UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO SOCIO-ECONOMICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

JANINE PESSANHA DE CARVALHO

MODELO DE FATORES DINÂMICOS: APLICAÇÃO À ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS

Florianópolis
2013

JANINE PESSANHA DE CARVALHO

MODELO DE FATORES DINÂMICOS: APLICAÇÃO À ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS

Projeto para qualificação de Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia, da Universidade Federal de Santa Catarina, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração: Finanças

ORIENTADOR: Guilherme Valle Moura

Florianópolis
2013

Ficha de identificação da obra elaborado pelo autor, através do Programa de Gearação Automática da Biblioteca Universitária da UFSC

Carvalho, J. P.

Modelo de fatores dinâmicos [dissertação]: Aplicação à estrutura a termo/ Janine Pessanha de Carvalho; Orientador: Guilherme Valle Moura – Florianópolis, SC, 2013.

62 p. ; 21 cm

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Sócio-Econômico, Programa de Pós-Graduação em Economia.

Inclui Referências

1. Economia. 2. Finanças 3. Modelos fatoriais. 4. Estrutura a termo.

Janine Pessanha de Carvalho

MODELO de FATORES DINÂMICOS: APLICAÇÃO À ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Economia, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 28 de junho de 2013

Prof. Dr. Roberto Meurer
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Guilherme Valle Moura
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. João Frois Caldeira
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. André Alves Portela Santos
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Francis Carlo Petterini Lourenço
Universidade Federal de Santa Catarina

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Lilian e Juvenal.
Aos meus irmãos, Linda e Vitor, e sobrinha Isabella que estiveram comigo todo o tempo me apoiando.
Aos meus amigos.
E é claro, ao Eduardo, sem o qual este trabalho jamais teria sido concluído.

Agradecimento

Gostaria de agradecer a Deus por ter me feito levantar apesar de todo o momento de tormenta que passei.

Agradeço aos meus pais e irmãos por todo suporte e compreensão por todo momento em que estive ausente.

Agradeço ao Cnpq, por toda ajuda financeira.

Aos meus amigos e familiares que estiveram me apoiando nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador Guilherme Valle Moura, por ter me estendido a mão, ter acreditado em mim e ter tido paciência e compreensão quando falhei.

Agradeço aos colegas do IPEA/RJ por suas sugestões, críticas e motivações.

E finalmente agradeço ao Eduardo, meu grande companheiro de todo o sempre e que tem uma colaboração ímpar no resultado deste trabalho.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é modelar o comportamento da estrutura a termo da taxa de juros brasileira e gerar boas previsões para horizontes distintos, seja de curto, médio e de longo prazo em diversas maturidades. Seguindo os trabalhos de Diebold e Li (2006), aplicaremos a estimação do modelo para uma amostra com dados diários de NTN's-B, e a partir dele previsões são geradas e comparadas com modelos de estimação e previsão concorrentes (RW, Svensson e modelo de dois fatores). O resultado de previsão encontrado nos levou a concluir que o modelo de Diebold e Li não é o mais adequado para o caso brasileiro e que para muitas maturidades nos diversos horizontes de previsão tal modelo é batido por meros passeios aleatórios. Porém, utilizando um modelo Diebold e Li modificado, mais simples e parcimonioso, alcançamos modelos com qualidade superior de previsões àqueles concorrentes, inclusive *randow walks*. Razões para o sucesso de previsão desse modelo de dois fatores são apontadas, assim como uma agenda de pesquisa futura para a estrutura a termo da taxa de juros brasileira.

Palavras chave: estrutura a termo da taxa de juros, modelos fatoriais, estimação e previsão.

Abstract

The main objective of this work is to model the behavior of the term structure of interest rates in Brazil and generate good predictions for different horizons, whether short, medium and long term in various maturities. Following the work of Diebold and Li (2006), we apply the estimation of the model for a sample of daily data NTN's-B, and predictions from it are generated and compared with models for estimating and forecasting competitors (RW, Svensson and two model factors). The result of prediction found led us to conclude that the Diebold and Li model is not the most appropriate for Brazil and for many maturities in different forecast horizons such model is outperformed by simple *random walks*. However, using a model modified Diebold and Li, simpler and more parsimonious models achieve superior forecasts to those of competitors, including *randow walks*. Reasons for the successful prediction of this model two factors are noted as well as a research agenda for the future term structure of interest rates in Brazil.

Keywords: term structure of interest rates, factor models, estimation and prediction.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. Introdução

A otimização da carteira de títulos públicos ganha considerável atenção pelos gestores que atuam na área de seguros e pensões, com destaque para a sua utilização na gestão de ativos e passivos. Tendo em vista que os objetivos fundamentais das instituições securitárias e previdenciárias são extrair o maior retorno possível dos investimentos feitos a partir das contribuições de seus segurados e evitar níveis de risco significativos a fim de garantir que os passivos futuros sejam pagos, é tarefa essencial da administração dessas entidades a elaboração e manutenção de modelos que sejam capazes de retratar o estado atual e gerar previsões acerca da trajetória futura dos retornos dos investimentos e do custo das obrigações a pagar. Ora, a curva de juros é peça fundamental desses modelos porque informa as rentabilidades de títulos públicos com os mais diversos prazos de vencimento (informação importante na medida em que esses títulos constituem parte significativa das carteiras dessas entidades), reflete as expectativas acerca das trajetórias futuras dessas rentabilidades (propriedade que permite a sua utilização na avaliação do risco de reinvestimento) e fornece os fatores necessários para o cálculo de valores presentes e futuros, que são dados indispensáveis para a análise dos riscos de solvência e liquidez.[1]

Então, modelos capazes de descrever o comportamento passado e inferir a trajetória futura da curva de juros são partes essenciais de qualquer sistema de gestão de ativos e passivos.

Além do gerenciamento de risco e apreçamento, a compreensão acerca da Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ) é importante para diversas utilidades. Um delas é o gerenciamento da dívida pública, ao indicar o custo de emitir novos títulos da dívida do governo com prazos semelhantes (Ver Campbell e Shiller (1991)).

Não menos importante é a questão da previsão, já que a ETTJ ajuda a prever o comportamento futuro das taxas de juros nominais de curto prazo, trazendo informações sobre expectativas de inflação e servindo como indicador antecedente do nível de atividade econômica. Previsões sobre a taxa futura de curto prazo, sobre a inflação e a atividade econômica futura são fundamentais como base para decisões

[1] Ver Sabino (2007).

informadas de investimento, poupança, consumo e de política dos agentes econômicos - governo, consumidores e firmas.[2]

A ETTJ tem papel fundamental no canal de juros para a transmissão de política monetária, já que as autoridades monetárias tem capacidade de influenciarem as taxas vigentes em operações de crédito e os rendimentos oferecidos por diversos tipos de ativos financeiros simplesmente manipulando a taxa de juros nominal de curtíssimo prazo (Romer e Romer, 2004).

Esse trabalho consiste no esforço de modelar o comportamento da estrutura a termo da taxa de juros, de importância inegável em virtude das várias aplicações discutidas acima, seja para macroeconomistas ou gestores financeiros. Mais especificamente, esse trabalho irá estimar e fazer previsões fora da amostra para ETTJ, tendo como base modelos fatoriais dinâmicos (autoregressivos (AR)), aplicando a metodologia proposta por Nelson e Siegel (1987). Tais autores utilizaram o modelo de três fatores para modelar o comportamento da ETTJ que mais tarde fora utilizado por Diebold e Li (2006) que interpretaram os fatores como nível, inclinação e curvatura da curva de juros. Para analisar o desempenho desse modelo de previsão será feito uma comparação com alguns modelos utilizados na literatura para modelagem de curva de juros, como modelo de Nelson e Siegel com dinâmica temporal do vetor autoregressivo (VAR), o modelo ampliado de Nelson e Siegel, com quatro fatores proposto por Svensson (1994) tanto com uma abordagem dinâmica de AR quanto de VAR, modelo de dois fatores (AR e VAR) e finalmente com um *randow walk* (RW).

Mais especificamente, é proposto neste trabalho a estimação e previsão da curva de juros real tendo com base os títulos indexados ao Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), ou seja, as notas do Tesouro Nacional – série B (NTN-B). Para os investidores, uma das vantagens da NTN-B é a possibilidade de obter rentabilidades em termos reais, isto é, ganho descontado da inflação. E isto, é particularmente desejável, já que no gerenciamento de ativos e passivos financeiros é imprescindível identificar os fatores que influenciam a volatilidade do retorno dos títulos, seja para fundos de pensão ou para agentes (empresas, famílias e governo) com passivos atrelados à variação do IPCA.

[2] Ver, por exemplo, "Why Does the Yield Curve Predict Output and Inflation?", de Arturo Estrella, The Economic Journal, 115, 2005. E ver Ang e Piazzesi (2003) para evidência sobre atividade real e Mishkin (1990) para evidência sobre inflação.

Price (1997) argumenta que as principais vantagens dos títulos indexados à inflação são: redução do custo, beneficiando o emissor; complementação do mercado financeiro, favorecendo os poupadores; reforço da credibilidade, compromissos e instrumentos de política monetária, beneficiando principalmente o BCB. Segundo o autor, em economias em transição, quando a credibilidade e os compromissos da política monetária podem ainda não estar bem estabelecidos, os títulos indexados à inflação seriam importantes auxiliares dos governos no alongamento da dívida e na promoção do desenvolvimento do mercado de capitais de longo prazo. Segundo Missale e Giavazzi (2003)

> [...] A indexação de preços permite um hedge natural contra o impacto da inflação, tanto no superávit primário, quanto na razão dívida líquida sobre o PIB. Sob a perspectiva do gerenciamento de ativos e passivos do Tesouro Nacional, os títulos atrelados a índices de preço não apenas casam com as receitas futuras, mas também com os riscos dos ativos atrelados à inflação do portfólio do governo. Como os títulos indexados à inflação têm um prazo maior, eles também auxiliam a reduzir o risco de refinanciamento do governo, representando um importante fator de estabilidade para a dinâmica da dívida pública.[3]

O Brasil tem avançado bastante no desenvolvimento do mercado de títulos remunerados por índices de preços, focando mais recentemente nos títulos remunerados pelo IPCA. A dinamização desse mercado vem proporcionando crescente liquidez e demanda, refletida no volume vendido e na maior participação desses títulos no total da Dívida Pública Federal (DPF). Nesse sentido, o Tesouro Nacional vem trabalhando para aumentar a participação dos títulos atrelados a esse indicador, as NTN's-B, as quais vêm ganhando força na composição da dívida pública recente, saltando de 12,5% em 2002 para 35,5% já em 2012.

No estudo de modelagem e previsão da Curva de Juros, este tema tem sido pouco explorado na academia no que diz respeito ao comportamento da ETTJ para estes títulos públicos atrelados à inflação.

Então, é esperada com esta pesquisa uma contribuição para o gerenciamento e apreçamento dos juros, dos agentes do mercado financeiro, que utilizem em suas carteiras títulos públicos, especificamente as NTN's-B.

O objetivo deste trabalho é modelar a expectativa dos gestores para a taxa de juros futura para qualquer maturidade, usando os dados

---

[3] Tradução livre.

dos títulos públicos, já que é sabido na literatura econômica e financeira que todos os títulos públicos estão referenciados de alguma forma na trajetória da curva de juros e é preciso modelar este comportamento, pois só conhecemos seu preço na maturidade, mas não seu preço entre a compra e o vencimento.

O resultado encontrado por Diebold e Li (2006) para os dados americanos se revelaram animadores, principalmente para horizontes de previsão de longo prazo. Embora o resultado para previsões no horizonte de 1 mês não sejam melhores do que mero passeio aleatório e concorrentes, para previsões de 1 ano à frente os modelos de Diebold e Li se mostraram superiores aos demais. Uma possível razão para o sucesso de previsão, segundo os autores, seria a abordagem da parcimônia, da simplicidade, ou seja, o princípio do KISS – "Keep it sophisticatedly simple". Portanto, espera-se com este trabalho que o sucesso seja repetido para o caso brasileiro em que faremos estimações e previsões para as NTN's-B.

Para modelar o comportamento da curva de juros brasileira e gerar previsões para a mesma, este trabalho irá utilizar como base contratos diários de NTN-B para títulos zero-cupom, extraídos da Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (ANBIMA) com diferentes maturidades.

Porém, o resultado deste trabalho conclui que para os dados brasileiros, o modelo de Diebold e Li (proposto originalmente por Nelson e Siegel) não é o mais indicado, já que para muitas maturidades nos diversos horizontes de previsão tal modelo é batido por meros modelos univariados (RW). Mas, utilizando como referência o que foi feito em Sabino (2007), será dada uma simplicidade ainda maior ao modelo de Diebold e Li (2006) e será utilizado um modelo modificado com somente dois fatores (nível e inclinação) para estimar e prever a curva de juros brasileira. Este modelo mostrou ser superior aos demais, incluindo o RW, para quase todas as maturidades e horizontes de previsão, gerando boas previsões para a dinâmica temporal de um VAR(1). A exceção fica por conta de horizontes de previsão de curtíssimo prazo (1dia à frente) em que um passeio aleatório mostrou consistentemente como o que ocorre com previsões para dados de vários países, ter os melhores resultados. No trabalho de Sabino (2007) uma das razões apontadas para o sucesso deste modelo é que os fatores determinantes da curva de juros brasileira estariam correlacionados e que o terceiro fator apontado como determinante teria baixo poder de explicação. Além destas justificativas, parece razoável supor que modelos menos complexos, com mais parcimônia preveem melhor, apesar de ter ajuste pior (KISS- "Keep it sophisticatedly Simple").

