

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Marcelo Gomes de Paoli

**MATÉRIA HADRÔNICA SUJEITA A CAMPOS MAGNÉTICOS  
FORTES**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do grau de Doutor em Física.  
Orientadora: Profa. Dra. Debora Peres Menezes

Florianópolis

2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Paoli, Marcelo Gomes de  
Matéria Hadrônica Sujeita a Campos Magnéticos Fortes /  
Marcelo Gomes de Paoli ; orientadora, Debora Peres Menezes  
- Florianópolis, SC, 2014.  
130 p.

- Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de  
Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em  
Física.

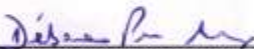
Inclui referências

1. Física. 2. Colisão de íons pesados. 3. Equação de  
Rarita-Schwinger. 4. Campos magnéticos fortes. 5. Razões  
de partículas. I. Menezes, Debora Peres. II. Universidade  
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em  
Física. III. Título.

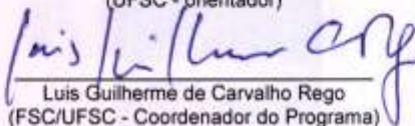
# Matéria Hadrônica Sujeita a Campos Magnéticos Fortes

**Marcelo Gomes de Paoli**

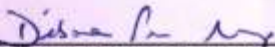
Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de **DOUTOR EM FÍSICA**, na área de concentração **Física Nuclear e de Hádrons** e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.



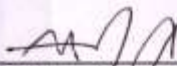
Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Débora Peres Menezes  
(UFSC - orientador)



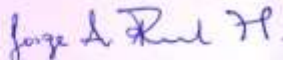
Luis Guilherme de Carvalho Rego  
(FSC/UFSC - Coordenador do Programa)



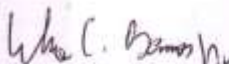
Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Débora Peres Menezes  
(UFSC - presidenta)



Prof. Dr. Marcus Emmanuel Benghi Pinto  
(membro titular) - FSC/UFSC



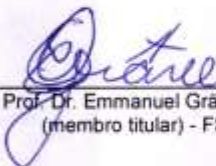
Prof. Dr. Jorge Armando Rueda Hernández  
(membro externo) - International Center for  
Relativistic Astrophysics Network -  
ICRANet - IT)



Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior  
(membro titular) - FSC/UFSC



Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro  
(membro externo) - UFMA



Prof. Dr. Emmanuel Grève de Oliveira  
(membro titular) - FSC/UFSC



*À Viviane.*



*Creio que ser um homem de ciência é como ter os dedos de Deus.*

*Não existem ateus, nem mesmo na ciência. Se perguntares a um homem por que faz ciência ele dirá: "Porque quero ser Deus".*

Olye Vtand Chehangaye





## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Profa. Dra. Debora Peres Menezes, mais uma vez minha orientadora, por ter acreditado e me ajudado a desenvolver este trabalho da melhor forma possível.

Ao Prof. Dr. Luis Guilherme de Carvalho Rego, pelo trabalho desenvolvido na chefia da pós-graduação em Física e por ser um mestre cordial e acessível.

Ao Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini, pela grande ajuda, ainda que indireta, e pela inspiração.

Agradeço também a todos que acreditaram e contribuíram de uma forma ou de outra para a realização deste trabalho e seu resultado final, em especial às pessoas dos colegas Luis Rafael Benito Castro e Celso de Camargo Barros Junior.

Aos senhores Jeel La Chewangayalanaye e Dia Mwalaybelmbe, pelo suporte pessoal.

À Viviane, minha esposa, por ter ajudado a conceber esta ideia, por ter me apoiado e feito com que eu acreditasse não somente no que faço, mas também em tudo o que sou e posso ser. Fica aqui o registro de todo o meu apreço e consideração por todas as horas desgastantes dedicadas a esses anos de estudo e trabalho. Saiba que considero você a coautora desta tese. Este trabalho é tanto meu quanto seu.

Ao meu filho Alvaro, mais uma vez, por fazer de mim um ser humano melhor todos os dias.



## RESUMO

O campo magnético produzido em uma colisão de íons pesados pode atingir valores muito altos. Isto ocorre devido ao rápido movimento das partículas carregadas e do pequeno espaço em que encontram-se comprimidas durante os instantes iniciais da colisão.

Modelamos a matéria durante uma colisão de íons pesados como um gás livre de bárions e mésons, sob a influência de um campo magnético externo entre  $10^{18}$  e  $10^{20}$  G. Apenas a matéria estranha (constituída de quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$ ) foi considerada nos cálculos. Ela aparece na forma dos hádrons pertencentes ao octeto bariônico (spin  $1/2$ ), decuplo bariônico (spin  $3/2$ ) e aos nonetos mesônicos pseudoescalar (spin  $0$ ) e vetorial (spin  $1$ ).

Para descrever corretamente as partículas de spin  $3/2$  é necessária a solução da equação de Rarita-Schwinger com a inclusão da interação eletromagnética. Mostramos que para uma determinada prescrição do calibre e acoplamento do campo magnético soluções do tipo Dirac são obtidas. Uma das consequências deste resultados é evitar as inconsistências relacionadas a não-covariança e não-causalidade, típicos problemas encontrados na solução da equação de RS.

O efeito do campo magnético foi medido através de um ajuste que minimiza o desvio quadrático ( $\chi^2$ ) com relação as razões experimentais de partículas encontradas no RHIC. Nossos resultados mostram que um campo da ordem de  $10^{19}$  G produz um melhor ajuste aos dados experimentais, em comparação aos cálculos sem campo magnético.

**Palavras-chave:** Colisão de íons pesados. Equação de Rarita-Schwinger. Campos magnéticos fortes. Razões de partículas. Spin  $3/2$ . Modelo térmico..



## ABSTRACT

The magnetic field produced in a heavy ion collision can reach very high values. This occurs due to the rapid movement of charged particles and the small space in which they are compressed during the initial stages of the collision.

We model matter during a heavy ion collision as a free gas of baryons and mesons, under the influence of an external magnetic field between  $10^{18}$  and  $10^{20}$  G. Only strange matter (composed of  $u$ ,  $d$  and  $s$  quarks) was considered in the calculations. It appears in the form of hadrons belonging to the baryon octet (spin 1/2), baryon decuplet (spin 3/2), pseudoscalar meson nonet (spin 0) and vector meson nonet (spin 1).

In order to correctly describe the spin 3/2 particles the solution of the Rarita-Schwinger equation with the inclusion of the electromagnetic interaction is required. We show that for a given prescription and gauge for the magnetic field coupling Dirac type solutions are obtained. One consequence of this result is that one avoids dealing with inconsistencies related to non-covariance and non-causality, typical problems found in the solution of the RS equation.

We measured the effects of the fields through an adjustment that minimizes the quadratic deviation ( $\chi^2$ ) regarding the experimental particles ratios in RHIC. Our results show that a field of the order of  $10^{19}$  G gives a better fit to the experimental data, compared to calculations without the magnetic field.

**Keywords:** Heavy ion collisions. Rarita-Schwinger equation. Strong magnetic fields. Particle ratios Spin 3/2. Thermal model..



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>17</b>
1.1 MATÉRIA HADRÔNICA.....	18
1.2 CAMPOS MAGNÉTICOS FORTES .....	18
1.3 DIAGRAMA DE FASES DA CROMODINÂMICA QUÂNTICA .....	19
1.4 COLISÃO DE ÍONS PESADOS .....	25
<b>2 AS PAR. DE RARITA-SCHWINGER SOB A INF. DE C. MAG. FORTES.....</b>	<b>37</b>
2.1 FORMALISMO .....	38
2.2 DISCUSSÃO .....	45
<b>3 RAZ. DE PAR. EM COL. DE ÍONS PES. E A INF. DE C. MAG. FOR. ....</b>	<b>47</b>
3.1 DESCRIÇÃO DAS PARTÍCULAS .....	49
3.2 RESULTADOS .....	56
<b>4 CONCLUSÃO .....</b>	<b>85</b>
Apêndice A – Notação e convenções .....	91
Apêndice B – Sol. da eq. de Klein-Gordon na pres. de um c. mag. ....	95
Apêndice C – Sol. da Eq. de Dirac na Pres. de um C. Mag. ....	99
Apêndice D – Sol. da eq. de Proca na pres. de um c. mag. ....	107
Apêndice E – Método da segunda quantização .....	111
Apêndice F – Term. do gás livre na pres. de um c. mag. ....	115
Referências bibliográficas .....	122





## 1 INTRODUÇÃO

Quarks e glúons (juntamente com os léptons) são os constituintes básicos da matéria. Em condições *normais* eles encontram-se *confinados* dentro dos hádrons. O plasma de quarks e glúons (*Quark Gluon Plasma - QGP*) é um estado da matéria com densidade de energia tão elevada que os quarks e glúons libertam-se do confinamento dos hádrons, passando para um estado *livre* ou *desconfinado*. Previsões da cromodinâmica quântica (*Quantum Chromodynamics - QCD*) indicam que o aparecimento do QGP deve ocorrer para temperaturas entre 150 e 170 MeV. Temperaturas desta magnitude só devem ter existido espontaneamente no universo logo após o *Big Bang*. Através da colisão de íons pesados, em laboratórios, é possível reproduzir temperaturas desta ordem de grandeza.

Segundo o modelo do *Big Bang*, o universo foi formado em uma *grande explosão*, um estado inicial com densidade de energia extremamente alta. Com a expansão do espaço-tempo e conseguinte resfriamento do universo, esta densidade de energia diminuiu até chegar ao estado atual [1]. Para tal regime de energia espera-se que tenham ocorrido uma série de transições de fases. Algumas das fases pelas quais nosso universo deve ter passado até chegar ao estado atual foram:

O *plasma de quarks e glúons* - estado da matéria em que quarks e glúons encontram-se livres. A temperatura do universo neste momento é alta demais para que quarks e glúons permaneçam ligados.

O *gás de hádrons* - regime em que prótons e nêutrons encontram-se livres, porém a temperatura ainda é muito quente para que haja ligações entre os núcleons. Nesta fase acontece a nucleossíntese primordial até o hélio.

O *plasma eletromagnético* - o universo ainda encontra-se quente demais para que elétrons fiquem ligados aos núcleons formando átomos.

As características globais do universo atual devem estar conectadas às propriedades destas diferentes fases e a passagem de uma para outra. Em um acelerador de partículas cria-se um sistema onde a densidade de energia é suficientemente grande para *derreter* os hádrons em uma sopa de quarks e glúons livres, reproduzindo assim as mesmas condições do universo primordial. Isto é realizado colidindo dois íons a velocidades próximas a da luz. Devido ao alto momento das partículas envolvidas cria-se um *Mini Bang*, uma minúscula região do espaço com altíssima densidade de energia. Com o estudo destes eventos busca-se obter um melhor entendimento da evolução do universo e do comportamento da matéria sob condições extremas.

## 1.1 MATÉRIA HADRÔNICA

A matéria hadrônica é constituída por bárions e mésons. De acordo com o modelo padrão, bárions e mésons são constituídos por quarks [2]. Existem 6 diferentes tipos de quarks e antiquarks separados em 3 gerações. Bárions caracterizam-se por serem constituídos por 3 quarks (ou 3 antiquarks, no caso dos antibárions) enquanto os mésons são constituídos por um par quark-antiquark. Fazendo combinações dos três quarks mais leves,  $u$ ,  $d$  e  $s$ , é possível gerar (e explicar) o octeto bariônico, o decuplete bariônico e dois dos nonetos mesônicos (pseudoscalar e vetorial). Eles são apresentados nas Tabelas 1 e 2 e nas Figuras 1-(a), 1-(b), 2-(a) e 2-(b).

Estas não são as únicas combinações possíveis, existe uma infinidade de nonetos mesônicos, octetos e decupletos bariônicos. Uma análise um pouco mais cuidadosa da Tabela 1 mostra que os bárions  $p$  e  $\Delta^+$  são constituídos de quarks  $uud$ , da mesma forma que os bárions  $n$  e  $\Delta^0$  são ambos constituídos de quarks  $udd$ , porém possuem propriedades diferentes (massa e spin). Os bárions  $\Delta$  são chamados de *ressonâncias*, partículas com a mesma constituição de quarks porém diferentes propriedades. As combinações mais exóticas de quarks (e spins) geram partículas com massas cada vez maiores e, portanto, mais difíceis de serem produzidas experimentalmente.

## 1.2 CAMPOS MAGNÉTICOS FORTES

Duncan e Thompson propuseram, em 1992, a existência de objetos estelares compactos chamados magnetares [3], que seriam estrelas de nêutrons com um campo magnético intrínseco da ordem de  $\approx 10^{15}$  G. Este valor tem sido utilizado como parâmetro para definir o que pode ser considerado um *campo magnético forte*.

Estudos levam a crer que campos até esta ordem de grandeza não produzem mudanças perceptíveis na estrutura da estrela (raio e massa) e, portanto, não seriam passíveis de detecção [4, 5]. Porém, na física da colisão de íons pesados os campos gerados são ainda maiores, da ordem de  $5 - 15m_\pi^2 \approx 1.7 - 5 \times 10^{19}$  G [6–11] e é plausível esperar que campos desta ordem de magnitude causem algum efeito nos resultados observados. Além disto, a astrofísica nuclear se concentra no estudo da matéria em altas densidades e baixas temperaturas, enquanto a física das altas energias (e dos colisores de partículas) estuda a matéria em baixas densidades e altas temperaturas.

Neste trabalho, nos concentramos na investigação dos efeitos do

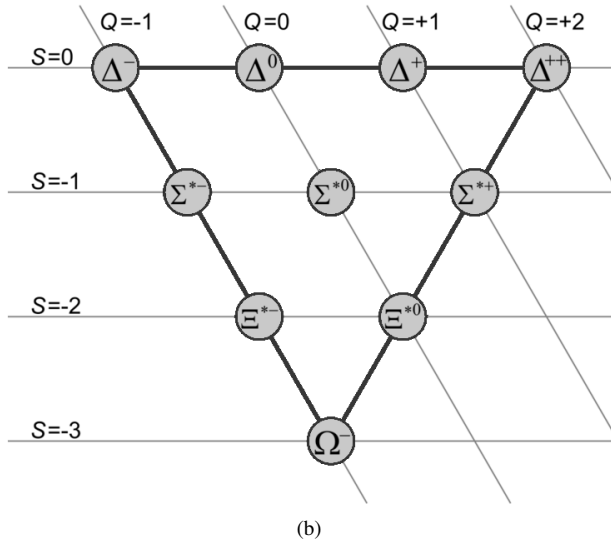
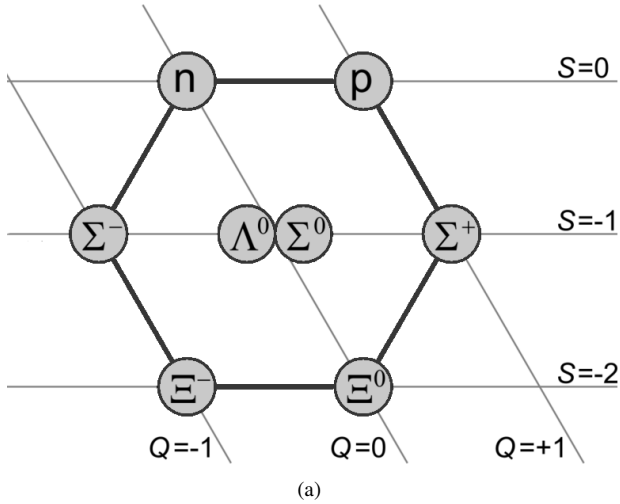
**Tabela 1: Propriedades dos bárions.**  $M$  é a massa da partícula em MeVs,  $Q$  é a carga em termos da carga do elétron,  $I_3$  é a terceira componente do isospin e  $S$  é a estranheza. Na última coluna temos a composição dos bárions em termos dos quarks.

Octeto bariônico (spin 1/2).					
Part.	$M$ (MeV)	$Q$ ( $e$ )	$I_3$	$S$	Comp.
$p$	938.3	+1	+1/2	0	$uud$
$n$	939.6	0	-1/2	0	$udd$
$\Lambda$	1,115.7	0	0	-1	$uds$
$\Sigma^+$	1,189.4	+1	+1	-1	$uus$
$\Sigma^0$	1,192.6	0	0	-1	$uds$
$\Sigma^-$	1,197.5	-1	-1	-1	$dds$
$\Xi^0$	1,314.9	0	+1/2	-2	$uss$
$\Xi^-$	1,321.7	-1	-1/2	-2	$dss$
Decupleto bariônico (spin 3/2).					
Part.	$M$ (MeV)	$Q$ ( $e$ )	$I_3$	$S$	Comp.
$\Delta^{++}$	1,232	+2	+3/2	0	$uuu$
$\Delta^+$	1,232	+1	+1/2	0	$uud$
$\Delta^0$	1,232	0	-1/2	0	$udd$
$\Delta^-$	1,232	-1	-3/2	0	$ddd$
$\Sigma^{*+}$	1,382.8	+1	+1	-1	$uus$
$\Sigma^{*0}$	1,383.7	0	0	-1	$uds$
$\Sigma^{*-}$	1,387.2	-1	-1	-1	$dds$
$\Xi^{*0}$	1,531.8	0	+1/2	-2	$uss$
$\Xi^{*-}$	1,535.0	-1	-1/2	-2	$dss$
$\Omega^-$	1,672.4	-1	0	-3	$sss$

campo magnético nas colisões de íons pesados.

### 1.3 DIAGRAMA DE FASES DA CROMODINÂMICA QUÂNTICA

A interação forte é descrita pela QCD. Ela possui liberdade assintótica (diminuição da interação entre os quarks com o aumento da energia) e é consistente com o confinamento (não existência de quarks livres), portanto, se comporta de forma diferente da Eletrodinâmica Quântica (Quantum Electrodynamics - QED).



**Figura 1:** (a) Octeto bariônico (spin 1/2). (b) Decuplo bariônico (spin 3/2). As linhas finas indicam os bárions que possuem a mesma estranheza ( $S$ ) e carga ( $Q$ ).

A Lagrangiana da QCD é dada por [12]:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ig_s t_a A_\mu^a) - m)\psi - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

**Tabela 2: Propriedades dos mésons.**  $M$  é a massa da partícula em MeVs,  $Q$  é a carga em termos da carga do elétron,  $I_3$  é a terceira componente do isospin e  $S$  é a estranheza. Na última coluna temos a composição dos mésons em termos dos quarks.

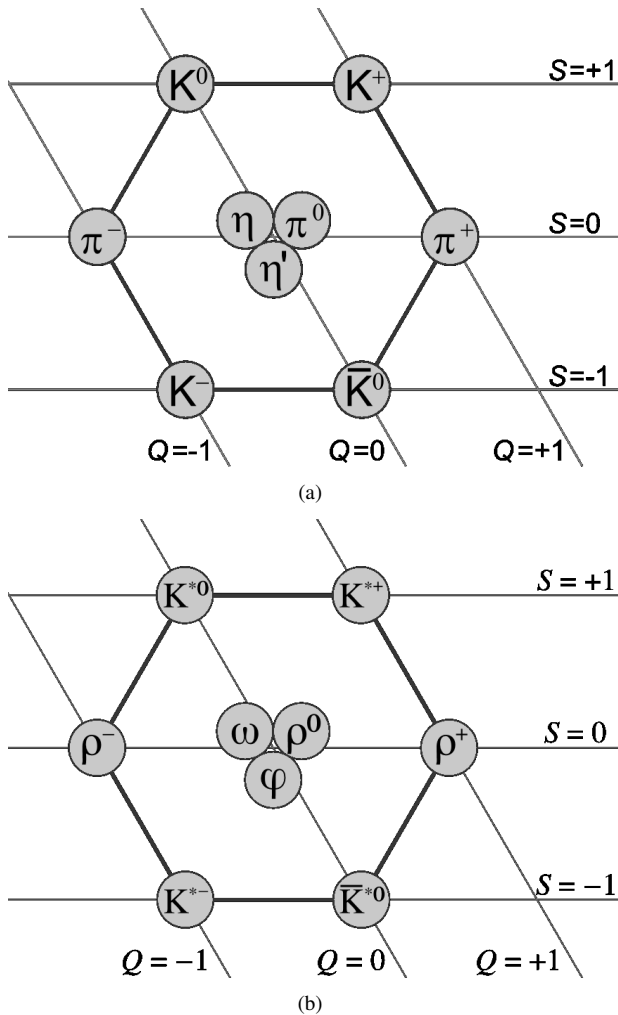
Noneto mesônico pseudoescalar (spin 0).					
Part.	$M$ (MeV)	$Q$ ( $e$ )	$I_3$	$S$	Comp.
$\pi^+$	139.6	+1	0	0	$u\bar{d}$
$\pi^-$	139.6	-1	0	0	$d\bar{u}$
$\pi^0$	135.0	0	0	0	$u\bar{u}, d\bar{d}$ mix.
$K^+$	493.7	+1	+1/2	+1	$u\bar{s}$
$K^-$	493.7	-1	-1/2	-1	$s\bar{u}$
$K^0$	497.6	0	-1/2	+1	$d\bar{s}$
$\bar{K}^0$	497.6	0	+1/2	-1	$s\bar{d}$
$\eta$	547.9	0	0	0	$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$ mix.
$\eta'$	957.8	0	0	0	$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$ mix.
Noneto mesônico vetorial (spin 1).					
Part.	$M$ (MeV)	$Q$ ( $e$ )	$I_3$	$S$	Comp.
$\rho^+$	775.5	+1	0	0	$u\bar{d}$
$\rho^-$	775.5	-1	0	0	$d\bar{u}$
$\rho^0$	775.5	0	0	0	$u\bar{u}, d\bar{d}$ mix.
$K^{*+}$	891.7	+1	+1/2	+1	$u\bar{s}$
$K^{*-}$	891.7	-1	-1/2	-1	$s\bar{u}$
$K^{*0}$	896.0	0	-1/2	+1	$d\bar{s}$
$\bar{K}^{*0}$	896.0	0	+1/2	-1	$s\bar{d}$
$\omega$	782.7	0	0	0	$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$ mix.
$\phi$	1019.5	0	0	0	$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$ mix.

onde  $\psi$  é o campo dos quarks,  $g_s$  é a constante de acoplamento da força forte,  $A_\mu^a$  é o campo dos glúons,  $\gamma_\mu$  são as matrizes de Dirac,  $t_a = \frac{\lambda_a}{2}$  onde  $\lambda_a$  são as matrizes de Gell-Mann e o símbolo  $G_{\mu\nu}^a$  é o tensor de força do campo dos glúons, análogo ao tensor de força do campo eletromagnético  $F^{\mu\nu}$  na QED, e é dado por:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.2)$$

onde  $f_{abc}$  é a constante de estrutura da métrica do SU(3).

A constante de acoplamento  $g_s$  é pequena para altas energias, levando à liberdade assintótica. Ela aumenta para baixas energias, o que está relacionado ao confinamento dos quarks e glúons nos hádrons. Não é possível resolver analiticamente a QCD. Para efetivamente extrair resultados físicos



**Figura 2:** (a) Noneto mesônico pseudoescalar (Spin 0). (b) Noneto mesônico vetorial (Spin 1). As linhas finas indicam os mésons que possuem a mesma estranheza ( $S$ ) e carga ( $Q$ ).

da teoria utilizam-se modelos, que simplificam a Lagrangiana e as interações, ou a QCD na rede, que é uma forma de cálculo numérico onde ocorre a discretização do espaço-tempo.

Em um estado de altas temperatura e baixa densidade, a QCD prevê uma transição de fases para um estado com quarks e glúons desconfinados (livres). Iremos utilizar um modelo simples de gás ideal para estimar quando esta transição de fases deve ocorrer. A pressão em um gás ideal é dada por

$$P = \frac{g}{90} \pi^2 T^4, \quad (1.3)$$

onde  $g$  é a degenerescência de partículas.

Para um gás de hádrons (HG) não interagente composto de prótons e nêutrons e com píons sem massa, temos

$$g = p, \bar{p}, n, \bar{n} \text{ e } \pi \quad \therefore \quad P_{HG} = \frac{5}{90} \pi^2 T^4, \quad (1.4)$$

e para um gás ideal de quarks  $u, d, s$  e glúons livres e sem massa (QGP), temos

$$g = (3q, 3\bar{q}) \times 3 \text{ cores e glúon} \quad \therefore \quad P_{QGP} = \frac{19}{90} \pi^2 T^4 - B, \quad (1.5)$$

onde  $B$  é a constante de sacola do modelo do MIT (*MIT Bag Model*<sup>1</sup>)

Na transição de fases (gás de hádrons  $\rightarrow$  QGP):

$$\begin{aligned} P_{HG} &= P_{QGP} \\ \frac{5}{90} \pi^2 T^4 &= \frac{19}{90} \pi^2 T^4 - B, \end{aligned} \quad (1.6)$$

então

$$T = \left( \frac{90B}{14\pi^2} \right)^{1/4}. \quad (1.7)$$

Tomando  $B^{1/4} \approx 200 \text{ MeV}$  obtemos

$$T \approx 175 \text{ MeV}. \quad (1.8)$$

No regime de altas temperaturas e baixas densidades, a simetria quiral da Lagrangiana da QCD<sup>2</sup> deve ser restaurada. Altas temperaturas e baixo

<sup>1</sup>Modelo efetivo utilizado para descrever quarks confinado [15].

<sup>2</sup>A simetria quiral é definida como a invariância dos campos sob uma transformação do tipo  $\psi \rightarrow e^{-i\gamma_5 \theta} \psi$ . Na QCD isso só ocorre no caso de quarks sem massa. Apesar de não ser possível medir diretamente a massa dos quarks, temos uma evidência experimental de que os quarks possuem massa no fato de que os píons não são bósons de Goldstone. Diz-se que a simetria

potencial químico bariônico ( $\mu_B$ ) devem ter sido as condições do universo primordial microssegundos após o Big-Bang.

No caso de altas densidades e baixas temperaturas, o sistema pode ser considerado como um gás de quarks degenerados interagentes. Cálculos aproximados de modelos [13, 14] sugerem que a transição seja de 1ª ordem. Apesar de ser um regime de baixa temperatura, devido as altas densidade e energia, a QCD também prevê uma transição de fases para um estado de quarks e glúons desconfinados e termalizados sob um grande volume. Além disso, a interação atrativa remanescente entre os quarks pode causar um emparelhamento quark-quark ( $q - q$ ) levando a formação de uma fase de supercondutividade de cor. Condições de densidade muito alta e baixa temperatura podem ser encontradas no núcleo de objetos astrofísicos densos como as estrelas de nêutrons.

Levando em conta estas duas situações e a aproximação de gás livre descrita anteriormente, podemos finalmente apresentar o diagrama de fases para a QCD que pode ser visto na Figura 3.

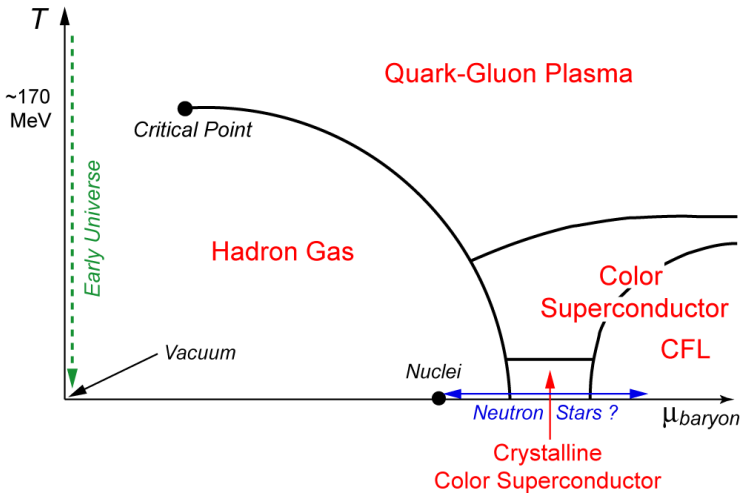


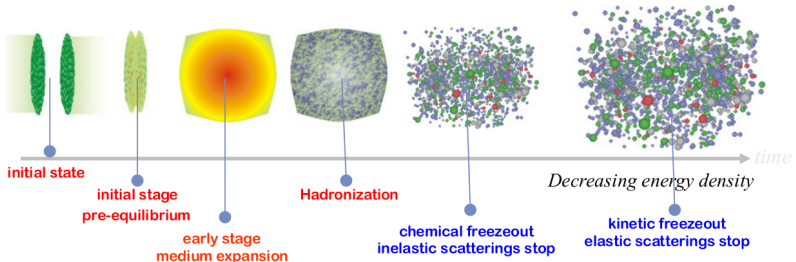
Figura 3: Diagrama de fases esquemático da QCD [16].

quiral é uma simetria aproximada para a força forte.



## 1.4 COLISÃO DE ÍONS PESADOS

Nas colisões de íons pesados estuda-se o comportamento da matéria sob condições extremas, com o objetivo explorar e testar a QCD e assim desvendar as questões fundamentais a respeito do confinamento dos hádrons e da quebra da simetria quiral, que estão relacionados com a existência e as propriedades do QGP.



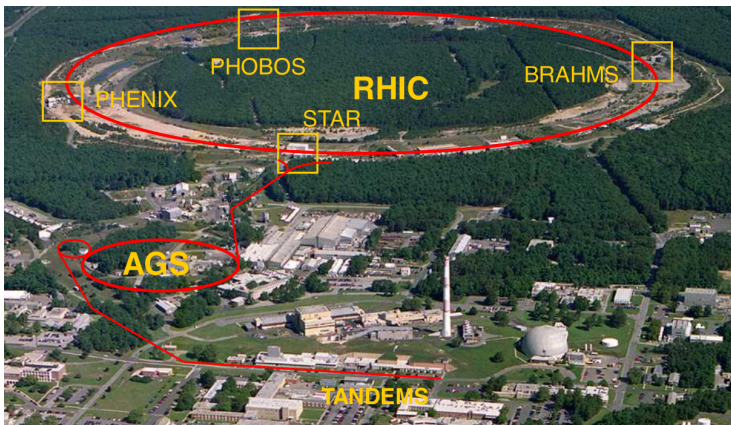
**Figura 4:** Estágios de uma colisão de íons pesados [17].

Os estágios de uma colisão de íons pesados podem ser vistos na Figura 4. No estágio inicial temos os núcleos colidores achatados devido a contração de Lorentz, flutuações de densidade e a aplicação de modelos de saturação de glúons (glasma). No pré-equilíbrio temos funções de distribuição de pártons<sup>3</sup>, partículas com altos momentos transversais ( $p_T$ ), jatos de partículas e partículas com sabores pesados (criadas através da fusão de glúons). Durante o processo de equilíbrio temos a matéria da QCD levemente termalizada, extremamente densa e fortemente interagente, que mostra comportamento coletivo e possui graus de liberdade de pártons. Sua dinâmica de expansão é bem descrita por modelos hidrodinâmicos. Na fase de hadronização temos diferentes mecanismos de produção de partículas e a quebra da simetria quiral. No *freeze-out* químico acontece o fim dos espalhamentos inelásticos e a fixação das razões de partículas, e pode-se estudar esta fase por meio de modelos térmicos estatísticos. Durante o *freeze-out* térmico temos modelos hadrônicos de cascata e o aparecimento das ressonâncias hadrônicas. Nesta fase obtemos o espectro de momento transversal, que é a distribuição dos momentos no plano perpendicular ao plano do feixe em relação ao número de participantes.

