UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas
Departamento de Filosofia

Indistinguibilidade: uma abordagem por meio de estruturas

Antônio Mariano Nogueira Coelho

Tese apresentada ao Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo, como um dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Filosofia.

ORIENTADOR: **Prof. Dr. Newton C.A. da Costa**

São Paulo, Outubro de 2005

Indistinguibilidade:
uma abordagem por meio de estruturas

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado, defendida e corrigida por Antônio Mariano Nogueira Coelho, tendo sido aprovada pela banca examinadora.

São Paulo, fevereiro de 2006.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa (orientador)
Prof. Dr. Adonai Schlup Sant'Anna
Prof. Dr. Edélcio Gonçalves de Souza
Prof. Dr. José Augusto Baeta Segundo
Prof. Dr. Roque da Costa Caiero

ABSTRACT

The concept of indistinguishability in a structure, understood as related to invariance under the automorphisms of that structure, is presented, analysed and applied to the examination of the philosophical problem of indistinguishable objects. Specially considered is the version of this problem that appears in quantum theory.

KEY WORDS: indistinguishability, structures, invariance, identity, quantum objects.

RESUMO

O conceito de indistinguibilidade em uma estrutura, entendido como relacionado à invariância sob os automorfismos dessa estrutura, é apresentado, analisado e aplicado ao exame do problema filosófico dos objetos indistinguíveis. Especialmente considerada é a versão desse problema que aparece na teoria quântica.

PALAVRAS-CHAVE: indistinguibilidade, estruturas, invariância, identidade, objetos quânticos.

À Cecília, minha Penélope

Agradeço

ao Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa,
pela orientação, estímulo e, acima de tudo, pelo exemplo;

aos Profs. Dr. Edélcio Gonçalves de Souza e Dr. Alexandre Rodrigues,
pelas sugestões e críticas ao texto do exame de qualificação;

ao Prof. Dr. Décio Krause,
por todo o apoio intelectual;

aos membros da banca, antecipadamente;

Ao Departamento de Filosofia da Universidade Federal de Santa Catarina, que me concedeu um afastamento de dois anos, para que eu trabalhasse em minha pesquisa;

especialmente, a meus pais e a minha mulher.

Indistinguibilidade: uma abordagem por meio de estruturas

I - Prólogo

O que é a relação de indistinguibilidade entre objetos? Existem *dois* objetos indistinguíveis? Isto é, existem objetos a e b tais que a seja diferente de b e a seja indistinguível de b ? Essas são perguntas antigas na história da filosofia. De um ponto de vista intuitivo, objetos indistinguíveis são aqueles que possuem exatamente as mesmas propriedades. Se por propriedades entendermos tanto as intrínsecas quanto as relacionais, poderemos apresentar essa concepção intuitiva, em uma linguagem de segunda ordem, dizendo que: a e b são indistinguíveis se e somente se valer o esquema (infinito) abaixo:

$\forall P_1 (P_1 a \leftrightarrow P_1 b)$

$\forall P_2 \forall x_1 ((P_2 a x_1 \leftrightarrow P_2 b x_1) \wedge (P_2 x_1 a \leftrightarrow P_2 x_1 b))$

$\forall P_3 \forall x_1 \forall x_2 ((P_3 a x_1 x_2 \leftrightarrow P_3 b x_1 x_2) \wedge (P_3 x_1 a x_2 \leftrightarrow P_3 x_1 b x_2) \wedge (P_3 x_1 x_2 a \leftrightarrow P_3 x_1 x_2 b))$

.

.

.

Aqui a e b denotam objetos e para cada número natural $n \geq 1$, x_n é uma variável variando sobre objetos e P_n é uma variável variando sobre relações n-árias entre objetos, isto é, variando sobre propriedades intrínsecas (P_1) ou relacionais (P_n com n ≥ 2) de objetos.

O uso da lógica de segunda ordem, manifesto na quantificação sobre propriedades, é considerado, por alguns, problemático, entretanto não discutiremos esse problema aqui. A meu ver, a única idéia suficientemente clara da noção de propriedade (isto é, clara o bastante para servir de alicerce à solução de outro problema que não o de caracterizar a noção mesma de propriedade) é a idéia extensional conjuntista. Examinemo-la na teoria de conjuntos usual, ZFC.

Segundo a visão extensional conjuntista, uma propriedade de objetos é simplesmente um conjunto de tais objetos. Expliquemos isso. Primeiramente, como estamos trabalhando em ZFC, entendemos por objeto um conjunto que esteja na hierarquia cumulativa usual, isto é, aquela construída a partir do vazio, por meio da iteração, ao longo da classe dos ordinais, das operações de conjunto das partes e união. Dito isso, a visão de uma propriedade de objetos como um conjunto desses objetos pode ser esclarecida com a apresentação de um par de exemplos. Vejamos. A propriedade de ser número par pode ser considerada como o conjunto dos números pares; a propriedade de ser função contínua de reais nos reais pode ser considerada como o conjunto das funções contínuas de reais nos reais. É possível precisar isso com a seguinte definição: dado um conjunto A, uma propriedade de elemento de A é um subconjunto de A. Ainda segundo a visão extensional conjuntista, dados um objeto *a* e uma propriedade P (ou seja um conjunto P), dizemos que *a* possui a propriedade P se e somente se *a* é elemento de P. Assim, dados os objetos *a* e *b*, dizer que *a* e *b* possuem as mesmas propriedades é dizer que eles pertencem aos mesmos conjuntos. Ora, o axioma do par, em ZFC, nos permite formar o conjunto unitário de um objeto qualquer. Portanto, se *a* e *b* pertencem aos mesmos conjuntos, temos, como *a* é elemento de $\{a\}$, que b também é elemento de $\{a\}$, e, daí, que $a = b$. Em outras palavras, $\{a\}$ representa a propriedade de ser idêntico a *a* ; se *b* possui as mesmas propriedade que *a* , então possui essa também, logo *b* é idêntico a *a*. Resumindo, não há objetos diferentes que sejam indistinguíveis (entendendo-se por indistinguibilidade a posse das mesmas propriedades).

Na verdade, nem é necessário supor que *a* e *b* possuam as mesmas propriedades, basta assumir que *b* possui todas as propriedades de *a*, assim, em particular, *b* possui a propriedade de ser idêntico a *a* e temos $a = b$. Esse raciocínio, que também poderia ser levado a cabo em uma teoria intuitiva de conjuntos que permitisse a formação de conjuntos unitários de objetos quaisquer, sugere a seguinte versão, em linguagem de segunda ordem, do chamado Princípio da Identidade dos Indistinguíveis, de Leibniz:

$$\forall x \forall y\, (\forall P\, (Px \rightarrow Py) \rightarrow x = y)$$

Aqui x e y são variáveis variando sobre objetos e P é uma variável variando sobre propriedades monádicas, ou seja, intrínsecas, de objetos. Essa mesma idéia foi adotada por Whitehead e Russell para definir identidade no *Principia Mathematica* (página 57 do volume 1 da segunda edição). Mas no caso deles, é importante ressaltar que além das diferenças de notação, o axioma da redutibilidade desempenhava um papel muito importante na definição. Aliás, Whitehead e Russell apresentam sua definição de identidade em uma seção, na introdução, dedicada ao axioma da redutibilidade, e falam de uma "certa afinidade" entre esse axioma e o Princípio da Identidade dos Indistinguíveis de Leibniz (mais tarde, em sua Introduction to Mathematical Philosophy, na página 192, Russell vai mais longe e afirma que o axioma da redutibilidade é uma forma generalizada da identidade dos indistinguíveis de Leibniz).

Não trabalharemos, aqui, com teoria ramificada dos tipos, mas é interessante notar que na mesma página do *Principia* em que apresentam a definição de identidade, Whitehead e Russell escrevem que para Leibniz, a indistinguibilidade não podia significar a concordância em todas as propriedades (isto é, dada uma propriedade qualquer, *a* e *b* a possuem ou a e b não a possuem) uma vez que dentre as propriedades de *a* está a de ser idêntico a *a* e se *b* concorda com *a* em todas as propriedades, então, em particular, *b* tem a propriedade de ser idêntico a *a*. O problema de saber que propriedades são relevantes para bem caracterizar a noção de indistinguibilidade continua sendo uma questão central no estudo dessa noção. Neste trabalho uma posição a respeito desse tema será defendida.

A idéia expressa pela fórmula $\forall x \forall y\ (\forall P\ (Px \rightarrow Py) \rightarrow x = y)$ pode ser apresentada em primeira ordem, na linguagem de ZFC, da seguinte maneira: se y é elemento de todo conjunto do qual x é elemento, então x é igual a y, ou seja, $\forall x \forall y\ (\forall z\ (x \in z \rightarrow y \in z) \rightarrow x = y)$. Essa última fórmula é, pelo argumento anterior acerca da formação de conjuntos unitários, um teorema de ZFC. Assim, a teoria usual de conjuntos, a perspectiva extensional conjuntista da noção de propriedade, e a concepção intuitiva de indistinguibilidade como a posse das mesmas propriedades, combinadas, têm respostas para as duas perguntas com que começamos este texto. À segunda elas respondem negativamente. Não existem objetos *a* e *b* diferentes e indistinguíveis. À primeira elas respondem fazendo coincidir indistinguibilidade com identidade. Assim, o caráter específico de problemas referentes à indistinguibilidade é eliminado, restando exclusivamente os problemas que dizem respeito à identidade. Em minha opinião esse estado de coisas não é minimamente satisfatório. Problemas genuínos sobre a noção de indistinguibilidade, como, por exemplo, o problema das partículas indistinguíveis nos fundamentos da mecânica quântica, continuam esperando por solução, ao menos do ponto de vista filosófico. Devo, portanto, rejeitar pelo menos uma das posições que engendraram tal situação. Escolhi abandonar a terceira. Neste estudo, trabalharemos dentro da teoria de conjuntos usual, ou da teoria ZFCU (isto é, ZFC com urelementos) cujos modelos podem ser imersos, naturalmente, dentro daqueles de ZFC, e conservaremos a perspectiva extensional conjuntista da noção de propriedade, mas nos valeremos de uma outra idéia de indistinguibilidade, que não a da posse das mesmas propriedades. Usaremos a noção de indistinguibilidade em uma estrutura.

Antes de prosseguir é oportuno tentar esclarecer um ponto. Embora tenha optado por manter a teoria de conjuntos usual e a visão extensional conjuntista da noção de propriedade, não vejo, em princípio, nenhuma razão para me opor a propostas que ataquem problemas de indistinguibilidade revisando-as, entretanto é importante destacar que temos aqui duas situações muito diferentes. A noção de propriedade, fora da visão extensional conjuntista é, apesar da extensa literatura a seu respeito, tema muito pouco esclarecido, ainda aguardando o estabelecimento de padrões básicos orientadores das linhas de pesquisa e, portanto, creio, mais favorável ao acolhimento de abordagens exploratórias heterodoxas. Ressalvando-se que acolhimento é uma coisa e sucesso é outra. Já a teoria de conjuntos usual, ZFC, ao contrário, tornou-se o que Penelope Maddy (na página 26 de seu *Naturalism in Mathematics*) chamou de "côrte final de apelação para questões de existência e demonstração matemáticas". Uma teoria conjuntista substancialmente distinta de ZFC (claro que esse não é o caso nem de ZFCU, nem de NBG, por exemplo) tende a ter sua importância matemática e filosófica, infelizmente, depreciada. Isso apesar das suspeitas filosóficas volta e meia levantadas acerca de ZFC, quer por conta de sua ontologia exuberante, bem o oposto de uma " paisagem deserta", quer por conta , por exemplo, da distinção que ela, por meio do axioma do fundamento, estabelece entre um objeto e o conjunto unitário deste objeto. Em que pese essa situação, investigações da noção de indistinguibilidade têm sido feitas por meio de teorias conjuntistas alternativas. Nesse campo merece destaque a teoria de quase conjuntos, que vem sendo desenvolvida, a partir de 1990, por Décio Krause, tendo em vista, principalmente, a aplicação ao já mencionado problema das partículas indistinguíveis nos fundamentos da mecânica quântica.

A lógica subjacente à teoria de quase-conjuntos é o cálculo de predicados de primeira ordem sem identidade. A teoria compreende dois tipos de urelementos. Os micro-urelementos e os macro-urelementos. Aos primeiros não se aplica o conceito de identidade. Intuitivamente eles representam as partículas elementares da teoria quântica, para as quais, no entender de alguns físicos, Schrödinger, por exemplo, a noção de identidade não faz sentido, e a de indistinguibilidade faz. Krause justamente formaliza uma noção de indistinguibilidade e constrói uma teoria que contém uma réplica de ZFC e cujos modelos são imersíveis nos modelos de ZFC. Essa imersibilidade é uma vantagem no que concerne à consistência da teoria de quase-conjuntos, mas não está claro, ainda, se ela fortalece ou enfraquece a convicção de que essa teoria retrata adequadamente a indistinguibilidade e a ausência de identidade de objetos quânticos. Em meu entender, a principal diferença entre as abordagens conjuntista usual e quase-conjuntista do problema das partículas indistinguíveis é a mesma que existe entre o método regressivo e o método intuitivo em questões de fundamentos. Dado um problema de fundamentação dessa ou daquela disciplina, o método regressivo se satisfaz com uma solução que funcione matematicamente, ou seja, produza os teoremas desejados, sem produzir, junto, inconsistência; não importando o quão artificial esta solução seja. Já o método intuitivo só aceita solução baseada no entendimento das noções relevantes para o problema sob exame. A funcionalidade matemática é desejada, mas deve ser obtida sem artificialismos e as intuições conceituais têm de receber o respeito que lhes é devido. Um breve e lúcido tratamento dos métodos regressivo e intuitivo é feito por Michael Potter (nas páginas 34 a 36) em seu *Set Theory and its Philosophy*. Na matemática usual, aquela fundamentada em ZFC, uma abordagem regressiva do problema das partículas indistinguíveis é feita. Aliás, com grande sucesso, segundo os cânones do método regressivo. A teoria dos quase-conjuntos é uma tentativa promissora de abordar, pelo método intuitivo, esse mesmo problema. Krause já publicou vários artigos sobre o tema. Uma primeira exposição em livro aparecerá pela Oxford University Press no volume *Identity in Physics: a historical, philosophical and formal analysis*, escrito por Steven French e Décio Krause.

Um último aspecto a observar antes de encerrar esta introdução. Falamos anteriormente de modelos de ZFC. O teorema da completude nos diz que, sendo uma teoria de primeira ordem, ZFC tem modelo se e somente se for consistente. Por outro lado, o segundo teorema de incompletude nos diz que a consistência de ZFC, se adequadamente especificada, não pode ser demonstrada em ZFC (a especificação adequada da consistência é necessária, tendo em vista o trabalho de Feferman sobre a aritmetização da metamatemática em um contexto geral). É costume assumir, em diversas situações, a consistência de ZFC, isto é, a existência de um modelo de ZFC. Neste trabalho assumiremos mais. Assumiremos a existência de um modelo *standard* de ZFC, para que possamos interpretar "$\in$" como pertinência entre elementos desse modelo e assim, seguindo a visão extensional conjuntista da noção de propriedade, dizer que um objeto *a* possui uma propriedade P se *a* pertencer "realmente", ao conjunto que representa a propriedade P. No contexto deste trabalho, essa assunção não parece excessiva.

II - Indistinguibilidade em uma estrutura

Em certos contextos matemáticos é possível caracterizar uma noção de indistinguibilidade considerando a idéia de invariância sob automorfismos. Ao fazer isso, comprometemo-nos com indistinguibilidade relativa a uma estrutura. Para entender o conceito de indistinguibilidade relativa a uma estrutura é conveniente examinar o conceito de definibilidade absoluta em uma estrutura, a respeito do qual Hartley Rogers escreveu que: "há uma noção absoluta de definibilidade? Embora os lógicos, em sua preocupação com sistemas formais particulares, a tenham ignorado amplamente, uma noção natural para definibilidade absoluta tem sido corrente em matemática, faz algum tempo. Essa é a noção de invariância sob automorfismos (...) Dizemos que $V \subseteq U$ [onde U é o domínio de uma estrutura] é invariante sob todos os automorfismos se $f(V) = V$ para todo automorfismo f [dessa estrutura]. É claro que se V vai ser "definível" (em algum sentido) em uma dada estrutura, ele tem de ser invariante sob todos os automorfismos da estrutura; pois f (V) tem de satisfazer qualquer definição que V satisfaça. Reciprocamente, pode-se argumentar que os subconjuntos invariantes de U são justamente os conjuntos que são determinados em algum sentido pela estrutura, e, portanto, que eles deveriam ser chamados 'definíveis'" [1].

Esclareçamos alguns aspectos da citação acima. Uma estrutura é um objeto $E = \langle U, R_0, R_1, ..., F_0, F_1,...\rangle$ onde U é um conjunto não vazio, chamado o domínio da

---

[1] Rogers, H. *Some Problems of Definability in Recursive Function Theory, in* Crossley, J. N. (ed.), *Sets, Models, and Recursion Theory.* Proceedings of the Summer School in Mathematical Logic and Tenth Logic Colloquium. Leicester, Aug./Sept., 1965 North Holland,, pp. 183-201

estrutura, cada R_i é uma relação n_i – ária em U e cada F_i é uma função n_i-ária em U (aqui *i* e n_i são números naturais quaisquer. As relações e funções de uma estrutura não têm de formar uma totalidade enumerável, mas, para os propósitos deste trabalho, essa é uma perda de generalidade irrelevante).

Um automorfismo da estrutura E é uma bijeção de U em U que preserva cada função de E, cada relação de E e o complementar de cada relação de E. A noção usual de definibilidade em uma estrutura, ou seja, a noção de definibilidade em uma estrutura em lógica de primeira ordem é a seguinte: seja L uma linguagem de primeira ordem, seja E uma estrutura para L, isto é, E é uma estrutura cujas relações e funções interpretam os símbolos de predicado e os símbolos de função de L respectivamente. Seja U o domínio de E. Seja R uma relação k-ária em U, para algum número natural k (aqui é importante distinguir entre as relações de E, isto é, aquelas relações que constituem a especificação da estrutura E e as relações em U, que são simplesmente subconjuntos das potências cartesianas de U). Dizemos que R é definível em E se e somente se para alguma fórmula Φ de L cujas variáveis livres estiverem dentre $x_1, ..., x_k$ tivermos que: $<u_1, ..., u_k>$ é elemento de R se e somente se $\Phi(\tilde{u}_1,..., \tilde{u}_k)$ é verdadeira em E (sendo $\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_k$ nomes estabelecidos de modo apropriado para $u_1,...,u_k$ respectivamente). Nesse caso dizemos que Φ define R em E. Essa noção de definibilidade em uma estrutura é tal que os automorfismos preservam as relações definíveis. Em particular esta noção satisfaz a condição afirmada como clara por Rogers na citação acima, isto é, se um subconjunto de um domínio de uma estrutura é definível, no sentido usual, nessa estrutura, então esse subconjunto é invariante sob todos os automorfismos dessa estrutura.[2] Também, como

[2] Veja, por exemplo, Enderton, H.B. *A Mathematical Introduction to Logic*, 2nd ed., Harcourt Academic Press, 2001, p. 98.

era de se esperar, a idéia intuitiva que os matemáticos têm de definibilidade em uma estrutura atende a essa condição. Por exemplo, o comprimento de um vetor do plano é habitualmente definido com base em uma noção de produto interno de vetores do plano; um matemático, mesmo que não tenha estudado lógica, sabe que não pode definir o comprimento de um vetor do plano, usando apenas a adição de vetores e a multiplicação de vetor por escalar, isso porque, por exemplo, a transformação do plano que leva cada vetor x no vetor 2x é um automorfismo do plano, como espaço vetorial sobre os reais, e, no entanto, não preserva os comprimentos dos vetores, em particular, não preserva um subconjunto V do plano, cujos elementos são vetores de um dado comprimento fixo (não nulo)[3]. Contudo, a recíproca assinalada na última sentença da citação de Rogers é que nos interessa mais aqui.

De fato, considerar como definíveis, no sentido de absolutamente definíveis, os subconjuntos do domínio de uma estrutura que são invariantes sob os automorfismos dessa estrutura está longe de corresponder à noção usual de definibilidade.

Vejamos um exemplo.

Seja ω conjunto dos números naturais e seja $< \omega, +, . >$ a estrutura constituída por ω munido da adição e multiplicação usuais. Seja f um automorfismo de $< \omega, +, . >$.

Então $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$.

Daí $f(0) = 0$, pois 0 é o único número natural que soluciona a equação $x = x + x$

Temos também que $f(1) = f(1 . 1) = f(1) . f(1)$

Daí $f(1) = 1$, pois 0 e 1 são os únicos números naturais que solucionam a equação $x = x . x$ e $f(1) \neq f(0)$, pela injetividade de f.

[3] Este exemplo está em Enderton, op. Cit. P. 99.

Agora, para todo número natural n, supondo f (n) = n temos f (n+1) = f (n) + f (1) = n + 1.

Assim, f (x) = x, para todo número natural x, ou seja, f é a função identidade em ω.

Sendo a função identidade o único automorfismo de < ω, +, . >, temos que todo subconjunto de ω é invariante sob os automorfismos de < ω, +, . > e portanto, que todo subconjunto de ω é absolutamente definível em < ω, +, . > .

Ora, cada conjunto definível em < ω, +, . > no sentido usual tem de ser definido por uma fórmula da linguagem associada a < ω, +, . >. Essa é uma linguagem enumerável, e, assim, tem apenas um número enumerável de fórmulas. Como o conjunto dos subconjuntos de ω tem a potência do contínuo, há muitos subconjuntos de ω que não são definíveis em < ω, +, . > no sentido usual. A definibilidade absoluta em uma estrutura é absoluta neste sentido, ela não é relativa à linguagem de primeira ordem associada à estrutura. Mesmo que trabalhássemos com uma linguagem de segunda ordem, isto é, que incluíssemos um repertório enumerável de variáveis de predicado e variáveis de função, continuaríamos com uma totalidade enumerável de fórmulas e ainda teríamos muitos subconjuntos de ω que não são definíveis em segunda ordem. O mesmo vale para linguagens de ordens superiores. Já para linguagens infinitárias a situação é diferente.

A definibilidade absoluta corresponde à expressibilidade em linguagens infinitárias. Isso é estabelecido por um teorema que apresentaremos adiante. Como esse teorema tratará de estruturas da forma <U, R> onde R é uma relação binária em U, vamos examinar um exemplo de estrutura dessa forma.

Consideremos a estrutura $< \omega, < >$, onde $<$ é a ordem usual em ω. Seja g um automorfismo de $< \omega, < >$ e suponhamos que g seja diferente da função identidade em ω. Então existe um menor número natural n tal que $g(n) \neq n$. Não podemos ter $g(n) = x < n$, pois g é injetiva e para todo $x < n$ vale $g(x) = x$, uma vez que n é o menor número natural cuja imagem por g é diferente de si mesmo. Assim, devemos ter $g(n) > n$, mas como g é sobrejetiva, existe um número natural k tal que $g(k) = n$. Não acontece $k = n$, pois $g(n) \neq n$. Também não acontece $k < n$, pois $g(x) = x$ para todo $x < n$ e $k \neq n$. Logo temos $k > n$ e $g(n) > g(k) = n$. Isso contradiz o fato de g ser um automorfismo. Portanto, o único automorfismo de $< \omega, < >$ é a função identidade em ω. Assim, todos os subconjuntos de ω são invariantes por automorfismos, ou seja, todos os subconjuntos de ω são absolutamente definíveis em $< \omega, < >$. Novamente, os subconjuntos de ω formam uma totalidade não enumerável e, em virtude da enumerabilidade da linguagem de primeira ordem associada à estrutura $< \omega, < >$, apenas um número enumerável de subconjuntos de ω é definível , no sentido usual, em $< \omega, < >$. Portanto, em $< \omega, < >$, mais uma vez a definibilidade usual está distante da definibilidade absoluta. Vamos às linguagens infinitárias.

