

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

Anderson Santos Nunes

**CÁLCULO DE PERDAS POR FLUXO DISPERSO E DE
FORÇAS EM TRANSFORMADORES E REATORES
ATRAVÉS DO MÉTODO DE REDE DE RELUTÂNCIAS**

Florianópolis

2013

Anderson Santos Nunes

**CÁLCULO DE PERDAS POR FLUXO DISPERSO E DE
FORÇAS EM TRANSFORMADORES E REATORES
ATRAVÉS DO MÉTODO DE REDE DE RELUTÂNCIAS**

Tese submetida ao Programa de Pós
Graduação em Engenharia Elétrica da
Universidade Federal de Santa Cata-
rina para a obtenção do Grau de Mes-
tre em Engenharia Elétrica.
Orientador: Prof. Dr. Patrick Kuo-
Peng
Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Gra-
fulha Vanti

Florianópolis

2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Nunes, Anderson Santos

Cálculo de perdas por fluxo disperso e de forças em transformadores e reatores através do método de rede de relutâncias / Anderson Santos Nunes ; orientador, Patrick Kuo-Peng ; co-orientador, Marcelo Grafulha Vanti. - Florianópolis, SC, 2013.

121 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Inclui referências

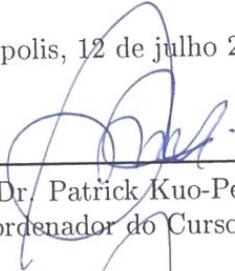
1. Engenharia Elétrica. 2. RNM. 3. Método de Elementos Finitos 2D e 3D. 4. Perdas por fluxo disperso. 5. Transformadores e reatores. I. Kuo-Peng, Patrick. II. Vanti, Marcelo Grafulha. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.

Anderson Santos Nunes

**CÁLCULO DE PERDAS POR FLUXO DISPERSO E DE
FORÇAS EM TRANSFORMADORES E REATORES
ATRAVÉS DO MÉTODO DE REDE DE RELUTÂNCIAS**

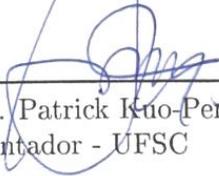
Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Elétrica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 12 de julho 2013.

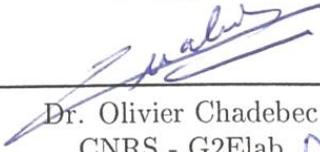


Prof. Dr. Patrick Kuo-Peng
Coordenador do Curso

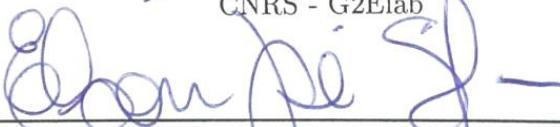
Banca Examinadora:



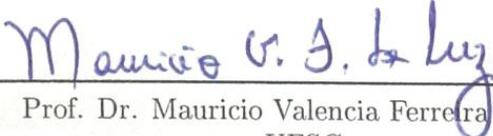
Prof. Dr. Patrick Kuo-Peng
Orientador - UFSC



Dr. Olivier Chadebec
CNRS - G2Elab



Prof. Dr. Elson José da Silva
UFMG



Prof. Dr. Mauricio Valencia Ferreira da Luz
UFSC

Dedico este trabalho à minha família e
minha noiva

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Rosane e Airton, por me darem a vida, amor, apoio e educação. À minha irmã Alexandra, por estar sempre ao meu lado, no papel de conselheira e melhor amiga e à minha noiva, Silvia, pelo amor, incansável compreensão e apoio durante a elaboração deste trabalho. Agradeço à WEG Indústrias S.A. T&D por proporcionar minha participação neste curso de Pós Graduação. Aos Mestres Prof. Dr. Patrick Kuo-Peng, Prof. Dr. Marcelo Grafulha Vanti, Prof. Dr. Xose Manuel López Fernández e ao Prof. Dr. Janusz Turowski, por me orientarem durante o desenvolvimento deste trabalho. E, acima de tudo, à uma Força maior, que me dá coragem de enfrentar os obstáculos, sempre seguindo pelo caminho correto, independentemente das consequências.

*A mente que se abre a uma nova idéia,
jamais voltará ao seu tamanho original.*

Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho apresenta o Método RNM como uma alternativa eficiente para a modelagem de fluxo disperso, perdas por correntes induzidas e forças em transformadores e reatores de potência.

São apresentados os conceitos necessários para modelagem de distribuição de fluxo magnético através de tubos magnéticos, bem como a propagação de onda eletromagnética no interior de domínios condutores. Desta forma, pode-se então modelar tais regiões condutoras como impedâncias magnéticas e obter os valores de perdas.

Através dos conceitos apresentados, pode-se elaborar um modelo de parâmetros concentrados, um circuito magnético, que caracterize o comportamento magnético do equipamento em questão. Para resolução deste circuito, elabora-se uma rotina computacional que é testado comparando os resultados obtidos com os calculados via Método de Elementos Finitos 2D e 3D.

Palavras-chave: RNM, Método de Elementos Finitos 2D e 3D, perdas por fluxo disperso, forças, transformadores, reatores

ABSTRACT

This work aims to present the RNM method as an efficient option to model leakage flux and stray losses, as well as forces, in power transformers and power reactors.

The basic concepts to model leakage flux through the flux tubes theory are presented, as well as the wave propagation along conductive domains. Thus, it is possible to model those conductive domains as magnetic impedances to compute the losses along it.

With the above mentioned theory, it is possible to elaborate a lumped parameters, i.e. magnetic circuit, which characterizes the magnetic device behavior. In order to solve the mentioned circuit, it is implemented a computational routine, which is tested through the comparison between its results with those obtained using the Finite Elements Method (FEM) 2D and 3D.

Keywords: RNM, 2D and 3D Finite Elements Method, stray losses, forces, transformers, reactors

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Métodos para modelagens eletromagnéticas	30
Figura 2	Tubo de fluxo ideal	34
Figura 3	Tubo de fluxo	35
Figura 4	Setor de tubo cilíndrico com fluxo rotacional.....	37
Figura 5	Setor de tubo cilíndrico com fluxo radial.....	38
Figura 6	Tubo cilíndrico com fluxo radial.....	39
Figura 7	Tubo cilíndrico com fluxo axial	40
Figura 8	Polos cilíndricos ou prismáticos.....	40
Figura 9	Malha regular de relutâncias.....	41
Figura 10	Ramo com relutância magnética.....	42
Figura 11	Circuito com relutâncias magnéticas.....	45
Figura 12	Ramo com relutância magnética.....	47
Figura 13	Distribuição de densidade de corrente.....	52
Figura 14	Vetor de Poynting.....	53
Figura 15	Condições de contorno.....	54
Figura 16	Espessura de penetração de campo - Atenuação de onda internamente à placa.....	56
Figura 17	Placa condutora com blindagem.....	60
Figura 18	Comparação da distribuição de campo interna a placa condutora (aço carbono) com e sem blindagem de cobre.....	61
Figura 19	Distribuição de campo magnético.....	62
Figura 20	Blindagens magnéticas.....	68
Figura 21	Curva BH para aço carbono.....	69
Figura 22	Blindagem eletromagnética de material não magnético.....	71
Figura 23	Distribuições de campo magnético	72
Figura 24	Fatores $k(d)$	73
Figura 25	Fatores $k(d)$ - Detalhe.....	74
Figura 26	Fluxograma	76
Figura 27	Fluxo de testes para programa WTRNM	77
Figura 28	Circuito de teste.....	77
Figura 29	Distribuição de campo magnético internamente ao tanque	83

Figura 30 Modelo bidimensional do transformador - a) geometria b) rede de relutâncias	85
Figura 31 Detalhe da rede de relutâncias	86
Figura 32 Planilha para entrada de dados	86
Figura 33 Malha 2D gerada no FEMM	87
Figura 34 Linhas de fluxo magnético análise para magnetostática.	88
Figura 35 Indução magnética ao longo da linha 1 - análise magne- tostática	89
Figura 36 Indução magnética ao longo da linha 2 - análise magne- tostática	89
Figura 37 a) Linhas de fluxo magnético análise para magnetodinâ- mica b) Detalhe da malha e campo magnético ao longo da espessura do tanque	91
Figura 38 Indução magnética ao longo da linha 1 - análise magne- todinâmica	92
Figura 39 Indução magnética ao longo da linha 2 - análise magne- todinâmica	92
Figura 40 Campo magnético ao longo da linha 3 - análise magne- todinâmica	93
Figura 41 Campo magnético no interior da parede do tanque	94
Figura 42 Indução magnética ao longo da linha 1 - análises magne- tostática e magnetodinâmica	95
Figura 43 Geometria do reator	97
Figura 44 Configuração de campo magnético entre enrolamentos - a) vista isométrica b) vista lateral	97
Figura 45 Plano entre os dois enrolamentos para obtenção da in- dução magnética normal	98
Figura 46 Modelo 3D	99
Figura 47 Camada do circuito magnético - a) camada completa b) detalhe das relutâncias dos enrolamentos	100
Figura 48 Resultado obtido com o método RNM	101
Figura 49 Malha refinada para o MEF	102
Figura 50 Malha refinada para o MEF	102
Figura 51 Malha primitiva para o MEF	103
Figura 52 Malha primitiva para o MEF	104
Figura 53 Modelos 2D	106

Figura 54 Resultados para indução magnética.....	108
Figura 55 Comparação entre as soluções RNM e MEF - indução magnética radial.....	109
Figura 56 Resultados para força obtidos com a solução RNM para a indução magnética	110

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Espessura de penetração e meio comprimento de onda .	57
Tabela 2	Impedâncias para materiais utilizados em transformadores e no vácuo.....	60
Tabela 3	Dimensões e permeabilidade relativa das relutâncias ...	78
Tabela 4	Comparação dos valores de fluxo magnético.....	79
Tabela 5	Erro[%] em relação à outros programas	80
Tabela 6	Comparação dos valores de fluxo magnético.....	81
Tabela 7	Perdas no tanque.....	96

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

H	Campo Magnético [A/m].....	33
E	Campo Elétrico [V/m].....	33
B	Densidade de Campo Magnético [T].....	33
D	Densidade de Campo Elétrico [C/m ²].....	33
J_{tot}	Densidade de corrente impressa, induzida e de deslocamento [A/m ²].....	33
J_c	Densidade de corrente conduzida (impressa e induzida) [A/m ²].....	33
μ	Permeabilidade magnética [H/m].....	33
σ	Condutividade elétrica [S/m].....	33
ε	Permissividade elétrica [F/m].....	33
θ	Potencial escalar magnético [A].....	34
S	Área [m ²].....	35
ds	Elemento diferencial de área [m ²].....	35
θ_A^B	Diferença de potencial magnético entre os pontos A e B [A].....	35
dl	Elemento diferencial de comprimento [m].....	35
φ	Fluxo magnético [Wb].....	35
\mathfrak{R}_A^B	Relutância magnética entre os nós A e B [1/H].....	36
\mathfrak{R}	Relutância magnética [1/H].....	36
Fmm	Força magneto-motriz [A].....	36
N	Quantidade de espiras.....	36
I	corrente elétrica [A].....	36
P	Permeância magnética [H].....	36
r_i	Raio interno[m].....	37
r_e	Raio externo[m].....	37
L	Profundidade do tubo de fluxo[m].....	37
dr	Elemento diferencial de raio[m].....	37
α	Ângulo do tubo de fluxo [rad].....	37
dP/dl	Derivada da permeância no comprimento[H/m].....	38
t	Profundidade da geometria[m].....	41
\mathfrak{R}_x	Relutância em x [1/H].....	41

\mathfrak{R}_y	Relutância em y [1/H]	41
L_x	Distância em x [m]	41
L_y	Distância em y [m]	41
θ_A	Potencial magnético no nó A [A]	43
θ_B	Potencial magnético no nó B [A]	43
H_A^B	Campo magnético entre os nós A e B[A/m]	43
L_A^B	Distância entre os nós A e B [m]	43
θ	Potencial magnético [A]	43
\mathfrak{R}	Relutância magnética [1/H]	43
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo [1/H]	43
μ_A^B	Permeabilidade magnética na relutância entre os nós A e B [H/m]	43
B_A^B	Indução magnética na relutância entre os nós A e B[T] .	43
F_g	Força magnética em um gap [N]	44
W_m	Energia magnética[J]	44
$nrel$	Quantidade de relutâncias	44
F_c	Força magnética em condutor percorrido por corrente [N/m ³]	44
I_B	Vetor de fontes	46
Y_B	Matriz de admitâncias	46
V_B	Matriz de potenciais	46
n	Quantidade de nós no circuito	46
Y	Admitância [1/Ω]	46
Y_P	Matriz primitiva admitâncias	47
A	Matriz de incidência nodal completa	47
H_y	Campo magnético ao longo do eixo y	53
z	Distância ao longo do eixo z	53
H_{msy}	Campo magnético máximo ao longo do eixo y	53
γ	Constante de propagação de onda	54
ω	Velocidade angular [rad/s]	54
f	Frequência [Hz]	55
α	Coefficiente de atenuação da onda	55
β	Coefficiente de fase da onda	55
E_x	Campo elétrico ao longo do eixo x [V/m]	55
E_{msx}	Campo elétrico máximo ao longo do eixo x [V/m]	55

t	Instante de tempo [s].....	55
J_x	Densidade de corrente longo do eixo x [A/m^2].....	55
δ	Espessura de penetração de campo [m].....	57
λ	Comprimento de onda [m].....	57
d	Espessura da placa condutora [m].....	57
η	impedância intrínseca de um dado meio [Ohm].....	58
μ_s	Permeabilidade magnética relativa de superfície.....	59
τ	Coefficiente de transmissão da onda.....	59
Γ	Coefficiente de reflexão da onda.....	59
S	Vetor de Poynting [VA].....	63
S_{av}	Valor médio do Vetor de Poynting [VA].....	63
P	Perdas [W].....	65
GO	Grão orientado.....	67
H_{sat}	Campo magnético de saturação.....	70
$k(d)$	Coefficientes para cálculo das perdas.....	73
μ_r	Permeabilidade magnética relativa.....	73
b	Metade da espessura da placa condutora [m].....	74
WTRNM	Rotina computacional desenvolvida.....	75
F_z	Força magnética ao longo do eixo z [N].....	105
F_r	Força magnética ao longo do raio [N].....	105
H_t	Campo magnético tangente ao contorno [A/m].....	106
B_z	Indução magnética ao longo do eixo z [T].....	107
B_r	Indução magnética ao longo do raio [T].....	107
h	Altura do enrolamento [m].....	107

LISTA DE SÍMBOLOS

∇	Operador Nabra	33
\times	Produto vetorial	33
\cdot	Produto escalar	33
$\partial/\partial x$	Derivada parcial em x	44

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	29
2 RELUTÂNCIAS MAGNÉTICAS - TUBOS DE FLUXO MAGNÉTICO E CÁLCULO DE FORÇA MAGNÉTICA	33
2.1 CÁLCULO DAS RELUTÂNCIAS EM TUBOS MAGNÉTICOS	33
2.1.1 Setor de tubo cilíndrico com fluxo rotacional	37
2.1.2 Setor de tubo cilíndrico com fluxo radial	38
2.1.3 Tubo cilíndrico com fluxo radial	39
2.1.4 Tubo cilíndrico com fluxo axial	39
2.1.5 Polos cilíndricos ou prismáticos	40
2.2 MALHA 2D DE RELUTÂNCIAS	41
2.3 RAMOS DO CIRCUITO MAGNÉTICO	42
2.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO	43
2.5 CÁLCULO DE FORÇA MAGNÉTICA	44
3 RESOLUÇÃO DO CIRCUITO MAGNÉTICO	45
3.1 MODELO DE REDE	46
3.2 MATRIZ DE INCIDÊNCIA NODAL	48
3.3 MATRIZ DE FONTES	49
3.4 RESOLUÇÃO DO SISTEMA MATRICIAL	49
4 EQUAÇÕES DE CAMPOS E PERDAS	51
4.1 INTRODUÇÃO À DIFUSÃO DE CAMPOS EM MEIOS CONDUTORES	52
4.2 ESPESSURA DE PENETRAÇÃO DE CAMPO E COMPRIMENTO DE ONDA	55
4.3 IMPEDÂNCIA ELÉTRICA DE SUPERFÍCIE	58
4.4 ANÁLISE DOS VALORES DE IMPEDÂNCIA PARA MATERIAIS UTILIZADOS EM TRANSFORMADORES	59
4.5 IMPEDÂNCIA MAGNÉTICA DE SUPERFÍCIE	61
4.6 CÁLCULO DE PERDAS ATRAVÉS DO VETOR DE POYNTING	63
5 CONSIDERAÇÕES PARA O CÁLCULO RELUTÂNCIAS E PERDAS PARA DIFERENTES MATERIAIS CONDUTORES	67
5.1 IMPEDÂNCIAS MAGNÉTICAS PARA MATERIAIS EMPREGADOS EM TRANSFORMADORES	68
5.1.1 A não linearidade do aço carbono	68

5.1.2	Impedância magnética para aço carbono e aço inox	69
5.1.3	Impedância magnética para blindagens de cobre ou alumínio	70
5.1.4	Impedância magnética para Aço silício - núcleo e blindagem magnética	71
5.2	PERDAS EM MATERIAIS MAGNÉTICOS/CONDUTORES	71
6	DESCRIÇÃO DA ROTINA COMPUTACIONAL DESENVOLVIDA	75
6.1	ROTINAS DE TESTES	76
7	MODELAGEM DE TRANSFORMADORES E REATOR	83
7.1	MODELO 2D DE TRANSFORMADOR	84
7.1.1	Modelo de rede de relutâncias	84
7.1.2	Modelagem magnetostática	87
7.1.3	Modelagem harmônica	90
7.2	MODELO 3D DE REATOR COM NÚCLEO DE AR	96
7.2.1	Simulações com o RNM	98
7.2.2	Simulações com o MEF	101
7.2.3	Análise com MEF - malha refinada	101
7.2.4	Análise com MEF - malha primitiva	103
7.3	MODELAGEM DE ESFORÇOS INTERNOS A ENROLAMENTOS CILÍNDRICOS DE TRANSFORMADORES	104
7.3.1	Introdução e justificativa	104
7.3.2	Cálculo das forças	105
7.3.3	Modelo	105
7.3.4	Resultados	107
8	CONCLUSÃO	111
	REFERÊNCIAS	113
	APÊNDICE A – OBTENÇÃO DE $k(d)$ PARA A CONDIÇÃO DADA NA Figura 23 a)	119

1 INTRODUÇÃO

Existe uma gama de estruturas condutoras (desconsiderando-se os enrolamentos e o núcleo, as chamadas partes ativas) em transformadores e reatores imersas em campos magnéticos variantes no tempo, podendo-se citar: armaduras, tirantes, travessas superiores e inferiores e, talvez uma dos mais importantes, o tanque. Este último é constituído de material condutor, normalmente aço carbono ou aço inox, caracterizando um sistema cuja modelagem se torna complexa, sobretudo na presença de regiões cobertas por blindagens, as quais podem ser magnéticas ou não.

Esta modelagem deve ser realizada cuidadosamente, pois as blindagens, que possuem a função de minimizar a geração de perdas no tanque, se mal dimensionadas podem acarretar em um resultado inverso. (TUROWSKI, 2005)

Em (TUROWSKI et al., 2001) são apresentadas algumas equações semi-empíricas e estatísticas para a obtenção das perdas no tanque do transformador, utilizadas por vários anos e por vários fabricantes. Para tais formulações, vários coeficientes são obtidos empiricamente, dificultando a aplicação e o desenvolvimento das referidas equações, pois as condições consideradas e os materiais utilizados são específicos a cada mensuração particular. Desta forma é de fundamental importância que se tenha meios precisos e eficientes de se estimar computacionalmente estas perdas considerando as características físicas e geométricas dos materiais utilizados.

O cálculo de perdas por correntes induzidas em transformadores elétricos é complexo e, além disso, as geometrias utilizadas não são passíveis de uma representação bidimensional adequada, pela falta de simetrias. Por isso, principalmente em regiões estruturais fora da região da janela do núcleo, é necessário uma análise tridimensional, requerendo-se um maior esforço tanto computacionalmente como na própria modelagem. (MULLINEUX; REED, 1966)

Como um exemplo, a espessura de penetração de campo magnético em materiais utilizados em transformadores (aços carbono) é de aproximadamente 1.4mm, em 60HZ, e as dimensões nestas regiões podem ser da ordem de metros quadrados.

O Método de Elementos Finitos (MEF) (BASTOS; SADOWSKI, 2003) é frequentemente utilizado para o cálculo das perdas devido a presença de correntes induzidas, sendo necessária a elaboração de malhas refinadas em regiões amplas, exigindo demasiados esforço compu-

tacional e o tempo de processamento. Segundo (CARPENTER, 1975), dissipação de energia afeta a formulação variacional, prejudicando a o desempenho do MEF neste tipo de problema.

