UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA LICENCIATURA

# Questões do ENEM e o trabalho em sala de aula: Proporcionalidade

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ALISSON CUNHA CHAURAIS

FLORIANÓPOLIS

2014

ALISSON CUNHA CHAURAIS

# Questões do ENEM e o trabalho em sala de aula: Proporcionalidade

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO APRESENTADO AO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE GRADUADO NO CURSO DE MATEMÁTICA HABILITAÇÃO LICENCIATURA. PROFESSORA ORIENTADORA: CARMEM SUZANE COMITRE GIMENEZ.

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n° 12/CCM/2014.

Prof. Silvia Martini de Holanda Janesch
Coordenadora do Curso de Graduação em Matemática

Banca Examinadora:

Prof.ª Ma. Carmem Suzane Comitre Gimenez

Prof. Dr. Eliezer Batista

Prof. Me. José Luiz Rosas Pinho

# Sumário

## Introdução

O desenvolvimento humano, social e intelectual conduziu o homem ao surgimento da sociedade moderna, que é a sociedade como a conhecemos hoje. O desenvolvimento do processo intelectual fez surgir escolas e faculdades e após a Revolução Industrial começaram a surgir os processos de encadernação em série e com eles muitas pessoas passaram a ter acesso aos métodos educacionais. Com o passar dos anos e o surgimento da sociedade moderna fez-se necessário criar processos de seleção para o ingresso dos interessados em instituições de ensino superior. E o que era para ser apenas um processo avaliativo do ensino brasileiro, acabou se transformando em mais uma ferramenta para selecionar estudantes para o ingresso nas instituições de ensino superior. Desta forma surge o ENEM,também como forma de oportunizar aos estudantes da rede pública de ensino  o acesso a universidade. É disto que trataremos no capítulo 1, ou seja, sobre o seu surgimento e os seus aspectos históricos.

Desde que os primeiros homens começaram a organizar-se em pequenos grupos sociais, surgiram as primeiras descobertas e com elas a necessidade do desenvolvimento intelectual. Desde a invenção da roda ou da descoberta do fogo, o homem vem desenvolvendo ferramentas e tecnologias para o aprimoramento da sociedade como um todo. Com o surgimento das primeiras comunidades rurais, iniciaram-se os primeiros processos de contagem e o desenvolvimento da linguagem matemática. A partir das primeiras ideias, surge também o conceito de função. Este conceito será abordado no capítulo 2, analisando brevemente seu aspecto histórico-cronológico e posteriormente algumas definições formais sobre domínio, contra-domínio e imagem de função, bem como gráfico e relações.

Já no capítulo 3, faremos um breve estudo da Função Afim, tomando como base duas questões da prova do ENEM de 2012, resolvidas via linguagem de função, e falaremos sobre a proporcionalidade. A proporcionalidade é um assunto comum no cotidiano das pessoas, e por isso mesmo decidiu-se complementar o capítulo fazendo uma proposta de uma situação problema para alunos de 7° e 8° ano de uma escola da rede estadual de ensino da grande Florianópolis. O objetivo do experimento era avaliar o processo cognitivo dos alunos e verificar se eles fariam uso de alguma ferramenta matemática na resolução do problema proposto.

# Capítulo 1

*Neste capítulo trataremos brevemente da história e desenvolvimento do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM),iniciado no ano de 1998, quando o então presidente da república, Sr. Fernando Henrique Cardoso, criou o ENEM com fins de testar a qualidade do ensino no Brasil. O exame se desenvolveu a tal ponto que hoje é utilizado para ingresso em Universidades Públicas de todo o Brasil. Também serve de base para a aquisição de bolsas parciais e integrais de estudos em Universidades particulares.*

## 1.1 ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é uma prova realizada pelo Ministério da Educação do Brasil, e atualmente tem como objetivo principal promover o ingresso de estudantes no ensino superior em universidades públicas do Brasil, através do Sistema de Seleção Unificada.

Para o acesso às universidades particulares, o resultado obtido no ENEM serve de base para aquisição de bolsas de estudos parciais ou integrais. Mas nem sempre foi assim. Inicialmente, em 1998, no governo do então presidente Fernando Henrique Cardoso, o ENEM fora criado para avaliar o aprendizado dos alunos, com o objetivo de identificar falhas e promover melhoras na educação, através da reestruturação dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Neste mesmo ano, foram aproximadamente 158.000 candidatos inscritos. Este modelo seguiu até 2009, quando entra em pauta a segunda versão da prova, que tinha como principal objetivo unificar o concurso vestibular das universidades federais de todo o país. Pode-se observar que entre os anos de 1998 e 2009, houve um crescimento no número de candidatos inscritos, de acordo com o quadro abaixo:

| Ano | Nº inscritos |
|---|---|
| 2013 | 7.834.024 |
| 2012 | 6.497.466 |
| 2011 | 6.221.697 |
| 2010 | 4.611.441 |
| 2009 | 4.576.126 |
| 2008 | 4.018.070 |
| 2007 | 3.568.592 |
| 2006 | 3.742.827 |
| 2005 | 3.004.491 |
| 2004 | 1.552.316 |
| 2003 | 1.882.393 |
| 2002 | 1.829.170 |
| 2001 | 1.624.131 |
| 2000 | 390.180 |
| 1999 | 346.953 |
| 1998 | 157.221 |

Mas, apesar de ser uma tentativa de unificar o vestibular em todo o país, nem todas as universidades aderiram ao novo sistema. Mesmo com tanta repercussão, o ENEM rivaliza com os tradicionais vestibulares. E dentre as universidades que aderiram ao programa, fica a seu critério adotar a nota do ENEM como resultado único ou parcial para ingresso nos cursos de graduação. Porém, uma das vantagens do ENEM, é que ele surge como uma necessidade de promover a integração entre disciplinas, o que usualmente não ocorre nos vestibulares tradicionais. Assim, um aluno que pretenda fazer a prova do ENEM, tem de se preparar em todos os sentidos, não bastando ser bom nesta ou naquela disciplina. Desta forma, poderíamos inferir que o ENEM capacita mais os estudantes, que ao invés de decorar fórmulas e datas, precisam de fato aprender, para poder interpretar e resolver as questões propostas.

O modelo de prova aplicada desde 2009, é uma prova aplicada em dois dias, contendo 180 questões mais uma redação. Todas as questões são de múltipla escolha, contendo 5 opções cada. Para evitar fraudes, o Ministério da Educação trabalha com 4 tipos de provas identificadas por cores, diferindo apenas na ordem como as questões estão distribuídas.

Como o objetivo principal da prova é avaliar competências e não informações, a prova não é dividida em matérias. Nesta prova, conta a criatividade do estudante ao resolver as questões, se utilizando das ferramentas necessárias para que o mesmo ocorra, ao invés de colher dados, jogar numa fórmula pronta e obter a resposta.

Como o ENEM visa avaliar a capacidade de raciocínio e as idéias do aluno, a prova é dividida em 4 partes: "Ciências da Natureza e Suas Tecnologias", "Ciências Humanas e Suas Tecnologias", "Linguagens códigos e Suas Tecnologias" e "Matemática e Suas Tecnologias", além da Redação.

A primeira parte aborda a Biologia, Física e Química. O que significa dizer que, de certa maneira, as questões deste tópico englobarão as 3 disciplinas em uma única pergunta. O objetivo é justamente trabalhar a interdisciplinaridade e forçar os estudantes a "aprenderem" mais. Para a segunda parte, teremos as abordagens da História, Geografia, Filosofia e Sociologia, seguindo nessa mesma linha de pensamento, ou seja, colocando uma questão que contemple todas as disciplinas de uma única vez. No terceiro tópico, serão trabalhadas a Língua Portuguesa, Literatura, Língua Estrangeira, Artes e Educação Física. E fechando, temos a prova de matemática.

A prova de redação é uma prova que exige do candidato um mínimo de 7 a 8 linhas e um máximo de 30 linhas. É uma prova que preza o conhecimento analítico, já que o ENEM pretende dar um valor especial ao raciocínio, à reflexão e à análise crítica. São comuns as escolhas de temas polêmicos ou de grande destaque nas mídias em geral.

O Enem é estruturado a partir de 5 competências – definidas como modalidades estruturais da inteligência, ações e operações que utilizamos para estabelecer relações com e entre objetos, situações, fenômenos e pessoas que desejamos conhecer – e 21 habilidades, definidas como decorrentes das competências adquiridas e que se referem ao plano imediato do "saber fazer", articulando-se por meio das ações e operações.

## 1.2 Competências

**1** – Dominar a norma culta da língua portuguesa e fazer uso da linguagem matemática, artística e científica.
**2** – Construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
**3** – Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
**4**–Relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
**5** – Recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os direitos humanos e considerando a diversidade sociocultural.

## 1.3 Habilidades

**01** – Dada a descrição discursiva ou por ilustração de um experimento ou fenômeno, de natureza científica, tecnológica ou social, identificar variáveis relevantes e selecionar os instrumentos necessários para sua realização ou interpretação.
**02** – Em um gráfico cartesiano de variável socioeconômica ou técnico-científica, identificar e analisar valores das variáveis, intervalos de crescimento ou decréscimo e taxas de variação.
**03** – Dada uma distribuição estatística de variável social, econômica, física, química ou biológica, traduzir e interpretar as informações disponíveis ou reorganizá-las, objetivando interpolações ou extrapolações.
**04**–Dada uma situação-problema, apresentada em uma linguagem de determinada área de conhecimento, relacioná-la com sua formulação em outras linguagens e vice-versa.

**05** – A partir da leitura de textos literários consagrados e de informações sobre concepções artísticas, estabelecer relações entre eles e seu contexto histórico, social, político ou cultural, inferindo as escolhas dos temas, gêneros discursivos e recursos expressivos dos autores.

**06** – Com base em um texto, analisar as funções da linguagem, identificar marcas de variantes lingüísticas de natureza sociocultural, regional de registro ou de estilo e explorar as relações entre as linguagens coloquial e formal.

**07**–Identificar e caracterizar a conservação e as transformações de energia em diferentes processos de sua geração e uso social e comparar diferentes recursos e opções energéticas.

**08** – Analisar criticamente, de forma qualitativa ou quantitativa, as implicações ambientais, sociais e econômicas dos processos de utilização dos recursos naturais, materiais ou energéticos.

**09** – Compreender o significado e a importância da água e de seu ciclo para a manutenção da vida, em sua relação com condições socioambientais, sabendo quantificar variações de temperatura e mudanças de fase em processos naturais e de intervenção humana.

**10** – Utilizar e interpretar diferentes escalas de tempo para situar e descrever transformações na atmosfera, biosfera, hidrosfera e litosfera, origem e evolução da vida, variações populacionais e modificações no espaço geográfico.

**11**–Diante da diversidade da vida, analisar, do ponto de vista biológico, físico ou químico, padrões comuns nas estruturas e nos processos que garantem a continuidade e a evolução dos seres vivos.

**12** – Analisar fatores socioeconômicos e ambientais associados ao desenvolvimento, às condições de vida e saúde de populações humanas, por meio da interpretação de diferentes indicadores.

**13**–Compreender o caráter sistêmico do planeta e reconhecer a importância da biodiversidade para preservação da vida, relacionando condições do meio e intervenção humana.

**14** – Diante da diversidade de formas geométricas planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, caracterizá-las por meio de propriedades, relacionar seus elementos, calcular comprimentos, áreas ou volumes e utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.