Ao longo das últimas décadas vários experimentos envolvendo co-

<sup>3</sup>Pártons são as partículas fundamentais constituintes dos hádrons, no caso, quarks e glúons.

lisões de íons pesados têm sido realizados. Nos anos 80 foram realizados experimentos no AGS/BNL com colisões do tipo Au+Au a energias de  $\sqrt{s_{NN}} = 5$  GeV. Nestes experimentos foram obtidas confirmações experimentais da existência de uma fase hadrônica e a observação de um comportamento global. Nos anos 90, experimentos realizados no SPS/CERN com colisões Pb+Pb e Si+Si a energias entre  $\sqrt{s_{NN}} = 5 - 18$  GeV proveram algumas evidências da existência do QGP. Em 2001 uma grande quantidade de estudos foi realizada no RHIC, de forma independente em cada um de seus detectores (STAR, PHENIX, PHOBOS e BRAHMS), com colisões Au+Au a energias entre  $\sqrt{s_{NN}} = 10 - 200$  GeV permitindo um estudo sistemático das colisões. Novos observáveis experimentais foram então obtidos e mais evidências da possível formação do QGP. Em 2010 foram realizados experimentos no LHC, nos detectores ALICE, ATLAS e CMS com colisões p+p a energia de  $\sqrt{s_{NN}} = 7$  TeV e colisões Pb+Pb a energia de  $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$  TeV, atingindo um novo regime de energias para provar a possível existência do QGP. Em 2013, novamente no LHC, colisões p+p a energia de  $\sqrt{s_{NN}} = 5,02$  TeV trouxeram a confirmação experimental da existência do bóson de Higgs<sup>4</sup>.



**Figura 5: Instalações do RHIC.**

O RHIC (*Relativistic Heavy Ion Collider*), Figura 5, está localizado em Long Island, NY, EUA. Nele ocorrem experimentos de colisão de íons pesados em 2 anéis concêntricos de 3,8 km de circunferência, feixes de íons

<sup>4</sup>O bóson de Higgs é uma partícula elementar bosônica prevista teoricamente pelo modelo padrão. Ela é a chave para explicar a origem da massa nas outras partículas elementares.

p e Au são acelerados e giram em direções opostas, colidindo em 6 diferentes pontos. Os dados obtidos no experimento RHIC/STAR serão reproduzidos no Capítulo 3 com nosso modelo de gás livre de Fermi sob o efeito de um campo magnético.

Na Figura 6-(a) temos a geometria de uma colisão de íons pesados,  $\mathbf{p}$  denota o momento de uma partícula produzida,  $p_{\perp}$  é o momento transversal. Os dois planos ortogonais são o plano de reação ( $z = 0$ ), onde as partículas do feixe se deslocam antes da colisão, e o plano transversal ( $x = 0$ ), onde a pseudorapidez é zero ( $\eta = 0$ ) e  $\theta = \pi/2$ . Na Figura 6-(b) tem-se uma visão do plano transversal de uma colisão de íons pesados, os dois núcleos tem raio  $R$ , viajam em sentidos opostos e colidem com parâmetro de impacto  $b$ . O ângulo  $\phi$  é azimutal com respeito ao plano de reação. A região onde os dois núcleos se sobrepõem contém os participantes da reação, a região onde eles não se sobrepõem contém os espectadores.

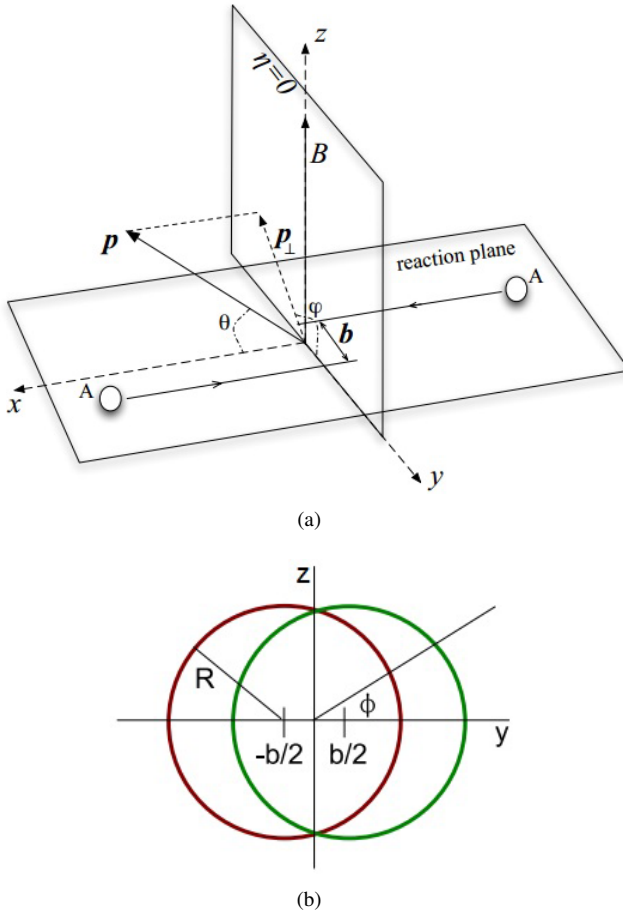
Como assumimos que as partículas do feixe de íons se deslocam ao longo do eixo  $x$ , seu momento transversal (*transverse momentum*) é dado por  $p_T = \sqrt{p_y^2 + p_z^2}$  e corresponde ao valor do momento no plano perpendicular ao plano do feixe. O momento longitudinal  $p_L = p_x$  corresponde ao momento das partículas na direção do feixe. Portanto, o momento total é dado por  $p = \sqrt{p_T^2 + p_L^2}$ .

A rapidez (*rapidity* -  $y$ ) e a pseudorapidez (*pseudo-rapidity* -  $\eta$ ) correspondem a uma medida do momento longitudinal e são dadas pelas expressões

$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_L}{E - p_L} \right) \quad \text{e} \quad \eta = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p + p_L}{p - p_L} \right), \quad (1.9)$$

a definição da pseudorapidez é útil, uma vez que as energias de repouso das partículas são quase sempre insignificantes quando comparadas com seus momentos. Além disso, a pseudorapidez está ligada ao ângulo que o momento faz com o feixe de íons. Quanto maior a pseudorapidez menor o ângulo entre o feixe de partículas resultantes e a direção original do feixe, o que indica um pequeno parâmetro de impacto e uma colisão mais central. Quando a pseudorapidez é pequena, temos um ângulo maior, indicando um alto parâmetro de impacto e uma colisão mais periférica.

O número total de partículas produzidas em um evento é chamado multiplicidade, em colisões de altas energias a multiplicidade de carga é aproximadamente proporcional a dois terços da multiplicidade total de partículas. Na Figura 7 podemos ver a distribuição da multiplicidade com relação à pro-

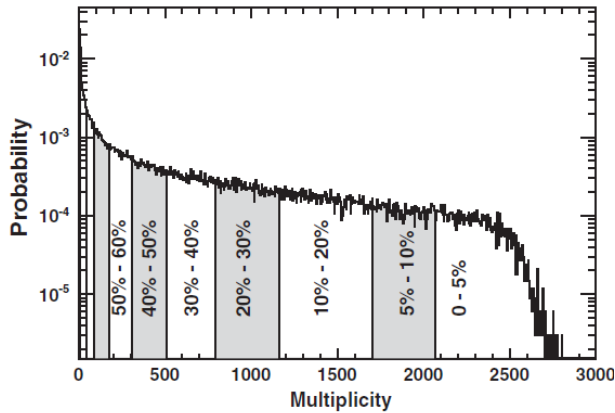


**Figura 6: (a) Geometria de uma colisão de íons pesados [18]. (b) Visão do plano transversal da colisão [19].**

babilidade por evento. A multiplicidade média varia muito de um evento para outro devido aos diferentes parâmetros de impacto de colisão. Para as colisões centrais temos pequeno parâmetro de impacto e alta multiplicidade de eventos, enquanto para as colisões periféricas temos grande parâmetro de impacto e baixa multiplicidade de eventos. O número de participantes em uma colisão aumenta linearmente com a massa atômica ( $A$ ) do íon utilizado, enquanto o número de colisões binárias escala com a massa atômica elevada

a quatro terços ( $A^{4/3}$ ). A centralidade da colisão é diretamente proporcional ao número de participantes, que é proporcional ao número de partículas produzidas em um dado intervalo de rapidez ( $dN/d\eta$ ).

Na Figura 8 pode-se ver mais uma confirmação de que a variação da multiplicidade deve-se apenas à geometria da colisão. As colisões com maior número de espectadores são as de menor multiplicidade e as com o menor número de espectadores possuem maior multiplicidade.

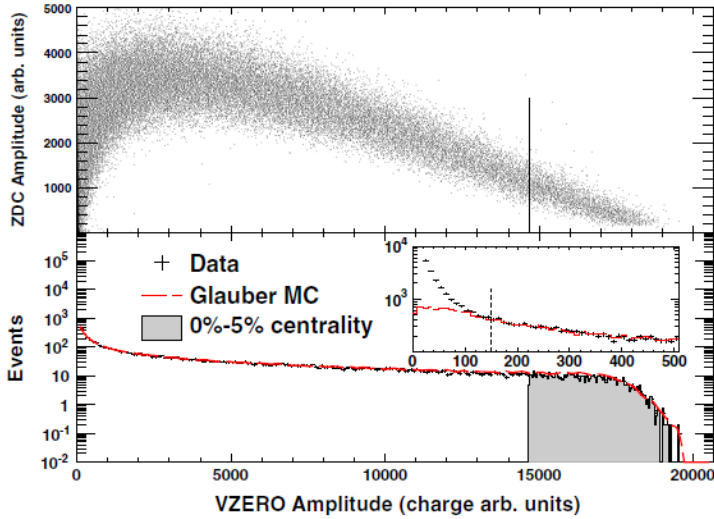


**Figura 7:** Variação da multiplicidade média (número de participantes), os eventos a direita possuem maior multiplicidade e correspondem a colisões centrais (0-5%), os eventos a esquerda possuem menor multiplicidade e correspondem a colisões periféricas (50-60%) [20].

A Figura 9 relaciona o número de partículas produzidas com a energia da colisão. A dependência com a energia é mais acentuada para as colisões de íons pesados do que para as colisões próton-próton (p-p), portanto as colisões A-A (íon-íon) não podem ser aproximadas por uma superposição de colisões p-p.

Na Figura 10 temos os gráficos das densidade de partículas carregadas em função das centralidades medidas no LHC comparadas com os dados do RHIC, as multiplicidades medidas no ALICE a 2,76 TeV são mais de duas vezes maiores do que as medidas no RHIC, porém, a forma da distribuição é a mesma, indicando que a multiplicidade depende apenas da geometria da colisão, ou seja, do quão central ou periférica foi a colisão entre os feixes de íons.

As razões de partículas aproximam-se de um ambiente de bárions li-

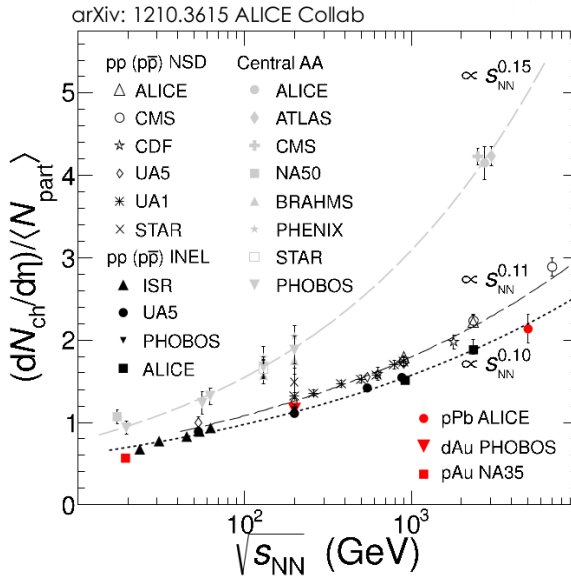


**Figura 8:** Número de espectadores em relação ao número de eventos no experimento LHC/ALICE [21], VZERO Amplitude é proporcional ao número de partículas carregadas produzidas na colisão (que é proporcional a multiplicidade de eventos), ZDC é o *Zero Degree Calorimeter*, sua amplitude é o número de fragmentos de núcleo detectados na direção do feixe (que é proporcional ao número de espectadores).

vres para as energias do RHIC e LHC, o que sugere que a maior parte das partículas nesta região são produzidas através do sistema de produção de pares. Podemos também construir diferentes razões utilizando as produções de partículas integradas (Figura 11). Estas razões são definidas no estágio de *freeze-out* químico da colisão.

Modelos térmicos funcionam bem para descrever as colisões nas energias do SPS e RHIC [24, 25], portanto, *o equilíbrio térmico deve ter sido atingido durante a colisão*. Além disso, na Figura 12, temos que a temperatura do *freeze-out* químico ( $T_{ch}$ ) é aproximadamente igual a temperatura do ponto crítico ( $T_c$ ), portanto aparentemente *o equilíbrio químico também é atingido nas colisões*. O fato de  $T_{ch} \approx T_c$  indica um rápido equilíbrio após a hadronização. Na Figura 13 pode-se ver que  $T_{ch}$  é constante para energias de colisão acima de 10 GeV, portanto, apesar das diferentes condições, nas colisões AA o sistema sempre evolui para o mesmo *freeze-out* químico.

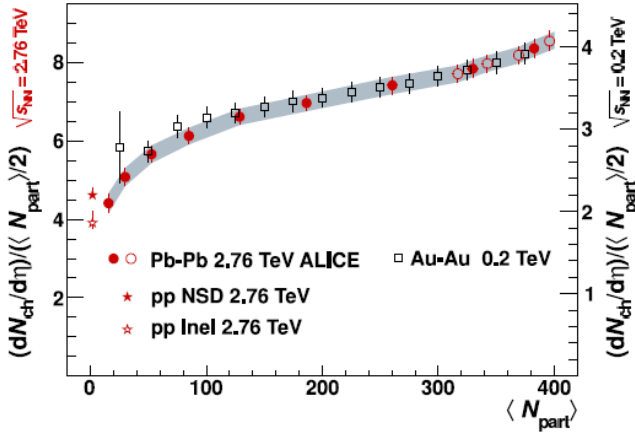
Recentemente a influência de campos magnéticos no diagrama de fa-



**Figura 9: Produção de partículas em função da energia da colisão [22].**

ses da QCD tem atraído alguma atenção [13, 14]. Em [13] pode-se ver que, para campos maiores que  $10^{17}$  G o ponto crítico e a região de coexistência de fases de primeira ordem são afetados. Observa-se um aumento no tamanho do segmento da linha de transição de primeira ordem com a temperatura de coexistência de fases movendo-se para valores mais altos do campo magnético. Este resultado é certamente de grande interesse para a física de colisões de íons pesados em energias intermediárias, onde campos enormes, da ordem de  $|eB| \geq m_\pi^2 \sim 10^{18}$  G, podem ser criados por correntes de íons pesados devido aos núcleos espectadores. A intensidade do campo depende da centralidade e do momento do feixe de modo que  $|eB| \approx 5m_\pi^2$  pode ser alcançado no RHIC enquanto  $|eB| \approx 15m_\pi^2$  pode ser atingido no LHC.

Neste trabalho descrevemos o estado das partículas durante uma colisão de íons pesados da forma mais simples possível, utilizando um modelo de gás livre de bárions e mésons. A partir disto analisamos os efeitos de um possível campo eletromagnético sobre as razões de partículas observadas. Levamos em conta em nossos cálculos os bárions de spin 1/2 e 3/2 e os mésons de spin 0 e 1. Para descrever corretamente este sistema são necessárias as expressões para energia e degenerescências de cada tipo de partícula.



**Figura 10:** Densidade de partículas carregadas em função da centralidade obtidas no experimento LHC/ALICE comparadas com os resultados medidos no RHIC [23].  $dN_{ch}/d\eta$  é o número de partículas carregadas produzidas em um dado intervalo de rapidez,  $\langle N_{part} \rangle$  é o número médio de participantes.

O cálculo de gás livre sem o efeito do campo eletromagnético é amplamente conhecido e não foi difícil obter as expressões corretas neste caso, porém quando adicionamos o campo magnético ao cálculo não conseguimos encontrar as expressões para energia e degenerescência das partículas de spin  $3/2$ , pois este cálculo ainda não havia sido realizado. Isto deve-se a problemas de causalidade oriundos da expressão para a Lagrangiana. Realizamos este cálculo que é apresentado no Capítulo 2, e demonstramos que é sim possível encontrar uma solução válida para as funções de onda, pelo menos para o caso de um campo magnético constante.

De posse de todas as expressões necessárias para a descrição das várias partículas no Capítulo 3 mostramos os resultados da comparação entre as simulações de um gás livre, com e sem a presença de um campo magnético constante, com resultados experimentais obtidos no detector STAR/RHIC. Nossos resultados apresentam um erro muito maior do que os resultados obtidos via modelos que levam em conta a exclusão de volume, no entanto eles mostram de forma clara que o campo magnético desempenha um grande efeito nas razões de partículas observadas experimentalmente.

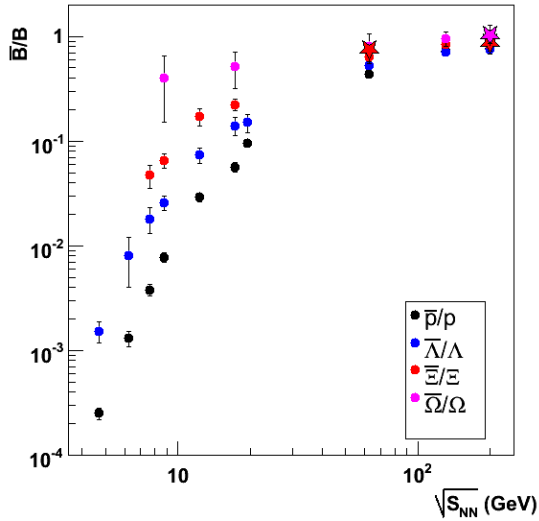
O trabalho que se segue esta dividido da seguinte forma: No Capítulo 2 temos uma discussão formal a respeito da equação de Rarita-Schwinger. Esta equação descreve um campo de spin  $3/2$  e apresenta problemas de não-



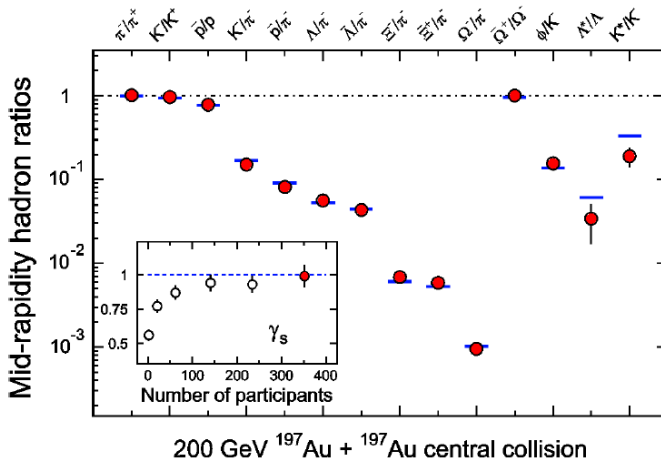
causalidade quando conectada via acoplamento mínimo a um campo eletromagnético. Este problema é conhecido desde a década de setenta e isto sempre foi um grande empecilho para o estudo de partículas de spin  $3/2$  sujeitas aos efeitos um campo magnético. Mostramos que para o caso de um acoplamento mínimo com um campo eletromagnético constante e homogêneo podemos evitar os problemas de não-causalidade e obter uma expressão para a energia das partículas de spin  $3/2$ , assim como para a degenerescência dos níveis de energia.

No Capítulo 3 modelamos uma colisão de íons pesados como um gás livre de férmions e bósons. Até então, devido aos problemas apresentados pela equação de Rarita-Schwinger, não parecia possível a descrição de partículas de spin  $3/2$  sujeitas a um campo eletromagnético. Averiguamos os efeitos do campo magnético em um gás livre para assim podermos estimar a importância que o campo tem nas razões de partículas obtidas. Nossos resultados mostram que mesmo para um modelo simples o efeito do campo eletromagnético é grande.

Nos Apêndices B, C, D, E e F apresentamos cálculos amplamente conhecidos, porém, de suma importância para as construções feitas nos Capítulos 2 e 3. Resolvemos detalhadamente as equações de Klein-Gordon, Dirac, e Proca com e sem o campo magnético. Também mostramos como fica a regra da segunda quantização para os respectivos campos e a termodinâmica do gás livre composto pelas partículas de spin 0,  $1/2$ , 1 e  $3/2$ .



(a)



(b)

**Figura 11:** (a) e (b) Razões de partículas experimentais [16]. Mid-rapidity refere-se a rapidez média das colisões, que corresponde a um intervalo onde a rapidez é aproximadamente constante.

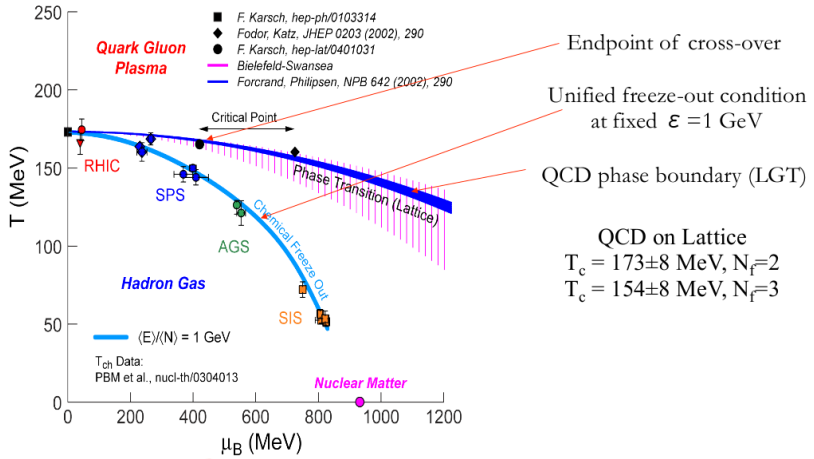


Figura 12: Resultados experimentais e expectativas teóricas para o diagrama da QCD. É possível ver que o equilíbrio químico é alcançado nos vários tipos de colisões estudadas [16].

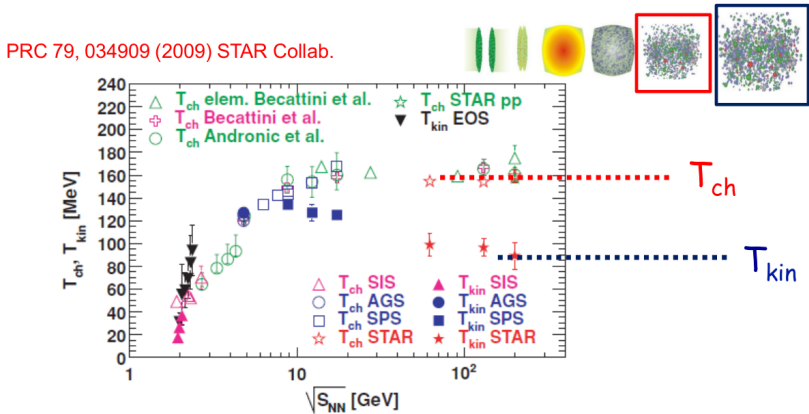


Figura 13: Temperaturas de freeze-out químico ( $T_{ch}$ ) e térmico/cinético ( $T_{kin}$ ) para vários tipos de colisão [26].



## 2 AS PARTÍCULAS DE RARITA-SCHWINGER SOB A INFLUÊNCIA DE CAMPOS MAGNÉTICOS FORTES

A descrição das partículas em estrelas de nêutrons por modelos relativísticos, tem dependência com a densidade de energia de simetria [27, 28], a escolha dos acoplamentos entre bárions e mésons interagentes [29, 30] e o possível aparecimento de condensados de píons e káons [29, 31, 32]. Além disso, a escolha de quais bárions e mésons entram como ingredientes do modelo, também afeta a equação de estado resultante. Em [30] a contribuição das quatro partículas delta ( $\Delta^-$ ,  $\Delta^0$ ,  $\Delta^+$ ,  $\Delta^{++}$ ) é levada em conta em uma teoria de campo médio (*Mean Field Theory* - *MFT*) e a equação de movimento de Rarita-Schwinger (RS) [33] é resolvida de forma auto-consistente com as equações de movimento que descrevem os outros bárions e mésons. Em [34], a influência de ressonâncias  $\Delta$  na massa máxima da estrela é investigada com dois diferentes modelos relativísticos. Com efeito, a inclusão de bárions  $\Delta$  leva a um aumento da massa máxima dentro do modelo não-linear de Walecka [35, 36] e uma diminuição dentro de um modelo hadrônico quiral [37]. Estrelas de nêutrons com  $\Delta$ 's são revisitadas em [38] e eles parecem suprimir a produção de híperons consideravelmente. Nos últimos anos, estrelas de nêutrons sujeitas a fortes campos magnéticos, nomeadas magnetares por Duncan [3, 39], têm sido uma fonte de intensa investigação [40–43]. Supondo-se que partículas  $\Delta$  são constituintes possíveis destes objetos compactos, a equação de RS com a inclusão do campo magnético [44–46] deve ser levada em conta.

A equação de Rarita-Schwinger [33] descreve partículas de spin 3/2 e tem sido amplamente estudada devido a seu interesse intrínseco e também para aplicações em diferentes campos de pesquisa, e não apenas os acima citados. O ônus das inconsistências representa uma desvantagem para a equação de RS. A quantização do campo de spin 3/2 interagente revelou-se inconsistente com a covariância de Lorentz [44]. Além disso, as frentes de onda das soluções clássicas da equação RS apresenta modos de propagação não-causais [47, 48]. Várias soluções para estas inconsistências têm sido sugeridas ao longo dos anos [49–51], incluindo uma receita interessante de acoplamento não-mínimo [52]. A partir desta última referência, fica claro que, pelo menos para campos constantes, um lagrangiano válido e causal existe.

Pelas razões mencionadas acima, uma solução completa para a equação de RS, sob a influência de campos magnéticos merece uma revisão detalhada, que realizamos no presente trabalho. Seguimos a abordagem desenvolvida em [53] e [54] e contornamos os problemas acima mencionado,

sem depender de acoplamentos não-mínimos. Esta é a primeira vez que um cálculo completo da equação Rarita-Schwinger com a inclusão da interação magnética, incluindo a ocupação dos níveis de Landau (LL), é obtido de maneira simples, evitando-se os problemas observados em cálculos anteriores [55].

## 2.1 FORMALISMO

Um campo de spin 3/2 pode ser descrito pela Lagrangiana de Rarita-Schwinger (RS) dada por (em unidades onde  $\hbar = c = 1$ )

$$\mathcal{L}^{RS}(A) = \bar{\psi}^\mu (i\partial_\alpha \Gamma_\mu^\alpha{}_\nu(A) - mB_{\mu\nu}(A)) \psi^\nu, \quad (2.1)$$

onde  $\bar{\psi}^\mu = (\psi^\mu)^\dagger \gamma^0$  é o vetor-espinor adjunto,  $m$  é a massa da partícula,  $\psi^\nu$  é o vetor-espinor e as matrizes  $\Gamma_\mu^\alpha{}_\nu$  e  $B_{\mu\nu}$  são dadas por [56]

$$\Gamma_\mu^\alpha{}_\nu(A) = g_{\mu\nu} \gamma^\alpha + A (\gamma_\mu g_\nu^\alpha + g_\mu^\alpha \gamma_\nu) + B \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma_\nu, \quad (2.2)$$

$$B_{\mu\nu}(A) = g_{\mu\nu} - C \gamma_\mu \gamma_\nu, \quad (2.3)$$

com

$$B \equiv \frac{3}{2} A^2 + A + \frac{1}{2}, \quad (2.4)$$

$$C \equiv 3A^2 + 3A + 1, \quad (2.5)$$

onde o tensor métrico é  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ,  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac e  $A$  é um parâmetro arbitrário (exceto que  $A \neq -1/2$ ). O parâmetro  $A$  não tem significado físico [44, 45] e as escolhas convencionais feitas na literatura são  $A = -1/3$  que corresponde ao Lagrangiana originalmente proposto em [33], ou,  $A = 0$  [46], ou, para  $A = -1$  a Lagrangiana reduz a [57]

$$\mathcal{L}^{RS}(A = -1) = -\frac{i}{2} \bar{\psi}_\mu \left( \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho + m \sigma^{\mu\lambda} \right) \psi_\lambda, \quad (2.6)$$

onde  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$  é o símbolo de Levi-Civita,  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  e  $\sigma^{\mu\lambda} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\lambda]$ . A liberdade representada pelo parâmetro  $A$  reflete a invariância sob rotações misturando os setores de spin  $1/2^+$  e  $1/2^-$ , residentes no espaço de representação de RS, além do spin 3/2 [58–61]. Ao aplicar as equações de

Euler-Lagrange para (2.6), obtêm-se a equação de movimento

$$\left( \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho + m \sigma^{\mu\lambda} \right) \psi_\lambda = 0, \quad (2.7)$$

pode-se reescrever (2.7) em uma forma mais simples com o auxílio de condições suplementares

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_\nu = 0, \quad (2.8)$$

$$\gamma^\mu \psi_\mu = 0, \quad (2.9)$$

$$\partial^\mu \psi_\mu = 0. \quad (2.10)$$

Estes últimos resultados mostram claramente que as equações de movimento (2.7) podem ser reescrita como uma equação de Dirac para o vetor-espinoir mais condições adicionais. Portanto, a solução para esta classe de sistemas consiste na busca de soluções para quatro equações do tipo Dirac. Não se deve esquecer, porém, que as equações não são de fato independentes, porque elas têm de satisfazer as restrições (2.9) e (2.10). Estas restrições são necessárias para eliminar os componentes redundantes do vetor-espinoir  $\psi^\mu$ . Estas restrições, em geral, não valem, na presença de interações. No entanto, é possível derivar o número necessário de condições subsidiárias para, pelo menos, uma classe de interações selecionada [62]. Além disso, multiplicando a equação (2.8) a esquerda por  $\gamma^\nu$  e usando a equação (2.9), obtemos a equação (2.10). Portanto, a condição de “calibre” (2.10) não é uma relação independente. As equações (2.8) e (2.9) são conhecidas como equação de RS [63].

