Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Coálgebras, Comódulos e o Teorema de Maschke para Álgebras de Hopf

Trabalho de Conclusão de Curso

Gabriel Samuel de Andrade

Florianópolis, 2013

Gabriel Samuel de Andrade

Coálgebras, Comódulos e o Teorema de Maschke para Álgebras de Hopf

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador:
Giuliano Boava

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis

2013

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 04/CCM/2012.

Prof. Silvia Martini de Holanda Janesch
Coordenadora do Curso de Graduação em Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Giuliano Boava
Orientador

Prof. Virgínia Silva Rodrigues
Co-orientadora

Prof. Luiz Augusto Saeger

Prof. Lício Hernanes Bezerra

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais pela minha vida e pelo amor por todos esses anos, ainda mais porque sei o quão difícil deve ser amar um filho tão crítico. Agradeço especialmente minha mãe, porque é ela que escuta a maior parte das minhas maluquices, não entende quase nada do que eu digo, como ela mesma confessa, mas ainda sim me escuta.

Agradeço aos meus amigos da faculdade por todo esse tempo de aprendizado, principalmente aqueles que satisfazem a definição mais forte de amizade (acho que eles sabem quem são). São pessoas que se tornaram razões pra eu acreditar que a vida vale a pena, mesmo nos piores momentos. Aproveitando, agradeço a certos professores maravilhosos com os quais tive a oportunidade de aprender, realmente dedicados a fazer um ótimo trabalho.

Suponhamos que Deus existe e que valem os axiomas convencionais associados a Ele. Nesse caso, gostaria de agradecê-Lo pelas suas criações, especialmente pela razão, porque é essa capacidade que nos permite vislumbrar tanta coisa bela, especialmente na Matemática. É realmente um privilégio poder estudar essa disciplina tão distinta, moldada com precisão e quase perfeição por tantos pensadores.

Sumário

Introdução

Uma biálgebra é, basicamente, uma álgebra em que existe uma estrutura dual, chamada estrutura de coálgebra, tal que as duas estruturas satisfazem uma relação de compatibilidade. Uma álgebra de Hopf é uma biálgebra com um endomorfismo satisfazendo uma condição que pode ser expressa usando as estruturas de álgebra e coálgebra.

O primeiro exemplo de uma tal estrutura foi observado em topologia algébrica por Heinz Hopf em 1941. Era a homologia de um grupo de Lie conexo, que é até mesmo uma álgebra de Hopf graduada. A partir do final do ano 1960, álgebras de Hopf se tornou um objeto de estudo do ponto de vista estritamente algébrico, e pelo fim do ano 1980, um grande impulso foi dado nas pesquisas neste domínio pelas suas conexões com mecânica quântica (os chamados grupos quânticos são exemplos de álgebras de Hopf não comutativas e não cocomutativas).

Talvez um dos mais surpreendentes aspectos das álgebras de Hopf é a sua extraordinária presença em variados campos da matemática: de teoria dos números (grupos formais), à geometria algébrica (esquemas de grupos afins), teoria de Lie (a álgebra envolvente de uma álgebra de Lie é uma álgebra de Hopf), teoria de Galois e extensões de corpo separáveis, teoria de aneis graduados, teoria de operadores, teoria de grupos localmente compactos, teoria de distribuições, combinatória, teoria de representação e mecânica quântica, e a lista pode continuar.

Neste trabalho, vamos tratar de aspectos básicos sobre a teoria de álgebras de Hopf. O primeiro capítulo tem o objetivo de definir a estrutura de coálgebra sobre um corpo k a partir da dualização da definição de álgebra sobre um corpo k. Observações sobre aspectos fundamentais da teoria de coálgebras são feitas, como o Teorema Fundamental das Coálgebras, com aprofundamentos podendo ser encontrados nas referências. Mostramos algumas relações entre as teorias de álgebras e coálgebras, como a obtenção da álgebra dual a partir de uma coálgebra dada e da coálgebra dual de uma álgebra de dimensão finita dada. Depois definimos uma estrutura de coálgebra no dual finito de uma álgebra qualquer.

No segundo capítulo, trabalhamos as representações de uma coálgebra, cuja estrutura é chamada de comódulo, definidas a partir da dualização da noção de módulo sobre uma álgebra.

Então definimos módulos racionais e apresentamos um resultado fundamental, o isomorfismo entre $Rat({}_{C^*}\mathscr{M})$ e $\mathscr{M}^C$, respectivamente a categoria dos C^*-módulos à esquerda racionais e a categoria dos C-comódulos à direita, em que C é uma coálgebra.

É no terceiro capítulo que finalmente definimos a estrutura de biálgebra e em seguida a estrutura de álgebra de Hopf. Verificamos algumas das riquezas dessa estrutura, apresentamos uma série de exemplos, alguns não comutativos nem cocomutativos, e investigamos algumas propriedades da antípoda. No final, introduzimos o conceito de módulos de Hopf, que são representações de biálgebras, e demonstramos o Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf, essencial para o quarto capítulo.

No quarto e último capítulo, definimos funcionais integrais e elementos integrais em uma biálgebra, conceitos intimamente relacionados com muitos resultados sobre álgebras de Hopf de dimensão finita. Um desses resultados, que demonstramos no final do capítulo, é o Teorema de Maschke para álgebras de Hopf, uma generalização do Teorema de Maschke para grupos.

Nesse trabalho, assumimos como conhecidos aspectos básicos da teoria de grupos, aneis e módulos. Alguns resultados de álgebra linear que são usados não são demonstrados, mas fazemos as referências para o leitor questionador poder confirmar suas validades.

“*A mathematician is a machine for converting coffee into theorems.*”

-Alfréd Rényi

“*A comathematician, by categorical duality, is a machine for converting cotheorems into ffee.*”

-Anonymous

1 Álgebras e Coálgebras

O objetivo desse capítulo é definir a estrutura de uma coálgebra sobre um corpo k, apresentar exemplos de coálgebras, provar algumas de suas propriedades e discutir relações entre a teoria de álgebras e a teoria de coálgebras. Para motivar a definição de uma coálgebra, inicialmente definimos o que é uma álgebra sobre um corpo k via diagramas. Essa definição será equivalente à definição tradicional como será mostrado. Com essa definição via diagramas, podemos inverter o sentido das setas dos diagramas e obter a noção dual de álgebra que é a noção de coálgebra.

Em todo o texto, os produtos tensoriais são sobre k a menos de menção contrária.

1.1 Álgebras

Definição 1.1.1. *Uma k-álgebra é uma tripla (A, M, u), em que A é um k-espaço vetorial e $M : A \otimes A \to A$ e $u : k \to A$ são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os diagramas*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I_A \otimes M"] \arrow[d, "M \otimes I_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "M"] \\
A \otimes A \arrow[r, "M"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "M"] & \\
k \otimes A \arrow[ur, "u \otimes I_A"] \arrow[dr, "\varphi_l"'] & & A \otimes k \arrow[ul, "I_A \otimes u"'] \arrow[dl, "\varphi_r"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

são comutativos, em que I_A é a identidade em A e $\varphi_l : k \otimes A \to A$ e $\varphi_r : A \otimes k \to A$ são os isomorfismos canônicos dados por $\varphi_l(1_k \otimes a) = 1_k a$ e $\varphi_r(a \otimes 1_k) = 1_k a$, $\forall a \in A$. ■

Os morfismos M e u são chamados de multiplicação e unidade da álgebra (A, M, u), respectivamente. A comutatividade do primeiro diagrama expressa exatamente a propriedade de associatividade da multiplicação, o que podemos escrever como

$$M \circ (M \otimes I_A) = M \circ (I_A \otimes M),$$

enquanto a comutatividade do segundo diagrama expressa a existência da unidade, o que podemos escrever como

$$M \circ (u \otimes I_A) = \varphi_l \quad \text{e} \quad M \circ (I_A \otimes u) = \varphi_r.$$

Observação 1.1.2. Como é de praxe, frequentemente vamos escrever simplesmente A para nos referir a uma k-álgebra (A, M, u) quando M e u estiverem subentendidos. Além disso, vamos omitir o símbolo de composição $\circ$ quando não houver confusão, indicando a composição por justaposição. Dessa forma, as igualdades anteriores serão escritas como

$$M(M \otimes I_A) = M(I_A \otimes M),\ M(u \otimes I_A) = \varphi_l \quad \text{e} \quad M(I_A \otimes u) = \varphi_r.$$

Por fim, algumas vezes vamos nos referir a M e u como os morfismos estrutura. ■

Classicamente, uma álgebra é definida como a seguir. No entanto, essa definição prévia via diagramas nos possibilita visualizar algo a mais como será observado posteriormente.

Definição 1.1.3. *Uma k-álgebra unitária A é um anel $(A, +, \cdot)$ com unidade que possui uma estrutura de k-espaço vetorial e é satisfeita a seguinte relação de compatibilidade da estrutura de anel com a estrutura de k-espaço vetorial:*

$$r(ab) = (ra)b = a(rb), \forall r \in k, \forall a, b \in A.$$

■

Proposição 1.1.4. *As definições de k-álgebra dadas acima são equivalentes.*

Demonstração: Seja (A, M, u) uma k-álgebra segundo a Definição 1.1.1, ou seja, A é um k-espaço vetorial e $M : A \otimes A \to A$ e $u : k \to A$ são morfismos de k-espaços vetoriais que comutam os diagramas da Definição 1.1.1. Vamos mostrar que a operação

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & A \times A & \to & A \\ & (a,b) & \mapsto & a \cdot b = M(a \otimes b) = ab \end{array}$$

serve como produto para A. Claramente, a associatividade de $\cdot$ é dada pela comutatividade do primeiro diagrama. A distributividade à esquerda é válida, pois dados $a,b,c \in A$, temos

$$\begin{aligned} a(b+c) &= M(a\otimes(b+c)) \\ &= M(a\otimes b + a\otimes c) \\ &= M(a\otimes b)+M(a\otimes c) \\ &= ab+ac. \end{aligned}$$

A distributividade à direita é provada analogamente. O elemento $u(1_k)$ é unidade da álgebra A, pois para $a \in A$, temos

$$\begin{aligned} u(1_k)a &= M(u(1_k)\otimes a) \\ &= M(u\otimes I_A)(1_k\otimes a) \\ &= \varphi_l(1_k\otimes a) \\ &= 1_k a \\ &= a, \end{aligned}$$

e, analogamente, $au(1_k) = a$. Para que $(A,+,\cdot)$ seja k-álgebra segundo a Definição 1.1.3, só falta verificar a relação de compatibilidade. Dados $r \in k$ e $a,b \in A$, temos

$$\begin{aligned} r(ab) &= rM(a\otimes b) \\ &= M(r(a\otimes b)) \\ &= M(ra\otimes b) = (ra)b \\ &= M(a\otimes rb) = a(rb). \end{aligned}$$

Portanto, vale $r(ab) = (ra)b = a(rb)$, $\forall r \in k$ e $\forall a,b \in A$. Concluímos que (A,M,u) é uma k-álgebra pela Definição 1.1.3.

Seja agora A uma k-álgebra segundo a Definição 1.1.3, ou seja, A é um k-espaço vetorial com uma estrutura de anel $(A,+,\cdot)$ e unidade 1_A e é satisfeita a relação de compatibilidade mencionada. Precisamos exibir $M : A\otimes A \to A$ e $u : k \to A$ morfismos de k-espaços vetoriais que comutem os diagramas da primeira definição. Notemos que $\cdot : A\times A \to A$ é uma função k-bilinear, pois A é uma k-álgebra (definição clássica). Portanto, pela propriedade universal do produto tensorial, existe um único morfismo de k-espaços vetoriais $M : A\otimes A \to A$ tal que $M(a\otimes b) = ab$, $\forall a,b \in A$. Agora, definimos $u : k \to A$ como sendo $u(r) = r1_A$, $\forall r \in k$. É fácil notar que u é k-linear e $u(1_k) = 1_k 1_A = 1_A$. Resta-nos verificar a comutatividade dos diagramas.

Para o primeiro diagrama, dados $a,b,c \in A$, temos

$$\begin{aligned} M(M\otimes I_A)(a\otimes b\otimes c) &= M(M(a\otimes b)\otimes I_A(c)) \\ &= M(ab\otimes c) \\ &= (ab)c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(I_A\otimes M)(a\otimes b\otimes c) &= M(I_A(a)\otimes M(b\otimes c)) \\ &= M(a\otimes bc) \\ &= a(bc). \end{aligned}$$

Como A é um anel, $(ab)c = a(bc)$, logo podemos concluir $M(M\otimes I_A) = M(I_A\otimes M)$. Para o segundo diagrama, dado $a \in A$, temos

$$\begin{aligned} M(u\otimes I_A)(1_k\otimes a) &= M(u(1_k)\otimes I_A(a)) \\ &= M(1_A\otimes a) \\ &= 1_A a \\ &= a \\ &= 1_k a \\ &= \varphi_l(1_k\otimes a), \end{aligned}$$

logo, $M(u\otimes I_A) = \varphi_l$ e, analogamente, obtemos $M(I_A\otimes u) = \varphi_r$. Portanto, o segundo diagrama também comuta e temos a equivalência demonstrada. ■

Observação 1.1.5. Observe que mostrar a comutatividade do segundo diagrama da Definição 1.1.1, que expressamos pelas igualdades $M(u\otimes I_A) = \varphi_l$ e $M(I_A\otimes u) = \varphi_r$, é equivalente a mostrar que o elemento $u(1_k)$ é a unidade da álgebra. Por isso, nos exemplos seguintes, dada uma álgebra (A,M,u), a prova de u ser unidade será feita verificando que $u(1_k)a = au(1_k) = a$, $\forall a \in A$. ■

Exemplo 1.1.6. Todo corpo k é uma k-álgebra de maneira natural, os morfismos estrutura $M : k\otimes k \to k$ e $u : k \to k$ dados por

$$M(r\otimes s) = rs \quad \text{e} \quad u(1_k) = 1_k, \forall r,s \in k$$

são, respectivamente, a multiplicação e o morfismo identidade em k. ■

Exemplo 1.1.7. Álgebra de Grupo. Seja G um grupo multiplicativo. Então podemos considerar o conjunto

$$kG = \oplus_{g\in G} kg,$$

em que dado um elemento $x \in kG$, temos $x = \sum\limits_{g\in G} \lambda_g g$, com $\lambda_g = 0$ exceto para uma quantidade finita de elementos $g \in G$. Nesse conjunto, podemos definir as seguintes operações:

- soma: $\sum\limits_{g\in G} r_g g + \sum\limits_{g\in G} s_g g = \sum\limits_{g\in G} (r_g + s_g)g$;
- produto: $(\sum\limits_{g\in G} r_g g)(\sum\limits_{h\in G} s_h h) = \sum\limits_{z\in G} t_z z$, em que $t_z = \sum\limits_{gh=z} r_g s_h$ para cada $z \in G$;
- produto por escalar: dado $r \in k$, $r\sum\limits_{g\in G} r_g g = \sum\limits_{g\in G} (rr_g)g$.

Com essas operações, kG possui uma estrutura de k-álgebra. Vale observar que a unidade dessa álgebra é o elemento $1_k e$, sendo $e \in G$ o elemento neutro do grupo. De fato, $(\sum\limits_{g\in G} r_g g)(1_k e) = \sum\limits_{g\in G} (r_g 1_k)(ge) = \sum\limits_{g\in G} r_g g$. Analogamente, $(1_k e)(\sum\limits_{g\in G} r_g g) = \sum\limits_{g\in G} r_g g$. ■

No exemplo anterior, usamos a definição clásssica de k-álgebra. Nos exemplos seguintes, usaremos a definição via diagramas comutativos.

Exemplo 1.1.8. Álgebra das Séries de Potências Formais. Consideremos o conjunto $k[[X]] = \{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n : a_n \in k\}$. Nesse conjunto, podemos definir as seguintes operações:

- soma: $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n)X^n$;
- produto por escalar: dado $r \in k$, $r\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (ra_n)X^n$.

É simples verificar que com a soma e o produto por escalar definidos acima, $k[[X]]$ é um k-espaço vetorial. Consideremos a função $m : k[[X]] \times k[[X]] \to k[[X]]$ dada por

$$m(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n, \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{i+j=n} a_i b_j) X^n.$$

É possível verificar que m definida assim é k-bilinear. Logo, pela propriedade universal do produto tensorial, existe um único morfismo M de k-espaços vetoriais dado por

$$\begin{array}{rccl} M: & k[[X]] \otimes k[[X]] & \to & k[[X]] \\ & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \otimes \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n & \mapsto & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\sum\limits_{i+j=n} a_i b_j) X^n. \end{array}$$

Podemos definir também uma função $u : k \to k[[X]]$ por $u(1_k) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \delta_{n,0}X^n$, sendo $\delta_{n,0}$ o delta de Kronecker, que por linearidade se estende a k. Verifiquemos que os diagramas da definição de álgebra comutam. Notemos que

$$\begin{aligned} M(M\otimes I_{k[[X]]})(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n \otimes \sum_{n\in\mathbb{N}} b_nX^n \otimes \sum_{n\in\mathbb{N}} c_nX^n) &= M(\sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{i+j=n} a_ib_j)X^n \otimes \sum_{n\in\mathbb{N}} c_nX^n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{i+j+k=n} a_ib_jc_k)X^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(I_{k[[X]]}\otimes M)(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n \otimes \sum_{n\in\mathbb{N}} b_nX^n \otimes \sum_{n\in\mathbb{N}} c_nX^n) &= M(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n \otimes \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{j+k=n}^{n} b_jc_k)X^n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{i+j+k=n} a_ib_jc_k)X^n. \end{aligned}$$

Portanto, $M(M\otimes I_{k[[X]]}) = M(I_{k[[X]]}\otimes M)$, ou seja, a associatividade vale. Para o segundo diagrama, vamos verificar que $u(1_k)$ é unidade. Temos

$$\begin{aligned} u(1_k)(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n) &= (\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{n,0}X^n)(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{i+j=n} \delta_{i,0}a_j)X^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n \end{aligned}$$

e, analogamente, vale $(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n)u(1_k) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n$. Portanto, $k[[X]]$ é k-álgebra. ■

Exemplo 1.1.9. Álgebra de Matrizes. Sejam $n \geq 1$ inteiro positivo e $M_n(k)$ um k-espaço vetorial de dimensão n^2. Denotamos por $\{e_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ uma base de $M_n(k)$ e definimos em $M_n(k)$ as respectivas multiplicação e unidade

$$M(e_{ij}\otimes e_{pq}) = \delta_{jp}e_{iq} \quad \text{e} \quad u(r) = r\sum_{i=1}^{n} e_{ii},\ 1\leq i,j\leq n,\ r\in k.$$

Então $M_n(k)$ é a conhecida *Álgebra de Matrizes*. ■

Exemplo 1.1.10. Álgebra Oposta. Seja (A,M,u) uma álgebra. Podemos definir uma nova álgebra A^{op} que como conjunto é exatamente o conjunto A, mas a multiplicação é dada por $M^{op} = M\circ\tau : A\otimes A \to A$, em que $\tau : A\otimes A \to A\otimes A$ é a aplicação chamada *twist* dada por $\tau(a\otimes b) = b\otimes a$. Denotamos a tripla como $A^{op} = (A,M^{op},u)$. A verificação da comutatividade dos diagramas da definição de álgebra são imediatos. Sejam $a,b,c\in A$, então

$$M^{op}(M^{op}\otimes I)(a\otimes b\otimes c) = M^{op}(ba\otimes c) = c(ba)$$

e

$$M^{op}(I \otimes M^{op})(a \otimes b \otimes c) = M^{op}(a \otimes cb) = (cb)a.$$

A igualdade vale, pois a álgebra (A, M, u) é associativa. Logo, $M^{op}(M^{op} \otimes I) = M^{op}(I \otimes M^{op})$. O axioma da unidade é imediato. Portanto, A^{op} é uma álgebra. ■

Definição 1.1.11. *Uma álgebra (A, M, u) é dita comutativa se o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "M"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "M"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

comuta, em que a função τ é a aplicação twist dita acima. Em outras palavras, $\forall a, b \in A$ temos

$$M(a \otimes b) = ab = ba = M\tau(a \otimes b).$$

■

Sejam A e B k-álgebras. Dizemos que $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras se f é um morfismo de aneis, de k-espaços vetoriais e $f(1_A) = 1_B$. Essa definição, assim como a definição de álgebra, pode ser traduzida em termos de diagramas comutativos.

Definição 1.1.12. *Sejam (A, M_A, u_A) e (B, M_B, u_B) k-álgebras. Uma função k-linear $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras se os diagramas*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "M_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "M_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & B \\
& k \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] &
\end{tikzcd}$$

são comutativos. ■

O primeiro diagrama nos diz que $f(ab) = f(a)f(b)$, $\forall a, b \in A$, e o segundo diagrama que $f(1_A) = 1_B$.

Proposição 1.1.13. *Sejam (A, M_A, u_A) e (B, M_B, u_B) k-álgebras. Sabemos que $A \otimes B$ tem uma estrutura de k-espaço vetorial. Agora, definindo as funções*

$$M_{A \otimes B} : A \otimes B \otimes A \otimes B \to A \otimes B \quad e \quad u_{A \otimes B} : A \otimes B \to k$$

por $M_{A\otimes B} = (M_A \otimes M_B)(I_A \otimes \tau \otimes I_B)$ *e* $u_{A\otimes B} = (u_A \otimes u_B)\varphi$*, em que* τ *é a aplicação twist e* $\varphi : k \to k \otimes k$ *é o isomorfismo canônico, então* $(A \otimes B, M_{A\otimes B}, u_{A\otimes B})$ *é uma k-álgebra.*

Demonstração: Vale observarmos que $M_{A\otimes B}$ e $u_{A\otimes B}$ assim definidas são morfismos de k-espaços vetoriais, pois são composições de funções k-lineares. Verifiquemos agora que os diagramas da definição de álgebra comutam. Sejam $a_1, a_2, a_3 \in A$ e $b_1, b_2, b_3 \in B$, então

$$M_{A\otimes B}(M_{A\otimes B} \otimes I)(a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2 \otimes a_3 \otimes b_3) = M_{A\otimes B}(a_1a_2 \otimes b_1b_2 \otimes a_3 \otimes b_3) = (a_1a_2)a_3 \otimes (b_1b_2)b_3,$$

$$M_{A\otimes B}(I \otimes M_{A\otimes B})(a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2 \otimes a_3 \otimes b_3) = M_{A\otimes B}(a_1 \otimes b_1 \otimes a_2a_3 \otimes b_2b_3 = a_1(a_2a_3) \otimes b_1(b_2b_3).$$

Como A e B são k-álgebras, podemos concluir $M_{A\otimes B}(M_{A\otimes B} \otimes I) = M_{A\otimes B}(I \otimes M_{A\otimes B})$. Agora, $u_{A\otimes B}(1_k) = (u_A \otimes u_B)\varphi(1_k) = (u_A \otimes u_B)(1_k \otimes 1_k) = u_A(1_k) \otimes u_B(1_k) = 1_A \otimes 1_B$, a unidade de $A \otimes B$. Logo, a proposição está demonstrada. ∎

1.2 Coálgebras

A importância da definição de uma k-álgebra via diagramas está em sua natureza categórica. Agora, podemos dualizar a definição de uma k-álgebra invertendo o sentido das setas nos diagramas e obter uma nova estrutura, chamada k-coálgebra.

Definição 1.2.1. *Uma k-coálgebra é uma tripla* (C, Δ, ε)*, em que* C *é um k-espaço vetorial e* $\Delta : C \to C \otimes C$ *e* $\varepsilon : C \to k$ *são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os diagramas*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "I_C \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes I_C"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\varphi_l"'] \arrow[dr, "\varphi_r"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\ k \otimes C & & C \otimes k \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes I_C"] \arrow[ur, "I_C \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

são comutativos, em que I_C *é a identidade em* C *e* $\varphi_l : C \to k \otimes C$ *e* $\varphi_r : C \to C \otimes k$ *são os isomorfismos canônicos dados por* $\varphi_l(c) = 1_k \otimes c$ *e* $\varphi_r(c) = c \otimes 1_k$, $\forall c \in C$. ∎

Os morfismos Δ e ε são chamados de comultiplicação e counidade da coálgebra (C, Δ, ε), respectivamente. A comutatividade do diagrama do lado esquerdo é chamada axioma da coassociatividade, o que podemos escrever como

$$(\Delta \otimes I_C)\Delta = (I_C \otimes \Delta)\Delta,$$

enquanto a comutatividade do segundo diagrama é chamada axioma da counidade, o que podemos escrever como

$$\varphi_l = (\varepsilon \otimes I_C)\Delta \quad \text{e} \quad \varphi_r = (I_C \otimes \varepsilon)\Delta.$$

Observação 1.2.2. Ao provarmos o axioma da counidade nos exemplos que apresentamos a seguir, vamos identificar $k \otimes C$ e $C \otimes k$ com C, de maneira que não vamos provar a relação $\varphi_l = (\varepsilon \otimes I_C)\Delta$, mas vamos verificar que para todo $c \in C$ com $\Delta(c) = \sum_i c_i \otimes d_i$, temos $\sum_i \varepsilon(c_i) d_i = c$. Isso quer dizer que, por abuso de notação, vamos escrever $(I_C \otimes \varepsilon)\Delta$ como uma função de C em C, ou seja, vamos estar pensando em $\varphi_l^{-1}(I_C \otimes \varepsilon)\Delta$. As mesmas observações valem para $\varphi_r = (I_C \otimes \varepsilon)\Delta$. ■

Exemplo 1.2.3. Sejam S um conjunto não-vazio e kS o k-espaço vetorial com base S. Para definir uma estrutura de coálgebra em kS, basta definirmos Δ e ε nos elementos da base e estender por linearidade. Assim, não é difícil ver que kS é uma coálgebra com comultiplicação e counidade dadas por

$$\Delta(s) = s \otimes s \quad \text{e} \quad \varepsilon(s) = 1, \forall s \in S.$$

■

Observação 1.2.4. Decorre desse primeiro exemplo que em todo k-espaço vetorial V podemos introduzir uma estrutura de coálgebra. Basta tomar S como sendo uma base para V, já que todo espaço vetorial possui base. Em particular, o corpo k é uma coálgebra, pois é um k-espaço vetorial com base $S = \{1_k\}$. Nesse caso, temos

$$\Delta(r) = r \otimes 1_k \quad \text{e} \quad \varepsilon(r) = r, \forall r \in k,$$

respectivamente o isomorfismo canônico e o morfismo identidade em k. ■

Exemplo 1.2.5. Estrutura de Coálgebra da Álgebra de Grupo. Sejam G um grupo e kG a álgebra de grupo do Exemplo 1.1.7. Podemos introduzir nesse conjunto uma estrutura de coálgebra, basta observarmos que $\{1_k g\}_{g \in G}$ é uma base para kG. Por abuso de notação, escrevemos $\{g\}_{g \in G}$ para denotar tal base. Assim, podemos definir

$$\Delta(g) = g \otimes g \quad \text{e} \quad \varepsilon(g) = 1_k, \forall g \in G$$

e estender por linearidade. ■

Exemplo 1.2.6. Coálgebra das Potências Divididas. Seja H um k-espaço vetorial com base

$\{c_m : m \in \mathbb{N}\}$. Então H é uma coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε dadas por

$$\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i} \quad \text{e} \quad \varepsilon(c_m) = \delta_{0,m}, \forall m \in \mathbb{N},$$

em que $\delta_{0,m}$ é o delta de Kronecker. Vamos mostrar que (H,Δ,ε) é k-coálgebra. Primeiro, devemos verificar a comutatividade do primeiro diagrama da definição de coálgebra, ou seja, a coassociatividade da comultiplicação. Para todo $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I_H)\Delta(c_m) &= (\Delta \otimes I_H)(\sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \Delta(c_i) \otimes c_{m-i} \\
&= \sum_{i=0}^{m} (\sum_{j=0}^{i} c_j \otimes c_{i-j}) \otimes c_{m-i} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} c_j \otimes c_{i-j} \otimes c_{m-i}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(I_H \otimes \Delta)\Delta(c_m) &= (I_H \otimes \Delta)(\sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes \Delta(c_{m-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes (\sum_{j=0}^{m-i} c_j \otimes c_{m-i-j}) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} c_i \otimes c_j \otimes c_{m-i-j}.
\end{aligned}$$

Portanto, chegamos a

$$(\Delta \otimes I_H)\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} c_j \otimes c_{i-j} \otimes c_{m-i} \quad \text{e} \quad (I_H \otimes \Delta)\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} c_i \otimes c_j \otimes c_{m-i-j},$$

mas essas somas são equivalentes, pois tem as mesmas parcelas. De fato, fixando na primeira soma $i = i_0$ e $j = j_0$ com $0 \leq i_0 \leq m$ e $0 \leq j_0 \leq i_0$, na segunda soma podemos escolher $i = j_0$ e $j = i_0 - j_0$, obtendo a mesma parcela $c_{j_0} \otimes c_{i_0-j_0} \otimes c_{m-i_0}$ nas duas somas. Da mesma forma, fixando na segunda soma $i = i_0$ e $j = j_0$ com $0 \leq i_0 \leq m$ e $0 \leq j_0 \leq m - i_0$, na primeira soma podemos escolher $i = i_0 + j_0$ e $j = i_0$, obtendo a mesma parcela $c_{i_0} \otimes c_{j_0} \otimes c_{m-i_0-j_0}$ nas duas somas. Portanto, concluímos que $(\Delta \otimes I_H)\Delta = (I_H \otimes \Delta)\Delta$.

