

**MARCOS HIDEO MARUO**

**COMPORTAMENTO DE UMA  
CLASSE DE ALGORITMOS DE  
CANCELAMENTO DE ECO  
ACÚSTICO AUXILIADO POR UM  
ARRANJO DE MICROFONES**

**FLORIANÓPOLIS**

**2014**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**COMPORTAMENTO DE UMA CLASSE DE  
ALGORITMOS DE CANCELAMENTO DE ECO  
ACÚSTICO AUXILIADO POR UM ARRANJO DE  
MICROFONES**

Tese submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica

**MARCOS HIDEO MARUO**

Florianópolis, Novembro de 2014



**COMPORTAMENTO DE UMA CLASSE DE  
ALGORITMOS DE CANCELAMENTO DE ECO  
ACÚSTICO AUXILIADO POR UM ARRANJO DE  
MICROFONES**

**MARCOS HIDEO MARUO**

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de concentração Comunicações e Processamento de Sinais, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

---

José C. M. Bermudez, PhD  
Orientador

---

Carlos Galup Montoro, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

---

José C. M. Bermudez, Ph.D  
Presidente

---

Márcio Holsbach Costa, Dr.

---

Leonardo Silva Resende, Dr.

---

Vítor Heloiz Nascimento, Ph.D

---

José Antonio Apolinário Jr, Dr.



*for SARAH her style and taste judgement love  
and support.*





## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor José Carlos Moreira Bermudez, pela orientação, empenho e amizade ao longo destes anos.

Ao professor Leonardo S. Resende, pela ajuda e disposição ao longo de todo o trabalho.

Ao professor Márcio Holsbach Costa, por sempre dizer “bom dia” apesar de, devido à causalidade, não saber se o dia será bom ou não.

Ao professor Abraham Alcaim, do CETUC na PUC-Rio, que generosamente cedeu a base de dados de sinais de fala com os quais os sinais não-estacionários utilizados nos experimentos foram produzidos.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica pelo ambiente de aprendizado.

Aos funcionários da UFSC: Wilson Silva Costa e Marcelo Manoel Siqueira.

Ao CNPq pela oportunidade, incentivo e financiamento.

Aos colegas de laboratório, sem necessidade de listar razões.



*“I can live with doubt, and uncertainty, and not knowing. I think it’s much more interesting to live not knowing than to have answers which might be wrong. I have approximate answers, and possible beliefs, and different degrees of certainty about different things, but I’m not absolutely sure of anything, and in many things I don’t know anything about, such as whether it means anything to ask why we’re here, and what the question might mean. I might think about a little, but if I can’t figure it out, then I go to something else. But I don’t have to know an answer. I don’t feel frightened by not knowing things, by being lost in a mysterious universe without having any purpose, which is the way it really is, as far as I can tell, possibly. It doesn’t frighten me.”*  
*Richard Phillips Feynman - The Pleasure of Finding Things Out.*



Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

## **COMPORTAMENTO DE UMA CLASSE DE ALGORITMOS DE CANCELAMENTO DE ECO ACÚSTICO AUXILIADO POR UM ARRANJO DE MICROFONES**

**Marcos Hideo Maruo**

Novembro / 2014

Orientador: José C. M. Bermudez, PhD.

Área de Concentração: Comunicações e Processamento de Sinais.

Palavras-chave: Cancelamento de eco acústico, Array de microfones, Filtragem adaptativa, Análise estatística.

Número de Páginas: 323

Esta tese apresenta uma análise estatística de uma classe de canceladores de eco acústico (AEC) auxiliados por um arranjo de microfones otimizados de maneira conjunta. A análise é realizada para sistemas em que o conformador de feixes (BF) é implementado na forma direta utilizando o algoritmo *constrained least-mean squares* e na forma de cancelador de lóbulos generalizado (GSC) utilizando o algoritmo *least-mean squares*. Para o BF implementado na forma direta, um modelo analítico é desenvolvido para o comportamento estatístico do sistema quando a convergência de ambos AEC e BF é controlada utilizando o mesmo passo de adaptação. Para o BF implementado na forma GSC, a análise é generalizada para considerar o controle de convergência utilizando uma matriz de passos de adaptação. É proposta uma nova formulação analítica, que demonstra que o problema da otimização conjunta é equivalente a um problema de minimização da variância com restrições lineares. Consequentemente, a nova análise leva a modelos analíticos que podem ser utilizados para prever o comportamento transitório de conformadores de feixe de banda larga tanto na forma direta quanto GSC. A generalização para a adaptação utilizando a matriz de passos leva a um modelo mais versátil que permite o estudo do comportamento do sistema sob uma lógica de controle externa. Essa generalização é especialmente interessante para o projeto de canceladores de eco acústicos reais pois a lógica de controle normalmente requer a operação do AEC e do BF com passos de adaptação diferentes durante diferentes condições de adaptação

(presença de fala local, mudanças de canal, rastreamento, etc). Modelos estatísticos são determinados para o comportamento transiente e em regime-permanente da potência de eco residual para sinais de entrada Gaussianos e estacionários. A análise de convergência resulta em limites de estabilidade para o passo de adaptação na forma direta e para a matriz de passos na forma GSC. Diretrizes de projeto são obtidas a partir dos modelos analíticos. Simulações de Monte Carlo mostram a precisão dos modelos teóricos e a utilidade das diretrizes de projeto. Exemplos de simulação incluem a operação sob efeito de não-estacionariedades moderadas. Os novos modelos confirmam teoricamente os resultados experimentais que indicam que o mesmo desempenho em cancelamento de AECs com um único microfone pode ser obtido com um AEC de comprimento menor quando há a possibilidade de uso de filtragem espacial. Finalmente, é mostrado que soluções com alta taxa de convergência podem ser obtidas utilizando o BF na forma GSC por meio de uma adaptação baseada em um algoritmo quase-Newton na qual a matriz de passos é projetada para descorrelacionar o vetor de entrada combinado.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

## **BEHAVIOR OF A CLASS OF ACOUSTIC ECHO CANCELLATION ALGORITHMS AIDED BY MICROPHONE ARRAYS**

**Marcos Hideo Maruo**

Nov / 2014

Advisor: José C. M. Bermudez, PhD.

Area of Concentration: Communications and Signal Processing.

Keywords: Acoustic echo cancellation, Microphone arrays, Adaptive filtering, Statistical analysis.

Number of pages: 323

This thesis presents a statistical analysis of a class of jointly optimized beamformer-assisted acoustic echo cancelers (AEC). The analysis is performed for systems with the BF implemented in the direct form using the constrained least-mean square algorithm and in the Generalized Sidelobe Canceler (GSC) form using the least-mean square algorithm. For the BF implemented in the direct form, an analytical model is derived for the statistical behavior of the system when the convergence of both AEC and BF are controlled using the same step size. For the BF implemented in the GSC form, the analysis is generalized to consider convergence control using a step size matrix. A new analytical formulation is proposed, which shows that the joint optimization problem is equivalent to a linearly-constrained minimum variance problem. As a consequence, the new analyses lead to analytical models that can be used to predict the transient performance of adaptive wideband beamformers in both direct and GSC forms. The generalization to the adaptation using a step size matrix leads to a flexible model that allows the study of the system performance under an external control logic. This is of special interest for the design of practical acoustic echo cancelers because typical control logics require the operation of the AEC and BF with different step-sizes during different adaptation scenarios (double-talk, channel changes, tracking, etc). Stochastic models are derived for the transient and steady-state behaviors of the residual echo power for stationary Gaussian inputs. Convergence analyses lead to stability bounds for the adaptation step-size in the direct form and for the step-size matrix in the GSC form. Design guidelines are derived from the analytical models. Monte

Carlo simulations illustrate the accuracy of the theoretical models and the applicability of the proposed design guidelines. Examples include operation under mild degrees of nonstationarity. The new models theoretically confirm previous experimental findings that the same cancellation performance of a single-microphone AEC can be achieved with a shorter AEC when the possibility of spatial filtering is available. Finally, it is shown how a high convergence rate can be achieved using the system with the BF in the GSC form via a quasi-Newton adaptation scheme in which the step-size matrix is designed to whiten the combined input vector.



## SUMÁRIO

Introdução . . . . .	1
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Cancelamento de eco . . . . .	1
1.2.1 Cancelamento de eco de linha . . . . .	4
1.2.2 Cancelamento de eco acústico . . . . .	8
1.3 Filtragem adaptativa . . . . .	16
1.3.1 Aplicações da Filtragem Adaptativa . . . . .	18
1.3.2 Processo de Filtragem . . . . .	21
1.3.3 Processo adaptativo . . . . .	23
1.3.4 Filtragem espacial . . . . .	30
1.4 Objetivos do trabalho . . . . .	31
1.5 Justificativa e relevância . . . . .	31
1.6 Estrutura do trabalho . . . . .	35
1.7 Trabalhos publicados e submetidos . . . . .	36
Cancelamento de Eco Acústico . . . . .	39
2.1 Introdução . . . . .	39
2.2 Cancelamento de eco acústico . . . . .	39
2.3 Filtragem adaptativa para o cancelamento de eco acústico . . . . .	43
2.3.1 Estruturas de processamento . . . . .	49
2.3.2 Cancelamento de eco acústico e redução de ruído . . . . .	55
2.3.3 Cancelamento de eco acústico e cancelamento de realimentação acústica . . . . .	57
2.3.4 Outros estudos . . . . .	58
2.4 Filtragem Espacial . . . . .	58
2.4.1 Conformadores de feixe . . . . .	60
2.4.2 Filtragem espacial em banda estreita . . . . .	61
2.4.3 Filtragem espacial em banda larga . . . . .	74
2.5 Cancelamento de eco acústico auxiliado por arranjo de microfones . . . . .	95
2.5.1 Formulação da estrutura BF-AEC . . . . .	102
2.5.2 Abordagens relacionadas . . . . .	104
2.6 Resumo . . . . .	119
Análise estatística do Cancelador de eco acústico auxiliado por um Arranjo de microfones na forma direta . . . . .	121

3.1	Estratégia de cancelamento de eco acústico auxiliado por um arranjo de microfones . . . . .	121
3.1.1	Sinal de entrada do conformador de feixe . . . . .	122
3.1.2	Eco residual . . . . .	125
3.2	Modelo de Sinal para a análise . . . . .	125
3.2.1	Superfície de desempenho . . . . .	126
3.2.2	Espaço Factível . . . . .	129
3.3	Solução adaptativa baseada no gradiente estocástico . . . . .	130
3.3.1	Implementação da solução adaptativa baseada no gradiente estocástico . . . . .	132
3.4	Análise estatística . . . . .	134
3.4.1	Hipóteses Simplificadoras . . . . .	134
3.4.2	Modelo do comportamento médio dos coeficientes de Frost III (1972) . . . . .	137
3.4.3	Modelo da Covariância dos coeficientes de Godara e Cantoni (1986) . . . . .	139
3.4.4	Modelo da MOP a partir da Covariância dos coeficientes de Godara e Cantoni (1986) . . . . .	142
3.4.5	Modelo da Correlação do vetor de erro nos coeficientes . . . . .	142
3.5	Análise da convergência . . . . .	145
3.6	Condições de estabilidade . . . . .	148
3.7	Velocidade de convergência . . . . .	151
3.8	Modelo da MOP a partir da Correlação do vetor de erro nos coeficientes . . . . .	153
3.9	Modelo da MOP em regime-permanente . . . . .	154
3.10	Resumo . . . . .	156

	Análise estatística do Cancelador de eco acústico auxiliado por um Arranjo de microfones na forma GSC . . . . .	157
4.1	Forma GSC da Equação (3.20) . . . . .	159
4.2	Solução adaptativa baseada no gradiente estocástico . . . . .	161
4.2.1	Modelo para a análise . . . . .	164
4.2.2	Vetor de erro nos coeficientes . . . . .	164
4.3	Análise estatística . . . . .	165
4.3.1	Considerações sobre as hipóteses simplificadoras . . . . .	166
4.3.2	Modelo do comportamento médio dos coeficientes . . . . .	167
4.3.3	Modelo do comportamento da MOP . . . . .	168
4.3.4	Modelo do comportamento da matriz de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes do filtro sem restrições . . . . .	169

4.4	Análise de Convergência . . . . .	171
4.4.1	Condições de Estabilidade . . . . .	176
4.4.2	MOP em excesso . . . . .	181
4.4.3	Regime permanente da MOP em excesso . . . . .	182
4.5	Proposta de um novo algoritmo para a otimização conjunta . . . . .	185
4.5.1	Matriz de passos branqueadora . . . . .	186
4.6	Resumo . . . . .	189
Resultados . . . . .		191
5.1	Análise da superfície de desempenho . . . . .	191
5.2	Resultados para o AEC auxiliado por um arranjo de microfones na forma direta . . . . .	192
5.2.1	Verificação da precisão . . . . .	193
5.2.2	Curvas de desempenho . . . . .	195
5.2.3	Exemplos de Projeto . . . . .	202
5.3	Resultados para o AEC auxiliado por um arranjo de microfones na forma GSC . . . . .	213
5.3.1	Verificação da precisão . . . . .	214
5.3.2	Exemplos de Projeto . . . . .	220
5.4	Resumo . . . . .	227
Discussão e Conclusões . . . . .		229
6.1	Propostas para continuação do trabalho . . . . .	232
Apêndice A – Restrições para $\theta_{DOA} = 0$ . . . . .		237
Apêndice B – Restrições para $\theta_{DOA} \neq 0$ . . . . .		241
Apêndice C – Equivalência entre as soluções ótimas da forma direta e GSC . . . . .		249
Apêndice D – Equivalência entre as soluções adaptativas da forma direta e GSC . . . . .		253
Apêndice E – Determinação de $\mathbf{P}_e E\{\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{v}[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}^\top\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\}$ $\mathbf{P}_e$ . . . . .		257
Apêndice F – Determinação de $\mathbf{P}_e E\{\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}\mathbf{w}_{\text{opt}}^\top\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\}$ $\mathbf{P}_e$ . . . . .		259

Apêndice G – Determinação de $E\{s[n]s^\top[n]v[n]v^\top[n]s[n]s^\top[n]\}$	261
Apêndice H – Propriedades de $P_e R_{ss} P_e$	263
H.1 Número de autovalores positivos e natureza semi-definida positiva	263
H.2 Autovetores associados aos autovalores nulos	264
Apêndice I – Prova do teorema dos círculos de Gershgorin	267
Apêndice J – Equivalência entre uma adaptação da família LMS com matriz de passos e o LMS convencional	269
Apêndice K – Determinação de $E\{B_e^\top s[n]s^\top[n]B_e \vartheta[n]w_{\text{opt}}^\top s[n]s^\top[n]B_e\}$	271
Apêndice L – Determinação de $E\{B_e^\top s[n]s^\top[n]w_{\text{opt}}w_{\text{opt}}^\top s[n]s^\top[n]B_e\}$	275
Apêndice M – Determinação de $E\{B_e^\top s[n]s^\top[n]B_e \vartheta[n]\vartheta^\top[n]B_e^\top s[n]s^\top[n]B_e\}$	277
Apêndice N – Prova do Teorema da Diagonalização Simultânea	281
N.1 Prova do Teorema 1	281
Apêndice O – Geração de respostas ao impulso pelo modelo exponencial	285
O.1 Procedimento para determinação das respostas ao impulso	287
Apêndice P – Obtenção de plantas LEM espacialmente correlacionadas	289
P.1 Exemplo	293
P.1.1 Especificação	293

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Telefone de Graham Bell (Scientific American, 1877). . . . .	2
1.2	Diagrama de uma conexão de longa distância em que transformadores híbridos são necessários para a amplificação do sinal (BENESTY et al., 2001). . . . .	5
1.3	Sistema supressor de eco (BENESTY et al., 2001). . . . .	7
1.4	Funcionamento básico de um cancelador de eco de linha (BENESTY et al., 2001) . . . . .	8
1.5	Funcionamento de um AEC (baseado em (BREINING et al., 1999)) . . . . .	10
1.6	Diagrama básico de um AEC (baseado em (BREINING et al., 1999)) . . . . .	11
1.7	Diagrama de blocos de um filtro adaptativo. Baseado em Benesty et al. (2001) . . . . .	17
1.8	As quatro categorias básicas de aplicações de filtragem adaptativa (HAYKIN, 1993) . . . . .	20
1.9	Filtro adaptativo na forma transversal (HAYKIN, 1993) . . . . .	23
2.1	Estruturas de filtragem adaptativa com uso de filtros preditores (BREINING et al., 1999). . . . .	48
2.2	Diagrama de blocos de um filtro adaptativo operando no domínio da frequência (BREINING et al., 1999). . . . .	52
2.3	Estrutura de processamento em sub-bandas com atraso. Os bancos de filtros são indicados pelos blocos em linhas tracejadas (síntese) e pontilhadas (análise) (LEE; GAN; KUO, 2009). . . . .	54
2.4	Um exemplo de um arranjo de sensores com 4 elementos e um sinal incidente (LIU; WEISS, 2010) . . . . .	62
2.5	Onda plana se propagando na direção $z$ de um sistema de coordenadas Cartesiano (LIU; WEISS, 2010) . . . . .	63
2.6	Conformador de feixes adaptativo de banda estreita (HAYKIN, 1993) . . . . .	66
2.7	Arranjo de sensores linear uniforme (TREES, 2002) . . . . .	67
2.8	Atraso espacial quando uma onda plana incide em um arranjo linear e uniforme de sensores . . . . .	69
2.9	Diagrama de irradiação de um conformador de feixe com os coeficientes da Equação (2.20) e $L = \lambda_{NB}/2$ . . . . .	73
2.10	Estrutura geral para conformação de feixes de banda larga em sua forma direta (FROST III, 1972) . . . . .	76

2.11	Estrutura geral para conformação de feixes de banda larga adaptativo em sua forma direta (FROST III, 1972) . . . . .	83
2.12	Plano das restrições $C^\top \mathbf{b} = \mathbf{f}$ e o subespaço $C^\top \mathbf{b} = \mathbf{0}$ definido pelas restrições . . . . .	89
2.13	Ação da matriz $\mathbf{P}$ projetando uma solução no espaço complementar ao espaço factível . . . . .	90
2.14	Exemplo de uma iteração do algoritmo CLMS . . . . .	90
2.15	Estrutura geral para a conformação de feixes de banda larga em sua forma GSC (GRIFFITHS; JIM, 1982) . . . . .	91
2.16	Estruturas genéricas para combinação de AEC e conformação de feixe (BRANDSTEIN; WARD, 2001) . . . . .	98
2.17	Estrutura AEC-BF adaptativa baseada em (GUO et al., 2011a; GUO et al., 2011b; GUO et al., 2011c; GUO et al., 2013) . . . . .	99
2.18	Estrutura BF-AEC na forma direta (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2011; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2013; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a) . . . . .	101
5.1	$E\{d^2[n]\}_{\min}$ em função de $M$ e $N_{\text{AEC}}$ (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2011) . . . . .	193
5.2	Comparação entre as previsões do modelo proposto e simulações de Monte-Carlo (média de 150 realizações) para sinais de <i>far-end</i> com diferentes estatísticas ( $M = 2$ , $N_h = 1024$ , $F = 4$ , $N_{\text{BF}} = 16$ , $N_{\text{AEC}} = 1039$ , variância do ruído $10^{-2}$ ) (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a) . . . . .	194
5.3	$E\{d^2[\infty]\}$ em função de $\mu$ para diferentes valores de $M$ (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a). . . . .	197
5.4	$E\{d^2[\infty]\}$ em função de $N_{\text{AEC}}$ e $M$ . O sinal de <i>far-end</i> é um sinal AR1(-0.9), a potência do ruído é $10^{-2}$ e $\mu = 0.05\mu_{\text{crit}}$ (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a). . . . .	198
5.5	Comportamento transitório da MOP para plantas LEM atualizadas pelo modelo de caminhada aleatória com diferentes graus de não-estacionariedade. Média de 100 realizações (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a). . . . .	201
5.6	Comportamento transitório da MOP para direção de chegada do sinal desejado em $\theta_{\text{DOA}} = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	203
5.7	Comportamento transitório dos sistemas projetados no Exemplo de Projeto 1 para $T_R(60) = 300$ ms (modelo e simulação) (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a). . . . .	207

5.8	Comportamento transitório dos sistemas projetados no Exemplo de Projeto 1 para $T_R(60) = 100$ ms (modelo e simulação) (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a). . . . .	208
5.9	Simulação de Monte-Carlo avaliando a MOP para sinais não-estacionários baseados em sinais de fala reais com pausas removidas (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a). . . . .	210
5.10	Comportamento transitório da MOP para o Exemplo de projeto 2 (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a). . . . .	212
5.11	Comparação entre as previsões do modelo proposto e simulações de Monte-Carlo (média de 300 realizações) para sinais de <i>far-end</i> com diferentes estatísticas ( $M = 2$ , $N_h = 128$ , $F = 4$ , $N_{BF} = 16$ $N_{AEC} = 128$ ) . . . . .	215
5.12	Comparação entre as previsões do modelo proposto e simulações de Monte-Carlo do Exemplo 2 (média de 20 realizações) para sinais de <i>far-end</i> AR1(-0.9) ( $M = 2$ , $N_h = 500$ , $F = 4$ , $N_{BF} = 16$ $N_{AEC} = 515$ ) (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014b). . . . .	217
5.13	Comparação entre as previsões do modelo proposto e simulações de Monte-Carlo do Exemplo 3 (média de 20 realizações) para sinais de <i>far-end</i> AR1(-0.9) ( $M = 2$ , $N_h = 500$ , $F = 4$ , $N_{BF} = 16$ $N_{AEC} = 515$ ) (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014b). . . . .	218
5.14	Simulação de Monte-Carlo para o Exemplo 4 (média de 100 realizações) . . . . .	221
5.15	MOP em regime-permanente $E\{d^2[\infty]\}$ em função de $N_{AEC}$ para diferentes valores de $M$ . O sinal de <i>far-end</i> é um sinal AR1(-0.9) e a potência do ruído é $10^{-2}$ . . . . .	223
5.16	Simulação de Monte-Carlo do Exemplo de projeto 1 utilizando sinais de fala com pausas removidas (média de 50 realizações) . . . . .	224
5.17	Previsão do modelo e simulação de Monte-Carlo para o Exemplo de projeto 2 . . . . .	227
J.1	Estrutura de processamento com o algoritmo LMS convencional equivalente à Equação (J.1) . . . . .	270
P.1	Componentes da resposta ao impulso . . . . .	296
P.2	Respostas ao impulso de plantas LEM . . . . .	298





## LISTA DE TABELAS

1.1	Principais algoritmos adaptativos para cancelamento de eco, suas funções custo e complexidades computacionais por iteração considerando o processamento em banda cheia ( <i>full-band</i> ) (OLYAEI et al., 2010; SAYED, 2008; ZAKHAROV; WHITE; LIU, 2008) . . . . .	29
5.1	Parâmetros do Exemplo de Projeto 1 com $T_R(60) = 300$ ms (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a) . . . . .	206
5.2	Parâmetros do Exemplo de Projeto 1 com $T_R(60) = 100$ ms (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a) . . . . .	209
5.3	Parâmetros de projeto para o Exemplo de projeto 2 (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a) . . . . .	211
5.4	Parâmetros de projeto para o Exemplo de projeto 3 (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a) . . . . .	213
5.5	Parâmetros para o Exemplo de Projeto 1 . . . . .	222
P.1	Fator de ponderação devido à não uniformidade na amostragem de $\theta$ para o Exemplo . . . . .	294



## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AEC	Acoustic Echo Cancellor.
AM	Arranjo de Microfones.
APA	Affine Projections algorithm.
BF	Beamformer.
BIBO	Bounded-input bounded-output.
CLMS	Constrained Least Mean-Square.
DCF	Decorrelation Filter.
DCT	Discrete cosine transform.
DFT	Discrete Fourier Transform.
DOA	Direção de chegada.
ERLE	Echo Return Loss Enhancement.
FIR	Finite impulse response.
GEIC	Generalized echo and interference canceler.
GSC	Generalized Sidelobe Cancellor.
HDTV	High Definition Television.
IDCF	Inverse Decorrelation Filter.
IDFT	Inverse Discrete Fourier Transform.
IIR	Infinite impulse response.
IP	Internet Protocol.
ITU	International Telecommunication Union.
LCMP	Linearly constrained minimum power.
LCMV	Linearly Constrained Minimum Variance.
LEM	Loudspeaker Enclosure Microphone.
LMS	Least Mean-Square.
LOS	Line-of-sight.
MOP	Mean output power.
MPDR	Minimum power distortionless response.
MSE	Mean Square error.
MVDR	Minimum-variance distortionless response.
NLMS	Normalized Least-Mean Square.
PSO	Particle Swarm Optimization.
PSTN	Public Switched Telephone Network.
RLS	Recursive least squares.
RLS-DCD	RLS using dichotomous coordinate descent iterations.
RSB	Reference Signal Based.
SNR	Signal to Noise Ratio.
SVDs	Singular Value Decomposition.

TF-GSC Transfer-Function Generalized Sidelobe Canceller.  
WFS Wave-Field Synthesis.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$u[n]$	Sinal de entrada da planta
$r[n]$	Ruído de medição
$e[n]$	Sinal de eco
$y[n]$	Saída da planta
$d[n]$	Erro de estimação
$\mathbf{u}_h[n]$	Vetor de sinal de entrada da planta
$\mathbf{h}$	Vetor de resposta ao impulso do sistema desconhecido
$\hat{y}[n]$	Saída estimada da planta
$\hat{\mathbf{h}}[n]$	Vetor de resposta ao impulso estimada da planta
$\mathbf{u}_{\hat{h}}[n]$	Vetor de sinal de referência
$N_{\text{AEC}}$	Comprimento do cancelador de eco
$E\{\cdot\}$	Valor esperado (esperança estatística)
$\gamma$	Fator de Esquecimento do algoritmo RLS
$d[n - i n]$	Erro de estimação para o vetor de entrada do instante $n - i$ utilizando a solução obtida no instante $n$
$N_u$	número de iterações necessárias para a solução de um problema de otimização quadrático
$\omega$	Frequência Angular normalizada
$Y(e^{j\omega})$	Transformada de Fourier do Sinal Desejado
$\hat{Y}(e^{j\omega})$	Transformada de Fourier do Sinal de Saída estimado da Planta
$U(e^{j\omega})$	Transformada de Fourier do Sinal de Entrada da Planta
$H(e^{j\omega, n})$	Resposta em Frequência do filtro adaptativo
$D(e^{j\omega})$	Transformada de Fourier do Erro de Estimação
$N_{\text{sb}}$	Número de Sub-bandas
$N_d$	Fator de decimação
$\hat{\mathbf{h}}_{\text{SB}_i}[n]$	$i$ -ésimo Sub-filtro adaptativo
$S_i(z)$	$i$ -ésimo Filtro do Banco de Síntese
$A_i(z)$	$i$ -ésimo filtro do banco de Análise
$y_i[n]$	Componente do Sinal Desejado Associada à $i$ -ésima Sub-banda
$\Omega_{\text{NB}}$	Frequência angular de um sinal com banda estreita
$k$	Número de onda ou frequência espacial
$c$	Velocidade de propagação da onda
$\lambda_{\text{NB}}$	Comprimento de onda
$\mathbf{k}$	Vetor de número de onda

$\varphi(t, \mathbf{v})$	Fase de um sinal contínuo no espaço
$\mathbf{U}$	Ângulo zenital
$f_s$	Frequência de amostragem
$M$	Número de microfones
$\omega_{\text{NB}}$	Frequência angular normalizada de um sinal com banda estreita
$y_{\text{NB}}[n]$	Sinal de saída de um conformador de feixes de banda estreita
$\mathbf{x}_s[n]$	Vetor de <i>snapshot</i> de amostras de entrada $n$
$\tau_m(\theta)$	Atraso de propagação para um sinal incidente em um ângulo $\theta$ entre o sensor 0 até o sensor $\theta$
$P_{\text{NB}}(e^{j\omega_{\text{NB}}}, \theta)$	Resposta do arranjo de sensores com banda estreita
$\boldsymbol{\eta}_{\text{NB}}(e^{j\omega}, \theta)$	Vetor de <i>steering</i> do arranjo de sensores com banda estreita
$L$	Distância entre sensores adjacentes
$F_{\text{NB}}(e^{j\omega_{\text{NB}}})$	Resposta em Frequência do conformador de feixe de banda estreita para $\theta = \theta_{\text{DOA}}$
$\theta_{\text{DOA}}$	Direção de chegada do sinal desejado
$N_{\text{BF}}$	Comprimento dos filtros FIR do conformador de feixe
$\mathbf{x}_b[n]$	Vetor de entrada do conformador de feixes de banda larga
$y_{\text{fix}}[n]$	Saída do conformador de feixes de banda larga fixo
$\mathbf{b}_{\text{fix}}$	Vetor de coeficientes do conformador de feixe de banda larga fixo
$P(e^{j\omega}, \theta)$	Resposta do conformador de feixes de banda larga fixo a um sinal incidente em um ângulo $\theta$ na frequência $\omega$
$\boldsymbol{\eta}(e^{j\omega}, \theta)$	Vetor de <i>steering</i> para o conformador de feixe de banda larga
$\mathbf{C}$	Matriz de restrição
$\mathbf{f}$	Vetor de resposta na direção desejada
$N_{\text{C}}$	Número de restrições
$\mathbf{b}[n]$	Vetor de coeficientes do conformador de feixe de banda larga adaptativo
$y[n]$	Saída do conformador de feixes de banda larga adaptativo
$\mathbf{R}_{\mathbf{x}_b \mathbf{x}_b}$	Matriz de autocorrelação de $\mathbf{x}$
$\boldsymbol{\varsigma}$	Vetor de multiplicadores de Lagrange
$\mu$	Passo de adaptação
$\mathbf{P}$	Matriz de Projeção no espaço ortogonal complementar às colunas de $\mathbf{C}$

$I_N$	Matriz identidade $N \times N$
$\mathbf{b}_f$	Solução de mínima norma
$\mathbf{B}$	Matriz de Bloqueio
$y_q[n]$	Sinal de saída quiescente
$\mathbf{b}_{IC}[n]$	Módulo de cancelamento de interferências
$y_{IC}[n]$	Sinal de saída do módulo de cancelamento de interferências
$\mathbf{b}_{ICopt}$	Solução ótima do LCMV na forma GSC
$\hat{\mathbf{h}}_i[n]$	$i$ -ésimo cancelador de eco associado ao $i$ -ésimo microfone na estrutura AEC-BF
$\hat{y}_i[n]$	Sinal de saída do $i$ -ésimo AEC na estrutura AEC-BF
$r_i[n]$	Sinal de Ruído mais Fala local associado ao $i$ -ésimo microfone
$\mathbf{H}$	Matriz de respostas ao impulso de plantas LEM
$\mathbf{u}[n]$	Vetor de amostras do sinal do <i>far-end</i> entendido
$\mathbf{s}[n]$	Vetor de entrada estendido
$N_w$	Número de amostras do vetor de entrada estendido
$\mathbf{w}[n]$	Vetor de coeficientes estendido
$\mathbf{R}_{ss}$	Matriz de autocorrelação do vetor de entrada estendido
$\mathbf{C}_e$	Matriz de restrição estendida
$\mathbf{w}_{opt}$	Solução ótima do problema de otimização conjunta
$J_{min}$	MOP mínimo
$\mathbf{P}_e$	Matriz de projeção estendida
$\hat{\nabla}_{\mathbf{w}}(E\{d^2[n]\})$	Estimativa instantânea não-polarizada do gradiente da superfície de desempenho MOP
$\mathbf{K}_{ww}[n]$	Matriz de covariância do vetor de coeficientes estendido
$\hat{\nabla}_{\mathbf{w}}(E\{d^2[n]\})$	Estimativa do gradiente da função custo
$\text{cov}(\hat{\nabla}_{\mathbf{w}}(E\{d^2[n]\}))$	Matriz de covariância de $\hat{\nabla}_{\mathbf{w}}(E\{d^2[n]\})$
$\mathbf{R}_{ww}[n]$	Matriz de correlação do vetor de coeficientes estendido
$\mathbf{R}_{vv}[n]$	Matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes estendidos
$\mathbf{Q}_v$	Matriz de autovetores normalizados de $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e$
$\mathbf{\Lambda}_{ss}$	decomposição ortogonal em autovalores da matriz $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e$
$\mathfrak{R}_{vv}[n]$	Projeção de $\mathbf{R}_{vv}[n]$ no espaço dos autovetores de $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e$
$\tilde{\lambda}_{ss}$	Vetor de autovalores de $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e$
$\lambda_{ss}$	Vetor de autovalores não-nulos de $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e$

$\tilde{\rho}_{\text{vv}}$	Vetor de elementos da diagonal de $\mathfrak{R}_{\text{vv}}[n]$
$\Phi$	Matriz de Transição de estados de $\rho_{\text{vv}}[n]$
$q_e$	Solução quiescente estendida
$B_e$	Matriz de bloqueio estendida
$\psi$	Vetor de coeficientes da solução sem-restrições
$R_{\text{bloc}}$	Matriz de autocorrelação do sinal estendido bloqueado
$\mu_{\text{AEC}}$	Passo de adaptação do AEC
$\mu_{\text{BF}}$	Passo de adaptação do BF
$\mathcal{M}$	Matriz de passos
$\vartheta[n]$	Vetor de erro nos coeficientes do filtro sem restrições
$p(a, b)$	Função densidade de probabilidade conjunta de a e b
$R_{\vartheta\vartheta}[n]$	Matriz de autocorrelação do filtro sem restrições
$\Lambda_{\text{bloc}}$	Matriz de autovalores de $R_{\text{bloc}}$
$Q_{\text{bloc}}$	Matriz de autovetores normalizados de $R_{\text{bloc}}$
$\xi[n]$	Vetor de erro nos coeficientes do filtro sem restrições transformado
$R_{\xi\xi}[n]$	Matriz de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes do filtro sem restrições transformado
$R_{\text{mod}}$	matriz de autocorrelação do vetor de entrada bloqueado no domínio transformado
$Q_{\text{mod}}$	Matriz de autovetores normalizados de $R_{\text{mod}}$
$\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n]$	Matriz de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes transformado projetada no espaço dos autovetores de $R_{\text{mod}}$
$\rho_{\xi}[n]$	Vetor dos elementos da diagonal principal da matriz de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes transformado projetada no espaço dos autovetores de $R_{\text{mod}}$
$\lambda_{\text{mod}}$	Vetor contendo os autovalores de $R_{\text{mod}}$
$\sigma_{\text{mod}}$	vetor contendo os valores singulares de $R_{\text{mod}}$
$\mathcal{W}[n]$	Matriz de pesos do algoritmo Newton-Raphson
$\nabla_{\psi}^2 (E\{d^2[n]\})$	Matriz Hessiana da Equação (4.2)
$R_{u_h u_h}$	Matriz de autocorrelação do vetor de entrada da planta desconhecida
$\chi$	Grau de não-estacionariedade
$R_{\text{vvpDF}}[n]$	Matriz de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes na forma direta transformado
$R_{\text{ssDF}}$	Matriz de autocorrelação do vetor de sinal de entrada projetado transformado
$N_f$	Número de restrições inicial para a aproximação de Buckley (1987)



$\mathbf{f}_{N_t}(e^{j\omega})$	Vetor de resposta em frequência na direção desejada
$(\cdot)^H$	Operador Hermitiano
$(\cdot)^*$	Operador de conjugação complexa
$\Re\{\cdot\}$	Operador de extração da parte real
$\Im\{\cdot\}$	Operador de extração da parte imaginária
$\Sigma_C$	Matriz de valores singulares de $C_R$
$U_C$	Matriz de vetores singulares à esquerda de $C_R$
$V_C$	Matriz de vetores singulares à direita de $C_R$
$\Sigma_{N_S}$	Submatriz dos $N_S$ valores singulares mais significativos de $C_R$
$\Sigma_0$	Submatriz dos $MN_{BF} - N_S$ valores singulares menos significativos de $C_R$
$\mathbf{0}_{a \times b}$	Matriz nula de ordem $a \times b$
$\mathbf{b}_{opt}$	Solução ótima do LCMV na forma direta
$\text{rank}(M)$	Posto da matriz $M$
$F_t$	Fator de amostragem temporal
$d_M$	Distância entre microfones adjacentes
$F_s$	Fator de amostragem espacial
$F$	Fator de sobreamostragem

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Introdução

Neste capítulo são introduzidos os conceitos iniciais para melhor compreensão do trabalho e apresentados os objetivos principais, sua relevância e o corrente estado da arte. Basicamente três tópicos são abordados: cancelamento de eco acústico, filtragem adaptativa e conformação de feixe.

## 1.2 Cancelamento de eco

O uso comercial da telefonia ocorreu apenas um ano após Alexander Graham Bell requerer a patente para o aparelho de telefone em 1876. Entretanto, existem outras tentativas de transmissão da voz através de circuitos elétricos anteriores. Além de Graham Bell, Charles Bourseul (1854), Antonio Meucci (1855), Philipp Reis (1861) e Elisha Grey (1875) também foram pioneiros no estudo da transmissão de voz através de circuitos elétricos (HÄNSLER; SCHMIDT, 2004).

Os primeiros aparelhos telefônicos demandam o uso de ambas as mãos; uma deveria segurar o alto-falante próximo ao ouvido e outra deveria segurar o microfone próximo à boca conforme ilustrado na Figura 1.1. Devido à ausência de elementos eletroacústicos adequados (transdutores, amplificadores, etc) na época, a fonte sonora (boca) precisava estar próxima do microfone e o receptor sonoro (ouvido) próximo ao alto-falante. Contudo, estes aparelhos apresentavam condições quase ideais de funcionamento: alta relação sinal-ruído (SNR) no microfone, bom acoplamento acústico entre o

alto-falante e o ouvido e alta atenuação acústica entre o alto-falante e o microfone.



Figura 1.1: Telefone de Graham Bell (Scientific American, 1877).

A evolução da interface do homem com o telefone ocorreu por meio da liberação de uma das mãos ao fixar o aparelho telefônico, incluindo seu microfone, a uma parede. Assim, apenas uma mão é ocupada segurando o alto-falante próximo ao ouvido. Posteriormente, o microfone e o alto-falante foram integrados a um único *handset*. Esta interface é, ainda hoje, a mais popular nos aparelhos telefônicos tradicionais. O próximo desafio consiste em construir sistemas *hands-free* que não demandem o uso das mãos dos usuários e permitam que a comunicação ocorra a uma distância razoável do aparelho, mantendo a qualidade dos sinais comparável a uma conversa local.

Segundo Hänsler e Schmidt (2006), a comunicação através de sistemas *hands-free*, com conforto similar a uma conversa local, deve apresentar as seguintes características:

- Os sinais de fala devem apresentar níveis de potência confortáveis para ambos os usuários sem que ocorra instabilidade do laço eletro-acústico;
- Os ecos gerados pelo sinal emitido pelo alto-falante e captados pelos microfones devem ser reduzidos para um nível aceitável sem cancelamento do sinal de voz do usuário local;
- O nível de ruído deve ser reduzido ao mínimo possível.

O aumento da distância entre o usuário e o microfone em sistemas *hands-free* causa uma diminuição da relação entre a potência do sinal de fala do usuário e a sobreposição de ruídos e ecos. Em Emling (1957) as perdas no laço de transmissão associadas à ausência do *handset* são estimadas em torno de 20 dB. Nesse trabalho, o termo ruído designa todas as ondas sonoras, exceto aquelas emitidas pelo usuário e pelo alto-falante, que são captadas nos microfones. No contexto desse trabalho, o termo eco representa a transmissão de parte do sinal remoto (*far-end*) de volta ao transmissor. Ele é resultado de vários acoplamentos, isto é, várias interações entre fenômenos físicos ao longo de toda a cadeia de transmissão. Três tipos de acoplamentos são mais significativos (JEANNES et al., 2001):

- Acoplamentos elétricos devido a interações na rede de transmissão (chaveamento da malha com dois fios para a malha com 4 fios e vice-versa);
- Acoplamentos mecânicos entre o alto-falante e microfones (propagação de ondas sonoras através do aparelho telefônico);

- Acoplamentos acústicos devido a reflexões de ondas sonoras emitidas pelo alto-falante em um ambiente reverberante que são captadas pelo microfone.

A presença de ruídos e ecos prejudica a inteligibilidade da conversação (BREI-NING et al., 1999; HÄNSLER; SCHMIDT, 2004), confunde sistemas de reconhecimento de palavras (em aplicações multimídia ou sistemas telefônicos comandados por voz) (HERBORDT; NAKAMURA; KELLER-MANN, 2005; MIYABE et al., 2007; JUANG; SOONG, 2001; TATEKURA; SARUWATARI; SHIKANO, 2001) e atrapalha o funcionamento de codificadores de voz (típicos em sistemas de telefonia celular GSM (ETS 300 961, 2000)).

### **1.2.1 Cancelamento de eco de linha**

Os terminais de telefonia analógicos em geral são conectados a uma malha com dois fios que é capaz de comunicação *full-duplex* (bi-direcional e com transmissão simultânea em ambos os sentidos). Entretanto, quando a distância entre os terminais excede 56 km, em geral as perdas do meio de transmissão tornam necessária a amplificação dos sinais envolvidos (BENESTY et al., 2001). Nesse caso, são necessários circuitos distintos para cada direção de transmissão e os terminais se conectam a uma malha intermediária com 4 fios por meio de uma híbrida (ou transformador híbrido). Assim, a híbrida precisa evitar que sinais em um sentido de transmissão sejam retornados através do par dedicado ao sentido contrário. Nesse caso, é necessário que a impedância da híbrida entre os terminais conectados à malha com 2

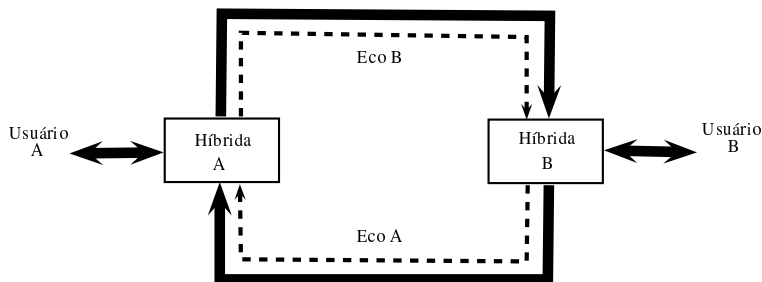


Figura 1.2: Diagrama de uma conexão de longa distância em que transformadores híbridos são necessários para a amplificação do sinal (BENESTY et al., 2001).

fios seja idêntica à impedância da malha com 2 fios. Contudo, na prática, em uma rede telefônica típica, o número de circuitos com 4 fios é muito menor que o número de circuitos com 2 fios. Devido à diferenças geográficas (que causam uma variação no comprimento e tipo dos fios da malha), número de extensões e diferentes modelos de telefone o casamento de impedâncias na híbrida é extremamente raro (WEINSTEIN, 1977). O retorno de parte do sinal transmitido devido a transformadores híbridos não-ideais é conhecido como eco de linha e deve ser cancelado de alguma maneira. Esta situação está ilustrada na Figura 1.2

As primeiras soluções no tratamento de ecos foram baseadas na supressão do sinal transmitido. Essas soluções são baseadas na premissa de que os sinais de voz locais apresentam amplitudes significativamente maiores que os sinais de eco e ruídos ambientais. A implementação dessas soluções é feita por meio de dispositivos com não-linearidades do tipo zona morta (*center clipper*). Durante períodos de ausência do sinal local (*near-end*),

este dispositivo é capaz de remover completamente ecos e ruídos ambientais com amplitudes inferiores a um limiar. Contudo, a fala local e os ecos têm propriedades estatísticas semelhantes, logo a decisão de chaveamento é feita, essencialmente, baseada na potência instantânea do sinal captado. Assim, o algoritmo de controle muitas vezes comete equívocos enviando trechos de eco com potência significativa e cortando trechos de fala com baixa potência. Devido à sua característica não-linear, esses dispositivos também causam distorções de cruzamento por zero (*crossover distortion*) no sinal de fala local de maneira semelhante a amplificadores de potência classe B (BOYLESTAD; NASHELSKY, 2002). Apesar de suas limitações, os supressores de eco são uma solução satisfatória para plantas com atrasos de até 100 ms (correspondentes a alguns milhares de quilômetros) (BENESTY et al., 2001) e, devido a sua simplicidade, esses dispositivos ainda são utilizados em aparelhos auditivos (DILLON, 2001). Tentativas de incrementar o desempenho dos supressores envolvem o ajuste adaptativo dos limiares e inclinações (HÄNSLER; SCHMIDT, 2004). Um diagrama esquemático de um sistema supressor de eco é ilustrado na Figura 1.3.

Com o advento das comunicações por satélite em 1965, as conexões telefônicas passaram a admitir atrasos de propagação da ordem de até 500–600 ms (SONDHI; BERKLEY, 1980). Nestas condições o desempenho de supressores de eco não é satisfatório e o uso de canceladores de eco adaptativos, inicialmente propostos por Sondhi e Presti (1966), passou a ser amplamente difundido. A principal vantagem que torna os canceladores de eco de linha tão atrativos é que, ao contrário de outras formas de controle do eco, o

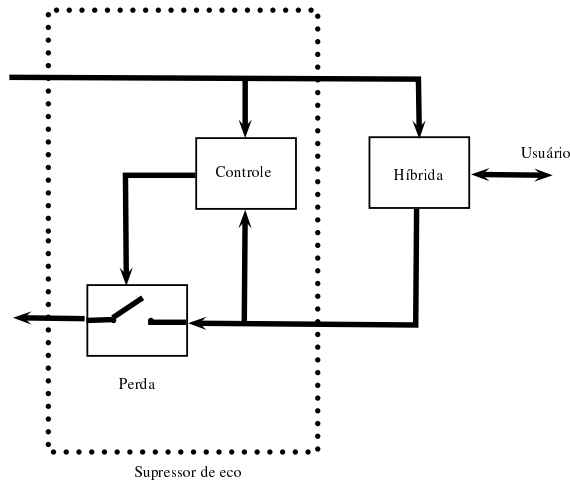


Figura 1.3: Sistema supressor de eco (BENESTY et al., 2001).

cancelador de eco de linha não opera diretamente no sinal de retorno. Portanto, sua operação permite a manutenção ininterrupta do sinal de fala local desde que esse sinal seja decorrelacionado do sinal remoto (BREINING et al., 1999). Uma segunda vantagem é a possibilidade da implementação do cancelador de eco de linha por meio de um filtro adaptativo que permite a adaptação a respostas variantes no tempo.

Embora o estudo do cancelamento de eco de linha esteja intimamente relacionado ao cancelamento de eco acústico, o segundo fazendo o uso de diversas técnicas originalmente desenvolvidas para o primeiro, neste trabalho o estudo será concentrado somente no estudo de cancelamento de eco acústico.



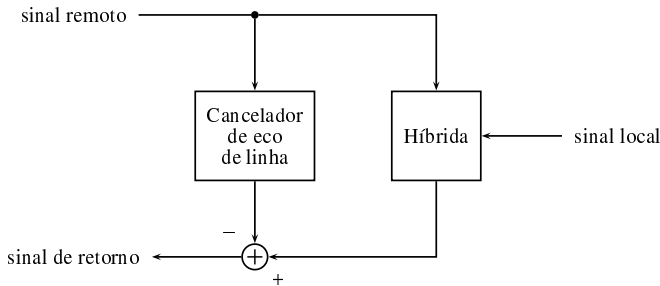


Figura 1.4: Funcionamento básico de um cancelador de eco de linha (BENESTY et al., 2001)

### 1.2.2 Cancelamento de eco acústico

O cancelamento de eco acústico difere do cancelamento de eco de linha principalmente pela natureza dos caminhos de eco. A planta a ser identificada é um sistema alto-falante, sala reverberante e microfone (LEM) cuja duração da resposta ao impulso é, normalmente, várias vezes mais longa (algumas centenas de milissegundos para um escritório e dezenas de milissegundos para o interior de um carro) do que a duração da resposta ao impulso de um transformador híbrido e pode mudar rapidamente a qualquer instante (por exemplo devido ao movimento de uma pessoa ou à abertura de uma porta) (BREINING et al., 1999). Reflexões com atrasos menores que 10 ms são definidos como reverberações (de ALMEIDA, 2004) e não costumam atrapalhar a qualidade da conversação. Em geral, atrasos dessa ordem não são cancelados em virtude de raramente ocorrerem conversações em ambientes anecoicos (GAY; BENESTY, 2000; BENESTY et al., 2001). Assim, a

ausência de reverberações causa certo desconforto aos usuários e, portanto, seu cancelamento não é desejável em sistemas práticos. A duração da resposta da planta é afetada ainda, no caso de comunicações digitais sem fio, pelos tempos de processamento necessários para a conversão, compressão, codificação, etc (BARIK; BHARDWAJ; NATH, 2010).

As primeiras soluções para tratamento de ecos acústicos consistiam no uso de alto-falantes e microfones direcionais posicionados de maneira a evitar que direções de alta emissão de potência dos alto-falantes coincida com direções de alta sensibilidade dos microfones. De maneira alternativa, a confecção de salas com paredes, chão e teto com reflexão acústica reduzida gerando câmaras anecoicas pode levar a resultados semelhantes. Estas soluções tendem a ser extremamente onerosas, necessitam de ambientes previamente preparados e são incapazes de se adequar a mudanças no ambiente acústico.

Ao contrário das soluções propostas anteriormente, o cancelador de eco acústico (AEC) consiste no uso de um filtro em paralelo à planta LEM e é capaz, quando bem projetado, de garantir a comunicação *full-duplex* de maneira economicamente viável em diferentes ambientes. O funcionamento de um AEC é ilustrado na Figura 1.5 em que  $u[n]$  representa o sinal de entrada da planta,  $r[n]$  representa o ruído na medição,  $e[n]$  representa o sinal de eco,  $y[n]$  é a saída da planta e  $d[n]$  é o erro de estimação (sinal de retorno). Assumindo o modelo da planta LEM por meio de um filtro com resposta ao impulso finita (FIR) linear, quando a resposta ao impulso do AEC for idêntica à da planta, o mesmo sinal de *far-end* produz respostas idênticas

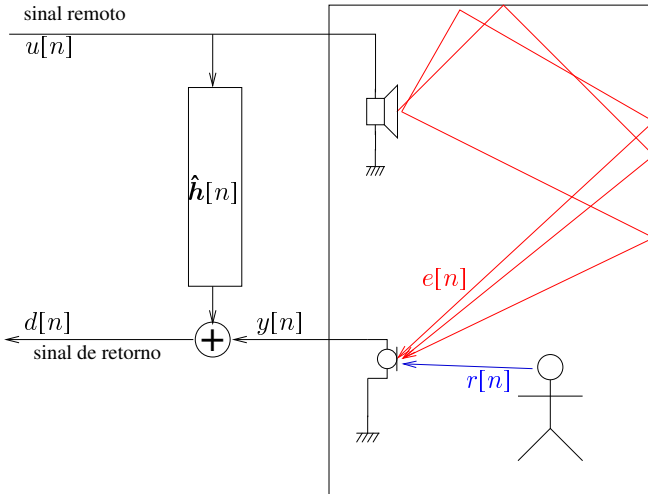


Figura 1.5: Funcionamento de um AEC (baseado em (BREINING et al., 1999))

na planta LEM e no AEC. Essas respostas podem ser subtraídas resultando no desaparecimento completo do eco acústico no sinal transmitido. Assim, os sinais recebido e transmitido são perfeitamente desacoplados garantindo que ecos acústicos não são retransmitidos ao transmissor (BREINING et al., 1999). O diagrama de blocos de um AEC é mostrado na Figura 1.6.

Neste trabalho, o efeito da variação no tempo da planta desconhecida não é estudado. Essa consideração é necessária para permitir o tratamento matemático nos Capítulos 3 e 4. Portanto, no restante deste trabalho considera-se que  $\hat{h}[n] = h$ .

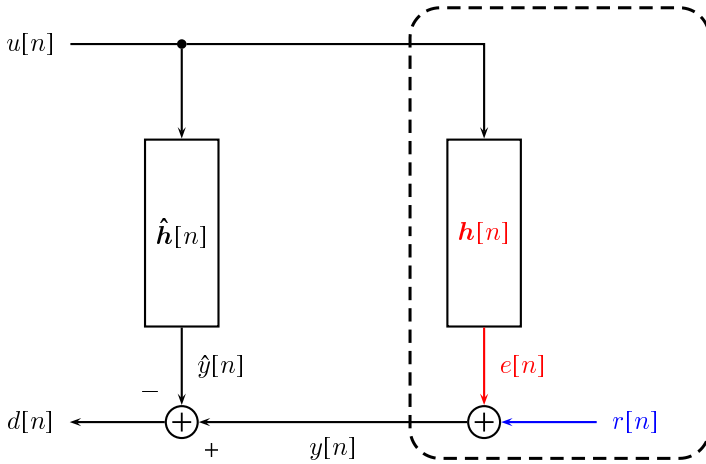


Figura 1.6: Diagrama básico de um AEC (baseado em (BREINING et al., 1999))

### Efeito do comprimento do AEC

Assumindo o modelo da planta LEM por meio de um filtro FIR linear e invariante no tempo e a ausência de outros sinais no sistema, o sinal de eco pode ser calculado pela convolução do sinal de referência pela resposta ao impulso da planta de comprimento arbitrário  $N_h$

$$e[n] = \mathbf{h}^\top \mathbf{u}_h[n] \quad (1.1)$$

em que

$$\mathbf{u}_h[n] = [u[n] \quad u[n-1] \quad \cdots \quad u[n-(N_h-1)]]^\top \quad (1.2)$$

representa o vetor de sinal de entrada da planta obtido a partir de amostras do sinal de entrada da planta. Nesse caso o sinal de entrada da planta é o sinal remoto recebido do *far-end*. O vetor  $\mathbf{h}$  contém os coeficientes da resposta ao impulso da planta desconhecida

$$\mathbf{h} = [h_0 \quad h_1 \quad \cdots \quad h_{N_h-1}]^\top. \quad (1.3)$$

O AEC produz uma estimativa da saída da planta

$$\hat{y}[n] = \hat{\mathbf{h}}^\top [n] \mathbf{u}_{\hat{h}}[n] \quad (1.4)$$

por meio do vetor de resposta ao impulso estimada da planta

$$\hat{\mathbf{h}}[n] = [\hat{h}_0[n] \quad \hat{h}_1[n] \quad \cdots \quad \hat{h}_{N_{\text{AEC}}-1}[n]]^\top \quad (1.5)$$

e do vetor do sinal de referência

$$\mathbf{u}_{\hat{h}}[n] = [u[n] \quad u[n-1] \quad \cdots \quad u[n-(N_{\text{AEC}}-1)]]^\top \quad (1.6)$$

em que  $N_{\text{AEC}}$  indica o comprimento da resposta ao impulso estimada. Em geral,  $N_h$  assume valores elevados, depende do ambiente acústico e não é conhecido exatamente. Portanto, na maioria dos projetos práticos tem-se a situação em que  $N_{\text{AEC}} < N_h$ .

O cancelamento máximo obtido com  $N_{\text{AEC}}$  coeficientes pode ser mensurado por meio da medida conhecida como *Echo Return Loss Enhancement* (ERLE). A ERLE relaciona, em decibéis, a potência do sinal de eco na ausência de qualquer cancelamento com a potência do eco na presença de

um cancelador de eco acústico

$$\text{ERLE}(\hat{\mathbf{h}}[n]) = 10 \log_{10} \frac{E\{e^2[n]\}}{E\{[e[n] - \hat{g}[n]]^2\}}. \quad (1.7)$$

Substituindo as Equações (1.1) e (1.4) na Equação (1.7) obtém-se uma expressão da ERLE em função do sinal de *far-end*

$$\text{ERLE}(\hat{\mathbf{h}}[n]) = 10 \log_{10} \frac{E\{(\mathbf{h}^\top \mathbf{u}_h[n])^2\}}{E\left\{\left[\mathbf{h}^\top \mathbf{u}_h[n] - \hat{\mathbf{h}}^\top [n] \mathbf{u}_h[n]\right]^2\right\}}$$

na qual o denominador pode ser escrito evidenciando a dependência da ERLE em função da diferença nos primeiros  $N_{\text{AEC}}$  coeficientes. Seja

$$\mathbf{h}_{\text{inicial}} = [h_0 \quad h_1 \quad \cdots \quad h_{N_{\text{AEC}}-1}]^\top$$

e

$$\mathbf{h}_{\text{residual}} = [h_{N_{\text{AEC}}} \quad h_{N_{\text{AEC}}+1} \quad \cdots \quad h_{N_h-1}]^\top.$$

Então a Equação (1.7) pode ser escrita como

$$\text{ERLE}(\hat{\mathbf{h}}[n]) = 10 \log_{10} \frac{\mathbf{h}^\top E\{\mathbf{u}_h[n] \mathbf{u}_h^\top [n]\} \mathbf{h}}{E\left\{\left[(\mathbf{h}_{\text{inicial}} - \hat{\mathbf{h}}[n])^\top \mathbf{u}_h[n] + \mathbf{h}_{\text{residual}}^\top \mathbf{u}_h[n - N_{\text{AEC}}]\right]^2\right\}}.$$

Assumindo que  $u[n]$  é um ruído branco, estacionário de média nula e fazendo

$\mathbf{h}_{\text{inicial}} = \hat{\mathbf{h}}$  a ERLE pode ser escrita como

$$\text{ERLE}(\mathbf{h}_{\text{inicial}}) = 10 \log_{10} \frac{\sum_{i=0}^{N_h-1} h_i^2}{\sum_{\ell=N_{\text{AEC}}}^{N_h-1} h_\ell^2}. \quad (1.8)$$

Assumindo que os coeficientes de  $\mathbf{h}$  apresentam um decaimento apro-

ximadamente exponencial (BREINING et al., 1999), então

$$\frac{|h_\ell|}{|h_0|} \approx e^{-\varpi\ell} \quad (1.9)$$

em que  $\varpi > 0$  e  $\ell = 0, \dots, N_h - 1$ . Substituindo a Equação (1.9) na Equação (1.8) tem-se

$$\begin{aligned} \text{ERLE}(\mathbf{h}_{\text{inicial}}) &= 10 \log_{10} \frac{\sum_{i=0}^{N_h-1} e^{-2\varpi i}}{e^{-2\varpi N_{\text{AEC}}} \sum_{\ell=0}^{N_h-N_{\text{AEC}}-1} e^{-2\varpi\ell}} \\ &= 10 \log_{10} \frac{\frac{1-e^{-2\varpi N_h}}{1-e^{-2\varpi}}}{e^{-2\varpi N_{\text{AEC}}} \frac{1-e^{-2\varpi(N_h-N_{\text{AEC}})}}{1-e^{-2\varpi}}} \\ &= 10 \log_{10} \frac{1-e^{-2\varpi N_h}}{e^{-2\varpi N_{\text{AEC}}} (1-e^{-2\varpi(N_h-N_{\text{AEC}})})}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

em que  $\sum_{i=0}^{N-1} a^i = \frac{1-a^N}{1-a}$ . Supondo que  $N_h$  é suficientemente elevado para modelar a resposta da planta LEM então  $e^{2\varpi N_h} \approx 0$ . Supondo ainda que  $N_h \gg N_{\text{AEC}}$  então  $e^{-2\varpi(N_h-N_{\text{AEC}})} \approx 0$ . Logo, a Equação (1.10) pode ser aproximada por

$$\begin{aligned} \text{ERLE}(\mathbf{h}_{\text{inicial}}) &\approx 10 \log_{10} e^{-2\varpi N_{\text{AEC}}} \\ &= 8.7\varpi N_{\text{AEC}}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

A Equação (1.11) indica que a ERLE, em condições ideais, depende linearmente da ordem do AEC (BREINING et al., 1999; SCHMIDT, 2000).

## Superfície de desempenho

A maneira mais simples de definir uma figura de mérito da qualidade de um AEC linear é utilizar a potência média do sinal  $d[n]$  como função

custo (WANG; BOVIK, 2009) e assumir independência estatística entre os sinais  $u[n]$  e  $r[n]$ . Procedendo como descrito, define-se

$$\hat{\mathbf{h}}_{\text{opt}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{h}}} E\{(y[n] - \hat{\mathbf{h}}^T \mathbf{u}_{\hat{\mathbf{h}}})^2\} \quad (1.12)$$

em que  $E\{\cdot\}$  corresponde ao valor esperado (esperança estatística). Outras maneiras de definir superfícies de desempenho para um AEC linear incluem a modelagem da solução ótima por meio de equações espaço-estado e a estimação de seus estados utilizando um filtro de Kalman (HELWANI; BUCHNER; SPORS, 2010a; HAYKIN et al., 1997) e a minimização do erro quadrático (*least-squares*) (HAYKIN, 1993). Para entradas estacionárias e planta LEM invariante no tempo, a solução ótima da Equação (1.12) é invariante no tempo e conhecida como filtro de Wiener (HAYKIN, 1993; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000; SAYED, 2008). Os filtros de Wiener não são adequados para trabalhar em situações em que os sinais envolvidos são não-estacionários. Nessas condições, a solução ótima da Equação (1.12) passa a ser variante no tempo.

O projeto de filtros de Wiener requer ainda informação *a priori* das estatísticas de segunda ordem dos sinais de entrada. O filtro é ótimo somente quando as estatísticas dos sinais coincidem com a informação utilizada durante o projeto do filtro. Uma solução é o cálculo de estimativas das estatísticas a partir de um conjunto de dados de treinamento. Este processo consiste em dois estágios. O primeiro realiza uma estimativa dos parâmetros estatisticamente relevantes enquanto o segundo utiliza estas estimativas para fazer aproximações da solução de Wiener de maneira não-recursiva. Esse



procedimento apresenta a desvantagem de demandar grande esforço computacional, o que dificulta sua aplicação em sistemas projetados para operar em tempo real (HAYKIN, 1993). De maneira alternativa, filtros adaptativos operam de maneira recursiva e aprimoram a solução utilizando recursos computacionais de maneira mais eficiente.

Devido à variação no tempo das respostas das plantas LEM, o projeto de um cancelador de eco utilizando filtros ótimos fixos não é uma alternativa viável. Assim, a solução mais utilizada na identificação da resposta é a filtragem adaptativa. Outras abordagens alternativas incluem o uso de otimização por enxame de partículas (PSO) (MAHBUB; ACHARJEE; FATTAH, 2010b; MAHBUB; ACHARJEE; FATTAH, 2010a), uso do algoritmo de Levinson (MADDALA; MAHESWAR, 2010), algoritmos de separação de fontes semi-cega (GUNTHER, 2012) e redes neurais artificiais (BIRKETT; GOUBRAN, 1995) entre outras.

### **1.3 Filtragem adaptativa**

O termo estimador ou filtro é utilizado frequentemente para se referir a um sistema que é projetado para extrair informação de interesse a partir de um conjunto de dados corrompidos. Devido à abrangência de sua definição, a teoria de filtragem é utilizada em um amplo espectro de aplicações como sistemas de comunicação, radar, sonar, navegação, sismologia, engenharia biomédica e engenharia financeira (HAYKIN, 1993).

Os primeiros estudos sobre a filtragem adaptativa foram feitos no final dos anos 1950, quando vários pesquisadores trabalhavam independen-

temente em aplicações para filtros adaptativos. O algoritmo *Least Mean-Square* (LMS) é um dos resultados desses trabalhos e oferece uma maneira simples mas efetiva para a adaptação de filtros FIR lineares transversais.

A operação de um algoritmo de filtragem adaptativa, em geral, envolve dois processos:

**Processo de filtragem** - envolve o cálculo da saída do filtro excitado pelo sinal de entrada e a estimativa do erro comparando a saída obtida com a resposta desejada;

**Processo adaptativo** - envolve o ajuste automático dos parâmetros do filtro de acordo com o erro calculado no processo de filtragem.

A combinação desses dois processos operando simultaneamente constitui um laço de realimentação conforme ilustrado na Figura 1.7. No contexto do cancelamento de eco monocanal, o sinal desejado (*desired signal*) coincide com o sinal  $y[n]$  de saída da planta.

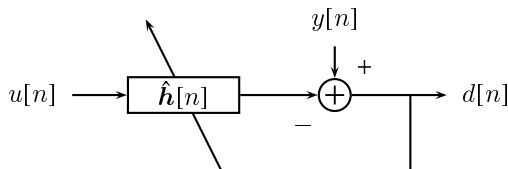


Figura 1.7: Diagrama de blocos de um filtro adaptativo. Baseado em Benesty et al. (2001)

### 1.3.1 *Aplicações da Filtragem Adaptativa*

A filtragem adaptativa, devido à abrangência de sua definição, é utilizada nas mais diversas áreas de processamento de sinais. Apesar do amplo espectro de aplicações, elas tem uma característica em comum: o uso de vetores de amostras de entrada e a presença de uma resposta desejada utilizada para calcular o erro de estimação (HAYKIN, 1993). Este sinal de erro é utilizado por um algoritmo de adaptação que ajusta os coeficientes do filtro de maneira a minimizar uma figura de mérito. Esses coeficientes podem representar os coeficientes de um filtro FIR linear, coeficientes de reflexão, parâmetros de rotação, coeficientes de uma média ponderada, etc. A principal diferença entre as diversas aplicações aparece na maneira como a resposta desejada é obtida. Nesse contexto, podem-se distinguir quatro categorias básicas de aplicações de filtragem adaptativa:

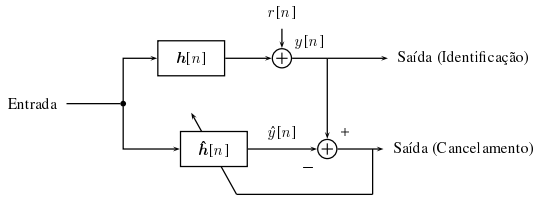
**Identificação de planta** Nessa categoria de aplicação, o objetivo é estimar os parâmetros do modelo matemático que melhor representa o comportamento de uma planta desconhecida. A planta desconhecida e o filtro adaptativo utilizam o mesmo vetor de entrada e o sinal desejado é definido pela medição da saída da planta desconhecida. O sinal de saída do sistema pode ser definido como a saída da planta ou, alternativamente, pelo erro de predição no caso de sistemas de cancelamento de ruído ou eco;

**Modelagem inversa** Nessa categoria de aplicação, o objetivo do filtro adaptativo é estimar o modelo que representa a função inversa de uma planta

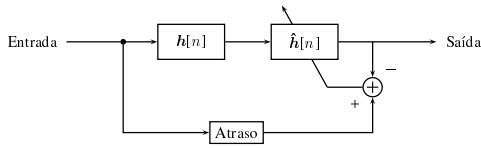
desconhecida. Para plantas lineares invariantes no tempo e de fase mínima, o modelo inverso tem uma função de transferência igual ao recíproco da função de transferência da planta desconhecida. Nesse caso, a entrada da planta, geralmente com atrasos, pode ser utilizada como o sinal desejado. Para plantas lineares invariantes no tempo sem fase mínima, o sinal desejado é uma versão atrasada do sinal de entrada da planta;

**Predição** Nessa categoria de aplicação, o objetivo do filtro adaptativo é estimar o valor atual de uma variável aleatória correlacionada no tempo. Portanto, o sinal desejado é definido como o valor atual da variável aleatória. Valores passados da variável aleatória formam o vetor de entrada do filtro adaptativo. Dependendo da aplicação, o sinal de saída do sistema pode ser definido pelo sinal de saída do filtro adaptativo (preditor) ou pelo sinal de erro de estimação (filtro de erro de predição);

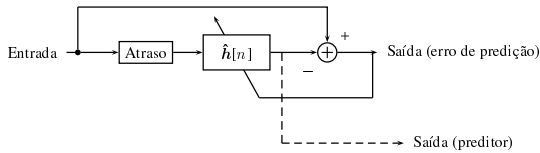
**Cancelamento de interferência** Nessa categoria de aplicação, o filtro adaptativo é utilizado para cancelar uma interferência desconhecida gerada a partir de um sinal de referência com características conhecidas. Um sinal primário correlacionado ao sinal de referência é utilizado como sinal desejado e o sinal de referência é utilizado na entrada do filtro adaptativo. O sinal de saída do sistema é formado pela subtração do sinal primário pela estimativa do filtro.



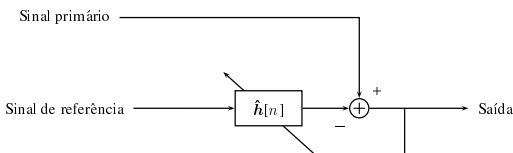
(a) Identificação de planta



(b) Modelagem inversa



(c) Predição



(d) Cancelamento de interferências

Figura 1.8: As quatro categorias básicas de aplicações de filtragem adaptativa (HAYKIN, 1993)

### 1.3.2 Processo de Filtragem

No processo de filtragem, os filtros podem ser classificados como lineares ou não-lineares. Um filtro é dito linear se o resultado de seu processamento em sua saída é uma função linear das observações utilizadas como dados de entrada. Do contrário, o filtro é não-linear (OPPENHEIM; WILLSKY; NAWAB, 1996).

As limitações inerentes ao uso de modelos lineares são conhecidas desde os primeiros estudos em redes neurais artificiais (MINSKY; PAPERT, 1988). De modo geral, os sistemas encontrados no mundo real não seguem modelos lineares. Uma maneira simples de adicionar não-linearidade a um filtro linear é utilizar uma função estática não-linear em cascata com um filtro linear como em modelos de Wiener e Hammerstein (WIENER, 1966; BILLINGS; FAKHOURI, 1977). Esse paradigma é capaz de modelar apenas uma classe específica de não-linearidades e pode adicionar mínimos locais na superfície de desempenho (LIU; PRINCIPE; HAYKIN, 2010). Alternativamente, a modelagem pode utilizar séries de Volterra para contornar dificuldades no tratamento matemático (GABOR; WILBY; WOODCOCK, 1961). Contudo, a complexidade dos modelos baseados em séries de Volterra tende a crescer exponencialmente com o aumento da capacidade de modelagem (LIU; PRINCIPE; HAYKIN, 2010). De modo similar, a modelagem pode utilizar séries de Wiener (FRANZ; SCHÖLKOPF, 2006), redes neurais artificiais (HAYKIN, 1998), inferência bayesiana (WINKLER, 2003) e filtragem adaptativa utilizando funções kernel (PARREIRA et al., 2012). Em

condições específicas, entretanto, sistemas não-lineares se comportam aproximadamente como sistemas lineares (CHEN, 1998; OGATA, 2002; KAILATH, 1980).

Apesar da nomenclatura utilizada, uma consequência direta da aplicação de um algoritmo recursivo em que os parâmetros de um filtro adaptativo são atualizados de uma iteração para outra é que os parâmetros são dependentes dos dados de entrada. Portanto, os filtros adaptativos lineares são, na realidade, sistemas não-lineares pois não respeitam o princípio da superposição (HAYKIN, 1993). Entretanto, uma certa classe de filtros, em que o sistema torna-se aproximadamente linear próximo à convergência, chamados de filtros adaptativos lineares são bastante úteis, tendem a ser matematicamente tratáveis e geralmente são mais fáceis de analisar que outros tipos de filtros (COSTA, 2001). Devido a sua maior simplicidade no tratamento matemático, nesse trabalho, o estudo se restringe a modelos lineares.

A filtragem adaptativa linear pode ser dividida em duas classes quanto à natureza de sua resposta ao impulso: resposta ao impulso finita (FIR) e resposta ao impulso infinita (IIR). Existem diferentes estruturas de implementação, conforme a classe do sistema analisado (OPPENHEIM; SCHAFER; BUCK, 1999). A estrutura FIR tende a ser mais popular no projeto de filtros adaptativos por garantir a estabilidade do sistema para coeficientes finitos e, quando necessário, permitir respostas em fase lineares. Embora existam múltiplas realizações possíveis para o mesmo filtro FIR (MITRA, 2000), geralmente os algoritmos de filtragem adaptativa são

desenvolvidos supondo os filtros na forma transversal, ilustrada na Figura 1.9.

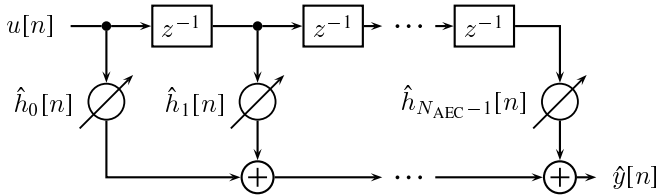


Figura 1.9: Filtro adaptativo na forma transversal (HAYKIN, 1993)

### 1.3.3 Processo adaptativo

O controle de adaptação assume a disponibilidade de certos parâmetros estatísticos dos sinais envolvidos e o objetivo é a otimização segundo um critério, geralmente estatístico. Segundo Widrow e Stearns (1985), os sistemas adaptativos possuem todas ou algumas das seguintes características:

- Adaptação automática a modificações do ambiente e/ou alterações do sistema (auto-otimização);
- Podem ser treinados para desempenhar uma tarefa específica de filtragem ou decisão, ou seja, podem ser programados por meio de um processo de treinamento (auto-programáveis);
- Em decorrência do item anterior, não necessitam procedimentos elaborados de síntese (são basicamente auto-programáveis);



- Podem extrapolar o espaço de conhecimento e lidar com novas situações após o treinamento com um pequeno conjunto de padrões de entrada (auto-aprendizado);
- Até certo ponto podem reparar a si mesmos, ou seja, podem adaptar-se em regiões próximas da ótima mesmo quando sujeitos a certos tipos de defeitos ou limitações;
- Geralmente são mais complexos e difíceis de analisar que sistemas não-adaptativos, mas oferecem a possibilidade de um desempenho substancialmente melhor quando as características do ambiente são desconhecidas ou variantes no tempo.

A adaptação ocorre por meio de um algoritmo de adaptação. Na escolha do algoritmo, alguns aspectos devem ser considerados (HAYKIN, 1993):

**Taxa de convergência** - É definida pelo recíproco do número de iterações necessárias para que o algoritmo, submetido a entradas estacionárias, exiba convergência para soluções próximas da solução ótima. Uma alta taxa de convergência permite que o filtro se adapte rapidamente a um ambiente estacionário com estatísticas desconhecidas;

**Desajuste** - Este parâmetro permite uma medida objetiva da diferença entre uma métrica do erro produzido pelo algoritmo em regime permanente e a métrica do erro produzido por uma solução ótima.

**Rastreamento** - Define a capacidade de um algoritmo de se adaptar a um ambiente não-estacionário. O desempenho do algoritmo, no aspecto de

rastreamento, é influenciado por duas características contraditórias: (a) taxa de convergência, e (b) desajuste em regime permanente devido a perturbações no sinal de entrada;

**Robustez** - Indica a sensibilidade do filtro a pequenas perturbações. Perturbações de baixa magnitude devem resultar em erros de estimação baixos;

**Requisitos computacionais** - Pode ser dividida em três aspectos:

1. número de operações matemáticas necessárias durante uma iteração do algoritmo;
2. o número de posições de memória necessárias para armazenar todos os dados necessários e o próprio programa;
3. o esforço necessário para programar o algoritmo.

