

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA (UFSC)**

Curso de Pós - Graduação, Lato Sensu

**Rosangela Ramon**

**MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA A EPIDEMIOLOGIA**

**Chapecó – SC, 2011**

**ROSANGELA RAMON**

**MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA A EPIDEMIOLOGIA**

Monografia apresentada à UFSC como parte dos requisitos para a obtenção do grau de especialista em Matemática.  
Orientador: Dr. Daniel Norberto Kozakevich

**Chapecó – SC, 2011**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS**  
**Departamento de Matemática**  
**Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância**

"Modelagem Matemática Aplicada a Epidemiologia"

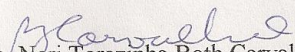
Monografia submetida à Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

**APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 25/03/2011**

Dr. Daniel Norberto Kozakevich (CFM/UFSC – Orientador) \_\_\_\_\_

Dr. Mário César Zambaldi (CFM/UFSC - Examinador) \_\_\_\_\_

Dr. Cleverson Roberto da Luz (CFM-UFSC - Examinador) \_\_\_\_\_

  
Dra. Neri Terezinha Both Carvalho

Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, março de 2011.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Augusto e Delize pelo exemplo de vida e incentivo;

Em especial ao meu marido Marcos, pelo apoio, compreensão e incentivo;

Ao professor Dr. Daniel, pelos ensinamentos e em especial pela compreensão e cordialidade admirável;

A professora Neri, coordenadora do projeto, que não mediu esforços para que o mesmo acontecesse.

A todos os professores do curso de especialização, Professora Silvia, Professor Oscar, Professor Eliezer, Professor Mércles, Professor Roberto, que ministraram as disciplinas e muito auxiliaram na construção de novos conhecimentos;

Ao meu colega Euclides pelos momentos de estudo, discussões e ajuda;

A todos vocês o meu **MUITO OBRIGADO!**

## RESUMO

Este trabalho consiste no estudo da modelagem matemática através de equações diferenciais ordinárias. A modelagem matemática é uma metodologia de pesquisa que permite modelar diversas situações do cotidiano. É a arte de transformar problemas da realidade em linguagem matemática.

A proposta aqui é utilizar da modelagem matemática para resolver problemas relacionados a epidemiologia através de equações diferenciais ordinárias.

## SUMÁRIO

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| CAPÍTULO I.....                                                               | 7  |
| 1. Modelagem matemática .....                                                 | 7  |
| 1.1 Modelo matemático.....                                                    | 9  |
| 1.2 Etapas da modelagem matemática.....                                       | 12 |
| 1.3 Importância da modelagem para as diferentes áreas do<br>conhecimento..... | 16 |
| CAPÍTULO II.....                                                              | 18 |
| 2. Equações diferenciais e epidemiologia.....                                 | 18 |
| 2.1 Equações diferenciais.....                                                | 18 |
| 2.2 Modelos matemáticos utilizando equações diferenciais .....                | 20 |
| 2.3 Sistemas de EDO's.....                                                    | 24 |
| 2.4 Epidemiologia.....                                                        | 35 |
| CAPÍTULO III.....                                                             | 44 |
| 3. Modelos Epidemiológicos .....                                              | 44 |
| 3.1. Modelo matemático I .....                                                | 45 |
| 3.2. Modelo matemático II.....                                                | 47 |
| 3.3 Modelo matemático III .....                                               | 48 |
| 3.4 Modelo matemático IV.....                                                 | 51 |
| 3.5 Modelo matemático V.....                                                  | 55 |
| CONSIDERAÇÕES FINAIS .....                                                    | 58 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....                                              | 59 |

## INTRODUÇÃO

As pessoas em geral imaginam que a matemática apenas serve para resolver problemas simples do cotidiano ou mesmo apenas para desenvolver o raciocínio lógico. O universo matemático é muito mais amplo do que se imagina.

A modelagem matemática nos permite ampliar a nossa visão. É através dela que podemos, por exemplo, fazer contribuições significativas nas mais diversas áreas do conhecimento.

Nesse trabalho, procuramos aplicar os conhecimentos matemáticos em problemas envolvendo epidemiologia. Basicamente nos detemos a uma pesquisa bibliográfica dos conceitos em questão.

No capítulo I é apresentada a definição de modelo matemático, modelagem e suas fases.

No capítulo II enfatizamos a teoria das equações diferenciais e os principais conceitos presentes em epidemiologia e sistemas epidemiológicos. Cabe ressaltar que os conceitos são apresentados de forma superficial, mas de forma que, torne ao leitor um conhecimento suficiente sobre o tema em questão.

O último capítulo apresenta modelos epidemiológicos encontrados na literatura. São apresentados alguns modelos bem como a análise dos mesmos. Cabe ressaltar que os modelos são simples, mas os mesmos conseguem representar a grandiosidade da matemática frente à resolução de problemas.

# CAPÍTULO I

## 1. MODELAGEM MATEMÁTICA

A prática da modelagem não é algo novo no mundo. Não é uma idéia nova. Sua essência impulsionou a criação de teorias científicas, especialmente em conceitos matemáticos. A modelagem matemática surge durante o Renascimento, quando se constroem as primeiras idéias da Física apresentadas segundo linguagem e tratamento matemáticos.

Tem-se notícias do uso da modelagem matemática por Pitágoras que data 530 a.C. Outros nomes, como o de Einstein, o de Willian Harvey tem registros da utilização da modelagem matemática entre suas pesquisas.

Segundo Yang (2002) a matemática teve o seu progresso associado ao esforço para a compreensão dos fenômenos naturais, graças aos espíritos inquiridores de pensadores que não se contentaram apenas com as descrições qualitativas dos mesmos. Desde tempos antigos, a geometria, por exemplo, tem sido desenvolvida para tratar de problemas de mensuração para calcular áreas de terras e volumes de celeiros. A linguagem concisa, precisa e abrangente - em termos de símbolos (ou notações) - da matemática tem sido útil para elaborar idéias e metodologias para compreender e explorar o mundo físico. Não foi sem razão que Galileu defendeu ardentemente uma descrição quantitativa - e dedutiva - dos fenômenos naturais que pudesse ser preditiva (utilizando fórmulas matemáticas), deixando de lado a comodidade de descrições apenas qualitativas e factuais dos fenômenos.

Com a busca de soluções de problemas do dia-a-dia, o homem pode encontrar na matemática uma ferramenta poderosa a seu favor. Com ela foi



possível expandir seus conhecimentos em relação a muitos fenômenos da natureza.

A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. (BASSANEZI, 2002, p. 16).

A capacidade do homem de pensar, analisar, questionar, investigar, permitiu a humanidade, juntamente com a matemática explorar e conhecer o ambiente em que vive.

A Modelagem Matemática, além de uma alternativa de ensino, é também uma metodologia de pesquisa que permite modelar diversas situações do cotidiano, como por exemplo, os mecanismos que controlam a dinâmica de populações, ou problemas ligados a ecologia, a neurologia, a genética, epidemiologias e os processos psicológicos, dentre outros. Também sabemos que informalmente, a modelagem matemática, é muito utilizada por leigos no assunto.

As vantagens do emprego de modelagem em termos de pesquisa podem ser constatadas nos avanços obtidos em vários campos da Física, Química, Biologia e Astrofísica, entre outros. A modelagem pressupõe a multidisciplinaridade. E, nesse sentido, vai ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa. (BASSANEZI, 2002, p. 16)

Yang (2002) saliente que uma vez que a compreensão de fenômenos naturais deve ser baseada em idéias desenvolvidas a partir de intuições (pensamento novo) e conhecimentos já adquiridos, o uso de modelos é de grande valia. Os modelos são desenvolvidos a partir de uma elaboração cuidadosa de idéias voltadas para partes do fenômeno, que permitirão a aferição das suas hipóteses em confronto com as observações. Assim, modelos podem ser modificados, aprimorados ou substituídos por outros para se obter uma compreensão correta daquilo que está ocorrendo na natureza. O desenvolvimento de modelos matemáticos para explicar as observações do mundo físico teve grande avanço desde tempos antigos. Por exemplo, a lei da atração gravitacional é um resultado de modelagem matemática, e a sua importância deve-se ao fato de ser uma lei universal, ou seja, consegue explicar tanto o movimento das estrelas e galáxias quanto o movimento de pequenos objetos em queda livre na terra.

Porém, no Brasil, o uso formal e científico da modelagem e de modelos matemáticos é recente. Nos últimos anos, ela tem se destacado pela sua eficácia em resolver determinados problemas.

Apesar de nova se comparada a outros métodos, essa prática já tem surtindo efeitos. Existem várias publicações relatando experiências bem sucedidas do uso da modelagem matemática. Dentre eles destacam-se Biembengut & Hein, 2000; Matos & Carreira, 1996; Monteiro & Pompeu Jr., 2001; Bassanezi, 2002. Também é possível perceber o número crescente de artigos acadêmicos publicados nessa área. Um que merece destaque refere-se ao trabalho publicado por à Epidemiologia da Transmissão da Dengue escrito Yang (2003) onde descreve a transmissão do vírus da dengue na população humana através de modelo matemático. Ainda temos trabalhos publicados por Poli & Yang (2006) referente ao Modelo Matemático Aplicado para Imunologia de HIV cujo um modelo simples que descreve a interação do vírus HIV com o sistema imunológico. Também temos o estudo Modelagem Matemática e Análise Quantitativa da Otimização dos Esquemas de Tratamentos da AIDS cujos autores são Caetano & Yoneyama.

Porém, apesar de interessante a modelagem requer do pesquisador um grau de atenção e intuição altos, pois o ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas, enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Essas atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo.

Segundo D'ambrosio (1986) a modelagem é um processo muito rico de encarar situações e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial.

## **1.1 Modelo matemático**

Bassanezzi (2002), afirma que um modelo matemático de uma situação é uma representação simbólica que parte do real e envolvendo uma formulação matemática abstrata. Segundo esse mesmo autor modelagem é a prática de fazer modelos.

Um modelo nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física – é uma idealização. Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo porém, precisão suficiente para conclusões significativas. É importante entender as limitações do modelo. (STEWART, 2009, p. 15).

Um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduz, de alguma forma, um fenômeno em questão ou um problema de situação real, é denominado de Modelo Matemático. (BIEMBENGUT, 1997, p. 89).

