

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA**

Juliane Silva de Almeida

**ANÁLISE DE DESEMPENHO DE ESTRATÉGIAS NO  
ALGORITMO DE *PROGRESSIVE HEDGING* QUANDO  
APLICADO NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE  
PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA**

Dissertação submetida ao Programa de  
Pós Graduação em Engenharia Elétrica  
da Universidade Federal de Santa  
Catarina para a obtenção do Grau de  
Mestre em Engenharia Elétrica  
Orientador: Prof. Dr. Erlon Cristian  
Finardi.

Florianópolis

2013

Catálogo na fonte elaborada pela biblioteca da  
Universidade Federal de Santa Catarina

A ficha catalográfica é confeccionada pela Biblioteca Central.

Tamanho: 7cm x 12 cm

Fonte: Times New Roman 9,5

Maiores informações em:

<http://www.bu.ufsc.br/design/Catalogacao.html>

Juliane Silva de Almeida

**ANÁLISE DE DESEMPENHO DE ESTRATÉGIAS NO  
ALGORITMO DE *PROGRESSIVE HEDGING* QUANDO  
APLICADO NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE  
PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração Sistemas de Potência, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 19 de Julho de 2013.

---

Prof. Patrick Kuo Peng, Dr.

Coordenador do Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Erlon Cristian Finardi, Dr. Eng  
Orientador

---

Prof. Rafael Nilson Rodrigues, Dr. Eng  
Membro Titular.

---

Eng. Raphael Eduardo Chagas Gonçalves, Dr. Eng.  
Membro Titular.

---

Prof. Hans Helmut Zürn, Ph. D.  
Membro Titular.



## AGRADECIMENTOS

Antes da apresentação do trabalho, gostaria de registrar neste documento os agradecimentos àquelas pessoas que contribuíram em âmbito profissional e pessoal para a realização deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Eng. Erlon Cristian Finardi por me confiar o trabalho em um tema ainda pouco explorado na área de sistemas de energia, pelos ensinamentos, incentivos, e amizade.

Ao Prof. Dr. Eng. Edson Luiz da Silva, um exemplo profissional na família.

Ao Prof. Dr. Sc. Jorge Mário Campagnolo pela oportunidade na disciplina de estágio de docência, que permitiu meu primeiro contato com a carreira docente.

Aos integrantes da banca de avaliação deste trabalho, Dr. Eng. Raphael Chagas Gonçalves, Prof. Dr. Eng. Rafael Nilson Rodrigues e Prof. Hans Helmut Zürn Ph.D., agradeço a presença, à disponibilidade e às contribuições feitas a este trabalho.

Aos professores do LabPlan, e Labspot, e professores colaboradores, os dois grupos de estudo de sistemas de potência da UFSC, que tiveram grande contribuição na minha formação acadêmica.

A todos os meus colegas de laboratório do LabPlan e Labspot, desde os tempos de iniciação científica até a finalização deste trabalho, na pós graduação, meus amigos de infância e de graduação, pelos incentivos, conversas, e momentos de descontração.

À minha família, meus pais, Eliane Mirian da Silva Almeida e Julio Cesar de Almeida, e minha irmã Bárbara Silva de Almeida, pelo incentivo pessoal e pela compreensão nos momentos de dedicação aos trabalhos.

À toda a equipe de docentes e técnicos administrativos do Departamento de Eletrotécnica do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC) em especial os docentes Ricardo Luiz Alves, João Carlos Lúcio, Márcia Regina Livramento, James Silveira, Rubiapiara Fernandes, Everthon Sica, Viviane Espíndola, Evaldo Bento, Eugênio Avello, Juliano Padilha, Igor Gavilon e Walcir Miot Fernandes, pela amizade, incentivo à carreira docente, formação profissional e pessoal.

Ao CNPq, e às entidades participantes do projeto de P&D que financiaram este trabalho.

Por fim, o meu agradecimento ao meu namorado Viriato Correa Pahim, pelo carinho, companhia, motivação, e por tornar meus dias cada vez melhores.



Estudar é polir a pedra preciosa, cultivando o espírito, purificamo-lo.

(Confúcio)





## RESUMO

O Planejamento da Operação Energética no Brasil é um problema de natureza estocástica, devido às incertezas relacionadas às variações climáticas, em virtude do uso da hidroeletricidade como principal fonte de energia do sistema elétrico brasileiro. Com o objetivo de representar adequadamente as incertezas envolvidas no problema, é importante resolver esse problema por meio de técnicas de Otimização Estocástica. O Setor Elétrico Brasileiro usa atualmente os algoritmos baseados na Decomposição de Benders para resolver o problema de Planejamento da Operação Energética. Entretanto, essa técnica não é o único meio existente de se resolver este problema. Outras técnicas de Programação Estocástica podem ser aplicadas, tais como o *Progressive Hedging*, objeto de estudo deste trabalho. O presente trabalho visa apresentar essa técnica aplicada ao problema de Planejamento da Operação Energética aplicado a Sistemas Hidrotérmicos, na sua forma mais usual e em modelagens que utilizam artifícios matemáticos, com o objetivo de proporcionar melhor desempenho computacional desta técnica de otimização ao problema de Planejamento da Operação Energética.

**Palavras-chave:** *Progressive Hedging*, Otimização Estocástica, Planejamento da Operação Energética, Sistemas Hidrotérmicos.



## ABSTRACT

Operation Planning in Brazil is a problem of stochastic nature, due to uncertainties related to climate changes, due to the use of hydropower as the main energy source of the Brazilian electrical system. In order to represent the uncertainties involved in the problem adequately, it is important to solve this problem by Stochastic Optimization techniques. Currently, the Brazilian Electricity Sector uses algorithms based on Benders decomposition to solve the problem of Operation Planning. However, this technique is not the only way of solving this problem. Other Stochastic Programming techniques can be applied, such as the Progressive Hedging, focused in this work. This work aims to present this technique when applied to the problem of Operation Planning applied in Hydrothermal Systems, in its most usual shape and modeling using mathematical strategies, with the aim of providing better computational performance of this optimization technique to the problem of Operation Planning.

**Keywords:** Progressive Hedging, Stochastic Optimization, Energy Operation Planning, Hydrothermal Systems.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Árvore de cenários. ....	8
Figura 2: Árvore de cenários com representação explícita. ....	9
Figura 3: Algoritmo do PH, descrito por Birge e Louveaux (1997), com critério de parada de Rockfellar e Wets (1991). ....	20
Figura 4: Estratégia de Penalidade Variável descrita em Gonçalves, Finardi e Silva (2011). ....	23
Figura 5: Algoritmo descrito em Nocedal, Wright e Robinson (2006). ....	24
Figura 6: Algoritmo proposto por Chiche, Gilbert e Porcheron (2011). ....	27
Figura 7: Relação entre função objetivo do PH ( $FO^{PH}$ ) e função objetivo do ED ( $FO^{ED}$ ) x penalidades. ....	37
Figura 8: Norma gradiente ao final do processo iterativo x penalidades. ....	37
Figura 9: Tempo de processamento x penalidades. ....	37
Figura 10: Número de iterações ao final dos processos iterativos x penalidades. ....	38
Figura 11: Relação entre a função objetivo do PH e a função objetivo do ED a cada iteração ( $\mu = 1$ ). ....	39
Figura 12: Norma do gradiente a cada iteração ( $\mu = 1$ ). ....	39
Figura 13: Relação entre a função objetivo do PH e função objetivo do ED x penalidades. ....	40
Figura 14: Norma do gradiente ao final do processo iterativo x penalidades. ...	41
Figura 15: Tempo de processamento x penalidades. ....	41
Figura 16: Iterações ao final do processo x penalidades. ....	42
Figura 17: Relação entre a função objetivo do PH e a função objetivo do ED ao longo de cada iteração ( $\mu=0,001$ ). ....	43
Figura 18: Norma do gradiente ao longo de cada iteração ( $\mu=0,001$ ). ....	43
Figura 19: Tempo de processamento e iterações x dados de entrada ( $\mu = 0,001$ ). ....	44
Figura 20: Detalhamento da relação entre função objetivo do PH e função objetivo do ED ao longo das iterações. ....	45
Figura 21: Detalhamento da norma do gradiente ao longo das iterações. ....	46
Figura 22: Penalidades ao longo das iterações. ....	46
Figura 23: Tempo de processamento e iterações para as implementações da Estratégia II com os diferentes dados de entrada. ....	47
Figura 24: Relação entre a função objetivo do PH e função objetivo do ED ao longo das iterações. ....	49
Figura 25: Norma do gradiente ao longo das iterações. ....	49
Figura 26: Penalidades ao longo das iterações. ....	50
Figura 27: Tempo de processamento e iterações para cada implementação da Estratégia III. ....	50
Figura 28: Relação entre função objetivo do PH e função objetivo do ED x penalidades. ....	52
Figura 29: Norma do gradiente ao fim do processo iterativo x penalidades. ....	52
Figura 30: Tempo de processamento x penalidades. ....	53

Figura 31: Iterações ao final do processo x penalidades.....	53
Figura 32: Relação entre a função objetivo do PH e função objetivo do ED a cada iteração ( $\mu=1$ ).....	54
Figura 33: Gradiente a cada iteração ( $\mu=1$ ).....	54
Figura 34: Tempo de processamento e iterações para cada implementação da Estratégia IV ( $\mu=1$ ).....	55
Figura 35: Relação entre função objetivo do PH e função objetivo do ED x Penalidades.....	56
Figura 36: Gradiente x Penalidades.....	56
Figura 37: Tempo de Processamento x Penalidades.....	57
Figura 38: Iterações ao final do processo x Penalidades.....	57
Figura 39: Relação entre a função objetivo do PH e função objetivo do ED a cada iteração ( $\mu=3000$ ).....	58
Figura 40: Gradiente a cada iteração ( $\mu=3000$ ).....	58
Figura 41: Tempo de processamento e iterações para cada implementação da Estratégia IV ( $\mu=3000$ ).....	59
Figura 42: Relação entre a função primal do PH e a função objetivo do ED. Caso Base - $\mu= 1$ .....	60
Figura 43: Relação entre a função primal do PH e a função objetivo do ED. Caso Base - $\mu= 0,001$ .....	61
Figura 44: Relação entre a função primal do PH e a função objetivo do ED. Estratégia II.....	61
Figura 45: Relação entre a função primal do PH e a função objetivo do ED. Estratégia III.....	62
Figura 46: Relação entre a função primal do PH e a função objetivo do ED. Estratégia IV $\mu = 3000$ .....	62
Figura 47: Desvios entre variáveis de volumes ED e volumes PH. Estágio 1 - Estratégia I, $\mu=0,001$ .....	64
Figura 48: Desvios entre variáveis de vazão turbinada ED e vazão turbinada PH. Estágio 1. Estratégia I - $\mu=0,001$ .....	64
Figura 49: Desvios entre variáveis de potência UTEs ED e potência UTEs PH. Estágio 1. Estratégia I - $\mu=0,001$ .....	65
Figura 50: Desvios entre variáveis de volumes ED e volumes PH. Estágio 8. Estratégia I - $\mu=0,001$ .....	65
Figura 51: Desvios entre variáveis de vazão turbinada ED e vazão turbinada PH. Estágio 8. Estratégia I - $\mu=0,001$ .....	66
Figura 52: Desvios entre variáveis de potência UTEs ED e potência UTEs PH. Estágio 8. Estratégia I - $\mu=0,001$ .....	66
Figura 53: Relação entre a função objetivo do PH e função objetivo do ED x Penalidades – condições iniciais da sugestão de partida quente.....	67
Figura 54: Norma do gradiente ao final do processo x penalidades - condições iniciais sugeridas.....	68
Figura 55: Tempo de processamento x penalidades - condições iniciais sugeridas.....	68

Figura 56: Iterações ao final do processo x penalidades - condições iniciais sugeridas. ....	69
Figura 57: Relação entre a função objetivo do PH e função objetivo do ED a cada iteração ( $\mu=0,001$ ) - condições iniciais sugeridas. ....	69
Figura 58: Norma do gradiente a cada iteração ( $\mu = 0,001$ ) - condições iniciais sugeridas. ....	70
Figura 59: Tempo de processamento e iterações x dados de entrada - condições iniciais sugeridas ( $\mu = 0,001$ ).....	70
Figura 60: Detalhamento da relação entre função objetivo do PH e função objetivo do ED ao longo das iterações – condições iniciais sugeridas.....	71
Figura 61: Detalhamento da norma do gradiente ao longo das iterações – condições iniciais sugeridas.....	72
Figura 62: Penalidades ao longo das iterações – condições iniciais sugeridas..	72
Figura 63: Tempo de processamento e iterações para cada implementação da Estratégia II - condições iniciais sugeridas. ....	73
Figura 64: Relação entre função objetivo do PH e função objetivo do ED ao longo das iterações – condições iniciais sugeridas.....	74
Figura 65: Gradiente ao longo das iterações – condições iniciais sugeridas.....	74
Figura 66: Penalidades ao longo das iterações – condições iniciais sugeridas..	75
Figura 67: Tempo de processamento e iterações para cada implementação da Estratégia III - condições iniciais sugeridas.....	75
Figura 68: Relação entre função objetivo do PH e função objetivo do ED x Penalidades. ....	77
Figura 69: Norma do gradiente x penalidades. ....	77
Figura 70: Tempo de Processamento x Penalidades. ....	78
Figura 71: Iterações x penalidades.....	78
Figura 72: Relação entre a função objetivo do PH e função objetivo do ED a cada iteração ( $\mu=3000$ ). ....	79
Figura 73: Norma gradiente a cada iteração ( $\mu=3000$ ). ....	79
Figura 74: Tempo de processamento e iterações para cada implementação da Estratégia IV ( $\mu=3000$ ).....	80





## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Dados operativos das UHEs do problema exemplo. ....	12
Tabela 2: Dados operativos das UTEs do problema exemplo.....	12
Tabela 3: Dados de afluência UHE 1.....	31
Tabela 4: Dados de afluência UHE 2.....	31
Tabela 5: ENA das UHE 1 e 2 para cada árvore de cenários (MW médios).....	32
Tabela 6: Relação de proporção entre ENA média por demanda média.....	32
Tabela 7: Função objetivo obtida via ED para cada árvore de cenário. ....	33



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANEEL:	Agência Nacional de Energia Elétrica
CEPEL:	Centro de Pesquisas de Energia Elétrica
DA:	Decomposição Aninhada
ED:	Equivalente Determinístico
EDF:	<i>Electricité de France</i>
ENA:	Energia Natural Afluente
LA:	Lagrangeano Aumentado
OE:	Otimização Estocástica
ONS:	Operador Nacional do Sistema Elétrico
PDE	Programação Dinâmica Estocástica
PDDE:	Programação Dinâmica Dual Estocástica
PH:	<i>Progressive Hedging</i>
PL:	Programação Linear
POE:	Planejamento da Operação Energética
RL:	Relaxação Lagrangeana
SIN:	Sistema Interligado Nacional
UHEs:	Usinas Hidrelétricas
UTEs:	Usinas Termelétricas



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO	5
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	6
<b>2 PROGRESSIVE HEDGING APLICADO AO PROBLEMA DO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA.</b>	<b>7</b>
2.1 INTRODUÇÃO	7
2.2 OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA	7
2.2.1 Modelagem das Incertezas	7
2.2.2 Modelagem Matemática do Problema de Otimização Estocástica	10
2.3 PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA	10
2.3.1 Características gerais	10
2.3.2 Modelagem do Problema de Planejamento da Operação Energética	11
2.4 PROGRESSIVE HEDGING	15
2.4.1 Algoritmo Clássico	19
2.4.2 Propostas para a Melhoria do Desempenho do <i>Progressive Hedging</i>	21
2.5 CONCLUSÕES	27
<b>3 RESULTADOS COMPUTACIONAIS</b>	<b>29</b>
3.1 INTRODUÇÃO	29
3.2 CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA HIDROTÉRMICO	29
3.3 DADOS DE ENTRADA	30
3.4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	33
3.4.1 Critérios e Condições de Avaliação	34
3.4.1.1 <i>Caso Base: Estratégia I</i>	36
3.4.1.2 <i>Estratégia II</i>	44
3.4.1.3 <i>Estratégia III</i>	48
3.4.1.4 <i>Estratégia IV</i>	51
3.4.2 Análise da Solução Primal	59

<b>3.4.3 Análise das Variáveis Primais</b>	<b>63</b>
<b>3.4.4 Sugestão para Condições de Partida Quente.</b>	<b>66</b>
<i>3.4.4.1 Estratégia I</i>	<i>67</i>
<i>3.4.4.2 Estratégia II</i>	<i>71</i>
<i>3.4.4.3 Estratégia III</i>	<i>73</i>
<i>3.4.4.4 Estratégia IV</i>	<i>76</i>
<b>3.5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÃO</b>	<b>80</b>
<b>4 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>83</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>85</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A energia elétrica é de extrema importância para as pessoas. Após a descoberta e o uso desta forma de energia, foi possível desenvolver recursos indispensáveis para exercício de atividades em diversos setores tais como, econômico, financeiro, político, social, saúde, educação entre outros, de forma rápida e eficiente. Logo, é essencial que se forneça energia elétrica por meio de um sistema elétrico eficiente e de qualidade. Para que isto ocorra é fundamental exercer de forma adequada os serviços de manutenção e operação deste sistema.

O Brasil possui um sistema elétrico de estrutura complexa e de grande porte. Segundo o Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS), responsável pela operação deste sistema, o Sistema Elétrico Brasileiro é denominado Sistema Interligado Nacional (SIN).

A complexidade de se trabalhar com o SIN deve-se principalmente às características do parque gerador brasileiro. A predominância da energia elétrica proveniente das Usinas Hidrelétricas (UHEs) na matriz energética brasileira incorpora características de incerteza aos modelos utilizados para o estudo do Planejamento da Operação Energética (POE). Em virtude do grande porte do SIN optou-se por dividir o problema de POE em etapas. Cada etapa consiste em avaliar o sistema para um determinado horizonte de tempo. À medida que este horizonte de tempo se torna mais próximo da operação em tempo real, mais detalhes são fornecidos pela política de decisão resultante dos algoritmos.

A separação do problema de POE em horizontes de tempo torna a resolução deste problema de grande porte viável computacionalmente, uma vez que técnicas de otimização estocástica demandam muito esforço computacional para solução de problemas de grande porte.

O POE do sistema brasileiro encontra-se subdividido em Planejamento da Operação de Médio Prazo, Curto Prazo, e Programação Diária. A primeira etapa consiste na aplicação de algoritmos de Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE), citada inicialmente nos trabalhos de Pereira e Pinto (1985), e Pereira (1989). O modelo computacional NEWAVE (CEPEL, 2001) é o *software* que realiza a aplicação da PDDE ao POE do SIN, no médio prazo. A segunda etapa consiste no uso da política de operação de médio prazo como dado de entrada do programa DECOMP (CEPEL, 2004). Ambos os programas, NEWAVE e DECOMP, são elaborados pelo Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL), entidade responsável pela elaboração de

*softwares* para aplicação ao SIN em diversas áreas de sistemas de energia elétrica.

A terceira etapa corresponde à Programação Diária, a qual ainda não possui oficialmente um programa utilizado no setor elétrico. Entretanto há muitos trabalhos na área que recorrem a uma técnica de programação não linear inteira mista denominada Relaxação Lagrangeana (RL) (RODRIGUES; FINARDI; SILVA, 2006; SCUZZIATO, 2011; TAKIGAWA, 2010; TAKRITI; BIRGE; LONG, 1996).

Apesar de ser mais comum o uso da PDDE para a primeira etapa do POE e da Decomposição Aninhada (DA) para a segunda etapa, há outras técnicas viáveis para resolução do problema de POE, dentre as quais destaca-se o *Progressive Hedging* (PH), descrito nos trabalhos de Santos et al. (2008; 2009), Santos (2010), Gonçalves, Finardi e Silva (2011, 2012), Gonçalves et. al. (2011), e Gonçalves (2009, 2011).

O PH é uma técnica semelhante ao Lagrangeano Aumentado (LA) que permite a separação do problema original estocástico em subproblemas menores divididos por cenários (ROCKAFELLAR; WETS, 1991). Além desta propriedade, o PH se adequa bem a recursos computacionais destinados a fornecer melhor desempenho neste sentido, tais como o uso de processamento paralelo (SILVA e FINARDI, 2003; SOMERVELL, 1998).

Todavia, há algumas restrições quanto à aplicação desta metodologia. Uma destas dificuldades deve-se à estratégia utilizada pela técnica de PH para se buscar a decisão ótima para o problema de POE. Esta estratégia consiste em inserir um termo quadrático multiplicado de uma constante, denominada parâmetro de penalidade. Esta estratégia é eficiente e utilizada no método de LA. Entretanto não é uma estratégia de aplicação simples, pois não há uma maneira universal de se realizar a escolha eficiente deste parâmetro.

Há diversos trabalhos na literatura que empregam o PH a problemas estocásticos, em especial a área de pesquisa operacional, (CRAINIC; FU; GENDREAU, 2009; HAUGEN; LØKKETANGEN; WOODRUFF, 2001; MULVEY; VLADIMIROU, 1991; WATSON; WOODRUFF; STRIP, 2008). Alguns destes problemas possuem similaridades em relação aos modelos elaborados para o problema de POE, o que motiva o emprego do PH neste tipo de problema.

Existem alguns trabalhos na literatura direcionados à área de sistemas de energia elétrica que fazem referência ao PH, embora ainda sejam poucos. Alguns tratam sobre o Planejamento da Expansão da Transmissão (REIS, FS; CARVALHO, P. M. S.; FERREIRA, 2005), e



outros ao problema de POE (CARPENTIER; GENDREAU; BASTIN, 2011; CHICHE, 2012; IROUMÉ et al., 2011). Nesta área alguns autores fazem referência ao caso brasileiro (GONÇALVES; FINARDI; SILVA, 2011, 2012; GONÇALVES, 2009, 2011; GONÇALVES et al., 2011; SANTOS; SILVA, 2008; SANTOS, 2009, 2010).

Neste contexto, essa dissertação de mestrado visa avaliar diversas estratégias de aplicação do PH direcionadas ao problema de POE, com a finalidade de propor melhores condições de adaptação do PH a esse problema.

## 1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta seção tem como objetivo mencionar as referências da literatura que contribuíram para os estudos no âmbito do POE, da metodologia do PH, elaboração de modelos para aplicação do PH ao problema de POE e propostas acerca de novas estratégias dessa técnica.

O problema de POE, conforme descrito na seção anterior, consiste na resolução de um problema de grande porte e de natureza estocástica. Além disto, é um problema acoplado no tempo em que a avaliação da política de operação é realizada em diferentes horizontes de tempo. Conforme o horizonte se aproxima da operação em tempo real, a política de operação se torna mais detalhada.

A aplicação de técnicas de Otimização Estocástica (OE), iniciou por meio de estudos realizados pelo CEPEL, em 1977, que apresentaram o desenvolvimento de um modelo computacional baseado em Programação Dinâmica Estocástica (PDE).

Após este estudo foram desenvolvidos trabalhos que propuseram o uso da decomposição de Benders aplicada ao POE. Dentre estes trabalhos encontra-se o trabalho de Pereira e Pinto (1985).

A partir da década de 80, novas propostas para melhorias dos algoritmos de POE surgiram, com destaque para o trabalho de Pereira (1989). Nestes trabalhos se faz menção ao uso da PDDE e se apresenta uma estratégia de separação dos horizontes de tempo para aplicação do problema de POE. A partir de então surgiram uma série de outros estudos, com diferentes estratégias de técnicas de OE, para diferentes áreas do POE (CARVALHO, 2002; CARVALHO; SOARES, 1987; CICOGLA, 2003; DE MATOS, 2008; FINARDI, 1999; GONÇALVES, 2011; KLIGERMAN, 1992; SANTOS, 2010; ZAMBELLI, 2009).

Dentre os trabalhos aplicados ao POE, dois utilizam a aplicação do PH, técnica estudada nesta dissertação (GONÇALVES, 2011 b; SANTOS, 2010).

Segundo Rockfellar e Wets (1991), o PH é uma técnica de OE que propõe uma maneira de decompor o problema original em subproblemas quadráticos.

Rosa e Ruszczyński (1994) apresentam estratégias de separação da técnica de LA em subproblemas menores. A separação do problema principal em subproblemas menores, decompostos por cenários, é um dos fatores característicos da técnica de PH, que possui estrutura semelhante ao LA.

Birge e Louveaux (1997) descrevem em seu trabalho uma estratégia do PH baseada nos trabalhos descritos anteriormente, que utiliza o método do gradiente para resolução do problema dual de otimização que compõe o PH.

O PH possui ampla aplicação na área de pesquisa operacional (CRAINIC; FU; GENDREAU, 2009; HAUGEN; LØKKETANGEN; WOODRUFF, 2001; WATSON, 2007; WATSON; WOODRUFF; STRIP, 2008) e ainda há poucos trabalhos aplicados à área de sistemas de energia.

Há trabalhos referentes a esta área nos problemas de alocação ótima de unidades geradoras (TAKRITI; BIRGE; LONG, 1996), Planejamento da Expansão da Transmissão (REIS, FS; CARVALHO, P. M. S.; FERREIRA, 2005; ROMERO, 2007), e POE (CARPENTIER; GENDREAU; BASTIN, 2010; GONÇALVES; FINARDI; SILVA, 2012, 2011b ; GONÇALVES, 2011 b; GONÇALVES et al., 2011 c; IROUMÉ et al., 2011; SANTOS; SILVA, 2008; SANTOS, 2010).

Santos (2010), e Santos et. al. (2008; 2009) aplicaram o PH ao problema de POE. Estes trabalhos têm o objetivo de se obter informações a respeito da aplicação do PH, elucidar a metodologia aplicada e avaliar o potencial de aplicação ao problema de POE. Outra característica relevante desse trabalho é a comparação do PH com outras metodologias de OE, em especial a Decomposição Aninhada (DA), técnica com aplicação recorrente no caso brasileiro. O sistema avaliado neste trabalho possui 21 UHEs e 20 UTEs integrantes dos quatro subsistemas referentes ao SIN. Entretanto a proposta de Santos (2010), que consiste na aplicação do algoritmo descrito por Birge e Louveaux (1997) ao POE, não apresenta uma estratégia de solução para um dos principais problemas referentes ao algoritmo da técnica de PH, a escolha do parâmetro de penalidade.

Neste contexto, Gonçalves (2011), Gonçalves, Finardi e Silva (2011, 2012) e Gonçalves et. al. (2011) elaboraram uma estratégia de penalidade variável que evita problemas relacionados à escolha do parâmetro de penalidade. Além de resolver esta dificuldade de

implementação do PH, a estratégia de Gonçalves (2011) trouxe benefícios ao PH quanto ao desempenho computacional. Além de elaborar uma estratégia de atualização do parâmetro de penalidade, é avaliado o desempenho computacional do PH. O desempenho computacional do PH é avaliado no trabalho de Gonçalves (2011) por meio da comparação com a DA aplicada ao modelo do SIN, e avaliação do uso de processamento paralelo no PH.