**Estrutura** - Se refere à estrutura do fluxo de informação no algoritmo, determinando a maneira em que ele pode ser implementado em *hardware*. Indica se o algoritmo apresenta alta modularidade, capacidade de paralelismo ou concorrência;

**Propriedades numéricas** - Na representação de números em processadores digitais de sinais, algumas imprecisões aparecem devido a erros de quantização relacionados à conversão digital analógica e à ação de operadores matemáticos com precisão finita. De maneira geral, a segunda fonte de erros de quantização é mais crítica no projeto de um

filtro adaptativo. Existem dois aspectos que devem ser considerados na escolha do algoritmo:

- Estabilidade Numérica: Idealmente, deseja-se que a diferença entre a resposta de um algoritmo com precisão infinita e sua versão implementada com precisão finita seja comparável ao erro de quantização dos sinais de entrada e saída. É conhecido que, quando os cálculos são realizados com precisão finita, alguns algoritmos tem respostas semelhantes ao algoritmo equivalente com precisão infinita e outros divergem da resposta esperada mesmo que a precisão da aritmética seja aumentada drasticamente (JONG, 1977). Isso ocorre devido à acumulação de erros, que podem causar a divergência do algoritmo quando não tratados. Algoritmos em que existe a garantia de que erros devido à aritmética de precisão finita não são amplificados são chamados numericamente estáveis. Embora existam definições precisas e formais para estabilidade, existem tantas possibilidades, para diferentes problemas, que nomear e definir cada uma tende a tirar o foco das questões de interesse (HIGHAM, 2002, p 129).
- Precisão numérica: É determinada pelo número de bits utilizados e pela representação (ponto-fixo, ponto-flutuante) dos dados amostrados e dos coeficientes dos filtros. Um algoritmo é considerado numericamente robusto se conserva suas propriedades quando submetido a variações no número de bits utilizados para

representação de seus dados.

A avaliação do desempenho de um filtro adaptativo pode ser realizada por diversas superfícies de desempenho. Um dos critérios mais utilizados é a minimização no sentido quadrático médio do sinal de erro ou erro quadrático médio (MSE), definido como a diferença entre uma resposta desejada e a saída do filtro (WANG; BOVIK, 2009). Esta função custo é escolhida em virtude de permitir uma manipulação matemática mais simples, além de apresentar apenas um único ponto de mínimo, no caso de um hiperparabolóide, que pode ser calculado facilmente utilizando-se a estatística de segunda-ordem do processo aleatório implícito (de ALMEIDA, 2004).

Alternativamente, a avaliação do desempenho pode ser feita utilizando outros critérios. Por meio de diferentes funções custo, uma série de algoritmos podem ser derivados com diferentes virtudes e limitações. Na Tabela 1.1 são mostradas as funções custo e número de operações por iteração dos algoritmos mais utilizados para o cancelamento de eco acústico em número de operações por iteração (LMS, LMS normalizado (NLMS), Algoritmo de Projeções Afins (APA), Algoritmo dos mínimos quadrados recursivo (RLS) em sua implementação convencional, uma versão rápida do RLS conhecida como RLS utilizando coordenadas dicotômicas descendentes (*RLS using dichotomous coordinate descent iterations*) (RLS-DCD) (ZAKHAROV; WHITE; LIU, 2008)) em que  $N_{\text{AEC}}$  indica o comprimento do filtro,  $0 < \gamma \leq 1$  é o fator de esquecimento do algoritmo RLS,  $d[n - i|n]$  indica o erro de estimação para o vetor de entrada do instante  $n - i$

utilizando a solução obtida no instante  $n$  e  $N_u$  indica o número de iterações necessárias para a solução de um problema de otimização quadrático. Alternativamente, o parâmetro  $N_u \leq N_{\text{AEC}}$  do algoritmo RLS-DCD pode ser interpretado como o número máximo de coeficientes do filtro que podem sofrer adaptação no mesmo instante (ZAKHAROV; WHITE; LIU, 2008, p 3156) que está sob controle pelo projetista. Na Tabela 1.1, assume-se que a implementação do algoritmo APA realiza a inversão de  $\mathbf{U}_u^T[n]\mathbf{U}_u[n]$  em que  $\mathbf{U}_u[n] = [\mathbf{u}_{\hat{h}}[n] \ \mathbf{u}_{\hat{h}}[n-1] \ \cdots \ \mathbf{u}_{\hat{h}}[n-P]]$ . Além da implementação do RLS utilizando coordenadas dicotômicas descendentes, existem outras implementações com complexidade computacional proporcional a  $N_{\text{AEC}}$  como o algoritmo RLS rápido em treliça (*Lattice predictor-based fast RLS algorithm*) (HAYKIN, 1993, p 607) e o algoritmo de filtragem transversal rápido (*Fast transversal filter algorithm*) (HAYKIN, 1993, p 586). A redução da complexidade computacional dos algoritmos da família RLS pode se aproveitar

- da estrutura dos vetores de entrada, por exemplo, em aplicações em que o vetor de entrada é uma linha de atrasos;
- da estrutura Toeplitz da matriz de autocorrelação dos sinais de entrada quando estes são estacionários;
- da equivalência entre as soluções de um sistema de equações lineares ( $\hat{\mathbf{R}}_{u_{\hat{h}} u_{\hat{h}}} \hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{r}}_{u_{\hat{h}} y}$ ) e um problema de minimização quadrático  $\min \frac{1}{2} \hat{\mathbf{h}}^\top \hat{\mathbf{R}}_{u_{\hat{h}} u_{\hat{h}}} \hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{h}}^\top \hat{\mathbf{r}}_{u_{\hat{h}} y}$  em relação a  $\hat{\mathbf{h}}$  em que  $\hat{\mathbf{R}}_{u_{\hat{h}} u_{\hat{h}}}$  é a estimativa da matriz de autocorrelação de  $\mathbf{u}_{\hat{h}}[n]$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_{u_{\hat{h}} y}$  é a estimativa do

vetor de correlação cruzada entre  $\mathbf{u}_{\hat{h}}[n]$  e  $y[n]$ ;

- da decomposição da direção de adaptação em  $N_{\text{AEC}}$  direções definidas pelo sistema de coordenadas cartesiano e a adaptação utilizando coordenadas dicotômicas descendentes.

Tabela 1.1: Principais algoritmos adaptativos para cancelamento de eco, suas funções custo e complexidades computacionais por iteração considerando o processamento em banda cheia (*full-band*) (OLYAEE et al., 2010; SAYED, 2008; ZAKHAROV; WHITE; LIU, 2008)

Algoritmo	Função custo		Operações
LMS	$E\{ d[n] ^2\}$	+	$2N_{\text{AEC}} + 1$
		×	$2N_{\text{AEC}} + 1$
		/	0
NLMS	$E\{ d[n] ^2\}$	+	$2N_{\text{AEC}} + 3$
		×	$2N_{\text{AEC}} + 3$
		/	1
APA	$\sum_{i=0}^{P-1} E\{ d[n-i] ^2\}$	+	$(P^2 + 2P)N_{\text{AEC}} + P^3 + P$
		×	$(P^2 + 2P)N_{\text{AEC}} + P^3 + P^2$
		/	1
RLS	$\sum_{l=0}^n \gamma^{n-l}  d[l] ^2$	+	$N_{\text{AEC}}^2 + 3N_{\text{AEC}}$
		×	$N_{\text{AEC}}^2 + 5N_{\text{AEC}} + 1$
		/	1
RLS-DCD	$\sum_{l=0}^n \gamma^{n-l}  d[l] ^2$	+	$N_{\text{AEC}}(2N_u + 6)$
		×	$3N_{\text{AEC}}$
		/	0

### 1.3.4 Filtragem espacial

A abordagem convencional para o cancelamento de eco acústico considera que os sinais e ruídos presentes no ambiente podem ser caracterizados no domínio do tempo. Entretanto, esses sinais também apresentam dependência espacial. Essa característica permite modelar sinais e ruídos por meio de processos no domínio espacial e temporal simultaneamente. O uso de arranjos de sensores permite a amostragem espacial do sinal por meio de sua captação em posições distintas. Nesse caso, ecos acústicos podem ser modelados alternativamente como uma série de interferências incidindo sobre um arranjo de microfones em uma infinidade de ângulos. Assim, algoritmos de conformação de feixe (*beamforming*) parecem ser soluções naturais para a supressão de ecos acústicos (HABETS; BENESTY, 2012). Entretanto, mesmo supondo a disponibilidade de um conformador de feixe (BF) ideal capaz de eliminar completamente o eco em direções diferentes da direção de chegada (DOA) do sinal desejado, a presença de um cancelador de eco acústico é necessária pois uma parcela do eco não poderia ser cancelada por estar incidindo sobre o arranjo na mesma direção do sinal desejado. Quando conformadores de feixe não-ideais são considerados, limitações na capacidade de seleção espacial devido ao número finito de graus de liberdade permitem que parte dos ecos em direções diferentes da DOA sejam retransmitidos aumentando a necessidade de um processo de cancelamento de eco convencional (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a; HERBORDT; KELLERMANN; NAKAMURA, 2004; HERBORDT; KELLERMANN, 2000).

## 1.4 **Objetivos do trabalho**

Estudar o comportamento de uma classe de algoritmos adaptativos de cancelamento de eco acústico auxiliados por um arranjo de microfones otimizados conjuntamente. Propor uma metodologia de análise capaz de fornecer modelos analíticos capazes de prever, com precisão suficiente, o comportamento de sistemas reais. Fornecer previsões do comportamento em regime transitório e permanente bem como obter limites de estabilidade apropriados para o projeto desses sistemas. Em um segundo momento, determinar diretrizes de projeto simples porém capazes de prever o efeito de alterações dos parâmetros do algoritmo em seu desempenho para condições determinadas, auxiliando o projetista de sistemas adaptativos dessa classe de algoritmos.

Apesar de serem áreas relacionadas, para não desviar do foco principal deste trabalho, decidiu-se não investigar o controle de *double-talk* (BERSHAD; TOURNERET, 2006; TOURNERET; BERSHAD; BERMUDEZ, 2009), estimação da direção de chegada de sinais de banda larga, projeto de matrizes de bloqueio adaptativas (HOSHUYAMA; SUGIYAMA; HIRANO, 1999) e análise do comportamento de outros algoritmos de adaptação (HERBORDT; KELLERMANN; NAKAMURA, 2004; HERBORDT; KELLERMANN, 2000).

## 1.5 **Justificativa e relevância**

Recentemente, o interesse em soluções de cancelamento de eco acústico auxiliado por um arranjo de microfones tem crescido rapidamente.



Isso ocorre devido ao potencial inerente a essas soluções de levar a um menor eco residual quando comparado com soluções baseadas em um único microfone (KALLINGER; BITZER; KAMMEYER, 2000). Contudo, esses estudos são predominantemente baseados em conjecturas e avaliações experimentais (KALLINGER; BITZER; KAMMEYER, 2000; HERBORDT; KELLERMANN; NAKAMURA, 2004; HERBORDT; KELLERMANN, 2000; GANNOT; BURSHTEIN; WEINSTEIN, 2001; MARKOVICH; GANNOT; COHEN, 2009; HABETS; BENESTY, 2013; TALMON; COHEN; GANNOT, 2009a; TALMON; COHEN; GANNOT, 2009b; SOUDEN; BENESTY; AFFES, 2010; GOETZE et al., 2008; BURTON; GOUBRAN, 2007; HAMALAINEN; MYLLYLA, 2007; REUVEN; GANNOT; COHEN, 2004; REUVEN; GANNOT; COHEN, 2007b; AFFES; GRENIER, 1996; BEH et al., 2008; HELWANI; BUCHNER; SPORS, 2010a; HELWANI; SPORS; BUCHNER, 2011; BUCHNER; SPORS; KELLERMANN, 2004; YELLEPEDDI; FLORENCIO, 2014; HOSHUYAMA, 2012; SUGIYAMA; MIYAHARAY, 2014; NATHWANI; HEGDE, 2012). Embora os méritos desses trabalhos sejam evidentes, a avaliação exclusivamente experimental apresenta alguns problemas fundamentais

- A rigor, não é possível a generalização destes resultados para diferentes condições de funcionamento tornando difícil a derivação de diretrizes de projeto;
- A análise do comportamento desses sistemas com diferentes parâmetros exigiria um número considerável de experimentos.

Variações nos parâmetros exigem uma nova avaliação experimental para cada conjunto de parâmetros avaliados;

- A ausência de modelos matemáticos, ainda que simplificados, não permite a identificação dos méritos e deficiências de cada abordagem.

Apesar da existência de alguns estudos teóricos para o AEC-BF com conformadores de feixe fixos (GUO et al., 2011b; GUO et al., 2011c; GUO; JENSEN; JENSEN, 2012) e para o BF-AEC otimizado conjuntamente (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2011; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2013; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014b), os resultados teóricos ainda são incipientes e realizados sob hipóteses simplificadoras nem sempre realistas (por exemplo: invariância da direção de direção desejada, sinais estacionários, plantas LEM lineares, etc).

Neste trabalho, propõe-se estudar o comportamento estatístico de uma solução para o cancelamento de ecos acústicos auxiliado por um conformador de feixe com otimização conjunta e adaptativa. Essa abordagem é baseada no sistema proposto por Herbordt, Kellermann e Nakamura (2004) utilizando, contudo, um algoritmo de adaptação mais simples e desconsiderando efeitos da mudança da direção de interesse. Essas simplificações foram necessárias para realizar uma análise que permita obter modelos analíticos capazes de prever o comportamento de sistemas reais. A principal diferença entre o cancelador de eco de Herbordt, Kellermann e Nakamura (2004) e o estudado é a figura de mérito a ser otimizada. Optou-se por uma otimização

baseada no MSE, diferentemente do critério dos mínimos quadrados ponderado utilizado em Herbordt, Kellermann e Nakamura (2004). As razões para isso são a tratabilidade matemática, a menor complexidade computacional e a maior facilidade de derivação de modelos analíticos. A escolha dessa estrutura deve-se a seu desempenho teoricamente superior a abordagens BF-AEC convencionais (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2011) e à complexidade computacional comparável à implementação de um AEC convencional adaptado utilizando o LMS e um conformador de feixe adaptado utilizando o algoritmo LMS com restrições (CLMS). Contudo, a otimização conjunta através de dois filtros adaptativos produz um sinal de erro que combina não-estacionariedades devido à adaptação do AEC e do BF além de tornar a adaptação de um dos filtros dependente do estado do outro filtro.

Em Maruo, Bermudez e Resende (2011) foram determinadas tanto as soluções ótimas do BF-AEC convencional quanto do BF-AEC otimizado conjuntamente e as suas respectivas potências médias de saída. Esse é um dos poucos trabalhos teóricos na área de cancelamento de eco acústico auxiliado por arranjo de microfones e, apesar do modelo altamente simplificado, permite a obtenção de figuras de mérito em forma fechada. Através dessas figuras de mérito, um projetista é capaz de decidir se é interessante optar por uma otimização conjunta no projeto de um sistema de cancelamento de eco acústico.

A metodologia utilizada na análise deste trabalho pode também ser utilizada no estudo de conformadores de feixe *Linearly constrained minimum variance* (LCMV) de banda larga adaptativos

## 1.6 Estrutura do trabalho

Inicialmente, foi apresentada a fundamentação teórica necessária à análise do problema. No Capítulo 2 será feita a definição formal do problema abordado nesse trabalho e a revisão bibliográfica recente. No Capítulo 3 será proposta uma solução baseada na otimização LCMV para o projeto de sistemas de cancelamento de eco acústico auxiliado por um arranjo de microfones implementada na forma direta e a análise estatística do comportamento de segunda-ordem da solução proposta. A análise pode ser utilizada tanto no projeto de sistemas LCMV convencionais quanto para sistemas implementados na forma GSC desde que as condições descritas no Apêndice D sejam satisfeitas. No Capítulo 4 serão discutidas as limitações da análise realizada no Capítulo 3 e a solução para o projeto de canceladores de eco acústico auxiliado por um arranjo de microfones. A solução envolve a implementação do conformador de feixe na forma GSC com passos de adaptação diferentes no AEC e no conformador de feixe. No Capítulo 5 os modelos analíticos serão avaliados e os resultados teóricos são comparados com simulações computacionais para avaliar a validade dos modelos propostos. Exemplos de projeto demonstram a utilidade do modelo proposto para o projeto de sistemas práticos. No Capítulo 6 são feitas observações gerais sobre o trabalho e apresentadas conclusões e propostas para sua continuação.

Ao longo deste trabalho será utilizada a seguinte notação:

- grandezas escalares: letras minúsculas;
- grandezas vetoriais: letras minúsculas em negrito;

- grandezas matriciais: letras maiúsculas em negrito.

### 1.7 Trabalhos publicados e submetidos

1. Maruo, M. H.; Bermudez J. C. M.; Resende L. S.; 2011. On The Optimal Solutions of Beamformer Assisted Acoustic Echo Cancelers. *In Proc. IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP 2011)*, pp 645–648, Nice, França.
2. Maruo, M. H.; Bermudez J. C. M.; Resende L. S.; 2013. Statistical analysis of the jointly-optimized acoustic echo cancellation BF-AEC structure. *In Proc. Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2013 IEEE International Conference on, pp 5840–5844, Vancouver, Canadá.
3. Maruo, M. H.; Bermudez J. C. M.; Resende L. S.; 2014. Statistical analysis of a jointly optimized beamformer-assisted acoustic echo canceler. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 62, n. 1, p. 252–265, Jan 2014. ISSN 1053-587X.
4. Maruo, M. H.; Bermudez J. C. M.; Resende L. S.; 2014. Statistical analysis of Jointly-Optimized GSC implementations of beamformer-assisted acoustic echo cancelers. *In Proc. Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2014 IEEE International Conference on, pp 6444–6448, Florença, Itália.
5. Maruo, M. H.; Bermudez J. C. M.; Resende L. S.; 2014. Statistical Analysis of a GSC-based Jointly Optimized Beamformer-Assisted

Acoustic Echo Canceler. Artigo submetido para Signal Processing, IEEE Transactions on, em Out 2014.



## 2 CANCELAMENTO DE ECO ACÚSTICO

### 2.1 Introdução

Neste capítulo, é formalizada a descrição do problema a ser analisado. É apresentada a revisão bibliográfica recente sobre o tema de cancelamento de eco acústico auxiliado por arranjo de microfones.

### 2.2 Cancelamento de eco acústico

O cancelamento de eco acústico é um problema crítico nos mais variados sistemas de comunicação. Ecos acústicos aparecem sempre que o alto-falante e o microfone são posicionados de modo que o microfone capte uma parcela do sinal emitido pelo alto-falante e suas reflexões no ambiente acústico (BREINING et al., 1999). Como consequência, o sistema sofre uma realimentação e pode tornar-se instável (SPRIET et al., 2008). Em sistemas de telecomunicação, os usuários se sentem incomodados ao escutar sua própria voz atrasada pela retransmissão de sinais de eco não cancelados. Para evitar esses problemas, a atenuação da planta formada entre o alto-falante e o microfone deve ser suficientemente alta. Em sistemas de telefonia convencional, o alto-falante e o microfone são combinados em um *handset* que garante uma atenuação de pelo menos 45 dB entre os dois elementos. Em sistemas de telefonia *hands-free* sem o uso de *headphones* a ausência da atenuação por meio do *handset* demanda o projeto de sistemas de cancelamento de eco acústico.

Os primeiros sistemas de telefonia *hands-free* exigiam a degradação



do canal *full-duplex* para um canal *half-duplex* com chaveamento ativado por sinais de voz específicos. O controle desse chaveamento, contudo, não é uma tarefa simples e exige dos usuários um comportamento disciplinado (BREI-NING et al., 1999). Sistemas de telefonia *hands-free* modernos são regulamentados pela *International Telecommunication Union* (ITU) (ITU-T P.341, 2011). O requisito mais severo, dentro do escopo do processamento de sinais, é o atraso máximo tolerável de 50 ms entre a captação do sinal e a interface com a rede (incluindo a codificação, encapsulamento em pacotes, e processamento de sinais). Sistemas de video-conferência ainda podem requisitar a transmissão de áudio estereofônico. Como os sinais de ambos os canais são altamente correlacionados, a superfície de desempenho é multi-modal (KHONG; NAYLOR, 2005). Outra aplicação que requer sistemas semelhantes a canceladores de eco acústico é o projeto de aparelhos auditivos. A realimentação acústica ocorre quando uma parcela do sinal emitido para dentro do ouvido da pessoa é captada pelo microfone externo ao ouvido. Devido à necessidade de amplificação dos sinais captados pelo microfone externo para suprir as deficiências do usuário, o laço eletroacústico pode tornar-se instável (GUO et al., 2013; SPRIET et al., 2008). Nesse caso, a planta LEM pode ser caracterizada por um número significativamente menor de coeficientes. Por outro lado, os aparelhos auditivos são alimentados por baterias e, portanto, o consumo de energia dos dispositivos de processamento de sinais deve ser minimizado. Outra peculiaridade do cancelamento de realimentação é a correlação entre o sinal de entrada do cancelador de realimentação e a perturbação da planta desconhecida, o que acarreta em polarização das

soluções (NAKAGAWA; NORDHOLM; YAN, 2013). Finalmente, os atrasos introduzidos pelo processo de cancelamento de eco não devem exceder 1 ms (BREINING et al., 1999). Sistemas controlados por voz também podem se beneficiar de avanços no cancelamento de eco acústico (HERBORDT; NAKAMURA; KELLERMANN, 2005; JUANG; SOONG, 2001; TATEKURA; SARUWATARI; SHIKANO, 2001). Nessa aplicação, os sinais captados pelo microfone são utilizados por um sistema de reconhecimento de fala que é sensível à relação sinal-ruído. Em aplicações nas quais o sistema também emite mensagens sonoras ao usuário, estes sinais produzem ecos acústicos e seu cancelamento pode incrementar as taxas de reconhecimento de modo significativo. Alternativamente, o cancelamento de eco pode também ser modelado como um problema de cancelamento de ruído. Nesse caso há uma equivalência entre o sinal de *far-end* e o sinal de ruído não perturbado, o sinal de eco e o ruído distorcido e entre o sinal local (*near-end*) e o sinal de interesse não corrompido por ruídos.

Tradicionalmente, o tratamento do cancelamento de eco consiste na estimação da resposta de uma planta que contém alto-falantes, microfones e um ambiente reverberante. Movimento de objetos ou mudanças na temperatura podem resultar na variação da resposta da planta LEM. Essa resposta também depende do tamanho do ambiente, das propriedades reflexivas dos objetos e paredes, e da posição dos objetos, principalmente dos alto-falantes e microfones.

De acordo com Schmidt (2000), medições em tempo-real mostram que o uso de modelos lineares na representação da planta LEM apresenta

limitações devido à não-linearidade inerente aos alto-falantes, de amplificadores analógicos, de microfones de baixa qualidade e do uso de conversores analógico-digitais para amplitudes próximas de seus limites de escala. Em geral, modelos lineares são apenas aproximações razoáveis de sistemas reais (AZPICUETA-RUIZ et al., 2011; AZPICUETA-RUIZ et al., 2013). Contudo, para sinais de baixa potência com amplitude dentro da faixa normal de funcionamento dos conversores analógico-digital e banda de frequência no espectro audível o modelo linear pode ser uma ferramenta útil devido à sua maior simplicidade e tratabilidade matemática (BREINING et al., 1999; OGATA, 2002). Nessas condições, AECs não-lineares podem ter desempenho inferior, quando comparados com AECs lineares, em virtude de flutuações no erro dos coeficientes associados aos termos não-lineares (COMMINIELLO et al., 2011).

Quando as plantas LEM podem ser adequadamente representadas por modelos lineares, o acoplamento acústico de um ambiente é formado por um caminho direto entre o alto-falante e o microfone e por um elevado número de reflexões. A resposta ao impulso desse sistema pode ser descrita como uma série de impulsos atrasados por um tempo proporcional à distância correspondente a cada trajeto percorrido pela onda sonora. A amplitude dos impulsos é determinada pela reflectividade das paredes do ambiente e pelo comprimento do caminho percorrido (BREINING et al., 1999; HÄNSLER; SCHMIDT, 2004). Quando o sinal refletido sofre um atraso da ordem de um quarto de segundo, uma conversação pode tornar-se impraticável (de ALMEIDA, 2004). Para um ambiente com tempo de reverberação de cerca de 200 ms e uma taxa

de amostragem de 8192 amostras por segundo, uma resposta com pelo menos  $\lceil 0.2 \times 8192 \rceil = 1639$  coeficientes é necessária para cancelar completamente o eco acústico em que  $\lceil \cdot \rceil$  indica o operador teto (*ceil*). Como o problema demanda respostas ao impulso longas, uma modelagem por meio de um filtro IIR pode parecer, a princípio, mais adequada. Contudo, a resposta ao impulso apresenta um formato irregular e para que o modelo apresente alto grau de semelhança com a resposta desejada, é necessário um número elevado de graus de liberdade que se traduz em um número elevado de parâmetros (LIAVAS; REGALIA, 1998). Assim, o modelo com um filtro IIR pode conter tantos parâmetros quanto um modelo com resposta FIR. A razão para a popularidade da modelagem com um modelo FIR é sua maior simplicidade no controle da estabilidade externa (BIBO) durante sua adaptação, bastando garantir que todos seus coeficientes tenham valores finitos (OPPENHEIM; WILLSKY; NAWAB, 1996).

Uma das soluções mais populares na estimação de modelos FIR linear é o uso de filtros adaptativos lineares (PROAKIS; MANOLAKIS, 2006; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000; HAYKIN, 1993).

### 2.3 Filtragem adaptativa para o cancelamento de eco acústico

Alguns fatores tornam o projeto de um AEC particularmente desafiador. Fatores relacionados à planta LEM podem ser resumidos em:

- A resposta ao impulso da planta LEM apresenta comprimento elevado o que tende a reduzir as taxas de convergência (de ALMEIDA et al., 2005);

- A variação no tempo da planta LEM pode ocorrer de maneira abrupta, demandando alta taxa de convergência para um desempenho adequado (BREINING et al., 1999);
- Apesar das plantas LEM apresentarem seletividade em frequência, em geral, sua largura de banda é relativamente grande. Assim, modelos de banda estreita normalmente utilizados no estudo do processamento por arranjo de antenas ou sensores não descrevem adequadamente os sinais de eco (LIU; WEISS, 2010);
- Embora alguns autores assumam esparsidade na resposta ao impulso da planta LEM para a derivação de algoritmos mais eficientes (BENESTY et al., 2001), outros autores argumentam que a natureza das plantas LEM é essencialmente não-esparsa apresentando um decaimento aproximadamente exponencial ao longo do tempo (BREINING et al., 1999; HÄNSLER; SCHMIDT, 2004). Loganathan, Habets e Naylor (2010) propõem, ainda, a separação da resposta entre uma parte esparsa (correspondente aos primeiros coeficientes da resposta) e uma parte não-esparsa (correspondente aos coeficientes restantes).

Os principais fatores associados à natureza dos sinais de voz podem ser resumidos em:

- O sinal de fala local apresenta um espectro composto por frequências semelhantes ao sinal de eco e, portanto, um processo de filtragem em frequência não é capaz de suprimir o eco sem distorcer significativamente o sinal de fala (HÄNSLER; SCHMIDT, 2004);

- Sinais de fala são não-estacionários e caracterizados por intervalos quase periódicos, intervalos com características de ruído e pausas. Na sua modelagem matemática é comum assumir curtos períodos de quase estacionariedade ( $< 20$  ms) e modelos baseados nessa aproximação têm levado a bons resultados práticos (RABINER; JUANG, 1993);
- Sinais de fala são, em geral, altamente correlacionados no tempo. Coeficientes de autocorrelação entre amostras vizinhas atingem valores na faixa entre 0.8 e 0.9 (BREINING et al., 1999). Isto torna as matrizes de autocorrelação mal-condicionadas e eleva o espalhamento de seus autovalores. Nestas condições, algoritmos baseados no gradiente estocástico (família LMS) apresentam baixa taxa de convergência (HAYKIN, 1993; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000; SAYED, 2008);
- Nos períodos de *double talk* (quando o sinal de perturbação  $r[n]$  da Figura 1.6 contém a fala do usuário do *near-end*), a potência do erro de estimação aumenta e pode causar um elevado aumento do desajuste nos coeficientes do filtro adaptativo. Assim, é necessária a interrupção na atualização dos coeficientes do filtro adaptativo durante esses períodos (BERSHAD; TOURNERET, 2006; TOURNERET; BERSHAD; BERMUDEZ, 2009).

Portanto, ao mesmo tempo que a natureza não-estacionária da planta LEM e dos sinais de entrada exige que os AECs apresentem adaptação rápida, características da planta LEM e dos sinais de voz, supondo a adaptação com um algoritmo da família LMS, tornam a adaptação lenta. Nessas condições,

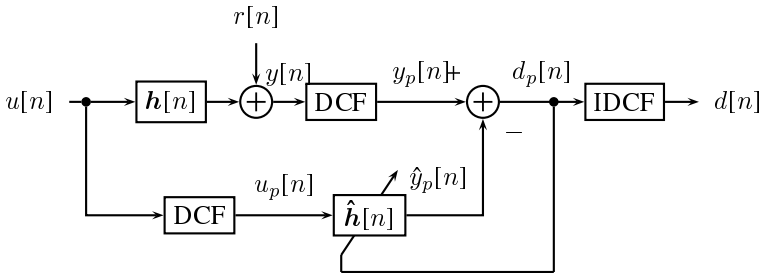
a busca de parâmetros capazes de conciliar estabilidade e velocidade de convergência com baixa complexidade computacional se torna ainda mais difícil (WIDROW et al., 1976; BREINING et al., 1999; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000; HAYKIN, 1993; HÄNSLER; SCHMIDT, 2004). A elevada variação de potência do sinal de entrada e sua sensibilidade a sinais altamente correlacionados (van de KERKHOF; KITZEN, 1992) tornam o algoritmo LMS, a princípio, pouco adequado para o controle da adaptação. Essa limitação do LMS é atenuada em sua versão normalizada (COSTA; BERMUDEZ, 2002) e no APA (OZEKI; UMEDA, 1984). O algoritmo RLS, em sua forma convencional apresenta uma complexidade computacional proporcional a  $N_{\text{AEC}}^2$  e requer a estimação recursiva da inversa de uma matriz  $N_{\text{AEC}} \times N_{\text{AEC}}$  (HELWANI; BUCHNER; SPORS, 2010a) que, devido à alta correlação dos sinais de voz, pode tornar-se mal-condicionada (PAPOULIS; PILLAI, 2002). Portanto, para estabilizar o algoritmo RLS, um número elevado de amostras pode ser necessário na estimativa da matriz inversa da autocorrelação do vetor de entrada. Assim, o fator de esquecimento assume valores elevados ( $\gamma \approx 1$ ). Em contrapartida, durante mudanças das estatísticas dos dados, a estimativa da autocorrelação dos dados de entrada utiliza vetores com estatísticas desatualizadas prejudicando a estimação. Este procedimento degrada a capacidade de rastreamento do algoritmo (BITTANTI; CAMPI, 1991), e sua velocidade de convergência após mudanças abruptas na planta LEM (HUBING; ALEXANDER, 1991; EWEDA, 1994), que são essenciais para a estimação de respostas ao impulso variantes no tempo (HÄNSLER; SCHMIDT, 2004; BREINING et al., 1999). Todavia, experimentos

computacionais indicam que, em determinadas circunstâncias, a capacidade de rastreamento do RLS pode ser satisfatória (CAREZIA et al., 2001) e até mesmo superar o LMS (SAYED, 2008, p. 293). Em sua versão convencional, o RLS têm complexidade computacional  $\mathcal{O}(N_{\text{AEC}}^2)$  (HAYKIN et al., 1997). Contudo, existem implementações eficientes do RLS que tem complexidade computacional proporcional a  $N_{\text{AEC}}$  (ZAKHAROV; WHITE; LIU, 2008). O algoritmo de projeções afins apresenta características intermediárias entre o LMS e o RLS. Sua complexidade computacional é relativamente maior que a do LMS e sua velocidade de convergência para entradas correlacionadas pode chegar próxima à do RLS. Assim como no RLS, o APA requer a inversão de uma matriz, contudo sua dimensão é controlada por um parâmetro  $P$ , em geral muito menor que  $N_{\text{AEC}}$ , que indica a ordem da projeção do algoritmo. Para uma faixa de valores em que  $N_{\text{AEC}} \gg P$ , a complexidade computacional do APA torna-se significativamente menor que a do RLS (BERSHAD; LINEBARGER; MCLAUGHLIN, 2001; de ALMEIDA; BERMUDEZ; BERSHAD, 2009; de ALMEIDA et al., 2003; de ALMEIDA; BERMUDEZ; BERSHAD, 2004; OZEKI; UMEDA, 1984)

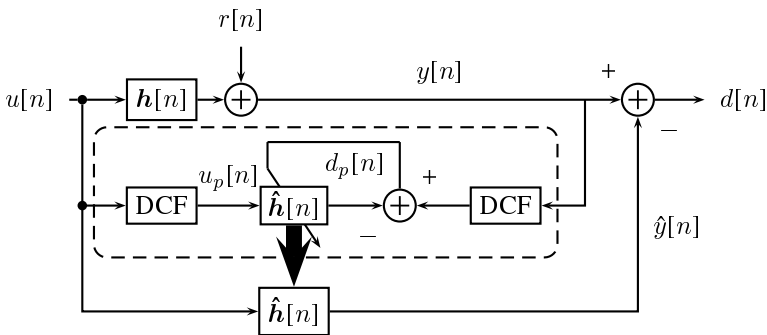
O problema de alta correlação temporal das amostras de entrada pode ser combatido por meio de filtros decorrelacionadores (*Decorrelation Filters* (DCF)) (BREINING et al., 1999). Esses filtros são filtros preditores de erro com seus coeficientes modelando as propriedades de correlação do sinal de fala (NICOLAU, 2010; NICOLAU; COSTA, 2011; MALUENDA, 2009). O resultado da ação desse filtro é o pré-branqueamento do sinal de fala, o que acelera a convergência do algoritmo adaptativo. Contudo, sinais não esta-



cionários na entrada do sistema podem exigir o uso de filtros de decorrelação adaptativos, o que leva ao aumento do custo computacional do cancelador de eco e a uma maior complexidade do projeto. O uso de algoritmos que projetam o sinal de entrada em uma base de vetores ortogonais é outra alternativa viável (IKEDA, 2002). Duas estruturas de identificação de sistemas com filtros de decorrelação podem ser vistas nas Figuras 2.1(a) e 2.1(b). Nessas



(a) Estrutura de decorrelacionamento 1



(b) Estrutura de decorrelacionamento 2

Figura 2.1: Estruturas de filtragem adaptativa com uso de filtros preditores (BREINING et al., 1999).

figuras o sinal  $u_p[n]$  representa o erro de previsão do filtro DCF quando um

sinhal  $u[n]$  é aplicado à sua entrada e  $d_p[n]$  representa o erro de predição do sinal  $y[n]$  quando processado por DCF. O filtro descorrelacionador (IDCF) implementa, quando possível, uma função de transferência recíproca à função de transferência de DCF. O uso da estrutura da Figura 2.1(a) implica no projeto do filtro DCF e seu filtro inverso IDCF. Para implementações em tempo real, tanto o filtro DCF como o filtro IDCF devem ser causais e estáveis. Ou seja, DCF deve ser um sistema de fase mínima (CHEN, 1998). A implementação da Figura 2.1(b) envolve o projeto do filtro DCF sem a necessidade de seu filtro inverso. Neste caso, o filtro inverso pode ser instável e/ou não-causal o que permite o uso da estrutura da Figura 2.1(b) com uma classe mais ampla de sinais (OPPENHEIM; WILLSKY; NAWAB, 1996).

### 2.3.1 Estruturas de processamento

A estrutura de filtragem FIR transversal da Figura 1.9 é a mais utilizada no processamento adaptativo de sinais no domínio do tempo e pode ser implementada tanto no modo amostra a amostra quanto no modo em bloco (HAYKIN, 1993). Contudo, os algoritmos baseados no LMS no domínio do tempo, associados com a estrutura FIR transversal, sofrem de baixa taxa de convergência se as aplicações exigem um filtro com muitos coeficientes ou se o sinal é altamente correlacionado (HAYKIN et al., 1997; de ALMEIDA et al., 2005; BREINING et al., 1999; HÄNSLER; SCHMIDT, 2004).

Quando os filtros adaptativos são implementados no domínio do tempo, o espalhamento dos autovalores da matriz de autocorrelação do sinal

de entrada desempenha um papel importante na determinação da velocidade de convergência (HAYKIN, 1993; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000; SAYED, 2008). Quando o sinal de entrada é altamente correlacionado, o espalhamento dos autovalores é alto e a convergência de algoritmos da família LMS torna-se extremamente lenta (de ALMEIDA et al., 2005). Outros algoritmos, como por exemplo o RLS, são mais robustos a esse espalhamento dos autovalores. O RLS, em particular, utiliza uma quantidade ajustável de informações passadas na estimativa da atualização da solução. Em contrapartida, para muitas aplicações, quando o comprimento dos filtros adaptativos é elevado, não são adequadas para o uso do RLS, em sua implementação convencional, devido a seu custo computacional proporcional a  $N_{AEC}^2$ . De acordo com Lee, Gan e Kuo (2009), algumas implementações do RLS ainda sofrem de baixa estabilidade numérica, baixa robustez e capacidade de rastreamento reduzida quando comparada com velocidade de convergência inicial (BREINING et al., 1999; EWEDA, 1994). Outra maneira de amenizar os efeitos do espalhamento dos autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada consiste no uso de transformações lineares ortogonais (como por exemplo a Transformada de Fourier discreta (DFT) ou a Transformada cosseno discreta (DCT)) (BOROUJENY, 1998). Esta abordagem, quando comparada com o uso do RLS no domínio do tempo, apresenta menor custo computacional e independência das características do sinal de entrada (LEE; GAN; KUO, 2009). Contudo, o uso de transformações do sinal de entrada podem ocasionar atrasos do caminho do sinal (MORGAN; THI, 1995) além de apresentarem requisitos extras de alocação de memória (RADHOUANE;

LIU; MODLIN, 2000). Devido aos requisitos de máximo atraso tolerável entre a captação do sinal e a interface com a rede (ITU-T P.341, 2011) a adição de atrasos no caminho do sinal devido à transformação ortogonal pode tornar o projeto desses sistemas inviável (MERCHEDE; DINIZ; PETRAGLIA, 1999).

A filtragem adaptativa no domínio da frequência é um caso particular de filtragem adaptativa utilizando transformações ortogonais que transformam o sinal desejado e o sinal de entrada utilizando a DFT e realizam a filtragem e adaptação no domínio da frequência. Um diagrama esquemático de um cancelador de eco no domínio da frequência pode ser observado na Figura 2.2 em que  $\omega$  indica a frequência angular normalizada,  $Y(e^{j\omega})$  indica a Transformada de Fourier do sinal desejado,  $\hat{Y}(e^{j\omega})$  indica a estimativa da Transformada de Fourier do sinal de saída da planta,  $U(e^{j\omega})$  indica a Transformada de Fourier do sinal de entrada da planta,  $H(e^{j\omega, n})$ , e  $D(e^{j\omega})$  indica a Transformada de Fourier do erro de estimação. Enquanto a operação de um filtro linear executa a convolução linear e uma estimação da correlação de maneira iterativa, baseada na chegada de novas amostras, no filtro adaptativo no domínio da frequência, em contrapartida, estas operações tornam-se a convolução e a correlação circulares (OPPENHEIM; WILLSKY; NAWAB, 1996). Assim, são necessários métodos mais sofisticados para realizar as operações *overlap-add* e *overlap-save* de modo que os operadores circulares se comportem como operadores lineares (KUO; GAN, 2005; LEE; GAN; KUO, 2009). Outro problema é a introdução de um atraso no caminho do sinal de *far-end* devido ao seu processamento por uma DFT e uma Transfor-

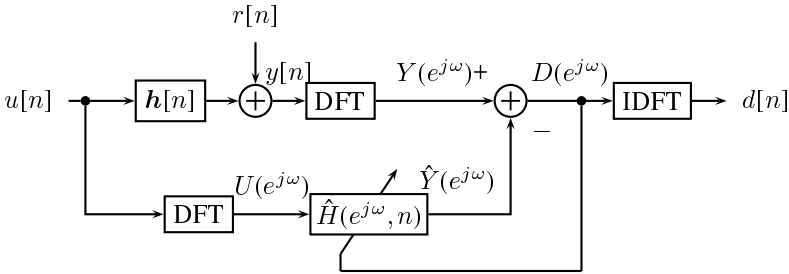


Figura 2.2: Diagrama de blocos de um filtro adaptativo operando no domínio da frequência (BREINING et al., 1999).

mada de Fourier discreta inversa (IDFT).

É possível evitar a introdução de atrasos no caminho do sinal por meio de soluções em que a adaptação ocorre no domínio transformado enquanto o processo de filtragem é feito utilizando uma cópia do filtro no domínio original (BENDEL et al., 2001). Contudo, o processo de conversão dos coeficientes do domínio transformado para o domínio original faz com que os coeficientes utilizados no processo de filtragem estejam atrasados em relação aos coeficientes obtidos na adaptação. Esses atrasos levam à redução da região de convergência do filtro adaptativo dificultando seu projeto (LONG; LING; PROAKIS, 1989).

Outra alternativa é o uso de técnicas de separação do sinal em sub-bandas (VAIDYANATHAN, 1993) que apresenta duas vantagens principais em relação ao processamento *fullband* (MORGAN; THI, 1995):

- O total de operações matemáticas é reduzido pois os sinais em cada sub-banda podem ser decimados reduzindo o número de coeficientes

em cada sub-filtro por um fator menor ou igual ao fator de decimação. Como os filtros são mais curtos, sua taxa de convergência pode ser maior;

- A convergência pode ser acelerada, pois o intervalo de frequências que cada sub-filtro deve tratar é reduzido e o espectro do sinal em cada sub-banda é significativamente mais plano que o espectro do sinal completo (LEE; GAN; KUO, 2009).

Um diagrama de blocos de um filtro adaptativo em sub-bandas é mostrado na Figura 2.3 em que  $N_{sb}$  indica o número de sub-bandas,  $N_d$  indica o fator de decimação,  $\hat{h}_{SB_i}[n]$  indica o sub-filtro adaptativo atuando na  $i$ -ésima sub-banda,  $S_i(z)$  indica o  $i$ -ésimo filtro do banco de síntese,  $A_i(z)$  indica o  $i$ -ésimo filtro do banco de análise,  $y_i[n]$  indica a componente do sinal desejado associada à  $i$ -ésima sub-banda. Quando  $N_{sb} = N_d$  o banco de filtros é chamado de criticamente amostrado (LEE; GAN; KUO, 2009; VAIDYANATHAN, 1993). A principal desvantagem do uso de sub-bandas é que um atraso é introduzido ao sinal de *far-end* em virtude dos filtros utilizados na separação e combinação do sinal em sub-bandas.

Em problemas como o cancelamento de eco acústico os efeitos perceptíveis de um cancelamento incompleto são agravados pelo atraso no caminho do sinal de *far-end*. Neste caso, uma estimativa incompleta do sinal de eco é subtraída do sinal do microfone gerando um incômodo eco residual (VALERO; MABANDE; HABETS, 2014). Portanto, apenas pequenos atrasos no caminho do sinal de *far-end* são permitidos (ITU-T P.341, 2011)

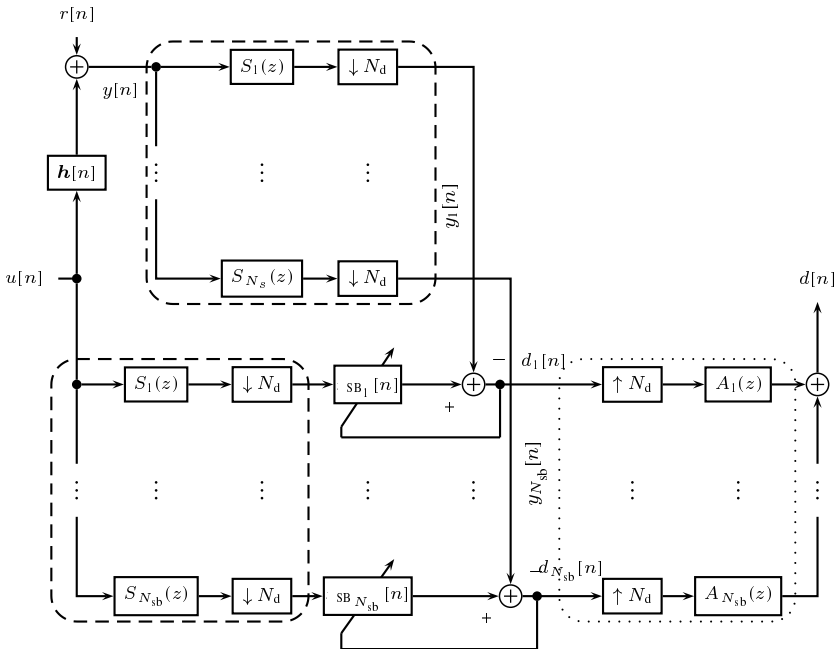


Figura 2.3: Estrutura de processamento em sub-bandas com atraso. Os bancos de filtros são indicados pelos blocos em linhas tracejadas (síntese) e pontilhadas (análise) (LEE; GAN; KUO, 2009).

implicando no uso de filtros de síntese e análise curtos. A consequência é uma seleção em frequência limitada que não permite uma boa atenuação dos sinais de uma sub-banda nas sub-bandas adjacentes. Uma arquitetura de filtragem em sub-banda sem atraso foi idealizada por Morgan e Thi (1995) e mais tarde analisada e aperfeiçoada por Merched, Diniz e Petraglia (1999) consiste em utilizar o banco de filtros de análise para obter os coeficientes no tempo equivalentes. O cancelamento de eco ocorre utilizando estes coeficientes, no domínio do tempo. Apesar do cancelamento de eco ocorrer sem a introdução de atrasos, a atualização dos coeficientes dos sub-filtros está sujeita aos atrasos do processamento pelo banco de filtros de síntese e a conversão dos coeficientes dos sub-filtros para o domínio do tempo está sujeita ao atraso de processamento do banco de análise. Nestas condições, ocorre uma diminuição da região de convergência dos filtros adaptativos e seu projeto torna-se mais complexo (LONG; LING; PROAKIS, 1989). Uma outra desvantagem associada ao processamento em sub-bandas é seu consumo de memória, que pode ser significativamente maior quando comparado com o processamento no domínio do tempo (HÄNSLER; SCHMIDT, 2004).

### **2.3.2 Cancelamento de eco acústico e redução de ruído**

Tradicionalmente, a redução de ruído e o controle de ecos acústicos são projetados independentemente. Contudo, estudos mais recentes têm buscado soluções globais para a combinação de sistemas de cancelamento de ecos e de redução de ruído (JEANNES et al., 2001). Uma das técnicas mais conhecidas de redução de ruído é baseada em algoritmos de atenuação espec-



tral. Nessa abordagem, é realizada uma atenuação dos coeficientes da transformada de Fourier do sinal contaminado por ruído (LOIZOU, 2007). A fase do sinal corrompido não é alterada, com base na hipótese de que distorções de fase não são percebidas pelas pessoas (WANG; LIM, 1982). Estas técnicas podem ser classificadas em três tipos:

- Subtração do espectro de potência, que consiste em subtrair uma estimativa da densidade espectral de potência do ruído da densidade espectral de potência do sinal corrompido (LIM; OPPENHEIM, 1979);
- Subtração espectral, que consiste na subtração do espectro do sinal contaminado por uma estimativa do espectro do ruído (BOLL, 1979);
- Realização de uma aproximação da solução de Wiener por meio de uma filtragem em malha aberta do sinal contaminado por ruído (VASHEGI, 1996).

Contudo, é amplamente conhecido que o ruído residual após o processamento apresenta uma característica indesejável que é o aparecimento de componentes senoidais em frequências aleatórias que variam a cada quadro processado. Este fenômeno é conhecido como ruído musical e deve ser tratado com algoritmos específicos (SILVA; BERMUDEZ, 2011).

Em Jeannes et al. (2001), diversas estruturas para a combinação de cancelamento de eco acústico com redução de ruído, com um (GUSTAFSSON et al., 2002; MARTIN; ALTENHONER, 1995) ou múltiplos microfones (REUVEN; GANNOT; COHEN, 2007a; DAHL; CLAESSION, 1999;

DOCLO; MOONEN; CLIPPEL, 2000; MARTIN; ALTENHONER, 1995), são apresentadas e seus méritos e deficiências discutidos. Contudo, não são tratados aspectos do comportamento transitório desses sistemas.

### ***2.3.3 Cancelamento de eco acústico e cancelamento de realimentação acústica***

A realimentação acústica é caracterizada por uma resposta ao impulso com menos coeficientes que a resposta de um caminho de eco acústico e, se não cancelada, pode causar a instabilização do sistema. A principal dificuldade no cancelamento de realimentação convencional está relacionada à polarização das soluções. Esta polarização surge da correlação entre os sinais emitido pelo alto-falante e captado pelo microfone (SPRIET et al., 2008; NAKAGAWA; NORDHOLM; YAN, 2013). Este problema é encontrado, principalmente, em aparelhos auditivos em que um nível elevado de ganho pode ser necessário e a presença de realimentação reduz a margem de ganho do sistema (NAKAGAWA; NORDHOLM; YAN, 2013). O projeto de canceladores de realimentação com um microfone é tratado em Maluenda e Bermudez (2012) e Nicolau (2010) e o projeto com múltiplos microfones é estudado em Guo et al. (2013). Em Guo, Jensen e Jensen (2012), a relação entre os cancelamentos de realimentação e eco acústico, ambos com múltiplos microfones, é discutida brevemente. O cancelamento de realimentação e redução de ruído com múltiplos microfones é tratado em Rombouts, Spriet e Moonen (2008).

### 2.3.4 Outros estudos

Outros tópicos de pesquisa em cancelamento de eco acústico, que não são tratados neste trabalho, incluem o estudo do controle de *double talk* (PALEOLOGU et al., 2011; TOURNERET; BERSHAD; BERMUDEZ, 2009; BERSHAD; TOURNERET, 2006), o projeto de sistemas estereofônicos (CECCHI et al., 2011) e a identificação de plantas LEM não-lineares (AZPICUETA-RUIZ et al., 2011; AZPICUETA-RUIZ et al., 2013; COMMINIELLO et al., 2011).

Uma abordagem que tem atraído interesse recentemente é combinação de cancelamento de eco acústico com a conformação de feixes por meio de um arranjo de microfones. Durante a aquisição dos sinais, a presença do arranjo de microfones permite a amostragem espacial dos sinais. Analogamente à amostragem no tempo, a amostragem espacial possibilita a seleção espacial dos sinais recebidos. Este tipo de sistema guarda muitas semelhanças com o projeto de sistemas de radar e sonar com múltiplas antenas ou sensores. Contudo, sistemas de radar e sonar são frequentemente estudados com base em modelos válidos para sinais de banda estreita.

## 2.4 Filtragem Espacial

Arranjos de microfones são componentes importantes em muitos sistemas de aquisição de áudio *hands-free* como por exemplo para teleconferências (HERBORDT et al., 2007). Os sinais recebidos normalmente consistem de sinais de interesse, interferências coerentes e não coerentes (HA-

BETS et al., 2010).

Em teoria, a filtragem espacial pode eliminar grande parte dos ecos acústicos. Ecos são formados pela sobreposição de várias reflexões no ambiente. Cada reflexão incide sobre o arranjo de microfones (AM) em uma determinada direção e, portanto, pode ser atenuada como uma interferência coerente (GANNOT; BURSHTEIN; WEINSTEIN, 2001). Contudo, o número de reflexões necessárias para modelar adequadamente uma resposta ao impulso de uma planta LEM típica requer muitos graus de liberdade. Para isso seria necessário um elevado número de sensores (HAYKIN, 1993).

Existem três principais áreas de pesquisa em processamento de sinais com arranjos de sensores (TREES, 2002)

1. Detecção da presença de sinais incidindo no arranjo e determinação do número de sinais recebidos (KWON; NARAYANAN; RANGASWAMY, 2013);
2. Estimação da direção de chegada de cada sinal recebido (KLEIN; VO, 2012; KANTOR et al., 2013);
3. Manutenção de um sinal de interesse emitido de uma direção e supressão de sinais interferentes (ZHANG; LIU; YU, 2011).

A terceira área de estudo consiste no processo de distinguir entre as propriedades espaciais de um sinal de interesse e suas perturbações, também conhecido como conformação de feixe (*beamforming*). O sistema usado para realizar a conformação de feixes é o conformador de feixe ou *beamformer*. O termo conformador de feixe tem origem no processamento em antenas em que

os sistemas eram projetados para formar respostas espaciais com “formato de um lápis” de maneira a receber sinais de uma direção específica e rejeitar sinais de todas as outras direções (VEEN; BUCKLEY, 1988).

Na análise deste trabalho, apenas arranjos de sensores lineares e uniformes são considerados e os sinais incidentes sobre o arranjo se propagam pelo modelo de ondas planas, ou seja, a distância entre os sensores do arranjo é muito menor que a distância dos sensores à fonte sonora. Esse modelo de propagação é também conhecido como campo distante (*far-field*) (TREES, 2002).

#### **2.4.1 Conformadores de feixe**

O estudo dos conformadores de feixe pode ser dividido de acordo com as características espectrais dos sinais envolvidos (banda larga ou banda estreita) (LIU; WEISS, 2010). Sinais de banda estreita, segundo Proakis e Manolakis (2006), são caracterizados por apresentar uma largura de banda muito menor (por um fator 10 ou mais) que a média entre sua frequência superior e inferior. Quando essa condição é satisfeita, o sub-espço de sinal contém uma componente dominante com frequência aproximadamente igual à frequência central do sinal (ZATMAN, 1997). Esses sinais podem ser modelados, aproximadamente, como sinais senoidais de frequência fixa e igual à frequência central da banda do sinal. Sinais de voz e eco, apesar de não apresentarem largura de banda particularmente larga, se propagam por meio de plantas LEM em banda-base. Assim, o modelo de sinais com banda estreita não é uma aproximação adequada na modelagem desses sinais, e o estudo e o projeto

de arranjos de microfones aplicados a esses sinais requer uma formulação especial.

A teoria da conformação de feixes para sinais de banda estreita assume um modelo de sinais complexos produzidos por um processo de modulação. Portanto, o processamento desses sinais é realizado por meio de combinações lineares com coeficientes complexos (TREES, 2002). A conformação de feixes para sinais de banda larga utiliza um modelo de sinal que é a combinação linear de múltiplos sinais de banda estreita portanto também requer o uso de coeficientes complexos. Entretanto, no tratamento de sinais de banda larga, em particular quando a aplicação utiliza sinais de entrada reais e requer sinais de saída reais, observa-se que é necessário o uso de coeficientes reais (LIU; WEISS, 2010). Apesar de grande parte da teoria da conformação de feixe permitir o uso de coeficientes complexos, particularmente em aplicações de radar, nesse trabalho assume-se que a conformação de feixes em banda larga utiliza coeficientes reais. Não obstante, os resultados obtidos podem ser facilmente generalizados para o caso de sinais e coeficientes complexos (HOROWITZ; SENNE, 1981).

Para compreender o princípio da filtragem espacial em banda estreita, e posteriormente em banda larga, as próximas seções explicam o funcionamento dos conformadores de feixe de maneira geral.

#### **2.4.2 Filtragem espacial em banda estreita**

Suponha uma onda planar  $x(t)$  de banda estreita com frequência angular  $\Omega_{NB}$  propagando na direção de um arranjo de sensores  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$

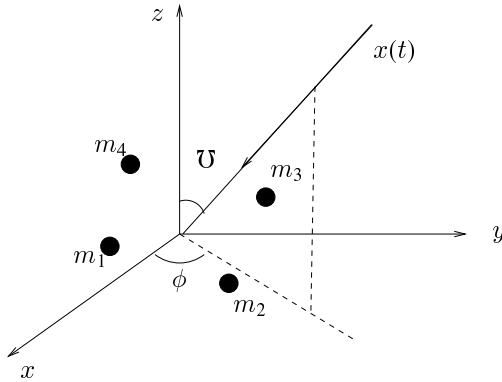


Figura 2.4: Um exemplo de um arranjo de sensores com 4 elementos e um sinal incidente (LIU; WEISS, 2010)

conforme a Figura 2.4. Para simplificar a notação, sem perda de generalidade, considere que a onda se propaga ao longo do eixo  $z$  conforme ilustrado na Figura 2.5. No plano definido como  $z$  constante, a fase do sinal pode ser expressa como:

$$\varphi(t, z) = \Omega_{\text{NB}}t - kz \quad (2.1)$$

na qual  $k$  é o número de onda definido como (CRAWFORD, 1968)

$$k = \frac{\Omega_{\text{NB}}}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{NB}}} \quad (2.2)$$

em que  $c$  indica a velocidade de propagação da onda e  $\lambda_{\text{NB}}$  é o comprimento de onda de  $x(t)$ . De maneira análoga a  $\Omega_{\text{NB}}$ , que indica uma mudança de fase de  $\Omega_{\text{NB}}t$  do sinal no instante de tempo  $t$ , a interpretação de  $k$  aponta para uma mudança na fase do sinal de  $kz$  radianos à medida que o sinal se propaga por uma distância  $z$ . Assim,  $k$  é frequentemente chamado também de frequência

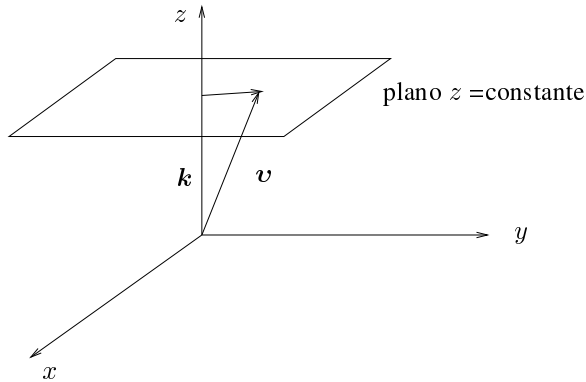


Figura 2.5: Onda plana se propagando na direção  $z$  de um sistema de coordenadas Cartesiano (LIU; WEISS, 2010)

espacial do sinal (LIU; WEISS, 2010).

De maneira diferente da frequência temporal  $\Omega_{\text{NB}}$ , que é um escalar, a frequência espacial  $k$  é, para uma direção de propagação arbitrária, um vetor com 3 dimensões apontado na direção contrária à propagação do sinal. Em um sistema de coordenadas cartesiano, a frequência espacial pode ser indicada por

$$\mathbf{k} = [k_x \quad k_y \quad k_z]^\top \quad (2.3)$$

que é conhecido como vetor de número de onda com comprimento

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \quad (2.4)$$

com  $k$  e  $\Omega_{\text{NB}}$  relacionados pela Equação (2.2).

A localização de um ponto no espaço pode ser representada por um vetor  $\mathbf{v} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^\top$ , em que  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  são as coordenadas cartesianas



do ponto. Assim, a Equação (2.1) pode ser expressa de maneira mais geral

$$\varphi(t, \mathbf{v}) = \Omega_{\text{NB}} t + \mathbf{k}^\top \mathbf{v}. \quad (2.5)$$

Para o caso da Figura 2.5, tem-se  $k_x = k_y = 0$  e  $k_z = -k$ . Portanto,

$$\mathbf{k}^\top \mathbf{v} = -k v_z. \quad (2.6)$$

Assim, todos os pontos do espaço que têm a mesma coordenada  $v_z$  no eixo  $z$  têm a mesma fase no mesmo instante de tempo.

Para o caso mais geral da Figura 2.4, a fonte sonora incide no arranjo com um ângulo zenital  $\bar{U}$  e azimute  $\phi$ . Neste caso, o vetor  $\mathbf{k}$  é dado por

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \text{sen} \bar{U} \text{sen} \phi \\ \text{sen} \bar{U} \cos \phi \\ \cos \bar{U} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Então o termo referente à posição na determinação da fase torna-se

$$\mathbf{k}^\top \mathbf{v} = k(v_x \text{sen} \bar{U} \text{sen} \phi + v_y \text{sen} \bar{U} \cos \phi + v_z \cos \bar{U}). \quad (2.8)$$

No processo de conformação de feixes, o objetivo é obter, a partir dos sinais captados por um arranjo de sensores com frequência de amostragem  $f_s$ , uma estimativa do sinal de interesse incidindo em uma direção específica na presença de ruídos e sinais interferentes. Analogamente ao processo de amostragem temporal, diferentes sensores captam sinais em posições distintas realizando uma amostragem no espaço. Assumindo que o sinal de interesse e as

interferências são geradas em pontos diferentes do espaço, como é comum no estudo dos radares, os sinais dos sensores podem ser combinados de maneira a enfatizar sinais incidentes em determinadas direções e atenuar em outras. Assim, os sinais captados podem ser processados para atenuar os sinais interferentes e extrair o sinal desejado. Como resultado, o arranjo se comporta de maneira distinta de acordo com o ângulo de incidência dos sinais de interesse e interferentes formando uma resposta espacial com um feixe apontado para o sinal desejado e com nulos nas direções de sinais interferentes (VEEN; BUCKLEY, 1988; TREES, 2002).

A Figura 2.6 mostra uma estrutura de processamento baseada em um arranjo linear e uniforme, em que  $M$  sensores captam amostras das ondas incidentes  $x_m[n]$ ,  $m = 0, \dots, M - 1$  com frequência angular normalizada  $\omega_{\text{NB}} = \frac{\Omega_{\text{NB}}}{f_s}$  em posições diferentes do espaço. O sinal de saída do conformador de feixes de banda estreita  $y_{\text{NB}}[n]$  é uma combinação linear destas amostras espaciais. O conjunto de medidas obtidas em um instante de tempo é denominado um *snapshot* do sinal.

A saída pode ser escrita como

$$y_{\text{NB}}[n] = \sum_{m=0}^{M-1} b_m[n] x_m[n] \quad (2.9)$$

Definindo o vetor de coeficientes, no instante  $n$ , de um conformador de feixe de banda estreita como

$$\mathbf{b}_{\text{NB}}[n] = [b_0[n] \quad b_1[n] \quad \dots \quad b_{M-1}[n]]^T \quad (2.10)$$

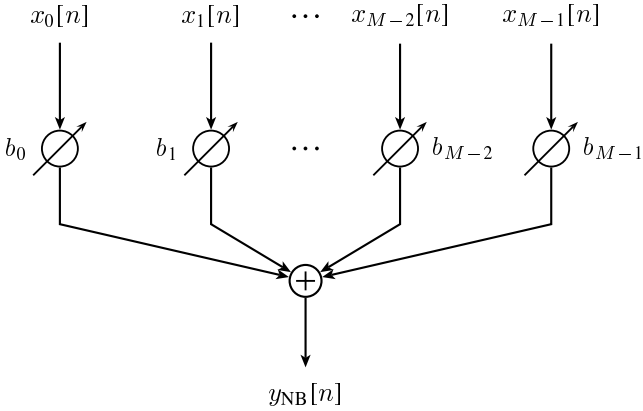


Figura 2.6: Conformador de feixes adaptativo de banda estreita (HAYKIN, 1993)

e o *snapshot* do arranjo

$$\mathbf{x}_s[n] = [x_0[n] \quad x_1[n] \quad \cdots \quad x_{M-1}[n]]^\top \quad (2.11)$$

a saída do sistema pode ser escrita como um produto interno

$$y_{NB}[n] = \mathbf{b}_{NB}^\top[n] \mathbf{x}_s[n]. \quad (2.12)$$

O comportamento desse sistema pode ser analisado supondo um sinal de banda estreita de amplitude unitária incidindo em um arranjo de sensores linear uniforme com ângulo de chegada  $\theta = \pi/2 - \mathcal{U}$ ,  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$  medido em relação a uma reta normal à disposição dos sensores conforme ilustrado na Figura 2.7. Essa geometria do arranjo de sensores não tem resolução espacial ao azimute (TREES, 2002). O sinal de banda estreita pode ser apro-

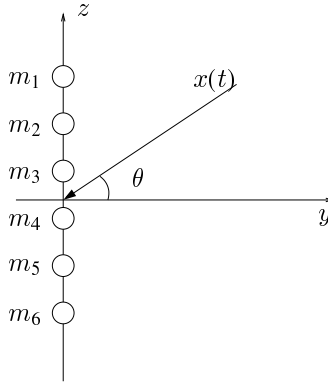


Figura 2.7: Arranjo de sensores linear uniforme (TREES, 2002)

ximado por  $s(t) = e^{j\Omega_{\text{NB}}t}$  em que  $\Omega_{\text{NB}} = 2\pi f_{\text{NB}}$  e  $f_{\text{NB}}$  indica a frequência central do sinal (PROAKIS; MANOLAKIS, 2006). Por conveniência, pode-se assumir que a fase do sinal é 0 quando medida no sensor 0. O sinal recebido no sensor  $m$  é dado por  $e^{j\Omega_{\text{NB}}(t-\tau_m(\theta))}$ ,  $m = 0, 1, \dots, M-1$  em que  $\tau_m(\theta)$  é o atraso de propagação do sensor 0 até o sensor  $m$  para o ângulo de incidência  $\theta$ . Da Equação (2.9), a saída do conformador de feixe, para um sinal incidente em um ângulo  $\theta$ , é dada por:

$$\begin{aligned}
 y_{\text{NB}\theta}[n] &= \sum_{m=0}^{M-1} e^{j\Omega_{\text{NB}}(t-\tau_m(\theta))} \Big|_{t=nT_s} b_m[n] \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} e^{j\Omega_{\text{NB}}(nT_s-\tau_m(\theta))} b_m[n] \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} e^{j\Omega_{\text{NB}}nT_s} e^{-j\Omega_{\text{NB}}\tau_m(\theta)} b_m[n] \\
 &= e^{j\omega_{\text{NB}}n} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j\Omega_{\text{NB}}\tau_m(\theta)} b_m[n]
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

em que  $T_s$  é o período de amostragem e  $\Omega_{\text{NB}}T_s = \omega_{\text{NB}}$ . Dado que a versão amostrada do sinal de entrada é  $e^{j\omega_{\text{NB}}n}$ , da Equação (2.13) pode-se concluir que a resposta do arranjo de sensores com banda estreita  $P_{\text{NB}}(e^{j\omega_{\text{NB}}}, \theta)$ , para uma frequência  $\omega_{\text{NB}}$  e ângulo de incidência  $\theta$ , pode ser escrita como

$$P_{\text{NB}}(e^{j\omega_{\text{NB}}}, \theta) = \boldsymbol{\eta}_{\text{NB}}^\top(e^{j\omega_{\text{NB}}}, \theta) \mathbf{b}_{\text{NB}}[n] \quad (2.14)$$

em que

$$\boldsymbol{\eta}_{\text{NB}}(e^{j\omega}, \theta) = \left[ 1 \quad e^{j\omega \frac{-\tau_1(\theta)}{T_s}} \quad \dots \quad e^{j\omega \frac{-\tau_{M-1}(\theta)}{T_s}} \right]^\top \quad (2.15)$$

indica o vetor de *steering* do arranjo de sensores com banda estreita.

Assumindo que a distância da fonte do sinal ao centro do arranjo de sensores é muito maior que a distância entre sensores adjacentes, é possível utilizar o modelo de propagação de *far-field* para simplificar o cálculo das defasagens entre sensores (TREES, 2002). Para um arranjo uniforme e linear de sensores conforme ilustrado na Figura 2.8 a distância adicional em relação ao sensor  $m - 1$  que uma onda percorre antes de ser captada pelo sensor  $m$  é dada por  $L \text{sen}\theta$  em que  $L$  é a distância entre sensores adjacentes do arranjo. Assumindo que a velocidade de propagação da onda é constante, o sinal captado no sensor  $m$  está atrasado em relação ao sinal captado no sensor  $m - 1$  por  $L \frac{\text{sen}\theta}{c}$  segundos ou  $L \frac{\text{sen}\theta}{cT_s}$  amostras.

Com base na definição do vetor de *steering*, é possível identificar o efeito de *aliasing* espacial de maneira similar ao *aliasing* temporal. Na conversão analógico-digital, um sinal contínuo é amostrado temporalmente e convertido em uma sequência discreta temporal. Nesse processo, o *alia-*

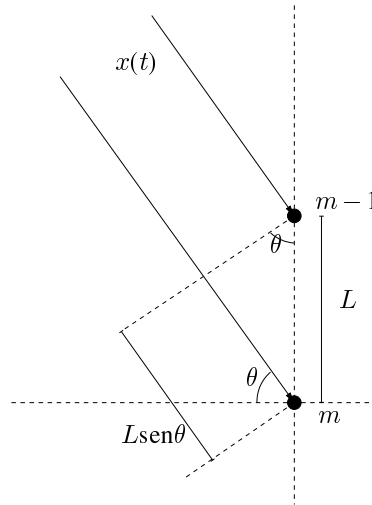


Figura 2.8: Atraso espacial quando uma onda plana incide em um arranjo linear e uniforme de sensores

*aliasing* é caracterizado quando sinais contínuos distintos apresentam a mesma sequência temporal após o processo de amostragem. Esse fenômeno ocorre quando os sinais são convertidos com uma taxa de amostragem menor que a frequência de Nyquist, ou seja, o dobro da maior frequência dos sinais originais (OPPENHEIM; WILLSKY; NAWAB, 1996). Na presença de *aliasing*, não é possível a reconstrução do sinal original a partir de suas amostras. Analogamente, para a amostragem espacial, os sensores captam o sinal em diferentes pontos do espaço. Caso esses sensores não estejam posicionados suficientemente próximos, sinais de duas direções diferentes apresentam o mesmo vetor de *steering* e sua localização não pode ser identificada unicamente. De maneira similar ao *aliasing* temporal existe uma ambiguidade na

direção da fonte sonora.

Assumindo duas fontes de sinais de banda estreita com mesma frequência angular e localizados em pontos distintos do espaço com ângulos de chegada  $\theta_1$  e  $\theta_2$  em que  $\theta_1 \neq \theta_2$  e  $(\theta_1, \theta_2) \in [-\pi, \pi]$ , se estes dois sinais apresentam o mesmo vetor de *steering*, então da Equação (2.15) tem-se  $e^{-j\Omega_{\text{NB}}\tau_m(\theta_1)} = e^{-j\Omega_{\text{NB}}\tau_m(\theta_2)}$ . Para observar o efeito de *aliasing* espacial, é necessário avaliar o efeito de  $L$  na formação do vetor de *steering*. Nesse caso, há ambiguidade na direção dos sinais se

$$e^{-jm\frac{2\pi L\text{sen}\theta_1}{\lambda_{\text{NB}}}} = e^{-jm\frac{2\pi L\text{sen}\theta_2}{\lambda_{\text{NB}}}}. \quad (2.16)$$

Para evitar a ambiguidade na Equação (2.16) é necessário que as fases estejam dentro do intervalo  $] -\pi, \pi[$ , ou seja,

$$\left| \frac{2\pi L\text{sen}\theta}{\lambda_{\text{NB}}} \right|_{\theta=\theta_1, \theta_2} < \pi$$

em que  $L, \lambda_{\text{NB}} \geq 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} \frac{L}{\lambda_{\text{NB}}} |\text{sen}\theta|_{\theta=\theta_1, \theta_2} &< \frac{1}{2} \\ L &< \frac{\lambda_{\text{NB}}}{2|\text{sen}\theta|_{\theta=\theta_1, \theta_2}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Como  $|\text{sen}\theta| \leq 1$ , a distância entre os elementos do arranjo  $L$  de modo a evitar o efeito de *aliasing* espacial, independentemente do ângulo de incidência, deve ser menor que  $\lambda_{\text{NB}}/2$ . No restante deste trabalho, assume-se que essa condição é satisfeita. Para um arranjo criticamente amostrado espacialmente,

$L = \frac{\lambda_{\text{NB}}}{2}$ , nesse caso,  $\Omega_{\text{NB}}\tau_m(\theta) = m\pi\text{sen}\theta$  e a resposta do arranjo é dada por

$$P_{\text{NB}}(e^{j\omega_{\text{NB}}}, \theta) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m[n]e^{-jm\pi\text{sen}\theta}. \quad (2.18)$$

Supondo que os mesmos coeficientes  $b_{\text{NB}}[n]$  sejam utilizados para projetar um filtro FIR transversal, sua resposta em frequência seria dada por

$$B_{\text{NB}}(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j\ell\omega} b_m[n]. \quad (2.19)$$

Quando  $\theta$  assume valores em  $[-\pi/2, \pi/2]$  na Equação (2.18), o atraso  $\pi\text{sen}\theta$  varia de  $-\pi$  a  $\pi$ , que é a mesma variação da frequência angular normalizada  $\omega$  em (2.19). Por meio da transformação de variável  $\omega = \pi\text{sen}\theta$ , os conformadores de feixe de banda estreita fixos podem ser projetados diretamente por meio de técnicas de projeto de filtros FIR convencionais. Por exemplo, o projeto de um conformador de feixe criticamente amostrado espacialmente com direção desejada em  $[-\pi/6, \pi/6]$  enquanto sinais de ângulos  $\pi/4 < |\theta| < \pi/2$  devem ser cancelados, é equivalente ao projeto de um filtro FIR com banda de passagem entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$  e banda de rejeição em  $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi < |\omega| < \pi$ . Este filtro pode ser projetado, por exemplo, com o algoritmo de Parks-McClellan (MITRA, 2000) e seus coeficientes utilizados diretamente no conformador de feixe. Supondo que o arranjo contém  $M = 16$  elementos, o projeto do filtro



tem como um dos resultados possíveis

$$\mathbf{b}_{\text{NB}} = \begin{bmatrix} 0.0192 & -0.0042 & -0.0323 & 0.0423 & 0.0249 & -0.1156 \\ 0.0602 & 0.5152 & 0.5152 & 0.0602 & -0.1156 & 0.0249 \\ 0.0423 & -0.0323 & -0.0042 & 0.0192 \end{bmatrix}^{\top}. \quad (2.20)$$

Substituindo esse resultado na Equação (2.18), pode-se traçar o diagrama de irradiação de  $P(e^{j\omega_{\text{NB}}}, \theta)$  do conformador de feixe em relação ao ângulo de chegada  $\theta$ . O diagrama de irradiação do conformador de feixe é usado para descrever a sensibilidade do sistema em relação a sinais incidentes de diferentes direções para uma frequência fixa. O diagrama de irradiação do filtro com os coeficientes da Equação (2.20) é ilustrado na Figura 2.9 para  $L = \lambda_{\text{NB}}/2$ .