A seguir são destacados alguns dos objetivos estabelecidos para a construção de um Modelo Matemático propostos por DAVIS e HERSH (1985):

- Obter respostas sobre o que acontecerá no mundo físico;
- Influenciar a experimentação ou as observações posteriores;
- Promover o progresso e a compreensão conceituais;
- Auxiliar a axiomatização da situação física;
- Incentivar o desenvolvimento científico da Matemática e a arte de fazer modelos Matemáticos.

Outro conceito interessante sobre o assunto é feito a seguir onde Biembengut ressalta que a modelagem vai além da resolução de um problema como algo maior.

Pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador, precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. (BIEMBENGUT, 1999, p. 10)

Biembengut (2002) relata ainda que a matemática e a realidade são dois conjuntos disjuntos. Elas por si só não tem nada em comum. Porém através da modelagem pode-se fazer a interação entre elas. Essa mesma estudiosa diz que a modelagem é uma arte, ao formular, resolver e elaborar não apenas uma solução particular. Mas dá o suporte para outras aplicações. Pois, com base

em um modelo conciso e coerente, podem-se desenvolver outros ou até mesmo adaptá-lo para outra situação.

A modelagem tem o papel de fazer a ligação entre várias áreas do conhecimento, o mundo real e a matemática.

A figura 1.1 mostra o papel da modelagem, sua importância entre a ligação que faz entre o mundo e a matemática. Ela é que nos permite tratar a matemática como um instrumento útil a humanidade e fazer da matemática instrumento de transformação.

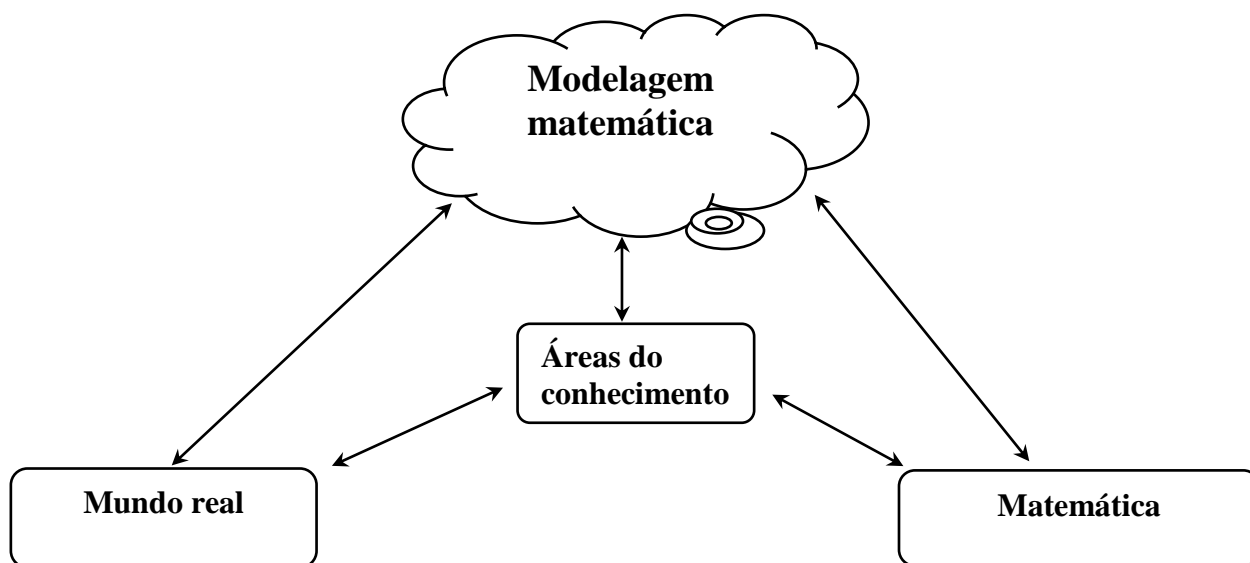


Figura 1.1: Inter-relação entre a modelagem e o mundo.

É possível perceber em todas as definições que a modelagem é ampla, requer do modelador muito mais do que o conhecimento matemático. Requer criatividade, observação da realidade e uma intuição muito forte; além de um planejamento coerente e adequado. A Modelagem é o processo de escolher características que descrevem adequadamente um problema de origem não matemático e que para ser resolvido seja utilizado conceitos matemáticos.

Na modelagem matemática, diversas relações podem ser estabelecidas. Compreender o sentido e o significado de um conceito numa situação de modelagem significa compreender as relações que se estabelecem entre a situação-problema oriunda da escolha de um tema, a matemática envolvida nessa situação. Assim sendo, a matemática deixa de ser uma disciplina

isolada das demais, para agir, interferir e solucionar problemas nas demais áreas do conhecimento.

## 1.2 Etapas da modelagem matemática

Muitas vezes, na modelagem, se faz necessário fazer várias tentativas e simulações para se chegar ao resultado desejado (aquele que solucione o problema ou amenize).

Para se fazer modelagem matemática de forma coerente e organizada se faz necessário refletir sobre diversos conceitos em diferentes momentos. Estas por sua vez, quando bem desenvolvidas permitem analisar o sucesso do modelo em questão.

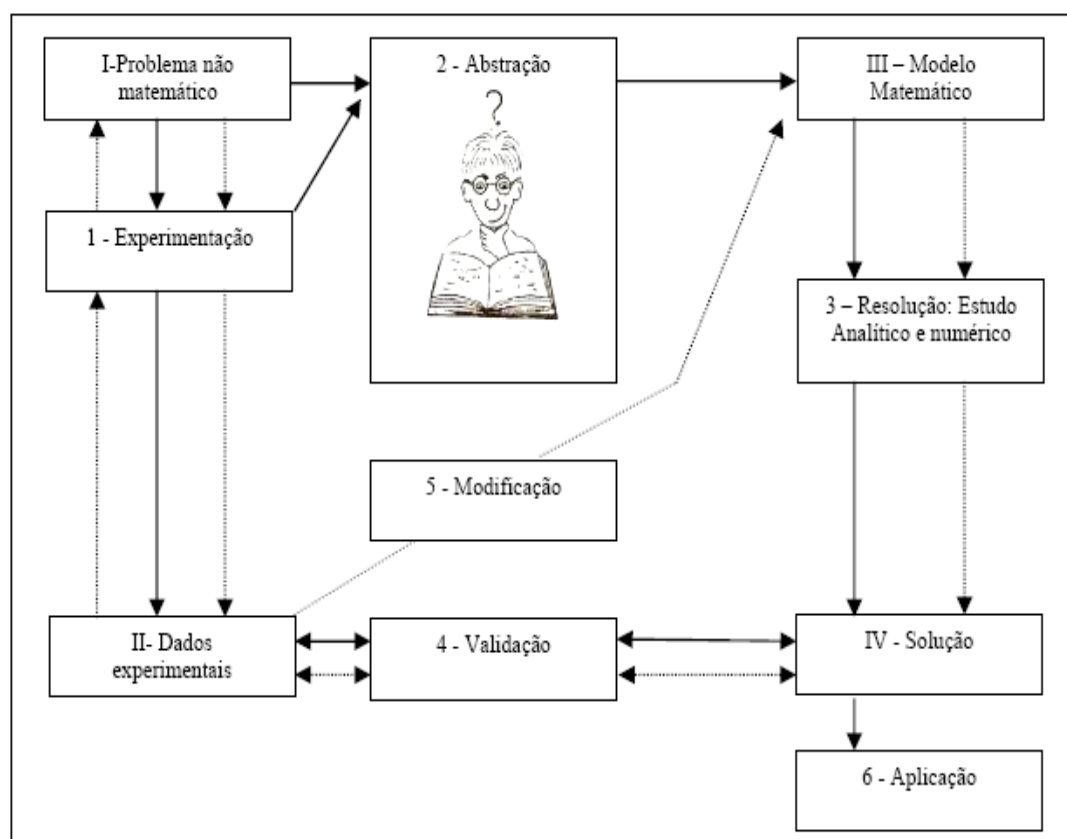


Figura 1.2: Atividades intelectuais da Modelagem Matemática  
Fonte: Bassanezi (2002)

Para que seja possível fazer a representação do mundo real como forma de matemática se faz necessário várias etapas. A seguir, apresentaremos uma pequena descrição das etapas que envolvem a modelagem matemática.

Para a formulação de um modelo se faz necessário seguir determinadas etapas. Essas etapas devem seguir a uma ordem cronológica. O não cumprimento de uma etapa pode vir a comprometer todo o processo de modelagem e não atingir os objetivos propostos para o estudo. A seguir serão apresentadas as etapas para formulação de um modelo matemático.

### **1.2.1 Interação**

É o momento de buscar a situação-problema. O problema precisa despertar interesse e motivar o modelador. Quanto mais atraente, mais estimulante.

Uma vez identificada e determinada a situação problema é de extrema importância que se estude o problema de modo inteiro com toda a sua complexidade. Fazer estudos teóricos, buscando trabalhos anteriores na busca de soluções para o problema em questão. O importante é levar em consideração um número grande de informações.

Para melhor esclarecimento pode-se dividir essa etapa em dois momentos. No primeiro momento é importante dedicar-se ao reconhecimento da situação problema e posteriormente aprofundar-se no estudo do assunto, buscando as causas, circunstâncias, conseqüências e demais informações pertinentes.

Uma pesquisa bem feita auxilia e muito na hora de fazer o modelo. É a partir do conhecimento acerca do assunto que tiramos conclusões pertinentes e qualitativas.

### **1.2.2 Matematização**

Esta é a parte mais complexa e muito importante. É nela que se formula matematicamente o problema, ou seja, reescreve-se a situação real por meio de símbolos matemáticos. É um momento de concentração. De análise. De

questionamentos. Da busca de conceitos que se adaptem ao problema e que com eles seja possível ter um norte. Também é um momento de escolhas. É neste momento que precisamos escolher o que é importante. Decidir as variáveis envolvidas.

Muitas vezes, a modelação caminha em passos lentos, devido a sua complexidade, contudo estimula a busca, a investigação incessante do conteúdo.

A criatividade e a experiência são de grande valia nessa fase, pois é necessário classificar o que é relevante ou não diante da situação estudada, selecionar símbolos apropriados para descrever o problema e buscar conceitos matemáticos eficazes.