Trabalharemos com a lógica infinitária de primeira ordem $L_{\alpha\beta}$, onde α e β são ordinais. Sendo de primeira ordem $L_{\alpha\beta}$ não admite quantificação sobre propriedades , mas quantificadores, sobre objetos, da forma, ($\exists x_0, x_1, x_2, ...x_\lambda$) para $\lambda < \beta$ são permitidos. Disjunções da forma ($\Phi_0 \vee \Phi_1 \vee .... \vee \Phi_\mu$) para $\mu < \alpha$, e conjunções da forma ($\Phi_0 \wedge \Phi_1 \wedge .... \wedge \Phi_\mu$) para $\mu < \alpha$ também são permitidas. Se α e β são maiores que ω, essas quantificações, disjunções e conjunções podem ter comprimento infinito. A atribuição de significados às fórmulas de $L_{\alpha\beta}$, com α e β maiores que ω, estende, de maneira óbvia, o que acontece no caso finito. Assim, conjunções são verdadeiras quando todas as suas componentes são verdadeiras, disjunções são verdadeiras quando pelo menos uma de suas componentes é verdadeira, e instanciações são verdadeiras quando houver uma atribuição de valores às variáveis quantificadas que satisfaça à fórmula instanciada. Claro que as linguagens $L_{\alpha\beta}$ também dispõem de negação.

Teorema

Seja < U, R > uma estrutura, onde R é uma relação binária em U. Seja V um subconjunto de U. Então V é absolutamente definível em < U, R > se e somente se para algum ordinal α e algum ordinal β, existe uma fórmula de $L_{\alpha\beta}$ (com o símbolo de predicado binário P) que define V, quando P é interpretado como R e os quantificadores são interpretados como variando sobre U.

Demonstração

Suponhamos que V seja definível em < U, R > por meio de alguma fórmula $\Phi(x)$ de $L_{\alpha\beta}$, isto é, suponhamos que para alguma fórmula $\Phi(x)$ de $L_{\alpha\beta}$ tenhamos que:

$u \in V$ se e somente se $\Phi(u)$ é verdadeira em < U, R > (aqui usamos "$\Phi(u)$" para indicar a fórmula $\Phi(u)$ com a variável x interpretada como o objeto $u \in U$)

Seja f um automorfismo de < U, R >. Então $<u_1, u_2> \in R$ se e somente se $<f(u_1), f(u_2)> \in R$. Como a definição de verdade em uma estrutura, para uma fórmula de $L_{\alpha\beta}$ simplesmente estende o caso finito temos que:

$\Phi(u)$ é verdadeira em < U, R > se e somente se $\Phi(f(u))$ é verdadeira em < U, R >

Portanto, ficamos com $u \in V$ se e somente se $f(u) \in V$, ou seja, V é invariante por automorfismos de < U, R > , isto é, V é absolutamente definível em < U, R > .

Vamos à volta. Suponhamos que V seja absolutamente definível em < U, R >, suponhamos também que U seja infinito. (o caso de U finito pode ser tratado muito simplesmente a partir da construção que será apresentada.)

Seja γ um ordinal da mesma cardinalidade que U e sejam α e β ordinais de cardinalidade maior que a de γ.

Seja $\{e_\lambda\}_{\lambda<\gamma}$ uma enumeração de U sem repetições.

Seja J= $\{\lambda : e_\lambda \in V\}$. Para todo par λ, $\mu<\gamma$, seja $\psi_{\lambda\mu}$ a fórmula $Px_\lambda x_\mu$ se $<e_\lambda, e_\mu> \in R$, e seja $\psi_{\lambda\mu}$ a fórmula $\neg Px_\lambda x_\mu$ se $<e_\lambda, e_\mu> \notin R$.

(x_0, x_1, ..., x_λ... são variáveis individuais em $L_{\alpha\beta}$). Seja, agora, $\Phi(x)$ a seguinte fórmula:

$$(\exists x_0, x_1, ..., x_\lambda, ...)_{\lambda<\gamma} \ [(\wedge_{\lambda,\mu<\gamma \text{ e } \lambda\neq\mu} \ x_\lambda \neq x_\mu) \wedge (\wedge_{\lambda,\mu<\gamma} \ \psi_{\lambda\mu}) \wedge \forall y\, [\vee_{\mu<\gamma \text{ e }} y = x_\mu] \wedge (\vee_{\lambda\in J} \ x = x_\lambda)]$$

Vamos mostrar, agora, que Φ define V, isto é, que u $\in$V se e somente se Φ (u) é verdadeira em < U, R >. Se u $\in$ V, então u = $e_{\lambda 0}$, para algum $\lambda_0 \in$ J. Interpretando x_0, x_1, ..., x_λ,.... como e_0, e_1, ..., e_λ , ... temos que: cada $x_\lambda \neq x_u$ é verdadeira, pois não há repetições na enumeração e_0, e_1, ..., e_λ ,... de U.

Cada $\psi_{\lambda\mu}$ é verdadeira pela definição $\psi_{\lambda\mu}$

$(\forall y)$ $[\vee_{\mu<\gamma} \ y = x_\mu]$ é verdadeira pois e_0, e_1, ..., e_λ ,... é uma enumeração de U, e assim, cada elemento de U é algum componente dessa enumeração. Novamente por essa razão, interpretando x como u, temos que se u $\in$ V, então $(\vee_{\lambda\in J} \ x = x_\lambda)$ é verdadeira. Assim, se u $\in$ V, Φ (u) é verdadeira em < U, R >.

Reciprocamente, suponhamos que Φ (u) seja verdadeira em < U, R >.

Seja $d_0, d_1, ..., d_\lambda, ...$ uma interpretação para as variáveis $x_0, x_1, ..., x_{\lambda,...}$ que torna Φ (u) verdadeira em $< U, R >$.

Então, com essa interpretação, a primeira e a terceira partes da fórmula Φ (x) são verdadeiras, isto é, cada $x_\lambda \neq x_\mu$ é verdadeira e para cada y em U, $y = x_\mu$ é verdadeira para algum $\mu < \gamma$.

Portanto, $\{d_\lambda\}_{\lambda < \gamma}$ é uma enumeração de U sem repetições. Agora definimos uma função f de U em U da seguinte maneira: $f(e_\lambda) = d_\lambda$ para todo $\lambda < \gamma$.

Como $e_0, e_1, ..., e_{\lambda,...}$ e $d_0, d_1, ..., d_\lambda, ...$são enumerações sem repetições de U, temos que f é bijetora.

Como Φ(u) é verdadeira quando interpretamos $x_0, x_1, ..., x_{\lambda,...}$ como $d_0, d_1, ..., d_\lambda,$ ....temos que com essa interpretação cada $\psi_{\lambda\ \mu}$ é verdadeira, isto é, f preserva R e o complementar de R, ou seja, f é um automorfismo.

Como V é absolutamente definível em $< U, R >$, isto é, invariante sobre os automorfismos de $< U, R >$ e $V = \{e_\lambda\}_{\lambda \in J}$, temos $V = \{d_\lambda\}_{\lambda \in J}$.

Agora, a verdade de Φ(u), com a interpretação especificada acima, também nos diz que a quarta parte da fórmula Φ é verdadeira, ou seja, que $u = d_{\lambda 0}$ para algum $\lambda_0 \in J$. Logo $u \in V$. Assim, estabelecemos que se Φ(u) é verdadeira em $< U, R >$, $u \in V$, o que encerra a demonstração.[4]

O teorema acima pode ser generalizado para estruturas de outras formas e, o que é mais significativo, para linguagens infinitárias de ordens superiores[5]. Entretanto, em nosso caso, como a forma apresentada abarca os modelos ZFC, ela é suficiente.

---

[4] Essa demonstração está em Rogers., op. cit.
[5] Veja da Costa, N.C.A. *Generalized Galois Theory* (a ser publicado).

Finalmente, vamos à noção de indistinguibilidade em uma estrutura. Entendemos, como Rogers, ser razoável sustentar que os subconjuntos do domínio de uma estrutura que são invariantes sob os automorfismos dessa estrutura sejam exatamente os conjuntos determinados por essa estrutura e, como adotamos a visão extensional conjuntista da noção de propriedade, isto é, a visão de que uma propriedade de objetos pode ser considerada como um conjunto de tais objetos, podemos afirmar que as propriedades determinadas por uma estrutura são as propriedades invariantes sob os automorfismos dessa estrutura e dizer que dois objetos no domínio de uma estrutura são indistinguíveis nessa estrutura se possuem, não simplesmente as mesmas propriedades, mas as mesmas propriedades determinadas por tal estrutura. Precisemos essa definição.

Trabalharemos com estruturas constituídas por um domínio e relações de quaisquer aridades finitas nesse domínio. Aqui, essa perda de generalidade não causará prejuízo. Permitiremos também que os domínios sejam classes e não só conjuntos. Faremos isso para tratar, de modo mais natural, alguns exemplos. Como de hábito, em ZFC as classes, que não existem nessa teoria, correspondem a fórmulas. Classes próprias, isso é, aquelas que não formam conjuntos, não podem ser tratadas tão livremente quanto conjuntos e tomaremos cuidado com isso.

Seja $\mathcal{A} = \langle D, \{R_i\}_{i \in I} \rangle$ uma estrutura.

Aqui, D é uma classe e cada R_i é uma relação n_i – ária em D, para algum número natural n_i.

Sejam a e b elementos de D (o domínio da estrutura). Dizemos que a e b são $\mathcal{A}$-distinguíveis (ou distinguíveis na estrutura $\mathcal{A}$, ou, ainda, distinguíveis em $\mathcal{A}$) se e somente se existe um subconjunto X de D tal que:

i) X é invariante sob os automorfismos da estrutura $\mathcal{A}$, isto é, f (X) = X para todo automorfismo f de $\mathcal{A}$.

ii) $a \in X$ se e somente se $b \notin X$.

Caso contrário dizemos que a e b são $\mathcal{A}$-indistinguíveis (ou indistinguíveis na estrutura $\mathcal{A}$, ou, ainda, indistinguíveis em $\mathcal{A}$).

Assim, os elementos a e b do domínio de uma estrutura $\mathcal{A}$ são distinguíveis nessa estrutura se e somente se existir uma propriedade determinada por essa estrutura (isto é, um subconjunto do domínio de $\mathcal{A}$ que seja invariante sob os automorfismos de $\mathcal{A}$) que um desses elementos possua e outro não. Equivalentemente, a e b são indistinguíveis em $\mathcal{A}$ precisamente quando pertencerem às mesmas subcoleções do domínio de $\mathcal{A}$ invariantes sob os automorfismos de $\mathcal{A}$, ou seja, quando possuírem as mesmas propriedades determinadas por $\mathcal{A}$, conforme adiantamos acima.

Na introdução deste trabalho, mencionamos que é um problema saber que propriedades são relevantes para bem caracterizar a noção de indistinguibilidade. Pois bem, se aceitarmos discutir problemas de indistinguibilidade no contexto de uma dada estrutura, parece bastante natural só admitirmos como meio de distinção entre objetos propriedades determinadas por essa estrutura.

Resta saber se há razão suficientemente forte para discutir questões de indistinguibilidade no contexto das estruturas. Esse é um ponto ainda não esclarecido e que não abordaremos, em detalhe, aqui. Mas cabe salientar que considerando a chamada visão semântica das teorias científicas, introduzida na década de 1950 por Patrick Suppes, e bastante desenvolvida desde então[6], segundo a qual apresentar uma teoria é definir diretamente a classe de seus modelos (estruturas); parece promissor, ao menos no que diz respeito aos problemas de indistinguibilidade no âmbito da filosofia da ciência (e os há, especialmente nos fundamentos da mecânica quântica, como dissemos na introdução), conduzir o debate para o contexto das estruturas. Mais adiante neste trabalho tentaremos tornar essa promessa um pouco mais crível aplicando a noção de indistinguibilidade em uma estrutura ao problema das partículas indistinguíveis em filosofia da mecânica quântica. Antes, porém, examinemos mais alguns aspectos dessa noção.

Uma conseqüência imediata da definição de indistinguibilidade em uma estrutura é a seguinte: seja A uma estrutura com domínio D e sejam a e b elementos de D. Então temos que: a e b são A-indistinguíveis se e somente se existe um automorfismo f da estrutura A tal que $f(a) = b$. De fato, primeiro lembremos que a função inversa de um automorfismo de A também é um automorfismo de A. Agora, se $f(a) = b$ para algum automorfismo f de A, e se $X \subseteq D$ é invariante sob os automorfismos de A, então se $a \in X$, temos que $f(a) \in X$, isto é, $b \in X$; reciprocamente, se $b \in X$, temos que $f^{-1}(b) \in X$, ou seja, $a \in X$. Portanto, $a \in X$ se e somente se $b \in X$, sempre que $X \subseteq D$ for invariante sob os automorfismos de A, ou seja, a e b são A- indistinguíveis. Não há subconjunto do domínio invariante sob os automorfismos ao qual a pertença e b não, ou vice-versa, isto é, não há propriedade determinada pela estrutura que a possua e b não, ou vice-versa.

[6] Veja Suppes, P. *Set-Theoretical structures in Science*, (mimeograph) Stanford University, 1970 e os capítulos 2 e 3 de da Costa, N.C.A. and French, S. *Science and Partial Truth*, Oxford University Press, 2003.

Por outro lado, se temos $f(a) \neq b$ para todo automorfismo f de *A*, então o conjunto das imagens de *a* pelos automorfismos de *A*, isto é, o conjunto $X = \{ f(a) : f$ é automorfismo de $A\}$ é tal que:

i) $a \in X$, pois a função identidade em D é um automorfismo de *A*.

ii) $b \notin X$, pois $b \neq f(a)$ para todo automorfismo f de *A*.

iii) X é invariante sob os automorfismos de *A*, pois a composição de dois automorfismos de *A* é um automorfismo de *A*, isto é, se $c \in X$, então, $c = f(a)$ para algum automorfismo f de *A*. Se h é um automorfismo qualquer de *A*, temos $c = h(h^{-1}(f(a)))$ e, portanto $c \in h(X)$, pois $h^{-1}(f(a)) = hof^{-1}(a) \in X$. Assim, X está contido em h(X). Reciprocamente, se $d \in h(X)$, então $d = h(g(a))$ para algum automorfismo g de *A*. Assim, $d = hog(a) \in X$, pois hog é um automorfismo de *A*. Logo, h(X) está contido em X.

Portanto, *a* e *b* são *A*-distinguíveis. X é um subconjunto do domínio de *A*, invariante sob os automorfismos de *A*, ao qual *a* pertence e *b* não pertence. Em outras palavras, X é uma propriedade determinada por *A*, possuída por *a* e não possuída por *b*.

O resultado que acabamos de mostrar, muito simples tecnicamente, nos diz algo muito importante; que a indistinguibilidade em uma estrutura *A* é uma relação de equivalência no domínio de *A*. De fato, sendo *A* uma estrutura e sendo *a*, *b* e *c* elementos do domínio de *A* temos que.

i) *a* é *A*-indistinguível de *a*, pois a função identidade no domínio de *A* é um automorfismo e leva *a* em *a*. Assim, a *A* -indistinguibilidade é reflexiva.

ii) Se a é A-indistinguível de b, então existe um automorfismo de A que leva a em b, daí a função inversa desse automorfismo leva b em a, e portanto, b é A-indistinguível de a. Assim, a A -indistinguibilidade é simétrica.

iii) Se a é A-indistinguível de b, e b é A-indistinguível de c, então existe um automorfismo de A que leva a em b e um outro que leva b em c, daí a composição desses automorfismos leva a em c, e portanto, a é A-indistinguível de c. Assim, a A -indistinguibilidade é transitiva.

Ou seja, a A –indistinguibilidade é uma relação de equivalência.

Em nossa opinião, como na da grande maioria dos que se interessam pelo tema, ser uma relação de equivalência é condição necessária a qualquer relação que pretenda traduzir, genuinamente, uma idéia de indistinguibilidade.

Quando definimos a A –indistinguibilidade falamos, simplesmente, em a e b serem A –indistinguíveis, sob certas condições, e não em a ser A –indistinguível de b. Isso nos pareceu natural levando em conta a tradição dos problemas de distinguibilidade. Com o resultado acima, esse modo de expressão fica justificado.

Também é interessante notar que a caracterização da A –indistinguibilidade entre a e b como a existência de um automorfismo de A que leva a em b está alinhada com a seguinte intuição de Sebastião e Silva: "se um elemento [do domínio de uma certa estrutura] não é individualizável, e, portanto, discernível logicamente de certos outros elementos (como o número i é indiscernível do número -i por meio das noções primitivas usuais) parece que deve existir um automorfismo do sistema que transforme esse elemento em qualquer dos outros."[7].

---

[7] Veja Sebastião e Silva, J. *Para uma Teoria Geral dos Homomorfismos, in Obras de José Sebastião e Silva*, Lisboa, Instituto Nacional de Investigação Científica, 1985., p. 281

Examinemos a indiscernibilidade entre i e –i de que fala Sebastião Silva. Os objetos i e – i são elementos do corpo dos complexos. Esse corpo é a estrutura <C, +, . > onde:

C = { <a, b >: a e b são números reais} e + e . são operadores binários em C (que podem, é claro, ser considerados relações ternárias em C para que se enquadrem na última definição de estrutura que apresentamos) definidas da seguinte maneira:

< a, b > + < c, d > = < a + c, b + d >

< a, b > . < c, d > = < ac - bd, ad + bc >

As operações + e . são ditas, respectivamente, a adição e a multiplicação no corpo dos complexos. Elas são associativas e comutativas. O elemento neutro da adição é < 0, 0 > e o da multiplicação é < 1, 0 >. O inverso aditivo, ou simétrico, de < a, b > é < -a, -b > e se < a, b > ≠ < 0, 0 >, o inverso multiplicativo de < a, b > é < a/ $(a^2+ b^2)$, -b/$(a^2+ b^2)$ >. Além disso, vale a distributividade da multiplicação sobre a adição.

A função f de C em C definida por f (<a, b>) = <a, -b> é dita conjugação em C e é um automorfismo do corpo dos complexos. Os objetos i e –i são identificados, respectivamente, com os pares < 0, 1> e < 0, -1>. Assim, f(i) = - i , e, portanto, i e - i são < C, +, . > - indistinguíveis.

Os comentários de Hartley Rogers e de Sebastião e Silva deixam claro que o que chamamos aqui de indistinguibilidade em uma estrutura é uma noção de indistinguibilidade já familiar entre os matemáticos. A nosso ver isso não compromete a originalidade deste trabalho. O ponto em que pretendemos ser, e cremos que fomos, originais é na aplicação dessa noção a problemas filosóficos, e isso faremos mais adiante.

A existência de uma tradição, ainda que não muito longa, de acolhimento desse tipo de indistinguibilidade no pensamento matemático contribui para fortalecer essa aplicação e torná-la menos problemática.

Estabelecemos na introdução desse trabalho que, combinadas, a teoria usual de conjuntos, a visão extensional conjuntista da noção de propriedade e a concepção intuitiva de indistinguibilidade como a posse das mesmas propriedades fazem coincidir indistinguibilidade com identidade. Dissemos que esse estado de coisas é insatisfatório, pois remove dos problemas de indistinguibilidade seu caráter específico e essa remoção contraria a tradição filosófica, inclusive a parte recente dessa tradição. Renunciamos à concepção intuitiva de indistinguibilidade como a posse das mesmas propriedades e adotamos a noção de indistinguibilidade em uma estrutura. Pois bem, a indistinguibilidade entre i e –i no corpo dos complexos mostra que coincidência com a identidade, ao menos nessa estrutura, não há mais. Verifiquemos o que acontece com respeito às estruturas em geral.

Chamemos de identidade em uma estrutura $\mathcal{A}$, a diagonal do domínio de $\mathcal{A}$, ou seja, o conjunto $\{<x, x>: x \in \text{domínio de } \mathcal{A}\}$. Em que condições as relações de indistinguibilidade em $\mathcal{A}$ e de identidade em $\mathcal{A}$ coincidem? Vamos responder, agora, a essa pergunta.

Lembremos que uma estrutura $\mathcal{A}$ é dita rígida se e somente se seu único automorfismo é a função identidade em seu domínio. É claro que em uma estrutura rígida, todo subconjunto do domínio é invariante sob os automorfismos da estrutura. Assim, dados a e b no domínio de uma estrutura rígida $\mathcal{A}$, temos que, se $a \neq b$, então a e b são $\mathcal{A}$-distinguíveis, pois $a \in \{a\}$, $b \notin \{a\}$e $\{a\}$ é invariante sob os automorfismos de

A. Claro, outro modo de ver isso é notar que sendo $a \neq b$ e sendo a função identidade no domínio o único automorfismo da estrutura A, não existe automorfismo de A que leve a em b e daí a e b são A-distinguíveis. Portanto, a indistinguibilidade em uma estrutura rígida implica identidade. Seja, agora, A uma estrutura na qual a A-indistinguibilidade e a identidade coincidem, isto é, quaisquer que sejam os elementos a e b do domínio de A, temos que a e b são A-indistinguíveis se e somente se $a = b$. Então A é rígida. A prova disso é simples. Suponhamos que f seja um automorfismo de A, diferente da função identidade no domínio de A. Então existe um elemento a no domínio tal que $f(a) = b \neq a$. Mas, como $b \neq a$ e na estrutura A, por hipótese, identidade e A-indistinguibilidade coincidem, então existe uma subcoleção X do domínio de A, tal que:

i) X é invariante sob os automorfismos de A,

ii) $a \in X$ se e somente se $b \notin X$.

Isso, contudo, é uma contradição, pois sendo X invariante sob os automorfismos de A, se tivermos $a \in X$, então teremos $b = f(a) \in X$ e, se tivermos $b \in X$, teremos $a = f^{-1}(b) \in X$.

Logo, o único automorfismo de A é a função identidade no domínio de A, ou seja, A é rígida. Novamente, uma outra maneira de obter esse resultado é lembrar que: valendo que a e b são A-indistinguíveis se e somente se $a = b$ se tivermos $a \neq b$, então a e b serão A-distinguíveis, isto é, não existe nenhum automorfismo de A que leve a em b. Como isso vale quaisquer que sejam os elementos a e b, diferentes, no domínio, não pode existir nenhum automorfismo de A, além da função identidade nesse domínio.

Assim, as estruturas rígidas são precisamente aquelas nas quais a indistinguibilidade na estrutura e a identidade na estrutura coincidem. Dito de outro modo, as estruturas rígidas são exatamente aquelas nas quais podemos usar a propriedade de "ser idêntico a *a*" para caracterizar *a* e distingui-lo (nessas estruturas) dos demais objetos do domínio, por meio do conceito de distinguibilidade em uma estrutura.

