

**VANESSA DILDA**

**CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES  
SUJEITOS A ZONA MORTA NO ATUADOR**

**FLORIANÓPOLIS  
2013**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

**CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES  
SUJEITOS A ZONA MORTA NO ATUADOR**

Tese submetida ao Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas  
da Universidade Federal de Santa Catarina  
como requisito para a obtenção do título  
de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas.

**VANESSA DILDA**

Orientador: Prof. Eugênio De Bona Castelan Neto, Dr.  
Coorientador: Prof. Romeu Reginatto, Dr.

Florianópolis, Dezembro de 2013.

# **CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES SUJEITOS A ZONA MORTA NO ATUADOR**

Vanessa Dilda

Tese submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas

---

Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.  
Orientador

---

Prof. Romeu Reginatto, Dr. (UNIOESTE)  
Coorientador

---

Prof. Jomi Fred Hubner, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas

Banca Examinadora:

---

Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.  
Presidente

---

Prof. Carlos Eduardo Trabuco Dórea, Dr. (UFRN)

---

Prof. Luís Fernando Costa Alberto, Dr. (USP/São Carlos)

---

Prof. Romeu Reginatto, Dr. (UNIOESTE)

---

Prof. Daniel Ferreira Coutinho, Dr. (UFSC)

---

Prof. Victor Juliano De Negri, Dr. (UFSC)



*Dedico este trabalho  
à minha mãe Lindamir e  
ao meu pai Valmor.*



# AGRADECIMENTOS

A Deus, que guia meu caminho.

Ao meus orientadores, professor Eugênio Castelan e professor Romeu Reginatto, pela orientação, incentivo, apoio, amizade e pelo conhecimento compartilhado. Agradeço também ao professor Eugênio Castelan por ter me proporcionado a realização do estágio sanduíche no CRAN (*Centre de Recherche en Automatique de Nancy*), um período de grande crescimento pessoal e profissional.

Aos membros da banca examinadora: professor Carlos Eduardo Trabuco Dórea, professor Luís Fernando Costa Alberto, professor Romeu Reginatto, professor Daniel Ferreira Coutinho e professor Victor Juliano De Negri pelas suas contribuições para este trabalho.

Aos que convivi no CRAN em Nancy, especialmente à Marc Jungers, pela acolhida, pela amizade e pelos ensinamentos. Agradeço também aos amigos que fiz neste período: Gonzaga, Julien, Liu, Ricardo e Marcos, os quais deram um colorido especial aos dias cinza da França.

Aos professores e funcionários do Departamento de Automação e Sistemas da UFSC, pelo auxílio e colaboração.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Aos amigos e colegas do DAS, especialmente: Jim, Francisco, Tanisia, Denis, César, Fara, Cambuzzi, Lange, Lie, Tahim, Ríad, Rattus, Luis Felipe e Odilson, pela troca de conhecimento, pela "terapia nossa de cada dia", pela pausa para o café e pelas risadas que ajudavam a fazer cada dia mais leve. Um obrigada especial também à turma dos churrascos, que animavam o final de semana.

Àquelas que conviveram comigo dia-a-dia e foram minha segunda família nestes anos, Tanisia e Márcia.

À tia Lene, que me acompanhou de perto nesse tempo e me acolheu de braços abertos em sua casa nos meses de escrita da tese.

Agradeço especialmente aos meus pais, Valmor e Lindamir, que sempre me apoiaram e foram meu porto seguro durante essa caminhada. À minha irmã, Camile, que sempre esteve ao meu lado, apesar dos quilômetros que nos separava.



*Existe uma coisa que a longa existência me ensinou:  
toda a nossa ciência, comparada à realidade,  
é primitiva e inocente; e, portanto,  
é o que temos de mais valioso.*

*Albert Einstein*



Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas.

## **CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES SUJEITOS A ZONA MORTA NO ATUADOR**

**Vanessa Dilda**

Dezembro/2013

Orientador: Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.

Coorientador: Prof. Romeu Reginatto, Dr.

Área de Concentração: Controle, Automação e Sistemas

Palavras-chave: Zona morta, Estabilidade Ultimamente Limitada, Estabilização, Desigualdades Matriciais Lineares

Nesta tese são abordados os problemas de análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados de sistemas lineares sujeitos a zona morta. Como ferramentas teóricas fundamentais para a definição dos problemas de análise e síntese na presença de zona morta e o seu tratamento, utiliza-se o conceito de Estabilidade UB (do inglês, *Ultimate Boundedness*) e a definição do conjunto de confinamento final (ou simplesmente, conjunto UB). Neste contexto, apresentam-se condições para a solução dos problemas na forma de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*, LMI). Inicialmente, são consideradas três modelagens diferentes para a não-linearidade de zona morta, modelagens estas relacionadas a trabalhos existentes na literatura. Posteriormente, propõe-se uma parametrização para a não-linearidade através de uma classe de funções pertencentes a setores, a qual mostrou-se interessante para o tratamento dos problemas considerados e para também considerar outras não-linearidades. Dessa forma, os resultados são estendidos para sistemas lineares sujeitos a uma não-linearidade que combinam os efeitos da zona morta e da saturação. Exemplos numéricos são apresentados ao longo do trabalho com o objetivo de ilustrar a aplicação e verificar a eficiência dos métodos propostos.



Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in System and Automation Engineering.

# **CONTROL OF LINEAR SYSTEMS WITH ACTUATORS SUBJECT TO DEAD-ZONE**

**Vanessa Dilda**

December/2013

Advisor: Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.

Co-Advisor: Prof. Romeu Reginatto, Dr.

Area of Concentration: Control, Automation and Systems

Key words: Dead-zone, Ultimate Boundedness Stability, Stabilization, Linear Matrix Inequality

This Thesis presents the problems of stability analysis and state feedback control synthesis for linear systems subject to dead-zone. As theoretical tools for defining and treat the fundamental issues of analysis and synthesis in the presence of the dead-zone, we use the concept of ultimate boundedness (UB) and the definition of the ultimately bounded set (or just, UB set). In this context, we present some conditions for solving the considered problems linear matrix inequalities (LMI). Initially, we consider three different models approaches for the dead-zone nonlinearity. Then, we propose a parametrization for the nonlinearity through a class of functions belonging to sectors, that allows to approach of the considered issues and also to take in account other nonlinearities. Thus, the results are extended to linear systems under a nonlinearity that combines the effects of dead-zone and saturation. Numerical examples are presented in order to illustrate the application and verify the effectiveness of the proposed methods.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Generalidades . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	5
1.3	Contribuições . . . . .	5
1.4	Organização da Tese . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Sistemas Lineares com Zona Morta</b>	<b>9</b>
2.1	Introdução . . . . .	9
2.2	Apresentação do problema . . . . .	10
2.3	Modelagens do sistema com zona morta . . . . .	17
2.3.1	Sistema com perturbação limitada . . . . .	18
2.3.2	Sistema chaveado . . . . .	22
2.3.3	Sistema com não-linearidade de setor decomposta . . . . .	27
2.4	Exemplos . . . . .	34
2.4.1	Sistema instável . . . . .	34
2.4.2	Sistema estável . . . . .	35
2.4.3	Sistema criticamente estável . . . . .	37
2.5	Considerações finais . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Parametrização da Zona Morta por uma Classe de Funções</b>	<b>39</b>
3.1	Introdução . . . . .	39
3.2	Revisão do problema . . . . .	40
3.3	Parametrização da não-linearidade por uma classe de funções . . . . .	41

3.4	Análise de estabilidade . . . . .	46
3.5	Síntese de realimentação de estados . . . . .	48
3.6	Exemplos numéricos . . . . .	51
3.6.1	Sistema estável . . . . .	51
3.6.2	Sistema instável monovariável . . . . .	52
3.6.3	Sistema instável multivariável I . . . . .	54
3.6.4	Sistema instável multivariável II . . . . .	56
3.7	Considerações finais . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Sistemas Lineares com Zona Morta e Saturação</b>	<b>61</b>
4.1	Introdução . . . . .	61
4.2	Apresentação do problema . . . . .	62
4.3	Análise de estabilidade UB local . . . . .	71
4.3.1	Análise I . . . . .	72
4.3.2	Análise II . . . . .	73
4.4	Exemplos numéricos . . . . .	75
4.4.1	Sistema instável multivariável I . . . . .	75
4.4.2	Sistema instável multivariável II . . . . .	78
4.5	Considerações finais . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>83</b>
5.1	Considerações finais . . . . .	83
5.2	Publicações relacionadas ao trabalho . . . . .	84
5.3	Perspectivas futuras . . . . .	85
<b>A</b>	<b>Conceitos de Base</b>	<b>87</b>
A.1	Introdução . . . . .	87
A.2	Estabilidade de Lyapunov . . . . .	87
A.2.1	Segundo método de Lyapunov . . . . .	88
A.2.2	Região de atração . . . . .	89
A.2.3	Conjunto invariante . . . . .	90
A.3	Sistemas do tipo Lur'e . . . . .	91
A.3.1	Condição de setor clássica . . . . .	91

<b>B</b>	<b>Demonstrações</b>	<b>93</b>
B.1	Demonstração do Lema 2.2.1 . . . . .	93
B.2	Demonstração da Proposição 2.3.4 . . . . .	95
B.3	Demonstração do Lema 4.2.1 . . . . .	96
<b>C</b>	<b>Exemplo - matrizes <math>\Delta</math></b>	<b>101</b>



# Lista de Figuras

2.1	Não-linearidade de zona morta. . . . .	10
2.2	Efeito da zona morta no sinal $u(t) = 2\text{sen}(t)$ . . . . .	11
2.3	Efeito da zona morta no sistema estável em malha aberta. . . . .	13
2.4	Efeito da zona morta no sistema instável em malha aberta. . . . .	13
2.5	Efeito da zona morta no sistema duplo integrador. . . . .	14
2.6	Não-linearidades localizadas em uma faixa de operação. . . . .	18
2.7	Não-linearidades de zona morta e saturação. . . . .	23
2.8	Não-linearidades pertencentes ao setor $[0, 1]$ . . . . .	27
2.9	Não-linearidades decompostas. . . . .	29
2.10	Não-linearidades decompostas e respectivas condições. . . . .	30
2.11	Resultado da análise de estabilidade para o sistema instável. . . . .	35
2.12	Resultado da análise de estabilidade para o sistema estável. . . . .	36
2.13	Resultado da análise de estabilidade para o sistema criticamente estável. . . . .	37
3.1	Função saturação parametrizada por uma classe de funções. . . . .	42
3.2	Trajétória do sistema estável em malha aberta. . . . .	52
3.3	Região UB e circunferência associada. . . . .	52
3.4	Região UB, circunferência associada e trajetórias. . . . .	53
3.5	Resultado gráfico - síntese sistema instável multivariável I. . . . .	55
3.6	Resultado gráfico - análise sistema instável multivariável I. . . . .	56
3.7	Resultado gráfico - síntese sistema instável multivariável II. . . . .	57
3.8	Resultado gráfico - análise sistema instável multivariável II. . . . .	58
4.1	Não-linearidade $\text{sat}_i(dz_i(u_i(t)))$ . . . . .	62

4.2	Efeito da não-linearidade $\text{sat}(dz(u(t)))$ no sinal $u(t) = 2\text{sen}(t)$ . . . . .	63
4.3	Retratos de fase. . . . .	65
4.4	Sinal de controle e saída das não-linearidades para $x_0 = [1 \ 0.5]^T$ . . . . .	66
4.5	Sinal de controle e saída das não-linearidades para $x_0 = [2 \ 0.5]^T$ . . . . .	67
4.6	Detalhamento de uma região da Figura 4.5. . . . .	67
4.7	Não-linearidade $\varphi_i(u_i(t))$ . . . . .	69
4.8	Não-linearidade $\varphi_i(u_i(t))$ parametrizada por uma classe de funções. . . . .	72
4.9	Resultado gráfico da análise de estabilidade I com trajetórias estáveis. . . . .	76
4.10	Resultado gráfico da análise de estabilidade I com trajetórias instáveis. . . . .	77
4.11	Resultado gráfico da análise de estabilidade II com trajetórias estáveis. . . . .	77
4.12	Resultado gráfico da análise de estabilidade II com trajetórias instáveis. . . . .	78
4.13	Resultado gráfico da análise de estabilidade I com trajetórias estáveis. . . . .	80
4.14	Resultado gráfico da análise de estabilidade I com trajetórias instáveis. . . . .	80
4.15	Resultado gráfico da análise de estabilidade II com trajetórias estáveis. . . . .	81
4.16	Resultado gráfico da análise de estabilidade II com trajetórias instáveis. . . . .	81
A.1	Esquema do sistema na forma Lur'e. . . . .	91

# Lista de Tabelas

2.1	Sistemas monovariáveis. . . . .	12
2.2	Resultados de análise - sistema instável. . . . .	35
2.3	Resultados análise - sistema estável. . . . .	36
2.4	Resultados análise - sistema criticamente estável. . . . .	37
3.1	Resultados análise - sistema estável. . . . .	51
3.2	Resultados análise - sistema instável monovariável. . . . .	53
3.3	Comparação - sistema instável monovariável. . . . .	53
3.4	Comparação de resultados. . . . .	54
3.5	Resultados síntese - sistema instável multivariável I. . . . .	55
3.6	Resultados análise - sistema instável multivariável I. . . . .	56
3.7	Resultados síntese - sistema instável multivariável II. . . . .	57
3.8	Resultados análise - sistema instável multivariável II. . . . .	58
C.1	Exemplo matriz $\Delta$ . . . . .	102



# Notação

## Símbolo

$\subset(\subseteq)$	:	<i>contido (contido ou igual)</i>
$\in$	:	<i>pertence</i>
$\notin$	:	<i>não pertence</i>
$\forall$	:	<i>para todo</i>
$\mathbb{R}$	:	<i>conjunto dos números reais</i>
$\mathbb{R}^n$	:	<i>conjunto dos vetores reais de dimensão <math>n</math></i>
$\mathbb{R}^{n \times m}$	:	<i>conjunto dos vetores reais de dimensão <math>n \times m</math></i>
$x_i$	:	<i><math>i</math>-ésimo elemento do vetor <math>x</math></i>
$P'$	:	<i>transposto de <math>P</math></i>
$*$	:	<i>elementos ou blocos simétricos em relação à diagonal</i>
$\text{diag}(\cdot)$	:	<i>matriz diagonal</i>
$\text{Re}(\lambda(A+BK))$	:	<i>parte real dos autovalores de <math>(A+BK)</math></i>
$\text{He}(P(A+BK))$	:	<i>Hermitiano de <math>(P(A+BK))</math></i>

## Abreviaturas

LDI	:	<i>Linear Differential Inclusion, (Inclusão Diferencial Linear)</i>
LMI	:	<i>Linear Matrix Inequality, (Desigualdade Matricial Linear)</i>
BMI	:	<i>Bilinear Matrix Inequality, (Desigualdade Matricial Bilinear)</i>
UB	:	<i>Ultimate Boundedness, (Ultimamente Limitado)</i>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Generalidades

Grande parte dos sistemas reais está sujeito à existência de certas não-linearidades na malha de controle, tais como saturação, zona morta, histerese, entre outras (Hu e Lin, 2001; Khalil, 2002; Oh *et al.*, 2009; Tarbouriech *et al.*, 2011a; Vidyasagar, 1993). A presença destas não-linearidades dá-se geralmente devido a limitações físicas ou de segurança dos atuadores, como é o caso de servo-motores elétricos ou servo-válvulas hidráulicas e pneumáticas. Tais limitações podem levar à uma degradação do desempenho do sistema e até mesmo à instabilidade.

Cada vez mais, as aplicações práticas exigem a utilização de sistemas de controle precisos e que atendam a diversos requisitos de desempenho. Surge então a necessidade de ferramentas teóricas que considerem certas particularidades dos sistemas de controle, especialmente aquelas presentes nos atuadores. Considerar tais particularidades no projeto de controladores tem sido de grande interesse da comunidade científica, com o objetivo de tratar teoricamente o problema de controle o mais próximo possível do real. Uma não-linearidade comum nos sistemas físicos é a zona morta, presente, por exemplo, em sistemas de acionamento hidráulicos e pneumáticos. Sistemas de acionamento hidráulicos são muito utilizados devido à excelente relação potência/peso e à resposta rápida aos comandos de partida, parada ou inversão de velocidade sem danos às partes mecânicas (Merritt, 1967). A utilização desse tipo de acionamento é comum desde a extração mineral até a indústria aeroespacial, bem como nas aplicações de uso cotidiano, como em veícu-

los de transporte e passeio, equipamentos médico-hospitalares e odontológicos, processadores de lixo urbano, oficinas e postos de serviços de veículos (Linsingen, 2003) e também nas indústrias do setor metal-mecânica, na mecanização agrícola e no manuseio e transporte de materiais (Valdiero *et al.*, 2007). No caso de sistemas pneumáticos, estes são muito utilizados em aplicações que demandam elevado desempenho, em ambientes que exijam condições de higiene e/ou em atividades com grande repetitividade e velocidade (Schneider e Hitchcox, 1998). Pode-se citar, por exemplo, o uso de sistemas servopneumáticos para o controle de posição de pás de turbinas de hidrelétricas (Asaff, 2006).

Devido à vasta aplicabilidade destes sistemas e também devido a presença da não-linearidade de zona morta neles, surgiu o interesse em aprofundar o estudo referente aos problemas de análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados para sistemas sujeitos a não-linearidade de zona morta no atuador.

A principal dificuldade para tratar problemas considerando atuadores sujeitos a zona morta é que quando o sinal de controle é suficientemente pequeno, a saída da zona morta é nula e, conseqüentemente, o sistema se comporta em malha aberta em uma região em torno da origem. Sendo assim, a estabilidade assintótica da origem de um sistema linear com atuadores sujeitos a zona morta só é possível para sistemas assintoticamente estáveis em malha aberta. Em outros casos, esta não-linearidade leva a uma perda de estabilidade local em torno da origem, o que implica que as trajetórias do sistema em malha fechada não irão convergir assintoticamente para a origem. No entanto, pode-se estimar uma região positivamente invariante, em torno da origem, para a qual as trajetórias do sistema irão convergir em um tempo finito e nela permanecerão confinadas (Hsu e Fong, 2001; Khalil, 2002; Tarbouriech *et al.*, 2011b).

Os estudos relacionados aos problemas de análise de estabilidade e estabilização de sistemas sujeitos a não-linearidades no atuador geraram uma literatura rica na teoria de sistemas de controle. Um dos primeiros trabalhos referente a não-linearidade de zona morta trata de uma forma de compensar os efeitos desta não-linearidade em sistemas e foi realizado por Tao e Kokotović (1994). Neste trabalho os autores propõem uma compensação baseada na inversa da zona morta e em um controle adaptativo. Em Zhou *et al.* (2011) é proposto um controle adaptativo para uma classe de sistemas não lineares incertos com uma não-linearidade de zona morta não simétrica. Os autores supõem que os estados do sistema não são mensuráveis, portanto, um observador é projetado para estimá-los. Alguns trabalhos tratam do problema de sistemas sujeitos não-linearidade de zona morta através da utilização de

redes neurais, pode-se citar Selmić e Lewis (1998), Selmić e Lewis (2000). A lógica fuzzy também é utilizada para tratar de sistemas sujeitos a não-linearidade de zona morta nos trabalhos de Lewis *et al.* (1999) e Wong *et al.* (2002).

Outra forma de estudar o comportamento dinâmico na presença da zona morta é através da utilização de ferramentas baseadas na teoria de estabilidade de Lyapunov ou de conjuntos atratores, utilizando, por exemplo, o conceito de estabilidade ultimamente limitada, UB (do inglês *Ultimate Boundedness*) (Khalil, 2002). Neste trabalho de doutorado optou-se por utilizar esta ferramenta baseada no conceito de estabilidade ultimamente limitada para tratar o problema de sistemas sujeitos a zona morta. Para realizar a análise ultimamente limitada, utilizam-se funções de Lyapunov quadráticas para mostrar o limite da solução de uma equação de estados, mesmo quando a origem não é um ponto de equilíbrio do sistema (Khalil, 2002).

Em Fong e Hsu (2000) a zona morta é descrita na forma afim por partes e, a partir desta descrição, é tratado o problema de síntese de realimentação de estados. As condições são descritas na forma de desigualdades matriciais lineares, LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*).

Em Hsu e Fong (2001) os autores tratam a zona morta como sendo uma perturbação na entrada de controle e a descrevem utilizando condição de faixa. Sendo assim, é possível também tratar problemas que envolvem sistemas sujeitos a outras não-linearidades, como por exemplo, *backlash* e histerese, desde que se localizem na faixa considerada. Nesse trabalho são propostas condições suficientes para a síntese de realimentação de estados para sistemas lineares com zona morta, as condições são descritas na forma de LMIs.

No trabalho de Turner (2006) é feita uma modificação na zona morta usual, de modo que esta passa a ser um caso particular de uma zona morta generalizada. Para considerar a não-linearidade é utilizada uma condição de setor. O autor apresenta uma forma de compensar a zona morta e a compara com a técnica de *anti-windup* (Tarbouriech e Turner, 2009).

Em Pomar *et al.* (2012) e Milhomem (2013) são apresentados resultados para tratar sistemas lineares sujeitos a uma classe de perturbações limitadas, tendo como ferramenta teórica para a solução dos problemas de análise e síntese, a estabilidade ultimamente limitada. As condições de análise e síntese são descritas na forma de LMIs.

Em certos sistemas físicos, como é o caso dos sistemas de acionamento hidráulico, a não-linearidade de zona morta aparece acompanhada da saturação. Portanto, tratar o problema de sistemas sujeitos a uma não-

linearidade que combina os efeitos da zona morta e da saturação mostrou-se também ser um tema importante a ser explorado. Quando o objetivo é solucionar um problema de análise de estabilidade de sistemas com atuador saturante, o que se busca é encontrar uma estimativa para o domínio de atração do sistema. Neste caso, qualquer trajetória com condição inicial localizada no interior do domínio de atração, converge assintoticamente para a origem. Pode-se citar alguns trabalhos que tratam da análise de estabilidade de sistemas com atuador saturante: Paim (2003), Gomes da Silva Jr. *et al.* (2001), Paim *et al.* (2002), Tarbouriech *et al.* (2004, 2006b), Ebenbauer e Allgower (2007) e Hu *et al.* (2002).

Para o caso de estabilização de sistemas lineares com saturação, pode-se tratar os problemas no contexto de estabilidade global ou local. O problema de estabilização global consiste em encontrar uma lei de controle que estabilize o sistema globalmente. Dentre os trabalhos que tratam deste assunto, pode-se citar Bourgat e Tarbouriech (1992) e Sussmann *et al.* (1994). No caso de estabilização local busca-se uma lei de controle e uma estimativa para o domínio de atração do sistema, a qual é um conjunto contrativo e invariante, associado a uma função de Lyapunov. Dentre os trabalhos que tratam da estabilização local, pode-se citar Gomes da Silva Jr. *et al.* (1997) e Gomes da Silva Jr. e Tarbouriech (2001).

No caso de sistemas sujeitos a saturação no atuador, a não-linearidade é tratada de diferentes formas, destacando-se, por exemplo, a abordagem que considera a saturação como uma não-linearidade pertencente a um setor, e a descreve através de uma condição de setor do tipo cone limitado (Castelan *et al.*, 2008; Khalil, 2002; Tarbouriech *et al.*, 2006a). A partir desta descrição e, utilizando o conceito de estabilidade absoluta, através do uso do S-Procedure (Boyd *et al.*, 1994) são obtidas condições suficientes para análise de estabilidade e estabilização destes sistemas.

A não-linearidade de saturação pode ser descrita também considerando um modelo híbrido, neste caso, em cada região de saturação o sistema é modelado como um sistema afim. Nesta abordagem a análise do comportamento não linear do sistema é feita a partir da divisão do espaço de estados em regiões de saturação (Gomes da Silva Jr. e Tarbouriech, 1999a,b).

Outra forma de tratar a saturação é através da representação politópica (Molchanov e Pyatnitskii, 1989), (Gomes da Silva Jr. *et al.*, 1997), (Hu e Lin, 2001), (Gomes da Silva Jr. e Tarbouriech, 2001). Neste caso, a planta com não-linearidade de saturação pode ser representada através de uma inclusão diferencial linear, LDI, (do inglês *Linear Differential Inclusion*). Recentemente, em Andrieu *et al.* (2011), os autores consideraram que a não-linearidade de saturação satisfaz duas condições de setor diferentes, em fun-

ção de uma partição do espaço de estado associado.

Recentemente no trabalho de Tarbouriech *et al.* (2011b) foram propostas condições de estabilização para sistemas com diferentes elementos não-lineares no atuador como, por exemplo, zona morta e saturação, *strick-slip* e saturação, histerese e saturação. Para tratar essas não-linearidades é proposta uma modelagem relacionada à noção de inclusão diferencial convexa (Alamo *et al.*, 2009; Fiacchini, 2010) e as condições para solução do problema são descritas na forma de LMIs. Devido ao fato da modelagem proposta abranger diferentes elementos não-linearidades, ao utilizar esta ferramenta para o caso de sistemas sujeitos a zona morta e saturação, pode incorrer em resultados restritivos.

## 1.2 Objetivos

Dentro do contexto descrito anteriormente, tem-se por objetivo tratar os problemas de análise de estabilidade e síntese de leis de controle por realimentação de estados para sistemas lineares sujeitos a zona morta. Para atingir este objetivo faz-se necessário: compreender os efeitos causados pela zona morta em sistemas lineares; utilizar um conceito que permita descrever estes fenômenos fazendo uso da teoria de estabilidade baseada em funções de Lyapunov; propor uma modelagem para a descrição da não-linearidade que seja adaptada para o tratamento dos problemas e, por fim, propor condições para a análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados para o sistema considerado. Devido ao fato de os sistemas físicos, por vezes, terem a presença das não-linearidades de zona morta e saturação conjuntamente, tem-se por objetivo também propor uma forma de tratar o problema de análise de estabilidade para sistemas lineares sujeitos a uma não-linearidade que combine os efeitos da zona morta e da saturação.

## 1.3 Contribuições

Com relação ao uso do ferramental teórico, pode-se destacar como contribuição deste trabalho a utilização do conceito de estabilidade ultimamente limitada para o tratamento específico de problemas de análise e síntese para sistemas lineares sujeitos a zona morta, descrevendo as condições na forma de LMIs. O uso do conceito de estabilidade ultimamente limitada foi motivador para os trabalhos de Pomar *et al.* (2012) e Milhomem (2013), sendo que, estes resultados serviram de base para os resultados apresentados

em Dilda e Castelan (2013). Além disso, este ferramental teórico também permitiu propor condições de análise e síntese para diferentes modelos de zona morta, conforme descrito no Capítulo 2.

Outra contribuição é o tratamento do sistema linear com zona morta como um sistema com não-linearidade de setor decomposta, apresentada no Capítulo 2, Seção 2.3.3. Neste caso, a zona morta é decomposta em termos de uma zona morta modificada e um erro relacionado à diferença entre a zona morta e a zona morta modificada. Sendo assim, utiliza-se uma condição de setor global para descrever a zona morta modificada e uma condição de perturbação limitada, válida localmente, para descrever o erro.

Com relação a modelagem da não-linearidade, destaca-se como principal contribuição deste trabalho de doutorado a parametrização por uma classe de funções, apresentada no Capítulo 3. Esta classe de funções é caracterizada por partes limitadas e afins em função de cada entrada de controle, mais precisamente, em função de quatro regiões da entrada de controle. Tal parametrização permite tratar os casos em que há perda de estabilidade em torno da origem e também o caso particular em que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema. A parametrização proposta pode ser utilizada também para tratar problemas de análise de estabilidade de sistemas lineares sujeitos a uma não-linearidade que combina os efeitos da zona morta e da saturação.

## 1.4 Organização da Tese

Esta tese está organizada da seguinte forma:

- Capítulo 2: apresentam-se os conceitos de base utilizados ao longo do trabalho. São ilustrados os efeitos causados pela presença da não-linearidade de zona morta em sistemas lineares e o problema de controle é formulado. Apresentam-se três modelagens diferentes para a não-linearidade, juntamente com a proposição de soluções para os problemas de análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados para cada um dos casos. Os resultados deste capítulo são descritos para sistemas monovariáveis.
- Capítulo 3: apresenta a principal contribuição do trabalho, referente à modelagem da não-linearidade de zona morta, através de uma parametrização por uma classe de funções. Considerando esta parametrização, são propostas soluções para os problemas de análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados.

- Capítulo 4: neste capítulo propõe-se uma extensão dos resultados para tratar o problema de análise de estabilidade para sistemas lineares sujeitos a uma não-linearidade que combina os efeitos da zona morta e da saturação. São ilustrados os efeitos desta não-linearidade em sistemas lineares. A parametrização descrita no capítulo anterior é utilizada para descrever a não-linearidade considerada neste capítulo.

Os resultados relatados nesta tese foram desenvolvidas junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina. Parte deste trabalho foi realizado na Université de Lorraine, Nancy (França), sob a orientação do Dr. Marc Jungers, no período de Dezembro de 2011 à Agosto de 2012.

As simulações numéricas apresentadas foram realizadas no Matlab e foi utilizado o *solver* SeDuMi com Yalmip (Löfberg, 2004) para resolver as LMIs.



## Capítulo 2

# Sistemas Lineares com Zona Morta

### 2.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os conceitos de base utilizados neste trabalho para tratar os problemas de análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados para sistemas lineares sujeitos a zona morta.

