Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Sobre sistemas e espaços de operadores

Gustavo Alexandre Albano Carli
Orientador: Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari

Florianópolis
Novembro de 2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor

Carli, Gustavo Alexandre Albano
Sobre sistemas e espaços de operadores
[dissertação] / Gustavo Alexandre Albano Carli; orientador,
Fernando de Lacerda Mortari - Florianópolis, SC, 2013.
101 p.; 21cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina,
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. sistemas de operadores.

3. aplicações completamente positivas. 4. teorema de Choi-Effros.

I. Mortari, Fernando de Lacerda. II. Universidade Federal de Santa Catarina.

Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Sobre sistemas e espaços de operadores

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com área de Concentração em Análise.

Gustavo Alexandre Albano Carli
Florianópolis
Novembro de 2013

Sobre sistemas e espaços de operadores

por

Gustavo Alexandre Albano Carli[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari (Orientador - UFSC)

Prof. Dra. Elisa Regina dos Santos (UFU)

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro (UFSC)

Prof. Dr. Giuliano Boava (UFSC)

Florianópolis, Novembro de 2013.

[1] Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Se, porém, algum de vós necessita de sabedoria,
peça-a a Deus, que a todos dá liberalmente
e nada lhes impropera; e ser-lhe-á concedida.
Tiago 1:5

Agradecimentos

Agradeço especialmente a Deus por ter me conduzido todos esses anos da minha vida, por Seu amor em me conceder paz e alegria, e por Sua bondade infinita. Agradeço pelo suprimento de todas as minhas necessidades e por endireitar meus caminhos, pois em Deus tudo nos é possível e "toda boa dádiva e todo dom perfeito são lá do alto, descendo do Pai das luzes, em quem não pode existir variação ou sombra de mudança" Tiago 1:17.

Agradeço ao meu pai Ozíris Pedro Carli, e minha mãe Natalina Osmarina Albano Carli por todo amor e carinho, e por tudo o que por mim fizeram, sem o qual não seria possível eu chegar até esse momento e desfrutar da alegria de ser considerado Mestre em Matemática. É com grande alegria no coração que agradeço a Deus por me dar pais que me educaram com retidão, em especial pelas orações de minha mãe e por seu zelo e por seu amor por mim.

Agradeço ao meu professor e orientador Fernando de Lacerda Mortari por toda paciência que teve ao dirigir meus estudos e por toda contribuição, a mim dada, para o meu desenvolvimento e enriquecimento matemático. Através da amizade e orientação do professor Fernando, foi possível eu chegar à coroação de mestre. Mesmo quando ocupado, sempre atendeu minhas dúvidas e, acima de tudo, sempre clareou meus pensamentos a respeito de muitos problemas matemáticos e com relação à minha carreira acadêmica. Obrigado por ser um professor tão atencioso e preocupado com o progresso dos meus estudos e pela grande pessoa que é.

Agradeço aos meus amigos André Walter, Anderson de Oliveira, Lara Santos Ventura, Taís Aguiar Weilandt por todos os momentos alegres, por todas as conversas divertidas, e por todo o apoio e carinho que me deram. As vezes estudamos matemática em alguma sala da UFSC e muitas vezes saimos para conversar e para sorrir, e esses momentos são enriquecedores em todos os sentidos e muito relevantes

para meu desenvolvimento acadêmico, e importantes, acima de tudo, para minha formação como pessoa. Obrigado por serem tão queridos, felizes, e sobretudo, amigos.

Agradeço aos professores Marcelo Ferreira Lima Carvalho, Luciano Bedin e José Luiz Rosas Pinho, que na graduação contribuíram grandemente para a minha aprendizagem matemática. Toda meu fundamento matemático se deve especialmente a esses professores. Obrigado por responderem às minhas dúvidas e por toda paciência que tiveram comigo. Embora as provas tivessem sido difíceis, as aulas e as listas de exercícios também, hoje vejo a importância desse fato e o seu reflexo neste trabalho de dissertação e na minha vida como estudante de matemática e também como ser humano.

Agradeço a Adriana Siemiatkoski minha namorada e amor da minha vida, por ter um coração do tamanho do universo, cheio de alegria, amor e carinho. Obrigado por ser uma pessoa sempre amiga, querida e linda em todos os sentidos, e pela constante preocupação e zelo que tem para comigo. Continue sendo essa mulher cheia de Deus e com muita paz no coração, "sal da terra, perfume e luz do mundo", sempre com muitos sorrisos para oferecer e muita paz para dar.

Agradeço a todos os meus amigos da graduação e do mestrado, por todos esses momentos juntos. Alguns terminando a graduação, outros iniciando o doutorado, a todos vocês muito obrigado por fazeren parte da minha história estudantil, pela maravilhosa amizade, e por me ajudarem a chegar até aqui. Um abraço todo especial aos meus amigos Bruno Brogni Uggioni e Paulo Ricardo Boff, por todos os momentos em que estudamos juntos, debatemos sobre vários assuntos, rimos e nos divertimos, pelos almoços e jantas no RU, e pelas conversas nos corredores do CFM. Continuem sendo pessoas amigas, íntegras e de bom caráter como sempre foram.

Agradeço aos professores Alcides Buss, Daniel Gonçalves, Martin Weilandt e Ruy Exel Filho por serem meus professores do mestrado e por me fazerem estudar com diligência e por todas as dúvidas que pacientemente me elucidaram. Agradeço à Pós-Graduação de Matemática Pura e Aplicada por ter em seu corpo docente esses profissionais altamente qualificados.

Agradeço a excelente profissional Elisa Barbosa Amaral, secretária da Pós-Graduação de Matemática Pura e Aplicada, por todo seu empenho e dedicação ao me auxliliar com as muitas dúvidas que tive ao longo do meu período como estudante do mestrado.

Agradeço a banca examinadora pelas contribuições dadas a minha dissertação e, finalmente, agradeço a CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Um sistema de operadores $\mathcal{S}$, contido em uma C^*-álgebra unital $\mathfrak{A}$, é um subespaço vetorial de $\mathfrak{A}$ fechado por adjunção e contém a unidade da álgebra. Uma aplicação positiva $\varphi : \mathcal{S} \to \mathfrak{B}$, em que $\mathfrak{B}$ é uma C^*-álgebra unital qualquer, é uma função linear que associa elementos positivos em $\mathcal{S}$ a elementos positivos em $\mathfrak{B}$. Dizemos que φ é completamente positivo se, para cada $n \in \mathbb{N}$, e para cada matriz positiva $[x_{ij}]_{i,j=1}^n$ em $\mathbb{M}_n(\mathcal{S})$, tem-se que $[\varphi(x_{ij})]_{i,j=1}^n$ é positivo em $\mathbb{M}_n(\mathfrak{B})$. Nessa dissertação queremos mostrar, entre outras coisas, que se $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é completamente positivo, então podemos estendê-lo a uma aplicação completamente positiva $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ com mesma norma que φ, teorema de extensão que chamamos de Teorema de Hahn-Banach não comutativo

Palavras-chave: Sistema de operadores. Aplicações completamente positivas. Teorema de extensão. C^*-álgebra unital.

Abstract

An operator system $\mathcal{S}$, contained in a unital C^*-algebra $\mathfrak{A}$ is a vector subspace of $\mathfrak{A}$ closed under addition and containing the algebra unit. A positive map $\varphi : \mathcal{S} \to \mathfrak{B}$, where $\mathfrak{B}$ is a unital C^*-algebra, is a linear transformation that sends positive elements in $\mathcal{S}$ to positive elements in $\mathfrak{B}$. We say that φ is a completely positive map if, for each $n \in \mathbb{N}$, and for every positive matrix $[x_{ij}]_{i,j=1}^n$ in $\mathbb{M}_n(\mathcal{S})$, we have that $[\varphi(x_{ij})]_{i,j=1}^n$ is positive in $\mathbb{M}_n(\mathfrak{B})$. In this dissertation we show, among other things, that if $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ is a completely positive map, then we can extend it to a completely positive map $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ with the same norm as φ, a theorem regarded as a non-commutative Hahn-Banach Extension Theorem. **Keywords**: Operator system. Completely positive map. Extension theorem. C^*-algebra.

Lista de Símbolos

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ conjunto dos números naturais
- $\mathbb{C}$ conjunto dos números complexos
- $\mathfrak{A}$,$\mathfrak{B}$,$\mathfrak{C}$ C^*-álgebras
- $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ C^*-álgebra de matrizes de ordem n com entradas em $\mathfrak{A}$
- I_n matriz identidade em $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$
- $\mathcal{M}$ espaço de operadores em uma C^*-álgebra
- $\mathcal{S}$ sistema de operadores em uma C^*-álgebra
- $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ espaços de Hilbert
- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ C^*-álgebra dos operadores limitados em $\mathcal{H}$
- $\mathcal{B}_0$ ideal dos operadores compactos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$
- $\mathcal{B}_{00}$ conjunto dos operadores de posto finito de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$
- $\mathcal{B}_1$ ideal dos operadores trace-class de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$
- $\mathcal{B}_2$ ideal dos operadores Hilbert-Schmidt de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$
- $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ espaços de Banach
- $\mathcal{L}(U, V)$ espaço vetorial das transformações lineares $T : U \to V$

- X, Y espaços topológicos

- $C(X)$ conjunto das aplicações contínuas $f : X \to \mathbb{C}$

- $\sigma(a)$ espectro de um elemento a em uma C^*-álgebra

- $C^*(a, 1)$ C^*-álgebra gerada por a e pela unidade em uma C^*-álgebra

- $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ espaço de Banach dos operadores limitados $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$

- $C_0(X)$ conjunto das aplicações contínuas $f : X \to \mathbb{C}$ que se anulam no infinito

- $Re(a)$ parte real de um elemento $a \in \mathfrak{A}$, $Re(a) = \dfrac{a + a^*}{2}$

- $Im(a)$ parte imaginária de um elemento $a \in \mathfrak{A}$, $Im(a) = \dfrac{a - a^*}{2i}$

- $a = Re(a) + iIm(a)$, para todo $a \in \mathfrak{A}$

- $GL(\mathfrak{A})$ conjunto dos elementos invertíveis da C^*-álgebra $\mathfrak{A}$

Sumário

Introdução

O estudo das aplicações completamente positivas foi motivado, inicialmente, pela tecnicalidade fornecida pelo estudo das dilatações em espaços de Hilbert. Quando conseguimos escrever um operador limitado definido em um espaço de Hilbert como a restrição de um outro operador sob um outro espaço de Hilbert que contém o primeiro, então dizemos que aquela restrição é uma contração do segundo, ou que o segundo operador é, grosso modo, uma dilatação do primeiro. Sz.-Nagy mostrou que um operador, com norma menor do que ou igual a um, pode ser dilatado para um operador unitário; nesse sentido operadores com essa propriedade começaram a ser chamados de contração. O enunciado deste teorema é dado abaixo e sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em (Paulsen, Teorema 1.1).

Teorema de Sz.-Nagy. Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma contração, isto é $\|T\| \leq 1$, então existe um espaço de Hilbert $\mathcal{K}$ que contém $\mathcal{H}$ como subespaço, e existe um operador unitário U tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, é válido que $T^n = P_{\mathcal{H}} U^n{}_{|\mathcal{H}}$, em que $P_{\mathcal{H}}$ é a projeção de $\mathcal{K}$ sobre $\mathcal{H}$.

Com esse resultado, segue imediatamente um elegante resultado atribuído a von Neumann :

Desigualdade de von Neumann. Se T é uma contração num espaço de Hilbert então para todo polinômio p é válido que

$$\|p(T)\| \leq \sup\{\|p(z)\|;\ z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}.$$

Trabalhos de Sarason, Sz.-Nagy e Foias mostraram que muitos resultados clássicos sobre funções analíticas, incluindo a teoria Nevanlinna-Pick, o Teorema de Nehari e o Teorema de Caratheodory são consequências destes resultados que envolvem operadores de contração.

Empolgado com essa teoria de dilatação, foi que Stinespring deu início à teoria dos operadores completamente positivos como meio de obter caracterização e existência de operadores de dilatação, descobrindo, assim, certa proximidade entre as aplicações completamente positivas e as medidas positivas. Posteriormente, Arveson contribuiu grandemente para o desenvolvimento dessa teoria. Um dos seus legados é a demonstração de um tipo de teorema de extensão Hahn-Banach, no caso não comutativo, o qual é um dos resultados principais dessa dissertação.

Muito se deve ao estudo das aplicações completamente positivas, como por exemplo a contribuição dada à teoria de produtos tensoriais de C^*-álgebras, ao estudo das C^*-álgebras nucleares, e também à análise harmônica não comutativa na qual estas aplicações se encontram camufladas como funções positivas.

Na década de 1980, motivados em grande parte pelo trabalho de Wittstock e Haagerup, pesquisadores começaram a estender muitos resultados da teoria das aplicações completamente positivas para a família das aplicações completamente limitadas. Na medida em que as primeiras são o análogo de medidas positivas, as aplicações completamente limitadas são o análogo de medidas limitadas.

Dois problemas famosos que fazem uso dessa família de funções são: Conjectura de Kadison e Conjectura de Halmos. Enquanto a primeira deseja mostrar que todo homomorfismo de uma C^*-álgebra na álgebra dos operadores limitados em um espaço de Hilbert é semelhante a um $*$-homorfismo, a segunda conjectura que todo operador polinomialmente limitado é semelhante a uma contração. Para a conjectura de Kadison existe um contraexemplo devido a Pisier, enquanto que a outra conjectura permanece em aberto.

Os domínios e imagens das aplicações completamente positivas e limitadas são os chamados sistemas ou espaços de operadores, que nada mais são do que subespaços vetoriais de um espaço de operadores definidos em um espaço de Hilbert, possuindo certas propriedades.

O último problema desse trabalho dará uma caracterização abstrata para os sistemas de operadores. Devido a Choi e Effros, este teorema tem um impacto semelhante ao da construção GNS (Gelfand-Naimark-Segal) na qual é possível enxergar C^*-álgebras, objetos abstratos, como objetos concretos em espaços de operadores. Tal resultado nos permite buscar paralelos entre a teoria dos espaços de Banach e a teoria das aplicações completamente positivas, e consequentemente ligações interessantes com a teoria das C^*-álgebras e álgebras de von Neumann.

No primeiro capítulo desse trabalho, nosso foco será dar embasamento à teoria das aplicações completamente positivas. A primeira seção será dedicada à C^*-álgebra de matrizes. Nela fixaremos uma C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ qualquer e mostraremos que a álgebra das matrizes $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é uma C^*-álgebra. Na segunda seção definiremos os sistemas de operadores e espaços de operadores, e abordaemos o assunto das aplicações positivas definidas em tais conjuntos. Depois, na terceira seção definiremos e demonstraremos resultados sobre as aplicações completamente positivas. Na quarta seção, nosso foco serão as aplicações positivas cujo domínio ou contradomínio são C^*-álgebras comutativas, e nessa seção veremos que esta será uma condição suficiente para que tais aplicações sejam completanente positivas. Por fim, na quinta seção, dedicamos ao Teorema de Stinespring, que tem o objetivo de caracterizar todas as aplicações completamente postivas. Veremos uma relação importante entre elas e os $*$-homomorfismos, a saber, que aplicações completamente positivas são “canto"de $*$-representações.

No segundo capítulo, falaremos de três importantes teoremas de extensão ligados à essa teoria: Teorema de Krein, Teorema de Arveson, Teorema de Wittstock. Tais teoremas generalizam o Teorema de Hahn-Banach, para o caso não-comutativo, ou seja, ao invés do contradomínio da aplicação ser o corpo dos complexos, trabalharemos com álgebras de matrizes complexas, inicialmente, e depois com espaços de operadores definidos em espaços de Hilbert. Dado um sistema de operadores $\mathcal{S}$ numa C^*-álgebra $\mathfrak{A}$, e uma aplicação completamente positiva $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, queremos encontrar uma aplicação completamente positiva $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, que é uma extensão de φ, de modo que $\|\varphi\| = \|\widetilde{\varphi}\|$. Para termos sucesso, será importante tratar da topologia BW, que é um enfraquecimento da topologia usual em $\mathcal{B}(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

No último capítulo demonstraremos o Teorema de Choi-Effros, que mencionamos anteriormente.

Em vários momentos dos três capítulos, será necessário o uso da teoria do produto tensorial algébrico entre espaços vetoriais. Por essa razão, o Apêndice A trata de resultados do produto tensorial que serão usados ao longo desse estudo sobre aplicações completamente positivas.

Para a demonstração do Teorema de Arveson, apresentada no segundo capítulo, faz-se necessário um estudo da teoria dos operadores trace-class e Hilber-Schmidt, os quais serão abordados no Apêndice B deste trabalho. Mostraremos que o espaço de Banach dos operadores limitados definidos em espaço de Hilbert, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, é isometricamente isomorfo ao espaço dual dos operadores trace-class.

Capítulo 1

Aplicações completamente positivas

Neste primeiro capítulo apresentaremos os sistemas de operadores em uma C^*-álgebra, e trataremos das aplicações positivas, das aplicações completamente positivas e das aplicações completamente limitadas em C^*-álgebras. Nosso ponto de partida será considerar uma C^*-álgebra $\mathfrak{A}$, mostrar que $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é uma C^*-álgebra e caracterizar seus elementos positivos. Finalizaremos demonstrando o Teorema de Stinespring, uma caracterização das aplicações completamente positivas, o qual mostra que existe uma relação interessante entre essa família de funções e as $*$-representações de C^*-álgebras.

1.1 C^*-álgebra de matrizes

Essa seção é composta de resultados básicos que serão utilizados ao longo desse estudo sobre aplicações completamente positivas. Sempre consideramos nossa C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ incluída na álgebra dos operadores lineares limitados $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, em que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, ou seja, $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (tal resultado, conhecido como construção GNS, pode ser encontrado em (Murphy, Teorema 3.4.1)). A partir do próximo parágrafo até o final da seção, consideramos o espaço vetorial das matrizes $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$, e objetivamos tornar $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ uma C^*-álgebra e caracterizar seus elementos positivos.

Sejam $\mathfrak{A}$ uma C^*-álgebra e n um número natural. Podemos considerar o espaço vetorial $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ das matrizes de ordem n com entradas em $\mathfrak{A}$, com as operações de adição e produto por escalar da forma usual. Dada $A \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$, escrevemos $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, ou seja, a entrada (i, j) dessa matriz é ocupada pelo elemento $a_{ij} \in \mathfrak{A}$, e muitas vezes para simplificar ou quando não há perigo de confusão denotamos tal matriz simplesmente por $[a_{ij}]_{ij}$ ou $[a_{ij}]$. Podemos, facilmente, dar uma estrutura de $*$-álgebra para esse espaço de matrizes. Para isso basta considerar, para cada $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$, o produto e involução definidos da seguinte forma:

$$[a_{ij}].[b_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}.b_{kj}\right], \ [a_{ij}]^* = [a_{ji}^*].$$

Queremos agora introduzir uma norma nesse espaço algébrico de matrizes de forma a torná-lo uma C^*-álgebra. Para fazer isso vamos começar com a C^*-álgebra dos operadores limitados $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Lembre-se que $\mathcal{H}^n$ é um espaço de Hilbert cujo produto interno definido usualmente é

$$\langle(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)\rangle := \sum_{i=1}^n \langle \xi_i, \eta_i\rangle,$$

em que $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{H}^n$ e $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in \mathcal{H}^n$. Denotamos frequentemente $(\xi_i)_{i=1}^n := (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, ou simplesmente $(\xi_i)_i$. Observe que $\|(\xi_i)_i\|^2 = \|\xi_1\|^2 + \cdots + \|\xi_n\|^2$.

Seja $[T_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ e defina a aplicação $T : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n$ por

$$T(\xi_j)_{j=1}^n = \left(\sum_{j=1}^n T_{ij}\xi_j\right)_{i=1}^n.$$

é fácil notar que T é linear. Queremos mostrar que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$, mais precisamente, T é limitado com $\|T\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|T_{ij}\|$. Para isso, note que para qualquer $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{H}^n$, temos

$$\begin{aligned}
\|\xi\| &= \|(\xi_1, 0, \ldots, 0) + (0, \xi_2, 0 \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, 0, \xi_n)\| \\
&\leq \|(\xi_1, 0, \ldots, 0)\| + \|(0, \xi_2, 0 \ldots, 0)\| + \cdots + \|(0, 0, \ldots, 0, \xi_n)\| \\
&= \|\xi_1\| + \cdots + \|\xi_n\|.
\end{aligned}$$

Tomando $\eta = (\eta_i)_i \in \mathcal{H}^n$ qualquer, tem-se

$$\|T(\eta_j)_{j=1}^n\| \leq \left\|\sum_{j=1}^n T_{1j}\eta_j\right\| + \cdots + \left\|\sum_{j=1}^n T_{nj}\eta_j\right\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|T_{ij}\eta_j\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|T_{ij}\|\|\eta_j\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|T_{ij}\|\right)\|\eta\|.$$

Portanto, T é limitado e $\|T\| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|T_{ij}\|$.

Queremos mostrar que a aplicação

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathcal{H}^n) \\ & & [T_{ij}] & \longmapsto & T \end{array}$$

é um $*$-isomorfismo. Sejam $[T_{ij}], [S_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Observe que

$$\begin{aligned} &\varphi([T_{ij}] + \lambda[S_{ij}])\xi = \varphi([T_{ij} + \lambda S_{ij}])\xi = \left(\sum_{k=1}^{n}(T_{ik} + \lambda S_{ik})\xi_k\right)_i \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} T_{ik}\xi_k\right)_i + \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} S_{ik}\xi_k\right)_i = \varphi([T_{ij}])\xi + \lambda\varphi([S_{ij}])\xi \\ &= (\varphi([T_{ij}]) + \lambda\varphi([S_{ij}])\xi. \end{aligned}$$

Como tal igualdade vale para todo $\xi \in \mathcal{H}^n$, segue que $\varphi([T_{ij}]+\lambda[S_{ij}]) = \varphi([T_{ij}]) + \lambda\varphi([S_{ij}])$, e portanto φ é linear.
Agora,

$$\begin{aligned} &\varphi([T_{ij}][S_{ij}])\xi = \varphi\left(\left[\sum_{l=1}^{n} T_{il}S_{lj}\right]_{ij}\right)\xi = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} T_{1l}S_{lk}\right)\xi_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} T_{nl}S_{lk}\right)\xi_k\right) = \\ &= \left(\sum_{l=1}^{n} T_{1l}\left(\sum_{k=1}^{n} S_{lk}\xi_k\right), \ldots, \sum_{l=1}^{n} T_{nl}\left(\sum_{k=1}^{n} S_{lk}\xi_k\right)\right) = \\ &= \varphi([T_{ij}])\left(\varphi([S_{ij}])\xi\right). \end{aligned}$$

Como tal igualdade vale para todo $\xi \in \mathcal{H}^n$, segue que $\varphi([T_{ij}][S_{ij}]) = \varphi([T_{ij}]) \circ \varphi([S_{ij}])$, e assim φ preserva produto.

Para mostrar que φ preserva estrela, ou seja, $\varphi([T_{ij}]^*) = \varphi([T_{ij}])^*$, lembre que para todo operador limitado $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, em que $\mathcal{K}$ é um espaço de Hilbert, existe um único operador em $\mathcal{B}(\mathcal{K})$, o qual denotamos geralmente por S^*, tal que $\langle S\xi, \eta\rangle = \langle \xi, S^*\eta\rangle$, para quaisquer $\xi, \eta \in \mathcal{K}$

- veja (Sunder, Corolário 2.4.3).

Portanto, para $\xi, \eta \in \mathcal{H}^n$, vale que

$$\langle \varphi([T_{ij}])\xi, \eta \rangle = \left\langle \left(\sum_{k=1}^{n} T_{1k}\xi_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} T_{nk}\xi_k \right), (\eta_1, \ldots, \eta_n) \right\rangle =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \left\langle \sum_{k=1}^{n} T_{lk}\xi_k, \eta_l \right\rangle = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \langle \xi_k, T_{lk}^*\eta_l \rangle = \sum_{k=1}^{n} \left\langle \xi_k, \sum_{l=1}^{n} T_{lk}^*\eta_l \right\rangle =$$

$$= \left\langle (\xi_1, \ldots, \xi_n), \left(\sum_{l=1}^{n} T_{l1}^*\eta_l, \ldots, \sum_{l=1}^{n} T_{ln}^*\eta_l \right) \right\rangle = \langle \xi, \varphi([T_{ji}^*])\eta \rangle.$$

Assim $\varphi([T_{ij}])^* = \varphi([T_{ji}^*]) = \varphi([T_{ij}]^*)$, e φ preserva estrela.

Note também que φ é injetiva. De fato, se $\varphi([T_{ij}]) = 0$, então $\varphi([T_{ij}])\xi = 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}^n$. Escolha $\xi = (0, \ldots, 0, \xi_j, 0, \ldots, 0)$ em que ξ_j é tomado arbitrariamente em $\mathcal{H}$ e ocupa a j-ésima posição do vetor ξ. Assim $\varphi([T_{ij}])\xi = (T_{1j}\xi_j, \ldots, T_{nj}\xi_j) = 0$. Portanto $T_{ij} = 0$ para todo i, j, ou seja, $[T_{ij}] = 0$. Logo φ é injetiva.

Finalmente provemos que φ é sobrejetiva. Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ defina o operador $V_i : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}$ pondo $V_i(\xi_j)_j = \xi_i$, para todo $(\xi_j)_j \in \mathcal{H}^n$. Note que tal operador é limitado, pois $\|V_i(\xi_j)_j\| = \|\xi_i\| \leq \|(\xi_j)_j\|$, ou seja, $\|V_i\| \leq 1$. Defina, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, o operador $U_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^n$, pondo $U_j(\xi) = (0, \ldots, \xi, \ldots, 0)$ em que ξ se encontra na j-ésima posição do vetor. Tal operador é limitado pois $\|U_j(\xi)\| = \|(0, \ldots, \xi, \ldots, 0)\| = \|\xi\|$, ou seja, $\|U_j\| = 1$. Considere a matriz $[Q_{ij}] := [V_iTU_j] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Seja $\xi = (\xi_i)_{i=1}^n \in \mathcal{H}^n$. Denote $\xi^{(k)} := (0, \ldots, 0, \xi_k, 0, \ldots, 0)$ o vetor em $\mathcal{H}^n$ em que ξ_k está na k-ésima posição e seja $T\xi^{(k)} := (\eta_1^k, \ldots, \eta_n^k)$. Então

$$\varphi([Q_{ij}])\xi = \left(\sum_{j=1}^{n} Q_{ij}\xi_j \right)_{i=1}^{n} = \left(\sum_{j=1}^{n} V_iTU_j\xi_j \right)_{i=1}^{n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big(V_i(\eta_1^j, \ldots, \eta_n^j) \Big)_{i=1}^{n} = \sum_{j=1}^{n} (\eta_1^j, \ldots, \eta_n^j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} T\xi^{(j)} = T\left(\sum_{j=1}^{n} \xi^{(j)} \right) = T\xi.$$

Como essa igualdade vale para todo $\xi \in \mathcal{H}^n$, segue que $T = \varphi([Q_{ij}])$.

Assim φ é sobrejetiva.

Provamos que $\varphi : \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$ é um $*$-isomorfismo e portanto podemos tornar $\mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ uma C^*-álgebra, já que $\mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$ é uma C^*-álgebra. Para fazermos isso basta induzir uma norma por meio de φ, ou seja, defina, para todo $[T_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $\|[T_{ij}]\| := \|\varphi([T_{ij}])\| = \|T\|$. Note que essa norma não depende da escolha de $\mathcal{H}$, pois toda $*$-álgebra admite no máximo uma norma que a torna uma C^*-álgebra - o leitor pode encontrar esse resultado em (Murphy, Corolário 2.1.2).

Lembre-se da contrução GNS: dada uma C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ qualquer, existem um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e uma $*$-representação fiel (injetiva) $\pi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ em que $\pi(\mathfrak{A})$ é uma C^*-subálgebra em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Considere a aplicação $\pi^{(n)} : \mathbb{M}_n(\mathfrak{A}) \to \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ que associa uma matriz $[a_{ij}]$ a matriz $[\pi(a_{ij})]$. Não é difícil notar que $\pi^{(n)}$ é um $*$-homomorfismo injetivo já que π o é. Com isso em mãos, podemos supor que $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é uma $*$-subálgebra de $\mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ e para mostrar que é uma C^*-subálgebra resta-nos mostrar que é fechado. Note que $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A}) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$. Considere uma sequência $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ tal que $T_m \to T \in \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})))$. Escreva $T_m = [T_{ij}^m]$. Seja $\varepsilon > 0$. Existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ e $m > m_0$, é válido que

$$\|T_m - T\| = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|(T_m - T)(\xi)\| < \varepsilon.$$

Vamos mostrar que $T_{kj}^m \to T_{kj}$ para quaisquer k, j. Seja $\xi_j \in \mathcal{H}$ com $\|\xi_j\| \leq 1$, e $\xi = (0, \ldots, \xi_j, \ldots, 0) \in \mathcal{H}^n$ em que ξ_j ocupa a j-ésima posição do vetor ξ. Logo

$$\begin{aligned}\|(T_m - T)(\xi)\|^2 = \|[T_{ij}^m - T_{ij}](\xi)\|^2 &= \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} (T_{ik}^m - T_{ik})(\xi_k) \right)_i \right\|^2 \\ &= \|(T_{ij}^m - T_{ij}(\xi_j))_{i=1}^n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|(T_{ij}^m - T_{ij})\xi_j\|^2.\end{aligned}$$

Portanto $T_{kj}^m \to T_{kj}$ para quaisquer j, k e como $\mathfrak{A}$ é fechado em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ segue que $T_{kj} \in \mathfrak{A}$ para quaisquer k, j. Assim $M_n(\mathfrak{A})$ é uma C^*-álgebra. Daí temos o seguinte resultado:

Proposição 1.1 *Se $\mathfrak{A}$ é uma C^*-álgebra então $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é uma C^*-álgebra.*

Relembramos ao leitor que numa C^*-álgebra $\mathfrak{A}$, um elemento $a \in \mathfrak{A}$ é positivo se, e somente se, existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que $a = b^*b$ - o leitor pode encontrar esse resultado em (Murphy, Teorema 2.2.4 e Teorema 2.2.5).

A proposição anterior nos permite falar de elementos positivos em $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$. Chamaremos de *matriz positiva* todo elemento positivo da C^*-álgebra $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$.

Queremos mostrar que se $A \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é positivo, então pode ser expresso como uma soma finita de matrizes da forma $[a_i^* a_j]$, em que $a_i \in \mathfrak{A}$. Note que

$$
\begin{aligned}
[a_i^* a_j] &= \begin{bmatrix} a_1^*a_1 & a_1^*a_2 & \cdots & a_1^*a_n \\ a_2^*a_1 & a_2^*a_2 & \cdots & a_2^*a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^*a_1 & a_n^*a_2 & \cdots & a_n^*a_n \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} a_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^* & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^* & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

é positivo, pois é fácil ver que esta última matriz é a adjunta da antepenúltima.

Dada uma matriz positiva $A = [a_{ij}]$, existe uma matriz $C = [c_{ij}]$ tal que $A = C^*C$, ou seja, $a_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ki}^* c_{kj}$, donde $[a_{ij}] = \sum_{k=1}^n [c_{ki}^* c_{kj}]$ como queríamos. Reciprocamente, uma matriz que é soma de matrizes da forma $[a_i^* a_j]$ é positiva, pois toda matriz da forma $[a_i^* a_j]$ é positiva, e uma soma de elementos positivos em uma C^*-álgebra é positivo - veja (Murphy, Lema 2.2.3).

Temos, portanto, a seguinte proposição:

Proposição 1.2 *Um elemento de $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é positivo se, e somente se, pode ser escrito como uma soma finita de matrizes da forma $[a_i^* a_j]$.*

Além disso, podemos obter uma outra caracterização para as matrizes positivas, a saber:

Proposição 1.3 *Uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é positiva se, e somente se, $\displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^* a_{ij} x_j \geq 0$, quaisquer que sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{A}$. ($\mathfrak{A}$ é uma C^*-álgebra unital).*

Demonstração. Suponha $A = [a_{ij}] \geq 0$. Escreva $a_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ki}^* c_{kj}$ conforme visto anteriormente. Note que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^* a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^* \left(\sum_{k=1}^n c_{ki}^* c_{kj} \right) x_j$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_i^* c_{ki}^* c_{kj} x_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} (c_{ki}x_i)^* c_{kj} x_j\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (c_{ki}x_i)^* c_{kj} x_j\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ki}x_i\right)^* \left(\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j\right)\right] \geq 0.
\end{aligned}
$$

Reciprocamente, suponha que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* a_{ij} x_j \geq 0$, quaisquer que sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{A}$. Primeiro mostraremos que a matriz A é autoadjunta. Note que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* a_{ij} x_j = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* a_{ij} x_j\right)^* = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^* a_{ij}^* x_i.$$

Fixe $k, l \in \{1, 2 \ldots, n\}$ e considere $x_i = 0$ sempre que $i \neq k, l$. Assim sendo, temos que $x_k^* a_{kl} x_l + x_l^* a_{lk} x_k = x_k^* a_{lk}^* x_l + x_l^* a_{kl}^* x_k$. Tomando $x_k = x_l = 1$ obtemos $a_{kl} - a_{lk}^* = a_{kl}^* - a_{lk}$. Por outro lado, $x_k = \sqrt{-1}$ e $x_l = 1$ obtemos $a_{lk}^* - a_{kl} = a_{kl}^* - a_{lk}$. Segue que $a_{lk}^* = a_{kl}$. Como isso vale para todo $k, l = 1, 2 \ldots, n$, tem-se que a matriz A é autoadjunta.