O modelo é parte da realidade, ou seja, tenta representar a realidade. Porém não é possível levar todos os fatores em consideração. Cabe ao modelador determinar o que realmente é importante e o que pode ser considerado insignificante.

Após considerar todos esses fatores é a hora de resolver o problema em termos de modelo. É a hora de uma análise detalhada dos dados e conhecimentos adquiridos anteriormente.

Nessa fase o uso do computador pode ser de grande valia. Muitas vezes as simulações são imprescindíveis para aproximações dos resultados e uma análise minuciosa do modelo em questão.

### **1.2.3 Validação do Modelo matemático**

Para validar o modelo, ou seja, para ver se o que foi feito condiz ou se aproxima do real, é essencial que seja feita uma interpretação do modelo e a sua verificação com a adequabilidade. Se o modelo não atende ao que se espera é necessário retornar a fase da matematização e reestruturar o que foi feito.

A validação do modelo deve ser feita com muita atenção. Os detalhes devem ser considerados. Se foram consideradas realmente as informações importantes ou se o modelo pode vir a ser simplificado e ou expandido.

Resumidamente as fases para a prática da modelagem matemática pode ser assim apresentada:

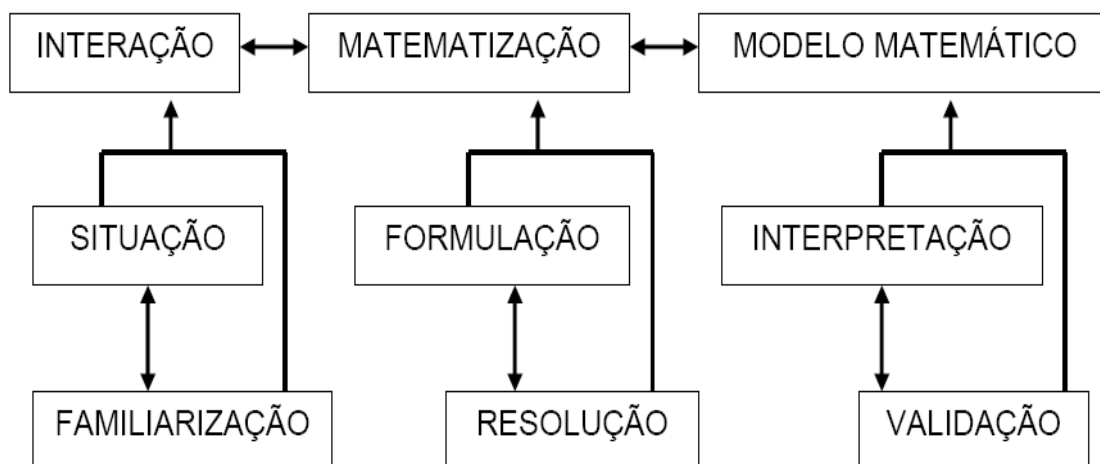


Figura 1.3: Dinâmica da Modelagem Matemática  
Fonte: Biemengut e Hein (2007)

O sucesso do modelo depende da boa formulação das 3 fases. Se uma falhar o modelo todo está comprometido e os resultados não serão coerentes.

Assim sendo, a Modelagem está associado à problematização e investigação. Na problematização busca-se criar perguntas e/ou problemas enquanto que na investigação, buscam-se a seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas as atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo.

Cabe ressaltar que o grau de dificuldade para a formulação de um modelo depende do problema real a ser considerado e do nível intelectual do modelador. Ou seja, se o conhecimento matemático restringe-se a uma matemática elementar o modelo ficará restrito a esses conceitos. Quanto mais conhecimento matemático mais abrangente será o modelo.

De acordo com Zuil, (2003), depois de formular o modelo matemático, estaremos de frente para o problema nada insignificante de resolvê-lo. Se pudermos resolvê-lo, julgaremos o modelo razoável se suas soluções forem consistentes com dados experimentais. Caso isso não aconteça, devemos levantar hipóteses alternativas, e, recomeçar o estudo.



Assim podemos, representar as etapas da modelagem com o seguinte diagrama:

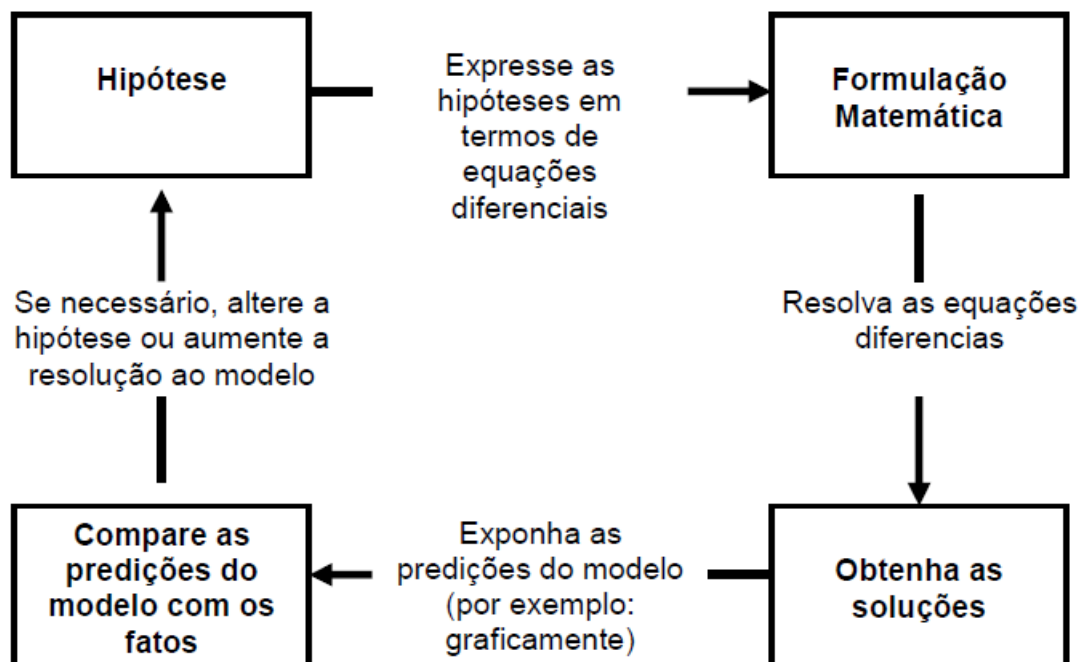


Figura 1.4: Etapas do processo de modelagem  
Fonte: Zill (2003)

### 1.3 Importância da modelagem para as diferentes áreas de conhecimento.

Com base no que foi apresentado anteriormente, fica visível que a modelagem envolve muita coisa. Muita analogia. Muita percepção do mundo. E isso é muito interessante, pois desde muito antes da obtenção do modelo é indispensável que se pense, se observe, se reflita sobre a realidade. Essa permite que a modelagem seja utilizada como um instrumento de ensino e aprendizagem nos diversos níveis de ensino, pois o educando não fica na posição de observador de conhecimentos, mas sim na posição de um construtor de seu conhecimento. Cabe ainda salientar que nesse processo muitas habilidades serão desenvolvidas, além da matemática. Visão de mundo, conhecimento científico de outras áreas, são fortemente influenciados pela modelagem matemática.

Estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas,

caminhar seguindo etapas aonde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural” (BASSANEZI, 2002, p.138).

A utilização da modelagem matemática se faz presentes nas mais diversas áreas do conhecimento. Exemplificaremos alguns modelos “famosos” formulados ao longo da história.

## CAPÍTULO II

### 2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E EPIDEMIOLOGIA

Neste capítulo serão apresentados os principais conceitos a cerca de equações diferenciais e epidemiologia, para que, posteriormente, seja feita a junção dos mesmos, a fim de estudar modelos epidemiológicos. A primeira parte refere-se a equações diferenciais que apresenta uma parte introdutória da teoria em questão. Posteriormente, falaremos de epidemiologia. Os conceitos serão enfatizados de forma superficial, mas que seja possível ao leitor, um conhecimento suficiente sobre o tema em questão.

#### 2.1 Equações diferenciais

Dentro de todos os conteúdos matemáticos existe um que merece destaque: equações diferenciais. A partir das mesmas é possível modelar inúmeros problemas de diversas áreas do conhecimento.

Equações diferenciais são equações que possuem um ou mais termos envolvendo derivadas de uma determinada função. Quando essas equações apresentam derivadas em função de uma única variável recebem o nome de equações diferenciais ordinárias (EDOs) e quando apresentam derivadas envolvendo mais de uma variável, são nomeadas de equações diferenciais parciais (EDPs). Nesse trabalho daremos ênfase para EDO's.

### 2.1.1 Definições e teoremas

Para a utilização da teoria de EDO's alguns conceitos tornam-se indispensáveis. Daremos ênfase as definições, principais teoremas e alguns exemplos. Cabe lembrar que não se fará um estudo minucioso sobre resolução de EDO's, mas sim, um embasamento teórico geral.

**Definição 2.1:** Uma Equação Diferencial Ordinária é uma igualdade envolvendo uma função  $y$ , de uma variável independente  $t$  e suas derivadas em relação a essa variável independente. Ou seja, é uma equação da seguinte forma  $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ .

**Definição 2.2:** A ordem de uma EDO é definida como a derivada de maior ordem da função envolvida na EDO.

**Definição 2.3:** Dizemos que uma EDO,  $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , é linear se  $F$  for linear em  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ , ou seja, se puder ser escrita na forma  $a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$ .

**Definição 2.4:** A EDO  $a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$  é dita homogênea se  $g(t) = 0$ .

**Definição 2.5:** Toda função  $\Phi$ , definida no intervalo  $I$  que tem pelo menos  $n$  derivadas contínuas em  $I$ , as quais substituídas em um EDO de ordem  $n$  reduzem a equação a uma identidade, é denominada uma solução da EDO no intervalo  $I$ .

No que se refere à solução de uma equação diferencial ordinária não existe uma maneira única para resolvê-las. A solução pode ser obtida através de diferentes abordagens: analítica, qualitativa e numérica.

A dificuldade de resolução das equações está ligada a sua classe (lineares, homogêneas, não lineares, ordem...). Em especial a linearidade e a ordem são fatores importantíssimos para determinar a solução analítica da EDO.