A equação de RS pode também ser derivada do Lagrangiano [33]

$$\mathcal{L}^{RS} = \bar{\psi}_\mu (\not{\partial} + im) \psi^\mu - \frac{1}{3} \bar{\psi}_\mu (\partial^\mu \phi + \gamma^\mu \partial \cdot \psi) + \frac{1}{3} \bar{\psi}_\mu \gamma^\mu (\not{\partial} - im) \phi, \quad (2.11)$$

onde  $\not{\partial} \equiv \gamma_\mu \partial^\mu$ ,  $\phi \equiv \gamma_\mu \psi^\mu$  e  $\partial \cdot \psi \equiv \partial_\mu \psi^\mu$ . Neste caso, as equações de Euler-Lagrange de movimento dão

$$(\not{\partial} + im) \psi^\mu - \frac{1}{3} (\partial^\mu \phi + \gamma^\mu \partial \cdot \psi) + \frac{1}{3} \gamma^\mu (\not{\partial} - im) \phi = 0. \quad (2.12)$$

Contraindo a equação (2.12) com  $\partial_\mu$  e  $\gamma_\mu$  obtêm-se as condições suplementares (2.9) e (2.10), que permitem a equação (2.12) reduzir a uma forma simplificada para a equação de RS. Devido à simplicidade uma vez que ambas as

equações são equivalentes, de agora em diante utilizaremos as equações (2.8) e (2.9) para descrever uma partícula spin 3/2.

Agora vamos considerar o sistema embebido em um campo eletromagnético. Isto é implementado por meio da prescrição de acoplamento mínimo, que consiste na substituição

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (2.13)$$

onde  $A_\mu$  é o  $\mu$ -ésimo componente do vetor quadri-potencial que representa um campo eletromagnético externo e a carga  $q = \varepsilon_q|q|$ , onde  $\varepsilon_q = 1(-1)$  corresponde a uma partícula com carga positiva (negativa), respectivamente. Assim, a equação de RS com um campo electromagnético torna-se

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi_\nu = 0 \quad \text{com} \quad \gamma^\mu \psi_\mu = 0. \quad (2.14)$$

De acordo com a discussão anterior sobre a alteração da condição subsidiária, pode-se calcular a nova condição pela multiplicação da primeira equação em (2.14) a esquerda por  $\gamma^\nu$  e utilizando a segunda equação em (2.14), levando a

$$D^\mu \psi_\mu = 0, \quad (2.15)$$

que está de acordo com a prescrição de acoplamento mínimo dado na equação (2.10). Este último resultado mostra claramente que a prescrição de acoplamento mínimo é matematicamente consistente, em contraste com a introdução de um potencial escalar de Lorentz, que chega a uma contradição se o mesmo for feito na equação de RS escrita na forma (2.8), como abordado em [47, 48, 64, 65].

Por outro lado, aplicando  $D^\nu$  na primeira equação em (2.14), obtemos

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)(D^\nu \psi_\nu) + i\gamma_\mu [D^\nu, D^\mu] \psi_\nu = 0 \quad (2.16)$$

ou equivalente

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)(D^\nu \psi_\nu) + \frac{q}{2} F^{\nu\mu} (\gamma_\mu \psi_\nu - \gamma_\nu \psi_\mu) = 0 \quad (2.17)$$

onde  $F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$ . Se  $D^\nu \psi_\nu = 0$ , obtemos

$$F^{\nu\mu} (\gamma_\mu \psi_\nu - \gamma_\nu \psi_\mu) = 0 \quad (2.18)$$

Esta expressão representa uma nova restrição entre as componentes de  $\psi_\mu$ . Vale a pena mencionar que a restrição (2.18) é uma consequência direta de



$$\gamma^\mu \psi_\mu = 0 \text{ e } D^\mu \psi_\mu = 0.$$

Para obter as soluções da equação de RS em um campo eletromagnético, seguimos a abordagem utilizada para obter as soluções da equação de Dirac em [53]. Uma abordagem semelhante também foi utilizada em [54].

Devido às razões mencionadas na Introdução, iremos considerar o campo vetorial externo como sendo um campo magnético constante. Supondo que o calibre  $A_\mu = \delta_{\mu 2} x B$ , *i.e.*  $A_\mu = (0, 0, xB, 0)$ , que produz um campo magnético constante transversal ao plano  $xy$ , temos  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  e  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = B\hat{e}_3$ . Desta maneira, a derivada covariante torna-se

$$D_\mu = \partial_\mu - i\varepsilon_q |q| B x \delta_{\mu 2}. \quad (2.19)$$

Como o campo magnético constante foi escolhido para ser transversal ao plano  $xy$ , pode-se aplicar o método de separação de variáveis no vetor espinor  $\psi_\mu$ , que pode ser reescrito na forma

$$\psi_\mu^{(\varepsilon)}(\vec{x}, t) = \phi_\mu^{(\varepsilon)}(\vec{x}) e^{-i\varepsilon Et} = f_\mu^{(\varepsilon)}(x) e^{-i\varepsilon Et + i\varepsilon p_y y + i\varepsilon p_z z}, \quad (2.20)$$

onde definimos  $E$  como positivo, e  $\varepsilon = +1(-1)$  corresponde aos estados de energia positiva (negativa), respectivamente.

Aproveitando as soluções da equação de Dirac (Apêndice C), podemos considerar a solução para  $\varepsilon_q = +1$  como

$$f_\mu^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} f_{\mu 1}(x) \\ f_{\mu 2}(x) \\ f_{\mu 3}(x) \\ f_{\mu 4}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\mu 1}^{(\varepsilon)} v_n(\xi) \\ C_{\mu 2}^{(\varepsilon)} v_{n-1}(\xi) \\ C_{\mu 3}^{(\varepsilon)} v_n(\xi) \\ C_{\mu 4}^{(\varepsilon)} v_{n-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

e para  $\varepsilon_q = -1$  como

$$f_\mu^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} f_{\mu 1}(x) \\ f_{\mu 2}(x) \\ f_{\mu 3}(x) \\ f_{\mu 4}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\mu 1}^{(\varepsilon)} v_{n-1}(\xi) \\ C_{\mu 2}^{(\varepsilon)} v_n(\xi) \\ C_{\mu 3}^{(\varepsilon)} v_{n-1}(\xi) \\ C_{\mu 4}^{(\varepsilon)} v_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

onde

$$v_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}, \quad (2.23)$$

é a solução para o oscilador harmônico unidimensional, onde a energia tem a forma

$$E = \sqrt{p_z^2 + m^2 + 2n|q|B} \quad (2.24)$$

e os coeficientes  $C_\mu^{(\varepsilon)}$  satisfazem a relação

$$\begin{pmatrix} C_{\mu 1}^{(\varepsilon)} \\ C_{\mu 2}^{(\varepsilon)} \\ C_{\mu 3}^{(\varepsilon)} \\ C_{\mu 4}^{(\varepsilon)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon p_z}{\varepsilon E + m} \\ \frac{i\varepsilon_q p_n}{-\varepsilon E + m} \end{pmatrix} C_{\mu 1}^{(\varepsilon)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{i\varepsilon_q p_n}{\varepsilon E + m} \\ -\frac{\varepsilon p_z}{\varepsilon E + m} \end{pmatrix} C_{\mu 2}^{(\varepsilon)}. \quad (2.25)$$

Temos agora que considerar as condições subsidiárias. Podemos definir os operadores

$$\hat{O}_1 = i(\varepsilon p_y - \varepsilon_q |q| B x + \frac{\partial}{\partial x}) = i(|q|B)^{1/2} (-\varepsilon_q \xi + \frac{\partial}{\partial \xi}), \quad (2.26)$$

$$\hat{O}_2 = i(-\varepsilon p_y + \varepsilon_q |q| B x + \frac{\partial}{\partial x}) = i(|q|B)^{1/2} (\varepsilon_q \xi + \frac{\partial}{\partial \xi}), \quad (2.27)$$

notando que

$$\hat{O}_1 v_n = \begin{cases} -ip_{n+1} v_{n+1} & \text{se } \varepsilon_q = 1 \\ ip_n v_{n-1} & \text{se } \varepsilon_q = -1 \end{cases}, \quad (2.28)$$

e

$$\hat{O}_2 v_n = \begin{cases} ip_n v_{n-1} & \text{if } \varepsilon_q = 1 \\ -ip_{n+1} v_{n+1} & \text{if } \varepsilon_q = -1 \end{cases}, \quad (2.29)$$

onde  $p_n = \sqrt{2n|q|B}$ . Assim, a condição (2.15) (i.e.  $D^\mu \psi_\mu = 0$ ) torna-se

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon E \begin{pmatrix} C_{01}^{(\varepsilon)} v_{n_q}(\xi) \\ C_{02}^{(\varepsilon)} v_{m_q}(\xi) \\ C_{03}^{(\varepsilon)} v_{n_q}(\xi) \\ C_{04}^{(\varepsilon)} v_{m_q}(\xi) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{n_q+1} (i\varepsilon_q C_{x1}^{(\varepsilon)} - C_{y1}^{(\varepsilon)}) v_{n_q+1}(\xi) \\ p_{m_q+1} (i\varepsilon_q C_{x2}^{(\varepsilon)} - C_{y2}^{(\varepsilon)}) v_{m_q+1}(\xi) \\ p_{n_q+1} (i\varepsilon_q C_{x3}^{(\varepsilon)} - C_{y3}^{(\varepsilon)}) v_{n_q+1}(\xi) \\ p_{n_q+1} (i\varepsilon_q C_{x4}^{(\varepsilon)} - C_{y4}^{(\varepsilon)}) v_{m_q+1}(\xi) \end{pmatrix} \\
 & + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{n_q} (-i\varepsilon_q C_{x1}^{(\varepsilon)} - C_{y1}^{(\varepsilon)}) v_{n_q-1}(\xi) \\ p_{m_q} (-i\varepsilon_q C_{x2}^{(\varepsilon)} - C_{y2}^{(\varepsilon)}) v_{m_q-1}(\xi) \\ p_{n_q} (-i\varepsilon_q C_{x3}^{(\varepsilon)} - C_{y3}^{(\varepsilon)}) v_{n_q-1}(\xi) \\ p_{m_q} (-i\varepsilon_q C_{x4}^{(\varepsilon)} - C_{y4}^{(\varepsilon)}) v_{m_q-1}(\xi) \end{pmatrix} + \varepsilon p_z \begin{pmatrix} C_{z1}^{(\varepsilon)} v_{n_q}(\xi) \\ C_{z2}^{(\varepsilon)} v_{m_q}(\xi) \\ C_{z3}^{(\varepsilon)} v_{n_q}(\xi) \\ C_{z4}^{(\varepsilon)} v_{m_q}(\xi) \end{pmatrix} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

onde definimos  $n_q = n$  ( $n_q = n - 1$ ) e  $m_q = n - 1$  ( $m_q = n$ ) quando a carga é positiva (negativa), respectivamente.

Finalmente, da restrição (2.9) (i.e.  $\gamma^\mu \psi_\mu = 0$ ), obtemos

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} C_{01}^{(\varepsilon)} v_{n_q}(\xi) \\ C_{02}^{(\varepsilon)} v_{m_q}(\xi) \\ -C_{03}^{(\varepsilon)} v_{n_q}(\xi) \\ -C_{04}^{(\varepsilon)} v_{m_q}(\xi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{x4}^{(\varepsilon)} v_{m_q}(\xi) \\ C_{x3}^{(\varepsilon)} v_{n_q}(\xi) \\ -C_{x2}^{(\varepsilon)} v_{m_q}(\xi) \\ -C_{x1}^{(\varepsilon)} v_{n_q}(\xi) \end{pmatrix} \\
 & + i \begin{pmatrix} -C_{y4}^{(\varepsilon)} v_{m_q}(\xi) \\ C_{y3}^{(\varepsilon)} v_{n_q}(\xi) \\ C_{y2}^{(\varepsilon)} v_{m_q}(\xi) \\ -C_{y1}^{(\varepsilon)} v_{n_q}(\xi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{z3}^{(\varepsilon)} v_{n_q}(\xi) \\ -C_{z4}^{(\varepsilon)} v_{m_q}(\xi) \\ -C_{z1}^{(\varepsilon)} v_{n_q}(\xi) \\ C_{z2}^{(\varepsilon)} v_{m_q}(\xi) \end{pmatrix} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Agora vamos concentrar a atenção sobre a restrição (2.18). Neste caso, obtém-se apenas  $F^{12} = \partial^1 A^2 \neq 0$  e (2.18) se reduz a

$$F^{12} (\gamma_2 \psi_1 - \gamma_1 \psi_2) = 0, \tag{2.32}$$

como  $F^{12} \neq 0$  a solução correta é

$$\gamma_2 \psi_1 - \gamma_1 \psi_2 = 0. \tag{2.33}$$

Utilizando a representação padrão para as matrizes  $\gamma^\mu$  e a solução de

(2.22)( $\epsilon_q = -1$ ), obtemos as relações

$$C_{x2} = -iC_{y2}, \quad C_{x4} = -iC_{y4}, \quad (2.34)$$

$$C_{x1} = iC_{y1}, \quad C_{x3} = iC_{y3}, \quad (2.35)$$

Se considerarmos o caso  $n = 0$  ( $C_{\mu 1} = C_{\mu 3} = 0$ ), a restrição (2.35) é trivialmente satisfeita e a restrição (2.34) é a mesma obtida a partir de (2.31). Para o caso de  $n = 1$  e  $n \geq 2$  as restrições (2.34) e (2.35) são restrições adicionais que ajudam na análise de coeficientes independentes.

A partir do sistema de equações (2.30) e (2.31), concluímos que para  $n \geq 2$  apenas quatro coeficientes são independentes o que significa que os estados de energia positiva ou negativa são quadruplicamente degenerados. Por outro lado, para  $n = 1$  (considerando  $\epsilon_q = -1$ ) a partir do sistema de equações (2.30) e (2.31) ( $v_{-1} = 0$ ), obtemos que apenas três coeficientes são independente significando que os estados de energia para  $n = 1$  são triplamente degenerados. Finalmente, para  $n = 0$  (considerando  $\epsilon_q = -1$ ) da equação (2.22) obtemos que  $C_{\mu 1}^{(\epsilon)} = C_{\mu 3}^{(\epsilon)} = 0$ , e, neste caso, a partir de (2.30) e (2.31) ( $v_{-2} = v_{-1} = 0$ ) conclui-se que apenas dois coeficientes são independentes, o que significa que os estados de energia para  $n = 0$  são duplamente degenerados. Esta degenerescência dos estados de energia pode ser associada a um rótulo de spin, como

$$n = l - \frac{s}{2} \epsilon_q + \frac{1}{2}, \quad (2.36)$$

onde  $l = 0, 1, 2, \dots$  e  $s = \pm 1, \pm 3$ . Por conseguinte, o fator de degenerescência de spin  $3/2$  pode ser dada por

$$g_n = 4 - \delta_{n1} - 2\delta_{n0}. \quad (2.37)$$

Explicitamente, obtemos  $g_0 = 2$  ( $n = 0$ ) para  $l = 0, s = -1$  e  $l = 1, s = -3$ . Obtemos  $g_1 = 3$  ( $n = 1$ ) para  $l = 0, s = +1$ ;  $l = 1, s = -1$  e  $l = 2, s = -3$ . E, finalmente,  $g_n = 4$  ( $n \geq 2$ ). Neste ponto, é útil mencionar que os coeficientes independentes podem ser completamente calculados com um procedimento análogo ao do descrito na seção 5.2 da Ref. [66], ou seja, utilizando um operador helicidade apropriado para partículas de spin  $3/2$  [67], mas esses cálculos estão fora do escopo deste trabalho.

## 2.2 DISCUSSÃO

No presente trabalho, revisitamos a equação Rarita-Schwinger incluindo a interação electromagnética através do esquema de acoplamento mínimo. Assumimos um calibre em que o campo magnético é transversal ao plano  $xy$  e constante. Isto conduz a escolha de soluções do tipo Dirac, que evitam consistentemente os problemas de não-causalidade. Dos resultados pode-se ver claramente que a ocupação dos níveis de Landau por partículas de spin  $3/2$  é bem diferente da ocupação das partículas de spin  $1/2$ . Os sistemas compostos por partículas de spin  $1/2$  sujeitos a campos magnéticos podem acomodar apenas uma partícula no nível mais baixo e duas partículas nos outros níveis, enquanto os sistemas de partículas de spin  $3/2$  podem acomodar 2 partículas no primeiro nível, 3 partículas no segundo e 4 partículas nos níveis restantes. Este fato tem influência nos estudos envolvendo equações de estado, densidade de partículas, amplitudes de espalhamento e outros cálculos de interesse para astrofísica nuclear e física de colisões de íons pesados mencionados no início deste capítulo [68], pois altera as propriedades termodinâmicas dos sistemas em questão.



### 3 RAZÕES DE PARTÍCULAS EM COLISÕES DE ÍONS PESADOS E A INFLUÊNCIA DE CAMPOS MAGNÉTICOS FORTES

As quantidades e razões de partículas hadrônicas são utilizadas para determinar a temperatura e potencial químico bariônico da possível transição de fases entre a matéria hadrônica e o QGP, este cálculo é realizado através de modelos térmicos de equilíbrio [24, 25]. As razões de partículas são quantidades convenientes de serem analisadas pois após o *freeze-out* químico elas permanecem praticamente inalteradas.

Em trabalhos anteriores um modelo estatístico em equilíbrio químico foi utilizado para calcular as quantidades de partículas [24, 25] e nestes trabalhos as densidades de partículas foram obtidas por uma aproximação de gás livre de férmions e bósons. Para obter uma melhor descrição dos dados, um termo de volume excludente foi designado para todas as partículas com o objetivo de imitar a interação repulsiva entre os hádrons a pequenas distâncias. Além de, após a produção termal, permitir o decaimento de ressonâncias e partículas mais pesadas através de um parâmetro sistemático que regula o processo de decaimento fraco.

Mais recentemente, modelos nucleares relativísticos foram testados nos regimes de alta temperatura presentes nestas colisões de íons pesados. Em [69, 70] diferentes versões de modelos do tipo Walecka relativístico [71] foram utilizadas para calcular rendimentos de partículas em colisões Au-Au no RHIC / BNL e em [72] o modelo de acoplamento quark-méson (*Quark Meson Coupling Model - QMC*) [73–75] foi utilizado para calcular os rendimentos e também as frações de partículas em colisões Pb-Pb no SPS / CERN. Em todos os casos 18 bárions, píons, káons,  $\rho$ 's e  $K^*$  s foram incorporados aos cálculos e um ajuste com base no valor mínimo do desvio quadrático foi implementado, a fim, de se obter a temperatura e potencial químico, de acordo com uma receita dada em [24]. Para colisões Au-Au (RHIC) estes números ficam compreendidos no intervalo  $132 < T < 169$  MeV e  $30.5 < \mu_B < 62.8$  MeV e para colisões Pb-Pb (SPS),  $99 < T < 156.1$  MeV e  $167.5 < \mu_B < 411$  MeV.

Por outro lado, os campos magnéticos envolvidos em colisões de íons pesados pode chegar a intensidades ainda maiores do que as consideradas em magnetares [3, 39]. Como sugerido em [6–11] é interessante investigar campos da ordem de  $eB = 5 - 30m_\pi^2$  (correspondente a  $1,7 \times 10^{19} - 10^{20}$  Gauss) e temperaturas variando de  $T = 120 - 200$  MeV relacionadas a colisões de íons pesados. Na verdade, as densidades relativas aos potenciais químicos obtidos dentro do quadro de modelos relativísticos, em todos os casos, são muito bai-

xas (da ordem de  $10^{-3} \text{ fm}^{-3}$ ). Nestas densidades as interações nucleares são realmente muito pequenas e este fator nos fez reconsiderar a possibilidade de um gás livre de férmions e bósons, mas agora sob a influência de um campo magnético forte.

Em [76], o autor estuda a radiação de síncrotron dos glúons produzida por quarks rápidos em campos magnéticos fortes geradas em colisões de íons pesados e mostra que uma forte polarização de quarks e léptons com respeito à direção do campo magnético é esperada. A polarização de quarks desaparece durante a fragmentação, mas isto não acontece no caso dos léptons. A observação de polarização leptônica assimétrica poderia ser uma prova da existência do campo magnético, que pode durar por  $1 - 2 \text{ fm}/c$ . O autor conclui que o campo magnético criado por íons pesados rápidos pode ser considerado aproximadamente constante devido a alta condutividade elétrica do plasma de quarks e glúons. Recentemente, o mesmo autor revisitou este assunto em 2 outros artigos [18, 77] e enfatizou a possibilidade de que após uma rápida diminuição em sua magnitude durante o primeiro  $\text{fm}/c$  da expansão do plasma, o campo magnético pode durar tanto quanto exista o plasma de quarks e glúons. Estes resultados contradizem uma outra referência recente [78], onde os autores afirmam que o tempo de vida do campo magnético não é afetado pela condutividade. Consequentemente, se a matéria nuclear tem ou não um papel decisivo na evolução do campo magnético com o tempo é assunto de intenso debate.

O propósito da análise que apresentamos neste trabalho é verificar se a inclusão de campos magnéticos fortes pode melhorar o ajuste dos valores teóricos com os dados experimentais. Começamos do cálculo mais simples possível, baseado no gás livre de férmions e bósons. Nem termos de volume excludente ou de decaimento de ressonâncias são levados em conta de forma a evitar o ofuscamento dos efeitos do campo magnético. Além disso, supomos que o campo magnético é homogêneo, constante e independente do tempo. De acordo com os cálculos presentes em [18, 76, 77], o campo magnético varia lentamente e é quase constante. Se este for o caso, ele certamente deixará sua assinatura nas frações de partículas. Em [79, 80], foi mostrado que a forma de o campo magnético apresenta um padrão especialmente não-trivial e após a média sobre muitos eventos apenas uma das componentes do campo magnético sobrevive. No entanto, a flutuação evento-por-evento da posição das partículas carregadas pode induzir outro componente do campo magnético (perpendicular a remanescente do cálculo médio) e também um campo elétrico, o qual é muito forte para baixos parâmetros de impacto. Enquanto o campo magnético permanece bem alto nas colisões periféricas,



o oposto acontece com o campo elétrico. Em nossa primeira análise não estávamos cientes deste fato, e calculamos as razões de partículas utilizando como base os dados experimentais das colisões mais centrais, com centralidades da ordem de 20%. Em um estudo mais refinado decidimos restringir os dados experimentais a centralidades da ordem de 80%, i.e., altos valores do parâmetro de impacto  $b \simeq 11 - 13$  fm onde estamos mais confortáveis em desconsiderar os efeitos do campo elétrico. No entanto, os dois resultados são apresentados no trabalho, tanto para baixa quanto para alta centralidades.

No presente capítulo, fazemos uma breve revisão do formalismo necessário para o cálculo da densidade de partículas sujeitas a campos magnéticos e as expressões utilizadas para implementar o ajuste do  $\chi^2$  aos resultados experimentais.

### 3.1 DESCRIÇÃO DAS PARTÍCULAS

Nós modelamos a matéria como um gás livre de bárions e mésons sob a influência de um campo magnético constante. Consideramos apenas a matéria normal e estranha, ou seja, os bárions e mésons constituída por  $u$ ,  $d$  e  $s$  quarks: o octeto bariônico (bárions de spin 1/2), o decuplete bariônico (bárions de spin 3/2), o noneto mesônico pseudoescalar (mésons de spin 0) e o noneto mesônico vetorial (mésons de spin 1), o que nos deixa com um total de 54 partículas (18 bárions, 18 antibárions e 18 mésons).

Nós utilizamos unidades naturais ( $\hbar = c = 1$ ) e definimos  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ . Da relação  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$  obtemos que a carga do elétron é  $e = \sqrt{4\pi\alpha}$ , onde  $\alpha = \frac{1}{137}$  é a constante de estrutura fina. As unidades naturais com a carga do elétron definida desta forma são chamadas de unidades de Heaviside-Lorentz [81] (mais detalhes no Apêndice A).

Neste trabalho, o campo magnético é introduzido através do acoplamento mínimo como mostrado em (2.19) e buscamos soluções para os campos  $\psi$  na forma de (2.20).

Para os bárions de spin 1/2 (campo de Dirac)  $\psi$  tem 4 componentes (e é um espinor), para os bárions de spin 3/2 (campo de Rarita-Schwinger)  $\psi_\mu$  tem 16 componentes (e é um quadrivetor-espinor), para os mésons de spin 0 (campo de Klein-Gordon)  $\psi$  tem apenas um componente (e é um escalar), e para os mésons de spin 1 (campo de Proca)  $\psi_\mu$  tem 4 componentes (e é um quadrivetor).

Devido ao uso de métodos estatísticos para lidar com o sistema sob consideração, não precisamos da expressão completa para  $\psi$ , mas apenas a

forma da energia  $E$  para cada um dos campos e a degenerescência dos níveis de energia  $\gamma$ .

Um cálculo detalhado das soluções das equações de Klein-Gordon e Dirac na presença de um campo magnético externo constante pode ser vista em [82]. A solução da equação de Proca na presença de um campo magnético externo constante pode ser encontrada em [83], onde os autores não calcularam explicitamente a expressão para energia, porém ela pode ser obtida de forma direta. Finalmente os cálculos para a equação de Rarita-Schwinger na presença de um campo magnético externo foi feita recentemente em [55].

Os bárions com spin  $1/2$  são descritos pela densidade Lagrangiana de Dirac [53] (vide Apêndice C)

$$\mathcal{L}^D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (3.1)$$

que (depois de se aplicar a equação de Euler-Lagrange) nos levam a equação de movimento

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0, \quad (3.2)$$

onde  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac.

A solução da equação de movimento dá

$$E = \begin{cases} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} & (q = 0) \\ \sqrt{p_3^2 + m^2 + 2n|q|B} & (q \neq 0) \end{cases}, \quad (3.3)$$

onde  $v$  corre sobre os possíveis níveis de Landau e a degenerescência para os estados de energia é dada por:

$$\gamma = \begin{cases} 2 & (q = 0) \\ 2 - \delta_{n0} & (q \neq 0) \end{cases}. \quad (3.4)$$

Os bárions com spin  $3/2$  são descritos pela densidade Lagrangiana de Rarita-Schwinger [33, 57] (vide Capítulo 2)

$$\mathcal{L}^{RS} = -\frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu D_\rho + im\sigma^{\mu\sigma})\psi_\sigma, \quad (3.5)$$

onde  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  e  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ .

A equação de movimento fica

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi_\nu = 0 \quad \text{com} \quad \gamma^\mu\psi_\mu = 0 \quad \text{e} \quad D^\mu\psi_\mu = 0. \quad (3.6)$$

A solução da equação Rarita-Schwinger não é trivial e possui problemas de não-causalidade. Para obter a degenerescência dos estados de energia, seguimos a prescrição usado em [53], que é dada em detalhes para a equação Rarita-Schwinger em [55]. Observando a equação de movimento pode-se ver que cada componente de  $\psi_\mu$  obedece a uma equação tipo Dirac, assim, a energia tem de ter a forma

$$E = \begin{cases} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} & (q = 0) \\ \sqrt{p_3^2 + m^2 + 2n|q|B} & (q \neq 0) \end{cases}. \quad (3.7)$$

Além disso,  $\psi_\mu$  tem 4 componentes, mas, duas equações são na verdade restrições, o que significa que apenas 2 das componentes  $\psi_\mu$  são realmente independentes. Então,  $\psi_\mu$  têm 2 polarizações, mas, (devido a solução de equação de Dirac) cada polarização é duplamente degenerada. Na presença de um campo magnético há uma outra restrição para os níveis de energia  $n = 0$  e  $n = 1$ , o que conduz à degeneração seguinte para os estados de energia

$$\gamma = \begin{cases} 4 & (q = 0) \\ 4 - 2\delta_{n0} - \delta_{n1} & (q \neq 0) \end{cases}. \quad (3.8)$$

Os mésons com spin 0 são descritos pela densidade Lagrangiana de Klein-Gordon [84] (vide Apêndice B)

$$\mathcal{L}^{KG} = D^\mu \psi^* D_\mu \psi - m^2 \psi^* \psi, \quad (3.9)$$

cuja equação de movimento é dada por

$$(D^\mu D_\mu + m^2)\psi = 0, \quad (3.10)$$

com a energia satisfazendo a relação:

$$E = \begin{cases} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} & (q = 0) \\ \sqrt{p_3^2 + m^2 + (2n + 1)|q|B} & (q \neq 0) \end{cases}. \quad (3.11)$$

Os mésons com spin 1 são descritos pela densidade Lagrangiana de Proca [83] (vide Apêndice D)

$$\mathcal{L}^P = \frac{1}{2}(D^\mu \psi^{v*} - D^v \psi^{\mu*})(D_\mu \psi_v - D_v \psi_\mu) - m^2 \psi^{v*} \psi_v. \quad (3.12)$$

A equação do movimento é

$$(D^\mu D_\mu + m^2)\psi_\nu = 0 \quad \text{com} \quad D_\mu \psi^\mu = 0. \quad (3.13)$$

Cada componente de  $\psi_\mu$  obedece a uma equação do tipo Klein-Gordon, de modo que os estados de energia são

$$E = \begin{cases} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} & (q = 0) \\ \sqrt{p_3^2 + m^2 + (2n + 1)|q|B} & (q \neq 0) \end{cases}, \quad (3.14)$$

$\psi_\mu$  tem 4 componentes, mas, uma das equações é uma equação de restrição comprimida, o que significa que apenas 3 componentes de  $\psi_\mu$  são independentes. Assim, cada estado de energia tem 3 polarizações no caso com carga zero (ou sem campo magnético). Se a carga for diferente de zero (e temos a presença de um campo magnético externo) há uma restrição adicional para o nível de energia  $n = 0$ , o que conduz à seguinte degenerescência para os estados de energia

$$\gamma = \begin{cases} 3 & (q = 0) \\ 3 - \delta_{n0} & (q \neq 0) \end{cases}. \quad (3.15)$$

A seguir, iremos delinear alguns dos passos básicos para obter as densidades bariônica e mesônica (mais detalhes podem ser encontrados no Apêndice F). A função de partição no formalismo grande canônico é dada por:

$$Z = \text{Tr} \left[ e^{-\beta(\sum_h \hat{H}_h - \sum_h \mu_h \hat{N}_h)} \right] = Z_f Z_b,$$

onde a soma em  $h$  é sobre todos os hádrons em consideração, tanto férmions ( $f$ ) quanto bósons ( $b$ ),  $\mu_h$  é potencial químico do hádron  $h$ ,  $\hat{H}_h$  e  $\hat{N}_h$  são os operadores hamiltoniano e número (vide Apêndice E), respectivamente, e  $\beta = 1/T$ .

Para obter o traço utilizamos o procedimento padrão, dividindo as partículas em férmions e bósons. O resultado é:

$$Z_f = e^{\beta \sum_{f,r} E_r^f} \prod_{f,r} \left( 1 + e^{-\beta(E_r^f - \mu_f)} \right) \prod_{f,r} \left( 1 + e^{-\beta(E_r^f + \mu_f)} \right)$$

e

$$Z_b = e^{\beta \sum_{b,r} E_r^b} \prod_{b,r} \frac{1}{1 - e^{-\beta(E_r^b - \mu_b)}} \prod_{b,r} \frac{1}{1 - e^{-\beta(E_r^b + \mu_b)}},$$

onde  $E_r^h$ ,  $h = f, b$  é a energia total da partícula  $h$  e  $r$  indica seu estado quântico,

i.e.,  $r = s, p_x, p_y, p_z$  (spin e momento no eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ ) para partículas sem carga ( $q = 0$ ) e  $r = n, s, p_y, p_z$  (nível de energia, spin e momento nos eixos  $y$  e  $z$ ) para partículas com carga ( $q \neq 0$ ).