Vamos mostrar agora que A é positivo. Como A é autoadjunto podemos escrever $A = T - S$ como uma diferença de elementos positivos em $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$, em que $TS = ST = 0$ - veja (Kreyszig, Teorema 3.10-3) ou ainda, veja o teorema do cálculo funcional contínuo em (Murphy, Teorema 2.1.13). Denote $T = [t_{ij}]$ e $S = [s_{ij}]$, e observe que $a_{ij} = t_{ij} - s_{ij}$. Desse fato e da hipótese, temos que $\sum_{i}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* s_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* t_{ij} x_j$, quaisquer que sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{A}$. Escrevendo $S^2 = [b_{ij}]$ temos $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik} s_{kj}$. Denotanto $S^3 = [r_{ij}]$, então $S^3 = S^2 S$ e assim $r_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b_{il} s_{lj} = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} s_{ik} s_{kl}\right) s_{lj} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_{ik} s_{kl} s_{lj}$.

Afirmação 1: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} x_j = 0, \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{A}$.

Como S é positivo segue que S^3 é positivo pelo cálculo funcional contínuo. Temos então que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} x_j \geq 0,$$

conforme foi visto no ínicio da demonstração dessa proposição. Observe que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* \left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_{ik}s_{kl}s_{lj}\right) x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i^* s_{ik}s_{kl}s_{lj}x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(s_{ki}x_i)^* s_{kl}s_{lj}x_j$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}(s_{ki}x_i)^*\right) s_{kl}\left(\sum_{j=1}^{n} s_{lj}x_j\right)\right) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_k^* s_{kl} y_l,$$

em que $y_l = \sum_{j=1}^{n} s_{lj}x_j$. Como $TS = 0$, segue que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} x_j = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_k^* s_{kl} y_l \leq \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_k^* t_{kl} y_l$$

$$= \sum_{k=1}^{n} y_k^* \left(\sum_{l=1}^{n} t_{kl}y_l\right) = \sum_{k=1}^{n} y_k^* \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} t_{kl}s_{lj}\right) x_j\right) = 0$$

e assim fica demonstrada a *Afirmação 1.*

Afirmação 2: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} y_j = 0, \forall x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathfrak{A}$.

Fixe $\lambda \in \mathbb{C}$ e escreva, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $z_i = x_i + \lambda y_i$. Da Afirmação 1, segue que

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i^* r_{ij} z_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i + \lambda y_i)^* r_{ij}(x_j + \lambda y_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} x_j + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* r_{ij} y_j +$$

$$+ \overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* r_{ij} x_j + \lambda \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} y_j$$

$$= \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i^* r_{ij} x_j + \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} y_j.$$

Escolhendo $\lambda = 1$ obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i^* r_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} y_j = 0.$$

Escolhendo $\lambda = \sqrt{-1}$ obtemos

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i^* r_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} y_j = 0.$$

Portanto $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^* r_{ij} y_j = 0$ e está provada a *Afirmação 2.*

Afirmação 3: $S^3 = 0$.

Lembre que $S^3 = [r_{ij}]$. Fixe $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Escolha $x_k = 1$, $y_l = 1$ e $x_i = y_i = 0$ quando $i \neq k, l$. Usando a Afirmação 2 obtemos $r_{kl} = 0$. Portanto $S^3 = 0$.

Como S é positivo e $S^3 = 0$, segue, do cálculo funcional contínuo que $S = 0$. Assim $A = T - S = T$ é positivo como queríamos. ■

Proposição 1.4 *$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é positivo se, e somente se, $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.*

Demonstração. Suponha que $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Note que $\langle (T - T^*)\xi, \xi \rangle = \langle T\xi, \xi \rangle - \langle \xi, T\xi \rangle = \langle T\xi, \xi \rangle - \overline{\langle T\xi, \xi \rangle} = 0$. Logo $\langle T\xi, \xi \rangle = \langle T^*\xi, \xi \rangle$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$. É fácil mostrar que quando isso ocorre para operadores $S, R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ então é válido que $\langle S\zeta, \eta \rangle = \langle R\zeta, \eta \rangle$, para quaisquer $\zeta, \eta \in \mathcal{H}$ (tome arbitrariamente $\zeta, \eta \in \mathcal{H}$ e aplique o vetor $\xi = \zeta + \eta$ em $\langle T\xi, \xi \rangle = \langle T^*\xi, \xi \rangle$ e depois $\xi = \zeta + i\eta$). Segue desse fato que $T^* = T$. Como vimos no transcorrer da demonstração da proposição anterior, podemos escrever T como diferença de dois elementos positivos, $T = T_+ - T_-$, de modo que $T_+ T_- = 0 = T_+ T_-$. Como $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$, segue que $\langle T_+\xi, \xi \rangle \geq \langle T_-\xi, \xi \rangle$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$. O cálculo funcional contínuo nos garante que $T_-^3 \geq 0$. Tome $\eta \in \mathcal{H}$ arbitrário e escolha $\xi = T_-\eta$. Então $0 \leq \langle T_-^3\eta, \eta \rangle \leq 0$. Logo $\langle T_-^3\eta, \eta \rangle = 0$, para todo $\eta \in \mathcal{H}$. Como observamos anteriormente, devemos ter $T_-^3 = 0$. Novamente pelo cálculo funcional contínuo, temos $T_- = 0$. Daí $T = T_+ \geq 0$.

Reciprocamente, suponha que $T \geq 0$. Escreva $T = S^*S$. Então $\langle T\xi, \xi\rangle = \langle S^*S\xi, \xi\rangle = \langle S\xi, S\xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. ∎

O resultado a seguir será importante para a demonstração de alguns resultados que envolvem aplicações completamente positivas.

Proposição 1.5 *Sejam $\mathfrak{A}$ uma C^*-álgebra com unidade 1 e elementos $a, b, p \in \mathfrak{A}$, em que p é autoadjunto. Então são válidas as seguintes proposições*

i) $\|a\| \leq 1$ *se, e somente se, a matriz* $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{bmatrix}$ *é positiva em* $\mathbb{M}_2(\mathfrak{A})$*;*

ii) $a^*a \leq b$ *se, e somente se,* $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & b \end{bmatrix}$ *é positivo em* $\mathbb{M}_2(\mathfrak{A})$*;*

iii) se $\begin{bmatrix} p & a \\ a^* & p \end{bmatrix}$ *é positivo em* $\mathbb{M}_2(\mathfrak{A})$ *então* $a^*a \leq \|p\|p$.

Demonstração.

i. Pense em $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Suponha que $\|a\| \leq 1$. Sejam ξ, η vetores quaisquer em $\mathcal{H}$. Note que

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \xi, \xi\rangle + \langle a\eta, \xi\rangle + \langle \xi, a\eta\rangle + \langle \eta, \eta\rangle \tag{1.1}$$

$$\geq \langle \xi, \xi\rangle - 2\|a\|\|\xi\|\|\eta\| + \langle \eta, \eta\rangle$$

pois $|\langle a\eta, \xi\rangle + \langle \xi, a\eta\rangle| \leq |\langle a\eta, \xi\rangle| + |\langle \xi, a\eta\rangle| \leq 2\|a\|\|\eta\|\xi\|$, e assim

$$-2\|a\|\|\xi\|\|\eta\| \leq \langle a\eta, \xi\rangle + \langle \xi, a\eta\rangle \leq 2\|a\|\|\xi\|\|\eta\|.$$

Além disso,

$$\langle \xi, \xi\rangle - 2\|a\|\|\xi\|\|\eta\| + \langle \eta, \eta\rangle \geq \langle \xi, \xi\rangle - 2\|\xi\|\|\eta\| + \langle \eta, \eta\rangle = (\|\xi\| - \|\eta\|)^2 \geq 0.$$

Logo, a matriz do enunciado é positiva.

Suponha agora que a matriz é positiva. Afirmamos que se $\|a\| > 1$ então existem vetores $\xi, \zeta \in \mathcal{H}$ com norma 1 tais que $\langle a\xi, \zeta\rangle < -1$. Como $\|a\| > 1$, existe um vetor $\xi \in \mathcal{H}$ com norma 1 tal que $\|a\xi\| > 1$. Considere o seguinte vetor de norma um, $\eta = \frac{\|a\xi\|}{\langle a\xi, a\xi\rangle} a\xi$. Note que

$$\langle a\xi, -\eta\rangle = \langle a\xi, -\frac{\|a\xi\|}{\langle a\xi, a\xi\rangle} a\xi\rangle = -\|a\xi\| < -1.$$

Portanto, se $\|a\| > 1$, a matriz do enunciado não pode ser positiva, pois para esses vetores $\xi, -\eta$, teremos 1.1 estritamente negativo.

ii. Suponha que a matriz em questão seja positiva. Sejam $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$ e denote $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Então
$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & b \end{bmatrix} \xi, \xi \right\rangle = \langle \xi_1, \xi_1 \rangle + \langle a\xi_2, \xi_1 \rangle + \langle \xi_1, a\xi_2 \rangle + \langle b\xi_2, \xi_2 \rangle \geq 0.$$
Tome $\xi_1 = -a\xi_2$ e a expressão anterior fica igual a

$$0 \leq \langle b\xi_2, \xi_2 \rangle - \langle a\xi_2, a\xi_2 \rangle = \langle (b - a^*a)\xi_2, \xi_2 \rangle.$$

Assim $a^*a \leq b$.

Supondo que $a^*a \leq b$ temos que

$$\begin{aligned}
&\langle \xi_1, \xi_1 \rangle + \langle a\xi_2, \xi_1 \rangle + \langle \xi_1, a\xi_2 \rangle + \langle b\xi_2, \xi_2 \rangle \\
&\geq \langle \xi_1, \xi_1 \rangle + \langle a\xi_2, \xi_1 \rangle + \langle \xi_1, a\xi_2 \rangle + \langle a^*a\xi_2, \xi_2 \rangle \\
&= \langle \xi_1 + a\xi_2, \xi_1 \rangle + \langle \xi_1 + a\xi_2, a\xi_2 \rangle \\
&= \langle \xi_1 + a\xi_2, \xi_1 + a\xi_2 \rangle \geq 0,
\end{aligned}$$

e assim a matriz em questão é positiva.

iii. Suponha que $\|p\|p - a^*a$ não seja positivo. Então existe um vetor $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\langle (\|p\|p - a^*a)\xi, \xi \rangle$ é um número complexo que não está no eixo real não negativo. Como $\|p\|p - a^*a$ é autoadjunto segue que $\langle (\|p\|p - a^*a)\xi, \xi \rangle$ é um número real, nesse caso estritamente negativo. Assim $\|p\|\langle p\xi, \xi \rangle < \langle a^*a\xi, \xi \rangle = \|a\xi\|^2$. Note que

$$\left\langle \begin{bmatrix} p & a \\ a^* & p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$\langle p\xi_1, \xi_1 \rangle + \langle a\xi_2, \xi_1 \rangle + \langle \xi_1, a\xi_2 \rangle + \langle p\xi_2, \xi_2 \rangle \tag{1.2}$$

Podemos ter $p = 0$. Nesse caso, escolha $\xi_2 = \xi$ e $\xi_1 = -a\xi$. Então 1.2 fica igual a $\langle a\xi, -a\xi \rangle + \langle -a\xi, a\xi \rangle = -2\|a\xi\|^2$ e é estritamente negativo pois $\|p\|\langle p\xi, \xi \rangle < \|a\xi\|^2$. Mas isso contradiz a positividade da matriz.

Agora para o caso em que p é não nulo escolha $\xi_1 = -\frac{1}{\|p\|}a\xi$ e $\xi_2 = \xi$. Assim 1.2 fica igual a

$$\langle p\xi_1, \xi_1 \rangle - \frac{2}{\|p\|}\|a\xi\|^2 + \langle p\xi_2, \xi_2 \rangle < \|p\|\|\xi_1\|^2 - \frac{2}{\|p\|}\|a\xi\|^2 + \frac{1}{\|p\|}\|a\xi_2\|^2$$

$$= \|p\| \frac{1}{\|p\|^2} \|a\xi\|^2 - \frac{2}{\|p\|} \|a\xi\|^2 + \frac{1}{\|p\|} \|a\xi\|^2 = 0,$$

contrariando novamente a positividade da matriz. ■

Observação 1.6 Dado $[T_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, queremos mostrar que

$$\|[T_{ij}]\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|T_{ij}\|^2 \right)^{1/2}.$$

Par ver isso, basta notar que para todo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{H}^n$, é válido que

$$\begin{aligned}
\|[T_{ij}]\xi\|^2 &= \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} T_{1j}\xi_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} T_{nj}\xi_j \right) \right\|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\langle \sum_{i=1}^{n} T_{ki}\xi_i, \sum_{j=1}^{n} T_{kj}\xi_j \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} \langle T_{ki}\xi_i, T_{kj}\xi_j \rangle \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} \|T_{ki}\| \|\xi_i\| \|T_{kj}\| \|\xi_j\| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \|T_{ki}\| \|\xi_i\| \right)^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \|T_{ki}\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\xi_j\|^2 \right)^{1/2} \right)^2 \\
&= \|\xi\|^2 \sum_{i,j=1}^{n} \|T_{ij}\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto $\|[T_{ij}]\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|T_{ij}\|^2 \right)^{1/2}$.

1.2 Aplicações positivas

Nessa seção falaremos sobre um dos objetos principais desse trabalho, os sistemas de operadores, que nada mais são do que subespaços vetoriais de uma C^*-álgebra fechados por adjunção e que contém a unidade da álgebra. Também procuremos demonstrar algumas propriedades fundamentais de aplicações positivas cujos domínios são sistemas de operadores e contradomínios as C^*-álgebras. Lembre-se do Teorema de Hahn-Banach que se $\mathcal{V}$ é um subespaço vetorial de um espaço de Banach $\mathcal{X}$, e se $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ é um funcional linear limitado, então existe uma extensão linear limitada $\widetilde{\varphi} : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$, de φ, de modo que $\|\varphi\| = \|\widetilde{\varphi}\|$ - veja a demonstração deste teorema em (Kreyszig, Teorema 4.3-2). No próximo capítulo demonstraremos uma versão não comutativa para este teorema. Nosso objetivo nessa seção é usar Teorema de Hahn-Banach para mostrar que uma aplicação positiva $\varphi : \mathcal{S} \subseteq \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$, em que $\mathcal{S}$ é um sistema de operadores, pode ser estendida para uma aplicação positiva $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ com mesma norma de φ.

Definição 1.7 Um *espaço de operadores* $\mathcal{M}$ de uma C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{A}$. Um *sistema de operadores* $\mathcal{S}$ de uma C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ com unidade é um subespaço vetorial contendo a unidade e fechado por adjunção, ou seja, se $x \in \mathcal{S}$ então $x^* \in \mathcal{S}$.

Observação 1.8 A partir de agora, $\mathcal{S}$ será sempre um sistema de operadores e $\mathcal{M}$ um espaço de operadores, salvo quando mencionarmos o contrário.

Podemos escrever um elemento autoadjunto h de S como uma diferença de dois elementos positivos em S, a saber

$$h = \frac{1}{2}(\|h\|.1 + h) - \frac{1}{2}(\|h\|.1 - h).$$

Para mostrar que tais elementos são positivos considere a C^*-álgebra $C^*(h, 1)$ gerada por h e pela unidade da álgebra. Pelo cálculo funcional contínuo, existe um $*$-isomorfismo isométrico $\pi : C^*(h, 1) \to C(\sigma(h))$, tal que $\pi(1) = 1$ e $\pi(h) = z : \sigma(h) \to \mathbb{C}$ é a função inclusão. Pensando em $\|h\|.1 + h$ e $\|h\|.1 - h$ como funções, fica fácil perceber que tais elementos são positivos, pois acrescentando à função inclusão sua norma, obtemos uma função não negativa; valendo o mesmo para $-h$. Note ainda que $\|h\|.1 + h$ e $\|h\|.1 - h$ pertencem a $\mathcal{S}$.

Definição 1.9 Se $\mathfrak{B}$ é uma C^*-álgebra, dizemos que uma aplicação linear $\varphi : \mathcal{M} \to \mathfrak{B}$ é *positiva* se $\varphi(p)$ é positivo para todo $p \in \mathcal{M}$ positivo.

Exemplo 1.10 *Um $*$-homomorfismo $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ é positivo. De fato, se $a \in \mathfrak{A}$ é positivo então existe $x \in \mathfrak{A}$ tal que $a = x^*x$. Portanto*

$\pi(a) = \pi(x^*x) = \pi(x^*)\pi(x) = \pi(x)^*\pi(x)$ é positivo, e assim π é uma aplicação linear positiva.

Agora vamos demonstrar alguns resultados importantes que envolvem aplicações positivas.

Proposição 1.11 *Se $\varphi : \mathcal{S} \to \mathfrak{B}$ é positiva então $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$, para todo $x \in \mathcal{S}$.*

Demonstração. Seja $p \in \mathcal{S}$ positivo. Então $\varphi(p^*) = \varphi(p) = \varphi(p)^*$. Seja $h \in \mathcal{S}$ autoadjunto. Podemos escrever $h = p_1 - p_2$ como diferença de positivos em $\mathcal{S}$. Portanto

$$\begin{aligned}\varphi(h^*) &= \varphi(p_1^* - p_2^*) = \varphi(p_1^*) - \varphi(p_2^*) = \varphi(p_1)^* - \varphi(p_2)^* = \\ &= (\varphi(p_1) - \varphi(p_2))^* = (\varphi(p_1 - p_2))^* = \varphi(h)^*.\end{aligned}$$

Seja $x \in \mathcal{S}$ qualquer e escreva $x = h_1 + ih_2$ como combinação linear de autoadjuntos em $\mathcal{S}$, ou seja $x = \frac{x+x^*}{2} + i\frac{x-x^*}{2i}$. Portanto

$$\varphi(x^*) = \varphi(h_1^* - ih_2^*) = \varphi(h_1)^* - i\varphi(h_2)^* = (\varphi(h_1) + i\varphi(h_2))^* = \varphi(x)^*,$$

donde $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$ para todo $x \in \mathcal{S}$ como queríamos. ■

Proposição 1.12 *Uma aplicação positiva $\varphi : \mathcal{S} \to \mathfrak{B}$ é limitada e $\|\varphi\| \leq 2\|\varphi(1)\|$.*

Demonstração. Se $p \in \mathcal{S}$ é positivo então segue, do cálculo funcional contínuo, que $0 \leq p \leq \|p\|$. Portanto $0 \leq \varphi(p) \leq \|p\|\varphi(1)$ e assim $\|\varphi(p)\| \leq \|p\|\|\varphi(1)\|$ - para a verificação dessa última desigualdade veja (Murphy, Teorema 2.2.5). Seja $h \in \mathcal{S}$ autoadjunto. Então escrevemos h como diferença de dois elementos positivos em $\mathcal{S}$, ou seja,

$$h = \frac{1}{2}(\|h\|.1 + h) - \frac{1}{2}(\|h\|.1 - h).$$

Denote $h_1 = \frac{1}{2}(\|h\|.1 + h)$, $h_2 = \frac{1}{2}(\|h\|.1 - h)$ e observe que $\|h_1\| \leq \|h\|$, $\|h_2\| \leq \|h\|$, $h = h_1 - h_2$, e que

$$-\|h_2\| \leq -h_2 \leq h \leq h_1 \leq \|h_1\|.$$

Portanto

$$\begin{aligned}&-\|h\|\|\varphi(1)\| \leq -\|h_2\|\|\varphi(1)\| \leq -\|h_2\|\varphi(1) = \varphi(-\|h_2\|) \leq \varphi(-h_2) \leq \\ &\leq \varphi(h) \leq \varphi(h_1) \leq \varphi(\|h_1\|) = \|h_1\|\varphi(1) \leq \|h\|\varphi(1) \leq \|h\|\|\varphi(1)\|,\end{aligned}$$

ou seja,

$$-\|h\|\|\varphi(1)\| \leq \varphi(h) \leq \|h\|\|\varphi(1)\|.$$

Como h é autoadjunto, segue que $\varphi(h)$ é autoadjunto pelo resultado anterior, e pelo cálculo funcional contínuo temos que $\|\varphi(h)\| \leq \|h\|\|\varphi(1)\|$.

Seja $x \in \mathcal{S}$. Como $\mathcal{S}$ é um sistema de operadores, podemos escrever $x = h_1 + ih_2$ como uma combinação linear de elementos autoadjuntos de S, a saber $x = (x + x^*)/2 + i(x - x^*)/2i$, e assim

$$\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi(h_1)\| + \|\varphi(h_2)\| \leq (\|h_1\| + \|h_2\|)\|\varphi(1)\| \leq 2\|x\|\|\varphi(1)\|.$$

Segue $\|\varphi(x)\| \leq 2\|x\|\|\varphi(1)\|$ para todo $x \in \mathcal{S}$, ou seja, φ é limitada e $\|\varphi\| \leq 2\|\varphi(1)\|$. ■

Proposição 1.13 *Seja $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ um funcional linear. Então φ é positivo se, e somente se, $\|\varphi\| = \varphi(1)$.*

Demonstração. Suponha que φ seja positivo. Vimos na demonstração do resultado anterior que, para todo elemento autoadjunto, $h \in \mathcal{S}$ é válido que $\|\varphi(h)\| \leq \|h\|\varphi(1)$. Seja $x \in \mathcal{S}$ qualquer. Então existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, satisfazendo $|\varphi(x)| = \varphi(\lambda x)$. Denotanto $y = \lambda x$ temos $\|y\| = \|x\|$. Escreva $y = Re(y) + iIm(y) = \frac{y+y^*}{2} + i\frac{y-y^*}{2i}$ e observe que $Re(y), Im(y) \in \mathcal{S}$ e são autoadjuntos. Então $|\varphi(x)| = \varphi(y) = \varphi(Rey)) + i\varphi(Imy) \in \mathbb{R}$. Usando a Proposição 1.11 temos que $\varphi(Rey)$ e $\varphi(Imy)$ são números reais, e portanto $\varphi(Imy) = 0$. Logo

$$|\varphi(x)| = \varphi(Rey) \leq \varphi(1)\|Rey\| \leq \varphi(1)\|y\| = \varphi(1)\|x\|.$$

Portanto $|\varphi(x)| \leq \varphi(1)\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{S}$. E daí $\|\varphi\| \leq \varphi(1)$. Como $\varphi(1) \leq \|\varphi\|$ segue que $\|\varphi\| = \varphi(1)$.

Reciprocamente, suponha que $\|\varphi\| = \varphi(1)$. Se $\varphi(1) = 0$ então $\|\varphi\| = 0$ e portanto $\varphi = 0$, ou seja, φ é positivo. Caso $\varphi(1) \neq 0$ então defina $\psi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ por $\psi = \frac{1}{\varphi(1)}\varphi$. Então ψ é linear, $\psi(1) = \frac{1}{\varphi(1)}\varphi(1) = 1$ e $\|\psi\| = 1$. Vamos mostrar que ψ é positivo. Seja $x \in \mathcal{S}$ positivo. Então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma(x) \subseteq [0, a]$. Note que $\psi(x) \in [0, a]$. De fato, se $p(x) = x - \frac{a}{2}$ é polinômio então segue do Teorema do Mapeamento Espectral, encontrado em (Murphy, Teorema 2.2.14), que

$$\sigma(p(x)) = p(\sigma(x)) \subseteq p([0, a]) \subseteq \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$$

e assim temos que $\sigma(x - \frac{a}{2}.1) \subseteq [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$. Como $x - \frac{a}{2}.1$ é autoadjunto segue que $\|x - \frac{a}{2}.1\| \leq \frac{a}{2}$. Portanto

$$\left|\psi(x) - \frac{a}{2}\right| = \left|\psi(x) - \frac{a}{2}\psi(1)\right| = \left|\psi\left(x - \frac{a}{2}\right)\right| \leq \|\psi\| \left\|x - \frac{a}{2}\right\| \leq \frac{a}{2}.$$

Portanto $\psi(x) \in [0, a]$. Como ψ é positivo segue que φ é positivo. ■

Teorema 1.14 *Sejam $\mathfrak{A}$ uma C^*-álgebra, $\mathcal{S}$ um sistema de operadores de $\mathfrak{A}$ e $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ um funcional linear positivo. Então existe uma extensão linear positiva $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ de φ com $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Como φ é contínuo segue do Teorema de Hahn-Banach que podemos estender φ para um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ com $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Como $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\| = \varphi(1)$ e como $\varphi(1) = \widetilde{\varphi}(1)$, segue do resultado anterior que $\widetilde{\varphi}$ é positivo. ■

1.3 Aplicações completamente positivas

As aplicações completamente positivas são um dos objetos mais importantes apresentados nesse estudo. Vimos na seção anterior que podemos estender uma aplicação positiva definida em um sistema de operadores, para uma aplicação positiva cujo domínio é a C^*-álgebra em questão. No próximo capítulo, um dos nossos objetivos será fazer o mesmo para as aplicações completamente positivas através do Teorema de Arveson, conhecido também como Teorema de Hahn-Banach não comutativo. Agora vamos simplesmente definir essa nova família de funções, dar alguns exemplos e obter propriedades a ela relacionadas.

Para dar início se faz necessária a seguinte observação:

Observação 1.15 Se $\mathfrak{A}$ é C^*-álgebra, e $\mathcal{M}$ é espaço de operadores e $\mathcal{S}$ é sistema de operadores em $\mathfrak{A}$, então $\mathbb{M}_n(\mathcal{M})$ e $\mathbb{M}_n(\mathcal{S})$ são espaço e sistema de operadores em $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$, respectivamente.

Definição 1.16 Uma aplicação $\varphi : \mathcal{M} \to \mathfrak{B}$ é dita *completamente positiva* se, para todo $n \in \mathbb{N}$, a aplicação

$$\begin{array}{cccc} \varphi^{(n)} & : & \mathbb{M}_n(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathfrak{B}) \\ & & [a_{ij}] & \longmapsto & [\varphi(a_{ij})] \end{array}$$

é positiva. Quando existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^{(n)}$ é positiva então φ é dita *n-positiva*.

Duas observações a respeito da aplicação $\varphi^{(n)}$ são mencionadas a seguir, e serão utilizadas na demonstração de alguns resultados, ainda nesse capítulo, e no próximo capítulo.

Observação 1.17 Se $\varphi : \mathcal{S} \to \mathfrak{B}$ é uma aplicação linear contínua então a aplicação $\varphi^{(n)} : \mathbb{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{M}_n(\mathfrak{B})$ também é contínua com $\|\varphi^{(n)}\| \leq n\|\varphi\|$ pois, com o auxílio da Observação 1.6, é válido que

$$\begin{aligned}\|\varphi^{(n)}(A)\| = \|[\varphi(a_{ij})]\| &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|\varphi(a_{ij})\|^2\right)^{1/2} \\ \leq \|\varphi\|\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}\|^2\right)^{1/2} &\leq n\|\varphi\|\|A\|.\end{aligned}$$

Observação 1.18 Não é difícil notar que se φ é uma aplicação completamente positiva então $\varphi^{(n)}$ também é.

Exemplo 1.19 *Um $*$-homomorfismo π entre C^*-álgebras é completamente positivo, pois $\pi^{(n)}$ é também um $*$-homomorfismo, logo positivo.*

Exemplo 1.20 *Um funcional linear positivo $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ é completamente positivo. De fato, se $A = [a_{ij}]$ é positivo em $\mathbb{M}_n(\mathcal{S})$, note que para qualquer $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ temos*

$$\langle f^{(n)}(A)x, x\rangle = \langle [f(a_{ij})]x, x\rangle = f\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{x_i}x_j a_{ij}\right) \geq 0,$$

pois se escrevermos $A = B^*B$ temos que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{x_i}x_j a_{ij} = x^*Ax = x^*B^*Bx = (Bx)^*(Bx) \geq 0.$$

Evidentemente existem aplicações positivas que não são completamente positivas:

Exemplo 1.21 *Seja $\varphi : \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ a aplicação que fornece a transposta de uma matriz, $\varphi(A) = A^t$. Tal função é positiva pois $\varphi(B^*B) = (B^*B)^t = B^t(B^t)^* \geq 0$. Considere as matrizes canônicas E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, ou seja, para cada $i, j = 1, 2$, a matriz E_{ij} possui o número 1 na entrada (i, j) e zero nas demais. Note que a matriz abaixo possui espectro igual a $\{0, 1\}$ e portanto é positiva em $\mathbb{M}_4(\mathbb{C}) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{M}_2(\mathbb{C}))$,*

$$E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Contudo

$$\varphi^{(2)}(E) = \begin{pmatrix} \varphi(E_{11}) & \varphi(E_{12}) \\ \varphi(E_{21}) & \varphi(E_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

não é positiva.

Exemplo 1.22 *Note que se $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ e $\psi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ são funções completamente positivas então $\psi \circ \varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ também é pois*

$$\begin{aligned} &(\psi \circ \varphi)^{(n)}([a_{ij}]) = [(\psi \circ \varphi)(a_{ij})] = \\ &= [\psi(\varphi(a_{ij}))] = \psi^{(n)}([\varphi(a_{ij})]) = \psi^{(n)}(\varphi^{(n)}[a_{ij}]). \end{aligned}$$

Exemplo 1.23 *Seja φ como no exemplo anterior. Se $b \in \mathfrak{B}$ então $L : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ definido por $L(a) = b^*\varphi(a)b$ também é completamente positiva pois se $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é positiva tem-se que*

$$L^{(n)}([a_{ij}]) = [L(a_{ij})] = [b^*\varphi(a_{ij})b] =$$

$$\begin{pmatrix} b^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b^* \end{pmatrix} [\varphi(a_{ij})] \begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix} \geq 0.$$

A desigualdade acima se verifica pois dado um elemento x positivo em uma C^*-álgebra qualquer $\mathfrak{Y}$, existe $y \in \mathfrak{Y}$ tal que $x = y^*y$ e portanto qualquer que seja $z \in \mathfrak{Y}$, temos $z^*xz = z^*y^*yz = (yz)^*(yz) \geq 0$.

Proposição 1.24 *Sejam $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{A}$ um sistema de operadores e $\varphi : \mathcal{S} \to \mathfrak{B}$ uma aplicação linear limitada. Então $\|\varphi^{(k)}\| \leq \|\varphi^{(n)}\|$ para todo $k \leq n$. Se $\varphi^{(n)}$ é positiva então $\varphi^{(k)}$ é positiva, para todo $k \leq n$.*

Demonstração. Para cada matriz $A \in \mathbb{M}_k(\mathcal{S})$ denote

$$A' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathcal{S}).$$

É fácil notar que a aplicação $A \mapsto A'$ é um $*$-homomorfismo injetivo. Portanto $\|A\| = \|A'\|$. Note também que

$$\varphi^{(n)}(A') = \begin{bmatrix} \varphi^k(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e como antes, também temos $\|\varphi^{(n)}(A')\| = \|\varphi^{(k)}(A)\|$. Logo

$$\|\varphi^{(k)}(A)\| = \|\varphi^{(n)}(A')\| \leq \|\varphi^{(n)}\|\|A'\| = \|\varphi^{(n)}\|\|A\|.$$

Como essa desigualdade vale para qualquer $A \in \mathbb{M}_k(\mathcal{S})$, temos que $\|\varphi^{(k)}\| \leq \|\varphi^{(n)}\|$.

Suponha agora que $\varphi^{(n)} : \mathbb{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{M}_n(\mathfrak{B})$ seja positivo. Já sabemos que existe uma espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de modo que $\mathbb{M}_n(\mathfrak{B}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$. Seja $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathcal{H}^k$. Seja $A \in \mathbb{M}_k(\mathcal{S})$ positivo. Pelo mesmo $*$-homomorfismo visto anteriormente, segue A' é positivo. Como $\varphi^{(n)}(A')$ é positivo, temos

$$\langle \varphi^{(k)}(A)\xi.\xi \rangle = \langle \varphi^{(n)}(A')(\xi_1, \ldots, \xi_k, 0. \ldots, 0), (\xi_1, \ldots, \xi_k, 0. \ldots, 0) \rangle \geq 0.$$

Como isso vale para todo $\xi \in \mathcal{H}^k$, segue que $\varphi^{(k)}$ é positivo. ■

Proposição 1.25 *Se $\mathcal{S}$ é um sistema de operadores de uma C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ e $\varphi : \mathcal{S} \to \mathfrak{B}$ é 2-positiva e unital, então*

i) φ é contrativa;

ii) se $a \in \mathcal{S}$ e $a^*a \in \mathcal{S}$ então $\varphi(a)^*\varphi(a) \leq \varphi(a^*a)$.

Demonstração.

i. Seja $a \in \mathcal{S}$ com $\|a\| \leq 1$. Então $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{bmatrix}$ é positivo em $\mathbb{M}_2(\mathcal{S})$ pela Proposição 1.5 (i), e como $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ pela Proposição 1.11 e φ é 2-positiva, temos que $\begin{bmatrix} 1 & \varphi(a) \\ \varphi(a)^* & 1 \end{bmatrix}$ é positivo. Pela Proposição 1.5 (iii) segue que $\varphi(a)^*\varphi(a) \leq 1$, e assim $\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| \leq 1$, ou seja, $\|\varphi\| \leq 1$, e portanto φ é contrativa.

ii. Basta notar que $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & a^*a \end{bmatrix}$ é positiva em $\mathbb{M}_2(\mathcal{S})$ e assim $\begin{bmatrix} 1 & \varphi(a) \\ \varphi(a)^* & \varphi(a^*a) \end{bmatrix}$ é positiva, e pela Proposição 1.5 (ii) temos que $\varphi(a)^*\varphi(a) \leq \varphi(a^*a)$. ■

Proposição 1.26 *Uma aplicação linear $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ é n-positiva se, e somente se,*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi(x_i^* x_j) y_j \geq 0,$$

$\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{A}$ e $\forall\, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{B}$.

