

Jeferson Rafael Bueno

**INFLUÊNCIA DA FLEXIBILIDADE DE VIGAS DE APOIO NO  
PROJETO DE LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC, da Universidade Federal de Santa Catarina, como parte dos requisitos para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Daniel Domingues Loriggio, Dr.

Florianópolis  
2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Bueno, Jeferson Rafael

Influência da flexibilidade de vigas de apoio no projeto de lajes maciças de concreto armado / Jeferson Rafael Bueno ; orientador, Daniel Domingues Loriggio - Florianópolis, SC, 2013.

196 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Inclui referências

1. Engenharia Civil. 2. Flexibilidade de vigas. 3. Lajes maciças. 4. Análise Estática. 5. Análise dinâmica. I. Loriggio, Daniel Domingues. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

Jeferson Rafael Bueno

**INFLUÊNCIA DA FLEXIBILIDADE DE VIGAS DE APOIO NO  
PROJETO DE LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC.

Florianópolis, 14 de outubro de 2013.

---

Prof. Daniel Domingues Loriggio, Dr. – Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina – ECV/UFSC

---

Prof. Roberto Caldas de Andrade Pinto, PhD.  
Coordenador do PPGEC

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Roberto Chust Carvalho, Dr.  
Universidade Federal de São Carlos – UFScar

---

Prof. Narbal Ataliba Marcellino, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina – ECV/UFSC

---

Prof. Rafael Holdorf Lopez, Ph.D.  
Universidade Federal de Santa Catarina – ECV/UFSC



À minha esposa Rovana, ao meu pai e a minha mãe (*in memoriam*), ao meu sogro e minha sogra, aos meus irmãos e demais familiares, amigos e colegas, a vocês dedico este trabalho. Obrigado!



## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois, sem Ele, eu não teria chegado até aqui.

Agradeço em especial à minha esposa Rovana, amor de minha vida, companheira de todas as horas, que sempre me incentivou, apoiou, aconselhou e me ajudou em todos os sentidos. Essa conquista também é sua!

Agradeço aos meus pais, Valtair e Jussara (*in memoriam*), aos meus irmãos e irmã, e aos pais de minha esposa, Edgar Kinas e Nélcí Kinas, que são exemplos para mim. Obrigado por todo investimento e apoio. Vocês sempre me instigaram a dar o meu melhor e a ser melhor a cada dia.

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Daniel Domingues Loriggio, pela aprendizagem, pelas reflexões, pelo exemplo, pelo olhar crítico, e pelas discussões que me auxiliaram a crescer. Espero poder retribuir, algum dia, por toda ajuda e suporte.

Aos demais familiares e amigos agradeço por estarem torcendo por mim. Ao Pastor José Carlos Venske e à Congregação Trindade pelas orações e pedidos de agradecimento, muito obrigado.

Agradeço também aos colegas do GRUPEX, GEPEND e do GAP, com os quais muito aprendi e pude dividir experiências e opiniões. O companheirismo e a amizade de vocês foram muito importantes durante todo o processo. Agradeço em especial à Ana Carolina, Jhulis, Francisco, Paulo, Lourenço, Elisabeth, Mariana e demais, que foram colegas em disciplinas e grandes amigos.

Agradeço também a Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC), bem como ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), por contribuírem para meu aperfeiçoamento profissional. À secretária do PPGEC, em especial às secretárias do programa, agradeço por toda a ajuda e excelente trabalho que desempenham.

À banca examinadora, agradeço por todas as contribuições para aperfeiçoamento da pesquisa.

Muito Obrigado!



## RESUMO

BUENO, J. R. **Influência da flexibilidade de vigas de apoio no projeto de lajes maciças de concreto armado.** 196 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

Nesta pesquisa realizou-se um estudo numérico sobre a influência da flexibilidade de vigas de apoio na resposta estática e dinâmica de tabuleiros formados por lajes maciças e vigas de concreto armado, em regime elástico-linear. Na resposta estática, é realizada a avaliação da variação de momentos fletores, da área de aço, do detalhamento das armaduras e das flechas das lajes e vigas, em função da relação entre a flexibilidade da laje e da viga. A avaliação da resposta dinâmica é realizada em vibração livre não amortecida, pela qual se obtêm os modos de vibração e os valores das frequências naturais que são comparados com os limites da NBR 6118:2007. Para a análise integrada de pisos de concreto armado constituídos por lajes maciças apoiadas em vigas flexíveis, utilizaram-se o método numérico de Analogia de Grelha (AG) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). O procedimento manual de cálculo de lajes, através de tabelas, é utilizado como um procedimento inicial para determinação de flechas e momentos fletores das lajes e também serve de base para a verificação dos modelos mais complexos. Os resultados desta pesquisa mostram que tanto a resposta estática, quanto a resposta dinâmica, do tabuleiro podem apresentar grande variação devido à alteração da relação entre rigidez à flexão das lajes e vigas de bordo.

**Palavras-chave:** Flexibilidade de vigas; Lajes maciças; Análise Estática; Análise dinâmica.



## ABSTRACT

**BUENO, J. R. Influence of flexibility of support beams in project of solid slabs of armed concrete.** 196 f. Dissertation (Masters in Structures) - Program of Postgraduate in Civil Engineering - PPGEC, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

In this research was realized a numerical study about influence of the flexibility of support beams in static and dynamic response of floors made of solid slabs and beams of reinforced concrete, in linear elastic regime. In static response is evaluated the variation of bending moments, area of steel, reinforcement detailing, and arrows of slabs and beams, depending on the relationship between the flexibility of the slab and beam. The evaluation of dynamic response is performed in free undamped vibration, which obtains the vibration modes and the values of natural frequencies, which are compared with the limits of NBR 6118:2007. For the integrated analysis of concrete floors, made of solid slabs supported on flexible beams, was used the numerical method of Analogy of plane Grids (AG) and the Finite Element Method (FEM). The manual procedure for calculating of slabs, through tables, is used as an initial procedure for determining arrows and bending moments of the slabs, and also provides the basis for the verification of models more complex. The research results show that both the static response as the dynamic response of the pavement, may show large variation due to the change in the relationship between bending stiffness of slabs and beams aboard.

**Keywords:** Flexibility of beams; Solid slabs; Static Analysis; Dynamic Analysis.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esforços internos em um elemento laminar.....	30
Figura 2 – Esforços internos em uma placa delgada.....	32
Figura 3 – Equilíbrio elemento de placa.....	33
Figura 4 – (a) Laje maciça; (b) grelha equivalente .....	41
Figura 5 – Grelha equivalente com 6 barras .....	47
Figura 6 – Sistema dinâmico de um grau de liberdade .....	54
Figura 7 – ações verticais de uma placa quadrada em uma viga periférica.....	56
Figura 8 – Excentricidade entre o eixo da viga e plano médio da laje.....	59
Figura 9 – Seção T.....	61
Figura 10 – Índice de Carga de Ruptura: vigas de apoio iguais entre si .....	62
Figura 11 – Índice de Carga de Ruptura: vigas de apoio iguais duas a duas.....	64
Figura 12 – Índice de Carga de Ruptura para lajes alongadas ( $\gamma=2$ ).....	65
Figura 13 – Índice de Carga de Ruptura para lajes quadradas ( $\gamma=1$ ).....	66
Figura 14 – Tabuleiro de lajes desiguais e vigas flexíveis .....	67
Figura 15 – (a) Visualização do apoio elástico; (b) Diagrama de corpo livre (DCL) da estrutura; (c) DCL do apoio (mola) .....	69
Figura 16 – Tabuleiro I: Pannel contínuo de lajes iguais.....	81
Figura 17 – Tabuleiro II: Pannel contínuo, com lajes desiguais .....	82
Figura 18 – Variação de esforços e deslocamentos, $h = 10$ cm.....	103
Figura 19 – Modos de vibração, $h = 12$ cm.....	112
Figura 20 – Resultados com tabelas de Czerny (kNm/m).....	130
Figura 21 – Variação de esforços (kNm/m) e deslocamentos (mm), $h = 14$ ..	144
Figura 22 – Modos de vibração, $h = 14$ cm.....	149
Figura 23 – Correlação entre variável X e Y .....	191
Figura 24 – Correlação de Pearson para o Tabuleiro I.....	192
Figura 25 – Correlação de Pearson para o Tabuleiro II .....	195



## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Validação Tabuleiro I, Laje = 10 cm .....	88
Gráfico 2 – Validação Tabuleiro I, Laje = 12 cm .....	89
Gráfico 3 – Validação Tabuleiro I, Laje = 15 cm .....	90
Gráfico 4 – Validação Tabuleiro I: Flechas elásticas (cm) .....	91
Gráfico 5 – Relação entre altura $H$ da viga V4 e índice $ILV4$ .....	94
Gráfico 6 – $Mx$ vs. $H$ (MEF) .....	95
Gráfico 7 – $My$ vs. $H$ (MEF) .....	95
Gráfico 8 – $IMx$ e $IMy$ vs. $ILV4$ (MEF).....	95
Gráfico 9 – $IMx$ e $IMy$ vs. $ILV4$ (MEF & Czerny) .....	96
Gráfico 10 – $IMx$ e $IMy$ vs. $ILV4$ (Centro de L1 para $ILv \leq 0,187$ ).....	98
Gráfico 11 – Relação $Mx \div My$ .....	99
Gráfico 12 – Relação $MEF \div Czerny$ .....	100
Gráfico 13 – $IMxe$ vs. $ILV4$ (MEF).....	100
Gráfico 14 – Variação de $Mxe$ para $h = 12$ (MEF) .....	101
Gráfico 15 – Flecha Imediata L1 e V4.....	105
Gráfico 16 – Flecha Final L1 .....	105
Gráfico 17 – Esforço Cortante $Vk$ .....	106
Gráfico 18 – Frequência fundamental de vibração .....	107
Gráfico 19 – FPM, variação Módulo (a); com sinal + ou - (b) .....	108
Gráfico 20 – Frequência de vibração: 2º e 3º modo (MEF) .....	109
Gráfico 21 – Flecha Final L1 vs. 1ª frequência.....	110
Gráfico 22 – Parcelas do momento de inércia .....	115
Gráfico 23 – $IMx$ ( <i>excentricidade</i> ).....	116
Gráfico 24 – $IMy$ ( <i>excentricidade</i> ).....	116
Gráfico 25 – $IMxe$ ( <i>excentricidade</i> ).....	117
Gráfico 26 – $Mxe$ relação com "e" .....	117
Gráfico 27 – $Mx$ com e sem "e" .....	117
Gráfico 28 – $My$ com e sem "e" .....	117

Gráfico 29 – 1ª frequência, com e sem "e" .....	118
Gráfico 30 – 2ª frequência, com e sem "e" .....	119
Gráfico 31 – Momento de inércia à flexão .....	121
Gráfico 32 – Momento de inércia à flexão, $h = 10$ cm .....	122
Gráfico 33 – Índice de Custos: Aço e Concreto .....	126
Gráfico 34 – Índice de Custo Total: Aço + Concreto .....	127
Gráfico 35 – Validação Tabuleiro II: flecha e momento fletor positivo L2.....	131
Gráfico 36 – Validação Tabuleiro II: momento fletor negativo.....	131
Gráfico 37 – $M_x$ para L2 .....	132
Gráfico 38 – Índice $IL2 \div V5$ .....	132
Gráfico 39 – $Im_x$ vs. $H$ .....	133
Gráfico 40 – $Im_x$ vs. $IL2 \div V5$ .....	133
Gráfico 41 – $M_{xe}$ L1-L2, para $h = 12$ cm.....	135
Gráfico 42 – $M_{xe}$ L1-L2, para $h = 14$ cm.....	135
Gráfico 43 – $M_{xe}$ L1-L2, para $h = 15$ cm.....	136
Gráfico 44 – $M_{xe}$ para $h = 14$ cm.....	138
Gráfico 45 – $M_{xe}$ entre L1/L2 .....	140
Gráfico 46 – $Im_{xe}$ para $M_{xe}$ .....	140
Gráfico 47 – Variação de momentos para L2, direção x .....	140
Gráfico 48 – $M_x$ L1 .....	141
Gráfico 49 – $M_y$ L1 .....	141
Gráfico 50 – Relação entre momentos fletores, L1 .....	142
Gráfico 51 – Flecha Final L2.....	145
Gráfico 52 – 1ª frequência.....	145
Gráfico 53 – 2º e 3º modos de vibração.....	147
Gráfico 54 – Razão de variação.....	147
Gráfico 55 – FPM, variação Módulo (a); com sinal + ou - (b).....	148
Gráfico 56 – Flecha final e Frequência, uso: Escritório .....	151
Gráfico 57 – Flecha Total ( $\delta_t - cf$ ) e Frequência, uso: Sala de Dança .....	152
Gráfico 58 – Flecha: carga acidental de $2,00$ kN/m <sup>2</sup> , uso: Escritório .....	153

Gráfico 59 – Flecha: carga acidental de 5,00 kN/m <sup>2</sup> (sem peso próprio).....	154
Gráfico 60 – Quantitativos de Aço e Concreto, Tabuleiro II.....	157
Gráfico 61 – Índice de Custo Total para o Tabuleiro II.....	157
Gráfico 62 – Índice de Flexibilidade $L2 \div V$ para "e".....	159
Gráfico 63 – Parcelas do momento de inércia.....	160
Gráfico 64 – Flecha - Cf [e].....	161
Gráfico 65 – Freq. 1º modo [e].....	161
Gráfico 66 – Freq. 2º modo [e].....	161
Gráfico 67 – Freq. 3º modo [e].....	161
Gráfico 68 – Fator de Participação Modal, H viga.....	162
Gráfico 69 – Fator de Participação Modal, $IL2 \div V$ .....	162
Gráfico 70 – $IMx$ com $J = 1,44 \times I$ .....	185
Gráfico 71 – $IMx$ com $J = 2,00 \times I$ .....	185
Gráfico 72 – $IMx$ com $J = 2,40 \times I$ .....	186
Gráfico 73 – $IMy$ com $J = 1,44 \times I$ .....	186
Gráfico 74 – $IMy$ com $J = 2,00 \times I$ .....	187
Gráfico 75 – $IMy$ com $J = 2,40 \times I$ .....	187
Gráfico 76 – $IMxe$ com $J = 1,44 \times I$ .....	188
Gráfico 77 – $IMxe$ com $J = 2,00 \times I$ .....	188
Gráfico 78 – $IMxe$ com $J = 2,40 \times I$ .....	189
Gráfico 79 – $Mxe$ com $h = 12$ .....	189
Gráfico 80 – Flecha Imediata laje L1 ( $\delta$ ): (a) $h = 10$ , (b) $h = 12$ .....	190
Gráfico 81 – Flecha Imediata L1 e V4 ( $\delta$ ): (a) V4 $h = 10$ , (b) L1 $h = 15$ .....	190



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Rigidez à torção das barras da grelha .....	46
Tabela 2- Pesquisadores, Tipo de Análise, Método .....	58
Tabela 3 – Resultados Laje L2: Tradicional × MEF .....	68
Tabela 4 – Comparativo entre Método Simplificado e MEF não linear .....	68
Tabela 5 – Momentos máximos e mínimos, laje L2, em função de $\beta$ .....	68
Tabela 6 – Frequência crítica, NRB 6118:2007 (Tabela 23.1) .....	74
Tabela 7 – Rigidez à torção das barras da grelha .....	77
Tabela 8 – Avaliação do Coeficiente de Correlação Linear de Pearson .....	80
Tabela 9 – Cargas para o Tabuleiro II (kN/m <sup>2</sup> ) .....	83
Tabela 10 – Verificações para o Tabuleiro I sobre AG .....	86
Tabela 11 – Validação Tabuleiro I: melhor aproximação entre MEF e AG .....	87
Tabela 12 – Valores para o centro de L1 com $h = 10$ cm: MEF e Czerny .....	92
Tabela 13 – Valores para o centro de L1 com $h = 12$ cm: MEF e Czerny .....	92
Tabela 14 – Valores para o centro de L1 com $h = 15$ cm: MEF e Czerny .....	92
Tabela 15 – Resumo Tabuleiro I: Influência da flexibilidade de V4 (MEF) ...	113
Tabela 16 – Tabuleiro I: Custo Aço + Concreto .....	127
Tabela 17 – Resumo da configuração mais econômica .....	128
Tabela 18 – Resumo Tabuleiro II: Limite Estático e Dinâmico .....	155
Tabela 19 – Resumo da configuração econômica: Tabuleiro II .....	158
Tabela 20 – Seções mínimas considerando a excentricidade .....	163
Tabela 21 – Síntese dos Resultados com os Objetivos Específicos .....	165



## LISTA DE SIMBOLOS

### Romanos

$A$	Área da seção transversal, área da laje
$\alpha_f$	Coefficiente (para considerar o efeito da fluência)
$b_f$	Largura da mesa de compressão da seção T
$b_w$	Largura da viga retangular
$[C]$	Matriz de amortecimento
$cf$	Contra-flecha
$d$	Deslocamento
$[D]$	Matriz das propriedades do material
$D_r$	Rigidez à flexão da placa
$e$	Excentricidade entre o plano médio da laje e eixo longitudinal da viga
$E$	Módulo de deformação longitudinal
$E_{cs}$	Módulo de deformação longitudinal secante
$F$	Força
$f_{01}$	Frequência fundamental de vibração (primeira frequência)
$f_{crit}$	Frequência crítica de vibração
$f_c$	Resistência à compressão do concreto
$f_{ck}$	Resistência característica à compressão do concreto
$f_{ct}$	Resistência do concreto à tração direta
$G$	Módulo de elasticidade transversal do material
$h$	Espessura da laje (placa), ou altura da viga para seção T
$h_f$	Espessura da mesa de compressão da seção T
$H$	Altura da viga retangular
$Hz$	Hertz (unidade de frequência)
$I$	Momento de inércia da seção de concreto simples
$I_L$	Índice de flexibilidade da laje
$I_M$	Índice adimensional de momento fletor
$I_V$	Índice de flexibilidade da viga
$I_{LV}$	Índice adimensional de flexibilidade entre laje e viga
$J$	Constante de torção
$K$	Rigidez à flexão de barras
$l_x$	Menor direção da laje

$l_y$	Maior direção da laje
$m$	Metro (comprimento linear) / momento de ruptura
$M_x$	Momento fletor positivo na laje, direção x
$M_y$	Momento fletor positivo na laje, direção y
$M_{xe}$	Momento fletor negativo, direção x
$M_{ye}$	Momento fletor negativo, direção y
$M_{xy}$	Momento torçor
$MPa$	Mega Pascal
$[N]$	Matriz que contém as funções de interpolação
$p$	Carga
$r$	Coefficiente de correlação linear de Pearson
$Q_T$	Carregamento total na laje
$R$	Raio de curvatura
$r_e$	Vetor de carga nodal consistente
$S_{dim}$	Esforço de dimensionamento
$\{u\}$	Vetor de deslocamento
$V$	Volume

## Gregos

$\alpha$	Constante de torção para vigas retangulares
$\beta$	Coefficiente
$\gamma$	Relação entre vãos da laje
$\varepsilon$	Deformação específica
$\delta = a_{t,0}$	Flecha elástica imediata de lajes e vigas
$\delta t = a_{t,\infty}$	Flecha total de lajes e vigas, considerando o efeito da fluência
$\mu_E$	Coefficiente de redução à torção
$\nu$	Coefficiente de Poisson do concreto
$\sigma$	Tensão
$\psi_c$	Preço do metro cúbico de concreto (R\$/m <sup>3</sup> )
$\psi_s$	Preço do quilograma força de aço (R\$/kgf)
$\psi_{c/s}$	Relação entre custos de concreto e aço
$\psi_t$	Índice de custo total

As grandezas representadas pelos símbolos estão sempre expressas em unidades do Sistema Internacional (SI).

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>25</b>
1.1	JUSTIFICATIVA.....	26
1.2	OBJETIVOS.....	27
<b>1.2.1</b>	<b>Objetivo Geral .....</b>	<b>27</b>
<b>1.2.2</b>	<b>Objetivos Específicos.....</b>	<b>27</b>
1.3	ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS .....	28
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>29</b>
2.1	MODELAGEM DE TABULEIROS .....	29
2.2	TEORIA DE PLACAS E CASCAS.....	29
2.3	TEORIA DE PLACAS DELGADAS .....	31
2.4	MÉTODOS TRADICIONAIS DE CÁLCULO DE LAJES.....	39
2.5	ANÁLISE POR ANALOGIA DE GRELHA (AG) .....	40
2.6	RIGIDEZ À TORÇÃO DE VIGAS .....	48
2.7	ANÁLISE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF).....	49
2.8	EQUAÇÕES DA SOLUÇÃO ESTÁTICA E DINÂMICA .....	53
2.9	ESTUDOS SOBRE A FLEXIBILIDADE DAS VIGAS DE APOIO.....	56
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>73</b>
3.1	MODELOS PARA ANÁLISE ACOPLADA DE TABULEIROS.....	73
3.2	OBTENÇÃO DA RESPOSTA ESTÁTICA .....	76
3.3	OBTENÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA .....	76
3.4	ANÁLISE COM USO DE TABELAS.....	76
3.5	ANÁLISE COM A ANALOGIA DE GRELHA (AG) .....	77
3.6	ANÁLISE COM MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF) .....	77
3.7	VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO .....	78
3.8	ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	78
3.9	TABULEIROS PARA ESTUDO.....	80
<b>3.9.1</b>	<b>Tabuleiro I .....</b>	<b>80</b>
<b>3.9.2</b>	<b>Tabuleiro II.....</b>	<b>82</b>

<b>4</b>	<b>ANÁLISES NUMÉRICAS.....</b>	<b>85</b>
4.1	ANÁLISE E RESULTADOS: TABULEIRO I.....	85
4.1.1	Validação do Modelo Numérico: Tabuleiro I .....	85
4.1.2	Influência da flexibilidade dos apoios.....	93
4.1.3	Flexibilidade e excentricidade entre laje e viga .....	114
4.1.4	Excentricidade e Seção T .....	120
4.1.5	Definição do modelo e configuração mais adequada.....	123
4.2	ANÁLISE E RESULTADOS: TABULEIRO II .....	129
4.2.1	Validação do Modelo Numérico: Tabuleiro II.....	129
4.2.2	Influência da flexibilidade dos apoios.....	132
4.2.3	Relação entre Resposta Estática e Resposta Dinâmica .....	150
4.2.4	Configuração geométrica mais econômica .....	155
4.2.5	Influência da Excentricidade.....	159
4.3	SÍNTESE DOS RESULTADOS EM RELAÇÃO AOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	164
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES.....</b>	<b>167</b>
5.1	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES SOBRE FLEXIBILIDADE DE VIGAS DE APOIO .....	167
5.2	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES SOBRE MODELAGEM DE TABULEIROS .....	170
5.3	RECOMENDAÇÕES PARA APLICAÇÃO EM PROJETO .....	172
5.4	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	173
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>175</b>
	<b>APÊNDICE A.....</b>	<b>185</b>
	<b>APÊNDICE B.....</b>	<b>191</b>
	<b>APÊNDICE C.....</b>	<b>195</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Inúmeros projetos de pisos (tabuleiros) de concreto armado são realizados diariamente em escritórios pelo mundo todo, totalizando milhares de metros quadrados de painéis formados por lajes e vigas. Nos andares constituídos por lajes e vigas, a união desses elementos pode ser denominada **tabuleiro**, pois os termos piso e pavimento podem ser confundidos com pavimentação (PINHEIRO, 2007a). Durante a modelagem dos edifícios com tabuleiros constituídos por lajes e vigas, as dimensões desses elementos estruturais, geralmente, são determinadas de modo a suportar os carregamentos, apresentando um bom desempenho em serviço, sem possuir deformações acima do limite normativo.

O cálculo dos esforços solicitantes, nos tabuleiros de concreto armado, é uma tarefa de grande importância dentro do projeto estrutural de edifícios e, nessa perspectiva, ressalta-se a importância da deformabilidade e excentricidade entre esses elementos estruturais. Há estudos que evidenciam a necessidade de considerar a flexibilidade laje/viga na resposta estática e dinâmica, mas quais os fatores que a influenciam? Será que a precisão dos resultados é prejudicada pela não consideração desses efeitos? E como se pode considerá-los em uma análise acoplada do tabuleiro? Essas são algumas questões pertinentes quando se deseja estudar o efeito da flexibilidade das vigas de apoio na análise e projeto de painéis de lajes.

Os tradicionais métodos manuais de dimensionamento de lajes, com o uso de tabelas, consideram as mesmas com vigas de apoio indeformáveis, o que é uma simplificação válida para tempos em que os cálculos eram realizados manualmente. Nos últimos anos, os computadores passaram a ter um papel importante nos escritórios de engenharia, nos quais os extensos e complicados cálculos manuais são substituídos pelo cálculo computacional. Assim, esse avanço agora permite realizar análises mais complexas e completas das estruturas.

Como a flexibilidade (inverso da rigidez) influencia nos resultados da resposta estática e dinâmica (LEITE, 2012; MAZZILLI, 1988, 1995), existem várias pesquisas que investigam o efeito da deformabilidade das vigas de apoio (Tabela 2), porém não fazem recomendações claras e práticas em relação a este assunto. Contudo, os escritórios de projetos necessitam de recomendações que descrevam os cuidados, limites e práticas para o cálculo de tabuleiros formados por vigas e lajes de concreto armado.

Dessa forma, este estudo comparou o método tradicional de cálculo de lajes maciças com o cálculo computacional através de métodos numéricos, como Analogia de Grelha (AG) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Esta pesquisa realiza a análise e cálculo do tabuleiro da estrutura de forma integrada, com algumas simplificações, com enfoque especial na continuidade dos esforços das lajes, de modo a considerar a interação entre estes elementos.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

Estudos verificam que o procedimento simplificado de cálculo de lajes, com uso de tabelas, não é adequado para lajes com vigas de apoio flexíveis (ARAÚJO, 2008, 2009; MAZZILLI, 1988, 1995; REIS, 2007; STRAMANDINOLI, 2003). Em tabuleiros formados por lajes e vigas de concreto armado, a flexibilidade entre lajes e vigas de bordo e a excentricidade entre os eixos desses elementos estruturais influenciam sensivelmente a resposta estática (MAZZILLI, 1988, 1995) e a resposta dinâmica (LEITE, 2012; LEITE *et al.*, 2010; PAULA, 2007).

Portanto, é necessário estudar o comportamento qualitativo das lajes com apoios flexíveis e, assim, verificar o efeito da flexibilidade dos apoios na resposta estática (deslocamentos, esforços cortantes e momentos fletores positivos e negativos - valores e forma) e dinâmica (frequências e modos de vibração). Assim sendo, a pesquisa dará indicações do efeito da flexibilidade dos apoios para a comparação com tabelas da teoria das placas em regime elástico-linear.

Outra justificativa para esta pesquisa é verificar a influência da flexibilidade laje/viga e excentricidade entre esses elementos, no dimensionamento e detalhamento das armaduras de lajes maciças, pois este estudo poderá ajudar no aprimoramento dos modelos atualmente usados em programas comerciais. Já o estudo da resposta dinâmica pode mostrar que a influência da flexibilidade dos apoios altera os valores das frequências naturais do sistema (laje + vigas), e, assim, o tabuleiro pode não atender aos limites da utilização, preconizados na NBR 6118:2007.

Este estudo limita-se a tabuleiros de estruturas de edifícios residenciais ou comerciais, formados por lajes maciças e vigas de concreto armado, nos quais as análises consideram a linearidade física e geométrica. As ações aplicadas nos modelos numéricos não possuem variação significativa no tempo, cargas estáticas, assim a análise dinâmica é realizada em vibração livre sem a consideração de amortecimento.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo Geral

Analisar a influência da flexibilidade das vigas e lajes maciças, no projeto de tabuleiros de concreto armado.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Averiguar o comportamento do conjunto laje/viga em tabuleiros de edifícios de concreto armado em comportamento elástico-linear;
- Analisar o efeito da continuidade dos esforços de lajes contíguas apoiadas sobre vigas deformáveis;
- Realizar o estudo comparativo entre resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos, Analogia de Grelha e processos tradicionais simplificados (tabelas de lajes), considerando a deformabilidade das vigas de apoio e a excentricidade entre laje e viga;
- Determinar até que ponto da relação de flexibilidade laje/viga é lícito calcular painéis de lajes, com o uso de métodos tradicionais simplificados (tabelas de lajes);
- Verificar a alteração no detalhamento das armaduras de lajes, devido à relação entre rigidez da laje com a rigidez das vigas de apoio;
- Determinar a influência da flexibilidade das vigas de apoio na resposta dinâmica (frequências e modos de vibração) de painéis de lajes;
- Comparar os resultados da análise dinâmica, considerando a flexibilidade das vigas de apoio e excentricidade entre laje e viga, com os limites propostos pela norma de projeto NBR 6118:2007, sob o ponto de vista do conforto humano;
- Recomendar critérios para aplicação em projetos de tabuleiros de concreto armado, formados por lajes e vigas flexíveis.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS

Segue-se breve resumo dos demais capítulos deste trabalho:

Capítulo 2 – São descritos os aspectos teóricos para análises de tabuleiros de concreto armado. Apresenta as bases da Teoria de Placas e o equacionamento do problema, à luz da Teoria da Elasticidade. O método aproximado de cálculo de lajes por tabelas é apresentado, com os seus aspectos teóricos e limitações. Em seguida, descreve-se a teoria em que se embasa o Método de Analogia de Grelha e o Método dos Elementos Finitos. O problema dinâmico aplicado à Engenharia de Estruturas também é apresentado, com enfoque em estruturas não amortecidas em vibração livre. Por fim, apresenta-se um resumo bibliográfico sobre os estudos que envolvem o termo flexibilidade/deformabilidade de apoios de lajes.

Capítulo 3 – É descrita a metodologia utilizada nesta pesquisa. Desde os métodos de análises, estruturas a serem estudadas, condições de análises, verificações, limitações e restrições, bem como os procedimentos a serem utilizados na análise dos dados.

Capítulo 4 – As análises numéricas são realizadas, seguidas de análises e discussão de resultados. A influência da flexibilidade das vigas de apoio na resposta estática e dinâmica, de tabuleiros de concreto armado, é investigada. Fazem-se estudos comparativos e inferências sobre as inter-relações dos resultados.

Capítulo 5 – Apresentam-se as considerações finais, conclusões e recomendações para estudos de tabuleiros com vigas flexíveis e estudos sobre a temática.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 MODELAGEM DE TABULEIROS

O cálculo dos esforços solicitantes nos pisos de concreto armado, formados por vigas e lajes maciças, é uma tarefa de grande importância dentro do projeto estrutural de edifícios. A rigor, somente através de uma análise não linear podem-se obter resultados precisos para a resposta estática e dinâmica (ARAÚJO, 2008; MAZZILLI, 1995).

A análise dos esforços e deslocamentos em lajes utilizando tabelas, método tradicional manual, garante o equilíbrio estático do tabuleiro, porém, pelo fato de não considerar a continuidade entre lajes e o comportamento conjunto entre laje e viga, há uma perda de precisão associada ao método. Os métodos computacionais permitem considerar esse comportamento monolítico entre laje e viga, então, mesmo em uma análise elástico-linear podem-se obter resultados mais adequados de esforços e deslocamentos.

Os métodos numéricos mais utilizados por projetistas, para modelagem de tabuleiros, são o Método dos Elementos Finitos (MEF), Método das Diferenças Finitas e o Método de Analogia de Grelha (AG). Diversos cuidados devem ser tomados sobre a utilização de qualquer método numérico. Sobre as condições de convergência e a precisão do MEF, estas não dependem apenas da formulação, mas também da escolha da malha e do tipo de elemento utilizado na discretização do problema, sendo necessário que a modelagem seja adequada (HENNRICH, 2003). Sobre o uso do MEF, devem-se tomar cuidados em relação ao grau de discretização, tipos de elementos, definição dos graus de liberdade ativos da análise, regiões de descontinuidade geométrica e de introdução de esforços, sistemas de referência para esforços internos e externos e interpretação dos resultados obtidos por via gráfica e por meio de relatórios de tensões (CIFÚ *et al.*, 2000).

### 2.2 TEORIA DE PLACAS E CASCAS

Placa é um elemento de superfície plana com carregamento normal (ortogonal) a essa superfície, em que uma das dimensões (espessura) é muito menor que as demais. Define-se como espessura “h” da placa a menor das três dimensões, e a superfície média como sendo aquela que passa pelos pontos médios do segmento que determina a altura em cada ponto da placa (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959). As placas podem ser classificadas como finas, em

---

Mestrando: Jeferson Rafael Bueno

Orientador: Daniel Domingues Loriggio

geral para  $h < 0,1 \cdot l_y$ , ou espessas, em geral para  $h > 0,1 \cdot l_y$ , em que “ $h$ ” é a espessura da placa e  $l_y$ , a maior dimensão.

O cálculo dos esforços nas placas pode ser realizado através de métodos clássicos ou métodos de ruptura. Métodos clássicos são fundamentados na teoria da elasticidade, supondo que o material é homogêneo e isotrópico e se comporta elasticamente, e os métodos de ruptura são fundamentados na teoria da plasticidade, a qual supõe que o material tenha um comportamento plástico (HENNRICHS, 2003; PUEL, 2009).

De maneira geral, placas e cascas estão submetidas à ação de oito esforços internos: duas forças normais ( $F_{11}, F_{22}$ ), uma força tangencial ( $F_{12}$ ), dois momentos fletores ( $M_{11}, M_{22}$ ), um momento volvente ( $M_{12}$ ) e duas forças cortantes ( $F_{13}, F_{23}$ ) (SCHULZ *et al.*, 2006, 2009). A Figura 1 exibe as forças e momentos por unidade de comprimento para um elemento de placa.

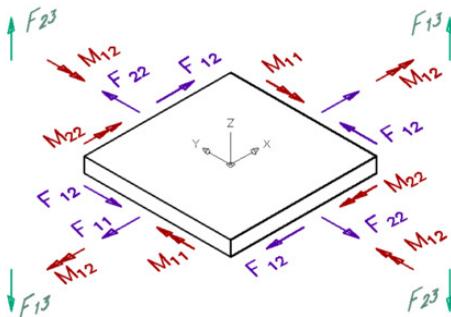


Figura 1 – Esforços internos em um elemento laminar  
Fonte: Schulz *et al.* (2006).

De acordo com os conceitos da Mecânica das Estruturas, o dimensionamento de uma placa pode ser dividido em duas etapas (SCHULZ *et al.*, 2006):

- Dimensionamento dos momentos e forças no plano do elemento, onde são consideradas as três forças no plano, esforços normais  $F_{11}$ ,  $F_{22}$  e esforço tangencial  $F_{12}$ , e os três momentos, fletores  $M_{11}$  e  $M_{22}$  e o momento volvente  $M_{12}$ . Esta etapa é iniciada através do dimensionamento à flexão composta nas duas direções.

- Na segunda etapa, é realizado o dimensionamento em função das forças transversais, onde são consideradas as forças cortantes  $F_{13}$  e

F<sub>23</sub>. Em Schulz e D'Avila (2010), é mostrada uma metodologia para analisar cascas com forças cisalhantes transversais, que é uma solução promissora para projeto de cascas de concreto armado.

O dimensionamento de estruturas laminares de concreto armado demanda novas pesquisas, visto que a consideração dos oito esforços deixa o problema mais trabalhoso. Existem alguns métodos que possuem aplicabilidade na prática de projeto, como a formulação clássica de Baumann (1972) que divide o problema de dimensionamento de uma casca, sujeita a momentos fletores e volventes, no dimensionamento de duas placas situadas junto às faces z- e z+. Essa formulação possui a limitação de estimar o braço de alavanca e não permitir considerar armaduras de compressão (SCHULZ *et al.*, 2006, 2009). Há também o modelo mecânico, apresentado em Schulz (1988), que é um modelo mais geral e pode ser no futuro utilizado na prática de projeto, pois não apresenta as limitações da formulação clássica de Baumann (1972), (SCHULZ *et al.*, 2006, 2009).

Por não ser objetivo deste trabalho o dimensionamento de armaduras de cascas, recomendam-se as bibliografias citadas anteriormente para maior esclarecimento e entendimento das formulações, tanto de dimensionamento quanto de verificação.

## 2.3 TEORIA DE PLACAS DELGADAS

Uma simplificação para o estudo de placas pode ser realizada com a Teoria de Kirchhoff ou com a Teoria de Kirchhoff-Love, esta última é uma modificação da primeira realizada por Love (1888) (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959). Para o estudo de placas delgadas, estas são consideradas finas e com pequenas deflexões.

A Teoria de Kirchhoff-Love é apropriada para placas delgadas (finas), ou seja,  $0,20 \leq R/h$ , em que R é o raio de curvatura e h a espessura. A maioria das estruturas de interesse prático na engenharia satisfaz esse critério (KIENDL *et al.*, 2009, 2010). O grande atrativo dessa teoria é que a formulação é baseada puramente em deslocamentos, e nenhum grau de liberdade de rotação é necessário (KIENDL *et al.*, 2010).

Nesta pesquisa usa-se a Teoria Kirchhoff para o estudo de placas delgadas, cujas hipóteses fundamentais são (ARAÚJO, 2010; LOVE, 1888; TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959):

- Material elástico-linear (obedece à lei de Hooke);

- Material homogêneo (mesmas propriedades físicas e mecânicas em todos os pontos);
- Material isotrópico (mesmas propriedades físicas e mecânicas em todas as direções);
- A placa indeformada é plana;
- A espessura  $h$  é pequena em relação às outras dimensões da placa;
- Cargas dinâmicas e estáticas são aplicadas perpendicularmente à superfície da placa;
- As tensões normais à superfície média são desprezíveis ( $\sigma_z \cong 0$ );
- Os deslocamentos verticais são muito pequenos em relação à espessura  $h$ , sendo possível desprezar a não linearidade geométrica (influência dos deslocamentos no estudo das condições de equilíbrio do elemento de placa);
- As deformações devidas ao cisalhamento são desprezadas.

Um elemento de placa delgada está submetido à ação de seis esforços internos: momentos fletores ( $M_{11}, M_{22}$ ), momentos volventes ( $M_{12}, M_{21}$ ) e forças cortantes ( $F_{13}, F_{23}$ ). A Figura 2 exhibe os esforços considerados em um elemento da placa delgada.

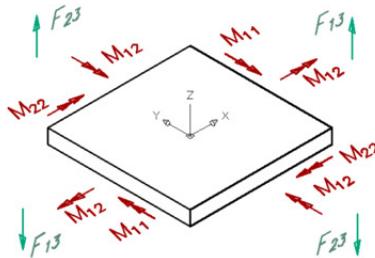


Figura 2 – Esforços internos em uma placa delgada

Os pressupostos básicos para a Teoria de Kirchhoff (flexão de placas) são muito semelhantes aos da Teoria Viga de Euler-Bernoulli. Uma das premissas mais importantes para ambas as teorias é que os pontos pertencentes antes da deformação a retas normais à superfície média encontram-se, após a deformação, sobre retas perpendiculares à superfície média deformada. Em outras palavras, a deformação transversal é negligenciada (KWON e BANG, 1996).

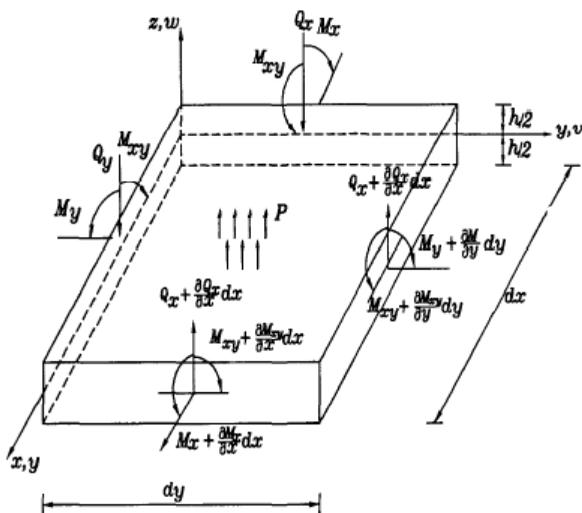


Figura 3 – Equilíbrio elemento de placa  
Fonte: Kwon e Bang (1996).

Como é desprezada a deformação transversal, devido ao cisalhamento, as deformações podem ser escritas como mostra a equação (2.1).

$$\{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\} = -z\{k_x \quad k_y \quad k_{xy}\}, \quad 2.1$$

O vetor  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T$  corresponde às deformações. A curvatura é dada pela equação abaixo, em que a deformada da placa delgada, submetida a cargas normais ao seu plano, é definida pela função  $w = w(x, y)$  (deslocamento transversal, deflexão, ao longo do eixo z).

$$\{k\}^T = \{k_x \quad k_y \quad k_{xy}\} = \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}. \quad 2.2$$

Para o estado plano de tensões e material isotrópico, a equação constitutiva do material é:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad 2.3$$

com  $\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T$  que denota as tensões, e  $[D]$  é a matriz das propriedades do material.

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}, \quad 2.4$$

“ $\nu$ ” é o coeficiente de Poisson do material, e “ $E$ ” é o módulo de elasticidade.

Assumindo a condição de estado plano de tensões para a placa deformada, e substituindo a equação (2.1) e (2.2) na equação (2.3), a equação constitutiva passa a ser escrita como:

$$\{\sigma\} = -z[D]\{k\}. \quad 2.5$$

Os momentos são definidos como:

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\}z \, dz. \quad 2.6$$

Em que  $\{M\} = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\}^T$  e “ $h$ ” é a espessura da placa, com:

$M_x \rightarrow$  Momento fletor positivo na direção  $x$  (em torno do eixo  $y$ );

$M_y \rightarrow$  Momento fletor positivo na direção  $y$  (em torno do eixo  $x$ );

$M_{xy} = M_{yx} \rightarrow$  Momento torçor.

Substituindo a equação (2.5) em (2.6), escreve-se a relação entre momentos e curvatura.

$$\{M\} = -[\bar{D}]\{k\}, \quad 2.7$$

e,

$$[\bar{D}] = \frac{h^3}{12} [D]. \quad 2.8$$

As equações de equilíbrio são obtidas através do diagrama de corpo livre (Figura 3). Para isso, utiliza-se as equações de equilíbrio da

Elasticidade, as quais governam o equilíbrio de um elemento sólido (VILLAÇA e GARCIA, 1998; YOUNG, 1989).

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0, \quad 2.9$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0, \quad 2.10$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0. \quad 2.11$$

Agora as equações de equilíbrio podem ser obtidas integrando a equação (2.9) e (2.10) sobre a espessura da placa, depois as multiplicando por  $z$ . As forças de volume são nulas,  $f_x = f_y = f_z = 0$ , assim, têm-se:

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) z \, d_z = \\ & = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + [\tau_{xz}z]_{-h/2}^{h/2} = 0, \end{aligned} \quad 2.12$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) z \, d_z = \\ & = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + [\tau_{yz}z]_{-h/2}^{h/2} = 0. \end{aligned} \quad 2.13$$

Como nas superfícies superior e inferior da placa não há tensões de cisalhamento, ou seja,  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$ , as forças de cisalhamento são dadas por:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz, \quad 2.14$$

e

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \quad 2.15$$

Integrando agora a equação (2.11) sobre a espessura da placa, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) z dz = \\ = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \sigma_z \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_z \left( -\frac{h}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad 2.16$$

Com  $\sigma_z \left( \frac{h}{2} \right) = p$  e  $\sigma_z \left( -\frac{h}{2} \right) = 0$ , a equação (2.16) pode ser escrita incluindo “p” que é a carga (pressão) distribuída na superfície  $+\frac{h}{2}$  da placa. A primeira equação de equilíbrio é obtida pela equação (2.12):

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0. \quad 2.17$$

A segunda equação de equilíbrio é obtida pela equação (2.13):

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \quad 2.18$$

E a terceira equação de equilíbrio é obtida pela equação (2.16):

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0. \quad 2.19$$

Pela equação (2.17), é obtida a expressão de  $Q_x$ , e com a equação (2.18) a expressão de  $Q_y$ . Dessa forma podem ser substituídas a equação (2.17) e (2.18) na equação (2.19), para se obter a Equação Diferencial de Equilíbrio das Placas que é válida em regime elástico e plástico, para placa isotropa ( $0,8 \leq l_x/l_y \leq 1$ ) ou ortótropa ( $0,5 \leq l_x/l_y < 0,8$ ).

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0. \quad 2.20$$

Combinando as equações (2.2), (2.7) e (2.20), é obtida a equação bi-harmônica, em termos de deslocamentos transversais  $w$ . Essa equação, que rege o comportamento de placas delgadas em regime elástico-linear, é chamada de **Equação de Sophie-Germain-Lagrange**, equação (2.21) (ARAÚJO, 2010; KWON e BANG, 1996; YOUNG, 1989).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D_r}. \quad 2.21$$

Em que  $D_r$  é a rigidez à flexão da placa.

$$D_r = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad 2.22$$

A equação dos momentos fletores e do momento torçor para o elemento de placa será:

$$M_x = -D_r \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad 2.23$$

$$M_y = -D_r \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad 2.24$$

$$M_{xy} = -D_r (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad 2.25$$

O esforço cortante (cisalhante) na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente, são (PINHEIRO, 1988):

$$Q_x = -D_r \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad 2.26$$

$$Q_y = -D_r \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad 2.27$$

A solução analítica da equação de Sophie-Germain-Lagrange (2.21) e das equações de momentos fletores e esforços cortantes não são fáceis de serem realizadas, pois, devido às condições de contorno e vinculações da placa, é difícil encontrar uma função  $w(x, y)$  que satisfaça as equações de solução da placa delgada (PINHEIRO, 1988). Para os casos mais simples de geometria e condições de apoio, podem se utilizar, para a integração da equação de Sophie-Germain-Lagrange, séries de Fourier ou Navier, por exemplo.

Diversos métodos foram desenvolvidos ou adaptados ao longo dos anos para a análise de lajes, podendo-se citar os seguintes: Teoria das Grelhas, Teoria das Linhas de Ruptura, Teoria de Flexão de Placas (solução “exata”), Analogia de Grelha, Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos Finitos (ARAÚJO, 2010; CHAPRA e CANALE, 2008). Cada método possui suas características, aplicações e limitações, logo cabe ao engenheiro decidir qual a precisão que se deseja obter na análise. Métodos mais refinados e precisos possuem teoria mais completa, e por isso mais complexa, o que exige maior tempo e cuidado para programação e análise dos resultados.

## 2.4 MÉTODOS TRADICIONAIS DE CÁLCULO DE LAJES

Os chamados métodos tradicionais de cálculos de lajes se referem a métodos aproximados, utilizados para o cálculo da resposta estática elástico-linear de lajes isoladas, geralmente apresentados em forma de tabelas. Em todos os casos de lajes, as tabelas apresentam diferenças entre umas e outras, decorrentes do valor do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), e devido ao truncamento das séries de Fourier (ARAÚJO, 2010). As principais tabelas utilizadas para cálculo de lajes são: Bares (1970) com coeficiente de Poisson  $\nu = 0,15$ ; Kalmanok (1961) com coeficiente de Poisson  $\nu = 0$  (adaptadas por Araújo (2010) para  $\nu = 0,20$ ); Czerny, entre outros (DORNELLES e PEREIRA, 2006). Em relação ao coeficiente de Poisson, a NRB 6118:2007, item 8.2.9, recomenda o valor de  $\nu = 0,20$ , para tensões de compressão menores que  $f_c/2$  e tensões de tração menores que  $f_{ct}$ .

Para a resolução de lajes apoiadas em vigas, com uso de tabelas, não é considerada a deformabilidade do contorno, ou seja, vigas de bordo são idealizadas como apoios rígidos, e também não se considera o efeito da excentricidade entre laje e viga. O inconveniente das tabelas é que geralmente os valores de momentos fletores e flechas são dados no centro da laje que, em alguns casos, não corresponde ao ponto onde os esforços e deslocamentos são máximos. As tabelas tradicionais, geralmente, apresentam valores para a solução de lajes de acordo com a relação entre os vãos, e assim uma laje pode ser classificada como:

- Laje unidirecional ou armada em uma direção ( $l_y/l_x > 2$ ): a laje passa a ser calculada como viga, na menor direção ( $l_x$ ), e na maior direção da laje adota-se uma armadura construtiva;
- Laje bidirecional ou armada em duas direções ( $l_y/l_x \leq 2$ ): calculam-se as armaduras para as duas direções ortogonais da laje.

Papanikolaou e Doudoumis (2001) sugerem tabelas para análise numérica elástica de placas individuais que consideram a possibilidade de levantamento dos bordos da laje em relação aos apoios (“descolamento” entre laje e viga). Este efeito acontece em elementos que não estão monoliticamente ligados, ou seja, a laje apenas “repousa” em cima da viga, ocorrendo geralmente com as lajes apoiadas em alvenaria e em pré-moldados. O levantamento dos bordos da laje (geralmente os cantos) ocorre quando as reações de tração, originadas por momentos, não são combatidas pelas vigas de suporte (PAPANIKOLAOU e DOUDOUMIS, 2001).

A NBR 6118:2007 recomenda que, para a verificação de estados limites de serviço, devem-se considerar os momentos fletores determinados pelo regime elástico. O dimensionamento da armadura das lajes, de acordo com a norma, pode ser feito considerando o estado limite último, permitindo que os momentos fletores possam ser determinados, considerando-se o regime rígido-plástico, através do Método das Linhas de Ruptura, também conhecido como Teoria das Charneiras Plásticas. A norma também permite que este dimensionamento de armaduras possa ser realizado com os valores de esforços obtidos na análise elástica.

## 2.5 ANÁLISE POR ANALOGIA DE GRELHA (AG)

O procedimento numérico de Analogia de Grelha consiste em substituir a placa (laje) por uma malha equivalente de vigas (Figura 4) (CARVALHO e PINHEIRO, 2009). Esse método foi inicialmente idealizado por Marcus em 1932 (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959). Por sua implementação computacional ser muito parecida com o método matricial de pórticos planos, Lightfoot e Sawko (1959) adaptaram um programa de cálculo de pórtico plano para o cálculo de um tabuleiro, utilizando uma malha de grelha, e, posteriormente, o método foi sistematizado por Hambly (1976) (CARVALHO, 1994; LU, LI e SHAO, 2012).

A utilização do método tornou-se recorrente em escritórios de projeto e em trabalhos acadêmicos, por possuir a versatilidade de adequar-se bem a diversos formatos de geometria de lajes (poligonais de formas diversas), ser de fácil compreensão e utilização, relativamente barato, e sua precisão tem sido provada em uma grande variedade de estudos (CARVALHO e PINHEIRO, 2009; CARVALHO, 1994; LU, LI e SHAO, 2012; STRAMANDINOLI e LORIGGIO, 2003). O método é capaz de representar todo o tabuleiro, lajes e vigas, dessa forma, o efeito de deformabilidade das vigas pode ser considerado na análise.