Mostremos a comutatividade do segundo diagrama. Para todo $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{i=0}^{m} \varepsilon(c_i)c_{m-i} = \sum_{i=0}^{m} \delta_{0,i}c_{m-i} = 1_k c_m = c_m.$$

Logo, $\sum\limits_{i=0}^{m} \varepsilon(c_i)c_{m-i} = c_m$ e analogamente se mostra $\sum\limits_{i=0}^{m} \varepsilon(c_{m-i})c_i = c_m$. Portanto, H é uma coálgebra, chamada *Coálgebra das Potências Divididas*. Esse nome será explicado no final desse capítulo. ■

Exemplo 1.2.7. Coálgebra de Matrizes. Sejam $n \geq 1$ inteiro positivo e $M^c(n,k)$ um k-espaço vetorial de dimensão n^2. Denotamos por $\{e_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ uma base de $M^c(n,k)$ e definimos em $M^c(n,k)$ as respectivas comultiplicação e counidade

$$\Delta(e_{ij}) = \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pj} \quad \text{e} \quad \varepsilon(e_{ij}) = \delta_{i,j},\ 1 \leq i,j \leq n.$$

Dessa maneira, $M^c(n,k)$ é uma coálgebra, chamada *Coálgebra de Matrizes*. De fato, temos

$$\begin{aligned}
(I \otimes \Delta)\Delta(e_{ij}) &= (I \otimes \Delta)(\sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pj}) \\
&= \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes \Delta(e_{pj}) \\
&= \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes \sum_{q=1}^{n} e_{pq} \otimes e_{qj} \\
&= \sum_{1 \leq p,q \leq n} e_{ip} \otimes e_{pq} \otimes e_{qj}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I)\Delta(e_{ij}) &= (\Delta \otimes I)(\sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pj}) \\
&= \sum_{p=1}^{n} \Delta(e_{ip}) \otimes e_{pj} \\
&= \sum_{p=1}^{n} (\sum_{q=1}^{n} e_{iq} \otimes e_{qp}) \otimes e_{pj} \\
&= \sum_{1 \leq p,q \leq n} e_{iq} \otimes e_{qp} \otimes e_{pj} \\
&= \sum_{1 \leq p,q \leq n} e_{ip} \otimes e_{pq} \otimes e_{qj}.
\end{aligned}$$

Portanto, o primeiro diagrama comuta. Mostremos que ε satisfaz a propriedade da counidade.

Dado $e_{ij} \in M^c(n,k)$, temos

$$\sum_{p=1}^{n} \varepsilon(e_{ip})e_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \delta_{i,p}e_{pj} = 1_k e_{ij} = e_{ij}.$$

Analogamente, mostra-se $\sum_{p=1}^{n} \varepsilon(e_{pj})e_{ip} = e_{ij}$. Assim, $M^c(n,K)$ é uma coálgebra. ■

Exemplo 1.2.8. Coálgebra Trigonométrica. Seja C um k-espaço vetorial com base $\{s,c\}$. Definimos $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to k$ por

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= s \otimes c + c \otimes s, \\ \Delta(c) &= c \otimes c - s \otimes s, \\ \varepsilon(s) &= 0, \\ \varepsilon(c) &= 1. \end{aligned}$$

Não é difícil ver que (C,Δ,ε) é uma coálgebra, chamada *Coálgebra Trigonométrica*. Não é coincidência que as expressões da comultiplicação aplicada nos elementos da base lembram muito as fórmulas do seno e cosseno da soma de arcos. Explicações adicionais serão dadas no final desse capítulo. ■

1.2.1 Notação de Sweedler, Subcoálgebras e Coálgebras Quociente

Nosso objetivo aqui é apresentar uma notação nova que irá facilitar os cálculos futuros com longas composições que envolvam a comultiplicação. Essa notação é chamada de notação de Sweedler. Para mais detalhes, o leitor pode consultar [1], p. 4-8.

Dada uma coálgebra (C,Δ,ε), podemos definir recursivamente uma sequência de aplicações $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ como segue:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \Delta, \quad & \Delta_n : C \to C \otimes \cdots \otimes C \;\; (C \text{ aparecendo } n+1 \text{ vezes}) \\ & \Delta_n = (\Delta \otimes I^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}, \text{ para todo } n \geq 2. \end{aligned}$$

Em uma álgebra (A,M,u), temos uma propriedade chamada associatividade generalizada, a qual pode ser traduzida pelo conhecido fato de que num produto de vários elementos de A, não importa como se colocam os parênteses, o resultado é sempre o mesmo. A propriedade dual no caso de coálgebras é chamada coassociatividade generalizada, dada pela proposição seguinte.

Proposição 1.2.9. *Seja (C,Δ,ε) uma coálgebra. Então para quaisquer $n \geq 2$ e $p \in \{0,...,n-1\}$*

a seguinte igualdade vale

$$\Delta_n = (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1}.$$

Demonstração: Mostraremos por indução em n que a igualdade vale para todo $p \in \{0, ..., n-1\}$. Para $n = 2$, devemos mostrar que $(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta$, mas isso é válido, pois é a coassociatividade da comultiplicação. Assuma que a relação valha para um n. Para $p = 0$ temos, por definição, $\Delta_{n+1} = (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ \Delta_n$. Suponha válido para $p \in \{0, ..., n-1\}$, então

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1} &= (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ \Delta_n \\
&= (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (I^p \otimes ((\Delta \otimes I) \circ \Delta) \otimes I^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (I^p \otimes ((I \otimes \Delta) \circ \Delta) \otimes I^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (I^{p+1} \otimes \Delta \otimes I^{n-1-p}) \circ (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (I^{p+1} \otimes \Delta \otimes I^{n-(p+1)}) \circ \Delta_n,
\end{aligned}$$

ou seja, a igualdade vale para $p+1$. Logo, a igualdade vale para $n+1$, para todo $p \in \{0, ..., n\}$.
■

Notemos que em uma álgebra, a multiplicação funciona como uma espécie de “contração” interna entre seus elementos, enquanto que em uma coálgebra, a comultiplicação funciona como uma espécie de “explosão” de seus elementos, o que está de acordo com o que se espera como a noção abstrata dual. Devido a este fato, cálculos em uma coálgebra são mais difíceis do que em uma álgebra. Por essa razão, vamos introduzir uma notação que simplifica a escrita do resultado de aplicar a comultiplicação várias vezes.

Usando as convenções usuais de soma, quando aplicássemos Δ em um elemento de C, deveríamos escrever $\Delta(c) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_{i1} \otimes c_{i2}$. Na notação de Sweedler, escrevemos simplesmente $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$, para qualquer $c \in C$. A vantagem está em suprimir os índices. De maneira similar, escrevemos $\Delta_n(c) = \sum c_1 \otimes \cdots \otimes c_{n+1}$, $\forall n \geq 1$. Pela definição de Δ_n, quanto maior o n, mais “carregada” se torna a escrita de $\Delta_n(c)$, qualquer que seja $c \in C$. Para $n = 2$, temos

$$(I \otimes \Delta)\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2},$$

$$(\Delta \otimes I)\Delta(c) = \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2.$$

A coassociatividade pode ser expressada como

$$\Delta_2(c) = \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2}.$$

Portanto, podemos escrever

$$\Delta_2(c) = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.$$

Para a propriedade da counidade, temos

$$c = \sum \varepsilon(c_1)c_2 = \sum c_1 \varepsilon(c_2).$$

Tendo em mente a notação de Sweedler, apresentamos mais um importante exemplo de coálgebra.

Exemplo 1.2.10. Coálgebra Cooposta. Dualizando a definição de álgebra oposta vista no Exemplo 1.1.10, podemos dar uma noção dual de coálgebra cooposta. Seja (C,Δ,ε) uma coálgebra, definimos C^{cop} como sendo exatamente o conjunto C, mas com comultiplicação definida por $\tau\Delta : C \to C \otimes C$, em que τ é a aplicação *twist* já comentada. Denotamos a tripla como $(C,\Delta^{cop},\varepsilon)$. Seja $c \in C$, então

$$(\Delta^{cop} \otimes I)\Delta^{cop}(c) = (\Delta^{cop} \otimes I)(\sum c_2 \otimes c_1) = \sum c_{2_2} \otimes c_{2_1} \otimes c_1 = \sum c_3 \otimes c_2 \otimes c_1,$$

$$(I \otimes \Delta^{cop})\Delta^{cop}(c) = (I \otimes \Delta^{cop})(\sum c_2 \otimes c_1) = \sum c_2 \otimes c_{1_2} \otimes c_{1_1} = \sum c_3 \otimes c_2 \otimes c_1.$$

A comutatividade do segundo diagrama não é difícil de ser verificada. Portanto, $(C,\Delta^{cop},\varepsilon)$ é k-coálgebra. ■

Baseando-nos nas definições de álgebra comutativa (Definição 1.1.11) e morfismo de álgebras (Definição 1.1.12) podemos dar definições duais para coálgebras.

Definição 1.2.11. *Uma coálgebra (C,Δ,ε) é dita cocomutativa se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ C \otimes C \arrow[rr, "\tau"'] & & C \otimes C \end{tikzcd}$$

comuta. Em outras palavras, $\forall c \in C$ temos

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2 = \sum c_2 \otimes c_1 = \tau\Delta(c).$$

■

Definição 1.2.12. *Sejam $(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$ e $(D,\Delta_D,\varepsilon_D)$ k-coálgebras. Uma função k-linear $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras se os diagramas*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

são comutativos. ■

A comutatividade do primeiro diagrama pode ser reescrita como

$$\Delta_D f(c) = \sum f(c)_1 \otimes f(c)_2 = \sum f(c_1) \otimes f(c_2) = (f \otimes f)\Delta_C(c), \forall c \in C.$$

Essa igualdade nos diz que f é um morfismo de coálgebras se a comultiplicação da imagem por f de um elemento for igual às "imagens por f da comultiplicação" desse elemento, de maneira análoga ao fato de f ser um morfismo de álgebras se a imagem por f do produto de dois elementos for o produto das imagens por f desses elementos.

Já a comutatividade do segundo diagrama pode ser reescrita como

$$\varepsilon_D f(c) = \varepsilon_C(c), \forall c \in C.$$

Portanto, $f : C \to D$ é morfismo de coálgebras se

$$\Delta_D f = (f \otimes f)\Delta_C \quad \text{e} \quad \varepsilon_D f = \varepsilon_C.$$

Agora, estudamos um pouco subestruturas e estruturas quociente.

Definição 1.2.13. *Sejam (C,Δ,ε) uma coálgebra e D um k-subespaço vetorial de C. Dizemos que D é uma subcoálgebra de C se $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.* ■

Definição 1.2.14. *Sejam (C,Δ,ε) uma coálgebra e I um k-subespaço vetorial de C. Dizemos que I é um:*

(i) coideal à esquerda (direita) se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$ ($\Delta(I) \subseteq I \otimes C$);

(ii) coideal se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$. ■

Como é de se esperar, a soma e a interseção de subcoálgebras (respectivamente, coideais, coideais à esquerda, coideais à direita) são subcoálgebras (respectivamente, coideais, coideais à esquerda, coideais à direita). Portanto, podemos falar da subcoálgebra gerada por um subconjunto $S \subseteq C$ como a intersecção de todas as subcoálgebras D de C com $S \subseteq D$, e o mesmo para coideais, coideais à esquerda e coideais à direita.

Exemplo 1.2.15. Vejamos um exemplo de um coideal I que não é coideal à direita nem à esquerda. Consideremos o anel de polinômios $k[X]$ que é uma coálgebra com comultiplicação e counidade dadas por

$$\Delta(X^n) = (X \otimes 1_k + 1_k \otimes X)^n, \quad \varepsilon(X^n) = 0 \text{ para } n \geq 1,$$
$$\Delta(1_k) = 1_k \otimes 1_k, \quad \varepsilon(1_k) = 1_k.$$

Agora, consideremos $I = kX$, o k-subespaço gerado por X. Mostremos que I é um coideal. É claro que $\Delta(X) = X \otimes 1_k + 1_k \otimes X \in I \otimes k[X] + k[X] \otimes I$ e $\varepsilon(X) = 0$. Suponhamos, por absurdo, que I seja coideal à esquerda, ou seja, $\Delta(X) \in k[X] \otimes I$. Assim, temos $\Delta(X) = \sum c_i \otimes r_i X$, com $c_i \in k[X]$ e $r_i \in k$. Pela propriedade da counidade,

$$X = \sum \varepsilon(r_i X) c_i = \sum \varepsilon(X) r_i c_i = 0,$$

o que é absurdo. Uma conta análoga mostra que I não é coideal à direita. ∎

Exemplo 1.2.16. Existem outros exemplos de coideais que não são coideais laterais, por exemplo:

1) considerando a coálgebra kS sobre um conjunto não vazio S do Exemplo 1.2.3, o coideal $I = k(s-t)$ que é o k-subespaço gerado pelo elemento $s - t \in kS$, $s, t \in S$;

2) considerando H a Coálgebra das Potências Divididas do Exemplo 1.2.6, os coideais $I_n = kc_1 + \ldots + kc_n$, $n \geq 1$;

3) na Coálgebra de Matrizes $M^c(n,k)$ do Exemplo 1.2.7, os coideais $I = \sum_{1 \leq i < j \leq n} ke_{ij}$, $J = \sum_{1 \leq j < i \leq n} ke_{ij}$ e $I + J$;

4) para a Coálgebra Trigonométrica do Exemplo 1.2.8, consideramos o coideal $I = ks$. ∎

Os dois próximos lemas, que apresentamos sem demonstração, servirão para demonstrar o Teorema Fundamental das Coálgebras. Esses lemas podem ser encontrados em [1], Exercise

1.3.1, p. 16 e Lemma 1.4.5, p. 24, respectivamente.

Lema 1.2.17. *Sejam V e W k-espaços vetoriais e $X \subseteq V$, $Y \subseteq W$ k-subespaços vetorias. Então $(V \otimes Y) \cap (X \otimes W) = X \otimes Y$.* ■

Lema 1.2.18. *Sejam V e W k-espaços vetoriais. Então para todo $x \in V \otimes W$, existem um inteiro positivo n e famílias de vetores linearmente independentes $(v_i)_{i=1,n} \subseteq X$, $(w_i)_{i=1,n} \subseteq W$ tais que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i$.* ■

Observação 1.2.19. Note que se I é um coideal à esquerda e direita, então pelo Lema 1.2.17 $\Delta(I) \subseteq (C \otimes I) \cap (I \otimes C) = I \otimes I$, portanto I é uma subcoálgebra. ■

O próximo resultado diferencia a teoria de coálgebras da teoria de álgebras, apresentando uma propriedade de finitude intrínseca das coálgebras. Muitos resultados interessantes da teoria de coálgebras dependem dessa propriedade.

Teorema 1.2.20. ***Teorema Fundamental das Coálgebras.*** *Todo elemento de uma coálgebra C está contido em uma subcoálgebra de dimensão finita.*

Demonstração: Seja $c \in C$. Escreva $\Delta_2(c) = \sum_{i,j} c_i \otimes x_{ij} \otimes d_j$, com os c_i's e d_j's linearmente independentes, o que é possível pelo Lema 1.2.18. Denote por X o k-subespaço gerado pelos x_{ij}'s, o qual tem dimensão finita. Como $c = (\varepsilon \otimes I \otimes \varepsilon)\Delta_2(c) = \sum_{i,j} \varepsilon(c_i)\varepsilon(d_i)x_{ij}$, segue que $c \in X$. Agora

$$(\Delta \otimes I \otimes I)\Delta_2(c) = (I \otimes \Delta \otimes I)\Delta_2(c),$$

e como os d_j's são linearmente independentes, segue que

$$\sum_i c_i \otimes \Delta(x_{ij}) = \sum_i \Delta(c_i) \otimes x_{ij} \in C \otimes C \otimes X.$$

Como os c_i's são linearmente independentes, segue que $\Delta(x_{ij}) \in C \otimes X$. Similarmente, $\Delta(x_{ij}) \in X \otimes C$ e pela observação anterior X é uma subcoálgebra. ■

Por causa desse teorema, muitas afirmações sobre coálgebras se resumem a afirmações sobre coálgebras de dimensão finita. Infelizmente, não veremos esse efeito neste trabalho, mas isso pode ser verificado nas referências.

O próximo lema, cuja demonstração também omitimos, servirá para demonstrar a proposição que o sucede. O leitor pode encontrar a prova do lema em [1], Lemma 1.4.8, p. 25.

Lema 1.2.21. *Sejam $f : V_1 \to V_2$ e $g : W_1 \to W_2$ morfismos de k-espaços vetoriais. Então $Ker(f \otimes g) = Ker(f) \otimes W_1 + V_1 \otimes Ker(g)$.* ■

A próxima proposição mostra uma situação muito semelhante ao que ocorre com aneis, grupos e módulos.

Proposição 1.2.22. *Seja $f : C \to D$ um morfismo de coálgebras. Então:*
(i) $Im(f)$ é uma subcoálgebra de D;
(ii) $Ker(f)$ é um coideal de C.

Demonstração: (i) Como f é um morfismo de coálgebras, o diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd}$$

comuta. Então

$$\Delta_D(Im(f)) = \Delta_D f(C) = (f \otimes f)\Delta_C(C) \subseteq (f \otimes f)(C \otimes C) = f(C) \otimes f(C) = Im(f) \otimes Im(f).$$

Logo, $Im(f)$ é uma subcoálgebra de D.

(ii) Como $f(Ker(f)) = 0$, temos $(f \otimes f)\Delta_C(Ker(f)) = \Delta_D f(Ker(f)) = 0$. Portanto, usando o Lema 1.2.21,

$$\Delta_C(Ker(f)) \subseteq Ker(f \otimes f) = Ker(f) \otimes C + C \otimes Ker(f).$$

Como f é um morfismo de coálgebras, o diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

comuta, portanto $\varepsilon_C(Ker(f)) = \varepsilon_D f(Ker(f)) = 0$. Assim, $Ker(f)$ é um coideal de C. ∎

Mostramos agora uma proposição que será importante no nosso estudo sobre Álgebras de Hopf. Dadas duas álgebras, conseguimos dar uma estrutura de álgebra para o seu produto tensorial. Isso é possível também para coálgebras.

Proposição 1.2.23. *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ k-coálgebras. Sabemos que $C \otimes D$ tem uma estrutura de k-espaço vetorial. Agora, definindo as funções*

$$\Delta_{C \otimes D} : C \otimes D \to C \otimes D \otimes C \otimes D \quad e \quad \varepsilon_{C \otimes D} : C \otimes D \to k$$

por $\Delta_{C\otimes D} = (I_C \otimes \tau \otimes I_D)(\Delta_C \otimes \Delta_D)$ *e* $\varepsilon_{C\otimes D} = \varphi(\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D)$*, em que* τ *é a aplicação twist e* $\varphi : k\otimes k \to k$ *é o isomorfismo canônico, então* $(C\otimes D, \Delta_{C\otimes D}, \varepsilon_{C\otimes D})$ *é uma k-coálgebra.*

Demonstração: Vale observarmos que $\Delta_{C\otimes D}$ e $\varepsilon_{C\otimes D}$ assim definidas são morfismos de k-espaços vetoriais, pois são composições de funções k-lineares. Verifiquemos agora que os diagramas da definição de coálgebra comutam. Sejam $c \in C$, $d \in D$, então

$$\begin{aligned}(\Delta_{C\otimes D} \otimes I_{C\otimes D})\Delta_{C\otimes D}(c\otimes d) &= (\Delta_{C\otimes D} \otimes I_{C\otimes D})(\sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2)\\ &= \sum c_{1_1} \otimes d_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes d_{1_2} \otimes c_2 \otimes d_2\\ &= \sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2 \otimes c_3 \otimes d_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(I_{C\otimes D} \otimes \Delta_{C\otimes D})\Delta_{C\otimes D}(c\otimes d) &= (I_{C\otimes D} \otimes \Delta_{C\otimes D})(\sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2)\\ &= \sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_{2_1} \otimes d_{2_1} \otimes c_{2_2} \otimes d_{2_2}\\ &= \sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2 \otimes c_3 \otimes d_3.\end{aligned}$$

Portanto, vale a comutatividade do primeiro diagrama. Agora,

$$\begin{aligned}c\otimes d &= (\sum c_1 \varepsilon_C(c_2)) \otimes (\sum d_1 \varepsilon_D(d_2))\\ &= \sum (c_1 \otimes d_1)\varepsilon_C(c_2)\varepsilon_D(d_2)\\ &= \sum (c_1 \otimes d_1)\varepsilon_{C\otimes D}(c_2 \otimes d_2).\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se $c\otimes d = \sum \varepsilon_{C\otimes D}(c_1 \otimes d_1)(c_2 \otimes d_2)$. Logo, $(C\otimes D, \Delta_{C\otimes D}, \varepsilon_{C\otimes D})$ é uma coálgebra. ■

Definição 1.2.24. *A estrutura de coálgebra de* $C\otimes D$ *obtida na proposição anterior é chamada estrutura do produto tensorial de coálgebras.* ■

Teorema 1.2.25. *Sejam* C *uma coálgebra,* I *um coideal de* C *e* $p : C \to C/I$ *a projeção canônica de k-espaços vetoriais. Então:*
(i) existe uma única estrutura de coálgebra em C/I *tal que* p *é um morfismo de coálgebras;*
(ii) se $f : C \to D$ *é um morfismo de coálgebras com* $I \subseteq Ker(f)$*, então existe um único morfismo de coálgebras* $\bar{f} : C/I \to D$ *tal que* $\bar{f}p = f$*.*

Demonstração: (i) Como I é um coideal, temos $\Delta(I) \subseteq I\otimes C + C\otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$. Assim, $(p\otimes p)\Delta(I) \subseteq (p\otimes p)(I\otimes C + C\otimes I) = 0$, pois $I = Ker(p)$. Logo, $I \subseteq Ker((p\otimes p)\Delta)$. Pela propriedade universal do espaço vetorial quociente, existe um único morfismo k-linear

$\bar{\Delta} : C/I \to C/I \otimes C/I$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\Delta"'] & C/I \arrow[d, "\bar{\Delta}"] \\ C \otimes C \arrow[r, "p \otimes p"'] & C/I \otimes C/I \end{tikzcd}$$

comuta. Esse morfismo é definido por $\bar{\Delta}(\overline{c}) = \sum \overline{c_1} \otimes \overline{c_2}$, em que $p(c) = \overline{c}$ é a classe de equivalência de c módulo I. Com isso, para todo $c \in C$, temos

$$(\bar{\Delta} \otimes I_{C/I})\bar{\Delta}(\overline{c}) = (\bar{\Delta} \otimes I_{C/I})(\sum \overline{c_1} \otimes \overline{c_2}) = \sum \overline{c_{1_1}} \otimes \overline{c_{1_2}} \otimes \overline{c_2} = \sum \overline{c_1} \otimes \overline{c_2} \otimes \overline{c_3},$$

$$(I_{C/I} \otimes \bar{\Delta})\bar{\Delta}(\overline{c}) = (I_{C/I} \otimes \bar{\Delta})(\sum \overline{c_1} \otimes \overline{c_2}) = \sum \overline{c_1} \otimes \overline{c_{2_1}} \otimes \overline{c_{2_2}} = \sum \overline{c_1} \otimes \overline{c_2} \otimes \overline{c_3}.$$

Portanto, $(\bar{\Delta} \otimes I_{C/I})\bar{\Delta} = (I_{C/I} \otimes \bar{\Delta})\bar{\Delta}$, ou seja, $\bar{\Delta}$ é coassociativo. Como $\varepsilon(I) = 0$, segue que $I \subseteq Ker(\varepsilon)$. Assim, pela propriedade universal do espaço vetorial quociente, existe um único morfismo k-linear $\bar{\varepsilon} : C/I \to k$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & C/I \arrow[dl, "\bar{\varepsilon}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

comuta. Esse morfismo é definido por $\bar{\varepsilon}(\overline{c}) = \varepsilon(c)$, $\forall c \in C$. Dessa forma,

$$\sum \bar{\varepsilon}(\overline{c_1})\overline{c_2} = p(\sum \varepsilon(c_1)c_2) = p(c) = \overline{c}$$

e, portanto, $(C/I, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ é uma coálgebra e a comutatividade dos dois diagramas acima mostra que p é um morfismo de coálgebras.

(ii) Como $I \subseteq Ker(f)$, pela propriedade universal do espaço vetorial quociente existe um único morfismo k-linear $\bar{f} : C/I \to D$ tal que $\bar{f}p = f$, definido por $\bar{f}(\overline{c}) = f(c)$, $\forall c \in C$. Como

$$\Delta_D \bar{f}(\overline{c}) = \Delta_D f(c) = \sum f(c)_1 \otimes f(c)_2 = \sum f(c_1) \otimes f(c_2) = \sum \bar{f}(\overline{c_1}) \otimes \bar{f}(\overline{c_2}) = (\bar{f} \otimes \bar{f})\bar{\Delta}(\overline{c})$$

$$\text{e} \quad \varepsilon_D \bar{f}(\overline{c}) = \varepsilon_D f(c) = \varepsilon(c) = \bar{\varepsilon}(\overline{c}),$$

segue que $\bar{f}$ é um morfismo de coálgebras. ■

Definição 1.2.26. *A k-coálgebra $(C/I, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ do teorema anterior é chamada coálgebra quociente de C com respeito ao coideal I.* ■

Corolário 1.2.27. ***Teorema Fundamental do Isomorfismo para Coálgebras.*** *Seja $f : C \to D$ um morfismo de coálgebras. Então existe um isomorfismo canônico de coálgebras entre $C/Ker(f)$ e $Im(f)$.*

Demonstração: Fazendo $I = Ker(f)$ em (ii) da proposição acima e observando que $\bar{f}$ é injetora, segue o resultado, pois $Im(\bar{f}) = Im(f)$. ■

1.2.2 A Álgebra e a Coálgebra Duais

Nessa seção, construímos a álgebra dual de uma coálgebra dada. Veremos que a construção da coálgebra dual de uma dada álgebra é mais delicada, por isso começamos com o caso em que a álgebra possui dimensão finita, depois partimos para a construção geral. Algumas propriedades e construções que podem ser feitas com essa estrutura dual são desenvolvidas.

Dado um k-espaço vetorial V, usamos a notação V^* para representar o espaço $Hom(V,k)$.

Para o próximo lema, seguimos a referência [1], Lemma 1.3.2, p. 16. Esse lema tem participação importante exatamente na parte em que, a partir de uma álgebra de dimensão finita, a estrutura de coálgebra dual é apresentada.

Lema 1.2.28. *Sejam k um corpo, M, N e V k-espaços vetoriais e as transformações lineares $\phi : M^* \otimes V \to Hom(M,V)$, $\phi' : Hom(M,N^*) \to (M \otimes N)^*$, $\rho : M^* \otimes N^* \to (M \otimes N)^*$ definidas por*

$$\phi(f \otimes v)(m) = f(m)v, \text{ para } f \in M^*, v \in V, m \in M;$$

$$\phi'(g)(m \otimes n) = g(m)(n), \text{ para } g \in Hom(M,N^*), m \in M, n \in N;$$

$$\rho(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m)g(n), \text{ para } f \in M^*, g \in N^*, m \in M, n \in N.$$

Então são válidas as afirmações seguintes.
(i) ϕ é injetora. Se V tem dimensão finita, então ϕ é um isomorfismo;
(ii) ϕ' é um isomorfismo;
(iii) ρ é injetora. Se N tem dimensão finita, então ρ é um isomorfismo. ■

Usando indução e o item (iii) do lema anterior enunciamos o resultado seguinte.

Corolário 1.2.29. *Sejam $M_1, M_2, ..., M_n$ k-espaços vetoriais, a função k-linear $\theta : M_1^* \otimes ... \otimes M_n^* \to (M_1 \otimes ... \otimes M_n)^*$ definida por $\theta(f_1 \otimes ... \otimes f_n)(m_1 \otimes ... \otimes m_n) = f_1(m_1)...f_n(m_n)$ é inje-*

tora. Além disso, θ é um isomorfismo se, e somente se, no máximo um dos k-espaços vetorias $M_1,\ldots,M_n$ não tem dimensão finita. ■

Observação 1.2.30. Se X,Y são k-espaços vetoriais e $v : X \to Y$ é uma função k-linear, denotamos por $v^* : Y^* \to X^*$ a função k-linear definida por $v^*(f) = f \circ v$, para toda $f \in Y^*$. Vamos chamar v^* de morfismo dual de v. ■

Com esses resultados e definições em posse, podemos agora dar um passo adiante. Dada uma coálgebra (C,Δ,ε), vamos introduzir uma estrutura de álgebra no k-espaço vetorial $C^* = Hom(C,k)$. Para isso, é necessário definir funções k-lineares $M : C^* \otimes C^* \to C^*$ e $u : C^* \to k$ tais que os diagramas da definição de álgebra comutem. Definimos

$$M : C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^* \quad \text{e} \quad u : k \xrightarrow{\varphi} k^* \xrightarrow{\varepsilon^*} C^*$$

isto é, $M = \Delta^*\rho$ e $u = \varepsilon^*\varphi$, em que ρ é definido como no Lema 1.2.28 e $\varphi(r)(s) = rs$, $\forall r,s \in k$. Claramente, M e u são k-lineares.