Demonstração. Suponha que φ seja n-positiva. Sejam $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{A}$ e $y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{B}$. A matriz $[x_i^* x_j] \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é positiva pela discussão feita anteriormente à Proposição 1.2, e portanto $\varphi^{(n)}([x_i^* x_j]) = [\varphi(x_i^* x_j)] \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{B})$ é positivo. Segue da Proposição 1.3 que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi(x_i^* x_j) y_j$$

é positivo em $\mathfrak{B}$.

Suponha agora que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi(x_i^* x_j) y_j$ seja positivo em $\mathfrak{B}$, para quaisquer $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{A}$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathfrak{B}$. Seja $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ positivo. Escreva essa matriz como uma soma de matrizes positivas, ou seja, $[a_{ij}] = \sum_{k=1}^{n} [c_{ki}^* c_{kj}]$, pela Proposição 1.2. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi(a_{ij}) y_j &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi\Big(\sum_{k=1}^{n} c_{ki}^* c_{kj}\Big) y_j \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi(c_{ki}^* c_{kj}) y_j\Big) \geq 0. \end{aligned}$$

Como isso vale para quaisquer $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathfrak{B}$, tem-se pela Proposição 1.3 que $[\varphi(a_{ij})] \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{B})$ é positivo, ou seja, $\varphi^{(n)}([a_{ij}])$ é positivo. Portanto φ é n-positivo. ■

A seguir mostramos a recíproca do Teorema de Stinespring, o qual será demonstrado no final desse primeiro capítulo.

Proposição 1.27 *Sejam $\mathfrak{A}$ uma C^*-álgebra, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ espaços de Hilbert, $\pi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um $*$-homomorfismo e $V : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ uma aplicação linear limitada. Então $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ definido por $\phi(a) = V^* \pi(a) V$ é completamente positivo.*

Demonstração. Seja $A = [a_{ij}]$ positiva em $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$. Então existe $B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ tal que $A = B^* B$, ou seja,

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}^* b_{kj}, \quad \forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Note que

$$\varphi^{(n)}([a_{ij}]) \quad = \quad [\varphi(a_{ij})] = [V^* \pi(a_{ij}) V]$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[V^* \left(\sum_{k=1}^{n} \pi(b_{ki}^*)\pi(b_{kj})\right) V\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} [V^* \pi(b_{ki}^*)\pi(b_{kj}) V].
\end{aligned}
$$

Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, a matriz

$$
P_k = [\pi(b_{ki}^*)\pi(b_{kj})]_{ij} = [\pi(b_{ki})^* \pi(b_{kj})]_{ij},
$$

em $\mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, é um operador de $\mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$ e é positivo pela discussão feita anteriormente à Proposição 1.2. Considere a soma direta de n cópias de V, a saber $v := V \oplus \cdots \oplus V : \mathcal{K}^n \to \mathcal{H}^n$ definida por $v(k_1, \ldots, k_n) = (V(k_1), \ldots, V(k_n))$ para todo $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathcal{K}^n$. Uma conta simples mostra que $v^* = V^* \oplus \cdots \oplus V^*$ e que $[V^* \pi(b_{ki}^*)\pi(b_{kj}) V] = v^* P_k v$. Segue que $v^* P_k v$ é positivo em $\mathcal{B}(\mathcal{K}^n)$ pois

$$
\langle (v^* P_k v)\xi, \xi \rangle = \langle P_k(v\xi), v\xi \rangle \geq 0, \ \forall \ \xi \in \mathcal{K}^n.
$$

Portanto $\varphi^{(n)}([a_{ij}])$ é uma soma finita de matrizes positivas, logo positiva. Dessa forma φ é completamente positiva. ■

Definição 1.28 Uma aplicação $\varphi : \mathcal{M} \to \mathfrak{B}$ é dita *completamente limitada* se $\|\varphi\|_{cb} := \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi^{(n)}\| < \infty$.

Proposição 1.29 *Uma aplicação completamente positiva $\varphi : \mathcal{S} \to \mathfrak{B}$ é completamente limitada e $\|\varphi(1)\| = \|\varphi\| = \|\varphi\|_{cb}$.*

Demonstração. Primeiramente note que

$$
\|\varphi(1)\| \leq \|\varphi\| \leq \sup_n \|\varphi^{(n)}\| = \|\varphi\|_{cb}.
$$

Para mostrar que φ é completamente limitada e concluir a demonstração dessa proposição vamos mostrar que $\|\varphi\|_{cb} \leq \|\varphi(1)\|$. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e considere $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{S})$ tal que $\|A\| \leq 1$ e considere a matriz identidade $I \in \mathbb{M}_n(\mathcal{S})$. Pela Proposição 1.5 a matriz

$$
P = \begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix}
$$

é positiva em $\mathbb{M}_2(\mathbb{M}_n(\mathcal{S})) \cong \mathbb{M}_{2n}(\mathcal{S})$. Seja $\varphi^{(2n)} : \mathbb{M}_{2n}(\mathcal{S}) \to \mathbb{M}_{2n}(\mathfrak{B})$.

Então

$$\varphi^{(2n)}(P) = \begin{bmatrix} \varphi(1) & \cdots & \varphi(0) & \varphi(a_{11}) & \cdots & \varphi(a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(0) & \cdots & \varphi(1) & \varphi(a_{n1}) & \cdots & \varphi(a_{nn}) \\ \varphi(a_{11}^*) & \cdots & \varphi(a_{n1}^*) & \varphi(1) & \cdots & \varphi(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(a_{1n}^*) & \cdots & \varphi(a_{nn}^*) & \varphi(0) & \cdots & \varphi(1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \varphi^{(n)}(I) & \varphi^{(n)}(A) \\ \varphi^{(n)}(A)^* & \varphi^{(n)}(I) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Mas pela Proposição 1.5 (iii) temos $\|\varphi^{(n)}(A)\| \leq \|\varphi^{(n)}(I)\| = \|\varphi(1)\|$. Assim $\|\varphi^{(n)}\| \leq \|\varphi(1)\|$ para todo n natural, ou seja, $\|\varphi\|_{cb} \leq \|\varphi(1)\|$ como queríamos. ■

Na demonstração da próxima proposição usaremos conceitos relacionados com o produto tensorial algébrico entre espaços de Hilbert. O leitor poderá encontrar a teoria completa para o produto tensorial algébrico entre espaços vetoriais em (Wegge-Olsen, T.2), por exemplo. Dados dois espaços vetoriais $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$, denotamos o produto tensorial algébrico de tais espaços por $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$. Se tais espaços são de Hilbert, podemos munir $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ com o único produto interno $\langle .,. \rangle$ que satisfaz $\langle \xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \langle \eta_1, \eta_2 \rangle$, $\forall \xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2 \in \mathcal{H} \odot \mathcal{K}$, e após isso podemos ainda completá-lo para torná-lo um espaço de Hilbert. Denotamos tal completamento por $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Para se certificar disso veja por exemplo a Proposição 4.14.

Agora, se $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $R : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, são tais que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $R \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, então existe uma único operador linear $T \otimes R : \mathcal{H} \otimes K \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, $T \otimes R \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, tal que $T \otimes R(\xi \otimes \eta) = T(\xi) \otimes R(\eta)$, para quaisquer $\xi \in \mathcal{H}$, $\eta \in \mathcal{K}$ (veja Proposição 4.15) . Se A, B são $*$-álgebras então existe único produto e existe única involução sobre $A \odot B$, de modo que $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$ e $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$ (veja Proposição 4.16). Com isso em mãos vamos demonstrar o resultado que segue:

Proposição 1.30 *Sejam $\mathfrak{B}$ uma C^*-álgebra e $\{E_{ij}\}$ base canônica de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Uma aplicação $\varphi : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{B}$ é completamente positiva se, e somente se, $[\varphi(E_{ij})]_{ij}$ é positiva em $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$.*

Demonstração. Suponha que $A = [\varphi(E_{ij})]_{ij} \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{B})$ seja positivo. Existe um único $B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ positivo tal que $B^2 = A$ veja

(Murphy, Teorema 2.2.1). Então $\varphi(E_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}^* b_{kj}$. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert tal que $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Defina o operador $V : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}$ por

$$V(\eta) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j \otimes x_k \otimes b_{kj}\eta,$$

em que $\{x_i\}$ é a base ortonormal padrão de $\mathbb{C}^n$. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \pi : & M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}) \\ & T & \longmapsto & T \otimes 1 \otimes 1 \end{array},$$

que é um $*$-homomorfismo pelos comentários feitos nos dois parágrafos que antecedem essa proposição.

Note que para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ tem-se

$$\begin{aligned}
& \langle (V^* \pi(T) V)\eta, \xi \rangle = \\
= \; & \langle (T \otimes 1 \otimes 1) V\eta, V\xi \rangle \\
= \; & \left\langle (T \otimes 1 \otimes 1) \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j \otimes x_k \otimes b_{kj}\eta, \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x_i \otimes x_l \otimes b_{li}\xi \right\rangle \\
= \; & \left\langle \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} Tx_j \otimes x_k \otimes b_{kj}\eta, \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x_i \otimes x_l \otimes b_{li}\xi \right\rangle \\
= \; & \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \langle Tx_j, x_i \rangle \langle x_k, x_l \rangle \langle b_{kj}\eta, b_{li}\xi \rangle \\
= \; & \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle Tx_j, x_i \rangle \langle b_{kj}\eta, b_{ki}\xi \rangle = \\
= \; & \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle (T_{1j}, \ldots, T_{ij}, \ldots, T_{nj}), (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \rangle \langle b_{kj}\eta, b_{ki}\xi \rangle \\
= \; & \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} T_{ij} \langle b_{kj}\eta, b_{ki}\xi \rangle \\
= \; & \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} T_{ij} \; \langle b_{ki}^* b_{kj}\eta, \xi \rangle \\
= \; & \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} T_{ij} \left\langle \sum_{k=1}^{n} b_{ki}^* b_{kj}\eta, \xi \right\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} T_{ij}\varphi(E_{ij})\eta, \xi \right\rangle \\
&= \langle \varphi(T)\eta, \xi \rangle.
\end{aligned}
$$

Portanto $\varphi(T) = V^*(T \otimes 1 \otimes 1)V = V^*\pi(T)V$, e φ é completamente positiva pela Proposição 1.27.

Para mostrar a outra implicação suponha que $\varphi : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{A}$ seja completamente positiva. Mostremos que $E = [E_{ij}] \in M_n(M_n(\mathbb{C}))$ é positiva e assim obtemos a positividade de $\varphi^{(n)}(E) = [\varphi(E_{ij})]$. Não é difícil observar que E é autoadjunta e que $E^2 = nE$; donde obtemos que

$$
\langle Ex, x \rangle = \frac{1}{n}\langle E^2 x, x \rangle = \frac{1}{n}\langle Ex, Ex \rangle \geq 0, \ \ \forall\, x \in \mathbb{C}^{n^2}.
$$

Isso significa que E é positivo. Portanto $[\varphi(E_{ij})] \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é postivo como queríamos. ■

Para o leitor que não está familiarizado com os conceitos relacionados com o produto tensorial algébrico entre espaços vetoriais, daremos uma outra demonstração para a volta do resultado anterior:

Demonstração. Note que se $A = [a_{st}]_{st}, B = [b_{st}]_{st} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ então $A = \sum_{s,t=1}^{n} a_{st}E_{st}$ e $B = \sum_{s,t=1}^{n} b_{st}E_{st}$, $AB = [\sum_{r=1}^{n} a_{sr}b_{rt}]_{st}$ e portanto temos $AB = \sum_{s,t=1}^{n}(\sum_{r=1}^{n} a_{sr}b_{rt}E_{st}) = \sum_{s,t,r=1}^{n} a_{sr}b_{rt}E_{st}$ e $A^*B = \sum_{s,t,r=1}^{n} \overline{a_{rs}}b_{rt}E_{st}$. Seja $k \in \mathbb{N}$ qualquer. Sejam $B_1, B_2, \ldots, B_k$ em $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ e $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \in \mathcal{H}$. Escreva para cada $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $B_l = [b_{st}^l]_{st}$ e note que $B_i^* B_j = \sum_{s,t,r=1}^{n} \overline{b_{rs}^i}.b_{rt}^j E_{st}$. Defina o seguinte vetor $\eta_{tr} = \sum_{j=1}^{k} b_{rt}^j \xi_j$ em $\mathcal{H}$. Denotanto $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\langle [\varphi(B_i^* B_j)]\xi, \xi \rangle = \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} \langle \varphi(B_i^* B_j)\xi_j, \xi_i \rangle = \sum_{s,t,r=1}^{n} \left\langle \varphi\left(\sum_{i,j=1}^{k} \overline{b_{rs}^i}.b_{rt}^j E_{st} \right) \xi_j, \xi_i \right\rangle = \\
&\sum_{s,t,r=1}^{n} \left\langle \sum_{i=1}^{k} \overline{b_{rs}^i} \varphi \left(\sum_{j=1}^{k} b_{rt}^j E_{st} \right) \xi_j, \xi_i \right\rangle \\
&= \sum_{s,t,r=1}^{n} \left\langle \varphi \left(\sum_{j=1}^{k} b_{rt}^j E_{st} \right) \xi_j, \sum_{i=1}^{k} b_{rs}^i \xi_i \right\rangle
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{s,t=1}^{n} \langle \varphi\left(E_{st}\right) \eta_{tr}, \eta_{sr} \rangle \right)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \langle [\varphi(E_{st})]_{st}\ \eta_r, \eta_r \rangle \geq 0$$

em que $\eta_r = (\eta_{1r}, \eta_{2r}, \ldots, \eta_{nr}) \in \mathcal{H}^n$. Finalmente, dada uma matriz $B \in \mathbb{M}_k(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ positiva, escreva B como uma soma de matrizes da forma $[B_i^* B_j]_{i,j=1}^k$ tal como vimos na Proposição 1.2, e obtemos $\langle \varphi^{(k)}(B)\xi, \xi \rangle \geq 0$, ou seja, $\varphi^{(k)}$ é positiva e como k foi tomado arbitrariamente, segue que φ é completamente positiva. ■

Exemplo 1.31 *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$. Defina $\varphi : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{A}$ por $\varphi(e_{ij}) = a_i^* a_j$. Então segue do resultado anterior que φ é completamente positiva pois $[\varphi(e_{ij})] = [a_i^* a_j] \geq 0$.*

1.4 Aplicações positivas entre álgebras comutativas

Nesta seção demonstraremos que uma condição suficiente para que uma aplicação positiva $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ seja completamente positiva é que uma das álgebras seja comutativa. Sabemos que se uma C^*-álgebra é comutativa então é C^*-isomorfa a $C_0(X)$ em que X é um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff - veja (Murphy, Teorema 2.1.10). Quando a álgebra em questão tem unidade, X é compacto e então a álgebra é C^*-isomorfa a $C(X)$. Vamos começar pelo caso mais simples em que a álgebra do contradomínio é comutativa.

Proposição 1.32 *Sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ C^*-álgebras. Se $\mathfrak{B}$ é comutativa então qualquer aplicação positiva $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ é completamente positiva.*

Demonstração. Sejam X um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff tal que $\mathfrak{B} = C_0(X)$ e $n \in \mathbb{N}$. Tome $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{A}$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathfrak{B}$. Note que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi(x_i^* x_j) y_j \right)(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i^*(t) \varphi(x_i^* x_j)(t) y_j(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(\overline{y_i(t)} x_i^* x_j y_j(t))(t)$$

$$= \varphi \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{y_i(t)} x_i^* x_j y_j(t) \right)(t)$$

$$= \varphi \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{y_i(t)} x_i^* \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j(t) x_j \right) \right)(t)$$

$$= \varphi \left(\left(\sum_{i=1}^{n} (y_i(t) x_i) \right)^* \left(\sum_{j=1}^{n} y_j(t) x_j \right) \right)(t) \geq 0.$$

Portanto $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i^* \varphi(x_i^* x_j) y_j$ é positivo para todo $n \in \mathbb{N}$, e segue que φ é completamente positiva pela Proposição 1.26. ■

Queremos agora mostrar que uma aplicação positiva, entre C^*-álgebras, é completamente positiva se a álgebra do domínio é comutativa e tem unidade. Para isso precisamos de alguns resultados auxiliares. Lembramos novamente ao leitor o cálculo funcional contínuo, sendo agora necessários mais detalhes:

Dado uma elemento normal a de uma C^*-álgebra com unidade $1_{\mathfrak{A}}$, o cálculo funcional contínuo é um $*$-isomorfismo isométrico de $C^*(a, 1)$ em $C(\sigma(a))$, em que a é levado na aplicação inclusão $z : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ e a identidade da álgebra $1_{\mathfrak{A}}$ é levada na identidade da álgebra das funções contínuas definidas no espectro de a, $C(\sigma(a))$. Dada uma $f \in C(\sigma(a))$ a representamos em $C^*(a, 1)$ como $f(a)$. Portanto se $f, g \in C(\sigma(a))$ temos que $(fg)(a) = f(a)g(a)$, $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$ e $\overline{f}(a) = f(a)^*$, decorrente do cálculo funcional ser $*$-homomorfismo. Note que a função unidade $1 : \sigma(a) \to \mathbb{C}$, $1(x) = 1 \in \mathbb{C}$ para todo x em $\sigma(a)$, corresponde a $1(a) = 1_{\mathfrak{A}}$, e a função inclusão $z : \sigma(a) \to \mathbb{C}$, $z(x) = x \in \sigma(a)$, corresponde a $z(a) = a$.

Vamos provar alguns resultados que nos permitirão demonstrar que toda aplicação positiva $\varphi : C(X) \to \mathfrak{B}$ é completamente positiva, em que X é um espaço topológico compacto e Hausdorff.

Seja $\mathfrak{C} = C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ o espaço vetorial das aplicações contínuas de um espaço topológico compacto X na C^*-álgebra das matrizes complexas. Para $F \in \mathfrak{C}$ e $x \in X$ escrevemos $F(x) = [f_{ij}(x)] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Note que $\mathfrak{C}$ tem estrutura $*$-algébrica se munido com as operações $(F.G)(x) = F(x)G(x)$, $(F+G)(x) = F(x)+G(x)$ e $F^*(x) = [\overline{f_{ji}(x)}]_{ij} = (F(x))^*$, $x \in X$. Observe também que para cada $i, j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ temos $f_{ij} \in C(X)$ pois para quaisquer $x, y \in X$ tem-se

$$\|f_{ij}(x) - f_{ij}(y)\| \leq \|[f_{kl}(x) - f_{kl}(y)]_{kl}\| = \|F(x) - F(y)\|.$$

Note ainda que $\mathfrak{C}$ tem unidade $1_{\mathfrak{C}} : X \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, em que $1_{\mathfrak{C}}(x) = I_n$ para todo $x \in X$. Portanto, se $H \in \mathfrak{C}$ é invertível então existe $G \in \mathfrak{C}$ tal que $HG = GH = 1_{\mathfrak{C}}$, ou seja, $H(x)G(x) = G(x)H(x) = I_n$ para todo $x \in X$ e $H(x)$ é uma matriz invertível para todo $x \in X$. Se agora temos $x \in X$ e $H \in \mathfrak{C}$ então $\sigma(H(x)) \subseteq \sigma(H)$. De fato, se $\lambda \in \sigma(H(x))$ então $H(x) - \lambda I_n = (H - \lambda 1_{\mathfrak{C}})(x)$ não é invertível, e devemos ter $H - \lambda 1_{\mathfrak{C}}$ não invertível em $\mathfrak{C}$, ou seja, $\lambda \in \sigma(H)$. Portanto $\sigma(F(x)) \subseteq \sigma(F)$ para todo $x \in X$ e $F \in \mathfrak{C}$.

Lema 1.33 *$\mathfrak{C} = C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ é uma C^*-álgebra com norma definida por $\|F\| = \sup\{\|F(x)\|;\ x \in X\}$, e é C^*-isomorfa a $M_n(C(X))$.*

Demonstração. Primeiro, mostremos que $\|.\|$ é norma. Como X é compacto segue que $\|F\| < \infty$. Claramente temos $\|F\| \geq 0$ e, $F = 0$ se, e somente se, $\|F\| = 0$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ então $\|(\lambda F)(x)\| = |\lambda|\|F(x)\| \leq |\lambda|\|F\|$ para todo $x \in X$ e temos $\|\lambda F\| \leq |\lambda|\|F\|$. Consequentemente $\|F\| = \left\|\dfrac{1}{\lambda}(\lambda F)\right\| \leq \dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda F\|$ para $\lambda \neq 0$, e portanto $|\lambda|\|F\| \leq \|\lambda F\|$. Assim $\|\lambda F\| = |\lambda|\|F\|$. Observe que se $\lambda = 0$ então a igualdade anterior é trivialmente verificada. Note que se $F, G \in \mathfrak{C}$ então $\|F(x) + G(x)\| \leq \|F(x)\| + \|G(x)\| \leq \|F\| + \|G\|$ para todo $x \in X$. Assim $\|F + G\| \leq \|F\| + \|G\|$. Então $\|.\|$ é norma sobre $\mathfrak{C}$.

Ainda, $\|F^*\| = \sup\{\|(F(x))^*\|; x \in X\} = \sup\{\|F(x)\|; x \in X\} = \|F\|$. Observe que para cada $x \in X$, temos $\|(FG)(x)\| = \|F(x)G(x)\| \leq \|F(x)\|\|G(x)\| \leq \|F\|\|G\|$, ou seja, $\|FG\| \leq \|F\|\|G\|$. Até aqui provamos que $\mathfrak{C}$ é uma $*$-álgebra normada.

Vamos mostrar que com essa norma, $\mathfrak{C}$ é uma $*$-álgebra de Banach. Seja $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathfrak{C}$ e $\varepsilon > 0$. Então existe um número natural N tal que para todo $m, k \geq N$ tem-se $\|F_k - F_m\| < \varepsilon$. Em outras palavras, $\|F_k(x) - F_m(x)\| < \varepsilon$ e temos para cada $x \in X$ que sequência $(F_k(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy e convergente para um $F(x) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ pois $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é completo. Vamos mostrar que $(F_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $F : X \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Fixe $x \in X$. Existe um $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq m_0$ então $\|F_m(x) - F(x)\| < \varepsilon$. Sejam $k \geq N$ e $m \geq \max\{m_0, N\}$. Então

$$\|F_k(x) - F(x)\| \leq \|F_k(x) - F_m(x)\| + \|F_m(x) - F(x)\| < 2\varepsilon.$$

Assim $\|F_k - F\| = \sup\{\|F_k(x) - F(x)\|;\ x \in X\} \leq 2\varepsilon$ para todo $k \geq N$ e a sequência $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para F. Resta mostrar que F é contínua. Para isso note que

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|F(x) - F_N(x)\| +$$

$$
\begin{aligned}
&+ \|F_N(x) - F_N(y)\| + \|F_N(y) - F(y)\| \\
&\leq 2\|F_N - F\| + \|F_N(x) - F_N(y)\|,
\end{aligned}
$$

para quaisquer $x, y \in X$.

Fixado $x \in X$ existe um aberto U de X tal que se $y \in U$ temos $\|F_N(x) - F_N(y)\| < \varepsilon$ pois F_N é contínua. Portanto se $y \in U$ temos $\|F(x) - F(y)\| < 3\varepsilon$. Segue que $F \in C(X, M_n(\mathbb{C}))$. Logo $\mathfrak{C}$ é Banach. Assim $\mathfrak{C}$ é uma $*$-álgebra de Banach. Mas como

$$
\begin{aligned}
\|F^*F\| &= \sup\{\|(F^*F)(x)\|;\ x \in X\} = \sup\{\|F^*(x)F(x)\|;\ x \in X\} = \\
&= \sup\{\|F(x)\|^2;\ x \in X\} = (\sup\{\|F(x)\|;\ x \in X\})^2 = \|F\|^2,
\end{aligned}
$$

segue que $(\mathfrak{C}, \|.\|)$ é uma C^*-álgebra.

Finalmente observamos que a aplicação

$$
\begin{array}{cccc}
T & : & C(X, M_n(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(C(X)) \\
 & & F & \longmapsto & [f_{ij}]
\end{array}
$$

é um $*$-isomorfismo, e, portanto, $C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ e $M_n(C(X))$ são C^*-isomorfos. ■

Observação 1.34 Queremos mostrar que $F \in C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ e $F(x)$ invertível para todo $x \in X$ é uma condição necessária e suficiente para que F seja invertível. Suponha que $F \in C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ e que $F(x)$ seja invertível para todo $x \in X$. Por (Murphy, Teorema 1.2.3) é sabido que a aplicação $\mathrm{inv} : GL(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $A \mapsto A^{-1}$, é contínua já que a álgebra $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é de Banach e unital. Portanto a aplicação composição $G = \mathrm{inv} \circ F$, $x \mapsto (F(x))^{-1}$, é contínua já que F também é contínua. Note que $(F \cdot G)(x) = F(x)G(x) = F(x)(F(x))^{-1} = I_n = 1_{\mathfrak{C}}(x)$ para todo $x \in X$. Então $FG = 1_{\mathfrak{C}}$. Analogamente, temos $GF = 1_{\mathfrak{C}}$. Assim, F é invertível. Reciprocamente, suponha que F seja contínua e invertível. Logo, existe $G \in C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$, de modo que $FG = GF = 1_{\mathfrak{C}}$. Então $F(x)G(x) = G(x)F(x) = I_n$ para todo $x \in X$. Portanto $F(x)$ é invertível para todo $x \in X$.

Lema 1.35 *Se X é um espaço topológico compacto e Hausdorff então $C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))_+ = C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})_+)$, em que o símbolo $+$ representa os elementos positivos da C^*-álgebra em questão.*

Demonstração. Seja $F \in C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))_+$, ou seja, $F = G^*G$ para algum $G \in C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$. Note que para todo $x \in X$, temos $F(x) = G^*(x)G(x) = (G(x))^*G(x) \geq 0$. Temos portanto que $C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))_+ \subseteq C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})_+)$.

Tome agora $F \in C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})_+)$. Note que F é autoadjunto. De fato, $F^*(x) = (F(x))^* = F(x)$, para todo $x \in X$, ou seja, $F = F^*$. Vamos mostrar que o espectro de F é formado por elementos positivos. Seja $\lambda \in \sigma(F)$, ou seja, $F - \lambda 1_{\mathfrak{C}}$ é não invertível. Como tal função é contínua, segue da Observação 1.34 que existe um $x \in X$ de modo que $F(x) - \lambda I_n$ é não inversível, ou seja, $\lambda \in \sigma(F(x)) \subset \mathbb{R}_+$. Assim F é positivo. ■

Proposição 1.36 *Sejam X espaço topológico compacto Hausdorff e $\varphi : C(X) \to \mathfrak{A}$ positiva. Então φ é completamente positiva.*

Demonstração. Seja n um número natural. Tome $F \in \mathbb{M}_n(C(X))$ tal que $F = f.T$ em que $f \in C(X)$ e $T = [T_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Note que $\varphi^{(n)}(F) = \varphi^{(n)}([fT_{ij}]) = [\varphi(fT_{ij})] = [\varphi(f)T_{ij}] = \varphi(f)T$. Supondo T positivo, escreva $T = M^*M$ em que $M = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Supondo $f \geq 0$ então $\varphi(f) \geq 0$ e podemos denotar $\varphi(f) = b^*b \in \mathfrak{A}$. Observe que $\varphi^{(n)}(F) \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é positivo pois

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(n)}(F) &= \varphi(f)T = b^*b\,[\overline{a_{ji}}][a_{ij}] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} b^*b\overline{a_{ki}}a_{kj}\right]_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{n}(\overline{a_{ki}}b^*)(a_{kj}b)\right]_{ij} \\
&= [\overline{a_{ji}}b^*][a_{ij}b] = [a_{ij}b]^*[a_{ij}b] \geq 0.
\end{aligned}
$$

Sejam $\varepsilon > 0$ e $F \in \mathbb{M}_n(C(X))_+ = C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))_+ = C(X, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})_+)$. Como φ é positiva então é contínua pela Proposição 1.12. Segue daí que $\varphi^{(n)}$ é contínua pela Observação 1.17. Assim existe um $\delta > 0$ tal que se $\|G - F\| \leq \delta$ então $\|\varphi^{(n)}(G) - \varphi^{(n)}(F)\| < \varepsilon$. Como F é contínua então para cada $x \in X$, existe uma vizinhança aberta V_x de x tal que para todo $y \in V_x$ temos $\|F(x) - F(y)\| < \frac{\delta}{2}$. Pela compacidade de X podemos considerar $\{V_{x_i}\}_{i=1}^k$ uma cobertura finita para X. Note que se $y, z \in V_{x_i}$ então $\|F(y) - F(z)\| < \delta$. Tome $\{p_i\}_{i=1}^k$ uma partição da unidade subordinada a $\{V_{x_i}\}_{i=1}^k$, ou seja, $p_i : X \to [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ é contínua, $p_i = 0$ em $X - V_{x_i}$ e $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ em X - veja mais sobre partição da unidade em (Willard, 20.C). Denote $G = \sum_{i=1}^k p_i F(x_i) \in \mathbb{M}_n(C(X))$. Observe que $p_i(x) > 0$ implica $x \in V_{x_i}$, donde segue $\|F(x) - F(x_i)\| < \delta$. Então

$$
\begin{aligned}
\|F(x) - G(x)\| &= \|F(x)\sum_{i=1}^k p_i(x) - \sum_{i=1}^k p_i(x)F(x_i)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^k p_i(x)\|F(x) - F(x_i)\| < \delta,
\end{aligned}
$$

para todo $x \in X$ pois podemos supor, sem perda de generalidade, que $x \in V_{x_1}, \dots, V_{x_l}$, e $x \notin V_{x_{l+1}}, \dots, V_{x_k}$, para algum $l \leq k$, e usamos ainda que $p_i(x) \leq 1$. Portanto $\|F - G\| \leq \delta$ e daí temos $\|\varphi^{(n)}(F) - \varphi^{(n)}(G)\| < \varepsilon$. Note que $\varphi^{(n)}(G) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(p_i)F(x_i) \geq 0$. Isso mostra que $\varphi^{(n)}(F)$ é limite de uma sequência de elementos positivos em $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$, e como o conjunto dos elementos positivos de uma C^*-álgebra é fechado, segue que $\varphi^{(n)}(F)$ é positivo. Já que n foi tomado de forma arbitrária então φ é completamente positivo. ■

1.5 Teorema de dilatação de Stinespring

Na Proposição 1.27, tinhamos um $*$-homomorfismo $\pi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e uma aplicação limitada $V : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, e foi possível mostrar que a aplicação $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$, $\varphi = V^*\pi V$, é uma aplicação completamente positiva. Queremos agora dar uma recíproca para esse resultado, o Teorema de Stinespring, ou seja, mostraremos que toda aplicação completamente positiva unital do tipo $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é, em certo sentido, “canto"de uma $*$-representação $\pi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$, em que $\mathcal{K}$ é um espaço de Hilbert “contendo"$\mathcal{H}$. O leitor poderá encontrar a demonstração desse teorema em (Paulsen, Teorema 4.1) ou em (Davidson, Teorema IX.4.3), no caso em que a álgebra $\mathfrak{A}$ é unital, e em (Lin, Teorema 2.1.5) no caso em que a álgebra é não unital, fazendo-se o uso nesse caso do conceito da unidade aproximada para uma C^*-álgebra. Demonstraremos o Teorema de Stinespring fundamentados nas ideias abordadas naquelas duas primeiras referências.

Teorema 1.37 *Sejam $\mathfrak{A}$ uma C^*-álgebra unital e $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ completamente positiva. Então existem um espaço de Hilbert $\mathcal{K}$, um $*$-homomorfismo unital $\pi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ e um operador limitado $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ com $\|\varphi(1)\| = \|V\|^2$ tal que $\varphi(a) = V^*\pi(a)V$, para todo $a \in \mathfrak{A}$.*

Demonstração. Vamos demonstrar esse teorema em quatro partes.
Parte 1: (Construção de $\mathcal{K}$). Considere o produto tensorial algébrico $\mathfrak{A} \odot \mathcal{H}$ e defina a aplicação $T : (\mathfrak{A} \odot \mathcal{H}) \times (\mathfrak{A} \odot \mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ por

$$T\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes \xi_i, \sum_{j=1}^{n} b_j \otimes \eta_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \langle \varphi(b_j^* a_i)\xi_i, \eta_j\rangle.$$

Note que T está bem definida pela propriedade universal do produto tensorial algébrico; veja a demonstração da Proposição 4.5. Observe que, pelo modo como T foi definido, T é linear na primeira entrada e conjugado-linear na segunda entrada. Sabemos que a matriz $[a_i^* a_j] \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é positiva para quaisquer escolhas de $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathfrak{A}$. Para mostrar que T é semi-positivo-definido seja $\sum_{i=1}^n a_i \otimes \xi_i \in \mathfrak{A} \odot \mathcal{H}$ e denote $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{H}^n$. Como φ é completamente positivo tem-se $\varphi^{(n)}([a_i^* a_j]) \geq 0$. Assim

$$T\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes \xi_i, \sum_{j=1}^n a_j \otimes \xi_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \varphi(a_j^* a_i)\xi_i, \xi_j\rangle$$
$$= \sum_{j=1}^n \left\langle \sum_{i=1}^n \varphi(a_j^* a_i)\xi_i, \xi_j \right\rangle = \langle \varphi^{(n)}[a_j^* a_i]\xi, \xi\rangle \geq 0.$$

Lembre que para formas sesquilineares semi-positivo-definidas vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz : $|T(u,v)|^2 \leq T(u,u)T(v,v)$. Com base nesse fato observe que

$$\begin{aligned} N &:= \{v \in \mathfrak{A} \odot \mathcal{H};\ T(v,v) = 0\} \\ &= \{v \in \mathfrak{A} \odot \mathcal{H};\ T(v,u) = 0,\ \ \forall u \in \mathfrak{A} \odot \mathcal{H}\} \end{aligned}$$

é uma subespaço vetorial de $\mathfrak{A} \odot \mathcal{H}$. E daí a aplicação $\langle u+N, v+N\rangle = T(u,v)$ sobre o espaço quociente $(\mathfrak{A} \odot \mathcal{H})/N$ define um produto interno sobre o mesmo. Seja $\mathcal{K}$ o completamento de $(\mathfrak{A} \odot H)/N$ na norma induzida por $\langle\ ,\rangle$. Então $(\mathcal{K}, \langle , \rangle)$ é um espaço de Hilbert.