Na maior parte das EDOs, a solução analítica fica difícil de ser encontrada. Nesses casos, uma alternativa é determinar a solução numérica. Esta solução pode ser obtida através de vários métodos, tais como método de Euler, Runge Kutta, Série de Teylor, etc..., com o auxílio computacional na maioria das vezes.

Em outras situações, o importante é saber as propriedades satisfeitas pela EDO, ou seja, o estudo qualitativo ganha destaque. Analisar, por exemplo, a estabilidade de um sistema de EDO's pode ser de muita importância para fazer previsões sobre determinados problemas.

As ED's, de modo geral, ocupam um lugar de destaque na matemática para descrever e estudar problemas biológicos. Muitos problemas já foram descritos. E com base nesses estudos é possível fazer previsões futuras e conseqüentemente tomar decisões que venham a beneficiar a humanidade.

Apresentaremos alguns exemplos que precursores no estudo de EDO's.

## **2.2 Modelos Matemáticos utilizando Equações Diferenciais Ordinárias**

Muitos dos modelos matemáticos utilizados para representar situações físicas são embasados em ED, sejam elas ordinárias ou parciais. Isso se deve ao fato da teoria de equações diferenciais levar em consideração taxas de variações. A seguir serão apresentados alguns modelos pioneiros envolvendo ED. Apesar de serem, hoje, considerados ultrapassados, serviram de embasamento para o surgimento de modelos mais elaborados e que representem a situação em questão de forma mais coerente.

### **2.2.1 Crescimento populacional**

Dentre vários modelos matemáticos alguns como crescimentos populacionais ganham destaque. Esses modelos tentam descrever a dinâmica

populacional, para que seja possível, em longo prazo, saber como o mesmo se comporta. Os modelos pioneiros para descrever a dinâmica populacional foram os de Malthus e Verhulst.

### 2.2.1.1 Modelo de Malthus

Malthus figura de destaque em estudos na dinâmica populacional. Em 1798, afirmou que a população cresce em uma progressão geométrica, enquanto que os alimentos em progressão aritmética. Malthus considerava esse sistema fechado. Este modelo é simples e válido se o crescimento dessa população está sujeito apenas as taxas de natalidade e mortalidade.

Uma situação, que representa o crescimento exponencial de um certo microorganismo que estejam em um ambiente favorável ao seu desenvolvimento pode ser expressa matematicamente pela EDO a seguir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t), \quad x(0) = P_0. \quad (2.1)$$

- $a$  é a constante de proporcionalidade (é a diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade)
- $\frac{dx(t)}{dt}$  representa a variação da população com o passar do tempo;
- $x(t)$  é a função que estabelece o tamanho da população num determinado instante;
- $x(0) = P_0$  é uma condição inicial, ou seja, o tamanho da população no instante zero;

Ou seja, no modelo  $x(t)$  é a função incógnita, a função que queremos determinar. Assim, como a solução de uma equação algébrica é de extrema importância, o mesmo acontece com as EDO's. Ao utilizar EDO's para modelar um sistema natural, o objetivo principal é encontrar a sua solução. Essa

solução nada mais é do que uma função que soluciona o problema em questão. Porém, nem sempre é fácil encontrar tal solução.

Voltando a equação (2.1) veremos que a EDO é de fácil resolução, ou seja, é possível encontrar a sua solução analítica sem muitos cálculos. Basta separar as variáveis e integrar.

Resolvendo a equação 2.1 através de separação de variáveis temos

$$\int_{P_0}^{P(t)} \frac{dx(t)}{x(t)} = \int_0^t a dt . \quad (2.2)$$

O que nos leva a concluir que:

$$x(t) = P_0 e^{at} . \quad (2.3)$$

Basta substituir a equação 2.3 na equação 2.1 e veremos que satisfaz a equação. Toda função  $x(t) = P_0 e^{at}$ , com  $P_0$  constante, é solução. A equação (2.3) recebe o nome solução geral da EDO.

É possível observar a partir da equação (2.1) que para  $a > 0$ , a população é crescente. Para  $a < 0$  é decrescente. Agora se  $a = 0$ , então a população permanece constante em relação ao tempo.

A seguir serão apresentados gráficos das soluções da equação (2.3) para diferentes valores de  $a$

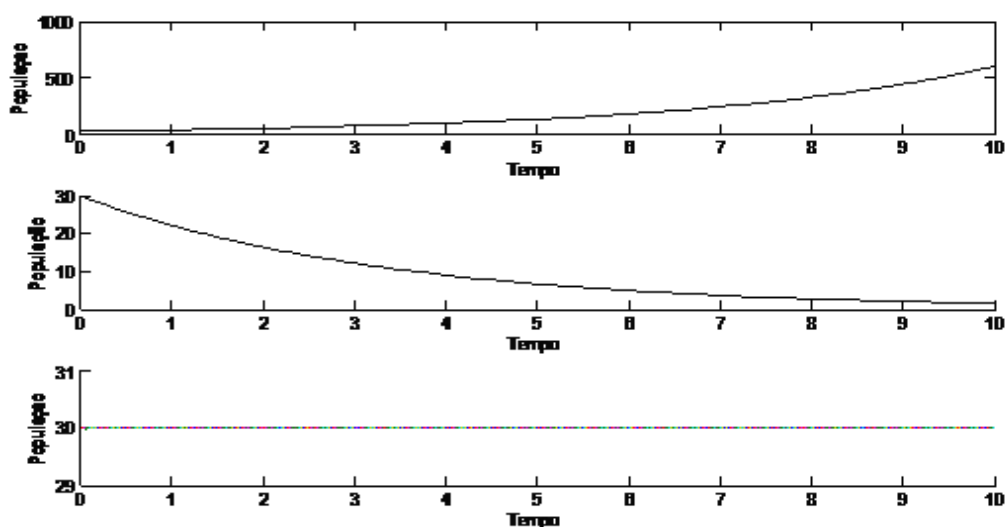


Figura 2.1: Gráfico da solução para a equação (2.1) com diferentes valores para  $a$   
Fonte: Elaborado pelo autor

### 2.2.1.2 Modelo de Verhulst

O modelo de crescimento de Verhulst, proposto em 1838 utiliza EDO's para descrever a dinâmica populacional. Este modelo se diferencia pelo citado anteriormente por considerar a capacidade de suporte do ambiente. Ou seja, a população crescerá até um determinado ponto, pois o esgotamento dos recursos disponíveis imporá limites à expansão.

Esse modelo é representado matematicamente pela seguinte equação .

$$\frac{dx}{dt} = rx \left( 1 - \frac{x}{k} \right), \quad x(0) = P_0. \quad (2.4)$$

- $\frac{dx(t)}{dt}$  representa a variação da população com o passar do tempo;
- $x(t)$  é a função que estabelece o tamanho da população num determinado instante;
- $x(0) = P_0$  é uma condição inicial;
- $r$  representa taxa de crescimento em relação da variação da população no decorrer do tempo;
- $k$  representa a capacidade de suporte do ambiente; que influencia no crescimento populacional, pois o esgotamento dos recursos disponíveis imporá limites à expansão.

A solução analítica da equação diferencial a cima é obtida através da integração após a separação das variáveis



$$x(t) = \frac{kP_0}{(k - P_0)e^{-rt} + P_0}. \quad (2.5)$$

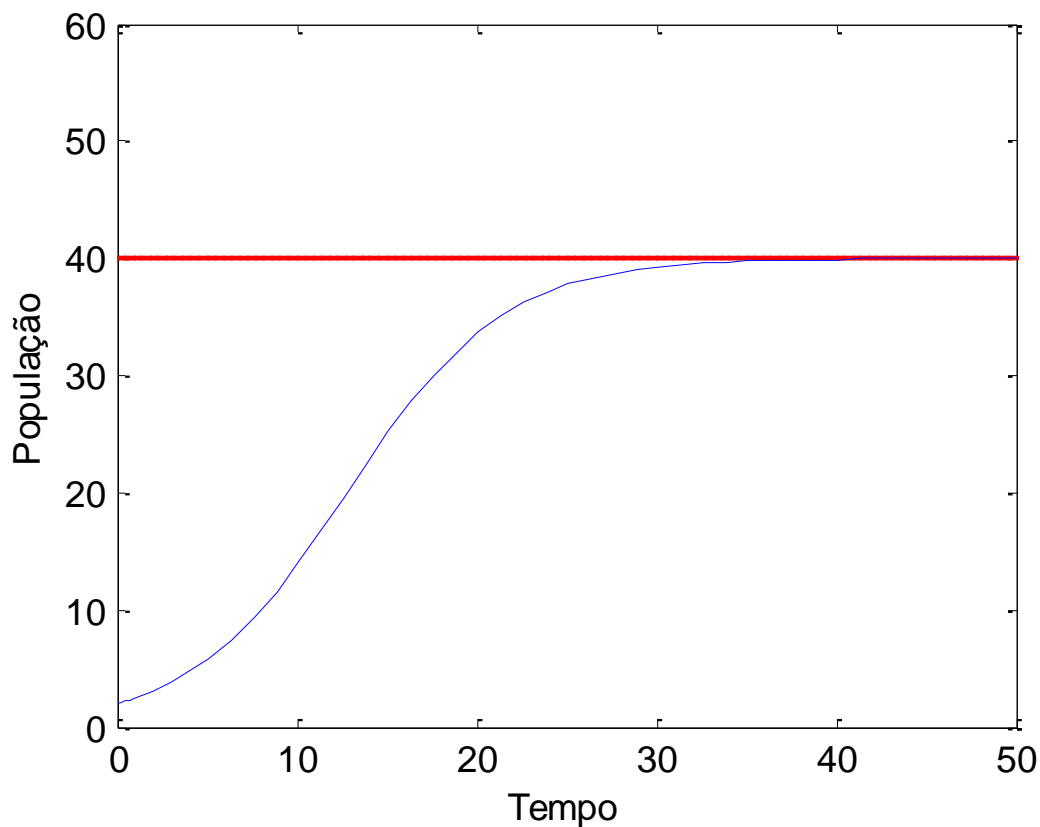


Figura 2.2: Gráfico da solução para a equação (2.4) com capacidade de suporte 40  
 Fonte: Elaborado pelo autor

### 2.3 Sistema de EDO's

Até o momento, enfatizamos os conceitos de EDO de forma isolada, a fim de melhor compreensão de conceitos. Na prática, quando trabalhamos com modelagem, dificilmente o modelo em questão envolve apenas uma EDO.