Observação 1.2.31. Denotamos $M(f \otimes g)$ por $f * g$. Da definição de M, para quaisquer $f,g \in C^*$ e $c \in C$, temos

$$(f * g)(c) = (\Delta^*\rho(f \otimes g))(c) = \Delta^*(\rho(f \otimes g))(c) = \rho(f \otimes g)\Delta(c) = \sum f(c_1)g(c_2).$$

Vejamos que $u(1_k) = \varepsilon$. De fato,

$$u(1_k)(c) = (\varepsilon^*\varphi)(1_k)(c) = \varepsilon^*(\varphi(1_k))(c) = \varphi(1_k)(\varepsilon(c)) = 1_k\varepsilon(c) = \varepsilon(c),$$

$\forall c \in C$. Logo, $\forall f,g \in C^*$, $\forall c \in C$, temos

$$(f * g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2) \quad \text{e} \quad u(1_k) = \varepsilon.$$

■

Proposição 1.2.32. *(C^*,M,u) é k-álgebra.*

Demonstração: Precisamos verificar a comutatividade dos diagramas de álgebra. Sejam

$f,g,h \in C^*$ e $c \in C$, então

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(c) &= \sum (f*g)(c_1)h(c_2)\\ &= \sum f(c_{1_1})g(c_{1_2})h(c_2)\\ &= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3)\\ &= \sum f(c_1)g(c_{2_1})h(c_{2_2})\\ &= \sum f(c_1)(g*h)(c_2)\\ &= (f*(g*h))(c).\end{aligned}$$

Portanto, a associatividade vale. Mostremos que $u(1_k) = \varepsilon$ é o elemento identidade na multiplicação definida por M. Sejam $f \in C^*$ e $c \in C$, então

$$(\varepsilon * f)(c) = \sum \varepsilon(c_1)f(c_2) = f(\sum \varepsilon(c_1)c_2) = f(c).$$

Portanto, $\varepsilon * f = f$ e, analogamente, $f * \varepsilon = f$. Logo, C^* é uma álgebra. ■

Definição 1.2.33. *A álgebra C^* é chamada álgebra dual da coálgebra C. A multiplicação definida em C^* é chamada convolução.* ■

Vejamos alguns exemplos de álgebras duais de coálgebras dadas.

Exemplo 1.2.34. Seja S um conjunto não vazio e kS a coálgebra definida no Exemplo 1.2.3. Então a álgebra dual é $(kS)^* = Hom(kS,k)$ com multiplicação dada por

$$(f*g)(s) = f(s)g(s), \text{ para } f,g \in (kS)^* \text{ e } s \in S.$$

■

Exemplo 1.2.35. Seja H a Coálgebra das Potências Divididas do Exemplo 1.2.6. Então a álgebra H^* tem multiplicação definida por

$$(f*g)(c_n) = \sum_{i=0}^{n} f(c_i)g(c_{n-i})$$

para $f,g \in H^*$, $n \in \mathbb{N}$, e unidade $u : k \to H^*$, $u(r)(c_n) = r\delta_{0,n}$, $r \in k$ e $n \in \mathbb{N}$. Essa álgebra H^* é isomorfa à Álgebra das Séries de Potências Formais $k[[X]]$ vista no Exemplo 1.1.8, o isomorfismo é dado por

$$\begin{aligned}\sigma : \quad H^* &\to k[[X]]\\ f &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f(c_n)X^n.\end{aligned}$$

De fato, não é difícil ver que σ é k-linear. Lembrando da Definição 1.1.12, precisamos verificar que os diagramas

$$\begin{tikzcd} H^* \otimes H^* \arrow[r, "\sigma\otimes\sigma"] \arrow[d, "M_{H^*}"'] & k[[X]] \otimes k[[X]] \arrow[d, "M_{k[[X]]}"] \\ H^* \arrow[r, "\sigma"'] & k[[X]] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^* \arrow[rr, "\sigma"] & & k[[X]] \\ & k \arrow[ul, "u_{H^*}"] \arrow[ur, "u_{k[[X]]}"'] & \end{tikzcd}$$

comutam. Assim,

$$\begin{aligned} M_{k[[X]]}(\sigma\otimes\sigma)(f\otimes g) &= M_{k[[X]]}(\sum_{n=0}^{\infty} f(c_n)X^n \otimes \sum_{n=0}^{\infty} g(c_n)X^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i+j=n} f(c_i)g(c_j))X^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} f(c_i)g(c_{n-i}))X^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(f*g)(c_n)X^n \\ &= \sigma M_{H^*}(f\otimes g). \end{aligned}$$

Portanto, $M_{k[[X]]}(\sigma\otimes\sigma) = \sigma M_{H^*}$ e o primeiro diagrama comuta. Para o segundo diagrama, verificamos a unidade

$$\sigma(u_{H^*}(1_k)) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{H^*}(1_k)(c_n)X^n = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{0,n}X^n = 1_{k[[X]]}.$$

Por fim, dada a série de potências formal $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_nX^n$, $r_n \in k$, não é difícil ver que a função $\omega : k[[X]] \to H^*$ definida por $\omega(\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_nX^n)(c_i) = r_i$, $i \in \mathbb{N}$, é a inversa de σ. Logo, σ é isomorfismo de álgebras. ■

Exemplo 1.2.36. Seja $n \geq 1$ inteiro positivo, considere a coálgebra de matrizes $M^c(n,k)$ com base $\{e_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ como no Exemplo 1.2.7, em que a comultiplicação e counidade são dadas por $\Delta(e_{ij}) = \sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes e_{pj}$ e $\varepsilon(e_{ij}) = \delta_{ij}$, $1 \leq i,j \leq n$. Considere a álgebra dual $(M^c(n,k))^*$ com a base dual $\{e_{ij}^*\}_{1\leq i,j\leq n}$, ou seja, $e_{ij}^*(e_{pq}) = \delta_{ip}\delta_{jq}$. Então $(M^c(n,k))^*$ é isomorfa à álgebra de matrizes da Definição 1.1.9. De fato, temos

$$(e_{ij}^* * e_{pq}^*)(e_{rs}) = \sum_{k=1}^{n} e_{ij}^*(e_{rk})e_{pq}^*(e_{ks}) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ir}\delta_{jk}\delta_{pk}\delta_{qs} = \delta_{ir}\delta_{qs}\delta_{jp} = \delta_{jp}e_{iq}^*(e_{rs}),$$

portanto $e_{ij}^* * e_{pq}^* = \delta_{jp} e_{iq}^*$, e a unidade é $\sum_{k=1}^{n} e_{kk}^*$, pois

$$e_{ij}^* * \sum_{k=1}^{n} e_{kk}^* = \sum_{k=1}^{n} e_{ij}^* * e_{kk}^* = \sum_{k=1}^{n} \delta_{jk} e_{ik}^* = e_{ij}^*.$$

■

Exemplo 1.2.37. Seja C a Coálgebra Trigonométrica do Exemplo 1.2.8 considerando $k = \mathbb{R}$. Então a $\mathbb{R}$-álgebra C^* tem base $\{s^*, c^*\}$ dual à base $\{s, c\}$ de C e o produto de convolução dos elementos da base são

$$s^* * s^* = -c^*, \, s^* * c^* = c^* * s^* = s^* \quad \text{e} \quad c^* * c^* = c^*.$$

Então, a $\mathbb{R}$-álgebra C^* é isomorfa a $\mathbb{C}$, um isomorfismo sendo dado por $1 \mapsto c^*$, $i \mapsto s^*$. ■

Nesse momento podemos nos fazer uma pergunta dual: dada uma álgebra (A, M, u), conseguimos definir em $A^* = Hom(A, k)$ uma estrutura de coálgebra? A resposta é: nem sempre.

Notemos que, para definir a estrutura de álgebra dual de uma coálgebra C, foi importante utilizar $\rho : C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$, pois essa função é uma das partes de uma possível multiplicação $C^* \otimes C^* \to C^*$, a outra parte sendo $\Delta^* : (C^* \otimes C^*) \to C^*$. No caso da álgebra (A, M, u), não podemos realizar uma construção similar, devido à inexistência de um morfismo canônico $(A \otimes A)^* \to A^* \otimes A^*$. No entanto, se A tem dimensão finita, então ρ é um isomorfismo pelo Lema 1.2.28 e podemos usar ρ^{-1} para definir uma comultiplicação em A^*.

Seja então (A, M, u) uma álgebra de dimensão finita. Podemos definir

$$\Delta = \rho^{-1} M^* : A^* \to A^* \otimes A^* \quad \text{e} \quad \varepsilon = \varphi u^* : A^* \to k,$$

em que ρ é como definido no Lema 1.2.28 e $\varphi(f) = f(1_k), \forall f \in k^*$. Note que

$$\varepsilon(f) = \varphi u^*(f) = \varphi(u^*(f)) = u^*(f)(1_k) = f(u(1_k)) = f(1_A).$$

Lema 1.2.38. *Seja $f \in A^*$ tal que $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$, para uma família finita de funções $g_i, h_i \in A^*$. Então*

$$f(ab) = \sum_i g_i(a) h_i(b), \forall a, b \in A.$$

Além disso, se $f(ab) = \sum_j g_j'(a) h_j'(b)$ para $g_j', h_j' \in A^*$, $\forall a, b \in A$, então $\sum_i g_i \otimes h_i = \sum_j g_j' \otimes h_j'$, isto é, $\sum_i g_i \otimes h_i$ é univocamente determinada pela condição $f(ab) = \sum_i g_i(a) h_i(b), \forall a, b \in A$.

Demonstração: Temos $\sum_i g_i(a) h_i(b) = \rho(\Delta(f))(a \otimes b)$, mas definimos $\Delta = \rho^{-1} M^*$, então

$\sum_i g_i(a)h_i(b) = M^*(f)(a\otimes b) = f(M(a\otimes b)) = f(ab)$. Agora, se existir uma outra família finita de funções $g'_j, h'_j \in A^*$ tal que $f(ab) = \sum_j g'_j(a)h'_j(b)$, então

$$\begin{aligned}\rho(\sum_i g_i\otimes h_i)(a\otimes b) &= \sum_i g_i(a)h_i(b)\\ &= f(ab)\\ &= \sum_j g'_j(a)h'_j(b)\\ &= \rho(\sum_j g'_j\otimes h'_j)(a\otimes b).\end{aligned}$$

Como ρ é injetora (veja Lema 1.2.28), concluímos $\sum_i g_i\otimes h_i = \sum_j g'_j\otimes h'_j$. ∎

Observação 1.2.39. O lema anterior nos diz que podemos definir $\Delta(f) = \sum_i g_i\otimes h_i$ em que $g_i, h_i \in A^*$ são tais que vale a propriedade de $f(ab) = \sum_i g_i(a)h_i(b)$, $\forall a,b \in A$, e essa definição é equivalente a que demos. ∎

Proposição 1.2.40. *Seja (A,M,u) uma álgebra de dimensão finita. Então (A^*,Δ,ε) é uma coálgebra.*

Demonstração: Seja $f\in A^*$ com $\Delta(f) = \sum_i g_i\otimes h_i$. Denotamos $\Delta(g_i) = \sum_j g'_{ij}\otimes g''_{ij}$ e $\Delta(h_i) = \sum_j h'_{ij}\otimes h''_{ij}$. Verifiquemos a comutatividade dos diagramas da definição de coálgebra.

$$(\Delta\otimes I_{A^*})\Delta(f) = (\Delta\otimes I_{A^*})(\sum_i g_i\otimes h_i) = \sum_{i,j} g'_{ij}\otimes g''_{ij}\otimes h_i,$$

$$(I_{A^*}\otimes\Delta)\Delta(f) = (I_{A^*}\otimes\Delta)(\sum_i g_i\otimes h_i) = \sum_{i,j} g_i\otimes h'_{ij}\otimes h''_{ij}.$$

Vamos aplicar a função $\theta : A^*\otimes A^*\otimes A^* \to (A\otimes A\otimes A)^*$ definida por $\theta(u\otimes v\otimes w)(a\otimes b\otimes c) = u(a)v(b)w(c)$, para $u,v,w\in A^*$ e $a,b,c\in A$. Sabemos que θ é injetora pelo Corolário 2. Então, $\forall a,b,c\in A$ temos

$$\begin{aligned}\theta(\sum_{i,j} g'_{ij}\otimes g''_{ij}\otimes h_i)(a\otimes b\otimes c) &= \sum_{i,j} g'_{ij}(a)g''_{ij}(b)h_i(c)\\ &= \sum_i g_i(ab)h_i(c)\\ &= f((ab)c)\\ &= f(abc).\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}\theta(\sum_{i,j} g_i \otimes h'_{ij} \otimes h''_{ij})(a\otimes b\otimes c) &= \sum_{i,j} g_i(a)h'_{ij}(b)h''_{ij}(c)\\ &= \sum_i g_i(a)h_i(bc)\\ &= f(a(bc))\\ &= f(abc).\end{aligned}$$

Como a função θ é injetora, temos

$$\sum_{i,j} g'_{ij}\otimes g''_{ij}\otimes h_i = \sum_{i,j} g_i \otimes h'_{ij}\otimes h''_{ij}$$

e podemos concluir

$$(\Delta\otimes I_{A^*})\Delta(f) = (I_{A^*}\otimes\Delta)\Delta(f), \forall f\in A^*.$$

Logo, Δ é coassociativa. Agora, para a counidade temos

$$(\sum_i \varepsilon(g_i)h_i)(a) = \sum_i g_i(1_A)h_i(a) = f(1_A a) = f(a).$$

Portanto, $\sum_i \varepsilon(g_i)h_i = f$ e, analogamente, $\sum_i \varepsilon(h_i)g_i = f$. Assim (A^*,Δ,ε) é uma coálgebra. ■

Vamos mostrar agora que essas construções duais que fizemos se comportam bem com respeito a morfismos.

Proposição 1.2.41. *Sejam C e D coálgebras e A e B álgebras de dimensão finita. Então:*
(i) se $f: C\to D$ é um morfismo de coálgebras, então $f^*: D^*\to C^*$ é um morfismo de álgebras;
(ii) se $g: A\to B$ é um morfismo de álgebras, então $g^*: B^*\to A^*$ é um morfismo de coálgebras.

Demonstração: (i) Sejam $d^*, e^*\in D^*$ e $c\in C$. Então

$$\begin{aligned}f^*(d^* * e^*)(c) &= (d^* * e^*)(f(c))\\ &= \sum d^*(f(c)_1)e^*(f(c)_2)\\ &= \sum d^*(f(c_1))e^*(f(c_2))\\ &= \sum f^*(d^*)(c_1)f^*(e^*)(c_2)\\ &= (f^*(d^*) * f^*(e^*))(c).\end{aligned}$$

Portanto, temos $f^*(d^* * e^*) = f^*(d^*) * f^*(e^*)$. Por fim, como já vimos que $1_{C^*} = \varepsilon_C$ e $1_{D^*} = \varepsilon_D$, temos $f^*(1_{D^*}) = f^*(\varepsilon_D) = \varepsilon_D f = \varepsilon_C = 1_{C^*}$, em que a penúltima igualdade vale pois f é morfismo de coálgebras.

(ii) Precisamos verificar que os diagramas

$$\begin{tikzcd} B^* \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\Delta_{B^*}"'] & A^* \arrow[d, "\Delta_{A^*}"] \\ B^* \otimes B^* \arrow[r, "g^* \otimes g^*"'] & A^* \otimes A^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B^* \arrow[rr, "g^*"] \arrow[dr, "\varepsilon_{B^*}"'] & & A^* \arrow[dl, "\varepsilon_{A^*}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

comutam. Seja $b^* \in B^*$. Lembrando do que foi mostrado no Lema 1.2.38, existem famílias finitas $\{g_i, h_i\}_i \subseteq A^*$ e $\{p_j, q_j\}_j \subseteq B^*$ tais que $(\Delta_{A^*} \circ g^*)(b^*) = \Delta_{A^*}(g^*(b^*)) = \Delta_{A^*}(b^* \circ g) = \sum_i g_i \otimes h_i$ e $\Delta_{B^*}(b^*) = \sum_j p_j \otimes q_j$. Usaremos a função injetora ρ definida no Lema 1.2.28 com $M = N = A$. Dados $a, b \in A$, temos

$$\rho((\Delta_{A^*} \circ g^*)(b^*))(a \otimes b) = \sum_i g_i(a)h_i(b) = (b^* \circ g)(ab) = b^*(g(ab)),$$

e ainda

$$\begin{aligned} \rho((g^* \otimes g^*) \circ \Delta_{B^*}(b^*))(a \otimes b) &= \rho(\sum_j g^*(p_j) \otimes g^*(q_j))(a \otimes b) \\ &= \sum_j g^*(p_j)(a) g^*(q_j)(b) \\ &= \sum_j p_j(g(a)) q_j(g(b)) \\ &= b^*(g(a)g(b)) \\ &= b^*(g(ab)). \end{aligned}$$

Pela injetividade de ρ, temos $(\Delta_{A^*} \circ g^*)(b^*) = (g^* \otimes g^*) \circ \Delta_{B^*}(b^*)$, e como b^* é arbitrário, concluímos $\Delta_{A^*} \circ g^* = (g^* \otimes g^*) \circ \Delta_{B^*}$. Portanto, o primeiro diagrama comuta. Finalmente,

$$(\varepsilon_{A^*} \circ g^*)(b^*) = \varepsilon_{A^*}(b^* \circ g) = (b^* \circ g)(1_A) = b^*(g(1_A)) = b^*(1_B) = \varepsilon_{B^*}(b^*),$$

ou seja, o segundo diagrama comuta. Logo, g^* é um morfismo de coálgebras. ■

1.2.3 Dual Finito de uma Álgebra

Vimos que para qualquer álgebra de dimensão finita A podemos definir uma estrutura canônica de coálgebra no espaço dual A^*. Nessa seção, mostraremos que a qualquer álgebra

A podemos associar de maneira natural uma coálgebra, não definida no espaço dual A^* inteiro, mas em um certo subespaço.

Seja então A uma álgebra com multiplicação $M : A \otimes A \to A$. Consideramos o seguinte conjunto

$$A^o = \{f \in A^* |\ Ker(f) \text{ contém um ideal de codimensão finita}\}.$$

Lembramos que um k-subespaço X de um k-espaço vetorial V tem codimensão finita se $dim(V/X)$ é finito. É claro que se X e Y são k-subespaços de codimensão finita em V, então $X \cap Y$ também tem codimensão finita, pois existe um morfismo injetivo $V/(X \cap Y) \to V/X \times V/Y$. Então se $f, g \in A^o$, segue que $Ker(f) \cap Ker(g) \subseteq Ker(f+g)$ e então $f+g \in A^o$. Também, para $f \in A^o$ e $r \in k$, temos $Ker(f) \subseteq Ker(rf)$, logo $rf \in A^o$. Portanto, A^o é um k-subespaço de A^*. É neste subespaço que vamos introduzir uma estrutura de coálgebra associada à álgebra A.

Lema 1.2.42. *Seja $f : A \to B$ um morfismo de álgebras e I um ideal de codimensão finita em B. Então o ideal $f^{-1}(I)$ tem codimensão finita em A.*

Demonstração: Seja $p : B \to B/I$ a projeção canônica. Então a aplicação $pf : A \to B/I$ é um morfismo de álgebras e $Ker(pf) = f^{-1}(I)$. Então $A/f^{-1}(I) \simeq Im(pf)$ que tem dimensão finita, pois é subespaço de B/I e $dim(B/I)$ é finito, uma vez que I tem codimensão finita. ■

Lema 1.2.43. *Sejam A, B álgebras e $f : A \to B$ um morfismo de álgebras. Então:*
(i) $f^*(B^o) \subseteq A^o$, em que f^* é o morfismo dual de f;
(ii) se denotarmos por $\rho : A^* \otimes B^* \to (A \otimes B)^*$ a injeção canônica, temos $\rho(A^o \otimes B^o) = (A \otimes B)^o$;
(iii) $M^*(A^o) \subseteq \rho(A^o \otimes A^o)$, em que M é a multiplicação de A.

Demonstração: (i) Seja $b^* \in B^o$ e I um ideal de codimensão finita em B que está contido em $Ker(b^*)$. Então $f^{-1}(I)$ é um ideal de codimensão finita em A pelo lema anterior e $f^{-1}(I) \subseteq Ker(b^* f) = Ker(f^*(b^*))$. Segue que $f^*(b^*) \in A^o$.

(ii) Seja $a^* \in A^o, b^* \in B^o$ e I, J ideais de codimensão finita em A e B, respectivamente, com $I \subseteq Ker(a^*), J \subseteq Ker(b^*)$. Então $A \otimes J + I \otimes B \subseteq Ker(\rho(a^* \otimes b^*))$, e como $A \otimes J + I \otimes B$ é um ideal em $A \otimes B$ e $(A \otimes B)/(A \otimes J + I \otimes B) \simeq A/I \otimes B/J$, que tem dimensão finita, segue que $\rho(a^* \otimes b^*) \in (A \otimes B)^o$, logo $\rho(A^o \otimes B^o) \subseteq (A \otimes B)^o$.

Seja agora $h \in (A \otimes B)^o$ e K um ideal de codimensão finita de $A \otimes B$ com $K \subseteq Ker(h)$. Definimos $I = \{a \in A | a \otimes 1 \in K\}$, que é ideal em A, e $J = \{b \in B | 1 \otimes b \in K\}$, que é ideal em B. Como I é a imagem inversa de K via o morfismo canônico de álgebras $A \to A \otimes B$ que leva a

em $a \otimes 1$, do lema anterior deduzimos que I tem codimensão finita em A. Analogamente, J tem codimensão finita em B, e além disso $A \otimes J + I \otimes B$ é um ideal de codimensão finita em $A \otimes B$. Claramente, $A \otimes J + I \otimes B \subseteq K$, logo $h(A \otimes J + I \otimes B) = 0$. Como $(A \otimes B)/(A \otimes J + I \otimes B) \simeq A/I \otimes B/J$, existe um morfismo de k-espaços vetoriais $\bar{h}$ que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes B \arrow[rr, "p_I \otimes p_J"] \arrow[dr, "h"'] & & A/I \otimes B/J \arrow[dl, "\bar{h}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

em que p_I e p_J são as projeções canônicas. Como A/I e B/J tem ambos dimensão finita, existe um isomorfismo canônico $\theta : (A/I)^* \otimes (B/J)^* \to (A/I \otimes B/J)^*$. Então existem $(\gamma_i)_i \subseteq (A/I)^*$, $(\delta_i)_i \subseteq (B/J)^*$ tais que $\bar{h} = \theta(\sum_i \gamma_i \otimes \delta_i)$ e temos

$$\begin{aligned} h(a \otimes b) &= \bar{h}(p_I(a) \otimes p_J(b)) \\ &= \sum_i \theta(\gamma_i \otimes \delta_i)(p_I(a) \otimes p_J(b)) \\ &= \sum_i \gamma_i(p_I(a))\delta_i(p_J(b)) \\ &= \rho(\sum_i \gamma_i p_I \otimes \delta_i p_J)(a \otimes b), \end{aligned}$$

logo, $h = \rho(\sum_i \gamma_i p_I \otimes \delta_i p_J)$. Mas $\gamma_i p_I \in A^*$ e $I \subseteq Ker(\gamma_i p_I)$, portanto $\gamma_i p_I \in A^o$ e, analogamente, $\delta_i p_J \in B^o$. Dessa maneira, obtivemos $h \in \rho(A^o \otimes B^o)$. Consequentemente, temos $(A^o \otimes B^o) \subseteq \rho(A^o \otimes B^o)$ e a igualdade está provada.

(iii) Seja $a^* \in A^o$ e I um ideal de codimensão finita de A com $I \subseteq Ker(a^*)$. Então $A \otimes I + I \otimes A$ é um ideal de codimensão finita de $A \otimes A$ e $A \otimes I + I \otimes A \subseteq Ker(a^* M)$, portanto $a^* M = M^*(a^*) \in (A \otimes A)^o = \rho(A^o \otimes A^o)$ por (ii). ■

Estamos agora em posição de definir a estrutura de coálgebra em A^o. Com a notação do lema anterior, sabemos que $M^*(A^o) \subseteq (A \otimes A)^o = \rho(A^o \otimes A^o)$, em que $\rho : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ é a injeção canônica. Pela parte (ii) do lema anterior, o morfismo ρ pode ser considerado um isomorfismo entre $A^o \otimes A^o$ e $(A \otimes A)^o$. Seja então $\Delta : A^o \to A^o \otimes A^o$, $\Delta = \rho^{-1} M^*$. Além disso, vamos definir o morfismo $\varepsilon : A^o \to k$ por $\varepsilon(a^*) = a^*(1_A)$.

Proposição 1.2.44. $(A^o, \Delta, \varepsilon)$ *é uma coálgebra.*

Demonstração: Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & (A\otimes A)^* \arrow[r, "(I\otimes M)^*"] & (A\otimes A\otimes A)^* \\
A^* \arrow[urr, "M^*"] \arrow[r, "M^*"] & (A\otimes A)^* \arrow[urr, "(M\otimes I)^*"] & & \\
 & & A^o\otimes A^o \arrow[uu, "\rho"] \arrow[r, "I\otimes\Delta"] & A^o\otimes A^o\otimes A^o \arrow[uu, "\rho_1"'] \\
A^o \arrow[uu, "j"] \arrow[urr, "\Delta"] \arrow[r, "\Delta"'] & A^o\otimes A^o \arrow[uu, "\rho"'] \arrow[urr, "\Delta\otimes I"'] & &
\end{tikzcd}$$

Denotamos por ρ a restrição a $A^o\otimes A^o$ da injeção canônica, que por sua vez é denotada por ρ_1 e por j a inclusão. Vamos provar a comutatividade de alguns subdiagramas. Primeiro, temos $\rho\Delta(a^*) = \rho\rho^{-1}M^*(a^*) = M^*(a^*) = M^*j(a^*)$, para todo $a^*\in A^*$, portanto $\rho\Delta = M^*j$. Para mostrar $\rho_1(\Delta\otimes I) = (M\otimes I)^*\rho$, primeiro mostramos que se $a^*\in A^o$ e $\Delta(a^*) = \sum_i a_i^*\otimes b_i^*$, então $\rho^{-1}M^*(a^*) = \sum_i a_i^*\otimes b_i^*$, logo $a^*M = M^*(a^*) = \sum_i \rho(a_i^*\otimes b_i^*)$ e então para quaisquer $a,b\in A$, temos $a^*(ab) = \sum_i a_i^*(a)b_i^*(b)$. Então se $a^*,b^*\in A^o$ e $a,b,c\in A$, temos

$$\begin{aligned}
(\rho_1(\Delta\otimes I)(a^*\otimes b^*))(a\otimes b\otimes c) &= \rho_1(\sum_i a_i^*\otimes b_i^*\otimes b^*)(a\otimes b\otimes c)\\
&= \sum_i a_i^*(a)b_i^*(b)b^*(c)\\
&= a^*(ab)b^*(c)\\
&= ((M\otimes I)^*\rho(a^*\otimes b^*))(a\otimes b\otimes c),
\end{aligned}$$

portanto $\rho_1(\Delta\otimes I) = (M\otimes I)^*\rho$. Similarmente, $\rho_1(I\otimes\Delta) = (I\otimes M)^*\rho$. Além disso,

$$(I\otimes M)^*M^* = (M(I\otimes M))^* = (M(M\otimes I))^* = (M\otimes I)^*M^*.$$

Então

$$\begin{aligned}
\rho_1(\Delta\otimes I)\Delta &= (M\otimes I)^*\rho\Delta\\
&= (M\otimes I)^*M^*j\\
&= (I\otimes M)^*M^*j\\
&= (I\otimes M)^*\rho\Delta\\
&= \rho_1(I\otimes\Delta)\Delta
\end{aligned}$$

e como ρ_1 é injetora, obtemos $(\Delta\otimes I)\Delta = (I\otimes\Delta)\Delta$, a coassociatividade de A^o.

Seja agora $a^* \in A^o$ e $\Delta(a^*) = \sum_i a_i^* \otimes b_i^*$. Então

$$(\sum_i \varepsilon(a_i^*)b_i^*)(a) = \sum_i a_i^*(1_A)b_i^*(a) = a^*(1_A a) = a^*(a)$$

para todo $a \in A$, portanto $\sum_i \varepsilon(a_i^*)b_i^* = a^*$. Similarmente, $\sum_i \varepsilon(b_i^*)a_i^* = a^*$ e a prova está completa. ■

Proposição 1.2.45. *Seja $f : A \to B$ um morfismo de álgebras. Então $f^*(B^o) \subseteq A^o$ e o morfismo induzido $f^o : B^o \to A^o$ é um morfismo de coálgebras.*

Demonstração: Já vimos no Lema 1.2.43 que $f^*(B^o) \subseteq A^o$. Para mostrar que f^o é um morfismo de coálgebras, temos que provar que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
B^o \arrow[r, "f^o"] \arrow[d, "\Delta_{B^o}"'] & A^o \arrow[d, "\Delta_{A^o}"] \\
B^o \otimes B^o \arrow[r, "f^o \otimes f^o"'] & A^o \otimes A^o
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B^o \arrow[rr, "f^o"] \arrow[dr, "\varepsilon_{B^o}"'] & & A^o \arrow[dl, "\varepsilon_{A^o}"] \\
& k &
\end{tikzcd}$$

são comutativos. A comutatividade do segundo diagrama é imediata, pois

$$\varepsilon_{A^o} f^o(b^*) = (f^o(b^*))(1_A) = b^*(f(1_A)) = b^*(1_B) = \varepsilon_{B^o}(b^*), \forall b^* \in B^o.$$

Para o primeiro diagrama, seja $b^* \in B^o$, $\Delta_{B^o}(b^*) = \sum_i b_i^* \otimes c_i^*$. Como $\rho : A^o \otimes A^o \to (A \otimes A)^*$ é injetivo, para mostrar que $(f^o \otimes f^o)\Delta_{B^o} = \Delta_{A^o} f^o$ é suficiente mostrar que $\rho(f^o \otimes f^o)\Delta_{B^o} = \rho\Delta_{A^o} f^o$. Para $x, y \in A$, temos

$$\begin{aligned}
((\rho(f^o \otimes f^o)\Delta_{B^o})(b^*))(x \otimes y) &= \sum_i (f^o(b_i^*))(x)(f^o(c_i^*))(y) \\
&= \sum_i b_i^*(f(x))c_i^*(f(y)) \\
&= b^*(f(x)f(y))
\end{aligned}$$

a última igualdade seguindo diretamente da definição de Δ_{B^o} ($\Delta_{B^o} = \rho^{-1}M_B^*$, portanto $\rho\Delta = M_B^*$, então aplique em b^* e depois em $f(x)\otimes f(y)$). Continuando, temos

$$
\begin{aligned}
(\rho\Delta_{A^o} f^o(b^*))(x\otimes y) &= (\rho\Delta_{A^o}(b^*f))(x\otimes y)\\
&= (M_A^*(b^*f))(x\otimes y)\\
&= (b^*fM)(x\otimes y)\\
&= b^*(f(xy))\\
&= b^*(f(x)f(y))
\end{aligned}
$$

e a prova está completa. ■

Vamos dar agora uma caracterização dos elementos de A^o que é útil para cálculos. Para isso, primeiramente observamos que, como A é um A-bimódulo, segue que $A^* = Hom(A,k)$ é um A-bimódulo, com ações dadas como segue. Se $a\in A$ e $a^*\in A^*$, então:
- a ação à esquerda de A em A^* é dada por $(a \rightharpoonup a^*)(b) = a^*(ba)$, $\forall b\in A$;
- a ação à direita de A em A^* é dada por $(a^* \leftharpoonup a)(b) = a^*(ab)$, $\forall b\in A$.