Chiche (2012) apresenta uma estratégia para melhorar a precisão dos resultados do PH aplicado ao POE do sistema elétrico da área de concessão da empresa *Electricité de France* (EDF), e melhorar o condicionamento numérico desta técnica por meio do escalonamento das restrições penalizadas na função objetivo do problema principal.

Além da estratégia proposta por Chiche (2012) há outras alternativas para conduzir o PH a um melhor desempenho computacional. Dentre estas estratégias estão a inicialização do algoritmo de PH com condições iniciais que proporcionam convergência mais eficiente do PH. Estas condições iniciais são conhecidas na literatura como condições de partida quente.

Em relação às condições de partida quente alguns trabalhos desta área sugerem propostas, tais como em Santos (2009). Este trabalho apresenta uma metodologia de partida para inicialização das metas com dados resultantes de um problema único de PL e, multiplicadores de Lagrange com valor zero.

Em seu estudo a respeito do sistema hidrotérmico do Québec, Carpentier, Gendreau e Bastin (2011) sugerem que a partida quente dos valores meta seja fornecida pelos valores esperados resultantes das soluções de vários PLs determinísticos. Cada um dos PL se refere a um cenário de afluência. Esta estratégia fornece valores meta mais próximos dos resultados obtidos pelo PH, e indica melhorias quanto ao desempenho computacional de aplicação desta técnica.

Com base nas referências acima, e também no fato de que não se dispõe de muitos trabalhos que comparam diferentes estratégias do PH aplicadas a problemas de POE, verifica-se a necessidade de obter maiores informações a respeito do PH aplicado ao POE. Este é um dos objetivos desta dissertação conforme descrito na seção seguinte.

## 1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO

Este trabalho estuda a técnica de PH com a finalidade de se avaliar as estratégias de aplicação desta técnica ao POE utilizadas em

estudos anteriores e combiná-las para buscar melhor adequação do PH ao POE.

Ao consolidar o conhecimento a respeito da metodologia de PH outro objetivo específico que entra em foco é propor o uso da proposta descrita por Carpentier, Gendreau e Bastin (2011) para aplicação no PH, a fim de obter melhor desempenho computacional.

O último objetivo específico diz respeito à avaliação de propostas para melhorar o condicionamento numérico e o desempenho computacional do PH. Dentre as propostas sugeridas para este fim está o escalonamento das restrições de não antecipatividade, de acordo com Chiche (2012).

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho encontra-se estruturado da seguinte maneira.

O estudo da técnica de PH aplicado ao POE é descrito no Capítulo 2. Este capítulo inicia com a formulação do modelo simplificado do problema de POE, o qual apresenta apenas as características essenciais ao problema de POE, pois o objetivo deste trabalho consiste apenas em adequar a técnica de PH para aplicação no POE. Além da modelagem, este mesmo capítulo faz menção às diferentes estratégias do PH estudadas neste trabalho, e também propõe uma alternativa de partida quente a esta metodologia. A proposta referente à partida quente dos algoritmos diz respeito ao fornecimento de condições iniciais dos valores meta e multiplicadores de Lagrange, parâmetros diretamente relacionados à decomposição do PH. Esta proposta é indicada nos trabalhos de Carpentier, Gendreau e Bastin (2011) e Santos (2009).

O Capítulo 3 apresenta o estudo de caso e a análise de resultados de quatro estratégias detalhadas no Capítulo 2, para um mesmo critério de convergência, proposto neste trabalho. O estudo de caso apresenta os resultados de cada uma destas estratégias, submetidas às condições iniciais do caso base, e às condições iniciais sugeridas no Capítulo 2. Este capítulo finaliza com a avaliação dos desempenhos computacional e numérico de cada estratégia de implementação do PH.

Por fim, no Capítulo 4 são apresentadas as conclusões e contribuições feitas por este trabalho, além das sugestões para trabalhos futuros.

## **2 PROGRESSIVE HEDGING APLICADO AO PROBLEMA DO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA.**

### **2.1 INTRODUÇÃO**

Em função de alguns aspectos que caracterizam incerteza, os problemas de Planejamento da Operação Energética (POE) de médio e curto prazo de sistemas hidrotérmicos são modelados como problemas de Otimização Estocástica (OE).

O presente capítulo apresenta uma descrição geral da OE, bem como a técnica do *Progressive Hedging* (PH), em que serão exibidos os fundamentos básicos, as principais características e o potencial da técnica para solução de uma classe particular de problemas de OE.

### **2.2 OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA**

A maioria dos problemas da vida real contêm incertezas, as quais são inerentes em diferentes áreas tais como economia, meteorologia, demografia, ecologia, entre outras. Modelos de OE são problemas nos quais alguns dados de entrada são desconhecidos no momento em que a decisão deve ser tomada. A incerteza pode ser devida à ausência de dados confiáveis, erros em medições, eventos futuros desconhecidos, e assim por diante. É possível modelar as incertezas por meio de variáveis aleatórias. Para o problema em estudo neste trabalho, a variável aleatória do problema é a vazão incremental afluyente das usinas hidrelétricas.

#### **2.2.1 Modelagem das Incertezas**

As incertezas do problema estocástico são representadas pela introdução de variáveis aleatórias no modelo de otimização. Para representar tais variáveis é conveniente utilizar uma estrutura denominada árvore de cenários. Esta representação utiliza de grafos para representar a relação de conexão entre as decisões possíveis que a variável aleatória pode assumir. Há diversas técnicas de otimização que utilizam desta estrutura para elaboração do modelo de otimização do problema a ser solucionado. Estas técnicas fazem uso da árvore de cenários por ser uma estrutura que permite a separação do problema de otimização inteiro em subproblemas menores. Desta forma estas técnicas apresentam bom desempenho computacional, e problemas de grande porte podem ser solucionados de maneira mais simples.

Dentre as técnicas de OE mais empregadas ao POE que utiliza da estrutura de árvore de cenários estão a Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE), e a Decomposição Aninhada (DA), atualmente vigente no Setor Elétrico Brasileiro (CEPEL, 2004)(CEPEL, 2001), bem como o PH.

A árvore de cenários da Figura 1 é apresentada aqui para um problema com três estágios de tempo e três realizações da variável aleatória em cada estágio.

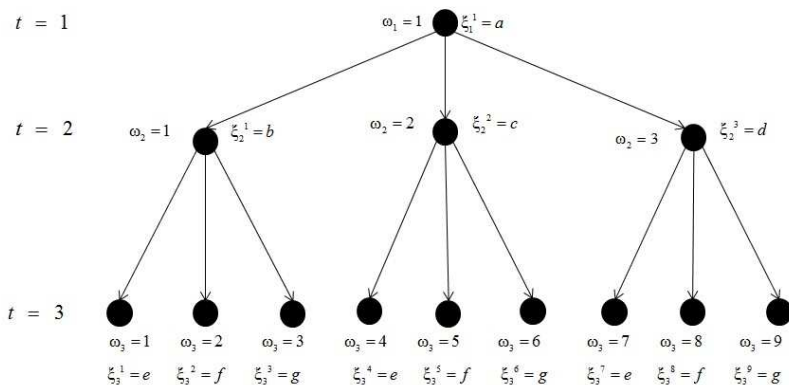


Figura 1: Árvore de cenários.

Em que:

$t$  Índice dos estágios de tempo;

$\omega_t$  Nó da árvore de cenários, pertencente ao estágio  $t$ ;

$\xi_t^{\omega_t}$  Realização da variável aleatória correspondente a um nó  $\omega_t$ .

Em primeiro lugar, deve-se dispor de uma distribuição de probabilidades discreta da variável aleatória para que a representação da estrutura da árvore de cenários seja possível e o problema de otimização seja de resolução viável computacionalmente. A discretização da variável aleatória é representada na árvore de cenários pelas realizações que esta variável pode assumir.

A árvore de cenários inicia-se com um nó raiz,  $\omega_1$ , referente ao primeiro estágio, em que uma decisão única é representada. Os demais nós da árvore,  $\omega_t$ , representam decisões a serem tomadas nos estágios sucessores do primeiro estágio. Cada decisão referente a um nó está relacionada com uma realização  $\xi_t^{\omega_t}$ , que representa o valor da variável

aleatória para a decisão  $\omega_t$ , e também com as decisões tomadas durante o estágio anterior  $\omega_{t-1}$ . Esta relação se dá de forma tal que as decisões tomadas em  $\omega_{t-1}$  são repassadas à decisão do nó  $\omega_t$ . O relacionamento entre as decisões tomadas nos nós  $\omega_t$  e  $\omega_{t-1}$ , encontram-se representadas na Figura 1 pelas conexões entre os nós.

A representação apresentada na Figura 1 é conhecida como representação implícita<sup>1</sup>.

Outra maneira de representar a árvore de cenários é conhecida como representação explícita<sup>2</sup>, conforme a Figura 2.

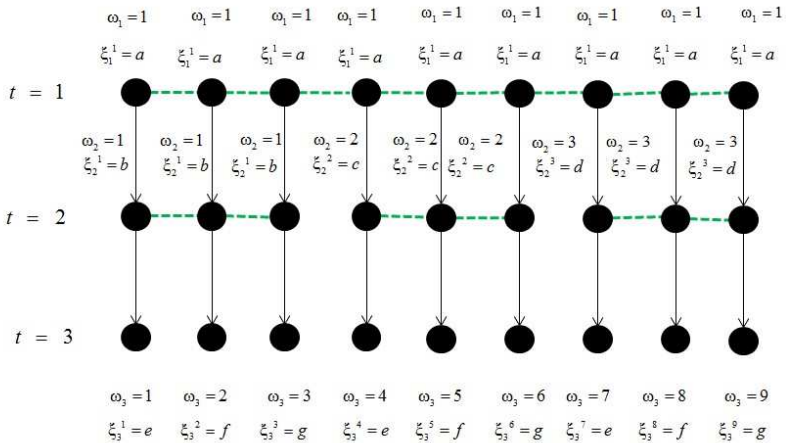


Figura 2: Árvore de cenários com representação explícita.

Observa-se na Figura 2 que as linhas tracejadas referem-se aos nós dos distintos cenários que possuem a mesma decisão. A representação explícita das decisões compartilhadas entre cenários é modelada por meio de restrições de igualdade, conhecidas na literatura como restrições de não antecipatividade (ROCKAFELLAR; WETS, 1991).

Para que o modelo estocástico tenha boa precisão é interessante fazer uso de uma árvore com uma grande quantidade de realizações da

<sup>1</sup> A representação é considerada implícita, por representar uma única vez as decisões dos nós pertencentes ao estágio  $t$ , comuns a diferentes cenários.

<sup>2</sup> A representação explícita tem o objetivo de colocar em evidência a constituição dos cenários individuais e o compartilhamento de nós entre os mesmos. Para isto, repete os nós com decisões comuns a diferentes cenários até um determinado estágio  $t$ .

variável aleatória. Entretanto, muitas realizações podem tornar o problema muito grande e também inviabilizar a solução computacionalmente. Por este motivo, deve-se adotar um número moderado de amostras da variável aleatória que torne o problema com resultados coerentes com as aplicações práticas e viáveis computacionalmente.

## **2.2.2 Modelagem Matemática do Problema de Otimização Estocástica**

O problema de POE se trata de um problema de otimização que pode ser modelado na sua forma completa por meio do Equivalente Determinístico (ED). O ED consiste na modelagem de um problema de otimização linear baseado em uma das representações da árvore de cenários, apresentadas nas Figura 1 e Figura 2.

Neste trabalho, será apresentada a modelagem por cenários, diferente do descrito em Santos (2010), que faz a modelagem do problema tanto por nós, quanto por cenários a fim de ilustrar o POE. O presente trabalho tem a finalidade de aplicar o algoritmo de PH ao POE, por isto não se tem o intuito de representar o problema de POE via ED por nós.

A modelagem do ED por cenários será descrita por meio de um problema exemplo de POE, com seis usinas, três realizações de afliências por estágio e horizonte composto por três estágios de tempo. Maiores detalhes a respeito da natureza da aplicação do problema serão elucidados a partir da Seção 2.3.

## **2.3 PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA**

O POE é um problema de OE estudado na área de sistemas de energia elétrica, com a finalidade de se obter suporte de decisões futuras acerca da política de operação das usinas constituintes do sistema elétrico, no caso brasileiro para o Sistema Interligado Nacional (SIN).

Esta seção visa apresentar a forma de modelagem do problema de POE adotada neste trabalho, para aplicação do algoritmo do PH.

### **2.3.1 Características gerais**

Geralmente, adota-se nos modelos de POE somente a incerteza referente aos fatores climáticos. A incerteza característica de sistemas hidrelétricos está diretamente relacionada com o regime de chuvas das



localidades onde as Usinas Hidrelétricas (UHEs) se encontram. Desta forma, uma das possibilidades de se inserir a incerteza ao problema de POE é tratar a vazão afluyente como variável aleatória. Ao se adotar essa medida, é possível estruturar o problema de POE em forma de árvore de cenários, com a representação das incertezas, de forma semelhante às descritas nas Figura 1 e Figura 2.

Este trabalho aborda o problema de POE de forma simplificada, devido à motivação em avaliar a viabilidade de aplicação do algoritmo de PH ao problema de maneira eficiente. Portanto, algumas particularidades, tais como as restrições referentes aos intercâmbios entre subsistemas, rendimento dos conjuntos turbina-gerador, incerteza da demanda e custos das gerações térmicas variáveis, serão desprezadas ao longo da modelagem do problema de aplicação de PH, como se demonstra na seção seguinte.

### **2.3.2 Modelagem do Problema de Planejamento da Operação Energética**

A modelagem do problema de POE, para efeito didático, é feita neste trabalho por meio de um problema exemplo simples, com três realizações de aflúncias por estágio em um horizonte com três estágios.

O sistema de geração do problema é composto de duas usinas hidrelétricas e cinco termelétricas. Uma destas últimas é modelada como déficit de energia. Esta usina apresenta custo de operação mais elevado que as usinas térmicas integrantes do sistema exemplo, representadas na Tabela 1. As hidrelétricas selecionadas para o modelo são usinas reais, pertencentes ao SIN, situadas em regiões distintas, onde não há acoplamento hidráulico, enquanto as Usinas Termelétricas (UTES) são fictícias. Os dados referentes às usinas do sistema encontram-se nas tabelas a seguir.

Tabela 1: Dados operativos das UHEs do problema exemplo.

UHE	Volume Útil (hm <sup>3</sup> )	Vazão Turbinada Máxima (m <sup>3</sup> /s)	Produtibilidade (MWmês/(m <sup>3</sup> /s))	Potência Máxima (MWmédio)
H <sub>1</sub>	4100	1500	0,96	1440
H <sub>2</sub>	5000	3000	0,51	1530

Tabela 2: Dados operativos das UTEs do problema exemplo.

UTE	Potência Máxima (MWmédio)	Custos Incrementais de Operação (R\$/MWmédio)
T <sub>1</sub>	100	10
T <sub>2</sub>	150	20
T <sub>3</sub>	200	40
T <sub>4</sub>	250	80

Algumas considerações são adotadas para se elaborar o problema do ED. A demanda ao longo dos estágios é constante, o vertimento é considerado como variável de folga, e a incerteza é caracterizada somente pela variável aleatória de vazões afluentes. Há também a modelagem do déficit de energia, em que se inclui uma UTE fictícia sem restrição de valor máximo e com o custo incremental de operação de valor consideravelmente elevado<sup>3</sup>, em relação aos custos das UTEs propriamente ditas do modelo.

A estrutura de organização dos dados do problema, que viabiliza a aplicação do método de OE, é descrita pela árvore de cenários fornecida pela Figura 2. De posse destas informações, é possível escrever o ED, conforme apresentado a seguir.

$$\begin{aligned}
 \min F = & \sum_{s=1}^9 p_s \cdot (10pt_{11s} + 20pt_{21s} + 40pt_{31s} + 80pt_{41s} + 500pd_{1s} + \\
 & 10pt_{12s} + 20pt_{22s} + 40pt_{32s} + 80pt_{42s} + 500pd_{2s} + \\
 & 10pt_{13s} + 20pt_{23s} + 40pt_{33s} + 80pt_{43s} + 500pd_{3s}) \quad (1)
 \end{aligned}$$

s.a.:

<sup>3</sup> O valor do custo de operação da UTE fictícia utilizada para modelar o déficit de energia é de 500 \$/MWmédios.

$$\begin{aligned}
v_{12s} + \kappa \cdot (q_{11s} + u_{11s}) &= v_{11s} + \kappa \cdot y_{11s} \\
v_{22s} + \kappa \cdot (q_{21s} + u_{21s}) &= v_{21s} + \kappa \cdot y_{21s} \\
\sum_{n=1}^4 pt_{n1s} + \rho_1 \cdot q_{11s} + \rho_2 \cdot q_{21s} + pd_{1s} &= P_L \\
v_{13s} - v_{12s} + \kappa \cdot (q_{12s} + u_{12s}) &= \kappa \cdot y_{12s} \\
v_{23s} - v_{22s} + \kappa \cdot (q_{22s} + u_{22s}) &= \kappa \cdot y_{22s} \\
\sum_{n=1}^4 pt_{n2s} + \rho_1 \cdot q_{12s} + \rho_2 \cdot q_{22s} + pd_{2s} &= P_L \\
v_{14s} - v_{13s} + \kappa \cdot (q_{13s} + u_{13s}) &= \kappa \cdot y_{13s} \\
v_{24s} - v_{23s} + \kappa \cdot (q_{23s} + u_{23s}) &= \kappa \cdot y_{23s} \\
\sum_{n=1}^4 pt_{n3s} + \rho_1 \cdot q_{13s} + \rho_2 \cdot q_{23s} + pd_{3s} &= P_L
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
0 \leq v_{1ts} &\leq 4100 \\
0 \leq v_{2ts} &\leq 5000 \\
0 \leq q_{1ts} &\leq 1500 \\
0 \leq q_{2ts} &\leq 3000 \\
0 \leq u_{1ts} & \\
0 \leq u_{2ts} & \\
0 \leq pt_{1ts} &\leq 100 \\
0 \leq pt_{2ts} &\leq 150 \\
0 \leq pt_{3ts} &\leq 200 \\
0 \leq pt_{4ts} &\leq 250 \\
0 \leq pd_{ts} & \\
205 \leq v_{14s} &\leq 4100 \\
250 \leq v_{24s} &\leq 5000
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
v_{11s_\alpha} = v_{11s_\gamma} \quad v_{21s_\alpha} = v_{21s_\gamma} \quad s_\alpha, s_\gamma \in \Omega_1^1, \quad \Omega_1^1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
v_{12s_\alpha} = v_{12s_\beta} \quad v_{22s_\alpha} = v_{22s_\beta} \quad s_\alpha, s_\beta \in \Omega_2^1, \quad \Omega_2^1 = \{1, 2, 3\} \\
v_{12s_\delta} = v_{12s_\epsilon} \quad v_{22s_\delta} = v_{22s_\epsilon} \quad s_\delta, s_\epsilon \in \Omega_2^2, \quad \Omega_2^2 = \{4, 5, 6\}
\end{aligned} \tag{4}$$

$$v_{12,s_\phi} = v_{12,s_\gamma} \quad v_{22,s_\phi} = v_{22,s_\gamma} \quad s_\phi, s_\gamma \in \Omega_2^3, \quad \Omega_2^3 = \{7, 8, 9\}$$

Em que:

- $s$  Índice dos cenários;
- $n$  Índice das usinas termelétricas;
- $t$  Índice dos estágios de tempo;
- $\omega_t$  Nó presente no estágio  $t$  compartilhado entre cenários distintos;
- $\Omega_t^{\omega_t}$  Conjunto que representa os cenários distintos que compartilham o mesmo nó  $\omega_t$  no estágio  $t$ ;
- $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \phi, \gamma$  Subíndices que representam os diferentes cenários pertencentes ao conjunto  $\Omega_t^{\omega_t}$ .
- $pt_{nts}$  Energia da usina térmica  $n$  ao longo do estágio  $t$  e cenário  $s$  (MWmês);
- $P_s$  Probabilidade de ocorrência do cenário  $s$ ;
- $pd_{ts}$  Déficit de energia no estágio  $t$  e cenário  $s$ , em MWmês;
- $v_{1ts} \ v_{2ts}$  Volumes das usinas hidrelétricas 1 e 2 ao início do estágio  $t$ , e cenário  $s$ , em  $\text{hm}^3$ ;
- $q_{1ts} \ q_{2ts}$  Vazão turbinada das usinas hidrelétricas 1 e 2, no estágio  $t$  e cenário  $s$ , em  $\text{m}^3/\text{s}$ ;
- $u_{1ts} \ u_{2ts}$  Vazão vertida das usinas hidrelétricas 1 e 2, no estágio  $t$ , e cenário  $s$ , em  $\text{m}^3/\text{s}$ ;
- $y_{1ts} \ y_{2ts}$  Vazões incrementais afluentes nas usinas 1 e 2 no estágio  $t$  e cenário  $s$ , em  $\text{m}^3/\text{s}$ ;
- $\kappa$  Constante de conversão de unidades de vazão ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) para unidades de volume ( $\text{hm}^3$ ). Esta constante tem valor de 2,592, para as unidades de vazão e volume utilizadas neste trabalho;
- $\rho_1 \ \rho_2$  Produtibilidade das usinas hidrelétricas 1 e 2, respectivamente, em  $\text{MWmês}/(\text{m}^3/\text{s})$ .
- $P_L$  Demanda constante ao longo dos estágios de tempo, em MWmês.

O problema de otimização é composto pela minimização da função objetivo (1), pelas restrições de balanço hidráulico e de balanço

de potências (2), restrições de caixa (3) e restrições de não antecipatividade (4).

Conforme pode ser observado nas restrições de caixa, optou-se por limitar o volume mínimo do reservatório no último estágio de tempo em 5% do volume útil máximo da usina, de modo que os reservatórios das usinas não fiquem completamente vazios neste último estágio de tempo.

Optou-se também por aplicar as restrições de não antecipatividade somente às variáveis de volume, conforme descrito em Gonçalves, Finardi e Silva (2011). Segundo esta bibliografia, a decomposição somente por penalização das restrições de volume mantém a conexão entre os cenários que compartilham decisões comuns e reduz o tamanho do problema dual associado ao PH. Além disto, tal decomposição apresenta desempenho muito semelhante ao uso de não antecipatividade clássica<sup>4</sup>. O algoritmo de PH adotada para aplicação ao POE é apresentada na seção seguinte.

## 2.4 *PROGRESSIVE HEDGING*

O PH é um algoritmo desenvolvido para resolução de problemas de OE com estrutura semelhante ao método do Lagrangeano Aumentado (LA).

A proposta de utilizar técnicas semelhantes ao LA para problemas de OE ganhou força devido às propriedades da inserção do termo quadrático, na função Lagrangeana, a fim de garantir a viabilidade do problema primal (BERTSEKAS, 1999), bem como apresentar a possibilidade de resolução do problema dual pelo método do gradiente (BIRGE; LOUVEAUX, 1997; NOCEDAL; WRIGHT; ROBINSON, 2006; SANTOS, 2010).

Tomando como referência de aplicação o ED descrito na Seção 2.3.2, nota-se pela formulação de (1) a (4) que o problema não é separável em cenários devido às restrições de não antecipatividade (4). Ademais, quando se constrói a função do LA dualizando-se essas restrições, o problema resultante mantém-se acoplado, pois ao decompor o termo quadrático, há a presença de um termo que corresponde a multiplicação entre dois cenários distintos. Para separar o problema em subproblemas por cenários é necessário remodelar as restrições de não antecipatividade (4).

---

<sup>4</sup> Nesta forma de decomposição, a não antecipatividade se aplica a todas as variáveis do problema.

Uma alternativa é descrita nos trabalhos de Birge e Louveaux (1997) e Gonçalves (2011), entre outros presentes na literatura, a qual consiste em igualar cada variável presente em uma restrição de não antecipatividade com a média das demais, conforme detalhado nas equações a seguir. Neste trabalho essa média será denominada de valor meta<sup>5</sup>.

Ao primeiro estágio, o valor meta das variáveis de volume é calculado da seguinte maneira:

$$V_{111} = \frac{(p_1 \cdot v_{111} + p_2 \cdot v_{112} + \dots + p_9 \cdot v_{119})}{\sum_{s=1}^9 p_s} \quad (5)$$

$$V_{211} = \frac{(p_1 \cdot v_{211} + p_2 \cdot v_{212} + \dots + p_9 \cdot v_{219})}{\sum_{s=1}^9 p_s} \quad (6)$$

Para o segundo estágio, há uma quantidade menor de cenários interligados entre si que compartilham decisões comuns. Todavia há maior quantidade de metas, conforme abaixo.

$$V_{121} = \frac{(p_1 \cdot v_{121} + p_2 \cdot v_{122} + p_3 \cdot v_{123})}{p_1 + p_2 + p_3}$$

$$V_{122} = \frac{(p_4 \cdot v_{124} + p_5 \cdot v_{125} + p_6 \cdot v_{126})}{p_4 + p_5 + p_6} \quad (7)$$

$$V_{123} = \frac{(p_7 \cdot v_{127} + p_8 \cdot v_{128} + p_9 \cdot v_{129})}{p_7 + p_8 + p_9}$$

$$V_{221} = \frac{(p_1 \cdot v_{221} + p_2 \cdot v_{222} + p_3 \cdot v_{223})}{p_1 + p_2 + p_3}$$

$$V_{222} = \frac{(p_4 \cdot v_{224} + p_5 \cdot v_{225} + p_6 \cdot v_{226})}{p_4 + p_5 + p_6} \quad (8)$$

---

<sup>5</sup> Os valores meta podem assumir outras denominações na literatura, tais como parâmetros adicionais (GONÇALVES; FINARDI; SILVA, 2011; SANTOS, 2009, 2010).

$$V_{223} = \frac{(p_7 \cdot v_{227} + p_8 \cdot v_{228} + p_9 \cdot v_{229})}{p_7 + p_8 + p_9}$$

Em que:

$V_{r\omega_i}$  Volume meta das variáveis de não antecipatividade referente à decisão do nó  $\omega_i$  compartilhada entre os cenários pertencentes ao conjunto  $\Omega_i^{\omega_i}$ .