O grupo de automorfismos de uma estrutura é o conjunto de automorfismos dessa estrutura munido da operação de composição de funções. Há quem sustente que um dos problemas fundamentais da física, talvez o problema fundamental da física, seja o de encontrar o grupo de automorfismos da natureza.[8] Além de ser essa uma afirmação, digamos, audaciosas, é evidente que, nessa formulação, o problema é um tanto vago. Afinal, sabemos perfeitamente o que é o grupo de automorfismos de uma estrutura, mas não sabemos se a natureza é, ou pode ser adequadamente representada por, uma estrutura. Admitindo que seja esse o caso, e o amplo uso que os físicos fazem de estruturas matemáticas é um bom indício nessa direção, a formulação do problema acima é precisa e talvez o grupo de automorfismos da natureza seja trivial, isto é, possua apenas a função identidade no domínio da natureza como elemento. Em outras palavras, talvez a natureza seja, ou possa ser adequadamente representada por uma estrutura rígida. Nesse caso, pelo argumento acima, indistinguibilidade na (estrutura representante da) natureza e identidade coincidirão e, se entendermos por objetos naturais os elementos do domínio (da estrutura representante) da natureza, valerá o seguinte princípio da identidade dos indistinguíveis: objetos naturais indistinguíveis são idênticos.

É importante destacar que uma tal situação seria muito diferente daquela que inicialmente julgamos insatisfatória. De fato, naquela, a coincidência de uma indistinguibilidade intuitiva com a identidade era uma conseqüência elementar da

---

[8] Creio que Weinberg disse isso, mas, infelizmente, tenho de falar de memória, pois pareço não ser capaz de encontrar a referência apropriada.

decisão filosófica de usar uma determinada teoria de conjuntos, uma dada noção de propriedade e um certo tipo de indistinguibilidade. Agora, o quadro é bem outro. Se houver coincidência, no mundo natural, entre identidade e indistinguibilidade em uma estrutura, isso decorrerá do fato de um problema monumental em física ter um tipo específico de solução. A redução de problemas filosóficos a problemas científicos é uma forma de naturalismo. Uma forma, a nosso ver, bastante atraente, ao menos no caso de problemas de indistinguibilidade que se encontram no âmbito da filosofia da ciência.

Mostramos, há pouco, que i e –i são indistinguíveis no corpo dos complexos. Com isso, alguém poderia pensar que, se o grupo dos automorfismos da natureza for trivial, i e – i não poderão representar objetos naturais distintos. Essa seria uma conclusão precipitada. Se i e – i forem elementos do domínio de uma estrutura mais ampla, em que o corpo dos complexos esteja imerso, eles podem ser distinguíveis nessa estrutura. Quando ampliamos uma estrutura, seu grupo de automorfismos pode encolher e com isso aumentar o repertório de propriedades determinadas pela estrutura, que são aquelas que nos permitem fazer distinções entre elementos do domínio. Esse é um fato simples, do qual faremos um uso importante no contexto desse trabalho. Antes, porém, analisemos alguns exemplos de estruturas.

Exemplo 1)

Uma boa ordem em uma classe A é uma relação binária R em A tal que:

i) R é irreflexiva, isto é, para todo x em A temos: não (xRx)

ii) R é transitiva, isto é, quaisquer que sejam x, y, z em A temos: se xRy e yRz, então xRz

iii) R é tricotômica, isto é, quaisquer que sejam x, y em A temos: x = y ou xRy ou yRx

iv) Todo subconjunto não vazio de A possui um menor elemento com respeito a R.

Se R é uma boa ordem de A dizemos , simplesmente, que a estrutura < A, R> é uma boa ordem.

Seja $\mathcal{A} = < A, < >$ uma boa ordem. Então, $\mathcal{A}$ é rígida. Realmente, se f é um automorfismo de $\mathcal{A}$ diferente da função identidade no domínio de $\mathcal{A}$, então o subconjunto do domínio de $\mathcal{A}$ formado por aqueles elementos que f não leva em si mesmos é não vazio, assim, existe um menor elemento $a \in A$ tal que $f(a) \neq a$. Claro que não podemos ter $f(a) = x < a$, pois, para todo $x < a$, temos $f(x) = x$. Portanto, como $<$ é tricotômica, temos $a < f(a)$. Mas, como f é sobrejetora, existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $f(b) = a$. Agora, não acontece $b = a$, pois $f(a) \neq a$ e, também, não acontece $b < a$, pois, $f(x) = x$ para todo $x < a$ e $b \neq a$. Logo, novamente pela tricotomia, temos $a < b$ e $f(b) < f(a)$, o que contradiz o fato de f ser um automorfismo.

Esse exemplo mostra que todo ordinal é uma estrutura rígida. Freqüentemente, quando estamos lidando com uma dada coleção de **n** objetos indistinguíveis, em princípio, isto é, objetos entre os quais, por razões práticas ou teóricas, não conseguimos estabelecer distinções diretamente, e desejamos torná-los distinguíveis por algum motivo, por exemplo, para falar sobre eles, geralmente o que fazemos é associar um ordinal à coleção desses objetos, o que corresponde a dizer alguma coisa como "sejam $o_0, o_1, ...,$ o_{n-1} tais objetos." Vejamos um exemplo disso na física quântica. Se considerarmos duas partículas indistinguíveis, no sentido intuitivo de não podermos fazer distinção entre elas com base em alguma característica representável na mecânica quântica, então para escrever a função de onda para o sistema composto por essas partículas, habitualmente nós as rotulamos com "nomes" como, digamos, partícula p_1 e partícula p_2 (ou, equivalentemente, partícula p_0 e partícula p_1 para concordar com a escolha de índices que fizemos acima)[9]. A noção de indistinguibilidade em uma estrutura torna claro, ao menos em princípio, o que estamos fazendo ao rotular as partículas, a saber, estamos associando a elas elementos do domínio de uma estrutura rígida, qual seja, aquela formada pelo conjunto dos números naturais munido da ordem usual. Isso é uma espécie de reverso do famoso (ou infame) processo de abstração. Em um processo de abstração nós progressivamente ignoramos distinções. Aqui nós introduzimos distinções por meio de rótulos que são ordinais.

Frege se expressou magistralmente sobre o processo de abstração quando escreveu: "[o processo de abstração] é particularmente efetivo. Nós damos menos atenção a uma propriedade, e ela desaparece. Fazendo uma característica após outra desaparecerem, obtemos conceitos mais e mais abstratos... Suponhamos que haja um gato preto e um gato branco sentados, lado a lado, diante de nós. Nós paramos de atentar para suas cores, e eles se tornam incolores, mas ainda sentados lado a lado. Paramos de atentar para suas posturas, e eles não estão mais sentados (embora não tenham assumido outra postura), mas cada um deles ainda está no seu lugar. Paramos de atentar para sua posição; eles deixam de ter lugar, mas ainda continuam diferentes...Finalmente, obtemos,

---

[9] Veja, por exemplo, Teller, P. *An interpretative Introduction to Quantum Field Theory*. Princeton U.P., 1995, p. 21.

assim, de cada um deles um *algo* totalmente desprovido de conteúdo, mas o *algo* obtido de um objeto é diferente do *algo* obtido de outro – embora não seja fácil ver como."[10]

Essa dificuldade de identificar uma diferença ao final do processo fez de Frege um crítico severo da abstração. Ele entendia que se a abstração fizesse com que todas as diferenças desaparecessem, desapareceria também a possibilidade de contagem, ou melhor, a contagem não iria além de "um" (eliminadas as diferenças entre *a* e *b*, eles seriam um e o mesmo objeto). Em mecânica quântica acontece o inverso do que ocorre na abstração. Há partículas entre as quais a teoria não permite o estabelecimento de diferença alguma. Elas podem ser livremente permutadas sem que tenha de haver qualquer mudança na descrição que a teoria faz do universo.Contudo, tais partículas, elétrons por exemplo, não só podem ser , como de fato são contadas para além de "um" no contexto da teoria. Os físicos dizem corriqueiramente coisas como: tal átomo tem tantos elétrons. Aqui, entretanto, é importante distinguir entre dois sentidos de contagem: o sentido cardinal e o sentido ordinal. Quando dizemos quantos são os elétrons em um átomo, estamos, em princípio, fazendo contagem no sentido cardinal. Todavia, o procedimento teórico habitual para fazer essa contagem consiste em primeiramente associar um ordinal à coleção de elétrons, isto é, considerar os elétrons como e_0, e_1, e_2, etc.. e depois, da maneira óbvia, obter o cardinal correspondente, ou seja, o procedimento que descrevemos acima quando falamos de associar as partículas a elementos do domínio de uma estrutura rígida.

Vamos detalhar, um pouco, a situação. Consideremos um sistema constituído por n partículas indistinguíveis (ou " idênticas" no jargão dos físicos). O estado desse sistema

---

[10] Veja Frege, G. *Extracts from a review of Husserl's Philosophie der Arithmetc*, in Geach, P. and Black, M. *Translations From the Philosophicals Writings of Gottlob Frege* (Oxford, Basil Blackwell), 1980, pp. 84-85. Encontrei essa referência em Shapiro, S. *Thinking about Mathematics*, Oxford U.P. (2000), p. 68.

é representado por uma função de onda ψ $(c_0, c_1, ..., c_{n-1})$, onde para $i = 0, 1, 2, ..., n\text{-}1$ c_i é o conjunto das coordenadas da i-ésima partícula e ψ fica determinada a menos de um múltiplo escalar complexo cujo valor absoluto é 1 (o valor absoluto do complexo < a, b> é $\sqrt{(a^2 + b^2)}$). Ora, quando falamos em i-ésima partícula, isto é, primeira partícula, segunda partícula, etc, estamos fazendo contagem ordinal. Matematicamente, nenhuma objeção é feita a esse procedimento. Ele nos permite, por exemplo, mostrar, a partir do princípio de invariância por permutações, que existem apenas bósons e férmions (discutiremos isso mais adiante). Mas quando se trata de saber se essa indexação, ou rotulagem, das partículas por ordinais resolve o problema das partículas indistinguíveis, a coisa muda completamente de figura. Há quem defenda a posição de que, uma vez indexadas as partículas se tornam distintas simplesmente por terem índices distintos. Por exemplo, a partícula p_1 tem a propriedade de ter o índice 1, a partícula p_2 não, e isso as distingue. W. de Muynck é um dos partidários dessa opinião[11] e van Fraassen defende uma doutrina que é, no mínimo, compatível com ela ao sustentar que as partículas podem ser individualizadas, no sentido de serem distinguidas uma das outras com base em características empiricamente supérfluas e não descritíveis em termos de mecânica quântica[12]. Mas nem de Munynck, nem van Fraassen parecem ter argumentos suficientemente fortes para defender suas posições. Segundo Steven French os dois parecem movidos apenas pelo desejo de salvar alguma versão do Princípio da Identidade dos Indistinguíveis. Para French, estabelecer distinções entre as partículas apenas com base em seus índices e rótulos " sugere uma metafísica de propriedades algo bizarra, uma

---

[11] Veja de Muynck, W. "Distinguishabe and Indistinguishable- Particle Descriptions of Systems of Identical Particles", *International Journal of theoretical Physics* 14, 1975, pp. 327-346.
[12] Veja van Fraassen, B. *Quantum Mechanics: an Empiricist View*. Oxford U.P, 1991, pp. 432-433.

vez que os próprios rótulos das partículas não estão sujeitos a teoria alguma, nem são invocados para explicar o comportamento das partículas.... A afirmação de que tais rótulos podem gerar diferença qualitativa necessária à preservação do PII [Princípio da Identidade dos Indistinguíveis] simplesmente não é plausível".[13] Mais ainda, French considera essa tática um exemplo dos extremos a que se pode chegar na tentativa de salvar o PII. Levando em conta os argumentos que têm sido apresentados em favor da diferenciação entre as partículas apenas com base em seus índices, é difícil discordar de Steven French. De fato a indexação de partículas nada tem de especificamente quântico. Indexam-se elétrons do mesmo jeito que indexar-se-iam laranjas l_0, l_1, l_2 etc. Apesar disso, apresentaremos adiante um argumento por analogia (com urelementos de ZFCU), que, talvez, diminua a implausibilidade afirmada por French na citação acima. Mas, ainda que não o faça, pelo menos contribuirá, acreditamos, para esclarecer o papel dos índices no estabelecimento de distinções entre objetos. Mas agora, voltemos aos exemplos.

Exemplo 2)

Seja Z $= \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ o conjunto dos números inteiros. Seja $A = \langle Z, + \rangle$ o grupo aditivo dos inteiros, isto é, A é a estrutura constituída pelo conjunto dos números inteiros munidos da adição usual. Então A não é uma estrutura rígida. De fato, a função f de Z em Z definida por $f(x) = -x$ para todo $x \in Z$ é um automorfismo de A, obviamente distinto da função identidade em Z. Vejamos. A função f é claramente bijetora e, além disso, quaisquer que sejam os inteiros x e y temos que:

$$f(x + y) = -(x + y) = (-x) + (-y) = f(x) + f(y)$$

Assim, qualquer que seja o inteiro x, x e -x são A- indistinguíveis.

[13] Veja French, S. "Withering Away of Physical Objects *in* Castellani, E. (ed.) Interpreting bodies". Classical and Quantum Objects in Modern Physics, Princeton U.P., 1998, pp.93-113.

Mostremos também, para utilização futura, que f é o único automorfismo de A diferente da função identidade em Z .

Seja g um automorfismo de < Z, + >.

Então g(0) = g (0 + 0) = g(0) + g(0). Daí, g(0) = 0.

Qualquer que seja o número inteiro x temos 0 = g (0) = g(x + (-x)) = g(x) + g(-x). Daí g(-x) = - g(x). Se g(1) =1, vem que, para todo número natural positivo n; se g(n)= n, então g(n+1) = g(n) + g(1) = n + 1. Logo g(k) = k para todo inteiro não negativo k. Como g(-k) = - g(k) = -k, então, g(x) = x para todo inteiro x, ou seja, g é a função identidade em Z.

Se g(1) = -1, então, por um raciocínio inteiramente análogo ao feito acima, g(x) = - x para todo x $\in$ Z, ou seja, g é a função f definida anteriormente.

Se g(1) = a onde a > 1. Então temos que 1 $\notin$ Imagem de g = {...., -2g(a), -g(a), 0, g(a), 2g(a), ...} o que contradiz a sobrejetividade de g. Pela mesma razão não podemos ter g(1) = a < -1.

Assim, g tem de ser a identidade em Z ou a função f.

Exemplo 3)

Seja V um universo standard de ZFC. Então A = < V, $\in$> é uma estrutura rígida.

Primeiramente, lembremos que se V é o universo bem fundado usual de ZFC (isto é, a classe de todos os conjuntos bem fundados), então, claro, V não é um conjunto, mas ainda assim, nós podemos falar de automorfismos de < V, $\in$>, ou seja, bijeções de V em V (no sentido expandido de bijeção de uma classe própria nela mesma) que preservam $\in$

e seu complementar, isto é, se h é uma tal bijeção, quaisquer que sejam os conjuntos u e v temos: $u \in v$, se e somente se $h(u) \in h(v)$.

A rigidez de $< V, \in>$ é uma conseqüência imediata do chamado teorema do isomorfismo[14]. Para entender adequadamente esse resultado devemos voltar ao axioma do fundamento (ou da regularidade) que é o seguinte:

$\forall x\,(x \neq \varnothing \rightarrow \exists y\,(y \in x \wedge y \cap x = \varnothing))$

ou seja, todo conjunto não vazio possui um elemento do qual ele é disjunto. Ou ainda, dito de outra forma: todo conjunto não vazio x possui um elemento $\in$- minimal y (isto é, $y \in x$ e para todo $a \in x$ temos $a \notin y$, o que, claro, é o mesmo que dizer $y \cap x = \varnothing$).

É esse axioma que impede a existência de conjuntos x tais que $x = \{x\}$. Como nessa condição teríamos $x \cap \{x\} \neq \varnothing$ (visto que $x \in \{x\}$ e $x \in x = \{x\}$), a existência de um tal conjunto violaria o axioma.

É ele também, e mais geralmente, que não deixa que existam conjuntos $x_0, x_1,..., x_n$, tais que: $x_0 \in x_1 \in ... \in x_n \in x_0$

Se tais conjuntos existissem, o conjunto $\{x_0, x_1,..., x_n\}$ violaria o axioma.

Por fim, e mais geralmente ainda, é ele que proíbe a existência de conjuntos x_0, x_1, x_2..... que formem cadeias descendentes infinitas de pertinência:

$.... \in x_2 \in x_1 \in x_0$

Um conjunto T é dito transitivo se e somente se para todos x e y, $y \in x \in T$ implica $y \in T$.

[14] Veja Jech, T. *Set Theory* Spring Verlag, 2nd. Ed., 1997.

Para todo conjunto X definimos o fecho transitivo de X, (TC(X)), da seguinte maneira:

Fazemos $X_0 = X$ e para cada número natural n $X_{n+1} = \cup X_n$. Isso estabelecido fazemos $TC(X) = \cup_{n\in\omega} X_n$. Segue dessa definição que o fecho transitivo de X é a interseção de todos os conjuntos transitivos que contêm X e, claro, é transitivo. O fecho transitivo de X é o conjunto cujos elementos são: os elementos de X, os elementos dos elementos de X, os elementos dos elementos dos elementos de X, etc.

Seja uma C classe não vazia qualquer. Seja S um elemento de C. Se S for disjunto de C, então S é um elemento minimal de C. Se S não for disjunto de C, existe um elemento que está em C e está em S e, por estar em S, também está no fecho transitivo de S. Assim, $TC(S) \cap C$ é um conjunto não vazio. ($TC(S) \cap C$ é conjunto, pois está contido em TC(S) e TC(S) é conjunto). Portanto, o axioma do fundamento garante a existência de um elemento $\in$- minimal de $TC(S) \cap C$. Esse elemento também é um elemento $\in$- minimal da classe C. Logo, toda classe não vazia possui um elemento $\in$-minimal.

Suponhamos agora que T seja uma classe transitiva e que P seja uma propriedade tais que:

(i) o conjunto vazio tem a propriedade P.

(ii) para cada x, se $x \in T$ e todo elemento de x tem a propriedade P, então x tem a propriedade P.

Nessas condições todo $x \in T$ tem a propriedade P.

De fato, seja C a classe dos elementos de T que não possuem a propriedade P. Se a classe C fosse não vazia então ela possuiria um elemento $\in$- minimal. Mas (i) e (ii) tornam impossível a existência de um tal elemento $\in$- minimal. Não por acaso, evidentemente, esse resultado é chamado de $\in$- indução. Ele estende a indução transfinita da classe dos ordinais para qualquer classe transitiva.

Sejam, agora, T1 e T2 duas classes transitivas e seja h um $\in$- isomorfismo de T1 em T2. Então T1= T2 e h é a função identidade em T1. Esse é o teorema do isomorfismo a que nos referimos antes. Ele é facilmente demonstrado por $\in$ - indução. Vejamos.

$h(\varnothing) = \varnothing$ pois $u \in \varnothing$ se e somente se $h(u) \in h(\varnothing)$. Suponhamos agora, qualquer que seja $x \in T_1$, que $h(z) = z$ para todo $z \in x$ e façamos $y = h(x)$. Se $z \in x$, então $h(z) \in h(x)$, ou seja, $z \in y$. Assim, x é um subconjunto de y. Por outro lado, seja $t \in y$. Como $y \in T_2$ e T_2 é transitiva, temos $t \in T_2$ e daí, pela sobrejetividade de h, existe $z \in T_1$ tal que $h(z) = t$. Como $h(z) \in y = h(x)$, temos $z \in x$ e daí $t = h(z) = z$. assim, $t \in x$, e , portanto, y é um subconjunto de x. Conseqüentemente, temos $y = x$, isto é, $h(x) = x$ para todo $\in T_1$. Dessa forma, $T_1 = T_2$ e h é a função identidade em T_1, o que encerra a demonstração do teorema do isomorfismo. Como estamos trabalhando com um universo standard, em particular transitivo, de ZFC, a rigidez de $< V, \in >$ segue imediatamente. Isso concorda com a idéia de que na matemática usual (isto é, aquela construída em ZFC) identidade e indistinguibilidade no sentido intuitivo, coincidem, Aqui, a rigidez de $< V, \in >$ garante a coincidência entre identidade e $< V, \in >$ - indistinguibilidade e, equivalentemente, estabelece também que se *a* é um objeto matemático usual, então a propriedade de ser idêntico a *a* pode ser usada para individualizar *a*, distinguindo-o dos demais objetos.

Exemplo 4)

Seja $A = < Z, < >$, onde $<$ é a ordem usual no conjunto Z dos números inteiros. Então A não é uma estrutura rígida. De fato, consideremos para cada número inteiro k fixo, a função $f_k : Z \rightarrow Z$ definida por $f_k(x) = x + k$ qualquer que seja o inteiro x.

f_k é claramente bijetora e além disso quaisquer que sejam os números inteiros x e y temos que: $x < y$ se e somente se $x + k < y + k$, ou seja, $x < y$ se e somente se $f_k(x) < f_k(y)$. Assim, f_k é um automorfismo de $< Z, < >$. Dados a e b em Z, fazendo $k = b - a$, obtemos $f_{b-a}(a) = b$. Logo, dados quaisquer inteiros a e b, existe um automorfismo de $<Z, < >$ que leva a em b. Portanto, quaisquer dois inteiros são indistinguíveis em $<Z, < >$. Esse exemplo será utilizado adiante.

Vamos agora introduzir uma outra noção. Seja A uma estrutura e seja X um subconjunto do domínio de A. Dizemos que os elementos de X são permutacionalmente indistinguíveis em A (ou, ainda, são A-permutacionalmente indistinguíveis) se e somente se toda permutação de X puder ser estendida a um automorfismo de A. Consideremos o caso $X = \{a, b\}$. Se a, b são permutacionalmente indistinguíveis em A, então é claro que a, b são A-indistinguíveis. A recíproca, entretanto, não vale. Examinemos a estrutura $A = < Z, < >$ do exemplo anterior e sejam a, b inteiros distintos quaisquer. Já vimos que a e b são A- indistinguíveis, contudo a permutação não trivial de $\{a, b\}$, isto é, aquela que leva a em b e b em a não é compatível com a ordem usual dos inteiros e portanto não pode ser estendida a um automorfismo de $< Z, < >$. Assim, mesmo para dois elementos, a noção de indistinguibilidade permutacional em uma estrutura é mais forte que a noção de indistinguibilidade nessa estrutura. Exploraremos a indistinguibilidade permutacional no exemplo seguinte.

Exemplo 5)

Lembremos alguns pontos sobre a teoria ZFU (Zermelo Fraenkel com urelementos).

A linguagem de ZFU tem como símbolos não lógicos o símbolo de predicado binário $\in$ e a constante u. Intuitivamente, os elementos de u são urelementos e os demais objetos são conjuntos. Temos o axioma dos urelementos, que nos diz que cada urelemento não possui elemento algum, isto é

$$\forall y\,(y \in u \rightarrow \neg\, \exists x \;\; x \in y)$$

Como podemos ter muitos objetos, digamos, vazios, o axioma da extensionalidade tem de ser reformulado para se aplicar apenas a conjuntos. Ele adquire a forma

$$\forall x\, \forall y\, ((x \notin u \wedge y \notin u \;\wedge\; \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y)) \rightarrow x = y)$$

Os outros axiomas de ZF permanecem os mesmos, inclusive o axioma do fundamento, sendo que um elemento $\in$–minimal que, em virtude desse axioma, um conjunto não vazio sempre possui, pode ser um urelemento.