Parte 2: (Construção do homomorfismo). Para cada $a \in \mathfrak{A}$ defina a aplicação

$$\begin{array}{rccc} f_a & : & \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H} \\ & & \displaystyle\sum_{i=1}^n b_i \otimes \xi_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n ab_i \otimes \xi_i \end{array}.$$

Observe que f_a é linear por construção, e está bem definida pela propriedade universal do produto tensorial algébrico; veja a demonstração da Proposição 4.5. Note que para quaisquer $a, b \in \mathfrak{A}$ temos $f_a \circ f_b = f_{ab}$. Provemos agora que para quaisquer $v, w \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}$ e para todo $a \in \mathfrak{A}$ é válido que

$$T(v, f_{a^*}(w)) = T(f_a(v), w).$$

Para isso escreva $v = \sum_{j=1}^n b_j \otimes \xi_j$, $w = \sum_{i=1}^m c_i \otimes \eta_i$ e observe que

$$T(f_a(v), w) = T\left(\sum_{j=1}^n ab_j \otimes \xi_j, \sum_{i=1}^m c_i \otimes \eta_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\langle \varphi(c_i^* a b_j)\xi_j, \eta_i\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\langle \varphi((a^* c_i)^* b_j)\xi_j, \eta_i\rangle$$
$$= T\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \otimes \xi_j, \sum_{i=1}^{m} a^* c_i \otimes \eta_i\right) = T(v, f_{a^*}(w)).$$

Provemos agora que $T(f_a(v), f_a(v)) \leq \|a\|^2 T(v,v)$. Considere $v = \sum_{j=1}^{n} b_j \otimes \xi_j \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{H}^n$ e $[c_{ij}] = [b_i^* a^* a b_j] \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$, $a \in \mathfrak{A}$. Note que

$$\begin{aligned} & T(f_a(v), f_a(v)) = T(v, f_{a^*}(f_a(v))) = T(v, f_{a^*a}(v)) \\ = \;& T\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \otimes \xi_j, \sum_{i=1}^{n} (a^* a b_i) \otimes \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left\langle \sum_{j=1}^{n} \varphi(b_i^* a^* a b_j)\xi_j, \xi_i)\right\rangle \\ = \;& \langle \varphi^{(n)}[c_{ij}]\xi, \xi\rangle. \end{aligned}$$

Além disso observe que para $A = (a^*a).1_{\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})}$, temos que

$$[c_{ij}] = \begin{pmatrix} b_1^* & 0 & \ldots & 0 \\ b_2^* & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^* & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente, $\|A\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$ e $A \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é positiva. Consequentemente, pelo Teorema de Gelfand-Naimark tem-se $A \leq \|a\|^2.1_{\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})}$. Assim

$$0 \leq [c_{ij}] \leq \begin{pmatrix} b_1^* & 0 & \ldots & 0 \\ b_2^* & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^* & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \|a\|^2.1_{\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \|a\|^2 [b_i^* b_j],$$

donde $0 \leq \varphi^{(n)}([c_{ij}]) \leq \|a\|^2 \varphi^{(n)}[b_i^* b_j]$ e portanto

$$\begin{aligned} T(f_a(v), f_a(v)) &= \langle \varphi^{(n)}[c_{ij}]\xi, \xi\rangle \leq \|a\|^2 \langle \varphi^{(n)}[b_i^* b_j]\xi, \xi\rangle \\ &= \|a\|^2 \sum_{i=1}^{n}\langle \sum_{j=1}^{n} \varphi(b_i^* b_j)\xi_j, \xi_i\rangle = \|a\|^2 T(v,v). \end{aligned}$$

Segue da desigualdade acima e do fato de T ser semi-positivo-definido que se $v \in N$ então $f_a(v) \in N$. Isso nos permite afirmar que a aplicação linear $\pi_a : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ definida por $\pi_a([v]) = [f_a(v)]$, $\forall\ [v] \in \mathcal{K}$, está bem definida. Note que π_a é limitada pois

$$\|\pi_a([v])\|^2 = \|[f_a(v)]\|^2 = T(f_a(v), f_a(v)) \leq \|a\|^2 T(v,v) = \|a\|^2 \|[v]\|^2.$$

Podemos definir então $\pi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ por $\pi(a) = \pi_a$.

Parte 3: (π é $*$-homomorfismo unital).

Sejam $v, u \in \mathfrak{A} \odot \mathcal{H}$ e $b \in \mathfrak{A}$. Então note que

$$\begin{aligned} &\langle \pi(b)([v]), [u] \rangle = \langle [f_b(v)], [u] \rangle \\ &= T(f_b(v), u) = T(v, f_b^*(u)) = \langle [v], \pi(b^*)([u]) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto temos que π preserva estrela. Note que π preserva produto pois

$$\begin{aligned} &\pi(ab)([v]) = [f_{ab}(v)] = [f_a(f_b(v))] \\ &= \pi(a)(\pi(b)[v]) = (\pi(a) \circ \pi(b))[v]. \end{aligned}$$

Portanto π é unital pois $\pi(1)[v] = [f_1(v)] = [v]$ para todo $[v]$ em $\mathcal{K}$.

Parte 4 : (Construção da aplicação limitada V)

Defina a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} V & : \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{K} \\ & \xi & \longmapsto & [1 \otimes \xi] \end{array}.$$

Então V é limitada pois

$$\begin{aligned} &\|V(\xi)\|^2 = \langle [1 \otimes \xi], [1 \otimes \xi] \rangle = T(1 \otimes \xi, 1 \otimes \xi) \\ &= \langle \varphi(1^*1)\xi, \xi \rangle \leq \|\varphi(1)\| \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Além disso temos $\|V\|^2 = \sup\{\langle \varphi(1)\xi, \xi \rangle;\quad \|\xi\| \leq 1\} = \|\varphi(1)\|$; veja (Kreyszig, Teorema 9-2-2). Finalmente concluimos nossa demonstração mostrando que para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle (V^*\pi(a)V)\xi, \eta \rangle &= \langle \pi(a)V(\xi), V(\eta) \rangle = \langle \pi(a)[1 \otimes \xi], [1 \otimes \eta] \rangle \\ &= \langle [f_a(1 \otimes \xi)], [1 \otimes \eta] \rangle = \langle [a \otimes \xi], [1 \otimes \eta] \rangle \\ &= T(a \otimes \xi, 1 \otimes \eta) = \langle \varphi(a)\xi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Assim temos $\varphi(a) = V^*\pi(a)V$ para todo $a \in \mathfrak{A}$ como queríamos. ■

Observação 1.38 Note que, se a aplicação completamente positiva φ do Teorema de Stinespring for unital, então o operador V é uma isometria e podemos encará-lo como a aplicação que inclui $\mathcal{H}$ em $\mathcal{K}$. Noutras palavras, $\mathcal{H}$ é um subespaço de Hilbert de $\mathcal{K}$ e podemos escrever $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\perp}$. Portanto V^* é a projeção de $\mathcal{K}$ sobre $\mathcal{H}$ e para todo $a \in \mathfrak{A}$, é válido que

$$\varphi(a) = \mathcal{P}_{\mathcal{H}} \pi(a)_{|\mathcal{H}},$$

em que $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ é a projeção de $\mathcal{K}$ sobre $\mathcal{H}$. Assim, a $*$-representação π é uma dilatação de φ. Haja vista que a recíproca deste teorema é válida, nesse sentido dizemos que aplicações completamente positivas são canto de $*$-representações.

Capítulo 2

Teoremas de Extensão

O Teorema de Hahn-Banach, ou um dos seus corolários, afirma que se $\mathcal{X}$ é um espaço vetorial normado e $\mathcal{F}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{X}$, então um funcional linear limitado $\varphi : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ pode ser estendido para um funcional linear limitado $\widetilde{\varphi} : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ com mesma norma, ou seja, $\|\varphi\| = \|\widetilde{\varphi}\|$.

No primeiro capítulo usamos o Teorema de Hahn-Banach para mostrar que um funcional linear positivo, definido em um sistema de operadores, pode ser estendido para um funcional linear positivo, ambos com mesma norma, o Teorema 1.14. Nesse segundo capítulo, queremos dar uma versão mais geral para o Teorema de Hahn-Banach, o Teorema de Arveson. Dado um sistema de operadores $\mathcal{S}$ numa C^*-álgebra $\mathfrak{A}$, mostraremos que podemos estender uma aplicação completamente positiva $\varphi : \mathcal{S} \subseteq \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para uma aplicação completamente positiva $\psi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ambas de mesma norma. Primeiramente mostramos o caso em que o contradomínio de tal aplicação é a álgebra das matrizes complexas $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Depois fazemos o mesmo quando o contradomínio é a álgebra dos operadores limitados $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, e para isso teremos que enfraquecer a topologia em $\mathcal{B}(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

2.1 Teorema da extensão de Krein

Sejam $\{e_1, e_2 \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^n$ e $A = [A_{rs}]_{rs} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Então para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ temos que

$$\langle [A_{rs}]e_j, e_i\rangle = \langle (A_{1j}, \ldots, A_{nj}), e_i\rangle = A_{ij}.$$

Considere um sistema de operadores $\mathcal{S}$ e uma aplicação linear $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Para cada $a \in \mathcal{S}$, denote $\varphi(a)_{ij}$ como sendo a entrada (i, j) da matriz complexa $\varphi(a)$ e defina a aplicação $s_\varphi : \mathbb{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ por

$$s_\varphi([a_{ij}]_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi(a_{ij})_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \varphi(a_{ij})e_j, e_i\rangle.$$

Observe que a linearidade de φ e a linearidade na primeira entrada do produto interno, garantem que s_φ é linear.

Seja $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in \mathbb{C}^{n^2}$. Usando a identificação dada pelo isomorfismo $\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{M}_{n^2}(\mathbb{C})$, notamos que

$$\begin{aligned}\langle \varphi^{(n)}([a_{ij}])e, e\rangle &= \langle [\varphi(a_{ij})]e, e\rangle \\ &= \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \langle \varphi(a_{rk})e_k, e_r\rangle = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(a_{kr})_{kr}.\end{aligned}$$

Temos, portanto, que $s_\varphi([a_{ij}]) = \langle \varphi^{(n)}([a_{ij}])e, e\rangle$.

Observe que a aplicação $G : \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \to \mathcal{L}(\mathbb{M}_n(\mathcal{S}), \mathbb{C})$, definida por $G(\varphi) = s_\varphi$, é linear, pois para $\lambda \in \mathbb{C}$ e $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{S})$, quaisquer, tem-se

$$\begin{aligned} G(\varphi + \lambda\psi)|_{[a_{ij}]} &= s_{\varphi+\lambda\psi}([a_{ij}]) \\ &= \frac{1}{n}\langle (\varphi + \lambda\psi)^{(n)}([a_{ij}])e, e\rangle \\ &= \frac{1}{n}\langle [(\varphi + \lambda\psi)(a_{ij})]e, e\rangle \\ &= \frac{1}{n}\langle [\varphi(a_{ij})]e, e\rangle + \frac{1}{n}\lambda\langle [\psi(a_{ij})]e, e\rangle \\ &= s_\varphi([a_{ij}]) + \lambda s_\psi[a_{ij}] \\ &= G(\varphi)|_{[a_{ij}]} + \lambda G(\psi)|_{([a_{ij}])}. \end{aligned}$$

Observação 2.1 No último exemplo do Apêndice-A, é demonstrado que para uma C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ tem-se $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{A} \odot \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Lá é observado que um elemento em $\mathfrak{A} \odot \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, pode ser escrito unicamente como $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes E_{ij}$, em que $a_{ij} \in \mathfrak{A}$ e $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^{m}$ é a base canônica em $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Em suma, cada elemento $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é igual, por meio do isomorfismo mencionado anteriormente, a $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes E_{ij}$. Usaremos a identificação $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \odot \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, no transcorrer dessa seção.

Seja $s : \mathbb{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ linear. Defina aplicação $\varphi_s : \mathcal{S} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ por $\varphi_s(a) = [s(a \otimes E_{ij})]_{ij}$, em que, para cada $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a \otimes E_{kl}$ é matriz em $\mathbb{M}_n(\mathcal{S})$ com a ocupando a entrada (k,l) e as demais entradas da matriz $a \otimes E_{kl}$ são ocupadas pelo zero. É fácil ver que φ_s é linear. Vamos mostrar que as aplicações

$$\begin{array}{rccc} G & : & \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \mathcal{L}(M_n(\mathcal{S}), \mathbb{C}) \\ & & \varphi & \longmapsto & s_\varphi \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathcal{L}(\mathbb{M}_n(\mathcal{S}), \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \\ & & s & \longmapsto & \varphi_s \end{array}$$

são inversas entre si. Note que

$$(F \circ G)(\varphi) = F(G(\varphi)) = F(s_\varphi) = \varphi_{s_\varphi}$$

e pela definição dada para s_φ, segue que

$$(\varphi_{s_\varphi}(a))_{ij} = n.s_\varphi(a \otimes E_{ij}) = \varphi(a)_{ij},$$

e, portanto $(F \circ G)(\varphi) = \varphi$. Além disso, observe que

$$(G \circ F)(s) = G(F(s)) = G(\varphi_s) = s_{\varphi_s},$$

e como

$$s_{\varphi_s}[a_{ij}] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi_s(a_{ij})_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s(a_{ij} \otimes E_{ij}) = s([a_{ij}]),$$

temos $(G \circ F)(s) = s$. Portanto, os espaços vetoriais $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ e $\mathcal{L}(M_n(\mathcal{S}), \mathbb{C})$ são isomorfos.

Lema 2.2 *Sejam $\mathcal{S}$ um sistema de operadores em uma C^*-álgebra $\mathfrak{A}$, e $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ uma aplicação linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

i) φ é completamente positiva;

ii) φ é n-positiva;

iii) s_φ é positiva.

Demonstração. $(iii) \implies (i)$. Suponha que $s_\varphi : \mathbb{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ é positiva. Pelo Teorema 1.14 podemos estender tal aplicação para $s : \mathbb{M}_n(\mathfrak{A}) \to \mathbb{C}$ positiva. Lembre que os espaços vetoriais $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ e $\mathcal{L}(M_n(\mathfrak{A}), \mathbb{C})$ são isomorfos. Seja $\psi : \mathfrak{A} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ associado a s, ou seja, $\psi = \psi_s$. Note que ψ estende φ linearmente, pois qualquer que seja $a \in \mathcal{S}$, temos

$$(\psi_s(a))_{ij} = s(a \otimes E_{ij}) = s_\varphi(a \otimes E_{ij}) = \varphi(a)_{ij} = \varphi(a)_{ij}.$$

Vamos mostrar agora que ψ é completamente positiva. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $[a_i^* a_j]$ positivo em $M_m(\mathfrak{A})$. Queremos provar que $\psi^{(m)} : \mathbb{M}_m(\mathfrak{A}) \to \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ é positivo. Seja $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^{nm}$, em que $x_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} e_k \in \mathbb{C}^n$. Note que

$$\langle \psi^{(m)}[a_i^* a_j]x, x\rangle = \langle [\psi(a_i^* a_j)]x, x\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \psi(a_1^* a_j)x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} \psi(a_m^* a_j)x_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \langle \psi(a_i^* a_j)x_j, x_i\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{jk}\overline{\lambda_{il}} \langle \psi(a_i^* a_j)e_k, e_l\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{jk}\overline{\lambda_{il}} \langle \psi_s(a_i^* a_j)e_k, e_l\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{jk}\overline{\lambda_{il}} \psi_s(a_i^* a_j)_{lk} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{jk}\overline{\lambda_{il}} s(a_i^* a_j \otimes E_{lk}) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} s\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \lambda_{jk}\overline{\lambda_{il}}.a_i^* a_j \otimes E_{lk}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} s\left(a_i^* a_j \otimes \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \lambda_{jk}\overline{\lambda_{il}}.E_{lk}\right)
\end{aligned}$$

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, denote por A_i a matriz em $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ com primeira linha $(\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{in})$ e as outras entradas zero. Então

$$A_i^* A_j = [\overline{\lambda_{il}}\lambda_{jk}]_{lk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{\lambda_{il}}\lambda_{jk} E_{lk}.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}\langle\psi^{(m)}[a_i^*a_j]x,x\rangle &= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m s(a_i^*a_j\otimes A_i^*A_j)\\ &= s\left(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_i^*a_j\otimes A_i^*A_j\right)\\ &= s\left(\left(\sum_{i=1}^m a_i\otimes A_i\right)^*\left(\sum_{j=1}^m a_j\otimes A_j\right)\right)\geq 0.\end{aligned}$$

Segue que ψ é completamente positivo e como ψ estende φ temos φ aplicação completamente positiva.

é óbvio que (i) implica (ii) e para mostrar que (ii) implica (iii), seja $[a_{ij}]\in\mathbb{M}_n(\mathcal{S})$ positivo. Sabemos que $s_\varphi([a_{ij}])=\langle\varphi^{(n)}[a_{ij}]e,e\rangle$. Mas por hipótese $\varphi^{(n)}$ é positivo e portanto s_φ é positivo. ■

Teorema 2.3 *(Teorema de Krein) Sejam $\mathfrak{A}$ uma C^*-álgebra, $\mathcal{S}$ um sistema de operadores e $\varphi:\mathcal{S}\to\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ uma aplicação completamente positiva. Então existe um aplicação completamente positiva $\psi:\mathfrak{A}\to\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ que estende φ tal que $\|\psi\|=\|\varphi\|$.*

Demonstração. Como $\varphi:\mathcal{S}\to\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é completamente positivo, então $s_\varphi:\mathbb{M}_n(\mathcal{S})\to\mathbb{C}$ é positivo pelo lema anterior. Estenda s_φ para uma aplicação positiva $s:\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})\to\mathbb{C}$, segundo o Teorema 1.14. Então s possui uma correspondente $\psi=\psi_s:\mathfrak{A}\to\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Já vimos na demonstração anterior que ψ estende φ e como s é positivo temos também pelo lema anterior que ψ é completamente positivo. Pela Proposição 1.29 segue que $\|\varphi\|=\|\varphi)(1)\|=\|\psi(1)\|=\|\psi\|$. ■

2.2 Teorema da extensão de Arveson

Queremos demonstrar um teorema mais geral que o Teorema 2.3. Nesse teorema tínhamos uma aplicação completamente positiva $\varphi:\mathcal{S}\to\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ e conseguimos encontrar uma aplicação completamente positiva $\psi:\mathfrak{A}\to\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $\psi|_{\mathcal{S}}=\varphi$ e $\|\varphi\|=\|\psi\|$. Nosso objetivo agora é fazer o mesmo para aplicações completanente positivas do tipo $\varphi:\mathcal{S}\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Vamos enfraquecer a topologia em $\mathcal{B}(\mathcal{S},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, no qual $\mathcal{S}$ será um sistema de operadores fechado, com o propósito de tornar as bolas fechadas em $\mathcal{B}(\mathcal{S},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, compactas. Será também preciso utilizar um pouco da teoria dos operadores trace-class e Hilbert-Schmidt, que o leitor poderá encontar no segundo apêndice, no qual objetivamos demonstrar que o espaço dos operadores limitados definidos sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, é igual ao espaço dual do espaço dos operadores Trace-Class $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$. Vamos começar construindo a topologia BW em $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)$.

2.3 A Topologia BW

Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços de Banach. Fixe $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$. Considere a aplicação $x \otimes y : \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*) \to \mathbb{C}$ definida por $x \otimes y(L) = L(x)(y)$, para todo $L \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)$. Vamos mostrar que $x \otimes y$ é linear. De fato, sejam $L, G \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então

$$\begin{aligned} & x \otimes y(L + \lambda G) = (L + \lambda G)(x)(y) = (L(x) + \lambda G(x))(y) \\ & = L(x)(y) + \lambda G(x)(y) = x \otimes y(L) + \lambda x \otimes y(G). \end{aligned}$$

Portanto $x \otimes y$ é um funcional linear. Note que $x \otimes y \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)^*$ pois

$$\|x \otimes y(L)\| = \|L(x)(y)\| \leq \|L(x)\|\|y\| \leq \|L\|\|x\|\|y\|,$$

ou seja, $x \otimes y$ é limitado com norma $\|x \otimes y\| \leq \|x\|\|y\|$. Para mostrar que $\|x \otimes y\| = \|x\|.\|y\|$ precisaremos da observação abaixo.

Observação 2.4 Se $\mathcal{X}$ é um espaço de Banach e se $x \in \mathcal{X}$ é não nulo, então podemos encontrar um funcional linear contínuo $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ tal que $\|f\| = 1$ e $|f(x)| = \|x\|$. De fato, considere $V = \text{span}\{x\}$. Defina um funcional $f : V \to \mathbb{C}$ tal que $f(x) = \|x\|$. Se $y \in V$ então existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $y = \lambda x$. Assim $|f(y)| = |f(\lambda x)| = |\lambda||f(x)| = |\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| = \|y\|$. Portanto $\|f\| = 1$. Assim, por Hahn-Banach, podemos estender tal funcional para um funcional linear contínuo $\widetilde{f} : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ tal que $\|\widetilde{f}\| = 1$ e $|\widetilde{f}(x)| = \|x\|$.

Usamos, portanto, a observação anterior para garantir que existem $f \in \mathcal{X}^*$, $g \in \mathcal{Y}^*$ tais que $|f(x)| = \|x\|$ e $|g(y)| = \|y\|$ e $\|f\| = \|g\| = 1$. Seja $L_{f,g} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}^*$ definida por $L_{f,g}(z) = f(z)g$. Observe que

$$\|L_{f,g}(z)\| = \|f(z)g\| = |f(z)|\|g\| = |f(z)| \leq \|f\|\|z\| = \|z\|,$$

ou seja, $\|L_{f,g}\| \leq 1$. Mas $x \otimes y(L_{f,g}) = (L_{f,g}(x))(y) = (f(x)g)(y) = f(x)g(y)$. Desta forma tem-se que $|x \otimes y(L_{f,g})| = |f(x)||g(y)| = \|x\|.\|y\|$. Isso quer dizer que $\|x \otimes y\| = \|x\|\|y\|$, como queríamos demonstrar.

Sejam $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Então $(x_1 + \lambda x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + \lambda(x_2 \otimes y)$ pois, para todo $L \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)$,

$$\begin{aligned}&(x_1 + \lambda x_2) \otimes y(L) = L(x_1 + \lambda x_2)(y) = (L(x_1) + \lambda L(x_2))(y)\\ &= L(x_1)(y) + \lambda L(x_2)(y) = x_1 \otimes y(L) + \lambda(x_2 \otimes y)(L).\end{aligned}$$

Analogamente, $x \otimes (y_1 + \lambda y_2) = x \otimes y_1 + \lambda(x \otimes y_2)$.

Considere o conjunto

$$Z = \overline{\operatorname{span}\{x \otimes y;\ \ x \in X, y \in Y\}} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)^*.$$

Lema 2.5 *$\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)$ é isometricamente isomorfo a Z^*.*

Demonstração. Para cada $L \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)$ pode-se definir (devido à propriedade universal do produto tensorial) uma aplicação $F_L : K = \operatorname{span}\{x \otimes y;\ \ x \in X, y \in Y\} \to \mathbb{C}$ da seguinte maneira

$$F_L\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^n L(x_i)(y_i) = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i(L).$$

Evidentemente F_L é linear, e é limitada pois

$$\begin{aligned}&\left|F_L\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^n (x_i \otimes y_i)(L)\right| = \left|\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right)(L)\right| \leq\\ &\leq \left\|\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right\| \|L\|,\end{aligned}$$

ou seja, $\|F_L\| \leq \|L\|$. Agora, para quaisquer $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$, temos que $\|L(x)(y)\| = \|F_L(x \otimes y)\| \leq \|F_L\|\|x \otimes y\| = \|F_L\|\|x\|\|y\|$. Assim, $\|L(x)\| \leq \|F_L\|\|x\|$, ou seja, $\|L\| \leq \|F_L\|$. Portanto $\|L\| = \|F_L\|$. Podemos estender F_L, continua e linearmente, para $\widetilde{F_L} : Z \to \mathbb{C}$ de forma que $\|\widetilde{F_L}\| = \|F_L\|$. é fácil ver que $F_{L+\lambda M} = F_L + \lambda F_M$, quaisquer que sejam $L, M \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Portanto $\widetilde{F_{L+\lambda M}} = \widetilde{F_L} + \lambda \widetilde{F_M}$, pois tais aplicações são contínuas e assumem o mesmo valor em K, que é denso em Z. Com isso em mãos, podemos definir a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*) & \longrightarrow & Z^* \\ & & L & \longmapsto & \widetilde{F_L} \end{array}$$

Note que F é isométrica pois $\|F(L)\| = \|\widetilde{F_L}\| = \|F_L\| = \|L\|$. Para concluir vamos mostrar que F é sobrejetiva. Seja $f \in Z^*$. Para cada

$x \in \mathcal{X}$ considere $f_x : \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ linear, $f_x(y) = f(x \otimes y)$. Note que $f_x \in \mathcal{Y}^*$ pois

$$|f_x(y)| = |f(x \otimes y)| \leq \|f\|\|x \otimes y\| = \|f\|\|x\|\|y\|.$$

Seja $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}^*$ definida por $L(x) = f_x$. Note que L é linear pois

$$\begin{aligned} L(x_1 + \lambda x_2)(y) &= f_{x_1+\lambda x_2}(y) = f((x_1 + \lambda x_2) \otimes y) = \\ &= f(x_1 \otimes y) + \lambda f(x_2 \otimes y) = f_{x_1}(y) + \lambda f_{x_2}(y) = \\ &= L(x_1)(y) + \lambda L(x_2)(y). \end{aligned}$$

Observe que L é contínua pois $\|L(x)\| = \|f_x\| \leq \|f\|\|x\|$ e portanto $\|L\| \leq \|f\|$. Assim $L \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)$. Observe que

$$F(L)(x \otimes y) = L(x)(y) = f_x(y) = f(x \otimes y).$$

Como $F(L)$ e f são aplicaçõs lineares então também são iguais em K. Mas como são contínuas, e como K é denso em Z, segue que $F(L) = f$. Assim F é sobrejetiva. Portanto F é o isomorfismo isométrico que desejávamos. ■

Observação 2.6 Munimos $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)$ com a topologia BW, ou seja, com a topologia fraca-$*$ de Z^*. Noutras palavras, queremos dizer que uma rede $(L_\lambda)_\lambda$ converge para L em $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)$ na topologia BW se, e somente se, a rede $(F(L_\lambda))_\lambda$ converge para $F(L)$ em Z^*, $*$-fracamente.

2.4 Teorema de Arveson

Lema 2.7 *Seja $(L_\lambda)_\lambda$ rede em $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)$ limitada. Então $L_\lambda \to L$ em $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)$ na topologia BW se, e somente se, $L_\lambda(x) \to L(x)$ em $\mathcal{Y}^*$, $*$-fracamente, para todo $x \in \mathcal{X}$.*

Demonstração. Suponha que $L_\lambda \to L$ na topologia BW, ou seja, $F(L_\lambda) \to F(L)$ $*$-fracamente. Se $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, então $F(L_\lambda)(x \otimes y) \to F(L)(x \otimes y)$, ou seja, $L_\lambda(x)(y) \to L(x)(y)$ e portanto $L_\lambda(x) \to L(x)$ $*$-fracamente em Y^*, para todo $x \in X$.

Reciprocamente, suponha que $L_\lambda(x)(y) \to L(x)(y)$ para todo $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, ou seja, $F(L_\lambda)(x \otimes y) \to F(L)(x \otimes y)$. Assim para todo $q \in K$, combinação linear de elementos da forma $x \otimes y$, tem-se que $F(L_\lambda)(q)$ converge para $F(L)(q)$. Seja $\varepsilon > 0$. Como a rede L_λ é limitada então existe um número real $a > 0$ tal que $\|L_\lambda\| < a$, para todo λ. Seja $z \in Z$. Tome q, uma combinação linear de elementos da forma $x \otimes y$, tal que $\|z-q\| < \dfrac{\varepsilon}{2(a+\|L\|)}$. Note que existe um λ_0 tal que, para todo $\lambda > \lambda_0$, tem-se $\|F(L_\lambda))(q) - F(L)(q)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Portanto $F(L_\lambda)(z)$ converge para $F(L)(z)$ pois para todo $\lambda > \lambda_0$ tem-se que

$$\begin{aligned}
&|F(L_\lambda)(z) - F(L)(z)| = \\
&= |F(L_\lambda)(z) - F(L_\lambda)(q) + F(L_\lambda)(q) - F(L)(q) + F(L)(q) - F(L)(z)| \\
&\|F(L_\lambda)(z-q)\| + \|F(L_\lambda)(q) - F(L)(q)\| + \|F(L)(q) - F(L)(z)\| \\
&\leq \|z-q\|(a+\|L\|) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Note que se dois espaços de Banach $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ são isometricamente isomorfos por uma aplicação $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$, então $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ e $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ são isometricamente isomorfos pela aplicação $E : \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Z})$, $E(T) = f \circ T$. De fato, E é claramente linear, e é sobrejetiva pois f é invertível; como $\|E(T)\| = \|f \circ T\| \leq \|f\|\|T\| = \|T\|$ e $\|Tx\| = \|f(Tx)\| \leq \|f \circ T\|\|x\|$ para todo $x \in X$, segue que $\|T\| \leq \|f \circ T\|$, e E é isométrica.

Utilizaremos agora a teoria dos operadores trace-class $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ que o leitor poderá encontrar no Apêndice B. Aqui, através do Teorema 5.21, sabemos que a aplicação $p : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}_1(\mathcal{H})^*$ tal que para todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $p(B) = E_B : \mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ é definida por $E_B(T) = tr(BT) = tr(TB)$, é um isomorfismo isométrico. Assim, $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ e $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{B}_1(\mathcal{H})^*)$ são isometricamente isomorfos pela aplicação

$$\begin{array}{cccc} E : & \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{B}(\mathcal{H})) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{B}_1(\mathcal{H})^*) \\ & T & \longmapsto & p \circ T \end{array}.$$

Definição 2.8 Diremos que uma rede L_λ converge para operador $L \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ na topologia BW se a rede $E(L_\lambda)$ converge para $E(L)$ em $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{B}_1(\mathcal{H})^*)$ na topologia BW.

Observação 2.9 Para cada par $\xi,\eta \in \mathcal{H}$ defina, a aplicação linear $R_{\xi,\eta} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, por $R_{\xi,\eta}(\zeta) = \langle \zeta,\eta\rangle\xi$. Afirmamos que todo operador de posto finito $T \in \mathcal{B}_{00}$ é uma soma finita de operadores da forma $R_{\xi,\eta}$ de posto um. De fato, considere uma base ortonormal para imagem de T, $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$. Então para cada $x \in \mathcal{H}$, existem únicos $\lambda_1^x, \lambda_2^x, \ldots, \lambda_k^x$ tais que $T(x) = \lambda_1^x e_1 + \lambda_2^x e_2 + \ldots + \lambda_k^x e_k$. Para cada $j = 1, 2\ldots, k$, considere a aplicação $\lambda_j : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ definida por $\lambda_j(x) = \lambda_j^x$. Para mostrar que tal aplicação é linear, sejam $x, y \in \mathcal{H}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Note que $\sum_{i=1}^k \lambda_i^{x+\lambda y} e_i = T(x+\lambda y) = T(x) + \lambda T(y) = \sum_{i=1}^k (\lambda_i^x + \lambda\lambda_i^y) e_i$.

Portanto $\lambda_j(x+\lambda y) = \lambda_j^{x+\lambda y} = \lambda_j^x + \lambda\lambda_j^y = \lambda_j(x) + \lambda\lambda_j(y)$, e assim λ_j é linear para todo $j = 1, 2, \ldots, k$. Além disso λ_j é um funcional linear limitado, pois para cada $x \in \mathcal{H}$, temos

$$|\lambda_j(x)|^2 \leq \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i^x|^2 = \| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^x e_i \|^2 = \|T(x)\|^2 \leq \|T\|^2 \|x\|^2.$$

Portanto λ_j é limitado com $\|\lambda_j\| \leq \|T\|$. Assim, pelo Teorema de Riesz, veja (Sunder, Teorema 4.2.1), existe um único $y_j \in \mathcal{H}$ tal que $\lambda_j(x) = \langle x, y_j \rangle$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Portanto $T(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^x e_i = \sum_{i=1}^{k} \langle x, y_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{k} R_{e_i, y_i}(x)$, ou seja, $T = \sum_{i=1}^{k} R_{e_i, y_i}$.