**15** – Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos naturais ou não e utilizar em situações-problema processos de contagem, representação de freqüência relativa, construção de espaços amostrais, distribuição e cálculo de probabilidades.

**16** – Analisar, de forma qualitativa ou quantitativa, situações-problema referentes a perturbações ambientais, identificando fonte, transporte e destino de poluentes, reconhecendo suas transformações, prever efeitos nos ecossistemas e sistema produtivo e propor formas d intervenção para produzir e controlar os efeitos da poluição ambiental.

**17** – Na obtenção e produção de materiais e insumos energéticos, identificar etapas, calcular rendimentos, taxas e índices e analisar implicações sociais, econômicas e ambientais.

**18** – Valorizar a diversidade dos patrimônios etnoculturais e artísticos, identificando-a em suas manifestações e representações em diferentes sociedades, épocas e lugares.

**19** – Confrontar interpretações diversas de situações ou fatos da natureza históricogeográfica, técnico-científica, artístico-cultural ou do cotidiano, comparando diferentes pontos de vista, identificando os pressupostos de cada interpretação e analisando a validade dos argumentos utilizados.

**20** – Comparar processos de formação socioeconômica, relacionando-os com seu contexto histórico e geográfico.

**21** – Dado um conjunto de informações sobre uma realidade histórico-geográfica, contextualizar e ordenar os eventos registrados, compreendendo a importância dos fatores sociais, econômicos, políticos ou culturais.

O foco do nosso trabalho recairá sobre as competências 3 e 4, as quais falam em linhas gerais, sobre a coleta de informações em uma situação-problema, um caso real, posterior análise do caso com tomada de decisão para sua solução e construção de argumentação consistente. O foco das habilidades serão 4, 8 e 9, as quais falam em linhas gerais sobre a transposição de linguagens na solução de uma situação-problema e sobre os recursos naturais e sua utilização adequada, como a água.

# Capítulo 2

*Neste capítulo procuraremos compreender a evolução histórica de um conceito, que é uma ferramenta útil em sua abordagem. Apresentaremos aqui um breve resumo da evolução do conceito de função ao longo da história, assim como as definições e exemplos relativos a tal conceito.*

## 2.1 Função: evolução cronológica

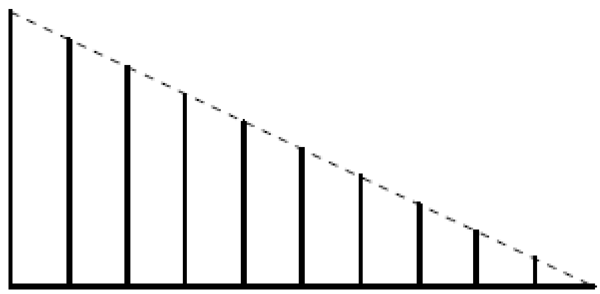
O conceito de função é um dos mais importantes na Matemática. O estudo do produto cartesiano serviu de base para o surgimento das relações, e a partir daí para o desenvolvimento do conceito de função. Funções nada mais são, do que um caso particular de relações, com algumas restrições. O exemplo mais comum de relações, pode ser verificado no nosso dia-a-dia, ao irmos à padaria comprar pão. A função que associa o preço total a ser pago, é determinada pelo preço do Kg do pão multiplicado pelo peso da quantidade pedida, e tudo isso dividido por 1000 gramas, que equivale à um Kilograma, ou seja, supondo que o kilograma do pão custe em média R$ 3,00, então $f(x) = \frac{3x}{1000}$, onde x representa o peso total em gramas dos pães pedidos.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 8 | 12 | 1,4142 |
| 3 | 9 | 27 | 36 | 1,732 |
| 4 | 16 | 64 | 80 | 2 |
| 5 | 25 | 125 | 150 | 2,2360 |
| 6 | 36 | 216 | 252 | 2,4494 |
| ... | | | | |
| 29 | 841 | 24389 | 25230 | 5,3851 |
| 30 | 900 | 27000 | 36000 | 5,4772 |

De acordo com a tabela, cada número de cada coluna, possui uma relação com o seu correspondente nas outras colunas.Perceba, que além de introduzir de maneira intuitiva, o conceito de função, os babilônios também já trabalhavam com outros conceitos, como a raiz quadrada de um número, por exemplo. Mas este não é o foco do trabalho.

À medida em que o pensamento evoluía, o conceito de função ia se refinando ainda mais, mas ainda muito longe do conceito formal com o qual trabalhamos hoje em dia. E como este conceito (função), é um conceito muito abrangente, e permeia tudo à nossa volta, é natural que todas as ciências se apóiem nele para descrever suas teses. Por volta de 600 a.c. na Grécia Clássica, onde tudo era relacionado às divindades, Tales de Mileto surge para tentar dar explicações mais plausíveis para os fenômenos que ocorriam na natureza. Até Aristóteles (384-322 a.c.), a ciência era descrita de forma qualitativa. Mais tarde, os cientistas começaram a dar saltos quantitativos e refinaram um pouco mais o conceito de função.

Por volta de 1100, com o advento das cruzadas e a viagem dos europeus para o oriente, os principais pensadores europeus foram traduzidos e as suas idéias começaram a se disseminar. Universidades foram criadas, e começou a surgir o pensamento científico; alguns pensadores propuseram uma mudança de paradigma e resolveram se apoiar no chamado método científico para obter seus resultados. Na figura abaixo, temos um esboço do cientista Nicolau de Oresme (1323-1382), da Universidade de Paris, onde ele relaciona a variação da velocidade de acordo com o tempo. A linha horizontal, ou abscissa, faz o papel do tempo, e as linhas verticais, ou ordenadas, fazem o papel da velocidade.



A partir do século XV, a nova filosofia que combinava o pensamento de Platão com a doutrina da Igreja Católica, que dizia que Deus criara tudo e tinha codificado suas leis imutáveis em linguagem matemática, fez surgir uma série de novos e influentes pensadores que iriam perpetuar seus trabalhos na história da humanidade. O astrônomo alemão Johannes Kepler (1561-1630), adotou a teoria heliocênctrica de Nicolau Copérnico (1473-1543), para enunciar leis matemáticas que descreviam o movimento dos planetas. Essa descrição se dava por meio de uma lei de formação, a que está relacionada com o conceito de função. A terceira Lei de Kepler diz que "*os quadrados dos períodos orbitais dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores das órbitas."* O desenvolvimento da Álgebra, através de Diofanto inicialmente, permitiu introduzir o conceito de variável, e relação entre grandezas que variam. Com o grande progresso da Álgebra no século XVI através do matemático francês Francois Viète (1540-1603), René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665), o conceito de função tal qual conhecemos hoje em dia, começou a adquirir contornos mais formais. No século XVII, James Gregory, em 1667 escreveu: *"Uma quantidade obtida de outras quantidades através da sucessão de operações algébricas"*. Ao escrever isso, Gregory ofereceu a definição mais explícita do conceito de função para a época.

Mas foi com Galileu-Galilei (1564-1642) que houve um rompimento definitivo entre o pensamento científico e o pensamento Aristotélico, ou seja, contemplativo. Durante seu período de isolamento após questionar dois conceitos filosóficos muito presentes em sua época, Galileu escreveu *"As Duas Novas Ciências"*,e neste trabalho sobre dinâmica e resistência dos materiais, dentre outros resultados Galileu enuncia que "*o espaço percorrido por um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao quadrado do tempo levado para percorrer este espaço."* Perceba que existe uma relação entre espaço percorrido e tempo, que nos dá o conceito de aceleração. De uma certa maneira, Galileu, ao estabeler esta relação, estava descrevendo uma função e sua lei de formação a exemplo de Kepler.

Mais tarde Isaac Newton (1642-1727) daria os primeiros passos ao escrever "*Princípios Matemáticos da Filosofia Natural"*. Mesmo não sendo uma obra estritamente matemática, Newton já esboçava, flertava com funções como a conhecemos. Esse período foi um período marcado pelo estudo de curvas, dada sua aplicabilidade nas ciências. Com o advento do Cálculo no século XVIII, todos estes conceitos vieram à tona. O *"Método das Fluxões"* escrito por Newton, tratava as váriaveis como *"Fluentes"* e a taxa de variação de *"Fluxos"*. O que Newton chamou de relação entre fluentes, é considerado por matemáticos hoje em dia como a expressão algébrica de uma função.

Com o cálculo desenvolvido por G. H. Leibniz (1646-1716), surgem as primeiras notações, dentre elas o uso dos termos *"constante"*, *"variável"* e *"parâmetro"*. Johann Bernoulli (1667-1748) definiu função da seguinte maneira:

*"Chamamos aqui Função de uma grandeza variável, uma quantidade composta de qualquer maneira desta grandeza variável e de constantes"*.

De acordo com Bernoulli, cada função poderia ser escrita através de uma expressão analítica. Esta expressão analítica, aparece na definição de função dada por Leonhard Euler (1707-1783) em sua obra intitulada *Introductio in AnalysisInfinitorum*, de 1748. Depois de definir o conceito de constante e de variável, Euler enuncia função da seguinte maneira:

*"Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma maneira desta quantidade variável e números ou quantidades constantes"*.

Euler só não deixou claro o que quis dizer com "expressão analítica", mas segundo Boyer (1991), tratava-se de funções algébricas e funções transcendentes elementares (exponenciais, logarítmicas e trigonométricas).

Em 1797, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) definiu função:
"*Chamamos função de uma ou várias quantidades toda expressão para cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, envolvidas ou não com outras quantidades que consideramos como sendo dadas e valores invariáveis, enquanto as quantidades da função podem assumir todos os valores possíveis. ... Designaremos em geral pela letra f ou F, colocada antes*

*da variável, toda função desta variável, isto é, toda quantidade que depende desta variável e que varia com ela segundo uma lei dada"*.

A interpretação do conceito de função como *transformação*, com cada elemento x é transformado no elemento f(x), foi dada por George Boole (1815-1864):

*"Qualquer expressão algébrica envolvendo o símbolo x é chamada uma função de x e podeser representada sob a forma geral abreviada f(x). ... Nestes mesmos princípios de notação, se em alguma função transformarmos x em 1, o resultado será expresso pela forma f(1); se na mesma*

*função transformarmos x em 0, o resultado será expresso pela forma f(0)* (Rüthing, 1984).

Richard Dedekind (1831-1916) utilizou a idéia de *aplicação* para definir o conceito de função:

*"Em uma aplicação de um sistema S uma lei é entendida, de acordo com a qual cada*

*elemento s de S está associado a um determinado objeto que é chamado a imagem de s e denotada por* f*(s); dizemos também que* f*(s) corresponde ao elemento s, que* f*(s) é originada ou gerada pela aplicação* f*, que s é transformado em* f*(s) pela aplicação* f".

Na definição de função dada por G.H. Hardy (1877-1947) foram enumeradas três características que devem ser satisfeitas por uma função determinada pela relação entre duas quantidades variáveis x e y:

(1) y é sempre determinado por um valor de x;

(2) para cada valor de y para o qual x é dado, corresponde um e somente um valor de y;

(3) a relação entre x e y expressa através de uma fórmula analítica, na qual o valor de y que corresponde a um dado valor de x pode ser calculado por substituição direta de x. (Silva, 1999)

## 2.2 Produto Cartesiano

Sejam $A$ e $B$ conjuntos não vazios. Definimos o produto cartesiano de $A$ por $B$ e denotamos $A \times B$, ao conjunto $A \times B = \{(a, b) | a \in A e b \in B\}$.