Por ser um método matricial, a laje é associada a uma grelha equivalente que substitui uma seção da laje maciça, de forma aproximada, por um elemento de barra com seção retangular. A estrutura formada por essas barras (malha de vigas) pode ser analisada com a utilização de programas baseados no método da rigidez, o qual utiliza a matriz de rigidez dos elementos da grelha, a equação (2.28) mostra essa matriz do elemento de grelha em relação ao sistema de eixo local.



torçor e distorções angulares, em um determinado ponto, não existe nenhum princípio matemático que garanta que, nas duas direções ortogonais, esse esforço tenha a mesma magnitude (REIS, 2007; STRAMANDINOLI, 2003). Contudo, se a malha da grelha for suficientemente refinada, a deformada da grelha irá se assemelhar a um plano liso, o que possibilita que as distorções sejam praticamente iguais nas direções ortogonais (HENNRICHS, 2003; REIS, 2007).

A ligação entre laje e viga é muito importante, pois, se a laje tiver ligação rígida com a viga de bordo, há transferência de momento torçor para a viga, que é devido ao momento fletor negativo que atua na barra da grelha. Logo, para lajes ligadas rigidamente nas vigas de bordo, há transferência de três esforços para a viga: força vertical (igual ao esforço cortante nas barras da grelha), momento fletor (devido ao momento torçor nas barras da grelha) e momento torçor (devido ao momento fletor negativo nas extremidades das barras da grelha). Para a situação de laje apoiada na viga de bordo, há transferência apenas de força vertical e momento fletor para a viga (ARAÚJO, 2010). Caso o momento torçor atuante nas vigas de bordo seja apenas de compatibilidade, na maioria dos casos, este esforço pode ser desprezado.

A precisão do método de Analogia de Grelha depende basicamente de três parâmetros: rigidez à flexão, rigidez à torção e espaçamento da malha. Quanto à rigidez à torção das barras da grelha equivalente, diversos estudos numéricos já realizaram análises com diferentes valores para a rigidez à torção, contudo, o tema ainda não está totalmente esclarecido. Usam-se as seguintes equações para o cálculo da rigidez da grelha equivalente, materiais isotrópicos homogêneos:

- Rigidez à flexão das barras da grelha equivalente:

$$K = \frac{E_{cs}}{(1 - \nu^2)} I. \quad 2.29$$

- Rigidez à torção (GJ) das barras da grelha equivalente:

$G = \frac{E_{cs}}{2(1+\nu)}$  é o módulo de elasticidade transversal do material e  $J$  é a constante de torção.

$$GJ = \frac{E_{cs}}{2(1 + \nu)} J. \quad 2.30$$

Segundo Araújo (2010), a constante de torção é dada por:

$$J = \beta(2I). \quad 2.31$$

Substituindo (2.31) em (2.30):

$$GJ = \beta \frac{E_{cs}}{(1 + \nu)} I. \quad 2.32$$

Para seção retangular,  $I = \frac{b_w H^3}{12}$  é o momento de inércia à flexão das barras longitudinais e transversais, ou seja, das vigas equivalentes, e  $E_{cs} = 0,85 \cdot 5600 \sqrt{f_{ck}}$  é o módulo de elasticidade secante.

O coeficiente de redução da rigidez à torção  $\beta$  deve ser menor ou igual a 1, ou seja,  $\beta \leq 1$  (ARAÚJO, 2010). Pela teoria de placas ( $\beta = 1$ ), têm-se maiores momentos torçores, e ao reduzir este valor ( $\beta < 1$ ) aumentam-se os momentos fletores e a flecha da laje e a consequente diminuição dos momentos torçores (ARAÚJO, 2010; PAULA, 2007). Para a condição ( $\beta = 1$ ), o valor da constante de torção vale exatamente o dobro do momento de inércia à flexão, equação (2.33).

Alguns trabalhos verificam que valores existentes, na relação entre duas e duas vezes e meia da razão do momento de inércia à flexão sobre a constante de torção, conduzem a uma boa aproximação, quando comparados com resultados de lajes calculadas pela Teoria da Elasticidade (HENNRICH, 2003; REIS, 2007; STRAMANDINOLI e LORIGGIO, 2003). Para a condição  $\beta = 1$  e  $\nu = 0,20$  a rigidez à torção das barras da grelha é dada por (2.34).

$$J = \frac{b_w H^3}{6} = 2 \cdot I, \quad 2.33$$

$$GJ = \frac{E_{cs} I}{1,2}. \quad 2.34$$

Stramandinoli (2003) verifica que, para um dimensionamento elástico de lajes nervuradas, a solução que parece ser mais adequada é desprezar a rigidez à torção das nervuras ( $\beta = 0$ ). Dessa forma, a não consideração da rigidez à torção faz com que os momentos fletores aumentem, e torna os momentos torçores praticamente nulos. Paula (2007) verifica que à medida que se aumenta a relação  $l_x/l_y$ , a

influência da inércia à torção das faixas da grelha não é muito significativa para análises que consideram apoios deslocáveis.

No *software* Eberick, a inércia à torção é configurada internamente, como mostra a equação (2.35) (KOCH, 2010; SILVA, 2005). Em relação ao módulo de elasticidade transversal  $G$ , a NRB 6118:2007 (item 8.2.9) possibilita utilizar a equação (2.36) para o cálculo do módulo de elasticidade transversal (seção não fissurada). O *software* Eberick utiliza esta recomendação da norma.

$$J = 2,5 \cdot I, \quad 2.35$$

$$G = 0,4E_{cs}. \quad 2.36$$

O valor da rigidez à torção das barras da grelha equivalente, no *software* Eberick, pode ser alterado através da configuração redução na torção que é um valor em percentual aqui chamado de  $\mu_E$ . Esse parâmetro define uma redução para o módulo de elasticidade transversal ( $G$ ). O valor máximo de redução à torção das lajes que o *software* permite é  $\mu_E = 99\%$ . Dessa forma, a rigidez à torção das barras ( $GJ$ ) é dada por (2.37) que é obtida pela equação (2.35) e (2.36).

$$GJ = \left( \frac{100 - \mu_E}{100} \right) E_{cs} I. \quad 2.37$$

Relacionando a equação (2.30), que não possui simplificações, com (2.37), utilizada pelo *software* Eberick, tem-se:

$$J = 2,4 \left( \frac{100 - \mu_E}{100} \right) I. \quad 2.38$$

Pela equação (2.38) verifica-se que, ao adotar  $\mu_E = 0$ , o valor da rigidez à torção será o mesmo que utilizar o valor de  $J = 2,4(I)$  na equação (2.30). Para que a equação (2.37) tenha o mesmo valor da equação (2.34) (valor tido com referência por muitas pesquisas, com  $J = 2I$ ), o coeficiente de redução na torção deverá ser  $\mu_E = 16,667$ . Esse número corrige os valores simplificados adotados pelo *software* para  $G$  e  $J$ . O valor recomendado de  $\mu_E$  pelo Eberick é  $\mu_E = 40$  e equivale a utilizar  $J = 1,44(I)$  na equação (2.30).

Em resumo, sobre a constante de torção ( $J$ ), pode-se verificar que não há um valor que represente adequadamente todos os esforços e deformações. Consta-se que, para lajes armadas nas duas direções, a resposta estática elástico-linear é muito dependente da rigidez à torção das barras da grelha (seja laje nervurada ou maciça).

Assim, não há consenso quanto aos valores a serem adotados (ARAÚJO, 2005), porém, de acordo com as pesquisas mostradas na Tabela 1, o valor da constante de torção ( $J = 2 \cdot I$ ) parece ser mais adequado para análises elásticas. Essa relação ( $J = 2 \cdot I$ ) é também a mais empregada na maioria das modelagens com analogia de grelha (ARAÚJO, 2010; CARVALHO, 1994; COELHO, 2009a; PINHEIRO, 1988; REIS, 2007; STRAMANDINOLI e LORIGGIO, 2003).

A carga equivalente nas barras da grelha pode ser calculada com a seguinte equação.

$$p_{eq} = \frac{(g + q)A}{\sum_{i=1}^n l_i}. \quad 2.39$$

Em que “ $g$ ” é a carga permanente e “ $q$ ”, a carga acidental (ambas da laje maciça), “ $A$ ” é a área da laje, o termo “ $\sum_{i=1}^n l_i$ ” representa a soma dos comprimentos das barras da grelha, sendo  $n$  o número de barras da grelha. O esforço de dimensionamento é obtido diretamente, dividindo-se o valor encontrado na grelha pela largura da “faixa” considerada ( $b_w$ ). Em que  $S_{dim}$  é o esforço que será utilizado no dimensionamento, e  $S_{i,j}$  é o esforço obtido na extremidade (inicial  $i$ , ou final  $j$ ) da barra da grelha (REIS, 2007).

$$S_{dim} = \frac{S_{i,j}}{b_w}. \quad 2.40$$

Tabela 1- Rigidez à torção das barras da grelha

<i>GJ</i>	Comportamento da Laje	Pesquisador
$GJ \cong 0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Estudo válido para lajes nervuradas;</li> <li>* Em regime elástico é a solução mais adequada;</li> <li>* <math>M_{Fletor} \rightarrow</math> aumentam;</li> <li>* <math>M_{Torção} \cong</math> nulos.</li> </ul>	Stramandinoli (2003)
$GJ = G \cdot I$	Lajes nervuradas podem ser calculadas como lajes maciças equivalentes, com $GJ$ igual à rigidez à flexão. Em que: $I$ inércia à flexão, com $b_w = 1$ ; $H$ é a espessura equivalente.	Araújo (2003)
$GJ = G \cdot 2 \cdot I$	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Estudo válido para lajes nervuradas;</li> <li>* <math>M_x \rightarrow</math> valores razoáveis;</li> <li>* <math>M_{ex}</math> e <math>M_{ey} \rightarrow</math> valores razoáveis;</li> <li>* <math>M_y \rightarrow</math> não resultou em bons valores, para os casos estudos;</li> <li>* Flechas: valores a favor da segurança.</li> </ul>	Stramandinoli e Loriggio (2003)
	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Resultados concordam muito bem com a teoria de placas;</li> <li>* Grandes momentos torçores;</li> <li>* Exigência das armaduras de canto.</li> </ul>	Araújo (2010)
$GJ = G \cdot 3 \cdot I$	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Estudo válido para lajes nervuradas;</li> <li>* Flechas: parece ser a mais adequada.</li> </ul>	Stramandinoli e Loriggio (2003)

$M_{Fletor} \therefore M_x ; M_y$  - Momento fletor positivo;

$M_{ex} ; M_{ey}$  - Momento fletor negativo;

$M_{Torção}$  - Momento torçor;

Sobre o refinamento da malha, estudos verificam que malhas mais “grosseiras” não apresentam resultados muito aceitáveis, e por outro lado, malhas mais discretizadas não apresentam melhora significativa nos resultados (HENNRICHS, 2003; STRAMANDINOLI, 2003). Segundo Hennrichs (2003), uma malha pode ser considerada adequada se tiver o espaçamento da ordem de 1/10 do vão da laje. Entretanto, alguns autores recomendam que o espaçamento entre os elementos da grelha equivalente não deve ser superior a  $\frac{1}{4}$  do vão (CARVALHO e PINHEIRO, 2009; HAMBLBY, 1976).

Para tabuleiros, deve-se ter o cuidado para que as barras de uma laje devam coincidir com as barras da laje vizinha (estarem ligadas pelo mesmo nó), dessa forma, há uma adequada transferência de esforços entre as lajes.

Em Antunes e Magri (1985) é apresentado o método de equivalência, desenvolvido por Hrennikoff (1941), que é semelhante ao de AG estudado neste tópico. O método exposto por esses autores possibilita simular um elemento placa por uma grelha equivalente de seis barras (Figura 5). O processo de equivalência consiste na substituição da placa por uma grelha, cujas barras têm características elásticas equivalentes. No método, as barras que compõem as diagonais têm somente rigidez à flexão, e as demais possuem rigidez à flexão e à torção. Mais detalhes sobre o processo de equivalência pode visto na bibliografia citada acima.

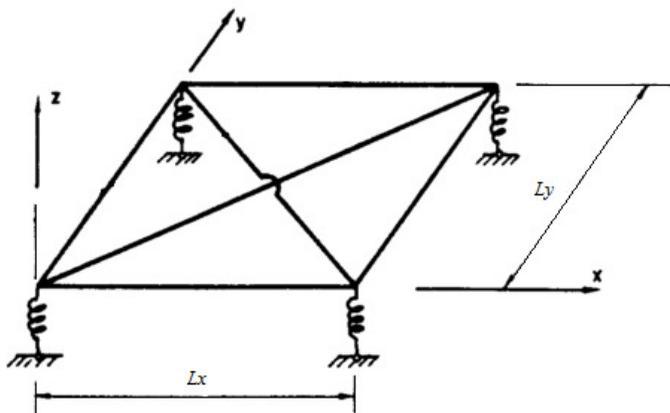


Figura 5 – Grelha equivalente com 6 barras  
Fonte: Antunes e Magri (1985).

## 2.6 RIGIDEZ À TORÇÃO DE VIGAS

Para o estudo e aplicação em critérios de projetos, a rigidez à torção das vigas pode ser diferenciada como torção de equilíbrio e torção de compatibilidade (NRB 6118:2007). A torção de equilíbrio é essencial ao equilíbrio da estrutura, como uma laje em balanço suportada diretamente por uma viga. A torção de compatibilidade é oriunda apenas da compatibilidade entre as deformações dos elementos, e, portanto, pode ser redistribuída pela estrutura sem prejuízo do equilíbrio estático.

Assim a NRB 6118:2007, item 17.5.1.2 (dimensionamento e verificação de elementos lineares), permite desprezar os esforços de torção atuantes em um elemento quando este esforço não for essencial ao equilíbrio da estrutura, e o elemento tenha adequada capacidade de adaptação plástica, calculando os demais esforços sem considerar os efeitos provocados pela torção a ser desprezada. A norma, item 14.6.7.2 (grelhas e nós de pórticos espaciais), permite reduzir a rigidez à torção das vigas por fissuração, utilizando-se 15% da rigidez elástica integral da seção. O atendimento desse item, na análise dos esforços, gera esforços de torção nas vigas, no entanto esses momentos possuem uma ordem de grandeza muito pequena, incompatível com a armadura mínima indicada pela norma (ARAÚJO, 2008). Para o caso de vigas contíguas, Reis (2007) verifica que esse valor, recomendado na NRB 6118:2007, pouco afeta a continuidade dos momentos negativos dos bordos das lajes.

Como nos edifícios usuais, geralmente são adotadas vigas de seção retangular ( $H \gg b_w$ ), estas possuem uma rigidez à torção muito pequena. De maneira geral, pode-se dizer que os resultados sofrem uma alteração desprezível quando se consideram a rigidez à torção das vigas e os momentos negativos das lajes que surgem nos apoios, devido à rigidez à torção das vigas em geral ser muito pequena (vigas com baixa rigidez à torção), dessa forma, a redução da rigidez à torção da viga a torna menos sensível à rotação das lajes (ARAÚJO, 2008, 2010; REIS, 2007). Devido ao inconveniente da necessidade de verificação se a seção transversal da viga é capaz de absorver os esforços oriundos da torção, além de ter de armá-la para suportar tais esforços, alguns estudos não consideram a rigidez à torção das vigas de bordo (ARAÚJO, 2009; PAULA, 2007; STRAMANDINOLI e LORIGGIO, 2003; STRAMANDINOLI, 2003).

Para a aplicação do método de Analogia de Grelha, a rigidez à torção da viga torna-se importante no estudo de lajes idênticas sobre

apoios indeslocáveis, onde as malhas da grelha equivalente não são coincidentes (COELHO, 2009b; REIS, 2007). A adoção de 15% da rigidez integral à torção das vigas, permitida pela NRB 6118:2007, mostra-se adequada para a transmissão dos momentos nos casos de lajes contíguas em que as malhas das grelhas estão desencontradas, desde que a malha seja pouco espaçada (REIS, 2007).

O cálculo da rigidez à torção,  $GJ$ , de vigas retangulares pode ser realizado com a equação (2.30), com a constante de torção  $J$  dada pela equação (2.41). No *software* Eberick, a rigidez à torção das vigas é alterada através de uma redução percentual. O valor mínimo de redução à torção, permitido pelo *software*, é 0% e o valor máximo de redução é de 95%.

$$J = \alpha H (b_w^3), \quad 2.41$$

Com  $H > b_w$  (dimensões da viga), a constante de torção é dada por (YOUNG, 1989):

$$\alpha = \frac{1}{3} - 0,21 \left( \frac{b_w}{H} \right) \left[ 1 - \frac{1}{12} \left( \frac{b_w}{H} \right)^4 \right]. \quad 2.42$$

## 2.7 ANÁLISE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Até a década de 1950 a análise estrutural era restrita à utilização de elementos ligados por apenas dois pontos no espaço. Engenheiros estruturais utilizavam o método “*lattice analogy*”, desenvolvido por Hrennikoff (1941) e McHenry (1943), para analisar placas e chapas. Porém, essa analogia não pode ser usada em regiões com áreas não retangulares (CLOUGH e WILSON, 1999). Para suprir essa e outras deficiências dos métodos de cálculo de estruturas, existentes até então, Ray Clough e Jon Turner desenvolveram um método que consiste na discretização de uma estrutura em pequenas partes. Esse método veio a ser conhecido como Método dos Elementos Finitos - MEF (*Finite Element Method* ou FEA - *Finite Element Analysis*).

O MEF trata-se de um método numérico em que as equações de campo da física matemática são aproximadas sobre regiões simples

(triângulos, quadriláteros, tetraedros, etc.). E depois reunidas para que o equilíbrio ou continuidade seja satisfeito através de pontos nodais que interligam os domínios (GUPTA e MEEK, 1996). De acordo com Gupta e Meek (1996), existem cinco grupos de artigos que podem ser considerados como desenvolvedores do MEF, que são os artigos de Courant (1943); Argyris (1954); Turner *et al.* (1956) – primeira vez que a técnica foi utilizada; Clough (1960) – artigo que atribui à técnica o termo “*Finite Element Method*”; e o artigo de Zienkiewicz e Cheung (1965).

De acordo com alguns autores (COOK, MALKUS e PLESHA, 2001), a vantagem de deduzir o MEF por meio do Método de Galerkin, de solução de equações diferenciais, é que assim as funções-peso são iguais às funções de forma (funções-base) (KWON e BANG, 1996; ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000). O método de Galerkin é um dos métodos clássicos da física matemática e inclui-se entre os chamados métodos de Resíduos Ponderados (nome atribuído a Crandall (1956)), destinados à resolução aproximada de equações diferenciais com condições de contorno (e iniciais). Este método foi desenvolvido por Galerkin (1915) e parte de equações integrais de resíduos ponderados, e por não exigir a existência ou conhecimento de um princípio variacional é mais geral que o método de Rayleigh-Ritz (BECKER, CAREY e ODEN, 1981; SORIANO, 2009).

Neste trabalho não se pretende deduzir e explicar todos os conceitos e equações para o desenvolvimento do MEF, mas sim, mostrar alguns tópicos teóricos e as equações para a obtenção da matriz de rigidez e vetores de cargas para estruturas reticuladas. Com um enfoque físico, a formulação da matriz de rigidez pode ser obtida baseada na interpolação dos deslocamentos, através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) (BECKER, CAREY e ODEN, 1981; COOK, MALKUS e PLESHA, 2001; KWON e BANG, 1996; LOPEZ, 2012).

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) diz que, no equilíbrio, a variação de energia de deformação devido a um deslocamento virtual é igual à variação do trabalho realizado pelas forças externas devido a este deslocamento virtual (COOK, MALKUS e PLESHA, 2001). A equação do PTV pode ser obtida com a utilização do Princípio da Energia Potencial Estacionária, dada por:

$$\int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV = \int_V \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} dV + \int_S \{\mathbf{u}\}^T \{\Phi\} dS, \quad 2.43$$

Com:  $\{u\} = [u \ v \ w]^T$  é o vetor das equações dos deslocamentos nas direções x, y e z que são obtidas pela multiplicação entre a matriz que contém as funções de interpolação  $[N]$  (*shape functions*), com o vetor de deslocamento nodal  $\{d\}$ , (2.44).

$$\{u\} = [N]\{d\}. \quad 2.44$$

A deformação específica pode ser escrita como a 1ª derivada da equação (2.44):

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\}. \quad 2.45$$

Logo:

$$\{\varepsilon\} = [\partial][N]\{d\}. \quad 2.46$$

Escrevendo:

$$[B] = [\partial][N] \quad 2.47$$

Substituindo (2.47) em (2.46), tem-se para a deformação específica:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\}. \quad 2.48$$

Aplica-se a primeira variação  $\delta$  do cálculo variacional em (2.43), e assim se obtém a equação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, PTV, escrito matricialmente como:

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{F\} dV + \int_S \{\delta u\}^T \{\Phi\} dS. \quad 2.49$$

Os deslocamentos virtuais serão:

$$\{\delta u\}^T = ([N]\{\delta d\})^T = \{\delta d\}^T [N]^T. \quad 2.50$$

E as deformações virtuais:

$$\{\delta \varepsilon\}^T = ([B]\{\delta d\})^T = \{\delta d\}^T [B]^T. \quad 2.51$$

A relação entre tensões e deformações, sem deformações ou tensões iniciais, é demonstrada pela equação (2.52). Em que,  $[D]$  é a matriz constitutiva, simétrica, e pode representar propriedades elásticas isotrópicas ou anisotrópicas.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}. \quad 2.52$$

Substituindo as equações (2.50) à (2.52) em (2.49) (equação do PTV), se obtém:

$$\{\delta d\}^T \left( \int_V [B]^T [D][B] dV \{d\} - \int_V [N]^T \{F\} dV - \int_S [N]^T \{\Phi\} dS \right) = 0. \quad 2.53$$

A equação acima deve ser válida para qualquer deslocamento virtual admissível  $\{\delta d\}$ , logo se tem a equação de elementos finitos para o elemento.

$$\left( \int_V [B]^T [D][B] dV \right) \{d\} = \int_V [N]^T \{F\} dV + \int_S [N]^T \{\Phi\} dS. \quad 2.54$$

O termo dentro do parêntese à esquerda do sinal de igualdade, da equação acima, representa a matriz de rigidez  $[K]$ . Os termos à direita da igualdade representam o vetor de carga nodal consistente  $\{r_e\}$ .

$$[K] = \int_V [B]^T [D][B] dV. \quad 2.55$$

$$\{r_e\} = \int_V [N]^T \{F\} dV + \int_S [N]^T \{\Phi\} dS. \quad 2.56$$

Dessa forma a equação (2.54) pode ser escrita em forma compacta como:

$$[K]\{d\} = \{r_e\}. \quad 2.57$$

As cargas concentradas nos nós podem ser introduzidas no momento da superposição das matrizes, como um vetor  $\{P\}$ . Depois de definidas as condições de contorno, resolve-se o sistema de equações de equilíbrio da estrutura (2.57) e obtém-se a solução estática do problema em termos de deslocamentos nodais. A partir destes pode-se encontrar os esforços nos elementos bem como as reações de apoio.

## 2.8 EQUAÇÕES DA SOLUÇÃO ESTÁTICA E DINÂMICA

Uma estrutura submetida a ações dinâmicas reage modificando sua configuração em torno de uma posição de equilíbrio estável. Esta mudança configuracional pode atingir grandes amplitudes, mesmo para valores pequenos da ação excitante, podendo conduzir ao colapso da estrutura. A solução das equações diferenciais de equilíbrio para estruturas reais, que são um meio contínuo submetido a ações dinâmicas, é em geral difícil de ser obtida. Portanto, na maioria dos casos, é utilizada uma técnica de discretização das estruturas (CLOUGH e PENZIEN, 2003).

Entende-se por sistemas discretos aqueles nos quais as massas que os compõem são discretizadas em pontos nodais associados a graus de liberdade. Na maioria dos casos, a análise dinâmica envolve uma quantidade suficiente de graus de liberdade para fornecer uma boa representação matemática do sistema modelado. Portanto, a formulação se reduz a encontrar a resposta no tempo destes pontos nodais, para seus graus de liberdade. As expressões matemáticas que determinam os deslocamentos causados por ações dinâmicas são chamadas de equações de movimento da estrutura, e a solução destas equações fornece os deslocamentos em função do tempo (CLOUGH e PENZIEN, 2003; LIMA e SANTOS, 2008).

A formulação das equações de movimento pode ser conduzida através da aplicação dos métodos: Segunda Lei de Newton, Equilíbrio dinâmico pelo Princípio d' Alembert, Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) e Princípio de Hamilton. A aplicação do Princípio de Hamilton, geralmente, é a mais apropriada, já que não envolve os problemas inerentes ao estabelecimento de equações vetoriais, pois se utilizam grandezas escalares: energia cinética, energia potencial e energia de dissipação (KIM, DARGUSH e JU, 2013).

Para o desenvolvimento das equações, considera-se a estrutura de um grau de liberdade (1 GDL) mostrada na Figura 6. As forças atuantes neste sistema são:

$$\begin{aligned} f_D &= c \dot{u} \rightarrow \text{Força de amortecimento;} \\ f_s &= k u \rightarrow \text{Força de rigidez;} \\ f_I &= m \ddot{u} \rightarrow \text{Força de inércia;} \\ f(t) &\rightarrow \text{Força externa atuante.} \end{aligned}$$

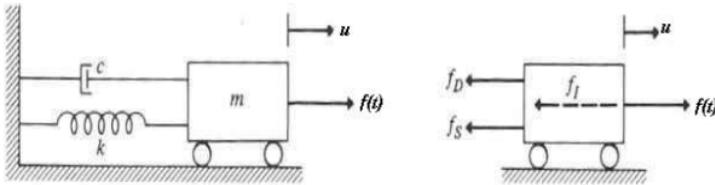


Figura 6 – Sistema dinâmico de um grau de liberdade

E  $u = u_{(t)}$  é a coordenada generalizada do deslocamento que define o estado cinemático do modelo, já  $\ddot{u}$  e  $\dot{u}$  são as derivadas de  $u_{(t)}$  em relação ao tempo, ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{u}_{(t)} = \left( \frac{\partial u_{(t)}}{\partial t} \right), \\ \ddot{u} &= \ddot{u}_{(t)} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_{(t)}}{\partial t} \right). \end{aligned} \tag{2.58}$$

Realizando o equilíbrio de forças, tem-se:

$$f_I + f_D + f_s = f(t). \tag{2.59}$$

Substituindo o valor das forças em (2.59), obtém-se a equação diferencial que rege o problema:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = f(t). \quad 2.60$$

Generalizando para N-graus de liberdade (CHOPRA, 1995; CLOUGH e PENZIEN, 2003):

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{f(t)\}, \quad 2.61$$

Em que:

$[M]$  → Matriz de massa global, na qual cada coeficiente  $m_{ij}$  representa a força de inércia por unidade de aceleração na direção  $i$ , devido à aceleração unitária na direção  $j$ ;

$[C]$  → Matriz de amortecimento global, na qual cada coeficiente  $c_{ij}$  representa a força de amortecimento, por unidade de velocidade na direção  $i$ , devido à velocidade unitária na direção  $j$ ;

$[K]$  → Matriz de rigidez da estrutura, na qual cada coeficiente  $k_{ij}$  representa a força na direção  $i$ , devido ao deslocamento unitário na direção  $j$ ;

$\{u\} = \{u(t)\}$  → Vetor dos deslocamentos;

$\{\dot{u}\} = \{\dot{u}(t)\}$  → Vetor das velocidades;

$\{\ddot{u}\} = \{\ddot{u}(t)\}$  → Vetor das acelerações;

$\{f(t)\}$  → Vetor das forças nodais equivalentes.

Para o caso em que se desconsideram o amortecimento ( $[C] \{\dot{u}\} = 0$ ), forças inerciais nulas ( $[M] \{\ddot{u}\} = 0$ ) e ações que não possuem variação significativa no tempo ( $f(t) \cong \text{constante}$ ), a equação (2.61) assume a mesma forma que a equação (2.57), a qual é a solução do problema estático.

Nesta pesquisa, o que importa são as frequências naturais não amortecidas e os modos de vibração. Logo a resposta dinâmica pode ser obtida em vibração livre ( $f(t) = 0$ ) e com o amortecimento nulo ( $[C] \{\dot{u}\} = 0$ ) da estrutura. Assim, a equação que rege o comportamento dinâmico de corpos elásticos, com deslocamentos infinitesimais, passa a

ser (CLOUGH e PENZIEN, 2003; HAMEDANI, KHEDMATI e AZKAT, 2012):

$$[M] \{\ddot{u}\} + [K] \{u\} = \{0\}. \quad 2.62$$

O desenvolvimento de (2.62) leva a um polinômio de ordem  $N$ . As  $N$  raízes de  $\omega_{nj}^2$ , chamadas de autovalores ou valores característicos, fornecem as  $N$  frequências circulares  $\omega_{nj}$  que podem ser ordenadas na forma crescente, sendo  $\omega_{n1}$  a menor delas, conhecida como frequência circular fundamental e as demais como harmônicos superiores (CLOUGH e PENZIEN, 2003). Os deslocamentos do sistema podem ser obtidos pela combinação linear dos modos de vibração ou autovetores. Esta propriedade é utilizada no procedimento que é chamado de método da superposição modal ou análise modal, restrito a estruturas com comportamento linear (HATCH, 2001; LIMA e SANTOS, 2008).

## 2.9 ESTUDOS SOBRE A FLEXIBILIDADE DAS VIGAS DE APOIO

Atualmente a NRB 6118:2007, item 14.7.6.1, permite o procedimento simplificado de adotar as reações de lajes como sendo uniformemente distribuídas. Estudos (ARAÚJO, 2008, 2009, 2010; MAZZILLI, 1988, 1995; REIS, 2007) verificam que os valores das reações das lajes, nas vigas de suporte, dependem da relação de rigidez entre esses elementos, e que o valor das reações ao longo da viga não é uniforme (Figura 7).

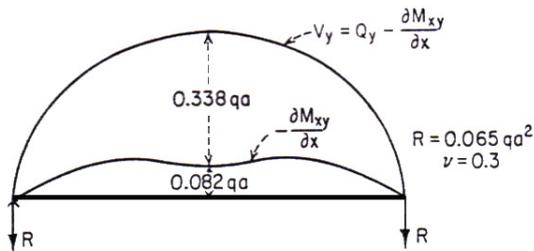


Figura 7 – ações verticais de uma placa quadrada em uma viga periférica  
Fonte: Timoshenko (1959).

A flexibilidade é o inverso da rigidez, e a redução das seções dos elementos estruturais, por exemplo, faz com que a estrutura diminua sua rigidez e, conseqüentemente, aumente sua flexibilidade (PANDEY e BISWAS, 1995). Muitos trabalhos têm estudado a influência da flexibilidade das vigas de apoio de lajes, como mostra a Tabela 2, sendo que a maioria das pesquisas trata apenas da análise estática de lajes isoladas, sem investigar as conseqüências na continuidade dos esforços em painéis de lajes e no dimensionamento de armaduras. Conforme Tangwongchai, Anwar e Chucheesakul (2011), é difícil prever de maneira realista o comportamento do sistema laje/viga, incluindo o efeito da flexibilidade dos apoios e excentricidade entre laje e viga, usando cálculos manuais.

Mazzilli (1988) verificou que, para lajes maciças de concreto armado (regime elástico-linear, isoladas, retangulares e apoiadas em seus quatro lados), os esforços na laje e nas vigas de apoio podem variar muito em função da flexibilidade das vigas. Para lajes retangulares e simplesmente apoiadas, Hahn *apud* Mazzilli (1995) fornece uma regra prática para o cálculo dos momentos máximos (por unidade de largura) nessas lajes. As pesquisas mostradas na Tabela 2 verificaram que, para lajes isoladas, o aumento da rigidez à flexão das vigas bordo ocasiona a diminuição dos deslocamentos na laje e nas próprias vigas (ARAÚJO, 2010; MAZZILLI, 1988, 1995; PAULA, 2007; REIS, 2007; STRAMANDINOLI, 2003).

Em Mazzilli (1995), estudou-se o regime estático elástico-linear, com o uso do MEF (*software* SAP90), e também o regime de ruptura (experimental e numérico). Os resultados evidenciaram que a flexibilidade das vigas de apoio, altera significativamente os valores da resposta estática, tanto no regime elástico como no regime plástico, para lajes isoladas e apoiadas.

Muitos estudos utilizam elementos finitos para fazer uma análise acoplada do sistema laje/vigas. Por exemplo, Araújo (2008) discretizou as lajes em elementos finitos isoparamétricos quadráticos de oito nós (com base na teoria de placas de Mindlin), as vigas foram discretizadas com elementos finitos de três nós, formulados com base na Teoria de Vigas de Timoshenko. Leite (2012) simulou por elementos finitos as vigas de bordo, nervuras e a laje de concreto armado, nos quais a utilização de elementos de cascas tem a capacidade de incorporar a excentricidade existente entre as lajes e as nervuras, sem nenhum tipo de artifício ou simplificação.

Tabela 2- Pesquisadores, Tipo de Análise, Método

<b>Pesquisador</b>	<b>Análise</b>	<b>Método</b>	<b>Aplicação</b>
Mazzilli (1988)	Estática Elástico-linear	MEF	Lajes maciças isoladas retangulares
Mazzilli (1995)	Estática regime de ruptura	MEF	Lajes maciças isoladas retangulares
Hennrichs (2003)	Estática Elástico-linear	MEF AG	Tabuleiro com Lajes planas iguais
Stramandinoli (2003)	Estática Elástico-linear	MEF AG	Lajes nervuradas isoladas
Paula (2007)	Estática e Dinâmica Elástico-linear	AG	Lajes nervuradas isoladas
Reis (2007)	Estática Elástico-linear	MEF AG	Lajes nervuradas isoladas
Araújo (2008)	Estática Elástico-linear	MEF e Métodos Simplificados	Painel com lajes iguais e lajes desiguais
Araújo (2009)	Estática linear e não linear	MEF e Método Simplificado	Painel com lajes desiguais
Coelho (2009)	Estática Elástico-linear	MEF AG	Painel com duas lajes retangulares
Araújo (2010)	Estática Elástico-linear	MEF	Lajes maciças retangulares e laje contínua
Leite <i>et al.</i> (2010)	Estática e Dinâmica Elástico-linear	MEF	Lajes nervuradas isoladas
Leite (2012)	Estática e Dinâmica Elástico-linear	MEF	Lajes nervuradas isoladas

Um parâmetro relevante para a análise do comportamento conjunto do tabuleiro, laje com as vigas de bordo, é a excentricidade ( $e$ ) existente entre o eixo longitudinal das vigas e o plano médio da laje, Figura 8 (HAMEDANI, KHEDMATI e AZKAT, 2012; LEITE, 2012; LEITE *et al.*, 2010; PAULA, 2007). Assim, a influência das vigas de bordo na resposta estática e dinâmica está relacionada à excentricidade existente entre os centroides da laje e vigas de bordo e à relação entre a rigidez da laje e da viga (ARAÚJO, 2008, 2009, 2010; LEITE, 2012; LEITE *et al.*, 2010). Uma maneira de tentar simular o efeito da excentricidade é usar o teorema dos eixos paralelos (teorema de Steiner), para calcular o momento de inércia das vigas, como mostra a equação (2.63) (ARAÚJO, 2008, 2009).

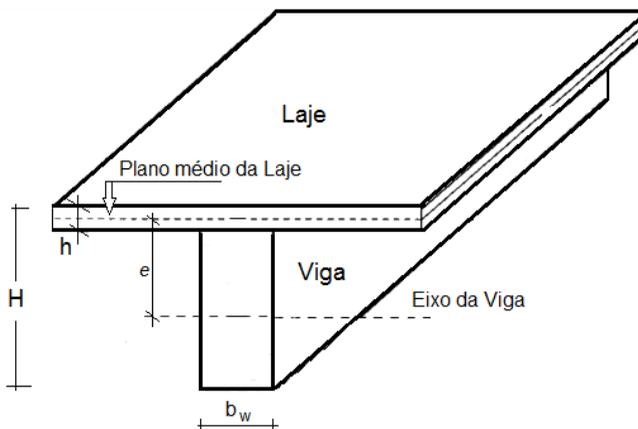


Figura 8 – Excentricidade entre o eixo da viga e plano médio da laje

$$I_{viga} = I_{CG} + b_w H e^2. \quad 2.63$$

Para vigas retangulares tem-se:

$$I_{CG} = \frac{b_w H^3}{12}, \quad 2.64$$

$$e = \frac{H - h}{2}. \quad 2.65$$

Ou ainda, com utilização de elementos finitos da casca, em que o comportamento gerado pela excentricidade entre os elementos estruturais pode ser modelado a partir de pequenas simplificações (LEITE, 2012; LEITE *et al.*, 2010; PAULA, 2007). O *software* Eberick não considera a excentricidade entre laje e viga, já no SAP2000, uma alternativa simplificada, que pode ser utilizada, é com o uso da opção “*cardinal point*”, para esta, recomenda-se consultar o manual do mesmo.

A consideração da excentricidade ( $e$ ) em modelagens com elementos finitos, segundo Tangwongchai, Anwar e Chuccheepsakul (2011), pode ser realizada com o modelo *Plate-Frame Model* (PFM) e *Shell-Frame Model* (SFM). Na prática, o método *SFM* é mais adequado, pois, mantém a simplicidade da superfície da estrutura em análise transversal, bem como na direção longitudinal. Nessa alternativa, SFM, as vigas são modeladas como elementos de barra e as lajes como elementos de casca, enquanto que a ligação entre eixos da laje e viga é realizada por meio de elemento rígido (*rigid link*) (TANGWONGCHAI, ANWAR e CHUCHEEPSAKUL, 2011). Podem-se usar, também, modelos de Elementos Finitos com a opção de colocar a viga no plano da laje usando a inércia de seção T com a consideração da largura colaborante da laje. Este modelo fornece bons resultados e não tem alguns problemas que os modelos *SFM* e *PFM* apresentam, os quais podem ser consultados em bibliografia específica (TANGWONGCHAI, ANWAR e CHUCHEEPSAKUL, 2011).

Kennedy e Bali (1979) apresentam algumas expressões analíticas para cálculo da rigidez de lajes nervuradas ortotrópicas. Os autores propõem o cálculo do momento de inércia à flexão da seção T considerando a influência do coeficiente de Poisson na mesa. Portanto:

$$I_T = \frac{b_f h_f^3}{12(1 - \nu^2)} + \frac{A_f \left( y_{CG} - \frac{h_f}{2} \right)^2}{(1 - \nu^2)} + I + A_h \left( h_f + \frac{h}{2} - y_{CG} \right)^2. \quad 2.66$$

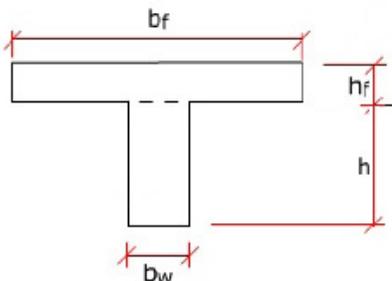


Figura 9 – Seção T

Em que:

$A_f = b_f h_f$  é a área da seção da mesa;

$I = \frac{b_w h^3}{12}$  é o momento de inércia da seção de viga abaixo da laje;

$A_h = b_w h$  é a área da seção de viga abaixo da laje;

$y_{CG}$  é a ordenada do centroide de seção T, medido a partir da face superior da laje (PAULA, 2007), calculada por:

$$y_{CG} = \frac{b_w h \left( h_f + \frac{h}{2} \right) + \frac{b_f h_f^2}{2(1 - \nu^2)}}{b_w h + \frac{b_f h_f}{(1 - \nu^2)}}. \quad 2.67$$

As equações (2.66) e (2.67) podem ser usadas para o cálculo do momento de inércia à flexão de seções T, como usualmente se utiliza. Para isso, basta considerar o coeficiente de Poisson nulo.

A rigidez das vigas também pode afetar significativamente a parcela de carga transmitida diretamente para os pilares, ou seja, para vigas com grande flexibilidade, as lajes tendem a transmitir os esforços diretamente para os pilares (HENNRICHS, 2003; MAZZILLI, 1988; REIS, 2007). Este comportamento, também, é verificado por Mazzilli (1995) para lajes isoladas e apoiadas em regime de ruptura.

Reis (2007) verifica que, para vigas com altura na relação aproximada de 10% do vão (para laje com espessura de 10 cm), a resposta estática (esforços e deslocamentos) possui valores aproximados à obtida pelas teorias clássicas que consideram as vigas indeformáveis. À medida que se reduz a altura dessas vigas, a laje tende a assumir o comportamento similar à de uma laje plana, e os momentos negativos das lajes são influenciados pela rigidez do pilar (REIS, 2007). Mazzilli

(1988, 1995) verifica que o aumento da espessura da laje (aumento da rigidez da laje) pode ser desfavorável para o bom desempenho das vigas e pilares. Leite (2012) e Leite *et al.* (2010) verificam que existe uma variação não linear decrescente dos deslocamentos verticais no centro da laje, à medida que aumenta a rigidez das vigas de bordo.

A Figura 10 mostra um dos gráficos (Gráfico 5.2.5-1, página 79) sugerido por Mazzilli (1995) para determinar a carga crítica de lajes maciças retangulares de concreto armado em regime plástico. O gráfico tem validade somente para lajes isotrópicas, isoladas e simplesmente apoiadas em quatro vigas iguais entre si (vigas de bordo). Essa referência aos resultados de Mazzilli (1988, 1995), é devida ao fato que esse autor realizou investigações sobre o comportamento flexível entre laje e viga, porém, não considerou a excentricidade entre esses elementos.

As curvas do gráfico relacionam o Índice de Carga de Ruptura  $I_{CR}$  com a razão entre a rigidez da laje e rigidez da viga, cada curva está relacionada a uma relação entre vãos das vigas ( $\gamma$ ). Pode-se notar que as curvas independem do valor da espessura da laje, pois a escolha do índice adimensional  $I_{LV}$ , equação (2.68), permite que as curvas  $Carga/I_{LV}$  sejam independentes do valor da espessura ( $h$ ) da laje (MAZZILLI, 1995). Deve ser lembrado que, este estudo não objetiva investigar o regime plástico, e sim o regime elástico-linear.

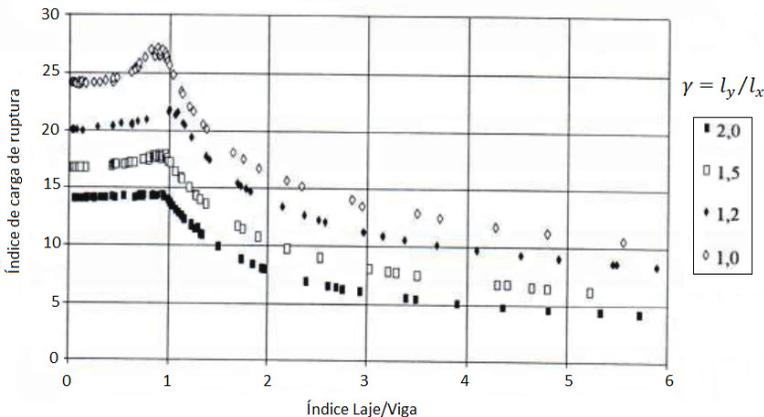


Figura 10 – Índice de Carga de Ruptura: vigas de apoio iguais entre si  
Fonte: Mazzilli (1995).

Para entendimento, apresentam-se as equações de base, que utilizam a mesma nomenclatura utilizada por Mazzilli (1995).

- Relação entre os vãos:  $\gamma = l_y/l_x$ ; em que  $l_x$  é o menor vão da viga e  $l_y$ , o maior vão.

- Índice de flexibilidade da laje:  $I_L = \frac{h^3 \sqrt{l_x \cdot l_y}}{12(1-\nu^2)}$ ; em que  $h$  é a espessura da laje.

- Índice de flexibilidade da viga:  $I_V = \frac{b_w \cdot H^3}{12}$ ; em que  $b_w$  é a largura da viga retangular e  $H$  é a altura. Esse índice é igual ao valor do momento de inércia que passa pelo centro geométrico da seção.

O índice relativo entre laje e viga será:

$$I_{LV} = \frac{I_L}{I_V} = \frac{1}{b_w} \frac{\sqrt{l_x \cdot l_y}}{(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{H}\right)^3. \quad 2.68$$

Esse índice  $I_{LV}$  também pode ser obtido através da relação entre rigidez à flexão da laje (2.22) e da viga. Nesse caso, considera-se a rigidez à flexão da viga sendo:

$$K = EI, \quad 2.69$$

$$\frac{D_r}{K} = \frac{1}{b_w(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{H}\right)^3. \quad 2.70$$

Para essa relação, utiliza-se o momento de inércia ( $I$ ) da seção bruta de concreto, ou seja, no estágio I, com o momento de fissuração  $M_R$  maior que o momento de serviço  $M_{SER}$ . Assim, o índice relativo entre laje e viga é obtido multiplicando a equação acima pela raiz quadrada do produto dos vãos da laje. Essa operação faz com que  $I_{LV}$  fique adimensional, e, assim, (2.68) fica igual a (2.71).

$$I_{LV} = \frac{D_r}{K} \sqrt{l_x \cdot l_y} = \frac{\sqrt{l_x \cdot l_y}}{b_w(1 - v^2)} \left(\frac{h}{H}\right)^3 \tag{2.71}$$

Logo a carga de ruptura pode ser obtida pela equação (2.72) (MAZZILLI, 1995). Em que  $m$  é o momento de ruptura, e  $l_x$  é o menor vão da laje.

$$q_R = I_{CR} \frac{m}{l_x^2} \tag{2.72}$$

Para o caso de vigas de apoio iguais duas a duas, ou seja:

$$V_1 = V_2 \neq V_3 = V_4$$

A carga de ruptura pode ser obtida pela Figura 11 (Gráfico 5.3.5-1 página 114 (MAZZILLI, 1995)). Para lajes alongadas ( $\gamma=2$ ), Mazzilli (1995) sugere a curva  $I_{CR} \times I_{LV}$  da Figura 12. Já para lajes quadradas ( $\gamma=1$ ), é sugerida a curva da Figura 13.

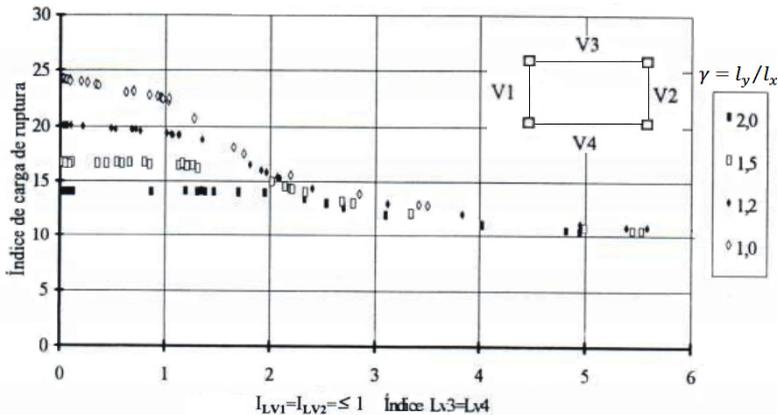


Figura 11 – Índice de Carga de Ruptura: vigas de apoio iguais duas a duas  
 Fonte: Mazzilli (1995).

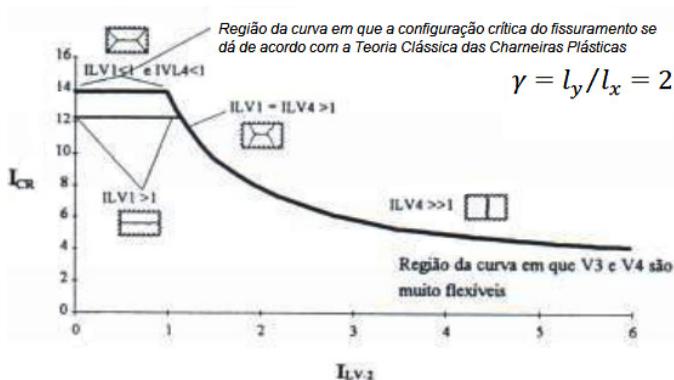


Figura 12 – Índice de Carga de Ruptura para lajes alongadas ( $\gamma=2$ )  
Fonte: Mazzilli (1995).

Leite (2012) verifica que para a relação entre vãos  $l_x/l_y = 1$ , o aumento da rigidez à flexão das vigas de bordo faz com que os momentos no centro da laje diminuam, sendo esta variação não linear, e as tensões máximas tendem a diminuir à medida que aumenta a rigidez da viga. Stramandinoli (2003), em estudo sobre lajes nervuradas (lajes isoladas, apoiadas em vigas de bordo iguais entre si), conclui que a deformabilidade das vigas de apoio influencia a resposta estática elástico-linear.

Para os casos de lajes nervuradas, apoiadas em bordos flexíveis ao invés de bordos fixos, com  $l_x/l_y = 0,666$  e  $l_x/l_y = 2$  (lajes retangulares), Stramandinoli (2003) verifica que o momento fletor na menor direção ( $M_x$ ) diminui, já o momento fletor na maior direção ( $M_y$ ) e a flecha aumentam. Logo, o aumento da rigidez das vigas de bordo causa o aumento dos momentos  $M_x$  e  $M_{xy}$  e diminuição de  $M_y$ , ou seja, a laje apresenta um comportamento que tende ao caso de laje apoiada em bordos fixos.

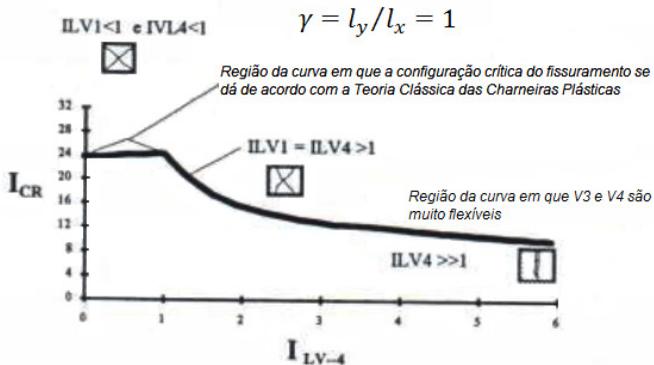


Figura 13 – Índice de Carga de Ruptura para lajes quadradas ( $\gamma=1$ )  
Fonte: Mazzilli (1995).