Proposição 1.2.46. *Seja A uma k-álgebra e $f\in A^*$. Então são equivalentes:*
(i) $f\in A^o$;
(ii) $M^*(f)\in\rho(A^o\otimes A^o)$;
(iii) $M^*(f)\in\rho(A^*\otimes A^*)$;
(iv) $A\rightharpoonup f$ tem dimensão finita;
(v) $f\leftharpoonup A$ tem dimensão fnita;
(vi) $A\rightharpoonup f\leftharpoonup A$ tem dimensão finita.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) foi provado em lema anterior.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) é claro.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Seja $M^*(f) = \rho(\sum_i a_i^*\otimes b_i^*)$ com $a_i^*, b_i^*\in A^*$. Então para $a,b\in A$, temos $f(ab) = \sum_i a_i^*(a)b_i^*(b)$, portanto $(b\rightharpoonup f)(a) = (\sum_i b_i^*(b)a_i^*)(a)$, ou seja, $b\rightharpoonup f = \sum_i b_i^*(b)a_i^*$. Isso mostra que $A\rightharpoonup f$ está contido no k-subespaço de A^* gerado por $(a_i^*)_i$ que tem dimensão finita.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Suponhamos que $A\rightharpoonup f$ tenha dimensão finita. Como $A\rightharpoonup f$ é um A-submódulo à esquerda de A^*, temos um morfismo de k-álgebras induzido por esta estrutura $\pi : A\to End(A\rightharpoonup f)$ definida por $\pi(a)(m) = a\rightharpoonup m$, para quaisquer $a\in A, m\in A\rightharpoonup f$. Como $End(A\rightharpoonup f)$ também tem dimensão finita, segue que $I = Ker(\pi)$ é um ideal de codimensão finita em A. Mas para $a\in I$ temos $f(a) = (a\rightharpoonup f)(1_A) = 0$, logo $I\subseteq Ker(f)$ e $f\in A^o$.

(iii) $\Rightarrow$ (v) e (v) $\Rightarrow$ (i) são provados da mesma maneira que (iii) $\Rightarrow$ (iv) e (iv) $\Rightarrow$ (i), trabalhando com as estruturas do lado direito.

(i) $\Rightarrow$ (vi) Se $f \in A^o$, seja I um ideal de codimensão finita em A com $I \subseteq Ker(f)$. Então para $a,b \in A$, temos $(a \rightharpoonup f \leftharpoonup b)(I) = f(aIb) \subseteq f(I) = 0$, portanto $A \rightharpoonup f \leftharpoonup A \subseteq \{g \in A^*|g(I) = 0\}$. Mas I tem codimensão finita, logo existe $(a_i)_{i=1,n} \subseteq A$ completando uma base de I a uma base de A. Denotando por $a_i^* \in A^*$ os funcionais para os quais $a_i^*(I) = 0, a_i^*(a_j) = \delta_{i,j}$, segue imediatamente que o subespaço $\{g \in A^*|g(I) = 0\}$ é gerado por $(a_i^*)_{i=1,n}$ e então tem dimensão finita.

(vi) $\Rightarrow$ (iv) é claro. ■

Observação 1.2.47. 1) A proposição anterior mostra que A^o é a maior coálgebra contida em A^* e induzida por M. De fato, temos $M^* : A^* \to (A \otimes A)^*$ e se $X \subseteq A^*$ é uma coálgebra induzida por M, então $M^*(X) \subseteq \rho(X \otimes X)$. Então $M^*(X) \subseteq \rho(A^* \otimes A^*)$, portanto $X \subseteq M^{*-1}(\rho(A^* \otimes A^*)) = A^o$.

2) Pode acontecer de $A^o = 0$. Por exemplo, se A é uma k-álgebra simples de dimensão infinita sobre k (e.g. uma extensão de corpo infinita de k), então A não contém nenhum ideal próprio de codimensão finita, portanto $A^o = 0$. ■

O lema seguinte é um resultado de álgebra linear que servirá apenas para a observação que o sucede. Esse lema pode ser encontrado em [1], Lemma 1.5.8, p. 39.

Lema 1.2.48. *Seja V um k-espaço vetorial. Se $f_1,...,f_n$ são elementos linearmente independentes de V^*, então existem $v_1,...,v_n \in V$ com $f_i(v_j) = \delta_{i,j}$ para quaisquer $i,j = 1,...,n$. Além disso, os v_i's são linearmente independentes.* ■

Observação 1.2.49. Temos que

$$\begin{aligned} A^o &= \{f \in A^* \,|\, M^*f \in \rho(A^* \otimes A^*)\} \\ &= \{f \in A^* \,|\, \exists f_i, g_i \in A^* : M^*f = \rho(\textstyle\sum f_i \otimes g_i)\} \\ &= \{f \in A^* \,|\, \exists f_i, g_i \in A^* : f(xy) = \textstyle\sum f_i(x)g_i(y), \forall x,y \in A\}. \ (*) \end{aligned}$$

Disso vemos que A^o é um sub-bimódulo de A^* com respeito a $\rightharpoonup$ e $\leftharpoonup$. Se assumirmos que os f_i's e g_i's são linearmente independentes, então pelo lema anterior obtemos que $f_i \in A \rightharpoonup f \subseteq A^o$ e $g_i \in f \leftharpoonup A \subseteq A^o$. Portanto, observamos que se usarmos $(*)$ como a definição de A^o, o fato de ser uma coálgebra segue exatamente como no caso de dimensão finita que já tratamos, por causa da Observação 1.2.39. O que fizemos anteriormente mostra que para todo $f \in A^o$, $A \rightharpoonup f \leftharpoonup A$ é uma subcoálgebra de A^o de dimensão finita. Isso significa que o Teorema Fundamental das

Coálgebras vale em A^o. Outra consequência é que subcoálgebras de A^o são sub-bimódulos de A^o, e a interseção de uma família de subcoálgebras de A^o é uma subcoálgebra (contém o sub-bimódulo gerado por cada um dos seus elementos). Portanto, a menor subcoálgebra contendo $f \in A^o$ é $A \rightharpoonup f \leftharpoonup A$.

Um caso particular importante de um dual finito é obtido para o caso da álgebra A ser uma álgebra de semigrupo kG, para algum monoide G (kG tem base G como um k-espaço vetorial e multiplicação dada por $(ax)(by) = (ab)(xy)$ para $a,b \in k$, $x,y \in G$). É bem sabido que existe um isomorfismo de espaços vetoriais

$$\phi : k^G \to (kG)^* = Hom(kG,k),\ \phi(f)(\sum_i a_i x_i) = \sum_i a_i f(x_i).$$

Consequentemente, k^G se torna um kG-bimódulo pelo transporte de estruturas via ϕ:

$$(xf)(y) = f(yx),\ (fx)(y) = f(xy),\ \forall x,y \in G,\ f \in k^G.$$

Definição 1.2.50. *Se G é um monoide, chamamos $R_k(G) := \phi^{-1}((kG)^o)$ a coálgebra representativa do monoide G.* ∎

Note que a estrutura de coálgebra em $R_k(G)$ é também transportada via ϕ. $R_k(G)$ é um kG-sub-bimódulo de k^G e consiste das funções (chamadas representativas) que geram um kG-sub-bimódulo de dimensão finita (ou, equivalentemente, um kG-submódulo à direita ou à esquerda).

Temos

$$R_k(G) = \{f \in k^G \,|\, \exists f_i, g_i \in k^G,\ f(xy) = \sum f_i(x) g_i(y),\ \forall x,y \in G\},$$

e a estrutura de coálgebra em $R_k(G)$ é dada como segue: se $f \in R_k(G)$ e $f_i, g_i \in k^G$ são tais que $f(xy) = \sum f_i(x) g_i(y)$, então $\Delta(f) = \sum f_i \otimes g_i$. Note também que para qualquer k-álgebra A, temos

$$A^o = R_k(A_m) \cap A^*,$$

em que A_m denota o monoide multiplicativo de A.

A seguinte proposição, que enunciamos sem demonstrar, explica o nome de funções representativas. Essa proposição pode ser encontrada em [1], Exercise 1.5.11, p. 41.

Proposição 1.2.51. *Sejam G um grupo e $\rho : G \to GL_n(k)$ uma representção de G. Se denotarmos por $\rho(x) = (f_{ij}(x))_{ij}$, seja $V(\rho)$ o k-subespaço de k^G gerado por $\{f_{ij}\}_{ij}$. Então as seguintes afirmações valem:*

(i) $V(\rho)$ é um sub-bimódulo de dimensão finita de k^G;

(ii) $R_k(G) = \sum\limits_{\rho} V(\rho)$, em que ρ são representações de dimensão finita de G.

Damos agora a explicação do nome "coálgebra trigonométrica". As funções sen e cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazem as igualdades

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x) \quad \text{e} \quad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y).$$

Essa igualdades mostram que sen e cos são funções representativas no grupo $(\mathbb{R}, +)$. O $\mathbb{R}$-subespaço gerado por elas no espaço das funções reais é então a subcoálgebra de $R_{\mathbb{R}}((\mathbb{R}, +))$, isomorfa à coálgebra trigonométrica do Exemplo 1.2.8.

Outros exemplos de funções representativas incluem:

1) a função exponencial $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pois $e^{x+y} = e^x e^y$, portanto $\Delta(\exp) = \exp \otimes \exp$. Uma tal função é chamada *grouplike*. Em geral, se G é um grupo, então $f \in R_k(G)$ é grouplike se, e somente se, f é um morfismo de grupo de G em $(k^*, \cdot)$;

2) a função logarítmica $\lg : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, pois $\lg(xy) = \lg(x) + \lg(y)$, então $\Delta(\lg) = \lg \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \lg$, em que $\mathbf{1}$ denota a função constante 1. Uma tal função é chamada primitiva. Em geral, se G é um grupo, então $f \in R_k(G)$ é primitiva se, e somente se, f é um morfismo de grupo de G em $(k, +)$;

3) as funções $d_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $d_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Como $d_n(x+y) = \sum\limits_i d_i(x) d_{n-i}(y)$ (pela fórmula binomial), segue que as d_n's são funções representativas no grupo $(\mathbb{R}, +)$, e o subespaço que elas geram é uma subcoálgebra de $R_{\mathbb{R}}((\mathbb{R}, +))$, isomorfa à coálgebra das potências divididas do Exemplo 1.2.6. Isso explica o nome dessa coálgebra.

2 Módulos e Comódulos

Da mesma forma que definimos álgebras via diagramas para obtermos a noção dual de coálgebra, é possível darmos uma definição via diagramas de um A-módulo para obtermos a noção dual de um C-comódulo, em que (A, M, u) é uma álgebra e (C, Δ, ε) é uma coálgebra. Vamos mostrar que C-comódulos estão intimamente relacionados com uma classe de C^*-módulos.

2.1 Módulos

Temos a definição tradicional de um A-módulo apresentada abaixo.

Definição 2.1.1. *Seja (A, M, u) uma álgebra. Dizemos que um conjunto $X \neq \emptyset$ é um A-módulo à esquerda se X é um k-espaço vetorial e está definida uma multiplicação por escalar que a cada par $(a, x) \in A \times X$ associa um elemento $ax \in X$, de forma que, para quaisquer $r \in k$, $a, b \in A$ e $x, y \in X$, valem as seguintes propriedades:*
(i) $a(bx) = (ab)x$;
(ii) $a(x + y) = ax + ay$;
(iii) $(a + b)x = ax + by$;
(iv) $1_A x = x$;
(v) $r(ax) = (ra)x = a(rx)$. ■

De maneira análoga, definimos a noção de um A-módulo à direita. Vamos agora apresentar uma nova definição via diagramas e provar que é equivalente à definição acima.

Definição 2.1.2. *Seja (A, M, u) uma álgebra. Um A-módulo à esquerda é um par (X, μ), em que X é um k-espaço vetorial e $\mu : A \otimes X \to X$ é um morfismo de k-espaços vetoriais tal que os* *diagramas*

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes X \arrow[r, "I_A\otimes\mu"] \arrow[d, "M\otimes I_X"'] & A\otimes X \arrow[d, "\mu"] \\ A\otimes X \arrow[r, "\mu"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A\otimes X \arrow[d, "\mu"] \\ k\otimes X \arrow[ur, "u\otimes I_X"] \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

comutam, em que $\varphi : k\otimes X \to X$ *é o isomorfismo canônico.* ■

A comutatividade do primeiro diagrama nos diz que $a(bx) = (ab)x$, para quaisquer $a, b \in A$ e $x \in X$. Já a comutatividade do segundo diagrama nos diz que $1_A x = x$, $\forall x \in X$.

O morfismo μ é algumas vezes chamado morfismo estrutura de módulo, ação de A sobre X ou simplesmente ação quando A e X estão subentendidos. Define-se, de maneira similar, A-módulo à direita, sendo o morfismo da forma $\mu : X\otimes A \to X$.

Proposição 2.1.3. *As Definições 2.1.1 e 2.1.2 dadas acima são equivalentes.*

Demonstração: Suponhamos X nas condições da Definição 2.1.2. Precisamos definir uma multiplicação por escalar que satisfaça as propriedades da Definição 2.1.1. Definimos

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & A\times X & \to & X \\ & (a,x) & \mapsto & a\cdot x = \mu(a\otimes x) = ax. \end{array}$$

As propriedades (i) e (iv) seguem imediatamente da comutatividade do primeiro e segundo diagramas da Definição 2.1.1, respectivamente. Sejam $r \in k$, $a, b \in A$ e $x, y \in X$. Então valem

$$\begin{array}{rcl} \text{(ii)}\;\; a(x+y) & = & \mu(a\otimes(x+y)) \\ & = & \mu(a\otimes x + a\otimes y)) \\ & = & \mu(a\otimes x) + \mu(a\otimes y) \\ & = & ax + ay; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{(iii)}\;\; (a+b)x & = & \mu((a+b)\otimes x) \\ & = & \mu(a\otimes x + b\otimes x) \\ & = & \mu(a\otimes x) + \mu(b\otimes x) \\ & = & ax + bx; \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\text{(v) } r(ax) &= r\mu(a\otimes x)\\
&= \mu(r(a\otimes x))\\
&= \mu(ra\otimes x) = (ra)x\\
&= \mu(a\otimes rx) = a(rx).
\end{aligned}
$$

Logo, X é um A-módulo à esquerda segundo a Definição 2.1.1.

Agora mostremos que a Definição 2.1.1 implica a Definição 2.1.2. Suponhamos X nas condições da Definição 2.1.1. Assim, existe uma função

$$
\begin{aligned}
\mu' : \ A\times X &\to X\\
(a,x) &\mapsto ax
\end{aligned}
$$

que satisfaz todas as propriedades da Definição 2.1.1. Essa função μ' é claramente k-bilinear, por causa da propriedade (v). Pela propriedade universal do produto tensorial, existe um único morfismo de k-espaços vetoriais $\mu : A\otimes X \to X$ tal que $\mu(a\otimes x) = ax$ para $a\in A$ e $x\in X$. Verifiquemos a comutatividade dos diagramas da Definição 2.1.2. Notemos que $u(1_k)x = 1_A x = x$, $\forall x\in X$, portanto o segundo diagrama comuta. Para o primeiro, dados $a,b\in A$ e $x\in X$, então

$$\mu(I_A\otimes\mu)(a\otimes b\otimes x) = \mu(a\otimes bx) = a(bx),$$

$$\mu(M_A\otimes I_X)(a\otimes b\otimes x) = \mu(ab\otimes x) = (ab)x$$

e, por hipótese, $a(bx) = (ab)x$. Logo, $\mu(I_A\otimes\mu) = \mu(M_A\otimes I_X)$. Portanto, X é um A-módulo à esquerda segundo a Definição 2.1.2. ■

2.2 Comódulos

Com a definição de A-módulo via diagramas, podemos dualizá-la para obter a noção de um C-comódulo, em que (C,Δ,ε) é uma coálgebra.

Definição 2.2.1. *Seja (C,Δ,ε) uma coálgebra. Um C-comódulo à direita é um par (M,ρ), em que M é um k-espaço vetorial e $\rho : M\to M\otimes C$ é um morfismo de k-espaços vetoriais tal que* *os diagramas*

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "I_M \otimes \Delta"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\rho \otimes I_C"'] & M \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[rd, "\varphi"] \arrow[dd, "\rho"'] & \\
& M \otimes k \\
M \otimes C \arrow[ru, "I_M \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

comutam, em que $\varphi : M \otimes k \to M$ é o isomorfismo canônico. ∎

O morfismo ρ é algumas vezes chamado morfismo estrutura de comódulo, coação de C sobre M ou simplesmente coação quando C e M estão subentendidos. Define-se, de maneira similar, C-comódulo à esquerda, sendo o morfismo da forma $\rho : M \to C \otimes M$. Podemos introduzir a notação de Sweedler para comódulos também. Seja M um C-comódulo à direita, com a estrutura dada por $\rho : M \to M \otimes C$. Então, $\forall m \in M$, escrevemos

$$\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$$

com os elementos na primeira posição tensorial (os $m_{(0)}$'s) estando em M e os elementos na segunda posição tensorial (os $m_{(1)}$'s) estando em C. Se M é um C-comódulo à esquerda com a estrutura dada por $\rho : M \to C \otimes M$, denotamos

$$\rho(m) = \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}.$$

A comutatividade dos diagramas da definição de um comódulo à direita podem ser escritas, respectivamente, com notação de Sweedler como

$$\sum (m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} = \sum m_{(0)} \otimes (m_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2,$$

$$\sum \varepsilon(m_{(1)}) m_{(0)} = m.$$

Exemplo 2.2.2. Toda coálgebra C é um C-comódulo à direita e à esquerda, a estrutura sendo dada pela sua comultiplicação $\Delta : C \to C \otimes C$. ∎

Exemplo 2.2.3. Se C é uma coálgebra e X é um k-espaço vetorial, então $X \otimes C$ é um C-comódulo à direita com a estrutura dada pela função $\rho : X \otimes C \to X \otimes C \otimes C$, $\rho = I_X \otimes \Delta$, ou seja, $\rho(x \otimes c) = \sum x \otimes c_1 \otimes c_2$, para quaisquer $x \in X$ e $c \in C$.

Verifiquemos que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
X \otimes C \arrow[r, "I_X\otimes\Delta"] \arrow[d, "I_X\otimes\Delta"'] & X\otimes C\otimes C \arrow[d, "I_{X\otimes C}\otimes\Delta"] \\
X\otimes C\otimes C \arrow[r, "(I_X\otimes\Delta)\otimes I_C"'] & X\otimes C\otimes C\otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X\otimes C \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, "I_X\otimes\Delta"'] & \\
& X\otimes C\otimes k. \\
X\otimes C\otimes C \arrow[ur, "I_{X\otimes C}\otimes\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Para o primeiro diagrama, sejam $x \in X$ e $c \in C$, então

$$\begin{aligned}
((I_X\otimes\Delta)\otimes I_C)(I_X\otimes\Delta)(x\otimes c) &= ((I_X\otimes\Delta)\otimes I_C)(x\otimes\Delta(c)) \\
&= ((I_X\otimes\Delta)\otimes I_C)(x\otimes(\sum c_1\otimes c_2)) \\
&= \sum x\otimes\Delta(c_1)\otimes c_2 \\
&= \sum x\otimes c_{1_1}\otimes c_{1_2}\otimes c_2 \\
&= \sum x\otimes c_1\otimes c_2\otimes c_3
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(I_{X\otimes C}\otimes\Delta)(I_X\otimes\Delta)(x\otimes c) &= (I_{X\otimes C}\otimes\Delta)(x\otimes\Delta(c)) \\
&= (I_{X\otimes C}\otimes\Delta)(x\otimes(\sum c_1\otimes c_2)) \\
&= \sum(I_{X\otimes C}\otimes\Delta)(x\otimes c_1\otimes c_2) \\
&= \sum x\otimes c_1\otimes\Delta(c_2) \\
&= \sum x\otimes c_1\otimes c_{2_1}\otimes c_{2_2} \\
&= \sum x\otimes c_1\otimes c_2\otimes c_3.
\end{aligned}$$

Para o segundo diagrama,

$$\begin{aligned}
(I_{X\otimes C}\otimes\varepsilon)(I_X\otimes\Delta)(x\otimes c) &= (I_{X\otimes C}\otimes\varepsilon)(x\otimes(\sum c_1\otimes c_2)) \\
&= \sum x\otimes c_1\varepsilon(c_2) \\
&= \sum x\otimes c_1\varepsilon(c_2) \\
&= x\otimes\sum c_1\varepsilon(c_2) \\
&= x\otimes c.
\end{aligned}$$

■

Definimos agora a noção de morfismo de A-módulos, dualizamos para obter a noção de morfismo de C-comódulos, para em seguida definirmos a categoria dos C-comódulos à direita.

Definição 2.2.4. *Sejam A uma álgebra e (X,μ_X), (Y,μ_Y) A-módulos à esquerda. Uma função k-linear $f : X \to Y$ é dita um morfismo de A-módulos se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} A\otimes X \arrow[r, "I_A\otimes f"] \arrow[d, "\mu_X"'] & A\otimes Y \arrow[d, "\mu_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

comuta. ■

A comutatividade do diagrama acima pode ser escrita como

$$f(ax) = af(x),\ \forall a \in A,\ \forall x \in X.$$

Definição 2.2.5. *Sejam C uma coálgebra e (M,ρ_M), (N,ρ_N) C-comódulos à direita. Uma função k-linear $g : M \to N$ é dita um morfismo de C-comódulos se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ M\otimes C \arrow[r, "g\otimes I_C"'] & N\otimes C \end{tikzcd}$$

comuta. ■

A comutatividade desse último diagrama pode ser escrita como

$$\sum g(m)_{(0)} \otimes g(m)_{(1)} = \sum g(m_{(0)}) \otimes m_{(1)},\ \forall m \in M.$$

Podemos falar agora na categoria dos comódulos à direita sobre uma coálgebra C, cujos objetos são todos os C-comódulos à direita e os morfismos entre dois objetos dessa categoria são morfismos de C-comódulos à direita. Denotamos tal categoria por $\mathscr{M}^C$. De maneira análoga, é definida a categoria dos C-comódulos à esquerda, denotada por ${}^C\mathscr{M}$.

Definição 2.2.6. *Sejam (M,ρ) um C-comódulo à direita e N um k-subespaço vetorial de M. Dizemos que N é um C-subcomódulo à direita se $\rho(N) \subseteq N\otimes C$.* ■

Observamos que se N é um C-subcomódulo à direita de M, então N é um C-comódulo à direita, cujo morfismo estrutura é a restrição de ρ a N. Como é de se esperar, a soma e a interseção de C-subcomódulos de um C-comódulo à direita (esquerda) são C-subcomódulos à direita (esquerda). Portanto, podemos falar do C-subcomódulo à direita gerado pelo subconjunto $S \subseteq M$ como a interseção de todos os C-subcomódulos à direita N de M com $S \subseteq N$.

Assim como as coálgebras, os comódulos possuem uma propriedade intrínseca de finitude, o que vamos demonstrar agora de maneira análoga ao que fizemos no Teorema Fundamental das Coálgebras.

Teorema 2.2.7. ***Teorema Fundamental dos Comódulos.*** *Seja M um C-comódulo à direita. Todo elemento $m \in M$ pertence a algum subcomódulo de dimensão finita.*

Demonstração: Seja $\{c_i\}_{i \in I}$ uma base para C, denote por $\rho : M \to M \otimes C$ o morfismo estrutura de comódulo. Para $m \in M$, vamos escrever

$$\rho(m) = \sum m_i \otimes c_i,$$

em que quase todos os m_i's são nulos. Então o subespaço N gerado pelos m_i's tem dimensão finita. De fato, temos

$$\Delta(c_i) = \sum a_{ijk} c_j \otimes c_k$$

$$\text{e} \quad \sum \rho(m_i) \otimes c_i = \sum m_i \otimes a_{ijk} c_j \otimes c_k.$$

Consequentemente, $\rho(m_k) = \sum m_i \otimes a_{ijk} c_j$, logo N é um subcomódulo de dimensão finita e $m = (I \otimes \varepsilon)\rho(m) \in N$. ■

Proposição 2.2.8. *Seja $f : M \to N$ um morfismo de C-comódulos à direita. Então:*
(i) $Im(f)$ é um C-subcomódulo de N;
(ii) $Ker(f)$ é um C-subcomódulo de M.

Demonstração: (i) Sejam $\rho_M : M \to M \otimes C$ e $\rho_N : N \to N \otimes C$ os morfismos estrutura dos dois C-comódulos. Como f é um morfismo de C-comódulos, temos

$$\rho_N(Im(f)) = \rho_N f(M) = (f \otimes I_C)\rho_M(M) \subseteq Im(f) \otimes C,$$

portanto $Im(f)$ é um subcomódulo de N.

(ii) Agora,

$$(f \otimes I_C)\rho_M(Ker(f)) = \rho_N f(Ker(f)) = 0,$$

logo $\rho_M(Ker(f)) \subseteq Ker(f \otimes I_C) = Ker(f) \otimes C$, em que a última igualdade decorre do Lema 1.2.21, portanto $Ker(f)$ é um subcomódulo de M. ■

Teorema 2.2.9. *Sejam (M, ρ) um C-comódulo à direita, N um C-subcomódulo à direita de M e $p : M \to M/N$ a projeção canônica de k-espaços vetoriais. Então:*
(i) existe uma única estrutura de C-comódulo à direita em M/N tal que $p : M \to M/N$ é um morfismo de C-comódulos à direita;
(ii) se $f : M \to P$ é um morfismo de C-comódulos à direita com $N \subseteq Ker(f)$, então existe um único morfismo de C-comódulos à direita $\bar{f} : M/N \to P$ tal que $\bar{f}p = f$.

Demonstração: (i) Como N é um C-subcomódulo, temos $\rho(N) \subseteq N \otimes C$. Assim, $(p \otimes I_C)\rho(N) \subseteq (p \otimes I_C)(N \otimes C) \subseteq p(N) \otimes C = 0$, pois $N = Ker(p)$. Logo, $N \subseteq Ker((p \otimes I_C)\rho)$. Pela propriedade universal do espaço vetorial quociente, existe um único morfismo k-linear $\bar{\rho}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\rho"'] & M/N \arrow[d, "\bar{\rho}"] \\ M \otimes C \arrow[r, "p \otimes I_C"'] & (M/N) \otimes C \end{tikzcd}$$

comuta. Esse morfismo é definido por $\bar{\rho}(\overline{m}) = \sum \overline{m_{(0)}} \otimes m_{(1)}$ Com isso, para todo $m \in M$, temos

$$(I_{M/N} \otimes \Delta)\bar{\rho}(\overline{m}) = (I_{M/N} \otimes \Delta)(\sum \overline{m_{(0)}} \otimes m_{(1)}) = \sum \overline{m_{(0)}} \otimes (m_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2 = \sum \overline{m_{(0)}} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)},$$

$$(\bar{\rho} \otimes I_C)\bar{\rho}(\overline{m}) = (\bar{\rho} \otimes I_C)(\sum \overline{m_{(0)}} \otimes m_{(1)}) = \sum \overline{(m_{(0)})_{(0)}} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} = \sum \overline{m_{(0)}} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)}.$$

Portanto, $(I_{M/N} \otimes \Delta)\bar{\rho} = (\bar{\rho} \otimes I_C)\bar{\rho}$. A comutatividade do segundo diagrama é válida pois

$$\begin{aligned} (I_{M/N} \otimes \varepsilon)\bar{\rho}(\overline{m}) &= (I_{M/N} \otimes \varepsilon)(\sum \overline{m_{(0)}} \otimes m_{(1)}) \\ &= \sum \varepsilon(m_{(1)})\overline{m_{(0)}} \\ &= \sum \overline{\varepsilon(m_{(1)})m_{(0)}} \\ &= \overline{\sum \varepsilon(m_{(1)})m_{(0)}} \\ &= \overline{m}. \end{aligned}$$

Segue que $(M/N, \bar{\rho})$ é um C-comódulo à direita. Do fato do diagrama do início da demonstração ser comutativo, concluímos que $p : M \to M/N$ é um morfismo de C-comódulos à direita.