O potencial grande canônico é  $\Omega_h = -\frac{1}{\beta} \ln Z_h$  para  $h = f, b$  de modo que

$$\Omega_f = -\sum_{f,r} E_r^f - \frac{1}{\beta} \sum_{f,r} \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_r^f - \mu_f)} \right) - \frac{1}{\beta} \sum_{f,r} \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_r^f + \mu_f)} \right)$$

e

$$\Omega_b = -\sum_{b,r} E_r^b + \frac{1}{\beta} \sum_{b,r} \ln \left( 1 - e^{-\beta(E_r^b - \mu_b)} \right) + \frac{1}{\beta} \sum_{b,r} \ln \left( 1 - e^{-\beta(E_r^b + \mu_b)} \right).$$

Utilizando a prescrição de *partícula na caixa*:

$$\sum_r = \sum_{s, p_x, p_y, p_z} \Rightarrow V \gamma_h \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 p \quad (q = 0)$$

e

$$\sum_r = \sum_{n, s, p_y, p_z} \Rightarrow V \gamma_h \frac{|q|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \quad (q \neq 0),$$

onde  $V$  é o volume total ocupado pelo sistema,  $\gamma_h$  e  $|q|$  são, respectivamente, a degenerescência e o módulo da carga da partícula  $h$  e  $B$  é o valor do campo magnético externo.

Com as expressões corretas para a energia ( $E_h$ ) e degenerescência ( $\gamma_h$ ) do hádron  $h$ , fazendo  $\omega_h = \frac{\Omega_h}{V}$  e utilizando as relações:

$$\rho_h = -\frac{\partial \omega_h}{\partial \mu_h}, \quad P_h = -\omega_h, \quad s_h = \frac{\partial P_h}{\partial T} \quad \text{e} \quad \varepsilon_h = \omega_h + Ts + \mu_h \rho_h,$$

podemos obter todas as quantidades termodinâmicas de interesse. As densidades de partículas para os bárions são

$$\rho_b = \begin{cases} \gamma_b \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} f(E_b - \mu_b) p^2 dp & (q = 0) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_b \frac{|q_b|B}{2\pi^2} \int_0^{\infty} f(E_b - \mu_b) dp & (q \neq 0) \end{cases}, \quad (3.16)$$

para os antibárions são

$$\rho_{ab} = \begin{cases} \gamma_b \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty f(E_b + \mu_b) p^2 dp & (q = 0) \\ \sum_{n=0}^\infty \gamma_b \frac{|q_b| B}{2\pi^2} \int_0^\infty f(E_b + \mu_b) dp & (q \neq 0) \end{cases}, \quad (3.17)$$

onde  $\gamma_b$  dá a degenerescência de cada partícula. Para os mésons, as densidades de partículas ficam:

$$\rho_m = \begin{cases} \gamma_m \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty b(E_m - \mu_m) p^2 dp & (q = 0) \\ \sum_{n=0}^\infty \gamma_m \frac{|q_m| B}{2\pi^2} \int_0^\infty b(E_m - \mu_m) dp & (q \neq 0) \end{cases}, \quad (3.18)$$

com  $f(x) = (e^{x/T} + 1)^{-1}$  e  $b(x) = (e^{x/T} - 1)^{-1}$ . Note que os antimésons não são levados em conta, uma vez que as antipartículas dos mésons são descritas como outras partículas. Portanto, em nossa notação, o setor de antibósons do formalismo fica de fora dos cálculos.

A densidade total de partículas bariônica é

$$\rho_B = \sum_b (\rho_b - \rho_{ab}), \quad (3.19)$$

e a densidade mesônica total é

$$\rho_M = \sum_m \rho_m. \quad (3.20)$$

A densidade de energia é dada pela soma das densidades de energia de cada partícula, de modo que

$$\varepsilon = \sum_b (\varepsilon_b + \varepsilon_{ab}) + \sum_m \varepsilon_m, \quad (3.21)$$

com

$$\varepsilon_b = \begin{cases} \gamma_b \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty E_b f(E_b - \mu_b) p^2 dp & (q = 0) \\ \sum_{n=0}^\infty \gamma_b \frac{|q_b| B}{2\pi^2} \int_0^\infty E_b f(E_b - \mu_b) dp & (q \neq 0) \end{cases}, \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_{ab} = \begin{cases} \gamma_b \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty E_b f(E_b + \mu_b) p^2 dp & (q = 0) \\ \sum_{n=0}^\infty \gamma_b \frac{|q_b| B}{2\pi^2} \int_0^\infty E_b f(E_b + \mu_b) dp & (q \neq 0) \end{cases}, \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \gamma_m \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty E_m b(E_m - \mu_m) p^2 dp & (q = 0) \\ \sum_{n=0}^\infty \gamma_m \frac{|q_m| B}{2\pi^2} \int_0^\infty E_m b(E_m - \mu_m) dp & (q \neq 0) \end{cases}. \quad (3.24)$$

A pressão é dada por

$$P = \sum_b (P_b + P_{ab}) + \sum_m P_m, \quad (3.25)$$

com

$$P_b = \begin{cases} \gamma_b \frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{E_b} f(E_b - \mu_b) p^4 dp & (q = 0) \\ \sum_{n=0}^\infty \gamma_b \frac{|q_b| B}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{E_b} f(E_b - \mu_b) p^2 dp & (q \neq 0) \end{cases}, \quad (3.26)$$

$$P_{ab} = \begin{cases} \gamma_b \frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{E_b} f(E_b + \mu_b) p^4 dp & (q = 0) \\ \sum_{n=0}^\infty \gamma_b \frac{|q_b| B}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{E_b} f(E_b + \mu_b) p^2 dp & (q \neq 0) \end{cases}, \quad (3.27)$$

$$P_m = \begin{cases} \gamma_m \frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{E_m} b(E_m - \mu_m) p^4 dp & (q = 0) \\ \sum_{n=0}^\infty \gamma_m \frac{|q_m| B}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{E_m} b(E_m - \mu_m) p^2 dp & (q \neq 0) \end{cases}, \quad (3.28)$$

a densidade de entropia pode ser encontrada através

$$s = \varepsilon + P - \sum_b \mu_b (\rho_b - \rho_{ab}) - \sum_m \mu_m \rho_m. \quad (3.29)$$

Note que nas equações acima,  $p$  e  $E$  são o momento e a energia das partículas no gás de hádrons, os quais são integrados sobre todos os possíveis valores do momento. Eles não são, obviamente, as medidas experimentais de energia e momento transversal.

O potencial químico dos hádrons é

$$\mu_h = B_h \mu_B + I_{3h} \mu_{I_3} + S_h \mu_S, \quad (3.30)$$

onde  $B_h$ ,  $I_{3h}$  e  $S_h$  são, respectivamente, o número bariônico, a terceira componente do isospin e a estranheza da partícula  $h$ . retirados do *Particle Data Group* [85].

Nós impomos a conservação local do número bariônico, isospin e estranheza. Esta imposição conduz às seguintes equações

$$\sum_h B_h \rho_h = \frac{N_B}{V}, \quad \sum_h I_{3h} \rho_h = \frac{I_3}{V}, \quad \sum_h S_h \rho_h = \frac{S}{V}, \quad (3.31)$$

onde  $N_B$  é o número bariônico total,  $I_3$  é o isospin total,  $S$  é a estranheza total do sistema e  $V$  é o volume ocupado pelo sistema. O potencial químico bariônico  $\mu_B$  é um parâmetro de controle do sistema (o outro é a temperatura  $T$ ). Os potenciais químicos de isospin  $\mu_{I_3}$  e estranheza  $\mu_S$  são determinados através de suas respectivas leis de conservação. A conservação de carga é automaticamente obtida através das outras três leis de conservação.

O número bariônico de um átomo Au é  $N_B = (N + Z) = 79 + 118 = 197$ , o isospin é  $I_3 = (Z - N)/2 = 19.5$  e para o deutério ( $d$ ), temos que  $N_B = 1 + 1 = 2$  e  $I_3 = 0$ . Assim, assumindo que a estranheza total do sistema é zero, temos as seguintes quantidades conservadas: Colisão Au+Au,  $N_B = 394$ ,  $I_3 = -39$  e  $S = 0$ . Colisão  $d$ +Au,  $N_B = 199$ ,  $I_3 = -19.5$  e  $S = 0$ .

Neste ponto, é importante enfatizar algumas das desvantagens da simplicidade de nosso cálculo. Como mostrado em [19], o campo magnético deve depender das cargas dos núcleos em colisão e o número de participantes deve variar para diferentes centralidades. Estas restrições não foram levados em conta diretamente em nossos cálculos. Toda a informação que utilizamos como *input* é provenientes das frações experimentais de partículas e o campo magnético é modificado até que o melhor ajuste seja encontrado. O número de diferentes participantes se reflete apenas no raio resultante.

### 3.2 RESULTADOS

Nós implementamos um ajuste no  $\chi^2$  a fim de se obter a temperatura e o potencial químico. As propriedades das partículas (spin, massa, número bariônico, isospin e estranheza) foram retirados do *Particle Data Group* [85].

Nas Tabelas 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 mostramos nossos resultados cor-



respondentes a temperatura e potencial químico que dão o valor mínimo para o desvio quadrático  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(\mathcal{R}_i^{exp} - \mathcal{R}_i^{theo})^2}{\sigma_i^2}, \quad (3.32)$$

onde  $\mathcal{R}_i^{exp}$  e  $\mathcal{R}_i^{theo}$  são a fração experimental e teórica da  $i$ -ésima partícula, e  $\sigma_i$  representa o erro nos dados experimentais.

Nas Tabelas 3 à 10  $B$  é o campo magnético,  $T$  é a temperatura,  $\mu_B$  é o potencial químico bariônico,  $\chi^2$  é o desvio quadrático,  $\mu_3$  é o potencial químico de isospin,  $\mu_S$  é o potencial químico de estranheza,  $R$  é o raio da *fire-ball*,  $\rho_B = \sum_b (\rho_b - \rho_{ab})$  é a densidade bariônica usual,  $\rho_\Delta = \rho_{\Delta^{++}} - \rho_{\Delta^{+}} + \rho_{\Delta^0} - \rho_{\Delta^-}$  é a densidade bariônica de deltas,  $\rho_M = \sum_m \rho_m$  é a densidade de mésons,  $\rho_\pi = \rho_{\pi^0} + \rho_{\pi^+} + \rho_{\pi^-}$  é a densidade de píons,  $\varepsilon$  é a densidade de energia,  $P$  é a pressão,  $s$  é a densidade de entropia e  $ndf$  é o número de graus de liberdade. Para  $B = 0$ ,  $ndf = 5$  (7 valores experimentais menos 2 parâmetros livres,  $T$  e  $\mu$ ), para  $B \neq 0$ ,  $ndf = 4$  (7 valores experimentais menos 3 parâmetros livres,  $T$ ,  $\mu$  e  $B$ ).  $\pi^-/\pi^+$ ,  $K^-/K^+$ ,  $\bar{p}/p$ ,  $K^-/\pi^-$ ,  $K^+/\pi^+$  e  $p/\pi^+$  são as razões de partículas teóricas (primeiras 7 colunas) e experimentais (última coluna) [86]. A temperatura e o potencial químico bariônico obtidos de um modelo estático em [86] são também dados na última coluna de todas as tabelas. É importante ressaltar que caso estivéssemos considerando os efeitos de volume excludente em nossos cálculos o ajuste do  $\chi^2$  também levaria a resultados próximos de 1. Para tornar clara a melhoria no ajuste de dados por meio da adição do campo magnético, calculamos o desvio percentual relativo ( $\Delta\%$ ) com respeito aos valores experimentais para  $B = 0$  e o melhor  $B \neq 0$  (as colunas em negrito nas tabelas) através da equação

$$\Delta\% = \left| \frac{\mathcal{R}^{theo} - \mathcal{R}^{exp}}{\mathcal{R}^{exp}} \right| \cdot 100\%, \quad (3.33)$$

e mostramos esses valores entre parênteses em todas as tabelas. Se compararmos o desvio relativo percentual dos resultados apresentados em negrito, obtidos a partir do menor valor do desvio quadrático, com os obtidos para um campo magnético nulo (primeiras colunas em todas as Tabelas), é evidente que, salvo raras exceções, a inclusão do campo magnético produz razões de partículas muito mais próximas dos resultados experimentais. Vale ressaltar que quanto maior for a carga eléctrica das partículas, mais forte a influência do campo magnético na sua densidade (ver eqs. (3.16-3.18)). No entanto,

como estamos interessados principalmente nas razões de partículas, este fato não pode ser observado a partir dos resultados apresentados nas Tabelas 3 à 10. Além disso, outras propriedades das partículas individuais, como o seu espectro por exemplo, são resultado de um delicado equilíbrio entre o preenchimento dos níveis de Landau (relacionado com a massa da partícula [13, 41, 87]) e a interação que governa a produção de partículas. Neste trabalho, a interação forte é negligenciada uma vez que estamos lidando com gases livres.

Nas Figuras 14-(a), 14-(b), 16-(a), 16-(b), 18-(a), 18-(b), 20-(a), 20-(b), 22-(a), 22-(b), 24-(a), 24-(b), 26-(a), 26-(b), 28-(a) e 28-(b) mostramos as razões experimentais e teóricas para  $B = 0$  e para  $B \neq 0$  que produz o melhor ajuste. Nas Figuras 15-(a), 17-(a), 19-(a), 21-(a), 23-(a), 25-(a), 27-(a) e 29-(a) mostramos o comportamento do  $\chi^2$  para  $B = 0$  e para  $B \neq 0$  que produz o melhor ajuste. Nas Figuras 15-(b), 17-(b), 19-(b), 21-(b), 23-(b), 25-(b), 27-(b) e 29-(b) mostramos o comportamento do  $\chi^2$  em função do campo magnético. Pode-se notar que o melhor ajuste é geralmente obtido para um campo magnético em torno de  $6 m_\pi^2$ , um pouco acima do que é esperado para as colisões no RHIC ( $5 m_\pi^2$ ). É surpreendente que o melhor ajuste sempre aconteça para o mesmo valor do campo magnético.

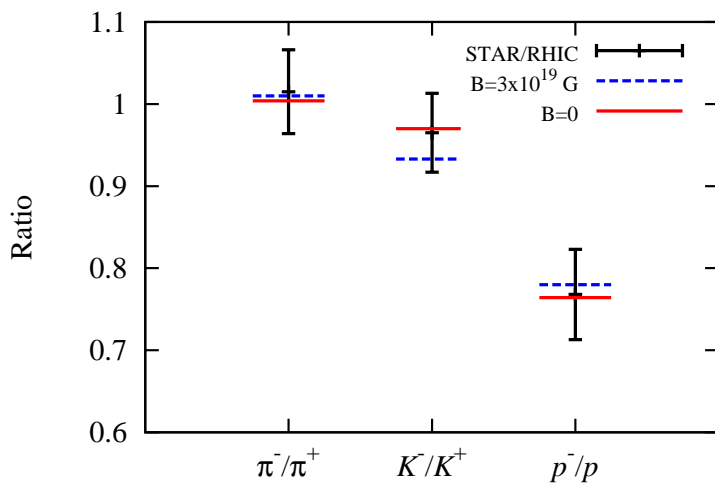
Nossos resultados mostram que, mesmo para um gás livre de férmions e bósons, um forte campo magnético desempenha um papel importante. A inclusão do campo magnético melhora o ajuste dos dados até um campo da ordem de  $B = 10^{19}$  G. Para campos magnéticos mais fortes, o ajuste torna-se pior novamente. Este comportamento pode ser facilmente observado nas Tabelas 3 à 10 e nas Figuras 15-(b) à 29-(b). Deve-se ressaltar a forma como o raio da *fire-ball*  $R$  e a densidade total  $\rho$  variam de acordo com o campo magnético sistematicamente:  $R$  e  $\rho$  praticamente não mudam entre  $B = 0$  e  $B = 10^{18}$  G, mas quando o campo aumenta ainda mais, o a densidade cresce e o raio decresce. Este comportamento é comum a todos os casos de colisão estudados. Este salto enorme na densidade explica por que as razões pioram para um campo magnético da ordem de  $B = 10^{20}$  G, para o qual as densidades são muito maiores do que é esperado em uma colisão de íons pesados. Ao obter os valores a temperatura e potencial químico bariônico para os diferentes valores do campo magnético não nos preocupamos com o limite superior da temperatura. Sabemos que uma transição de fase deve ocorrer para uma temperatura da ordem de 175 MeV, mas não levamos isto em conta na hora de obter os dados. Fizemos isto no intuito de obter uma melhor visualização do efeito dos campos muito altos nas propriedades termodinâmicas do sistema.

Nosso modelo dá uma boa descrição para as razões de partícula/ an-

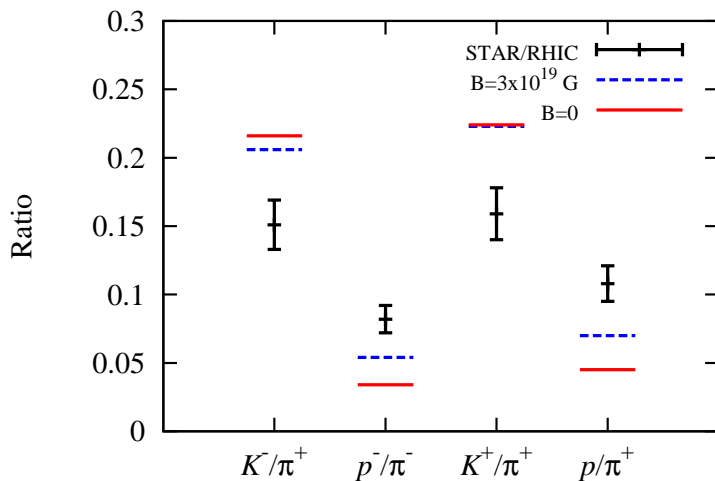
tipartícula, mas não consegue descrever a relação entre os píons e as outras partículas. Isso ocorre porque o modelo produz píons demais como mostrado explicitamente nas densidades de partículas. Em todos os tipos de colisão nosso modelo apresenta uma densidade bariônica ( $\rho_B$ ) composta de mais de 30% de bárions  $\Delta$  e uma densidade de mésons ( $\rho_M$ ) composta de mais de 60% de  $\pi$  ( $\rho_\pi$ ). Os desvios percentuais relativos nos rendimentos de partículas mostram claramente que alguns resultados melhoram consideravelmente quando o campo magnético é considerado, enquanto outros permanecem inalteradas ou até mesmo pioram um pouco. No entanto, nossas figuras também mostram que o comportamento do  $\chi^2$  muda drasticamente com a adição do campo magnético e que as temperaturas e potenciais químicos calculados através um modelo estatístico com volume excludente fica quase sempre dentro da elipse de confiança  $3 - \sigma$  obtida para o melhor  $\chi^2$ , mas ficam sempre fora das elipses de confiança obtidas com campo magnético nulo.

Gostaríamos de ressaltar que quando começamos a este trabalho, não estávamos cientes das referências [79, 80] e foram utilizados dados obtidos para baixas centralidades, i.e., baixos parâmetros de impacto. Estes resultados estão presentes nas Tabelas 3, 5, 7 e 9 e nas Figuras 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26 e 27. Nestes casos, os  $\chi^2$  mínimos obtidos são geralmente menores, que é o contrário do que se espera, uma vez que para as colisões centrais o campo magnético deve ser menor. Acreditamos que isto ocorre devido as barras de erro maiores que acompanham os dados de centralidades reduzidas.



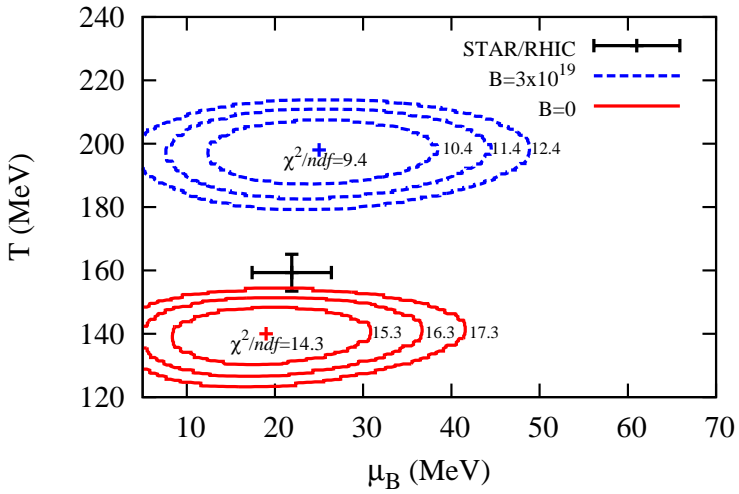


(a)

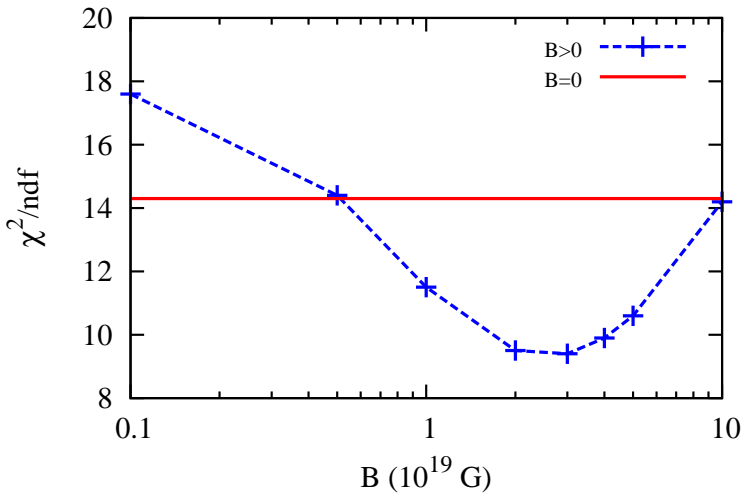


(b)

Figura 14: Au+Au (0-5%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  A GeV. (a) razões de partícula/antipartícula. (b) razões mistas.



(a)

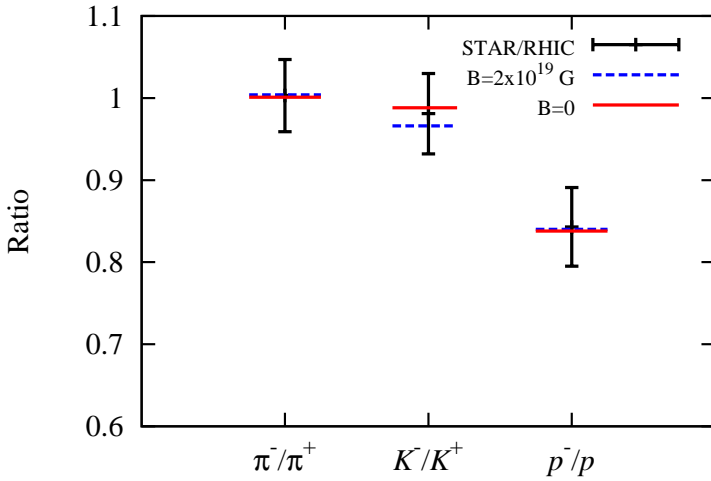


(b)

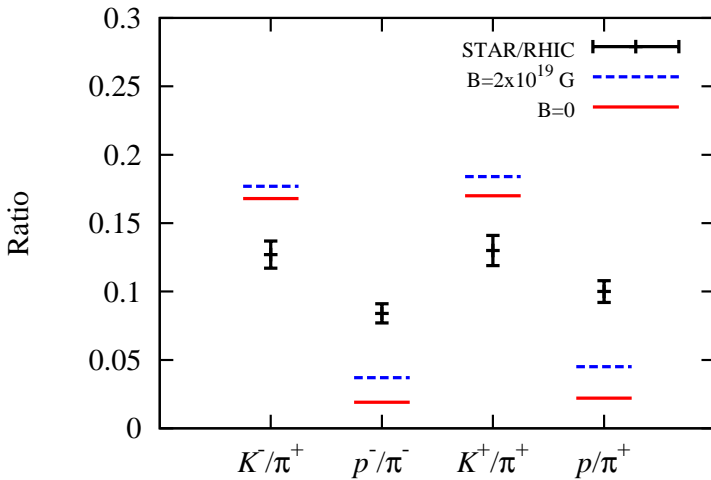
Figura 15: Au+Au (0-5%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  A GeV. (a) e (b) comportamento do  $\chi^2$ .

Tabela 4: Au+Au (70-80%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV. Resultados obtidos para diferentes valores do campo magnético.

$B$ ( $\times 10^{19}$ G)	0	0.1	0.5	1	2	5	10	STAR/ RHIC [86]
	0	0.3	1.5	3	6	15	30	
$\pi^-/\pi^+$ ( $\Delta\%$ )	1.001 (0.17%)	1.001	1.002	1.003	<b>1.004 (0.12%)</b>	1.006	1.008	1.003 $\pm$ 0.044
$K^-/K^+$	0.988 (0.76%)	0.998	0.982	0.973	<b>0.966 (1.58%)</b>	0.959	0.964	0.981 $\pm$ 0.049
$\bar{p}/p$	0.838 (0.60%)	0.839	0.841	0.833	<b>0.840 (0.39%)</b>	0.841	0.846	0.843 $\pm$ 0.048
$K^-/\pi^-$	0.168 (32.3%)	0.168	0.175	0.177	<b>0.177 (39.5%)</b>	0.181	0.178	0.127 $\pm$ 0.010
$\bar{p}/\pi^-$	0.019 (77.8%)	0.019	0.026	0.032	<b>0.037 (55.6%)</b>	0.036	0.027	0.084 $\pm$ 0.007
$K^+/\pi^+$	0.170 (30.9%)	0.170	0.178	0.182	<b>0.184 (41.8%)</b>	0.190	0.186	0.130 $\pm$ 0.011
$p/\pi^+$	0.022 (77.7%)	0.023	0.031	0.039	<b>0.045 (55.4%)</b>	0.043	0.032	0.100 $\pm$ 0.008
$T$ (MeV)	124	125	138	152	<b>170</b>	194	199	157.9 $\pm$ 3.9
$\mu_B$ (MeV)	11	11	12	14	<b>15</b>	17	20	14.1 $\pm$ 4.2
$\mu_{I3}$ (MeV)	-0.0759	-0.0768	-0.115	-0.176	<b>-0.254</b>	-0.436	-0.504	
$\mu_S$ (MeV)	0.755	0.785	1.31	2.13	<b>3.03</b>	4.09	3.65	
$\chi^2/ndf$	42.4	52.3	45.9	39.8	<b>35.5</b>	39.6	47.8	
$R$ (fm)	66.2	64.6	46.7	34.0	<b>25.0</b>	17.3	15.4	
$\rho_B$ ( $\times 10^{-3}$ fm $^{-3}$ )	0.325	0.349	0.923	2.40	<b>6.04</b>	18.1	25.9	
$\rho_\Delta$ ( $\times 10^{-3}$ fm $^{-3}$ )	0.0813	0.0878	0.254	0.717	<b>1.98</b>	6.64	10.2	
$\rho_M$ ( $\times 10^{-3}$ fm $^{-3}$ )	91.7	95.9	167	292	<b>581</b>	1512	2727	
$\rho_\pi$ ( $\times 10^{-3}$ fm $^{-3}$ )	63.6	66.3	109	183	<b>354</b>	940	1829	
$\varepsilon$ (MeV/fm $^3$ )	55.4	58.2	111	212	<b>456</b>	1202	1818	
$P$ (MeV/fm $^3$ )	11.2	11.8	22.6	43.6	<b>97.3</b>	283	489	
$s$ (MeV/fm $^3$ )	0.537	0.560	0.966	1.68	<b>3.25</b>	7.65	11.6	



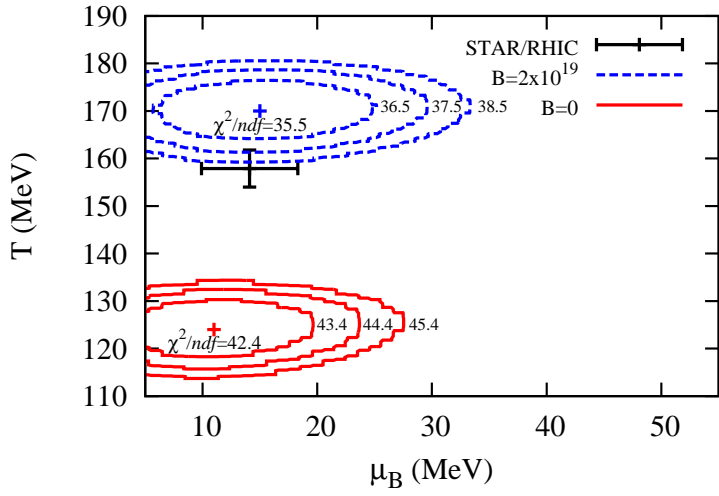
(a)



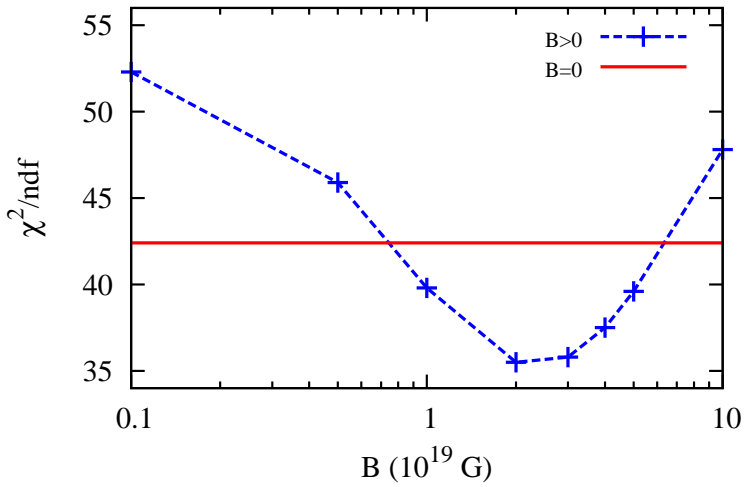
(b)

Figura 16: Au+Au (70-80%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV. (a) razões de partícula/antipartícula. (b) razões mistas.