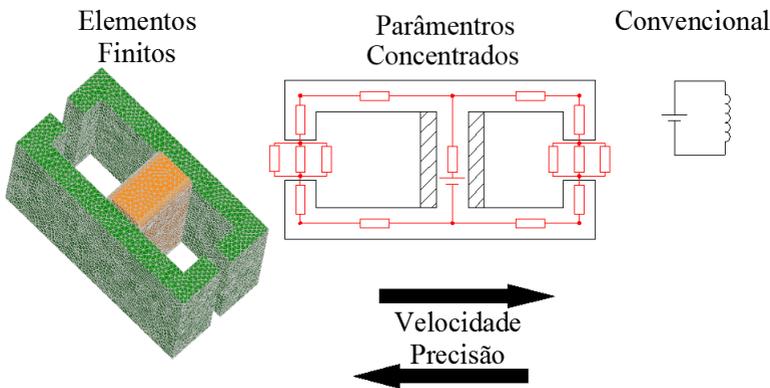
Apesar disso o MEF é o método mais difundido na indústria para este tipo de cálculo 3D, porém o alto custo destes pacotes, o esforço computacional necessário e a necessidade de pessoal especializado leva à busca de técnicas de análise alternativas, que não apresentem as desvantagens citadas. (TUROWSKI, 2005)

Em (MULLINEUX; REED, 1966) é apresentado um método analítico que considera o tanque com permeabilidade magnética infinita, obtendo-se assim perfil de força magneto motriz (Fmm) ao longo da superfície do tanque. Com estes dados, calculam-se então as perdas nas regiões de interesse. No entanto o método é somente aplicado em 2D, devido a dificuldade de aplicação analítica em 3D.

Conforme verificado acima, o MEF pode apresentar resultados confiáveis, porém possui algumas desvantagens. Já o método analítico possui a grande vantagem do baixo custo computacional, porém as simplificações nas formulações podem acarretar em redução no nível de precisão. Tais características sugerem a utilização de um método intermediário, que utilize parâmetros concentrados, por exemplo.

Na Figura1 abaixo ilustra a relação precisão vs tempo de simulação para os métodos citados.

Figura 1 – Métodos para modelagens eletromagnéticas



Considerando-se modelagem através de parâmetros concentrados, o método (*"Reluctance Network Method"*) RNM é um dos mais an-

tigos métodos utilizados para modelagem de circuitos magnéticos em máquinas elétricas (SOTO et al., 2008). Mesmo o MEF podendo apresentar resultados com maior precisão, o RNM mantém eficiente por apresentar resultados confiáveis com esforço computacional reduzido e menores tempos de simulação. (PETRICHENKO, 2007)(BODRICH, 2008)

Atualmente, o método RNM vem sendo utilizado para a modelagem de dispositivos eletromagnéticos (ROMAIN, 2007), (DELALE et al., 2004), máquinas elétricas (PETRICHENKO, 2007), até mesmo de linhas de transmissão (BORMANN; TAVAKOLI, 2012) e, em alguns casos, torna-se vantajoso em relação ao MEF, onde a espessura de penetração de campo é relativamente pequena.

Tratando-se de modelagem de fluxo disperso e as perdas causadas por este fenômeno, em (KAZMIERSKI et al., 1984) é apresentado um modelo 2D de rede de relutâncias para modelagem de transformadores tipo "core". Este modelo considera o tanque como material condutor e magnético, através do conceito de impedância magnética de superfície, entretanto, as perdas são obtidas através do conceito de impedância elétrica de superfície. Em (KAZMIERSKI et al., 1984), é elaborado um modelo 3D, também para transformadores "core", no qual os efeitos do fluxo disperso nas perdas no tanque seguem os mesmos conceitos utilizados em (KAZMIERSKI et al., 1984). Já em (SOTO et al., 2008) e (LOPEZ-FERNANDEZ et al., 2007), os conceitos citados são utilizados para modelagem de transformadores tipo "shell".

Desta forma, abaixo é apresentado o conceito para o cálculo das relutâncias para meios não condutores e homogêneos, bem como as equações para obtenção destas relutâncias em geometrias já conhecidas. Nos próximos capítulos são apresentados os conceitos e as equações para obtenção das relutâncias magnéticas complexas, aqui denominadas impedâncias magnéticas. Também é apresentada a metodologia para o cálculo das perdas nestas impedâncias. É apresentada a metodologia utilizada para a resolução de circuitos magnéticos.

Alguns autores apresentam programas que permitem analisar transformadores através do método RNM, porém estes programas são implementados para circuitos magnéticos fixos, impossibilitando a utilização destes de forma mais ampla. Por outro lado, outros autores apresentam programas que permitem analisar qualquer circuito, porém estes não são otimizados para as modelagens propostas neste trabalho, que requerem grandes circuitos com relutâncias tanto reais como complexas, para a análise de perdas em materiais magnéticos condutores.

Desta forma, é desenvolvido um programa no qual é possível resolver e analisar circuitos magnéticos de grande porte, com relutân-

cias magnéticas reais e complexas. Este é primeiramente testado com um circuito simples, através da comparação dos resultados obtidos com outros programas já difundidos.

Como validação através de modelos físicos, são implementados modelos 2D para transformadores e reatores, bem como modelo 3D para reator. A comparação é elaborada através de resultados obtidos com o MEF.

2 RELUTÂNCIAS MAGNÉTICAS - TUBOS DE FLUXO MAGNÉTICO E CÁLCULO DE FORÇA MAGNÉTICA

O cálculo das relutâncias magnéticas é realizada com base no conceito de tubos de fluxo e com o auxílio do chamado potencial escalar magnético (DAVEY; KING, 1981), sendo de suma importância para este trabalho. Neste método, cada relutância é considerada como um ramo de um circuito magnético, através da qual circula fluxo magnético de acordo com a diferença de potencial entre os terminais da mesma.

Através das relutâncias magnéticas, as propriedades físicas dos materiais são incorporadas ao modelo por parâmetros concentrados. Tais relutâncias podem ser reais ou complexas, dependendo se o material é condutor ou não, porém nesta seção o foco é mantido em relutâncias reais, para materiais não condutores.

2.1 CÁLCULO DAS RELUTÂNCIAS EM TUBOS MAGNÉTICOS

A teoria eletromagnética descreve um conjunto amplo de fenômenos que podem ser convenientemente descritos pelas Equações de Maxwell, (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5), conjuntamente com as relações constitutivas dos materiais, (2.6), (2.7) e (2.8).

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{tot}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad (2.8)$$

A definição dos tubos de fluxo está baseada nas equações de Maxwell e neste capítulo elas serão consideradas em regime estático. Os efeitos devido a variação temporal de fluxo, como correntes induzidas, serão estudados no Capítulo 4, no qual será apresentado o conceito de impedância magnética.

A solução de problemas de campos magnéticos pode ser simplificada através do uso do potencial escalar magnético (θ), pois o campo magnético pode ser obtido através de seu gradiente.

$$\mathbf{H} = -\nabla\theta \quad (2.9)$$

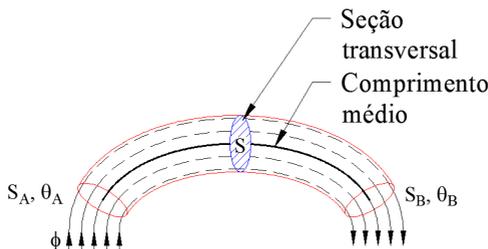
No entanto, através da Equação (2.1), verifica-se uma limitação a aplicação de (2.9), pois o rotacional do gradiente é nulo.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times (-\nabla\theta) = 0 \quad (2.10)$$

Logo, percebe-se que para definir \mathbf{H} como gradiente de θ , a densidade de corrente deve ser nula.

Utilizando-se o conceito de potencial escalar magnético, trechos do tubo de fluxo podem ser definidos de maneira que suas seções extremas coincidam com superfícies equipotenciais que sejam transversais às linhas de campo magnético, de forma que o campo magnético é definido através do gradiente do potencial escalar magnético.

Figura 2 – Tubo de fluxo ideal



No tubo de fluxo representado na Figura 2, as superfícies S_A e S_B são equipotenciais, com valores dados por θ_A e θ_B .

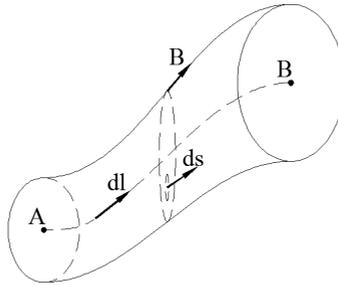
Para iniciar o equacionamento das relutâncias através dos tubos de fluxo, faz-se é necessário definir o fluxo através da seção S .

$$\varphi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = BS \quad (2.11)$$

Também é necessário definir a diferença de potencial magnético entre os pontos A e B, θ_A^B , que é dado pela equação 2.12 e está ilustrado na Figura 3.

$$\theta_A^B = - \int_A^B \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_B^A \mathbf{H} d\mathbf{l} \quad (2.12)$$

Figura 3 – Tubo de fluxo



Considerando-se a relação constitutiva dada em (2.6), pode-se escrever a Equação 2.12 na seguinte forma:

$$\theta_A^B = - \int_A^B \frac{\mathbf{B}}{\mu} d\mathbf{l} \quad (2.13)$$

Sabendo-se que o fluxo magnético é conservativo, ele é constante ao longo do caminho AB, portanto,

$$\theta_A^B = \varphi \int_B^A \frac{dl}{S\mu} \quad (2.14)$$

Define-se o conceito de relutância magnética como a razão entre potencial e fluxo.

$$\Re_A^B = \frac{\theta_B^A}{\varphi} = \int_A^B \frac{dl}{S\mu} \quad (2.15)$$

No caso de caminhos magnéticos circulares, por exemplo o apresentado na Seção 2.1.1, considera-se que o fluxo é gerado por um condutor retilíneo. Assim, pode-se obter o campo magnético entre duas faces perpendiculares às linhas de fluxo e defasadas geometricamente por um ângulo α .

$$H = \frac{I}{\alpha r} \quad (2.16)$$

Através do campo magnético e da seção transversal do tubo de fluxo, obtém-se o fluxo magnético.

$$\varphi = \frac{\mu_0 S I}{\alpha r} \quad (2.17)$$

A relutância magnética pode ser expressa por:

$$\Re = \frac{Fmm}{\varphi} \quad (2.18)$$

Se $Fmm = NI$ e $N = 1$ pode-se obter a relutância magnética.

$$\Re = \frac{I}{\varphi} \quad (2.19)$$

Logo, pode-se obter a permeância magnética, o inverso da relutância magnética, como:

$$P = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu S}{\alpha r} = \iint_S \frac{\mu ds}{\alpha r} \quad (2.20)$$

Na sequência são apresentados tipos de tubos de fluxo com as equações pertinentes à obtenção da relutância magnética para cada diferente situação. Verifica-se que em cada situação é definida sua referência bibliográfica, porém para o tipo apresentado na Seção 2.1.2 não foi possível verificar tal referência, necessitando-se deduzir o equacionamento.

Através destas relutâncias, torna-se possível modelar uma gama de dispositivos eletromagnéticos, porém para que seja possível elaborar

uma configuração correta dos tubos, faz-se necessário um conhecimento "a priori" da distribuição de fluxo na região de interesse (HAMMOND; SYKULSKI, 2004), e com isso, determinar os tipos de tubos a serem utilizados no modelo, bem como suas conexões.

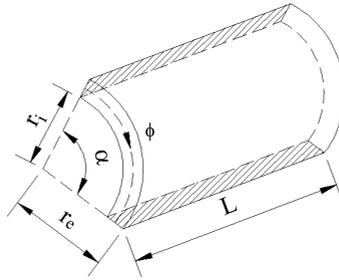
Na seção final deste capítulo, será utilizada a taxa de variação da permeância magnética em relação ao seu comprimento, para o cálculo de forças magnéticas. Por isso, para cada tipo de tubo de fluxo, define-se a relação dP/dl .

Os principais tubos de fluxo utilizados neste trabalho são apresentados a seguir.

2.1.1 Setor de tubo cilíndrico com fluxo rotacional

A geometria de tubo cilíndrico com fluxo rotacional é apresentada na Figura 4.

Figura 4 – Setor de tubo cilíndrico com fluxo rotacional



Através da integral da permeância, dada na Equação (2.20), faz-se necessário definir ds para a geometria acima:

$$ds = Ldr \quad (2.21)$$

Aplicando-se (2.21) em (2.20), a permeância relativa à Figura 4 é dada em (2.22), que pode ser verificada em (ROMAIN, 2007, p.21).

$$P = \frac{\mu L}{\alpha} \int_{r_i}^{r_e} \frac{dr}{r} = \frac{\mu L}{\alpha} \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right) \quad (2.22)$$

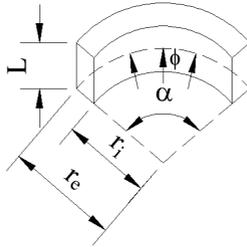
E sua taxa de variação dP/dl é dada por:

$$\frac{dP}{dl} = \frac{\mu}{\alpha} \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right) \quad (2.23)$$

2.1.2 Setor de tubo cilíndrico com fluxo radial

Na Figura 5 é mostrada um setor de tubo cilíndrico com fluxo radial.

Figura 5 – Setor de tubo cilíndrico com fluxo radial



A definição da relutância magnética para o tubo de fluxo radial da Figura 5 é dada através de (2.15), definindo-se o elemento diferencial dl como dr e a área transversal através da Equação (2.24).

$$S = L\alpha r \quad (2.24)$$

Com dl e S definidos, obtém-se a equação para a relutância.

$$\mathfrak{R} = \int_{r_i}^{r_e} \frac{dl}{S\mu} = \frac{1}{L\alpha\mu} \int_{r_i}^{r_e} \frac{dr}{r} = \frac{1}{L\alpha\mu} \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right) \quad (2.25)$$

A permeância é dada por:

$$P = \frac{L\alpha\mu}{\ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)} \quad (2.26)$$

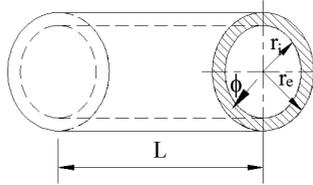
E a taxa de variação dP/dl por:

$$\frac{dP}{dl} = \frac{\mu\alpha}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} \quad (2.27)$$

2.1.3 Tubo cilíndrico com fluxo radial

Na Figura 6 é apresentado um tubo cilíndrico com fluxo radial.

Figura 6 – Tubo cilíndrico com fluxo radial



A equação para a permeância tubo de fluxo dado na Figura 6 é definida em (BODRICH, 2008, p.222), mas também pode ser verificada através da Equação (2.26), definindo-se $\alpha = 2\pi$.

$$P = \frac{\mu 2\pi L}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} \quad (2.28)$$

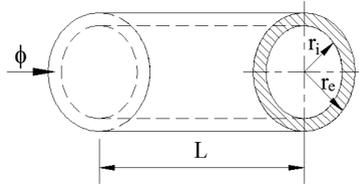
A taxa de variação dP/dl é definida como:

$$\frac{dP}{dl} = \frac{\mu 2\pi}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} \quad (2.29)$$

2.1.4 Tubo cilíndrico com fluxo axial

Na Figura 7 é apresentado um tubo cilíndrico com fluxo axial.

Figura 7 – Tubo cilíndrico com fluxo axial



A permeância magnética para o tubo de fluxo apresentado na Figura 7 é facilmente obtida através de (2.15), uma vez que sua seção transversal é dada pela Equação (2.30). A Equação (2.31) pode ser obtida em (BODRICH, 2008, p.222).

$$S = \pi (r_e^2 - r_i^2) \quad (2.30)$$

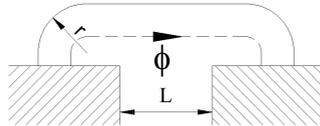
$$P = \frac{\mu\pi (r_e^2 - r_i^2)}{L} \quad (2.31)$$

Conforme acima mencionado, necessita-se definir a taxa de variação dP/dl .

$$\frac{dP}{dl} = \frac{\mu\pi (r_e^2 - r_i^2)}{L^2} \quad (2.32)$$

2.1.5 Polos cilíndricos ou prismáticos

Figura 8 – Polos cilíndricos ou prismáticos



A equação para a permeância do tubo de fluxo apresentado na Figura 8 é dada em (BODRICH, 2008, p.222), expressa na Equação (2.33).

$$P = \frac{2\mu t \ln \left(1 + \frac{\pi r}{2L}\right)}{\pi} \quad (2.33)$$

$$\frac{dP}{dl} = \frac{\mu tr}{L^2 \left(1 + \frac{\pi r}{L}\right)} \quad (2.34)$$

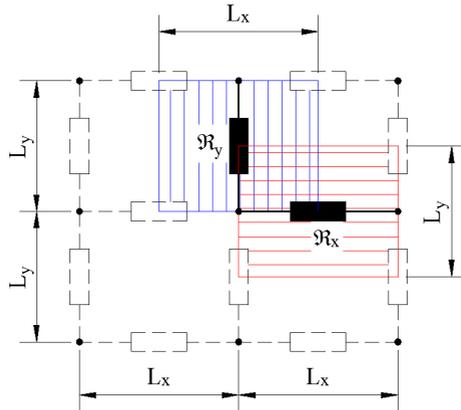
Onde t , que é a profundidade da geometria, pode ser definida com base no formato do pólo.

2.2 MALHA 2D DE RELUTÂNCIAS

Como está sendo verificado ao longo deste trabalho, para a utilização do método RNM é necessária uma rede de relutâncias. No entanto, é importante abordar metodologias que facilitem a geração destas redes de forma sequencial, possibilitando a automação deste processo. (DAVEY; KING, 1981), (SYKULSKI, 1995), (WOJCIECHOWSKI et al., 2009) e (KING, 1966) apresentam uma metodologia para obtenção da rede de relutâncias a partir de uma malha retangular previamente estabelecida.

Considerando-se um elemento regular bidimensional (2D), conforme Figura 9, pode-se obter as componentes x e y da relutância \mathfrak{R}_x e \mathfrak{R}_y .

Figura 9 – Malha regular de relutâncias



$$\mathfrak{R}_y = \frac{L_y}{\mu L L_x} \quad (2.35)$$

$$\mathfrak{R}_x = \frac{L_x}{\mu L L_y} \quad (2.36)$$

Como informação complementar, em (SYKULSKI, 1995) e (KING, 1966) essas equações são obtidas através da resolução da Equação de Poisson por expansões em séries de Taylor. Como a resolução se dá através da rede de relutâncias, nestas referências é mencionado uma similaridade entre o método RNM e o método de Diferenças Finitas.

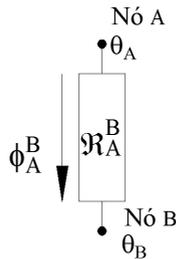
Em (CARPENTER, 1975) é apresentada uma forma de integração do método de rede de relutâncias com malhas triangulares de primeira ordem geradas para o MEF, com o intuito de analisar problemas com correntes induzidas.

2.3 RAMOS DO CIRCUITO MAGNÉTICO

Tendo-se os valores de relutâncias, necessita-se implementar um circuito (modelagem através de parâmetros concentrados) que considere cada relutância como um ramo, bem como suas conexões com os nós do circuito.

Através da resolução do circuito magnético, obtém-se o potencial magnético θ em cada nó do circuito e, com esta informação, deve-se obter as grandezas necessárias, como campo magnético e indução magnética.

Figura 10 – Ramo com relutância magnética



Com estes potenciais, torna-se possível obter todas as grandezas necessárias, como: fluxo magnético (φ_A^B), campo magnético (H_A^B) e

indução magnética (B_A^B).

$$\varphi_A^B = -\frac{\theta_B - \theta_A}{\mathfrak{R}_A^B} \quad (2.37)$$

$$\theta_B - \theta_A = H_A^B L_A^B \quad (2.38)$$

Através da Equação (2.39), que relaciona campo magnético e o gradiente do potencial escalar magnético, pode-se obter o campo magnético e indução magnética em cada ramo do circuito, da seguinte forma:

$$\mathbf{H} = -\nabla\theta \quad (2.39)$$

$$H_A^B = \frac{\theta_B - \theta_A}{L_A^B} \quad (2.40)$$

$$H_A^B = \frac{\varphi_A^B \mathfrak{R}_A^B}{L_A^B} \quad (2.41)$$

$$B_A^B = \mu_A^B H_A^B \quad (2.42)$$

2.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

No RNM a aplicação das condições de contorno de Dirichlet e Neumann está baseada na conexão entre os nós de uma forma tal a impor tais características à distribuição de campo magnético.

Para impor a simetria ao modelo, condição de contorno de Neumann, em (KING, 1966) os nós ao longo da linha de simetria são considerados com potencial nulo.

Em (DAVEY; KING, 1981) a condição de contorno de Dirichlet é aplicada para a modelagem de fluxo de dispersão em regiões abertas, nas quais as relutâncias podem ser curto-circuitadas, desde que o potencial magnético não varie significativamente.