Além dessa introdução, a seção seguinte traz alguns conceitos do mercado de juros relevantes e a terceira seção aborda algumas características do mercado de títulos públicos brasileiro. Na quarta seção, há uma breve revisão de modelos adotados para a estimação e previsão da curva de juros. A apresentação dos dados assim como o resultado da estimação e previsão da curva de juros brasileira para NTN-B zero-cupom é discutida na quinta seção. E finalmente a sexta seção traz a conclusão do trabalho.

2. Conceitos básicos relacionados à estrutura a termo da taxa de juros

Nesta subseção algumas definições básicas utilizadas ao longo deste trabalho serão apresentadas, como títulos zero-cupom (*zero-coupon bonds)*, *yield to maturity*, taxa efetiva (*effective yield*), taxa anualizada (*annualized yield*), *yield spreads*, a definição de estrutura a termo, entre outras. É imprescindível o conhecimento de tais conceitos antes de adentrarmos no estudo dos modelos da estrutura a termo da taxa de juros.

2.1. Título Zero-Cupom

Os títulos zero-cupom são títulos de renda fixa que fazem um único pagamento em uma data futura conhecida como data de vencimento do título (ou maturidade). Já os títulos com cupons realizam pagamentos de cupons periodicamente e liquida o principal no vencimento.

O valor de face do título é o valor do pagamento a ser efetuado na data de vencimento do título. Este é negociado com desconto em relação ao seu valor de face. Apesar de o valor de face de um título poder assumir qualquer valor, em nosso trabalho, será feito sempre referência a títulos *zero-coupon* com valor de face de uma unidade monetária. Tal normalização visa apenas padronizar títulos com valores de face diferentes, não tendo, obviamente, qualquer impacto sobre as taxas às quais os títulos são efetivamente negociados. O prazo de um título *zero-coupon*, no instante t, é o espaço de tempo a transcorrer entre o período t e a data de vencimento do título T.

Para estabelecer a relação entre as taxas de juros de curto e longo prazos no contexto de títulos zero-cupom, considera-se inicialmente o caso sem incerteza, sem custo de transação e com perfeita visão do futuro, como visto em Rossi (1996). O investidor compara o retorno de duas estratégias de aplicação financeira. Na primeira, compra um título do governo com maturidade T, mantendo-o até o vencimento. Na segunda, compra uma Letra do Tesouro de um período, reinvestindo o resultado (principal mais os juros) na compra e uma nova Letra do Tesouro para o período seguinte, repetindo a operação nos próximos períodos até T. Cumpre ressaltar que a Letra do Tesouro é um tipo de ativo com desconto puro, pois não há qualquer pagamento de cupom. Vale dizer, o título é vendido com um desconto, sendo amortizado pelo seu valor de face. Desta forma, a percentagem do ganho de capital sobre o preço de compra é a taxa de juros que o ativo paga.

2.2. A taxa efetiva e a taxa anualizada de um título zero-coupon

A taxa efetiva do título (*effective yield*) em um ambiente de tempo contínuo é facilmente calculável através da fórmula:

$$y_{t,T}^{effective} = \frac{FV_{t,T}}{p_{t,T}} = \frac{1}{p_{t,T}} \ , \quad (1)$$

onde:

$y_{t,T}^{effective}$ = valor da taxa efetiva, em t, paga por um *zero-coupon* com vencimento em T,

$FV_{t,T}$= valor de face do título em t, padronizado para \$1, que será pago em T(t<T),

$p_{t,T}$ = valor (preço) pelo qual esse *zero-coupon bond*, com vencimento em T, é negociado em t (t<T).

Geralmente, os títulos não são negociados pelos seus preços nem pelas suas taxas efetivas, e, sim por suas taxas anualizadas. Estas taxas dependem da convenção acerca da forma como os juros são compostos. Em um ambiente de juros compostos continuamente, a taxa de juros anualizada de um título com preço de $p_{t,T}$ será dada por:

$$e^{-y_{t,T}*(t-T)} = p_{t,T} \leftrightarrow y_{t,T} = -\frac{\log(p_{t,T})}{(T-t)} \leftrightarrow y_{t,\tau} = -\frac{\log(p_{t,\tau})}{\tau}, \quad (2)$$

onde:

$y_{t,T}$ ou $y_{t,\tau}$ = valor da taxa anualizada de um *zero-coupon* com vencimento em T e negociado a $p_{t,T}$ em t (T>t),

$(T-t) = \tau$ = valor em unidades anuais do prazo, em t, de um *zero- coupon.*

Consideramos aqui que os títulos *zero-coupon* estão isentos da possibilidade de calote. Assim, as taxas às quais os títulos estão sendo negociados são indicativas de dois fatores: o valor intertemporal do dinheiro e o risco associado à volatilidade da taxa de juros de curto prazo.

Se um investidor compra um título *zero-coupon* em t e o mantém até o vencimento em T (t<T), ele receberá $1 no dia do pagamento. Considerando o fato do emissor do título ser o governo, o risco nessa operação é muito baixo, entretanto ele estará com seu capital indisponível entre o período t e o período T, ele demanda uma remuneração por isso – chamamos esse fator de valor intertemporal do dinheiro.

Além disso, se o investidor considera a possibilidade de se desfazer do título antes de seu vencimento, ele está exposto ao risco de que variações na taxa de juros de curto prazo alterem o valor de revenda do título. Um título que paga $1 em T, pode valer menos, em t<T, caso ocorram aumentos na taxa de juros de curto prazo. Esse é o risco associado à volatilidade da taxa de juros.

A possibilidade do investidor não receber o valor de face do título no vencimento, dado o emissor ser o governo, é considerada muito baixa pelo detentor do título. Essa é a razão pela qual a ETTJ de uma economia é normalmente obtida através das taxas às quais são negociados os títulos do governo e, não, pelas taxas a que são negociados títulos de empresas, pois o governo de um país é, normalmente, considerado o emissor de menor risco.

2.3. A Estrutura a termo da taxa de juros

A ETTJ é obtida através de um conjunto das taxas de juros às quais são negociados os títulos *zero-coupon* para diferentes maturidades de um governo. A ETTJ observada para essa economia é o conjunto de pares ordenados (taxa de juros, maturidade) dos títulos *zero-coupon* emitidos pelo governo. Porém, por diversas razões, o governo não emite títulos para todas as maturidades possíveis e, ainda que emitisse, todos esses títulos não seriam negociados todos os dias, somente alguns deles[4]. Há, então, uma ETTJ incompleta, significando com isso que

[4] Criar liquidez em mercado secundário de títulos, investidores que possuam preferência por vencimentos específicos são algumas das razões pelas quais o governo escolhe emitir uma maior concentração de dívida em determinados vencimentos. Cox, Ingersoll e Ross (1985) é uma excelente referência na discussão de algumas dessas teorias relacionadas à ETTJ.

várias maturidades não tem taxa de juros associada. Se o conjunto dos títulos emitidos cobrisse a totalidade dos vencimentos possíveis, então teria uma ETTJ completa para esse dia, ou seja, taxas associadas a qualquer vencimento possível.

Geralmente, a ETTJ observada não é completa. No entanto, para os participantes do mercado de títulos é importante ter a capacidade de associar a qualquer maturidade a taxa de juros que vigoraria caso um título do governo tivesse sido negociado naquele vencimento, ou seja, é importante ter a capacidade de se obter uma ETTJ completa ou, ao menos, uma boa aproximação desta. Existem algumas formas principais para que sejam obtidas aproximações de uma ETTJ completa.

A forma mais usual de se aproximar taxas não observadas é a interpolação. As técnicas de interpolação são as mais variadas. Normalmente, utilizam-se polinômios com formas conhecidas (como os de Legendre ou Bernstein) como funções que ligam o prazo de vencimento à taxa de juros. Alguns trabalhos importantes estudam a ETTJ interpolada. Entre eles, citamos Almeida (2009).[5]

2.4. Yield Spread

O *yield spread* mede a diferença entre as taxas de retorno entre dois diferentes investimentos, normalmente de qualidade de crédito diferente. O "*yield spread* de X e Y" é simplesmente a porcentagem de retorno sobre o investimento de um instrumento financeiro X menos o retorno percentual sobre o investimento de um instrumento financeiro Y (por ano). Sempre que for feita referência ao *yield spread* neste trabalho será para obter uma medida da diferença entre a taxa de curto prazo e a taxa de outro título de maturidade mais longa, qual seja:

$$S_{t,T} = y_{t,T} - r_t, \tag{3}$$

onde:

$S_{t,T}$ = *yield spread*, no período t, entre a taxa de um *zero-coupon* com vencimento em T e a taxa de curto prazo,

$y_{t,T}$ = valor da taxa anualizada de um *zero-coupon* com vencimento em T,

---

[5] A ETTJ é explicada por uma função f (normalmente, essa função é um polinômio). Estimam-se os coeficientes da função que melhor se ajustam às taxas de fato observadas no mercado. De posse desses coeficientes, é possível, dado que conhecemos a forma funcional do polinômio, se obter a taxa de juros associada à qualquer maturidade.

r_t = valor da taxa livre de risco ou taxa de curto prazo da economia.

Então, a ETTJ está associada ao risco de mercado e à taxa de longo prazo para a economia.

2.5. A taxa *forward* e a taxa *forward* instantânea

A taxa *forward* é a taxa de juros fixada no presente para um empréstimo a concretizar numa determinada data futura, assim conhecida também como taxa de juros previamente contratada.

Essa taxa pode ser entendida como a taxa de um investimento feito em t, mas que irá vigorar entre s e T, (t<s<T), sendo que o investidor recebe uma unidade monetária nesse último período. O procedimento para se obter tal investimento é o que segue:

1. Querendo garantir o pagamento de $1 em T, o investidor compra, em t, um título com vencimento em T por $p_{t,T}$;
2. Como o investidor quer iniciar seu investimento somente em s, ele vende uma quantidade de títulos com vencimento em s, de forma a obter o valor $p_{t,T}$ gasto na compra do outro título. Como o título com vencimento em s custa $p_{t,s}$, o investidor vende $p_{t,T}/p_{t,s}$ unidades do título com vencimento em s;
3. Assim, ele desembolsa zero, pois desembolsa $p_{t,T}$ em títulos com vencimento em T, mas recebe $p_{t,T}$ por títulos vendidos com vencimento em s. O retorno de tal investimento é dado por:

$$\frac{1}{p_{t,s}/p_{t,T}} = e^{f_{t,s,T} * (T-t)} , \qquad (4)$$

onde:

$f_{t,s,T}$ = taxa *forward* contratado em t e que vigorará entre s e T,

(T- s) = período em anos para o qual a taxa *forward* estará ativa.

A taxa *forward* instantânea em s é a taxa *forward* quando T tende a s (ou seja, T-s→ 0).

3. O mercado brasileiro de títulos públicos - Características dos principais títulos públicos

A Secretaria do Tesouro Nacional (STN), como caixa do governo, capta recursos no mercado financeiro via emissão primaria de títulos, para execução e financiamento das dividas internas do governo via Letra do Tesouro Nacional (LTN), Letra Financeira do Tesouro (LFT) e Nota do Tesouro Nacional (NTN). As características de alguns dos títulos públicos e suas peculiaridades são descritas a seguir, segundo conceitos fornecidos pela STN.

LTN – Letras do Tesouro Nacional

Por se tratar de título prefixado, o investidor tem a exata noção do retorno do título se carregá-lo até a data de vencimento. A LTN tem prazos muito sensíveis à conjuntura econômica. Em momentos de estabilidade das expectativas quanto às futuras taxas de câmbio, juros e inflação, os agentes privados aceitam LTN's com prazos crescentes, sem aumento equivalente nas taxas de desconto (ou até mesmo com taxas decrescentes). Em compensação, os períodos de crises financeiras são particularmente difíceis para a colocação em mercado das LTN's, em que os agentes veem seus horizontes de planejamento prejudicados mediante a instabilidade da economia e a aceitação dos agentes a estes títulos pré-fixados com prazos maiores fica comprometida e os prazos caem sensivelmente. Os períodos de março a abril de 1995 (efeitos da crise do México) e novembro a dezembro de 1997 (crise da Ásia) ilustram bem os efeitos depressivos das crises internacionais sobre os títulos prefixados brasileiros. Com a alta das taxa de juros decorrente da crise, os papéis prefixados perderam força e a participação dos títulos indexados aos juros (LFT) se tornou elevada. A composição da dívida pública que em 2006 era de 18% em títulos indexados à *over/selic* e 61% em títulos pré-fixados teve sua composição alterada em 2007, com destaque para as LFT's que aumentaram sua participação para 35% do total frente a uma retração da LTN para 40% do total.