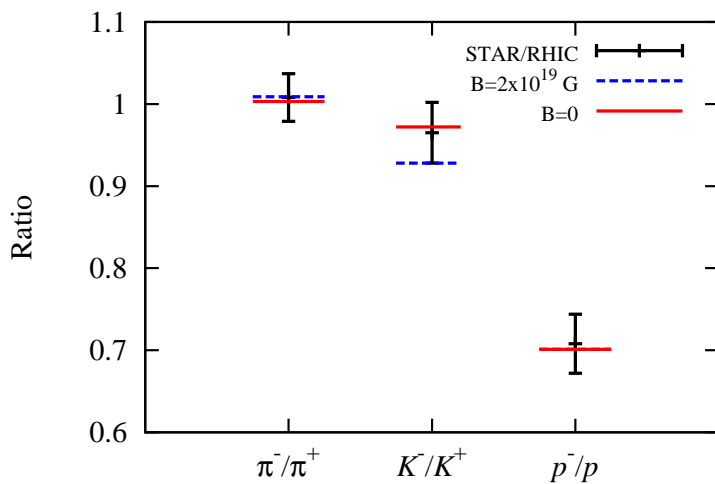
(a)



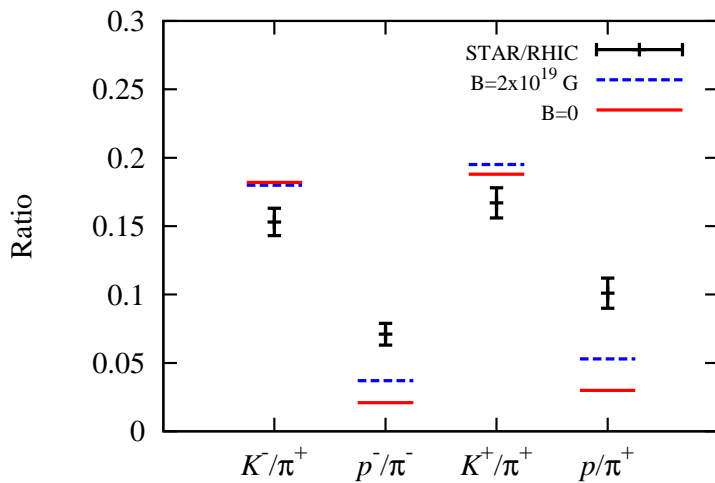
(b)

Figura 17: Au+Au (70-80%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV. (a) e (b) comportamento do  $\chi^2$ .



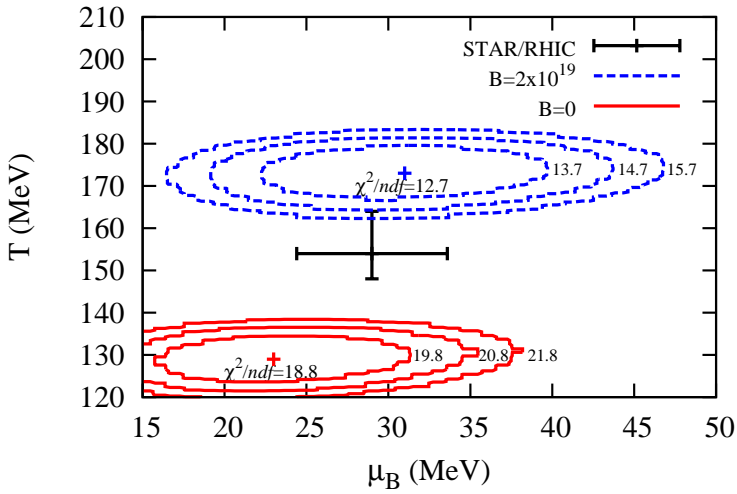


(a)

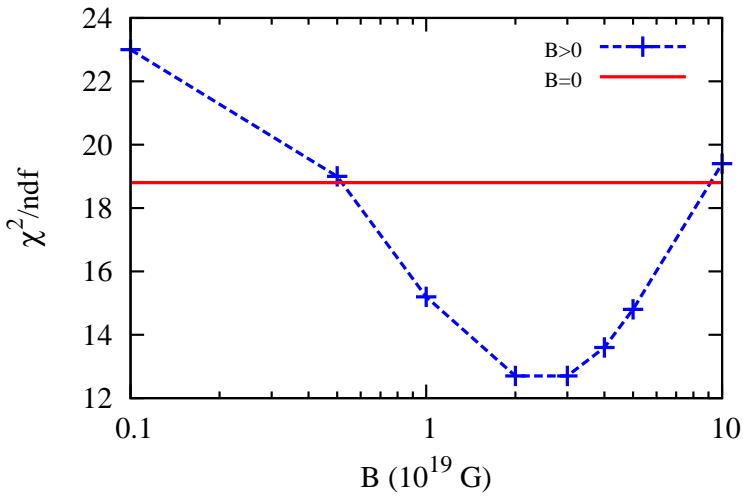


(b)

Figura 18: Au+Au (0-6%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 130$  A GeV. (a) razões de partícula/antipartícula. (b) razões mistas.



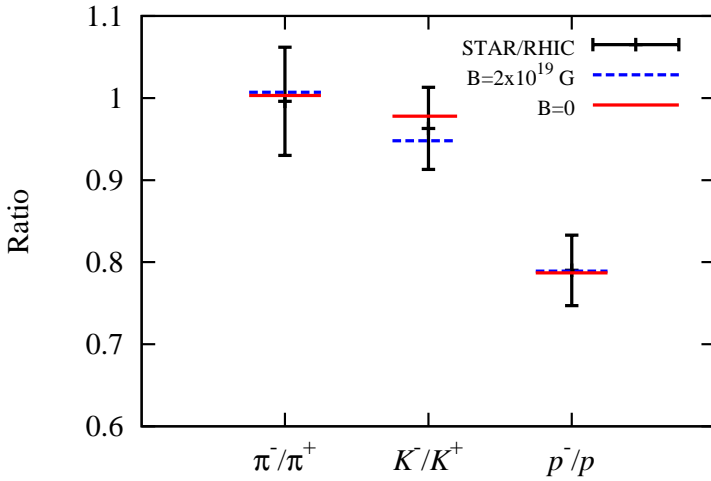
(a)



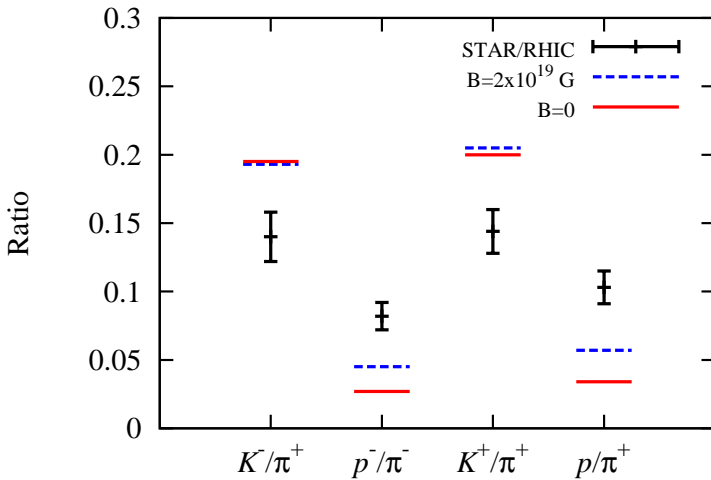
(b)

Figura 19: Au+Au (0-6%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 130$  A GeV. (a) e (b) comportamento do  $\chi^2$ .



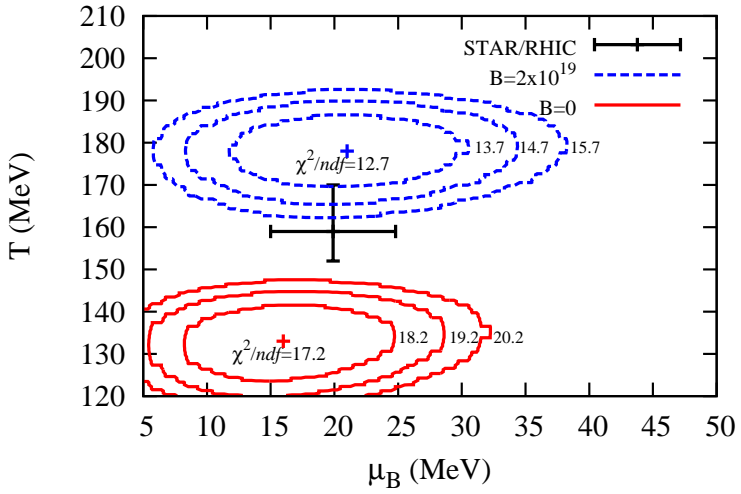


(a)

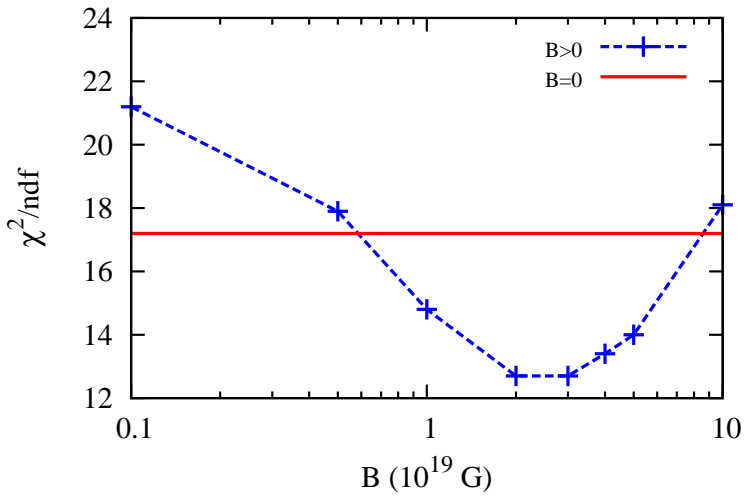


(b)

Figura 20: Au+Au (58-85%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 130$  A GeV. (a) razões de partícula/antipartícula. (b) razões mistas.



(a)



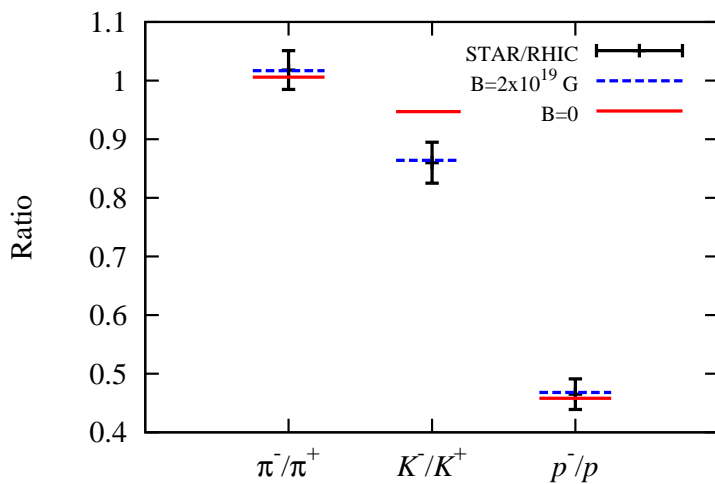
(b)

Figura 21: Au+Au (58-85%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 130$  A GeV. (a) e (b) comportamento do  $\chi^2$ .

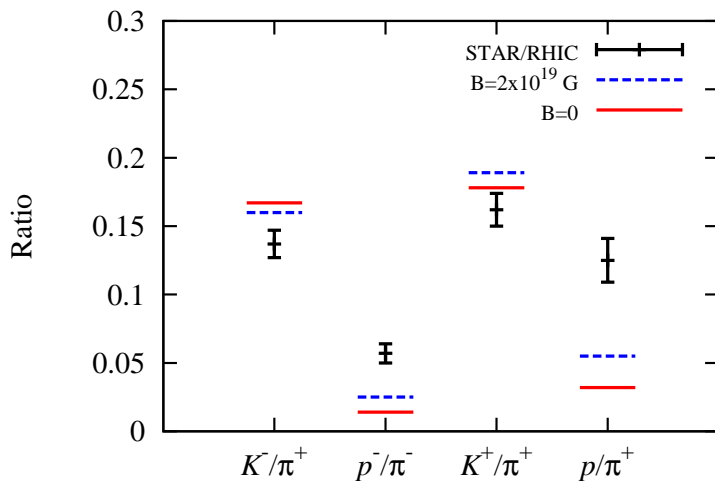
Tabela 7: Au+Au (0-5%)  $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$  A GeV. Resultados obtidos para diferentes valores do campo magnético.

$B$ ( $\times 10^{19}$ G) $eB$ ( $m_2^2$ )	0	0.1	0.5	1	2	5	10	STAR/ RHIC [86]
	0	0.3	1.5	3	6	15	30	
$\pi^-/\pi^+$	1.006 (1.15%)	1.006	1.009	1.012	<b>1.017 (0.06%)</b>	1.027	1.032	1.018 $\pm$ 0.033
$K^-/K^+$	0.947 (10.1%)	0.945	0.923	0.895	<b>0.864 (0.49%)</b>	0.847	0.860	0.860 $\pm$ 0.035
$\bar{p}/p$	0.458 (2.35%)	0.461	0.463	0.464	<b>0.468 (0.22%)</b>	0.473	0.471	0.469 $\pm$ 0.026
$K^-/\pi^-$	0.167 (22.0%)	0.167	0.166	0.163	<b>0.160 (17.1%)</b>	0.159	0.159	0.137 $\pm$ 0.010
$\bar{p}/\pi^-$	0.014 (74.8%)	0.015	0.019	0.023	<b>0.025 (55.6%)</b>	0.023	0.017	0.057 $\pm$ 0.007
$K^+/\pi^+$	0.178 (9.61%)	0.178	0.181	0.185	<b>0.189 (16.6%)</b>	0.192	0.190	0.162 $\pm$ 0.012
$p/\pi^+$	0.032 (74.7%)	0.032	0.041	0.049	<b>0.055 (55.9%)</b>	0.049	0.038	0.125 $\pm$ 0.016
$T$ (MeV)	125	126	137	150	<b>167</b>	187	193	154 $^{+10}_{-7}$
$\mu_B$ (MeV)	49	49	53	58	<b>64</b>	71	74	62.7 $\pm$ 6.0
$\mu_3$ (MeV)	-0.361	-0.366	-0.495	-0.693	<b>-1.02</b>	-1.64	-2.01	
$\mu_5$ (MeV)	3.56	3.70	5.70	8.54	<b>12.4</b>	15.7	14.8	
$\chi^2/ndf$	17.7	22.8	18.0	14.6	<b>12.5</b>	14.5	18.0	
$R$ (fm)	38.9	38.0	28.9	21.8	<b>16.0</b>	11.5	9.93	
$\rho_B$ ( $\times 10^{-3}$ fm $^{-3}$ )	1.60	1.71	3.91	9.11	<b>23.1</b>	61.1	96.0	
$\rho_\Delta$ ( $\times 10^{-3}$ fm $^{-3}$ )	0.404	0.435	1.07	2.70	<b>7.49</b>	22.0	37.3	
$\rho_M$ ( $\times 10^{-3}$ fm $^{-3}$ )	95.1	99.5	162	277	<b>544</b>	1346	2506	
$\rho_\pi$ ( $\times 10^{-3}$ fm $^{-3}$ )	65.4	68.2	106	176	<b>339</b>	871	1725	
$\varepsilon$ (MeV/fm $^3$ )	58.6	61.6	107	197	<b>414</b>	989	1558	
$P$ (MeV/fm $^3$ )	11.8	12.4	21.7	40.7	<b>88.9</b>	238	431	
$s$ (MeV/fm $^3$ )	0.562	0.587	0.936	1.58	<b>3.00</b>	6.54	10.4	



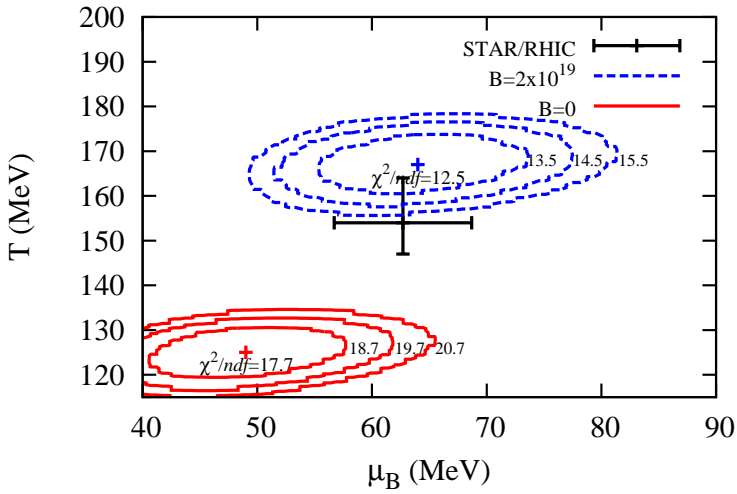


(a)

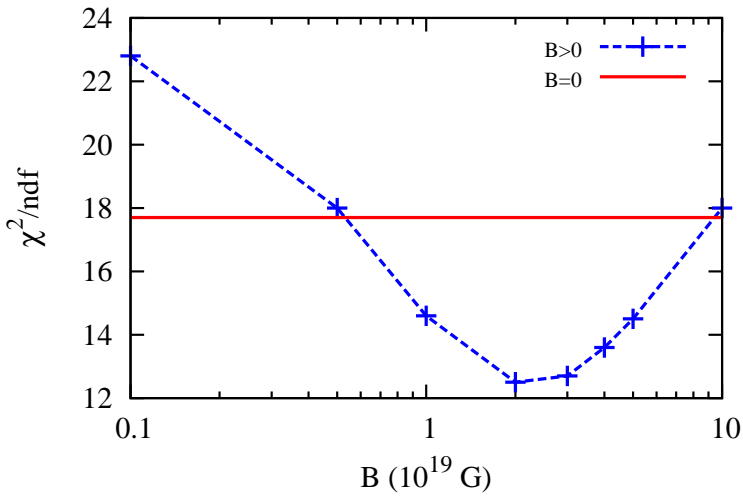


(b)

Figura 22: Au+Au (0-5%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$  A GeV. (a) razões de partícula/antipartícula. (b) razões mistas.



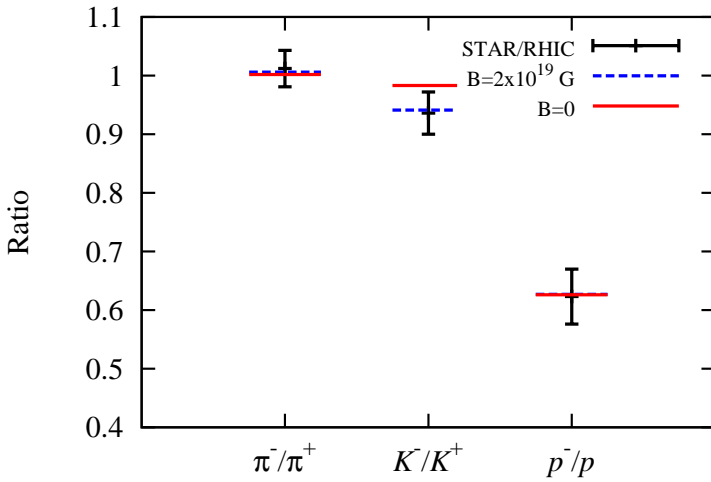
(a)



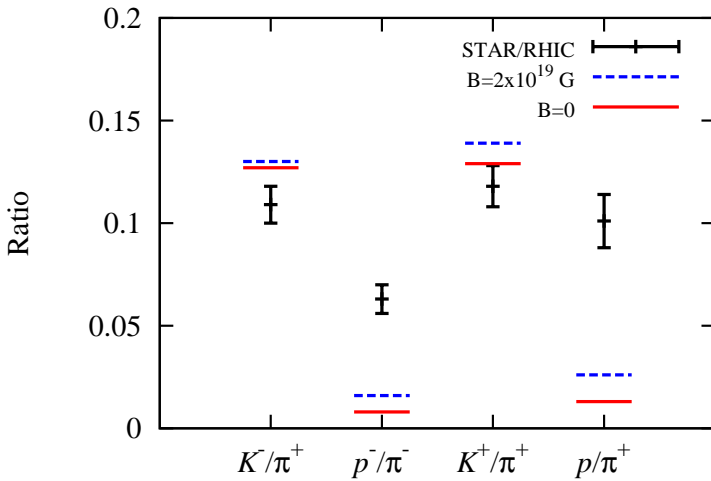
(b)

Figura 23: Au+Au (0-5%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$  A GeV. (a) e (b) comportamento do  $\chi^2$ .



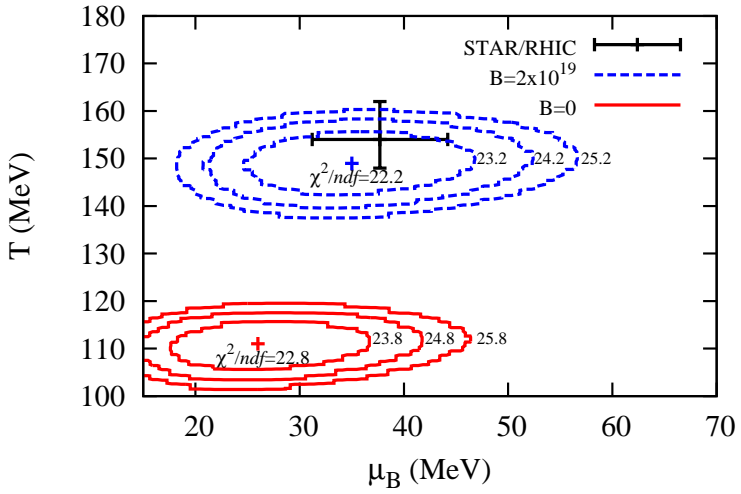


(a)

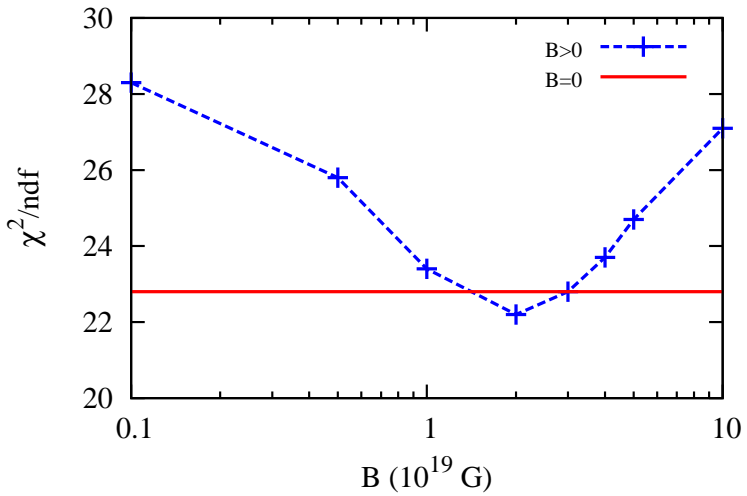


(b)

Figura 24: Au+Au (70-80%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$  GeV. (a) razões de partícula/antipartícula. (b) razões mistas.



(a)

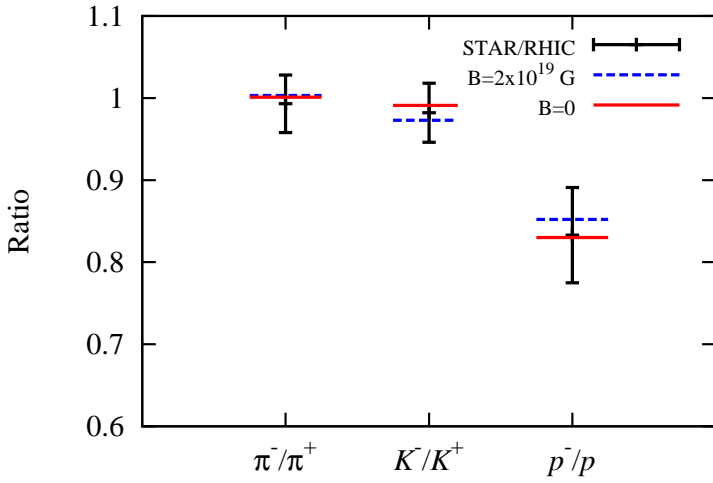


(b)

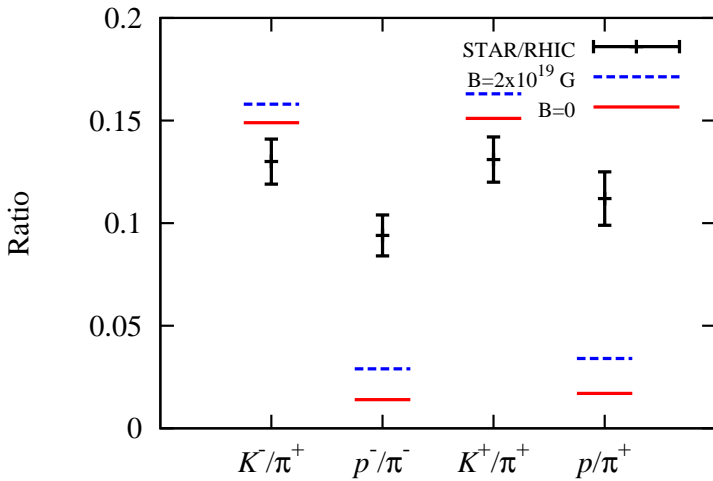
Figura 25: Au+Au (70-80%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$  GeV. (a) e (b) comportamento do  $\chi^2$ .

Tabela 9:  $d+Au$  (0-20%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  A GeV. Resultados obtidos para diferentes valores do campo magnético.

$B$ ( $\times 10^{19}$ G) $eB$ ( $m\pi^2$ )	0	0.1	0.5	1	2	5	10	STAR/ RHIC [86]
	0	0.3	1.5	3	6	15	30	
$\pi^-/\pi^+$	1.001 (0.81%)	1.001	1.002	1.002	<b>1.003 (1.01%)</b>	1.005	1.005	0.993 $\pm$ 0.035
$K^-/K^+$	0.991 (0.87%)	0.990	0.985	0.978	<b>0.973 (0.90%)</b>	0.968	0.974	0.982 $\pm$ 0.036
$\bar{p}/p$	0.830 (0.32%)	0.832	0.832	0.836	<b>0.852 (2.27%)</b>	0.847	0.848	0.833 $\pm$ 0.058
$K^-/\pi^-$	0.149 (14.8%)	0.149	0.154	0.156	<b>0.158 (21.8%)</b>	0.159	0.153	0.130 $\pm$ 0.011
$\bar{p}/\pi^-$	0.014 (85.3%)	0.014	0.019	0.024	<b>0.029 (69.6%)</b>	0.025	0.018	0.094 $\pm$ 0.010
$K^+/\pi^+$	0.151 (15.1%)	0.151	0.157	0.160	<b>0.163 (24.6%)</b>	0.164	0.158	0.131 $\pm$ 0.011
$p/\pi^+$	0.017 (85.1%)	0.017	0.023	0.029	<b>0.034 (70.0%)</b>	0.030	0.021	0.112 $\pm$ 0.013
$T$ (MeV)	118	119	131	144	<b>161</b>	179	180	167 $^{+12}_{-7}$
$\mu_B$ (MeV)	11	11	12	13	<b>13</b>	15	15	15.8 $\pm$ 6.3
$\mu_3$ (MeV)	-0.0558	-0.057	-0.0854	-0.124	<b>-0.176</b>	-0.292	-0.311	
$\mu_S$ (MeV)	0.586	0.612	1.05	1.63	<b>2.23</b>	2.92	2.41	
$\chi^2/ndf$	24.9	30.8	28.0	25.4	<b>23.7</b>	26.2	29.5	
$R$ (fm)	77.6	75.5	54.4	40.3	<b>29.9</b>	21.5	19.7	
$\rho_B$ ( $\times 10^{-3}$ fm $^{-3}$ )	0.201	0.218	0.584	1.44	<b>3.52</b>	9.53	12.4	
$\rho_\Delta$ ( $\times 10^{-3}$ fm $^{-3}$ )	0.0475	0.0517	0.152	0.408	<b>1.10</b>	3.32	4.66	
$\rho_M$ ( $\times 10^{-3}$ fm $^{-3}$ )	73.1	76.8	133	235	<b>475</b>	1173	2068	
$\rho_\pi$ ( $\times 10^{-3}$ fm $^{-3}$ )	53.3	55.8	92.4	157	<b>310</b>	795	1506	
$\epsilon$ (MeV/fm $^3$ )	40.7	42.9	79.9	151	<b>326</b>	761	1097	
$P$ (MeV/fm $^3$ )	8.42	8.89	16.8	32.2	<b>72.5</b>	191	318	
$s$ (MeV/fm $^3$ )	0.416	0.435	0.738	1.27	<b>2.47</b>	5.32	7.86	

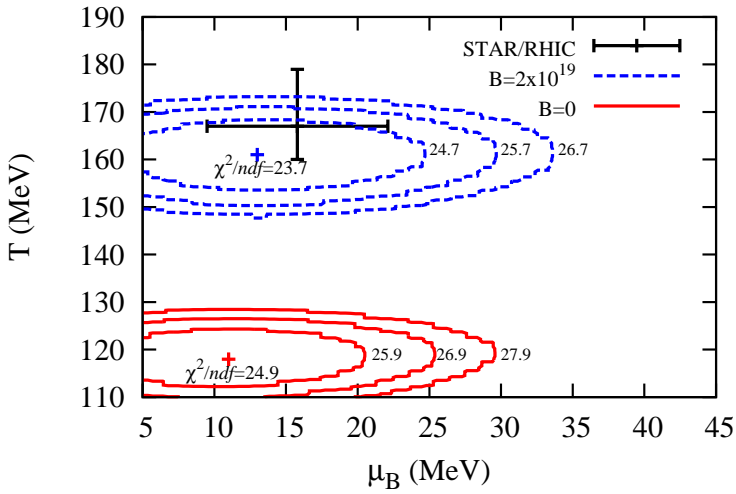


(a)

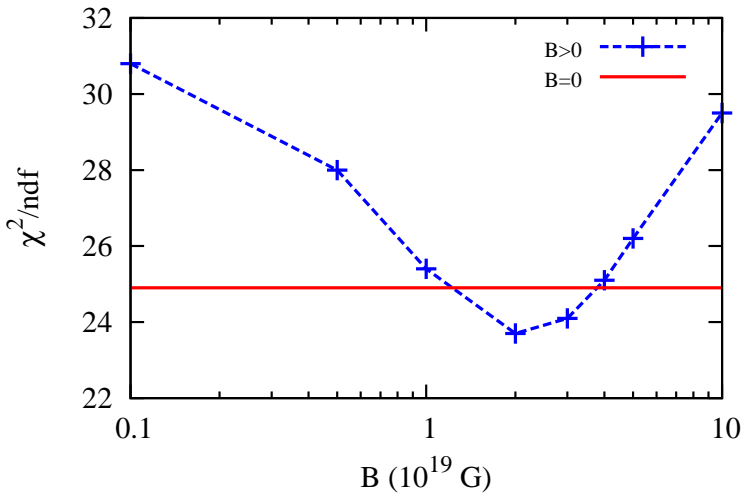


(b)

Figura 26:  $d+Au$  (0-20%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  A GeV. (a) razões de partícula/antipartícula. (b) razões mistas.