Observação 2.10 Queremos mostrar que todo operador de posto finito é trace-class. Como $\langle R_{\xi,\eta}(\zeta), y \rangle = \langle \langle \zeta, \eta \rangle \xi, y \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \langle \xi, y \rangle = \langle \zeta, \langle y, \xi \rangle \eta \rangle$ para quaisquer $\zeta, y \in \mathcal{H}$, então $R^*{}_{\xi,\eta}(y) = \langle y, \xi \rangle \eta$ para todo $y \in \mathcal{H}$. Denotanto $L_{\xi,\eta} = (R^*{}_{\xi,\eta} \circ R_{\xi,\eta})$, obtemos $L_{\xi,\eta}(x) = (R^*{}_{\xi,\eta} \circ R_{\xi,\eta})(\zeta) = \langle \zeta, \eta \rangle \langle \xi, \xi \rangle \eta$. Note que o operador em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ definido por

$$f(\zeta) = \frac{\langle \zeta, \eta \rangle \|\xi\| \eta}{\sqrt{\langle \eta, \eta \rangle}}$$

é a raíz quadrada de $L_{\xi,\eta}$, ou seja, $f^2 = L_{\xi,\eta}$. Então

$$\|R_{\xi,\eta}\|_1 = \sum_n \langle |R_{\xi,\eta}| e_n, e_n \rangle = \sum_n \langle f e_n, e_n \rangle = \sum_n \frac{\langle e_n, \eta \rangle}{\sqrt{\langle \eta, \eta \rangle}} \|\xi\| \langle \eta, e_n \rangle.$$

Portanto

$$\frac{\|R_{\xi,\eta}\|_1}{\|\eta\|} = \sum_n \frac{\langle e_n, \frac{\eta}{\|\eta\|} \rangle}{\sqrt{\langle \eta, \eta \rangle}} \|\xi\| \langle \eta, e_n \rangle$$

Escolha uma base ortonormal $\{e_n\}$ contendo $\eta/\|\eta\|$. Portanto

$$\|R_{\xi,\eta}\|_1 = \|\xi\| \frac{\langle \eta, \eta \rangle}{\sqrt{\langle \eta, \eta \rangle}}$$

e assim $R_{\xi,\eta} \in \mathcal{B}_1$.

Observação 2.11 Dada uma base ortonormal qualquer $\{e_n\}$, escreva $\eta = \sum_n \langle \eta, e_n \rangle e_n$. A Proposição 5.19 no Apêndice B nos diz que $\mathcal{B}_1$ é ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Assim para um operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ temos

$$tr(AR_{\xi,\eta}) = \sum_n \langle AR_{\xi,\eta} e_n, e_n \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_n \langle ((\langle e_n, \eta\rangle \xi), e_n\rangle \\
&= \sum_n \langle e_n, \eta\rangle \langle A\xi, e_n\rangle \\
&= \sum_n \langle A\xi, \langle \eta, e_n\rangle e_n\rangle \\
&= \langle A\xi, \sum_n \langle \eta, e_n\rangle e_n\rangle = \langle A\xi, \eta\rangle.
\end{aligned}
$$

Lema 2.12 *Sejam $\mathcal{X}$ espaço de Banach e L_λ uma rede limitada em $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Então a rede converge para L em $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ na topologia BW se, e somente se, $\langle L_\lambda(x)\xi, \eta\rangle$ converge para $\langle L(x)\xi, \eta\rangle$, para quaisquer $x \in \mathcal{X}$ e $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.*

Demonstração. Suponha que L_λ convirja para L na topologia BW. Assim $E(L_\lambda)$ converge para $E(L)$ em $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{B}_1(\mathcal{H})^*)$ na topologia BW. Pelo lema anterior vale que para qualquer $x \in \mathcal{X}$, a rede $E(L_\lambda)(x)$ converge para $E(L)(x)$ $*$-fracamente. Portanto, a rede $E(L_\lambda)(x)(T)$ converge para $E(L)(x)(T)$, para todo $x \in \mathcal{X}$ e para todo $T \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$. Observe que

$$
\begin{aligned}
&E(L_\lambda)(x)(T) = (p \circ L_\lambda)(x)(T) \\
&= (p(L_\lambda(x)))(T) = E_{L_\lambda(x)}(T) \\
&= tr(L_\lambda(x)T).
\end{aligned}
$$

Analogamente, $E(L)(x)(T) = tr(L(x)T)$. Considere o operador $T \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$, $T = R_{\xi,\eta}$. Sabemos, pela Observação 2.10 encontrada no Apêndice B, que $tr(BR_{\xi.\eta}) = \langle B\xi, \eta\rangle$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Temos portanto que $\langle L_\lambda(x)\xi, \eta\rangle$ converge para $\langle L(x)\xi, \eta\rangle$, para quaisquer $x \in \mathcal{X}$ e $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Reciprocamente, suponha que $\langle L_\lambda(x)\xi, \eta\rangle$ converge para $\langle L(x)\xi, \eta\rangle$, para quaisquer $x \in \mathcal{X}$ e $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Queremos mostrar que L_λ converge a L, em $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, na topologia BW. Em outras palavras, queremos mostrar que $E(L_\lambda)$ converge a $E(L)$, em $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{B}_1(\mathcal{H})^*)$, na topologia BW. Vamos usar o lema anterior mostrando que, para todo $x \in \mathcal{X}$, a rede $E(L_\lambda)(x)$ converge $*$-fracamente para $E(L)(x)$ em $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})^*$. Como estamos supondo que $\langle L_\lambda(x)\xi, \eta\rangle$ converge para $\langle L(x)\xi, \eta\rangle$, para quaisquer $x \in \mathcal{X}$ e $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, segue que $E(L_\lambda)(x)(R_{\xi,\eta})$ converge para $E(L)(x)(R_{\xi,\eta})$. Então $E(L_\lambda)(x)(F)$ converge para $E(L)(x)(F)$ para todo $F \in \mathcal{B}_{00}$, pois todo operador de posto finito é uma combinação linear finita de elementos da forma $R_{\xi,\eta}$. Mas $\mathcal{B}_{00}$ é denso em $\mathcal{B}_1$ na norma $\|.\|_1$ pelo Teorema 5.19(4) . Seja $T \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$. Considere $F \in \mathcal{B}_{00}$ arbitrariamente próximo de T. Usando o Teorema 5.19(5) na última desigualdade abaixo, temos que

$$
\begin{aligned}
&|E(L_\lambda(x)(T) - E(L)(x)(T)| \leq \\
&\leq |E(L_\lambda)(x)(T-F)| + |E(L_\lambda)(x)(F) \\
&- E(L)(x)(F)| + |E(L)(x)(F-T)| \\
&= |tr(L_\lambda(x)(T-F))| + |E(L_\lambda)(x)(F) \\
&- E(L)(x)(F)| + |tr(L(x)(T-F))| \\
&\leq \|L_\lambda(x)\|\|T-F\|_1 + |E(L_\lambda)(x)(F) \\
&- E(L)(x)(F)| + \|L(x)\|\|T-F\|_1.
\end{aligned}
$$

Como a rede L_λ é limitada então a rede $E(L_\lambda)(x)(T)$ converge para $E(L_\lambda)(x)(T)$. ■

Definição 2.13 Fixado um número real positivo r, definimos $CP_r(\mathcal{S},\mathcal{H})$ como sendo o conjunto formado pelos elementos completamente positivos de

$$B_r(\mathcal{S},\mathcal{H}) = \{L \in \mathcal{B}(\mathcal{S},\mathcal{B}(\mathcal{H}));\ \|L\| \leq r\}.$$

Observação 2.14 Lembre que se $\mathcal{X}$ é um espaço normado então a bola unitária de $\mathcal{X}^*$ é um espaço compacto e Hausdorff com topologia fraca $*$, segundo o Teorema de Alaoglu, que pode ser encontrado em (Sunder, Teorema 1.6.9). Munindo $\mathcal{B}(\mathcal{S},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ com a topologia BW temos que $B_r(\mathcal{S},\mathcal{H})$ é compacto pelo Teorema de Alaoglu. Para mostrar que $CP_r(\mathcal{S},\mathcal{H})$ é compacto vamos provar que tal conjunto é fechado na topolgia BW. Para isso vamos demonstrar as observações que seguem.

Observação 2.15 Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, $x \in \mathcal{H}$, $(x_\lambda)_\lambda$ é uma rede tal que $\langle x_\lambda, y\rangle$ converge para $\langle x, y\rangle$ para todo $y \in \mathcal{H}$ e existe um $r \in \mathbb{R}$ tal que $\|x_\lambda\| \leq r$, então $\|x\| \leq r$. Se $x = 0$ está provado. Caso contrário, tome $y = \dfrac{\|x\|x}{\langle x, x\rangle}$ e suponha que $\|x\| > r$. Então existe um λ tal que $|\langle x, y\rangle| - |\langle x_\lambda, y\rangle| \leq |\langle x_\lambda, y\rangle - \langle x, y\rangle| < \|x\| - r$. Portanto $r < \langle x_\lambda, y\rangle \leq \|x_\lambda\|\|y\| = \|x_\lambda\|$, um absurdo.

Observação 2.16 Se L_λ é uma rede em $\mathcal{B}(\mathcal{S},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $L \in \mathcal{B}(\mathcal{S},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, se existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\|L_\lambda\| \leq r$, e se a rede $\langle L_\lambda(a)x, y\rangle$ converge para $\langle L(a)x, y\rangle$ para todo $a \in \mathcal{S}$ e para quaisquer $x, y \in \mathcal{H}$, então $\|L\| \leq r$. De fato, suponha que $\|L\| > r$. Então existe $a \in \mathcal{S}$ com $\|a\| = 1$ tal que $\|L(a)\| > r$. Analogamente, existe $x \in \mathcal{H}$ com $\|x\| = 1$ tal que $\|L(a)(x)\| > r$. Note que para todo λ temos que $\|L_\lambda(a)(x)\| \leq \|L_\lambda\| \leq r$, o que é um absurdo pela observação anterior.

Observação 2.17 Seja $L \in \mathcal{B}(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Considere também $(L_\lambda)_\lambda$ uma rede em $\mathcal{B}(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Se $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(S)$ e $\langle L_\lambda(a)x, y\rangle$ converge para $\langle L_\lambda(a)x, y\rangle$ para todo $a \in \mathcal{S}$ e para quaisquer $x, y \in \mathcal{H}$, então $\langle [L_\lambda(a_{ij})]\xi, \eta\rangle$ converge para $\langle [L(a_{ij})]\xi, \eta\rangle$, para quaisquer $\xi, \eta \in \mathcal{H}^n$. é sóobservar que a rede

$$\langle [L_\lambda(a_{ij})]\xi, \eta\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle L_\lambda(a_{ij})\xi_j, \eta_i\rangle$$

converge para

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle L(a_{ij})\xi_j, \eta_i\rangle = \langle [L(a_{ij})]\xi, \eta\rangle.$$

Lema 2.18 *Se $\mathcal{S}$ é fechado, então $CP_r(\mathcal{S}, \mathcal{H})$ é compacto na topologia BW.*

Demonstração. Vamos mostrar que $CP_r(\mathcal{S}, \mathcal{H})$ é fechado. Considere uma rede $(L_\lambda)_\lambda$ em $CP_r(\mathcal{S}, \mathcal{H})$ convergente a $L \in \mathcal{B}(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Como $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{A}$ é fechado, então é um espaço Banach e podemos usar o lema anterior pois a rede $(L_\lambda)_\lambda$ é limitada. Daí a rede $\langle L_\lambda(a)x, y\rangle$ é convergente a $\langle L(a)x, y\rangle$ para todo $a \in \mathcal{S}$ e para quaisquer $x, y \in \mathcal{H}$. Pela Observação 2.16 segue que $\|L\| \leq r$. Resta mostrar que L é completamente positivo. Sejam $n \in \mathbb{N}$ qualquer e $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{S})$ positivo. Como a rede $\langle L_\lambda(a)x, y\rangle$ é convergente a $\langle L(a)x, y\rangle$ para todo $a \in \mathcal{S}$ e para quaisquer $x, y \in \mathcal{H}$, então segue da Observação 2.17 que a rede $\langle [L_\lambda(a_{ij})]\xi, \xi\rangle$ converge para $\langle [L(a_{ij})]\xi, \xi\rangle$ para todo $\xi \in \mathcal{H}^n$. Mas como a rede $\langle [L_\lambda(a_{ij})]\xi, \xi\rangle$ possui somente elementos não negativos, qualquer que seja ξ, segue que $\langle [L(a_{ij})]\xi, \xi\rangle$ é positivo para todo $\xi \in \mathcal{H}^n$. Assim L é completamente positivo. Portanto $CP_r(\mathcal{S}, \mathcal{H})$ é fechado na topologia BW, e é compacto pois $B_r(\mathcal{S}, \mathcal{H})$ é compacto. ■

Teorema 2.19 *(Teorema de Arveson) Sejam $\mathfrak{A}$ uma C^*-álgebra, S um sistema de operadores em $\mathfrak{A}$ e $\varphi : S \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma aplicação completamente positiva. Então existe uma aplicação completamente positiva $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que estende φ e $\|\varphi\| = \|\widetilde{\varphi}\|$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ subespaço vetorial de dimensão finita. Considere $V_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ a aplicação inclusão, ou seja, definida por $V_{\mathcal{F}}(f) = f$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Defina a aplicação $\varphi_{\mathcal{F}} : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(\mathcal{F})$ por $\varphi_{\mathcal{F}}(a) = V_{\mathcal{F}}^*\varphi(a)V_{\mathcal{F}}$. é fácil ver que $\varphi_{\mathcal{F}}$ é completamente positiva. Note que $\|\varphi_{\mathcal{F}}(a)\| = \|V_{\mathcal{F}}^*\varphi(a)V_{\mathcal{F}}\| \leq \|\varphi\|\|a\|$. Assim $\|\varphi_{\mathcal{F}}\| \leq \|\varphi\|$. Para cada $\mathcal{F}$, existe $n_{\mathcal{F}} \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{B}(\mathcal{F}) \cong \mathbb{M}_{n_{\mathcal{F}}}(\mathbb{C})$. Existe portanto, pelo Teorema 2.3, o Teorema de Krein, $\widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}} : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{F})$ completamente positiva estendendo $\varphi_{\mathcal{F}}$ e $\|\widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}}\| = \|\varphi_{\mathcal{F}}\| \leq \|\varphi\|$. Para cada $\mathcal{F}$, podemos escrever $\mathcal{H} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^{\perp}$. Defina $\psi_{\mathcal{F}} : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ por $\psi_{\mathcal{F}}(a)(f + f^{\perp}) = \widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}}(a)(f)$. Note que $\|f+f^{\perp}\|^2 = \|f\|^2 + \|f^{\perp}\|^2$ e assim $\|f\| \leq \|f+f^{\perp}\|$. Portanto

$$\|\psi_{\mathcal{F}}(a)(f + f^{\perp})\| = \|\widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}}(a)(f)\| \leq \|\widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}}(a)\|\|f\| \leq \|\widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}}(a)\|\|f + f^{\perp}\|$$

e $\|\psi_{\mathcal{F}}(a)\| \leq \|\widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}}(a)\| \leq \|\widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}}\|\|a\|$, ou seja, $\|\psi_{\mathcal{F}}\| \leq \|\widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}}\| = \|\varphi_{\mathcal{F}}\| \leq \|\varphi\|$. Observe que tal aplicação é completamente positiva pois se $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ é positivo e $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{H}^n$ é vetor qualquer com $\xi_i = f_i + f_i^{\perp}$, então

$$\begin{aligned}
&\langle \psi_{\mathcal{F}}^{(n)}[a_{ij}]\xi, \xi\rangle = \\
= \;& \langle [\psi_{\mathcal{F}}(a_{ij})](\xi_1, \ldots, \xi_n), (\xi_1, \ldots, \xi_n)\rangle \\
= \;& \langle [\widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}}(a_{ij})](f_1, \ldots, f_n), (f_1 + f_1^{\perp}, \ldots, f_n + f_n^{\perp})\rangle \\
= \;& \langle [\widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}}(a_{ij})](f_1, \ldots, f_n), (f_1, \ldots, f_n)\rangle + \\
+ \;& \langle [\widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}}(a_{ij})](f_1, \ldots, f_n), (f_1^{\perp}, \ldots, f_n^{\perp})\rangle \\
= \;& \langle [\widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}}(a_{ij})](f_1, \ldots, f_n), (f_1, \ldots, f_n)\rangle \geq 0,
\end{aligned}$$

já que $\widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}}$ é completamente positivo.

Considere agora o conjunto dirigido $\{\mathcal{F};\ \ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}\}$ tal que $\mathcal{F}$ tem dimensão finita e $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ se, e somente se, $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Então a rede $(\psi_{\mathcal{F}})_{\mathcal{F}}$ está contida em $CP_{\|\varphi\|}(\mathfrak{A}, \mathcal{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathfrak{A}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ que é compacto na topologia BW. Portanto, existe uma subrede de $(\psi_{\mathcal{F}})_{\mathcal{F}}$, a saber $(\psi_{\mathcal{F}_\mu})_\mu \subseteq CP_{\|\varphi\|}(\mathfrak{A}, \mathcal{H})$, que converge $*$-fracamente, ou seja, converge na topologia BW para uma operador completamente positivo $\psi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Vamos mostrar que ψ estende φ. Sejam $a \in S$ e $x, y \in \mathcal{H}$. Seja $\mathcal{F} = \operatorname{span}\{x, y\}$. Seja $\mathcal{F}_1 \geq \mathcal{F}$, ou seja, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$. Então

$$\langle \widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}_1}(a)(x), y\rangle = \langle \varphi_{\mathcal{F}_1}(a)(x), (y)\rangle = \langle V_{\mathcal{F}_1}^* \varphi(a) V_{\mathcal{F}_1}(x), y\rangle = \langle \varphi(a)x, y\rangle.$$

Então $\langle \varphi(a)x, y\rangle = \langle \widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}_1}(a)(x), y\rangle$ para todo $\mathcal{F}_1 \geq \mathcal{F}$. Seja μ_0 tal que $\mathcal{F}_{\mu_0} \geq \mathcal{F}$. Se $\mu \geq \mu_0$ tem-se que $\mathcal{F}_\mu \geq \mathcal{F}_{\mu_0} \geq \mathcal{F}$ e assim

$$\langle \varphi(a)x, y\rangle = \langle \widetilde{\varphi}_{\mathcal{F}_\mu}(a)(x), y\rangle = \langle \psi_{\mathcal{F}_\mu}(a)(x), y\rangle \to \langle \psi(a)(x), y\rangle,$$

pelo Lema 2.12. Portanto ψ estende φ como queríamos. Pela Observação 2.16, temos que $\|\psi\| \leq \|\varphi\|$. Daí $\|\psi\| = \|\varphi\|$ pois ψ é uma extensão de φ. ■

2.5 Teorema da extensão de Wittstock

Objetivamos, agora, demonstrar um teorema de extensão ainda mais geral que os vistos anteriormente. Até aqui o domínio de nossa aplicação φ era um sistema de operadores. Agora, ao invés de considerarmos uma aplicação completamente positiva $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tomaremos uma aplicação completamente limitada $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, em que $\mathcal{M}$ é um espaço de operadores. Lembre-se que um espaço de operadores de uma C^*-álgebra é simplesmente um subespaço vetorial da mesma, e que φ, sendo completamente limitada, implica que $\|\varphi\|_{cb} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi^{(n)}\|$ é finito. Começamos exibindo o *$*$-isomorfismo canônico shuffle* que será extremamente útil na demonstração do Teorema de Wittstock.

2.6 $*$-Isomorfismo canônico Shuffle

Seja $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n(\mathfrak{A}))$. Escreva $A = [A_{ij}]_{i,j=1}^m$ em que $A_{ij} \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$. Então podemos escrever $A_{ij} = [a_{ijkl}]_{k,l=1}^n$, em que $a_{ijkl} \in \mathfrak{A}$, e assim temos

$$A = \Big[[a_{ijkl}]_{k,l}^n\Big]_{i,j}^m.$$

Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} T & : & \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})) & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathbb{M}_m(\mathfrak{A})) \\ & & \Big[[a_{ijkl}]_{k,l=1}^n\Big]_{i,j=1}^m & \longmapsto & \Big[[a_{ijkl}]_{i,j=1}^m\Big]_{k,l=1}^n. \end{array}$$

é fácil notar T é uma aplicação linear e inversível. Além disso tem-se que T preserva adjunto pois para todo $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n(\mathfrak{A}))$ temos

$$\begin{aligned} T(A^*) &= T\left(\Big[[a_{ijkl}]_{k,l=1}^n\Big]_{i,j=1}^{m\,*}\right) = T\left(\Big[[a_{jikl}]_{k,l=1}^{n\,*}\Big]_{i,j=1}^m\right) \\ &= T\left(\Big[[a_{jilk}{}^*]_{k,l=1}^n\Big]_{i,j=1}^m\right) = \Big[[a_{jilk}{}^*]_{i,j=1}^m\Big]_{k,l=1}^n = T(A)^*, \end{aligned}$$

e para mostrar que T preserva produto, sejam $A = \Big[[a_{ijkl}]_{kl}^n\Big]_{ij}^m$ e $B = \Big[[b_{ijkl}]_{kl}^n\Big]_{ij}^m$ pertencentes a $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n(\mathfrak{A}))$. Note que

$$T(AB) = T\left(\left[\sum_{r=1}^m [a_{irkl}]_{k,l=1}^n [b_{rjkl}]_{k,l=1}^n\right]_{i,j=1}^m\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r=1}^{m} T\left(\left[[a_{irkl}]_{k,l=1}^{n}[b_{rjkl}]_{k,l=1}^{n}\right]_{i,j=1}^{m}\right)\\
&= \sum_{r=1}^{m} T\left(\left[\left[\sum_{s=1}^{n} a_{irks}b_{rjsl}\right]_{k,l=1}^{n}\right]_{i,j=1}^{m}\right)\\
&= \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} T\left(\left[[a_{irks}b_{rjsl}]_{k,l=1}^{n}\right]_{i,j=1}^{m}\right)\\
&= \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \left[[a_{irks}b_{rjsl}]_{i,j=1}^{m}\right]_{k,l}^{n}\\
&= \sum_{s=1}^{n} \left[\left[\sum_{r=1}^{m} a_{irks}b_{rjsl}\right]_{ij}^{m}\right]_{kl}^{n}\\
&= \sum_{s=1}^{n} \left[[a_{ijks}]_{ij}^{m}[b_{ijsl}]_{ij}^{m}\right]_{kl}^{n}\\
&= \left[\sum_{s=1}^{n}[a_{ijks}]_{ij}^{m}[b_{ijsl}]_{ij}^{m}\right]_{kl}^{n}\\
&= \left[[a_{ijkl}]_{ij}^{m}\right]_{kl}^{n}\left[[b_{ijkl}]_{ij}^{n}\right]_{kl}^{n}\\
&= T(A)T(B).
\end{aligned}
$$

Portanto T é um $*$-isomorfismo entre C^*-álgebras, e consequentemente preserva norma e positividade. Isso segue do seguinte teorema cuja demonstração se encontra em (Murphy, Teorema 3.1.5): *Sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ C^*-álgebras, e $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ um $*$-homomorfismo. Então φ é injetivo se, e somente se, φ é isométrico.*

Definição 2.20 Dados $m, n \in \mathbb{N}$ e uma C^*-álgebra $\mathfrak{A}$, definimos o *$*$-isomorfismo canônico shuffle* por

$$
\begin{array}{cccc}
T : & \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})) & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathbb{M}_m(\mathfrak{A}))\\
& \left[[a_{ijkl}]_{k,l=1}^{n}\right]_{i,j=1}^{m} & \longmapsto & \left[[a_{ijkl}]_{i,j=1}^{m}\right]_{k,l=1}^{n}.
\end{array}
$$

2.7 Teorema de Wittstock

Lema 2.21 *Sejam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ C^*-álgebras com unidade 1, e sejam $\mathcal{M}$ um espaço de operadores em $\mathfrak{A}$ e $\varphi : \mathcal{M} \to \mathfrak{B}$ linear. Defina um sistema de* *operadores*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda 1 & a \\ b^* & \mu 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathcal{M} \right\} \subseteq \mathbb{M}_2(\mathfrak{A}),$$

e seja $\Phi : \mathcal{S}_{\mathcal{M}} \to \mathbb{M}_2(\mathfrak{B})$ definido da seguinte forma

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \lambda 1 & a \\ b^* & \mu 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda 1 & \varphi(a) \\ \varphi(b)^* & \mu 1 \end{bmatrix}.$$

Se $\varphi : \mathcal{M} \to \mathfrak{B}$ é completamente contrativa, ou seja, $\varphi^{(n)}$ é contrativa para todo n natural, então Φ é completamente positiva.

Demonstração. Seja $m \in \mathbb{N}$. Considere $[S_{ij}]_{i,j=1}^m \in \mathbb{M}_m(\mathcal{S}_{\mathcal{M}}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_2(\mathfrak{A}))$. Para cada par $i, j \in \{1, 2 \ldots, m\}$, denote

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_{ij} & a_{ij} \\ b_{ij}^* & \mu_{ij} \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}.$$

Podemos escrever

$$[S_{ij}]_{i,j=1}^m = \left[[a_{ijkl}]_{k,l=1}^2\right]_{i,j=1}^m$$

em que $S_{ij} = [a_{ijkl}]_{k,l=1}^2$ e assim $a_{ij11} = \lambda_{ij}$, $a_{ij12} = a_{ij}$, $a_{ij21} = b_{ij}^*$ e $a_{ij22} = \mu_{ij}$. Portanto

$$T([S_{ij}]_{i,j}^m) = T\left(\left[[a_{ijkl}]_{k,l=1}^2\right]_{i,j=1}^m\right) = \left[[a_{ijkl}]_{i,j=1}^m\right]_{k,l=1}^2 =$$

$$\begin{bmatrix} [a_{ij11}]_{i,j=1}^m & [a_{ij12}]_{i,j=1}^m \\ [a_{ij21}]_{i,j=1}^m & [a_{ij22}]_{i,j=1}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\lambda_{ij}]_{i,j=1}^m & [a_{ij}]_{i,j=1}^m \\ [b_{ij}^*]_{i,j=1}^m & [\mu_{ij}]_{i,j=1}^m \end{bmatrix}. \qquad (2.1)$$

Observe também que

$$\Phi^{(m)}([S_{ij}]_{i,j=1}^m) = [\Phi(S_{ij})]_{i,j=1}^m = \left[\begin{bmatrix} \lambda_{ij} & \varphi(a_{ij}) \\ \varphi(b_{ij})^* & \mu_{ij} \end{bmatrix}\right]_{i,j}^m.$$

e procedendo como antes temos

$$T(\Phi^{(m)}[S_{ij}]) = \begin{bmatrix} [\lambda_{ij}]_{i,j=1}^m & [\varphi(a_{ij})]_{i,j=1}^m \\ [\varphi(b_{ij})^*]_{i,j=1}^m & [\mu_{ij}]_{i,j=1}^m \end{bmatrix}. \qquad (2.2)$$

Para mostrar que Φ é completamente positivo basta supor que para cada $m \in \mathbb{N}$, 2.1 é positivo, e mostrar que 2.2 é positivo. Denotando $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ji}]$, $H = [\lambda_{ij}]$, $K = [\mu_{ij}]$, então $A = B$ pois a matriz 2.1, sendo positiva, é autoadjunta, e pela Proposição 1.3 temos que H, K são positivos. Seja $\varepsilon > 0$ e considere os seguintes operadores $H_\varepsilon = H + \varepsilon I$ e $K_\varepsilon = K + \varepsilon I$. Considere o polinômio $p(x) = x + \varepsilon$. Seja $\lambda \in \sigma(H)$. Então $p(\lambda) = \lambda + \varepsilon > 0$. Pelo Teorema do Mapeamento Espectral, veja (Murphy, Teorema 2.1.14), sabemos que $\sigma(H_\varepsilon) = \sigma(H + \varepsilon I) = \sigma(p(H)) = p(\sigma(H)) \subset \mathbb{R}^+$. Como $0 \notin \sigma(H_\varepsilon)$ segue que H_ε é invertível. Analogamente, K_ε é invertível. Pelo Teorema de Gelfand-Naimark, a raíz quadrada de tais operadores ainda é invertível. Note que

$$\begin{bmatrix} H_\varepsilon & A \\ A^* & K_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & A \\ A^* & K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix} \geq 0,$$

e

$$\begin{bmatrix} I & H_\varepsilon^{-1/2} A K_\varepsilon^{-1/2} \\ K_\varepsilon^{-1/2} A^* K_\varepsilon^{-1/2} & I \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} H_\varepsilon^{-1/2} & 0 \\ 0 & K_\varepsilon^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_\varepsilon & A \\ A^* & K_\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_\varepsilon^{-1/2} & 0 \\ 0 & K_\varepsilon^{-1/2} \end{bmatrix} \geq 0,$$

e assim $\|H_\varepsilon^{-1/2} A K_\varepsilon^{-1/2}\| \leq 1$ pela Proposição 1.5. Agora, não é difícil mostrar que se R, S são matrizes complexas de ordem n e $C \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$, então $\varphi^{(n)}(RCS) = R\varphi^{(n)}(C)S$. Usando esse fato e denotando $X = \varphi^{(m)}(H_\varepsilon^{-1/2} A K_\varepsilon^{-1/2})$, temos

$$\begin{bmatrix} H_\varepsilon & \varphi^{(m)}(A) \\ (\varphi^{(m)}(A))^* & K_\varepsilon \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} H_\varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & K_\varepsilon^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ X^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_\varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & K_\varepsilon^{1/2} \end{bmatrix}.$$

Haja vista que φ é completamente contrativa, temos portanto que $\|\varphi^{(m)}(H_\varepsilon^{-1/2} A K_\varepsilon^{-1/2})\| \leq 1$, e novamente pelo Proposição 1.5, a matriz

$$\begin{bmatrix} I & X \\ X^* & I \end{bmatrix}$$

é positiva e assim a matriz

$$\begin{bmatrix} H_\varepsilon & \varphi^{(m)}(A) \\ (\varphi^{(m)}(A))^* & K_\varepsilon \end{bmatrix}$$

é positiva para todo $\varepsilon > 0$. Podemos portanto tomar uma sequência de elementos positivos que converge à 2.2, e como numa C^*-álgebra o conjunto dos elementos positivos é fechado, segue que 2.2 é positivo como queríamos. ■

Teorema 2.22 *(Teorema de Wittstock) Sejam $\mathfrak{A}$ uma C^*-álgebra com unidade, $\mathcal{M}$ um espaço de operadores de $\mathfrak{A}$ e $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ completamente limitada. Então existe uma extensão completamente limitada $\psi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de φ tal que $\|\varphi\|_{cb} = \|\psi\|_{cb}$.*

Demonstração. Suponha inicialmente que $\|\varphi\|_{cb} = 1$. Sejam $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ e $\Phi : \mathcal{S}_{\mathcal{M}} \to \mathbb{M}_2(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ como no lema anterior. Como $\|\varphi\|_{cb} = 1$, então φ é completamente contrativa e pelo mesmo lema Φ é completamente positiva. Note que $\mathbb{M}_2(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = \mathcal{B}(\mathcal{H}^2)$ e pelo Teorema de Extensão de Arveson tem-se que existe uma extensão completamente positiva $\Psi : \mathbb{M}_2(\mathfrak{A}) \to \mathbb{M}_2(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ de Φ. Defina $\psi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ da seguinte forma

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} * & \psi(a) \\ * & * \end{bmatrix}.$$

Se $a \in \mathcal{M}$, então ψ estende φ pois

$$\begin{bmatrix} * & \psi(a) \\ * & * \end{bmatrix} = \Psi\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \Phi\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \varphi(a) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos mostrar que ψ é completamente contrativa. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$. Note que

$$\Psi^{(n)}\left(\left[\begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_{i,j}^n\right) = \left[\Psi\left(\begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_{i,j}^n = \left[\begin{bmatrix} * & \psi(a_{ij}) \\ * & * \end{bmatrix}\right]_{i,j}^n,$$

e analogamente como vimos na demonstração do lema anterior temos

$$T\left(\left[\begin{bmatrix} * & \psi(a_{ij}) \\ * & * \end{bmatrix}\right]_{i,j}^n\right) = \begin{bmatrix} * & \psi^{(n)}(A) \\ * & * \end{bmatrix}.$$

Como Ψ é completamente positivo e unital segue que $\Psi^{(n)}$ é também completamente positivo e unital. Assim, pela Proposição 1.25, $\Psi^{(n)}$ é contrativa. Logo

$$\|\psi^{(n)}(A)\| \leq \left\|\begin{bmatrix} * & \psi^{(n)}(A) \\ * & * \end{bmatrix}\right\| = \left\|T\left(\left[\begin{bmatrix} * & \psi(a_{ij}) \\ * & * \end{bmatrix}\right]_{i,j}^n\right)\right\|$$

$$= \left\| \left[\left[\begin{array}{cc} * & \psi(a_{ij}) \\ * & * \end{array} \right]\right]_{i,j}^{n} \right\| = \left\| \Psi^{(n)} \left(\left[\left[\begin{array}{cc} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{array} \right]\right]_{i,j}^{n} \right) \right\|$$
$$\leq \left\| \left[\left[\begin{array}{cc} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{array} \right]\right]_{i,j}^{n} \right\| = \left\| T \left(\left[\left[\begin{array}{cc} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{array} \right]\right]_{i,j}^{n} \right) \right\|.$$

Portanto

$$\|\psi^{(n)}(A)\| \leq \left\| T \left(\left[\left[\begin{array}{cc} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{array} \right]\right]_{i,j}^{n} \right) \right\| = \left\| \left[\begin{array}{cc} 0 & A \\ 0 & 0 \end{array} \right] \right\| = \|A\|.$$

Isso quer dizer que $\|\psi^{(n)}\| \leq 1$ para todo n natural. Devemos ter portanto $\|\psi\|_{cb} \leq 1$ e como ψ é uma extensão de φ, $\|\psi\|_{cb} = 1$.