Uma das abordagens mais comuns no projeto de conformadores de feixe adaptativos de banda estreita consiste na minimização da variância do sinal de saída sob restrições lineares que assumem a forma

$$F_{\text{NB}}(e^{j\omega_{\text{NB}}}) = \mathbf{b}_{\text{NB}}^{\top} [n] \boldsymbol{\eta}_{\text{NB}}(e^{j\omega_{\text{NB}}}, \theta_{\text{DOA}}) \quad (2.21)$$

em que  $F_{\text{NB}}(e^{j\omega_{\text{NB}}})$  é a resposta em frequência desejada para  $\omega = \omega_{\text{NB}}$  e direção de chegada do sinal desejado  $\theta = \theta_{\text{DOA}}$ . Se necessário, restrições adicionais para diferentes ângulos de chegada podem ser produzidas da mesma maneira. Por exemplo, pode-se conhecer a localização de uma fonte de interferência *a priori* e forçar o conformador de feixe a rejeitar sinais desta localização (TREES, 2002).

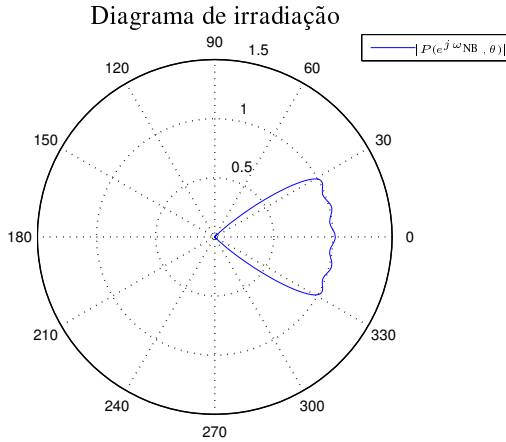


Figura 2.9: Diagrama de irradiação de um conformador de feixe com os coeficientes da Equação (2.20) e  $L = \lambda_{NB}/2$

A imposição da restrição da Equação (2.21) garante que, para uma determinada direção de chegada, a resposta do arranjo, para  $\omega = \omega_{NB}$ , é mantida constante para todos os valores de  $\mathbf{b}_{NB}[n]$  que pertencem ao espaço factível das soluções. O conformador de feixe que minimiza a variância do seu sinal de saída, sujeito a esta restrição, é chamado de *Linearly constrained minimum variance* e, quando a restrição força a resposta na direção de chegada a ter ganho unitário, o conformador de feixe é chamado de *Minimum-variance distortionless response* (MVDR). O uso de uma restrição reduz o número de graus de liberdade do conformador de feixe de banda estreita para  $M - 1$ . Consequentemente, o número de nulos na resposta espacial produzidos pelo algoritmo, que correspondem ao número de direções de interferência que po-

dem ser completamente canceladas, é  $M - 1$  (HAYKIN, 1993).

Considere um sistema em que o sinal na DOA é captado na presença de  $N_i$  interferências que apresentam energia em  $\omega = \omega_{NB}$  e geradas em diferentes pontos do espaço. Deseja-se que o conformador de feixe mantenha a resposta  $F(e^{j\omega_{NB}})$  em  $\theta = \theta_{DOA}$  e apresente resposta nula para as interferências incidentes em ângulos  $\theta = \theta_i$ , em que  $i = 0, \dots, N_i - 1$ . Esta condição pode ser expressa por meio do conjunto de restrições em (2.22).

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{-j\Omega_{NB}\tau_1(\theta_{DOA})} & \dots & e^{-j\Omega_{NB}\tau_{M-1}(\theta_{DOA})} \\ 1 & e^{-j\Omega_{NB}\tau_1(\theta_0)} & \dots & e^{-j\Omega_{NB}\tau_{M-1}(\theta_0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\Omega_{NB}\tau_1(\theta_{N_i-1})} & \dots & e^{-j\Omega_{NB}\tau_{M-1}(\theta_{N_i-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(e^{j\omega_{NB}}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Enquanto a matriz à esquerda apresentar posto completo ( $N_i < M - 1$ ), é possível encontrar pelo menos um conjunto de coeficientes para cancelar as  $N_i$  interferências. A solução ótima para essa equação é uma função tanto da frequência do sinal quanto do ângulo de incidência.

### 2.4.3 Filtragem espacial em banda larga

Quando os sinais de interesse são transmitidos em banda-base (como por exemplo em uma planta LEM) os sistemas baseados no modelo de sinal com banda estreita não são capazes de cumprir os requisitos de manutenção da resposta em uma faixa de frequência na direção de interesse. Sinais com energia em  $N_{freq}$  frequências podem ser representados pela sobreposição de

$N_{\text{freq}}$  sinais senoidais e, portanto, exigem  $N_{\text{freq}}$  conjuntos de equações na forma da Equação (2.22) para garantir a manutenção da resposta na direção de interesse e o cancelamento de interferências nas  $N_{\text{freq}}$  frequências. No caso geral de sinais de banda larga, a densidade espectral de potência do sinal de entrada tende a uma função contínua. Nesse caso,  $N_{\text{freq}} \rightarrow \infty$ . Estas  $N_{\text{freq}}$  equações matriciais apresentam  $N_{\text{freq}}$  soluções, uma para cada frequência (LIU; WEISS, 2010). Logo, para satisfazer os requisitos de manutenção da resposta em frequência e o cancelamento das interferências, é necessário que as componentes de  $\mathbf{b}_{\text{NB}}$  apresentem valores diferentes para diferentes frequências, ou seja,

$$\mathbf{b}_{\text{NBopt}} = [b_0(e^{j\omega}) \quad b_1(e^{j\omega}) \quad \dots \quad b_{M-1}(e^{j\omega})]^\top. \quad (2.23)$$

Portanto, o uso de um conformador de feixe com um coeficiente constante por sensor, como ilustrado na Figura 2.6, não é capaz de garantir o comportamento do sistema para múltiplas frequências.

Os primeiros estudos no projeto de conformadores de feixe de banda larga utilizam filtros FIR transversais de comprimento  $N_{\text{BF}}$  no lugar de um único coeficiente por sensor com o objetivo de obter respostas em função da frequência dos sinais incidentes (CAPON, 1969; FROST III, 1972). A combinação dos sinais de saída destes filtros FIR transversais realiza filtragem espacial por meio da compensação das diferenças de fase em toda a largura de banda do sinal. Esta estrutura está ilustrada na Figura 2.10.

Enquanto os componentes na direção de interesse são combinadas em fase, os outros componentes são combinados visando sua aniquilação por in-

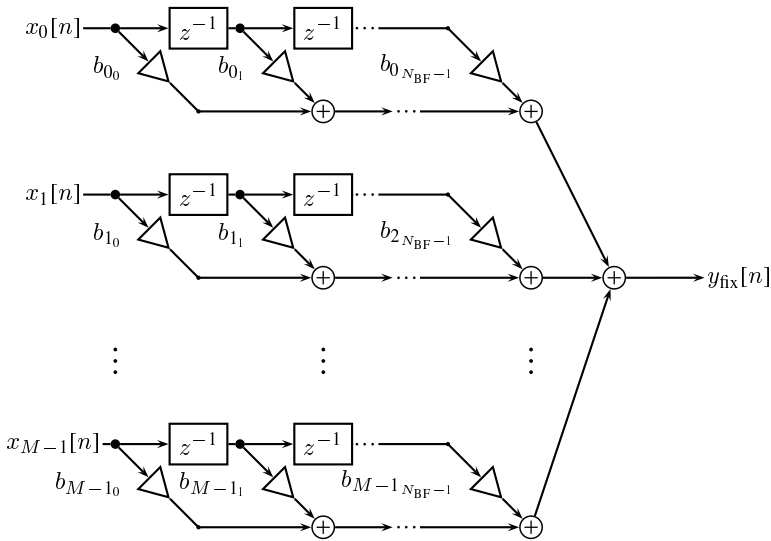


Figura 2.10: Estrutura geral para conformação de feixes de banda larga em sua forma direta (FROST III, 1972)

terferência destrutiva (CRAWFORD, 1968). No tratamento de sinais estacionários com estatísticas conhecidas e incidindo de direções conhecidas, é possível projetar conformadores de feixe fixos com cancelamento de interferências ótimo para diversos critérios de desempenho (TREES, 2002). Contudo, eles sofrem das mesmas dificuldades para a implementação em tempo real que os filtros de Wiener.

Devido ao processamento temporal, o vetor de dados de entrada do conformador de feixe de banda larga da Figura 2.10 contém valores passados

da entrada (FROST III, 1972):

$$\mathbf{x}_b[n] = \left[ \mathbf{x}_s^\top[n] \quad \mathbf{x}_s^\top[n-1] \quad \cdots \quad \mathbf{x}_s^\top[n - (N_{\text{BF}} - 1)] \right]^\top \quad (2.24)$$

com  $\mathbf{x}_s[n]$  dado pela Equação (2.11).

Analogamente, definindo o vetor contendo os  $\ell$ -ésimos coeficientes de cada filtro FIR

$$\mathbf{b}_\ell = \left[ b_{0_\ell} \quad b_{1_\ell} \quad \cdots \quad b_{M-1_\ell} \right]^\top \quad (2.25)$$

em que  $\ell = 0, \dots, N_{\text{BF}} - 1$ . Pode-se escrever o sinal de saída do conformador de feixes de banda larga como

$$y_{\text{fix}}[n] = \sum_{\ell=0}^{N_{\text{BF}}-1} \mathbf{x}_s^\top[n-\ell] \mathbf{b}_\ell \quad (2.26)$$

Definindo o vetor de coeficientes do conformador de banda larga fixo (FROST III, 1972).

$$\mathbf{b}_{\text{fix}} = \left[ \mathbf{b}_0^\top \quad \mathbf{b}_1^\top \quad \cdots \quad \mathbf{b}_{N_{\text{BF}}-1}^\top \right]^\top$$

o sinal de saída pode ser escrito como um produto interno

$$y_{\text{fix}}[n] = \mathbf{b}_{\text{fix}}^\top \mathbf{x}_b[n], \quad (2.27)$$

Essa notação, mais geral que a da subseção anterior, incorpora o conformador de feixe de banda estreita fixo como um caso particular em que  $N_{\text{BF}} = 1$ .

Supondo que um sinal de banda estreita incide em um ângulo  $\theta$  sobre o arranjo de sensores, é mensurado e convertido em um sinal discreto  $e^{j\omega n}$

no sensor 0, então os sinais em outros sensores são descritos por

$$x_m[n - \ell] = e^{j\omega(n - (\frac{\tau_m(\theta)}{T_s} + \ell))} \quad (2.28)$$

em que o modelo de propagação de *far-field* foi assumido.

Substituindo a Equação (2.28) na Equação (2.27), o sinal de saída, para um sinal de entrada com frequência angular  $\omega$  e incidente em um ângulo  $\theta$ , é dado por

$$\begin{aligned} y[n]|(\theta, \omega) &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{\ell=0}^{N_{\text{BF}}-1} b_{m\ell} e^{j\omega(n - (\frac{\tau_m(\theta)}{T_s} + \ell))} \\ &= e^{j\omega n} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{\ell=0}^{N_{\text{BF}}-1} b_{m\ell} e^{-j\omega(\frac{\tau_m(\theta)}{T_s} + \ell)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Logo, a resposta do conformador de feixes de banda larga a um sinal incidente de um ângulo  $\theta$  na frequência  $\omega$  é dada por

$$P(e^{j\omega}, \theta) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{\ell=0}^{N_{\text{BF}}-1} b_{m\ell} e^{-j\omega(\frac{\tau_m(\theta)}{T_s} + \ell)}. \quad (2.30)$$

Essa resposta pode ser escrita como um produto interno

$$P(e^{j\omega}, \theta) = \boldsymbol{\eta}^\top(e^{j\omega}, \theta) \mathbf{b}_{\text{fix}} \quad (2.31)$$

em que  $\boldsymbol{\eta}(e^{j\omega}, \theta)$  é o vetor de *steering* para o conformador de feixe de banda

larga dado por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(e^{j\omega}, \theta) = & \left[ e^{-j\omega \frac{\tau_0(\theta)}{T_s}} \quad \dots \quad e^{-j\omega \frac{\tau_{M-1}(\theta)}{T_s}} \quad e^{-j\omega \left( \frac{\tau_0(\theta)}{T_s} + 1 \right)} \quad \dots \right. \\ & e^{-j\omega \left( \frac{\tau_{M-1}(\theta)}{T_s} + 1 \right)} \quad \dots \quad e^{-j\omega \left( \frac{\tau_0(\theta)}{T_s} + N_{\text{BF}} - 1 \right)} \quad \dots \\ & \left. e^{-j\omega \left( \frac{\tau_{M-1}(\theta)}{T_s} + N_{\text{BF}} - 1 \right)} \right]^\top. \end{aligned} \quad (2.32)$$

O vetor de *steering* para o conformador de feixe de banda estreita é um caso particular de (2.32) quando  $N_{\text{BF}} = 1$ . Para um arranjo uniforme e linear de sensores, de maneira similar ao conformador de feixe de banda estreita, a distância entre os sensores não deve ultrapassar  $L \leq \frac{\lambda_{\min}}{2}$ , em que  $\lambda_{\min}$  é o comprimento de onda correspondente à frequência de maior magnitude no sinal de banda larga. Do contrário, observa-se o efeito de *aliasing* espacial. Assumindo ainda que  $L = \frac{\lambda_{\min}}{2}$ , o atraso entre o sensor  $m$  e o sensor 0 dividido pelo período de amostragem é dado por  $\frac{\tau_m(\theta)}{T_s} = m\beta \text{sen}\theta$  com  $\beta = \frac{L}{cT_s}$ . Logo, o vetor de *steering* pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(e^{j\omega}, \theta) = & [1 \quad \dots \quad e^{-j\omega(M-1)\beta \Omega \text{sen}\theta} \quad e^{-j\omega} \quad \dots \quad e^{-j\omega[(M-1)\beta \text{sen}\theta + 1]} \\ & \dots \quad e^{-j\omega(N_{\text{BF}}-1)} \quad \dots \quad e^{-j\omega[(M-1)\beta \text{sen}\theta + N_{\text{BF}}-1]}]^\top. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nesse caso, a resposta do arranjo para o vetor de steering da Equação (2.33)



é dada por

$$\begin{aligned}
 P(e^{j\omega}, \theta) &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N_{\text{BF}}-1} e^{-j\omega(m\beta\text{sen}\theta+i)} b_{m_i} \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j\omega m\beta\text{sen}\theta} \sum_{i=0}^{N_{\text{BF}}-1} e^{-j\omega i} b_{m_i} \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j\omega m\beta\text{sen}\theta} B_m(e^{j\omega})
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

em que  $B_m(e^{j\omega})$  é a transformada de Fourier dos coeficientes do  $m$ -ésimo filtro FIR do conformador de feixe.

Supondo que tanto o sinal de saída do conformador de feixe quanto o sinal de entrada dos sensores são sinais reais, então é necessário que  $P^*(e^{j\omega}, \theta) = P(e^{-j\omega}, \theta)$  (OPPENHEIM; WILLISKY; NAWAB, 1996). De (2.34), tem-se

$$\begin{aligned}
 P(e^{-j\omega}, \theta) &= \sum_{m=0}^{M-1} e^{j\omega m\beta\text{sen}\theta} B_m(e^{-j\omega}) \\
 P^*(e^{j\omega}, \theta) &= \sum_{m=0}^{M-1} e^{j\omega m\beta\text{sen}\theta} B_m^*(e^{j\omega}).
 \end{aligned}$$

Portanto, para que o conformador de feixe tenha uma saída real para sinais de entrada reais é necessário que  $B_m(e^{-j\Omega}) = B_m^*(e^{j\Omega})$ . Logo, os coeficientes de  $b_{\text{fix}}$  devem ser reais (DAUBECHIES, 1992).

### Restrições lineares

A resposta de um conformador de feixe linear, para ângulos e frequências pré-determinados, pode ser garantida por meio de restrições

lineares. Dentre os conformadores de feixe sujeitos a esse tipo de restrição existem os conformadores LCMV, conformadores de potência mínima com restrições lineares (LCMP), os conformadores de potência mínima com resposta sem distorção (MPDR) e MVDR (TREES, 2002). Cada aplicação pode exigir um conjunto diferente de restrições. Dentre as restrições, uma das mais comuns é a de manutenção de uma resposta em frequência para uma direção de chegada. Essas são as restrições geralmente adotadas no projeto de conformadores de feixe MVDR (CAPON, 1969; OWSLEY, 1985) nos quais deseja-se uma resposta em frequência com magnitude constante e fase linear. Em outras aplicações, a manutenção da resposta em frequência em mais de um ângulo de interesse pode ser mais adequada (BUCKLEY, 1986; BUCKLEY, 1987). A formulação destas restrições é baseada na relação entre a resposta na direção de interesse e o vetor de coeficientes do arranjo

$$\mathbf{C}^\top \mathbf{b} = \mathbf{f} \quad (2.35)$$

em que, supondo que as restrições foram projetadas para  $N_\theta$  ângulos de incidência e  $N_\omega$  frequências para cada ângulo de incidência, então

$$\mathbf{C} = [\boldsymbol{\eta}(e^{j\omega_0}, \theta_0) \quad \dots \quad \boldsymbol{\eta}(e^{j\omega_{N_\omega-1}}, \theta_{N_\theta-1})] \quad (2.36)$$

indica a matriz de restrição,

$$\mathbf{f} = [P(e^{j\omega_0}, \theta_0) \quad \dots \quad P(e^{j\omega_{N_\omega-1}}, \theta_{N_\theta-1})] \quad (2.37)$$

indica o vetor de resposta na direção desejada em que o número de restrições é  $N_C = N_\theta \cdot N_\omega$ . Métodos para obtenção da matriz de projeção e do vetor

quiescente reais para  $\theta_{\text{DOA}} = 0$  e  $\theta_{\text{DOA}} \neq 0$  são descritos nos Apêndices A e B respectivamente.

### **Filtragem espacial em banda larga adaptativa**

No projeto de arranjos de conformadores de feixe para sinais de banda larga, em geral, procura-se a manutenção de uma resposta em frequência na direção de interesse e a supressão de sinais, tanto de banda larga quanto estreita, em outras direções. Quando admite-se a adaptação dos coeficientes de um conformador de feixes em banda larga, a estrutura de processamento em sua forma direta é a representada pela Figura 2.11.

Uma das primeiras propostas do uso de filtragem adaptativa na otimização do conformador de feixe de banda larga foi apresentada por Frost III (1972) resultando no algoritmo CLMS. Esse algoritmo se baseia na divisão do vetor de coeficientes do conformador de feixe em dois subespaços ortogonais. Um deles corresponde ao espaço dos vetores que satisfazem à restrição de manutenção de uma resposta em frequência em uma direção. O outro é o subespaço complementar ortogonal. A projeção do vetor de soluções no subespaço das colunas da matriz de restrição permanece constante durante toda a adaptação e a minimização ocorre ajustando a projeção dos coeficientes no espaço complementar ortogonal ao espaço das colunas da matriz de restrição.

Para a versão adaptativa do conformador de feixe de banda larga, o vetor de coeficientes passa a ser dependente do instante de tempo discreto  $n$  (FROST III, 1972). Definindo o vetor contendo os  $\ell$ -ésimos coeficientes de

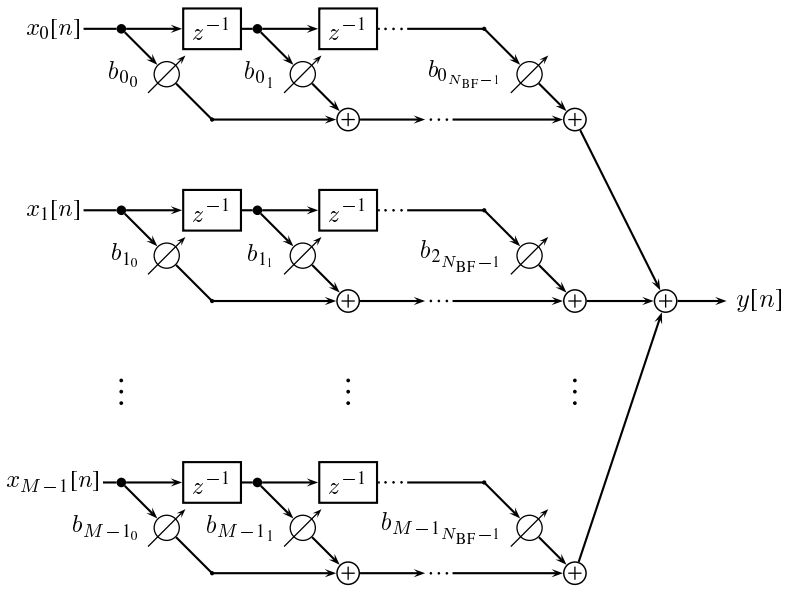


Figura 2.11: Estrutura geral para conformação de feixes de banda larga adaptativo em sua forma direta (FROST III, 1972)

cada filtro FIR

$$\mathbf{b}_\ell[n] = [b_{\ell 0}[n] \quad b_{\ell 1}[n] \quad \cdots \quad b_{\ell N_{BF}-1}[n]]^\top$$

e o vetor de coeficientes do conformador de feixe

$$\mathbf{b}[n] = [\mathbf{b}_0^\top[n] \quad \mathbf{b}_1^\top[n] \quad \cdots \quad \mathbf{b}_{N_{BF}-1}^\top[n]]^\top \quad (2.38)$$

o sinal de saída passa a ser

$$y[n] = \mathbf{b}^\top[n] \mathbf{x}_b[n]. \quad (2.39)$$

### Algoritmo CLMS

O algoritmo CLMS foi proposto em (FROST III, 1972) como uma solução adaptativa para o projeto de conformadores de feixe utilizando a superfície de desempenho LCMV. O sinal de saída do conformador de feixe é descrito pela Equação (2.39) e, assumindo que  $y[n]$  tem média nula, sua potência média, condicionada ao valor dos coeficientes do BF, é dada por

$$\begin{aligned} E\{y^2[n] | \mathbf{b}[n] = \mathbf{b}\} &= E\{\mathbf{b}^\top \mathbf{x}_b[n] \mathbf{x}_b^\top [n] \mathbf{b}\} \\ &= \mathbf{b}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.40)$$

em que  $\mathbf{R}_{x_b x_b} = E\{\mathbf{x}_b[n] \mathbf{x}_b^\top [n]\}$  é definida positiva. Portanto, na ausência de restrições, a solução que minimiza a Equação (2.40) é  $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0}_{M \cdot N_{BF} \times 1}$ . Contudo, em geral, deseja-se manter o sinal em uma direção desejada por meio de um conjunto de restrições lineares semelhantes a (2.35). Combinando as Equações (2.40) e (2.35) chega-se à superfície de desempenho LCMV expressa por

$$\mathbf{b}_{\text{opt}} = \arg \min_{\mathbf{b}} \quad \mathbf{b}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{b} \quad (2.41a)$$

$$\text{sujeito a } \mathbf{C}^\top \mathbf{b} = \mathbf{f}. \quad (2.41b)$$

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange (FLETCHER, 1987), a função Lagrangeana associada à Equação (2.41) é dada por

$$\mathcal{C} = \mathbf{b}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{b} + \boldsymbol{\varsigma}^\top (\mathbf{C}^\top \mathbf{b} - \mathbf{f}) \quad (2.42)$$

em que  $\zeta$  indica o vetor de multiplicadores de Lagrange. O gradiente da Equação (2.42) em relação a  $\mathbf{b}$  é dado por

$$\nabla_{\mathbf{b}} \mathcal{C} = 2\mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{b} + \mathbf{C} \zeta. \quad (2.43)$$

A solução ótima da Equação (2.41) é obtida ao encontrar a solução para  $\nabla_{\mathbf{b}} \mathcal{C} = \mathbf{0}_{M \cdot N_{BF} \times 1}$  e observando que a matriz Hessiana da Equação (2.42) dada por  $\mathbf{R}_{x_b x_b}$  é definida positiva. Portanto a solução ótima  $\mathbf{b}_{\text{opt}}$  deve obedecer

$$\begin{aligned} 2\mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{b}_{\text{opt}} + \mathbf{C} \zeta &= \mathbf{0}_{M \cdot N_{BF} \times 0} \\ \mathbf{b}_{\text{opt}} &= -2\mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1} \mathbf{C} \zeta. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Para que  $\mathbf{b}_{\text{opt}}$  esteja no hiperplano definido pela Equação (2.41), é necessário que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^\top \mathbf{b}_{\text{opt}} &= -2\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1} \mathbf{C} \zeta = \mathbf{f} \\ \zeta &= -\frac{1}{2} (\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Finalmente, substituindo a Equação (2.45) na Equação (2.44) a solução ótima do LCMV definido pela Equação (2.41) é dada por (FROST III, 1972)

$$\mathbf{b}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}. \quad (2.46)$$

Uma maneira de derivar um algoritmo recursivo para minimizar a Equação (2.42) é utilizar uma aproximação estocástica do método do gradiente (*steepest-descent*) (SAYED, 2008; HAYKIN, 1993; GODARA; CAN-

TONI, 1986). Nesse caso, a atualização da solução segue a recursão

$$\mathbf{b}[n+1] = \mathbf{b}[n] - \frac{\mu}{2} \nabla_{\mathbf{b}} \mathcal{C} \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{b}[n]} \quad (2.47)$$

em que  $\mu$  indica o passo de adaptação que controla a velocidade de convergência da Equação (2.47). Substituindo a Equação (2.43) na Equação (2.47) encontra-se a recursão específica para o problema descrito pela Equação (2.41)

$$\mathbf{b}[n+1] = \mathbf{b}[n] - \mu \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{b}[n] - \frac{\mu}{2} \mathbf{C} \boldsymbol{\varsigma}. \quad (2.48)$$

Assumindo que  $\mathbf{b}[n]$  é uma solução factível,  $\mathbf{b}[n+1]$  é uma solução factível se a nova solução satisfaz (2.41), ou seja

$$\mathbf{C}^\top \mathbf{b}[n+1] = \mathbf{C}^\top \mathbf{b}[n] - \mu \mathbf{C}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{b}[n] - \frac{\mu}{2} \mathbf{C}^\top \mathbf{C} \boldsymbol{\varsigma} = \mathbf{f}.$$

Nesse caso, o vetor de coeficientes de Lagrange que garante que  $\mathbf{b}[n+1]$  é factível é dado por

$$\boldsymbol{\varsigma} = \frac{2}{\mu} (\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{C}^\top \mathbf{b}[n] - \mathbf{f}) - 2 (\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{b}[n] \quad (2.49)$$

em que assume-se que  $\mathbf{C}$  tem posto cheio de colunas. Substituindo a Equação (2.49) na Equação (2.48) deriva-se uma recursão independente do valor dos multiplicadores de Lagrange expressa por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}[n+1] = & \mathbf{b}[n] - \mu \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{b}[n] + \mu \mathbf{C} (\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{b}[n] \\ & - \mathbf{C} (\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{C}^\top \mathbf{b}[n] - \mathbf{f}) \end{aligned}$$

em que o último termo, proporcional a  $\mathbf{C}^\top \mathbf{b}[n] - \mathbf{f}$ , foi mantido para ilustrar a capacidade do algoritmo de corrigir pequenos desvios da solução (por exemplo devido a imprecisões na matemática de precisão finita) que podem levar a soluções não-factíveis. Essas imprecisões podem se acumular ao longo das iterações levando a resultados errôneos, conforme indicado por Frost III (1972). Rearranjando os termos da equação de atualização tem-se

$$\mathbf{b}[n+1] = \mathbf{P}(\mathbf{b}[n] - \mu \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{b}[n]) + \mathbf{b}_f \quad (2.50)$$

em que

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_{M \cdot N_{BF}} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C} \quad (2.51)$$

indica a projeção no espaço ortogonal complementar ao espaço das colunas de  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{I}_N$  indica a matriz identidade  $N \times N$  e

$$\mathbf{b}_f = \mathbf{C}(\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \quad (2.52)$$

é a solução de mínima norma quadrática que satisfaz a Equação (2.41). Para obter a aproximação estocástica da Equação (2.50) as estatísticas dos sinais de entrada devem ser substituídas por aproximações adequadas. A escolha mais simples para o estimador de  $\mathbf{R}_{x_b x_b}$  é a estimativa instantânea que é baseada em uma matriz de posto unitário formada por valores amostrados do sinal de entrada definida como  $\mathbf{R}_{x_b x_b} \approx \mathbf{x}_b[n] \mathbf{x}_b^\top[n]$ . Substituindo o estimador da autocorrelação de  $\mathbf{x}_b[n]$  na Equação (2.50) a aproximação estocástica torna-



se

$$\begin{aligned} \mathbf{b}[n+1] &= \mathbf{P}(\mathbf{b}[n] - \mu \mathbf{x}_b[n] \mathbf{x}_b^\top[n] \mathbf{b}[n]) + \mathbf{b}_f \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{b}[n] - \mu \mathbf{x}_b[n] y[n]) + \mathbf{b}_f \end{aligned} \quad (2.53)$$

em que  $\mathbf{x}_b^\top[n] \mathbf{b}[n] = y[n]$  da Equação (2.39).

Em uma implementação da Equação (2.53) com precisão infinita e supondo a inicialização do algoritmo em uma solução factível, o vetor  $\mathbf{b}[n]$  satisfaz a Equação (2.41) para todo  $n$  devido à Equação (2.49). Portanto suas soluções estão contidas em um sub-espaço  $(M \cdot N_{BF} - N_C)$ -dimensional definido pelo hiperplano de restrições  $\mathbf{C}^\top \mathbf{b} = \mathbf{f}$ . Supondo que  $M \cdot N_{BF} = 2$ , para facilitar a visualização, o espaço de soluções, o subespaço definido pelo hiperplano de restrições e o núcleo da matriz de restrições são indicados na Figura 2.12. A reta normal ao hiperplano de restrições é um vetor na mesma direção de  $\mathbf{b}_f$  (FROST III, 1972).

Vetores ortogonais à normal do hiperplano de restrições são combinações lineares das colunas da matriz  $\mathbf{C}$  i.e. pertencem ao espaço imagem de  $\mathbf{C}$ . Portanto, estes vetores podem ser escritos na forma  $\mathbf{b}_\perp = \mathbf{C} \mathbf{v}_\perp$  em que  $\mathbf{v}_\perp$  é um vetor  $N_C$ -dimensional que define os coeficientes da combinação linear. A forma homogênea da Equação (2.41)  $\mathbf{C}^\top \mathbf{b} = \mathbf{0}$  define um segundo hiperplano  $(M \cdot N_{BF} - N_C)$ -dimensional que inclui a origem do sistema de coordenadas (solução trivial). Este plano define o subespaço de restrições que é ortogonal a  $\mathbf{b}_f$  e, conseqüentemente, paralelo ao hiperplano de restrições. A função do operador linear  $\mathbf{P}$  na Equação (2.53) é a de projetar a componente

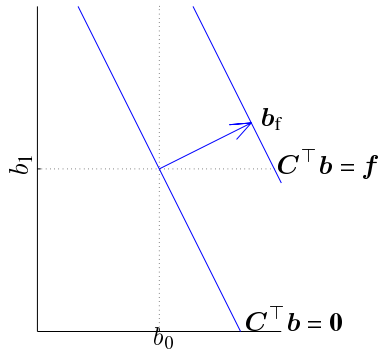


Figura 2.12: Plano das restrições  $C^T \mathbf{b} = \mathbf{f}$  e o subespaço  $C^T \mathbf{b} = \mathbf{0}$  definido pelas restrições

de atualização  $\mathbf{b}[n] - \mu \mathbf{x}_b[n]y[n]$  no espaço ortogonal e complementar às colunas de  $\mathbf{C}$  produzindo a componente  $\mathbf{b}_\perp[n+1]$  da solução. A operação do operador  $\mathbf{P}$  é mostrada na Figura 2.13.

Finalmente, quando a componente  $\mathbf{b}_\perp[n+1]$  é adicionada a  $\mathbf{b}_f$ , o vetor resultante pertence ao espaço factível pois  $C^T \mathbf{b}_\perp[n+1] = \mathbf{0}$  e  $C^T \mathbf{b}_f = \mathbf{f}$ . O funcionamento de uma iteração do algoritmo CLMS é ilustrado na Figura 2.14

### Estrutura GSC

Uma estrutura alternativa para a conformação de feixe foi proposta por Griffiths e Jim (1982). Essa estrutura é baseada na decomposição do vetor  $\mathbf{b}$  em um filtro quiescente, que pertence ao espaço factível definido pela Equação (2.41) e garante a resposta em frequência desejada na direção de interesse, e uma componente ortogonal ao espaço factível que efetua o cancela-

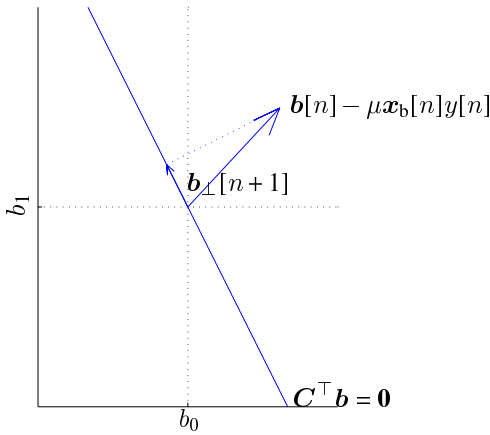


Figura 2.13: Ação da matriz  $\mathbf{P}$  projetando uma solução no espaço complementar ao espaço factível

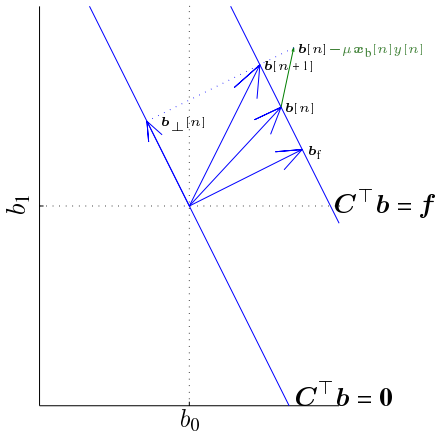


Figura 2.14: Exemplo de uma iteração do algoritmo CLMS

mento de interferências. A componente ortogonal ao espaço factível é produzida pela combinação linear das colunas de uma matriz com posto completo de colunas e ortogonal a  $C$ , a matriz de bloqueio  $B$ . Em condições ideais, o sinal filtrado por  $B$  não contém nenhuma informação do sinal incidente em  $\theta_{\text{DOA}}$ . Um diagrama esquemático do conformador de feixe Griffiths e Jim (1982), conhecido como *Generalized Sidelobe canceller* (GSC), é mostrado na Figura 2.15. Nesse diagrama,  $\mathbf{b}_q$  é o filtro quiescente,  $B$  é a matriz de

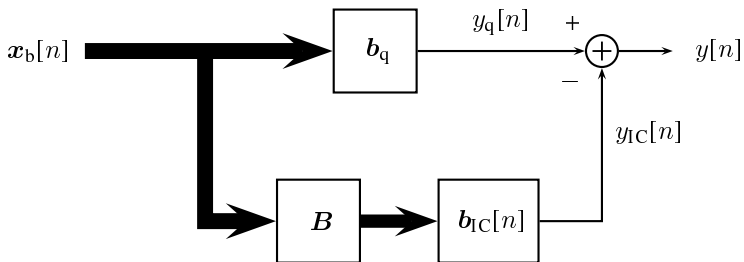


Figura 2.15: Estrutura geral para a conformação de feixes de banda larga em sua forma GSC (GRIFFITHS; JIM, 1982)

bloqueio e  $b_{ic}[n]$  é o filtro de cancelamento de interferências. As condições para a equivalência entre as formas direta e GSC são demonstradas de diferentes maneiras em Breed e Strauss (2002), Jim (1977), Buckley (1986). As condições para equivalência entre um GSC adaptativo baseado no LMS e o MVDR adaptativo utilizando o CLMS são demonstradas em Griffiths e Jim (1982) e generalizadas para o LCMV adaptativo baseado no LMS em Buckley (1986). Em Werner, Apolinário Jr. e Campos (2003), uma demonstração

semelhante é feita para o GSC adaptado com o algoritmo RLS. Nesse trabalho, as provas de equivalência em regime-permanente de Breed e Strauss (2002) e adaptativa de Buckley (1986) são detalhadas nos anexos C e D respectivamente.

Como no caso do conformador de feixe na forma direta, pode-se escrever o sinal de saída do GSC como a combinação de produtos internos. Nessa dedução, assume-se que a direção de interesse permanece constante durante toda a duração do experimento. Assim, tanto os coeficientes do filtro quiescente quanto a matriz de bloqueio são invariantes no tempo.

No ramo superior da Figura 2.15, a saída quiescente do GSC  $y_q[n]$  é descrita pelo produto interno

$$y_q[n] = \mathbf{b}_q^\top \mathbf{x}_b[n] \quad (2.54)$$

na qual  $\mathbf{x}_b[n]$  dado pela Equação (2.24) e  $\mathbf{C}^\top \mathbf{b}_q = \mathbf{f}$ . No ramo inferior, o sinal de entrada de  $\mathbf{b}_{1C}[n]$  é formado pela pré-multiplicação do sinal  $\mathbf{x}_b[n]$  pela transposta de  $\mathbf{B}$  em que  $\mathbf{B}$  é uma matriz  $(MN_{BF}) \times (MN_{BF} - N_C)$  e  $\mathbf{C}^\top \mathbf{B} = \mathbf{0}_{N_C \times (MN_{BF} - N_C)}$ . Assim, quando  $\mathbf{B}$  tem posto completo de colunas, combinações lineares das colunas de  $\mathbf{B}$  geram o subespaço ortogonal complementar ao espaço das colunas de  $\mathbf{C}$ . O sinal  $\mathbf{B}^\top \mathbf{x}_b[n]$  é então processado por um módulo de cancelamento de interferências  $\mathbf{b}_{1C}[n]$  formando o sinal de saída do módulo de cancelamento de interferências  $y_{1C}[n]$ , dado por

$$\begin{aligned} y_{1C}[n] &= \mathbf{b}_{1C}^\top[n] \mathbf{B}^\top \mathbf{x}_b[n] \\ &= (\mathbf{B} \mathbf{b}_{1C}[n])^\top \mathbf{x}_b[n]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

A subtração de  $y_{1C}[n]$  de  $y_q[n]$  forma o sinal de saída do conformador de feixe

$$\begin{aligned} y[n] &= y_q[n] - y_{1C}[n] \\ &= \mathbf{b}_q^\top \mathbf{x}_b[n] - (\mathbf{B}\mathbf{b}_{1C}[n])^\top \mathbf{x}_b[n] \\ &= (\mathbf{b}_q - \mathbf{B}\mathbf{b}_{1C}[n])^\top \mathbf{x}_b[n]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Comparando as Equações (2.39) e (2.56) tem-se que as duas estruturas têm soluções equivalentes quando

$$\mathbf{b}[n] = \mathbf{b}_q - \mathbf{B}\mathbf{b}_{1C}[n]. \quad (2.57)$$

em que, sempre que  $\mathbf{b}_q$  pertence ao espaço factível e a ortogonalidade entre  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{B}$  é respeitada, então a Equação (2.57) gera soluções factíveis. A substituição da Equação (2.57) na Equação (2.41) resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^\top \mathbf{b}[n] &= \mathbf{C}^\top (\mathbf{b}_q - \mathbf{B}\mathbf{b}_{1C}[n]) \\ &= \mathbf{C}^\top \mathbf{b}_q - \mathbf{C}^\top \mathbf{B}\mathbf{b}_{1C}[n] = \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2.58)$$

em que  $\mathbf{C}^\top \mathbf{b}_q = \mathbf{f}$  e  $\mathbf{C}^\top \mathbf{B} = \mathbf{0}_{N_C \times (MN_{BF} - N_C)}$ .

Utilizando uma superfície de desempenho de minimização da potência média do sinal de saída em relação ao vetor de cancelamento de interferência, e dado que a Equação (2.58) garante que as soluções são factíveis para todo  $\mathbf{b}_{1C}[n]$ , basta solucionar o problema de otimização sem restrições

$$\mathbf{b}_{1C\text{opt}} = \arg \min_{\mathbf{b}_{1C}} E\{y^2[n] | \mathbf{b}_{1C}[n] = \mathbf{b}_{1C}\}. \quad (2.59)$$

Nesse caso, a função custo é obtida diretamente a partir das Equações (2.59) e (2.56)

$$\mathcal{C}_{\text{GSC}} = \mathbf{b}_{\text{q}}^{\top} \mathbf{R}_{x_{\text{b}}, x_{\text{b}}} \mathbf{b}_{\text{q}} - \mathbf{b}_{\text{q}}^{\top} \mathbf{R}_{x_{\text{b}}, x_{\text{b}}} \mathbf{B} \mathbf{b}_{\text{IC}} - \mathbf{b}_{\text{IC}}^{\top} \mathbf{B}^{\top} \mathbf{R}_{x_{\text{b}}, x_{\text{b}}} \mathbf{b}_{\text{q}} + \mathbf{b}_{\text{IC}}^{\top} \mathbf{B}^{\top} \mathbf{R}_{x_{\text{b}}, x_{\text{b}}} \mathbf{B} \mathbf{b}_{\text{IC}}. \quad (2.60)$$

O cálculo do gradiente da Equação (2.60) em relação a  $\mathbf{b}_{\text{IC}}$  resulta em

$$\nabla_{\mathbf{b}_{\text{IC}}} \mathcal{C}_{\text{GSC}} = 2\mathbf{B}^{\top} \mathbf{R}_{x_{\text{b}}, x_{\text{b}}} \mathbf{B} \mathbf{b}_{\text{IC}} - 2\mathbf{B}^{\top} \mathbf{R}_{x_{\text{b}}, x_{\text{b}}} \mathbf{b}_{\text{q}}. \quad (2.61)$$

Como  $\mathbf{B}$  tem posto cheio de colunas, e assumindo que  $\mathbf{R}_{x_{\text{b}}, x_{\text{b}}}$  é definida positiva então  $\mathbf{B}^{\top} \mathbf{R}_{x_{\text{b}}, x_{\text{b}}} \mathbf{B}$  é definida positiva, portanto não-singular. A solução de  $\nabla_{\mathbf{b}_{\text{IC}}} E\{y^2[n]\} = \mathbf{0}_{(MN_{\text{BF}} - N_{\text{C}}) \times 1}$  em relação a  $\mathbf{b}_{\text{IC}}$  é

$$\mathbf{b}_{\text{ICopt}} = (\mathbf{B}^{\top} \mathbf{R}_{x_{\text{b}}, x_{\text{b}}} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^{\top} \mathbf{R}_{x_{\text{b}}, x_{\text{b}}} \mathbf{b}_{\text{q}}. \quad (2.62)$$

### Solução adaptativa para a estrutura GSC

De maneira análoga à utilizada para a forma direta, o algoritmo do gradiente (*steepest-descent*) para a minimização da Equação (2.59) é obtido por

$$\mathbf{b}_{\text{IC}}[n+1] = \mathbf{b}_{\text{IC}}[n] - \frac{\mu}{2} \nabla_{\mathbf{b}_{\text{IC}}} \mathcal{C}_{\text{GSC}} \Big|_{\mathbf{b}_{\text{IC}} = \mathbf{b}_{\text{IC}}[n]}. \quad (2.63)$$

A substituição da Equação (2.61) na Equação (2.63) resulta em

$$\mathbf{b}_{\text{IC}}[n+1] = \mathbf{b}_{\text{IC}}[n] + \mu \left( \mathbf{B}^{\top} \mathbf{R}_{x_{\text{b}}, x_{\text{b}}} \mathbf{b}_{\text{q}} - \mathbf{B}^{\top} \mathbf{R}_{x_{\text{b}}, x_{\text{b}}} \mathbf{B} \mathbf{b}_{\text{IC}}[n] \right). \quad (2.64)$$

O algoritmo do gradiente estocástico é obtido pela aproximação de  $\mathbf{R}_{x_{\text{b}}, x_{\text{b}}}$  por uma estimativa razoável. Utilizando a estimativa instantânea  $\mathbf{R}_{x_{\text{b}}, x_{\text{b}}} \approx$

$\mathbf{x}_b[n]\mathbf{x}_b^\top[n]$  na Equação (2.64) resulta na solução adaptativa

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{1C}[n+1] &= \mathbf{b}_{1C}[n] + \mu \mathbf{B}^\top \left( \mathbf{x}_b[n]\mathbf{x}_b^\top[n]\mathbf{b}_q - \mathbf{x}_b[n]\mathbf{x}_b^\top[n]\mathbf{B}\mathbf{b}_{1C}[n] \right) \\ &= \mathbf{b}_{1C}[n] + \mu \mathbf{B}^\top \mathbf{x}_b[n]\mathbf{x}_b^\top[n](\mathbf{b}_q - \mathbf{B}\mathbf{b}_{1C}[n]) \\ &= \mathbf{b}_{1C}[n] + \mu \mathbf{B}^\top \mathbf{x}_b[n]y[n]\end{aligned}\tag{2.65}$$

em que a Equação (2.56) foi utilizada na última passagem.

## 2.5 Cancelamento de eco acústico auxiliado por arranjo de microfones

Ecos acústicos aparecem quando um microfone capta sinais emitidos por um alto-falante através do caminho direto e reflexões em um ambiente reverberante. Em sistemas *hands-free*, essas reflexões acarretam na degradação da inteligibilidade. Os tempos de reverberação típicos (dezenas de milissegundos para automóveis até alguns segundos em salas de grandes dimensões) exigem que os canceladores de eco tenham respostas ao impulso extremamente longas. Além disso, os sinais de fala local também são perturbados por sinais de fala de outros locutores e por ruídos (BREINING et al., 1999; HÄNSLER; SCHMIDT, 2004). Sob essas condições, o projeto de um cancelador com alta ERLE e que ao mesmo tempo tenha convergência rápida exige um esforço substancial. Isso ocorre porque bons compromissos entre estabilidade, velocidade de convergência e complexidade computacional tornam-se mais difíceis com o aumento do comprimento do filtro (WIDROW et al., 1976; BREINING et al., 1999; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000; HAYKIN, 1993; HÄNSLER; SCHMIDT, 2004).



Durante a aquisição de sinais de áudio em sistemas de comunicação *hands-free* ou interfaces homem-máquina, arranjos de microfones são soluções populares para conservar sinais de interesse e, simultaneamente, suprimir interferências e ruídos (HABETS et al., 2010; HERBORDT; KELLERMANN; NAKAMURA, 2004). Em sistemas de comunicação *full-duplex*, os sinais de interesse são sobrepostos não somente a ruídos e interferências locais mas também a ecos acústicos produzidos por reflexões do som emitido pelo alto-falante no ambiente. Portanto, quando é possível estimar a direção de chegada do sinal de interesse, os conformadores de feixe podem atenuar sinais em outras direções incluindo ecos acústicos. Contudo, o conformador de feixe é incapaz de rejeitar ecos acústicos se eles incidem sobre o arranjo na mesma direção do sinal de interesse. Quando conformadores de feixe não-ideais são considerados, limitações na capacidade de seleção espacial devido ao número finito de graus de liberdade permitem que parte dos ecos em direções diferentes da DOA sejam retransmitidos aumentando a necessidade de um processo de cancelamento de eco convencional. Ao mesmo tempo, os conformadores de feixe não são capazes de utilizar a informação contida no sinal de *far-end* para estimar os sinais de eco nos microfones.

Soluções que combinem, ao mesmo tempo, conformação de feixes e cancelamento de eco acústico têm sido estudadas nos últimos anos (KELLERMANN, 1997; HERBORDT; KELLERMANN, 2000; HERBORDT; KELLERMANN, 2001; HERBORDT; KELLERMANN; NAKAMURA, 2004; KAMMEYER; KALLINGER; MERTINS, 2005; HERBORDT; NA-

KAMURA; KELLERMANN, 2005; BRANDSTEIN; WARD, 2001; GUO et al., 2011a; GUO et al., 2011b; GUO et al., 2011c; GUO et al., 2013; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2011; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2013; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a). Como BFs e AECs contribuem de maneiras diferentes para a diminuição da influência dos ecos acústicos, é possível empregar ambas as técnicas de forma sinérgica para desenvolver sistemas adaptativos mais eficientes (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a).

Um dos primeiros estudos na combinação de cancelamento de ecos acústicos com filtragem espacial foi feito por Kellermann (1997). Nesse trabalho foram propostas as duas estruturas básicas de processamento ilustradas na Figura 2.16, as quais são descritas a seguir:

**AEC-BF** (ou *AEC first*): Um AEC independente é associado a cada microfone. Um conformador de feixe combina então os sinais de saída dos vários AECs para produzir o sinal de saída (GUO et al., 2011a; GUO et al., 2011b; GUO et al., 2011c; GUO et al., 2013);

**BF-AEC** (ou *BF first*): Os sinais de todos os microfones são processados por um conformador de feixe. O sinal de saída é produzido pela diferença entre o sinal de saída do conformador de feixe e o sinal de saída de um único AEC (HERBORDT; KELLERMANN, 2000; HERBORDT; KELLERMANN; NAKAMURA, 2004; HERBORDT; NAKAMURA; KELLERMANN, 2005; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2011; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2013; MARUO; BERMUDEZ;

RESENDE, 2014a; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014b)

Na figura, os AECs da estrutura AEC-BF são representados pelas colunas da matriz  $\hat{\mathbf{H}}[n]$  e a saída de cada AEC é uma componente do vetor  $\hat{\mathbf{y}}[n]$ .

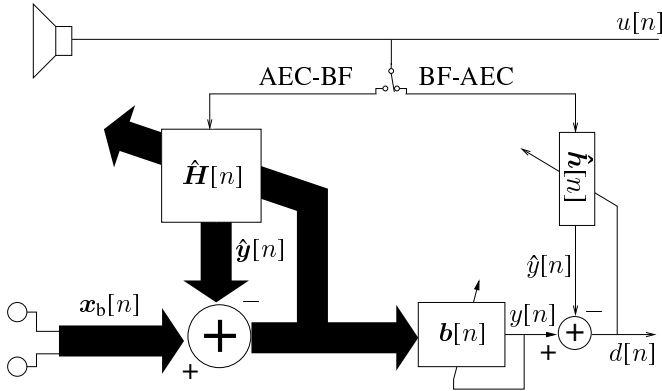


Figura 2.16: Estruturas genéricas para combinação de AEC e conformação de feixe (BRANDSTEIN; WARD, 2001)

A complexidade computacional da estrutura AEC-BF é cerca de  $M$  vezes maior do que a da estrutura BF-AEC quando  $N_{\text{AEC}} \gg MN_{\text{BF}}$  devido ao uso de  $M$  AECs. Assim, mesmo com os avanços recentes em *hardware*, o uso da estrutura AEC-BF para sistemas com um elevado número de microfones ( $M > 5$ ) deve permanecer inviável nos próximos anos (BRANDSTEIN; WARD, 2001). Além disso, o posicionamento dos canceladores de eco acústico antes do conformador de feixe ainda torna o controle de *double-talk* mais complexo. Sinais de fontes sonoras em direções diferentes da DOA (como por exemplo um aparelho de ar-condicionado ou um ventilador) devem ser tratados como *double-talk* diminuindo o tempo disponível para a

adaptação dos filtros (KELLERMANN, 1997). A principal vantagem da estrutura AEC-BF é que a adaptação dos AECs ocorre independente da direção de chegada do sinal de interesse. Portanto, durante mudanças da direção de interesse os canceladores de eco geralmente são inicializados em boas soluções e sua adaptação não precisa ser acelerada. O estudo do comportamento transitório da estrutura AEC-BF, ilustrado na Figura 2.17, supondo BFs fixos, foi feito em Guo et al. (2011a), Guo et al. (2011b), Guo et al. (2011c) e Guo et al. (2013). Na figura,  $\hat{h}_i[n]$  indica o  $i$ -ésimo cancelador de eco associado ao  $i$ -ésimo microfone representado pela  $i$ -ésima coluna de  $\hat{H}[n]$ ,  $\hat{y}_i[n]$  representa a saída do  $i$ -ésimo AEC e  $r_i[n]$  indica o sinal de ruído mais fala local associado ao  $i$ -ésimo microfone.

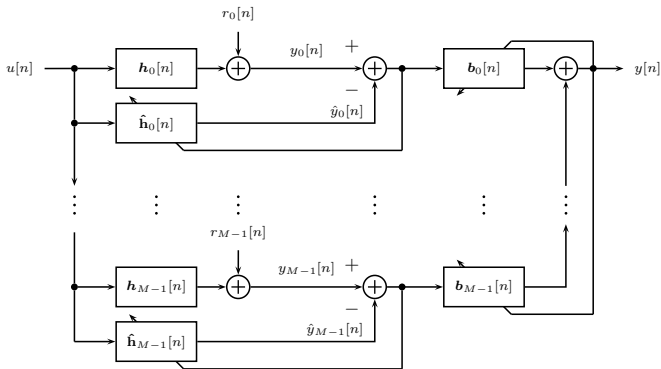


Figura 2.17: Estrutura AEC-BF adaptativa baseada em (GUO et al., 2011a; GUO et al., 2011b; GUO et al., 2011c; GUO et al., 2013)

Uma alternativa para reduzir os requisitos computacionais da estrutura AEC-BF consiste na redução do comprimento do AEC e a utilização do conformador de feixe para suprimir os ecos residuais. Contudo, o encurtamento

implica que a adaptação do AEC é perturbada por uma componente de ruído adicional devido a componentes de eco não modeladas pelo AEC (BREINING et al., 1999). Em Burton e Goubran (2007) é proposta uma solução intermediária em que os AECs de uma estrutura AEC-BF apresentam comprimento curto mas um único filtro longo é posicionado após o conformador de feixe e é responsável pelo cancelamento das componentes não modeladas pelos AECs. Hamalainen e Myllyla (2007) utiliza o mesmo princípio exceto pelo uso de um conformador de feixe polinomial buscando obter um sistema independente da direção de chegada do sinal local.

Na estrutura BF-AEC tradicional, mostrada na Figura 2.18, o conformador de feixe opera independentemente do estado do AEC. Assim, o conformador de feixe auxilia na redução do eco devido à sua seletividade espacial (atenuando as reflexões do eco acústico incidindo em direções diferentes da desejada) e, simultaneamente, cancelando interferências locais. O comportamento transitório do conformador de feixe pode então ser descrito pelos modelos já existentes (GODARA; CANTONI, 1983; GODARA; CANTONI, 1985; FROST III, 1972). A principal desvantagem desta estrutura é o fato de um único AEC modelar não-estacionariedades de  $M$  canais de eco e não-estacionariedades devido ao processo de adaptação dos coeficientes do conformador de feixe. Uma desvantagem adicional é a necessidade de um AEC de comprimento  $N_h + N_{BF} - 1$  para o cancelamento completo dos ecos acústicos (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a). Para tentar diminuir estes requisitos é proposto o uso de um conformador de feixe fixo em Brandstein e Ward (2001).

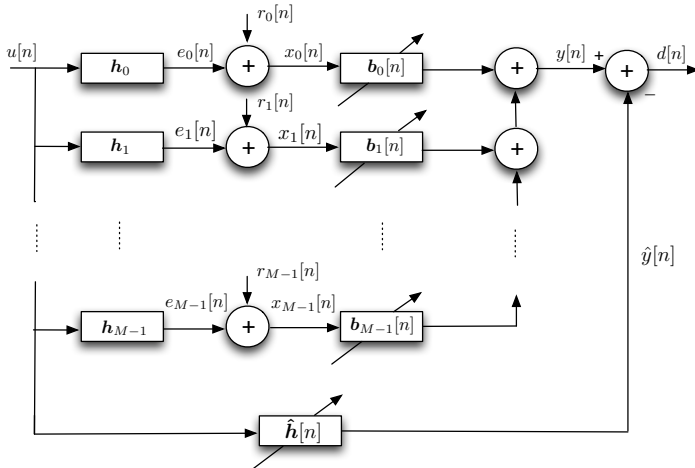


Figura 2.18: Estrutura BF-AEC na forma direta (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2011; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2013; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a)

Algumas alterações na estrutura BF-AEC tradicional incluem a implementação do BF em sua forma GSC (HERBORDT; KELLERMANN, 2000; HERBORDT; KELLERMANN; NAKAMURA, 2004; HERBORDT; NAKAMURA; KELLERMANN, 2005; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014b). Essa abordagem apresenta menor complexidade computacional por trabalhar em um subespaço de menor dimensão, demandando a adaptação de menos coeficientes por iteração e por permitir o projeto de matrizes de bloqueio que minimizem o número de multiplicações necessárias para obter o sinal  $B^T \mathbf{x}_b[n]$  (GRIFFITHS; JIM, 1982). Contudo, a obtenção de matrizes de bloqueio para quaisquer ângulos de incidência em uma forma fechada ainda é um problema em aberto (BUCKLEY, 1987; HOSHUYAMA;

SUGIYAMA; HIRANO, 1999). Outra maneira de incrementar o desempenho da estrutura BF-AEC consiste em adaptar o sistema utilizando a superfície de desempenho de otimização conjunta em que o BF utiliza o sinal de retorno  $d[n]$  na sua adaptação (HERBORDT; KELLERMANN; NAKAMURA, 2004; HERBORDT; NAKAMURA; KELLERMANN, 2005; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2011; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2013; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a).

### 2.5.1 *Formulação da estrutura BF-AEC*

A Figura 2.18 mostra a estrutura BF-AEC com  $M$  respostas ao impulso de plantas LEM  $h_m$  cada uma contendo  $N_h$  coeficientes,  $M$  sinais dos microfones  $x_m[n]$ , um BF de banda larga composto por  $M$  filtros FIR lineares  $b_m[n]$  com  $N_{BF}$  coeficientes cada e um filtro AEC adaptativo  $\hat{h}[n]$  com  $N_{AEC}$  coeficientes. Para esse estudo, as respostas das plantas LEM  $h_k$  são assumidas constantes e os sinais  $u[n]$  e  $r_m$  são assumidos estacionários em razão de tratabilidade matemática (HAYKIN, 1993, pp. 348–351). Para manter uma notação consistente com o AEC monocanal dado que, na estrutura BF-AEC, o sinal desejado do AEC é o sinal de saída do BF, o sinal de saída do BF passa a ser indicado por  $y[n]$ . A maneira mais popular para avaliar o efeito de não estacionariedade de filtros adaptativos consiste em submeter os sinais de entrada (estacionários) à ação de um sistema linear variante no tempo (de ALMEIDA, 2004; HAYKIN, 1993; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000). A análise para respostas ao impulso de plantas LEM variantes no tempo é particularmente desafiadora nesse caso, mesmo que o modelo de

não-estacionariedade considerado seja o *random-walk* (HAYKIN, 1993; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000). A razão é que a variação no tempo do modelo para as plantas LEM leva à não-estacionariedade do vetor de entrada do BF. Ademais, os incrementos estatisticamente independentes à resposta ao impulso das plantas LEM  $h_m$  devido ao modelo de *random-walk* seriam correlacionados no tempo com os filtros do BF. Isto tornaria a análise extremamente complexa, mesmo para esse modelo simples de não-estacionariedade, tornando o estudo de propriedades do comportamento do algoritmo extremamente difícil. Um estudo do comportamento para sinais de entrada não estacionários requer um modelo específico para formular a variação das estatísticas do sinal ao longo do tempo. Para sinais de voz, não há consenso na escolha de um modelo para a não-estacionariedade do sinal. Por outro lado, previsões feitas com modelos derivados sob condições de estacionariedade são capazes de mostrar tendências do comportamento de algoritmos quando graus de não-estacionariedade baixos são utilizados (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 595).

Kallinger, Bitzer e Kammeyer (2000) observaram que a filtragem espacial é capaz de reduzir o comprimento do AEC necessário para atingir, quando comparado com um AEC convencional, o mesmo nível de cancelamento de eco tanto para a estrutura AEC-BF quanto para o BF-AEC. Para tentar confirmar essa propriedade, a análise deste trabalho considera a possibilidade do uso de um AEC com menos coeficientes que a resposta ao impulso da planta LEM admitindo  $N_{AEC} \leq N_h$ .



### 2.5.2 *Abordagens relacionadas*

A redução dos ecos acústicos por meio de técnicas de desreverberação, em que os ecos acústicos são tratados simplesmente como ruídos coerentes, é estudada em Huang, Benesty e Chen (2008), Habets e Benesty (2012), Souden, Benesty e Affes (2010) e Hacıhabibouglu e Cvetkovic (2012). Segundo esse paradigma, os sinais captados pelos microfones contêm o sinal emitido pelo usuário local convoluído com uma resposta ao impulso da sala associada à posição desse usuário e um microfone, ecos acústicos, interferências locais e ruídos. Análoga à resposta das plantas LEM, a resposta ao impulso entre uma fonte de fala local e um microfone é composta por uma componente associada ao caminho direto entre a fonte sonora e o microfone e uma série de reflexões no ambiente. Os efeitos da distorção da resposta ao impulso da sala podem ser compensados ou mesmo eliminados por meio de técnicas de equalização (HAYKIN, 1993; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000). O que torna o problema de desreverberação dos sinais desafiador é que, mesmo com o conhecimento das respostas ao impulso entre todas as fontes sonoras a todos os microfones, essas respostas são extremamente longas (BREINING et al., 1999; HÄNSLER; SCHMIDT, 2004) tornando sua inversão um processo computacionalmente oneroso. Essas respostas também são geralmente de fase não-mínima que significa que elas não tem uma função inversa que é, ao mesmo tempo, causal e estável (OPPENHEIM; WILLISKY; NAWAB, 1996). Devido ao alto número de cálculos por amostra e os problemas numéricos associados ao cálculo com matrizes longas, que surgem

quando o número de microfones e/ou os tempos de reverberação aumentam, o processamento no domínio do tempo é pouco utilizado. Nesse caso, o processamento no domínio da frequência é mais comum. Abordagens alternativas incluem a decomposição no GSC baseado em funções de transferência (TF-GSC) (GANNOT; BURSHTEIN; WEINSTEIN, 2001) particionado em sub-espacos (MARKOVICH; GANNOT; COHEN, 2009; HABETS; BENESTY, 2013), e no TF-GSC convolutivo (TALMON; COHEN; GANNOT, 2009a; TALMON; COHEN; GANNOT, 2009b). Assim, a redução dos ecos acústicos baseada estritamente em filtragem espacial apresenta a vantagem de adicionar atrasos significativos no caminho do sinal de fala (devido à equalização com filtros longos ou à necessidade de acumulação de amostras para realizar a FFT) além de desprezar a informação do sinal de *far-end*.

Em Souden e Liu (2009), os autores propõem o cancelamento de eco acústico não-linear simultaneamente com a separação cega dos sinais em um arranjo de microfones. Este é um problema diferente do tratado em Low e Nordholm (2005) em que os ecos acústicos lineares são processados por um supressor de eco, o que leva a distorções do sinal local. Os autores propõem medir o grau de similaridade estatística entre os sinais de *far-end* e a saída do sistema de separação dos sinais usando uma função de coerência cruzada. Essa função foi identificada, empiricamente, como pouco sensível à não-linearidade dos canais de eco. Embora essa abordagem pareça promissora, ela envolve um alto custo computacional para um elevado número de microfones. Os autores também não fornecem ferramentas matemáticas para o projeto (valores dos passos de adaptação, parâmetros da não-linearidade).

Miyabe et al. (2007) trata o cancelamento de eco em um sistema de reconhecimento de voz. Muitas vezes o usuário pode enviar um comando enquanto o sistema está retornando uma resposta sonora ao usuário. Neste caso, a voz do usuário é captada pelos microfones simultaneamente com o eco acústico gerado pela resposta sonora do sistema. A presença desse sinal espúrio pode prejudicar o algoritmo de reconhecimento de palavras obrigando o usuário a repetir o comando várias vezes ou mesmo executando comandos incorretos. Este problema, muito semelhante ao cancelamento de ecos acústicos durante períodos de *double talk*, é conhecido como *barge-in* (JUANG; SOONG, 2001). Para evitar estas situações, os autores propõem o uso de múltiplos alto-falantes e um arranjo de microfones de maneira que o *barge-in* seja cancelado, acusticamente, a partir de uma estimativa da função de transferência da sala pela ação dos alto-falantes. Embora essa solução apresente características interessantes como a possibilidade de produzir ambientes de realidade virtual sonora (TATEKURA; SARUWATARI; SHIKANO, 2001), seu alto custo computacional e a necessidade de muitos elementos eletroacústicos limitam sua implementação fora de ambientes de pesquisa. Embora esse problema tenha semelhanças com o cancelamento ativo de ruídos (COSTA, 2001), os autores não disponibilizam ferramentas matemáticas para o projeto desse sistema.

Em Hioka et al. (2008) é proposto um sistema de cancelamento de eco acústico estereofônico para um sistema de video-conferência doméstico por meio do Protocolo Internet (IP) com imagens em alta qualidade (HDTV). Nesse sistema, o arranjo de microfones serve tanto para fornecer dire-

cionalidade na captação de áudio estereofônico quanto para auxiliar no cancelamento dos ecos acústicos. Os autores não mostram detalhes de implementação do projeto nem resultados teóricos ou experimentais. De maneira similar, em Papp, Saric e Teslic (2011) é proposto o uso do aparelho de televisão com um arranjo de microfones embutido como o terminal de teleconferência. A estratégia de cancelamento de eco é baseada no AEC-BF.

Em Goetze et al. (2008), os autores propõem a equalização do sinal de *far-end* antes de sua emissão pelo alto-falante e a captação do sinal com um arranjo de microfones. O equalizador é projetado a partir da resposta ao impulso identificada pelo AEC  $\hat{h}[n]$ . Esta abordagem apresenta alguns problemas:

- A equalização, supondo sua convergência, garante a minimização da distorção devido à planta LEM nos microfones. Porém, o usuário pode estar distante dos microfones em sistemas *hands-free*;
- não há garantia que  $\hat{h}[n]$  tenha fase mínima. Assim, o equalizador, em sistemas projetados para funcionar em tempo real, causa atrasos no caminho do sinal de *far-end*;
- a baixa qualidade da equalização no início do processamento, devido à distância entre a resposta do cancelador de eco acústico e a resposta verdadeira da planta LEM, pode causar distorções severas no sinal de *far-end* prejudicando a qualidade da conversação.

Em Burton e Goubran (2007) é proposta uma nova estrutura baseada em um AEC-BF em que os AECs apresentam comprimento deficiente para

reduzir os requisitos computacionais. Para cancelar o eco residual, devido ao comprimento deficiente dos AECs, um AEC adicional, que trabalha apenas na parte final da resposta da planta LEM, é utilizado na saída do conformador de feixe. A justificativa é que, devido à natureza de decaimento exponencial de um canal de eco típico (BREINING et al., 1999), a maior parte da energia do eco acústico está concentrada na porção inicial da resposta ao impulso da planta LEM. O desenvolvimento de ferramentas de projeto para esse tipo de cancelador de eco é particularmente desafiador. A convergência do banco de AECs é perturbada por uma componente de ruído correlacionada ao sinal de *far-end* devido à parcela não modelada da planta LEM (GU et al., 2003; MAYYAS, 2005). Devido à convergência do banco de AECs, o vetor de entrada do BF é não-estacionário e portanto a resposta ótima do AEC adicional varia com o tempo. Análises estatísticas em que os sinais de entrada de filtros adaptativos são não-estacionárias ainda estão em estágio incipiente (BERSHAD; BERMUDEZ, 2011; BERSHAD; EWEDA; BERMUDEZ, 2014).

Hamalainen e Myllyla (2007) propõem o uso de um AEC-BF para o cancelamento de ecos acústicos em um ambiente de escritório no qual múltiplas pessoas utilizam um único aparelho telefônico para teleconferência. O controle da direcionalidade utiliza múltiplos conformadores de feixe atraso-e-soma com o mecanismo de votação proposto por Kellermann (1997). Essa abordagem funciona bem, por exemplo, em um carro onde é possível identificar um número pequeno de posições possíveis para os ocupantes do carro. Assim, é possível projetar um número limitado de

conformadores de feixe atraso-e-soma direcionados às posições aproximadas dos sinais de fala local (cabeças dos ocupantes do veículo). Contudo, quando o número de direções de chegada torna-se elevado, a quantidade de memória para armazenar os conformadores de feixe atraso-e-soma torna-se inviável. Nesse trabalho, para obter a capacidade de direcionalidade contínua, é proposto o conformador de feixe polinomial na forma direta que consiste em uma aproximação polinomial a partir de um conjunto finito de conformadores de feixe atraso-e-soma (KAJALA; HAMALAINEN, 2001). Em Myllyla e Hamalainen (2008), a mesma metodologia é aplicada para o conformador de feixe para a forma GSC.

Em Herbordt e Kellermann (2000) é proposta uma estrutura em que um AEC é integrado à estrutura GSC. O funcionamento desse sistema é baseado na premissa que a combinação da matriz de bloqueio com o filtro de cancelamento de interferências é capaz de eliminar completamente os ecos acústicos em direções diferentes de  $\theta_{DOA}$ . O AEC é posicionado após o filtro quiescente e assim, um único AEC é necessário para qualquer número de microfones. Contudo, para tempos de reverberação típicos, o número de direções de incidência de reflexões de ecos acústicos é muito maior que número de graus de liberdade do conformador de feixe. Logo, uma parcela considerável do eco acústico não é eliminada pela combinação de matriz de bloqueio e filtro cancelador de interferências. Portanto, o posicionamento do AEC, em que o sinal desejado é produzido pela saída do filtro quiescente, impede sua ação sobre os ecos residuais da combinação matriz de bloqueio e filtro cancelador de interferências.

Em Reuven, Gannot e Cohen (2004), é proposto um sistema de cancelamento de eco acústico com múltiplos microfones no domínio da frequência. O sistema baseia-se no TF-GSC e em um cancelador de eco implementado no domínio da frequência. Essa abordagem apresenta vantagens em relação à de Herbordt e Kellermann (2000) por realizar o projeto da matriz de bloqueio utilizando a informação da estimativa dos caminhos de eco do ambiente. O resultado é, em teoria, de uma menor transferência de potência do eco para o sinal de saída. Contudo, o desajuste da adaptação da matriz de bloqueio pode acarretar em um aumento da potência do sinal de saída e esses efeitos podem se compensar ou até mesmo deteriorar o desempenho do sistema. A dependência em relação a uma estimativa da função de transferência do ambiente também leva a um baixo cancelamento de eco durante o início da convergência quando a função de transferência do ambiente é relativamente diferente de sua estimativa.

Em Affes e Grenier (1996) é estudada uma estrutura TF-GSC robusta a situações de *double-talk*. A robustez é baseada na hipótese de independência estatística entre os sinais de eco e fala local. Nesse caso, várias funções de transferência relativas são estimadas, utilizando métodos de decomposição em subespaços, cada uma associada a uma fonte de eco ou sinal de fala local. As funções relativas aos sinais de eco e fala local são utilizadas para construir a matriz de bloqueio e o vetor quiescente respectivamente de modo a maximizar a eficiência dos graus de liberdade do BF. Além do desempenho baixo durante o início da adaptação, quando as estimativas das funções de transferência relativas são muito diferentes das funções de transferência

relativas reais, essa abordagem apresenta a desvantagem adicional, associada a métodos de decomposição em subespaços, que é sua sensibilidade às hipóteses sobre a distribuição estatística do sinal (REUVEN; GANNOT; COHEN, 2004).

Em Reuven, Gannot e Cohen (2007a) é proposto um sistema de cancelamento de eco e redução de ruído que consiste em um TF-GSC projetado exclusivamente para a redução de ruídos e um TF-GSC secundário projetado para o cancelamento de ecos. O TF-GSC primário apresenta um módulo de cancelamento de ruído após a matriz de bloqueio produzindo uma estimativa do sinal de fala local em sua saída. O TF-GSC secundário utiliza cópias das funções de transferência relativas, do vetor quiescente e da matriz de bloqueio e do bloco de cancelamento de ruído do TF-GSC primário para cancelar o eco sobre o sinal processado pelo filtro quiescente. A saída do TF-GSC primário é subtraída do TF-GSC secundário produzindo o sinal de saída do sistema. Apesar do sistema apresentar dois blocos TF-GSC, o fato de grande parte de sua estrutura ser idêntica em ambos os TF-GSC permite a economia de memória na implementação do sistema.

A otimização conjunta de um sistema de cancelamento de eco auxiliado por arranjo de microfones foi proposta inicialmente em Herbordt, Kellermann e Nakamura (2004) para uma estrutura BF-AEC com o conformador de feixe em sua forma GSC. Este resultado foi reproduzido para a estrutura AEC-BF em Kammeyer, Kallinger e Mertins (2005). Contudo, sua otimização é baseada no critério dos mínimos quadrados ponderado por uma função de janelamento (OPPENHEIM; WILLISKY; NAWAB, 1996). Algorit-



mos adaptativos para a otimização desta função objetivo, como por exemplo o RLS, apresentam maior custo computacional, podem apresentar problemas de instabilidade numérica e podem apresentar baixa capacidade de rastreamento (de ALMEIDA; BERMUDEZ; BERSHAD, 2009; MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014b).

Em Beh et al. (2008), um cancelador de ecos acústicos auxiliado por um conformador de feixe é utilizado em um sistema automático de reconhecimento de fala para interação com um robô. Deseja-se que o sistema opere satisfatoriamente durante períodos de *double-talk* e, possivelmente, com a direção desejada apontando para a linha de visada (LOS) entre o alto-falante e o arranjo de microfones. Devido ao número limitado de microfones, uma estrutura AEC-BF é utilizada com o conformador de feixe em sua forma GSC. Os autores propõem uma lógica de controle em que o AEC é adaptado na presença de ecos e ausência de sinal local e o GSC é adaptado somente em situações em que existe sinal local mas os ecos estão ausentes. A detecção da presença de ecos, entretanto, é função do tempo de reverberação do ambiente que é desconhecido *a priori* e se torna impossível de estimar se os AECs apresentam comprimento deficiente.

Em Helwani, Buchner e Spors (2010b), é proposta uma estrutura de cancelamento de eco acústico com múltiplos microfones e múltiplos alto-falantes. O problema é modelado, de maneira similar a um AEC-BF, como um sistema MIMO em que o número de entradas é o número de alto-falantes e  $M$  saídas. Devido aos problemas de alta correlação tanto intracanal como inter-canal os autores propõem o uso do algoritmo RLS no domínio

da frequência com uma transformação de diagonalização das matrizes de autocorrelação dos sinais dos microfones e dos sinais de eco estimados. Posteriormente, os filtros ótimos e a transformação de diagonalização são estimados recursivamente com a decomposição em valores singulares das matrizes de autocorrelação no domínio transformado. Para o cálculo da Decomposição em valores singulares (SVDs), é utilizada uma sequência de rotações de Givens (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000) para obter uma matriz triangular superior que corresponde à matriz triangular  $R$  de uma decomposição QR. O produto das transformações de Givens corresponde à matriz  $Q$ .

