

Victor Frederico Baumhardt Neto

**OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM SEMI-EIXO  
AUTOMOTIVO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.

Florianópolis  
2012

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Baumhardt Neto, Victor Frederico  
Otimização Geométrica de um Semi-Eixo Automotivo /  
Victor Frederico Baumhardt Neto ; orientador, Arcanjo  
Lenzi - Florianópolis, SC, 2012.  
137 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Semi-eixo homocinético. 3.  
Otimização. 4. Vibração. I. Lenzi, Arcanjo. II. Universidade  
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica. III. Título.

Victor Frederico Baumhardt Neto

## **OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM SEMI-EIXO AUTOMOTIVO**

Este (a) Dissertação/Tese foi julgado(a) adequado(a) para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica e aprovad(o)a em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 06 de Setembro de 2012.

---

Prof. Júlio César Passos, Dr. Eng.  
Coordenador do Curso

### **Banca Examinadora:**

---

Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Roberto Jordan, Dr. Eng.  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Lauro Cesar Nicolazzi, Dr. Eng.  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Fábio Fiates, Dr. Eng.  
Universidade do Sul de Santa Catarina



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à Ford Motor Company do Brasil pelo incentivo e suporte. Aos engenheiros John Saieg, Vitório Guarizo e Dênis Mestre Moreno por acreditarem neste projeto. Aos colegas do VTT, em especial o engenheiro Valdinei Sczibor, pelo suporte experimental.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D, pela paciência e disposição em orientar mesmo à distância. Ao doutorando Olavo Silva e aos professores do LVA, Roberto Jordan, Dr.Eng., e Samir N.Y. Gerges, Ph.D.

Aos meus pais, Vitor Baumhardt e Verônica Baumhardt, pelo exemplo e esforço com minha formação básica. Aos meus irmãos, Virgínia Baumhardt e Vinicius Baumhardt.

E por último agradeço à minha esposa Ana Paula por todo o incentivo. Tu fostes muito importante.



## RESUMO

O nível de desenvolvimento dos veículos atuais atingiu um grau de maturidade muito grande, agregando diversos recursos até há pouco tempo inalcançáveis. Por outro lado, este maior nível de conforto tornou os veículos mais suscetíveis aos níveis de ruídos, fazendo com que barulhos outrora imperceptíveis passassem a gerar desconforto e criar uma sensação de baixa qualidade. Para manter a competitividade no mercado, inúmeras soluções foram desenvolvidas nos últimos anos, com o objetivo de aumentar o conforto interno.

O semi-eixo homocinético é o componente responsável por transmitir o torque e a rotação do motor para as rodas do veículo. Consiste de uma barra com duas juntas que permitem a articulação em cada extremidade. Dependendo da sua configuração, a barra pode entrar em ressonância com a frequência de rotação do motor, gerando ruído no interior do veículo. Existem inúmeras alternativas para se contornar este problema, no entanto, a maior parte delas agrega custo.

Este trabalho busca desenvolver um semi-eixo para um veículo alterando o perfil de usinagem da barra com o objetivo de ajustar a sua frequência natural para uma faixa com baixo nível de vibração do motor. Inicialmente foi realizada uma análise modal de um semi-eixo montado em veículo para determinar as suas condições de contorno. A partir da resposta um modelo numérico em Elementos Finitos foi elaborado e sua geometria otimizada por Algoritmos Genéticos, com o objetivo de buscar a menor frequência natural possível.

A partir das respostas obtidas, um protótipo foi construído para validar o eixo otimizado.

**Palavras-chave:** Semi-eixo homocinético; otimização; vibração.



## ABSTRACT

The advancement stage from current vehicles has reached a very high maturity level, adding several features that could not be even expected a few years ago. On the other hand, this higher comfort level made vehicles more sensible to noise, allowing the passengers to identify sounds imperceptibles until then, resulting in discomfort and perception of low quality. To keep projects competitive, many solutions have been developed on the past few years with the proposal to increase the internal comfort.

The halfshaft is the component responsible to transmit torque and rotation from engine to the vehicle wheels. It basically consists of a bar with two joints at each end that allow the steering. Depending on its design, the bar can be in resonance with engine rotation frequency, resulting in noise inside the vehicle. Several solutions have been presented to overpass this issue, however, most of them result in cost increase.

The aim of this study is to develop a halfshaft for a vehicle changing the bar machining profile targeting the natural frequency to a range where engine provide lower level of excitation. Initially an experimental modal analysis of a halfshaft assembled at vehicle was performed to determinate real boundary conditions. From the values obtained, an Finite Element model was developed. Finally, the geometry was optimized using Genetic Algorithms, searching for the lowest natural frequencies.

From the obtained answers, a prototype was built to validate the optimized shaft.

**Key words:** Halfshaft; optimization; vibration.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Relações geométricas do conjunto biela – manivela. ....	33
Figura 2.2: Variação da posição em função de $\lambda$ .....	35
Figura 2.3: Variação da velocidade em função de $\lambda$ .....	36
Figura 2.4: Variação da aceleração em função de $\lambda$ .....	36
Figura 2.5: Variação da força causada pela combustão.....	39
Figura 2.6: Cilindros representados como vetores no plano central.....	40
Figura 2.7: Posição relativa dos cilindros. ....	41
Figura 2.8: Distribuição dos cilindros. ....	42
Figura 2.9: Nível de aceleração em função da rotação.....	44
Figura 2.10: Ilustração de uma junta universal do século XVI. ....	45
Figura 2.11: Semi-eixo homocinético: juntas ligadas por um eixo. ....	46
Figura 2.12: Vista explodida de uma junta fixa de esferas.....	47
Figura 2.13: Importância do deslocamento axial da junta deslizante. ....	48
Figura 2.14: Junta deslizante tripóide.....	49
Figura 2.15: Primeiro modo de vibração de um eixo. ....	50
Figura 2.16: Eixo longo dividido em duas seções mais curtas.....	51
Figura 2.17: Imagem em corte de um semi-eixo com eixo tubular. ....	52
Figura 2.18: Área de contato da massa adicionada . ....	53
Figura 2.19: Absorvedor de vibrações. ....	54
Figura 2.20: Espectro com absorvedor e sem absorvedor. ....	55
Figura 2.21: Disposição dos elementos piezoelétricos.....	56
Figura 2.22: Eixo de fibra de carbono.....	57
Figura 3.1: Análise modal analítica (a) e experimental (b). ....	62
Figura 3.2: Banda de meia potência. ....	65
Figura 3.3: Curva de estabilização. ....	66
Figura 3.4: Cadeia de instrumentação. ....	67
Figura 3.5: 5 pontos e discretização do eixo. ....	68
Figura 3.6: Espectro com 1 e 5 acelerômetros. ....	69
Figura 3.7: Sistema de coordenadas SAE. ....	69
Figura 3.8: Impacto no tempo e na frequência. ....	70
Figura 3.9: Variação da força no espectro da frequência. ....	71
Figura 3.10: Montagem para o ensaio livre-livre. ....	73
Figura 3.11: Curva de estabilização (livre-livre).....	73
Figura 3.12: Primeiro e segundo modos de flexão livre-livre. ....	74
Figura 3.13: Montagem para o ensaio em veículo. ....	76
Figura 3.14: Curva de estabilização montado no veículo.....	76
Figura 3.15: Primeiro modo de flexão do eixo montado em veículo. ...	77
Figura 4.1: Ilustração das teorias de viga. ....	82
Figura 4.2: Principais elementos sólidos. ....	83

Figura 4.3: Eixo utilizado no estudo de otimização. ....	84
Figura 4.4: Utilização de elemento de viga. ....	84
Figura 4.5: Malha na região do apoio. ....	85
Figura 4.6: Modelo Ansys comparado com o desenho 2D do eixo. ....	86
Figura 4.7: Eixo discretizado em elementos sólidos de 20mm. ....	87
Figura 4.8: Primeiro modo de flexão modal numérica livre-livre. ....	88
Figura 4.9: Junta como um apoio 2D com resistência para o eixo. ....	88
Figura 4.10: Furo de apoio na posição equivalente ao centro da junta. ....	89
Figura 4.11: Juntas representadas por mola e amortecedor. ....	89
Figura 4.12: Condições de contorno representadas por mola. ....	90
Figura 4.13: Primeiro modo de flexão modal numérica montado. ....	91
Figura 5.1: Representação gráfica de soluções locais e global. ....	96
Figura 5.2: Representação binária. ....	100
Figura 5.3: Método de seleção de indivíduos pela Roleta Giratória. ....	102
Figura 5.4: Operação de Cruzamento com 1 ponto de corte. ....	103
Figura 5.5: Operação de Cruzamento com 2 pontos de corte. ....	103
Figura 5.6: Operação de Mutação. ....	104
Figura 5.7: Cruzamento direcional. ....	107
Figura 5.8: Eixo seccionado utilizado. ....	108
Figura 5.9: Problema de otimização no modeFrontier. ....	110
Figura 5.10: Distribuição de indivíduos. ....	111
Figura 5.11: Convergência da resposta ao longo das interações. ....	112
Figura 5.12: Distribuição dos raios. ....	113
Figura 5.13: Diagrama de corpo livre de um eixo bi-apoiado. ....	114
Figura 5.14: Eixo com dois ressalto. ....	114
Figura 5.15: Problema de otimização do eixo com 2 ressalto. ....	116
Figura 5.16: Convergência da resposta ao longo das interações 1. ....	117
Figura 5.17: Convergência da resposta ao longo das interações 2. ....	118
Figura 5.18: Raio dos indivíduos com a melhor resposta. ....	119
Figura 5.19: Região com indivíduos válidos. ....	120
Figura 5.20: Distribuição das respostas do ressalto esquerdo. ....	121
Figura 5.21: Distribuição das respostas do ressalto direito. ....	121
Figura 5.22: Eixo otimizado. ....	122
Figura 5.23: Problema no modeFrontier. ....	123
Figura 5.24: Resposta aproximada por uma superfície polinomial. ....	124
Figura 5.25: Resposta aproximada por uma superfície Gaussiana. ....	125
Figura 5.26: Superfície Gaussiana 3D. ....	126
Figura 6.1: Esboço do protótipo. ....	127
Figura 6.2: Protótipo usinado. ....	128
Figura 6.3: Protótipo montado em veículo com instrumentação. ....	128
Figura 6.4: Curva de estabilização: 1º modo em 110,2Hz. ....	129

Figura 6.5: Simulação numérica do protótipo montado em veículo.... 129



## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Força de inércia resultante no ciclo de combustão. ....	38
Tabela 2.2: Valores para um motor 4 cilindros e 4 tempos. ....	43
Tabela 3.1: Frequências para modelos analíticos. ....	75
Tabela 3.2: Modos do eixo montado no veículo. ....	77
Tabela 4.1: Propriedades do material. ....	87
Tabela 4.2: Propriedades do modelo. ....	91



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$r$	Raio do virabrequim de um motor alternativo
$s$	Deslocamento do pistão de um motor alternativo
$l$	Comprimento da biela de um motor alternativo
$v$	Velocidade do pistão de um motor alternativo
$\lambda$	Relação de comprimentos entre manivela / biela
$a$	Aceleração do pistão de um motor alternativo
$s_0$	Soma do comprimento da biela e raio do virabrequim
$s_x$	Soma do comprimento da biela e raio do virabrequim após uma rotação de $\varphi$ graus
$\varphi$	Ângulo de rotação do virabrequim com o eixo do cilindro
$\psi$	Ângulo de inclinação da biela com o eixo do cilindro
$s$	Deslocamento do pistão
$\omega_v$	Velocidade angular do virabrequim
$v$	Velocidade do pistão
$a$	Aceleração de um pistão
$F_i$	Força de inércia de um pistão
$m_p$	Massa de um pistão
$F_e$	Força de um pistão gerada pela queima do combustível
$p(\varphi)$	Pressão de um cilindro em função do ângulo de rotação do virabrequim

$A$	Área de um pistão
$\varphi_i$	Ângulo do $i$ ésimo cilindro em relação ao plano dos cilindros
$\varphi_{i1}$	Ângulo relativo entre o $i$ ésimo cilindro e o primeiro cilindro
$d_i$	Distância entre dois pistões vizinhos
$M$	Momento resultante sobre o motor gerado pelas forças dos cilindros
$n_c$	Número de cilindros de um motor
$RPM$	Rotações por minuto no eixo de um motor
$f$	Frequência resultante de excitação de um motor 4 cilindros 4 tempos
$k_{eq}$	Constante de mola equivalente do eixo em flexão
$m_{eq}$	Massa equivalente distribuída do eixo
$E$	Módulo de elasticidade de um material
$I$	Momento de inércia da seção transversal
$I_{maciço}$	Momento de inércia de um eixo de seção circular
$I_{tubular}$	Momento de inércia de um eixo de seção tubular
$\rho$	Densidade
$l_e$	Comprimento de eixo
$r_m$	Raio externo de um eixo maciço
$r_e$	Raio externo de um eixo tubular
$r_i$	Raio interno de um eixo tubular

$m_{maciço}$	Massa de um eixo maciço
$m_{tubular}$	Massa de um eixo maciço
$[M]$	Matriz de massa de um sistema discretizado
$[K]$	Matriz de rigidez de um sistema discretizado
$[C]$	Matriz de amortecimento de um sistema discretizado
$\lambda_r$	Frequência natural ao quadrado do modo $r$ de um sistema discretizado
$\omega$	Frequência de um sistema discretizado
$\vec{X}$	Vetor de deslocamento dos elementos de um sistema discretizado
$\vec{F}$	Vetor de força de excitação de um sistema discretizado
$[\alpha(\omega)]$	Resposta no vetor $\vec{X}$ causada pelos efeitos individuais da força aplicada $\vec{F}$
$N$	Número de graus de liberdade de um sistema discretizado
${}_r\phi_j$	Amplitude na resposta no ponto $j$
${}_r\phi_k$	Amplitude na excitação no ponto $k$
$S_{xx}$	Densidade espectral de potência da resposta
$S_{ff}$	Densidade espectral de potência da excitação
$S_{fx}$	Densidade espectral cruzada da força pela excitação
$S_{xf}$	Densidade espectral cruzada da excitação pela força

$H_1(\omega)$	Estimador de frequência $H_1$
$H_2(\omega)$	Estimador de frequência $H_2$
$\gamma^2(\omega)$	Coerência
$\zeta$	Coefficiente de amortecimento
$f_p$	Frequência natural de pêndulo
$g$	Gravidade
$L_p$	Comprimento de um pêndulo
$\omega_n$	Frequência natural [rad/seg]
$f_n$	Frequência natural [Hz]
$A_e$	Área da seção transversal de um eixo
$V$	Sequência de <i>bits</i> que define um valor de um indivíduo
$m$	Número de bits de uma sequência $V$
$D$	Sequência de <i>bits</i> que define todos os valores de um indivíduo
$n_v$	Número de sequências $V$ que definem uma sequência $D$
$N_c$	Número de intervalos que uma variável pode ser discretizada com $m$ bits
$j$	Valor traduzido a partir de uma sequência binária
$X^1$	Primeira geração em um processo de cruzamento
$X^2$	Segunda geração em um processo de cruzamento
$Ind_j$	Novo indivíduo da operação de Cruzamento Direcional

<i>Ind<sub>p</sub></i>	Indivíduo pai da operação de Cruzamento Direcional
<i>Ind<sub>m</sub></i>	Indivíduo mãe da operação de Cruzamento Direcional
<i>t</i>	Uma geração de referência na operação de Cruzamento Direcional
<i>Input 1 - 15</i>	Diâmetros dos do eixo no modelo Eixo Seccionado do estudo de otimização (15 posições)
<i>Pos<sub>e</sub> / Pos<sub>d</sub></i>	Posição do ressalto (esquerda e direita) em relação a extremidade do eixo no modelo Eixo com Dois Ressaltos
<i>Lar<sub>e</sub> / Lar<sub>d</sub></i>	Largura do ressalto (esquerda e direita) no modelo Eixo com Dois Ressaltos
<i>Dia<sub>e</sub> / Dia<sub>d</sub></i>	Diâmetro do ressalto (esquerda e direita) no modelo Eixo com Dois Ressaltos



# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>25</b>
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>31</b>
2.1 MOTORES DE COMBUSTÃO INTERNA.....	31
2.1.1 Forças de Inércia .....	33
2.1.2 Forças geradas pela combustão .....	39
2.1.3 Análise de vibração de um motor 4 cilindros e 4 tempos .....	40
2.2 SISTEMA DE TRANSMISSÃO POR SEMI-EIXOS HOMOCINÉTICOS .....	45
2.2.1 Junta Fixa .....	47
2.2.2 Junta Deslizante.....	47
2.2.3 Eixo Interconector .....	49
2.2.3.1 Variação de comprimento .....	50
2.2.3.2 Eixo tubular .....	52
2.2.3.3 Adição de massa .....	53
2.2.3.4 Adição de absorvedores dinâmicos.....	54
2.2.3.5 Controle ativo de vibração no eixo .....	55
2.2.3.6 Utilização de materiais alternativos .....	56
2.3 PROPOSTA DE TRABALHO: OTIMIZAÇÃO DO PERFIL DE USINAGEM DE UM EIXO HOMOCINÉTICO .....	57
<b>3. ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL.....</b>	<b>59</b>
3.1 ANÁLISE MODAL NUMÉRICA.....	59
3.2 ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL .....	62
3.2.1 Métodos de identificação modal.....	63
3.3 ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL DE SEMI-EIXO.....	66
3.3.1 Cadeia de instrumentos.....	67
3.3.2 Ajustes de parâmetros .....	71
3.3.3 Modelo livre-livre (free-free) .....	71
3.3.4 Modelo com condições de contorno (montado no veículo)..	74
<b>4. ANÁLISE MODAL NUMÉRICA (MEF) .....</b>	<b>79</b>
4.1 ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS .....	79
4.2 PROBLEMA DE ANÁLISE MODAL DE SEMI-EIXO .....	83

4.3	MODELO LIVRE-LIVRE .....	85
4.4	MODELO COM CONDIÇÕES DE CONTORNO (MONTADO NO VEÍCULO) .....	88
<b>5.</b>	<b>OTIMIZAÇÃO .....</b>	<b>93</b>
5.1	FORMULAÇÃO DE UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO .....	93
5.2	MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO .....	95
5.2.1	Métodos Determinísticos .....	96
5.2.2	Métodos Estocásticos .....	97
5.3	ALGORITMOS GENÉTICOS .....	98
5.3.1	Geração inicial / conjunto de pontos iniciais .....	100
5.3.2	Aptidão dos indivíduos .....	101
5.3.3	Seleção de indivíduos .....	101
5.3.4	Operação de Cruzamento (Crossover) .....	102
5.3.5	Mutação .....	103
5.3.6	Seleção / Reprodução .....	104
5.3.7	Líder da população .....	104
5.3.8	Critério de parada .....	104
5.4	APLICAÇÃO DE ALGORITMO GENÉTICO NA OTIMIZAÇÃO DE UM SEMI-EIXO .....	105
5.4.1	MOGA II .....	105
5.4.2	Etapa I: Otimização de um eixo seccionado .....	107
5.4.3	Etapa II: Otimização de um eixo com dois ressaltos .....	114
5.4.4	Análise da resposta em todo o intervalo .....	122
<b>6.</b>	<b>VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL .....</b>	<b>127</b>
<b>7.</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>131</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>135</b>

## 1. INTRODUÇÃO

O veículo moderno deixou de ser apenas um meio de transporte para carga e passageiros. Ele deve ser atraente: um local onde o condutor e passageiros tenham vontade de estar. Para tanto, novos equipamentos opcionais são adicionados constantemente e o nível de conforto é cada vez maior. Estas duas características, somadas a um preço competitivo, são vitais para que um projeto se mantenha competitivo.

O nível de ruído percebido pelos passageiros no interior do veículo influencia diretamente na sua percepção sobre a qualidade do produto, o que tem feito a indústria automotiva investir no desenvolvimento de novas tecnologias. Inúmeras inovações têm sido aplicadas, desde películas absorvedoras entre as lâminas do pára-brisa, que auxiliam na redução de ruídos, passando por novos desenvolvimentos que melhoram a qualidade da combustão interna nas câmaras do motor, pneus mais silenciosos a até sofisticados dispositivos de controle ativo de ruído.

Enquanto que para a maior parte dos veículos é esperado que apresentem baixos níveis de ruído, existem alguns segmentos específicos que necessitam de um comportamento diferenciado, como os veículos esportivos. Uma pessoa que dirige este tipo de carro espera ouvir o som do motor bastante presente gerado pela alta potência do motor. Por outro lado, não existem divisões onde o ocupante ficará satisfeito com ruídos causados pela transmissão, por fluxo de ar ou pela fricção entre componentes. Estes ruídos são sempre indesejados e contribuem para uma percepção de baixa qualidade do projeto, fazendo com que o consumidor o rejeite e dê preferência a outros veículos que apresentem melhor desempenho acústico.

O principal contribuinte para os problemas vibroacústicos do veículo é o motor. Este, com o movimento alternado de altas magnitudes de pressão dos pistões geradas pela combustão nas câmaras, é a maior fonte de vibrações de todo o veículo. O sistema de Drive Train, responsável por transmitir a potência gerada pelo motor até o solo (GILLESPIE, 1992), também desempenha um papel muito importante e sensível no comportamento vibroacústico do veículo. Inúmeros acoplamentos, transmissões, eixos e pequenos componentes estão em movimento, o que os torna fontes de vibração e, conseqüentemente, de ruído. Como exemplo, pode-se tomar a vibração gerada pelos dentes de engrenagem de um diferencial ou o desbalanceamento de um eixo cardan em alta velocidade. Além de fontes, eles podem ainda atuar

transmitindo ou até mesmo amplificando as vibrações geradas pelo motor aos demais componentes e sistemas do carro. Além dos ruídos ocasionados pelo motor e drive train, existem ainda os ocasionados pelo movimento do veículo, o que são muito dependentes das condições do pavimento, da suspensão e da aerodinâmica do automóvel.

O ruído percebido no interior do veículo associado ao motor e à transmissão pode ser dividido em dois grupos: 1- a vibração e ruído irradiados diretamente pelo próprio sistema; 2- vibração e ruído transmitidos pela estrutura do veículo. Por serem feitos de metal, os automóveis e seus componentes facilmente conduzem a energia em forma de vibração da fonte até pontos específicos como painéis de lataria, que acabam transformando esta vibração em ruído. Além da estrutura metálica, cavidades de ar também transmitem a energia vibro-acústica, atuando como ligação entre a fonte e os ocupantes. Estima-se que, para problemas de baixa frequência, em geral abaixo de 700 Hz, apenas 20% da energia seja transmitida via ar, sendo a estrutura a grande responsável pela transmissão da vibração da fonte aos ocupantes (FAHY, 1985).

Outra contribuição que os componentes da transmissão podem dar à degradação da qualidade acústica percebida no interior do veículo é pela amplificação das frequências geradas pelo motor. Caso a frequência natural de algum dos elementos da transmissão coincida com alguma gerada pelo motor, pelos dentes de engrenagem da caixa de marchas ou qualquer outra fonte de vibração, esta estrutura certamente elevará o nível de energia que será repassada aos demais componentes. A fim de se evitar tal fenômeno, deve-se impedir o casamento de frequências da fonte com frequências naturais de componentes no caminho de propagação. Em muitos casos, para que isso seja possível, é necessário adicionar massas ou absorvedores dinâmicos com o intuito de alterar a frequência natural do componente em ressonância.

Para que se possa projetar um componente da forma mais otimizada possível, é preciso conhecer com detalhes as suas condições de trabalho. É importante que se conheçam os sistemas com os quais este irá interagir e as características dos mesmos. No caso de componentes que façam parte do Drive Train, é imprescindível conhecer os tipos, as magnitudes e as faixas de frequência das vibrações que o motor irá gerar. Embora o motor esteja apoiado sobre coxins, ficando isolado do chassi, muitas das vibrações podem ser transmitidas à carroceria por meio de elementos do drive train, caso este não seja apropriadamente dimensionado. Em casos extremos, as vibrações poderão causar ressonâncias de partes do sistema de transmissão,

elevando ainda mais as amplitudes das vibrações e agravando a percepção que os ocupantes tem no interior do veículo.

Uma vez que se tenha conhecimento das fontes de vibração dos componentes ao quais estão acoplados, costuma-se iniciar o projeto de componentes específicos com o auxílio de métodos numéricos como Elementos Finitos. Após um conceito inicial, protótipos são fabricados e verificados em testes em veículos. Esta metodologia também pode ser estendida à veículos que já estejam em produção. Neste caso, busca-se resolver problemas até então não identificados, redução de custos ou simplesmente aplicar uma melhoria ao projeto do veículo.

Um dos componentes do sistema drive train que pode significativamente afetar o comportamento vibro-acústico do veículo é o semi-eixo homocinético. É o responsável por transmitir a potência da saída do diferencial ao cubo de roda, entregando torque e velocidade às rodas. Seu projeto básico é composto de um eixo interconector com duas juntas nas extremidades. São estas juntas que permitem o semi-eixo acompanhar os movimentos da suspensão e do sistema de esterçamento das rodas. O eixo interconector possui duas formas construtivas básicas: maciça ou tubular. Enquanto que o custo de produção de um eixo maciço é menor, este também possui menor momento de inércia de área e maior massa, o que torna a frequência do primeiro modo de flexão menor em comparação ao tubular.

O semi-eixo é continuamente excitado pelo efeito combinado de diversas fontes de vibração. A excitação é aplicada através da junta deslizante que é presa à transmissão, e geralmente é originada pela vibração da combustão nas câmaras do motor, embora outros fatores, como a vibração gerada pelos dentes do diferencial também possam ser significativos. A resposta do eixo é determinada pelo seu comprimento, diâmetro, material e condições de contorno e, teoricamente, possui um grande número de modos de vibração. No entanto, é o primeiro modo de flexão que gera a maior parte dos problemas de ressonância do semi-eixo (FARNHAM, 1963).

Quando a frequência de excitação atinge a frequência do primeiro modo de flexão do eixo interconector, a amplitude no centro da barra atinge o valor máximo. Embora a amplitude da vibração seja significativamente grande, o eixo interconector em si não causa qualquer problema acústico no veículo. Isto ocorre porque a superfície do eixo não emite uma quantidade significativa de energia sonora. Por outro lado, esta energia de vibração é transmitida a outros sistemas do veículo que são excitados pela ressonância do semi-eixo (MELLO, 2003). Observa-se, assim, que o ponto chave não é a amplitude de vibração do

eixo, mas sim a força que este transmite ao cubo de roda no qual está montado.

Tipicamente, o eixo maciço é feito a partir de uma barra trefilada que é usinada em pontos específicos como o encaixe das coifas e redução do diâmetro no melhor ponto para ocorrer a fratura (fusível). As demais regiões permanecem com o diâmetro bruto.

Este trabalho descreve o desenvolvimento de um semi-eixo maciço para um veículo de passeio buscando-se reduzir ao máximo a frequência natural alterando-se o perfil de usinagem do eixo. O trabalho se dará sobre um automóvel Ford Ka, comercializado no Brasil. Este veículo representa bem as características da grande maioria dos veículos, com tração dianteira e motor quatro cilindros / ciclo Otto quatro tempos, transversal, caixa de transmissão manual de 5 marchas e suspensão dianteira independente do tipo McPherson. Este é um veículo que já está em produção e possui um semi-eixo maciço próprio.

O trabalho pode ser dividido em três etapas principais: caracterização do semi-eixo montado em veículo através de análise modal experimental, criação de modelo numérico em CAE e otimização por algoritmos genéticos. Os tópicos deste estudo foram agrupados em capítulos conforme segue:

#### Capítulo 2: Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresenta o motor como a principal fonte de vibração do veículo. Através de relações trigonométricas, descreve a origem destas excitações, suas amplitudes, frequências e a relação que possuem com a velocidade de rotação do eixo virabrequim. Em seguida apresenta o semi-eixo e descreve cada um de seus componentes. Por último, demonstra como a vibração do motor pode excitar o semi-eixo e quais as principais ferramentas utilizadas pela indústria automotiva para amenizar este problema, além dos recentes estudos com novas alternativas.

#### Capítulo 3: Análise modal experimental

Neste capítulo a análise modal experimental é apresentada como ferramenta para caracterizar o comportamento dinâmico de um sistema quando este vibra. Em seguida é descrita a análise realizada em um semi-eixo em condição livre-livre e montado em veículo, detalhando todos os parâmetros com que estes ensaios foram realizados. Os resultados são utilizados no capítulo seguinte para gerar um modelo numérico.

#### Capítulo 4: Análise modal numérica

Neste capítulo o método numérico por Elementos Finitos é apresentado e aplicado para representar o semi-eixo montado no veículo

utilizando os dados da análise modal experimental como referência. Os resultados são utilizados no capítulo seguinte no estudo de otimização.

#### Capítulo 5: Otimização numérica

Este capítulo faz uma revisão das metodologias de otimização, descrevendo em detalhes os métodos por Algoritmos Genéticos. Em seguida aplica estes conceitos no estudo de otimização do semi-eixo buscando a menor frequência natural alterando a sua geometria externa.

#### Capítulo 6: Validação experimental

Neste capítulo um protótipo é construído e submetido a uma nova análise modal em veículo para validar a proposta. Os resultados são comparados com a resposta encontrada no estudo de otimização.

#### Capítulo 7: Conclusões

No capítulo 7 são finalmente apresentadas as conclusões e sugestões de trabalhos futuros.



## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 MOTORES DE COMBUSTÃO INTERNA

Automóveis movidos por motores têm sido construídos há mais de cem anos. As evoluções observadas na aparência dos veículos são surpreendentes até mesmo para um leigo. Por outro lado, as mudanças na aparência dos motores tem sido mínimas. As semelhanças nas dimensões e disposição dos componentes entre os motores do passado e os modelos atuais escondem o avanço tecnológico ocorrido com o passar do tempo.