Na maioria dos casos, nos deparamos com um conjunto de equações diferenciais, ou seja, com um sistema de EDO's, com uma equação para cada variável cujo comportamento tem a intenção de descrever.

Um modelo bem conhecido é o de Lutka-Voltera, onde apresenta a competição de duas espécies por recursos vitais, dado pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - by(t) \\ \frac{dy}{dt} = cy(t) - dy(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

Esse foi o primeiro modelo que apresenta a competição de duas espécies. Ele foi descrito por Lutka e Voltera . Um fato que chama atenção é que esse modelo foi criado isoladamente por esses dois pesquisadores. Esse modelo considera que a presa é a única fonte de alimento do predador, ou seja, na ausência de presas o predador é extinto. Nesse contexto, a análise da estabilidade do sistema é muito importante, pois é através dos pontos de equilíbrio do sistema em questão que se deve estar embasado para tomar atitudes com intuito de controle.

Os valores  $a, b, c, d$  regulam a variação dessas duas espécies representadas por  $x$  e  $y$ .

### 2.3.1 Estabilidade de sistemas

Uma abordagem geométrica de um sistema linear pode revelar informações interessantes a respeito da solução de EDO's. Essa abordagem se dá pela análise do esboço do plano de fase. Outro item indispensável é a análise da estabilidade.

Primeiramente se faz necessário refletir a cerca da palavra estabilidade. Como já comentado anteriormente, muitos modelos matemáticos recaem em sistemas de EDO's. E estes na maioria das vezes, só podem ser resolvidos numericamente. Mas essa solução é limitada, pois vale apenas para uma situação particular. As vezes, é interessante saber para que tipo de condições iniciais temos determinado comportamento.

Ou seja, o estudo qualitativo do comportamento das soluções da equação ou sistema em questão é mais interessante. Saber se um sistema é ou não estável é uma informação valiosa no estudo qualitativo.

A seguir serão apresentadas algumas de definições a cerca da estabilidade de sistemas lineares.

Considere  $y' = F(y)$  onde  $F \equiv (f_1, \dots, f_n) : R^n$ . Chama-se uma solução constante ao vetor  $y_1(t) = y_1^*, \dots, y_n(t) = y_n^*$  do sistema, de ponto de equilíbrio, ou solução estacionária, ou ponto remanescente.

Assim, um ponto de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais é obtido quando todas as derivadas são nulas ou seja, quando os movimentos do sistema cessam.

$$\begin{cases} f_1(y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Então, para determinar os pontos de equilíbrio de um S.E.D. basta resolver o sistema de equações  $f(y) = 0$ .

Cada ponto que satisfaz essas condições será um ponto de equilíbrio do sistema de E.D.

**Definição 2.6:** Considere que  $y^*$  é um ponto de equilíbrio de  $y' = F(y)$ . Isso é  $F(y^*) = 0$ . Dizemos que  $y^*$  é um equilíbrio assintoticamente estável (E.A.E.) se toda solução  $y(t)$  que começa “próxima” a  $y^*$  converge para  $y^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Definição 2.7:** O ponto de equilíbrio  $y^*$  é classificado como equilíbrio assintótico globalmente estável se toda solução de  $y' = F(y)$  tende para  $y^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Definição 2.8:** Um ponto  $y^*$  que não é assintoticamente estável e que toda solução que começa próxima a  $y^*$  permanece próxima de  $y^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ , chama-se um ponto de equilíbrio de estabilidade neutra

**Definição 2.9:** Um ponto de equilíbrio  $y^*$  de  $y' = F(y)$  que é assintoticamente estável ou de estabilidade neutra é dito estável.

**Definição 2.10:** Um ponto de equilíbrio  $y^*$  é instável quando não é estável.

O estudo qualitativo de sistemas de EDO's pode ser feito através da análise dos autovalores da matriz associada ao sistema. Faremos uma abordagem considerando sistema de ED dois por dois. Para tanto considere:

$$\frac{dx}{dt} = Ax . \quad (2.8)$$

onde  $A$  é uma matriz constante  $2 \times 2$  e  $x$  é um vetor  $2 \times 1$ .

Para construir a solução geral do sistema, procuramos uma solução da forma:

$$x = ve^{rt} . \quad (2.9)$$

onde  $r$  e o vetor  $v$  devem ser determinados. Substituindo na equação 2.8 temos:

$$(A - rI)v = 0 \quad (2.10)$$

Com base na equação, para resolver o sistema de equações (2.8) basta resolver o sistema de equações algébricas, ou seja, determinar os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes de  $A$ . Nosso objetivo principal é caracterizar a equação diferencial de acordo com o padrão geométrico apresentado por suas trajetórias.

A análise qualitativa pode ser determinada através dos autovalores da matriz  $A$ . Os autovalores podem ser divididos em 3 casos, como segue:

#### Caso 1: Autovalores reais e distintos

- Se ambos forem negativos o ponto crítico é dito nó atrator e é um ponto assintoticamente estável;
- Se ambos forem positivos o ponto crítico é dito nó ou fonte e é instável;
- Se um for positivo e outro negativo então o ponto é dito ponto de sela e é instável;

#### Caso 2: Autovalores reais e iguais

- Se for positivo será um nó próprio ou impróprio e o ponto crítico é instável;
- Se for negativo será um nó próprio ou impróprio e o ponto crítico é assintoticamente estável;

### Caso 3: Autovalores complexos

- Se a parte real for positiva, então o ponto crítico é um ponto espiral, e é instável;
- Se a parte real for negativa, então o ponto crítico é um ponto espiral, porém o mesmo é assintoticamente estável;
- Se os autovalores forem imaginários puros, o ponto crítico é chamado de centro e é estável;

Para melhor compreensão exemplificaremos. Para cada um dos sistemas lineares abaixo analisaremos a estabilidade e apresentaremos o plano de fase. Considere o sistema:

$$\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = x - y \end{cases} \quad (2.11)$$

Podemos escrever o sistema de acordo com a equação 2.8, o que equivale á:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Para determinar os autovalores trabalhamos com a matriz  $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

$$\det \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.13)$$

Ou seja, a equação característica é:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0. \quad (2.14)$$

As raízes para a equação são:

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{2}i \quad (2.15)$$

Assim, pode-se concluir que o ponto fixo da origem é um espiral assintoticamente estável. A figura 2.3 comprova tal afirmação.

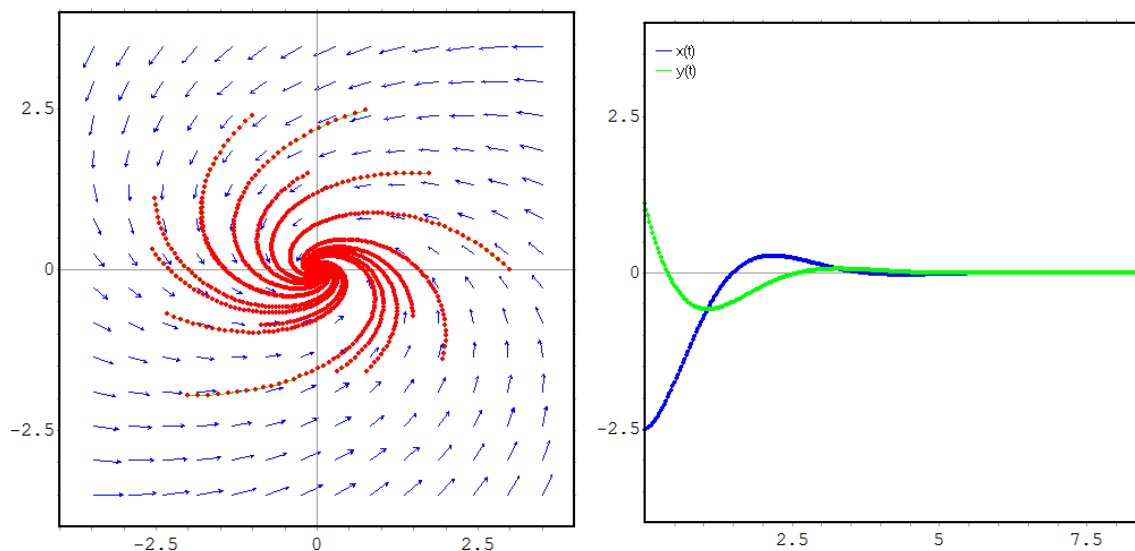


Figura 2.3: Plano de fase e comportamento para equação (2.11)  
Fonte: Elaborado pelo autor

Outro sistema a ser considerado para exemplificar o estudo qualitativo segue:

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x - y. \end{cases} \quad (1.16)$$

Reescrevendo o sistema de acordo com a equação 2.8, temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Para determinar os autovalores trabalhamos com a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.18)$$

As raízes para a equação característica obtida a partir da equação (2.18) são:

$$\lambda = \pm i. \quad (2.19)$$

Assim, pode-se concluir que o ponto fixo da origem é um centro, cuja estabilidade é estável, como mostra a figura.