Buchner, Spors e Kellermann (2004) usam a geração de frentes de onda (WFS) para criar uma região contínua do espaço em que os ecos acústicos são aproximadamente cancelados. A WFS é baseada no princípio de Huygens, segundo o qual qualquer fonte sonora pontual gera uma variação na pressão do ar que se propaga conforme o modelo de ondas esféricas (HÄNSLER; SCHMIDT, 2004). Através desse princípio e do uso de múltiplos alto-falantes, é possível gerar frentes de onda em formatos arbitrários por meio da superposição de efeitos de fontes pontuais. Para obter este efeito, são utilizadas a equação de onda e a segunda lei de Newton. Utilizando o segundo teorema de Green (KAPLAN, 1952), estas equações diferenciais podem ser transformadas em integrais de Kirchoff-Helmholtz (GORDON, 1975). Para um meio sem perdas e utilizando a representação de vetores em coordenadas polares, os integrandos podem ser expressos por funções de Hankel de primeira e segunda ordens que são as

soluções fundamentais da equação de onda em coordenadas polares (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964). Outros trabalhos recentes que utilizam o princípio da WFS no cancelamento de eco acústico são Helwani, Spors e Buchner (2011) em que o campo sonoro é formado por 4 conjuntos de alto-falantes em linha e em Schneider e Kellermann (2011), em que é usado um arranjo circular de alto falantes.

Em Goetze et al. (2010), ao contrário do uso do arranjo de microfones, é proposto um sistema de pré-equalização adaptativa do sinal de *far-end* antes de sua emissão pelo alto-falante. O objetivo deste sistema de pré-equalização é obter, de maneira aproximada, uma função inversa ao canal de eco (NEELY; ALLEN, 1979; MOURJOPOULOS, 1994). A principal dificuldade desta abordagem é a equalização do canal de eco no início da execução do algoritmo quando as informações sobre a resposta ao impulso da planta LEM são limitadas, podendo haver grande distorção do sinal.

Em Guo et al. (2011b), é realizada uma análise estatística no domínio da frequência para um sistema AEC-BF com conformador de feixe fixo, filtros canceladores de eco longos e adaptação dos AECs utilizando o algoritmo LMS com passo de adaptação tendendo a zero. Nesse trabalho, é usada a hipótese simplificadora de que os canais de eco para cada microfone são descorrelacionados. Esta hipótese é usada para simplificar a obtenção de uma expressão para a correlação cruzada dos erros nos coeficientes dos canceladores de eco acústico. Os autores derivam expressões, em função da densidade espectral de potência do sinal de *far-end*, para o limite de estabilidade, para o erro quadrático médio do algoritmo em cada intervalo de frequência e para

o erro em regime permanente em uma determinada faixa de frequências. Em função desse modelo, é possível o projeto de um valor do passo que leva a um determinado nível de erro em regime permanente. Entretanto, nas simulações os canais de eco são modelados como filtros FIR lineares com apenas 2 coeficientes. Na continuação deste trabalho, em Guo et al. (2011c), a mesma metodologia é aplicada para os algoritmos NLMS e RLS.

Em Yellepeddi e Florencio (2014), é proposto um algoritmo para a estimação da resposta ao impulso de plantas LEM entre um ou mais altofalantes e um arranjo de microfone dado o conhecimento da geometria do arranjo. O algoritmo assume a esparsidade das respostas ao impulso das plantas LEM que são modeladas segundo o método das imagens, atenuação da onda sonora independente da frequência, que a aproximação pelo modelo de *far-field* é adequada e o conhecimento da versão em tempo contínuo do sinal de *far-end*. Durante um período de treinamento, os sinais dos microfones são modelados por meio da combinação linear de uma base de vetores formados pela concatenação de regressores do sinal de *far-end* atrasados de uma quantidade de instantes de amostragem em função dos ângulo de incidência. Uma vez encontrada a base de regressores concatenados, a estimativa das respostas ao impulso de plantas LEM é feita pela combinação linear, com os mesmos coeficientes da combinação da base de regressores concatenados, de vetores contendo funções  $\frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$  atrasadas do mesmo número de instantes de amostragem identificados na base de sinais de *far-end* concatenados. Devido à hipótese de esparsidade, tanto a identificação da base de regressores quanto a estimativa das respostas ao impulso podem ser feitas utilizando um

número limitado de vetores. Embora uma boa estimativa das plantas LEM seja possível, os autores indicam a possibilidade do uso desse método como a inicialização de um algoritmo de estimação mais sofisticado.

Em Hoshuyama (2012), é proposto um sistema de cancelamento de eco não-linear com dois microfones. O autor assume que o arranjo de microfones é posicionado muito próximo do alto-falante, como por exemplo em um telefone celular. Sob essa hipótese, é razoável assumir que a distância da fonte de fala local é significativamente mais afastada do arranjo de microfones que o alto-falante. Assim, para que os sinais sejam ouvidos pelo usuário e captados pelo microfone com potência razoável, esses elementos eletroacústicos funcionam fora de sua região de linearidade. O arranjo de microfones é posicionado de maneira que um microfone está muito mais próximo do alto-falante que outro. O sinal de *far-end* é utilizado como entrada de um cancelador de eco linear associado ao microfone mais próximo ao alto-falante. Supondo convergência, o sinal resultante da subtração do sinal do microfone pela saída do AEC linear contém somente componentes de eco não-linear e o sinal de fala local. Um conformador de feixes combina o sinal do microfone mais distante do alto-falante com a saída do cancelamento de eco linear do microfone mais próximo. O filtro FIR associado ao microfone remoto realiza somente uma operação de atraso. Devido à diferença entre as distâncias dos microfones aos alto-falantes, assume-se que o microfone mais distante é menos perturbado por ecos acústicos não-lineares. O filtro FIR associado à saída do cancelamento de ecos no microfone próximo tem a função de formar nulos nas direções de maior energia. O autor assume que a formação de nu-

los elimina os ecos não-lineares sem prejudicar o sinal de fala local devido à sua baixa potência. Finalmente, a saída da conformação de feixe é subtraída de um segundo processo de cancelamento de eco que visa eliminar os ecos acústicos lineares do sinal captado pelo microfone remoto. O sinal residual é transmitido de volta ao *far-end*. Um problema dessa abordagem é a falta de controle sobre o nível de distorção do sinal de fala local. No entanto, essa é uma abordagem interessante para situações em que não é possível estimar uma direção de chegada desejada.

Em Nathwani e Hegde (2012), é proposto um sistema de cancelamento de eco acústico baseado no AEC-BF, com o BF implementado na forma GSC. Um banco de AECs é utilizado para subtrair uma estimativa dos ecos acústicos da saída de cada filtro FIR do filtro quiescente que é projetado para manutenção de uma resposta em frequência na direção do alto-falante. Um arranjo de microfones adicional é posicionado mais distante do alto-falante, de modo que os ecos acústicos possam ser desprezados. Esse arranjo também contém um nulo espacial na direção do alto-falante. Assume-se que os sinais de fala local são captados por esse arranjo adicional como cópias atrasadas ou adiantadas em relação ao arranjo primário. Um estimador, baseado na correlação cruzada entre os sinais de arranjos distintos é usado para calcular o atraso entre os dois arranjos. Enquanto no arranjo primário a combinação da matriz de bloqueio com o filtro de cancelamento de interferências tem a função de atenuar ecos acústicos, o arranjo secundário tem como função o cancelamento de interferências.

Um sistema de cancelamento de interferências similar ao BF-AEC é

estudado em Sugiyama e Miyaharay (2014). Em condições ideais, o filtro quiescente de uma estrutura GSC implementando um MVDR permitiria a passagem de sinais exclusivamente em uma direção de interesse e rejeitando sinais em todas as outras direções. Contudo, uma limitação dos BF fixos convencionais é a variação de sua resposta em frequência em direções não tratadas pelas restrições do problema. Essa variação ocorre devido à diferença entre os comprimentos de onda em baixa e alta frequência que limita a seletividade espacial em baixas frequências. Portanto, é esperado que existam componentes de baixa frequência no sinal de saída do filtro quiescente em direções diferentes da desejada. Essas componentes de baixa frequência corrompem a estimativa de matrizes de bloqueio adaptativas resultando em menor cancelamento de interferências em baixa frequência. A solução proposta é o uso de um microfone de referência, suficientemente afastado do arranjo de microfones, e o uso de um filtro adaptativo capaz de remover a componente correlacionada ao sinal do microfone de referência do sinal de saída do filtro quiescente. A adaptação do filtro de cancelamento de interferências e do filtro descorrelacionador do sinal de referência é realizada utilizando o algoritmo NLMS. Coincidentemente, se o sinal de referência for substituído pelo sinal de *far-end* e o algoritmo de adaptação foi substituído pelo RLS, essa estrutura torna-se idêntica ao GSAEC proposto em Herbordt e Kellermann (2000). Portanto, alguns resultados obtidos para o GSAEC podem ser utilizados para compreender o funcionamento dessa implementação alternativa de um MVDR implementado na forma GSC.

## **2.6 Resumo**

Neste capítulo, apresentou-se o problema da presença de eco acústico em sistemas de telecomunicação, suas peculiaridades, e as principais estratégias para seu cancelamento utilizando filtragem adaptativa. Uma revisão bibliográfica mais criteriosa sobre o uso de conformadores de feixe de banda larga no auxílio ao cancelamento de eco acústico foi realizada.

No próximo capítulo, a modelagem do problema como uma otimização LCMV e a análise estatística de uma solução de cancelamento de eco acústico auxiliada por um arranjo de microfones com o BF implementado na forma direta será apresentada.





### **3 ANÁLISE ESTATÍSTICA DO CANCELADOR DE ECO ACÚSTICO AUXILIADO POR UM ARRANJO DE MICROFONES NA FORMA DIRETA**

Este capítulo apresenta a análise estatística do comportamento de um cancelador de eco auxiliado por um arranjo de microfones otimizados conjuntamente. Inicialmente mostra-se que o problema da otimização conjunta com restrições pode ser formulado de modo que ele tenha uma superfície de desempenho equivalente a um problema LCMV. Essa modelagem permite o uso de modelos analíticos para prever o comportamento transiente de conformadores de feixe de banda larga adaptativos convencionais. O modelo foi derivado para prever o comportamento transitório e em regime-permanente da correlação do erro nos coeficientes e a potência média de saída do sistema. A análise da convergência resultou na obtenção de um limite suficiente de estabilidade para o passo de adaptação.

#### **3.1 Estratégia de cancelamento de eco acústico auxiliado por um arranjo de microfones**

Neste trabalho, optou-se pela estratégia de otimização conjunta do cancelador de eco auxiliado por um conformador de feixes adaptativo na estrutura BF-AEC. Essa estratégia tem como principal virtude a possibilidade de encontrar soluções com menor potência de eco residual quando comparada com soluções que utilizam um único microfone (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2011).

A estratégia de otimização conjunta de um AEC adaptado simultaneamente foi proposta em Herbordt, Kellermann e Nakamura (2004) para uma

superfície de desempenho baseada na otimização pelo critério dos mínimos quadrados. Em Herbordt, Kellermann e Nakamura (2004), o BF é implementado na forma GSC com uma matriz de bloqueio adaptativa baseada em (HOSHUYAMA; SUGIYAMA; HIRANO, 1999).

### 3.1.1 Sinal de entrada do conformador de feixe

Dada a estrutura BF-AEC mostrada na Figura 2.18, os sinais de eco incidindo em cada microfone são formados pela convolução do sinal de *far-end* com a resposta ao impulso da planta LEM entre o alto-falante e o microfone  $m$

$$e_m[n] = \mathbf{h}_m^\top \mathbf{u}_h[n] \quad (3.1)$$

em que  $\mathbf{u}_h[n]$  é descrito pela Equação (1.2).

Agrupando as respostas das plantas LEM na matriz

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_0 \quad \mathbf{h}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{h}_{M-1}] \quad (3.2)$$

de ordem  $N_{\text{AEC}} \times M$  e definindo a componente de eco no *snapshot* do BF

$$\mathbf{e}_s[n] = [e_0[n] \quad e_1[n] \quad \cdots \quad e_{M-1}[n]]^\top \quad (3.3)$$

então a Equação (3.1) leva ao mapeamento

$$\mathbf{e}_s[n] = \mathbf{H}^\top \mathbf{u}_h[n]. \quad (3.4)$$

O sinal captado no  $m$ -ésimo microfone é a sobreposição de um sinal

do *near-end*  $r_m[n]$  com outro contendo os ecos  $e_m[n]$

$$x_m[n] = e_m[n] + r_m[n], \quad m = 0, \dots, M - 1. \quad (3.5)$$

Cada sinal  $r_m[n]$  é composto por fala local, interferências locais e ruídos. Então, o *snapshot* do conformador de feixe da Equação (2.11) pode ser escrito como

$$\mathbf{x}_s[n] = \mathbf{e}_s[n] + \mathbf{r}_s[n]$$

em que  $\mathbf{r}_s[n] = [r_0[n] \quad r_1[n] \quad \dots \quad r_{M-1}[n]]^\top$  representa o *snapshot* do sinal do *near-end*.

Definindo o vetor de amostras do sinal do *far-end* estendido como

$$\mathbf{u}[n] = [u[n] \quad u[n-1] \quad \dots \quad u[n - (N_h + N_{BF} - 2)]]^\top \quad (3.6)$$

em que a dimensão de  $\mathbf{u}[n]$  é o número de amostras resultantes da convolução de  $\mathbf{h}_m[n]$  e  $\mathbf{b}_m[n]$ . Para escrever a componente de eco dos sinais captados pelos microfones em função de  $\mathbf{u}[n]$  a Equação (3.4) é reescrita como

$$\mathbf{e}_s[n-k] = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times k} & \mathbf{H}^\top & \mathbf{0}_{M \times N_{BF} - (k+1)} \end{bmatrix} \mathbf{u}[n]. \quad (3.7)$$

Logo, definindo o vetor completo de amostras de eco com comprimento  $M \cdot N_{BF} \times 1$

$$\mathbf{e}[n] = \left[ \mathbf{e}_s^\top[n] \quad \mathbf{e}_s^\top[n-1] \quad \dots \quad \mathbf{e}_s^\top[n - (N_{BF} - 1)] \right]^\top \quad (3.8)$$

pode-se escrever

$$\mathbf{e}[n] = \mathcal{H}^\top \mathbf{u}[n] \quad (3.9)$$

em que

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} & & \mathbf{0}_{1 \times M} & \cdots & \mathbf{0}_{N_{\text{BF}}-1 \times M} \\ & \mathbf{H} & \mathbf{H} & \cdots & \mathbf{H} \\ \mathbf{0}_{N_{\text{BF}}-1 \times M} & \mathbf{0}_{N_{\text{BF}}-2 \times M} & \cdots & & \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

é a matriz estendida de respostas ao impulso de plantas LEM de dimensão  $N_h + N_{\text{BF}} - 1 \times M \cdot N_{\text{BF}}$ . Observa-se que  $\mathbf{e}[n]$  contém os sinais de eco correspondentes ao comprimento da resposta ao impulso dos filtros FIR do BF.

Utilizando as Equações (3.5), (2.11), (3.8) e (3.9), e definindo a componente de *near-end* do vetor de entrada  $M \cdot N_{\text{BF}}$ -dimensional do BF como

$$\mathbf{r}_b[n] = [\mathbf{r}_s^\top[n] \quad \mathbf{r}_s^\top[n-1] \quad \cdots \quad \mathbf{r}_s^\top[n-(N_{\text{BF}}-1)]]^\top \quad (3.11)$$

pode-se escrever o vetor de entrada do conformador de feixe como

$$\mathbf{x}_b[n] = \mathcal{H}^\top \mathbf{u}[n] + \mathbf{r}_b[n]. \quad (3.12)$$

### Sinal de entrada do cancelador de eco acústico

Assumindo que  $N_{\text{AEC}} \leq N_h + N_{\text{BF}} - 1$ , os vetores  $\mathbf{u}[n]$  da Equação (3.6) e  $\mathbf{u}_{\hat{h}}[n]$  da Equação (1.6) estão relacionados por

$$\mathbf{u}_{\hat{h}}[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\text{AEC}}} & \mathbf{0}_{N_{\text{AEC}} \times (N_h + N_{\text{BF}} - N_{\text{AEC}} - 1)} \end{bmatrix} \mathbf{u}[n]. \quad (3.13)$$

### 3.1.2 Eco residual

O sinal de eco residual  $d[n]$  na Figura 2.18 é formado pela saída do conformador de feixe  $y[n]$  da Equação (2.39) subtraída pela saída do cancelador de eco  $\hat{y}[n]$  da Equação (1.4)

$$d[n] = \mathbf{b}^\top[n] \mathbf{x}_b[n] - \hat{\mathbf{h}}^\top[n] \mathbf{u}_{\hat{h}}[n]. \quad (3.14)$$

## 3.2 Modelo de Sinal para a análise

Definindo o vetor de entrada estendido como

$$\mathbf{s}[n] = \left[ -\mathbf{u}_{\hat{h}}^\top[n] \quad \mathbf{x}_b^\top[n] \right]^\top \quad (3.15)$$

em que  $\mathbf{s}[n] \in \mathbb{R}^{N_w}$  e  $N_w = N_{\text{AEC}} + M N_{\text{BF}}$  indica o número de amostras do vetor de entrada estendido. Analogamente, o vetor de coeficientes estendido é definido a partir de (2.38) e (1.5) como

$$\mathbf{w}[n] = \left[ \hat{\mathbf{h}}^\top[n] \quad \mathbf{b}^\top[n] \right]^\top. \quad (3.16)$$

Então a Equação (3.14) pode ser reescrita como

$$d[n] = \mathbf{s}^\top[n] \mathbf{w}[n]. \quad (3.17)$$

Utilizando as Equações (3.15), (3.16) e (3.17) é possível demonstrar que o problema de otimização do sistema da Figura 2.18, quando a superfície de desempenho é a potência média de  $d[n]$ , pode ser escrito como um problema LCMV equivalente.

### 3.2.1 Superfície de desempenho

Dentre os critérios para a minimização de  $d[n]$ , o escolhido nesse trabalho foi a minimização do valor esperado de sua potência. Quando os sinais de entrada são estacionários, a potência média de saída (*Mean Output Power* (MOP)) é uma função de segunda ordem dos coeficientes do filtro transversal na Equação (3.16). A dependência da MOP em relação ao vetor de coeficientes desconhecido pode ser vista como um parabolóide multi-dimensional com um único ponto de mínimo (HAYKIN, 1993).

#### Propriedades da MOP

A escolha da MOP foi feita por algumas características interessantes, particularmente quando  $E\{d[n]\} = 0$  (WANG; BOVIK, 2009):

**Simplicidade** A função  $E\{d^2[n]\}$  não possui memória em relação a  $d[n]$  e pode ser avaliada independente de outros instantes de tempo. O cálculo de  $d^2[n]$  para a avaliação da precisão do modelo pode ser feito por meio de uma única multiplicação por realização por amostra;

**Propriedades matemáticas** A métrica  $E\{d^2[n]\}$  pode ser interpretada como uma norma quadrática ao quadrado e portanto tem as propriedades de

- Não-negatividade:  $E\{d^2[n]\} \geq 0$ ;
- Identidade:  $E\{d^2[n]\} = 0$  se e somente se  $d^2[n] = 0$  em todas as realizações;

- Simetria:  $E\{d^2[n]\} = E\{(-d[n])^2\}$ , ou seja, sua magnitude para  $d[n]$  real independe da fase.

**Interpretação** Tem um significado físico evidente por representar a energia do sinal de saída;

**Tratabilidade matemática** A MOP é uma boa métrica para otimização. Ela tem as propriedades de convexidade, simetria, continuidade e diferenciabilidade;

**Propriedades estatísticas** A MOP é aditiva para sinais estatisticamente independentes, ou seja  $E\{(d_1[n] + d_2[n])^2\} = E\{d_1^2[n]\} + E\{d_2^2[n]\}$  para  $d_1[n]$  independente de  $d_2[n]$ .

Determinada a superfície de desempenho, e baseado no modelo de sinal para a análise, em seguida é derivado o problema LCMV equivalente que permite o uso de resultados teóricos anteriores (FROST III, 1972; GODARA; CANTONI, 1986). Apesar do estudo em Godara e Cantoni (1986) ser baseado em um modelo de sinais de banda estreita, observa-se que os resultados são aplicáveis para sinais de banda larga (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a).

### LCMV Equivalente

Considerando um vetor de coeficientes estendido fixo, da Equação (3.17) tem-se

$$E\{d^2[n] | \mathbf{w}[n] = \mathbf{w}\} = E\{\mathbf{w}^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{w}\} = \mathbf{w}^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w} \quad (3.18)$$



em que  $E\{s[n]s^\top[n]\} = \mathbf{R}_{ss}$  indica a matriz de correlação de  $s[n]$  que é considerada constante nesse trabalho.

Para escrever as restrições na Equação (2.35) em função do vetor de coeficientes estendido  $\mathbf{w}$ , define-se a matriz de restrições estendida (HERBORDT; KELLERMANN; NAKAMURA, 2004; HERBORDT; KELLERMANN; NAKAMURA, 2006)

$$\mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_C \times N_{AEC}} & \mathbf{C}^\top \end{bmatrix}^\top. \quad (3.19)$$

Observa-se que, quando  $\mathbf{C}$  tem posto de colunas completo, a matriz  $\mathbf{C}_e$  também tem posto de colunas completo. Portanto, o problema da otimização conjunta pode ser descrito como

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \arg \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w} \quad (3.20a)$$

$$\text{sujeito a } \mathbf{C}_e^\top \mathbf{w} = \mathbf{f}. \quad (3.20b)$$

em que nota-se que a Equação (3.20) tem a mesma forma do LCMV estudado em (FROST III, 1972). Portanto, sua solução ótima é

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{ss}^{-1} \mathbf{C}_e (\mathbf{C}_e^\top \mathbf{R}_{ss}^{-1} \mathbf{C}_e)^{-1} \mathbf{f}. \quad (3.21)$$

Substituindo a Equação (3.21) na Equação (3.18) encontra-se o MOP mínimo dado por

$$J_{\min} = \mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}_{\text{opt}} \quad (3.22)$$

$$= \mathbf{f}^\top (\mathbf{C}_e^\top \mathbf{R}_{ss}^{-1} \mathbf{C}_e)^{-1} \mathbf{f}. \quad (3.23)$$

A busca de soluções para a Equação (3.20), pode ser restrita ao espaço factível definido pelo hiperplano descrito pela Equação (3.20b). A ausência de restrições de desigualdade permite decomposições apropriadas das soluções (FROST III, 1972; GRIFFITHS; JIM, 1982; CAMPOS; WERNER; APOLINARIO J.A., 2002). A seguir é feito um rápido estudo sobre a representação de soluções para a Equação (3.20) na forma direta (FROST III, 1972).

### 3.2.2 Espaço Factível

Uma solução factível  $\mathbf{w}$ , que satisfaz a Equação (3.20b), pode ser decomposta em uma componente no espaço de colunas de  $\mathbf{C}_e$  e outra no seu espaço ortogonal e complementar (FROST III, 1972). Utilizando  $\mathbf{C}_e^\top \mathbf{w} = \mathbf{f}$  para todo  $\mathbf{w}$  factível resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (\mathbf{I}_{N_w} - \mathbf{C}_e(\mathbf{C}_e^\top \mathbf{C}_e)^{-1} \mathbf{C}_e^\top) \mathbf{w} + (\mathbf{C}_e(\mathbf{C}_e^\top \mathbf{C}_e)^{-1} \mathbf{C}_e^\top) \mathbf{w} \\ &= \mathbf{P}_e \mathbf{w} + \mathbf{w}_f \end{aligned} \quad (3.24)$$

em que  $\mathbf{P}_e$  é a matriz  $N_w \times N_w$ -dimensional de projeção estendida no espaço ortogonal e complementar do espaço de colunas de  $\mathbf{C}_e$ , definida como

$$\mathbf{P}_e = (\mathbf{I}_{N_w} - \mathbf{C}_e(\mathbf{C}_e^\top \mathbf{C}_e)^{-1} \mathbf{C}_e^\top) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{AEC}} & \mathbf{0}_{N_{AEC} \times M \cdot N_{BF}} \\ \mathbf{0}_{M \cdot N_{BF} \times N_{AEC}} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

na qual  $\mathbf{P}$ , dada pela Equação (2.51), é a matriz  $M \cdot N_{BF} \times M \cdot N_{BF}$ -dimensional de projeção no espaço ortogonal e complementar do espaço

de colunas de  $C$  (FROST III, 1972), e

$$\mathbf{w}_f = C_e(C_e^\top C_e)^{-1} \mathbf{f} = [\mathbf{0}_{1 \times N_{AEC}} \quad \mathbf{b}_f^\top]^\top \quad (3.26)$$

é a parcela  $N_w \times 1$ -dimensional quiescente estendida da solução, definida pela solução de mínima norma que satisfaz a Equação (3.20b), na qual o vetor quiescente convencional é dado pela Equação (2.52) (GRIFFITHS; JIM, 1982).

A decomposição de soluções factíveis por meio da Equação (3.24) simplifica a obtenção de soluções adaptativas para a Equação (3.20).

### 3.3 Solução adaptativa baseada no gradiente estocástico

O desenvolvimento de um algoritmo recursivo de adaptação dos coeficientes de um filtro adaptativo linear transversal baseado no gradiente estocástico consiste em dois procedimentos (HAYKIN, 1993; SAYED, 2008):

- Aproximação da Equação (3.21) (i.e., a equação matricial que define a solução de mínimo MOP) por meio do método do gradiente determinístico (*steepest descent*), uma técnica consagrada na teoria de otimização (FLETCHER, 1987), para obter uma aproximação recursiva para  $\mathbf{w}_{opt}$ . A aproximação assume o conhecimento *a priori* de estatísticas dos sinais envolvidos (HAYKIN, 1993);
- Substituição das estatísticas dos sinais por aproximações baseadas em observações *a posteriori* do sinal para obter uma estimativa do gradiente da superfície de desempenho.

O algoritmo resultante, apesar de sua simplicidade, é capaz de obter boas aproximações de  $\mathbf{w}_{\text{opt}}$  sob determinadas condições (HAYKIN, 1993; SAYED, 2008; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000; WIDROW et al., 1976). Sua principal virtude, novamente em consequência de sua simplicidade, é sua capacidade de obter soluções em tempo real. Suas maiores limitações são sua taxa de convergência sensível a variações no espalhamento dos autovetores da matriz de autocorrelação dos dados de entrada (SAYED, 2008) e a dificuldade de encontrar um bom conjunto de parâmetros capazes de conciliar ao mesmo tempo um baixo erro em regime permanente e uma boa velocidade de convergência (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000).

Neste capítulo, propõe-se um modelo para o comportamento do problema de cancelamento de eco acústico utilizando um sistema BF-AEC definido na Equação (3.20) quando os coeficientes de ambos BF e AEC são adaptados conjuntamente utilizando o algoritmo LMS com restrições proposto inicialmente em Frost III (1972) e descrito no Capítulo 2. Observando que a Equação (3.20) tem exatamente a mesma forma que o problema LCMV estudado em Frost III (1972) a análise utiliza vários dos resultados teóricos desenvolvidos em Frost III (1972) e Godara e Cantoni (1986), realizando os ajustes necessários.

A atualização do vetor de coeficientes estendido, conforme o procedimento para obtenção de uma solução baseado no gradiente estocástico é

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] - \frac{1}{2}\mu \hat{\mathbf{\nabla}}_{\mathbf{w}}(E\{d^2[n]\}) \quad (3.27)$$

em que  $\hat{\nabla}_{\mathbf{w}}(E\{d^2[n]\})$  é uma estimativa instantânea não-polarizada do gradiente da superfície de desempenho da Equação (3.20) e  $\mu$  indica o passo de adaptação que controla a velocidade de convergência de (3.27) para (3.21). Para garantir que a nova solução pertence ao espaço factível, substituindo a Equação (3.27) na Equação (3.24), a estimativa instantânea para a solução da Equação (3.20) torna-se, conforme proposta em Godara e Cantoni (1986),

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{P}_e \left[ \mathbf{w}[n] - \frac{1}{2} \mu \hat{\nabla}_{\mathbf{w}}(E\{d^2[n]\}) \right] + \mathbf{w}_f. \quad (3.28)$$

Utilizando a estimativa instantânea  $\hat{\nabla}_{\mathbf{w}}(E\{d^2[n]\}) = 2 \mathbf{s}[n]d[n]$  proposta em Frost III (1972), a equação de atualização torna-se

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{P}_e(\mathbf{w}[n] - \mu \mathbf{s}[n]d[n]) + \mathbf{w}_f. \quad (3.29)$$

### 3.3.1 Implementação da solução adaptativa baseada no gradiente estocástico

Para o LCMV convencional, a matriz  $\mathbf{C}_e$  na Equação (3.20b) pode não apresentar a forma esparsa da Equação (3.19). Portanto, para o caso geral, a matriz  $\mathbf{P}_e$  de projeção no espaço ortogonal e complementar às colunas de  $\mathbf{C}_e$  também não apresenta esparsidade. Nesse caso, a solução adaptativa descrita na Equação (3.29) deve ser implementada. Entretanto, para implementação do sistema BF-AEC, é interessante observar a natureza diagonal em blocos da matriz  $\mathbf{P}_e$  na Equação (3.25), que os vetores  $\mathbf{s}[n]$  e  $\mathbf{w}[n]$ , nas Equações (3.15) e (3.16) respectivamente, podem ser particionados com dimensões consistentes com os blocos de  $\mathbf{P}_e$ . A multiplicação em blocos

resulta em

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}[n+1] \\ \mathbf{b}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\text{AEC}}} & \mathbf{0}_{N_{\text{AEC}} \times M \cdot N_{\text{BF}}} \\ \mathbf{0}_{M \cdot N_{\text{BF}} \times N_{\text{AEC}}} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}[n] \\ \mathbf{b}[n] \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} -\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{h}}}[n] \\ \mathbf{x}_{\mathbf{b}}[n] \end{bmatrix} d[n] + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_{\text{AEC}} \times 1} \\ \mathbf{b}_{\text{f}} \end{bmatrix}$$

que pode ser dividida em duas equações de atualização

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}[n+1] &= \hat{\mathbf{h}}[n] + \mu d[n] \mathbf{u}_{\hat{\mathbf{h}}}[n] \\ \mathbf{b}[n+1] &= \mathbf{P}(\mathbf{b}[n] - \mu d[n] \mathbf{x}_{\mathbf{b}}[n]) + \mathbf{b}_{\text{f}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Embora a implementação direta da Equação (3.29) possibilite a busca de soluções para a Equação (3.20) de maneira recursiva, a implementação da Equação (3.30), reduz a complexidade computacional de maneira significativa. Isso acontece devido à ausência de uma multiplicação matriz-vetor na atualização de  $\hat{\mathbf{h}}[n]$  e porque a dimensão de  $\mathbf{P}$  ( $M N_{\text{BF}}$ ) é menor que a dimensão de  $\mathbf{P}_{\text{e}}$  ( $N_{\text{w}} = N_{\text{AEC}} + M N_{\text{BF}}$ ). Essa diferença é significativa quando  $N_{\text{AEC}} \gg M N_{\text{BF}}$ , uma condição usual no projeto de sistemas de cancelamento de eco acústico.

### Caso particular: $M = 1$

Para comparação com soluções que não utilizam um arranjo de microfones, é interessante observar que a implementação com um único microfone ( $M = 1$ ) é um caso particular da formulação apresentada. Quando  $M = 1$ , o sistema é simplificado para um único filtro adaptativo linear adaptado pelo algoritmo LMS em que a solução ótima é um filtro

de Wiener quando  $N_{\text{BF}} = N_{\text{C}}$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{f} = [1 \quad \mathbf{0}_{1 \times N_{\text{C}}-1}]^{\top}$  (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a). Logo,  $d[n] = x_0[n] - \mathbf{u}_{\hat{h}}^{\top}[n]\hat{\mathbf{h}}[n]$  e  $\mathbf{w}_{\text{opt}} = [(\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{\hat{h}}\mathbf{u}_{\hat{h}}}^{-1} \mathbf{p}_{\mathbf{u}_{\hat{h}}x_0})^{\top} \quad \mathbf{f}^{\top}]^{\top}$ , em que  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{\hat{h}}\mathbf{u}_{\hat{h}}} = E\{\mathbf{u}_{\hat{h}}[n]\mathbf{u}_{\hat{h}}^{\top}[n]\}$  e  $\mathbf{p}_{\mathbf{u}_{\hat{h}}x_0} = E\{\mathbf{u}_{\hat{h}}[n]x_0[n]\} = E\{\mathbf{u}_{\hat{h}}[n]\mathbf{x}_{\text{b}}^{\top}[n]\}\mathbf{f}$  (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2011).

### 3.4 Análise estatística

Nessa seção, é feita a análise estatística do comportamento do cancelador de eco acústico auxiliado pelo arranjo de microfones adaptado utilizando a Equação (3.29). O modelo é derivado a partir de estatísticas dos coeficientes de  $\mathbf{w}[n]$  para sinais de entrada reais e estacionários e supondo plantas LEM fixas. A análise é feita sob um conjunto de hipóteses simplificadoras, que são necessárias para a tratabilidade matemática (HAYKIN, 1993).

#### 3.4.1 Hipóteses Simplificadoras

**H1**  $\mathbf{s}[n]$  é um vetor com média nula e distribuição Gaussiana;

**H2**  $u[n]$  e  $r[n]$  são estatisticamente independentes;

**H3** A matriz  $\mathbf{R}_{\text{ss}}$  é definida positiva e a matriz  $\mathbf{C}$  tem posto de colunas completo;

**H4** A dependência estatística entre  $\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^{\top}[n]$  e  $\mathbf{w}[n]$  pode ser desprezada;

**H5** A DOA não muda durante a adaptação.

Apesar de não serem sempre válidas em situações práticas, essas hipóteses tornam a análise viável e frequentemente levam a resultados que mantêm

informação suficiente do processo adaptativo para servirem de diretrizes de projeto (HAYKIN, 1993, p. 315), (HERBORDT; KELLERMANN, 2000; HERBORDT; KELLERMANN; NAKAMURA, 2004). No contexto desse trabalho, é importante diferenciar diretrizes de projeto de regras de projeto. Regras de projeto são definidas por órgãos responsáveis pela normalização técnica como por exemplo a *International Organization for Standardization* (ISO) ou a *International Electrotechnical Commission* (IEC) e devem ser seguidas rigorosamente sob o risco de infringir a lei, violar normas nacionais ou internacionais, transgredir princípios éticos, etc. Diretrizes de projeto são um conjunto de instruções ou indicações que servem como uma ferramenta para facilitar a escolha de parâmetros em um projeto, ou seja, são ferramentas de auxílio à decisão. Portanto o projetista pode se recusar a utilizar diretrizes de projeto baseado em uma ampla experiência no projeto de sistemas adaptativos. Contudo, na ausência de um especialista, essas ferramentas simplificam a complexidade do projeto permitindo que o tempo do projetista seja alocado de maneira mais eficiente. A hipótese H1 simplifica o cálculo de momentos estatísticos de quarta-ordem de  $s[n]$  (HAYKIN, 1993, p 318),(PAPOULIS; PILLAI, 2002). Esses momentos dependem da distribuição de  $s[n]$  e a distribuição Gaussiana combina, ao mesmo tempo, a capacidade de modelar adequadamente inúmeros processos físicos e simplificar as derivações matemáticas necessárias. Quanto à validade dessa hipótese, dados experimentais indicam que sinais de voz podem ser melhor modelados utilizando distribuições Laplaciana ou  $\Gamma$  simétrica modificada (SHIN; CHANG; KIM, 2005). Contudo, não há consenso sobre a



função distribuição de probabilidade específica para sinais de voz e o assunto ainda é alvo de debates (HÄNSLER; SCHMIDT, 2004). Por um lado, o uso da distribuição Gaussiana é frequente na avaliação de desempenho de algoritmos (COSTA; BERMUDEZ, 2002; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000; de ALMEIDA; BERMUDEZ; BERSHAD, 2009; de ALMEIDA; BERMUDEZ; BERSHAD, 2004; BARRAULT et al., 2005; SAYED, 2008; BUTTERWECK, 2001; BERSHAD; LINEBARGER; MCLAUGHLIN, 2001; MERCHED; DINIZ; PETRAGLIA, 1999; HOROWITZ; SENNE, 1981; FEUER; WEINSTEIN, 1985; WIDROW et al., 1976; TOBIAS; BERMUDEZ; BERSHAD, 2000; de ALMEIDA et al., 2005; GUO et al., 2011a; PARREIRA et al., 2012; BERSHAD; BERMUDEZ, 2011; BERSHAD; QU, 1989; BERSHAD; EWEDA; BERMUDEZ, 2014; EWEDA; BERSHAD, 2012). A hipótese de distribuição Gaussiana dos dados de entrada é também frequentemente criticada por ser pouco realista. Essa crítica é válida e serve como incentivo para buscar modelos mais gerais. Contudo, a hipótese de distribuição Gaussiana é uma escolha natural quando há pouca informação sobre a verdadeira distribuição dos dados (STOICA; BABU, 2011). A razão dessa escolha é que a distribuição Gaussiana é pouco informativa pois ela maximiza a entropia condicionada a um valor finito e fixo de variância (JAYNES, 1957). Consequentemente, resultados teóricos obtidos sob a hipótese de distribuição Gaussiana servem para determinar soluções ótimas para um caso de pior cenário (*worst-case scenario*), pois essas escolhas são ótimas baseadas em um critério min-max (PARK; SERPEDIN; QARAQE, 2013). A hipótese H2 é razoável já que os sinais  $u[n]$  e  $r[n]$  são gerados em lados

diferentes de um canal de comunicação por diferentes pessoas. A hipótese H3 é razoável em situações práticas pois é esperado que  $s[n]$  contenha uma componente de ruído de quantização descorrelacionado com  $u[n]$  e  $r[n]$ . A matriz  $\mathbf{C}$  é especificada pelo projetista, que tem total controle sobre suas propriedades matemáticas. A hipótese H4, é necessária para o cálculo de momentos estatísticos entre o sinal de entrada e o vetor de coeficientes, uma vez que a distribuição do último é desconhecida exceto quando os vetores de entrada são Gaussianos (BERSHAD; QU, 1989). Essa hipótese é, na verdade, menos restritiva que a hipótese de independência, que requer que  $s[n]$  e  $w[n]$  sejam independentes, conforme discutido em Minkoff (2001). H5 é utilizada para simplificar o modelo resultante pois o objetivo principal é determinar propriedades fundamentais do desempenho do sistema adaptativo. Um estudo do comportamento durante mudanças de direção exigiria o uso de uma matriz de projeção  $\mathbf{P}$  variante no tempo que tornaria as derivações excessivamente complexas.

#### 3.4.2 *Modelo do comportamento médio dos coeficientes de Frost III (1972)*

Definindo o vetor de erro nos coeficientes

$$\mathbf{v}[n] = \mathbf{w}[n] - \mathbf{w}_{\text{opt}} \quad (3.31)$$

o comportamento médio da Equação (3.29) pode ser estudado independente da solução ótima (de ALMEIDA; BERMUDEZ; BERSHAD, 2009). O modelo para o comportamento médio da Equação (3.31) foi estudado

em (FROST III, 1972). É interessante observar que, para  $\mathbf{w}[n]$  factível tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[n] &= \mathbf{P}_e \mathbf{w}[n] + \mathbf{w}_f - (\mathbf{P}_e \mathbf{w}_{\text{opt}} + \mathbf{w}_f) \\ &= \mathbf{P}_e \mathbf{v}[n]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nesse caso, o vetor de erro nos coeficientes pertence ao espaço de colunas de  $\mathbf{P}_e$ .

Assumindo que o algoritmo foi inicializado em uma solução factível, a subtração de  $\mathbf{w}_{\text{opt}}$  em ambos os lados da Equação (3.29) resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[n+1] &= \mathbf{P}_e (\mathbf{w}[n] - \mu \mathbf{s}[n] d[n]) + \mathbf{w}_f - \mathbf{w}_{\text{opt}} \\ &= \mathbf{P}_e (\mathbf{v}[n] - \mu \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{w}[n]) \\ &= \mathbf{P}_e (\mathbf{I}_{N_w} - \mu \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n]) \mathbf{v}[n] - \mu \mathbf{P}_e \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{w}_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

em que  $\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{P}_e \mathbf{w}_{\text{opt}} + \mathbf{w}_f$  e a Equação (3.17) foram utilizados na derivação da Equação (3.33). O comportamento médio dos coeficientes é descrito pelo valor esperado de (3.33), utilizando a Equação (3.32) e a hipótese H4, dado por

$$E\{\mathbf{v}[n+1]\} = (\mathbf{I}_{N_w} - \mu \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e) E\{\mathbf{v}[n]\} - \mu \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{w}_{\text{opt}}$$

em que, a substituição das Equações (3.21) e (3.25) no cálculo de  $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{w}_{\text{opt}}$

resulta em

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}_{\text{opt}} &= (\mathbf{I}_{N_w} - \mathbf{C}_e (\mathbf{C}_e^\top \mathbf{C}_e)^{-1} \mathbf{C}_e^\top) \mathbf{R}_{ss} \mathbf{R}_{ss}^{-1} \mathbf{C}_e (\mathbf{C}_e^\top \mathbf{R}_{ss}^{-1} \mathbf{C}_e)^{-1} \mathbf{f} \\
 &= \mathbf{C}_e (\mathbf{C}_e^\top \mathbf{R}_{ss}^{-1} \mathbf{C}_e)^{-1} \mathbf{f} - \mathbf{C}_e (\mathbf{C}_e^\top \mathbf{R}_{ss}^{-1} \mathbf{C}_e)^{-1} \mathbf{f} \\
 &= \mathbf{0}_{N_w \times 1}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Portanto o valor esperado da recursão de  $\mathbf{v}[n]$ , utilizando a Equação (3.34), torna-se

$$E\{\mathbf{v}[n+1]\} = (\mathbf{I}_{N_w} - \mu \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e) E\{\mathbf{v}[n]\}. \tag{3.35}$$

Assim, o comportamento de  $E\{\mathbf{v}[n]\}$ , supondo inicialização em uma solução factível é dado por (CHEN, 1998)

$$E\{\mathbf{v}[n]\} = (\mathbf{I}_{N_w} - \mu \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e)^n E\{\mathbf{v}[0]\}. \tag{3.36}$$

Da equação (3.36) conclui-se que a convergência, em média, de  $\mathbf{w}[n]$  para  $\mathbf{w}_{\text{opt}}$  requer que todos os autovalores de  $\mathbf{I}_{N_w} - \mu \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e$  estejam localizados dentro do círculo de raio unitário. Nesse caso, a solução  $\mathbf{w}[n]$  converge assintoticamente para  $\mathbf{w}_{\text{opt}}$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

### 3.4.3 Modelo da Covariância dos coeficientes de Godara e Cantoni (1986)

Utilizando o procedimento descrito em Godara e Cantoni (1986), deriva-se um modelo recursivo para a matriz de covariância dos coeficientes  $\mathbf{K}_{ww}[n] = E\{(\mathbf{w}[n] - E\{\mathbf{w}[n]\})(\mathbf{w}[n] - E\{\mathbf{w}[n]\})^\top\}$  em função de

uma estimativa  $\hat{\nabla}_{\mathbf{w}}(E\{d^2[n]\})$  do gradiente da função custo

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{ww}}[n+1] &= \mathbf{P}_e \mathbf{K}_{\text{ww}}[n] \mathbf{P}_e - \mu \mathbf{P}_e \mathbf{K}_{\text{ww}}[n] \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e \\ &- \mu \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{K}_{\text{ww}}[n] \mathbf{P}_e + \frac{1}{4} \mu^2 \mathbf{P}_e \text{cov}(\hat{\nabla}_{\mathbf{w}}(E\{d^2[n]\})) \mathbf{P}_e \end{aligned} \quad (3.37)$$

em que  $\text{cov}(\hat{\nabla}_{\mathbf{w}}(E\{d^2[n]\}))$  indica a matriz de covariância de  $\hat{\nabla}_{\mathbf{w}}(E\{d^2[n]\})$ ,

$$\mathbf{K}_{\text{ww}}[n] = \mathbf{R}_{\text{ww}}[n] - E\{\mathbf{w}[n]\}E\{\mathbf{w}^\top[n]\} \quad (3.38)$$

e  $\mathbf{R}_{\text{ww}}[n]$  indica a matriz de correlação de  $\mathbf{w}[n]$ . Para completar o modelo, para a recursão da Equação (3.29), é necessário utilizar a definição de  $\hat{\nabla}_{\mathbf{w}}(E\{d^2[n]\})$  para calcular seus momentos estatísticos

Utilizando a estimativa  $\hat{\nabla}_{\mathbf{w}}(E\{d^2[n]\}) = 2\mathbf{s}[n]d[n]$  proposta em Frost III (1972) e a Equação (3.17) na Equação (3.37) resulta em

$$\begin{aligned} \text{cov}(2\mathbf{s}[n]d[n]) &= 4E\{\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{w}[n]\mathbf{w}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\} \\ &- 4\mathbf{R}_{\text{ss}}E\{\mathbf{w}[n]\}E\{\mathbf{w}^\top[n]\}\mathbf{R}_{\text{ss}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Utilizando as hipóteses H4 e H1 e o Teorema da fatoração dos momentos de variáveis Gaussianas (PAPOULIS; PILLAI, 2002), o primeiro termo da Equação (3.39) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{w}[n]\mathbf{w}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\} &= 2\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{R}_{\text{ww}}[n]\mathbf{R}_{\text{ss}} \\ &+ \mathbf{R}_{\text{ss}}\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{R}_{\text{ww}}[n]). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Utilizando a Equação (3.38) o termo  $\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{R}_{\text{ww}}[n])$  na Equação (3.40) é sim-

plificado para

$$\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{R}_{\text{ww}}[n]) = \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{K}_{\text{ww}}[n]) + E\{\mathbf{w}^\top[n]\}\mathbf{R}_{\text{ss}}E\{\mathbf{w}[n]\} \quad (3.41)$$

no qual as propriedades  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  e  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$  foram usadas. Portanto, a Equação (3.39) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \text{cov}(2\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{w}[n]) &= 8\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{K}_{\text{ww}}[n]\mathbf{R}_{\text{ss}} + 4\mathbf{R}_{\text{ss}}E\{\mathbf{w}^\top[n]\}\mathbf{R}_{\text{ss}}E\{\mathbf{w}[n]\} \\ &+ 4\mathbf{R}_{\text{ss}}\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{K}_{\text{ww}}[n]) - 4\mathbf{R}_{\text{ss}}E\{\mathbf{w}[n]\}E\{\mathbf{w}^\top[n]\}\mathbf{R}_{\text{ss}} \end{aligned} \quad (3.42)$$

completando o modelo da Equação (3.37). Finalmente, o modelo do comportamento da matriz de covariância dos coeficientes da Equação (3.29) é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{ww}}[n+1] &= \mathbf{P}_e\mathbf{K}_{\text{ww}}[n]\mathbf{P}_e - \mu\mathbf{P}_e\mathbf{K}_{\text{ww}}[n]\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{P}_e \\ &- \mu\mathbf{P}_e\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{K}_{\text{ww}}[n]\mathbf{P}_e + 2\mu^2\mathbf{P}_e\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{K}_{\text{ww}}[n]\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{P}_e \\ &+ \mu^2\left(\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{K}_{\text{ww}}[n]) + E\{\mathbf{w}^\top[n]\}\mathbf{R}_{\text{ss}}E\{\mathbf{w}[n]\}\right)\mathbf{P}_e\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{P}_e \\ &- \mu^2\mathbf{P}_e\mathbf{R}_{\text{ss}}E\{\mathbf{w}[n]\}E\{\mathbf{w}^\top[n]\}\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{P}_e \end{aligned} \quad (3.43)$$

### 3.4.4 Modelo da MOP a partir da Covariância dos coeficientes de Godara e Cantoni (1986)

Usando a hipótese H4 e a Equação (3.41), a MOP pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 E\{d^2[n]\} &= E\{\mathbf{w}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{w}[n]\} \\
 &= E\{\text{tr}(\mathbf{w}[n]\mathbf{w}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n])\} \\
 &= \text{tr}\left(E\{\mathbf{w}[n]\mathbf{w}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\}\right) \\
 &= \text{tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}[n]\mathbf{R}_{\mathbf{s}\mathbf{s}}) \\
 &= \text{tr}(\mathbf{K}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}[n]\mathbf{R}_{\mathbf{s}\mathbf{s}}) + E\{\mathbf{w}^\top[n]\}\mathbf{R}_{\mathbf{s}\mathbf{s}}E\{\mathbf{w}[n]\}. \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

Apesar da Equação (3.44) prever o comportamento da MOP com boa precisão, ela depende de uma função de segunda-ordem de  $E\{\mathbf{w}[n]\}$ , e portanto não é apropriada para a análise da convergência para derivar diretrizes de projeto. Alternativamente, o comportamento das estatísticas de segunda ordem de  $\mathbf{w}[n]$  pode ser descrito com base no vetor de erro nos coeficientes  $\mathbf{v}[n]$ .

### 3.4.5 Modelo da Correlação do vetor de erro nos coeficientes

Uma maneira alternativa de descrever o comportamento das estatísticas de segunda-ordem da Equação (3.29) é o uso da correlação do erro nos coeficientes (COSTA; BERMUDEZ, 2002; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000; de ALMEIDA; BERMUDEZ; BERSHAD, 2009; de ALMEIDA; BERMUDEZ; BERSHAD, 2004; PARREIRA et al., 2012;

BERSHAD; BERMUDEZ, 2011; BERSHAD; QU, 1989). O estudo da convergência por meio dessa estatística é mais simples pois o comportamento da MOP é descrito independente de  $E\{\mathbf{w}[n]\}$ . Não obstante, as previsões resultantes desse modelo têm a mesma precisão que as feitas utilizando a Equação (3.43) pois as mesmas hipóteses simplificadoras são utilizadas.

Pós multiplicando a Equação (3.33) por sua transposta obtém-se

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}[n]\mathbf{v}^\top[n] &= \mathbf{P}_e \left( \mathbf{v}[n]\mathbf{v}^\top[n] - \mu\mathbf{v}[n]\mathbf{v}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n] \right. \\
 &\quad - \mu\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{v}[n]\mathbf{v}^\top[n] - \mu\mathbf{v}[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}^\top\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n] \\
 &\quad + \mu^2\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{v}[n]\mathbf{v}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n] \\
 &\quad + \mu^2\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{v}[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}^\top\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n] \\
 &\quad - \mu\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}\mathbf{v}^\top[n] \\
 &\quad + \mu^2\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}\mathbf{v}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n] \\
 &\quad \left. + \mu^2\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}\mathbf{w}_{\text{opt}}^\top\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n] \right) \mathbf{P}_e \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

em que  $\mathbf{v}[n] = \mathbf{P}_e\mathbf{v}[n]$  da Equação (3.32) e  $\mathbf{P}_e = \mathbf{P}_e^\top$  da Equação (3.25). Calculando o valor esperado da Equação (3.45) e utilizando a hipótese H4



chega-se a

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\text{vv}}[n] = & \mathbf{P}_e (\mathbf{R}_{\text{vv}}[n] - \mu \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{R}_{\text{ss}} - \mu \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \\
& - \mu E\{\mathbf{v}[n]\} \mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} - \mu \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{w}_{\text{opt}} E\{\mathbf{v}[n]\}^\top \\
& + \mu^2 E\{\mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{v}[n] \mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n]\} \\
& + \mu^2 E\{\mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{w}_{\text{opt}} \mathbf{v}^\top [n] \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n]\} \\
& + \mu^2 E\{\mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{v}[n] \mathbf{v}^\top [n] \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n]\} \\
& + \mu^2 E\{\mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{w}_{\text{opt}} \mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n]\}) \mathbf{P}_e \quad (3.46)
\end{aligned}$$

em que  $\mathbf{R}_{\text{vv}}[n]$  indica a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes estendidos. Os termos  $\mathbf{P}_e E\{\mathbf{v}[n]\} \mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e$  e  $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{w}_{\text{opt}} E\{\mathbf{v}[n]\}^\top \mathbf{P}_e$  podem ser descartados utilizando a Equação (3.34) diretamente. O cálculo dos outros termos é detalhado nos Apêndices E, F e G.

Substituindo as Equações (E.2), (F.2) e (G.4) na Equação (3.46) resulta em

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\text{vv}}[n+1] = & \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{P}_e - \mu \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e \\
& - \mu \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{P}_e + 2\mu^2 \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e \\
& + \mu^2 \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e [\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{R}_{\text{vv}}[n]) + J_{\text{min}}]. \quad (3.47)
\end{aligned}$$

A Equação (3.47) é um modelo do comportamento das estatísticas de segunda-ordem do vetor de coeficientes estendido em função de  $\mathbf{R}_{\text{vv}}[n]$  apenas, o que facilita a análise da convergência.

### 3.5 Análise da convergência

Observa-se, da Equação (3.32) que (GODARA; CANTONI, 1986; FROST III, 1972)

$$\mathbf{R}_{\text{vv}}[n] = \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] = \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{P}_e = \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{P}_e \quad (3.48)$$

portanto, a Equação (3.47) pode ser re-escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{vv}}[n+1] &= \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] - \mu \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] (\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e) \\ &\quad - \mu (\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e) \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] + 2\mu^2 (\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e) \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] (\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e) \\ &\quad + \mu^2 [\text{tr}((\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e) \mathbf{R}_{\text{vv}}[n]) + J_{\min}] (\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Utilizando a decomposição ortogonal em autovalores da matriz simétrica  $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_v \mathbf{\Lambda}_{\text{ss}} \mathbf{Q}_v^\top$ , em que  $\mathbf{Q}_v \mathbf{Q}_v^\top = \mathbf{I}_{N_w}$ , e definindo  $\mathfrak{R}_{\text{vv}}[n] = \mathbf{Q}_v^\top \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{Q}_v$ , na Equação (3.49) resulta em

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\text{vv}}[n+1] &= \mathfrak{R}_{\text{vv}}[n] - \mu \mathfrak{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{\Lambda}_{\text{ss}} - \mu \mathbf{\Lambda}_{\text{ss}} \mathfrak{R}_{\text{vv}}[n] \\ &\quad + 2\mu^2 \mathbf{\Lambda}_{\text{ss}} \mathfrak{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{\Lambda}_{\text{ss}} + \mu^2 \mathbf{\Lambda}_{\text{ss}} [\text{tr}(\mathbf{\Lambda}_{\text{ss}} \mathfrak{R}_{\text{vv}}[n]) + J_{\min}] \end{aligned} \quad (3.50)$$

em que

$$\mathbf{\Lambda}_{\text{ss}} = \text{diag}(\lambda_{s_1}, \lambda_{s_2}, \dots, \lambda_{s_{N_w}}) \quad (3.51)$$

é a matriz diagonal contendo os autovalores de  $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e$ . Essa matriz tem propriedades particulares devido à pré e pós-multiplicação pela matriz de projeção estendida  $\mathbf{P}_e$ . No apêndice H, demonstra-se que  $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e$  tem exatamente  $N_C$  autovalores nulos. Esses autovalores correspondem à par-

cela factível da solução, associada a  $w_f$ , que permanece inalterada durante a adaptação e, portanto, não afeta a convergência. Análises em que a matriz de autocorrelação do sinal de entrada é singular são relativamente incomuns na literatura. Em Eweda (2005) o comportamento do LMS e do algoritmo do sinal (*sign algorithm*) quando submetidos a sinais de entrada não-persistentes.

Para simplificar a análise, assume-se que os autovalores de  $P_e R_{ss} P_e$  estão posicionados em um vetor

$$\tilde{\lambda}_{ss} = [\lambda_{ss}^\top \quad \mathbf{0}_{1 \times N_C}]^\top \quad (3.52)$$

em que  $\lambda_{ss} = [\lambda_{s_1}, \dots, \lambda_{s_{N_w - N_C}}]$  contém os autovalores não-nulos associados ao subespaço ortogonal a  $C_e$ .

Como  $\mathfrak{R}_{vv}[n]$  é semi-definida positiva, todos seus menores principais (*principal minors*) são não-negativos. Portanto,  $[\mathfrak{R}_{vv}[n]]_{i,j}^2 \leq [\mathfrak{R}_{vv}[n]]_{i,i} [\mathfrak{R}_{vv}[n]]_{j,j}$  e  $[\mathfrak{R}_{vv}[n]]_{i,i} \geq 0$  (PRUSSING, 1986). Logo, a convergência da Equação (3.50) pode ser caracterizada por meio do comportamento de seus elementos na diagonal principal exclusivamente. Seja

$$\tilde{\rho}_{vv}[n] = [[\mathfrak{R}_{vv}[n]]_{1,1}, [\mathfrak{R}_{vv}[n]]_{2,2}, \dots, [\mathfrak{R}_{vv}[n]]_{N_w, N_w}]^\top \quad (3.53)$$

o vetor contendo os elementos da diagonal principal de  $\mathfrak{R}_{vv}[n]$ . Os elementos

da diagonal principal de  $\mathfrak{R}_{\text{vv}}[n]$ , da Equação (3.50), podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
 [\tilde{\rho}_{\text{vv}}[n+1]]_i &= [\tilde{\rho}_{\text{vv}}[n]]_i - 2\mu\lambda_{s_i}[\tilde{\rho}_{\text{vv}}[n]]_i \\
 &\quad + 2\mu^2\lambda_{s_i}^2[\tilde{\rho}_{\text{vv}}[n]]_i + \mu^2\lambda_{s_i}\tilde{\lambda}_{\text{ss}}^\top\tilde{\rho}_{\text{vv}}[n] + \mu^2J_{\min}\lambda_{s_i} \\
 &= [(1 - \mu\lambda_{s_i})^2 + \mu^2\lambda_{s_i}^2][\tilde{\rho}_{\text{vv}}[n]]_i \\
 &\quad + \mu^2\lambda_{s_i}\tilde{\lambda}_{\text{ss}}^\top\tilde{\rho}_{\text{vv}}[n] + \mu^2J_{\min}\lambda_{s_i}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

em que

$$\text{tr}(\mathbf{A}_{\text{ss}}\mathfrak{R}_{\text{vv}}[n]) = \sum_{i=1}^{N_{\text{w}}} \lambda_{s_i}[\mathfrak{R}_{\text{vv}}[n]]_{i,i} = \sum_{i=1}^{N_{\text{w}}-N_{\text{C}}} \lambda_{s_i}[\mathfrak{R}_{\text{vv}}[n]]_{i,i} = \tilde{\lambda}_{\text{ss}}^\top\tilde{\rho}_{\text{vv}}[n].$$

Da Equação (3.52), observa-se que, devido a estarem associadas a autovalores nulos,  $[\tilde{\rho}_{\text{vv}}[n]]_i$  para  $i > N_{\text{w}} - N_{\text{C}}$  seguem

$$[\tilde{\rho}_{\text{vv}}[n+1]]_i = [\tilde{\rho}_{\text{vv}}[n]]_i = 0, \quad i > N_{\text{w}} - N_{\text{C}}$$

e não são alteradas durante a adaptação. Essa observação concorda com as propriedades de  $\mathbf{P}_e\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{P}_e$  estudadas no Apêndice H.

As outras componentes de  $[\tilde{\rho}_{\text{vv}}[n]]_i$ ,  $i = 1, \dots, N_{\text{w}} - N_{\text{C}}$ , estão agrupadas no vetor  $\rho_{\text{vv}}[n]$  que segue a recursão

$$\rho_{\text{vv}}[n+1] = \mathbf{\Phi}\rho_{\text{vv}}[n] + \mu^2J_{\min}\lambda_{\text{ss}} \tag{3.55}$$

em que

$$\mathbf{\Phi} = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{N_{\text{w}}-N_{\text{C}}}) + \mu^2\lambda_{\text{ss}}\lambda_{\text{ss}}^\top \tag{3.56}$$

e  $\rho_i = (1 - \mu\lambda_{s_i})^2 + \mu^2\lambda_{s_i}^2$ .

A matriz  $\mathbf{\Phi}$  é simétrica e definida positiva, pois para qualquer vetor  $\alpha$

não-nulo tem-se (KAILATH, 1980; CHEN, 1998; HORN; JOHNSON, 1990; BERNSTEIN, 2005)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^\top \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\alpha}^\top \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{N_w - N_C}) \boldsymbol{\alpha} + \mu^2 \boldsymbol{\alpha}^\top \boldsymbol{\lambda}_{ss} \boldsymbol{\lambda}_{ss}^\top \boldsymbol{\alpha} \\ &= \sum_{i=1}^{N_w - N_C} \left( (1 - \mu \lambda_{s_i})^2 + \mu^2 \lambda_{s_i}^2 \right) ([\boldsymbol{\alpha}]_i)^2 + \mu^2 (\boldsymbol{\lambda}_{ss}^\top \boldsymbol{\alpha})^2 > 0. \end{aligned}$$

A Equação (3.55) tem solução em forma fechada (KAILATH, 1980; CHEN, 1998)

$$\boldsymbol{\rho}_{vv}[n] = \boldsymbol{\Phi}^n \boldsymbol{\rho}_{vv}[0] + \mu^2 J_{\min} \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{\Phi}^j \boldsymbol{\lambda}_{ss}. \quad (3.57)$$

Utilizando a Equação (3.57) é possível estudar as condições de estabilidade, o comportamento em regime-permanente e a velocidade de convergência.

### 3.6 Condições de estabilidade

A recursão da Equação (3.55), é uma equação espaço-estado discreta em que cada estado é representado por uma componente de  $[\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{vv}[n]]_i$ ,  $i = 1, \dots, N_w - N_C$ . Essa equação é estável se e somente se os autovalores de  $\boldsymbol{\Phi}$  satisfazem a condição  $\lambda_{\Phi_i} < 1$ ,  $i = 1, \dots, N_w - N_C$ <sup>1</sup>.

Uma condição de estabilidade em função de  $\mu$  pode ser determinada utilizando o teorema dos discos de Gerschgorin (BRUALDI; MELLEN-DORF, 1994), que estabelece que  $\lambda_{\Phi_i}$  pertence ao disco no plano complexo com centro no  $i$ -ésimo elemento da diagonal principal de  $\boldsymbol{\Phi}$  com raio igual à soma dos valores absolutos dos elementos da  $i$ -ésima linha (ou coluna) fora

<sup>1</sup> Observa-se que todos os autovalores  $\lambda_{\Phi_i}$  são reais e positivos já que  $\boldsymbol{\Phi}$  é simétrica e definida positiva.

da diagonal. A prova desse teorema é apresentada no Apêndice I. Como os elementos de  $\Phi$  são números reais e positivos, o  $i$ -ésimo autovalor de  $\Phi$  é limitado por (HAYKIN, 1993)

$$\begin{aligned} \lambda_{\Phi_i} &< \rho_i + \mu^2 \lambda_{s_i} \sum_{j=1}^{N_w - N_C} \lambda_{s_j} \\ &< 1 - 2\mu \lambda_{s_i} + 2\mu^2 \lambda_{s_i}^2 + \mu^2 \lambda_{s_i} \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e). \end{aligned} \quad (3.58)$$

para todo  $i$ . Para garantir a estabilidade da Equação (3.55), basta restringir o limite superior para  $\lambda_{\Phi_i}$  da Equação (3.58) para o círculo de raio unitário no plano complexo. Sabendo que  $\Phi$  é simétrica e definida positiva, seus autovalores são reais e positivos. Portanto pode-se derivar a condição de estabilidade suficiente

$$\lambda_{\Phi_i} < 1 - 2\mu \lambda_{s_i} + 2\mu^2 \lambda_{s_i}^2 + \mu^2 \lambda_{s_i} \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e) < 1 \quad (3.59)$$

para  $k = 1, \dots, N_w - N_C$  ou, de maneira equivalente

$$-2\mu \lambda_{s_i} + 2\mu^2 \lambda_{s_i}^2 + \mu^2 \lambda_{s_i} \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e) < 0$$

que implica que  $\mu > 0$  e

$$\mu < \frac{2}{2 \max\{\lambda_{ss}\} + \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e)}. \quad (3.60)$$

Esse limite superior para o tamanho do passo foi inicialmente encontrado em Ivandich e Cantoni (1993) sob hipótese de sinais de banda estreita. Esse resultado foi generalizado para o BF de banda larga em Maruo, Bermudez e Resende (2014a). Na prática, uma estimativa precisa dos autovalores da

matriz  $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e$  não é conhecida *a priori* e o limite superior descrito na Equação (3.60) não tem utilidade na maioria dos projetos. Contudo, usando a desigualdade

$$\max\{\lambda_{ss}\} \leq \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e)$$

é possível determinar um limite superior mais conservador (HOROWITZ; SENNE, 1981; FEUER; WEINSTEIN, 1985)

$$\mu < \frac{2}{3\text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e)} = \frac{2}{3\text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss})}. \quad (3.61)$$

Utilizando a propriedade (BERNSTEIN, 2005, p. 529)

$$\text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss}) \leq \sigma_{\max}(\mathbf{P}_e) \text{tr}(\mathbf{R}_{ss}) \quad (3.62)$$

em que  $\sigma_{\max}(\mathbf{P}_e)$  indica o maior valor singular de  $\mathbf{P}_e$ . Contudo,  $\mathbf{P}_e$  é simétrica e idempotente. Portanto, seus autovalores são idênticos aos seus valores singulares. Além disso, por ser uma matriz de projeção, os autovalores de  $\mathbf{P}_e$  são todos iguais a 0 ou 1. Portanto,  $\sigma_{\max}(\mathbf{P}_e) = 1$  e o limite superior da Equação (3.61) torna-se

$$\mu < \frac{2}{3\text{tr}(\mathbf{R}_{ss})}. \quad (3.63)$$

O limite da Equação (3.63) confirma o limite inicialmente proposto por Frost III (1972). Apesar de ser mais conservador que os limites encontrados utilizando as Equações (3.60) ou (3.61), o limite da Equação (3.63) tem a vantagem prática de ser função do traço de  $\mathbf{R}_{ss}$  que é, por definição, a potência média do sinal  $s[n]$  ou a soma das potências médias de  $\mathbf{u}_h[n]$  e

$\mathbf{x}_b[n]$ , que podem ser estimadas na prática.

### 3.7 Velocidade de convergência

Assumindo que a condição de estabilidade da seção anterior foi utilizada, pode-se utilizar a identidade (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{\Phi}^j &= (\mathbf{I}_{N_w - N_c} - \mathbf{\Phi}^n)(\mathbf{I}_{N_w - N_c} - \mathbf{\Phi})^{-1} \\ &= (\mathbf{I}_{N_w - N_c} - \mathbf{\Phi})^{-1} - \mathbf{\Phi}^n(\mathbf{I}_{N_w - N_c} - \mathbf{\Phi})^{-1} \end{aligned}$$

para escrever a Equação (3.57) na forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{vv}[n] &= \mathbf{\Phi}^n \left( \boldsymbol{\rho}_{vv}[0] - \mu^2 J_{\min}(\mathbf{I}_{N_w - N_c} - \mathbf{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\lambda}_{ss} \right) \\ &\quad + \mu^2 J_{\min}(\mathbf{I}_{N_w - N_c} - \mathbf{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\lambda}_{ss}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Conforme o algoritmo se adapta, quando  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{\Phi}^n = \mathbf{0}_{(N_w - N_c) \times (N_w - N_c)}$$

logo, a Equação (3.64) converge assintoticamente para

$$\boldsymbol{\rho}_{vv}[\infty] = \mu^2 J_{\min}(\mathbf{I}_{N_w - N_c} - \mathbf{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\lambda}_{ss}. \quad (3.65)$$

Utilizando a Equação(3.65), pode-se escrever a Equação (3.64) na forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{vv}[n] - \boldsymbol{\rho}_{vv}[\infty] &= \mathbf{\Phi}^n (\boldsymbol{\rho}_{vv}[0] - \boldsymbol{\rho}_{vv}[\infty]) \\ \mathbf{Q}_{\Phi}^{\top}(\boldsymbol{\rho}_{vv}[n] - \boldsymbol{\rho}_{vv}[\infty]) &= \mathbf{\Lambda}_{\Phi}^n \mathbf{Q}_{\Phi}^{\top}(\boldsymbol{\rho}_{vv}[0] - \boldsymbol{\rho}_{vv}[\infty]) \end{aligned} \quad (3.66)$$



em que  $\mathbf{\Phi} = \mathbf{Q}_\Phi \mathbf{\Lambda}_\Phi \mathbf{Q}_\Phi^\top$  é a decomposição ortogonal em autovalores de  $\mathbf{\Phi}$ . A Equação (3.66) mostra que a velocidade de convergência da Equação (3.29) é função dos autovalores de  $\mathbf{\Phi}$ , que por sua vez é função de  $\lambda_{ss}$  e  $\mu$ . Se a convergência ocorre lentamente, com um passo de adaptação baixo, então  $\mu\lambda_{s_i} \ll 1$  e a matriz  $\mathbf{\Phi}$  se torna aproximadamente diagonal. Supondo uma matriz  $\mathbf{\Phi}$  diagonal, a  $i$ -ésima linha da Equação (3.66) é, aproximadamente,

$$[\rho_{vv}[n] - \rho_{vv}[\infty]]_i \approx [1 - 2\mu\lambda_{s_i} + 3\mu^2\lambda_{s_i}^2]^n [(\rho_{vv}[0] - \rho_{vv}[\infty])]_i. \quad (3.67)$$

O tempo necessário para que a  $i$ -ésima componente da Equação (3.67) decair para  $e^{-1} [\rho_{vv}[0] - \rho_{vv}[\infty]]_i$  define a  $i$ -ésima constante de tempo da Equação (3.57) dada por

$$\tau_{\rho_i} = \frac{1}{\ln[1 - \mu\lambda_{s_i}(2 - 3\mu\lambda_{s_i})]}.$$

Supondo que a o passo de adaptação foi arbitrado satisfazendo a Equação (3.63), então  $2 - 3\mu\lambda_{s_i} < 2(1 - \frac{\lambda_{s_i}}{\text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e)}) < 2$ . Então, se  $2\mu\lambda_{s_i} \ll 1$ , tem-se

$$\tau_{\rho_i} \approx \frac{1}{\mu\lambda_{s_i}(2 - 3\mu\lambda_{s_i})}. \quad (3.68)$$

Quando o projetista escolhe passos de adaptação baixos,  $2 - 3\mu\lambda_{s_i} \approx 2$  e a constante de tempo torna-se aproximadamente  $1/(2\mu\lambda_{s_i})$ . Logo, supondo convergência lenta, os modos de convergência da MOP são aproximadamente duas vezes mais rápidos quando comparados com os modos de convergência da Equação (3.36) (FROST III, 1972).

### 3.8 Modelo da MOP a partir da Correlação do vetor de erro nos coeficientes

Utilizando a hipótese H4 e  $d[n]$  da Equação (3.17), pode-se escrever a MOP como

$$\begin{aligned}
 E\{d^2[n]\} &= E\{\mathbf{w}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{w}[n]\} \\
 &= E\{(\mathbf{v}[n] + \mathbf{w}_{\text{opt}})^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n](\mathbf{v}[n] + \mathbf{w}_{\text{opt}})\} \\
 &= E\{\mathbf{v}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{v}[n]\} + 2E\{\mathbf{v}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\}\mathbf{w}_{\text{opt}} + J_{\min} \\
 &= E\{\text{tr}(\mathbf{v}[n]\mathbf{v}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n])\} + 2E\{\mathbf{v}^\top[n]\}\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{w}_{\text{opt}} + J_{\min} \\
 &= J_{\min} + \text{tr}(E\{\mathbf{v}[n]\mathbf{v}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\}) + 2E\{\mathbf{v}^\top[n]\}\mathbf{P}_e\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{w}_{\text{opt}} \\
 &= J_{\min} + \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{vv}}[n]\mathbf{R}_{\text{ss}}) \\
 &= J_{\min} + \boldsymbol{\rho}_{\text{vv}}^\top[n]\boldsymbol{\lambda}_{\text{ss}}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

em que  $\mathbf{v}[n] = \mathbf{P}_e\mathbf{v}[n]$  da Equação (3.32) e  $\mathbf{P}_e\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{0}_{N_w \times 1}$  da Equação (3.34). Portanto a MOP em excesso é definida como

$$J_{\text{ex}}[n] = E\{d^2[n]\} - J_{\min} = \boldsymbol{\rho}_{\text{vv}}^\top[n]\boldsymbol{\lambda}_{\text{ss}}. \tag{3.70}$$

As Equações (3.69) e (3.70) mostram que o comportamento transiente da MOP não é influenciado pelos autovalores nulos de  $\mathbf{P}_e\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{P}_e$ . Ademais, como ambas as matrizes  $\mathbf{P}_e\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{P}_e$  e  $\mathbf{R}_{\text{vv}}[n]$  são semi-definidas positivas,  $J_{\text{ex}}[n] \geq 0$  ( $J_{\text{ex}}[n] = 0$  é possível somente se  $\mathbf{P}_e\mathbf{s}[n] = \mathbf{0}_{N_w \times 1}$  em todas as iterações), ou seja, a MOP em qualquer iteração é maior que  $J_{\min}$ .