Verificam-se poucos estudos sobre a influência da relação entre rigidez da laje e rigidez da viga na resposta dinâmica. Leite *et al.* (2010) e Leite (2012) afirmam que, a partir do aumento da rigidez das vigas de bordo, de lajes nervuradas, os valores das frequências naturais tendem a aumentar (variação não linear), e que, em alguns casos, a frequência fundamental ( $f_{01}$ ) é inferior ao valor da frequência crítica ( $f_{01} \leq 1,2f_{crit}$ ). Paula (2007) também corrobora que o aumento de rigidez à flexão das vigas de bordo eleva os valores das frequências naturais.

Para assegurar comportamento satisfatório do tabuleiro, a NRB 6118:2007 (item 23.3, Tabela 23.1) estabelece que a frequência fundamental ( $f_{01}$ ) deve-se afastar o máximo possível da frequência crítica ( $f_{crit}$ ). Para escritórios, esse limite é ( $f_{crit} = 3,0$  a  $4,0$  Hz). Em relação aos modos de vibração (formas modais), Paula (2007), Leite *et al.* (2010) e Leite (2012) verificaram que o efeito das vigas de bordo não possui influência significativa, em relação aos modelos estudados. Esses estudos evidenciam que o modo fundamental de vibração é predominantemente associado à flexão.

Resultados da resposta estática sofrem uma alteração desprezível quando se considera a rigidez à torção das vigas, e quando é realizada esta consideração, surgem, nas bordas de extremidade da laje, momentos fletores negativos,  $M_{xb}$  e  $M_{yb}$ . Para um tabuleiro com lajes desiguais<sup>1</sup>, Figura 14, os momentos máximos da laje L1 e L4 ocorrem no sentido do maior vão, e não no sentido do menor vão, o que contraria os resultados

<sup>1</sup> - Na análise pelo MEF, considera-se a rigidez reduzida  $0,4 \cdot E_{cs}I$  para as vigas (estádio II) e despreza-se sua rigidez à torção, e lajes encontram-se no estágio I.

do método tradicional de cálculo. Este comportamento é devido à flexão da viga V5 que impõe uma grande curvatura à laje L1, segundo a direção  $y$ . O que também ocorre entre a viga V2 e a laje L4, na direção  $x$  (ARAÚJO, 2008).

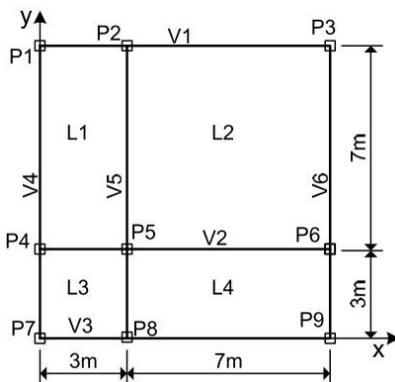


Figura 14 – Tabuleiro de lajes desiguais e vigas flexíveis  
Fonte: Araújo (2008).

A Tabela 3 exibe os resultados obtidos por Araújo (2008), para a laje L2 (Figura 14), análise em MEF  $\times$  Tradicional (tabelas), que evidencia que o método tradicional superestima os momentos negativos, e subestima os momentos positivos e as flechas das lajes (ARAÚJO, 2008, 2009). Esses valores da Tabela 3 correspondem aos resultados máximos na laje L2, onde a flecha é dada em mm e os momentos em kNm/m. Para demonstrar o efeito das deformações das vigas de apoio sobre as flechas das lajes, considerou-se a laje L2 apoiada nos quatro lados. Nessa situação a flecha pelo método tradicional será  $W_0 = 19,69$  mm, o que corresponde a 90% da flecha obtida com o MEF, o que evidencia a influência da flexibilidade das vigas de apoio.

Araújo (2008, 2009, 2010) propôs um método simplificado, para o cálculo de lajes, que utiliza as tabelas da teoria de placas para encontrar uma solução satisfatória. No método, consideram-se todas as lajes simplesmente apoiadas, para efeito de cálculo dos momentos positivos, flecha e reações de apoio, e em um bordo comum (apoio interno), adota-se um momento negativo de valor absoluto igual ao do maior momento positivo das duas lajes adjacentes, na direção considerada.

Tabela 3 – Resultados Laje L2: Tradicional  $\times$  MEF

Resultado Para L2	Tradicional	MEF	Tradicional
	$GJ = 0$	$K = 0,4 \cdot E_{cs}I; GJ = 0$	MEF
$W_o$	10,18	21,67	46,98 %
$M_x = M_y$	6,88	9,88	69,64 %
$M_{xe} = M_{ye}$	-16,59	-7,86	211,07 %

O autor supracitado verificou que, com esse método, podem-se obter resultados melhores que o método tradicional (tabelas). Araújo (2009) analisou o tabuleiro da Figura 14, através de uma análise não linear física, e comparou os resultados desta análise com os valores do Método Simplificado. Para o modelo, considerou-se a flexibilidade das vigas de apoio, em que estas possuem rigidez à flexão  $\beta E_{cs}I$  e rigidez à torção nula. Os resultados para a laje L2 são exibidos na Tabela 4, e na Tabela 5 são mostrados os momentos fletores da laje L2, em função da rigidez das vigas de apoio dada por  $\beta E_{cs}I$ .

Tabela 4 – Comparativo entre Método Simplificado e MEF não linear

Resultado	Método Simplificado	MEF	Met. Simplificado
			MEF
Flecha inicial: $W_o$	7,10	11,40	62,28 %
Flecha final: $W_o$	24,90	24,00	103,75 %
$M_x = M_y$	12,99	12,04	107,89 %
$M_{xe} = M_{ye}$	-12,99	-9,47	137,17 %

Fonte: Araújo (2009).

Tabela 5 – Momentos máximos e mínimos, laje L2, em função de  $\beta$ 

Coefficiente	Momento Positivo (MEF)	Momento Negativo (MEF)
$\beta$	(kNm/m)	(kNm/m)
0,2	13,27	-11,00
0,4	12,04	-9,47
0,7	11,36	-10,44
1,0	11,05	-10,94
10,0	10,15	-12,43

Fonte: Araújo (2009).

O tradicional método de cálculo (tabelas) que consiste em considerar as lajes isoladas e com apoios indeformáveis, de acordo com a maioria das pesquisas, não é adequado para a análise de tabuleiros com vigas deformáveis, e só é apropriado para lajes apoiadas em vigas rígidas ou em paredes (ARAÚJO, 2008, 2009, 2010; MAZZILLI, 1988, 1995). Como alternativa para o cálculo aproximado de lajes apoiadas em vigas deformáveis, Fauchart *apud* Mazzilli (1995) sugeriu um método simplificado de cálculo para a superestrutura de pontes, o qual utiliza uma faixa da laje de largura unitária na direção transversal do tabuleiro que substitui os apoios das longarinas por apoios de molas. Stucchi *apud* Mazzilli (1995) verificou que essa é uma simplificação que fornece resultados confiáveis e satisfatórios.

Para esse método, a consideração de apoios elásticos (molas) pode ser realizada com a adição de uma força  $F_i$ , dependente do deslocamento  $u_i$  e correspondente à ação do apoio elástico de rigidez  $k$ , no vetor de forças global  $\{F\}$ , ver Figura 15 (MARTHA, 2010; MCGUIERE, GALLAGHER e ZIEMIAN, 1999; MOREIRA, 1977).

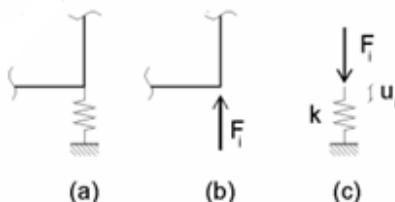


Figura 15 – (a) Visualização do apoio elástico; (b) Diagrama de corpo livre (DCL) da estrutura; (c) DCL do apoio (mola)

Após substituir as variáveis na equação (2.57) (MEF), este sistema pode ser representado matricialmente por:

$$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ -k \cdot u_i \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & \\ & \ddots & \vdots & \\ \cdots & \cdots & k_{ii} & \cdots \\ & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad 2.73$$

Logo, esse sistema equivale a somar a constante de mola  $k$  ao coeficiente  $k_{ii}$  da diagonal principal da matriz de rigidez global  $[K]$  da estrutura.

$$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & \\ & \ddots & & \\ \cdots & \cdots & k_{ii} + k & \cdots \\ & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad 2.74$$

Verifica-se que com a adição da constante de mola  $k$  na matriz  $[K]$ , a estrutura fica mais rígida. Logo, pela a equação (2.74) e (2.28), percebe-se que a resposta do sistema laje/viga é dependente da constante  $k$  e dos parâmetros da matriz de rigidez da estrutura, como  $G, J$  e  $I$ .

Muitos fatores possuem comportamento similar, ou seja, quando um aumenta, o outro também aumenta, e quando um diminui o outro também diminui. Essa relação é evidenciada entre o valor da constante de mola  $k$  e os seguintes parâmetros: excentricidade entre laje e viga (dependente de  $H$  e  $h$ ), módulo de elasticidade longitudinal do concreto ( $E$ ) e seção transversal da viga ( $b_w$  e  $H$ ). O aumento dos valores de  $G$  e  $J$ , adotados para a análise, também ocasionam o “aumento” da matriz  $[K]$ . Percebe-se, que ao aumentar a rigidez dos apoios da laje e assim o coeficiente  $k$ , através da seção transversal da viga, a massa da estrutura terá um pequeno aumento, e assim, aumentar-se-á a matriz de massa  $[M]$ , pois, é dependente da espessura da laje (massa da laje) e da massa das vigas.

Em termos gerais, a variação das seções transversais de lajes e vigas ocasiona uma alteração na matriz de rigidez da estrutura. Também modifica o vetor de cargas, já que o peso próprio é considerado para a determinação da resposta estática, e também é modificada a matriz de massa da estrutura. A resposta estática é dependente apenas da matriz de rigidez e do vetor de cargas, já a resposta dinâmica está relacionada com a matriz de rigidez e matriz de massa.

O estudo da flexibilidade das vigas de apoio também é importante para a análise de paredes de alvenaria não estruturais. Sabe-se que esses elementos podem apresentar fissuras se ocorrerem flechas excessivas nas lajes ou vigas. Devido à grande rigidez dessas paredes, elas não conseguem acompanhar a deformação dos elementos flexíveis de apoio e, assim, surgem fissuras inclinadas de cisalhamento. Em estudo sobre a influência das vigas de apoio de alvenaria estrutural, Barbosa (2000) verificou que, nos sistemas que apresentam vigas flexíveis, as zonas de separação entre alvenaria e viga são maiores, e quanto maior a zona de separação, mais acentuado será o efeito de arco na alvenaria.

Considerando-se os aspectos teóricos explicitados no decorrer deste projeto, delineou-se o método de pesquisa a seguir. O método foi

construído com base nos objetivos do estudo e nas verificações obtidas nas referências consultadas.



### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 MODELOS PARA ANÁLISE ACOPLADA DE TABULEIROS

Existem diferentes tipos de procedimentos para análise e projeto de tabuleiros de edifícios de concreto armado, como elásticos e plásticos. Contudo, para investigar a influência da flexibilidade das lajes e vigas no projeto de tabuleiros de concreto armado, foi considerado nesta pesquisa o comportamento elástico-linear.

A análise acoplada do tabuleiro formado por pilares, lajes maciças e vigas de concreto armado possibilita um estudo completo da resposta estática (esforços e deslocamentos) e da resposta dinâmica (frequências e modos de vibração). Assim, para o estudo foram elaborados exemplos numéricos que levam em conta a inclusão de alguns parâmetros que podem influenciar o comportamento do tabuleiro. Desse modo, pretendeu-se estudar com estes modelos:

- Diferenças entre métodos simplificados (tabelas) e métodos numéricos (Analogia de Grelha - AG e Método dos Elementos Finitos - MEF), na determinação da resposta estática do tabuleiro;
- Influência da rigidez à torção das barras da grelha equivalente (AG);
- Influência do espaçamento da malha da grelha (AG);
- Efeito da flexibilidade das vigas de apoio na resposta estática e dinâmica;
- Efeito da flexibilidade das vigas de apoio no cálculo das armaduras e detalhamento das lajes. Essa parte foi realizada utilizando o *software* Eberick, com AG.

Para as análises, são utilizados dois (2) modelos de tabuleiros de concreto armado. A resposta estática é obtida pelos três métodos de análise: Tabelas, Analogia de Grelha (AG) e Método dos Elementos Finitos (MEF). As flechas das lajes e vigas são flechas elásticas, e a flecha final é calculada de acordo com o item 17.3.2.1.2 da NBR 6118:2007. O cálculo das armaduras das lajes e vigas utilizou os dados da resposta estática elástico-linear, obtida pelo método de Analogia de Grelha (AG) com uso do *software* Eberick V6.

---

Mestrando: Jeferson Rafael Bueno

Orientador: Daniel Domingues Loriggio

A análise dinâmica é realizada somente pelo MEF (*software* SAP2000). Para ambos os tabuleiros em estudo, realizou-se a verificação do estado-limite de vibração excessiva. Dessa forma, para assegurar comportamento satisfatório do tabuleiro, a frequência própria da estrutura ( $f_{01}$ ) deve se afastar o máximo possível da frequência crítica ( $f_{crit}$ ), equação (3.75), NRB 6118:2007 item 23.3 Tabela 23.1. Nesta pesquisa se investigou o limite de vibração excessiva para os casos apresentados na Tabela 6, referentes a estruturas submetidas a vibrações pela ação de pessoas.

Tabela 6 – Frequência crítica, NRB 6118:2007 (Tabela 23.1)

Utilização (Caso)	Frequência Crítica $f_{crit}$ (Hz)	Frequência Fundamental $f_{01}$ (Hz)
Escritórios	4,00	4,80
Salas de dança ou de concerto sem cadeiras fixas	7,00	8,40

$$f_{01} > 1,2 \times f_{crit}. \quad 3.75$$

Para as análises desta pesquisa, os seguintes efeitos **não foram verificados/considerados**:

- Levantamento dos bordos da laje em relação aos apoios (“descolamento” entre laje e viga). Pois é considerada como monolítica a ligação entre os elementos estruturais;
- Cisalhamento nas lajes e fissuração dos elementos estruturais;
- Influência da seção dos pilares nos esforços;
- Rigidez à torção das vigas de apoio. Pois essa rigidez é apenas de compatibilidade, sendo assim, não é essencial para o equilíbrio do tabuleiro.

Alguns dos resultados das análises são exibidos em função do índice  $I_{LV}$ , flexibilidade laje/viga. Este índice é o mesmo apresentado por Mazzilli (1995), equação (2.71), e optou-se por manter a mesma nomenclatura utiliza por esse autor. Reescrevendo a equação (2.71):

$$I_{LV} = \frac{I_L}{I_v} = \frac{D_r}{K} \sqrt{l_x \cdot l_y} = \frac{h^3 \sqrt{l_x \cdot l_y}}{12 I_v (1 - \nu^2)}. \quad 3.76$$

- Índice de flexibilidade da laje:  $I_L = \frac{h^3 \sqrt{l_x \cdot l_y}}{12(1-\nu^2)}$ ; em que  $h$  é a espessura da laje.

- Índice de flexibilidade da viga:  $I_v = \frac{b_w \cdot H^3}{12}$ , em que  $b_w$  é a largura da viga retangular e  $H$  é a altura da viga. Esse valor é o mesmo do momento de inércia à flexão para seção retangular.

Com objetivo de apresentar os resultados de  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xe}$  e  $M_{ye}$  (kNm/m), independentes da espessura da laje, foram utilizados índices adimensionais semelhantes ao apresentado em Mazzilli (1995). Em que:

- $I_{Mx}$  → Índice para momento positivo  $M_x$ , na direção x;
- $I_{My}$  → Índice para momento positivo  $M_y$ , na direção y;
- $I_{Mxe}$  → Índice para momento negativo  $M_{xe}$ , na direção x;
- $I_{Mye}$  → Índice para momento negativo  $M_{ye}$ , na direção y;
- $l_x$  → Menor dimensão da laje, em metros;
- $q_t$  → Carga total na laje, em kN/m<sup>2</sup>.

$$I_{Mx} = \frac{q_t}{M_x} l_x^2, \quad 3.77$$

$$I_{My} = \frac{q_t}{M_y} l_x^2, \quad 3.78$$

$$I_{Mxe} = \frac{q_t}{M_{xe}} l_x^2, \quad 3.79$$

$$I_{Mye} = \frac{q_t}{M_{ye}} l_x^2. \quad 3.80$$

Os índices adimensionais permitem relacionar os resultados da resposta estática e dinâmica, de maneira mais adequada. Em alguns casos, não é necessário exibir os valores de espessura de laje e altura de viga, dos quais foram realizadas as análises e obtidos esses resultados.

As conclusões e verificações, ao longo desta pesquisa, baseiam-se em análises numéricas quantitativas e qualitativas, caracterizando-se como uma abordagem mista (CRESWELL, 2010; SAMPIERI, COLLADO e LUCIO, 2006).

### 3.2 OBTENÇÃO DA RESPOSTA ESTÁTICA

A resposta estática do tabuleiro, esforços e deslocamentos, foi obtida por meio de análises com os métodos de AG, MEF e tabelas de lajes.

### 3.3 OBTENÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA

A resposta dinâmica do tabuleiro, frequências e modos de vibração foi obtida por meio de análises com o MEF. O problema de autovalores e de autovetores no SAP2000 é resolvido com o uso da matriz de massa diagonal (CSI, 2009).

Para a escolha de modo de vibração correto, é considerado o fator de participação modal (*Modal Participation Factor*). Esses fatores de participação indicam o quão forte cada modo é excitado pelas respectivas cargas de aceleração (CSI, 2009). Pois, na análise de edifícios modelados como pórtico espacial, para a verificação do tabuleiro, nem sempre o modo de vibração que possui uma menor frequência de vibração é o que deve ser utilizado. Mas sim, aquele que mobiliza mais massa segundo a direção de interesse que, nos casos em estudo, é a direção vertical ou eixo Z global.

### 3.4 ANÁLISE COM USO DE TABELAS

A análise com utilização de métodos tradicionais de cálculo de lajes foi realizada com o auxílio de tabelas, para cálculo dos momentos fletores e flechas das lajes (no centro da placa). Foram utilizadas as tabelas de Czerny (1976) com  $v = 0,20$ , e as tabelas apresentadas em Pinheiro (2007). Em uma segunda etapa, foi realizada a compatibilização dos momentos fletores negativos, e para tal, toma-se como momento fletor negativo compatibilizado o maior dos seguintes valores:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,80M_a \\ 0,80M_b \\ \frac{M_a + M_b}{2} \end{array} \right. \quad 3.81$$

$M_a$  e  $M_b$  representam os valores dos momentos negativos de cada uma das lajes adjacentes.

### 3.5 ANÁLISE COM A ANALOGIA DE GRELHA (AG)

Para a análise com de Analogia de Grelha, foi utilizado o *software* Eberick versão V6. A rigidez à torção das barras da grelha ( $GJ$ ) é considerada por meio da equação (2.29). A Tabela 7 mostra os valores da constante de torção das barras da grelha ( $J$ ) utilizados nesta pesquisa.

A influência do refinamento malha da grelha (espaçamento entre barras) foi estudada com a consideração de quatro alternativas: 10x10; 25x25; 50x50; 80x80, todos em cm. Esse procedimento foi realizado apenas para o primeiro estudo numérico (Tabuleiro I, item 4.1), já para o segundo, foi utilizada apenas a modelagem em AG, com o parâmetro  $J$  e a malha que obtiveram resultados mais próximos aos encontrados por MEF, para o Tabuleiro I (ver Apêndice A).

Para as vigas, foi considerado o coeficiente de Redução na Torção igual a 95%, ou seja, vigas com rigidez à torção muito pequena. No caso dos momentos fletores entre lajes, os valores apresentados pelo *software*, são valores já compatibilizados.

Tabela 7 – Rigidez à torção das barras da grelha

<b>Coefficiente</b> $\mu_E$	<b>Valor de <math>J</math></b> Relação com a equação (2.29)	<b>Rigidez à Torção</b>
0,000	$J = 2,40 \cdot I$	$GJ = E_{cs}I$
16,667	$J = 2,00 \cdot I$	$GJ = E_{cs}I/1,2$
40,000	$J = 1,44 \cdot I$	$GJ = 0,6 \cdot E_{cs}I$

### 3.6 ANÁLISE COM MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

A análise pelo MEF foi utilizada como base para comparação com os resultados dos demais métodos. O *software* SAP2000, versão 14.0.0, utilizado nesta pesquisa está licenciado à Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

Nos estudos, as lajes são modeladas como elementos finitos quadrilaterais de casca fina (*Shell-Thin*: 4 nós, 6 graus de liberdade por nó), que está baseada na Teoria de Kirchhoff, que não considera a deformação transversal devida ao cisalhamento (CSI, 2009). As vigas são modeladas como elementos finitos de barras (*frame*), que considera apenas a deformação devida à flexão.

Para a análise dinâmica, se utiliza apenas a massa dos elementos, dada pela multiplicação da densidade pelo volume. No caso de vigas, a massa é agrupada nas articulações  $i$  e  $j$  (nó inicial e final), e para as lajes a massa é agrupada nos nós do elemento (CSI, 2009). Nenhum efeito inercial é considerado ao longo dos elementos.

Para os momentos fletores e frequências de vibração, a influência da flexibilidade dos apoios foi analisada de duas maneiras:

- 1º Não se considera a excentricidade entre o plano médio da laje e o eixo longitudinal da viga;

- 2º Considera-se a excentricidade entre o plano médio da laje e o eixo longitudinal da viga. Para tal, utilizou-se a equação (2.63).

### 3.7 VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

Para análises numéricas, é de suma importância que o modelo seja validado, ou seja, comprovada a exatidão dos resultados. Essa etapa pode ser realizada, por exemplo, por meios manuais, métodos simplificados (tabelas) e através de outros modelos numéricos.

Após o processamento da estrutura, foram realizadas a análise e a validação dos resultados. Esta atividade corresponde à verificação dos dados de entrada, consistência e interpretação dos resultados. Usaram-se, como técnica de verificação da resposta estática, os somatórios de reações de apoio para os diversos tipos de carregamento, análise visual da estrutura deformada e comparação dos esforços de saída do modelo com esforços calculados manualmente, para trechos mais simples da estrutura (KIMURA, 2007; MARTINS *et al.*, 2009).

Para a verificação da resposta do Tabuleiro I, modelado por AG e MEF, as vigas foram dotadas de grande seção transversal para poder se considerar as vigas de apoio praticamente indeformáveis. Já para o Tabuleiro II, restringiram-se os deslocamentos verticais dos nós de ligação entre laje e viga. Assim, os resultados obtidos por AG e MEF de ambos os tabuleiros são comparados com os obtidos por tabelas.

### 3.8 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos nas análises numéricas são comparados e analisados de acordo com o procedimento usual, adotado em estudos de tabuleiros de concreto armado que consiste na análise gráfica dos resultados (gráficos de dispersão, barras, entre outros), comparação por tabelas, análises de proporcionalidade entre variáveis e relações associativas entre valores.

Para avaliar o grau de relacionamento entre as variáveis de estudo, foi utilizado o Coeficiente de Correlação Linear de Pearson, também chamado de Coeficiente de Correlação do Produto-Momento (LIRA e NETO, 2005). Que é apropriado para descrever a correlação linear dos dados de duas variáveis quantitativas, ou seja, avaliar o grau de relacionamento entre elas, não fazendo distinção entre variáveis independentes e dependentes. A representação simbólica é feita pela letra  $r$ .

O intervalo de variação do coeficiente de Pearson é  $-1 < r > +1$ , e uma associação é positiva quando  $r > 0$ , o que significa que duas variáveis,  $X$  e  $Y$ , caminham num mesmo sentido, ou seja, se um elemento tiver valores grandes de  $X$ , os de  $Y$  também tendem a ser, e valores pequenos de  $X$  tendem a ter valores pequenos de  $Y$ . A relação contrária ( $Y \rightarrow X$ ) também é verdade. A correlação negativa é quando os elementos de uma variável aumentam, e os da outra diminuem. A correlação nula  $r = 0$  significa que não há correlação linear entre as variáveis  $X$  e  $Y$ .

Para o cálculo do coeficiente de correlação linear de Pearson,  $r$ , pode-se utilizar a seguinte equação.

$$r = \frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i - \bar{X}}{S_x} \right) \left( \frac{y_i - \bar{Y}}{S_y} \right). \quad 3.82$$

Em que,  $\bar{X}$  é média da variável  $x$ ,  $\bar{Y}$  é média da variável  $y$ ,  $S_x$  é o desvio-padrão da variável  $x$ ,  $S_y$  é o desvio-padrão da variável  $y$ . E  $N$  é o número de pares de observações.

Nesta pesquisa o cálculo do coeficiente de correlação tem interesse prático, já que se quer estudar as relações entre as diversas variáveis existentes no projeto de tabuleiros de concreto armado. Dessa forma, o coeficiente de correlação é avaliado qualitativamente como pode ser visto na Tabela 8.

É importante ressaltar que o conceito de correlação refere-se a uma associação numérica entre duas variáveis e não implica necessariamente uma relação de causa e efeito (FILHO e JÚNIOR, 2009; LIRA, 2004). Também não se refere à porcentagem e proporção, por exemplo, uma correlação de  $r = 0,4$  não representa 40% e não significa que ela é duas vezes maior que uma de  $r = 0,2$ , apenas que tem uma correlação maior.

Tabela 8 – Avaliação do Coeficiente de Correlação Linear de Pearson

Correlação	Interpretação
$ r  = 1,00$	Correlação perfeita
$0,8 <  r  < 1,0$	Muito alta
$0,6 <  r  < 0,8$	Alta
$0,4 <  r  < 0,6$	Moderada
$0,2 <  r  < 0,4$	Baixa
$0,0 <  r  < 0,2$	Muito baixa
$r = 0,00$	Nula

### 3.9 TABULEIROS PARA ESTUDO

A seguir são apresentados os tabuleiros formados por lajes maciças e vigas retangulares de concreto armado que foram estudados nesta pesquisa.

#### 3.9.1 Tabuleiro I

Painel de lajes contínuas, retangulares, com vigas flexíveis, Figura 16. Esse painel foi analisado por Coelho (2009), e para este estudo alguns parâmetros foram alterados. Abaixo são mostradas as características do tabuleiro.

- Espessura da laje,  $h$ : 10, 12 e 15 cm;
- Vigas de bordo (vigas rígidas: V1, V2, V3, e V5): 15x250 cm;
- Viga intermediária V4:  $b_w=15$  cm, e altura  $H = 16, 17, 18, 19, 20$  cm a 100 cm (variação de 5 cm). Por meio da variação da rigidez dessa viga, é estudada a influência da flexibilidade no tabuleiro;
  - As vigas de bordo possuem ligação rígida com os pilares (seção 20x20 cm), e a viga V4 apoia-se com liberação da rotação, nas vigas V1 e V2;
- Resistência à compressão do concreto:  $f_{ck} = 20$  MPa. Módulo de elasticidade longitudinal secante do concreto:  $E_{cs} = 21287,37$  MPa.
- Cobrimento: 2,50 cm para vigas e 2,00 cm para lajes;
- Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,20$ ;
- AG → Redução na torção para vigas: 95%, vigas com rigidez à torção praticamente nula;

- AG → Rigidez à torção das barras da grelha: item 3.5, pág.77 (Tabela 7);
- AG → Espaçamento das barras da grelha: Ver item 3.5, pág.77;
- MEF → Lajes modeladas com elementos de casca fina (*Shell-Thin*), com malha retangular de 12,5 x 18,75 cm (mantém a razão entre as dimensões da laje L1), vigas modeladas como elementos de barra (*frame*) e pilares são representados como pontos nodais;
  - MEF → Para desconsiderar a rigidez à torção das vigas: *Define* → *Section Properties* → *Frame Section* → no campo "*Find this property*" selecionar a "seção da viga" → *Modify/Show Property* → *Set Modifiers* → *Torsional Constant* → colocar "0,00" (zero).
  - Carregamento das lajes: Foi utilizado o seguinte carregamento para as lajes (carga total):

$$h = 10 \rightarrow p = 12,50 \text{ kN/m}^2;$$

$$h = 12 \rightarrow p = 13,00 \text{ kN/m}^2;$$

$$h = 15 \rightarrow p = 13,75 \text{ kN/m}^2.$$

Esse carregamento foi tomado de maneira semelhante ao valor utilizado por Coelho (2009).

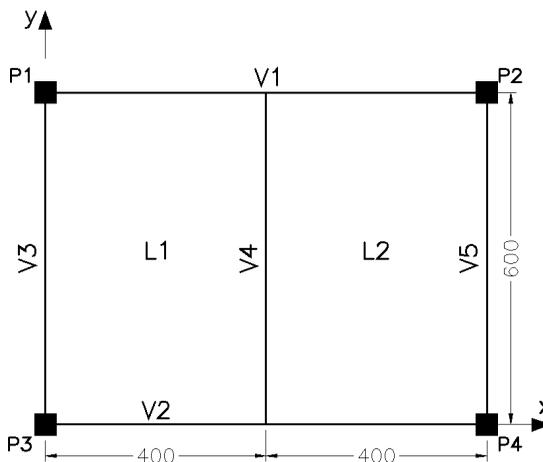


Figura 16 – Tabuleiro I: Painel contínuo de lajes iguais

### 3.9.2 Tabuleiro II

Tabuleiro com lajes desiguais e vigas flexíveis. A geometria do tabuleiro é mostrada na Figura 17, a qual já foi analisada por outros pesquisadores (ARAÚJO, 2008, 2009). Para não repetir os resultados encontrados por pesquisas já existentes, foram alterados alguns parâmetros. Por meio da variação da altura das vigas V2 e V5, é estudada a influência da flexibilidade das vigas de apoio na determinação da resposta estática e dinâmica do tabuleiro, essa investigação é realizada somente por MEF. As características do tabuleiro são:

- Vigas de bordo (V1, V3, V4, e V6):  $b_w = 20$  cm, e altura da viga igual a um décimo do maior vão,  $H = l/10 = 70$  cm;
- Viga V2 e V5:  $b_w = 20$  cm, e altura  $H = 30, 40, \dots, 150$  cm (variação de 10 cm);

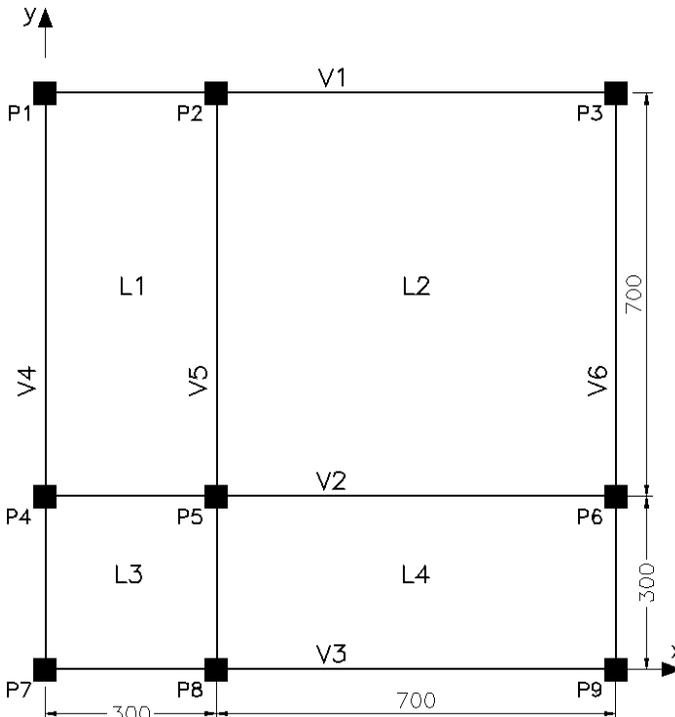


Figura 17 – Tabuleiro II: Painel contínuo, com lajes desiguais

- Espessura da laje,  $h$ : 12, 14 e 15 cm;
- As vigas apoiam-se em pilares (seção 20x20 cm), com liberação da rotação;
  - Resistência à compressão do concreto:  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ .
  - Módulo de elasticidade longitudinal secante do concreto:  $E_{cs} = 26071,59 \text{ MPa}$ ;
  - Cobrimento: 2,50 cm para vigas e 2,00 cm para lajes;
  - Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,20$ ;
  - AG → Utilizado apenas para a validação do modelo em MEF;
  - AG → Redução na torção para vigas: 95%;
  - AG → Rigidez à torção das barras da grelha,  $GJ$  e espaçamento das barras da grelha (malha): definido no item 4.1 (ver também Apêndice A);
    - MEF → Lajes modeladas com elementos de casca fina (*Shell-Thin*). Para malha em MEF, foram estudadas quatro alternativas de malha quadrada: 10x10, 20x20, 25x25 e 50x50 cm. Este estudo foi realizado para fazer a validação do modelo numérico. Após essa etapa, a análise da flexibilidade das vigas foi realizada com o uso da malha que resultou em resultados mais próximos aos encontrados pelo uso das tabelas de Czerny;
    - MEF → As vigas modeladas como elementos de barra (*frame*) e pilares representados como pontos nodais;
    - Carregamento das lajes: a carga total utilizada é apresentada na Tabela 9, para os dois casos de utilização do tabuleiro (combinação rara), que é como “Escritório” e como “Sala de Dança”. Esse procedimento foi adotado, pois, o objetivo é avaliar a variação de flechas e esforços devido à flexibilidade dos apoios, para esses dois casos de utilização.

Tabela 9 – Cargas para o Tabuleiro II (kN/m<sup>2</sup>)

Laje (cm)	Carga Total: Escritório	Carga Total: Sala de Dança
12	5,50	8,00
14	6,00	8,50
15	6,25	8,75

A influência da excentricidade entre laje e viga, para o Tabuleiro II, foi investigada apenas para as flechas da laje L2 e para a resposta dinâmica, referente a frequências e modos de vibração. Para isso, todas as vigas do tabuleiro foram modeladas com a mesma seção transversal.

Mestrando: Jeferson Rafael Bueno

Orientador: Daniel Domingues Loriggio



## 4 ANÁLISES NUMÉRICAS

### 4.1 ANÁLISE E RESULTADOS: TABULEIRO I

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para o Tabuleiro I, (ver Figura 16). As análises utilizaram os procedimentos descritos no item 3 (metodologia).

#### 4.1.1 Validação do Modelo Numérico: Tabuleiro I

Para a validação dos modelos numéricos, estes podem ser modelados com vigas de grande rigidez à flexão, para que elas tenham deformabilidade insignificante, ou deve-se restringir o deslocamento vertical dessas vigas. Dessa forma, para a validação do modelo em AG e MEF, as vigas são modeladas com seção transversal de  $15 \times 900$  cm.

Os resultados dos modelos numéricos, do Tabuleiro I, são comparados com os resultados encontrados com o uso das tabelas de Czerny e pelas tabelas apresentadas em Pinheiro (2007). Os dados da validação dos modelos numéricos são mostrados do Gráfico 1 ao Gráfico 3, em kNm/m. Como as duas lajes L1 e L2 são iguais, evidenciam-se apenas os resultados para a laje L1. Os esforços apresentados são valores característicos (sem majoração).

Para facilitar a análise dos resultados e reduzir a repetição de termos, é usada a seguinte representação:

$h$  → refere-se à espessura da laje, em cm;

$H$  → refere-se à altura da seção transversal da viga, em cm;

Os valores encontrados pelos métodos tradicionais (tabelas) diferem pouco entre si. Assim, pode-se usar qualquer uma das duas alternativas de tabelas, nas quais os valores dos esforços aumentam com a espessura da laje com a razão de aumento igual à relação entre a carga da laje mais espessa com a da menos espessa.

Para a comparação dos resultados utiliza-se a equação (4.83), na qual o MEF é tido como referência para comparação com os demais procedimentos, “X”. Se o resultado for positivo, significa que o esforço em análise é maior que o obtido por MEF, e caso seja negativo, significa que é menor.

$$Diferença = 100\% \left( \frac{X}{MEF} - 1 \right) \quad 4.83$$

Para AG, constata-se que os valores da constante de torção das barras da grelha ( $J$ ) apresentam grande influência nos resultados de esforços da laje. Para o método, têm-se as seguintes verificações referentes ao Tabuleiro I (Tabela 10), para a etapa de validação do mesmo (ver também o Apêndice A).

- *Verificação I:* com o aumento do espaçamento das barras da grelha (aumento do espaçamento da malha #), e com valores constantes de  $J$ , ocorre o aumento dos momentos fletores das lajes L1 e L2;
- *Verificação II:* para uma mesma malha e com o aumento de  $J$  ocorre a diminuição dos momentos fletores das lajes L1 e L2;
- *Verificação III:* à medida que se diminui o refinamento da malha e com maiores valores de  $J$ , têm-se menores valores para os esforços.

Logo, para a validação do Tabuleiro I, verifica-se que os maiores valores de momentos  $M_x$  e  $M_{xe}$  obtidos por AG correspondem à malha de  $80 \times 80$  cm ( $\#80 \times 80$ ), com uso de  $J = 1,44 \times I$  que corresponde a  $\mu_E = 40$  (valor recomendado pelo *software* Eberick). Para  $M_y$ , a malha  $10 \times 10$  cm com  $J = 2,40 \times I$  resulta em maiores valores.

Comprova-se que,  $M_x$  será maior que  $M_y$  quando as vigas de apoio forem muito mais rígidas que as lajes (Gráfico 1 a Gráfico 3). O que não acontecerá quando as vigas de apoio forem muito flexíveis (Gráfico 9). Como para a laje L1 a relação entre vãos é  $l_x/l_y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ , a laje é ortótropa, e assim  $M_x \neq M_y$  (apoios indeformáveis), conseqüentemente  $As_x \neq As_y$ , o que se verifica para vigas muito rígidas.

Tabela 10 – Verificações para o Tabuleiro I sobre AG

Verificação	Malha (#)	$J$	$M_x$	$M_{xe}$	$M_y$
I	↑	Const.	↑	↑	↑
II	Const.	↑	↓	↓	↓
III	↓	↑	↓	↓	↓

Na comparação entre MEF e tabelas (Gráfico 1 ao Gráfico 3), verifica-se que para os momentos fletores negativos  $M_{xe}$ , a maior diferença é de +0,80% ( $h = 15$  cm). Já para o momento fletor positivo  $M_x$ , a diferença é menor que -10% para todas as espessuras de lajes. Para o momento  $M_y$ , a melhor correspondência dos resultados é entre Czerny e MEF, com diferença igual a -10,86%, entre Pinheiro e MEF a

maior diferença é de -19,68%. Dos resultados entre tabelas e MEF, constata-se que, com o aumento da espessura da laje, há o aumento da diferença para ambos os esforços.

Na condição de vigas de apoio indeformáveis, os resultados entre AG e MEF que mais se aproximam são comparados na Tabela 11. Os resultados concordam com as observações já feitas por outros estudos, ver item 2.5, os quais verificam que para AG não há uma malha e valor de  $J$  que possam representar adequadamente todos os esforços e flechas das lajes, simultaneamente.

Para aplicação prática em escritórios de projetos, não é viável projetar uma estrutura fazendo alterações de malha e  $J$  para o dimensionamento de cada esforço atuante nas lajes, assim, é necessário adotar um modelo que represente adequadamente os esforços mais importantes. Nessa linha de pensamento, ao analisar os esforços obtidos por MEF (laje com  $h = 15$  cm), verificam-se as seguintes relações entre os mesmos:  $M_x = 2,205 \times M_y$  e  $M_{xe} = 4,174 \times M_y$ . Dessa forma, é conveniente adotar uma malha e um valor de  $J$  que melhor represente  $M_x$  e  $M_{xe}$ , para se ter um dimensionamento mais adequado, pois, são referentes às maiores armaduras, e estas são distribuídas na maior dimensão da laje, direção  $y$  ( $l_y = 1,50 \times l_x$ ).

Tabela 11 – Validação Tabuleiro I: melhor aproximação entre MEF e AG

Esforço	AG	Diferença (%)		
	Malha (#) e $J$	$h = 10$	$h = 12$	$h = 15$
$M_x$	#10x10, $J = 2,00 \times I$	+1,24	+1,17	+1,05
$M_{xe}$	#10x10, $J = 2,40 \times I$	+0,95	+1,08	+1,40
$M_y$	#80x80, $J = 1,44 \times I$	-9,54	-9,74	-10,11

Por exemplo, os modelos em AG com malha  $10 \times 10$  com  $J = 2 \times I$  e  $50 \times 50$  com  $J = 2,40 \times I$ , representam satisfatoriamente os esforços  $M_x$  e  $M_{xe}$ , com uma diferença aceitável para  $M_y$ . A malha  $25 \times 25$  com  $J = 2 \times I$  possui valores para  $M_x$  e  $M_{xe}$  um pouco maiores, mesmo assim, mostra-se como uma boa opção. Como pode ser visto, há várias opções de modelagens em AG, para o Tabuleiro I, que levam a bons resultados (diferença menor que 6% para  $M_x$  e  $M_{xe}$ ).

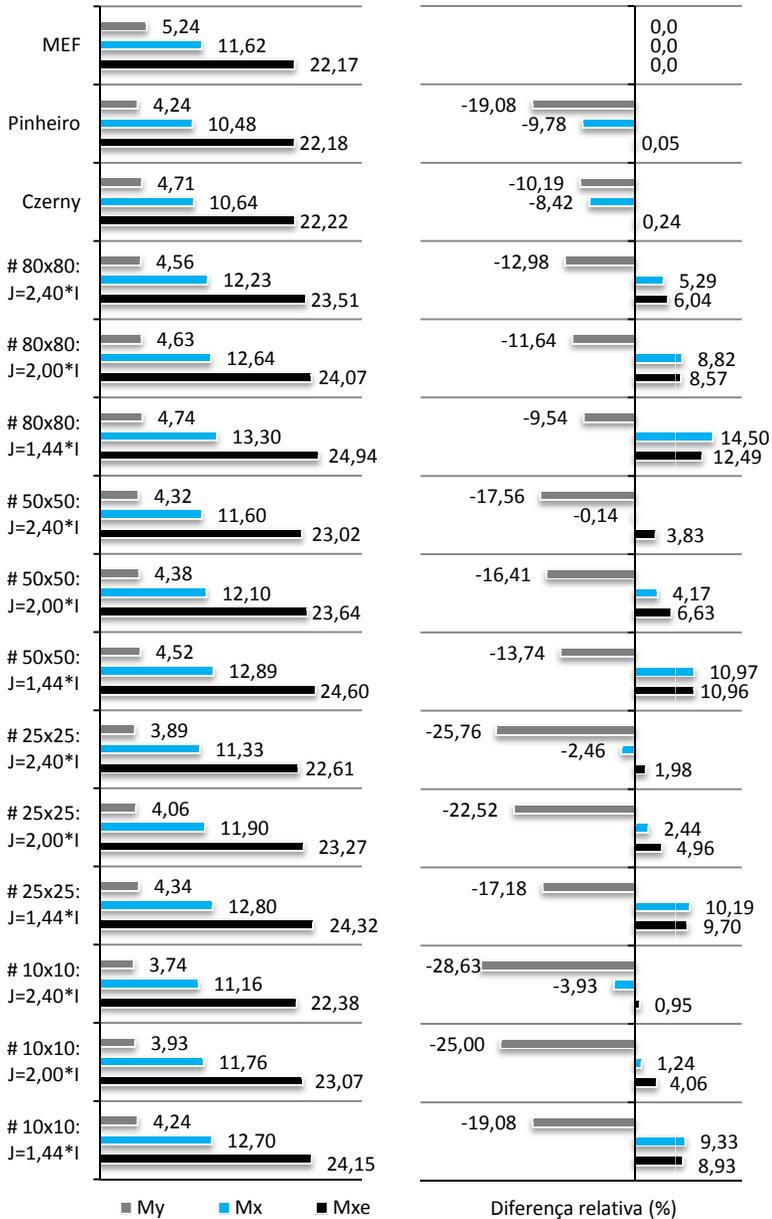


Gráfico 1 – Validação Tabuleiro I, Laje = 10 cm

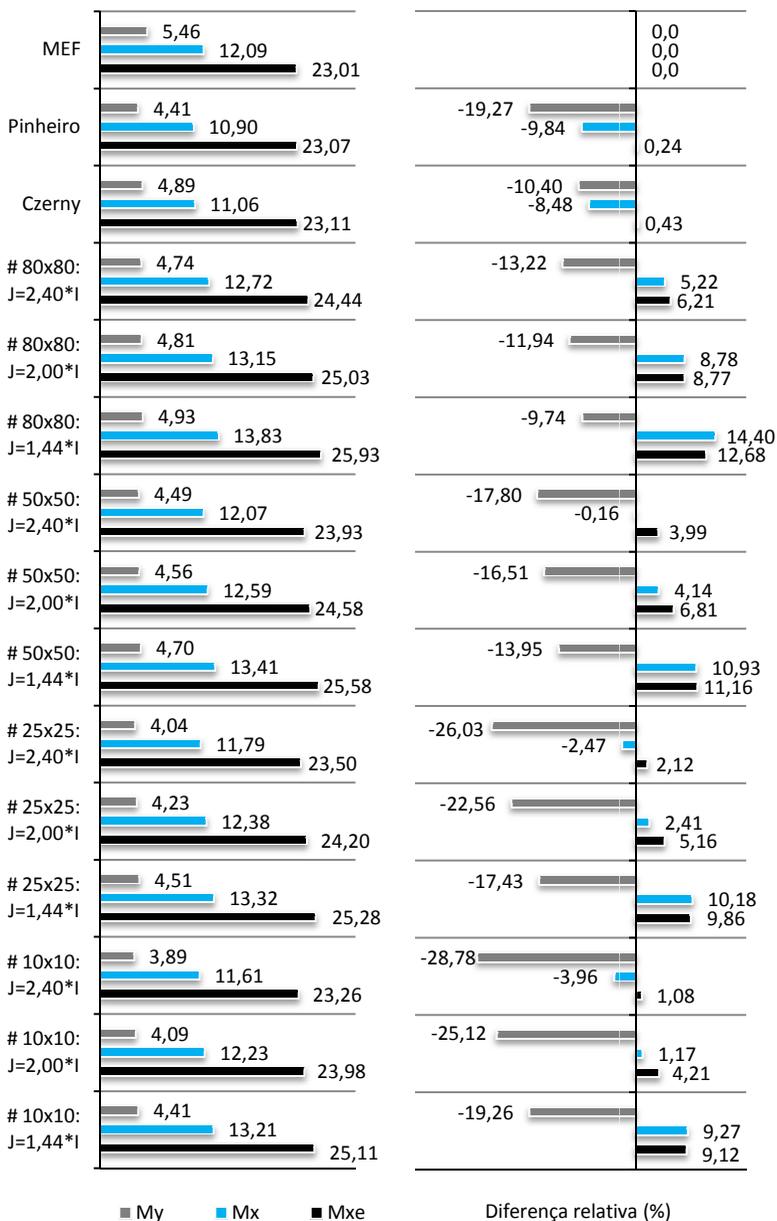


Gráfico 2 – Validação Tabuleiro I, Laje = 12 cm

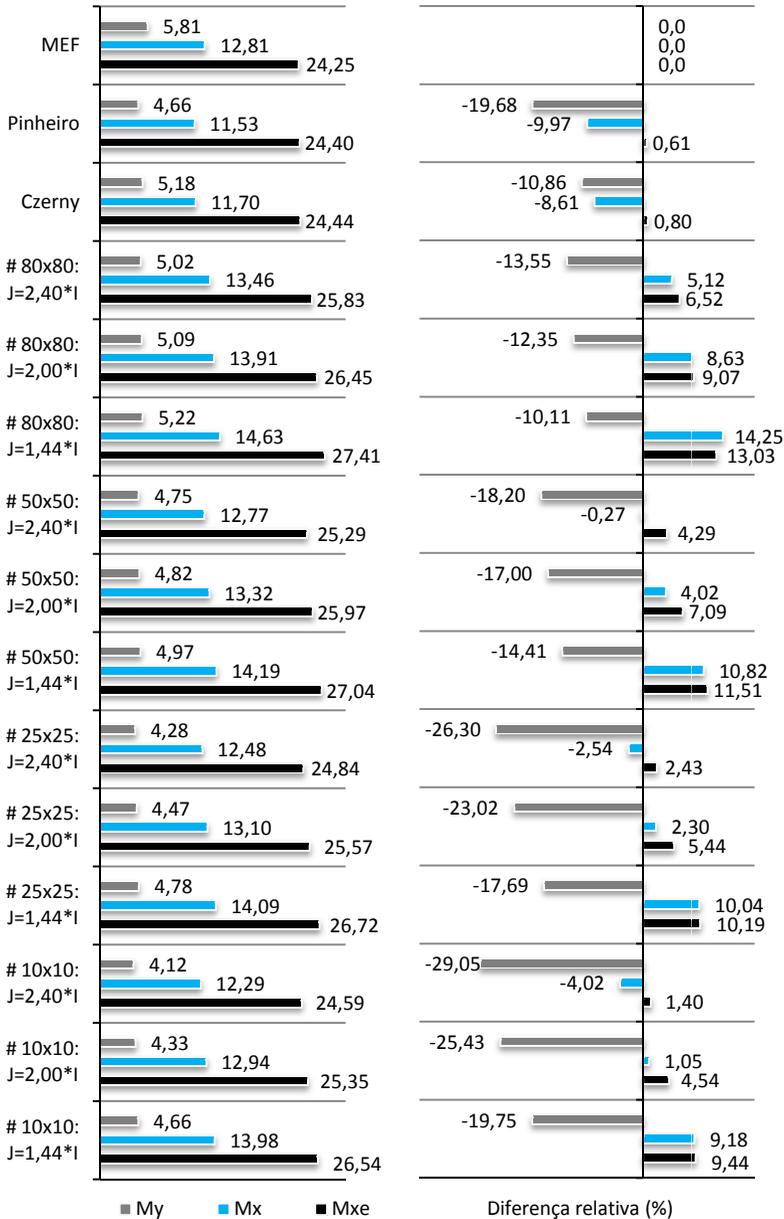


Gráfico 3 – Validação Tabuleiro I, Laje = 15 cm

O Gráfico 4 apresenta os resultados para flechas imediatas (deslocamento elástico máximo) da laje L1 (cm), e mostra a diferença relativa entre os métodos, com o método de Czerny tido como referência. Os valores obtidos por tabelas correspondem ao deslocamento vertical do centro da laje L1, e os obtidos por MEF e AG correspondem à flecha da laje (deslocamento máximo), que pode não ser no centro da laje.