(ii) Como $N \subseteq Ker(f)$, pela propriedade universal do espaço vetorial quociente existe um único morfismo k-linear $\bar{f}: M/N \to P$ tal que $\bar{f}p = f$, definido por $\bar{f}(\overline{m}) = f(m)$, $\forall m \in M$. Como

$$\rho_P\bar{f}(\overline{m}) = \rho_P f(m) = \sum f(m)_{(0)} \otimes f(m)_{(1)} = \sum f(m_{(0)}) \otimes m_{(1)} = \sum \bar{f}(\overline{m_{(0)}}) \otimes \bar{m}_{(1)} = (\bar{f} \otimes I_C)\bar{\rho}(\overline{m})$$

segue que $\bar{f}$ é um morfismo de C-comódulos à direita. ■

Definição 2.2.10. *O C-comódulo $(M/N, \bar{\rho})$ do teorema anterior é chamado Comódulo Quociente de M com respeito ao subcomódulo N.* ■

Corolário 2.2.11. ***Teorema Fundamental do Isomorfismo para Comódulos.*** *Seja $f: M \to P$ um morfismo de C-comódulos à direita. Então existe um isomorfismo canônico de C-comódulos à direita entre $M/Ker(f)$ e $Im(f)$.*

Demonstração: Fazendo $I = Ker(f)$ em (ii) da proposição acima e observando que $\bar{f}$ é injetora, segue o resultado, pois $Im(\bar{f}) = Im(f)$. ■

2.3 Módulos Racionais

Todas as construções nessa seção tem por objetivo demonstrar um isomorfismo entre categorias, a saber, as categorias $\mathscr{M}^C$ e $Rat({}_{C^*}\mathscr{M})$, essa última será definida mais adiante no texto.

Sejam C uma coálgebra e C^* sua álgebra dual. Consideremos M um k-espaço vetorial e $\omega: M \to M \otimes C$ k-linear. Para $m \in M$, denotando $\omega(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$, definimos

$$\begin{array}{rccl} \psi_\omega: & C^* \otimes M & \to & M \\ & c^* \otimes m & \mapsto & \sum_i c^*(c_i)m_i. \end{array}$$

Proposição 2.3.1. *(M, ω) é um C-comódulo à direita se, e somente se, (M, ψ_ω) é um C^*-módulo à esquerda.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Escrevemos, para todo $m \in M$, $\omega(m) = \sum_i m_i \otimes c_i = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$. Denotamos, para todo $c^* \in C^*$, $c^* \cdot m = \psi_\omega(c^* \otimes m) = \sum c^*(m_{(1)})m_{(0)}$. Mostremos que ψ_ω é uma ação. Primeiro, observamos que

$$1_{C^*} \cdot m = \varepsilon \cdot m = \sum \varepsilon(m_{(1)})m_{(0)} = m$$

e, para quaisquer $c^*, d^* \in C^*$ e $m \in M$,

$$\begin{aligned}
c^* \cdot (d^* \cdot m) &= c^* \cdot (\sum d^*(m_{(1)})m_{(0)}) \\
&= \sum d^*(m_{(1)})c^*((m_{(0)})_{(1)})(m_{(0)})_{(0)} \\
&= \sum d^*((m_{(1)})_2)c^*((m_{(1)})_1)m_{(0)} \ \text{ (pois } (M,\omega) \text{ é } C\text{-comódulo)} \\
&= \sum c^*((m_{(1)})_1)d^*((m_{(1)})_2)m_{(0)} \\
&= \sum (c^* * d^*)(m_{(1)})m_{(0)} \\
&= (c^* * d^*) \cdot m.
\end{aligned}$$

Logo, (M, ψ_ω) é um C^*-módulo à esquerda.

($\Leftarrow$) Suponha que (M, ψ_ω) seja um C^*-módulo à esquerda. Temos que verificar que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\omega"'] & M \otimes C \arrow[d, "I_M \otimes \Delta"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\omega \otimes I_C"'] & M \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[d, "\omega"'] & \\
M \otimes C \arrow[r, "I_M \otimes \varepsilon"'] & M \otimes k
\end{tikzcd}$$

comutam. Para o segundo diagrama, temos

$$m = 1_{C^*} \cdot m = \varepsilon \cdot m = \sum \varepsilon(m_{(1)})m_{(0)}, \ \forall m \in M.$$

Sabemos, por hipótese, que $(c^* * d^*) \cdot m = c^* \cdot (d^* \cdot m)$, $\forall c^*, d^* \in C^*$ e $\forall m \in M$. Assim,

$$\begin{aligned}
c^* \cdot (d^* \cdot m) &= \sum d^*(m_{(1)})c^*((m_{(0)})_{(1)})(m_{(0)})_{(0)} \\
&= \sum c^*((m_{(0)})_{(1)})d^*(m_{(1)})(m_{(0)})_{(0)} \\
&= \Phi(I_M \otimes c^* \otimes d^*)((\omega \otimes I_C)\omega(m))
\end{aligned}$$

em que $\Phi : M \otimes k \otimes k \to M$ é o isomorfismo canônico dado por $\Phi(m \otimes r \otimes s) = (rs)m$. Além disso,

$$\begin{aligned}
(c^* * d^*) \cdot m &= \sum (c^* * d^*)(m_{(1)})m_{(0)} \\
&= \sum c^*((m_{(1)})_1)d^*((m_{(1)})_2)m_{(0)} \\
&= \Phi(I_M \otimes c^* \otimes d^*)((I_M \otimes \Delta)\omega(m)).
\end{aligned}$$

Logo, $\Phi(I_M \otimes c^* \otimes d^*)((\omega \otimes I_C)\omega(m)) = \Phi(I_M \otimes c^* \otimes d^*)((I_M \otimes \Delta)\omega(m))$. Escrevemos

$$y = (\omega \otimes I_C)\omega(m) - (I_M \otimes \Delta)\omega(m).$$

Seja $\{e_i\}_i$ uma base de C, então podemos escrever $y = \sum m_{ij} \otimes e_i \otimes e_j \in M \otimes C \otimes C$. Para i_0, j_0 fixados, podemos considerar $e^*_{i_0}, e^*_{j_0} \in C^*$ tais que $e^*_{i_0}(e_k) = \delta_{i_0,k}$ e $e^*_{j_0}(e_k) = \delta_{j_0,k}$. Notamos que $\Phi(I_M \otimes c^* \otimes d^*)(y) = 0$, $\forall c^*, d^* \in C^*$. Em particular, $0 = \Phi(I_M \otimes e^*_{i_0} \otimes e^*_{j_0})(y) = m_{i_0 j_0}$, o que implica $y = 0$. Logo, $(\omega \otimes I_C)\omega(m) = (I_M \otimes \Delta)\omega(m)$, $\forall m \in M$ e podemos concluir $(\omega \otimes I_C)\omega = (I_M \otimes \Delta)\omega$. Portanto, (M, ω) é um C-comódulo. ■

Sejam M um C^*-módulo à esquerda. O conjunto $Hom(C^*, M)$ é o k-espaço vetorial das transformações k-lineares de C^* em M. Definimos

$$\begin{array}{rccl} \rho_M : & M & \to & Hom(C^*, M) \\ & m & \mapsto & \rho_M(m)(c^*) = c^* \cdot m. \end{array}$$

Sejam $j : C \to C^{**}$ e $f_M : M \otimes C^{**} \to Hom(C^*, M)$ definidas por $j(c)(c^*) = c^*(c)$ e $f_M(m \otimes c^{**})(c^*) = c^{**}(c^*)m$. Mostremos que j e f_M são injetoras.

Fato 1: j é injetora. Seja $c \in Ker(j)$, então $j(c) = 0$. Logo, $0 = j(c)(c^*) = c^*(c)$, $\forall c^* \in C^*$, o que implica $c = 0$.

Fato 2: f_M é injetora. Seja $\sum_i m_i \otimes c_i^{**} \in Ker(f_M)$, em que os m_i's são linearmente independentes (Lema 1.2.18). Então $0 = f_M(\sum_i m_i \otimes c_i^{**})(c^*) = \sum_i c_i^{**}(c^*)m_i$, $\forall c^* \in C^*$, o que implica $c_i^{**}(c^*) = 0$, $\forall c^* \in C^*$, ou seja, $c_i^{**} = 0$ e então $\sum_i m_i \otimes c_i^{**} = 0$.

Segue disso que a função

$$\mu_M : M \otimes C \to Hom(C^*, M)$$

definida por $\mu_M = f_M(I_M \otimes j)$ é injetora. Dessa definição, temos

$$\begin{array}{rcl} \mu_M(m \otimes c)(c^*) & = & f_M(I_M \otimes j)(m \otimes c)(c^*) \\ & = & f_M(m \otimes j(c))(c^*) \\ & = & j(c)(c^*)m \\ & = & c^*(c)m \end{array}$$

para quaisquer $c \in C$, $c^* \in C^*$ e $m \in M$.

Definição 2.3.2. *Um C^*-módulo à esquerda M é dito racional se $\rho_M(M) \subseteq \mu_M(M \otimes C)$.* ■

Observação 2.3.3. M é um C^*-módulo à esquerda racional se, e somente se, $\forall m \in M$ existem famílias finitas $(m_i)_i \subseteq M$ e $(c_i)_i \subseteq C$ que determinam a ação de elementos de C^* sobre m, isto é, $c^* \cdot m = \sum_i c^*(c_i)m_i$, $\forall c^* \in C^*$.

De fato, se $\rho_M(m) \in \mu_M(M \otimes C)$, então $\rho_M(m) = \mu_M(\sum_i m_i \otimes c_i)$ para famílias finitas $(m_i)_i \subseteq M$ e $(c_i)_i \subseteq C$. Logo, $c^* \cdot m = \rho_M(m)(c^*) = \mu_M(\sum_i m_i \otimes c_i)(c^*) = \sum_i c^*(c_i)m_i$, $\forall c^* \in C^*$. ∎

Observação 2.3.4. Seja M um C^*-módulo à esquerda racional. Se para $m \in M$ existem dois pares de famílias finitas $(m_i)_i, (c_i)_i$ e $(m'_j)_j, (c'_j)_j$ como na observação anterior, então $\sum_i m_i \otimes c_i = \sum_j m'_j \otimes c'_j$, pois μ_M é injetora. ∎

Exemplo 2.3.5. Se C é uma coálgebra de dimensão finita, então C^*, visto como C^*-módulo à esquerda, é racional. De fato, nesse caso temos que $j : C \to C^{**}$ e $f_{C^*} : C^* \otimes C^{**} \to Hom(C^*, C^*)$ são isomorfismos de k-espaços vetoriais, para o isomorfismo j, veja [1], Proposition 1.3.14, p. 22 e para f_{C^*} notemos que é um caso particular do Lema 1.2.28 item (i), a menos de *twist*. Segue da definição de μ_{C^*} que $\mu_{C^*}(C^* \otimes C) = Hom(C^*, C^*)$, pois nesse caso μ_{C^*} é um isomorfismo. Portanto, $\rho_{C^*}(C^*) \subseteq \mu_{C^*}(C^* \otimes C)$, ou seja, C^* é um C^*-módulo à esquerda racional. ∎

Denotamos por $Rat({}_{C^*}\mathscr{M})$ a categoria dos C^*-módulos à esquerda racionais. Sobre categorias, o leitor interessado pode consultar sobre o tema em um contexto mais geral em [3], p. 52-53 e [1], p. 361-362. Entretanto, para o próximo teorema, é conveniente citarmos a seguinte definição, que diz respeito às duas categorias serem isomorfas.

Definição 2.3.6. *Duas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são ditas isomorfas se existem funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tais que $I_{\mathscr{C}} = G \circ F$ e $I_{\mathscr{D}} = F \circ G$, em que $I_{\mathscr{C}}$ e $I_{\mathscr{D}}$ são os funtores identidade nas respectivas categorias, isto é, $I_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ é tal que $I_{\mathscr{C}}(C) = C$ e $I_{\mathscr{C}}(f) = f$, para qualquer objeto C em $\mathscr{C}$ e qualquer morfismo $f : C \to D$ em $\mathscr{C}$, e analogamente para $I_{\mathscr{D}}$.* ∎

Teorema 2.3.7. *As categorias $\mathscr{M}^C$ e $Rat({}_{C^*}\mathscr{M})$ são isomorfas.*

Demonstração: Seja (M, ω) um C-comódulo à direita. Mostremos que (M, ψ_ω) é um C^*-módulo à esquerda racional. Pela Proposição 2.3.1, usando a mesma notação, (M, ψ_ω) é um C^*-módulo à esquerda. Como $c^* \cdot m = \psi_\omega(c^* \otimes m) = \sum c^*(m_{(1)})m_{(0)}$ segue, da Observação 2.3.3, que M é um C^*-módulo à esquerda racional.

Sejam M, N C-comódulos e $f : M \to N$ um morfismo de C-comódulos à direita. Provemos que f é um morfismo de C^*-módulos à esquerda racionais. De fato,

$$\begin{aligned} f(c^* \cdot m) &= f(\sum c^*(m_{(1)})m_{(0)}) \\ &= \sum c^*(m_{(1)})f(m_{(0)}) \\ &= \sum c^*(f(m)_{(1)})f(m)_{(0)} \\ &= c^* \cdot f(m). \end{aligned}$$

Assim, podemos definir o funtor $T : \mathscr{M}^C \to Rat({}_{C^*}\mathscr{M})$ tal que $T(M, \omega) = (M, \psi_\omega)$ e $T(f) = f$, para quaisquer M C-comódulo à direita e f morfismo de C-comódulos à direita.

Seja (M, ψ) um C^*-módulo à esquerda racional. Como $\mu_M : M \otimes C \to Hom(C^*, M)$ é injetora, segue que $\tilde{\mu}_M : M \otimes C \to \mu_M(M \otimes C)$ é um isomorfismo de k-espaços vetoriais. Temos que $\psi(c^* \otimes m) = c^* \cdot m = \rho_M(m)(c^*)$, $\forall c^* \in C^*$, então podemos definir

$$\begin{aligned} \omega_\psi : \quad M &\to M \otimes C \\ m &\mapsto \omega_\psi(m) = \tilde{\mu}_M^{-1}(\rho_M(m)) \end{aligned}.$$

Portanto, $\omega_\psi(m) = \tilde{\mu}_M^{-1}(\rho_M(m)) = \tilde{\mu}_M^{-1}(\mu_M(\sum_i m_i \otimes c_i)) = \sum_i m_i \otimes c_i$, $\forall m \in M$, em que $(m_i)_i \subseteq M$ e $(c_i)_i \subseteq C$ são famílias finitas tais que $c^* \cdot m = \sum_i c^*(c_i)m_i$.

Queremos ver que (M, ω_ψ) é um C-comódulo à direita e para isso mostremos que $\psi_{\omega_\psi} = \psi$, pois se assim o fizermos, teremos pela Proposição 2.3.1 que (M, ω_ψ) é um C-comódulo à direita se, e somente se, (M, ψ_{ω_ψ}) é um C^*-módulo à esquerda. Temos

$$\omega_\psi(m) = \sum_i m_i \otimes c_i = \tilde{\mu}_M^{-1}(\rho_M(m)) \Rightarrow \rho_M(m) = \sum_i \tilde{\mu}_M(m_i \otimes c_i) = \sum_i \mu_M(m_i \otimes c_i).$$

Portanto, $\rho_M(m)(c^*) = \sum_i \mu_M(m_i \otimes c_i)(c^*) = \sum_i c^*(c_i)m_i = \psi(c^* \otimes m)$. Por outro lado, $\psi_{\omega_\psi}(c^* \otimes m) = \sum_i c^*(c_i)m_i = \psi(c^* \otimes m)$ e isso implica $\psi_{\omega_\psi} = \psi$. Logo, (M, ω_ψ) é um C-comódulo à direita.

Sejam (M, ψ_M) e (N, ψ_N) C^*-módulos à esquerda racionais e $f : M \to N$ um morfismo de C^*-módulos à esquerda. Mostremos que f é um morfismo de C-comódulos à direita entre

(M, ω_{ψ_M}) e (N, ω_{ψ_N}). Precisamos mostrar que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\omega_{\psi_M}"'] & N \arrow[d, "\omega_{\psi_N}"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f \otimes I_C"'] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

Seja $m \in M$, então $\omega_{\psi_M}(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$ e

$$\begin{aligned} \mu_N((f \otimes I_C)\omega_{\psi_M}(m))(c^*) &= \mu_N(\sum_i f(m_i) \otimes c_i)(c^*) \\ &= \sum_i c^*(c_i) f(m_i) \\ &= f(\sum_i c^*(c_i) m_i) \\ &= f(c^* \cdot m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_N(\omega_{\psi_N} f(m))(c^*) &= \mu_N((\tilde{\mu}_N^{-1} \rho_N) f)(m))(c^*) \\ &= \rho_N(f(m))(c^*) \\ &= c^* \cdot f(m) \\ &= f(c^* \cdot m). \end{aligned}$$

Como μ_N é injetora, segue que $(f \otimes I_C)\omega_{\psi_M}(m) = \omega_{\psi_N} f(m)$, $\forall m \in M$, portanto $(f \otimes I_C)\omega_{\psi_M} = \omega_{\psi_N} f$ e f é morfismo de C-comódulos à direita.

Definimos agora, $S : Rat({}_{C^*}\mathscr{M}) \to \mathscr{M}^C$ tal que $S(M, \psi) = (M, \omega_\psi)$ e $S(f) = f$, para todo f morfismo de C^*-módulos à esquerda. Temos

$$\begin{aligned} (T \circ S)(M, \psi) &= T(S(M, \psi)) = T(M, \omega_\psi) \\ &= (M, \psi_{\omega_\psi}) = (M, \psi) \end{aligned}$$

e ainda $(T \circ S)(f) = f$. Portanto, $T \circ S = I_{Rat({}_{C^*}\mathscr{M})}$. Por fim, observamos que

$$\begin{aligned} \omega_{\psi_\omega} : \quad M &\to M \otimes C \\ m &\mapsto \tilde{\mu}_M^{-1}(\rho_M(m)) = \omega_{\psi_\omega}(m). \end{aligned}$$

Aplicando $\tilde{\mu}_M = \mu_M$ a $\tilde{\mu}_M^{-1}(\rho_M(m)) = \omega_{\psi_\omega}(m)$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_M(\omega_{\psi_\omega}(m))(c^*) &= \rho_M(m)(c^*)\\ &= c^* \cdot m,\end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_M(\omega(m))(c^*) &= \tilde{\mu}_M(\sum m_{(0)} \otimes m_{(1)})(c^*)\\ &= \sum c^*(m_{(1)})m_{(0)}\\ &= \psi_\omega(c^* \otimes m)\\ &= c^* \cdot m.\end{aligned}$$

Sendo $\tilde{\mu}_M$ injetora, $\omega_{\psi_\omega}(m) = \omega(m), \forall m \in M$. Portanto, $\omega_{\psi_\omega} = \omega$. Logo,

$$\begin{aligned}(S \circ T)(M, \omega) &= S(T(M, \omega)) = S(M, \psi_\omega)\\ &= (M, \omega_{\psi_\omega}) = (M, \omega)\end{aligned}$$

e também $(S \circ T)(f) = f$. Assim, $S \circ T = I_{\mathscr{M}^C}$. Portanto, as categorias $\mathscr{M}^C$ e $Rat({}_{C^*}\mathscr{M})$ são isomorfas. ■

O resultado seguinte apresenta algumas das propriedades básicas dos módulos racionais.

Teorema 2.3.8. *Seja C uma coálgebra. Então:*
(i) um submódulo cíclico de um C^*-módulo racional tem dimensão finita;
(ii) se M é um C^*-módulo racional e N é um C^*-submódulo de M, então N e M/N são C^*-módulos racionais;
(iii) se $(M_i)_{i\in I}$ é uma família de C^*-módulos racionais, então $\oplus_{i\in I} M_i$, a soma direta como um C^*-módulo, é um C^*-módulo racional;
(iv) todo C^*-módulo L tem um maior C^*-submódulo racional L^{rat}. Mais precisamente, L^{rat} é a soma de todos os submódulos racionais de L.

Demonstração: (i) Seja M um C^*-módulo racional e $C^* \cdot m$ o submódulo cíclico gerado por $m \in M$. Como M é racional, existem duas famílias finitas de elementos $(c_i)_{i\in F} \subseteq C$ e $(m_i)_{i\in F} \subseteq M$ para as quais $c^* \cdot m = \sum_{i\in F} c^*(c_i)m_i$, para todo $c^* \in C$. Segue que $C^* \cdot m$ está contido no subespaço vetorial gerado pela família $(m_i)_{i\in F}$, logo tem dimensão finita.

(ii) Se N é um submódulo de M, então a Observação 2.3.3 mostra imediatamente que N é racional. Se denotarmos por $\overline{m}$ a classe de equivalência de um elemento $m \in M$ módulo N, então com a notação de (i), temos para todo $c^* \in C^*$

$$c^* \cdot \overline{m} = \sum_{i \in F} c^*(c_i)\overline{m_i},$$

e usando de novo a mesma observação, segue que M/N é racional também.

(iii) Seja $q_j : M_j \to \oplus_{i\in F} M_i$ a inclusão canônica de M_j na soma direta, e seja $m = \sum_{i\in F} q_i(m_i)$ um elemento de $\oplus_{i\in F} M_i$, em que F é um subconjunto finito de I. Para todo $i \in F$, o C^*-módulo M_i é racional, portanto existem duas famílias de elementos $(c_{ij})_{j\in F_i} \subseteq C$ e $(m_{ij})_{j\in F_i} \subseteq M_i$, F_i conjuntos finitos, tais que $c^* \cdot m_i = \sum_{j\in F_i} c^*(c_{ij})m_{ij}$ para todo $c^* \in C^*$. Então

$$\begin{aligned} c^* \cdot m &= \sum_{i\in F} q_i(c^* \cdot m_i) \\ &= \sum_{i\in F}\sum_{j\in F_i} q_i(c^*(c_{ij})m_{ij}) \\ &= \sum_{i\in F}\sum_{j\in F_i} c^*(c_{ij})q_i(m_{ij}) \end{aligned}$$

e agora $\oplus_{i\in I} M_i$ é racional pela Observação 2.3.3.

(iv) Se L é um C^*-módulo à esquerda, seja

$$L^{rat} = \sum \{N \,|\, N \text{ é um } C^*\text{-submódulo racional de } L\}.$$

As afirmações (ii) e (iii) mostram que L^{rat} é um C^*-submódulo racional de L. Da maneira como foi definido, é claro que qualquer C^*-submódulo racional de L está contido em L^{rat}. ■

Uma consequência dessas propriedades é outra prova do Teorema Fundamental dos Comódulos.

Corolário 2.3.9. *Seja M um C-comódulo à direita. Então:*
(i) o subcomódulo gerado por um elemento de M tem dimensão finita;
(ii) M é a soma dos seus subcomódulos de dimensão finita.

Demonstração: (i) O subcomódulo gerado por um elemento $m \in M$ é o C^*-submódulo cíclico gerado por m do C^*-módulo racional M, o qual tem dimensão finita pelo teorema anterior.

(ii) Consideramos M como um C^*-módulo racional à esquerda. É claro que M é a soma dos seus submódulos cíclicos, os quais são todos subcomódulos de dimensão finita de M. ■

Observação 2.3.10. Se C é uma coálgebra, então C^* é um C^*-módulo à esquerda, portanto faz sentido falar sobre o maior submódulo à esquerda racional de C^*. Vamos denotar este submódulo por C_l^{*rat}. Similarmente, considerando C^* como um C^*-módulo à direita, denotamos por C_r^{*rat} o maior submódulo à direita racional de C^*. No caso de C ter dimensão finita, o Exemplo 2.3.5 mostra que $C_l^{*rat} = C_r^{*rat} = C^*$. ■

Observação 2.3.11. Se C é uma coálgebra, como C é um C-comódulo à direita via Δ, podemos considerar C como um C^*-módulo à esquerda racional. Denotamos esta ação à esquerda de C^* em C por $\rightharpoonup$. Portanto, $c^* \rightharpoonup c = \sum c^*(c_2)c_1$, para todo $c^* \in C^*$ e $c \in C$. Similarmente, C é um C^*-módulo à direita racional com a ação $c \leftharpoonup c^* = \sum c^*(c_1)c_2$. ■

Proposição 2.3.12. *Seja C uma coálgebra, C^* a álgebra dual. Então C_l^{*rat} é ideal de C^*.*

Demonstração: Sejam $c^* \in C_l^{*rat}$ e $d^* \in C^*$. Como C_l^{*rat} é C^*-submódulo à esquerda de C^*, temos $d^* * c^* \in C_l^{*rat}$. Para provar que $c^* * d^* \in C_l^{*rat}$, vamos mostrar que $C_l^{*rat} * d^*$ é C^*-submódulo à esquerda racional de C^*. Como $c^* \in C_l^{*rat}$, existem famílias finitas $(c_i^*)_i \subseteq C_l^{*rat}$ e $(c_i)_i \subseteq C$ que determinam a ação de C^* sobre c^*, ou seja, tais que

$$e^* * c^* = \sum e^*(c_i)c_i^*, \forall e^* \in C^*.$$

Então, $\forall e^* \in C^*$ temos

$$e^* * (c^* * d^*) = (e^* * c^*) * d^* = (\sum e^*(c_i)c_i^*) * d^* = \sum e^*(c_i)c_i^* * d^*.$$

Portanto, temos que as famílias finitas $(c_i^* * d^*)_i \subseteq C_l^{*rat} * d^*$ e $(c_i)_i \subseteq C$ determinam a ação de C^* sobre $c^* * d^*$. Concluímos que $C_l^{*rat} * d^*$ é C^*-submódulo à esquerda racional de C^*, logo $C_l^{*rat} * d^* \subseteq C_l^{*rat}$, pois C_l^{*rat} é o maior C^*-submódulo à esquerda racional de C^*. Dessa forma, $c^* * d^* \in C_l^{*rat}$. ■

3 Álgebras de Hopf

Nessa seção, definimos álgebra de Hopf e apresentamos alguns exemplos e propriedades. Para isso, começamos definindo biálgebras, que são espaços vetoriais com estruturas compatíveis de álgebra e coálgebra. Em seguida, definimos a álgebra de convolução de uma coálgebra C e uma álgebra A para podermos introduzir o conceito de antípoda.

3.1 Biálgebras

Seja H um k-espaço vetorial que possui uma estrutura de álgebra (H, M, u) e também uma estrutura de coálgebra (H, Δ, ε). Abaixo, mostramos um resultado de compatibilidade entre as estruturas de álgebra e de coálgebra de H. Lembramos que $H \otimes H$ possui uma estrutura de coálgebra e de álgebra.

Proposição 3.1.1. *As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) as funções M e u são morfismos de coálgebras;
(ii) as funções Δ e ε são morfismos de álgebras.

Demonstração: Temos que $M : H \otimes H \to H$ é morfismo de coálgebras se, e somente se, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & H \arrow[dd, "\Delta"] \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "I\otimes\tau\otimes I"'] & \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "M\otimes M"'] & H \otimes H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & H \arrow[dd, "\varepsilon"] \\
k \otimes k \arrow[d, "\varphi"'] & \\
k \arrow[r, "I_k"'] & k
\end{tikzcd}$$

comutam, em que $\varphi : k \otimes k \to k$ é o isomorfimo canônico.

Agora, $u : H \to k$ é morfismo de coálgebras se, e somente se, os diagramas

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ k \otimes k \arrow[r, "u \otimes u"'] & H \otimes H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "I_k"'] & & H \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

comutam.

Notemos que Δ é morfismo de álgebras se, e somente se, o primeiro e o terceiro diagramas comutam, e ε é morfismo de álgebras se, e somente se, o segundo e o quarto diagramas comutam, daí segue a equivalência. ■

Observação 3.1.2. O fato de Δ e ε serem morfismos de álgebras nos possibilita expressar em notação de Sweedler os fatos abaixo

$$\sum (hg)_1 \otimes (hg)_2 = \Delta(hg) = \Delta(h)\Delta(g) = (\sum h_1 \otimes h_2)(\sum g_1 \otimes g_2) = \sum h_1 g_1 \otimes h_2 g_2,$$

$$\varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g), \forall h, g \in H.$$

Além disso, $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ e $\varepsilon(1_H) = 1_k$. ■

Definição 3.1.3. *Um k-espaço vetorial H que possui estruturas de álgebra (H, M, u) e de coálgebra (H, Δ, ε) é uma biálgebra se Δ e ε são morfismos de álgebras.* ■

Observação 3.1.4. Diremos que uma biálgebra H possui uma propriedade P se sua estrutura de álgebra ou de coálgebra tiver a propriedade P. Assim, por exemplo, podemos falar de biálgebras comutativas (se sua estrutura de álgebra for comutativa) ou cocomutativas (se sua estrutura de coálgebra for cocomutativa). ■

Proposição 3.1.5. *Seja H uma biálgebra. Então são válidas as seguintes proposições:*
(i) se H é comutativa, então M é morfismo de álgebras;
(ii) se H é cocomutativa, então Δ é morfismo de coálgebras.

Demonstração: (i) Temos que verificar que os diagramas

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "M \otimes M"] \arrow[d, "M_{H \otimes H}"'] & H \otimes H \arrow[d, "M"] \\ H \otimes H \arrow[r, "M"'] & H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[rr, "M"] & & H \\ & k \arrow[ul, "u_{H \otimes H}"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

comutam. Sejam $a,b,c,d \in H$, então

$$\begin{aligned} M(M\otimes M)(a\otimes b\otimes c\otimes d) &= M(ab\otimes cd)\\ &= (ab)(cd)\\ &= abcd, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MM_{H\otimes H}(a\otimes b\otimes c\otimes d) &= M(ac\otimes bd)\\ &= (ac)(bd)\\ &= acbd\\ &= abcd. \end{aligned}$$

A última igualdade é satisfeita, pois H é comutativa. Portanto, $M(M\otimes M) = MM_{H\otimes H}$, ou seja, o primeiro diagrama comuta. Para o segundo diagrama, temos

$$Mu_{H\otimes H}(1_k) = M(1_H\otimes 1_H) = 1_H 1_H = 1_H = u(1_k).$$

Logo, M é um morfismo de álgebras.