### 2.2.1 Produto Cartesiano de $n$ Conjuntos

$A_1$x$A_2$x ... x$A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_j \in A_j\ ;\ j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$; $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é dita n-upla ordenada.

## 2.3 Relações

Sejam $E$ e $F$ conjuntos não vazios e seja $E \times F$ o produto cartesiano em $E$ e $F$. Todo subconjunto $R$ de $E \times F$ é denominado uma relação de $E$ em $F$. Usamos a notação $aRb$ para dizer que $(a, b) \in R$.

### 2.3.1 Domínio de uma Relação

Seja $R$ uma relação de $E$ em $F$. Denomina-se domínio de $R$ e denota-se $D(R)$ o conjunto$D(R) = \{x \in E \mid \exists y \in FxRy\}$.

### 2.3.2 Imagem de uma Relação

Seja $R$ uma relação de $E$ em $F$. Denomina-se Imagem de $R$ e denota-se $Im(R)$ o conjunto $Im(R) = \{y \in F | \exists x \in ExRy\}$.

### 2.3.3 Inversa de uma Relação

Seja $R$ uma relação de $E$ em $F$. A relação inversa de $R$, denotada por $R^{-1}$, é definida por$R^{-1} = \{(y, x) \in F$x$E \mid (x, y) \in R\}$.

## 2.4 Função

Seja $f$ uma relação de $E$ em $F$, com $E \neq \emptyset, F \neq \emptyset$. Dizemos que $f$ é uma função de $E$ em $F$, se:

i) $D(f) = E$;

ii) A cada elemento $x \in D(f)$ está associado um único elemento $f(x) \in F$. Denota-se por:

$$f: E \to F$$

Uma função $f: E \to F$ consta de três elementos: um conjunto $E$, chamado o *domínio* da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto $F$, chamado o *contradomínio* da função (ou o conjunto onde a função toma valores) e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in E$, um único elemento $f(x) \in F$, chamado o valor que a função assume em $x$ (ou no ponto $x$). Não se deve confundir $f$ com $f(x)$: $f$ é a função, enquanto que $f(x)$ é o valor que a função assume num ponto $x$ do seu domínio.

A natureza da regra, ou lei de formação, que ensina como obter o valor $f(x) \in F$, quando é dado $x \in E$ é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:

1 – Não deve haver exceções: a fim de que $f$ tenha o conjunto $E$ como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$ para todo $x \in E$.

2 – Não deve haver ambigüidades: a cada $x \in E$, a regra deve fazer corresponder um *único* $f(x)$ em $F$.

Vemos com isso, que não existem funções "plurívocas". Pela segunda condição, acima, se $x = y$ em $E$, então, $f(x) = f(y)$ em $F$.

Segue das considerações acima que duas funções $f: E \to F$ e $g: E' \to F'$ são iguais se, e somente se, $E = E'$, $F = F'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in E$. Ou seja,duas funções são iguais quando têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra de correspondência, ou seja, a mesma lei de formação.

## 2.5 Gráfico de uma Função

O gráfico de uma função $f: E \to F$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $E \times F$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde $x \in E$ é arbitrário. Ou seja,$G(f) = \{(x, y) \in E\text{x}F \mid y = f(x)\}$.

Segue-se da definição de igualdade entre funções que duas funções são iguais se, e somente se, possuem o mesmo gráfico.

Para que um subconjunto $G \subset E \times F$ seja o gráfico de uma função $f: E \to F$ é necessário e suficiente que, para cada $x \in E$, exista um único ponto $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada seja $x$. Para funções $f: E \to F$, onde $E$ e $F$ são conjuntos de números reais, esta condição significa que toda paralela ao eixo das ordenadas, traçada por um ponto de $E$, deve cortar o gráfico $G$ num e num só ponto.

**Exemplo:**

**Função Afim**

Uma função definida por $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é denominada afim, quando existem constantes reais $a, b$ tais que $f(x) = ax + b, \forall\, x \in \mathbb{R}$.O domínio, contra-domínio e imagem de $f$ são $D(f) = CD(f) = Im(f) = \mathbb{R}$.

A representação gráfica do gráfico da função afim é uma reta no plano. Para verificar a veracidade desta afirmação, façamos a verificação do alinhamento de três pontos distintos

$$P_1 = (x_1, y_1) = \big(x_1, f(x_1)\big) = (x_1, ax_1 + b),$$

$$P_2 = (x_2, y_2) = \big(x_2, f(x_2)\big) = (x_2, ax_2 + b),$$

$$P_3 = (x_3, y_3) = \big(x_3, f(x_3)\big) = (x_3, ax_3 + b).$$

Lembrando que, dados três pontos distintos, eles estão alinhados se, e somente se, pertencerem a mesma reta. Isto implica dizer que o cálculo do determinante deve ser igual à zero, ou seja,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & ax_1 + b & 1 \\ x_2 & ax_2 + b & 1 \\ x_3 & ax_3 + b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Em outras palavras, utilizando a Regra de Sarrus, temos que:

$$\left|\begin{matrix} x_1 & ax_1 + b & 1 \\ x_2 & ax_2 + b & 1 \\ x_3 & ax_3 + b & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} x_1 & ax_1 + b \\ x_2 & ax_2 + b \\ x_3 & ax_3 + b \end{matrix}\right| =$$

$$= (1.x_2.(ax_3 + b) + (ax_1 + b).1.x_3 + x_1.(ax_2 + b).1) -$$

$$-\big((ax_1 + b).x_2.1 + x_1.1.(ax_3 + b) + 1.(ax_2 + b).x_3\big) =$$

$$= (ax_2x_3 + bx_2 + ax_1x_3 + bx_3 + ax_1x_2 + bx_1) -$$

$$-(ax_1x_2 + bx_2 + ax_1x_3 + bx_1 + ax_2x_3 + bx_3) =$$

$$= ax_2x_3 + bx_2 + ax_1x_3 + bx_3 + ax_1x_2 + bx_1 -$$

$$- ax_1x_2 - bx_2 - ax_1x_3 - bx_1 - ax_2x_3 - bx_3 =$$

$$= ax_2x_3 - ax_2x_3 + bx_2 - bx_2 + ax_1x_3 - ax_1x_3 +$$

$$+bx_3 - bx_3 + ax_1x_2 - ax_1x_2 + bx_1 - bx_1 = 0$$

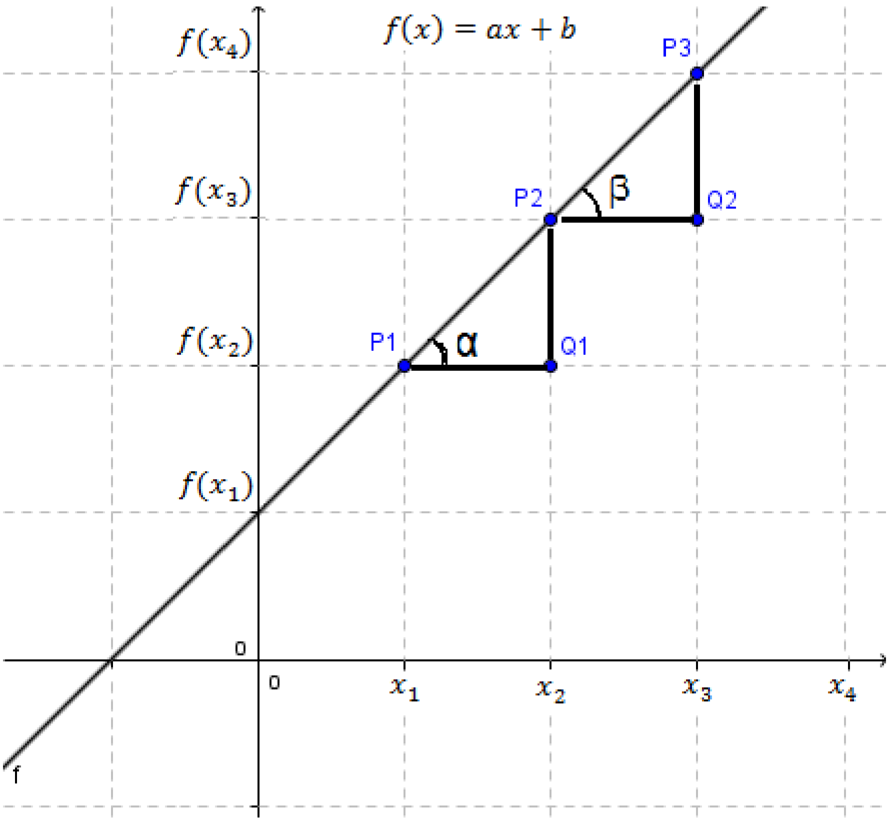
O que mostra que dados três pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1) = \big(x_1, f(x_1)\big) = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, y_2) = \big(x_2, f(x_2)\big) = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, y_3) = \big(x_3, f(x_3)\big) = (x_3, ax_3 + b)$, eles pertencem a uma mesma reta, ou seja, a representação gráfica da função afim é uma reta.

Uma outra maneira de verificar este fato seria utilizar o cálculo das tangentes, ou seja, tomados os mesmos pontos $P_1, P_2$ e $P_3$, podemos utilizar pontos auxiliares$Q_1 = (x_2, f(x_1)) = (x_2,\ ax_1 + b)$ e $Q_2 = (x_3, f(x_2)) = (x_3,\ ax_2 + b)$ e calcular $\tan\alpha$ e $\tan\beta$, como segue:

$$\tan\alpha = \frac{d(P_2,\ Q_1)}{d(P_1,\ Q_1)} = \frac{\sqrt[2]{(x_2 - x_2)^2 + ((ax_2 + b) - (ax_1 + b))^2}}{\sqrt[2]{(x_2 - x_1)^2 + ((ax_1 + b) - (ax_1 + b))^2}}$$
$$= \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{(x_2 - x_1)} = \frac{a(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} = a$$

$$\tan\beta = \frac{d(P_3,\ Q_2)}{d(P_2,\ Q_2)} = \frac{\sqrt[2]{(x_3 - x_3)^2 + ((ax_3 + b) - (ax_2 + b))^2}}{\sqrt[2]{(x_3 - x_2)^2 + ((ax_2 + b) - (ax_2 + b))^2}}$$
$$= \frac{(ax_3 + b) - (ax_2 + b)}{(x_3 - x_2)} = \frac{a(x_3 - x_2)}{(x_3 - x_2)} = a$$

Portanto, $\tan\alpha = \tan\beta$. O que mostra que os pontos $P_1, P_2$ e $P_3$, ou seja, pertencem a mesma reta. Para uma melhor compreensão do cálculo das tangentes, veja a figura ilustrativa abaixo:



Como a função afim é uma função cujas constantes $a$ e $b$ são valores reais, para $a = 0$, teremos uma função definida por $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = b$ chamada função constante. A representação gráfica desta função é uma reta paralela ou coincidente com o eixo $Ox$. Já para $b = 0$, teremos uma função definida por $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax$ chamada função linear. A representação gráfica do gráfico desta função é uma reta passando pela origem $(0, 0)$ do plano cartesiano.

A função linear dada pela fórmula $f(x) = ax$, é o modelo matemático utilizado para os problemas de proporcionalidade. A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios.