LFT- Letras Financeiras do Tesouro

Este título é indicado para o investidor que deseja uma rentabilidade pós-fixada indexada à taxa de juros da economia (Selic). A LFT tem sua emissão interrompida em função da política de desindexação e redução do custo da dívida pública mobiliária federal interna (DPMFi). Um dos objetivos básicos dessa política consiste em mudar a composição da dívida, reduzindo a participação relativa dos títulos pós-fixados, substituindo-os por papéis prefixados em ambientes com relativa estabilidade econômica.

Para o investidor, considerando que a Selic passou a não ser tão interessante como opção de rendimento com o início da trajetória de queda na taxa de juros básica da economia, as expectativas quanto a movimentos futuros confirmam a queda da participação das LFTs no montante da dívida. A redução progressiva das LFT's no total da DPMFi pode ser confirmada através dos dados do BCB, que apontam menor participação desta na composição do total. Participação esta que saiu de 46% em 2002, para um pouco mais de 30% em dezembro de 2010.

NTN- Notas do Tesouro Nacional

As notas do Tesouro permitem ao investidor obter rentabilidade em termos reais, se protegendo da elevação do IPCA (NTN-B) ou do IGP-M (NTN-C). Além disso, o investidor recebe um fluxo de cupons semestrais de juros, o que aumenta a liquidez possibilitando reinvestimentos.

Estes títulos são indicados em momentos de ciclos econômicos expansionistas que irão aumentar o consumo e, consequentemente, puxar os preços da economia como um todo para cima. Também são indicados para períodos longos em que se tem assegurado certa estabilidade econômica, garantindo o ganho real da aplicação.

Como já citado anteriormente as NTN's-B ganharam maior notoriedade na composição da dívida pública. A participação deste título no total da DPMFi saltou de 12,5% em 2002 para 35,5% já em 2012.

4. Revisão de literatura

4.1. Modelos teóricos para a ETTJ

A ETTJ não é diretamente observável na prática e precisa ser estimada a partir de cotações de mercado para títulos de renda fixa ou instrumentos financeiros derivativos, disponíveis para um número finito de vencimentos. A partir deste conjunto discreto de dados, pode-se construir uma curva “contínua” que aproximadamente se "ajusta" nos dados observados, usando técnicas de interpolação, e estimar o valor da curva em pontos fora da zona conhecida, usando técnicas de extrapolação.

Nesta seção, vamos descrever a teoria por trás dos modelos da ETTJ. Os modelos teóricos da ETTJ podem ser divididos em três classes principais: modelos de não arbitragem; os modelos de equilíbrio; e os modelos estatísticos.

Os modelos de não arbitragem para a estrutura a termo de taxas de juros foram obtidos de modo a gerar automaticamente valores para a estrutura a termo que sejam consistentes com a realidade atual do mercado. Tais modelos usam precificação livre de arbitragem. Exemplos de modelos desta classe são os modelos de Hull e White (1990). A imposição de condições de não-arbitragem, além de assegurar consistência com a precificação no sentido proposto por Harrison e Kreps (1979), também pode afetar o ajuste e previsões do modelo. Ang e Piazzesi (2003) e Almeida e Vicente (2008) indicam que a imposição de correções para não arbitragem leva a uma melhora nas previsões para a estrutura a termo, e assim forçar a consistência com não-arbitragem representaria melhores ajustes e previsões em modelos para a estrutura a termo de taxas de juros. Esta hipótese, entretanto, só é consistente quando esses títulos são ampla e simultaneamente líquidos no mercado. Neste tipo de mercado, então, os agentes racionais observam consistência entre as taxas das diferentes maturidades existentes.

A segunda classe de modelos, os modelos de equilíbrio, é obtida através da imposição de condições de equilíbrio entre os rendimentos das diversas maturidades na curva de juros. Este modelo consiste basicamente de obter a partir de hipóteses econômicas, o processo para a taxa de juros. Um fato estilizado deste modelo é o do comportamento das taxas de juros a curto prazo e sua reversão a média de longo prazo. Porém, os resultados empíricos dos modelos de equilíbrio geral, como os modelos de Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985) indicam que o ajuste dentro da amostra e previsões resultantes destes modelos é bastante pobre.

A terceira principal classe de modelos é dada pelos modelos estatísticos. Estes modelos são obtidos como representações puramente estatísticas da evolução da estrutura a termo de taxas de juros. Esta classe é composta principalmente por modelos de componentes principais, modelos de fatores ou de variáveis latentes, bem como por modelos de interpolação. Nestes modelos as técnicas utilizadas permitem ajustes e previsões da curva de juros, mas estes modelos não são consistentes com a imposição de condições de não-arbitragem dadas pela teoria de precificação de ativos financeiros.

Dentre os modelos estatísticos, o modelo de Nelson e Siegel (1987) e suas variantes, são os mais populares entre gestores de renda fixa e bancos centrais. A atratividade dos modelos de fatores da classe Nelson e Siegel se deve à sua parcimonialidade e boa performance empírica. Modelos deste tipo conseguem capturar a maior parte da evolução da estrutura a termo da taxa de juros através do uso de apenas três fatores (nível, inclinação e curvatura). Várias extensões do modelo de Nelson e Siegel foram propostas (ver Almeida et al. (2007), Laurini and Hotta (2008), Bjork and Christensen (1999), Rudebusch and Wu (2008), entre outros).

Os trabalhos de Diebold e Li (2006) e Diebold et al. (2006) voltaram atenção para o modelo de Nelson e Siegel e o reinterpretaram como um modelo estatístico de três fatores para descrever a curva de juros ao longo do tempo. Os três fatores, como veremos à frente, são interpretados como nível, inclinação e curvatura, de forma consistente a interpretação obtida em Litterman and Scheinkman (1991), em que a interpretação tem algum sentido econômico.

4.2. Modelo de Nelson - Siegel

Em um dado ponto do tempo, é observado um grande conjunto de rendimentos e há o desejo de ajustá-los a uma curva suave. As taxas a termo do Modelo de Nelson Siegel (1997) são dadas pela equação:

$$f(\tau) = \beta_1 + \beta_2 e^{-\lambda\tau} + \beta_3 \lambda\tau e^{-\lambda\tau}. \tag{5}$$

A *yield curve* correspondente ao modelo estático Nelson-Siegel é

$$y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + \beta_3 \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right). \tag{6}$$

Apesar da forma funcional do modelo parecer um tanto quanto arbitrário, o modelo de Nelson-Siegel tem algumas características muito atraentes. Por exemplo, é um modelo parcimonioso capaz de gerar estruturas a termo com formatos muito semelhantes aos observados no mercado financeiro.

Agora que já foi visto como se dá o ajuste *cross-section* estático da curva, partiremos para um modelo dinâmico da estrutura a termo da taxa de juros.

Seguindo Diebold e Li (2006), é reconhecido que os parâmetros de Nelson-Siegel deva ser variável no tempo, se a curva de rendimento também varia no tempo.

Assim, combinando as perspectivas espaciais e temporais têm-se o modelo dinâmico de Nelson-Siegel (DNS):

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + \beta_{3t}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right). \qquad (7)$$

Operacionalmente, o modelo DNS nada mais é do que o modelo estático de Nelson-Siegel com os parâmetros variando no tempo. Em um dado ponto do tempo, t, a curva de juros, denotada aqui por $y_t(\tau)$, é uma função representando a taxa de juros como uma função das maturidades τ. O modelo exponencial da curva de juros proposto por Nelson e Siegel (1987) e reinterpretado por Diebold e Li (2006) considera uma forma paramétrica para a evolução da estrutura a termo da taxa de juros ao longo do tempo, em que os coeficientes podem ser interpretados como fatores latentes comuns β_{1t} (nível), β_{2t} (inclinação) e β_{3t} (curvatura) e os coeficientes $\left[1, \frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}, \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) - e^{-\lambda\tau}\right]$ cargas fatoriais, respectivamente.

DNS é o principal exemplo de modelos fatoriais dinâmicos em que um conjunto de variáveis altamente dimensionadas (neste caso, inúmera rentabilidades para inúmeras maturidades) é governado por um conjunto menor de variáveis (neste caso três fatores comuns latentes).

Este modelo dinâmico é muito conveniente estatisticamente, pois converte situações de alta dimensão aparentemente intratáveis para situações de baixa dimensão, fáceis de mensurar. Isto é possível, neste caso, graças a tendência que os ativos financeiros tem de se mover juntos, não no mesmo ritmo é claro, visto que há os fatores idiossincráticos, específicos para cada rendimento, dado sua maturidade.

Naturalmente, vamos descrever um pouco mais sobre os fatores comuns não observáveis β_{1t}, β_{2t} e β_{3t}. Antes, porém, é necessário conhecer o significado do parâmetro λ. Este é tratado como fixo em Diebold e Li (2006) e governa a taxa de decaimento exponencial e pequenos (grandes) valores de λ estão associados a um decaimento suave (rápido). Como veremos na seção 5, este trabalho optou por seguir Diebold e Li e fixa um valor de lambda em 0,1036.

Considere primeiro, a carga de β_{1t}, função que é constante em 1 e não tende para zero no limite. Desta forma, como o peso do primeiro fator é constante para todas as maturidades β_{1t} representa o chamado "fator de longo prazo" que influencia igualmente as taxas de curto e longo prazo, sendo associado ao nível da curva de juros. É possível demonstrar claramente o porquê da associação do β_{1t} ao nível da curva. Da equação 7 e tomando a maturidade (τ) ao infinito, têm-se que:

$$y_t(\infty) = \beta_{1t} + \beta_{2t}\, lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + \beta_{3t} lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right).$$

Resolvendo o limite, tem:

$$y_t(\infty) = \beta_{1t} + \beta_{2t}\, 0 + \beta_{3t} 0.$$

Concluindo que

$y_t(\infty) = \beta_{1t}$, mostrando que o nível é igual ao β_{1t}.

O peso do segundo fator, $\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}$, começa em 1 e converge para zero monotonicamente e rapidamente, sendo β_{2t} interpretado como inclinação da curva de juros, ou "fator de curto prazo", dado que este fator influencia muito as taxas de juros curto prazo. Da equação 7 e utilizando o cálculo para definir a primeira derivada da curva de juros (inclinação) baseada no método de diferenças finitas para aproximação de derivadas, tem

$$y_t(0) - y_t(\infty) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} lim_{\tau\to 0}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + \beta_{3,t} lim_{\tau\to 0}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) - \beta_{1,t} - \beta_{2,t} lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) - \beta_{3,t} lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right).$$

Resolvendo o limite, tem:

$$y_t(0) - y_t(\infty) = \beta_{1t} + \beta_{2t}\, 1 + \beta_{3t} 0 - \beta_{1t} - \beta_{2t}\, 0 + \beta_{3t} 0.$$

E chega à

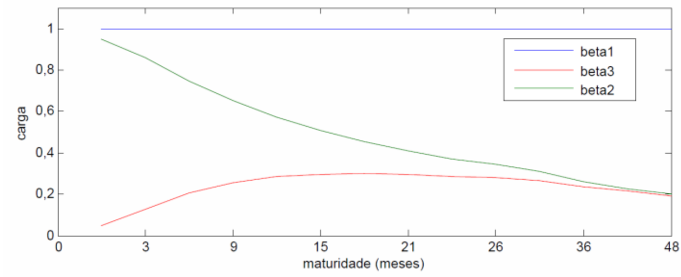
$$y_t(0) - y_t(\infty) = \beta_{1t} + \beta_{2t} - \beta_{1t}$$

$$y_t(0) - y_t(\infty) = \beta_{2t}\,.$$

O que nos diz que β_{2t} representa a inclinação da curva. No gráfico 1 é possível observar o nível, a inclinação e a curvatura.

O peso do terceiro fator, $\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) - e^{-\lambda\tau}$, é uma função côncava, que assume valor zero para a maturidade zero, cresce, depois converge para zero nas maturidades mais longas. Assim, β_{3t} é interpretado como curvatura, ou "fator de médio prazo", pois está associado às taxas de juros de médio prazo.

Gráfico 1 – Carga dos fatores (λ = 0.1036)



Fonte:própria

É interessante notar ainda que o rendimento instantâneo depende de ambos os fatores, nível e inclinação, porque $y_t(0) = \beta_{1t} + \beta_{2t}$.

Passando para uma representação que enfatiza os fatores nível, inclinação e curvatura no modelo DNS, o modelo é reescrito como

$$y_t(\tau) = l_t + s_t\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + c_t\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) - e^{-\lambda\tau}, \tag{8}$$

onde T = 1, ..., T e τ = 1, ..., N.

Agora será feita a estimação dos modelos fatoriais dinâmicos da ETTJ. A primeira abordagem de estimação, chamada de modelo DNS em duas etapas, foi introduzido por Diebold e Li (2006). Considere primeiro, o caso do parâmetro λ calibrado.

Na primeira etapa são estimados os fatores latentes da equação de medida pelo método dos mínimos quadrados sob o modelo estático de Nelson-Siegel, para cada período de tempo t, ou seja, esta equação é tratada como um modelo *cross-section*. A partir disso são obtidos um conjunto de dados em séries temporais dos fatores estimados $\{\hat{l_t}, \hat{s_t}, \hat{c_t}\}_{t=1}^{T}$, assim como são gerados os resíduos $\{\hat{\varepsilon_t}(\tau_1), \hat{\varepsilon_t}(\tau_2), \hat{\varepsilon_t}(\tau_N)\}_{t=1}^{T}$, para cada período de tempo (série temporal).