### 3.9 Modelo da MOP em regime-permanente

Quando a condição de estabilidade na Equação (3.60) é satisfeita, o algoritmo converge assintoticamente portanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\rho}_{\text{vv}}[n+1] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\rho}_{\text{vv}}[n] = \tilde{\rho}_{\text{vv}}[\infty]$ . Utilizando a definição de  $J_{\text{ex}}[n]$  da Equação (3.70) e substituindo na Equação (3.54), quando  $n \rightarrow \infty$ , resulta em

$$\begin{aligned} [\tilde{\rho}_{\text{vv}}[\infty]]_i &= [(1 - \mu\lambda_{s_i})^2 + \mu^2\lambda_{s_i}^2][\tilde{\rho}_{\text{vv}}[\infty]]_i + \mu^2\lambda_{s_i}J_{\text{ex}}[\infty] + \mu^2J_{\text{min}}\lambda_{s_i} \\ &= (J_{\text{ex}}[\infty] + J_{\text{min}})\frac{\mu}{2 - 2\mu\lambda_{s_i}}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Utilizando a Equação (3.71) na Equação (3.70) quando  $n \rightarrow \infty$  resulta em

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}[\infty] &= \tilde{\lambda}_{\text{ss}}^\top \tilde{\rho}_{\text{vv}}[\infty] \\ &= (J_{\text{ex}}[\infty] + J_{\text{min}})\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_w - N_C} \frac{\mu\lambda_{s_i}}{1 - \mu\lambda_{s_i}} \\ &= J_{\text{min}} \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_w - N_C} \frac{\mu\lambda_{s_i}}{1 - \mu\lambda_{s_i}}}{1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_w - N_C} \frac{\mu\lambda_{s_i}}{1 - \mu\lambda_{s_i}}}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Supondo que  $\mu \max\{\lambda_{s_i}\} \ll 1$ ,  $i = 1, \dots, N_w - N_C$  então  $\frac{\mu\lambda_{s_i}}{1 - \mu\lambda_{s_i}} \approx \mu\lambda_{s_i}$  e a Equação (3.72) pode ser simplificada para

$$J_{\text{ex}}[\infty] \approx J_{\text{min}} \frac{\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e)}{1 - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e)}. \quad (3.73)$$

É fácil demonstrar que o valor da Equação (3.73) aumenta monotonicamente com  $\mu$

$$\frac{\partial J_{\text{ex}}[\infty]}{\partial \mu} = \frac{\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e)}{[1 - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e)]^2} \geq 0 \quad (3.74)$$

em que o denominador da Equação (3.74) é positivo para todo  $\mu$  e o numerador é não-negativo pois  $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e$  é semi-definida positiva. Além disso, dada a condição de estabilidade da Equação (3.61) e a propriedade da Equação (3.74) tem-se

$$J_{\text{ex}}[\infty] \leq J_{\min} \frac{\frac{1}{2} \mu \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e)}{1 - \frac{1}{2} \mu \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e)} \Bigg|_{\mu = \frac{2}{3 \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e)}} = \frac{J_{\min}}{2}$$

Comparando os resultados das constantes de tempo da Equação (3.68) e da MOP em excesso na Equação (3.73) observa-se que existe um compromisso entre a velocidade de convergência (recíproca ao tempo necessário para a adaptação de cada constante de tempo) e a qualidade da adaptação (MOP em regime-permanente) na escolha do passo de adaptação  $\mu$ . Ou seja, um decréscimo em  $\mu$  para obter um nível de cancelamento de eco mais alto (MOP mais baixa) na Equação (3.73) leva a um acréscimo nas constantes de tempo na Equação (3.68) que resulta em uma convergência mais lenta. Esse compromisso é uma característica fundamental de algoritmos da família LMS (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000). Assumindo ainda que  $\mu \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e) \ll 2$ , simplificando o denominador da Equação (3.73) ( $1 - \frac{1}{2} \mu \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e) \approx 1$ ) e utilizando a Equação (3.62) no numerador da Equação (3.73) obtém-se uma aproximação ainda mais simples

$$J_{\text{ex}}[\infty] \approx J_{\min} \frac{\mu}{2} \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e) < J_{\min} \frac{\mu}{2} \text{tr}(\mathbf{R}_{ss}). \quad (3.75)$$

Apesar de sua simplicidade, na qual  $J_{\text{ex}}[\infty]$  depende linearmente de  $\mu$ , essa aproximação é adequada quando  $\mu \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e) \ll 1$ , que é a condição mais

utilizada no projeto de sistemas práticos, quando a validade das hipóteses simplificadoras torna-se mais questionável (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 534).

### **3.10 Resumo**

Esse capítulo apresentou uma análise estatística para o comportamento do cancelador de eco auxiliado por um arranjo de microfones adaptado utilizando o algoritmo CLMS em um meio estacionário, considerando um sinal de entrada Gaussiano de média zero. Equações recursivas determinísticas foram desenvolvidas para o comportamento da potência média de saída do sistema. O modelo é válido para a predição do comportamento de um LCMV convencional adaptado utilizando o algoritmo CLMS.

No próximo Capítulo, a análise do comportamento de uma implementação alternativa do sistema da Figura 2.18 baseada no GSC é estudada resultando em conclusões sobre o comportamento de um sistema BF-AEC submetido a diferentes estágios da lógica de controle resultando na proposta de um algoritmo baseado na aproximação estocástica de um algoritmo Quase-Newton.

#### 4 ANÁLISE ESTATÍSTICA DO CANCELADOR DE ECO ACÚSTICO AUXILIADO POR UM ARRANJO DE MICROFONES NA FORMA GSC

A principal limitação no modelo derivado no capítulo anterior é a de ser aplicável apenas quando o AEC e o BF são adaptados com o mesmo passo de adaptação. Assim como no cancelamento de eco acústico convencional, soluções baseadas na otimização conjunta da estrutura BF-AEC demandam uma lógica de controle complexa para evitar a divergência durante períodos de *double-talk* (BERSHAD; TOURNERET, 2006; TOURNERET; BERSHAD; BERMUDEZ, 2009). Em geral, durante a presença de *double-talk*, a convergência do AEC é completamente interrompida. Mesmo na presença de *double-talk*, o conformador de feixes é capaz de funcionar sem maiores dificuldades na configuração de cancelamento de um sinal de referência (Reference Signal Based (RSB)) (ZHANG; LIU; LANGLEY, 2011) em que o sinal de referência é a saída do AEC. O estudo de estratégias para a adaptação de AECs durante esses períodos ainda é incipiente. Em um trabalho recente, Gunther (2012) propõe o uso de técnicas de separação cega de fontes baseado na independência estatística entre o sinal de *far-end* e o sinal de *near-end* para obter uma estimação dos sinais de eco nos microfones sem a presença da fala local. Apesar de promissora, essa técnica ainda carece de soluções computacionalmente eficientes. Analogamente, quando é detectada uma mudança na resposta das plantas LEM e o sistema não está em um período de *double-talk*, a adaptação do sistema pode ser acelerada (BERSHAD; TOURNERET, 2006). Portanto para tratar da con-

vergência durante diferentes configurações da lógica de controle, em que a Equação (3.30) é implementada com passos diferentes para as atualizações de  $\hat{h}[n]$  e  $b[n]$ , um modelo mais geral é necessário.

A análise desse capítulo estende a análise do capítulo anterior e de Maruo, Bermudez e Resende (2014a) para estudar o comportamento transiente da estrutura BF-AEC com o conformador de feixe na forma GSC. Além disso, a análise considera a adaptação utilizando uma matriz de passos simétrica e definida positiva (MIKHAEL et al., 1986; RUPP; CEZANNE, 2000; EVANS; XUE; LIU, 1993; HARRIS; CHABRIES; BISHOP, 1986; DALLINGER; RUPP, 2009).

As implementações na forma direta e GSC apresentam complexidade computacional semelhante quando o número de restrições do problema é baixo. Contudo, a forma GSC oferece maior flexibilidade de projeto devido à possibilidade da escolha da matriz de bloqueio. Boas escolhas tendem a buscar matrizes esparsas e com elementos restritos a  $\{-1, 0, 1\}$  para reduzir o número de multiplicações necessárias durante a multiplicação do vetor de sinal pela matriz de bloqueio (GRIFFITHS; JIM, 1982, p. 31). A forma GSC também permite implementações robustas em que matrizes de bloqueio adaptativas são utilizadas para evitar o cancelamento do sinal de interesse quando ocorrem pequenas variações na DOA (HOSHUYAMA; SUGIYAMA; HIRANO, 1999; HERBORDT; W., 2001; HERBORDT; KELLERMANN, 2002; HERBORDT; NAKAMURA; KELLERMANN, 2005; HERBORDT et al., 2007)

A adaptação com matrizes de passo já foi utilizada em problemas de

cancelamento de eco em Makino, Kaneda e Koizumi (1993). Segundo o modelo de respostas ao impulso de plantas LEM com decaimento exponencial descrito em Breining et al. (1999), a maior parte da potência de eco está relacionada aos coeficientes iniciais da resposta, após o atraso de propagação da componente com linha de visada. Assim, é possível acelerar a convergência do algoritmo utilizando passos de adaptação individuais para cada coeficiente com passos maiores no início da resposta ao impulso. Em Dallinger e Rupp (2009), é demonstrada a equivalência, na ausência de ruído, entre uma adaptação baseada no LMS com uma matriz de passos simétrica e definida positiva e o LMS clássico em um espaço vetorial transformado. No Apêndice J a equivalência é estendida para o caso geral, em que basta que o sinal desejado apresente potência finita.

#### 4.1 Forma GSC da Equação (3.20)

Analogamente ao LCMV convencional, soluções factíveis para a Equação (3.20) podem ser decompostas em uma forma GSC

$$\mathbf{w} = \mathbf{q}_e - \mathbf{B}_e \boldsymbol{\psi} \quad (4.1)$$

em que  $\mathbf{q}_e$  é uma solução factível qualquer, i.e.  $\mathbf{C}_e^\top \mathbf{q}_e = \mathbf{f}$ , e  $\mathbf{B}_e \boldsymbol{\psi}$  está no espaço ortogonal e complementar de  $\mathbf{C}_e$ . A matriz de bloqueio estendida  $\mathbf{B}_e$  é  $N_w \times (N_w - N_C)$ -dimensional com posto completo de colunas e ortogonal a  $\mathbf{C}_e$  da Equação (3.19), ou seja  $\mathbf{C}_e^\top \mathbf{B}_e = \mathbf{0}_{N_C \times N_w - N_C}$ , e  $\boldsymbol{\psi}^1$  é um vetor  $N_\psi$ -

---

<sup>1</sup> $\boldsymbol{\psi}$  é definido condicionado a  $\mathbf{q}_e$  e  $\mathbf{B}_e$  que pode ser ajustado sem restrições para minimizar a função custo (3.20a). Contudo por simplicidade de notação, esse condicionamento é omitido nesse trabalho. Assim  $\boldsymbol{\psi} | (\mathbf{B}_e, \mathbf{q}_e) = \boldsymbol{\psi}$



dimensional,  $N_\psi = N_w - N_C$ . Observa-se da Equação (4.1) que a restrição da Equação (3.20b) é satisfeita independente de  $\psi$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_e^\top \mathbf{w} &= \mathbf{C}_e^\top \mathbf{q}_e - \mathbf{C}_e^\top \mathbf{B}_e \psi \\ &= \mathbf{f} \end{aligned}$$

em que  $\mathbf{C}_e^\top \mathbf{q}_e = \mathbf{f}$  e  $\mathbf{C}_e^\top \mathbf{B}_e = \mathbf{0}_{N_C \times (N_\psi)}$ . Portanto, a Equação (3.20) pode ser escrita, utilizando a Equação (4.1), como o problema de minimização sem restrições

$$\psi_{\text{opt}} = \arg \min_{\psi} \mathbf{q}_e^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{q}_e - 2\psi^\top \mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{q}_e + \psi^\top \mathbf{R}_{\text{bloc}} \psi \quad (4.2)$$

em que

$$\mathbf{R}_{\text{bloc}} = \mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{B}_e \quad (4.3)$$

indica a matriz de autocorrelação do sinal de entrada estendido bloqueado por  $\mathbf{B}_e$  e, da Equação (4.1) tem-se  $\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{q}_e - \mathbf{B}_e \psi_{\text{opt}}$ . O gradiente da Equação (4.2) em relação a  $\psi$  é

$$\nabla_{\psi} \left( E \{ d^2[n] \} \right) = -2\mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{ss} (\mathbf{q}_e - \mathbf{B}_e \psi). \quad (4.4)$$

Igualando  $\nabla_{\psi} \left( E \{ d^2[n] \} \right)$  ao vetor nulo, a solução da equação resultante em relação a  $\psi$  resulta em (BUCKLEY, 1986)

$$\psi_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{\text{bloc}}^{-1} \mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{q}_e. \quad (4.5)$$

na qual a matriz Hessiana de (4.2) ( $\mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{B}_e$ ) é definida positiva para  $\mathbf{R}_{ss}$  definida positiva logo  $\boldsymbol{\psi}_{\text{opt}}$  é um ponto de mínimo (FLETCHER, 1987).

## 4.2 Solução adaptativa baseada no gradiente estocástico

A análise deste capítulo, contudo, trata da adaptação simultânea do AEC e do BF, considerando a adaptação em diferentes estados da lógica de controle necessária em sistemas reais de cancelamento de eco (BERSHAD; TOURNERET, 2006; TOURNERET; BERSHAD; BERMUDEZ, 2009). Considere a matriz de bloqueio estendida

$$\mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{N_{\text{AEC}}} & \mathbf{0}_{N_{\text{AEC}} \times (MN_{\text{BF}} - N_{\text{C}})} \\ \mathbf{0}_{MN_{\text{BF}} \times N_{\text{AEC}}} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

em que  $\mathbf{B}$  é a matriz de bloqueio convencional ortogonal a  $\mathbf{C}$ . Considere também o particionamento do vetor  $\boldsymbol{\psi}[n]$  como

$$\boldsymbol{\psi}[n] = \left[ \boldsymbol{\psi}_{\hat{h}}^\top[n] \quad \boldsymbol{\psi}_b^\top[n] \right]^\top \quad (4.7)$$

em que  $[\boldsymbol{\psi}_{\hat{h}}[n]]_i = [\boldsymbol{\psi}[n]]_i$ ,  $i = 1, \dots, N_{\text{AEC}}$  e  $[\boldsymbol{\psi}_b[n]]_i = [\boldsymbol{\psi}[n]]_{i+N_{\text{AEC}}}$ ,  $i = 1, \dots, MN_{\text{BF}} - N_{\text{C}}$ . Utilizando o vetor quiescente  $\mathbf{q}_e = [\mathbf{0}_{1 \times N_{\text{AEC}}} \quad \mathbf{b}_q^\top]^\top$  em que  $\mathbf{C}^\top \mathbf{b}_q = \mathbf{f}$  tem-se das Equações (4.1) e (4.6)

$$\mathbf{w}[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_{\text{AEC}} \times 1} \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{\hat{h}}[n] \\ -\mathbf{B}\boldsymbol{\psi}_b[n] \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Substituindo a Equação (3.16) no lado esquerdo da Equação (4.8) conclui-se que

$$\psi_{\hat{\mathbf{h}}}[n] = \hat{\mathbf{h}}[n] \quad (4.9)$$

e

$$\mathbf{b}[n] = \mathbf{b}_q - \mathbf{B}\psi_b[n]. \quad (4.10)$$

A partir da Equação (4.1) pode-se escrever a Equação (4.4) na forma

$$\nabla_{\psi}(E\{d^2[n]\}) = -2\mathbf{B}_c^{\top} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w} = -2\mathbf{B}_c^{\top} E\{\mathbf{s}[n]d[n]\} \quad (4.11)$$

na qual a Equação (3.17) foi utilizada para obter a última expressão à direita. Dado o particionamento da Equação (4.7) e utilizando a Equação (4.9) tem-se

$$\nabla_{\psi}(E\{d^2[n]\}) = \left[ \nabla_{\hat{\mathbf{h}}}^{\top}(E\{d^2[n]\}) \quad \nabla_{\psi_b}^{\top}(E\{d^2[n]\}) \right]^{\top} \quad (4.12)$$

em que, das Equações (3.15), (4.6) e (4.11) tem-se

$$\nabla_{\hat{\mathbf{h}}}(E\{d^2[n]\}) = 2E\{\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{h}}}[n]d[n]\} \quad (4.13a)$$

$$\nabla_{\psi_b}(E\{d^2[n]\}) = -2\mathbf{B}^{\top} E\{\mathbf{x}_b[n]d[n]\}. \quad (4.13b)$$

Aplicando o método do gradiente (HAYKIN, 1993; SAYED, 2008) para a obtenção de equações recursivas para  $\hat{\mathbf{h}}[n]$  e  $\psi_b[n]$ , e utilizando as Equações (4.13a) e (4.13b), resulta em

$$\hat{\mathbf{h}}[n+1] = \hat{\mathbf{h}}[n] - \mu_{\text{AEC}} E\{\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{h}}}[n]d[n]\} \quad (4.14a)$$

$$\psi_b[n+1] = \psi_b[n] + \mu_{\text{BF}} \mathbf{B}^{\top} E\{\mathbf{x}_b[n]d[n]\} \quad (4.14b)$$

em que  $\mu_{\text{AEC}}$  indica o passo de adaptação do cancelador de eco acústico e  $\mu_{\text{BF}}$  indica o passo de adaptação do conformador de feixes. É importante salientar que a Equação (4.14), exceto quando  $\mu_{\text{AEC}} = \mu_{\text{BF}}$ , não representa o algoritmo do gradiente para  $\psi[n]$ . Portanto, o comportamento da Equação (4.14), mesmo quando  $\mathbf{B}_e^\top \mathbf{B}_e = \mathbf{I}$ , não pode ser descrito pela análise do Capítulo 3 utilizando a equivalência do Apêndice D. Contudo, esse novo grau de flexibilidade é exatamente o que permite a análise do sistema BF-AEC com o conformador de feixe na forma GSC em diferentes estados da lógica de controle, que em geral age alterando os valores do par  $(\mu_{\text{AEC}}, \mu_{\text{BF}})$ .

Finalmente, utilizando a aproximação estocástica do algoritmo do gradiente, as Equações (4.14a) e (4.14b) são aproximadas por

$$\hat{\mathbf{h}}[n+1] \approx \hat{\mathbf{h}}[n] - \mu_{\text{AEC}} \mathbf{u}_{\hat{h}}[n]d[n] \quad (4.15a)$$

$$\psi_b[n+1] \approx \psi_b[n] + \mu_{\text{BF}} \mathbf{B}^\top \mathbf{x}_b[n]d[n] \quad (4.15b)$$

em que  $E\{\mathbf{u}_{\hat{h}}[n]d[n]\} \approx \mathbf{u}_{\hat{h}}[n]d[n]$  e  $E\{\mathbf{x}_b[n]d[n]\} \approx \mathbf{x}_b[n]d[n]$ . Essa implementação exige aproximadamente o mesmo número de operações por iteração que a implementação separada de um AEC baseado no LMS e de um BF implementado na forma GSC com adaptação pelo algoritmo LMS. A memória utilizada é também aproximadamente a mesma, exigindo apenas uma alocação a mais para o passo de adaptação adicional.

### 4.2.1 Modelo para a análise

Definindo a matriz de passos

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mu_{\text{AEC}} \mathbf{I}_{N_{\text{AEC}}} & \mathbf{0}_{N_{\text{AEC}} \times (MN_{\text{BF}} - N_{\text{C}})} \\ \mathbf{0}_{(MN_{\text{BF}} - N_{\text{C}}) \times N_{\text{AEC}}} & \mu_{\text{BF}} \mathbf{I}_{MN_{\text{BF}} - N_{\text{C}}} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

as Equações (4.15a) e (4.15b) podem ser escritas na forma de uma única equação de atualização equivalente

$$\psi[n+1] = \psi[n] + \mathcal{M} \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] d[n]. \quad (4.17)$$

A Equação (4.17) é algebricamente equivalente à Equação (4.15). Contudo, ela simplifica o tratamento matemático necessário à análise do algoritmo que se torna uma adaptação com uma matriz de passos de adaptação estudada previamente em Mikhael et al. (1986), Rupp e Cezanne (2000), Evans, Xue e Liu (1993), Harris, Chabries e Bishop (1986), Dallinger e Rupp (2009).

É importante evidenciar que, apesar das considerações feitas para a obtenção da Equação (4.15), neste capítulo a análise é feita para uma forma mais geral da Equação (4.17), na qual é necessário apenas que  $\mathcal{M}$  seja uma matriz simétrica definida positiva,  $\mathbf{B}_e$  uma matriz de posto completo de colunas e que  $\mathbf{C}_e^\top \mathbf{B}_e = \mathbf{0}_{N_{\text{C}} \times N_{\psi}}$ .

### 4.2.2 Vetor de erro nos coeficientes

A partir do vetor de erro nos coeficientes na forma direta da Equação (3.31) e da Equação (4.1) pode-se escrever o vetor de erro nos

coeficientes como

$$\mathbf{v}[n] = \mathbf{q}_e - \mathbf{B}_e \boldsymbol{\psi}[n] - (\mathbf{q}_e - \mathbf{B}_e \boldsymbol{\psi}_{\text{opt}}) = -\mathbf{B}_e \boldsymbol{\vartheta}[n] \quad (4.18)$$

em que  $\boldsymbol{\vartheta}[n] = \boldsymbol{\psi}[n] - \boldsymbol{\psi}_{\text{opt}}$  indica o vetor de erro nos coeficientes do filtro sem restrições<sup>2</sup> condicionado a  $\mathbf{B}_e$  e  $\mathbf{q}_e$ . Da Equação (4.18), observa-se que  $\mathbf{v}[n]$  pertence à imagem de  $\mathbf{B}_e$ . Logo,  $\mathbf{v}[n]$  pode ser determinado por meio de  $\boldsymbol{\vartheta}[n]$  condicionado a  $\mathbf{B}_e$ . Nessa análise, o comportamento do sistema é descrito pelas estatísticas de  $\boldsymbol{\vartheta}[n]$ .

Subtraindo  $\boldsymbol{\psi}_{\text{opt}}$  de ambos os lados da Equação (4.17), utilizando a Equação (3.17) com  $\mathbf{w}[n] = \mathbf{v}[n] + \mathbf{w}_{\text{opt}}$  e as Equações (4.1) e (4.18) obtém-se uma equação recursiva para  $\boldsymbol{\vartheta}[n]$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\vartheta}[n+1] = & (\mathbf{I}_{N_\psi} - \mathcal{M} \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e) \boldsymbol{\vartheta}[n] \\ & + \mathcal{M} \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{w}_{\text{opt}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

### 4.3 Análise estatística

Nesta seção, é feita a análise estatística do comportamento do cancelador de eco acústico auxiliado pelo arranjo de microfones adaptado utilizando a Equação (4.17) que é uma forma mais geral da Equação (4.15). Quando necessário, os resultados da análise são particularizados para facilitar o uso do modelo no projeto do cancelador de eco acústico auxiliado por um arranjo de microfones implementado na forma GSC com passos de adaptação distintos. O modelo prevê o comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes,

<sup>2</sup>Assim como  $\boldsymbol{\psi}$ ,  $\boldsymbol{\vartheta}[n]$  é definido condicionado a  $\mathbf{q}_e$  e  $\mathbf{B}_e$ . Contudo por simplicidade de notação, esse condicionamento é omitido nesse trabalho. Assim  $\boldsymbol{\vartheta} | (\mathbf{B}_e, \mathbf{q}_e) = \boldsymbol{\vartheta}$

a convergência da correlação do vetor de erro nos coeficientes e a potência média de saída. O modelo é derivado a partir de estatísticas dos coeficientes de  $\psi[n]$  para sinais de entrada reais e estacionários e supondo plantas LEM fixas.

### 4.3.1 Considerações sobre as hipóteses simplificadoras

A análise desse capítulo é feita sob o mesmo conjunto de hipóteses simplificadoras utilizadas no Capítulo 3. Para esse fim, algumas considerações devem ser feitas.

#### Hipótese H4

Da hipótese H4, tem-se (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p. 245)

$$p(\beta(\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]), \alpha(\mathbf{w}[n])) \approx p(\beta(\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]))p(\alpha(\mathbf{w}[n])) \quad (4.20)$$

em que  $p(a, b)$  indica a função densidade de probabilidade conjunta de  $a$  e  $b$ ,  $\beta(\mathbf{A})$  e  $\alpha(\mathbf{a})$  indicam funções de uma matriz e vetor respectivamente. Sejam  $\beta(\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]) = \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e$  e  $\alpha(\mathbf{v}[n]) = -\mathbf{B}_e^\top (\mathbf{w}[n] - \mathbf{w}_{\text{opt}}) = \boldsymbol{\vartheta}[n]$  da Equação (4.18) então a hipótese H4 implica que

$$p(\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e, \boldsymbol{\vartheta}[n]) \approx p(\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e)p(\boldsymbol{\vartheta}[n]). \quad (4.21)$$

ou seja, a hipótese H4 é equivalente à hipótese de que a dependência estatística entre  $\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e$  e  $\boldsymbol{\vartheta}[n]$  pode ser desprezada. Portanto, essa forma equivalente da hipótese H4 é assumida durante a determinação do modelo do comportamento da forma GSC.

### Hipótese H3

A hipótese H3 implica que a matriz  $C_e$  também tem posto de colunas completo pois  $\text{rank}(C_e) = \text{rank}(C_e^\top) = \text{rank}([\mathbf{0}_{N_C \times N_{AEC}} \quad C_e^\top]) = \text{rank}(C_e^\top) = N_C$  que coincide com o número de colunas de  $C_e$ . Das equações (3.24) e (4.1), subtraindo  $w_f$  tem-se  $P_e w = q_e - w_f - B_e \psi$  em que  $q_e$  é uma solução factível portanto pode ser decomposta segundo a Equação (4.1) em  $q_e = w_f - B_e q_{e_{B_e}}$  na qual  $B_e q_{e_{B_e}}$  representa a projeção de  $q_e$  no espaço ortogonal e complementar ao espaço das colunas de  $C_e$ . Portanto, pode-se escrever

$$P_e w = -B_e(\psi + q_{e_{B_e}}), \quad (4.22)$$

em que o lado esquerdo da Equação (4.22) define um subespaço  $(N_w - N_C)$ -dimensional no espaço  $\mathbb{R}^{N_w}$ . Portanto, para que exista uma relação biunívoca entre as soluções na forma direta e na forma GSC, é necessário que  $\text{rank}(B_e) = N_\psi$ . Logo, durante a análise assume-se que  $B_e$  tem posto de colunas completo.

#### 4.3.2 Modelo do comportamento médio dos coeficientes

Calculando o valor esperado da Equação (4.19) utilizando a hipótese H4 o vetor médio de erro nos coeficientes é descrito por

$$E\{\vartheta[n+1]\} = (I_{N_\psi} - \mathcal{M}B_e^\top R_{ss} B_e) E\{\vartheta[n]\} + \mathcal{M}B_e^\top R_{ss} w_{opt}$$



em que o último termo pode ser simplificado utilizando a Equação (4.5) na Equação (4.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}_{\text{opt}} &= \mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{q}_e - \mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{R}_{\text{bloc}}^{-1} \mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{q}_e \\ &= \mathbf{0}_{N_\psi}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

com  $\mathbf{R}_{\text{bloc}}$  definido na Equação (4.3). Portanto, o modelo do comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes se reduz a

$$E\{\boldsymbol{\vartheta}[n+1]\} = (\mathbf{I}_{N_\psi} - \mathcal{M}\mathbf{R}_{\text{bloc}})E\{\boldsymbol{\vartheta}[n]\}. \quad (4.24)$$

A solução de (4.24) em função de estatísticas da inicialização do algoritmo é dada por (CHEN, 1998)

$$E\{\boldsymbol{\vartheta}[n]\} = (\mathbf{I}_{N_\psi} - \mathcal{M}\mathbf{R}_{\text{bloc}})^n E\{\boldsymbol{\vartheta}[0]\}. \quad (4.25)$$

Observa-se da Equação (4.24) que a Equação (4.17) converge assintoticamente para  $\psi_{\text{opt}}$  quando todos os autovalores de  $\mathbf{I}_{N_\psi} - \mathcal{M}\mathbf{R}_{\text{bloc}}$  estão contidos dentro do círculo de raio unitário no plano complexo. Nesse caso, a recursão da Equação (4.17) produz soluções assintoticamente não-polarizadas em média (HAYKIN, 1993; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000).

### 4.3.3 Modelo do comportamento da MOP

O comportamento transitório da MOP pode ser determinado calculando o valor esperado de  $d^2[n]$  utilizando a Equação (3.17) com  $\mathbf{w}[n] =$

$\mathbf{w}_{\text{opt}} + \mathbf{v}[n]$ , as Equações (4.18) e (4.23) e a hipótese H4 para obter

$$\begin{aligned}
 J[n] &= E\{d^2[n]\} \\
 &= E\{(\mathbf{w}_{\text{opt}} - \mathbf{B}_e \boldsymbol{\vartheta}[n])^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top[n] (\mathbf{w}_{\text{opt}} - \mathbf{B}_e \boldsymbol{\vartheta}[n])\} \\
 &= J_{\min} - E\{\boldsymbol{\vartheta}^\top[n]\} \mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}_{\text{opt}} - \mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{B}_e E\{\boldsymbol{\vartheta}[n]\} \\
 &\quad + E\{\boldsymbol{\vartheta}^\top[n] \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top[n] \mathbf{B}_e \boldsymbol{\vartheta}[n]\} \\
 &= J_{\min} + E\{\text{tr}(\boldsymbol{\vartheta}^\top[n] \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top[n] \mathbf{B}_e \boldsymbol{\vartheta}[n])\} \\
 &= J_{\min} + \text{tr}(E\{\boldsymbol{\vartheta}[n] \boldsymbol{\vartheta}^\top[n] \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top[n] \mathbf{B}_e\}) \\
 &= J_{\min} + \text{tr}(\mathbf{R}_{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}}[n] \mathbf{R}_{\text{bloc}})
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

em que  $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}}[n] = E\{\boldsymbol{\vartheta}[n] \boldsymbol{\vartheta}^\top[n]\}$  indica a matriz de autocorrelação do filtro sem restrições de dimensão  $N_\psi \times N_\psi$ , o traço de um escalar é igual ao próprio escalar,  $\text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B})$  e  $\text{tr}(E\{\mathbf{A}\}) = E\{\text{tr}(\mathbf{A})\}$ . Para completar o modelo da Equação (4.26), é necessário obter uma expressão para o comportamento da matriz  $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}}[n]$ .

#### 4.3.4 Modelo do comportamento da matriz de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes do filtro sem restrições

Para descrever o comportamento da MOP na Equação (4.26) é necessário um modelo para o comportamento de  $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}}[n]$ . Para esse fim, pós-

multiplicando a Equação (4.19) por sua transposta obtém-se

$$\begin{aligned}
\vartheta[n+1]\vartheta^\top[n+1] &= \vartheta[n]\vartheta^\top[n] - \mathbf{M}\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\vartheta[n]\vartheta^\top[n] \\
&\quad - \vartheta[n]\vartheta^\top[n]\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\mathbf{M} \\
&\quad + \mathbf{M}\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\vartheta[n]\vartheta^\top[n]\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\mathbf{M} \\
&\quad + \vartheta[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\mathbf{M} \\
&\quad + \mathbf{M}\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}\vartheta^\top[n] \\
&\quad - \mathbf{M}\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\vartheta[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\mathbf{M} \\
&\quad - \mathbf{M}\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}\vartheta^\top[n]\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\mathbf{M} \\
&\quad + \mathbf{M}\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}\mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\mathbf{M} \quad (4.27)
\end{aligned}$$

em que  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\top$ . Calculando o valor esperado da Equação (4.27) e utilizando a hipótese H4 chega-se a

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n+1] &= \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n] - \mathbf{M}\mathbf{R}_{\text{blloc}}\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n] - \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n]\mathbf{R}_{\text{blloc}}\mathbf{M} \\
&\quad + E\{\vartheta[n]\}\mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{B}_e\mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{w}_{\text{opt}}E\{\vartheta^\top[n]\} \\
&\quad - \mathbf{M}E\{\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\vartheta[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\}\mathbf{M} \\
&\quad - \mathbf{M}E\{\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}\vartheta^\top[n]\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\}\mathbf{M} \\
&\quad + \mathbf{M}E\{\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\vartheta[n]\vartheta^\top[n]\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\}\mathbf{M} \\
&\quad + \mathbf{M}E\{\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}\mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{B}_e\}\mathbf{M}. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

em que o quarto e quinto termos da Equação (4.28) são nulos de acordo com a Equação (4.23). Os cálculos do sexto, oitavo e nono termos de (4.28) podem ser feitos utilizando os procedimentos descrito nos Apêndices K, M e L res-

pectivamente. O sétimo termo é calculado a partir da transposição do sexto termo. Finalmente, substituindo as Equações (K.2), (L.1) e (M.4) na Equação (4.28) o modelo resultante para  $\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n]$  é

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n+1] = & \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n] - \mathcal{M}\mathbf{R}_{\text{bloc}}\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n] - \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n]\mathbf{R}_{\text{bloc}}\mathcal{M}^\top \\ & + [J_{\min} + \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{bloc}}\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n])]\mathcal{M}\mathbf{R}_{\text{bloc}}\mathcal{M}^\top \\ & + 2\mathcal{M}\mathbf{R}_{\text{bloc}}\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n]\mathbf{R}_{\text{bloc}}\mathcal{M}^\top. \end{aligned} \quad (4.29)$$

A Equação (4.29) completa o modelo da Equação (4.26).

#### 4.4 Análise de Convergência

A análise de convergência convencional da Equação (4.26), em função da Equação (4.29), consiste em projetar  $\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n]$  no espaço definido pelos autovetores de  $\mathbf{R}_{\text{bloc}}$  e estudar a convergência dos elementos da diagonal da versão projetada de  $\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n]$  (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000). Considerando a decomposição de  $\mathbf{R}_{\text{bloc}} = \mathbf{Q}_{\text{bloc}}\mathbf{\Lambda}_{\text{bloc}}\mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top$  em que  $\mathbf{\Lambda}_{\text{bloc}}$  e  $\mathbf{Q}_{\text{bloc}}$  indicam as matrizes de autovalores e autovetores normalizados de  $\mathbf{R}_{\text{bloc}}$  respectivamente, a Equação (4.26) pode ser escrita em função da decomposição de  $\mathbf{R}_{\text{bloc}}$  resultando em

$$\begin{aligned} J[n] &= J_{\min} + \text{tr}(\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n]\mathbf{Q}_{\text{bloc}}\mathbf{\Lambda}_{\text{bloc}}\mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top) \\ &= J_{\min} + \text{tr}(\mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n]\mathbf{Q}_{\text{bloc}}\mathbf{\Lambda}_{\text{bloc}}) \\ &= \sum_{j=1}^{N_\psi} \lambda_{\text{bloc}_j} [\mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n]\mathbf{Q}_{\text{bloc}}]_{j,j} \end{aligned} \quad (4.30)$$

em que  $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$  e  $\lambda_{\text{bloc}_j}$  indica o  $j$ -ésimo autovalor de  $\mathbf{R}_{\text{bloc}}$ . O modelo da MOP na Equação (4.30) requer a descrição dos elementos da diagonal de  $\mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n] \mathbf{Q}_{\text{bloc}}$ . Pré-multiplicando a Equação (4.29) por  $\mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top$  e pós-multiplicando por  $\mathbf{Q}_{\text{bloc}}$ , a recursão que descreve o comportamento de  $\mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n] \mathbf{Q}_{\text{bloc}}$  é

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n+1] \mathbf{Q}_{\text{bloc}} &= \mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n] \mathbf{Q}_{\text{bloc}} \\
&- \mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{M} \mathbf{Q}_{\text{bloc}} \mathbf{\Lambda}_{\text{bloc}} \mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n] \mathbf{Q}_{\text{bloc}} \\
&- \mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n] \mathbf{Q}_{\text{bloc}} \mathbf{\Lambda}_{\text{bloc}} \mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{M}^\top \mathbf{Q}_{\text{bloc}} \\
&+ [J_{\min} + \text{tr}(\mathbf{\Lambda}_{\text{bloc}} \mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n] \mathbf{Q}_{\text{bloc}})] \mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{M} \mathbf{Q}_{\text{bloc}} \mathbf{\Lambda}_{\text{bloc}} \mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{M}^\top \mathbf{Q}_{\text{bloc}} \\
&+ 2 \mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{M} \mathbf{Q}_{\text{bloc}} \mathbf{\Lambda}_{\text{bloc}} \mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n] \mathbf{Q}_{\text{bloc}} \mathbf{\Lambda}_{\text{bloc}} \mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{M}^\top \mathbf{Q}_{\text{bloc}}. \quad (4.31)
\end{aligned}$$

A presença de termos em função da matriz  $\mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{M} \mathbf{Q}_{\text{bloc}}$ , contudo, exige uma abordagem diferente. Exceto quando o produto entre  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{R}_{\text{bloc}}$  é comutativo ( $\mathbf{M} \mathbf{R}_{\text{bloc}} = \mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{M}$ ) a matriz  $\mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{M} \mathbf{Q}_{\text{bloc}}$  não é diagonal (BERNSTEIN, 2005, p. 392) tornando a análise dos elementos diagonais de  $\mathbf{Q}_{\text{bloc}}^\top \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n] \mathbf{Q}_{\text{bloc}}$  excessivamente complexa. A demonstração do teorema da diagonalização simultânea está descrita no apêndice N. Em particular para a atualização segundo a Equação (4.15) com  $\mu_{\text{AEC}} \neq \mu_{\text{BF}}$ , observa-se que, das Equações (3.15), (4.6) e (4.16)

$$\mathbf{M} \mathbf{R}_{\text{bloc}} = \begin{bmatrix} \mu_{\text{AEC}} \mathbf{R}_{u_{\hat{h}} u_{\hat{h}}} & \mu_{\text{AEC}} \mathbf{R}_{u_{\hat{h}} x_b} \mathbf{B} \\ \mu_{\text{BF}} (\mathbf{R}_{u_{\hat{h}} x_b} \mathbf{B})^\top & \mu_{\text{BF}} \mathbf{B}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

e

$$\mathbf{R}_{\text{blloc}} \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mu_{\text{AEC}} \mathbf{R}_{u_h u_h} & \mu_{\text{BF}} \mathbf{R}_{u_h x_b} \mathbf{B} \\ \mu_{\text{AEC}} (\mathbf{R}_{u_h x_b} \mathbf{B})^\top & \mu_{\text{BF}} \mathbf{B}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Portanto, a multiplicação de  $\mathbf{R}_{\text{blloc}}$  por  $\mathcal{M}$  não é comutativa mesmo para configurações simples de  $\mathcal{M}$  e  $\mathbf{B}_e$ . Nesse caso, a Equação (4.29) não é facilmente diagonalizável pela projeção nos autovetores de  $\mathbf{R}_{\text{blloc}}$  por resultar em uma projeção de  $\mathcal{M}$  no espaço dos autovalores de  $\mathbf{R}_{\text{blloc}}$  não-diagonal (BERNSTEIN, 2005, p. 392). Contudo, é possível diagonalizar simultaneamente  $\mathcal{M}$  e  $\mathbf{R}_{\text{blloc}}$  por meio de diagonalização contragradiente (BERNSTEIN, 2005, p. 465), (HORN; JOHNSON, 1990, p. 466). Inicialmente, como a matriz  $\mathcal{M}$  é simétrica e definida positiva ela tem uma fatoração de Cholesky  $\mathcal{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$  com  $\mathbf{L}$  não singular (HORN; JOHNSON, 1990, p. 407), (STRANG, 1988, p. 334), (MEYER; MEYER, 2001, p. 559), (GOLUB; LOAN, 2013, p. 163). Portanto, a convergência da Equação (4.29) pode ser estudada por meio das estatísticas de segunda ordem do vetor de erro nos coeficientes do filtro sem restrições transformado  $\boldsymbol{\xi}[n] = \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\vartheta}[n]$ , sua respectiva matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}[n] = E\{\boldsymbol{\xi}[n]\boldsymbol{\xi}^\top[n]\} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}}[n] \mathbf{L}^{-\top}$  e da matriz de autocorrelação do vetor de entrada bloqueado no domínio transformado

$$\mathbf{R}_{\text{mod}} = E\{\mathbf{L}^\top \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] (\mathbf{L}^\top \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n])^\top\} = \mathbf{L}^\top \mathbf{R}_{\text{blloc}} \mathbf{L}. \quad (4.33)$$

Logo, pré-multiplicando a Equação (4.29) por  $\mathbf{L}^{-1}$ , pós-multiplicando por  $\mathbf{L}^{-\top}$  e

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n]\mathbf{R}_{\text{bloc}}) &= \text{tr}(\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n](\mathbf{L}^{\top})^{-1}\mathbf{L}^{\top}\mathbf{R}_{\text{bloc}}\mathbf{L}\mathbf{L}^{-1}) \\ &= \text{tr}\left[(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n]\mathbf{L}^{-\top})(\mathbf{L}^{\top}\mathbf{R}_{\text{bloc}}\mathbf{L})\right] \\ &= \text{tr}(\mathbf{R}_{\xi\xi}[n]\mathbf{R}_{\text{mod}}) \end{aligned} \quad (4.34)$$

obtém-se uma recursão para  $\mathbf{R}_{\xi\xi}[n]$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\xi\xi}[n+1] &= \mathbf{R}_{\xi\xi}[n] - \mathbf{R}_{\text{mod}}\mathbf{R}_{\xi\xi}[n] - \mathbf{R}_{\xi\xi}[n]\mathbf{R}_{\text{mod}} \\ &\quad + \mathbf{R}_{\text{mod}}[J_{\min} + \text{tr}(\mathbf{R}_{\xi\xi}[n]\mathbf{R}_{\text{mod}})] \\ &\quad + 2\mathbf{R}_{\text{mod}}\mathbf{R}_{\xi\xi}[n]\mathbf{R}_{\text{mod}} \end{aligned} \quad (4.35)$$

em que  $\mathbf{R}_{\text{mod}}$  é uma matriz simétrica e definida positiva. Assim,  $\mathbf{R}_{\text{mod}}$  é diagonalizável por meio de  $\mathbf{R}_{\text{mod}} = \mathbf{Q}_{\text{mod}}\mathbf{\Lambda}_{\text{mod}}\mathbf{Q}_{\text{mod}}^{\top}$  em que  $\mathbf{Q}_{\text{mod}}^{\top}\mathbf{Q}_{\text{mod}} = \mathbf{I}_{N_{\psi}}$  e

$$\mathbf{\Lambda}_{\text{mod}} = \text{diag}(\lambda_{\text{mod}_1}, \lambda_{\text{mod}_2}, \dots, \lambda_{\text{mod}_{N_{\psi}}}) \quad (4.36)$$

em que  $\lambda_{\text{mod}_i}$  indica o  $i$ -ésimo autovalor de  $\mathbf{R}_{\text{mod}}$ . A pré-multiplicação da Equação (4.35) por  $\mathbf{Q}_{\text{mod}}^{\top}$  e pós-multiplicação por  $\mathbf{Q}_{\text{mod}}$  resulta em

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\xi\xi}[n+1] &= \mathfrak{R}_{\xi\xi}[n] - \mathbf{\Lambda}_{\text{mod}}\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n] - \mathfrak{R}_{\xi\xi}[n]\mathbf{\Lambda}_{\text{mod}} + 2\mathbf{\Lambda}_{\text{mod}}\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n]\mathbf{\Lambda}_{\text{mod}} \\ &\quad + \mathbf{\Lambda}_{\text{mod}}(J_{\min} + \text{tr}(\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n]\mathbf{\Lambda}_{\text{mod}})) \end{aligned} \quad (4.37)$$

em que  $\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n] = \mathbf{Q}_{\text{mod}}^{\top}\mathbf{R}_{\xi\xi}[n]\mathbf{Q}_{\text{mod}}$ .

É fácil mostrar que  $\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n]$  é a matriz de autocorrelação do vetor

$$\mathbf{Q}_{\text{mod}}^\top \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\vartheta}[n]$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\xi\xi}[n] &= \mathbf{Q}_{\text{mod}}^\top \mathbf{L}^{-1} E\{\boldsymbol{\vartheta}[n] \boldsymbol{\vartheta}^\top[n]\} \mathbf{L}^{-\top} \mathbf{Q}_{\text{mod}} \\ &= E\left\{ \left[ \mathbf{Q}_{\text{mod}}^\top \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\vartheta}[n] \right] \left[ \mathbf{Q}_{\text{mod}}^\top \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\vartheta}[n] \right]^\top \right\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

portanto  $\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n]$  é semi-definida positiva. Logo  $[\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n]]_{i,j}^2 \leq [\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n]]_{i,i} [\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n]]_{j,j}$ ,  $[\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n]]_{i,i} \geq 0$  (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p. 251), (PRUSSING, 1986) e a convergência da Equação (4.37) é garantida pela convergência de seus elementos na diagonal principal (HAYKIN, 1993; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000). Portanto, o estudo da convergência da Equação (4.37) pode ser feito restrito aos elementos da diagonal principal de  $\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n]$ . Sejam  $[\boldsymbol{\rho}_\xi[n]]_i = [\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n]]_{i,i}$ ,  $i = 1, \dots, N_\psi$  os elementos do vetor  $\boldsymbol{\rho}_\xi[n]$  contendo os elementos da diagonal principal de  $\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n]$  e  $\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}} = [\lambda_{\text{mod}_1} \quad \lambda_{\text{mod}_2} \quad \dots \quad \lambda_{\text{mod}_{N_\psi}}]^\top$  o vetor de autovalores de  $\mathbf{R}_{\text{mod}}$ . Então, os elementos da diagonal da Equação (4.37) podem ser escritos como

$$[\boldsymbol{\rho}_\xi[n+1]]_i = \left[ (1 - \lambda_{\text{mod}_i})^2 + \lambda_{\text{mod}_i}^2 \right] [\boldsymbol{\rho}_\xi[n]]_i + \lambda_i \boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^\top \boldsymbol{\rho}_\xi[n] + \lambda_i J_{\text{min}}. \quad (4.39)$$

Portanto, notando que  $\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^\top \boldsymbol{\rho}_\xi[n] = \text{tr}(\boldsymbol{\Lambda}_{\text{mod}} \mathfrak{R}_{\xi\xi}[n])$  e definindo

$$\boldsymbol{\Phi}_{\text{mod}} = \text{diag}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{N_\psi}) + \boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}} \boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^\top \quad (4.40)$$

em que  $\zeta_k = (1 - \lambda_{\text{mod}_k})^2 + \lambda_{\text{mod}_k}^2$ , tem-se que

$$\boldsymbol{\rho}_\xi[n+1] = \boldsymbol{\Phi}_{\text{mod}} \boldsymbol{\rho}_\xi[n] + J_{\text{min}} \boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}} \quad (4.41)$$

Observa-se que da Equação (4.40) a matriz  $\boldsymbol{\Phi}_{\text{mod}}$  é simétrica.  $\boldsymbol{\Phi}_{\text{mod}}$



também é definida positiva pois para qualquer vetor  $N_\psi$ -dimensional não-nulo  $\alpha$  tem-se

$$\begin{aligned} \alpha^\top \Phi_{\text{mod}} \alpha &= \alpha^\top \text{diag}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{N_\psi}) \alpha + \alpha^\top \lambda_{\text{mod}} \lambda_{\text{mod}}^\top \alpha \\ &= \sum_{k=1}^{N_\psi} \left( (1 - \lambda_{\text{mod}_k})^2 + \lambda_{\text{mod}_k}^2 \right) ([\alpha]_k)^2 + (\lambda_{\text{mod}}^\top \alpha)^2 > 0. \end{aligned}$$

A solução da Equação (4.41) é (KAILATH, 1980)

$$\rho_\xi[n] = \Phi_{\text{mod}}^n \rho_\xi[0] + J_{\text{min}} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_{\text{mod}}^j \lambda_{\text{mod}}. \quad (4.42)$$

Utilizando a Equação (4.42), é possível determinar as condições de estabilidade e o comportamento em regime-permanente da Equação (4.17).

#### 4.4.1 Condições de Estabilidade

##### Condições de estabilidade do vetor de erro médio nos coeficientes

Pré-multiplicando a Equação (4.24) inicialmente por  $L^{-1}$  e em seguida por  $Q_{\text{mod}}^\top$ , o comportamento do vetor de erro nos coeficientes do filtro sem restrições modificado é descrito por

$$\begin{aligned} E\{\xi[n+1]\} &= (\mathbf{I}_{N_\psi} - \mathbf{R}_{\text{mod}}) E\{\xi[n]\} \\ Q_{\text{mod}}^\top E\{\xi[n+1]\} &= (\mathbf{I}_{N_\psi} - \Lambda_{\text{mod}}) Q_{\text{mod}}^\top E\{\xi[n]\}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Como a matriz  $\mathbf{R}_{\text{mod}}$  é simétrica e definida positiva seus autovalores são todos reais e maiores que zero. Portanto, a Equação (4.43) converge assintoticamente para  $\mathbf{0}_{N_\psi \times 1}$  se os autovalores de  $\mathbf{I}_{N_\psi} - \mathbf{R}_{\text{mod}}$  estiverem dentro do círculo de raio unitário (HAYKIN, 1993; MANOLAKIS; INGLE; KOGON,

2000; SAYED, 2008). Logo, a convergência assintótica, em média, do vetor de coeficientes é garantida se

$$-1 < 1 - \lambda_{\text{mod}_k} < 1$$

ou

$$0 < \lambda_{\text{mod}_k} < 2.$$

Devido à dificuldade de estimação dos autovalores individuais de  $\mathbf{R}_{\text{mod}}$  em tempo real (MESTRE, 2008), uma condição suficiente pode ser escrita na forma (HAYKIN, 1993; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000)

$$\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{mod}}) = \text{tr}(\mathbf{L}^\top \mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{L}) = \text{tr}(\mathcal{M} \mathbf{R}_{\text{bloc}}) < 2. \quad (4.44)$$

### Condições de estabilidade para o momento estatístico de segunda ordem

Assumindo a convergência da Equação (4.42), a Equação (4.39) converge assintoticamente para

$$[\boldsymbol{\rho}_\xi[\infty]]_i = \left[ (1 - \lambda_{\text{mod}_i})^2 + \lambda_{\text{mod}_i}^2 \right] [\boldsymbol{\rho}_\xi[\infty]]_i + \lambda_i \boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^\top \boldsymbol{\rho}_\xi[\infty] + \lambda_i J_{\text{min}}.$$

cuja solução é dada por

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\rho}_\xi[\infty]]_i &= \frac{\lambda_{\text{mod}_i} (\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^\top \boldsymbol{\rho}_\xi[\infty] + J_{\text{min}})}{1 - (1 - 2\lambda_{\text{mod}_i} + 2\lambda_{\text{mod}_i}^2)} \\ &= \frac{\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^\top \boldsymbol{\rho}_\xi[\infty] + J_{\text{min}}}{2 - 2\lambda_{\text{mod}_i}}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

A utilização da Equação (4.45) para o cálculo de  $\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^\top \boldsymbol{\rho}_\xi[\infty] = \sum_{i=1}^{N_\psi} \lambda_{\text{mod}_i} [\boldsymbol{\rho}_\xi[\infty]]_i$  resulta em

$$\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^\top \boldsymbol{\rho}_\xi[\infty] = (\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^\top \boldsymbol{\rho}_\xi[\infty] + J_{\min}) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_\psi} \frac{\lambda_{\text{mod}_i}}{1 - \lambda_{\text{mod}_i}}. \quad (4.46)$$

A solução da Equação (4.46) em relação a  $\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^\top \boldsymbol{\rho}_\xi[\infty]$  é dada por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^\top \boldsymbol{\rho}_\xi[\infty] &= J_{\min} \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_\psi} \frac{\lambda_{\text{mod}_i}}{1 - \lambda_{\text{mod}_i}}}{1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_\psi} \frac{\lambda_{\text{mod}_i}}{1 - \lambda_{\text{mod}_i}}} \\ &= J_{\min} \frac{g(\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}})}{1 - g(\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}})} \end{aligned}$$

em que

$$g(\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_\psi} \frac{\lambda_{\text{mod}_i}}{1 - \lambda_{\text{mod}_i}}. \quad (4.47)$$

A substituição da Equação (4.47) na Equação (4.46) resulta em

$$g(\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}) = \frac{\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^\top \boldsymbol{\rho}_\xi[\infty]}{\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^\top \boldsymbol{\rho}_\xi[\infty] + J_{\min}}. \quad (4.48)$$

Considerando que  $J_{\min} > 0$ ,  $\lambda_{\text{mod}_i} > 0$  e  $[\boldsymbol{\rho}_\xi[\infty]]_i > 0$  para  $i = 1, \dots, N_\psi$  conclui-se a partir da Equação (4.48) que (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000; SOLO; KONG, 1995; NASCIMENTO, 1999; HOROWITZ; SENNE, 1981; FEUER; WEINSTEIN, 1985)

$$0 \leq g(\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_\psi} \frac{\lambda_{\text{mod}_i}}{1 - \lambda_{\text{mod}_i}} < 1. \quad (4.49)$$

Uma condição suficiente para garantir o limite de estabilidade descrito pela Equação (4.49) é  $0 < \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{mod}}) < \frac{2}{3}$  (HOROWITZ; SENNE, 1981;

FEUER; WEINSTEIN, 1985). Não obstante, esse mesmo limite para a estabilidade do momento estatístico de segunda ordem pode ser encontrado por meio do Teorema dos discos de Gershgorin.

### Condições de estabilidade para o momento estatístico de segunda ordem segundo o Teorema dos discos de Gershgorin

A combinação das Equações (4.42) e (4.26) na qual  $\text{tr}(\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n]\mathbf{R}_{\text{bloc}}) = \boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^{\top}\boldsymbol{\rho}_{\xi}[n]$  formam um sistema de equações espaço-estado

$$\boldsymbol{\rho}_{\xi}[n+1] = \mathbf{\Phi}_{\text{mod}}\boldsymbol{\rho}_{\xi}[n] + J_{\min}\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}$$

$$J[n] = J_{\min} + \boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^{\top}\boldsymbol{\rho}_{\xi}[n].$$

Existe uma extensa literatura no tratamento de equações nessa forma (CHEN, 1998; KAILATH, 1980; KAILATH; SAYED; HASSIBI, 2000). A estabilidade de sistemas descritos nessa forma é determinada exclusivamente pela localização dos autovalores da matriz  $\mathbf{\Phi}_{\text{mod}}$  indicados por  $\lambda_{\Phi_{\text{mod}_k}}$ ,  $k = 1, \dots, N_{\psi}$  (KAILATH, 1980). Contudo, mesmo na ausência do conhecimento dos autovalores individuais de  $\mathbf{\Phi}_{\text{mod}}$ , uma condição suficiente pode ser determinada a partir do teorema dos círculos de Gershgorin (BRUALDI; MELLENDORF, 1994). Dada a matriz  $\mathbf{\Phi}_{\text{mod}}$  da Equação (4.40) e sabendo que seus autovalores são reais e positivos, tem-se

$$\begin{aligned} \lambda_{\Phi_{\text{mod}_k}} &< \zeta_k + \lambda_{\text{mod}_k} \sum_{j=1}^{N_{\psi}} \lambda_{\text{mod}_j} \\ &< 1 - 2\lambda_{\text{mod}_k} + 2\lambda_{\text{mod}_k}^2 + \lambda_{\text{mod}_k} \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{mod}}), \quad \forall k. \end{aligned} \quad (4.50)$$

A estabilidade da Equação (4.42) é garantida se  $\lambda_{\Phi_{\text{mod}_k}} < 1$   $k = 1, \dots, N_\psi$ . Portanto, é suficiente restringir o limite superior da Equação (4.50) a valores menores que 1. Rearranjando os termos, tem-se

$$-2\lambda_{\text{mod}_k} + 2\lambda_{\text{mod}_k}^2 + \lambda_{\text{mod}_k} \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{mod}}) < 0, \quad \forall k \quad (4.51)$$

que implica que  $\lambda_{\text{mod}_k} \neq 0$  e

$$2 \max\{\lambda_{\text{mod}_k}\} + \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{mod}}) < 2. \quad (4.52)$$

Durante o projeto do algoritmo, uma estimativa confiável dos autovalores de  $\mathbf{R}_{\text{mod}}$  geralmente não está disponível *a priori*. Logo não é possível utilizar a Equação (4.52) para derivar limites de estabilidade. Contudo, é possível utilizar a desigualdade

$$\max\{\lambda_{\text{mod}_k}\} \leq \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{mod}})$$

para obter a seguinte condição suficiente para a estabilidade (HOROWITZ; SENNE, 1981; FEUER; WEINSTEIN, 1985):

$$\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{mod}}) = \sum_{k=1}^{N_\psi} \lambda_{\text{mod}_k} < \frac{2}{3}. \quad (4.53)$$

O limite de estabilidade da Equação (4.53) está contido no limite de estabilidade da Equação (4.44). Portanto, durante o projeto é suficiente satisfazer a Equação (4.53) para garantir a convergência assintótica da Equação (4.17)

### Condições de estabilidade para a adaptação com passos distintos

Da Equação (4.33) tem-se  $\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{mod}}) = \text{tr}(\mathbf{L}^\top \mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{L}) = \text{tr}(\mathcal{M} \mathbf{R}_{\text{bloc}})$  em que  $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A})$  e  $\mathcal{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ . O traço de  $\mathcal{M} \mathbf{R}_{\text{bloc}}$ , quando a adaptação ocorre segundo a Equação (4.15), pode ser calculado a partir da soma dos traços dos blocos diagonais da Equação (4.32), resultando em

$$\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{mod}}) = \mu_{\text{AEC}} \text{tr}(\mathbf{R}_{u_h u_h}) + \mu_{\text{BF}} \text{tr}(\mathbf{B}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{B}). \quad (4.54)$$

Logo, a condição de estabilidade da Equação (4.53) pode ser escrita como

$$\mu_{\text{AEC}} \text{tr}(\mathbf{R}_{u_h u_h}) + \mu_{\text{BF}} \text{tr}(\mathbf{B}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{B}) < \frac{2}{3}. \quad (4.55)$$

#### 4.4.2 MOP em excesso

Para avaliar a influência de  $\mathcal{M}$  na convergência da Equação (4.17), em geral, é interessante analisar separadamente a MOP em excesso  $J_{\text{ex}}[n]$ . Substituindo a Equação (4.34) na Equação (4.26) e definindo

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}[n] &= J[n] - J_{\text{min}} \\ &= \text{tr}(\mathbf{R}_{\xi\xi}[n] \mathbf{R}_{\text{mod}}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{Q}_{\text{mod}} \mathbf{Q}_{\text{mod}}^\top \mathbf{R}_{\xi\xi}[n] \mathbf{Q}_{\text{mod}} \mathbf{Q}_{\text{mod}}^\top \mathbf{R}_{\text{mod}}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{Q}_{\text{mod}}^\top \mathbf{R}_{\xi\xi}[n] \mathbf{Q}_{\text{mod}} \mathbf{Q}_{\text{mod}}^\top \mathbf{R}_{\text{mod}} \mathbf{Q}_{\text{mod}}) \\ &= \text{tr}(\mathfrak{R}_{\xi\xi}[n+1] \mathbf{\Lambda}_{\text{mod}}) \\ &= \boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^\top \boldsymbol{\rho}_\xi[n] \end{aligned} \quad (4.56)$$

ou, adicionando  $J_{\min}$  a ambos os lados da Equação (4.56), tem-se novamente a expressão para a MOP

$$J[n] = J_{\min} + \boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}^{\top} \boldsymbol{\rho}_{\xi}[n]. \quad (4.57)$$

em que  $[\boldsymbol{\lambda}_{\text{mod}}]_i > 0$  e  $[\boldsymbol{\rho}_{\xi}[n]]_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N_{\psi}$ . Portanto,  $J[n] \geq J_{\min}$ . Essa propriedade é consequência da Equação (4.29), em que o termo  $J_{\min} \mathbf{M} \mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{M}^{\top}$  impede a convergência de  $\mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n]$  para uma matriz nula (HAYKIN, 1993, p 321). Esse comportamento é consistente com a observação de que o vetor de erro nos coeficientes pode se aproximar de um vetor nulo mas, devido ao uso de passos de adaptação maiores que zero, quando próximos da solução ótima os coeficientes sofrem atualizações que causam pequenas flutuações ao redor da solução ótima.

#### 4.4.3 Regime permanente da MOP em excesso

Quando a condição de estabilidade da Equação (4.52) é respeitada,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\Phi}_{\text{mod}}^n \rightarrow \mathbf{0}_{N_{\psi} \times N_{\psi}}$  e, conseqüentemente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\rho}_{\xi}[n+1] = \lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\rho}_{\xi}[n] = \boldsymbol{\rho}_{\xi}[\infty]$ . Nesse caso, substituindo a Equação (4.56) na Equação (4.39) para  $n \rightarrow \infty$ , o  $i$ -ésimo elemento de  $\boldsymbol{\rho}_{\xi}[\infty]$  é descrito por

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\rho}_{\xi}[\infty]]_i &= \left[ (1 - \lambda_{\text{mod}_i})^2 + \lambda_{\text{mod}_i}^2 \right] [\boldsymbol{\rho}_{\xi}[\infty]]_i + \lambda_{\text{mod}_i} (J_{\text{ex}}[\infty] + J_{\min}) \\ \left[ 1 - (1 - 2\lambda_{\text{mod}_i} + 2\lambda_{\text{mod}_i}^2) \right] [\boldsymbol{\rho}_{\xi}[\infty]]_i &= \lambda_{\text{mod}_i} (J_{\text{ex}}[\infty] + J_{\min}) \\ [\boldsymbol{\rho}_{\xi}[\infty]]_i &= (J_{\text{ex}}[\infty] + J_{\min}) \frac{1}{2 - 2\lambda_{\text{mod}_i}} \end{aligned} \quad (4.58)$$

A substituição da Equação(4.58) na Equação (4.56) resulta em

$$\begin{aligned}
 J_{\text{ex}}[\infty] &= (J_{\text{ex}}[\infty] + J_{\text{min}}) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\psi}} \frac{\lambda_{\text{mod}_i}}{1 - \lambda_{\text{mod}_i}} \\
 \left( 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\psi}} \frac{\lambda_{\text{mod}_i}}{1 - \lambda_{\text{mod}_i}} \right) J_{\text{ex}}[\infty] &= J_{\text{min}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\psi}} \frac{\lambda_{\text{mod}_i}}{1 - \lambda_{\text{mod}_i}} \\
 J_{\text{ex}}[\infty] &= J_{\text{min}} \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\psi}} \frac{\lambda_{\text{mod}_i}}{1 - \lambda_{\text{mod}_i}}}{1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\psi}} \frac{\lambda_{\text{mod}_i}}{1 - \lambda_{\text{mod}_i}}}. \tag{4.59}
 \end{aligned}$$

Das Equações (4.3), (4.33), e da hipótese H3, conclui-se que  $\mathbf{R}_{\text{mod}}$  é uma matriz simétrica e definida positiva (HORN; JOHNSON, 1990). Portanto, seu autovalor de maior magnitude está relacionado ao maior valor singular por meio de  $\max\{\lambda_{\text{mod}}\} = \max\{\sigma_{\text{mod}}\}$  em que  $\sigma_{\text{mod}}$  indica o vetor contendo os valores singulares de  $\mathbf{R}_{\text{mod}}$ . O maior valor singular de uma matriz também é igual à sua norma Euclidiana (CHEN, 1998, pg.78). Logo, a utilização da propriedade submultiplicativa (GOLUB; LOAN, 2013, p 56) da norma 2 em  $\mathbf{R}_{\text{mod}} = \mathbf{L}^{\top} \mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{L}$  resulta em um limite superior para

$$\begin{aligned}
 \max\{\lambda_{\text{mod}}\} &= \|\mathbf{L}^{\top} \mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{L}\|_2 \\
 &\leq \|\mathbf{L}^{\top}\|_2 \|\mathbf{R}_{\text{bloc}}\|_2 \|\mathbf{L}\|_2 = \|\mathcal{M}\|_2 \|\mathbf{R}_{\text{bloc}}\|_2 \tag{4.60}
 \end{aligned}$$

em que  $\mathcal{M}$  e  $\mathbf{R}_{\text{bloc}}$  são matrizes simétricas e definidas positivas e, portanto, com autovalores reais e positivos. A igualdade da segunda linha pode ser obtida por meio da decomposição em valores singulares de  $\mathbf{L} = \mathbf{U}_{\text{L}} \Sigma_{\text{L}} \mathbf{V}_{\text{L}}^{\top}$  na



qual

$$\mathcal{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top = \mathbf{U}_L \boldsymbol{\Sigma}_L^2 \mathbf{U}_L^\top$$

em que  $\mathbf{V}_L^\top \mathbf{V}_L = \boldsymbol{\Sigma}_L = \boldsymbol{\Sigma}_L^\top$ . Portanto, o maior valor singular de  $\mathcal{M}$  é igual ao maior valor singular de  $\mathbf{L}$  ao quadrado então  $\|\mathcal{M}\|_2 = \|\mathbf{L}\|_2 \|\mathbf{L}^\top\|_2$ . Assim, para  $\max\{\lambda_{\mathcal{M}}\} \max\{\lambda_{\text{bloc}}\} \ll 1$  em que  $\lambda_{\mathcal{M}}$  e  $\lambda_{\text{bloc}}$  indicam vetores contendo os autovalores de  $\mathcal{M}$  e  $\mathbf{R}_{\text{bloc}}$  respectivamente, conclui-se que  $\max\{\lambda_{\text{mod}}\} \ll 1$  e pode-se aproximar a Equação (4.59) por

$$J_{\text{ex}}[\infty] \approx J_{\min} \frac{\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{mod}})}{1 - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{mod}})}. \quad (4.61)$$

Se  $\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{mod}}) \ll 2$ , o denominador da Equação (4.61) torna-se aproximadamente 1 e uma aproximação adicional pode ser realizada resultando em

$$J_{\text{ex}}[\infty] \approx \frac{1}{2} J_{\min} \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{mod}}) \quad (4.62)$$

### Regime permanente da MOP em excesso para a adaptação com passos distintos

Substituindo a Equação (4.54) na Equação (4.61), a MOP em excesso em regime permanente quando a adaptação é feita utilizando a recursão da Equação (4.15) é descrita por

$$J_{\text{ex}}[\infty] = J_{\min} \frac{\mu_{\text{AEC}} \text{tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{u}_h \mathbf{u}_h}) + \mu_{\text{BF}} \text{tr}(\mathbf{B}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{B})}{2 - \mu_{\text{AEC}} \text{tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{u}_h \mathbf{u}_h}) - \mu_{\text{BF}} \text{tr}(\mathbf{B}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{B})}. \quad (4.63)$$

Alternativamente, substituindo a Equação (4.54) na Equação (4.62) a aproximação para a MOP em excesso em regime permanente é escrita como

$$J_{\text{ex}}[\infty] \approx \frac{J_{\min}}{2} \left[ \mu_{\text{AEC}} \text{tr}(\mathbf{R}_{u_h u_h}) + \mu_{\text{BF}} \text{tr}(\mathbf{B}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{B}) \right], \quad (4.64)$$

ou seja, uma combinação linear dos passos de adaptação do AEC e do BF.

#### 4.5 Proposta de um novo algoritmo para a otimização conjunta

O uso da otimização conjunta no projeto de sistemas baseados na estrutura BF-AEC apresenta algumas vantagens como a possibilidade de explorar uma superfície de desempenho com soluções ótimas mais eficazes (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2011) e a possibilidade do uso de estratégias de solução baseadas no LCMV adaptativo (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a). Contudo, estratégias baseadas na otimização local do conformador de feixe tendem a se adaptar mais rapidamente pois, em geral, os canceladores de eco tem comprimento significativamente mais longo que os BFs e a adaptação do conformador de feixe não é influenciada pelo estado do AEC. Os resultados da análise realizada nas Seções 4.3 e 4.4 são válidos para a adaptação utilizando a Equação (4.17) bastando que  $\mathcal{M}$  seja uma matriz definida positiva, que  $\mathbf{B}_e$  apresente posto completo de colunas e que  $\mathbf{C}_e^\top \mathbf{B}_e = \mathbf{0}_{N_c \times N_\psi}$ . Satisfeitas essas condições, a possibilidade de adaptação em direções diferentes da definida pelo gradiente estocástico pode ser explorada para obter ganhos em velocidade de convergência.

#### 4.5.1 Matriz de passos branqueadora

Resultados teóricos anteriores mostram que a velocidade de convergência da Equação (4.17) apresenta um aumento quando o espalhamento dos autovalores de  $\mathbf{R}_{\text{mod}}$  diminui (HAYKIN, 1993; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000; SAYED, 2008), alcançando sua máxima velocidade de convergência quando a multiplicidade algébrica dos autovalores de  $\mathbf{R}_{\text{mod}}$  é  $N_\psi$ , ou seja quando todos os autovalores são iguais. Nesse caso,  $\mathbf{\Lambda}_{\text{mod}} = \lambda_{\text{mod}} \mathbf{I}_{N_\psi}$  e  $\mathbf{R}_{\text{mod}} = \lambda_{\text{mod}} \mathbf{Q}_{\text{mod}} \mathbf{Q}_{\text{mod}}^\top = \lambda_{\text{mod}} \mathbf{I}_{N_\psi}$ . Portanto, da Equação (4.33), dividindo ambos os lados por  $\lambda_{\text{mod}} \neq 0$  tem-se

$$\mathbf{L}^\top \left( \frac{1}{\lambda_{\text{mod}}} \mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{L} \right) = \mathbf{I}_{N_\psi}. \quad (4.65)$$

A Equação (4.65) é válida se e somente se

$$\mathbf{L}^\top = \left( \frac{1}{\lambda_{\text{mod}}} \mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{L} \right)^{-1} = \lambda_{\text{mod}} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}_{\text{bloc}}^{-1}. \quad (4.66)$$

Logo, pré multiplicando a Equação (4.66) por  $\mathbf{L}$  e observando que  $\mathbf{M} = \mathbf{L} \mathbf{L}^\top$

$$\mathbf{M} = \lambda_{\text{mod}} \mathbf{R}_{\text{bloc}}^{-1}. \quad (4.67)$$

Ao mesmo tempo, quando  $\text{tr}(\mathbf{\Lambda}_{\text{mod}}) = N_\psi \lambda_{\text{mod}}$ , a Equação (4.61) revela que

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}[\infty] &= J_{\text{min}} \frac{\frac{1}{2} N_\psi \lambda_{\text{mod}}}{1 - \frac{1}{2} N_\psi \lambda_{\text{mod}}} \\ (J_{\text{min}} + J_{\text{ex}}[\infty]) \frac{1}{2} N_\psi \lambda_{\text{mod}} &= J_{\text{ex}}[\infty] \\ \lambda_{\text{mod}} &= \frac{2}{N_\psi} \frac{J_{\text{ex}}[\infty]}{J_{\text{min}} + J_{\text{ex}}[\infty]}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Finalmente, a matriz de passos que descorrelaciona  $\mathbf{R}_{\text{mod}}$ , em função da MOP em excesso, é dada pelas Equações (4.67) e (4.68):

$$\mathcal{M} = \frac{2}{N_\psi} \frac{J_{\text{ex}}[\infty]}{J[\infty]} (\mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{B}_e)^{-1}. \quad (4.69)$$

Essa abordagem apresenta duas desvantagens evidentes. A primeira é a necessidade de conhecimento sobre as estatísticas de segunda ordem do sinal  $s[n]$  *a priori*. A segunda é que a inversão de  $\mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{B}_e$  na Equação pode gerar matrizes com grau de esparsidade nulo.

Substituindo a Equação (4.69) na Equação (4.17) a recursão resultante é

$$\psi[n+1] = \psi[n] + \frac{2}{N_\psi} \frac{J_{\text{ex}}[\infty]}{J[\infty]} (\mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{B}_e)^{-1} \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] d[n]. \quad (4.70)$$

### Interpretação alternativa como um algoritmo Quase-Newton

O algoritmo de Newton-Raphson realiza a busca de soluções por meio de (FLETCHER, 1987; THEODORIDIS, 2001)

$$\psi[n+1] = \psi[n] + 2\mu \mathcal{W}[n] \nabla_\psi (E\{d^2[n]\}) \quad (4.71)$$

em que  $\mathcal{W}[n]$  indica a matriz de pesos do algoritmo Newton-Raphson. A escolha mais popular de  $\mathcal{W}[n]$  é proporcional à inversa da matriz Hessiana da superfície de desempenho da Equação (4.2) descrita por

$$\nabla_\psi^2 (E\{d^2[n]\}) = 2\mathbf{R}_{\text{bl oc}} = 2\mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{B}_e. \quad (4.72)$$

A principal dificuldade no uso do método de Newton-Raphson é a ne-

cessidade do cálculo de derivadas de segunda ordem da função objetivo para a formação da Matriz  $\mathcal{W}[n]$ . Isso requer a avaliação de  $N_{\psi}^2$  funções escalares a cada iteração (DENNIS JR.; MORÉ, 1977). Alternativamente, quando a matriz Hessiana da Equação (4.2) é muito complexa para ser computada em tempo real, é possível utilizar uma aproximação em seu lugar. Segundo Dennis Jr. e Moré (1977) e Brent (1973), uma técnica válida para reduzir a complexidade computacional de métodos quase Newton quando a variação das derivadas de segunda ordem ocorre lentamente consiste no uso de derivadas de segunda ordem fixas. A convergência do algoritmo para soluções ótimas é garantida se  $\mathcal{W}$  for uma matriz definida positiva (FLETCHER, 1987, pp 22–23).

Finalmente, a Equação (4.71) pode ser aproximada por meio da aproximação estocástica do algoritmo do gradiente para a determinação de uma equação recursiva de um algoritmo Quase-Newton. Assim, a Equação (4.71) pode ser aproximada por

$$\psi[n+1] \approx \psi[n] + 2\mu \mathcal{W} \mathbf{B}_e^{\top} \mathbf{s}[n] d[n] \quad (4.73)$$

Supondo que existe uma estimativa de  $\mathcal{W} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{B}_e^{\top} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{B}_e)^{-1}$  disponível baseada na estimação *a priori* de  $\mathbf{B}_e^{\top} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{B}_e$  ou  $(\mathbf{B}_e^{\top} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{B}_e)^{-1}$  para sinais de entrada estacionários então a Equação (4.73) pode ser aproximada por

$$\psi[n+1] \approx \psi[n] + \mu (\mathbf{B}_e^{\top} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{B}_e)^{-1} \mathbf{B}_e^{\top} \mathbf{s}[n] d[n] \quad (4.74)$$

em que a Equação (4.70) é um caso particular da Equação (4.74) quando

$$\mu = \frac{2}{N_{\psi}} \frac{J_{\text{ex}}[\infty]}{J[\infty]}.$$

## 4.6 Resumo

Este capítulo apresentou uma análise estatística para o comportamento do cancelador de eco auxiliado por um arranjo de microfones com o conformador de feixe implementado na forma GSC e adaptação utilizando o algoritmo LMS em um meio estacionário, considerando um sinal de entrada Gaussiano de média zero. O modelo considera a utilização de passos de adaptação independentes para o AEC e o BF. Assim, a adaptação durante diferentes estágios da lógica de controle de *double-talk* pode ser prevista, o que permite uma melhor compreensão do processo adaptativo. Equações recursivas determinísticas foram desenvolvidas para o comportamento da potência média de saída do sistema. O modelo é válido para a predição do comportamento de um LCMV convencional implementado na forma GSC e adaptação utilizando o algoritmo LMS.

O modelo permite também mostrar que a máxima velocidade de convergência ocorre quando aplica-se um ajuste matricial para o passo de adaptação, e que essa solução corresponde a um algoritmo quase-Newton.