Logo, as restrições de não antecipatividade que antes eram modeladas conforme (4) são reescritas de tal maneira que as variáveis de outros cenários presentes nestas equações são aproximadas por valores constantes. Estas constantes são obtidas após o cálculo de uma iteração do algoritmo aplicado ao PH. As restrições de não antecipatividade (4) são reescritas como:

$$\begin{aligned} v_{11s} - V_{111} = 0 \quad v_{21s} - V_{211} = 0 \quad \text{se } s \in \Omega_1^1 \quad \Omega_1^1 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\ v_{12s} - V_{121} = 0 \quad v_{22s} - V_{221} = 0 \quad \text{se } s \in \Omega_2^1 \quad \Omega_2^1 &= \{1, 2, 3\} \\ v_{12s} - V_{122} = 0 \quad v_{22s} - V_{222} = 0 \quad \text{se } s \in \Omega_2^2 \quad \Omega_2^2 &= \{4, 5, 6\} \\ v_{12s} - V_{123} = 0 \quad v_{22s} - V_{223} = 0 \quad \text{se } s \in \Omega_2^3 \quad \Omega_2^3 &= \{7, 8, 9\} \end{aligned} \quad (9)$$

De posse das restrições anteriores, o próximo passo para mostrar o PH consiste em construir a função LA para o problema:

$$\begin{aligned} \Phi = \min F + \sum_{r=1}^2 & \left[ \lambda_{r11} \cdot (v_{r11} - V_{r11}) + \frac{\mu}{2} \cdot (v_{r11} - V_{r11})^2 + \lambda_{r12} \cdot (v_{r12} - V_{r11}) + \right. \\ & \frac{\mu}{2} \cdot (v_{r12} - V_{r11})^2 + \lambda_{r13} \cdot (v_{r13} - V_{r11}) + \frac{\mu}{2} \cdot (v_{r13} - V_{r11})^2 + \lambda_{r14} \cdot (v_{r14} - V_{r11}) + \\ & \left. \frac{\mu}{2} \cdot (v_{r14} - V_{r11})^2 + \lambda_{r15} \cdot (v_{r15} - V_{r11}) + \frac{\mu}{2} \cdot (v_{r15} - V_{r11})^2 + \lambda_{r16} \cdot (v_{r16} - V_{r11}) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu}{2} \cdot \left( v_{r16} - V_{r11} \right)^2 + \lambda_{r17} \cdot \left( v_{r17} - V_{r11} \right) + \frac{\mu}{2} \cdot \left( v_{r17} - V_{r11} \right)^2 + \lambda_{r18} \cdot \left( v_{r18} - V_{r11} \right) + \\
& \frac{\mu}{2} \cdot \left( v_{r18} - V_{r11} \right)^2 + \lambda_{r19} \cdot \left( v_{r19} - V_{r11} \right) + \frac{\mu}{2} \cdot \left( v_{r19} - V_{r11} \right)^2 + \lambda_{r21} \cdot \left( v_{r21} - V_{r21} \right) + \\
& \frac{\mu}{2} \cdot \left( v_{r21} - V_{r21} \right)^2 + \lambda_{r22} \cdot \left( v_{r22} - V_{r21} \right) + \frac{\mu}{2} \cdot \left( v_{r22} - V_{r21} \right)^2 + \lambda_{r23} \cdot \left( v_{r23} - V_{r21} \right) + \\
& \frac{\mu}{2} \cdot \left( v_{r23} - V_{r21} \right)^2 + \lambda_{r24} \cdot \left( v_{r24} - V_{r22} \right) + \frac{\mu}{2} \cdot \left( v_{r24} - V_{r22} \right)^2 + \lambda_{r25} \cdot \left( v_{r25} - V_{r22} \right) + \\
& \frac{\mu}{2} \cdot \left( v_{r25} - V_{r22} \right)^2 + \lambda_{r26} \cdot \left( v_{r26} - V_{r22} \right) + \frac{\mu}{2} \cdot \left( v_{r26} - V_{r22} \right)^2 + \lambda_{r27} \cdot \left( v_{r27} - V_{r23} \right) + \\
& \frac{\mu}{2} \cdot \left( v_{r27} - V_{r23} \right)^2 + \lambda_{r28} \cdot \left( v_{r28} - V_{r23} \right) + \frac{\mu}{2} \cdot \left( v_{r28} - V_{r23} \right)^2 + \lambda_{r29} \cdot \left( v_{r29} - V_{r23} \right) + \\
& \left. \frac{\mu}{2} \cdot \left( v_{r29} - V_{r23} \right)^2 \right] \tag{10}
\end{aligned}$$

*s.a:*

(2), (3), para todo  $s = 1, 2, \dots, S$ .

Em que:

$\lambda_{rns}$  Multiplicador de Lagrange associado às restrições de não antecipatividade;

$\mu$  Fator de penalidade associado às restrições de não antecipatividade;

$r$  Índice de identificação da UHE.

A modelagem do subproblema primal para um cenário será ilustrada pela representação deste para o Cenário 1. Esta modelagem se repete para os subproblemas dos demais cenários, alterando-se apenas os índices de cenários e os índices dos valores meta, referentes aos nós



que o cenário avaliado compartilha com os outros cenários pertencentes ao conjunto  $\Omega_t^{\text{ot}}$ .

Logo, esta modelagem pode ser descrita conforme o equacionamento abaixo.

$$\begin{aligned}
 \min p_1 \cdot & (10pt_{111} + 20pt_{211} + 40pt_{311} + 80pt_{411} + 500pd_{11} + \\
 & 10pt_{121} + 20pt_{221} + 40pt_{321} + 80pt_{421} + 500pd_{21} + \\
 & 10pt_{131} + 20pt_{231} + 40pt_{331} + 80pt_{431} + 500pd_{31}) + \tag{11} \\
 & \sum_{r=1}^2 \left[ \lambda_{r11} \cdot (v_{r11} - V_{r11}) + \frac{\mu}{2} \cdot (v_{r11} - V_{r11})^2 + \lambda_{r21} \cdot (v_{r21} - V_{r21}) + \right. \\
 & \left. \frac{\mu}{2} \cdot (v_{r21} - V_{r21})^2 \right]
 \end{aligned}$$

*s.a*

(2) e (3), com  $s = 1$ .

De posse dessas informações iniciais é possível elaborar o algoritmo do PH conforme descrito em Birge e Louveaux (1997). Este algoritmo será descrito na seção seguinte.

### 2.4.1 Algoritmo Clássico

O algoritmo mais comum de aplicação do método de PH (BIRGE; LOUVEAUX, 1997) segue os passos apresentados no fluxograma da Figura 3.

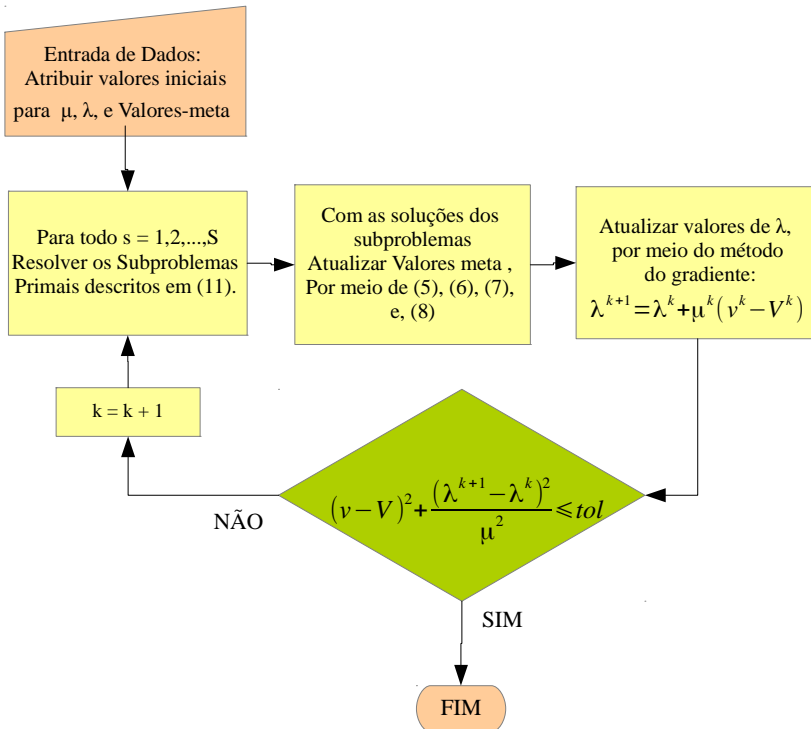


Figura 3: Algoritmo do PH, descrito por Birge e Louveaux (1997), com critério de parada de Rockfellar e Wets (1991).

O algoritmo começa com a inicialização do parâmetro de penalidade, dos valores meta de volume e dos multiplicadores de Lagrange, com o objetivo de se resolver os subproblemas primais, descritos em (11). A proposta de desacoplamento entre os cenários fornece ao problema de OE característica determinística ao se aproximar as variáveis presentes nas restrições de não antecipatividade por valores constantes. Logo é possível resolver os subproblemas de otimização por meio de métodos aplicados em otimização determinística.

Após estas etapas, os resultados obtidos na solução dos subproblemas primais são utilizados para se recalculam os valores meta e atualizar os multiplicadores de Lagrange.

A atualização dos multiplicadores de Lagrange consiste na resolução do problema dual. A metodologia para resolver o problema

dual no algoritmo proposto consiste no método do gradiente. Logo, a atualização dos multiplicadores de Lagrange obedece à seguinte relação.

$$\lambda_{rts}^{k+1} = \lambda_{rts}^k + \mu \cdot (v_{rts} - V_{rts}) \quad (12)$$

Além das características acima, cabe destacar outras peculiaridades referentes à execução e desempenho deste algoritmo. Neste conjunto encontram-se a dependência do algoritmo quanto às condições iniciais, ou condições de partida quente, conforme descrito na literatura (SANTOS, 2009) e a escolha do parâmetro de penalidade.

Quanto à primeira, pode-se dizer que esta depende da região viável do problema de otimização, informação difícil de dispor a priori. Em virtude de não ser simples ter conhecimento a respeito da região viável do problema de otimização, também não é simples elaborar uma heurística universal que permita a escolha de condições iniciais que proporcionam melhor desempenho computacional no algoritmo de PH. Conforme observado na Figura 3, não há uma heurística elaborada que proporcione condições de partida quente. Quanto ao parâmetro de penalidade, não é muito simples escolher o valor de penalidade que permita garantir desempenho eficiente do algoritmo<sup>6</sup>. Este é um problema comum entre as metodologias que envolvem fatores de penalidade.

Há na literatura trabalhos que propõem estratégias para as condições iniciais e para os parâmetros de penalidade, a fim de proporcionar melhor eficiência do algoritmo de PH. Estas propostas serão apresentadas na seção seguinte.

## 2.4.2 Propostas para a Melhoria do Desempenho do *Progressive Hedging*

Os estudos a respeito do PH permitiram a elaboração de diversas estratégias para se tratar as dificuldades presentes no algoritmo descrito em Birge e Louveaux (1997), tais como a dependência das condições iniciais e escolha do parâmetro de penalidade, por exemplo.

Dentre as propostas sugeridas para se adequar o parâmetro de penalidade estão a utilização de estratégias de atualização do valor do

---

<sup>6</sup> Diferente do fornecimento de condições iniciais, a escolha inadequada deste parâmetro pode conduzir a soluções não ótimas, enquanto a alteração das condições iniciais não promove alteração de resultado do problema, apenas influi no desempenho computacional da técnica de PH.

parâmetro de penalidade a cada iteração, conforme descrito em Watson (2008) e Gonçalves (2011).

Ambos os trabalhos propõem estratégias em que se relacionam as alterações no fator de penalidade com a variação da diferença entre os valores máximos e mínimos das variáveis primais dos conjuntos de decisões compartilhadas entre os cenários distintos, calculados após a etapa de solução dos subproblemas primais. Quanto menor esta diferença, menos alterações serão aplicadas sobre o fator de penalidade da iteração anterior.

Para este trabalho, optou-se por usar a estratégia proposta por Gonçalves (2011a), devido ao fato de utilizar uma estratégia de alteração da penalidade que dependa da norma do gradiente da função objetivo do PH. Quanto mais próximo da convergência o algoritmo estiver, menos expressivas serão as alterações no parâmetro de penalidade. A relação que altera a penalidade está descrita na equação abaixo.

$$\mu^{k+1} = \mu^k \cdot \left\{ \sigma \cdot E \left\{ \sum_{t=1}^{T-1} \left\{ \sum_{s=1}^S \left[ \sum_{r=1}^R \frac{\|y_{rts} - V_{rts}\|^2}{(v_{rtmax} - v_{rtmin} + 1)} \right] \right\} \right\} + 1 \right\} \quad (13)^7$$

Com esta proposta, os valores de penalidade sofrerão menos alterações à medida que a convergência do problema é atingida. Além deste motivo, a escolha da estratégia citada também se faz interessante devido à semelhança entre o problema de aplicação descrito em Gonçalves (2011) e o problema em estudo neste trabalho. O algoritmo da proposta segue abaixo, conforme o fluxograma descrito na Figura 4.

---

<sup>7</sup> O parâmetro  $\sigma$ , é obtido empiricamente. Em Gonçalves, Finardi e Silva (2011) sugere-se que o valor de  $\sigma$  se situe entre 1 a 10. Na aplicação da literatura este parâmetro tem valor 2,5. Por sua vez,  $E[ \ ]$  representa o valor esperado dos conjuntos sujeitos às restrições de não antecipatividade.

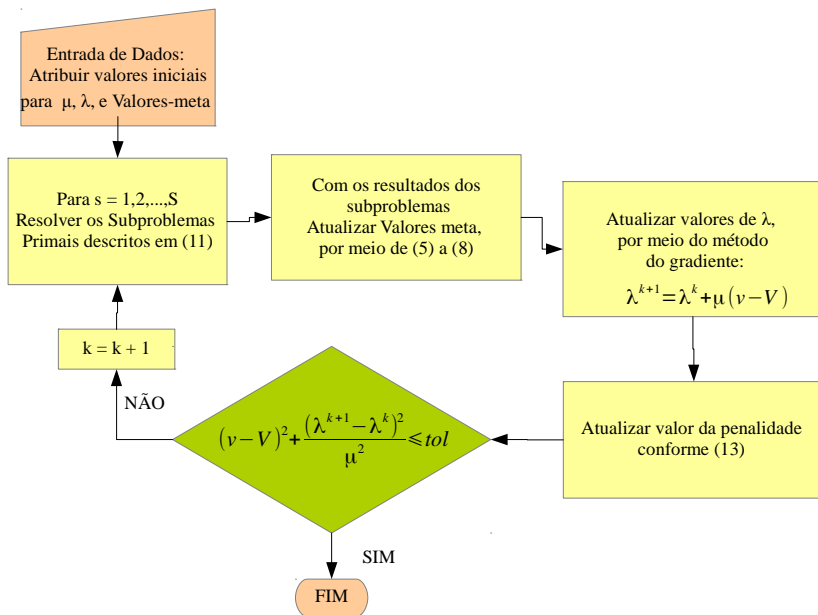


Figura 4: Estratégia de Penalidade Variável descrita em Gonçalves, Finardi e Silva (2011).

Além desta estratégia que utiliza penalidade variável, optou-se por resolver o problema de PH, por meio de uma estratégia tradicionalmente utilizada na solução de problemas modelados pelo método do LA, em que o fator de penalidade é atualizado pela multiplicação de um fator de passo estabelecido empiricamente ( $\gamma$ ). O objetivo do uso desta estratégia é verificar se algoritmos utilizados para se resolver o LA, tal como o algoritmo descrito em Nocedal, Wright e Robinson (2006) são viáveis para o PH, além de aplicar uma estratégia que utiliza penalidade variável.

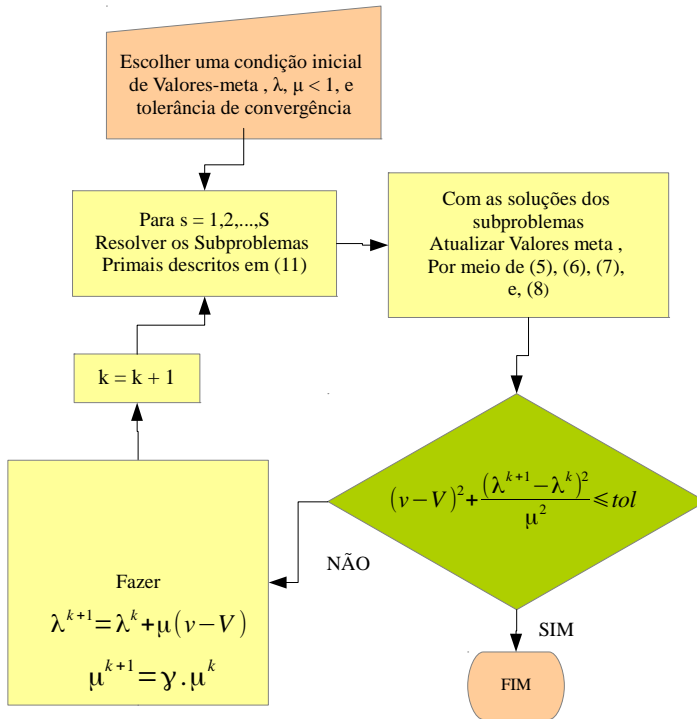


Figura 5: Algoritmo descrito em Nocedal, Wright e Robinson (2006).

A dificuldade de implementar esta estratégia está na escolha da constante de atualização da penalidade,  $\gamma$ , que é determinada de forma empírica.

Em relação ao tratamento das condições iniciais, são poucas as propostas na literatura que tratam a respeito da elaboração de estratégias que permitam o fornecimento de condições de partida quente, ou seja, condições iniciais de valores meta e multiplicadores de Lagrange que fornecem melhor desempenho do algoritmo. Dentre os autores que propõe uma estratégia para este fim são Carpentier, Gendreau e Bastin (2011). Estes autores sugerem que se resolvam problemas de PL determinísticos para cada cenário, de onde se extraem os resultados referentes às variáveis de volumes destes PLs para que sejam utilizados no cálculo dos valores meta iniciais, conforme as relações descritas de (5), a (8).

Em Santos (2009), sugere-se em um dos casos de avaliação das condições iniciais, a inicialização dos multiplicadores de Lagrange com

valores nulos, por não se dispor de completo conhecimento a respeito da região viável do problema de otimização avaliado.

Além das propostas referentes às estratégias adotadas para fornecimento de condições de partida quente e tratamento do fator de penalidade, algumas alterações podem ser feitas no algoritmo para fornecer melhor condicionamento numérico. Há uma proposta na literatura que trata a respeito do escalonamento das restrições de não antecipatividade. Esta proposta tende a fornecer resultados com maior precisão, pois trabalha com valores maiores de penalidades, além de utilizar menos iterações na convergência do algoritmo (CHICHE; GILBERT; PORCHERON, 2011; CHICHE, 2012). Além disto, é uma estratégia interessante para se combinar com alguma das estratégias descritas anteriormente.

O escalonamento aplicado à não antecipatividade descrita em (9), altera estas restrições da forma como se sucede.

$$\begin{aligned}
 \frac{v_{11s} - V_{111}}{v_{1max}} = 0 & \quad \frac{v_{21s} - V_{211}}{v_{2max}} = 0 & \quad s \in \Omega_1^1 & \quad \Omega_1^1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
 \frac{v_{12s} - V_{121}}{v_{1max}} = 0 & \quad \frac{v_{22s} - V_{221}}{v_{2max}} = 0 & \quad s \in \Omega_2^1 & \quad \Omega_2^1 = \{1, 2, 3\} \\
 \frac{v_{12s} - V_{122}}{v_{1max}} = 0 & \quad \frac{v_{22s} - V_{222}}{v_{2max}} = 0 & \quad s \in \Omega_2^2 & \quad \Omega_2^2 = \{4, 5, 6\} \\
 \frac{v_{12s} - V_{123}}{v_{1max}} = 0 & \quad \frac{v_{22s} - V_{223}}{v_{2max}} = 0 & \quad s \in \Omega_2^3 & \quad \Omega_2^3 = \{7, 8, 9\}
 \end{aligned} \tag{14}$$

Em que,

$v_{rmax}$  Valor útil máximo das variáveis de volume pertencentes à usina  $r$ .<sup>8</sup>

Logo, aplica-se esta proposta aos subproblemas primais descritos em, (11), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \min p_s \cdot (10pt_{11s} + 20pt_{21s} + 40pt_{31s} + 80pt_{41s} + 500pd_{1s} + \\
 10pt_{12s} + 20pt_{22s} + 40pt_{32s} + 80pt_{42s} + 500pd_{2s} +
 \end{aligned}$$

<sup>8</sup> Adotaram-se os volumes úteis máximos das UHEs como pivôs de escalonamento pelo fato desta prática ter sido bem sucedida no trabalho de Chiche, Gilbert e Porcheron (2011).

$$10pt_{13s} + 20pt_{23s} + 40pt_{33s} + 80pt_{43s} + 500pd_{3s} + \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^{T-1} \left[ \lambda_{rts} \cdot \frac{(v_{rts} - V_{rt\omega_t})}{v_{rmax}} + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{(v_{rts} - V_{rt\omega_t})^2}{v_{rmax}^2} \right] \quad (15)$$

s.a.:

(2) e (3). Com  $s = 1, 2, \dots, S$

Além de aplicar o escalonamento aos subproblemas primais, aplica-se, também o escalonamento da não antecipatividade à atualização dos multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda_{rts}^{k+1} = \lambda_{rts}^k + \mu^k \cdot \frac{(v_{rts}^k - V_{rts}^k)}{v_{rmax}} \quad (16)$$

Optou-se, portanto, em utilizar esta estratégia combinada com as propostas sugeridas em Carpentier, Gendreau e Bastin (2011), metas de volume e Santos (2009), multiplicadores de Lagrange, para fornecimento das condições de partida quente. Esta estratégia encontra-se descrito no fluxograma da Figura 6.



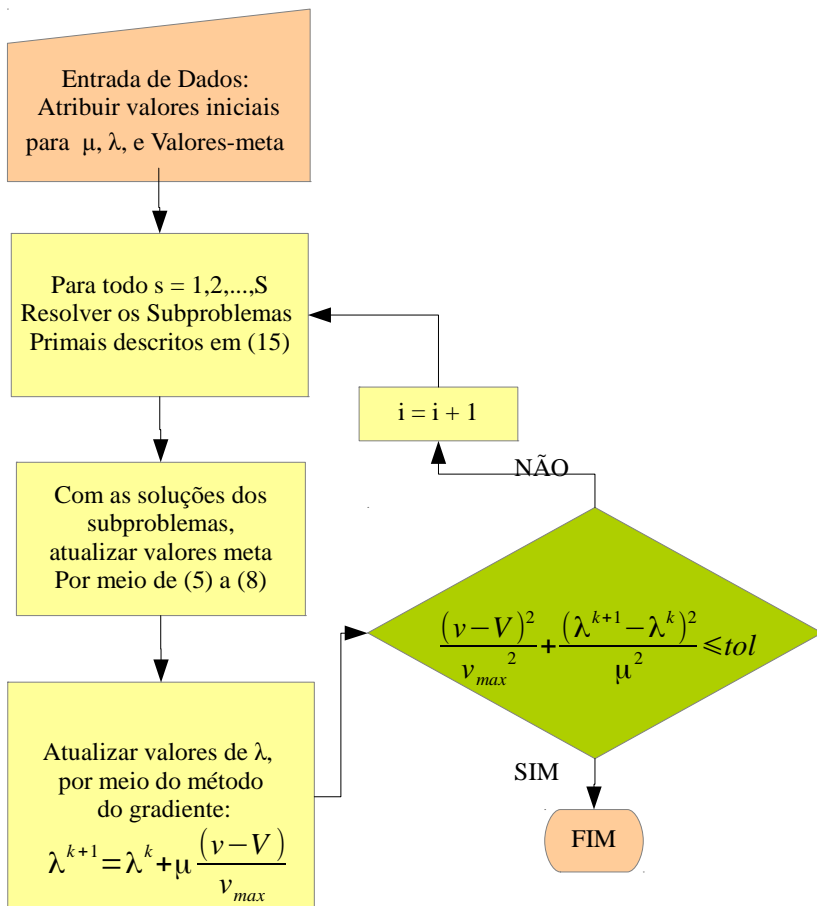


Figura 6: Algoritmo proposto por Chiche, Gilbert e Porcheron (2011).

## 2.5 CONCLUSÕES

Este capítulo teve como objetivo de ilustrar as principais características do algoritmo do PH e apresentar formas de aplicação do mesmo, para o POE. Para atingir este objetivo é necessário primeiro fazer referência à OE, ao problema de POE aplicada a sistemas hidrotérmicos, e às metodologias de ED e PH.

Apesar da facilidade de resolução e separação do problema, e de se propiciar simples aplicação de processamento paralelo dadas as características das estratégias utilizadas no algoritmo de PH, este possui algumas dificuldades quanto à escolha de condições iniciais dos valores

meta e multiplicadores de Lagrange. Também há dificuldades quanto à escolha do parâmetro de penalidade.

O PH é um algoritmo de fácil adaptação para diversas aplicações de problemas de OE. Verifica-se esta versatilidade nos trabalhos presentes na literatura, nas mais diversas aplicações, tais como economia, e em diversas vertentes do planejamento de sistemas de energia elétrica, da transmissão (REIS, FS; CARVALHO, P. M. S.; FERREIRA, 2005; ROMERO, 2007), *unit commitment* (TAKRITI; BIRGE; LONG, 1996), e na operação energética (GONÇALVES, 2011; SANTOS, 2010), sendo esta última área o foco deste trabalho.

O capítulo seguinte faz referência à aplicação do PH em diversas estratégias, citadas neste capítulo, com o objetivo de se avaliar o desempenho e os resultados dos artifícios anteriormente apresentados.

### 3 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Nesta seção serão apresentados os resultados computacionais das estratégias descritas no Capítulo 2, com aplicação ao problema de Planejamento da Operação Energética (POE), solucionado pela técnica de *Progressive Hedging* (PH).

O capítulo inicia com uma breve apresentação do problema em estudo e dos dados de entrada. Serão utilizados diferentes dados de entrada com o objetivo de avaliar cuidadosamente o desempenho computacional e precisão de resultados das estratégias aplicadas ao algoritmo de PH.

Em seguida, apresentam-se os estudos de casos. Nesta seção são ressaltadas as particularidades de cada estratégia, sendo realizada a análise isolada dos resultados.

Por fim será realizada a análise comparativa entre os resultados obtidos no estudo de caso a fim de apontar as conclusões e contribuições deste trabalho.

#### 3.2 CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA HIDROTÉRMICO

O sistema utilizado para os estudos de caso contém estrutura semelhante àquela apresentada no Capítulo 2. Entretanto, o problema muda em tamanho em função da ampliação da quantidade de estágios de tempo. Isto implica em alterações relacionadas à variável aleatória de vazões afluentes.

A modelagem do sistema obedece às condições descritas no Capítulo 2, com alterações decorrentes da atribuição de limites máximos às variáveis de folga, déficit de energia, vertimento<sup>9</sup>, e no número de cenários do problema, em decorrência do aumento do número de estágios de tempo avaliados. Com esta última mudança mais variáveis são adicionadas ao problema de otimização. Consequentemente, o problema aumenta em tamanho.

---

<sup>9</sup> Utilizam-se limites amplos para as variáveis de folga de déficit de energia e vertimento para proporcionar melhor condicionamento das restrições de caixa, sem que essas deixem de ser variáveis de folga. Limitou-se o déficit máximo no valor da demanda e o vertimento em dez vezes a vazão turbinada máxima.

### 3.3 DADOS DE ENTRADA

Esta seção tem o objetivo de detalhar os aspectos associados ao tamanho do problema de POE e da organização dos dados de entrada.

Os dados de entrada para o problema do POE em estudo consistem nos dados de características do sistema descritos pelas Tabela 1 e Tabela 2 do Capítulo 2, e dados de afluência.