Uma proporcionalidade é uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais $c,\ x$ tem-se $f(cx) = c.f(x)$ (Proporcionalidade direta) ou $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$, se $c \neq 0$ (Proporcionalidade inversa).

É claro que se $f(cx) = c.f(x)$ para todo $c$ e para todo $x$ então, escrevendo $a = f(1)$, tem-se $f(c) = f(c.1) = c.f(1) = ca$, ou seja, $f(c) = ac$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Em uma notação mais adequada, temos $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e$f$ é uma função linear.

Em suma, a grandeza $y$ é diretamente proporcional à grandeza $x$ quando existe um número $a$ (chamado a *constante de proporcionalidade*) tal que $y = ax$ para todo valor de $x$.

Quanto à proporcionalidade inversa, ela só tem sentido quando se trata de grandezas não-nulas. Seu modelo matemático é uma função $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$(com $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$) tal que $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$ para $c,\ x \in \mathbb{R}^*$ quaisquer. Usando o mesmo raciocínio anterior, isto quer dizer que, para todo $x \in \mathbb{R}^*$, tem-se $f(x) = \frac{a}{x}$, e a constante $a$ é $f(1)$.

Fixaremos nossa atenção na proporcionalidade direta, que chamaremos apenas de “proporcionalidade”.

Há uma questão preliminar que é a seguinte: como vamos ter certeza de que a correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade? A definição dada por Trajano em 1883 [4] exige que se tenha $f(cx) = c.f(x)$ para todos os valores reais de $c$ e $x$. Em particular, para todo $c$. A definição é a seguinte:

> *“Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica*

*multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais."*

(Aritmética Progressiva, Antonio Trajano)

Verificar esta definição quando $c$ é um número inteiro é fácil. Mas e nos demais casos? E se $c$ for um número irracional? Felizmente basta que se saiba que $f(nx) = n.f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n$ inteiro, desde que se suponha que $f$ é monótona (o que é fácil de constatar na prática).

O teorema abaixo é a chave para determinar, em todas as situações, se uma dada função é ou não linear.

## 2.6 Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = n.f(x)$para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
(2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(3) $f(x+y) = f(x) + f(y)$para quaisquer $x,\ y \in \mathbb{R}$.

A demonstração encontra-se em [4]

# Capítulo 3

*Neste capítulo apresentaremos duas questões retiradas da prova do ENEM, ligadas às competências 3 e 4, bem como as habilidades 4, 8 e 9. Estas competências e habilidades de um modo geral, relacionam o conhecimento científico às situações do cotidiano. Apresentaremos também uma atividade que trata da proporcionalidade, feita com alunos da rede estadual de ensino básico, de uma das escolas da região da grande Florianópolis.*

## 3.1 As Questões do ENEM

Questão 167

Nos *Shopping Centers* costumam existir parques com vários brinquedos e jogos. Os usuários colocam crédito em um cartão, que são descontados por cada período de tempo de uso dos jogos. Dependendo da pontuação da criança no jogo, ela recebe um certo número de tíquetes para trocar por produtos nas lojas dos parques.

Suponha que o período de uso de um brinquedo em certo *shopping* custa R$ 3,00 e que uma bicicleta custa 9200 tíquetes.

Para uma criança que recebe 20 tíquetes por período de tempo que joga, o valor, em reais, gasto com créditos para obter a quantidade de tíquetes para trocar pela bicicleta é:

A – 153

B – 460

C – 1218

**D – 1380**

E – 3066

### 3.1.1 A questão:

A criança irá jogar, utilizando qualquer um dos brinquedos disponíveis no parque. De acordo com o enunciado da questão, o desenvolvimento do jogo gerará uma pontuação, que será diretamente proporcional a habilidade da criança, ou seja, uma criança mais hábil fará uma pontuação maior enquanto que, uma criança menos hábil fará uma pontuação menor. Esta pontuação será o referencial para a troca de tíquetes. Mais uma vez, temos uma relação diretamente proporcional entre a pontuação e a quantidade de tíquetes. Assim, mais pontos geram mais tíquetes, enquanto menos pontos geram menos tíquetes. Dessa forma, poderíamos entender que a quantidade de tíquetes depende da pontuação gerada pela criança no decorrer do jogo. Porém, o enunciado da questão deixa claro que estamos tratando de um caso particular e específico:uma criança que joga um jogo qualquer sempre obterá a mesma pontuação no jogo, ou seja, sempre pontuará tal que seus pontos resultarão na troca por 20 tíquetes. Segue então que, 20 tíquetes é um valor fixo, ou seja, a menos que se diga o contrário, a pontuação da criança será sempre a mesma.

Ainda de acordo com o enunciado, temos que cada período de uso de um brinquedo qualquer custa R$ 3,00. Podemos entender este valor como uma taxa de uso, um ingresso pago pela utilização do brinquedo. Perceba que em nenhum momento, a questão trata de um tempo limite ou um tempo mínimo de uso do brinquedo. Assim sendo, a partir do instante em que a criança decide utilizar qualquer um dos brinquedos disponíveis no parque, não importa se ela jogará por 10 minutos ou 1 hora. O valor a ser pago pela utilização do brinquedo continua fixo, e é R$ 3,00.Como a questão já nos coloca a quantidade de tíquetes necessários para se efetuar a troca pelo produto em destaque, ou seja, 9200 tíquetes para trocar por uma bicicleta, nos resta calcular o valor monetário necessário para atingir tal meta. Para retirar a bicicleta, a criança deve jogar 460 períodos, referentes ao quociente entre o total de tíquetes necessários para a retirada da bicicleta, 9200, e a quantidade de 20 tíquetes que a criança ganha por período de jogo. Como cada período custa R$ 3,00, o valor gasto será 460x3=1380. Em resumo, $\frac{9200}{20} \times 3$.Temos então uma relação entre a quantidade de tíquetes necessários para a retirada de um produto em destaque e o valor monetário necessário para se atingir tal meta.Para a retirada da bicicleta, são necessários 9200 tíquetes. Mas, se ao invés da bicicleta, tivéssemos um carrinho, cuja pontuação é de 1200 tíquetes? Naturalmente, com uma pontuação menor, o carrinho também exigiria um valor monetário menor em comparação à bicicleta, por exemplo. Posto isso, podemos entender que o valor monetário é diretamente proporcional à pontuação do brinquedo, ou seja,

$$x \longmapsto y = \frac{3.x}{20}$$

com$x$ - a quantidade de tíquetes e $y$ - valor em reais.

### 3.1.2 O domínio e contra-domínio da função

O domínio da nossa função será o conjunto de todas as pontuações necessárias para se retirar determinado objeto em destaque. Em outras palavras, serão os valores atribuídos aos brindes. Como estamos tratando de uma situação real do nosso cotidiano, não podemos imaginar 1 tíquete e meio, (-2) tíquetes, ou quem sabe 3,14159265... tíquetes. Nossas quantidades de quantidades de tíquetes serão sempre números inteiros estritamente positivos. É importante notar que a empresa sempre irá colocar o número de tíquetes como “adequados” ao valor em reais por período jogado. Não consideraremos aqui a quantidade zero de tíquetes, pois naturalmente, não havendo tíquetes, não haverá retirada de brinde. Posto isso, podemos entender que o domínio da nossa função, ou o conjunto de valores de entrada, será o conjunto dos números naturais, sem o zero, denotado$\mathbb{N}^*$**.**

Suponhamos agora, que para retirar um determinado brinquedo, sejam necessários 3101 tíquetes. Então $\frac{3.3101}{20} = \frac{9303}{20} = 465{,}15 \in \mathbb{Q}$. Isto implica dizer que, mesmo que os valores de entrada sejam números estritamente positivos, os valores de saída podem assumir valores fracionados, ou seja, valores positivos racionais. Assim sendo, nosso contra-domínio será $\mathbb{Q}_+$.

A função $f$ assim entendida, é dada então por:

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}_+$$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{3.x}{20}$$

Com $x$ - a quantidade de tíquetes e

$y = f(x)$ - valor em reais.

### 3.1.3 Considerações

O problema não deixa explícito o tempo de cada período, o que nos leva a algumas ponderações que podem suscitar novas questões. Por exemplo, suponha que seja necessário 1 hora de jogo para que a criança atinja a pontuação necessária para a retirada de 1 tíquete. E para abastecer o cartão, a criança gaste R$ 3,00 conforme indicado na questão. Para que ela possa retirar a bicicleta, precisará gastar um total de 9200 tíquetes multiplicado por R$ 3,00, o que gerará um custo total de R$ 27.600,00. Diante deste contexto, podemos nos perguntar: não seria mais econômico a criança comprar uma bicicleta nova por um valor menor?

Outra questão que poderia ser levantada a partir desta seria: se tomarmos como referência o preço de uma bicicleta nova, utilizarmos este valor para abastecer o cartão de pontuação, e jogarmos, qual será a quantidade de tíquetes retirados levando em consideração que para cada R$ 3,00 retira-se 1 tíquete?

Percebe-se que a partir de uma mesma questão, podemos criar tantas outras novas questões quanto ela nos permitir. Este tipo de questão é muito semelhante a algo que vivemos no nosso cotidiano, com relação às milhagens nos vôos de avião, ou nos cartões de pontos diversos, onde você troca pontos acumulados por brindes. Estes cartões são comumente utilizados por redes de supermercados, postos de gasolina, dentre outros. São conhecidos como “cartão fidelidade”, que tornou-se uma forma de fidelizar uma clientela cada vez mais exigente e com cada vez mais opções de compra.

Questão 173

Há, em virtude da demanda crescente de economia de água, equipamentos e utensílios como, por exemplo, as bacias sanitárias ecológicas, que utilizam 6 litros de água por descarga em vez dos 15 litros utilizados por bacias sanitárias não ecológicas, conforme dados da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

Qual será a economia diária de água obtida por meio da substituição de uma bacia sanitária não ecológica, que gasta cerca de 60 litros por dia com a descarga, por uma bacia sanitária ecológica?

A – 24 litros

**B – 36 litros**

C – 40 litros

D – 42 litros

E – 50 litros

### 3.1.4 A questão

O consumo de água por uma bacia não ecológica e por uma bacia ecológica são valores fixos. O consumo de água é uma medida variável. Além disso, o problema pede para calcular a economia real em litros de água, ao efetuar a troca de uma bacia por outra. Tem-se aqui uma subtração usual entre duas medidas, ou seja, "o número de descargas dadas por uma bacia não-ecológica" menos "o número de descargas dadas por uma bacia ecológica". Assim, dada uma quantidade $x$ de água, temos que $\frac{x}{15}$ é o número de descargas dada por uma bacia não-ecológica, pois a referida descarga consome 15 litros de água por descarga. O resultado obtido, deverá então ser multiplicado por 6, que é o consumo da bacia sanitária ecológica. O resultado, assim obtido, será o consumo da bacia sanitária ecológica. Para saber a economia real em litros de água, subtrai-se do valor total de água disponível para descarga, o valor que a bacia sanitária ecológica consome, ou seja:

$$x - \frac{6x}{15} = \frac{15x - 6x}{15} = \frac{9x}{15} = \frac{3x}{5}$$

### 3.1.5 O domínio e contra-domínio da função

Ao tratarmos de litros de água, estamos lidando com medidas bem determinadas. Ou seja, mesmo fracionado, não é possível determinar 3,141592653589... $(\pi)$litros de água. Mas podemos calcular 0,5 litro de água, por exemplo. Porém, não é possível encher uma bacia de água, com (-2) litros de agua. Portanto, o domínio da função $f$ será $\mathbb{Q}_+$.