Considere agora $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ completamente limitado e não nulo. Seja $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definido por $\psi(a) = \dfrac{\varphi(a)}{\|\varphi\|_{cb}}$. Evidentemente ψ é completamente limitado e $\|\psi\|_{cb} = 1$. Então existe uma aplicação completamente limitada $\widetilde{\psi} : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\widetilde{\psi}|_{\mathcal{M}} = \psi$ e $\|\widetilde{\psi}\|_{cb} = \|\psi\|_{cb} = 1$. Note que a aplicação $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definida por $\widetilde{\varphi}(a) = \|\varphi\|_{cb}\widetilde{\psi}(a)$ é tal que $\|\widetilde{\varphi}\|_{cb} = \|\varphi\|_{cb}$, $\widetilde{\varphi}|_{\mathcal{M}} = \varphi$, e é claramente completamente positiva pois $\widetilde{\psi}$ é completamente positiva., como queríamos. ■

Capítulo 3

Teorema de Choi-Effros

Na construção GNS, consideramos uma C^*-álgebra unital e a enxergamos como uma C^*-subálgebra de um espaço de operadores em um determinado espaço de Hilbert. Quando assim o fazemos, muitas propriedades relacionadas a ela são mais facilmente demonstradas. Um exemplo é quando a quocientamos por um ideal bilateral, e por meio da construção GNS podemos perceber que o resultado é uma C^*-subálgebra de um espaço de operadores. Nesse capítulo queremos definir os espaços $*$-vetoriais e enxergá-los como sistemas de operadores em uma determinada C^*-álgebra cuja construção é feita no transcorrer da demonstração do Teorema de Choi-Effros.

Definição 3.1 Um *espaço $*$-vetorial* é um par $(S, *)$, em que $\mathcal{S}$ é um espaço vetorial complexo e $* : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ é uma aplicação involutiva e conjugado-linear, isto é, $(x^*)^* = x$ e $(x + \lambda y)^* = x^* + \overline{\lambda} y^*$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathcal{S}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definição 3.2 Dado um espaço $*$-vetorial $\mathcal{S}$, dizemos que um elemento de $x \in \mathcal{S}$ é *autoadjunto* se $x^* = x$. Os conjunto formado pelos elementos autoadjuntos de $\mathcal{S}$ será denotado por $\mathcal{S}_h = \{x \in \mathcal{S};\ \ x^* = x\}$.

Podemos observar que para cada elemento $x \in \mathcal{S}$ existem $y, z \in \mathcal{S}_h$ tais que $x = y + iz$, em que $y = (x + x^*)/2$ e $z = (x - x^*)/2i$.

Definição 3.3 Um subconjunto C de $\mathcal{S}_h$ é chamado *cone* de $\mathcal{S}$ se $0 \in C$, se para qualquer λ número real estritamente positivo tem-se que $\lambda x \in C$ para todo $x \in C$ e dados se $x, y \in C$ tem-se que $x + y \in C$. Quando $\mathcal{S}$ possui um cone C, então escrevemos $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, C)$ que representa o espaço

$\mathcal{S}$ munido com o cone C. Diremos que $(\mathcal{S}, C)$ é um *espaço $*$-vetorial ordenado.*

Definição 3.4 Uma *unidade de ordem* e em $(\mathcal{S}, C)$ é um elemento de $\mathcal{S}_h$ tal que para todo $x \in \mathcal{S}_h$ existe um número real estritamente positivo r tal que $re + x \in C$. A unidade de ordem e é chamada de *unidade de ordem arquimediana* quando para qualquer $x \in \mathcal{S}_h$, se $re + x \in C$ para todo número real r estritamente positivo, então $x \in C$.

Vamos agora listar três observações simples, porém importantes, a respeito de e, uma unidade em $(\mathcal{S}, C)$.

Observação 3.5 Como $e \in \mathcal{S}_h$ então existe um número real positivo r tal que $re + e \in C$. Como C é cone em $\mathcal{S}$ temos que

$$e = \frac{1+r}{1+r} \cdot e = \frac{1}{1+r} \cdot (re + e) \in C.$$

Observação 3.6 Note que se $s \geq r > 0$ e $re + x \in C$ então $se + x = se + re - re + x = (s - r)e + re + x \in C$, pois C é cone.

Observação 3.7 Se $x \in \mathcal{S}_h$ então existe um número real positivo r tal que $re+x \in C$. Como $-x \in \mathcal{S}_h$ existe s positivo tal que $se-x \in C$. Seja $t = \max\{r, s\}$. Logo $te+x,\ te-x \in C$ e como $x = (te+x)/2-(te-x)/2$, tem-que $\mathcal{S}_h = C - C$.

Note que, para um espaço $*$-vetorial $\mathcal{S}$ e $n \in \mathbb{N}$, podemos tornar $\mathbb{M}_n(\mathcal{S})$ um espaço $*$-vetorial. Para isso basta definir uma nova aplicação $* : \mathbb{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{M}_n(\mathcal{S})$ nesse espaço de matrizes, por $[x_{ij}]^*_{ij} := [x^*_{ji}]_{ij}$, para cada matriz $[x_{ij}]$ em $\mathbb{M}_n(\mathcal{S})$.

Para cada $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $X = [x_{ij}] \in \mathbb{M}_{n\times k}(\mathcal{S})$ definimos o produto a esquerda de X de forma usual

$$A.X = \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}x_{lj}\right]_{ij} \in \mathbb{M}_{m\times k}(\mathcal{S}),$$

e similarmente o definimos o produto a direita de X.

Definição 3.8 Um espaço $*$-vetorial é dito *matricialmente ordenado* quando

i) Para todo número natural n existe um cone C_n em $M_n(\mathcal{S})_h$;

ii) Para todo número natural n tem-se $C_n \cap -C_n = \{0\}$;

iii) Quaisquer que sejam m e n números naturais e $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ tem-se $A^*C_nA \subseteq C_m$.

Muitas das terminologias que usamos quando estudamos sistema de operadores serão usadas no contexto dos espaços $*$-vetoriais. Por exemplo, se $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ são espaços $*$-vetoriais e se, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se que C_n^1 e C_n^2 são cones de $\mathbb{M}_n(\mathcal{S}_1)$ e $\mathbb{M}_n(\mathcal{S}_2)$, respectivamente, então $\varphi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ é uma aplicação completamente positiva se para cada $[x_{ij}] \in C_n^1$ tem-se $[\varphi(x_{ij})] \in C_n^2$.

Quando $\varphi : S_1 \to S_2$ é completamente positivo e invertível e sua inversa for também completamente positiva, dizemos que φ é um *isomorfismo de ordem completo.*

Observação 3.9 Vamos considerar, a partir de agora, o produto tensorial algébrico $\mathcal{S} \odot \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{M}_n(\mathcal{S})$, entre espaços vetoriais. Uma demonstração para essa igualdade encontra-se na primeira parte do último exemplo do Apêndice-A, trocando $\mathfrak{A}$ por $\mathcal{S}$.

Daqui em diante, $I_n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é a matriz identidade.

Definição 3.10 Em um espaço $*$-vetorial matricialmente ordenado S, um elemento $e \in \mathcal{S}_h$ é chamado *unidade de ordem matricial* se para todo n número natural, tem-se que a matriz $e \otimes I_n$ é unidade de ordem em $(\mathbb{M}_n(\mathcal{S}), C_n)$. É chamado de *unidade de ordem matricial arquimediana* se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $e \otimes I_n$ for unidade arquimediana em $(\mathbb{M}_n(\mathcal{S}), C_n)$.

Se $\mathcal{S}$ é um espaço $*$-vetorial, então considere uma aplicação linear $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Defina o funcional linear $s_\varphi : \mathbb{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ por

$$s_\varphi([x_{ij}]) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \varphi(x_{ij})e_j, e_i\rangle,$$

tal como fizemos no início do capítulo anterior, porém omitimos agora o termo $\frac{1}{n}$. Se $s : \mathbb{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ é um funcional linear, definimos a aplicação linear $\varphi_s : \mathcal{S} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ por

$$\varphi_s(x) = [s(x \otimes E_{ij})]_{ij},$$

em que $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ é a base canônica de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, e $x \in \mathcal{S}$. Vimos no capítulo anterior que tais operações são mutuamente inversas, ou seja, $\varphi_{s_\varphi} = \varphi$ e $s_{\varphi_s} = s$ (Observe que a demonstração desse fato depende apenas da estrutura vetorial de $\mathcal{S}$)

Proposição 3.11 *Sejam $\mathcal{S}$ um espaço $*$-vetorial ordenado matricialmente, $s : \mathbb{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ um funcional linear e $\varphi = \varphi_s$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $s(C_n) \geq 0$;

ii) φ *é n-positiva;*

iii) φ *é completamente positiva.*

Demonstração. Suponha que $s(C_n) \geq 0$. Considere vetores $b = (b_1, \ldots, b_n)$ e $a = (a_1, \ldots, a_n)$ em $\mathbb{C}^n$. Então para todo $x \in \mathcal{S}$ temos

$$\langle \varphi(x)b, a\rangle = \langle [s(x \otimes E_{ij})]b, a\rangle =$$

$$= \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} s(x \otimes E_{1i})b_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} s(x \otimes E_{ni})b_i \right), (a_1, \ldots, a_n) \right\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{a_j} \sum_{i=1}^{n} s(x \otimes E_{ji})b_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} s(\overline{a_j}(x \otimes E_{ji})b_i)$$

$$= s([\overline{a_i} x b_j]_{ij}) = s(a^* x b).$$

Sejam $[x_{ij}] \in C_m$ e $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}^n$. Denote $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m) \in \mathbb{C}^{nm}$. Então

$$\langle [\varphi(x_{ij})]_{i,j=1}^{m} v, v\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi(x_{ij})v_j, v_i\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} s(v_i^* x_{ij} v_j) =$$

$$= s\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} v_i^* x_{ij} v_j \right) = s(v^*[x_{ij}]v) =$$

$$= s\left(\begin{bmatrix} \overline{v_1^1} & \ldots & \overline{v_m^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{v_1^n} & \ldots & \overline{v_m^n} \end{bmatrix} [x_{ij}] \begin{bmatrix} v_1^1 & \ldots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_m^1 & \ldots & v_m^n \end{bmatrix} \right)$$

que é positivo por hipótese, usando também a terceira parte da Definição 3.8. Temos, portanto, que a matriz $[\varphi(x_{ij})]_{ij}^{m}$ é positiva. Como isso vale para cada m número natural, então φ é completamente positiva. As outras implicações são análogas àquelas registradas no Lema 2.2. ■

Proposição 3.12 *Sejam $\mathcal{S}$ um espaço $*$-vetorial ordenado matricialmente, $e \in \mathcal{S}$ unidade de ordem matricial arquimediana e $X \in \mathbb{M}_n(\mathcal{S})$. Então*

$$\|X\|_n = \inf\left\{r;\ \left[\begin{array}{cc} r.\, e \otimes I_n & X \\ X^* & r.\, e \otimes I_n \end{array}\right] \in C_{2n}\right\}$$

é uma norma sobre $\mathbb{M}_n(S)$ e C_n é um suconjunto fechado de $\mathbb{M}_n(S)$ na topologia induzida pela norma $\|.\|_n$.

Demonstração. Faremos o caso $n = 1$ e perceba que os outros casos são absolutamente análogos. Vamos mostrar inicialmente que $\|.\|_1$ é norma sobre $\mathcal{S}$. A seguir fazemos as afirmações do que queremos provar e em seguida a demonstração.

Afirmação 1: $\|x\|_1 \geq 0, \forall x \in \mathcal{S}$.

Sejam $x \in \mathcal{S}$ e r um número real tais que

$$r\left[\begin{array}{cc} e & 0 \\ 0 & e \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & x \\ x^* & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} re & x \\ x^* & re \end{array}\right] \in C_2.$$

Note que tal r existe pois $e \in \mathcal{S}$ é unidade de ordem matricial, e, portanto, a matriz $e \otimes I_n$ é unidade de ordem em $M_2(S)$.
Considere a matriz $A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right] \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Então

$$\left[\begin{array}{cc} re & -x \\ -x^* & re \end{array}\right] = A^*\left[\begin{array}{cc} re & x \\ x^* & re \end{array}\right] A \in C_2.$$

Portanto

$$\left[\begin{array}{cc} re & x \\ x^* & re \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} re & -x \\ -x^* & re \end{array}\right] = 2r\left[\begin{array}{cc} e & 0 \\ 0 & e \end{array}\right] = 2r(e \otimes I_2) \in C_2.$$

Suponha por contradição, que r seja estritamente negativo. Então a matriz $-2r\left[\begin{array}{cc} e & 0 \\ 0 & e \end{array}\right] = -2r(e \otimes I_2) \in C_2$, pois C_2 é cone. Mas pelo segundo item da Definição 3.8 devemos ter $C_2 \cap -C_2 = \{0\}$. Como $2r(e \otimes I_2), -2r(e \otimes I_2) \in C_2$ então $r = 0$, que é um absurdo. Portanto $r \geq 0$ e assim $\|x\|_1 \geq 0$ para todo $x \in S$.

Afirmação 2: $\|x\|_1 = 0$ se, e somente se, $x = 0$

Suponha que $\|x\|_1 = 0$. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe um número real r tal que $0 < r < \varepsilon$ e $\begin{bmatrix} re & x \\ x^* & re \end{bmatrix} \in C_2$. Da Observação 3.6 temos que $\begin{bmatrix} \varepsilon e & x \\ x^* & \varepsilon e \end{bmatrix} \in C_2$ para todo $\varepsilon > 0$.

Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$. Então

$$[1, \overline{\lambda}] \begin{bmatrix} \varepsilon e & x \\ x^* & \varepsilon e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \varepsilon(1 + |\lambda|^2)e + \lambda x + (\lambda x)^* \in C_1, \forall \varepsilon > 0.$$

Como e é arquimediano, segue que $\lambda x + (\lambda x)^* \in C_1$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Escolhendo $\lambda = 1$ e depois $\lambda = -1$ temos $x + x^* \in C_1$ e $-x - x^* \in C_1$. Assim $x + x^* = 0$. Escolhendo $\lambda = i$ e $\lambda = -i$ obtemos $x - x^* = 0$. Portanto $x = 0$.

Suponha agora que $x = 0$. Queremos determinar

$$\|x\|_1 = \inf\{r;\ r(e \otimes I_2) \in C_2\}.$$

Note que $0(e \otimes I_n) \in C_2$. Suponha que exista $r < 0$ tal que $r(e \otimes I_n) \in C_2$. Cono $-r > 0$ e $e \otimes I_n \in C_2$, segue que $-re \otimes I_n \in C_2$. E como $C_2 \cap -C_2 = \{0\}$, devemos ter $r = 0$, um absurdo. Logo $\|x\|_1 = 0$.

Afirmação 3: $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall x \in \mathcal{S}$.

Sejam $x \in \mathcal{S}$ e $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Suponha que $\|\lambda x\| < |\lambda|\|x\|$. Da definição de ínfimo de um conjunto, existe um número real r tal que $r < |\lambda|\|x\| - \|\lambda x\| + \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ e $\begin{bmatrix} re & \lambda x \\ \overline{\lambda} x^* & re \end{bmatrix} \in C_2$. Note que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ |\lambda|/\lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} re & \lambda x \\ \overline{\lambda} x^* & re \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & |\lambda|/\overline{\lambda} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} re & |\lambda| x^* \\ |\lambda| x & re \end{bmatrix} \in C_2$ e conforme já vimos antes também temos que $\begin{bmatrix} re & |\lambda| x \\ |\lambda| x^* & re \end{bmatrix} \in C_2$. Portanto $|\lambda| \begin{bmatrix} \frac{1}{|\lambda|} re & x \\ x^* & \frac{1}{|\lambda|} re \end{bmatrix} \in C_2$ e assim $\begin{bmatrix} \frac{1}{|\lambda|} re & x \\ x^* & \frac{1}{|\lambda|} re \end{bmatrix} \in C_2$, o que é um absurdo pois $\frac{r}{|\lambda|} < \|x\|$. Logo $\|\lambda x\| \geq |\lambda|\|x\|$.

Suponha que $\|\lambda x\| > |\lambda|\|x\|$. Então existe um número real r tal que $r < (\frac{\|\lambda x\|}{|\lambda|} - \|x\|) + \|x\| = \frac{\|\lambda x\|}{|\lambda|}$ tal que $\begin{bmatrix} re & x \\ x^* & re \end{bmatrix} \in C_2$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Note que $\begin{bmatrix} 0 & \overline{\beta} \\ \overline{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} re & x \\ x^* & re \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\beta|^2 re & \alpha\overline{\beta} x^* \\ \overline{\alpha}\beta x & |\alpha|^2 re \end{bmatrix} \in$

C_2. Queremos chegar a uma contradição mostrando que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $\begin{bmatrix} |\lambda|re & \lambda x \\ \overline{\lambda}x^* & |\lambda|re \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\beta|^2 re & \overline{\alpha}\beta x \\ \alpha\overline{\beta}x^* & |\alpha|^2 re \end{bmatrix}$, pois contradiz com $|\lambda|r < \|\lambda x\|$. Queremos encontrar α, β tais que $\overline{\alpha}\beta = \lambda$ e $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = |\lambda|$. Escreva λ na sua forma trigonométrica, ou seja, $\lambda = |\lambda|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Seja $\beta = \sqrt{|\lambda|}(\cos(\theta/2) + i$
$mthrmsen(\theta/2))$ uma das duas raízes quadradas de λ e seja $\alpha = \overline{\beta}$. Então $\beta\overline{\alpha} = \lambda$. Como isso gera um absurdo, devemos ter $\|\lambda x\| \leq |\lambda|\|x\|$.

Afirmação 4: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathcal{S}$

Suponha que existam $x, y \in \mathcal{S}$ tais que $\|x+y\| > \|x\| + \|y\|$. Portanto, da definição de $\|y\|$, existe um número real r tal que $r < \|y\| + (\|x+y\| - \|x\| - \|y\|) = \|x+y\| - \|x\|$ e $\begin{bmatrix} re & y \\ y^* & re \end{bmatrix} \in C_2$. Como $r + \|x\| < \|x+y\|$ então existe um número real s tal que $s < \|x\| + (\|x+y\| - r - \|x\|) = \|x+y\| - r$ e $\begin{bmatrix} se & x \\ x^* & se \end{bmatrix} \in C_2$. Observe que $\begin{bmatrix} (s+r)e & x+y \\ x^*+y^* & (s+r)e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} se & x \\ x^* & se \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} re & y \\ y^* & re \end{bmatrix} \in C_2$, no entanto $s + r < \|x+y\|$, um absurdo. Logo para quaisquer $x, y \in \mathcal{S}$ temos que $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Afirmação 5: $\|x^*\| = \|x\|$

Suponha por contradição que $\|x\| < \|x^*\|$. Então existe um número real r tal que $r < (\|x^*\| - \|x\|) + \|x\| = \|x^*\|$ e $\begin{bmatrix} re & x \\ x^* & re \end{bmatrix} \in C_2$. Note que

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} re & x \\ x^* & re \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} re & -x^* \\ -x & re \end{bmatrix} \in C_2$$

Além disso temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} re & -x^* \\ -x & re \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} re & x^* \\ x & re \end{bmatrix} \in C_2.$$

Isso significa afirmar que $\|x^*\| \leq r < \|x^*\|$, um absurdo. Logo devemos ter $\|x^*\| \leq \|x\|$ para todo $x \in S$. Assim $\|x\| = \|(x^*)^*\| \leq \|x^*\|$. Segue que $\|x\| = \|x^*\|$ para todo $x \in S$.

Afirmação 6: C_1 é fechado na topologia induzida pela norma $\|.\|_1$.

Vamos mostrar que C_1 é fechado na norma $\|.\|_1$. Seja (x_n) sequência em C_1 convergente a $x \in \mathcal{S}$. Como $\|x_n - x\| \to 0$ então $\|x_n^* - x\| \to 0$ pois $x_n^* = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas $\|x_n^* - x^*\| = \|(x_n - x)^*\| = \|x_n - x\| \to 0$. Portanto $x = x^*$. Seja $\varepsilon > 0$. Existe um número natural k tal que $\|x - x_k\| < \varepsilon$. Logo

$$\begin{bmatrix} \varepsilon e & x - x_k \\ x - x_k & \varepsilon e \end{bmatrix} \in C_2.$$

Assim

$$[1,1] \begin{bmatrix} \varepsilon e & x - x_k \\ x - x_k & \varepsilon e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\varepsilon e + 2x - 2x_k \in C_1$$

Como $x_k \in C_1$ então $\varepsilon e + x \in C_1$ para todo $\varepsilon > 0$ e como e é arquimediano segue que $x \in C_1$. ■

Corolário 3.13 *Seja $\mathcal{S}$ é um espaço $*$-vetorial matricialmente ordenado com unidade arquimediana e. Dado $x \in \mathcal{S}$, então $\|x\| \leq 1$ se, e somente se, $E = \begin{bmatrix} e & x \\ x^* & e \end{bmatrix} \in C_2$.*

Demonstração. Se a matriz E está em C_2, então segue, da definição que demos para $\|x\|$, que $\|x\| \leq 1$. Suponha que $\|x\| \leq 1$. Se $\|x\| < 1$ então existe um $r \in \mathbb{R}$ tal que $\|x\| < r < 1$ e $\begin{bmatrix} re & x \\ x^* & re \end{bmatrix} \in C_2$. Como $1 > r$ temos $\begin{bmatrix} e & x \\ x^* & e \end{bmatrix} \in C_2$. Suponha então que $\|x\| = 1$. Então para todo número natural n existe r_n número real tal que $r_n < \|x\| + 1/n = 1 + 1/n$ tal que $\begin{bmatrix} r_n e & x \\ x^* & r_n e \end{bmatrix} \in C_2$. Portanto $E_n = \begin{bmatrix} (1+1/n)e & x \\ x^* & (1+1/n)e \end{bmatrix} \in C_2$. Note que $\|E_n - E\| = \dfrac{1}{n} \left\| \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \right\|$, ou seja, E_n converge para E e como C_2 é fechado segue que $E \in C_2$. ■

Lema 3.14 *Sejam $(\mathcal{S}, C)$ um espaço $*$-vetorial ordenado matricialmente com unidade arquimediana, e $a \notin C$. Então existe um funcional linear $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(p) \geq 0$, para todo $p \in C$, e $\varphi(a) \notin \{z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C};\ \alpha \geq 0 \text{ e } \beta = 0\}$.*

Demonstração. Vamos demonstrar esse lema em dois casos. Primeiramente suponha que a seja autoadjunto, $a = a^*$. Como $a \notin C$ e como C é fechado, existe uma bola aberta B, centrada em a, tal que $B \cap C = \emptyset$. Como $\mathcal{S}$ é normado então B é um conjunto convexo e podemos usar o Teorema de Separação de Hahn-Banach, veja (Sunder, Teorema 1.6.12), existe um funcional linear $\psi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ e existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Re(\psi(x)) < \lambda \leq Re(\psi(p))$ para todo $x \in B$ e para todo $p \in C$. Note que $\lambda \leq 0$, pois $0 \in C$. Defina o funcional $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ por $\varphi(a) = \dfrac{\psi(a) + \overline{\psi(a^*)}}{2}$, para todo $a \in \mathcal{S}$. é fácil ver que tal funcional é linear. Note que se $p \in C$ temos $\varphi(p) = Re(\psi(p)) \geq \lambda$. Observe também que $\varphi(a) = Re(\psi(a)) < \lambda \leq 0$, ou seja, $\varphi(a) < 0$. Então se $\lambda = 0$ o lema está demonstrado. Suponha que $\lambda < 0$ e vamos mostrar que φ é positivo. De fato, se existir $p \in C$ tal que $\varphi(p) < 0$, escolha um número real positivo t tal que $t > \dfrac{\lambda}{\varphi(p)}$. Assim $Re(\psi(tp)) = \varphi(tp) < \lambda$ o que é um absurdo pois, sendo C um cone, temos $tp \in C$. Fica então demonstrado que se a é autoadjunto então existe um funcional linear positivo $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(a) < 0$.

Vamos agora considerar o caso em que a não é autoadjunto. Escreva $a = Re(a) + iIm(a)$. Observe que $Re(a)$ e $Im(a)$ são autoadjuntos, e que $Im(a) \neq 0$ porque $Im(a) = \dfrac{a - a^*}{2i}$ e $a \neq a^*$. Note que $\psi(a) = \psi(Re(a)) + i\psi(Im(a))$ para todo funcional linear $\psi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$, além disso se ψ é positivo temos $\psi(Re(a)), \psi(Im(a)) \in \mathbb{R}$, pois $Re(a), Im(a)$ são autoadjuntos. Vamos encontrar um funcional linear positivo ψ tal que $\psi(Im(a)) \neq 0$. Para isso suponha primeiro que $Im(a) \notin C$. Conforme vimos anteriormente, existe um funcional linear positivo ψ tal que $\psi(Im(a)) < 0$ e a demonstração do lema, nesse caso, está concluída. Caso $Im(a) \in C$ então $-Im(a) \notin C$ pois $C \cap -C = \{0\}$ e $Im(a) \neq 0$. Considere um funcional positivo ψ tal que $\psi(-Im(a)) < 0$. Então $\psi(Im(a)) > 0$. Eis nosso ψ. ■

Teorema 3.15 *(Teorema de Choi-Effros) Sejam $\mathcal{S}$ um espaço $*$-vetorial ordenado matricialmente e $e \in \mathcal{S}$ unidade de ordem matricial arquimediana. Então existem um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, um sistema de operadores $\widetilde{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e um isomorfismo de ordem completa $\varphi : \mathcal{S} \to \widetilde{\mathcal{S}}$ tal que $\varphi(e) = I_{\mathcal{H}}$.*

Demonstração. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto P_n das aplicações completamente positivas $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $\varphi(e) = I_n$. Observe que P_n é não vazio, para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, a C^*-álgebra $\oplus_\varphi \mathbb{M}_n^\varphi$ formada pela soma direta de cópias de

$\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, indexada pelo conjunto das aplicações completamente positivas $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Feito isso, considere a C^*-álgebra $\mathfrak{A} = \oplus_n(\oplus_\varphi \mathbb{M}_n^\varphi)$. Defina a aplicação

$$\begin{array}{cccc} J & : & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathfrak{A} \\ & & x & \longmapsto & \oplus_n(\oplus_\varphi \varphi(x)) \end{array}.$$

Observe que J está bem definida pois, para cada $x \in \mathcal{S}$, existe um $r \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{bmatrix} re & x \\ x^* & re \end{bmatrix} \in C_2$, já que o elemento e é unidade de ordem matricial. Assim, para qualquer $\varphi \in P_n$, tem-se que $\begin{bmatrix} rI_n & \varphi(x) \\ \varphi(x)^* & rI_n \end{bmatrix}$ é positivo em $\mathbb{M}_2(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$. Daí, $\|\varphi(x)\| \leq r$ pela Proposição 1.5. Temos, portanto, que para cada $x \in \mathcal{S}$ existe um $r \in \mathbb{R}$ tal que $\|J(x)\| = \sup\limits_{n\ \varphi} \|\varphi(x)\| \leq r$.

Note que $J(S)$ é uma sistema de operadores pois é um subespaço vetorial, haja vista que J é uma transformação linear, e possui a unidade da álgebra $\mathfrak{A}$, a saber $J(e) = \oplus_n(\oplus_\varphi I_n)$, e claramente preserva estrela, pois cada φ preserva estrela. Nosso objetivo é mostrar que a aplicação $J : \mathcal{S} \to J(\mathcal{S})$ é o isomorfismo do enunciado do teorema.

Perceba que J é injetiva pois cada aplicação $\varphi \in P_n$ é uma isometria (logo injetiva) pela Proposição 1.29.

Vamos mostrar que J é completamente positivo. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $[x_{ij}] \in C_m$. Então $J^{(m)}([x_{ij}]) = [J(x_{ij})] = [\oplus_n \oplus_\varphi \varphi(x_{ij})]$. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathfrak{A}$, $x_i = \oplus_n \oplus_\varphi A_i$, em que $i = 1, 2 \ldots, n$. Note que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i^* \cdot \oplus_n \oplus_\varphi\ \varphi(x_{ij}) \cdot x_j = \\
&\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\oplus_n \oplus_\varphi A_i^*) \cdot \oplus_n \oplus_\varphi\ \varphi(x_{ij}) \cdot (\oplus_n \oplus_\varphi A_j) = \\
&\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \oplus_n \oplus_\varphi A_i^* \varphi(x_{ij}) A_j = \\
&\oplus_n \oplus_\varphi \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_i^* \varphi(x_{ij}) A_j \right),
\end{aligned}$$

é positivo, devido à Proposição 1.3 e porque cada aplicação φ é completamente positiva. Pela mesma Proposição 1.3, segue que $J^{(m)}([x_{ij}]) = [J(x_{ij})] = [\oplus_n \oplus_\varphi \varphi(x_{ij})]$ é uma matriz positiva para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, J é completamente positivo.

Para mostrar que a inversa de J é completamente positiva precisamos provar que se $[J(x_{ij})]_{ij}^m$ é positivo então $[x_{ij}]_{ij}^m$ também o é. E para mostrar isso, usamos a contrapositiva dessa afirmação, ou seja, supomos que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $[x_{ij}]_{ij=1}^n$ não é positivo, e precisamos mostrar que existem $k \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in P_k$ tais que $[\varphi(x_{ij})]_{ij=1}^n$ não é positivo. Segue do lema anterior que existe um funcional linear $s : \mathbb{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ tal que $s(C_n) \geq 0$ e $s([x_{ij}])$ não é número real positivo. Seja $\varphi_s : \mathcal{S} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, tal como vimos no início do capítulo anterior temos $\langle [\varphi(x_{ij})]f, f\rangle = s([x_{ij}])$, em que $f = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in \mathbb{C}^{n^2}$, donde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é base canônica de $\mathbb{C}^n$. Portanto $[\varphi(x_{ij})]$ não é positivo. Observe que φ_s é completamente positivo pela Proposição 3.11.

Seja $\varphi(e) = P$ positivo em $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Suponha que P seja invertível. Escreva $P = A^*A$. Então $(A^{-1})^*PA^{-1} = (A^*)^{-1}PA^{-1} = I_n$. Defina a aplicação completamente positiva $\psi(x) = (A^{-1})^*\varphi(x)A^{-1}$ e note que $\varphi(e) = I_n$. Note que

$$\langle [\psi(x_{ij})](Ae_i)_{i=1}^n, (Ae_i)_{i=1}^n\rangle =$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \psi(x_{ij})Ae_j, Ae_i\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \varphi(x_{ij})e_j, e_i\rangle = s([x_{ij}]) \ngeq 0.$$

Suponha agora que P é não-invertível e considere a $\dim(\ker(P)^\perp) = k < n$. Assim $\dim(\ker(P)) = n - k$. Considere a projeção $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ sobre $\ker(P)^\perp$. Afirmamos que existem matrizes $A \in \mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{C})$ e $D \in \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{C})$ tais que $A^*PA = I_k$ e $AD = Q$. De fato, considere uma base de autovetores ortonormais para P. Tal base possui $n-k$ vetores de $\ker(P)$ e, como os vetores são ortonormais, segue que os outros k vetores restantes estão em $\ker(P)^\perp$. Ordene essa base de forma que podemos escrever a matriz de P com relação a essa base na forma $\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ em que L é a matriz diagonal formada pelos autovalores não nulos. Evidentemente temos L invertível e positiva em $\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$. Assim existe $C \in \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$ tal que $C^*LC = I_k$. Seja $B^* = [C^* \ 0] \in \mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{C})$. Note que $B^* \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = I_k$ e que $B[C^{-1} \ 0] = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Lembre do curso de álgebra linear que podemos escrever $\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = R^*PR$ em que R invertível, $R^* = R^{-1}$, e R é a matriz de mudança de base, da base canônica para a base mencionada anteriormente. Portanto $(RB)^*P(RB) = I_k$, e denotamos $A = RB \in \mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{C})$. Analogamente $R^*QR = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B[C^{-1} \ 0]$ e assim $Q = (RB)[C^{-1} \ 0]R^{-1}$. Fica demonstrado que se P não é invertível então existem matrizes $A \in \mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{C})$ e $D \in \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{C})$ tais que $A^*PA = I_k$ e $AD = Q$.

Seja $x \in \mathcal{S}$ com $\|x\| \leq 1$. Então $\begin{bmatrix} e & x \\ x^* & e \end{bmatrix} \in C_2$ e consequentemente $\begin{bmatrix} P & \varphi(x) \\ \varphi(x)^* & P \end{bmatrix}$ é positivo em $\mathbb{M}_2(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$. Portanto $\varphi(x)^*\varphi(x) \leq \|P\|P$, e para todo $\eta \in \mathbb{C}^n$ temos $\langle \varphi(x)^*\varphi(x)\eta, \eta\rangle \leq \langle \|P\|P\eta, \eta\rangle$. Logo, se $P\eta = 0$ então $\varphi(x)\eta = 0$ para todo $x \in \mathcal{S}$. Mostremos agora que $Q\varphi(x)Q = \varphi(x)$, qualquer que seja $x \in \mathcal{S}$. De fato, se $\xi + \eta \in \ker(P)^\perp \oplus \ker P = \mathbb{C}^n$ então $Q\varphi(x)Q(\xi + \eta) = Q\varphi(x)\xi$. Note também que $\varphi(x)(\xi + \eta) = \varphi(x)\xi$ já que $\eta \in \ker(P)$. Para mostrar o que desejamos, resta provar que $\varphi(x)\xi \in \ker(P)^\perp$. Seja $\eta \in \ker(P)$. Suponha que x é autoadjunto. Note que $\langle \varphi(x)\xi, \eta\rangle = \langle \xi, \varphi(x)^*\eta\rangle = \langle \xi, \varphi(x^*)\eta\rangle = \langle \xi, \varphi(x)\eta\rangle = 0$. No caso em que x não é autoadjunto, basta escrever $x = Re(x) + iIm(x)$ para concluir o mesmo. Portanto $Q\varphi(x)Q = \varphi(x)$ para todo $x \in \mathcal{S}$.