Conforme citado anteriormente, o aumento do problema se deve ao aumento no número de cenários. Isto implica na expansão da árvore de cenários. A estrutura da árvore de cenários para o estudo de caso contém duas realizações por estágio e o horizonte de tempo considerado é de oito estágios. Portanto, o número de cenários é determinado pela seguinte relação.

$$S = ab^{T-1} \quad (17)$$

Em que,

- $ab$  Número total de realizações da variável aleatória por estágio;
- $T$  Número total de estágios de tempo;
- $S$  Número total de cenários.

Ao se calcular a relação descrita acima, com oito estágios de tempo e duas realizações, se obtém 128 cenários. Logo, ao modelar o problema do Equivalente Determinístico (ED) de forma semelhante à descrita no Capítulo 2, o tamanho do problema aplicado aos estudos de caso contém 11264 variáveis e 4864 restrições.

Para se avaliar o desempenho das estratégias adotadas via PH presentes nos estudos de casos, decidiu-se utilizar cinco árvores de cenários de afluência distintas. O estágio inicial de aplicação do problema é considerado determinístico, por apresentar uma única realização.

A escolha dos conjuntos de realizações utilizadas para diferenciar as aberturas foi feita por meio de sorteio dos anos do histórico de afluências das usinas. Os dados de afluências referentes às Usinas Hidrelétricas (UHEs) 1 e 2 estão representados na Tabela 3 e Tabela 4.

Tabela 3: Dados de afluência UHE 1.

Estágio /Árvore	1	2	3	4	6	6	7	8
A1	857	414	325	487	761	1319	2880	2979
	857	1251	282	436	238	174	245	913
A2	857	427	570	579	448	2448	1869	672
	857	632	1315	1009	1259	923	1179	1200
A3	857	649	961	1034	410	475	530	963
	857	883	1289	993	593	417	1107	807
A4	857	1426	1046	924	942	706	2076	894
	857	446	414	292	299	147	708	471
A5	857	1488	2838	1304	407	485	1502	1246
	857	628	1133	1094	701	1837	1238	1175

Tabela 4: Dados de afluência UHE 2.

Estágio /Árvore	1	2	3	4	5	6	7	8
A1	2459	2148	1468	1851	1583	928	850	657
	2459	7005	7938	6244	5105	3651	4748	2995
A2	2459	2587	3622	3533	2442	1834	1663	1199
	2459	4996	5076	4638	2763	1873	1525	1231
A3	2459	4431	5115	3674	2422	1531	1313	1155
	2459	3186	3805	6882	3766	2264	1740	1547
A4	2459	2553	3277	4014	3262	2085	2125	1998
	2459	2033	3546	4946	2989	1751	1574	1208
A5	2459	6827	4711	3351	2348	1810	2291	1519
	2459	2434	4254	3589	3081	1969	1860	1349

Uma das formas de analisar as diferenças entre as árvores de dados de afluência apresentadas nas tabelas acima é por meio do cálculo da Energia Natural Afluente (ENA) das UHEs do sistema. A ENA é calculada por meio do produto entre a vazão afluente e a produtividade da UHE.

Cada dado de afluência representado nas tabelas acima apresenta uma ENA distinta. A ENA de cada árvore de cenários está representada na Tabela 5.

Tabela 5: ENA das UHE 1 e 2 para cada árvore de cenários (MW médios).

Estágio/ Árvores	1	2	3	4	5	6	7	8
A1	2077	3133	2690	2507	2185	1884	2927	2799
A2	2077	2442	3123	2846	2147	2563	2276	1518
A3	2077	2678	3355	3665	2059	1396	1564	1539
A4	2077	2068	2441	2868	2190	1388	2280	1473
A5	2077	3377	4192	2921	1916	2078	2374	1893

Após o cálculo da ENA, é possível destacar a capacidade de suprimento da demanda do sistema teste pelas UHEs. Para tanto compara-se a ENA média da árvore com a demanda média ao longo dos estágios de tempo por meio de uma relação de proporção, conforme pode ser observado na Tabela 6.

Tabela 6: Relação de proporção entre ENA média por demanda média.

Árvore	ENA média/demanda média
A1	0,93534
A2	0,879242
A3	0,848703
A4	0,777016
A5	0,964283

Nesta comparação verifica-se que a Árvore 5 possui o maior valor. Portanto, indica maior potencial de suprimento do sistema pelas UHEs, e que o custo de operação do sistema teste tende a ser reduzido.

Segundo o indicador da Tabela 6, a Árvore 4 indica a possibilidade de menor contribuição das UHEs na geração de energia, conseqüentemente, possibilidade de que custo de operação do sistema seja elevado.

As estimativas apresentadas acima são verificadas através da solução do ED para cada árvore de cenários. Após este processo, obtiveram-se os resultados da função objetivo, destacados na Tabela 7.

Tabela 7: Função objetivo obtida via ED para cada árvore de cenário.

Árvore	Função Objetivo ED (\$)
A1	232396,00
A2	60644,00
A3	111890,00
A4	153161,00
A5	19385,70

Observa-se que a Árvore 5 de fato é a que possui o menor custo de operação total em decorrência do maior valor da proporção entre ENA e demanda média.

Porém, a estimativa apresentada pelo indicador da Tabela 6 para verificar a árvore que indica possibilidade de operação a custos elevados não foi válida. Ao se analisar a Tabela 7, nota-se que a Árvore 1 apresenta os maiores custos de operação, apesar da proporção entre ENA e demanda média ser menor para a Árvore 4.

Outro fator que influencia no custo de operação do sistema está relacionado à disposição das aflúncias na estrutura da árvore de cenários. Esta informação permite avaliar a disponibilidade de água, para geração de energia pelas UHEs, ao longo dos estágios de tempo. Desta forma, influencia o resultado da política de operação.

Com exceção da Árvore 1, o indicador da ENA média por demanda média apresentou boa estimativa da participação das UHEs do sistema teste no abastecimento da demanda. Entretanto, as informações acima relatam que apenas este indicador não é o suficiente para realizar a estimativa dos custos de operação de um sistema hidrotérmico.

Após a definição dos dados de entrada, organiza-se cada uma das cinco árvores distintas em conjuntos de 128 cenários, que obedecem à estrutura de árvore semelhante à descrita na Figura 2 do Capítulo 2. A seção a seguir descreve a respeito da implementação computacional dos algoritmos descritos no Capítulo 2, com o uso dos dados de entrada descritos nesta seção.

### 3.4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Esta seção tem a finalidade de realizar a análise de cada uma das estratégias propostas ao PH, descritas na Seção 2.4, conforme a seguinte ordem:

Estratégia I: Algoritmo padrão do PH (BIRGE; LOUVEAUX, 1997)<sup>10</sup>.

Estratégia II: Algoritmo de Gonçalves (2011).

Estratégia III: Algoritmo de Nocedal, Wright e Robinson (2006).

Estratégia IV: Algoritmo de Chiche, Gilbert e Porcheron (2011).

Adotou-se a Estratégia I como Caso Base, em virtude desta estratégia corresponder ao algoritmo do PH na íntegra, sem o uso de artifícios matemáticos, e possuir aplicação em diferentes tipos de problemas.

A implementação computacional das estratégias apresentadas na literatura foi efetuada para cada uma das cinco árvores de cenários descritas na seção anterior.

São avaliados os dados de saída de cada estratégia referentes ao gradiente do problema dual, tempo de processamento, número de iterações, e variação das penalidades ao longo do processo iterativo para as Estratégias II e III. Também são avaliados os dados referentes à função objetivo. Compara-se estes dados com os valores obtidos via ED, descritos na Tabela 7, a fim de mensurar o desvio em relação ao ED.

Após a avaliação das quatro estratégias individualmente será realizada a análise das variáveis primais resultantes do PH aplicado por cada uma destas estratégias. Estes valores serão comparados com os valores obtidos via ED.

Os critérios e condições de avaliação encontram-se na seção a seguir.

### **3.4.1 Critérios e Condições de Avaliação**

Além de implementar as quatro estratégias para cinco tipos diferentes de árvores de cenários, outras condições são adotadas para se obter mais informações acerca do PH aplicado ao problema de POE.

As estratégias são implementadas com duas diferentes condições iniciais de partida quente. Deseja-se avaliar qual das duas condições sugeridas neste trabalho fornece melhor desempenho ao algoritmo. Estas condições encontram-se a seguir.

A primeira condição de partida consiste na atribuição de 50% do volume útil das UHEs aos volumes meta iniciais, e valores nulos dos multiplicadores de Lagrange.

A segunda proposta de condição de partida quente utilizada para as diferentes estratégias do PH será a inicialização dos valores meta com

---

<sup>10</sup> Esta é a estratégia do PH adotada no trabalho de Santos (2010).



os valores médios de volumes resultantes de 128 problemas de Programação Linear (PL) determinísticos. Cada problema de PL utiliza um cenário de aflúncias da árvore avaliada. Além disto, utiliza-se, na partida quente, a atribuição de valores zero aos multiplicadores de Lagrange, conforme descrito na Seção 2.4.2.

Quanto ao critério de parada, algumas modificações foram feitas em relação aos critérios de parada originais de cada estratégia. Optou-se por utilizar um critério de parada único para as quatro estratégias do PH e por não utilizar a norma da diferença dos multiplicadores de Lagrange na sua formulação (ROCKAFELLAR; WETS, 1991). Esta opção foi feita, pois, em algoritmos de Lagrangeano Aumentado (LA), com estrutura semelhante à apresentada no PH, os multiplicadores de Lagrange podem apresentar caráter oscilatório em algoritmos que envolvem parâmetro de penalidade (RODRIGUES, 2003). Desta forma, o processo de convergência pode se estender sem necessidade.

Para evitar esta ocorrência, optou-se por elaborar uma proposta de critério de parada. A proposta sugere a inserção de um termo que utiliza os valores da função de custo de operação<sup>11</sup>, em vez de utilizar o termo que avalia a norma das diferenças dos multiplicadores de Lagrange. Nesse termo sugerido pela proposta avalia-se a norma das diferenças entre valores da função custo de operação, distantes entre si, de 100 iterações<sup>12</sup>. O vetor em que a norma será avaliada é composto de cem elementos. Este termo da proposta é conhecido como médias móveis. Insere-se o termo de médias móveis no critério de parada somente após a ducentésima iteração.

Portanto, o critério de parada proposto, funciona da seguinte maneira: nas primeiras duzentas iterações analisa-se somente a norma do gradiente, e utiliza-se uma tolerância de convergência mais apertada. Após a ducentésima iteração, diminui-se a tolerância de convergência e insere-se o termo de médias móveis, adicionado à norma do gradiente.

A implementação computacional das quatro estratégias do PH avaliadas apresenta limite máximo de 1000 iterações. As tolerâncias de convergência utilizadas foram de  $10^{-2}$  para as duzentas primeiras iterações e de  $10^{-1}$  para as iterações posteriores.

---

<sup>11</sup> A função custo de operação corresponde somente à função objetivo do problema de POE via ED. Nesta função não consta os termos de penalização que compõe a função Lagrangeana Aumentada.

<sup>12</sup> O valor 100 adotado no critério de médias móveis pode variar conforme a aplicação. Para as estratégias do PH utilizadas neste trabalho e para o sistema avaliado este valor apresentou-se adequado.

Os programas foram executados em plataforma MATLAB<sup>®</sup>, em conjunto com o pacote de funções de otimização MOSEK<sup>®</sup> Optimization Tools ([S.d.]), num notebook com configuração de 4 GB de RAM e processador Intel(R) Core (TM) i7 – 2620M CPU de 2,7 GHz. Optou-se por utilizar apenas o *Parallel Toolbox* do MATLAB, que distribuiu os processos iterativos para divisões do processador do computador em que ocorreu a implementação computacional.

Os resultados da implementação computacional estão descritos a seguir.

### 3.4.1.1 Caso Base: Estratégia I

A Estratégia I, atribuída como Caso Base neste trabalho pelos motivos descritos na Seção 3.4, é avaliada nesta seção. O algoritmo da Estratégia I é descrito pela Figura 3 do Capítulo 2.

Para avaliar o desempenho do PH avalia-se a Estratégia I para 100 diferentes valores de penalidades, situados na faixa de valores entre  $10^{-5}$  a 10. Foi necessário implementar a Estratégia I diversas vezes pois esta estratégia não utiliza penalidade variável. Além disto, há a necessidade de se identificar em qual valores de penalidades a convergência ocorre.

Os resultados da implementação da Estratégia I encontram-se a seguir.

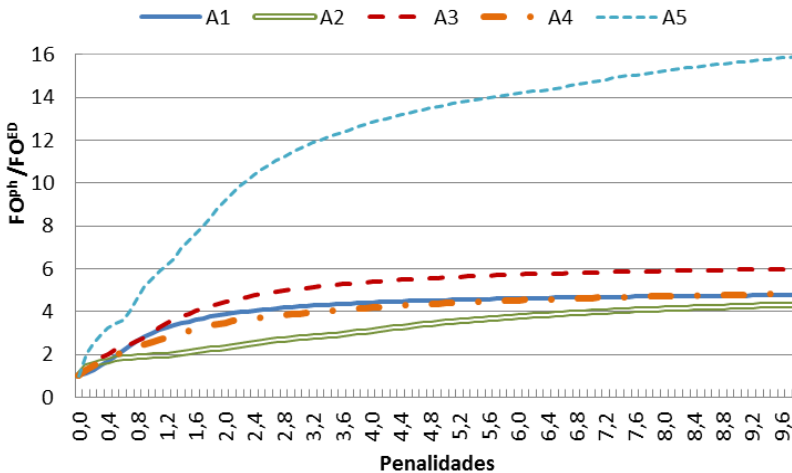


Figura 7: Relação entre função objetivo do PH ( $FO^{PH}$ ) e função objetivo do ED ( $FO^{ED}$ ) x penalidades<sup>13</sup>.

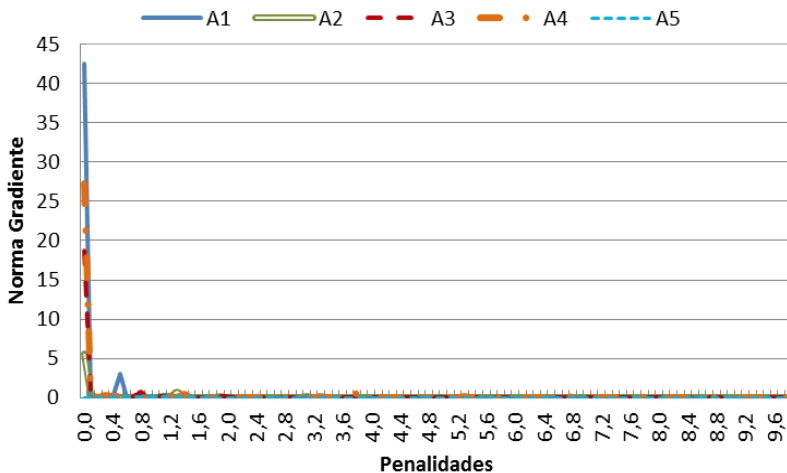


Figura 8: Norma gradiente ao final do processo iterativo x penalidades.

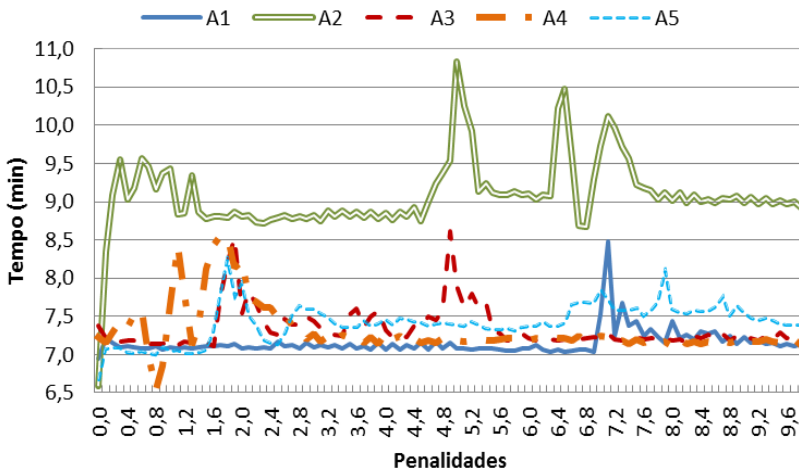


Figura 9: Tempo de processamento x penalidades.

<sup>13</sup> A função objetivo do PH corresponde ao valor da função Lagrangeana Aumentada, ao longo do processo iterativo.

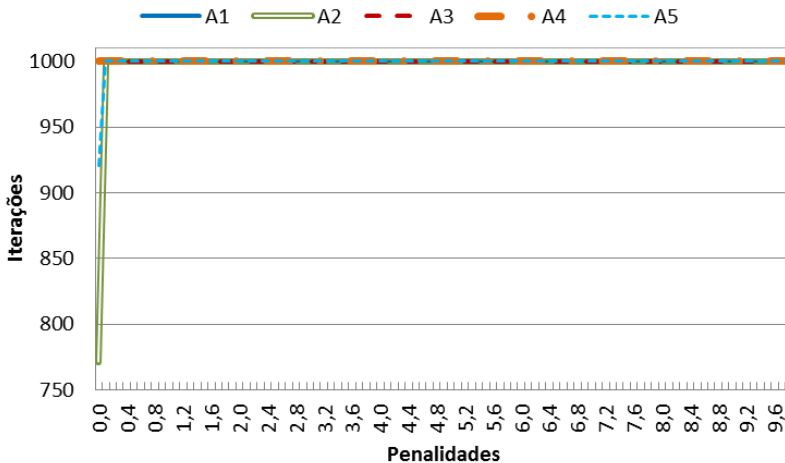


Figura 10: Número de iterações ao final dos processos iterativos x penalidades.

Pelos gráficos obtidos a partir das implementações da Estratégia I é possível fazer as seguintes observações. Apenas as implementações com as Árvores 2 e 5 apresentaram convergência para um valor próximo de zero ( $10^{-5}$ ), conforme observado nos primeiros pontos da Figura 10. Mesmo assim, estes casos apresentaram número elevado de iterações até a convergência. Pelo fato da Estratégia I, aplicada ao POE em estudo não convergir para valores mais altos de penalidades, os tempos de processamento para cada implementação foram elevados.

Além disto, observa-se um elevado crescimento da função PH comparado ao ED. O gráfico da Figura 7 indica esta característica, em especial para valores maiores de penalidades. Isto pode ser um indício que a influência do termo penalizado se sobrepõe ao valor da função objetivo do problema de POE.

Ao se avaliar a Figura 8, nota-se que a norma do gradiente possui valores mais elevados para os valores menores de penalidades, e valores baixos para valores de penalidades maiores ao final de cada implementação. Embora valores maiores de penalidades tendam a proporcionar melhor aproximação das variáveis que compõem as restrições de não antecipatividade às metas, nem sempre estes permitem que os algoritmos de penalidades forneçam a solução ótima. Altos valores de penalidades podem fazer com que a solução do problema dual seja atualizada de forma mais lenta, pois tendem a proporcionar valores de gradientes mais baixos, desde as primeiras iterações.

Para averiguar esta questão apresentam-se os resultados da implementação da Estratégia I para os cinco diferentes dados de entrada e, fator de penalidade igual a 1. Segundo o gráfico da Figura 7, para  $\mu = 1$  os valores das funções objetivos em cada um dos cinco dados de entrada do PH apresentam-se em torno de duas a seis vezes maiores que os valores das funções objetivo do ED. Os resultados encontram-se a seguir.

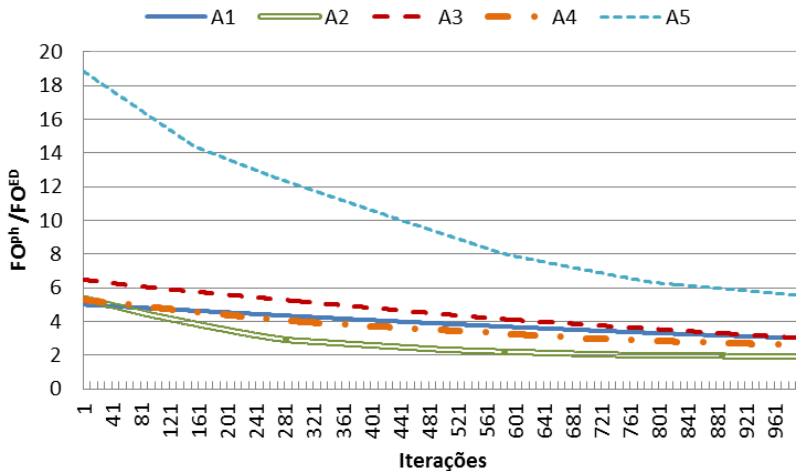


Figura 11: Relação entre a função objetivo do PH e a função objetivo do ED a cada iteração ( $\mu = 1$ ).

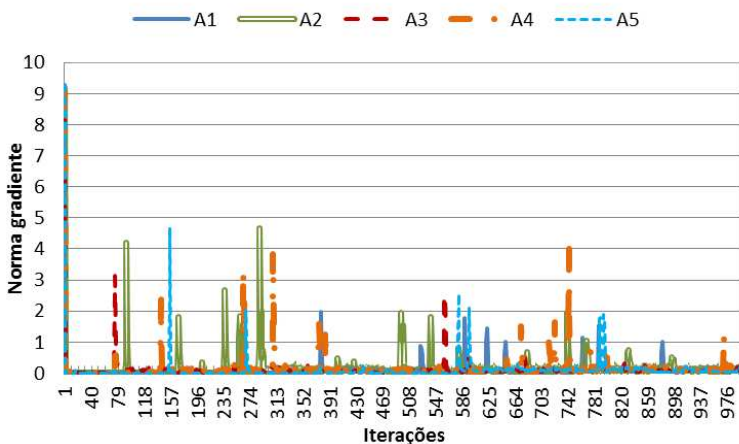


Figura 12: Norma do gradiente a cada iteração ( $\mu = 1$ ).

Nota-se que o carácter oscilatório do gradiente está presente para o valor de penalidade avaliado. O gradiente se manteve em torno de um determinado valor em razão do uso de penalidade elevada, que não promoveu com eficiência a busca pela solução do problema dual.

Como os resultados não foram bem sucedidos para valores mais altos de penalidades, decidiu-se avaliar o PH aplicado ao POE para valores pequenos de penalidades. Optou-se por avaliar com valores de penalidades para uma faixa de penalidades situadas entre de  $10^{-5}$  a 0,001. Os resultados encontram-se a seguir.

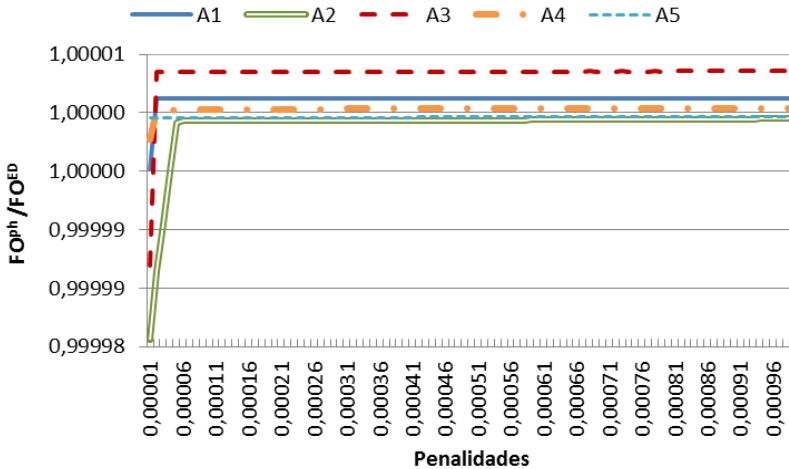


Figura 13: Relação entre a função objetivo do PH e função objetivo do ED x penalidades.

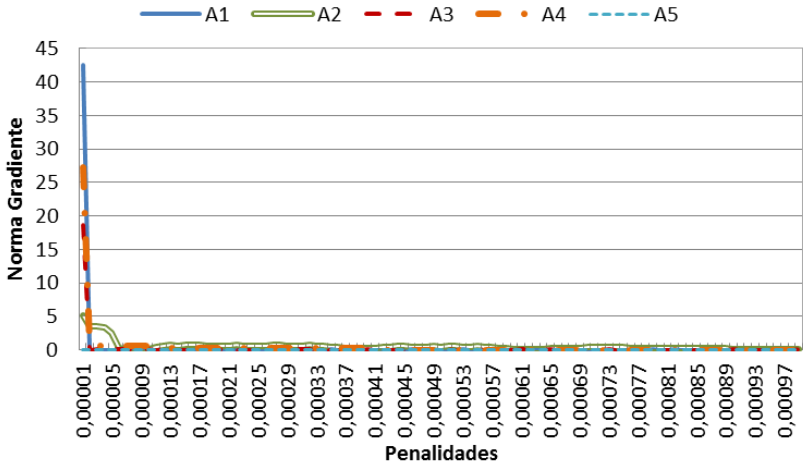


Figura 14: Norma do gradiente ao final do processo iterativo x penalidades.

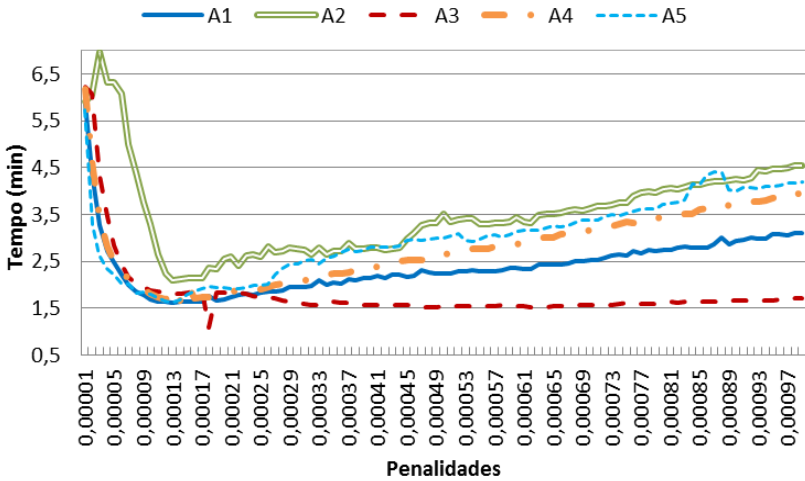


Figura 15: Tempo de processamento x penalidades.

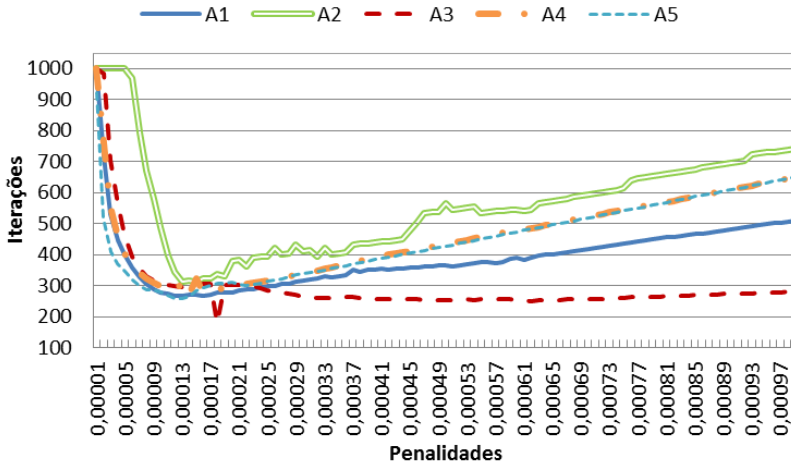


Figura 16: Iterações ao final do processo x penalidades.