Inicialmente são ilustrados os efeitos ocasionados pela presença da zona morta em sistemas lineares. Na sequência são introduzidos o conceito de estabilidade ultimamente limitada, UB, e a definição do conjunto de confinamento final (ou simplesmente, conjunto UB), os quais serão utilizados como ferramentas teóricas fundamentais para a definição dos problemas de análise e síntese na presença de zona morta e o seu tratamento ao longo deste trabalho.

O conceito de estabilidade UB é utilizado para resolver os problemas de análise e síntese considerando três modelagens diferentes para a não-linearidade. Os modelos apresentados estão relacionados a modelos já existentes na literatura, no entanto tendo por base o conceito de estabilidade UB, foram reformuladas as condições de análise e síntese associadas. Os resultados são apresentados para sistemas monovariáveis. Uma análise é feita em cada um dos casos, apontando as vantagens, desvantagens e dificuldades encontradas ao tratar o problema à luz de cada modelagem.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 2.2 é apresen-

tada a formulação do problema de controle e é feita uma análise dos efeitos da zona morta em sistemas estáveis, instáveis e criticamente estáveis. A Seção 2.3 apresenta três formas de tratar a não-linearidade juntamente com a proposição de soluções para os problemas de análise e síntese para cada um dos casos. A Seção 2.4 é dedicada à apresentação dos resultados numéricos, finalmente, na Seção 2.5 são apresentadas as considerações finais do capítulo.

## 2.2 Apresentação do problema

Considere um sistema linear contínuo e invariante no tempo com não-linearidade de zona morta no atuador, representado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bdz(u(t)) \quad (2.1)$$

$$u(t) = Kx(t) \quad (2.2)$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e o par  $(A, B)$  é controlável. A matriz de ganhos  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz de realimentação de estados que estabiliza o sistema sem a presença da zona morta  $dz(\cdot)$ , isto é, a matriz  $(A + BK)$  é Hurwitz.

A não-linearidade de zona morta considerada é descentralizada e simétrica,  $dz(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , representada na Figura 2.1 e definida por:

$$dz_i(u_i(t)) = \begin{cases} u_i(t) - \rho_i, & \text{se } u_i(t) > \rho_i, \\ 0, & \text{se } |u_i(t)| \leq \rho_i, \quad \forall i \in \{1; \dots; m\}. \\ u_i(t) + \rho_i, & \text{se } u_i(t) < -\rho_i, \end{cases} \quad (2.3)$$

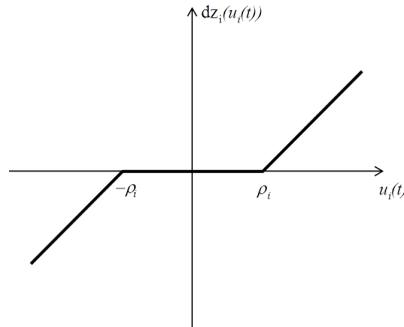


Figura 2.1: Não-linearidade de zona morta.

A Figura 2.2 mostra um sinal  $u(t) = 2\text{sen}(t)$  e a saída da zona morta para este sinal, considerando-se  $\rho = 0.5$ . Observe que além de anular a saída quando o sinal de entrada é pequeno,  $|u(t)| \leq \rho$ , a zona morta também causa uma diferença na amplitude do sinal de saída em relação ao sinal de entrada quando  $|u(t)| > \rho$ .

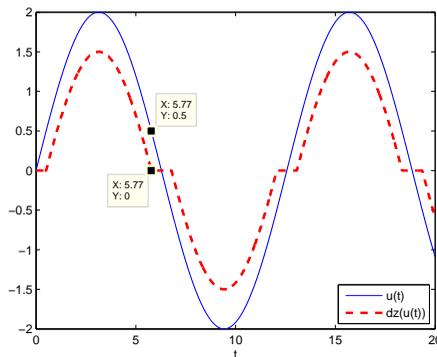


Figura 2.2: Efeito da zona morta no sinal  $u(t) = 2\text{sen}(t)$ .

Considerando o sistema (2.1)-(2.2), quando  $u(t)$  é suficientemente pequeno e  $dz(u(t)) = 0$ , o mesmo se comporta em malha aberta em uma região em torno da origem. Sendo assim, a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada somente é possível quando o sistema for assintoticamente estável em malha aberta, ou seja, quando a matriz  $A$  é Hurwitz. Nos outros casos a zona morta leva o sistema a uma perda de estabilidade local em torno da origem, embora exista uma região em torno dela para a qual as trajetórias do sistema convergem em tempo finito e permanecem em seu interior. A fim de ilustrar o comportamento das trajetórias do sistema em malha fechada quando na presença da zona morta, considere o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.2.1** Considere três sistemas monovariáveis, de segunda ordem, descritos na Tabela 2.1, sendo:  $S_e$  sistema assintoticamente estável em malha aberta,  $S_i$  sistema instável em malha aberta e  $S_c$  sistema criticamente estável em malha aberta. O valor do limite da zona morta foi fixado em  $\rho = 0.5$ .

Tabela 2.1: Sistemas monovariáveis.

Sistema	A		B		Autovalores A	K	Autovalores (A + BK)
$S_e$	2.5	-4	0.5		$\{-0.5 \pm i\}$	[6.15 -8.07]	$\{-1, -5\}$
	2.5	-3.5	1				
$S_i$	0.2	-1	0.5		$\{0.2 \pm i\}$	[1.63 -7.21]	$\{-1, -5\}$
	1	0.2	1				
$S_c$	0	1	1		$\{0, 0\}$	[-26 16]	$\{-5 \pm i\}$
	0	0	1				

A Figura 2.3 mostra os resultados da simulação do sistema estável em malha aberta,  $S_e$ . Os dois primeiros gráficos mostram o comportamento das trajetórias de malha fechada do sistema, com condição inicial igual a  $[0.3 \ -0.3]^T$ . A trajetória em linha cheia e azul é referente ao sistema com zona morta e a trajetória em linha tracejada e preta é referente ao sistema sem zona morta<sup>1</sup>. É possível observar que as trajetórias dos dois sistemas convergem assintoticamente para a origem. Note que na presença da zona morta essa convergência ocorre mais lentamente do que no caso em que não há zona morta no sistema. Os dois outros gráficos da Figura 2.3 mostram o comportamento do sinal de controle. Em linha cheia e azul, o sinal de controle referente ao sistema com zona morta e em linha tracejada e preta o sinal de controle referente ao sistema sem zona morta, finalmente em vermelho e tracejado a saída da zona morta. No segundo gráfico do sinal de controle apresenta-se um detalhamento da região onde a saída da zona morta é igual a zero, ou seja, quando  $|u(t)| \leq 0.5$ .

A Figura 2.4 é o resultado gráfico da simulação numérica realizada com o sistema instável em malha aberta,  $S_i$ . Observe nos dois primeiros gráficos da figura que na presença da zona morta as trajetórias do sistema convergem para um ciclo-limite em torno da origem. Nos outros dois gráficos são mostrados o sinal de controle, à esquerda, e um detalhamento deste sinal próximo da origem, à direita. Nota-se um comportamento oscilatório do sinal de controle  $u(t)$  e valores nulos ou muito pequenos do sinal efetivamente aplicado (referentes à saída da zona morta), correspondentes ao ciclo-limite observado nas trajetórias dos estados.

Os dois primeiros gráficos da Figura 2.5 ilustram o comportamento das trajetórias do sistema criticamente estável,  $S_c$ , e é possível observar no gráfico do detalhamento das trajetórias do sistema, à direita, que, quando a zona morta está presente no sistema as trajetórias convergem para um ponto de equilíbrio próximo da origem. Nos outros dois gráficos é possível observar

<sup>1</sup>As mesmas cores e os mesmos formatos de linha são utilizados nos gráficos das Figuras 2.4 e 2.5.

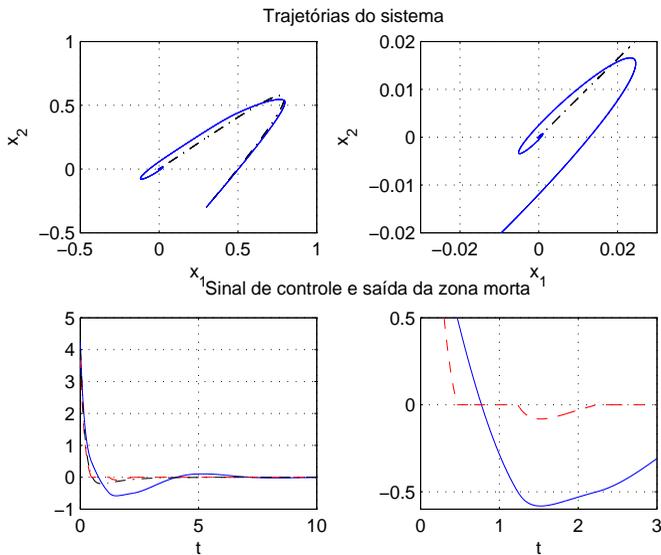


Figura 2.3: Efeito da zona morta no sistema estável em malha aberta.

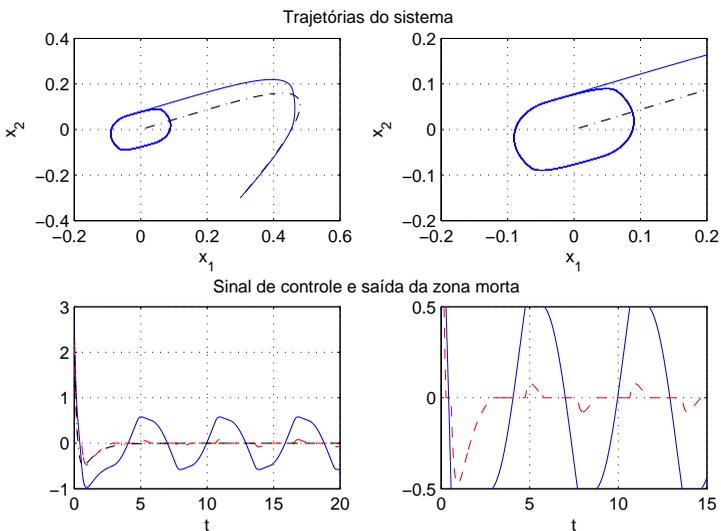


Figura 2.4: Efeito da zona morta no sistema instável em malha aberta.

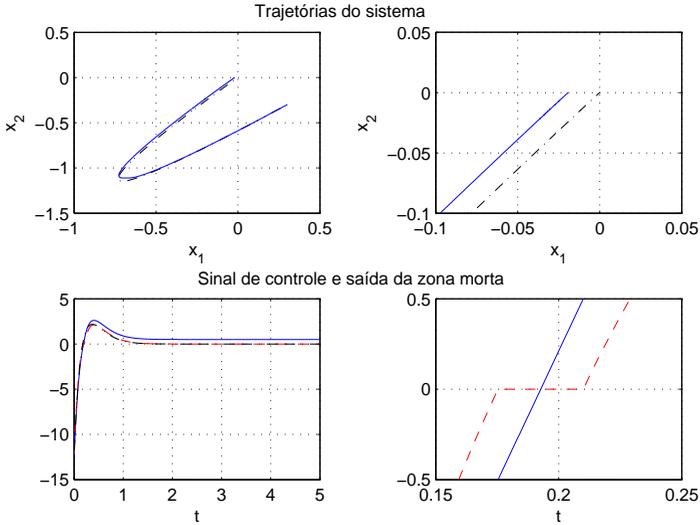


Figura 2.5: Efeito da zona morta no sistema duplo integrador.

o efeito da zona morta no sinal de controle.

O exemplo anterior permite observar o efeito causado pela zona morta em sistemas de segunda ordem, sistemas de ordem maior do que dois podem ser vistos como uma interconexão de subsistemas básicos de primeira e segunda ordem, cada um deles associado a seus autovalores reais ou a pares complexos conjugados da matriz  $A$  (Chen, 1998). Pode-se inferir, então, que sistemas de maior ordem poderão apresentar combinações de comportamento oscilatório e de convergência para pontos de equilíbrio diferentes da origem devido à presença da zona morta na ação de controle, dependendo dos autovalores da matriz  $A$ . Dessa forma, tem-se por objetivo determinar a região em torno da origem para a qual as trajetórias do sistema irão convergir e permanecerão nela confinadas. No caso de sistemas assintoticamente estáveis em malha aberta esta região será a própria origem. Para os casos em que não é possível assegurar a estabilidade assintótica da origem, pode-se utilizar conceito de estabilidade ultimamente limitada (Khalil, 2002) e estimar uma região positivamente invariante, em torno da origem, para a qual as trajetórias do sistema irão convergir e nela permanecerão confinadas.

**Definição 2.1**<sup>2</sup> (Khalil, 2002) *As soluções do sistema (2.1)-(2.2) são globalmente ultimamente limitadas se existe um conjunto convexo compacto,  $\mathcal{U}$ , no qual as trajetórias entram em um tempo finito dependente da condição inicial,  $x_0$ , e permanecem nele confinadas. Isto é,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  existe  $T = T(x_0) \geq 0$  finito, tal que*

$$x(t) \in \mathcal{U}, \quad \forall t \geq T. \quad (2.4)$$

*O conjunto  $\mathcal{U}$  que satisfaz (2.4) é chamado conjunto de confinamento final, ou simplesmente conjunto UB e, por definição, é um conjunto positivamente invariante. A todo conjunto UB, associa-se uma esfera cujo diâmetro representa a constante UB*

$$\gamma = \sup_{z \in \mathcal{U}} \|z\|^2. \quad (2.5)$$

■

Com o objetivo de utilizar o conceito apresentado para a análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados, propõe-se inicialmente uma reformulação do sistema (2.1)-(2.2). Tal reformulação permite realizar a análise de estabilidade utilizando-se a matriz em malha fechada  $(A + BK)$  que é Hurwitz por hipótese, o que não é garantido somente pela matriz  $A$ . Considera-se então a não-linearidade dual à zona morta, i.e., a saturação, a qual é definida por  $\text{sat}(u(t)) = u(t) - \text{dz}(u(t))$ , ou equivalentemente:

$$\text{sat}_i(u_i(t)) = \begin{cases} \rho_i, & \text{se } u_i(t) > \rho_i, \\ u_i(t), & \text{se } |u_i(t)| \leq \rho_i, \quad \forall i \in \{1; \dots; m\}. \\ -\rho_i, & \text{se } u_i(t) < -\rho_i, \end{cases} \quad (2.6)$$

Sendo assim, o sistema (2.1)-(2.2) é equivalente a

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) - B\text{sat}(Kx(t)). \quad (2.7)$$

Para comprovar a propriedade ultimamente limitada das trajetórias do sistema (2.7), considera-se a função de Lyapunov quadrática como candidata. Define-se  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$V(x(t)) = x(t)'Px(t), \quad (2.8)$$

com  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$ .

---

<sup>2</sup>Uma descrição mais detalhada do conceito de estabilidade limitada e ultimamente limitada pode ser encontrada no Apêndice A e em Khalil (2002).

Considera-se o conjunto  $\mathcal{E}(P)$  dado por:

$$\mathcal{E}(P) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; V(x(t)) \leq 1\}. \quad (2.9)$$

Então, pode-se estabelecer o lema seguinte, fundamental para a proposição das soluções dos problemas que serão apresentados na sequência. Sua demonstração está baseada em técnicas usuais da teoria de controle (Khalil, 2002; Slotine e Li, 1991). A demonstração é apresentada no Apêndice B, Seção B.1, e é descrita de maneira semelhante à apresentada em (Milhomem, 2013; Pomar *et al.*, 2012).

**Lema 2.2.1** *Considere o sistema (2.7), a função de Lyapunov (2.8) e o conjunto (2.9). Dada qualquer condição inicial  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , seja  $x(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  a trajetória de (2.7). Suponha que*

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), \text{sat}(u(t))) &= x(t)'((A + BK)'P + P(A + BK))x(t) - \text{sat}(u(t))'B'Px(t) \\ &\quad - x(t)'PB\text{sat}(u(t)) < 0, \quad \forall x \notin \mathcal{E}(P). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Então,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  existe  $T = T(x_0) \geq 0$  finito, tal que

$$x(t) \in \mathcal{E}(P), \quad \forall t \geq T.$$

Logo, toda a trajetória  $x(t)$  converge para  $\mathcal{E}(P)$  em tempo finito e nele permanece confinada, ou seja, o conjunto positivamente invariante  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto UB para o sistema (2.7). Ao conjunto  $\mathcal{E}(P)$ , associa-se uma esfera cujo diâmetro representa a constante UB, dada por:

$$\gamma \triangleq \sup_{x(t) \in \mathcal{E}(P)} \|x(t)\|^2 = \frac{1}{\lambda_{\min}(P)}. \quad (2.11)$$

■

Em função da Definição 2.1, ao longo deste trabalho dois problemas serão considerados:

**Problema 2.1 (Análise de estabilidade)** *Dadas as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e a matriz de realimentação de estados  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tal que  $(A + BK)$  seja Hurwitz, determinar uma região UB,  $\mathcal{E}(P)$ , para o sistema (2.1)-(2.2), com constante UB  $\gamma$  associada, a menor possível.*

**Problema 2.2 (Síntese de realimentação de estados)** *Dadas as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , determinar a matriz de realimentação de estados  $K \in$*

$\mathbb{R}^{m \times n}$ , verificando a condição

$$-\frac{\mu}{2} \leq \operatorname{Re}(\lambda_i(A + BK)) < 0 \quad (2.12)$$

e obter uma região  $UB$ ,  $\mathcal{E}(P)$ , para o sistema (2.1)-(2.2), com constante  $UB$   $\gamma$  associada, a menor possível.

Sem a condição de alocação de pólos (2.12), o Problema 2.2 não seria bem posto, pois sua solução resultaria em uma realimentação de estados de alto ganho,  $K \rightarrow \infty$ , o que implicaria em autovalores de  $(A + BK)$  distantes do eixo imaginário e uma região  $\mathcal{E}(P)$  aproximando-se da origem.

Para solucionar os Problemas 2.1 e 2.2 serão utilizando algoritmos baseados em LMIs a partir de (2.10) e (2.11). Pela equação (2.11) é possível notar que a constante  $UB$ ,  $\gamma$ , está associada ao menor autovalor de  $P$ , o qual, geometricamente, está relacionado ao comprimento do eixo maior do conjunto elipsoidal  $\mathcal{E}(P)$ . Sendo assim, a fim de obter o conjunto  $UB$   $\mathcal{E}(P)$ , com constante  $\gamma$  associada e a menor possível,  $\mathcal{E}(P)$  é incluído na esfera de diâmetro igual a  $\gamma$ , a qual será minimizada.

Note que, por definição,  $\mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{E}\left(\frac{1}{\gamma}I_n\right) \Leftrightarrow x' \frac{1}{\gamma} x \leq 1 \quad \forall x' P x \leq 1$ . Utilizando o S-procedure e o complemento de Schur (Boyd *et al.*, 1994) é possível mostrar que esta inclusão é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} -\gamma I_n & I_n \\ * & -P \end{bmatrix} \leq 0, \quad (2.13)$$

ou ainda, considerando  $P^{-1} = Q$ :

$$Q \leq \gamma I_n. \quad (2.14)$$

Outras formas de minimizar o conjunto elipsoidal  $\mathcal{E}(P)$  podem ser escolhidas, como considerar o traço de  $P$ , ou ainda o logaritmo do determinante de  $P$ ,  $\log(\det(P))$ , o qual está relacionado à minimização do volume de  $P$ . Maiores detalhes sobre os critérios de otimização podem ser encontrados em Durieu *et al.* (1996); Fong e Hsu (2000); Tarbouriech *et al.* (2011a).

## 2.3 Modelagens do sistema com zona morta

Nesta seção são apresentadas três formas de modelar a não linearidade de zona morta, as quais permitem resolver os Problemas 2.1 e 2.2 utilizando o

conceito de estabilidade ultimamente limitada. As condições de estabilidade são obtidas via desigualdades matriciais e descritas sob a forma de LMIs nos algoritmos de otimização. Os modelos aqui apresentados estão relacionados com modelos já existentes na literatura. Por simplicidade, os sistemas são considerados monovariáveis<sup>3</sup>.

### 2.3.1 Sistema com perturbação limitada

A não-linearidade do tipo zona morta pode ser considerada como pertencente a uma faixa de operação, o que permite tratar o sistema de controle como um sistema linear sujeito a uma perturbação limitada. Nos trabalhos de Pomar *et al.* (2012) e Milhomem (2013) são apresentadas condições para análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados para sistemas lineares sujeitos a uma classe de perturbações limitadas. Estes resultados são descritos na sequência, para o caso de sistemas lineares com não-linearidade do tipo zona morta. Em Dilda e Castelan (2013) estes resultados são utilizados para abordar o problema de análise de seguimento de referência para sistemas lineares com não-linearidade do tipo zona morta, aplicado a um atuador hidráulico.

A Figura 2.6 mostra a representação da zona morta e da saturação. Note que as não-linearidades estão limitadas a uma faixa de operação:

$$u(t) - \rho \leq dz(u(t)) \leq u(t) + \rho \Leftrightarrow -\rho \leq \text{sat}(u(t)) \leq \rho.$$

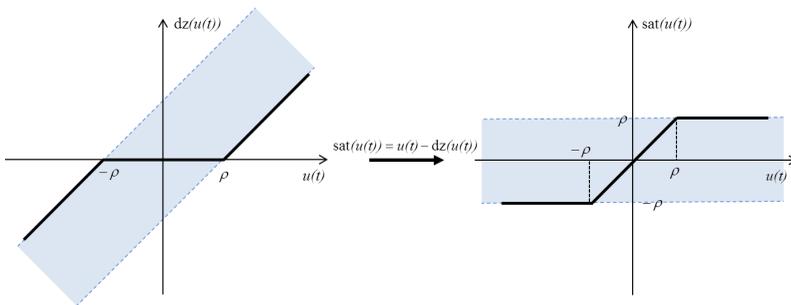


Figura 2.6: Não-linearidades localizadas em uma faixa de operação.

<sup>3</sup>Por simplicidade, o tempo  $t$  será omitido em algumas expressões.

Pode-se afirmar que  $\text{sat}(u(t)) \in W \subset \mathbb{R}$ , sendo  $W$  um conjunto politópico compacto que contém a origem definido por:

$$W = \{\omega(t) \in \mathbb{R} : \omega(t) = \nu\rho + (1 - \nu)\rho, \nu \in [0, 1]\}. \quad (2.15)$$

Sendo assim,  $\omega(t)$  pode ser considerada uma perturbação limitada em  $W$  e o sistema (2.7) pode ser visto como um sistema linear sujeito a uma perturbação aditiva:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) - B\omega(t), \quad (2.16)$$

em que,  $\omega(t)$  é limitado por  $-\rho$  e  $\rho$ .

Observe que diversas não-linearidades podem ser descritas como pertencentes à faixa de operação entre  $-\rho$  e  $\rho$ , o que pode tornar esta abordagem conservadora quando utilizada para tratar especificamente a não-linearidade do tipo zona morta.

### Análise de estabilidade

Para resolver o Problema de análise de estabilidade 2.1 utiliza-se a abordagem proposta por Pomar *et al.* (2012) e Milhomem (2013) para tratar sistemas lineares sujeitos a uma classe de perturbações limitadas.

**Proposição 2.3.1** *Considere a existência de um escalar positivo  $\tau_1$  e uma matriz simétrica definida positiva  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tais que:*

$$\begin{bmatrix} (A + BK)'P + P(A + BK) + \tau_1 P & -PB\rho \\ * & -\tau_1 \end{bmatrix} < 0. \quad (2.17)$$

Então,  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto UB para o sistema (2.7).

**Demonstração 1** Seja (2.17) verificada. Então, por simetria, verifica-se também a desigualdade

$$\begin{bmatrix} (A + BK)'P + P(A + BK) + \tau_1 P & PB\rho \\ * & -\tau_1 \end{bmatrix} < 0. \quad (2.18)$$

Considerando (2.17), (2.18) e o conjunto politópico (2.15), tem-se,  $\forall \nu \in [0, 1]$ :

$$\nu \begin{bmatrix} \text{He}(P(A + BK)) + \tau_1 P & -PB\rho \\ * & -\tau_1 \end{bmatrix} + (1 - \nu) \begin{bmatrix} \text{He}(P(A + BK)) + \tau_1 P & PB\rho \\ * & -\tau_1 \end{bmatrix} < 0. \quad (2.19)$$

Sendo assim,

$$\begin{bmatrix} (A+BK)'P + P(A+BK) + \tau_1 P & -PB\omega \\ * & -\tau_1 \end{bmatrix} < 0, \forall \omega \in W. \quad (2.20)$$

Pré- e pós-multiplicando (2.20) por  $[x' \ 1]$  e  $[x' \ 1]'$ , respectivamente, obtém-se:

$$x'((A+BK)'P + P(A+BK))x - x'PB\omega - \omega B'Px - \tau_1(1 - x'Px) < 0, \forall \omega \in W, \quad (2.21)$$

ou, fazendo uso do S-procedure (Boyd *et al.*, 1994), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \omega) = x'((A+BK)'P + P(A+BK))x - x'PB\omega - \omega B'Px < 0, \\ \forall x \notin \mathcal{E}(P) \text{ e } \forall \omega \in W. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como  $\text{sat}(u) \in W$ , a relação (2.22) implica que (2.10) do Lema 2.2.1 é verificada e, portanto,  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto UB para o sistema (2.7). ■

Note que a desigualdade (2.17) é uma BMI, devido à presença do produto de variáveis  $\tau_1 P$  e torna-se uma LMI se  $\tau_1$  for fixado. Assim, para resolver o problema de análise de estabilidade utilizando-se LMIs é realizada uma busca na variável  $\tau_1$ . Esta busca é feita em um intervalo determinado. Salienta-se, entretanto, que no caso do problema de análise, não foi possível encontrar uma forma de determinar sistematicamente o intervalo para a realização desta busca.

### Algoritmo 2.3.1 (Análise via perturbação limitada)

1. Para valores dados de  $\tau_1 \in [\tau_{1min}, \tau_{1max}]$ , resolve-se o problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{P, \gamma} \quad & \gamma \\ \text{sujeito à} \quad & \\ & (2.17) \text{ e } (2.13). \end{aligned}$$

2. Verifica-se qual o menor valor de  $\gamma$  obtido e o valor correspondente da matriz  $P$ .

### Síntese de realimentação de estados

As condições de síntese de realimentação de estados são obtidas a partir das condições de análise de estabilidade, fazendo a mudança de variável  $KQ = Y$ , com  $Q = P^{-1}$  e considerando uma condição adicional de alocação de pólos que satisfaça (2.12).

**Proposição 2.3.2** *Considere a existência de um escalar positivo  $\tau_1$ , uma matriz simétrica definida positiva  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tais que:*

$$\begin{bmatrix} QA' + AQ + Y'B' + BY + \tau_1 Q & -B\rho \\ * & -\tau_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.23)$$

e

$$QA' + AQ + Y'B' + BY + \mu Q > 0. \quad (2.24)$$

Então,  $\mathcal{E}(Q^{-1})$  é um conjunto UB para o sistema (2.7) cuja matriz de ganho de realimentação de estados  $K = YQ^{-1}$  verifica a condição (2.12).

**Demonstração 2** A demonstração da desigualdade (2.23) é feita de maneira análoga a da desigualdade (2.17), apenas é considerado  $P = Q^{-1}$  e faz-se a mudança de variável  $KQ = Y$ .

O primeiro bloco diagonal da desigualdade (2.23) e a desigualdade (2.24), que são, respectivamente,  $QA' + AQ + Y'B' + BY + \tau_1 Q < 0$  e  $QA' + AQ + Y'B' + BY + \mu Q > 0$ , juntamente com a condição de  $(A, B)$  ser controlável, garantem a verificação da restrição de alocação de pólos (2.12), que neste caso é dada por:

$$-\frac{\mu}{2} \leq \text{Re}(\lambda_i(A + BK)) \leq -\frac{1}{2}\tau_1 \leq 0, \quad (2.25)$$

sendo  $\mu$  um escalar positivo escolhido de acordo com a alocação de pólos desejada. ■

Para resolver o Problema de síntese de realimentação de estados 2.2 o seguinte algoritmo é proposto.

**Algoritmo 2.3.2** (*Síntese via perturbação limitada*)

1. Para valores dados de  $\tau_1 \in [\tau_{1min}, \tau_{1max}]$ , sendo este intervalo escolhido de acordo com a alocação de pólos desejada, resolve-se o problema de

otimização:

$$\begin{aligned} & \min_{Q, Y, \gamma} \gamma \\ & \text{sujeito à} \\ & (2.23), (2.24) \text{ e } (2.14). \end{aligned}$$

2. Verifica-se qual o menor valor de  $\gamma$  obtido e os valores correspondentes de  $Q$ ,  $Y$ . Por fim, calcula-se a matriz de realimentação de estados  $K = YQ^{-1}$ .

Note que os valores de  $\tau_1$  são fixados em um intervalo determinado, no entanto, diferentemente do Algoritmo de análise 2.3.1, para o qual não foi possível sistematizar a escolha do intervalo  $[\tau_{1\min}, \tau_{1\max}]$ , aqui este intervalo é escolhido de acordo com a alocação de pólos desejada, verificando a condição (2.25).