A função $f$ toma um valor de entrada, e o multiplica por uma constante, a saber$\frac{3}{5}$, que é um número racional estritamente positivo. Tendo em vista, que nossos valores de entrada são racionais também estritamente positivos, segue que nosso contra-domínio também será $\mathbb{Q}_+$. Logo, a função fica determinada por:

$$f\colon \mathbb{Q}_+ \longrightarrow \mathbb{Q}_+$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{3x}{5}$$

Com $x$ - quantidade de litros de água consumidos e

$y = f(x)$ - a economia em litros com a descarga ecológica

### 3.1.6 Considerações

A questão colocada do modo como está pode nos fazer pensar em outra pergunta: qual a economia monetária (R$), ao efetuarmos a troca de uma bacia sanitária não ecológica por uma bacia sanitária ecológica?

Veja:

$$N° \; Pessoas \longrightarrow N° \; Descargas \; (Mês) \begin{Bmatrix} Ecológica \\ Não \; Ecológica \end{Bmatrix} \longrightarrow Consumo$$

Esse é o quadro para um ambiente qualquer, onde o número de pessoas é determinante para o cálculo final. Tomemos agora como referência, uma residência e uma pessoa que efetua em média 90 descargas por mês. Assim:

$$1\ Pessoa \longrightarrow \begin{cases} Consumo\ 90 \times 15 - Não\ Ecológica \\ Consumo\ 90 \times 6 - Ecológica \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1350\ litros\ de\ água\ por\ mês \\ 540\ litros\ de\ água\ por\ mês \end{cases}$$

Se levarmos em consideração mais pessoas, ou seja, $n$ pessoas, nossa base de cálculo ficará assim:

$$n\ Pessoas \longrightarrow \begin{cases} 1350.n\ litros\ de\ água\ por\ mês \\ 540.n\ litros\ de\ água\ por\ mês \end{cases}$$

Logo, a função "Economia de Água" $E_A$ para $n$ pessoas é dada por:

$$E_A(n) = 1350.n - 540.n \Longrightarrow E_A(n) = 810.n(l)$$

Analisando uma conta de água, e tomando seus valores como referência, temos o seguinte quadro:

Até $10m^3$, paga-se R$ 2,992 por $m^3$,

entre$11m^3$ e $25m^3$ paga-se R$ 5,4836 por $m^3$,

entre$26m^3$ e $50m^3$, paga-se R$ 7,6934 por $m^3$,

e acima de $50m^3$, paga-se R$ 9,2192 por $m^3$.

Lembrando que $1m^3$ equivale à 1000 litros de água, se forem consumidos $10m^3$, paga-se um total de R$ 29,92. Por exemplo, em uma residência com 5 pessoas, nossa economia em litros de água, dada a função $E_A$ é de:

$$E_A(5) = 810.5l = 4050l$$

Baseado nisso e tendo como referência nossa tabela de valores de consumo, temos:

$$\begin{matrix} 1m^3 \longrightarrow & 1000l \\ xm^3 \longrightarrow & 4050l \end{matrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1000.x = 1.4050 \Longrightarrow x = \frac{4050}{1000} = 4{,}05m^3$$

Como $4{,}05m^3 < 10m^3$, então paga-se o valor de R\$ $2{,}992$ por $m^3$. Logo,

$$4{,}05 \times 2{,}992 = \text{R\$ } 12{,}1178$$

Consideramos aqui apenas o consumo de água da descarga, e não o consumo total de água da residência. Esta é a economia total, para uma residência com 5 pessoas. Agora, voltando à nossa questão inicial, queremos saber de quanto será a economia em reais (R$), ao efetuarmos a troca de uma bacia sanitária não ecológica por uma ecológica?

Consideramos que o consumo não excede $10m^3$. O número de descargas é uma variável dependente do número de pessoas existentes no ambiente e o consumo de água depende do número de descargas. Isto nos dá a função$E_A(n) = 810.n$ litros; em $m^3$ temos $E_A(n) = 0{,}81.n$. Como até $10m^3$, paga-se um valor de R\$ 2,992 por $m^3$, a função que dá uma estimativa da economia em reais para $n$ pessoas pode ser vista como uma função composta.

$$\begin{array}{ccc} número\ de\ pessoas \rightarrow & economia\ de\ água(m^3) \rightarrow & economia\ em\ reais \\ n & 0{,}81.n & 0{,}81.n.(2{,}992) \end{array}$$

A primeira função é a função $E_A(n)$ já definida; a segunda função é a função $g(y) = 2{,}992y$. A função composta é dada então por,

$$E(n) = (g \circ E_A)(n) = g\big(E_A(n)\big) = g(0{,}81.n) = (2{,}992).(0{,}81).n = 2{,}42352.n$$

Esta função dá uma estimativa da economia, pois estamos considerando apenas o consumo mínimo. Um número muito grande de pessoas certamente excederá o consumo mínimo de $10m^3$ e haverá um aumento no valor dos $m^3$ excedentes. Nas condições consideradas, a função $E$ é uma função linear e é uma proporcionalidade. Então, de acordo com o que foi colocado, podemos entender que aumentando o número de pessoas, teremos uma economia monetária maior? A resposta é sim, isto porque, a economia é relativa ao valor pago que depende do consumo de água.Então mais pessoas geram maior economia em relação ao consumo. Assim, diante disto, cabe uma pergunta: como é a função que estuda a situação de maneira global, sem restrições? Ela é uma função linear?

## 3.2 Experimento em sala de aula

Vimos anteriormente que para uma dada questão, é possível levantar novas questões a partir desta. Vimos ainda, que se a questão não estiver bem formulada é possível que um aluno possa ter uma compreensão diferente e que faça uma análise totalmente distinta da proposta inicial.

Em uma escola da rede estadual de ensino no bairro Abraão, da cidade de Florianópolis, no estado de Santa Catarina, foi realizado um experimento com duas turmas de ensino fundamental, de 7° e 8° anos mais precisamente, cujas turmas são únicas, ou seja, não há mais do que uma turma de cada ano. O experimento consistiu em propor um problema para que tentassem encontrar um modo de resolvê-lo. Para cada turma foi dado um tempo de 45 minutos, o que equivale ao período de uma aula, onde os alunos se reuniram em duplas, trios e quartetos para juntos solucionar a questão. A distribuição dos grupos levou em consideração o total de alunos em cada turma. Não foi dada nenhuma dica de como resolver a questão, apenas deixou-se claro que o objetivo era verificar como os alunos elucidariam o problema, que faz parte do cotidiano.

O experimento teve início com a turma de 8° ano, que conta com um total de 7 alunos, dos quais, dois chegaram 15 minutos atrasados. Às 8:03 da manhã do dia 02.07.2014, foi feita a distribuição inicial dos alunos do 8° ano, uma dupla de meninos e um trio de duas meninas e um menino. A distribuição assim dada foi feita entre os próprios alunos. Propôs-se então a questão seguido da explicação do objetivo do experimento. Passados 15 minutos de aula, entraram mais dois alunos, e cada um foi para um grupo. As devidas orientações foram passadas aos dois alunos e o experimento seguiu normalmente. Houve bastante discussão de idéias entre os alunos, e a produção textual seguiu no mesmo ritmo das discussões. Após 40 minutos, às 8 horas e 43 minutos da manhã, teve fim o experimento e os grupos entregaram o resultado de suas ideias. Após isso, a aula seguiu o cronograma normal.

Em seguida o mesmo experimento foi proposto à turma de 7° ano, que teve início às 9 horas e 36 minutos. A turma contou com um total de 18 alunos, dos quais dois não quiseram participar, e não foi exigido uma explicação para tal recusa. Os 16 alunos foram distribuídos em 4 duplas e 2 trios. Conforme feito com a turma de 8° ano, após a seleção das duplas e trios foi proposto o problema no quadro, e explicado aos alunos o objetivo do experimento. Novamente, não foi dado dica sobre como resolver a questão. Apenas pediu-se que tentassem encontrar uma maneira de resolver a questão. Após 38 minutos de aula, os alunos entregaram as suas soluções, às 10 horas e 14 minutos. Após o término do experimento, todos os alunos voltaram aos seus lugares e a aula continuou com o seu cronograma habitual.

A decisão de fazer este experimento com turmas de 7° e 8° ano respectivamente, se baseia no fato de que nesta etapa do ensino fundamental, os alunos já tiveram contato com o estudo da proporcionalidade e regra de três, além do assunto constar no cronograma curricular da escola onde o experimento foi realizado. Para tal experimento, foi conversado com a diretora responsável pela escola que autorizou a atividade.

De acordo com os "Parâmetros Curriculares Nacionais – Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental", de 1998, na página 53, tópico "Organização de Conteúdos" há a seguinte passagem:

> *"A variedade de conexões que podem ser estabelecidas entre os diferentes blocos, ou seja, ao planejar suas atividades, o professor procurará articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando a possibilitar a compreensão mais ampla que o aluno possa atingir a respeito dos princípios e métodos básicos do corpo de conhecimentos matemáticos (proporcionalidade, equivalência, indução, dedução, etc.); além disso, buscará estabelecer ligações entre a Matemática, as situações cotidianas dos alunos e as outras áreas do conhecimento."*

O objetivo do experimento era verificar se os alunos ao se depararem com uma situação real, do cotidiano deles, utilizariam alguma ferramenta matemática para resolver a questão. O que pôde se verificar ao final do experimento, é que de todas as respostas dadas, nenhuma delas explorou o conjunto de ferramentas matemáticas para resolver o problema proposto. Verificou-se ainda alguns outros problemas, como erro de concordância verbal e principalmente erros de grafia. O ponto positivo, é que os alunos tentaram, ao seu modo, resolver a questão sob diversos pontos de vista. Foi interessante notar que todos eles utilizaram como base sua realidade. Os alunos envolvidos no experimento são moradores de uma comunidade carente da cidade Florianópolis.

É interessante notar que para uma mesma questão, pode-se encontrar muitas maneiras de resolvê-la dependendo do olhar que se lança sobre ela. O olhar matemático nos induz a resolver esta questão por meio de regra de três, uma das ferramentas mais utilizadas neste meio. Já para os estudantes oriundos da comunidade, o método de resolução baseou-se na sua realidade.

A seguir, veremos o enunciado da questão, algumas sugestões de resolução via linguagem matemática e algumas das respostas obtidas pelos alunos, seguidas de comentários.

"*Uma lata de leite em pó, pesando 400g custa R$ 5,20. O mesmo leite, na embalagem de 900g, custa R$ 11,20. Qual das duas opções é a mais vantajosa?"*

### 3.2.1 Solução 01

Tomando a lata de 400g como referência, podemos verificar quanto custaria 900g desta mesma lata e comparar o resultado obtido com o anúncio feito. Assim, através de uma regra de três simples temos:

$$\left.\begin{array}{ccc} 400 & - & 5{,}20 \\ 900 & - & x \end{array}\right\} \Rightarrow 400.x = 900.5{,}20 \Rightarrow 400.x = 4680 \Rightarrow x = \frac{4680}{400} \Rightarrow x = 11{,}70$$

Ou seja, 900g da lata de 400g custariam R$ 11,70. O que representa mais do que o preço anunciado de R$ 11,20.