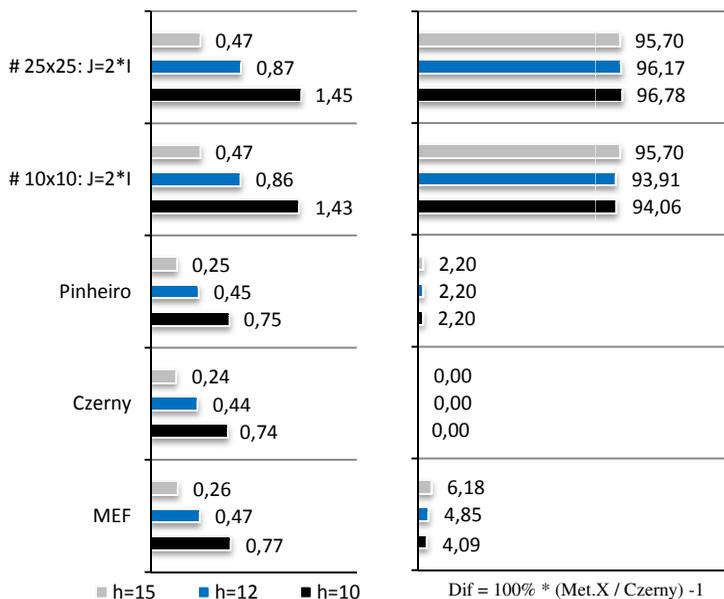


Gráfico 4 – Validação Tabuleiro I: Flechas elásticas (cm)

Com a equação de Sophie-Germain-Lagrange (2.21), verifica-se que o aumento da espessura da placa e conseqüente elevação da rigidez da laje, os deslocamentos devem ser menores. Esse comportamento é verificado nos resultados, em ambos os métodos. A diferença entre MEF e tabelas é aceitável, pois, em termos práticos de engenharia, uma diferença de 0,30 mm não possui grande significado.

Das modelagens realizadas com AG para o Tabuleiro I, se verifica que utilizar malha  $50 \times 50$  ( $J = 2,4 \times I$ ),  $10 \times 10$  ( $J = 2 \times I$ ) e malha  $25 \times 25$  ( $J = 2 \times I$ ) leva a resultados satisfatórios para cálculo dos esforços. Essa verificação pode ser feita também para outras opções de modelagens em AG, já que resultam em diferenças menores que 5% para  $M_x$  e  $M_{xe}$ .

Caso os resultados de momentos fletores e flecha imediata fossem obtidos no centro da laje, as diferenças entre MEF e Czerny serão praticamente nulas. A Tabela 12, Tabela 13 e Tabela 14 comparam os resultados desses dois métodos para valores obtidos no centro da laje L1, com espessura da laje igual a 10, 12 e 15 cm respectivamente. As unidades são as mesmas utilizadas nos gráficos anteriores (kNm/m; cm). As vigas foram modeladas com seção transversal de 15x900 cm, e como pode-se ver nas tabelas, esse procedimento pode ser considerado como uma boa aproximação.

Tabela 12 – Valores para o centro de L1 com  $h = 10$  cm: MEF e Czerny.

	<b>MEF</b>	<b>Czerny</b>	<b>MEF/ Czerny</b>
$M_x$	10,628	10,638	99,91 %
$M_{xe}$	22,170	22,222	99,77 %
$M_y$	4,693	4,706	99,72 %
$\delta_{centro L1}$	0,736	0,737	99,86 %

Tabela 13 – Valores para o centro de L1 com  $h = 12$  cm: MEF e Czerny.

	<b>MEF</b>	<b>Czerny</b>	<b>MEF/ Czerny</b>
$M_x$	11,053	11,064	99,90 %
$M_{xe}$	23,012	23,111	99,57 %
$M_y$	4,880	4,894	99,71 %
$\delta_{centro L1}$	0,443	0,443	100,00 %

Tabela 14 – Valores para o centro de L1 com  $h = 15$  cm: MEF e Czerny.

	<b>MEF</b>	<b>Czerny</b>	<b>MEF/ Czerny</b>
$M_x$	11,691	11,702	99,91 %
$M_{xe}$	24,250	24,444	99,21 %
$M_y$	5,162	5,176	99,73 %
$\delta_{centro L1}$	0,240	0,240	100,00 %

Os resultados evidenciam que a modelagem utilizada em MEF está adequada. Apresentando excelente concordância com os resultados obtidos pelas tabelas de cálculo de lajes.

## 4.1.2 Influência da flexibilidade dos apoios

Com a validação dos modelos numéricos, pode-se dar continuidade ao estudo da influência da flexibilidade das vigas de apoio, na resposta estática e dinâmica do tabuleiro. Desta forma, realizaram-se análises com o MEF (SAP2000) e AG (Apêndice A), variando as dimensões da viga V4, conforme é descrito na página 77. Os resultados apresentados nesta seção não consideram a excentricidade entre laje e viga, esse estudo é apresentado na página 114.

Para a análise generalizada dos resultados, os valores obtidos para a resposta estática elástico-linear são exibidos em função do índice adimensional laje/viga, para uma melhor visualização do comportamento flexível dos elementos. O uso do índice torna-se efetivo para representar esforços, pois, em apenas uma curva, podem-se apresentar os resultados sem a necessidade de relacionar explicitamente estes valores com a espessura da laje ou altura da viga.

O Gráfico 5 compara o índice  $I_{Lv4}$  para as três espessuras de lajes, em função da altura  $H$  da viga V4. Conforme  $H$  aumenta, o índice  $I_{Lv4}$  diminui, evidenciando que, para uma laje mais rígida, obtêm-se menores valores de  $I_{Lv4}$ . Na sequência são feitas as seguintes explicações, para leitura e correta análise dos gráficos.

- $I_{Lvb} = I_L / I_{vb} = 0,0022$  corresponde à razão entre a flexibilidade da laje com a flexibilidade das vigas de bordo. Como as vigas de bordo possuem grande rigidez à flexão ( $15 \times 250$  cm), consideram-se essas vigas como indeslocáveis apoios rígidos;

- $I_{Lv4} = I_L / I_{v4}$  corresponde à razão entre a flexibilidade da laje com a flexibilidade da viga V4. Quanto maior o valor desse índice, menor é a altura da viga V4 e menor a sua rigidez à flexão em relação à laje L1;

- Legenda dos gráficos: os termos “ $h = 10$ ;  $h = 12$  e  $h = 15$ ” correspondem à espessura da laje para a qual são exibidos os resultados.

Para melhor apresentação dos resultados, o eixo horizontal e/ou vertical de alguns gráficos são exibidos em escala logarítmica, base 2. Os gráficos em escala logarítmica são mais harmônicos, ou seja, neles as tendências e formações de análise técnica ficam mais claras. Nos demais casos, utiliza-se a escala linear.

No Gráfico 6 e no Gráfico 7 são mostrados os resultados obtidos com o MEF, para os esforços característicos (sem ponderação) máximos  $M_x$  e  $M_y$ , respectivamente, da laje L1 em kNm/m. Veja que estes

gráficos exibem os valores dos esforços em função de  $H$  (altura V4) e  $h$  (espessura L1), o que resulta em três curvas de variação não linear decrescente à medida que  $H$  aumenta, uma curva para cada valor de  $h$ .

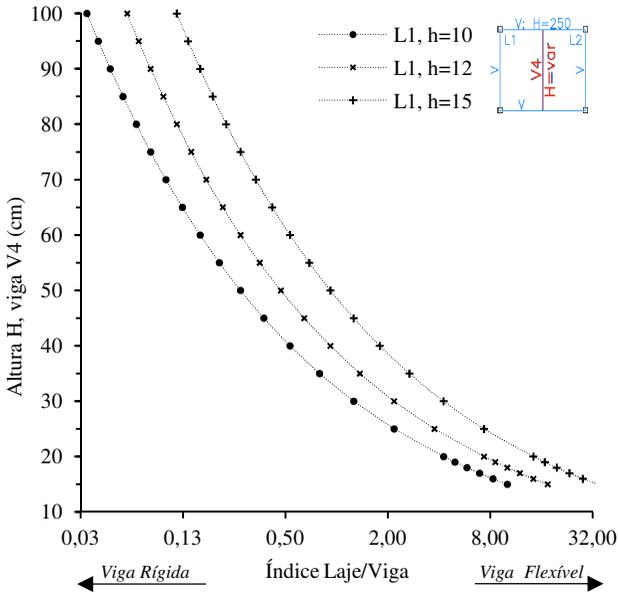


Gráfico 5 – Relação entre altura  $H$  da viga V4 e índice  $I_{LV4}$

Em ambos os gráficos, se evidencia que os momentos fletores positivos são menores à medida que a rigidez à flexão da viga torna-se maior que a rigidez à flexão da laje, com variação não linear. Os maiores valores dos momentos fletores positivos são obtidos para  $h = 15$  (espessura de L1) e  $H = 15$  cm (altura de V4), e os menores para  $h = 10$  e  $H = 100$  cm.

O Gráfico 8 relaciona os valores obtidos para  $M_x$  e  $M_y$ , em função do índice  $I_{Mx}$  e  $I_{My}$  (equação 3.77 e 3.78), e índice  $I_{LV4}$  (equação 3.76). Esses índices são correspondentes aos momentos fletores positivos, obtidos para cada valor de  $H$  e  $h$ , e quanto maior o valor do índice menor será o valor do momento fletor. Consta-se que é possível representar os resultados com apenas uma curva, sem precisar exibir os valores de  $H$  e  $h$ , dos quais originam os esforços.

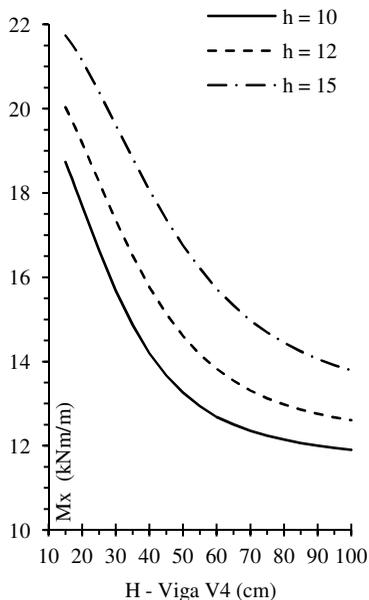


Gráfico 6 -  $M_x$  vs.  $H$  (MEF)

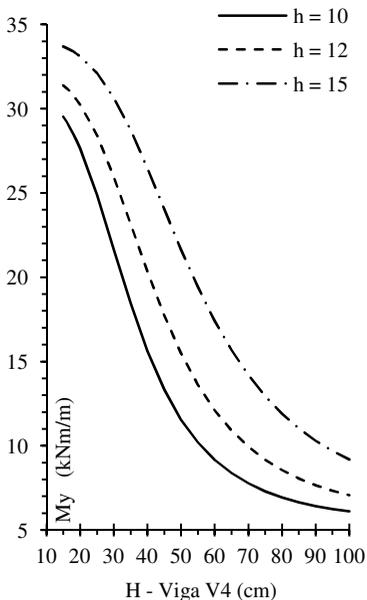


Gráfico 7 -  $M_y$  vs.  $H$  (MEF)

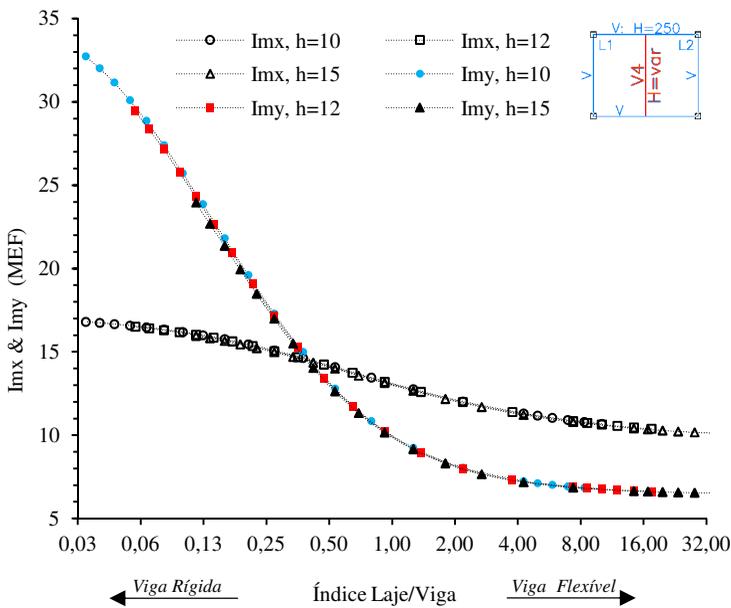


Gráfico 8 -  $I_{Mx}$  e  $I_{My}$  vs.  $I_{LV4}$  (MEF)

Ao realizar a análise do Gráfico 6 ao Gráfico 8, verifica-se que o uso dos índices adimensionais é prático e possibilita uma análise mais geral dos resultados, com fácil visualização do comportamento da variação dos esforços da laje. Deve ser lembrado, que os índices são inversamente proporcionais aos momentos fletores (ver Gráfico 11).

O Gráfico 9 compara os resultados obtidos por MEF e Czerny, para os índices  $I_{Mx}$  e  $I_{My}$  em função do índice adimensional  $I_{LV4}$ . O objetivo deste gráfico foi de mostrar a diferença entre a consideração da flexibilidade dos apoios (MEF), com a não consideração (Czerny), para cálculo dos momentos fletores positivos do Tabuleiro I.

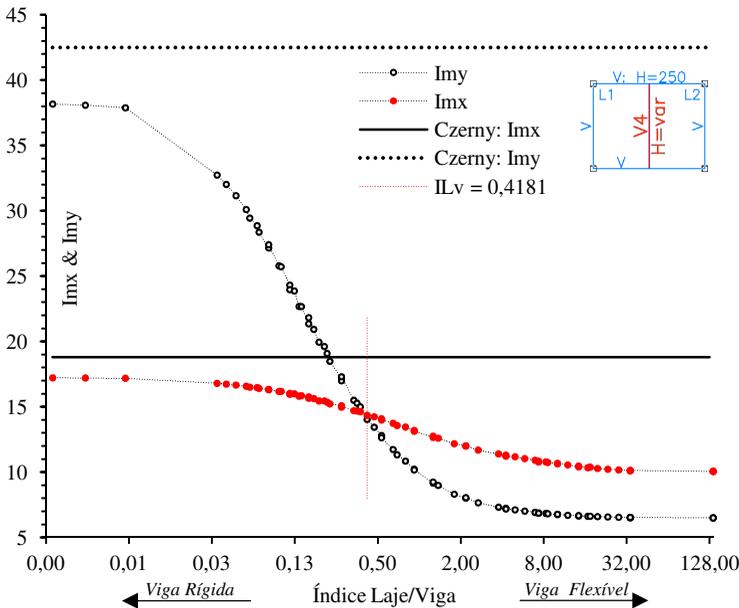


Gráfico 9 –  $I_{Mx}$  e  $I_{My}$  vs.  $I_{LV4}$  (MEF & Czerny)

Os valores de cada um dos índices adimensionais,  $I_{Mx}$  e  $I_{My}$ , estão representados por apenas uma curva, como o Gráfico 8 demonstra ser possível. Por meio do Gráfico 9, pode-se entender melhor como variam os momentos fletores positivos, do Tabuleiro I, em função da relação entre a flexibilidade da laje L1 e da viga de apoio V4. Percebe-se que os valores dos índices  $I_{Mx}$  e  $I_{My}$  de Czerny são constantes, devido a não consideração da deformabilidade dos apoios da laje. Já o MEF possibilita a consideração da deformabilidade e continuidade dos

esforços entre lajes, e dessa forma, o Gráfico 9 evidencia que a diferença entre resultados obtidos por MEF e Tabelas pode ser significativa. Evidenciando que para o uso de tabelas, deve-se garantir que as vigas de apoio tenham rigidez à flexão muito maior que a da laje.

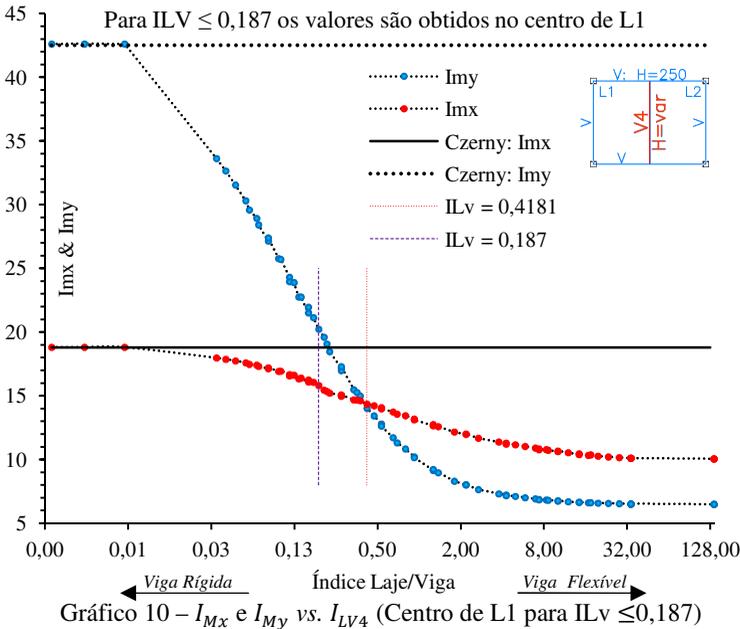
Na condição de apoios com grande rigidez à flexão têm-se os maiores valores para  $I_{M_x}$  e  $I_{M_y}$ , o que significa menores valores de momentos fletores positivos e maiores de momentos fletores negativos (Gráfico 13). Quando  $I_{Lv4} < 0,4181$ , o momento fletor  $M_x$  passa a ser maior que  $M_y$ , ou seja, *o momento fletor na direção do menor vão passa a ser maior que o momento na direção do maior vão*. Este comportamento está de acordo com o esperado para o tabuleiro, visto que a laje é ortótropa ( $l_x/l_y = 0,6667$ ) e assim  $M_x > M_y$ , para laje com condições de contorno indeslocáveis. E quando  $I_{Lv4} > 0,4181$  se tem  $M_y > M_x$ , ou seja, *o momento na direção do maior vão passa a ser maior que momento na direção do menor vão*. Assim, a maior armadura calculada será para a direção  $y$  (maior vão), e não da direção  $x$  (menor vão), contrariando o cálculo tradicional com uso de tabelas.

A diferença que se observa no Gráfico 9, para a condição de V4 praticamente indeformável/indeslocável, é devida ao fato que os resultados obtidos por MEF são valores máximos de esforços de L1, que não correspondem ao centro da laje. Enquanto, os resultados de Czerny correspondem valores obtidos para o centro da laje L1. Para mostrar que quando  $I_{Lv4} \leq 0,187$  (rigidez de V4  $\gg$  rigidez de L1) os resultados de MEF e Czerny são praticamente iguais no centro de L1, elaborou-se o Gráfico 10. O qual, também utiliza os valores da Tabela 12, Tabela 13 e Tabela 14 para calcular os índices de momentos. Os demais dados são os mesmos exibidos no Gráfico 9.

Apenas o Gráfico 10 que apresenta os resultados para o centro de L1, para  $I_{Lv4} \leq 0,187$  os demais gráficos não o fazem.

No Gráfico 10, pode-se constatar a formação de um patamar quando V4 tiver a altura igual à espessura da laje, ou seja,  $H = h$ . Para essa condição, que resulta em  $I_{Lv4} = 34,021$ , o tabuleiro apresenta a configuração de apenas uma laje, com dimensão 8,00x6,00 m. Os momentos fletores positivos  $M_x$  e  $M_y$  resultam em índices  $I_{M_x} = 10,06$  e  $I_{M_y} = 6,50$ , respectivamente, para todas as espessuras das lajes. Dessa forma, o Gráfico 9 e Gráfico 10 possibilitam o estudo completo da variação de  $M_x$  e  $M_y$ , desde a condição de V4 indeformável até  $H = h$  (tabuleiro com apenas uma laje de 8,00x6,00 m). Logo, é necessário garantir que as vigas de apoio de lajes tenham rigidez à flexão adequada,

para que o uso de tabelas forneça resultados compatíveis com os que seriam obtidos por uma análise com o MEF.

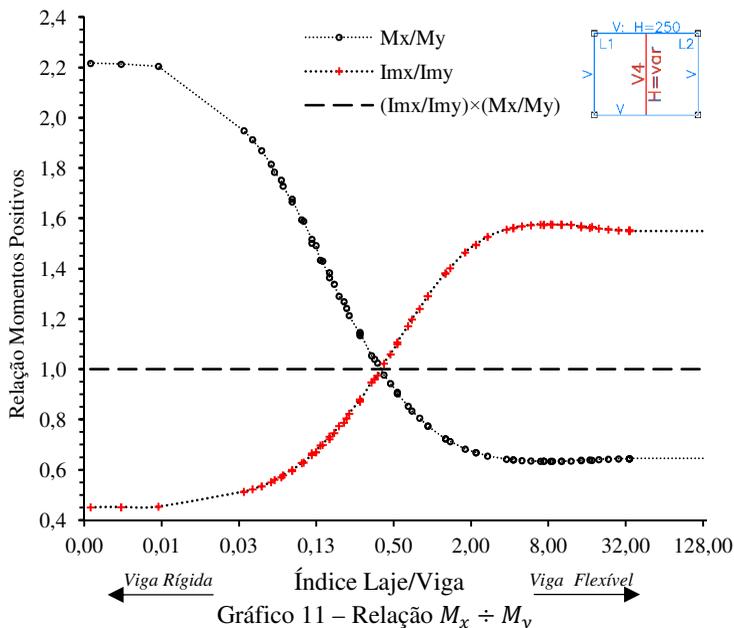


Uma visualização mais direta, da relação entre os momentos fletores positivos de L1, pode ser observada no Gráfico 11. Neste gráfico fica clara a relação entre os momentos  $M_x$  e  $M_y$ , entre os índices  $I_{M_x}$  e  $I_{M_y}$ , e a relação entre índices e momentos. Para todas as relações de  $I_{LV4}$ , o produto entre  $I_{m_x}/I_{m_y}$  e  $M_x/M_y$  será sempre igual a 1. Observa-se que para a configuração de geometria da laje L1, L2 e viga V4, em que  $I_{LV4} = 0,034$ , referente à  $h = 10$  e  $H = 100$  cm, a relação entre momentos positivos de L1 é  $M_x/M_y = 1,949$ . Entretanto, para o valor de  $I_{LV4} = 0,5316$  referente à  $h = 15$  e  $H = 60$  cm, a relação será  $M_x/M_y = 0,903$ , essa verificação evidencia que para valores superiores a essa relação,  $I_{LV4} \geq 0,4181$ , para o Tabuleiro I, se obtém  $M_y > M_x$ .

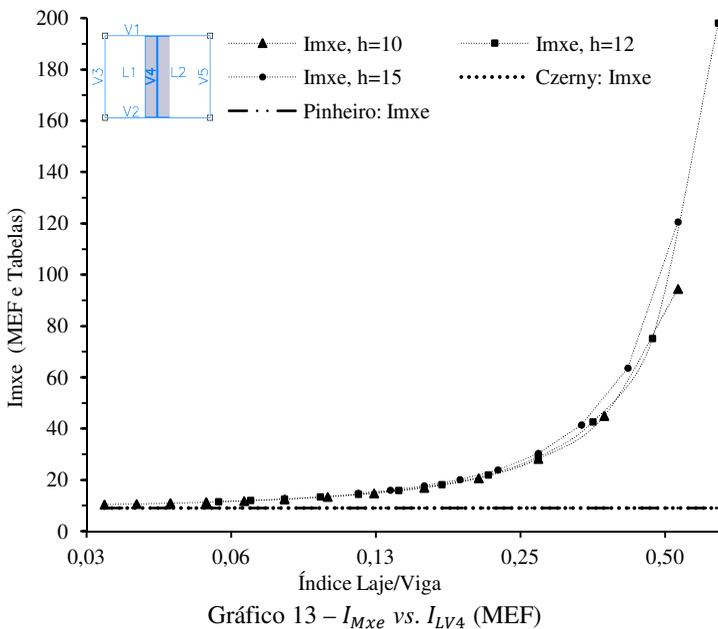
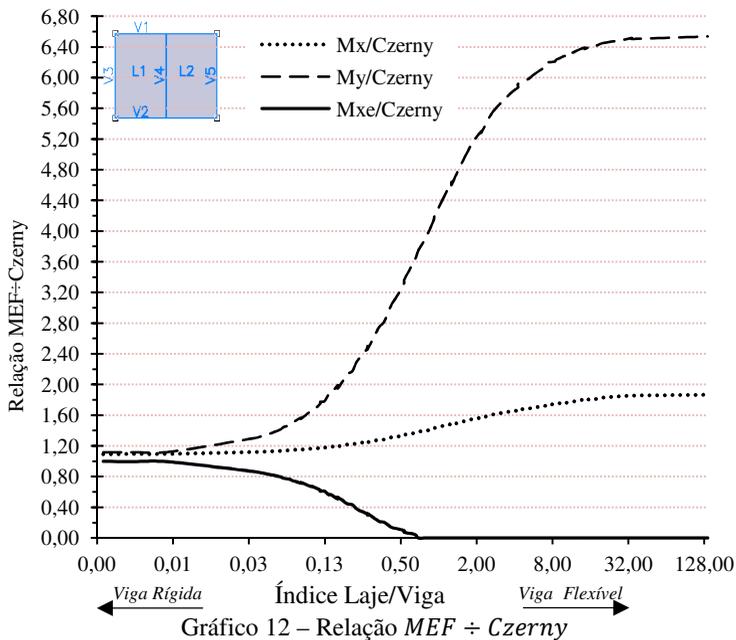
Além disso, ainda é necessário responder à seguinte pergunta: Qual é o erro/diferença associada à não consideração da flexibilidade e/ou deformabilidade dos apoios de lajes maciças, entre o uso de tabelas e MEF?

Essa pergunta é respondida com auxílio do Gráfico 12, que relaciona os resultados obtidos por MEF e Czerny para os momentos fletores positivos e negativos do Tabuleiro I. Verifica-se que, para a configuração de maior rigidez do tabuleiro, a relação entre os resultados obtidos por MEF e Czerny é muito próxima a um para  $M_x$  e  $M_y$ , e tende a um para  $M_{xe}$ .

Para este último, a partir de  $I_{Lv4} \geq 0,6901$ , não há como relacionar os resultados, pois, devido à flexibilidade de V4, o momento fletor negativo entre lajes é nulo (Gráfico 13), e, assim, o tabuleiro trabalha como se fosse formado por apenas uma laje apoiada nas vigas de borda (V1, V2, V3 e V5). Nessa situação, a viga V4 deixa de trabalhar como apoio para as lajes L1 e L2 e passa a funcionar como se fosse uma nervura da laje.



Em relação aos momentos fletores negativos, entre L1 e L2, estes são representados pelo índice adimensional  $I_{Mxe}$  (equação 3.79) que utiliza os valores em módulo deste esforço. A variação dos valores máximos obtidos com MEF, e um comparativo com as tabelas de Czerny e Pinheiro (2007b), é mostrada no Gráfico 13.



A Figura 18 exibe a variação dos deslocamentos, esforços na direção  $x$  ( $M_{11}$ ) e  $y$  ( $M_{22}$ ) (kNm/m), à medida que se reduz a altura de V4 ( $H$ ). De modo geral, pode-se dizer que a redução da rigidez de V4 ocasiona o aumento dos momentos fletores positivos, aumento das flechas (lajes e vigas), e diminuição de  $M_{xe}$ . Um aspecto importante sobre os esforços  $M_{xe}$  é que estes não são uniformes ao longo do bordo de continuidade entre as duas lajes, como evidencia o Gráfico 14 e a Figura 18(a, d, g, j, m).

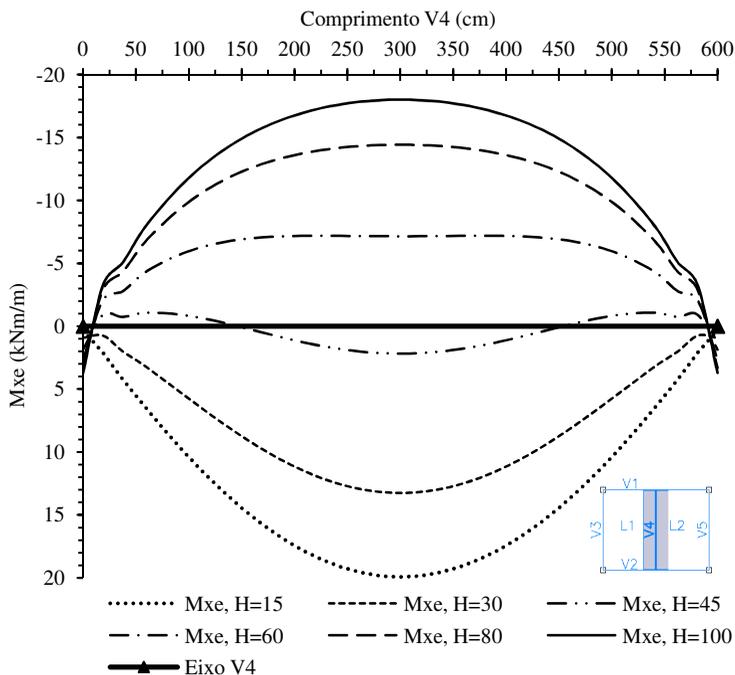


Gráfico 14 – Variação de  $M_{xe}$  para  $h = 12$  (MEF)

Como uma alternativa prática, para aplicação em projeto de lajes, Araújo (2008) determina um momento fletor negativo médio ao longo do bordo de continuidade entre duas lajes, que é calculado pela equação (4.84), em que  $l$  é o comprimento da viga. Os resultados de  $M_{xe}$  do Tabuleiro I não consideram o valor médio ( $\bar{M}_{xe}$ ).

$$\overline{M}_{xe} = \frac{1}{l} \int_0^l M_{xe}(y) dy. \quad 4.84$$

Essas verificações sobre os momentos fletores são importantes para análise do tabuleiro, pois, ao adotar uma análise que não leve em conta o comportamento flexível dos apoios, deve-se garantir que as vigas tenham rigidez à flexão adequada. Caso contrário, os valores dos esforços podem estar contra a segurança e/ou economia, comprometendo assim a qualidade do projeto. E como foi verificado por Mazzilli (1995), o fato é que a diferença entre o uso de tabelas de lajes e modelo com vigas flexíveis e/ou deformáveis pode ser muito significativa.

As informações sobre o comportamento estático do Tabuleiro I, também podem ser vistas na Figura 18, de maneira gráfica. A representação dos momentos fletores, com faixas de isovalores possibilita a visualização clara da distribuição dos esforços, à medida que se reduz a rigidez da viga V4. É possível verificar que o ponto de deslocamento máximo (flecha) de L1 não é no centro da laje, e, quando V4 é muito flexível ( $I_{Lv4} > 0,418$ ), a flecha do tabuleiro (L1, L2 e V4) ocorre no centro da viga V4, com o mesmo valor para L1, L2 e V4. Ou seja, o ponto de deslocamento máximo para ambos os elementos coincide no mesmo lugar.

Para L1, o ponto da flecha elástica se localiza nas seguintes coordenadas:

- Eixo y:  $l_y/2$ ;
- Eixo x: Quanto mais flexível V4, mais o ponto tenderá a se aproximar do eixo longitudinal de V4 ( $x = 4,00$  m).

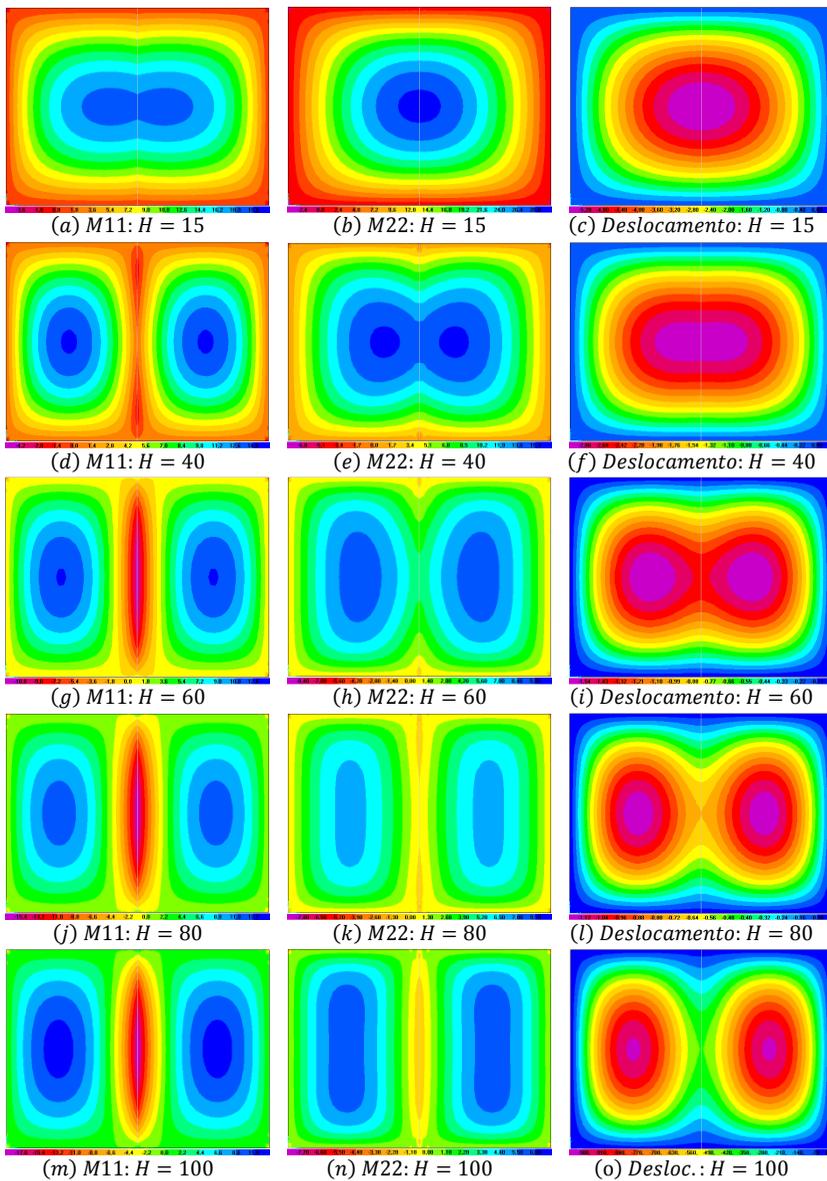


Figura 18 – Variação de esforços e deslocamentos,  $h = 10$  cm.

As flechas imediatas ( $a_{t,0} = \delta$ ), que são os deslocamentos elásticos máximos do Tabuleiro I (L1 e V4), são apresentadas no Gráfico 15. Os maiores valores de flechas correspondem à configuração de menor rigidez, e estes deslocamentos apresentam comportamento decrescente não linear, conforme o tabuleiro aumenta sua rigidez. Esse comportamento, também, é evidenciado em outras pesquisas (LEITE *et al.*, 2010; MAZZILLI, 1995; PAULA, 2007). Os resultados obtidos com AG podem ser vistos no Apêndice A.

No Gráfico 16, é apresentada a flecha total de L1 ( $a_{t,\infty} = \delta t$ ), calculada de acordo com a equação (4.85), para um tempo infinito ( $t \geq 70$  meses) e carregamento aplicado em  $t_0 = 6$  meses (item 17.3.2.1.2 da NBR 6118:2007). Com esse critério, as flechas imediatas são multiplicadas por  $(1 + \alpha_f)$ , com o coeficiente  $\alpha_f = 0,82$ , para considerar o efeito da fluência. A equação (4.85) foi utilizada como um método simplificado para o cálculo da flecha total.

$$\delta t = a_{t,\infty} = (1 + \alpha_f)a_{t,0}. \quad 4.85$$

O deslocamento admissível, segundo a NBR 6118:2007 (item 13.3, Tabela 13.2), referente à aceitabilidade sensorial visual ( $l/250$ ), para L1 é também exibido no Gráfico 16. Em que, “ $l$ ” é o comprimento do menor vão da laje (NBR 6118:2007, Tabela 13.2 – nota nº 2). Como mencionado anteriormente, a análise é elástica-linear, portanto, não se considerou a fissuração dos elementos estruturais.

Logo, para atender às exigências quanto ao estado-limite de deformações excessivas das lajes L1 e L2, deve-se ter:

$$\delta_{lim} \leq l_y/250 \leq 400/250 \leq 1,60 \text{ cm.}$$

Verifica-se que, para  $h = 10$  cm, o limite normativo não é atendido para nenhum valor de  $H$ . Para  $h = 12$  cm com  $H \geq 80$  cm essa condição é satisfeita, e com  $h = 15$  cm, a condição de aceitabilidade sensorial-visual é atendida para  $H \geq 70$  cm. Deve ser lembrado, que se pode recorrer ao uso de contraflecha para diminuir a flecha final ( $\delta t$ ), e que os resultados foram obtidos com a consideração de uma carga total de  $10 \text{ kN/m}^2$  mais o peso próprio dos elementos estruturais.

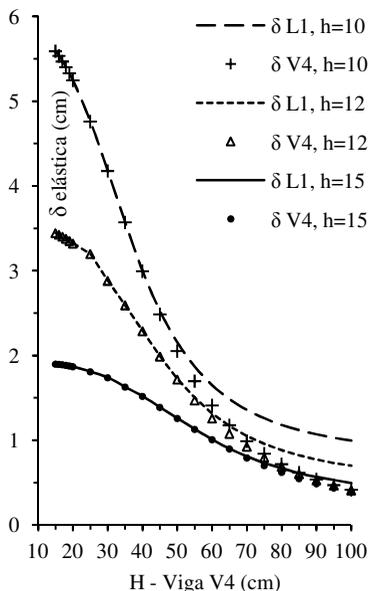


Gráfico 15 – Flecha Imediata L1 e V4

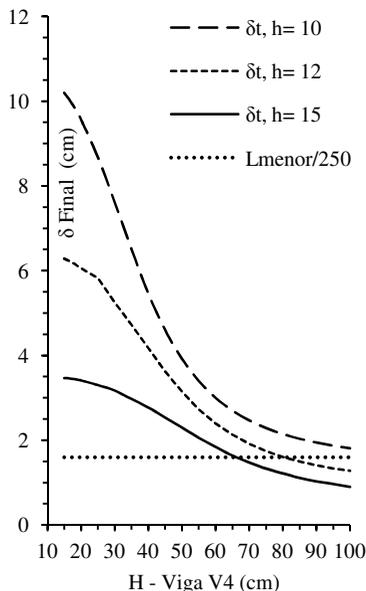
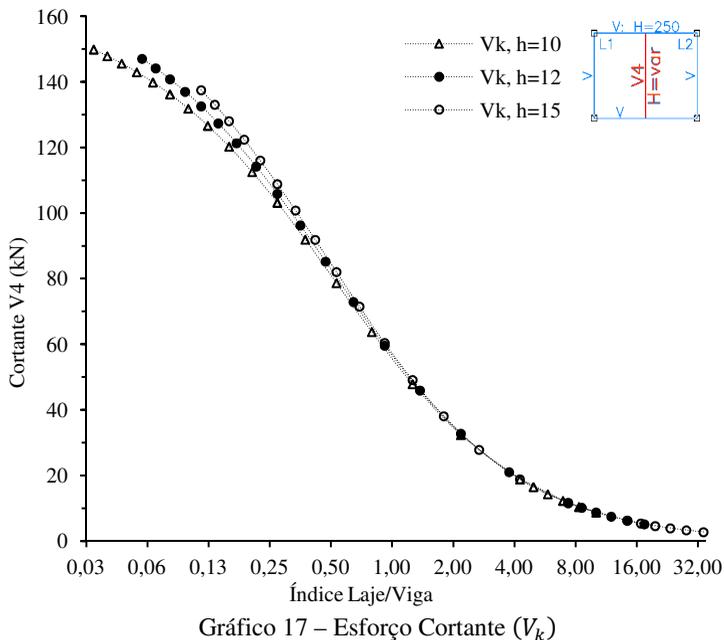


Gráfico 16 – Flecha Final L1

A influência da flexibilidade laje/viga afeta também a parcela de esforço cortante transmitido para as extremidades de V4. A variação do esforço cortante característico ( $V_k$ ) é mostrada no Gráfico 17 que utiliza o índice  $I_{Lv4}$ , pois, com o uso do índice, pode-se melhor entender esta variação de  $V_k$ .

Como o Tabuleiro I é simétrico,  $V_k$  terá o mesmo valor em módulo nas duas extremidades de V4. No Gráfico 17, verifica-se que os maiores valores de  $V_k$  são obtidos quando a rigidez à flexão da laje é bem menor que a rigidez à flexão de V4, logo, os maiores valores são obtidos para  $h = 10$  cm e  $H = 100$  cm.

O gráfico demonstra que a variação de  $V_k$  é não linear, e que à medida que a rigidez da laje aumenta,  $V_k$  diminui, assim, os menores valores são encontrados para  $h = 15$  cm e  $H = 15$  cm. O uso do índice  $I_{Lv4}$  mostra-se útil, também, para a representação de esforços cortantes, já que os resultados do Tabuleiro I poderiam ser representados por apenas uma curva, sem grande perda de precisão dos resultados, principalmente quando a rigidez à flexão de V4 for menor que a de L1.



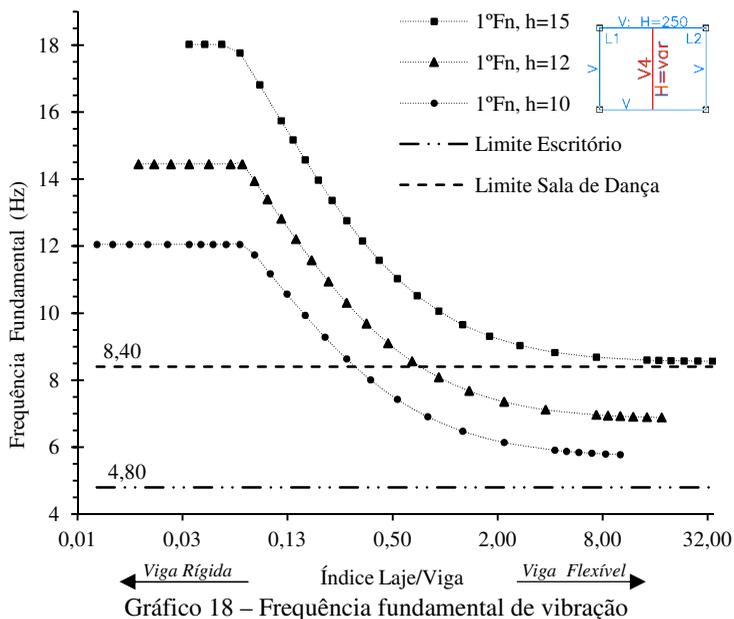
A resposta dinâmica, do Tabuleiro I, foi obtida por meio de análises de vibração livre não amortecida, e utiliza-se o *software* SAP2000. Analisam-se as três primeiras frequências naturais de vibração (autovalores) e os modos de vibração (autovetores) correspondentes, em função da flexibilidade entre laje L1 e viga V4.

Os valores da 1ª primeira frequência natural ( $f_{01}$ ), obtidos nas análises, são exibidos no Gráfico 18 que relaciona esses valores com o índice  $I_{Lv4}$ , a relação com os valores de  $H$  pode ser vista no Gráfico 21. Os resultados confirmam que, quanto mais flexível a estrutura (maiores valores de  $I_{Lv4}$ ) menor será o valor de  $f_{01}$ , com variação não linear. Este comportamento é esperado, visto que pela equação (2.62) pode-se perceber que o aumento da rigidez da estrutura resultará em maiores valores de autovalores (frequências).

O aumento das seções dos elementos estruturais ocasiona um ganho de rigidez para o sistema, e ao mesmo tempo adiciona mais massa a este sistema. O que leva ao questionamento: até que ponto podem-se aumentar os valores de  $h$  (laje) e  $H$  (V4) (valores de  $I_{Lv4}$ ) e, assim, ocasionar o aumento da frequência fundamental de vibração ( $f_{01}$ )?

Para tentar responder a esta pergunta, além das seções transversais de V4 já mencionadas nos itens anteriores, foram realizadas análises com  $H = 110, 120, 130, 140$  e  $150$  cm.

Assim, a resposta ao questionamento anterior é obtida pela análise do Gráfico 18 ao Gráfico 20. Pelo Gráfico 18, se verifica que para relações de  $I_{Lv4}$  menores que  $0,0664$  ( $h = 10$ ),  $0,0588$  ( $h = 12$ ) e  $0,0523$  ( $h = 15$ ) a frequência fundamental ( $f_{01}$ ) passa a ser constante, ou seja, não apresenta variação com o aumento da altura  $H$  de V4. Já o 2º modo de vibração ( $f_{02}$ ), Gráfico 20, se verifica comportamento contrário, ou seja, enquanto  $f_{01}$  aumenta,  $f_{02}$  se mantém constante, e quando  $f_{01}$  passa a ser constante, os valores de  $f_{02}$  aumentam.

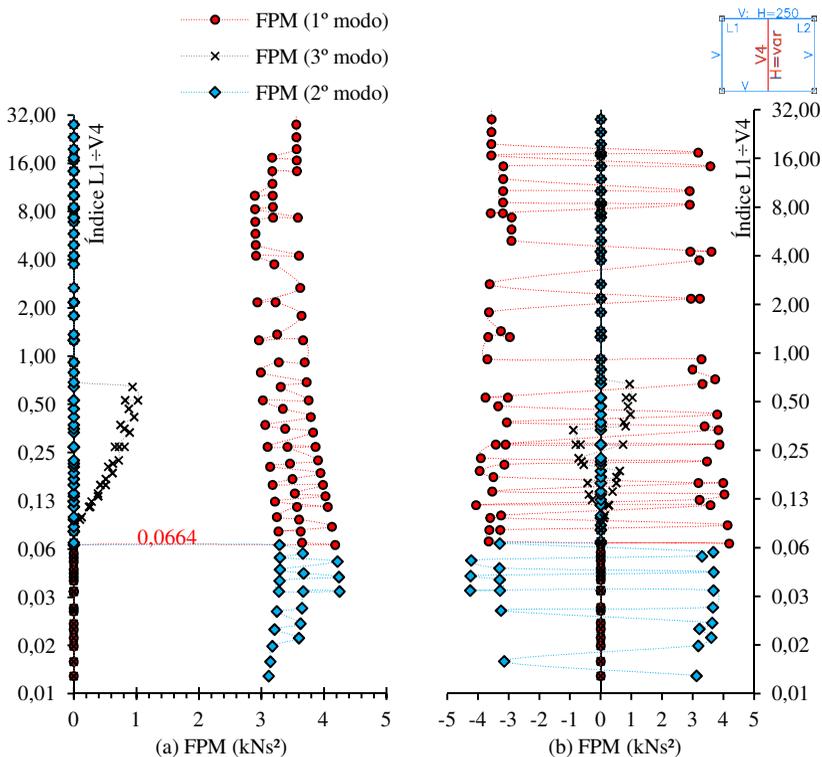


O porquê desse comportamento pode ser explicado com a ajuda do Gráfico 19, que mostra a variação do fator de participação modal<sup>2</sup> (FPM), com valores em módulo (a) e considerando o sinal + ou -, os quais dependem da parametrização do modo, sem nenhum significado

<sup>2</sup> - Para um dado modo de vibração e um eixo global de referência, X, Y ou Z, o fator de participação modal é igual ao produto interno (produto escalar) da aceleração unitária, ao longo desse eixo, e o modo de vibração.

para este estudo. No gráfico, observa-se que para  $I_{Lv4} > 0,0664$  o 1º modo de vibração terá um maior fator de participação modal, e quando a relação for  $I_{Lv4} \leq 0,0664$  o 2º modo terá maior fator de participação modal. Isto significa que, quando V4 tiver grande rigidez à flexão, não será o 1º modo o que mobilizará mais massa segundo a direção vertical (eixo Z global), mas sim o 2º modo.

Em relação à condição de atendimento ao estado-limite de vibração, recomendado pela NBR 6118:2007, para uso do tabuleiro como escritório, a estrutura é aceitável para qualquer relação de  $I_{Lv4}$  estudado nesta pesquisa, Gráfico 18. Visto que o valor mínimo da 1ª frequência de vibração exigida pela norma, calculada conforme a equação (3.75), deve ser  $f_{01} > 4,80$  Hz (uso da edificação: escritório).



Para o caso de destinação do Tabuleiro I, como “Sala de dança” ( $f_{01} > 8,40$ ), a exigência da NBR 6118:2007 é atendida para todas as

análises com  $h = 15$ . Quando  $h = 10$ , o limite é atendido, quando  $H \geq 50$  cm, e para  $h = 12$  com  $H \geq 45$  cm, levando-se em conta os valores de frequência do 1º modo de vibração.

Os valores de frequências do 2º e do 3º modo de vibração são apresentados no Gráfico 20. Observa-se, de forma semelhante à análise dos esforços, flechas e frequências do 1º modo, uma variação não linear dos valores destas frequências. O aumento está associado ao ganho de rigidez do tabuleiro, e como dito anteriormente, quando  $I_{Lv4} \leq 0,0664$  o 2º modo é o que mais mobiliza massa segundo a direção vertical, maior fator de participação modal.

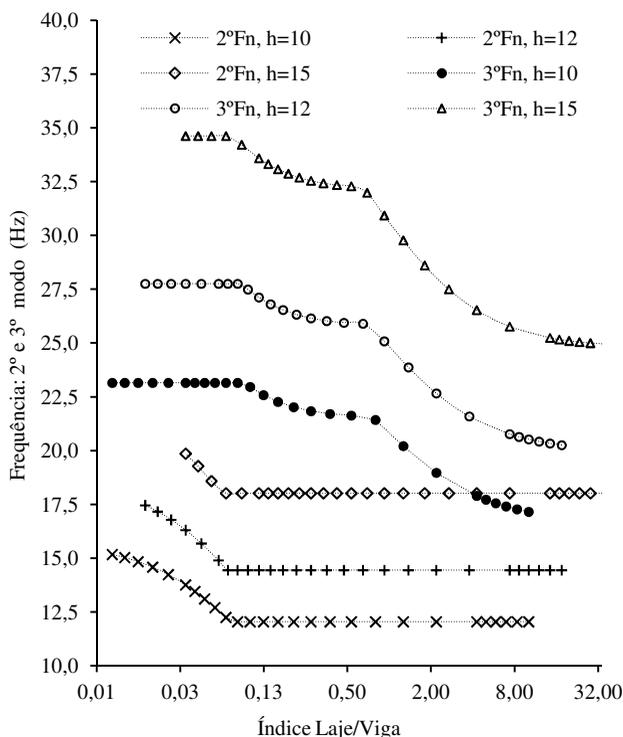


Gráfico 20 – Frequência de vibração: 2º e 3º modo (MEF)

O 3º modo apresenta um patamar de valores constantes para as frequências. Os limites relacionados a esse patamar de valores constantes são próximos dos encontrados para o 1º modo. A participação

do 3º modo nos deslocamentos, da direção vertical, é praticamente nula, quando V4 é muito rígida ou muito flexível.