Na segunda etapa, por sua vez, ajusta-se o modelo dinâmico dos fatores da equação de transição. A dinâmica dos fatores é modelada através de um processo autorregressivo de primeira ordem, AR(1), para cada fator. Utilizando a série temporal dos três fatores estimadas no primeiro passo para estimar a equação dos estados, obtém os estimadores tanto do parâmetro (A) desta equação como do fator de perturbação (η_t).

Ao invés de fixar e/ou calibrar o valor de λ em um valor especificado a priori é possível estimar este valor. O problema é simples: consiste em estimar na primeira etapa não três parâmetros, mas sim quatro $\{\hat{l_t},\hat{s_t},\hat{c_t},\hat{\lambda_t}\}_{t=1}^{T}$, e consequentemente na segunda etapa ao estimar os parâmetros da equação de transição, estes quatro estimadores para o modelo dinâmico serão utilizados.

4.3. Modelo de Svensson

Uma extensão do modelo original de Nelson e Siegel é o proposto por Svensson (1994) em que é adicionado um quarto fator em que se têm melhores ajustes e flexibilidade.

Como a inclinação e a curvatura em Nelson e Siegel se aproximam de zero rapidamente com maturidades maiores, somente o nível estaria disponível para o ajuste das yields de longo prazo (cerca de 10 anos ou mais). Para resolver este problema Svensson (1994) introduz uma segunda curvatura ao modelo assim como um lambda adicional[6]. O modelo proposto por Svensson (1994) é

$$y(\tau) = \beta_1 + \beta_2\left(\frac{1-e^{-\lambda 1\tau}}{\lambda_1\tau}\right) + \beta_3\left(\frac{1-e^{-\lambda 1\tau}}{\lambda_1\tau} - e^{-\lambda 1\tau}\right) + \beta_4\left(\frac{1-e^{-\lambda 2\tau}}{\lambda_2\tau} - e^{-\lambda 2\tau}\right). \tag{9}$$

Como observado anteriormente no modelo de Nelson e Siegel, Diebold e Li introduziram uma dinâmica temporal no modelo original e mostraram que sua versão dinâmica tem boa capacidade de previsão. Similarmente ao que Diebold e Li fizeram ao modelo original de Nelson e Siegel, a versão dinâmica do modelo de Svensson é dada por

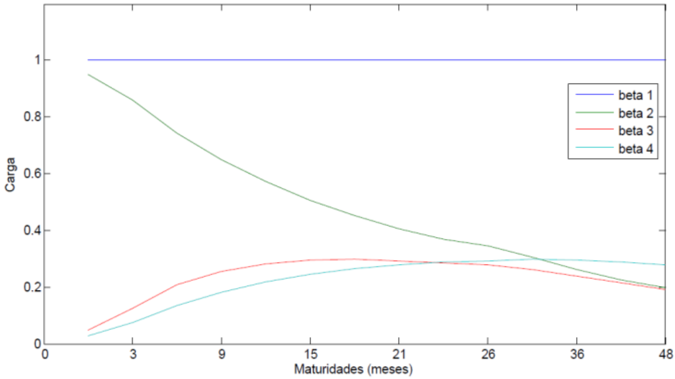
$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda 1\tau}}{\lambda_1\tau}\right) + \beta_{3t}\left(\frac{1-e^{-\lambda 1\tau}}{\lambda_1\tau} - e^{-\lambda 1\tau}\right) + \beta_{4t}\left(\frac{1-e^{-\lambda 2\tau}}{\lambda_2\tau} - e^{-\lambda 2\tau}\right). \tag{10}$$

A carga dos quatro fatores é mostrada no gráfico 2 como função das maturidades.

---

[6] Problema de multicolinearidade da estimação do modelo com a introdução de um novo lambda será detalhada mais a frente.

Gráfico 2 – Carga dos fatores ($\lambda_1 = 0.0747$ e $\lambda_2 = 0.0424$)



Fonte: própria.

Em trabalho recente, Calderia, Moura e Santos (2012) demonstram que para dados brasileiros este modelo com um fator a mais tem um melhor ajuste aos dados do que àqueles com três fatores, modelo de Nelson e Siegel. Além disso, este modelo de Svensson vem sendo amplamente usado por bancos centrais em todo o mundo (BIS 2005).

5. Modelagem e previsão da Estrutura a termo da taxa de juros

Nesta seção os modelos propostos para a curva de juros serão estimados e avaliados, utilizando o modelo de três fatores de Diebold e Li (2006) em que na primeira etapa estimam-se os fatores para cada período de tempo (modelo *cross–section*) e em seguida ajusta-se o modelo dinâmico dos fatores da equação de transição. Iniciaremos com a introdução dos dados. Além deste modelo, outros concorrentes serão utilizados para comparações.

5.1. Dados

Nesse capítulo serão introduzidos os dados utilizados para construir as curvas de juros e a análise de suas propriedades.

Os dados empregados consistem das séries diárias de taxas de juros dos títulos públicos federais fixados à inflação (IPCA) extraídos da ANBIMA, com maturidades fixas de 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 26, 30, 36, 42 e 48 meses. O período analisado vai de 03/01/2005 a 03/02/2011, perfazendo um total de 1529 observações diárias. Para a estimação da curva de juros foram utilizados os preços indicativos dos títulos NTN-B emitidos pelo Tesouro Nacional para todos os vencimentos disponíveis. Estes títulos indexados pagam cupons semestrais.

As NTN-B’s são títulos s públicos com rentabilidade vinculada à variação do IPCA, acrescida de juros definidos no momento da compra que pagam cupons de juros (6% a.a.) semestrais, compostos, e apresentam um único fluxo de principal na data de vencimento. O valor nominal deste título na data base (15/07/2000) é R$ 1.000,00 que serve como referência para atualização do valor nominal conforme o IPCA. Seu preço unitário é calculado como:

$$PU = \sum_{t=1}^{n} \left[\frac{C_t}{(1+y)^{\tau}}\right] + \frac{VNA}{(1+y)^{\tau}} \,, \qquad (11)$$

$$c_t = \left[(1+6\%)^{\frac{1}{2}} - 1\right] X\, VNA, \qquad (12)$$

onde

$PU =$ preço unitário;

C_t= pagamento dos cupons do título;

VNA= valor nominal atualizado pela variação do IPCA entre a data-base;

(15/07/2000) e a data de liquidação;

y = Yield do título anualizado;

τ = tempo até o vencimento (em anos comerciais - 252 dias úteis).

Inicialmente os títulos com cupom (NTN-B de diversas maturidades) são transformados em zero cupom através do cálculo da *duration*[7] dos mesmos. Uma vez que este trabalho trabalha com maturidades fixas, os dados observados foram interpolados através do método *cubic splines* proposto originalmente por McCulloch (1971; 1975). Em seguida, define-se o total de pagamentos dos títulos (D) como:

$$D_t(\tau) = PR_t(\tau) + c_t(\tau) \ , \qquad (13)$$

onde

PR= pagamento do principal;

C = o somatório do pagamento dos cupons do título considerado.

A partir de $D_t(\tau)$ obtém-se a *duration* e a maturidade de cada título. A Tabela 1 resume algumas estatísticas descritivas da curva de juros para o período.

Tabela 1 – Estatística das taxas de juros das NTN's-B

Maturidade (meses)	Média	Mediana	desvio Padrão	Mínimo	Máximo	Assimetria	Curtose	ρ(1)	ρ(5)	ρ(21)
1	8.0436	6.8458	4.2837	1.8698	20.9481	1.3583	4.1193	0.9984	0.9897	0.9343
3	7.2996	6.9599	2.8934	2.7535	13.2592	0.4105	2.2050	0.9966	0.9820	0.9161
6	7.4630	7.1504	2.6171	3.3714	12.8881	0.3441	2.1315	0.9967	0.9824	0.9204
9	7.7693	7.3806	2.4641	4.2060	12.8889	0.5085	2.2454	0.9983	0.9913	0.9535
12	7.9779	7.6163	2.3612	4.7570	12.9571	0.6090	2.3335	0.9990	0.9945	0.9655
15	8.0994	7.7718	2.2513	4.9519	12.9306	0.6259	2.3108	0.9991	0.9950	0.9676
18	8.1634	7.8000	2.1322	5.1707	12.7061	0.5946	2.2107	0.9990	0.9947	0.9668
21	8.1909	7.8151	2.0138	5.3868	12.4330	0.5423	2.0796	0.9989	0.9941	0.9650
24	8.1949	7.8469	1.9035	5.5869	12.1375	0.4853	1.9504	0.9988	0.9936	0.9627
26	8.1836	7.8380	1.8046	5.7477	11.8395	0.4326	1.8425	0.9987	0.9930	0.9599
30	8.1624	7.8111	1.7179	5.7770	11.5624	0.3884	1.7640	0.9986	0.9923	0.9567
36	8.1027	7.7703	1.5774	5.8031	11.3847	0.3283	1.6920	0.9984	0.9910	0.9497
42	8.0324	7.7716	1.4714	5.8074	11.3072	0.2972	1.6959	0.9982	0.9898	0.9426
48 (nível)	7.9595	7.7358	1.3894	5.8027	11.1869	0.2810	1.7281	0.9981	0.9888	0.9363
inclinação	-0.0840	0.8979	3.5039	-11.5079	5.2861	-1.4511	4.6307	0.9974	0.9828	0.8895
curvatura	0.3787	0.8315	1.9598	-6.3376	4.3202	-1.3030	4.5264	0.9963	0.9767	0.8654

Nota: A tabela apresenta estatísticas descritivas das taxas de juros diárias para diferentes maturidades assim como para o nível, inclinação e curvatura da curva, definidos, respectivamente, como $y_t(48), y_t(48) - y_t(1)$ e $2y_t(21) - y_t(120) - y_t(1)$. O período amostral vai de 03/01/2005 até 03/02/2011.
Fonte:ANBIMA. Elaboração: própria.

A análise preliminar estatística dos dados permite fazer algumas conclusões. Respeitando a teoria de finanças, em geral, verifica-se que a curva de juros média é positiva e côncava (ver Diebold e Li (2006) e Angi e Piazzesi (2003)). Porém, as médias registradas para títulos americanos com prazos equivalentes apresentam valores bem menores

[7] Macaulay (1938) propôs a formulação ainda hoje utilizada para o cálculo da *duration*, como uma média ponderada de todos os fluxos de caixa do título.

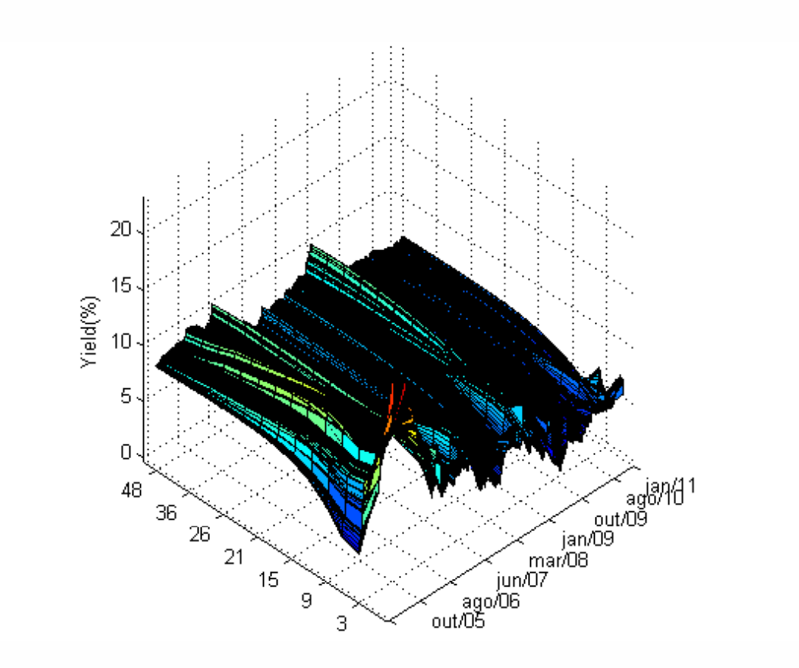
do que as médias das taxas nas NTN's-B. Adicionalmente, os desvios padrões decrescem com a maturidade, ou seja, títulos com vencimento em curtíssimo prazo (por exemplo, observe um título com maturidade de 1 mês) possui volatilidade superior a de um outro com maturidade de longo prazo (título com maturidade de 48 meses). Isto indica que taxas de juros de prazos menores são mais suscetíveis a flutuações na Selic.

Outro ponto importante é a considerável variação entre as taxas mínimas e máximas para as diferentes maturidades, o que pode estar sendo influenciado pela política monetária no referido período. As distribuições das taxas possuem, em sua grande maioria, uma cauda longa à direita, conforme indicado pela medida de assimetria. Testamos a hipótese nula de que as *yields* são normalmente distribuídas e foi possível rejeitar a hipótese para todas as maturidades (assim como para os dados americanos).