2.5 CÁLCULO DE FORÇA MAGNÉTICA

Uma das grandes aplicações do método RNM é o cálculo de forças magnéticas em dispositivos eletromagnéticos. Tendo-se, de antemão, a distribuição de campo magnético em um determinado domínio, torna-se trivial obter o mapeamento de forças magnéticas. Este mapeamento pode ser elaborado através de várias formas, podendo-se citar: Tensor de Maxwell, lei de Laplace e através da variação da energia magnética, (2.43). (BASTOS, 2004)

$$F_g = \frac{\partial}{\partial x} W_m \quad (2.43)$$

Sendo que, para meios lineares, W_m vale:

$$W_m = \int_0^B H dB = \mu \int_0^H H dH = \frac{\mu H^2}{2} \quad (2.44)$$

A Equação (2.43) pode ser simplificada, considerando-se o circuito magnético através de parâmetros concentrados. Desta forma, pode-se obter o valor de força através dos valores de potenciais magnéticos entre os nós de cada relutância e da taxa e variação da permeância magnética em relação ao seu comprimento. (BODRICH, 2008) (ROTTERS, 1941)

$$F_g = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nrel} \theta_{AB}^2 \frac{dP}{dx} \quad (2.45)$$

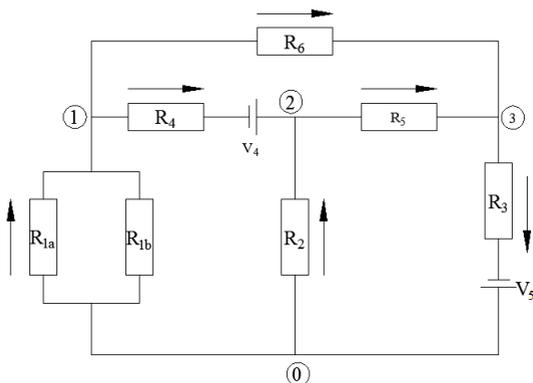
No entanto, no caso de condutores percorridos por corrente elétrica e imersos em campos magnéticos, podendo-se citar como exemplo os enrolamentos de transformadores e reatores, a força magnética pode ser obtida através da equação de Laplace (SOLLERGEN, 1978), Equação (2.46)

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.46)$$

3 RESOLUÇÃO DO CIRCUITO MAGNÉTICO

Com a evolução dos sistemas computacionais, o uso de álgebra para a formulação e resolução de problemas complexos de engenharia tornou-se largamente difundido. A aplicação de notações matriciais fornece um significado matemático simples, para uma abrangência considerável de problemas de engenharia, podendo-se citar a análise de sistemas elétricos, através da resolução de sistemas lineares. Os métodos utilizados para o tratamento matricial de sistemas de potência, o qual é utilizado para a resolução de circuitos magnéticos neste trabalho, são detalhadamente apresentados em (STAGG; EL-ABIAD, 1968), (DAS, 2002) e (CHUA; LIN, 1981). Considerando-se a analogia entre circuitos elétricos e magnéticos (SADIKU, 2004), opta-se por apresentar a teoria para resolução através de um exemplo de circuito elétrico. Os referidos circuitos elétricos representam circuitos magnéticos oriundos da modelagem através do método RNM, onde as resistências, impedâncias, e fontes de tensão representam relutâncias magnéticas reais, impedâncias magnéticas e fontes de Força magneto-motriz (Fmm), nesta sequência. As leis fundamentais dos circuitos elétricos são a Lei das Correntes e Tensões de Kirchhoff. Agora, para circuitos magnéticos, tais leis são aplicadas a circuitos magnéticos. Como forma de ilustração da teoria abaixo apresentada, elabora-se um circuito simples, dado na Figura 11.

Figura 11 – Circuito com relutâncias magnéticas



3.1 MODELO DE REDE

O modelo matemático de sistemas elétricos deve descrever as características individuais de cada elemento da rede, bem como conectá-los de forma a se obter um sistema que represente o modelo físico. (STAGG; EL-ABIAD, 1968) Matematicamente, as equações de rede podem ser aplicadas no formato nodal, "bus" ou no formato de laços, "loops". Neste trabalho, é aplicado o método nodal, o qual é um método clássico, mas também utiliza sistemas diagonais bem definidos (HO et al., 1975), o que possibilita a otimização computacional do sistema matricial, através de métodos para solução e condicionamento de matrizes diagonais ou esparsas. Para tal, as equações podem ser apresentadas através de ambos os conceitos de impedância e admitância, sendo que o a resolução se dá através do sistema matricial abaixo.

$$[I_B]_{(n-1,1)} = [Y_B]_{(n-1,n-1)}[V_B]_{(n-1,1)} \quad (3.1)$$

Onde n é o número de nós na rede. O subscrito $(n-1)$ significa que o nó de referência não consta no sistema matricial. Neste caso, onde são pré-estabelecidas as fontes de tensão, através de fontes de corrente (via equivalentes Norton) e as admitâncias, o sistema matricial a ser resolvido se torna na seguinte forma:

$$[V_B] = [Y_B]^{-1} [I_B] \quad (3.2)$$

O vetor $[V_B]$ representa a tensão em cada nó do circuito, em referência ao nó 0.

Elaborando-se a análise nodal (LCK) no circuito dado na Figura 11, obtêm-se as 3 equações dadas abaixo, para os 3 nós.

Nó 01:

$$V_1(Y_{1a} + Y_{1b} - Y_4 - Y_6) + V_2Y_4 + V_3Y_6 = V_4Y_4 \quad (3.3)$$

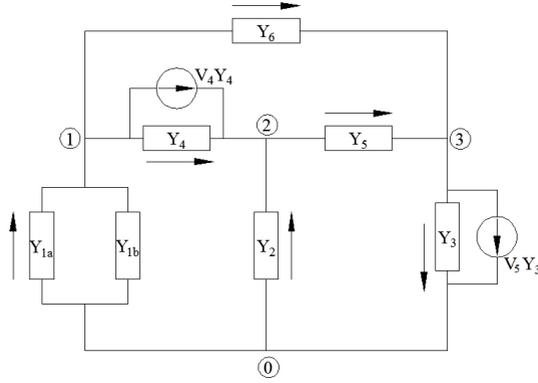
Nó 02:

$$V_1Y_4 + V_2(-Y_4 - Y_2 - Y_5) + V_3Y_5 = -V_4Y_4 \quad (3.4)$$

Nó 03:

$$V_1Y_6 + V_2Y_5 + V_3(-Y_3 - Y_5 - Y_6) = V_5Y_3 \quad (3.5)$$

Figura 12 – Ramo com relutância magnética



Escrevendo-se as equações (3.3), (3.4) e (3.5) em forma matricial, tem-se o sistema matricial dado em (3.6).

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{1a} + Y_{1b1} - Y_4 - Y_6 & Y_4 & Y_6 \\ Y_4 & -Y_4 - Y_2 - Y_5 & Y_5 \\ Y_6 & Y_5 & -Y_3 - Y_5 - Y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_4 Y_4 \\ -V_4 Y_4 \\ V_5 Y_3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Desta forma, torna-se possível obter os potenciais em todos os nós do circuito, através de dados do modelo (matriz de admitâncias), ver (3.7), e fontes de tensão pré-estabelecidas

$$Y_B = \begin{bmatrix} Y_{1a} + Y_{1b1} - Y_4 - Y_6 & Y_4 & Y_6 \\ Y_4 & -Y_4 - Y_2 - Y_5 & Y_5 \\ Y_6 & Y_5 & -Y_3 - Y_5 - Y_6 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Outra maneira de se obter a matriz de admitâncias é através da matriz de incidência nodal $[A]$, a qual é apresentada na próxima seção, e da matriz primitiva de admitância $[Y_P]$, conforme a Equação (3.8).

$$[Y_B] = [A] [Y_P] [A'] \quad (3.8)$$

A matriz primitiva $[Y_P]$ é formada através das admitâncias próprias de cada ramo, como pode ser observado em (3.9).

$$Y_P = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

3.2 MATRIZ DE INCIDÊNCIA NODAL

Para a elaboração desta matriz, considera-se um circuito com n nós e e ramos. A matriz de incidência, denominada $[A]$ tem dimensões $(n \times e)$ e trás consigo a informação do sentido das correntes aplicadas ao circuito, desta forma:

- $A_{ij} = 1$: se a corrente no ramo j sai do nó i ;
- $A_{ij} = -1$: se a corrente no ramo j entra no nó i ;
- $A_{ij} = 0$: se corrente no ramo j não incide no nó i

A matriz completa de incidência, a qual considera o nó de referência, para o circuito proposto na Figura 12, está indicada abaixo, na Equação(3.10)

$$A_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Para a resolução do sistema matricial, utiliza-se a matriz de incidências na forma reduzida, a qual não contém os dados inerentes ao nó de referência (CHUA; LIN, 1981). Esta é apresentada pela Equação (3.11).

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Com as matrizes (3.9) e (3.11) pode-se obter a matriz $[Y_B]$, como apresentado em (3.8).

3.3 MATRIZ DE FONTES

Para a resolução do sistema matricial apresentado em (3.1), ainda necessita-se obter o vetor e este é definido conforme a Equação (3.12) abaixo.

$$[I_B] = -[A][Y_P][F] \quad (3.12)$$

Sendo que o vetor $[F]$ é dado seguindo a topologia do circuito em questão, onde: cada ramo que contenha uma fonte de tensão gera este valor na sua posição, no vetor $[F]$. Seguindo-se o exemplo dado na Figura 11, este vetor é dado através de (3.13)

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3 \\ V_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

3.4 RESOLUÇÃO DO SISTEMA MATRICIAL

De posse do sistema matricial, o qual é acima detalhado, pode-se resolver este sistema basicamente de duas formas em relação ao tipo de material utilizado no problema em questão, sendo elas: linear e não linear. Neste trabalho são considerados materiais lineares na resolução dos problemas. Considerando-se materiais lineares, podem-se seguir duas linhas para a resolução do sistema matricial: métodos diretos e métodos iterativos. Dentre os métodos diretos, pode-se citar a decomposição LU, eliminação de Gauss, regra de Kramer, entre outros.

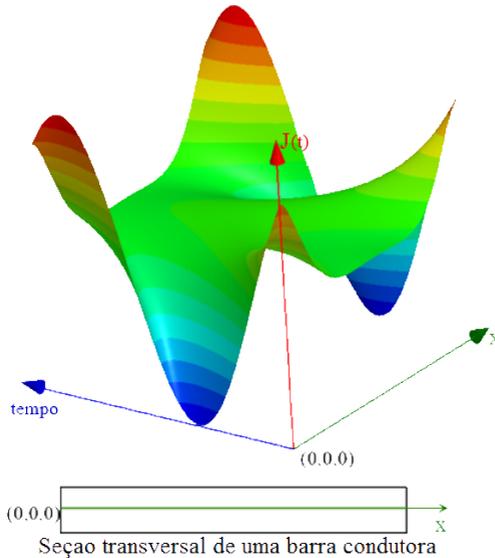
Considerando-se os sistemas lineares de porte pequeno-médio, implementa-se a rotina computacional através do método de Eliminação de Gauss. (TODD, 1962)

4 EQUAÇÕES DE CAMPOS E PERDAS

A metodologia para modelagem de dispositivos eletromagnéticos através de um circuito magnético sempre foi muito aplicada em situações que permitam desconsiderar as condutividades dos materiais. Porém em (KAZMIERSKI et al., 1984) é adicionado o conceito de impedância magnética, permitindo considerar a condutividade dos domínios, tornando o método RNM largamente utilizado para modelagem de perdas por correntes induzidas em transformadores. (TUROWSKI, 2005), (TUROWSKI et al., 2001) (SYKULSKI, 1995) (LOPEZ-FERNANDEZ et al., 2007)

A modelagem de perdas de forma analítica, como aplicado no método RNM, é relativamente complexa, pois depende da difusão de campos eletromagnéticos em domínios condutores. Através da Figura 13, que mostra a distribuição de densidade de corrente ao longo da linha central de um barramento submetido à corrente elétrica normal ao plano transversal, verifica-se o quão complexa pode ser a distribuição interna de campos e perdas em um material condutor. Entretanto, a modelagem deste fenômeno através da equação da difusão em regime harmônico fornece algumas facilidades para esta abordagem.

Figura 13 – Distribuição de densidade de corrente



Tendo-se em vista a importância dos conceitos teóricos inerentes a este tipo de modelagem, neste capítulo, partindo-se da teoria da difusão de campos em materiais condutores, é apresentado o equacionamento para obtenção das impedâncias magnéticas e perdas nestas impedâncias. Tais equacionamentos partem da premissa de um valor de campo magnético tangente à superfície de uma placa condutora, sendo este campo magnético obtido através da resolução do circuito magnético que represente o domínio em estudo.

4.1 INTRODUÇÃO À DIFUSÃO DE CAMPOS EM MEIOS CONDUTORES

Para o equacionamento deste fenômeno, partindo-se das Equações de Maxwell e considerando-se que, em frequências industriais, a densidade de corrente de deslocamento pode ser desprezada na Lei de Ampère, apresenta-se a equação da difusão. (BASTOS; SADOWSKI, 2003)

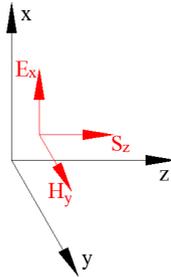
$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (4.1)$$

Como premissa, admite-se que os campos pulsam de forma puramente senoidal, podendo-se reescrever a equação da difusão em regime harmônico.

$$\nabla^2 \mathbf{H} = j\sigma\mu\omega \mathbf{H} \quad (4.2)$$

Acima é considerada uma hipótese de regime harmônico. Porém, no interior de um bom condutor, os campos são paralelos a interface, e propagam-se perpendicularmente a mesma, de forma que suas amplitudes dependem basicamente da componente tangencial do campo magnético imediatamente externo à interface.(JACKSON, 1999). Admitindo-se portanto que o campo vetorial \mathbf{H} somente possui componente em y , (H_y), e que o campo vetorial \mathbf{E} somente possui componente em x (E_x), o vetor de Poynting possuirá apenas a componente z , (S_z). Ver Figura 14.

Figura 14 – Vetor de Poynting

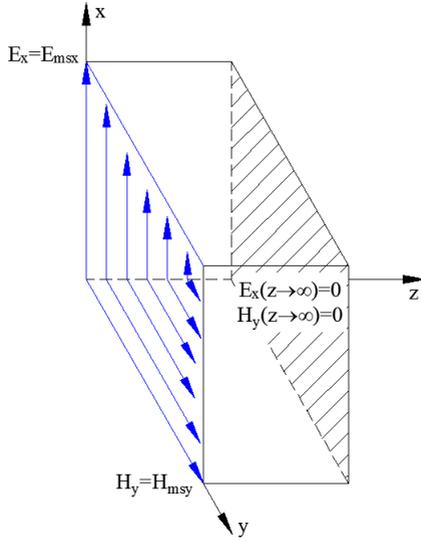


Assim, (4.2) pode ser reescrita como uma equação escalar:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = j\sigma\mu\omega H_y \quad (4.3)$$

Com base na discussão acima, define-se um campo senoidal de pico tangente à superfície desta placa, H_{msy} , conforme a Figura 15.

Figura 15 – Condições de contorno



Tendo-se o valor inicial de campo H_{msy} , a solução geral da Equação (4.3) pode ser escrita como (4.4). No entanto, como será mostrado em seguida, os dois termos do lado direito de (4.4) representam duas ondas se propagando para as direções positiva e negativa de z , respectivamente, de forma que apenas o primeiro deve ser considerado. Assim, a solução de (4.3) é dada então por (4.5).

$$H_y = H_{msy}e^{-\gamma z} + H_{msy}e^{\gamma z} \quad (4.4)$$

$$H_y = H_{msy}e^{-\gamma z} \quad (4.5)$$

De posse da Solução (4.5), pode-se aplicá-la na Equação (4.3).

$$\frac{\partial^2 (H_{msy}e^{-\gamma z})}{\partial z^2} = \gamma^2 H_{msy} \frac{\partial (e^{-\gamma z})}{\partial z} = j\omega\mu\sigma H_{msy} \quad (4.6)$$

Obtendo-se γ .

$$\gamma^2 = j\sigma\mu\omega \quad (4.7)$$

$$\gamma = \pm \sqrt{j\omega\mu\sigma} \quad (4.8)$$

Através da aplicação de γ em (4.5), verifica-se que este somente pode assumir valores positivos, caso contrário tal equação torna-se com caráter não físico.

$$\gamma = (1 + j) \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad (4.9)$$

Sendo que γ é definido como coeficiente de propagação de onda, formado pelo coeficiente de atenuação, α , e pelo coeficiente de fase, β , os quais são equivalentes em módulo, (4.11).

$$\gamma = \sqrt{\pi f \mu \sigma} + j \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \alpha + j\beta \quad (4.10)$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad (4.11)$$

O equacionamento apresentado para o campo magnético pode, de maneira idêntica, ser aplicado para o campo elétrico.

$$E_x = E_{msx} e^{-\gamma z} \quad (4.12)$$

Escrevendo-se a Equação (4.12) na forma temporal, através da identidade de Euler, chega-se em:

$$E_x = E_{msx} \left(e^{-\sqrt{\pi f \mu \sigma} z} \right) \left[\cos \left(\omega t - \sqrt{\pi f \mu \sigma} z \right) \right] \quad (4.13)$$

E, para o campo magnético e densidade de corrente, tem-se:

$$H_y = H_{msy} \left(e^{-\sqrt{\pi f \mu \sigma} z} \right) \left[\cos \left(\omega t - \sqrt{\pi f \mu \sigma} z \right) \right] \quad (4.14)$$

$$J_x = \sigma E_{msx} \left(e^{-\sqrt{\pi f \mu \sigma} z} \right) \left[\cos \left(\omega t - \sqrt{\pi f \mu \sigma} z \right) \right] \quad (4.15)$$

4.2 ESPESSURA DE PENETRAÇÃO DE CAMPO E COMPRIMENTO DE ONDA

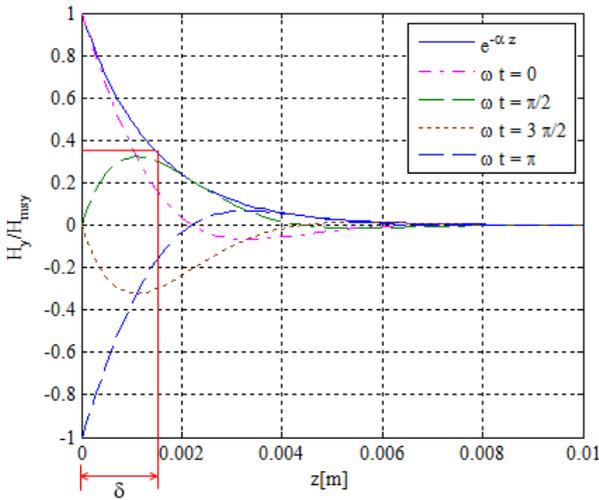
Quando se trata de análise de difusão de campo em meio condutor, um dado sumamente importante é a espessura de penetração de campo, pois este dado pode ajudar a definir o melhor método numérico

ou analítico para ser utilizado na modelagem. Segundo (BASTOS, 2004), a espessura de penetração é a profundidade na qual a onda eletromagnética pode penetrar em determinado meio, dado por δ , equivalendo ao ponto no qual o expoente que rege a amplitude da Equação (4.5), γz , torna-se unitário. Ou seja,

$$\sqrt{\pi f \mu \sigma} z = 1 \quad (4.16)$$

Isto significa dizer que na espessura de penetração, δ , os valores de campos estarão atenuados para 36.78% do valor na superfície, conforme a (4.17). Na Figura 16, além da espessura de penetração, são apresentadas as formas de onda no interior do material condutor, aplicando-se na (4.14) 4 instantes diferentes.

Figura 16 – Espessura de penetração de campo - Atenuação de onda internamente à placa



$$\frac{H_y}{H_{msy}} = e^{-1} = 0.3678 \quad (4.17)$$

A partir da Equação (4.16), pode-se obter o valor desta espessura de penetração.

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (4.18)$$

A constante de propagação de onda e o comprimento de onda podem ser expressas através da espessura de penetração de campo, como segue:

$$\gamma = \frac{(1 + j)}{\delta} \quad (4.19)$$

$$\lambda = 2\pi\delta \quad (4.20)$$

Analisando-se a relação entre a amplitude da onda eletromagnética em um meio condutor em $z = \lambda/2$, verifica-se que a amplitude da onda está atenuada à 0,043 pu do valor na superfície. Este fato permite considerar que na espessura $z = \lambda/2$ as reflexões internas já podem ser desconsideradas. Ou seja, um domínio com espessura maior que $\lambda/2$ pode ser considerado como semi-infinito. Na Tabela 1, apresentam-se os valores de espessura de penetração de campo e meio comprimento de onda, para os materiais condutores mais utilizados na fabricação de transformadores, para a frequência de 60Hz.

Tabela 1 – Espessura de penetração e meio comprimento de onda

Material	δ[mm]	$\lambda/2$[mm]
Cobre	9,69	30,43
Alumínio	11,27	35,42
Aço baixo carbono saturado	1,41	4,42
Aço baixo carbono - máx, Perm	0,99	3,12
Aço inox	57,66	181,13

A tabela acima demonstra que, por exemplo, para aço baixo carbono, somente pode-se utilizar equacionamentos que partam da premissa $d > \lambda/2$, quando a espessura da placa for maior que aproximadamente 3mm. Este é um dado de suma importância, pois muitos equacionamentos consideram a condição de plano semi-infinito e, a informação acima apresentada define se esta condição é satisfeita ou não.