Os gráficos mostram que a penalidade para a qual ocorre a melhor alocação de recursos no problema de otimização em estudo se situa numa faixa de baixos valores, entre  $10^{-5}$  a 0,001, e a convergência mais eficiente ocorre para a faixa de  $10^{-4}$  a 0,001. Estes gráficos apresentaram melhores resultados, com número de iterações abaixo do limite máximo e tempos de processamento mais baixos que o caso anterior. É possível observar também a variação dos valores do gradiente ao longo do processo iterativo, que inicia com altos valores e se reduz significativamente. Quanto aos desvios da função objetivo em relação ao valor obtido via ED, para os diferentes dados de entrada avaliados, os valores foram muito baixos ao final da convergência, praticamente igualando o resultado do ED.



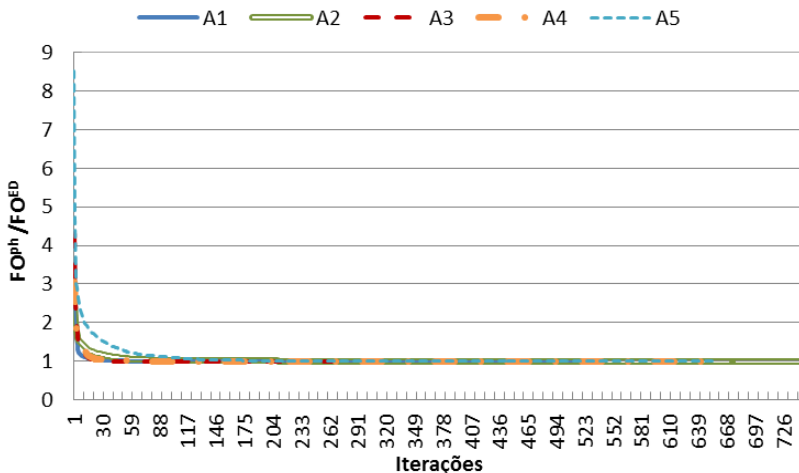


Figura 17: Relação entre a função objetivo do PH e a função objetivo do ED ao longo de cada iteração ( $\mu=0,001$ ).

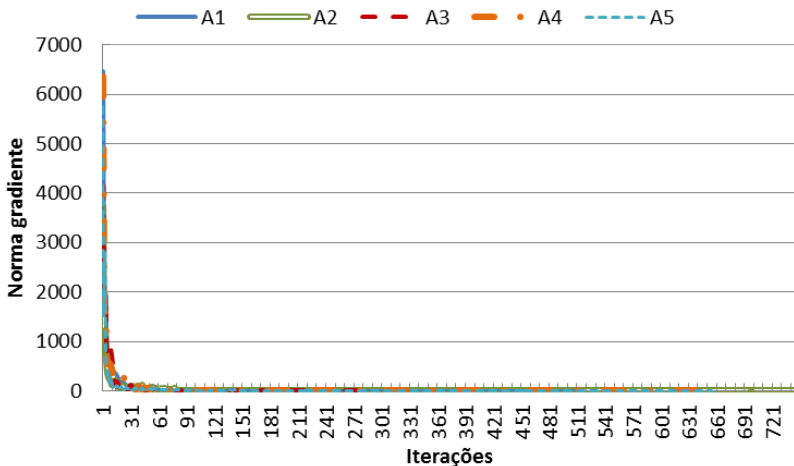


Figura 18: Norma do gradiente ao longo de cada iteração ( $\mu=0,001$ ).

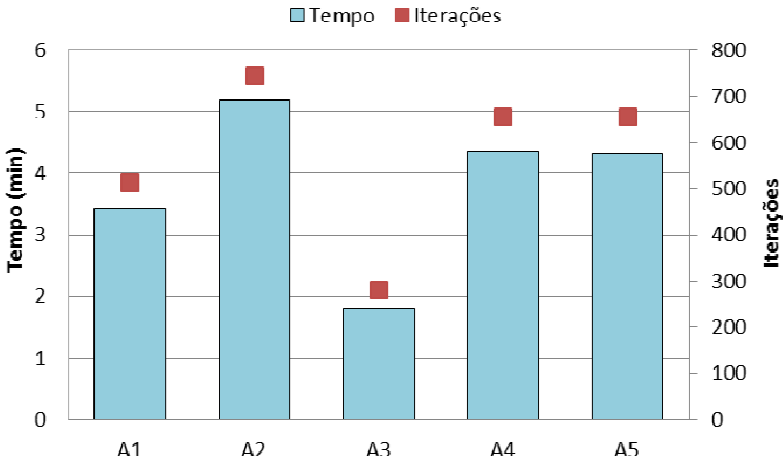


Figura 19: Tempo de processamento e iterações x dados de entrada ( $\mu = 0,001$ ).

O problema de POE implementado com a Estratégia I apresentou peculiaridades tais como a convergência para baixos valores de penalidades.

Portanto, verificou-se nesta análise que a Estratégia I necessita de uma heurística para melhorar o condicionamento do problema de POE a ser resolvido. Uma heurística para este fim é apresentada na Seção 2.4.2, e analisada na Seção 3.4.1.4, Estratégia IV.

### 3.4.1.2 Estratégia II

A estratégia baseada no algoritmo proposto por Gonçalves (2011), descrito na Figura 4, apresenta uma estratégia de alteração de parâmetro de penalidade ao longo do processo iterativo. Esta estratégia visa evitar o problema de escolha deste valor. Este problema ficou evidente nos resultados apresentados na seção anterior, onde foi necessário implementar a Estratégia I para diferentes valores de penalidades com a finalidade de encontrar valores de penalidades que apresentem estabilização próximos à convergência.

Conforme descrito na Seção 2.4.2, a estratégia de alteração do fator de penalidade ao longo das iterações depende do gradiente do problema de otimização.

A implementação computacional da Estratégia II passou por algumas modificações em relação àquela descrita na bibliografia que a sugere (GONÇALVES; FINARDI; SILVA, 2011, 2012; GONÇALVES, 2011). Além da modificação do critério de parada para o critério sugerido na seção 3.4.1, o valor do parâmetro  $\sigma$  foi alterado para um valor inferior à faixa de valores sugeridos pelas referências da literatura<sup>14</sup>.

Esta medida foi tomada após o levantamento de observações do Caso Base para valores altos de penalidades. Conforme descrito anteriormente, menores valores de penalidade fornecem melhores direções em busca da solução ótima.

Para realizar a implementação da Estratégia II sujeita aos diferentes dados de entrada, inicializou-se o parâmetro de penalidade em  $10^{-5}$ . Os resultados encontram-se nas figuras a seguir.

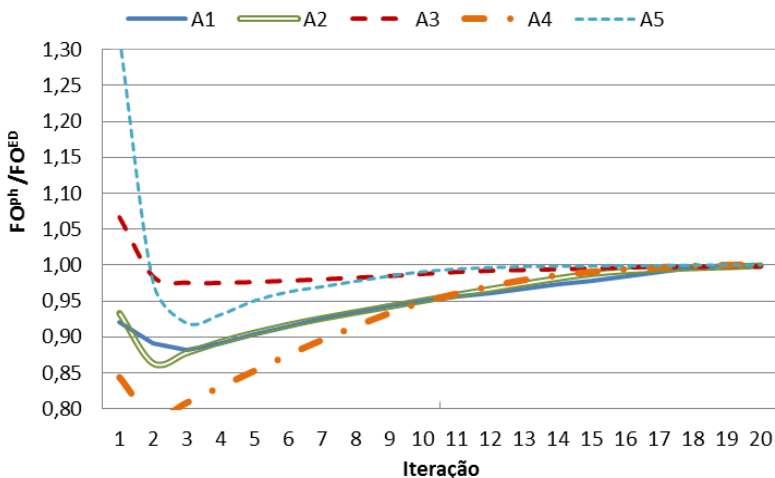


Figura 20: Detalhamento da relação entre função objetivo do PH e função objetivo do ED ao longo das iterações.

<sup>14</sup> O valor de  $\sigma$  utilizado para este problema foi de 0,05.

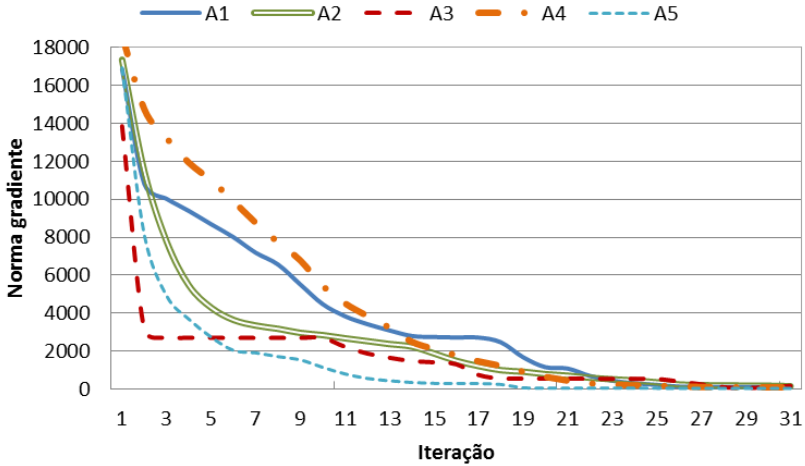


Figura 21: Detalhamento da norma do gradiente ao longo das iterações.

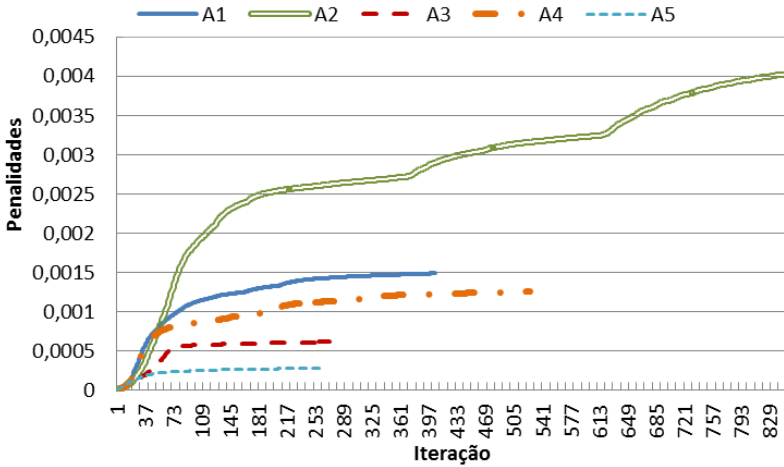


Figura 22: Penalidades ao longo das iterações.

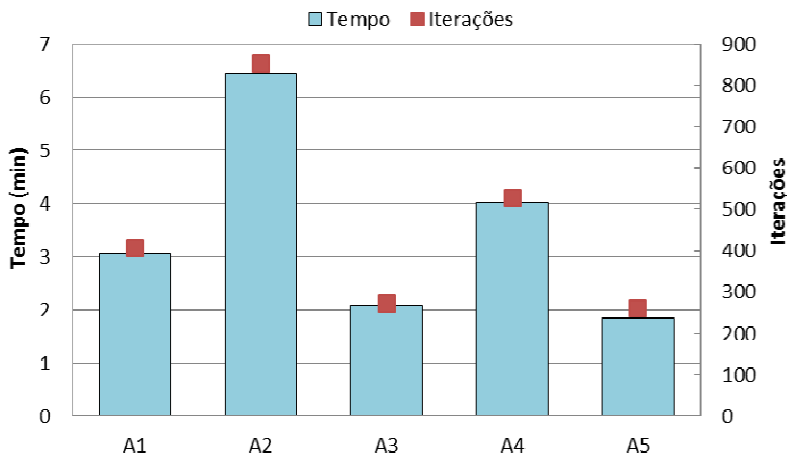


Figura 23: Tempo de processamento e iterações para as implementações da Estratégia II com os diferentes dados de entrada.

Os resultados da implementação desta estratégia foram comparados com os resultados do Caso Base para o fator de penalidade igual a 0,001, pois os valores finais da penalidade para cada implementação da Estratégia II situam-se nesta ordem de grandeza.

Optou-se por mostrar somente o comportamento dos parâmetros ilustrados na Figura 20 e Figura 21, nas primeiras iterações, pois, estes parâmetros apresentam poucas modificações nas iterações posteriores.

Este caso, comparado ao Caso Base, apresentou redução no número de iterações e menor tempo de processamento para atingir a solução do problema de otimização quando se utilizou a Árvore 5, como dado de entrada. Para os demais dados de entrada, os resultados foram semelhantes.

Observa-se nos resultados acima que os valores dos gradientes são mais elevados no começo do processo iterativo, comparado ao apresentado na Estratégia I para  $\mu = 0,001$ . Isto ocorre em função do valor inicial da penalidade da Estratégia II ser inferior a 0,001. À medida que a penalidade cresce, os valores de gradiente decrescem, a fim de compensar o aumento de penalidade e diminuir a influência deste parâmetro na função objetivo do PH.

Esta estratégia apresenta mais vantagens quanto à escolha do parâmetro ideal de penalidade, em virtude da estratégia adotada para alteração deste parâmetro iterativamente. Desta forma, um dos problemas relativos ao PH é contornado. Portanto, pode-se dizer que a

Estratégia II fornece uma proposta interessante para aplicação ao problema de POE.

### 3.4.1.3 *Estratégia III*

A Estratégia III utiliza um algoritmo de penalidade variável que consiste na alteração da penalidade a cada iteração, assim como a Estratégia II. Diferente da estratégia apresentada na seção anterior, alteração da penalidade na Estratégia III se dá através da multiplicação da mesma por uma constante arbitrada pelo usuário, conforme o problema de aplicação (NOCEDAL; WRIGHT; ROBINSON, 2006).

Conforme descrito na Seção 2.4.2, o algoritmo desta estratégia possui aplicação recorrente em técnicas de otimização que envolve parâmetro de penalidade. Além deste aspecto, outro motivo favorável à aplicação do algoritmo da Estratégia III é citado por Rodrigues (2003). Este autor descreve a respeito da facilidade de adaptação desta estratégia a diferentes tipos de problemas.

A implementação computacional da Estratégia III foi feita da maneira sugerida na bibliografia, descrita no fluxograma da Figura 5, com as modificações descritas na Seção 3.4.1, referentes ao critério de convergência e a constante de atualização do parâmetro de penalidade. Para a constante de atualização foi necessário usar um valor inferior ao valor recomendado na literatura,  $1,005^{15}$ , com a finalidade de evitar variações bruscas do parâmetro de penalidade. Desta forma, evita-se que o termo quadrático passe a competir com a função objetivo original, conforme descrito na Seção 3.4.1.1.

Esta estratégia utiliza as mesmas condições iniciais descritas na Estratégia II, ou seja, inicialização da penalidade com valor  $10^{-5}$ . Os resultados encontram-se nas figuras a seguir.

---

<sup>15</sup> Este valor foi escolhido empiricamente, após testar a convergência do algoritmo para diferentes fatores de atualização, inferiores ao valor recomendado pela literatura, que é de 100.

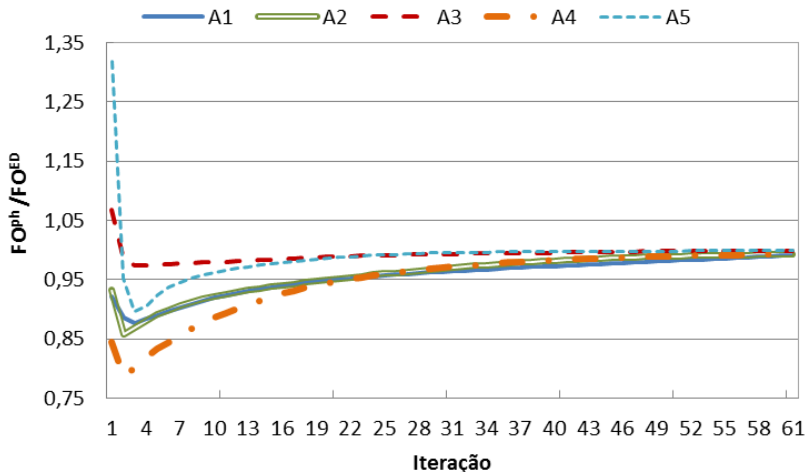


Figura 24: Relação entre a função objetivo do PH e função objetivo do ED ao longo das iterações.

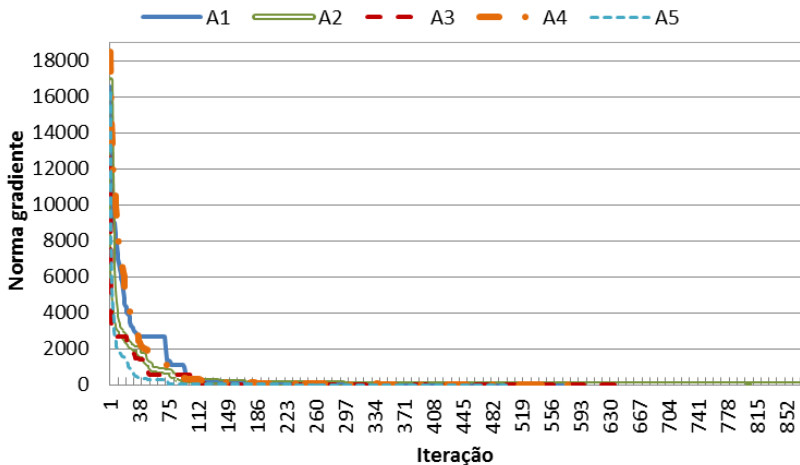


Figura 25: Norma do gradiente ao longo das iterações.

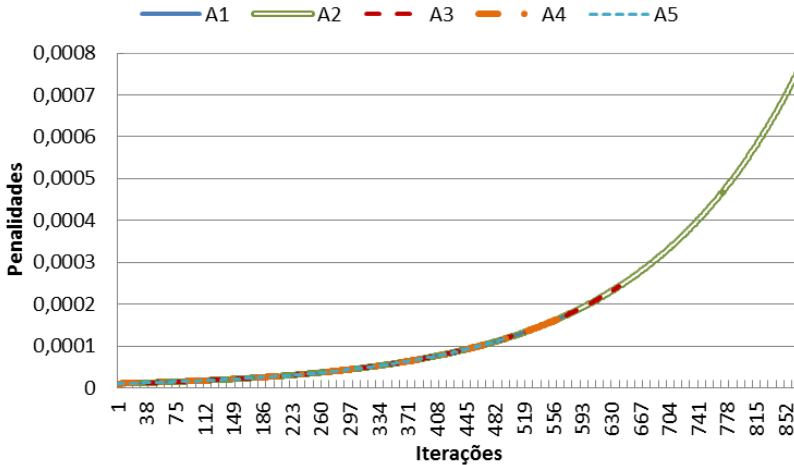


Figura 26: Penalidades ao longo das iterações.

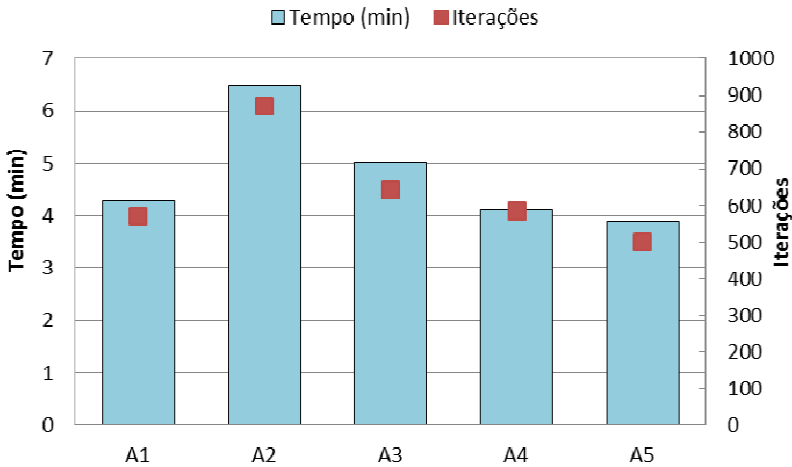


Figura 27: Tempo de processamento e iterações para cada implementação da Estratégia III

A convergência de todas as situações avaliadas nesta estratégia comprovam que o algoritmo possui viabilidade para aplicação no PH. Portanto o objetivo principal da avaliação desta estratégia foi atingido. Entretanto, o desempenho desta estratégia não foi tão satisfatório comparado à Estratégia II.



Em relação à Estratégia I, a Estratégia III não apresenta necessidade da escolha do parâmetro de penalidade. Quanto ao desempenho computacional, e qualidade de resultados, a Estratégia I apresenta mais vantagens de aplicação, por apresentar tempos de processamento menores, e utilizar menos iterações.

Ao comparar com a Estratégia III com a Estratégia II, observa-se o desempenho computacional inferior da Árvore 3. Esta situação apresentou tempo de processamento mais elevado, e mais que o dobro do número de iterações do resultado da aplicação da Estratégia II para estes mesmos dados.

A discrepância de resultados entre as duas estratégias deve-se à diferente estratégia adotada para alteração do parâmetro de penalidade. A alteração da penalidade na Estratégia III segue a tendência exponencial, com variações mais lentas para valores menores e variações mais bruscas para valores maiores, conforme pode ser observado na Figura 26. Isto influencia no comportamento do gradiente, que possui decréscimo mais lento nas iterações iniciais, descrito pela Figura 25. Já a Estratégia II utiliza uma estratégia de atualização da penalidade que depende do próprio gradiente, o que conduz a uma aceleração no decréscimo do valor do gradiente nas iterações iniciais.

Apesar da Estratégia III ser viável para aplicação ao PH, ainda possui pouca eficiência. Portanto, para permitir um desempenho computacional eficiente e proporcionar qualidade nos resultados, devem-se adotar heurísticas para tratamento do PH que utiliza desta estratégia.

#### *3.4.1.4 Estratégia IV*

A Estratégia IV é uma estratégia de penalidade fixa e se trata de uma modificação da Estratégia I. A Estratégia IV utiliza o escalonamento das restrições relaxadas na função objetivo do PH. A finalidade do escalonamento é evitar o mau condicionamento do problema de otimização.

Como a Estratégia IV utiliza penalidade fixa, não se tem conhecimento da faixa de valores de penalidades em que a convergência do problema ocorre. Logo, a Estratégia IV é avaliada para a mesma faixa de valores de penalidades descrita no Caso Base ( $10^{-5}$  a 10). Os resultados da implementação desta estratégia encontram-se nas figuras seguir.

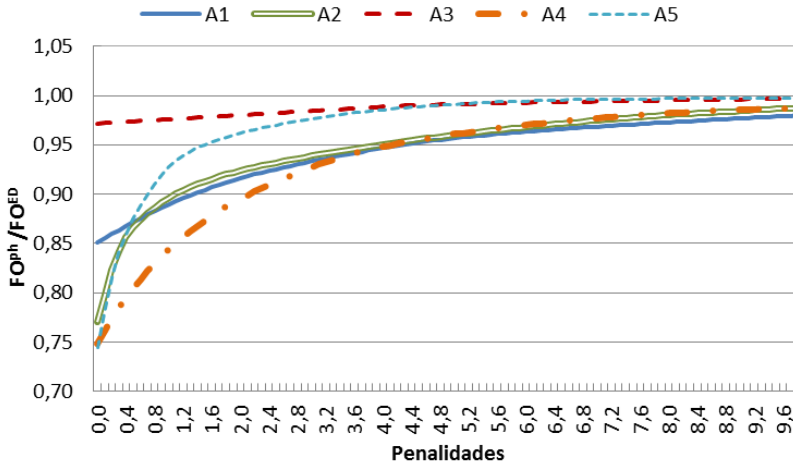


Figura 28: Relação entre função objetivo do PH e função objetivo do ED x penalidades.

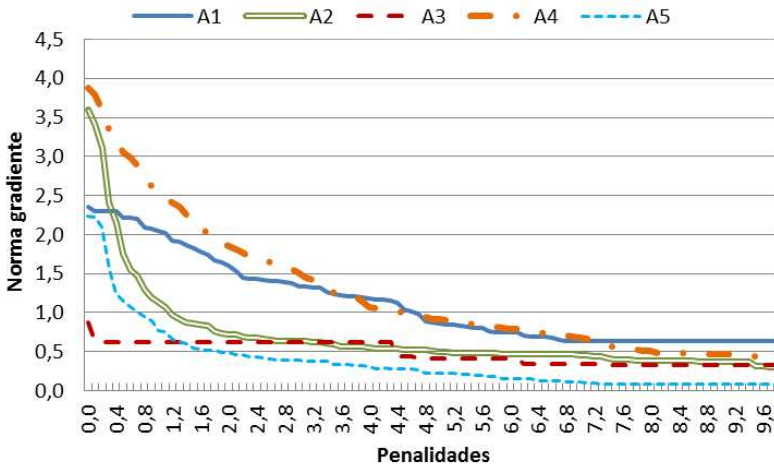


Figura 29: Norma do gradiente ao fim do processo iterativo x penalidades.

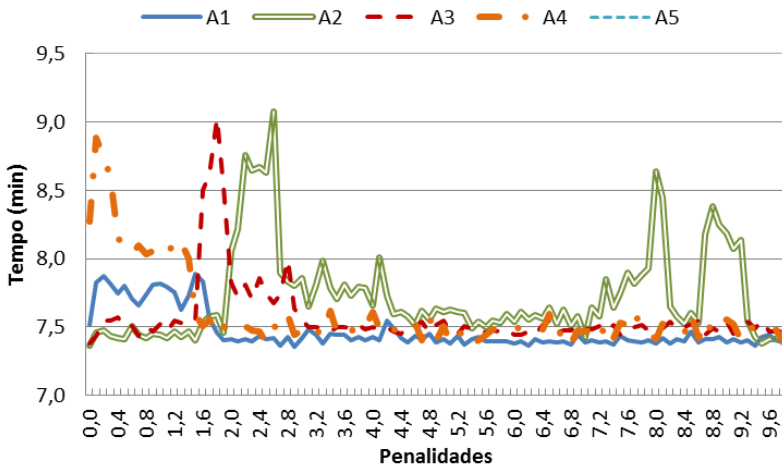


Figura 30: Tempo de processamento x penalidades.