A autocorrelação de primeira ordem das séries é elevada, o que indica que os movimentos das taxas de juros dos NTN's-B tendem a ser persistentes (ver, por exemplo, a autocorrelação de primeira ordem registrada para a taxa de NTN - B de 1 mês, que é de aproximadamente 0.9984), o que vai ao encontro da teoria econômica, já que as taxas de juros para maturidades de curto prazo parecem ser persistentes para as três defasagens utilizadas, 1, 5 e 21 dias úteis. Importante destacar também as autocorrelações para maturidades de prazos mais longos que não cai expressivamente, contrariando o observado para dados americanos (Dieboldi e Li (2006)). Isto pode ser um indício de que para o caso brasileiro existe uma alta correlação entre fatores que afetam as *yields* tanto no curto quanto no longo prazo. Isso será explorado mais adiante na seção de resultados.

O gráfico 3 mostra o comportamento diário da curva de juros para o período analisado.

Gráfico 3 – Comportamento recente das taxas de juros das NTN's.



Fonte:ANBIMA. Elaboração: própria.

A Figura mostra o comportamento temporal das taxas de juros das NTN's-B de 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18,21, 24, 26, 30, 36 e 42 meses. Nota-se que as taxas costumam se movimentar em conjunto, fenômeno que pode ser atribuído à influência de um fator nível (que supostamente afeta todas as taxas da mesma maneira). Este fato pode ser analisado ao notar que o nível da *yield* (maturidade de 48 meses) é altamente persistente com autocorrelação alta. Nota-se também que ao longo do tempo tanto a inclinação e a curvatura variam significativamente assumindo vários formatos e que são também altamente persistentes. Porém a curvatura é menos persistente que a inclinação, que por sua vez é menos persistente que o nível da *yield*.

Por fim, testes de raiz unitária foram realizados para a verificação da existência ou não de estacionariedade nas séries temporais relativas às 14 maturidades de NTN-B. A rejeição da hipótese nula de que há raiz unitária ao nível de significância de 10%, 5% e 1%

é assinalada por (*, **,***). Os testes Dickey-Fuller aumentado (ADF) sugerem na tabela 2 que as séries são I(1), com exceção das maturidades 3, 6 e 9 meses, para as quais foram rejeitadas a hipóteses nula de raiz unitária em nível. Porém, será seguido o trabalho de Diebold e Li (2006) e essas séries serão utilizadas em níveis.

Tabela 2 - Resultados dos testes de raiz unitária realizados com a série temporal relativa às taxas de NTN'-B

Maturidades	Nada		Intercepto		Intercepto e tendência	
(meses)	Nível	Diferença	Nível	Diferença	Nível	Diferença
1	-1.0179	-23.7347***	-1.2131	-23.7342***	-1.9212	-23.7257***
3	-0.8182	-9.2639***	-1.4871	-9.2648***	-4.3388***	-9.3114***
6	-0.6234	-15.6193***	-1.0277	-15.6172***	-4.0474***	-15.6812***
9	-0.6946	-10.3620***	-0.8314	-10.3690***	-3.6189**	-10.4302***
12	-0.8007	-12.2169***	-0.6314	-12.2303***	-2.8487	-12.2692***
15	-0.8570	-34.7836***	-0.3455	-34.7883***	-2.4800	-34.8109***
18	-0.9153	-35.0483***	-0.4509	-35.0544***	-2.1757	-35.0620***
21	-0.9337	-35.2476***	-0.5486	-35.25358***	-2.0511	-35.2541***
24	-0.9341	-35.3207***	-0.6292	-35.3261***	-2.0109	-35.3233***
26	-0.9261	-35.3005***	-0.6971	-35.3052***	-2.0094	-35.3007***
30	-0.9151	-35.2252***	-0.7564	-35.2292***	-2.0247	-35.2237***
36	-0.8951	-35.0142***	-0.8557	-35.0170***	-2.0669	-35.0104***
42	-0.8865	-34.8073***	-0.9320	-34.8096***	-2.1010	-34.8024***
48	-0.8921	-34.6332***	-0.9859	-34.6357***	-2.1210	-34.6280***

Teste realizados no pacote econométrico MATLAB. Utilizou-se critério de Critério de Schwarze (SIC) para a escolha das defasagens no teste de raiz unitária ADF.
Fonte: ANBIMA. Elaboração:própria.

5.2. Curva de Juros estimada

Como discutido na seção 4.2, para o ajuste da curva de juros de NTN-B será utilizado o modelo de Diebold e Li já descrito em seções anteriores como

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + \beta_{3t}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right).$$

Seguindo os trabalhos de Nelson e Siegel (1987) e Diebold e Li (2006), os parâmetros β_1, β_2 e β_3 (betas) serão estimados pelo método dos mínimos quadrados ordinários (MQO) para cada período de tempo, e, portanto, fixando o parâmetro de decaimento λ em um valor específico. Especificar a priori o valor do λ ao invés de estimá-lo, possibilita que a carga dos fatores seja fixada e conhecida (regressores fixos), podendo ser estimado pelo MQO. Além de simplicidade e conveniência, a calibragem do λ também fornece confiabilidade numérica ao modelo já que estamos substituindo centenas de otimizações numéricas (algoritmos) potencialmente complexas por triviais regressões de mínimos quadrados. Obviamente devemos optar por um valor apropriado para o λ. Este parâmetro ótimo escolhido será aquele que minimiza a soma do quadrado da diferença do *yield* observado do estimado, isto é que minimize a soma dos quadrados dos resíduos (SQR) conforme descrito na equação abaixo

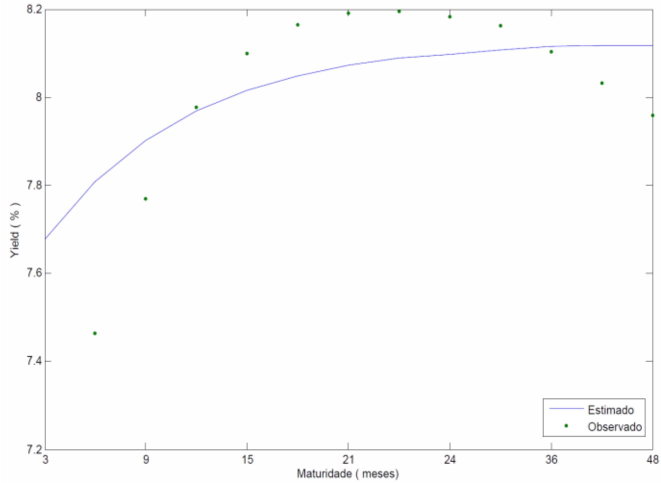
$$\hat{\lambda} = mín \sum \left\{ y_t(\tau_i) - \hat{y}\left(\tau_i, \lambda, \widehat{f_t}\right) \right\}^2 . \quad (14)$$

O valor de λ que minimiza a função acima descrita é de 0,1036 o que implica que o valor máximo da curvatura ocorre aos 18 meses ou 378 dias úteis.

Após a escolha do λ, é aplicado o MQO para estimar os valores que β_1, β_2 e β_3 irão assumir ao longo do tempo, assim como os resíduos correspondentes. Agora será analisado o ajuste do modelo. Nos gráfico 4 e 5 plota-se, respectivamente, a média (excluindo a *yield* de maturidade de curto prazo – 1 mês) e a mediana das curvas de juros ajustada contra a curva de juros real (observada). Percebe-se que o modelo ajustado tem bom ajuste aos dados reais de *yield*, já que as duas curvas estão bem próximas.

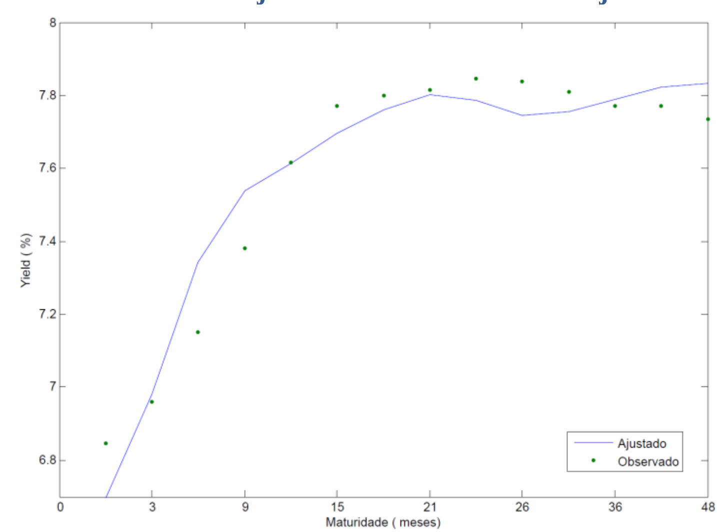
Seguindo a análise do modelo ajustado, no gráfico 6 algumas datas específicas são selecionadas e o comportamento da curva de juros ajustada no modelo de três fatores e a curva empírica (observada) são mostradas. É possível perceber que a curva ajustada replica vários formatos da curva de juros real: positivamente inclinada, negativamente inclinada, curvatura em forma de U e em U invertido. Porém, em certas datas específicas alguns formatos tiveram dificuldades de serem replicados, principalmente quando a taxa de curtíssimo prazo (1mês) é muito alta e cai rapidamente num período breve (como é o caso do gráfico à esquerda e embaixo).

Gráfico 4 – Curva de juros média observada e ajustada



Fonte: ANBIMA. Elaboração: própria.

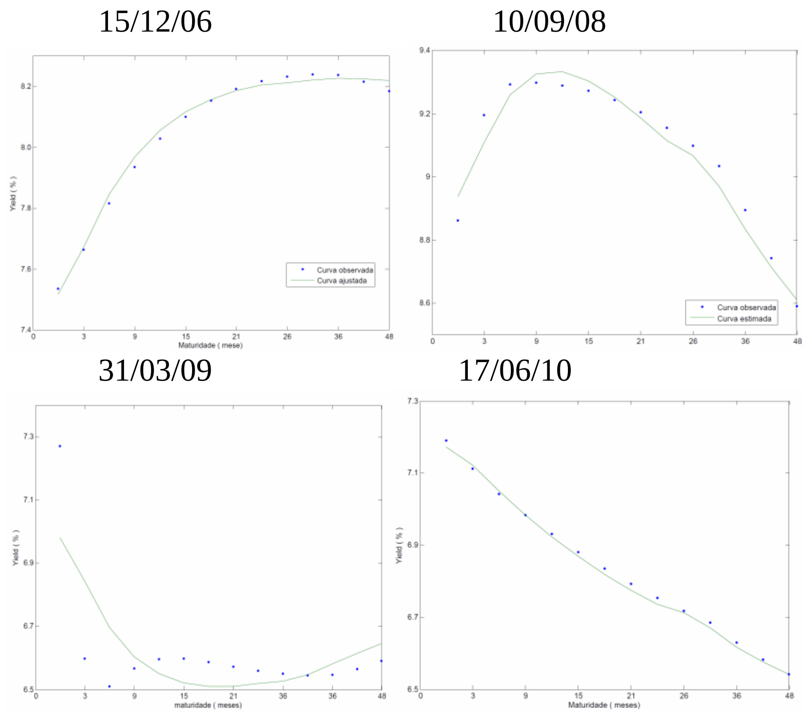
Gráfico 5 - Curva de juros mediana observada e ajustada



Fonte: ANBIMA. Elaboração: própria.

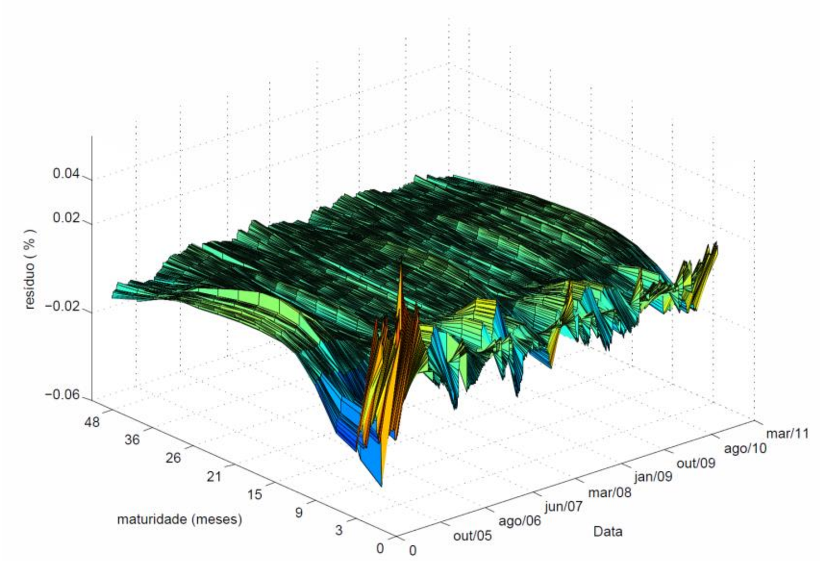
O gráfico 7 mostra os resíduos diários da curva de juros obtidos do modelo ajustado. Observa-se que os resíduos, de uma maneira geral, apresentam baixa magnitude indicando um bom ajuste do modelo. E ainda, que os resíduos para maturidade mais curtas apresentam volatilidade maior, fato estilizado na curva de juros que tem como uma de suas explicações a maior influência de instrumento de política monetária, mais suscetível a variações da Selic.

Gráfico 6 – Curva de juros em datas selecionadas



Fonte: ANBIMA. Elaboração: própria.