Ao longo dos anos, inúmeros conceitos completamente novos de motores foram propostos. No final dos anos 40, Rover desenvolveu um veículo movido por uma turbina a gás, que mais tarde acabou se mostrando ineficiente para carros de passeio (BASSHUYSEN; SCHÄFER, 2004). Outro modelo famoso foi um motor a combustão interna com pistão rotativo desenvolvido por Felix Wankel nos anos 60. No entanto, inúmeros problemas conceituais e principalmente a dificuldade em obter um processo de fabricação que permitisse uma vedação eficaz entre o cilindro e a câmara, acabaram resultando em altas taxas de consumo de combustível e de emissões de gases poluentes. Apenas a fabricante Japonesa Mazda construiu alguns poucos modelos esportivos com este motor, porém sem muito sucesso.

A absoluta maioria dos motores de combustão interna atuais é derivada dos antigos motores a vapor, onde um conjunto biela-manivela transformava a pressão do vapor em movimento alternativo de um pistão e depois em rotativo. Estes motores a vapor, onde a energia de um fluido (tanto gasoso quanto líquido) é transformada em um movimento de deslocamento alternado, são conhecidos como motores alternativos. Os motores de combustão interna obedecem ao mesmo princípio, no entanto, a energia do vapor dá lugar à energia da queima da mistura ar e combustível que é convertida em energia mecânica.

Devido à sua complexidade, os motores de combustão interna alternativos possuem muitas variações, o que permite que sejam classificados de diversas maneiras, como:

- processo de combustão (forçada ou espontânea)
- combustível
- ciclo de trabalho (4 tempos ou 2 tempos)
- sistema para gerar a mistura ar / combustível (interno ou externo)

- sistema de entrada do gás na câmara (janela ou válvula)
- alimentação (aspirada ou forçada)
- disposição dos cilindros (linha, V, W, radial, boxer, entre outros)
- sistema de ignição
- sistema de refrigeração (ar ou líquido)

Dentre as citadas acima, uma importante classificação é a do ciclo de trabalho. Tanto o motor 4 tempos quanto o 2 tempos possuem em comum o fato da compressão da mistura ar - combustível ocorrer na primeira etapa através da redução da câmara de combustão, seguida da ignição logo após o pistão alternar o sentido do movimento. Nos motores com ciclo de 2 tempos, a troca da mistura queimada por uma nova ocorre simultaneamente, próximo do ponto morto inferior, causado pela expulsão do gás queimado pela entrada de uma nova mistura. Durante este processo, ocorre uma pequena variação no volume de trabalho, o que faz com que as etapas de compressão e expansão não sejam aproveitadas por completo, elevando assim o consumo de combustível. Além do mais, embora não seja o único método disponível, a maior parte deste tipo de motores tem o óleo lubrificante adicionada ao combustível, que lubrifica as partes móveis enquanto é conduzido à câmara. Isso resulta na queima adicional do óleo, aumentando a emissão de gases nocivos ao meio ambiente, além de uma lubrificação deficiente se comparada à do motor 4 tempos.

Somando a isso o maior nível de ruído, os motores 2 tempos têm tido utilização cada vez menor na indústria automobilística, chegando ao ponto de praticamente não encontrar mais aplicação em função da ampla utilização de motores 4 tempos.

Por ser a principal fonte de energia do veículo, não é surpresa o fato que o motor também é a principal fonte geradora de vibração e ruído no automóvel. Por possuir inúmeros componentes em movimentos alternados e de rotação com diferentes velocidades, o motor acaba gerando excitações de alta amplitude em uma ampla faixa de frequência. Esta excitação é proveniente de duas forças principais: as geradas pela combustão da mistura ar - combustível e as resultantes da inércia dos componentes internos.

Os itens a seguir descrevem a origem de cada uma destas forças, demonstrando através de relações trigonométricas a contribuição que cada uma delas tem nas forças resultantes.

### 2.1.1 Forças de Inércia

Para que se possa entender a origem dos esforços em um motor, inicialmente será descrito o conjunto pistão – biela – manivela conforme mostra a Figura 2.1, sendo:

$r$ , o raio do virabrequim (manivela);

$s$ , o deslocamento do pistão;

$l$ , o comprimento da biela;

$v$ , a velocidade do pistão;

$$\lambda = \frac{r}{l}, \text{ a relação de comprimentos entre manivela / biela;} \quad (2.1)$$

$a$ , a aceleração do pistão;

$$s_0 = l + r; \quad (2.2)$$

$$s_x = r \cos \varphi + l \cos \psi; \quad (2.3)$$

$$s = s_0 - s_x; \quad (2.4)$$

$$s = l + r - (r \cos \varphi + l \cos \psi). \quad (2.5)$$

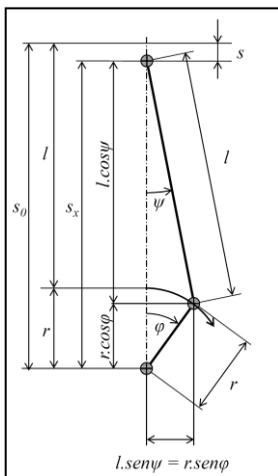


Figura 2.1: Relações geométricas do conjunto biela – manivela.

Aplicando-se relações de trigonometria e realizando algumas simplificações, o ângulo da biela  $\psi$  pode ser escrito em função do ângulo do virabrequim  $\varphi$  conforme segue:

$$\psi = \arctan\left(\frac{\lambda \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}\right). \quad (2.6)$$

Substituindo na Equação (2.5), tem-se:

$$s = r \left[ 1 - \cos \varphi + \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \right) \right]. \quad (2.7)$$

Considerando a expressão em série de potência,

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \dots, \quad (2.8)$$

onde  $x$  corresponde ao último termo da raiz da Equação (2.7), obtém-se:

$$x = \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi. \quad (2.9)$$

Como tipicamente  $\lambda \leq 0,35$  e  $\operatorname{sen} \varphi \ll 1$ , o produto destes resulta em um valor pequeno que ao ser elevado ao quadrado, torna-se ainda menor ( $\ll 1$ ). Assim, os dois primeiros termos da Equação (2.8) já bastam para que se obtenha uma boa precisão. Reescrevendo a Equação (2.7) chega-se a:

$$s = r \left( 1 - \cos \varphi + \frac{1}{2} \lambda \operatorname{sen}^2 \varphi \right). \quad (2.10)$$

Para representar a velocidade, deriva-se a expressão acima com relação ao tempo, sendo

$$\omega_v = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (2.11)$$

obtendo-se:

$$v = r\omega_v \left( \sin\varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right). \quad (2.12)$$

Se a derivada for aplicada novamente, obtém-se a aceleração:

$$a = r\omega_v^2 (\cos\varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (2.13)$$

Nas Equações (2.10), (2.12) e (2.13) observa-se que o primeiro termo entre parênteses está relacionado à frequência de rotação (primeira ordem do virabrequim) enquanto que o segundo termo representa a segunda ordem. Nota-se também que a relação  $\lambda$  está sempre vinculada à segunda ordem do motor. As 3 figuras a seguir mostram gráficos que demonstram a influência de  $\lambda$  no deslocamento, velocidade e aceleração do cilindro ao longo de uma rotação completa do motor considerando o raio = 1m e velocidade angular = 1rad/seg.

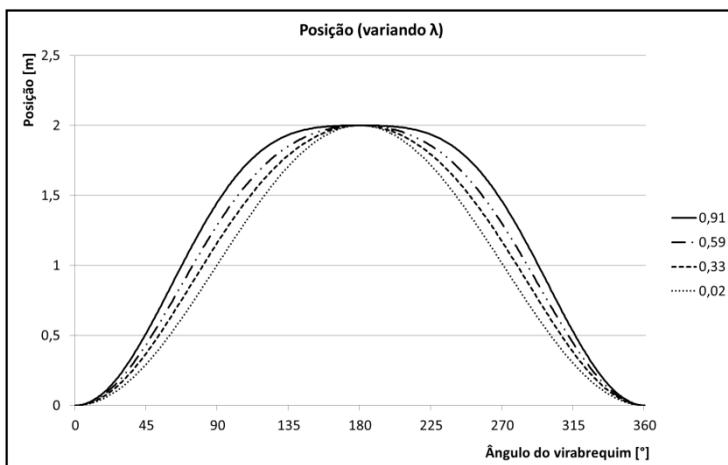


Figura 2.2: Variação da posição em função de  $\lambda$ .

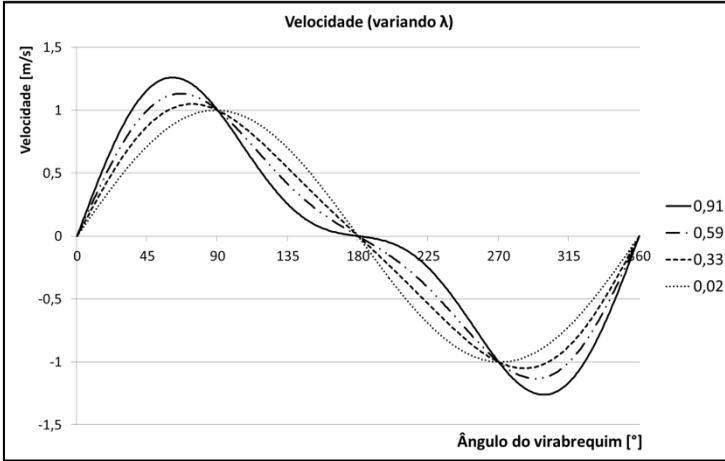


Figura 2.3: Variação da velocidade em função de  $\lambda$ .

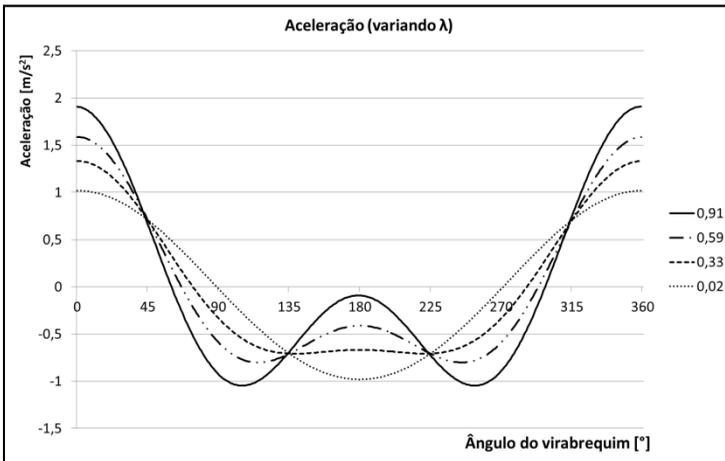


Figura 2.4: Variação da aceleração em função de  $\lambda$ .

Percebe-se que à medida que  $\lambda$  assume valores menores, o segundo termo do parêntese passa a ter uma contribuição menor, tornando o movimento mais próximo de um harmônico puro. Como se estão buscando as forças resultantes do motor, pode-se definir a força de inércia  $F_i$  em função da aceleração do pistão. Para isso, define-se:

$$F_i = m_p a, \quad (2.14)$$

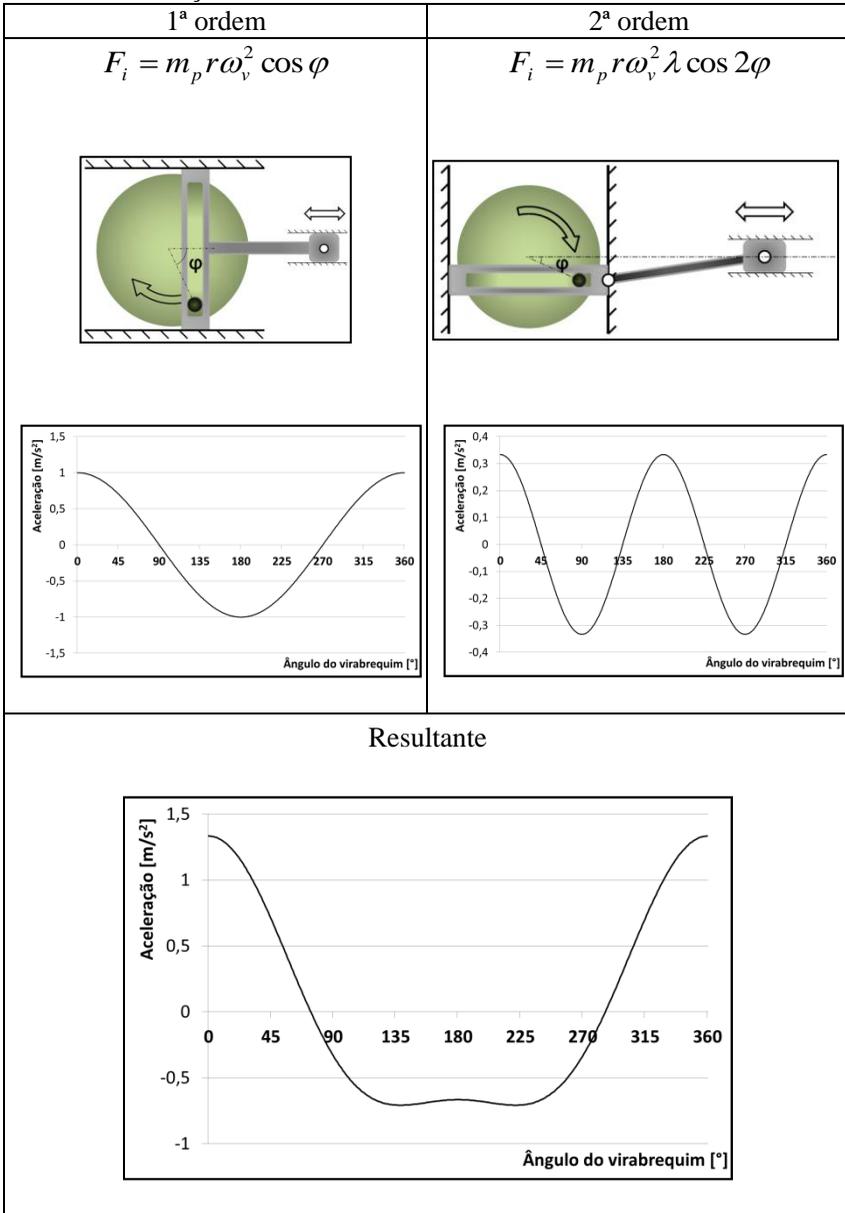
onde  $F_i$  corresponde à força de inércia do pistão e  $m_p$  a massa do pistão.

Utilizando a Equação (2.13), tem-se:

$$F_i = m_p r \omega_v^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (2.15)$$

Assim, como no caso da aceleração, a força de inércia também pode ser decomposta em dois termos relacionados à 1ª ordem e à 2ª ordem de rotação do virabrequim. A tabela a seguir resume como cada termo da equação contribui para a aceleração do pistão e ilustra a representação física de cada um considerando  $\lambda = 0.33$ , raio = 1m e velocidade angular = 1rad/seg.

Tabela 2.1: Força de inércia resultante no ciclo de combustão.



## 2.1.2 Forças geradas pela combustão

Os motores de combustão interna são máquinas térmicas que transformam a energia química do combustível em energia mecânica. Para tanto, é necessário que ocorra a queima da mistura ar - combustível na câmara de combustão. Como resultado deste fenômeno, ocorre um aumento repentino da pressão no interior da câmara, resultando em uma força sobre a área do pistão que faz com que se desloque e seu movimento seja transformado em rotação através do conjunto biela-manivela, descrito anteriormente. A força da queima da mistura tem direção oposta às forças de inércia e pode ser expressa pela seguinte fórmula:

$$F_e = p(\varphi)A, \quad (2.16)$$

sendo  $p(\varphi)$  a pressão ao longo do ciclo e  $A$  a área do pistão.

A pressão resultante da queima da mistura depende de uma série de fatores:

- Ciclo termodinâmico;
- Processo de combustão;
- Potência do motor;
- Condição de uso (torque entregue pelo motor).

A combinação destes resulta em diferentes padrões de pressão, mas de forma geral, em um motor com ciclo 4 tempos a pressão, e conseqüentemente a força aplicada ao cilindro, varia ao longo do ciclo completo, conforme ilustra o gráfico mostrado na figura 2.5.

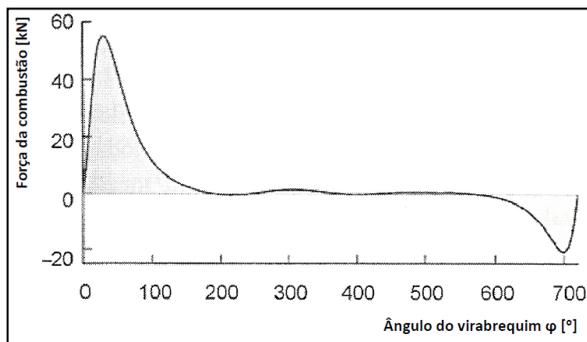


Figura 2.5: Variação da força causada pela combustão ao longo de duas rotações.

Percebe-se que ao longo do ciclo a pressão permanece praticamente constante, ocorrendo apenas um pico associado à combustão a cada duas voltas do virabrequim. Pode-se, então, afirmar que a força resultante da queima do combustível é de meia ordem por pistão, ou seja, cada pistão gera um pico de força a cada duas rotações. Observa-se também que, diferente das forças de inércia, a força resultante da combustão é apenas uma função da variação de pressão, ou seja, não tem influência direta da velocidade de rotação.

### 2.1.3 Análise de vibração de um motor 4 cilindros e 4 tempos

Em motores com pelo menos dois ou mais cilindros montados em linha, é necessário que durante o desenvolvimento do projeto seja dada atenção especial à disposição e espaçamento entre os cilindros em relação ao centro de gravidade do bloco.

As forças de inércia de cada cilindro produzem torque sobre o motor proporcional à sua distância ao centro de gravidade que faz com que vibre em um movimento de balanço na vertical. Tanto as forças quanto os momentos resultantes são grandezas vetoriais, o que significa que seus respectivos vetores podem ser representados no plano do centro de gravidade para que sejam calculados os esforços resultantes como mostra a figura 2.6 (STOUT, 2001).

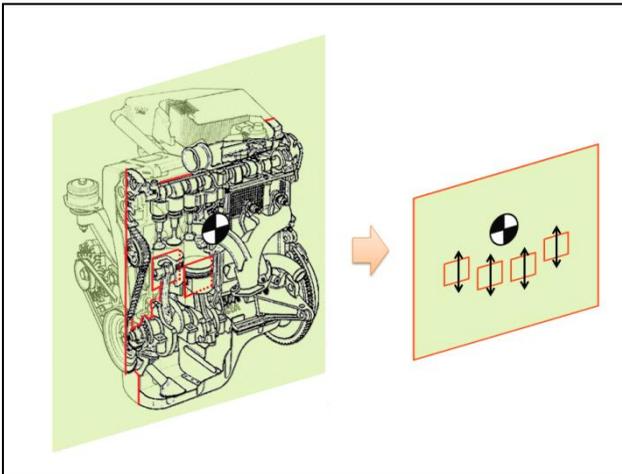


Figura 2.6: Cilindros representados como vetores no plano central.

Primeiramente, considera-se que as forças de cada cilindro são iguais. Isso significa que a força gerada pela combustão de um cilindro é

a mesma gerada por todos os demais e que a massa e movimento também são os mesmos em todas as câmaras. Considera-se também que a distância entre dois cilindros consecutivos é constante. Também é preciso assumir que cada pistão aplica a sua força sobre o virabrequim em um instante diferente, ou seja, existe um ângulo de defasagem entre eles. Isso faz com que as forças nunca sejam somadas.

A posição relativa no curso de cada pistão é uma função do ângulo de defasagem no virabrequim. Esta defasagem é representada pelo ângulo de cada pistão em relação ao primeiro cilindro conforme mostrado na Figura (2.7) e representado pela Equação (2.17):

$$\varphi_{i1} = \varphi_i - \varphi_1 \quad (2.17)$$

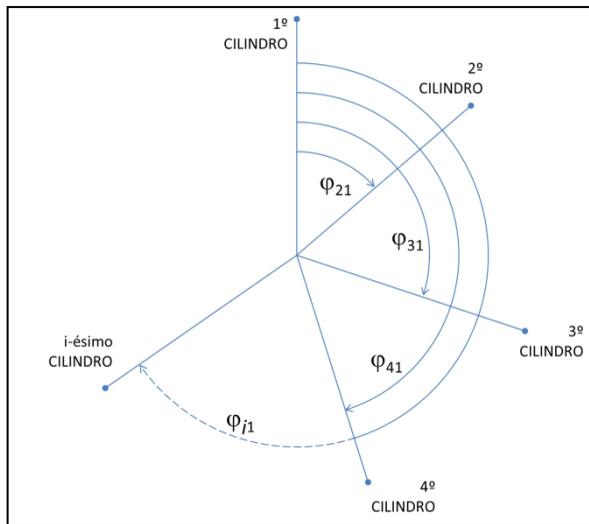


Figura 2.7: Posição relativa dos cilindros.

Na figura 2.8 observa-se a distribuição e defasagem dos cilindros em um motor de 4 cilindros. Partindo do pressuposto que o centro do virabrequim está alinhado com o centro de gravidade do bloco do motor, onde dois cilindros se encontram à esquerda e dois à direita, define-se a distância entre dois pistões vizinhos como  $d$ . Como o que está em análise é o balanço de torques causado pelas forças de inércia dos pistões em relação ao centro de gravidade do motor e que a posição relativa entre os cilindros é uma função do ângulo de defasagem no virabrequim, determina-se que para os cilindros à direita do centro de gravidade o ângulo de defasagem seja acrescido de  $180^\circ$ . Na prática isso

equivale a multiplicar a força deste lado por (-1). Isso é coerente já que, quando estão se deslocando na mesma direção, as forças dos cilindros de um lado do centro de gravidade fazem o bloco do motor girar em uma direção enquanto as dos cilindros do outro lado fazem girar no sentido oposto.

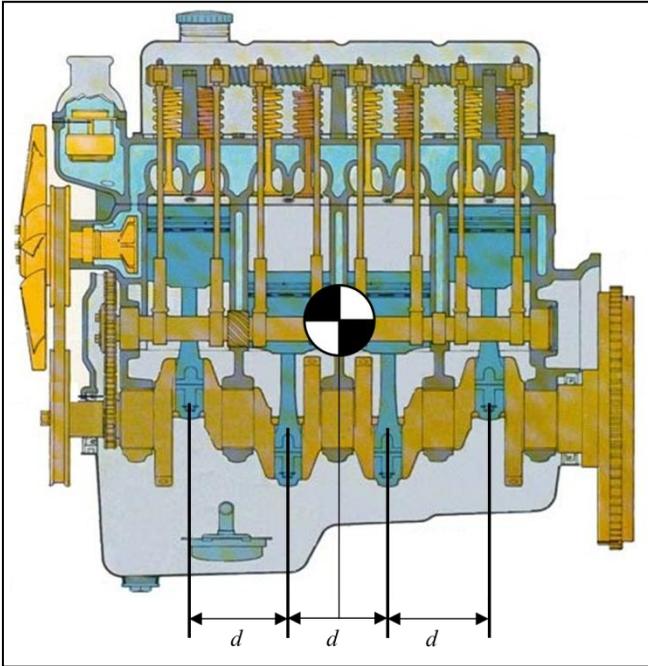


Figura 2.8: Distribuição dos cilindros em relação ao centro de gravidade do motor.

O momento resultante das forças de inércia dos pistões sobre o motor pode ser representado por:

$$M = \sum_{i=1}^n F_i d_i, \quad (2.18)$$

onde  $n$  é o número total de cilindros.

Substituindo  $F_i$ , conforme definido pela Equação (2.15), obtém-se:

$$M = m_p r \omega_v^2 \sum_{i=1}^n (\cos(\varphi_{i1} + \theta) + \lambda \cos(2\varphi_{i1} + \theta)) d_i, \quad (2.19)$$

onde  $\Theta = 180^\circ$  a serem somados nos cilindros à direita do centro de gravidade.

Pode-se separar a equação em duas parcelas, uma referente à primeira ordem e outra à segunda:

$$M_1 = m_p r \omega_v^2 \sum_{i=1}^n (\cos(\varphi_{i1} + \theta)) d_i, \quad (2.20)$$

e

$$M_2 = m_p r \omega_v^2 \sum_{i=1}^n (\lambda \cos(2\varphi_{i1} + \theta)) d_i. \quad (2.21)$$

A tabela abaixo representa os valores dos 4 cilindros mostrados na Figura (2.8). Aplicando estes valores nas Equações (2.20) e (2.21), observa-se que tanto a soma dos momentos causados pelas forças de 1ª ordem quanto de 2ª ordem é zero quando o centro do virabrequim está alinhado com o centro de gravidade do bloco do motor.

Tabela 2.2: Valores para um motor 4 cilindros e 4 tempos.

Cilindro	Distância $d_i$	Defasagem $\varphi_{i1}$ [°]	$\Theta$ [°]
1	$d + d/2$	0	0
2	$d/2$	180	0
3	$d/2$	180	180
4	$d + d/2$	360	180

Além da soma das forças de inércia dos pistões em torno do centro de gravidade do bloco do motor, é necessário também analisar a força resultante no plano de deslocamento dos cilindros, ou seja, a força resultante vertical. Para tanto, pode-se partir das Equações (2.20) e (2.21), apenas removendo os termos  $d_i$  referente à distância do centro de gravidade e  $\Theta$  para cilindros de lados diferentes do motor. Isto ocorre porque no deslocamento linear não há rotação em torno do centro de gravidade, mas sim deslocamento puro. Assim, obtém-se:

$$F_1 = m_p r \omega_v^2 \sum_{i=1}^n (\cos \varphi_{i1}) \quad (2.22)$$

e

$$F_2 = m_p r \omega_v^2 \sum_{i=1}^n (\lambda \cos 2\varphi_{i1}). \quad (2.23)$$

Novamente, aplicando os valores da Tabela (2.2) (sem a soma dos 180°), observa-se que enquanto a soma referente à primeira ordem é zero, a resultante de segunda ordem não se anula.

Completando a análise da vibração de um motor de 4 cilindros em linha, deve-se avaliar a contribuição das forças resultantes da combustão. Conforme já dito anteriormente, a força resultante da combustão é de meia ordem por cilindro em direção oposta à força de inércia. Para o motor em estudo, isso significa uma vibração de segunda ordem com relação ao virabrequim. Em baixas rotações, as forças de inércia de segunda ordem tendem a se anular com as de combustão. No entanto, na medida em que se trabalha com rotações mais elevadas, as forças resultantes da inércia adquirem maiores amplitudes e passam a predominar em relação às de combustão (Figura 2.9). De forma geral, a frequência da vibração resultante pode ser representada pela Equação (2.24) conforme segue:

$$f = \frac{RPM * 2}{60}, \quad (2.24)$$

onde  $f$  corresponde à frequência, em Hertz, o fator 2 corresponde à segunda ordem e RPM expressa a velocidade em rotações por minuto.

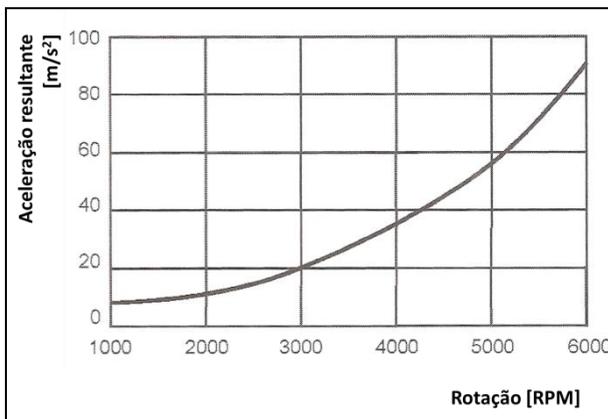


Figura 2.9: Nível de aceleração (2ª ordem do virabrequim) em função da rotação.

Aplicando a Equação (2.24) e considerando que um motor típico opera na faixa de 1000 RPM a 6000 RPM, chega-se à conclusão que a frequência de excitação de um motor 4 tempos com 4 cilindros em linha gera vibração na faixa de 33Hz a 200Hz.

## 2.2 SISTEMA DE TRANSMISSÃO POR SEMI-EIXOS HOMOCINÉTICOS

Até meados do século XX, as chamadas Juntas Universais (Figura 2.10) eram amplamente utilizadas como mecanismo para transmitir força entre dois eixos em planos inclinados. Estas juntas, cujos primeiros relatos datam do século XVI, encontravam aplicações em máquinas estacionárias e nos primeiros veículos com tração motora. Até metade do século XX, a tração traseira era muito popular devido às dificuldades de combinar a rotação com o esterçamento das rodas. As juntas universais operavam sem dificuldades nos baixos ângulos necessários aos eixos longitudinais que transmitiam a potência dos motores situados na dianteira dos carros até o eixo traseiro. No entanto, apresentavam limitações quando utilizadas em ângulos superiores à  $7^\circ$ . Na primeira metade do século XX foram criadas as primeiras juntas homocinéticas. Estas juntas rapidamente passaram a ser utilizadas como padrão para o desenvolvimento de veículos com tração dianteira, especialmente em modelos de passeio ou de tração nas 4 rodas (SEHERR-THOSS; SCHMELZ; AUCKTOR, 2006).

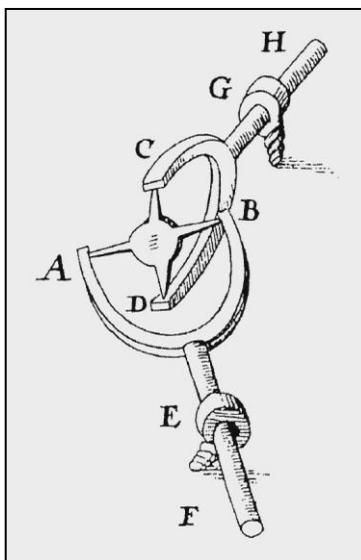


Figura 2.10: Ilustração de uma junta universal do século XVI.