No próximo capítulo serão apresentados os resultados de simulações e procedimentos numéricos para comprovar a validade dos modelos de comportamento desenvolvidos nos Capítulos 3 e 4.



## 5 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados resultados de simulações e procedimentos numéricos que demonstram a validade dos modelos analíticos desenvolvidos nos capítulos anteriores. Apesar dos modelos desse trabalho não considerarem efeitos de não-estacionariedade, as previsões são confrontadas com simulações utilizando plantas LEM que se modificam segundo um modelo de caminhada aleatória (*random-walk*) e sinais de voz reais com pausas removidas. Para demonstrar a viabilidade dos modelos desenvolvidos, alguns exemplos de projeto são apresentados e suas previsões são comprovadas por meio de simulações de Monte-Carlo.

### 5.1 Análise da superfície de desempenho

A partir da superfície de desempenho descrita na Equação (3.20) é possível observar a variação na MOP, supondo coeficientes ótimos, em função do número de microfones, do comprimento do cancelador de eco acústico e de estatísticas dos sinais de entrada. É possível comprovar que a solução com otimização conjunta tem o potencial de obter soluções com menor MOP quando comparada à solução com otimização do BF independente do AEC (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2011). Na Figura 5.1 são comparadas as potências residuais de eco de um sistema com um único microfone (AEC), a estrutura BF-AEC com otimização convencional (BF-AEC) e conjunta (jo BF-AEC) com 2, 4 e 8 microfones assumindo sobreamostragem espacial. Para a otimização convencional, a solução ótima



do conformador de feixe foi calculada utilizando a Equação (2.46) e a MOP ótima é calculada condicionada a  $\mathbf{b}_{\text{opt}}$  (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2011). Para a solução utilizando a otimização conjunta, a MOP foi calculada diretamente a partir da Equação (3.23). Nesse exemplo são considerados canais de eco segundo modelo exponencial para múltiplos microfones, uma sala com tempo de reverberação de 100 ms, sinal de *far-end* autorregressivo de ordem 1 e coeficiente  $a_1 = -0.9$  com média nula e variância unitária e ruídos brancos Gaussianos de média nula e variância  $10^{-6}$  aplicados em cada microfone. O comprimento das respostas ao impulso das plantas LEM consideradas é de  $N_h = 1024$  amostras a uma taxa de amostragem  $f_s = 8192$  Hz. Observa-se que o desempenho de uma estrutura BF-AEC com otimização convencional apresenta potência de eco residual maior que o de um sistema com somente um microfone quando um comprimento do AEC aproxima-se do comprimento da resposta ao impulso da sala. Observa-se também que, para um mesmo número de microfones e mesmo comprimento do AEC, a solução ótima da otimização conjunta apresenta potência residual de eco menor que a obtida pela solução ótima da otimização convencional.

## 5.2 Resultados para o AEC auxiliado por um arranjo de microfones na forma direta

Essa seção apresenta simulações e exemplos de projeto para verificar a precisão do modelo desenvolvido no Capítulo 3 e mostrar sua viabilidade como ferramenta de auxílio ao projetista. Os resultados dessa seção encontram-se também em Maruo, Bermudez e Resende (2014a).

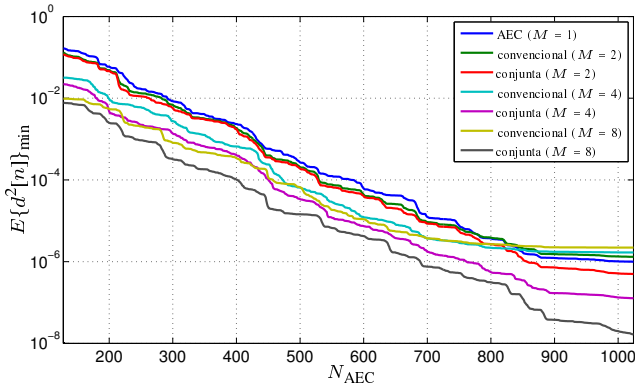


Figura 5.1:  $E\{d^2[n]\}_{\min}$  em função de  $M$  e  $N_{\text{AEC}}$  (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2011)

Nas simulações dessa seção, o sinal de *far-end* foi aproximado por um processo autorregressivo AR1( $a_1$ ) dado por  $u[n] = a_1 u[n-1] + z[n]$ , em que  $z[n]$  é um ruído branco Gaussiano de média nula e variância  $\sigma_z^2$  selecionada de modo que a variância de  $u[n]$ ,  $\sigma_u^2 = 1$ . Nessa simulação assume-se que os coeficientes são adaptados durante um período de ausência de fala local na direção de interesse. As plantas LEM foram geradas a partir do procedimento descrito no Apêndice P assumindo um arranjo linear e uniforme de microfones, que resulta em respostas ao impulso espacialmente correlacionadas.

### 5.2.1 Verificação da precisão

A Figura 5.2 mostra algumas simulações com o objetivo de observar a precisão do modelo derivado no Capítulo 3 em função do grau de correlação dos sinais de *far-end* e para diferentes passos de adaptação. As simulações foram realizadas com  $M = 2$  microfones e respostas ao impulso das plantas

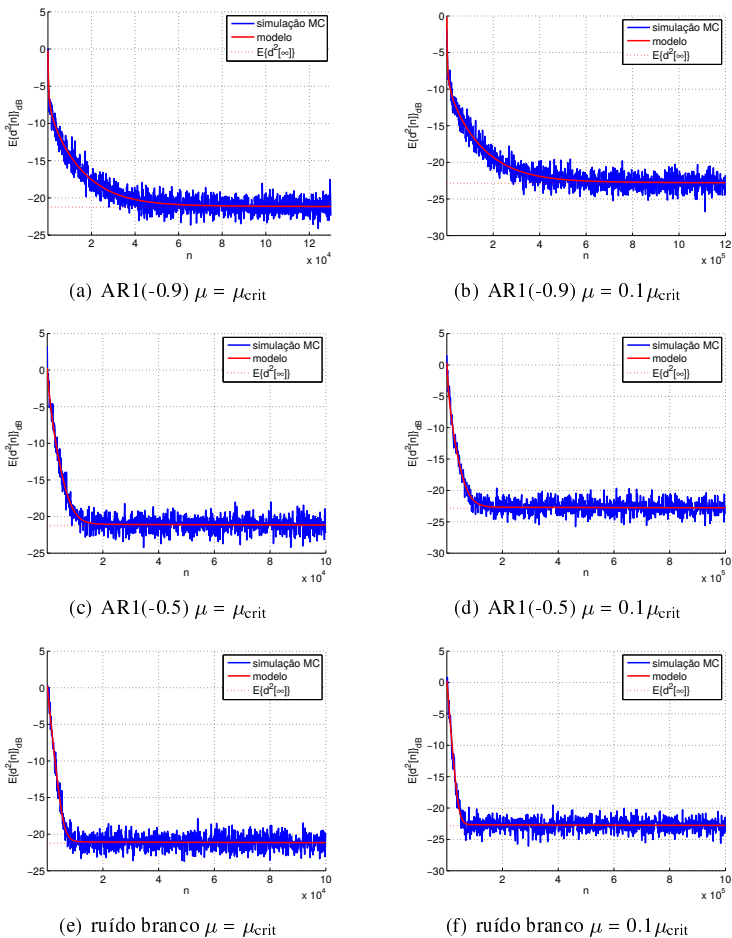


Figura 5.2: Comparação entre as previsões do modelo proposto e simulações de Monte-Carlo (média de 150 realizações) para sinais de *far-end* com diferentes estatísticas ( $M = 2$ ,  $N_h = 1024$ ,  $F = 4$ ,  $N_{\text{BF}} = 16$ ,  $N_{\text{AEC}} = 1039$ , variância do ruído  $10^{-2}$ ) (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a)

LEM  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_2$  com aproximadamente  $T_R(60) = 100$  ms e taxa de amostragem  $f_s = 8000$  resultando em plantas com  $N_h = 1024$  coeficientes. Os conformadores de feixe foram projetados com  $N_{BF} = 16$  e  $N_C = 16$  restrições forçando uma resposta plana com fase linear na direção do *broadside* do arranjo. O comprimento do AEC foi arbitrado como  $N_{AEC} = N_h + N_{BF} - 1 = 1039$ . Os passos de adaptação foram determinados a partir de fatores de  $\mu_{crit} = 2/[3\text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e)]$  que é o limite de estabilidade derivado na Equação (3.63). Os sinais dos microfones foram corrompidos por ruídos brancos Gaussianos de média nula e variância  $10^{-2}$ . Ruídos em microfones distintos foram gerados independentemente. As previsões do modelo (traçadas por meio de curvas vermelhas contínuas) mostram uma boa concordância com a simulação de Monte-Carlo (média de 150 realizações). Os valores da previsão de  $J[\infty]$  utilizando a Equação (3.73) são mostrados nas linhas vermelhas horizontais tracejadas.

É importante mencionar que a análise estatística nesse trabalho utilizou hipóteses simplificadoras para tornar o problema tratável matematicamente. Portanto, o modelo desenvolvido e os exemplos a seguir servem para extrair padrões no comportamento fundamental do algoritmo e não devem ser utilizados como equações exatas de projeto.

### 5.2.2 Curvas de desempenho

Baseado no grau de precisão demonstrado pelo modelo analítico, pode-se demonstrar sua utilidade na geração de um conjunto de curvas de desempenho para auxiliar o projeto de sistemas reais. A Figura 5.3 mos-

tra a MOP em regime-permanente obtida utilizando as Equações (3.69) e (3.73) em função do passo de adaptação  $\mu$  para arranjos com diferentes números de microfones  $M$ . As curvas foram traçadas assumindo plantas LEM com  $N_h = 2500$  coeficientes geradas pelo procedimento descrito no Apêndice P com  $F = 5$ , sinais remotos modelados por um sinal  $AR1(a_1)$  com  $a_1 = -0.9$ , filtros do BF com memória  $N_{BF} = 16$  coeficientes e  $N_{AEC} = N_h + N_{BF} - 1 = 2515$  coeficientes. Ruídos brancos Gaussianos de média zero e variância  $\sigma_r^2 = 10^{-2}$  foram utilizados para modelar os sinais  $r_m[n]$ . As curvas foram traçadas para valores de  $\mu$  variando de valores próximos a zero até  $\mu_{crit}$ , que é uma função de  $M$ . Portanto, diferentes valores de  $M$  acarretam em diferentes faixas de valores para  $\mu$ . Essas curvas mostram o efeito da inclusão de microfones adicionais no desempenho em regime-permanente do sistema.

A Figura 5.4 mostra a previsão da MOP em regime permanente em função do número de microfones  $M$  e o comprimento do AEC  $N_{AEC}$  para a mesma planta LEM utilizada na obtenção da Figura 5.3. O valor do passo de adaptação foi arbitrado como  $\mu = 0.05\mu_{crit}$  que é um valor típico para uso em aplicações reais (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p 534). O sinal de *far-end* foi modelado como um sinal  $AR1(a_1)$  com  $a_1 = -0.9$  e variância unitária e um ruído branco Gaussiano de média nula e variância  $\sigma_r^2 = 10^{-2}$  foi utilizado para modelar o ruído em cada microfone. Essas curvas mostram que, quando  $N_{AEC}$  é próximo de  $N_h + N_{BF} - 1$ , a MOP em regime-permanente decresce aproximadamente 3 dB quando o número de microfones é dobrado. Essa curva também mostra que, para atingir o mesmo nível de

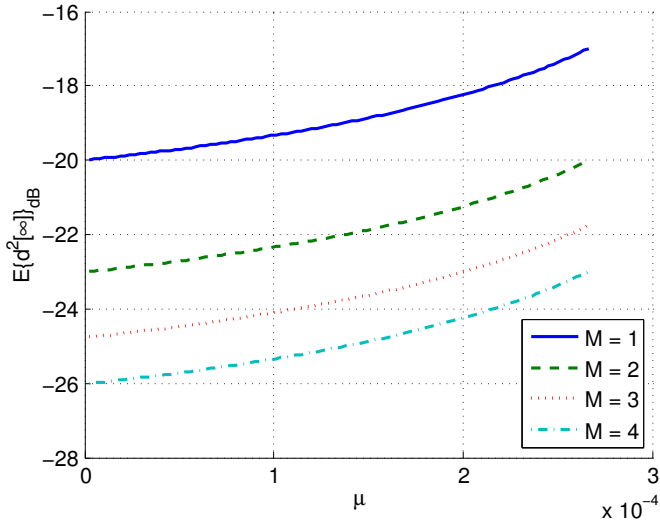


Figura 5.3:  $E\{d^2[\infty]\}$  em função de  $\mu$  para diferentes valores de  $M$  (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a).

cancelamento de eco de um sistema com um único microfone, é possível utilizar um AEC com  $N_{\text{AEC}}$  significativamente menor quanto maior o número de microfones disponível. Esse resultado confirma teoricamente a conjectura feita em Kallinger, Bitzer e Kammeyer (2000).

### Efeito da não-estacionariedade

As previsões do modelo foram desenvolvidas sob hipóteses simplificadas que consideram os sinais de entrada do sistema estacionários. Contudo, para baixos graus de não-estacionariedade, o modelo ainda é capaz de mostrar tendências de comportamento do algoritmo que podem auxiliar a tomada de decisão do projetista (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p 595). O

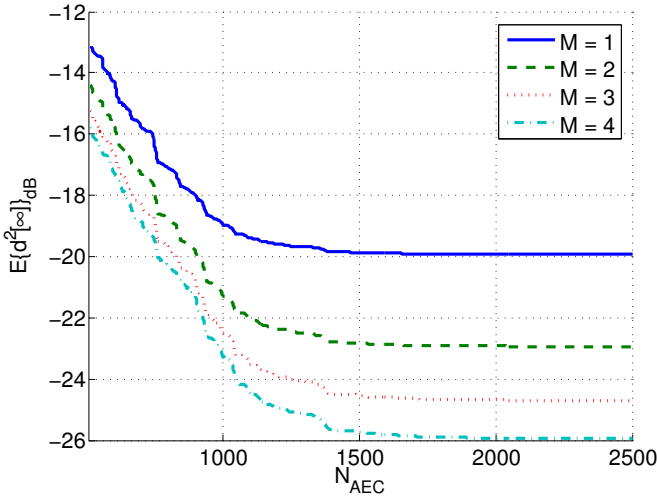


Figura 5.4:  $E\{d^2[\infty]\}$  em função de  $N_{AEC}$  e  $M$ . O sinal de *far-end* é um sinal AR1(-0.9), a potência do ruído é  $10^{-2}$  e  $\mu = 0.05\mu_{crit}$  (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a).

grau de não-estacionariedade é definido pela razão entre a parcela do erro mínimo devido ao efeito da não-estacionariedade pelo erro mínimo devido a fenômenos exclusivamente estacionários. Neste exemplo, a utilidade do modelo é verificada em uma situação em que a resposta das plantas LEM é variante com o tempo. É conhecido que os filtros adaptativos não são capazes de rastrear mudanças nas estatísticas dos sinais que correspondam a graus de não-estacionariedade maiores que a unidade (MARCOS; MACCHI, 1987). Portanto, são comparadas as previsões do modelo e os resultados experimentais para três graus de não-estacionariedade. Para inicializar as respostas ao impulso das plantas LEM, o procedimento descrito no Apêndice P com  $F = 4$ ,  $T_R(60) = 100$  ms e  $N_h = 1024$  foi utilizado. A variação com o tempo foi rea-

lizada por meio de um processo de *random-walk* descrito por

$$\mathbf{h}_k[n+1] = \mathbf{h}_k[n] + \Delta\mathbf{h}_k[n] \quad (5.1)$$

em que  $\Delta\mathbf{h}_k[n] \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{N_h \times 1}, \sigma_{\Delta\mathbf{h}_k}^2 \mathbf{I}_{N_h})$  e  $\sigma_{\Delta\mathbf{h}_k}^2$  é definido a partir do grau de não-estacionariedade para a  $k$ -ésima planta LEM (MACCHI, 1995; MACCHI, 1996)

$$\begin{aligned} \chi_k &= \sqrt{\frac{E\{(\Delta\mathbf{h}_k^\top[n]\mathbf{u}_h[n])^2\}}{E\{r_k^2[n]\}}} \\ &= \sqrt{\frac{\text{tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{u}_h\mathbf{u}_h} E\{\Delta\mathbf{h}_k[n]\Delta\mathbf{h}_k^\top[n]\})}{E\{r_k^2[n]\}}} \\ &= \sqrt{\sigma_{\Delta\mathbf{h}_k}^2 \frac{\text{tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{u}_h\mathbf{u}_h})}{E\{r_k^2[n]\}}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

em que  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_h\mathbf{u}_h} = E\{\mathbf{u}_h[n]\mathbf{u}_h^\top[n]\}$ . Assumindo que o grau de não estacionariedade é constante para todos os sinais captados pelos microfones,  $\sigma_{\Delta\mathbf{h}_k}^2 = \sigma_{\Delta\mathbf{h}}^2$ ,  $E\{r_k^2[n]\} = \sigma_r^2$  e  $\chi_k = \chi$ . Assumindo também que o sinal de *far-end* é estacionário no sentido amplo,  $\text{tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{u}_h\mathbf{u}_h}) = N_h\sigma_u^2$  em que  $\sigma_u^2$  indica a variância de  $u[n]$ . Portanto, da Equação (5.2), tem-se

$$\sigma_{\Delta\mathbf{h}}^2 = \frac{\chi^2 \sigma_r^2}{N_h \sigma_u^2}. \quad (5.3)$$

Para as simulações desse exemplo, foram verificados cenários com  $\chi = \{0.07, 0.1, 0.5\}$ ,  $\sigma_u^2 = 1$ , e  $\sigma_r^2 = 10^{-2}$ . O sistema de cancelamento de eco foi projetado com  $N_{\text{BF}} = 16$ ,  $N_{\text{AEC}} = N_h + N_{\text{BF}} - 1 = 1039$ ,  $M = 2$  e  $\mu = \mu_{\text{crit}}/2$ . O sinal de *far-end* utilizado foi um sinal AR1(-0.9) com média nula e variância unitária e ruídos brancos Gaussianos de média nula e



variância  $10^{-2}$  foram adicionados aos sinais dos microfones. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 5.5 em que pode-se verificar a capacidade do modelo de prever tendências do comportamento do algoritmo mesmo para  $\chi = 0.5$ .

### Direção de chegada do sinal de fala local

Nessa simulação deseja-se verificar a capacidade do modelo proposto para prever o comportamento do algoritmo para ângulos de chegada diferentes de  $\theta = 0^\circ$ . As simulações foram realizadas com  $M = 2$  microfones e respostas ao impulso das plantas LEM  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_2$  com  $N_h = 128$  coeficientes. Os conformadores de feixe foram projetados com  $N_{BF} = 16$  e  $N_C = 16$  restrições forçando uma resposta aproximadamente plana com fase linear na direção  $\theta_{DOA} = \frac{\pi}{4}$ . O comprimento do AEC foi arbitrado como  $N_{AEC} = N_h + N_{BF} - 1 = 143$  coeficientes. O passo de adaptação foi determinados a partir de  $\mu = 0.05 \cdot 2 / [3\text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e)]$ . Os sinais dos microfones foram corrompidos por ruídos brancos Gaussianos de média nula e variância  $10^{-2}$ . Ruídos em microfones distintos foram gerados independentemente.

Para a geração da matriz de restrição e do vetor  $\mathbf{f}$ , foi utilizado o procedimento no Apêndice B considerando  $c = 343$  m/s,  $f_s = 8000$  Hz e  $N_f = 16$  frequências distribuídas uniformemente entre 0 e 4 kHz. O arranjo de microfones é criticamente amostrado espacialmente com microfones afastados de

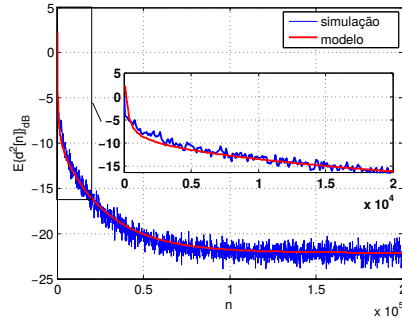
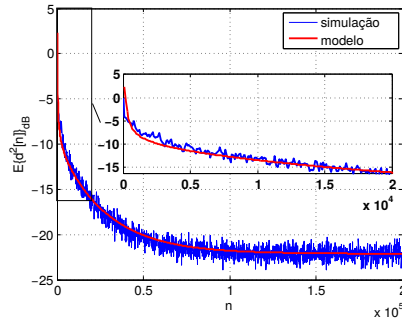
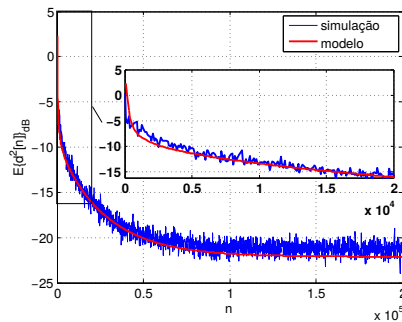
(a) Grau de não-estacionariedade  $\chi = 0.07$ .(b) Grau de não-estacionariedade  $\chi = 0.1$ .(c) Grau de não-estacionariedade  $\chi = 0.5$ .

Figura 5.5: Comportamento transitório da MOP para plantas LEM atualizadas pelo modelo de caminhada aleatória com diferentes graus de não-estacionariedade. Média de 100 realizações (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a).



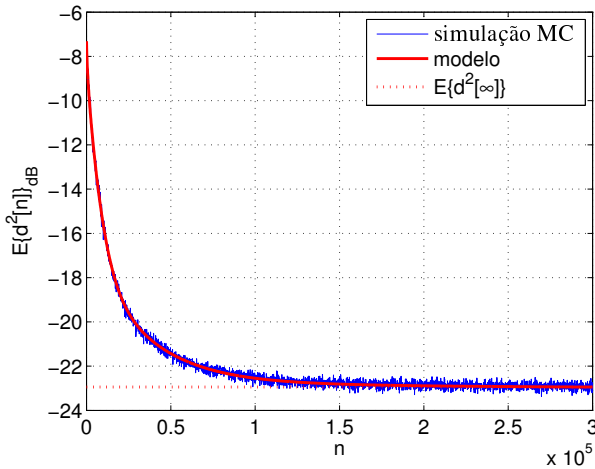


Figura 5.6: Comportamento transitório da MOP para direção de chegada do sinal desejado em  $\theta_{\text{DOA}} = \frac{\pi}{4}$ .

reverberação <sup>1</sup>  $T_{\text{R}}(60) = 300$  ms e uma potência de ruído nos microfones de  $10^{-2}$ . Assume-se que a resposta desejada na direção de interesse ( $\theta_{\text{DOA}} = 0^\circ$ ) é equivalente à resposta de um filtro com resposta em frequência plana, fase linear e sem atrasos com  $N_{\text{C}} = 16$  coeficientes, i.e.  $\mathbf{f} = [1, \mathbf{0}_{1 \times N_{\text{C}}-1}]^\top$  (FROST III, 1972). O objetivo do projeto é uma ERLE em regime-permanente de 16 dB ou  $J[\infty]_{\text{dB}} = -19$  dB (1 dB acima da MOP ótima de um sistema com  $M = 1$ ) e que o sistema atinja uma MOP de  $-18$  dB em menos de 60 s (em torno de  $5 \times 10^5$  iterações). O passo de adaptação é arbitrado como 5% de  $\mu_{\text{crit}}$ .

O modelo de resposta em frequência para  $\theta_{\text{DOA}} = 0^\circ$  em Frost III

<sup>1</sup> $T_{\text{R}}(60)$  é definido como o tempo necessário para que a energia de uma onda sonora seja atenuada de 60 dB após o término de sua emissão (BREINING et al., 1999).

(1972) requer  $N_{BF} = N_C = 16$ . O comprimento mínimo das plantas LEM é  $N_h > f_s T_R(60) = 2400$ , e portanto um comprimento  $N_h = 2500$  coeficientes foi escolhido. Os parâmetros a serem determinados são o número de microfones  $M$  e o comprimento do AEC  $N_{AEC}$ . Essas escolhas influenciam a complexidade computacional por iteração e a velocidade de convergência. Nesse projeto, foi definido um limite inferior para  $N_{AEC} \geq 512$  e a possibilidade do uso de  $M = 1, 2$  ou  $4$  microfones. Uma possibilidade de sequência de passos para o projeto é a seguinte:

1. Inicialize  $M = 4$  microfones;
2. Se  $M < 1$ , siga para o passo 16 ;
3. Utilize o procedimento do Apêndice P com  $F = 5$  para gerar  $M$  respostas ao impulso de plantas LEM;
4. Determine a matriz de restrição  $\mathbf{C}$  e a matriz de projeção  $\mathbf{P}$  para  $\mathbf{f} = [1, \mathbf{0}_{1 \times N_C - 1}]^\top$  (FROST III, 1972; BUCKLEY, 1987);
5. Inicialize  $N_{AEC} = N_h + N_{BF} - 1$ ;
6. Se  $N_{AEC} < 512$ , reduza o valor de  $M$  e siga para o passo 2 ;
7. Determine  $\mathbf{C}_e$  a partir da Equação (3.19) e  $\mathbf{R}_{ss}$  utilizando as Equações (3.12), (3.13) e as estatísticas de  $\mathbf{r}_b[n]$  e  $\mathbf{u}[n]$  (conhecidas *a priori* ou estimadas);
8. Calcule  $J_{\min}$  a partir da Equação (3.23);

9. Se  $N_{\text{AEC}} = N_h + N_{\text{BF}} - 1$  e  $J_{\min} > -19$  dB, então o projeto com  $M$  microfones não é factível. Vá ao passo 16;
10. Determine  $\mathbf{P}_e$  a partir de  $\mathbf{P}$  utilizando a Equação (3.25);
11. Calcule  $\mu_{\text{crit}} = 2/[3\text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e)]$  e  $\mu = 0.05\mu_{\text{crit}}$ ;
12. Se  $J[\infty] - J_{\min} < J_{\text{ex}}[\infty]$  da Equação (3.72), reduza  $M$  e retorne ao passo 2;
13. Obtenha uma solução inicial factível  $\mathbf{w}[0]$ . Encontre  $\mathbf{w}_{\text{opt}}$  utilizando a Equação (3.21) e  $\mathbf{v}[0]$  da Equação (3.31); Determine  $\mathbf{Q}_v$  a partir de  $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_v \mathbf{\Lambda}_{\text{ss}} \mathbf{Q}_v^T$  para encontrar  $\mathfrak{R}_{\text{vv}}[0] = \mathbf{Q}_v^T \mathbf{v}[0] \mathbf{v}^T[0] \mathbf{Q}_v$ . Utilize as Equações (3.51) e (3.52) para encontrar  $\lambda_{\text{ss}}$ , a Equação (3.53) para calcular  $\tilde{\rho}_{\text{vv}}[0]$  e utilize suas  $N_w - N_C$  primeiras componentes para formar  $\rho_{\text{vv}}[0]$ . Finalmente, utilize a Equação (3.56) para encontrar  $\Phi$ . Utilizando as Equações (3.55) e (3.69) encontre o valor da MOP na iteração  $n = 5 \times 10^5$ ;
14. Se  $J[5 \times 10^6]_{\text{dB}} > -18$  dB, reduza  $N_{\text{AEC}}$  e siga para o passo 6;
15. A solução satisfaz os requisitos do projeto. Guarde esse conjunto de parâmetros, reduza  $N_{\text{AEC}}$  e retorne ao passo 6;
16. A partir das soluções que satisfazem os requisitos do projeto, escolha as soluções com menor  $N_{\text{AEC}}$  para o mesmo número de microfones;
17. Avalie o desempenho dos parâmetros encontrados utilizando simulações de Monte-Carlo.

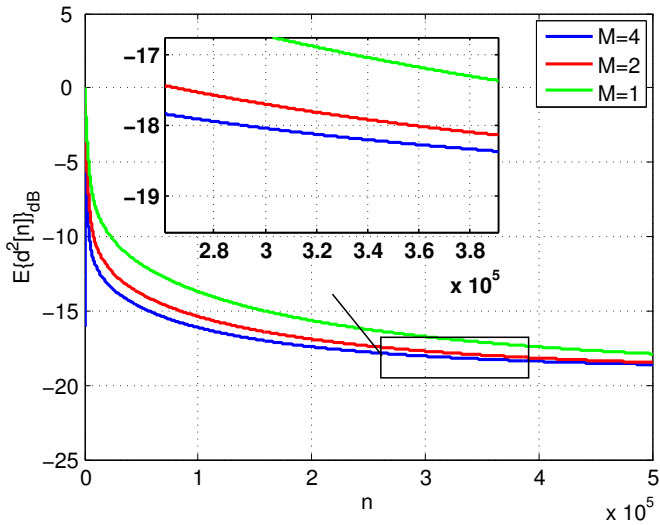
Tabela 5.1: Parâmetros do Exemplo de Projeto 1 com  $T_R(60) = 300$  ms (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a)

$M$	$J[\infty]_{\text{dB}}$	$N_{AEC}$	$n_{-18 \text{ dB}}$	$\mu$
1	-19.01	1024	$> 5 \times 10^5$	$2.6802 \times 10^{-5}$
2	-19.04	831	$3.57 \times 10^5$	$3.3156 \times 10^{-5}$
4	-19.01	709	$2.92 \times 10^5$	$3.8203 \times 10^{-5}$

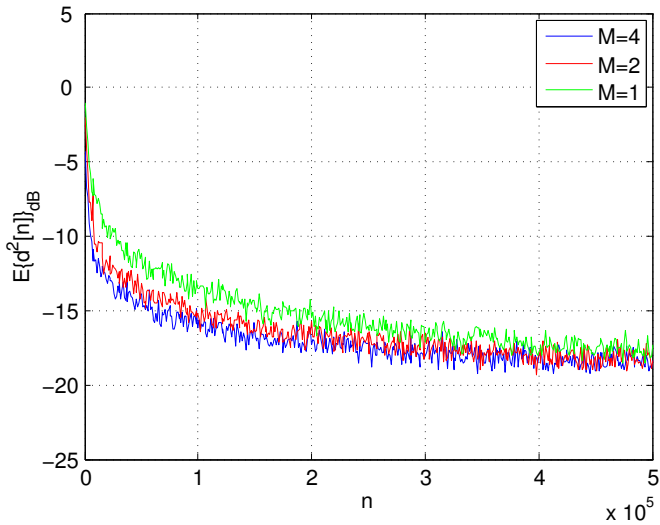
Alternativamente, curvas de projeto como a mostrada na Figura 5.4 obtidas para  $\mu = 0.05\mu_{\text{crit}}$  e diferentes valores de  $N_{AEC}$  e  $M$  também podem ser utilizadas para auxiliar na escolha de parâmetros de projeto. A Tabela 5.1 mostra os conjuntos de parâmetros de projeto obtidos utilizando o procedimento descrito anteriormente. A previsão da iteração em que a MOP residual atinge  $-18$  dB é indicada por  $n_{-18 \text{ dB}}$ . Esses resultados indicam que projetos utilizando  $M > 1$  apresentam desempenho significativamente melhor comparados com projetos utilizando  $M = 1$ . A Figura 5.7 mostra que as previsões do modelo são confirmadas pela simulação de Monte-Carlo. Um filtro de média móvel foi utilizado na obtenção da Figura 5.7(b) para melhorar a visualização.

A Tabela 5.2 mostra os resultados para o mesmo exemplo mas com um tempo de reverberação  $T_R(60) = 100$  ms e  $N_h = 1024$  coeficientes. O comportamento transiente dos projetos obtidos é mostrado na Figura 5.8. Observa-se que o projeto com  $M = 2$  pode apresentar vantagens em comparação com o projeto com  $M = 4$ , particularmente no número de iterações para atingir uma MOP de  $-18$  dB.

Para confrontar os resultados do projeto utilizando sinais de *far-end*



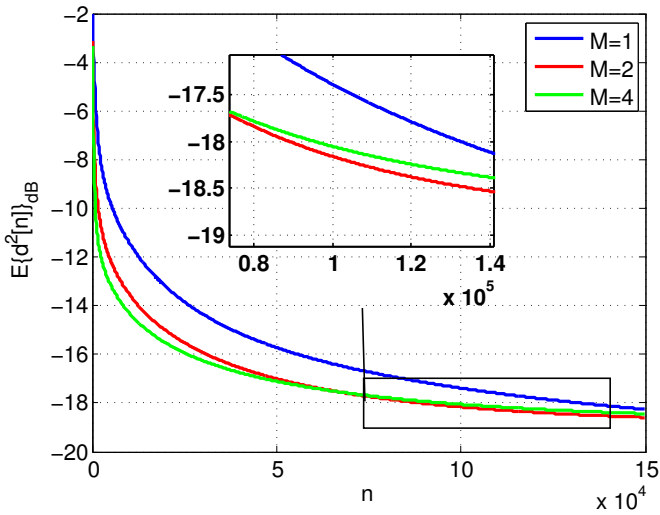
(a) Previsão do modelo.



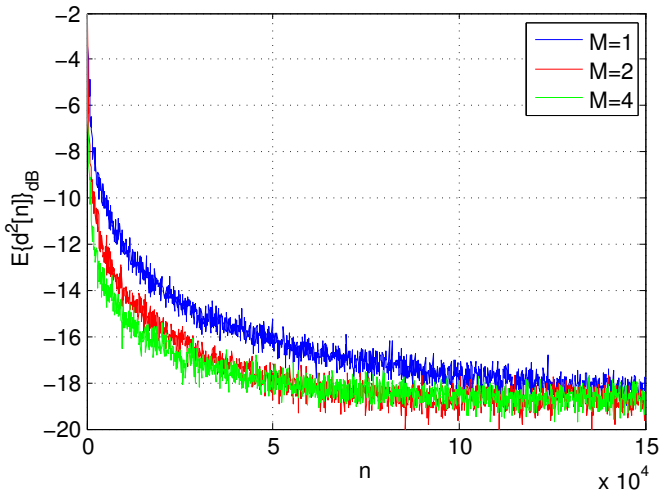
(b) Simulação de Monte-Carlo (Média de 300 realizações).

Figura 5.7: Comportamento transitório dos sistemas projetados no Exemplo de Projeto 1 para  $T_R(60) = 300$  ms (modelo e simulação) (MARUO; BER-MUDEZ; RESENDE, 2014a).





(a) Previsão do modelo.



(b) Simulação de Monte-Carlo (Média de 300 realizações).

Figura 5.8: Comportamento transitório dos sistemas projetados no Exemplo de Projeto 1 para  $T_R(60) = 100$  ms (modelo e simulação) (MARUO; BER-MUDEZ; RESENDE, 2014a).

Tabela 5.2: Parâmetros do Exemplo de Projeto 1 com  $T_R(60) = 100$  ms (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a)

$M$	$J[\infty]_{\text{dB}}$	$N_{\text{AEC}}$	$n_{-18 \text{ dB}}$	$\mu$
1	-19.01	415	$1.32 \times 10^5$	$8.0321 \times 10^{-5}$
2	-19.02	328	$9.14 \times 10^4$	$1.0089 \times 10^{-4}$
4	-19.03	319	$9.59 \times 10^4$	$1.0141 \times 10^{-4}$

sintéticos, a simulação de Monte-Carlo para  $T_R(60) = 300$  ms foi repetida utilizando sinais com não-estacionariedade semelhante a de sinais de fala reais. Para obter esses sinais não-estacionários, sinais de fala reais gravados utilizando sentenças foneticamente balanceadas em português brasileiro obtidas em Alcaim, Solewicz e Moraes (1992) e amostrados originalmente em 22.050 kHz ou 11.025 kHz<sup>2</sup> foram filtrados e decimados para obter sinais amostrados a 8 kHz (padrão PCM) e separados em intervalos de 20 ms. Cada intervalo teve sua variância estimada e trechos com variância menor que  $5 \times 10^{-3}$  foram classificados como períodos de silêncio e descartados. Os intervalos remanescentes foram concatenados para formar um conjunto de sinais não-estacionários, cada um com  $3.5 \times 10^5$  amostras. A Figura 5.9 mostra a média da potência de saída calculada a partir de 100 sinais não-estacionários para  $M = 2$ ,  $M = 4$  e  $\mu = 0.05\mu_{\text{crit}}$ . Esses resultados confirmam as previsões do modelo que ambos os projetos são capazes de atingir assintoticamente uma MOP de -19 dB e que a convergência mais rápida ocorre para a configuração com  $M = 4$ . O projeto final do sistema iria demandar

<sup>2</sup>Os sinais de fala foram obtidos de um banco de dados de sinais de fala cedidos generosamente pelo Prof. Abraham Alcaim do CETUC na PUC-Rio.

ajustes adicionais nos parâmetros para obter o nível de desempenho desejado em um ambiente real. Contudo, um número reduzido de simulações seria necessário já que uma configuração de parâmetros capaz de ponderar valores de  $M$ ,  $N_{\text{AEC}}$  e  $\mu$  mantendo um compromisso entre velocidade de convergência e baixo nível de eco residual já foi encontrada por meio do modelo analítico.

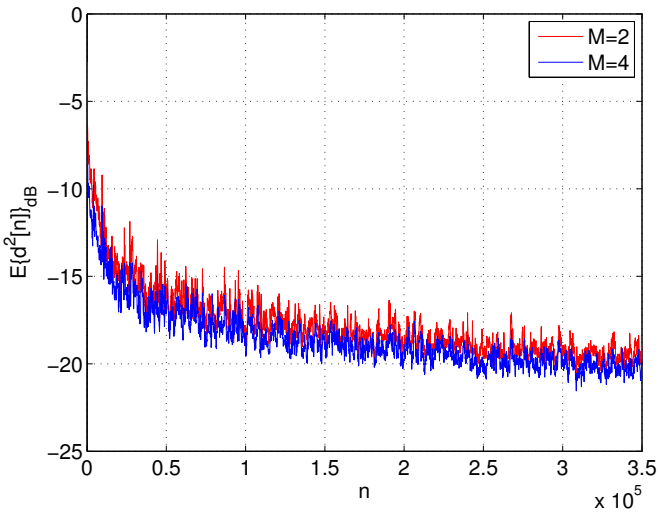


Figura 5.9: Simulação de Monte-Carlo avaliando a MOP para sinais não-estacionários baseados em sinais de fala reais com pausas removidas (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a).

### Exemplo de projeto 2

Considere um projeto no qual o objetivo principal é atingir uma ERLE de ao menos 10 dB (equivalente a uma MOP de  $-13$  dB) 1 segundo após o início da rodada do algoritmo para uma planta com tempo de reverberação  $T_R(60) = 200$  ms e taxa de amostragem  $f_s = 8192$  Hz. O ruído aditivo tem

Tabela 5.3: Parâmetros de projeto para o Exemplo de projeto 2 (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a)

$M$	$N_{\text{AEC}}$	$\mu$	$E\{d^2[\infty]\}_{\text{dB}}$
1	NP	NP	NP
2	NP	NP	NP
4	777	$3.9061 \times 10^{-5}$	-25.9493

uma potência  $-20$  dB menor que o sinal de *far-end* que tem potência unitária. Para o projeto, são considerados conjuntos de parâmetros com  $M = 1, 2$  ou  $4$  e um limite superior para o passo de adaptação  $\mu$  dado por  $\mu_{\text{max}} = 0.05\mu_{\text{crit}}$ . Para cada possibilidade de  $M$  os valores de  $J_{\text{ex}}[n]$  em  $n = 8192$  são calculados para  $512 \leq N_{\text{AEC}} \leq 1024$  e  $\mu_{\text{max}}/100 \leq \mu \leq \mu_{\text{max}}$  (100 valores distribuídos uniformemente) utilizando as Equações (3.64) e (3.69). Para cada valor possível de  $M$ , as soluções são avaliadas e, quando mais de uma solução satisfaz  $J[8192]_{\text{dB}} < -13$ , a configuração com a menor MOP em regime permanente é escolhida. Os resultados encontrados estão resumidos na Tabela 5.3 em que NP indica que não foram encontradas soluções que satisfazem o critério de  $J[8192]_{\text{dB}} < -13$ . Observa-se que a única configuração encontrada requer  $M = 4$  microfones. Projetos com 1 ou 2 microfones, que inicialmente iriam demandar uma grande quantidade de simulações, podem ser descartados diretamente a partir da avaliação do modelo. Para validar o resultado encontrado, o conjunto de parâmetros da Tabela 5.3 com 4 microfones foi avaliado por meio de uma simulação de Monte-Carlo e os resultados encontrados são mostrados na Figura 5.10.

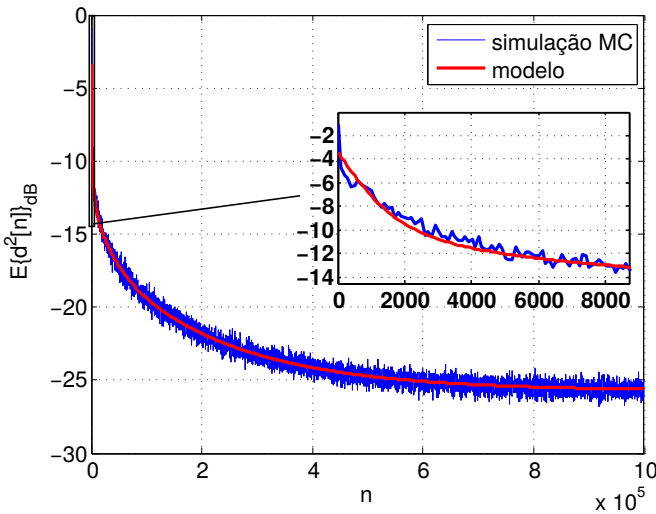


Figura 5.10: Comportamento transitório da MOP para o Exemplo de projeto 2 (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a).

### Exemplo de projeto 3

Nesse exemplo, considera-se um projeto no qual há flexibilidade na escolha do número de microfones mas uma restrição de  $N_{AEC} \leq 256$  é imposta devido à um limite na memória e área de *chip* disponível. O projeto visa cancelar o eco acústico de um ambiente típico de escritório com  $T_R(60) = 200$  ms atingindo uma MOP de  $-13$  dB em regime permanente para um nível de ruído  $-20$  dB menor que a potência do sinal do *far-end* que é gerado com potência unitária. Supondo uma taxa de amostragem  $f_s = 8192$ , o comprimento da resposta ao impulso das plantas LEM é de aproximadamente  $N_h = 1650$  coeficientes que é significativamente maior que o comprimento máximo permitido para o AEC. Restringindo os passos de adaptação para  $\mu_{\max} = 0.05\mu_{\text{crit}}$

### 5.3 Resultados para o AEC auxiliado por um arranjo de microfones na forma GSC213

Tabela 5.4: Parâmetros de projeto para o Exemplo de projeto 3 (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a)

$M$	$J[\infty]_{\text{dB}}$	$\mu$
1	NP	NP
2	NP	NP
3	-13.002348	$1.280061 \times 10^{-4}$
4	-13.114184	$1.265425 \times 10^{-4}$

que é um valor típico de projeto em aplicações reais (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p 534), os conjuntos de parâmetros de projeto capazes de satisfazer os requisitos de projeto são mostrados na Tabela 5.4 em que NP indica que não foram encontradas configurações factíveis com esse número de microfones. Os resultados obtidos determinam que são necessários pelo menos 3 microfones para atender os requisitos do projeto e que o uso de  $M = 4$  não acarreta em uma melhora significativa no desempenho em regime permanente (e aumenta o tempo de convergência do sistema).

### 5.3 Resultados para o AEC auxiliado por um arranjo de microfones na forma GSC

Essa seção apresenta simulações e exemplos de projeto para verificar a precisão do modelo desenvolvido no Capítulo 4 e mostrar sua viabilidade como ferramenta de auxílio ao projetista. Alguns resultados dessa seção encontram-se também em Maruo, Bermudez e Resende (2014b). Nas simulações dessa seção, o sinal de *far-end* foi aproximado por um processo autorregressivo  $\text{AR1}(a_1)$  exceto durante os testes com sinais de fala. Assume-

se que os coeficientes são adaptados durante um período de ausência de fala local na direção de interesse. As plantas LEM foram geradas a partir do procedimento descrito no Apêndice P assumindo um arranjo linear e uniforme de microfones, que resulta em respostas ao impulso espacialmente correlacionadas.

### 5.3.1 Verificação da precisão

#### Exemplo 1

A precisão do modelo desenvolvido no Capítulo 4 foi verificada utilizando simulações de Monte-Carlo para diversos conjuntos de parâmetros. Para economizar espaço, a Figura 5.11 mostra algumas dessas simulações para  $M = 2$  e plantas LEM  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_2$  com  $N_h = 128$  coeficientes. O conformador de feixe foi projetado com  $N_{BF} = 16$  mantendo uma resposta em frequência plana com fase linear sem atrasos em  $\theta_{DOA} = 0^\circ$ . O AEC teve comprimento arbitrado como  $N_{AEC} = 128$  coeficientes. Ruídos brancos Gaussianos de média nula e variância  $10^{-2}$  foram aplicados a cada microfone. As previsões do modelo (traçadas por meio de curvas vermelhas contínuas) mostram boa concordância com a simulação de Monte-Carlo (média de 300 realizações). Os valores da previsão de  $J[\infty]$  utilizando a Equação (4.61) são mostrados nas linhas vermelhas horizontais tracejadas.

#### Exemplo 2

Considere um sinal de *far-end* AR1(-0.9) com variância unitária,  $M = 2$  microfones, respostas ao impulso  $\mathbf{h}_0$  e  $\mathbf{h}_1$  com  $N_h = 500$  coeficien-

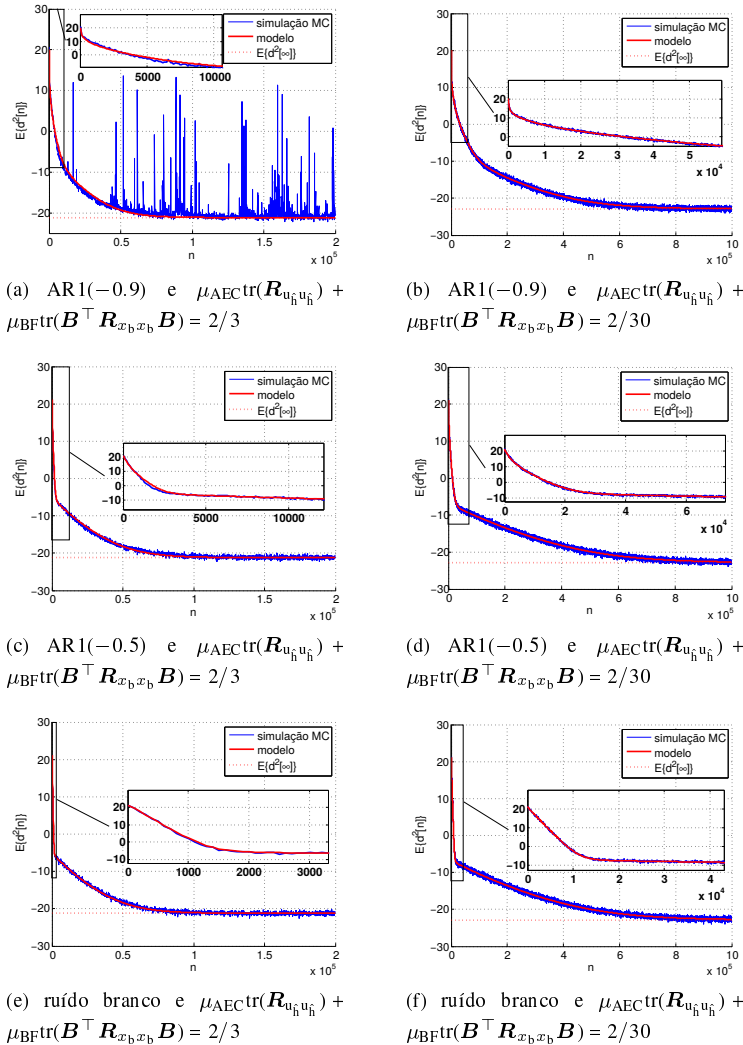


Figura 5.11: Comparação entre as previsões do modelo proposto e simulações de Monte-Carlo (média de 300 realizações) para sinais de *far-end* com diferentes estatísticas ( $M = 2$ ,  $N_h = 128$ ,  $F = 4$ ,  $N_{\text{BF}} = 16$ ,  $N_{\text{AEC}} = 128$ )



tes geradas de acordo com o procedimento descrito no Apêndice P. Ruídos brancos Gaussianos de média zero e variância  $10^{-2}$  foram aplicados a cada microfone. A direção de chegada do sinal de interesse  $\theta_{\text{DOA}}$  foi assumida no *broadside* do arranjo. O conformador de feixe adaptativo foi projetado com  $N_{\text{BF}} = 16$ , e  $N_{\text{C}} = 16$  restrições formando uma resposta em frequência plana com fase linear para  $\theta_{\text{DOA}}$  assumida no *broadside* do arranjo de microfones. O AEC foi projetado com  $N_{\text{AEC}} = N_{\text{h}} + N_{\text{BF}} - 1 = 515$  coeficientes. A Figura 5.12 mostra a MOP prevista pelo modelo (linhas escuras) e a simulação de Monte-Carlo (média de 20 realizações em linhas claras). A simulação de Monte-Carlo foi processada por um filtro de média móvel para melhorar a visualização. Duas configurações de parâmetros foram testadas  $[\mu_{\text{AEC}}, \mu_{\text{BF}}] = [2.6191 \times 10^{-4}, 0.0262]$  e  $[\mu_{\text{AEC}}, \mu_{\text{BF}}] = [3.9840 \times 10^{-4}, 0.0028]$ . A Figura 5.12 mostra uma excelente concordância entre previsão teórica e simulação. Contrário a resultados teóricos desenvolvidos para o algoritmo LMS, os resultados mostram que, com o uso da adaptação pela Equação (4.17), uma maior velocidade de convergência não implica em uma maior MOP em regime-permanente.

### Exemplo 3

Neste exemplo, deseja-se comparar o comportamento de um AEC auxiliado por um BF com otimização conjunta projetado utilizando 3 métodos diferentes. Deseja-se que o sistema utilize  $M = 2$  microfones, respostas ao impulso  $\mathbf{h}_0$  e  $\mathbf{h}_1$  com  $N_{\text{h}} = 500$  coeficientes geradas de acordo com o procedimento descrito no Apêndice P para um sinal de *far-end* AR1(-0.9)

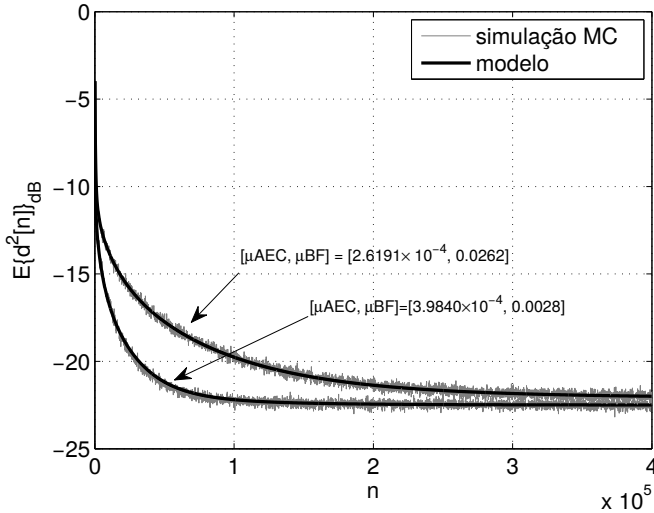


Figura 5.12: Comparação entre as previsões do modelo proposto e simulações de Monte-Carlo do Exemplo 2 (média de 20 realizações) para sinais de *far-end* AR1(-0.9) ( $M = 2$ ,  $N_h = 500$ ,  $F = 4$ ,  $N_{BF} = 16$ ,  $N_{AEC} = 515$ ) (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014b).

com variância unitária e um ruído aditivo branco Gaussiano de média nula e variância  $10^{-2}$ . O projeto deve utilizar  $N_{AEC} = N_h + N_{BF} - 1 = 515$  coeficientes e atingir um nível de eco residual em regime-permanente de  $E\{d^2[\infty]\}_{dB} = -22$ . A direção de chegada do sinal desejado é assumida em  $0^\circ$  garantida por meio de  $N_C = 16$  restrições e o BF tem uma memória de  $N_{BF} = 16$  coeficientes.

Três métodos de projeto são avaliados: o projeto com um único passo de adaptação ( $\mu_{AEC} = \mu_{BF}$ ), o projeto utilizando passos de adaptação diferentes de modo a minimizar o maior autovalor de  $\Phi_{\text{mod}}$  (que maximiza a velocidade de convergência da Equação (4.42)) e o projeto utilizando a ma-

triz de passo branqueadora da Equação (4.69). O AEC foi inicializado no vetor nulo e o BF em  $\mathbf{b}[0] = \mathbf{b}_f$ . O primeiro projeto resultou em  $\mu_{\text{AEC}} = \mu_{\text{BF}} = 7.0983 \times 10^{-4}$  e o segundo projeto resultou em  $\mu_{\text{AEC}} = 9.0628 \times 10^{-4}$  e  $\mu_{\text{BF}} = 1 \times 10^{-2}$ . Utilizando o modelo de comportamento, observou-se que o projeto com a matriz de passo branqueadora apresenta a convergência mais rápida seguido pelo segundo projeto e a convergência mais lenta é obtida com os passos de adaptação iguais. A previsão dos modelos foi comparada com a simulação de Monte-Carlo (média de 20 realizações) apresentando boa concordância. Os resultados são mostrados na Figura 5.13.

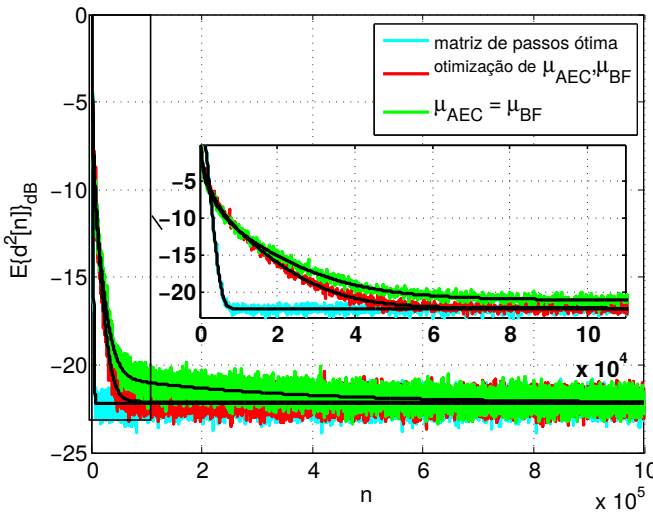


Figura 5.13: Comparação entre as previsões do modelo proposto e simulações de Monte-Carlo do Exemplo 3 (média de 20 realizações) para sinais de *far-end* AR1(-0.9) ( $M = 2$ ,  $N_h = 500$ ,  $F = 4$ ,  $N_{\text{BF}} = 16$ ,  $N_{\text{AEC}} = 515$ ) (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014b)

#### Exemplo 4

O modelo do comportamento estatístico derivado no Capítulo 4 utilizou hipóteses simplificadoras que assumem estacionariedade dos sinais de entrada e plantas LEM invariantes no tempo. Contudo, modelos estatísticos derivados sob hipóteses semelhantes são capazes de reter informação suficiente sobre o processo adaptativo para fornecer informação sobre tendências do comportamento para baixos níveis de não-estacionariedade, particularmente quando os efeitos do ruído de estimação do gradiente (*tap-weight error vector*) predominam sobre o efeito do atraso no vetor de coeficientes (*weight vector lag*) (HAYKIN, 1993, p 348). Para mostrar a viabilidade do modelo em um ambiente não estacionário, simulações com 3 graus de não-estacionariedade são propostas. Os sistemas são projetados para  $M = 2$  microfones, sinais de *far-end* modelados por processos  $AR1(-0.9)$  com média nula e variância unitária, sinais dos microfones corrompidos por ruídos brancos Gaussianos de média nula e variância  $10^{-2}$ , taxa de amostragem de  $f_s = 8000$  Hz, tempo de reverberação de  $T_R(60) = 100$  ms resultando em comprimentos de planta LEM  $N_h > f_s T_R(60) = 800$ . Portanto, um comprimento das plantas LEM  $N_h = 1024$  coeficientes foi escolhido. A direção de chegada é assumida em  $\theta_{DOA} = 0^\circ$  com  $N_C = 16$  restrições garantindo uma resposta em frequência plana e de fase linear. O BF é implementado com  $N_{BF} = 16$  coeficientes por filtro. O AEC é projetado com  $N_{AEC} = N_h + N_{BF} - 1 = 1039$  coeficientes e passos de adaptação  $\mu_{AEC} = \mu_{BF} = 3.1612 \times 10^{-4}$ . Finalmente, os graus de não estacionariedade  $\chi = \{0.01, 0.1, 0.5\}$  são avaliados e a variância

das plantas LEM é calculada utilizando a Equação (5.3). Os resultados comparando as previsões do modelo e as simulações de Monte-Carlo são mostrados na Figura 5.14. Para graus de não-estacionariedade mais elevados, o comportamento do sistema se distancia das previsões teóricas. Contudo, as previsões ainda são capazes de fornecer informação relevante para inicializar o processo de busca de parâmetros de projeto.

### 5.3.2 Exemplos de Projeto

Essa seção apresenta dois exemplos de projeto para demonstrar a utilidade do modelo desenvolvido no auxílio ao projeto de sistemas reais.

#### Exemplo de projeto 1

Considere um sistema de cancelamento de ecos acústicos para um ambiente com tempo de reverberação  $T_R(60) = 60$  ms (típico de um automóvel) e um nível de potência de ruído  $-20$  dB menor que a potência unitária do sinal de *far-end*. Nesse projeto, a direção de chegada é  $\theta_{DOA} = 0^\circ$  e uma resposta em frequência plana com fase linear sem atrasos na direção desejada são assumidas. A resposta em frequência para  $\theta_{DOA}$  é garantida por meio de  $N_C = 16$  restrições lineares projetadas de acordo com o procedimento descrito no Apêndice A e em Frost III (1972). O objetivo do projeto é obter um sistema capaz de atingir um nível de potência residual menor que  $J[n]_{dB} < -20$  em um tempo menor que 2 s (avaliado na amostra  $n = 1.5E4$ ).

Para o projeto, foi considerada uma frequência de amostragem de  $f_s = 8000$  e o modelo de restrições do Apêndice A com  $N_C = 16$  restrições

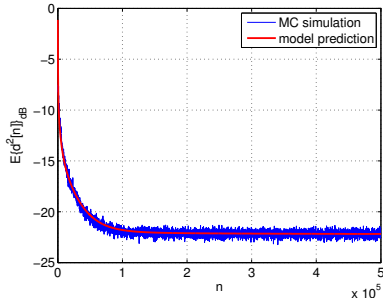
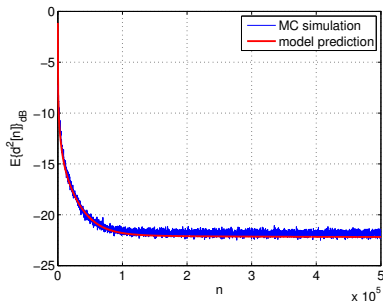
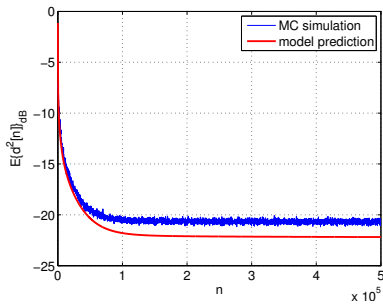
(a)  $\eta = 0.01$ (b)  $\eta = 0.1$ (c)  $\eta = 0.5$ 

Figura 5.14: Simulação de Monte-Carlo para o Exemplo 4 (média de 100 realizações)

e filtros do conformador de feixe com comprimento  $N_{BF} = 16$ . As respostas das plantas LEM devem conter pelo menos  $N_h > f_s T_R(60) = 480$  coeficientes e portanto um valor de  $N_h = 500$  foi arbitrado. Durante o projeto, assume-se que a adaptação dos coeficientes ocorre de acordo com a Equação (4.15). Assim, os parâmetros de projeto são  $M$ ,  $N_{AEC}$ ,  $\mu_{AEC}$  e  $\mu_{BF}$ . Desses parâmetros,  $M$  e  $N_{AEC}$  afetam a complexidade computacional por iteração e são considerados mais importantes nesse projeto. Para esse fim, a Figura 5.15 mostra os valores de  $J[\infty]$  em função de  $M$  e  $N_{AEC}$  para  $M = \{2, 4\}$  e  $N_{AEC} = 290, \dots, 515$  das soluções que são capazes de satisfazer  $J[1.5E4]_{dB} < -20$ . Os valores de  $J[1.5E4]$  foram avaliados utilizando as Equações (4.42) e (4.56) para  $n = 1.5E4$  na Equação (4.57) para 100 valores de  $\text{tr}(\mathcal{M}\mathbf{R}_{\text{mod}})$  variando uniformemente entre  $2/300$  a  $2/3$ . Quando múltiplas soluções, para mesmo  $M$  e  $N_{AEC}$  são encontradas, o valor de  $J[\infty]$  é avaliado por meio das Equações (4.57) e (4.61) e a solução com menor potência em regime permanente é escolhida.

A partir da Figura 5.15, duas soluções candidatas que levam a  $J[\infty] \approx -21.5$  dB foram selecionadas. Os parâmetros encontrados são mostrados na Tabela 5.5. Para avaliação das soluções na Tabela 5.5 foram utilizados

Tabela 5.5: Parâmetros para o Exemplo de Projeto 1

$M$	$N_{AEC}$	$\mu_{AEC}$	$\mu_{BF}$	$J[\infty]$
2	405	$9.7778E-04$	$6.4603E-04$	-21.54 dB
4	290	$9.1034E-04$	$1.6969E-04$	-21.5 dB

sinais de *far-end* não-estacionários produzidos da mesma maneira descrita na Subseção 5.2.3 a partir de sinais de fala real com pausas removidas. Cada

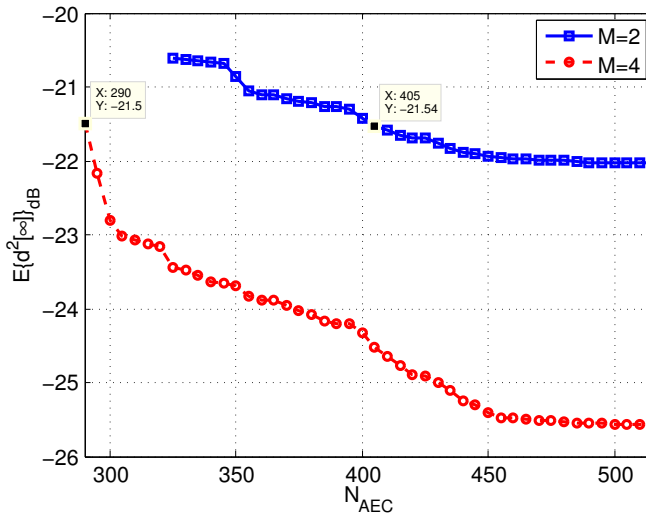


Figura 5.15: MOP em regime-permanente  $E\{d^2[\infty]\}$  em função de  $N_{\text{AEC}}$  para diferentes valores de  $M$ . O sinal de *far-end* é um sinal  $\text{AR1}(-0.9)$  e a potência do ruído é  $10^{-2}$ .



solução foi avaliada por meio de simulações de Monte-Carlo (50 realizações). O resultado médio para cada solução proposta é mostrado na Figura 5.16.

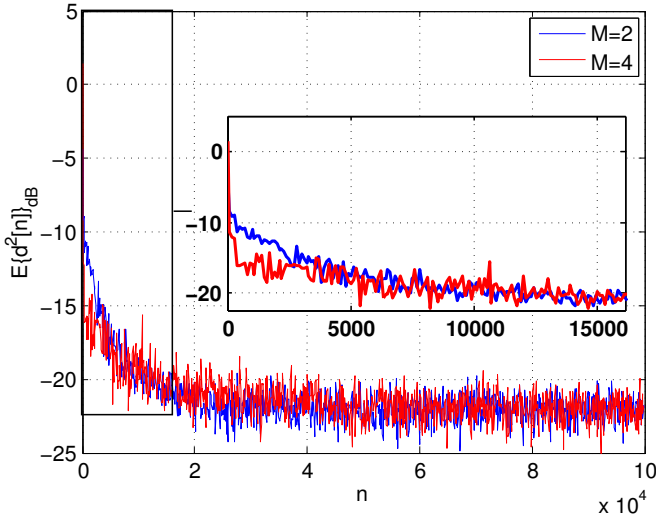


Figura 5.16: Simulação de Monte-Carlo do Exemplo de projeto 1 utilizando sinais de fala com pausas removidas (média de 50 realizações)

Observa-se da Figura 5.16 que as previsões do modelo, realizadas com um sinal estacionário e relativamente simples, guardam informação suficiente para um projeto mais realista. Ambas as soluções propostas foram capazes de atingir  $J[1.5E4]_{\text{dB}} \approx -20$  e uma MOP em regime permanente menor que  $-21.5$  dB.

### Exemplo de projeto 2

Para o exemplo de projeto 2, deseja-se avaliar o comportamento do sistema BF-AEC em diferentes estados da lógica de controle de *double-talk*. Para isso, a convergência do sistema foi dividida em intervalos com diferen-

tes estatísticas dos sinais de entrada e mudanças abruptas nas respostas da planta LEM. Durante o projeto, assume-se a disponibilidade de um detector de *double-talk* ideal. Nesse exemplo, considera-se o projeto de um sistema de cancelamento de eco auxiliado por arranjo de microfones para uma sala com tempo de reverberação de  $T_R(60) = 100$  ms. Para garantir uma qualidade de sinal compatível com a rede (PSTN), a taxa de amostragem  $f_s = 8000$  foi escolhida resultando em comprimentos da resposta ao impulso da planta LEM  $N_h > T_R(60)f_s = 800$ . Portanto, um comprimento de  $N_h = 1000$  foi utilizado. Para essa taxa de amostragem e considerando os requisitos de máximo atraso entre a captação da voz e a interface de rede descrita em ITU-T P.341 (2011), assume-se que uma resposta em frequência na direção desejada satisfatória pode ser obtida utilizando  $N_C = 16$  restrições e filtros do BF com  $N_{BF} = 16$  coeficientes. Logo, um cancelador de eco com  $N_{AEC} = N_h + N_{BF} - 1 = 1015$  foi utilizado. O projeto supõe a disponibilidade de um arranjo com  $M = 2$  microfones. Durante as primeiras  $10^6$  iterações, assume-se uma direção de chegada do sinal de interesse em  $\theta_{DOA} = \pi/4$  e ausência de sinais de fala local. Nesse período, a adaptação ocorre de acordo com a otimização conjunta com passos de adaptação  $\mu_{AEC} = \mu_{BF} = 8.2147 \times 10^{-5}$ . Após esse período inicial, um sinal de fala local modelado por um processo AR1(-0.9) com potência unitária incide em  $\theta = 0^\circ$  durante as próximas  $5.10^5$  amostras. Supõe-se que a estimativa da direção do sinal de fala local e a atualização das matrizes de restrição e bloqueio ocorre imediatamente. Durante esse período, somente o BF sofre adaptação. A atualização dos coeficientes do AEC é paralisada ( $\mu_{AEC} = 0$ ) e o passo do BF é alterado para  $\mu_{BF} = 8.2147 \times 10^{-5}$ .

Para a previsão utilizando o modelo, um passo  $\mu_{\text{AEC}} = 10^{-15} \approx 0$  foi utilizado para manter a matriz de passos  $\mathcal{M}$  definida positiva. Durante as  $10^6$  amostras seguintes, o sinal de *near-end* é retirado e, dado que o BF foi adaptado no período anterior, considera-se que os coeficientes do conformador de feixes estão em uma solução razoável e os passos de adaptação são alterados para  $\mu_{\text{AEC}} = 9.3243 \times 10^{-5}$  e  $\mu_{\text{BF}} = 10^{-7}$ . Durante o último período da simulação, as plantas LEM são submetidas a uma mudança abrupta, como por exemplo a mudança causada pela abertura de uma porta ou janela em um ambiente de escritório, e a simulação durante as últimas  $10^6$  amostras é realizada com uma nova matriz de respostas ao impulso de plantas LEM  $\mathbf{H}$ . Assumindo novamente que a lógica de controle funciona de maneira ideal, a mudança nas plantas LEM é percebida instantaneamente e os passos de adaptação são atualizados para  $\mu_{\text{AEC}} = \mu_{\text{BF}} = 9 \times 10^{-5}$  visando acelerar a convergência (TOURNERET; BERSHAD; BERMUDEZ, 2009). Durante as mudanças entre os estados da lógica de controle, o modelo da Equação (4.41) é inicializado a partir da solução média do período anterior  $\mathbf{R}_{\psi\psi}[n_{\text{trans}_i} - 1] = (\psi[n_{\text{trans}_i}] - \psi_{\text{opt}})(\psi[n_{\text{trans}_i}] - \psi_{\text{opt}})^{\top}$  em que  $n_{\text{trans}_i}$  indica a amostra na qual a lógica de controle é alterada para corresponder ao  $i$ -ésimo estado. A Figura 5.17 mostra as previsões do modelo e a simulação de Monte-Carlo (média de 50 realizações). Esse exemplo de projeto mostra a capacidade do modelo proposto de identificar tendências do comportamento do algoritmo, em diferentes estados da lógica de controle, que podem ser úteis no projeto de sistemas reais

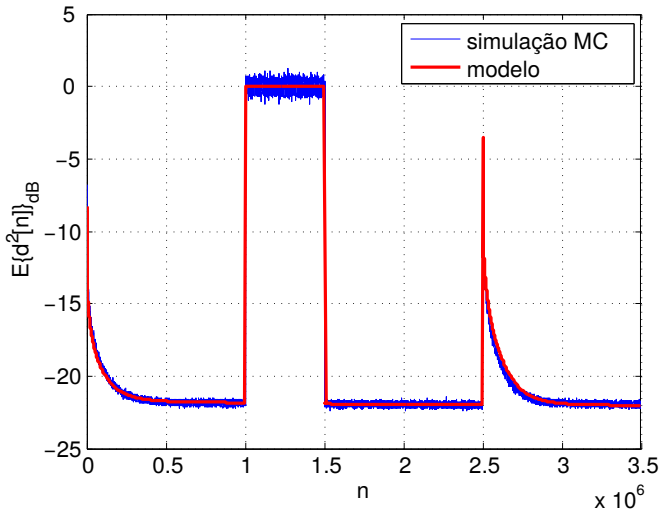


Figura 5.17: Previsão do modelo e simulação de Monte-Carlo para o Exemplo de projeto 2

## 5.4 Resumo

Neste capítulo foram apresentados resultados de simulações e procedimentos numéricos visando ilustrar a validade dos modelos analíticos desenvolvidos nos capítulos anteriores e sua utilidade para o projeto de sistemas reais. Os modelos foram inicialmente testados em cenários em que as hipóteses simplificadoras são aproximadamente satisfeitas para avaliar a sua acurácia. Posteriormente, os modelos foram utilizados para prever o comportamento do algoritmo em situações típicas de projeto com efeitos de não-estacionariedade. Apesar dos modelos desse trabalho não considerarem efeitos de não-estacionariedade, as previsões são confrontadas com simulações utilizando plantas LEM que se modificam segundo um modelo de cami-

nhada aleatória (*random-walk*) e sinais de voz reais com pausas removidas. Para demonstrar a viabilidade dos modelos desenvolvidos, alguns exemplos de projeto são apresentados e suas previsões são comprovadas por meio de simulações de Monte-Carlo.

## 6 DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Neste trabalho foi realizada a análise estatística de uma classe de algoritmos de otimização LCMV adaptativa vislumbrando aplicações no cancelamento de eco acústico auxiliado por um arranjo de microfones na estrutura BF-AEC. Os algoritmos realizam o processo de otimização em funções custo baseadas na potência média de saída que conserva algumas propriedades matemáticas do MSE. Esses algoritmos apresentam o potencial de obter soluções com desempenho superior a soluções que utilizam apenas um microfone na captação dos sinais de entrada conforme discutido em Maruo, Bermudez e Resende (2011) e Kallinger, Bitzer e Kammeyer (2000). Entretanto, sua convergência é relativamente mais complexa devido à interação entre a convergência do cancelador de eco e do conformador de feixe.

O problema foi modelado concatenando os coeficientes de ambos os filtros adaptativos em um único vetor de entrada de maneira que sua superfície de desempenho é um caso particular de uma superfície de desempenho LCMV para conformadores de feixe de banda larga. Esse artifício matemático permitiu o uso da solução adaptativa por meio do algoritmo CLMS (FROST III, 1972) e de resultados teóricos anteriores desenvolvidos em Frost III (1972) e Godara e Cantoni (1986). Apesar do estudo em Godara e Cantoni (1986) ter sido desenvolvido buscando um modelo para previsão do comportamento de BFs de banda estreita, observa-se que seus resultados podem ser facilmente generalizados para BFs de banda larga. Contudo, no modelo de Godara e Cantoni (1986) há dependência das estatísticas de segunda-

ordem do processo adaptativo em relação a estatísticas de primeira-ordem. A análise da MOP por meio desse modelo tornaria a análise da convergência excessivamente complexa. Assim, decidiu-se pela modelagem do comportamento de segunda-ordem dos coeficientes por meio do vetor de erro nos coeficientes que elimina a dependência em relação a estatísticas de primeira-ordem.

Em um primeiro momento, é realizada a análise do comportamento de um sistema com conformadores de feixe implementados na forma direta e adaptação simultânea do AEC e do BF utilizando um único passo de adaptação. Essa estratégia de adaptação é equivalente ao algoritmo CLMS proposto em Frost III (1972) com o vetor de entrada adaptado. Modelos determinísticos foram derivados para modelar o comportamento da matriz de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes do filtro adaptativo formado pela concatenação dos coeficientes do AEC e BF, a potência média de saída e as constantes de tempo de cada modo de convergência. O estudo assume que o algoritmo opera em um ambiente estacionário. A análise da convergência permite a comprovação da conjectura proposta em Kallinger, Bitzer e Kammerer (2000) de que é possível o projeto de canceladores de eco auxiliados por arranjos de microfones com diminuição do número de coeficientes dos canceladores de eco mantendo o mesmo desempenho de canceladores de eco com um único microfone e mesmo número de coeficientes da planta desconhecida. Por meio da análise de convergência foram obtidas previsões teóricas para o limite de estabilidade do passo de adaptação, do comportamento da correlação do vetor de erro nos coeficientes em regime-permanente,

da potência média de saída em regime-permanente e das constantes de tempo de cada modo de convergência do algoritmo.