Com intuito de investigar a relação de atendimento dos limites normativos para a resposta estática e dinâmica, do Tabuleiro I, elaborou-se o Gráfico 21. No qual se expõem os resultados da 1ª frequência de vibração e os valores da flecha total da laje L1 ( $\delta t$ ), ambos em função da espessura da laje ( $h$ ) e da altura da viga V4 ( $H$ ). O limite dinâmico, valor mínimo de  $f_{01}$ , e o limite estático, valor máximo de  $\delta t$ , também são apresentados no gráfico. Veja que esta comparação é possível, pois o tabuleiro pode ser utilizado como escritório ou sala de dança, visto que a carga total nas lajes é superior à mínima exigida pela NBR 6120, para estas utilizações.

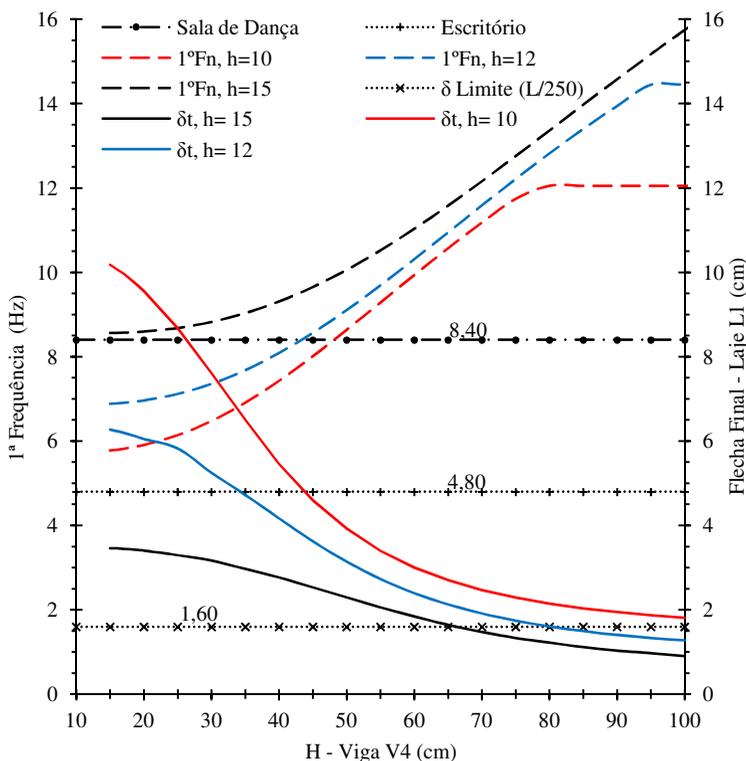


Gráfico 21 – Flecha Final L1 vs. 1ª frequência

As curvas apresentadas no Gráfico 21 demonstram que a variação das flechas e frequências ocorre de maneira contrária uma da outra. O

que significa dizer que, à medida que se reduz a rigidez da viga V4, os valores de frequências diminuem, mas as flechas (elásticas e totais) aumentam, como foi constatado no Gráfico 15, Gráfico 16 e Gráfico 18. Salienta-se que o aumento da rigidez do tabuleiro é benéfico para o projeto, pois, o objetivo em geral é ter flechas menores e frequências mais altas.

Então, se verifica que para  $h = 10$  e  $h = 12$  cm e utilização como “sala de dança”, primeiro se atingirá o limite estático e após o limite dinâmico, à medida que se reduz a rigidez do tabuleiro. Para uso como “escritório”, todas as configurações de geometrias atendem ao limite dinâmico de  $f_{01} > 4,80$  Hz.

Essa relação entre a resposta estática e a dinâmica é muito importante, pois, ao realizar somente a análise estática do Tabuleiro I, é possível saber se o limite dinâmico foi ou não atingido.

Os três primeiros modos de vibração do tabuleiro, associados à espessura da laje  $h = 12$  cm, são apresentados na Figura 19. Utilizam-se para exibição os momentos fletores na direção  $x$  ( $M_{11}$ ). A partir da análise desses três primeiros modos, verifica-se que se trata de modos verticais, e que a configuração dos modos se modifica quando a rigidez de V4 aumenta.

A Tabela 15 resume o comportamento do tabuleiro devido à influência da flexibilidade dos apoios. Com este estudo, se constata que a variação de rigidez de apenas um apoio da laje pode resultar em grandes efeitos para o comportamento do Tabuleiro I.

Em relação aos resultados, o principal alerta fica em relação ao uso de métodos que não consideram a flexibilidade e/ou deslocabilidade dos apoios. Pois, para se ter veracidade nos resultados com o uso das tradicionais tabelas de cálculo de lajes, deve-se garantir que as vigas de apoio tenham rigidez à flexão muito superior que a da laje.

Como demonstrado, diversos são os fatores que interferem nos resultados de uma análise de estruturas. Para o Tabuleiro I, foram estudadas algumas destas variáveis e determinadas algumas relações entre as respostas, bem como a variação de algumas variáveis devido à alteração de outras. No Apêndice B são correlacionados alguns parâmetros utilizados nas análises deste item. Para isso, usou-se o Coeficiente de Correlação Linear de Pearson ( $r$ ), descrito no item 3.8. A classificação qualitativa da correlação foi realizada de acordo com a Tabela 8.

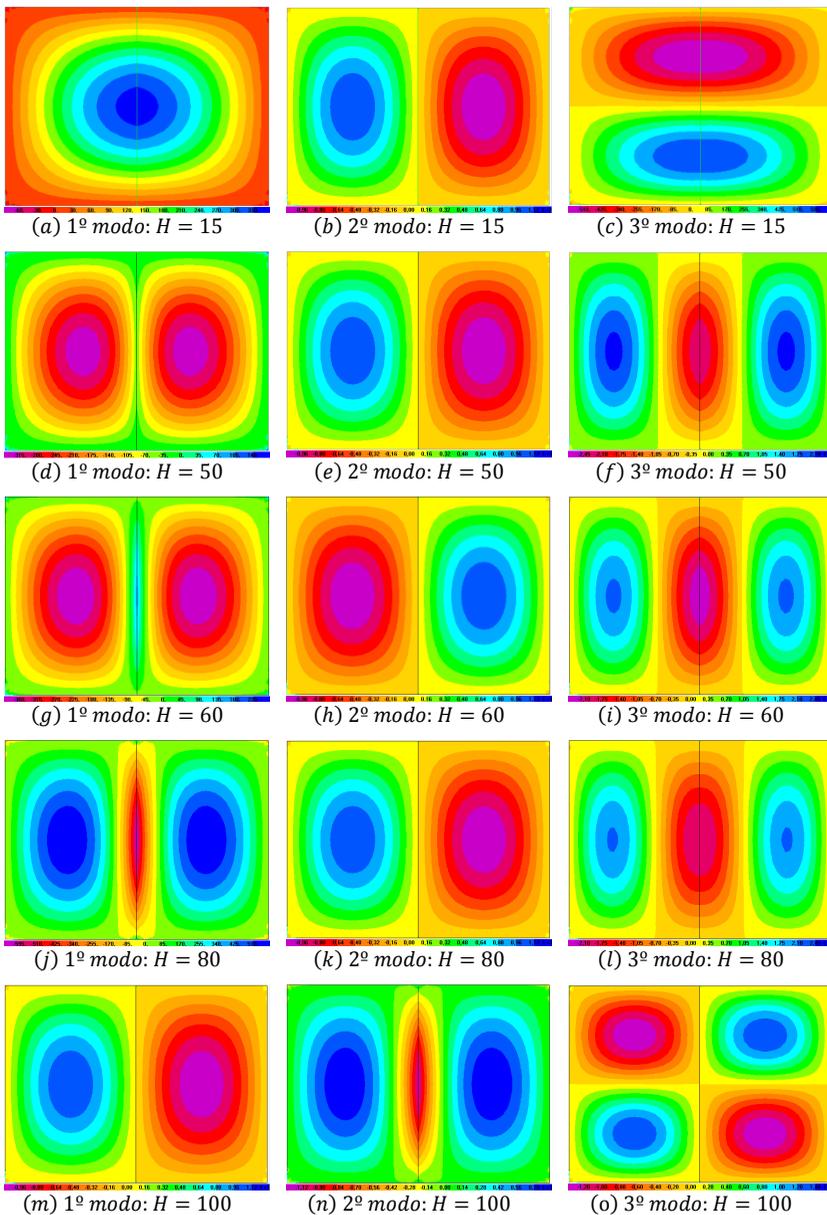


Figura 19 – Modos de vibração,  $h = 12$  cm.

Tabela 15 – Resumo Tabuleiro I: Influência da flexibilidade de V4 (MEF)

<b>Índice</b> $I_{LV4}$	<b>Comportamento do Tabuleiro I</b>
$I_{LV4} \ll 1,00$	- Maiores valores para as frequências de vibração; <i>flecha L1 e L2 &gt; flecha V4</i> (menores valores) - Maiores valores para $M_{xe}$ . Com $M_{xe} > M_x > M_y$ - Menores valores para $M_x$ e $M_y$
$I_{LV4} \leq 0,0523$	$f_{01} = \text{constante}$ ( $h = 15$ )
$I_{LV4} \leq 0,0588$	$f_{01} = \text{constante}$ ( $h = 12$ )
$I_{LV4} \leq 0,0664$	$f_{01} = \text{constante}$ ( $h = 10$ ) $f_{02} = \text{constante}$ ( $h = 15$ ) 2º modo mobiliza mais massa (direção z)
$I_{LV4} \geq 0,0664$	$f_{03} = \text{constante}$ ( $h = 15$ ) $I_{LV4} > 0,0664$ : 1º modo mobiliza mais massa (direção z)
$I_{LV4} \geq 0,0686$	$f_{02} = \text{constante}$ ( $h = 12$ )
$I_{LV4} \leq 0,0806$	$f_{03} = \text{constante}$ ( $h = 10$ e $12$ )
$I_{LV4} \geq 0,0806$	$f_{02} = \text{constante}$ ( $h = 10$ )
$I_{LV4} \geq 0,1339$	$M_x > M_{xe}$
$I_{LV4} \geq 0,1870$	$M_y > M_{xe}$
$I_{LV4} \geq 0,4181$	$M_y > M_x$ com <i>flecha de L1 e L2 = flecha V4</i>
$I_{LV4} \geq 0,6901$	- V4 perde sua função de suporte para L1 e L2 e passa a trabalhar como uma nervura da laje. O Tabuleiro I funciona como se fosse formado por apenas uma laje, e $M_{xe} = 0,00$
$I_{LV4} \geq 34,02$	Situação de laje simplesmente apoiada (8,00 x 6,00 m): $I_{Mx} = 10,06$ ; $I_{My} = 6,50$ ; $M_{xe} = 0,00$ - Flechas da laje (cm): $h = 10 \rightarrow \delta = 5,80$ ; $h = 12 \rightarrow \delta = 3,50$ ; $h = 15 \rightarrow \delta = 1,90$ .

### 4.1.3 Flexibilidade e excentricidade entre laje e viga

A excentricidade existente entre o eixo longitudinal da viga e o plano médio da laje, "e", influencia a resposta estática e dinâmica do tabuleiro (ARAÚJO, 2008; LEITE, 2012; PAULA, 2007). Dessa forma, esse item analisa como a excentricidade, entre V4 e lajes, modifica a resposta estática ( $M_x$ ,  $M_{xe}$  e  $M_y$ ) e a resposta dinâmica (frequências de vibração) do Tabuleiro I.

Neste item, a excentricidade entre laje e viga foi considerada de forma simplificada, com a utilização da equação (2.63). O índice adimensional  $I_{LV4}$  foi calculado de acordo com a equação (4.86), na qual  $I_{v4}$  é o momento de inércia equivalente de V4, equação (2.63).

$$I_{LV4} = \frac{I_L}{I_V} = \frac{1}{I_{v4}} \frac{h^3 \sqrt{l_x \cdot l_y}}{12(1 - \nu^2)}. \quad 4.86$$

As análises foram realizadas com SAP2000 (MEF). No qual, ao alterar o momento de inércia da seção transversal da viga ( $I_{33}$ ), se deve também alterar o módulo resistente ( $S_{33}$ ) e o raio de giração ( $R_{33}$ ).

No Gráfico 22, o momento de inércia em relação ao centro geométrico da peça é representado por  $I = \frac{b_w \cdot H^3}{12}$ , e esses valores independem da espessura do tabuleiro. A parcela do momento de inércia devido apenas à excentricidade "e" é representada por  $Ae^2 = b_w H e^2$ , e será maior quando  $h = 10$ , devido "e" ser maior. O momento de inércia de V4 com a consideração de "e" é representado por  $I + Ae^2$ , que é a soma das duas parcelas mencionadas anteriormente.

Como se verifica, grande vantagem se tem ao considerar a excentricidade "e". Pois, como apresenta o Gráfico 22, o produto "Ae<sup>2</sup>" é maior que o momento de inércia dado por  $I = \frac{b_w \cdot H^3}{12}$ .

A proporção de aumento, do momento de inércia, será a mesma para o aumento da rigidez à flexão de V4, pois, como se verifica na equação (2.69), a rigidez à flexão é diretamente proporcional ao momento de inércia. Como os maiores valores de excentricidade são encontrados para  $h = 10$ , a situação em que V4 terá a maior rigidez à flexão será quando L1 e L2 forem modeladas com espessura de 10 cm.

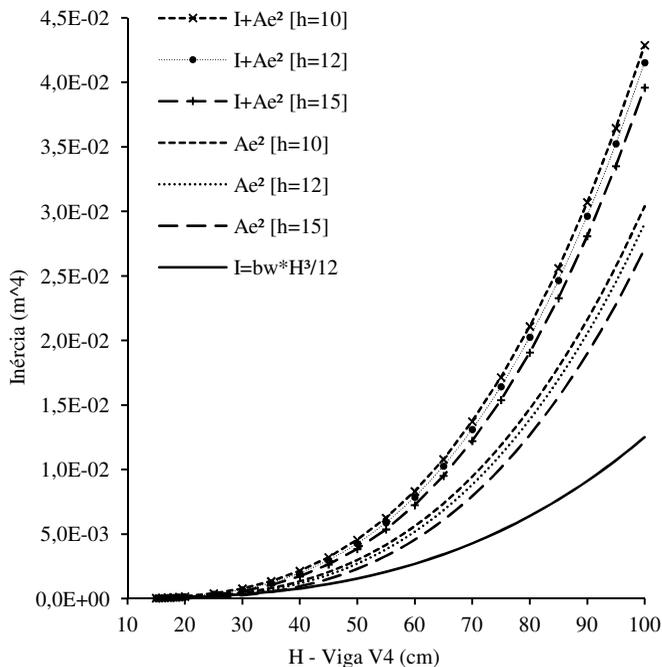
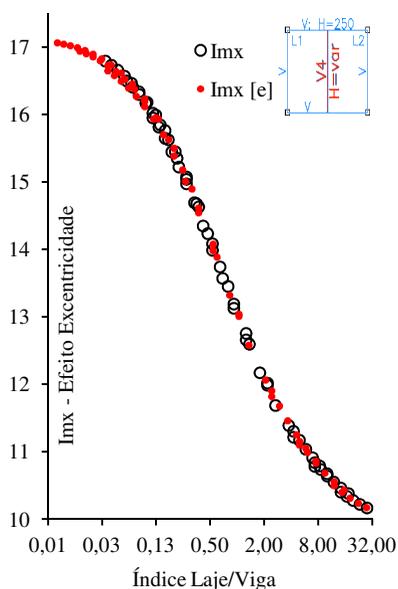
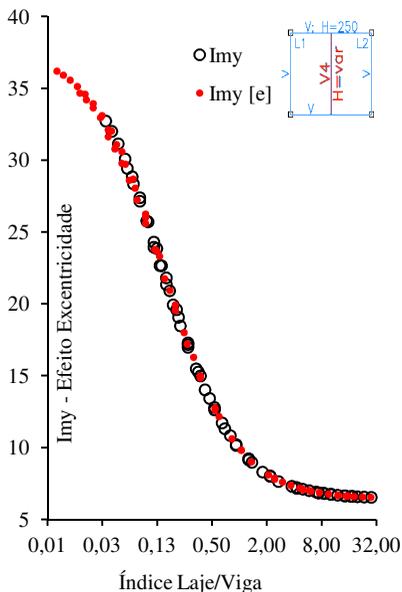


Gráfico 22 – Parcelas do momento de inércia

A utilização dos índices adimensionais ( $I_{LV4}$ ,  $I_{Mx}$ ,  $I_{Mxe}$ ,  $I_{My}$ ) mostra-se adequada para representar os esforços da laje, mesmo com a consideração da excentricidade. Os resultados obtidos com a utilização da excentricidade são apresentados nos gráficos a seguir, com a descrição “[e]” (ver legenda do gráfico), já os demais dados se referem aos valores sem essa consideração. O Gráfico 23 apresenta a variação de  $I_{Mx}$  e  $I_{Mx}[e]$  (sem e com excentricidade), e o Gráfico 24 a variação de  $I_{My}$  e  $I_{My}[e]$  (sem e com excentricidade). Os comentários elaborados para o Gráfico 8, também, são válidos para esses gráficos.

No Gráfico 25, se apresenta a variação de  $I_{Mxe}$ , e os comentários elaborados para o Gráfico 13, também, são válidos para esse gráfico. Note que a forma da curva apresentada nesses gráficos, não se altera devido à consideração da excentricidade. Sendo possível, então, propor uma forma de curva semelhante a essas, para o Tabuleiro I, que seja válida para qualquer valor da altura de V4 e espessura de laje.

Gráfico 23 –  $I_{M_x}$  (excentricidade)Gráfico 24 –  $I_{M_y}$  (excentricidade)

Apesar de os índices adimensionais cumprirem o seu propósito de maneira satisfatória, não fica claro ao leitor que os esforços obtidos com a consideração de "e" são menores para  $M_x$  e  $M_y$ , e maiores para  $M_{xe}$ , em comparação com os calculados sem essa consideração. Por isso, são apresentados a seguir os gráficos dos esforços da laje L1, que comparam as duas considerações sobre o momento de inércia de V4.

Esse comportamento, como se sabe, está relacionado ao fato de que, ao se considerar "e", tem-se uma viga de apoio V4 mais rígida, e quanto mais rígida, maiores serão os valores de  $M_{xe}$  e menores os de  $M_x$  e  $M_y$ . A configuração em que se tem a viga de apoio V4 mais rígida é quando se tem a menor espessura de laje, ver equação (2.63).

Os resultados referentes à consideração de "e", nos gráficos, são apresentados com o índice "[e]" (ver legenda). As unidades dos esforços são em kNm/m. A variação do momento fletor negativo  $M_{xe}$  é apresentada no Gráfico 26 (em módulo), e no Gráfico 27 e Gráfico 28 os momentos fletores positivos,  $M_x$  e  $M_y$  respectivamente.

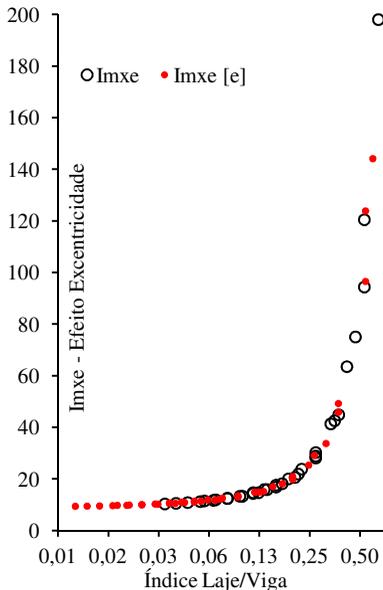


Gráfico 25 -  $I_{Mxe}$  (excentricidade)

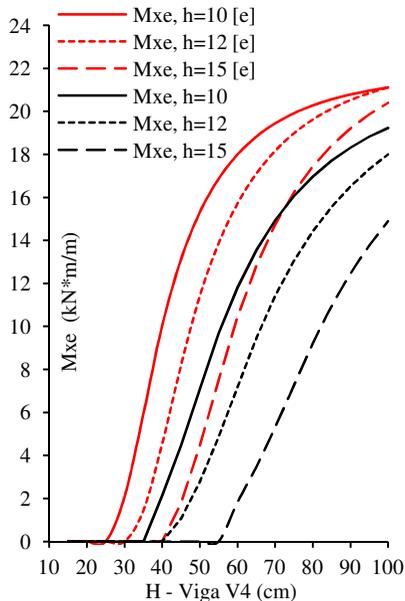


Gráfico 26 -  $M_{xe}$  relação com "e"

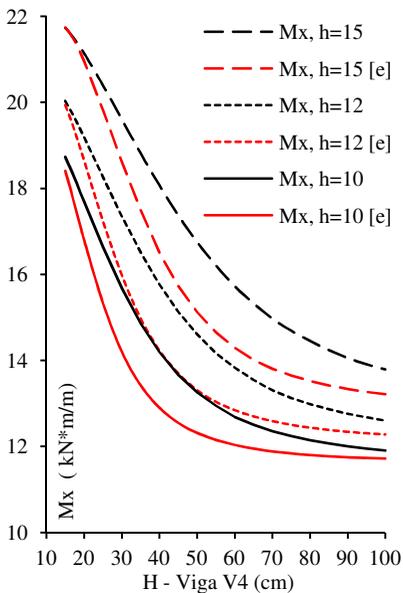


Gráfico 27 -  $M_x$  com e sem "e"

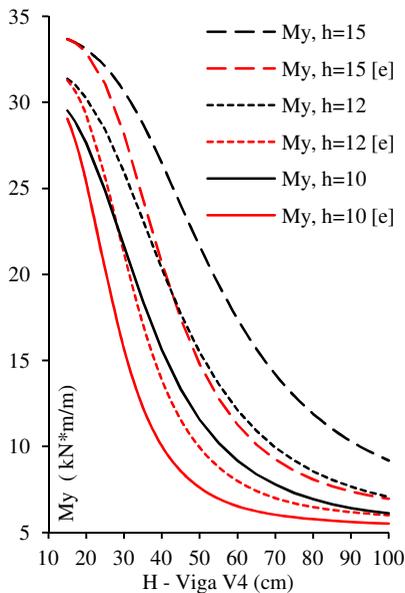
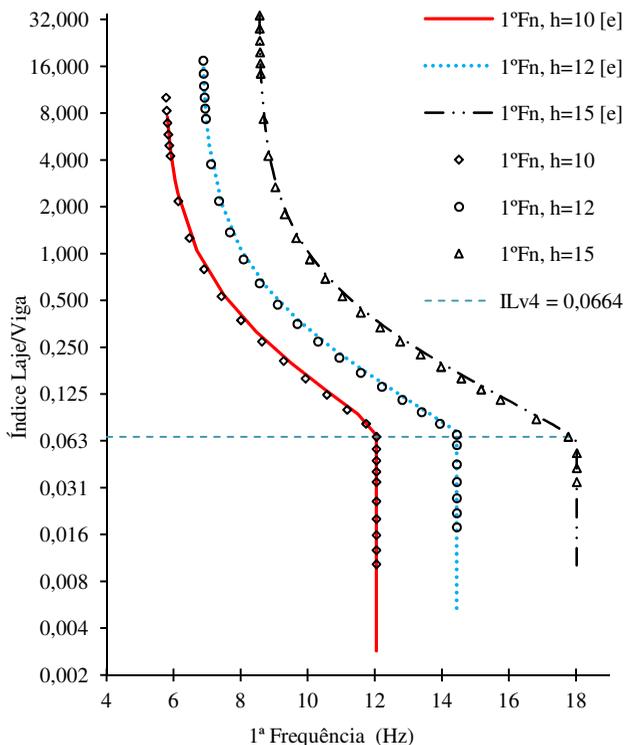


Gráfico 28 -  $M_y$  com e sem "e"

A ideia de ganho de rigidez ao considerar "e" implica, também, em outras considerações, como sobre a resposta dinâmica. Pela equação (2.62), determina-se que o aumento da rigidez da estrutura, sem aumento da massa da mesma, causa um aumento das frequências de vibração. Esse comportamento é verificado pelos dados obtidos, como pode ser visto no Gráfico 29 e Gráfico 30.

No Gráfico 29, é apresentado o comparativo da variação da frequência fundamental de vibração, entre a consideração ou não de "e", em função do índice adimensional  $I_{LV4}$ . Verifica-se que a consideração de "e" adiciona rigidez ao tabuleiro, resultando em valores mais altos de frequência. Nota-se que, por este gráfico, os valores da frequência fundamental atingem um valor constante, a partir de certa relação de rigidez entre laje e viga.



Os valores de  $I_{LV4}$  para início de formação desse patamar, de valores constantes da frequência fundamental de vibração, são os mesmos apresentados no Gráfico 18 e na Tabela 15. Verifica-se que o início da formação do patamar pode ser simplificado considerado, para todas as espessuras de laje, a partir de  $I_{LV4} \leq 0,0664$ , ou seja, quando V4 tiver rigidez à flexão muito maior que L1. Nesse intervalo, o 2º modo de vibração (Gráfico 30) terá o maior fator de participação modal, assim, será o modo de vibração que mais mobilizará massa segundo a direção vertical (eixo Z), como se verifica no Gráfico 19.

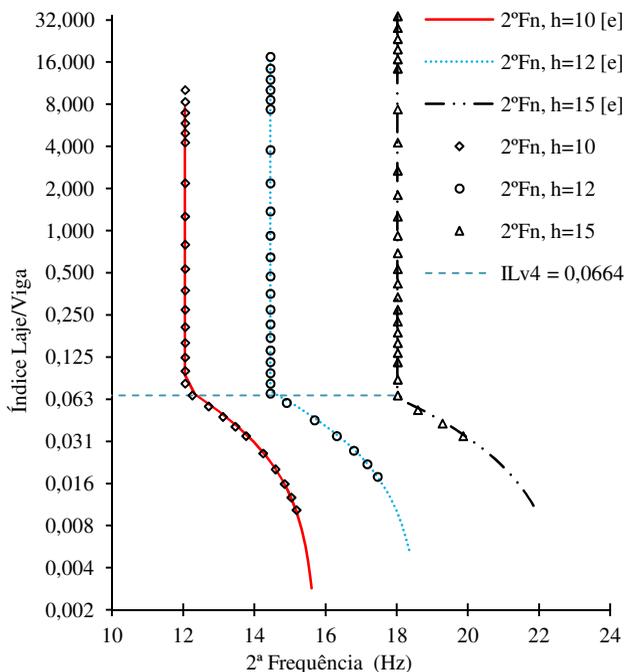


Gráfico 30 – 2ª frequência, com e sem "e"

Constata-se, então, que o uso do coeficiente  $I_{LV4}$  é vantajoso para o estudo da resposta dinâmica do Tabuleiro I. Pois, como se verifica no Gráfico 29 e Gráfico 30, a análise da frequência resume-se a uma curva por espessura de laje, e na qual, pode-se saber o valor da frequência através do conhecimento da relação entre flexibilidade da laje e da viga ( $I_{LV4}$ ).

Dessa forma, para uma configuração de tabuleiro, como a estudada, não é necessário realizar uma análise dinâmica rigorosa. Isto por que, ao estabelecer uma espessura de laje, pode-se saber qual o valor de  $I_{LV4}$  máximo para atendimento do estado-limite de vibração excessiva, e assim determinar qual deve ser a rigidez mínima da viga de apoio. Esta última pode ser determinada de diversas maneiras, por exemplo, com a variação do módulo de elasticidade ou alteração das características geométricas da seção transversal. Até mesmo, pode-se considerar, para o cálculo do momento de inércia, a excentricidade entre o elemento apoiado e o elemento de apoio, ou a largura colaborante da laje (seção T).

A metodologia adotada para a análise mostra-se adequada, já que é simples, não exige grande esforço matemático e pode ser facilmente implementada nos algoritmos de *softwares* de análise de estruturas. O método também leva vantagem em relação a métodos mais complexos, como o modelo *Plate-Frame Model* (PFM) e *Shell-Frame Model* (SFM), apresentados na seção 2.9.

#### 4.1.4 Excentricidade e Seção T

Uma modelagem realista e precisa, no regime elástico-linear, pode ser realizada ao considerar o comportamento monolítico entre laje e viga. E assim, utilizar o comportamento de viga T (contribuição da mesa de compressão da laje). Esse incremento de rigidez influencia a distribuição de esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos.

Semelhante ao que foi realizado no item anterior, esse tópico avalia três metodologias para o cálculo do momento de inércia da viga V4. Nas análises, se consideram a excentricidade entre laje e viga ( $e$ ) e, também, a seção T de V4, formada pela seção retangular mais a largura colaborante de L1 e L2 (mesa de compressão). A largura colaborante efetiva ( $b_f$ ) para V4 é calculada de acordo com o item 14.6.2.2 da NBR 6118:2007 e resulta em  $b_f = 130$  cm.

A variação do momento de inércia da seção transversal de V4 é exibida no Gráfico 31. Para melhor discussão dos resultados evidenciados no gráfico, realiza-se a seguinte correspondência com a legenda do mesmo:

- *Método  $I_e$* : considera a inércia da seção retangular em relação ao plano médio da laje, calculada pela equação (2.63). Leva em conta a excentricidade entre laje e viga, logo depende da espessura da laje. Na legenda do gráfico:  $bw \cdot H^3 / 12 + A \cdot e^2$  [ $h =$  espessura laje];

- *Método  $I_T$* : considera a inércia da seção T em relação ao centro geométrico da mesma, e leva em conta a influência do coeficiente de Poisson na mesa de compressão, conforme propõem Kennedy e Bali (1979) (equação 2.66). Na legenda do gráfico: IT [h = espessura laje];

- *Método  $I_{CG}$* : considera a inércia da seção retangular em relação ao centro geométrico e independe da espessura da laje. Na legenda do gráfico: bw\*H<sup>3</sup>/12 (equação 2.64).

O gráfico evidencia que se obtêm maiores valores para o momento de inércia com o uso do método  $I_e$ . Para o método  $I_{CG}$ , que é usualmente utilizado em análises, se obtêm os menores valores de momento de inércia.

Utilizando o método  $I_T$ , se obtêm maiores valores que o método usual  $I_{CG}$ , porém menores que o método  $I_e$ . Observa-se que, quando V4 tiver grande rigidez à flexão, com o método  $I_T$  os maiores valores de inércia são obtidos para  $h = 15$  cm e os menores para  $h = 10$  cm, uma vez que, nesse método, a contribuição da mesa de compressão, para o aumento da inércia, é proporcional ao aumento da espessura da laje. Já para o método  $I_e$  os maiores valores são obtidos para  $h = 10$  cm, e os menores para  $h = 15$  cm. O que se justifica, pelo fato de que quanto menor a espessura da laje maior será a excentricidade entre o eixo da viga e o plano médio da laje, ver equação 2.65.

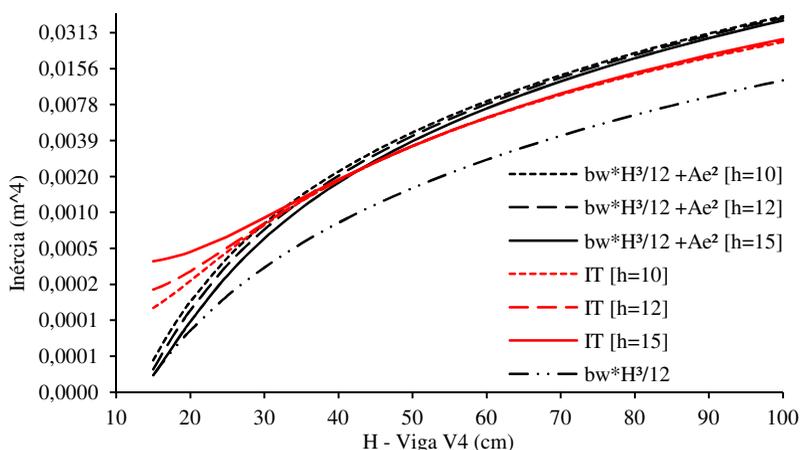


Gráfico 31 – Momento de inércia à flexão

No Gráfico 32 pode ser vista a variação do momento de inércia, para espessura de laje  $h = 10$  cm, em que  $I_T$  é tido como referência para o cálculo da diferença relativa entre os demais métodos. Para de  $H < 30$  cm,  $I_e$  resulta em menores valores que  $I_T$ , e para  $H \geq 30$  cm, os valores obtidos por  $I_e$  serão superiores aos calculados por  $I_T$ . A diferença entre os procedimentos será maior à medida que a excentricidade "e" aumenta. Essa verificação é devida ao incremento de inércia garantido pelo aumento altura da viga.

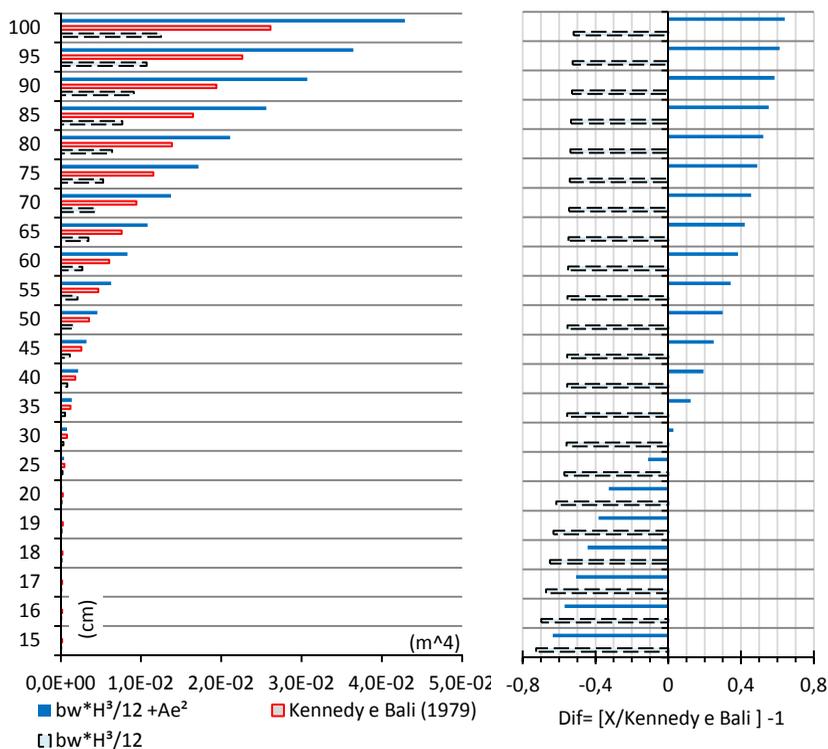


Gráfico 32 – Momento de inércia à flexão,  $h = 10$  cm

Em primeira análise,  $I_e$  (equação 2.63) apresenta-se como a melhor forma de calcular o momento de inércia à flexão das vigas. Apresenta ainda a vantagem de não ser necessário realizar algumas verificações, que para o método  $I_T$  são importantes, como as apresentadas no item 18.3.7 da NBR 6118:2007. Outro aspecto que corrobora esse ponto de vista é que o método  $I_e$  é de fácil programação e

Mestrando: Jeferson Rafael Bueno

Orientador: Daniel Domingues Loriggio

entendimento. No entanto, é importante lembrar que este método trata-se de uma forma simplificada para a consideração da excentricidade, já que não considera a fissuração das vigas, o que iria reduzir a rigidez à flexão destas, e necessita de mais estudos para validar sua utilização. Logo, ao utilizar  $I_e$  pode-se estar superestimando a rigidez das vigas. Em contra partida, o método  $I_T$  tem sua eficiência comprovada por outros autores (KENNEDY e BALI, 1979), e normas de projeto, mesmo não considerando o efeito do coeficiente de Poisson.

#### 4.1.5 Definição do modelo e configuração mais adequada

As análises para o Tabuleiro I, tanto por MEF quanto por AG, evidenciam que a flexibilidade da viga V4 influencia grandemente na resposta estática e dinâmica da estrutura. Dos modelos estudados em AG, se verifica que não há um modelo numérico que possibilite obter os mesmos resultados calculados por MEF, para todos os esforços e flechas.

No entanto, verifica-se que para AG pode-se adotar uma modelagem que utilize  $J = 2 \times I$  com malha 25x25. Com este modelo se obtêm valores de esforços próximos aos obtidos por MEF, quando V4 tiver grande rigidez à flexão (ver Apêndice A). Quanto às flechas elásticas, a modelagem resulta em valores maiores.

Até este momento, se sabe que a modelagem em MEF leva a bons resultados, e caso seja escolhida uma análise com AG, já foram definidos os parâmetros a serem adotados. Assim, fica o questionamento sobre qual é a melhor configuração geométrica das seções transversais das lajes L1 e L2, e da viga V4.

No procedimento corrente de análise e dimensionamento de estruturas de concreto armado, a escolha da melhor configuração é baseada na análise de diversas soluções e da viabilidade de sua execução (SILVA, 2000). Após realizar a análise das diversas configurações, cabe ao engenheiro decidir se aceita o projeto atual como final ou se este ainda deve ser aprimorado. Logo, esse procedimento é dependente da intuição, experiência e habilidade do engenheiro responsável pelo projeto (SILVA, 2000).

Segundo alguns autores, a melhor solução é, então, utilizar um processo de projeto que consiste em identificar as variáveis de projeto e definir a função-objetivo (ARORA, 2004; MIGUEL, LOPEZ e MIGUEL, 2013; SILVA, 2000). Com a função-objetivo e os requisitos de projeto formulados, em termos das variáveis de projeto, um método

de otimização apropriado pode ser utilizado para aperfeiçoar o projeto, através de uma dada configuração inicial (SILVA, 2000).

Esta pesquisa não busca entrar na área de otimização de estruturas. Pretendeu-se escolher a melhor solução, por meio de comparação dos custos de concreto e aço, de cada alternativa de modelagem dos elementos do tabuleiro. Essa etapa utilizou os valores de área de aço calculados pelo *software* Eberick V6, com AG e,  $J = 2 \times I$  e malha 25x25, que não considera o efeito da excentricidade e a seção T da viga. Deve ser lembrado, que os resultados a seguir dependem das simplificações e critérios que foram adotados nesta pesquisa.

No cálculo do volume, foi considerado apenas a contribuição de L1, L2 e V4, com massa específica do concreto armado de  $\rho_c = 2500,00 \text{ kg/m}^3$ . Para o cálculo do peso de aço, considera-se a massa específica de  $\rho_s = 7850,00 \text{ kg/m}^3$ .

Para a composição dos quantitativos de aço, não foi realizado o detalhamento de todas as configurações de modelagens. Mas sim, o cálculo aproximado, utilizando os resultados de área de aço das seções mais solicitadas. Consideram-se as armaduras de tração e compressão da viga, armaduras positivas e negativas da laje. Essas armaduras foram calculadas pelo Eberick V6, para a seção de solicitação máxima, e para a análise de custos foram consideradas como sendo constantes nas demais seções do elemento. A armadura negativa, entre lajes, foi considerada constante em todo o comprimento da ligação entre lajes, com comprimento das barras de 4,00 m.

Nesta pesquisa, chama-se a relação entre o preço do metro cúbico de concreto ( $\psi_c$ ) e do quilograma força de aço ( $\psi_s$ ), de  $\psi_{c/s}$ , equação (4.87), o qual serve como indexador de custo. Assim, o custo final é relacionado a um valor de  $\psi_{c/s}$ , e para se ter um valor numérico de referência, foi atribuído ao custo do aço um valor unitário,  $\psi_s = 1$ , e, então, o custo do concreto será  $\psi_c = \psi_{c/s}$ . O valor da soma dos custos relativos de concreto e aço, não representa o custo total da estrutura, mas sim, uma aproximação, e por isso, é chamado de índice de custo total  $\psi_t$ , dado pela equação (4.88). Neste item, adota-se  $\psi_{c/s} = 82,00$ .

$$\psi_{c/s} = \frac{\psi_c}{\psi_s}, \quad 4.87$$

$$\psi_t = \text{Custo}_{\text{concreto}} + \text{Custo}_{\text{aço}}. \quad 4.88$$

O índice de custo para o aço e concreto foi calculado pela equação (4.89) e (4.90), respectivamente.

$$Custo_{aço} = \psi_s \frac{\rho_s}{10^4} (l_{uni} A_s y_1 x_1). \quad 4.89$$

$$Custo_{concreto} = \psi_c \rho_c Volume. \quad 4.90$$

Em que:

-  $l_{uni}$ : para viga assume o valor de 1, e para laje se refere a uma largura de faixa de 1,00 m;

-  $y_1$ : comprimento da barra. Para V4 e  $A_{sy}$ :  $y_1 = 6,10$  m; para  $A_{sx}$ :  $y_1 = 4,10$  m; e para  $A_{sxe}$ :  $y_1 = 4,00$  m;

-  $x_1$ : para viga assume o valor de 1, para laje representa o número de faixas em que a armadura será distribuída. Portanto, para cada laje e cada direção se têm,  $A_{sx}$ :  $x_1 = 6$ ; e  $A_{sy}$ :  $x_1 = 4$ .

Os resultados dos custos são mostrados no Gráfico 33 e no Gráfico 34. Pelo Gráfico 33, como esperado, o custo do concreto tem variação linear, e é maior para maiores espessuras de laje ( $h$ ). O custo do aço apresenta comportamento não linear decrescente, à medida que a altura de V4 ( $H$ ) aumenta.

O que se justifica, pelo fato de que quanto mais rígido o tabuleiro, menores serão os valores dos esforços positivos da laje, e conseqüentemente menores valores para as armaduras. Dessa forma, o custo do aço será menor que o do concreto, porque as armaduras positivas da laje possuem maior contribuição que as demais armaduras, para a composição de custos do aço.

Para a condição de V4 muito flexível, se têm os maiores custos em relação ao aço e menores para o concreto, já para a condição de V4 muito rígida, a situação se inverte. Ou seja, menores valores para os custos com aço e maiores para os custos com concreto.

Ao analisar a curva de custos de aço com  $h = 15$ , observa-se uma descontinuidade quando  $H = 45$  cm, que é devida ao fato de que, para valores menores que 45 cm, não há armadura negativa na laje ( $A_{sxe}$ ). Quando  $H \geq 45$ , a armadura negativa aumenta, porém a armadura positiva da laje diminui.

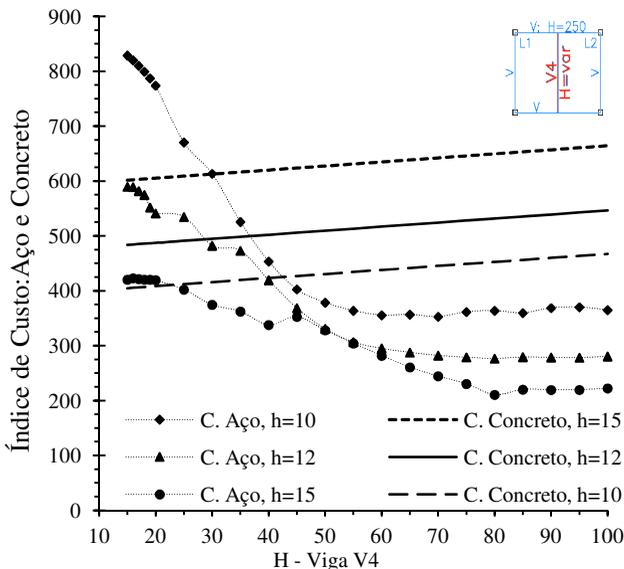


Gráfico 33 – Índice de Custos: Aço e Concreto

Salienta-se que essa falta de armadura negativa é devida as simplificações que foram feitas, a fim de poder analisar com mais facilidade a variação dos custos. Um detalhamento adequado do bordo de continuidade, entre lajes, deve prever pelo menos uma armadura mínima nessa região, entretanto, este não é o foco da pesquisa.

A soma dos custos de aço e concreto para o tabuleiro é apresentada no Gráfico 34. No qual, verifica-se que os maiores custos são obtidos com a configuração de menor rigidez do tabuleiro. Pelo mesmo gráfico, verifica-se que, com o aumento da rigidez de V4, tem-se a diminuição do índice de custo total dos materiais  $\psi_t$ . Esses resultados podem ser sensíveis às simplificações e critérios adotados no detalhamento.

Nota-se que o ponto  $H = 35$  cm pode ser considerado, simplificado, como um ponto de partida para verificação da espessura de laje mais econômica, como mostra a Tabela 16. A configuração de seção transversal de V4, L1 e L2, mais econômica, entre todas, é encontrada para a espessura de laje  $h = 12$  cm, com V4 tendo altura de  $H = 80$  cm ( $I_{LV4} = 0,1148$ ). No entanto, a partir de  $H = 60$  cm, com espessura da laje de 10 e 12 cm, a diferença entre as

configurações geométricas é pequena, podendo-se assumir qualquer uma como “configuração mais adequada” economicamente.

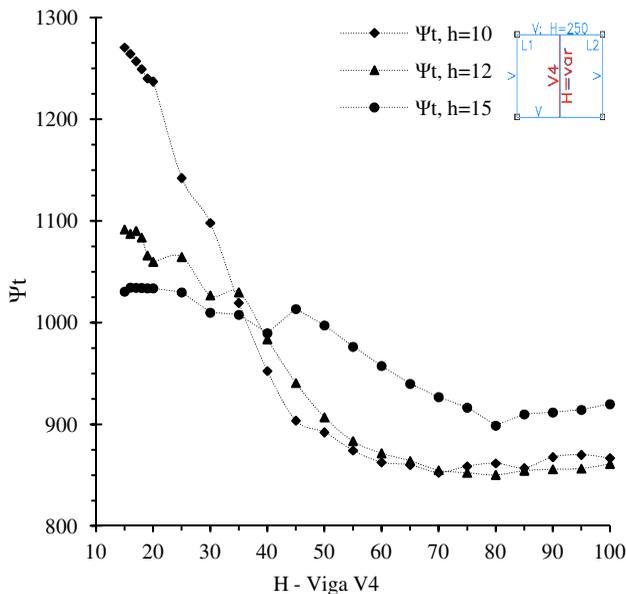


Gráfico 34 – Índice de Custo Total: Aço + Concreto

Tabela 16 – Tabuleiro I: Custo Aço + Concreto

Altura viga V4	Espessura de Laje	
	Mais Econômica	Menos Econômica
$H < 35$	$h = 15$	$h = 10$
$H = 35$	$h = 15$	$h = 12$
$35 < H < 75$	$h = 10$	$h = 15$
$H \geq 75$	$h = 12$	$h = 15$

A Tabela 17 resume os resultados de quantitativos e custos, para essa configuração do tabuleiro. Os índices estão de acordo com os indicadores para o controle da qualidade de projetos de estruturas de concreto armado, que são apresentados por outros autores (COELHO, 2012), e utilizados em escritórios de projeto estrutural. De acordo com os índices de custos do tabuleiro, fica claro que a configuração de dimensões dos elementos atende aos requisitos de um bom projeto. Uma

vez que, além dos aspectos econômicos e estéticos, atende aos requisitos de capacidade resistente, desempenho em serviço e durabilidade.

Tabela 17 – Resumo da configuração mais econômica

Área do Tabuleiro:		48,00 m <sup>2</sup>
Configuração mais Econômica considerando apenas: V4, L1 e L2.	Laje: $h = 12$ cm	
	Viga: $H = 80$ cm	
Quantidades:	Volume de concreto:	6,48 m <sup>3</sup>
	Peso de aço:	318,99 kgf
	Aço/Concreto:	49,226 kgf/m <sup>3</sup>
Índices:	Aço/Área:	6,646 kgf/m <sup>2</sup>
	Concreto/Área:	0,135 m <sup>3</sup> /m <sup>2</sup>

Com esses valores,  $h = 12$  cm e  $H = 80$  cm ( $I_{LV4} = 0,1148$ ), as exigências normativas referentes à flecha e ao limite de vibração são atendidas. Como pode ser visto no Gráfico 16 e Gráfico 18.

Deve ser lembrado, que a análise econômica completa, do tabuleiro, envolve custos referentes a concreto, aço e fôrmas entre outros, que são importantes. Mesmo assim, é possível perceber a variação dos custos e definir qual deve ser a provável configuração de maior economia, sem esquecer que essa configuração deve respeitar os limites normativos referentes aos estados limites últimos e de utilização.

## 4.2 ANÁLISE E RESULTADOS: TABULEIRO II

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para o Tabuleiro II, Figura 17. As análises utilizaram os procedimentos descritos no item 3 (metodologia).

### 4.2.1 Validação do Modelo Numérico: Tabuleiro II

Para a validação da modelagem numérica em AG e MEF do Tabuleiro II, segue-se o mesmo princípio utilizado na validação do Tabuleiro I, para destinação do tabuleiro como “Escritório”. No modelo em AG, com  $J = 2 \times I$  e malha 25x25, as vigas são modeladas com seção transversal de  $20 \times 900$  cm, assim, se garante uma deformabilidade insignificante para as vigas. Já para a validação do modelo em MEF, todos os pontos de ligação entre vigas e lajes são restringidos à translação em Z (direção vertical), e dessa forma, se garante que as vigas sejam indeslocáveis verticalmente.

Os resultados dos modelos numéricos são comparados com os resultados encontrados com o uso das tabelas de Czerny, para cálculo de lajes. Para isso, as lajes são dotadas de espessura  $h = 14$  cm, e carga total de  $6,00 \text{ kN/m}^2$  (uso como “escritório”). Os esforços apresentados são valores característicos (sem majoração), com unidade  $\text{kNm/m}$ , e as flechas elásticas são dadas em cm. Os resultados calculados por MEF são valores máximos, que podem não corresponder necessariamente ao centro da laje.

Os resultados do cálculo por tabelas são apresentados na Figura 20, na qual, se verifica que os momentos fletores positivos da laje L2 são iguais para as duas direções x e y, o mesmo é verdade também para L3, pois, essas lajes possuem a relação entre vãos igual a um ( $\lambda = l_{\text{maior}}/l_{\text{menor}} = 1$ ). Esse comportamento, também, ocorre para outros esforços, pois, ao traçar uma linha do pilar P3 ao P7, nota-se que essa linha é na verdade um eixo de simetria do tabuleiro. Logo, o momento fletor negativo existente entre L2 e as lajes vizinhas serão o mesmo para a direção x e y, ou seja,  $M_{xe}$  (L1/L2) será igual a  $M_{ye}$  (L2/L4), e o momento entre L1 e L3 será igual ao que há entre L3 e L4, com  $M_x$  de L1 igual a  $M_y$  de L4 e vice-versa. A compatibilização dos momentos fletores negativos utiliza a equação (3.81).

