assim

$$\int_{\Omega_e} \sigma \left(\vec{u}_{n+1}^k \right) \cdot \varepsilon(\omega) d\Omega = \vec{F}_e^\sigma \cdot \delta \vec{q}_e \quad (\text{A.6})$$

tal que

$$\vec{F}_e^\sigma = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T \vec{\sigma} \left(\vec{u}_{n+1}^k \right) d\Omega \quad (\text{A.7})$$

$$\vec{\sigma} \left(\vec{u}_{n+1}^k \right) = [\mathbb{D}_0] \vec{\varepsilon} \left(\vec{u}_{n+1}^k \right) \quad (\text{A.8})$$

Determinação de (2)

$$(2) = \int_{\Omega_e} \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{\omega} d\Omega \quad (\text{A.9})$$

Assim

$$\int_{\Omega_e} \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{\omega} d\Omega = \vec{F}_e^b \cdot \delta \vec{q}_e \quad (\text{A.10})$$

tal que

$$\vec{F}_e^b = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T \vec{b}_{n+1} d\Omega \quad (\text{A.11})$$

Determinação de (3)

$$(3) = \int_{\Omega_e} D\vec{\sigma}(\vec{u}_{n+1}^k) \left[\Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] \cdot \vec{\varepsilon}(\omega) d\Omega \quad (\text{A.12})$$

Assim

$$\int_{\Omega_e} D\vec{\sigma}(\vec{u}_{n+1}^k) \left[\Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] \cdot \vec{\varepsilon}(\omega) d\Omega = [\mathbf{K}_{T_e}^u] \left\{ \Delta \vec{q}_{e_{n+1}}^k \right\} \cdot \delta \vec{q}_e \quad (\text{A.13})$$

tal que

$$[\mathbf{K}_{T_e}^u] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbb{D}_0] [\mathbf{B}] d\Omega \quad (\text{A.14})$$

que é a matriz de rigidez linear elástica tradicional.

Determinação de (4)

$$(4) = \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} \vec{t}_{n+1} \cdot \vec{\omega} d\Gamma \quad (\text{A.15})$$

Assim

$$\int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} \vec{t}_{n+1} \cdot \vec{\omega} d\Gamma = F_e^t \cdot \delta \vec{q}_e \quad (\text{A.16})$$

tal que

$$F_e^t = \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} [\mathbf{N}]^T \vec{t}_{n+1} d\Gamma \quad (\text{A.17})$$

A.2 ELEMENTOS DE LINHA

Deve-se determinar as contribuições dos seguintes termos

$$(1) = \sum_e \int_{\Gamma_e} Q_{\Sigma T_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [[\omega_T]] d\Gamma \quad (\text{A.18})$$

$$(2) = \sum_e \int_{\Gamma_e} Q_{\Sigma N_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [[\omega_N]] d\Gamma \quad (\text{A.19})$$

$$(3) = \sum_e \int_{\Gamma_e} DQ_{\Sigma N_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) \left[\Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] [[\omega_N]] d\Gamma \quad (\text{A.20})$$

$$(4) = \sum_e \int_{\Gamma_e} DQ_{\Sigma T_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) \left[\Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] [[\omega_T]] d\Gamma \quad (\text{A.21})$$

Obtém-se o salto normal do deslocamento como

$$[[u_N(x(\tau), y(\tau))]] = \vec{N}_N \cdot \vec{q}_e \quad (\text{A.22})$$

com

$$\begin{aligned} \left[\vec{N}_N \right]^T = & \begin{bmatrix} \Psi_{1n_x} & \Psi_{1n_y} & \Psi_{2n_x} & \Psi_{2n_y} & -\Psi_{2n_x} & -\Psi_{2n_y} \\ -\Psi_{1n_x} & -\Psi_{1n_y} & \Psi_{3n_x} & \Psi_{3n_y} & -\Psi_{3n_x} & -\Psi_{3n_y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

O salto tangencial do deslocamento é dado por

$$[[u_T(x(\tau), y(\tau))]] = \vec{N}_T \cdot \vec{q}_e \quad (\text{A.24})$$

com

$$\begin{aligned} \left[\vec{N}_T \right]^T = & \begin{bmatrix} \Psi_{1n_y} & -\Psi_{1n_x} & \Psi_{2n_y} & -\Psi_{2n_x} & -\Psi_{2n_y} & \Psi_{2n_x} \\ -\Psi_{1n_y} & \Psi_{1n_x} & \Psi_{3n_y} & -\Psi_{3n_x} & -\Psi_{3n_y} & \Psi_{3n_x} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