A seguir desenvolveu-se o estudo do algoritmo de adaptação conjunta do AEC e BF na forma GSC. Sob condições específicas, descritas no Apêndice D, o comportamento dessa estrutura pode ser inferido diretamente a partir do modelo de comportamento com conformadores de feixe implementados na forma direta (BUCKLEY, 1986; GRIFFITHS; JIM, 1982). Contudo, a análise desenvolvida contempla o uso de passos de adaptação diferentes no AEC e no BF, em que a equivalência descrita em Buckley (1986) não é válida. Para realizar a análise de convergência dessa configuração, foi necessária uma metodologia alternativa para a diagonalização das matrizes de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes baseada em uma equivalência entre um algoritmo LMS e uma adaptação baseada no LMS mas utilizando uma matriz de passos definida positiva descrita em Dallinger e Rupp (2009). Modelos determinísticos foram derivados para modelar o comportamento da matriz de autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes da componente não-restrita do filtro adaptativo formado pela concatenação dos coeficientes do AEC e BF e da potência média de saída. Novamente, o estudo assume que o algoritmo opera em um ambiente estacionário. Por meio da análise de convergência foram obtidas previsões teóricas para o limite de estabilidade da combinação linear dos passos de adaptação, do comportamento da correlação do vetor de erro nos coeficientes em regime-permanente e da potência média de saída em regime-permanente. Baseado nos resultados do modelo, foi proposto um algoritmo alternativo visando maximizar a velocidade de convergência por



meio do uso de uma matriz de passo ou matriz de bloqueio capaz de descorrelacionar o vetor de entrada.

Para validação dos modelos, simulações comparativas são apresentadas mostrando uma boa concordância entre o comportamento previsto segundo os modelos propostos e simulações de Monte-Carlo. A utilidade dos modelos como uma ferramenta de auxílio ao projeto é comprovada por meio de exemplos de projeto. Nesses exemplos observa-se que informações relevantes sobre os parâmetros podem ser extraídas por meio do modelo diminuindo o tempo, custo e esforço necessário para o projeto de maneira significativa. Outros exemplos de projeto visam demonstrar a utilidade do modelo proposto em condições que violam as hipóteses simplificadoras. Nesses exemplos, o sistema foi projetado utilizando o modelo desenvolvido para sinais estacionários mas sua avaliação foi realizada utilizando plantas LEM não estacionárias em um primeiro momento e sinais com não-estacionariedades semelhantes a sinais de voz posteriormente.

### 6.1 Propostas para continuação do trabalho

- Estudo do comportamento da estrutura na forma direta com passos distintos: De maneira análoga à realizada para a estrutura GSC, a adaptação de  $w[n]$  utilizando uma matriz de passos resulta na recursão

$$w[n+1] = P_e(w[n] - \mathcal{M}_{DF}s[n]d[n]) + w_f. \quad (6.1)$$

em que  $\mathcal{M}_{DF}$  é uma matriz de passos  $N_w \times N_w$ -dimensional simétrica e definida positiva. Utilizando a mesma metodologia utilizada para

a obtenção da Equação (3.47), a autocorrelação do vetor de erro nos coeficientes da Equação (6.1) é

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{vv}}[n+1] &= \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{P}_e - \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathcal{M}_{\text{DF}} \mathbf{P}_e \\ &- \mathbf{P}_e \mathcal{M}_{\text{DF}} \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{P}_e + 2 \mathbf{P}_e \mathcal{M}_{\text{DF}} \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathcal{M}_{\text{DF}} \mathbf{P}_e \\ &+ \mathbf{P}_e \mathcal{M}_{\text{DF}} \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathcal{M}_{\text{DF}} \mathbf{P}_e [\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{R}_{\text{vv}}[n]) + J_{\min}]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Observa-se que o mesmo artifício matemático utilizado no Capítulo 4 para a diagonalização da Equação (6.2) não é aplicável diretamente. Contudo, se  $\mathcal{M}_{\text{DF}}$  é escolhida cuidadosamente para que  $\mathcal{M}_{\text{DF}} \mathbf{P}_e = \mathbf{P}_e \mathcal{M}_{\text{DF}}$ , a Equação (6.2) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{vv}}[n+1] &= \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] - \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{P}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e \mathcal{M}_{\text{DF}} \\ &- \mathcal{M}_{\text{DF}} \mathbf{P}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] + 2 \mathcal{M}_{\text{DF}} \mathbf{P}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{P}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e \mathcal{M}_{\text{DF}} \\ &+ \mathcal{M}_{\text{DF}} \mathbf{P}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e \mathcal{M}_{\text{DF}} [\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{R}_{\text{vv}}[n]) + J_{\min}] \end{aligned}$$

Realizando a fatoração de Cholesky de  $\mathcal{M}_{\text{DF}} = \mathbf{L}_{\text{DF}} \mathbf{L}_{\text{DF}}^\top$  e definindo

$$\mathbf{R}_{\text{vvDF}}[n] = \mathbf{L}_{\text{DF}}^{-1} \mathbf{R}_{\text{vv}}[n] \mathbf{L}_{\text{DF}}^{-\top} \text{ e } \mathbf{R}_{\text{ssDF}} = \mathbf{L}_{\text{DF}}^\top \mathbf{P}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{P}_e \mathbf{L}_{\text{DF}} \text{ tem-se}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{vvDF}}[n+1] &= \mathbf{R}_{\text{vvDF}}[n] - \mathbf{R}_{\text{vvDF}}[n] \mathbf{R}_{\text{ssDF}} - \mathbf{R}_{\text{ssDF}} \mathbf{R}_{\text{vvDF}}[n] \\ &+ 2 \mathbf{R}_{\text{ssDF}} \mathbf{R}_{\text{vvDF}}[n] \mathbf{R}_{\text{ssDF}} + \mathbf{R}_{\text{ssDF}} [\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{R}_{\text{vv}}[n]) + J_{\min}]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Embora a Equação (6.3) seja facilmente diagonalizável a partir da decomposição em autovalores de  $\mathbf{R}_{\text{ssDF}}$ , tanto  $\mathbf{R}_{\text{ssDF}}$  quanto  $\mathbf{R}_{\text{vvDF}}[n]$  são matrizes singulares. Nesse caso, um estudo mais detalhado de suas

propriedades é necessário antes de prosseguir na análise.

- Estudo em ambiente não-estacionário: O estudo da estrutura BF-AEC em ambiente não-estacionário é particularmente desafiador mesmo para os modelos de não-estacionariedade mais simples. Frequentemente, o estudo de não-estacionariedades em canceladores de eco mantém o sinal de *far-end* estacionário e utiliza um modelo de *random-walk* para variações na resposta ao impulso da planta LEM (HAYKIN, 1993; MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000; SAYED, 2008; de ALMEIDA; BERMUDEZ; BERSHAD, 2009; de ALMEIDA et al., 2005). Contudo, no estudo de sistemas BF-AEC, mudanças nas plantas LEM causam não-estacionariedades no sinal de entrada dos conformadores de feixe. Portanto, a modelagem teria que contemplar ao mesmo tempo não-estacionariedades em uma parcela do sinal de entrada e na planta desconhecida. Apenas recentemente surgiram resultados teóricos no tratamento desse tipo de não-estacionariedade (BERSHAD; BERMUDEZ, 2011; BERSHAD; EWEDA; BERMUDEZ, 2014);
- Estudo do efeito de mudanças na direção de chegada do sinal desejado: Durante o estudo desse trabalho, a direção de chegada do sinal desejado é assumida fixa. Contudo, em uma teleconferência típica, o sistema de cancelamento de eco teria que se adaptar à pequenas mudanças na posição do usuário além de mudanças abruptas como uma troca no usuário desejado. O efeito de variações na direção de chegada torna as Equações (3.32), (3.48), (4.18) e (4.19) inválidas e portanto uma nova

análise é necessária.

- Estudo de outros algoritmos de adaptação
  - Normalização da potência do sinal de entrada: Algoritmos baseados no LMS utilizam uma atualização proporcional a  $\mu s[n]d[n]$  que é diretamente proporcional ao vetor de dados de entrada  $s[n]$ . Portanto, quando a potência de  $s[n]$  é alta, o algoritmo sofre de amplificação do ruído na estimação do gradiente. Para sinais de voz, em que a diferença de potência entre trechos diferentes pode ser maior que 20 vezes (HÄNSLER; SCHMIDT, 2004), o uso de algoritmos sem normalização pode levar a projetos excessivamente conservadores;
  - *Generalized echo and interference canceler* (GEIC), APA: O uso de outros algoritmos em que o termo de atualização dispõe de informação adicional podem levar a ganhos interessantes de velocidade de convergência.



## APÊNDICE A – RESTRIÇÕES PARA $\theta_{\text{DOA}} = 0$

O vetor de *steering* da Equação (2.33) para  $\theta_{\text{DOA}} = 0$  é expresso por

$$\boldsymbol{\eta}(e^{j\omega}, 0) = [1 \quad \dots \quad 1 \quad e^{j\omega} \quad \dots \quad e^{j\omega} \quad \dots \quad e^{j\omega(N_{\text{BF}}-1)} \quad \dots \quad e^{j\omega(N_{\text{BF}}-1)}]^\top. \quad (\text{A.1})$$

Portanto, a resposta do arranjo, segundo a Equação (2.31), é

$$\begin{aligned} P(e^{j\omega}, 0) &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N_{\text{BF}}-1} e^{-j\omega i} b_{m_i} \\ &= \sum_{i=0}^{N_{\text{BF}}-1} e^{-j\omega i} \sum_{m=0}^{M-1} b_{m_i}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Na construção de restrições para sistemas de cancelamento de eco auxiliado por arranjo de microfones, deseja-se que o conformador de feixe apresente um comportamento fixo para  $\theta_{\text{DOA}} = 0$ . Supondo que a resposta em frequência desejada possa ser modelada por meio da resposta em frequência de um filtro FIR linear então a resposta ao impulso desse filtro é

$$f[n] = \sum_{i=0}^{N_{\text{BF}}-1} f_i \delta[n-i] \quad (\text{A.3})$$

e sua resposta em frequência é

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{i=0}^{N_{\text{BF}}-1} f_i e^{-j\omega i}. \quad (\text{A.4})$$

Para que a resposta do arranjo em  $\theta_{\text{DOA}} = 0$  seja equivalente à resposta em frequência do filtro descrita pela Equação (A.4), é necessário que  $P(e^{j\omega}, 0) =$

$F(e^{j\omega})$ , ou seja

$$\sum_{i=0}^{N_{\text{BF}}-1} \left( \sum_{m=0}^{M-1} b_{m_i} \right) e^{-j\omega i} = \sum_{i=0}^{N_{\text{BF}}-1} f_i e^{-j\omega i}.$$

Portanto, para qualquer valor de  $\omega$ , tem-se

$$\sum_{m=0}^{M-1} b_{m_i} = f_i, \quad i = 0, \dots, N_{\text{BF}} - 1. \quad (\text{A.5})$$

Uma outra determinação da Equação (A.5) baseada no princípio de equivalência do conformador de feixe com um único filtro FIR quando o sinal incide no *broadside* ( $\theta_{\text{DOA}} = 0$ ) é apresentada em Frost III (1972). O termo *broadside* se origina na era da navegação quando os navios de batalha tinham uma grande quantidade de canhões posicionados em ambos os lados do casco. O disparo de todas as armas em um dos lados do navio era conhecido como *broadside*. Devido à tecnologia da época, os canhões eram altamente imprecisos e seu baixo poder de penetração obrigava as embarcações a navegar próximas a seus alvos para que seus disparos fossem efetivos. Os disparos então eram feitos quando as embarcações estivessem aproximadamente emparelhadas para maximizar o número de canhões em condições ideais de disparo. Analogamente, quando o sinal incide no *broadside*, a linha dos sensores (canhões) está ortogonal à linha que une o centro do arranjo e a fonte desejada (alvo).

Assim, para uma direção de chegada frontal, a soma dos coeficientes associados a um atraso de  $i$  amostras deve ser igual ao  $i$ -ésimo coeficiente da resposta ao impulso desejada. Definindo o conjunto de vetores  $\mathbf{c}_i$  de di-

mensão  $(M \times N_{\text{BF}}) \times 1$ ,  $i = 0, \dots, N_{\text{BF}} - 1$

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \\ \vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \\ \vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} M \\ \vdots \\ M \\ i\text{-ésimo grupo de } M \text{ elementos} \\ M \\ \vdots \\ M \end{array} \quad (\text{A.6})$$

pode-se escrever  $\mathbf{C}$  como

$$\mathbf{C} \triangleq \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{c}_0 & \cdots & \mathbf{c}_i & \cdots & \mathbf{c}_{N_{\text{BF}}-1} \end{array} \right] \quad (\text{A.7})$$



tal que a condição da Equação (A.5) pode ser escrita na forma matricial

$$\mathbf{C}^\top \mathbf{b} = \mathbf{f} \quad (\text{A.8})$$

em que  $\mathbf{f}$  é definido por

$$\mathbf{f} = [f_0 \quad f_1 \quad f_{N_{\text{BF}}-1}]^\top. \quad (\text{A.9})$$

Observa-se que as restrições para o conformador de feixe de banda estreita podem ser construídas a partir da Equação (A.8) quando  $N_{\text{BF}} = 1$ .

## APÊNDICE B – RESTRIÇÕES PARA $\theta_{DOA} \neq 0$

A matriz de restrições e o vetor de resposta em frequência para ângulos diferentes de  $\theta_{DOA} = 0$  podem ser obtidos pelo método de Buckley (1987). Inicialmente, define-se um número de restrições inicial  $N_f$  que pode ser diferente de  $N_{BF}$ . O vetor de resposta em frequência desejada  $\mathbf{f}_{N_f}(e^{j\omega})$  nas frequências escolhidas pode ser expresso por

$$\mathbf{f}_{N_f}(e^{j\omega}) = [F^*(e^{j\omega_0}) \quad F^*(e^{j\omega_1}) \quad \dots \quad F^*(e^{j\omega_{N_f-1}})]^H. \quad (\text{B.1})$$

em que  $F(e^{j\omega_i})$  indica a resposta em frequência desejada em  $\omega = \omega_i$ ,  $(\cdot)^H$  indica o operador Hermitiano e  $(\cdot)^*$  indica o operador de conjugação complexa.

O método de geração de restrições de Buckley (1987) é mais flexível na definição da resposta em frequência na direção desejada quando comparado com as restrições para  $\theta_{DOA} = 0$  descritas em (FROST III, 1972). Ao contrário do método descrito no Apêndice anterior, o método não exige que a resposta do conformador de feixe na direção desejada seja realizável por um filtro FIR linear com comprimento  $N_{BF}$ .

A resposta em frequência na direção desejada é garantida pela restrição linear

$$\mathbf{C}_{N_f}^\top \mathbf{b} = \mathbf{f}_{N_f}(e^{j\omega}) \quad (\text{B.2})$$

em que

$$\mathbf{C}_{N_f} = [\boldsymbol{\eta}(e^{j\omega_1}, \theta_{DOA}) \quad \dots \quad \boldsymbol{\eta}(e^{j\omega_{N_f-1}}, \theta_{DOA})]. \quad (\text{B.3})$$

Em geral, uma aproximação razoável da resposta em frequência desejada é obtida quando  $N_f \gg N_{\text{BF}}$ , o que requer o armazenamento de uma matriz complexa muito maior do que a matriz real obtida para  $\theta_{\text{DOA}} = 0$ . Em Buckley (1987) é proposta a utilização de uma decomposição SVD para obter uma aproximação da Equação (B.2) com redução de ordem e minimizando o erro quadrático médio da resposta em frequência obtida.

Para vetores de coeficientes reais, o tratamento das restrições pode utilizar um passo intermediário que transforma  $\mathbf{C}_{N_f}$  e  $\mathbf{f}_{N_f}(e^{j\omega})$  em uma matriz e um vetor reais respectivamente. Se esse passo intermediário for tomado, evita-se a obtenção de matrizes de restrição e vetores de resposta em frequência complexos (BUCKLEY, 1987). Isso pode ser feito, por exemplo, pela separação em suas componentes reais e imaginárias. A matriz de restrição resultante é

$$\mathbf{C}_{\mathbf{R}} = \left[ \Re\{\mathbf{C}_{N_f}\}^{\top} \quad \Im\{\mathbf{C}_{N_f}\}^{\top} \right]^{\top} \quad (\text{B.4})$$

em que  $\Re\{\cdot\}$  indica o operador de extração da parte real e  $\Im\{\cdot\}$  indica o operador de extração da parte imaginária. Analogamente, o vetor de resposta em frequência na direção desejada associado à matriz de restrição da Equação (B.4) é dado por

$$\mathbf{f}_{\mathbf{R}} = \left[ \Re\{\mathbf{f}_{N_f}(e^{j\omega})\} \quad \Im\{\mathbf{f}_{N_f}(e^{j\omega})\} \right]^{\top}. \quad (\text{B.5})$$

Devido à estrutura da Equação (B.3), cujos elementos são exponenciais com-

plexas, a parte real de  $\mathbf{C}_{N_f}$  pode ser escrita como

$$\Re\{\mathbf{C}_{N_f}\}^\top = \begin{bmatrix} \cos\left(\omega_0 \frac{\tau_0(\theta)}{T_s}\right) & \cos\left(\omega_0 \frac{\tau_1(\theta)}{T_s}\right) & \cdots & \cos\left(\omega_0 \left(\frac{\tau_{M-1}(\theta)}{T_s} - (N_{\text{BF}} - 1)\right)\right) \\ \cos\left(\omega_1 \frac{\tau_0(\theta)}{T_s}\right) & \cos\left(\omega_1 \frac{\tau_1(\theta)}{T_s}\right) & \cdots & \cos\left(\omega_1 \left(\frac{\tau_{M-1}(\theta)}{T_s} - (N_{\text{BF}} - 1)\right)\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\left(\omega_{N_f-1} \frac{\tau_0(\theta)}{T_s}\right) & \cos\left(\omega_{N_f-1} \frac{\tau_1(\theta)}{T_s}\right) & \cdots & \cos\left(\omega_{N_f-1} \left(\frac{\tau_{M-1}(\theta)}{T_s} - (N_{\text{BF}} - 1)\right)\right) \end{bmatrix}$$

e a parte imaginária como

$$\Im\{\mathbf{C}_{N_f}\}^\top = \begin{bmatrix} \sin\left(\omega_0 \frac{\tau_0(\theta)}{T_s}\right) & \sin\left(\omega_0 \frac{\tau_1(\theta)}{T_s}\right) & \cdots & \sin\left(\omega_0 \left(\frac{\tau_{M-1}(\theta)}{T_s} - (N_{\text{BF}} - 1)\right)\right) \\ \sin\left(\omega_1 \frac{\tau_0(\theta)}{T_s}\right) & \sin\left(\omega_1 \frac{\tau_1(\theta)}{T_s}\right) & \cdots & \sin\left(\omega_1 \left(\frac{\tau_{M-1}(\theta)}{T_s} - (N_{\text{BF}} - 1)\right)\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin\left(\omega_{N_f-1} \frac{\tau_0(\theta)}{T_s}\right) & \sin\left(\omega_{N_f-1} \frac{\tau_1(\theta)}{T_s}\right) & \cdots & \sin\left(\omega_{N_f-1} \left(\frac{\tau_{M-1}(\theta)}{T_s} - (N_{\text{BF}} - 1)\right)\right) \end{bmatrix}.$$

O método de Buckley (1987) consiste na decomposição de  $\mathbf{C}_R$  por meio de seus valores singulares

$$\mathbf{C}_R = \mathbf{U}_C \mathbf{\Sigma}_C \mathbf{V}_C^\top \quad (\text{B.6})$$

em que  $\mathbf{\Sigma}_C \in \mathbb{R}^{(M N_{\text{BF}}) \times 2N_f}$  indica a matriz diagonal que contém os valores singulares de  $\mathbf{C}_R$ ,  $\mathbf{U}_C \in \mathbb{R}^{M N_{\text{BF}} \times M N_{\text{BF}}}$  indica a matriz de vetores singulares à esquerda de  $\mathbf{C}_R$  e  $\mathbf{V}_C \in \mathbb{R}^{2N_f \times 2N_f}$  indica a matriz de vetores singulares à direita de  $\mathbf{C}_R$ . Dada a forma diagonal de  $\mathbf{\Sigma}_C$ , pode-se facilmente selecionar os  $N_S$  valores singulares mais significativos por meio do particionamento de  $\mathbf{\Sigma}_C$

$$\mathbf{\Sigma}_C = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{\Sigma}_{N_S} & \mathbf{0}_{N_S \times (2N_f - N_S)} \\ \hline \mathbf{0}_{(M N_{\text{BF}} - N_S) \times N_S} & \mathbf{\Sigma}_0 \end{array} \right] \quad (\text{B.7})$$

em que  $\mathbf{\Sigma}_{N_S} \in \mathbb{R}^{N_S \times N_S}$  é a submatriz contendo os  $N_S$  valores singulares mais significativos de  $\mathbf{C}_R$ ,  $\mathbf{\Sigma}_0 \in \mathbb{R}^{(M N_{\text{BF}} - N_S) \times (M N_{\text{BF}} - N_S)}$  indica a submatriz con-

tendo os  $MN_{\text{BF}} - N_S$  valores singulares menos significativos de  $C_{\text{R}}$  e  $\mathbf{0}_{a \times b}$  indica a matriz nula de ordem  $a \times b$ . O número de valores singulares significativos  $N_S$  representa a ordem do subespaço de sinal utilizado na obtenção da matriz de restrições. Quando  $\Sigma_0$  for uma matriz nula, todos os valores singulares não nulos são utilizados na obtenção da matriz de restrições e a única aproximação ocorre na amostragem da resposta em frequência na direção desejada. Caso contrário, quanto maior o valor de  $N_S$ , a princípio, mais precisa é a aproximação. Contudo, Strang (1988) argumenta que, devido a imprecisões numéricas de várias fontes, valores singulares de baixa magnitude adicionais podem aparecer na decomposição SVD. Assim, valores singulares com magnitude menor que um limiar devem ser substituídos por zeros. Do contrário, erros de arredondamento ou de medição podem ser percebidos como valores singulares de baixa magnitude. No cálculo da pseudo-inversa de  $C_{\text{R}}$  os recíprocos desses valores tornam-se muito altos e podem levar a grandes desvios da resposta esperada. Esse fenômeno está intimamente relacionado a problemas de condicionamento em  $C_{\text{R}}$  (MEYER; MEYER, 2001). Portanto, desprezando os valores singulares menos significativos contidos em  $\Sigma_0$  a matriz  $\Sigma_C$  torna-se, aproximadamente (BUCKLEY, 1987),

$$\Sigma_C \approx \left[ \begin{array}{c|c} \Sigma_{N_S} & \mathbf{0}_{N_S \times (2N_f - N_S)} \\ \hline \mathbf{0}_{(MN_{\text{BF}} - N_S) \times N_S} & \mathbf{0}_{(MN_{\text{BF}} - N_S) \times (2N_f - N_S)} \end{array} \right]. \quad (\text{B.8})$$

Particionando as matrizes  $\mathbf{U}_C$  e  $\mathbf{V}_C$  em submatrizes

$$\mathbf{U}_C = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{U}_{1,1} & \mathbf{U}_{1,2} \\ \hline \mathbf{U}_{2,1} & \mathbf{U}_{2,2} \end{array} \right] \quad (\text{B.9})$$

e

$$\mathbf{V}_C = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{V}_{1,2} \\ \hline \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{V}_{2,2} \end{array} \right], \quad (\text{B.10})$$

em que  $\mathbf{U}_{1,1} \in \mathbb{R}^{N_S \times N_S}$ ,  $\mathbf{U}_{1,2} \in \mathbb{R}^{N_S \times (M N_{\text{BF}} - N_S)}$ ,  $\mathbf{U}_{2,1} \in \mathbb{R}^{(M N_{\text{BF}} - N_S) \times N_S}$ ,  $\mathbf{U}_{2,2} \in \mathbb{R}^{(M N_{\text{BF}} - N_S) \times (M N_{\text{BF}} - N_S)}$ ,  $\mathbf{V}_{1,1} \in \mathbb{R}^{N_S \times N_S}$ ,  $\mathbf{V}_{1,2} \in \mathbb{R}^{N_S \times (2N_f - N_S)}$ ,  $\mathbf{V}_{2,1} \in \mathbb{R}^{(2N_f - N_S) \times N_S}$ ,  $\mathbf{V}_{2,2} \in \mathbb{R}^{(2N_f - N_S) \times (2N_f - N_S)}$ . A matriz de restrições torna-se, aproximadamente

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_R &\approx \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{U}_{1,1} & \mathbf{U}_{1,2} \\ \hline \mathbf{U}_{2,1} & \mathbf{U}_{2,2} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Sigma}_{N_S} & \mathbf{0}_{N_S \times (2N_f - N_S)} \\ \hline \mathbf{0}_{(M N_{\text{BF}} - N_S) \times N_S} & \mathbf{0}_{(M N_{\text{BF}} - N_S) \times (2N_f - N_S)} \end{array} \right] \\ &\quad \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{V}_{1,1}^\top & \mathbf{V}_{2,1}^\top \\ \hline \mathbf{V}_{1,2}^\top & \mathbf{V}_{2,2}^\top \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{U}_{1,1} \boldsymbol{\Sigma}_{N_S} & \mathbf{0}_{N_S \times (2N_f - N_S)} \\ \hline \mathbf{U}_{2,1} \boldsymbol{\Sigma}_{N_S} & \mathbf{0}_{(M N_{\text{BF}} - N_S) \times (2N_f - N_S)} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{V}_{1,1}^\top & \mathbf{V}_{2,1}^\top \\ \hline \mathbf{V}_{1,2}^\top & \mathbf{V}_{2,2}^\top \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{U}_{1,1} \boldsymbol{\Sigma}_{N_S} \mathbf{V}_{1,1}^\top & \mathbf{U}_{1,1} \boldsymbol{\Sigma}_{N_S} \mathbf{V}_{2,1}^\top \\ \hline \mathbf{U}_{2,1} \boldsymbol{\Sigma}_{N_S} \mathbf{V}_{1,1}^\top & \mathbf{U}_{2,1} \boldsymbol{\Sigma}_{N_S} \mathbf{V}_{2,1}^\top \end{array} \right]. \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

Observa-se que a aproximação da Equação (B.11) independe das submatrizes  $\mathbf{U}_{1,2}$ ,  $\mathbf{U}_{2,2}$ ,  $\mathbf{V}_{1,2}$  e  $\mathbf{V}_{2,2}$ . Assim, pode-se escrever a Equação (B.11) de forma

mais compacta na qual

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{R}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{1,1} \\ - \frac{\cdot}{\cdot} - \\ \mathbf{U}_{2,1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{N_S} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1,1}^\top & \vdots \\ \mathbf{V}_{2,1}^\top & \vdots \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U}_{N_S} \boldsymbol{\Sigma}_{N_S} \mathbf{V}_{N_S}^\top \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

em que

$$\mathbf{U}_{N_S} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{1,1} \\ - \frac{\cdot}{\cdot} - \\ \mathbf{U}_{2,1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

e

$$\mathbf{V}_{N_S} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1,1} \\ - \frac{\cdot}{\cdot} - \\ \mathbf{V}_{2,1} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

As colunas de  $\mathbf{V}_{N_S}$  formam uma base ortonormal do subespaço de sinal na matriz de restrições (BUCKLEY, 1987). O subespaço de sinal da matriz de restrições é definido pela transformação de Karhunen-Loève de um sinal de entrada com densidade espectral de potência conhecida (PAPOULIS; PILLAI, 2002). Utilizando a aproximação da Equação (B.11) no conjunto de restrições da Equação (A.8) resulta no novo conjunto de restrições

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}_{N_S} \boldsymbol{\Sigma}_{N_S} \mathbf{V}_{N_S}^\top)^\top \mathbf{b} &= \mathbf{f}_{\mathbf{R}} \\ \mathbf{V}_{N_S} \boldsymbol{\Sigma}_{N_S} \mathbf{U}_{N_S}^\top \mathbf{b} &= \mathbf{f}_{\mathbf{R}} \end{aligned}$$

em que  $\boldsymbol{\Sigma}_{N_S} = \boldsymbol{\Sigma}_{N_S}^\top$ . O posto do produto  $\mathbf{V}_{N_S} \boldsymbol{\Sigma}_{N_S} \mathbf{U}_{N_S}^\top$  é definido pelo posto de  $\boldsymbol{\Sigma}_{N_S}$  que é  $N_f$ . Portanto é possível reduzir a dimensão do conjunto de

restrições pré-multiplicando ambos os lados por  $\mathbf{V}_{N_S}^\top$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{N_S}^\top \mathbf{V}_{N_S} \boldsymbol{\Sigma}_{N_S} \mathbf{U}_{N_S}^\top \mathbf{b} &= \mathbf{V}_{N_S}^\top \mathbf{f}_{\mathbf{R}} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{N_S} \mathbf{U}_{N_S}^\top \mathbf{b} &= \mathbf{V}_{N_S}^\top \mathbf{f}_{\mathbf{R}}\end{aligned}\quad (\text{B.15})$$

em que  $\mathbf{V}_{N_S}^\top \mathbf{V}_{N_S} = \mathbf{I}_{N_S}$ . Supondo que a matriz  $\boldsymbol{\Sigma}_{N_S}$  foi formada selecionando somente com valores singulares não-nulos, essa matriz é não-singular. Por construção, essa matriz é também diagonal e, portanto, sua inversa pode ser obtida de maneira trivial. Portanto, outra maneira de representar aproximadamente a Equação (A.8) consiste em pré-multiplicar a Equação (B.15) por  $\boldsymbol{\Sigma}_{N_S}^{-1}$  obtendo o sistema de equações

$$\mathbf{U}_{N_S}^\top \mathbf{b} = \boldsymbol{\Sigma}_{N_S}^{-1} \mathbf{V}_{N_S}^\top \mathbf{f}_{\mathbf{R}}. \quad (\text{B.16})$$

A vantagem da Equação (B.16) em relação à Equação (B.15) é o fato de  $\mathbf{U}_{N_S}$  ter colunas ortonormais. Nesse caso, a obtenção de sua matriz de bloco com colunas ortogonais pode ser feita utilizando diretamente  $\mathbf{U}_{2,1}$  e  $\mathbf{U}_{2,2}$  (BUCKLEY, 1987).

Portanto, na Equação (B.15) tem-se  $\mathbf{C} = \mathbf{U}_{N_S} \boldsymbol{\Sigma}_{N_S}$  e  $\mathbf{f} = \mathbf{V}_{N_S}^\top \mathbf{f}_{\mathbf{R}}$  e na Equação (B.16) tem-se  $\mathbf{C} = \mathbf{U}_{N_S}$  e  $\mathbf{f} = \boldsymbol{\Sigma}_{N_S}^{-1} \mathbf{V}_{N_S}^\top \mathbf{f}_{\mathbf{R}}$ .





## APÊNDICE C – EQUIVALÊNCIA ENTRE AS SOLUÇÕES ÓTIMAS DA FORMA DIRETA E GSC

Utilizando a Equação (2.57) pode-se obter a solução ótima da forma direta

$$\mathbf{b}_{\text{opt}} = \left( \mathbf{I}_{MN_{\text{BF}}} - \mathbf{B} \left( \mathbf{B}^{\top} \mathbf{R}_{x_b x_b} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^{\top} \mathbf{R}_{x_b x_b} \right) \mathbf{b}_q. \quad (\text{C.1})$$

Essa solução ótima pode ser comparada com a solução do LCMV determinada na Equação (2.46). A equivalência entre as Equações (C.1) e (2.46) pode ser demonstrada sob as seguintes hipóteses

1. As matrizes de restrição  $\mathbf{C}$  e de bloqueio  $\mathbf{B}$  são ortogonais. Portanto  $\mathbf{C}^{\top} \mathbf{B} = \mathbf{0}_{N_C \times (MN_{\text{BF}} - N_C)}$  (GRIFFITHS; JIM, 1982);
2. A matriz  $\mathbf{R}_{x_b x_b}$  é definida positiva. Portanto, as colunas de  $\mathbf{R}_{x_b x_b}^{1/2} \mathbf{B}$  são ortogonais às colunas de  $\mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1/2} \mathbf{C}$  (BREED; STRAUSS, 2002). Da hipótese anterior, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{\top} \mathbf{B} &= \mathbf{0}_{N_C \times (MN_{\text{BF}} - N_C)} \\ \mathbf{C}^{\top} \mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1/2} \mathbf{R}_{x_b x_b}^{1/2} \mathbf{B} &= \mathbf{0}_{N_C \times (MN_{\text{BF}} - N_C)} \\ \left( \mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1/2} \mathbf{C} \right)^{\top} \mathbf{R}_{x_b x_b}^{1/2} \mathbf{B} &= \mathbf{0}_{N_C \times (MN_{\text{BF}} - N_C)} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

em que  $\mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1/2} \mathbf{R}_{x_b x_b}^{1/2} = \mathbf{I}_{MN_{\text{BF}}}$  e  $\mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1/2} = \left( \mathbf{R}_{x_b x_b}^{1/2} \right)^{\top}$ .

3. O posto de  $\mathbf{C}$  é igual a  $N_C$  e o posto de  $\mathbf{B}$  é  $MN_{\text{BF}} - N_C$ . Portanto tanto  $\mathbf{C}$  quanto  $\mathbf{B}$  tem posto de colunas completo. Logo, combinada

com a primeira hipótese, conclui-se os espaços de colunas de  $C$  e  $B$  são ortogonais e complementares (BREED; STRAUSS, 2002);

4. O vetor quiescente  $\mathbf{b}_q$  pertence ao espaço factível do problema definido na Equação (2.35). Portanto  $C^\top \mathbf{b}_q = \mathbf{f}$  (GRIFFITHS; JIM, 1982).

Pré-multiplicando a Equação (C.1) por  $R_{x_b x_b}^{-1/2} R_{x_b x_b}^{1/2}$  e fatorando  $R_{x_b x_b} = R_{x_b x_b}^{1/2} R_{x_b x_b}^{1/2}$  a solução na forma direta equivalente à solução ótima na forma GSC pode ser escrita de maneira mais conveniente como

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\text{opt}} &= R_{x_b x_b}^{-1/2} \left( I_{MN_{\text{BF}}} - R_{x_b x_b}^{1/2} B (B^\top R_{x_b x_b}^{1/2} R_{x_b x_b}^{1/2} B)^{-1} B^\top R_{x_b x_b}^{1/2} \right) R_{x_b x_b}^{1/2} \mathbf{b}_q \\ &= R_{x_b x_b}^{-1/2} \left( I_{MN_{\text{BF}}} - P_{R_{x_b x_b}^{1/2} B} \right) R_{x_b x_b}^{1/2} \mathbf{b}_q \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

em que  $P_{R_{x_b x_b}^{1/2} B}$  é o operador de projeção no subespaço gerado pelas colunas de  $R_{x_b x_b}^{1/2} B$ .

Da segunda e terceira hipóteses conclui-se que a projeção no espaço complementar a  $P_{R_{x_b x_b}^{1/2} B}$  coincide com a projeção no espaço de colunas de  $R_{x_b x_b}^{1/2} C$ . Logo

$$\begin{aligned} I_{MN_{\text{BF}}} - P_{R_{x_b x_b}^{1/2} B} &= P_{R_{x_b x_b}^{-1/2} C} \\ &= R_{x_b x_b}^{-1/2} C (C^\top R_{x_b x_b}^{-1/2} R_{x_b x_b}^{-1/2} C)^\top R_{x_b x_b}^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

A substituição da Equação (C.4) na Equação (C.3) resulta em

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_{\text{opt}} &= \mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1/2} \left( \mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1/2} \mathbf{C} \left( \mathbf{C}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1/2} \right) \mathbf{R}_{x_b x_b}^{1/2} \mathbf{b}_q \\
 &= \mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1} \mathbf{C} \left( \mathbf{C}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^\top \mathbf{b}_q \\
 &= \mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1} \mathbf{C} \left( \mathbf{C}^\top \mathbf{R}_{x_b x_b}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{f}
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

em que no último passo, a quarta hipótese foi utilizada.

Portanto, satisfeitas as condições, as realizações direta e GSC do conformador de feixe têm a mesma solução ótima para uma superfície de desempenho baseada no LCMV.



## APÊNDICE D – EQUIVALÊNCIA ENTRE AS SOLUÇÕES ADAPTATIVAS DA FORMA DIRETA E GSC

A equivalência entre as soluções adaptativas na forma direta na Equação (2.53) e GSC na Equação (2.65) foi inicialmente demonstrada para o MVDR em Frost III (1972) e posteriormente para o LCMV em Buckley (1987). A equivalência pode ser demonstrada utilizando as hipóteses do apêndice C e a hipótese adicional (FROST III, 1972; BUCKLEY, 1987)

5. As colunas de  $\mathbf{B}$  formam uma base ortonormal ( $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} =$

$$\mathbf{I}_{(MN_{\text{BF}} - N_{\text{C}}) \times (MN_{\text{BF}} - N_{\text{C}})}).$$

A partir da terceira hipótese, a transformação linear

$$\mathbf{T} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{C}] \tag{D.1}$$

em que  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{MN_{\text{BF}} \times MN_{\text{BF}}}$  tem posto completo. A pré-multiplicação da Equação (2.53) por  $\mathbf{T}^\top$  resulta em

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^\top \mathbf{b}[n+1] \\ \mathbf{C}^\top \mathbf{b}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^\top \mathbf{P}(\mathbf{b}[n] - \mu \mathbf{x}_{\text{b}}[n]y[n]) + \mathbf{B}^\top \mathbf{b}_{\text{f}} \\ \mathbf{C}^\top \mathbf{P}(\mathbf{b}[n] - \mu \mathbf{x}_{\text{b}}[n]y[n]) + \mathbf{C}^\top \mathbf{b}_{\text{f}} \end{bmatrix}. \tag{D.2}$$

Da Equação (2.51) e da primeira hipótese, tem-se os produtos matriciais

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^\top \mathbf{P} &= \mathbf{C}^\top (\mathbf{I}_{MN_{\text{BF}}} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}) \\ &= \mathbf{C}^\top - \mathbf{C}^\top \mathbf{C}(\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C} \\ &= \mathbf{C}^\top - \mathbf{C}^\top = \mathbf{0}_{\mathbf{C} \times MN_{\text{BF}}} \end{aligned} \tag{D.3}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}^\top \mathbf{P} &= \mathbf{B}^\top \left( \mathbf{I}_{MN_{BF}} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C} \right) \\
 &= \mathbf{B}^\top - \mathbf{B}^\top \mathbf{C}(\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C} \\
 &= \mathbf{B}^\top.
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

Da Equação (2.52) e da primeira hipótese, os produtos matriz-vetor à direita na Equação (D.2) são dados por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}^\top \mathbf{b}_f &= \mathbf{B}^\top \mathbf{C}(\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \\
 &= \mathbf{0}_{(MN_{BF} - N_C) \times 1}
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^\top \mathbf{b}_f &= \mathbf{C}^\top \mathbf{C}(\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \\
 &= \mathbf{f}
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

A substituição das Equações (D.3), (D.4), (D.5) e (D.6) na Equação (D.2) resulta em

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^\top \mathbf{b}[n+1] \\ \mathbf{C}^\top \mathbf{b}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^\top (\mathbf{b}[n] - \mu \mathbf{x}_b y[n]) \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}. \tag{D.7}$$

A parcela inferior da Equação (D.7) indica somente que as soluções produzidas pela Equação (2.53) são factíveis. Quando a primeira, terceira e quarta hipóteses são satisfeitas, toda solução na forma direta pode ser mapeada para uma solução na forma GSC (GRIFFITHS; JIM, 1982). A substituição da

Equação (2.57) na porção superior da Equação (D.7) resulta em

$$\mathbf{B}^\top (\mathbf{b}_q - \mathbf{B}\mathbf{b}_{\text{IC}}[n]) = \mathbf{B}^\top (\mathbf{b}_q - \mathbf{B}\mathbf{b}_{\text{IC}}[n]) - \mu \mathbf{B}^\top \mathbf{x}_b[n]y[n]$$

$$\mathbf{B}^\top \mathbf{B}\mathbf{b}_{\text{IC}}[n] = \mathbf{B}^\top \mathbf{B}\mathbf{b}_{\text{IC}}[n] + \mu \mathbf{B}^\top \mathbf{x}_b[n]y[n].$$

Finalmente, quando a quinta hipótese é válida então chega-se à Equação (2.65). Ou seja, dado o mesmo passo de adaptação  $\mu$ , satisfeitas as hipóteses, e inicializados na mesma solução os conformadores de feixe implementados na forma direta e GSC tem o mesmo comportamento transitório (GRIFFITHS; JIM, 1982).





## APÊNDICE E – DETERMINAÇÃO DE

$$P_e E\{s[n]s^\top[n]v[n]w_{\text{opt}}^\top s[n]s^\top[n]\} P_e$$

O sexto e sétimo termos da Equação (3.46) podem ser calculados utilizando as hipóteses H1 e H4 e o Teorema da fatoração dos momentos de variáveis Gaussianas. Seja  $[*]_{i,j}$  o elemento na linha  $i$  e coluna  $j$  da matriz  $*$  e  $[*]_i$  o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $*$  então

$$\begin{aligned} & \left[ E\{s[n]s^\top[n]v[n]w_{\text{opt}}^\top s[n]s^\top[n]\} \right]_{i,j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} E\{[s[n]]_i [s[n]]_\ell [v[n]]_\ell [w_{\text{opt}}]_p [s[n]]_p [s[n]]_j\} \\ &= \sum_{\ell=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} E\{[s[n]]_i [s[n]]_\ell [s[n]]_p [s[n]]_j\} E\{[v[n]]_\ell\} [w_{\text{opt}}]_p \\ &= \sum_{\ell=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} \left( E\{[s[n]]_i [s[n]]_\ell\} E\{[s[n]]_p [s[n]]_j\} + E\{[s[n]]_i [s[n]]_p\} \right. \\ & \quad \cdot \left. E\{[s[n]]_\ell [s[n]]_j\} + E\{[s[n]]_i [s[n]]_j\} E\{[s[n]]_\ell [s[n]]_p\} \right) E\{[v[n]]_\ell\} [w_{\text{opt}}]_p \\ &= \left( \sum_{\ell=1}^{N_w} E\{[s[n]]_i [s[n]]_\ell\} E\{[v[n]]_\ell\} \right) \left( \sum_{p=1}^{N_w} E\{[s[n]]_p [s[n]]_j\} [w_{\text{opt}}]_p \right) \\ & \quad + \left( \sum_{p=1}^{N_w} E\{[s[n]]_i [s[n]]_p\} \right) \left( \sum_{\ell=1}^{N_w} E\{[s[n]]_\ell [s[n]]_j\} E\{[v[n]]_\ell\} [w_{\text{opt}}]_p \right) \\ & \quad + E\{[s[n]]_i [s[n]]_j\} \sum_{\ell=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} \left( E\{[s[n]]_\ell [s[n]]_p\} E\{[v[n]]_\ell\} [w_{\text{opt}}]_p \right) \\ &= [\mathbf{R}_{ss} E\{v[n]\}]_i [\mathbf{R}_{ss} w_{\text{opt}}]_j + [\mathbf{R}_{ss} w_{\text{opt}}]_i [\mathbf{R}_{ss} E\{v[n]\}]_j \\ & \quad + [\mathbf{R}_{ss}]_{i,j} w_{\text{opt}}^\top \mathbf{R}_{ss} E\{v[n]\}. \end{aligned} \tag{E.1}$$

Portanto, o sexto termo da Equação (3.46) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_e E\{\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{v}[n]\mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\}\mathbf{P}_e &= \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} E\{\mathbf{v}[n]\}\mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e \\
 &\quad + \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}_{\text{opt}} E\{\mathbf{v}[n]\}^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e \\
 &\quad + \mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{R}_{ss} E\{\mathbf{v}[n]\}\mathbf{P}_e \\
 &= \mathbf{0}_{N_w \times N_w} \qquad \qquad \qquad (\text{E.2})
 \end{aligned}$$

em que  $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{0}_{N_w \times 1}$  da Equação (3.34). O sétimo termo é também nulo e é o resultado da transposição da Equação (E.2).

## APÊNDICE F – DETERMINAÇÃO DE

$$P_e E\{s[n]s^\top[n]w_{\text{opt}}w_{\text{opt}}^\top s[n]s^\top[n]\} P_e$$

O último termo da Equação (3.46) pode ser calculado utilizando as hipóteses H1 e H4 e o Teorema da fatoração dos momentos de variáveis Gaussianas. O elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna de  $E\{s[n]s^\top[n]w_{\text{opt}}w_{\text{opt}}^\top s[n]s^\top[n]\}$  é escrito como

$$\begin{aligned} & [E\{s[n]s^\top[n]w_{\text{opt}}w_{\text{opt}}^\top s[n]s^\top[n]\}]_{i,j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} E\{[s[n]]_i [s[n]]_\ell [s[n]]_p [s[n]]_j\} [w_{\text{opt}}]_\ell [w_{\text{opt}}]_p \\ &= \sum_{\ell=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} \left( E\{[s[n]]_i [s[n]]_\ell\} E\{[s[n]]_p [s[n]]_j\} + E\{[s[n]]_i [s[n]]_p\} \right. \\ & \quad \cdot E\{[s[n]]_\ell [s[n]]_j\} + E\{[s[n]]_i [s[n]]_j\} E\{[s[n]]_\ell [s[n]]_p\} \left. \right) [w_{\text{opt}}]_\ell [w_{\text{opt}}]_p \\ &= 2 \sum_{\ell=1}^{N_w} \left( E\{[s[n]]_i [s[n]]_\ell\} [w_{\text{opt}}]_\ell \right) \sum_{p=1}^{N_w} \left( E\{[s[n]]_p [s[n]]_j\} [w_{\text{opt}}]_p \right) \\ & \quad + E\{[s[n]]_i [s[n]]_j\} \sum_{\ell=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} \left( E\{[s[n]]_\ell [s[n]]_p\} [w_{\text{opt}}]_\ell [w_{\text{opt}}]_p \right) \\ &= 2[\mathbf{R}_{ss} w_{\text{opt}}]_i [\mathbf{R}_{ss} w_{\text{opt}}]_j + [\mathbf{R}_{ss}]_{i,j} w_{\text{opt}}^\top \mathbf{R}_{ss} w_{\text{opt}}. \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P_e E\{s[n]s^\top[n]w_{\text{opt}}w_{\text{opt}}^\top s[n]s^\top[n]\} P_e &= 2P_e \mathbf{R}_{ss} w_{\text{opt}} w_{\text{opt}}^\top \mathbf{R}_{ss} P_e \\ & \quad + P_e \mathbf{R}_{ss} P_e w_{\text{opt}}^\top \mathbf{R}_{ss} w_{\text{opt}} \\ &= P_e \mathbf{R}_{ss} P_e J_{\min} \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

em que  $\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{0}_{N_w \times 1}$  da Equação (4.23) e  $J_{\min} = \mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}_{\text{opt}}$  da Equação (3.22).

## APÊNDICE G – DETERMINAÇÃO DE

$$E\{\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{v}[n]\mathbf{v}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\}$$

O termo  $E\{\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{v}[n]\mathbf{v}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\}$  da Equação (3.46) pode ser calculado utilizando as hipóteses H1 e H4 e o Teorema da fatoração dos momentos de variáveis Gaussianas. O termo da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna de  $E\{\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{v}[n]\mathbf{v}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\}$  é dado por

$$\begin{aligned} & [E\{\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{v}[n]\mathbf{v}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\}]_{i,j} = \\ & = \sum_{\ell=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} E\{[\mathbf{s}[n]]_i[\mathbf{s}[n]]_\ell[\mathbf{v}[n]]_\ell[\mathbf{v}[n]]_p[\mathbf{s}[n]]_p[\mathbf{s}[n]]_j\} \\ & = \sum_{\ell=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} E\{[\mathbf{s}[n]]_i[\mathbf{s}[n]]_\ell[\mathbf{s}[n]]_p[\mathbf{s}[n]]_j\} E\{[\mathbf{v}[n]]_\ell[\mathbf{v}[n]]_p\} \\ & = \sum_{\ell=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} \left( E\{[\mathbf{s}[n]]_i[\mathbf{s}[n]]_\ell\} E\{[\mathbf{s}[n]]_p[\mathbf{s}[n]]_j\} + E\{[\mathbf{s}[n]]_i[\mathbf{s}[n]]_p\} \right. \\ & \quad \left. \times E\{[\mathbf{s}[n]]_\ell[\mathbf{s}[n]]_j\} + E\{[\mathbf{s}[n]]_i[\mathbf{s}[n]]_j\} E\{[\mathbf{s}[n]]_\ell[\mathbf{s}[n]]_p\} \right) E\{[\mathbf{v}[n]]_\ell[\mathbf{v}[n]]_p\} \\ & = 2 \sum_{\ell=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} (E\{[\mathbf{s}[n]]_i[\mathbf{s}[n]]_\ell\} E\{[\mathbf{v}[n]]_\ell[\mathbf{v}[n]]_p\} E\{[\mathbf{s}[n]]_p[\mathbf{s}[n]]_j\}) \\ & \quad + E\{[\mathbf{s}[n]]_i[\mathbf{s}[n]]_j\} \sum_{\ell=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} E\{[\mathbf{s}[n]]_\ell[\mathbf{s}[n]]_p\} E\{[\mathbf{v}[n]]_\ell[\mathbf{v}[n]]_p\} \\ & = 2[\mathbf{R}_{ss}\mathbf{R}_{vv}[n]\mathbf{R}_{ss}]_{i,j} + [\mathbf{R}_{ss}]_{i,j} \sum_{\ell=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} E\{[\mathbf{s}[n]]_\ell[\mathbf{s}[n]]_p\} E\{[\mathbf{v}[n]]_\ell[\mathbf{v}[n]]_p\}. \end{aligned} \tag{G.1}$$

em que

$$[\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{R}_{\text{vv}}[n]]_{i,j} = \sum_{p=1}^{N_w} E\{[\mathbf{s}[n]]_i[\mathbf{s}[n]]_p\}E\{[\mathbf{v}[n]]_p[\mathbf{v}[n]]_j\} \quad (\text{G.2})$$

portanto

$$\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{R}_{\text{vv}}[n]) = \sum_{\ell=1}^{N_w} [\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{R}_{\text{vv}}[n]]_{\ell,\ell} = \sum_{\ell=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} E\{[\mathbf{s}[n]]_\ell[\mathbf{s}[n]]_p\}E\{[\mathbf{v}[n]]_p[\mathbf{v}[n]]_\ell\}. \quad (\text{G.3})$$

Logo, a matriz  $E\{\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{v}[n]\mathbf{v}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\}$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\mathbf{v}[n]\mathbf{v}^\top[n]\mathbf{s}[n]\mathbf{s}^\top[n]\} &= 2\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{R}_{\text{vv}}[n]\mathbf{R}_{\text{ss}} \\ &\quad + \mathbf{R}_{\text{ss}}\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{R}_{\text{vv}}[n]). \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

## APÊNDICE H – PROPRIEDADES DE $P_e R_{ss} P_e$

### H.1 Número de autovalores positivos e natureza semi-definida positiva

Da hipótese simplificadora H3, pode-se decompor  $R_{ss} = A^\top A$  em que  $A$  é uma matriz com posto de colunas completo (KAILATH, 1980, p. 667). Da Equação (3.25),  $P_e^\top = P_e$  e

$$P_e R_{ss} P_e = P_e^\top A^\top A P_e = (A P_e)^\top A P_e. \quad (\text{H.1})$$

A demonstração da singularidade matriz  $P_e R_{ss} P_e$  utiliza a propriedade (BERNSTEIN, 2005, p. 104) na Equação (H.1)

$$\text{rank}(P_e R_{ss} P_e) = \text{rank}(P_e A) = \text{rank}(P_e) \quad (\text{H.2})$$

em que  $\text{rank}(M) = \text{rank}(M^\top)$  e  $A$  tem posto de colunas completo (BERNSTEIN, 2005, p. 124). Da hipótese H3  $\text{rank}(C_e) = N_C$ , logo  $(C_e^\top C_e)^{-\frac{1}{2}}$  é não-singular. Portanto, pode-se escrever a Equação (3.25) como

$$P_e = I_{N_w} - C_e (C_e^\top C_e)^{-\frac{1}{2}} \left( C_e (C_e^\top C_e)^{-\frac{1}{2}} \right)^\top. \quad (\text{H.3})$$

Utilizando a Equação (H.3) e a propriedade em Bernstein (2005, p. 224), o posto da projeção é

$$\text{rank}(P_e) = N_w - \text{rank}(C_e (C_e^\top C_e)^{-\frac{1}{2}}) = N_w - \text{rank}(C_e) = N_w - N_C. \quad (\text{H.4})$$

Finalmente, das Equações (H.2) e (H.4) tem-se que  $\text{rank}(P_e R_{ss} P_e) = N_w - N_C$ . Logo,  $P_e R_{ss} P_e$  tem exatamente  $N_C$  autovalores nulos. Como



$P_e R_{ss} P_e$  é singular e pode ser escrita na forma da Equação (H.1) pode-se concluir que  $P_e R_{ss} P_e$  é simétrica e semi-definida positiva.

## H.2 Autovetores associados aos autovalores nulos

Utilizando o teorema da fatoração de Takagi (HORN; JOHNSON, 1990, p. 211), pode-se decompor  $P_e R_{ss} P_e = Q_v \Lambda_{ss} Q_v^T$  em que  $\Lambda_{ss}$  é diagonal e  $Q_v Q_v^T = I_{N_w}$ . Supondo que  $p$  é um autovetor de  $P_e R_{ss} P_e$  com norma euclidiana unitária então

$$\lambda p = (P_e R_{ss} P_e)p. \quad (H.5)$$

Da propriedade de idempotência de projeções ortogonais tem-se  $P_e = P_e^2$ . Portanto, pode-se escrever a Equação (H.5) como

$$(P_e R_{ss} P_e)p = (P_e R_{ss} P_e)P_e p. \quad (H.6)$$

A decomposição de  $p$  em duas projeções ortogonais  $P_e$  e  $I_{N_w} - P_e$  resulta em

$$p = P_e p + (I_{N_w} - P_e)p. \quad (H.7)$$

Pré-multiplicando a Equação (H.7) por  $\lambda$  e utilizando a Equação (H.5) tem-se

$$\begin{aligned} \lambda p &= \lambda P_e p + (I_{N_w} - P_e)(P_e R_{ss} P_e)p \\ &= \lambda P_e p \end{aligned} \quad (H.8)$$

em que  $(I_{N_w} - P_e)P_e = \mathbf{0}_{N_w \times N_w}$ . Finalmente, substituindo as Equações (H.6)

e (H.8) na Equação (H.5) pode-se escrever

$$\lambda \mathbf{P}_e \mathbf{p} = (\mathbf{P}_e \mathbf{R}_{ss} \mathbf{P}_e) \mathbf{P}_e \mathbf{p}. \quad (\text{H.9})$$

Das Equações (H.5) e (H.9), pode-se concluir que  $\mathbf{p}$  é um autovetor associado a um autovalor  $\lambda \neq 0$  se e somente se  $\mathbf{P}_e \mathbf{p}$  também for um autovetor associado ao mesmo autovalor. Portanto o sub-espço dos autovetores associados a autovalores  $\lambda \neq 0$  coincide com a imagem (*range*) de  $\mathbf{P}_e$ . Consequentemente, combinações lineares dos autovetores associados a  $\lambda = 0$  geram o espaço complementar e ortogonal a  $\mathbf{P}_e$ . Logo,  $\mathbf{P}_e \mathbf{p} | (\lambda = 0) = \mathbf{0}_{N_w \times 1}$ . Então, da Equação (H.7) pode-se concluir que

$$\mathbf{p} | (\lambda = 0) = (\mathbf{I}_{N_w} - \mathbf{P}_e) \mathbf{p} | (\lambda = 0). \quad (\text{H.10})$$

Observa-se que a atualização do vetor de coeficientes estendido da Equação (3.29) na direção do espaço gerado pelos autovetores associados a autovalores nulos é

$$(\mathbf{I}_{N_w} - \mathbf{P}_e) \mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}_f \quad (\text{H.11})$$

em que  $(\mathbf{I}_{N_w} - \mathbf{P}_e) \mathbf{P}_e = \mathbf{0}_{N_w \times N_w}$ . Supondo que o vetor de coeficientes estendido é inicializado em uma solução factível (por exemplo,  $\mathbf{w}[0] = \mathbf{w}_f$  (FROST III, 1972)), não existe adaptação na direção definida pela Equação (H.10). Portanto, a análise da convergência da Equação (3.29), utilizando a Equação (3.50), pode ser feita estudando somente o sub-espço dos autovetores associados aos autovalores  $\lambda \neq 0$  (MARUO; BERMUDEZ; RESENDE, 2014a).



## APÊNDICE I – PROVA DO TEOREMA DOS CÍRCULOS DE GERSHGORIN

O teorema dos discos de Gershgorin afirma que todo autovalor de uma matriz  $\mathbf{A}$  está contido em pelo menos um dos círculos no plano complexo com centro no  $i$ -ésimo elemento da diagonal e raio igual à soma dos valores absolutos dos elementos da  $i$ -ésima linha ou coluna fora da diagonal. Supondo que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N_A} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N_A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_A,1} & a_{N_A,2} & \cdots & a_{N_A,N_A} \end{bmatrix}$$

é uma matriz de quadrada de ordem  $N_A$ ,  $\lambda_A$  é um autovalor de  $\mathbf{A}$  e

$$\mathbf{v}_A = [v_{A_1} \quad v_{A_2} \quad \cdots \quad v_{A_{N_A}}]^\top$$

é o autovetor não-generalizado associado ao autovalor  $\lambda_A$  então

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_A = \lambda_A \mathbf{v}_A. \tag{I.1}$$

Seja  $v_{A_j}$  a componente de  $\mathbf{v}_A$  com maior magnitude

$$|v_{A_j}| = \max \{ |v_{A_i}|, i = 1, \dots, N_A \}.$$

Então, escolhendo a  $j$ -ésima linha da do sistema de Equações (I.1), tem-se

$$\sum_{i=1}^{N_A} a_{j,i} v_{A_i} = \lambda v_{A_j}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_A} a_{j,i} v_{A_i} = v_{A_j} (\lambda - a_{j,j}). \quad (\text{I.2})$$

Calculando o valor absoluto da Equação (I.2) e utilizando a desigualdade triangular, tem-se

$$|v_{A_j}| |\lambda - a_{j,j}| = \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_A} a_{j,i} v_{A_i} \right|$$

$$\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_A} |a_{j,i}| |v_{A_i}| \leq |v_{A_j}| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_A} |a_{j,i}|.$$

em que, dado que  $v_{A_j}$  é um autovetor, tem-se  $|v_{A_j}| \neq 0$ . Logo,

$$|\lambda - a_{j,j}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_A} |a_{j,i}|. \quad \square \quad (\text{I.3})$$

Ou seja, todo autovalor de uma matriz pertence a pelo menos um disco com centro em  $a_{j,j}$  e raio  $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_A} |a_{j,i}|$ .

## APÊNDICE J – EQUIVALÊNCIA ENTRE UMA ADAPTAÇÃO DA FAMÍLIA LMS COM MATRIZ DE PASSOS E O LMS CONVENCIONAL

Supondo um filtro adaptativo na configuração de cancelamento de interferências (HAYKIN, 1993, p. 19), um algoritmo baseado no LMS clássico com uma matriz de passos simétrica e definida positiva pode ser descrito pela equação de atualização

$$\hat{\mathbf{h}}[n+1] = \hat{\mathbf{h}}[n] + \mathcal{M}\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{h}}}[n](y[n] - \mathbf{u}_{\hat{\mathbf{h}}}^{\top}[n]\hat{\mathbf{h}}[n]) \quad (\text{J.1})$$

em que  $\mathcal{M}$  é definida positiva portanto tem uma decomposição de Cholesky  $\mathcal{M} = \mu\mathbf{L}\mathbf{L}^{\top}$  com  $\mu > 0$  e  $\mathbf{L}$  não-singular. Pré multiplicando a Equação (J.1) por  $\mathbf{L}^{-1}$  resulta em

$$\mathbf{L}^{-1}\hat{\mathbf{h}}[n+1] = \mathbf{L}^{-1}\hat{\mathbf{h}}[n] + \mu\mathbf{L}^T\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{h}}}[n](y[n] - (\mathbf{L}^T\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{h}}}[n])^{\top}\mathbf{L}^{-1}\hat{\mathbf{h}}[n]) \quad (\text{J.2})$$

em que  $\mathbf{L}\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{I}_{N_{\text{AEC}} \times N_{\text{AEC}}}$ . Definindo  $\hat{\mathbf{h}}_L[n] = \mathbf{L}^{-1}\hat{\mathbf{h}}[n]$  e  $\mathbf{u}_L[n] = \mathbf{L}^T\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{h}}}[n]$  a Equação (J.2) pode ser reescrita como

$$\hat{\mathbf{h}}_L[n+1] = \hat{\mathbf{h}}_L[n] + \mu\mathbf{u}_L[n](y[n] - \mathbf{u}_L^{\top}[n]\hat{\mathbf{h}}_L[n]) \quad (\text{J.3})$$

que é a equação de um algoritmo LMS convencional com vetor de coeficientes  $\hat{\mathbf{h}}_L[n]$ , sinal de entrada  $\mathbf{u}_L[n]$  e sinal desejado  $y[n]$ . Essa equivalência entre as Equações (J.1) e (J.3) foi observada inicialmente por Dallinger e Rupp (2009) para um sinal desejado sem ruídos. Não obstante, observa-se que a equivalência é válida mesmo na ausência de suposições sobre o sinal

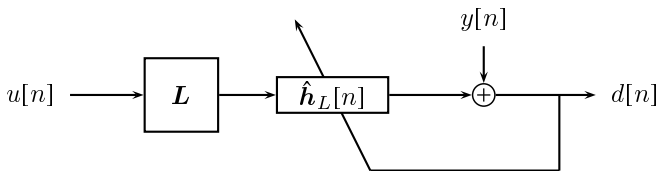


Figura J.1: Estrutura de processamento com o algoritmo LMS convencional equivalente à Equação (J.1)

desejado. O diagrama de blocos da implementação da Equação (J.1) na forma de um algoritmo LMS convencional é mostrado na Figura J.1.

**APÊNDICE K – DETERMINAÇÃO DE**

$$E\{B_e^\top s[n] s^\top [n] B_e \vartheta[n] w_{\text{opt}}^\top s[n] s^\top [n] B_e\}$$

O sexto e sétimo termos da Equação (4.28) podem ser calculados utilizando as hipóteses H1 e H4 e o Teorema da fatoração dos momentos de variáveis Gaussianas. Seja  $[*]_{i,j}$  o elemento na linha  $i$  e coluna  $j$  da matriz  $*$



e  $[*]_i$  o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $*$  então

$$\begin{aligned}
& \left[ E\{\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e \vartheta[n] \mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e\} \right]_{i,j} \\
&= \sum_{\ell=1}^{N_\psi} \sum_{p=1}^{N_w} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell [\vartheta[n]]_\ell [\mathbf{w}_{\text{opt}}]_p [\mathbf{s}[n]]_p [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} \\
&= \sum_{\ell=1}^{N_\psi} \sum_{p=1}^{N_w} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell [\mathbf{s}[n]]_p [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} E\{[\vartheta[n]]_\ell\} [\mathbf{w}_{\text{opt}}]_p \\
&= \sum_{\ell=1}^{N_\psi} \sum_{p=1}^{N_w} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell\} E\{[\mathbf{s}[n]]_p [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} E\{[\vartheta[n]]_\ell\} [\mathbf{w}_{\text{opt}}]_p \\
&+ \sum_{\ell=1}^{N_\psi} \sum_{p=1}^{N_w} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{s}[n]]_p\} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} E\{[\vartheta[n]]_\ell\} [\mathbf{w}_{\text{opt}}]_p \\
&+ \sum_{\ell=1}^{N_\psi} \sum_{p=1}^{N_w} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} E\{[\mathbf{s}[n]]_p [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell\} E\{[\vartheta[n]]_\ell\} [\mathbf{w}_{\text{opt}}]_p \\
&= \left( \sum_{\ell=1}^{N_\psi} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell\} E\{[\vartheta[n]]_\ell\} \right) \left( \sum_{p=1}^{N_w} E\{[\mathbf{s}[n]]_p [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} [\mathbf{w}_{\text{opt}}]_p \right) \\
&+ \left( \sum_{p=1}^{N_w} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{s}[n]]_p [\mathbf{w}_{\text{opt}}]_p\} \right) \left( \sum_{\ell=1}^{N_\psi} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} E\{[\vartheta[n]]_\ell\} \right) \\
&+ E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} \sum_{\ell=1}^{N_\psi} \sum_{p=1}^{N_w} E\{[\mathbf{s}[n]]_p [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell\} E\{[\vartheta[n]]_\ell\} [\mathbf{w}_{\text{opt}}]_p \\
&= [\mathbf{R}_{\text{bloc}} E\{\vartheta[n]\}]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{w}_{\text{opt}}]_j + [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{w}_{\text{opt}}]_i [\mathbf{R}_{\text{bloc}} E\{\vartheta[n]\}]_j \\
&+ [\mathbf{R}_{\text{bloc}}]_{i,j} E\{\vartheta^\top [n]\} \mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{w}_{\text{opt}} \tag{K.1}
\end{aligned}$$

Portanto, o sexto termo da Equação (4.28) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 E\{ \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e \vartheta [n] \mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e \} &= \mathbf{R}_{\text{bloc}} E\{ \vartheta [n] \} \mathbf{w}_{\text{opt}}^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{B}_e \\
 &\quad + \mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{w}_{\text{opt}} E\{ \vartheta^\top [n] \} \mathbf{R}_{\text{bloc}} \\
 &\quad + \mathbf{R}_{\text{bloc}} E\{ \vartheta^\top [n] \} \mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{w}_{\text{opt}} \\
 &= \mathbf{0}_{N_w \times N_w} \qquad \qquad \qquad (\text{K.2})
 \end{aligned}$$

em que  $\mathbf{B}_e^\top \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{0}_{N_\psi \times 1}$  da Equação (4.23). O sétimo termo é também nulo e é o resultado da transposição da Equação (K.2).



## APÊNDICE L – DETERMINAÇÃO DE

$$E\{B_e^\top s[n]s^\top[n]w_{\text{opt}}w_{\text{opt}}^\top s[n]s^\top[n]B_e\}$$

O último termo da Equação (4.28) pode ser calculado utilizando as hipóteses H1 e H4 e o Teorema da fatoração dos momentos de variáveis Gaussianas. O elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna de  $E\{s[n]s^\top[n]w_{\text{opt}}w_{\text{opt}}^\top s[n]s^\top[n]\}$  é calculado conforme a Equação (F.1) portanto,

$$\begin{aligned} E\{B_e^\top s[n]s^\top[n]w_{\text{opt}}w_{\text{opt}}^\top s[n]s^\top[n]B_e\} &= 2B_e^\top R_{\text{ss}}w_{\text{opt}}w_{\text{opt}}^\top R_{\text{ss}}B_e \\ &\quad + B_e^\top R_{\text{ss}}B_e w_{\text{opt}}^\top R_{\text{ss}}w_{\text{opt}} \\ &= B_e^\top R_{\text{ss}}B_e J_{\text{min}} \end{aligned} \quad (\text{L.1})$$

em que  $B_e^\top R_{\text{ss}}w_{\text{opt}} = \mathbf{0}_{N_\psi \times 1}$  da Equação (3.34) e  $J_{\text{min}} = w_{\text{opt}}^\top R_{\text{ss}}w_{\text{opt}}$  da Equação (3.22).



**APÊNDICE M – DETERMINAÇÃO DE**

$$E\{\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e \boldsymbol{\vartheta}[n] \boldsymbol{\vartheta}^\top [n] \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e\}$$

O termo  $E\{\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e \boldsymbol{\vartheta}[n] \boldsymbol{\vartheta}^\top [n] \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e\}$  da Equação (4.28) pode ser calculado utilizando as hipóteses H1 e H4 e o Teorema da fatoração dos momentos de variáveis Gaussianas. O termo da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna de  $E\{\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e \boldsymbol{\vartheta}[n] \boldsymbol{\vartheta}^\top [n] \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e\}$

$\mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e\}$  é dado por

$$\begin{aligned}
 & [E\{\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e \vartheta[n] \vartheta^\top [n] \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e\}]_{i,j} = \\
 & = \sum_{\ell=1}^{N_\psi} \sum_{p=1}^{N_\psi} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell [\vartheta[n]]_\ell [\vartheta[n]]_p [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_p [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} \\
 & = \sum_{\ell=1}^{N_\psi} \sum_{p=1}^{N_\psi} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_p [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} E\{[\vartheta[n]]_\ell [\vartheta[n]]_p\} \\
 & = \sum_{\ell=1}^{N_\psi} \sum_{p=1}^{N_\psi} \left( E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell\} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_p [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} \right. \\
 & \quad + E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_p\} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} \\
 & \quad \left. + E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_p\} \right) E\{[\vartheta[n]]_\ell [\vartheta[n]]_p\} \\
 & = 2 \sum_{\ell=1}^{N_\psi} \sum_{p=1}^{N_w} \left( E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell\} E\{[\vartheta[n]]_\ell [\vartheta[n]]_p\} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_p [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} \right) \\
 & \quad + E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_j\} \sum_{\ell=1}^{N_\psi} \sum_{p=1}^{N_\psi} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_p\} E\{[\vartheta[n]]_\ell [\vartheta[n]]_p\}. \\
 & = 2[\mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n] \mathbf{R}_{\text{bloc}}]_{i,j} + [\mathbf{R}_{\text{bloc}}]_{i,j} \sum_{\ell=1}^{N_\psi} \sum_{p=1}^{N_\psi} \left( E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_\ell [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_p\} \right. \\
 & \quad \left. E\{[\vartheta[n]]_\ell [\vartheta[n]]_p\} \right) \tag{M.1}
 \end{aligned}$$

em que

$$[\mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{R}_{\vartheta\vartheta}[n]]_{i,j} = \sum_{p=1}^{N_\psi} E\{[\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n]]_p\} E\{[\vartheta[n]]_p [\vartheta[n]]_j\}. \tag{M.2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{R}_{\vartheta \vartheta} [n]) &= \sum_{\ell=1}^{N_\psi} [\mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{R}_{\vartheta \vartheta} [n]]_{\ell, \ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^{N_\psi} \sum_{p=1}^{N_\psi} E\{ [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s} [n]]_i [\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s} [n]]_p \} E\{ [\vartheta [n]]_p [\vartheta [n]]_j \}. \end{aligned} \tag{M.3}$$

Logo, a matriz  $E\{ \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s} [n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e \vartheta [n] \vartheta^\top [n] \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s} [n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e \}$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} E\{ \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s} [n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e \vartheta [n] \vartheta^\top [n] \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s} [n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e \} &= 2 \mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{R}_{\vartheta \vartheta} [n] \mathbf{R}_{\text{bloc}} \\ &\quad + \mathbf{R}_{\text{bloc}} \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{bloc}} \mathbf{R}_{\vartheta \vartheta} [n]). \end{aligned} \tag{M.4}$$



280M *Determinação de  $E\{\mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e \vartheta[n] \vartheta^\top [n] \mathbf{B}_e^\top \mathbf{s}[n] \mathbf{s}^\top [n] \mathbf{B}_e\}$*

---

## APÊNDICE N – PROVA DO TEOREMA DA DIAGONALIZAÇÃO SIMULTÂNEA

**Teorema 1.** *Sejam  $M$  e  $G \in \mathbb{R}^{N \times N}$  duas matrizes diagonalizáveis.  $M$  e  $G$  são diagonalizáveis simultaneamente por  $SM S^{-1}$  e  $SG S^{-1}$ , com  $S$  não-singular, se e somente se  $MG = GM$*

### N.1 Prova do Teorema 1

*Suficiência.* Assumindo que  $M$  e  $G$  são diagonalizáveis simultaneamente, então  $M = S^{-1}\Lambda_M S$  e  $G = S^{-1}\Lambda_G S$  em que  $\Lambda_M$  e  $\Lambda_G$  são diagonais.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 MG &= S^{-1}\Lambda_M S S^{-1}\Lambda_G S \\
 &= S^{-1}\Lambda_M \Lambda_G S \\
 &= S^{-1}\Lambda_G \Lambda_M S \\
 &= S^{-1}\Lambda_G S S^{-1}\Lambda_M S \\
 &= GM. \quad \square
 \end{aligned}$$

em que o produto de matrizes diagonais  $\Lambda_M$  e  $\Lambda_G$  é comutativo.