Resposta: A lata mais econômica é a de 900g.

### 3.2.2 Solução 2

Tomando a lata de 900g como referência, podemos verificar quanto custaria 400g desta mesma lata e comparar o resultado obtido com o anúncio feito. Assim, através de uma regra de três simples temos:

$$\left.\begin{matrix} 400 & - & x \\ 900 & - & 11{,}20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 900.x = 400.11{,}20 \Rightarrow 900.x = 4480 \Rightarrow x = \frac{4480}{900} \Rightarrow x \cong 4{,}98$$

Ou seja, 400g da lata de 900g custariam aproximadamente R$ 4,98. O que representa menos do que o preço anunciado de R$ 5,20.

Resposta: A lata mais econômica é a de 900g.

### 3.2.3 Solução 3

Através de uma regra de três simples, vejamos quanto custa 100g de cada uma das latas, e comparemos o resultado.

$$\left.\begin{matrix} 100 & - & x \\ 900 & - & 11{,}20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 900.x = 100.11{,}20 \Rightarrow 900.x = 1120 \Rightarrow x = \frac{1120}{900} \Rightarrow x \cong 1{,}25$$

$$\left.\begin{matrix} 400 & - & 5{,}20 \\ 100 & - & x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 400.x = 100.5{,}20 \Rightarrow 400.x = 520 \Rightarrow x = \frac{520}{400} \Rightarrow x = 1{,}30$$

Ou seja, 100g da lata de 900g custam aproximadamente R$ 1,25, enquanto as mesmas 100g da lata de 400g custam R$ 1,30.

Resposta: A lata mais econômica é a de 900g.

### 3.2.4 Solução 4

Através de uma regra de três simples, vejamos quanto custa 1g de cada uma das latas, e comparemos o resultado.

$$\left.\begin{matrix} 1 & - & x \\ 900 & - & 11{,}20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 900.x = 1.11{,}20 \Rightarrow 900.x = 11{,}20 \Rightarrow x = \frac{11{,}20}{900} \Rightarrow x \cong 0{,}0125$$

$$\left.\begin{matrix} 400 & - & 5{,}20 \\ 1 & - & x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 400.x = 1.5{,}20 \Rightarrow 400.x = 5{,}20 \Rightarrow x = \frac{5{,}20}{400} \Rightarrow x = 0{,}0130$$

Ou seja, 100g da lata de 900g custam aproximadamente R$ 0,0125, enquanto as mesmas 100g da lata de 400g custam R$ 0,0130.

Resposta: A lata mais econômica é a de 900g.

### 3.2.5 Solução 5

Calculando o M.M.C. entre 400 e 900, temos que 3600 é múltiplo de 400 e 900. Logo, calculando o preço de 3600g de leite em pó, através de uma regra de três temos:

$$\left.\begin{matrix} 3600 & - & x \\ 900 & - & 11{,}20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 900.x = 3600.11{,}20 \Rightarrow 900.x = 40320 \Rightarrow x = \frac{40320}{900} \Rightarrow x = 44{,}80$$

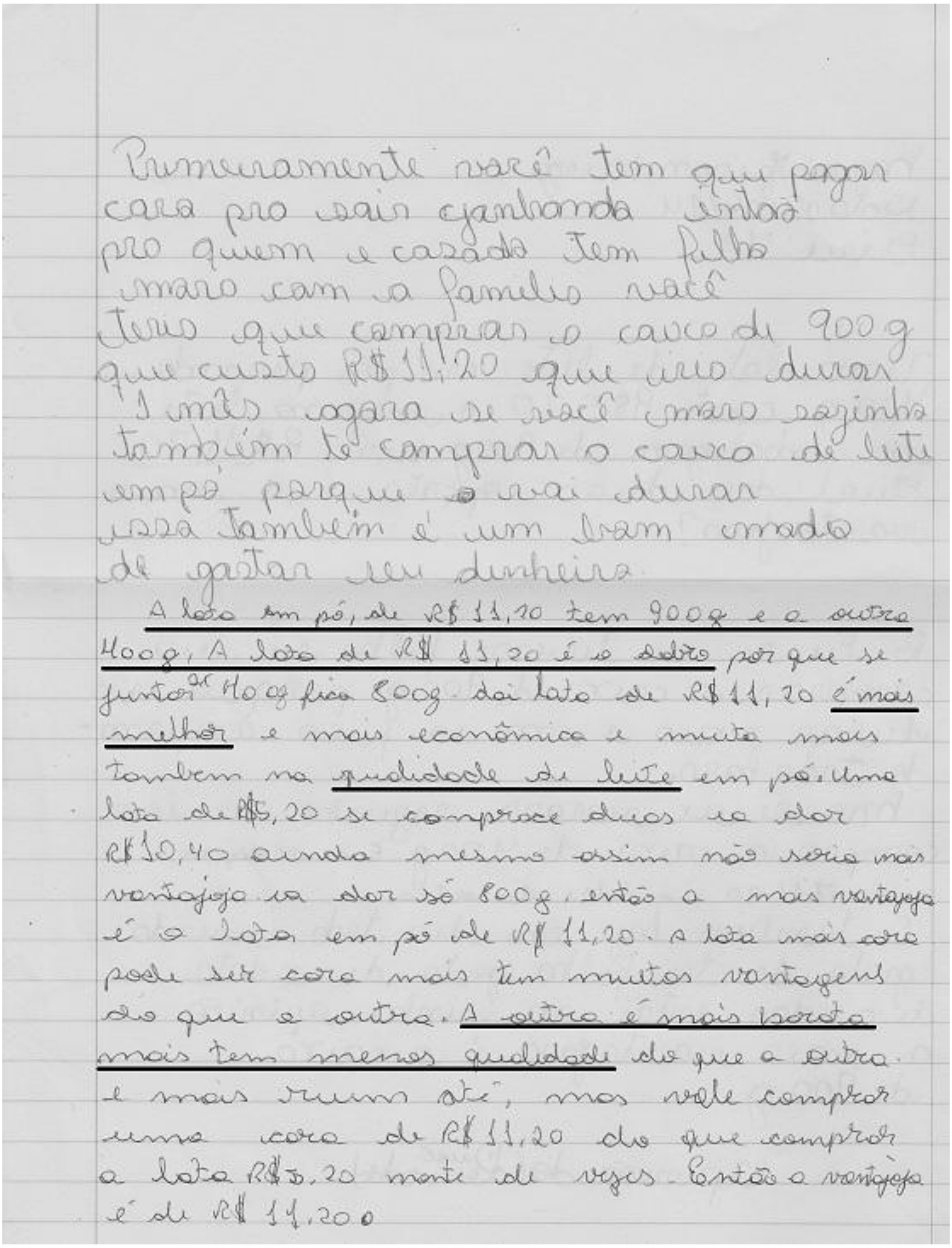
$$\left.\begin{matrix} 400 & - & 5{,}20 \\ 3600 & - & x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 400.x = 3600.5{,}20 \Rightarrow 400.x = 18720 \Rightarrow x = \frac{18720}{400} \Rightarrow x = 46{,}80$$

Ou seja, 3600g da lata de 900g custam R$ 44,80, enquanto as mesmas 3600g da lata de 400g custam R$ 46,80.

Resposta: A lata mais econômica é a de 900g.

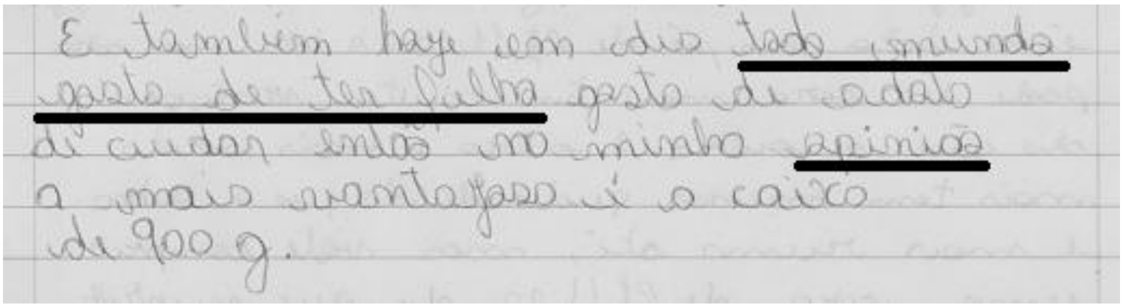
Nota-se que para esta solução, já fizemos uso de outra ferramenta matemática, o“Mínimo, Múltiplo, Comum – M.M.C.” para calcular um peso equivalente aos dois e verificar qual deles seria mais econômico.

Outro aspecto a se notar, é que em todos os casos citados, foi feito uso quase exclusivo da regra de três simples. E esta ferramenta já é conhecida pelos alunos de 7° e 8° ano. Esperava-se que os estudantes ao se depararem com a questão, explorassem isso, pois é uma habilidade que se espera de um estudante deste nível. No entanto,o que se verificou, foi que os estudantes exploraram a questão sob um outro prisma: o da sua realidade. De um modo geral, os estudantes levaram em consideração muitos aspectos. Dentre eles, a possibilidade de morar sozinho, de ser casado, de ter filhos, da duração do leite, de não precisar se deslocar constantemente até um estabelecimento para comprar, etc. Os alunos de um modo geral, também deixaram claro que estavam emitindo uma opinião e não dando uma solução para o problema como se esperava. Acompanhe abaixo, algumas respostas:


Primeiramente você tem que pagar
cara pro sair ganhando então
pro quem é casado tem filho
mora com a familia você
terá que comprar o caixa di 900 g
que custa R$ 11,20 que irá durar
1 mês agora se você mora sozinho
também te comprar o caixa de leite
em pó porque vai durar
essa também é um bom modo
de gastar seu dinheiro
A lata em pó, de R$ 11,10 tem 900g e a outra
400g, A lata de R$ 11,20 é o dobro por que se
juntar as 400g fica 800g. dai lata de R$ 11,20 é mais
melhor e mais econômica e muito mais
também na qualidade de leite em pó. Uma
lata de R$5,20 se comprace duas ia dar
R$10,40 ainda mesmo assim não seria mais
vantajojo ia dar só 800g. então a mais vantajoja
é a lata em pó de R$ 11,20. A lata mais cara
pode ser cara mais tem muitos vantagens
do que a outra. A outra é mais barata
mais tem menos qualidade do que a outra.
é mais ruim até, mas vale comprar
uma cara de R$ 11,20 do que comprar
a lata R$5,20 monte de vezes. Então a vantajoja
é de R$ 11,20.

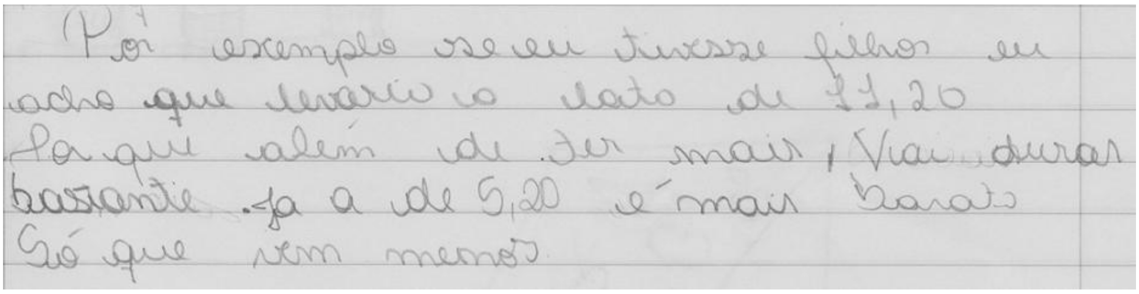
Nota-se que nesta resposta dada por uma turma de 7° ano, temos alguns pontos bastante interessantes a notar. Em relação a proposta do experimento, temos que estes alunos levaram em consideração até mesmo a qualidade do leite, atrelando quantidade a qualidade (Vide parte final da figura, onde está sublinhado). Outro aspecto, é que os estudantes falaram que a lata de 900g é o dobro da de 400g, revelando uma carência técnica no conteúdo matemático.