Com isso em mãos, definimos uma aplicação completamente positiva $\psi : \mathcal{S} \to \mathbb{M}_k(C)$ por $\psi(x) = A^*\varphi(x)A$. Note que $\psi(e) = I_k$. Concluimos observando que $[\psi(x_{ij}] \not\geq 0$ pois

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \psi(x_{ij})De_j, De_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \varphi(x_{ij})Qe_j, Qe_i\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \varphi(x_{ij})e_j, e_i\rangle = s([x_{ij}]) \not\geq 0. \blacksquare$$

Capítulo 4

Apêndice A - Produto tensorial algébrico

4.1 Definição e unicidade

Definição 4.1 Um *produto tensorial* entre dois espaços vetoriais E e F é um par (π, T) tal que T é um espaço vetorial, $\pi : E \times F \to T$ é uma aplicação bilinear, e para todo espaço vetorial U, e para toda aplicação bilinear $\psi : E \times F \to U$, existe uma única aplicação linear $\varphi : T \to U$ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & T \arrow[d, "\varphi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

ou seja, $\varphi \circ \pi = \psi$.

Observação 4.2 Dizemos que (π, T) é um produto tensorial entre os espaços vetoriais E e F, ou que (π, T) é um produto tensorial do espaço vetorial $E \times F$.

Proposição 4.3 *O produto tensorial entre espaços vetoriais E e F é único, a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Sejam (π_1, T_1) e (π_2, T_2) produtos tensoriais entre E, F. Então existem únicas aplicações lineares $\varphi_1 : T_1 \to T_2$ e φ_2 :

$T_2 \to T_1$ tais que os diagramas abaixo comutam,

$$\begin{tikzcd} E\times F \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & T_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ & T_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E\times F \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & T_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\ & T_1 \end{tikzcd}$$

ou seja, $\varphi_1 \circ \pi_1 = \pi_2$ e $\varphi_2 \circ \pi_2 = \pi_1$. Assim $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \pi_2 = \pi_2$ e $\varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \pi_1 = \pi_1$. Evidentemente, os diagramas abaixo também comutam

$$\begin{tikzcd} E\times F \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & T_1 \arrow[d, "id_{T_1}"] \\ & T_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E\times F \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & T_2 \arrow[d, "id_{T_2}"] \\ & T_2 \end{tikzcd} \quad .$$

Temos, portanto, que $id_{T_1} \circ \pi_1 = \pi_1$ e $\varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \pi_1 = \pi_1$, e obtemos da nossa definição de produto tensorial que $id_{T_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Analogamente, $id_{T_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$. Em outras palavras, T_1 e T_2 são isomorfos. ■

4.2 Construção de um produto tensorial

Considere espaços vetorias E e F. Seja o espaço vetorial de todas as combinações lineares formais e finitas de $E \times F$, a saber

$$\mathbb{C}^{E\times F} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, f_i); \;\; \lambda_i \in \mathbb{C}, e_i \in E, f_i \in F, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Vamos definir também os seguintes conjuntos em $\mathbb{C}^{E\times F}$

$$\begin{aligned} N_1 &= \{(e_1 + e_2, f) - (e_1, f) - (e_2, f);\;\; e_1, e_2 \in E, f \in F\}, \\ N_2 &= \{(e, f_1 + f_2) - (e, f_1) - (e, f_2);\;\; e \in E, f_1, f_2 \in F\}, \\ N_3 &= \{\lambda(e, f) - (\lambda e, f);\;\; \lambda \in \mathbb{C}, e \in E, f \in F\}, \\ N_4 &= \{\lambda(e, f) - (e, \lambda f);\;\; \lambda \in \mathbb{C}, e \in E, f \in F\}. \end{aligned}$$

Denote por N o espaço gerado pela união dos conjuntos N_1, N_2, N_3, N_4 e defina o espaço quociente

$$E \odot F := \mathbb{C}^{E\times F}/N.$$

Considere a aplicação quociente $\widetilde{\pi} : \mathbb{C}^{E\times F} \to E \odot F$, definida por $\widetilde{\pi}(x) = [x] = x + N$, que leva x na classe de x, para todo $x \in \mathbb{C}^{E\times F}$.

Considere também a aplicação inclusão $i : E \times F \to \mathbb{C}^{E\times F}$, e defina $\pi := \widetilde{\pi} \circ i : E \times F \to E \odot F$. Para cada $(e, f) \in E \times F$ denotamos $\pi(e, f) = \widetilde{\pi} \circ i(e, f) = [(e, f)] =: e \otimes f$, e se $\widetilde{x} \in E \odot F$ então

$$\widetilde{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i, f_i) + N = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left((e_i, f_i) + N\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i \otimes f_i).$$

Note π é bilinear pois se anula em elementos de N_1, N_2, N_3, N_4, vistos em $E \times F$, já que para todo $\widetilde{x} \in N$ temos $\widetilde{\pi}(\widetilde{x}) = \widetilde{x} + N = N = 0_{E\odot F}$, o elemento neutro de $E \odot F$. Assim

$$\begin{aligned}
&(e_1 + e_2) \otimes f = e_1 \otimes f + e_2 \otimes f,\\
&e \otimes (f_1 + f_2) = e \otimes f_1 + e \otimes f_2,\\
&\lambda(e \otimes f) = \lambda e \otimes f,\\
&\lambda(e \otimes f) = e \otimes \lambda f.
\end{aligned}$$

Observação 4.4 A partir de agora, sempre que escrevermos π, faz-se referência a aplicação bilinear canônica $\pi : E \times F \to E \odot F$, $\pi(e, f) = e \otimes f$, que mencionamos anteriormente. Sempre que escrevermos N, faz-se referência ao conjunto definido anteriormente.

Proposição 4.5 *$(\pi, E \odot F)$ é um produto tensorial entre E e F.*

Demonstração. Sejam U um espaço vetorial e $\psi : E \times F \to U$ uma aplicação bilinear. Vamos definir a aplicação $\widetilde{\psi} : \mathbb{C}^{E\times F} \to U$ por $\widetilde{\psi}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i, f_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi(e_i, f_i)$. Evidentemente $\widetilde{\psi}$ é linear, e é fácil ver que $N \subseteq \ker(\widetilde{\psi})$ pois ψ é bilinear. Vamos definir agora $\varphi : E \odot F \to U$ por

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \otimes f_i\right) = \widetilde{\psi}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i, f_i)\right).$$

Perceba que φ está bem definida pois se $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \otimes f_i = 0$ teremos $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i[(e_i, f_i)] = 0$ e então $[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i, f_i)] = 0$. Portanto $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i, f_i) \in N$, e daí

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \otimes f_i\right) = \widetilde{\psi}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i, f_i)\right) = 0,$$

pois já observamos que $N \subseteq \ker(\widetilde{\psi})$.

Como $\varphi \circ \pi(e, f) = \varphi(e \otimes f) = \widetilde{\psi}(e, f) = \psi(e, f)$ para todo $(e, f) \in E \times F$, então o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & E \odot F \arrow[d, "\varphi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Suponha também que exista Φ linear, que no lugar de φ no diagrama acima, é tal que $\Phi \circ \pi = \psi$. Então $\Phi = \varphi$ pois

$$\begin{aligned} \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \Phi(e_i \otimes f_i) = \sum_{i=1}^{n} \Phi \circ \pi(e_i, f_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \psi(e_i, f_i) = \widetilde{\psi}\left(\sum_{i=1}^{n}(e_i, f_i)\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i\right). \end{aligned}$$

Como φ é a única aplicação linear que faz o diagrama acima comutar, segue que $(\pi, E \odot F)$ é produto tensorial de $E \times F$. ■

4.3 Propriedades

Proposição 4.6 *Dados espaços vetoriais E, F, G e os produtos tensoriais $(E \odot (F \odot G), \pi_1)$ e $(E \odot (F \odot G), \pi_2)$, então $(E \odot F) \odot G$ e $E \odot (F \odot G)$ são isomorfos.*

Demonstração. Começamos definindo a aplicação
$\psi_2 : E \times (F \odot G) \to (E \odot F) \odot G$ por

$$\psi_2\left(e, \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(e \otimes f_i) \otimes g_i,$$

que está bem definida por um raciocínio análogo ao feito na demonstração da proposicão anterior, e é fácil demonstrar que tal aplicação é bilinear. Com base nisso, existe uma única aplicação linear $\varphi_2 : E \odot (F \odot G) \to (E \odot F) \odot G$ que faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{tikzcd} E \times (F \odot G) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[dr, "\psi_2"'] & E \odot (F \odot G) \arrow[d, "\varphi_2"] \\ & (E \odot F) \odot G \end{tikzcd}$$

ou seja, $\varphi_2 \circ \pi_2 = \psi_2$. Note que

$$\begin{aligned}\varphi_2\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\otimes(f_i\otimes g_i)\right) &= \sum_{i=1}^{n}\varphi_2(e_i\otimes(f_i\otimes g_i)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\varphi_2(\pi_2(e_i, f_i\otimes g_i)) = \sum_{i=1}^{n}\psi_2(e_i, f_i\otimes g_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}(e_i\otimes f_i)\otimes g_i.\end{aligned}$$

Analogamente, definimos $\psi_1 : (E\odot F)\times G \to E\odot(F\odot G)$ por

$$\psi_1\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\otimes f_i, g\right) = \sum_{i=1}^{n} e\otimes(f_i\otimes g)$$

que é trivialmente bilinear. Portanto, existe uma aplicação linear φ_1 que faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{tikzcd}(E\odot F)\times G \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr, "\psi_1"'] & (E\odot F)\odot G \arrow[d, "\varphi_1"] \\ & E\odot(F\odot G)\end{tikzcd}$$

ou seja, $\varphi_1\circ\pi_1 = \psi_1$. Analogamente, também temos

$$\varphi_1\left(\sum_{i=1}^{n}(e_i\otimes f_i)\otimes g_i\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i\otimes(f_i\otimes g_i).$$

Segue que

$$\begin{aligned}(\varphi_2\circ\varphi_1)\left(\sum_{i=1}^{n}(e_i\otimes f_i)\otimes g_i\right) &= \varphi_2\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\otimes(f_1\otimes g_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(e_i\otimes f_1)\otimes g_i,\end{aligned}$$

e assim $\varphi_2\circ\varphi_1 = id_{(E\odot F)\odot G}$. Do mesmo modo, obtemos $\varphi_1\circ\varphi_2 = id_{E\odot(F\odot G)}$. Portanto temos que os espaços vetoriais $(E\odot F)\odot G$ e $E\odot(F\odot G)$ são isomorfos. ■

Definição 4.7 Uma *base* $B = \{e_i\}_{i\in I}$ de um espaço vetorial E, em que I é um conjunto de índices, é um subconjunto de E, de modo que qualquer elemento do espaço E é uma combinação linear finita de elementos de B e qualquer subconjunto finito de B é linearmente independente.

Proposição 4.8 *Se $\{e_i\}_{i\in I}$ e $\{f_j\}_{j\in J}$ são bases para os espaços vetoriais E e F, respectivamente, então $\{e_i \otimes f_j\}_{i\in I, j\in J}$ é base de $E \odot F$.*

Demonstração. Sejam $e \in E$ e $f \in F$. Existem $a_{l_i}, b_{kj} \in \mathbb{C}$, $e_{i_l} \in \{e_i\}_{i\in J}$ e $f_{k_j} \in \{f_j\}_{j\in J}$ tais que $e = \sum_{l=1}^{n} a_{li}e_{li}$ e $f = \sum_{l=1}^{m} b_{kj}f_{kj}$. Portanto

$$e \otimes f = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{l_i}b_{k_j}(e_{l_i} \otimes f_{k_j}),$$

e assim $\{e_i \otimes f_j\}_{i\in I, j\in J}$ gera $E \odot F$. Suponha agora que

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{l_i,k_j}(e_{li} \otimes f_{k_j}) = 0 \tag{4.1}$$

em que $a_{l_i,k_j} \in \mathbb{C}$. Para cada $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e para cada $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ definimos os seguintes funcionais lineares $d_{e_{l_i}} : E \to \mathbb{C}$, $d_{e_{l_i}}(e_i) = \delta_{l_i,i}$ e $d_{f_{k_l}} : F \to \mathbb{C}$, $d_{f_{k_j}}(f_j) = \delta_{k_j,j}$. Defina a aplicação $d_{e_{l_i}} \times d_{f_{k_l}} : E \times F \to \mathbb{C}$ por

$$d_{e_{l_i}} \times d_{f_{k_l}}(e_i, f_j) = d_{e_{l_i}}(e_i)d_{f_{k_l}}(f_j)$$

que é evidentemente bilinear. Logo existe uma aplicação linear $d_{e_{l_i}} \otimes d_{f_{k_l}}$, que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "d_{e_{l_i}} \times d_{f_{k_l}}"'] & E \odot F \arrow[d, "d_{e_{l_i}} \otimes d_{f_{k_l}}"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd} \quad .$$

Em outras palavras, $d_{e_{l_i}} \otimes d_{f_{k_l}}(e_i \otimes f_j) = d_{e_{l_i}}(e_i)d_{f_{k_l}}(f_j)$. Aplicando $d_{e_{l_i}} \otimes d_{f_{k_l}}$ em 4.1 obtemos $a_{l_i,k_j} = 0$. Portanto $\{e_i \otimes f_j\}_{i\in I, j\in J}$ é base de $E \odot F$. ■

Observação 4.9 Note, pela demonstração do resultado anterior, que se $\{e_i\}_{i\in I}$ e $\{f_j\}_{j\in J}$ são conjuntos linearmente independentes dos espaços vetoriais E e F, respectivamente, então $\{e_i \otimes f_j\}_{i\in I, j\in J}$ é linearmente independente.

Observação 4.10 Todo elemento $\sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i \in E \odot F$ pode ser escrito supondo que $\{e_i\}_{i=1}^n$ ou $\{f_i\}_{i=1}^n$ sejam conjuntos linearmente independentes. De fato, basta considerar uma base $\{b_j\}_{j=1}^m$ obtida pelo espaço gerado pelos elementos do conjunto $\{f_i\}_{i=1}^n$ por exemplo, e após isso, escrever, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} b_j$, para alguns $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$. E assim

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i &= \sum_{i=1}^n \left(e_i \otimes \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} b_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} e_i \otimes b_j \right). \end{aligned}$$

Em alguns casos será interessante considerar $\{b_j\}$ um conjunto ortonormal.

Proposição 4.11 *Se E, F são espaços vetoriais, $\sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i = 0$, e $\{e_i\}_{i=1}^n$ é um conjunto linearmente independente, então $f_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$*

Demonstração. Suponha que exista um elemento não nulo em $\{f_i\}_{i=1}^n$. Então considere uma base $\{b_j\}_{j \in J}$ para espaço gerado pelo conjunto $\{f_i\}_{i=1}^n$. Assim cada f_i pode ser escrito como uma combinação linear finita de elementos de $\{b_j\}_{j \in J}$. Portanto, podemos escrever $\sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i$ como uma combinação linear finita de elementos do conjunto $\{e_i \otimes b_j\}$, que por hipótese resulta em zero. Mas isto é um absurdo já que $\{e_i\}_{i=1}^n$ e $\{b_j\}_{j \in J}$ são conjuntos linearmente independentes, ou seja, $\{e_i \otimes b_j\}$ também é um conjunto linearmente independente. ■

Proposição 4.12 *Sejam E_1, E_2, F_1, F_2 espaços vetoriais e aplicações lineares $f_1 : E_1 \to F_1$ e $f_2 : E_2 \to F_2$. Então existe uma única aplicação linear $f_1 \otimes f_2 : E_1 \odot E_2 \to F_1 \odot F_2$ tal que $f_1 \otimes f_2(e_1 \otimes e_2) = f_1(e_1) \otimes f_2(e_2)$, para todo $e_1 \in E_1$ e para todo $e_2 \in E_2$.*

Demonstração. Defina a aplicação $\psi : E_1 \times E_2 \to F_1 \odot F_2$ por $\psi(e_1, e_2) = f_1(e_1) \otimes f_2(e_2)$. Como f_1 e f_2 são lineares então fica fácil perceber que ψ é bilinear. Portanto existe uma única aplicação linear $f_1 \otimes f_2$ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} E_1 \times E_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & E_1 \odot E_2 \arrow[d, "f_1 \otimes f_2"] \\ & F_1 \odot F_2 \end{tikzcd}$$

ou seja, $f_1 \otimes f_2(e_1 \otimes e_2) = f_1(e_1) \otimes f_2(e_2)$, como queríamos. ■

Proposição 4.13 *Se $\varphi : E \to \mathbb{C}$ e $\psi : F \to \mathbb{C}$ são funcionais lineares (conjugado-lineares), então existe uma única aplicação linear (conjugado-linear) $\varphi \odot \psi : E \odot F \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi \odot \psi(e, f) = \varphi(e)\psi(f)$, para quaisquer $e \in E$, $f \in F$.*

Demonstração. Sejam $\varphi : E \to \mathbb{C}$ e $\psi : F \to \mathbb{C}$ são funcionais lineares. De maneira análoga ao que fizemos na demonstração do resultado anterior, existe uma única aplicação linear $\varphi \odot \psi : E \otimes F \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi \odot \psi(e \otimes f) = \varphi(e)\psi(f)$, para quaisquer $e \in E$, $f \in F$.

Suponha, então, que $\varphi : E \to \mathbb{C}$ e $\psi : F \to \mathbb{C}$ são funcionais conjugado-lineares. é fácil notar que $\Phi : E \to \mathbb{C}$, $\Psi : F \to \mathbb{C}$, definidas por $\Phi(e) = \overline{\varphi(e)}$, $\Phi(f) = \overline{\psi(e)}$, são lineares. Logo, existe uma única aplicação linear $\Phi \odot \Psi : E \odot F \to \mathbb{C}$ de modo que $(\Phi \odot \Psi)(e \otimes f) = \Phi(e)\Psi(f)$, para quaisquer $e \in E$, $f \in F$. Portanto, a aplicação $g : E \odot F \to \mathbb{C}$, definida por $g(x) = \overline{(\Phi \odot \Psi)(x)}$, é conjugado-linear. Além disso, temos $g(e \otimes f) = \overline{(\Phi \odot \Psi)(e \otimes f)} = \varphi(e)\psi(f)$. Como g é conjugado-linear, segue facilmente a unicidade. ■

4.4 Produto tensorial entre espaços de Hilbert

Proposição 4.14 *Se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ são espaços de Hilbert, então existe um único produto interno $\langle . , . \rangle_{\mathcal{H} \odot \mathcal{K}} : \mathcal{H} \odot \mathcal{K} \times \mathcal{H} \odot \mathcal{K} \to \mathbb{C}$, de modo que para quaisquer $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$ e $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{K}$, tem-se*

$$\langle \xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle_{\mathcal{H} \odot \mathcal{K}} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \langle \eta_1, \eta_2 \rangle.$$

Demonstração. Denotamos por $\mathfrak{J}$ o espaço vetorial das aplicações conjugado-lineares $\varphi : \mathcal{H} \odot \mathcal{K} \to \mathbb{C}$. Para cada $\xi \in \mathcal{H}$ e para cada $\eta \in \mathcal{K}$ definimos as aplicações $h_\xi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $k_\eta : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ por $h_\xi(\xi^{'}) = \langle \xi, \xi^{'} \rangle$ e $k_\eta(\eta^{'}) = \langle \eta, \eta^{'} \rangle$. Considere também $\psi : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathfrak{J}$ definida por $\psi(\xi, \eta) = h_\xi \odot k_\eta$, (é fácil notar que ψ está bem definida e que é bilinear). Existe, portanto, uma única aplicação linear L que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \times \mathcal{K} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathcal{H} \odot \mathcal{K} \arrow[d, "L"] \\
& \mathfrak{J}
\end{tikzcd}$$

ou seja, $L(\xi \otimes \eta) = \psi(\xi, \eta) = h_\xi \odot k_\eta$. Defina a aplicação desejada $\langle . \ , . \rangle_{\mathcal{H}\odot\mathcal{K}} : \mathcal{H} \odot \mathcal{K} \times \mathcal{H} \odot \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ por $\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}\odot\mathcal{K}} = L(x)(y)$. Note que tal aplicação é linear na primeira entrada e conjugado-linear na segunda entrada, pois L é linear e $L(x)$ é conjugado-linear. Para mostrar que é um produto interno, resta provar que é uma aplicação positiva-definida. Seja $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i \in \mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ de modo que $\{\eta_i\}_{i=1}^{n}$ é um conjunto ortonormal. Então

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j \otimes \eta_j \right\rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \xi_i \otimes \eta_i,\ \xi_j \otimes \eta_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L(\xi_i \otimes \eta_i)(\xi_j \otimes \eta_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{\xi_i} \odot k_{\eta_i}(\xi_j \otimes \eta_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{\xi_i}(\xi_j) k_{\eta_i}(\eta_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \xi_i, \xi_j\rangle\langle \eta_i, \eta_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \xi_i, \xi_i\rangle \geq 0.$$

Observe que se o resultado acima é zero então $\xi_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e assim $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i = 0$. Portanto, $\langle . \ , . \rangle_{\mathcal{H}\odot\mathcal{K}}$ é um produto interno sobre $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$. A unicidade segue facilmente. ■

Sendo $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ o completamento de $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ segundo o produto interno da proposição anterior, enunciamos a seguinte proposição:

Proposição 4.15 *Se $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ são espaços de Hilbert, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $S : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ são operadores limitados, ou seja, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, então existe um único operador limitado $T \otimes S \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ tal que $T \otimes S(\xi \otimes \eta) = T\xi \otimes S\eta$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$ e para todo $\eta \in \mathcal{K}$.*

Demonstração. Começamos considerando os operadores identidade $id_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ e $id_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$. Note que existem únicos operadores $id_{\mathcal{H}} \odot S : \mathcal{H} \odot \mathcal{K} \to \mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ e $T \odot id_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \odot \mathcal{K} \to \mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ tais que $id_{\mathcal{H}} \odot S(\xi \otimes \eta) = \xi \otimes S\eta$ e $T \odot id_{\mathcal{K}}(\xi \otimes \eta) = T\xi \otimes \eta$, para quaisquer $\xi \in \mathcal{H}$ e $\eta \in \mathcal{K}$. Vamos mostrar que $id_{\mathcal{H}} \odot S$ é limitado. Seja $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i \in \mathcal{H} \odot \mathcal{K}$, já considerando $\{\xi_i\}_i^n$ conjunto ortonormal. Note que

$$\left\| (id_{\mathcal{K}} \odot S)\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i\right)\right\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes S\eta_i\right\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes S\eta_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j \otimes S\eta_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \xi_i \otimes S\eta_i, \xi_j \otimes S\eta_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \xi_i, \xi_j \rangle \langle S\eta_i, S\eta_j \rangle \leq \|S\|^2 \sum_{i=1}^{n} \|\eta_i\|^2 \\
&= \|S\|^2 \sum_{i=1}^{n} \langle \eta_i, \eta_i \rangle = \|S\|^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \xi_i, \xi_j \rangle \langle \eta_i, \eta_j \rangle \\
&= \|S\|^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \xi_i \otimes \eta_i, \xi_j \otimes \eta_j \rangle \\
&= \|S\|^2 \left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j \otimes \eta_j \right\rangle \\
&= \|S\|^2 \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i \right\|^2 .
\end{aligned}
$$

Portanto $id_{\mathcal{K}} \odot S$ é limitado com $\|id_{\mathcal{K}} \odot S\| \leq S$. Analogamente se prova que $T \odot id_{\mathcal{K}}$ é limitado com $\|T \odot id_{\mathcal{K}}\| \leq \|T\|$. Agora podemos estender tais operadores para os operadores limitados $id_{\mathcal{H}} \otimes S : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ e $T \otimes id_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, e note que $T \otimes S(\xi \otimes \eta) := (T \otimes id_{\mathcal{K}} \circ id_{\mathcal{H}} \otimes S)(\xi \otimes \eta) = T\xi \otimes S\eta$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$ e para todo $\xi \in \mathcal{K}$. A prova da unicidade de tal operador é elementar. ■

4.5 Produto tensorial entre álgebras

Proposição 4.16 *Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são duas $*$-álgebras então existe uma única multiplicação em $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, $\cdot : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \times \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \to \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, de modo que $(a_1 \otimes b_1).(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$, e existe uma única involução $* : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \to \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ de modo que $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{J} := \mathcal{L}(\mathcal{A} \odot \mathcal{B})$ o espaço vetorial das aplicações lineares $f : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \to \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Para cada $a_0 \in \mathcal{A}$ e para cada $b_0 \in \mathcal{B}$, considere $L_{a_0} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e $L_{b_0} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, definidas por $L_{a_0}(a) = a_0 a$, $L_{b_0}(b) = b_0 b$. Seja $L_{a_0} \otimes L_{b_0} \in \mathfrak{J}$ e defina a aplicação $\psi : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathfrak{J}$ por $\psi(a, b) = L_a \otimes L_b$, que claramente é bilinear. Portanto, existe uma única aplicação linear φ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \times \mathcal{B} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \arrow[d, "\varphi"] \\
& \mathfrak{I}
\end{tikzcd}$$

ou seja, $\varphi(a \otimes b) = \psi(a, b) = L_a \otimes L_b$. Defina $. : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \times \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \to \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ por $x.y := \varphi(x)(y)$ e note que

$$\begin{aligned}
(a_1 \otimes b_1).(a_2 \otimes b_2) &= \varphi(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) \\
&= (L_{a_1} \otimes L_{b_1})(a_2 \otimes b_2) \\
&= L_{a_1}(a_2) \otimes L_{b_1}(b_2) \\
&= a_1 a_2 \otimes b_1 b_2.
\end{aligned}$$

Vamos agora definir a aplicação involução em $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, $* : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \to \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, por

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right)^* = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \otimes b_i^*.$$

Note que tal aplicação é conjugado-linear. Observe também que está bem definida. De fato, suponha que $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i = 0$. Podemos considerar uma base $\{e_i\}_{i=1}^{m}$ para espaço gerado pelos elementos do conjunto $\{b_j\}_{j=1}^{n}$. Assim existem $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ tais que para cada $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$, $b_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} e_i$. Portanto

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes b_j = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \otimes \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} a_j \otimes e_i\right),$$

ou seja, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} a_j = 0$ para todo $i \in \{1, 2 \ldots, m\}$. Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_j^* \otimes b_j^* &= \sum_{j=1}^{n} \left(a_j^* \otimes \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_{ij}} e_i^*\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_{ij}} a_j^* \otimes e_i^*\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} a_j\right)^* \otimes e_i^*\right) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto a aplicação $*$ está bem definida. ■

Proposição 4.17 *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ álgebras. Se $\psi : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ é multiplicativa, ou seja, $\psi(a_1 a_2, b_1 b_2) = \psi(a_1, b_1)\psi(a_2, b_2)$, para todo $a_i \in \mathcal{A}$, $b_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2$, e se ψ é bilinear, então existe uma única aplicação linear e multiplicativa $\varphi : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ de modo que $\varphi(a \otimes b) = \psi(a, b)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ e para todo $b \in \mathcal{B}$. Se $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ são *-álgebras e se ψ preserva estrela, então φ preserva estrela.* ■

Demonstração. Como ψ é bilinear, já sabemos que existe uma única aplicação aplicação $\varphi : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ de modo que $\varphi(a \otimes b) = \psi(a, b)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ e para todo $b \in \mathcal{B}$. Vamos mostrar que φ é multiplicativa. Note que

$$
\begin{aligned}
&\varphi\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} a_j^{'} \otimes b_j^{'}\right)\right) \\
&= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i \otimes b_i)(a_j^{'} \otimes b_j^{'})\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi\left((a_i \otimes b_i)(a_j^{'} \otimes b_j^{'})\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \varphi\left(a_i a_j^{'} \otimes b_i b_j^{'}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \psi\left(a_i a_j^{'}, b_i b_j^{'}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \psi(a_i, b_i)\psi(a_j^{'}, b_j^{'}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i \otimes b_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \varphi(a_j^{'} \otimes b_j^{'})\right).
\end{aligned}
$$

Portanto φ é multiplicativa.

Suponha agora que ψ preserve estrela. Para $a \in \mathcal{A}$ e $b \in \mathcal{B}$, temos

$$(\varphi(a \otimes b))^* = (\psi(a, b))^* = \psi((a, b)^*) = \psi(a^*, b^*) = \varphi(a^* \otimes b^*) = \varphi((a \otimes b)^*).$$

Como φ é linear, segue que preserva estrela. ■

Exemplo 4.18 *Se $\mathfrak{A}$ é uma C^*-álgebra então $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A} \odot \mathbb{C}$ são $*$-isomorfos. De fato, seja $\psi : \mathfrak{A} \times \mathbb{C} \to \mathfrak{A}$ definida por $\psi(a, \lambda) = \lambda a$. é fácil notar que ψ é bilinear e multiplicativa. Portanto, existe uma aplicação linear e multiplicativa $\varphi : \mathfrak{A} \odot \mathbb{C} \to \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(a \otimes \lambda) = \psi(a, \lambda) = \lambda a$, para todo $a \in \mathfrak{A}$ e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Como φ é linear, temos*

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \lambda_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i.$$

Note ainda que ψ preserva estrela, logo φ preserva estrela. Dado $a \in \mathfrak{A}$ então $\varphi(a \otimes 1) = a$, e φ é sobrejetiva. Suponha que $\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \lambda_i\right) =$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$. *Observe que* $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \otimes 1 = 0$, *ou seja,* φ *é injetiva. Portanto,* $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{A} \odot \mathbb{C}$ *são* $*$*-isomorfos pelo* $*$*-homomorfismo* $\varphi : \mathfrak{A} \odot \mathbb{C} \to \mathfrak{A}$.

Observação 4.19 Sejam $\mathfrak{A}$ uma C^*-álgebra, $a \in \mathfrak{A}$ e $x \in \mathfrak{A} \odot \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Considere $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ a base canônica de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Existem $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathfrak{A}$, $A_i \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, tais que $A_i = [a_{rs}^i]_{r,s=1}^{n}$, $i = 1, \ldots, m$, e

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes A_i &= \sum_{i=1}^{m} \left(a_i \otimes \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{ks}^i E_{ks} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ks}^i a_i \otimes E_{ks} \right). \end{aligned}$$

Isso quer dizer que existem únicos $b_{ks} \in \mathfrak{A}$ tais que

$$x = \sum_{k,s=1}^{n} b_{ks} \otimes E_{ks}.$$

Exemplo 4.20 $\mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ *e* $\mathfrak{A} \odot \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *são *-isomorfos. De fato, defina a aplicação* $\psi : \mathfrak{A} \odot \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_n(\mathfrak{A})$ *por*

$$\psi \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes E_{ij} \right) = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}.$$

Observe que ψ *é multiplicativa pois*

$$\begin{aligned} &\psi \left(\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes E_{ij} \right) \left(\sum_{k,m=1}^{n} b_{km} \otimes E_{km} \right) \right) = \\ &= \psi \left(\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,m=1}^{n} (a_{ij} \otimes E_{ij})(b_{km} \otimes E_{km}) \right) = \\ &= \psi \left(\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,m=1}^{n} a_{ij} b_{km} \otimes E_{ij} E_{km} \right) = \\ &= \psi \left(\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,m=1}^{n} a_{ij} b_{km} \otimes \delta_{jk} E_{im} \right) = \\ &= \psi \left(\sum_{i,m=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jm} \otimes E_{im} \right) \right) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jm}\right]_{i,m=1}^{n} = \\
&= [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} [b_{ij}]_{i,j=1}^{n} = \\
&= \psi\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes E_{ij}\right) \psi\left(\sum_{k,m=1}^{n} b_{km} \otimes E_{km}\right).
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que ψ preserva estrela. Seja $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes E_{ij} \in \mathfrak{A} \odot \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Denote $b_{ji} := a_{ij}^*$ e note que

$$
\begin{aligned}
&\psi\left(\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes E_{ij}\right)^*\right) = \psi\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^* \otimes E_{ij}^*\right) = \psi\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ji} \otimes E_{ji}\right) = \\
&= \psi\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \otimes E_{ij}\right) = [b_{ij}]_{i,j=1}^{n} = [a_{ji}^*]_{i,j=1}^{n} = [a_{ij}]^* = \\
&= \psi\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes E_{ij}\right)^*,
\end{aligned}
$$

e portanto ψ preserva estrela. E como é fácil ver que ψ é injetiva e sobrejetiva, segue que é um $*$-isomorfismo.

Capítulo 5

Apêndice B - Operadores trace-class e Hilbert-Schmidt

5.1 Decomposição Polar

As demonstrações dos teoremas dessa seção podem ser encontradas em (Sunder, Seção 4.2).

Definição 5.1 Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e considere $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ o espaço de Banach dos operadores limitados $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Um operador $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é chamado de *isometria parcial* se W^*W é uma projeção.

Teorema 5.2 *Para um operador $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *W é uma isometria parcial;*
2. *$W = WW^*W$;*
3. *$W|_{\ker^\perp W}$ é uma isometria.*

Observação 5.3 Para uma isometria parcial $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é válido que $\|W\| \leq 1$ pois $\mathcal{H} = \ker^\perp W \oplus \ker W$ e $W|_{\ker^\perp W}$ é uma isometria.

Observação 5.4 Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, lembre-se que $|T| = (T^*T)^{1/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um operador positivo.

Teorema 5.5 *Todo operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ admite uma decomposição $T = W|T|$ tal que*

1. *$W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma isometria parcial;*

2. *$\ker(T) = \ker(W) = \ker(|T|)$.*

Teorema 5.6 *Se $T = WA$ uma decomposição de T, em que A é positivo e W é uma isometria parcial, então as seguintes proposições são válidas:*

1. *Se $T = VB$ é outra decomposição de T como produto de uma isometria parcial V e um operador positivo B, tal que $\ker(B) = \ker(V)$, então $W = V$ e $B = A = |T|$;*

2. *Se $T = U|T|$ é decomposição de T, em que U é uma isometria parcial, então $|T| = U^*T$.*

Definição 5.7 A decomposição $T = W|T|$, em que W é isometria parcial, é chamada de *decomposição polar* de T.