O semi-eixo é um elemento rotativo que transmite a potência do motor para as rodas. No seu projeto deve levar em consideração 4 parâmetros básicos que variam de uma aplicação para a outra:

- Torque: a função primária de um semi-eixo é a de transmitir torque através de um ângulo entre a fonte e o elemento conduzido;

- Rotação: o semi-eixo deve ser capaz de girar dentro de uma certa faixa de rotação de acordo com a sua aplicação;

- Ângulos: as juntas do semi-eixo devem ser capazes de operar a um certo ângulo formado pela interseção dos eixos, seja este ângulo fixo ou variável;

- Variação de comprimento: a maior parte das aplicações exigem algum meio de compensar os efeitos causados pela variação do comprimento do eixo. Tipicamente, esta variação pode ser acomodada de duas formas: com eixo de comprimento variável ou com uma junta que permita um certo deslocamento axial.

Para que possa atender a estes 4 requisitos, o semi-eixo homocinético de um veículo com tração dianteira é composto de um eixo interconector preso a uma junta homocinética em cada uma de suas extremidades (Figura 2.11). Este conceito permite que o mesmo acompanhe a variação de ângulo causada pelo esterçamento das rodas e deslocamento da suspensão enquanto o veículo se desloca. Além disto, o semi-eixo ainda deve ser capaz de variar seu comprimento para que possa compensar a variação da distância entre o diferencial e o cubo de rodas provocada pelo trabalho da suspensão. Este papel é desempenhado por um tipo especial de junta homocinética, conhecido como junta deslizante.



Figura 2.11: Semi-eixo homocinético (modelo 3D): juntas ligadas por um eixo.

### 2.2.1 Junta Fixa

Juntas fixas recebem este nome por não permitirem o deslocamento axial, ou seja, possuem o comprimento fixo e geralmente são utilizadas na conexão com a roda. O tipo mais comum é a chamada Rzeppa, cujos registros de patente ocorreram na metade dos anos 1920 até início dos anos 1930. Esta junta consiste basicamente de um anel externo forjado e usinado que é preso ao cubo de roda e um anel interno (também forjado e usinado) conectado ao eixo. Ambos os anéis são ligados entre si por 6 esferas posicionadas e mantidas em um plano através de uma gaiola que fica entre os dois anéis.

A principal vantagem deste tipo de junta é a habilidade de transmitir potência a uma velocidade constante e a ângulos relativamente elevados, podendo chegar a mais de  $50^\circ$ . Além disso, quando comparada a outras juntas, tem alta capacidade de torque para o seu tamanho e é bastante resistente a esforços axiais. Estes esforços axiais são muito frequentes em aplicações com suspensão independente onde a distância entre a roda e o diferencial muda constantemente (figura 2.12).

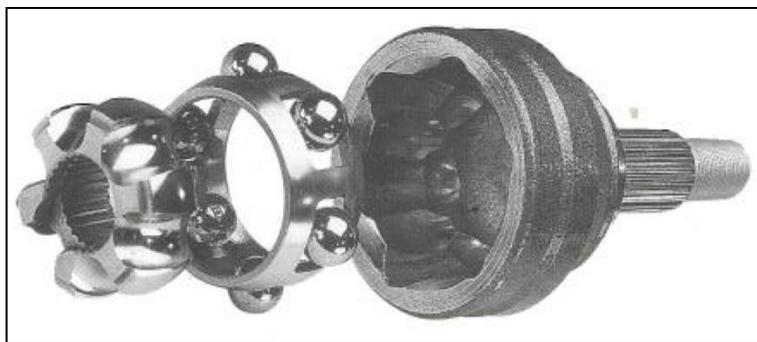


Figura 2.12: Vista explodida de uma junta fixa de esferas.

### 2.2.2 Junta Deslizante

Conforme já dito anteriormente, o deslocamento da suspensão exige que o comprimento do semi-eixo varie constantemente, cobrindo a distância entre o diferencial e a roda desde a posição da suspensão completamente comprimida até totalmente distendida. Em aplicações que exigem altos cursos, costumam-se utilizar eixos bipartidos conectados por um entalhado. No entanto, para a maior parte das aplicações, esta variação de comprimento é absorvida pela junta

deslizante, que diferentemente da junta fixa, possui mais um grau de liberdade, permitindo o deslocamento axial (figura 2.13). Além de absorver os cursos da transmissão, soma-se a funcionalidade de compensar as variações de comprimento causadas pelo processo de manufatura, já que tanto o motor quanto os braços da suspensão são fixos à carroceria por coxins de borracha, que geralmente possuem altas tolerâncias geométricas.

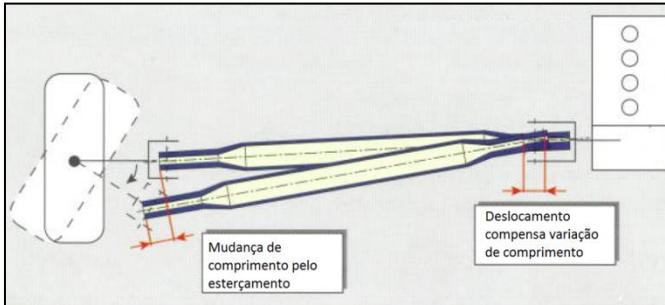


Figura 2.13: Importância do deslocamento axial da junta deslizante.

Tipicamente estas juntas são montadas no lado da transmissão, pois sua capacidade de ângulo é limitada comparada às juntas fixas. Caso fossem montadas nas rodas acabariam limitando o ângulo de esterçamento do veículo. Quando comparadas às juntas universais, observa-se uma capacidade de ângulo de trabalho maior, fazendo com que muitas vezes sejam utilizadas no eixo cardam.

Inúmeros conceitos de junta deslizantes foram desenvolvidos, cada uma com suas características particulares. De forma resumida, podem ser classificadas em dois grupos: as juntas de esferas e as juntas tripóides. O veículo utilizado no presente estudo possui uma junta tripóide do tipo GI (*Glanzer Internieur*), formada por um anel interno com 3 hastes que é fixado ao eixo. Em cada uma das hastes é preso um rolamento de agulhas. A metade restante da junta é formada por um anel externo forjado conhecido como Tulipa (devido a sua semelhança com a flor) que possui 3 canais onde são encaixados cada um dos 3 rolamentos do anel interno (Figura 2.14).

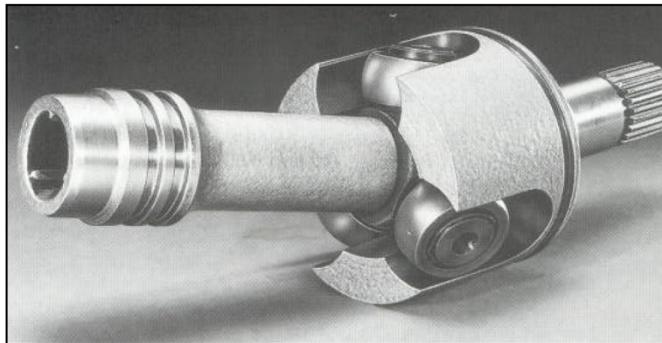


Figura 2.14: Junta deslizante tripóide.

### 2.2.3 Eixo Interconector

O eixo interconector é o elemento que melhor representa a principal função do semi-eixo, que é transmitir o torque. É o componente que une as duas juntas homocinéticas (fixa e deslizante), completando a ligação entre o diferencial e as rodas. Em geral, é fabricado a partir de uma barra sólida, sendo usinado em uma forma que atenda às necessidades de resistência estrutural, fadiga e vibrações.

No que diz respeito às vibrações, o eixo é o componente que deve ser analisado cuidadosamente. Dependendo de seu comprimento e seção transversal, o primeiro modo de vibração de flexão pode coincidir com a segunda ordem de rotação do eixo virabrequim do motor, fazendo com que sua frequência de ressonância seja excitada.

Em muitos projetos de veículos o motor é montado longitudinalmente ao eixo do carro. Nestes casos a transmissão fica localizada no centro das duas rodas dianteiras de tal forma que os dois semi-eixos possuam o mesmo comprimento. No entanto, nos projetos mais modernos, o motor é disposto transversalmente, fazendo com que o diferencial fique deslocado para um dos lados do veículo. Nestes casos, os semi-eixos do lado esquerdo e direito terão comprimentos diferentes. Nesta configuração, em muitos casos a frequência do primeiro modo de flexão do eixo maior fica na faixa de rotação do motor.

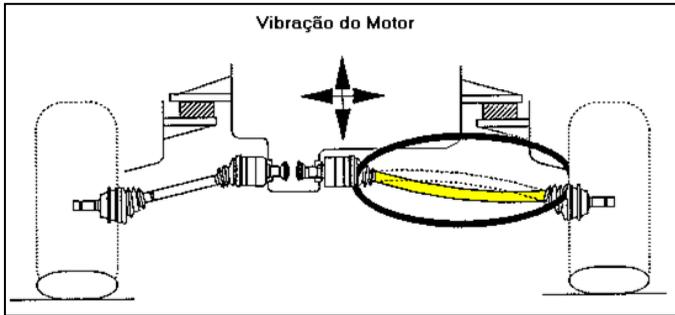


Figura 2.15: Primeiro modo de vibração de flexão de um eixo homocinético no veículo.

Soluções para este problema vêm sendo desenvolvidas há muitos anos. Até o final da década de 1950, a maior parte dos veículos era montada sobre um chassi apoiado sobre coxins. Esta arquitetura permitia um bom isolamento da carroceria das fontes de vibração provenientes do conjunto motor. Com o desenvolvimento dos veículos monoblocos no início da década de 1960, associado à melhoria dos pavimentos das rodovias, surgiram os primeiros problemas de vibração e ruído associados ao sistema de tração (FARNHAM, 1963). Muitos estudos foram desenvolvidos nesta época e as soluções propostas são até hoje amplamente utilizadas no controle de vibração do semi-eixo.

### 2.2.3.1 Variação de comprimento

Conforme descrito por Farnham (1960), uma alternativa para alterar a frequência de flexão de eixos de transmissão do carro é modificar o seu comprimento. Considerando que dois eixos feitos do mesmo material (com módulo de elasticidade  $E$  e densidade  $\rho$  iguais) e mesma seção transversal (momento de inércia de área  $I$  iguais), o eixo que tiver menor comprimento terá também a menor massa, enquanto que a sua rigidez equivalente de flexão será maior comparada ao eixo mais longo conforme demonstrado pela Equação (2.25) (esta fórmula refere-se a uma viga bi-apoiada e representa apenas uma aproximação das condições de contorno do semi-eixo) (GMAP, 2007):

$$k_{eq} = \frac{48EI}{l_e^3} \quad (2.25)$$

$$f_{eixo} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}, \quad (2.26)$$

onde  $k_{eq}$  é a constante de mola equivalente do eixo em flexão,  $m_{eq}$  é a massa equivalente distribuída do eixo,  $E$  o módulo de elasticidade do material,  $I$  o momento de inércia da seção transversal e  $l_e$  o comprimento do eixo.

Aplicando a equação básica da frequência natural sem amortecimento (2.26), percebe-se que a frequência do primeiro modo de flexão do eixo mais curto será maior. Esta solução é amplamente utilizada em eixos cardans já que estes são divididos ao meio e apoiados por rolamentos, facilitando variar o seu comprimento. No caso de semi-eixos, uma solução semelhante pode ser adotada. Para tanto, caso deseje-se elevar a frequência natural do semi-eixo mais longo, divide-se este em duas partes, com a junta posicionada no centro do conjunto e apoiada no bloco do motor por um rolamento.

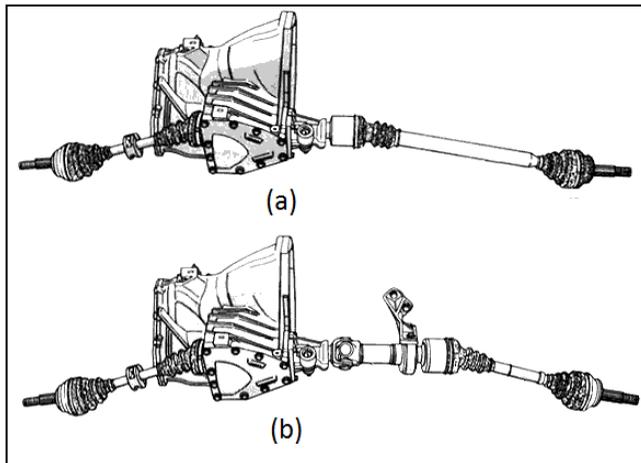


Figura 2.16: Eixo longo (a) dividido em duas seções mais curtas (b).

Esta solução pode ser utilizada quando opta-se por elevar a frequência de ressonância do semi-eixo para uma faixa acima da descrita na Equação (2.24), evitando-se, assim, o acoplamento com a vibração proveniente do motor. Alguns cuidados são necessários para que se determinem os comprimentos corretos dos eixos para atingir a frequência desejada.

### 2.2.3.2 Eixo tubular

Outra alternativa frequentemente adotada para elevar a frequência de ressonância do semi-eixo é a aplicação de eixos com o perfil tubular (SAE, 1979). Utilizando um perfil com o diâmetro e espessura de parede apropriados é possível atingir frequências naturais superiores ao primeiro modo de flexão com eixos mais leves e de maior capacidade de torque.

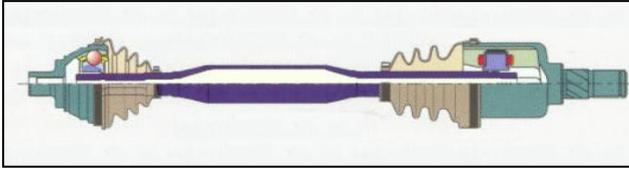


Figura 2.17: Imagem em corte de um semi-eixo com eixo tubular.

Considerando o caso de dois eixos com o mesmo comprimento e mesmo material (com módulo de elasticidade  $E$  e densidade  $\rho$  iguais) e aplicando novamente a Equação (2.25), percebe-se que neste caso a rigidez equivalente será uma função do momento de inércia da seção transversal  $I$ , descrito pelas equações a seguir para o eixo maciço e tubular (POPOV; BALAN, 1998):

$$I_{maciço} = \frac{\pi r_m^4}{4} \quad (2.27)$$

e

$$I_{tubular} = \frac{\pi(r_e^4 - r_i^4)}{4}, \quad (2.28)$$

onde  $r_e$  é o raio externo do eixo tubular,  $r_i$  o raio interno e  $r_m$  o raio externo do eixo maciço.

A massa dos dois eixos é descrita pelas seguintes fórmulas:

$$m_{maciço} = \rho \pi r_m^2 l \quad (2.29)$$

e

$$m_{tubular} = \rho \pi (r_e^2 - r_i^2) l, \quad (2.30)$$

onde  $\rho$  é a densidade.

Percebe-se que tanto a rigidez quanto a massa equivalente são função dos raios dos eixos. Assim, para que a aplicação do eixo tubular seja vantajosa sobre a maciça, basta ajustar  $r_e$  e  $r_i$  de tal forma a obter uma frequência de ressonância acima do valor obtido com  $r_m$ .

### 2.2.3.3 Adição de massa

Em alguns casos onde a frequência natural do eixo está próxima do limite inferior de excitação do motor, pode-se adotar a solução descrita por (HODGETTS; PARKINS, 1974). Este modelo consiste em prender um lastro de massa ao semi-eixo, preferencialmente no ponto central entre as duas juntas, ponto onde ocorre o maior deslocamento por flexão do eixo. A adição deste lastro eleva a massa equivalente do sistema e não deve afetar o balanceamento. Para que não haja aumento relativo da rigidez de flexão, a área de contato entre o lastro e o eixo deve ser a menor possível (Figura 2.18). Como resultado, a frequência natural assume valores mais baixos, podendo variar de acordo com a massa adicionada.

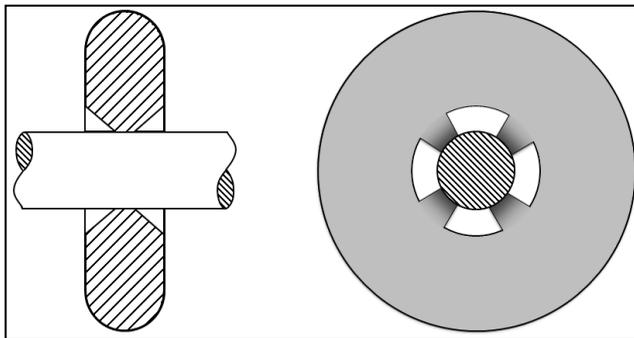


Figura 2.18: A massa adicionada tem pouca área de contato com o eixo.

Muitas vezes a redução da frequência natural do semi-eixo não é o bastante para que fique fora da faixa de excitação do motor. No entanto, conforme mostra o gráfico da Figura (2.9), em rotações mais baixas as forças de inércia tendem a se anular com as forças de combustão, gerando um nível de vibração menor que o encontrado em altas rotações. Assim, ainda que com a adição do lastro o semi-eixo continue na faixa de excitação do motor, certamente estará sujeito a uma vibração com menor intensidade.

### 2.2.3.4 Adição de absorvedores dinâmicos

Conforme descrito por Esser (1969) e Schwibinger et. Al (1995), outra alternativa é adotar um dispositivo de controle de vibração, como o absorvedor dinâmico. O absorvedor de vibrações consiste de um sistema massa-mola no qual o seu principal objetivo é controlar os efeitos indesejados de componentes em ressonância, como o semi-eixo de um veículo. Embora sejam comumente chamados de *dampers* (amortecedor, em Inglês), esta nomenclatura não é apropriada. Ela se origina no termo *Auxiliary Mass Damper* (Massa Auxiliar Amortecida). Seu projeto básico consiste de um anel de aço (massa) montado sobre um anel de borracha com o diâmetro interno igual ao do eixo interconector no qual será montado (figura 2.19).



Figura 2.19: Absorvedor de vibrações.

Assim como o semi-eixo, o absorvedor é um sistema que possui sua frequência natural própria. A intenção é que a frequência seja a mesma do eixo interconector no qual será montado. Uma vez montado, o novo sistema passa a ter duas frequências de ressonância, uma maior e outra menor do que a original (Figura 2.20). O absorvedor deve ter a sua frequência natural e massa ajustada de tal forma que as frequências do novo sistema eixo e absorvedor se afastem do intervalo crítico de excitação do motor.

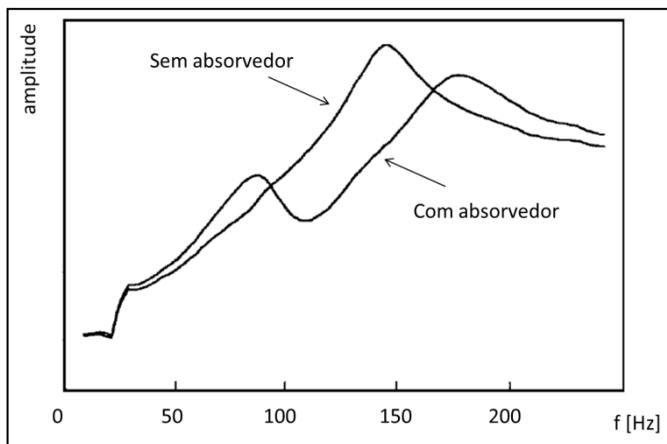


Figura 2.20: Espectro de um semi-eixo com absorvedor e sem absorvedor.

### 2.2.3.5 Controle ativo de vibração no eixo

O avanço da eletrônica e de novos materiais tem permitido o desenvolvimento de novas tecnologias na redução de vibração, tais como o controle ativo de vibrações ASAC (Active Structural Acoustic Control). Este conceito se baseia na ideia de controlar a vibração na fonte que gera o ruído, ao invés de cancelar o ruído por fontes sonoras, como é feito no controle ativo de ruído (ACN – Active Noise Control).

No estudo realizado por Kunze et. al, foi aplicado o efeito piezoelétrico reverso, onde pequenos elementos piezoelétricos montados sobre o semi-eixo de um veículo Audi A2 receberam uma carga elétrica que resulta em uma força mecânica, fazendo com que se comportem como atuadores.

Dois canais independentes de atuadores foram instalados sobre o semi-eixo na região central com o objetivo de reduzir a amplitude do primeiro modo de flexão. Cada canal teve dois elementos piezoelétricos de múltipla camada instalados nos dois lados opostos do diâmetro e defasados  $90^\circ$  dos atuadores do outro canal, formando dois planos de atuação. Essa configuração permite que um único impulso elétrico em um canal induza a um esforço de flexão no eixo causado pelos elementos deste plano. Além dos 4 atuadores, 4 sensores piezoelétricos também foram instalados com a mesma disposição. A figura abaixo ilustra a seção onde foram instalados os elementos.

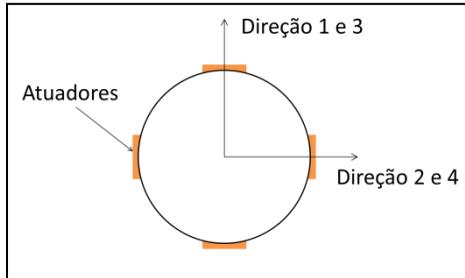


Figura 2.21: Disposição dos elementos piezoelétricos.

O semi-eixo foi montado em um veículo para avaliação objetiva. Inicialmente uma análise modal foi realizada para identificar a frequência natural do semi-eixo.

Nas avaliações dinâmicas realizadas em rodovias os resultados obtidos em níveis de redução de vibração baseado na aquisição feita por acelerômetros colocados nas proximidades do semi-eixo (diferencial e suspensão) foram excelentes. Os níveis de pressão sonora captados por microfones instalados próximos ao ouvido do motorista mostraram redução de 12 dB na frequência de ressonância do semi-eixo.

Apesar dos excelentes resultados, este conceito ainda apresenta algumas limitações. A principal é a necessidade de desenvolver uma forma eficiente de transferir energia para os atuadores instalados sobre um eixo em rotação. No experimento descrito foi utilizado um sistema de escovas para alimentar os elementos piezoelétricos, que não é muito robusto para a aplicação em grande escala.

### 2.2.3.6 Utilização de materiais alternativos

O aprimoramento dos processos de manufatura tem permitido a utilização de novos materiais mais leves e resistentes na fabricação dos eixos, o que permite elevar as frequências de ressonância.

Conforme explicam Pierburg e Amborn (1998), até recentemente, eixos tubulares de alumínio eram apenas obtidos pelo processo de extrusão. No entanto, peças fabricadas com esse processo não possuem espessura de parede constante, além de serem limitados a alguns poucos tipos de liga. O desenvolvimento do processo de fabricação de tubos por solda longitudinal permitiu a adoção deste material em um número maior de aplicações. A conexão com a haste de aço que é montada na junta é realizada através de modernos processos de solda por fricção desenvolvidos especialmente para estas aplicações.

Materiais anisotrópicos, como fibras de carbono, também têm sido utilizados na fabricação de eixo compósitos. O tipo de fibra combinado ao seu ângulo de hélice resulta em uma ampla faixa de frequência de flexão e rigidez torcional. Embora ainda bastante caro, este eixo pode obter ganhos que permitam a utilização de um eixo de seção única em eixos cardam, que geralmente são divididos em dois segmentos. Além de uma melhor performance acústica, essa tecnologia permite eixos até 50% mais leves.



Figura 2.22: Eixo de fibra de carbono.

Estudos recentes têm sido realizados com o objetivo de aplicar materiais absorvedores entre camadas do eixo. No trabalho de Ghoneim e Lawrie (2006), um eixo tubular feito de duas camadas de aço em torno de uma camada de material amortecedor viscoelástico prensada no meio das duas (CLD – Constrained Layer Damping) foi avaliado com o objetivo de elevar o amortecimento do primeiro modo de flexão. Os resultados se mostraram limitados, sugerindo que mais pesquisa deve ser realizada sobre esta proposta.

### 2.3 PROPOSTA DE TRABALHO: OTIMIZAÇÃO DO PERFIL DE USINAGEM DE UM EIXO HOMOCINÉTICO

A utilização de eixos maciços é reconhecida como a mais simples e menos dispendiosa, tanto pela simplicidade de processo de fabricação quanto pelo baixo número de componentes. Por outro lado, como dito anteriormente, é a mais propícia a apresentar problemas de vibração por

frequentemente ter a frequência de seu primeiro modo de flexão coincidindo com a 2ª ordem de excitação do motor.

Dentre todas as alternativas para reduzir os problemas de ressonância pesquisados e apresentados neste trabalho, nenhuma abordou desenvolvimento de um perfil de usinagem que pudesse alterar a frequência do primeiro modo de flexão. A variação de diâmetro afeta a massa e a rigidez equivalente de flexão.

Este trabalho aborda o desenvolvimento de um semi-eixo maciço para um veículo de passeio buscando-se reduzir ao máximo a frequência natural do primeiro modo de flexão alterando-se o perfil de usinagem do eixo. O efeito esperado é o mesmo da adição de massa: sintonizar a frequência para uma faixa onde a amplitude da excitação do motor seja menor. O trabalho será realizado sobre o semi-eixo de um Ford Ka.

O trabalho será realizado em três etapas: inicialmente, será realizada uma análise modal em um semi-eixo montado no veículo para que se determine a frequência natural do semi-eixo, respeitando-se as condições de contorno. Em seguida, utilizando-se dos resultados obtidos, será gerado um modelo numérico pelo Método de Elementos Finitos. Por fim, o estudo de otimização será realizado sobre o modelo numérico por meio de Algoritmos Genéticos. Um protótipo é construído para que seja feita a validação da proposta.

### 3. ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

De forma bastante genérica, pode-se dizer que a Análise Modal Experimental (EMA – *Experimental Modal Analysis*) é um processo por meio do qual se descreve uma estrutura física através de suas características dinâmicas, ou seja, frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração. Tal análise é feita a partir das respostas que a estrutura apresenta quando excitada por um estímulo externo.

Muitos componentes apresentam uma geometria relativamente simples e podem ter seu comportamento dinâmico caracterizado por modelos numéricos. No entanto, geometrias contínuas complexas ou sistemas que envolvem mais de um componente acoplado tendem a ser difíceis de representar matematicamente de forma robusta, o que justifica a aplicação da Análise Modal Experimental. Esta ferramenta tornou-se bastante comum nas últimas décadas e tem sido amplamente utilizada nas análises de componentes e sistemas dinâmicos. Por ser um método bastante abrangente, é importante o conhecimento de diversas áreas como instrumentação, processamento de sinais, definição de parâmetros e vibrações.

#### 3.1 ANÁLISE MODAL NUMÉRICA

Nos métodos numéricos, o problema inicia pela descrição da estrutura através das suas características físicas, ou seja, são determinadas as suas matrizes de massa  $[M]$ , rigidez  $[K]$  e amortecimento  $[C]$  como as representadas abaixo. Em modelos distribuídos o sistema necessita ser discretizado e os elementos das matrizes representados por valores equivalentes. Sejam então as matrizes:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

e

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

A equação da dinâmica de um sistema mecânico é dada por (INMAN, 2007):

$$[M]\{\ddot{\vec{x}}\} + [C]\{\dot{\vec{x}}\} + [K]\{\vec{x}\} = \{\vec{f}\}. \quad (3.4)$$

Considerando vibração livre ( $\{\vec{f}\} = \{0\}$ ), ou seja, sem força de excitação, e a ausência de amortecimento, tem-se:

$$[M]\{\ddot{\vec{x}}\} + [K]\{\vec{x}\} = \{0\}. \quad (3.5)$$

Considerando movimento harmônico, na forma  $\{\vec{x}\} = \{X\}e^{i\omega t}$ , a equação se transforma em:

$$-\omega^2 [M]\{X\} + [K]\{X\} = \{0\}. \quad (3.6)$$

Pré-multiplicando a equação acima por  $[M]^{-1}$  (a inversa da matriz massa), obtém-se:

$$\omega^2 \{X\} = [M]^{-1}[K]\{X\} = [D]\{X\}. \quad (3.7)$$

A equação acima é semelhante à equação:

$$[A]\{X\} = \lambda \{X\}, \quad (3.8)$$

que é um problema clássico de autovetores e autovalores, onde  $\lambda = \omega^2$  são os autovalores que fornecem as frequências naturais e  $\{X\}$  são as formas modais.

Em problemas práticos, resolvidos por elementos finitos, por exemplo, as matrizes  $[M]$  e  $[K]$  são de dimensões muito elevadas, de forma que calcular  $[D] = [M]^{-1}[K]$  se torna inviável. Assim, outros algoritmos são utilizados para extrair autovalores e autovetores do problema acima apresentado (STRANG; FIX, 1997).

Considerando o movimento forçado, com aplicação de força harmônica  $\{\vec{f}\} = \{\vec{f}\} e^{i\omega t}$ , tem-se:

$$-\omega^2[M]\{X\} + [K]\{X\} = \{\vec{f}\}, \quad (3.9)$$

ou

$$([K] - \omega^2[M])\{X\} = \{\vec{f}\}. \quad (3.10)$$

Isolando o vetor  $\{X\}$ :

$$\{X\} = ([K] - \omega^2[M])^{-1}\{F\} = [\alpha(\omega)]\{F\}. \quad (3.11)$$

Na equação acima a matriz  $[\alpha(\omega)]$  contém as receptâncias do sistema, considerando todos os pontos de excitação e resposta. O procedimento acima, com inversão de matriz para cada frequência  $\omega$ , é novamente inviável. Usando as propriedades de ortogonalidade das formas modais pode-se provar que cada elemento da matriz  $[\alpha(\omega)]$  pode ser colocado na forma:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r\phi_j \quad {}_r\phi_k}{\omega_{nr}^2 - \omega^2}, \quad (3.12)$$

onde  $N$  é o número total de modos,  ${}_r\phi_j$  a amplitude da forma modal no ponto de resposta e  ${}_r\phi_k$  o mesmo para o ponto de excitação.