### 2.3.2 Sistema chaveado

Em Fong e Hsu (2000) é proposta uma condição de síntese de realimentação de estados para sistemas lineares sujeitos a não-linearidade do tipo zona morta no atuador. Inicialmente, os autores descrevem o sistema em sua forma exata, ou seja, como um sistema chaveado, definindo o valor exato da não-linearidade do tipo zona morta em cada região de funcionamento. No entanto, a condição obtida em Fong e Hsu (2000) é equivalente a (2.23), ou seja, é a mesma obtida ao se considerar a não-linearidade pertencente a uma faixa de operação. Com o intuito de estabelecer condições de análise e síntese a partir da descrição exata da não-linearidade é proposto o resultado que segue.

Na Figura (2.7) observa-se que a não-linearidade pode ser descrita no seu valor exato em cada região de funcionamento, ou seja, em  $|u(t)| \leq \rho$  e  $|u(t)| > \rho$ .

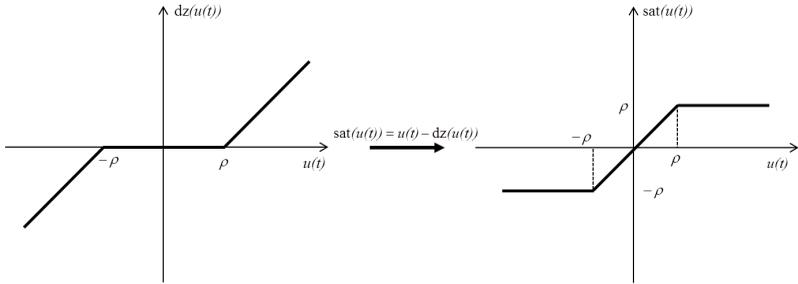


Figura 2.7: Não-linearidades de zona morta e saturação.

Como  $u(t) = Kx(t)$ , o sistema (2.7) pode ser descrito como um sistema chaveado em função dos estados, como segue:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} (A + BK)x(t) - B\rho, & \text{se } Kx(t) > \rho, \\ Ax(t), & \text{se } |Kx(t)| \leq \rho, \\ (A + BK)x(t) + B\rho, & \text{se } Kx(t) < -\rho. \end{cases} \quad (2.26)$$

Note que no interior da região  $|Kx(t)| \leq \rho$  o sistema se comporta em malha aberta. O conjunto poliédrico que corresponde a esta região, é dado por:

$$\mathfrak{S}(K, \rho) = \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^n; \begin{bmatrix} K \\ -K \end{bmatrix} x(t) \leq \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.27)$$

Para o sistema (2.26), a derivada da função de Lyapunov (2.8) também pode ser descrita em cada região de funcionamento:

$$\dot{V}(x) = \begin{cases} x'(\text{He}(P(A + BK)))x - x'PB\rho - \rho B'Px, & \text{se } Kx > \rho, \\ x'(\text{He}(PA))x, & \text{se } |Kx| \leq \rho, \\ x'(\text{He}(P(A + BK)))x + x'PB\rho + \rho B'Px, & \text{se } Kx < -\rho. \end{cases} \quad (2.28)$$

### Análise de estabilidade

**Proposição 2.3.3** *Considere a existência de escalares positivos  $\tau_\ell$ , com  $\ell \in \{1; \dots; 4\}$  e uma matriz simétrica definida positiva  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tais que:*

$$\begin{bmatrix} (A+BK)'P + P(A+BK) + \tau_1 P & -PB\rho + K'\rho\tau_2 \\ * & -\tau_1 - 2\rho\tau_2\rho \end{bmatrix} < 0, \quad (2.29)$$

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + \tau_1 P - K' \frac{\tau_3}{\rho^2} K & 0_{n \times 1} \\ * & -\tau_1 + \tau_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.30)$$

$$\begin{bmatrix} (A+BK)'P + P(A+BK) + \tau_1 P & PB\rho - K'\rho\tau_4 \\ * & -\tau_1 - 2\rho\tau_4\rho \end{bmatrix} < 0. \quad (2.31)$$

Então,  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto UB para o sistema (2.7).

**Demonstração 3** Seja (2.29) verificada. Pré- e pós-multiplicando (2.29) por  $[x' \ 1]$  e  $[x' \ 1]'$ , respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} x'((A+BK)'P + P(A+BK))x - x'PB\rho - \rho B'Px - \tau_1(1 - x'Px) \\ - 2\rho\tau_2(\rho - Kx) < 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Como  $x \in Kx > \rho \Leftrightarrow \rho(\rho - Kx) < 0$ , fazendo uso do S-procedure, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = x'((A+BK)'P + P(A+BK))x - x'PB\rho - \rho B'Px < 0, \\ \forall x \notin \mathcal{E}(P), \forall x \in Kx > \rho. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Da mesma forma, se (2.31) é verificada, obtém-se:

$$\begin{aligned} x'((A+BK)'P + P(A+BK))x + x'PB\rho + \rho B'Px - \tau_1(1 - x'Px) \\ - 2\rho\tau_2(Kx + \rho) < 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Sendo  $x \in Kx < -\rho \Leftrightarrow \rho(Kx + \rho) < 0$ , fazendo uso do S-procedure, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = x'((A+BK)'P + P(A+BK))x + x'PB\rho + \rho B'Px < 0, \\ \forall x \notin \mathcal{E}(P), \forall x \in Kx < -\rho. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Considere agora que (2.30) é verificada, multiplicando à esquerda e à

direita por  $[x' \quad 1]$  e  $[x' \quad 1]'$ , respectivamente, obtém-se:

$$x'(A'P + PA)x - \tau_1(1 - x'Px) - \tau_3(x'K' \frac{1}{\rho^2}Kx - 1) < 0. \quad (2.36)$$

Neste caso,  $x \in \mathcal{S}(K, \rho) \Leftrightarrow x'K' \frac{1}{\rho^2}Kx \leq 1$  e utilizando o S-procedure, pode-se reescrever (2.36) como:

$$\dot{V}(x) = x'(A'P + PA)x < 0, \quad \forall x \notin \mathcal{E}(P) \text{ e } \forall x \in \mathcal{S}(K, \rho). \quad (2.37)$$

Considerando-se (2.28), as relações (2.33), (2.35) e (2.37) implicam que (2.10) do Lema 2.2.1 é verificada. Portanto,  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto UB para o sistema (2.7). ■

Note que, as desigualdades (2.29), (2.30) e (2.31) são BMIs devido ao produto de variáveis,  $\tau_1 P$ . No entanto, se  $\tau_1$  for um valor fixo as desigualdades tornam-se LMIs. Para resolver o Problema de análise de estabilidade 2.1, o seguinte algoritmo é proposto.

**Algoritmo 2.3.3** (*Análise via sistema chaveado*)

1. Para valores dados de  $\tau_1 \in [\tau_{1min}, \tau_{1max}]$ , resolve-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min_{P, \gamma, \tau_2, \tau_3, \tau_4} \gamma \\ & \text{sujeito à} \\ & (2.29), (2.30), (2.31) \text{ e } (2.13). \end{aligned}$$

2. Verifica-se qual o menor valor de  $\gamma$  obtido e os valores correspondentes de  $P, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ .

**Síntese de realimentação de estados**

As condições de síntese de realimentação de estados são obtidas a partir das condições de análise e o resultado é apresentado a seguir.

**Proposição 2.3.4** *Considere a existência de escalares positivos  $\tau_\ell$ , com  $\ell \in \{1; \dots; 4\}$ , uma matriz simétrica definida positiva  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Z \in$*

$\mathbb{R}^{m \times n}$  e  $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tais que:

$$\begin{bmatrix} \text{He}(AQ) + \tau_1 Q & -B\rho & B \\ * & -\tau_1 - 2\rho\tau_2\rho & \rho\tau_2 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [Z \ 0 \ -X] \right) < 0, \quad (2.38)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}(AQ) + \tau_1 Q & 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ * & -\tau_1 + \tau_3 & 0 \\ * & * & -\frac{\tau_3}{\rho^2} \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [Z \ 0 \ -X] \right) < 0, \quad (2.39)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}(AQ) + \tau_1 Q & B\rho & B \\ * & -\tau_1 - 2\rho\tau_4\rho & -\rho\tau_4 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [Z \ 0 \ -X] \right) < 0 \quad (2.40)$$

e

$$\begin{bmatrix} \text{He}(AQ) + \mu Q & B \\ * & 0 \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} B \\ -1 \end{bmatrix} [Z \ -X] \right) > 0. \quad (2.41)$$

Então,  $\mathcal{E}(Q^{-1})$  é um conjunto UB para o sistema (2.7) cuja matriz de ganho de realimentação de estados  $K = YQ^{-1}$ , sendo  $Y = X^{-1}Z$ , verifica a condição (2.12).

**Demonstração 4** A demonstração é baseada no Lema de Finsler (Skelton *et al.*, 1998), esta técnica já foi utilizada em outros trabalhos como Tarbouriech *et al.* (2009), Gonzaga *et al.* (2012) e Dilda *et al.* (2013) e permite eliminar termos não-convexos através da reformulação das desigualdades. A demonstração detalhada pode ser encontrada no Apêndice B, Seção B.2 (veja também Capítulo 3). ■

Para resolver o Problema de síntese de realimentação de estados 2.2 o seguinte algoritmo é proposto.

**Algoritmo 2.3.4** (*Síntese via sistema chaveado*)

1. Para valores dados de  $\tau_1 \in [\tau_{1min}, \tau_{1max}]$ , sendo este intervalo escolhido de acordo com a alocação do pólos desejada, resolve-se o problema de otimização:

$$\min_{Q, Y, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \gamma} \gamma$$

sujeito à

$$(2.38), (2.39), (2.40), (2.41) \text{ e } (2.14).$$

2. Verifica-se qual o menor valor de  $\gamma$  obtido e os valores correspondentes de  $Q$ ,  $Y$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ ,  $\tau_4$ . Por fim, calcula-se a matriz de realimentação de estados  $K = X^{-1}ZQ^{-1} = YQ^{-1}$ .

### 2.3.3 Sistema com não-linearidade de setor decomposta

Geometricamente, a zona morta é uma não-linearidade do tipo cone limitado,  $dz(u(t)) \in [0, 1]$  (Boyd *et al.*, 1994; Khalil, 2002) :

$$dz(u(t))t_1 [dz(u(t)) - u(t)] \leq 0, \text{ para qualquer } t_1 > 0. \quad (2.42)$$

Além disso, como já se sabe, a zona morta está relacionada com a saturação, portanto a saturação também pode ser vista como uma não-linearidade pertencente ao setor  $[0, 1]$ , como pode ser observado na Figura 2.8. Na teoria clássica de estabilidade absoluta, ao considerar-se uma não-linearidade pertencente a um setor que passa pela origem busca-se tratar um problema de estabilidade assintótica da origem. Sabe-se que, para sistemas sujeitos à zona morta, só é possível obter a estabilidade assintótica da origem nos casos em que o sistema é estável em malha aberta.

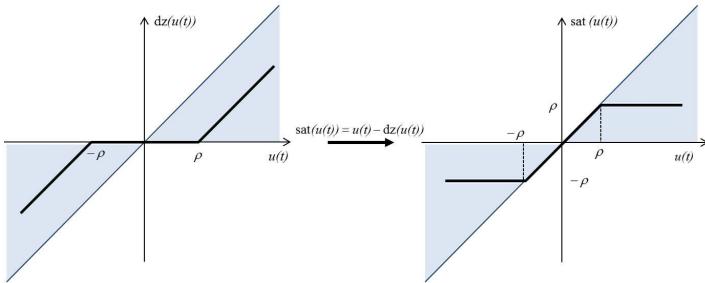


Figura 2.8: Não-linearidades pertencentes ao setor  $[0, 1]$ .

Tendo em vista que o objetivo é considerar, principalmente os casos de sistemas que não são assintoticamente estáveis em malha aberta, propõe-se a decomposição da zona morta em termos de uma zona morta modificada,  $dz_m(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , e um erro relacionado à diferença entre a zona morta e a zona morta modificada,  $e(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , tais que:

$$dz(u(t)) = dz_m(u(t)) + e(u(t)). \quad (2.43)$$

Mais especificamente (ver Figura 2.9), para algum escalar  $\bar{\alpha} \in [0, 1)$  e

considerando  $\bar{u} = \frac{\rho}{1-\bar{\alpha}}$ , tem-se:

$$dz_m(u(t)) = \begin{cases} u(t) - \rho, & \text{se } u(t) > \bar{u} \\ \bar{\alpha}u(t), & \text{se } |u(t)| \leq \bar{u} \\ u(t) + \rho, & \text{se } u_i(t) < -\bar{u} \end{cases} \quad (2.44)$$

e

$$e(u(t)) = \begin{cases} 0, & \text{se } |u(t)| \geq \bar{u} \\ (1 - \bar{\alpha})u(t) - \rho, & \text{se } \rho < u(t) < \bar{u} \\ -\bar{\alpha}u(t), & \text{se } |u(t)| \leq \rho \\ (1 - \bar{\alpha})u(t) + \rho, & \text{se } -\bar{u} < u(t) < -\rho \end{cases} \quad (2.45)$$

Esta decomposição foi utilizada por Dilda *et al.* (2012) e segue a ideia também apresentada em Turner (2006). Tal decomposição permite utilizar uma condição de setor, válida globalmente, para o termo referente à não-linearidade modificada, e uma condição de perturbação limitada, válida localmente, para o outro termo. Por construção  $dz_m(u(t)) \in [\bar{\alpha}, 1]$ , isto é,

$$[dz_m(u(t)) - \bar{\alpha}u(t)]t_1 [dz_m(u(t)) - u(t)] \leq 0, \quad \forall u(t),$$

para qualquer  $t_1 > 0$ , com  $0 \leq \bar{\alpha} < 1$ . Por outro lado, o erro definido em (2.45) é tal que  $e(u(t)) = 0$  se  $|u(t)| > \bar{u}$ ;  $e(u(t))$  é limitado localmente pelo valor máximo  $\bar{\alpha}\rho$ , isto é,

$$|e(u(t))| \leq \bar{\alpha}\rho, \quad \forall |u(t)| \leq \bar{u}. \quad (2.46)$$

Substituindo (2.43) em (2.1) obtém-se

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bdz_m(u(t)) + Be(u(t)). \quad (2.47)$$

Considerando a lei de controle de realimentação de estados dada por (2.2),  $u(t) = Kx(t)$ , o sistema em malha fechada pode ser escrito como

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) - B\text{sat}_m(u(t)) + Be(u(t)), \quad (2.48)$$

em que,  $\text{sat}_m(u(t)) = u(t) - dz_m(u(t))$  é tal que:

$$\text{sat}_m(u(t)) = \begin{cases} \rho, & \text{se } u(t) > \bar{u} \\ (1 - \bar{\alpha})u(t), & \text{se } |u(t)| \leq \bar{u} \\ -\rho, & \text{se } u_i(t) < -\bar{u} \end{cases} \quad (2.49)$$

A Figura 2.9 apresenta a decomposição das não-linearidades zona morta e saturação. Observa-se, em cinza a zona morta e a saturação, em preto a zona

morta modificada e a saturação modificada, e em vermelho e tracejado o erro relacionado.

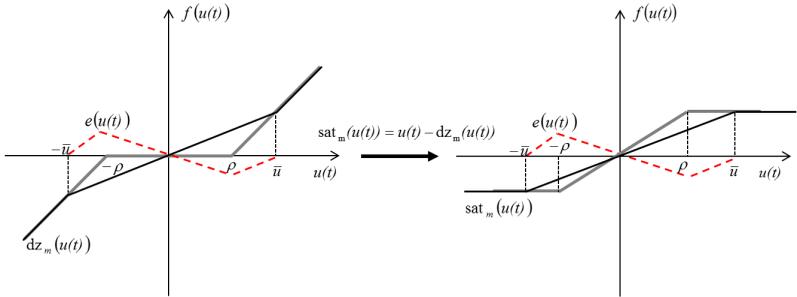


Figura 2.9: Não-linearidades decompostas.

A não-linearidade  $\text{sat}_m(\cdot)$  verifica globalmente a condição de setor  $\text{sat}_m(\cdot) \in [0, (1 - \bar{\alpha})]$ , isto é:

$$\text{sat}'_m(u(t))t_1 [\text{sat}_m(u(t)) - (1 - \bar{\alpha})u(t)] \leq 0, \quad (2.50)$$

para todo  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  para qualquer  $t_1 > 0$ , com  $0 \leq \bar{\alpha} < 1$ .

O erro, equivalente a  $e(u(t)) = dz(u(t)) - dz_m(u(t)) = \text{sat}_m(u(t)) - \text{sat}(u(t))$ , é descentralizado e verifica localmente a condição (2.46). Observa-se através dos gráficos das figuras anteriores que o erro ocorre no interior do conjunto  $\mathcal{S}(\rho, \bar{\alpha})$ , definido por:

$$\mathcal{S}(\rho, \bar{\alpha}) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; -\bar{u} \leq Kx(t) \leq \bar{u}\}, \quad (2.51)$$

com  $\bar{u} = \frac{\rho}{1 - \bar{\alpha}}$ , para todo  $\bar{\alpha} \in [0, 1)$ .

Na Figura 2.10 observam-se as não-linearidades modificadas e as respectivas condições de setor, bem como o erro relacionado e a condição de perturbação limitada considerada.

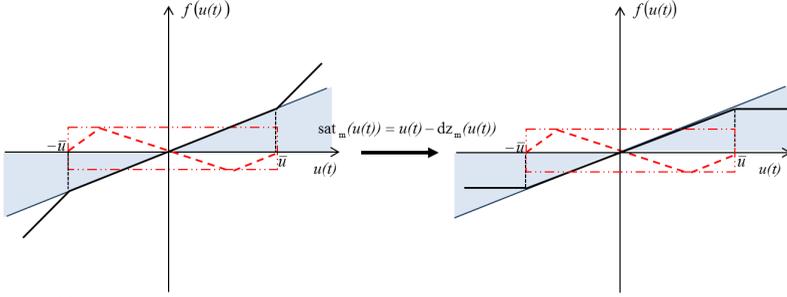


Figura 2.10: Não-linearidades decompostas e respectivas condições.

Em função do exposto acima, pode-se considerar que o sistema (2.48) apresenta duas regiões de funcionamento, uma no exterior de  $\mathcal{S}(\rho, \bar{\alpha})$  na qual o erro,  $e(u(t))$ , é nulo, e outra no interior, na qual  $e(u(t)) \neq 0$ . O sistema pode ser descrito como:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} (A+BK)x(t) - B\text{sat}_m(u(t)), & \text{se } |Kx(t)| > \rho, \\ (A+BK)x(t) - B\text{sat}_m(u(t)) + Be(u(t)), & \text{se } |Kx(t)| \leq \rho. \end{cases} \quad (2.52)$$

$$(2.53)$$

Para o sistema (2.52)-(2.53), a derivada da função de Lyapunov (2.8) também pode ser descrita em cada região de funcionamento:

$$\dot{V}(x) = \begin{cases} x'(\text{He}(P(A+BK)))x - 2x'PB\text{sat}_m(u(t)), & \text{se } |Kx| > \rho, \\ x'(\text{He}(P(A+BK)))x - 2x'PB\text{sat}_m(u(t)) + 2x'Be(u(t)), & \text{se } |Kx| \leq \rho. \end{cases} \quad (2.54)$$

### Análise de estabilidade

As condições de análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados serão obtidas considerando o sistema (2.52)-(2.53), sendo assim, é proposto o resultado seguinte.

**Proposição 2.3.5** *Considere a existência de escalares positivos  $t_1$ ,  $t_2$  e  $\tau_\ell$ , com  $\ell \in \{1; \dots; 3\}$  e uma matriz definida positiva  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tais que:*

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \text{He}(P(A+BK)) + \tau_1 P + K'(1-\bar{\alpha})\frac{\tau_2}{\rho^2}(1-\bar{\alpha})K & -PB + K'(1-\bar{\alpha})t_1 \\ * & -2t_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.55)$$

$$\Psi_2 = -\tau_1 - \tau_2 < 0, \quad (2.56)$$

$$\Psi_3 = \begin{bmatrix} \text{He}(P(A+BK)) + \tau_1 P - K'(1-\bar{\alpha})\frac{\tau_3}{\rho^2}(1-\bar{\alpha})K & -PB + K'(1-\bar{\alpha})t_1 & PB \\ * & -2t_1 & 0 \\ * & * & -t_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.57)$$

$$\Psi_4 = -\tau_1 + \tau_3 + \bar{\alpha}^2 t_2 \rho^2 < 0, \quad (2.58)$$

Então,  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto UB para o sistema (2.7).

**Demonstração 5** Assume-se que (2.55) e (2.56) são verificadas, portanto pode-se reescrevê-las como

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & 0_{n \times 1} \\ * & \Psi_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.59)$$

Pré- e pós-multiplicando (2.59) por  $\begin{bmatrix} x' & \text{sat}(u)' & 1 \end{bmatrix}$  e seu transposto, respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} & x'(\text{He}(P(A+BK)))x - x'PB\text{sat}_m(u) - \text{sat}_m(u)B'Px - \tau_1(1-x'Px) \\ & - 2\text{sat}_m(u)t_1[\text{sat}_m(u) - (1-\bar{\alpha})Kx] - \tau_2 \left( 1 - x'K'(1-\bar{\alpha})\frac{1}{\rho^2}(1-\bar{\alpha})Kx \right) < 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Sendo (2.50) verificada e  $x \notin \mathcal{S}(\rho, \bar{\alpha}) \Leftrightarrow x'K'(1-\bar{\alpha})\frac{1}{\rho^2}(1-\bar{\alpha})Kx \geq 1$ , fazendo uso do S-procedure, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x'(\text{He}(P(A+BK)))x - x'PB\text{sat}_m(u) - \text{sat}_m(u)B'Px < 0, \\ \forall x \notin \mathcal{E}(P), \forall x \notin \mathcal{S}(\rho, \bar{\alpha}). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Considere (2.57) e (2.58) verificadas, então pode-se reescrevê-las como

$$\begin{bmatrix} \Psi_3 & 0_{n \times 1} \\ * & \Psi_4 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.62)$$

Pré- e pós-multiplicando (2.62) por

$$\begin{bmatrix} x' & \text{sat}_m(u)' & e(u)' & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x' & \text{sat}_m(u)' & e(u)' & 1 \end{bmatrix}',$$

respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} & x'(\text{He}(P(A+BK)))x - x'PB\text{sat}_m(u) - \text{sat}_m(u)B'Px + x'PBe(u) + e(u)'B'Px \\ & - 2\text{sat}_m(u)t_1[\text{sat}_m(u) - (1 - \bar{\alpha})Kx] - t_2[e(u)'e(u) - \bar{\alpha}^2\rho^2] \\ & - \tau_1(1 - x'Px) + \tau_3 \left( 1 - x'K'(1 - \bar{\alpha})\frac{1}{\rho^2}(1 - \bar{\alpha})Kx \right) < 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Sendo (2.46), (2.50) verificadas e, por definição:

$$x \in \mathcal{S}(\rho, \bar{\alpha}) \Leftrightarrow x'K'(1 - \bar{\alpha})\frac{1}{\rho^2}(1 - \bar{\alpha})Kx < 1,$$

fazendo uso do S-procedure, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x'(\text{He}(P(A+BK)))x - 2x'PB\text{sat}(u) + 2x'PBe(u) < 0, \\ \forall x &\notin \mathcal{E}(P), \forall x \in \mathcal{S}(\rho, \bar{\alpha}). \end{aligned} \quad (2.64)$$

As relações (2.61) e (2.64) implicam que (2.10) do Lema 2.2.1 é verificada e, portanto,  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto UB para o sistema (2.7). ■

Observe que as desigualdades (2.55), (2.57) e (2.58) são BMIs devido aos produtos de variáveis,  $\tau_1 P$ ,  $\bar{\alpha}\tau_2\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\alpha}t_1$ ,  $\bar{\alpha}\tau_3\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\alpha}^2t_2$ . No entanto, se  $\tau_1$  e  $\bar{\alpha}$  forem fixados, as desigualdades tornam-se LMIs. Portanto, para resolver o Problema de análise de estabilidade 2.1, o seguinte algoritmo é proposto.

### Algoritmo 2.3.5 (Análise via não-linearidade de setor decomposta)

1. Para valores dados de  $\tau_1 \in [\tau_{1\min}, \tau_{1\max}]$ , faz-se uma busca linear na variável  $0 \leq \bar{\alpha} < 1$ , através da resolução do problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min_{P, \tau_2, \tau_3, t_1, t_2} \gamma \\ & \text{sujeito à} \\ & (2.55), (2.56), (2.57), (2.58) \text{ e } (2.13). \end{aligned}$$

2. Verifica-se qual o menor valor de  $\gamma$  obtido e os valores correspondentes de  $\bar{\alpha}$ ,  $P$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ .

### Síntese de realimentação de estados

As condições de síntese de realimentação de estados são obtidas a partir das condições de análise de estabilidade e são apresentadas a seguir.

**Proposição 2.3.6** *Considere a existência de escalares positivos  $t_1, t_2, \tau_\ell$ , com  $\ell \in \{1; \dots; 3\}$  e uma matriz simétrica definida positiva  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tais que:*

$$\begin{bmatrix} \text{He}(AQ) + \tau_1 Q & -B & B \\ * & -2t_1 & t_1(1-\bar{\alpha}) \\ * & * & (1-\bar{\alpha})\frac{\tau_2}{\rho^2}(1-\bar{\alpha}) \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [Z \quad 0 \quad -X] \right) < 0, \quad (2.65)$$

$$-\tau_1 - \tau_2 < 0, \quad (2.66)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}(AQ) + \tau_1 Q & -B & B & B \\ * & -2t_1 & 0 & t_1(1-\bar{\alpha}) \\ * & * & -t_2 & 0 \\ * & * & * & -(1-\bar{\alpha})\frac{\tau_3}{\rho^2}(1-\bar{\alpha}) \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} B \\ 0_{2 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} [Z \quad 0_{1 \times 2} \quad -X] \right) < 0, \quad (2.67)$$

$$-\tau_1 + \tau_3 + \bar{\alpha}^2 t_2 \rho^2 < 0, \quad (2.68)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}(AQ) + \mu Q & B \\ * & 0 \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} B \\ -1 \end{bmatrix} [Z \quad -X] \right) > 0. \quad (2.69)$$

Então,  $\mathcal{E}(Q^{-1})$  é um conjunto UB para o sistema (2.7), cuja matriz de ganho de realimentação de estados  $K = YQ^{-1}$ , sendo  $Y = X^{-1}Z$ , verifica a condição de alocação de pólos (2.12).

**Demonstração 6** As condições (2.65)-(2.68) são obtidas a partir das condições de análise de estabilidade e a demonstração é baseada no Lema de Finsler (Skelton *et al.*, 1998), e segue de maneira análoga à Demonstração 4. A demonstração da condição (2.69) segue a mesma descrita anteriormente para a condição (2.41). ■

Para resolver o Problema de síntese de realimentação de estados 2.2 o seguinte algoritmo é proposto.

**Algoritmo 2.3.6** (*Síntese via não-linearidade de setor decomposta*)

1. Para valores dados de  $\tau_1 \in [\tau_{1min}, \tau_{1max}]$ , sendo este intervalo escolhido de acordo com a alocação do pólos desejada, faz-se uma busca linear

na variável  $0 \leq \bar{\alpha} < 1$ , através da resolução do problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min_{Q, Y, \tau_2, \tau_3, t_1, t_2, \gamma} \gamma \\ & \text{sujeito à} \\ & (2.65), (2.66), (2.67), (2.68), (2.69) \text{ e } (2.14). \end{aligned}$$

2. Verifica-se qual o menor valor de  $\gamma$  obtido e os valores correspondentes de  $\bar{\alpha}$ ,  $Q$ ,  $Y$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ . Por fim, calcula-se a matriz de realimentação de estados  $K = X^{-1}ZQ^{-1} = YQ^{-1}$ .

## 2.4 Exemplos

Serão mostrados aqui os resultados numéricos e de simulação computacional para o problema de análise de estabilidade, considerando os três sistemas apresentados na Tabela 2.1 do Exemplo 2.2.1.

### 2.4.1 Sistema instável

Na Tabela 2.2 são apresentados os resultados obtidos quando na resolução do Problema de análise de estabilidade 2.1 considerando o sistema  $S_i$  da Tabela 2.1. São descritos os valores da matriz  $P$ , da constante UB  $\gamma$  e da área do conjunto UB  $\mathcal{E}(P)$ . Na primeira coluna são mostrados os resultados obtidos fazendo uso do Algoritmo 2.3.1, mas note que estes são os resultados mais conservadores. Tal conservadorismo deve-se ao fato de que se descreve a não-linearidade como uma perturbação limitada, ou seja, pertencente a uma faixa de operação onde diversas não-linearidades também podem ser descritas.

Os resultados apresentados na segunda coluna foram obtidos através da solução do Algoritmo 2.3.3 e neste caso são obtidos os melhores valores para a constante UB e para a área da região  $\mathcal{E}(P)$ , isso porque na modelagem considerada descreve-se o modelo exato da não-linearidade. Na última coluna utilizou-se o Algoritmo 2.3.5 e verifica-se que os resultados obtidos são próximos dos obtidos utilizando o modelo chaveado.