Seja, agora, U um universo de ZFU. Então a estrutura A = <U, $\in$ > não é rígida[15]. Na verdade qualquer permutação dos urelementos pode ser estendida a um automorfismo de A. De fato, seja π uma permutação dos urelementos, isto é, seja π uma bijeção de u em u. Em um abuso de linguagem chamemos também de π a seguinte extensão da bijeção dada dos urelementos: por $\in$–indução definimos, para todo x $\pi(x) = \{\pi\,(t) : t \in x\}$. Então π é um automorfismo de <U, $\in$ >. Assim, os urelementos são permutacionalmente indistinguíveis em <U, $\in$ >. A propósito disso, encontramos Fraenkel, Bar-Hillel e Levy dizendo que: "(...) não há característica que distinga um indivíduo do outro (...) em

[15] Valem aqui observações similares àquelas que fizemos no início do exemplo 3 a respeito de automorfismos de < V, $\in$ >, onde V era um universo standard de ZFC.

termos matemáticos dir-se-ia que toda permutação dos indivíduos pode ser estendida a um automorfismo do universo de elementos". [16]

Os indivíduos a que eles se referem são urelementos de ZFU. A citação acima diz respeito ao papel desempenhado pelos urelementos na prova de Fraenkel da consistência da negação do axioma da escolha com os demais axiomas de ZFU (excluindo o axioma do fundamento). Fica assim estabelecido que a noção de indistinguibilidade permutacional em uma estrutura já é corrente em matemática, o que é uma vantagem do ponto de vista de alguém que, como nós, pretenda aplicar esta noção em filosofia. Elaboremos agora, o início de tal aplicação.

Podemos fazer uma analogia entre a apresentação dos indistinguíveis urelementos como objetos distintos e as observações que fizemos acima (no exemplo 1) acerca da introdução de distinções entre duas partículas por meio de indexação ou rotulagem. Para isso é interessante considerar o modo como Paul Cohen, em seu livro clássico sobre teoria dos conjuntos apresenta os urelementos: "a seguir discutimos modelos V nos quais o axioma da escolha falha.. Resultados clássicos nessa direção foram obtidos por Fraenkel e Mostowski...[que] introduziram átomos [isto é urelementos], i.e, objetos fictícios x_i tais que $\forall y\, (\neg y \in x_i)$ todavia, $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$." [17]

Portanto, urelementos são distinguidos por seus índices, por seus rótulos, que são, é claro, ordinais. Obviamente não podemos distinguir entre os urelementos como distinguimos entre conjuntos. Afinal todos os urelementos possuem os mesmos elementos, a saber, nenhum. Se tentarmos caracterizar as diferenças entre urelementos *a* e *b* por meio da visão extensional conjuntista da noção de propriedade, dizendo que $a \neq b$

---

[16] Veja Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y and e Levy, A. *Foundations of Set Theory*, North-Holland, 1973, p. 59.
[17] Veja Cohen, P.J. *Set Theory and the Continuum Hyphothesis*, W. Benjamim, p. 173.

se e somente se a e b não pertencem aos mesmos conjuntos, caímos em uma espécie de circularidade. Por exemplo, $a \in \{a\}$, assim para saber se b é ou não igual a a, temos de determinar se b pertence ou não a $\{a\}$, mas para isso temos de saber "antes" se b é ou não igual a a. É interessante observar que o mesmo tipo de circularidade foi constatado por E.J.Lowe ao analisar um critério de identidade para eventos proposto por D. Davidson. O critério é o seguinte: quaisquer que sejam os eventos x e y temos que x é igual a y se e somente se x e y causam os mesmos eventos e x e y são causados pelos mesmos eventos.O problema identificado por Lowe reside em que se, por exemplo, x for causado por z e y for causado por w, então, para determinar se x é igual a y temos de saber se z é igual a w e para determinar se z é igual a w temos de saber se x é igual a y[18] (estamos simplificando a situação considerando que x é causado apenas por z e y é causado apenas por w e, além disso, z causa apenas x e w causa apenas y; não há nessa consideração uma perda de generalidade real, levando em conta o ponto em que estamos aqui interessados). Como de hábito, Lowe não vê o mesmo problema com os urelementos[19] e, de fato, não há com eles problema algum, desde que admitamos como legítimas as distinções estabelecidas por meio de índices ou rótulos; desde que, por exemplo, acompanhando Cohen, aceitemos que o urelemento x_1 é diferente do urelemento x_2 simplesmente porque 1 é diferente de 2. Parece muito fácil e natural aceitar isso, tal aceitação tem caráter definicional , mas vimos acima no caso das partículas da teoria quântica distinções que tinham por base apenas índices ou rótulos foram consideradas por Steven French como ilegítimas, e a posição de French neste caso é, tanto quanto seja do meu conhecimento, a que reflete o pensamento amplamente dominante sobre esse assunto. Dizer, sem maiores

[18] Veja Lowe, E.J. "Objects and Criteria of Identity" in Hale, B. and Wright, C. (ed.) *A Companion to the Philosophy of Language*, Blackwell, 1999, pp. 613-33.
[19] Veja Lowe, op. cit.

explicações, que a partícula p_1 é diferente da partícula p_2 simplesmente porque 1 é diferente de 2 soa bastante implausível. Mas, afinal, porque a situação dos urelementos parece tão diferente da situação das partículas? Porque o mais do que plausível para eles é, ou parece ser, altamente implausível para elas? Uma possível resposta para essas perguntas seria dizer que os urelementos são construções mentais nossas e por isso temos sobre eles controle suficiente para distinguí-los uns dos outros por meio de rótulos, ou seja, como dissemos acima, especificamos a noção de urelemento de tal maneira que podemos distinguir os urelementos uns dos outros por meio de seus índices. Já as partículas seriam elementos constitutivos do mundo, descritas e não construídas pela teoria quântica, e sobre elas nosso controle seria bem menor. Os índices seriam recursos artificiais para estabelecer distinções entre elas e não representantes de diferenças genuínas. Essa resposta é, ao nosso ver, totalmente insatisfatória. Ela está comprometida com uma doutrina construtivista em matemática e outra realista quanto a entidades em física. Essas doutrinas já têm seus próprios problemas e não devem alicerçar a diferença entre urelementos e partículas no que diz respeito à distinguibilidade por índices. Claro que há outras respostas possíveis, entretanto, procurarei, no próximo capítulo, mostrar que, no que concerne ao estabelecimento de distinções por meio de rótulos, urelementos e partículas podem ser vistos de maneiras análogas. A analogia está ligada à indistinguibilidade permutacional. Espero, assim, em alguma medida, contestar a posição segundo a qual distinções entre partículas feitas exclusivamente com base em índices não são genuínas. Antes, porém, para a utilização futura, vamos considerar as seguintes definições.

Seja A = < D, $\{R_i\}_{i \in I}$ > uma estrutura. Dizemos que uma estrutura B é uma expansão de A se e somente se B = < D, $\{R_i\}_{i \in I \cup J}$ > onde $I \cap J = \varnothing$. Em outras palavras, B é uma expansão de A se e somente se B é obtida acrescentando-se novas relações a A. Por exemplo, a estrutura < Z, +, < > constituída pelos inteiros munidos da adição e da ordem usuais é uma expansão de < Z, + >, o grupo aditivos dos inteiros. Dizemos que B é uma expansão rígida trivial de A se e somente se B satisfizer as seguintes condições:

i) B é uma expansão de A

ii) B' = < D, $\{R_i\}_{i \in J}$ > é rígida (nesse caso, claro, B também é rígida).

Ou seja, B é uma expansão rígida trivial de A precisamente quando as novas relações acrescentadas a A para obtermos B são, sozinhas, suficientes para assegurar a rigidez de B, independentemente das relações originais de A. Por exemplo, se A = < Z, + >, então B = < Z, +, {0}, {1}, {-1}, {2}, {-2} ... > é uma expansão rígida trivial de A, uma vez que B é obviamente uma expansão de A e, além disso, a estrutura B' = < Z, {0}, {1}, {-1}, {2}, {-2} ... > é também obviamente rígida. As relações acrescentadas a A para produzir B tornam, por si só, B rígida, independentemente da adição dos inteiros que já estava na estrutura A.

Podemos ver, com facilidade, que toda estrutura tem uma expansão rígida trivial, por exemplo, a expansão obtida acrescentando-se à estrutura original todos os conjuntos unitários de elementos de seu domínio. Foi o que fizemos no exemplo imediatamente acima com o grupo aditivo dos inteiros. Dada uma estrutura A = < D, $\{R_i\}_{i \in I}$ >, um outro modo de obter uma estrutura B que seja uma expansão rígida trivial de A é fazer B = < D,

$\{R_i\}_{i\in I}$, $<$ >, onde $<$ é uma boa ordem de D. A existência de uma tal boa ordem é garantida pelo axioma da escolha (ou pelo axioma da escolha global).

Para encerrar esta seqüência de definições, dizemos que uma estrutura *B* é uma expansão rígida não trivial de $A = < D, \{R_i\}_{i\in I} >$ se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) *B* é uma expansão de *A*

(ii) *B* é rígida

(iii) $B' = < D, \{R_i\}_{i\in J} >$ não é uma estrutura rígida.

Nesse caso as novas relações acrescentadas a *A* para se obter *B* não são, sozinhas, suficientes para assegurar a rigidez de *B*, independentemente das relações originais de *A*. Por exemplo, se $A = <Z, + >$, então, $B = < Z, +, < >$ é uma expansão rígida não trivial de *A*. De fato, $<Z, +, < >$ é rígida, pois, como já vimos, o único automorfismo de $< Z , + >$ diferente da função identidade em Z é f: Z $\rightarrow$ Z definida por $f(x) = - x$ para cada x inteiro e essa função f não preserva a ordem $<$.

Mas $< Z, < >$ não é rígida, pois, como também já vimos, para cada inteiro k fixo, a função $f_k : Z \rightarrow Z$ definida por $f_k (x) = x + k$, para cada x inteiro, é um automorfismo de $< Z, < >$. Para um outro exemplo, consideremos novamente $A = < Z, + >$. Então cada estrutura $B = < Z, +, \{k\} >$, onde k é um inteiro não nulo arbitrariamente fixado, é uma expansão rígida não trivial de *A*, pois embora *B* seja rígida (novamente porque o único automorfismo de $< Z, + >$ diferente da função identidade em Z não preserva {k}, quando k é um inteiro não nulo), $B' = < Z, \{k\} >$ não é rígida uma vez que há infinitas bijeções de Z em Z que fixam k e cada uma dessas bijeções é um automorfismo de < Z, {k} > . Por outro lado, < Z, +, {o} > não é uma expansão rígida não trivial de < Z, +> , já que , claramente, não é rígida.

Vimos que toda estrutura tem uma expansão rígida trivial. Com as expansões rígidas não triviais a situação é outra. Um exemplo de estrutura que não possui expansão rígida não trivial é *A* = <D, R >, onde D = {1,2} e R = { <1,2>, <2, 1>}. De fato, a função f: D → D definida por f(1) = 2 e f(2) = 1 é um automorfismo de *A*. Portanto *A* não é uma estrutura rígida. Se *B* é uma expansão rígida de *A*, então as relações acrescentadas a *A* para formar *B* têm de, por si só, fazer com que a função f deixe de ser um automorfismo, mas como a única permutação de D, além de f, é a função identidade, ao serem capazes de fazer isso, tais relações são, sozinhas, suficientes para assegurar a rigidez de *B*. Logo, a estrutura *B* tem de ser uma expansão rígida trivial de *A*.

Uma outra noção que devemos considerar, ainda que muito brevemente, antes de passar às aplicações à mecânica quântica, é a de coordenatização ou mensuração. Essa é uma noção bastante complexa, tendo como aspecto central a expressibilidade por meio de números entendidos em um sentido amplo como entidades com as quais podemos operar. Contribuições fundamentais para entender, de uma perspectiva abstrata, os processos de coordenatização ou mensuração foram dados por Hermann Weyl e Patrick Suppes[20]. Contudo, para os propósitos deste trabalho, basta que nos concentremos em um único aspecto da coordenatização, qual seja, o que trata da introdução de distinções. Esse aspecto é destacado por Shafarevich (na página 7 de seu livro *Basic Notions of Algebra*) da seguinte maneira: os objetos que funcionarão como coordenadas têm de ser individualmente distinguíveis, para que, por meio deles, estabeleçam-se distinções entre

[20] Veja, por exemplo, Krantz,D. Luce, R., Suppes, P. and Tversky, A. *Foundations of Measurement*, Academic Press, 1971 e Weyl, H. *The Classical Groups*, Princeton University Press, 1939.

objetos que possuem as mesmas propriedades. Shafarevich dá como exemplo a coordenatização dos pontos de uma reta, os quais, segundo ele, possuem as mesmas propriedades (metaforicamente, Shafarevich afirma que um ponto pode ser fixado apenas quando colocamos o dedo sobre ele) enquanto que números reais, por exemplo, 3, 7/2, $\sqrt{2}$, π , que coordenatizam esses pontos são individualizados e distinguíveis uns dos outros. Em uma outra metáfora, Shafarevich diz que o mesmo processo ocorre quando filhotes de cachorro recém-nascidos, indistinguíveis para seu dono, são identificados por meio de fitas coloridas amaradas em volta de seus pescoços.

Resumindo, para Shafarevich os pontos de uma reta são indistinguíveis (certamente, o mesmo, segundo ele, poderia ser dito dos pontos de um plano ou do espaço) e ao associar a esses pontos coordenadas, que são números reais, nós os distinguimos uns dos outros. Seria razoável interpretar a posição de Shafarevich como um reconhecimento de que são legítimas as distinções entre pontos feitas por meio de rótulos, índices, que são números reais. Entretanto, não é fácil entender a natureza dessa legitimidade. Por exemplo, parece claro que para que o processo de coordenatização funcione, números reais diferentes têm de corresponder, como coordenadas, a pontos diferentes, mas sendo os pontos indistinguíveis, como saber que são diferentes?

A questão da indistinguibilidade ou não dos pontos do espaço (ou de um plano, ou de uma reta) é muito importante. Em seu *Introduction to Mathematical Philosophy* (na página 192, que, aliás, já mencionamos neste trabalho), Russell afirma que, em virtude da diferenciação espaço-temporal, o Princípio da Identidade dos Indistinguíveis de Leibniz é empiricamente verdadeiro no que diz respeito a particulares – "não podem dois particulares ter as mesmas relações espaciais e temporais com todos os outros particulares". O mesmo caminho foi seguido por Carnap, que em seu *The Logical of Syntax of Language* (página 50), sustentou que não é sequer concebível que dois objetos diferentes coincidam em todas as suas propriedades se por propriedades entendemos também aquelas referentes à posição. Temos, assim, tanto por parte de Russell como de Carnap, a defesa da seguinte tese: dois objetos diferentes sempre podem ser distinguidos um do outro por ocuparem, em um dado momento, posições diferentes no espaço. Claro que essa tese é equivalente a tese da impenetrabilidade material, segundo a qual objetos diferentes não podem, ao mesmo tempo, ocupar o mesmo lugar no espaço. A impenetrabilidade material não vale no mundo quântico, e, portanto, fica limitado o escopo da tese. Há, aqui, contudo, um outro problema para o qual nos chamou a atenção Max Black em seu famoso artigo sobre a identidade dos indistinguíveis[21]. Se quisermos dizer que dois objetos (duas esferas no exemplo de Black) são distintos por ocuparem, num dado momento, posições distintas no espaço, não podemos dizer que as posições são distintas por serem ocupadas por objetos distintos, pois isso nos faria cometer o pecado da circularidade. Se quero fazer distinção entre objetos por meio das posições que eles ocupam não posso fazer distinção entre posições por meio dos objetos que as ocupam. Não posso dizer, por exemplo, que este canto da sala é diferente daquele canto da sala porque neste há uma cadeira e naquele não. Ora, sem poder fazer distinções entre posições espaciais por meio de objetos, uma alternativa seria reconhecer como legítimas e genuínas as distinções entre posições espaciais estabelecidas por meio de coordenatização (com uma tripla de coordenadas reais coordenatizando cada ponto do espaço). Haveria outras possibilidades. Bem, vejamos.

---

[21] Veja Black, M. *The Identity of Indiscernibles* (1952) in Loux, M. *Universals and Particulars*, 2nd ed. University of Notre Dame Press, 1976.

Para discutir esse tópico é muito oportuno considerar a seção 428 (página 452) do *The Principles of Mathematics* de Russell, onde é discutido um argumento do filósofo alemão, do século XIX, Rudolf Hermann Lotze, contra um espaço composto de pontos. O argumento tem origem na identidade dos indistinguíveis de Leibniz e procura derivar uma contradição do fato de que os pontos seriam exatamente todos iguais (no sentido de possuírem as mesmas propriedades, incluindo aí as mesmas relações mútuas). Russell (que na seção 325, página 346 de *The Principles of Mathematics*, havia afirmado que a oposição entre identidade e diversidade em uma coleção é um problema fundamental da lógica e, talvez, o problema fundamental da filosofia) rejeita o argumento, mas a parte que nos interessa, aqui, é aquela contida na seguinte citação: "Onde, então, está a plausibilidade da noção de que todos os pontos são exatamente iguais [no sentido especificado acima]? Essa noção é, creio, uma ilusão psicológica, devida ao fato de que nós não podemos recordar um ponto, de modo a reconhecê-lo quando o encontramos novamente. Dentre pontos simultaneamente apresentados é fácil distinguir [por coordenatização?]; mas embora estejamos perpetuamente em movimento, e, portanto, sendo trazidos a novos pontos somos incapazes de detectar esse fato por meio de nossos sentidos, e reconhecemos lugares somente por meio de objetos que eles contêm (...) Façamos uma analogia: suponhamos um homem com uma memória muito ruim para faces: ele seria capaz de saber, a qualquer momento, se viu uma face ou muitas, mas ele não seria capaz de saber se já viu qualquer das faces antes. Assim ele seria levado a definir pessoas pelas salas em que ele as viu e a supor autocontraditório que novas pessoas comparecessem às suas aulas, [o homem em questão é um professor], ou que pessoas antigas deixassem de fazê-lo. No último caso, pelo menos, será admitido por professores que ele estaria errado. E assim como com as faces, tal é com os pontos – inabilidade para reconhecê-los tem de ser atribuída, não à ausência de individualidade, mas meramente a nossa incapacidade".

Filhotes de cachorro, dedos fixadores de pontos, faces humanas, ilusão psicológica, reconhecimento de (mas não distinção entre) posições somente pelos objetos que elas contêm, circularidade. A situação parece, de fato, bastante confusa e a ilustração de doutrinas filosóficas por metáforas certamente, ao menos no presente caso, indica o pequeno progresso no estudo deste tópico. Metáforas podem ilustrar bem certas intuições valiosas, mas é preciso assentar a discussão sobre bases mais firmes. Faremos uma tentativa nesta direção. Para isso precisaremos de alguns conceitos matemáticos, mais especificamente topológicos, que, passamos a apresentar.

Um espaço métrico consiste em um conjunto S juntamente com uma função d que a cada par $<x, y>$ de pontos S associa um número real não negativo. Satisfazendo essa função d as seguintes condições:

i) $d<x,y>=0$ se e somente se $x=y$

ii) $d<x,y>=d<y,x>$

iii) $d<x,z> \leq d<x,y>+d<y,z>$

quaisquer que sejam os pontos x, y e z de S. É importante notar, para que não haja confusão com o que discutimos antes, que quando falamos, aqui, em pontos de S, queremos dizer, simplesmente, elementos de S.

$d<x,y>$ é dita a distância entre x e y no espaço métrico em questão.

Alguns exemplos de espaços métricos são:

- O conjunto R dos números reais com a distância entre x e y sendo o valor absoluto de x menos y.
- O conjunto R^2 dos pares ordenados de números reais com a distância euclidiana usual no plano, isto é, com a distância entre $< x_1, y_1 >$ e $< x_2, y_2 >$ sendo a raiz quadrada da soma dos quadrados de x_1 menos x_2 e y_1 menos y_2 respectivamente.
- O conjunto R^3 das triplas ordenadas de números reais também com a distância euclidiana usual no espaço, isto é, com a distância entre $< x_1, y_1, z_1, >$ e $< x_2, y_2, z_2>$ sendo a raiz quadrada da soma dos quadrados de x_1 menos x_2, y_1 menos y_2, z_1 menos z_2 respectivamente (claro que a situação nos exemplos acima se generaliza para o conjunto de n-uplas ordenadas de números reais R^n).
- O conjunto ***N*** de todas as seqüências infinitas de números naturais com a distância entre $x = < x_o, x_1, x_2... >$ e $y = < y_o, y_1, y_2... >$ sendo o somatório de $1/2^n$ tomado sobre cada número natural n para o qual tenhamos x_n diferente de y_n (lembremos que o somatório vazio é nulo). ***N***, munido da distância que acabamos de especificar, é dito o espaço de Baire.

Cabe aqui uma observação para aqueles que já estudaram algo de topologia: não se deve estranhar o uso do artigo definido “o” na expressão “ o espaço de Baire”. Apesar de em topologia definirmos um espaço de Baire como, por exemplo, aquele em que todo aberto não vazio é não magro, a prática em teoria descritiva dos conjuntos e em teoria da recursão é mesmo chamar ***N***, com a distância dada, de *o* espaço de Baire. Sendo um espaço métrico completo, ***N*** é, pelo teorema de Baire, um espaço de Baire no sentido topológico usual.

Podemos conceber o espaço de Baire como o resultado de uma digitalização do conjunto R dos números reais. Sabemos que cada número real admite uma representação decimal da forma x_o , x_1 x_2... onde x_o é a parte inteira do número real nessa representação, x_1 é a primeira casa decimal do número real nessa representação, x_2 é a segunda casa decimal do número real nessa representação etc.. Notemos que a seqüência $< x_o, x_1, x_2... >$ é um elemento de ***N***. Assim temos, por meio de representações decimais, uma correspondência entre R e ***N***. Há, porém, uma diferença fundamental entre o espaço dos reais e o espaço de Baire. Duas seqüências infinitas diferentes de números naturais, isto é, duas seqüências infinitas de números naturais que difiram em pelo menos uma de suas componentes, representam, ou melhor, são, por definição, elementos diferentes de ***N***. Já com os números reais temos uma outra situação. Representações decimais diferentes, isto é, representações decimais que difiram na parte inteira ou em pelo menos uma de suas casas decimais, podem representar o mesmo número real. Todos estamos, desde a escola básica, familiarizados com o fato de certos números reais possuírem mais de uma representação decimal (por exemplo, temos 1/2 = 0, 50000......e 1/2 = 0, 499999....). Assim, uma representação decimal determina sempre um único número real, mas um número real nem sempre determina unicamente uma representação decimal que o identifique. Esse fato tem conseqüências topológicas profundas.Vejamos.