### 3.2 ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

Ao ser analisado um sistema contínuo, a determinação das matrizes de massa, rigidez e amortecimento pode ser um processo complexo e demorado. Nestes casos, recorre-se à análise modal experimental, onde o problema é resolvido inversamente. Uma amostra real é discretizada e submetida a um estímulo externo para que suas frequências naturais e seus modos de vibração sejam determinados. Estes dados são então utilizados para resolver o problema de autovetores, gerando assim as matrizes de massa, rigidez e amortecimento. Este processo de determinação dos modelos matemáticos a partir de dados medidos é chamado de *Teoria de Identificação de Sistemas* (INMAN, 1989) relacionada à resolução do problema inverso, como mostrado na Figura 3.1.

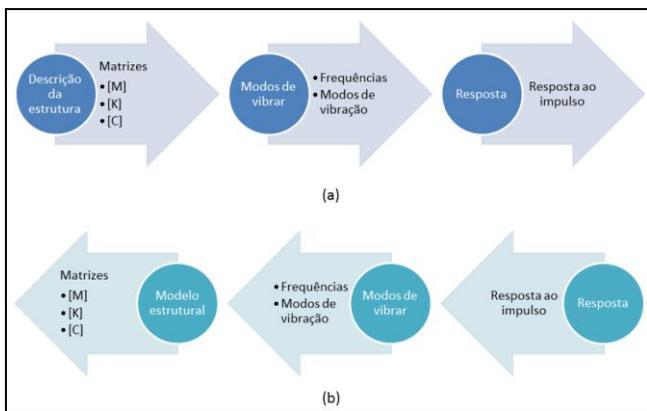


Figura 3.1: Análise modal analítica (a) e experimental (b).

A maior parte dos métodos experimentais se baseia na determinação das FRFs, o que justifica o seu correto entendimento. De forma simplificada, pode-se definir uma FRF como a razão entre transformadas de Fourier da resposta pela da excitação. Quando as duas são medidas no mesmo ponto temos uma FRF Pontual, ao passo que quando realizadas em pontos distintos obtém-se a FRF de Transferência.

Uma forma bastante efetiva de verificar se uma estimativa FRF foi bem realizada é calcular a função de coerência entre o sinal de excitação e a resposta. A coerência deve variar de 0, onde a correlação entre resposta e excitação é nula, até 1, onde a correlação é máxima. Para deduzir esta função, define-se a função de Auto Correlação como o valor médio da resposta do sistema no mesmo ponto onde uma força

aleatória é aplicada. De forma similar, define-se também a Correlação Cruzada quando a resposta é adquirida em um ponto diferente da excitação.

Aplicando a transformada de Fourier sobre as correlações definidas acima, obtêm-se as Densidades Espectrais de Potência  $S_{xx}$  e  $S_{ff}$  (funções reais) e as Densidades Espectrais Cruzadas  $S_{fx}$  e  $S_{xf}$  (funções complexas). Na prática, as FRFs são na maior parte obtidas através de dois estimadores  $H_1(\omega)$  e  $H_2(\omega)$  por meio da relação das Densidades Espectrais conforme segue:

$$H_1(\omega) = \frac{S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} \quad (3.13)$$

e

$$H_2(\omega) = \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{xf}(\omega)}. \quad (3.14)$$

Embora os dois sejam amplamente utilizados, costuma-se optar pelo processador  $H_1(\omega)$ , já que não possui números complexos no denominador e conseqüentemente é mais fácil de ser estimado. A coerência é então definida como a relação entre os dois estimadores:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)}. \quad (3.15)$$

### 3.2.1 Métodos de identificação modal

Uma vez realizadas as medições experimentais, é necessário aplicar algum procedimento para que sejam identificados os modos e as respectivas frequências naturais a partir dos dados obtidos. Muitos destes foram desenvolvidos a partir e fazem uso da transformada rápida de Fourier. Os métodos de identificação podem ser divididos em dois grupos: métodos no domínio do tempo e métodos no domínio da frequência.

Métodos no domínio do tempo geralmente requerem o cálculo da Função de Resposta ao Impulso (*IRF – Impulse Response Function*). A grande vantagem deste método reside no fato de permitir o uso de dados diretamente como foram adquiridos, sem a necessidade de pré-processamento. No entanto, é necessário que todas as respostas sejam adquiridas simultaneamente, para que se identifique a fase de cada

frequência entre os pontos medidos como resposta à mesma força de excitação. Isto pode ser um fator limitante já que, em estruturas complexas, o número de pontos de aquisição é muito grande, o que tornaria necessário um grande número de canais e sensores.

Este problema costuma ser contornado aplicando-se a transformada inversa de Fourier (IFFT) sobre as Funções Resposta em Frequência FRFs (descritas na sequência), permitindo assim a aquisição de diversos pontos de forma individual. Porém este procedimento implica no uso das transformadas de Fourier duas vezes, elevando assim o tempo de processamento e trazendo todas as incertezas associadas a este processo. Quando realizado este procedimento, acaba-se por anular uma das principais vantagens deste método, que é justamente a possibilidade de utilizar os dados na forma como foram adquiridos, ou seja, no domínio do tempo. Apesar desta limitação, métodos no domínio do tempo costumam apresentar melhores resultados para faixas de frequências muito amplas e são utilizados em sistemas com resposta livre (não forçada) (MAIA; SILVA, 1997).

Os métodos no domínio da frequência, como o próprio nome sugere, consistem em avaliar a resposta após ser transformada para o espectro da frequência. Para tanto, os dados adquiridos precisam ser processados, tanto o da força de excitação bem como os de resposta.

O método mais simples de identificação modal no domínio da frequência consiste em determinar os parâmetros de cada modo individualmente a partir das FRFs e é conhecido como Pico de Amplitude. Este método é bastante eficaz e preciso quando o sistema possui baixo amortecimento e os modos se encontram suficientemente afastados. Isso significa que, analisando o espectro de frequência, é necessário que cada modo exerça influência na vizinhança de sua frequência sozinho, ou seja, sem a influência de outro modo.

Uma vez identificados os picos na magnitude da FRF, as frequências são marcadas como  $\omega_n$ . Para que se determine o amortecimento em cada ponto, é necessário avaliar a forma do pico, o quão concentrado ou distribuído ele é. Para tanto, inicialmente é necessário tomar o valor da amplitude  $\Omega$  da ressonância como referência e identificar os pontos imediatamente acima ( $\omega_s$ ) e abaixo ( $\omega_i$ ), correspondentes à banda de meia potência, ilustrada na Figura 3.2.

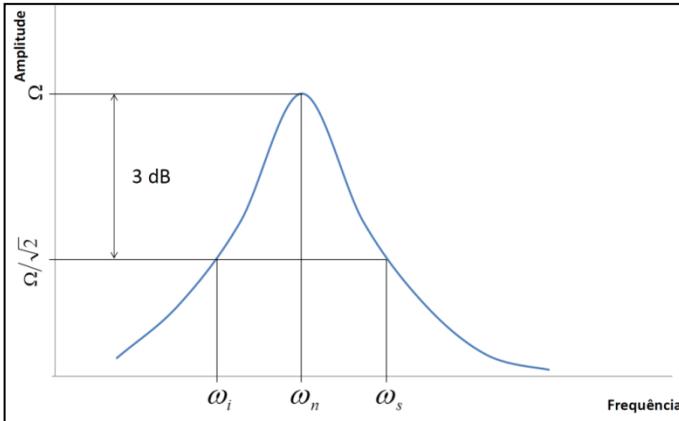


Figura 3.2: Banda de meia potência.

Para a obtenção dos coeficientes de amortecimento na frequência de ressonância é aplicada a seguinte fórmula:

$$\xi = \frac{\Delta\omega}{2\omega_n} . \quad (3.16)$$

Além do Pico de Amplitude, outros métodos no domínio da frequência também são frequentemente utilizados, tais como *Quadrature Response*, Ajuste Individual de Círculo (através de gráficos Nyquist) ou Fração Racional Polinomial.

Uma ferramenta bastante importante para a análise modal experimental é o gráfico de estabilização. Este gráfico é obtido repetindo-se diversas vezes a análise modal a partir dos dados obtidos, porém sempre elevando o número de modos. À medida em que a análise é repetida, mais frequências modais são estimadas e adicionadas à resposta, sendo que quando uma frequência de um modo real é identificada, ela passa a se repetir nas análises seguintes, sempre com o mesmo valor, ou seja, estabilizada. Modos bem excitados tendem a apresentar uma rápida estabilização, enquanto que os modos que recebem pequena excitação tendem a estabilizar somente depois que modos muito elevados sejam analisados. Os modos espúrios não estabilizam por completo, podendo ser facilmente eliminados da análise.

A partir da resposta de todas as análises, ou seja, das de menor ordem até as de maior, é gerada uma curva sintetizada de todas as respostas, mostrando todas as respostas identificadas em cada uma das análises. Os modos reais aparecem repetidamente no mesmo ponto,



duas etapas. Inicialmente, o eixo será avaliado sem as juntas na condição livre-livre. Esta estratégia permite eliminar as influências das condições de contorno, o que reduz a quantidade de variáveis e leva a um ajuste mais preciso do modelo numérico. O resultado validará a geometria, propriedades do material e os elementos de malha do modelo numérico. Na segunda etapa, o semi-eixo completo será montado no veículo, levantando dados para a determinação das condições de contorno.

### 3.3.1 Cadeia de instrumentos

Os resultados de uma análise modal experimental dependem de uma série de fatores ligados à cadeia de instrumentação e montagem da amostra. Os suportes de fixação, mecanismos de excitação, o tipo de instrumentação e os parâmetros de cada instrumento influenciam diretamente nos resultados. A Figura 3.4 representa a instrumentação utilizada neste trabalho.

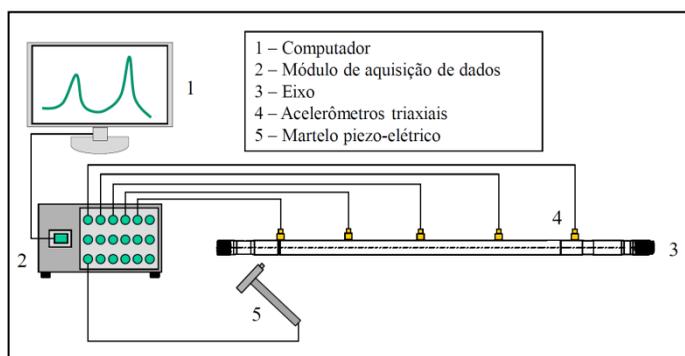


Figura 3.4: Cadeia de instrumentação.

O *software* utilizado para a análise modal foi o CADA-X, da LMS. O computador foi ligado a um módulo LMS SCADAS III de 20 canais, capaz de realizar medições com uma taxa de amostragem de até 204,8kHz a 24 bits. O número de bits determina em quantos pontos vai ser discretizado o sinal analógico adquirido através da relação  $2^n$ , onde  $n$  é o número de bits. Isso significa que o SCADAS III é capaz de ler um sinal mais de 200 mil vezes por segundo com uma resolução de mais de 16 milhões de pontos.

Embora não exista um modelo analítico que represente as condições de contorno das juntas homocinéticas e a seção transversal do eixo não seja constante, sabe-se que o perfil dos modos de flexão se

aproxima bastante do modelo de uma barra bi-apoiada (COUTINHO; TAMAGNA, 1993). Esta consideração foi utilizada para determinar a quantidade de pontos de medição e a posição onde a excitação foi aplicada. Sobre o eixo foram localizados 5 pontos equidistantes onde foram aplicadas as excitações e realizadas as leituras da resposta do eixo (ver Figura 3.5).

As duas análises modais foram realizadas utilizando a mesma discretização. Como no caso do eixo montado existe a presença das coifas termoplásticas, as extremidades do eixo não estão acessíveis para a instalação dos acelerômetros. Por este motivo, mesmo havendo espaço para que os transdutores pudessem ser colocados nas extremidades do eixo livre-livre, foi mantido o espaço vazio das coifas.

A Figura 3.5 ilustra a posição dos 5 pontos sobre o semi-eixo e uma aproximação dos primeiros modos de flexão nas condições livre-livre e bi-apoiado. Percebe-se que foram evitados os nós destes dois principais modos de vibração.

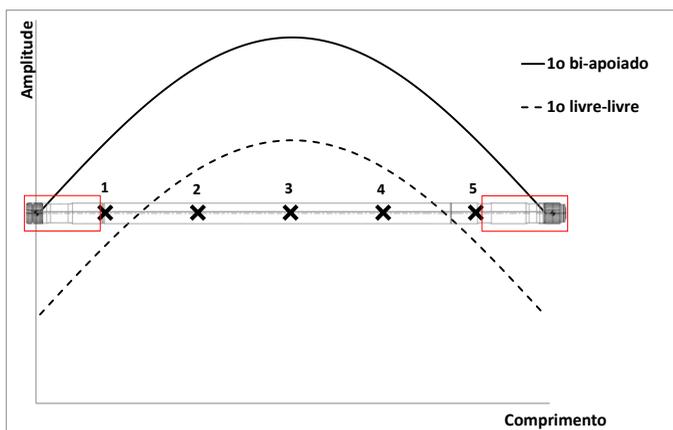


Figura 3.5: Os 5 pontos e discretização do eixo (área coberta pelas coifas em vermelho).

Sobre cada um dos pontos foi instalado um acelerômetro tri-axial A356A08, da marca PCB preso por base magnética. Cada conjunto acelerômetro + base tem a massa de 40g (22g + 18g, respectivamente), totalizando 200g comparado à massa de 2,1kg do eixo. Para se certificar que a massa dos transdutores não influenciou nos resultados, foi obtida uma FRF inicial posicionando um acelerômetro no ponto 3 para se determinar a frequência do primeiro modo livre-livre. Em seguida, o experimento foi repetido com os 5 acelerômetros. Como se percebe pelos resultados mostrados na Figura 3.6, a massa dos transdutores não

afetou o resultado significativamente. A diferença encontrada entre as duas medições foi de 2,25Hz, o que significa aproximadamente 1%. A orientação de cada eixo do transdutor foi feita segundo o Sistema de Eixos SAE mostrado na Figura 3.7.

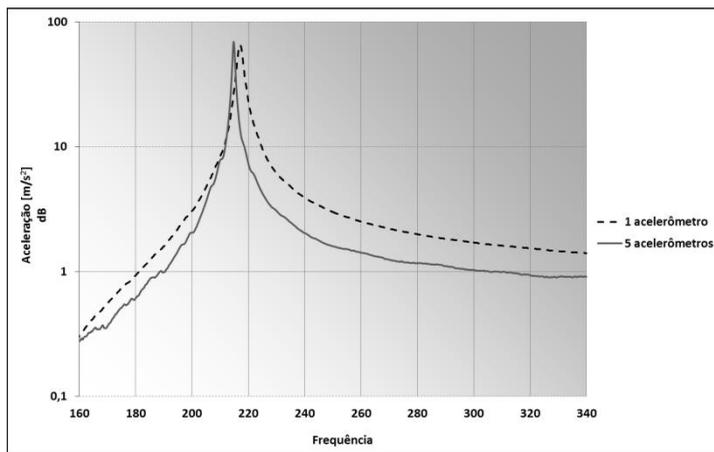


Figura 3.6: Espectro com 1 e 5 acelerômetros.

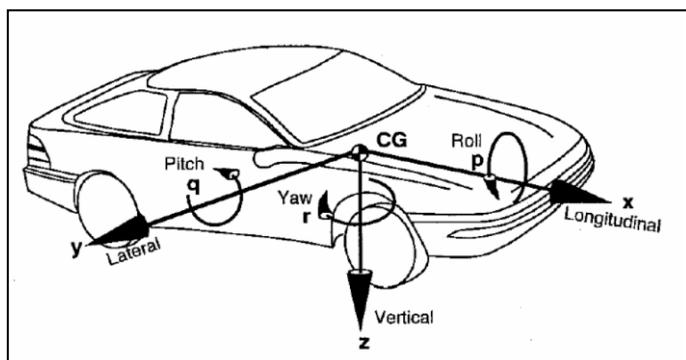


Figura 3.7: Sistema de coordenadas SAE.

A excitação pode ser aplicada de diferentes formas:

Pré-tensionamento: a estrutura é tensionada com uma força controlada por uma corda que é subitamente liberada, proporcionando a conversão de energia potencial em cinética;

Condição de trabalho: o mecanismo é excitado pelas cargas no seu uso normal. Neste método não é possível controlar a carga aplicada;

Excitador de vibração: um mecanismo acoplado à estrutura aplica uma vibração com amplitude frequência e padrão controlados. A

desvantagem deste método é que caso não seja bem realizado, pode adicionar massa ao sistema, alterando o seu comportamento dinâmico, especialmente em estruturas leves;

Martelo de impacto: um martelo com uma célula de carga aplica um impulso sobre a estrutura, fazendo-a vibrar.

Por ser um método rápido, simples de ser implementado e apresentar resultados satisfatórios quando realizado por um operador experiente, o método do martelo de impacto foi utilizado neste ensaio.

Uma desvantagem da excitação por martelo é que a faixa de frequência excitada não pode ser limitada de forma direta. Isto significa que os modos de vibração de frequência mais altas e que não estão sendo avaliados também serão excitados, desperdiçando energia que poderia ser direcionada aos modos de frequência mais baixa. Uma forma de minimizar este problema consiste em substituir a ponteira do martelo. A escolha do material e da geometria desta ponteira influencia diretamente na faixa de frequência excitada. A Figura 3.8 mostra as formas da força de impacto e os respectivos espectros. Para estímulos com materiais mais macios como borracha, o espectro concentra-se nas baixas frequências (Agilent Technologies, 2000).

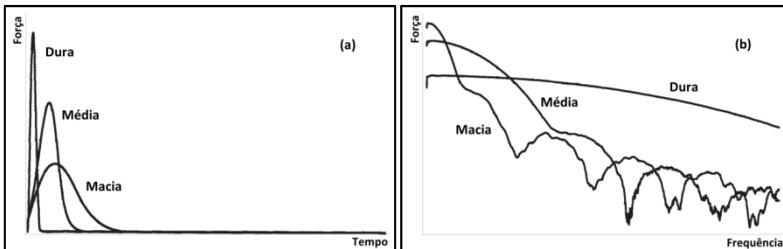


Figura 3.8: Impacto no tempo (a) e na frequência (b) (adaptado de The Fundamentals of Modal Testing, Agilent Technologies, 2000).

É importante que o impacto seja sempre aplicado perpendicularmente à superfície e evitar que o martelo repique sobre a estrutura analisada, pois isto provocaria uma excitação dupla que também teria influência indesejada nos resultados. Por último, é fundamental que a batida ocorra sempre no mesmo ponto, evitando-se ao máximo desvios significativos entre uma medida e outra.

Para este experimento o semi-eixo foi excitado por um martelo de impacto da marca PCB montado com ponteira de nylon e um transdutor de força modelo 086C05 de sensibilidade de 0,25mV/N. A Figura 3.9 ilustra o espectro de força aplicada ao eixo.

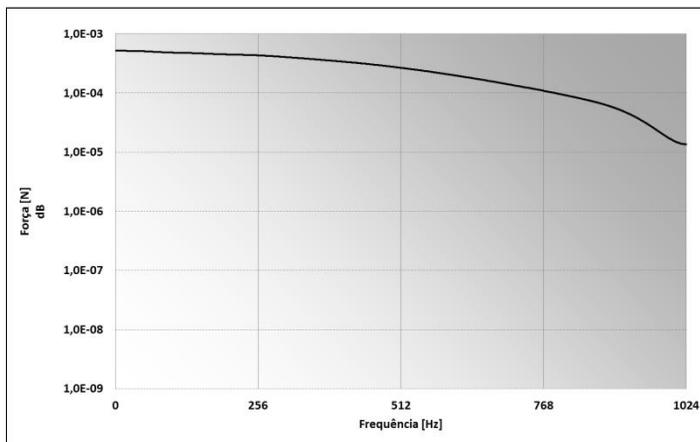


Figura 3.9: Variação da força no espectro da frequência.

### 3.3.2 Ajustes de parâmetros

Tanto a aquisição quanto a análise dos dados gerados exigem que uma série de parâmetros seja corretamente ajustada. Sempre que esta etapa for negligenciada ou realizada de forma imprecisa, erros associados ocorrerão e levarão a conclusões inadequadas, comprometendo o estudo realizado.

Para o estudo do semi-eixo, a faixa de frequência da aquisição foi ajustada em 1024Hz, dando uma boa margem de segurança já que este sistema costuma apresentar respostas no intervalo de 100Hz a 300Hz. Foram definidas 4096 linhas espectrais, o que resulta em uma resolução de 0,25Hz. Sobre o sinal do martelo foi aplicado uma janela de força de 0,5%. Para minimizar o erro de *Leakage*, uma janela exponencial de 1% foi aplicada sobre o sinal dos transdutores.

### 3.3.3 Modelo livre-livre (*free-free*)

O principal objetivo da análise modal experimental neste trabalho é gerar dados para validar a análise modal numérica. Isso significa que a partir dos resultados obtidos, um modelo virtual em elementos finitos será construído e ajustado de tal forma que se obtenha a mesma frequência natural encontrada no teste físico. Este modelo, por sua vez, será utilizado no estudo de otimização. Para que o modelo matemático seja representativo, muitas variáveis precisam ser ajustadas

corretamente, tais como geometria, tipo e tamanho de malha e condições de contorno, entre outras. É possível, no entanto, que uma combinação errada destes parâmetros leve a uma resposta correta para a geometria em questão, mas que não represente o modelo físico quando a geometria for alterada. Por exemplo, pode-se erroneamente ajustar as propriedades do material e as condições de contorno de tal forma que se obtenha o mesmo resultado do modelo real quando avaliada a geometria original. No entanto, ao iniciar o estudo de otimização e se realizar alterações desta geometria, este modelo matemático pode não mais representar o comportamento real da estrutura otimizada.

Para evitar este problema, as propriedades do eixo serão determinadas separadamente dos parâmetros de condições de contorno. Inicialmente será avaliado um eixo sem as juntas e qualquer tipo de fixação, na forma denominada livre-livre. Os resultados serão então utilizados para validar a geometria, as propriedades do material e os elementos de malha. Finalmente, o ensaio físico será repetido montando-se o eixo nas juntas e no carro, avaliando-se assim a influência das condições de contorno no modelo.

No experimento realizado, o eixo foi suspenso em dois cavaletes por dois tirantes de borracha bastante flexíveis. O eixo foi preso nas suas duas extremidades perpendicularmente a estas borrachas. Os cavaletes foram montados sobre uma pesada base de aço suspensa por coxins, isolando o sistema completamente de fatores externos. Embora esta configuração resulte em uma frequência muito baixa no modo de corpo rígido vertical, os acelerômetros foram montados no plano horizontal, fazendo um movimento de pêndulo. Esta configuração resulta em uma frequência de balanço muito baixa, principalmente quando o comprimento dos tirantes for próximo ou maior de 1 metro, conforme utilizado no experimento. A aproximação da frequência em Hertz deste modo pode ser feita pela Equação (3.17).

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l_p}}, \quad (3.17)$$

onde  $f_p$  é a frequência do movimento de pêndulo,  $g$  a gravidade e  $l_p$  o comprimento do tirante. Para este caso, onde  $l=1\text{m}$ , a frequência é aproximadamente 0,5Hz.

A Figura 3.10 mostra a montagem do eixo para o ensaio livre-livre.

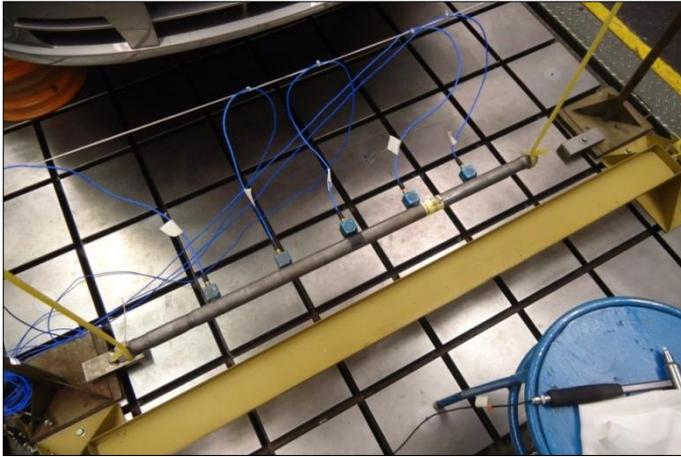


Figura 3.10: Montagem para o ensaio livre-livre.

Embora a aplicação da força em um ponto seja o bastante, neste experimento a força foi aplicada nos pontos 3 e 4 para garantir a excitação do primeiro e segundo modo. Para cada um foi determinada uma curva de resposta a partir da média de 10 aquisições. A partir dos resultados, utilizando-se método de identificação no domínio na frequência, foi gerada uma curva de estabilização (Figura 3.11). Os dois primeiros modos de flexão foram facilmente identificados nas seguintes frequências (Figura 3.12):

- Primeiro modo de flexão: 213,6Hz;
- Segundo modo de flexão: 576,2Hz.



Figura 3.11: Curva de estabilização (livre-livre): primeiro e segundo modos de flexão identificados.

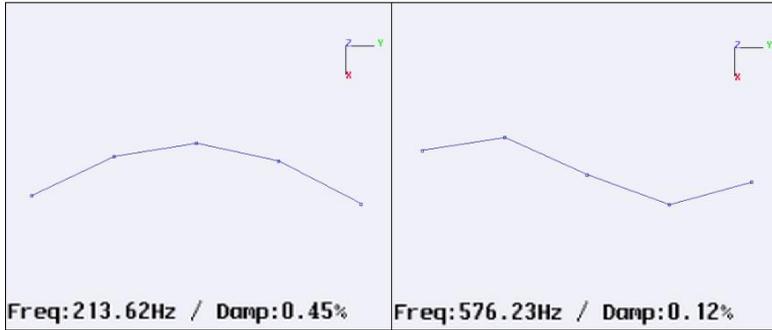


Figura 3.12: Primeiro e segundo modos de flexão livre-livre.

### 3.3.4 Modelo com condições de contorno (montado no veículo)

Utilizando mais uma vez a instrumentação e parâmetros da análise livre-livre, o semi-eixo foi montado por completo em um veículo e a análise modal foi repetida. Para que as condições fossem as mais reais possíveis, foi aplicado um torque de 50Nm estático sobre o semi-eixo (valor típico de um veículo em velocidade constante), reproduzindo assim a situação de transmissão de potência. Este procedimento elimina as folgas e cria uma resistência ao movimento de flexão devida ao atrito entre os componentes internos da junta.

Comparando ao modelo livre-livre, é esperado que o semi-eixo montado no veículo apresente valores mais baixos para a frequência do primeiro modo de flexão. Para demonstrar isto, inicialmente pode-se aproximar o cálculo da frequência de flexão do eixo livre-livre como (INMAN, 2007):

$$f_n = \frac{(4,73)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A_e l^4}}, \quad (3.18)$$

onde  $E$  corresponde ao módulo de elasticidade do material,  $I$  o momento de inércia da seção transversal,  $\rho$  a densidade do material,  $A_e$  a área da seção transversal e  $l$  o comprimento da barra.

No caso do eixo montado, embora não exista um modelo que represente esta condição precisamente, pode-se fazer uma aproximação como um modelo bi-apoiado. De fato, pode-se entender que o eixo montado se enquadra em um ponto intermediário entre uma viga bi-apoiada e uma viga bi-engastada, tendendo para o primeiro. Para

entender esta analogia, é preciso que se defina a expressão para uma viga bi-apoiada (INMAN, 2007):

$$f_n = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}. \quad (3.19)$$

A equação para uma viga bi-engastada é a mesma definida para a condição livre-livre (Equação (3.18)).

Considerando que o eixo é feito de aço SAE 1045 com módulo de elasticidade  $E = 201\text{GPa}$ , densidade de  $7850\text{kg/m}^3$ , comprimento de  $693\text{mm}$  e diâmetro constante de  $22,8\text{mm}$ , obtém-se os valores mostrados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Frequências para modelos analíticos.

Condições de contorno	Frequência [Hz]
Livre-livre	213,6
Bi-engastado	213,6
Bi-apoiado	94,2

Observa-se que o valor da frequência com as condições de contorno bi-apoiada de fato apresenta um valor mais baixo que o livre-livre, indicando que valores menores devem ser esperados para o eixo quando montado no veículo.

O veículo foi suspenso para facilitar o acesso por debaixo dele, no entanto, as rodas foram mantidas apoiadas sobre calços para permitir que o torque estático fosse aplicado e o ângulo correto das juntas fosse mantido. Os acelerômetros foram posicionados na parte superior do eixo e montados nos mesmos pontos do modelo livre-livre. O estímulo do martelo foi aplicado 10 vezes nos pontos 3 e 4 nos eixos X e Z. A Figura 3.13 mostra a montagem do eixo para o ensaio no veículo.

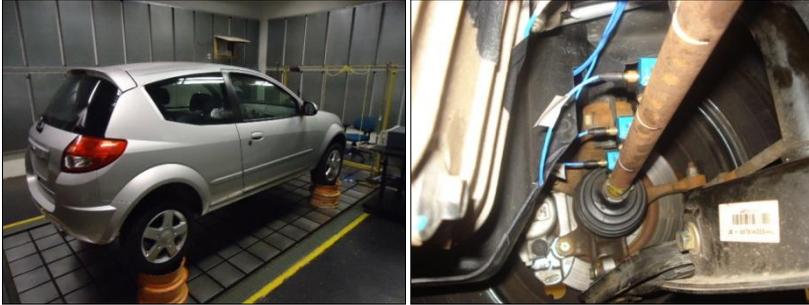


Figura 3.13: Montagem para o ensaio em veículo.

Novamente, a partir das respostas obtidas foi aplicado o método de identificação no domínio da frequência e gerada uma curva de estabilização (Figura 3.14).