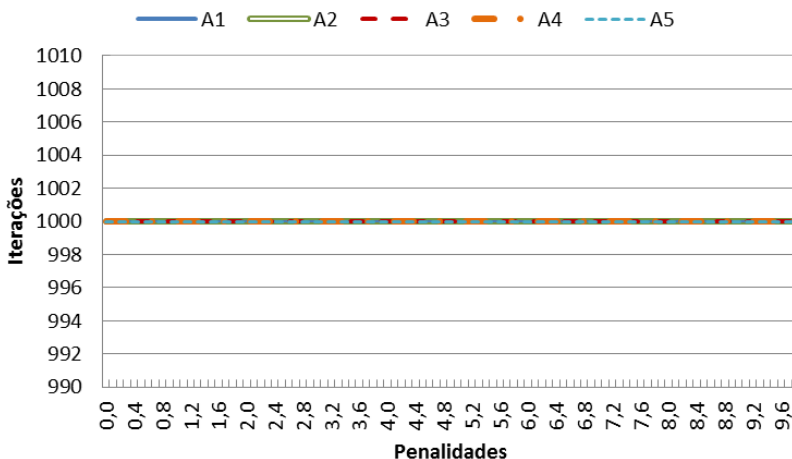


Figura 31: Iterações ao final do processo x penalidades.

Os resultados acima indicam que o problema não convergiu, pois o número de iterações atingiu o limite máximo. Além disso, os valores da função objetivo do PH não atingiram o valor do ED.

Para verificar o motivo pelo qual esta estratégia não atingiu a convergência para esta faixa de valores de penalidades, utiliza-se o

mesmo procedimento descrito na Estratégia I. Avalia-se a Estratégia IV para penalidade igual a 1. Os resultados encontram-se a seguir.

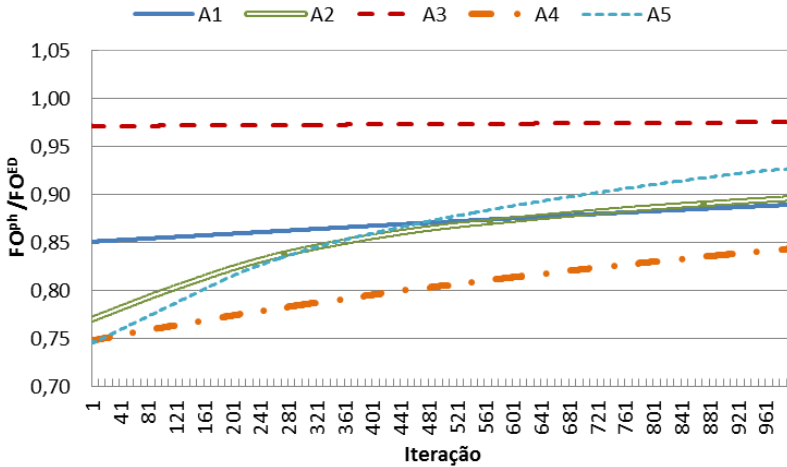


Figura 32: Relação entre a função objetivo do PH e função objetivo do ED a cada iteração ( $\mu=1$ ).

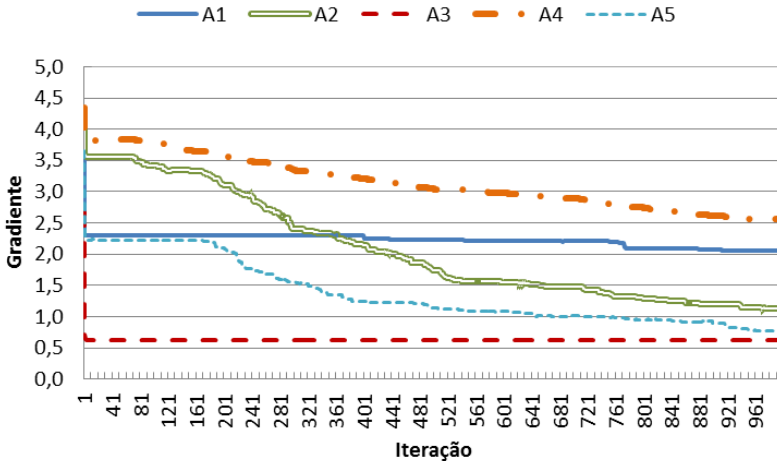


Figura 33: Gradiente a cada iteração ( $\mu=1$ ).

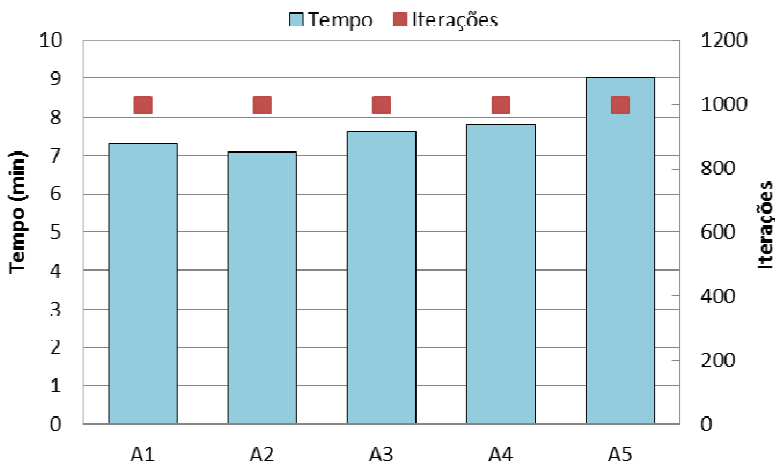


Figura 34: Tempo de processamento e iterações para cada implementação da Estratégia IV ( $\mu=1$ ).

Observa-se pelos resultados na Figura 33 que o gradiente, neste caso, diferente do apresentado na Estratégia I, apresentou tendência à estabilidade nas últimas iterações. Entretanto esta estabilidade ocorreu distante da tolerância de convergência. Desta forma o PH aplicado por essa estratégia não convergiu.

Portanto, a faixa de valores de penalidades para os quais ocorre a convergência do problema de otimização encontra-se mais elevados. Para verificar a localização desta faixa de valores, avaliou-se a Estratégia IV para uma faixa de valores de  $10^{-5}$  a  $10^4$ . Os resultados desta implementação encontram-se nas figuras seguir.

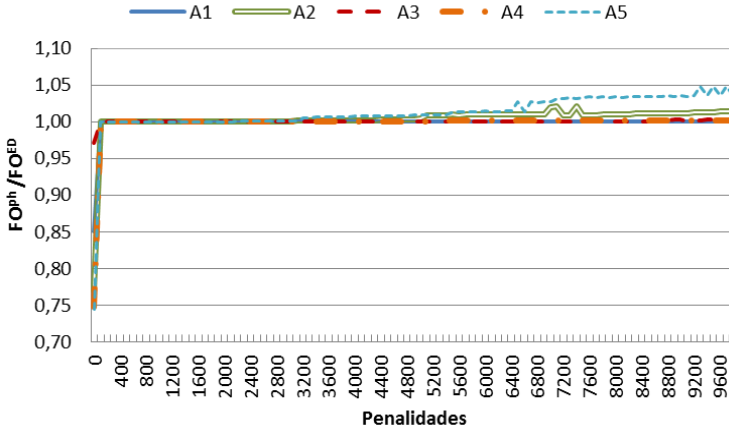


Figura 35: Relação entre função objetivo do PH e função objetivo do ED x Penalidades.

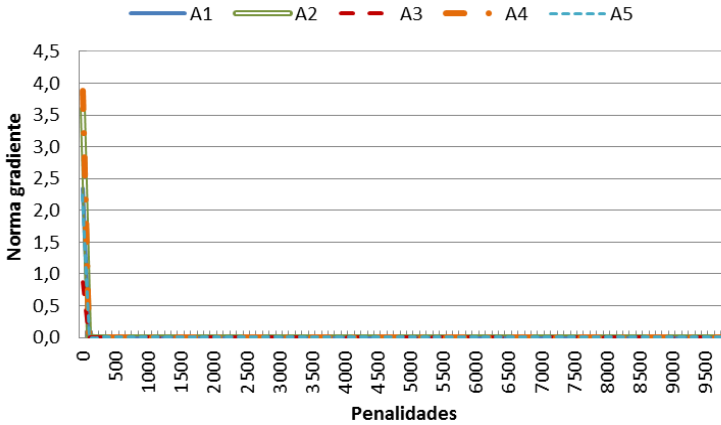


Figura 36: Gradiente x Penalidades.

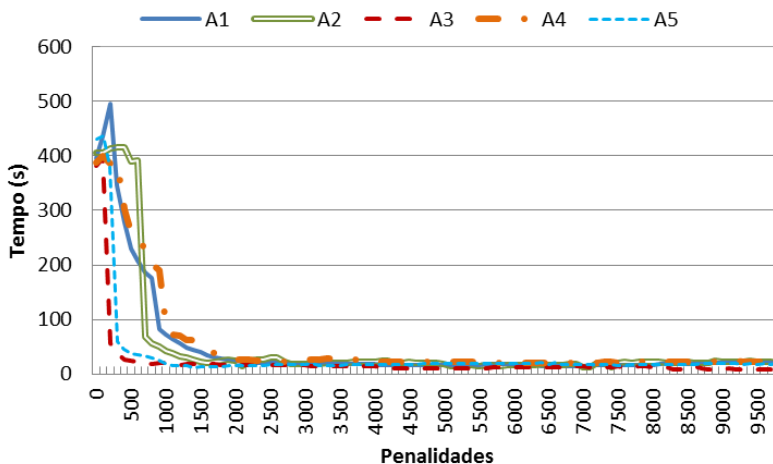


Figura 37: Tempo de Processamento x Penalidades.

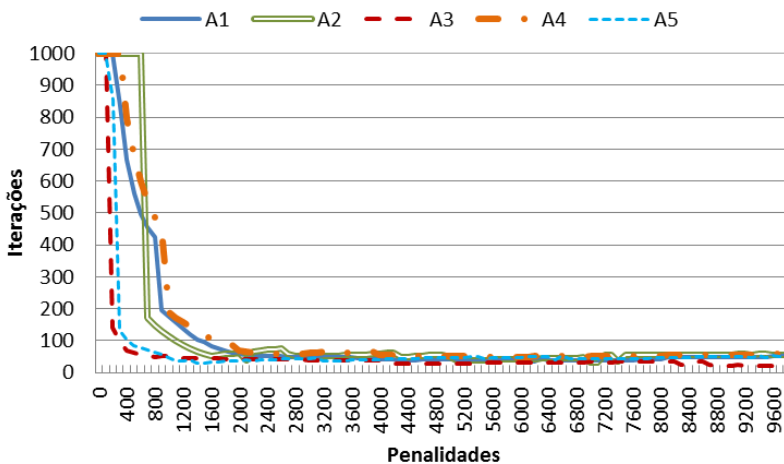


Figura 38: Iterações ao final do processo x Penalidades

Os resultados acima mostram um desempenho computacional melhor, com possibilidade de convergência do problema para altos valores de penalidades. Para a maioria das penalidades pertencentes à faixa de valores em que a convergência é atingida, menos de 100 iterações foram utilizadas e foram necessários menos de 30 segundos para a convergência ser estabelecida.

Com esta estratégia foi possível verificar a convergência mais rápida, e para valores de penalidades maiores, para o problema de POE em estudo. Isto é consequência do condicionamento do problema de otimização proporcionado pelo pivotamento das restrições de não antecipatividade.

Um exemplo deste comportamento é apresentado nas figuras a seguir, em que foi implementada a Estratégia IV para  $\mu = 3000$ .

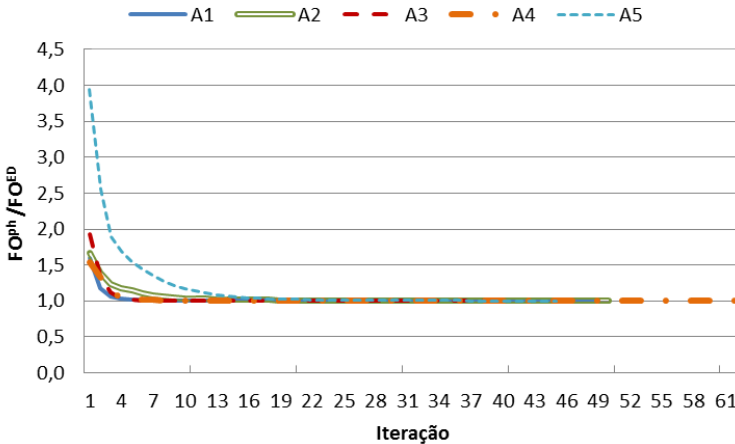


Figura 39: Relação entre a função objetivo do PH e função objetivo do ED a cada iteração ( $\mu=3000$ ).

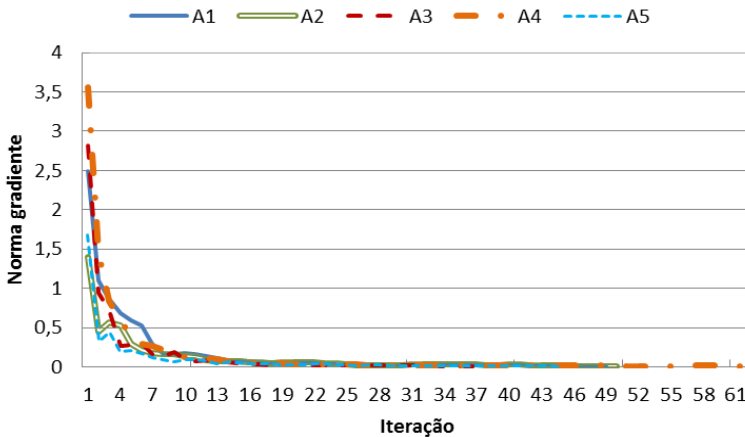


Figura 40: Gradiente a cada iteração ( $\mu=3000$ ).



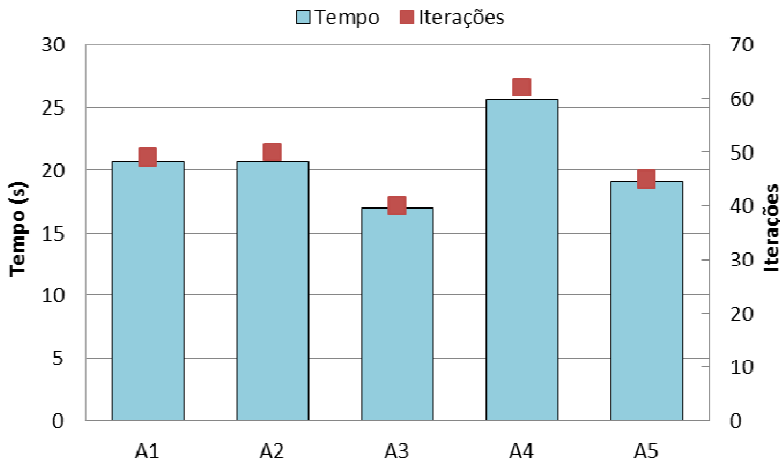


Figura 41: Tempo de processamento e iterações para cada implementação da Estratégia IV ( $\mu=3000$ ).

Ao se comparar a Estratégia IV com as demais avaliadas, nota-se apenas uma desvantagem desta estratégia não possuir uma heurística de alteração do fator de penalidade ao longo das iterações.

Outra característica desta estratégia que em algumas aplicações pode ser considerada uma desvantagem se refere à parada do algoritmo de PH antes de ocorrer a convergência deste. Chiche (2012) cita a presença desta ocorrência em seus resultados, para altos valores de penalidades, assim como pode ser observado na Figura 35, em especial com a Árvore 5. Entretanto, este problema pode ser contornado, ao se diminuir a tolerância de convergência do algoritmo, para garantir que este chegue a estabilização próxima da solução ótima. Esta característica é uma vantagem para aplicações que necessitem de soluções de alta precisão.

### 3.4.2 Análise da Solução Primal

Os resultados descritos nas seções anteriores mostraram que a solução dual do PH e suas distintas estratégias de aplicação apresentaram pouquíssimos desvios em relação à solução fornecida pelo ED.

Esta seção consiste em avaliar a solução primal do PH, em relação ao ED. A solução dual se refere somente ao valor da função de

custo de operação, e despreza os valores dos termos penalizados integrantes da função PH.

Ao comparar da relação da função PH com a função objetivo do ED apresentados na seção anterior com os gráficos das figuras abaixo desta seção observa-se que a influência do termo penalizado se fez presente apenas nas primeiras iterações. Entretanto esta não se sobrepôs aos valores da função de custo.

Quanto aos valores elevados apresentados no Caso Base para penalidades acima de 0,001, o termo penalizado não se sobrepôs aos valores da função custo. Ocorreu que os valores meta pouco variaram em relação aos valores da partida quente, em virtude da pouca variação que a direção de busca do algoritmo apresentou ao longo do processo iterativo.

Os resultados encontram-se nas figuras abaixo.

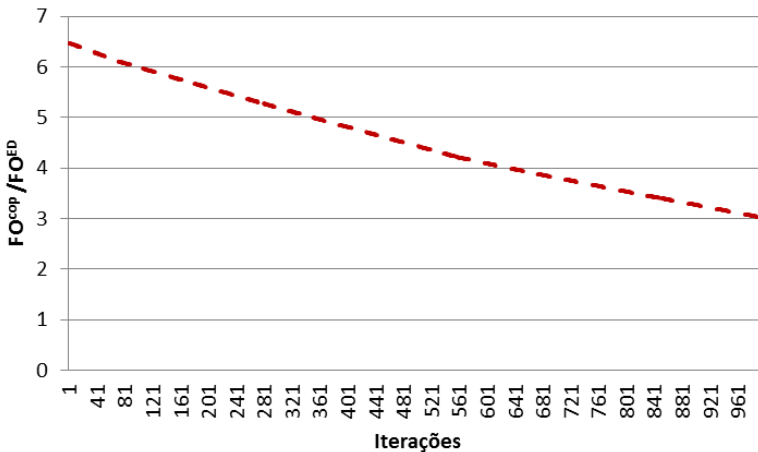


Figura 42: Relação entre a função primal do PH e a função objetivo do ED.  
Caso Base -  $\mu = 1$ .

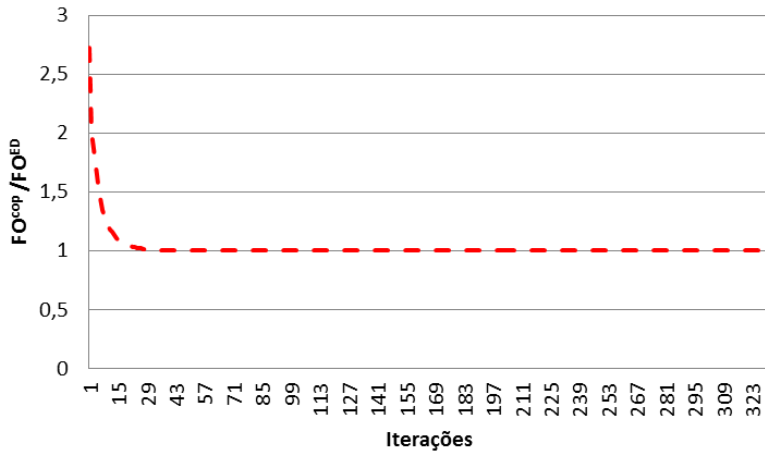


Figura 43: Relação entre a função primal do PH e a função objetivo do ED.  
Caso Base -  $\mu = 0,001$ .

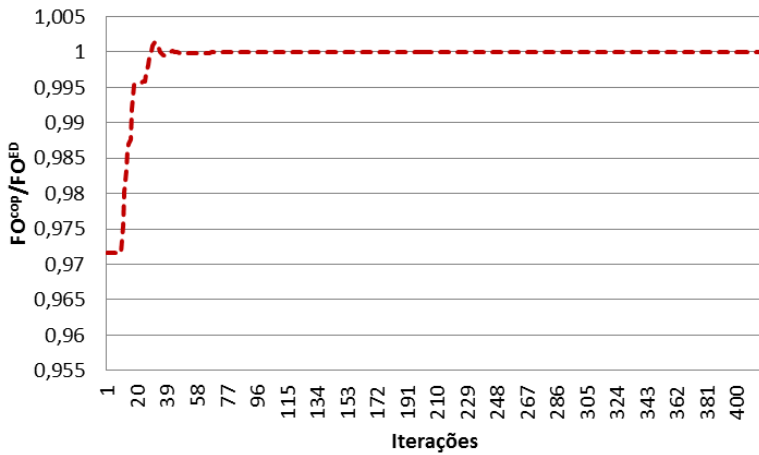


Figura 44: Relação entre a função primal do PH e a função objetivo do ED.  
Estratégia II.

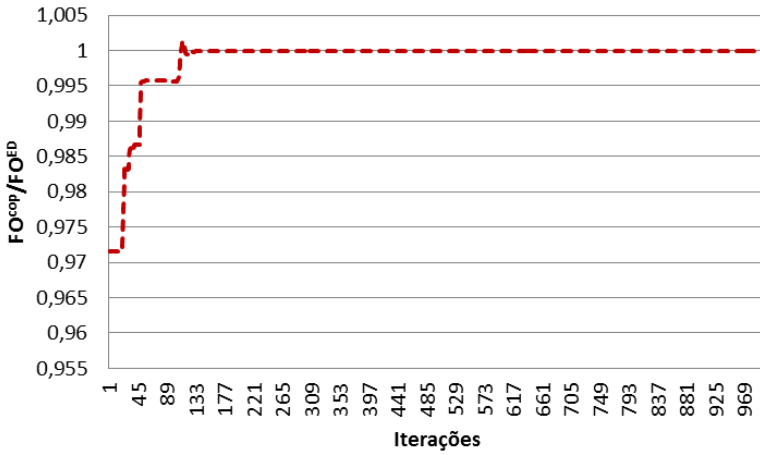


Figura 45: Relação entre a função primal do PH e a função objetivo do ED. Estratégia III.

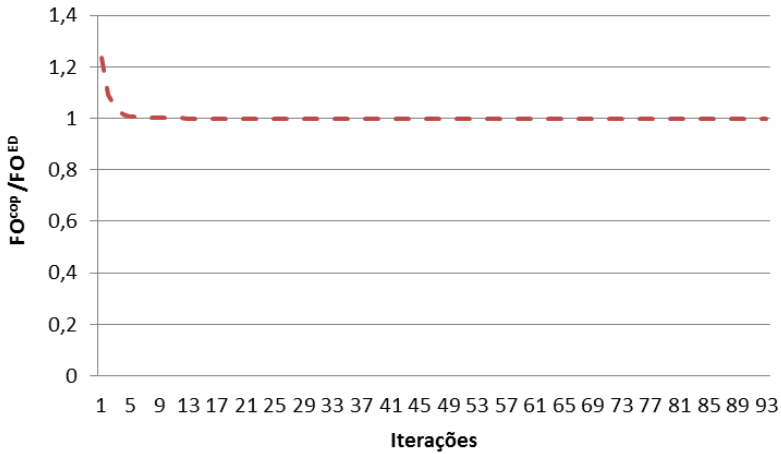


Figura 46: Relação entre a função primal do PH e a função objetivo do ED. Estratégia IV  $\mu = 3000$ .

### 3.4.3 Análise das Variáveis Primais

Esta seção consiste em avaliar a política de operação do POE resultante do algoritmo de PH. A política de operação do POE é fornecida pelo conjunto de variáveis primais deste problema.

Pelos resultados apresentados anteriormente, observa-se que tanto a solução primal do PH, quanto a solução dual se igualaram à solução do ED.

Ao se comparar as variáveis primais resultantes do PH com as variáveis primais resultantes do ED, nota-se que estas políticas de operação são praticamente iguais ao primeiro estágio de tempo. Entretanto a alocação de recursos varia ao longo dos estágios de tempo avaliados. A alocação se torna mais discrepante no último estágio de tempo. O PH prioriza uma solução que mantém os reservatórios vazios em todos os estágios finais de tempo, enquanto o ED mantém os reservatórios acima do limite mínimo de operação para quase todos os cenários. As variáveis que apresentaram os maiores desvios de alocação ao longo do algoritmo foram as variáveis de vazão turbinada, e potência das UTEs, em especial a UTE 3.

No modelo de problema de POE elaborado para este trabalho, optou-se por não inserir estas variáveis nas restrições de não antecipatividade a fim de melhorar o desempenho computacional do algoritmo de PH. Este pode ser um dos motivos pelos quais as variáveis primais, resultantes do PH, não se igualaram as variáveis primais do ED, uma vez que a solução ótima apresentada pelo PH tende a satisfazer a aproximação das variáveis primais por seus valores meta. Esta relação corresponde ao gradiente da função objetivo do problema.

Todas as estratégias apresentaram resultados praticamente iguais. Por este motivo serão apresentadas somente as comparações com as variáveis primais resultantes do Caso Base, que se encontram a seguir.

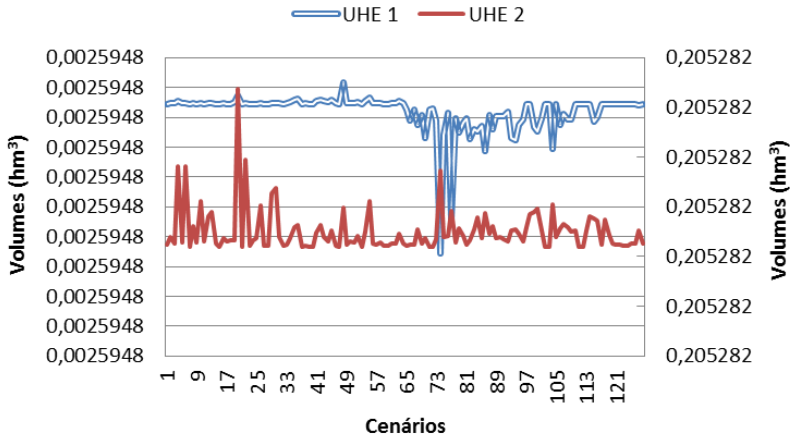


Figura 47: Desvios entre variáveis de volumes ED e volumes PH. Estágio 1 - Estratégia I,  $\mu=0,001$ .

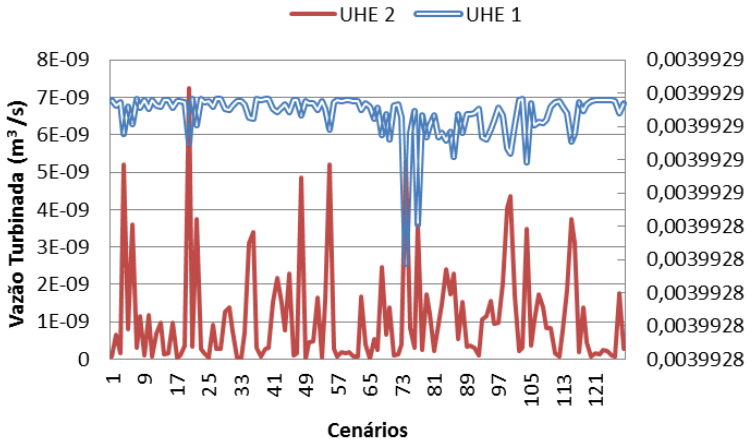


Figura 48: Desvios entre variáveis de vazão turbinada ED e vazão turbinada PH. Estágio 1. Estratégia I -  $\mu=0,001$ .