A Figura 2.11 mostra os resultados gráficos obtidos quando considerada cada uma das modelagens aqui propostas. Apresenta-se a região UB, juntamente com a circunferência associada, cujo raio é dado por  $\sqrt{\gamma}$ , e uma trajetória que mostra o comportamento do sistema, tendo como condição inicial o ponto  $x_0 = [-0.5 \quad -0.1]^T$ . No último gráfico da figura mostra-se uma

comparação das regiões UB obtidas em cada um dos casos considerados.

Tabela 2.2: Resultados de análise - sistema instável.

Parâmetro	Perturbação	Chaveado	Decomposição
$P$	58.60    -35.70 -35.70    61.04	68.74    -41.48 -41.48    80.34	67.44    -40.98 -40.98    80.14
$\gamma$	0.0415	0.0306	0.0309
Área $\mathcal{E}(P)$	0.0654	0.0509	0.0514

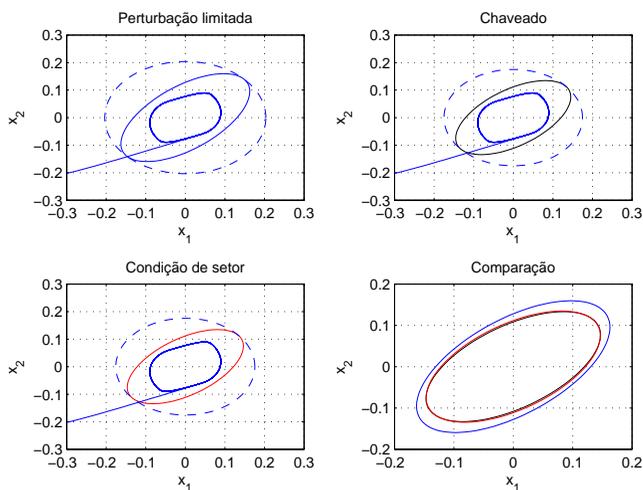


Figura 2.11: Resultado da análise de estabilidade para o sistema instável.

## 2.4.2 Sistema estável

A Tabela 2.3 mostra os resultados obtidos na solução do Problema de análise 2.1, considerando o sistema estável em malha aberta,  $S_e$ , descrito na Tabela 2.1. Novamente é possível observar o conservadorismo dos resultados obtidos ao modelar a não-linearidade como uma perturbação limitada, observa-se também este conservadorismo no primeiro gráfico da Figura 2.12, onde é apresentada a região UB obtida neste caso e uma trajetória do sistema, que inicia no ponto  $x_0 = (-0.3, -0.3)$ . No segundo gráfico da Figura 2.12 são mostradas as regiões UB obtidas nos outros dois casos e nota-se que as

regiões tendem à 0,  $\mathcal{E}(P) \rightarrow 0$ . É importante salientar que para o caso do sistema com não-linearidade de setor decomposta o menor valor de  $\gamma$  foi obtido quando  $\bar{\alpha} = 0$ , isso é equivalente ao erro ser nulo, conforme pode ser observado em (2.46).

Tabela 2.3: Resultados análise - sistema estável.

	Perturbação		Chaveado		Decomposição	
$P$	69.08	-68.32	4.73	-5.13	4.21	-4.71
	-68.32	84.32	-5.13	7.13	-4.71	6.61
			$\times 10^8$		$\times 10^8$	
$\gamma$	0.1257		$1.5 \times 10^{-8}$		$1.82 \times 10^{-8}$	
Área $\mathcal{E}(P)$	0.0923		$1.15 \times 10^{-8}$		$1.32 \times 10^{-8}$	

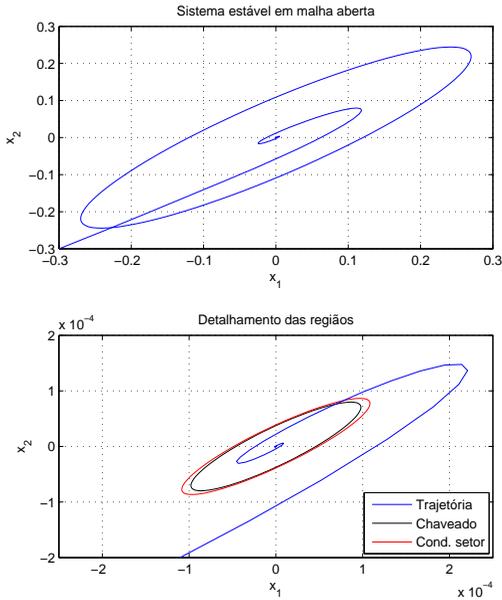


Figura 2.12: Resultado da análise de estabilidade para o sistema estável.

### 2.4.3 Sistema criticamente estável

A Tabela 2.4 apresenta os resultados para o caso do sistema criticamente estável em malha aberta. As regiões de convergência, juntamente com duas trajetórias são apresentadas na Figura 2.13. Note que para este sistema as trajetórias convergem para pontos de equilíbrio próximos da origem.

Tabela 2.4: Resultados análise - sistema criticamente estável.

	Perturbação	Chaveado	Decomposição
$P$	$\begin{bmatrix} 1.65 & -1.60 \\ -1.60 & 1.64 \end{bmatrix} \times 10^3$	$\begin{bmatrix} 1.13 & -1.01 \\ -1.01 & 1.02 \end{bmatrix} \times 10^3$	$\begin{bmatrix} 1.24 & -1.11 \\ -1.11 & 1.12 \end{bmatrix} \times 10^3$
$\gamma$	0.0256	0.0153	0.0153
Área $\mathcal{E}(P)$	0.0088	0.0084	0.0080

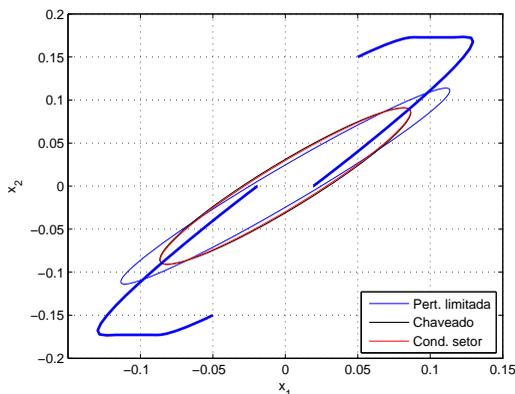


Figura 2.13: Resultado da análise de estabilidade para o sistema criticamente estável.

## 2.5 Considerações finais

Neste capítulo foram ilustrados os efeitos da não-linearidade do tipo zona morta em sistemas lineares, foram apresentados os conceitos de base e os problemas de análise e síntese de realimentação de estados, que serão utilizados ao longo deste trabalho. Condição para a análise de estabilidade e

síntese de realimentação de estados foram propostas, considerando três modelagens diferentes para a não-linearidade, as quais são baseadas em métodos existentes na literatura. Os resultados apresentados foram descritos para sistemas monovariáveis, porém podem ser estendidos para o caso multivariável. Para os casos em que a não-linearidade é tratada de maneira diferente em cada uma das regiões de funcionamento, uma forma de fazer esta extensão é considerar todas as combinações entre as regiões de acordo com o número de entradas de controle, de forma similar à que será tratada no próximo capítulo.

Com o intuito de generalizar a modelagem da zona morta, sem que os resultados se tornem mais conservadores e vislumbrando tratar o problema de sistemas lineares sujeitos a outras não-linearidades, que também apresentem perda de estabilidade em torno da origem, propõe-se no capítulo seguinte uma modelagem através da parametrização da não-linearidade por uma classe de funções.

## Capítulo 3

# Parametrização da Zona Morta por uma Classe de Funções

### 3.1 Introdução

Neste capítulo são tratados os problemas de análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados para sistemas lineares sujeitos a não-linearidade de zona morta no atuador. Propõe-se uma modelagem para a não-linearidade através da parametrização por uma classe de funções. Tal parametrização mostrou-se interessante, uma vez que utiliza a ideia de não-linearidade pertencente a setores, porém sem a necessidade de decompor a não-linearidade. Os resultados são apresentados para sistemas multivariáveis.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 3.2, apresenta-se uma breve revisão do problema a ser estudado. Na Seção 3.3 é descrita a parametrização da não-linearidade por uma classe de funções, que é a contribuição deste trabalho à modelagem da não-linearidade estudada. Nas Seções 3.4 e 3.5, são descritos os resultados da análise de estabilidade e da síntese de realimentação de estados, respectivamente. A Seção 3.6 mostra os resultados de simulação computacional. Por fim, na Seção 3.7 são apresentadas as considerações finais do capítulo.

## 3.2 Revisão do problema

Como no capítulo anterior, considere o sistema linear, contínuo e invariante no tempo, com não-linearidade de zona morta no atuador, representado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bdz(u(t)) \quad (3.1)$$

$$u(t) = Kx(t) \quad (3.2)$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e o par  $(A, B)$  é controlável. A matriz de ganhos  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz de realimentação de estados que estabiliza o sistema sem a presença da zona morta  $dz(\cdot)$ , isto é, a matriz  $(A + BK)$  é Hurwitz.

A não-linearidade de zona morta,  $dz(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , é descentralizada e simétrica, como representada na Figura 2.1:

$$dz_i(u_i(t)) = \begin{cases} u_i(t) - \rho_i, & \text{se } u_i(t) > \rho_i, \\ 0, & \text{se } |u_i(t)| \leq \rho_i, \quad \forall i \in \{1; \dots; m\}. \\ u_i(t) + \rho_i, & \text{se } u_i(t) < -\rho_i, \end{cases} \quad (3.3)$$

Sendo,  $\text{sat}(u(t)) = u(t) - dz(u(t))$ , ou equivalentemente:

$$\text{sat}_i(u_i(t)) = \begin{cases} \rho_i, & \text{se } u_i(t) > \rho_i, \\ u_i(t), & \text{se } |u_i(t)| \leq \rho_i, \quad \forall i \in \{1; \dots; m\}, \\ -\rho_i, & \text{se } u_i(t) < -\rho_i, \end{cases} \quad (3.4)$$

o sistema (3.1)-(3.2) é equivalente a

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) - B\text{sat}(Kx(t)). \quad (3.5)$$

Para comprovar a propriedade ultimamente limitada (UB) das trajetórias do sistema (3.5), considera-se, como anteriormente, a função de Lyapunov quadrática como candidata. Define-se  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$V(x(t)) = x(t)'Px(t), \quad (3.6)$$

com  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$ . O conjunto  $\mathcal{E}(P)$  definido pela curva de nível unitária da função de Lyapunov (3.6) é dado por:

$$\mathcal{E}(P) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; V(x(t)) \leq 1\}. \quad (3.7)$$

Da mesma forma que no capítulo anterior são considerados os problemas de análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados (Problemas 2.1 e 2.2, respectivamente) os quais estão associados à determinação de uma região elipsoidal UB para o sistema (3.5).

O Lema 2.2.1 foi considerado como ferramenta para a solução dos problemas de análise e síntese baseados na modelagem da não-linearidade apresentada na sequência.

### 3.3 Parametrização da não-linearidade por uma classe de funções

Considerando o sistema em malha fechada (3.5), a não-linearidade  $\text{sat}(u(t))$  pode ser modelada como pertencente a uma classe parametrizada de não-linearidades. Esta classe é caracterizada por partes limitadas e afins em função da entrada de controle  $u(t)$ , ou mais precisamente em função de quatro regiões de cada entrada de controle  $u_i(t)$ , como é mostrado na Figura 3.1. Tem-se, para  $\alpha_i \in [0; 1]$  e  $\beta_i \in [0; 1]$ ,  $\forall i \in \{1; \dots; m\}$ ,

$$u_i(t) \leq -\rho_i \Rightarrow (\text{sat}(u_i(t)) + \beta_i \rho_i)(\text{sat}(u_i(t)) - (\alpha_i u_i(t) - (1 - \alpha_i) \rho_i)) \leq 0, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} -\rho_i \leq u_i(t) \leq 0 \Rightarrow & (\text{sat}(u_i(t)) - (\alpha_i u_i(t) - (1 - \alpha_i) \rho_i)) \\ & (\text{sat}(u_i(t)) - ((\beta_i + 1 - \alpha_i) u_i(t) + (1 - \alpha_i) \rho_i)) \leq 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq u_i(t) \leq \rho_i \Rightarrow & (\text{sat}(u_i(t)) - (\alpha_i u_i(t) + (1 - \alpha_i) \rho_i)) \\ & (\text{sat}(u_i(t)) - ((\beta_i + 1 - \alpha_i) u_i(t) - (1 - \alpha_i) \rho_i)) \leq 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$u_i(t) \geq \rho_i \Rightarrow (\text{sat}(u_i(t)) - \beta_i \rho_i)(\text{sat}(u_i(t)) - (\alpha_i u_i(t) + (1 - \alpha_i) \rho_i)) \leq 0. \quad (3.11)$$

A parametrização apresentada introduz graus de liberdade através das variáveis  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  e permite utilizar condições de setor, sem a necessidade de decompor a não-linearidade. Através desta parametrização, é possível considerar os casos em que há perda de estabilidade em torno da origem e também o caso particular em que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha aberta.

Note que, se  $\alpha_i \rightarrow 1$  e  $\beta_i \rightarrow 0$ , o modelo (3.8)-(3.11) é reduzido à

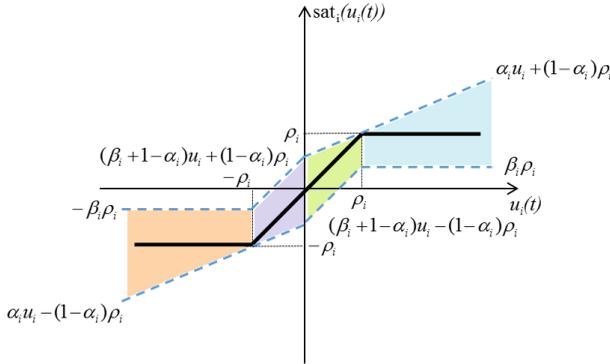


Figura 3.1: Função saturação parametrizada por uma classe de funções.

condição de setor válida globalmente:

$$(\text{sat}(u_i(t)))(\text{sat}(u_i(t)) - u_i(t)) \leq 0, \forall u_i(t) \in \mathbb{R}^m \text{ e } i \in \{1; \dots; m\}, \quad (3.12)$$

o que permite tratar os casos em que  $A$  é Hurwitz e o sistema em malha fechada converge assintoticamente para a origem.

Nos outros casos, em que  $\alpha_i \neq 1$  e  $\beta_i \neq 0$ , a condição de setor engloba não-linearidades que não se anulam em torno da origem ou, mais especificamente, na região  $-\rho_i \leq u_i \leq \rho_i$ . Sendo assim, a parametrização proposta permitirá concluir sobre a convergência das trajetórias para um conjunto atrator, para os casos em que  $A$  não é Hurwitz.

A fim de descrever cada uma das 4 regiões, definidas na parametrização da não-linearidade, é introduzida uma função indicador  $\theta_i(u_i, \rho_i)$ , cujos elementos estão associados aos componentes do vetor  $u_i$ . Cada valor  $\theta_i$ ,  $i \in \{1; \dots; m\}$  corresponde a uma região, conforme mostrado na Figura 3.1. Define-se  $\theta_i(u_i, \rho_i)$  como:

$$\theta_i(u_i, \rho_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } u_i \leq -\rho_i, \\ 2, & \text{se } -\rho_i \leq u_i \leq 0, \\ 3, & \text{se } 0 \leq u_i \leq \rho_i, \\ 4, & \text{se } u_i \geq \rho_i. \end{cases} \quad (3.13)$$

Considera-se também a função  $\delta_j(\theta_i)$ , dada por:

$$\delta_j(\theta_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta_i(u_i, \rho_i) = j \\ 0, & \text{se } \theta_i(u_i, \rho_i) \neq j \end{cases}, \forall j \in \{1, \dots, 4\}. \quad (3.14)$$

Nos resultados apresentados na sequência será utilizada a notação matricial, como segue:

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}, \\ D_\beta &= \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}, \\ \Delta_{j,\theta} &= \text{diag}(\delta_j(\theta_1), \dots, \delta_j(\theta_m)) \in \mathbb{R}^{m \times m}, \forall j \in \{1, \dots, 4\}. \end{aligned}$$

Na sequência são apresentados quatro lemas que serão utilizados para a obtenção das condições de análise e síntese. Os mesmos fazem uso das definições anteriores e são obtidos via aplicação do S-procedure (Boyd *et al.*, 1994) nas implicações (3.8)-(3.11).

Assim, a implicação (3.8) é equivalente a existência de escalares positivos  $s_{1i}$  e  $t_{1i}$ , tais que:

$$\begin{aligned} (\text{sat}(u_i) + \beta_i \rho_i) s_{1i} (\text{sat}(u_i) - (\alpha_i u_i - (1 - \alpha_i) \rho_i)) - \rho_i t_{1i} (u_i + \rho_i) \leq 0, \\ \forall i = \{1; \dots; m\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Considerando  $S_1 = \text{diag}(s_{11}, \dots, s_{1m})$  e  $T_1 = \text{diag}(t_{11}, \dots, t_{1m})$ , obtém-se o Lema seguinte.

**Lema 3.3.1** *Dado o ganho  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , para quaisquer matrizes diagonais, definidas positivas  $T_1$  e  $S_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , denota-se:*

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0_n & -K' D_\alpha \Delta_{1,\theta} S_1 & -K' \Omega_1 \\ * & 2\Delta_{1,\theta} S_1 & \Delta_{1,\theta} S_1 (D_\beta + I_m - D_\alpha) \rho \\ * & * & \Pi_1 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

sendo

$$\Omega_1 = \Delta_{1,\theta} (D_\alpha S_1 D_\beta + T_1) \rho \text{ e } \Pi_1 = 2\rho' ((I_m - D_\alpha) D_\beta S_1 - T_1) \Delta_{1,\theta} \rho.$$

Então, considerando  $z = [x' \quad (\text{sat}(u))' \quad 1]'$ , tem-se:

$$\begin{aligned} z' M_1 z &= 2(\text{sat}(u) + D_\beta \rho)' \Delta_{1,\theta} S_1 (\text{sat}(u) - D_\alpha u + (I_m - D_\alpha) \rho) \\ &\quad - 2\rho' \Delta_{1,\theta} T_1 (u + \rho) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

**Demonstração 7** A desigualdade (3.17) é obtida desenvolvendo a forma quadrática  $z' M_1 z$ . Assim,  $z' M_1 z \leq 0$  na desigualdade (3.17), considerando os componentes da matriz indicador  $\Delta_{1,\theta}$ , é equivalente a (3.15), para todo  $i \in \{1; \dots; m\}$ . Então, se  $\delta_1(\theta_i) = 0$ , o termo de  $z' M_1 z$ , ponderado por  $\delta_1(\theta_i)$ ,

é nulo. No entanto, se  $\delta_1(\theta_i) = 1$ , então o termo de  $z'M_1z$ , ponderado por  $\delta_1(\theta_i)$ , é negativo definido. Portanto, a desigualdade  $z'M_1z \leq 0$  é verificada. ■

Fazendo uso do S-procedure em (3.9), considera-se  $t_{2i}$  e  $\tilde{t}_{2i}$  positivos e obtém-se:

$$\begin{aligned} & (\text{sat}(u_i) - ((\beta_i + 1 - \alpha_i)u_i + (1 - \alpha_i)\rho_i))s_{2i}(\text{sat}(u_i) - (\alpha_i u_i - (1 - \alpha_i)\rho_i)) \\ & - \rho_i t_{2i}(-\rho_i - u_i) - \rho_i \tilde{t}_{2i} u_i \leq 0, \quad \forall i \in \{1; \dots; m\}. \end{aligned}$$

Considerando  $S_2 = \text{diag}(s_{2i}, \dots, s_{2m})$ ,  $T_2 = \text{diag}(t_{2i}, \dots, t_{2m})$  e  $\tilde{T}_2 = \text{diag}(\tilde{t}_{2i}, \dots, \tilde{t}_{2m})$ , obtém-se o Lema seguinte.

**Lema 3.3.2** *Dado o ganho  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , para quaisquer matrizes diagonais definidas positivas  $T_2$ ,  $S_2$  e  $\tilde{T}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , denota-se*

$$M_2 = \begin{bmatrix} 2K'D_\alpha \Delta_{2,\theta} S_2 (D_\beta + I_m - D_\alpha) K & -K' \Delta_{2,\theta} S_2 (D_\beta + I_m) & K' \Omega_2 \\ * & 2\Delta_{2,\theta} S_2 & 0_{m \times 1} \\ * & * & \Pi_2 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= (S_2(I_m - D_\alpha) - (D_\beta + I_m - D_\alpha)S_2(I_m - D_\alpha) + T_2 - \tilde{T}_2)\Delta_{2,\theta}\rho \text{ e} \\ \Pi_2 &= -2\rho' \Delta_{2,\theta} ((I_m - D_\alpha)' S_2(I_m - D_\alpha) - T_2)\rho. \end{aligned}$$

Então, tem-se

$$\begin{aligned} z'M_2z &= 2(\text{sat}(u) - (D_\beta + I_m - D_\alpha)u - (I_m - D_\alpha)\rho)' \\ & \quad \Delta_{2,\theta} S_2 (\text{sat}(u) - D_\alpha u + (I_m - D_\alpha)\rho) \\ & \quad - 2\rho' \Delta_{2,\theta} T_2 (-\rho - u) - 2(\rho' \Delta_{2,\theta} \tilde{T}_2 u) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

■

O mesmo procedimento pode ser aplicado para (3.10), com  $t_{3i}$  e  $\tilde{t}_{3i}$  escalares positivos:

$$\begin{aligned} & (\text{sat}(u_i) - ((\beta_i + 1 - \alpha_i)u_i - (1 - \alpha_i)\rho_i))s_{3i}(\text{sat}(u_i) - (\alpha_i u_i(t) + (1 - \alpha_i)\rho_i)) \\ & - \rho_i t_{3i}(u_i - \rho_i) + \rho_i \tilde{t}_{3i} u_i \leq 0, \quad \forall i \in \{1; \dots; m\}. \end{aligned}$$

Considerando  $S_3 = \text{diag}(s_{3i}, \dots, s_{3m})$ ,  $T_3 = \text{diag}(t_{3i}, \dots, t_{3m})$  e  $\tilde{T}_3 = \text{diag}(\tilde{t}_{3i}, \dots, \tilde{t}_{3m})$ , obtém-se o Lema seguinte.

**Lema 3.3.3** Dado o ganho  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , para quaisquer matrizes diagonais definidas positivas  $T_3, S_3$  e  $\tilde{T}_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , denota-se

$$M_3 = \begin{bmatrix} 2K'D_\alpha\Delta_{3,\theta}S_3(D_\beta + I_m - D_\alpha)K & -K'\Delta_{3,\theta}S_3(D_\beta + I_m) & K'\Omega_3 \\ * & 2\Delta_{3,\theta}S_3 & 0_{m \times 1} \\ * & * & \Pi_3 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \Delta_{3,\theta}(-S_3(I_m - D_\alpha) + (D_\beta + I_m - D_\alpha)S_3(I_m - D_\alpha) - T_3 + \tilde{T}_3)\rho e \\ \Pi_3 &= 2\rho'\Delta_{3,\theta}(-(I_m - D_\alpha)S_3(I_m - D_\alpha) + \tilde{T}_3)\rho. \end{aligned}$$

Tem-se

$$\begin{aligned} z'M_3z &= 2(\text{sat}(u) - (D_\beta + I_m - D_\alpha)u + (I_m - D_\alpha)\rho)' \\ &\quad \Delta_{3,\theta}S_3(\text{sat}(u) - D_\alpha u - (I_m - D_\alpha)\rho) \\ &\quad - 2\rho'\Delta_{3,\theta}T_3(u - \rho) + 2\rho'\Delta_{3,\theta}\tilde{T}_3u \leq 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

■

Finalmente, considerando (3.11) e  $t_{4i} > 0$ :

$$\begin{aligned} (\text{sat}(u_i) - \beta_i\rho_i)s_{4i}(\text{sat}(u_i) - (\alpha_i u_i + (1 - \alpha_i)\rho_i)) - \rho_i t_{4i}(\rho_i - u_i) \leq 0, \\ \forall i \in \{1; \dots; m\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sendo  $S_4 = \text{diag}(s_{4i}, \dots, s_{4m})$  e  $T_4 = \text{diag}(t_{4i}, \dots, t_{4m})$ , obtém-se o Lema seguinte.

**Lema 3.3.4** Dado o ganho  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , para quaisquer matrizes diagonais definidas positivas  $T_4$  e  $S_4 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , denota-se

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0_n & -K'D_\alpha\Delta_{4,\theta}S_4 & K'\Omega_4 \\ * & 2\Delta_{4,\theta}S_4 & -\Delta_{4,\theta}S_4(I - D_\alpha + D_\beta)\rho \\ * & * & \Pi_4 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

sendo

$$\Omega_4 = \Delta_{4,\theta}(D_\alpha S_4 D_\beta + T_4)\rho e \quad \Pi_4 = 2\rho'\Delta_{4,\theta}(D_\beta S_4(I_m - D_\alpha) - T_4)\rho.$$

Então, tem-se:

$$\begin{aligned} z' M_4 z = & 2(\text{sat}(u) - D_\beta \rho)' \Delta_{4,\theta} S_4 (\text{sat}(u) - (D_\alpha u + (I_m - D_\alpha) \rho)) \\ & - 2\rho' \Delta_{4,\theta} T_4 (\rho - u) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

■

Para comprovar a propriedade ultimamente limitada (UB) das trajetórias do sistema (3.5), considera-se a função de Lyapunov quadrática como candidata definida em (3.6), o conjunto  $\mathcal{E}(P)$  definido pela curva de nível unitária da função de Lyapunov e descrito em (3.7) e utilizam-se os resultados dos Lemas 2.2.1 e 3.3.1-3.3.4.

### 3.4 Análise de estabilidade

Para a solução do Problema de análise de estabilidade 2.1, propõe-se o seguinte resultado.

**Proposição 3.4.1** *Considere a existência de um escalar positivo  $\tau_1$  e vetores  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$ , tais que  $0 \leq \alpha_i \leq 1$  e  $0 \leq \beta_i \leq 1, \forall i \in \{1; \dots; m\}$ , matrizes diagonais definidas positivas  $T_j, S_j, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}, j \in \{1; \dots; 4\}$  e uma matriz simétrica definida positiva  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tais que:*

$$\begin{bmatrix} (A + BK)'P + P(A + BK) + \tau_1 P & -PB & 0_{n \times 1} \\ * & 0_m & 0_{m \times 1} \\ * & * & -\tau_1 \end{bmatrix} - M_1 - M_2 - M_3 - M_4 < 0. \quad (3.25)$$

Então,  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto UB para o sistema (3.5), com constante UB associada:

$$\gamma \triangleq \sup_{x \in \mathcal{E}(P)} \|x\|^2 = \frac{1}{\lambda_{\min}(P)}. \quad (3.26)$$

**Demonstração 8** Seja (3.25) verificada. Multiplicando (3.25) à esquerda e à direita por  $z' = [x' \quad \text{sat}(u)' \quad 1]$  e  $z = [x' \quad \text{sat}(u)' \quad 1]'$ , respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} x'((A + BK)'P + P(A + BK))x - x'PB\text{sat}(u) - \text{sat}(u)'B'Px \\ - \tau_1(1 - x'Px) - z'M_1 z - z'M_2 z - z'M_3 z - z'M_4 z < 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Considerando-se os Lemas 3.3.1-3.3.4, tem-se:

$$x'((A+BK)'P+P(A+BK))x-x'PB\text{sat}(u)-\text{sat}(u)'B'Px-\tau_1(1-x'Px)<0. \quad (3.28)$$

Assim, fazendo uso do S-procedure:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x'((A+BK)'P+P(A+BK))x-x'PB\text{sat}(u)-\text{sat}(u)'B'Px < 0 \\ &\forall x \notin \mathcal{E}(P). \end{aligned} \quad (3.29)$$

A relação (3.29) implica que (2.10) do Lema 2.2.1 é verificada, portanto,  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto UB para o sistema (3.5). ■

Observe que a desigualdade (3.25) é BMI, devido a presença de produtos envolvendo as variáveis  $D_\alpha$ ,  $D_\beta$ ,  $\tau_1$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  e  $P$ . No entanto, quando  $\tau_1$ ,  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são fixados, a desigualdade se torna uma LMI. Portanto, uma busca é feita nas variáveis escalares  $\tau_1$ ,  $\alpha_i = \alpha$  e  $\beta_i = \beta$ ,  $\forall i \in \{1; \dots; m\}$ . Sendo assim, para resolver o Problema de análise de estabilidade (2.1) o seguinte algoritmo é proposto.

#### Algoritmo 3.4.1 (Análise via parametrização)

1. Para valores dados de  $\tau_1 \in [\tau_{1min}, \tau_{1max}]$ , faz-se uma busca nas variáveis  $0 \leq \alpha \leq 1$  e  $0 \leq \beta \leq 1$ , através da resolução do problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\min_{P, \gamma, \{T_j\}_{j \in \{1; \dots; 4\}}, \{S_j\}_{j \in \{1; \dots; 4\}}, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3} \gamma \\ &\text{sujeito à} \\ &(3.25) \text{ e } (2.13). \end{aligned}$$

2. Verifica-se qual o menor valor de  $\gamma$  obtido e os valores correspondentes de  $\tau_1$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $P$ ,  $\{T_j\}_{j \in \{1; \dots; 4\}}$ ,  $\{S_j\}_{j \in \{1; \dots; 4\}}$ ,  $\tilde{T}_2$ ,  $\tilde{T}_3$ .