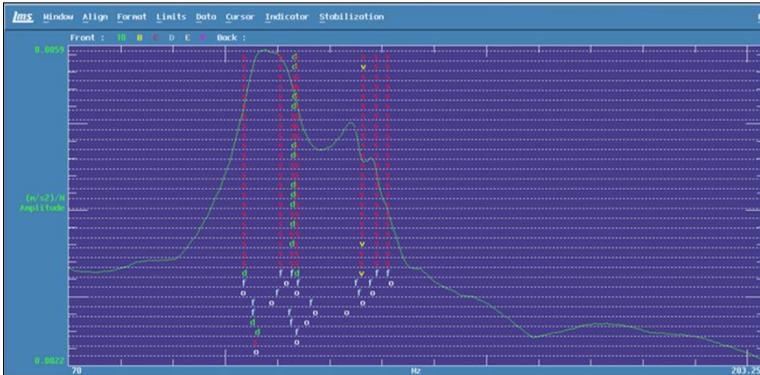


Figura 3.14: Curva de estabilização (montado no veículo): 1º modo próximo de 110Hz.

Percebe-se um pico na região próxima de 110Hz, no entanto, em uma primeira análise o algoritmo identifica mais de um ponto como possível modo, dificultando a determinação da frequência do primeiro modo de flexão com precisão. Dentre estes pontos, os valores de amortecimento são mostrados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Modos do eixo montado no veículo.

Nº do modo identificado	Frequência [Hz]	Amortecimento [%]
9	102,6	0,15
10	104,8	1,22
11	107,4	4,72
12	107,9	1,32
13	112,2	16,06

Considerando o valor de amortecimento elevado em 112,2Hz e a forma modal desta frequência (Figura 3.15), pode-se definir o valor de 112,2Hz como a frequência do primeiro modo de flexão em veículo.

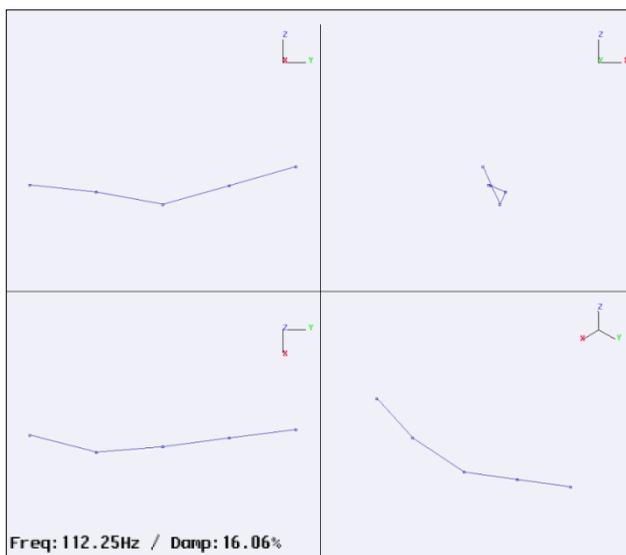


Figura 3.15: Primeiro modo de flexão do eixo montado em veículo.



## 4. ANÁLISE MODAL NUMÉRICA (MEF)

Tradicionalmente, o método para se dimensionar uma estrutura física consiste em formular uma equação matemática que represente o problema real e resolvê-la. As respostas obtidas podem então ser analisadas e interpretadas como o comportamento que a estrutura irá apresentar. Para muitas das situações, já existem modelos analíticos desenvolvidos que representam muito bem o modelo físico, obtendo respostas exatas. A maior parte destes métodos é bastante difundida e aceita, porém, existem algumas limitações.

Vigas e geometrias simples podem ser representadas por modelos analíticos. Estruturas de maior importância prática são na maior parte dos casos muito complexas para serem analisadas pelos métodos clássicos, tendo-se que recorrer em excesso a simplificações que acabam levando a resultados pouco precisos.

Para se contornar este problema, recorre-se ao uso do Método dos Elementos Finitos (MEF). Este é um método aproximado que permite, porém, ser aplicado em qualquer tipo de geometria com quaisquer condições de carregamento, gerando resultados com um nível de precisão aceitável. A ideia básica passa por discretizar um sistema contínuo em partes separadas distintas, conectadas entre si por pontos discretos conhecidos como nós. A solução aproximada é obtida pelo agrupamento de um número finito destes elementos.

### 4.1 ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS

Uma estrutura discretizada pode ser entendida como uma série de pontos ligados entre si por molas e amortecedores. Na análise dinâmica os pontos são os nós, estruturas imaginárias de referência que representam a massa de cada elemento. Cada ponto é conectado ao seu vizinho por molas e amortecedores, dependendo da quantidade de graus de liberdade representada no problema e do tipo de elemento. Conforme descrito no Item 3.1, estes elementos formam um sistema de equações lineares que é representado na forma matricial e o problema é resolvido através de equações algébricas. A matriz da massa é uma matriz formada pelo valor da massa de cada nó enquanto que as matrizes de rigidez e amortecimento são representadas pela Equações (4.2) e (4.3).

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

e

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Os elementos destas matrizes são determinados da seguinte forma: para cada valor, o índice associado à linha corresponde ao elemento onde a grandeza é medida, enquanto que o índice correspondente à coluna representa o elemento onde o estímulo é aplicado (por padrão e simplicidade, costuma-se adotar deslocamento unitário).

A equação da dinâmica de um sistema mecânico é dada por (INMAN, 2007):

$$[M]\{\ddot{\vec{x}}\} + [C]\{\dot{\vec{x}}\} + [K]\{\vec{x}\} = \{\vec{f}\}. \quad (4.4)$$

Considerando que a força de excitação é nula ( $\{\vec{f}\} = \{0\}$ ), a ausência de amortecimento e movimento harmônico na forma  $\{\vec{x}\} = \{X\}e^{i\omega t}$ , tem-se:

$$-\omega^2 [M]\{X\} + [K]\{X\} = \{0\}. \quad (4.5)$$

Como dito no Item 3.1, pré multiplicando esta equação por  $[M]^{-1}$  (a inversa da matriz massa), a matriz da massa e rigidez podem ser reescritas como uma matriz dinâmica  $[D]$ :

$$\omega^2 \{X\} = [M]^{-1}[K]\{X\} = [D]\{X\}. \quad (4.6)$$

Esta equação se assemelha a um problema clássico de autovetores e autovalores, onde  $\lambda = \omega^2$  são os autovalores que fornecem as frequências naturais e  $\{X\}$  são as formas modais.

Em problemas práticos resolvidos por elementos finitos, as matrizes  $[M]$  e  $[K]$  são de dimensões muito elevadas, de forma que calcular  $[D] = [M]^{-1}[K]$  se torna inviável. Assim, outros algoritmos são utilizados para extrair autovalores e autovetores do problema acima apresentado (STRANG; FIX, 1997).

Nos problemas onde o movimento forçado é levado em consideração, com aplicação de força harmônica  $\{\bar{f}\} = \{\bar{f}\} e^{i\omega t}$ , tem-se:

$$-\omega^2 [M]\{X\} + [K]\{X\} = \{\bar{f}\}, \quad (4.7)$$

ou

$$([K] - \omega^2 [M])\{X\} = \{\bar{f}\}. \quad (4.8)$$

Isolando o vetor  $\{X\}$ :

$$\{X\} = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \{F\} = [\alpha(\omega)] \{F\}. \quad (4.9)$$

Na equação acima a matriz  $[\alpha(\omega)]$  contém as receptâncias do sistema, considerando todos os pontos de excitação e resposta. O procedimento acima, com inversão de matriz para cada frequência  $\omega$ , é novamente inviável. Usando as propriedades de ortogonalidade das formas modais pode-se provar que cada elemento da matriz  $[\alpha(\omega)]$  pode ser colocado na forma:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{r \phi_j}{\omega_{nr}^2 - \omega^2} r \phi_k, \quad (4.10)$$

onde  $N$  é o número total de modos,  ${}_r\phi_j$  a amplitude da forma modal no ponto de resposta e  ${}_r\phi_k$  o mesmo para o ponto de excitação.

A precisão das constantes de mola e amortecimento equivalentes de cada elemento influenciará diretamente na resposta. Em geral, quanto mais simples o elemento menos recursos computacionais são necessários, o que torna a solução do problema mais barata. Por outro lado, elementos simples demais acarretam em simplificações que podem fazer o modelo não representar a estrutura real.

Elementos de barra possuem comportamento unidimensional, ou seja, podem muito bem ser utilizados para um cálculo de uma estrutura sujeita à tração ou compressão, no entanto, é insensível aos esforços de cisalhamento e flexão e não representa as variações de carga na seção transversal. Geralmente são utilizados no cálculo de soluções globais de treliças, onde os elementos são conectados entre si sem a transmissão de momento fletor.

Elementos de viga apresentam mais graus de liberdade comparados ao elemento de barra, sendo possível também avaliar os esforços e deslocamentos transversais como esforço cortante ou momento de flexão. Estes elementos têm como base as teorias de viga de Euler-Berlouilli ou de Timoshenko (Figura 4.1). Na primeira, parte-se da premissa que o plano transversal mantém-se plano e perpendicular à linha neutra para pequenos deslocamentos, enquanto que na segunda supõe-se que existe uma rotação adicional causada pela deformação da seção.

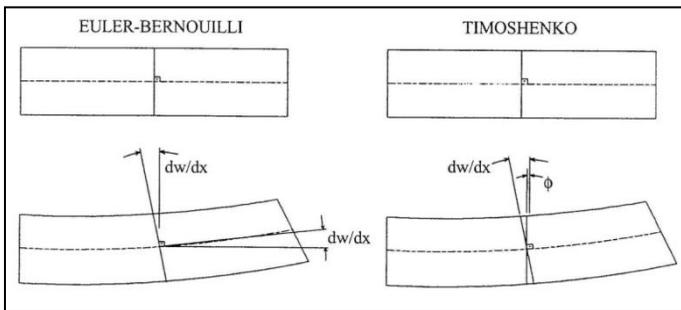


Figura 4.1: Ilustração das teorias de viga de Euler-Berlouilli e de Timoshenko.

De acordo com Fonseca (2002), para a escolha do melhor elemento deve-se levar em consideração a relação entre comprimento e largura. Como regra geral para problemas dinâmicos (como análise modal), Fonseca define que em respostas de baixa frequência de peças

esbeltas (maior seção transversal da geometria corresponde a no máximo 1/10 do comprimento da viga) deve-se optar pelo elemento deduzido a partir da teoria de Euler-Berlouilli. Já para frequências mais elevadas de geometrias com esbelteza moderada, recomenda-se o uso do modelo de Timoshenko. No entanto, em vigas curtas ou com geometria especial, recomenda-se a análise tridimensional utilizando elemento sólido, este bem mais complexo e caro.

Elementos sólidos são mais versáteis, pois podem ser facilmente aplicados a geometrias complexas e reproduzem as condições de contorno de forma mais precisa. Os elementos mais comuns são os tetraedros, pentaedros e hexaedros. Todos possuem 3 faces adjacentes a cada nó (Figura 4.2).

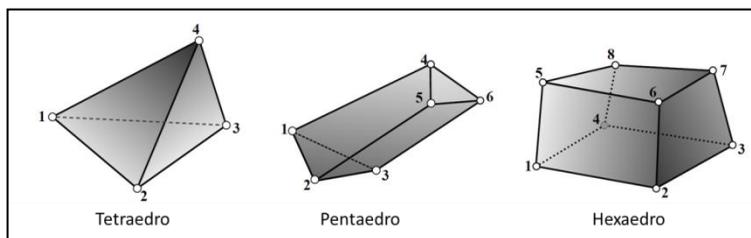


Figura 4.2: Principais elementos sólidos.

## 4.2 PROBLEMA DE ANÁLISE MODAL DE SEMI-EIXO

Analisando a geometria do semi-eixo, percebe-se que se trata de uma peça esbelta, sendo a relação do diâmetro máximo pelo comprimento inferior a 1/10. Além disto, o problema em questão trata de uma análise modal em baixas e médias frequências (de 30Hz a 200Hz). Tipicamente seria recomendada a utilização de elementos de viga na obtenção da solução, já que apresentam a melhor relação entre resposta e custo computacional.

No entanto, o objetivo principal em criar um modelo numérico do semi-eixo é poder utilizá-lo em um estudo de otimização. Conforme apresentado no Capítulo 5, a otimização foi dividida em duas etapas, sendo que a primeira foi feita sobre um eixo com seção transversal não constante, ou seja, a geometria foi dividida em diversas seções cônicas (Figura 4.3).

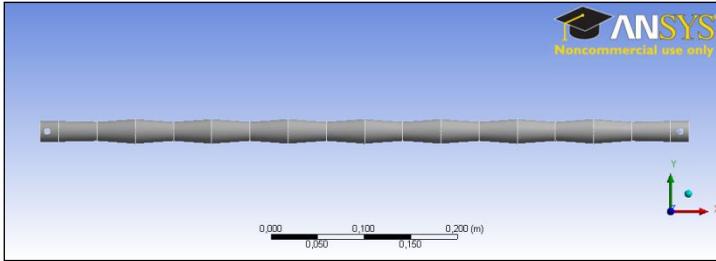


Figura 4.3: Eixo utilizado no estudo de otimização (seção não constante).

Como o elemento de viga deve apresentar seção constante, neste caso o eixo deveria ser discretizado em elementos muito pequenos, para uma melhor representação da geometria (Figura 4.4), aumentando o custo computacional a ponto de não ser vantajoso comparado ao elemento sólido. Além disso, por se tratar de uma geometria simples, mesmo quando utilizado o elemento sólido o tempo de análise permanece baixo, menor que 20 segundos, ou seja, o custo computacional não é significativamente afetado, mesmo que o problema trate de um estudo de otimização com diversas iterações.

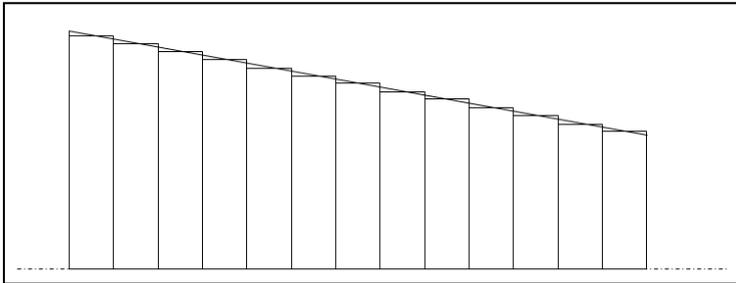


Figura 4.4: Utilização de elemento de viga resultaria em representação mais grosseira da geometria.

Outra limitação do elemento de viga ocorreria com a simulação do eixo montado no veículo. Conforme mostrado na Figura 4.5, a geometria foi ligeiramente alterada na região das juntas, tornando a utilização do elemento sólido mais apropriada.

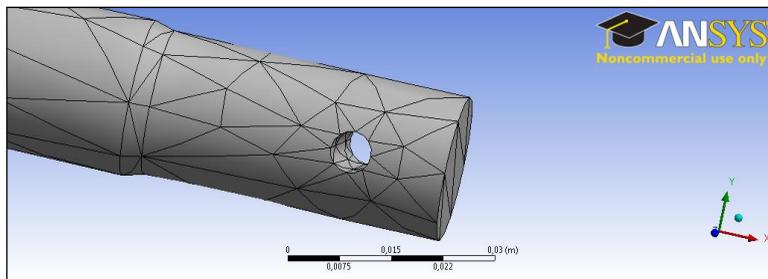


Figura 4.5: Malha na região do apoio.

Por último, conforme demonstrado no estudo realizado por Chen (2012), o elemento sólido apresenta bons resultados na análise modal do eixo de um rotor com propriedades similares às do eixo em estudo. Levando em consideração os fatos acima expostos, optou-se por utilizar o elemento sólido no estudo do semi-eixo.

#### 4.3 MODELO LIVRE-LIVRE

A partir dos resultados obtidos com a análise modal experimental o modelo numérico teve ajustadas as propriedades de material, malha e condições de contorno de tal forma a reproduzir o modelo real. O *software* utilizado para a simulação foi o Ansys Workbench versão 13.0. A plataforma Workbench é uma ferramenta complementar que facilita a elaboração do problema, traduzindo os dados de entrada para uma interface gráfica simples e intuitiva de acordo com o tipo de análise desejada (estrutural, modal, térmica e elétrica, por exemplo).

A geometria do modelo foi gerada utilizando-se o próprio *software*. A região das estrias que fazem interface com as juntas foram aproximadas pelo diâmetro médio dos dentes. Esta aproximação garante que a massa na região se mantenha a mesma, ao passo que a rigidez equivalente pode ser alterada minimamente neste ponto. No entanto, a flexão na extremidade do eixo tende a ser desprezível, o que torna o modelo bastante fiel ao modelo real. A Figura 4.6 mostra o modelo comparado ao desenho 2D do eixo.

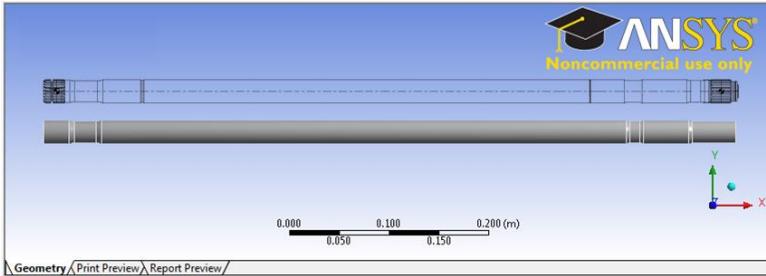


Figura 4.6: Modelo gerado no Ansys (abaixo) comparado com o desenho 2D do eixo (acima).

Conforme dito anteriormente, para facilitar o estudo de otimização onde o eixo será representado como uma sequência de seções cônicas, optou-se por utilizar o elemento sólido no modelo numérico. O Ansys workbench permite que a malha de elementos seja gerada de diversas formas: pode-se escolher o tipo de elemento, um grupo de elementos, pode-se refinar pontos específicos ou, por último, pode-se gerar a malha automaticamente. Neste último, o usuário apenas determina o tamanho do elemento enquanto que o Ansys elege o melhor tipo para cada ponto da geometria. Como esta escolha resulta em diferentes tipos de elementos sendo usados ao mesmo tempo, o tamanho determinado pelo usuário corresponderá à maior diagonal de cada elemento, independente do tipo escolhido.

Para o estudo do eixo, o tamanho foi definido de forma empírica: partindo-se de um elemento de tamanho 100mm (maior aresta), foi realizada uma análise modal numérica. Em seguida, a análise foi repetida com um elemento menor e os resultados comparados a fim de verificar se a variação do tamanho influenciaria ou não na resposta. Neste procedimento, foi definido o elemento sólido com tamanho de 20mm como ideal para representar o modelo (Figura 4.7).

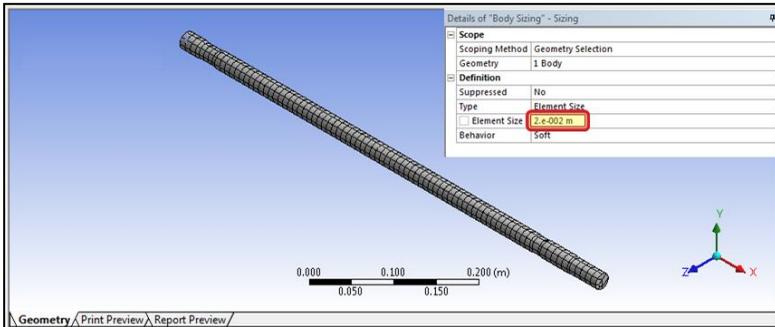


Figura 4.7: Eixo discretizado em elementos sólidos de 20mm.

O eixo é feito de aço SAE 1045 que possui módulo de elasticidade padrão  $E = 201\text{GPa}$  e densidade de  $7850\text{kg/m}^3$ . Para se refinar o modelo e obter exatamente os mesmos resultados da análise modal experimental o módulo de elasticidade foi reduzido para  $194,5\text{GPa}$ , mantendo-se a mesma densidade padrão (Tabela 4.1).

Tabela 4.1: Propriedades do material.

Propriedade	Valor
Densidade	$7850 [\text{kg/m}^3]$
Módulo de Elasticidade	$194,5\text{GPa}$
Poisson	$0,3$

Executando a análise modal numérica do modelo gerado, foi encontrado o valor de aproximadamente  $213,7\text{Hz}$  para o primeiro modo de flexão, próximo do valor de  $213,6\text{Hz}$  identificado na análise modal experimental. O resultado obtido foi utilizado como referência para validar a geometria, propriedades do material, tamanho e tipo de malha. Para a análise com condições de contorno, as mesmas propriedades serão utilizadas, fazendo-se apenas as alterações necessárias para representar o apoio da maneira mais adequada.

Na Figura 4.8, abaixo, pode-se observar o resultado da análise modal numérica e a forma modal do eixo. A amplitude da deformação teve a escala ampliada apenas por fim didático, ilustrando o comportamento dinâmico do eixo.

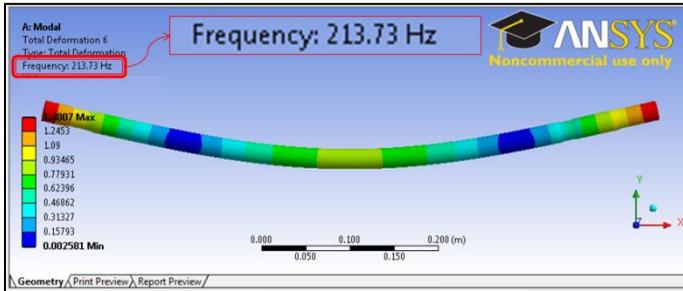


Figura 4.8: Primeiro modo de flexão na análise modal numérica livre-livre.

#### 4.4 MODELO COM CONDIÇÕES DE CONTORNO (MONTADO NO VEÍCULO)

Para a simulação do semi-eixo montado no veículo, é necessário considerar as juntas homocinéticas. De forma simplificada, pode-se entender as juntas como suportes para o eixo permitindo que rotacione nos dois eixos perpendiculares à sua orientação (Figura 4.9). Como o eixo é circular e os esforços de reação das juntas são iguais nos dois planos, a flexão ocorre de forma simétrica no plano XY, YZ ou qualquer plano intermediário.

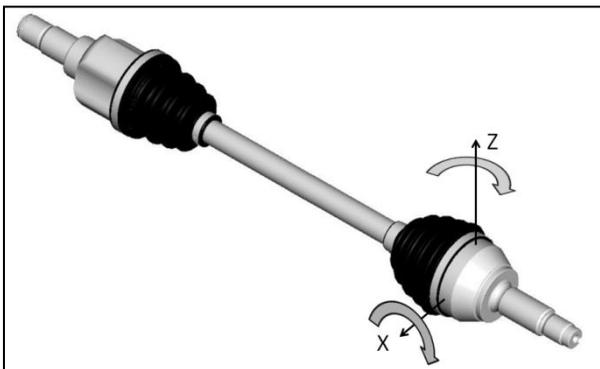


Figura 4.9: Junta pode ser entendida como um apoio 2D com resistência para o eixo.

Para representar a condição de apoio da junta, a geometria do eixo foi alterada adicionando-se um pequeno rasgo cilíndrico com raio de 4mm na posição equivalente ao centro de rotação da junta (Figura 4.10). Uma vez que o plano no qual o eixo irá vibrar não afeta o resultado e é uma função da orientação que a excitação é aplicada, o

furo foi feito de tal forma a permitir a flexão apenas no plano vertical (YZ).

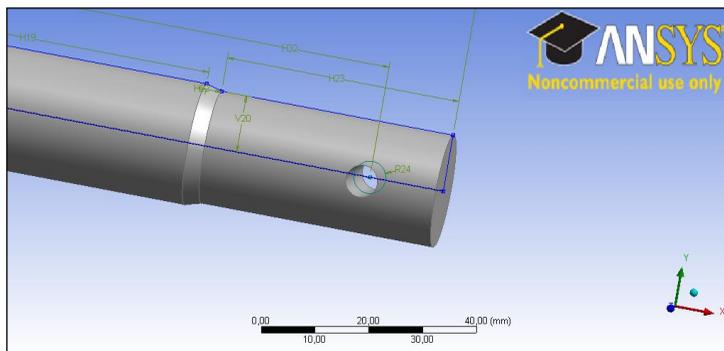


Figura 4.10: Furo de apoio na posição equivalente ao centro de rotação da junta.

Conforme dito no Item 3.3.4, o eixo apoiado sobre juntas apresenta um comportamento intermediário entre um sistema bi-apoiado e bi-engastado. Isto significa que o eixo tem liberdade de rotacionar sobre o eixo transversal da junta. No entanto, esse movimento não é feito com liberdade total. Existe alguma resistência a este movimento de rotação provocada pelas juntas.

Conforme descrito por Coutinho (1993), a representação da interface do eixo com as juntas é uma das mais difíceis de ser feita no modelo do semi-eixo. Para contornar este problema, Coutinho propôs que, mantendo o eixo fixo, as juntas fossem representadas como uma massa presa a um ponto fixo através de uma mola torcional com um amortecimento viscoso (Figura 4.11).



Figura 4.11: Juntas representadas como uma mola e um amortecedor torcional.

Os resultados obtidos por Coutinho demonstram que a representação da junta como um apoio com a mola torcional apresentam bons resultados comparados ao modelo real, desde que a constante de

mola seja ajustada corretamente. Coutinho ainda demonstrou que o amortecimento pode ser desprezado quando o objetivo é determinar as frequências naturais e os modos de vibração.

Seguindo esta mesma metodologia, foi acrescentada ao modelo uma mola torcional na região do apoio das juntas. A constante de mola foi determinada de forma empírica, partindo de um valor inicial de  $150\text{Nm}^\circ$  e alterando o valor até atingir o mesmo valor da frequência de flexão identificado na análise modal experimental. O valor ideal encontrado para a constante de mola foi de  $44\text{Nm}^\circ$ . Este valor não significa que na prática a junta apresenta uma rigidez de  $44\text{Nm}^\circ$ . De fato a junta sequer tem o comportamento de uma mola, ou seja, a força de articulação não se eleva com o aumento do ângulo. O valor de  $44\text{Nm}^\circ$  deve apenas ser entendido como um valor intermediário entre a rigidez de um modelo bi-apoiado (rigidez zero) e um modelo bi-engastado (rigidez infinita na junta, sendo limitada pela deformação do eixo na região de engaste).

Todos os demais graus de liberdade foram restringidos (deslocamento em X, Y e Z e rotação em X e Y – coordenadas locais). A Figura 4.12 mostra o modelo com a mola torcional.

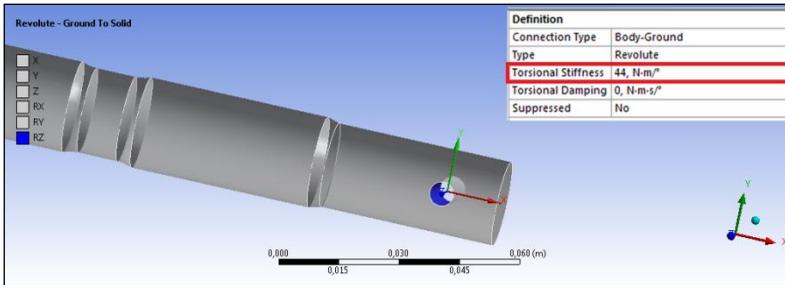


Figura 4.12: Condições de contorno representadas como uma mola torcional.

O modelo do eixo com estas condições de contorno apresentou uma frequência natural para o primeiro modo de flexão de  $112,6\text{Hz}$ , valor muito próximo dos  $112,2\text{Hz}$  encontrados na análise modal experimental, completando a validação do modelo da geometria, malha, propriedades do material e condições de contorno. A Figura 4.13 mostra o resultado obtido.

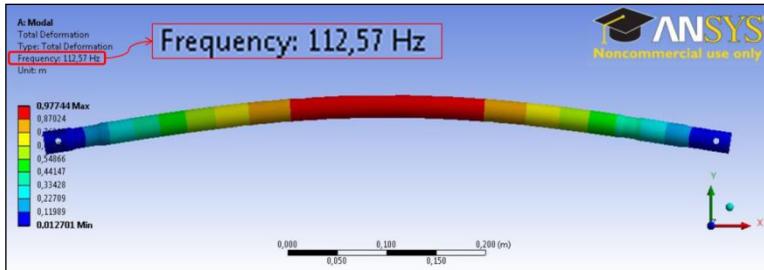


Figura 4.13: Primeiro modo de flexão na análise modal numérica montado.

Como o foco deste estudo é otimizar o perfil de usinagem da região central do eixo (região onde não há interface com as juntas), o diâmetro nesta região será remodelado com medidas parametrizadas. No entanto, todas as demais propriedades (malha, material e comprimento) serão mantidas idênticas às utilizadas no modelo descrito neste Capítulo. A Tabela 4.2 resume as propriedades do modelo.

Tabela 4.2: Propriedades do modelo.

Parâmetro	Valor
Material: densidade	7850kg/m <sup>3</sup>
Material: módulo de elasticidade	194,5GPa
Poisson	0,3
Malha: tipo de elemento	Sólido (3D)
Malha: tamanho do elemento	20mm
Apoio: constante de mola torcional	44Nm/°



## 5. OTIMIZAÇÃO

O processo de projetar e fabricar certo produto ocorre há centenas de anos e evoluiu bastante durante o passar do tempo. A existência de inúmeros sistemas complexos evidencia o nível de maturidade a que este processo chegou. Por outro lado, a evolução destes sistemas tem sido relativamente lenta. O desenvolvimento de um produto consome muito tempo e pode ser muito caro, já que envolve muito recurso humano em análises, pesquisa e negociações comerciais além de estrutura física. Como consequência, este processo tem levado ao desenvolvimento e fabricação de componentes bons, mas que necessariamente não sejam os melhores. Neste processo de desenvolvimento, inicialmente inúmeras alternativas são propostas. Desenvolver cada uma delas para então eleger a melhor seria muito caro e demorado, tornando-se absolutamente inviável. Assim, baseando-se nos dados disponíveis, intuição, experiência e habilidade dos envolvidos no projeto, apenas um número limitado de alternativas é avaliado. No momento em que se obtém uma solução para o problema, esta é então plenamente desenvolvida. Nesta etapa do processo muita matemática é utilizada, no entanto, apenas para confirmar ou rejeitar as propostas dos engenheiros, nunca para gerar uma nova proposta.