(a)

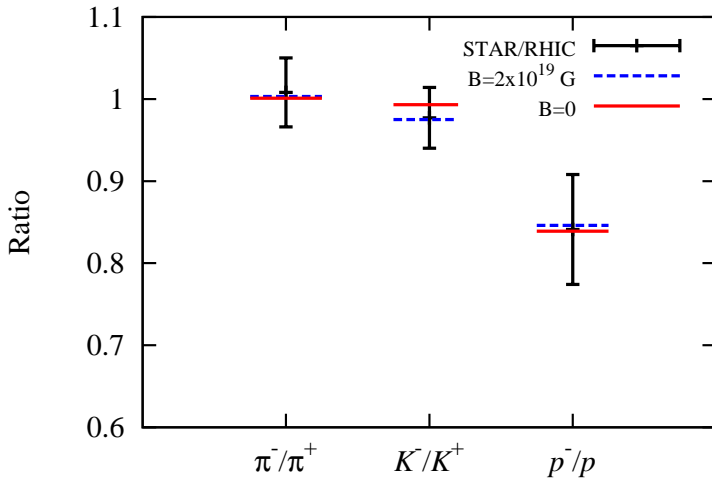


(b)

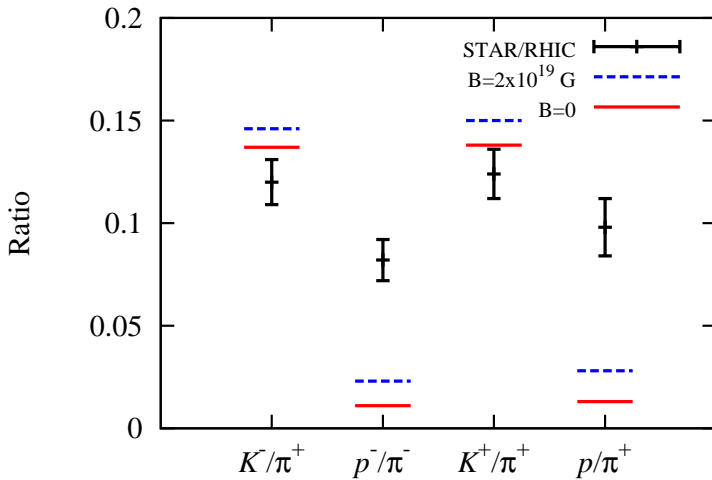
Figura 27:  $d$ +Au (0-20%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  A GeV. (a) e (b) comportamento do  $\chi^2$ .





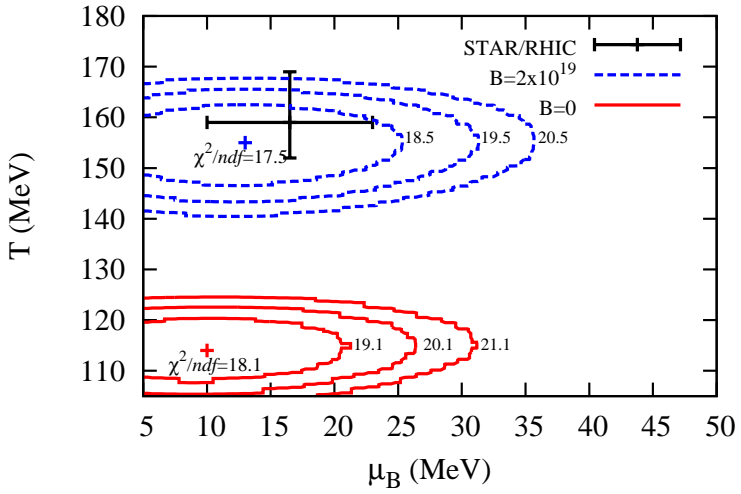


(a)

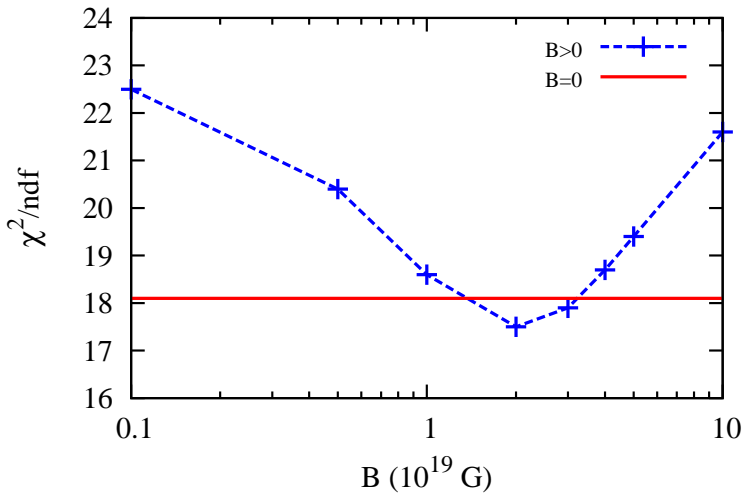


(b)

Figura 28:  $d+Au$  (40-100%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV. (a) razões de partícula/antipartícula. (b) razões mistas.



(a)



(b)

**Figura 29:**  $d+Au$  (40-100%) colisão a  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV. (a) e (b) comportamento do  $\chi^2$ .

Os resultados contidos nas Tabelas 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 e Figuras 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 e 29 apresentam uma pequena discrepância em relação aos resultados originalmente publicados e que podem ser vistos em [68]. Isto ocorre pois, durante a preparação final da tese, um pequeno erro foi encontrado, que não alterou em nada a análise qualitativa e, como pode ser observado, modificou apenas levemente os resultados quantitativos. Todos os cálculos foram refeitos e os resultados corretos são os presentes neste Capítulo.

## 4 CONCLUSÃO

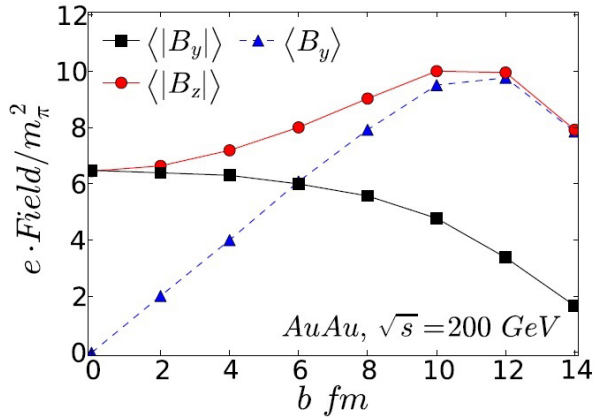
No Capítulo 1 foi apresentada uma breve introdução às colisões de íons pesados, a importância do seu estudo para um melhor entendimento do processo evolutivo do universo, os principais observáveis experimentais e as buscas que foram e têm sido feitas com o objetivo de encontrar uma confirmação experimental da existência do plasma de quarks e glúons.

No Capítulo 2 apresentamos uma solução para a equação de Rarita-Schwinger na presença de um campo magnético externo constante. A equação de RS descreve as partículas de spin  $3/2$  e sua solução é essencial para a correta descrição desse tipo de partícula.

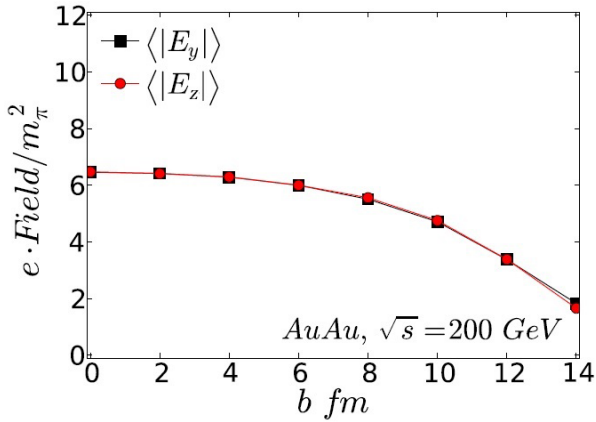
A equação de RS [33], quando acoplada a um campo magnético é inconsistente com a covariância de Lorentz [44] e suas frentes de onda apresentam modos de propagação não-causais [47, 48]. Estes dois graves problemas tornam a descrição das partículas de spin  $3/2$  sob efeito de um campo magnético externo algo não trivial. No Capítulo 2 revisitamos a equação Rarita-Schwinger incluindo a interação electromagnética através do esquema de acoplamento mínimo. Demonstramos que para uma dada prescrição do calibre, em que o campo magnético é transversal ao plano  $xy$  e constante, é possível evitar as inconsistências mencionadas. Este resultado conduz a soluções do tipo Dirac, que evitam consistentemente os problemas de não-causalidade permitindo a utilização de partículas de spin  $3/2$  sob efeito de campos magnéticos com o formalismo correto, algo que era impossível até então. Dos resultados apresentados no Capítulo 2 pode-se ver que a ocupação dos níveis de Landau por partículas de spin  $3/2$  é diferente da ocupação das partículas de spin  $1/2$ . Este fato tem grande influência nos estudos envolvendo equações de estado, densidade de partículas, amplitudes de espalhamento e outros cálculos de interesse para astrofísica nuclear e física de colisões de íons pesados.

No Capítulo 3 utilizamos o formalismo do Capítulo 2, em conjunto com as soluções já conhecidas das equações de Dirac, Klein-Gordon e Proca, para analisar os efeitos do campo magnético sobre as razões de partículas obtidas em uma colisão de íons pesados.

Com a possibilidade de descrever corretamente as partículas de spin  $3/2$  interagentes com um campo magnético externo, investigamos o efeito de tal campo nas colisões de íons pesados, através de um ajuste do desvio quadrático. No Capítulo 3 utilizando um modelo de gás livre, encontramos o valor do campo magnético que melhor descreve as razões de partículas observadas experimentalmente. Os resultados mostram que, mesmo para um



(a)



(b)

**Figura 30:** Valor médio absoluto do (a) campo magnético e (b) campo elétrico na origem em  $t=0$  como uma função do parâmetro de impacto para uma colisão Au+Au a  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV [79].

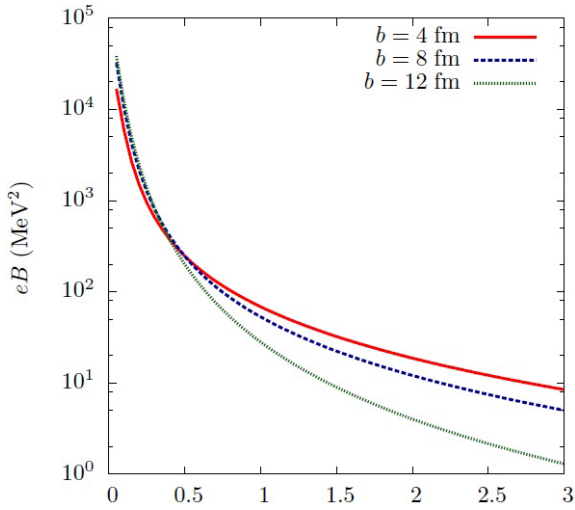
gás livre de férmions e bósons, um forte campo magnético desempenha um papel importante. A princípio, foram utilizados dados de colisões frontais (com menor parâmetro de impacto) para a realização do ajuste pois ainda não estávamos cientes dos resultados apresentados em [79, 80]. Na Figura 30-(a)

vê-se que os campos magnéticos esperados nas colisões periféricas são muito maiores do que os esperados nas colisões frontais, além disso, como mostrado na Figura 30-(b), o campo elétrico assume valores muito altos nas colisões frontais e diminui nas colisões periféricas, o que nos deixa mais confortáveis em relação ao fato de não termos considerado o campo elétrico nos cálculos. Para obter uma comparação mais realística em relação aos dados experimentais, fizemos nossas simulações utilizando os dados das colisões periféricas (maior parâmetro de impacto), mas a fim de complementar o nosso estudo, apresentamos os dois resultados no Capítulo 3. Para as colisões frontais, os  $\chi^2$  mínimos são geralmente menores, ao contrário do que seria esperado, acreditamos que isto ocorre devido as barras de erro maiores que acompanham os dados de centralidades reduzidas.

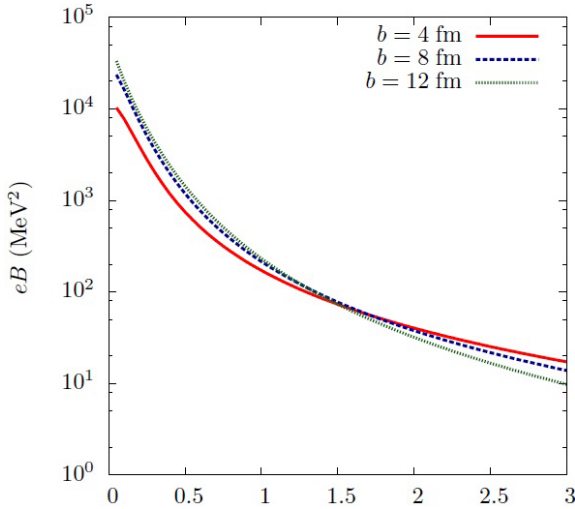
O modelo de gás livre de férmions e bósons dá uma boa descrição para as razões de partícula/antipartícula, mas não consegue descrever corretamente a relação entre os píons e as outras partículas. Isso ocorre porque o modelo produz píons em demasia, o que poderia ser resolvido adicionando algum tipo de interação a lagrangiana do modelo mas estava fora do escopo deste trabalho. Nossas figuras mostram que apesar de os desvios percentuais relativos nos rendimentos de partículas nem sempre melhorarem significativamente, o comportamento do  $\chi^2$  muda drasticamente com a adição do campo magnético, alterando sensivelmente as temperaturas e potenciais químicos obtidos.

Nossos cálculos superestimam o valor do campo magnético em uma colisão de íons pesados. Em [19] os autores mostraram que o campo magnético cai 4 ordens de magnitude desde o valor inicial de aproximadamente  $5 m_\pi^2$  até que o *freeze-out* seja atingido e as razões de partículas sejam estabilizadas (Figuras 31-(a) e (b)). Em [18] é realizado um cálculo da dependência temporal do campo magnético, incluindo os efeitos da condutividade elétrica do QGP e expansão longitudinal, o autor conclui que o campo magnético, cujo valor inicial é próximo de  $6 m_\pi^2$ , decai por um fator de 100 entre o tempo inicial e final ( $5 fm/c$ ). Em nossos cálculos encontramos um valor para o campo magnético muito próximo do que é esperado no início da colisão, no entanto, durante o *freeze-out*, momento em que as razões de partículas são obtidas, é esperado que os campos já tenham decaído bastante com relação a seu valor inicial e, portanto, não produzam um grande efeito nas razões de partículas.

Existem várias melhorias que podem ser feitas no modelo de forma a ajustar melhor os dados experimentais sem perder a generalidade ou recorrer a modelos de volume excludente. A primeira delas é a inclusão do campo



(a)



(b)

**Figura 31:** Campo magnético no eixo  $z$  (multiplicado pela carga do elétron) na origem em uma colisão Au+Au a energias de (a)  $\sqrt{s_{NN}} = 62$  GeV e (b)  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV [19].



elétrico. Apesar de ter sido uma das primeiras melhorias a serem consideradas para nosso modelo, a inclusão do campo elétrico se mostrou deveras complicada. Em primeiro lugar são necessárias as soluções das equações de Klein-Gordon, Dirac, Proca e Rarita-Schwinger na presença de um campo elétrico para que possamos obter as expressões para a energia e degenerescência das partículas, cálculos estes que envolvem um nível de dificuldade muito superior ao do caso do campo magnético. Após isso, é necessário considerar o caso dos campos elétrico e magnético concomitantemente. Neste ponto as duas situações mais simples são as de que os campos sejam paralelos ou perpendiculares. Estes resultados não estão totalmente feitos na literatura, ou pelo menos as expressões para energia e degenerescência não podem ser obtidos de forma clara.

A inclusão de outro quark ao modelo, o quark charmoso, também poderia causar alguma melhora nos resultados, sem apresentar tantas dificuldades de implementação, bastando apenas expandir o zoológico de partículas.

Como o modelo produz muitos píons outra forma de melhorar o ajuste dos dados seria através da adição de algum tipo de interação entre as partículas. Novamente, o problema neste caso é a solução das equações e obtenções das expressões para energia e degenerescência. Além disso, neste caso sairíamos da situação do gás livre, que era o nosso objetivo no princípio do trabalho, mesmo assim é um válido caminho a ser desenvolvido no futuro.

As duas últimas possibilidades de melhoria também apresentam dificuldades técnicas muito grandes devido aos cálculos envolvidos. Considerar a evolução temporal do campo magnético no processo e seu decaimento com o tempo seria de grande valia nos estudos desenvolvidos neste trabalho, porém, tal cálculo apresenta dificuldades imensas. Além da evolução temporal, a possibilidade de avaliar a transição de fase e seu efeito nas razões de partículas geradas, seria de grande interesse para o estudo das colisões de íons pesados e nos levaria a uma outra direção de pesquisa.



## APÊNDICE A – NOTAÇÃO E CONVENÇÕES

Índices latinos  $i, j, k, l, \dots$  correm sobre as três coordenadas espaciais 1, 2, 3 ou  $x, y, z$ .

Índices gregos  $\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$  correm sobre as quatro coordenadas do espaço-tempo 0, 1, 2, 3 ou  $t, x, y, z$ .

Índices repetidos são somados, a menos que indicado o contrário.

Tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Coordenadas contravariantes de um quadrivetor:

$$x^\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, x, y, z) = (t, \vec{x}). \quad (\text{A.2})$$

Coordenadas covariantes:

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) = (t, -x, -y, -z) = (t, -\vec{x}). \quad (\text{A.3})$$

Produto escalar entre quadrivetores:

$$A_\mu B^\mu = A_\mu g^{\mu\nu} B_\nu = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 = A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (\text{A.4})$$

Derivada contravariante e covariante:

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right), \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{e}_3 = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3). \quad (\text{A.6})$$

Quadridivergência:

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{\partial A_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \quad \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (\text{A.7})$$

Matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z). \quad (\text{A.9})$$

Matrizes de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}), \quad \gamma_\mu = (\gamma^0, -\vec{\gamma}), \quad (\text{A.11})$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma^5\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Definimos:

$$\vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \gamma^0. \quad (\text{A.16})$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu = \nu \\ i\gamma^\mu\gamma^\nu & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases}, \quad (\text{A.17})$$

$$\sigma^{0i} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{ij} = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Símbolo de Levi-Civita:

$$\varepsilon_{ijkl\dots} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k, l, \dots) \text{ é uma permutação par de } (1, 2, 3, 4, \dots) \\ -1 & \text{se } (i, j, k, l, \dots) \text{ é uma permutação ímpar de } (1, 2, 3, 4, \dots) \\ 0 & \text{se dois índices são iguais} \end{cases}. \quad (\text{A.19})$$

Utilizaremos o sistema natural de unidades  $\hbar = c = 1$ , definiremos também  $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ , assim, da relação  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$ , obtemos que a carga do elétron é  $e = \sqrt{4\pi\alpha}$  onde  $\alpha = \frac{1}{137}$ . O sistema de unidades definido desta forma é conhecido como Heaviside-Lorentz [81].

Devido as diferenças nas equações para o campo elétrico e magnético que existem entre sistemas SI e CGS, quando passamos ao sistema de unidades naturais a unidade do campo magnético passa a depender da definição utilizada para a carga do elétron, que pode ou não apresentar um fator de  $\sqrt{4\pi}$ . A maneira mais fácil de se evitar tais ambiguidades em relação a escolha de unidades é utilizarmos  $eB$  como padrão para medir a força do campo magnético, ao invés de apenas  $B$ .

Dadas as constantes:

$$\begin{aligned} \hbar &= 6.582 \times 10^{-22} \text{ MeV s}, \\ m_e &= 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}, \\ e &= 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} = \sqrt{4\pi\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Podemos converter as unidades do campo magnético  $B$ :

$$\begin{aligned} 1 \text{ T} &= 1 \frac{\text{kg}}{\text{sC}} = 1.95 \times 10^{-10} \text{ MeV}^2, \\ 1 \text{ G} &= 10^{-4} \text{ T} = 1.95 \times 10^{-14} \text{ MeV}^2, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

sendo a massa do pión  $m_\pi = 140 \text{ MeV}$ , temos

$$\begin{aligned} 1 \text{ eG} &= 5.91 \times 10^{-15} \text{ MeV}^2 = 3.01 \times 10^{-19} m_\pi^2 \\ 1 m_\pi^2 &= 1.96 \times 10^4 \text{ MeV}^2 = 3.32 \times 10^{18} \text{ eG}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$



## APÊNDICE B – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO

Nos Apêndices B, C e D vamos utilizar a técnica desenvolvida em [53] para obtermos as expressões para as *energias* e a *degenerescências* dos níveis de energia das partículas de spin 0, 1/2 e 1, respectivamente.

A densidade Lagrangiana de Klein-Gordon é dada por

$$\mathcal{L}^{KG} = (\partial^\mu \psi^*)(\partial_\mu \psi) - m^2 \psi^* \psi, \quad (\text{B.1})$$

onde o  $\psi$  é um campo escalar e  $\psi^*$  é seu complexo conjugado. Dada a equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad (\text{B.2})$$

aplicando (B.2) em (B.1), em relação ao campo  $\psi$ , obtemos a equação de movimento para uma partícula de spin 0

$$(\square + m^2)\psi = (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{\psi} = (\nabla^2 - m^2)\psi. \quad (\text{B.3})$$

Com o objetivo de tratar de modo unificado as soluções de energias positivas e negativas, definimos  $E$  como positivo e utilizamos o ansatz a seguir

$$\psi^{(\varepsilon)}(\vec{x}, t) = \phi^{(\varepsilon)}(\vec{x}) e^{-i\varepsilon Et} = C^{(\varepsilon)} e^{-i\varepsilon Et + i\varepsilon p_x x + i\varepsilon p_y y + i\varepsilon p_z z}, \quad (\text{B.4})$$

assim,  $\varepsilon = +(-)$  corresponde aos estados de energia positiva (negativa) e  $C^{(\varepsilon)}$  é uma constante.

Substituindo o ansatz (B.4) para  $\psi^{(\varepsilon)}$  na equação de movimento (B.3) obtemos

$$(-E^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2)C^{(\varepsilon)} = 0, \quad (\text{B.5})$$

e portanto

$$E = E(p_x, p_y, p_z) = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (\text{B.6})$$

Introduziremos o campo magnético através da prescrição do acoplamento mínimo

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (\text{B.7})$$

vamos escrever a carga como  $q = \varepsilon_q |q|$ , deste modo  $\varepsilon_q = +(-)$  corresponde a uma partícula de carga positiva (negativa) e considerar um campo magnético constante na direção  $z$  através do calibre:

$$\begin{aligned} A^\mu(\vec{x}, t) = \delta_{\mu y} x B \quad \rightarrow \quad A^0 = 0 \quad \text{e} \quad \vec{A}(\vec{x}) = (0, xB, 0) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = B \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Utilizando a notação definida em (B.4) o ansatz adequado para procurarmos as soluções de energias positivas e negativas na presença de um campo magnético na direção  $z$ , pode ser escritos na forma

$$\psi^{(\varepsilon)}(\vec{x}, t) = \phi^{(\varepsilon)}(\vec{x}) e^{-i\varepsilon E t} = f^{(\varepsilon)}(x) e^{-i\varepsilon E t + i\varepsilon p_y y + i\varepsilon p_z z}. \quad (\text{B.9})$$

Determinaremos  $f^{(\varepsilon)}$  substituindo o novo  $\psi^{(\varepsilon)}$  (B.9) na equação de movimento (B.3)

$$[E^2 - \hat{p}_x^2 - (\varepsilon p_y - \varepsilon_q |q| B x)^2 - p_z^2 - m^2] f^{(\varepsilon)} = 0, \quad (\text{B.10})$$

por conveniência defini-se a variável

$$\xi = (|q|B)^{1/2} \left( x - \frac{\varepsilon_q \varepsilon p_y}{|q|B} \right), \quad (\text{B.11})$$

com isso

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{E^2 - p_z^2 - m^2}{|q|B} - \xi^2 \right) f^{(\varepsilon)} = 0, \quad (\text{B.12})$$

que é a equação do oscilador harmônico quântico unidimensional

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \lambda - \xi^2 \right) v_n(\xi) = 0, \quad (\text{B.13})$$

com

$$v_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}, \quad (\text{B.14})$$

onde  $H_n(\xi)$  são os polinômios de Hermite [91] cujos autovalores são

$$\lambda = 2n + 1, \quad (\text{B.15})$$



e portanto

$$E = E(p_z, n) = \sqrt{p_z^2 + m^2 + p_n^2} = \sqrt{p_z^2 + m^2 + (2n + 1)|q|B}. \quad (\text{B.16})$$

Neste caso, a expressão adequada para  $f^{(\varepsilon)}$  será dada por

$$f^{(\varepsilon)} = C^{(\varepsilon)} v_n(\xi), \quad (\text{B.17})$$

onde  $C^{(\varepsilon)}$  é uma constante.



## APÊNDICE C – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO

Continuando o que foi começado no Apêndice B, iremos agora resolver a equação de Dirac, que descreve partículas de spin 1/2, afim de obter novamente as expressões para a *energia* e para a *degenerescencia* dos níveis de energia.

A densidade Lagrangiana de Dirac é dada por

$$\mathcal{L}^D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (\text{C.1})$$

onde  $\psi$  é um campo espinorial e  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ . Aplicando a equação de Euler-Lagrange (B.2) em (C.1) obtemos a equação de movimento para uma partícula de spin 1/2

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad \text{ou} \quad i\psi = (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m\beta)\psi, \quad (\text{C.2})$$

onde  $\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}$  e  $\beta = \gamma^0$  (vide Apêndice A). Assumindo o ansatz (B.4) para cada uma das componente de  $\psi^{(\varepsilon)}$  e substituindo na equação de movimento (C.2)

$$\left[ \begin{pmatrix} i\partial_t \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -i\partial_t \mathbf{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot \hat{p} \\ -\sigma \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m\mathbf{I} & 0 \\ 0 & m\mathbf{I} \end{pmatrix} \right] \psi^{(\varepsilon)} = 0, \quad (\text{C.3})$$

a relação anterior pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} (\varepsilon E - m)\mathbf{I} & -(\sigma_x \varepsilon p_x + \sigma_y \varepsilon p_y + \sigma_z \varepsilon p_z) \\ \sigma_x \varepsilon p_x + \sigma_y \varepsilon p_y + \sigma_z \varepsilon p_z & -(\varepsilon E + m)\mathbf{I} \end{bmatrix} C^{(\varepsilon)} = 0, \quad (\text{C.4})$$

onde fazendo a substituição

$$\sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z = \begin{pmatrix} \varepsilon p_z & \varepsilon p_x - i\varepsilon p_y \\ \varepsilon p_x + i\varepsilon p_y & -\varepsilon p_z \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

obtemos

$$\begin{pmatrix} \varepsilon E - m & 0 & -\varepsilon p_z & -(\varepsilon p_x - i\varepsilon p_y) \\ 0 & \varepsilon E - m & -(\varepsilon p_x + i\varepsilon p_y) & \varepsilon p_z \\ \varepsilon p_z & \varepsilon p_x - i\varepsilon p_y & -(\varepsilon E + m) & 0 \\ \varepsilon p_x + i\varepsilon p_y & -\varepsilon p_z & 0 & -(\varepsilon E + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(\varepsilon)} \\ C_2^{(\varepsilon)} \\ C_3^{(\varepsilon)} \\ C_4^{(\varepsilon)} \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{C.6})$$

Para obtermos soluções não triviais a matriz não pode ser inversível e, portanto, o seu determinante deve ser nulo. Para o cálculo deste determinantes vamos utilizar a propriedade de decomposição de uma matriz composta por blocos de submatrizes

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}, \quad (\text{C.7})$$

portanto

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B). \quad (\text{C.8})$$

Utilizando estes resultados na matriz dos coeficientes (C.6) obtemos

$$\det \begin{pmatrix} \varepsilon E - m & 0 \\ 0 & \varepsilon E - m \end{pmatrix} \det \left[ \begin{pmatrix} -(\varepsilon E + m) & 0 \\ 0 & -(\varepsilon E + m) \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon E - m} \begin{pmatrix} \varepsilon p_z & (\varepsilon p_x - i\varepsilon p_y) \\ (\varepsilon p_x + i\varepsilon p_y) & -\varepsilon p_z \end{pmatrix} \right]^2 = 0, \quad (\text{C.9})$$

a solução da equação acima resulta em

$$E = E(p_x, p_y, p_z) = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (\text{C.10})$$

A equação matricial (C.6) nos leva a um conjunto de equações

algébricas para  $C_i^{(\varepsilon)}$

$$(\varepsilon E - m)C_1^{(\varepsilon)} - \varepsilon p_z C_3^{(\varepsilon)} - (\varepsilon p_x - i\varepsilon p_y)C_4^{(\varepsilon)} = 0,$$

$$(\varepsilon E - m)C_2^{(\varepsilon)} - (\varepsilon p_x + i\varepsilon p_y)C_3^{(\varepsilon)} + \varepsilon p_z C_4^{(\varepsilon)} = 0,$$

$$(\varepsilon E + m)C_3^{(\varepsilon)} - \varepsilon p_z C_1^{(\varepsilon)} - (\varepsilon p_x - i\varepsilon p_y)C_2^{(\varepsilon)} = 0,$$

$$(\varepsilon E + m)C_4^{(\varepsilon)} - (\varepsilon p_x + i\varepsilon p_y)C_1^{(\varepsilon)} + \varepsilon p_z C_2^{(\varepsilon)} = 0.$$

Das duas últimas expressões obtemos

$$C_3^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon E + m} \left[ \varepsilon p_z C_1^{(\varepsilon)} + (\varepsilon p_x - i\varepsilon p_y)C_2^{(\varepsilon)} \right], \quad (\text{C.11})$$

$$C_4^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon E + m} \left[ (\varepsilon p_x + i\varepsilon p_y)C_1^{(\varepsilon)} - \varepsilon p_z C_2^{(\varepsilon)} \right], \quad (\text{C.12})$$

que podem ser reescritas como

$$\begin{pmatrix} C_1^{(\varepsilon)} \\ C_2^{(\varepsilon)} \\ C_3^{(\varepsilon)} \\ C_4^{(\varepsilon)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon p_z}{\varepsilon E + m} \\ \frac{\varepsilon p_x + i\varepsilon p_y}{\varepsilon E + m} \end{pmatrix} C_1^{(\varepsilon)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\varepsilon p_x - i\varepsilon p_y}{\varepsilon E + m} \\ -\frac{\varepsilon p_z}{\varepsilon E + m} \end{pmatrix} C_2^{(\varepsilon)}. \quad (\text{C.13})$$

Os estados de energia positiva ou negativa dependem de duas constantes independentes e, portanto, são duplamente degenerados. Por exemplo, dentre as várias possibilidades poderíamos escolher ( $C_1^{(\varepsilon)} = 1$  e  $C_2^{(\varepsilon)} = 0$ ) ou ( $C_1^{(\varepsilon)} = 0$  e  $C_2^{(\varepsilon)} = 1$ ).