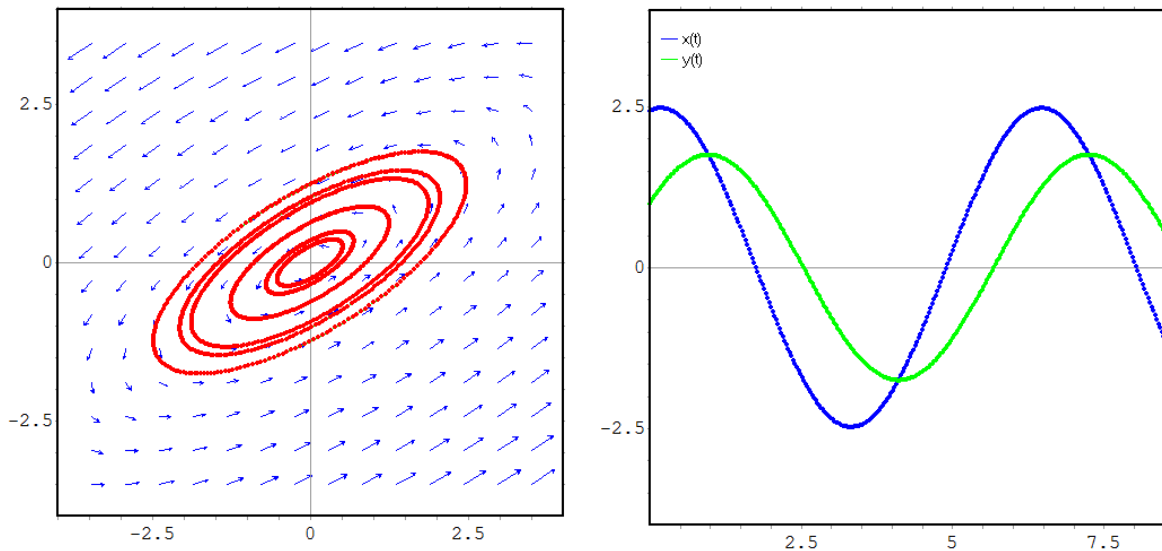


Figura 2.4: Plano de fase e comportamento para equação (2.16)  
Fonte: Elaborado pelo autor

O último exemplo apresentado será um sistema onde o ponto de origem é instável. Para tanto considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases} \quad (1.20)$$

Reescrevendo o sistema de acordo com a equação 2.8, temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Para determinar os autovalores trabalhamos com a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.22)$$

As raízes para a equação característica obtida a partir da equação (2.18) são:

$$\lambda = 1 \pm i. \quad (2.23)$$

Com base nos autovalores, podemos concluir que o ponto crítico é um ponto de espiral e é instável.

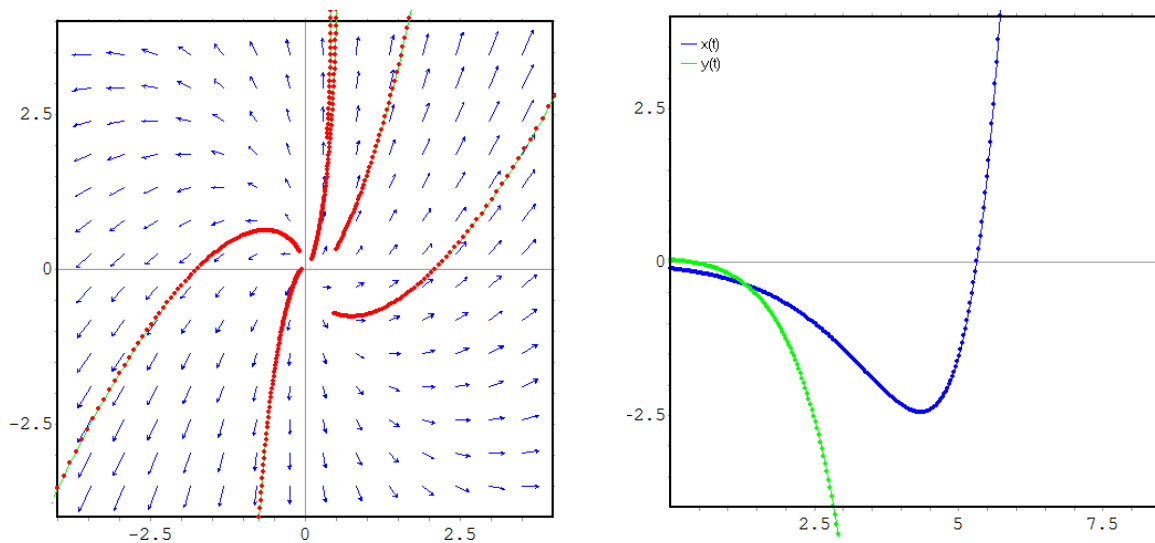


Figura 2.5: Plano de fase e comportamento para equação 2.20  
Fonte: Elaborado pelo autor

### 2.3.1 Sistemas não lineares

Fazer o estudo qualitativo de um sistema não linear procede-se de maneira semelhante a um sistema linear, com a diferença que primeiro precisamos linearizar o sistema em questão.

Considere as funções:

$$f(x, y) = f(u, v) + (x - u) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(u,v)} + (y - v) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(u,v)} + \dots$$

$$g(x, y) = g(u, v) + (x - u) \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(u,v)} + (y - v) \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(u,v)} + \dots$$

Se  $(u, v)$ , for um ponto fixo do sistema,  $f(u, v)$  e  $g(u, v)$  serão nulas. Ou seja, mudando a origem de coordenadas para o ponto fixo  $(u, v)$ , numa vizinhança da origem, o sistema não linear pode ser aproximado pelo sistema linear:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{(u,v)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$



Essa matriz, obtida a partir das derivadas das funções denomina-se de Matriz Jacobiana. A fim de exemplificar considere o sistema em questão:

$$\begin{cases} x' = 6 - x^2 - 4y^2 \\ y' = -x^2 + y^2 + 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

A Matriz Jacobiana associado a (2.25) é:

$$J = \begin{bmatrix} -2x & -8y \\ -2x & 2y \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Precisamos descobrir os pontos críticos de 2.25. Para tanto, basta resolver:

$$\begin{cases} 6 - x^2 - 4y^2 = 0 \\ -x^2 + y^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Os valores que satisfazem a equação (2.27) são:

$$(\sqrt{2}, 1), (-\sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, -1), (-\sqrt{2}, -1). \quad (2.28)$$

Aplicando cada um dos pontos encontrados em 2.28 na Matriz Jacobiana apresentada em (2.26) temos 4 novos sistemas lineares para serem analisados. Para tanto realiza-se o que foi feito nos sistemas lineares. Faremos a análise para o ponto  $(\sqrt{2}, -1)$ . Assim temos:

$$\det \begin{vmatrix} -2\sqrt{2} - \lambda & 8 \\ -2\sqrt{2} & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.29)$$

Calculando o determinante e as raízes da equação característica chegamos a conclusão que os autovalores são complexos com parte real negativa, ou seja, o ponto  $(\sqrt{2}, -1)$  é um ponto espiral, assintoticamente

estável. O mesmo procedimento deve ser feito para a análise dos demais pontos críticos.

O plano de fases a seguir apresentado a seguir nos permite verificar a estabilidade assintótica do ponto  $(\sqrt{2}, -1)$ .

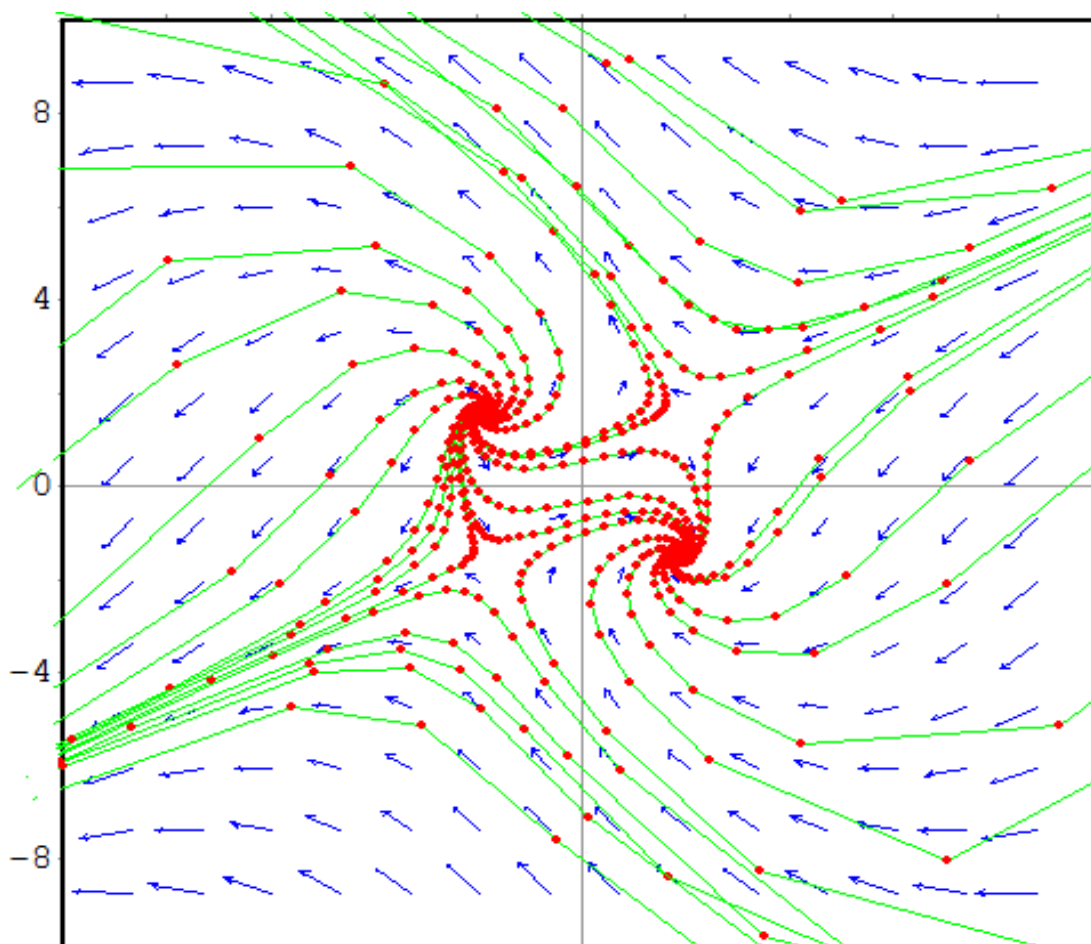


Figura 2.5: Plano de fase para equação (2.25)  
Fonte: Elaborado pelo autor

## 2.4 EPIDEMIOLOGIA

O significado etimológica da palavra epidemiologia pode ser traduzido como ciência do que ocorre sobre o povo (*epi* = sobre; *demos* = povo; *logos* = palavra). Mas podemos definir Epidemia como a alteração de uma ou mais características em um número significativo de indivíduos de uma população. Segundo Anderson e May (1992), elas são uma das maiores fontes de mortalidade e constituem-se potentes forças seletivas. Ainda, segundo esse

mesmo autor, o número de mortes provocado pelas maiores epidemias de todos os tempos é impreciso, mas é incomparavelmente maior que o número de mortes provocadas por todas as guerras.