O desenvolvimento completo de um produto exige análise de uma grande quantidade de dados, o que requer tempo. Com os recentes avanços da informática, os computadores atuais permitem a realização de uma grande quantidade de cálculos em um curto período de tempo, beneficiando o processo de desenvolvimento de projetos. Como consequência, mais opções podem ser melhor analisadas durante a criação de um novo produto. No entanto, a habilidade humana ainda é essencial. Cabe ao engenheiro identificar as variáveis que afetam o desempenho do projeto, traduzir estas variáveis em funções a serem otimizadas e apontar as restrições. É importante que o projeto seja formulado como um problema de otimização da maneira mais precisa possível, representando muito bem o comportamento real para que se obtenha de fato o melhor produto para um fim específico.

### 5.1 FORMULAÇÃO DE UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

De forma geral, aceita-se que uma parcela significativa dos esforços em solucionar um problema devem ser empregada em formular o problema da forma mais precisa possível. Assim, é muito importante que se definam rotinas na formulação de um estudo de otimização. É

importante que análises preliminares sejam realizadas para que possam traduzir o problema em um modelo a ser resolvido numérica ou analiticamente. Para isso, a maioria dos problemas de otimização podem ser representados através de cinco passos (ARORA, 2004):

- Passo 1 - Formulação do problema:

Todo o processo de otimização inicia por uma descrição do problema, a qual deve conter os objetivos e requisitos. Esta etapa define o rumo do processo de otimização, que é buscar a função objetivo observando as faixas de valores de cada parâmetro conforme especificado nas restrições.

- Passo 2 – Coleta de dados e informações:

Para que o problema possa ser representado de forma correta através de uma série de equações matemáticas, muitas informações sobre o sistema são necessárias, tais como propriedades do material, custo da matéria prima, custos do processo de manufatura e condições de uso, entre muitos outros. Nesta etapa, pode ser necessária a avaliação de alguns modelos para que se possam coletar todas as informações necessárias e se entenda como algumas variáveis afetam o comportamento do componente.

- Passo 3 – Identificação e definição das variáveis de projeto:

Nesta etapa são definidas as variáveis do modelo a ser estudado. Diferentes conjuntos de valores para as variáveis representam diferentes geometrias ou propriedades do modelo. As variáveis devem ser preferencialmente independentes umas das outras para assumirem qualquer valor sem influência das demais. Um problema pode ser descrito por uma infinidade de variáveis. A formulação correta do problema é feita selecionando-se as variáveis que realmente terão impacto no processo de otimização, e essa etapa depende da habilidade do engenheiro.

Muitas vezes a identificação das variáveis do problema pode ser uma tarefa difícil. Nestes casos, deve-se listar todas as variáveis possíveis e realizar uma análise de sensibilidade, onde aquelas que não exercerem influência podem ser consideradas como valor fixo. Uma vez definidas todas as variáveis de projeto, um valor deve ser associado a cada uma delas para que seja criado um modelo inicial a partir do qual o estudo é realizado. Dependendo do tipo de problema, as variáveis podem ser valores discretos ou contínuos.

- Passo 4 – Definição da função objetivo:

Um componente pode ter diferentes formas e propriedades que são representadas pelas variáveis de projeto e para que se possam comparar diferentes alternativas, é necessário um critério. Este critério deve ser uma função numérica que traduza as variáveis em um valor numérico que represente o objetivo buscado. Em geral este critério é conhecido como Função Objetivo e precisa ser minimizado ou maximizado.

A função objetivo pode representar diversos aspectos do projeto, tais como peso, resistência estrutural e frequência natural, além de características que não envolvam engenharia, como custo, por exemplo. Em muitos casos pode-se ter mais de objetivo, como por exemplo o menor peso com a máxima resistência torcional. Esses problemas são chamados de multiobjetivos. Em muitos casos a função objetivo pode ser representada por um modelo numérico de CAE.

- Passo 5 – Identificação das restrições:

O último passo na elaboração de um problema de otimização consiste em determinar as restrições de cada uma das variáveis. A maioria dos modelos deve ser fabricadas dentro de alguns limites. As restrições traduzem estes limites para as variáveis de projeto. Em alguns casos existem restrições que não estão ligadas diretamente a uma variável de projeto, mas sim a várias. Como exemplo pode-se citar uma estrutura onde se deseje atingir o menor peso possível sem que ela deforme além de um determinado valor. Embora a função objetivo esteja buscando o menor peso, também deve-se calcular a deformação da estrutura como uma função da variáveis de projeto e estipular o valor máximo permitido, limitando-as indiretamente.

## 5.2 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

Existem diferentes métodos de otimização, sendo que cada um apresenta suas particularidades e é mais indicado para as aplicações específicas. Dependendo da quantidade de variáveis, restrições, objetivos e tamanho do espaço amostral, entre outros, alguns métodos são mais apropriados que outros. O tipo de solução buscada também influencia na escolha: soluções locais ou soluções globais. Em alguns problemas nem sempre é possível determinar a melhor solução, seja pela complexidade, tempo de processamento ou por outros fatores. Nestes casos, costumam-se identificar as soluções quase ótimas, ou soluções

locais. A Figura 5.1 ilustra as diferenças entre soluções locais e soluções globais.

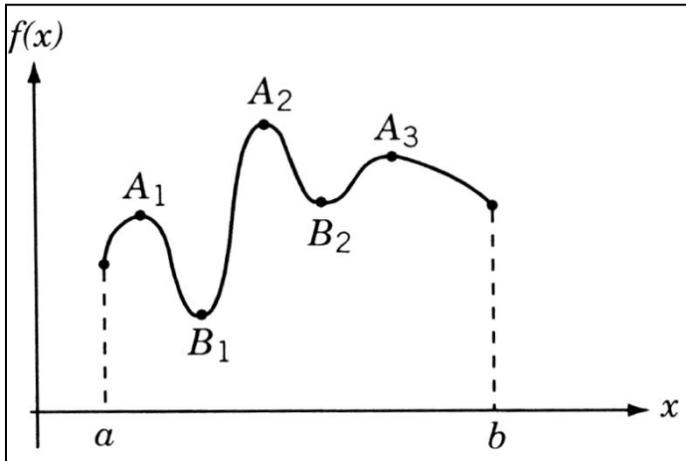


Figura 5.1: Representação gráfica da diferença entre soluções locais ( $A_1/A_3$  máximos e  $B_2$  mínimo) e solução global ( $A_2$  máximo e  $B_1$  mínimo).

Problemas de otimização com um único objetivo tem como principal característica o fato de possuírem uma única solução ótima. Por outro lado, problemas com múltiplos objetivos são mais complexos, pois costumam apresentar mais de uma solução, chamadas de conjunto de soluções de Pareto, onde nenhuma é a melhor para todos os objetivos. Nestes casos é importante que o algoritmo de otimização convirja de forma uniforme para a solução de todos os objetivos.

Os métodos de otimização podem ser divididos em duas categorias principais: os Determinísticos e os Estocásticos. Esses dois métodos tem suas características discutidas a seguir.

### 5.2.1 Métodos Determinísticos

Métodos determinísticos identificam a solução ótima fazendo uso de cálculos diferenciais a partir de gradientes gerados através da derivada de soluções próximas. Como a procura ocorre na vizinhança do ponto corrente, estes métodos acabam muitas vezes sendo utilizados para identificar soluções locais. São, geralmente, aplicados para problemas de objetivo simples.

Quando se busca a solução global, o método precisa realizar uma busca exaustiva por todas as alternativas de projeto, o que acaba consumindo maiores tempos de computação. Nestes casos é importante

refinar o modelo o melhor possível, evitando que seja gasto muito tempo de computação.

Em se tratando de problemas onde se deseja encontrar a solução global, os métodos determinísticos podem ser subdivididos dois grupos: Exatidão Finita ou Heurísticos. O primeiro é o único que dá a garantia absoluta de que a melhor solução global será encontrada dentro de um número finito de passos, porém, em geral o número de iterações é muito grande, especialmente quando há mais de uma variável de projeto. Em modelos contínuos, a avaliação completa seria impossível, já que não existe limite de alternativas a serem avaliadas. A eficiência de diferentes métodos de Exatidão Finita está em eleger como essa avaliação é feita.

Nos métodos Heurísticos, embora o tempo de processamento seja menor, não há garantias de que a melhor solução global será localizada. A maior parte destes métodos é uma variação do Algoritmo Genérico de Descida. De forma geral, esta metodologia consiste em aplicar um número finito de passos descendo em direção a um ótimo mínimo. Em problemas lineares esse caminho percorre linhas retas, enquanto que em problemas de ordem maior pode ser mais difícil identificar o tamanho ideal entre os passos para que se determine a direção da forma correta.

### 5.2.2 Métodos Estocásticos

Existem inúmeros métodos estocásticos no estudo de otimização e todos apresentam um ponto em comum: são uma variação da busca puramente aleatória. Alguns apresentam melhores resultados em problemas discretos, enquanto outros têm bom desempenho tanto em problemas discretos quanto contínuos. Todos os métodos partem de elementos randômicos: inicialmente uma amostra de pontos é arbitrariamente selecionada. A partir deste ponto, cada método manipula as informações da sua maneira, sempre buscando reduzir ao máximo o tempo de processamento. Estes métodos são recomendados especialmente em problemas de múltiplo objetivo.

De forma geral, pode-se afirmar que os métodos estocásticos apresentam grande vantagem sobre os métodos determinísticos, especialmente quando se leva em consideração a eficiência na resolução do problema, ou seja, identificar um bom resultado no menor tempo possível.

Entre os métodos estocásticos podemos citar: Busca Aleatória, *Clustering*, Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*), Tabu e Algoritmos Genéticos (*Genetic Algorithm*). Neste último, indivíduos de um espaço são selecionados e combinados com outros. Quanto maior for

a aptidão do indivíduo selecionado, maior será a probabilidade dele transferir as suas informações, gerando indivíduos mais fortes. Por se tratar de um método robusto e eficiente, este último será utilizado no estudo de otimização deste trabalho e é apresentado em detalhes a seguir.

### 5.3 ALGORITMOS GENÉTICOS

Algoritmos Genéticos traçam um paralelo com a biologia evolucionária e se baseiam na teoria da Seleção Natural, onde o indivíduo melhor adaptado ao meio tem maior chance de sobreviver e transmitir suas características para as gerações futuras (HOLLAND, 1998). A ideia básica deste método consiste em partir de um grupo de amostras gerado aleatoriamente utilizando valores permitidos para todas as variáveis de projeto. Para cada ponto é atribuído um valor que determina o quão bem este é adaptado ao cenário. Este valor geralmente é o resultado da Função Objetivo. Deste conjunto de amostras, algumas são selecionadas, sendo que as melhor adaptadas, isto é, as que apresentam melhor valor na Função Objetivo, tem mais chance de serem escolhidas. Através de processos aleatórios, os pontos selecionados geram novos pontos. Como estes novos pontos foram gerados a partir dos que melhor se adaptavam ao problema, os conjuntos sucessivos tem sempre uma probabilidade maior de terem amostras melhores que aquelas que as originaram, convergindo para um ponto ótimo.

O processo descrito acima onde dois indivíduos são selecionados para gerar um novo é conhecido como Cruzamento e tem por objetivo mudar as novas gerações buscando melhores respostas ao problema. Além deste, existe outro operador conhecido como Seleção, onde indivíduos bem adaptados são copiados para a geração seguinte sem que haja qualquer alteração. Além disso, para a formação das gerações seguintes, é importante que seja considerada a Mutação para que sejam gerados novos indivíduos. Por seguir os mesmos passos das operações genéticas, este método possui muitos termos similares à microbiologia. Assim, é importante que algumas nomenclaturas sejam definidas, conforme mostrado a seguir.

**População:** é como é chamado o conjunto de diferentes amostras disponíveis em uma certa interação. Representa o grupo finito de possíveis soluções disponíveis com as quais novos indivíduos / amostras serão gerados.

**Geração:** cada interação do algoritmo genético é chamada de geração. As gerações possuem o próprio tamanho da população.

**Cromossomo:** é o termo que representa um certo ponto. Ele contém valores para todas as variáveis de projeto, logo, pode ser representado como uma amostra, seja esta possível ou não.

**Gene:** é o valor de uma variável de projeto de uma certa amostra. Um gene sozinho não é capaz de representar completamente um certo ponto (a menos que este possua apenas uma variável de projeto). Diversos genes compõem um cromossomo, tornando real a representação de um indivíduo.

**Alelo:** é o valor que um gene específico pode assumir. Está relacionado com as restrições de projeto.

**Locus:** é a posição que certo gene ocupa no cromossomo.

**Genótipo:** é a representação genética completa de um certo indivíduo. O genótipo é a combinação de todos os cromossomos deste ponto, representando todas as variáveis de projeto. Em outras palavras, é a representação vetorial de um certo indivíduo. Na biologia ele representa toda a genética de um organismo.

**Fenótipo:** é a manifestação do genótipo no indivíduo. O fenótipo é a representação física, ou seja, são as variáveis de projeto traduzidas no problema, sejam as geometrias de uma peça, o custo de um processo, o tempo de uma operação de manufatura ou qualquer outra variável que esteja sendo representada.

Para que o Algoritmo Genético possa utilizar e manipular de forma correta e apropriada os genótipos / cromossomos de um certo indivíduo, é necessários definir um método para que se represente os valores das variáveis de projeto (genes). Os métodos de representação mais comuns são:

- **Sequências binárias:** [00100011]
- **Vetores de números inteiros:** [4 4 7 15]
- **Vetores de números reais:** [4,14 3,84 7,15 15,01]

Embora existam ainda muitas outras representações, as sequências binárias ainda são as mais amplamente utilizadas. São fáceis de representar uma variável, são eficientes e de fácil implementação (MITCHELL, 1998). Cada elemento da sequência binária é chamado de *bit*, equivalente ao alelo. Uma sequência de *bits* que representa o valor

de uma variável, ou seja, de um gene, é chamado de sequência  $V$ . Para a representação completa de um indivíduo, a sequência de *bits* é chamada de sequência  $D$ . A sequência  $D$  representa o cromossomo e é composta de  $n_v$  sequências  $V$ . A Figura 5.2 ilustra a representação dos alelos, genes e cromossomos em uma sequência binária.

Uma sequência  $V$  binária permite realizar  $2^m$  diferentes combinações, ou seja, permite que  $2^m$  valores sejam representados, sendo  $m$  o número de *bits*. Assim, se uma variável qualquer precisa ser discretizada em  $N_c$  valores, é preciso ajustar o tamanho da sequência binária conforme segue:

$$2^m \geq N_c. \quad (5.1)$$

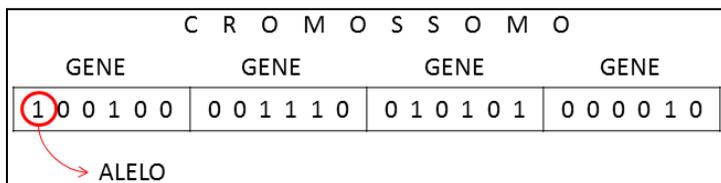


Figura 5.2: Representação binária.

Uma sequência binária de um gene pode ser traduzida em um valor inteiro  $j$  de uma variável de diversas formas. A equação abaixo ilustra um destes métodos.

$$j = \sum_{i=1}^m G(i)2^{(i-1)} + 1, \quad (5.2)$$

onde  $i$  é a posição do *bit* (Locus) e  $G(i)$  é o valor do  $i$ -ésimo *bit* (Alelo), 0 ou 1.

### 5.3.1 Geração inicial / conjunto de pontos iniciais

O primeiro passo na resolução de um problema por Algoritmos Genéticos é criar uma geração que ocupe o espaço da solução e dará origem a todos os demais indivíduos. Este grupo deve ter o tamanho da população e precisa ser o mais distribuído possível, tentando cobrir o mais homogêneo possível todo o espaço amostral, fornecendo assim a maior diversidade possível. Em alguns casos o projetista já

conhece algumas boas soluções e as utiliza como membros desta geração inicial, induzindo o resultado a uma região favorável. Métodos aleatórios também podem ser utilizados na determinação da geração inicial, desde que se tome o cuidado de manter a melhor distribuição possível entre os pontos.

### 5.3.2 Aptidão dos indivíduos

A aptidão de um indivíduo determina a sua importância para o problema, ou seja, baseado na sua variedade genética (Genótipo) é determinado o quão bom um ponto é para a solução (Fenótipo) e, conseqüentemente, qual a probabilidade de gerar novos indivíduos ainda melhores. Este termo novamente se origina das Leis da Seleção Natural, onde o indivíduo melhor *adaptado* ao meio tem mais chances de transmitir seus genes às gerações futuras.

A aptidão de um indivíduo pode ser determinada de duas formas. A primeira é o próprio valor obtido na Função Objetivo. Quanto melhor for a resposta para o problema em questão, melhor adaptado está este ponto. A outra alternativa costuma ser aplicada em problemas com muitas restrições e se baseia em penalidades. Para cada restrição que é desobedecida o indivíduo recebe uma penalidade. Quanto menos penalidades tiver, melhor adaptado estará ao meio.

### 5.3.3 Seleção de indivíduos

Conforme dito anteriormente, o conceito do Algoritmo Genético consiste em gerar novos indivíduos a partir da população atual de tal forma que a aptidão geral da nova geração seja melhor que a da anterior. Para que isso seja possível, é necessário que os indivíduos melhor adaptados sejam eleitos para gerar os “descendentes” através de cruzamento entre eles. Diferentes métodos podem ser aplicados na escolha destes, entre os quais podem ser citados: seleção Determinística, Uniforme e por Roleta Giratória.

No método da Roleta Giratória, imagina-se um jogo de roleta onde todos os indivíduos estão representados por uma fatia. O tamanho da fatia de cada indivíduo é proporcional ao seu grau de aptidão. Significa que aqueles que tiverem maior aptidão terão maiores chances de serem selecionados para o cruzamento. A roleta é girada o número de vezes necessário até que se atinja o número de indivíduos necessários. A cada rodada o indivíduo selecionado permanece no processo, o que significa que podem ocorrer repetições. Este método garante que, com o

uso de um processo estocástico, após algumas gerações os indivíduos com menor aptidão sejam eliminados da população. A Figura 5.3 ilustra o método da Roleta Giratória.

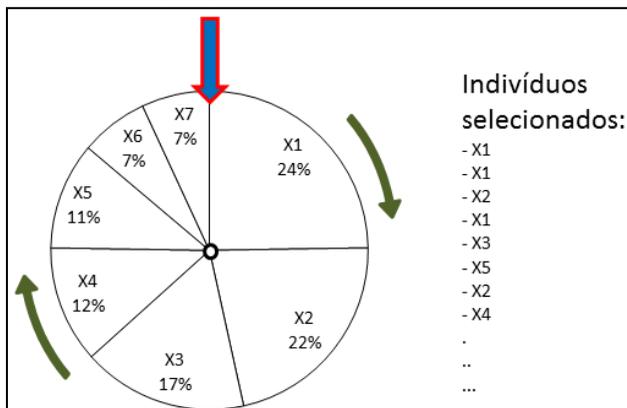


Figura 5.3: Método de seleção de indivíduos pela Roleta Giratória.

### 5.3.4 Operação de Cruzamento (*Crossover*)

Cruzamento é a principal operação do Algoritmo Genético por ser o responsável por proporcionar a diversidade em uma população. É nesse processo que dois diferentes indivíduos tem suas características (genes) misturadas para originar um novo indivíduo. Embora existam diferentes métodos de realizar esta operação, duas maneiras se destacam e são mais frequentemente utilizadas:

#### - Cruzamento com 1 ponto de corte

O ponto de corte é a posição (Locus) no cromossomo que irá dividir a sua “carga genética”. O corte em 1 ponto implica que o cromossomo de cada indivíduo será cortado em duas partes, resultando num total de 4 seções. Nos dois indivíduos, chamados de pais, embora a posição do corte seja aleatória, é importante que seja a mesma nos dois. As 4 partes são então recombinadas, formando novos indivíduos chamados de filhos. Os novos indivíduos (filhos) substituem os antigos (pais) na população. A Figura 5.4 ilustra este processo. A primeira geração é chamada de  $X^1$  (cromossomos de 1ª geração), enquanto a segunda de  $X^2$  (cromossomos de 2ª geração).

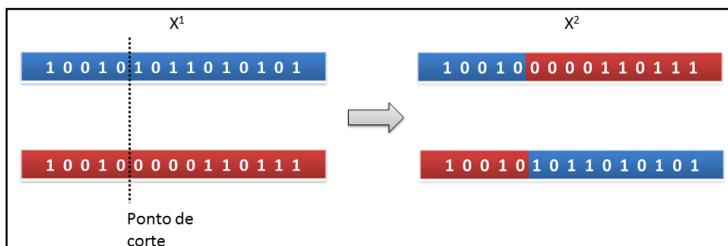


Figura 5.4: Operação de Cruzamento com 1 ponto de corte.

#### - Cruzamento com 2 pontos de corte

O cruzamento com 2 pontos de corte ocorre de forma similar ao de 1 ponto, com a diferença de que neste método os cromossomos dos pais são cortados em 2 pontos, gerando 3 secções que são então recombinadas em dois novos indivíduos conforme mostrado na Figura 5.5. A vantagem deste método é que a taxa de cruzamento é elevada, aumentando a variação entre os indivíduos de duas gerações seguidas.

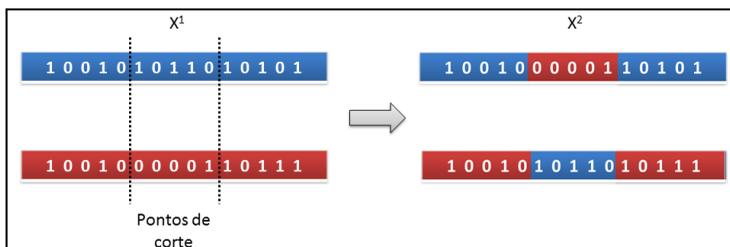


Figura 5.5: Operação de Cruzamento com 2 pontos de corte.

### 5.3.5 Mutação

Mutação é uma importante operação nos Algoritmos Genéticos por proteger o problema de uma perda prematura de variabilidade genética. O operador de Mutação seleciona alguns membros da população e faz a troca de alguns *bits* (Alelos) de 0 para 1 e vice-versa. A escolha dos indivíduos que sofrerão mutação ocorre por métodos heurísticos, enquanto que a escolha do ponto onde ocorrerá a mutação é geralmente determinada de forma aleatória. Embora ajude a manter a diversidade da população, recomenda-se que a taxa de mutação não ultrapasse os 5% para que não interfira negativamente na convergência da resposta. Caso o operador de mutação seja levado a 100%, o método se tornará puramente aleatório.

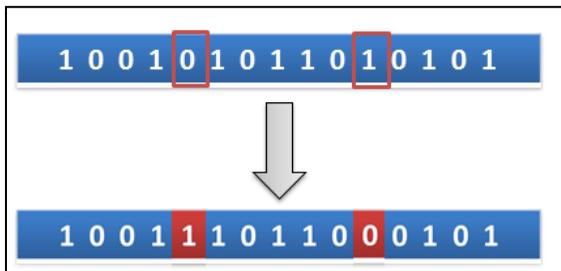


Figura 5.6: Operação de Mutação.

### 5.3.6 Seleção / Reprodução

Seleção é o processo no qual indivíduos de uma determinada geração são escolhidos para serem copiados na geração seguinte. A seleção destes indivíduos leva em consideração o seu grau de aptidão, ou seja, aqueles que apresentam melhor resposta para o problema possuem maiores chances de serem escolhidos. A escolha destes indivíduos é feita de forma aleatória através do método anteriormente descrito da Roleta Giratória, onde os indivíduos com maior grau de aptidão tem mais chances de serem selecionados.

### 5.3.7 Líder da população

A cada geração, o membro que tiver a melhor resposta para o problema é considerado o líder da população. Se mais de um indivíduo possuir o mesmo valor, apenas um será eleito. O líder só é substituído quando for gerado um novo membro com uma solução melhor, o que previne que uma boa resposta seja “extinta” do problema e nunca ocorra uma degradação de uma geração para outra. O líder é aquele que apresenta a maior probabilidade entre todos os indivíduos de ser escolhido para Cruzamento ou Seleção.

### 5.3.8 Critério de parada

O algoritmo deve ser executado até que se atinja o valor desejado, um número máximo de interações seja alcançado ou que ocorra a estabilização da convergência em um certo número de gerações sucessivas.

## 5.4 APLICAÇÃO DE ALGORITMO GENÉTICO NA OTIMIZAÇÃO DE UM SEMI-EIXO

O objetivo deste trabalho está direcionado à otimização da geometria de um semi-eixo buscando a menor frequência possível para o seu primeiro modo de vibração por flexão. Conforme descrito nos Capítulos anteriores, um modelo numérico do problema foi gerado no *software* comercial Ansys e validado através de comparação da análise modal experimental do modelo real.

Para o estudo de otimização foi escolhido o *software* comercial *modeFrontier* versão 4.3, da empresa Esteco. Neste *software*, estão disponíveis diversos algoritmos de otimização, entre os quais podem ser citados o SIMPLEX, Bounded BFGS (B-BFGS) e Levenberg-Marquardt como os de objetivo simples e o MOGA-II (*Multiobjective Genetic Algorithm*), ARMOGA (*Adaptive Range Multiobjective Genetic Algorithm*) e MOPSO (*Multiobjective Particle Swarm Optimization*) como multiobjetivos, entre outros.

Além de conduzir o processo de otimização, disponibiliza inúmeras ferramentas gráficas, estatísticas e de pós-processamento para a análise dos resultados. Com o uso destas ferramentas, é possível plotar o resultado (eixo Z) em um gráfico tridimensional interpolando todos os pontos calculados como uma função de duas variáveis (eixos X e Y), gerando uma superfície que permita entender melhor a influência que cada uma delas possui no estudo em questão e direcionando melhor a tomada de decisão. Para isso, o *modeFrontier* disponibiliza diversos algoritmos, tais como Polinomial, K-Nearest, Gaussiano e Redes Neurais.

### 5.4.1 MOGA II

Como o próprio nome sugere, MOGA II (*Multiobjective Genetic Algorithm*) é a segunda geração de um Algoritmo Genético para problemas multiobjetivos. É um aperfeiçoamento do algoritmo MOGA que muitas vezes apresentava dificuldades de encontrar o Pareto real e se prendia a um Pareto Local. O MOGA II se diferencia de seu antecessor por fazer uso de uma ferramenta chamada Elitismo Inteligente que aumenta a robustez do resultado e de um novo operador denominado Cruzamento Direcional, que acelera a convergência. A codificação utilizada é a binária, amplamente utilizada em Algoritmos Genéticos.

O termo Elitismo origina-se da palavra elite. Em Algoritmos Genéticos, consiste em copiar o Líder da População na geração seguinte, ou seja, aquele que apresenta melhor resposta, que se destaca perante os demais, o que pertence à elite de uma geração. No entanto, quando se fala de problemas multiobjetivos, torna-se mais difícil identificar adequadamente o líder da população já que existe mais de uma função objetivo e pode haver um líder para cada função. O Elitismo Inteligente do MOGA II cria um Pareto ótimo que é atualizado a cada geração através do conceito de Dominância, preservando assim os indivíduos que apresentam as melhores respostas para cada função objetivo. Testes realizados por (POLES, 2003) demonstraram a importância do operador de Elitismo para o MOGA II através de testes padrões, sempre atingindo o melhor desempenho com resultados robustos quando esta ferramenta foi aplicada.

O Cruzamento Direcional se difere um pouco do Cruzamento tradicional por considerar que a melhor direção pode ser detectada comparando a aptidão de dois indivíduos de referência, fazendo uma espécie de triangulação. Considerando um indivíduo  $Ind_j$  pertencente a uma geração  $t$ , formado pelos genes de seus pais  $Ind_p$  e  $Ind_m$  da geração  $t-1$ , quando comparada a sua aptidão com a de seus pais pode-se entender como os genes de cada um contribuí para gerar um indivíduo melhor ou pior, apontando a melhor direção. Assim, um novo indivíduo pode ser criado a partir de uma escolha melhor dos genes de seus pais, movendo-se aleatoriamente nesta direção.

O mesmo conceito pode também ser aplicado com indivíduos pertencentes à mesma geração. Para tanto, basta que os indivíduos pais  $Ind_p$  e  $Ind_m$  sejam escolhidos dentro da população à qual  $Ind_j$  pertence. Inicialmente, o indivíduo sujeito à reprodução é escolhido como o ponto de partida. A partir deste ponto, é feita uma caminhada baseada em algum critério aleatório e os potenciais indivíduos  $Ind_p$  são marcados. O mesmo ocorre para a seleção de  $Ind_m$ . Quando todos os candidatos são escolhidos, aquele que apresentarem melhor aptidão são eleitos para o Cruzamento Direcional (Figura 5.7).

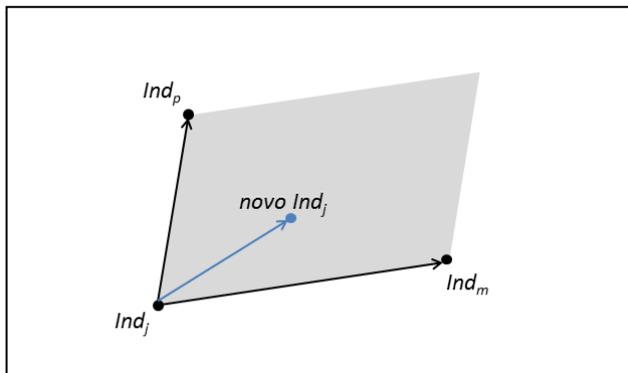


Figura 5.7: Cruzamento direcional.

O Cruzamento Direcional aumenta bastante a eficiência ao elevar a convergência, no entanto, torna a resolução do problema menos robusta já que pode levar à soluções locais. Por este motivo, é sempre recomendada a utilização do Elitismo com o MOGA II.