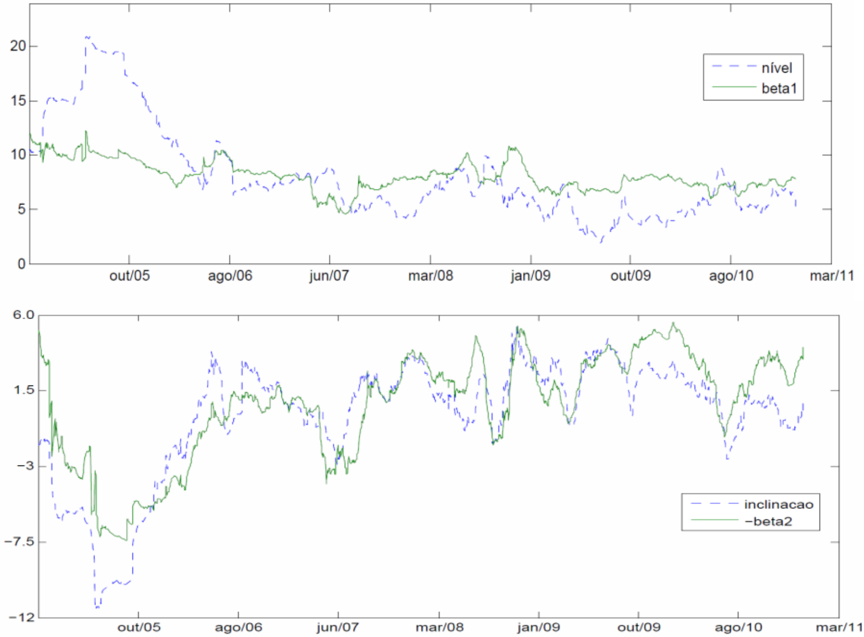
Gráfico 7 – Resíduos da Curva de Juros estimada



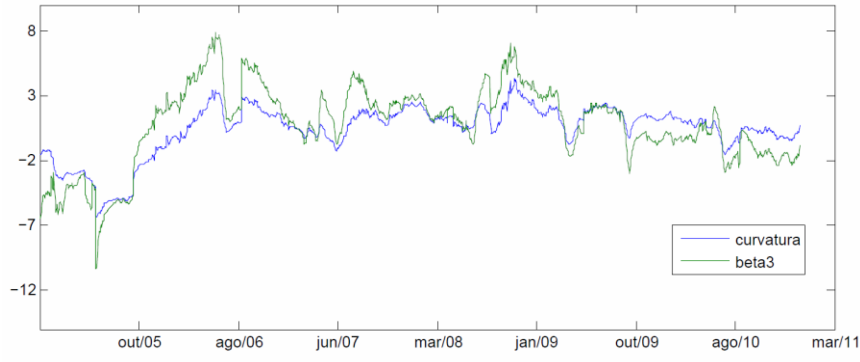
Observando os fatores estimados (β_1, β_2, β_3) e comparando-os com os observados na figura 8, a premissa de que os três fatores do modelo correspondem ao nível, inclinação e curvatura se confirmam. As correlações entre os fatores estimados e o nível, inclinação e curvatura observado são de $\rho(\beta_1, N) = 0.67$, $\rho(\beta_2, I) = -0.84$ e $\rho(\beta_3, C) = 0.90$, onde (N,I,C) é nível, inclinação e curvatura da curva de juros observada. Completando a análise dos fatores da curva estimada, a tabela 3 apresenta algumas estatísticas descritivas destes fatores. O primeiro fator é o menos volátil, pois o seu desvio padrão é menor do que o calculado para os demais fatores; o fator mais volátil é o segundo. E por fim, nota-se que o segundo fator é o mais persistente de todos, pois apresenta as maiores autocorrelações. Ademais, este fator possui uma característica importante a ser notada: na média, seu valor é negativo. A inclinação negativa indica a conduta da política monetária flexível adotada no período em questão, no qual a meta Selic definida pelo Comitê de Política Monetária (Copom) recuou de 19,75% a.a. (maior pico do período analisado) em agosto de 2005 para 10,75% a.a. em janeiro de 2011 (BCB – Histórico das Taxas de Juros). Os testes

Dickey-Fuller aumentado (ADF) sugerem que β_1 e β_2 têm raiz unitária e que β_3 não tem[8].

Gráfico 8 – Fatores estimados versus observados



[8] Testes realizados no pacote econométrico MATLAB. Utilizou-se critério de Critério de Schwarze (SIC) para a escolha das defasagens no teste de raiz unitária ADF. Ao nível de significância de 5% os valores críticos para rejeição da hipótese nula de presença de raiz unitária é de 1.9416.



Define-se, da curva observada, o nível como sendo o *yield* de 48 meses, a inclinação como sendo a diferença entre a *yield* de 48 meses e a *yield* de 1mês, e a curvatura como sendo duas vezes a *yield* de 18 meses (maturidade de médio prazo) menos a soma da *yield* de 48 meses e a de 1 mês.
Fonte: ANBIMA. Elaboração: própria.

Tabela 3 - Estatística descritiva, fatores estimados.

Fatores	Média	Mediana	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo	Assimetria	Curtose	ρ(1)	ρ(5)	ρ(21)	ADF
β^1	8.0865	7.9231	1.3589	4.5517	12.2764	0.2898	2.9750	0.9910	0.9512	0.7863	-1.1910
β^2	-0.5882	-1.2051	3.1628	-5.5752	7.4268	0.7817	2.7986	0.9956	0.9759	0.8636	-1.6948
β^3	0.7688	1.2212	3.0156	-10.3760	7.8358	-0.5298	3.2472	0.9922	0.9545	0.7992	-2.5451

Fonte: ANBIMA. Elaboração: própria.

5.3. Modelagem e desempenho dos modelos de previsão fora-da-amostra

Como já mencionado anteriormente, o modelo de Diebold e Li será utilizado com abordagem dinâmica construída a partir de um modelo univariado de processo autoregressivo (AR(1)) para estimar e fazer previsões fora-da-amostra a cerca do comportamento da curva de juros. A seleção deste como modelo a priori se dá pela sua simplicidade dentre os grandes modelos autorregressivos mais sofisticados.

Seguindo os trabalhos de Diebold e Li (2006), será aplicada a estimação do modelo para uma amostra com dados diários de 03/01/2005 à 03/02/2010, sendo que uma subamostra composta por 252 dias úteis, compreendendo o período de 04/02/2010 até 02/01/2011 é deixada do lado de fora da amostra. Essa subamostra é separada para comparar as previsões calculadas com os dados efetivamente observados[9]. O critério adotado para avaliação de desempenho é o RMSE (root-mean-square error) , isto é, raiz do erro médio quadrático e os horizontes para os quais se faz as previsões são 1 dia, 1 semana, 1mês, 2 meses e 3 meses (h=1,5,21,42 e 63 dias úteis).

A previsão da curva de juros com base em um modelo univariado AR(1) é

$$\hat{y}_{t+h/t}(\tau) = \hat{\beta}_{,1t+h/t} + \hat{\beta}_{2,t+h/t}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + \hat{\beta}_{3,t+h/t}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right),$$

onde

$$\hat{\beta}_{1,t+h/t} = \hat{a}_i + \hat{b}_i\hat{\beta}_{i,t}\ , i = 1,2,3.$$

Este trabalho irá incluir também previsões VAR(1) para análise, assim como em Diebold e Li (2006). Neste o autor argumenta que existem pelo menos duas razões para se esperar que esta previsão seja inferior a um AR(1). Primeiro devido ao grande número de parâmetros imposto ao modelo (devido as interações entre os fatores) que podem gerar resultados superajustados e segundo devido ao fato de que, segundo Diebold e Li, para dados americanos os fatores possuem poucas interações e não são altamente correlacionados. Serão mostrados nos resultados que para o caso brasileiro isto não se confirma. Segue o modelo utilizado para a dinâmica do VAR(1).

$$\hat{y}_{t+h/t}(\tau) = \hat{\beta}_{,1t+h/t} + \hat{\beta}_{2,t+h/t}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) + \hat{\beta}_{3,t+h/t}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right),$$

onde

$$\widehat{\beta}_{1,t+h/t} = \hat{a} + \hat{b}\hat{\beta}_t\ , i = 1,2,3.$$

Para comparação, também iremos obter previsões para modelos concorrentes que seguem abaixo.

1. Passeios aleatórios ou *randow walks* (RW) que corresponde a

$$\hat{y}_{t+h/t}(\tau) = y_t(\tau),$$

2. Modelo dinâmico AR (1) de Svensson ajustado (1994)[10]

---

[9] O procedimento consiste em estimar o modelo com dados de 03/01/2005 à 03/02/10 no primeiro passo. Em seguida, o modelo é utilizado para gerar previsões de 04/02/10 à 02/01/2011. Faz-se então, uma repetição do primeiro passo incorporando um dia a mais para a estimação, ou seja, os modelos são estimados novamente com dados de 03/01/2005 à 04/02/10. Agora, no segundo passo são geradas previsões para o período de 05/02/2010 à 02/01/11. Faz-se então estimações e previsões recursivamente e este procedimento com janela móvel vai se repetindo sucessivamente.

[10] Seguindo os trabalho de Caldeira, Moura e Santos (2012) disponível em Advances in Scientific and Applied Accounting. São Paulo, v.5, n.3, p. 349-376, 2012 iremos utilizar um modelo ajustado, com o intuito de corrigir possível problema de multicolinearidade entre os

$$\hat{y}_{t+h/t}(\tau) = \hat{\beta}_{,1t+h/t} + \hat{\beta}_{2,t+h/t}\left(\frac{1-e^{-\lambda 1\tau}}{\lambda 1\tau}\right) + \hat{\beta}_{3,t+h/t}\left(\frac{1-e^{-\lambda 1\tau}}{\lambda 1\tau} - e^{-\lambda 1\tau}\right) + \hat{\beta}_{4,t+h/t}\left(\frac{1-e^{-\lambda 2\tau}}{\lambda 2\tau} - e^{-2\lambda 2\tau}\right),$$

onde

$$\hat{\beta}_{1,t+h/t} = \hat{a}_i + \hat{b}_i\hat{\beta}_{i,t}, i = 1,2,3,4.$$

3. Modelo dinâmico VAR (1) de Svensson ajustado (1994)

$$\hat{y}_{t+h/t}(\tau) = \hat{\beta}_{,1t+h/t} + \hat{\beta}_{2,t+h/t}\left(\frac{1-e^{-\lambda 1\tau}}{\lambda 1\tau}\right) + \hat{\beta}_{3,t+h/t}\left(\frac{1-e^{-\lambda 1\tau}}{\lambda 1\tau} - e^{-\lambda 1\tau}\right) + \hat{\beta}_{4,t+h/t}\left(\frac{1-e^{-\lambda 2\tau}}{\lambda 2\tau} - e^{-2\lambda 2\tau}\right),$$

onde

$$\hat{\beta}_{1,t+h/t} = \hat{a} + \hat{b}\hat{\beta}_t, i = 1,2,3,4.$$

4. Modelo de 2 fatores com dinâmica AR(1)[11]

$$\hat{y}_{t+h/t}(\tau) = \hat{\beta}_{,1t+h/t} + \hat{\beta}_{2,t+h/t}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right),$$

Onde

$$\hat{\beta}_{1,t+h/t} = \hat{a}_i + \hat{b}_i\hat{\beta}_{i,t}, i = 1,2.$$

5. Modelo de 2 fatores com dinâmica VAR(1)

$$\hat{y}_{t+h/t}(\tau) = \hat{\beta}_{,1t+h/t} + \hat{\beta}_{2,t+h/t}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right),$$

onde

$$\hat{\beta}_{1,t+h/t} = \hat{a} + \hat{b}\hat{\beta}_t, i = 1,2.$$

A raiz dos erros quadráticos médio (RMSE) para cada maturidade de NTN-B são apresentadas a seguir para o modelo Diebold e Li (DL – AR e VAR) assim como a de seus concorrentes *randow walk* (RW), Svensson ajustado (SV – AR e VAR) e o modelo de dois fatores (2fat – AR e VAR). As tabelas de 4 a 7 mostram o resultado de previsão fora-da-amostra para h passos à frente, sendo horizontes diário (h=1), semanal (h=5), mensal (h=21), bimestral (h=42) e trimestral (h=63), respectivamente.

---

lambdas 1 e 2, em que De Pooter (2007) propõe uma substituição do ultimo termo da equação 12 por $-e^{-2\lambda 2\tau}$.

[11] Na dissertação apresentada por Priscila Kelly Carvalho Sabino (2007) é mencionada a questão da não necessidade do terceiro fator para o comportamento da estrutura a termo brasileira segundo a verificação de ACP. Tal resultado também foi obtido para a curva de juros alemã antes do estabelecimento do euro (ver "A Two-Factor Model of the German Term Structure of Interest Rates", de Nuno Cassola e Jorge Barros Luís, em Applied Financial Economics, 13, 2003.)