#### **2.4.1 Breve histórico da epidemiologia**

Os principais objetivos da epidemiologia referem-se a descrição e análise dos problemas de saúde nas populações, proporcionar planejamentos, execução e avaliação de prevenções. A transmissão de doenças infecciosas ocorre basicamente de duas formas: transmissão horizontal e transmissão vertical. A primeira acontece com a passagem da infecção de um indivíduo hospedeiro para outro. Enquanto que a vertical refere-se a transferência direta de uma doença para seu prole antes do nascimento ou logo após o nascimento.

Segundo Corso et Al., 2002 a modelagem matemática de doenças infecciosas esteve baseada na modelagem de sistemas ecológicos, principalmente nos modelos que procuram captar a dinâmica da interação entre duas ou mais espécies competitivas.

Yang salienta que os modelos matemáticos aplicados à saúde pública têm duplo objetivo: descritivo e preditivo. A princípio, um modelo matemático deve explicar a situação vigente de uma epidemia em uma comunidade. Se um modelo não descrever as observações epidemiológicas, então deve-se proceder a uma reformulação de idéias quanto à transmissão da doença. Quando o modelo passar por esse primeiro teste, ele pode ser usado para prever as possíveis mudanças resultantes de alterações nas condições bióticas ou abióticas. Quando possível, deve ser feita uma nova validação do modelo. Um modelo é considerado robusto se explicar, também, essas mudanças satisfatoriamente.

Segundo Nepomuceno (2005), o interesse em compreender como as doenças proliferam-se data de tempos ancestrais. Mas, o estudo matemático sobre epidemiologia com o intuito de prever o comportamento de uma epidemia e, antecipadamente, adotar uma política de prevenção para que ela não tome

proporções que fujam do controle começou a ser realizado partir do século XVIII.

A história da humanidade ficou marcada inúmeras vezes por desastres relacionados a doenças epidemiológicas. Muitas delas foram capazes dizimar grande parte da população de uma determinada região. Dentre elas podemos destacar a peste negra teve três grandes manifestações na história: entre 1347 e 1350 matou quase que um quarto de toda a população da Europa. Já por volta de 1665, mais de 68 mil pessoas morreram de peste bubônica em Londres. Em 1520, os Astecas perderam três quartos de sua população devido à varíola.

Muitas outras epidemias deixaram marcada a história da humanidade. Desde a década de 80, o vírus HIV passou a ter um significativo impacto nos índices de mortalidade em todo o mundo. Mais recentemente a população mundial ficou em alerta com a gripe suína.

O estudo de epidemias utilizando modelos matemáticos tem-se mostrado uma ferramenta importante para que se possa entender e prever o comportamento de uma epidemia e, adotar uma política de prevenção para que ela não se alastre causando um grande número de mortes em uma população

#### **2.4.2 A matemática na epidemiologia**

Os modelos matemáticos procuram fornecer informações sobre dois parâmetros epidemiológicos relevantes: a força de infecção e a razão de reprodutibilidade basal.

Nesse sentido a modelagem matemática é uma ferramenta valiosa, devido a sua capacidade de organizar informações disponíveis e fazer previsões ao seu respeito.

Segundo Bassanezi (2002), a tentativa de representar a dinâmica de uma determinada população tem motivado pesquisadores a desenvolver modelos matemáticos nessa direção. Fato que pode ser constatado a partir do número de artigos publicados nessa área.

No American Journal of Epidemiology, dos 909 artigos publicados (1981-1985), 24% eram sobre as doenças infecciosas dos quais, 11.4% com modelos matemáticos, simplesmente o dobro dos artigos dos 5 anos anteriores. O mesmo se deu, no mesmo período, com os artigos do International Journal of Epidemiology que passou de 14.6% para 27.3%. (BASSANEZI, 2002, pg. 162).

Segundo Domingos (2006), a modelagem surge como resultado da investigação científica em qualquer campo e é importante no mundo biológico. Um fato que é evidente à primeira vista é que o estudo formal da maioria dos sistemas biológicos não se pode fazer diretamente. Para ter acesso a um estudo teórico de um sistema real necessita-se de um processo gradual de abstração, quer dizer, é preciso abstrair do sistema natural as características mais importantes, à luz do objetivo que se deseja alcançar, e ir efetuando sua formulação conceitual para poder realizar o estudo do meio estritamente.

A aplicação da matemática no estudo das doenças transmissíveis de acordo com Andersons e May, ocorreu por volta de 1760 por Daniel Bernouli, dando ênfase a estatística. Segundo Filho (1986), a tendência à matematização da Epidemiologia recebe um reforço considerável na década de 70. Modelos matemáticos de distribuição de inúmeras doenças são então propostos: O campo da Epidemiologia encontra, assim, identidade provisória, justificando a consolidação da sua autonomia enquanto disciplina. Impõe-se na pesquisa sobre a saúde/doença com o recurso à Matemática. Para a Epidemiologia, a Matemática serve ideologicamente como um poderoso mito de razão, indispensável para o confronto com a "experiência clínica" ou a "demonstração experimental" enquanto supostos fundamentos da pesquisa médica.

Yang (2002) afirma que “modelos matemáticos têm auxiliado os sanitaristas na escolha do melhor mecanismo de controle de doenças infecciosas por meio de vacinações.”

Domingues (2006) saliente que modelos para estudar epidemias são importantes, pois através deles podemos testar o impacto causado pelos parâmetros inerentes àquele tipo de epidemia. Mas alerta que não existe uma solução única para modelar a dinâmica de uma epidemia. A solução ideal para cada caso deve ser buscada tentando responder o porquê, onde e quando do fenômeno epidêmico, definido descreve a epidemia e prevê sua evolução.

A modelagem de epidemias busca dar um embasamento teórico para resposta a questões como:

- Como melhorar o controle de transmissão de doenças?
- A vacinação é eficiente para o controle da epidemia?
- Em caso de uma epidemia, na busca do controle, é melhor usar a vacinação ou a retirada dos indivíduos transmissores da doença?
- Qual é a melhor estratégia a ser utilizada para proteger os indivíduos vulneráveis a epidemia?
- Que porcentagem da população precisa ser vacinada para controlar a epidemia?

No Brasil, vários estudos realizados tentam descrever a dinâmica de epidemias, dentre os quais podemos destacar, leptospirose, dengue, etc...

Os modelos epidemiológicos, representados por sentenças matemáticas podem ser classificados basicamente em:

- Linear ou não linear, como o nome já diz, as equações que representam esse modelo são lineares ou não;
- Estático ou dinâmico: leva em consideração ou não, a evolução temporal do sistema;
- Estocástico ou determinístico: uso ou não de fatores aleatórios nas equações;
- Discretos ou contínuos: dependendo do tipo de equações utilizadas no modelo;

Antes de entrarmos na discussão de modelos propriamente ditos, se faz necessário definir alguns termos chaves dentro da epidemiologia.

#### **2.4.2 Conceitos básicos na epidemiologia**

Para desenvolver um modelo matemático em epidemiologia, se faz necessário conhecer a biologia da propagação de epidemias para, a partir desses conceitos, selecionar aspectos essenciais da dinâmica da transmissão da doença.

O contágio epidêmico segue basicamente a lei geral de ação das massas. Ou seja, a infecção se propaga mais rapidamente quanto maior for a concentração de indivíduos susceptíveis expostos ao agente infeccioso. Esta taxa de infecção pode ser descrita como a taxa básica de reprodução do patógeno,  $R_0$ , definida como o número de infecções secundárias produzidas por cada indivíduo infectado dentro de uma categoria particular de risco, logo que uma epidemia tem início. Assim temos que:

$$R_0 = \beta cd$$

Onde:

$\beta$  é a probabilidade média de sucesso de infecção de um contactante;

$c$  o número médio de susceptíveis expostos a um indivíduo infectado;

$d$  período médio da fase contagiosa.

Com base em estudos na equação acima podemos concluir que:

- Se  $R_0 > 1$  o número de infectados crescerá gerando uma epidemia;
- Se  $R_0 < 1$ , a epidemia não se auto-sustenta e tende a desaparecer;
- Se  $R_0 = 1$ , a doença persiste endemicamente, porém de forma instável, na população, podendo causar epidemias, persistir ou se extinguir.

Outro fator resultado importante que se destaca dentro de epidemiologia é o teorema do Limiar proposto por Kermack e McKendrick, que nos diz que deve existir um número crítico de susceptíveis em uma população para que uma epidemia possa ocorrer. Ou seja, se uma quantidade de indivíduos infectados for introduzida em uma população, só teremos uma epidemia se o número de susceptíveis for maior que o valor crítico. Caso contrário, não teremos a ocorrência de uma epidemia. Isso justifica o porquê da não vacinação de 100% da população durante surtos de epidemias. Dependendo da situação é possível controlar uma determinada epidemia vacinando, por exemplo, 70% da população.

Em uma epidemia, a fração de susceptíveis, com o passar do tempo, torna-se pequena, até a transmissão cair a zero, quando então acaba a epidemia. Outro fator a ser ressaltado é que as epidemias não retornam rapidamente porque a imunidade de grupo é mantida elevada na população

após o ataque, até que surjam susceptíveis suficientes para uma nova onda de contágio viral.

A análise biológica e a síntese matemática permitem desenvolver modelos com o intuito de ressaltar os efeitos de um fator biológico envolvido na transmissão de epidemias, e oferecer meios de comparação entre dois fatores atuantes na dinâmica.

Dessa forma, um modelo matemático preocupa-se em fazer uma caricatura da realidade, com o intuito de extrair algumas informações úteis para o controle epidêmico, bem como definir a quantidade necessária da população que deve ser vacinada.

A seguir serão apresentadas algumas definições de conceitos referentes ao tema:

*Endemia*: presença constante de uma doença em um conjunto de pessoas de determinada região.

*Epidemia*: ocorrência de uma doença, caracterizada por um aumento inesperado e descontrolada, ultrapassando os valores endêmicos. Quando uma epidemia ocorre em vários países ao mesmo tempo recebe o nome pandemias. Um exemplo de pandemia é a AIDS.

*Interepidêmico*: período entre duas epidemias.

*Equilíbrio*: uma população está em equilíbrio estático quando nada está acontecendo (não há nascimentos e nem mortes), ou em um equilíbrio dinâmico quando os diferentes processos estão balanceados (nascimentos e mortes, p. ex., se equivalem). Regra geral, o estado para o qual um sistema evolui e nele se estabiliza pode ser chamado de equilíbrio.