A probabilidade de Cruzamento tradicional no MOGA II é determinada da seguinte forma:

$$\text{Prob. Cruzamento tradicional} = 1 - (\text{Prob. Cruzamento Direcional} + \text{Prob. Seleção} + \text{Prob. Mutação})$$

Isso significa que à medida em que se reduz a probabilidade de Cruzamento direcional, eleva-se a probabilidade do Cruzamento tradicional.

Embora o MOGA II tenha sido desenvolvido voltado especialmente para problemas de otimização multiobjetivos, (POLES; RIGONI, 2004) compararam os resultados de problemas de objetivo simples com dois algoritmos de muito sucesso voltados especificamente para este tipo de problema. Em todos os testes realizados o MOGA II obteve desempenho melhor ou igual aos dois competidores desenvolvidos especificamente para problemas de objetivo simples. Por este motivo, MOGA II foi selecionado como algoritmo de otimização deste trabalho.

#### 5.4.2 Etapa I: Otimização de um eixo seccionado

A otimização do semi-eixo foi feita utilizando-se modelos numéricos gerados a partir do modelo criado no Capítulo 4. As mesmas propriedades de material, malha e condições de contorno foram

mantidas conforme descrito na Tabela 4.1, ao passo que a geometria foi alterada na região a ser otimizada. As dimensões que inicialmente definiam o modelo original do eixo foram parametrizadas e associadas às variáveis de entrada do estudo de otimização. As únicas medidas mantidas do eixo original foram o comprimento e diâmetro na região de montagem com a junta.

O estudo foi separado em duas etapas. Inicialmente o eixo foi dividido em 16 seções cônicas de comprimento constante com os diâmetros definidos como variáveis de otimização. A partir dos resultados, um novo modelo mais refinado foi elaborado para encontrar o perfil ótimo (este modelo e seus resultados serão apresentados no Item 5.4.3).

O propósito de dividir o eixo em pequenas seções de diâmetro variado foi permitir que cada região fosse avaliada separadamente, verificando a influência de cada uma na frequência do primeiro modo de flexão. Como resultado deve-se esperar algum padrão com variações de diâmetro ao longo do eixo. Os diâmetros na extremidade do eixo foram mantidos iguais ao original, resultando assim em 15 variáveis (Figura 5.8).

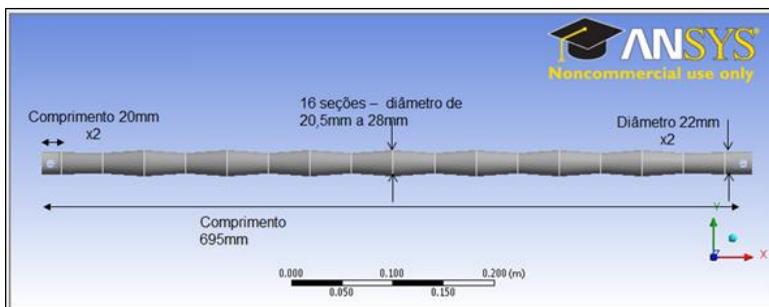


Figura 5.8: Eixo seccionado utilizado no primeiro estudo de otimização.

Os limites inferior e superior dos diâmetros foram definidos com base no modelo original do eixo. Para determinar o diâmetro mínimo, é necessário que se tenha o cuidado de não comprometer a capacidade de transmitir torque, ou seja, o eixo não pode ter uma seção muito pequena a ponto de quebrar quando solicitado, seja por fadiga ou impacto. Como os dados de carregamento (torque do motor, fator de choque em função do tempo de alívio da embreagem) e de reação (tamanho do pneu, fator de atrito com o solo, distribuição da massa do veículo por eixo) são desconhecidos, optou-se por utilizar como referência o menor diâmetro

do modelo atual do semi-eixo uma vez que este diâmetro já foi validado pela montadora. O valor utilizado foi de 20,5mm (10,25mm de raio).

O limite superior para cada seção foi definido levando-se em consideração o espaço disponível. Eixos com diâmetro muito grande podem ter interferência com qualquer outro componente da parte de baixo do veículo, especialmente da suspensão quando esta está em movimento. Para limitar o risco deste problema acontecer, foi utilizado o valor de 28mm (14mm de raio), típico de eixos tubulares que tendem a possuir uma seção transversal maior.

O fato de utilizar limites máximos e mínimos baseado em valores já existentes também é vantajoso no sentido que ajuda a tornar o problema mais simples. Caso a resistência torcional também estivesse sendo avaliada, mais variáveis de saída seriam necessárias e a resposta da frequência natural não seria tão evidente. Além do mais, o tempo para cada interação seria maior, tanto no cálculo de otimização quanto no da resposta do modelo, elevando o tempo total necessário para resolver o problema.

O modeFrontier permite que o estudo seja elaborado utilizando uma interface gráfica bastante simples e intuitiva. Basicamente o problema é montado ligando-se várias caixas entre si onde cada uma representa uma função do estudo, como variável de entrada, variável de saída, geração inicial e algoritmo de otimização, entre outros. Estas caixas são conhecidas como nós. Para o estudo do eixo dividido em seções, o problema foi montado com 15 nós de entrada associadas aos 15 raios do modelo proposto (Input01 a Input15 da Figura 5.9). Os limites foram determinados conforme descrito nos parágrafos acima. O nó de saída foi definido como a frequência do primeiro modo de flexão com o objetivo de encontrar o menor valor possível. Para que os dados de entradas (diâmetros) fossem traduzidos em frequência natural do eixo, foi utilizado um nó de CAE (*Computer Aided Engineering*). Este nó age como a Função objetivo, e neste estudo foi vinculado ao modelo numérico do *software* Ansys desenvolvido no Capítulo 4 com as modificações mostradas na Figura 5.8. Neste modelo, as medidas a serem otimizadas foram transformadas em variáveis de projeto.

Por fim, dois outros importantes nós responsáveis por conduzir o estudo de otimização foram definidos: o DOE e o *Scheduler*. Estes dois nós são os responsáveis por determinar o valor de cada uma das variáveis de entrada para cada indivíduo e, a partir dos valores de saída, gerar novos indivíduos que convirjam de acordo com o objetivo do problema. O algoritmo de otimização e todos os seus parâmetros são determinados nestes nós. O nó de DOE é responsável pela geração

inicial, enquanto que o *Scheduler* cria os novos indivíduos a partir dos resultados obtidos.

Assim, o ciclo completo funciona da seguinte forma: o nó DOE gera diversos valores para as variáveis de projeto. Estes valores são enviados ao Ansys que calcula a frequência natural do eixo. Esta frequência é retornada ao modeFrontier e utilizada como referência no nó *Scheduler* para gerar novos pontos que serão novamente enviados para o Ansys, buscando sempre a convergência.

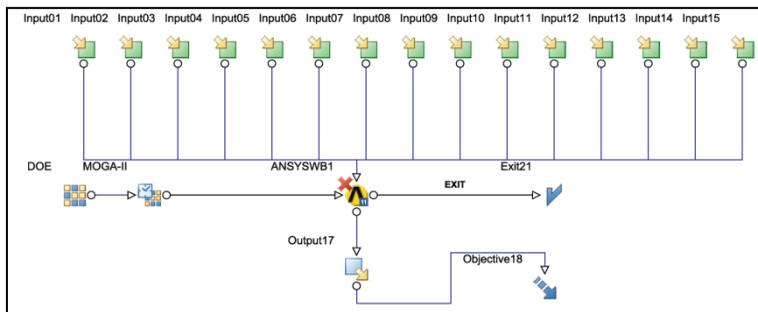


Figura 5.9: Problema de otimização do eixo seccionado no modeFrontier.

Um problema de otimização bem definido parte de uma população inicial bem distribuída, que ocupe da forma mais homogênea possível todos os espaços do campo amostral sem deixar pontos vazios. No modeFrontier o nó DOE é o responsável pela população inicial. Tipicamente este grupo é gerado por um algoritmo randômico, no entanto, embora este método garanta uma boa abrangência de todo o espectro, ele não garante uma distribuição uniforme entre todos os pontos. Para o problema do semi-eixo, foi utilizado o algoritmo ISF (*Incremental Space Filler*). Este código se diferencia por adicionar novos pontos em regiões onde o espaço entre os elementos existentes é maior, tornando a distribuição mais homogênea. A Figura 5.10 ilustra uma comparação genérica entre indivíduos de duas variáveis (eixos X e Y) gerados de forma randômica e pelo algoritmo ISF (nos dois casos o mesmo número de indivíduos foi gerado).

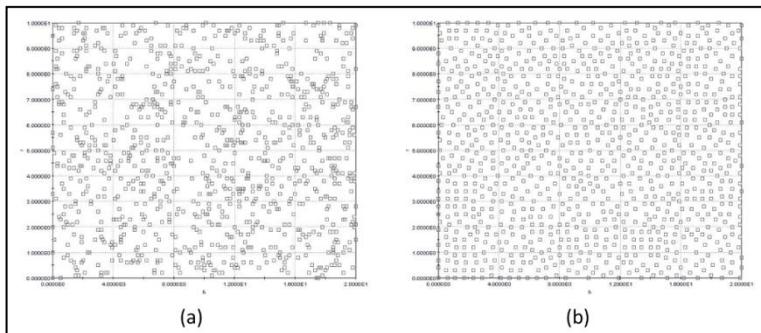


Figura 5.10: Distribuição de indivíduos gerados por algoritmo randômico (a) e ISF (b).

Tipicamente a população deve ter o seu tamanho definido pela seguinte regra: no mínimo 15 indivíduos ou 2 vezes o número de variáveis vezes o número de objetivos (MODEFRONTIER, 2008). No problema do eixo dividido em secções o estudo partiu de uma população de 15 indivíduos. Com base na regra apresentada, este valor pode ser considerado baixo, no entanto, o resultado obtido apresentou uma tendência de modelo ótimo que serviu de referência para o modelo seguinte e pode ser avaliado como satisfatório.

No nó *Scheduler* foi selecionado o algoritmo de otimização MOGA-II, anteriormente descrito no Item 5.4.1. O número de gerações foi inicialmente definido como 35, resultando em um total de 525 pontos gerados. O Elitismo Inteligente foi ativado e os operadores de otimização de Cruzamento Direcional, Cruzamento Tradicional, Seleção e Mutação foram ajustados com os seguintes valores:

- Cruzamento direcional: 0,5;
- Seleção: 0,05;
- Mutação: 0,1;
- Cruzamento tradicional: 0,35.

O resultado do estudo é mostrado na Figura 5.11, onde os melhores elementos de cada geração são plotados.

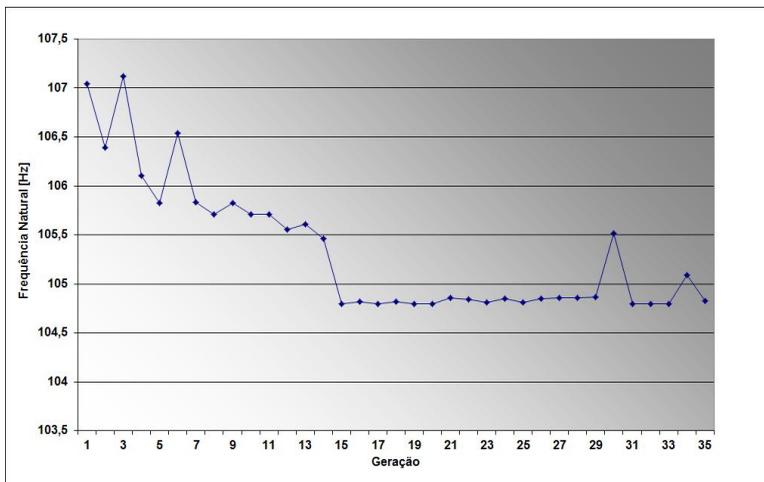


Figura 5.11: Convergência da resposta ao longo das interações.

As respostas obtidas com a variação de diâmetro ficaram no intervalo entre 104,7Hz e 126,6Hz. Dentre todos os 525 indivíduos gerados, 64 tiveram valor abaixo de 105Hz e foram classificados como os melhores. O perfil destes indivíduos foi analisado separadamente dos demais na tentativa de se identificar um padrão comum entre eles.

A primeira análise destes 64 indivíduos é representada no gráfico da Figura 5.12 e mostra a distribuição dos valores do diâmetro (representada no eixo Y) para cada posição (representada pelas variáveis de entrada *Input* no eixo X). Neste gráfico o diâmetro médio é representado pelo ponto preto enquanto que a linha laranja na vertical mostra o intervalo com os máximos e mínimos obtidos. Percebe-se um padrão bastante claro entre estes indivíduos de possuir raio máximo (próximo de 14mm) nas extremidades do eixo e mínimo na região central (aproximadamente 10,25mm).

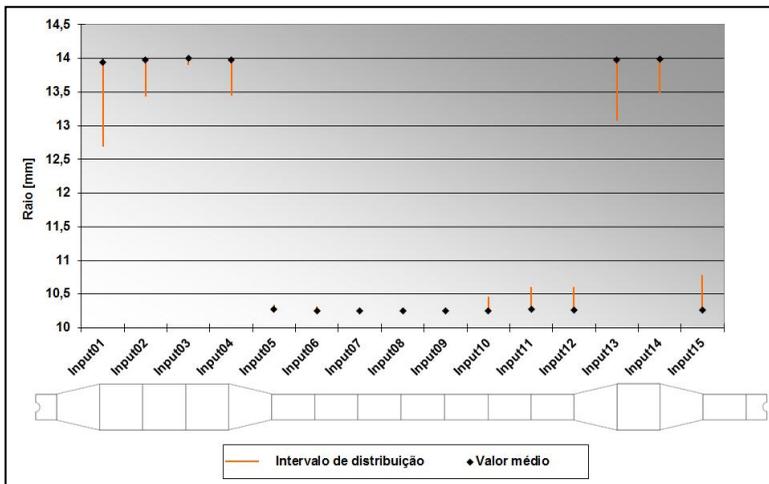


Figura 5.12: Distribuição dos raios dos indivíduos com melhor resposta.

A exceção é o ponto localizado na extremidade direita, que apresentou valores mínimos como os obtidos na região central. Pelo fato do modelo de otimização ser um eixo simétrico com condições de contorno idênticas em cada uma das extremidades e com uma resposta de deformação simétrica (flexão do primeiro modo), esperava-se como resposta um eixo que também fosse simétrico, ou seja, o perfil da extremidade esquerda ao centro idêntico ao perfil da extremidade direita ao centro. É possível que a resposta ótima realmente não possua um perfil que pareça lógico e o perfil obtido realmente corresponda à melhor resposta, no entanto, também deve-se avaliar a possibilidade do algoritmo ter ficado preso a uma solução local e não ter convergido para o ponto ótimo. Neste caso, tanto a extremidade da esquerda poderia estar com o diâmetro muito grande quanto a extremidade da direita com diâmetro muito pequeno.

O resultado com dois ressaltos nas extremidades é coerente e possui explicação lógica. Para que a frequência natural reduza, é necessário adicionar massa, ou seja, elevar o diâmetro do eixo. Por outro lado, elevar o diâmetro acarreta em maior rigidez à flexão, o que age de forma oposta e aumenta a frequência natural. O ideal então é identificar as regiões do eixo onde há maior esforço de flexão para manter a rigidez baixa nestes pontos, elevando a massa nas demais regiões. Fazendo o diagrama de equilíbrio de um eixo bi-apoiado (condições de contorno próximas das do semi-eixo), percebe-se que o máximo esforço encontra-se no ponto central, diminuindo à medida que se desloca para as

extremidades (Figura 5.13). Assim, é coerente pensar que a melhor região para se elevar o diâmetro seja a mais distante do centro, como foi encontrado no estudo de otimização.



Figura 5.13: Diagrama de corpo livre de um eixo bi-apoiado - momento fletor em azul (FTool – Two-Dimensional Frame Analysis Tool).

Para esclarecer a questão sobre simetria do eixo e confirmar o modelo com diâmetro maior nas extremidades, um novo modelo refinado de eixo com menos variáveis foi proposto a partir da resposta obtida neste primeiro problema. Os detalhes deste modelo e resultados da otimização são mostrados no item a seguir.

#### 5.4.3 Etapa II: Otimização de um eixo com dois ressaltos

Os resultados obtidos na otimização do eixo dividido em secções mostram que o perfil ótimo apresenta um diâmetro baixo na região central e se eleva próximo das extremidades. Porém, o estudo realizado não deixa claro se o perfil deve ser simétrico nos dois lados do eixo, qual a porção do eixo que deve ter o diâmetro reduzido ou se existe algum diâmetro ideal no qual se deve trabalhar. Para responder a estas perguntas, a partir dos resultados encontrados na otimização do eixo seccionado foi proposto um novo modelo, ilustrado na Figura 5.14.

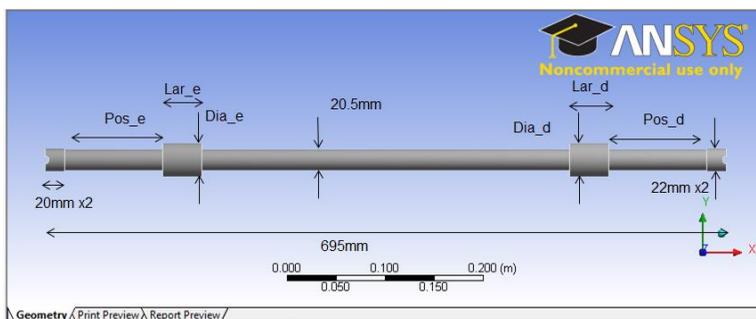


Figura 5.14: Eixo com dois ressaltos utilizado na otimização de refinamento.

Neste modelo o eixo é gerado com os dois ressaltos, porém estes são definidos através de parâmetros de otimização, permitindo que cada um varie a sua geometria de forma independente e se possa avaliar a contribuição de cada uma das variáveis enquanto se determina o perfil

ideal. As demais regiões onde não há ressalto tiveram o diâmetro ajustado em 20,5mm. No total foram definidos 6 parâmetros, sendo 3 duplicados para cada um dos ressaltos. São eles:

- Posição (esquerda e direita): é a distância entre a extremidade do eixo (respeitando a porção livre de 20mm para a montagem das juntas) ao início do ressalto, ou seja, define o quanto o ressalto se afasta da extremidade do eixo;

- Tamanho (esquerda e direita): define o comprimento do ressalto. A soma do seu valor com o valor da posição não deve ser maior que metade do comprimento do eixo (subtraído os 20mm da extremidade onde as juntas são montadas);

- Diâmetro (esquerda e direita): define os valores máximos e mínimos que o diâmetro do ressalto pode ter. O diâmetro mínimo foi novamente igual ao menor diâmetro do eixo original, ou seja, 20,5mm. No entanto, diferente do modelo anterior, o diâmetro máximo desta vez foi limitado a 34mm. O motivo principal foi que o limite superior do modelo anterior não resultou em variações expressivas da frequência natural, o que pode tornar difícil a validação experimental do modelo (o eixo original apresentou 112,6Hz e o otimizado 104,6Hz, uma diferença que pode ser menor que os possíveis erros associados à construção e validação do protótipo). Elevando o limite superior espera-se encontrar valores de frequência natural ainda menores, facilitando a validação experimental.

A Figura 5.15 mostra o problema no modeFrontier. Caso os dois ressaltos ultrapassassem o centro do eixo ao mesmo tempo, a resposta do modelo resultaria em um erro, o que dificultaria a análise e a convergência. Para evitar este problema, cada um dos ressaltos ficou limitado à metade do comprimento do eixo, estipulando-se que a soma da posição com o tamanho não devesse passar do valor de 327mm ( $695\text{mm} - 2 \times 20\text{mm} = 655\text{mm} / 2 = 327,5\text{mm}$ ). O comprimento individual de cada seção foi limitado entre 1mm e 326mm (o comprimento de 0mm resultaria em erro no modelo).

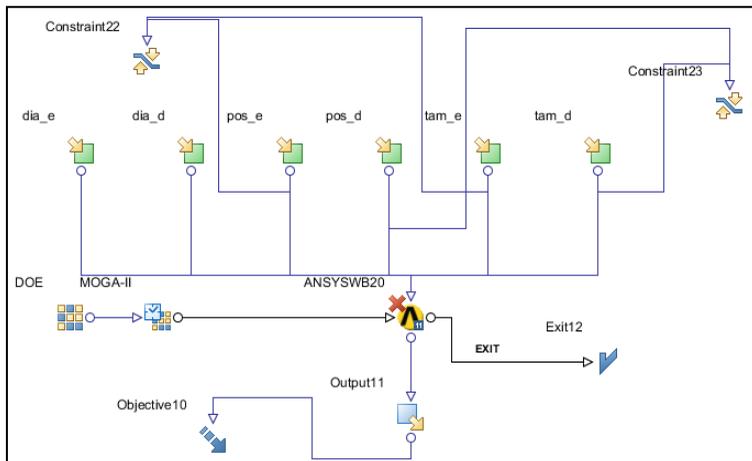


Figura 5.15: Problema de otimização do eixo com 2 ressaltos no modeFrontier.

A população inicial novamente foi definida a partir da regra que sugere o mínimo de 16 indivíduos ou 2 vezes o número de variáveis vezes o número de objetivos. Neste caso, como a segunda regra resulta em 12 indivíduos ( $2 \times 6 \times 1$ ), optou-se por utilizar os 16 elementos sugeridos. A população foi gerada novamente através do algoritmo ISF.

Novamente o algoritmo de otimização MOGA-II foi selecionado no nó *Scheduler*. Como no modelo anterior a resposta ótima foi alcançada com aproximadamente 15 gerações, o número de novas populações foi limitado em 20, resultando em um número total de 320 indivíduos. Novamente o Elitismo Inteligente foi ativado e os operadores de otimização de Cruzamento Direcional, Cruzamento Tradicional, Seleção e Mutação foram mantidos com os mesmos valores do modelo anterior: 0,5, 0,35, 0,05 e 0,1. O resultado apresentado na Figura 5.16 mostra que o algoritmo oscilou bastante e não conseguiu convergir de forma estável, o que demonstra que embora os parâmetros fossem apropriados para o modelo anterior, eles não são adequados para o eixo com os dois ressaltos.

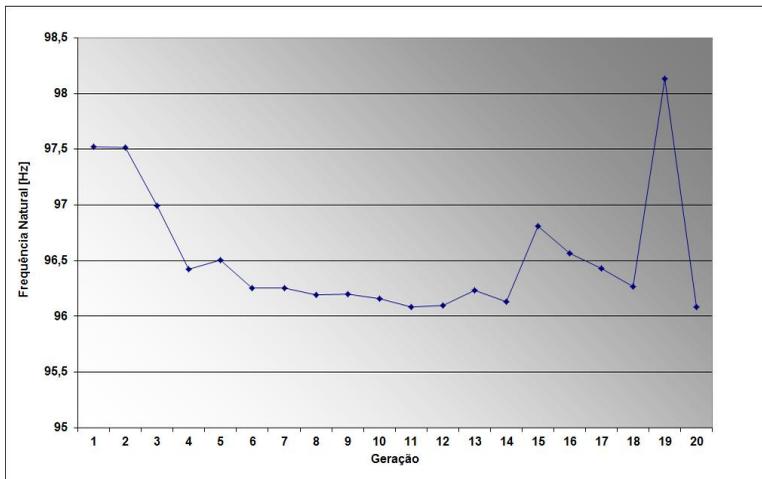


Figura 5.16: Convergência da resposta ao longo das interações (primeira tentativa).

A fim de corrigir o problema de convergência do modelo anterior, os operadores de otimização foram revistos para os seguintes valores:

- Cruzamento direcional: 0,7;
- Seleção: 0,05;
- Mutação: 0,05;
- Cruzamento tradicional: 0,2.

Espera-se que reduzindo o percentual de mutação o problema oscile menos e que a substituição do cruzamento tradicional pelo cruzamento direcional faça com que a resposta convirja de forma mais estável para a resposta ótima. Mais uma vez o Elitismo Inteligente foi mantido ativado. A população inicial foi mantida em 16 indivíduos gerados pelo algoritmo ISF enquanto que o número de gerações foi elevado para 30. O número total de indivíduos gerados foi de 480. Os resultados são mostrados na Figura 5.17.

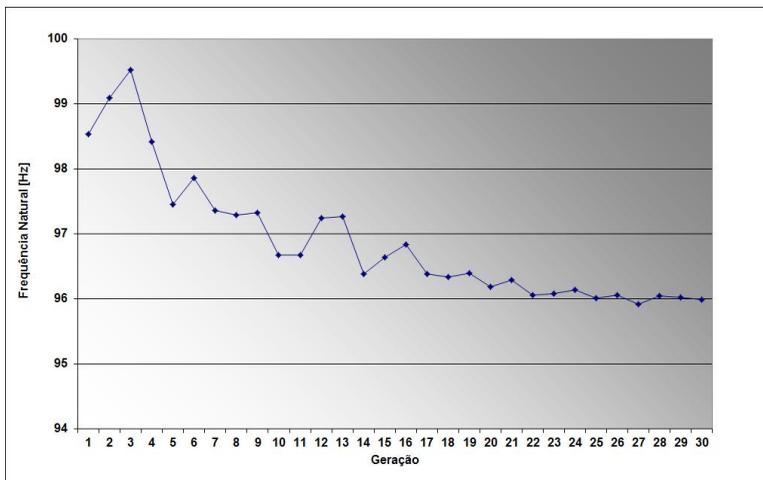


Figura 5.17: Convergência da resposta ao longo das interações (segunda tentativa).

Comparado ao modelo anterior, percebe-se uma convergência mais suave e constante, embora em alguns pontos ocorra uma oscilação e o valor se eleve um pouco de uma geração para a seguinte. O fato do Elitismo não manter o melhor indivíduo da geração anterior pode gerar questionamentos sobre o problema, no entanto, quando se analisa a lógica do algoritmo do Elitismo Inteligente percebe-se que o melhor indivíduo de uma geração pode ser descartado por um operador aleatório. Conforme explicado por Poles (2003), no algoritmo MOGA-II a população de cada geração é formada pelo conjunto de indivíduos calculados  $P$  somados ao grupo de Elitismo  $E$ . O grupo Elitismo  $E$  inclui um pareto dos melhores indivíduos para todos os objetivos (o MOGA-II é um algoritmo multi-objetivo). Como a união dos grupos  $P$  e  $E$  ultrapassa o número de indivíduos da geração, a população é reduzida randomicamente, e este processo pode eliminar o melhor indivíduo para uma certa resposta. Assim, mesmo com o Elitismo Inteligente ativado, não há garantias de que a melhor resposta de uma geração será mantida na geração seguinte, o que pode resultar em pequenas variações na convergência.

A primeira análise realizada é sobre o diâmetro dos ressaltos. Espera-se confirmar que para este modelo o diâmetro maior apresente as melhores respostas. Dos 480 indivíduos gerados, 158 apresentaram a frequência do primeiro modo abaixo dos 97Hz e foram considerados como os melhores. O diâmetro dos ressaltos destes indivíduos é mostrado na Figura 5.18, onde o ponto preto corresponde ao valor

médio e a linha laranja na vertical o intervalo que abrange os valores máximos e mínimos de cada um. Percebe-se claramente que todos os indivíduos com resposta abaixo de 97Hz tiveram o raio do resalto próximo do valor máximo de 17mm.

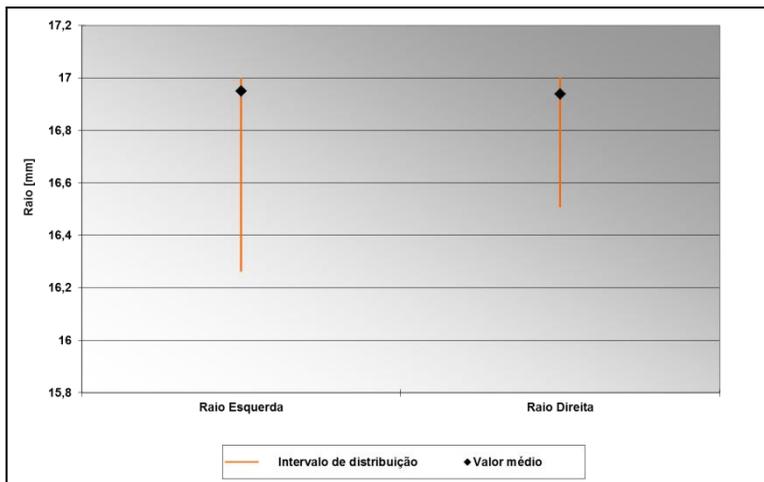


Figura 5.18: Raio dos indivíduos com a melhor resposta.

Uma vez identificados os diâmetros dos ressaltos do modelo ótimo, é preciso determinar a posição e o tamanho de cada um deles. Para tanto, cada lado foi analisado separadamente em um gráfico de 2 dimensões onde cada eixo corresponde a uma das variáveis em análise: X equivale ao TAMANHO e Y à POSIÇÃO. Como existe a restrição quanto à soma dos dois ter que ser sempre menor que 327mm, este gráfico só irá apresentar indivíduos na diagonal inferior, como ilustrado na Figura 5.19. Pontos acima da diagonal tem a soma de suas coordenadas maior que 327, tornando-os irrealis.

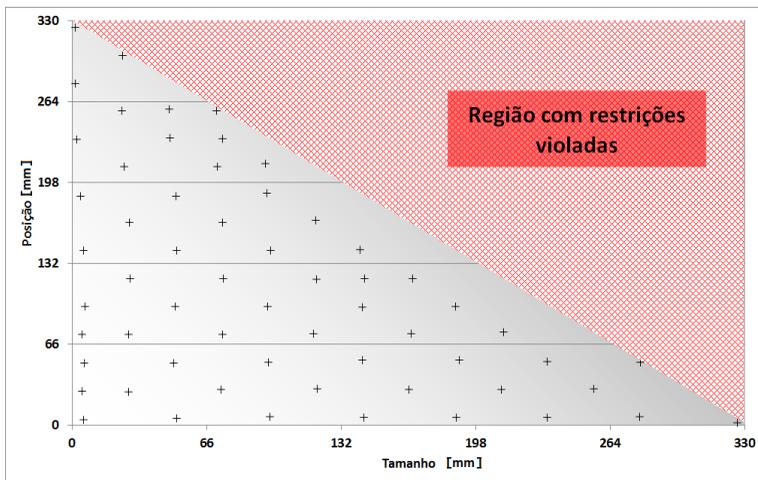


Figura 5.19: Região com indivíduos válidos (porção inferior da diagonal) e região com indivíduos ultrapassando os limites da restrição (porção superior da diagonal em vermelho).