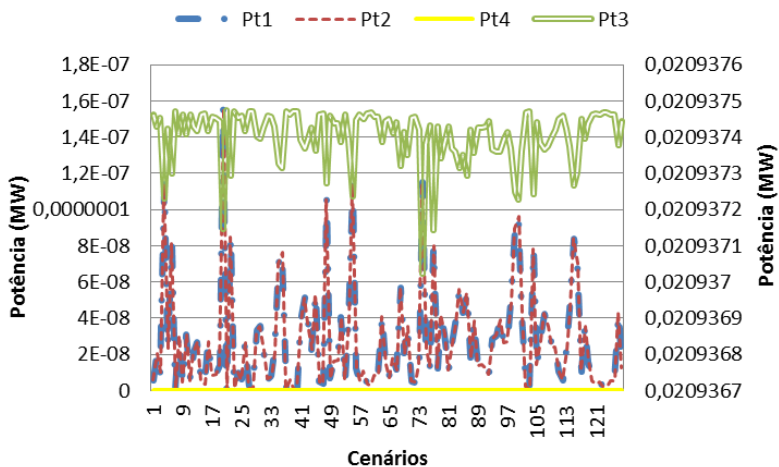


Figura 49: Desvios entre variáveis de potência UTEs ED e potência UTEs PH. Estágio 1. Estratégia I -  $\mu=0,001$ .

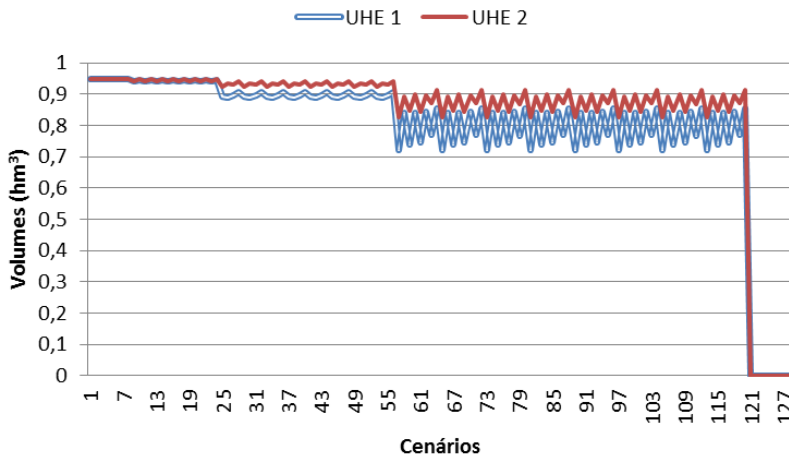


Figura 50: Desvios entre variáveis de volumes ED e volumes PH. Estágio 8. Estratégia I -  $\mu=0,001$ .

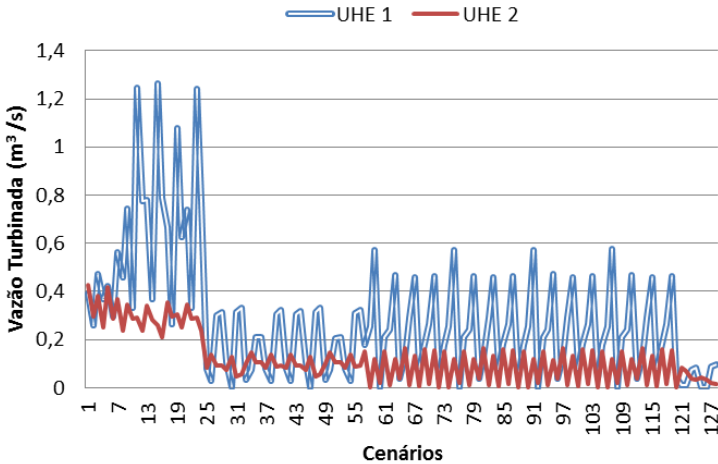


Figura 51: Desvios entre variáveis de vazão turbinada ED e vazão turbinada PH. Estágio 8. Estratégia I -  $\mu=0,001$ .

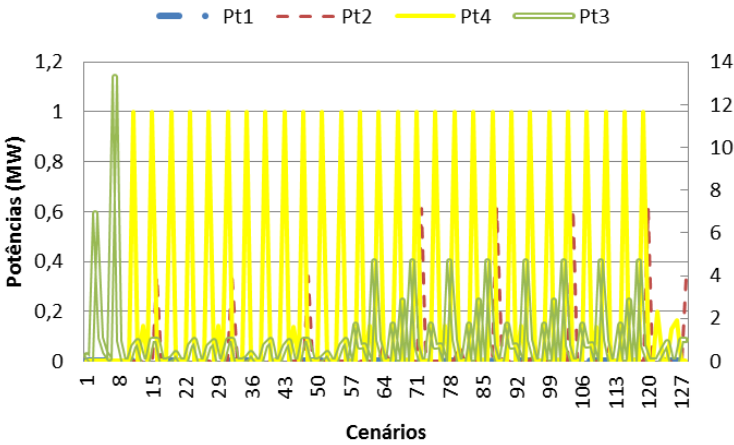


Figura 52: Desvios entre variáveis de potência UTEs ED e potência UTEs PH. Estágio 8. Estratégia I -  $\mu=0,001$ .

#### 3.4.4 Sugestão para Condições de Partida Quente.

A sugestão para condições de partida quente, descrita na Seção 2.4.2, visa estabelecer melhores condições iniciais para o PH.



Conforme descrito anteriormente, estas condições iniciais, ou condições de partida quente, são baseadas nas condições iniciais utilizadas por Carpentier, Gendreau e Bastin (2011), que utilizam os resultados de 128 PLs determinísticos, cada um referente a um cenário de afluência, para calcular os valores meta de volumes iniciais. Os multiplicadores de Lagrange são inicializados com valor zero.

Para comparação com os resultados anteriores, aplica-se a proposta de condições de partida quente às mesmas estratégias apresentadas na seção 3.4.1.

#### 3.4.4.1 Estratégia I

Ao se aplicar as condições iniciais da sugestão de partida quente à Estratégia I, notam-se melhorias quanto ao desempenho computacional para a maioria dos casos analisados. É interessante lembrar que a faixa de valores para os quais ocorre a convergência nessa estratégia situa-se entre  $10^{-5}$  a 0,001. Os gráficos que demonstram estes resultados encontram-se a seguir.

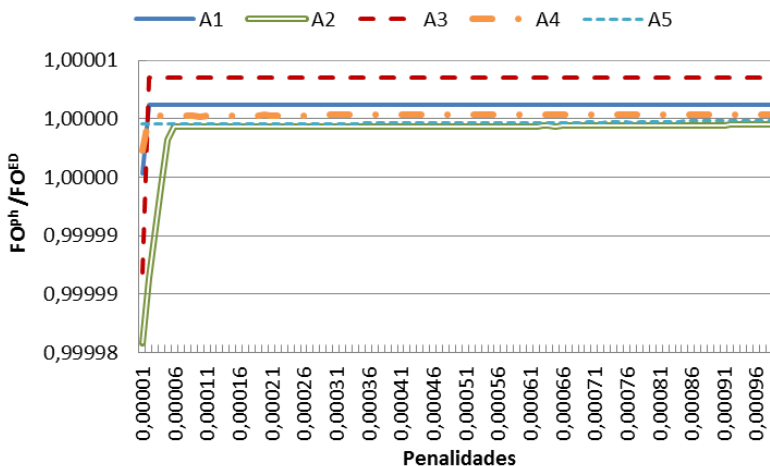


Figura 53: Relação entre a função objetivo do PH e função objetivo do ED x Penalidades – condições iniciais da sugestão de partida quente.

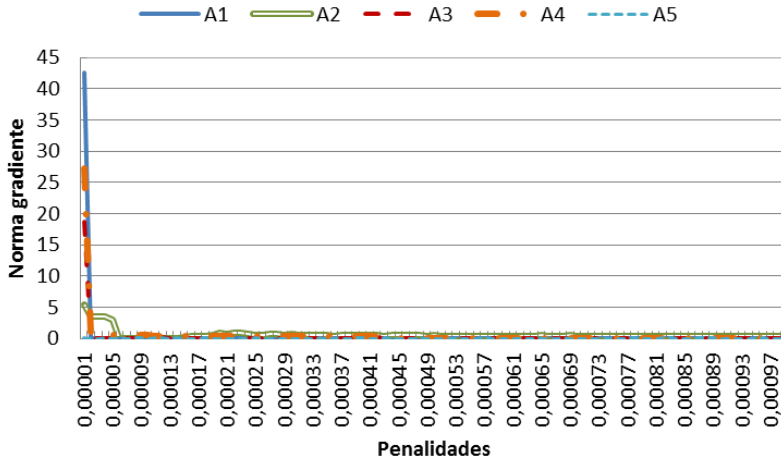


Figura 54: Norma do gradiente ao final do processo x penalidades - condições iniciais sugeridas.

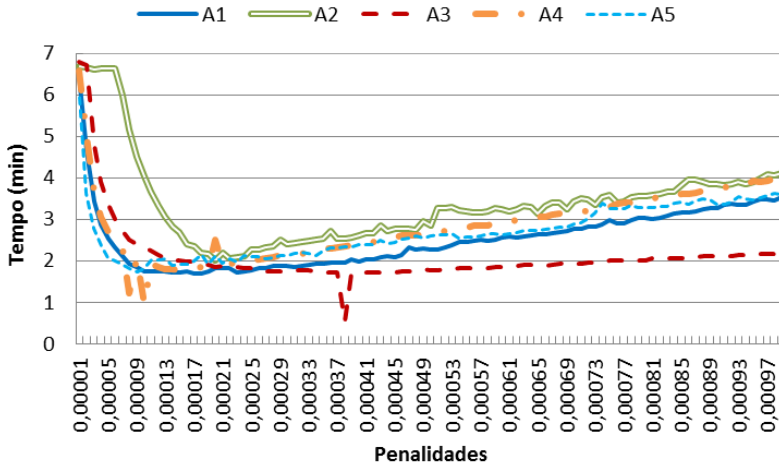


Figura 55: Tempo de processamento x penalidades - condições iniciais sugeridas.

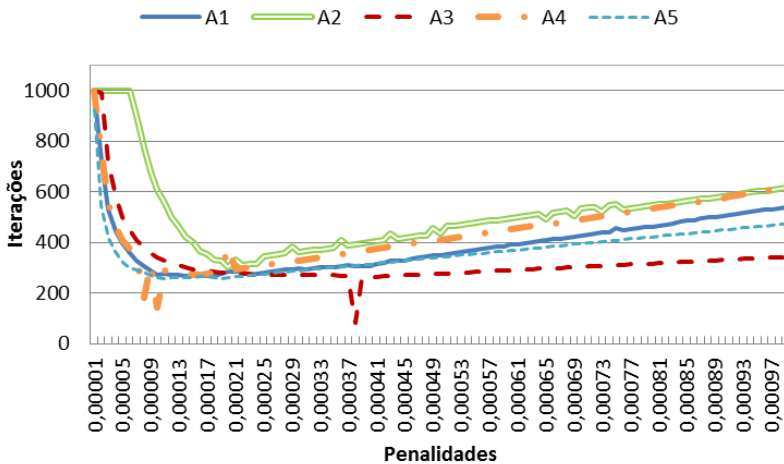


Figura 56: Iterações ao final do processo x penalidades - condições iniciais sugeridas.

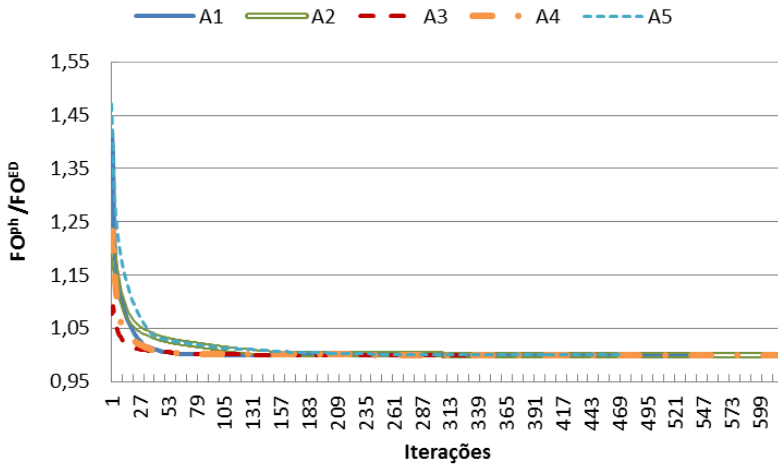


Figura 57: Relação entre a função objetivo do PH e função objetivo do ED a cada iteração ( $\mu=0,001$ ) - condições iniciais sugeridas.

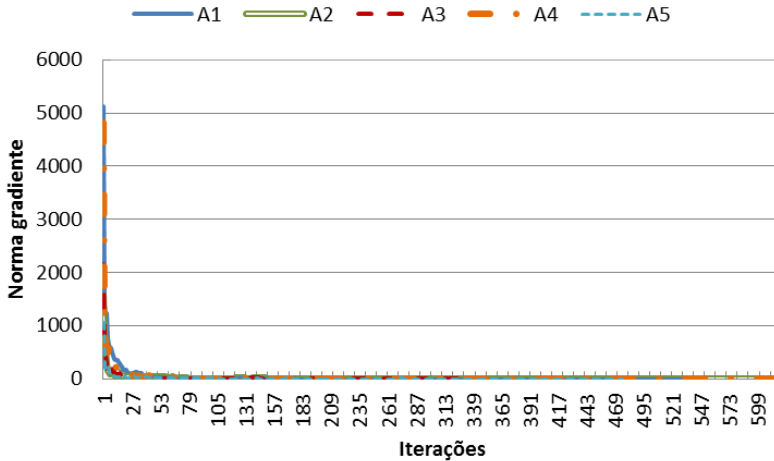


Figura 58: Norma do gradiente a cada iteração ( $\mu = 0,001$ ) - condições iniciais sugeridas.

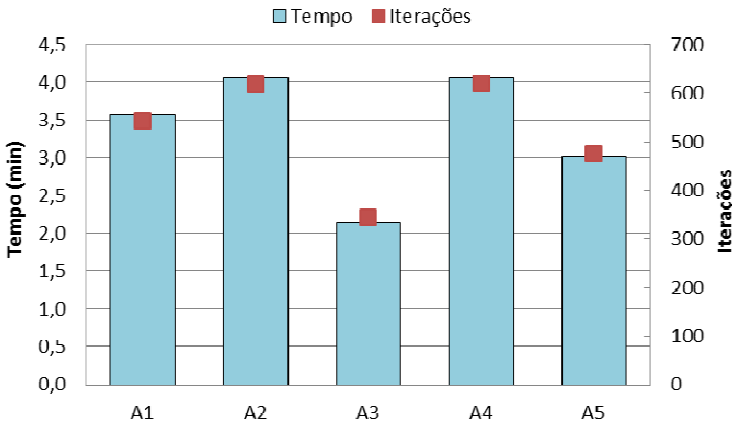


Figura 59: Tempo de processamento e iterações x dados de entrada - condições iniciais sugeridas ( $\mu = 0,001$ ).

As condições de partida quente sugeridas atenuaram o valor do gradiente. Isto ocorre, pois estas condições iniciais aproximam o problema de otimização da solução ótima. Logo é necessário estabelecer uma direção de busca de menor intensidade para se encontrar a solução ótima, o que facilita a convergência do algoritmo de PH. Por este

motivo, a maioria dos casos apresentou melhorias quanto ao desempenho computacional. As Estratégias I implementadas com as Árvores 2, 4 e 5 foram as que apresentaram melhorias no desempenho computacional, conforme descrito na Figura 59.

### 3.4.4.2 Estratégia II

O uso das condições iniciais sugeridas aplicadas à Estratégia II trouxe pequenos benefícios quanto ao desempenho computacional, em virtude do melhor condicionamento do problema de otimização. Os resultados encontram-se nas figuras abaixo.

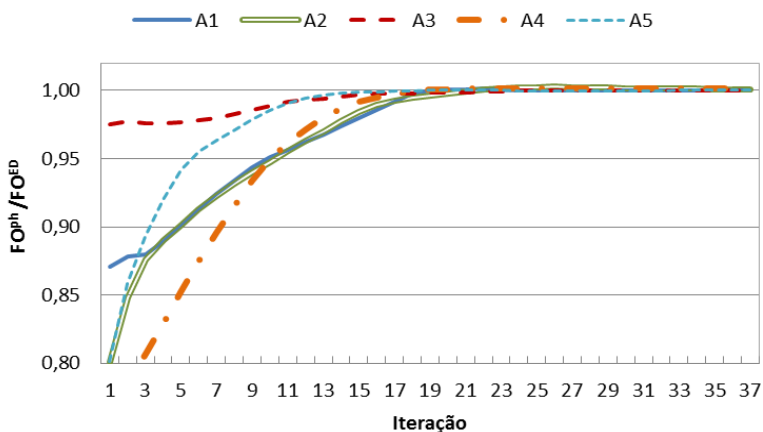


Figura 60: Detalhamento da relação entre função objetivo do PH e função objetivo do ED ao longo das iterações – condições iniciais sugeridas.

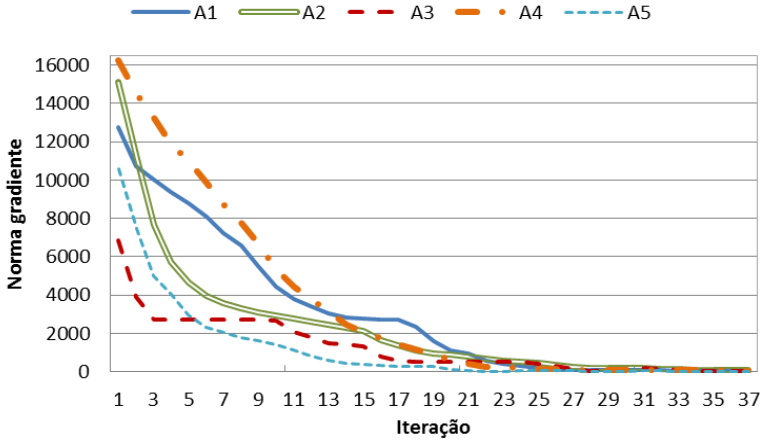


Figura 61: Detalhamento da norma do gradiente ao longo das iterações – condições iniciais sugeridas.

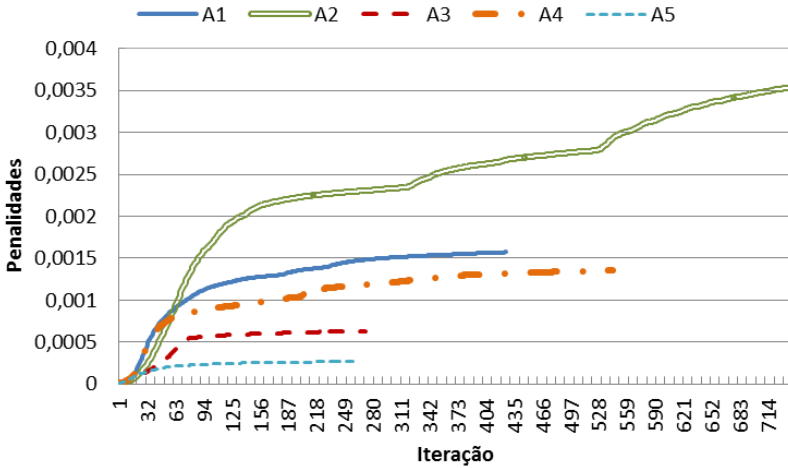


Figura 62: Penalidades ao longo das iterações – condições iniciais sugeridas.

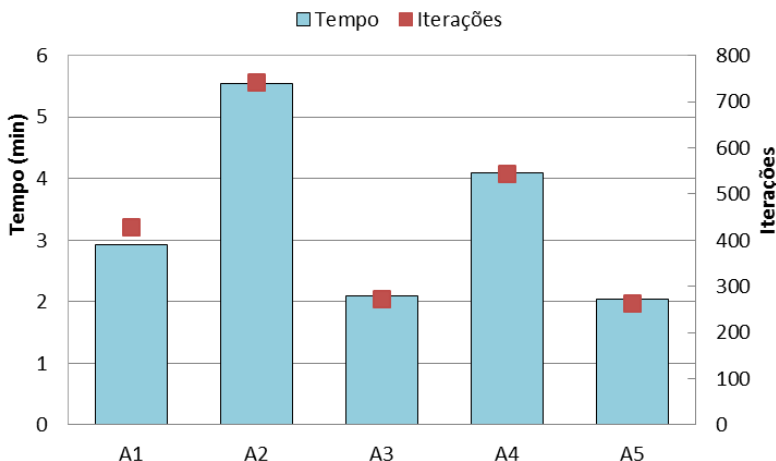


Figura 63: Tempo de processamento e iterações para cada implementação da Estratégia II - condições iniciais sugeridas.

A implementação da Estratégia II na condição avaliada nesta seção, e com o uso dos dados de entrada da Árvore 2, apresentou redução de 112 iterações. As demais árvores implementadas com a Estratégia II praticamente não apresentou mudanças quanto ao desempenho computacional.

Estas condições de partida quente fazem com que o problema demande menos tempo e menos iterações para alcançar a solução ótima pois aproxima o problema da solução ótima. Isto pode ser notado pela ausência de picos de valores iniciais da função objetivo, conforme pode ser demonstrado na Figura 60. As condições de partida quente da Proposta 2 diminuiu a influência do termo penalizado sobre o valor da função objetivo ao longo do processo iterativo.

Para melhorar o desempenho computacional da Estratégia II, além de implementá-la com as condições iniciais sugeridas, deve-se aplicar estratégias que proporcionem melhor condicionamento do PH desta estratégia.

#### 3.4.4.3 Estratégia III

Os resultados observados a partir da implementação da Estratégia III submetida às condições iniciais sugeridas apresentaram melhorias consideráveis quanto ao desempenho computacional, conforme pode ser observado nos resultados a seguir.

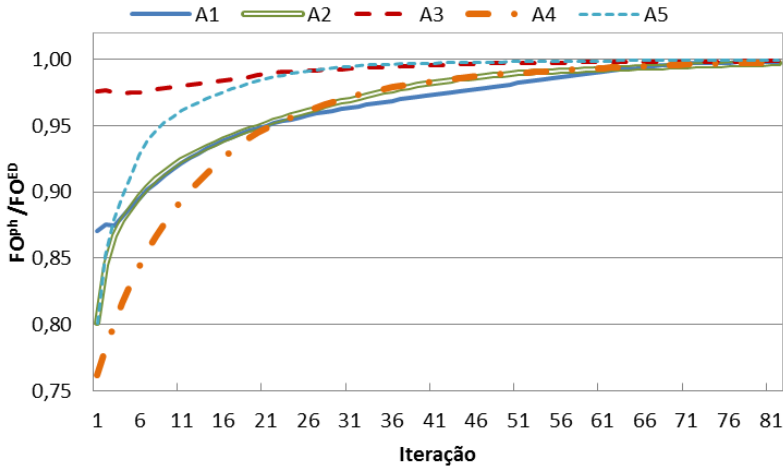


Figura 64: Relação entre função objetivo do PH e função objetivo do ED ao longo das iterações – condições iniciais sugeridas.

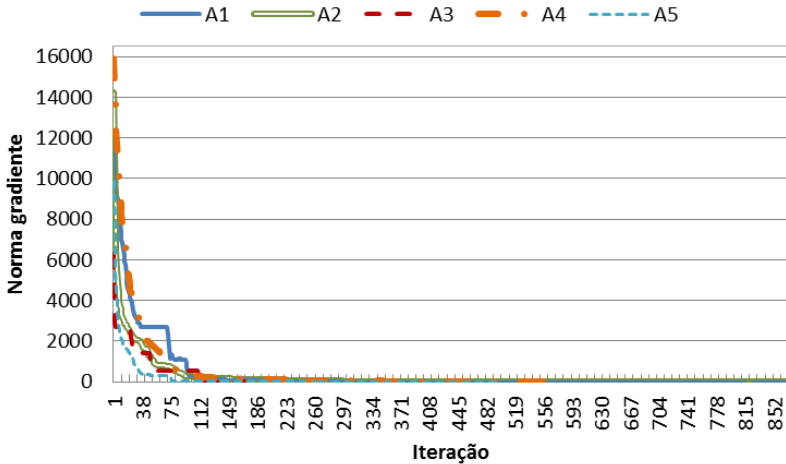


Figura 65: Gradiente ao longo das iterações – condições iniciais sugeridas.



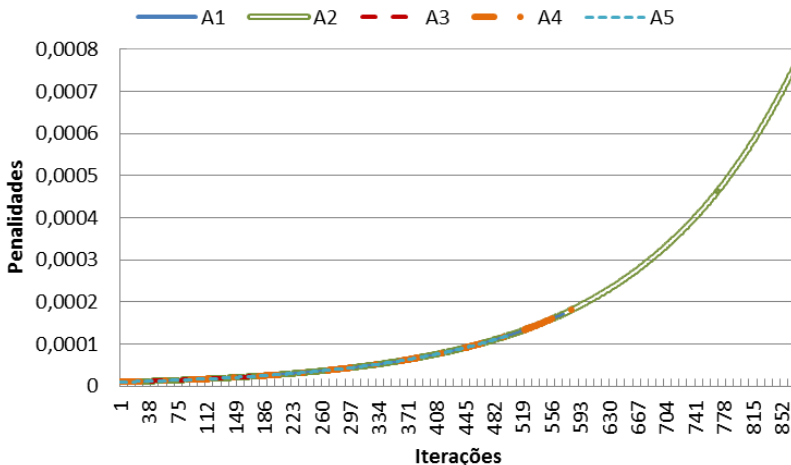


Figura 66: Penalidades ao longo das iterações – condições iniciais sugeridas.

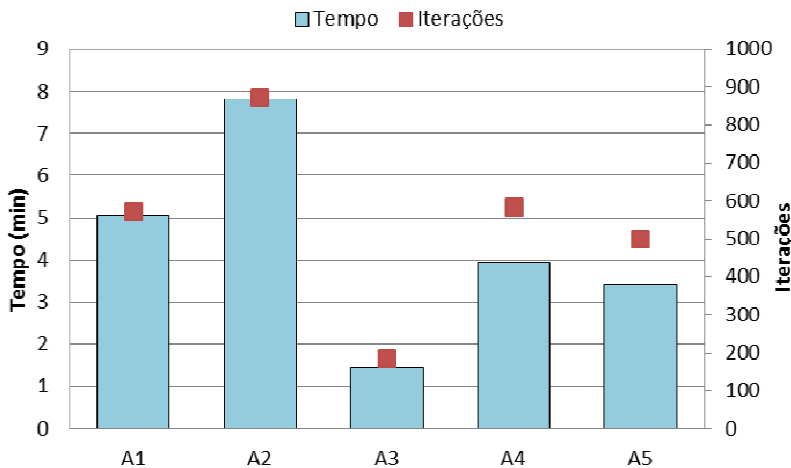


Figura 67: Tempo de processamento e iterações para cada implementação da Estratégia III - condições iniciais sugeridas.