É importante salientar que no caso multivariável a busca em  $\alpha$  e  $\beta$  no intervalo  $[0, 1]$ , implica em considerar  $D_\alpha = \alpha I_m$  e  $D_\beta = \beta I_m$ . Esta escolha particular para as matrizes  $D_\alpha$  e  $D_\beta$  deve-se ao fato de que, para sistemas multivariáveis a busca multidimensional de  $\alpha$  e  $\beta$  aumentaria a complexidade numérica.

### 3.5 Síntese de realimentação de estados

Nesta seção é desenvolvida a solução para o Problema 2.2. É projetada uma matriz de ganho de realimentação de estados  $K$ , associada com a minimização do tamanho da região UB  $\mathcal{E}(P)$ . Para se obterem as condições de síntese de realimentação de estados, parte-se da desigualdade (3.25).

Antes de apresentar a condição suficiente para a solução do problema de síntese de realimentação de estados, apresenta-se uma reescrita da condição (3.25) e para isso, são introduzidas as seguintes matrizes.

$$N_0 = 2D_\alpha(\Delta_{2,\theta}S_2 + \Delta_{3,\theta}S_3)(D_\beta + I_m - D_\alpha), \quad (3.30)$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} D_\alpha(\Delta_{1,\theta}S_1 + \Delta_{4,\theta}S_4) + (D_\beta + I_m)(\Delta_{2,\theta}S_2 + \Delta_{3,\theta}S_3) \\ \sum_{j=1}^4 \Omega_j \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} -2(\Delta_{1,\theta}S_1 + \Delta_{2,\theta}S_2 + \Delta_{3,\theta}S_3 + \Delta_{4,\theta}S_4) & * \\ \rho'(\Delta_{4,\theta}S_4 - \Delta_{1,\theta}S_1)(I_m - D_\alpha + D_\beta) & \sum_{j=1}^4 \Pi_j - \tau_1 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -B & 0_{n \times 1} \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

A matriz  $\mathbb{B}$  é constante. As matrizes  $N_0$ ,  $N_1$  e  $N_2$  são lineares com relação às variáveis  $\{T_j\}_{j \in \{1, \dots, 4\}}$ ,  $\{S_j\}_{j \in \{1, \dots, 4\}}$ ,  $\tilde{T}_2$ ,  $\tilde{T}_3$  e também não dependem de  $P$  e  $K$ . A desigualdade (3.25) pode ser reescrita, por uma questão de clareza e para enfatizar as dependências das variáveis  $P$  e  $K$ , como:

$$\begin{bmatrix} (A + BK)'P + P(A + BK) + \tau_1 P - K'N_0K & * \\ \mathbb{B}P + N_1K & N_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (3.34)$$

Ao resolver o Problema de síntese de realimentação de estados 2.2, busca-se, além da região UB, a menor possível, o valor da matriz de realimentação de estados  $K$ . Note que, neste caso, o termo  $-K'N_0K$ , da desigualdade (3.34), apresenta produto entre a variável  $K$  e é não-convexo. Sendo assim, utiliza-se o Lema de Finsler (Skelton *et al.*, 1998), a fim de transformar (3.34) em uma desigualdade que não apresente termos não-convexos<sup>1</sup>. Na sequência propõe-se uma condição suficiente para a solução do problema de síntese.

**Proposição 3.5.1** *Considere a existência de um escalar positivo  $\tau_1$ , vetores*

<sup>1</sup>As demonstrações das Proposições 2.3.4 e 2.3.6 do capítulo anterior, mostradas no Apêndice B basearam-se na técnica inicialmente aplicada neste capítulo.

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$ , tal que  $0 \leq \alpha_i \leq 1$  e  $0 \leq \beta_i \leq 1, \forall i \in \{1; \dots; m\}$ , matrizes diagonais definidas positivas  $T_j, S_j, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}, j \in \{1; \dots; 4\}$ , uma matriz simétrica definida positiva  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes  $X \in \mathbb{R}^{m \times m}, Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que:

$$\begin{bmatrix} \text{He}(QA) + \tau_1 Q & \mathbb{B} & B \\ * & N_2 & N_1 \\ * & * & -N_0 \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} B \\ 0_{(m+1) \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z & 0_{m \times (m+1)} & -X \end{bmatrix} \right) < 0 \quad (3.35)$$

e

$$\begin{bmatrix} \text{He}(QA) + \mu Q & B \\ * & 0 \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} B \\ -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z & -X \end{bmatrix} \right) > 0. \quad (3.36)$$

Então,  $\mathcal{E}(Q^{-1})$  é um conjunto UB para o sistema (3.5) cuja matriz de ganho de realimentação de estados  $K = YQ^{-1} = X^{-1}ZQ^{-1}$  verifica a condição de alocação de pólos:

$$-\frac{\mu}{2} \leq \text{Re}(\lambda_i(A + BK)) \leq -\frac{1}{2}\tau_1 \leq 0. \quad (3.37)$$

**Demonstração 9** A prova é baseada no Lema de Finsler. Considerando que a desigualdade (3.36) é verificada, então o último bloco diagonal,  $\text{He}(X) > 0$  garante que a matriz  $X$  é inversível. Fazendo a mudança de variáveis  $Z = XY$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} A'Q + QA + \mu Q & B \\ * & 0 \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} BX \\ -X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & -I_m \end{bmatrix} \right) > 0. \quad (3.38)$$

Note que

$$\begin{bmatrix} Y & -I_m \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} I_n \\ Y \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

e pelo Lema de Finsler, a desigualdade (3.36) induz

$$\begin{bmatrix} I_n \\ Y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'Q + QA + \mu Q & B \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ Y \end{bmatrix} > 0, \quad (3.40)$$

que pode ser reescrita como

$$A'Q + QA + Y'B' + BY + \mu Q > 0. \quad (3.41)$$

Fazendo a mudança de variáveis  $K = X^{-1}ZQ^{-1} = YQ^{-1}$ , é garantida a condição de alocação de pólos (2.12).

Seja (3.35) verificada,  $X$  inversível e assumindo  $Y = X^{-1}Z$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} Z & 0_{m \times (m+1)} & -X \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} Y & 0_{m \times (m+1)} & -I_m \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Note que

$$\begin{bmatrix} Y & 0_{m \times (m+1)} & -I_m \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times (m+1)} \\ 0_{(m+1) \times n} & I_{m+1} \\ Y & 0_{m \times (m+1)} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

A relação (3.43), considerando o Lema de Finsler, permite reescrever a desigualdade (3.35) como

$$\begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times (m+1)} \\ 0_{(m+1) \times n} & I_{m+1} \\ Y & 0_{m \times (m+1)} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \text{He}(\underline{QA}) + \tau_1 Q & \mathbb{B} & B \\ * & N_2 & N_1 \\ * & * & -N_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times (m+1)} \\ 0_{(m+1) \times n} & I_{m+1} \\ Y & 0_{m \times (m+1)} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.44)$$

ou equivalentemente

$$\begin{bmatrix} A'Q + QA + Y'B' + BY + \tau_1 Q - Y'N_0Y & \mathbb{B} + Y'N_1 \\ * & N_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (3.45)$$

Multiplicando (3.45) à esquerda e à direita por  $\text{diag}(P, I_{m+1})$ , com  $P = Q^{-1}$  tem-se a desigualdade (3.34).

Note que o primeiro bloco diagonal das desigualdades (3.35) e (3.36) que são, respectivamente,  $\text{He}(AW + BY) + \tau W < 0$  e  $\text{He}(AW + BY) + \mu W > 0$ , juntamente com a condição de  $(A, B)$  ser controlável, garantem a verificação da restrição de alocação de pólos (2.12), que neste caso é dada por (3.37). ■

A solução para o Problema 2.2 é obtida pelo algoritmo seguinte.

### Algoritmo 3.5.1 (Síntese via parametrização)

1. Para valores dados de  $\tau_1 \in [\tau_{1\min}, \tau_{1\max}]$ , sendo este intervalo escolhido de acordo com a alocação do pólos desejada, faz-se uma busca nas variáveis  $0 \leq \alpha \leq 1$  e  $0 \leq \beta \leq 1$ , através da resolução do problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min_{Q, X, Z, \{T_j\}_{j \in \{1, \dots, 4\}}, \{S_j\}_{j \in \{1, \dots, 4\}}, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3, \gamma} \gamma \\ & \text{sujeito à} \\ & (3.35), (3.36) \text{ e } (2.14). \end{aligned}$$

2. Verifica-se qual o menor valor de  $\gamma$  obtido e os valores correspondentes de  $\tau_1, \alpha, \beta, Q, X, Z, \{T_j\}_{j \in \{1, \dots, 4\}}, \{S_j\}_{j \in \{1, \dots, 4\}}, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3$ . Por fim, calcula-se a matriz de realimentação de estados  $K = X^{-1}ZQ^{-1} = YQ^{-1}$ .

## 3.6 Exemplos numéricos

### 3.6.1 Sistema estável

Considere um sistema estável e monovariável, dado por:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, K = [84.61 \quad -53.84], \rho = 0.4.$$

Os autovalores de malha aberta são iguais a  $\{-1, -2\}$  e os autovalores de malha fechada  $\{-5, -8\}$ . Resolva-se o problema de análise de estabilidade utilizando o Algoritmo 3.4.1 e os resultados obtidos são descritos na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Resultados análise - sistema estável.

$\tau_1$	$\alpha$	$\beta$	$P$	$\gamma$	Área $\mathcal{E}(P)$
0.1	1	0	$\begin{bmatrix} 8.69 & -4.11 \\ -4.11 & 2.71 \end{bmatrix} \times 10^8$	$1.62 \times 10^{-8}$	$1.21 \times 10^{-8}$

Note que, fixar  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$  nas condições (3.8)-(3.11) é equivalente a descrever a não-linearidade no setor  $[0, 1]$ , ou equivalentemente, considerar a condição de setor global (3.12). Observe também, na Figura 3.2, que a trajetória iniciada em  $x_0 = [0.2 \quad -0.2]'$  converge assintoticamente para a origem. A Figura 3.3 mostra o conjunto UB  $\mathcal{E}(P)$  e a circunferência associada, cujo raio é dado por  $\sqrt{7}$ .

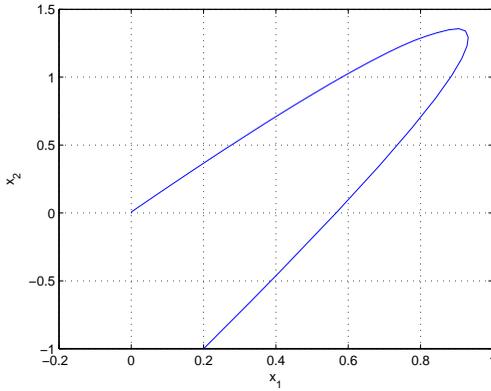


Figura 3.2: Trajetória do sistema estável em malha aberta.

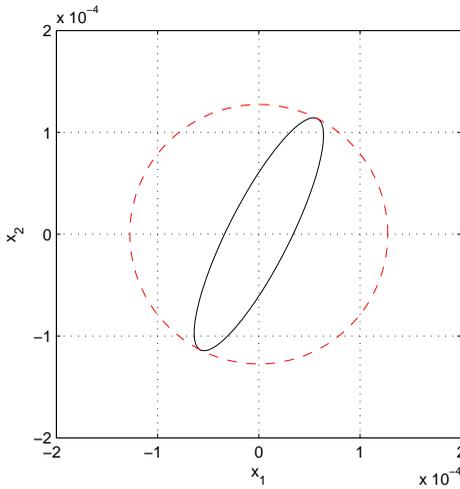


Figura 3.3: Região UB e circunferência associada.

### 3.6.2 Sistema instável monovariável

Considera-se o sistema instável  $S_i$ , tratado no Capítulo 2 e descrito na Tabela 2.1, sendo  $\rho = 0.5$ . Os resultados obtidos ao resolver o Problema de análise de estabilidade 2.1 utilizando o Algoritmo 3.4.1, são descritos na

Tabela 3.2. Na Figura 3.4 é mostrada a região UB, juntamente com a circunferência associada e diferentes trajetórias do sistema. Observa-se que as trajetórias do sistema convergem para a região UB e permanecem nela confinadas.

Tabela 3.2: Resultados análise - sistema instável monovariável.

$\tau_1$	$\alpha$	$\beta$	$P$		$\gamma$	Área $\mathcal{E}(P)$
0.9	0.6	0	68.74	-41.48	0.0306	0.0509
			-41.48	80.36		

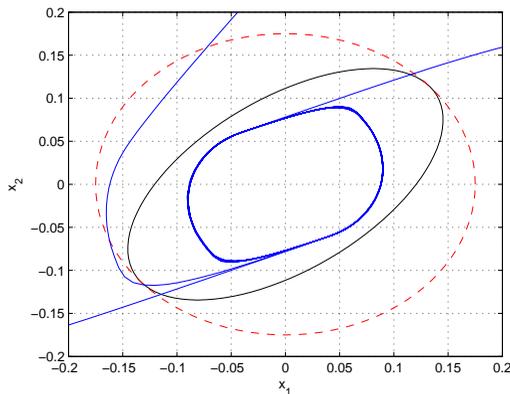


Figura 3.4: Região UB, circunferência associada e trajetórias.

Na Tabela 3.3 são reescritos os valores da constante UB  $\gamma$  e da área da região UB  $\mathcal{E}(P)$  obtidos para cada um dos algoritmos de análise, em cada uma das modelagens apresentadas ao longo deste trabalho. Os resultados apresentados nas três primeiras colunas são referentes às modelagens descritas no capítulo anterior, salientando-se que as modelagens lá propostas são inspiradas em modelos da literatura.

Tabela 3.3: Comparação - sistema instável monovariável.

	Perturbação	Chaveado	Setor dec.	Parametrização
$\gamma$	0.0415	0.0306	0.0309	0.0306
Área $\mathcal{E}(P)$	0.0654	0.0509	0.0514	0.0509

A fim de comparar os resultados apresenta-se, na Tabela 3.4, a porcentagem de melhora que se obteve com uso da parametrização da não-linearidade por uma classe de funções, comparado com as demais modelagens. Na primeira coluna é mostrada a comparação entre os resultados aqui obtidos com os resultados obtidos quando a não-linearidade é considerada uma perturbação limitada (descritos na Seção 2.3.1). Como mencionado no capítulo anterior, as condições de análise e síntese para este caso são as mesmas encontradas na literatura, em Fong e Hsu (2000), Pomar *et al.* (2012) e Milhomem (2013). Note que, utilizando a parametrização proposta neste capítulo, os resultados referentes ao valor da constante UB melhoraram 26.26%, já a área do conjunto UB obtida foi 22.17% melhor do que no caso em que se considera a não-linearidade como uma perturbação limitada.

Na segunda e na terceira coluna da Tabela 3.4 a comparação é realizada com as condições apresentadas nas Seções 2.3.2 e 2.3.3, respectivamente. Nestes dois casos não se obtiveram melhores resultados quando considerada a parametrização aqui proposta. Apesar de considerar uma classe de não-linearidades, os resultados obtidos não são mais conservadores do que os outros. A modelagem aqui proposta também pode ser estendida para o caso de sistemas que apresentam outras não-linearidades combinadas com a zona morta, como por exemplo, sistemas com zona morta e saturação na entrada de controle. A vantagem de utilizar esta parametrização é que ela descreve uma classe de não-linearidades e não somente a zona morta.

Tabela 3.4: Comparação de resultados.

	Parametrização × Perturbação	Parametrização × Chaveado	Parametrização × Decomposição
$\gamma$	26.26%	0%	0.97%
Área $\mathcal{E}(P)$	22.17%	0%	0.97%

### 3.6.3 Sistema instável multivariável I

Considere um sistema multivariável, dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \rho = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de malha aberta do sistema são  $\{0.25 \pm 0.96i\}$ . Resolvendo o Problema de síntese de realimentação de estados 2.2, através do

Algoritmo 3.5.1, obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 3.5.

Tabela 3.5: Resultados síntese - sistema instável multivariável I.

$\tau_1$	$\alpha$	$\beta$	$P$		$\gamma$	Área $\mathcal{E}(P)$
3	0.5	0	2749.21	-3711.56	0.0023	0.0016
			-3711.56	6350.12		

A busca do valor da matriz de ganho de realimentação de estados foi feita considerando a restrição de alocação de pólos (3.37). Assumiu-se  $\mu = 80$  e  $1 \leq \tau_1 \leq 3$ , sendo o valor obtido para  $\tau_1$  apresentado na Tabela 3.5, a condição (3.37) é dada por:

$$-40 \leq \text{Re}(\lambda_i(A + BK)) \leq -1.5 \leq 0,$$

A matriz de ganho de realimentação de estados obtida foi

$$K = \begin{bmatrix} 78.31 & -157.45 \\ -70.66 & 77.10 \end{bmatrix},$$

sendo assim, os autovalores de  $(A + BK)$ , são  $\{-32.69, -38.48\}$ . Observe que os autovalores de malha fechada satisfazem a restrição considerada.

Na Figura 3.5 é mostrada a região UB, a circunferência associada, juntamente com trajetórias que ilustram o comportamento do sistema e o conjunto, que corresponde a região em que o sistema se comporta em malha aberta,  $|K_i x| \leq \rho_i, \forall i \in \{1, 2\}$ , em linhas tracejadas.

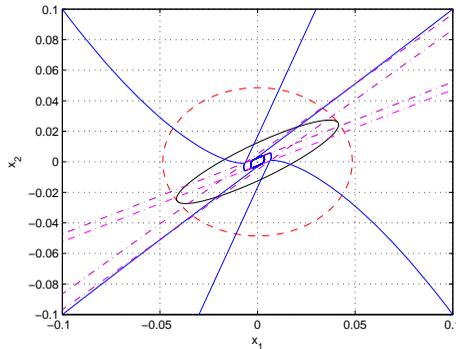


Figura 3.5: Resultado gráfico - síntese sistema instável multivariável I.

Fixando o valor da matriz de ganho de realimentação de estados obtida, resolve-se o problema de análise de estabilidade através do uso do Algoritmo 3.4.1, a fim de buscar uma melhor estimativa da região UB. Na Tabela 3.6 apresentam-se os resultados obtidos e na Figura 3.6 mostra-se o resultado gráfico.

Tabela 3.6: Resultados análise - sistema instável multivariável I.

$\tau_1$	$\alpha$	$\beta$	$P$		$\gamma$	Área $\mathcal{E}(P)$
1.1	0.9	0	1.39	-1.67	$9.41 \times 10^{-4}$	$5.10 \times 10^{-4}$
			-1.67	2.28	$\times 10^4$	

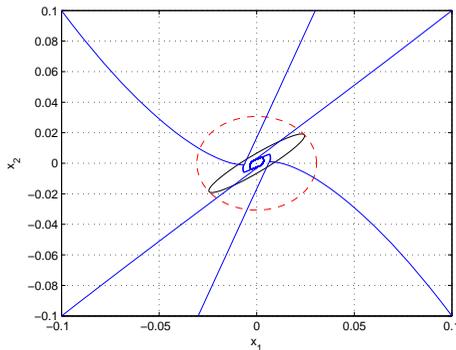


Figura 3.6: Resultado gráfico - análise sistema instável multivariável I.

### 3.6.4 Sistema instável multivariável II

Considere um sistema multivariável, descrito a seguir, este sistema também foi utilizado no trabalho de Tarbouriech *et al.* (2011b), dado por:

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.5 & 4 \\ 4.3 & 6 & 5 \\ 3.2 & 6.8 & 7.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.7 & -1.3 \\ 0 & -4.3 \\ 0.8 & -1.5 \end{bmatrix}, \rho = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de malha aberta deste sistema são  $\{13.96, -0.63 \pm 0.73i\}$ . Inicialmente resolve-se o problema de síntese de realimentação de estados, utilizando o Algoritmo 3.5.1, os resultados obtidos são apresentados na Tabela 3.7.

Tabela 3.7: Resultados síntese - sistema instável multivariável II.

$\tau_1$	$\alpha$	$\beta$	$P$			$\gamma$	Volume $\mathcal{E}(P)$
2	0.5	0	14.47	-0.55	4.26	0.1146	0.0384
			-0.55	24.71	-32.76		
			4.26	-32.76	77.57		

Considerando a condição de alocação de pólos (3.37), escolheu-se  $\mu = 40$  e  $2 \leq \tau_1 \leq 10$ . Sendo o valor obtido para  $\tau_1$  é apresentado na Tabela 3.7, portanto, a condição (3.37) é dada por:

$$-20 \leq \text{Re}(\lambda_i(A + BK)) \leq -1 \leq 0,$$

A matriz de ganho de realimentação de estados obtida é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} -0.5353 & 21.3442 & -38.5778 \\ 2.9615 & -3.9362 & 22.7573 \end{bmatrix}$$

e os autovalores de  $(A + BK)$  são  $\{-2.28, -18.28 \pm 33.06i\}$ . Portanto, os autovalores de malha fechada satisfazem a restrição considerada.

Na Figura 3.7 apresenta-se a região UB e duas trajetórias que ilustram o comportamento do sistema. Tais trajetórias têm como condição inicial  $x_0 = [0.2 \ 0.4 \ 0.2]'$  e  $x_0 = [-0.2 \ -0.4 \ -0.2]'$ .

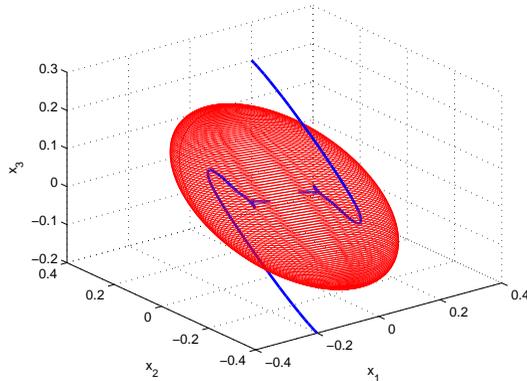


Figura 3.7: Resultado gráfico - síntese sistema instável multivariável II.

Com a matriz de ganho de realimentação de estados obtida quando na resolução do problema de síntese, resolve-se o problema de análise de estabilidade, fazendo uso do Algoritmo 3.4.1. Os resultados obtidos são descritos na Tabela 3.8. Na Figura 3.8 observa-se a região UB e duas trajetórias do sistema, as quais consideram as mesmas condições iniciais apresentadas anteriormente. Pode-se constatar que resolvendo o problema de análise de estabilidade conseguiu-se melhorar a estimativa da região UB, se compararmos os volumes do elipsoide obtido na síntese e na análise, a melhora foi de aproximadamente 91%.

Tabela 3.8: Resultados análise - sistema instável multivariável II.

$\tau_1$	$\alpha$	$\beta$	$P$			$\gamma$	Volume $\mathcal{E}(P)$
2	0.5	0	75.77	-7.07	26.98	0.0217	0.0033
			-7.07	121.45	-154.91		
			26.98	-154.91	368.89		

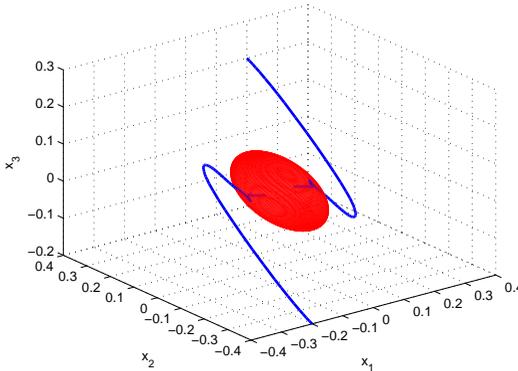


Figura 3.8: Resultado gráfico - análise sistema instável multivariável II.

### 3.7 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentadas condições LMIs, baseadas no conceito de estabilidade ultimamente limitada, para tratar os problemas de análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados para sistemas lineares contínuos e invariantes no tempo sujeitos a não-linearidade de zona morta.

Para tratar a não-linearidade, foi proposta uma parametrização por uma classe de funções.

Os resultados foram apresentados considerando sistemas multivariáveis. A função indicador utilizada para descrever cada uma das regiões definidas na parametrização da não-linearidade pode também ser utilizada para estender os resultados do Capítulo 2 para o caso multivariável.

Os resultados obtidos se mostraram menos conservadores quando comparados a resultados existentes na literatura que consideram também uma classe de não-linearidades. No entanto, ao comparar com resultados que consideram a modelagem exata da não-linearidade os resultados apresentados neste capítulo não se tornaram mais conservadores, o que vem a ser uma vantagem para a parametrização proposta, uma vez que ela pode ser utilizada para tratar uma classe de funções não-lineares, mantendo a qualidade dos resultados.

Outra vantagem do uso da parametrização aqui proposta é que esta pode ser estendida para o caso de sistemas lineares sujeitos a não-linearidades que combinem os efeitos da zona morta com outras funções, como por exemplo, sistemas sujeitos a zona morta e saturação.

Os resultados apresentados neste capítulo serviram de base para um artigo (Dilda *et al.*, 2013), submetido para publicação.



## Capítulo 4

# Sistemas Lineares com Zona Morta e Saturação

### 4.1 Introdução

Neste capítulo será tratado o problema de análise de estabilidade para sistemas lineares sujeitos a uma não-linearidade que combina os efeitos da zona morta e da saturação.

Inicialmente são ilustrados os efeitos da não-linearidade considerada em sistemas lineares e é descrito o problema a ser estudado. Em seguida é introduzida a definição que será utilizada como ferramenta teórica para a solução do problema de análise de estabilidade. Utilizando os resultados e a parametrização apresentados no capítulo anterior propõem-se soluções para o problema de análise de estabilidade.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 4.2 é apresentado o problema de controle e é feita uma breve análise dos efeitos causados pela não-linearidade considerada, a qual combina os efeitos das não-linearidades de zona morta e saturação. A Seção 4.3 é dedicada a apresentação das condições para solução do problema de análise de estabilidade UB local. Na Seção 4.4 apresentam-se os resultados numéricos e por fim, na Seção 4.5 são apresentadas as considerações finais do capítulo.

## 4.2 Apresentação do problema

Considere um sistema linear contínuo e invariante no tempo, com atuador sujeito a uma não-linearidade que combina os efeitos da zona morta e da saturação, representado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\text{sat}(dz(u(t))) \quad (4.1)$$

$$u(t) = Kx(t) \quad (4.2)$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e o par  $(A, B)$  é controlável. A matriz de ganhos  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz de realimentação de estados que estabiliza o sistema sem a presença da não-linearidade  $\text{sat}(dz(u(t)))$ , isto é, a matriz  $(A + BK)$  é Hurwitz.

A não-linearidade  $\text{sat}(dz(\cdot)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é descentralizada e simétrica, está representada na Figura 4.1 e, sendo  $\bar{\rho}_i = \delta_i + \rho_i$ ,  $i = \{1; \dots; m\}$ , é dada por:

$$\text{sat}_i(dz_i(u(t))) = \begin{cases} \delta_i, & \text{se } u_i(t) \geq \bar{\rho}_i, \\ u_i(t) - \rho_i, & \text{se } \rho_i < u_i(t) < \bar{\rho}_i, \\ 0, & \text{se } |u_i(t)| \leq \rho_i, \\ u_i(t) + \rho_i, & \text{se } -\bar{\rho}_i < u_i(t) < -\rho_i, \\ -\delta_i, & \text{se } u_i(t) \leq -\bar{\rho}_i. \end{cases} \quad (4.3)$$

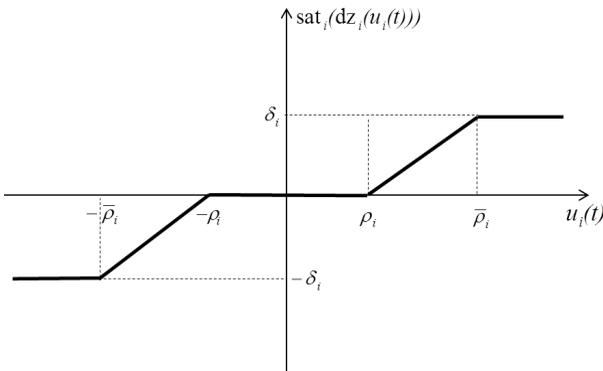


Figura 4.1: Não-linearidade  $\text{sat}_i(dz_i(u_i(t)))$ .

A Figura 4.2 mostra a saída da não-linearidade  $\text{sat}(dz(u(t)))$  para um sinal  $u(t) = 2\text{sen}(t)$ . Nesta simulação foram escolhidos  $\rho = 0.5$ ,  $\delta = 1.2$  e, portanto,  $\bar{\rho} = 1.7$ . Note que a não-linearidade combina os efeitos da saturação e da zona morta. Além de anular o sinal de saída quando o sinal de entrada é pequeno,  $|u(t)| \leq \rho$ , a zona morta causa uma diferença na amplitude do sinal de saída em relação ao sinal de entrada quando  $\rho < u(t) < \bar{\rho}$  e  $-\bar{\rho} < u(t) < -\rho$ , e ainda, o sinal é limitado em amplitude quando  $|u(t)| \geq \bar{\rho}$  devido à saturação.