(ii) Verifiquemos que os diagramas

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & H\otimes H \arrow[d, "\Delta_{H\otimes H}"] \\ H\otimes H \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"'] & H\otimes H\otimes H\otimes H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & H\otimes H \arrow[dl, "\varepsilon_{H\otimes H}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

comutam. Seja $h \in H$, então

$$\begin{aligned} (\Delta\otimes\Delta)\Delta(h) &= (\Delta\otimes\Delta)(\sum h_1\otimes h_2)\\ &= \sum h_{1_1}\otimes h_{1_2}\otimes h_{2_1}\otimes h_{2_2}\\ &= \sum h_1\otimes h_2\otimes h_3\otimes h_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{H\otimes H}\Delta(h) &= \Delta_{H\otimes H}(\sum h_1\otimes h_2)\\ &= \sum h_{1_1}\otimes h_{2_1}\otimes h_{1_2}\otimes h_{2_2}\\ &= \sum h_1\otimes h_3\otimes h_2\otimes h_4\\ &= \sum h_1\otimes h_2\otimes h_3\otimes h_4. \end{aligned}$$

A última igualdade vale, pois H é cocomutativa. Portanto, $(\Delta\otimes\Delta)\Delta = \Delta_{H\otimes H}\Delta$, ou seja, o primeiro diagrama comuta. Para o segundo diagrama, para todo $h\in H$, temos

$$\varepsilon_{H\otimes H}\Delta(h) = \varepsilon_{H\otimes H}(\sum h_1\otimes h_2) = \sum \varepsilon(h_1)\varepsilon(h_2) = \varepsilon(\sum h_1\varepsilon(h_2)) = \varepsilon(h).$$

Portanto, Δ é morfismo de coálgebras. ■

Exemplo 3.1.6. O corpo k é uma biálgebra. Lembrando, k possui uma estrutura de álgebra e de coálgebra, em que $\Delta : k\to k\otimes k$ é o isomorfismo canônico e $\varepsilon : k\to k$ é a identidade em k. Resta-nos verificar que tais funções são morfismos de álgebras. Sejam $r,s\in k$, então

$$\Delta(rs) = rs\otimes 1_k = (r\otimes 1_k)(s\otimes 1_k) = \Delta(r)\Delta(s),\ \Delta(1_k) = 1_k\otimes 1_k = 1_{k\otimes k},$$

$$\varepsilon(rs) = \varepsilon(r)\varepsilon(s) \quad \text{e} \quad \varepsilon(1_k) = 1_k.$$

■

Exemplo 3.1.7. Estrutura de Biálgebra da Álgebra de Grupo. Sejam G um grupo e kG a álgebra de grupo vista no Exemplo 1.1.7, cuja estrutura de coálgebra é dada por

$$\Delta(g) = g\otimes g \quad \text{e} \quad \varepsilon(g) = 1_k, \forall g\in G.$$

Verifiquemos que Δ e ε são morfismos de álgebras. Sejam $g,h\in kG$ elementos da base. Então $\Delta(gh) = gh\otimes gh = (g\otimes g)(h\otimes h) = \Delta(g)\Delta(h)$ e $\varepsilon(gh) = 1_k = 1_k 1_k = \varepsilon(g)\varepsilon(h)$. Portanto, kG é uma biálgebra. ■

A partir de uma biálgebra, podemos obter outras biálgebras, considerando a estrutura de álgebra oposta ou a estrutura de coálgebra cooposta.

Exemplo 3.1.8. Seja H uma biálgebra. Então H^{op}, H^{cop} e $H^{op,cop}$ são biálgebras, em que H^{op} possui a estrutura de álgebra oposta e mantém a estrutura de coálgebra de H, H^{cop} possui a estrutura de coálgebra cooposta e mantém a estrutura de álgebra de H e $H^{op,cop}$ possui as estruturas de álgebra oposta e coálgebra cooposta de H. Denotamos por $\cdot_{op}$ a multiplicação em H^{op}. Sejam $g,h\in H$, então

$$\begin{aligned}
\Delta(x\cdot_{op} y) &= \Delta(yx) = \Delta(y)\Delta(x) \\
&= y_1x_1\otimes y_2x_2 \\
&= (x_1\otimes x_2)\cdot_{op}(y_1\otimes y_2) \\
&= \Delta(x)\cdot_{op}\Delta(y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(x \cdot_{op} y) &= \varepsilon(yx)\\ &= \varepsilon(y)\varepsilon(x)\\ &= \varepsilon(x)\varepsilon(y).\end{aligned}$$

Portanto, H^{op} é uma biálgebra. Agora,

$$\Delta^{cop}(hg) = \sum (hg)_2 \otimes (hg)_1 = \sum h_2 g_2 \otimes h_1 g_1$$

$$\text{e} \quad \Delta^{cop}(h)\Delta^{cop}(g) = (\sum h_2 \otimes h_1)(\sum g_2 \otimes g_1) = \sum h_2 g_2 \otimes h_1 g_1.$$

Portanto, H^{cop} é uma biálgebra. Não é difícil verificar que $H^{op,cop}$ é uma biálgebra. ■

Proposição 3.1.9. *Seja H uma biálgebra de dimensão finita. Então H^* com a estrutura de álgebra dual da coálgebra H e com a estrutura de coálgebra dual da álgebra H é uma biálgebra, chamada biálgebra dual de H.*

Demonstração: Denotamos por Δ e ε a comultiplicação e a counidade de H e por δ e E a comultiplicação e counidade de H^*. Lembrando, para $f \in H^*$ temos $E(f) = f(1_H)$ e $\delta(f) = \sum f_1 \otimes f_2$ com a propriedade $f(ab) = \sum f_1(a) f_2(b)$, para quaisquer $a, b \in H$.

Mostremos que δ é um morfismo de álgebras. Sejam $a, b \in H$, $f, g \in H^*$, então

$$\begin{aligned}(f * g)(ab) &= \sum f((ab)_1) g((ab)_2)\\ &= \sum f(a_1 b_1) g(a_2 b_2)\\ &= \sum f_1(a_1) f_2(b_1) g_1(a_2) g_2(b_2)\\ &= \sum f_1(a_1) g_1(a_2) f_2(b_1) g_2(b_2)\\ &= \sum (f_1 * g_1)(a)(f_2 * g_2)(b),\end{aligned}$$

em que $\delta(f) = \sum f_1 \otimes f_2$ e $\delta(g) = \sum g_1 \otimes g_2$. Assim,

$$\begin{aligned}\delta(f * g) &= \sum (f_1 * g_1) \otimes (f_2 * g_2)\\ &= \sum (f_1 \otimes f_2) * (g_1 \otimes g_2)\\ &= \delta(f)\delta(g).\end{aligned}$$

Como $\varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g)$, $\forall h, g \in H$, temos $\delta(1_{H^*}) = \delta(\varepsilon) = \varepsilon \otimes \varepsilon = \delta(1_{H^* \otimes H^*})$. Logo, δ é morfismo de álgebras. Mostremos agora que E é um morfismo de álgebras. Se $f, g \in H^*$, temos

$$E(f * g) = (f * g)(1_H) = f(1_H) g(1_H) = E(f)E(g)$$

e $E(\varepsilon) = \varepsilon(1_H) = 1_k$. Portanto, H^* é uma biálgebra. ∎

Definição 3.1.10. *Sejam H e K biálgebras. Uma função k-linear $f : H \to K$ é dita um morfismo de biálgebras se f é um morfismo de álgebras e um morfismo de coálgebras com respeito às estruturas de álgebra e de coálgebra de H e K, respectivamente.* ∎

Definição 3.1.11. *Sejam H uma biálgebra e K um k-subespaço vetorial de H. Dizemos que K é uma sub-biálgebra de H se K é subálgebra e subcoálgebra de H.* ∎

Definição 3.1.12. *Sejam H uma biálgebra e I um k-subespaço vetorial de H. Dizemos que I é um bi-ideal de H se I é ideal e coideal de H.* ∎

A proposição seguinte é imediata, pois já mostramos a Proposição 1.2.22, por isso vamos omitir sua demonstração.

Proposição 3.1.13. *Seja $f : H \to K$ um morfismo de biálgebras. Então:*
(i) $Im(f)$ é uma sub-biálgebra de K;
(ii) $Ker(f)$ é um bi-ideal de H.

Teorema 3.1.14. *Sejam H uma biálgebra, I um bi-ideal e $p : H \to H/I$ a projeção canônica de k-espaços vetoriais. Então as estruturas de álgebra quociente e de coálgebra quociente definem uma estrutura de biálgebra em H/I tal que a projeção $p : H \to H/I$ é um morfismo de biálgebras.*

Demonstração: Primeiro lembremos que a estrutura de coálgebra em H/I vista no Teorema 1.2.25 é definida por $\bar{\Delta}(\overline{h}) = \sum \overline{h_1} \otimes \overline{h_2}$ e $\bar{\varepsilon}(\overline{h}) = \varepsilon(h)$, para todo $h \in H$. Verifiquemos que $\bar{\Delta}$ e $\bar{\varepsilon}$ são morfismos de álgebras. Sejam $h, g \in H$, temos

$$\bar{\Delta}(\overline{hg}) = \sum \overline{(hg)_1} \otimes \overline{(hg)_2} = \sum \overline{h_1}\overline{g_1} \otimes \overline{h_2}\overline{g_2} = \sum (\overline{h_1} \otimes \overline{h_2})(\overline{g_1} \otimes \overline{g_2}) = \bar{\Delta}(\overline{h})\bar{\Delta}(\overline{g})$$

e, claramente, $\bar{\Delta}(\overline{1}_H) = \overline{1}_H \otimes \overline{1}_H$. Agora,

$$\bar{\varepsilon}(\overline{hg}) = \varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g) = \bar{\varepsilon}(\overline{h})\bar{\varepsilon}(\overline{g})$$

e também $\bar{\varepsilon}(\overline{1}_H) = \varepsilon(1_H) = 1_k$. Portanto, H/I é uma biálgebra. Além disso, pela teoria de álgebras, p é morfismo de álgebras, pelo Teorema 1.2.25, p é morfismo de coálgebras. Portanto p é morfismo de biálgebras. ∎

O próximo resultado é imediato.

Corolário 3.1.15. *Se H é uma biálgebra comutativa (respectivamente, cocomutativa), então a biálgebra quociente H/I é comutativa (respectivamente, cocomutativa).* ∎

Para encerrar esta seção sobre biálgebras, observamos que nem toda álgebra admite estrutura de biálgebra.

Observação 3.1.16. Seja k um corpo e $n \geq 2$ um inteiro positivo. Então não existe estrutura de biálgebra em $M_n(k)$ tal que a estrutura de álgebra seja a álgebra de matrizes. De fato, suponha que exista uma estrutura de biálgebra em $M_n(k)$, então a counidade $\varepsilon : M_n(k) \to k$ é um morfismo de álgebras. Assim, o kernel de ε é um ideal de $M_n(k)$, logo só pode ser 0 ou $M_n(k)$ (pois $M_n(k)$ é álgebra simples). Como $\varepsilon(1) = 1$, temos $Ker(\varepsilon) = 0$ e obtemos uma contradição, pois $dim(M_n(k)) > dim(k)$. ∎

3.2 Álgebras de Hopf

Falta-nos um último conceito para definirmos o que é uma álgebra de Hopf, o conceito de antípoda em uma biálgebra. Para definir a antípoda, precisamos estudar uma álgebra associada a uma coálgebra e uma álgebra, chamada *Álgebra de Convolução*.

Sejam (C, Δ, ε) uma coálgebra e (A, M, u) uma álgebra. Definimos sobre $Hom(C, A)$ uma estrutura de álgebra na qual a multiplicação denotada por $*$ é dada como segue. Se $f, g \in Hom(C, A)$, então

$$(f * g)(c) = M(f \otimes g)\Delta(c) = \sum f(c_1)g(c_2), \forall c \in C.$$

Essa multiplicação definida é associativa, pois para quaisquer $f, g, h \in Hom(C, A)$ e $c \in C$,

$$\begin{aligned}
((f*g)*h)(c) &= \sum (f*g)(c_1)h(c_2) \\
&= \sum f(c_{1_1})g(c_{1_2})h(c_2) \\
&= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3) \\
&= \sum f(c_1)g(c_{2_1})h(c_{2_2}) \\
&= \sum f(c_1)(g*h)(c_2) \\
&= (f*(g*h))(c).
\end{aligned}$$

A unidade de $Hom(C,A)$ é o elemento $u\varepsilon \in Hom(C,A)$, pois para todo $c \in C$

$$\begin{aligned}
(f * u\varepsilon)(c) &= \sum f(c_1)u\varepsilon(c_2) \\
&= \sum f(c_1)u(1_k)\varepsilon(c_2) \\
&= f(\sum c_1\varepsilon(c_2)) \\
&= f(c),
\end{aligned}$$

portanto $f * u\varepsilon = f$. Analogamente, é possível mostrar $u\varepsilon * f = f$. Reparemos que se $C = k$, temos $Hom(C,A) = Hom(k,A) \simeq A$; se $A = k$, temos $Hom(C,A) = Hom(C,k) = C^*$ e $*$ é o produto de convolução definido na álgebra dual da coálgebra C. Por essa razão, também chamamos esse produto $*$ de produto de convolução.

Definição 3.2.1. *Sejam C uma k-coálgebra e A uma k-álgebra. Então a álgebra $Hom(C,A)$ discutida anteriormente é chamada a Álgebra de Convolução de C e A.* ■

Consideremos um caso particular dessa construção de álgebra que acabamos de fazer. Seja H uma biálgebra, denotamos H^c a estrutura de coálgebra de H e H^a a estrutura de álgebra de H. Nessas condições, temos uma estrutura de álgebra em $Hom(H^c,H^a)$. Notemos que a função identidade $I : H \to H$ pertence à álgebra $Hom(H^c,H^a)$.

Definição 3.2.2. *Seja H uma biálgebra. Uma função k-linear $S : H \to H$ é chamada antípoda de H se S for a inversa da função identidade $I : H \to H$ com respeito ao produto de convolução da álgebra $Hom(H^c,H^a)$.* ■

Definição 3.2.3. *Uma biálgebra H é dita uma álgebra de Hopf se H possui uma antípoda.* ■

Observação 3.2.4. Algumas observações podem ser feitas de imediato dessa definição.

1) A antípoda em uma álgebra de Hopf é única, pois é o inverso do elemento I da álgebra $Hom(H^c,H^a)$.

2) Nem toda biálgebra é uma álgebra de Hopf, ou seja, nem sempre é garantida a existência de uma antípoda em uma biálgebra. Mais adiante, apresentamos um exemplo de biálgebra que não tem antípoda.

3) Uma álgebra de Hopf tem uma propriedade P se satisfazer as mesmas condições vistas na Observação 3.1.4, ou seja, se sua estrutura de álgebra ou de coálgebra tiver a propriedade P.

4) De $S * I = I * S = u\varepsilon$, segue

$$(S * I)(h) = \sum S(h_1)I(h_2) = \sum S(h_1)h_2 = u\varepsilon(h) = u(\varepsilon(h)) = \varepsilon(h)1_H,$$

$$(I*S)(h)=\sum I(h_1)S(h_2)=\sum h_1S(h_2)=u\varepsilon(h)=u(\varepsilon(h))=\varepsilon(h)1_H.$$

Portanto, em notação de Sweedler

$$\sum S(h_1)h_2=\sum h_1S(h_2)=\varepsilon(h)1_H,\ \text{para todo } h\in H,$$

ou ainda $M(S\otimes I)\Delta=M(I\otimes S)\Delta=u\varepsilon$. ∎

Definição 3.2.5. *Sejam H e K álgebras de Hopf. Uma função $f:H\to K$ é dita um morfismo de álgebras de Hopf se for um morfismo de biálgebras.* ∎

Proposição 3.2.6. *Sejam H e K álgebras de Hopf com antípodas S_H e S_K. Se $f:H\to K$ é um morfismo de biálgebras, então $S_Kf=fS_H$.*

Demonstração: Consideremos a álgebra de convolução $Hom(H,K)$, S_Kf e fS_H elementos dessa álgebra. Mostremos que S_Kf é o inverso à esquerda de f e fS_H é o inverso à direita de f nessa álgebra, isso implica que $S_Kf=fS_H$. Seja $h\in H$, então

$$\begin{aligned}
(S_Kf*f)(h) &= \sum S_Kf(h_1)f(h_2)\\
&= \sum S_K(f(h_1))f(h_2)\\
&= \sum S_K(f(h)_1)f(h)_2\\
&= \varepsilon_K(f(h))1_K\\
&= \varepsilon_H(h)1_K\\
&= u_K(\varepsilon_H(h))\\
&= u_K\varepsilon_H(h),
\end{aligned}$$

também

$$\begin{aligned}
(f*fS_H)(h) &= \sum f(h_1)fS_H(h_2)\\
&= \sum f(h_1)f(S_H(h_2))\\
&= f(\sum h_1S_H(h_2))\\
&= f(\varepsilon_H(h)1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)1_K\\
&= u_K(\varepsilon_H(h))\\
&= u_K\varepsilon_H(h).
\end{aligned}$$

Assim, f é invertível em $Hom(H,K)$ com relação ao produto de convolução, disso segue que sua inversa à direita é igual à sua inversa à esquerda, ou seja, $S_K f = f S_H$. ■

Antes de vermos alguns exemplos de álgebras de Hopf, mostramos algumas propriedades referentes à antípoda para tomarmos mais conhecimento do seu papel nessa estrutura.

Proposição 3.2.7. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então são válidas as afirmações:*
(i) $S(hg) = S(g)S(h)$, para quaisquer $g,h \in H$;
(ii) $S(1_H) = 1_H$;
(iii) $\Delta(S(h)) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$;
(iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

As propriedades (i) e (ii) significam que S é um antimorfismo de álgebras e (iii) e (iv) significam que S é um antimorfismo de coálgebras.

Demonstração: (i) Considere $H \otimes H$ com a estrutura de produto tensorial de coálgebras vista na Proposição 1.2.23 e H com sua estrutura de álgebra. Nessas condições faz sentido falar na álgebra de convolução $Hom(H \otimes H, H)$. A unidade dessa álgebra é o elemento $u_H \varepsilon_{H\otimes H} : H \otimes H \to H$. Consideremos as funções $F, G, M : H \otimes H \to H$ definidas por

$$F(h \otimes g) = S(g)S(h),\ G(h \otimes g) = S(hg) \ \text{ e } \ M(h \otimes g) = hg$$

para quaisquer $h, g \in H$. Mostremos que M é a inversa à esquerda de F e é a inversa à direita de G com respeito ao produto de convolução. De fato,

$$\begin{aligned}
(M * F)(h \otimes g) &= \sum M((h \otimes g)_1)F((h \otimes g)_2) \\
&= \sum M(h_1 \otimes g_1)F(h_2 \otimes g_2) \\
&= \sum h_1 g_1 S(g_2)S(h_2) \\
&= \sum h_1 \varepsilon(g) 1_H S(h_2) \\
&= \sum \varepsilon(g) h_1 S(h_2) \\
&= \varepsilon(g)\varepsilon(h) 1_H \\
&= \varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes g) 1_H \\
&= u_H \varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes g),
\end{aligned}$$

o que nos mostra $M * F = u_H \varepsilon_{H\otimes H}$. Também,

$$
\begin{aligned}
(G*M)(h\otimes g) &= \sum G((h\otimes g)_1)M((h\otimes g)_2)\\
&= \sum G(h_1\otimes g_1)M(h_2\otimes g_2)\\
&= \sum S(h_1g_1)h_2g_2\\
&= \sum S((hg)_1)(hg)_2\\
&= \varepsilon(hg)1_H\\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_H\\
&= \varepsilon_{H\otimes H}(h\otimes g)1_H\\
&= u_H\varepsilon_{H\otimes H}(hg),
\end{aligned}
$$

portanto $G*M = u_H\varepsilon_{H\otimes H}$. Disso segue $F = G$, ou seja, $S(hg) = S(g)S(h)$.

(ii) Como $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$, temos $S(1_H)1_H = \varepsilon(1_H)1_H = 1_k 1_H = 1_H$. Portanto, $S(1_H) = 1_H$.

(iii) Agora, consideremos H com sua estrutura de coálgebra e $H\otimes H$ com sua estrutura de produto tensorial de álgebras vista na Proposição 1.1.13. Assim, podemos considerar a álgebra de convolução $Hom(H, H\otimes H)$. O elemento identidade dessa álgebra é a função $u_{H\otimes H}\varepsilon_H : H \to H\otimes H$. Sejam as funções $F, G : H \to H\otimes H$ definidas por

$$F(h) = \Delta(S(h)) \;\text{ e }\; G(h) = \sum S(h_2)\otimes S(h_1)$$

para todo $h \in H$. Provemos que Δ é a inversa à esquerda de F e é a inversa à direita de G com respeito ao produto de convolução. Seja $h \in H$, então

$$
\begin{aligned}
(\Delta * F)(h) &= \sum \Delta(h_1)F(h_2)\\
&= \sum \Delta(h_1)\Delta(S(h_2))\\
&= \Delta(\sum h_1S(h_2))\\
&= \Delta(\varepsilon(h)1_H)\\
&= \varepsilon(h)1_H\otimes 1_H\\
&= u_{H\otimes H}\varepsilon_H(h),
\end{aligned}
$$

o que nos mostra $\Delta * F = u_{H\otimes H}\varepsilon_H$. Também,

$$\begin{aligned}
(G*\Delta)(h) = \sum G(h_1)\Delta(h_2) &= \sum (S((h_1)_2)\otimes S((h_1)_1))((h_2)_1\otimes (h_2)_2)\\
&= \sum (S(h_2)\otimes S(h_1))(h_3\otimes h_4)\\
&= \sum S(h_2)h_3\otimes S(h_1)h_4\\
&= \sum S((h_2)_1)(h_2)_2\otimes S(h_1)h_3\\
&= \sum \varepsilon(h_2)1_H\otimes S(h_1)h_3\\
&= \sum 1_H\otimes S(h_1)\varepsilon((h_2)_1)(h_2)_2\\
&= \sum 1_H\otimes S(h_1)h_2\\
&= 1_H\otimes \varepsilon(h)1_H\\
&= u_{H\otimes H}\varepsilon_H(h),
\end{aligned}$$

portanto $G*\Delta = u_{H\otimes H}\varepsilon_H$. Disso segue $F = G$, ou seja, $\Delta(S(h)) = \sum S(h_2)\otimes S(h_1)$.

(iv) Basta aplicarmos ε na igualdade $\sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1_H$. Assim obtemos $\sum \varepsilon(h_1)\varepsilon(S(h_2)) = \varepsilon(h)$. Como ε e S são k-lineares, temos $\varepsilon(S(\sum \varepsilon(h_1)h_2)) = \varepsilon(h)$. Usando a propriedade da counidade, segue $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$. ■

Proposição 3.2.8. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) $\sum S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1_H$, para todo $h\in H$;
(ii) $\sum h_2 S(h_1) = \varepsilon(h)1_H$, para todo $h\in H$;
(iii) $S^2 = I$ ($S^2 = S\circ S$).

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (iii) Por definição, sabemos que I é o inverso de S pelo produto de convolução. Mostremos que S^2 é o inverso de S à direita pelo produto de convolução, então o resultado seguirá por causa da unicidade do inverso. Seja $h\in H$, temos

$$\begin{aligned}
(S*S^2)(h) &= \sum S(h_1)S^2(h_2)\\
&= \sum S(S(h_2)h_1)\\
&= S(\varepsilon(h)1_H)\\
&= \varepsilon(h)S(1_H)\\
&= \varepsilon(h)1_H\\
&= u\varepsilon(h),
\end{aligned}$$

mostrando que $S * S^2 = u\varepsilon$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Basta aplicarmos S na igualdade $\sum S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H$. Temos

$$\begin{aligned} S(\sum S(h_1)h_2) &= \sum S(S(h_1)h_2) \\ &= \sum S(h_2)S^2(h_1) \\ &= \sum S(h_2)I(h_1) \\ &= \sum S(h_2)h_1 \\ &= S(\varepsilon(h)1_H) \\ &= \varepsilon(h)1_H, \end{aligned}$$

portanto $\sum S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1_H$.

As implicações (iii) $\Rightarrow$ (ii) e (ii) $\Rightarrow$ (iii) são análogas às implicações (iii) $\Rightarrow$ (i) e (i) $\Rightarrow$ (iii), respectivamente. ■

Corolário 3.2.9. *Se H é álgebra de Hopf comutativa ou cocomutativa, então $S^2 = I$.*

Demonstração: Se H for comutativa, então $\varepsilon(h)1_H = \sum S(h_1)h_2 = \sum h_2 S(h_1)$, ou seja, $S^2 = I$. Se H for cocomutativa, então $\sum h_1 \otimes h_2 = \sum h_2 \otimes h_1$, logo $\varepsilon(h)1_H = \sum S(h_1)h_2 = \sum S(h_2)h_1$, ou seja, $S^2 = I$. ■

Definimos agora subestruturas de álgebras de Hopf, como subálgebras de Hopf e ideais de Hopf, e álgebras de Hopf quociente.

Definição 3.2.10. *Sejam H uma álgebra de Hopf com antípoda S e K um k-subespaço vetorial de H. Dizemos que K é uma subálgebra de Hopf de H se K é sub-biálgebra de H e se $S(K) \subseteq K$.*
■

Observamos que se K é uma subálgebra de Hopf, então K é uma álgebra de Hopf com a estrutura induzida de H.

Definição 3.2.11. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S e I um k-subespaço vetorial de H. Dizemos que I é um ideal de Hopf se I é bi-ideal de H e $S(I) \subseteq I$.* ■

Teorema 3.2.12. *Sejam H uma álgebra de Hopf, I um ideal de Hopf de H e $p : H \to H/I$ a projeção canônica de k-espaços vetoriais. Então existe uma única estrutura de álgebra de Hopf em H/I tal que p é um morfismo de álgebras de Hopf.*

Demonstração: Sabemos do Teorema 3.1.14 que H/I tem uma estrutura de biálgebra. Como $S(I) \subseteq I$, podemos definir $\bar{S}: H/I \to H/I$ por $\bar{S}(\overline{h}) = \overline{S(h)}$, $\forall h \in H$. De fato, $\bar{S}$ está bem definida, pois se para $h, g \in H$ temos $\overline{h} = \overline{g}$, então $h - g \in I$ e portanto $S(h-g) \in I$ por hipótese, ou seja, $S(h) - S(g) \in I$, o que implica que $\overline{S(h)} = \overline{S(g)}$.

Agora, $\overline{S}$ é uma antípoda, pois para todo $h \in H$, vale

$$\begin{aligned}
\sum \bar{S}(\overline{h_1})\overline{h_2} &= \sum \overline{S(h_1)}\,\overline{h_2} \\
&= \sum \overline{S(h_1)h_2} \\
&= \overline{\sum S(h_1)h_2} \\
&= \overline{\varepsilon(h)1_H} \\
&= \varepsilon(h)\overline{1_H} \\
&= \bar{\varepsilon}(\overline{h})\overline{1_H}
\end{aligned}$$

e de maneira análoga se mostra $\sum \overline{h_1}\bar{S}(\overline{h_2}) = \bar{\varepsilon}(\overline{h})\overline{1_H}$. Portanto, H/I é uma álgebra de Hopf. ■

Antes de apresentarmos exemplos de álgebras de Hopf, definimos certos elementos especiais de uma coálgebra.

Definição 3.2.13. *Seja C uma coálgebra. Um elemento $c \in C$ é dito grouplike se c é não-nulo e $\Delta(c) = c \otimes c$. O conjunto dos elementos grouplike da coálgebra C é denotado por $G(C)$. Segue da propriedade da counidade que $\varepsilon(c) = 1_k$, para todo $c \in C$.* ■

Proposição 3.2.14. *Seja H álgebra de Hopf. Então $G(H)$ é grupo com a multiplicação de H.*

Demonstração: Notemos que $1_H \in G(H)$, pois $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$. Se $g, h \in G(H)$, então

$$\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h) = (g \otimes g)(h \otimes h) = gh \otimes gh, \text{ ou seja, } gh \in G(H).$$

Agora, se $g \in G(H)$, então $S(g) \in G(H)$, pois $\Delta(S(g)) = \sum S(g_2) \otimes S(g_1) = S(g) \otimes S(g)$. Por outro lado, $(S * I)(g) = S(g)g = \varepsilon(g)1_H = 1_H$ e analogamente $gS(g) = 1_H$. Portanto, todo elemento groulike $g \in G$ tem inverso $g^{-1} = S(g) \in G(H)$. Logo, $G(H)$ é grupo. ■

Exemplo 3.2.15. Estrutura de Álgebra de Hopf da Álgebra de Grupo. Seja G um grupo multiplicativo. Vimos no Exemplo 3.1.7 que kG possui uma estrutura de biálgebra. Faltanos definir uma antípoda para que kG seja uma álgebra de Hopf. Definindo $S: kG \to kG$ por $S(g) = g^{-1}$ para $g \in G$ e estendendo por linearidade, temos S definida em todo kG. Observamos que

$$\sum S(g_1)g_2 = S(g)g = g^{-1}g = 1_G = \varepsilon(g)1_G$$

e analogamente $\sum g_1 S(g_2) = \varepsilon(g)1_G$, para todo $g \in G$. Portanto, kG é uma álgebra de Hopf. Observamos que $G(kG) = G$. ■

Observação 3.2.16. É interessante observar, a partir do exemplo e da proposição anteriores, que a antípoda generaliza a ideia de inverso de um elemento. A relação que existe entre biálgebras e álgebras de Hopf é semelhante à relação entre semigrupos e grupos. ■

Exemplo 3.2.17. Finalmente, apresentamos um exemplo de uma biálgebra que não é uma álgebra de Hopf como dissemos na Observação 3.2.4. Consideremos G um monoide (conjunto não vazio com uma operação $\cdot$ associativa com elemento neutro $e \in G$) tal que G não é um grupo. Nessas condições, kG é uma biálgebra, mas não é uma álgebra de Hopf, pois caso existisse uma antípoda S, teríamos, para todo $g \in G$,

$$S(g)g = \sum S(g_1)g_2 = \varepsilon(g)1_G = 1_G$$

e, analogamente, $gS(g) = 1_G$, ou seja, $S(g)$ seria o inverso de g. Assim, G seria um grupo, o que é uma contradição. ■

Para o próximo exemplo, é necessário que mostremos o seguinte lema.