4.3 IMPEDÂNCIA ELÉTRICA DE SUPERFÍCIE

A relação entre os campos elétrico e magnético é conhecida como impedância intrínseca de um dado meio, dada pela Equação (4.21).

$$\eta = \frac{E_x}{H_y} \quad (4.21)$$

Analisando-se a unidade da relação entre o elétrico e o campo magnético, chega-se a conclusão que a unidade é Ohm (Ω), unidade de impedância elétrica.

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\frac{V}{m}}{\frac{A}{m}} = \frac{V}{A} = \Omega \quad (4.22)$$

Esta impedância depende das propriedades do domínio, dielétrico ou condutivo, e pode ser expressa pela Equação (4.23), que resulta em um número complexo, podendo-se ser expresso por módulo e ângulo:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = |\eta| \angle\theta_\eta = |\eta| e^{j\theta_\eta} \quad (4.23)$$

Para um domínio bom condutor, onde a relação $\sigma \gg \omega\varepsilon$ seja satisfeita, a impedância intrínseca é dada pela Equação (4.24)

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = |\eta| \angle\pi/4 = |\eta| e^{j\pi/4} \quad (4.24)$$

A Equação (4.23) também pode ser aplicada em meios não condutores ($\sigma = 0$), como o vácuo por exemplo.

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7}}{\frac{1}{36\pi} 10^{-9}}} = 376,99\Omega \quad (4.25)$$

Conforme visto anteriormente, para obter a impedância em um meio qualquer, necessita-se obter a relação entre os campos \mathbf{H} e \mathbf{E} . Para tal, parte-se de (2.2), que pode ser reescrita na forma abaixo.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (4.26)$$

Porém, considerando-se que os campos \mathbf{H} e \mathbf{E} somente possuem componentes em y e x , respectivamente, a (4.26) pode ser apresentada,

em regime harmônico, como:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = j\omega\mu H_y \quad (4.27)$$

Aplicando-se a derivada da Equação (4.12), que é o lado esquerdo de (4.27), pode-se chegar à relação entre E_x e H_y , dado na Equação (4.28).

$$\eta = \frac{E_x}{H_y} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = (1 + j) \frac{1}{\sigma\delta} \quad (4.28)$$

Considerando-se uma placa condutora não linear magneticamente, a permeabilidade magnética não será constante ao longo do eixo z , sugerindo-se a utilização de uma permeabilidade magnética superficial (μ_s), já que o campo somente penetra até uma determinada espessura δ .

$$\eta = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu_s}{2\sigma}} \quad (4.29)$$

4.4 ANÁLISE DOS VALORES DE IMPEDÂNCIA PARA MATERIAIS UTILIZADOS EM TRANSFORMADORES

Conforme anteriormente mencionado, uma onda se propagando ao longo do eixo z de uma placa condutora com espessura menor que $\lambda/2$, ao atingir uma das interfaces ($z = 0$ ou $z = \text{espessura}$), tem uma parte refletida proporcional ao coeficiente de reflexão Γ e uma parte transmitida, que por sua vez, é proporcional ao coeficiente de transmissão τ . Tais coeficientes são obtidos através dos valores de impedância intrínseca dos materiais que formam a interface.

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (4.30)$$

$$\tau = 1 + \Gamma \quad (4.31)$$

Na Tabela 2, são apresentados os valores de impedância para alguns materiais utilizados na construção de transformadores, porém a impedância do vácuo foi adicionada nesta tabela apenas como valor de referência. Tais dados são obtidos através do módulo da (4.29).

Tabela 2 – Impedâncias para materiais utilizados em transformadores e no vácuo

Material	Impedância [Ω]
Vácuo	3,77E+02
Óleo mineral	2,54E+02
Aço baixo carbono saturado	1,67E-04
Aço baixo carbono - máx, Perm	2,36E-04
Aço inox	1,37E-05
Cobre	2,29E-06
Alumínio	2,67E-06

A Figura 18 exemplifica a diferença na distribuição de campo internamente à placa condutora, causada pelas diferentes impedâncias dos materiais que formam as interfaces (Γ_1 e Γ_2) apresentadas na Figura 17. Para efeito de comparação, esta análise considera o valor de campo unitário na superfície da placa.

Figura 17 – Placa condutora com blindagem

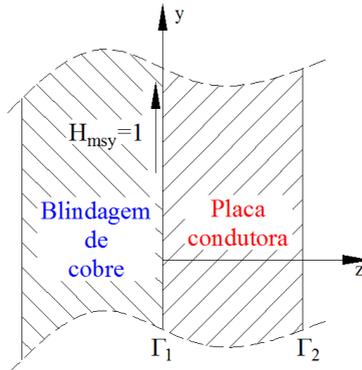
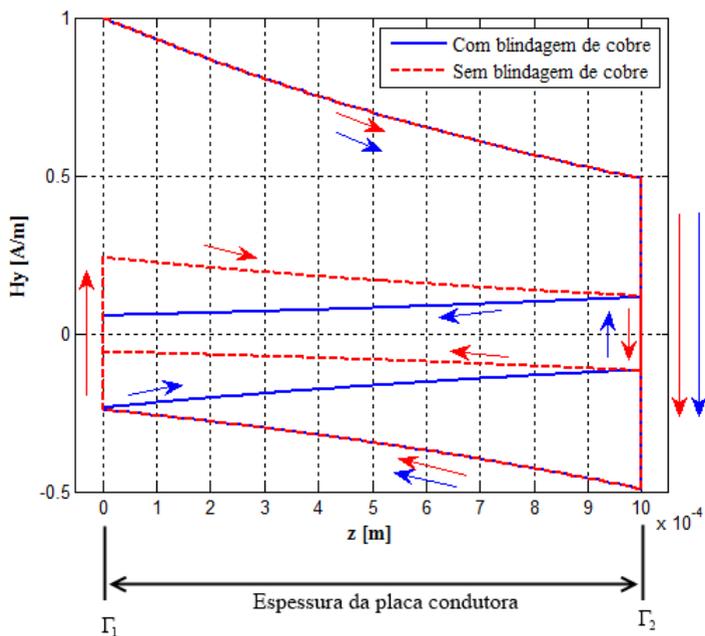


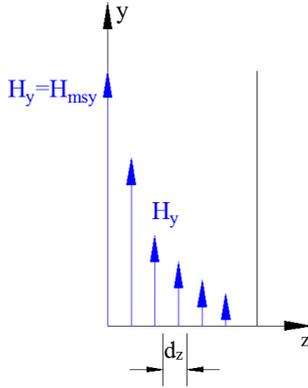
Figura 18 – Comparação da distribuição de campo interna a placa condutora (aço carbono) com e sem blindagem de cobre



4.5 IMPEDÂNCIA MAGNÉTICA DE SUPERFÍCIE

Com o intuito de obter a impedância magnética de superfície, considera-se que somente existe a componente H_y do campo magnético e que se propaga ao longo do eixo z , conforme a Figura 19.

Figura 19 – Distribuição de campo magnético



Considerando-se que o fluxo magnético, por unidade de profundidade em x , que circula por esta região é dado pela Equação (4.32), pode-se estabelecer a relação entre fluxo e campo magnético, que resulta na relutância magnética complexa, ou impedância magnética, dada na Equação (4.35).

$$\varphi_{msy} = \int_0^{\infty} B_y dz = \mu \int_0^{\infty} H_y dz = \mu \int_0^{\infty} H_{msy} e^{-\gamma z} dz \quad (4.32)$$

$$\varphi_{msy} = \mu H_{msy} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} dz = \frac{\delta \mu}{(1+j)} H_{msy} \quad (4.33)$$

$$\frac{H_{msy}}{\varphi_{msy}} = \frac{(1+j)}{\delta \mu} \quad (4.34)$$

$$\Re = \text{Re}(\Re) + j \text{Im}(\Re) = \frac{(1+j)}{\delta \mu} \quad (4.35)$$

Onde,

$$\frac{1}{\delta \mu} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu}{\omega \sigma}}} = \sqrt{\frac{\omega \sigma}{2\mu}} \quad (4.36)$$

4.6 CÁLCULO DE PERDAS ATRAVÉS DO VETOR DE POYNTING

Tendo em vista o foco deste trabalho, que é a modelagem de perdas em materiais condutores, torna-se necessário uma abordagem a respeito da transferência de energia, através do vetor de Poynting. O teorema de Poynting diz que *"a potência líquida saindo através da superfície de um dado volume é igual à taxa temporal de decremento na energia armazenada em campos elétricos e magnéticos dentro deste volume v , menos as perdas por condução"*, o que é, matematicamente e fisicamente, expresso na Equação (4.37).

$$\int_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_v \sigma E^2 dv - \frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{\epsilon}{2} E^2 + \frac{\mu}{2} H^2 \right) dv \quad (4.37)$$

Tendo-se a definição do vetor de Poynting, necessita-se verificar o equacionamento para a obtenção do valor médio de perdas em uma dada região. Tendo-se o Vetor de Poynting instantâneo $S(z,t)$, o seu valor médio em um período é dado por:

$$S_{av}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(z,t) \quad (4.38)$$

O comportamento temporal dos campos elétrico e magnético é dado pelas equações (4.13) e (4.14), reescritos em (4.39) e (4.40).

$$E_x = E_{msx} (e^{-\frac{z}{\delta}}) \left[\cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) \right] \quad (4.39)$$

$$H_y = H_{msy} (e^{-\frac{z}{\delta}}) \left[\cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) \right] \quad (4.40)$$

O campo magnético H_y pode ser apresentado em função do campo elétrico E_x , através da impedância intrínseca.

$$H_y = \frac{E_{msx}}{(1+j) \frac{1}{\sigma \delta}} (e^{-\frac{z}{\delta}}) \left[\cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) \right] \quad (4.41)$$

$$H_y = \frac{E_{msx}}{\sqrt{2}} \sigma \delta (e^{-\frac{z}{\delta}}) \left[\cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (4.42)$$

Desta forma, tem-se o vetor de Poynting instantâneo:

$$S(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma \delta E_{msx}^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} \left[\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (4.43)$$

Que, através de simplificações trigonométricas, reduz-se a:

$$S(z,t) = \sigma \delta E_{msx}^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\omega t - 2\frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (4.44)$$

Sendo que seu valor médio é dado pela Equação (4.45).

$$S(z) = \frac{\sqrt{2}}{4} \sigma \delta E_{msx}^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} \quad (4.45)$$

Utilizando-se o conceito de impedância:

$$\eta = \frac{E_x}{H_y} = \frac{(1+j)}{\sigma \delta} \quad (4.46)$$

A Equação (4.45) torna-se em função do campo magnético,

$$S(z) = \frac{1}{2} \frac{H_{msy}^2}{\sigma \delta} e^{-\frac{2z}{\delta}} \quad (4.47)$$

$$S(z) = \frac{1}{2} \frac{H_{msy}^2}{\sqrt{\frac{2\sigma}{\omega\mu}}} e^{-\frac{2z}{\delta}} \quad (4.48)$$

Que resulta em uma equação para o cálculo de perdas em função do campo magnético.

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} H_{msy}^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} \quad (4.49)$$

Comparando esta equação de perdas com as equações de campo, percebe-se que a distribuição de perdas é atenuada duas vezes mais rápido que o campo. Considerando-se este fato, para materiais onde a espessura é maior que $\lambda/2$ (ver Tabela 2), é razoável afirmar que as perdas se concentram na superfície da região condutora, $z = 0$ (TURROWSKI, 1993). Assim, a variação do valor das perdas ao longo de z ($e^{-\frac{2z}{\delta}}$) é desprezada e a Equação (4.49) torna-se:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} H_{msy}^2 \quad (4.50)$$

Esta equação fornece a informação da quantidade de perdas por unidade de área, podendo-se então apresentar a equação que fornece a quantidade de perdas ao longo de uma superfície S , dada por:

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \iint_S H_{msy}^2 ds \quad (4.51)$$

Resolvendo o circuito magnético com impedâncias magnéticas, calcula-se o valor de campo magnético em cada impedância e, consequentemente, o valor de perdas em cada uma delas. Faz-se importante mencionar que este equacionamento parte da premissa que o material é magneticamente linear. A caracterização de perdas em materiais não lineares através deste equacionamento vem sendo a razão de pesquisas atuais, apesar de haver uma razoável aproximação estabelecida por (TUROWSKI et al., 2001), que é apresentada no próximo capítulo.

5 CONSIDERAÇÕES PARA O CÁLCULO RELUTÂNCIAS E PERDAS PARA DIFERENTES MATERIAIS CONDUTORES

Na modelagem eletromagnética de equipamentos elétricos, pode-se deparar com a necessidade de análises tanto em regiões não condutoras quanto em regiões condutoras, principalmente se tratando de modelagem de perdas em partes estruturais de transformadores e reatores.

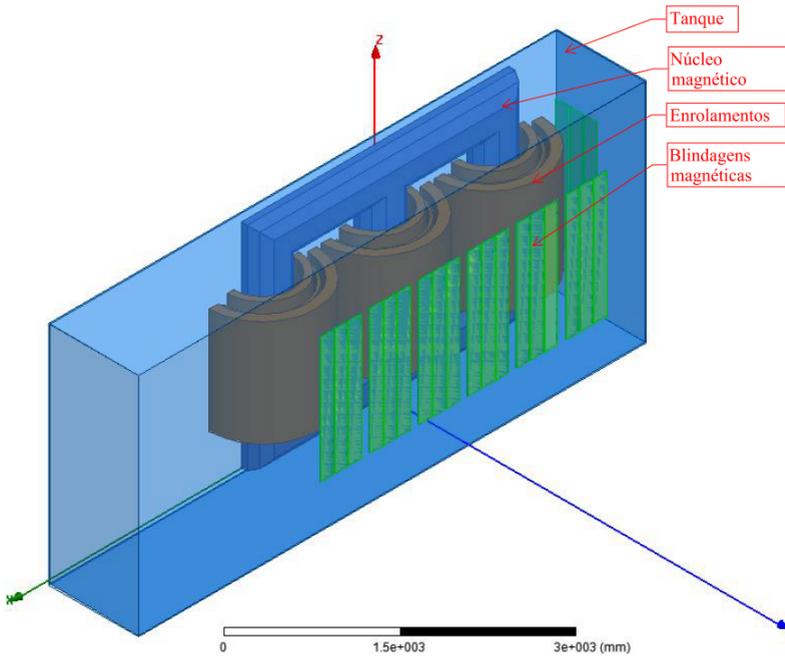
De posse dos equacionamentos apresentados nas Seções 4.5 e 4.6, neste Capítulo são apresentadas algumas particularidades inerentes a aplicação destes equacionamentos em materiais magnéticos e condutores que compõem os equipamentos acima citados.

Para exemplificar os diferentes materiais condutores e magnéticos utilizados, a Figura 20 apresenta algumas partes do modelo de um transformador, sendo que cada parte pode ser fabricada utilizando os materiais citados abaixo.

- Tanque: aço carbono ou aço inox;
- Núcleo magnético: aço silício de grão orientado (GO);
- Enrolamentos: cobre ou alumínio;
- Blindagens: aço silício, cobre ou alumínio.

Cada um destes materiais possui determinadas características eletromagnéticas que devem ser conhecidas a "*priori*", com razoável nível de precisão.

Figura 20 – Blindagens magnéticas



5.1 IMPEDÂNCIAS MAGNÉTICAS PARA MATERIAIS EMPREGADOS EM TRANSFORMADORES

Nas seções a seguir serão apresentadas algumas particularidades inerentes ao cálculo das impedâncias magnéticas para modelagem de transformadores e reatores.

5.1.1 A não linearidade do aço carbono

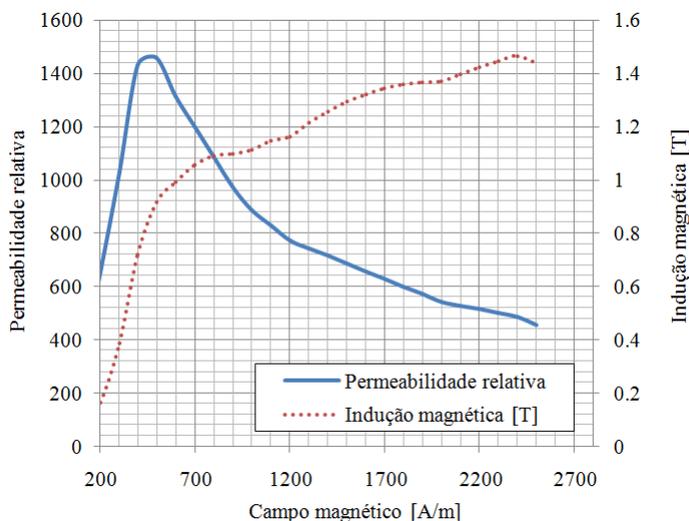
Para se ter confiabilidade nos resultados obtidos através da modelagem de materiais não lineares, por exemplo, o aço carbono e o aço silício, necessita-se obter as características magnéticas destes materiais com maior confiabilidade, pois estas características impactam diretamente nos resultados obtidos através de modelos matemáticos. Existe

uma grande variação destas características, já que tais propriedades se alteram de acordo com a composição química e condições metalúrgicas destes aços, sugerindo-se que os fabricantes de transformadores possuam tais dados atualizados.

Há uma gama de aços que podem ser utilizados com o mesmo propósito de suportar mecanicamente determinada estrutura. Cada tipo de aço contido nesta gama é tratado como aço estrutural, porém suas propriedades elétricas e magnéticas podem se alterar significativamente. Há poucas referências com as propriedades elétricas e magnéticas destes aços e, comparando-se os dados de diferentes referências, percebe-se que os valores não coincidem. Este fato pode implicar em modelagens com resultados pouco precisos.

Em (TUROWSKI, 1993), o autor apresenta uma curva com a característica magnética para aço carbono estrutural, representada neste trabalho pela Figura 21

Figura 21 – Curva BH para aço carbono



5.1.2 Impedância magnética para aço carbono e aço inox

Estudos teóricos experimentais mostram que para campos fortes ($H > H_{sat}$) a permeabilidade varia ao longo de z e esta variação deve

ser considerada para se obter precisão nos resultados. (TUROWSKI, 1993)

Em (TUROWSKI, 1993) a não linearidade é levada em consideração no modelo através de dois coeficientes a_1 e a_2 utilizados no cálculo da impedância magnética.

$$\mathfrak{R}_m = a_1 \operatorname{Re}(\mathfrak{R}) + a_2 j \operatorname{Im}(\mathfrak{R}) \quad (5.1)$$

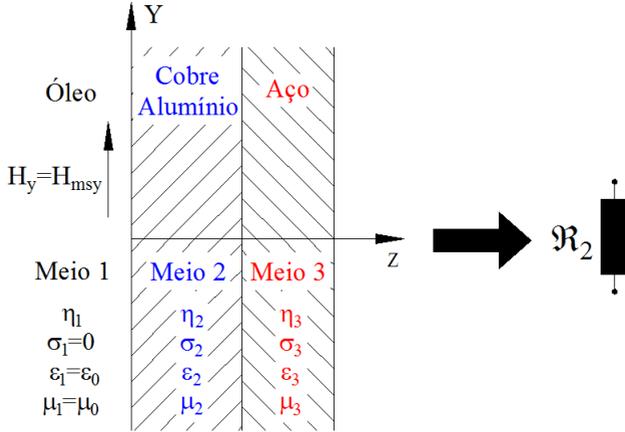
Segundo o autor, estes coeficientes são obtidos empiricamente. Sendo que para o aço carbono, cuja curva BH é apresentada na Figura 21 e possui um campo magnético de saturação $H_{sat} = 500\text{A/m}$, para campos fortes a_1 e a_2 valem $0,37\sqrt{2}$ e $0,61\sqrt{2}$, respectivamente. Porém, para campos fracos, valem $a_1 = a_2 = \sqrt{2}$, da mesma forma que para aço inox, mas neste caso independentemente do valor do campo.

5.1.3 Impedância magnética para blindagens de cobre ou alumínio

As blindagens devem ser consideradas na modelagem proposta neste trabalho, através de relutâncias ou impedâncias magnéticas que considerem seus efeitos. Abaixo, são apresentadas maneiras de considerar tais relutâncias e calcular as perdas nas partes acima mencionadas.

Conforme mencionado anteriormente, o tanque do transformador pode ter regiões cobertas por blindagens de cobre ou alumínio, que são materiais não magnéticos. Neste caso, necessita-se calcular a impedância magnética destas regiões, conforme (SYKULSKI, 1995, p.158).