As Figuras 5.20 e 5.21 mostram os dois gráficos da distribuição das respostas do ressalto da esquerda e da direita, respectivamente. Observa-se que nos dois casos houve uma boa distribuição dos pontos, o que é positivo para evitar solução local. Entre os pontos que apresentaram resposta abaixo de 97Hz e são classificados como os melhores, nota-se uma tendência destes terem POSIÇÃO (eixo Y) com valores próximos de 5mm e TAMANHO (eixo X) entre 160mm e 230mm. Entre estes pontos, os que apresentaram as 10 melhores respostas foram plotados em destaque e observa-se que eles se localizam na região próxima dos 200mm. Fisicamente isto significa que o ressalto inicia próximo da extremidade do eixo (5mm da extremidade) e se estende por aproximadamente 200mm, cobrindo assim 2/3 de todo o eixo. Esta resposta é observada tanto no lado esquerdo quanto no lado direito.

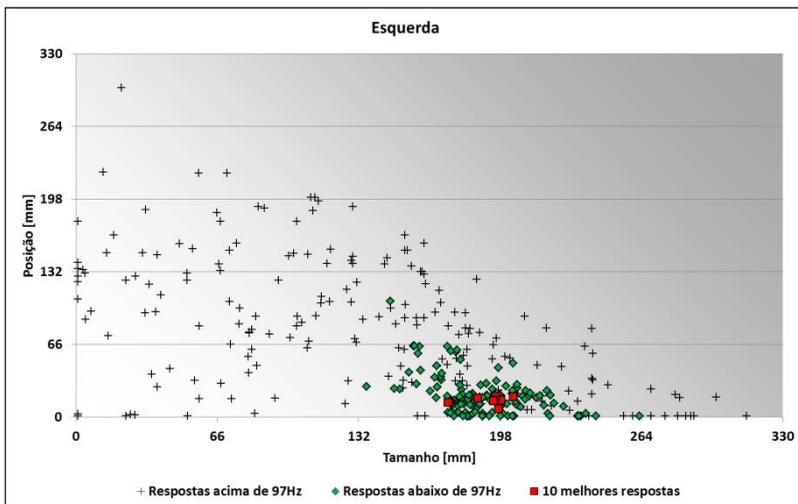


Figura 5.20: Distribuição das respostas do ressalto esquerdo.

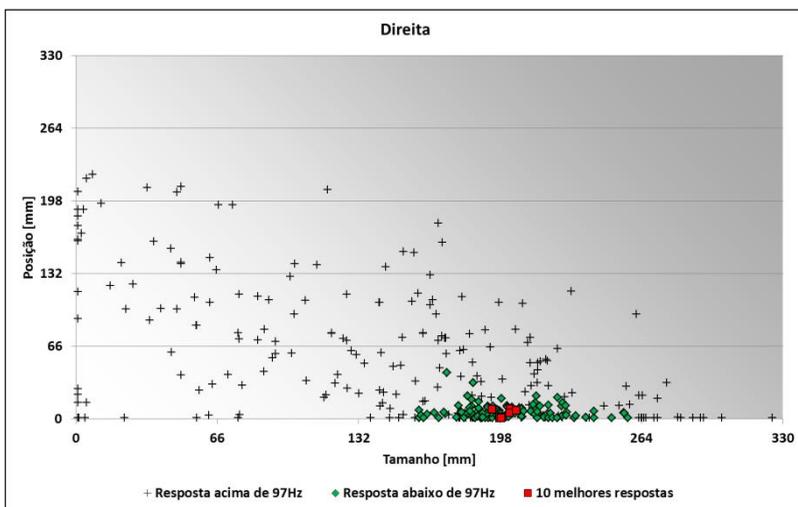


Figura 5.21: Distribuição das respostas do ressalto direito.

Observa-se que, conforme esperado, a melhor resposta apresenta geometria simétrica entre o lado esquerdo e direito, confirmando que a diferença entre os tamanho encontrada no problema com o eixo sectionado poderia ser atribuída a uma resposta local. A Figura 5.22 mostra como ficou o perfil do eixo otimizado neste problema.

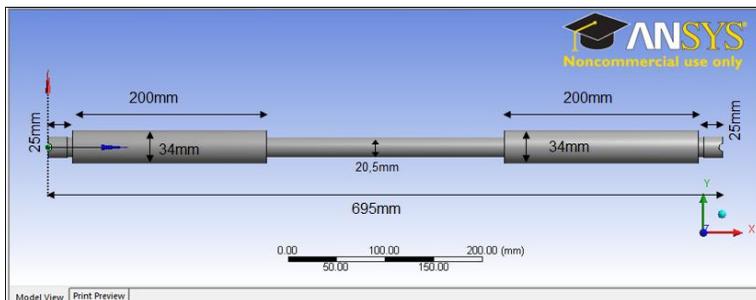


Figura 5.22: Eixo otimizado.

#### 5.4.4 Análise da resposta em todo o intervalo

Para que se entenda melhor a influência de cada uma das variáveis e se possa certificar que a resposta encontrada realmente está na região ótima, um último estudo complementar foi conduzido a partir do modelo com os dois ressaltos. A intenção é distribuir indivíduos por todo o espaço amostral e, a partir das respostas, traçar uma superfície que demonstre o comportamento como uma função das variáveis de entrada.

Tomando como base os resultados encontrados no modelo de dois ressaltos, neste estudo considerou-se que o eixo é simétrico, ou seja, os dois ressaltos são iguais. Para que o estudo seja executado de forma precisa e robusta, é necessário que os pontos mantenham uma distância mínima entre eles, caso contrário algum comportamento local poderia ser acidentalmente negligenciado. A distribuição dos pontos foi feita da seguinte forma:

- Largura: 7 pontos no intervalo;
- Posição: 7 pontos no intervalo.

A Figura 5.23 mostra o problema montado no modeFrontier. Os valores de diâmetro dos ressaltos e da região central, embora estejam parametrizados, foram mantidos constantes e iguais aos encontrados na resposta do problema anterior (valor máximo para os ressaltos – 34mm – e nominal para a região central – 20,5mm). Os valores da posição e tamanho do ressalto da direita foram marcados como uma função do ressalto da esquerda. A restrição de que a soma do comprimento com a posição tenha um valor máximo de 327,5mm foi mantida.

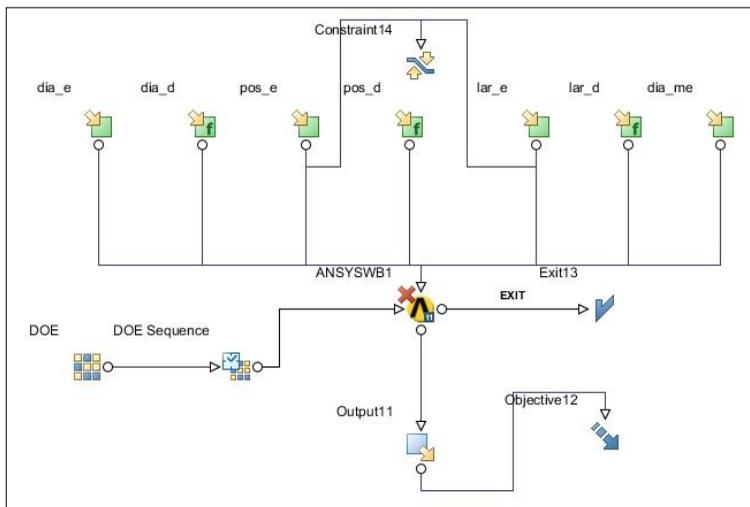


Figura 5.23: Problema no modeFrontier.

Os dados obtidos foram dispostos em um gráfico tridimensional onde os eixos X e Y correspondem aos valores de entrada TAMANHO e POSIÇÃO respectivamente, repetindo a orientação das Figuras 5.20 e 5.21. A resposta é representada no eixo Z através de uma superfície que aproxima o valor da frequência de todos os pontos e permite identificar as melhores regiões mais facilmente. Esta superfície foi gerada através de um algoritmo que representa os pontos por meio de uma equação polinomial. Para o problema em especial foi utilizada uma equação de 6ª ordem (o grau é limitado pelo número de pontos disponíveis). Este método é conhecido por apresentar precisão bastante limitada, no entanto, é bastante indicado para que se tenha uma ideia do comportamento geral da resposta. A Figura 5.24 mostra a superfície gerada, onde as cores mais avermelhadas / quentes correspondem aos valores de frequência maiores enquanto que as cores azuladas / frias indicam as regiões de menor frequência.

É preciso ter em mente que assim como demonstrado na Figura 5.19, os pontos da diagonal superior não são reais, pois violam as restrições. Embora a superfície cubra esta área, os valores desta região não possuem significado algum e são apenas uma extrapolação da equação gerada a partir dos pontos da diagonal inferior.

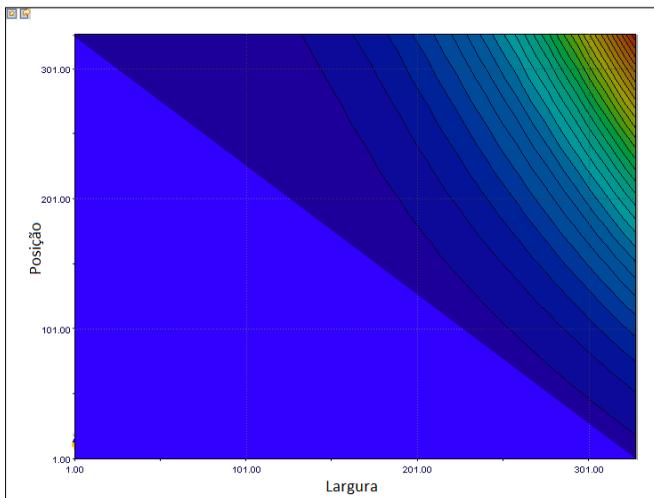


Figura 5.24: Resposta aproximada por uma superfície polinomial de 6<sup>a</sup> ordem.

Analisando o gráfico mostrado na Figura 5.24, percebe-se nitidamente que os valores extrapolados na diagonal superior (região escura) foram tão grandes (até 2300Hz) que acabaram mascarando o comportamento da região de interesse (diagonal inferior), tornando esta praticamente constante e difícil de se identificar qualquer comportamento. Uma nova tentativa foi realizada utilizando-se desta vez um algoritmo Gaussiano para gerar a superfície.

O algoritmo Gaussiano se baseia na distribuição normal e é bastante recomendado para problemas que não podem ser aproximados por equações polinomiais. Neste método cada indivíduo tem a sua resposta representada como uma distribuição normal, preenchendo assim os espaços em torno da sua vizinhança. Regiões isoladas por restrições (como a diagonal superior do problema) acabam recebendo pouca importância devido ao baixo número de indivíduos, favorecendo assim a análise dos pontos de interesse do espaço de resposta. A Figura 5.25 mostra a curva de resposta para o problema aproximado pelo algoritmo Gaussiano.

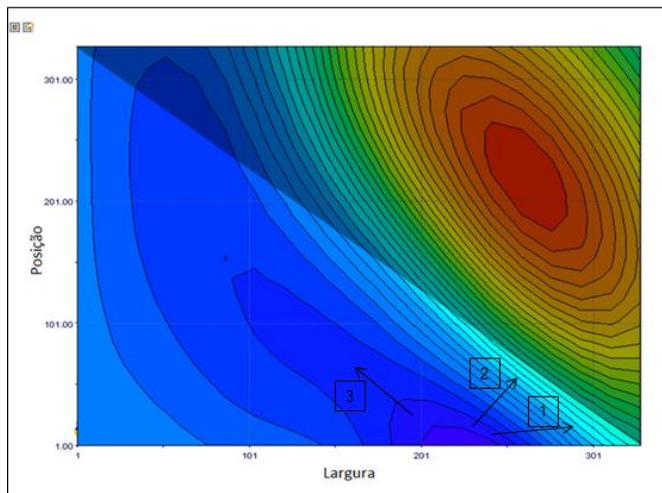


Figura 5.25: Resposta aproximada por uma superfície Gaussiana.

Novamente observa-se que a diagonal superior do gráfico (região de restrições violadas) foi extrapolada com os maiores valores, porém, diferente da curva polinomial, os valores não foram tão elevados e possibilitam uma análise da região de interesse (diagonal inferior). A curva demonstra que as menores frequências se encontram na mesma região identificada pelo problema do eixo com dois ressaltos, confirmando a resposta. Ainda no gráfico observa-se que, na medida em que se desloca para a direita (setas 1 e 2) a frequência aumenta muito mais rapidamente que para a esquerda (seta 3). Fisicamente isto significa que quando o ressalto avança em direção à região central a frequência se eleva rapidamente, o que é coerente, pois o diâmetro maior no centro eleva a rigidez equivalente do eixo justamente na região com maior esforço de flexão.

A Figura 5.26 mostra o gráfico da superfície Gaussiana sobre outra perspectiva onde são mostrados os valores da frequência natural de cada região.

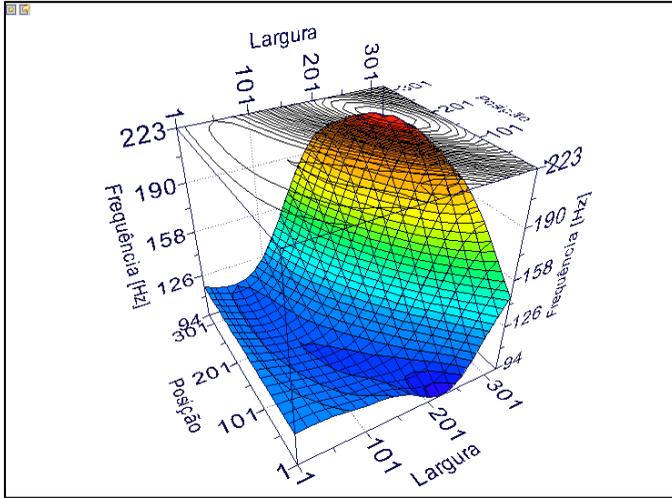


Figura 5.26: Superfície Gaussiana 3D.

## 6. VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

Para validar o estudo de otimização e confirmar que o modelo proposto realmente apresenta uma resposta melhor comparado ao eixo original, um protótipo foi construído e submetido à mesma análise modal experimental em veículo que originou o modelo numérico. No entanto, algumas modificações sobre o modelo otimizado foram necessárias para que o novo eixo fosse corretamente montado nas juntas:

1. O principal desvio da geometria foi com relação à coordenada definida como POSIÇÃO no estudo de otimização. Ao passo que no modelo do estudo o ressalto respeitava um intervalo de 20mm da extremidade do eixo para permitir o encaixe nas juntas mais 5mm da própria resposta da otimização, no modelo real este intervalo total foi elevado para 40mm para permitir que as rodas fossem esterçadas durante o deslocamento do veículo ao laboratório de testes sem que o ressalto tocasse a face das juntas. Para compensar, os ressaltos foram estendidos por 190mm ao invés dos 200mm da resposta, seguindo o caminho indicado pela seta 3 da Figura 5.25.
2. O segundo desvio do protótipo foi o diâmetro máximo dos ressaltos. Por indisponibilidade de matéria prima, o diâmetro máximo foi limitado a 32mm, diferente dos 34mm do estudo de otimização.
3. Além destes dois, durante a usinagem da região central foi evidenciada uma vibração relativa entre o eixo e a ferramenta quando se atingiu o diâmetro de 22,8mm, impossibilitando atingir os 20,5mm utilizados no estudo de otimização.

As Figuras 6.1 e 6.2 mostram o esboço protótipo e a peça já usinada, respectivamente.

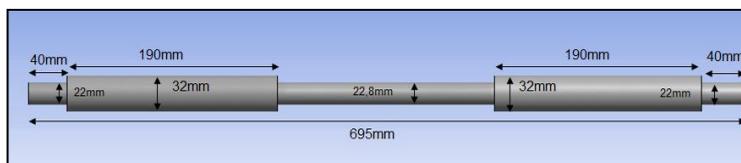


Figura 6.1: Esboço do protótipo.



Figura 6.2: Protótipo usinado.

O novo protótipo foi usinado a partir de uma barra de aço SAE 1045 (mesmo material do eixo original) e montado com interferência e soldado no componente móvel de cada junta (os anéis internos mostrados nas Figuras 2.12 e 2.14), garantindo assim resistência para aplicar os 50Nm da análise modal mas mantendo a capacidade de articulação das juntas. A Figura 6.3 mostra o semi-eixo montado no veículo durante a análise modal.



Figura 6.3: Protótipo montado em veículo com instrumentação.

Uma vez montado no veículo, o mesmo procedimento realizado no Item 3.3.4 foi repetido: excitação aplicada 10 vezes nos pontos 3 e 4 nos eixos X e Z. A partir dos resultados foi novamente gerada uma curva sintetizada das respostas. A Figura 6.4 mostra a região entre 80Hz e 120Hz, onde foi identificado o primeiro modo de flexão. Ao contrário dos 96Hz esperados pelo estudo de otimização, o valor encontrado foi de 110,2Hz.



Figura 6.4: Curva de estabilização: 1º modo em 110,2Hz.

Para que se possa entender as causas desta diferença, um novo modelo numérico foi construído com os mesmos desvios utilizados na construção do protótipo (1. ressaltos deslocados; 2. diâmetro dos ressaltos menor; 3. diâmetro central maior). Foi utilizada a mesma mola torcional de  $44\text{Nm}^\circ$ . O resultado é mostrado na Figura 6.5.

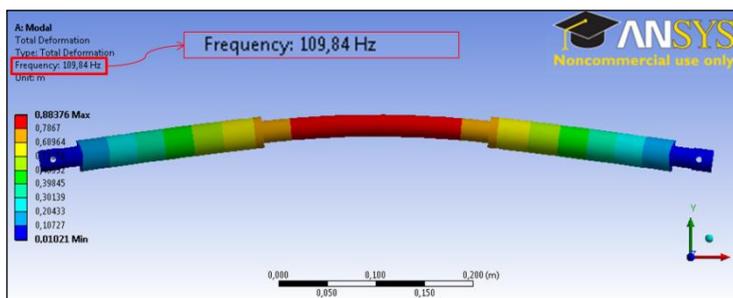


Figura 6.5: Simulação numérica do protótipo montado em veículo.

Como pode-se perceber, os desvios durante a construção do protótipo justificam a diferença encontrada entre o estudo de otimização e a validação experimental: um valor muito próximo dos 110Hz foi obtido no modelo numérico que representa o eixo montado no veículo. Assim, embora não tenha sido possível obter a mesma resposta do eixo otimizado, é possível validar o modelo numérico do eixo com dois ressaltos, garantindo que o estudo foi realizado com um modelo representativo.



## 7. CONCLUSÕES

A partir do estudo realizado podem ser feitas as seguintes conclusões:

### Capítulo 3: Análise modal experimental

Neste Capítulo foram executadas as análises modais que serviriam de referência para o estudo de otimização. O experimento foi dividido em duas etapas: a livre-livre e a montada em veículo. A primeira se mostrou bastante simples e fácil de ser executada, deixando os modos de vibração bastante evidentes e sem grandes dificuldades de identificá-los, tanto no método da frequência quanto no método do tempo. Este ensaio preliminar também mostrou que a instrumentação foi bem planejada e executada, exercendo pouquíssima influência sobre os resultados.

Na análise modal do eixo montado em veículo foi notada a influência bastante presente das condições de contorno. Os resultados obtidos estavam de acordo com o esperado, mostrando valores um pouco superiores ao previsto no modelo bi-apoiado mas menores que o bi-engastado e livre-livre.

### Capítulo 4: Análise modal numérica

Neste Capítulo os dados obtidos com a simulação experimental foram utilizados para gerar modelos numéricos que seriam utilizados no estudo de otimização. Para a validação da geometria, das propriedades do material e da malha, foram utilizadas as respostas do ensaio livre-livre. Os resultados obtidos demonstram que o modelo foi bem elaborado, pois os mesmos resultados dos testes experimentais foram atingidos com propriedades de material muito próximas dos valores tabelados para o aço SAE1045. A escolha da malha de elementos sólidos também se mostrou bastante apropriada, contribuindo para os resultados precisos do modelo ao mesmo tempo em que deu grande liberdade para gerar um modelo bastante flexível para o estudo de otimização.

Para a simulação do eixo montado no veículo foi proposto um modelo de condições de contorno bi-apoiado com molas torcionais iguais em cada uma das extremidade do eixo. A determinação das cargas das molas foi feita de forma empírica e os valores encontrados foram bastante coerentes. O perfil da deformada do eixo foi o mesmo encontrado no veículo, confirmando que o modelo foi bastante representativo e propício para o estudo de otimização.

### Capítulo 5: Otimização

Neste Capítulo o modelo numérico foi adaptado para o estudo de otimização em duas etapas independentes. Em ambos os casos o algoritmo de otimização utilizado foi o MOGA-II sobre uma população inicial gerada pelo código ISF. Embora o MOGA-II tenha sido desenvolvido para problemas multi-objetivos e o projeto em questão trate de um problema de objetivo único, os resultados encontrados foram muito satisfatórios, demonstrando que a escolha pelo código foi apropriada.

Na primeira parte do estudo foi gerado um perfil com bastante liberdade para variar o diâmetro em qualquer ponto do eixo, chamado de eixo seccionado. A convergência estável em 35 gerações (Figura 5.11) mostra que os parâmetros do problema foram ajustados de forma correta. A resposta obtida com dois ressaltos nas extremidades se mostrou bastante coerente já que encontrou explicação lógica na Mecânica dos Sólidos (Figura 5.13) e fundamentos de vibração. Porém, a resposta não deixou claro se o perfil ótimo deveria apresentar simetria ou não. Para responder esta questão foi gerado um novo modelo baseado na resposta do primeiro para refinar o estudo de otimização, chamado de eixo com dois ressaltos.

O eixo de dois ressaltos foi inicialmente submetido ao processo de otimização com os mesmos parâmetros utilizados no modelo seccionado, no entanto, a convergência não foi constante e apresentou muita oscilação (Figura 5.16), fazendo com que os parâmetros fossem revistos e o ensaio re-submetido. Na segunda tentativa o Cruzamento Direcional foi aumentado e a Mutação reduzida, resultando em uma convergência mais suave e constante (Figura 5.17). A análise dos 158 indivíduos com melhor resposta (abaixo de 97Hz) deixou claro que para o estudo proposto o diâmetro deve ser ajustado como máximo, com valor de 34mm (Figura 5.18). Nos gráficos que mostram os valores dos ressaltos da esquerda e direita (Figuras 5.20 e 5.21 respectivamente) observa-se que os indivíduos popularam o intervalo inteiro de forma bastante distribuída, o que ajuda a demonstrar que o problema não ficou preso a uma solução local. Nos mesmos gráficos, quando novamente se analisam os 158 melhores indivíduos observa-se que a mesma resposta do lado esquerdo foi encontrada no lado direito, com estes ocupando a mesma região dos dois lados e confirmando que o modelo ótimo apresenta simetria.

Por último, foi realizado um estudo no qual foi gerada uma superfície representando a frequência como uma função do tamanho e posição do ressalto. O resultado mostrou que a melhor resposta

realmente se encontrava na região apontada pelo estudo de otimização (Figuras 5.25 e 5.26). Ainda foi possível perceber que esta região é bastante estreita, variando bastante a frequência para pequenos desvios na geometria.

#### Capítulo 6: Validação experimental

Neste Capítulo um eixo protótipo com o mesmo material do eixo original foi construído a partir dos resultados do estudo de otimização, aplicando três desvios para permitir a montagem do eixo nas juntas. Uma vez montado e instalado no veículo, a análise modal realizada no Capítulo 3 foi repetida, no entanto, a resposta encontrada foi diferente da apontada pelo estudo de otimização. A partir dos desvios foi gerado um novo modelo numérico, chegando à mesma resposta obtida no ensaio experimental.

Embora não tenha sido possível evidenciar experimentalmente o ganho do modelo otimizado, foi possível validar a geometria com dois ressaltos em um ensaio veicular. Este fato comprova o que já havia sido constatado com a Figura 5.27: o modelo otimizado é muito sensível a variações de geometria, apresentando grandes mudanças da frequência natural mesmo com pequenas alterações dimensionais.

O modelo ótimo apresentou uma melhoria comparado ao modelo original, no entanto, para isso foi necessário elevar o diâmetro significativamente. Esta variação de diâmetro impossibilitou a montagem do eixo nas juntas, além de elevar os custos com a matéria prima (barra com diâmetro maior) e processo de usinagem. Por outro lado, fica evidente que existe um potencial para otimizar o perfil de usinagem do eixo. Embora este por si só possa não obter os ganhos desejados, pode contribuir para a redução da frequência natural do eixo e ser associado à outros recursos (adição de massa, absorvedor dinâmico, entre outros), aumentando o ganho destes.

Como sugestão de trabalhos futuros, recomenda-se o estudo combinando de otimização de eixo com outras alternativas de projeto para a redução da frequência natural do primeiro modo de flexão, como absorvedor dinâmico ou adição de massa.



## REFERÊNCIAS

- GILLESPIE, Thomas D.. **Fundamentals of Vehicle Dynamics**, SAE, Michigan, 1992.
- FAHY, F.. **Sound and Structural Vibration – Radiation, Transmission and Response**, Academic Press, Oxford, 1985.
- FARNHAM, J. R.. **Power Train Tuning for Quiet Cars**, SAE, Michigan, 1963.
- MELLO, R.. **Análise da Sensibilidade do Campo Acústico Veicular à Excitação do Sistema de Transmissão**, SAE, Campinas, 2003.
- BASSHUYSEN, R. v.; SCHÄFER, F.. **Internal Combustion Engine Handbook**, SAE, Warrendale, 2004.
- STOUT, J.L.. **Engine Excitation Decomposition Method and V Engine Results**, SAE, Michigan, 2001.
- SEHERR-THOSS, H.C.; SCHMELZ, F.; AUCKTOR E.. **Universal Joints and Driveshafts**, Springer, Alemanha, 2006.
- FARNHAM, J. R... **Control of Noise and Vibration in the Unibody**, SAE, Michigan, 1960.
- Tabela obtida da página eletrônica do Grupo de Mecânica Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.
- Universal Joint and Driveshaft Design Manual**, SAE, Warrendale, 1979.
- POPOV E. P.; BALAN, T. A.. **Engineering Mechanics of Solids**, Prentice Hall, Califórnia, 1998.
- HODGETTS D.; PARKINS, D. W.. **Vibration Modes of an Automotive Driveline**, SAE, Michigan, 1974.
- ESSER, W. M.. **Axle Noise Control – the Internal Vibration Absorber propeler shaft**, SAE, Michigan, 1969.
- SCHWIBINGER, P.; HENDRICK; D.; WU, W.; IMASHINI, Y.. **Noise and Vibration Control Measures in the Powertrain of Passangers Cars**, SAE, Michigan, 1995.
- KUNZE, H.; RIEDEL, M.; SCHMIDT, K.; BIANCHINI. E.. **Vibration reduction on automotive shafts using piezoceramics**, Proc. SPIE, Smart Structures and Materials, 2003.

PIERBURG, B.; AMBORN, P.. **Constant velocity driveshafts for passenger cars**, Mi, Loëbro, 1998.

GHONEIM, H.; LAWRIE, D. J.. **Analysis of the Flexural Vibration of a Composite Drive Shaft with Partial Cylindrical Constrained Layer Damping Treatment**, SAE, Michigan, 2006.

INMAN, D.J.. **Engineering Vibration**, Prentice Hall, New Jersey, 2007.

STRANG, G.; FIX, G.. **An Analysis of the Finite Element Method**, Prentice Hall, New Jersey, 1997.

INMAN, D.J.. **Vibration with control, measurement and stability**, Prentice Hall, New Jersey, 1989.

MAIA, N.M.M.; SILVA, J.M.M.. **Theoretical and experimental modal analysis**, Research Studies Press, 1997.

ALLEMANG, R.J.; BROWN, D.L.. **Experimental Modal Analysis**, SEM Handbook on Experimental Mechanics, 1993.

GUILLAUME, P.. **Modal Analysis**, Vrije Universiteit Brussel, Bruxelas, 2009.

COUTINHO, L. F.; TAMAGNA, A.. **Study of vibration in halfshafts**, SAE, São Paulo, 1993.

AGILENT TECHNOLOGIES. **The Fundamentals of Modal Testing**, Material didático da empresa Agilent Technologies, Estados Unidos, 2000..

FONSECA, J.. **Ferramentas de Simulação em Mecânica: Elementos Finitos**, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

CHEN, S. Y.. **An equivalent direct modeling of a rotary shaft with hot-fit components using contact element modal analysis results**, Far East University, Taiwan, 2012.

ARORA, J.. **Introduction to Optimum Design**, Academic Press, 2004

HOLLAND, J. H.. **Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence**, The Mit Press, Michigan, 1998.

MITCHELL, M.. **An Introduction to Genetic Algorithms: Complex Adaptive Systems**, The Mit Press, San Diego, 1998.

POLES, S.. **MOGA-II An Improved Multi-Objective Genetic Algorithm**, Technical report 2003-006, Esteco, Trieste, 2003.

POLES, S.; RIGONI, E.. **MOGA-II Performance on Noisy Optimization Problems**, Esteco, Trieste, 2004.

[33] MODEFRONTIER. **modeFRONTIER User Manual 3.2.0**, Esteco, 2008.