Lema 3.2.18. *A igualdade* $\displaystyle\binom{m+n}{l} = \sum_{i=0}^{l} \binom{m}{i}\binom{n}{l-i}$ *é válida para quaisquer* $m,n,l \in \mathbb{N}$.

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{m+n} \binom{m+n}{l} x^l &= (1+x)^{m+n} \qquad \text{(pelo teorema binomial)} \\
&= (1+x)^m (1+x)^n \\
&= \left(\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} x^l\right)\left(\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l\right) \\
&= \sum_{l=0}^{m+n} \sum_{i=0}^{l} \binom{m}{i}\binom{n}{l-i} x^l,
\end{aligned}$$

em que na última igualdade utilizamos a definição do produto de polinômios de graus m e n com a convenção de que $\binom{r}{s} = 0$ sempre que $s > r$, $\forall r,s \in \mathbb{N}$. Igualando os coeficientes de x^l concluímos que $\binom{m+n}{l} = \sum_{i=0}^{l} \binom{m}{i}\binom{n}{l-i}$. ■

Uma maneira combinatória de mostrar a igualdade do lema anterior é perceber que $\binom{m+n}{l}$ é o número de possibilidades de escolher l elementos de dois conjuntos, um com m elementos e outro com n elementos, mas cada uma dessas escolhas pode ser feita escolhendo i elementos do conjunto com m elementos e depois escolhendo os restantes $l-i$ elementos no conjunto com n elementos, essa última maneira de pensar leva ao número $\sum\limits_{i=0}^{l} \binom{m}{i}\binom{n}{l-i}$.

Exemplo 3.2.19. Álgebra de Hopf das Potências Divididas. Seja H um k-espaço vetorial com base $\{c_m : m \in \mathbb{N}\}$, já definimos uma estrutura de coálgebra em H no Exemplo 1.2.6 em que

$$\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i} \quad \text{e} \quad \varepsilon(c_m) = \delta_{0,m}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Agora, damos uma estrutura de álgebra a H. Sejam $c_m, c_n \in H$, definimos o produto

$$c_n c_m = \binom{n+m}{n} c_{n+m}$$

que pode ser estendido por linearidade. Notemos que

$$c_0 c_m = \binom{m}{0} c_m = c_m = c_m c_0.$$

Portanto, $c_0 = 1_H$, o elemento identidade em H. Mostremos que essa multiplicação é associativa, ou seja, $(c_n c_m)c_p = c_n(c_m c_p)$, para quaisquer $n, m, p \in \mathbb{N}$. De fato,

$$\begin{aligned}
(c_n c_m)c_p &= \binom{n+m}{n} c_{n+m} c_p \\
&= \binom{n+m}{n}\binom{n+m+p}{n+m} c_{n+m+p} \\
&= \frac{(n+m)!}{n!m!}\frac{(n+m+p)!}{(n+m)!p!} c_{n+m+p} \\
&= \frac{(n+m+p)!}{n!m!p!} c_{n+m+p} \\
&= \frac{(m+p)!}{m!p!}\frac{(n+m+p)!}{n!(m+p)!} c_{n+m+p} \\
&= \binom{m+p}{m}\binom{n+m+p}{n} c_{n+m+p} \\
&= \binom{m+p}{m} c_n c_{m+p} = c_n(c_m c_p).
\end{aligned}$$

Assim, H tem uma estrutura de álgebra. Verifiquemos que H é uma biálgebra mostrando que Δ e ε são morfismos de álgebras. É claro que

$$\varepsilon(c_n c_m) = \binom{n+m}{n}\varepsilon(c_{n+m}) = \binom{n+m}{n}\delta_{0,n+m} = \delta_{0,n}\delta_{0,m} = \varepsilon(c_n)\varepsilon(c_m).$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\Delta(c_n)\Delta(c_m) &= (\sum_{j=0}^{n} c_j \otimes c_{n-j})(\sum_{k=0}^{m} c_k \otimes c_{m-k}) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} \binom{j+k}{j}\binom{m+n-j-k}{n-j} c_{j+k} \otimes c_{n+m-j-k} \\
&= \sum_{i=0}^{n+m}\sum_{j=0}^{n} \binom{i}{j}\binom{n+m-i}{n-j} c_i \otimes c_{n+m-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{n} c_i \otimes c_{n+m-i} \text{ (pelo Lema 3.2.18)} \\
&= \Delta\left(\binom{n+m}{n} c_{n+m}\right) \\
&= \Delta(c_n c_m),
\end{aligned}$$

com a convenção de $\binom{i}{j} = 0$ sempre que $j > i$. Falta-nos definir uma antípoda. Seja $S : H \to H$ dada por

$$S(c_0) = S(1_H) = 1_H \quad \text{e} \quad S(c_m) = -\sum_{i=0}^{m-1} S(c_i)c_{m-i}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Mostremos que $\sum S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H$, para todo h pertencente à base de H. Sendo H claramente cocomutativa, valem as condições equivalentes da Proposição 3.2.8. Para $c_0 = 1_H$, temos

$$S(c_0)c_0 = S(1_H)1_H = 1_H = \varepsilon(c_0)1_H.$$

Para $m > 0$, temos

$$\begin{aligned}
(S * I)(c_m) &= \sum_{i=0}^{m} S(c_i)c_{m-i} \\
&= (\sum_{i=0}^{m-1} S(c_i)c_{m-i}) + S(c_m)c_0 \\
&= (\sum_{i=0}^{m-1} S(c_i)c_{m-i}) - (\sum_{i=0}^{m-1} S(c_i)c_{m-i})1_H \\
&= 0 \\
&= \varepsilon(c_m)1_H,
\end{aligned}$$

em que na terceira igualdade foram usados a definição de $S(c_m)$ e o fato de $c_0 = 1_H$. Portanto, H é uma álgebra de Hopf. ∎

Exemplo 3.2.20. Álgebra de Hopf de Sweedler de Dimensão 4. Suponhamos k um corpo de característica diferente de 2. Seja H uma álgebra gerada por elementos c e x satisfazendo as relações

$$c^2 = 1_H,\ x^2 = 0 \ \text{ e } \ xc = -cx.$$

Então H é um k-espaço vetorial de dimensão 4 cuja base é $\{1_H, c, x, cx\}$. A estrutura de coálgebra é dada por

$$\Delta(c) = c \otimes c,\ \Delta(x) = c \otimes x + x \otimes 1_H,$$

$$\varepsilon(c) = 1_k \quad \text{e} \quad \varepsilon(x) = 0.$$

Notemos que

$$(\Delta \otimes I)\Delta(x) = (\Delta \otimes I)(c \otimes x + x \otimes 1_H) = c \otimes c \otimes x + c \otimes x \otimes 1_H + x \otimes 1_H \otimes 1_H,$$

$$(I \otimes \Delta)\Delta(x) = (I \otimes \Delta)(c \otimes x + x \otimes 1_H) = c \otimes c \otimes x + c \otimes x \otimes 1_H + x \otimes 1_H \otimes 1_H.$$

Portanto vale a coassociatividade para x. A verificação para c é imediata. Para a propriedade da counidade, temos

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes I)\Delta(x) &= (\varepsilon \otimes I)(c \otimes x + x \otimes 1_H) \\ &= \varepsilon(c)x + \varepsilon(x)1_H \\ &= x.\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se $(I \otimes \varepsilon)\Delta(x) = x$. Portanto, com essa estrutura de coálgebra, H é uma biálgebra. Além disso, o morfismo k-linear S dado por $S(c) = c$ e $S(x) = -cx$ é antípoda para H. De fato,

$$S(c)c = c^2 = 1_H = \varepsilon(c)1_H,$$

$$S(c)x + S(x)1_H = cx - cx = 0 = \varepsilon(x)1_H.$$

portanto, H é uma álgebra de Hopf. Não vamos provar, mas vale $G(H) =< c >= \{1, c\}$, em que $< c >$ é o grupo multiplicativo gerado por c. ■

Observação 3.2.21. O exemplo acima é de uma álgebra de Hopf que não é comutativa nem cocomutativa. De fato, se $cx = xc$ teríamos $cx - xc = 0$, ou seja, $cx + cx = 0$, o que implica $(1+1)cx = 0$, como k tem característica diferente de 2, $1+1 \neq 0$ e daí $cx = 0$, um absurdo. Logo, H não é comutativa. Agora, suponhamos que $\Delta(x) = c \otimes x + x \otimes 1 = \tau\Delta(x) = x \otimes c + 1 \otimes x$. Denotando por M_H a multiplicação em H, teríamos que $M_H(c \otimes x + x \otimes 1) = M_H(x \otimes c + 1 \otimes x)$, ou seja, $cx + x = xc + x$, o que implica $cx = xc$, o que não pode acontecer, pois acabamos de ver que H não é comutativa. Logo, H não é cocomutativa. ■

O próximo exemplo generaliza o exemplo anterior, são as chamadas álgebras de Hopf Taft.

Exemplo 3.2.22. Álgebras de Hopf Taft. Sejam $n > 1$ um inteiro e λ uma raiz n-ésima primitiva da unidade. Consideremos a álgebra $H_{n^2}(\lambda)$ definida pelos geradores c e x que satisfazem

$$c^n = 1,\; x^n = 0 \quad \text{e} \quad ,xc = \lambda cx.$$

Sobre essa álgebra podemos introduzir uma estrutura de coálgebra exatamente como no exemplo acima. Dessa maneira, $H_{n^2}(\lambda)$ se torna uma biálgebra de dimensão n^2, tendo como base $\{c^i x^j : 0 \leq i,j \leq n-1\}$. A antípoda é definida por $S(c) = c^{n-1}$ e $S(x) = -c^{n-1}x$. Para o caso em que $n = 2$ e $\lambda = -1$, temos a Álgebra de Hopf de Sweedler de Dimensão 4. Não vamos provar, mas vale $G(H_{n^2}(\lambda)) =< c >= \{1, c, ..., c^{n-1}\}$. ■

Exemplo 3.2.23. Álgebra de Hopf de Polinômios. Na álgebra de polinômios $k[X]$ introduzimos uma estrutura de coálgebra como segue: usando a propriedade universal da álgebra de polinômios, existe um único morfismo de álgebras $\Delta : k[X] \to k[X] \otimes k[X]$ para o qual $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$. É claro que

$$(\Delta \otimes I_{k[X]})\Delta(X) = (I_{k[X]} \otimes \Delta)\Delta(X) = X \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes X \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes X,$$

e então usando novamente a propriedade universal da álgebra de polinômios segue que Δ é coassociativa. Similarmente, existe um único morfismo de álgebras $\varepsilon : k[X] \to k$ com $\varepsilon(X) = 0$. Não é difícil ver que junto com Δ e ε, $k[X]$ se torna uma biálgebra. É até mesmo uma álgebra de Hopf, com antípoda $S : k[X] \to k[X]$, construída de novo pela propriedade universal da álgebra de polinômios, tal que $S(X) = -X$. ■

Observação 3.2.24. Aproveitamos a oportunidade para justificar o uso do nome convolução. O anel de polinômios $\mathbb{R}[X]$ é uma coálgebra como no exemplo anterior, portanto seu dual $U = \mathbb{R}[X]^* = Hom(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$ é uma álgebra com o produto de convolução. Se f é uma função contínua com suporte compacto, então $f^* \in U$, em que f^* é dada por

$$f^*(P) = \int f(x)\tilde{P}(x)dx,$$

em que $\tilde{P}$ é a função polinomial associada a $P \in \mathbb{R}[X]$. Temos $\Delta(P) \in \mathbb{R}[X] \otimes \mathbb{R}[X] \simeq \mathbb{R}[X,Y]$,

$$\Delta(P) = \sum P_1 \otimes P_2 = P(X+Y).$$

Se g é outra função contínua com suporte compacto, o produto de convolução de f^* e g^* é dado por

$$\begin{aligned}
(f^* * g^*)(P) &= \sum \int f(x)\tilde{P}_1(x)dx \int g(y)\tilde{P}_2(y)dy \\
&= \sum \int (\int f(x)\tilde{P}_1(x)dx) g(y)\tilde{P}_2(y)dy \\
&= \int (\int f(x)g(y)dx)\tilde{P}(x+y)dy \\
&= \int (\int f(x)g(t-x)dx)\tilde{P}(t)dt \\
&= h^*(P),
\end{aligned}$$

em que $h(t) = \int f(x)g(t-x)dx$ é o que normalmente é chamado produto de convolução. ∎

Exemplo 3.2.25. Seja k um corpo de característica $p > 0$. Na Álgebra de Polinômios $k[X]$ consideramos a estrutura de álgebra de Hopf descrita no Exemplo 3.2.23, em que $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, $\varepsilon(X) = 0$ e $S(X) = -X$. Como $\Delta(X^p) = X^p \otimes 1 + 1 \otimes X^p$ (estamos em característica p, logo todos os coeficientes binomiais $\binom{p}{i}$ com $1 \leq i \leq p-1$ são divisíveis por p, portanto são nulos), $\varepsilon(X^p) = 0$ e $S(X^p) = -X^p$, segue que o ideal gerado por X^p é ideal de Hopf, então faz sentido construir a álgebra de Hopf quociente $H = k[X]/(X^p)$, que tem dimensão p. Denotando por x a classe de equivalência de X, temos $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ e $x^p = 0$. ∎

Observação 3.2.26. Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então a biálgebra $H^{op,cop}$ é uma álgebra de Hopf com antípoda S. Além disso, se S é bijetora, então as biálgebras H^{op} e H^{cop} são álgebras de Hopf com antípoda S^{-1}. ∎

De fato, seja $h \in H^{op,cop}$, então

$$(S * I)(h) = \sum S(h_2) \cdot_{op} h_1 = \sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1_H = u\varepsilon(h),$$

$$(I * S)(h) = \sum h_2 \cdot_{op} S(h_1) = \sum S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H = u\varepsilon(h).$$

Portanto, $S * I = I * S = u\varepsilon$. Logo, $H^{op,cop}$ é uma álgebra de Hopf com antípoda S. Agora, seja $h \in H^{op}$, então

$$(S^{-1} * I)(h) = \sum S^{-1}(h_1) \cdot_{op} h_2 = \sum h_2 S^{-1}(h_1).$$

Mas, $S(\sum h_2 S^{-1}(h_1)) = \sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1_H = S(\varepsilon(h)1_H)$. Como S é injetora, temos $\sum h_2 S^{-1}(h_1) = \varepsilon(h)1_H = u\varepsilon(h)$, assim $S^{-1} * I = u\varepsilon$. Similarmente, $I * S^{-1} = u\varepsilon$. Portanto, H^{op}

é uma álgebra de Hopf com antípoda S^{-1}. Com raciocínio análogo, H^{cop} é uma álgebra de Hopf com antípoda S^{-1}.

Proposição 3.2.27. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S. Então a biálgebra H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda S^*.*

Demonstração: Sabemos que H^* é uma biálgebra pela Proposição 3.1.9. Mostremos que S^* é a antípoda de H^*. Sejam $h^* \in H^*$ e $\delta(h^*) = \sum h_1^* \otimes h_2^*$, em que δ é a comultiplicação de H^*. Então, para todo $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
(\sum S^*(h_1^*) * h_2^*)(h) &= \sum S^*(h_1^*)(h_1)h_2^*(h_2) \\
&= \sum h_1^*(S(h_1))h_2^*(h_2) \\
&= \sum h^*(S(h_1)h_2) \\
&= h^*(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)h^*(1_H) \\
&= E(h^*)\varepsilon(h).
\end{aligned}$$

Daí, $\sum S^*(h_1^*) * h_2^* = E(h^*)\varepsilon$. Similarmente, $\sum h_1^* * S^*(h_2^*) = E(h^*)\varepsilon$. ■

Proposição 3.2.28. *Se H e K são biálgebras, então $H \otimes K$ com a estrutura de álgebra e de coálgebra já definidas anteriormente possui uma estrutura de biálgebra. Se H e K são álgebras de Hopf, então $H \otimes K$ é uma álgebra de Hopf com antípoda $S_H \otimes S_K$.*

Demonstração: Temos em $H \otimes K$ as operações definidas nas Proposições 1.1.13 e 1.2.23. Mostremos que $\Delta_{H\otimes K}$ e $\varepsilon_{H\otimes K}$ são morfismos de álgebras. De fato, dados $h, h' \in H$ e $g, g' \in K$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_{H\otimes K}((h\otimes g)(h'\otimes g')) &= \Delta_{H\otimes K}(hh'\otimes gg') \\
&= \sum (hh')_1 \otimes (gg')_1 \otimes (hh')_2 \otimes (gg')_2 \\
&= \sum h_1h_1' \otimes g_1g_1' \otimes h_2h_2' \otimes g_2g_2',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{H\otimes K}(h\otimes g)\Delta_{H\otimes K}(h'\otimes h') &= \sum (h_1\otimes g_1\otimes h_2\otimes g_2)(h_1'\otimes g_1'\otimes h_2'\otimes g_2') \\
&= \sum h_1h_1' \otimes g_1g_1' \otimes h_2h_2' \otimes g_2g_2'.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{H\otimes K}((h\otimes g)(h'\otimes g')) &= \varepsilon_{H\otimes K}(hh'\otimes gg')\\
&= \varepsilon_H(hh')\varepsilon_K(gg')\\
&= \varepsilon_H(h)\varepsilon_H(h')\varepsilon_K(g)\varepsilon_K(g')\\
&= \varepsilon_H(h)\varepsilon_K(g)\varepsilon_H(h')\varepsilon_K(g')\\
&= \varepsilon_{H\otimes K}(h\otimes g)\varepsilon_{H\otimes K}(h'\otimes g').
\end{aligned}$$

Logo, $H\otimes K$ é uma biálgebra. Agora, suponhamos que H e K sejam álgebras de Hopf, verifiquemos que $S_H\otimes S_K$ é uma antípoda para a biálgebra $H\otimes K$. Temos

$$\begin{aligned}
\sum((S_H\otimes S_K)(h_1\otimes g_1))(h_2\otimes g_2) &= \sum(S_H(h_1)\otimes S_K(g_1))(h_2\otimes g_2)\\
&= \sum S_H(h_1)h_2\otimes S_K(g_1)g_2\\
&= \varepsilon_H(h)1_H\otimes\varepsilon_K(g)1_K\\
&= \varepsilon_H(h)\varepsilon_K(g)1_H\otimes 1_K\\
&= \varepsilon_{H\otimes K}(h\otimes g)1_{H\otimes K}\\
&= u_{H\otimes K}\varepsilon_{H\otimes K}(h\otimes g).
\end{aligned}$$

Analogamente, $I_{H\otimes K}*(S_H\otimes S_K)=u_{H\otimes K}\varepsilon_{H\otimes K}$. Portanto, $H\otimes K$ é uma álgebra de Hopf. ■

Lembramos que se A é uma álgebra e M é um A-módulo à esquerda, então M é um A^{op}-módulo à direita com a ação dada por $m\cdot a=am$ para quaisquer $a\in A^{op}$ e $m\in M$. A estrutura de álgebra oposta é essencial para que valha a propriedade de compatibilidade $m\cdot(a\cdot_{op}b)=(m\cdot a)\cdot b$, ou seja, $m\cdot(a\cdot_{op}b)=m\cdot(ba)=(ba)m=b(am)=(am)\cdot b=(m\cdot a)\cdot b$, para quaisquer $a,b\in A^{op}$ e $m\in M$. Em geral, M não possui uma estrutura natural de A-módulo à direita. Da mesma forma, se C é uma coálgebra e M é um C-comódulo à direita, então M é um C^{cop}-comódulo à esquerda, mas não tem uma estrutura natural de C-comódulo à esquerda.

O próximo teorema mostra como dados um H-módulo ou H-comódulo de um lado, a antípoda induz naturalmente uma estrutura de H-módulo ou H-comódulo do outro lado, respectivamente.

Teorema 3.2.29. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*
(i) se M é um H-módulo à esquerda, então M possui uma estrutura de H-módulo à direita com

ação dada por $m \cdot h = S(h)m$;

(ii) se M é um H-comódulo à direita com estrutura $\rho : M \to M \otimes H$, $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$, então M possui uma estrutura de H-comódulo à esquerda com coação dada por $\rho' : M \to H \otimes M$, $\rho'(m) = \sum S(m_{(1)}) \otimes m_{(0)}$.

Demonstração: (i) Sejam $h, g \in H$, $m \in M$, então

$$m \cdot (hg) = S(hg)m = (S(g)S(h))m = S(g)(S(h)m) = S(g)(m \cdot h) = (m \cdot h) \cdot g,$$

$$m \cdot 1_H = S(1_H)m = 1_H m = m.$$

(ii) Seja $m \in M$, $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$. Provemos que $(\Delta \otimes I_M)\rho' = (I_C \otimes \rho')\rho'$. Temos

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I_M)\rho'(m) &= (\Delta \otimes I_M)(\sum S(m_{(1)}) \otimes m_{(0)}) \\
&= \sum S(m_{(1)})_1 \otimes S(m_{(1)})_2 \otimes m_{(0)} \\
&= \sum S((m_{(1)})_2) \otimes S((m_{(1)})_1) \otimes m_{(0)} \\
&= \sum S(m_{(2)}) \otimes S(m_{(1)}) \otimes m_{(0)},
\end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}
(I_C \otimes \rho')\rho'(m) &= (I_C \otimes \rho')(\sum S(m_{(1)}) \otimes m_{(0)}) \\
&= \sum S(m_{(1)}) \otimes S((m_{(0)})_{(1)}) \otimes (m_{(0)})_{(0)} \\
&= \sum S(m_{(2)}) \otimes S(m_{(1)}) \otimes m_{(0)},
\end{aligned}$$

portanto $(\Delta \otimes I)\rho' = (I \otimes \rho')\rho'$. Além disso,

$$(\varepsilon \otimes I)\rho'(m) = (\varepsilon \otimes I)(\sum S(m_{(1)}) \otimes m_{(0)}) = \sum \varepsilon(S(m_{(1)}))m_{(0)} = \sum \varepsilon(m_{(1)})m_{(0)} = m.$$

■

3.3 Módulos de Hopf

Ao longo desta seção, H será uma álgebra de Hopf.

Definição 3.3.1. *Um k-espaço vetorial M é chamado um H-módulo de Hopf à direita se M tem uma estrutura de H-módulo à direita, denotada mh, para $m \in M$ e $h \in H$, e uma estrutura de H-comódulo à direita, dada pelo morfismo $\rho : M \to M \otimes H$, $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$, tal que para* *todo $m \in M$, $h \in H$*

$$\rho(mh) = \sum m_{(0)}h_1 \otimes m_{(1)}h_2.$$

■

Proposição 3.3.2. *Seja M um H-módulo de Hopf à direita. Então:*
(i) $\rho : M \to M \otimes H$ é morfismo de H-módulos à direita;
(ii) $\mu : M \otimes H \to M$ é morfismo de H-comódulos à direita, em que μ é o morfismo estrutura de H-módulo à direita de H.

Demonstração: (i) Para que $\rho : M \to M \otimes H$ seja morfismo de H-módulos à direita é preciso que $M \otimes H$ seja um H-módulo à direita. Portanto, vamos primeiro definir essa estrutura. Considere $H \otimes H$ com a estrutura de álgebra do produto tensorial, então $M \otimes H$ é $H \otimes H$-módulo à direita com estrutura dada por $(m \otimes h)(g \otimes p) = mg \otimes hp$, para quaisquer $m \otimes h \in M \otimes H$, $g \otimes p \in H \otimes H$. Considerando o morfismo de álgebras $\Delta : H \to H \otimes H$, podemos considerar $M \otimes H$ como um H-módulo à direita pela restrição de escalares via Δ. Esta estrutura é dada por

$$(m \otimes h)g = \sum mg_1 \otimes hg_2, \ m \otimes h \in M \otimes H, g \in H.$$

Com essa estrutura, temos

$$\rho(mh) = \sum m_{(0)}h_1 \otimes m_{(1)}h_2 = (\sum m_{(0)} \otimes m_{(1)})h = \rho(m)h,$$

portanto ρ é morfismo de H-módulos à direita.

(ii) Para que $\mu : M \otimes H \to M$ seja morfismo de H-comódulos à direita é preciso que $M \otimes H$ seja um H-comódulo à direita. Portanto, vamos primeiro definir essa estrutura. Considere $H \otimes H$ com a estrutura de coálgebra do produto tensorial, então $M \otimes H$ é $H \otimes H$-comódulo à direita com estrutura dada por $m \otimes h \mapsto \sum m_{(0)} \otimes h_1 \otimes m_{(1)} \otimes h_2$, para todo $m \otimes h \in M \otimes H$. Considerando o morfismo de coálgebras $M_H : H \otimes H \to H$, podemos considerar $M \otimes H$ como um H-comódulo à direita pela correstrição de escalares via M_H. Esta estrutura é dada por

$$m \otimes h \mapsto \sum m_{(0)} \otimes h_1 \otimes m_{(1)}h_2, \ m \otimes h \in M \otimes H.$$

Com esta estrutura, temos

$$\begin{aligned}\sum \mu((m\otimes h)_{(0)})\otimes (m\otimes h)_{(1)} &= \sum \mu(m_{(0)}\otimes h_1)\otimes m_{(1)}h_2\\ &= \sum m_{(0)}h_1\otimes m_{(1)}h_2\\ &= \sum (mh)_{(0)}\otimes (mh)_{(1)}\\ &= \sum \mu(m\otimes h)_{(0)}\otimes \mu(m\otimes h)_{(1)},\end{aligned}$$

portanto μ é morfismo de H-comódulos à direita. ■

Podemos definir uma categoria tendo como objetos os H-módulos de Hopf à direita e como morfismos entre dois tais objetos todas as transformações lineares que são também morfismos de H-módulos à direita e morfismos de H-comódulos à direita. Essa categoria é denotada por $\mathscr{M}_H^H$, a qual vamos chamar categoria dos H-módulos de Hopf à direita.

Exemplo 3.3.3. Se H é álgebra de Hopf, então H é um H-módulo de Hopf à direita e esquerda. ■

Exemplo 3.3.4. Seja V um k-espaço vetorial. Então definimos em $V\otimes H$ uma estrutura de H-módulo à direita por $(v\otimes h)g = v\otimes hg$, para quaisquer $v\in V$, $h,g\in H$, e uma estrutura de H-comódulo à direita dada pelo morfismo $\rho : V\otimes H\to V\otimes H\otimes H$, $\rho(v\otimes h)=\sum v\otimes h_1\otimes h_2$, para quaisquer $v\in V$, $h\in H$. Então $V\otimes H$ se torna um H-módulo de Hopf à direita com essas duas estruturas. De fato,

$$\begin{aligned}\rho((v\otimes h)g) &= \rho(v\otimes hg)\\ &= \sum v\otimes (hg)_1\otimes (hg)_2\\ &= \sum v\otimes h_1g_1\otimes h_2g_2\\ &= \sum ((v\otimes h_1)g_1)\otimes h_2g_2\\ &= \sum (v\otimes h)_{(0)}g_1\otimes (v\otimes h)_{(1)}g_2,\end{aligned}$$

provando a compatibilidade. ■

Vamos mostrar que os H-módulos de Hopf do exemplo anterior são (a menos de isomorfismo) todos os H-módulos de Hopf. Primeiro, precisamos de uma definição.

Definição 3.3.5. *Seja M um H-comódulo à direita, com estrutura de comódulo dada pelo morfismo $\rho : M\to M\otimes H$. O conjunto*

$$M^{coH} = \{m\in M | \rho(m) = m\otimes 1_H\}$$

é um k-subespaço vetorial de M que é chamado Subespaço dos Coinvariantes de M. ■

Exemplo 3.3.6. Seja H com a estrutura de H-comódulo induzida por $\Delta : H \to H \otimes H$. Então $H^{coH} = k1_H$. De fato, se $h \in H^{coH}$, então $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2 = h \otimes 1_H$. Aplicando ε na primeira posição, obtemos $h = \varepsilon(h)1_H \in k1_H$. Reciprocamente, se $h = r1_H$ para algum escalar $r \in k$, então $\Delta(h) = r1_H \otimes 1_H = h \otimes 1_H$, de forma que $h \in H^{coH}$. ■

Seja H uma álgebra de Hopf e M um H-módulo de Hopf à direita. Considere em $M^{coH} \otimes H$ a estrutura de H-módulo de Hopf à direita como no Exemplo 3.3.4.

Teorema 3.3.7. Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf. O morfismo $f : M^{coH} \otimes H \to M$ definido por $f(m \otimes h) = mh$, para quaisquer $m \in M^{coH}$ e $h \in H$, é um isomorfismo de módulos de Hopf.