Figura 22 – Blindagem eletromagnética de material não magnético



$$\mathfrak{R}_2 = \frac{\gamma_2 \gamma_3 \sinh \left[\gamma_2 d \left(1 + \gamma_2 d \sqrt{\frac{\mu_3 \sigma_2}{\mu_2 \sigma_3}} \right) \right]}{\mu_0 \gamma_3 \left(1 + \gamma_2 d \sqrt{\frac{\mu_3 \sigma_2}{\mu_2 \sigma_3}} \right) [\cosh(\gamma_2 d) - 1] + \mu_w \gamma_2 \sinh(\gamma_2 d)} \quad (5.2)$$

5.1.4 Impedância magnética para Aço silício - núcleo e blindagem magnética

Em casos onde o campo magnético é perpendicularmente ao material magnético, aço silício neste caso, o cálculo da impedância magnética se dá da mesma forma que para aço carbono (Equação (5.1)), salvo que $a_1 = a_2 = 0,55\sqrt{2}$. (LOPEZ-FERNANDEZ et al., 2007)

Para considerar o material magnético apenas como um tubo de fluxo, toma-se uma relutância magnética de acordo com a permeabilidade magnética do material ou como uma aproximação inicial, um curto-circuito magnético ($\mathfrak{R} = 0$). (SYKULSKI, 1995)

5.2 PERDAS EM MATERIAIS MAGNÉTICOS/CONDUTORES

A Equação de Turowski (TUROWSKI, 1993, p.193) para o cálculo de perdas é uma aproximação que visa considerar os efeitos da não

linearidade magnética do material e, devido ao fator $k(d)$, pode ser aplicada em condições diferentes de $d > \lambda/2$ e em diferentes condições de contorno em relação ao campo magnético externo (TUROWSKI, 1993) (KULKARNI S; KHAPARDE S, 2004).

$$P = k(d) \frac{ap}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}} \iint_S \sqrt{\mu_r} H_{msy}^2 ds \quad (5.3)$$

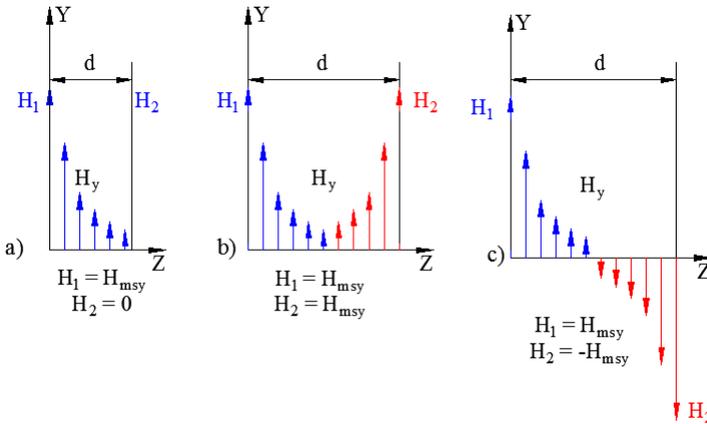
Onde ap é o coeficiente para linearização da variação da permeabilidade na região interior do material que, para campos fortes vale 1,4 e para campos fracos vale 1 (TUROWSKI, 1993, p.71). Em (TUROWSKI, 1993, p.316) é apresentada uma aproximação para $\sqrt{\mu_r} H_{msy}^2$.

$$\sqrt{\mu_r} H_{msy}^2 = C_1 H_{msy} + C_2 H_{msy}^2 \quad (5.4)$$

Onde C_1 e C_2 devem ser obtidos para cada material.

Tendo-se em vista uma placa metálica imersa em um campo magnético, são possíveis 3 condições de contorno para a equação de Poisson, considerando-se o campo magnético nas superfícies, ver Figura 23. Para considerar estes efeitos, introduz-se o fator $k(d)$, verificado na equação para perdas (5.3).

Figura 23 – Distribuições de campo magnético



Abaixo são apresentadas as equações para $k(d)$ para as condições apresentadas na Figura 23.

$$k(d) = \frac{\sinh(2d/\delta) + \sin(2d/\delta)}{\cosh(2d/\delta) - \cos(2d/\delta)} \quad (5.5)$$

$$k(d) = 2 \frac{\sinh(d/\delta) - \sin(d/\delta)}{\cosh(d/\delta) + \cos(d/\delta)} \quad (5.6)$$

$$k(d) = 2 \frac{\sinh(d/\delta) + \sin(d/\delta)}{\cosh(d/\delta) - \cos(d/\delta)} \quad (5.7)$$

No Apêndice A é apresentada a dedução matemática para o fator $k(d)$ dado em (5.5). Na Figura 24 é apresentado um gráfico que representa as equações acima, para um dado material com condutividade $\sigma = 4,7 \text{ MS/m}$ e permeabilidade relativa $\mu_r = 700$. Verifica-se que dependendo do sinal ou da existência do campo magnético nas faces da placa condutora o valor de perdas aumenta ou diminui consideravelmente em função da espessura desta placa.

A Figura 25 apresenta uma ampliação da região de interesse da Figura 24.

Figura 24 – Fatores $k(d)$

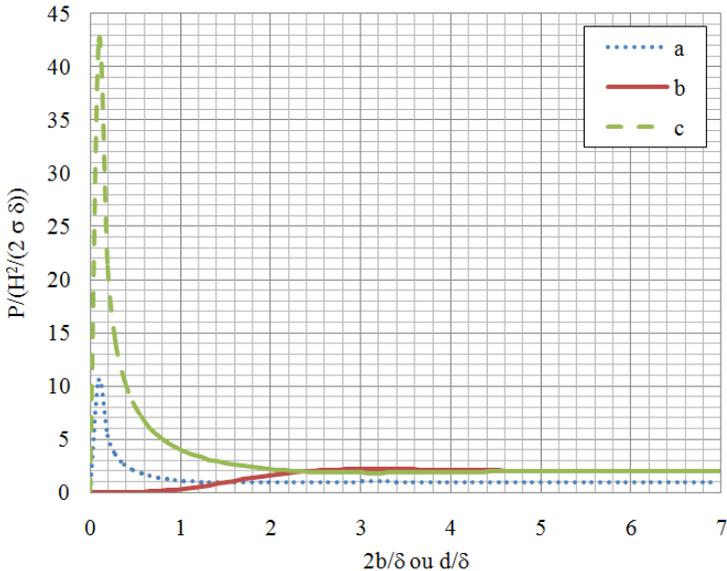
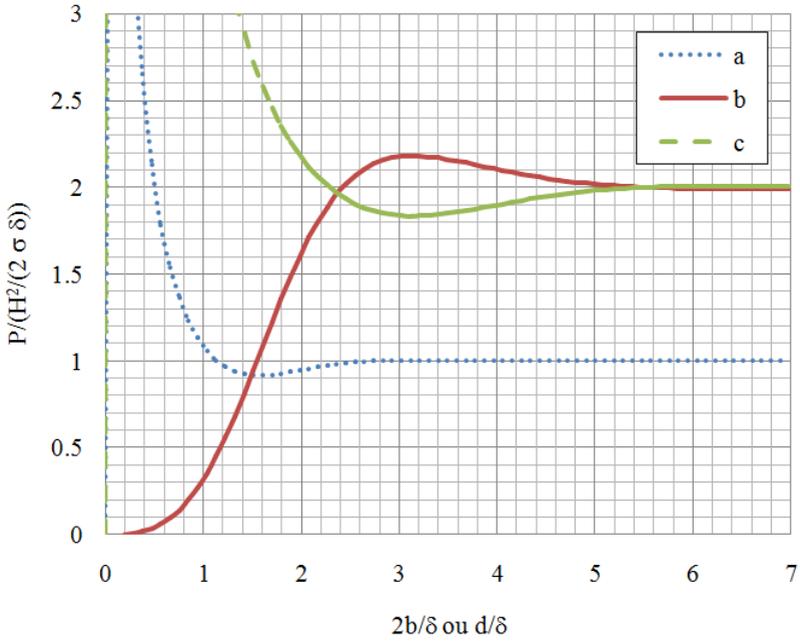


Figura 25 – Fatores k(d)- Detalhe



6 DESCRIÇÃO DA ROTINA COMPUTACIONAL DESENVOLVIDA

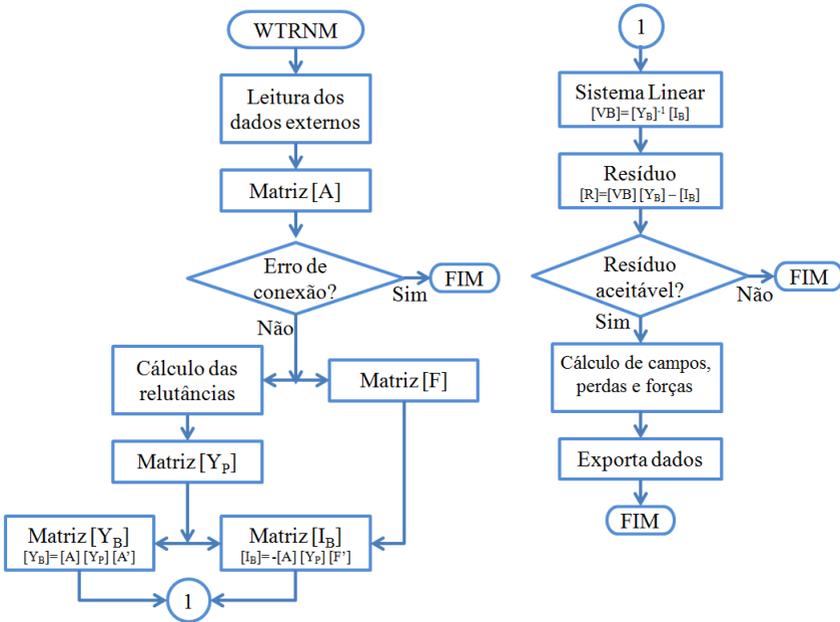
Dados os conceitos expostos nos capítulos anteriores, apresentam-se aqui as rotinas computacionais desenvolvidas neste trabalho a fim resolver os circuitos magnéticos que modelam os equipamentos mencionados neste trabalho. Na Figura 26 é apresentado o fluxograma destas rotinas, as quais compõem o programa WTRNM.

Normalmente, o conjunto de rotinas que compõem um programa de simulação é dividido em pré-processamento, processamento e pós-processamento. No entanto, as rotinas elaboradas durante este trabalho são de processamento e pós-processamento, pois estas necessitam de rotinas auxiliares que gerem uma lista de dados contendo as características geométricas, conexões e os materiais das relutâncias, no bloco "Leitura dos dados externos". No pós-processamento, bloco "Cálculo de campos e forças", calculam-se os campos e as forças, que são disponibilizados em arquivos em formato .txt, o que também requer rotinas auxiliares para ler e disponibilizar estes dados ao usuário. Consequentemente, o restante dos blocos são utilizados para montagem e resolução do circuito magnético, aqui chamado de processamento.

Como verificação das conexões do circuito, obtém-se o somatório de cada coluna da matriz de incidência nodal e, caso haja algum somatório não nulo, o usuário é advertido e o programa é encerrado. O que também acontece caso a resolução do sistema linear, através do Método de Gauss com pivoteamento parcial, não atinja o nível especificado de erro.

Essas rotinas são desenvolvidas em linguagem de programação C# 3.0, através do ".NET Framework 3.5" . (SHARP, 2008)

Figura 26 – Fluxograma



6.1 ROTINAS DE TESTES

Tendo-se em vista que as rotinas computacionais foram totalmente desenvolvidas durante a elaboração deste trabalho, surge a necessidade de um fluxo de testes para os códigos, que é apresentado na Figura 27.

Para validação das rotinas envolvidas, os resultados obtidos são comparados com aqueles fornecidos por um programa já consolidado, o Reluctool (ROMAIN, 2007). Neste programa, é analisado um circuito magnético genérico, com 17 relutâncias, 4 fontes e 12 nós, conforme apresentado na Figura 28. É importante mencionar que este circuito não possui analogia com nenhum modelo físico, pois o objetivo nesta seção é somente validar as rotinas desenvolvidas, através de um exemplo simples.

Figura 27 – Fluxo de testes para programa WTRNM

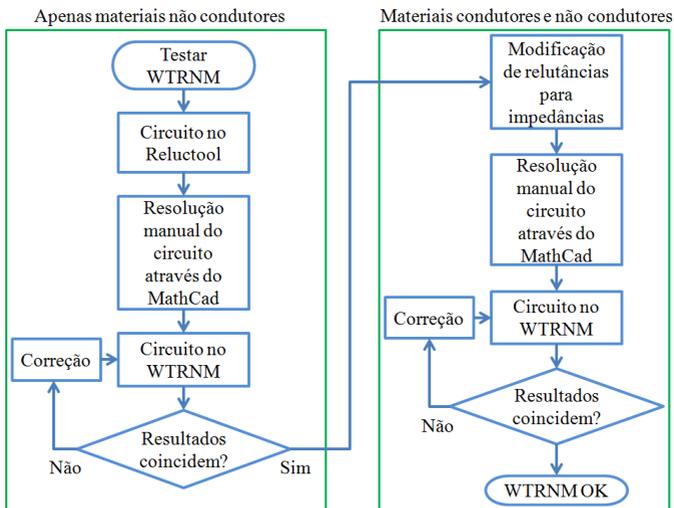
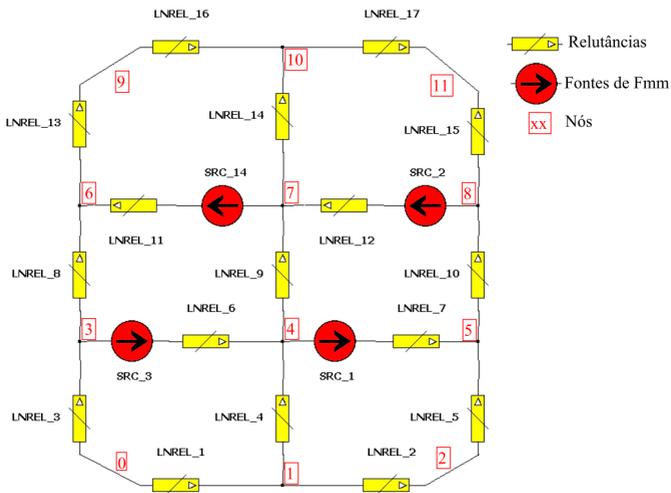


Figura 28 – Circuito de teste



Para a resolução do circuito acima apresentado, o primeiro passo é definir as dimensões e a permeabilidade relativa das relutâncias do

circuito, dadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Dimensões e permeabilidade relativa das relutâncias

Relutância	D_0	D_1	D_2	Perm. Relativa (μ_r)
1	0,001	0,002	0,003	1
2	0,005	0,006	0,007	2
3	0,009	0,01	0,011	3
4	0,013	0,014	0,015	4
5	0,017	0,018	0,019	5
6	0,021	0,022	0,023	6
7	0,025	0,026	0,027	7
8	0,029	0,03	0,031	8
9	0,033	0,034	0,035	9
10	0,037	0,038	0,039	10
11	0,041	0,042	0,043	11
12	0,045	0,046	0,047	12
13	0,049	0,05	0,051	13
14	0,053	0,054	0,055	14
15	0,057	0,058	0,059	15
16	0,061	0,062	0,063	16
17	0,065	0,066	0,067	17

O circuito apresentado na Figura 28 é resolvido através dos programas MathCad, Reluctool e WTRNM, sendo que os valores de fluxo magnético são apresentados na Tabela 4 e a comparação percentual é dada na Tabela 5.

Tabela 4 – Comparação dos valores de fluxo magnético

Relutância	Fluxo magnético [Wb]		
	WTRNM	Reluctool	MathCad
1	-1,09E-07	-1,09E-07	-1,09E-07
2	-1,41E-06	-1,41E-06	-1,41E-06
3	1,09E-07	1,09E-07	1,09E-07
4	1,30E-06	1,30E-06	1,30E-06
5	-1,41E-06	-1,41E-06	-1,41E-06
6	1,59E-04	1,59E-04	1,59E-04
7	1,99E-04	1,99E-04	1,99E-04
8	-1,58E-04	-1,58E-04	-1,58E-04
9	-3,95E-05	-3,95E-05	-3,95E-05
10	1,98E-04	1,98E-04	1,98E-04
11	3,59E-04	3,59E-04	3,59E-04
12	4,23E-04	4,23E-04	4,23E-04
13	2,01E-04	2,01E-04	2,01E-04
14	2,41E-05	2,41E-05	2,41E-05
15	-2,25E-04	-2,25E-04	-2,25E-04
16	2,01E-04	2,01E-04	2,01E-04
17	2,25E-04	2,25E-04	2,25E-04

Tabela 5 – Erro[%] em relação à outros programas

Relutância	Erro [%]	
	WTRNM / Reluctool	WTRNM / MathCad
1	-3,66E-12	8,78E-10
2	-7,11E-13	-3,21E-09
3	6,44E-11	9,46E-10
4	-7,77E-13	2,99E-10
5	-7,11E-13	-3,21E-09
6	-6,22E-13	-2,81E-09
7	0,00E+00	1,47E-09
8	-6,44E-13	1,45E-09
9*	-2,44E-13	9,85E-10
10	0,00E+00	2,36E-09
11	-2,66E-13	-2,42E-10
12	0,00E+00	6,71E-10
13	-5,11E-13	-1,57E-09
14	0,00E+00	1,29E-09
15	-4,44E-13	-8,22E-10
16	-5,11E-13	-1,57E-09
17	0,00E+00	-8,21E-10

Neste ponto tem-se o programa testado e com resultados coerentes para materiais não condutores, nos quais as relutâncias são reais. Todavia, necessita-se ainda validar o programa WTRNM para aplicações nas quais existam impedâncias magnéticas inseridas no circuito. Para tal, alteram-se algumas relutâncias para impedâncias, nos programas MathCad e WTRNM. Tais impedâncias são calculadas a partir da Equação (5.1) e os novos valores de fluxo magnético nestas relutâncias e impedâncias são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 – Comparação dos valores de fluxo magnético

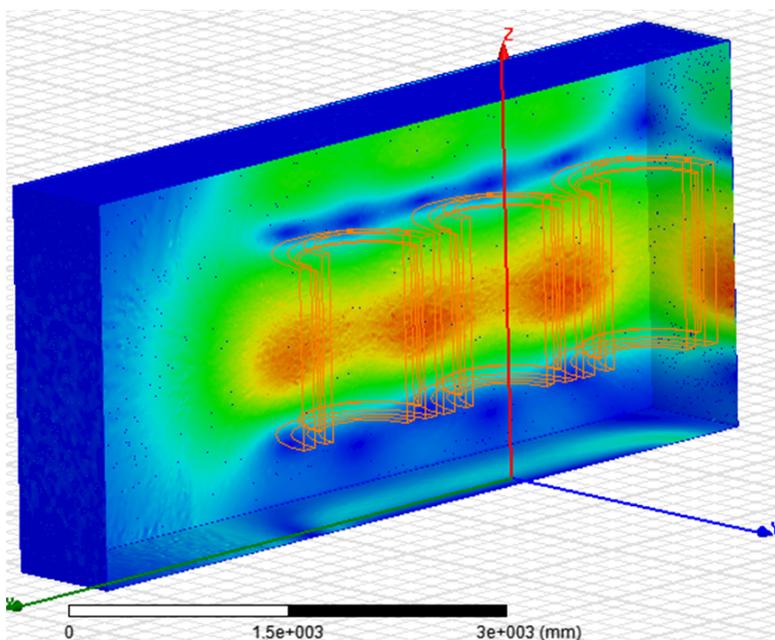
Relutância	Fluxo magnético [Wb]		Erro
	WTRNM	MathCad	WTRNM/ MathCad
1	5,03E-06	5,03E-06	-8,31E-10
2	2,80E-07	2,80E-07	1,72E-09
3	5,03E-06	5,03E-06	-7,83E-10
4	5,11E-06	5,11E-06	-8,71E-10
5	2,80E-07	2,80E-07	1,71E-09
6	2,00E-04	2,00E-04	-1,58E-09
7	2,11E-04	2,11E-04	-1,94E-09
8	2,05E-04	2,05E-04	1,76E-09
9	1,50E-05	1,50E-05	2,77E-10
10	2,11E-04	2,11E-04	-2,07E-09
11	4,10E-04	4,10E-04	-5,92E-10
12	4,30E-04	4,30E-04	3,25E-10
13	2,08E-04	2,08E-04	3,88E-10
14	1,71E-05	1,71E-05	-2,92E-09
15	2,25E-04	2,25E-04	1,96E-09
16	2,08E-04	2,08E-04	3,88E-10
17	2,25E-04	2,25E-04	1,00E+02

Através dos dados acima apresentados, verifica-se que as rotinas apresentam resultados confiáveis, tanto para sistemas reais como complexos. Desta forma, parte-se para modelagens 2D e 3D, as quais serão utilizadas para verificar as rotinas de uma forma global.

7 MODELAGEM DE TRANSFORMADORES E REATOR

A distribuição de campo ao longo do domínio interno de transformadores é tão mais complexa quanto são a geometria e as propriedades físicas dos materiais utilizados no equipamento. Abaixo, na Figura 29, apresenta-se a distribuição de campo magnético na superfície interna do tanque de um transformador de potência.

Figura 29 – Distribuição de campo magnético internamente ao tanque



Normalmente, na modelagem de transformadores, considera-se o tanque apenas como uma condição de contorno que considere sua permeabilidade relativa como infinita (Neumann). No entanto, sabe-se *a priori* que os materiais utilizados para este fim possuem permeabilidade relativa na casa das centenas, conforme a Figura 21.

Outro fator importante é o efeito de reação de campo magnético gerado pelas correntes induzidas no tanque e/ou nas blindagens eletromagnéticas.

Desta forma, duas análises bidimensionais planares de uma fase do transformador são elaboradas. A primeira delas considera o tanque não condutor, sendo elaborada em regime estático. A segunda, para verificar os valores de perdas no tanque e o efeito mencionado no parágrafo acima, considera o tanque condutor e é realizada em regime dinâmico harmônico.