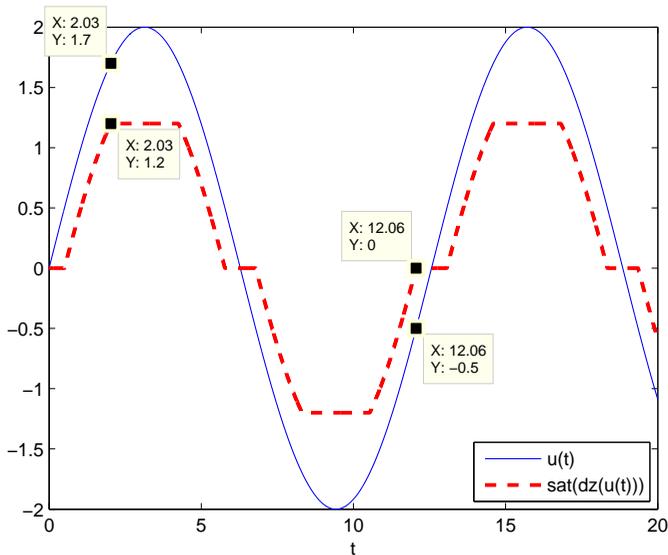


Figura 4.2: Efeito da não-linearidade  $\text{sat}(dz(u(t)))$  no sinal  $u(t) = 2\text{sen}(t)$ .

Como descrito anteriormente, a presença da zona morta no sinal de controle do sistema implica no comportamento em malha aberta do sistema em uma região em torno da origem (ver Exemplo 2.2.1). Por outro lado, a presença da saturação no controle pode ser uma fonte de pontos de equilíbrios parasitas e ciclos limites, ou ainda, pode levar as trajetórias do sistema à instabilidade (Tarbouriech *et al.*, 2011a). Assim, quando sujeito a não-linearidade  $\text{sat}(dz(u))$ , a estabilidade do sistema em malha fechada deve ser analisada em termos do possível confinamento em torno da origem quando  $t \rightarrow \infty$ , devido à presença da zona morta, e em termos da possibilidade de instabilidade (ou não convergência) das trajetórias para a região em torno da origem, dependendo

da condição inicial, como exemplificado a seguir.

**Exemplo 4.2.1** Considere o sistema instável em malha aberta,  $S_i$ , descrito na Tabela 2.1. Nas figuras seguintes é feita uma comparação dos efeitos da não-linearidade de zona morta no sistema e da não-linearidade  $\text{sat}(dz(u(t)))$ . Consideram-se os limites da zona morta como sendo  $|\rho| = 0.5$  e, quando na presença de  $\text{sat}(dz(u(t)))$ , o sistema satura em  $|\delta| = 0.6$  quando  $|u(t)| \geq 1.1$ .

Através da representação geométrica do comportamento de todas as trajetórias do sistema, dada pelo retrato de fase, é possível analisar o efeito das não-linearidades  $dz(u)$  e  $\text{sat}(dz(u))$  no sistema (2.1)-(2.2) e (4.1)-(4.2), respectivamente. Na Figura 4.3 o primeiro gráfico representa o comportamento das trajetórias deste sistema quando na presença da não-linearidade de zona morta. Observe que, como mostrado nos capítulos anteriores, as trajetórias convergem globalmente para uma região UB. No entanto, quando o sistema é sujeito a não-linearidade  $\text{sat}(dz(u(t)))$  (veja o segundo gráfico) existe uma região de condições iniciais para as quais as trajetórias convergem para uma região em torno da origem, ou ainda, pode-se dizer que existe uma convergência local das trajetórias do sistema.

A Figura 4.4 mostra o sinal de controle e a saída da não-linearidade, considerando como condição inicial para o sistema  $x_0 = [1 \ 0.5]'$ . No primeiro gráfico desta figura a não-linearidade presente no sistema é a zona morta, no segundo gráfico a não-linearidade considerada é  $\text{sat}(dz(u))$ . Observe no segundo gráfico que nos dois primeiros segundos, aproximadamente, o sinal de controle satura, no entanto é possível observar que, considerando esta condição inicial, o sistema em malha fechada não instabiliza. No entanto, observe no segundo gráfico da Figura 4.5 que, ao considerar a condição inicial  $x_0 = [1 \ 0.5]'$  no sistema sujeito a não-linearidade  $\text{sat}(dz(u))$  o sinal de controle instabiliza, o que pode ser comprovado ao observar, no retrato de fase da Figura 4.3 que a trajetória iniciada neste ponto é instável.

A Figura 4.6 mostra o detalhamento de uma região do segundo gráfico da Figura 4.5, onde é possível perceber com mais precisão os efeitos da não-linearidade  $\text{sat}(dz(u))$ .

Tendo em vista os efeitos da presença da não-linearidade  $\text{sat}(dz(u))$  em sistemas lineares, tem-se por objetivo analisar a estabilidade de sistemas, determinando uma região ultimamente limitada para a qual as trajetórias do sistema irão convergir e também determinar uma região de condições iniciais em que toda a trajetória iniciada em seu interior converge para a região ultimamente limitada e permanece nela confinada.

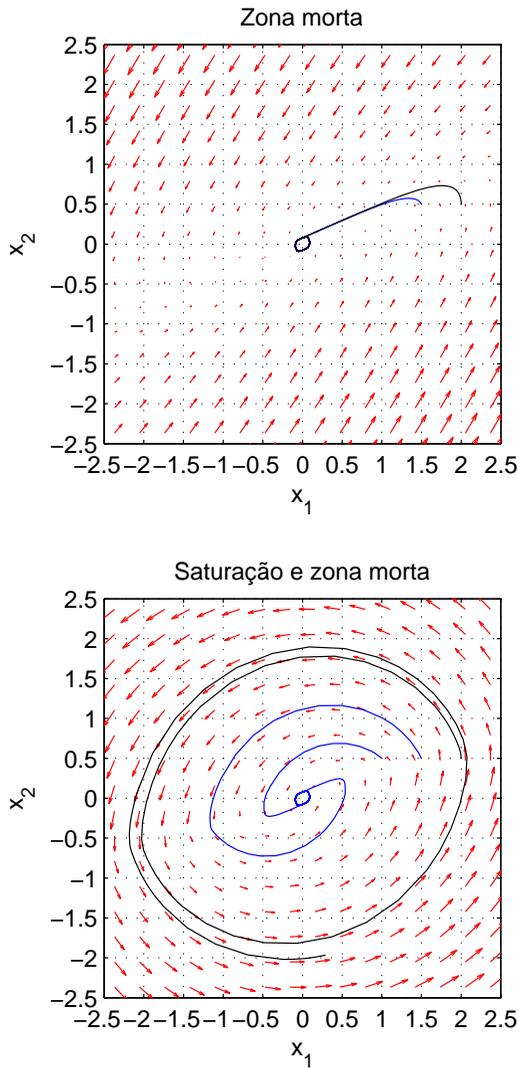


Figura 4.3: Retratos de fase.

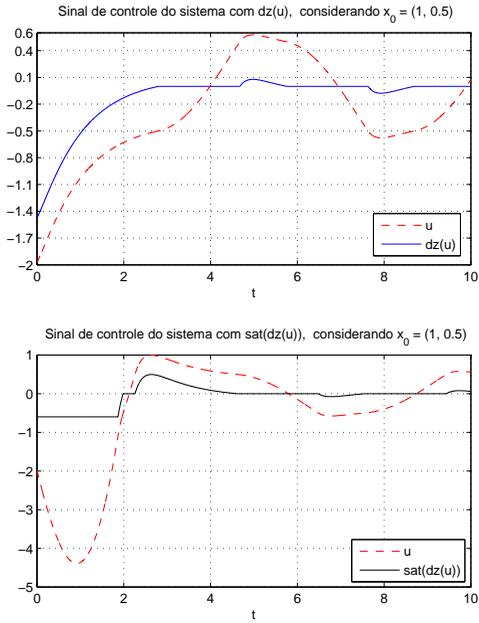


Figura 4.4: Sinal de controle e saída das não-linearidades para  $x_0 = [1 \ 0.5]'$ .

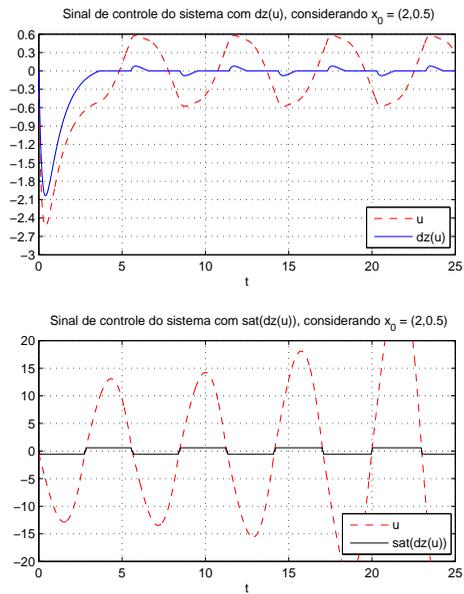


Figura 4.5: Sinal de controle e saída das não-linearidades para  $x_0 = [2 \ 0.5]'$ .

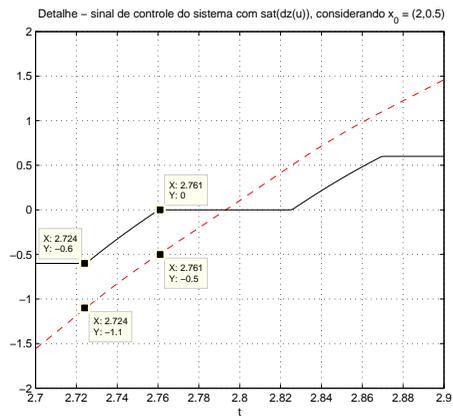


Figura 4.6: Detalhamento de uma região da Figura 4.5.

**Definição 4.1** Seja  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ . As soluções do sistema (4.1)-(4.2) são localmente ultimamente limitadas em relação à  $\mathcal{D}$  se existe um conjunto convexo compacto,  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$ , que contém a origem, no qual todas as trajetórias com condição inicial  $x(0) = x_0 \in \mathcal{D}$ , entram em um tempo finito e permanecem nele confinadas. Isto é, existe  $T = T(x_0) \geq 0$  finito, tal que

$$x_0 \in \mathcal{D} \Rightarrow x(t) \in \mathcal{U}, \forall t \geq T. \quad (4.4)$$

O conjunto  $\mathcal{U}$  que satisfaz (4.4) é chamado conjunto ultimamente limitado,  $UB_{\mathcal{D}}$  local, com relação à  $\mathcal{D}$ , e, por definição, é um conjunto positivamente invariante. A todo conjunto  $UB_{\mathcal{D}}$  local, associa-se uma esfera cujo diâmetro,  $\bar{\gamma}$ , representa a constante  $UB_{\mathcal{D}}$

$$\bar{\gamma} = \sup_{z \in \mathcal{U}} \|z\|^2 < \sup_{z \in \mathcal{D}} \|z\|^2. \quad (4.5)$$

■

Como no capítulo anterior, com o objetivo de utilizar o conceito apresentado e formular o problema a ser tratado, propõe-se uma reformulação do sistema (4.1)-(4.2), a qual permite garantir que  $(A + BK)$  é Hurwitz e considera uma não-linearidade dual à (4.3), representada na Figura 4.7, definida por  $\varphi(u(t)) = u - \text{sat}(dz(u(t)))$ , ou equivalentemente,  $i = \{1; \dots; m\}$ , sendo  $\bar{\rho}_i = \delta_i + \rho_i$ :

$$\varphi_i(u_i(t)) = \begin{cases} u_i - \delta_i, & \text{se } u_i(t) \geq \bar{\rho}_i, \\ \rho_i, & \text{se } \rho_i < u_i(t) < \bar{\rho}_i, \\ u_i, & \text{se } |u_i(t)| \leq \rho_i, \\ -\rho_i, & \text{se } -\bar{\rho}_i < u_i(t) < -\rho_i, \\ u_i + \delta_i, & \text{se } u_i(t) \leq -\bar{\rho}_i. \end{cases} \quad (4.6)$$

Portanto, o sistema (4.1)-(4.2) pode ser reescrito como:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) - B\varphi(u(t)). \quad (4.7)$$

Para comprovar a propriedade UB local das trajetórias do sistema (4.7), são consideradas funções de Lyapunov quadráticas. Define-se  $V_P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$V_P(x(t)) = x(t)'Px(t), \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad P = P' > 0 \quad (4.8)$$

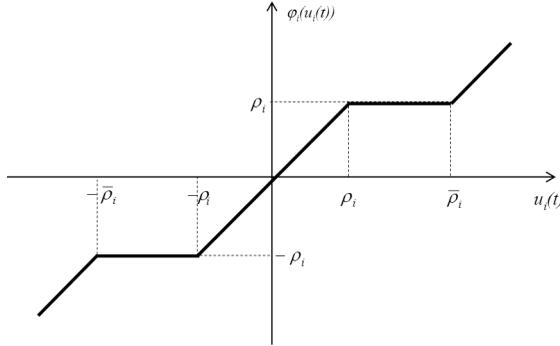


Figura 4.7: Não-linearidade  $\varphi_i(u_i(t))$ .

e

$$V_N(x(t)) = x(t)'Nx(t), N \in \mathbb{R}^{n \times n}, N = N' > 0. \quad (4.9)$$

Consideram-se os conjuntos  $\mathcal{E}(P, c)$ , que representam as curvas de nível da função de Lyapunov (4.8), dados por:

$$\mathcal{E}(P, c) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; V_P(x(t)) \leq c, c > 0\}. \quad (4.10)$$

Se  $c = 1$ , denota-se  $\mathcal{E}(P, c) = \mathcal{E}(P)$ , o conjunto de nível unitário. Assim, o conjunto  $\mathcal{E}(N)$ , representa a curva de nível unitária da função de Lyapunov (4.9) e é dado por:

$$\mathcal{E}(N) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; V_N(x(t)) \leq 1\}. \quad (4.11)$$

Pode-se estabelecer o lema seguinte, fundamental para a proposição das soluções dos problemas que serão apresentados na sequência.

**Lema 4.2.1** *Considere o sistema (4.7), as funções de Lyapunov (4.8) e (4.9) e os conjuntos (4.10) e (4.11), com  $c > 1$ . Dada qualquer condição inicial  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , seja  $x(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  a trajetória de (4.7). Admita que:*

$$\begin{aligned} \dot{V}_P(x(t), \varphi(u(t))) &= x(t)'((A + BK)'P + P(A + BK))x(t) \\ &\quad - \varphi(u(t))'B'Px(t) - x(t)'PB\varphi(u(t)) < 0, \quad (4.12) \\ \forall x \in \mathcal{E}(P, c), \forall x \notin \mathcal{E}(P) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{V}_N(x(t), \varphi(u(t))) &= x(t)'((A + BK)'N + N(A + BK))x(t) \\ &\quad - \varphi(u(t))'B'Nx(t) - x(t)'NB\varphi(u(t)) < 0, \quad (4.13) \\ &\forall x \in \mathcal{E}(N) \text{ e } \forall x \notin \mathcal{E}(P, c). \end{aligned}$$

Então, existe  $T = T(x_0) \geq 0$  finito, tal que

$$x_0(t) \in \mathcal{E}(N) \Rightarrow \begin{cases} x(t) \in \mathcal{E}(N), & \forall t \geq 0, \\ x(t) \in \mathcal{E}(P), & \forall t \geq T \end{cases} \quad (4.14)$$

Logo,  $\mathcal{E}(N)$  é um conjunto positivamente invariante e toda trajetória  $x(t)$  com condição inicial  $x_0 \in \mathcal{E}(N)$  converge para  $\mathcal{E}(P)$  em tempo finito e nele permanece confinada. Ou seja,  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto  $UB_{\mathcal{D}}$  local para o sistema (4.7), com  $\mathcal{D} \triangleq \mathcal{E}(N)$  e constante  $UB_{\mathcal{D}}$  associada, dada por:

$$\bar{\gamma} \triangleq \sup_{x(t) \in \mathcal{E}(P)} \|x(t)\|^2 = \frac{1}{\lambda_{\min}(P)}. \quad (4.15)$$

Além disso,

$$\bar{\gamma} < \frac{1}{\lambda_{\min}(N)}. \quad (4.16)$$

■

A prova do Lema 4.2.1 pode ser encontrada na Seção B.3 do Apêndice B. A partir da demonstração do Lema 4.2.1 obtém-se os corolários seguintes.

**Corolário 4.2.1** Se  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto  $UB$  global para o sistema com zona morta, então existe  $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{E}(P)$ , tal que  $\mathcal{E}(P)$  é  $UB_{\mathcal{D}}$  local para o sistema com não-linearidade  $\varphi(u)$ , a qual combina os efeitos da zona morta e da saturação.

**Demonstração 10** Seja  $\bar{\rho} > \rho$  e  $c_{\max} > 1$  o maior valor de  $c$ , tal que  $\mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{S}(K, \bar{\rho})$ . Se  $\mathcal{E}(P)$  é  $UB$  para o sistema com zona morta, então (4.12) é verificada para todo  $x \notin \mathcal{E}(P)$  e  $x \in \mathcal{E}(P, c)$ , com  $c \leq c_{\max}$  pois  $\mathcal{E}(P, c)$  está incluído no conjunto onde não ocorre saturação. Logo,  $\mathcal{E}(P, c) \triangleq \mathcal{D}$ . ■

Devido ao Corolário 4.2.1  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto  $UB_{\mathcal{D}}$  local para o sistema (4.7), sendo  $\mathcal{D} \triangleq \mathcal{E}(P, c_{\max})$ , e tal que:

$$\bar{\gamma} \triangleq \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \leq \frac{c_{\max}}{\lambda_{\min}(P)}$$

Note entretanto, que o conjunto  $\mathcal{D}$  determinado pelo Corolário 4.2.1 não é uma boa estimativa do conjunto de condições iniciais, cujas trajetórias convergem para  $\mathcal{E}(P)$ , tendo em vista que neste conjunto não ocorre a saturação. Sendo assim, propõe-se o seguinte Problema de análise de estabilidade UB local.

**Problema 4.1 (Análise UB local)** *Considere que sejam dadas as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , a matriz de realimentação de estados  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tal que  $(A + BK)$  seja Hurwitz, e um conjunto  $\mathcal{E}(P)$ . Determinar uma região de condições iniciais  $\mathcal{E}(N)$ , a maior possível, tal que  $\mathcal{E}(P)$  seja um conjunto localmente UB $_{\mathcal{D}}$  em relação à  $\mathcal{E}(N)$ , para o sistema (4.1)-(4.2).*

Para solucionar o Problema 4.1 serão utilizados algoritmos baseados em LMIs a partir de (4.12), (4.13) e (4.16). Supõe-se também que o conjunto  $\mathcal{E}(P)$  é conhecido, e é um conjunto UB global para o sistema (3.5). Note que  $\varphi_i(u_i) = \text{sat}_i(u_i)$  no interior do conjunto  $\mathcal{S}(K, \bar{\rho}) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; -\bar{\rho}_i \leq K_i x(t) \leq \bar{\rho}_i\}$ , portanto, pode-se dizer que  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto UB local para o sistema (4.7).

**Observação 4.1** A partir de (4.16) observa-se que  $\eta$  está associado ao maior autovalor da matriz  $N$  o qual, geometricamente, está relacionado ao comprimento do eixo menor do conjunto  $\mathcal{E}(N)$ . Portanto, para obter o maior conjunto  $\mathcal{E}(N)$ , inclui-se uma esfera de diâmetro igual a  $\eta$  neste conjunto e busca-se maximizar esta esfera.

Por definição,  $\mathcal{E}(\frac{1}{\eta}) \subseteq \mathcal{E}(N) \Leftrightarrow x' N x \leq 1 \quad \forall x' \frac{1}{\eta} x \leq 1$ , ou, equivalentemente:

$$N \leq \hat{\eta} I_n, \quad (4.17)$$

sendo  $\hat{\eta} = \frac{1}{\eta}$ . Portanto, minimizar  $\hat{\eta}$  equivale à maximizar o tamanho do conjunto  $\mathcal{E}(N)$ .

### 4.3 Análise de estabilidade UB local

Considerando o sistema (4.7), a não-linearidade (4.6) pode ser parametrizada como pertencente à classe de funções apresentada no Capítulo 3, como pode ser observado na Figura 4.8. Note, entretanto, que a parametrização é válida localmente, ou ainda, no interior do conjunto:

$$\mathcal{S}(K, \sigma) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; -\sigma_i \leq K_i x(t) \leq \sigma_i\}, \quad (4.18)$$

sendo  $\sigma_i = \frac{\delta_i + (1 - \alpha_i) \rho_i}{1 - \alpha_i}$ .

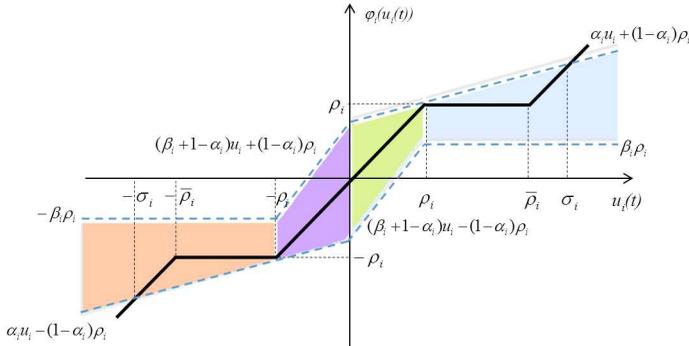


Figura 4.8: Não-linearidade  $\varphi_i(u_i(t))$  parametrizada por uma classe de funções.

Propõe-se na sequência duas formas de resolver o Problema 4.1, considerando os resultados do Corolário 4.2.1 e do Lema 4.2.1.

### 4.3.1 Análise I

A primeira análise é baseada no resultado do Corolário 4.2.1. Assume-se que já são conhecidos o conjunto UB  $\mathcal{E}(P)$  e a constante  $\alpha$ , a qual refere-se à inclinação de uma das retas utilizada na descrição da parametrização da função  $\varphi_i(u_i)$ , (veja Figura 4.8). Estes resultados são obtidos quando na solução do Algoritmo 3.4.1. Busca-se um conjunto de condições iniciais  $\mathcal{E}(P, c)$ , o maior possível, o qual está incluído na região  $\mathcal{S}(\rho, \sigma)$  de validade local da parametrização.

**Proposição 4.3.1** *Sejam dados  $P' = P > 0$ , tal que  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto UB,  $\alpha_i$  e  $\sigma_i$ ,  $\forall i = \{1; \dots; m\}$ , existe um escalar  $c > 1$ , tal que:*

$$\begin{bmatrix} P & K_i' \\ * & \hat{c}\sigma_i^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.19)$$

sendo  $\hat{c} = \frac{1}{c}$ . Então,  $\mathcal{E}(P, c)$  é um conjunto positivamente invariante para o sistema (4.7) e toda trajetória  $x(t)$  com condição inicial  $x_0 \in \mathcal{E}(P, c)$  converge para  $\mathcal{E}(P)$  em tempo finito e nele permanece confinada, ou seja,  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto localmente ultimamente limitado.

**Demonstração 11** Seja  $\mathcal{E}(P)$  um conjunto UB global para o sistema (3.5), o que é garantido pela Proposição 3.4.1. Tem-se  $\text{sat}_i(u_i) = \varphi_i(u_i)$  no interior do

conjunto  $\mathcal{S}(K, \bar{\rho}) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; -\bar{\rho}_i \leq K_i x(t) \leq \bar{\rho}_i\}$ , portanto,  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto UB local para o sistema (4.7) e (4.12) é verificada. Sendo assim, existe um conjunto positivamente invariante  $\mathcal{E}(P, c)$ , com  $c > 1$ , tal que  $\mathcal{E}(P, c) \subseteq \mathcal{S}(K, \sigma)$ . Por definição,  $\mathcal{E}(P, c) \subseteq \mathcal{S}(K, \sigma) \Leftrightarrow x' K_i' \frac{1}{\sigma_i^2} K_i x \leq 1 \forall x' \frac{P}{c} x \leq 1$ , esta relação é equivalente a (Boyd *et al.*, 1994)

$$\begin{bmatrix} \frac{P}{c} & K_i \\ * & \sigma_i^2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.20)$$

Pré- e pós-multiplicando (4.20) por  $\text{diag} \left( \sqrt{c} I_n, \frac{1}{\sqrt{c}} \right)$  e por seu transposto, respectivamente e considerando  $\frac{1}{c} = \hat{c}$ , obtém-se a desigualdade (4.19), garantindo assim a inclusão do conjunto  $\mathcal{E}(P, c)$  na região de validade do modelo  $\mathcal{S}(K, \sigma)$ . ■

Para realizar a análise de estabilidade, com base na Proposição 4.3.1, tem-se por objetivo encontrar o maior conjunto elipsoidal  $\mathcal{E}(P, c)$ . Sendo assim, considerando a Observação 4.1 e fazendo  $\mathcal{E}(N) = \mathcal{E}(P, c)$ , obtém-se uma relação equivalente a (4.17) para o conjunto  $\mathcal{E}(P, c)$ , dada por:

$$P\hat{c} \leq \hat{\eta} I_n, \quad (4.21)$$

sendo  $\hat{c} = \frac{1}{c}$  e  $\hat{\eta} = \frac{1}{\eta}$ . Desta forma, ao minimizar  $\hat{\eta}$ , será maximizado o conjunto  $\mathcal{E}(P, c)$ . Propõe-se então o seguinte problema de otimização.

#### Problema de Otimização 4.3.1

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{\eta}, \hat{c}} \hat{\eta} \\ & \text{sujeito à} \\ & (4.19) \text{ e } (4.21). \end{aligned}$$

### 4.3.2 Análise II

Visando melhorar a estimativa do conjunto de condições iniciais, seja  $\mathcal{E}(P, c)$  conhecido e obtido na solução do Problema de otimização 4.3.1, é proposto o resultado que segue.

**Proposição 4.3.2** *Sejam dados  $P = P > 0$  e  $c > 0$ , tais que  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto  $UB_{\mathcal{D}}$  local, com  $\mathcal{D} \triangleq \mathcal{E}(P, c)$ . Considere que existe um escalar positivo  $\tau_1$ , vetores  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$ , tais que  $0 \leq \alpha_i < 1$  e  $0 \leq \beta_i \leq 1, \forall i \in \{1; \dots; m\}$ , matrizes diagonais definidas positivas  $T_j, S_j, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}, j \in \{1; \dots; 4\}$  e uma*

matriz simétrica definida positiva  $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tais que,  $\forall i = \{1; \dots; m\}$ :

$$\begin{bmatrix} (A+BK)'N+N(A+BK)+\tau_1 P \hat{c} & -NB & 0_{n \times 1} \\ * & 0_m & 0_{m \times 1} \\ * & * & -\tau_1 \end{bmatrix} - M_1 - M_2 - M_3 - M_4 < 0, \quad (4.22)$$

$$\begin{bmatrix} N & K_i' \\ * & \sigma_i^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.23)$$

sendo  $\sigma_i = \frac{\delta_i + (1 - \alpha_i) \rho_i}{1 - \alpha_i}$ , e  $\hat{c} = \frac{1}{c}$ . Então,  $\mathcal{E}(N)$  é um conjunto positivamente invariante para o sistema (4.7) e toda trajetória  $x(t)$  com condição inicial  $x_0 \in \mathcal{E}(N)$  converge para  $\mathcal{E}(P)$  em tempo finito e nele permanece confinada.

**Demonstração 12** Considere que (4.23) é verificada, portanto é garantida a inclusão do conjunto  $\mathcal{E}(N)$  na região de validade do modelo,  $\mathcal{S}(K, \sigma)$ , sua demonstração segue de maneira análoga à demonstração de (4.19).

Seja (4.22) verificada. Multiplicando (4.22) à esquerda e à direita por  $\bar{z}' = [x' \quad \varphi(u)' \quad 1]$  e  $\bar{z} = [x' \quad \varphi(u)' \quad 1]'$ , obtém-se

$$\begin{aligned} & x'((A+BK)'N+N(A+BK))x - x'NB\varphi(u) - \varphi(u)'B'Nx \\ & - \tau_1(1 - x'P\hat{c}x) - \bar{z}'M_1\bar{z} - \bar{z}'M_2\bar{z} - \bar{z}'M_3\bar{z} - \bar{z}'M_4\bar{z} < 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Considerando-se os Lemas 3.3.1-3.3.4 e sendo  $\hat{c} = \frac{1}{c}$ , tem-se:

$$x'((A+BK)'N+N(A+BK))x - x'NB\varphi(u) - \varphi(u)'B'Nx - \tau_1 \left(1 - x'P\frac{1}{c}x\right) < 0. \quad (4.25)$$

Fazendo uso do S-procedure:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x'((A+BK)'N+N(A+BK))x - x'NB\varphi(u) - \varphi(u)'B'Nx < 0, \\ & \forall x \in \mathcal{E}(N) \text{ e } \forall x \notin \mathcal{E}(P, c). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Então, pelo Lema 4.2.1,  $\mathcal{E}(N)$  é um conjunto positivamente invariante e toda trajetória  $x(t)$  com condição inicial  $x_0 \in \mathcal{E}(N)$ , converge para  $\mathcal{E}(P)$  em tempo finito e nele permanece confinada, ou seja,  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto localmente UB $_{\mathcal{D}}$  para o sistema (4.7), com  $\mathcal{D} \triangleq \mathcal{E}(N)$ . ■

A desigualdade (4.22) é uma BMI, devido a presença de produtos envolvendo as variáveis  $D_\alpha = \alpha_i I_m$ ,  $D_\beta = \beta_i I_m$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$ . Portanto, da mesma maneira que no capítulo anterior, é feita uma busca nas variáveis escalares  $\alpha_i = \alpha$  e  $\beta_i = \beta$ ,  $\forall i \in \{1; \dots; m\}$ . Sendo assim, é proposto o algoritmo seguinte.