Demonstração: Denotamos o morfismo dando a estrutura de comódulo de M por $\rho : M \to M \otimes H$, $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$. Considere o morfismo $g : M \to M$ definido por $g(m) = \sum m_{(0)} S(m_{(1)})$, para todo $m \in M$. Se $m \in M$, temos

$$
\begin{aligned}
\rho(g(m)) &= \rho(\textstyle\sum m_{(0)} S(m_{(1)})) \\
&= \textstyle\sum (m_{(0)})_{(0)} S(m_{(1)})_1 \otimes (m_{(0)})_{(1)} S(m_{(1)})_2 \\
&\quad \text{(definição de módulos de Hopf)} \\
&= \textstyle\sum (m_{(0)})_{(0)} S((m_{(1)})_2) \otimes (m_{(0)})_{(1)} S((m_{(1)})_1) \\
&\quad \text{(a antípoda é antimorfismo de coálgebras)} \\
&= \textstyle\sum m_{(0)} S(m_{(3)}) \otimes m_{(1)} S(m_{(2)}) \\
&\quad \text{(usando a notação de Sweedler para comódulos)} \\
&= \textstyle\sum m_{(0)} S(m_{(2)}) \otimes (m_{(1)})_1 S((m_{(1)})_2) \\
&\quad \text{(usando a notação de Sweedler para comódulos)} \\
&= \textstyle\sum m_{(0)} S(m_{(2)}) \otimes \varepsilon(m_{(1)}) 1_H \\
&\quad \text{(definição da antípoda)} \\
&= \textstyle\sum m_{(0)} S(\varepsilon(m_{(1)}) m_{(2)}) \otimes 1_H \\
&= \textstyle\sum m_{(0)} S(\varepsilon((m_{(1)})_1)(m_{(1)})_2) \otimes 1_H \\
&\quad \text{(usando a notação de Sweedler para comódulos)} \\
&= \textstyle\sum m_{(0)} S(m_{(1)}) \otimes 1_H \ \text{ (propriedade da counidade)} \\
&= g(m) \otimes 1_H,
\end{aligned}
$$

o que mostra que $g(m) \in M^{coH}$, para todo $m \in M$. Então faz sentido definir o morfismo $F : M \to M^{coH} \otimes H$ por $F(m) = \sum g(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}$, para todo $m \in M$. Vamos mostrar que F é a inversa de f. De fato, se $m \in M^{coH}$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
Ff(m \otimes h) &= F(mh) \\
&= \sum g((mh)_{(0)}) \otimes (mh)_{(1)} \\
&= \sum g(m_{(0)}h_1) \otimes m_{(1)}h_2 \\
&\quad \text{(definição de módulos de Hopf)} \\
&= \sum g(mh_1) \otimes h_2 \ \ \text{(pois } m \in M^{coH}\text{)} \\
&= \sum (mh_1)_{(0)} S((mh_1)_{(1)}) \otimes h_2 \\
&= \sum m_{(0)} h_{1_1} S(m_{(1)} h_{1_2} \otimes h_2 \\
&\quad \text{(definição de módulos de Hopf)} \\
&= \sum m h_{1_1} S(h_{1_2}) \otimes h_2 \ \ \text{(pois } m \in M^{coH}\text{)} \\
&= \sum m\varepsilon(h_1) \otimes h_2 \ \ \text{(propriedade da antípoda)} \\
&= m \otimes h \ \ \text{(propriedade da counidade),}
\end{aligned}$$

portanto, $Ff = Id$. Reciprocamente, se $m \in M$, então

$$\begin{aligned}
fF(m) &= f(\sum m_{(0)} S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)}) \\
&= \sum m_{(0)} S(m_{(1)}) m_{(2)} \\
&= \sum m_{(0)} S((m_{(1)})_1)(m_{(1)})_2 \\
&\quad \text{(usando notação de Sweedler para comódulos)} \\
&= \sum m_{(0)} \varepsilon(m_{(1)}) \ \ \text{(propriedade da antípoda)} \\
&= m \ \ \text{(pela propriedade da counidade),}
\end{aligned}$$

o que mostra que $fF = Id$ também. Falta provar que f é um morfismo de H-módulos de Hopf, i.e. é um morfismo de H-módulos à direita e um morfismo de H-comódulos à direita. A primeira afirmação é clara, pois

$$f((m \otimes h)h') = f(m \otimes hh') = mhh' = f(m \otimes h)h'.$$

Para mostrar que f é um morfismo de H-comódulos, temos que provar que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
M^{coH} \otimes H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "I\otimes\Delta"'] & M \arrow[d, "\rho"] \\
M^{coH} \otimes H \otimes H \arrow[r, "f\otimes I"'] & M \otimes H
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Isso é imediato, pois

$$\begin{aligned}
\rho f(m \otimes h) &= \rho(mh) \\
&= \sum mh_1 \otimes h_2 \ \text{(pois } m \in M^{coH}\text{)} \\
&= \sum (f \otimes I_H)(m \otimes h_1 \otimes h_2) \\
&= (f \otimes I_H)(I \otimes \Delta)(m \otimes h)
\end{aligned}$$

e a prova está terminada. ∎

4 Integrais

Integrais são certos elementos ou funcionais em uma biálgebra. Pode-se pensar em integrais que são elementos de uma biálgebra como análogos do elemento $t = \sum_{g \in G} g$ da álgebra de grupo kG de um grupo finito G sobre k. Pode-se pensar em integrais que são funcionais como análogos da integral de Haar em um grupo compacto. Muitos resultados profundos sobre álgebras de Hopf de dimensão finita estão diretamente relacionados com integrais. Aqui vamos apenas tratar de um resultado, conhecido como Teorema de Maschke para álgebras de Hopf.

4.1 Integrais em uma Álgebra de Hopf

Seja H uma biálgebra. Então H^* tem uma estrutra de álgebra dual à estrutura de coálgebra de H. A multiplicação é dada pelo produto de convolução. Para simplificar a notação, se h^*, $g^* \in H^*$, vamos denotar o produto de h^* e g^* em H^* por h^*g^*, ao invés de $h^* * g^*$.

Definição 4.1.1. *Um funcional $T \in H^*$ é chamado um funcional integral à esquerda da biálgebra H se $h^*T = h^*(1_H)T$, para todo $h^* \in H^*$. O conjunto de funcionais integrais à esquerda de H é denotado por $\int_l$. Funcionais integrais à esquerda de H^{cop} são chamados funcionais integrais à direita para H, seu conjunto sendo denotado por $\int_r$.* ■

Não é difícil ver que $T \in H^*$ é um funcional integral à esquerda se, e somente se, $\sum T(x_2)x_1 = T(x)1, \forall x \in H$, e é um funcional integral à direita se, e somente se, $\sum T(x_1)x_2 = T(x)1, \forall x \in H$.

Vamos discutir brevemente o nome dado à noção acima. Seja G um grupo compacto. Uma integral de Haar em G é um funcional linear λ no espaço de funções contínuas de G em $\mathbb{R}$ que é invariante por translação, i.e.

$$\lambda(xf) = \lambda(f),$$

para qualquer $f : G \to \mathbb{R}$ contínua e $x \in G$. Então a restrição de λ à àlgebra de Hopf $\tilde{R}_{\mathbb{R}}(G)$ de funções contínuas representativas em G é um funcional integral no sentido da noção acima. De fato,

$$\begin{aligned}
\lambda(xf) &= \lambda(f), \forall f \in \tilde{R}_{\mathbb{R}}(G), x \in G \Leftrightarrow \\
\lambda(\sum f_2(x)f_1) &= \lambda(f)1, \forall f \in \tilde{R}_{\mathbb{R}}(G), x \in G \Leftrightarrow \\
\sum \lambda(f_1)f_2(x) &= \lambda(f)\mathbf{1}(x), \forall f \in \tilde{R}_{\mathbb{R}}(G), x \in G \Leftrightarrow \\
\sum \lambda(f_1)f_2 &= \lambda(f)\mathbf{1}, \forall f \in \tilde{R}_{\mathbb{R}}(G) \Leftrightarrow \\
\sum \lambda(f_1)\mu(f_2) &= \lambda(f)\mu(\mathbf{1}), \forall f \in \tilde{R}_{\mathbb{R}}(G), \mu \in \tilde{R}_{\mathbb{R}}(G)^* \Leftrightarrow \\
(\lambda\mu)(f) &= (\mu(\mathbf{1})\lambda)(f), \forall f \in \tilde{R}_{\mathbb{R}}(G), \mu \in \tilde{R}_{\mathbb{R}}(G)^* \Leftrightarrow \\
\lambda\mu &= \mu(\mathbf{1})\lambda, \forall \mu \in \tilde{R}_{\mathbb{R}}(G)^*
\end{aligned}$$

e isso explica o uso do nome “integral” para biálgebras.

Observação 4.1.2. 1) $\int_l$ é claramente um subespaço vetorial de H^*. Além disso, $\int_l$ é um ideal na álgebra H^*. Que é um ideal à direita é claro, pois se $g^* \in H^*$ e $T \in \int_l$, então para todo $h^* \in H^*$ temos

$$h^*(Tg^*) = (h^*T)g^* = (h^*(1_H)T)g^* = h^*(1_H)Tg^*,$$

logo $Tg^* \in \int_l$. Para mostrar que $\int_l$ é também um ideal à esquerda, com a mesma notação temos

$$h^*(g^*T) = (h^*g^*)T = (h^*g^*)(1_H)T = h^*(1_H)g^*(1_H)T = h^*(1_H)g^*T,$$

logo $g^*T \in \int_l$.

2) Considere a parte racional de H^* à esquerda, portanto H_l^{*rat} é a soma de ideais à esquerda da álgebra H^*. Então $\int_l \subseteq H_l^{*rat}$. Isso segue imediatamente da parte (iv) do Teorema 2.3.8. Em particular, se para uma biálgebra temos $H_l^{*rat} = 0$, então também temos $\int_l = 0$, uma vez que não há funcionais integrais à esquerda não nulos. ■

Damos agora alguns exemplos de biálgebras, algumas tendo funcionais integrais não nulos, e outras não.

Exemplo 4.1.3. Seja G um monoide e $H = kG$ a álgebra de semigrupo com estrutura de biálgebra semelhante a do Exemplo 1.1.7. Denotamos por $p_1 \in H^*$ o morfismo linear definido por $p_1(g) = \delta_{1,g}$, para todo $g \in G$, em que 1 representa aqui o elemento identidade do monoide. Então p_1 é um funcional integral à esquerda e à direita para H. De fato, se $h^* \in H^*$, então para todo $g \in G$ temos

$$(h^*p_1)(g) = h^*(g)p_1(g) = \delta_{1,g}h^*(g) = h^*(1)p_1(g).$$

A última igualdade é clara se $g = 1$, e se $g \neq 1$, então ambos são zero. Como H é cocomutativa, p_1 é também um funcional integral à direita. ■

Exemplo 4.1.4. Seja H a álgebra de Hopf das Potências Divididas do Exemplo 3.2.19. Lembrando, H é um k-espaço vetorial com base $\{c_m : m \in \mathbb{N}\}$, a estrutura de coálgebra é definida por

$$\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i} \quad \text{e} \quad \varepsilon(c_m) = \delta_{0,m}$$

e a estrutura de álgebra por

$$c_n c_m = \binom{n+m}{n} c_{n+m}$$

com elemento identidade $1_H = c_0$. No Exemplo 1.2.35 vimos que existe um isomorfismo de álgebras

$$\sigma : H^* \to k[[X]],\ \sigma(h^*) = \sum_{n \geq 0} h^*(c_n) X^n$$

para $h^* \in H^*$.

Suponha que exista T funcional integral à esquerda de H. Então para todo $h^* \in H^*$, temos $h^*T = h^*(1_H)T$, e aplicando σ obtemos $\sigma(h^*)\sigma(T) = h^*(1_H)\sigma(T)$. Notando que $h^*(1_H) = \sigma(h^*)(0)$, segue que $\sigma(T)$ é uma série de potências formal para a qual $F\sigma(T) = F(0)\sigma(T)$ para qualquer série de potências formal F. Escolhendo então $F \neq 0$ tal que $F(0) = 0$ (e.g. $F = X$), obtemos $\sigma(T) = 0$ (pois $k[[X]]$ é um domínio), e como σ é um isomorfismo, isso implica $\int_l = 0$. ■

Exemplo 4.1.5. Sejam k um corpo de característica zero e $H = k[X]$ com a estrutura de álgebra de Hopf do Exemplo 3.2.23. Então H não tem funcionais integrais não nulos. De fato, se $T \in H^*$ fosse um funcional integral, então $h^*T = h^*(1)T$, para todo $h^* \in H^*$. Como $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, aplicando a igualdade acima em X, temos $h^*(X)T(1) = 0$, e escolhendo h^* com $h^*(X) \neq 0$, segue que $T(1) = 0$. Então provamos por indução que $T(X^n) = 0$, para todo $n \geq 0$. Para ir de $n-1$ a n aplicamos a igualdade $h^*T = h^*(1)T$ em X^{n+1} e usamos a fórmula

$$\Delta(X^{n+1}) = \sum_{0 \leq i \leq n+1} \binom{n+1}{i} X^{n+1-i} \otimes X^i.$$

Pela hipótese de indução, obtemos $h^*(X)T(X^n) = 0$, e escolhendo de novo h^* com $h^*(X) \neq 0$, chegamos a $T(X^n) = 0$. Consequentemente, $T = 0$. ■

4.2 A Conexão entre Integrais e o Ideal H^{*rat}

Seja H uma álgebra de Hopf. Daqui em diante, H^{*rat} representa a parte racional de H^* à esquerda. Vimos, na Observação 4.1.2 2), que se $H^{*rat}=0$, então $\int_l = 0$. Nosso objetivo agora é encontrar uma conexão mais precisa entre H^{*rat} e $\int_l$. Sabemos que H^{*rat} é um H^*-módulo à esquerda racional, e isso induz uma estrutura de H-comódulo à direita em H^{*rat}, definida por $\rho : H^{*rat} \to H^{*rat} \otimes H, \rho(h^*) = \sum h^*_{(0)} \otimes h^*_{(1)}$ tal que $g^*h^* = \sum g^*(h^*_{(1)})h^*_{(0)}$, para todo $g^* \in H^*$. Considere a ação $\rightharpoonup$ de H em H^* definida como segue: se $h \in H$ e $h^* \in H^*$, então $h \rightharpoonup h^* \in H^*$ é dado por $(h \rightharpoonup h^*)(g) = h^*(gh)$ para todo $g \in H$. Dessa forma, H^* se torna um H-módulo à esquerda e essa estrutura é de fato induzida pela estrutura canônica de H-módulo à direita de H. Essa estrutura de H-módulo à esquerda em H^* induz uma estrutura de H-módulo à direita em H^* como segue: se $h \in H$ e $h^* \in H^*$, defina $h^* \leftharpoondown h = S(h) \rightharpoonup h^*$. Então temos $(h^* \leftharpoondown h)(g) = h^*(gS(h))$, para todo $g \in H$.

Teorema 4.2.1. *H^{*rat} é um H-submódulo à direita de H^* com ação $\leftharpoondown$. Essa estrutura de H-módulo à direita e a estrutura de H-comódulo à direita dada por ρ definem em H^{*rat} uma estrutura de H-módulo de Hopf à direita.*

Demonstração: Seja $h^* \in H^{*rat}$ e $h \in H$. Mostraremos que para todo $g^* \in H^*$ temos a relação

$$g^*(h^* \leftharpoondown h) = \sum g^*(h^*_{(1)}h_2)(h^*_{(0)} \leftharpoondown h_1).$$

Seja $g \in H$, então

$$\begin{aligned}
(\sum g^*(h^*_{(1)}h_2)(h^*_{(0)} \leftharpoondown h_1))(g) &= \sum g^*(h^*_{(1)}h_2)h^*_{(0)}(gS(h_1)) \\
&= \sum (h_2 \rightharpoonup g^*)(h^*_{(1)})h^*_{(0)}(gS(h_1)) \\
&= \sum ((h_2 \rightharpoonup g^*)h^*)(gS(h_1)) \\
&\quad \text{(pela definição de } \rho) \\
&= \sum (h_2 \rightharpoonup g^*)((gS(h_1))_1)h^*((gS(h_1))_2) \\
&\quad \text{(pela definição de convolução)} \\
&= \sum (h_3 \rightharpoonup g^*)(g_1S(h_2))h^*(g_2S(h_1)) \\
&= \sum g^*(g_1S(h_2)h_3)h^*(g_2S(h_1))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum g^*(g_1\varepsilon(h_2))h^*(g_2S(h_1))\\
&= \sum g^*(g_1)h^*(g_2S(h))\\
&= (g^*(h^* \leftharpoondown h))(g),
\end{aligned}
$$

provando a relação como queríamos. Isso mostra que $h^* \leftharpoondown h \in H^{*rat}$ e, além disso, que

$$\rho(h^* \leftharpoondown h) = \sum h^*_{(0)} \leftharpoondown h_1 \otimes h^*_{(1)}h_2$$

i.e. H^{*rat} é um H-módulo de Hopf à direita. ■

O lema seguinte mostra que existe uma relação estreita entre H^{*rat} e $\int_l$.

Lema 4.2.2. *O subespaço de coinvariantes $(H^{*rat})^{coH}$ é exatamente $\int_l$.*

Demonstração: Seja $h^* \in H^{*rat}$. Então $h^* \in (H^{*rat})^{coH}$ se, e somente se, $\rho(h^*) = h^* \otimes 1_H$, e isso é equivalente a $g^*h^* = g^*(1_H)h^*$, para todo $g^* \in H^*$. Mas isso é a definição de um funcional integral à esquerda. ■

Podemos agora provar o resutado mostrando a conexão completa entre H^{*rat} e $\int_l$.

Teorema 4.2.3. *A aplicação $f : \int_l \otimes H \to H^{*rat}$ definida por $f(T \otimes h) = T \leftharpoondown h$, para quaisquer $T \in \int_l$, $h \in H$, é um isomorfismo de H-módulos de Hopf à direita.*

Demonstração: Segue diretamente do Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf 3.3.7 aplicado ao módulo de Hopf H^{*rat}. ■

Já tínhamos visto na Observação 4.1.2 que se $H^{*rat} = 0$, então $\int_l = 0$. O teorema anterior mostra que a recíproca também vale.

Corolário 4.2.4. *$H^{*rat} = 0$ se, e somente se, $\int_l = 0$.* ■

Corolário 4.2.5. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S e tendo um funcional integral não nulo. Então S é injetora. Se, além disso, H tem dimensão finita, então $\int_l$ tem dimensão 1 e S é bijetora.*

Demonstração: Do teorema anterior, se existisse um $h \neq 0$ com $S(h) = 0$, então para um $T \in \int_l, T \neq 0$, teríamos $f(T \otimes h) = 0$, contradizendo a injetividade de f. Se H tem dimensão finita, já vimos na Observação 2.3.10 que $H^{*rat} = H^*$. Nós obtivemos um isomorfismo de módulos de Hopf $f : \int_l \otimes H \to H^*$ definido por $f(T \otimes h) = T \leftharpoondown h = S(h) \rightharpoonup T$. Em particular, é

um isomorfismo de espaços vetoriais, então $dim(H^*) = dim(\int_l \otimes H)$. Mas $dim(H^*) = dim(H)$ e $dim(\int_l \otimes H) = dim(\int_l)dim(H)$. Portanto, $dim(\int_l) = 1$. Além disso, como S é um endomorfismo injetivo do espaço vetorial de dimensão finita H, segue que S é um isomorfismo, logo é bijetivo.
■

Quando H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita, ainda há outra forma de trabalhar com funcionais integrais. Existe um isomorfismo de álgebras $\phi : H \to H^{**}$ definido por $\phi(h)(h^*) = h^*(h)$, para todo $h \in H, h^* \in H^*$. Então faz sentido falar sobre funcionais integrais à esquerda para a álgebra de Hopf H^*, estes elementos estando em H^{**}. Como ϕ é bijetora, existe um elemento não nulo $h \in H$ tal que $\phi(h) \in H^{**}$ é um funcional integral à esquerda para H^*. Como todo elemento em H^{**} é da forma $\phi(l)$ com $l \in H$, isso significa que para todo $l \in H$ temos $\phi(l)\phi(h) = \phi(l)(1_{H^*})\phi(h)$. Mas $\phi(l)\phi(h) = \phi(lh)$ (ϕ é um morfismo de álgebras) e $\phi(l)(1_{H^*}) = \phi(l)(\varepsilon) = \varepsilon(l)$, portanto o fato de $\phi(h)$ ser um funcional integral à esquerda para H^* é equivalente a $lh = \varepsilon(l)h$, para todo $l \in H$. Isso justifica a seguinte definição.

Definição 4.2.6. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Um elemento integral à esquerda em H é um elemento $t \in H$ para o qual $ht = \varepsilon(h)t$, para todo $h \in H$.* ■

Observação 4.2.7. O corolário anterior mostra que em toda álgebra de Hopf de dimensão finita existem elementos integrais à esquerda não nulos e, além disso, o subespaço que eles geram tem dimensão 1, e é portanto kt, em que t é um elemento integral à esquerda não nulo em H. ■

Exemplo 4.2.8. Seja G um grupo finito e kG a álgebra de Hopf de grupo descrita no Exemplo 3.2.15. Então $t = \sum_{g \in G} g$ é um elemento integral à esquerda e direita em kG. ■

Exemplo 4.2.9. Se G é um grupo finito, então $(kG)^*$, o dual de kG, é uma álgebra de Hopf, e a aplicação $p_1 \in (kG)^*$, $p_1(g) = \delta_{1,g}$, é um elemento integral à esquerda e direita em $(kG)^*$. ■

Exemplo 4.2.10. Seja k um corpo de característica $p > 0$ e $H = k[X]/(X^p)$ a álgebra de Hopf descrita no Exemplo 3.2.25. Então $t = x^{p-1}$ é um elemento integral à esquerda (e direita) em H. ■

Exemplo 4.2.11. Seja H a álgebra de Hopf de Sweedler de dimensão 4 descrita no Exemplo 3.2.20. Então $x + cx$ é um elemento integral à esquerda em H e $x - cx$ é um elemento integral à direita em H. ■

Exemplo 4.2.12. Seja $H_{n^2}(\lambda)$ a álgebra de Taft descrita no Exemplo 3.2.22. Então $t = (1 + c + ... + c^{n-1})x^{n-1}$ é um elemento integral em $H_{n^2}(\lambda)$. ■

Uma aplicação importante de integrais em álgebras de Hopf de dimensão finita é o seguinte resultado, conhecido como Teorema de Maschke.

Teorema 4.2.13. ***Teorema de Maschke.*** *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então H é uma álgebra semissimples se, e somente se, $\varepsilon(t) \neq 0$ para um elemento integral $t \in H$.*

Demonstração: Suponha primeiro que H seja semissimples. Sabemos que $Ker(\varepsilon)$ é um ideal de codimensão 1 em H. Considerando $Ker(\varepsilon)$ como um submódulo à esquerda de H, pela semissimplicidade de H temos que $Ker(\varepsilon)$ é um somando direto em H, portanto existe um ideal à esquerda I de H com $H = Ker(\varepsilon) \oplus I$. Seja $1 = z + h$, com $z \in Ker(\varepsilon)$, $h \in I$, a representação de 1 como uma soma de dois elementos de $Ker(\varepsilon)$ e I. Claramente $h \neq 0$, pois $1 \notin Ker(\varepsilon)$. Como I tem dimensão 1 (pois $Ker(\varepsilon)$ tem codimensão 1), segue que $I = kh$. Seja agora $l \in H$. Então $lh \in I$, e então a representação de lh na soma direta $H = Ker(\varepsilon) \oplus I$ é $lh = 0 + lh$. Por outro lado, temos $l = (l - \varepsilon(l)1) + \varepsilon(l)1$, e então $lh = (l - \varepsilon(l)1)h + \varepsilon(l)h$. Como $(l - \varepsilon(l)1)h \in Ker(\varepsilon), \varepsilon(l)h \in I$, e a representação de um elemento em H como uma soma de dois elementos em $Ker(\varepsilon)$ e I é única, segue que $(l - \varepsilon(l)1)h = 0$ e $\varepsilon(l)h = lh$. A última relação mostra que h é um elemento integral à esquerda em H. Como $I \cap Ker(\varepsilon) = 0$, segue que $\varepsilon(h) \neq 0$, e a primeira implicação está provada.

Assuma agora que $\varepsilon(t) \neq 0$ para um elemento integral à esquerda $t \in H$. Fixe um tal elemento integral t com $\varepsilon(t) = 1$ (podemos fazer isso substituindo t por $t/\varepsilon(t)$). Para mostrar que H é semissimples, podemos mostrar que para qualquer H-módulo à esquerda M e qualquer H-submódulo N de M, N é um somando direto em M como H-módulos à esquerda. Seja $\pi : M \to N$ uma transformação linear tal que $\pi(n) = n$, para todo $n \in N$ (para construir tal transformação escrevemos M como uma soma direta de N e outro subespaço, como k-espaços vetoriais, e então consideramos a projeção em N). Defina

$$P : M \to N,\ P(m) = \sum t_1 \pi(S(t_2)m) \text{ para todo } m \in M.$$

Primeiramente, mostramos que $P(n) = n$, para todo $n \in N$. De fato,

$$\begin{aligned}
P(n) &= \sum t_1 \pi(S(t_2)n) \\
&= \sum t_1 S(t_2)n \ \text{ (pois } S(t_2)n \in N) \\
&= \varepsilon(t)1n \ \text{ (pela propriedade da antípoda)} \\
&= n \ \text{ (pois } \varepsilon(t) = 1).
\end{aligned}$$

Mostramos agora que P é um morfismo de H-módulos à esquerda. De fato, para $m \in M$, $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
hP(m) &= \sum ht_1\pi(S(t_2)m) \\
&= \sum h_1t_1\pi(S(t_2)\varepsilon(h_2)m) \ \text{(pela propriedade da counidade)} \\
&= \sum h_1t_1\pi(S(t_2)S(h_2)h_3m) \ \text{(pela propriedade da antípoda)} \\
&= \sum h_1t_1\pi(S(h_2t_2)h_3m) \\
&= \sum (h_1t)_1\pi(S((h_1t)_2)h_2m) \\
&= \sum \varepsilon(h_1)t_1\pi(S(t_2)h_2m) \ \text{(pois } h_1t = \varepsilon(h_1)t) \\
&= \sum t_1\pi(S(t_2)hm) \ \text{(pela propriedade da counidade)} \\
&= P(hm).
\end{aligned}$$

Mostramos que existe um morfismo de H-módulos à esquerda $P : M \to N$ tal que $P(n) = n$, para todo $n \in N$. Então N é um somando direto em M como H-módulos à esquerda (pois $M = N \oplus Ker(P)$) e a prova está terminada. ■

Observação 4.2.14. Se G é um grupo finito e $H = kG$, vimos que $t = \sum_{g\in G} g$ é um elemento integral em H. Então $\varepsilon(t) = |G|1_k$, em que $|G|$ é a ordem do grupo G. O teorema anterior mostra que a álgebra de Hopf kG é semissimples se, e somente se, $|G|1_k \neq 0$, portanto se, e somente se, a característica de k não divide a ordem do grupo G. Esse é o bem conhecido Teorema de Maschke para grupos. ■

5 Conclusão

O trabalho foi desenvolvido ao longo do ano 2013, as principais referências sendo [1] e [2]. Ao ver essas referências, é possível perceber que o que foi feito nesse trabalho não chega nem a ser a ponta do iceberg da teoria de álgebras de Hopf. Descrevo a seguir algumas das coisas que existem nessas referências que não foram apresentadas no trabalho.

A dualidade entre álgebras e coálgebras pode ser mais aprofundada, por exemplo, definindo-se a topologia finita de um espaço vetorial dado (ver [1], Seção 1.2), é possível estabelecer correspondências injetoras entre as subcoálgebras de uma coálgebra dada e os ideais fechados da sua álgebra dual, entre os coideais à esquerda da coálgebra e os ideiais à esquerda fechados da álgebra dual, entre os coideais da coálgebra e as subálgebras fechadas da álgebra dual, e correspondências similares podem ser construídas entre as subestruturas de uma álgebra e da coálgebra dual finito. Existe uma noção chamada produto wedge entre subespaços de uma coálgebra que corresponde à multiplicação de subespaços da álgebra dual. Muitos outros conceitos estão relacionados com o produto wedge, entre eles a filtração corradical de uma coálgebra, que é, basicamente, uma cadeia de subespaços cuja união é a coálgebra e cujo primeiro termo é o corradical da coálgebra, que por sua vez é a soma das subcoálgebras simples da coálgebra. O conceito de filtração corradical é importante em resultados que o usam para argumentos indutivos.

Além dos comódulos e módulos de Hopf, apresentados de maneira sucinta no trabalho, existem os comódulos de Hopf, cuja estrutura é dual a dos módulos de Hopf, e os módulos de Hopf relativos, que contribuem com muitos resultados sobre módulos livres, especialmente sobre resultados que envolvem uma álgebra de Hopf e quando ela é livre sobre suas subálgebras de Hopf.

Um dos conceitos mais surpreendentes é o de integrais, muito importante na teoria de álgebras de Hopf de dimensão finita. Em [2] é possível ver que as integrais estão relacionadas com semissimplicidade; cossemissimplicidade; a função traço $Tr : End(H) \to k$ para uma álgebra de Hopf H de dimensão finita, por exemplo, pode ser expressa em termos de integrais e integrais podem ser expressas em termos da função traço; a antípoda, que também pode ser expressa em termos de integrais; os elementos grouplikes, que estão associados com integrais generalizadas; o centro e elementos cocomutativos da álgebra de Hopf dual.

Algumas coisas que não apareceram de maneira nenhuma no trabalho foram as ações e coações de álgebras de Hopf sobre álgebras e coálgebras, que dão origem a estruturas como H-módulo álgebra, H-comódulo álgebra, H-módulo coálgebra, H-comódulo coálgebra e o produto smash.

Depois de tudo isso, fica claro que existe muita coisa para estudar. Por isso e pelo fato de ser assunto extremamente interessante, pretendo persistir nos estudos, ainda mais por causa da oportunidade de estudá-lo ao lado de pessoas que admiro e pelas quais tenho muito carinho.

Referências

[1] S. DĂSCĂLESCU; C. NĂSTĂSESCU; S. RAIANU. **Hopf Algebras: An Introduction**, New York: Marcel Dekker, 2001.

[2] D. E. RADFORD; **Hopf Algebras**, University of Illinois em Chicago, USA: World Scientific 2012

[3] T. W. HUNGERFORD. **Algebra**, Springer, 2000.