A mesma lógica é aplicada para as componentes normal e tangencial da variação do salto do deslocamento, dados por

$$[[\omega_N(x(\tau), y(\tau))]] = \vec{N}_N \cdot \delta \vec{q}_e \quad (\text{A.26})$$

$$[[\omega_T(x(\tau), y(\tau))]] = \vec{N}_T \cdot \delta \vec{q}_e \quad (\text{A.27})$$

Determinação de (1)

$$(1) = \int_{\Gamma_e} Q_{\Sigma T_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [[\omega_T]] d\Gamma \quad (\text{A.28})$$

assim

$$\int_{\Gamma_e} Q_{\Sigma T_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [[\omega_T]] d\Gamma = F_e^{\Sigma T} \cdot \delta \vec{q}_e \quad (\text{A.29})$$

onde

$$F_e^{\Sigma T} = \int_{\Gamma_e} Q_{\Sigma T_{n+1}}(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) \left\{ \vec{N}_T \right\} d\Gamma \quad (\text{A.30})$$

Determinação de (2)

$$(2) = \int_{\Gamma_e} Q_{\Sigma N_{n+1}} (\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [[\omega_N]] d\Gamma \quad (\text{A.31})$$

assim

$$\int_{\Gamma_e} Q_{\Sigma N_{n+1}} (\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) [[\omega_N]] d\Gamma = F_e^{\Sigma N} \cdot \delta \vec{q}_e \quad (\text{A.32})$$

onde

$$F_e^{\Sigma N} = \int_{\Gamma_e} Q_{\Sigma N_{n+1}} (\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) \left\{ \vec{N}_N \right\} d\Gamma \quad (\text{A.33})$$

Determinação de (3)

$$(3) = \int_{\Gamma_e} DQ_{\Sigma N_{n+1}} (\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) \left[\Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] [[\omega_N]] d\Gamma \quad (\text{A.34})$$

tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} DQ_{\Sigma N_{n+1}} (\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) \left[\Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] [[\omega_N]] d\Gamma = \\ \left[[\mathbf{K}_e^{NNa}] + [\mathbf{K}_e^{NNb}] + [\mathbf{K}_e^{NT}] \right] \Delta \vec{q}_{e_{n+1}}^k \cdot \delta \vec{q}_e \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

com

$$[\mathbf{K}_e^{NNa}] = \left[\int_{\Gamma_e} \left\{ (1 - d_{N_{n+1}})^2 k_N \right\} (\vec{N}_N \otimes \vec{N}_N) d\Gamma \right] \quad (\text{A.36})$$

$$[\mathbf{K}_e^{NNb}] = \left[\int_{\Gamma_e} \frac{1}{\eta_u} H_{step} \left(\left[[u_{N_{n+1}}^k] \right] \right) (\vec{N}_N \otimes \vec{N}_N) d\Gamma \right] \quad (\text{A.37})$$

$$[\mathbf{K}_e^{NT}] = \left[\int_{\Gamma_e} \left\{ (1 - d_{N_{n+1}}) (1 - d_{T_{n+1}}) k_{NT} \right\} (\vec{N}_N \otimes \vec{N}_T) d\Gamma \right] \quad (\text{A.38})$$

Determinação de (4)

$$\begin{aligned} (4) &= \int_{\Gamma_e} DQ_{\Sigma T_{n+1}} (\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) \left[\Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] [[\omega_T]] d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_e} DQ_{\Sigma T}^f (\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) \left[\Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] [[\omega_T]] d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_e} DQ_{\Sigma T}^i (\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) \left[\Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] [[\omega_T]] d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Assim

$$\int_{\Gamma_e} DQ_{\Sigma T}^i(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) \left[\Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] [[\omega_T]] d\Gamma = \left[[\mathbf{K}_e^{TTra}] + [\mathbf{K}_e^{TNrb}] \right] \Delta \vec{q}_{e_{n+1}}^k \cdot \delta \vec{q}_e \quad (\text{A.40})$$

com

$$[\mathbf{K}_e^{TTra}] = \left[\int_{\Gamma_e} \left\{ (1 - d_{T_{n+1}})^2 k_T \right\} \left(\vec{N}_T \otimes \vec{N}_T \right) d\Gamma \right] \quad (\text{A.41})$$

$$[\mathbf{K}_e^{TNrb}] = \left[\int_{\Gamma_e} \left\{ (1 - d_{N_{n+1}}) (1 - d_{T_{n+1}}) k_{NT} \right\} \left(\vec{N}_T \otimes \vec{N}_N \right) d\Gamma \right] \quad (\text{A.42})$$