Para a comparação dos resultados, utiliza-se a equação (4.83), sem exibir os valores no formato de porcentagem (%). Na equação, os resultados obtidos por MEF (malha 25x25) são tidos como referência

para comparação com os demais procedimentos, “X”. Se o resultado for positivo, significa que o esforço ou flecha elástica em análise é maior que o obtido por MEF, e caso seja negativo significa que é menor.

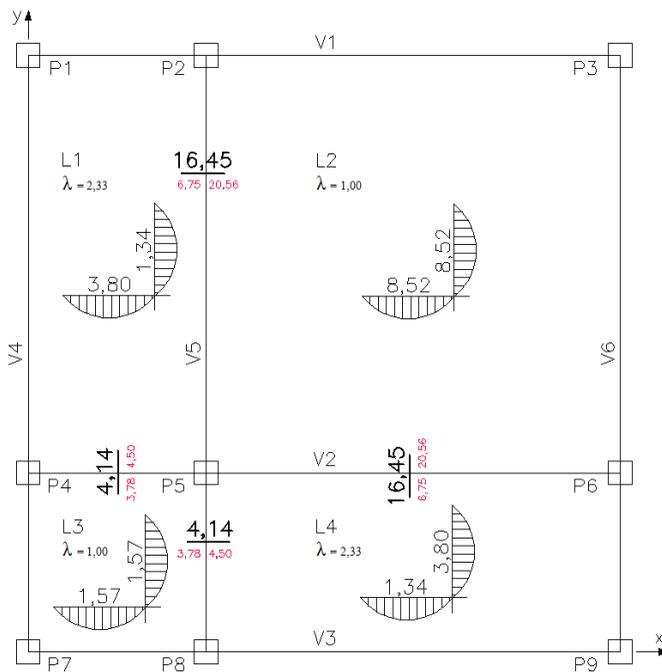


Figura 20 – Resultados com tabelas de Czerny (kNm/m)

O comparativo entre flecha imediata (elástica) e momento fletor positivo máximo, da laje L2 ( $M_x = M_y$ ), é apresentado no Gráfico 35. Verifica-se que a diferença entre Czerny e MEF é pequena, porém, entre MEF e AG a diferença é de 72% para a flecha. Em relação ao momento fletor negativo entre L1 e L2 ( $L1/L2 = L2/L4$ ), e entre L1 e L3 ( $L1/L3 = L3/L4$ ) (Gráfico 36), a diferença máxima de 36% foi obtida para Czerny. Entre AG e MEF, a diferença máxima foi de 30%, para o momento entre L1 e L2, que é o maior momento fletor negativo.

Para o MEF, todas as opções de refinamento da malha evidenciam coerência entre os resultados. Logo, a escolha da malha, para estudo da influência da flexibilidade do tabuleiro, leva em conta o tempo de processamento e facilidade para visualização dos resultados. Com estes critérios, é escolhida a malha 25x25 cm para dar continuidade às demais análises.

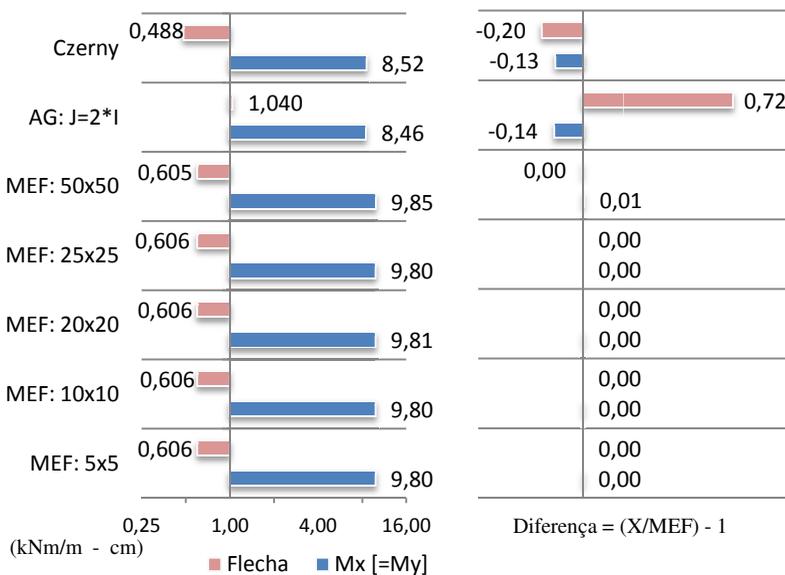


Gráfico 35 – Validação Tabuleiro II: flecha e momento fletor positivo L2

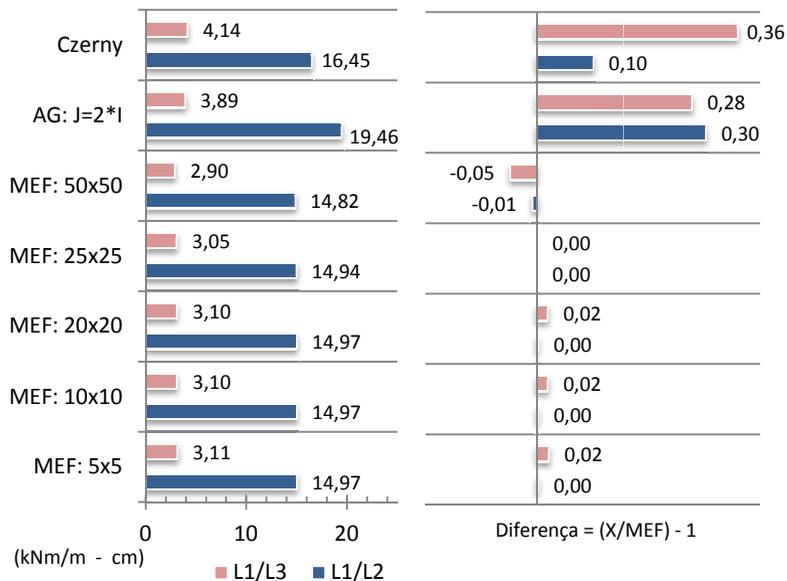


Gráfico 36 – Validação Tabuleiro II: momento fletor negativo

## 4.2.2 Influência da flexibilidade dos apoios

O estudo sobre a flexibilidade dos apoios de lajes do Tabuleiro II foi realizado variando a altura das vigas V2 e V5, de  $H = 30$  a  $H = 150$  cm, com as demais vigas modeladas com seção transversal de  $20 \times 70$  cm, como foi descrito no capítulo metodologia. Não é considerada a excentricidade entre laje e viga, e a seção T (mesa colaborante da laje).

Os resultados de momentos fletores são valores máximos sem majoração (valores característicos), dados em kNm/m, e as flechas são dadas em centímetros (cm). As análises apresentadas a seguir foram realizadas por MEF, para destinação do tabuleiro como “Escritório”.

Para a laje L2, os resultados de momentos fletores positivos ( $M_x = M_y$ ) são apresentados no Gráfico 37, em que, cada linha representa os resultados calculados para cada espessura de laje ( $h$ ). Para esses esforços, quanto maior o valor de  $h$  (espessura de laje) maior será  $M_x$ , e quanto maior  $H$  (altura viga V2 e V5) menor será  $M_x$ . Esse comportamento já era esperado, como também foi verificado para o Tabuleiro I.

Para o Tabuleiro II, também, são utilizados os índices adimensionais de momentos fletores e de relação entre rigidez da laje L2 e vigas V2 e V5, que é o índice  $I_{L2 \div V5}$  (Gráfico 38).

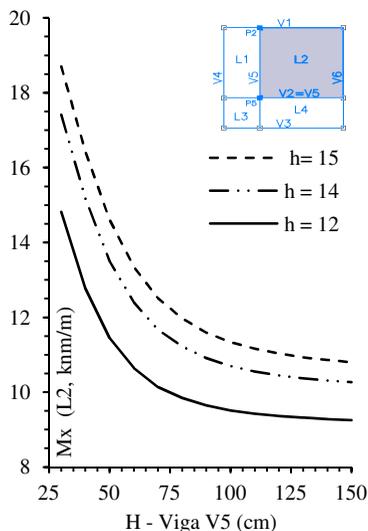


Gráfico 37 –  $M_x$  para L2

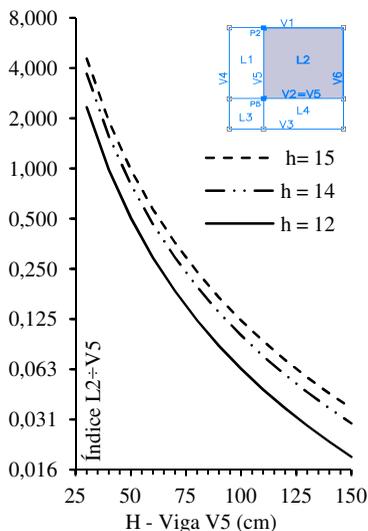


Gráfico 38 – Índice  $I_{L2 \div V5}$

Como para a laje L2 se tem  $l_x/l_y = 1$ , logo  $M_x = M_y$  e dessa forma  $I_{mx} = I_{my}$ , o que torna a análise da variação dos esforços na laje mais fácil. O Gráfico 39 apresenta os valores de  $I_{mx}$  para L2, em função da altura  $H$  de V5 ( $V2 = V5$ ). No gráfico, se verifica que há uma curva correspondente a cada valor de  $h$ , além disso, quanto maior o valor do índice  $I_{mx}$  menores serão os momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$ .

No Gráfico 40, o índice  $I_{mx}$  é apresentado em função do índice  $I_{L2 \div V5}$ , o que facilita a análise, pois, os valores de  $I_{mx}$  podem ser exibidos por, praticamente, apenas uma curva, sem grande perda de precisão. Nos mesmos gráficos, são informados os valores de  $I_{mx}$  para a condição de vigas indeslocáveis/indeformáveis. Esses limites são referentes aos valores de  $M_x$  obtidos por Czerny (centro da laje), e por MEF com todas as vigas modeladas como indeslocáveis (legenda: “V\_ind”).

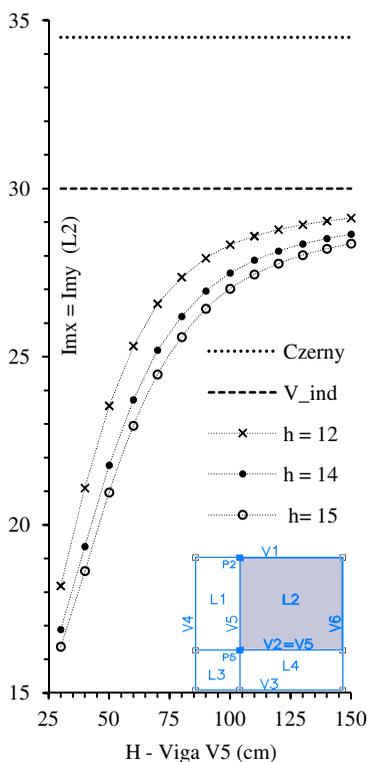


Gráfico 39 –  $I_{mx}$  vs.  $H$

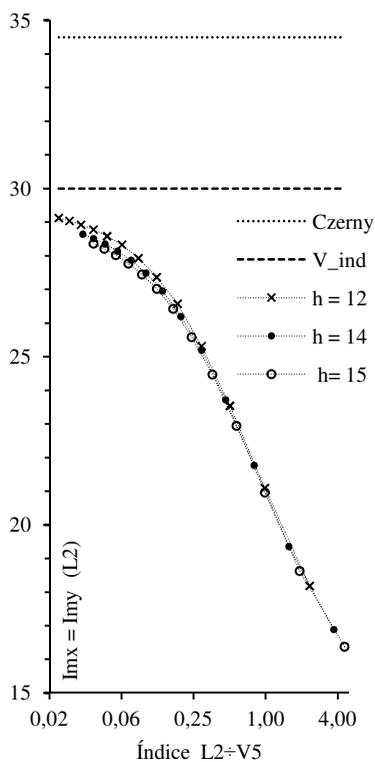


Gráfico 40 –  $I_{mx}$  vs.  $I_{L2 \div V5}$

Independentemente do gráfico analisado, constata-se que o limite relacionado com Czerny é maior, com  $I_{mx} = 34,50$ . Para o MEF com vigas indeslocáveis se obtém o valor de  $I_{mx} = 30,0$  que significa uma relação  $V_{ind}/Czerny = 0,8695$ , ou seja, para a condição de apoios indeslocáveis e/ou indeformáveis, os valores de  $M_x$  calculados por Czerny representam 86,95% (diferença de -13%, Gráfico 35) do valor obtido por MEF, independente da espessura da laje L2 ( $h$ ).

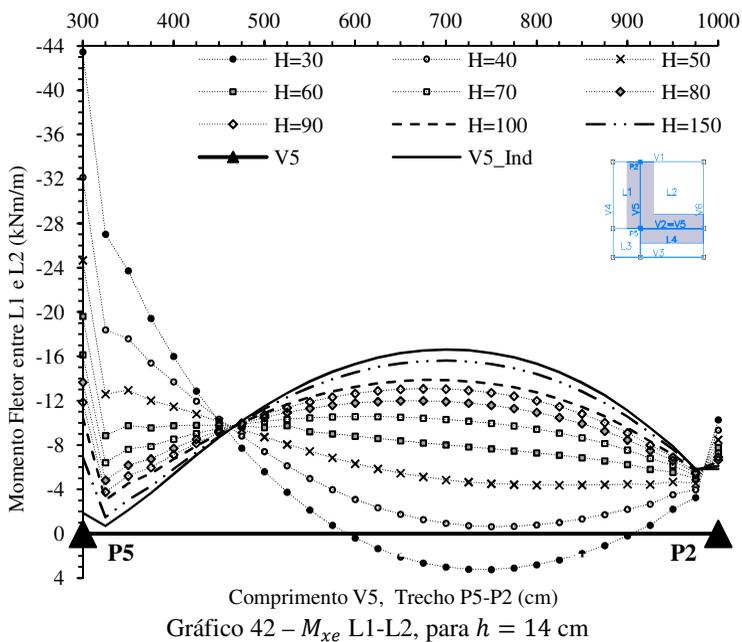
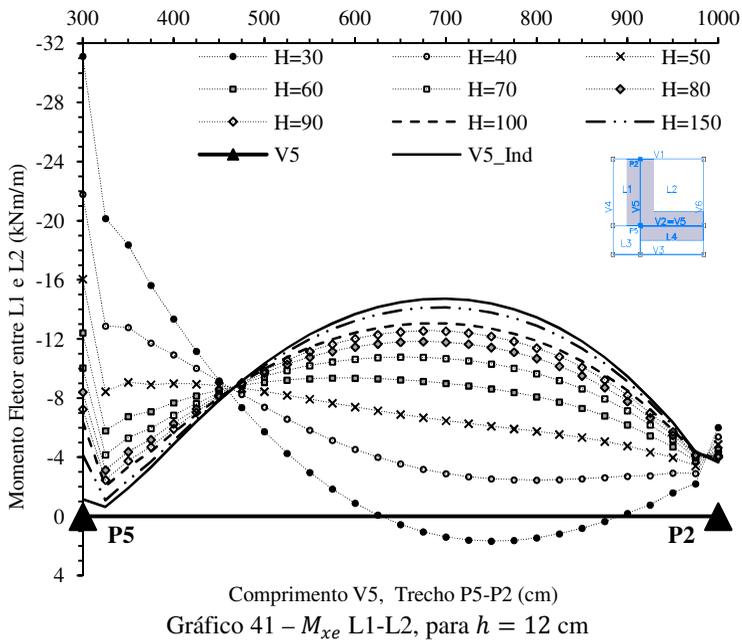
E como já verificado para o Tabuleiro I, os valores dos momentos fletores positivos são altamente dependentes da relação de rigidez entre laje e viga. Com diferenças crescentes, entre Czerny e modelos em MEF com vigas flexíveis, à medida que se reduz a altura de V2 e V5.

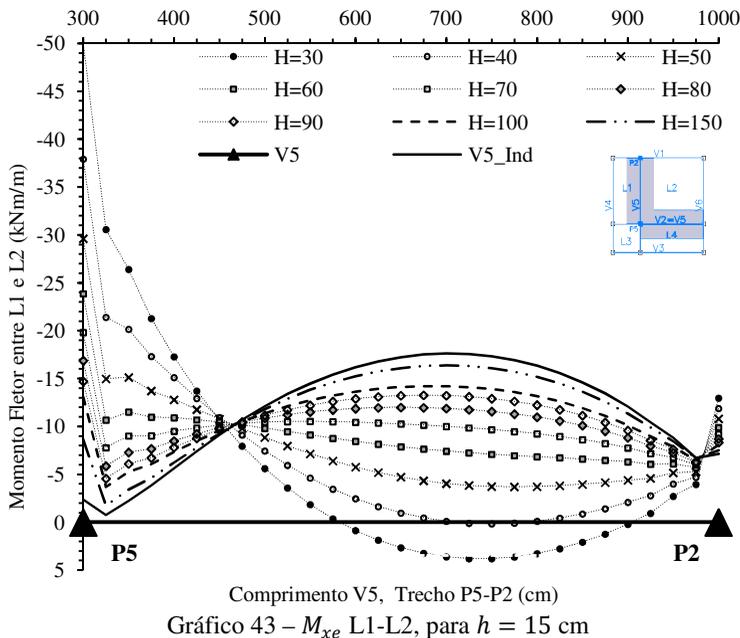
A análise dos momentos fletores negativos  $M_{xe}$  entre L1 e L2 (iguais a  $M_{ye}$  entre L2 e L4) mostra que os valores dependem da rigidez da viga V5, e não são constantes ao longo do bordo de continuidade das lajes. Essa variação dos valores de  $M_{xe}$ , ao longo do trecho entre o pilar P5 e P2, é exibida no Gráfico 41, para  $h = 12$ , Gráfico 42 para  $h = 14$  e Gráfico 43 para  $h = 15$  cm, todos com semelhança muito grande entre si. Nestes gráficos, não são apresentados os valores de  $M_{xe}$  no pilar P5, devido à grande descontinuidade dos valores.

Os resultados referentes à legenda “V5\_ind” são os valores obtidos com V2 e V5 indeslocáveis, com as demais vigas de seção transversal de 20x70 cm.

Os gráficos mostram como é grande a variação dos momentos fletores entre L1 e L2, ao longo do trecho P5-P2 (iguais aos do trecho P5-P6). A influência da flexibilidade entre laje e viga é evidenciada como sendo a principal responsável pela mudança da distribuição de esforços do tabuleiro. Observa-se que, em termos de valores absolutos, os momentos fletores negativos são maiores nas extremidades do trecho que no vão, quando V2 e V5 tiverem  $H \leq 60$  cm, com casos em que o momento no vão passa a ser positivo ( $H = 30$ ).

Verificou-se, também, que modelos mais flexíveis necessitam de um maior refinamento da malha, em comparação com os modelos rígidos (vigas indeformáveis/indeslocáveis). Esse refinamento é necessário, principalmente, nas regiões onde há concentração de tensões.





À medida que a rigidez de V5 aumenta, os valores de  $M_{xe}$  tendem a diminuir nas extremidades e aumentar no vão. Ao comparar as curvas formadas pelos resultados das duas situações de extremos,  $H = 30$  e  $V5\_ind$ , nota-se que uma curva apresenta concavidade para cima (configuração flexível), e a outra, concavidade para baixo (configuração rígida).

A análise com apenas V2 e V5 indeslocáveis, ( $V5\_ind$ ), gera resultados maiores que a análise com todas as vigas indeslocáveis ( $V\_ind$ ), como pode ser visto no Gráfico 44 para  $h = 14$ . O modelo  $V\_ind$  é o que foi utilizado para a comparação com Czerny (Gráfico 36).

Pela comparação dos dois modelos, fica claro que quando todas as vigas são indeslocáveis, modelo  $V\_ind$ , não há concentração de tensões nos extremos do vão, o que acontece quando as vigas são deformáveis. Portanto, quando V2 e V5 forem flexíveis e/ou deslocáveis, há uma tentativa de o canto da laje levantar o pilar, com conseqüente surgimento de tensões de tração na face superior da laje, nessa região (MAZZILLI, 1995).

Uma observação importante é que, o maior momento  $M_{xe}$ , para o trecho entre P5 e P2, é obtido com a configuração de V2 e V5 indeslocáveis, com as demais vigas deslocáveis e flexíveis (20x70),

modelo  $V5\_ind$ , e não com a configuração do modelo  $V\_ind$ , com todas as vigas indeslocáveis. Logo, para  $V5\_ind$  o aumento da curvatura das demais vigas (V1, V3, V4 e V6) ocasiona um acréscimo no valor de  $M_{xe}$ , com o valor de  $M_{xe}$  máximo 11,178% maior que o obtido por  $V\_ind$ .

Essas verificações sobre  $M_{xe}$  implicam questionamentos sobre o dimensionamento das armaduras negativas entre L1 e L2. Por exemplo, qual o valor de  $M_{xe}$  que deve ser adotado para o dimensionamento das armaduras negativas? Valor máximo? A média aritmética? Ou dividir o vão em faixas de momentos?

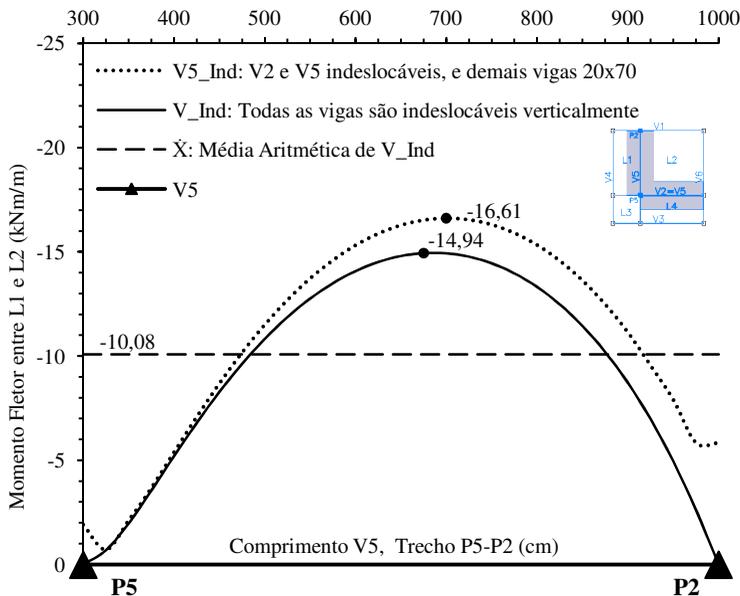
Cada uma dessas perguntas leva a outros questionamentos, contudo, não é objetivo desta pesquisa explorar ou esgotar esses questionamentos. Entretanto, ao se pensar em economia, tanto no dimensionamento como no detalhamento das armaduras (positivas e negativas), e em segurança, pode-se dizer que uma alternativa satisfatória seria utilizar faixas de momentos.

Essas faixas podem ser escolhidas de forma que na região de domínio da faixa, os valores de momentos sejam constantes ou com valores próximos. Ainda, pode-se determinar uma largura fixa da faixa, e nesse domínio utilizar o momento fletor máximo para o dimensionamento. Dessa forma, garante-se o cobrimento do diagrama de momentos fletores negativos, em todas as faixas do bordo de continuidade. Esse procedimento já está disponível em alguns softwares de projeto de concreto armado, e sendo utilizado em escritórios de projeto, mas torna-se trabalhoso caso seja realizado manualmente.

Uma alternativa prática de acordo com Araújo (2008), consiste em utilizar o valor médio de  $M_{xe}$ , que é  $\overline{M}_{xe}$ . O qual exige plastificação e redistribuição de esforços. São necessários estudos adicionais sobre essa metodologia. Apesar disso, utilizou-se  $\overline{M}_{xe}$  nas comparações seguintes.

No Gráfico 44 pode ser visto o valor médio  $\overline{M}_{xe}$ , referente à média aritmética  $\overline{X}$  dos valores de  $M_{xe}$  para o modelo  $V\_ind$  com  $h = 14$ . Para o cálculo da média aritmética  $\overline{X}$ , não foram considerados os valores dados nas extremidades do vão, ou seja, em P2 e P5, já que a região onde se obtêm esses dados está dentro da seção do pilar. O valor médio  $\overline{X}$  é obtido pela equação (4.91), com  $\overline{M}_{xe} = \overline{X} = 10,08$  kNm/m.

Constata-se, que esse valor médio não é adequado para o dimensionamento de todo o trecho P5-P2. Pois, em grande parte do vão, o cobrimento do diagrama de momentos fletores não é realizado.

Gráfico 44 –  $M_{xe}$  para  $h = 14$  cm

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad 4.91$$

Verifica-se, então, que a busca por um dimensionamento mais econômico pode ser realizado ao levar em conta a distribuição não homogênea dos esforços. E como foi verificado do Gráfico 41 ao Gráfico 43, o uso de  $M_{xe}$  máximo para todo o vão de V5 (e V2), não resulta em um dimensionamento econômico para todo o vão. Devido a essa observação, os resultados de  $M_{xe}$ , das análises de flexibilidade do Tabuleiro II são apresentados através do valor médio  $\bar{M}_{xe}$ , obtido por meio da variação de  $H$  da viga V2 e V5, com as demais vigas de seção transversal 20x70 cm, como realizado anteriormente.

O Gráfico 45 compara os valores do momento fletor negativo entre L1 e L2 (mesmos para L2 e L4), obtidos por Czerny, pelo valor médio  $\bar{M}_{xe}$  (ver legenda: X), e para  $M_{y=650}$ , que é o momento fletor negativo no ponto  $y = 650$  cm (centro do trecho entre P5 e P2). Os resultados mostram que o valor médio  $\bar{M}_{xe}$  não é adequado como critério para uma uniformização dos momentos, principalmente quando o tabuleiro tiver

grande rigidez à flexão. As diferenças entre  $\overline{M}_{xe}$  e Czerny também são grandes, com relação entre resultados de,

$$\left( \overline{M}_{xe} / \text{Czerny} \right)_{h=15; H=150} = 0,685.$$

Já entre Czerny e  $M_{y=650}$  para  $H = 150$ , as diferenças são menores,

$$\left( M_{y=650} / \text{Czerny} \right)_{h=15; H=150} = 0,939.$$

O que mostra que com essa configuração de geometria, a curvatura de V2 e V5 pouco influencia na distribuição dos esforços.

Para o mesmo gráfico, os maiores valores são obtidos para a configuração de maior rigidez do tabuleiro, ou seja, com espessura das lajes de  $h = 15$  e altura de V2 e V5 igual a  $H = 150$  cm. Nota-se que para  $\overline{M}_{xe}$  com  $H < 60$ , a diferença entre as diversas espessuras de laje é pequena. A relação, entre a configuração de maior rigidez ( $h = 15$  e  $H = 150$ ), e a de menor rigidez ( $h = 12$  e  $H = 25$ ), para  $\overline{M}_{xe}$  é de 303,90%.

No Gráfico 46, apresentam-se os valores para o índice  $I_{mxe}$  referente ao valor médio  $\overline{M}_{xe}$ , com valores em módulo. No mesmo gráfico, são comparados os resultados para as diferentes espessuras das lajes e indicados os valores máximos do índice que são referentes ao cálculo tradicional com uso de tabelas de Czerny, e ao MEF com todas as vigas indelocáveis verticalmente ( $V_{ind}$ ).

A variação dos momentos fletores positivos ( $M_x, M_y$ ) da laje L2, e negativos médios entre L1 e L2 (iguais entre L2 e L4), e a correspondência entre eles são expostas no Gráfico 47. Os eixos verticais representam os valores característicos dos momentos em kNm/m. Como já visto em outros gráficos, quando V2 e V5 tiverem seção transversal com  $H > 70$  cm, aproximadamente, os momentos fletores  $M_{xe}$  passam a ser maiores que os momentos fletores positivos de L2. Observe que, para  $H = 150$  cm, os momentos  $\overline{M}_{xe}$  e  $M_x$  possuem valores próximos.

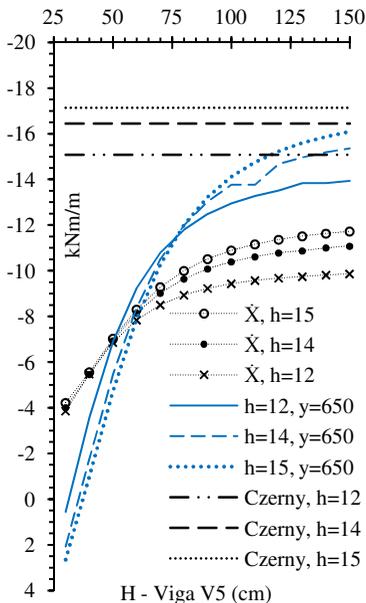


Gráfico 45 -  $M_{xe}$  entre L1/L2

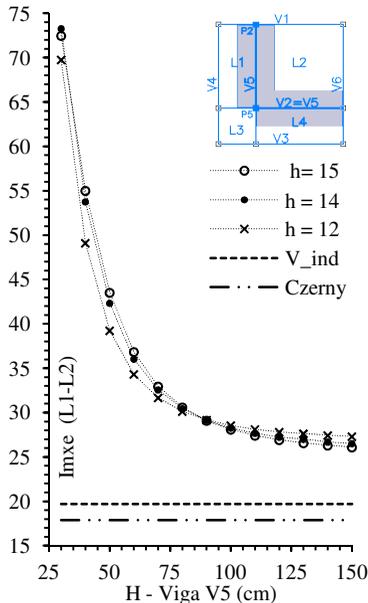


Gráfico 46 -  $I_{mxe}$  para  $\bar{M}_{xe}$

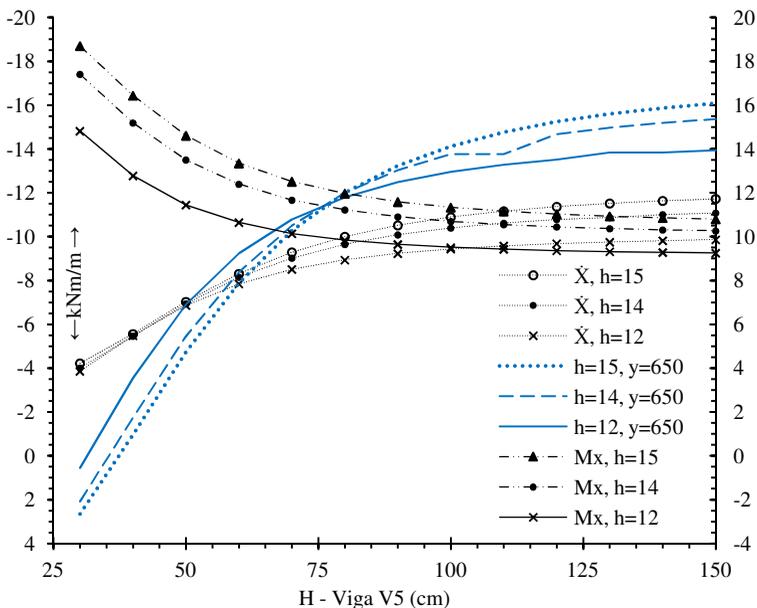
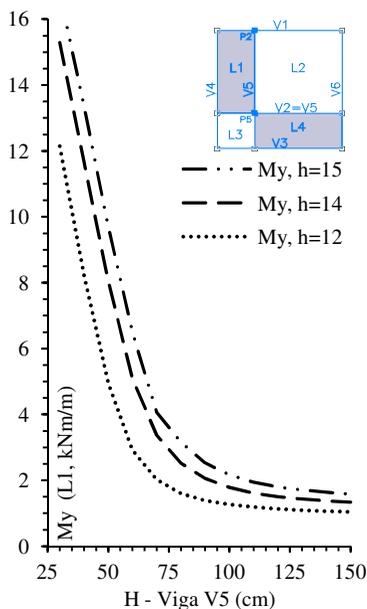
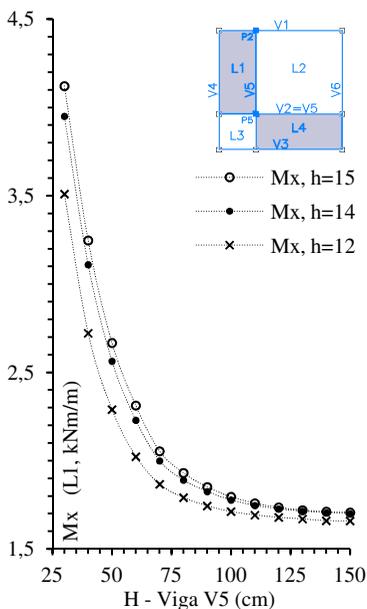


Gráfico 47 - Variação de momentos para L2, direção x

A variação dos momentos fletores positivos da laje L1 é apresentada no Gráfico 48 para  $M_x$  e Gráfico 49 para  $M_y$ . A variação dos esforços é não linear decrescente, à medida que V2 e V5 aumentam sua rigidez à flexão, como era esperado.

Como é visto na Figura 20, para L1 e L4 a relação entre vão maior e menor resulta em 0,4285, e de acordo com o tradicional método de cálculo (tabelas), essas lajes devem ser calculadas em uma direção, a do menor vão. Se for respeitada a armadura mínima nas duas direções das lajes L1 e L4, essa armadura pode ser suficiente para corrigir os erros de cálculo devido ao uso das tabelas (ARAÚJO, 2008). A norma britânica BS 8110:1997, de projeto de estruturas de concreto, faz essa exigência de armadura mínima das duas direções da laje, diferente da NBR 6118:2007, que permite utilizar uma armadura de distribuição na maior direção.



Essa premissa é corroborada caso as condições de contorno da laje sejam indeformáveis ou indeslocáveis. Mas como pode ser verificado no Gráfico 50, a distribuição dos momentos não ocorre dessa forma quando se têm vigas deformáveis. No gráfico, são apresentadas as

relações entre os momentos fletores positivos, e destes como o momento fletor negativo médio  $\overline{M}_{xe}$  (valores em módulo). O eixo vertical está em escala logarítmica (base 2).

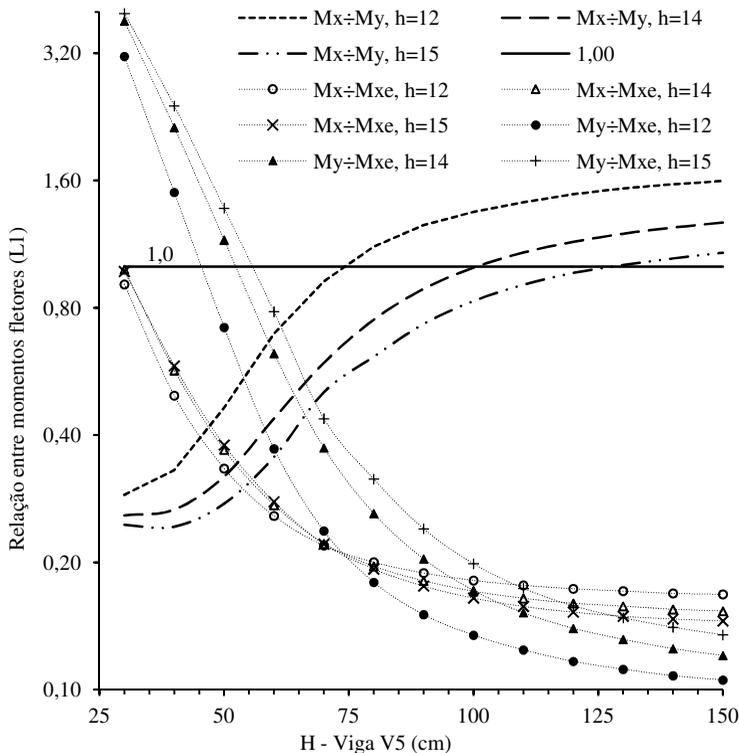


Gráfico 50 – Relação entre momentos fletores, L1

Os resultados evidenciam que, para L1, o momento fletor  $M_y$  é maior que  $M_x$  para várias relações de configurações geométricas de vigas e lajes. Com a configuração da altura da seção transversal de V2 e V5 igual a um décimo do maior vão,  $H = \text{Maior vão}/10 = 70$  cm, que é um valor tido como referência para estimar a altura de uma viga, a relação entre momentos fletores de L1 resulta em,

$$M_x/M_y = \{H: 70 \rightarrow \begin{cases} h: 12 = 0,9240 \\ h: 14 = 0,5932 \\ h: 15 = 0,5051 \end{cases}$$

$$M_x/M_{xe} = \{H: 70 \rightarrow \begin{cases} h: 12 = 0,2194 \\ h: 14 = 0,2215 \\ h: 15 = 0,2210 \end{cases}$$

Deve-se observar que essa configuração de geometria é usualmente empregada na determinação da seção geométrica das vigas. Caso o cálculo dos esforços fosse realizado com uso de tabelas de lajes, como as de Czerny, o maior momento fletor positivo seria  $M_x$ , pois  $l_y/l_x > 2$ , que significa que o cálculo da laje pode ser realizado como o de vigas, e para o vão de cálculo usa-se o menor vão da laje. Mas como se verifica no Gráfico 50, esse procedimento não está adequado, pois, caso as lajes do tabuleiro tivessem espessura de  $h = 14$  cm e vigas com  $H = 70$  cm, o momento fletor na direção do maior vão ( $M_y$ ) seria 59,32% maior que o momento fletor na direção do menor vão,  $M_x$ .

Devido à redistribuição dos esforços e plastificação de algumas seções de vigas e lajes, é provável que a diferença, resultante da não consideração do comportamento deformável e flexível das vigas, não causará um dano à estrutura, a ponto de comprometer sua capacidade resistente. Mas podem surgir fissuras que, em certa intensidade, podem comprometer o atendimento dos estados limites de utilização, abertura de fissuras, de vibração excessiva, devido à diminuição de rigidez das seções fissuradas, entre outros problemas. Ou seja, cuidados adicionais devem ser tomados na verificação dos estados limites de serviço (ELS).

Na Figura 21, pode ser vista a variação dos momentos fletores das lajes, na direção x ( $M11$ ) e y ( $M22$ ), e variação dos deslocamentos verticais das lajes (flechas imediatas), para lajes modeladas com espessura de 14 cm. Como já observado anteriormente, quando a altura de V2 e V5 é reduzida, há aumento da concentração de tensões em torno do pilar P5, devido ao aumento dos momentos fletores nesta região. Em relação ao comportamento e à variação dos momentos fletores  $M11$ , são feitas as mesmas considerações sobre os momentos fletores  $M22$  que são referentes aos momentos fletores positivos e negativos, já investigados nos gráficos anteriores.

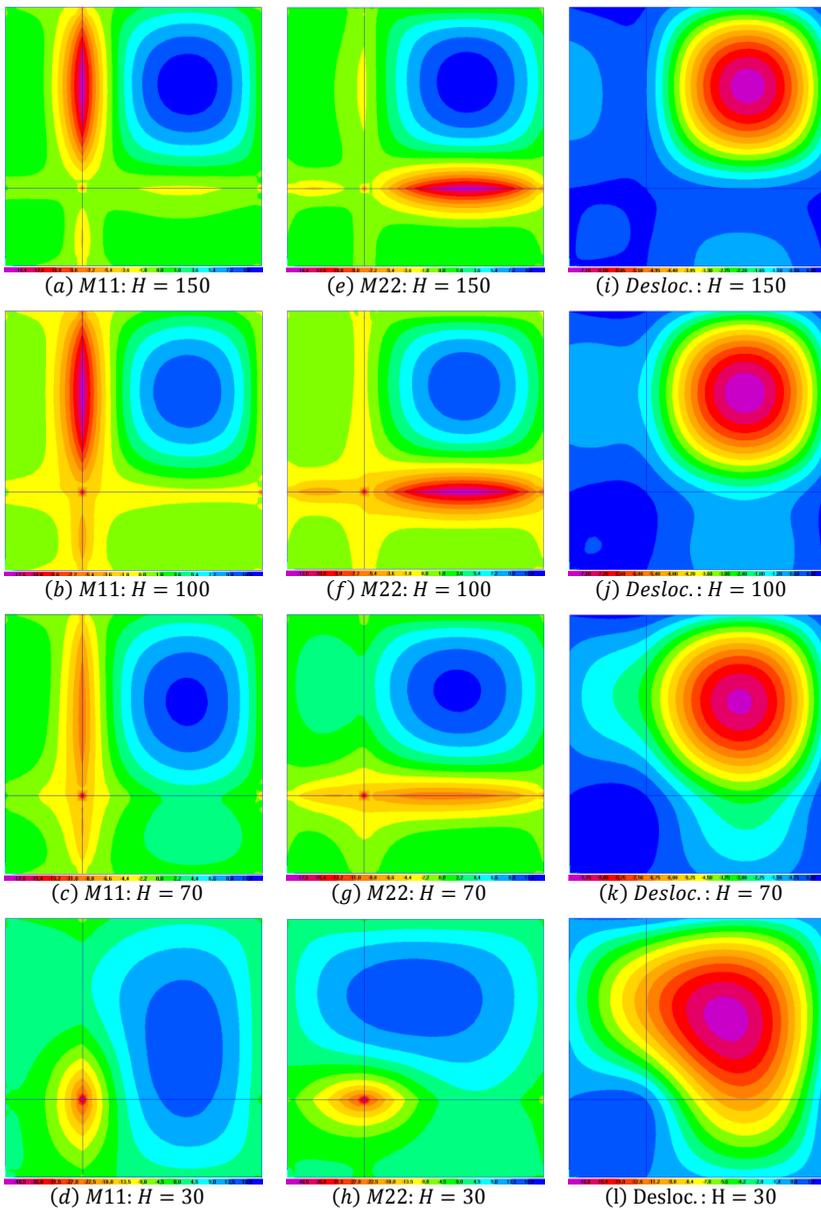


Figura 21 – Variação de esforços (kNm/m) e deslocamentos (mm),  $h = 14$

No Gráfico 51, é apresentada a flecha final (total) de L2 ( $\delta$ ), calculada pela equação (4.85), para um tempo infinito ( $t \geq 70$  meses) e carregamento aplicado em  $t_0 = 0,0$  meses (item 17.3.2.1.2 da NBR 6118:2007). Com esse critério, o coeficiente para cálculo da flecha final da laje L2 resulta em  $\alpha_f = 2,00$ . A variação é não linear decrescente, à medida que se aumenta a altura das vigas V2 e V5.

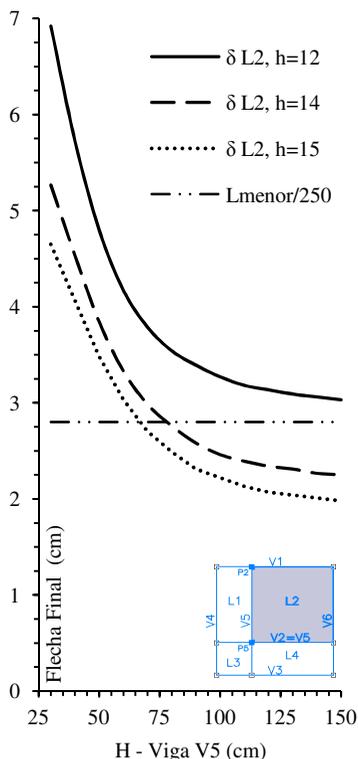


Gráfico 51 – Flecha Final L2

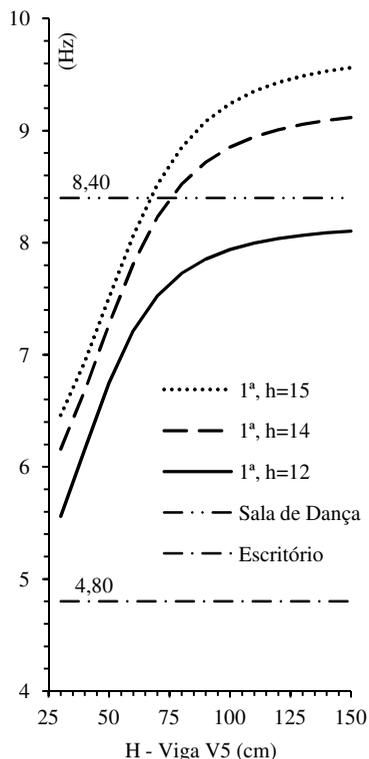


Gráfico 52 – 1ª frequência

Em relação ao limite de deformação excessiva para a laje L2,  $\delta \leq l_{menor}/250 \leq 2,80$  cm, constata-se que, para  $h = 12$  cm, não há nenhuma configuração aceitável. O limite normativo só é atendido com as seguintes configurações:  $h = 14$  cm com  $H \geq 80$  cm e  $h = 15$  cm com  $H \geq 70$  cm. Caso fosse utilizada uma contraflecha, outras seções também poderiam atender ao limite de  $\delta \leq 2,80$  cm.

A frequência fundamental de vibração do tabuleiro e sua variação devido às diversas relações de  $h$  e  $H$  são apresentadas no Gráfico 52.

Como já foi verificado para o Tabuleiro I, o aumento da altura  $H$  de V2 e V5 adiciona rigidez ao sistema, o que ocasiona o aumento da frequência fundamental de vibração.

Todas as configurações de geometria da seção transversal, de lajes e vigas analisadas para o Tabuleiro II, atendem ao limite de vibração excessiva para a utilização como escritório ( $f_{01} > 4,80 \text{ Hz}$ ). Em relação ao limite relacionado à utilização como “sala de dança” ( $f_{01} > 8,40 \text{ Hz}$ ), todas as configurações com espessura da laje  $h = 12 \text{ cm}$  não atendem ao requisito da NBR 6118:2007. Para as demais espessuras de laje, o limite é atendido a partir das seguintes geometrias:  $h = 14$  e  $H \geq 80 \text{ cm}$  e  $h = 15$  com  $H \geq 70 \text{ cm}$ . Veja que essa verificação de conforto dinâmico é possível, mesmo que a carga utilizada no cálculo estático seja adequada para uso como “Escritório” e não para o uso como “Sala de Dança”. Uma vez que, a resposta dinâmica independe do carregamento da estrutura (considera-se apenas o peso próprio da estrutura).

Os resultados da variação da frequência natural de vibração do 2º e 3º modos são exibidos no Gráfico 53. Observa-se que maiores valores são obtidos com configurações geométricas de seções transversais de lajes e vigas maiores. Quando  $H > 80 \text{ cm}$ , a variação dos valores do 2º e 3º modos é muito pequena, o que dá a impressão de uma possível formação de trecho com valores constantes, como foi constatado para o Tabuleiro I (Gráfico 20).

Para avaliar o quanto variam as frequências de vibração, com a variação da altura de V2 e V5, é construído o Gráfico 54 o qual apresenta a razão de variação das frequências ( $R_f$ ) do 1º, 2º e 3º modos, com base nos resultados obtidos com  $H = 70 \text{ cm}$ , como mostra a equação (4.92). Utilizou-se esse valor de referência, pois, assim, todas as vigas do tabuleiro possuem a mesma seção transversal, com altura das vigas igual a  $H = l_{vão}/10$ .

$$R_f = \frac{f_H}{f_{H=70}}. \quad 4.92$$

Do Gráfico 54 verifica-se grande variação das frequências para todos os modos de vibração. O 2º modo apresenta a maior razão de aumento  $R_f = 1,24 = 124\%$ , para  $h = 15$  e  $H \geq 100$ . A maior razão

de diminuição também é relacionada ao 2º modo de vibração, com  $h = 12$  e  $H \geq 30$ , e vale  $R_f = 0,62 = 62\%$ .

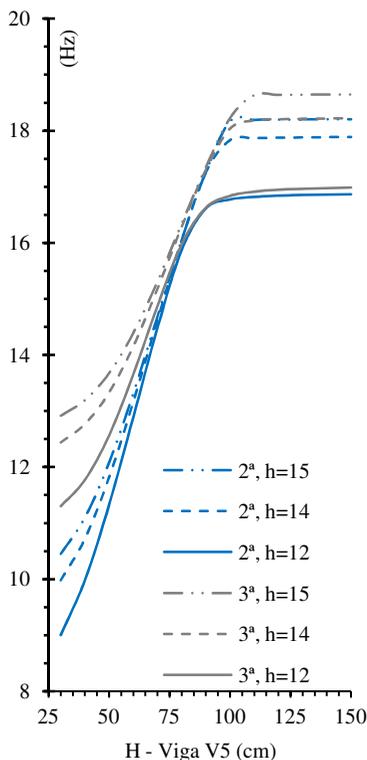


Gráfico 53 – 2º e 3º modos de vibração

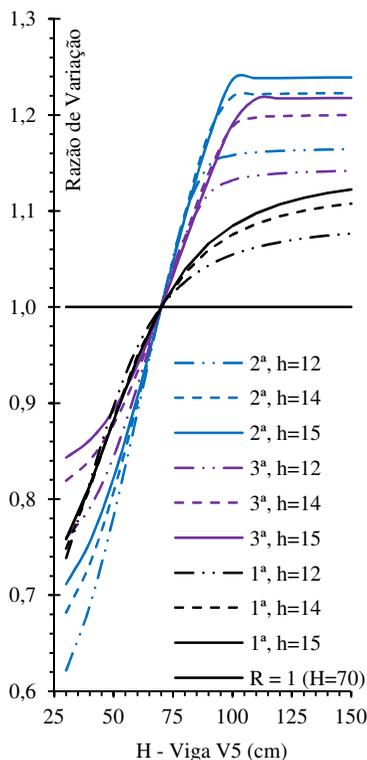


Gráfico 54 – Razão de variação

Logo, constata-se que os valores das frequências são muito dependentes da rigidez das vigas V2 e V5. O gráfico que apresenta a razão de variação das frequências ( $R_f$ ) mostra ser útil para a visualização e mensuração da variação dos valores. Alerta também que, as curvas de aumento e/ou diminuição apresentam um trecho praticamente linear, outro não linear, e por fim um patamar (trecho com valores constantes).

Em relação aos modos de vibração, a variação da relação entre rigidez das vigas V2 e V5 com as lajes do tabuleiro mostra que dos cinco primeiros modos de vibração, os que mais mobilizam massa na direção vertical (eixo z) são o 1º, 3º e 5º modos. O 2º e 4º modos são referentes a movimentos no plano do tabuleiro (direção x e y). O Gráfico

55 exibe os fatores de participação modal (FPM) do 1º, 3º e 5º modos de vibração, em função do índice adimensional  $I_{L2-V5}$ . No gráfico (a) pode-se verificar que a não consideração do sinal + ou - possibilita identificar que, para  $I_{L2-V5} \geq 0,123$  o 1º modo terá maior participação que os demais modos. E assim, é o modo que mais mobiliza massa segundo a direção vertical. Logo, o 1º modo tem aumento de participação quando V2 e V5 forem mais flexíveis, já o 3º e 5º modos possuem menor participação nesta configuração.