Seja S, munido de uma distância, um espaço métrico. Seja x um elemento de S e seja r um número real positivo. A bola aberta de centro x e raio r é o conjunto dos pontos, isto é, elementos, de S que distam de x menos que r. Seja A um subconjunto de S. Um ponto interior de A é um ponto x de S tal que para algum número real r positivo a bola aberta de centro x e raio r seja um subconjunto de A. A é dito um conjunto aberto se e somente se todo ponto de A é um ponto interior de A. Os exemplos mais imediatos, em certo sentido, de conjuntos abertos de S são o conjunto vazio, S e todas as bolas abertas em S. Um subconjunto de S é dito fechado se e somente se seu complementar em relação a S é aberto. Uma família de conjuntos abertos de S é dita uma base para os conjuntos abertos de S se e somente se para cada subconjunto aberto de A de S e para cada elemento de x de A, existe um conjunto U nessa família tal que x é elemento de U e U é subconjunto de A. Um subconjunto de S é dito feberto se e somente se ele for fechado e aberto (a palavra em inglês é "clopen" e embora reconheça que "feberto" soa estranho, vou manter essa, digamos, " tradução literal"). Em cada espaço métrico o conjunto vazio e o espaço todo são febertos.

Com esse material podemos apresentar uma noção de dimensão topológica que será útil adiante.Um espaço métrico é dito zero-dimensional se e somente se existe uma base para os conjuntos abertos constituída de conjuntos febertos. O espaço de Baire é zero-dimensional. O espaço dos reais tem como únicos febertos o conjunto vazio e R, portanto não é zero-dimensional. O fato do espaço dos reais não ser zero dimensional está fundamentalmente ligado à existência de mais de uma representação decimal para certos números reais[22]. Podemos pensar nisso da seguinte maneira: um número real nem sempre determina seus dígitos. Um elemento do espaço de Baire sempre o faz. Por isso o espaço de Baire é zero dimensional e o espaço dos reais não. Poderíamos ter apresentado uma definição de dimensão topológica segundo a qual a dimensão topológica do espaço de

[22] Veja Edgar, G. A. *Measure,Topology and Fractal Geometry*, Springer, 1990 (pp. 83-84)

Baire seria zero, a de R seria 1, a de R^2 seria 2, a de R^3 seria 3, enfim, a de R^n seria n[23]. Isso é relevante para este trabalho, porque a noção de dimensão topológica retrata, intuitivamente, uma certa idéia de movimento. A esse propósito, Gerald Edgar cita, de memória, Herman Weyl: "dizemos que o espaço é tridimensional porque as paredes de uma prisão são bidimensionais" e em seguida explica, aproximadamente, que podemos aprisionar um ponto do espaço usando um cubo. Podemos aprisionar um ponto em uma das faces desse cubo usando um quadrado. Podemos aprisionar um ponto em um dos lados desse quadrado usando dois pontos. Finalmente um ponto, sendo um desses dois pontos, não pode mais se movimentar, já está preso. Um espaço de dois pontos é zero dimensional, cada lado de um quadrado tem dimensão topológica 1 e cada face de um cubo tem dimensão topológica 2 [24]. Essa idéia intuitiva de movimento associada à dimensão topológica igual ou superior a 1 pode ser usada numa tentativa de formalização da intuição de Russell citada acima, segundo a qual, creio, é o estarmos em permanente movimento que, por assim dizer, nos põe em contato com novos pontos, embora não possamos detectar esses pontos usando nossos sentidos. Poderíamos propor a seguinte interpretação para essa passagem de Russell: a impressão de indistinguibilidade está associada à capacidade de movimento, entendida essa última como a posse de uma dimensão topológica igual ou superior a 1.. Em outras palavras, objetos dos quais temos a impressão de serem indistinguíveis são aqueles que, por algum motivo, julgamos razoavelmente bem representados pelos elementos de um espaço métrico cuja dimensão topológica é igual ou superior a 1. Falamos de impressão de indistinguibilidade e uma impressão pode, em algum sentido ser parcialmente correta. Posto de outra maneira,

[23] Veja Hurewicz, W. and Wallman, H. *Dimension Theory*, revised ed., Princeton University Press, 1948.
[24] Veja Edgar, op. cit., p. 79.

correção, para impressões é uma questão de grau. Sugiro que uma impressão de indistinguibilidade para certos objetos seja considerada tanto mais correta, quanto mais fiel, por algum motivo, for considerada a representação desses objetos por elementos de um espaço métrico de dimensão topológica igual ou superior a 1. Admito, é claro, que tudo isso é muito vago e está longe de resolver o problema da indistinguibilidade ou não dos pontos do espaço. Entretanto, levando em conta o estado de coisas, repleto de metáforas, em que a discussão desse tema se encontra, creio que a proposta acima pode significar algum progresso ainda que muito modesto. Nada tenho contra metáforas e disse antes que elas podem ilustrar intuições valiosas. Aqui levei em conta a intuição de Russell acerca do movimento associado, de alguma forma, à indistinguibilidade (ilusória?) dos pontos do espaço e a combinei com a intuição de movimento associada à dimensão topológica igual ou superior a 1. Aliás, intuição semelhante também está presente, por exemplo, quando Carnap, em seu artigo *Empirismo, semântica e ontologia*, falando do sistema de coordenadas espaço-temporais para a física diz que: "se certos eventos alegadamente observados em sessões espíritas, por exemplo, uma bola que se move para fora de uma caixa fechada, fossem confirmados além de qualquer dúvida razoável, pareceria aconselhável usar quatro coordenadas espaciais"[25].

Convém explicar um pouco mais a associação de indistinguibilidade com dimensão topológica maior que zero. Para isso, valer-me-ei de uma idéia exposta por Frege no parágrafo 13 de seu *Fundamentos da Aritmética*. Lá, Frege sustenta que pontos do espaço, considerados em si mesmos, são indistinguíveis uns dos outros (uma discordância, portanto, em relação a Russell). O mesmo, porém, não acontece com

[25] Veja Carnap, R. "Empiricism, semantics and ontology" (1956) in Benacerraf, P. and Putnam, H. *Philosophy of Mathematics*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1983 (p. 248).

números; cada um dos quais tem sua peculiaridade. Vamos trazer essa idéia para um caso particular de nosso contexto. Dissemos que o espaço de Baire, que é zero-dimensional, pode ser visto como um retrato digital do espaço dos reais, 1-dimensional, pois cada elemento do espaço de Baire é uma seqüência de números naturais. Essa capacidade de determinação de seus dígitos não é possuída pelos elementos do espaço dos reais, visto que alguns números reais têm mais de uma representação decimal, ou seja, têm mais de uma representação digital. Consideremos, sem fazer exegese de Frege, que a peculiaridade dos números seja dada pela unicidade da representação digital, isto é, pela unicidade da representação por uma seqüência de números naturais. Essa unicidade faz a dimensão topológica do espaço de Baire ser zero. A ausência dela faz a dimensão topológica da reta (o espaço dos reais) ser 1, a do plano ser 2, a do espaço ser 3, etc... A definição de dimensão topológica é tal que espaços finitos e enumeráveis, com distâncias naturalmente especificadas, também são zero-dimensionais. Assim, objetos em uma coleção que possam ser univocamente representados por seqüências finitas ou ω-infinitas de números naturais (onde ω é o conjunto dos números naturais) consideramo-los coordenadamente distinguíveis uns dos outros. Objetos em uma coleção que não admitam esse tipo de representação unívoca consideramo-los coordenadamente indistinguíveis uns dos outros. É muito importante notar que as noções de distinguibilidade coordenada e de indistinguibilidade coordenada não se aplicam, neste trabalho, a objetos que não sejam pontos do espaço, ou de um plano, ou de uma reta. Em particular, neste trabalho, elas estão completamente separadas do âmbito de aplicação das noções de indistinguibilidade em uma estrutura e indistinguibilidade permutacional em uma estrutura.

Bem, eu disse que as noções de distinguibilidade coordenada e de indistinguibilidade coordenada não se aplicam a objetos que não sejam pontos do espaço ou de um plano, ou de uma reta. E a pontos do espaço ou de um plano, ou de uma reta; elas se aplicam? Claro, se não se aplicarem, elas serão inúteis, mas para saber se elas se aplicam ou não a dados objetos temos de investigar a possibilidade de representação unívoca desses objetos por seqüências de números naturais. Essa é uma questão muito complexa. A noção mesma de possibilidade nesse caso, como, aliás, em tantos outros, é obscura. Poderíamos buscar alguma luz examinando certos desenvolvimentos científicos, onde a estrutura do espaço é aspecto crucial. Mas, mesmo aí, não temos, por enquanto, respostas satisfatórias. Creio que disso podem nos convencer as seguintes citações.

A eletrodinâmica quântica é uma disciplina muitíssimo bem sucedida tanto teórica quanto experimentalmente, entretanto um de seus criadores, o físico Richard Feyman, escreveu: "Schwinger, Tomonaga e eu independentemente, inventamos meios de fazer cálculos definidos ...(ganhamos prêmios [Nobel] por isso...). O jogo que jogamos....é tecnicamente chamado de "renormalização". Mas não importa quão inteligente seja a palavra é o que eu chamaria um processo superficial! Recorrer a um tal hocus-pocus nos impediu de provar que a teoria da eletrodinâmica quântica é matematicamente autoconsistente. É surpreendente que, de um modo ou de outro, não tenha sido provado até agora que a renormalização não seja matematicamente legítima. O certo é que nós não temos um bom modo matemático de descrever a eletrodinâmica quântica; esse monte de palavras não.... é boa matemática[26].

[26] Veja Feyman, R. *QED: The Strange Theory of Light and Matter*. Princeton University Press, 1985 (pp. 128-129), *apud* Maddy, P. *Naturalism in Mathematics*, Oxford University Press, 1997 (pp. 148-149).

Podemos, de certa foram, resumir a passagem acima dizendo que há uma inconsistência de natureza matemática na eletrodinâmica quântica, ao menos quando se considera o atual estado de coisas nessa disciplina. O próprio Feyman, em um outro texto, também nos dá uma indicação do possível motivo dessa inconsistência: "eu acredito que a teoria de que o espaço é contínuo [no sentido de não digital] esteja errada, pois nós obtemos essas infinitudes e outras dificuldades". [27]

Dúvidas acerca da natureza contínua do espaço também são compartilhadas por Chris Isham: "Temos de admitir que tanto no nível epistemológico como no ontológico, nosso entendimento atual do espaço e do tempo, deixa muito a desejar. Em uma grande extrapolação a partir da experiência diária, tanto a relatividade geral como a especial usam um modelo para o espaço-tempo que é baseado na idéia de um contínuo, isto é, a posição de um ponto no espaço-tempo é unicamente especificada pelos valores de quatro números reais (as três coordenadas do espaço e a coordenada do tempo em algum sistema conveniente de coordenadas). Mas a construção de um número real a partir de inteiros e frações é um procedimento matemático muito abstrato e não há razão a priori alguma pela qual esse procedimento deva estar refletido no mundo empírico. De fato, do ponto de vista da teoria quântica a idéia de um ponto do espaço-tempo parece singularmente inapropriada: em virtude do princípio da incerteza de Heisenberg [cujo conteúdo intuitivo é o de que não existe o conceito de caminho de uma partícula[28]], uma quantidade infinita de energia seria requerida para localizar uma partícula em um verdadeiro ponto; e é portanto mais do que um pouco estranho que a moderna teoria de campos ainda

[27] Veja Feyman, R. *The Character of Physical Law, MIT Press, 1967 (p. 166) apud* Maddy, P., op. cit. (p. 149).

[28] Veja Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. *Quantum Mechanics*. Pergamon Press and Addison-Wesley Publishing Company, translated from the Russian by Sykes, J.B. and Bell, J. S, 1958 (p. 8)

empregue campos que são funções de tais pontos. Tem sido freqüentemente conjecturado que os problemas matemáticos quase inevitáveis que surgem em tais teorias (a predição de valores infinitos para as probabilidades de processos físicos que ocorrem e a necessidade associada de "renormalizar" a teoria...) são um resultado direto de ignorar essa inconsistência interna[29]." Esse artigo de Isham trata dos problemas que as tentativas de quantização da gravidade têm de enfrentar. A não quantização da gravidade é uma fonte de inconsistências na física, também ligada ao debate em torno da natureza contínua ou não do espaço.

Newton da Costa também não vê motivos suficientemente fortes para acreditar que o espaço seja contínuo: "Assim, mediante construtos teóricos deveras abstratos e algo artificiosos (em particular porque dificilmente se afigura plausível que o espaço e o tempo reais sejam contínuos matemáticos) eliminam-se as contradições.[30]" As contradições a cuja eliminação Newton da Costa se refere são aquelas associadas aos paradoxos de Zenão. É interessante notar que se nesse caso o uso de contínuos matemáticos elimina contradições, na eletrodinâmica quântica, a julgar pelas opiniões de Isham e Feyman, ele provavelmente as cria.

O processo que leva à construção dos números reais é de fato muito abstrato. É fácil entender intuitivamente a passagem dos naturais aos inteiros e destes para as frações (com numerador e denominador inteiros). Já a passagem das frações para os números reais, por exemplo, por seqüências de Cauchy ou por cortes de Dedekind, é muito mais complexa e portanto muito menos plausível de ocorrer no mundo real, se esse mundo estiver sujeito a restrições que limitem a complexidade matemática. Por outro lado,

---

[29] Veja Isham, C. "Quantum Gravity", 1989 in Davies, P. *The New Physics*, Cambridge University Press, 1989 (p. 72) *apud* Maddy op. cit. (p. 151).

[30] Veja da Costa, N.C.A. *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*, 2ª ed.. HUCITEC, 1994 (p. 207).

concepções contínuas do espaço têm amplo uso em teorias científicas consagradas. Consideremos, por exemplo, a seguinte passagem de Stephen Hawking: "Embora tenha havido sugestões de que o espaço-tempo possa ter uma estrutura discreta, eu não vejo razão para abandonar as teorias contínuas que têm sido tão bem sucedidas."[31] Essas visões conflitantes indicam que a natureza do espaço requer muita investigação. Tais conflitos, envolvendo identidade de pontos e números reais, também estão relacionados aos fundamentos da análise numérica. Vejamos.

A análise numérica estuda certos problemas de natureza computacional importantes, por exemplo, na matemática aplicada. Esses problemas freqüentemente envolvem objetos representados pelos números reais, isto é, o contínuo. O modelo de computabilidade de Turing, que é aquele que os computadores digitais de verdade exemplificam (deixando de lado, é claro, as limitações práticas a que os computadores digitais de verdade estão sujeitos), não lida com o contínuo, mas com o digital, opera sobre os números naturais ou sobre objetos que possam ser codificados por números naturais e não se aplica diretamente aos números reais. Um modo de estender o modelo de Turing aos números reais é encarar um número real como especificado pelos dígitos de uma sua representação decimal, isto é, como uma função dos naturais nos naturais (assim, por exemplo, o número real 5,274...é visto como a função f dos naturais nos naturais tal que f(0) = 5, f(1) = 2, f(2) = 7, f (3) = 4, ...) e em seguida considerar um número real como computável se e somente se essa função dos naturais nos naturais for computável por máquina de Turing. Essa abordagem não considera o fato de certos números reais possuírem mais de uma representação decimal, o que, como já vimos, é um

[31] Veja Hawking, S. and Penrose, R. *The Nature of Space and Time*, Princeton University Press, 1996 (p. 4).

aspecto topologicamente fundamental. Acerca dos fundamentos da análise numérica e da computação com números reais, o matemático Steve Smale, ganhador da medalha Fields em 1966 por suas contribuições à topologia diferencial, escreveu: "Aqui, referir-me-ia a uma carta que recebi de Moore um ano atrás. Eu não pretendo discorrer profundamente, aqui, sobre minha opinião de que a análise numérica e a computação científica [aquela envolvendo números reais] têm fundamentos frágeis. Moore é o principal nome no desenvolvimento da aritmética de intervalos e ele escreveu que "Há fundamentos para a computação científica. Mais de 2000 artigos e dúzias de livros. Eu o convido a ler inteiramente o livro de Aberth"; esse é um livro que Moore chegou a enviar para mim. Ele disse "Esse livro abrirá seus olhos para todo um mundo novo." Assim eu abri o livro – de fato poucas semanas atrás – e li na pagina 34 do livro (Chamado *Precise Numerical Analysis*) "O problema de decidir se dois números reais computáveis são iguais é portanto um problema computacional que deve ser evitado". Mas o problema 3.1 nesse livro é: "Dados dois números a e b decida se a = b." Mais adiante na página 62, Aberth diz: "resolva o problema 6.1: encontre k decimais para as partes real e imaginária das raízes de um polinômio de grau positivo." Mas a resposta para esse problema solúvel ...tem de passar por d versões daquele " outro problema que deve ser evitado"."[32]

Um modo de compreender porque o problema de decidir se dois números reais computáveis são iguais deve ser evitado é o seguinte: dentro da perspectiva adotada, isto é, encarando um número real como especificado por dígitos decimais, esse problema se transforma em um problema de indução. Vejamos, dado, por exemplo, a = 0,0000 ...., queremos saber se a é igual a zero. Em cada etapa do cálculo de uma representação

[32] Veja Smale, S. " Theory of Computation", 1992, in Casacuberta, C. and Castellet, M. (ed.) *Mathematical Research Today and Tomorrow*, Springer-Verlag, 1992 (pp. 65-66)

decimal de *a* podemos dispor apenas de um número finito de dígitos calculados. Se *a* for diferente de zero, mais cedo ou mais tarde aparecerá um dígito não nulo na representação decimal calculada de *a*, assim, calculando durante um tempo suficientemente longo, descobriremos esse dígito. Por outro lado, se *a* for igual a zero, todos os dígitos na representação decimal calculada de *a* serão nulos e calcularemos eternamente, sem resolver o problema. É uma situação análoga àquela clássica de saber se todos os (potencialmente infinitos) corvos são pretos, tendo examinado apenas um número finito de corvos, com a possível complicação adicional de que dado um seguimento inicial finito de uma representação decimal de um número real, existe uma infinidade não enumerável de números reais cujas representações decimais têm em comum esse segmento inicial. Em conexão com o exposto temos também o seguinte resultado: seja $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ uma enumeração efetiva das funções recursivas parciais cujos argumentos e valores são números naturais. O problema de decidir, dados os números naturais x e y, se $\varphi_x = \varphi_y$ é recursivamente insolúvel.[33]

Para ser honesto com Aberth é importante observar que em seu livro o problema 3.1 é apresentado como insolúvel (singular na sua terminologia.)[34] Contudo, a dificuldade, como Smale deixa claro, é que ao decretar que o problema de decidir se dois números reais computáveis são iguais está fora do escopo da teoria, fica estabelecido, também, que o problema de encontrar soluções de uma equação polinomial está igualmente fora do escopo da teoria, mas isso é inadmissível, pois esse é um dos problemas centrais que a teoria se propõe a resolver. Na prática diz-se, ainda que indiretamente, que o problema está e não está no escopo da teoria. Isso, do ponto de vista

[33] Veja Rogers, H. *The Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill Book Company, 1967 (pp. 33-34).
[34] Veja Aberth, O. *Precise Numerical Analysis*. Brown Publishers, 1988 (p. 34)

da lógica clássica, indica fragilidade nos fundamentos. Devo destacar que essa fragilidade, mesmo que real, de maneira alguma diminui a enorme importância da análise numérica e, além disso, também não se deve concluir que exista uma inconsistência na análise numérica vista como teoria formal cuja lógica subjacente é a clássica. Se esse fosse o caso, como a análise numérica, no aspecto formal, se reduz à teoria dos conjuntos ZFC, teríamos, como resultado, que ZFC é inconsistente. É claro que não podemos tirar apressadamente uma tal conclusão. O ponto é que a análise numérica enquanto disciplina aplicada, isto é, considerada como um sistema que engloba tanto seus teoremas quanto os problemas de aplicação que resolve ou tenta resolver, tem a ela associada uma inconsistência, ao menos na visão de Smale. Essa inconsistência surgiria do conflito entre o digital e o contínuo. A esse respeito, Lenore Blum, Felipe Cucker, Michael Shub e Steve Smale assim se pronunciaram: "Um obstáculo central à reconciliação da computação científica [que lida com números reais] com a ciência da computação [que lida com números naturais] é a presente visão da máquina, isto é, o computador digital. Enquanto o computador for visto como um objeto discreto ou finito será difícil sistematizar a análise numérica. Nós acreditamos que a máquina de Turing, como um fundamento para algoritmos envolvendo números reais pode apenas obscurecer conceitos."[35] Diante dessa situação Smale, Blum e Shub desenvolveram, a partir de fins dos anos 80 (do século passado), uma teoria da computabilidade para os números reais que não se vale diretamente de uma aproximação digital do contínuo. As máquinas dessa

[35] Veja Blum, L. Cucker, F., Shub, M. and Smale, S. *Complexity and Real Computation*, Springer-Verlag, 1988 (p. 23)

teoria admitem como inputs números reais. É uma teoria interessante e sofisticada, porém controversa.[36]

Já me estendi o suficiente sobre a tensão entre digital e contínuo e o problema a ela associado da natureza dos pontos do espaço. Na verdade, o objetivo das considerações que fiz aqui acerca da distinguibilidade ou não dos pontos do espaço foi unicamente o de justificar uma suspensão de juízo, neste trabalho, sobre esse tema. Embora entenda que o problema é muito importante, não tentarei, aqui, para além das incipientíssimas observações feitas acima, resolvê-lo. Considero-o extremamente difícil, e as últimas citações mostram, acredito, que essa avaliação é justificada. O que desejo fazer neste texto é lidar com dois tipos de problemas, a saber: (i) os problemas de indistinguibilidade que se apresentem naturalmente no contexto de uma estrutura. (ii) o problema das partículas indistinguíveis na filosofia da mecânica quântica (talvez o problema (ii) se reduza a problemas do tipo (i)). Acredito que esses problemas podem e devem ser tratados independentemente do problema da distinguibilidade ou não dos pontos do espaço. Mas me pareceu que essa crença deveria ser apoiada por uma exposição que ao menos tentasse mostrar o quanto a situação dos pontos do espaço é delicada no que diz respeito à indistinguibilidade e sugerisse, ainda que muito precariamente, algum tipo de abordagem dessa situação. Sendo indulgente comigo mesmo, suporei que isso foi feito e passarei, no capítulo seguinte, às aplicações à filosofia da mecânica quântica.

[36] Veja Blum, Cucker, Shub and Smale. Op. cit.

III - Aplicação à filosofia da mecânica quântica

Para aplicar as noções de indistinguibilidade em uma estrutura e indistinguibilidade permutacional em uma estrutura à filosofia da mecânica quântica, ou, mais especificamente, ao problema das partículas indistinguíveis na filosofia da mecânica quântica, devemos, antes de mais nada, dizer o que entendemos, aqui, por mecânica quântica. Para nós, a mecânica quântica será uma teoria axiomática. Mas há duas perspectivas segundo as quais uma teoria pode ser considerada axiomática. A informal e a formal[37].

Estou me valendo de uma distinção feita por Alonzo Church, em seu livro *Introduction to Mathematical Logic* (p. 57) entre método axiomático informal e método axiomático formal. No método axiomático formal, a derivação dos teoremas da teoria a partir de seus axiomas é logicamente analisada. No método axiomático informal isso não acontece. Uma teoria axiomática formal compreende uma linguagem, isto é, seus símbolos e fórmulas, axiomas, que são certas fórmulas, e regras de inferência que nos permitem demostrar teoremas (que também são certas fórmulas) a partir dos axiomas e estritamente a partir dos axiomas, lógicos ou não lógicos. Já uma teoria axiomática informal, no âmbito da matemática, que é o nosso caso, é especificada pela simples apresentação de axiomas matematicamente precisos. As demonstrações dos teoremas de uma teoria axiomática informal podem utilizar não só os axiomas da teoria como quaisquer resultados matemáticos estabelecidos. Ilustremos, com um exemplo, a diferença entre teoria axiomática formal e teoria axiomática informal.