5.2 Operadores trace-class e Hilbert-Schmidt

Proposição 5.8 *Se $\{e_n\}$, $\{f_m\}$ são bases ortonormais de $\mathcal{H}$ e $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ então $\sum_n \|Ae_n\|^2 = \sum_m \|A^* f_m\|^2 = \sum_n \sum_m |\langle Ae_n, f_m\rangle|^2$.*

Demonstração. Pela identidade de Parseval, veja (Sunder, Proposição 2.3.5), temos para cada n que $\|Ae_n\|^2 = \sum_m |\langle Ae_n, f_m\rangle|^2$. Da mesma forma, para cada m vale que $\|A^* f_m\|^2 = \sum_n |\langle e_n, A^* f_m\rangle|^2$. Portanto

$$\begin{aligned}\sum_n \|Ae_n\|^2 &= \sum_n \sum_m |\langle Ae_n, f_m\rangle|^2 = \sum_n \sum_m |\langle e_n, A^* f_m\rangle|^2 \\ &= \sum_m \sum_n |\langle e_n, A^* f_m\rangle|^2 = \sum_m \|A^* f_m\|^2. \blacksquare\end{aligned}$$

Proposição 5.9 *Seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e denote $|A| = \sqrt{A^*A}$. Então a soma $\sum_n \langle |A|e_n, e_n\rangle$ independe da base ortonormal $\{e_n\}$.*

Demonstração. De fato, se $\{e_n\}$ e $\{f_m\}$ são bases ortornormais de $\mathcal{H}$ então

$$\sum_n \langle |A|e_n, e_n\rangle = \sum_n \left\langle \sqrt{A^*A}\, e_n, e_n \right\rangle = \sum_n \left\langle \sqrt{\sqrt{A^*A}}\, e_n, \sqrt{\sqrt{A^*A}} e_n \right\rangle$$

$$= \sum_n \left\| \sqrt{\sqrt{A^*A}}\, e_n \right\|^2 = \sum_n \sum_m \left| \left\langle \sqrt{\sqrt{A^*A}}\, e_n, f_m \right\rangle \right|^2$$
$$= \sum_m \sum_n \left| \left\langle \sqrt{\sqrt{A^*A}}\, e_n, f_m \right\rangle \right|^2 = \sum_m \left\| \sqrt{\sqrt{A^*A}}\, f_m \right\|^2$$
$$= \sum_m \langle |A| f_m, f_m \rangle. \ \blacksquare$$

Definição 5.10 Um operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é chamado *trace-class* se existe uma base ortonormal $\{e_n\}$ tal que $\sum_n \langle |A| e_n, e_n \rangle < \infty$. O conjunto de tais operadores será denotado por $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$.

Definição 5.11 Para cada $A \in \mathcal{B}_1$ definimos a *trace-norm* $\|A\|_1 = \sum_n \langle |A| e_n, e_n \rangle$.

Definição 5.12 Um operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é chamado *Hilbert-Schmidt* se $|A|^2 \in \mathcal{B}_1$ e denotamos por $\|A\|_2 := \left(\sum_n \langle |A|^2 e_n, e_n \rangle\right)^{1/2} = \sqrt{\||A|^2\|_1}$. O conjunto de tais operadores será denotado por $\mathcal{B}_2 := \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$.

Proposição 5.13 *Para cada $A \in \mathcal{B}_2$, as seguintes proposições são verdadeiras:*

1. $\|A\|_2 = (\sum_n \|Ae_n\|^2)^{1/2}$;
2. $\|A^*\|_2 = \|A\|_2$;
3. $\|A\| \leq \|A\|_2$;
4. *Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ então $AT, TA \in \mathcal{B}_2$ e $\|AT\|_2, \|TA\|_2 \leq \|T\| \|A\|_2$;*
5. *$\mathcal{B}_2$ é ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $\|.\|_2$ é norma sobre $\mathcal{B}_2$.*

Demonstração.

1.
$$\sum_n \|Ae_n\|^2 = \sum_n \langle Ae_n, Ae_n \rangle = \sum_n \langle A^*Ae_n, e_n \rangle$$
$$= \sum_n \langle \sqrt{A^*A}^2 e_n, e_n \rangle = \sum_n \langle |A|^2 e_n, e_n \rangle = \|A\|_2^2.$$

2. Usando o item 1. e a Proposição 5.8 temos

$$\|A^*\|_2 = \left(\sum_n \|A^* e_n\|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_n \|Ae_n\|^2 \right)^{1/2} = \|A\|_2.$$

3. Seja $e \in \mathcal{H}$ tal que $\|e\| = 1$. Considere uma base ortonormal $\{e_n\}$ que contenha e. Assim $\|Ae\| \leq \sqrt{\sum_n \|Ae_n\|^2} = \|A\|_2$. Portanto $\|A\| \leq \|A\|_2$.

4. Seja $\{e_n\}$ base ortonormal e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Então $\|TAe_n\|^2 \leq \|T\|^2\|Ae_n\|^2$. Usando o item 1., nós podemos concluir que

$$\begin{aligned}\|TA\|_2 &= \left(\sum_n \|TAe_n\|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_n \|T\|^2\|Ae_n\|^2\right)^{1/2} = \|T\|\|A\|_2 < \infty.\end{aligned}$$

Logo $TA \in \mathcal{B}_2$ e $\|TA\|_2 \leq \|T\|\|A\|_2$. Note que pelo o que acabamos de mostrar vale que $\|T^*A^*\|_2 \leq \|T^*\|\|A^*\|_2 = \|T\|\|A\|_2 < \infty$. Também $\|T^*A^*\|_2 = \|(T^*A^*)^*\|_2 = \|AT\|_2$. Assim $AT \in \mathcal{B}_2$ e $\|AT\|_2 \leq \|T\|\|A\|_2$.

5. Sejam $A, B \in \mathcal{B}_2$. Então $\{\|Ae_n\|\}, \{\|Be_n\|\} \in l^2$. Usando a desigualdade triangular para l^2 temos que

$$\left(\sum_n (\|Ae_n\| + \|Be_n\|)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_n \|Ae_n\|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_n \|Be_n\|^2\right)^{1/2}$$
$$= \|A\|_2 + \|B\|_2.$$

Assim

$$\begin{aligned}\|A+B\|_2^2 &= \sum_n \|Ae_n + Be_n\|^2 \leq \sum_n (\|Ae_n\| + \|Be_n\|)^2 \\ &\leq (\|A\|_2 + \|B\|_2)^2 < \infty.\end{aligned}$$

Agora se $\lambda \in \mathbb{C}$ então $\lambda A \in B_2$ pelo item 1., e portanto temos que $\mathcal{B}_2$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, e pelo item anterior segue que $\mathcal{B}_2$ é ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. ■

Corolário 5.14 *Todo operador Hilbert-Schmidt é compacto.*

Demonstração. Pelo primeiro item da Proposição 5.13 a identidade em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ não pertence a $\mathcal{B}_2$. Assim $\mathcal{B}_2$ é ideal próprio de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, e portanto $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_0$, em que $\mathcal{B}_0$ é o ideal dos operadores compactos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Proposição 5.15 *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ então são equivalentes:*

1. *$A \in \mathcal{B}_1$;*
2. *$|A|^{1/2} \in \mathcal{B}_2$;*
3. *A é produto de dois operadores Hilbert-Schmidt;*
4. *$|A|$ é o produto de operadores Hilbert-Schmidt.*

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$. Se $A \in \mathcal{B}_1$ então $\sum_n \langle |A| e_n, e_n\rangle < \infty$. Portanto $(\sum_n \langle (|A|^{1/2})^2 e_n, e_n\rangle)^{1/2} = (\sum_n \langle |A| e_n, e_n\rangle)^{1/2} < \infty$.

$2 \Rightarrow 3$. Seja $A = W|A|$ a decomposição polar de A. Então $A = (W|A|^{1/2})|A|^{1/2}$. Como por hipótese $|A|^{1/2} \in \mathcal{B}_2$, segue do quarto item da Proposição 5.13 que $W|A|^{1/2} \in \mathcal{B}_2$. Portanto, A se escreve como produto de dois operadores Hilbert-Schmidt.

$3 \Rightarrow 4$ Se $A = BC$ em que $B, C \in \mathcal{B}_2$, note que para a decomposição polar $A = W|A|$, tem-se que $(W^*B)C = |A|$, ou seja, $|A|$ é produto de dois operadores Hilbert-Schmidt.

$4 \Rightarrow 1$ Suponha que $|A| = BC$ em que $B, C \in \mathcal{B}_2$. Note que $\langle |A| e_n, e_n\rangle = \langle Ce_n, B^*e_n\rangle \leq \|Ce_n\|\|B^*e_n\|$. Assim $A \in \mathcal{B}_1$, pois, pela Desigualdade de Holder, temos

$$\begin{aligned}\sum_n \langle |A| e_n, e_n\rangle \leq \sum_n \|Ce_n\|\|B^*e_n\| &\leq \sqrt{\sum_n \|Ce_n\|^2}\sqrt{\sum_n \|B^*e_n\|^2} \\ &= \|C\|_2\|B^*\|_2 = \|C\|_2\|B\|_2 < \infty. \blacksquare\end{aligned}$$

Proposição 5.16 *Seja $A \in \mathcal{B}_1$ e considere $\{e_n\}$ uma base ortonormal. Então $\sum_n |\langle Ae_n, e_n\rangle| < \infty$, $\sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle \in \mathbb{C}$ e independe da escolha da base.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{B}_1$. Escreva $A = C^*B$ como produto de operadores Hilbert-Shmidt tal como vimos na Proposição 5.15. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ qualquer. Note que para qualquer $\xi \in \mathcal{H}$ vale que

$$\begin{aligned}0 &\leq \|(B - \lambda C)\xi\|^2 = \langle (B - \lambda C)\xi, (B - \lambda C)\xi\rangle \\ &= \|B\xi\|^2 - \overline{\lambda}\langle B\xi, C\xi\rangle - \lambda\langle C\xi, B\xi\rangle + |\lambda|^2\|C\xi\|^2.\end{aligned}$$

Escolhendo $\lambda = \frac{|\langle C\xi, B\xi\rangle|}{\langle C\xi, B\xi\rangle}$ obtemos $|\langle C\xi, B\xi\rangle| \leq \frac{1}{2}(\|B\xi\|^2 + \|C\xi\|^2)$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Portanto

$$\sum_n |\langle Ae_n, e_n\rangle| = \sum_n |\langle Be_n, Ce_n\rangle| \leq \frac{1}{2}\sum_n \|Be_n\|^2 + \frac{1}{2}\sum_n \|Ce_n\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\|B\|_2^2 + \frac{1}{2}\|C\|_2^2 < \infty.$$

Note também que

$$Re(\langle Ae_n, e_n\rangle) = \frac{1}{2}(\langle Be_n, Ce_n\rangle + \langle Ce_n, Be_n\rangle)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\|(B+C)e_n\|^2 - \|(B-C)e_n\|^2\right).$$

Somando essa última expressão em n, obtemos

$$Re\left(\sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle\right) = \frac{1}{4}\left(\|B+C\|_2^2 - \|B-C\|_2^2\right)$$

Observe que para um número complexo z vale que $Re(iz) = -Im(z)$, e como $iA = C^*(iB)$, temos que

$$-Im\left(\sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle\right) = Re\left(\sum_n \langle iAe_n, e_n\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\|iB+C\|_2^2 - \|iB-C\|_2^2\right).$$

Isso mostra que $\sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle$ não depende da base ortonormal escolhida. ■

Definição 5.17 Para cada $A \in \mathcal{B}_1$ definimos $tr(A) := \sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle$, o *traço* de A.

Observação 5.18 Para cada par $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ defina, a aplicação linear $R_{\xi,\eta} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, por $R_{\xi,\eta}(\zeta) = \langle \zeta, \eta\rangle\xi$, que é trace-class, segundo a Observação 2.10. Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é normal e compacto então, para todo n, existe $\lambda_n \in \sigma(T) - \{0\}$, e existe base ortonormal $\{e_n\}$ tal que $T(x) = \sum_n R_{\lambda_n e_n, e_n}(x)$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Chamaremos tal decomposição de decomposição espectral de T. Você pode encontrar esse resultado em (Sunder, Proposição 4.3.2).

Teorema 5.19 .

1. *$\mathcal{B}_1$ é um ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $\|.\|_1$ é norma em $\mathcal{B}_1$.*

2. *Todo operador trace-class é compacto. Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é compacto e $\{\lambda_n\}_n$ são autovalores de $|A|$ então $A \in \mathcal{B}_1$ se, e somente se, $\|A\|_1 = \sum_n \lambda_n < \infty$.*

3. *A aplicação traço $tr : \mathcal{B}_1 \to \mathbb{C}$ é um funcional liner positivo. Se $A \in \mathcal{B}_1$ é positivo e $tr(A) = 0$ então $A = 0$.*

4. *$\mathcal{B}_1$ contém os operadores de posto finito $\mathcal{B}_{00}$ como subespaço denso na norma $\|.\|_1$.*

5. *Se $A \in \mathcal{B}_1$ e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ então $tr(AT) = tr(TA)$ e $|tr(T|A|)| \leq \|T\|.\|A\|_1$. Também $|tr(TA)| \leq \|T\|\|A\|_1$.*

6. *Para todo $A \in \mathcal{B}_1$, tem-se $\|A\|_1 = \|A^*\|_1$.*

7. *Se $A \in \mathcal{B}_1$ e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ então $\|AT\|_1 \leq \|T\|\|A\|_1$ e $\|TA\|_1 \leq \|T\|\|A\|_1$.*

Demonstração. 1. Sejam $A, B \in \mathcal{B}_1$. Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Escreva $A = XY$ produdo de dois operadores Hilbert-Schmidt. Então $TA = (TX)Y$ é produto de dois operadores Hilbert-Schmidt, pois $\mathcal{B}_2$ é ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; e portanto $TA \in \mathcal{B}_1$. Analogamente, $AT \in \mathcal{B}_1$. Considere as decomposições polares $A = W|A|$, $B = V|B|$ e $A+B = U|A+B|$. Como $\mathcal{B}_2$ é ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e como cada operador trace-class pode ser escrito como produto de dois operadores Hilbert-Shmidt, então $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_0$. Segue que $A, B \in \mathcal{B}_2$, ou seja, $A + B \in \mathcal{B}_2$, ou seja, $|A + B| \in \mathcal{B}_2$ e portanto $|A + B| \in \mathcal{B}_0$. Temos então que $A + B \in \mathcal{B}_1$ e $\|A + B\|_1 \leq \|A\|_1 + \|B\|_1$, pois

$$
\begin{aligned}
&\sum_n \langle |A + B| e_n, e_n\rangle = \sum_n \langle (A + B)e_n, Ue_n\rangle \\
&= \sum_n (\langle Ae_n, Ue_n\rangle + \langle Be_n, Ue_n\rangle) \\
&= \sum_n (\langle |A|e_n, W^*Ue_n\rangle + \langle |B|e_n, V^*Ue_n\rangle) \\
&= \sum_n (|A|^{1/2}e_n, |A|^{1/2}W^*Ue_n\rangle + \langle |B|^{1/2}e_n, |B|^{1/2}V^*Ue_n\rangle) \\
&\leq \sum_n (\||A|^{1/2}e_n\|\||A|^{1/2}W^*Ue_n\| + \||B|^{1/2}e_n\|\||B|^{1/2}V^*Ue_n\|) \\
&\leq \||A|^{1/2}\|_2^2 + \||B|^{1/2}\|_2^2 = \|A\|_1 + \|B\|_1.
\end{aligned}
$$

Logo $\mathcal{B}_1$ é ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Como as outras propriedades de norma são facilmente verificadas pelo definição dada para $\|.\|_1$, então $\|.\|_1$ é norma em $\mathcal{B}_1$.

2. A compacidade de um operador trace-class segue do fato que podemos escrevê-lo como produto de dois operadores Hilbert-Schmidt.

Seja $A \in \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e considere sua decomposição polar $A = W|A|$. Como $\mathcal{B}_0$ é ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ segue que $|A| = W^*A$ é compacto. Considere sua diagonalização espectral dada por $|A| = \sum_m R_{\lambda_m e_m, e_m}$. Se $A \in \mathcal{B}_1$ então

$$\begin{aligned}
\infty > \|A\|_1 &= \sum_n \langle |A| e_n, e_n \rangle \\
&= \sum_n \left\langle \sum_m R_{\lambda_m e_m, e_m} e_n, e_n \right\rangle = \sum_n \sum_m \langle R_{\lambda_m e_m, e_m} e_n, e_n \rangle \\
&= \sum_n \sum_m \langle \langle e_n, e_m \rangle \lambda_m e_m, e_n \rangle = \sum_n \langle \lambda_n e_n, e_n \rangle = \sum_n \lambda_n.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, se $\|A\|_1 = \sum_n \lambda_n < \infty$ então $A \in \mathcal{B}_1$.

3. Note que se $A \in \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é positivo então $tr(A) = \sum_n \langle Ae_n, e_n \rangle \geq 0$ e assim tr é um funcional linear positivo. Seja $A = \sum_n R_{\lambda_n e_n, e_n}$ sua diagonalização espectral. Se supormos $tr(A) = 0$, temos $tr(A) = \sum_n \lambda_n = 0$ e como cada λ_n é positivo, pois A é positivo, segue que $\lambda_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $A = 0$.

4. Seja $A \in \mathcal{B}_1$ e $A = W|A|$ sua decomposição polar. Então $|A| \in \mathcal{B}_0$ e podemos considerar sua diagonalização espectral dada por $|A| = \sum_k R_{\lambda_k e_k, e_k}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o seguinte operador em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ definido por

$$A_n = W \left(\sum_{k=1}^{n} R_{\lambda_k e_k, e_k} \right).$$

Portanto,

$$A - A_n = W \left(\sum_{k>n} R_{\lambda_k e_k, e_k} \right)$$

é a decomposição polar de $A - A_n$ e assim $|A - A_n| = \sum_{k>n} R_{\lambda_k e_k, e_k}$. Mas como $\|A\|_1 = \sum_n \lambda_n < \infty$, segue que $\|A - A_n\|_1 = \sum_{k>n} \lambda_k$ coonverge a zero quando n tende a infinito. Logo, o conjunto dos operadores de posto finito $\mathcal{B}_{00}$ é denso em $\mathcal{B}_1$ na norma $\|.\|_1$.

5. Seja $A \in \mathcal{B}_1$. Escreva $A = C^*B$ como produto de operadores Hilbert-Schmidt. Já vimos que

$$Re(trC^*B) = Re(trA) = \frac{1}{4} \left(\|B + C\|_2^2 - \|B - C\|_2^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|B^* + C^*\|_2^2 - \|B^* - C^*\|_2^2\right) = Re(tr((C^*)^* B^*)) = Re(trCB^*).$$

Já vimos também que

$$-Im(trA) = -Im(trC^*B) = \frac{1}{4}\|iB + C\|_2^2 - \frac{1}{4}\|iB - C\|_2^2.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} -\, Im(tr(C^*)^* B^*) &= \frac{1}{4}\|iB^* + C^*\|_2^2 - \frac{1}{4}\|iB^* - C^*\|_2^2 \\ = \frac{1}{4}\| - iB + C\|_2^2 &- \frac{1}{4}\|iB + C\|_2^2 = Im(trC^*B) \end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} tr(C^*B) &= Re(trC^*B) + iIm(trC^*B) \\ &= Re(tr(CB^*) - iIm(tr(CB^*) = \overline{tr(CB^*)}. \end{aligned}$$

Agora, se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ então $TA = T(C^*B) = (CT^*)^*B$ é produto de dois Hilbert-Schmidt, e como antes, temos

$$\begin{aligned} tr(TA) &= tr((CT^*)^*B) = \overline{tr((CT^*)B^*)} = \overline{tr(C(BT)^*)} \\ &= tr(C^*BT) = tr(AT). \end{aligned}$$

Para mostrar a segunda parte basta observar que

$$\begin{aligned} &|tr(T|A|)| = \left|\sum_n \langle T|A|e_n, e_n\rangle\right| = \left|\sum_n \langle |A|^{1/2}e_n, |A|^{1/2}T^*e_n\rangle\right| \\ &\leq \sum_n \||A|^{1/2}e_n\|.\||A|^{1/2}T^*e_n\| \\ &\leq \sqrt{\sum_n \||A|^{1/2}e_n\|^2}\sqrt{\sum_n \||A|^{1/2}T^*e_n\|^2} \\ &= \||A|^{1/2}\|_2.\||A|^{1/2}T^*\|_2 \leq \||A|^{1/2}\|_2^2\|T^*\| = \||A|^{1/2}\|_2^2\|T\| \\ &= \|A\|_1\|T\|. \end{aligned}$$

Finalmente, considerando a decomposição polar $A = W|A|$ temos que

$$|tr(TA)| = |tr((TW)|A|)| \leq \|TW\|\|A\|_1 \leq \|T\|\|A\|_1.$$

6. Seja $A \in \mathcal{B}_1$. Considere a decomposição polar $A = W|A|$. Lembre também que $A^* = |A|W^*$. Note que $AA^* = W|A|A^* = W|A|^2W^*$. Como $|A^*| = \sqrt{AA^*}$, temos $|A^*|^2 = AA^* = W|A|^2W^*$. Mas

$$W|A|W^*)^2 = W|A|W^*W|A|W^*$$

$$= W|A|W^*AW^* = WA^*AW^* = W|A|^2W^*$$

e assim $|A^*| = W|A|W^*$, pela unicidade da raíz. Então

$$\|A^*\|_1 = tr(|A^*|) = tr(W|A|W^*) =$$
$$tr(W^*W|A|) \leq \|WW^*\|\|A\|_1 \leq \|A\|_1.$$

Como a desigualdade anterior vale para todo $A \in \mathcal{B}_1$, e como pela mesma desigualdade temos $A^* \in \mathcal{B}_1$, então $\|A\|_1 = \|(A^*)^*\|_1 \leq \|A^*\|$. Logo $\|A\|_1 = \|A^*\|$ como queríamos.

7. Sejam $A \in \mathcal{B}_1$ e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Escreva $A = W|A|$ e $TA = U|TA|$ decomposições polares. Logo $|TA| = U^*TA = (U^*TW)|A|$. Portanto

$$\|TA\|_1 = tr(|TA|) = tr((U^*TW)|A|)$$
$$\leq \|U^*TW\|\|A\|_1 \leq \|T\|A\|_1.$$

Procede-se analogamente para mostar que $\|AT\|_1 \leq \|T\|\|A\|_1$. ■

Podemos para cada $A \in \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definir a aplicação $\varphi_A : \mathcal{B}_0 \to \mathbb{C}$ por $\varphi_A(C) = tr(AC) = tr(CA)$, para todo $C \in \mathcal{B}_0$. Vamos mostrar que o dual dos operadores compactos sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é o espaço vetorial normado dos operadores trace-class $(\mathcal{B}_1, \|.\|_1)$. Note que $\varphi_A \in \mathcal{B}_0^*$ e $\|\varphi_A\| \leq \|A\|_1$, pois considerando a decomposição polar $A = W|A|$, tem-se

$$|\varphi_A(C)| = |tr(AC)| = |tr(CA)| = |tr(CW|A|)|$$
$$\leq \|CW\|\|A\|_1 \leq \|C\|\|A\|_1,$$

para todo $C \in \mathcal{B}_0$.

Teorema 5.20 *A aplicação*

$$\begin{array}{rcccl} p & : & \mathcal{B}_1 & \longrightarrow & \mathcal{B}_0^* \\ & & A & \longmapsto & \varphi_A \end{array}$$

é um isomorfismo isométrico de $(\mathcal{B}_1, \|.\|_1)$ *no dual dos operadores campactos de* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que p é linear. Sejam $A, B \in \mathcal{B}_1$, $T \in \mathcal{B}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Da linearidade da aplicação traço segue que $p(A + \lambda B)(T) = \varphi_{A+\lambda B}(T) = tr((A + \lambda B)T) = tr(AT + \lambda BT) = tr(AT) + \lambda tr(BT) = \varphi_A(T) + \lambda\varphi_B(T) = (p(A) + \lambda p(B))(T)$. Assim

p é linear. Além disso, p é limitada, pois $\|p(A)\| = \|\varphi_A\| \leq \|A\|_1$, ou seja, $\|p\| \leq 1$. Vamos mostrar que p é sobrejetiva, isométrica e assim concluir a prova.

Seja $\phi \in \mathcal{B}_0^*$. Defina a aplicação

$$\begin{array}{cccc} [.\,,.] & : & \mathcal{H}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & (g,h) & \longmapsto & \phi(R_{g,h}). \end{array}$$

Perceba que se $g, h, k \in \mathcal{H}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então

$$\begin{aligned} R_{g+\lambda k,h}(x) &= \langle x,h\rangle(g+\lambda k) \\ &= \langle x,h\rangle g + \lambda\langle x,h\rangle k = R_{g,h}(x) + \lambda R_{k,h}(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Portanto $R_{g+\lambda k,h} = R_{g,h} + \lambda R_{k,h}$. Também temos

$$\begin{aligned} R_{g,k+\lambda h}(x) &= \langle x, k+\lambda h\rangle g \\ &= \langle x,k\rangle g + \overline{\lambda}\langle x,h\rangle g \\ &= R_{g,k}(x) + \overline{\lambda} R_{g,h}(x) \end{aligned}$$

para todo $x, \in \mathcal{H}$, ou seja, $R_{g,k+\lambda h} = R_{g,h} + \overline{\lambda} R_{g,h}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} [g+\lambda h, k] &= \phi(R_{g+\lambda h,k}) \\ &= \phi(R_{g,k} + \lambda R_{h,k}) \\ &= \phi(R_{g,k}) + \lambda\phi(R_{h,k}) \end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned} [g, h+\lambda k] &= \phi(R_{g,h+\lambda k}) = \phi(R_{g,h} + \overline{\lambda} R_{g,k}) \\ &= \phi(R_{g,h}) + \overline{\lambda}\phi(R_{g,k}) = [g,h] + \overline{\lambda}[g,k] \end{aligned}$$

Fica demonstrado que a aplicação $[.,.]$ é linear na primeira entrada e conjugado linear na segunda entrada. Note que é limitada pois $\|[g,h]\| = \|\phi(R_{g,h})\| \leq \|\phi\|\|R_{g,h}\| \leq \|\phi\|\|g\|\|h\|$, e assim $\|[.,.]\| \leq \|\phi\|$. Noutras palavras, $[.,.]$ é uma forma sesquilinear. Portanto existe um único operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\phi(R_{g,h}) = [g,h] = \langle Ag, h\rangle$ para todo $g, h \in \mathcal{H}$, veja (Sunder, Proposição 2.4.4). Vamos mostrar que $A \in \mathcal{B}_1$ e que $\phi = \varphi_A$. Seja $C \in \mathcal{B}_{00}$, ou seja, operador pertencente ao conjunto operados limitados de posto finito. Considere $n \in \mathbb{N}$ e operadores R_{g_k,h_k} de posto um , e $C = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} R_{g_k,h_k} \in \mathcal{B}_{00}$. Então

$$\phi(C) = \phi\left(\sum_{k=1}^{n} R_{g_k,h_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \phi(R_{g_k,h_k}) = \sum_{k=1}^{n} \langle Ag_k, h_k\rangle. \tag{5.1}$$

Mas note que se $\{e_m\}$ é uma base ortornormal de $\mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned} tr(AC) &= \sum_n \langle ACe_m, e_m\rangle = \sum_m \left\langle A\left(\sum_{k=1}^n R_{g_k,h_k}\right)e_m, e_m\right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n\sum_m \langle AR_{g_k,h_k}e_m, e_m\rangle = \sum_{k=1}^n tr(AR_{g_k,h_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \langle Ag_k, h_k\rangle = \phi(C). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que A é trace-class. Considere sua decomposição polar, $A = W|A|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere o operador limitado

$$C_n = \left(\sum_{k=1}^n R_{e_k,e_k}\right)W^*.$$

Note que $\|\sum_{k=1}^n R_{e_k,e_k}\| \leq 1$, pois dado $x \in \mathcal{H}$ temos que

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{k=1}^n R_{e_k,e_k}x\right\|^2 &= \left\|\sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2 \\ = \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle|^2 &\leq \sum_{k=1}^\infty |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2; \end{aligned}$$

para essa última igualdade veja (Sunder, Proposição 2.3.5). Como $\|W^*\| = \|W\| \leq 1$, segue que $|\phi(C_n)| \leq \|\phi\|\|C_n\| \leq \|\phi\|$. Note também que $R_{e_k,e_k} \circ W^* = R_{e_k,We_k}$, para todo $k = 1, 2 \ldots, n$, pois $(R_{e_k,e_k} \circ W^*)(x) = R_{e_k,e_k}(W^*x) = \langle W^*x, e_k\rangle e_k = \langle x, We_k\rangle e_k = R_{e_k,We_k}(x)$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Portanto, segue de 5.1 que

$$\begin{aligned} \|\phi\| \geq |\phi(C_n)| &= \left|\phi\left[\left(\sum_{k=1}^n R_{e_k,e_k}\right)W^*\right]\right| = \left|\sum_{k=1}^n \phi(R_{e_k,e_k} \circ W^*)\right| = \\ = \left|\sum_{k=1}^n \phi(R_{e_k,We_k})\right| &= \left|\sum_{k=1}^n \langle Ae_k, We_k\rangle\right| = \left|\sum_{k=1}^n \langle |A|e_k, e_k\rangle\right|. \end{aligned}$$

Como $|A|$ é operador positivo, temos que $\langle |A|e_k, e_k\rangle$ é positivo. Então a sequência $\{\sum_{k=1}^n \langle |A|e_k, e_k\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e limitada superiormente por $\|\phi\|$, logo convergente para seu supremo, a saber $\|A\|_1$. Portanto $\|\phi\| \geq \|A\|_1$, e $A \in \mathcal{B}_1$. Vimos que se $C \in \mathcal{B}_{00}$ então

$\phi(C) = tr(AC) = \varphi_A(C)$. Então ϕ e φ_A se igualam num conjunto denso de $(\mathcal{B}_0, \|.\|)$ e por isso, $\phi = \varphi_A$, e assim p é sobrejetiva. Além disso p é isométrica pois para todo $A \in \mathcal{B}_1$ temos $\|p(A)\| = \|\varphi_A\| = \|\phi\| \geq \|A\|_1$. Assim $\|A\|_1 \leq \|p(A)\| \leq \|A\|_1\|$ e $\|p\| = 1$. ■

Segue do Teorema 5.20 que o espaço dos operadores trace-class $(\mathcal{B}_1, \|.\|_1)$ é Banach. Agora, para cada $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ podemos definir o funcional linear $E_B : \mathcal{B}_1 \to \mathbb{C}$ pondo $E_B(A) = tr(AB) = tr(BA)$, para todo $A \in \mathcal{B}_1$. Dado $A \in \mathcal{B}_1$, considere sua decomposição polar $A = W|A|$. Segue que $|E_B(A)| = |tr((BW)|A|)| \leq \|BW\|\|A\|_1 \leq \|B\|\|A\|_1$, ou seja, E_B é limitada com $\|E_B\| \leq \|B\|$. Vamos mostrar que o dual dos operadores trace-class e o espaço de Banach dos operadores limitados $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ são os mesmos.

Teorema 5.21 *A aplicação*

$$\begin{array}{cccc} p & : & \mathcal{B}(\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{B}_1(\mathcal{H})^* \\ & & B & \longmapsto & E_B \end{array}$$

é um isomorfismo isométrico entre a álgebra dos operadores limitados e o dual dos operadores trace-class.

Demonstração. Para começar note que $\|p(B)\| = \|E_B\| \leq \|B\|$ e p é um operador linear limitado com $\|p\| \leq 1$. Seja $\varepsilon > 0$ e seja $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Escolha um vetor $g \in \mathcal{H}$ com norma $\|g\| = 1$ tal que $\|Bg\| > \|B\| - \varepsilon$ e escolha um vetor $h \in \mathcal{H}$ com norma $\|h\| = 1$ tal que $\langle Bg, h\rangle = \|Bg\|$, por exemplo $h = Bg\frac{\|Bg\|}{\langle Bg, Bg\rangle}$. Considere o operador de posto um $R_{g,h}$. Já vimos que tal operador tem norma $\|R_{g,h}\| = 1$. Portanto $\|E_B\| \geq \|B\|$ pois $\|E_B\| \geq |tr(BR_{g,h})| = \langle Bg, h\rangle = \|Bg\| > \|B\| - \varepsilon$. Assim p é uma isometria. Vamos mostrar que p é sobrejetivo. Seja $E \in \mathcal{B}_1^*$. Como na demonstração do Teorema 5.20, existe um operador $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle Bg, h\rangle = E(R_{g,h})$ para quaisquer $g, h \in \mathcal{H}$. Exatamente como na demonstração do Teorema 5.20 podemos concluir que $tr(BT) = E(T)$ para todo operador T de posto finito. Mas $E_B(T) = tr(BT) = E(T)$ e como o conjunto dos operadores de posto finito é denso em $\mathcal{B}_1$ segue que $E = E_B$. Assim p é sobrejetiva como desejávamos. ■

Bibliografia

K. R. Davidson. *C^*-Algebras by example.* American Mathematical Society, Rhode Island, 1996.

E. Kreyszig. Introductory functional analysis with applications. John Wiley and Sons. Inc, New York, 1978.

H. Lin. *A introduction to the classification of amenable C^*-algebras.* World Scientific, New Jersey, 2001.

G. J. Murphy. *C^*-algebras and operator theory.* Academic Press Inc., San Diego, 1990.

V. Paulsen. *Completely bounded maps and operator algebras.* Cambridge University Press, New York, 2002.

V. S. Sunder. *Functional analysis: Spectral theory.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

N. E. Wegge-Olsen. *K-theory and C^*-algebras.* Oxford University Press, Oxford, 1993.

S. Willard. *General Topology.* Addison- Wesley Publishing Company, Inc., New York, 2004.