Introduzindo o campo magnético através do acoplamento mínimo (B.7) tomando o calibre (B.8), assumindo o ansatz (B.9) para cada uma das componentes de  $\psi^{(\varepsilon)}$  e substituindo diretamente na equação de movimento (B.2), obtemos

$$\left\{ \begin{pmatrix} i\partial_t \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -i\partial_t \mathbf{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot \hat{p} + \varepsilon_q |q| Bx \sigma_y \\ -(\sigma \cdot \hat{p} + \varepsilon_q |q| Bx \sigma_y) & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m \mathbf{I} & 0 \\ 0 & m \mathbf{I} \end{pmatrix} \right\} \psi^{(\varepsilon)} = 0. \quad (\text{C.14})$$

A relação acima pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} (\varepsilon E - m) \mathbf{I} & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \varepsilon_q |q| Bx \boldsymbol{\sigma}_y \\ -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \varepsilon_q |q| Bx \boldsymbol{\sigma}_y) & -(\varepsilon E + m) \mathbf{I} \end{bmatrix} f^{(\varepsilon)} = 0, \quad (\text{C.15})$$

substituindo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \varepsilon_q |q| Bx \boldsymbol{\sigma}_y &= \sigma_x \hat{p}_x - \sigma_y \varepsilon p_y - \sigma_z \varepsilon p_z + \varepsilon_q |q| Bx \boldsymbol{\sigma}_y \\ &= \begin{pmatrix} -\varepsilon p_z & i(\varepsilon p_y - \varepsilon_q |q| Bx + \frac{\partial}{\partial x}) \\ i(-\varepsilon p_y + \varepsilon_q |q| Bx + \frac{\partial}{\partial x}) & \varepsilon p_z \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

obtemos

$$\begin{pmatrix} \varepsilon E - m & 0 & -\varepsilon p_z & \hat{O}_1 \\ 0 & \varepsilon E - m & \hat{O}_2 & \varepsilon p_z \\ \varepsilon p_z & -\hat{O}_1 & -(\varepsilon E + m) & 0 \\ -\hat{O}_2 & -\varepsilon p_z & 0 & -(\varepsilon E + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^{(\varepsilon)} \\ f_2^{(\varepsilon)} \\ f_3^{(\varepsilon)} \\ f_4^{(\varepsilon)} \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{C.17})$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \hat{O}_1 &= i(\varepsilon p_y - \varepsilon_q |q| Bx + \frac{\partial}{\partial x}), \\ \hat{O}_2 &= i(-\varepsilon p_y + \varepsilon_q |q| Bx + \frac{\partial}{\partial x}), \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

e utilizando a relação (B.11) obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{O}_1 &= i(|q|B)^{1/2} (-\varepsilon_q \xi + \frac{\partial}{\partial \xi}), \\ \hat{O}_2 &= i(|q|B)^{1/2} (\varepsilon_q \xi + \frac{\partial}{\partial \xi}). \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Das propriedades da função de onda do oscilador harmônico unidimensional pode-se escrever

$$\begin{aligned} \left( -\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) v_n(\xi) &= -\sqrt{2(n+1)} v_{n+1}(\xi), \\ \left( \xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) v_n(\xi) &= \sqrt{2n} v_{n-1}(\xi), \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

onde

$$v_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}. \quad (\text{C.21})$$

Neste ponto devemos tratar separadamente os casos de carga positiva e negativa. Para o caso de carga positiva  $\varepsilon_q = 1$ , o ansatz adequado para  $f^{(\varepsilon)}$  será dado por

$$f^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} f_1^{(\varepsilon)} \\ f_2^{(\varepsilon)} \\ f_3^{(\varepsilon)} \\ f_4^{(\varepsilon)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{(\varepsilon)} v_n(\xi) \\ C_2^{(\varepsilon)} v_{n-1}(\xi) \\ C_3^{(\varepsilon)} v_n(\xi) \\ C_4^{(\varepsilon)} v_{n-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.22})$$

onde  $C_i^{(\varepsilon)}$  são constantes. No caso de carga negativa  $\varepsilon_q = -1$

$$f^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} f_1^{(\varepsilon)} \\ f_2^{(\varepsilon)} \\ f_3^{(\varepsilon)} \\ f_4^{(\varepsilon)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{(\varepsilon)} v_{n-1}(\xi) \\ C_2^{(\varepsilon)} v_n(\xi) \\ C_3^{(\varepsilon)} v_{n-1}(\xi) \\ C_4^{(\varepsilon)} v_n(\xi) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.23})$$

Substituindo ansatz para  $f^{(\varepsilon)}$  (C.22) e (C.23) na Equação (C.17) obtemos a seguinte relação entre os coeficientes

$$\begin{pmatrix} \varepsilon E - m & 0 & -\varepsilon p_z & -i\varepsilon_q p_n \\ 0 & \varepsilon E - m & i\varepsilon_q p_n & \varepsilon p_z \\ \varepsilon p_z & i\varepsilon_q p_n & -(\varepsilon E + m) & 0 \\ -i\varepsilon_q p_n & -\varepsilon p_z & 0 & -(\varepsilon E + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(\varepsilon)} \\ C_2^{(\varepsilon)} \\ C_3^{(\varepsilon)} \\ C_4^{(\varepsilon)} \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{C.24})$$

onde definimos  $p_n = \sqrt{2n|q|B}$ .

Para obtermos soluções não triviais a matriz não pode ser inversível e, novamente, o seu determinante deve ser nulo. Utilizando a propriedade (C.7) obtemos

$$\det \begin{pmatrix} \varepsilon E - m & 0 \\ 0 & \varepsilon E - m \end{pmatrix} \det \left[ \begin{pmatrix} -(\varepsilon E + m) & 0 \\ 0 & -(\varepsilon E + m) \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon E - m} \begin{pmatrix} \varepsilon p_z & i\varepsilon_q p_n \\ -i\varepsilon_q p_n & -\varepsilon p_z \end{pmatrix}^2 \right] = 0, \quad (\text{C.25})$$

a solução da Equação (C.25) resulta em

$$E = E(p_z, n) = \sqrt{p_z^2 + m^2 + p_n^2} = \sqrt{p_z^2 + m^2 + 2n|q|B}. \quad (\text{C.26})$$

A equação matricial (C.24) nos leva a um conjunto de equações algébricas para  $C_i^{(\varepsilon)}$

$$\begin{aligned} (\varepsilon E - m)C_1^{(\varepsilon)} - \varepsilon p_z C_3^{(\varepsilon)} - i\varepsilon_q p_n C_4^{(\varepsilon)} &= 0, \\ (\varepsilon E - m)C_2^{(\varepsilon)} + i\varepsilon_q p_n C_3^{(\varepsilon)} + \varepsilon p_z C_4^{(\varepsilon)} &= 0, \\ (\varepsilon E + m)C_3^{(\varepsilon)} - \varepsilon p_z C_1^{(\varepsilon)} - i\varepsilon_q p_n C_2^{(\varepsilon)} &= 0, \\ (\varepsilon E + m)C_4^{(\varepsilon)} + i\varepsilon_q p_n C_1^{(\varepsilon)} + \varepsilon p_z C_2^{(\varepsilon)} &= 0. \end{aligned}$$

Das duas últimas expressões obtemos

$$C_3^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon E + m} \left( \varepsilon p_z C_1^{(\varepsilon)} + i\varepsilon_q p_n C_2^{(\varepsilon)} \right), \quad (\text{C.27})$$

$$C_4^{(\varepsilon)} = -\frac{1}{\varepsilon E + m} \left( i\varepsilon_q p_n C_1^{(\varepsilon)} + \varepsilon p_z C_2^{(\varepsilon)} \right), \quad (\text{C.28})$$

que podem ser reescritas como

$$\begin{pmatrix} C_1^{(\varepsilon)} \\ C_2^{(\varepsilon)} \\ C_3^{(\varepsilon)} \\ C_4^{(\varepsilon)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon p_z}{\varepsilon E + m} \\ -\frac{i\varepsilon_q p_n}{\varepsilon E + m} \end{pmatrix} C_1^{(\varepsilon)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{i\varepsilon_q p_n}{\varepsilon E + m} \\ -\frac{\varepsilon p_z}{\varepsilon E + m} \end{pmatrix} C_2^{(\varepsilon)}. \quad (\text{C.29})$$

Os estados de energia positiva ou negativa dependem de duas constantes independentes e, portanto, são duplamente degenerados. Por exemplo, dentre as várias possibilidades poderíamos escolher ( $C_1^{(\varepsilon)} = 1$  e  $C_2^{(\varepsilon)} = 0$ ) ou ( $C_1^{(\varepsilon)} = 0$  e  $C_2^{(\varepsilon)} = 1$ ). O estado fundamental não é degenerado, pois devido as Equações (C.22) e (C.23), no caso de carga  $q$  positiva, quando  $n = 0$ , os coeficientes  $C_2^{(\varepsilon)} = C_4^{(\varepsilon)} = 0$ , resultando em um único estado. No caso de carga  $q$  negativa, os coeficientes  $C_1^{(\varepsilon)} = C_3^{(\varepsilon)} = 0$ , quando  $n = 0$ , resultando também em um único estado.



A degenerescência pode ser associada a um rótulo de spin

$$n = l + (-\varepsilon_q s + \frac{1}{2}), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad s = \pm \frac{1}{2}, \quad (\text{C.30})$$

note que para o caso de carga positiva  $s = -\frac{1}{2}$  ( $s = \frac{1}{2}$ ) corresponde a  $C_1^{(\varepsilon)} = 1$  e  $C_2^{(\varepsilon)} = 0$  ( $C_1^{(\varepsilon)} = 0$  e  $C_2^{(\varepsilon)} = 1$ ), ocorrendo o oposto no caso de carga negativa.



## APÊNDICE D – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE PROCA NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO

Dando prosseguimento aos Apêndices B e C iremos agora resolver a equação de Proca, que descreve uma partícula de spin 1.

A densidade Lagrangiana de Proca é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^P &= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^*F^{\mu\nu} + m^2\psi_\mu^*\psi^\mu \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu\psi_\nu^* - \partial_\nu\psi_\mu^*)(\partial^\mu\psi^\nu - \partial^\nu\psi^\mu) + m^2\psi_\mu^*\psi^\mu,\end{aligned}\tag{D.1}$$

onde  $\psi_\mu$  é um campo vetor-escalar.

Aplicando a equação de Euler-Lagrange (B.2) em (D.1) obtemos a equação de movimento para uma partícula de spin 1

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2\psi^\mu &= \partial_\mu(\partial^\mu\psi^\nu - \partial^\nu\psi^\mu) + m^2\psi^\mu \\ &= \square\psi^\mu - \partial^\nu(\partial_\mu\psi^\mu) + m^2\psi^\mu = 0,\end{aligned}\tag{D.2}$$

ou

$$\square\psi^\mu + m^2\psi^\mu = 0 \quad \text{com} \quad \partial_\mu\psi^\mu = 0.\tag{D.3}$$

Devido às equações de movimento, cada componente do campo  $\psi_\mu$  deve satisfazer uma equação do tipo Klein-Gordon. Da restrição ( $\partial^\mu\psi_\mu = 0$ ) obtemos

$$-EC_0^{(\epsilon)} + p_x C_x^{(\epsilon)} + p_y C_y^{(\epsilon)} + p_z C_z^{(\epsilon)} = 0.\tag{D.4}$$

Podemos ver que das 4 componentes de  $\psi_\mu$ , apenas 3 são independentes, dizemos então que o campo  $\psi_\mu$  tem três polarizações, logo, uma partícula que obedece a equação de Proca tem estados de energia com 3 polarizações distintas (spin 1).

Introduzindo o campo magnético através do acoplamento mínimo (B.7), assumindo o calibre (B.8) e utilizando a restrição ( $D^\mu\psi_\mu = 0$ ) obtemos

$$\begin{aligned}-i\epsilon E f_0^{(\epsilon)} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_x^{(\epsilon)} + i(\epsilon p_y - \epsilon_q |q| Bx) f_y^{(\epsilon)} + i\epsilon p_z f_z^{(\epsilon)} &= 0, \\ -i\epsilon E f_0^{(\epsilon)} - i\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) f_x^{(\epsilon)} + i(\epsilon p_y - \epsilon_q |q| Bx) f_y^{(\epsilon)} + i\epsilon p_z f_z^{(\epsilon)} &= 0.\end{aligned}\tag{D.5}$$

Utilizando a definição (C.19) temos

$$\begin{aligned} -i\epsilon E f_0^{(\epsilon)} - i \left( \frac{\hat{O}_1 + \hat{O}_2}{2} \right) f_x^{(\epsilon)} + \left( \frac{\hat{O}_1 - \hat{O}_2}{2} \right) f_y^{(\epsilon)} + i\epsilon p_z f_z^{(\epsilon)} &= 0, \\ -i\epsilon E f_0^{(\epsilon)} + \frac{\hat{O}_1}{2} (-if_x^{(\epsilon)} + f_y^{(\epsilon)}) - \frac{\hat{O}_2}{2} (if_x^{(\epsilon)} + f_y^{(\epsilon)}) + i\epsilon p_z f_z^{(\epsilon)} &= 0. \end{aligned} \quad (D.6)$$

Da relação (C.20) vem

$$\begin{aligned} \hat{O}_1 v_n &= \begin{cases} -ip_{n+1} v_{n+1} & \text{para } \epsilon_q = 1 \\ ip_n v_{n-1} & \text{para } \epsilon_q = -1 \end{cases}, \\ \hat{O}_2 v_n &= \begin{cases} ip_n v_{n-1} & \text{para } \epsilon_q = 1 \\ -ip_{n+1} v_{n+1} & \text{para } \epsilon_q = -1 \end{cases}, \end{aligned} \quad (D.7)$$

onde  $p_n = \sqrt{2n|q|B}$ . Utilizando (D.7) em (D.6) obtemos para  $\epsilon_q = 1$

$$\begin{aligned} -\epsilon E C_0^{(\epsilon)} v_n(\xi) + \frac{p_{n+1}}{2} (iC_x^{(\epsilon)} - C_y^{(\epsilon)}) v_{n+1}(\xi) \\ + \frac{p_n}{2} (-iC_x^{(\epsilon)} - C_y^{(\epsilon)}) v_{n-1}(\xi) + \epsilon p_z C_z^{(\epsilon)} v_n(\xi) &= 0, \end{aligned} \quad (D.8)$$

e para  $\epsilon_q = -1$  temos

$$\begin{aligned} -\epsilon E C_0^{(\epsilon)} v_n(\xi) + \frac{p_n}{2} (iC_x^{(\epsilon)} - C_y^{(\epsilon)}) v_{n-1}(\xi) \\ + \frac{p_{n+1}}{2} (-iC_x^{(\epsilon)} - C_y^{(\epsilon)}) v_{n+1}(\xi) + \epsilon p_z C_z^{(\epsilon)} v_n(\xi) &= 0. \end{aligned} \quad (D.9)$$

Generalizando, obtemos uma única equação

$$\begin{aligned} -\epsilon E C_0^{(\epsilon)} v_n(\xi) + \frac{p_{n+1}}{2} (i\epsilon_q C_x^{(\epsilon)} - C_y^{(\epsilon)}) v_{n+1}(\xi) \\ + \frac{p_n}{2} (-i\epsilon_q C_x^{(\epsilon)} - C_y^{(\epsilon)}) v_{n-1}(\xi) + \epsilon p_z C_z^{(\epsilon)} v_n(\xi) &= 0. \end{aligned} \quad (D.10)$$

Portanto novamente temos 3 polarizações possíveis, exceto para  $n = 0$ , quando teremos de impor  $i\epsilon_q C_x^{(\epsilon)} = C_y^{(\epsilon)}$ , o que nos dá uma equação a mais e portanto uma polarização a menos, assim, para  $n = 0$  teremos apenas 2 polarizações possíveis.

A degenerescência dos níveis de energia também pode ser associada a

um rótulo de spin

$$n = l - \varepsilon_q s, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 0, \pm 1. \quad (\text{D.11})$$



## APÊNDICE E – MÉTODO DA SEGUNDA QUANTIZAÇÃO

No método da segunda quantização ou quantização canônica [88, 89] impomos aos campos<sup>1</sup> e seus momentos generalizados as relações de anticomutação (+), para os férmions, e comutação (-), para os bósons, em tempos iguais, que seguem

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_\alpha(\vec{x}', t)]_\pm &= i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}', t)]_\pm &= [\hat{\Pi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_\alpha(\vec{x}', t)]_\pm = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

onde o índice  $\alpha$  refere-se a partícula em questão (férmions (+) e bósons (-)) e  $\hat{\Pi}$  é o momento generalizado definido por

$$\hat{\Pi}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial \partial^0 \hat{\Pi}_\alpha} = i\hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\vec{x}, t). \quad (\text{E.2})$$

Fazendo uso da última relação (E.2) em (E.1) obtemos

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\vec{x}', t)]_\pm &= \delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta_\alpha, \\ [\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}', t)]_\pm &= [\hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\vec{x}', t)]_\pm = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Agora temos condições de quantizar os campos encontrados nas densidades Hamiltonianas dos férmions (+) e bósons (-), através da técnica de segunda quantização:

$$\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t) = \sum_r \left( \hat{a}_r^\alpha \phi_{\alpha,r}^{(+)}(\vec{x}) e^{-iE_r^\alpha t} \pm \hat{b}_r^{\alpha\dagger} \phi_{\alpha,r}^{(-)}(\vec{x}) e^{iE_r^\alpha t} \right), \quad (\text{E.4})$$

$$\hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\vec{x}, t) = \sum_r \left( \hat{a}_r^{\alpha\dagger} \phi_{\alpha,r}^{(+)\dagger}(\vec{x}) e^{iE_r^\alpha t} \pm \hat{b}_r^\alpha \phi_{\alpha,r}^{(-)\dagger}(\vec{x}) e^{-iE_r^\alpha t} \right), \quad (\text{E.5})$$

onde  $\alpha = f, b$  e a soma em  $r$  é sobre todos números quânticos. Para o caso em que a partícula  $\alpha$  não tem carga ( $q = 0$ ) temos  $r = s, p_x, p_y, p_z$ , e para o caso em que a partícula  $\alpha$  tem carga ( $q \neq 0$ ) temos  $r = s, n, p_y, p_z$  e as energias satisfazem as relações

$$H_\alpha \phi_{\alpha,r}^{(\pm)}(\vec{x}) = \pm E_r^\alpha \phi_{\alpha,r}^{(\pm)}(\vec{x}) \quad (\text{E.6})$$

<sup>1</sup>Aos campos indica que cada uma das componentes de  $\Psi$  deve obedecer as relações de anticomutação/comutação.

Substituindo os campos (E.4) na relação de anticomutação/comutação (E.3), obtemos

$$\begin{aligned}
 [\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\vec{x}', t)]_\pm &= \sum_r \sum_{r'} \left( \phi_{\alpha,r}^{(+)}(\vec{x}) \phi_{\alpha,r'}^{(+)\dagger}(\vec{x}') [\hat{a}_r^\alpha, \hat{a}_{r'}^{\alpha\dagger}]_\pm e^{-i(E_r^\alpha - E_{r'}^\alpha)t} \right. \\
 &\quad \pm \phi_{\alpha,r}^{(+)}(\vec{x}) \phi_{\alpha,r'}^{(-)\dagger}(\vec{x}') [\hat{a}_r^\alpha, \hat{b}_{r'}^\alpha]_\pm e^{-i(E_r^\alpha + E_{r'}^\alpha)t} \\
 &\quad \pm \phi_{\alpha,r}^{(-)}(\vec{x}) \phi_{\alpha,r'}^{(+)\dagger}(\vec{x}') [\hat{b}_r^{\alpha\dagger}, \hat{a}_{r'}^{\alpha\dagger}]_\pm e^{i(E_r^\alpha + E_{r'}^\alpha)t} \\
 &\quad \left. + \phi_{\alpha,r}^{(-)}(\vec{x}) \phi_{\alpha,r'}^{(-)\dagger}(\vec{x}') [\hat{b}_r^{\alpha\dagger}, \hat{b}_{r'}^\alpha]_\pm e^{i(E_r^\alpha - E_{r'}^\alpha)t} \right). \tag{E.7}
 \end{aligned}$$

Para implementar o método da quantização canônica devemos impor aos operadores de criação (aniquilação) de partículas,  $\hat{a}_r^{\alpha\dagger}$  ( $\hat{a}_r^\alpha$ ), e aos operadores de criação (aniquilação) de antipartículas,  $\hat{b}_r^{\alpha\dagger}$  ( $\hat{b}_r^\alpha$ ), as relações de anticomutação/comutação que seguem

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}_r^\alpha, \hat{a}_{r'}^{\alpha\dagger}]_\pm &= [\hat{b}_r^\alpha, \hat{b}_{r'}^{\alpha\dagger}]_\pm = \delta_{rr'}, \\
 [\hat{a}_r^\alpha, \hat{a}_{r'}^\alpha]_\pm &= [\hat{b}_r^\alpha, \hat{b}_{r'}^\alpha]_\pm = 0. \tag{E.8}
 \end{aligned}$$

Substituindo as últimas relações de anticomutação/comutação (E.8) na equação (E.7) obtemos

$$\begin{aligned}
 [\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\vec{x}', t)]_\pm &= \sum_r \left( \phi_{\alpha,r}^{(+)}(\vec{x}) \phi_{\alpha,r}^{(+)\dagger}(\vec{x}') + \phi_{\alpha,r}^{(-)}(\vec{x}) \phi_{\alpha,r}^{(-)\dagger}(\vec{x}') \right) \\
 &= \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \tag{E.9}
 \end{aligned}$$

onde utilizamos a propriedade de completude da base de estados para obter a última igualdade.

A Hamiltoniana dos férmions (+) e bósons (-) em segunda



quantização fica

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_\alpha^\pm &= \int d^3x \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}, t) H_\alpha \psi_\alpha(\vec{x}, t) \\
 &= \int d^3x \sum_r \left( \hat{a}_r^{\alpha\dagger} \phi_{\alpha,r}^{(+)\dagger}(\vec{x}) e^{iE_r^\alpha t} \pm \hat{b}_r^\alpha \phi_{\alpha,r}^{(-)\dagger}(\vec{x}) e^{-iE_r^\alpha t} \right) H_\alpha \\
 &\quad \times \sum_{r'} \left( \hat{a}_{r'}^\alpha \phi_{\alpha,r'}^{(+)}(\vec{x}) e^{-iE_{r'}^\alpha t} \pm \hat{b}_{r'}^{\alpha\dagger} \phi_{\alpha,r'}^{(-)}(\vec{x}) e^{iE_{r'}^\alpha t} \right) \\
 &= \sum_{rr'} \left( E_{r'}^\alpha \hat{a}_r^{\alpha\dagger} \hat{a}_{r'}^\alpha \int d^3x \phi_{\alpha,r}^{(+)\dagger}(\vec{x}) \phi_{\alpha,r'}^{(+)}(\vec{x}) e^{i(E_r^\alpha - E_{r'}^\alpha)t} \right. \\
 &\quad \mp E_{r'}^\alpha \hat{a}_r^{\alpha\dagger} \hat{b}_{r'}^{\alpha\dagger} \int d^3x \phi_{\alpha,r}^{(+)\dagger}(\vec{x}) \phi_{\alpha,r'}^{(-)}(\vec{x}) e^{i(E_r^\alpha + E_{r'}^\alpha)t} \\
 &\quad \pm E_{r'}^\alpha \hat{b}_r^\alpha \hat{a}_{r'}^\alpha \int d^3x \phi_{\alpha,r}^{(-)\dagger}(\vec{x}) \phi_{\alpha,r'}^{(+)}(\vec{x}) e^{-i(E_r^\alpha + E_{r'}^\alpha)t} \\
 &\quad \left. - E_{r'}^\alpha \hat{b}_r^\alpha \hat{b}_{r'}^{\alpha\dagger} \int d^3x \phi_{\alpha,r}^{(-)\dagger}(\vec{x}) \phi_{\alpha,r'}^{(-)}(\vec{x}) e^{-i(E_r^\alpha - E_{r'}^\alpha)t} \right). \tag{E.10}
 \end{aligned}$$

Utilizando as relações de ortonormalidade das soluções das equações para  $\Psi$  e as relações de anticomutação/comutação (E.8), obtemos

$$\hat{H}_\alpha^\pm = \sum_r E_r^\alpha (\hat{a}_r^{\alpha\dagger} \hat{a}_r^\alpha - \hat{b}_r^\alpha \hat{b}_r^{\alpha\dagger}) = \sum_r E_r^\alpha (\hat{a}_r^{\alpha\dagger} \hat{a}_r^\alpha \pm \hat{b}_r^{\alpha\dagger} \hat{b}_r^\alpha - 1). \tag{E.11}$$

O operador número para férmions (+) e bósons (-) pode ser obtido de forma semelhante

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_\alpha^\pm &= \int d^3x \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}, t) \psi_\alpha(\vec{x}, t) \\
 &= \int d^3x \sum_r \left( \hat{a}_r^{\alpha\dagger} \phi_{\alpha,r}^{(+)\dagger}(\vec{x}) e^{iE_r^\alpha t} \pm \hat{b}_r^\alpha \phi_{\alpha,r}^{(-)\dagger}(\vec{x}) e^{-iE_r^\alpha t} \right) \\
 &\quad \times \sum_{r'} \left( \hat{a}_{r'}^\alpha \phi_{\alpha,r'}^{(+)}(\vec{x}) e^{-iE_{r'}^\alpha t} \pm \hat{b}_{r'}^{\alpha\dagger} \phi_{\alpha,r'}^{(-)}(\vec{x}) e^{iE_{r'}^\alpha t} \right) \\
 &= \sum_{rr'} \left( \hat{a}_r^{\alpha\dagger} \hat{a}_{r'}^\alpha \int d^3x \phi_{\alpha,r}^{(+)\dagger}(\vec{x}) \phi_{\alpha,r'}^{(+)}(\vec{x}) e^{i(E_r^\alpha - E_{r'}^\alpha)t} \right. \\
 &\quad \pm \hat{a}_r^{\alpha\dagger} \hat{b}_{r'}^{\alpha\dagger} \int d^3x \phi_{\alpha,r}^{(+)\dagger}(\vec{x}) \phi_{\alpha,r'}^{(-)}(\vec{x}) e^{i(E_r^\alpha + E_{r'}^\alpha)t} \\
 &\quad \pm \hat{b}_r^\alpha \hat{a}_{r'}^\alpha \int d^3x \phi_{\alpha,r}^{(-)\dagger}(\vec{x}) \phi_{\alpha,r'}^{(+)}(\vec{x}) e^{-i(E_r^\alpha + E_{r'}^\alpha)t} \\
 &\quad \left. + \hat{b}_r^\alpha \hat{b}_{r'}^{\alpha\dagger} \int d^3x \phi_{\alpha,r}^{(-)\dagger}(\vec{x}) \phi_{\alpha,r'}^{(-)}(\vec{x}) e^{-i(E_r^\alpha - E_{r'}^\alpha)t} \right), \tag{E.12}
 \end{aligned}$$

resultando na expressão

$$\begin{aligned}\hat{N}_\alpha^\pm &= \int d^3x \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}, t) \psi_\alpha(\vec{x}, t) \\ &= \sum_r (\hat{a}_r^{\alpha\dagger} \hat{a}_r^\alpha + \hat{b}_r^\alpha \hat{b}_r^{\alpha\dagger}) = \sum_r (\hat{a}_r^{\alpha\dagger} \hat{a}_r^\alpha \mp \hat{b}_r^{\alpha\dagger} \hat{b}_r^\alpha + 1).\end{aligned}\tag{E.13}$$

## APÊNDICE F – TERMODINÂMICAS DO GÁS LIVRE NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO

A seguir será realizado um estudo das grandezas termodinâmicas de interesse para um gás livre de férmions e bósons na presença de um campo magnético externo. O procedimento padrão [90] consiste em obter o potencial termodinâmico grande-canônico  $\Omega$  a partir da função de partição grande-canônica  $Z$

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Z, \quad Z = \text{Tr} \left[ e^{-\beta(\hat{H} - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \hat{N}_{\alpha})} \right], \quad (\text{F.1})$$

onde  $\beta = 1/T$ ,  $T$  é a temperatura,  $\mu_{\alpha}$  é o potencial químico e  $\hat{N}_{\alpha}$  é o operador número. As partículas são sempre bósons ou férmions e portanto  $\alpha = f, b$ . As grandezas termodinâmicas estão associadas a  $\Omega$  através das relações

$$\Omega = -PV, \quad \bar{N}_{\alpha} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_{\alpha}}, \quad S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T}, \quad \text{e} \quad \Omega = E - TS - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \bar{N}_{\alpha}, \quad (\text{F.2})$$

onde  $P$  é a pressão,  $V$  é o volume,  $\bar{N}$  é o número médio de partículas,  $S$  é a entropia e  $E$  é a energia. Vamos utilizar a representação de números de ocupação. O número de ocupação de partículas  $\alpha$  no estado  $r$  é  $n_r^{\alpha}$  e o de antipartículas é  $\bar{n}_r^{\alpha}$ . Assim, a base de estados de partícula independente em função do número de ocupação pode ser escrita como

$$|\alpha\rangle = |n_1^{\alpha}, n_2^{\alpha}, \dots, \bar{n}_1^{\alpha}, \bar{n}_2^{\alpha}, \dots\rangle \quad (\text{F.3})$$

onde

$$n_r^{\alpha}, \bar{n}_r^{\alpha} = 0, 1, \dots, \infty \quad \text{e} \quad r = 1, 2, \dots, \infty, \quad (\text{F.4})$$

ordenando o conjunto de estados de partícula/anti-partícula independente de acordo com a regra:

$$\begin{aligned} \{n_r^{\alpha}\} &= (n_1^{\alpha}, n_2^{\alpha}, \dots, n_{\infty}^{\alpha}), \\ \{\bar{n}_r^{\alpha}\} &= (\bar{n}_1^{\alpha}, \bar{n}_2^{\alpha}, \dots, \bar{n}_{\infty}^{\alpha}). \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Nas expressões acima e nas que irão se seguir o rótulo  $r$  representa os números quânticos da partícula  $\alpha$ . Para o caso em que a partícula  $\alpha$  não tem carga ( $q = 0$ ) temos que  $r = s, p_x, p_y, p_z$ , e para o caso em que a partícula  $\alpha$  tem carga ( $q \neq 0$ ) temos que  $r = s, n, p_y, p_z$ .

Portanto, podemos calcular o traço que aparece na função de partição

(F.1), utilizando a expressão que obtivemos para a Hamiltoniana e o operador número em segunda quantização (vide Apêndice E)

$$\begin{aligned}
 Z_\alpha &= \text{Tr} \left[ e^{-\beta(\hat{H}_\alpha - \Sigma_\alpha \mu_\alpha \hat{N}_\alpha)} \right] \\
 &= \sum_\alpha \langle \alpha | e^{-\beta(\hat{H}_\alpha - \Sigma_\alpha \mu_\alpha \hat{N}_\alpha)} | \alpha \rangle \\
 &= \sum_{n_r^\alpha} \langle n_r^\alpha | e^{-\beta(\hat{H}_\alpha - \Sigma_\alpha \mu_\alpha \hat{N}_\alpha)} | n_r^\alpha \rangle \sum_{\bar{n}_r^\alpha} \langle \bar{n}_r^\alpha | e^{-\beta(\hat{H}_\alpha - \Sigma_\alpha \mu_\alpha \hat{N}_\alpha)} | \bar{n}_r^\alpha \rangle \\
 &= e^{\beta \Sigma_{\alpha,r} E_r^\alpha} \sum_{n_r^\alpha} e^{-\beta \Sigma_{\alpha,r} (E_r^\alpha - \mu_\alpha) n_r^\alpha} \sum_{\bar{n}_r^\alpha} e^{-\beta \Sigma_{\alpha,r} (E_r^\alpha + \mu_\alpha) \bar{n}_r^\alpha},
 \end{aligned} \tag{F.6}$$

onde utilizamos que  $\mu_{\bar{\alpha}} = -\mu_\alpha$  e portanto  $\Sigma_\alpha (\mu_\alpha + \mu_{\bar{\alpha}}) = 0$ .