Teoria axiomática formal de grupos.

[37] Veja Church, A. *Introduction to Mathematical Logic*, vol.1, Princeton University Press, 1956 (p. 57)

- símbolos da linguagem: os símbolos lógicos usuais, incluindo o de igualdade, e, como único símbolo não lógico o símbolo de função binária *.
- fórmulas da linguagem: as fórmulas usuais da linguagem de primeira ordem cujos símbolos sejam os especificados acima.
- axiomas lógicos: aqueles de alguma versão usual do cálculo de predicados de primeira ordem clássico.
- axiomas não lógicos: temos dois, a saber,
- (1°) $(x * y) * z = x * (y * z)$
- (2°) $\exists x (\forall y (x * y = y) \wedge \forall y \exists z (z * y = x))$[38]
- regras de inferência: aquelas da mesma versão da lógica de primeira ordem que escolhemos ao especificar os axiomas lógicos.

O primeiro axioma não lógico nos diz que a operação de grupo é associativa. O segundo afirma a existência de uma identidade à esquerda e que cada elemento possui um inverso, também à esquerda. São teoremas dessa teoria, por exemplo, o fato da identidade à esquerda ser única e ser também, identidade à direita e o fato do inverso à esquerda de um dado elemento ser único e ser, também, inverso à direita. Mas não é teorema dessa teoria, por exemplo, o fato de que se G é um grupo finito e se H é um subgrupo de G (isto é, H é um subconjunto de G e a operação de G restrita a H faz de H um grupo), então, o número de elementos de H é um divisor do número de elementos de G. Esse resultado é o chamado teorema de Lagrange. Ele envolve o conceito de número natural que não é abarcado pela teoria axiomática formal de grupos. Também não é teorema dessa teoria o enunciado segundo o qual se G é um grupo finito cujo número de elementos é divisível

[38] Esse é o modo pelo qual Shoenfield apresenta os axiomas de grupo. Veja Shoenfield, J.R. *Mathematical Logic*, Addison – Wesley Publishing Company, 1967 (p. 22).

por, no máximo, dois números primos,então G é solúvel. Esse é o chamado teorema *pq* de Burnside (*p* e *q* são os números primos em questão). Habitualmente sua demonstração emprega, dentre muitas outras coisa, o fato do corpo dos números complexos ser algebricamente fechado (isto é, todo polinômio com coeficientes complexos posui uma raiz complexa). Esse resultado é conhecido, um tanto inadequadamente, como teorema fundamental da álgebra. As noções nele envolvidas também não são abarcadas pela teoria axiomática formal de grupos.

Teoria axiomática informal de grupos.

Para apresentá-la, basta dizer que um grupo é um conjunto de munido de uma operação binária tal que

(i) essa operação é associativa.

(ii) existe um elemento identidade para essa operação.

(iii) cada elemento admite um inverso com respeito a essa operação.

As afirmações (i), (ii) e (iii) são os axiomas da teoria. Todo teorema da teoria axiomática formal de grupos é, quando informalmente expresso de modo adequado, teorema da teoria axiomática informal de grupos. Além disso, resultados como o teorema de Lagrange o o teorema *pq* de Burnside também são teoremas da teoria axiomática informal de grupos. Na obtenção de teoremas dessa teoria podemos usar livremente resultados de outras partes da matemática, como propriedades dos números naturais e o teorema fundamental da álgebra.

Uma versão axiomática formal da mecânica quântica *começou* a ser apresentada por Stors McCall[39]. Sua lógica subjacente é 3-sortida de 1ª ordem e ela é inspirada na notação bra-ket de Dirac. Nas aplicações que faremos da indistinguibilidade em uma

[39] Veja McCall, S. "Axiomatic Quantum Theory" *Journal of Philosophical Logic* 30, 2001, pp. 465-477.

estrutura e da indistinguibilidade permutacional em uma estrutura à mecânica quântica não trabalharemos com a axiomatização de McCall, entretanto é interessante apresentá-la até para entender porque não trabalharemos com ela.

Teoria quântica axiomática formal de McCall (AQT)

Observação: a terminologia a seguir é a do próprio McCall.

I) Linguagem

Variáveis

Variáveis de escalar a,b, c....

Variáveis de vetor u, v, w....

Variáveis de operador A, B, C,...

Conectivos primitivos

. (multiplicação) binário

* (transposta conjugada) unário

+ (adição) binário

- (menos) unário

Relações primitivas

= (identidade)

> (maior que)

Constantes

0 (escalar, operador ou vetor)

1 (escalar)

I (operador de identidade)

Parênteses

(,) (parênteses ordinários)

| > , < | (parênteses de Dirac)

Notação lógica

Os conectivos e quantificadores usuais

Regras de formação

Escalares

Uma variável de escalar é um escalar.

0, 1 e –1 são escalares.

Se x e Y são escalares, então X + Y, X . Y, X* são escalares (X* é o complexo conjugado de X).

Nada mais é um escalar.

Operadores

Uma variável de operador é um operador.

0 e I são operadores.

Se X e Y são operadores, então X + Y, X . Y, X* são operadores.

Se X é um escalar, e Y é um operador, então X.Y é um operador.

Nada mais é um operador.

Vetores

Uma variável de vetor é um vetor.

0 é um vetor.

Se X e Y são vetores, então X + Y é um vetor.

Se X é um escalar ou um operador, e Y é um vetor, então X .Y é um vetor.

Kets e Bras

1. Se X é um vetor, então $| X >$ é um ket e $< X |$ é um bra
2. Se X é um ket, então X* é um bra. Se X é um bra, então X* é um ket.
3. Se X é um escalar ou um operador e $| Y >$ é um ket, então $X | . Y >$ é um ket.
4. Se X é um escalar ou um operador, e $< Y |$ é um bra, então $< Y | . X$ é um bra.
5. Se X e Y são kets, então X + Y é um ket.
6. Se X e Y são bras, então X + Y é um bra.

Novas cláusulas

Acrescentemos as seguintes novas cláusulas a " Escalares" e "Operadores"

$< X | . | Y >$ é um escalar

$| X > . < Y |$ é um operador

Observação: isso pode parecer estranho depois de, tanto no caso dos escalares como no dos operadores, termos dito " Nada mais é...". Mas a apresentação pode ser arranjada de modo a legitimar esses acréscimos.

Sentenças

1. Se X e Y são ambos escalares, ou ambos operadores ou ambos kets ou vetores, ou ambos bras, então X=Y é uma sentença.

2. Se X e Y são escalares reais (ver def. 5), então $X > Y$ é uma sentença.

3. Se X e Y são sentenças, então as combinações usuais por conectivos e as quantificações usuais delas são sentenças.

4. Nada mais é sentença

Definições

Def. 1 $X\,Y = X\,.Y$

Def. 2 $\langle X | Y \rangle = \langle X || Y \rangle$

Def. 3 $-X = (-1)\,X$

Def. 4 $X - Y = X + (-Y)$

Def. 5 Se X é um escalar, então X é real se e somente se $X = X^*$

Na seqüência da apresentação as variáveis sintáticas W, X, Y, Z designarão escalares, operadores, vetores, kets ou bras indiferentemente, desde que as expressões resultantes sejam bem formadas.

Axiomas

1. $(X\,Y)^* = X^*\,Y^*$
2. $X^{**} = X$
3. $(XY)\,Z = X\,(YZ)$
4. Se X é um escalar, então $X\,Y = YX$
5. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
6. $X + Y = Y + X$
7. $X\,(Y + Z) = XY + XZ$

8. $| X \rangle^* = \langle X |$

9. $\langle X |^* = | X \rangle$

10. $(X + Y)^* = X^* + Y^*$

11. Se X é um escalar ou um operador, então $| X Y \rangle = X | Y \rangle$

12. $X 0 = 0$

13. $X + 0 = X$

14. $X - X = 0$

15. $1X = X$

16. Se X é um operador, então $XI = IX = X$

17. $X = Y \rightarrow X^* = Y^*$

18. $(X = Y \wedge W = Z) \rightarrow X + W = Y + Z$

19. $(X = Y \wedge W = Z) \rightarrow X W = Y Z$

20. Se X é um vetor, então $X = | X \rangle$

21. $\forall v (Xv = Yv) \rightarrow X = Y$

22. $\langle v | 0 \rangle = 0$

23. $\langle v \neq 0 \rangle \rightarrow \langle v | v \rangle > 0$

Regras de inferência

Regras usuais da lógica de primeira ordem com identidade.

Isso encerra a apresentação da teoria formal.

Em seu artigo McCall prova os seguintes teoremas.

Teorema 1) $\langle u | v \rangle^* = \langle v | u \rangle$

Teorema 2) $\langle u | A | v \rangle^* = \langle v | A^* | u \rangle$

Teorema 3) $(X + Y) Z = XZ + YZ$

Teorema 4) Se X e Y são vetores, então $| X + Y > = | X > + | Y >$

Teorema 5) $< u | v + w > = < u | v > + < u | w >$

Teorema 6) Se X é um escalar ou um operador, então $< X Y | = < Y | X^*$

Teorema 7) $\forall v \ (X | v > = Y | v >) \rightarrow X = Y$

Teorema 8) $\forall v \ (< v | A | v > = < v | B | v >) \rightarrow A = B$

Def. 6) A é hermitiana se e somente se $A = A^*$

Teorema 9) Se A é hermitiana, então $\forall u \forall v \ (< A u | v > = < u | Av >)$

Teorema 10) $\forall u \forall v \ (< A u | v > = < u | Av >) \rightarrow \forall u \forall v \ (< u | A | v > = < v | A | u^*)$

Teorema 11) Se $\forall u \forall v \ (< u | A | v > = < v | A | u >^*)$, então A é hermitiana.

Teoream 12) Os seguintes enunciados são equivalentes:

(i) A é hermitiana

(ii) $\forall u \forall v \ (< A u | v > = < u | Av >)$

(iii) $\forall u \forall v \ (< u | A | v > = < v | A | u >^*)$

Def. 7) a é um autovalor de A se e somente se $\exists$ v ($v \neq o \wedge Av = av$)

Teorema 13) Todo autovalor de todo operador hermitiano é real.

Teorema 14) $< v | v >$ é real

Teorema 14) $< v | v > = 0 \rightarrow v = 0$

McCall apresenta também uma semântica para AQT baseada, entre outras coisas, na noção de estrutura Q – modelo. Uma estrutura Q – modelo é uma quádrupla Q = < N, C, R, S > onde N é o conjunto dos números complexos, C é o conjunto de todos os vetores coluna (finitos) sobre os complexos, R é o conjunto de todos os vetores-linha (finitos) sobre os complexos, e S é o conjunto de todas as matrizes quadradas (finitas) sobre os complexos. As condições de finitude impostas sobre C, R e S restringem a interpretação de AQT a espaços vetoriais de dimensão finita.

Como o próprio McCall observa, AQT é apenas o início de uma axiomatização formal completa da mecânica quântica. AQT não abrange, por exemplo, a desigualdade de incerteza de Heisenberg. Em seu artigo, McCall afirma que, tanto quanto seja de seu conhecimento, nenhuma axiomática formal da teoria quântica foi tentada antes de AQT. Tanto quanto eu saiba, essa é, de fato, a situação. Seja como for AQT, pela simples razão de não ser mecânica quântica propriamente dita, não serve como referência para a aplicação de nossas noções de indistinguibilidade. Percorreremos um outro caminho. Trabalharemos tendo como referência a axiomática informal apresentada por George Mackey no capítulo 2 de seu livro *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*[40]. Para apresentar essa axiomática precisaremos de alguns aspectos matemáticos preliminares. Vamos a eles.

Seja X um conjunto. Uma coleção T de subconjuntos de X é dita uma topologia em X se e somente se satisfizer as seguintes condições:

(i) o conjunto vazio e X pertencerem a T;

(ii) a interseção de qualquer família finita de elementos de T for um elemento de T

(iii) a união de uma família qualquer de elementos de T for um elemento de T.

Se T é uma topologia em X, então <X, T> é dito um espaço topológico e os elementos de T são ditos os conjuntos abertos nesse espaço topológico. Se <X,T> é um

[40] Veja Mackey, G. W. *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics.* W.A. Benjamim, INC, 1963.

espaço topológico, podemos por abuso de linguagem, dizer simplesmente que X é um espaço topológico munido da topologia T.

Se X e Y são espaços topológicos e f é uma função de X em Y, então f é dita contínua se e somente se a imagem inversa por f de todo aberto em Y é um aberto em X.

Seja X um conjunto. Uma coleção M de subconjuntos de X é dita uma σ-algebra em X se e somente se satisfizer as seguintes condições:

(i) X é elemento de M

(ii) Se A é elemento de M, então o complementar de A em relação a X é elemento de M.

(iii) A união de uma família enumerável de elementos de M é um elemento de M.

Se M é uma σ-algebra em X então, X, com o abuso de linguagem habitual, é dito um espaço mensurável e os elementos de M são ditos os conjuntos mensuráveis em X. Essa é, claro, uma noção abstrata de medida.

Se X é um espaço mensurável, Y é um espaço topológico e f é uma função de X em Y, então f é dita mensurável se e somente se a imagem inversa por f de todo aberto em Y for um conjunto mensurável em X.

Apresentamos, no capítulo anterior, a definição de espaço métrico. Um espaço métrico torna-se um espaço topológico quando consideramos como topologia a coleção dos abertos, segundo a definição de conjunto aberto dada para o caso de espaços métricos.

Se F é qualquer coleção de subconjuntos de X, então existe uma menor σ-algebra em X contendo F. Em particular se X é um espaço topológico, então existe uma menor

σ-algebra B em X tal que todo aberto em X pertence a B. Os elementos de B são ditos os conjuntos de Borel de X. Conjuntos fechados são, por definição, os complementares dos conjuntos abertos e, portanto, são conjuntos de Borel. Uniões contáveis de conjuntos fechados e interseções contáveis de conjuntos abertos também são conjuntos de Borel. Como B é uma σ-algebra, então X é um espaço mensurável, tendo como conjuntos mensuráveis os conjuntos de Borel. Se Y é um espaço topológico e f uma função contínua de X em Y, então a imagem inversa por f de qualquer aberto em Y é um elemento de B. Assim, toda função contínua de X em Y é Borel mensurável. Funções Borel mensuráveis são ditas simplesmente, funções de Borel.

Detalhemos, um pouco, a hierarquia de Borel na reta real. Vamos falar informalmente de *níveis*.

Nivel Σ_1 : constituído pelos conjuntos abertos

Nivel Π_1: constituído pelos conjuntos fechados

Nivel Σ_2: constituído pelas uniões contáveis de fechados.

Nivel Π_2: constituído pelos complementos de conjuntos em Σ_2

.

.

.

Nivel Σ_{n+1}: constituído pelas uniões contáveis de conjuntos em Π_n

Nivel Π_{n+1}: constituído pelos complementares de conjuntos em Σ_n

.

.

.

Um espaço vetorial sobre o corpo dos complexos (ou simplesmente um espaço vetorial complexo) é um conjunto V, cujos elementos são chamados vetores, juntamente com duas operações, adição e multiplicação por escalar, satisfazendo as seguintes condições.

A cada par de vetores x e y corresponde um vetor x + y de tal modo que:

$x + y = y + x$

$x + (y + z) = (x + y) + z$

existe 0 em V tal que $x + 0 = x$ para todo x em V

dado x em V existe $-x$ em V tal que $x + (-x) = 0$

A cada par $< \alpha , x >$ onde α é um escalar (isto é, nesse caso, um número complexo) e x é um vetor corresponde um vetor α x de tal modo que :

$1 x = x$

$\alpha (\beta x) = (\alpha\beta)x$

$\alpha (x + y) = \alpha x + \beta y$

$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$

Um espaço vetorial complexo H é dito um espaço com produto interno se e somente se a cada par ordenado de vetores x e y de H está associado um número complexo (x,y), chamado o produto interno x e y, de tal modo que valem as seguintes condições

(i) $(y, x) = (x, y)^*$ (onde * denota a conjugação complexa)

(ii) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ para x, y e z em H

(iii) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$ para x e y em H e α escalar

(iv) $(x, x) \geq 0$ para todo x em H

(v) $(x, x) = 0$ somente se $x = 0$

Usando (iv) definimos a norma de um vetor x como a raiz quadrada não negativa de (x, x).

Fazendo a distância entre x e y ser a norma de x – y, tornamos H um espaço métrico.

Uma seqüência $<x_0, x_1, x_2, ...>$ de elementos de um espaço métrico converge para um elemento x desse espaço métrico se e somente se dado qualquer número real ε positivo existe um número natural N tal que para todo n maior que N a distância entre x e x_n é menor que ε.

Uma seqüência $<x_0, x_1, x_2, ...>$ de elementos de um espaço métrico é dita uma seqüência de Cauchy se e somente se dado qualquer número real ε positivo, existe um número natural N tal que a distância entre x_n e x_m é menor que ε sempre que m e n forem maiores que N.

Um espaço métrico é dito completo se e somente se toda seqüência de Cauchy de elementos desse espaço converge para um elemento desse espaço.

Voltemos ao espaço H com que estávamos trabalhando. Se H é um espaço métrico completo, dizemos que H é um espaço de Hilbert.

O fecho de um conjunto E num espaço topológico X é o menor fechado de X que contém E. Sendo A e B subconjuntos de X, dizer que A é denso em B é dizer que o fecho de A contém B. Um espaço é dito separável se e somente se ele contém um subconjunto denso contável.

Um subconjunto M de um espaço vetorial V é dito um subespaço de V, se e somente se a adição e a multiplicação por escalar, especificadas para V quando restritas a M, fazem de M um espaço vetorial.

Um subespaço fechado M de H é um subespaço de H que é um conjunto fechado com respeito à topologia induzida pela distância em H.

Feita essa apresentação bastante concisa e esquemática de noções matemáticas podemos passar a axiomatização da mecânica quântica elaborada por Mackey.

Seja *B* o conjunto de todos os subconjuntos de Borel do conjunto dos números reais R munido da topologia usual. Sejam O e S conjuntos e seja p uma função que associa um número real p (A, α, E), igual ou superior a zero e igual ou inferior a um a cada tripla <A, α, E> onde A é um elemento de O , α um elemento de S e E é um elemento de *B*. Os elementos de O são ditos os observáveis e os elementos de S são ditos os estados (essa terminologia reflete a interpretação física pretendida). p (A, α, E) é a probabilidade de que uma mensuração do observável A no estado α produza um valor em E. Os axiomas imporão condições sobre a função p

Axioma 1) temos que:

(i) $p(A, \alpha, \varnothing) = 0$

(ii) $p(A, \alpha, R) = 1$

(iii) $p(A, \alpha, E_1 \cup E_2 ...) = p(A, \alpha, E_1) + p(A, \alpha, E_2) + ...$sempre que E_1, E_2 ...forem conjuntos de Borel dois a dois disjuntos.

Seja $\alpha_A(E) = p(A, \alpha, E)$. O axioma 1 nos diz que para cada A em O e cada α em S, α_A é uma medida de probabilidade (no sentido de Kolmogorov).

Axioma 2) temos que:

(i) Se $p(A, \alpha, E) = p(A', \alpha, E)$ para todo α em S e todo E em *B*, então $A = A'$.

(ii) Se p (A, α, E) = p (A, α', E) para todo A em O e todo E em *B*, então $\alpha = \alpha'$.

O axioma 2 nos diz que para que dois estados sejam diferentes, eles têm de associar distribuições de probabilidade diferentes a pelo menos um observável e para que dois observáveis sejam diferentes, eles têm de ter distribuições de probabilidade diferentes em pelo menos um estado.

É interessante, nesse ponto, interromper a apresentação dos axiomas de Mackey pra verificar como a escolha de axiomas para uma teoria pode afetar a formulação de questões filosóficas sobre ela. Esse é um fato aparentemente óbvio, mas por alguma razão estranha parece ser, por vezes, esquecido. Em seu livro *Quantum Mechanics: An Empirics View* (p. 140) [41]. Van Fraassen define estados empiricamente indistinguíveis como aqueles que não associam distribuições de probabilidades diferentes a pelo menos um observável e observáveis empiricamente indistinguíveis como aqueles que não têm distribuições de probabilidades diferentes em pelo menos um estado. Em seguida, Van Fraassen pergunta se indistinguibilidade empírica implica identidade. Ele sustenta que a questão deve ser examinada do ponto de vista da abordagem semântica das teorias científicas, isto é, a mecânica quântica deve ser considerada como o conjunto de seus modelos e temos de procurar saber se em cada um desses modelos a indistinguibilidade empírica de estados implica a identidade de estados e a indistinguibilidade empírica de observáveis implica a identidade de observáveis. Van Fraassen, com base em uma certa interpretação, afirma que sim. De qualquer modo, essas questões não surgem na axiomática de Mackey. O axioma 2 faz com que a indistinguibilidade empírica de estados

[41] Veja van Fraassen, op. cit. (p. 140).

e a indistinguibilidade empírica de observáveis coincidam com a identidade de estados e a identidade de observáveis respectivamente.

Além disso, como o próprio Van Fraassen reconhece (e não poderia ser mesmo de outra forma) a noção de modelo da mecânica quântica ainda não está suficientemente clara[42], o que parece recomendar a adoção do axioma 2. Agora voltemos à axiomática de Mackey.

Axioma 3)

Seja A um observável e seja f uma função de Borel em R tomando valores também em R.Então existe um observável B tal que $p(B, \alpha, E) = p(A, \alpha, f^{-1}(E))$ para todo estado α e todo E em *B*.

B é, em virtude do axioma 2, unicamente determinado por A e será denotado por f(A). Intuitivamente, mede-se f (A) aplicando a função f ao resultado de mensuração de A. O axioma 3 nos permite, de certa forma, operar com observáveis. Quando A é um observável ele confere sentido a expressões como A^2, A^3+A, 1-A e a exponencial de A.

Axioma 4)

Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ são estados e $t_1, t_2, \ldots$ são números reais entre zero e 1 tais que $t_1 + t_2 + \ldots = 1$, então existe um estado α tal que: $p(A, \alpha, E) = t_1 p(A, \alpha_1, E) + t_2 p(A, \alpha_2, E) + \ldots$ para todo observável A e todo E em *B*.

Pelo axioma 2 temos que α é unicamente determinado por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ e $t_1, t_2, \ldots$ Escrevemos $\alpha = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \ldots$

Fisicamente α corresponde a um estado em que sabemos que estamos no estado α_i com probabilidade t_i. α é dito uma mistura de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

[42] Veja van Fraassen, op. cit. (p. 140-141)

α é dito um estado puro se e somente se α não pode ser obtido misturando dois estados diferentes de si mesmo.

Um observável A é dito uma questão se e somente se para todo estado α, temos $\alpha_A(\{0,1\}) = 1$. O conjunto de todas as questões será denotado por Q. A imagem de um observável A pela função característica de um conjunto de Borel E da reta é sempre uma questão e será denotada por $Q^A{}_E$. Intuitivamente essa questão corresponde à pergunta: "a mensuração do observável A produziu um valor E?"

Se $Q^A{}_E = Q^{A'}{}_E$ para todo E em *B*, então A = A`.

Seja Q uma questão qualquer. α_Q é determinada por $\alpha_Q(\{1\})$. Definamos m_α (Q) como $\alpha_Q(\{1\})$.