Tabela 4 – RMSE do modelo de Diebold e Li (AR e VAR) e concorrentes RW, SV, e modelo de 2 fatores (2fat) quando h=1

Maturidades	RW	DL (AR)	DL (VAR)	SV (AR)	SV (VAR)	2fat (AR)	2fat (VAR)
1	**0.00186**	0.01067	0.01071	0.00870	0.00890	0.01232	0.01246
3	**0.00114**	0.00917	0.00914	0.00898	0.00893	0.00850	0.00841
6	**0.00102**	0.00774	0.00771	0.00585	0.00580	0.00805	0.00799
9	**0.00071**	0.00256	0.00255	0.00076	0.00074	0.00336	0.00335
12	**0.00062**	0.00098	0.00099	0.00271	0.00275	0.00071	0.00072
15	**0.00061**	0.00237	0.00235	0.00327	0.00297	0.00147	0.00143
18	**0.00060**	0.00281	0.00277	0.00261	0.00259	0.00200	0.00194
21	**0.00058**	0.00266	0.00260	0.00144	0.00140	0.00205	0.00197
24	0.00056	0.00219	0.00211	0.00060	**0.00054**	0.00183	0.00173
26	**0.00054**	0.00187	0.00178	0.00101	0.00093	0.00168	0.00158
30	**0.00053**	0.00093	0.00084	0.00223	0.00219	0.00105	0.00095
36	**0.00051**	0.00087	0.00099	0.00269	0.00289	0.00052	0.00058
42	**0.00050**	0.00210	0.00228	0.00125	0.00143	0.00110	0.00126
48	**0.00049**	0.00326	0.00347	0.00240	0.00262	0.00188	0.00206

Fonte: ANBIMA. Elaboração: própria.

Tabela 5 – RMSE do modelo de Diebold e Li (AR e VAR) e concorrentes RW, SV, e modelo de 2 fatores (2fat) quando h=5

Maturidades	RW	DL (AR)	DL (VAR)	SV (AR)	SV (VAR)	2fat (AR)	2fat (VAR)
1	**0.00186**	0.01067	0.01071	0.00870	0.00890	0.01232	0.01246
3	**0.00114**	0.00917	0.00914	0.00898	0.00893	0.00850	0.00841
6	**0.00102**	0.00774	0.00771	0.00585	0.00580	0.00805	0.00799
9	0.00071	0.00256	0.00255	0.00076	**0.00074**	0.00336	0.00335
12	0.00062	0.00098	0.00099	0.00271	0.00275	0.00071	**0.00072**
15	0.00061	0.00237	0.00235	0.00327	0.00297	**0.00147**	0.00143
18	**0.00060**	0.00281	0.00277	0.00261	0.00259	0.00200	0.00194
21	**0.00058**	0.00266	0.00260	0.00144	0.00140	0.00205	0.00197
24	0.00056	0.00219	0.00211	**0.00060**	0.00054	0.00183	0.00173
26	0.00054	0.00187	0.00178	**0.00101**	0.00093	0.00168	0.00158
30	0.00053	**0.00093**	0.00084	0.00223	0.00219	0.00105	0.00095
36	0.00051	0.00087	0.00099	0.00269	0.00289	**0.00052**	0.00058
42	0.00050	0.00210	0.00228	0.00125	**0.00143**	0.00110	0.00126
48	**0.00049**	0.00326	0.00347	0.00240	0.00262	0.00188	0.00206

Fonte: ANBIMA. Elaboração: própria.

Tabela 6 – RMSE do modelo de Diebold e Li (AR e VAR) e concorrentes RW, SV, e modelo de 2 fatores (2fat) quando h=21

Maturidades	RW	DL (AR)	DL (VAR)	SV (AR)	SV (VAR)	2fat (AR)	2fat (VAR)
1	0.01391	0.01310	0.01406	0.01480	0.01521	**0.01314**	0.01335
3	0.00956	0.00727	0.00657	0.00576	**0.00525**	0.00774	0.00775
6	0.00833	0.00602	0.00547	0.00393	**0.00331**	0.00720	0.00744
9	0.00592	0.00181	0.00157	0.00525	0.00476	**0.00266**	0.00299
12	0.00470	0.00315	0.00321	0.00756	0.00786	0.00169	**0.00121**
15	0.00413	0.00454	0.00448	0.00820	0.00799	0.00286	**0.00203**
18	0.00375	0.00503	0.00483	0.00776	0.00671	0.00342	**0.00246**
21	0.00342	0.00496	0.00463	0.00682	0.00612	0.00350	**0.00244**
24	0.00314	0.00460	0.00414	0.00576	0.00527	0.00331	**0.00218**
26	0.00290	0.00437	0.00385	0.00519	0.00477	0.00320	**0.00206**
30	0.00270	0.00353	0.00287	0.00416	0.00402	0.00258	**0.00140**
36	0.00247	0.00244	0.00172	0.00373	0.00311	0.00174	**0.00089**
42	0.00227	0.00174	0.00134	0.00463	0.00444	0.00105	**0.00125**
48	0.00217	0.00165	0.00190	0.00713	0.00697	**0.00082**	0.00195

Fonte: ANBIMA. Elaboração: própria.

Tabela 7 – RMSE do modelo de Diebold e Li (AR e VAR) e concorrentes RW, SV, e modelo de 2 fatores (2fat) quando h=42

Maturidades	RW	DL (AR)	DL (VAR)	SV (AR)	SV (VAR)	2fat (AR)	2fat (VAR)
1	0.01644	0.01559	0.02053	0.01941	0.02205	**0.01415**	0.01508
3	0.01354	**0.00600**	0.00619	0.00673	0.00652	0.00710	0.00713
6	0.01169	**0.00500**	0.00555	0.00621	0.00666	0.00649	0.00688
9	0.00912	0.00346	0.00685	0.00885	0.00905	**0.00270**	0.00337
12	0.00747	0.00558	0.00888	0.01111	0.01074	0.00323	**0.00307**
15	0.00634	0.00696	0.00989	0.01185	0.01226	0.00448	**0.00377**
18	0.00547	0.00749	0.01009	0.01159	0.01459	0.00506	**0.00405**
21	0.00475	0.00749	0.00982	0.01085	0.01560	0.00517	**0.00396**
24	0.00417	0.00721	0.00931	0.00998	0.01199	0.00501	**0.00368**
26	0.00370	0.00704	0.00904	0.00950	0.00996	0.00493	**0.00359**
30	0.00335	0.00630	0.00806	0.00856	0.00954	0.00434	**0.00294**
36	0.00290	0.00532	0.00685	0.00810	0.00707	0.00354	**0.00234**
42	0.00268	0.00444	0.00583	0.00881	0.00879	0.00279	**0.00211**
48	0.00255	0.00374	0.00506	0.01077	0.01031	0.00215	**0.00226**

Fonte: ANBIMA. Elaboração: própria.

Tabela 8 – RMSE do modelo de Diebold e Li (AR e VAR) e concorrentes RW, SV, e modelo de 2 fatores (2fat) quando h=63

Maturidades	RW	DL (AR)	DL (VAR)	SV (AR)	SV (VAR)	2fat (AR)	2fat (VAR)
1	0.01827	0.01777	0.02990	0.02261	0.02760	**0.01516**	0.01778
3	0.01699	**0.00568**	0.01400	0.00862	0.01187	0.00671	0.00770
6	0.01451	**0.00501**	0.01329	0.00842	0.01630	0.00608	0.00740
9	0.01139	0.00539	0.01545	0.01133	0.01935	**0.00343**	0.00557
12	0.00928	0.00769	0.01717	0.01361	0.02055	**0.00470**	0.00597
15	0.00783	0.00908	0.01788	0.01445	0.02268	**0.00599**	0.00651
18	0.00674	0.00964	0.01788	0.01436	0.02163	**0.00659**	0.00665
21	**0.00588**	0.00971	0.01748	0.01381	0.01810	0.00673	0.00649
24	0.00619	0.00949	0.01688	0.01310	0.01154	**0.00617**	0.00660
26	**0.00464**	0.00937	0.01656	0.01271	0.01036	0.00654	0.00607
30	**0.00422**	0.00870	0.01551	0.01189	0.00999	0.00599	0.00540
36	**0.00364**	0.00781	0.01420	0.01145	0.01146	0.00522	0.00472
42	**0.00332**	0.00697	0.01307	0.01199	0.01300	0.00448	0.00424
48	**0.00312**	0.00624	0.01212	0.01353	0.01629	0.00381	0.00397

Fonte: ANBIMA. Elaboração: própria.

Quando comparamos a análise de desempenho dos modelos (RMSE) para o horizonte de previsão de 1 semana, percebemos que o RW ainda supera os modelos concorrentes em sua maioria. Mas agora, modelos como os de Svensson ajustado (maturidade de 24 e 26 meses; e 9 e 36 meses, respectivamente, para AR(1) e VAR(1)), e o modelo de dois fatores (15 e 36 meses; e 12 meses, respectivamente AR(1) e VAR(1)) aparecem como a melhor alternativa de previsão fora-da-amostra. Porém, nosso o modelode Diebold e Li, continua apresentar um resultado frustrante para previsões, superando seus concorrentes apenas para a maturidade de 30 meses (DL(AR)).

Quando o horizonte de previsão é ampliado, a qualidade de previsão dos modelos propostos melhora substancialmente, principalmente para previsões de 1 mês e 2 meses à frente, com destaque para o modelo de dois fatores.

No caso da previsão para 1 mês, o modelo de dois fatores supera os demais em sua grande maioria, com as maturidades de 12,15,18,21,24,26,30,36 e 42 meses tendo o melhor desempenho com um modelo dinâmico VAR(1) enquanto que para os prazos de 1,9 e 48 meses o AR(1) obteve o melhor resultado em termos da raiz do erro médio quadrático (RMSE). Para as demais maturidades (3 e 6 meses), o modelo de Svensson ajustado com trajetória temporal modelada por um VAR(1) apresentou o melhor desempenho.

Para previsões de 2 meses à frente, a performance do modelo de dois fatores praticamente repete o resultado apresentado no horizonte de previsão anterior. Uma vez mais, este modelo apresenta um melhor desempenho para a grande maioria das maturidades frente aos demais.

A diferença fundamental é que para as maturidades de 3 e 6 meses, o modelo de Diebold e Li (DL(AR)) consegue obter o menor RMSE frente aos seus concorrentes.

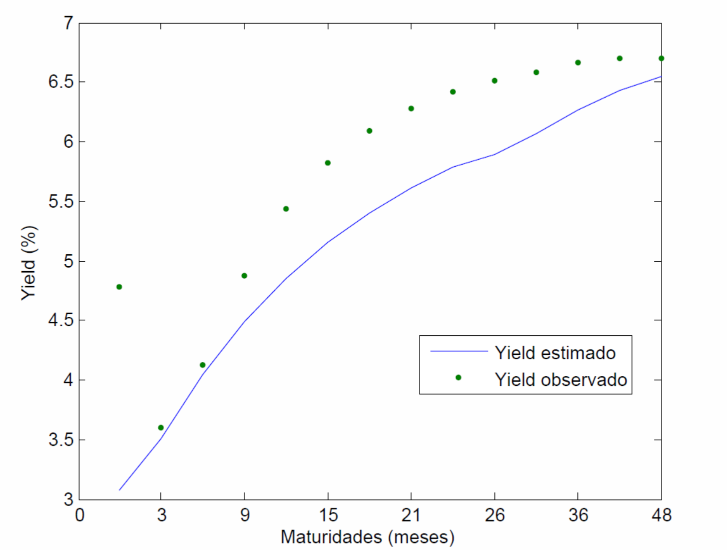
O desempenho do modelo DL(AR) no horizonte de previsão para dois meses é repetida para previsões trimestrais, apresentando melhores resultados para 3 e 6 meses. O que ocorre com o modelo de dois fatores que vinham liderando a performance é que este acaba perdendo espaço para o modelo mais simples, como o RW (melhores resultados para 21,26,30,36,42 e 48 meses). Uma possível explicação é que como os dados são diários a previsão para um prazo tão longo como o de 63 dias à frente fica cada vez mais difícil.

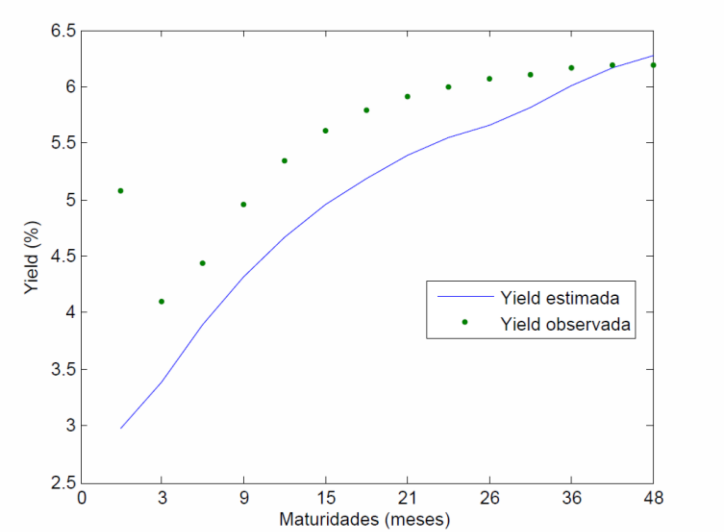
Os resultados anteriores levam a conclusão de que para os dados brasileiros, especificamente para as NTN's-B, o modelo de Diebold e Li não é o mais adequado para previsões de quaisquer horizontes, sendo em quase todas as maturidades superado por um modelo passeio aleatório, contrariando os resultados encontrados para dados americanos. Observado as tabelas de 4 à 8, é possível constatar que o modelo modificado de Diebold e Li, chamado neste trabalho de modelo de dois fatores, apresenta o melhor desempenho preditivo para quase todos os horizontes de previsão nas diversa maturidades analisadas.