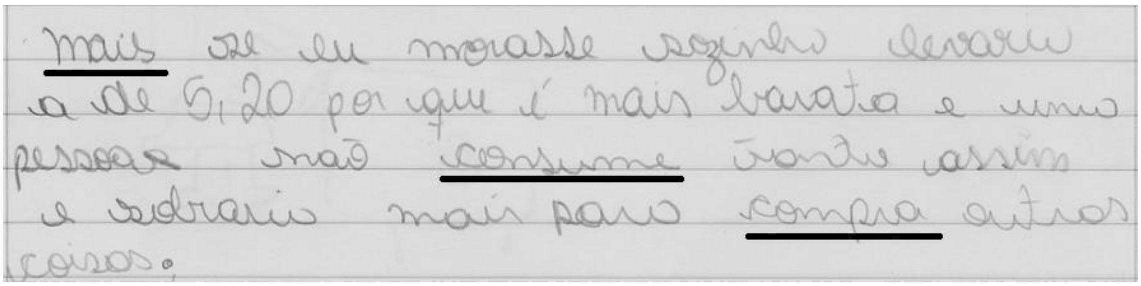
Com relação aos demais aspectos desta resposta em particular, é que podemos observar erros de concordância quando o aluno diz “mais melhor”, e também confunde “mas” com “mais”. Mas de um modo geral, explorou-se a realidade do seu cotidiano para produzir esta resposta. Acompanhe abaixo, outro trecho destes mesmos alunos:


E também haje em dia todo mundo
gosta de ter filho gosto de cidado
di cuidar então no minha opinião
a mais vantajosa é a caixa
de 900 g.

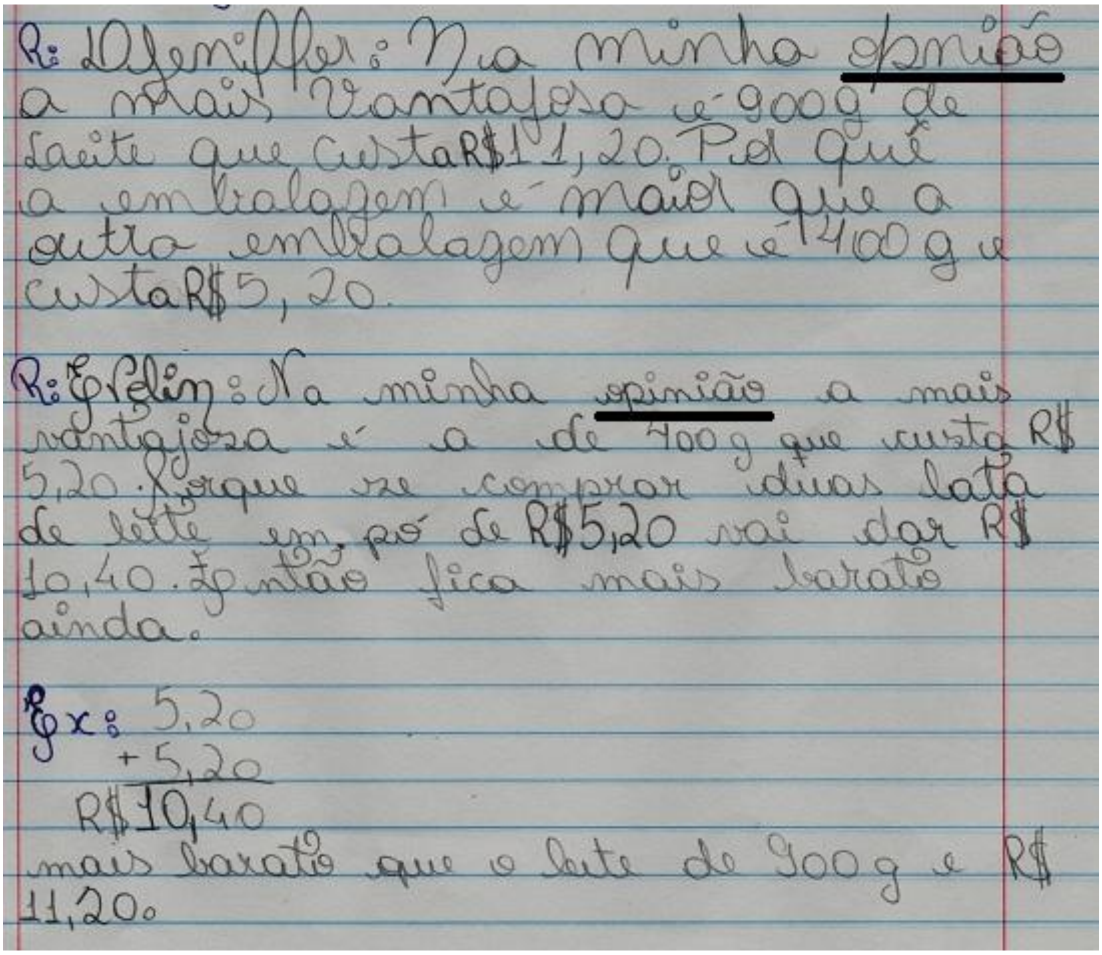
Veja que o aluno menciona algo que para ele parece ser um fato: “Todos gostam de ter filhos”. E para solucionar a questão ele se baseia então na sua opinião.

Seguem abaixo, outras respostas:


Por exemplo se eu tivesse filhos eu
acho que levaria a lata de 11,20
Porque além de ter mais, Vai durar
bastante. Já a de 5,20 é mais barato
Só que vem menos


mais se eu morasse sozinho levaria
a de 5,20 por que é mais barata e uma
pessoa não consume tanto assim
e sobraria mais para compra outros
coisas.

Aqui, mais um exemplo de erros de português, onde o estudante confunde “mas” com “mais”, “consome” com “consume” e “comprar” com “compra”. E novamente, os estudantes levantam a questão de morar sozinho ou de ter filhos.

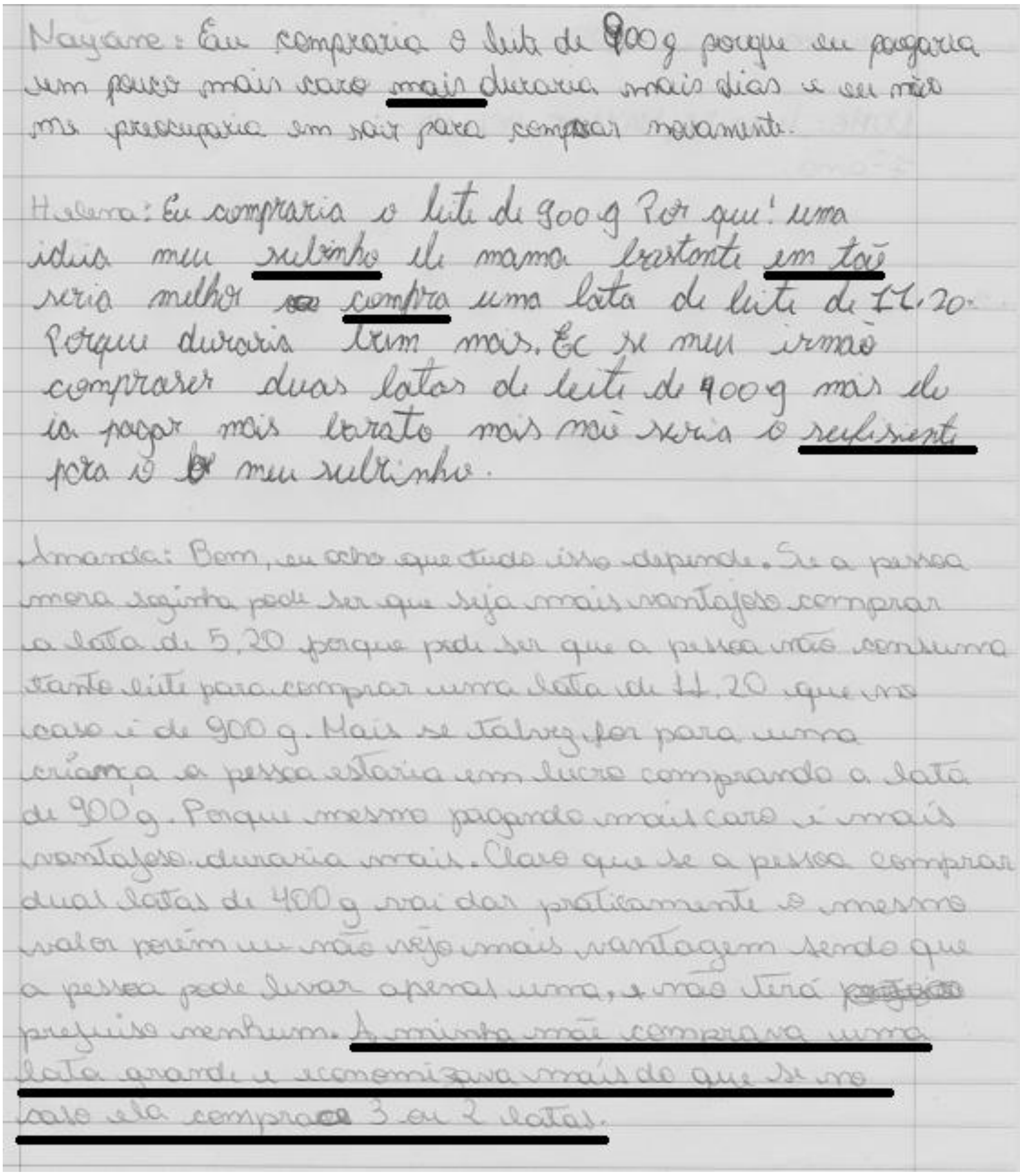


R: Jenifer: Na minha opinião a mais vantajosa é 900g de leite que custa R$ 11,20. Por quê a embalagem é maior que a outra embalagem que é 400 g e custa R$ 5,20.

R: Evelin: Na minha opinião a mais vantajosa é a de 400 g que custa R$ 5,20. Porque se comprar duas lata de leite em pó de R$ 5,20 vai dar R$ 10,40. Então fica mais barato ainda.

Ex: 5,20
+ 5,20
R$ 10,40
mais barato que o leite de 900 g é R$ 11,20.