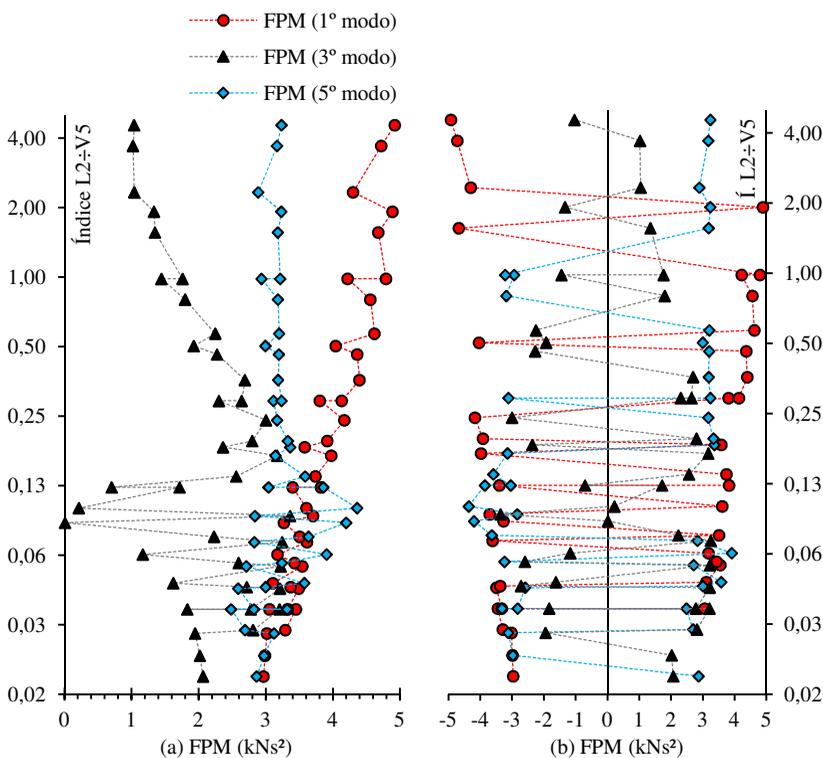


Gráfico 55 – FPM, variação Módulo (a); com sinal + ou - (b)

O 1º, 2º, 3º e 5º modos de vibração são apresentados na Figura 22, para  $h = 14$  cm, com a representação de  $M_{11}$ . A partir da análise desses modos, verifica-se que a configuração dos mesmos se modifica quando se aumenta a rigidez de V2 e V5.

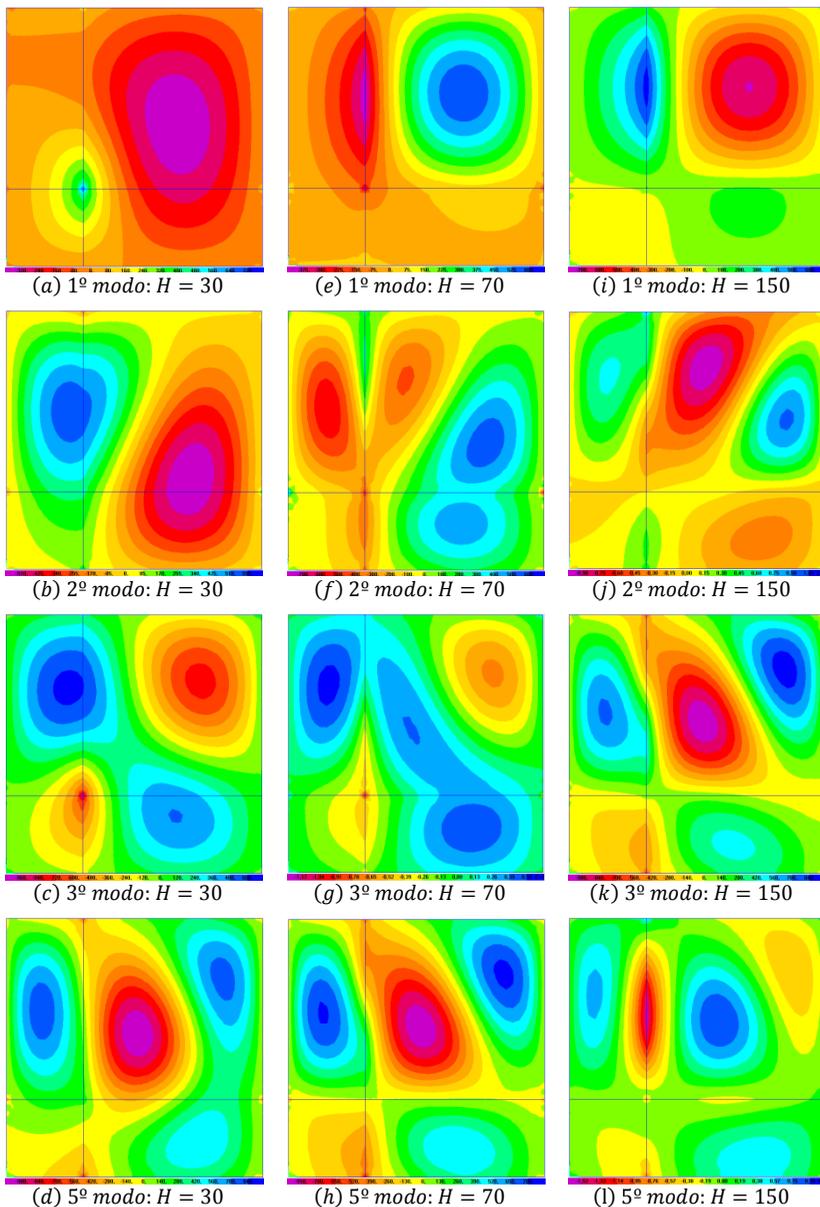


Figura 22 – Modos de vibração,  $h = 14$  cm

### 4.2.3 Relação entre Resposta Estática e Resposta Dinâmica

A investigação anterior mostrou que a variação de rigidez, entre laje e vigas de apoio, altera de maneira significativa o comportamento da estrutura. Ainda é necessário relacionar os resultados da resposta estática com os da resposta dinâmica, para se entender melhor o comportamento do Tabuleiro II e estabelecer quais são as seções-limites (mínimas) para o atendimento dos requisitos normativos.

O termo “resposta estática”, neste tópico, refere-se aos resultados de flechas da laje L2 (laje com maiores deslocamentos), e o termo “resposta dinâmica”, aos resultados da frequência fundamental de vibração da estrutura. A relação entre a resposta estática e dinâmica, para o Tabuleiro II, é apresentada para o uso da estrutura como “Escritório” e “Sala de Dança”, com as devidas cargas verticais mínimas para o cálculo de flechas, como estabelece a NBR 6120:1980.

Deve ser lembrado que os resultados desta pesquisa não consideram a fissuração dos elementos estruturais. Portanto, as verificações e comentários deste tópico são válidos para o caso de não consideração da fissuração, e/ou estado não fissurado.

Para a utilização do Tabuleiro II como “Escritório”, os resultados de flechas finais (resposta estática) são os mesmos apresentados no Gráfico 51. Como já dito antes, os valores da resposta dinâmica, em vibração livre não amortecida, independem do carregamento da estrutura, e sim, apenas do peso próprio do tabuleiro e de sua rigidez.

O Gráfico 56 apresenta os resultados de todas as respostas para uso como “Escritório”, com os respectivos limites de cada uma, ou seja, o limite estático, ( $\delta \leq L/250 \leq 2,80$  cm), e o limite dinâmico ( $1^{\text{a}} \text{ freq} \geq 4,80$  Hz). Os comentários sobre este gráfico são os mesmos realizados para o Gráfico 51 e o Gráfico 52.

Da análise, é observado que o limite dinâmico não impõe restrição à estrutura, quanto às seções transversais de vigas e lajes. Dessa forma, para uso do tabuleiro como “Escritório”, todos os modelos analisados atendem satisfatoriamente às vibrações causadas por pessoas.

Quanto ao limite estático, limite de deformação excessiva para a laje L2 ( $\delta \leq l_{\text{menor}}/250 \leq 2,80$ ), pelo Gráfico 51 e Gráfico 56 têm-se as seguintes verificações (sem consideração de contraflecha):

$h = 12$  cm: não há nenhuma configuração aceitável;

$h = 14$  cm com  $H \geq 80$  cm: o limite normativo é atendido;

$h = 15$  cm com  $H \geq 70$  cm: o limite normativo é atendido.

Estes resultados não levam em conta a influência da excentricidade e da seção T.

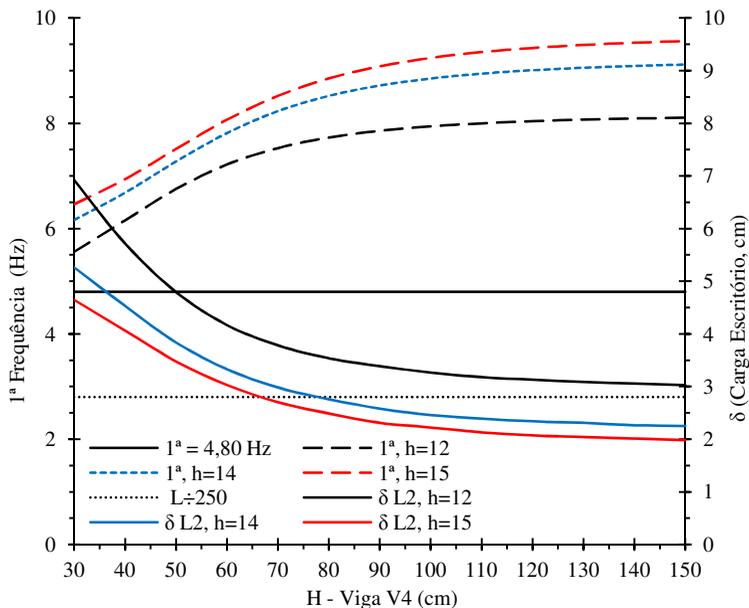


Gráfico 56 – Flecha final e Frequência, uso: Escritório

Com o carregamento total das lajes dado pelo peso próprio das lajes mais uma carga vertical de 5,00 kN/m<sup>2</sup> (Tabela 9), para a utilização do Tabuleiro II como “Sala de Dança”, são obtidos os deslocamentos máximos para essa destinação. Estes deslocamentos máximos são as flechas totais, com  $\alpha_f = 2,00$ , e para as quais, a condição de deslocamento máximo,  $\delta \leq L/250 \leq 2,80$  cm, só é atendida com a configuração de  $h = 15$  com  $H \geq 140$  cm. Ou seja, todas as demais configurações de geometrias de vigas e lajes não atendem ao requisito normativo referente à deformação excessiva.

Devido a isso, decidiu-se, nesse caso, adotar uma contraflecha ( $cf$ ) de 1,00 cm para a laje L2, que corresponde a  $L/700$ . Esse valor de  $cf$  respeita a recomendação da NBR 6118:2007 (item 13.3) que estabelece como valor máximo a relação  $L/350$ .

Os resultados de flechas totais ( $\delta t - cf$ ) para uso como “Sala de Dança”, e a correspondência com a resposta dinâmica são apresentados no Gráfico 57.

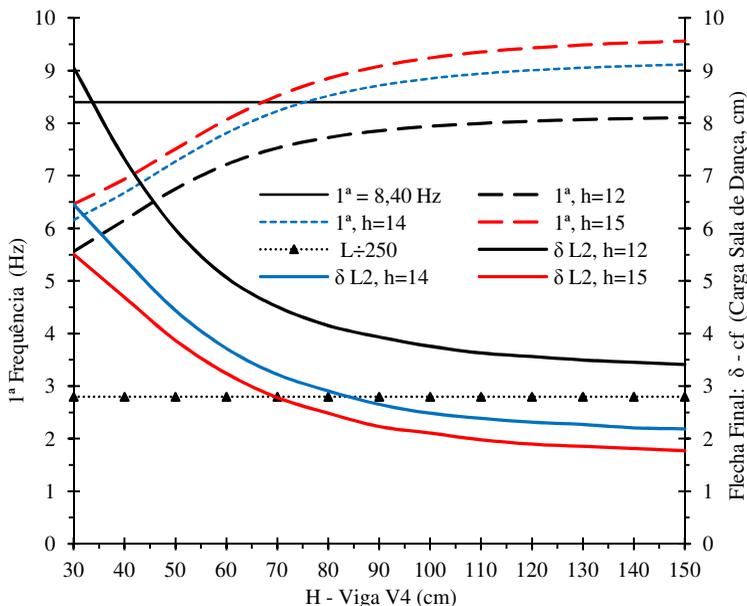


Gráfico 57 – Flecha Total ( $\delta t - cf$ ) e Frequência, uso: Sala de Dança

Para a condição de “Aceitabilidade Sensorial”, para vibrações sentidas no piso, a NBR 6118:2007 (item 13.3, tabela 13.2) recomenda que, para proporcionar um adequado comportamento da estrutura em serviço, os deslocamentos devidos apenas à carga acidental não sejam maiores que  $L/350$ . Para a laje L2, essa condição é atendida com deslocamentos  $\delta \leq 700/350 = 2,00$  cm.

Os deslocamentos diferidos no tempo, com  $\alpha_f = 2,00$ , devidos apenas a uma carga acidental de  $2,00$  kN/m<sup>2</sup> e  $5,00$  kN/m<sup>2</sup>, para uso como “Escritório” e “Sala de Dança”, respectivamente, são apresentados no Gráfico 58 e no Gráfico 59. A carga acidental utilizada para montar estes gráficos é o valor mínimo de carga vertical para uso do Tabuleiro II para estes fins de utilização, conforme estabelece a NBR 6120:1980.

Para uso como “Escritório”, nota-se que, com essa recomendação normativa ( $\delta \leq L/350$ ), pode-se saber que o limite dinâmico será atendido para as configurações com  $h = 14$  e  $h = 15$  para todos os

valores de  $H$ . Com  $h = 12$  e  $H < 40$  cm, ficaria uma dúvida se o limite dinâmico seria ou não atendido, mesmo assim, essa verificação dos deslocamentos devido à carga acidental é relevante e mostra-se útil, neste caso, para se ter uma primeira avaliação da resposta dinâmica.

Caso seja realizada uma análise dinâmica da estrutura, essa verificação de  $\delta \leq L/350$  não é necessária, pois se têm de fato os valores de frequências. Entretanto, caso não seja realizada uma análise dinâmica, a verificação dos deslocamentos devidos apenas à carga acidental (sem considerar o peso próprio da estrutura), com a limitação de  $\delta \leq L/350$ , mostra-se uma boa alternativa simplificada, para a verificação do limite dinâmico do Tabuleiro II com uso como “Escritório”.

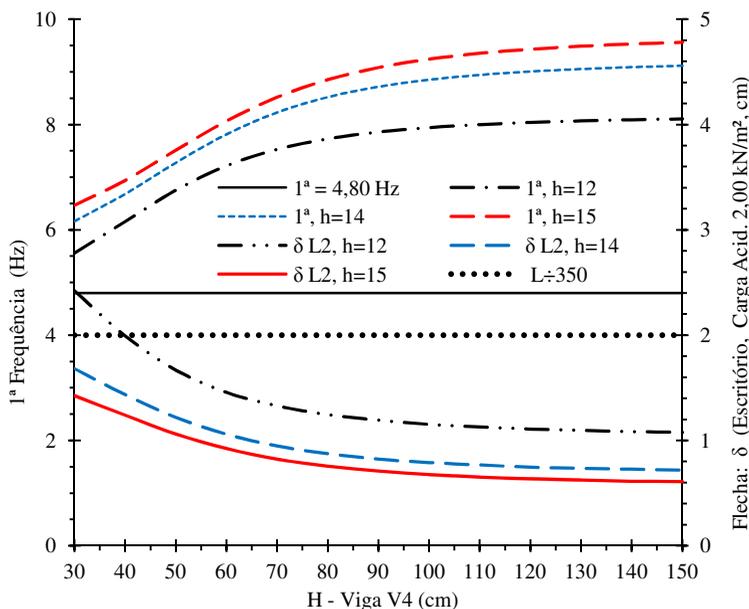


Gráfico 58 – Flecha: carga acidental de 2,00 kN/m<sup>2</sup>, uso: Escritório

Já para a utilização como “Sala de Dança”, os deslocamentos devidos apenas à carga de utilização de 5,00 kN/m<sup>2</sup> (sem considerar o peso próprio da estrutura) são apresentados no Gráfico 59. A limitação de  $\delta \leq L/350 = 2,00$  cm, nesse caso, não se relaciona de maneira tão satisfatória à resposta estática com a dinâmica, como foi relacionada para o uso como “Escritório”. Mesmo assim, a recomendação da norma,

mostrou-se como uma boa alternativa para verificar o estado limite de vibração excessiva.

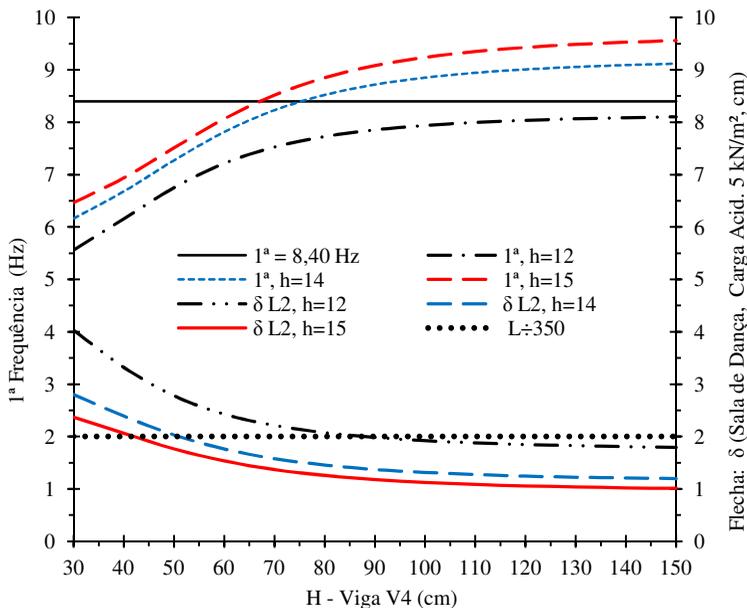


Gráfico 59 – Flecha: carga acidental de 5,00 kN/m<sup>2</sup> (sem peso próprio)

Na Tabela 18, são apresentadas, resumidamente, as geometrias que atendem ao limite estático e dinâmico, para a utilização como “Escritório” e “Sala de Dança”. Os resultados são referentes aos critérios de flechas totais com  $\alpha_f = 2,00$  (Gráfico 56 e Gráfico 57), com a consideração de contraflecha para uso como “Sala da Dança”.

Como as análises foram realizadas com a variação de 10 cm da altura das vigas V2 e V5, pode haver valores menores de  $H$  que atenderam ao limite estático e dinâmico, seguindo os critérios estabelecidos. Assim, os resultados da Tabela 18 representam uma indicação de quais são os valores mínimos da altura  $H$  que as vigas V2 e V5 podem assumir. Observa-se que o limite estático e o dinâmico, referentes ao uso como “sala de dança”, possuem as mesmas seções de limites. Ou seja, apenas são atendidos os requisitos normativos, com a adoção de espessura das lajes de 14 e 15 cm e vigas (V2 e V5) que tenham altura aproximada de  $H \geq l/10$ .

Note que esta relação ( $H \geq l/10$ ) é a recomendação prática da estática que, comumente se utiliza para a definição inicial da altura da seção transversal de vigas. No entanto, essa relação pode ser diferente para a resposta estática, caso sejam adotados outros critérios para o cálculo da flecha final, e/ou outro valor para a contraflecha da laje L2, ou ainda, caso seja considerada a fissuração.

Tabela 18 – Resumo Tabuleiro II: Limite Estático e Dinâmico

Limite	Destinação (uso) do Tabuleiro II	$h = 12$	$h = 14$	$h = 15$
Estático $\delta$	Escritório ( $\delta \leq 2,80$ cm)	Não há	$H \geq 80$	$H \geq 70$
	Sala de Dança ( $\delta - cf \leq 2,80$ cm)	Não há	$H > 80$	$H \geq 70$
Dinâmico $f_{01}$	Escritório $f_{01} \geq 4,80$ Hz	$H \geq 30$	$H \geq 30$	$H \geq 30$
	Sala de Dança $f_{01} \geq 8,40$ Hz	Não há	$H \geq 80$	$H \geq 70$

Para a utilização do tabuleiro como “Escritório”, fica evidente que a limitação da altura das vigas V2 e V5 é dada pelo limite estático. Visto que o limite dinâmico é atendido para todos os valores de  $H$  analisados.

#### 4.2.4 Configuração geométrica mais econômica

Para a escolha da configuração de seção transversal de vigas e lajes, para uso como “Escritório”, que resulte em um provável dimensionamento mais econômico, e que respeite os limites normativos referentes ao limite estático (flechas) e dinâmico (frequência de vibração), são feitas as seguintes restrições:

1° - Atender ao limite de flecha excessiva;

2° - Ter frequência de vibração superior ao mínimo estipulado na Tabela 6, para utilização como “Escritório”.

Dessa forma, as seções que obedecem aos critérios acima são (Tabela 18):

$$h = 14 \text{ cm; V2 e V5 com } H \geq 80 \text{ cm}^*$$

$$h = 15 \text{ cm; V2 e V5 com } H \geq 70 \text{ cm}^*$$

\* As demais vigas (V1, V3, V4, e V6) possuem seção transversal de 20x70 cm.

Como apresentado na Tabela 18, para a espessura  $h = 12 \text{ cm}$  das lajes, o limite dinâmico é atendido, mas o limite estático não é respeitado. Portanto, não foram realizadas análises de custos referentes à espessura de lajes igual a  $h = 12 \text{ cm}$ .

Para a composição dos custos totais, se considera apenas o custo relativo a aço e concreto de todas as vigas e lajes do Tabuleiro II. Os quantitativos de aço e concreto, de cada configuração geométrica das seções transversais, são obtidos com o *software* Eberick V6. O qual utiliza o método de AG, e a rigidez à torção das barras da grelha foi configurada para resultar em  $J = 2I$ , com espaçamento da malha de  $25 \times 25 \text{ cm}$ , como foi utilizado para a validação relatada no item 4.2.1, pág. 129 (ver também o Apêndice A).

No cálculo dos quantitativos de aço, se consideram todas as armaduras da viga, ou seja, de tração, compressão, cisalhamento, armadura de pele e armadura construtiva. A armadura de cisalhamento é calculada com uso do Modelo II (inclinação das bielas de concreto igual a  $\theta = 45^\circ$ ), que utiliza as prescrições do item 17.4.2.3 da NBR 6118:2007, e é constante em todo o vão (simplificação). Para as lajes, não é verificado o cisalhamento. Em todas as vigas é adotada a armadura de pele, seguindo as recomendações do item 17.3.5.2.3 da NBR 6118:2007.

Como foi realizado para o Tabuleiro I, este item utiliza  $\psi_{c/s}$ , equação (4.87). Assim, o custo final é relacionado a vários valores de  $\psi_{c/s}$ , e para se ter um valor numérico de referência é atribuído ao custo do aço um valor unitário  $\psi_s = 1$ , e, então, o custo do concreto será  $\psi_c = \psi_{c/s}$ . O valor da soma dos custos de concreto e aço não representa o custo total da estrutura, mas sim, uma aproximação, e por isso, é chamado de índice de custo total  $\psi_t$  (equação 4.88).

A variação dos quantitativos de aço e concreto é indicada no Gráfico 60. Verifica-se que com o aumento de  $H = 30$  até  $H = 50 \text{ cm}$  ocorre uma redução do peso de aço, e a partir de  $H > 50 \text{ cm}$  há o aumento do consumo. Os valores de  $\psi_{c/s}$  adotados para as análises são apresentados no Gráfico 61. No qual, são apresentados os resultados referentes ao custo total de aço e concreto, para as lajes e vigas.

Da análise dos gráficos, pode-se ver que a provável configuração de maior economia será com espessura das lajes de  $h = 14 \text{ cm}$  e vigas V2 e V5 com  $H = 50 \text{ cm}$  (as demais vigas possuem seção transversal de  $20 \times 70 \text{ cm}$ ), independente do valor de  $\psi_{c/s}$ .

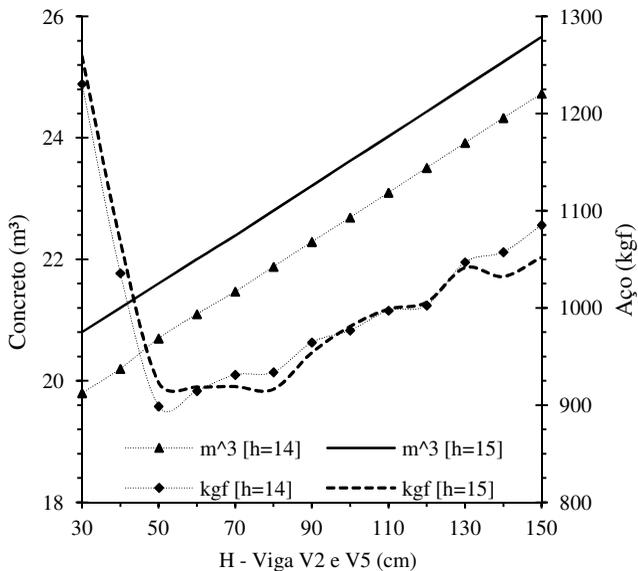


Gráfico 60 – Quantitativos de Aço e Concreto, Tabuleiro II

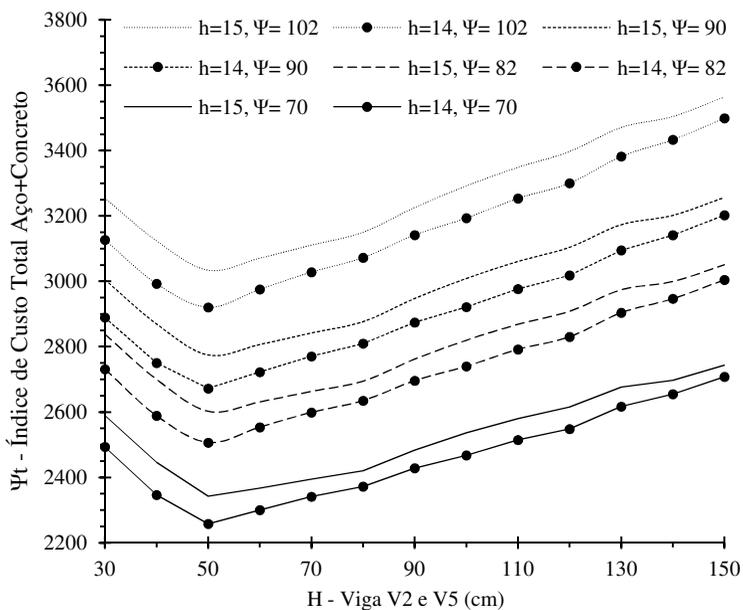


Gráfico 61 – Índice de Custo Total para o Tabuleiro II

Porém, esta seção de 20x50 cm não atende ao limite estático e dinâmico (Tabela 18). Dessa forma, a seção que atende aos limites e resulta no menor custo relativo  $\psi_t$ , é a seção de 20x80 cm (V2 e V5), com laje de 14 cm. Para a  $h = 15$ , o valor de  $H = 70$  cm é a solução que atende aos limites com a maior economia possível. Em vista das análises estáticas, dinâmicas e de quantitativos e custos, se verifica que, a uma espessura de  $h = 14$  ou  $h = 15$  cm, se conduz a bons resultados, desde que a altura das vigas fique perto de uma relação,

$$H \geq \frac{l_{v\tilde{a}o}}{10} \text{ cm.}$$

Com esses critérios, se garante um comportamento adequado ao Tabuleiro II, com certa segurança em relação ao limite de deformação excessiva e à limitação de frequência mínima. Um cálculo mais rigoroso pode ser realizado com a consideração da excentricidade entre laje e viga, ou com outras técnicas, como utilizar a seção T das vigas V2 e V5, e do comportamento não linear dos materiais. Ou ainda simplificada, pode-se considerar a redução de rigidez à flexão das vigas devido à fissuração (vigas no estádio II). Entretanto, os resultados são uma excelente aproximação, tanto para a resposta estática quanto para a resposta dinâmica, em comportamento elástico-linear.

A Tabela 19 apresenta um resumo sobre este item, no qual o valor do índice de custo é tomado igual a  $\psi_{c/s} = 82$ .

Tabela 19 – Resumo da configuração econômica: Tabuleiro II

Área do Tabuleiro:		100,00 m <sup>2</sup>
Configuração Econômica	Laje: $h = 14$ cm	
	V1, V3, V4 e V6: $H = 70$ cm V2 e V5: $H = 80$ cm	
Quantidades:	Volume de concreto:	21,88 m <sup>3</sup>
	Peso de aço:	934,00 kgf
Índices:	Aço/Concreto:	42,68 kgf/m <sup>3</sup>
	Aço/Área:	9,34 kgf/m <sup>2</sup>
	Concreto/Área:	0,22 m <sup>3</sup> /m <sup>2</sup>

### 4.2.5 Influência da Excentricidade

O efeito da excentricidade existente entre o eixo longitudinal da viga e o plano médio da laje, "e", para o Tabuleiro II foi analisado de acordo com o item 3.9.2. Que consiste em variar a altura de todas as vigas do tabuleiro de  $H = 30$  a  $H = 150$  cm, para lajes com espessura de 12, 14 e 15 cm, e carregamento referente à utilização do tabuleiro como "Sala de Dança". Foi avaliada a variação da flecha da laje L2 e alteração nos resultados de frequência de vibração.

A excentricidade entre laje e viga é considerada de forma simplificada, com uso da equação (2.63), a flexibilidade das vigas também foi considerada. Os resultados foram obtidos pelo *software* SAP2000, que utiliza o MEF.

O índice adimensional de flexibilidade entre laje L2 e vigas,  $I_{L2 \div V}$  (Gráfico 62), foi calculado de acordo com a equação (4.86), na qual  $I_v$  é o momento de inércia equivalente das vigas ( $I_{33}$ ), calculado pela equação (2.63).

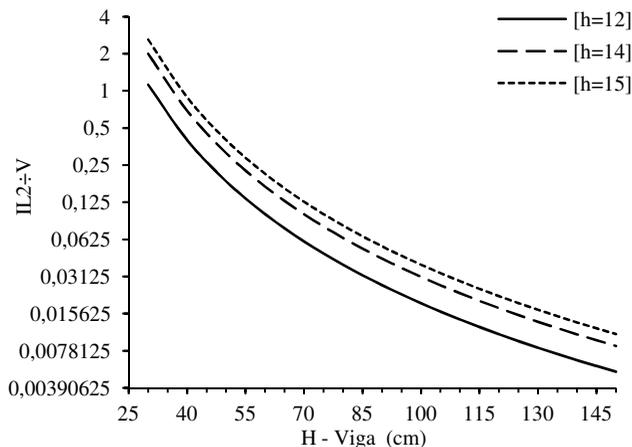


Gráfico 62 – Índice de Flexibilidade L2 ÷ V para "e"

A variação do momento de inércia das vigas é indicada no Gráfico 63, em que "[h=12]", "[h=14]" e "[h=15]" referem-se à espessura da laje. Quanto menor a espessura da laje, maior será o valor da excentricidade "e", porém, os valores de inércia não apresentam grande diferença entre as espessuras de lajes. Os eixos verticais dos gráficos citados anteriormente estão em escala logarítmica base 2.

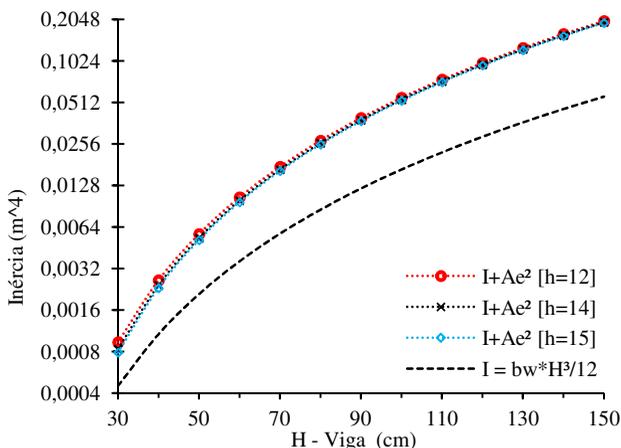


Gráfico 63 – Parcelas do momento de inércia

A variação da flecha final máxima de L2, menos uma contraflecha de 1 cm, é evidenciada no Gráfico 64 ( $\delta - cf$ ), e é calculada pela equação 4.85, com coeficiente de fluência do concreto igual a  $\varphi = 2,00$ . A flecha limite dada por  $l/250 = 2,80$  cm, para L2, também é exibida no gráfico.

A variação da frequência natural de vibração, não amortecida, dos modos 1, 2 e 3 é apresentada no Gráfico 65, Gráfico 66 e Gráfico 67, respectivamente. A recomendação normativa de frequência mínima de vibração para o 1º modo pode ser vista no Gráfico 65, que para destinação do tabuleiro como “Sala de Dança” deve ser  $f_{01} > 8,40$  Hz.

Ambos os resultados, flechas e frequências, apresentam variação não linear devido à alteração da rigidez do tabuleiro. Como já evidenciado nas outras análises, quanto mais rígido for o tabuleiro, menores serão as flechas de lajes e vigas, e maiores as frequências de vibração da estrutura.

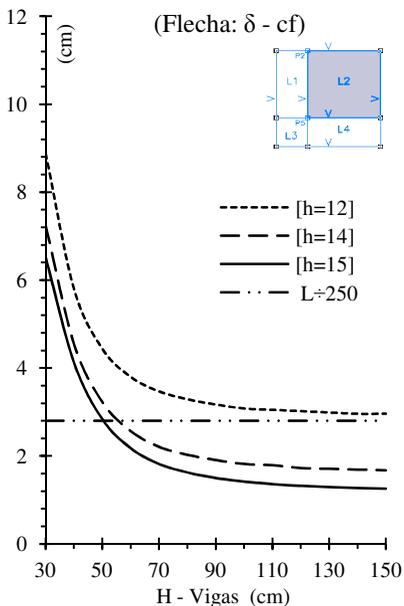


Gráfico 64 – Flecha - Cf [e]

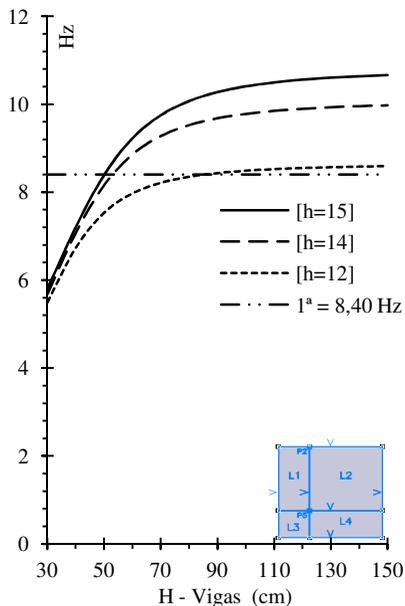


Gráfico 65 – Freq. 1º modo [e]

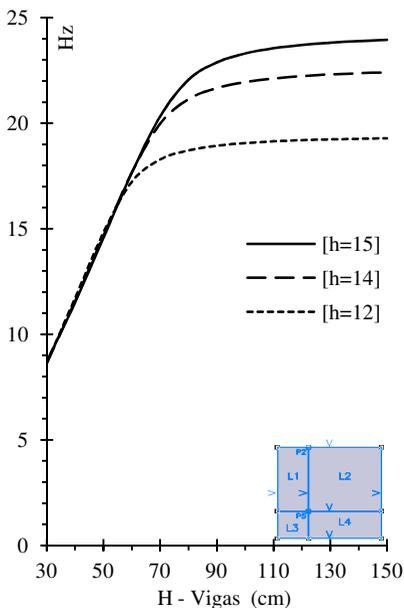


Gráfico 66 – Freq. 2º modo [e]

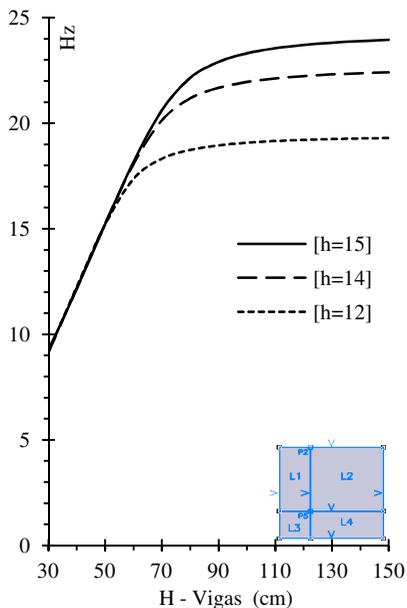
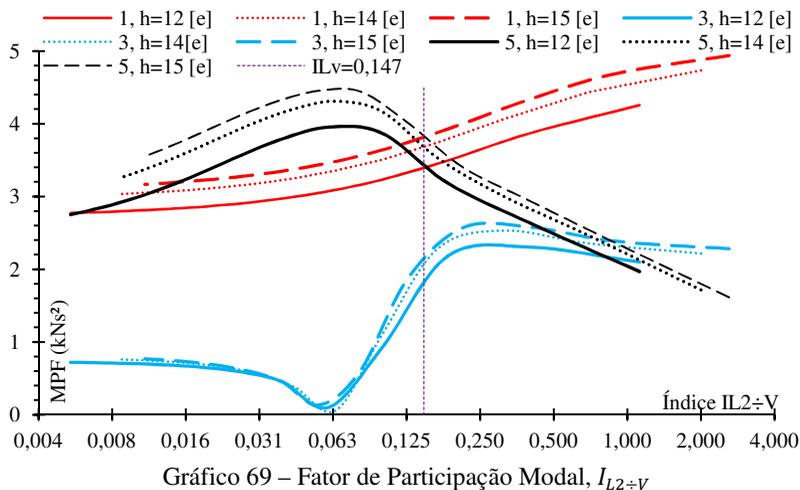
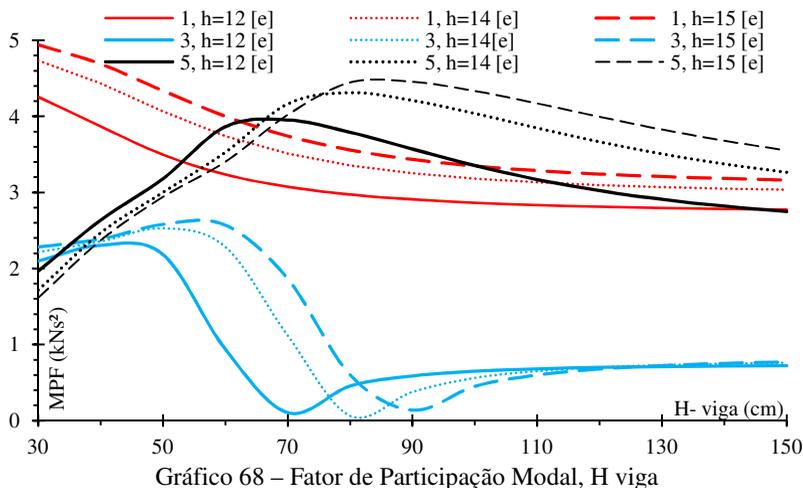


Gráfico 67 – Freq. 3º modo [e]

Nas análises anteriores foi verificado que a variação da rigidez do tabuleiro altera os valores do fator de participação modal (FPM). Essa modificação dos valores também foi verificada quando se considera a excentricidade, como pode ser visto no Gráfico 68 e Gráfico 69. Ambos os gráficos não consideram o sinal do FPM, já que este depende da parametrização do modo de vibração, e não tem significado prático.



Veja que o Gráfico 68 apresenta a variação do FPM em função da altura das vigas, e o Gráfico 69 em função do índice adimensional  $I_{L2+V}$ .

Mestrando: Jeferson Rafael Bueno

Orientador: Daniel Domingues Loriggio

A segunda opção (Gráfico 69) mostra-se mais atrativa, pois, fica claro que a partir do índice  $I_{L2÷V} < 0,147$  será o 5º modo que mais irá mobilizar massa segundo a direção vertical, e para  $I_{L2÷V} > 0,147$  será o primeiro modo. O terceiro modo pouco mobiliza massa segundo a direção vertical, e o segundo e quarto modos estão relacionados a movimentos no plano do tabuleiro.

O comparativo dos resultados de flechas e frequências de vibração, para a consideração da excentricidade ( $e$ ) ou não consideração é realizada resumidamente na Tabela 20. Nesta, são apresentadas apenas as seções de vigas e lajes, que a partir destas, são atendidos os limite referentes à flecha máxima (Gráfico 64), e a frequência de vibração mínima (Gráfico 65).

A Tabela 20 utiliza parte dos dados da Tabela 18, que para a qual apenas as vigas V2 e V5 possuem seção variável, as demais (V1, V3, V4 e V6) possuem seção constante de  $20 \times 70$  cm.

A análise que considera o efeito da excentricidade entre lajes e vigas ( $e$ ) está referenciada ao método utilizado para cálculo do momento de inércia das vigas. Portanto, a não consideração da excentricidade corresponde a:

$$I = b_w H^3 / 12.$$

E, a consideração da excentricidade corresponde (equação 2.63):

$$I + Ae^2.$$

Como as análises foram realizadas com a variação de 10 cm da altura das vigas, pode haver valores menores de  $H$  que atenderam aos limites citados acima, seguindo os critérios estabelecidos. Assim, os resultados representam uma indicação de quais são os valores mínimos da altura  $H$ , que as vigas do tabuleiro podem assumir para destinação como “Sala de Dança”.

Tabela 20 – Seções mínimas considerando a excentricidade.

Limite	Inércia das vigas	$h = 12$	$h = 14$	$h = 15$
Flecha ( $\delta - cf$ ) $\leq 2,80$ cm	$I = b_w H^3 / 12$	Não há	$H > 80$	$H \geq 70$
	$I + Ae^2$	Não há	$H \geq 60$	$H > 50$
Frequência $f_{01} \geq 8,40$ Hz	$I = b_w H^3 / 12$	Não há	$H \geq 80$	$H \geq 70$
	$I + Ae^2$	$H \geq 90$	$H \geq 60$	$H > 50$

Da análise acima, verifica-se que a consideração da excentricidade, entre lajes e vigas, possibilita a redução das dimensões

dos elementos, com consequentemente redução de custo de concreto. Observa-se que, os limites relacionados a seções de laje e vigas para o atendimento de flechas e frequência, possuem as mesmas seções com a consideração da excentricidade, para espessura de laje igual a 14 e 15 cm. Ou seja, apenas são atendidos os requisitos normativos, com a adoção de espessura das lajes de  $h = 14$  com  $H \geq 60$  cm e  $h = 15$  com vigas que tenham altura de  $H \geq 50$  cm.

#### 4.3 SÍNTESE DOS RESULTADOS EM RELAÇÃO AOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS

O trabalho de pesquisa realizado, ao longo desta Dissertação, permitiu alcançar o objetivo geral e os objetivos específicos inicialmente propostos. O objetivo geral, que é “*Analisar a influência da flexibilidade das vigas e lajes maciças, no projeto de tabuleiros de concreto armado*”, foi atingido satisfatoriamente por meio dos objetivos específicos.

Na Tabela 21 são informados os gráficos, figuras e tabelas que exprimem, explicam e/ou verificam os objetivos específicos desta pesquisa.

Tabela 21 – Síntese dos Resultados com os Objetivos Específicos

<b>Objetivo Específico</b> (item 1.2.2 , pág.27)	<b>Elementos de referência</b> (comprovação de atendimento)
Averiguar o comportamento do conjunto laje/viga em tabuleiros de edifícios de concreto armado em comportamento elástico-linear.	Verificado ao longo do subcapítulo 4.1(Tabuleiro I) e 4.2 (Tabuleiro II).
Analisar o efeito da continuidade dos esforços de lajes contíguas apoiadas sobre vigas deformáveis.	Verificado em: - Tabuleiro I: Gráfico 13, Gráfico 14 e Figura 18; - Tabuleiro II: Gráfico 41 a Gráfico 43, Gráfico 46 e Figura 21.
Realizar o estudo comparativo entre resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos, Analogia de Grelha e processos tradicionais simplificados (tabelas de lajes), considerando a deformabilidade das vigas de apoio e a excentricidade entre laje e viga.	Verificado em: - Tabuleiro I: Gráfico 12, Apêndice A; - Tabuleiro II: Gráfico 35, Gráfico 36, Gráfico 45 a Gráfico 47 e Gráfico 50;
Determinar até que ponto da relação de flexibilidade laje/viga é lícito calcular painéis de lajes, com o uso de métodos tradicionais simplificados (tabelas de lajes).	Verificado em: - Tabuleiro I: Gráfico 4, Gráfico 9, Gráfico 12 e Gráfico 13; - Tabuleiro II: Gráfico 35 e Gráfico 50.
Verificar a alteração no detalhamento das armaduras de lajes, devido à relação entre rigidez da laje com a rigidez das vigas de apoio.	Devido à alteração dos esforços de flexão, verifica-se que a distribuição das armaduras é alterada devido à variação de rigidez entre laje e vigas.
Determinar a influência da flexibilidade das vigas de apoio na resposta dinâmica (frequências e modos de vibração) de painéis de lajes.	Verificado em: - Tabuleiro I: Gráfico 18, Gráfico 19, Gráfico 20 e Figura 19; - Tabuleiro II: Gráfico 52, Gráfico 53, Gráfico 55 e Figura 22;
Comparar os resultados da análise dinâmica, considerando a flexibilidade das vigas de apoio e excentricidade entre laje e viga, com os limites propostos NBR 6118:2007, sob o ponto de vista do conforto humano.	Verificado em: - Tabuleiro I: Gráfico 21, Gráfico 29, Gráfico 30 e Gráfico 32; - Tabuleiro II: Gráfico 69, Gráfico 56 a Gráfico 57 e Tabela 20;
Recomendar critérios para aplicação em projetos de tabuleiros de concreto armado, formados por lajes e vigas flexíveis.	Esse objetivo é atendido no item 5.3, página 172.



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Neste capítulo constam as considerações finais e conclusões mais importantes sobre a pesquisa realizada. Para melhor compreensão do leitor esta seção é dividida em quatro partes.

### 5.1 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES SOBRE FLEXIBILIDADE DE VIGAS DE APOIO

Por meio da pesquisa bibliográfica e dos resultados dos modelos numéricos analisados, tem-se que a rigidez das vigas de apoio de lajes maciças tem fundamental importância e contribuição na rigidez do tabuleiro. As análises conseguiram demonstrar que a alteração da rigidez do tabuleiro modifica a resposta estática e dinâmica, esta última em vibração livre não amortecida, e como se dá esta modificação.

Essa alteração era evidente, pois, como se verifica nas equações (2.57) e (2.62), referentes à solução do problema estático e dinâmico respectivamente, estas são altamente dependentes da rigidez dos elementos estruturais. Mas, o que se precisava saber, era como se dava e/ou acontecia esta modificação do comportamento do tabuleiro, e o quanto seria significativa.

Os resultados do Tabuleiro I e Tabuleiro II corroboram que o comportamento da estrutura é dependente da flexibilidade entre laje e viga. Foi constatado que esforços e deslocamentos apresentam grande variação devido à alteração de relação de rigidez entre laje e viga de apoio.

Verifica-se que, para lajes maciças com vigas de bordos flexíveis, o maior momento fletor pode não ser na direção do menor vão. A direção do maior momento fletor, como verificado, depende da relação entre rigidez da laje e viga, assim, pode ser tanto na direção do menor vão como do maior. Esse comportamento está relacionado, também, com a variação do momento fletor negativo.

Ficou evidenciado, para os dois tabuleiros estudados, que os esforços solicitantes, oriundos da aplicação das ações, são distribuídos de acordo com a rigidez relativa entre os elementos que compõem a estrutura, no caso lajes e vigas. O esforço sempre tenderá a concentrar-se nas regiões que possuem maior rigidez.

Pelos resultados foi demonstrado que ao utilizar as tradicionais tabelas de cálculo de lajes, para a determinação dos esforços e deslocamentos, deve-se garantir que as vigas de apoio tenham rigidez à flexão superior à da laje. Caso não se garanta essa rigidez, para os

Mestrando: Jeferson Rafael Bueno

Orientador: Daniel Domingues Loriggio

tabuleiros estudados, foi apresentada qual a relação entre os valores obtidos entre o uso de tabelas e com a utilização do MEF, evidenciando a diferença devido a não consideração do comportamento flexível das vigas de apoio.

A consequência direta desta verificação se reflete no cálculo das armaduras das lajes. Por exemplo, para uma laje com relação entre vãos de  $l_y/l_x > 2$ , de acordo com o tradicional método de cálculo de lajes com uso de tabelas, a maior armadura seria a calculada para o momento, segundo a direção do menor vão, e na outra direção usualmente se adotaria uma armadura de distribuição. Entretanto, foi verificado que a flexão das vigas de apoio pode impor grande curvatura às lajes, e assim, os resultados podem ser totalmente diferentes dos encontrados pelo uso de tabelas de lajes. Com momentos positivos maiores segundo a direção do maior vão, e não na direção do menor vão.

Corroborar-se que o momento fletor negativo das lajes não é uniforme ao longo do bordo de continuidade entre lajes. Assim, ao utilizar o valor máximo deste esforço, para todo o bordo, pode-se obter um dimensionamento seguro, porém pode não ser uma solução econômica. Uma solução que pode atender aos estados limites últimos e de serviço, com uma considerável economia, consiste em utilizar faixas de momentos. Pois, cada trecho do bordo de continuidade pode ser dotado de armadura conforme a real necessidade. A simplificação de utilizar um momento fletor médio deve ser verificada para cada caso de cálculo.

O índice adimensional  $I_{LV}$ , que relaciona a flexibilidade entre laje/viga, mostra-se eficiente para representação dos resultados, tanto da resposta estática quanto da resposta dinâmica. Em relação aos índices adimensionais ( $I_{LV}$  e índices de momentos fletores) e comportamento dos tabuleiros analisados, se têm as seguintes verificações:

- A escolha de índices adimensionais para a representação dos momentos fletores revela-se eficiente, pois, estes resultados podem ser exibidos sem necessidade de apresentar explicitamente os valores de espessura de laje e altura de vigas, dos quais foram realizadas as análises e obtidos os valores dos esforços;

- A utilização dos índices adimensionais de momentos fletores é mais atrativa, principalmente, quando o tabuleiro for simétrico. Mas, podem ser utilizados quando o tabuleiro não apresentar simetria;

- A exibição dos resultados da resposta dinâmica através do índice  $I_{LV}$  mostra-se eficiente. Visto que, para ambos os tabuleiros analisados, pode-se visualizar a variação do fator de participação modal

e verificar, para cada relação de  $I_{LV}$ , qual é o modo de vibração que mais está mobilizando massa para os deslocamentos verticais das lajes.