Para validar as rotinas computacionais desenvolvidas durante este trabalho, estas análises também são elaboradas através do MEF. Assim os resultados obtidos com os dois métodos são comparados.

7.1 MODELO 2D DE TRANSFORMADOR

7.1.1 Modelo de rede de relutâncias

O modelo de rede de relutâncias desenvolvido para esta modelagem está baseado no modelo bidimensional apresentado em (KAZMIERSKI et al., 1984).

Conforme apresentado na Figura 30, o modelo contém: relutâncias magnéticas para região do núcleo magnético e região de ar, relutâncias para o tanque que, no caso da análise harmônica, tornam-se impedâncias magnéticas e fontes de Fmm dispostas na região entre enrolamentos. A Figura 31 apresenta um detalhe da Figura 30, tornando-se mais visível a numeração dos nós, bem como os itens acima citados. O modelo de rede de relutâncias é composto por 607 relutâncias e 300 nós, tanto para a análise estática quanto para a análise dinâmica, o que resulta na resolução de um sistema linear com dimensões 300 x 300.

Figura 30 – Modelo bidimensional do transformador - a) geometria b) rede de relutâncias

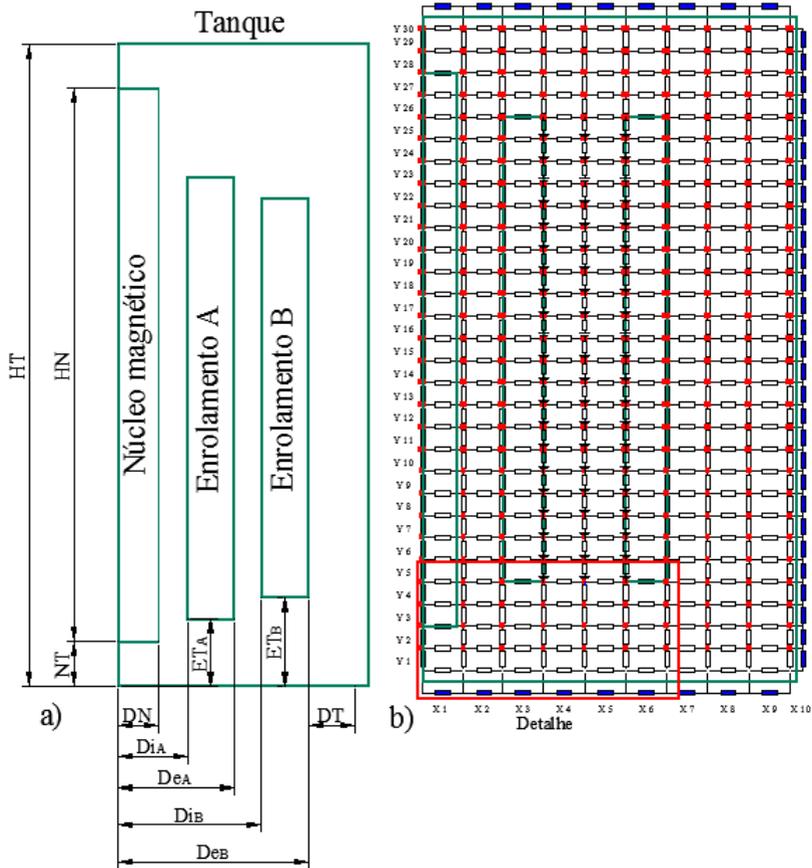
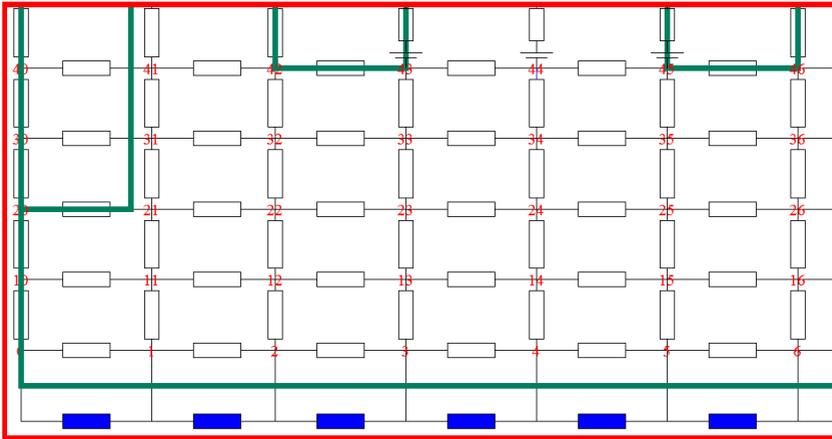


Figura 31 – Detalhe da rede de relutâncias



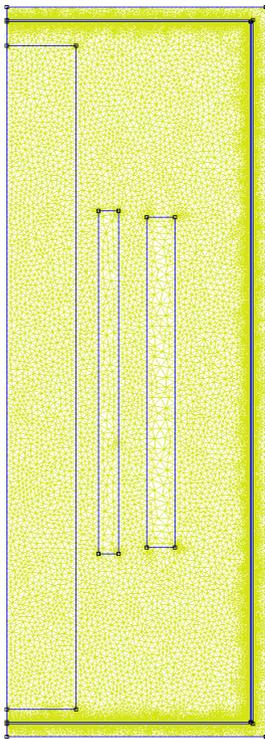
Faz-se importante mencionar que as relutâncias são obtidas através dos dados de entrada referentes à geometria do transformador, fornecidos pelo usuário através de uma planilha Excel, conforme apresentado abaixo.

Figura 32 – Planilha para entrada de dados

Entrada de dados							
Núcleo		Enrolamento A		Enrolamento B		Tanque	
HN	2590,00	DiA	717,00	DIB	1093,00	HT	2735,00
NT	50,00	DeA	877,00	DeB	1315,00	DT	297,00
DN	541,00	ETA	656,00	ETB	681,00	ESP	8,00
		HA	1340,00	HB	1290,00		
		NA	553,00	NB	314,00		
		IA	356,30	IB	627,50		

Conforme acima mencionado, as análises também são elaboradas através do MEF. A malha utilizada para ambas as simulações, estática e dinâmica harmônica, é apresentada na Figura 33.

Figura 33 – Malha 2D gerada no FEMM



7.1.2 Modelagem magnetostática

A Figura 34 apresenta as linhas equipotenciais de potencial vetor magnético, conhecidas como linhas de fluxo magnético, obtidas através do pacote computacional FEMM (MEEKER, 2010). As linhas verticais em cor vermelha representam os conjuntos de pontos nos quais foi obtido a indução magnética. Valores tais apresentados nas Figuras 35 e 36.

Figura 34 – Linhas de fluxo magnético análise para magnetostática

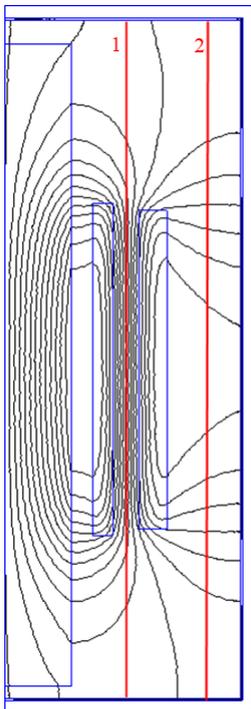


Figura 35 – Indução magnética ao longo da linha 1 - análise magnetostática

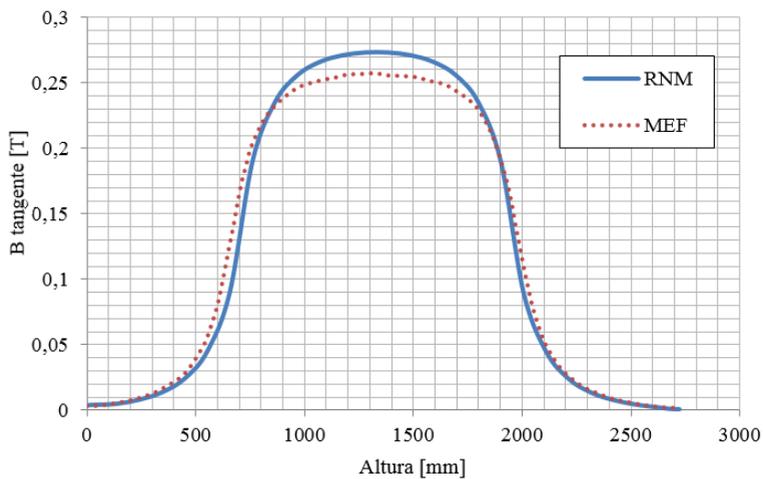
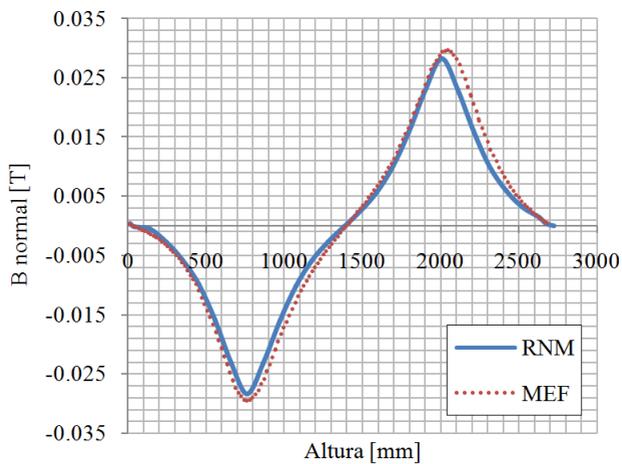


Figura 36 – Indução magnética ao longo da linha 2 - análise magnetostática

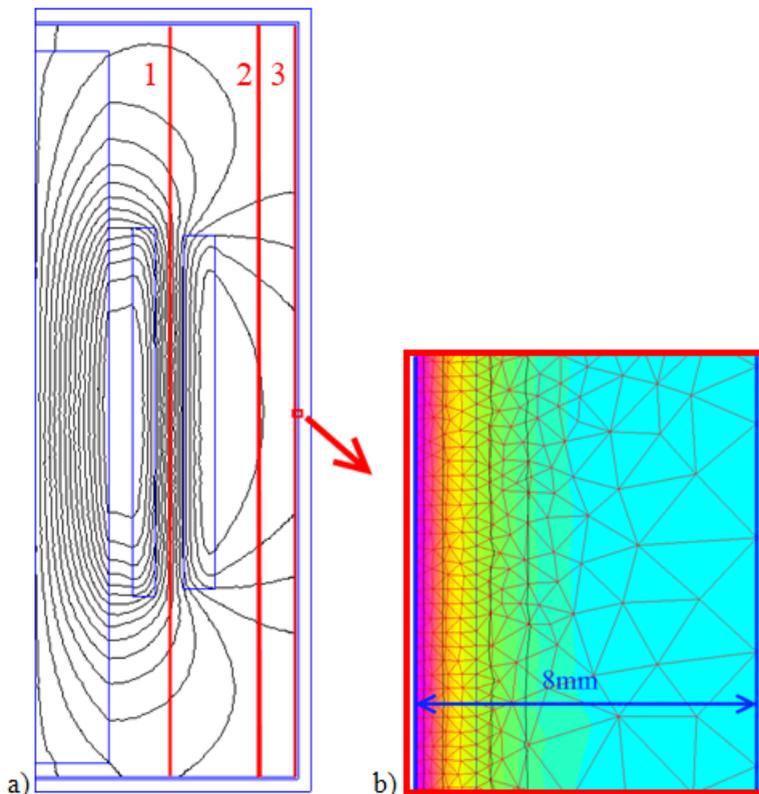


7.1.3 Modelagem harmônica

Esta análise tem como objetivo, além de comparar os resultados entre os métodos, verificar a influência do tanque, sendo considerado como material magnético e condutor, na distribuição interna de campo magnético. Para isto, elabora-se uma análise através do programa FEMM, considerando-se a mesma geometria apresentada na seção anterior.

Nesta análise, faz-se necessária uma malha suficientemente refinada na região interna ao tanque, com o objetivo de modelar corretamente o efeito de penetração de campo no material condutor. A Figura 37 apresenta em a) a distribuição das linhas de fluxo magnético e em b) a distribuição de campo magnético internamente ao tanque, bem como a malha necessária para considerar este efeito corretamente.

Figura 37 – a) Linhas de fluxo magnético análise para magnetodinâmica
b) Detalhe da malha e campo magnético ao longo da espessura do tanque



A Figura 38 apresenta a comparação entre os resultados obtidos através dos dois métodos, para a distribuição de indução magnética ao longo da linha 1. Já a Figura 39 apresenta a comparação a indução magnética ao longo da linha 2.

Figura 38 – Indução magnética ao longo da linha 1 - análise magnetodinâmica

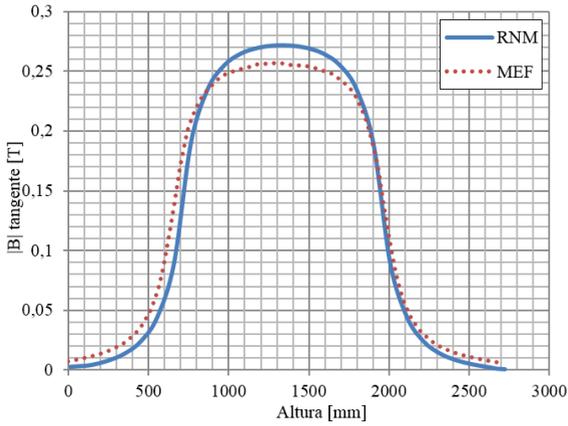
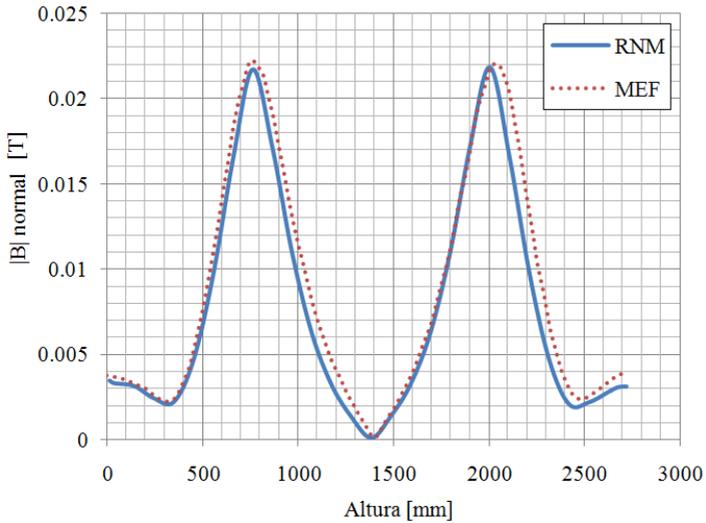


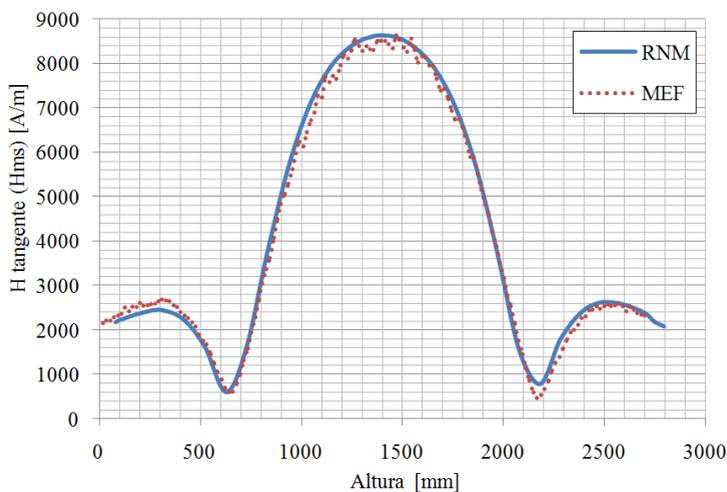
Figura 39 – Indução magnética ao longo da linha 2 - análise magnetodinâmica



A Figura 40 apresenta a comparação para o campo magnético

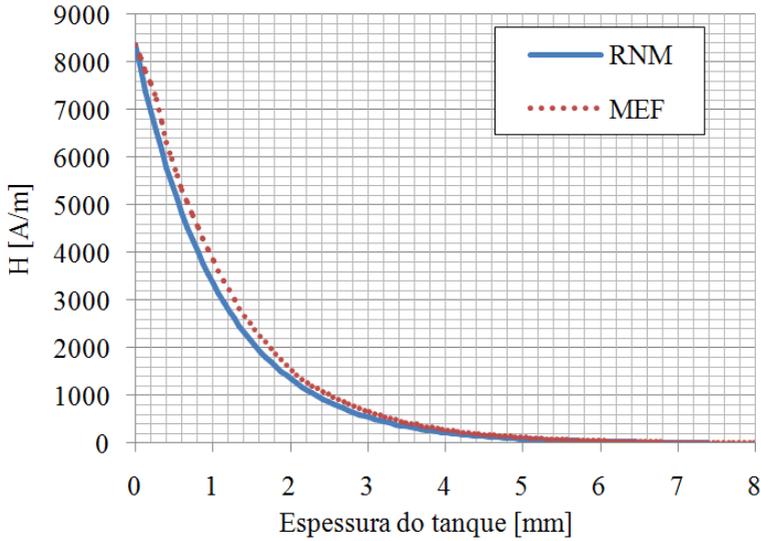
tangente à linha 3, na superfície interna do tanque.

Figura 40 – Campo magnético ao longo da linha 3 - análise magneto-dinâmica



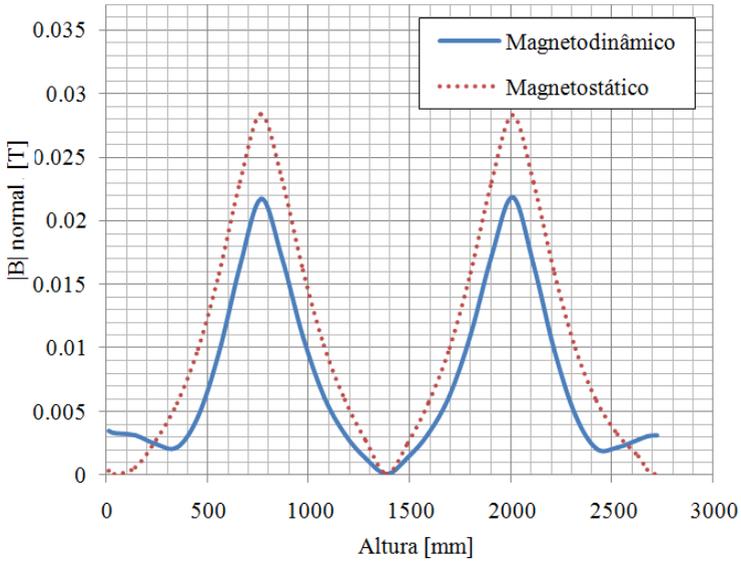
De posse do campo magnético na superfície de uma placa metálica, o tanque do transformador, pode-se obter a distribuição do campo magnético na região interna desta placa, aplicando-se o valor de campo calculado para a superfície da placa na Equação (4.12), porém para campo magnético. A comparação entre o cálculo analítico e o MEF está apresentada na Figura 41, abaixo.

Figura 41 – Campo magnético no interior da parede do tanque



Para calcular forças de curto-circuito e perdas nos condutores dos enrolamentos, é necessária uma análise da distribuição de indução magnética na região interna do transformador. Normalmente, esta análise é elaborada em regime estático, que não considera os efeitos de difusão de campos no tanque. Entretanto, para verificar de forma quantitativa o efeito deste fenômeno, apresenta-se a Figura 42, contendo os resultados de indução magnética normal à linha apresentada na Figura 34, para as formulações em regimes estático e dinâmico, através do método RNM.

Figura 42 – Indução magnética ao longo da linha 1 - análises magnetostática e magnetodinâmica



Através da Figura 42, verifica-se que modelar a distribuição de indução magnética em regime estático pode conduzir a resultados menos precisos.

Afim de comparar os valores de perdas no tanque, elaboram-se 5 análises, modificando-se as características do tanque, como segue:

- MEF não linear: curva BH dada na Figura 21 e $\sigma = 4.5MS/m$.
- MEF linear: $\mu_r = 700$ e $\sigma = 4.5MS/m$;
- MEF linear com fator 1.4: $\mu_r = 700$ e $\sigma = 4.5MS/m$, multiplicando-se o valor das perdas por 1.4;
- RNM com fator 1.4: Equação (5.3), com $\mu_r = 700$, $\sigma = 4.5MS/m$, $a_p = 1.4$ (campos fortes) e $k(d) = 1$;
- RNM: Equação (5.3), com $\mu_r = 700$, $\sigma = 4.5MS/m$, $a_p = 1$ (campos fracos) e $k(d) = 1$;

Os resultados de perdas e a comparação entre eles são apresentados na Tabela 7. Mesmo sendo verificada pouca diferença entre os

resultados obtidos com o MEF, utiliza-se da simulação não linear como base de comparação, pois este deve ser o mais próximo da realidade. Verificando-se os resultados obtidos com o RNM, conclui-se que fator $a_p = 1,4$ é relevante, uma vez que os valores de campo magnético apresentados na Figura 40 são todos maiores que 500 A/m.