e

$$(4)^i = \int_{\Gamma_e} DQ_{\Sigma T}^i(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) \left[\Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] [[\omega_T]] d\Gamma \quad (\text{A.43})$$

resultando em

$$\int_{\Gamma_e} DQ_{\Sigma T}^i(\vec{u}_{n+1}, d_{N_{n+1}}, d_{T_{n+1}}) \left[\Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] [[\omega_T]] d\Gamma = \left[[\mathbf{K}_e^{NNia}] + [\mathbf{K}_e^{NNib}] + [\mathbf{K}_e^{TTic}] + [\mathbf{K}_e^{TTid}] \right] \Delta \vec{q}_{e_{n+1}}^k \cdot \delta \vec{q}_e \quad (\text{A.44})$$

com

$$F_{aux} = \mu_{\Sigma} S_T^{\varepsilon_0}(\circ) \text{sign}(Q_{\Sigma N}(\circ)) \quad (\text{A.45})$$

$$[\mathbf{K}_e^{NNia}] = \int_{\Gamma_e} F_{aux} \left\{ (1 - d_{N_{n+1}})^2 k_N \right\} \left(\vec{N}_N \otimes \vec{N}_T \right) d\Gamma \quad (\text{A.46})$$

$$[\mathbf{K}_e^{NNib}] = \int_{\Gamma_e} F_{aux} \frac{1}{\eta_u} H_{step} \left(\left[[u_{N_{n+1}}^k] \right] \right) \left(\vec{N}_N \otimes \vec{N}_T \right) d\Gamma \quad (\text{A.47})$$

$$[\mathbf{K}_e^{TTic}] = \int_{\Gamma_e} F_{aux} \left\{ (1 - d_{N_{n+1}}) (1 - d_{T_{n+1}}) k_{NT} \right\} \left(\vec{N}_T \otimes \vec{N}_T \right) d\Gamma \quad (\text{A.48})$$

$$[\mathbf{K}_e^{TTid}] = \int_{\Gamma_e} \mu_{\Sigma} \left| Q_{\Sigma N} \left(\vec{u}_{n+1}^k, \circ \right) \right| H_T^{\varepsilon_0} \left(u_{T_{n+1}}^k, \circ \right) \left(\vec{N}_T \otimes \vec{N}_T \right) d\Gamma \quad (\text{A.49})$$

tal que

$$\text{sign}(Q_{\Sigma N}(\circ)) = \begin{cases} 1 & \text{se } (Q_{\Sigma N}^r(\vec{u}_{n+1}^k)) \geq 0 \\ -1 & \text{se } (Q_{\Sigma N}^r(\vec{u}_{n+1}^k)) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.50})$$

$$S_T^{\varepsilon_0}(u_{T_{n+1}}^k, \circ) = \begin{cases} 1 & \text{se } \left[\left[u_{T_{n+1}}^k \right] \right] \geq \left[[u_{T_n}] \right] + \varepsilon_0 \Delta t \\ \frac{\left[\left[u_{T_{n+1}}^k \right] \right] - \left[[u_{T_n}] \right]}{\varepsilon_0 \Delta t} & \text{se } \left| \left[\left[u_{T_{n+1}}^k \right] \right] - \left[[u_{T_n}] \right] \right| < \varepsilon_0 \Delta t \\ -1 & \text{se } \left[\left[u_{T_{n+1}}^k \right] \right] \leq \left[[u_{T_n}] \right] - \varepsilon_0 \Delta t \end{cases} \quad (\text{A.51})$$

$$H_T^{\varepsilon_0}(u_{T_{n+1}}^k, \circ) = \begin{cases} 0 & \text{se } \left[\left[u_{T_{n+1}}^k \right] \right] \geq \left[[u_{T_n}] \right] + \varepsilon_0 \Delta t \\ \frac{1}{\varepsilon_0 \Delta t} & \text{se } \left| \left[\left[u_{T_{n+1}}^k \right] \right] - \left[[u_{T_n}] \right] \right| < \varepsilon_0 \Delta t \\ 0 & \text{se } \left[\left[u_{T_{n+1}}^k \right] \right] \leq \left[[u_{T_n}] \right] - \varepsilon_0 \Delta t \end{cases} \quad (\text{A.52})$$

$$H_{step}\left(\left[\left[u_{N_{n+1}}^k \right] \right]\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } \left[\left[u_{N_{n+1}}^k \right] \right] \geq 0 \\ 0 & \text{se } \left[\left[u_{N_{n+1}}^k \right] \right] < 0 \end{cases} \quad (\text{A.53})$$