A diferença entre os resultados da Estratégia III submetida às condições iniciais sugeridas e Estratégia III submetida às condições de 50% do volume útil máximo, ocorre pelo fato de a Árvore 3 ter apresentado melhorias expressivas no desempenho computacional na

primeira situação. O número de iterações da implementação da Estratégia III, com estes dados, e sujeita às condições iniciais sugeridas passou para 184, e houve uma redução de 386 iterações. Consequentemente houve redução de tempo de processamento significativa. Nas demais iterações o desempenho computacional se manteve praticamente invariável, com o acréscimo de uma única iteração.

Da mesma forma que o ocorrido na Estratégia II, a Estratégia III apresentou melhorias quanto ao desempenho computacional em razão da aproximação das condições iniciais do problema com a solução ótima, proporcionada pela condição de partida quente. Os efeitos proporcionados por esta condição de partida quente na Estratégia III foram os mesmos apresentados na Estratégia II, redução da influência do termo penalizado sobre o valor da função objetivo.

Por fim, observa-se que a Estratégia III possui maior viabilidade de aplicação quando combinada com as condições iniciais sugeridas quando comparada ao uso das condições iniciais descritas na seção 3.4.1.

#### *3.4.4.4 Estratégia IV*

A Estratégia IV apresentou resultados satisfatórios em relação à implementação sem as condições iniciais sugeridas, quanto ao desempenho computacional para a maioria dos casos.

Em razão dos resultados expressivos referentes à melhoria do desempenho computacional a partir do uso do escalonamento das restrições de não antecipatividade, as mudanças de desempenho proporcionados pelo uso das condições de partida quente da Proposta 2, foram menos intensos, porém consideráveis.

Avaliou-se esta estratégia com as condições iniciais sugeridas somente para a faixa de valores de penalidades em que ocorre a convergência e para a situação de  $\mu = 3000$ . Os resultados encontram-se a seguir.

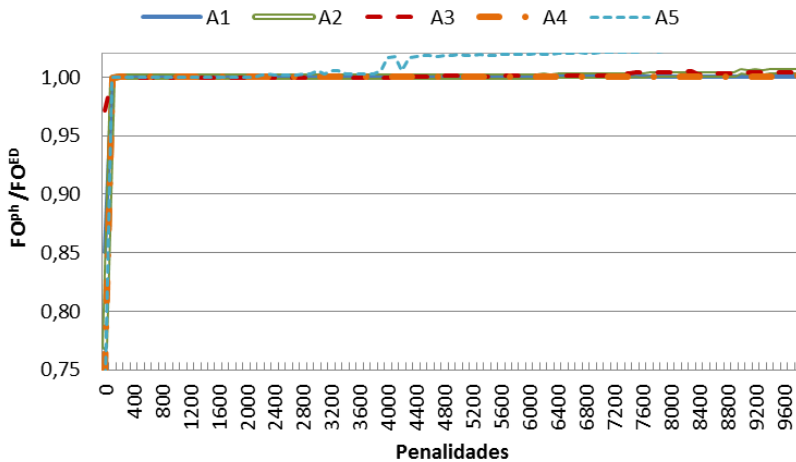


Figura 68: Relação entre função objetivo do PH e função objetivo do ED x Penalidades.

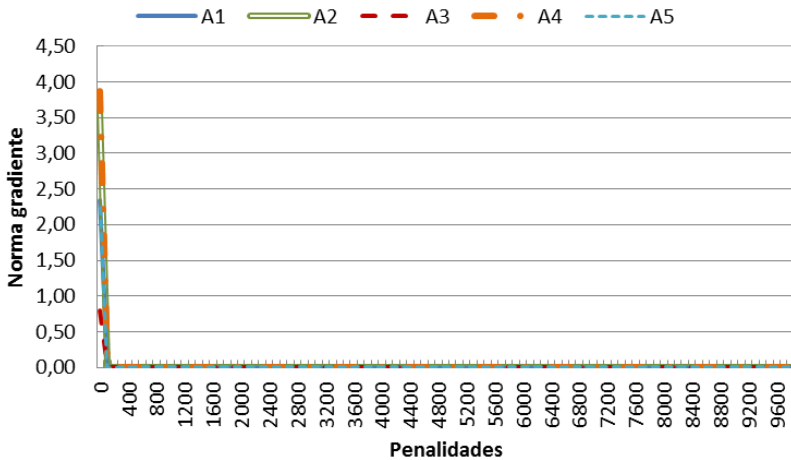


Figura 69: Norma do gradiente x penalidades.

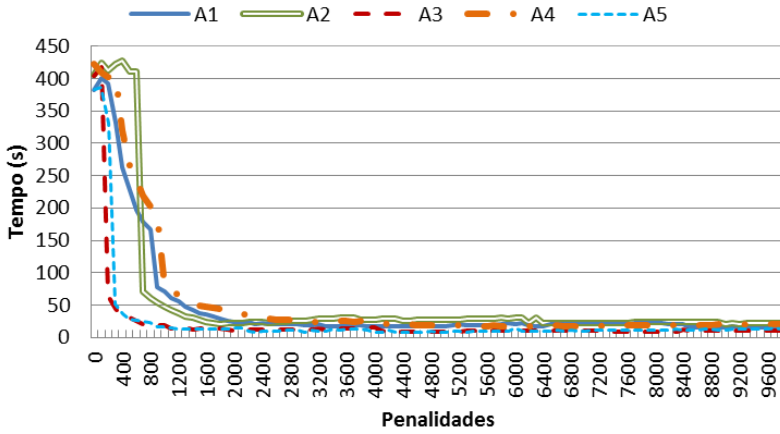


Figura 70: Tempo de Processamento x Penalidades.

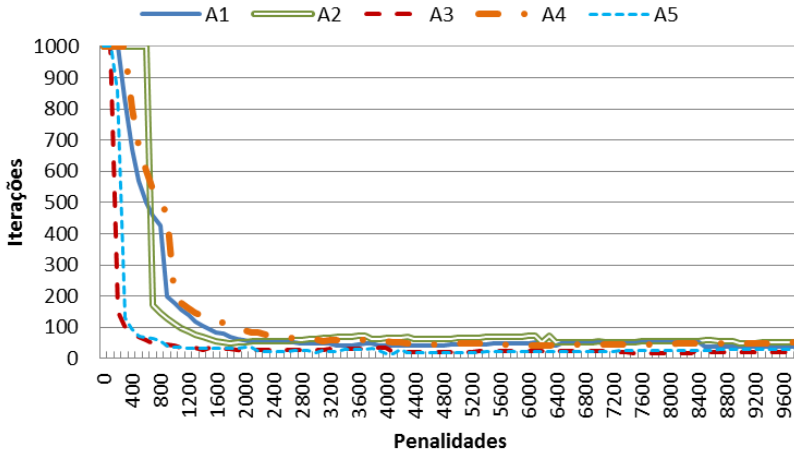


Figura 71: Iterações x penalidades

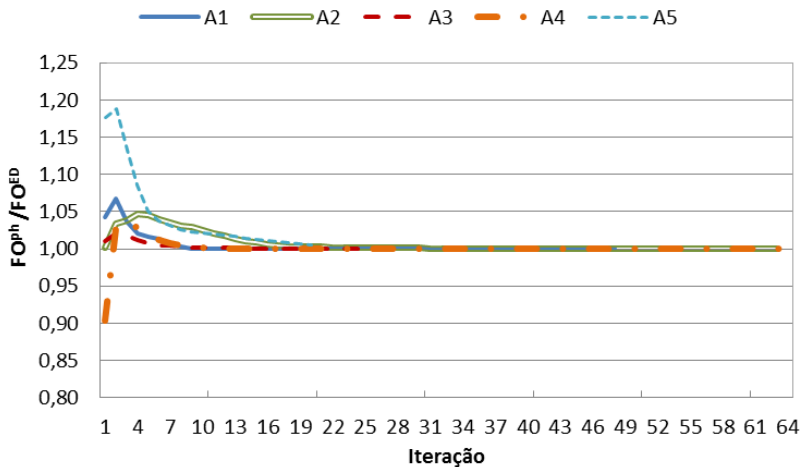


Figura 72: Relação entre a função objetivo do PH e função objetivo do ED a cada iteração ( $\mu=3000$ ).

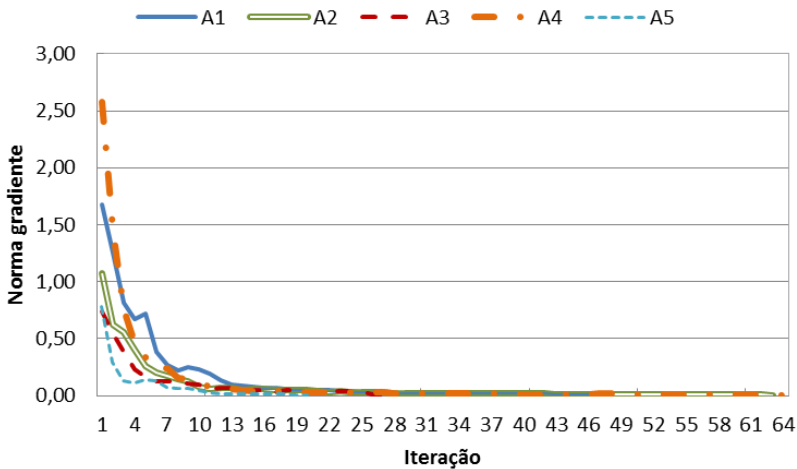


Figura 73: Norma gradiente a cada iteração ( $\mu=3000$ ).

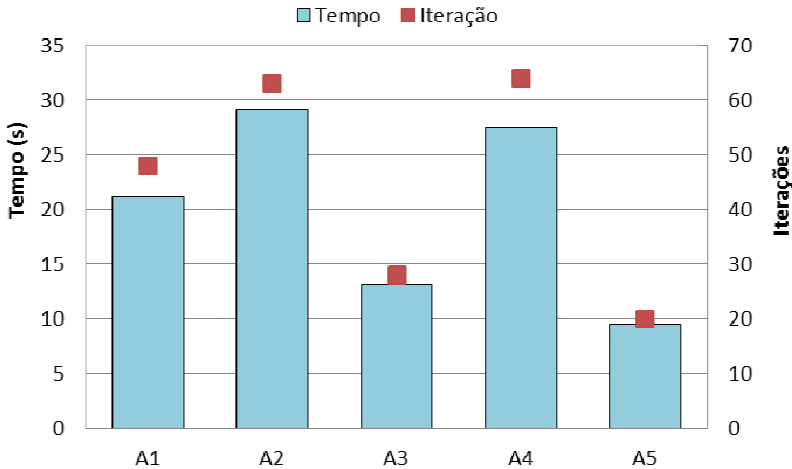


Figura 74: Tempo de processamento e iterações para cada implementação da Estratégia IV ( $\mu=3000$ ).

Dentre as alterações promovidas pelas condições iniciais sugeridas, estão a diminuição da norma do gradiente, conforme observado na Figura 73, em razão dos motivos já citados anteriormente, nas seções anteriores. Isto influenciou no desempenho computacional das implementações da Estratégia IV realizadas com as Árvores 3 e 5, conforme pode ser observado na Figura 74. Nestes dois casos, a redução do número de iterações caiu pela metade. Para os demais casos, foi observado o acréscimo de até três iterações, decréscimo pouco significativo comparado a melhoria nos casos anteriores.

Conclui-se que as condições iniciais sugeridas proporcionam melhor condicionamento da técnica de PH, para diferentes estratégias. Além do uso do escalonamento, foi possível iniciar o problema de otimização mais próximo da solução ótima.

Portanto, faz-se interessante a aplicação das condições iniciais da sugeridas para condicionar melhor os problemas de otimização.

### 3.5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÃO

O critério de parada sugerido neste trabalho, com uso das médias móveis tornou a convergência de todas as estratégias eficiente. Os resultados apresentados sugerem a viabilidade de aplicação deste critério de parada de forma eficaz. Conforme dito anteriormente, optou-

se por não utilizar os multiplicadores de Lagrange neste critério de parada. Esta medida foi adotada em razão do caráter oscilatório que o problema de POE em estudo apresentava para estes parâmetros. Portanto, a estratégia de médias móveis, que utiliza a norma da diferença do valor da função objetivo é interessante para auxiliar na parada do algoritmo.

Além do PH aplicado ao POE por estratégias já empregadas a este tipo de problema (Estratégias I e II), as estratégias adaptadas para resolução destes problemas apresentaram potencial de resolução (Estratégias III e IV). Com o advento das condições de partida quente sugeridas, que permitiram a atenuação dos valores da norma do gradiente, a resolução do problema de POE por estas estratégias foi mais eficiente. Tais condições de partida quente favoreceram o desempenho dos algoritmos aplicados ao POE.

A Estratégia IV condicionou melhor o problema de otimização ao realizar o escalonamento das condições de não antecipatividade. Esta medida fez com que o problema deixasse de convergir para baixos valores de penalidades. O escalonamento assegura a característica de diferenciabilidade do PH e tende a evitar eventuais dificuldades de convergência.

Por meio dessa estratégia, mesmo para um problema mal condicionado, como o apresentado neste trabalho, foi possível preservar as características originais do algoritmo de PH. Todavia este método carece de recursos para corrigir as dificuldades relacionada à escolha eficiente do parâmetro de penalidade.





## 4 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho faz menção ao uso de artifícios matemáticos para o algoritmo de *Progressive Hedging* (PH) aplicado ao problema de Planejamento da Operação Energética (POE). O foco da literatura é avaliar a viabilidade de aplicação do PH de forma geral, por meio das estratégias descritas em referências da literatura e por outras propostas. Além de avaliar as estratégias destinadas a resolver problemas de POE se propôs a adaptação de duas estratégias para a resolução de problemas desta natureza. Estas são as estratégias propostas por Nocedal, Wright e Robinson (2006), e Chiche, Gilbert e Porcheron (2011).

Associou-se cada uma destas quatro estratégias, a uma proposta de inicialização dos valores meta, com a finalidade de se fornecer condições de partida eficientes. As condições propostas no trabalho de Carpentier, Gendreau e Bastin (2011) fazem alusão à resolução de vários problemas de Programação Linear (PL) determinísticos, de onde se obtêm dados de volumes de cada cenário, para se calcular os valores meta iniciais.

Uma das contribuições deste trabalho é fornecer melhores condições de partida para o algoritmo de PH aplicado ao POE, assim como uma nova proposta para o critério de parada destes algoritmos, a fim de melhorar o desempenho do mesmo e torná-lo mais eficientes. Ao se aplicar as condições iniciais descritas no trabalho de Carpentier, Gendreau e Bastin (2011), observaram-se melhorias no desempenho computacional das estratégias implementadas em função do tratamento que estas condições iniciais forneceram ao algoritmo de PH. Quanto ao critério de parada foi possível obter bom desempenho computacional, pois o critério de médias móveis se adequou bem ao problema de POE aplicado.

Outra contribuição importante diz respeito ao modelo matemático do problema de otimização em estudo neste trabalho. Conforme observado nas análises das estratégias, observou-se que este problema encontra-se mau condicionado. Dentre as estratégias avaliadas, uma proposta apresentou uma estratégia de tratamento para evitar este tipo de problema, e preservar as características do algoritmo de PH, a Estratégia IV, inspirada no trabalho de Chiche (2012).

Dentre as demais contribuições estão a verificação da viabilidade de aplicação da estratégia proposta por Nocedal, Wright e Robinson (2006) usualmente empregada para resolução de problemas de

Lagrangeano Aumentado (LA), aplicada ao POE, por meio do algoritmo de PH. Embora esta estratégia tenha apresentado resultados menos satisfatórios, comparada às demais estratégias avaliadas, do ponto de vista de tempo de processamento e, número de iterações, o objetivo de avaliar a viabilidade de aplicação desta técnica foi consolidado.

Ao se tratar das estratégias de penalidade variável pode-se afirmar que a estratégia proposta por Gonçalves (2011) é a mais indicada para resolução do POE, via PH. Uma das propostas para trabalhos futuros acerca destas metodologias de penalidade variável é fornecer melhor condicionamento numérico a esta estratégia, com o objetivo de se acelerar a convergência de forma a garantir resultados precisos.

A última estratégia avaliada, descrita no trabalho de Chiche, (2012), trouxe melhorias quanto ao condicionamento numérico do problema de otimização e grandes avanços do ponto de vista de desempenho computacional, conforme descrito anteriormente. Entretanto carece de uma heurística da escolha do parâmetro de penalidade que conduz à estratégia à convergência.

Outra proposta interessante para melhorar a eficiência e rapidez das estratégias do PH aqui apresentadas, ou para outras propostas presentes na literatura consiste em alterar a atualização dos multiplicadores de Lagrange, em que geralmente se utiliza o método do gradiente. A proposta se justifica para garantir uma direção de busca da solução do problema dual que se adapte melhor às condições do problema avaliado, e conseqüentemente proporcione mais eficiência computacional ao algoritmo de PH. Sugere-se a alteração deste método para um que forneça mais velocidade ao algoritmo. Uma eventual alternativa seria o uso do método do gradiente conjugado.

Além das propostas anteriores, sugere-se uma proposta relacionada a um aspecto pouco explorado neste trabalho, a estratégia de decomposição do PH. As estratégias de decomposição permitem a elaboração de subproblemas primais mais simples, ou novos modelos para as restrições de não antecipatividade. Esta estratégia permite maior eficiência ao PH. Além da proposta de elaboração de uma estratégia de separação destinada a tornar os subproblemas primais mais simples, sugere-se também a realização de estudos destinados a esclarecer aspectos associados a estratégias de separação do PH.

Por fim salienta-se a importância dos resultados obtidos neste trabalho, que demonstrou a versatilidade de aplicação do PH por meio de diferentes artifícios matemáticos.

## REFERÊNCIAS

BERTSEKAS, D. P. **Nonlinear Programming**. 2. ed. [S.l.] Athena Scientific, 1999. p. 777

BIRGE, J.; LOUVEAUX, F. **Introduction to stochastic programming**. New York, NY: Springer New York, 1997.

CARPENTIER, P.; GENDREAU, M.; BASTIN, F. **Mid-Term production planning for a large hydro-dominated power system in Quebec by the Progressive Hedging algorithm**. Conference on Optimization and Practices in Industry. *Anais...* Paris, France, França: 2011

CARVALHO, L. C. X. DE. **Planejamento de Sistemas Hidrotérmicos: Uma Análise Comparativa entre as Representações à Usinas Individualizadas e a Reservatórios Equivalentes de Energia**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.

CARVALHO, M.; SOARES, S. An Efficient Hydrothermal Scheduling Algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 2, n. 3, p. 537–542, 1 ago. 1987.

CEPEL, E. **Manual de Referência–Modelo Newave**. Disponível em: <[http://www.cose.fee.unicamp.br/cose/it511/newave-decomp-dessem/Newave\\_comentado.pdf](http://www.cose.fee.unicamp.br/cose/it511/newave-decomp-dessem/Newave_comentado.pdf)>. Acesso em: 25 jan. 2013.

CEPEL, E. **Manual de Referência do Modelo DECOMP**. Disponível em: <[http://www.cose.fee.unicamp.br/cose/it511/newave-decomp-dessem/Decomp\\_comentado.pdf](http://www.cose.fee.unicamp.br/cose/it511/newave-decomp-dessem/Decomp_comentado.pdf)>.

CHICHE, A. **Theory and algorithms for numerical resolution of large scale problems: energy management case study**. Thèse. École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre. Université Pierre et Marie Curie, 2012.

CHICHE, A.; GILBERT, C.; PORCHERON, M. **Study of the progressive hedging algorithm applied to the medium-term**

**electricity planning problem.** Conference on Optimization and Practices in Industry. *Anais...*Paris, France: 2011

CICOGNA, M. **Sistema de suporte a decisão para o planejamento ea programação da operação de sistemas de energia elétrica.** Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, 2003.

CRAINIC, T.; FU, X.; GENDREAU, M. **Progressive Hedging-based Metaheuristics for Stochastic Network Design.** CIRRELT. *Anais...*Montreal, Canada: 2009. Disponível em: <<https://www.cirrelt.ca/DocumentsTravail/CIRRELT-2009-03.pdf>>. Acesso em: 25 jan. 2013

DE MATOS, V. L. **Análise comparativa entre as modelagens de reservatório equivalente de energia agregado por subsistema e por cascata no problema do planejamento anual da operação energética.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.

FINARDI, E. C. **Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos Utilizando Computação de Alto Desempenho.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, 1999.

GONÇALVES, R. E. C. **Proposta de um modelo computacional aplicado à programação mensal da operação energética utilizando métodos de otimização estocástica.** Exame de Qualificação. Universidade Federal de Santa Catarina, 2009.

GONÇALVES, R. E. C. et al. Comparing stochastic optimization methods to solve the medium-term operation planning problem. *Computational & Applied Mathematics*, v. 30, n. 2, p. 289–313, 2011.

GONÇALVES, R. E. C. **Desenvolvimento de modelos de programação estocástica aplicados à programação mensal da operação energética : uma análise comparativa de desempenho computacional.** Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2011.

GONÇALVES, R. E. C.; FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. DA. **Exploring the Progressive Hedging characteristics in the solution of the Medium-Term Operation Planning Problem**Power Systems Computational Conference. **Anais...**Stockolm: 2011Disponível em: <[http://www.psc-central.org/uploads/tx\\_ethpublications/fp118.pdf](http://www.psc-central.org/uploads/tx_ethpublications/fp118.pdf)>. Acesso em: 25 jan. 2013

GONÇALVES, R. E. C.; FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. DA. Applying different decomposition schemes using the progressive hedging algorithm to the operation planning problem of a hydrothermal system. **Electric Power Systems Research**, v. 83, n. 1, p. 19–27, fev. 2012.

HAUGEN, K.; LØKKETANGEN, A.; WOODRUFF, D. Progressive hedging as a meta-heuristic applied to stochastic lot-sizing. **European Journal of Operational Research**, v. 132, p. 116–122, 2001.

IROUMÉ, A. et al. **Stochastic Programming : Progressive Hedging applied to Hydrothermal Coordination in the Chilean Power System**Optimization in an Uncertain Environment Workshop. **Anais...**Davis, California: 2011

KLIGERMAN, A. S. **Operação ótima de subsistemas hidrotermicos interligados utilizando programação dinamica estocastica dual**. Dissertação de Mestrado. Biblioteca Digital da Unicamp, 13 fev. 1992.

MOSEK APS, D. **The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual**.CopenhagenMosek ApS, Denmark., , [S.d.]. Disponível em: <[www.mosek.com](http://www.mosek.com)>

MULVEY, J.; VLADIMIROU, H. Applying the progressive hedging algorithm to stochastic generalized networks. **Annals of Operations Research**, v. 31, n. 1, p. 399–424, dez. 1991.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J.; ROBINSON, S. M. **Numerical Optimization**. 2. ed. [S.l: s.n.]. p. 664

PEREIRA, M. Optimal stochastic operations scheduling of large hydroelectric systems. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 11, n. 3, p. 161–169, jul. 1989.

PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Stochastic Optimization of a Multireservoir Hydroelectric System: A Decomposition Approach. **Water Resources Research**, v. 21, n. 6, p. 779–792, 1985.

REIS, FS; CARVALHO, P. M. S.; FERREIRA, L. A. F. M. Reinforcement scheduling convergence in power systems transmission planning. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 20, n. 2, p. 1151–1157, 2005.

ROCKAFELLAR, R. T.; WETS, R. J.-B. Scenarios and Policy Aggregation in Optimization Under Uncertainty. **Mathematics of Operations Research**, v. 16, n. 1, p. 119–147, 1 fev. 1991.

RODRIGUES, R. N. **Despacho de Unidades Geradoras Hidrelétricas Utilizando Lagrangeano Aumentado**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.

RODRIGUES, R. N.; FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. DA. **Alocação de unidades hidrelétricas no problema da programação da operação energética utilizando relaxação lagrangeana e lagrangeano aumentado**. Disponível em:  
<[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0103-17592006000200004&lng=en&nrm=iso&tlng=pt](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-17592006000200004&lng=en&nrm=iso&tlng=pt)>. Acesso em: 5 fev. 2013.

ROMERO, S. P. **Decomposição Lagrangeana Aplicada ao Problema de Planejamento da Expansão da Transmissão de Sistemas de Transmissão de Energia Elétrica Considerando Cenários de Incerteza**. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.

ROSA, C. H.; RUSZCZYŃSKI, A. **On augmented Lagrangian decomposition methods for multistage stochastic programs** *Annals of Operations Research*, dez. 1994. Disponível em:  
<<http://www.iiasa.ac.at/Admin/PUB/Documents/WP-94-125.pdf>>. Acesso em: 17 ago. 2012

SANTOS, M. L. L. DOS; SILVA, E. L. DA. **Using the Progressive Hedging Method to Solve the Short Term Operating Planning**

**Problem for Hydrothermal Systems** International Conference on Engineering Optimization. **Anais...** Rio de Janeiro, Brasil: 2008. Disponível em:

<[http://www.engopt.org/08/nukleo/pdfs/0613\\_progressive\\_hedging\\_method\\_for\\_hydrothermal\\_systems.pdf](http://www.engopt.org/08/nukleo/pdfs/0613_progressive_hedging_method_for_hydrothermal_systems.pdf)>. Acesso em: 25 jan. 2013

SANTOS, M. L. L. DOS. Practical aspects in solving the medium-term operation planning problem of hydrothermal power systems by using the progressive hedging method. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 31, n. 9, p. 546–552, out. 2009.

SANTOS, M. L. L. DOS. **Modelagem e solução do problema de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo no contexto da programação estocástica : uma aplicação do método progressive hedging**. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2010.

SCUZZIATO, M. R. **Proposta de um Modelo para Alocação Ótima de Unidades Hidrelétricas para Usinas em Cascata**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2011. Disponível em: <<http://www.tede.ufsc.br/teses/PEEL1417-D.pdf>>. Acesso em: 31 jan. 2013.

SILVA, E. DA; FINARDI, E. Parallel processing applied to the planning of hydrothermal systems. **IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems**, v. 14, n. 8, p. 721–729, 2003.

SOMERVELL, M. **Progressive Hedging in Parallel**. [S.l.] Engineering Science--University of Auckland, 1998. p. 174

TAKIGAWA, F. Y. K. **Desenvolvimento de um modelo computacional para o problema da programação diária da operação de sistemas hidrotérmicos**. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2010.

TAKRITI, S.; BIRGE, J.; LONG, E. A stochastic model for the unit commitment problem. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 1, n. August, p. 1497–1508, 1996.

WATSON, J. P. Progressive hedging innovations for a stochastic spare parts support enterprise problem. **Journal Article - Naval research Logistics**, p. 1–21, 2007.

WATSON, J.-P.; WOODRUFF, D. L.; STRIP, D. R. Progressive Hedging Innovations for a Class of Stochastic Resource Allocation Problems. **SSRN Electronic Journal**, p. 1–27, 2008.

ZAMBELLI, M. S. **Planejamento da operação energética do sistema interligado nacional baseado em modelo de controle preditivo**. Tese de Doutorado. Biblioteca Digital da Unicamp, 9 dez. 2009.