Tabela 7 – Perdas no tanque

Método	Perdas [W]	Diferença [%]
MEF não linear	10950	-
MEF linear	10313,7	-6%
MEF linear c/ fator $a_p = 1,4$	14437,78	32%
RNM com fator $a_p = 1,4$	11790,58	8%
RNM	8421,84	-23 %

7.2 MODELO 3D DE REATOR COM NÚCLEO DE AR

Nesta seção elabora-se uma modelagem de um reator com núcleo de ar, através do Método RNM. Para comparação dos resultados, este modelo também é simulado através do MEF 3D, em um pacote comercial (ANSYS, 2010).

Na Figura 43 é apresentada a geometria do reator em análise.

Tal reator é composto por dois enrolamentos, conectados de forma que o fluxo magnético gerado por cada um deles tenha sinal oposto, fazendo com que ocorra uma circulação de fluxo entre os enrolamentos, conforme apresentado na Figura 44.

Figura 43 – Geometria do reator

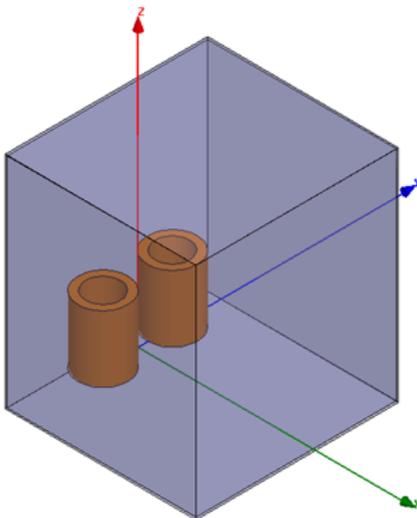
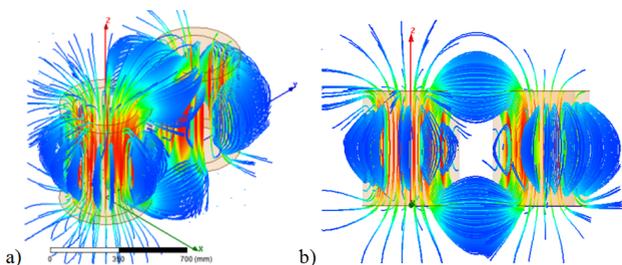
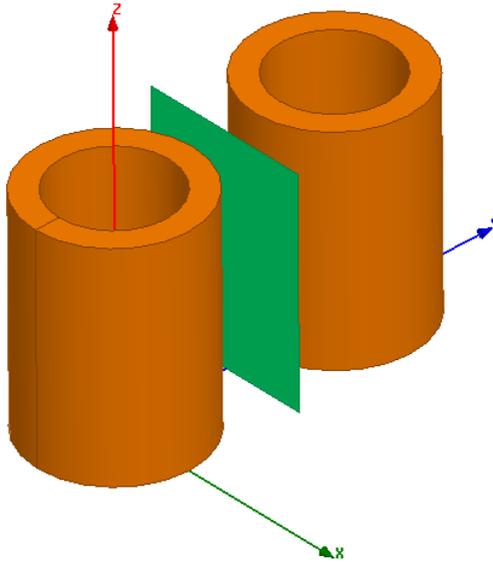


Figura 44 – Configuração de campo magnético entre enrolamentos - a) vista isométrica b) vista lateral



Como o objetivo final desta simulação é obter o valor de forças entre os dois enrolamentos, define-se como variável de análise a indução magnética entre os dois enrolamentos. Ou seja, a indução magnética normal ao plano representado na cor verde, Figura 45.

Figura 45 – Plano entre os dois enrolamentos para obtenção da indução magnética normal



7.2.1 Simulações com o RNM

Para elaborar a análise da geometria apresentada na Figura 43, com distribuição de fluxo magnético conforme a Figura 44, elabora-se o circuito magnético apresentado na Figura 46. Este circuito é dividido em camadas, Figura 47, contendo relutâncias magnéticas dispostas da região dos enrolamentos (1), conectando estas duas regiões (2), conectando estas regiões e o tanque (3) e as relutâncias representando o tanque (4). Cada camada representa uma fatia da altura total do modelo, sendo que a conexão entre cada camada forma o circuito magnético completo em 3D. Vale mencionar que a figura apresenta somente a metade superior do modelo.

Figura 46 – Modelo 3D

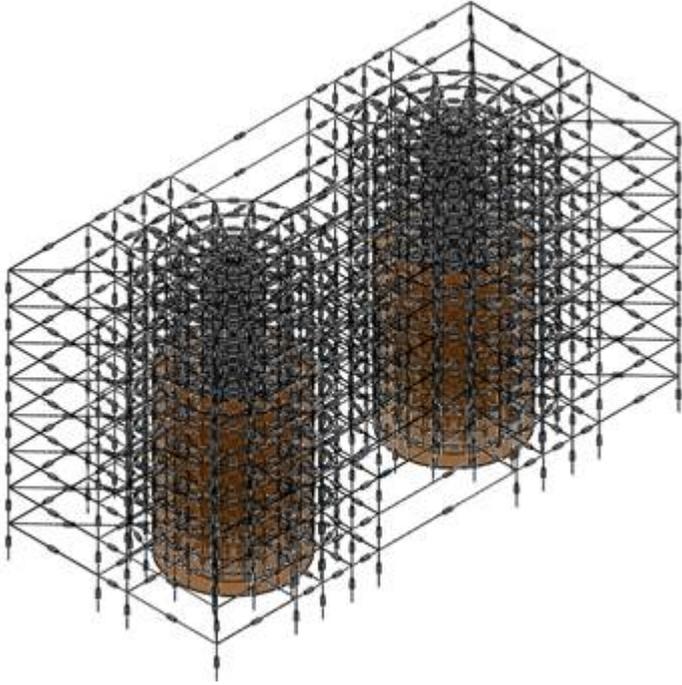
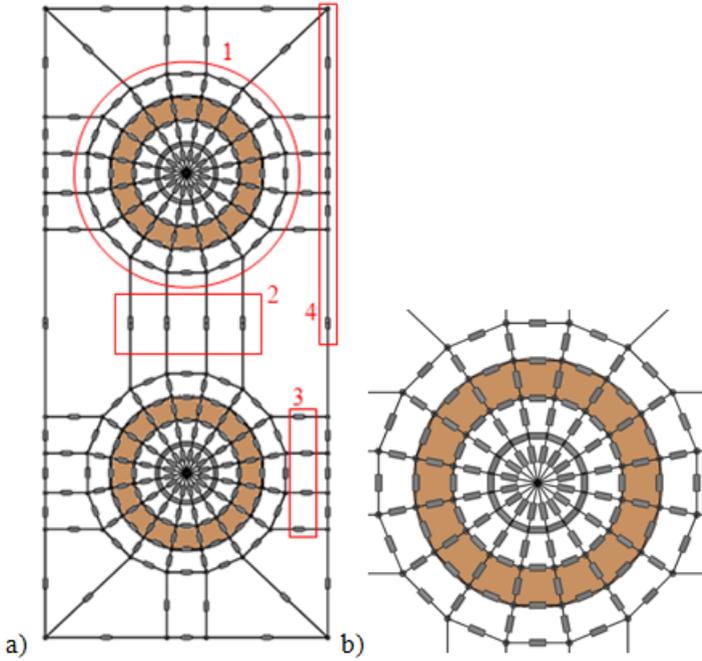
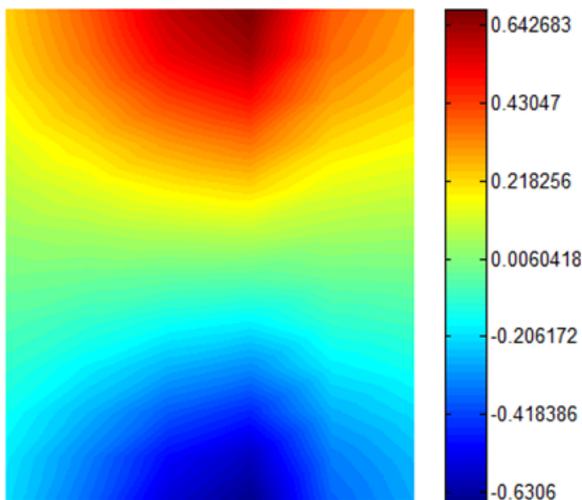


Figura 47 – Camada do circuito magnético - a) camada completa b) detalhe das relutâncias dos enrolamentos



Resolvendo-se o circuito magnético apresentado, calcula-se a indução magnética normal ao plano entre os dois enrolamentos.

Figura 48 – Resultado obtido com o método RNM



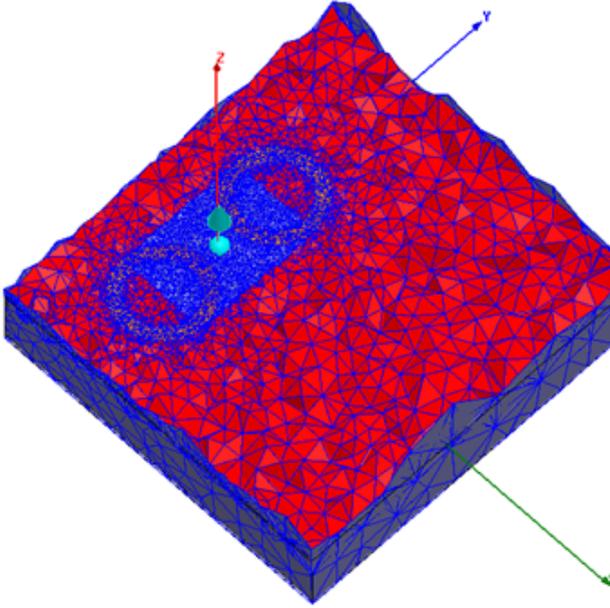
7.2.2 Simulações com o MEF

São elaboradas duas análises utilizando o MEF, variando-se apenas parâmetros de malha em cada uma delas.

7.2.3 Análise com MEF - malha refinada

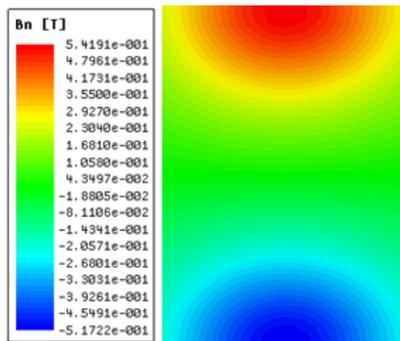
Primeiramente, parte-se para uma malha refinada, com processo de refinamento adaptativo tanto através da energia total no domínio bem como a força magnética nos enrolamentos. Estes parâmetros de refinamento de malha são definidos com o objetivo de obter uma solução com baixo erro e considerá-la como referência de comparação para os resultados obtidos através do circuito magnético acima apresentado. A malha gerada é apresentada na Figura 49, podendo-se observar o refinamento da malha na região entre os dois enrolamentos.

Figura 49 – Malha refinada para o MEF



Os resultados obtidos com o MEF 3D para malha acima são apresentados na Figura 50. Verifica-se que existe uma divergência entre os valores obtidos através dos métodos RNM e MEF de aproximadamente 18%.

Figura 50 – Malha refinada para o MEF

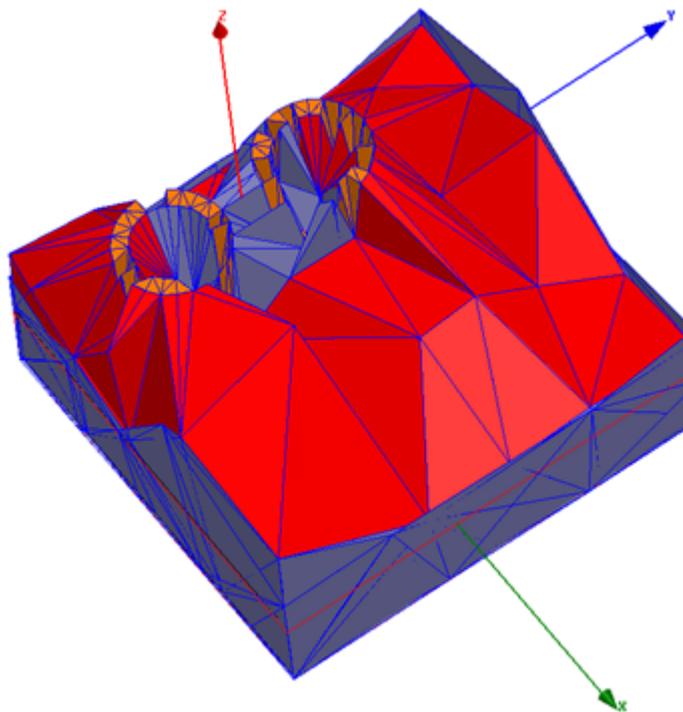


7.2.4 Análise com MEF - malha primitiva

A priori, sabe-se que a exatidão de qualquer método que dependa de qualquer tipo de discretização está diretamente relacionada com o nível desta discretização. A rede de relutâncias apresentada na Figura 46 é uma rede primitiva, a qual pode ser melhorada com a aplicação de métodos de geração de malha tridimensional.

Para verificar se a divergência verificada entre os resultados obtidos na Seção anterior é devido a qualidade da rede de relutâncias, elabora-se mais uma simulação através do MEF 3D, mas utilizando-se uma malha também primitiva, como pode ser verificado na Figura 51.

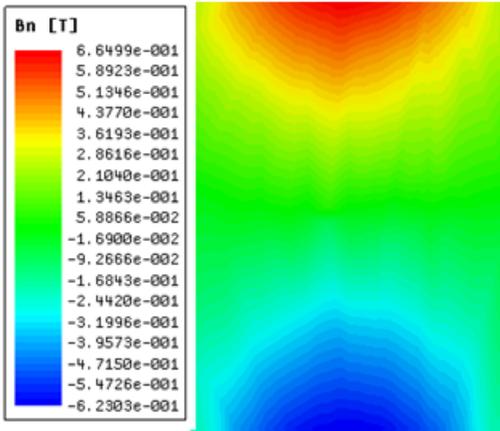
Figura 51 – Malha primitiva para o MEF



Os resultados estão apresentados na Figura 52. Verifica-se que os resultados obtidos com o MEF, através desta malha, convergem aos re-

sultados obtidos com o RNM, com uma diferença de aproximadamente 3%.

Figura 52 – Malha primitiva para o MEF



7.3 MODELAGEM DE ESFORÇOS INTERNOS A ENROLAMENTOS CILÍNDRICOS DE TRANSFORMADORES

Durante a elaboração deste trabalho, apresentou-se a necessidade de modelar esforços em reatores com núcleo de ar, devido ao fenômeno de Inrush. Desta forma, nesta seção são apresentados a introdução e justificativa ao tema, o modelo proposto e os resultados, bem como a comparação com os resultados obtidos com o MEF.

7.3.1 Introdução e justificativa

Sabe-se que a corrente de Inrush pode atingir cerca de 8 vezes a corrente nominal do transformador e que, em geral, estes transitórios são mais frequentes e mais longos do que curtos-circuitos. As interações mecânicas e eletromagnéticas inerentes às correntes de Inrush em transformadores vem sendo estudadas durante anos, devido a possíveis falhas causadas por tais esforços. Atualmente, este tema ainda se encontra em pleno desenvolvimento, como em (CHIESA, 2010).

Entretanto, para modelar os esforços inerentes a estes fenômenos,

de acordo com a Lei de Laplace, necessita-se anteriormente modelar a distribuição de indução magnética. Tal modelagem pode ser obtida através de vários métodos analíticos e numéricos, porém através do modelo analítico apresentado em (SOLLERGRÉN, 1978), dado na (7.1), somente é possível obter a indução magnética no centro do enrolamento e não no domínio comum aos condutores. Este fato impõe a limitação de somente ser possível calcular os esforços radiais e, em casos de surtos, tanto as componentes radiais como as axiais são de fundamental importância, sugerindo-se a necessidade por um método que contemple ambas componentes.

Com o intuito de obter os esforços em ambos os sentidos, radial (F_r) e axial (F_z), ao longo da seção do enrolamento, este trabalho visa apresentar o desenvolvimento de uma rede de relutâncias específica para a modelagem de enrolamentos com simetria axi-simétrica, o que se dá através de relutâncias dispostas tanto radialmente como axialmente e fontes de Ampère-Espira. Com a resolução computacional desta rede, obtêm-se os valores de fluxo magnético em tais relutâncias e, como consequência, os valores de indução magnética. A partir daí, podem ser calculados os valores das forças em ambos os sentidos ao longo da seção do enrolamento.

7.3.2 Cálculo das forças

Com o mapeamento de distribuição de indução magnética na forma vetorial ao longo da seção transversal do enrolamento, através da equação de Lorentz, (2.46), obtêm-se as componentes de força magnética F_r e F_z .

Faz-se importante mencionar que este trabalho limita-se ao cálculo da distribuição de forças internamente ao enrolamento, não mencionando a metodologia para obtenção dos esforços em condutores e materiais isolantes.

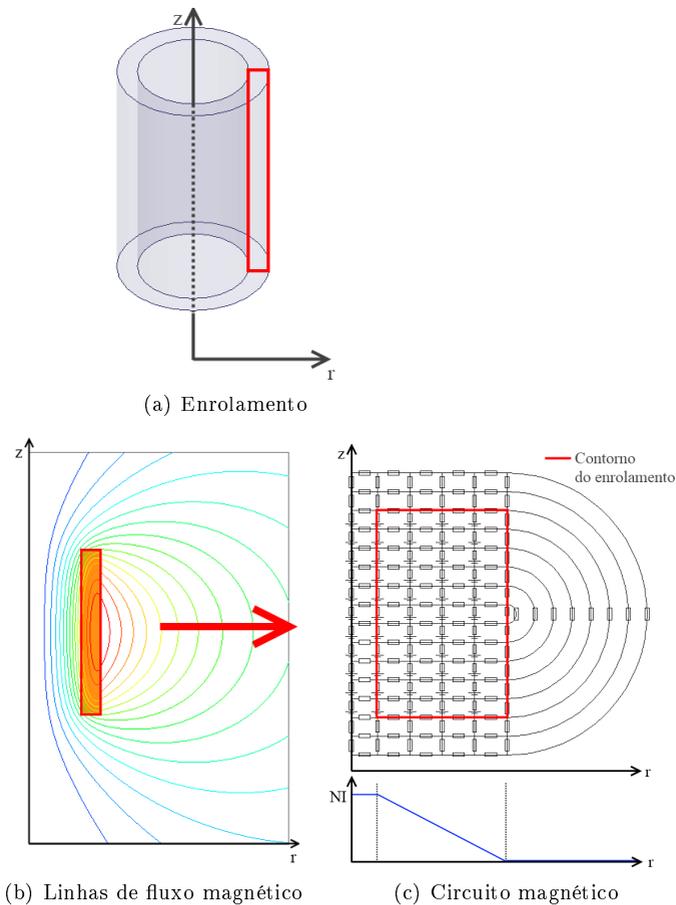
7.3.3 Modelo

Considerando-se a amplitude deste tipo de transitório, pode-se considerar que a permeabilidade magnética dos materiais magnéticos envolvidos é muito baixa, próxima da do ar, devido à saturação do material. Este fato implica em dificuldades ao modelar este fenômeno através de métodos que impõem condições de contorno $H_t = 0$, por

exemplo o Método de Rabins (KULKARNI S; KHAPARDE S, 2004). Tal fato também possibilita desconsiderar os contornos magnéticos (núcleo e tanque), simplificando consideravelmente o modelo.

No que tange esforços mecânicos, somente o enrolamento energizado é submetido a tais esforços, possibilitando a modelagem somente deste. Desta forma, o modelo em estudo é um enrolamento cilíndrico (Figura 54(a)), o qual pode ser modelado através de simetria axissimétrica. Tal simetria se dá através da disposição e conexão entre as relutâncias apresentadas na Figura 54(c).

Figura 53 – Modelos 2D



No entanto, o circuito magnético implementado precisa corresponder magneticamente à distribuição de linhas de fluxo magnético apresentado na Figura 54(b) e, para o mapeamento das componentes de indução magnética ao longo do domínio, necessita-se de uma rede de relutâncias dispostas horizontalmente e verticalmente, com o intuito de obter as componentes B_r e B_z . As fontes de F_{mm} estão dispostas axialmente, com valores de NI constantes no interior do enrolamento e variando de NI até 0 na região da seção transversal, Figura 11.

O circuito magnético apresentado em Figura 11 contém 178 relutâncias e 96 nós, sendo resolvido em menos de 0,5s. Quanto ao modelo MEF, mesmo contendo cerca de 17000 elementos também é resolvido rapidamente, em cerca de 5s. Mesmo tratando-se de baixos tempos de simulação, as dimensões dos sistemas matriciais deve ser levada em consideração.