Para as frequências de vibração, verifica-se que para o Tabuleiro I, o uso de  $I_{LV}$  possibilita a identificação de patamares de valores das frequências de vibração. Ou seja, a partir de quais relações entre rigidez de laje e viga, as frequências de vibração de certo modo passam a ser constantes (Gráfico 18 e Gráfico 20). Esse resultado, de comportamento dinâmico do tabuleiro, aponta que, para determinadas relações de  $I_{LV}$  não será o primeiro modo de vibração que mais mobilizará massa segundo a direção vertical, e sim outro modo.

No Gráfico 12, Tabuleiro I, apresentou-se as relações entre momentos fletores obtidos por MEF (valor máximo na laje) e por tabelas de Czerny (valores no centro da laje). Esses resultados foram utilizados desta forma, pois, ao dimensionar a laje, o engenheiro teria estes valores para fazê-lo. Dessa forma, para o Tabuleiro I foi verificado que para se obter uma relação em torno de  $\pm 20\%$ , entre resultados obtidos por MEF e Czerny (nos termos acima) deve-se ter:

- $I_{LV} \leq 0,172$  para  $M_x$ ;
- $I_{LV} \leq 0,014$  para  $M_y$ ;
- $I_{LV} \leq 0,055$  para  $M_{xe}$ .

A relação  $H \geq l/10$  (em que  $l$  é o vão da viga) para os Tabuleiros I (com  $h = 12$  e  $15$  cm) e II (com  $h = 14$  e  $15$  cm) mostrou-se como um bom ponto de partida para a definição inicial da altura das vigas. Já que em muitos casos resultou em seções eficientes, para o atendimento de limites máximos de deslocamentos e frequência mínima de vibração. Além de proceder em configurações geométricas, de lajes e vigas, que possibilitam um dimensionamento mais econômico (ver Gráfico 34, Tabela 18 e Tabela 19). Com a consideração da excentricidade, entre o plano médio da laje e eixo longitudinal das vigas, pode-se reduzir ainda mais as seções das vigas, como foi evidenciado para os dois tabuleiros (ver Tabela 20 - Tabuleiro II para destinação como Sala de dança).

Para a consideração da excentricidade foram apresentados dois artifícios. Um com uso da equação (2.63), referente ao teorema dos eixos paralelos, e outro com a equação (2.66), que leva em conta a influência do coeficiente de Poisson na mesa de compressão da seção T, conforme propõem Kennedy e Bali (1979). Em ambas, há ganho de rigidez à flexão sem adição de massa ao sistema. A modelagem da excentricidade

com uso da equação (2.63), alternativa simplificada, resulta em uma estrutura mais rígida em comparação com uso da equação (2.66). O que procede em menores momentos fletores positivos e flechas, porém maiores momentos fletores negativos, e também, maiores valores para as frequências de vibração.

Em relação ao atendimento dos limites normativos, referentes a deslocamento máximo e frequência fundamental de vibração, foram apresentadas as relações entre esses resultados. Para as estruturas analisadas, verificou-se que para o uso do tabuleiro como “escritório” o limite estático (referente aos deslocamentos máximos permitidos) é atingido antes que o limite dinâmico (referente aos valores mínimos de  $f_{01}$ ). Para a destinação do tabuleiro como “sala de dança”, verifica-se que quando há limitação, a redução da altura das vigas é restringida primeiro devido ao limite dinâmico (frequência fundamental de vibração), seguida de perto pelo limite estático (flechas). Salienta-se que essas verificações são referentes aos tabuleiros utilizados e aos critérios estabelecidos para a obtenção dos resultados, os quais podem ser consultados no capítulo 3, página 73.

Em resumo, pode-se dizer que o aumento da rigidez das vigas de apoio ocasiona:

Sobre a resposta estática:

- diminuição dos deslocamentos de lajes e vigas;
- redução dos momentos fletores positivos de lajes;
- aumento dos momentos fletores negativos das lajes.

Sobre a resposta dinâmica:

- aumento das frequências de vibração;
- alteração dos modos de vibração, referente ao valor do fator de participação modal (FPM).

Ressalta-se de que existem outros resultados que não estão apresentados neste item. Estes são apresentados ao longo dos itens 4.1 e 4.2. Outras informações e resultados da pesquisa podem ser consultados nos Apêndices.

## 5.2 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES SOBRE MODELAGEM DE TABULEIROS

Quando se utiliza as tabelas tradicionais de cálculo de lajes está se considerando que as lajes tenham os bordos indeformáveis e/ou indeslocáveis. Como foi verificado, para ambos os tabuleiros, essa condição de indeformabilidade, dos bordos de lajes, só é atingida com a adoção de seções transversais que garantam uma grande rigidez à flexão

Mestrando: Jeferson Rafael Bueno

Orientador: Daniel Domingues Loriggio

para as vigas de apoio. Para os modelos estudados a relação  $H \geq l/10$  mostrou-se com um bom parâmetro inicial, para a definição de seções de vigas, pois, a análise resultante atende aos estados limites de serviço (flechas e frequência fundamental de vibração), e possibilita um dimensionamento econômico.

Dessa forma, a diferença, encontrada entre o cálculo com uso de tabelas e o cálculo utilizando o MEF, será menor quanto maior for a rigidez da viga em relação à laje. Para modelagens numéricas, conclui-se que, quando  $I_{LV} \ll 1$  (índice laje/viga muito menor que um), a relação entre os resultados obtidos por MEF e tabelas para a resposta estática (referente a momentos fletores e deslocamentos) é pequena.

O método de Analogia de Grelha (AG) foi avaliado em comparação com o MEF. Das análises do Tabuleiro I, verifica-se que o método de AG é altamente dependente do espaçamento das barras (#) da grelha e do valor da constante de torção das mesmas ( $J$ ). Verifica-se que, para análises de diversas relações de  $I_{LV}$  para um tabuleiro, não há um valor de “ $J$ ” e “#” que leve a resultados próximos aos encontrados por MEF, para todas as relações de  $I_{LV}$ . Para o estudo do Tabuleiro II, com o MEF, foram realizadas algumas análises com diferentes malhas, no entanto, não foram encontradas diferenças significativas entre as mesmas (ver Gráfico 35).

Contudo, para o método de AG foi possível determinar que, para uma análise mais satisfatória dos casos estudados, a utilização de  $J = 2 * I$  e o espaçamento da malha de 25x25 cm resultam em um bom modelo numérico, para análise de lajes maciças apoiadas em vigas flexíveis.

A validação dos modelos numéricos foi de suma importância para a confiabilidade dos resultados, como pode ser visto nos itens 4.1.1 e 4.2.1. Neste trabalho, constata-se que a validação dos resultados de deslocamentos e momentos fletores pode ser realizada satisfatoriamente, por meio da modelagem das vigas de apoio com grandes seções transversais ou restringindo a translação no eixo  $z$  (direção dos deslocamentos verticais) nas ligações entre laje e viga. Estes procedimentos impedem que ocorra uma deformabilidade que influencie significativamente os resultados. Assim, a comparação dos resultados entre modelos numéricos e tabelas pode ser realizada, e então, determinar se as diferenças são pequenas e aceitáveis. O uso dessa metodologia deve resultar em pequenas diferenças, pelo menos para momentos fletores e/ou deslocamentos, e caso não ocorra, deve-se verificar se há erros no modelo numérico.

### 5.3 RECOMENDAÇÕES PARA APLICAÇÃO EM PROJETO

As recomendações deste tópico são aplicáveis a tabuleiros de concreto armado, formados por lajes maciças e vigas retangulares, com dimensões e carregamentos usuais com uma análise elástica-linear. As recomendações são as seguintes:

- Necessidade de emprego de um modelo numérico para análise, quando as vigas de apoio são flexíveis e/ou deslocáveis;

- Devido ao estudo dos diagramas de momentos fletores positivos e negativos das lajes, recomenda-se estudar a possibilidade de utilizar para o dimensionamento das armaduras a adoção de faixas de momentos, o que pode resultar em um dimensionamento e detalhamento econômicos. Esse procedimento torna-se viável quando implementado em programas de cálculo de estruturas de concreto armado;

- Recomenda-se a consideração da excentricidade entre laje e viga. Quanto ao procedimento que deve ser usado para tal, recomenda-se utilizar a inércia de seção T com a consideração do efeito do coeficiente de Poisson na mesa da seção (equação 2.66). Visto que o procedimento já tem comprovada eficiência e veracidade, enquanto o procedimento com uso da equação (2.63) ainda necessita de estudos;

- Para as lajes armadas em uma direção ( $l_y/l_x > 2$ ), no cálculo com tabelas, é recomendável estudar se há necessidade de utilizar armadura mínima na maior dimensão da laje. Essa recomendação é válida nos casos em que não se tem garantia de que as vigas de apoio tenham rigidez à flexão adequada, para que se possa considerar as bordas das lajes como indeslocáveis/indeformáveis;

- Importância da análise dinâmica, mesmo que seja realizada em vibração livre sem considerar o amortecimento. Pois é necessário saber qual é a frequência fundamental de vibração do tabuleiro, e, assim, verificar se este valor atende ao mínimo exigido para a utilização/destinação do tabuleiro.

Algumas verificações ao longo desta pesquisa, também, podem ser vistas como recomendações para aplicação em projeto de tabuleiros de concreto armado. Como por exemplo, a modelagem de tabuleiros com o SAP2000 e Eberick V6, a metodologia para análise, lançamento e verificação dos resultados do Tabuleiro I e II.

#### 5.4 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A seguir são listadas algumas recomendações para trabalhos futuros, para complementar o estudo sobre a influência da flexibilidade de vigas de apoio de lajes maciças, na determinação da resposta estática e dinâmica.

- Estudo do comportamento estático e dinâmico dos tabuleiros já estudados, com diferentes relações entre vãos;

- Estudo do comportamento do tabuleiro submetido a cargas dinâmicas, considerando o amortecimento;

- Estudo dos tabuleiros I e II considerando uma análise não linear, e assim, comparar os resultados com os obtidos pela análise elástica-linear;

- Estudo de modelagem da excentricidade entre laje e viga, com utilização de diferentes métodos, com a consideração da fissuração;

- Realizar estudo semelhante ao desta pesquisa, com estruturas mistas de aço e concreto (lajes maciças e vigas metálicas), lajes nervuradas e protendidas;

- Estudo sobre otimização das seções transversais de lajes e vigas, utilizando parte dos resultados desta pesquisa.



## REFERÊNCIAS

- ANTUNES, H. M. C. C. e MAGRI, J. A. Sistema para cálculo de placas e chapas utilizando microcomputadores. **MECÂNICA COMPUTACIONAL - COLECCION INFORMATICA Y COMPUTACION**, v. 1, p. 342–356, 1985.
- ARAÚJO, J. M. de. Avaliação dos procedimentos de projeto das lajes nervuradas de concreto armado. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, v. 3, n. 3, p. 31–42, 2003.
- ARAÚJO, J. M. de. Considerações sobre a rigidez à torção das lajes nervuradas de concreto armado. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, v. 5, n. 7, p. 1–8, 2005.
- ARAÚJO, J. M. de. Avaliação dos métodos simplificados para cálculo de lajes maciças apoiadas em vigas flexíveis. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, v. 8, n. 12, p. 1–11, 2008.
- ARAÚJO, J. M. de. Método simplificado para cálculo de lajes maciças apoiadas em vigas flexíveis: validação por meio da análise não linear. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, v. 9, n. 14, p. 71–81, 2009.
- ARAÚJO, J. M. de. **Curso de Concreto Armado**. 3. ed. Rio Grande: Dunas, 2010. v. 2p. 416.
- ARGYRIS, J. H. Energy Theorems and Structural Analysis: A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations. **Aircraft Engineering and Aerospace Technology**, v. 26, n. 10, p. 347–356, doi:10.1108/eb032482, 1954.
- ARORA, J. S. **Introduction to optimum design**. [S.l.: s.n.], 2004.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações.** Rio de Janeiro, 1980.

BANKI, A. L. **Análise de lajes: Modelos de análise de lajes de concreto armado.** Disponível em: <[www.altoqi.com.br](http://www.altoqi.com.br)>. Acesso em: 8 out. 2012.

BARBOSA, P. C. **Interação de paredes de alvenaria estrutural com vigas de concreto armado.** 110p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

BARES, R. **Tablas para el cálculo de placas y vigas pared.** Barcelona: Gustavo Gili, 1970.

BAUMANN, T. **Tragwirkung orthogonaler Bewehrungsnetze beliebiger Richtung in Flächentragwerken aus Stahlbeton.** Berlin: Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 1972. p. 61.

BECKER, E. B.; CAREY, G. F. e ODEN, J. T. **Finite Elements: An introduction.** 1. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1981.

CARVALHO, R. C. **Análise não-linear de pavimentos de edifícios de concreto através da Analogia de Grelha.** 218 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1994.

CARVALHO, R. C. e PINHEIRO, L. M. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: volume 2.** São Paulo: Pini, 2009.

CHAPRA, S. C. e CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia.** 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and applications to earthquake engineering.** 1. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1995.

CIFÚ, S. *et al.* **Recomendações e cuidados na modelagem e interpretação de resultados de estruturas analisadas a partir de modelos**

matemáticos com base no M.E.F. In: IV SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO. **Anais...** São Paulo: 2000.

CLOUGH, R. W. The finite element method in plane stress analysis. In: PROCEEDINGS OF THE 2ND CONFERENCE ON ELECTRONIC COMPUTATION OF AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. **Anais...** Pittsburgh: PA, 1960.

CLOUGH, R. W. e PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2003.

CLOUGH, R. W. e WILSON, E. L. Early finite element research at Berkeley. In: FIFTH U.S. NATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL MECHANICS. **Anais...** [S.l: s.n.], 1999.

COELHO, J. d'Araujo. **Modelagem de Lajes de Concreto Armado por Analogia de Grelha, Influência dos Parâmetros de Rigidez**. Disponível em: <[www.altoqi.com.br](http://www.altoqi.com.br)>. Acesso em: 25 jun. 2012a.

COELHO, J. d'Araujo. **Modelagem de Lajes de Concreto Armado por Analogia de Grelha - Influência da Flexibilidade dos Apoios**. Disponível em: <[www.altoqi.com.br](http://www.altoqi.com.br)>. Acesso em: 25 jun. 2012b.

COELHO, J. d'Araujo. **Os projetos elaborados com o Eberick são superdimensionados?** Disponível em: <<http://faq.altoqi.com.br/faq/content/265/647/pt-br/os-projetos-elaborados-com-o-eberick-são-superdimensionados.html>>. Acesso em: 2 ago. 2012.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S. e PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2001.

COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. **Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society**, v. 49, n. 1, p. 1–23, 1943.

CRANDALL, S. H. **Engineering analysis: a survey of numerical procedures**. New York-Toronto-London: McGraw-Hill, 1956.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CSI. **SAP2000 Basic Analysis Reference**. . Berkeley: Computers & Structures, Inc., 2009.

DORNELLES, F. L. e PEREIRA, J. da S. **Estudo sobre a análise de lajes em regime elástico**. 143 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

FILHO, D. B. F. e JÚNIOR, J. A. da S. Desvendando os mistérios do coeficiente de correlação de Pearson ( $r$ ). **Revista Política Hoje**, v. 18, n. 1, p. 115–146, 2009.

GALERKIN, B. G. Rods and Plates: Series in some problems of elastic equilibrium of rods and plates. **Vestnik Ingenerov Tech. (USSR)**, v. 1, p. 897–908, 1915.

GUPTA, K. K. e MEEK, J. L. A brief history of the beginning of the finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, n. November 1995, p. 3761–3774, 1996.

HAMBLY, E. **Bridge deck behaviour**. London: Chapman and Hall, 1976.

HAMEDANI, S. J.; KHEDMATI, M. R. e AZKAT, S. Vibration analysis of stiffened plates using finite element method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 9, n. 1, p. 1–20, 2012.

HATCH, M. R. **Vibration simulation using MATLAB and ANSYS**. New York: Chapman and Hall/CRC, 2001.

HENNRICHS, C. A. **Estudos sobre a Modelagem de Lajes Planas**. 201 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

HRENNIKOFF, A. Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method. **Applied Scientific Research**, v. A8, p. 169–175, 1941.

KALMANOK, A. S. **Manual para cálculo de placas**. Montevideo: Editora Inter Ciencia, 1961.

KENNEDY, J. B. e BALI, S. K. Rigidities of concrete waffle-type slab structures. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 6, n. 1, p. 65–74, doi:10.1139/l79-008, 1979.

KIENDL, J. *et al.* Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 49-52, p. 3902–3914, doi:10.1016/j.cma.2009.08.013, 2009.

KIENDL, J. *et al.* The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff – Love shell structures comprised of multiple patches. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 37-40, p. 2403–2416, doi:10.1016/j.cma.2010.03.029, 2010.

KIM, J.; DARGUSH, G. e JU, Y. Extended framework of Hamilton’s principle for continuum dynamics. **International Journal of Solids and Structures**, v.50, n.20-21, p.3418–3429, doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.06.015, 2013.

KIMURA, A. **Informática aplicada em estruturas de concreto armado: cálculos de edifícios com o uso de sistemas computacionais**. 1. ed. São Paulo: Pini, 2007.

KOCH, D. K. **Análise de lajes e estudo comparativo de soluções estruturais em concreto armado**. 129 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

KWON, Y. W. e BANG, H. **The Finite Element Method using MATLAB**. New York: The Mechanical Engineering Series, 1996.

LEITE, M. R. S. *et al.* Estudo do comportamento estático e dinâmico de lajes nervuradas de concreto armado. In: MECÂNICA COMPUTACIONAL VOL XXIX. **Anais...** Buenos Aires: [s.n.], 2010.

LEITE, M. R. S. **Modelagem do comportamento estrutural estático e dinâmico de lajes nervuradas de concreto armado.** 141 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

LIGHTFOOT, E. e SAWKO, F. Structural frame analysis by electronic computer: grid frameworks resolved by generalized slope deflection. **Engineering**, p. 18–20, 1959.

LIMA, S. de S. e SANTOS, S. H. de C. **Análise Dinâmica das Estruturas.** 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2008.

LIRA, S. A. **Análise de correlação abordagem teórica e de construção dos coeficientes com aplicações.** 196 p. Dissertação (mestrado). Setores de Ciências Exatas e de Tecnologia, UFPR - Curitiba. 2004.

LIRA, S. A. e NETO, A. C. Pontos de dicotomização para a obtenção do coeficiente de correlação tetracórico. **Revista Ciências Exatas e Naturais**, v. 7, n. 2, p. 195–208, 2005.

LOVE, a. E. H. The Small Free Vibrations and Deformation of a Thin Elastic Shell. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 179, p. 491–546, doi:10.1098/rsta.1888.0016, 1888.

LU, P.; LI, F. e SHAO, C. Analysis of a T-Frame Bridge. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2012, p. 1–14, doi:10.1155/2012/640854, 2012.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos.** 1. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2010.

MARTINS, B. L. C. *et al.* Evolução das modelagens estruturais, das ferramentas de dimensionamento e reflexos na economia, segurança e

durabilidade de estruturas de concreto de usinas hidrelétricas. In: INSTITUTO BRASILEIRO DO CONCRETO - 51º CONGRESSO BRASILEIRO. **Anais...** Curitiba: IBRACON, 2009.

MAZZILLI, A. R. P. **Influência da deformabilidade das vigas de apoio no cálculo de estruturas de edifícios**. 391 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) - Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1988.

MAZZILLI, A. R. P. **Influência da flexibilidade das vigas e das lajes nos esforços das estruturas de concreto armado**. 211 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

MCGUIERE, W.; GALLAGHER, R. H. e ZIEMIAN, R. D. **Matrix Structural Analysis**. 2. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1999.

MIGUEL, L. F. F.; LOPEZ, R. H. e MIGUEL, L. F. F. Multimodal size, shape, and topology optimisation of truss structures using the Firefly algorithm. **Advances in Engineering Software**, v. 56, p. 23–37, doi:10.1016/j.advengsoft.2012.11.006, 2013.

MOREIRA, D. F. **Análise Matricial das Estruturas**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1977.

PANDEY, A. K. e BISWAS, M. Experimental verification of flexibility difference method for locating damage in structures. **Journal of Sound and Vibration**, v. 184, n. 2, p. 311–328, doi:10.1006/jsvi.1995.0319, 1995.

PAPANIKOLAOU, V. K. e DOUDOUMIS, I. N. Elastic analysis and application tables of rectangular plates with unilateral contact support conditions. **Computers & Structures**, v. 79, n. 29-30, p. 2559–2578, doi:10.1016/S0045-7949(01)00144-4, 2001.

PAULA, W. C. De. **Comportamento estrutural de lajes nervuradas de concreto armado com base no emprego do programa ANSYS**.

189 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

PINHEIRO, L. M. **Análise elástica e plástica de lajes retangulares de edifícios**. 314 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

PINHEIRO, L. M. **Fundamentos do concreto e projeto de edifícios**. São Carlos: UFSCar, 2007a.

PINHEIRO, L. M. **Tabelas de lajes**. São Carlos: UFSCar, 2007b. p. 24

PUEL, A. **Modelagem de lajes planas simétricas e assimétricas em concreto armado - análise integrada laje x pilar**. 152 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.

REIS, E. M. Dos. **Análise de pavimentos de edifícios utilizando a analogia de grelha**. 139 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F. e LUCIO, P. B. **Metodologia de Pesquisa**. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

SCHULZ, M. **Verificação geral de peças de concreto armado baseada no modelo da chapa fissurada**. 405 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 1988.

SCHULZ, M. *et al.* Aspectos do dimensionamento de placas e cascas de concreto armado. In: 48<sup>o</sup> CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO. **Anais...** Rio de Janeiro: IBRACON, 2006.

SCHULZ, M. *et al.* Aspectos do dimensionamento de estruturas de barragens segundo o ACI e o CEB. In: 51<sup>o</sup> CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO. **Anais...** Curitiba: IBRACON, 2009.

SCHULZ, M. e D'AVILA, M. P. S. Analysis of Reinforced Concrete Shells with Transverse Shear Forces. **Journal of Structural Engineering**, v. 136, n. 7, p. 837–848, doi:10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000171, 2010.

SILVA, F. M. Da. **Estudo comparativo de painel de lajes em concreto armado**. 112 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

SILVA, M. A. Da. **Sobre a otimização de estruturas submetidas a carregamento dinâmico**. 145 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

SILVA, M. A. F. da; FILHO, J. R. de F. e CARVALHO, R. C. A utilização da analogia de grelha para análise de pavimentos de edifícios em concreto armado. In: V SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO. **Anais...** São Paulo: [s.n.], 2003.

SORIANO, H. L. **Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2009.

STRAMANDINOLI, J. S. B. **Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha**. 199 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGE, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

STRAMANDINOLI, J. S. B. e LORIGGIO, D. D. Estudo da rigidez à torção para a aplicação do processo de analogia de grelha em lajes maciças. In: V SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO. **Anais...** São Paulo: [s.n.], 2003.

TANGWONGCHAI, S.; ANWAR, N. e CHUCHEEPSAKUL, S. Flexural responses of concrete slab over flexible girders through FEA-based parametric evaluation. **KSCE Journal of Civil Engineering**, v. 15, n. 6, p. 1057–1065, doi:10.1007/s12205-011-1077-0, 2011.

TIMOSHENKO, S. P. e WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**. 2. ed. [S.l.]: Mcgraw-Hill College, 1959.

TURNER, M. J. *et al.* Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, p. 805–823 and 854, 1956.

VILLAÇA, S. F. e GARCIA, L. F. T. **Introdução à Teoria da Elasticidade**. 3. ed. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1998.

YOUNG, W. C. **Roark's Formulas for Stress and Strain**. 6. ed. New York: McGraw-Hill, 1989.

ZIENKIEWICZ, O. C. e CHEUNG, U. K. Finite elements in the solution of field problems. **The Engineer**, p. 507–510, 1965.

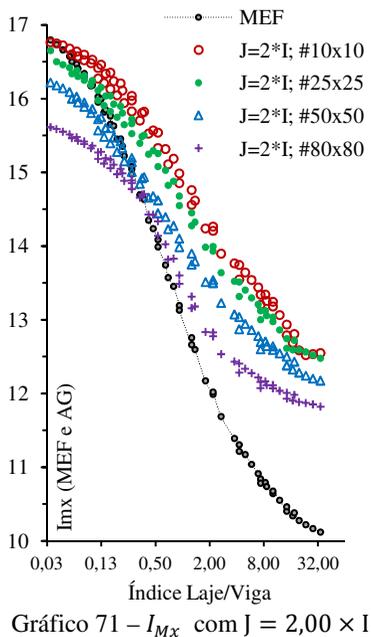
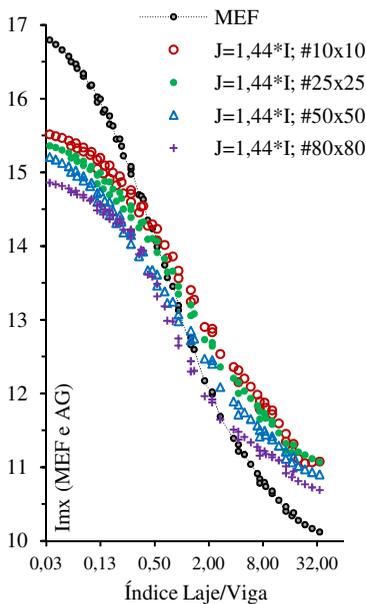
ZIENKIEWICZ, O. C. e TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method Vol 1: The Basis**. 5. ed. Woburn: Butterworth Heinemann, 2000.

## APÊNDICE A

### TABULEIRO I – Flexibilidade dos apoios: MEF e AG

Neste item apresentam-se os resultados obtidos pelo método de Analogia de Grelha (AG), com uso do *software* Eberick V6, para o Tabuleiro I. Apresenta-se também um comparativo entre MEF e AG, cujo resultado para os índices  $I_{Mx}$ ,  $I_{Mxe}$  e  $I_{My}$  é exibido em três etapas, da seguinte forma: primeiro MEF *versus* AG com  $J = 1,44 \times I$ , em seguida, MEF *versus* AG com  $J = 2 \times I$  e, por último, MEF *versus* AG com  $J = 2,40 \times I$ .

A análise do Gráfico 70 a Gráfico 75 evidencia que os resultados dos momentos fletores positivos da laje L1, obtidos por AG, são muito dependentes do valor adotado para a rigidez à torção das barras da grelha ( $J$ ) e do refinamento da malha. Variação maior é encontrada para os valores de  $I_{Mx}$  que, nesse caso, crescem com o aumento do índice  $I_{LV4}$ .



Para modelagens que se possa garantir um baixo valor de  $I_{LV4}$ , o valor de  $J = 2 \times I$  mostra ser a melhor opção, com malha 25x25 ou 50x50. Caso V4 seja muito flexível, que resulta em altos valores para  $I_{LV4}$ , a melhor opção é utilizar  $J = 1,44 \times I$ , em relação à malha, deve-se estudar o caso e escolher a que melhor se adapte ao índice  $I_{LV4}$ .

De acordo com o Gráfico 72, o uso de  $J = 2,40 \times I$  leva a bons resultados apenas quando V4 possui grande rigidez à flexão, em relação à L1, com malha 50x50. Nessa condição, para malha 10x10 e 25x25, esse valor de  $J$  resulta em valores de  $M_x$  menores que os obtidos com o MEF, já com malha 80x80, se obtêm maiores valores.

Para  $M_y$ , os resultados evidenciam que, quando V4 é muito flexível, a diferença entre MEF e AG é pequena e varia muito pouco devido ao valor de  $J$  adotado ou do espaçamento da malha. Quando V4 possui grande rigidez à flexão, as diferenças são maiores, e todas as configurações de modelagens com AG resultam em maiores valores de  $I_{M_y}$  que os obtidos pelo MEF. Quando  $I_{LV4} = 0,03$  (V4 muito rígida), e deseja-se obter melhores valores de  $M_y$ , recomenda-se o uso de  $J = 1,44 \times I$ , com malha 80x80.

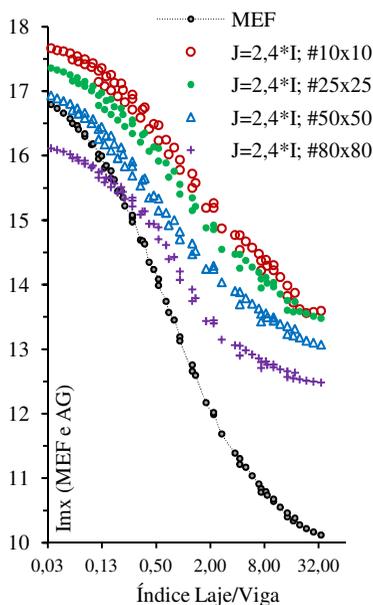


Gráfico 72 –  $I_{M_x}$  com  $J = 2,40 \times I$

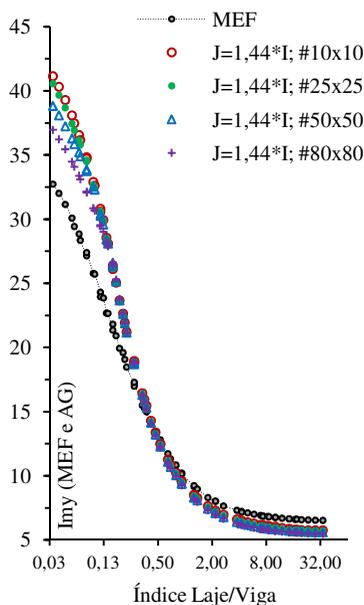


Gráfico 73 –  $I_{M_y}$  com  $J = 1,44 \times I$

Da análise dos momentos fletores positivos de L1, verifica-se que por AG não há um valor de  $J$  que possa representar ambos os momentos  $M_x$  e  $M_y$ , com valores próximos aos encontrados pelo MEF. O procedimento de adotar um valor de  $J$  para calcular  $M_x$  e outro para  $M_y$  não é prático e nem recomendável.

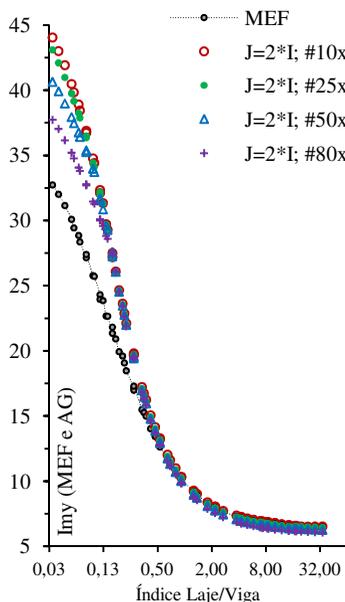


Gráfico 74 –  $I_{M_y}$  com  $J = 2,00 \times I$

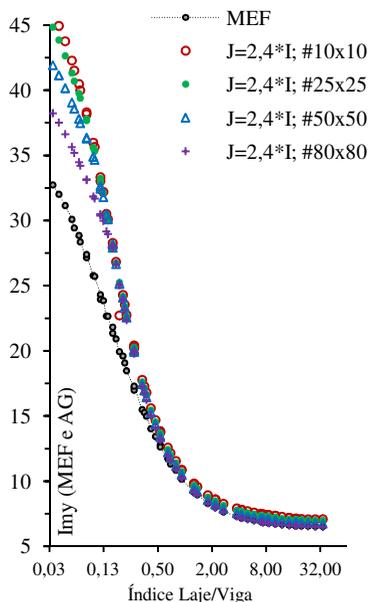


Gráfico 75 –  $I_{M_y}$  com  $J = 2,40 \times I$

O procedimento recomendável, então, para análise do Tabuleiro I com AG deve ser o de verificar qual a relação de rigidez entre L1 e V4, e assim determinar qual será a melhor configuração de modelagem a ser adotada na análise por esse método numérico.

Por exemplo, quando V4 tiver rigidez à flexão muito maior que L1 ( $I_{LV4} = 0,034$ ), a relação entre índices de momentos fletores positivos será  $I_{M_x} = 0,513I_{M_y}$  que significa  $M_x = 1,949M_y$  (MEF), como pode ser verificado no Gráfico 11. Assim, deve-se escolher um valor de  $J$  que represente melhor  $M_x$  do que  $M_y$ , no caso  $J = 2 \times I$  com malha 25x25.

O comparativo entre MEF e AG para o índice de momentos fletores negativos ( $I_{M_{xe}}$ ) é apresentado no Gráfico 76 para  $J = 1,44 \times I$ , Gráfico 77 para  $J = 2 \times I$ , e Gráfico 78 com  $J = 2,40 \times I$ . No Gráfico 79,

apresenta-se a variação de  $M_{xe}$  (kNm/m), para L1 e L2 com  $h = 12$  cm e valores em módulo.

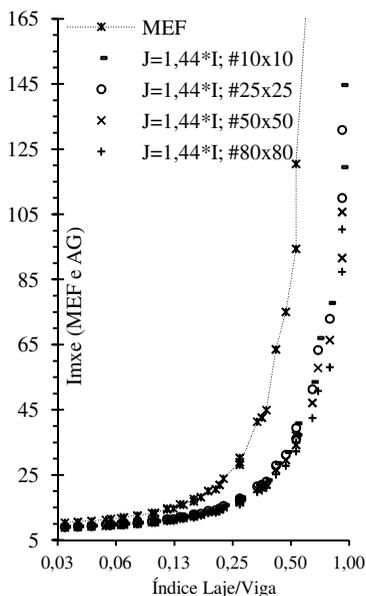


Gráfico 76 –  $I_{M_{xe}}$  com  $J = 1,44 \times I$

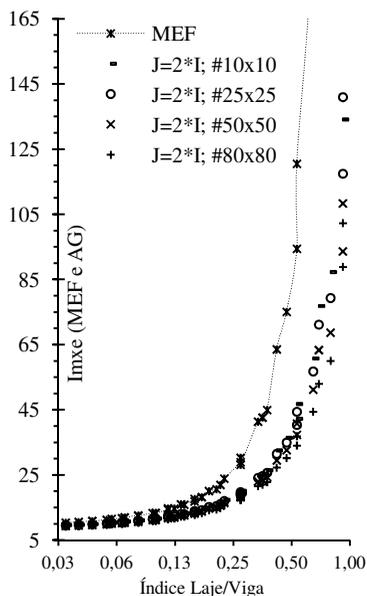
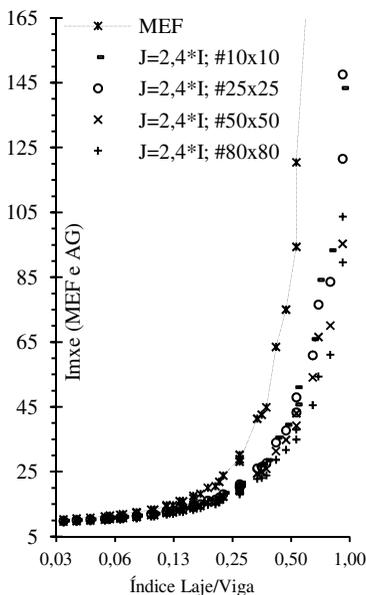
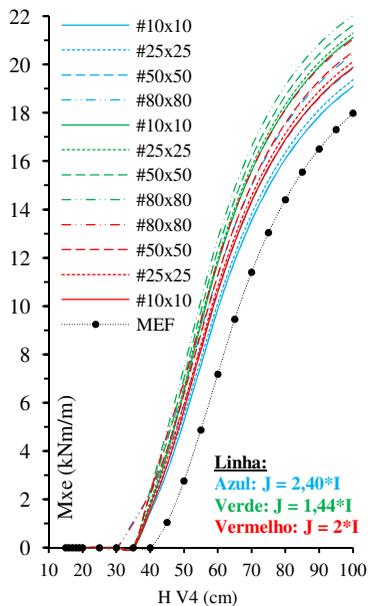


Gráfico 77 –  $I_{M_{xe}}$  com  $J = 2,00 \times I$

Ambos os modelos em AG conseguem representar a variação do momento fletor  $M_{xe}$ , em função de  $I_{LV4}$  ou de  $H$  de V4. No item 4.1, foi verificado que, a partir de  $I_{LV4} \geq 0,6901$  o momento fletor  $M_{xe}$  será nulo, e assim, verifica-se que por AG esse ponto-limite será maior. Ou seja, por AG, alguns modelos com V4 muito flexível terão momentos fletores negativos não nulos, enquanto por MEF esses momentos serão nulos.

Assim, para a modelagem do Tabuleiro I em AG, a escolha de  $J = 2 \times I$  com malha 25x25 é a solução que mais se aproxima da obtida pelo MEF, principalmente quando V4 tiver grande rigidez à flexão. Essa verificação vai ao encontro das constatações feitas por outros pesquisadores (BANKI, 2009; SILVA e CARVALHO, 2003; STRAMANDINOLI e LORIGGIO, 2003).

Gráfico 78 -  $I_{Mxe}$  com  $J = 2,40 \times I$ Gráfico 79 -  $M_{xe}$  com  $h = 12$ 

As flechas elásticas da laje L1 ( $\delta$ ) são mostradas no Gráfico 80, para  $h = 10$  e  $h = 12$  cm, e no Gráfico 81(b) para  $h = 15$  cm. Para a viga V4, as flechas imediatas (elásticas) com espessura de laje  $h = 10$  cm são apresentadas no Gráfico 81(a).

Os resultados evidenciam que o método de AG superestima as flechas da laje e da viga, principalmente para a situação em que o tabuleiro é mais flexível. Logo, a diferença entre MEF e AG será maior quanto maior for a deformabilidade de V4. No Gráfico 15, os resultados obtidos por MEF indicam que, a partir de  $I_{Lv4} > 0,418$  a flecha imediata de L1 e V4 terá o mesmo valor, mas esse comportamento não é verificado por AG, sendo que por este último, quando V4 for muito flexível, as flechas da laje serão menores que as da viga.

Os resultados por AG evidenciam que, para o cálculo de flechas, a configuração de modelagem que mais se aproxima dos resultados obtidos por MEF é com o uso de  $J = 2,40 \times I$  com malha 10x10. A opção menos recomendável é com o uso de  $J = 1,44 \times I$  com malha 80x80.

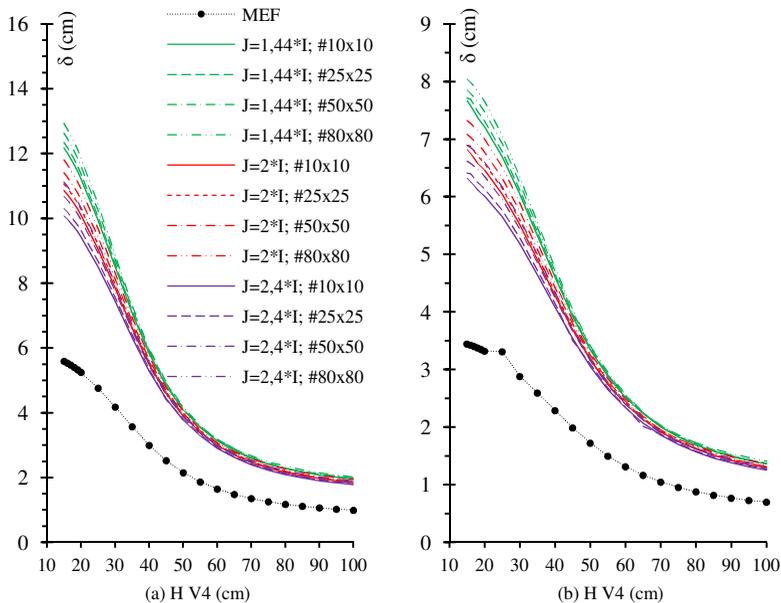


Gráfico 80 – Flecha Imediata laje L1 ( $\delta$ ): (a)  $h = 10$ , (b)  $h = 12$

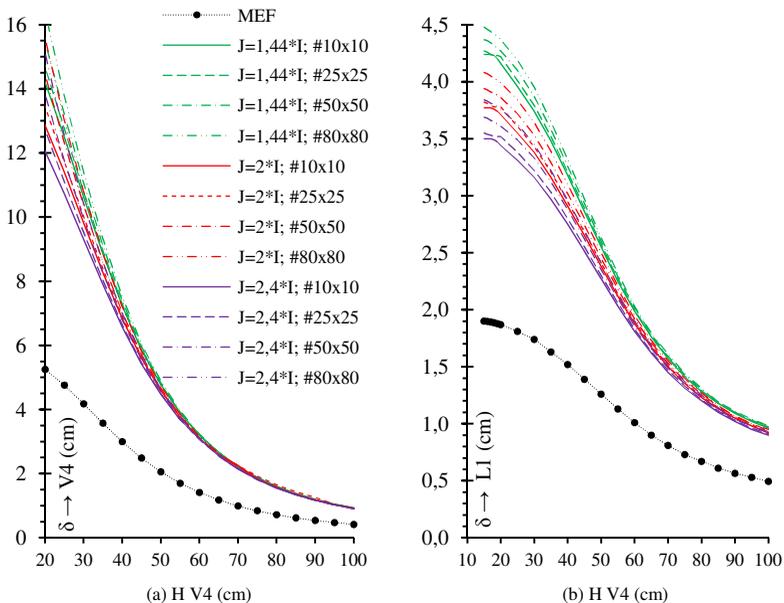


Gráfico 81 – Flecha Imediata L1 e V4 ( $\delta$ ): (a) V4  $h = 10$ , (b) L1  $h = 15$

## APÊNDICE B

### TABULEIRO I – Análise de Correlação Linear entre variáveis

Diversos são os fatores que interferem nos resultados de uma análise de estruturas. Para o Tabuleiro I, foram estudadas algumas destas variáveis e determinadas algumas relações entre as respostas, bem como a variação de algumas variáveis devido à alteração de outras. A seguir são correlacionados alguns parâmetros utilizados nas análises anteriores.

Para isso, usou-se o Coeficiente de Correlação Linear de Pearson ( $r$ ), descrito no item 3.8. Como este coeficiente mede a relação linear entre duas variáveis, o mesmo pode não representar adequadamente a real correlação entre os dados em estudo. Da análise do conjunto de variáveis, pode haver somente uma relação numérica, sem relação de causa-efeito, que nesse caso, a correlação é chamada de espúria, devido apenas à coincidência (LIRA, 2004). A classificação qualitativa da correlação foi realizada de acordo com a Tabela 8.

O cálculo do coeficiente  $r$  é realizado entre pares, ou seja, entre duas variáveis. São utilizadas apenas as variáveis que apresentam relação linear entre as mesmas, com exceção do par “espessura laje x carga na laje”, que são diretamente proporcionais. Para verificar se a relação entre as variáveis é linear ou praticamente linear, cria-se um gráfico de dispersão que compara os pares de valores, como mostra a Figura 23.

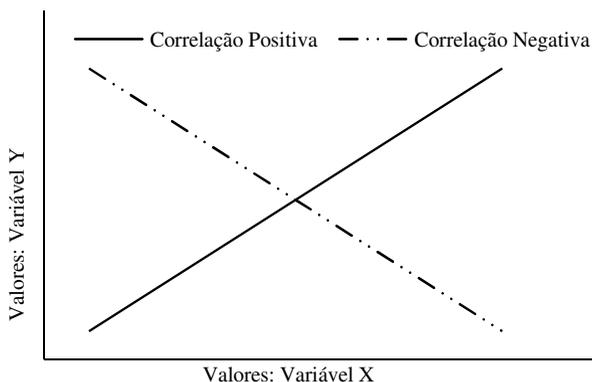


Figura 23 – Correlação entre variável X e Y

As variáveis e os resultados de correlação entre as mesmas são exibidos na Figura 24, que é, na verdade, uma matriz simétrica que

possui em sua diagonal principal apenas valores iguais a um. O valor de  $r = +1$  representa uma correlação positiva perfeita, e  $r = -1$ , uma correlação negativa perfeita.

Os resultados de correlação evidenciam que a altura da viga V4 ( $H$ ), entre todas as demais variáveis, é a que possui a maior correlação com os demais elementos. Apresenta correlação alta positiva ( $0,6 < r < 0,8$ ) com a flecha da laje ( $\delta_{L1}$ ) e da viga V4 ( $\delta_{V4}$ ), e correlação muito alta ( $0,8 < r < 1$ ) com as demais variáveis.

	$H$	$M_x$	$M_{xe}$	$M_y$	$\delta_{L1}$	$\delta_{V4}$	1ª freq
$H$	1						
$M_x$	-0,87	1					
$M_{xe}$	0,91	-0,83	1				
$M_y$	-0,93	0,98	-0,89	1			
$\delta_{L1}$	-0,76	0,50	-0,62	0,63	1		
$\delta_{V4}$	-0,80	0,54	-0,68	0,67	1	1	
1ª freq	0,93	-0,66	0,82	-0,77	-0,88	-0,89	1

Figura 24 – Correlação de Pearson para o Tabuleiro I

Por mais que o Coeficiente de Correlação Linear de Pearson ( $r$ ) não indique, necessariamente, uma relação causal entre as variáveis, em relação à altura de V4 ( $H$ ), podem-se fazer algumas inferências sobre a influência do aumento desta nas demais. Nesse caso,  $H$  é a variável independente, já que não depende dos resultados das demais, as outras variáveis são as dependentes, pois, como se apresenta a seguir, dependem do valor de  $H$  adotado na análise.

\*  $H$  e momento fletor positivo de L1 ( $M_x$  e  $M_y$ ): Como se verifica, existe uma correlação negativa muito alta entre essas variáveis. O que significa que à medida que uma variável aumenta, a outra diminui. Esse comportamento foi comprovado no Gráfico 6 e Gráfico 7. Logo, corrobora-se que há uma relação de causalidade entre  $H$  e os momentos fletores positivos de L1,  $M_x$  e  $M_y$ .

\*  $H$  e flechas elásticas ( $\delta_{L1}$ ,  $\delta_{V4}$ ): Apresentam correlação alta negativa, ou seja, quando uma aumenta, a outra diminui. No Gráfico 15, verifica-se esse comportamento, ou seja, com maiores valores de  $H$ , se

obtem menores flechas, devido ao aumento da rigidez do tabuleiro. Assim, há relação causal entre  $H$  e as flechas calculadas.

\*  $H$  com  $M_{xe}$  e 1ª *freq*: Entre essas variáveis há uma correlação muito alta positiva que significa que, quando  $H$  aumenta, as demais também aumentam, o que de fato acontece. Assim, há uma relação causal, ou seja, com o aumento da altura da viga V4, esta aumenta sua inércia. Logo, adiciona mais rigidez ao sistema, e com maior rigidez há aumento do momento fletor negativo entre L1 e L2 (Gráfico 13 e Gráfico 14) e aumento da 1ª frequência natural de vibração (Gráfico 18).

Entre as demais variáveis, há apenas correlação espúria entre valores, o que não indica uma relação de causa e efeito, diretamente. As correlações, para as demais variáveis, mostram-se altas, com algumas positivas e outras negativas, com exceção da correlação entre  $M_x$  e as flechas de L1 e V4, que é uma correlação moderada positiva ( $0,4 < r < 0,6$ ).

A análise de correlação serviu para se ter um entendimento melhor sobre as variáveis envolvidas no projeto do Tabuleiro I. Pois, como a pesquisa trata de análises quantitativas, é necessária uma abordagem que faça pelo menos uma análise estatística simplificada dos dados.



## APÊNDICE C

### TABULEIRO II – Análise de Correlação Linear entre variáveis

A seguir, são correlacionados alguns parâmetros utilizados nas análises do Tabuleiro II, com a utilização do Coeficiente de Correlação Linear de Pearson ( $r$ ), descrito no item 3.8. As correlações são realizadas entre os mesmos pares utilizados para o Tabuleiro I, e a classificação qualitativa da correlação é realizada de acordo com a Tabela 8.

As variáveis e os resultados de correlação entre as mesmas são apresentados na Figura 25 (matriz simétrica que possui em sua diagonal principal apenas valores iguais a um).

	$H$	$M_{x L2}$	$M_{x L1}$	$M_{y L1}$	$\bar{M}_{xe}$	$\delta_{L2}$	$1^a \text{ freq}$
$H$	1						
$M_{x L2}$	-0,77	1					
$M_{x L1}$	-0,80	0,95	1				
$M_{y L1}$	-0,80	0,97	0,99	1			
$\bar{M}_{xe}$	-0,88	0,79	0,92	0,90	1		
$\delta_{L2}$	-0,77	0,57	0,77	0,73	0,93	1	
$1^a \text{ freq}$	0,80	-0,60	-0,79	-0,76	-0,96	-0,97	1

Figura 25 – Correlação de Pearson para o Tabuleiro II

Para os resultados de correlação do Tabuleiro II, podem ser mantidas, praticamente, as mesmas explicações sobre as correlações feitas para o Tabuleiro I.

Atribuindo a variável  $H$  à classificação de variável independente, já que não depende dos resultados das demais, as outras variáveis são as dependentes, pois, como se apresenta a seguir, dependem do valor de  $H$ , como foi realizado para o Tabuleiro I. Dessa forma, se têm as seguintes colocações:

\*  $H$  e momento fletor positivo de L2 ( $M_x$  e  $M_y$ ) e L1 ( $M_{x L1}$  e  $M_{y L1}$ ): Como se verifica pelo coeficiente de Pearson, existe uma

correlação negativa alta entre essas variáveis. Esse comportamento foi comprovado no Gráfico 37, no Gráfico 48 e no Gráfico 49.

\*  $H$  e flecha elástica de L2 ( $\delta_{L2}$ ): Apresentam correlação alta negativa. No Gráfico 51, verifica-se esse comportamento, ou seja, com maiores valores de  $H$ , se obtêm menores flechas, devido ao aumento da rigidez do tabuleiro.

\*  $H$  com  $\overline{M}_{xe}$ : Correlação muito alta. É negativa, pois na análise se considerou o sinal do momento fletor, mas como visto no Gráfico 44, quando  $H$  aumenta, os valores em módulo do momento fletor negativo também aumentam.

\*  $H$  com a 1ª  $freq$ : Correlação alta positiva que significa que, quando  $H$  aumenta, a frequência fundamental de vibração também aumenta, como se vê no Gráfico 52 e no Gráfico 53. Assim, há uma relação causa e efeito, ou seja, com o aumento da altura da viga V2 e V5 há ganho de rigidez do sistema, e com maior rigidez, se obtêm maiores valores para as frequências de vibração.

Entre as demais variáveis há apenas correlação entre valores, o que não indica uma relação de causa e efeito, diretamente. As correlações, para as demais variáveis, mostram-se alta ou muito alta, e apenas as relacionadas à frequência fundamental de vibração são correlações negativas.

A análise de correlação serviu para se ter um entendimento melhor sobre as variáveis envolvidas no projeto do Tabuleiro I e do Tabuleiro II.