**Algoritmo 4.3.1** (*Análise UB local*)

1. Faz-se uma busca nas variáveis  $0 \leq \alpha < 1$  e  $0 \leq \beta \leq 1$ , através da resolução do problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min_{N, \hat{\eta}, \{T_j\}_{j \in \{1, \dots, 4\}}, \{S_j\}_{j \in \{1, \dots, 4\}}, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3} \hat{\eta} \\ & \text{sujeito à} \\ & (4.22), (4.23), \text{ e } (4.17). \end{aligned}$$

2. Verifica-se qual o menor valor de  $\hat{\eta}$  obtido e os valores correspondentes de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $N$ ,  $\{T_j\}_{j \in \{1, \dots, 4\}}$ ,  $\{S_j\}_{j \in \{1, \dots, 4\}}$ ,  $\tilde{T}_2$ ,  $\tilde{T}_3$ .

## 4.4 Exemplos numéricos

### 4.4.1 Sistema instável multivariável I

Considere o sistema multivariável, tratado no capítulo anterior e reescrito aqui, por questão de clareza:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \rho = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para realizar a análise de estabilidade local considera-se a matriz de ganho de realimentação de estados obtida na solução do problema de síntese utilizando o algoritmo proposto no capítulo anterior, a qual é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} 78.31 & -157.45 \\ -70.66 & 77.10 \end{bmatrix}.$$

#### Resultado Análise I

Resolve-se o Problema de otimização 4.3.1 e obtém-se o primeiro resultado da análise de estabilidade. Sendo o conjunto  $\mathcal{E}(P)$  e a constante  $\alpha$  conhecidos, neste caso:

$$P = \begin{bmatrix} 1.39 & -1.67 \\ -1.67 & 2.28 \end{bmatrix} \times 10^4, \alpha = 0.9, \delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nesta primeira análise de estabilidade se obteve  $c = 56.6659$ , o valor

da função objetivo obtido foi  $\eta = 6.2882 \times 10^2$ . Na Figura 4.9 observa-se as regiões  $\mathcal{E}(P)$  e  $\mathcal{E}(P, c)$ , em linha tracejada preta e linha cheia vermelha, respectivamente, juntamente com duas trajetórias, com condições iniciais sobre a curva de nível referente ao conjunto elipsoidal  $\mathcal{E}(P, c)$ . Na Figura 4.10 observa-se uma trajetória instável, com condição inicial  $x_0 = [0.2 \ 0.2]'$ , e pode-se notar que a estimativa do conjunto de condições iniciais pode ser melhorada.

### Resultado Análise II

Na intenção de melhorar a estimativa do conjunto de condições iniciais, resolve-se o problema de análise de estabilidade utilizando o Algoritmo 4.3.1, neste caso se obtém o conjunto  $\mathcal{E}(N)$ , mostrado na Figura 4.11, juntamente com o conjunto  $\text{UB}_{\mathcal{D}}$  e algumas trajetórias do sistema. A matriz  $N$  obtida é dada por:

$$N = \begin{bmatrix} 61.84 & -111.38 \\ -111.38 & 230.52 \end{bmatrix}$$

Comparando as áreas dos conjuntos  $\mathcal{E}(P, c)$ , obtido na primeira análise, e  $\mathcal{E}(N)$ , conseguiu-se melhorar aproximadamente 60% a área do conjunto de condições iniciais nesta segunda análise. Na Figura 4.12 observa-se a região  $\mathcal{E}(N)$  e uma trajetória instável, com a mesma condição inicial considerada na Figura 4.10 e pode-se notar que a região de condições iniciais encontrada é uma boa estimativa para o sistema considerado.

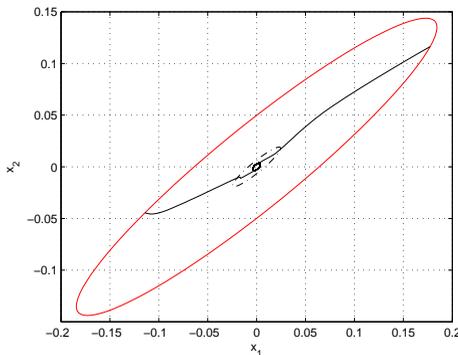


Figura 4.9: Resultado gráfico da análise de estabilidade I com trajetórias estáveis.

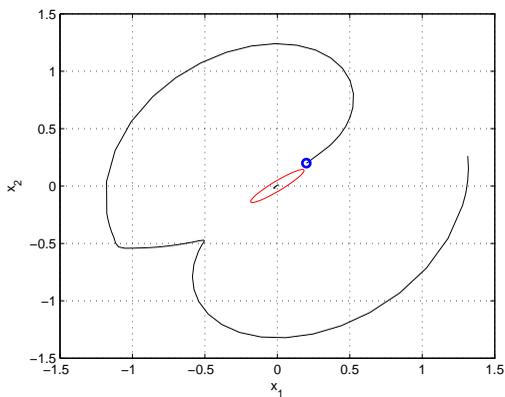


Figura 4.10: Resultado gráfico da análise de estabilidade I com trajetórias instáveis.

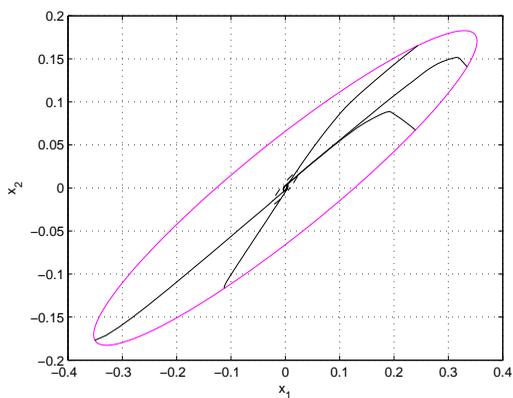


Figura 4.11: Resultado gráfico da análise de estabilidade II com trajetórias estáveis.

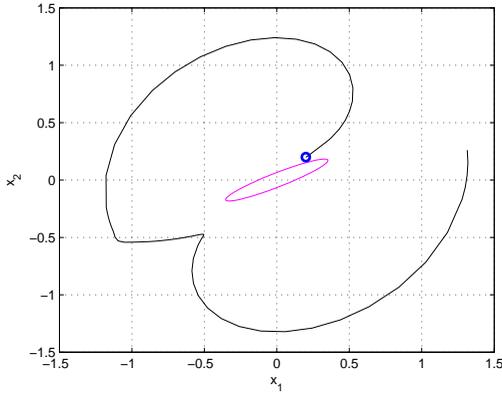


Figura 4.12: Resultado gráfico da análise de estabilidade II com trajetórias instáveis.

#### 4.4.2 Sistema instável multivariável II

Considere o sistema instável multivariável, tratado na Seção 3.6.4 do capítulo anterior e reescrito aqui por uma questão de clareza<sup>1</sup>.

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.5 & 4 \\ 4.3 & 6 & 5 \\ 3.2 & 6.8 & 7.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.7 & -1.3 \\ 0 & -4.3 \\ 0.8 & -1.5 \end{bmatrix}, \rho = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \delta = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Para realizar a análise de estabilidade local considera-se a matriz de ganho de realimentação de estados considerada no capítulo anterior, a qual é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} -0.5353 & 21.3442 & -38.5778 \\ 2.9615 & -3.9362 & 22.7573 \end{bmatrix}.$$

#### Resultado da Análise I

A fim de buscar uma primeira estimativa da região de condições iniciais, resolve-se o problema de análise de estabilidade através do Problema de otimização 4.3.1. Vale ressaltar que considera-se o conjunto UB  $\mathcal{E}(P)$  e a constante  $\alpha$  conhecidos e obtidos quando na solução do Algoritmo 3.4.1. Sendo assim, para este sistema  $\alpha = 0.5$ , por consequência,  $\sigma = [4.2 \quad 4.2]'$ ,

<sup>1</sup>Vale lembrar que este sistema também foi tratado em Tarbouriech *et al.* (2011b).

sendo este o valor dos limites da região de validade da não-linearidade (veja (4.18)),  $P$  é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 75.77 & -7.07 & 26.98 \\ -7.07 & 121.45 & -154.91 \\ 26.98 & -154.91 & 368.89 \end{bmatrix}.$$

Nesta primeira análise de estabilidade foi obtido:  $c = 3.8747$  e  $\hat{\eta} = 114.9630$ . Vale lembrar que  $\hat{\eta}$  representa o valor da função objetivo e refere-se ao maior autovalor de  $\mathcal{E}(P, c)$ . O volume da região elipsoidal  $\mathcal{E}(P, c)$  encontrada foi 0.0258.

Na Figura 4.13 é mostrada a região UB  $\mathcal{E}(P)$  em azul (região interna) e a região de condições iniciais  $\mathcal{E}(P, c)$  em vermelho (região externa). São mostradas também duas trajetórias, com condições iniciais iguais a  $x_0 = [0.1502 \ 0.1083 \ 0.09633]'$  e  $x_0 = [-0.11307 \ -0.1811 \ -0.1055]'$ . Observe que as trajetórias convergem para a região UB e nela permanecem confinadas. A Figura 4.14 apresenta as mesmas regiões mostradas na figura anterior e duas trajetórias, com condições iniciais iguais a  $x_0 = [0.2 \ -0.3 \ 0.2]'$  e  $x_0 = [-0.2 \ -0.3 \ 0.2]'$ , localizadas no exterior da região  $\mathcal{E}(P, c)$  e que são instáveis. Observando as condições iniciais das trajetórias instáveis é possível constatar que a região de condições iniciais ainda pode ser melhorada.

## Resultado da Análise II

Com o objetivo de melhorar a estimativa da região de condições iniciais, utilizam-se os resultados apresentados na Seção 4.3.2, obtidos resolvendo o Algoritmo 4.3.1. Neste caso foi fixado o valor de  $c$  obtido quando na solução da Análise I o resultado obtido na busca das variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  foi  $\alpha = 0.5$  e  $\beta = 0$ , note que são os mesmos valores obtidos quando na busca pelo conjunto UB  $\mathcal{E}(P)$  (veja resultados apresentados na Tabela 3.8) e, conseqüentemente os mesmos valores fixados na análise anterior, quando buscou-se o conjunto de condições iniciais  $\mathcal{E}(P, c)$ , no entanto o fato de adicionar graus de liberdade ao considerar o conjunto  $\mathcal{E}(N)$  possibilitou um aumento de aproximadamente 30% no volume da região de condições iniciais, comparado com o volume de  $\mathcal{E}(P, c)$  obtido anteriormente. O valor da função objetivo, o qual se refere ao maior autovalor de  $\mathcal{E}(N)$ , foi  $\hat{\eta} = 111.6216$  e a matriz  $N$  encontrada foi:

$$N = \begin{bmatrix} 11.08 & 0.65 & 2.93 \\ 0.65 & 31.38 & -40.61 \\ 2.93 & -40.61 & 90.99 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 4.15 é mostrada a região UB  $\mathcal{E}(P)$  em azul e a região de condições iniciais  $\mathcal{E}(P,c)$  em vermelho. São mostradas também duas trajetórias, com condições iniciais iguais a  $x_0 = [0.2149 \ 0.1259 \ 0.0932]$  e  $x_0 = [-0.0528 \ -0.2265 \ -0.1509]$ . A Figura 4.16 apresenta as mesmas regiões mostradas na figura anterior e duas trajetórias, com condições iniciais iguais às condições consideradas na Figura 4.14, localizadas no exterior da região  $\mathcal{E}(N)$ .

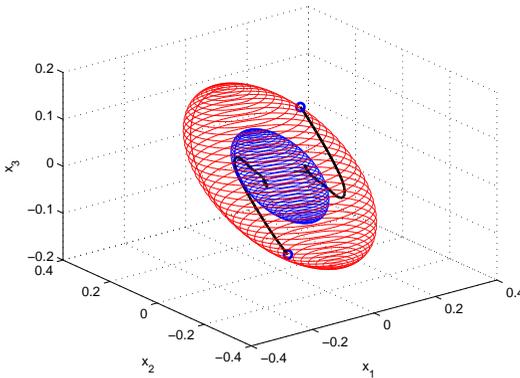


Figura 4.13: Resultado gráfico da análise de estabilidade I com trajetórias estáveis.

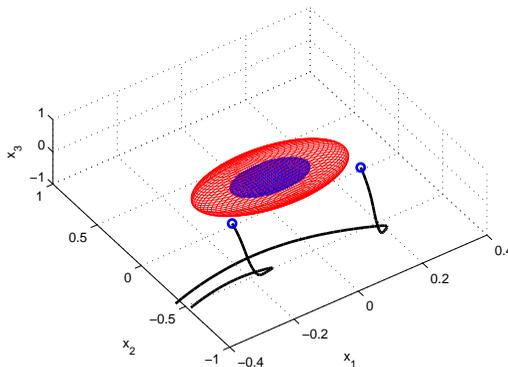


Figura 4.14: Resultado gráfico da análise de estabilidade I com trajetórias instáveis.

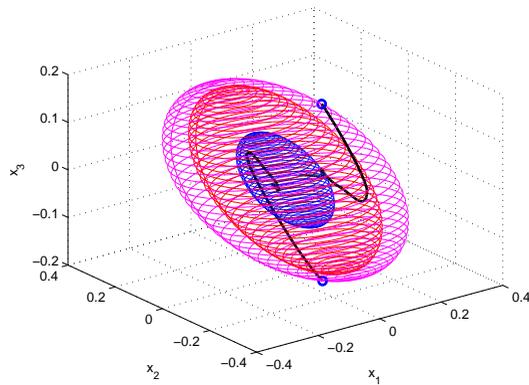


Figura 4.15: Resultado gráfico da análise de estabilidade II com trajetórias estáveis.

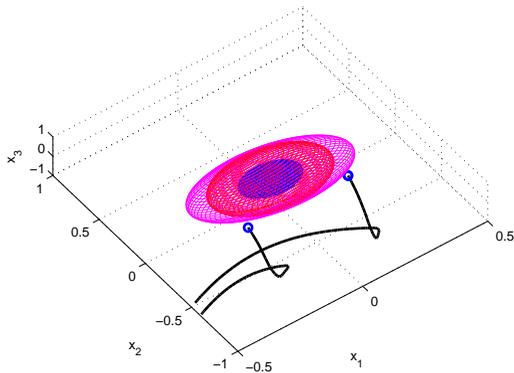


Figura 4.16: Resultado gráfico da análise de estabilidade II com trajetórias instáveis.

## 4.5 Considerações finais

Apresentaram-se neste capítulo condições para a análise de estabilidade local para sistemas lineares sujeitos à não-linearidade que combina os efeitos da zona morta e da saturação. Devido aos efeitos da saturação, na

análise de estabilidade busca-se um conjunto de condições iniciais, o maior possível, para o qual toda a trajetória com condição inicial em seu interior converge, em tempo finito, para o conjunto localmente UB e nele permanecerá confinada.

Para tratar a não-linearidade considerou-se a parametrização proposta no capítulo anterior. Os resultados apresentados mostraram-se satisfatórios, observou-se que a parametrização utilizada impõe um comprometimento entre o tamanho da região de condições iniciais e o tamanho da região UB. Pode-se observar na Figura 4.8 esta ligação entre as condições do exterior e do interior, que é dada pela inclinação  $\alpha$ . Caso fossem acrescentadas duas regiões externas, com retas de inclinação diferente de  $\alpha$  poderia ser possível acrescentar graus de liberdade às condições, o que permitiria obter estimativas das regiões de condições iniciais menos conservadoras. A ideia de considerar uma parametrização específica para esta não-linearidade, em função de 6 regiões da entrada de controle exige um estudo mais aprofundado e propõe-se como trabalho futuro.

# Capítulo 5

## Conclusões e Trabalhos Futuros

### 5.1 Considerações finais

Nesta tese mostrou-se que o conceito de estabilidade ultimamente limitada é apropriado para tratar os problemas de análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados para sistemas lineares sujeitos a zona morta no atuador. As principais contribuições foram a proposição de uma parametrização da zona morta por uma classe de funções caracterizadas por partes limitadas e afins em função da entrada de controle e a proposição de algoritmos para a análise e síntese baseados em LMIs. A parametrização da não-linearidade foi também utilizada para tratar o problema de sistemas lineares sujeitos a uma não-linearidade que combina os efeitos da zona morta e da saturação.

Para uma melhor compreensão da influência da zona morta no sistema realimentado, no Capítulo 2 foram inicialmente ilustrados os efeitos desta não-linearidade em três sistemas lineares. Apresentou-se então o conceito de estabilidade ultimamente limitada, ou simplesmente, estabilidade UB, e a definição de conjunto UB, os quais foram utilizados como ferramenta teórica fundamental para a proposição das soluções dos problemas de análise e síntese. Ainda neste capítulo foram consideradas três modelagens existentes na literatura para a não-linearidade de zona morta aplicadas ao caso de sistemas com uma única entrada de controle: modelagem via perturbação limitada, modelagem considerando o sistema chaveado em função dos estados e mode-

lagem via decomposição da não-linearidade. Para cada uma das modelagens foram propostas soluções para os problemas de análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados, tendo por base o conceito de estabilidade UB. Resultados numéricos foram mostrados para efeito de comparação em termos de estimativas de conjuntos UB.

No Capítulo 3 foi proposta uma modelagem para a não-linearidade através da parametrização por uma classe de funções. Utilizou-se esta modelagem na proposição de uma solução para os problemas de análise de estabilidade e síntese de realimentação de estados, tendo como conceito de base a estabilidade ultimamente limitada. Os resultados foram apresentados considerando o sistema multivariável e uma função indicador foi utilizada para descrever cada uma das regiões definidas na parametrização da não-linearidade. Salienta-se que tal função pode também ser utilizada para estender os resultados apresentados no Capítulo 2 para o caso multivariável. Os resultados propostos foram comparados aos resultados do Capítulo 2 e se mostraram menos conservadores quando comparado aos resultados que consideram a modelagem via perturbação limitada e a modelagem via decomposição da não-linearidade. Ao comparar os resultados obtidos utilizando a modelagem que considera o sistema chaveado em função dos estados, os resultados foram equivalentes, o que vem a ser uma vantagem para a parametrização proposta, uma vez que ela pode ser utilizada para tratar uma classe mais ampla de funções não-lineares, mantendo a qualidade dos resultados.

No Capítulo 4 a parametrização proposta foi estendida para tratar uma não-linearidade que combina os efeitos da zona morta e da saturação. Inicialmente foram ilustrados os efeitos da não-linearidade considerada em um sistema linear instável em malha aberta. Utilizando a parametrização apresentado no Capítulo 3 foram propostas soluções para o problema de análise de estabilidade. Devido aos efeitos da saturação, na análise de estabilidade buscou-se um conjunto de condições iniciais, o maior possível, para o qual toda a trajetória iniciada em seu interior converge, em tempo finito, para o conjunto localmente UB, permanecendo nele confinada.

## 5.2 Publicações relacionadas ao trabalho

As pesquisas desenvolvidas até o momento deram origem aos seguintes artigos já publicados:

- Dilda, V., Reginatto, R., e Castelan, E. (2012). Análise e síntese *ultimate boundedness* para sistemas com zona morta no atuador. Proc.

*Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*

- Dilda, V. e Castelan, E. (2013). An approach for tracking analysis for linear systems with dead-zone nonlinearity applied to a hydraulic actuator. Proc. *Anais do XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente e Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*.

Os seguintes artigos encontram-se no momento em processo de revisão para publicação ou preparação para submissão:

- Dilda, V., Jungers, M., e Castelan, E. Uniformly ultimate boundedness analysis and synthesis for linear systems with dead-zone in the actuator. *Submetido para publicação no International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- Dilda, V., Castelan, E., e Jungers, M. Stability analysis for linear systems with dead-zone and saturation in the actuator. *A ser submetido para publicação na Revista da Sociedade Brasileira de Automática*.

## 5.3 Perspectivas futuras

Dentre as sugestões de trabalhos futuros pode-se citar:

- Estender os resultados obtidos para o caso de sistemas discretos no tempo. Neste caso, fundamentalmente, a derivada da função de Lyapunov é substituída por  $\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k)$ .
- Abordar o problema de seguimento de referência para o sistema linear sujeito a não-linearidade que combina os efeitos da zona morta e da saturação. Já foi realizado um estudo sobre este problema, porém considerou-se apenas o sistema linear sujeito a não-linearidade de zona morta. Neste estudo, após realizar a transformação de malha no sistema, a fim de considerar  $(A + BK)$  Hurwitz, tratou-se a não-linearidade dual à zona morta como uma perturbação limitada. Foi abordado especificamente o problema de seguimento de referência considerando o modelo do atuador hidráulico (Dilda e Castelan, 2013).
- Estender os resultados obtidos para o caso de sistemas comutados, inicialmente para o caso de comutação arbitrária.
- Considerar o problema de síntese de realimentação de estados para sistemas lineares sujeitos a não-linearidade de zona morta e saturação no atuador, a partir dos resultados propostos no Capítulo 4.



# Apêndice A

## Conceitos de Base

### A.1 Introdução

Tem-se por objetivo neste apêndice apresentar alguns dos principais conceitos de base que foram utilizados ao longo deste trabalho. Os conceitos aqui apresentados tiveram por base Khalil (2002).

### A.2 Estabilidade de Lyapunov

Para estudar a estabilidade de pontos de equilíbrio de um sistema, usualmente utilizam-se os métodos de Lyapunov. A teoria de Lyapunov é baseada em considerações sobre a energia do sistema, ou seja, se a energia total de um sistema físico decresce monotonicamente com o tempo e apresenta, em um ponto de equilíbrio, um mínimo local, então é possível concluir que este ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

O segundo método de Lyapunov (ou método direto) é baseado na extensão das considerações sobre a energia do sistema e permite analisar a estabilidade de um sistema determinando uma função que caracterize tal estabilidade, não sendo necessário solucionar as equações diferenciais que descrevem o sistema.

Considere o seguinte sistema não-linear:

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{A.1})$$

$$x(0) = x_0 \quad (\text{A.2})$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t \geq 0$ .

**Definição A.1** (*Estabilidade e instabilidade (Khalil, 2002)*) Um ponto de equilíbrio  $x = 0$  de (A.1) é dito estável se para algum  $\varepsilon > 0$ , existir um  $\delta(0, \varepsilon)$  tal que  $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$ ,  $x(t)$  é a solução do sistema iniciando em  $x_0$ , no tempo  $t = 0$ . Caso contrário é instável.

Em vários problemas a estabilidade de Lyapunov não é suficiente, é necessário também garantir a estabilidade assintótica do sistema, a qual é definida a seguir.

**Definição A.2** (*Estabilidade assintótica*) Um ponto de equilíbrio,  $x = 0$  é dito ser assintoticamente estável se ele é estável, e se existe algum  $\delta > 0$ , tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Para estudar a estabilidade de sistemas utilizando diretamente a definição de ponto de equilíbrio é necessário conhecer a expressão analítica das trajetórias do sistema, porém isso pode ser muito difícil ou até impossível. Portanto, pode-se utilizar o segundo método de Lyapunov, que permite estudar a estabilidade do sistema através do uso de funções de Lyapunov e de suas propriedades de contratividade.

### A.2.1 Segundo método de Lyapunov

Seja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável definida em um domínio  $C \subset \mathbb{R}^n$  que contém a origem. A derivada de  $V$  ao longo das trajetórias do sistema(A.1), é dada por

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \quad (\text{A.4})$$

A derivada de  $V$  ao longo das trajetórias do sistema depende das equações do sistema. Desta forma, se  $\dot{V}(x)$  é negativa,  $V$  irá decrescer ao longo da solução de (A.1). O teorema a seguir mostra como determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio do sistema utilizando o método direto de Lyapunov.

**Teorema A.2.1** *Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio do sistema (A.1) e  $D \subset \mathbb{R}^n$  um domínio que contém  $x = 0$ . Seja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável tal que*

$$V(0) = 0 \text{ e } V(x) > 0 \quad (\text{A.5})$$

em  $D - \{0\}$ ;

$$\dot{V} \leq 0 \quad (\text{A.6})$$

em  $D$ ; então,  $x = 0$  é estável em  $D$ . Além disso, se

$$\dot{V} < 0 \quad (\text{A.7})$$

em  $D - \{0\}$ ; então,  $x = 0$  é assintoticamente estável.

A função  $V(x)$  que satisfaz a condição (A.5) para  $x \neq 0$  é dita ser positiva definida, caso satisfaça a condição  $V(x) \geq 0$  para  $x \neq 0$ , é dita ser positiva semidefinida. A função  $V(x)$  é dita ser negativa definida ou negativa semidefinida se  $-V(x)$  é positiva definida ou positiva semidefinida, respectivamente.

**Definição A.3** (*Superfície de Lyapunov*) *Seja  $V(x)$  uma função de Lyapunov. A superfície no espaço de estados dada por:*

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) = c\} \quad (\text{A.8})$$

é chamada superfície de Lyapunov ou superfície de nível.

## A.2.2 Região de atração

O conceito de estabilidade assintótica está ligado ao conceito de região de atração da origem (Khalil, 2002).

Ao se determinar a estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio é de interesse saber qual a região em torno deste ponto em que se garante que todas as trajetórias iniciadas dentro dela, convergem ao ponto de equilíbrio. Encontrar analiticamente a região de atração é difícil, ou mesmo impossível.

vel. Portanto, a função de Lyapunov pode ser usada para estimar a região de atração.

**Definição A.4** (*Região de atração*) *A região de atração de um determinado ponto de equilíbrio é o conjunto de todos os pontos em que as trajetórias do sistema iniciadas no conjunto convergem assintoticamente para o equilíbrio quando  $T \rightarrow +\infty$ .*

Se existe uma função de Lyapunov que satisfaz as condições de estabilidade assintótica em um domínio  $D$  e se  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq c\}$  é limitado e está contido em  $D$ , então as trajetórias iniciadas em  $\Omega_c$  permanecem confinadas neste conjunto e ainda tendem ao ponto de equilíbrio quando  $t \rightarrow \infty$ , sendo, portanto,  $\Omega_c$  é uma estimativa positivamente invariante da região de atração.

### A.2.3 Conjunto invariante

A ideia básica de conjunto invariante é que toda a trajetória iniciada dentro dele, permanece confinada em seu interior.

**Definição A.5** (*Conjunto invariante*) *Um conjunto  $M$  é dito invariante em relação ao sistema autônomo  $\dot{x} = f(x)$  se*

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{A.9})$$

*O conjunto  $M$  será dito positivamente invariante se*

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{A.10})$$

*O conjunto  $M$  será contrativamente invariante se*

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \quad \forall t \geq 0 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t)) = x_e \quad (\text{A.11})$$

*sendo  $x_e$  um dado ponto de equilíbrio no interior de  $M$ .*

Para sistemas com saturação, os conjuntos invariantes podem ser usados como estimativa da região de atração.

## A.3 Sistemas do tipo Lur'e

Muitos sistemas não-lineares podem ser tratados através de um sistema linear realimentado por um termo não-linear, como pode ser observado na Figura A.1.

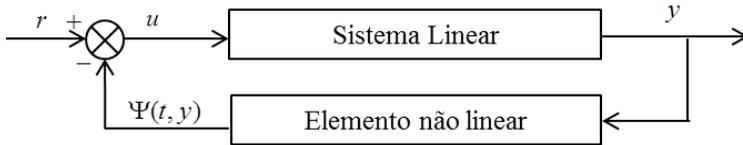


Figura A.1: Esquema do distema na forma Lur'e.

O sistema pode ser escrito como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu \quad (\text{A.12})$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (\text{A.13})$$

$$u(t) = r - \Psi(t, y) \quad (\text{A.14})$$

sendo o par  $(A, B)$  controlável,  $(C, A)$  observável e  $\Psi(t, y)$  é não-linearidade sem memória, linear por partes e localmente Lipschitz em  $y$  (mais detalhes podem ser encontrados em (Khalil, 2002)). Diz-se que  $\Psi(t, y)$  é uma não-linearidade de setor se verifica certas condições, chamadas de condições de setor. A seguir apresentam-se algumas destas condições.

### A.3.1 Condição de setor clássica

**Definição A.6** Uma função contínua  $\Psi : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pertence ao setor  $[K_1, K_2]$  se existem dois números não-negativos  $K_1$  e  $K_2$ , sendo  $K_2 > K_1$ , tais que

$$K_1 y^2 \leq y \Psi(t, y) \leq K_2 y^2, \forall t \quad (\text{A.15})$$

é verificada. A relação (A.15) pode ser escrita como

$$[\Psi(t, y) - K_1 y] [\Psi(t, y) - K_2 y] \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{A.16})$$

Considerando o setor  $[0, K_i]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e  $\Psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , para

o caso multivariável a relação (A.16) pode ser escrita na forma

$$[\Psi(t, y_i)] [\Psi(t, y_i) - K_i y_i] \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{A.17})$$

ou ainda, na forma matricial,

$$[\Psi(t, y)'] [\Psi(t, y) - \Delta] \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{A.18})$$

sendo  $\Delta = \text{diag} \{K_i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Baseado no sistema Lur'e, e nas condições de setor definidas, pode-se definir estabilidade absoluta, como segue.