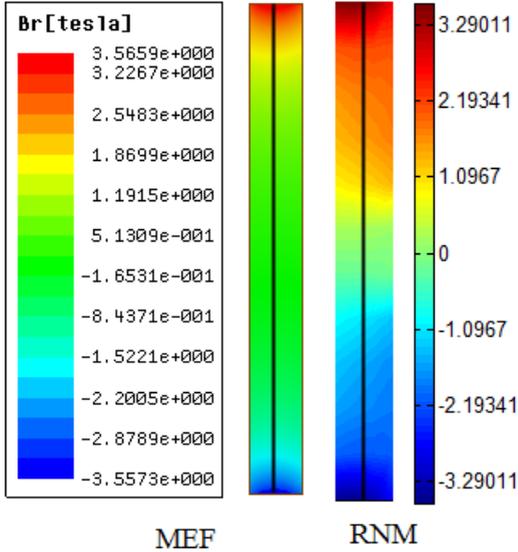
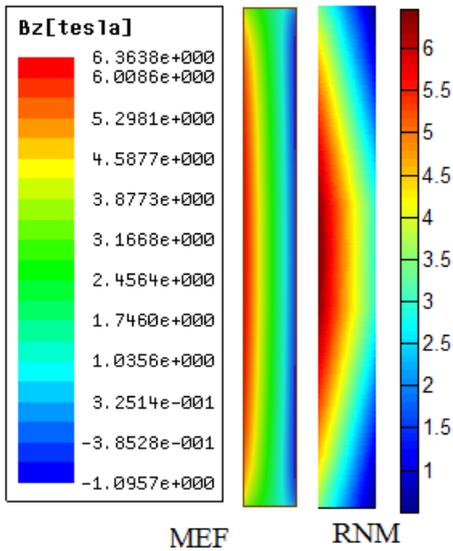
7.3.4 Resultados

Partindo-se do modelo mais simples, pode-se obter a indução magnética no centro do enrolamento através de uma aproximação analítica, dada na Equação (7.1)(SOLLERGRÉN, 1978). Avaliando-se tal equação para $N = 138$, $I = 21677$ A e $h = 0,5$ m, obtém-se $B_z = 3,76$ T.

$$B_z = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{NI}{h} \quad (7.1)$$

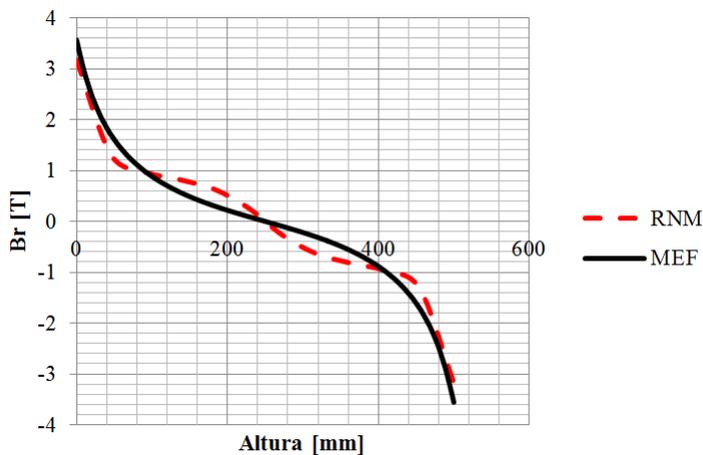
Na Figura 54 são apresentadas as comparações entre o modelo proposto e um modelo simulado através do MEF. Na Figura 54 a) são apresentados os resultados para B_r , enquanto na Figura 54 b), são apresentados os resultados para B_z . Verifica-se que os resultados são coerentes entre si, pois comparando-se os resultados obtidos com ambos os métodos, percebe-se uma diferença de aproximadamente 8%. Porém, comparando-se o mapa de indução magnética B_z , Figura 54 b), com o valor obtido analiticamente, conclui-se que este é conservador.

Figura 54 – Resultados para indução magnética

(a) Indução magnética radial (B_r)(b) Indução magnética axial (B_z)

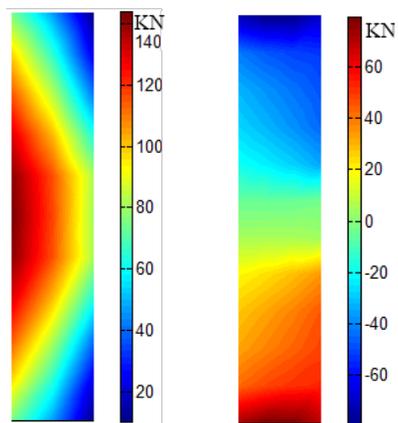
Como forma de comparação mais explícita, obtêm-se os valores de indução magnética radial ao longo de uma linha vertical no centro do enrolamento, Figura 54 b). Tais resultados são apresentados na Figura 55.

Figura 55 – Comparação entre as soluções RNM e MEF - indução magnética radial



De posse da distribuição das componentes de indução magnética ao longo da seção transversal do enrolamento, através da (2.46), pode-se mapear a distribuição de forças, radiais e axiais, ao longo desta seção. Ver Figura 56.

Figura 56 – Resultados para força obtidos com a solução RNM para a indução magnética



(a) Força radial

(b) Força axial

8 CONCLUSÃO

A modelagem de eletromagnetismo está baseada nas equações de Maxwell, as quais nos fornecem uma base sólida de entendimento dos fenômenos aqui tratados.

Existem muitas referências bibliográficas que apresentam várias formas de se obter as relutâncias magnéticas, para as mais variadas formas geométricas. No entanto, saber como estas equações são obtidas e quais seus limites se torna de suma importância. Desta mesma forma, para a resolução do circuito magnético, há uma grande gama de referências bibliográficas que tratam do assunto, mas quando se torna necessário desenvolver uma rotina computacional para a resolução, o perfeito entendimento do método se torna relevante.

O método RNM é um método simples, que permite o entendimento de fenômenos eletromagnéticos através de uma abordagem acessível. Porém, quando se trata das modelagens harmônicas em meios condutores lineares, podendo-se citar: impedâncias magnéticas de superfície, impedâncias elétricas de superfícies e perdas, os conceitos se tornam mais complexos, tanto fisicamente como matematicamente.

Agora, tratando-se de modelagens harmônicas em meios condutores não lineares, o assunto se torna ainda mais complexo e de grande importância, pois a grande maioria das aplicações do método se dá em materiais não lineares.

Esta complexidade inicia na obtenção das características dos materiais. No caso de transformadores, esses materiais são aços estruturais, sendo que os fabricantes não fornecem suas propriedades elétricas e magnéticas. Mesmo obtendo-se tais propriedades, para modelagens com materiais magneticamente não lineares e em regime harmônico, é necessário obter os coeficientes de linearização. No entanto, há poucas referências a cerca deste assunto e ainda é objeto de pesquisas. Os fatores de linearização apresentados neste trabalho são originados de modelos de linearização, mas segundo as referências através das quais foram obtidos, tais coeficientes possuem correções empíricas.

Quando se trata de desenvolvimentos computacionais, a aplicação de uma rotina de testes se faz necessária. É importante que esta rotina abranja uma grande gama de possibilidades, diminuindo razoavelmente a possibilidade de haver algum erro, tanto teórico como de codificação.

Tratando-se da análise bidimensional, a quantidade de nós utilizados no método RNM é consideravelmente menor que a quantidade

de nós utilizada na modelagem com o MEF. Uma justificativa para este fato é que o RNM modela a espessura de penetração de campo analiticamente, sem a necessidade de se discretizar a espessura da placa condutora. Os resultados obtidos foram coerentes com aqueles obtidos através do MEF, tanto para modelagens estáticas como harmônicas. Através do RNM também foi possível verificar, com fidelidade, a influência de considerar o tanque como material condutor. Os valores de perdas no tanque obtidos com o RNM são 8% maiores que aqueles obtidos com o MEF, o que é aceitável. Esta pequena diferença pode sugerir a necessidade de uma melhor análise dos fatores de linearização.

Quanto à modelagem tridimensional do reator, os resultados apresentaram determinada diferença se comparados com a malha refinada. No entanto, percebe-se que esta diferença, apesar de ser aceitável, é devido à qualidade da rede de relutâncias implementada.

Obviamente, conforme acima descrito, o assunto não está esgotado. Há uma vasta gama de estudos que seriam importantes nas futuras aplicações do RNM, como os abaixo listados:

- Formas de medição das características magnéticas não lineares de aços estruturais;
- Modelagem dos fatores de linearização de materiais não lineares, para obtenção das impedâncias magnéticas e perdas;
- Estudo e aplicação de uma formulação transiente temporal;
- Estudo de aplicação de fontes de corrente diretamente no modelo;
- Analisar os cálculos matriciais inerentes ao método e verificar a melhor forma de armazenamento e multiplicação de matrizes, bem como resolução do sistema matricial;
- Geração automática de malha 2D e 3D, bem como a conversão desta malha em rede de relutâncias;
- Sempre há a necessidade de comparar diferentes métodos através de parâmetros de convergência. Assim, um trabalho importante seria a comparação da convergência dos métodos RNM e MEF, considerando-se uma mesma malha para ambos.

O método RNM é simples, de fácil aplicação computacional e apresenta resultados coerentes. É também um método otimizado para a modelagem de dispositivos eletromagnéticos, e acoplado com o equacionamento em regime harmônico, torna-se capaz de modelar perdas em regiões condutoras com baixo custo computacional.

REFERÊNCIAS

- ANSYS. *Maxwell 3D - Electromagnetic and Electromechanical Analysis*, v.14. Canonsburg, 2010.
- BASTOS, J.; SADOWSKI, N. *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods*. New York: Marcel Deeker, 2003.
- BASTOS, J. P. A. *Eletromagnetismo para Engenharia: Estática e Quase Estática. 1. ed.* Florianópolis: UFSC, 2004.
- BODRICH, T. Electromagnetic actuator modeling with the extended modelica magnetic library. *Modelica 2008*, p. 221–227, 2008.
- BORMANN, D.; TAVAKOLI, H. Reluctance network treatment of skin and proximity effects in multi-conductor transmission lines. *Magnetics, IEEE Transactions on*, v. 48, n. 2, p. 735–738, 2012. ISSN 0018-9464.
- CARPENTER, C. Finite-element network models and their application to eddy-current problems. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, v. 122, n. 4, p. 455–462, 1975. ISSN 0020-3270.
- CHIESA, N. *Transformer Modeling for Inrush Current Calculation*. Tese (Doutorado) — Norwegian University of Science and Technology, 2010.
- CHUA, L. O.; LIN, P. *Komputerowa Analiza Ukradow Elektronicznych - Algorytmy i Metody Obliczeniowe*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1981.
- DAS, J. *Power System Analysis - Short Circuit Load Flow and Harmonics*. New York: Marcel Dekker, 2002.
- DAVEY, K.; KING, E. A three dimensional scalar potential field solution and its application to the turbine generator end region. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-100, n. 5, p. 2302–2310, 1981. ISSN 0018-9510.
- DELALE, A.; ALBERT, L.; GERBAUD, L.; WURTZ, F. Automatic generation of sizing models for the optimization of electromagnetic devices using reluctance networks. *Magnetics, IEEE Transactions on*, v. 40, n. 2, p. 830–833, 2004. ISSN 0018-9464.

HAMMOND, P.; SYKULSKI, J. Tubes and slices: a new way of teaching the principles of electric and magnetic fields. *Education, IEEE Transactions on*, v. 35, n. 4, p. 300–306, 2004. ISSN 0018-9359.

HO, C.; RUEHLI, A. E.; BRENNAN, P. A. The modified nodal approach to network analysis. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, v. 22, n. 6, p. 504–509, 1975. ISSN 0098-4094.

JACKSON, J. D. *CLASSICAL ELECTRODYNAMICS*. New York: John Wiley & Sons, 1999.

KAZMIERSKI, M.; KOZLOWSKI, M.; LASONSKI, J.; PINKKIEWICS, I.; TUROWSKI, J. Hot spot identification and overheating hazard preventing when designing a large transformer. *CIGRE International Conference on Large High Voltage Electric Systems*, p. 1–6, 1984.

KING, E. Equivalent circuits for two-dimensional magnetic fields: I - the static field. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-85, n. 9, p. 927–935, 1966. ISSN 0018-9510.

KULKARNI S, V.; KHAPARDE S, A. *Transformer Engineering - Design and Practice*. New York: Marcel Dekker, 2004.

LOPEZ-FERNANDEZ, X. M.; RODRIGUEZ, A. S.; REVENGA, D. S.; TUROWSKI, J. Stray losses control in shell type transformers. Part II: Method of three-dimensional network solution. *Proc. of Advanced Research Workshop on Transformers (ARWtr2007)*, p. 69–75, 2007.

MEEKER, D. *Finite Element Method Magnetics. Version 4.2. Version 4.2. User's Manual*. out 2010. Electronic. Acesso em: 12 dez. 2011. <<http://www.femm.info/Archives/doc/manual42.pdf>>.

MULLINEUX, N.; REED, J. Eddy-current shielding of transformer tanks. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, v. 113, n. 5, p. 815–818, 1966. ISSN 0020-3270.

PETRICHENKO, D. *Contribution à la Modélisation et à la Conception Optimale des Turbo-Alternateurs de Faible Puissance*. Tese (Doutorado) — École Centrale de Lille, 2007.

ROMAIN, d. P. d. S. *Modelisation des Actionneurs lectromagnetiques par Reseaux de eluctances. Creation D'un Outil Metier Dedieau Predimensionnement par Optimisation*. Tese (Doutorado) — Universite Joseph Fourier. Grenoble, 2007.

- ROTTERS, H. *Electromagnetic Devices*. New York: Wiley, 1941.
- SADIKU, M. N. O. *Elementos de Eletromagnetismo*. Porto Alegre: Bookman, 2004.
- SHARP, J. *Visual C# 2008 - Step by Step*. Redmond: Microsoft Press, 2008.
- SOLLERGREN, B. Calculation of short-circuit forces in transformer. *Final Report prepared by Working Group 12-04 of Study Committee No.12 (Transformer)*, No. 67, p. 29–75, 1978.
- SOTO, A.; SOUTO, D.; TUROWSKI, J.; LOPEZ-FERNANDEZ, X.; COUTO, D. Software for fast interactive three-dimensional modeling of electromagnetic leakage field and magnetic shunts design in shell type transformers. *18th International Conference on Electrical Machines (ICEM 2008)*, p. 1–6, 2008.
- STAGG, G. W.; EL-ABIAD, A. H. *Computer Methods in Power System Analysis - International Student Edition*. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1968.
- SYKULSKI, J. K. *Computational Magnetics*. New York: Chapman & Hall, 1995.
- TODD, J. *Survey on Numerical Analysis*. New York: McGraw Hill Book Company, 1962.
- TUROWSKI, J. *Elektrodynamika Techniczna*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1993.
- TUROWSKI, J. Rapid calculation of stray fields and losses in power transformers. *Zeszyty Naukowe Politech*, 2005.
- TUROWSKI, J.; KRAJ, I.; KULASEK, K. Industrial verification of rapid design methods in power transformers. *Proc. TRANSFORMER'01*, 2001.
- WOJCIECHOWSKI, R.; DEMENKO, A.; SYKULSKI, J. K. Inducted currents analysis in multiply connected conductors using reluctance resistance networks. *ISEF - XIV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering*, 2009.

**APÊNDICE A – OBTENÇÃO DE $k(d)$ PARA A
CONDIÇÃO DADA NA Figura 23 a)**

Para tal análise, considera-se uma placa plana, na qual a espesura (d) varia de -b até b.

Equação base:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = j \omega \mu \sigma H_y \quad (\text{A.1})$$

Resolução:

$$H_y = A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z} \quad (\text{A.2})$$

Aplicação das condições de contorno:

$$H_y(z = -b) = H_{msy} \quad (\text{A.3})$$

$$H_y(z = b) = H_{msy} \quad (\text{A.4})$$

Resolução:

$$H_y = A_1 e^{\gamma b} + A_2 e^{-\gamma b} \quad (\text{A.5})$$

$$H_y = A_1 e^{-\gamma b} + A_2 e^{\gamma b} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{bmatrix} H_{msy} \\ H_{msy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\gamma b} & e^{-\gamma b} \\ e^{-\gamma b} & e^{\gamma b} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\gamma b} & e^{-\gamma b} \\ e^{-\gamma b} & e^{\gamma b} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{msy} \\ H_{msy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{e^{\gamma b} e^{\gamma b} - e^{-\gamma b} e^{-\gamma b}} \begin{bmatrix} e^{\gamma b} & -e^{-\gamma b} \\ -e^{-\gamma b} & e^{\gamma b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{msy} \\ H_{msy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$A_1 = A_2 = \frac{H_{msy} (e^{\gamma z} - e^{-\gamma b})}{e^{2\gamma z} - e^{-2\gamma b}} = \frac{H_{msy}}{e^{\gamma z} - e^{-\gamma b}} \quad (\text{A.10})$$

$$H_y = \frac{H_{msy} (e^{-\gamma z} + e^{\gamma z})}{e^{\gamma b} - e^{-\gamma b}} = H_{msy} \frac{\cosh(\gamma z)}{\cosh(\gamma b)} \quad (\text{A.11})$$

$$J_x = -\frac{dH_y}{dz} = -\gamma H_{msy} \frac{\sinh(\gamma z)}{\cosh(\gamma b)} \quad (\text{A.12})$$

$$Pe = \frac{1}{2\sigma} \int_{-b}^{+b} |J_x|^2 \quad (\text{A.13})$$

$$|J_x| = H_{msy} \left| -\frac{(1+j)}{\delta} \frac{\sinh\left(\frac{(1+j)}{\delta} z\right)}{\cosh\left(\frac{(1+j)}{\delta} b\right)} \right| \quad (\text{A.14})$$

$$|J_x| = \frac{H_{msy} \sqrt{2}}{\delta} \left\{ \frac{[\sinh\left(\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\frac{z}{\delta}\right)]^2 + [\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right) \sin\left(\frac{z}{\delta}\right)]^2}{[\cosh\left(\frac{b}{\delta}\right) \cos\left(\frac{b}{\delta}\right)]^2 + [\sinh\left(\frac{b}{\delta}\right) \sin\left(\frac{b}{\delta}\right)]^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.15})$$

$$|J_x| = \frac{H_{msy} \sqrt{2}}{\delta} \left[\frac{(e^{\frac{z}{\delta}} - e^{-\frac{z}{\delta}})^2 \cos^2\left(\frac{z}{\delta}\right) + (e^{\frac{z}{\delta}} + e^{-\frac{z}{\delta}})^2 \sin^2\left(\frac{z}{\delta}\right)}{(e^{\frac{b}{\delta}} + e^{-\frac{b}{\delta}})^2 \cos^2\left(\frac{b}{\delta}\right) + (e^{\frac{b}{\delta}} - e^{-\frac{b}{\delta}})^2 \sin^2\left(\frac{b}{\delta}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.16})$$

$$|J_x| = \frac{H_{msy} \sqrt{2}}{\delta} \left[\frac{(e^{\frac{z}{\delta}} - e^{-\frac{z}{\delta}})^2 \cos^2\left(\frac{z}{\delta}\right) + (e^{\frac{z}{\delta}} + e^{-\frac{z}{\delta}})^2 \sin^2\left(\frac{z}{\delta}\right)}{(e^{\frac{b}{\delta}} + e^{-\frac{b}{\delta}})^2 \cos^2\left(\frac{b}{\delta}\right) + (e^{\frac{b}{\delta}} - e^{-\frac{b}{\delta}})^2 \sin^2\left(\frac{b}{\delta}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.17})$$

$$|J_x| = \frac{H_{msy} \sqrt{2}}{\delta} \left\{ \frac{(e^{\frac{2z}{\delta}} + e^{-\frac{2z}{\delta}}) - 2 [\cos^2\left(\frac{z}{\delta}\right) - \sin^2\left(\frac{z}{\delta}\right)]}{(e^{\frac{2b}{\delta}} + e^{-\frac{2b}{\delta}})^2 + 2 [\cos^2\left(\frac{z}{\delta}\right) - \sin^2\left(\frac{z}{\delta}\right)]} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.18})$$

$$|J_x| = \frac{H_{msy} \sqrt{2}}{\delta} \left[\frac{\cosh\left(\frac{2z}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2z}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.19})$$

$$Pe = \frac{1}{2\sigma} \int_{-b}^{+b} \left\{ \frac{H_{msy} \sqrt{2}}{\delta} \left[\frac{\cosh\left(\frac{2z}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2z}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right] \right\}^2 \quad (\text{A.20})$$

$$Pe = \frac{1}{2\sigma} \frac{H_{msy}^2}{\delta^2} 2 \int_{-b}^{+b} \frac{\cosh\left(\frac{2z}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2z}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} dz \quad (\text{A.21})$$

$$Pe = \frac{1}{2\sigma} \frac{H_{msy}^2}{\delta^2} \frac{1}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \int_{-b}^{+b} \left[\cosh\left(\frac{2z}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2z}{\delta}\right) \right] dz \quad (\text{A.22})$$

$$Pe = \frac{H_{msy}^2}{\sigma \delta^2} \frac{1}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \int_{-b}^{+b} \left[\cosh\left(\frac{2z}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2z}{\delta}\right) \right] dz \quad (\text{A.23})$$

Equação final para perdas:

$$Pe = \frac{H_{msy}^2}{\sigma \delta} \left[\frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right] \quad (\text{A.24})$$

$$Pe = \frac{H_{msy}^2}{\sigma \delta} k \quad (\text{A.25})$$

Onde:

$$k = \left[\frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right] \quad (\text{A.26})$$