*Necessidade.* A prova da necessidade é feita por contradição assumindo que o produto de  $M$  e  $G$  é comutável mas  $M$  e  $G$  não são diagonalizáveis simultaneamente. Supondo que  $M$  é diagonalizável por  $M = S_M^{-1}\Lambda_M S_M$

mas  $\mathbf{G} = \mathbf{S}_M^{-1} \mathbf{\Lambda}_G \mathbf{S}_M$  resulta em uma matriz  $\mathbf{\Lambda}_G$  não-diagonal. Então

$$\mathbf{M}\mathbf{G} = \mathbf{G}\mathbf{M}$$

$$\mathbf{S}_M^{-1} \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{S}_M \mathbf{S}_M^{-1} \mathbf{\Lambda}_G \mathbf{S}_M = \mathbf{S}_M^{-1} \mathbf{\Lambda}_G \mathbf{S}_M \mathbf{S}_M^{-1} \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{S}_M$$

$$\mathbf{S}_M^{-1} \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{\Lambda}_G \mathbf{S}_M = \mathbf{S}_M^{-1} \mathbf{\Lambda}_G \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{S}_M$$

$$\mathbf{\Lambda}_M \mathbf{\Lambda}_G = \mathbf{\Lambda}_G \mathbf{\Lambda}_M. \quad (\text{N.1})$$

Como  $\mathbf{\Lambda}_M$  é diagonal, os elementos dos dois lados da Equação (N.1) podem ser escritos como

$$[\mathbf{\Lambda}_M \mathbf{\Lambda}_G]_{i,j} = [\mathbf{\Lambda}_M]_{i,i} [\mathbf{\Lambda}_G]_{i,j} \quad (\text{N.2a})$$

$$[\mathbf{\Lambda}_G \mathbf{\Lambda}_M]_{i,j} = [\mathbf{\Lambda}_G]_{i,j} [\mathbf{\Lambda}_M]_{j,j}. \quad (\text{N.2b})$$

A substituição das Equações (N.2a) e (N.2b) na Equação (N.1) resulta em

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Lambda}_M]_{i,i} [\mathbf{\Lambda}_G]_{i,j} &= [\mathbf{\Lambda}_G]_{i,j} [\mathbf{\Lambda}_M]_{j,j} \\ [\mathbf{\Lambda}_G]_{i,j} ([\mathbf{\Lambda}_M]_{i,i} - [\mathbf{\Lambda}_M]_{j,j}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{N.3})$$

Portanto,  $[\mathbf{\Lambda}_G]_{i,j} = 0$  sempre que  $[\mathbf{\Lambda}_M]_{i,i} \neq [\mathbf{\Lambda}_M]_{j,j}$ . Quando  $[\mathbf{\Lambda}_M]_{i,i} = [\mathbf{\Lambda}_M]_{j,j}$  pode-se assumir, sem perda de generalidade, que elementos repetidos na diagonal de  $\mathbf{\Lambda}_M$  estão agrupados contiguamente. Logo,  $\mathbf{\Lambda}_G$  é uma matriz diagonal em blocos com estrutura

$$\mathbf{\Lambda}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{G1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{\Lambda}_{Gk} \end{bmatrix}$$

em que existe um bloco  $\Lambda_{G_i}$  para cada elemento distinto da diagonal de  $\Lambda_M$ . Cada bloco é quadrado e tem dimensão definida pela multiplicidade do elemento da diagonal de  $\Lambda_M$ . Como  $G$  é diagonalizável, então cada bloco  $\Lambda_{G_i}$  também é diagonalizável.  $\Lambda_M$  tem a estrutura particionada

$$\Lambda_M = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_k \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

em que o tamanho de cada bloco coincide com a multiplicidade do elemento da diagonal de  $\Lambda_M$  associado a cada bloco. Sabendo que cada bloco diagonal de  $\Lambda_M$  é uma matriz identidade multiplicada por um escalar e cada bloco diagonal de  $\Lambda_G$  é diagonalizável, então existe uma transformação  $T_i$  não-singular que resulta em  $T_i^{-1} G_i T_i$  e  $T_i^{-1} \lambda_i \mathbf{I} T_i = \lambda_i \mathbf{I}$  diagonais. Finalmente, dada a matriz

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & T_k \end{bmatrix}$$

observa-se que  $T^{-1} \Lambda_M T$  e  $T^{-1} \Lambda_G T$  são diagonais. Logo a transformação  $SMS^{-1}$  e  $SGS^{-1}$  com  $S = TS_M$  é capaz de diagonalizar simultaneamente  $M$  e  $G$  que contradiz a hipótese inicial de que o produto de  $M$  e  $G$  é comutável mas  $M$  e  $G$  não são diagonalizáveis simultaneamente.  $\square$



## APÊNDICE O – GERAÇÃO DE RESPOSTAS AO IMPULSO PELO MODELO EXPONENCIAL

O caminho entre o sinal de *far-end* e o sinal captado pelo microfone é formado pelas respostas dos elementos eletroacústicos, possivelmente a aplicação de ganhos, os processos de conversão e pelo acoplamento acústico. O acoplamento acústico é formado por uma componente relacionada ao caminho direto entre o alto-falante e o microfone e por um número elevado de caminhos secundários devido às reflexões. Assumindo que a resposta pode ser representada adequadamente por um modelo linear, a resposta ao impulso do acoplamento acústico é formada por uma sequência de funções impulsivas atrasadas de um tempo proporcional ao comprimento do caminho percorrido pela reflexão associada. Assumindo que a distância entre o alto-falante e o microfone estão a uma distância de  $d_{LOS}$  cm e uma velocidade de propagação do som no ar de  $c = 343$  m/s, os primeiros  $\lfloor \frac{d_{LOS}f_s}{c} \rfloor$  coeficientes da resposta ao impulso são nulos. Os outros coeficientes são determinados de acordo com a reflectividade das paredes e objetos do ambiente e o comprimento do caminho percorrido pela reflexão. De maneira geral, a reflectividade e as dimensões do ambiente são caracterizados por meio do tempo de reverberação  $T_R(60)$ . O tempo de reverberação de um ambiente é definido pelo tempo necessário para que, interrupção de sua emissão por uma fonte sonora, a energia sonora sofra uma redução de 60 dB. Supondo que um ruído branco estava sendo emitido pelo alto-falante e foi subitamente interrompido, o decaimento da potência

deve obedecer

$$10 \log_{10} \frac{E\{h_{n_{\text{LOS}}}^2\}}{E\{h_{n_{\text{LOS}}+n_{T_{\text{R}}(60)}}^2\}} = -60 \quad (\text{O.1})$$

em que  $n_{T_{\text{R}}(60)} = f_s \cdot T_{\text{R}}(60)$  e que  $E\{h_k\} = 0$ . Os tempos de reverberação típicos de um escritório são da ordem de algumas centenas de milissegundos. Considerando que os sinais dos microfones são captados com uma taxa de amostragem  $f_s = 8000$  Hz, a duração de uma resposta ao impulso típica de um escritório pode exigir filtros de alguns milhares de coeficientes.

Segundo o modelo exponencial da resposta ao impulso,

$$E\{h_k^2\} = E\{h_{n_{\text{LOS}}}^2\} e^{-2\varpi(k-n_{\text{LOS}})}, \quad k \geq n_{\text{LOS}} \quad (\text{O.2})$$

em que, para determinar  $\varpi$ , substitui-se a Equação (O.2), para  $n = n_{\text{LOS}} + n_{T_{\text{R}}(60)}$ , na Equação (O.1) para obter

$$\begin{aligned} -60 &= 10 \log_{10} \frac{E\{h_{n_{\text{LOS}}}^2\}}{E\{h_{n_{\text{LOS}}}^2\} e^{-2\varpi \cdot n_{T_{\text{R}}(60)}}} \\ -6 &= 2\varpi \cdot n_{T_{\text{R}}(60)} \log_{10} e \\ \varpi &= \frac{-3}{0,8686 \cdot n_{T_{\text{R}}(60)}} \end{aligned} \quad (\text{O.3})$$

Finalmente, para determinar  $E\{h_{n_{\text{LOS}}}^2\}$ , supondo que  $E\{h_i, h_j\} = 0$ , a

energia média da resposta ao impulso é indicada por

$$\begin{aligned}
 E\{\mathbf{h}^\top \mathbf{h}\} &= E\left\{\sum_{i=1}^{n_{\text{LOS}}+n_{T_{\text{R}}(60)}} h_i^2\right\} \\
 &= \sum_{i=n_{\text{LOS}}}^{n_{\text{LOS}}+n_{T_{\text{R}}(60)}} E\{h_i^2\} \\
 &= E\{h_{n_{\text{LOS}}}^2\} \sum_{j=0}^{n_{T_{\text{R}}(60)}} e^{-2\varpi j} \\
 E\{h_{n_{\text{LOS}}}^2\} &= \frac{(1 - e^{-2\varpi})E\{\mathbf{h}^\top \mathbf{h}\}}{1 - e^{-2\varpi(n_{T_{\text{R}}(60)}+1)}} \quad (\text{O.4})
 \end{aligned}$$

### O.1 Procedimento para determinação das respostas ao impulso

1. Especifique  $f_s$ ,  $T_{\text{R}}(60)$ ,  $d_{\text{LOS}}$  e a energia média da resposta ao impulso;
2. Determine  $n_{\text{LOS}} = \lfloor \frac{d_{\text{LOS}} f_s}{c} \rfloor + 1$ ,  $n_{T_{\text{R}}(60)} = \lceil f_s \cdot T_{\text{R}}(60) \rceil$  e  $N_{\text{h}} > n_{\text{LOS}} + n_{T_{\text{R}}(60)}$ ;
3. Utilizando  $n_{T_{\text{R}}(60)}$  e a Equação (O.3), determine  $\varpi$ ;
4. Utilizando  $\varpi$ ,  $n_{T_{\text{R}}(60)}$  e a energia média da resposta ao impulso, determine  $E\{h_{n_{\text{LOS}}}^2\}$ ;
5. Utilizando um gerador de números pseudo-aleatórios, gere um vetor auxiliar  $\mathbf{a}$  de comprimento  $n_{T_{\text{R}}(60)}$  com distribuição Gaussiana, média nula e variância unitária;
6. Utilizando  $E\{h_{n_{\text{LOS}}}^2\}$ ,  $\varpi$  e  $\mathbf{a}$ , determine  $[\mathbf{h}]_{i+n_{\text{LOS}}} = [\mathbf{a}]_i \sqrt{E\{h_{n_{\text{LOS}}}^2\}} e^{-\varpi i}$ .





## APÊNDICE P – OBTENÇÃO DE PLANTAS LEM ESPACIALMENTE CORRELACIONADAS

Neste estudo, assume-se um arranjo linear e uniforme de microfones, o modelo de propagação de *far-field* e que as plantas LEM são invariantes no tempo. A resposta ao impulso da planta LEM do alto-falante ao  $m$ -ésimo microfone pode ser decomposta na sobreposição de infinitas respostas ao impulso  $\mathbf{h}_m(\theta) = [h_{m_0}(\theta), \dots, h_{m_{N_h-1}}(\theta)]^\top$  em que cada uma corresponde a uma direção de chegada  $\theta$

$$\mathbf{h}_m = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{h}_m(\theta) d\theta, \quad m = 0, \dots, M - 1. \quad (\text{P.1})$$

O modelo de propagação de *far-field* diz que as componentes de eco incidentes em uma direção específica são captadas em microfones diferentes com mesma amplitude e atraso proporcional ao número de microfones entre eles. Consequentemente, as componentes da resposta ao impulso da planta LEM em qualquer microfone podem ser escritas a partir das componentes no microfone zero

$$h_{m_i}(\theta) = h_{0_{i+m\Delta n(\theta)}}(\theta) \quad (\text{P.2})$$

em que  $\Delta n(\theta)$  indica o atraso relativo de uma onda sonora incidindo sobre o arranjo em um ângulo  $\theta$  entre microfones adjacentes (normalizado pelo período de amostragem). Valores negativos de  $\Delta n(\theta)$  são possíveis quando a onda incide no  $M - 1$ -ésimo microfone antes do microfone zero.

Segundo o Teorema da amostragem espacial a distância máxima en-

tre sensores adjacentes que permite a captação de um sinal sem ambiguidade sobre sua direção de chegada é  $d_{\max} = \frac{\lambda_{\min}}{2} = \frac{c}{2f_{\max}}$  (TREES, 2002), em que  $c$  indica a velocidade de propagação da onda no meio e  $f_{\max}$  é a maior frequência do espectro do sinal recebido. O teorema da amostragem temporal afirma que, para que um sinal contínuo possa ser recuperado sem ambiguidades a partir de sua versão amostrada  $f_{\max} \leq \frac{f_s}{2}$  (OPPENHEIM; WILLSKY; NAWAB, 1996). Quando a largura de banda do sinal recebido é menor que esse limite superior, os sinais dos microfones são sobreamostrados por um fator de sobreamostragem temporal  $F_t = \frac{f_s}{2f_{\max}} > 1$ . Nesse caso,  $f_{\max} = \frac{f_s}{2F_t}$  e a distância máxima entre microfones adjacentes torna-se

$$d_{\max} = \frac{F_t c}{f_s}. \quad (\text{P.3})$$

Analogamente, durante um projeto que exija muitos microfones ou em que existam limitações espaciais severas como em telefones celulares ou aparelhos auditivos, o posicionamento dos microfones espaçados de  $d_{\max}$  pode não ser viável. Ao posicionar os microfones separados de  $d_M < d_{\max}$ , os sinais são sobreamostrados espacialmente (TREES, 2002). O fator de sobreamostragem espacial é definido como

$$F_s = \frac{d_{\max}}{d_M} \quad (\text{P.4})$$

no qual  $F_s > 1$  para não ocorrerem ambiguidades na direção dos sinais. Utilizando o modelo de propagação de *far-field* o número de amostras de atraso

entre sensores adjacentes utilizando as Equações (P.3) e (P.4), é expresso por

$$\Delta n(\theta) = f_s \frac{d_M \sin \theta}{c} = \frac{f_s}{2f_{\max}} \frac{\frac{d_{\max}}{F_s} \sin \theta}{d_{\max}} = \frac{F_t}{F_s} \sin \theta = F \sin \theta \quad (\text{P.5})$$

em que o fator de sobreamostragem  $F = \frac{F_t}{F_s} > 0$  é a razão entre o fator de amostragem temporal e o fator de amostragem espacial.

Substituindo (P.5) e (P.2) em (P.1) e observando o  $i$ -ésimo elemento do vetor de resposta ao impulso da planta LEM resultante é dado por

$$[\mathbf{h}_m]_i = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{h}_{0_{i+mF \sin \theta}}(\theta) d\theta. \quad (\text{P.6})$$

A aplicação da Equação (P.6) requer um modelo contínuo para  $\mathfrak{h}_0(\theta)$  em relação a  $\theta$  para gerar atrasos em qualquer ângulo de incidência e, conseqüentemente, é necessário um procedimento para atrasar  $\mathfrak{h}_{0_i}$  por um número fracionário de amostras. Contudo, se o fator de amostragem for suficientemente elevado,  $F \gg 1$  e é possível aproximar atrasos fracionários para seu número inteiro mais próximo. Isso possibilita o uso de um modelo discreto para  $\mathfrak{h}_0$  e a Equação (P.6) torna-se aproximadamente

$$[\mathbf{h}_m]_i \approx \sum_{j=-F}^F \alpha(j) \mathfrak{h}_{0_{i+mj}}(\arcsen(\frac{j}{F})) \quad (\text{P.7})$$

em que  $\alpha(j)$  é um fator de ponderação devido à não uniformidade na amostragem de  $\theta$  e a função  $\arcsen$  é assumida limitada a  $-\pi/2 \leq \arcsen(\cdot) \leq \pi/2$ .

Se a densidade de potência do eco for assumida uniforme para  $-\frac{\pi}{2} <$

$\theta < \frac{\pi}{2}$  então os fatores de ponderação na Equação (P.7) são determinados por

$$\alpha(j) = \frac{g\left(\frac{j+\frac{1}{2}}{F}\right) - g\left(\frac{j-\frac{1}{2}}{F}\right)}{\pi} \quad (\text{P.8})$$

em que

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < -1 \\ \arcsin(x), & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{\pi}{2} & x > 1 \end{cases}$$

Assim, a resposta ao impulso das plantas LEM é caracterizada a partir de  $2F + 1$  componentes de eco no microfone zero. Para a geração dessas componentes, utilizou-se o modelo exponencial apresentado em Breining et al. (1999) devido a sua simplicidade. De modo opcional, uma componente representando a transferência de potência sonora entre o alto-falante e o arranjo de microfones por uma linha de visada pode ser adicionada em que somente um coeficiente de  $b_{0_{\text{LOS}}}$  é diferente de zero e um atraso entre sensores adjacentes  $-F \leq \Delta n_{\text{LOS}} \leq F$  é aplicado para obter a componente de linha de visada nos outros microfones. Como normalmente a componente de linha de visada apresenta o menor atraso de transmissão entre o alto-falante e o arranjo de microfones, coeficientes em atrasos menores que a componente de linha de visada podem ser descartados para manter a coerência com essa observação.

## P.1 Exemplo

Considere o projeto de um aparelho *smart TV* que dispõe de um arranjo de  $M = 2$  microfones no qual deseja-se implementar um sistema de telefonia *hands-free* utilizando o *hardware* já disponível. O aparelho apresenta funcionalidades de gravação de áudio em alta qualidade, um sistema de reconhecimento de palavras que permite ao usuário utilizar comandos de fala para operar o dispositivo, um sistema de telefonia *hands-free* entre outros. Deseja-se projetar um cancelador de eco acústico para um ambiente com tempo de reverberação típico de  $T_R(60) = 100$  ms

### P.1.1 Especificação

O sistema de gravação de áudio requer uma taxa de amostragem elevada  $f_s = 48000$  Hz disponível para o uso de outras funcionalidades. O arranjo de microfones foi especificado previamente para funcionar com o sistema de reconhecimento de palavras que requer a captação da fala com uma qualidade significativamente superior ao sistema de telefonia. Considera-se que os sinais utilizados no sistema de reconhecimento de fala estão na faixa entre 0 até 8 kHz (SSNDERSON; PALIWAL, 1997) e que o arranjo é criticamente amostrado espacialmente para essa largura de banda. Portanto, supondo uma velocidade de propagação do som no ar de 343 m/s, a distância entre os microfones é  $d = \frac{c}{2f_{\max}} = \frac{343}{2 \cdot 8000} = 2.14$  cm. Finalmente, considerando que a distância das fontes sonoras, em condições típicas, é significativamente maior que a distância entre os microfones, o modelo de *far-field* para

a propagação de ondas é uma aproximação razoável.

### Fator de sobreamostragem temporal

Quando o sistema opera no modo telefone *hands-free*, a faixa de interesse do sinal está entre 0 e 4 kHz. Portanto, o fator de sobreamostragem temporal é  $F_t = \frac{f_s}{2f_{\max}} = \frac{48000}{2 \cdot 4000} = 6$ .

### Fator de sobreamostragem espacial

Analogamente, a distância máxima entre os microfones para evitar o *aliasing* espacial no modo telefone *hands-free* é  $d_{\max} = \frac{c}{2f_{\max}} = \frac{343}{2 \cdot 4000} = 4.28$  cm. Portanto, o fator de sobreamostragem espacial resultante é  $F_s = \frac{4.28}{2.14} = 2$ .

### Fator de sobreamostragem

Com base nos fatores de sobreamostragem espacial e temporal, conclui-se que o fator de sobreamostragem é  $F = \frac{F_t}{F_s} = \frac{6}{2} = 3$ .

### Fator de ponderação devido à não uniformidade na amostragem de $\theta$

A utilização da Equação (P.8) para o cálculo de  $\alpha(j)$ ,  $j = -F, \dots, F$  resulta nos coeficientes mostrados na Tabela P.1

Tabela P.1: Fator de ponderação devido à não uniformidade na amostragem de  $\theta$  para o Exemplo

$\alpha(-3)$	$\alpha(-2)$	$\alpha(-1)$	$\alpha(0)$	$\alpha(1)$	$\alpha(2)$	$\alpha(3)$
0,1864	0,1469	0,1134	0,1066	0,1134	0,1469	0,1864

### Geração das componentes da resposta ao impulso $h_0(\theta)$

Para a taxa de amostragem de  $f_s = 48000$  Hz e o tempo de reverberação  $T_R(60) = 100$  ms, o comprimento necessário para modelar cada planta LEM é dado por  $N_h = 4800$  coeficientes. Entretanto, para simplificar o exemplo e facilitar a visualização, as plantas foram geradas com apenas 32 coeficientes. A geração das plantas com mais coeficientes segue o mesmo procedimento. Assumindo que as componentes nas diferentes direções de chegada seguem o modelo exponencial descrito no Apêndice O (BREINING et al., 1999) e que componentes em direções diferentes são independentes, um conjunto possível de respostas é indicado na Figura P.1. Cada uma dessas respostas corresponde a uma realização independente de um canal exponencial com  $E\{h_{0_i}(\theta)\} = 0$ ,  $E\{h_{0_i}^2(\theta)\}$  dado pela Equação (O.2) e distribuição Gaussiana.

### Obtenção das respostas ao impulso correlacionadas espacialmente

A utilização a Equação (P.7), para  $m = 0$ ,  $F = 3$  e  $\alpha(j)$  dado pela Tabela P.1 resulta em

$$\begin{aligned}
 [h_0]_i &= \sum_{j=-3}^3 \alpha(j) h_{0_i} \left( \arcsen \left( \frac{j}{F} \right) \right) \\
 &= 0, 1864 \cdot h_{0_i} \left( \frac{\pi}{2} \right) + 0, 1469 \cdot h_{0_i} (\arcsin(2/3)) \\
 &\quad + 0, 1134 \cdot h_{0_i} (\arcsin(1/3)) + 0, 1066 \cdot h_{0_i} (0) \\
 &\quad + 0, 1134 \cdot h_{0_i} (-\arcsin(1/3)) + 0, 1469 \cdot h_{0_i} (-\arcsin(2/3)) \\
 &\quad + 0, 1864 \cdot h_{0_i} \left( -\frac{\pi}{2} \right) \tag{P.9}
 \end{aligned}$$



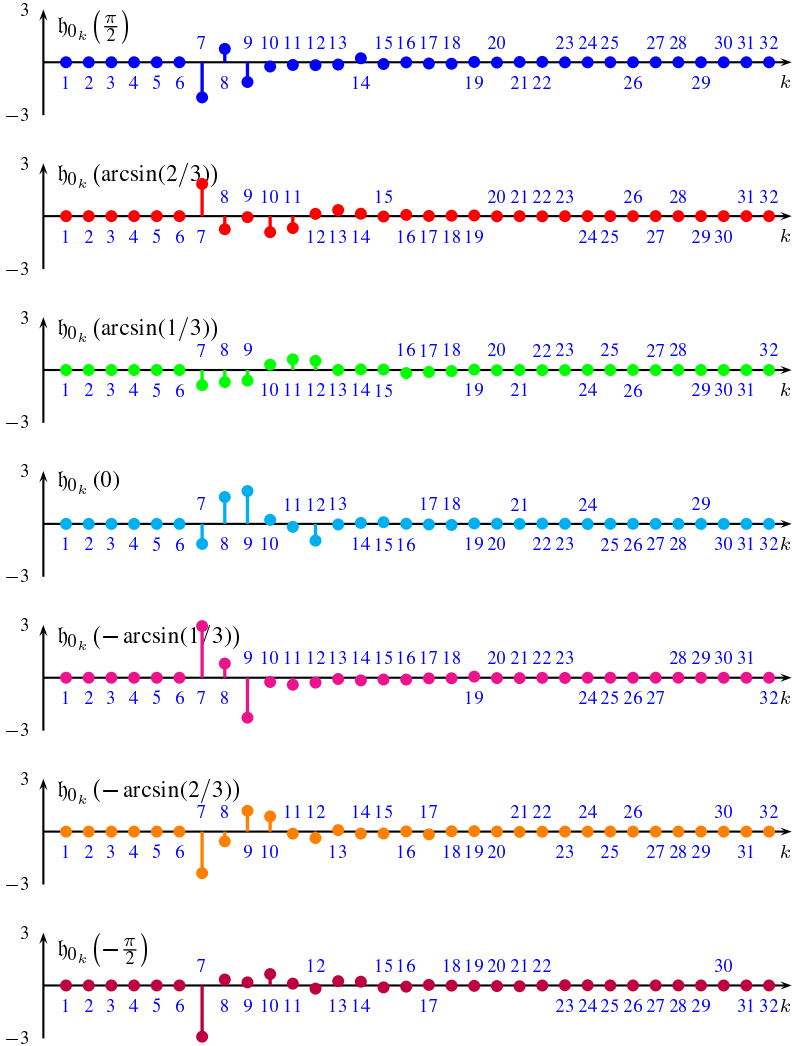


Figura P.1: Componentes da resposta ao impulso

e, para  $m = 1$  e  $F = 3$  resulta em

$$\begin{aligned}
 [h_1]_i &= \sum_{j=-3}^3 \alpha(j) \mathfrak{h}_{0_{i+j}} \left( \arcsen \left( \frac{j}{F} \right) \right) \\
 &= 0,1864 \cdot \mathfrak{h}_{0_{i+3}} \left( \frac{\pi}{2} \right) + 0,1469 \cdot \mathfrak{h}_{0_{i+2}} (\arcsin(2/3)) \\
 &\quad + 0,1134 \cdot \mathfrak{h}_{0_{i+1}} (\arcsin(1/3)) + 0,1066 \cdot \mathfrak{h}_{0_i} (0) \\
 &\quad + 0,1134 \cdot \mathfrak{h}_{0_{i-1}} (-\arcsin(1/3)) + 0,1469 \cdot \mathfrak{h}_{0_{i-2}} (-\arcsin(2/3)) \\
 &\quad + 0,1864 \cdot \mathfrak{h}_{0_{i-3}} \left( -\frac{\pi}{2} \right). \tag{P.10}
 \end{aligned}$$

O mesmo procedimento é utilizado para os demais valores de  $m$ .

Finalmente, as respostas ao impulso das plantas LEM descritas nas Equações (P.9) e (P.10) são ilustradas na Figura P.2

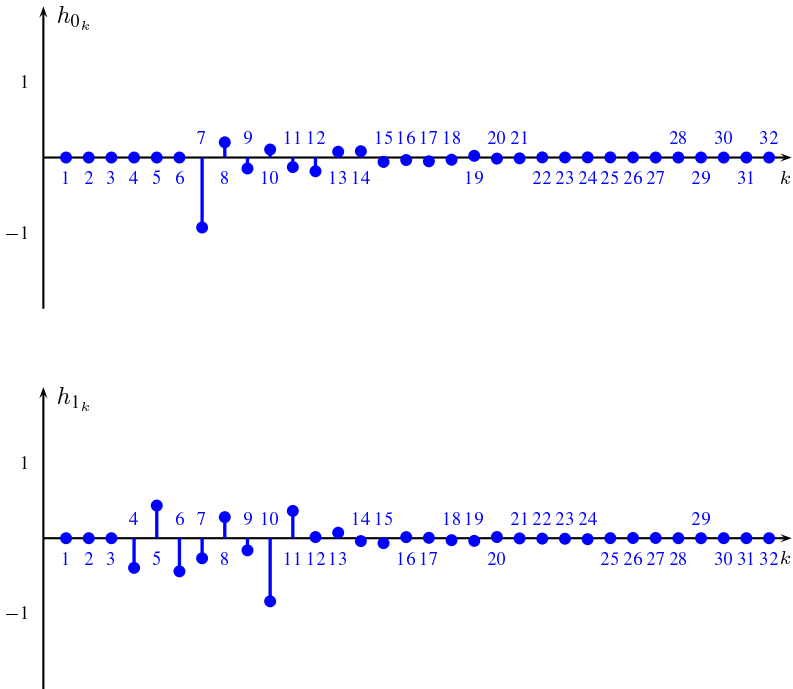


Figura P.2: Respostas ao impulso de plantas LEM

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. ninth dover printing, tenth gpo printing. New York: Dover, 1964.
- AFFES, S.; GRENIER, Y. A source subspace tracking array of microphones for double talk situations. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1996. ICASSP-96. Conference Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*. 1996. v. 2, p. 909–912.
- ALCAIM, A.; SOLEWICZ, J. A.; MORAES, J. A. Frequência de ocorrência dos fones e lista de frases foneticamente balanceadas no Português falado no Rio de Janeiro. (in Portuguese). *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações.*, v. 7, n. 1, p. 23–41, Dec. 1992.
- AZPICUETA-RUIZ, L. et al. Adaptive combination of volterra kernels and its application to nonlinear acoustic echo cancellation. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, v. 19, n. 1, p. 97–110, Jan. 2011. ISSN 1558-7916.
- AZPICUETA-RUIZ, L. et al. Enhanced adaptive volterra filtering by automatic attenuation of memory regions and its application to acoustic echo cancellation. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 61, n. 11, p. 2745–2750, 2013. ISSN 1053-587X.
- BARIK, A.; BHARDWAJ, T. P.; NATH, R. A family of multiple sub-filters based acoustic echo cancellers. In: *Proceedings of the First International Conference on Intelligent Interactive Technologies and Multimedia*. New York, NY, USA: ACM, 2010. (IITM '10), p. 93–97. ISBN 978-1-4503-0408-5. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/1963564.1963579>>.
- BARRAULT, G. et al. A new analytical model for the nlms algorithm. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2005. Proceedings. (ICASSP '05). IEEE International Conference on*. 2005. v. 4, p. 41–44. ISSN 1520-6149.
- BEH, J. et al. Combining acoustic echo cancellation and adaptive beamforming for achieving robust speech interface in mobile robot. In: *Intelligent Robots and Systems, 2008. IROS 2008. IEEE/RSJ International Conference on*. 2008. p. 1693–1698.

- BENDEL, Y. et al. Delayless frequency domain acoustic echo cancellation. *Speech and Audio Processing, IEEE Transactions on*, v. 9, n. 5, p. 589–597, Jul. 2001. ISSN 1063-6676.
- BENESTY, J. et al. *Advances in Network and Acoustic Echo Control.* : Springer, 2001. ISBN 3-540-41721-4.
- BERNSTEIN, D. S. *Matrix Mathematics. Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory.* : Princeton University Press, 2005.
- BERSHAD, N.; BERMUDEZ, J. Stochastic analysis of the LMS algorithm for non-stationary white gaussian inputs. In: *Statistical Signal Processing Workshop (SSP), 2011 IEEE*. 2011. p. 57–60. ISSN pending.
- BERSHAD, N.; EWEDA, E.; BERMUDEZ, J. Stochastic analysis of the LMS and NLMS algorithms for cyclostationary white gaussian inputs. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 62, n. 9, p. 2238–2249, May 2014. ISSN 1053-587X.
- BERSHAD, N.; LINEBARGER, D.; MCLAUGHLIN, S. A stochastic analysis of the affine projection algorithm for Gaussian autoregressive inputs. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. Proceedings. (ICASSP '01). 2001 IEEE International Conference on*. 2001. v. 6, p. 3837–3840.
- BERSHAD, N.; QU, L. Z. On the probability density function of the LMS adaptive filter weights. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 37, n. 1, p. 43–56, 1989. ISSN 0096-3518.
- BERSHAD, N.; TOURNERET, J.-Y. Echo cancellation – a likelihood ratio test for double-talk versus channel change. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 54, n. 12, p. 4572–4581, 2006. ISSN 1053-587X.
- BILLINGS, S.; FAKHOURI, S. Identification of nonlinear systems using the Wiener model. *Electronics Letters*, v. 13, n. 17, p. 502–504, August 1977. ISSN 0013-5194.
- BIRKETT, A.; GOUBRAN, R. Acoustic echo cancellation using NLMS-neural network structures. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1995. ICASSP-95., 1995 International Conference on*. 1995. v. 5, p. 3035–3038. ISSN 1520-6149.

- BITTANTI, S.; CAMPI, M. Tuning the forgetting factor in rls identification algorithms. In: *Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on*. 1991. p. 1688–1689 vol.2.
- BOLL, S. Suppression of acoustic noise in speech using spectral subtraction. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 27, n. 2, p. 113 – 120, Apr. 1979. ISSN 0096-3518.
- BOROJEN Y, F. B. *Adaptive Filters: Theory and Applications.* : John Wiley & Sons, UK, 1998.
- BOYLESTAD, R.; NASHELSKY, L. *Electronic Devices and Circuit Theory.* : PRENTICE HALL ELT, 2002. ISBN 9780130922137.
- BRANDSTEIN, M.; WARD, D. (Ed.). *Microphone Arrays: Signal Processing Techniques and Applications.* 1. ed. : Springer, 2001. Hardcover. ISBN 3540419535.
- BREED, B.; STRAUSS, J. A short proof of the equivalence of LCMV and GSC beamforming. *Signal Processing Letters, IEEE*, v. 9, n. 6, p. 168 –169, Jun. 2002. ISSN 1070-9908.
- BREINING, C. et al. Acoustic echo control. An application of very-high-order adaptive filters. *Signal Processing Magazine, IEEE*, v. 16, n. 4, p. 42–69, Jul. 1999. ISSN 1053-5888.
- BRENT, R. Some efficient algorithms for solving systems of nonlinear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 10, n. 2, p. 327–344, 1973. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/0710031>>.
- BRUALDI, R. A.; MELLENDORF, S. Regions in the complex plane containing the eigenvalues of a matrix. *American Mathematical Monthly*, v. 101, n. 10, p. 975–985, Dec. 1994. ISSN 0002-9890.
- BUCHNER, H.; SPORS, S.; KELLERMANN, W. Wave-domain adaptive filtering: acoustic echo cancellation for full-duplex systems based on wave-field synthesis. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2004. Proceedings. (ICASSP '04). IEEE International Conference on*. 2004. v. 4, p. 117–120. ISSN 1520-6149.
- BUCKLEY, K. Broad-band beamforming and the generalized sidelobe canceller. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 34, n. 5, p. 1322 – 1323, Oct. 1986. ISSN 0096-3518.

- BUCKLEY, K. Spatial/spectral filtering with linearly constrained minimum variance beamformers. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 35, n. 3, p. 249 – 266, Mar. 1987. ISSN 0096-3518.
- BURTON, T.; GOUBRAN, R. A new structure for combining echo cancellation and beamforming in changing acoustical environments. In: *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2007. ICASSP 2007. IEEE International Conference on*. 2007. v. 1, p. 77–80. ISSN 1520-6149.
- BUTTERWECK, H. A wave theory of long adaptive filters. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, v. 48, n. 6, p. 739 –747, Jun. 2001. ISSN 1057-7122.
- CAMPOS, M. de; WERNER, S.; APOLINARIO J.A., J. Constrained adaptation algorithms employing Householder transformation. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 50, n. 9, p. 2187 – 2195, Sep. 2002. ISSN 1053-587X.
- CAPON, J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proceedings of the IEEE*, v. 57, n. 8, p. 1408 – 1418, Aug. 1969. ISSN 0018-9219.
- CAREZIA, A. H. et al. A stable and efficient DSP implementation of a LSL algorithm for acoustic echo cancelling. In: IEEE. *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. Proceedings.(ICASSP'01). 2001 IEEE International Conference on*. 2001. v. 2, p. 921–924.
- CECCHI, S. et al. A combined psychoacoustic approach for stereo acoustic echo cancellation. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, v. 19, n. 6, p. 1530 –1539, Aug. 2011. ISSN 1558-7916.
- CHEN, C.-T. *Linear System Theory and Design*. New York, NY, USA: Oxford University Press, inc., 1998. ISBN 0195117778.
- COMMINIELLO, D. et al. Functional link based architectures for nonlinear acoustic echo cancellation. In: *Hands-free Speech Communication and Microphone Arrays (HSCMA), 2011 Joint Workshop on*. 2011. p. 180–184.
- COSTA, M.; BERMUDEZ, J. An improved model for the normalized LMS algorithm with Gaussian inputs and large number of coefficients.

- In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2002. Proceedings. (ICASSP '02). IEEE International Conference on.* 2002. v. 2, p. 1385–1388.
- COSTA, M. H. *Comportamento do algoritmo FXLMS em sistemas com caminho secundário não-linear: Aplicação ao controle ativo de ruído.* Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.
- CRAWFORD, F. S. *Waves (Berkeley physics course Volume 3).* : McGraw-Hill, 1968.
- DAHL, M.; CLAESSION, I. Acoustic noise and echo cancelling with microphone array. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, v. 48, n. 5, p. 1518–1526, Sep. 1999. ISSN 0018-9545.
- DALLINGER, R.; RUPP, M. A strict stability limit for adaptive gradient type algorithms. In: *Signals, Systems and Computers, 2009 Conference Record of the Forty-Third Asilomar Conference on.* 2009. p. 1370–1374. ISSN 1058-6393.
- DAUBECHIES, I. *Ten Lectures on Wavelets.* : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics). ISBN 9780898712742.
- de ALMEIDA, S.; BERMUDEZ, J.; BERSHAD, N. A stochastic model for the affine projection algorithm operating in a nonstationary environment. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2004. Proceedings. (ICASSP '04). IEEE International Conference on.* 2004. v. 2, p. 449–452. ISSN 1520-6149.
- de ALMEIDA, S.; BERMUDEZ, J.; BERSHAD, N. A stochastic model for a pseudo affine projection algorithm. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 57, n. 1, p. 107–118, Jan. 2009. ISSN 1053-587X.
- de ALMEIDA, S. et al. A stochastic model for the convergence behavior of the affine projection algorithm for Gaussian inputs. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2003. Proceedings. (ICASSP '03). 2003 IEEE International Conference on.* 2003. v. 6, p. 313–316. ISSN 1520-6149.
- de ALMEIDA, S. et al. A statistical analysis of the affine projection algorithm for unity step size and autoregressive inputs. *Circuits and Systems I:*



- Regular Papers, IEEE Transactions on*, v. 52, n. 7, p. 1394 – 1405, Jul. 2005. ISSN 1549-8328.
- de ALMEIDA, S. J. M. *Análise estatística do comportamento de uma classe de algoritmos de projeções afins*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.
- DENNIS JR., J.; MORÉ, J. Quasi-newton methods, motivation and theory. *SIAM Review*, v. 19, n. 1, p. 46–89, 1977. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/1019005>>.
- DILLON, H. *Hearing Aids*. : Boomerang Press, 2001.
- DOCLO, S.; MOONEN, M.; CLIPPEL, E. de. Combined acoustic echo and noise reduction using GSVD-based optimal filtering. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2000. ICASSP '00. Proceedings. 2000 IEEE International Conference on*. 2000. v. 2, p. 61–64.
- EMLING, J. General aspects of hands-free telephony. *Comm. and Electronics*, v. 76, n. 5, p. 201–205, 1957.
- ETS 300 961. *Digital cellular telecommunications system (Phase 2+) (GSM)*. Dec. 2000.
- EVANS, J.; XUE, P.; LIU, B. Analysis and implementation of variable step size adaptive algorithms. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 41, n. 8, p. 2517 –2535, Aug. 1993. ISSN 1053-587X.
- EWEDA, E. Comparison of RLS, LMS, and sign algorithms for tracking randomly time-varying channels. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 42, n. 11, p. 2937 –2944, Nov. 1994. ISSN 1053-587X.
- EWEDA, E. Signal behavior of adaptive filtering algorithms in a nonstationary environment with singular data covariance matrix. *Signal Process.*, Elsevier North-Holland, Inc., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v. 85, n. 6, p. 1263–1274, jun. 2005. ISSN 0165-1684.
- EWEDA, E.; BERSHAD, N. Stochastic analysis of a stable normalized least mean fourth algorithm for adaptive noise canceling with a white Gaussian reference. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 60, n. 12, p. 6235–6244, Dec 2012. ISSN 1053-587X.

- FEUER, A.; WEINSTEIN, E. Convergence analysis of LMS filters with uncorrelated Gaussian data. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 33, n. 1, p. 222 – 230, Feb. 1985. ISSN 0096-3518.
- FLETCHER, R. *Practical methods of optimization; (2nd ed.)*. New York, NY, USA: Wiley-Interscience, 1987. ISBN 0-471-91547-5.
- FRANZ, M.; SCHÖLKOPF, B. A unifying view of Wiener and Volterra theory and polynomial kernel regression. *Neural Computation*, v. 18, p. 3097–3118, 2006.
- FROST III, O. An algorithm for linearly constrained adaptive array processing. *Proceedings of the IEEE*, v. 60, n. 8, p. 926 – 935, Aug. 1972. ISSN 0018-9219.
- GABOR, D.; WILBY, W. P. L.; WOODCOCK, R. A universal non-linear filter, predictor and simulator which optimizes itself by a learning process. *Proceedings of the IEE - Part B: Electronic and Communication Engineering*, v. 108, n. 40, p. 422–435, July 1961. ISSN 0369-8890.
- GANNOT, S.; BURSHEIN, D.; WEINSTEIN, E. Signal enhancement using beamforming and nonstationarity with applications to speech. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 49, n. 8, p. 1614 –1626, Aug. 2001. ISSN 1053-587X.
- GAY, S. L.; BENESTY, J. (Ed.). *Acoustic signal processing for telecommunication*. 2000.
- GODARA, L.; CANTONI, A. Analysis of the performance of adaptive beamforming using perturbation sequences. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, v. 31, n. 2, p. 268 – 279, Mar. 1983. ISSN 0018-926X.
- GODARA, L.; CANTONI, A. Analysis of constrained LMS algorithm with application to adaptive beamforming using perturbation sequences. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP '85*. 1985. v. 10, p. 1804 – 1807.
- GODARA, L.; CANTONI, A. Analysis of constrained LMS algorithm with application to adaptive beamforming using perturbation sequences. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, v. 34, n. 3, p. 368 – 379, Mar. 1986. ISSN 0018-926X.

- GOETZE, S. et al. Quality assessment for listening-room compensation algorithms. In: *Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP), 2010 IEEE International Conference on*. 2010. p. 2450 –2453. ISSN 1520-6149.
- GOETZE, S. et al. System identification for multi-channel listening-room compensation using an acoustic echo canceller. In: *Hands-Free Speech Communication and Microphone Arrays, 2008. HSCMA 2008*. 2008. p. 224 –227.
- GOLUB, G.; LOAN, C. V. *Matrix Computations*. : Johns Hopkins University Press, 2013. (Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences). ISBN 9781421407944.
- GORDON, W. Far-field approximations to the Kirchoff-Helmholtz representations of scattered fields. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, v. 23, n. 4, p. 590 – 592, Jul. 1975. ISSN 0018-926X.
- GRIFFITHS, L.; JIM, C. An alternative approach to linearly constrained adaptive beamforming. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, v. 30, n. 1, p. 27 – 34, Jan. 1982. ISSN 0018-926X.
- GU, Y. et al. Convergence analysis of a deficient-length LMS filter and optimal-length sequence to model exponential decay impulse response. *Signal Processing Letters, IEEE*, v. 10, n. 1, p. 4–7, Jan 2003. ISSN 1070-9908.
- GUNTHER, J. Learning echo paths during continuous double-talk using semi-blind source separation. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, v. 20, n. 2, p. 646 –660, Feb. 2012. ISSN 1558-7916.
- GUO, M. et al. Analysis of acoustic feedback/echo cancellation in multiple-microphone and single-loudspeaker systems using a power transfer function method. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 59, n. 12, p. 5774 –5788, Dec. 2011. ISSN 1053-587X.
- GUO, M. et al. Analysis of adaptive feedback and echo cancellation algorithms in a general multiple-microphone and single-loudspeaker system. In: *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2011 IEEE International Conference on*. 2011. p. 433 –436. ISSN 1520-6149.

- GUO, M. et al. Comparison of multiple-microphone and single-loudspeaker adaptive feedback/echo cancellation systems. In: *Proc. 19th European Signal Process. Conf. (EUSIPCO 2011)*. : EURASIP, 2011. p. 1279 – 1283. ISSN 2076-1465.
- GUO, M.; JENSEN, S.; JENSEN, J. Novel acoustic feedback cancellation approaches in hearing aid applications using probe noise and probe noise enhancement. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, v. 20, n. 9, p. 2549–2563, 2012. ISSN 1558-7916.
- GUO, M. et al. Analysis of closed-loop acoustic feedback cancellation systems. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2013. ICASSP 2013. Proceedings. 2013 IEEE International Conference on*. 2013. p. 590–594.
- GUSTAFSSON, S. et al. A psychoacoustic approach to combined acoustic echo cancellation and noise reduction. *Speech and Audio Processing, IEEE Transactions on*, v. 10, n. 5, p. 245 – 256, Jul. 2002. ISSN 1063-6676.
- HABETS, E.; BENESTY, J. Multi-microphone noise reduction based on orthogonal noise signal decompositions. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, v. 21, n. 6, p. 1123–1133, June 2013. ISSN 1558-7916.
- HABETS, E. et al. New insights into the MVDR beamformer in room acoustics. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, v. 18, n. 1, p. 158–170, Jan 2010. ISSN 1558-7916.
- HABETS, E. A. P.; BENESTY, J. A perspective on frequency-domain beamformers in room acoustics. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, v. 20, n. 3, p. 947–960, March 2012. ISSN 1558-7916.
- HACIHABIBOUGLU, H.; CVETKOVIC, Z. Multichannel dereverberation theorems and robustness issues. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, v. 20, n. 2, p. 676–689, Feb 2012. ISSN 1558-7916.
- HAMALAINEN, M.; MYLLYLÄ, V. Acoustic echo cancellation for dynamically steered microphone array systems. In: *Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, 2007 IEEE Workshop on*. 2007. p. 58 –61.

- HÄNSLER, E.; SCHMIDT, G. *Acoustic Echo and Noise Control: A Practical Approach*. : Wiley-Interscience, 2004. ISBN 0471453463.
- HÄNSLER, E.; SCHMIDT, G. *Topics in Acoustic Echo and Noise Control: Selected Methods for the Cancellation of Acoustical Echoes, the Reduction of Background Noise, and Speech Processing (Signals and Communication Technology)*. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2006. ISBN 354033212X.
- HARRIS, R.; CHABRIES, D.; BISHOP, F. A variable step (vs) adaptive filter algorithm. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 34, n. 2, p. 309–316, 1986. ISSN 0096-3518.
- HAYKIN, S. *Adaptive Filter Theory (2nd Edition)*. : Prentice Hall, 1993. ISBN 0130132365.
- HAYKIN, S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. 2nd. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall PTR, 1998. ISBN 0132733501.
- HAYKIN, S. et al. Adaptive tracking of linear time-variant systems by extended RLS algorithms. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 45, n. 5, p. 1118–1128, May 1997. ISSN 1053-587X.
- HELWANI, K.; BUCHNER, H.; SPORS, S. On the robust and efficient computation of the Kalman gain for multichannel adaptive filtering with application to acoustic echo cancellation. In: *Signals, Systems and Computers (ASILOMAR), 2010 Conference Record of the Forty Fourth Asilomar Conference on*. 2010. p. 988 –992. ISSN 1058-6393.
- HELWANI, K.; BUCHNER, H.; SPORS, S. Source-domain adaptive filtering for MIMO systems with application to acoustic echo cancellation. In: *Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP), 2010 IEEE International Conference on*. 2010. p. 321 –324. ISSN 1520-6149.
- HELWANI, K.; SPORS, S.; BUCHNER, H. Spatio-temporal signal preprocessing for multichannel acoustic echo cancellation. In: *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2011 IEEE International Conference on*. 2011. p. 93 –96. ISSN 1520-6149.
- HERBORDT, W. et al. Multichannel bin-wise robust frequency-domain adaptive filtering and its application to adaptive beamforming. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, v. 15, n. 4, p. 1340–1351, 2007. ISSN 1558-7916.

- HERBORDT, W.; KELLERMANN, W. GSAEC - acoustic echo cancellation embedded into the generalized sidelobe canceller. In: *Proc. European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*. 2000. v. 3, p. 1843–1846.
- HERBORDT, W.; KELLERMANN, W. Limits for generalized sidelobe cancellers with embedded acoustic echo cancellation. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. Proceedings. (ICASSP '01). 2001 IEEE International Conference on*. 2001. v. 5, p. 3241–3244.
- HERBORDT, W.; KELLERMANN, W. Frequency-domain integration of acoustic echo cancellation and a generalized sidelobe canceller with improved robustness. *European Transactions on Telecommunications*, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 13, n. 2, p. 123–132, 2002. ISSN 1541-8251. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/ett.4460130207>>.
- HERBORDT, W.; KELLERMANN, W.; NAKAMURA, S. Joint optimization of LCMV beamforming and acoustic echo cancellation. In: *Proc. European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*. 2004. p. 2003–2006.
- HERBORDT, W.; KELLERMANN, W.; NAKAMURA, S. Joint optimization of acoustic echo cancellation and adaptive beamforming. In: HANSLER, E.; SCHMIDT, G. (Ed.). *Topics in Acoustic Echo and Noise Control*. Springer Berlin Heidelberg, 2006, (Signals and Communication Technology). p. 19–50. ISBN 978-3-540-33212-1. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/3-540-33213-8\\_2](http://dx.doi.org/10.1007/3-540-33213-8_2)>.
- HERBORDT, W.; NAKAMURA, S.; KELLERMANN, W. Joint optimization of LCMV beamforming and acoustic echo cancellation for automatic speech recognition. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2005. Proceedings. (ICASSP '05). IEEE International Conference on*. 2005. v. 3, p. iii/77 – iii/80 Vol. 3. ISSN 1520-6149.
- HERBORDT, W.; W., K. Computationally efficient frequency-domain robust generalized sidelobe canceller. In: *Proc. International Workshop on Acoustic Echo and Noise control (IWAENC)*. 2001. p. 51–54.
- HIGHAM, N. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms: Second Edition*. : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. ISBN 9780898715217.

- HIOKA, Y. et al. A display-mounted high-quality stereo microphone array for high-definition videophone system. *Consumer Electronics, IEEE Transactions on*, v. 54, n. 2, p. 778–786, May 2008. ISSN 0098-3063.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. : Cambridge University Press, 1990. ISBN 0521386322.
- HOROWITZ, L.; SENNE, K. Performance advantage of complex LMS for controlling narrow-band adaptive arrays. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 1981. ISSN 0096-3518.
- HOSHUYAMA, O. Dual-microphone echo canceller for suppressing loud nonlinear echo. In: *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2012 IEEE International Conference on*. 2012. p. 181–184. ISSN 1520-6149.
- HOSHUYAMA, O.; SUGIYAMA, A.; HIRANO, A. A robust adaptive beamformer for microphone arrays with a blocking matrix using constrained adaptive filters. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 47, n. 10, p. 2677–2684, Oct. 1999. ISSN 1053-587X.
- HUANG, Y.; BENESTY, J.; CHEN, J. Analysis and comparison of multi-channel noise reduction methods in a common framework. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, v. 16, n. 5, p. 957–968, July 2008. ISSN 1558-7916.
- HUBING, N.; ALEXANDER, S. Statistical analysis of initialization methods for RLS adaptive filters. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 39, n. 8, p. 1793–1804, Aug. 1991. ISSN 1053-587X.
- IKEDA, K. Convergence analysis of block orthogonal projection and affine projection algorithms. *Signal Process.*, Elsevier North-Holland, Inc., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v. 82, n. 3, p. 491–496, 2002. ISSN 0165-1684.
- ITU-T P.341. *Transmission characteristics for wideband digital loudspeaking and hands-free telephony terminals*. 3 2011. In force.
- IVANDICH, S.; CANTONI, A. Performance analysis of narrow-band adaptive arrays using projected perturbation sequences. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, v. 41, n. 5, p. 625–634, 1993. ISSN 0018-926X.

- JAYNES, E. T. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, v. 106(4), p. 620–630, 1957.
- JEANNES, W. et al. Combined noise and echo reduction in hands-free systems: a survey. *Speech and Audio Processing, IEEE Transactions on*, v. 9, n. 8, p. 808–820, Nov. 2001. ISSN 1063-6676.
- JIM, C. A comparison of two LMS constrained optimal array structures. *Proceedings of the IEEE*, v. 65, n. 12, p. 1730–1731, Dec. 1977. ISSN 0018-9219.
- JONG, L. S. de. Towards a formal definition of numerical stability. *Numerische Mathematik*, Springer-Verlag, v. 28, n. 2, p. 211–219, 1977. ISSN 0029-599X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01394453>>.
- JUANG, B. H.; SOONG, F. K. Hands-free telecommunications. In: *Proceedings of International Workshop on Hands-Free Speech Communication*. 2001. p. 5–8.
- KAILATH, T. *Linear Systems*. New Jersey, USA: Prentice-Hall, 1980.
- KAILATH, T.; SAYED, A.; HASSIBI, B. *Linear estimation*. : Prentice Hall, 2000. (Prentice-Hall information and system sciences series). ISBN 9780130224644.
- KAJALA, M.; HAMALAINEN, M. Filter-and-sum beamformer with adjustable filter characteristics. In: *Proceedings of the Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. on IEEE International Conference*. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2001. v. 5, p. 2917–2920. ISBN 0-7803-7041-4. Disponível em: <<http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1258238.1259552>>.
- KALLINGER, M.; BITZER, J.; KAMMEYER, K.-D. Study on combining multi-channel echo cancellers with beamformers. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2000. ICASSP '00. Proceedings. 2000 IEEE International Conference on*. 2000. v. 2, p. 797–800. ISSN 1520-6149.
- KAMMEYER, K.-D.; KALLINGER, M.; MERTINS, A. New aspects of combining echo cancellers with beamformers. In: *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, and Signal Processing*. Philadelphia, PA, USA: , 2005. v. 3, p. 137–140.



- KANTOR, J. et al. Mean-squared-error prediction for bayesian direction-of-arrival estimation. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 61, n. 19, p. 4729–4739, 2013. ISSN 1053-587X.
- KAPLAN, W. *Advanced calculus*. Reading, Mass: Addison Wesley, 1952.
- KELLERMANN, W. Strategies for combining acoustic echo cancellation and adaptive beamforming microphone arrays. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1997. ICASSP-97., 1997 IEEE International Conference on*. 1997. v. 1, p. 219–222.
- KHONG, A.; NAYLOR, P. Selective-tap adaptive algorithms in the solution of the nonuniqueness problem for stereophonic acoustic echo cancellation. *Signal Processing Letters, IEEE*, v. 12, n. 4, p. 269–272, April 2005. ISSN 1070-9908.
- KLEIN, U.; VO, T. Q. Direction-of-arrival estimation using a microphone array with the multichannel cross-correlation method. In: *Signal Processing and Information Technology (ISSPIT), 2012 IEEE International Symposium on*. 2012. p. 000251–000256.
- KUO, S. M.; GAN, W.-S. S. *Digital Signal Processors: Architectures, Implementations and Applications*. : Prentice Hall, 2005.
- KWON, Y.; NARAYANAN, R.; RANGASWAMY, M. Multi-target detection using total correlation for noise radar systems. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, v. 49, n. 2, p. 1251–1262, 2013. ISSN 0018-9251.
- LEE, K.-A.; GAN, W.-S.; KUO, S. M. *Subband Adaptive Filtering: Theory and Implementation*. : Wiley Publishing, 2009. ISBN 0470516941, 9780470516942.
- LIAVAS, A.; REGALIA, P. Acoustic echo cancellation: do IIR models offer better modeling capabilities than their FIR counterparts? *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 46, n. 9, p. 2499–2504, Sep. 1998. ISSN 1053-587X.
- LIM, J.; OPPENHEIM, A. Enhancement and bandwidth compression of noisy speech. *Proceedings of the IEEE*, v. 67, n. 12, p. 1586 – 1604, Dec. 1979. ISSN 0018-9219.

- LIU, W.; PRINCIPE, J. C.; HAYKIN, S. *Kernel Adaptive Filtering: A Comprehensive Introduction*. 1st. ed. : Wiley Publishing, 2010. ISBN 0470447532, 9780470447536.
- LIU, W.; WEISS, S. *Wideband Beamforming: Concepts and Techniques*. : Wiley Publishing, 2010. ISBN 0470713925, 9780470713921.
- LOGANATHAN, P.; HABETS, E. A. P.; NAYLOR, P. A. A partitioned block proportionate adaptive algorithm for acoustic echo cancellation. In: *APSIPA ASC 2010 - Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference*. Biopolis, Singapore: , 2010. p. 371 – 376.
- LOIZOU, P. C. *Speech Enhancement: Theory and Practice (Signal Processing and Communications)*. 1. ed. : CRC, 2007. Hardcover. ISBN 0849350328.
- LONG, G.; LING, F.; PROAKIS, J. The LMS algorithm with delayed coefficient adaptation. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 37, n. 9, p. 1397 –1405, Sep. 1989. ISSN 0096-3518.
- LOW, S. Y.; NORDHOLM, S. A blind approach to joint noise and acoustic echo cancellation. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2005. Proceedings. (ICASSP '05). IEEE International Conference on*. 2005. v. 3, p. 69–72. ISSN 1520-6149.
- MACCHI, O. *Adaptive Processing: The LMS approach with Applications in Transmission*. : Wiley, 1995.
- MACCHI, O. The theory of adaptive filtering in a random time-varying environment. In: FIGUEIRAS-VIDAL, A. R. (Ed.). *Digital Signal Processing in Telecommunications*. : Springer-Verlag, 1996.
- MADDALA, S.; MAHESWAR, Y. Acoustic echo canceller for teleconferencing systems using Levinson algorithm. In: *Emerging Trends in Robotics and Communication Technologies (INTERACT), 2010 International Conference on*. 2010. p. 92 –95.
- MAHBUB, U.; ACHARJEE, P.; FATTAH, S. An acoustic echo cancellation scheme based on particle swarm optimization algorithm. In: *TENCON 2010 - 2010 IEEE Region 10 Conference*. 2010. p. 759 –762. ISSN pending.

- MAHBUB, U.; ACHARJEE, P.; FATTAH, S. A time domain approach of acoustic echo cancellation based on particle swarm optimization. In: *Electrical and Computer Engineering (ICECE), 2010 International Conference on*. 2010. p. 518–521.
- MAKINO, S.; KANEDA, Y.; KOIZUMI, N. Exponentially weighted step-size NLMS adaptive filter based on the statistics of a room impulse response. *Speech and Audio Processing, IEEE Transactions on*, v. 1, n. 1, p. 101–108, 1993. ISSN 1063-6676.
- MALUENDA, Y.; BERMUDEZ, J. Transient mean-square analysis of prediction error method-based adaptive feedback cancellation in hearing aids. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, v. 20, n. 1, p. 261–275, 2012. ISSN 1558-7916.
- MALUENDA, Y. R. M. *Análise estatística do algoritmo LMS aplicado ao cancelamento de retroalimentação acústica em aparelhos auditivos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2009.
- MANOLAKIS, D. G.; INGLE, V. K.; KOGON, S. M. *Statistical and adaptive signal processing: spectral estimation, signal modeling, adaptive filtering, and array processing*. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2000. xix + 796 p. ISBN 0-07-040051-2.
- MARCOS, S.; MACCHI, O. Tracking capability of the least mean square algorithm: Application to an asynchronous echo canceller. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 35, n. 11, p. 1570–1578, 1987.
- MARKOVICH, S.; GANNOT, S.; COHEN, I. Multichannel eigenspace beamforming in a reverberant noisy environment with multiple interfering speech signals. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, v. 17, n. 6, p. 1071–1086, Aug 2009. ISSN 1558-7916.
- MARTIN, R.; ALTENHONER, J. Coupled adaptive filters for acoustic echo control and noise reduction. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1995. ICASSP-95., 1995 International Conference on*. 1995. v. 5, p. 3043–3046. ISSN 1520-6149.
- MARUO, M. H.; BERMUDEZ, J. C. M.; RESENDE, L. S. On the optimal solutions of beamformer assisted acoustic echo cancelers. In: *Proc.*

- IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP 2011)*. 2011. p. 645–648.
- MARUO, M. H.; BERMUDEZ, J. C. M.; RESENDE, L. S. Statistical analysis of the jointly-optimized acoustic echo cancellation BF-AEC structure. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2013. ICASSP 2013. Proceedings. 2013 IEEE International Conference on*. 2013. p. 5840–5844.
- MARUO, M. H.; BERMUDEZ, J. C. M.; RESENDE, L. S. Statistical analysis of a jointly optimized beamformer-assisted acoustic echo canceler. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 62, n. 1, p. 252–265, Jan 2014. ISSN 1053-587X.
- MARUO, M. H.; BERMUDEZ, J. C. M.; RESENDE, L. S. Statistical analysis of jointly-optimized GSC implementations of beamformer-assisted acoustic echo cancelers. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2014. ICASSP 2014. Proceedings. 2014 IEEE International Conference on*. 2014. p. Forthcoming.
- MAYYAS, K. Performance analysis of the deficient length LMS adaptive algorithm. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 53, n. 8, p. 2727–2734, 2005. ISSN 1053-587X.
- MERCHED, R.; DINIZ, P.; PETRAGLIA, M. A new delay less subband adaptive filter structure. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 47, n. 6, p. 1580–1591, Jun. 1999. ISSN 1053-587X.
- MESTRE, X. Improved estimation of eigenvalues and eigenvectors of covariance matrices using their sample estimates. *Information Theory, IEEE Transactions on*, v. 54, n. 11, p. 5113–5129, Nov 2008. ISSN 0018-9448.
- MEYER, C. D.; MEYER, C. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. : Soc for Industrial & Applied Math, 2001. ISBN 0898714540.
- MIKHAEL, W. B. et al. Adaptive filters with individual adaptation of parameters. *Circuits and Systems*, v. 33, p. 677–686, 1986.
- MINKOFF. Comment on the “Unnecessary assumption of statistical independence between reference signal and filter weights in feedforward adaptive systems”. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 49, n. 5, p. 1109, May. 2001.

- MINSKY, M. L.; PAPERT, S. *Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry*. Expanded ed. Cambridge Mass.: MIT Press, 1988. ISBN 0262631113.
- MITRA, S. K. K. *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach*. : McGraw-Hill Higher Education, 2000. ISBN 0072321059.
- MIYABE, S. et al. Interface for barge-in free spoken dialogue system based on sound field reproduction and microphone array. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, v. 2007, 2007.
- MORGAN, D.; THI, J. A delayless subband adaptive filter architecture. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 43, n. 8, p. 1819–1830, Aug. 1995. ISSN 1053-587X.
- MOURJOPOULOS, J. N. Digital equalization of room acoustics. *J. Audio Eng. Soc*, v. 42, n. 11, p. 884–900, 1994.
- MYLLYLÄ, V.; HAMALAINEN, M. Adaptive beamforming methods for dynamically steered microphone array systems. In: *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2008. ICASSP 2008. IEEE International Conference on*. 2008. p. 305–308. ISSN 1520-6149.
- NAKAGAWA, C.; NORDHOLM, S.; YAN, W.-Y. New insights into optimal acoustic feedback cancellation. *Signal Processing Letters, IEEE*, v. 20, n. 9, p. 869–872, 2013. ISSN 1070-9908.
- NASCIMENTO, V. H. *Stability and Performance of Adaptive Filters without Slow Adaptation Approximations*. Tese (Doutorado) — University of California, 1999.
- NATHWANI, K.; HEGDE, R. Joint adaptive beamforming and echo cancellation using a non reference anchor array framework. In: *Signals, Systems and Computers (ASILOMAR), 2012 Conference Record of the Forty Sixth Asilomar Conference on*. 2012. p. 885–889. ISSN 1058-6393.
- NEELY, S. T.; ALLEN, J. B. Invertibility of a room impulse response. *Journal of the Acoustical Society of America, ASA*, v. 66, n. 1, p. 165–169, 1979.

- NICOLAU, V. B. *Cancelamento de realimentação acústica em aparelhos auditivos através do método de erro de predição com comprimento deficiente*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2010.
- NICOLAU, V. B.; COSTA, M. H. Analysis of the deficient length prediction error method in a hearing aid's feedback canceller. In: *IEEE European Signal Process. Conf. (EUSIPCO), In Proc.* 2011. p. 714–718.
- OGATA, K. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, Pearson Education International, 2002. (graph. Darst). ISBN 9780130432452. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=zcOnQgAACAAJ>>.
- OLYAE, S. et al. Refractive index determination in fuel cells using high-resolution laser heterodyne interferometer. *International Journal of Hydrogen Energy*, In Press, Corrected Proof, p. –, 2010. ISSN 0360-3199. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360319910011912>>.
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W.; BUCK, J. R. *Discrete-time signal processing (2nd ed.)*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1999. ISBN 0-13-754920-2.
- OPPENHEIM, A. V.; WILLISKY, A. S.; NAWAB, S. H. *Signals & systems (2nd ed.)*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996. ISBN 0-13-814757-4.
- OWSLEY, N. Sonar array processing. In: HAYKIN, S. (Ed.). *Array Signal Processing*. : Prentice-Hall, 1985.
- OZEKI, K.; UMEDA, T. An adaptive filtering algorithm using an orthogonal projection to an affine subspace and its properties. *Transactions of the ICEIE*, v. 67-A, n. 2, p. 126–132, Feb. 1984.
- PALEOLOGU, C. et al. Class of double-talk detectors based on the holder inequality. In: *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2011 IEEE International Conference on.* 2011. p. 425–428. ISSN 1520-6149.
- PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. : McGraw-Hill Education, 2002. (McGraw-Hill series in electrical and computer engineering). ISBN 9780071226615.

- PAPP, I.; SARIC, Z.; TESLIC, N. Hands-free voice communication with TV. *Consumer Electronics, IEEE Transactions on*, v. 57, n. 2, p. 606–614, May 2011. ISSN 0098-3063.
- PARK, S.; SERPEDIN, E.; QARAQE, K. Gaussian assumption: The least favorable but the most useful [lecture notes]. *Signal Processing Magazine, IEEE*, v. 30, n. 3, p. 183–186, 2013. ISSN 1053-5888.
- PARREIRA, W. et al. Stochastic behavior analysis of the Gaussian kernel least-mean-square algorithm. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 60, n. 5, p. 2208–2222, May 2012. ISSN 1053-587X.
- PROAKIS, J. G.; MANOLAKIS, D. K. *Digital Signal Processing*. 4. ed. : Prentice Hall, 2006. ISBN 0131873741.
- PRUSSING, J. E. The principal minor test for semidefinite matrices. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 9, n. 1, Jan. 1986.
- RABINER, L.; JUANG, B.-H. *Fundamentals of speech recognition*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1993. ISBN 0-13-015157-2.
- RADHOUANE, R.; LIU, P.; MODLIN, C. Minimizing the memory requirement for continuous flow FFT implementation: continuous flow mixed mode FFT (CFMM-FFT). In: *Circuits and Systems, 2000. Proceedings. ISCAS 2000 Geneva. The 2000 IEEE International Symposium on*. 2000. v. 1, p. 116–119.
- REUVEN, G.; GANNOT, S.; COHEN, I. Joint acoustic echo cancellation and transfer function GSC in the frequency domain. In: *Electrical and Electronics Engineers in Israel, 2004. Proceedings. 2004 23rd IEEE Convention of*. 2004. p. 412 – 415.
- REUVEN, G.; GANNOT, S.; COHEN, I. Joint noise reduction and acoustic echo cancellation using the transfer-function generalized sidelobe canceller. *Speech Communication*, v. 49, n. 7-8, p. 623–635, Jul. 2007.
- REUVEN, G.; GANNOT, S.; COHEN, I. Multichannel acoustic echo cancellation and noise reduction in reverberant environments using the transfer-function GSC. In: *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2007. ICASSP 2007. IEEE International Conference on*. 2007. v. 1, p. I–81 –I–84. ISSN 1520-6149.

- ROMBOUTS, G.; SPRIET, A.; MOONEN, M. Generalized sidelobe canceller based combined acoustic feedback- and noise cancellation. *Signal Process.*, Elsevier North-Holland, Inc., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v. 88, p. 571–581, Mar. 2008. ISSN 0165-1684. Disponível em: <<http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1321778.1321860>>.
- RUPP, M.; CEZANNE, J. Robustness conditions of the LMS algorithm with time-variant matrix step-size. *Signal Process.*, Elsevier North-Holland, Inc., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v. 80, n. 9, p. 1787–1794, Sep. 2000. ISSN 0165-1684. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1684\(00\)00088-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1684(00)00088-8)>.
- SAYED, A. H. *Adaptive Filters.* : Wiley-IEEE Press, 2008. ISBN 0470253886.
- SCHMIDT, G.-U. *Acoustic echo and noise control for low-cost processors.* Jan. 2000. (DSP World Spring Design Conference <2000, San José, Calif.>: Proceedings. S. 1-28). Disponível em: <<http://tubiblio.ulb-tu-darmstadt.de/15353/>>.
- SCHNEIDER, M.; KELLERMANN, W. A wave-domain model for acoustic MIMO systems with reduced complexity. In: *Hands-free Speech Communication and Microphone Arrays (HSCMA), 2011 Joint Workshop on.* 2011. p. 133 –138.
- Scientific American. The new bell telephone. *Scientific American*, Oct. 1877.
- SHIN, J.-W.; CHANG, J.-H.; KIM, N. S. Statistical modeling of speech signals based on generalized gamma distribution. *Signal Processing Letters, IEEE*, v. 12, n. 3, p. 258–261, March 2005. ISSN 1070-9908.
- SILVA, L. F.; BERMUDEZ, J. C. M. Speech enhancement using a frame adaptive gain function for Wiener filtering. In: *Proc. IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP 2011).* 2011. p. 389–392.
- SOLO, V.; KONG, X. *Adaptive Signal Processing Algorithms: Stability and Performance.* Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1995. ISBN 0-13-501263-5.
- SONDHI, M.; BERKLEY, D. Silencing echoes on the telephone network. *Proceedings of the IEEE*, v. 68, n. 8, p. 948 – 963, Aug. 1980. ISSN 0018-9219.



- SONDHI, M. M.; PRESTI, A. J. B.S.T.J. briefs: A self-adaptive echo canceller. *The Bell System Technical Journal*, v. 45, n. 10, p. 1851–1854, Dec. 1966. ISSN 0005-8580. Disponível em: <<http://bstj.bell-labs.com/BSTJ/images/Vol45/bstj45-10-1851.pdf>>.
- SOUDEN, M.; BENESTY, J.; AFFES, S. On optimal frequency-domain multichannel linear filtering for noise reduction. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, v. 18, n. 2, p. 260–276, Feb 2010. ISSN 1558-7916.
- SOUDEN, M.; LIU, Z. Optimal joint linear acoustic echo cancellation and blind source separation in the presence of loudspeaker nonlinearity. In: *Multimedia and Expo, 2009. ICME 2009. IEEE International Conference on*. 2009. p. 117–120. ISSN 1945-7871.
- SPRIET, A. et al. Feedback control in hearing aids. In: BENESTY, J.; SONDHI, M.; HUANG, Y. (Ed.). *Springer Handbook of Speech Processing*. Springer Berlin Heidelberg, 2008. p. 979–1000. ISBN 978-3-540-49125-5. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-49127-9\\_48](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-49127-9_48)>.
- SSNDERSON, C.; PALIWAL, K. K. Effect of different sampling rates and feature vector sizes on speech recognition performance. In: *TENCON '97. IEEE Region 10 Annual Conference. Speech and Image Technologies for Computing and Telecommunications., Proceedings of IEEE*. 1997. v. 1, p. 161–164 vol.1.
- STOICA, P.; BABU, P. The Gaussian data assumption leads to the largest Cramér-Rao bound [lecture notes]. *Signal Processing Magazine, IEEE*, v. 28, n. 3, p. 132–133, 2011. ISSN 1053-5888.
- STRANG, G. *Linear Algebra and its Applications*. San Diego: Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, 1988.
- SUGIYAMA, A.; MIYAHARAY, R. A new generalized sidelobe canceller with a compact array of microphones suitable for mobile terminals. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2014. Proceedings. (ICASSP '14). IEEE International Conference on*. 2014. p. 820–824.
- TALMON, R.; COHEN, I.; GANNOT, S. Convolutional transfer function generalized sidelobe canceler. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, v. 17, n. 7, p. 1420–1434, Sept 2009. ISSN 1558-7916.

- TALMON, R.; COHEN, I.; GANNOT, S. Multichannel speech enhancement using convolutive transfer function approximation in reverberant environments. In: *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2009. ICASSP 2009. IEEE International Conference on*. 2009. p. 3885–3888. ISSN 1520-6149.
- TATEKURA, Y.; SARUWATARI, H.; SHIKANO, K. An iterative inverse filter design method for the multichannel sound field reproduction system. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E84-A, n. 4, p. 991–998, 2001.
- THEODORIDIS, S. Adaptive filtering algorithms. In: *Instrumentation and Measurement Technology Conference, 2001. IMTC 2001. Proceedings of the 18th IEEE*. 2001. v. 3, p. 1497–1501. ISSN 1091-5281.
- TOBIAS, O. J.; BERMUDEZ, J. C. M.; BERSHAD, N. J. Mean weight behavior of the filtered-X LMS algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 48, n. 4, p. 1061–1075, 2000.
- TOURNERET, J.-Y.; BERSHAD, N. J.; BERMUDEZ, J. C. M. Echo Cancellation-The Generalized Likelihood Ratio Test For Double-Talk Versus Channel Change. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 57, n. 3, p. 916–926, 2009.
- TREES, H. L. V. *Optimum Array Processing (Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part IV)*. 1. ed. : Wiley-Interscience, 2002. Hardcover. ISBN 0471093904.
- VAIDYANATHAN, P. P. *Multirate systems and filter banks*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1993. ISBN 0-13-605718-7.
- VALERO, M.; MABANDE, E.; HABETS, E. Signal-based late residual echo spectral variance estimation. In: *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2014 IEEE International Conference on*. 2014. p. 5914–5918.
- van de KERKHOF, L.; KITZEN, W. Tracking of a time-varying acoustic impulse response by an adaptive filter. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 40, n. 6, p. 1285–1294, Jun. 1992. ISSN 1053-587X.
- VASHEGI, S. V. *Advanced Signal Processing and Digital Noise Reduction*. : Willey-Teubner, 1996.

- VEEN, B. V.; BUCKLEY, K. Beamforming: a versatile approach to spatial filtering. *ASSP Magazine, IEEE*, v. 5, n. 2, p. 4–24, Apr. 1988. ISSN 0740-7467.
- WANG, D.; LIM, J. The unimportance of phase in speech enhancement. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 30, n. 4, p. 679–681, Aug. 1982. ISSN 0096-3518.
- WANG, Z.; BOVIK, A. Mean squared error: Love it or leave it? a new look at signal fidelity measures. *Signal Processing Magazine, IEEE*, v. 26, n. 1, p. 98–117, Jan 2009. ISSN 1053-5888.
- WEINSTEIN, S. Echo cancellation in the telephone network. *Communications Society Magazine, IEEE*, v. 15, n. 1, p. 8–15, January 1977. ISSN 0148-9615.
- WERNER, S.; APOLINÁRIO JR., J.; CAMPOS, M. de. On the equivalence of RLS implementations of LCMV and GSC processors. *Signal Processing Letters, IEEE*, v. 10, n. 12, p. 356–359, Dec. 2003. ISSN 1070-9908.
- WIDROW, B. et al. Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter. *Proceedings of the IEEE*, v. 64, n. 8, p. 1151–1162, 1976.
- WIDROW, B.; STEARNS, S. D. *Adaptive signal processing*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1985. ISBN 0-13-004029-0.
- WIENER, N. *Nonlinear Problems in Random Theory*. : MIT Press, 1966. (MIT Press Classics).
- WINKLER, R. *An Introduction to Bayesian Inference and Decision*. : Probabilistic Publishing, 2003. ISBN 9780964793842.
- YELLEPEDDI, A.; FLORENCIO, D. Sparse array-based room transfer function estimation for echo cancellation. *Signal Processing Letters, IEEE*, v. 21, n. 2, p. 230–234, Feb 2014. ISSN 1070-9908.
- ZAKHAROV, Y.; WHITE, G.; LIU, J. Low-complexity RLS algorithms using dichotomous coordinate descent iterations. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 56, n. 7, p. 3150–3161, Jul. 2008. ISSN 1053-587X.

- ZATMAN, M. How narrow is narrowband? [adaptive array signal processing]. In: *Signals, Systems amp; Computers, 1997. Conference Record of the Thirty-First Asilomar Conference on*. 1997. v. 2, p. 1341–1345 vol.2. ISSN 1058-6393.
- ZHANG, L.; LIU, W.; LANGLEY, R. Adaptive beamforming with real-valued coefficients based on uniform linear arrays. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, v. 59, n. 3, p. 1047–1053, 2011. ISSN 0018-926X.
- ZHANG, L.; LIU, W.; YU, L. Performance analysis for finite sample MVDR beamformer with forward backward processing. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 59, n. 5, p. 2427–2431, 2011. ISSN 1053-587X.