Sejam Q_1 e Q_2 questões. Definamos $Q_1 \leq Q_2$ se e somente se $m_\alpha(Q_1) \leq m_\alpha(Q_2)$ para todo estado α. A relação $\leq$ é uma ordem parcial no conjunto das questões. Se Q_1 e Q_2 são questões tais que $Q_1 \leq 1 - Q_2$ (isto é, $m_\alpha(Q_1) + m_\alpha(Q_2) \leq 1$ para todo estado α), dizemos que Q_1 e Q_2 são disjuntas. Fisicamente, o fato de Q_1 e Q_2 serem disjuntas significa que elas não podem ter respostas afirmativas simultâneas.

Dizemos que uma questão Q é a soma das questões disjuntas Q_1, Q_2 .....e escrevemos $Q = Q_1 + Q_2$ ....se e somente se para todo estado α temos $m_\alpha(Q) = m_\alpha(Q_1) + m_\alpha(Q_2) + ...$

Axioma 5)

Seja Q_1, Q_2 ..... uma seqüência de questões duas a duas disjuntas. Então $Q_1 + Q_2 + ...$existe.

Seja q uma função de *B* no conjunto das questões. Denotemos q (E) por q_E. Dizemos que q é uma medida questão-valorada se e somente se q satisfizer as condições abaixo:

(i) Se E e F são disjuntos, então q_E e q_F são disjuntas.

(ii) Se E_1, E_2, ...são dois a dois disjuntos, então $q_{E1 \cup E2 \ldots} = q_{E1} + q_{E2} + \ldots$.

(iii) $q_\varnothing = Q^A{}_\varnothing = 0$ e $q_R = Q^A{}_R = 1$ (onde A é um observável qualquer)

Axioma 6)

Se q é uma medida questão-valorada, então existe um observável A tal que $Q^A{}_E = q_E$ para todo E em *B*.

Axioma 7)

O conjunto parcialmente ordenado de todas as questões em mecânica quântica é isomorfo ao conjunto parcialmente ordenado de todos subespaços fechados de um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita.

Lembremos que se A é um observável e E é um subconjunto de Borel da reta real, dizemos que $Q^A{}_E = 0$ se α_A (E) = 0 para todo estado α.

Axioma 8)

Se Q é uma questão diferente de zero, então existe um estado α tal que m_α (Q) = 1.

Passemos, agora, à parte dinâmica da mecânica quântica. O primeiro ponto a observar é que o caráter não causal da mecânica quântica não abrange o relacionamento entre estados em tempos diferentes. Esse relacionamento é causal, isto é, o estado no tempo t_2 maior que t_1 é unicamente determinado por $t_2 - t_1$ e pelo estado no tempo t_1. Se o estado de um sistema é α no tempo $t_1 = 0$, denotaremos por $V_t(\alpha)$ o estado desse sistema no tempo t.

Axioma 9)

Para cada seqüência $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de estados e para cada seqüência $a_1, a_2, \ldots$ de números reais não negativos cuja soma seja 1, temos que $V_t(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots) = a_1 V_t(\alpha_1) + a_2 V_t(\alpha_2) + \ldots$ para todo t igual ou superior a zero e para todo observável A, para todo estado α, para todo E em B, $p(A, V_t(\alpha), E)$ é uma função contínua de t.

Isso conclui a apresentação da axiomática de Mackey para a mecânica quântica. Há outras possibilidades de axiomatização informal para a teoria quântica. Não é importante, para os propósitos deste trabalho, que seja usada especificamente a axiomatização acima (por isso fomos, novamente, esquemáticos ao apresentá-la). Mas é importante, primeiramente, que saibamos que uma tal axiomatização existe para nos servir de referência e em segundo lugar, que essa axiomatização de referência possa ser inteiramente acomodada dentro da hierarquia de Borel da reta real. Elaboremos um pouco mais esse ponto.

A teoria elementar de conjuntos e a topologia, também elementar, nos fornecem os seguintes resultados:

O conjunto dos subconjuntos contáveis de R é equipotente a R.

O conjunto das seqüências contáveis de elementos de R é equipotente a R.

O conjunto de todos os subconjuntos abertos de R é equipotente a R.

O conjunto de todos os subconjuntos fechados de R é equipotente a R.

O conjunto de todas as funções contínuas de R em R é equipotente a R.

Esses resultados, essencialmente, nos permitem codificar os conjuntos de Borel e as funções de Borel por números reais.

No início deste capítulo, afirmamos que era fundamental explicar o que entendemos, aqui, por mecânica quântica. Pois bem, para nós, mecânica quântica é, aqui, a teoria axiomática de Mackey apresentada acima. Essa teoria pode ser construída na hierarquia de Borel, isto é, no âmbito dos conjuntos de Borel e das funções de Borel. Como esses conjuntos e essas funções podem ser codificados por números reais (entendendo codificação no sentido usual de correspondência biunívoca), então a mecânica quântica, tal como entendida nesse trabalho, pode ser feita no terreno dos números reais. Claro que trabalhar sempre, diretamente, apenas com números reais traria enormes dificuldades práticas. A axiomática de Mackey, por exemplo, passa longe disso. Mas o ponto é que a análise funcional embutida nessa axiomática pode ser inteiramente substituída por números reais sem qualquer perda lógica.

A mecânica quântica pode ter como teoria formal de fundo a teoria dos conjuntos ZFC, ou a teoria simples de tipos, por exemplo. Mas essas teorias têm força muito além da necessária para o desenvolvimento da mecânica quântica. Elas nos permitem ir muito além dos números reais e, de um ponto de vista lógico, são necessários apenas os números reais para desenvolver a mecânica quântica. Uma teoria formal dos números reais (isto é, uma teoria formal tendo os números reais, suas propriedades e relações como interpretação pretendida) é a chamada análise matemática formal. Por meio das codificações mencionadas anteriormente, poderíamos dentro da teoria de primeira ordem que é a análise matemática formal, construir a axiomática informal de Mackey, isto é, construir a mecânica quântica.

A análise matemática formal tem a seguinte linguagem:

- Símbolos lógicos usuais, exceto o símbolo de identidade
- Símbolo de relação unária N
- Símbolo de relação binária $<$
- Símbolo de função binária $+$
- Símbolo de função binária $\cdot$

As fórmulas são as habituais da lógica de primeira ordem.

Na interpretação pretendida as variáveis variam sobre os números reais, $\cdot$, + e < significam, respectivamente a multiplicação, a adição e a ordem usuais em R e N significa a propriedade de ser número natural.

Os axiomas da análise matemática formal são:

Os axiomas de corpo ordenado

Os axiomas para N, isto é, para a propriedade de ser número natural no contexto do corpo ordenado dos reais, por exemplo:

O elemento neutro da adição é número natural.

O elemento neutro da multiplicação é número natural.

Se x é um número natural, então x mais o elemento neutro da multiplicação é número natural.

Não há nenhum número natural menor que o elemento neutro da adição

Se x é número natural, então não há nenhum número natural entre x e x mais o elemento neutro da multiplicação.

Finalmente, um esquema de axiomas para dizer que todo conjunto não vazio e superiormente limitado de números reais possui supremo, além, é claro, dos axiomas lógicos em alguma apresentação usual.

As regras de inferência na análise matemática formal são aquelas de uma versão usual da lógica de primeira ordem compatível com a escolha, feita acima, dos axiomas lógicos.

A identidade é definida na analise matemática formal da seguinte maneira:

$x = y$ se e somente se não acontecer $x < y$ e não acontecer $y < x$. Pensando em números reais a motivação para essa definição é clara.

O ponto a destacar para futura utilização é o seguinte: mesmo quando escolhemos de modo muito econômico a teoria de fundo na qual a mecânica quântica é formulada (evitando, por exemplo, a escolha de ZFC que não seria nada econômica), essa teoria de fundo contém uma teoria dos números naturais. Isso já havia se manifestado do ponto de vista informal, uma vez que os números naturais foram utilizados, explicita e implicitamente na apresentação da axiomática de Mackey.

Vamos agora examinar uma situação que já consideramos no capítulo anterior; aquela de um sistema constituído por n partículas indistinguíveis (ou “idênticas” no jargão dos físicos). Como dissemos antes, o estado desse sistema é representado por uma função de onda ψ $(c_1, c_2, ..., c_n)$, onde, para cada $i = 1, 2, ...,n$ c_i é o conjunto de coordenadas da i-ésima partícula e ψ fica determinada a menos de uma multiplicação por um escalar complexo λ cujo valor absoluto é 1.

Um modo de apresentar o chamado Princípio de Invariância por Permutação é esse: se ψ nos dá o estado de um sistema cujas componentes são partículas “idênticas”, então o valor esperado de qualquer observável A é o mesmo para todas as permutações dessas partículas[43].

Assim, uma permutação das partículas não altera o estado, isto é, multiplica ψ por uma constante.

Antes de prosseguirmos é importante destacar que os desenvolvimentos matemáticos citados acima, bem como aqueles que faremos a seguir podem ser construídos no contexto da axiomática de Mackey.

Sejam $p_1, p_2, ...p_n$ as partículas do sistema de n partículas indistinguíveis considerado. É claro que o uso da letra p aqui não é importante. Assim, digamos simplesmente que sejam 1, 2,..., n as partículas do sistema de n partículas indistinguíveis considerado. Seja σ uma permutação das partículas, isto é, seja σ uma permutação do conjunto {1,2,....n}. Então temos que $\psi (c_{\sigma(1)}, ...c_{\sigma(n)}) = \lambda(\sigma)\ \psi (c_1, c_2,....c_n)$. Aqui $\lambda(\sigma)$ é um número complexo de valor absoluto 1.

Lembremos que o conjunto das permutações do conjunto {1, 2, ...,n} munido da operação de composição de funções é um grupo, o chamado grupo simétrico n, Sn.

Recordemos os seguintes fatos sobre Sn.

Um permutação de {1, 2, ...,n} que permuta dois elementos e deixa os demais fixos é dita uma transposição. A transposição que permuta i e j será denotada por (ij).

Toda permutação de {1, 2, ...,n} pode ser escrita como um produto (isto é, composição) de transposições. Esse é um resultado de fácil compreensão intuitiva. De fato, dada uma ordenação qualquer do conjunto {1, 2, ...,n} essa ordenação pode ser

---

[43] Veja van Fraassen, op. cit. P. 131.

obtida partindo-se da ordenação original $1 < 2 < .... < n$ e efetuando-se sucessivas transposições.

Uma permutação de $\{1, 2, ..., n\}$ pode ser escrita de várias maneiras como um produto de transposições, mas o número de fatores nesses produtos é sempre par ou sempre ímpar. Quando o número é par, a permutação é dita par. Quando o número é impar, a permutação é dita impar .

Vamos mostrar agora que a função de Sn nos complexos que associa a uma permutação σ de $\{1, 2, ..., n\}$ o número complexo $\lambda(\sigma)$ (conforme especificado acima) é um homomorfismo do grupo Sn em um certo subgrupo do grupo multiplicativo do corpo dos complexos.

Seja σ_1 e σ_2 permutações em Sn. Temos então que:

$\psi\,(c_{\sigma 1 \sigma 2\,(1)}, ... c_{\sigma 1 \sigma 2\,(n)}) = \lambda(\sigma_1\sigma_2)\ \psi\,(c_1, c_2, ...c_n)$.

Por outro lado, também temos que:

$\psi\,(c_{\sigma 1 \sigma 2\,(1)}, ... c_{\sigma 1 \sigma 2\,(n)}) = \psi\,(c_{\sigma 1(\sigma 2\,(1))}, ... c_{\sigma 1(\sigma 2\,(n))}) = \lambda\,(\sigma_1)\ \psi\,(c_{\sigma 2\,(1)}, ... c_{\sigma 2\,(n)}) = \lambda(\sigma_1)\ \lambda(\sigma_2)\ \psi\,(c_1, c_2, ...c_n)$.

Assim, $\lambda(\sigma_1\sigma_2) = \lambda(\sigma_1)\ \lambda(\sigma_2)$, ou seja, a função λ que associa a cada permutação σ em Sn o número complexo $\lambda(\sigma)$ é, de fato, um homomorfismo de Sn em algum subgrupo do grupo multiplicativo do corpo dos complexos.

Como λ é um homomorfismo, então λ aplicado à permutação identidade em Sn tem como resultado a identidade multiplicativa nos complexos, ou seja, 1.

Seja id permutação identidade em Sn. Seja (ij) uma transposição qualquer. Como toda transposição é sua própria inversa, temos que:

$1 = \lambda\,(id) = \lambda\,((ij)(ij)) = \lambda\,(ij)\ \lambda\,(ij)$

Assim temos que λ (ij) = 1 ou λ (ij) = -1

Como toda permutação é um produto de transposições, então λ é um homomorfismo de Sn no grupo formado pelo conjunto {1, -1} munido da multiplicação usual.

Se n = 2, então λ é o homomorfismo trivial ou é o homomorfismo que leva a permutação identidade em 1 e a transposição (12) em -1

Essa situação se generaliza para um n qualquer. Considerando Sn, λ é o homomorfismo que leva todas as permutações em 1 ou λ é o homomorfismo que leva as permutações pares em 1 e as ímpares em –1. Denotemos, nesse segundo caso, λ por θ, isto é, temos que:

θ (σ) = 1, quando σ é permutação par.

$\theta(\sigma)$ = - 1, quando σ é permutação ímpar.

Assim, temos duas possibilidades

(1) ψ ($c_{\sigma(1)}, ...c_{\sigma(n)}) = \psi (c_1, c_2,....c_n)$ para todo σ.

(2) ψ ($c_{\sigma(1)}, ...c_{\sigma(n)}) = \theta(\sigma) \psi (c_1, c_2,....c_n)$ para todo σ.

É a natureza das partículas que compõem o sistema que determina qual dos casos se verifica. Os bósons, isto é, as partículas que obedecem à estatística de Bose-Einstein, produzem o caso 1. Os férmions, isto é, as partículas que obedecem à estatística de Fermi-Dirac, produzem o caso 2. Falaremos um pouco mais sobre essas estatísticas adiante. Exemplos de bósons são os fótons. Exemplos de férmions são os elétrons, os prótons e os neutrons. Assim, obtivemos uma versão do chamado Princípio da Dicotomia: cada partícula é um bóson ou é um férmion[44].

No processo de obtenção do Princípio da Dicotomia coordenatizamos as partículas por meio de números naturais. Assim, introduzimos distinções entre elas e pudemos trabalhar com grupos de permutações. O processo de coordenatização, no caso, consistiu em atribuir índices ou rótulos às partículas e com isso distinguí-las umas das outras. No capítulo anterior mencionamos o problema de saber se distinções baseadas apenas em indexação ou rotulagem de objetos quânticos eram distinções genuínas ou somente um expediente matemático que, por mais útil que seja, não resolve o problema filosófico das partículas indistinguíveis. Vimos que há quem sustente a posição de que distinções baseadas apenas em índices são genuínas, mas também há quem diga o contrário, sob a alegação de que os índices não estão subordinados a nenhuma teoria, nem servem para explicar o comportamento das partículas. Quanto à explicação do comportamento das partículas, não está, a meu ver, claro que os índices não contribuem para ela. Afinal o Princípio da Dicotomia pode ser encarado como uma das manifestações desse comportamento, e pelo menos na obtenção desse princípio esboçada acima, os índices desempenham um papel fundamental. Matematicamente, o Princípio da Dicotomia é simplesmente a afirmação de que existem exatamente duas representações unidimensionais do grupo Sn, e sem os índices não podemos falar em grupo Sn. Já a afirmação de que os índices não estão subordinados à teoria alguma é, em nosso caso, falsa, pois, para nós a mecânica quântica é uma teoria axiomática informal, mais especificamente a axiomática de Mackey, que abrange os números naturais que servem

[44] Na discussão do Princípio da Dicotomia usei a concisa e clara abordagem de Shafarevich. Veja Shafarevich op. cit., p.162.

de índices. Se perguntarmos pela teoria formal de fundo na qual essa teoria informal pode ser desenvolvida, obtemos, como resposta econômica, a análise matemática formal, que conta com um símbolo de predicado unário cuja interpretação pretendida é a propriedade de ser número natural e também com axiomas que são muito mais do que suficientes para justificar as manipulações com índices. Tudo isso, talvez, possa enfraquecer as críticas à indexação como processo estabelecedor de distinções genuínas entre as partículas, mas certamente não irá rebatê-las de forma categórica, pois os autores dessas críticas sempre podem dizer que a caracterização de mecânica quântica utilizada neste trabalho é peculiar e parcial, não compreendendo todos os aspectos da mecânica quântica como teoria física que são relevantes para o problema da indistinguibilidade e isso, provavelmente, está correto. Além do mais, sempre fica a impressão, ou certeza, também mencionada no capítulo anterior, de que a indexação se faz sem considerar nenhuma característica específica da mecânica quântica; indexam-se partículas e laranjas do mesmo modo. Prometi que, apesar disso, apresentaria um argumento por analogia com urelementos de ZFCU, tentando tornar mais palatável a aceitação das distinções baseadas apenas em índices como genuínas. Vejamos.

Já sabemos, para ZFU, mas também vale para ZFCU, que qualquer permutação dos urelementos pode ser estendida a um automorfismo de uma estrutura para ZFCU. Portanto, como também já dissemos, os urelementos são permutacionalmente indistinguíveis em uma estrutura para ZFCU. Essa é uma situação análoga à das partículas, cujas permutações não provocam modificações de estado. Aceitamos como legítimas as distinções entre urelementos estabelecidas exclusivamente com base em indexação. E de que outro modo poderíamos distinguir entre eles? Por isso proponho o seguinte critério de legitimidade para distinções entre objetos baseadas apenas na indexação ou rotulagem.

Seja X um subconjunto do domínio de uma estrutura A. São legítimas, com respeito à estrutura A, as distinções estabelecidas entre os elementos de X com base apenas na indexação ou rotulagem desses elementos por números naturais se e somente se os elementos de X são permutacionalmente indistinguíveis em A.

Intuitivamente, se não considerarmos os índices, urelementos são objetos, para dizer o mínimo, muito difíceis de distinguir uns dos outros (o uso da palavra "outros" deve ser encarado de um modo também intuitivo). Por outro lado, com números naturais i e j, tais que $i \neq j$, servindo como índices, podemos entender que o urelemento x_i é diferente do urelemento x_j porque x_i tem índice i e x_j não tem índice i. E essa distinção entre urelementos feita apenas com base em índices é legítima. O que o critério acima propõe é que para objetos tão difíceis de distinguir uns dos outros como os urelementos, as distinções baseadas apenas em indexação sejam consideradas também legítimas. O ponto é que a expressão " tão difíceis de distinguir uns dos outros como os urelementos" é relativizada a uma estrutura e caracterizada precisamente como a possibilidade de estender qualquer permutação desses objetos a um automorfismo dessa estrutura. Assim, se a noção de estrutura, isto é, de modelo, para a mecânica quântica for tornada suficientemente precisa, e se as partículas corresponderem a elementos do domínio de um tal modelo, poderemos saber se nessa estrutura as distinções entre partículas baseadas apenas em indexação são ou não legítimas, isto é, genuínas, resolvendo o problema de saber se as permutações das partículas podem ou não ser estendidas a automorfismos dessa estrutura. Isso não necessariamente torna a solução do problema original mais fácil. Afinal, esse último problema algébrico pode ser muito difícil ou mesmo impossível de solucionar. Mas, ao menos temos uma versão exata do problema original e em defesa da relevância filosófica dessa versão podemos dizer que ela é, no mínimo, compatível com a abordagem semântica das teorias científicas.

Uma última observação sobre esse tópico. Objetos quânticos têm um comportamento que não é explicado em termos de objetos clássicos. Ao contrário, os urelementos de ZFCU podem ser explicados em termos dos conjuntos de ZFC. Para ver como, lembremos, primeiramente, a hierarquia cumulativa de conjuntos.

Sejam α e β ordinais. A hierarquia cumulativa de conjuntos é especificada por indução transfinita da seguinte maneira:

$V_0 = \varnothing$

$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$

$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$ se α é ordinal limite.

Em virtude do axioma do fundamento, qualquer que seja o conjunto x, existe um ordinal α tal que x é elemento de V_α Isso nos permite definir o rank de x do seguinte modo:

rank (x) = menor ordinal α tal que x é elemento de $V_{\alpha+1}$

Seja agora C um conjunto de conjuntos do mesmo rank. Dados dois conjuntos em C, temos que cada um deles não pertence ao fecho transitivo do outro, isto é, cada um deles não é elemento do outro, nem elemento de elemento do outro, nem elemento de elemento de elemento do outro etc... Fixemos um conjunto em C para desempenhar o papel de conjunto vazio. Os outros conjuntos em C desempenharão o papel de urelementos. Assim obtemos um modelo ZFCU dentro de um modelo de ZFC.[45]

Portanto, se tivermos de explicar o que são urelementos, podemos dar essa explicação em ZFC dizendo que urelementos são (isto é, podem ser representados por) certos elementos de um conjunto de conjuntos do mesmo rank. Não é surpresa que isso aconteça. Afinal ZFC tem um poder de representação imenso, capaz de dar conta de toda a matemática com que lidamos, inclusive de ZFCU. Por isso, embora expliquemos os urelementos a partir de conjuntos que não envolvem urelementos e não expliquemos os objetos quânticos a partir de objetos clássicos, acredito que a analogia entre urelementos e partículas não reste enfraquecida.

Aplicada que foi a noção de indistinguibilidade permutacional em uma estrutura à filosofia da mecânica quântica, passamos agora a aplicar a noção de indistinguibilidade em uma estrutura.

Com esse propósito, voltemos a considerar as estatísticas quânticas. Para motivar a apresentação dessas estatísticas, é interessante levar em conta, ainda que de forma muito simplificada, alguns aspectos históricos do desenvolvimento da teoria quântica (entendida tal teoria, a partir de agora, como teoria científica em um sentido amplo e não só no sentido da axiomática de Mackey). Obviamente, essa teoria foi desenvolvida para resolver certos problemas físicos. Não importa, aqui, saber quais são exatamente esses problemas, mas sim que três leis foram formuladas para solucioná-los. Primeiro a lei de Wien, depois a lei de Rayleigh e finalmente a lei de Planck. Também não é necessário, aqui, conhecer os enunciados precisos dessas leis. O que nos interessa é que os fenômenos a serem explicados envolviam freqüências e temperaturas e, grosso modo, a

[45] Ver Jech, T. *Set Theory*, 2 nd ed., Springer, 1997, p. 199.

lei de Wien funcionava, isto é, concordava com a experiência, para freqüências altas e temperaturas baixas; a lei de Rayleigh funcionava para freqüências baixas e temperaturas altas e cada uma dessas duas leis não funcionava onde a outra funcionava. O problema de combinar essas duas leis e concordar com a experiência em todas as freqüências foi resolvido pela lei de Planck (isto é, foi resolvido por Planck com sua nova lei). As derivações dessas leis continham aspectos probabilísticos. O problema quanto a esses aspectos é que quando era usada a distribuição de probabilidade que parecia sensata e razoável no caso do fenômeno considerado, a lei derivada era a de Wien e não a de Planck. Para obter a lei de Planck, Bose, em uma estratégia *ad hoc*, lançou mão de uma distribuição de probabilidade diferente que, em certo sentido, ignorava a identidade das partículas cujo comportamento se queria explicar. Podemos ilustrar a situação com um chamado modelo de brinquedo.[46]

Imaginemos a experiência de lançar duas moedas e verificar os resultados, cara ou coroa, desses lançamentos. Os resultados possíveis, claro, são:

1. Cara no primeiro lançamento e cara no segundo lançamento
2. Cara no primeiro lançamento e coroa no segundo lançamento
3. Coroa no primeiro lançamento e cara no segundo lançamento
4. Coroa no primeiro lançamento e coroa no segundo lançamento

O que chamamos acima de distribuição de probabilidade que parecia sensata e razoável consiste em considerar os quatro resultados como equiprováveis e, portanto, atribuir a cada um deles probabilidade 1/4. Isso corresponde à estatística clássica de

[46] Veja Van Fraassen, B.C. "The Problem of Indistinguishable Particles" in Castellani, E. (ed.) *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, Princeton University Press, 1998, p. 83.