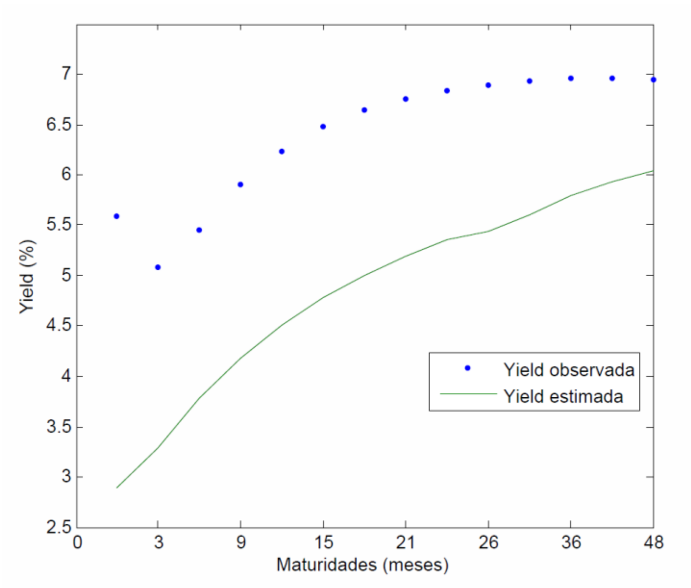
Futuramente, testes econométricos poderiam ser utilizados para checar se os fatores B1(nível) e B2 (inclinação) tendem a ser significativamente correlacionados. Uma explicação, se isto se confirmar, é que um choque inflacionário que pressione a taxa de juros de curto prazo gera também expectativas de alta para o longo prazo. Há ainda o fato de o terceiro fator (curvatura) poder ser irrelevante para o caso brasileiro, já que os dois primeiros fatores são capazes de explicar mais de 99% da variabilidade dos dados da amostra. (Sabino (2007)).

Gráfico 9 - Curvas de juros observadas e previstas pelo modelo de dois fatores (Diebold e Li modificado) para datas selecionadas

(Previsões para 09/03/2010 (h=21), 08/04/2010 (h=42) e 10/05/10 (h=63), respectivamente. As previsões foram calculadas em 04/02/2010.)







Fonte: ANBIMA. Elaboração: própria.

O gráfico 9 mostra as curvas de juros para as taxas de juros de NTN’s-B observadas e previstas pelo modelo de dois fatores para o horizonte (DL(VAR)) de 1, 2 e 3 meses à frente ((previsões calculadas em 04/02/2010). Comprovando a teoria, as curvas de juros são positivamente inclinadas e côncavas, sendo que a curva prevista para h=21 tem melhor aderência aos dados observados do que a curva para h=42, que por sua vez mostra um melhor resultado que a curva de juros prevista para 3 meses.

Portanto, com os resultados encontrados neste trabalho é concluído que o modelo capaz de gerar melhores previsões para a curva de juros brasileira utilizando taxas de NTN’s-B para horizontes distintos, notadamente para 1 e 2 meses à frente, para diversas maturidades é o modelo de Diebold e Li modificado de dois fatores. Este resultado vai ao encontrar da literatura encontrada em diversos trabalhos onde modelos mais parcimoniosos são capazes de gerar melhores previsões (princípio do KISS).

6. Conclusão

Esse trabalho consistiu no esforço de modelar o comportamento da estrutura a termo da taxa de juros, de importância inegável em virtude das aplicações já discutidas, seja para macroeconomistas ou gestores financeiros.

Mais especificamente, esse trabalho objetivou aplicar a metodologia proposta por Diebold e Li para estimar e fazer previsões fora da amostra para ETTJ brasileira (NTN's-B), tendo como base modelos fatoriais dinâmicos (AR e VAR). Tais autores utilizaram o modelo de três fatores para modelar o comportamento da ETTJ que interpretaram como nível, inclinação e curvatura da curva de juros.

O resultado encontrado por Diebold e Li (2006) para os dados americanos se revelaram animadores, principalmente para horizontes de previsão de longo prazo. Embora o resultado para previsões no horizonte de 1 mês não sejam melhores do que mero passeio aleatório e concorrentes, para previsões de 1 ano à frente os modelos de Diebold e Li se mostraram superiores aos demais. Uma possível razão para o sucesso de previsão, segundo os autores, seria a abordagem da parcimônia, da simplicidade, ou seja, o princípio do KISS – "Keep it sophisticatedly simple.

Já os resultados de previsão, utilizando o mesmo modelo citado anteriormente, encontrados para a curva de juros brasileira se mostrou aquém do esperado, nos levando a concluir que o modelo de Diebold e Li não é o mais adequado para o caso brasileiro e que para muitas maturidades nos diversos horizontes de previsão tal modelo é batido por meros modelos univariados (RW).

Porém, utilizando como referência o que foi feito em Sabino (2007), foi utilizado um modelo Diebold e Li mais simples e parcimonioso, visando dar uma simplicidade ainda maior objetivando gerar modelos com qualidade superior de previsões. Este modelo modificado com somente dois fatores (nível e inclinação) para estimar e prever a curva de juros brasileira mostrou ser superior aos demais, incluindo o RW, com exceção do horizonte de previsão de curtíssimo prazo (1 dia à frente e 1 semana à frente), para quase todas as maturidades e horizontes de previsão, gerando boas previsões para a dinâmica temporal de um VAR(1).

As principais razões apontadas para o sucesso deste modelo como citado em Sabino (2007) é que os fatores determinantes da curva de juros brasileira estariam correlacionados e que o terceiro fator apontado como determinante teria baixo poder de explicação. Além destas justificativas, parece razoável supor que modelos menos complexos, com mais parcimônia preveem melhor, apesar ter ajuste pior (KISS).

Por fim, para uma futura extensão de pesquisa da curva de juros brasileira poder-se-ia explorar mais afundo a correlação entre os fatores comuns que explicam a ETTJ, lançando mão de modelos de correção de erro. Assim como, modelar choques de elevação da inflação no curto prazo, onde a elevação da taxa de juros no curto é transmitida para as taxas longas.

Referências bibliográficas

ALMEIDA, C. ET AL. Does curvature enhance forecasting? International Journal of Theoretical and Applied Finance, v. 12, n. 8, p. 1171–1196, 2009.

ALMEIDA, C, I. E VICENTE, J. (2008). The role of no-arbitrage on forecasting: Lessons from a parametric. term structure model. Journal of Banking & Finance.

ANBIMA. 2011. Índices de Renda Fixa IMA. Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiros e de Capitais.

ANGI, A.; PIAZZESI, M.. A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics wiyh Macroeconomic and Latent Variables. Journal of Monetary Economics 745-787, 2003.

BJORK, T. AND B. J. CHRISTENSEN (1999), Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves, Mathematical Finance, 9, 323-348.

BRANDT, M.W. 2009. Portfolio choice problems. Handbook of financial econometrics, 1, 269-336.

BIS. 2005 (Oct.). Zero-coupon yield curves: technical documentation. BIS Papers 25. Bank for International Settlements (Department Monetary and Economic).

BRASIL. Ministério da Fazenda. Secretaria do Tesouro Nacional. Coordenação Geral de Administração da Dívida Pública. Administração da Dívida Pública Mobiliária Federal Interna – DPMFI. Brasília, 1999, mimeo.

CALDEIRA, J. F. Estimação da estrutura a termo da curva de juros no Brasil Análise Econômica, Porto Alegre, ano 29, n. 55, p. 95-122, mar. 2011.

CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; PORTUGAL, M. S. Efficient yield curve estimation and forecasting in Brazil. Economia, v. 11, n. 1, p. 27–51, 2010.

CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; PORTUGAL, M. S. Otimização de carteira de títulos públicos. Advances in Scientific and Applied Accounting. São Paulo, v.5, n.3, p. 349-376, 2012.

CAMPBELL, J. Y. Some lessons from the yield curve. Journal of Economic Perspectives, s. 1, v. 9, n. 3, p. 129-152, 1995.

CAMPBELL, J. Y., SHILLER, R. J. Yield Spreads and Interest Rate Movements: A Bird's Eye View. The Econometrics of Financial Markets, special issue, Review of Economic Studies 58,no. 3: 495-514, 1991.

CASSOLA, N.; LUÍS, J.. A Two-Factor Model of the German Term Structure of Interest Rates, Applied Financial Economics, 13: 783-806, 2003.

COX, J. C; INGERSOLL JR., J. E; ROSS, S. A. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica, v. 53, n. 2, 385–407, 1985.

DEMIGUEL, V., & NOGALES, F. J. 2009. Portfolio Selection with Robust Estimation. Operations Research, forthcoming.

DEMIGUEL, V., GARLAPPI, L., NOGALES, F. J., & UPPAL, R. 2009a. A generalized approach to portfolio optimization: improving performance by constraining portfolio norms. Management Science, 55(5), 798-812.

DEPOOTER, M. 2007. Examining the Nelson-Siegel class of term structure models. Tinbergen Institute Discussion Papers. Tinbergen Institute.

DIEBOLD, F., & LI, C. 2006. Forecasting the term structure of government bond yields. Journal of Econometrics, 130(2), 337-364.

DIEBOLD, F. X., & RUDEBUSCH, G. D. 2011. The Dynamic Nelson-Siegel Approach to Yield Curve Modeling and Forecasting. mimeo.

DIEBOLD, F. X., RUDEBUSCH, G. D., & ARUOBA, S. B. 2006. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. Journal of Econometrics, 131(1-2), 309-338.

ELTON, E. J., GRUBER, M. J. Modern portfolio theory and investment analysis. 3. ed., New York: John Wiley & Sons, 1987.

ESTRELLA, ARTURO. “Why Does the Yield Curve Predict Output and Inflation?”. The Economic Journal, 115, 2005.

HARRISON, J. M. E KREPS, D., 1979. Martingales and arbitrage in multiperiod securitiesmarkets. Journal of Economic Theory 20: 381–408.

HULL, J., & WHITE, A. 1990. Pricing interest rate derivative securities. The Review of Financial Studies.

KORN, O., & KOZIOL, C. 2006. Bond Portfolio Optimization. The Journal of Fixed Income, 15(4), 48-60.

LAURINI, M.P. E L.K. HOTTA (2008), “Bayesian Extensions of the Diebold and Li Term Structure Model," IBMEC Working Paper WPE-74-2008, São Paulo.

LITTERMAN, R. E J.A. SCHEINKMAN (1991), “Common Factors Affecting Bond Returns," Journal of Fixed Income, 1, 77-85.

MACAULAY, F. (1938), The Movements of Interest Rates. Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856, New York: National Bureau of Economic Research.

MARKOWITZ, H. 1952. Portfolio Selection. Journal of Finance, 7(1), 77-91. McCulloch, J. H. 1971. Measuring the Term Structure of Interest Rates. The Journal of Business, 44(1), 19-31.

MCCULLOCH, J. H. 1975. The Tax-Adjusted Yield Curve. Journal of Finance, 30(3), 811-30.

MISSALE, ALESSANDRO; GIAVAZZI, FRANCESCO. Public debt management in Brazil, june 2003.

MISHKIN, FREDERIC S., 1990 . “What does the term structure tell us about future inflation?," Journal of Monetary Economics, Elsevier, vol. 25(1), pages 77-95.

NELSON, C. R. N., & Siegel, A. F. 1987. Parsimonious Modeling of Yield Curves. The Journal of Business, 60(4), 473-489.

PRICE, ROBERT (1997), “The Rationale and Design of Inflation-Indexed Bonds” IMF- Monetary and Exchange Affairs Department – Working Paper WP/97/12.

ROMER, CHRISTINA D., and DAVID H. ROMER. 2004. “A New Measure of Monetary Shocks: Derivation and Implications.” American Economic Review, 94(4): 1055–84.

ROSSI, J. W. A estrutura a termo da taxa de juros: uma síntese. Pesquisa e Planejamento Econômico, v. 26, n. 3, p. 521–548, 1996.

RUDEBUSCH, G. AND T. WU (2008), A Macro-Finance Model of the Term Structure, Monetary Policy and the Economy," Economic Journal, 118, 906{926.

SABINO, PRISCILA. Aplicando a Metodologia de Diebold e Li à Análise da Estrutura a Termo da Taxa de Juros Brasileira. Dissertação Apresentada para obtenção do título de mestre. PUC-RJ 2007. Disponível em http://www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br/10800/10800_1.PDF

Site do BANCO CENTRAL DO BRASIL. Disponível em http://www.bcb.gov.br/. Ultimo acesso em 18/02/2013.

SITE DO TESOURO NACIONAL. Disponível em https://www.tesouro.fazenda.gov.br/pt/divida-publica-federal/a-divida-em-grandes-numeros

SVENSSON, L. O. 1994 (Sept.). Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. IMF Working Papers 94-114. International Monetary Fund.

VASICEK, O. 1977. An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics, 5(2), 177-188.