O número de ocupação dos férmions só pode assumir os valores 0 ou 1. Portanto, para os férmions, podemos reescrever os somatórios dos férmions em  $n_r^\alpha$  e  $\bar{n}_r^\alpha$  por produtórios

$$\sum_{n_r^f=0}^1 \prod_{f,r} e^{-\beta(E_r^f - \mu_f) n_r^f} = \prod_{f,r} \sum_{n_r^f=0}^1 e^{-\beta(E_r^f - \mu_f) n_r^f} = \prod_{f,r} \left( 1 + e^{-\beta(E_r^f - \mu_f)} \right) \tag{F.7}$$

e

$$\sum_{\bar{n}_r^f=0}^1 \prod_{f,r} e^{-\beta(E_r^f - \mu_f) \bar{n}_r^f} = \prod_{f,r} \left( 1 + e^{-\beta(E_r^f + \mu_f)} \right). \tag{F.8}$$

O número de ocupação de bósons podem assumir qualquer valor entre 0 e  $\infty$ . Vamos utilizar então a fórmula para a soma de uma P.G. infinita para reescrever os somatórios dos bósons em  $n_r^\alpha$  e  $\bar{n}_r^\alpha$

$$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} = a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}, \tag{F.9}$$

e obtemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{n_r^b=0}^{\infty} \prod_{b,r} e^{-\beta(E_r^b - \mu_b)n_r^b} &= \prod_{b,r} \sum_{n_r^b=0}^{\infty} e^{-\beta(E_r^b - \mu_b)n_r^b} \\
 &= \prod_{b,r} \left( 1 + \sum_{n_r^b=1}^{\infty} e^{-\beta(E_r^b - \mu_b)} e^{-\beta(E_r^b - \mu_b)(n_r^b - 1)} \right) \\
 &= \prod_{b,r} \left( 1 + \frac{e^{-\beta(E_r^b - \mu_b)}}{1 - e^{-\beta(E_r^b - \mu_b)}} \right) = \prod_{b,r} \frac{1}{1 - e^{-\beta(E_r^b - \mu_b)}}
 \end{aligned} \tag{F.10}$$

e

$$\sum_{\bar{n}_r^b=0}^{\infty} \prod_{b,r} e^{-\beta(E_r^b - \mu_b)\bar{n}_r^b} = \prod_{b,r} \frac{1}{1 - e^{-\beta(E_r^b + \mu_b)}}.$$

Portanto a função de partição grande-canônica pode ser reescrita como

$$Z = Z_f Z_b \tag{F.11}$$

onde

$$Z_f = e^{\beta \sum_{f,r} E_r^f} \prod_{f,r} \left( 1 + e^{-\beta(E_r^f - \mu_f)} \right) \prod_{f,r} \left( 1 + e^{-\beta(E_r^f + \mu_f)} \right). \tag{F.12}$$

e

$$Z_b = e^{\beta \sum_{b,r} E_r^b} \prod_{b,r} \frac{1}{1 - e^{-\beta(E_r^b - \mu_b)}} \prod_{b,r} \frac{1}{1 - e^{-\beta(E_r^b + \mu_b)}}, \tag{F.13}$$

a partir da função de partição podemos obter o potencial termodinâmico grande-canônico

$$\begin{aligned}
 \Omega_{\alpha} &= -\frac{1}{\beta} \ln Z_{\alpha} \\
 \Omega_f &= -\sum_{f,r} E_r^f - \frac{1}{\beta} \sum_{f,r} \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_r^f - \mu_f)} \right) - \frac{1}{\beta} \sum_{f,r} \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_r^f + \mu_f)} \right) \\
 \Omega_b &= -\sum_{b,r} E_r^b + \frac{1}{\beta} \sum_{b,r} \ln \left( 1 - e^{-\beta(E_r^b - \mu_b)} \right) + \frac{1}{\beta} \sum_{b,r} \ln \left( 1 - e^{-\beta(E_r^b + \mu_b)} \right).
 \end{aligned} \tag{F.14}$$

Os números quânticos  $r$  da partícula  $\alpha$  sem carga são diferente dos números quânticos para as partículas com carga, e portanto é necessário separar nossos cálculos a partir deste ponto. Além disso, as energias dos férmions e bósons, não dependem do número quântico de spin  $s$ , deste modo, podemos substituir as somas em  $s$  na equação (F.14) por uma multiplicações pelo fator  $\gamma_\alpha$ , que representa a degenerescência dos nível de energia dos férmions ou bósons em questão.

Para as partículas sem carga ( $q = 0$ ) as somas nos momentos  $p_x, p_y, p_z$  podem ser substituídas por integrais utilizando a prescrição de partícula na caixa

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_i} \sum_{p_i} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_i \quad \rightarrow \quad \sum_r = \sum_{s, p_x, p_y, p_z} \\ &\rightarrow V \gamma_\alpha \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 p = V \gamma_\alpha \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} p^2 dp. \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

Dividindo (F.14) por  $V$  e substituindo (F.15) e  $\sum_s = \gamma_\alpha$  obtemos a o potencial grande-canônico para as partículas sem carga

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\Omega}{V} \\ \omega_f &= - \sum_f \gamma_f \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} E_f p^2 dp \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \sum_f \gamma_f \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_f - \mu_f)} \right) + \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_f + \mu_f)} \right) \right] p^2 dp, \\ \omega_b &= - \sum_b \gamma_b \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} E_b p^2 dp \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \sum_b \gamma_b \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta(E_b - \mu_b)}} + \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta(E_b + \mu_b)}} \right] p^2 dp, \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

onde

$$E_r^\alpha = E_{s, \vec{p}}^\alpha = \sqrt{\vec{p}^2 + m_\alpha^2}, \quad (\text{F.17})$$

para férmions e bósons sem carga. As partículas sem carga não sofrem os efeitos do campo magnético, e portanto se comportam como partículas livres, apresentando as mesmas expressões para energia e degenerescência dos casos

sem campo magnético, (apresentados nos Apêndices B, C, D e Capítulo 2).

Finalmente, pode-se agora obter as quantidades termodinâmicas de interesse utilizando o a densidade de potencial grande-canônico (F.16) e as relações (F.2). A densidade de partículas pode ser obtida a partir do número médio de partículas

$$\rho_\alpha = \frac{\bar{N}_\alpha}{V} = -\frac{1}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_\alpha} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mu_\alpha}, \quad (\text{F.18})$$

portanto a densidade dos férmions fica

$$\begin{aligned} \rho_f &= \gamma_f \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{e^{\beta(E_f - \mu_f)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(E_f + \mu_f)} + 1} \right) p^2 dp \\ &= \gamma_f \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 p [n_f(p, T, \mu_f) - \bar{n}_f(p, T, \mu_f)] p^2 dp, \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

e a dos bósons

$$\begin{aligned} \rho_b &= \gamma_b \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{e^{\beta(E_b - \mu_b)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(E_b + \mu_b)} - 1} \right) p^2 dp \\ &= \gamma_b \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 p [n_b(p, T, \mu_b) - \bar{n}_b(p, T, \mu_b)] p^2 dp, \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

a pressão pode ser obtida por

$$\begin{aligned} P &= -\omega = -\omega_f - \omega_b \\ &= \sum_f \gamma_f \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_f p^2 dp + \sum_b \gamma_b \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_b p^2 dp \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \sum_f \gamma_f \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_f}{\partial p} [n_f(p, T, \mu_f) + \bar{n}_f(p, T, \mu_f)] p^3 dp \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \sum_b \gamma_b \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_b}{\partial p} [n_b(p, T, \mu_b) + \bar{n}_b(p, T, \mu_b)] p^3 dp, \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

a densidade de entropia por

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{\partial P}{\partial T} = \beta^2 \frac{\partial \omega_f}{\partial \beta} + \beta^2 \frac{\partial \omega_b}{\partial \beta} \\
 &= \beta \sum_f \gamma_f \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} [(E_f - \mu_f)n_f(p, T, \mu_f) + (E_f + \mu_f)\bar{n}_f(p, T, \mu_f)] p^2 dp \\
 &\quad + \beta \sum_b \gamma_b \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} [(E_b - \mu_b)n_b(p, T, \mu_b) + (E_b + \mu_b)\bar{n}_b(p, T, \mu_b)] p^2 dp,
 \end{aligned} \tag{F.22}$$

e a densidade de energia por

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \frac{E}{V} = \omega + Ts + \sum_f \mu_f \rho_f + \sum_b \mu_b \rho_b \\
 &= \sum_f \gamma_f \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_f [n_f(p, T, \mu_f) + \bar{n}_f(p, T, \mu_f)] p^2 dp \\
 &\quad + \sum_b \gamma_b \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_b [n_b(p, T, \mu_b) + \bar{n}_b(p, T, \mu_b)] p^2 dp - P.
 \end{aligned} \tag{F.23}$$

Para as partículas carregadas ( $q \neq 0$ ) vamos novamente substituir as somas nos momentos  $p_y, p_z$  por integrais utilizando a prescrição da partícula na caixa. No caso do momento  $p_y$  notamos, da expressão para  $\xi^1$ , que  $\frac{p_y}{|q|B}$  determina a posição onde as funções de onda do oscilador estão centradas. Lembrando que estamos localizando o sistema em uma caixa e considerando condições de contorno periódicas, portanto, esta posição deve estar localizada no interior da caixa

$$-\frac{L_y}{2} \leq \frac{p_y}{|q|B} \leq \frac{L_y}{2}, \tag{F.24}$$

uma vez que os níveis de energia não dependem de  $p_y$  temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{p_y} &= \frac{L_y}{2\pi} \int dp_y = \frac{L_x L_y |q| B}{2\pi} \rightarrow \sum_r = \sum_{n,s,p_y,p_z} \\
 &\rightarrow V \gamma \frac{|q|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z.
 \end{aligned} \tag{F.25}$$

Novamente, obtêm-se o potencial grande-canônico dividindo (F.14)

---

<sup>1</sup>Equação (B.11) no Apêndice B.



por  $V$  e substituindo (F.25) e  $\sum_s = \gamma_\alpha$

$$\begin{aligned}\omega_f &= -\sum_{f,n} \gamma_f \frac{|q_f|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_f dp_z \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \sum_{f,n} \gamma_f \frac{|q_f|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_f - \mu_f)} \right) + \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_f + \mu_f)} \right) \right] dp_z, \\ \omega_b &= -\sum_{b,n} \gamma_b \frac{|q_b|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_b dp_z \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \sum_b \gamma_b \frac{|q_b|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta(E_b - \mu_b)}} + \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta(E_b + \mu_b)}} \right] dp_z,\end{aligned}\tag{F.26}$$

onde

$$E_r^f = E_{n,s,p_y,p_z}^f = \sqrt{p_z^2 + m_f^2 + 2n|q_f|B},\tag{F.27}$$

e

$$E_r^b = E_{n,s,p_y,p_z}^b = \sqrt{p_z^2 + m_b^2 + (2n+1)|q_b|B},\tag{F.28}$$

são as energias para os férmions e bósons na presença de um campo magnético e foram obtidas nos Apêndices B, C, D e Capítulo 2, assim como a expressão para a degenerescência dos níveis de energia  $\gamma_\alpha$ .

Utilizando a densidade de potencial grande-canônico (F.26) e as relações (F.2) a densidade de partículas para os férmions fica

$$\begin{aligned}\rho_f &= \gamma_f \frac{|q_f|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{e^{\beta(E_f - \mu_f)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(E_f + \mu_f)} + 1} \right) dp_z \\ &= \gamma_f \frac{|q_f|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} [n_f(p, T, \mu_f) - \bar{n}_f(p, T, \mu_f)] dp_z,\end{aligned}\tag{F.29}$$

a densidade de partículas para os bósons

$$\begin{aligned}\rho_b &= \gamma_b \frac{|q_b|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{e^{\beta(E_b - \mu_b)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(E_b + \mu_b)} - 1} \right) dp_z \\ &= \gamma_b \frac{|q_b|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} [n_b(p, T, \mu_b) - \bar{n}_b(p, T, \mu_b)] dp_z,\end{aligned}\tag{F.30}$$

a pressão

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_f \gamma_f \frac{|q_f|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_f dp_z + \sum_b \gamma_b \frac{|q_b|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_b dp_z \\
 &+ \frac{1}{\beta} \sum_f \frac{|q_f|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_f}{\partial p} [n_f(p, T, \mu_f) + \bar{n}_f(p, T, \mu_f)] p_z dp_z \quad (\text{F.31}) \\
 &+ \frac{1}{\beta} \sum_b \gamma_b \frac{|q_b|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_b}{\partial p} [n_b(p, T, \mu_b) + \bar{n}_b(p, T, \mu_b)] p_z dp_z,
 \end{aligned}$$

a densidade de entropia:

$$\begin{aligned}
 s &= \beta \sum_f \gamma_f \frac{|q_f|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} [(E_f - \mu_f)n_f(p, T, \mu_f) + (E_f + \mu_f)\bar{n}_f(p, T, \mu_f)] dp_z \\
 &+ \beta \sum_b \gamma_b \frac{|q_b|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} [(E_b - \mu_b)n_b(p, T, \mu_b) + (E_b + \mu_b)\bar{n}_b(p, T, \mu_b)] dp_z, \quad (\text{F.32})
 \end{aligned}$$

e a densidade de energia:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \sum_f \gamma_f \frac{|q_f|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_f [n_f(p, T, \mu_f) + \bar{n}_f(p, T, \mu_f)] dp_z \\
 &+ \sum_b \gamma_b \frac{|q_b|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_b [n_b(p, T, \mu_b) + \bar{n}_b(p, T, \mu_b)] dp_z - P. \quad (\text{F.33})
 \end{aligned}$$

## REFERÊNCIAS

- [1] Barbara Ryden, *Introduction to Cosmology*, 1st Edition, Addison-Wesley (2003).
- [2] David Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, 2nd Revised Edition, Wiley-VHC (2008).
- [3] R. Duncan and C. Thompson, *Formation of very strongly magnetized neutron stars - Implications for gamma-ray bursts*, *Astrophysical Journal*, Part 2 - Letters **392** (1992), L9-L13.
- [4] P. Yue, F. Yang and H. Shen, *Properties of Hyperonic Matter in Strong Magnetic Fields*, *Phys. Rev. C* **79** (2009), 025803, arXiv:0902.3699 [nucl-th].
- [5] L. L. Lopes and D. P. Menezes, *The Influence of Hyperons and Strong Magnetic Field in Neutron Star Properties*, *Braz. J. Phys.* **42** (2012), 428-436.
- [6] K. Fukushima, D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, *The Chiral Magnetic Effect* *Phys. Rev. D* **78** (2008), 074033, arXiv:0808.3382 [hep-ph].
- [7] D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, *Chiral magnetic conductivity*, *Phys. Rev. D* **80** (2009), 034028, arXiv:0907.5007 [hep-ph].
- [8] D. E. Kharzeev, *Chern-Simons current and local parity violation in hot QCD matter*, *Nucl. Phys. A* **830** (2009), 543c-546c, arXiv:0908.0314 [hep-ph].
- [9] E. S. Fraga and A. J. Mizher, *Chiral transition in a strong magnetic background*, *Phys. Rev. D* **78** (2008), 025016, arXiv:0804.1452 [hep-ph].
- [10] E. S. Fraga and A. J. Mizher, *Chiral symmetry restoration and strong CP violation in a strong magnetic background*, *PoS CPOD 2009* **37** (2009), arXiv:0910.4525 [hep-ph].
- [11] E. S. Fraga, M. N. Chernodub and A. J. Mizher, *Phase diagram of hot QCD in an external magnetic field: possible splitting of deconfinement and chiral transitions*, *Phys. Rev. D* **82** (2010), 105016, arXiv:1004.2712 [hep-ph].

- [12] W. Greiner, S. Schramm and E. Stein, *Quantum Chromodynamics*, 3rd Edition, Springer (2007).
- [13] S. S. Avancini, D. P. Menezes, M.B. Pinto and C. Providência, *QCD critical end point under strong magnetic fields*, Phys. Rev. D **85** (2012), 091901(R), arXiv:1202.5641 [hep-ph].
- [14] J. O. Andersen and A. Tranberg, *The chiral transition in a magnetic background: Finite density effects and the functional renormalization group*, J. of High. Energy Phys. **8** (2012), arXiv:1204.3360 [hep-ph].
- [15] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorne and V. F. Weisskopf, *New extended model of hadrons*, Phys. Rev. D **9** (1974), 3471.
- [16] J. Takahashi, *Lecture: Física Nuclear de Altas Energias*, XVI Escola de Verão Jorge André Swieca de Física Nuclear Teórica, 17 a 23 de fevereiro de 2013.
- [17] M. G. Munhoz, *Lecture: Recent Results from Heavy Ion Collisions at the Large Hadron Collider*, XVI Escola de Verão Jorge André Swieca de Física Nuclear Teórica, 17 a 23 de fevereiro de 2013.
- [18] K. Tuchin, *Particle production in strong electromagnetic fields in relativistic heavy-ion collisions*, arXiv:1301.0099 [hep-ph].
- [19] D. E. Kharzeev, L.D. McLerran and H. J. Warringa, *The effects of topological charge change in heavy ion collisions: "Event by event P and CP violation"*, Nucl. Phys. A **803** (2008), 227-253, arXiv:0711.0950 [hep-ph].
- [20] K. Aamodt et al. (ALICE Collaboration), *Elliptic Flow of Charged Particles in Pb-Pb Collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV*, Phys. Rev. Lett. **105** (2010), 252302, arXiv:1011.3914 [nucl-ex].
- [21] K. Aamodt et al. (ALICE Collaboration), *Charged-particle multiplicity density at mid-rapidity in central Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV*, Phys. Rev. Lett. **105** (2010), 252301, arXiv:1011.3916 [nucl-ex].
- [22] B. Abelev et al. (ALICE Collaboration) *Pseudorapidity density of charged particles in p+Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$  TeV*, Phys. Rev. Lett. **110** (2013), 032301, arXiv:1210.3615 [nucl-ex].

- [23] K. Aamodt et al. (ALICE Collaboration), *Centrality dependence of the charged-particle multiplicity density at midrapidity in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV*, Phys. Rev. Lett. **106** (2011), 032301, arXiv:1012.1657 [nucl-ex].
- [24] P. Braun-Munzinger, I. Heppe and J. Stachel, *Chemical equilibration in Pb+Pb collisions at the SPS* Phys. Lett. B **465** (1999), 15-20, arXiv:nucl-th/9903010.
- [25] P. Braun-Munzinger, D. Magestro, K. Redlich and J. Stachel, *Hadron production in Au-Au collisions at RHIC*, Phys. Lett. B **518** (2001), 41-46, arXiv:hep-ph/0105229.
- [26] B. I. Abelev et al. (STAR Collaboration), *Systematic Measurements of Identified Particle Spectra in pp, d+Au and Au+Au Collisions from STAR*, Phys. Rev. C **79** (2009), 034909, arXiv:0808.2041 [nucl-ex].
- [27] R. Cavagnoli, D. P. Menezes and C. Providência, *Neutron star properties and the symmetry energy*, Phys. Rev. C **84** (2011), 065810, arXiv:1108.1733 [hep-ph].
- [28] I. Vidanã, C. Providência, A. Polls and A. Rios, *Density dependence of the nuclear symmetry energy: A microscopic perspective*, Phys. Rev. C **80** (2009), 045806, arXiv:0907.1165 [nucl-th].
- [29] N. K. Glendenning, *Neutron stars are giant hypernuclei?*, Astrophys. J. **293** (1985), 470-493.
- [30] J. C. T. de Oliveira, M. Kyotoku, M. Chiapparini, H. Rodrigues and S. B. Duarte, *Delta matter formation in dense asymmetric nuclear medium*, Mod. Phys. Lett. A **15** (2000), 1529-1537.
- [31] N. K. Glendenning, *Compact Stars*, Springer, New York, 2000.
- [32] D. P. Menezes, P. K. Panda and C. Providência, *Kaon condensation in the quark-meson coupling model and compact stars*, Phys. Rev. C **72** (2005), 035802, arXiv:astro-ph/0506196.
- [33] W. Rarita and J. Schwinger, *On a theory of particles with half-integral spin*, Phys. Rev. **60** (1941), 61.
- [34] H. Xiang and G. Hua, *Delta excitation and its influences on neutron stars in relativistic mean field theory*, Phys. Rev. C **67** (2003), 038801.

- [35] J. D. Walecka, *A theory of highly condensed matter*, Ann. Phys. **83**, (1974) 491-529.
- [36] B. D. Serot and J. D. Walecka, *The relativistic nuclear many-body problem*, Adv. Nucl. Phys. **16** (1986) 1.
- [37] R. J. Furnstahl, H. B. Tang and B. D. Serot, *Vacuum contributions in a chiral effective Lagrangian for nuclei*, Phys. Rev. C **52** (1995), 1368-1379.
- [38] T. Schürhoff, S. Schramm and V. Dexheimer, *Neutron stars with small radii - the role of delta resonances*, ApJ **724** (2010), L74-L77, arXiv:1008.0957 [astro-ph.SR].
- [39] C. Kouveliotou et al, *An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft  $\gamma$ -ray repeater SGR1806-20*, Nature **393** (1998), 235-237.
- [40] R. G. Felipe, A. P. Martinez, H. P. Rojas and M. Orsaria, *Magnetized strange quark matter and magnetized strange quark stars*, Phys. Rev. C **77** (2008), 015807, arXiv:0709.1224 [astro-ph].
- [41] D. P. Menezes, M. B. Pinto, S. S. Avancini, A. Pérez Martínez and C. Providência, *Quark matter under strong magnetic fields in the Nambu-Jona-Lasinio Model*, Phys. Rev. C **79** (2009), 035807, arXiv:0811.3361 [nucl-th].
- [42] L. Paulucci, E. J. Ferrer, V. de la Incera and J. E. Horvath, *Equation of state for the MCFL phase and its implications for compact star models*, Phys. Rev. D **83** (2011), 043009, arXiv:1010.3041.
- [43] L. L. Lopes and D. P. Menezes, *The Influence of Hyperons and Strong Magnetic Field in Neutron Star Properties*, Brazilian J. Phys. **42** (2012), 428-436, arXiv:1307.1691 [nucl-th].
- [44] K. Johnson and E. C. G. Sudarshan, *Inconsistency of the Local Field Theory of Charged Spin 3/2 Particles*, Ann. Phys. **13** (1961), 126-145.
- [45] E. E. Fradkin, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **32** (1957), 1479.
- [46] M. Seetharaman, J. Prabhakaran and P. M. Matheus, *Rarita-Schwinger particles in homogeneous magnetic fields, and inconsistencies of spin-3/2 theories*, Phys. Rev. D **12** (1975), 458-466.

- [47] G. Velo and D. Zwanziger, *Propagation and Quantization of Rarita-Schwinger Waves in an External Electromagnetic Potential*, Phys. Rev. **186** (1969), 1337-1341.
- [48] M. Hortaçsu, *Demonstration of noncausality for the Rarita-Schwinger equation*, Phys. Rev. D **9** (1974), 928-930.
- [49] V. Pascalutsa, *Quantization of an interacting spin-3/2 field and the  $\Delta$  isobar*, Phys. Rev. D. **58** (1998), 096002, arXiv:hep-ph/9802288.
- [50] V. Pascalutsa and R. Timmermans, *Field theory of nucleon to higher-spin baryon transitions*, Phys. Rev. C **60** (1999), 042201(R), arXiv:nucl-th/9905065.
- [51] S. I. Kruglov, *"Square Root" of the Proca Equation: Spin-3/2 Field Equation*, Int. J. Mod. Phys. A **21** (2006), 1143-1155, arXiv:nucl-th/9905065.
- [52] M. Porrati and R. Rahman, *Causal propagation of a charged spin 3/2 field in an external electromagnetic background*, Phys. Rev. D **80** (2009), 025009, arXiv:hep-th/0405088.
- [53] D. B. Melrose and A. J. Parle, *Quantum electrodynamics in strong magnetic fields: I Electron*, Aus. J. Phys. 1983, **36**, 755-774.
- [54] I Lovas, K. Sailer and W. Greiner, *Generalized Rarita-Schwinger Equations*, arXiv:hep-th/9810103.
- [55] M. G. de Paoli, L. B. Castro, D. P. Menezes and C. C. Barros Jr., *The Rarita-Schwinger particles under de influence of strong magnetic fields* J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **40** (2013), 055007, arXiv:1207.4063 [math-ph].
- [56] M. Napsuciale, M. Kirchbach and S. Rodriguez, *Spin 3/2 beyond the Rarita-Schwinger framework*, Eur. Phys. J. A **29** (2006), 289-306.
- [57] S. Weinberg, *The Quantum Theory of fields, Vol. III, Supersymetry*, Cambridge University Press, 2000.
- [58] L. M. Nath, B. Etemadi and J. D. Kimel, *Uniqueness of the Interaction Involving Spin-3/2 Particles*, Phys. Rev. D **3** (1971), 2153-2161.

- [59] R. M. Davidson, N. C. Mukhopadhyay and R. S. Wittman, *Effective-Lagrangian approach to the theory of pion photoproduction in the  $\Delta(1232)$  region*, Phys. Rev. D **43** (1991), 71-94.
- [60] M. Napsuciale and J. L. Lucio, *Spin 3/2 interacting fields and heavy baryon chiral perturbation theory*, Phys. Lett. B **384** (1996), 227-232.
- [61] M. Napsuciale and J. L. Lucio, *Heavy baryon spin 3/2 theory and radiative decays of the decuplet*, Nucl. Phys. B **494** (1997), 260-278.
- [62] M. Fierz and W. Pauli, *On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **173** (1939), 211.
- [63] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*, Berlin: Springer, 1990.
- [64] J. Jasiak and A. Szymacha, *A relativistic spin-3/2 particle in a spherical cavity and the problem of  $\Delta$  resonance in the MIT bag model* J. Phys. G: Nucl. Phys. **14** (1988), 261.
- [65] P. G. Blunden, Y. Okuhara and A. S. Raskin, *The Rarita-Schwinger spin-3/2 equation in a nonuniform, central potential*, J. Phys. G: Nucl. Phys. **24** (1998), 719.
- [66] D. Melrose, *Quantum Plasmadynamics: Magnetized Plasmas*, in press.
- [67] S. Sarkar, *Helicity projection operators for spin 3/2 particles*, Proc. Phys. Soc. **91** (1967), 577.
- [68] M. G. de Paoli and D. P. Menezes, *Particle Yields in Heavy Ion Collisions and the Influence of Strong Magnetic Fields*, Advances in High Energy Physics (2014), 479401.
- [69] D. P. Menezes, C. Providência, M. Chiapparini, M. E. Bracco, A. Delfino, and M. Malheiro, *Constraining relativistic models through heavy ion collisions*, Phys. Rev. C **76** (2007), 064902, arXiv:0708.3380 [hep-ph].
- [70] M. Chiapparini, M. E. Bracco, A. Delfino, M. Malheiro, D. P. Menezes and C. Providência, *Hadron production in non linear relativistic mean field models* Nucl. Phys. A **826** (2009), 178-189, arXiv:0711.3631 [hep-ph].



- [71] B. Serot and J. D. Walecka, *Advances in Nuclear Physics* **16**, Plenum-Press (1986).
- [72] P. K. Panda, D.P. Menezes and C. Providência, *Particle production within the quark meson coupling model*, Phys. Rev. C **80** (2009), 014905, arXiv:0904.3837 [nucl-th].
- [73] P. A. M. Guichon, *A possible quark mechanism for the saturation of nuclear matter*, Phys. Lett. B **200** (1988), 235-240.
- [74] K. Saito and A. W. Thomas, *A quark-meson coupling model for nuclear and neutron matter*, Phys. Lett. B **327** (1994), 9-16, arXiv:nucl-th/9403015.
- [75] K. Tsushima, K. Saito, A. W. Thomas and S. W. Wright, *In-medium kaon and antikaon properties in the quark-meson coupling model*, Phys. Lett. B **429** (1998), 239-246 arXiv:nucl-th/9712044.
- [76] K. Tuchin, *Synchrotron radiation by fast fermions in heavy-ion collisions*, Phys. Rev. C **82** (2010), 034904, [Erratum *ibid* **83** (2011), 039903] arXiv:1006.3051 [nucl-th].
- [77] K. Tuchin, *Time and space dependence of electromagnetic field in relativistic heavy-ion collisions*, Phys. Rev. C **88** (2013), 024911, arXiv:1305.5806 [hep-ph].
- [78] L. McLerran and V. Skokov, *Comments About the Electromagnetic Field in Heavy-Ion Collisions*, arXiv:1305.0774 [hep-ph].
- [79] A. Bzdak, V. Skokov, *Event-by-event fluctuations of magnetic and electric fields in heavy-ion collisions*, Phys. Lett. B **710** (2012), 171-174, arXiv:1111.1949 [hep-ph].
- [80] W-T. Deng and X-G. Huang, *Event-by-event generation of electromagnetic fields in heavy-ion collisions*, Phys. Rev. C **85** (2012), 044907, arXiv:1201.5108 [nucl-th].
- [81] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3th Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [82] V. G. Bagrov and D. M. Gitman, *Exact Solution of Relativistic Wave Equations*, Kluwer Academic Publishers, 1990.

- [83] I. A. Obukhov, V. K. Peres-Fernandes, I. M. Ternov and V. R. Khalilov, Moscow State University. *Charged vector particles in a magnetic field*, Translated from Teoret. Mat. Fiz., **55**, No 3, pp. 335-348, June 1983. Original article submitted September 13, 1982.
- [84] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, 1996.
- [85] K. Nakamura, *et al.* (Particle Data Group), *Review of particle physics*, J. Phys. G **37** (2010), 075021.
- [86] B. I. Abelev, *et al.* (STAR Collaboration), *Systematic measurements of identified particle spectra in pp, d+Au, and Au+Au collisions at the STAR detector*, Phys. Rev. C **79** (2009), 034909, arXiv:0808.2041 [nucl-ex].
- [87] S. S. Avancini, D. P. Menezes and C. Providência, *Finite temperature quark matter under strong magnetic fields* Phys. Rev. C **83** (2011), 065805.
- [88] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, Singapore, 1985.
- [89] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain, 1985.
- [90] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill, USA, 1971.
- [91] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, USA, 1970.