**Definição A.7** *O sistema (A.12), com não-linearidade  $\Psi$  pertencente ao setor  $[K_1, K_2]$ , é dito*

- *localmente absolutamente estável: se o sistema (A.12) é localmente assintoticamente estável para toda não-linearidade que verifica localmente a condição de setor (A.16);*
- *globalmente absolutamente estável: se o sistema (A.12) é globalmente assintoticamente estável para toda não-linearidade que verifica globalmente a condição de setor (A.16).*

# Apêndice B

## Demonstrações

### B.1 Demonstração do Lema 2.2.1

A demonstração aqui apresentada é baseada em técnicas usuais da teoria de controle, na teoria de Lyapunov (Khalil, 2002; Slotine e Li, 1991) e é descrita de forma semelhante à apresentada em (Pomar *et al.*, 2012).

**Demonstração 13** Assuma que (2.10) é verificada. Inicialmente, prova-se, por contradição, que  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto positivamente invariante. Defina-se  $\mathcal{N}_0 = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; V(x) > 1\}$ . Suponha que  $\mathcal{E}(P)$  não seja um conjunto positivamente invariante, então, existe  $x_0 \in \mathcal{E}(P)$  e  $t_1 \in \mathbb{R}$  tais que,  $t_1 > 0$  e  $x(t_1) \in \mathcal{N}_0$ , em que  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a trajetória contínua de (2.7) sujeito à condição inicial  $x(0) = x_0 \in \mathcal{E}(P)$ . Devido à continuidade de  $V(x(t))$  e aplicando o Teorema do Valor Intermediário, sabe-se que existe  $0 \leq \bar{s} < t_1$  tal que  $x(\bar{s}) \in \mathcal{F}_0$ , em que  $\mathcal{F}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) = 1\}$ . Definindo  $\bar{t} = \sup\{0 \leq t < t_1 | x(t) \in \mathcal{F}_0\}$ . Note que  $\bar{t} \geq 0$ . Por continuidade,  $\bar{t} < t_1$  e  $x(\bar{t}) \in \mathcal{F}_0$ . Logo, a definição de  $\bar{t}$  e o Teorema do Valor Intermediário implicam que  $x(t) \in \mathcal{N}_0$  para todo  $\bar{t} < t < t_1$ . Mas,  $\dot{V}(x(t), \text{sat}(u(t))) < 0$  para cada  $\bar{t} < t < t_1$ . Portanto,  $V(x(t_1)) < V(x(\bar{t})) = 1$ , ou seja,  $x(t_1) \in \mathcal{E}(P)$ , que é uma contradição. Isto prova que  $\mathcal{E}(P)$  é positivamente invariante.

Seja a trajetória de (2.7),  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sujeito à condição inicial  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Existem apenas duas possibilidades: (i) ou  $x_0 \in \mathcal{E}(P)$ , (ii) ou  $x_0 \notin \mathcal{E}(P)$ .

Se (i) ocorre, então  $x(t) \notin \mathcal{E}(P)$  para cada  $t \geq 0$ , pois  $\mathcal{E}(P)$  é positivamente invariante.

Considere então que (ii) é verdade e que  $x(t) \notin \mathcal{E}(P)$  para todo  $t \geq 0$ . Assim,  $x(t) \in \mathcal{N}_0$  e  $\dot{V}(x(t), \text{sat}(u(t))) < 0$  para  $t \geq 0$ . Desta maneira,  $1 < V(x(t)) < V(x_0)$  para  $t \geq 0$ . No entanto,  $V(x)$  é contínua,  $\lambda_{\min}(P) > 0$  e

$$\lambda_{\min}(P) \|x\|^2 \leq V(x), \text{ para } x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, o conjunto

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n; 1 \leq V(x) \leq V(x_0)\} \subset \mathcal{N}_0$$

é compacto (fechado e limitado) e  $x(t) \in \mathcal{K}$  para todo  $t \geq 0$ . Como  $\text{sat}(u) = \text{sat}(Kx) = f(x)$ , de (2.10),  $\dot{V}(x, \text{sat}(u)) < 0$ , para todo  $x \in \mathcal{K}$ . Conclui-se então que existe  $\zeta > 0$  tal que

$$\dot{V}(x, \text{sat}(u)) < -\zeta < 0, \forall x \in \mathcal{K}. \quad (\text{B.1})$$

Portanto, para cada  $t \geq 0$ ,

$$V(x(t)) - V(x_0) = \int_0^t \dot{V}(x(s), \text{sat}(u(s))) ds < -\zeta t.$$

Consequentemente, para  $t$  grande o suficiente, tem-se  $V(x(t)) < 0$ , que é uma contradição.

Portanto, qualquer trajetória adentra  $\mathcal{E}(P)$  em tempo finito e nele permanece confinada.

Considere (Khalil, 2002):

$$\lambda_{\min}(P) \|x(t)\|^2 \leq x(t)' P x(t) \leq \lambda_{\max}(P) \|x(t)\|^2. \quad (\text{B.2})$$

Então, a partir de (B.2), tem-se:

$$x(t)' P x(t) \leq 1 \Rightarrow \lambda_{\min}(P) \|x(t)\|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \|x(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(P)}, \quad (\text{B.3})$$

o que garante que a elipse  $\mathcal{E}(P) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; V(x(t)) \leq 1\}$  está incluída em uma esfera de diâmetro  $\gamma$ .

Por outro lado,  $\frac{1}{\lambda_{\min}(P)}$  é, por definição o raio maior do elipsóide  $\mathcal{E}(P)$ . Logo,

$$\gamma \triangleq \sup_{x(t) \in \mathcal{E}(P)} \|x(t)\| = \frac{1}{\lambda_{\min}(P)},$$

sendo  $\gamma$ , portanto, a constante UB. ■

## B.2 Demonstração da Proposição 2.3.4

**Demonstração 14** Seja (2.41) verificada, então o último bloco diagonal,  $\text{He}(X) > 0$ , garante que  $X$  é inversível. Fazendo a mudança de variáveis  $Z = XY$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} \text{He}(AQ) + \mu Q & B \\ * & 0 \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} BX \\ -X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & -1 \end{bmatrix} \right) > 0. \quad (\text{B.4})$$

Note que,

$$\begin{bmatrix} Y & -1 \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} I_n \\ Y \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

e pelo Lema de Finsler, a desigualdade (2.41) induz

$$\begin{bmatrix} I_n \\ Y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \text{He}(AQ) + \mu Q & B \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ Y \end{bmatrix} > 0, \quad (\text{B.6})$$

que pode ser reescrita como

$$\text{He}(AQ + BY) + \mu Q > 0, \quad (\text{B.7})$$

fazendo a mudança de variáveis  $K = X^{-1}ZQ^{-1} = YQ^{-1}$ , é garantida a condição de alocação de pólos (2.12), que neste caso é dada por (2.25).

Considere que as desigualdades (2.38), (2.39) e (2.40) têm solução, sendo  $X$  inversível e fazendo  $Y = X^{-1}Z$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} Z & 0 & -X \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} Y & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Note que

$$\begin{bmatrix} Y & 0 & -1 \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 \\ Y & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

A relação (B.9), combinada com o Lema de Finsler, permite escrever

as desigualdades (2.38), (2.39) e (2.40) como:

$$\begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 \\ Y & 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} He(AQ) + \tau_1 Q & -B\rho & B \\ * & -\tau_1 - 2\rho\tau_2\rho & \rho\tau_2 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 \\ Y & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 \\ Y & 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} He(AQ) + \tau_1 Q & -B\rho & 0_{n \times 1} \\ * & -\tau_1 + \tau_3 & 0 \\ * & * & -\frac{\tau_3}{\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 \\ Y & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

e

$$\begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 \\ Y & 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} He(AQ) + \tau_1 Q & B\rho & B \\ * & -\tau_1 - 2\rho\tau_4\rho & -\rho\tau_4 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 \\ Y & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

ou equivalentemente como

$$\begin{bmatrix} Q(A+BK)' + (A+BK)Q + \tau_1 Q & -B\rho + Y'\rho\tau_2 \\ * & -\tau_1 - 2\rho\tau_2\rho \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{bmatrix} QA' + AQ + \tau_1 Q - Y'\frac{\tau_3}{\rho^2}Y & 0_{n \times 1} \\ * & -\tau_1 + \tau_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{bmatrix} Q(A+BK)' + (A+BK)Q + \tau_1 Q & B\rho - Y'\rho\tau_4 \\ * & -\tau_1 - 2\rho\tau_4\rho \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{B.15})$$

Multiplicando as desigualdades (B.13), (B.14) e (B.15) por  $\text{diag}(P; 1)$ , sendo  $P = Q^{-1}$  e  $Y = KQ$ , serão obtidas as desigualdades (2.29), (2.30) e (2.31), respectivamente, portanto continuidade da demonstração segue de maneira análoga à apresentada anteriormente para a análise de estabilidade. ■

### B.3 Demonstração do Lema 4.2.1

**Demonstração 15** Assuma que (4.13) e (4.12) são verificadas. Pelo Lema 2.2.1, é garantido que  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto positivamente invariante.

Seja,  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sujeito à condição inicial  $x(0) = x_0 \in \mathcal{E}(P, c)$ . Existem apenas duas possibilidades: (i) ou  $x_0 \in \mathcal{E}(P)$ , (ii) ou  $x_0 \in \mathcal{E}(P, c) \setminus \mathcal{E}(P)$ .

Se (i) ocorre, então  $x(t) \in \mathcal{E}(P)$  para cada  $t \geq 0$ , pois  $\mathcal{E}(P)$  é positivamente invariante.

Considere então que (ii) é verdade e que  $x(t) \notin \mathcal{E}(P)$  para todo  $t \geq 0$ . Assim,  $x(t) \in \mathcal{E}(P, c) \setminus \mathcal{E}(P)$  e  $\dot{V}_P(x(t), \varphi(u(t))) < 0$  para  $t \geq 0$ . Desta maneira,  $1 < V_P(x(t)) < V_P(x_0)$  para  $t \geq 0$ . No entanto,  $V_P(x)$  é contínua,  $\lambda_{\min}(P) > 0$

e

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq V_P(x), \text{ para } x \in \mathcal{E}(P, c).$$

Logo, o conjunto

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{E}(P, c); 1 \leq V_P(x) \leq V_P(x_0)\} \subset \mathcal{E}(P, c) \setminus \mathcal{E}(P)$$

é compacto (fechado e limitado) e  $x(t) \in \mathcal{K}$  para todo  $t \geq 0$ . Como  $\varphi(u) = \varphi(Kx) = f(x)$ , de (2.10),  $\dot{V}_P(x, \varphi(u)) < 0$ , para todo  $x \in \mathcal{K}$ . Conclui-se então que existe  $\zeta > 0$  tal que

$$\dot{V}_P(x, \varphi(u)) < -\zeta < 0, \forall x \in \mathcal{K}. \quad (\text{B.16})$$

Portanto, para cada  $t \geq 0$ ,

$$V_P(x(t)) - V_P(x_0) = \int_0^t \dot{V}_P(x(s), \varphi(u(s))) ds < -\zeta t.$$

Consequentemente, para  $t$  grande o suficiente, tem-se  $V_P(x(t)) < 0$ , que é uma contradição.

Considere agora que,  $x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sujeito à condição inicial  $x(0) = x_0 \in \mathcal{E}(N)$ . Existem três possibilidades: (i) ou  $x_0 \in \mathcal{E}(P)$ , (ii) ou  $x_0 \in \mathcal{E}(P, c) \setminus \mathcal{E}(P)$  (iii) ou  $x_0 \in \mathcal{E}(N) \setminus \mathcal{E}(P, c)$ .

Se (i) ocorre, então  $x(t) \in \mathcal{E}(P)$  para cada  $t \geq 0$ , pois  $\mathcal{E}(P)$  é positivamente invariante.

Se (ii) ocorre, então  $x(t) \in \mathcal{E}(P)$  para cada  $t \geq 0$ , pois  $\mathcal{E}(P, c)$  é positivamente invariante.

Considere então que (iii) é verdade e que  $x(t) \notin \mathcal{E}(P)$  para todo  $t \geq 0$ . Assim,  $x(t) \in \mathcal{E}(N) \setminus \mathcal{E}(P, c)$  e  $\dot{V}_N(x(t), \varphi(u(t))) < 0$  para  $t \geq 0$ . Desta maneira,  $1 < V_N(x(t)) < V_N(x_0)$  para  $t \geq 0$ . No entanto,  $V_N(x)$  é contínua,  $\lambda_{\min}(N) > 0$  e

$$\lambda_{\min}(N)\|x\|^2 \leq V_N(x), \text{ para } x \in \mathcal{E}(N).$$

Logo, o conjunto

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{E}(N); 1 \leq V_N(x) \leq V_N(x_0)\} \subset \mathcal{E}(N) \setminus \mathcal{E}(P, c)$$

é compacto (fechado e limitado) e  $x(t) \in \mathcal{K}$  para todo  $t \geq 0$ . Como  $\varphi(u) = \varphi(Kx) = f(x)$ , de (2.10),  $\dot{V}_N(x, \varphi(u)) < 0$ , para todo  $x \in \mathcal{K}$ . Conclui-se então que existe  $\zeta > 0$  tal que

$$\dot{V}_N(x, \varphi(u)) < -\zeta < 0, \forall x \in \mathcal{K}. \quad (\text{B.17})$$

Portanto, para cada  $t \geq 0$ ,

$$V_N(x(t)) - V_N(x_0) = \int_0^t \dot{V}_N(x(s), \varphi(u(s))) ds < -\zeta t.$$

Consequentemente, para  $t$  grande o suficiente, tem-se  $V_N(x(t)) < 0$ , que é uma contradição.

Portanto, toda a trajetória  $x(t) \in \mathcal{E}(N)$  converge para  $\mathcal{E}(P)$  em tempo finito e nele permanece confinada. Ou seja,  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto  $\text{UB}_{\mathcal{D}}$  local para o sistema (4.7), com  $\mathcal{D} \triangleq \mathcal{E}(N)$ .

Considere (Khalil, 2002):

$$\lambda_{\min}(P) \|x(t)\|^2 \leq x(t)' P x(t) \leq \lambda_{\max}(P) \|x(t)\|^2. \quad (\text{B.18})$$

Então, a partir de (B.18), tem-se:

$$x(t)' P x(t) \leq 1 \Rightarrow \lambda_{\min}(P) \|x(t)\|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \|x(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(P)}. \quad (\text{B.19})$$

o que garante que a elipse  $\mathcal{E}(P) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; V_P(x(t)) \leq 1\}$  está incluída em uma esfera de diâmetro  $\bar{\gamma}$ .

Por outro lado,  $\frac{1}{\lambda_{\min}(P)}$  é, por definição, o raio maior do elipsóide  $\mathcal{E}(P)$ . Logo,

$$\bar{\gamma} \triangleq \sup_{x(t) \in \mathcal{E}(P)} \|x(t)\|^2 = \frac{1}{\lambda_{\min}(P)},$$

sendo  $\bar{\gamma}$ , portanto, a constante  $\text{UB}_{\mathcal{D}}$ .

Seja  $\mathcal{E}(P, c) \subset \mathcal{E}(N)$ , com  $c > 1$ , então:

$$\mathcal{E}(P) \subset \mathcal{E}(N) \Leftrightarrow x(t)' N x(t) < x(t)' P x(t),$$

logo:

$$\lambda_{\min}(N) \|x(t)\|^2 \leq x(t)' N x(t) < x(t)' P x(t) \leq \lambda_{\max}(P) \|x(t)\|^2. \quad (\text{B.20})$$

Então, a partir de (B.20), tem-se:

$$x(t)' P x(t) \leq 1 \Rightarrow \lambda_{\min}(N) \|x(t)\|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \|x(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(N)}. \quad (\text{B.21})$$

Por definição,  $\frac{1}{\lambda_{\min}(N)}$  é o raio maior do elipsóide  $\mathcal{E}(N)$ , então (B.21)

garante que  $\mathcal{E}(P)$  está incluído em  $\mathcal{E}(N)$ . Logo,

$$\bar{\gamma} < \frac{1}{\lambda_{\min}(N)}.$$

■



# Apêndice C

## Exemplo - matrizes $\Delta$

Considere um sistema com duas entradas de controle,  $m = 2$ , na Tabela C.1 são mostradas como seriam as matrizes  $\Delta_{1,\theta} \forall j \{1, \dots, 4\}$  obtidas para todas as combinações entre os valores de  $\theta_i \forall i \{1, \dots, m\}$ .

Tabela C.1: Exemplo matriz  $\Delta$ .

$\theta; i \in \{1,2\}$	1	2	3	4
1	$\Delta_{1,\theta} = \text{diag}(1, 1)$ $\Delta_{2,\theta} = \Delta_{3,\theta} = \Delta_{4,\theta} = \text{diag}(0, 0)$	$\Delta_{1,\theta} = \text{diag}(0, 1)$ $\Delta_{2,\theta} = \text{diag}(1, 0)$ $\Delta_{3,\theta} = \Delta_{4,\theta} = \text{diag}(0, 0)$	$\Delta_{1,\theta} = \text{diag}(0, 1)$ $\Delta_{3,\theta} = \text{diag}(1, 0)$ $\Delta_{2,\theta} = \Delta_{4,\theta} = \text{diag}(0, 0)$	$\Delta_{1,\theta} = \text{diag}(0, 1)$ $\Delta_{4,\theta} = \text{diag}(1, 0)$ $\Delta_{2,\theta} = \Delta_{3,\theta} = \text{diag}(0, 0)$
2	$\Delta_{2,\theta} = \text{diag}(0, 1)$ $\Delta_{1,\theta} = \text{diag}(1, 0)$ $\Delta_{3,\theta} = \Delta_{4,\theta} = \text{diag}(0, 0)$	$\Delta_{2,\theta} = \text{diag}(1, 1)$ $\Delta_{1,\theta} = \Delta_{3,\theta} = \Delta_{4,\theta} = \text{diag}(0, 0)$	$\Delta_{2,\theta} = \text{diag}(0, 1)$ $\Delta_{3,\theta} = \text{diag}(1, 0)$ $\Delta_{1,\theta} = \Delta_{4,\theta} = \text{diag}(0, 0)$	$\Delta_{2,\theta} = \text{diag}(0, 1)$ $\Delta_{4,\theta} = \text{diag}(1, 0)$ $\Delta_{1,\theta} = \Delta_{3,\theta} = \text{diag}(0, 0)$
3	$\Delta_{3,\theta} = \text{diag}(0, 1)$ $\Delta_{1,\theta} = \text{diag}(1, 0)$ $\Delta_{2,\theta} = \Delta_{4,\theta} = \text{diag}(0, 0)$	$\Delta_{3,\theta} = \text{diag}(0, 1)$ $\Delta_{2,\theta} = \text{diag}(1, 0)$ $\Delta_{1,\theta} = \Delta_{4,\theta} = \text{diag}(0, 0)$	$\Delta_{3,\theta} = \text{diag}(1, 1)$ $\Delta_{1,\theta} = \Delta_{2,\theta} = \Delta_{4,\theta} = \text{diag}(0, 0)$	$\Delta_{3,\theta} = \text{diag}(0, 1)$ $\Delta_{4,\theta} = \text{diag}(1, 0)$ $\Delta_{1,\theta} = \Delta_{2,\theta} = \text{diag}(0, 0)$
4	$\Delta_{4,\theta} = \text{diag}(0, 1)$ $\Delta_{1,\theta} = \text{diag}(1, 0)$ $\Delta_{2,\theta} = \Delta_{3,\theta} = \text{diag}(0, 0)$	$\Delta_{4,\theta} = \text{diag}(0, 1)$ $\Delta_{2,\theta} = \text{diag}(1, 0)$ $\Delta_{1,\theta} = \Delta_{3,\theta} = \text{diag}(0, 0)$	$\Delta_{4,\theta} = \text{diag}(0, 1)$ $\Delta_{3,\theta} = \text{diag}(1, 0)$ $\Delta_{1,\theta} = \Delta_{2,\theta} = \text{diag}(0, 0)$	$\Delta_{4,\theta} = \text{diag}(1, 1)$ $\Delta_{1,\theta} = \Delta_{2,\theta} = \Delta_{3,\theta} = \text{diag}(0, 0)$

# Referências Bibliográficas

- Alamo, T., Cepeda, A., Fiacchini, M., e Camacho, E. (2009). Convex invariant sets for discrete-time Lur'e systems. *Automatica*, Vol. 45, No. 4, pp. 1066–1071.
- Andrieu, V., Prieur, C., Tarbouriech, S., e Arzelier, D. (2011). Global asymptotic stabilization of systems satisfying two different sector conditions. *Systems & Control Letters*, Vol. 60, No. 8, pp. 570–578.
- Asaff, Y. (2006). Desenvolvimento de um sistema servopneumático para regulação de velocidade de turbinas em pequenas centrais hidrelétricas. Dissertação de Mestrado, Florianópolis, Brasil: Universidade Federal de Santa Catarina.
- Bourgat, C. e Tarbouriech, S. (1992). Global stability of a class of systems with saturated controls. *International Journal of Systems and Science, Oxford*, Vol. 23pp. 37–56.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., e Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Studies in Applied Mathematics.
- Castelan, E., Tarbouriech, S., e Queinnec, I. (2008). Control design for a class of nonlinear continuous-time systems. *Automatica*, Vol. 44, No. 8, pp. 2034–2039.
- Chen, C.-T. (1998). *Linear system theory and design*. Oxford University Press, Inc.
- Dilda, V. e Castelan, E. (2013). An approach for tracking analysis for linear systems with dead-zone nonlinearity applied to a hydraulic actuator. Proc. *Anais do XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente e Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*.

- Dilda, V., Jungers, M., e Castelan, E. (2013). Uniformly ultimate boundedness analysis and synthesis for linear systems with dead-zone in the actuator. *Submetido para publicação no International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol.
- Dilda, V., Reginatto, R., e Castelan, E. (2012). Análise e síntese ultimate boundedness para sistemas com zona morta no atuador. *Proc. Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 1262–1267.
- Durieu, C., Polyak, B., e Walter, E. (1996). Trace versus determinant in ellipsoidal approximation with application to state estimation. *Proc. Proceedings of the 13th Triennial IFAC World Congress, San Francisco*, Vol. 1, pp. 43–48.
- Ebenbauer, C. e Allgower, F. (2007). Stability analysis of constrained control systems: an alternative approach. *Systems & Control*, Vol. 56, No. 2, pp. 93–98.
- Fiacchini, M. (2010). *Convex difference inclusions for systems analysis and control*. Tese de Doutorado, Sevilla, Spain: Universidad de Sevilla.
- Fong, I. e Hsu, C. (2000). State feedback stabilization of single input systems through actuators with saturation and deadzone characteristics. *Proc. Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia*, Vol. 4, pp. 3266–3271.
- Gomes da Silva Jr., J., J.M., Fischman, A., Tarbouriech, S., Dion, J. M., e Dugard, L. (1997). Synthesis of state feedback for linear systems subject to Control saturation by an LMI-based approach. *Proc. Proceedings of 2nd IFAC Workshop on Robust Control Design (ROCOND'97), Budapest, Hungary*, pp. 229–234.
- Gomes da Silva Jr., J., Paim, C., e Castelan, E. (2001). Stability and stabilization of linear discrete-time system subject to control saturation. *Proc. Proceedings of 1st IFAC Symp. on System Structure and Control (SSSC'01), Prague, Czech Republic*.
- Gomes da Silva Jr., J. e Tarbouriech, S. (1999a). Invariance and contractivity of polyhedra for linear continuous-time systems with saturating controls. *Revista Controle & Automação*, Vol. 10, No. 3, pp. 149–156.
- Gomes da Silva Jr., J. e Tarbouriech, S. (1999b). Polyhedral regions of local asymptotic stability for discrete time linear systems with saturating controls. *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 44, No. s.n., pp. 2081–2086.

- Gomes da Silva Jr., J. e Tarbouriech, S. (2001). Local stabilization of discrete-time systems with saturating control: an LMI based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, No. 1, pp. 119–125.
- Gonzaga, C. A., Jungers, M., e Daafouz, J. (2012). Stability analysis of discrete-time lur'e systems. *Automatica*, Vol. 49, No. 1, pp. 2277–2283.
- Hsu, C. e Fong, I. (2001). Ultimate boundedness control of linear systems with band-bounded nonlinear actuators and additive measurement noise. *Systems & Control Letters*, Vol. 43, No. 5, pp. 329–336.
- Hu, T. e Lin, Z. (2001). *Control systems with actuator saturation. Analysis and design*. Birkhäuser.
- Hu, T., Lin, Z., e Chen, B. (2002). An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, Vol. 38, No. s.n., pp. 315–359.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear systems*, Vol. 3. Prentice Hall.
- Lewis, F., Tim, W., Wang, L., e Li, Z. (1999). Deadzone compensation in motion control systems using adaptive fuzzy logic control. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, Vol. 7, No. 6, pp. 731–742.
- Linsingen, I. (2003). *Fundamentos de Sistemas Hidráulicos*. Editora da UFSC.
- Löfberg, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. Proc. *IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, Taiwan*, pp. 284–289.
- Merritt, H. E. (1967). *Hydraulic control systems*. Wiley New York.
- Milhomem, R. (2013). Análise e síntese de sistemas sujeitos a uma classe de perturbações limitadas e aplicações. Dissertação de Mestrado, Florianópolis, Brasil: Universidade Federal de Santa Catarina.
- Molchanov, A. e Pyatnitskii, E. (1989). Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. *Systems & Control Letters*, Vol. 13, No. s.n., pp. 59–64.
- Oh, J., Drincic, B., e D.S., B. (2009). Nonlinear feedback models of hysteresis. *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 29, No. 1, pp. 100–119.
- Paim, C. (2003). *Análise e controle de sistemas lineares sob saturação*. Tese de Doutorado, Florianópolis, Brasil: Universidade Federal de Santa Catarina.

- Paim, C., Tarbouriech, S., Gomes da Silva Jr., J., e Castelan, E. (2002). New conditions for determining stability regions for linear systems with saturating actuator. *Proc. Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática, Natal, Brasil*, pp. 2433–2437.
- Pomar, M., Silveira, H., e Castelan, E. (2012). Condições LMIs para análise e síntese de sistemas lineares sujeitos a uma classe de perturbações limitadas. *Proc. Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 2461–2466.
- Schneider, R. e Hitchcox, A. (1998). Fluid power technology shapes industry worldwide. *Hydraulics and pneumatics, United States of America : Penton publishing*, Vol. 51, No. 3, pp. 59–122.
- Selmić, R. e Lewis, F. (1998). Deadzone compensation in nonlinear systems using neural networks. *IEEE Conference Decision Control*, Vol. pp. 513–519.
- Selmić, R. e Lewis, F. (2000). Deadzone compensation in motion control systems using neural networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 4, pp. 602–613.
- Skelton, R. E., Iwasaki, T., e Grigoriadis, K. (1998). *A unified algebraic approach for linear control design*. Taylor and Francis.
- Slotine, J.-J. e Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall.
- Sussmann, H. J., Sontag, E. D., e Y., Y. (1994). A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39pp. 2411–2425.
- Tao, G. e Kokotović, P. (1994). Adaptive control of plants with unknown dead-zones. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 1, pp. 59–68.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr, J., e Queinnec, I. (2011a). *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer-Verlag London.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., e Langouet, P. (2004). Anti-windup strategy with guaranteed stability for linear systems with amplitude and dynamics restricted actuator. *Proc. Proceedings of 6th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems (NOL-COS'04), Stuttgart, Germany*.
- Tarbouriech, S., Prieur, C., e da Gomes da Silva Jr., J. (2006a). Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. *IEEE Transaction Automatic Control*, Vol. 51, No. 8, pp. 1364–1371.

- Tarbouriech, S., Queinnec, I., Alamo, T., Fiacchini, M., e Camacho, E. (2011b). Ultimate bounded stability and stabilization of linear systems interconnected with generalized saturated functions. *Automatica*, Vol. 47, No. 1, pp. 1473–1481.
- Tarbouriech, S., Queinnec, I., e Garcia, G. (2006b). Stability region enlargement through anti-windup strategy for linear systems with dynamics restricted actuator. *International Journal of System Science*, Vol. 37, No. 2, pp. 79–90.
- Tarbouriech, S., Queinnec, I., e Turner, M. (2009). Anti-windup design with rate and magnitude actuator and sensor saturations. Proc. *European Control Conference, ECC09*, pp. 330–335.
- Tarbouriech, S. e Turner, M. (2009). Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems. *IET Control Theory & Applications*, Vol. 3, No. s.n., pp. 1–19.
- Turner, M. (2006). Actuator deadzone compensation: theoretical verification of an intuitive control strategy. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings*, Vol. 153, No. 1, pp. 59–68.
- Valdiero, A., Guenther, R., De Pieri, E., e De Negri, V. (2007). Cascade control of hydraulically driven manipulators with friction compensation. *International Journal of Fluid Power*, Vol. 8, No. 1, pp. 7–16.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear systems Theory*. Prentice-Hall International Editions.
- Wong, L., Leung, F., e Tam, P. (2002). Stability analysis of systems with nonsymmetric dead zone under fuzzy logic control. Proc. *IECON 02 [Industrial Electronics Society, IEEE 2002 28th Annual Conference of the]*, Vol. 3, pp. 2114–2119. IEEE.
- Zhou, N., Liu, Y., e Tong, S. (2011). Adaptive fuzzy output feedback control of uncertain nonlinear systems with nonsymmetric dead-zone input. *Nonlinear Dynamics*, Vol. pp. 1–8.