Maxwell-Boltzmann e o problema, como dissemos, é que a partir dela a lei obtida é a Wien e não a de Planck.

A estatística quântica de Bose-Einstein corresponde à seguinte distribuição de probabilidade:

1. Probabilidade do resultado (1): 1/3
2. Probabilidade do resultado (2): 1/6
3. Probabilidade do resultado (3): 1/6
4. Probabilidade do resultado (4): 1/3

Usando a estatística de Bose-Einstein obtemos a lei de Planck. Um modo de motivar, intuitivamente, essa estatística é pensar no experimento de lançar duas moedas como tendo três resultados possíveis e equiprováveis, a saber,

1. duas caras
2. uma cara e uma coroa
3. duas coroas

O resultado de duas caras corresponde ao resultado (1), o resultado de duas coroas corresponde ao resultado (4) e o resultado de uma cara e uma coroa corresponde à combinação dos resultados (2) e (3). Como a probabilidade dessa combinação é 1/3 e dentro dela os resultados (2) e (3) são equiprováveis, atribuímos probabilidade 1/6 a cada um deles. Isso pode ser interpretado como a desconsideração da identidade das moedas. Não se identifica mais qual delas é a primeira nem qual é a segunda. Um exemplo de Schrödinger, que citaremos mais adiante, tornará essa motivação mais clara.

A outra estatística quântica é a de Fermi-Dirac que corresponde à distribuição de probabilidade abaixo.

1. Probabilidade do resultado (1): zero
2. Probabilidade do resultado (2): 1/2
3. Probabilidade do resultado (3): 1/2
4. Probabilidade do resultado (4): zero

Ela reflete o Princípio de Exclusão de Pauli, segundo o qual não pode haver mais de uma partícula de um certo tipo em um dado estado. Assim, cara para as duas moedas e coroa para as duas moedas seriam resultados impossíveis. Não precisaremos considerar a estatística de Fermi-Dirac na aplicação que faremos à frente.

Com o advento das estatísticas quânticas, o problema, filosófico, da indistinguibilidade das partículas nos fundamentos da teoria foi posto em relevo. Há, grosso modo, duas posições principais acerca desse tema.

(A) Partículas indistinguíveis são indistinguíveis num sentido ontológico. A incapacidade de estabelecer distinções entre elas não se deve à limitações da linguagem, nem do conhecimento.

(B) Partículas indistinguíveis são indistinguíveis apenas epistemologicamente. Ampliações da linguagem e avanços no conhecimento nos permitirão eliminar essa indistinguibilidade.

Com auxílio das noções de expansão rígida trivial e de expansão rígida não trivial de uma estrutura podemos apresentar a seguinte caracterização, aproximada, é claro, das posições (A) e (B) acima[47].

Admitamos que exista um modelo da mecânica quântica e que esse modelo possa ser considerado como uma estrutura no sentido usual, se não diretamente, ao menos por

[47] A idéia dessa caracterização foi nuclear em minha proposta de projeto de doutorado. Ela também foi explorada, posteriormente, no artigo KRAUSE, D. & COELHO, A.M.N. *Identity, Indiscernibility, and Philosophical Claims*, *Axiomathes*, vol. 15, n. 2, June 2005, pp. 191-210.

meio de idealizações e aproximações. Chamemos um tal modelo de uma estrutura para a mecânica quântica. Nesse caso, a nosso ver, aqueles que sustentam a posição (A) devem aceitar que, uma estrutura para a mecânica quântica não admite expansão rígida não trivial. Os objetos do domínio que correspondem às partículas elementares, só podem ser distinguidos um dos outros por meio de relações que, por si só, bastem para estabelecer essa distinguibilidade. Um exemplo de relação assim é uma boa ordem dos objetos correspondentes às partículas elementares. Tal boa ordem se faz, habitualmente, por meio da atribuição de índices. Falamos, por exemplo, em partícula p_1 e em partícula p_2. A distinção feita com base nos índices independe da teoria quântica, desse modo ela seria feita em uma expansão rígida trivial. Tudo, no que concerne à distinguibilidade, se passaria da mesma maneira se tivéssemos, por exemplo, a bola de bilhar p_1 e a bola de bilhar p_2. Já para os que defendem a posição (B), segundo a nossa perspectiva, uma estrutura para a mecânica quântica admite uma expansão rígida não trivial. Assim os objetos do domínio que correspondem às partículas elementares são distinguidos uns dos outros, mas não por novas relações que, sozinhas, sejam responsáveis por essa distinguibilidade, e sim, por novas relações que, combinadas com as relações constitutivas da estrutura original, produzam a rigidez da expansão. Nossa consideração de expansões rígidas se deve ao fato de as estruturas rígidas serem, como já verificamos antes, precisamente aquelas nas quais indistinguibilidade (na estrutura) e identidade coincidem, e, portanto, aquelas em que, de um certo ponto de vista, o problema da indistinguibilidade é resolvido.

Podemos motivar as considerações acima examinando a seguinte passagem, em que Schrödinger aborda intuitivamente as estatísticas de Maxwell-Boltzmann e de Bose-Einstein:

"Três alunos, Tom, Dick, Harry, merecem um prêmio. O professor tem dois prêmios para distribuir entre eles. Antes de fazer isso, ele deseja verificar quantas distribuições diferentes são possíveis (.....) É uma questão de estatística: (...) diferentes tipos de prêmios ilustrarão os (...) diferentes tipos de estatística.

(a) Os dois prêmios são duas moedas memoriais com as figuras de Newton e de Shakespeare, respectivamente. O professor pode dar Newton para Tom, ou para Dick, ou para Harry, e Shakespeare para Tom, ou para Dick, ou para Harry. Assim, há três vezes três, isto é, nove, distribuições diferentes (estatística clássica [ou seja, de Maxwell-Boltzmann]).

(b) Os dois prêmios são duas moedas de um shilling (que, para nosso propósito, tem de ser consideradas como quantidades indivisíveis). Elas podem ser dadas para dois meninos diferentes, o terceiro ficando sem prêmio. Além dessas três possibilidades, há três outras: Tom ou Dick ou Harry recebem dois shillings. Assim há seis distribuições diferentes (estatística de Bose-Einstein).

(....) os prêmios representam as partículas (...) Moedas memoriais são indivíduos distinguidos um do outro. Shillings, para todos os propósitos, não são, mas eles ainda são capazes de serem possuídos no plural. Faz diferença se você tem um shilling ou dois (...) Não há porque dois meninos trocarem seus shillings."[48]

---

[48] Veja Shrödinger, E. *What is an elementary particle*. reimpresso in Castellani, E. (ed.) *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*. Princeton U.P., 1998, pp. 197-210.

A idéia é que se pudermos construir uma estrutura representando essa situação, tal que a propriedade de ser um prêmio seja uma de suas relações constitutivas, então não haveria automorfismo dessa estrutura levando uma moeda memorial em outra. Mas, como, enquanto prêmios, os dois shillings são indistinguíveis, haveria um automorfismo levando um shilling no outro. Esse seria o significado da última sentença da citação acima. Por outro lado, embora os shillings, como objetos materiais, possam ser distinguidos um do outro, esse tipo de distinguibilidade basta, por si só, para identificar cada shilling. Ele não envolve a propriedade de ser um prêmio. Portanto, uma expansão rígida de uma estrutura representando o exemplo de Schrödinger, tendo entre suas relações constitutivas a propriedade de ser um objeto material, seria trivial, e não incomodaria os defensores da posição (A) acima. Uma refutação bem sucedida da posição (A), em nossa opinião, demandaria uma expansão rígida não trivial de uma estrutura representando o exemplo citado, ou seja, a consideração de novas relações que, não sozinhas, mas combinadas com a propriedade de ser um prêmio, produzissem a rigidez que permitiria a identificação de cada shilling (lembremos da relação $<$ no exemplo de $\langle Z,+,< \rangle$ como expansão rígida não trivial de $\langle Z,+ \rangle$). Com isso concluímos essa aplicação da noção de indistinguibilidade em uma estrutura à mecânica quântica.

IV – Epílogo

Começamos este trabalho com duas perguntas. O que é a relação de indistinguibilidade entre dois objetos? Existem objetos *a* e *b* tais que *a* seja diferente de *b* e *a* seja indistinguível de *b*? Não tentamos respondê-las, mas elaborar critérios segundo os quais ao menos alguns aspectos dessas perguntas fossem tornados mais exatos. Com isso esperamos contribuir para o encontro de respostas. Apresentamos as noções de indistinguibilidade em uma estrutura e indistinguibilidade permutacional em uma estrutura. Aplicamos ambas à filosofia da física quântica. Com a segunda, procuramos em certo sentido abrir a possibilidade de que a distinção entre partículas baseada apenas em índices se tornasse mais aceitável. Com a primeira, tentamos caracterizar as concepções de indistinguibilidade ontológica e indistinguibilidade epistemológica e construímos essa caracterização negando, de certo modo, legitimidade às distinções entre partículas baseadas apenas em índices. Dissemos, inclusive, que a distinção feita com base nos índices independe da teoria quântica. Não há nenhum conflito. Primeiro, porque ao aplicar a indistinguibilidade permutacional em uma estrutura trabalhamos com uma visão específica de mecânica quântica, a saber, uma teoria axiomática informal, aquela de Mackey, enquanto na aplicação da indistinguibilidade em uma estrutura lidamos com a teoria quântica entendida como teoria científica em um sentido amplo[49]. E em segundo lugar, porque as duas aplicações, embora relacionadas, podem, e em nosso entender devem, ser desenvolvidas separadamente. Se e quando a noção de modelo da mecânica quântica ou da teoria quântica se tornar mais clara, talvez seja possível avaliar qual das aplicações tem mais chances de alcançar algum êxito.

---

[49] Veja página 92.

Mencionamos na introdução a teoria de quase-conjuntos, que procura servir de alicerce para u'a matemática que incorpore intuitivamente e não regressivamente a indistinguibilidade e a ausência de identidade de objetos quânticos (se é que essa identidade está mesmo ausente). Vimos que a análise matemática formal pode servir de teoria de fundo ao desenvolvimento da mecânica quântica como teoria axiomática informal. Por isso, fazendo uma analogia com a teoria dos conjuntos, talvez fosse interessante desenvolver uma análise matemática formal de quase-objetos, isto é, uma teoria formal de quase-números reais. Esse é um problema em aberto. Na verdade, como o problema das partículas indistinguíveis pode, de certa maneira, ser formulado em contextos finitos, talvez fosse oportuno desenvolver uma aritmética formal de quase-objetos, isto é, uma teoria formal de quase-números naturais. Esse é um problema em aberto.

Finalmente, acreditamos que as versões lógico-algébricas de problemas filosóficos construídas, aqui, iluminem o estudo desses problemas.

V – Referências Bibliográficas

1. ALBERTH, O. *Precise Numerical Analysis*. Brown Publishers, 1988.
2. BENACERRAF, P. "Mathematical Truth" reimpresso in BENACERRAF, P. and PUTNAM, H. (eds) *Philosophy of Mathematics*, 2nd ed.. Cambridge U.P., 1983, 403-20.
3. BENACERRAF, P. "What Numbers Could not Be" reimpresso in BENACERRAF, P. and PUTNAM, H. (eds) *Philosophy of Mathematics*, 2nd ed. Cambridge U.P., 1983, 272-294.
4. BENACERRAF, P. and PUTNAM, H. (eds) *Philosophy of Mathematics*, 2nd ed. Cambridge U.P., 1983, 272-294.
5. BÉZIAU, J.Y. "Identity, Structure and Logic", *Bulletin of the Section of Logic*, Polish Academy of Sciences, 25 (1996) 89-94.
6. BLACK, M. *The Identity of Indiscernibles* (1952) in Loux, M. *Universals and Particulars*, 2nd ed. University of Notre Dame Press, 1976.
7. BLUM, L. CUCKER, F., SHUB, M. and SMALE, S. *Complexity and Real Computation*, Springer-Verlag, 1988.
8. BURGESS, J.P. and ROSEN,G. *A subject with no Object: strategies for nominalistic interpretation of mathematics*. Oxford U.P., 1977.
9. CARNAP, R. *The Logical of Syntax of Language*, Open court, 2002.
10. CASACUBERTA, C. and CASTELLET, M. (ed.) *Mathematical Research Today and Tomorrow*, Springer-Verlag, 1992.
11. CASTELLANI, E. (ed.) *Interpreting bodies. Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, Princeton U.P., 1998, pp.93-113.
12. COEHN, P.J. *Set Theory and the Continuum Hyphothesis*, W. Benjamim,
13. CHURCH, A. *Introduction to Mathematical Logic*, vol.1, Princeton University Press, 1956.

14. DA COSTA, N. C. A. and KRAUSE, D. , "Set- theoretical models for quantum systems" in Dalla Chiara, M. L. et al. (eds.), *Language, Quantum, Music*, Kluwer Academic Publishers, 1999, 171-181.
15. DA COSTA, N.C.A. and French, S. *Science and Partial Truth*, Oxford University Press, 2003.
16. DA COSTA, N.C.A. *Generalized Galois Theory* (a ser publicado).
17. DA COSTA, N.C.A *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*, 2ª ed.. HUCITEC, 1994
18. DALLA CHIARA, M. L. , "Some foundational problems in mathematics suggested by physics" , *Synthese* 62, 1985, 303-315
19. DE MUYNCK, W.M. "Distinguishable and Indistinguishable – Particle Descriptions of Systems of Identical Particles", *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 14, n. 5 (1975) 327-346.
20. EDGAR, G. A. *Measure,Topology and Fractal Geometry*, Springer, 1990.
21. ENDERTON, H.B. *A Mathematical Introduction to Logic*, 2 nd ed., Harcourt Academic Press, 2001, p. 98.
22. FEYMAN, R. *QED: The Strange Theory of Light and Matter*. Princeton University Press, 1985 (pp. 128-129), *apud* Maddy, P. *Naturalism in Mathematics*, Oxford University Press, 1997
23. FEYMAN, R. *The Character of Physical Law, MIT Press, 1967 (p. 166) in* Maddy, P.,op. cit.
24. FRAENKEL, A. A., BAR-HILLEL, Y. and e LEVY, A. *Foundations of Set Theory*, North-Holland, 1973.
25. FREGE, G. *The Foundations of Arithmetic, xtracts from a review of Husserl's Philosophie der Arithmetc*, transl. J. L. Austin, Northwestern University Press, 1968.
26. FREGE, G. *Extracts from a review of Husserl's Philosophie der Arithmetc*, in Geach, P. and Black, M. *Translations From the Philosophicals Writings of Gottlob Frege* (Oxford, Basil Blackwell), 1980.
27. FRENCH, S. "Why the principle of identity of indiscernibles is not contingently true either", *Synthese* 78, 1989, 141-166

28. FRENCH, S. "Withering Away of Physical Objects in Castellani, E. (ed.) Interpreting bodies". Classical and Quantum Objects in Modern Physics, Princeton U.P., 1998, pp.93-113.

29. FRENCH, S. and KRAUSE, D. , "A formal framework for quantum non-individuality", Synthese 102, 1995, 195-214

30. FRENCH, S. and KRAUSE, D., *Quantum individuality: a historical, philosophical and formal approach* (a ser publicado)

31. FRENCH, S. and KRAUSE, D. "The logic of Quanta" in CAO, T.Y. (ed.) *Conceptual Foundations of Quantum Field Theory*, Cambridge U.P. 1999, 324-342.

32. FRENCH, S. and KRAUSE, D. "Vague identity and quantum non-individuality" Analysis 55 (1), 1995, 20-26.

33. FRENCH, S. and REDHEAD, M. "Quantum physics and the identity of indiscernibles" , Brit. J. Phil. Sci. 39, 1988, 233-246.

34. HALE, B. and Wright, C. (ed.) *A Companion to the Philosophy of Language*, Blackwell, 1999.

35. HAWKING, S. and PENROSE, R. *The Nature of Space and Time*, Princeton University Press, 1996

36. HODGES,W. *A Shorter Model Theory*. Cambridge U.P., 1997

37. HUGGETT, N. "Identity, Quantum Mechanics and Common Sense" *The Monist*, vol. 80, no. 1, 1977, 118-130

38. HUGGETT, N. "On the Significance of Permutation Symmetry", *Brit. J. Phil. Sci.* 50 (1999) 325-347.

39. HUGGETT, N. "What are Quanta and Why does it matter?", *PSA* 1994, vol. 2, 69-76.

40. HUREWICZ, W. and WALLMAN, H. *Dimension Theory*, revised ed., Princeton University Press, 1948.

41. JAMMER, M. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw Hill, 1966.

42. JECH, T. *Set Theory* Spring Verlag, 2nd. Ed., 1997.

43. KRANTZ, D. Luce, R., SUPPES, P. and TVERSKY, A. *Foundations of Measurement*, Academic Press, 1971 e Weyl, H. *The Classical Groups*, Princeton University Press, 1939.
44. KRAUSE, D. & COELHO, A.M.N. *Identity, Indiscernibility, and Philosophical Claims, Axiomathes*. Vol 15, n. 2, June 2005, pp. 191-210.
45. KRAUSE, D. , "Axioms for collections of indistinguishable objects", *Logique et Analyse* 153-154, 1996, 69-93
46. KRAUSE, D. "Remarks on Individuation, Quantum Objects and Logic", *Logique et Analyse* 153-4, 1996, 325-333.
47. KUNEN, K. *Set Theory* , North-Holland, 1980.
48. LANDAU, L.D. and LIFSHITZ, E.M. *Quantum Mechanics*. Pergamon Press and Addison-Wesley Publishing Company, translated from the Russian by Sykes, J.B. and Bell, J. S, 1958.
49. LEWIS, D. "Many, but almost one", reimpresso in Castellani, E. (ed.) , *Interpreting bodies: classical and quantum objects in modern physics* , Princeton University Press, 1998, 30-45.
50. LOWE, E.J. "Objects and Criteria of Identity" in HALE, R. and WRIGHT, C. (eds.) *A Companion to the Philosophy of Language*, Blackwell, 1999, 613-33.
51. LOUX, M. *Universals and Particulars*, 2nd ed. University of Notre Dame Press, 1976.
52. MACKEY, G.W. *The mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin, 1963.
53. MADDY, P. *Realism in Mathematics* Oxford University Press, 1990.
54. MADDY, P. *Naturalism in Mathematics* Oxford University Press, 1990.
55. MASSIMI, M. "Exclusion Principle and the Identity of the Indiscernibles: a Response to Margenau's Argument", *Brit. J. Phil. of Sci.* 52 (2001), 303-330.
56. McCALL, S. "Axiomatic Quantum Theory" *Journal of Philosophical Logic* 30, 2001, 465-477.

57. MOORE, G.H. "The Origins of Forcing" in Drake, F.R and Truss, J.K. (eds.) *Logic Colloquium'86*, North-Holland, 1988, 143-173.

58. MUYNCK, W. "Distinguishable and Indistinguishable- Particle Descriptions of Systems of Identical Particles" , *International Journal of theoretical Physics* 14, 1975.

59. POST, H. "Individuality and Physics", conferência radiofônica disponível como um *Departmental Report*, Dept. of History and Philosophy of Science, Chelsea College, University of London , 1963.

60. POTTER, M. *Set Theory and its Philosophy.* Oxford University Press, 2004

61. PRUGOVECKI, E. *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, de Edward Prugovecki, Academic Press, 1971.

62. PUTNAM, H. "Models and Reality", reimpresso in BENACERRAF, P. and PUTNAM, H. (eds.) *Philosophy of Mathematics*, 2nd. ed. Cambridge U.P., 1983, 421-444.

63. REDHEAD, M. and TELLER, P., "Particle labels and the theory of indistinguishable particles in quantum mechanics", Brit. J. Phil. Sci. , 43 , 1992, 201-218.

64. ROGERS, H. *Some Problems of Definability in Recursive Function Theory*, in Crossley, J. N. (ed.), *Sets, Models, and Recursion Theory*. Proceedings of the Summer School in Mathematical Logic and Tenth Logic Colloquium. Leicester, Aug./Sept., 1965 North Holland, pp. 183-201.

65. ROGERS, H. *The Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill Book Company, 1967.

66. RUSSERL, B. *Introduction to Mathematical Philosophy*, London, 1919.

67. RUSSERL, B. *The Principles of Mathematics*, 2 nd ed. Norton&Company, 1996.

68. SCHRÖDINGER, E. , "What is an elementary particle" , reimpresso in Castellani, E. (ed.) , *Interpreting bodies: classical and quantum objects in modern physics* , Princeton University Press, 1998, 197-210.

69. SILVA, J.S. *Para uma Teoria Geral dos Homomorfismos*, in *Obras de José Sebastião e Silva*, Lisboa, Instituto Nacional de Investigação Científica, 1985., p. 281.

70. SHAFAREVICH, I.R. *Basic Notions of Algebra* Springer-Verlag, 1997.

71. SHAPIRO, S. *Philosophy of Mathematics: structure and ontology*, Oxford U.P., 1997.

72. SHAPIRO, S. *Thinking about Mathematics*, Oxford U.P. 2000.

73. SHOENFIELD, J.R. *Mathematical Logic*, Addison–Wesley Publishing Company, 1967.

74. SHRÖDINGER, E. *What is an elementary particle*, reimpresso in Castellani, E. (ed.) *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*. Princeton U.P., 1998, pp. 197-210.

75. SMALE, S. " Theory of Computation", 1992, in Casacuberta, C. and Castellet, M. (ed.) *Mathematical Research Today and Tomorrow*, Springer-Verlag, 1992.

76. SUPPES, P. "Invariance, Symmetry and Meaning" *Foundation of Physics*, vol. 30, no. 10, 2000, 1569-1585.

77. SUPPES, P. *Set-Theoretical structures in Science*, (mimeograph) Stanford University, 1970.

78. TELLER, P. , *An interpretative introduction to quantum field theory* , Princeton University Press, 1995.

79. TORALDO DI FRANCIA, G. , "What is a physical object?" , Scientia 113, 1978, 57-65.

80. van FRAASSEN, B. *Quantum Mechanics: an Empiricist View*. Oxford U.P, 1991.

81. WEINGARTNER, P. "On the Characterization of Entities by Means of Individuals and Properties", *Journal of Philosophical Logic* 3 (1974) 323-336.

82. WEYL, H. *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, 1949.

83. WEYL, H. *The Classical Groups*, Princeton University Press, 1939.

84. WHITEHEAD, A.N. and RUSSERLL, B. *Principia Mathematica* (Cambridge University Press, vol. 1, 1910, vol. 2, 1912, vol. 3, 1913.