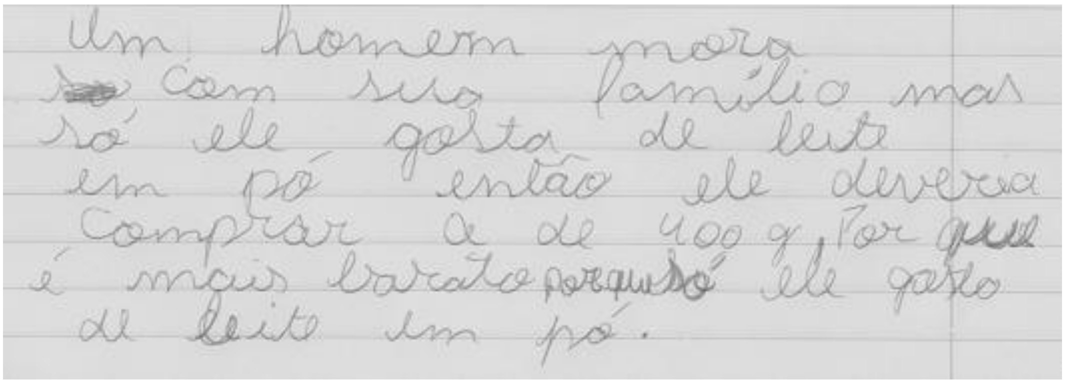
Nesta resposta, as alunas do 7° ano levaram em consideração o preço a ser pago e o tamanho da embalagem.


Nayane: Eu compraria o leite de 900g porque eu pagaria um pouco mais caro mais duraria mais dias e eu não me preocuparia em sair para comprar novamente.

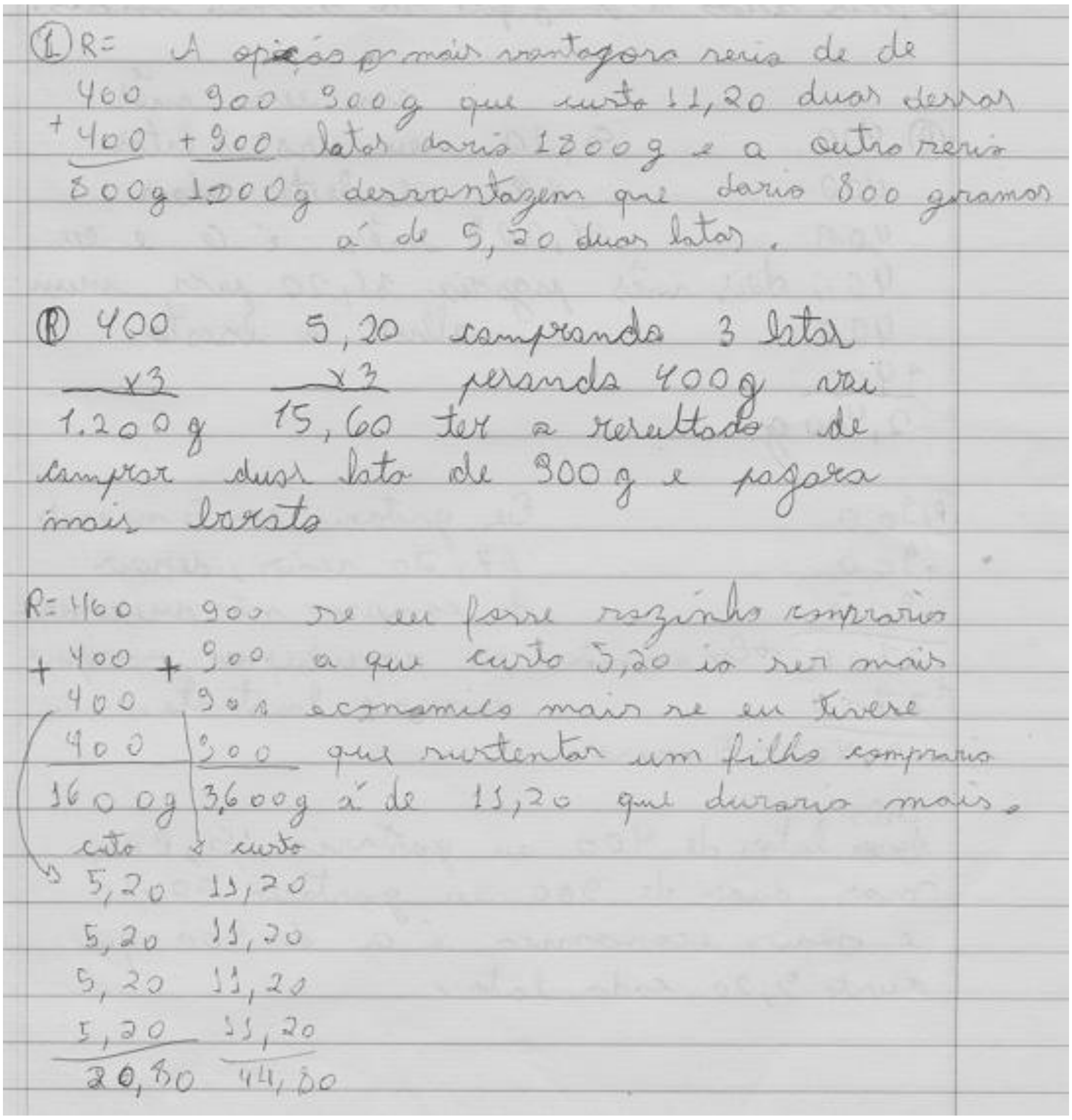
Helena: Eu compraria o leite de 900g Por quê! uma ideia meu sobrinho ele mama bastante em tão seria melhor compra uma lata de leite de 11,20. Porque duraria bem mais. E se meu irmão comprarser duas latas de leite de 400g mas ele ia pagar mais barato mais não seria o suficiente para o meu sobrinho.

Amanda: Bem, eu acho que tudo isso depende. Se a pessoa mora sozinha pode ser que seja mais vantajoso comprar a lata de 5,20 porque pode ser que a pessoa não consuma tanto leite para comprar uma lata de 11,20 que no caso é de 900 g. Mais se talvez for para uma criança a pessoa estaria em lucro comprando a lata de 900g. Porque mesmo pagando mais caro é mais vantajoso duraria mais. Claro que se a pessoa comprar duas latas de 400g vai dar praticamente o mesmo valor porém eu não vejo mais vantagem sendo que a pessoa pode levar apenas uma, e não terá prejuiso nenhum. A minha mãe comprava uma lata grande e economizava mais do que se no caso ela comprasse 3 ou 2 latas.

Na primeira resposta, a aluna de 7° ano, leva em consideração a preocupação em se deslocar até o estabelecimento para fazer a compra. Já na segunda resposta, temos o exemplo do sobrinho da menina para justificar a resposta. Nesta mesma resposta, podemos perceber erros de concordância e grafia. Já na terceira resposta, a menina também cita o exemplo da sua mãe para justificar sua resposta.


Um homem mora
com sua família mas
só ele gosta de leite
em pó então ele deveria
Comprar a de 400 g, Por que
é mais barato porque só ele gasta
de leite em pó.

Aqui, o aluno de 7° ano justificou sua resposta, argumentado que se um homem mora com sua família, mas só ele gosta de leite, seria mais vantajoso comprar a lata de 400g por ser mais barata.


① R= A opção mais vantajosa seria de de
400 900 900g que custa 11,20 duas dessas
+400 +900 latas daria 1800g e a outra seria
800g 1800g desvantagem que daria 800 gramas
a de 5,20 duas latas.

② 400 5,20 comprando 3 latas
x3 x3 pesando 400g vai
1.200g 15,60 ter o resultado de
comprar duas lata de 900g e pagaria
mais barato

R= 400 900 se eu fosse sozinho compraria
+400 +900 a que custa 5,20 ia ser mais
400 900 economico mais se eu tivesse
400 900 que sustentar um filho compraria
1600g 3600g a de 11,20 que duraria mais.
custo custo
5,20 11,20
5,20 11,20
5,20 11,20
5,20 11,20
20,80 44,80

Os alunos do 8° ano tentaram explorar mais a questão, utilizando a linguagem matemática. Perceba que ao lado da justificativa, existem alguns cálculos. Mas novamente, levaram em consideração o fato de morarem ou não sozinho, terem ou não filhos, etc.

De todas as maneiras que os alunos encontraram para resolver a questão, pode-se perceber claramente, que estes abriram mão da matemática e do raciocínio lógico dedutivo, para solucionar a questão através de opiniões e justificativas. Além disso, o experimento revelou uma falha no processo ensino/aprendizagem, tanto da matemática quanto da língua portuguesa.

# Conclusão

Através deste trabalho pode-se constatar de maneira breve que as funções afins, ou seja, as proporcionalidades estão presentes em diversas situações. Seja no cotidiano ou em situações acadêmicas, o estudo da proporcionalidade é um estudo relativamente comum e presente na vida dos estudantes de um modo geral. Por isso mesmo, optou-se por este tema, para que outros acadêmicos possam buscar neste trabalho uma fonte para o desenvolvimento de trabalhos futuros. É possível, a partir de elementos aparentemente simples, desenvolver um bom trabalho e um bom estudo acerca do cotidiano estudantil. Este trabalho não tem a pretensão de finalizar os estudos acerca da proporcionalidade, tampouco ser conclusivo nos seus resultados, apenas tem por objetivo ser um fator indicador de futuras pesquisas. Para resultados mais precisos e conclusivos, seria necessário um espaço de tempo maior, dados mais quantitativos e qualitativos, bem como experimentos mais amplos, feitos em mais ambientes de ensino, o que não ocorreu.

No decorrer das análises das questões escolhidas, retiradas da prova do ENEM de 2012, verificou-se que é possível modelar uma questão, levando em consideração algumas restrições, de modo a enxergá-la como uma proporcionalidade. E mais, é possível a partir destas questões levantar novas questões, que trabalhem a criatividade dos alunos e permitam que se desenvolva o seu potencial intelectual, ajudando a formar cidadãos críticos.

O experimento realizado com alunos de 7° e 8° ano permitiu constatar algumas deficiências tanto técnicas quanto motivacionais por parte dos estudantes, o que me levou a fazer diversas indagações sobre a questão do ensino como um todo, sobre o processo de ensino/aprendizagem. Isto tudo me conduziu a questionamentos de ordem política e social, acadêmica científica, e de valores morais. Pois os resultados técnicos do experimento aplicado não revelam faces, feições, histórias, etc. Mostram apenas que existe algo no ensino que precisa ser revisto, pois o estudo da proporcionalidade é um estudo relativamente comum e que faz parte do cotidiano de cada pessoa, por isso mesmo esperava-se um pouco mais dos alunos.

# Bibliografia


[1] BOYER, C. História da Matemática. 2ª edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

[2] Educação matemática em revista / Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Rio Grande do Sul (SBEM-RS). – vol. 1, n. 10 (2009) – Canoas: Ed. ULBRA, 2009 -. Anual ISSN 1518 - 8221

[3] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. A matemática do ensino médio, v.1, 7° Ed. Rios de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, c2003 – v.1 (Coleção do professor de matemática) ISBN 85 – 85818 – 10 – 7 (v1)

[4] TRAJANO, Antônio Bandeira. Arithmetica Progressiva Illustrada: ensino teórico e prático. 78ª edição de 1948. – Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves.

[5] SILVA, M. H. M. e REZENDE, W. M. Análise Histórica do Conceito de Função. Caderno Dá Licença. Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense. v.2. p. 28-33. Niterói, 1999.

[6] Provas anteriores do ENEM. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores com acesso em 02/04/2014.

[7] ENEM. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/enem com acesso em 02/04/2014.

[8] ENEM. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13318&Itemid=310 com acesso em 02/04/2014.

[9] Parâmetros Curriculares Nacionais. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf com acesso em 16/07/2014.