*Transmissão horizontal*: Transmissão ocorrendo dentro de uma população entre seus indivíduos, mas que não inclui transmissão vertical.

*Transmissão vertical*: Transmissão vertical ocorre quando um genitor passa a infecção para seu feto, como ocorre na sífilis humana e entre artrópodes que transmite transovarianamente arbovírus. A infecção perinatal é uma forma especial de transmissão vertical.

### **2.4. 3 Modelos compartimentais**



Um tipo de modelo muito utilizado para estudar a dinâmica de uma epidemia é o compartimental, onde a população é dividida, de acordo com o grupo a que pertencem (compartimentos) em relação a uma determinada doença.

Os sistemas de compartimento consistem em um número finito de subsistemas interligados, podendo ocorrer trocas entre si. Dentro da abordagem compartimental o modelo SIR é um dos mais comuns na literatura, já que com ele é possível introduzir os principais conceitos do processo epidêmico de maneira simples.

Apresentaremos a seguir alguns tipos de modelos compartimentais encontrados na literatura.

Segundo Bassanezi, o estudo de epidemiologias ocorreu lentamente até o século XIX, pois acreditava-se que as enfermidades eram pragas de Deus e cabia ao homem aceitá-las. Só mais tarde é que foi dada a atenção merecida.

A seguir serão apresentados alguns modelos epidemiológicos encontrados na bibliografia. Primeiramente considerando que uma epidemia ocorre em um sistema fechado onde existe o contato entre indivíduos sadios e infectados e que a população é dividida em classes distintas, sendo elas:

$S = S(t)$ : pessoas sadias mas suscetíveis a doença, que podem vir a ser infectadas quando entrarem em contato com pessoas doentes;

$I = I(t)$ : indivíduos portadores da doença, os quais são o foco de transmissão da doença.

$R = R(t)$ : indivíduos que já contraíram a doença e se recuperaram, ou morreram ou então estão isolados.

No estudo de modelos compartimentais, consideramos que cada compartimento é composto por indivíduos homogêneos; cada indivíduo tem a mesma probabilidade de encontrar com um indivíduo suscetível; não ocorre nascimento e que a morte de indivíduos só ocorre pela doença contagiosa.

Nesse estudo (compartimental) é um sistema fechado, ou seja, a população em questão permanece constante com o passar do tempo. Isso pode ser descrito pela seguinte equação  $N = S(t) + I(t) + R(t)$ , onde  $N$  representa a quantidade da população.

A seguir apresentaremos alguns esquemas que podem ser utilizados na modelagem epidemiológica com base em sistemas compartimentais.

Modelo SI: Como sugere as iniciais na sigla esse modelo leva em conta o fato que após indivíduo ser infectado jamais se recuperará da doença, um exemplo bem concreto que podemos tomar como exemplo é o do vírus HIV.

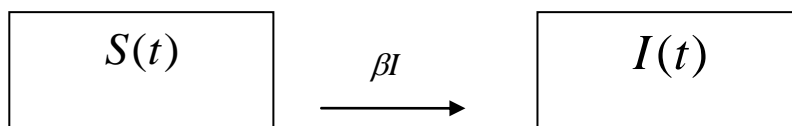


Figura 2.6: Representação do modelo SI  
Fonte: Elaborado pelo autor

Modelo SIS: O modelo Suscetível - Infectado - Suscetível, é utilizado em casos em que a doença não fornece imunidade, assim o indivíduo pode passar de infectado para suscetível novamente. Os modelos SIS são apropriados para doenças como meningite e muitas doenças venéreas.

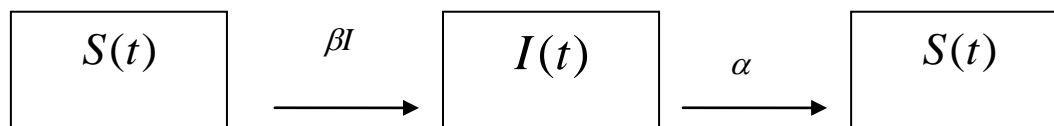


Figura 2.7: Representação do modelo SIS  
Fonte: Elaborado pelo autor

Modelo SIR: No modelo Suscetível-Infectado-Recuperado, os indivíduos infectados podem se recuperar e adquirir imunidade permanente. Doenças, como rubéola, varicela e sarampo são exemplos de doenças que são modeladas pelo modelo SIR.

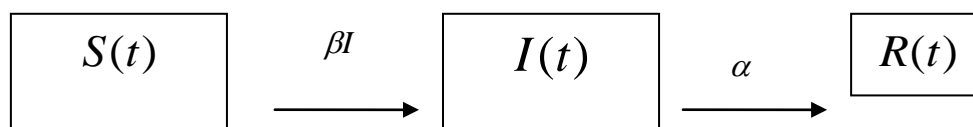


Figura 2.7: Representação do modelo SIR  
Fonte: Elaborado pelo autor

Modelo SIRS: Esse modelo pode ser aplicável a casos em que a imunidade adquirida pelo indivíduo ao recuperar-se não é permanente, assim o

indivíduo volta a ser suscetível depois de um determinado tempo. O vírus da gripe é um exemplo que pode ser modelado pelo SIRS.

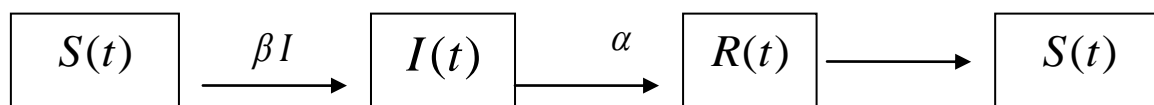


Figura 2.8: Representação do modelo SIRS  
Fonte: Elaborado pelo autor

Cabe salientar que muitos outros modelos epidemiológicos existem tentando descrever os acontecimentos ocorridos durante um surto epidemiológico.

Muitas adaptações dos modelos acima são utilizadas usando as especificidades de cada doença em questão, incorporaram termos que levam em conta as políticas de prevenção e a transmissão da doença.

#### 2.4.4 Controle de epidemia

Muito mais importante do que descrever o processo de propagação da epidemia é saber como controlá-la. É fato que sabendo como acontece a interação de indivíduos suscetíveis e indivíduos contaminados mais fácil e eficazes se tornam as medidas de controle.

É importante destacar a diferença entre erradicação e controle. Erradicação de uma infecção requer que está esteja totalmente ausente na população. Controle por sua vez, considera que uma infecção permanece presente, com uma baixa prevalência. O controle exige aplicação continuada de medidas preventivas. O controle também pode ter efeitos negativos imprevistos. Por exemplo, a utilização de vacina contra rubéola na infância pode aumentar a idade comum à qual a infecção é contraída. Como a infecção causa complicações sérias durante gravidez, uma política de vacinação imprópria pode ter um efeito indesejável em mulheres.

Também é importante salientar que medidas de prevenção devem levar em consideração custo benefício. Saber o momento mais indicado para, por exemplo, aplicar a vacinação e qual grupo populacional deve ser vacinado

para que esta seja eficiente a fim de que uma endemia não venha a se tornar uma epidemia.

## Capítulo III

### 3. MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS

Neste capítulo daremos ênfase para alguns modelos matemáticos que descrevem o comportamento de epidemiologias. O estudo matemático dos efeitos das epidemias começou a ser realizado a partir do século XVIII, devido às grandes catástrofes ocorridas na história da humanidade.

Segundo Alonso (2004) o efeito desastroso de doenças infecciosas do que a *peste negra* que causou terror em toda a Europa durante os anos de 1347-1350, matando um quarto de toda a população. Já em 1665 cerca de 70 mil pessoas morreram de peste bubônica em Londres, deixando a população dessa cidade aterrorizada. Doenças infecciosas endêmicas na Europa, tais como sarampo, varíola, gripe e peste bubônica, foram transmitidas por estrangeiros e foram responsáveis pela exterminação de grupos étnicos, os quais não entraram em contato com a doença e desse modo não desenvolveram imunidade.

Como já ressaltamos anteriormente, o uso da modelagem matemática para análise de tal comportamento é de extrema importância para que se possam tomar medidas preventivas e também para que se busquem estratégias eficientes de controle, levando em consideração custo benefício

A seguir serão apresentados alguns modelos matemáticos aplicados a epidemiologia.

### 3.1 Modelo Matemático I

Em 1760, Daniel Bernoulli, propôs e analisou um modelo matemático, com o intuito de estudar a disseminação de doenças contagiosas. O mesmo fez estudos sobre a varíola.

Suponha que uma população seja formada por  $y$  indivíduos que têm a doença e  $x$  indivíduos que não possuem, mas que são suscetíveis a mesma.

Assim podemos afirmar que  $x + y = 1$ , ou seja, a soma das duas classes representa 100% da população.

Suponhamos agora que a proliferação da doença aconteça pelo contato entre os indivíduos doentes e os não doentes, onde o número de contatos é proporcional ao produto de  $x$  por  $y$ . Desta forma a variação do número de infectados com o passar do tempo poderá ser representado por:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha xy. \quad (3.1)$$

Usando o fato que  $x+y=1$ , ou seja,  $x=1-y$  temos:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y(1-y), \quad y(0) = y_0. \quad (3.2)$$

Com base na equação 3.2 podemos encontrar os pontos críticos, ou seja, quando  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Assim temos que  $y = 0$  e  $y = 1$  são os pontos de equilíbrio do modelo em questão.

Para resolver a EDO (3.2) separamos as variáveis e integramos

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \alpha dt. \quad (3.3)$$

Usando o método das frações parciais chegamos a:

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{1-y} = \int \alpha dt. \quad (3.4)$$

Assim temos que  $\ln |y| - \ln |1-y| = \alpha t + c$ .

Aplicando a condição inicial do modelo e reescrevendo chegamos à:

$$y = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-\alpha t}} \quad (3.5)$$

Com base na solução encontrada podemos constatar que quando  $t \rightarrow \infty$   $y(t) \rightarrow 1$ .

Assim o ponto  $y = 1$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, ou seja, com o passar do tempo a doença se espalhará por toda a população, independente do tamanho inicial da população infectada.

Já o ponto  $y = 0$  é um ponto de equilíbrio instável. Mesmo soluções que comecem bem próximas de zero tendem a 1.

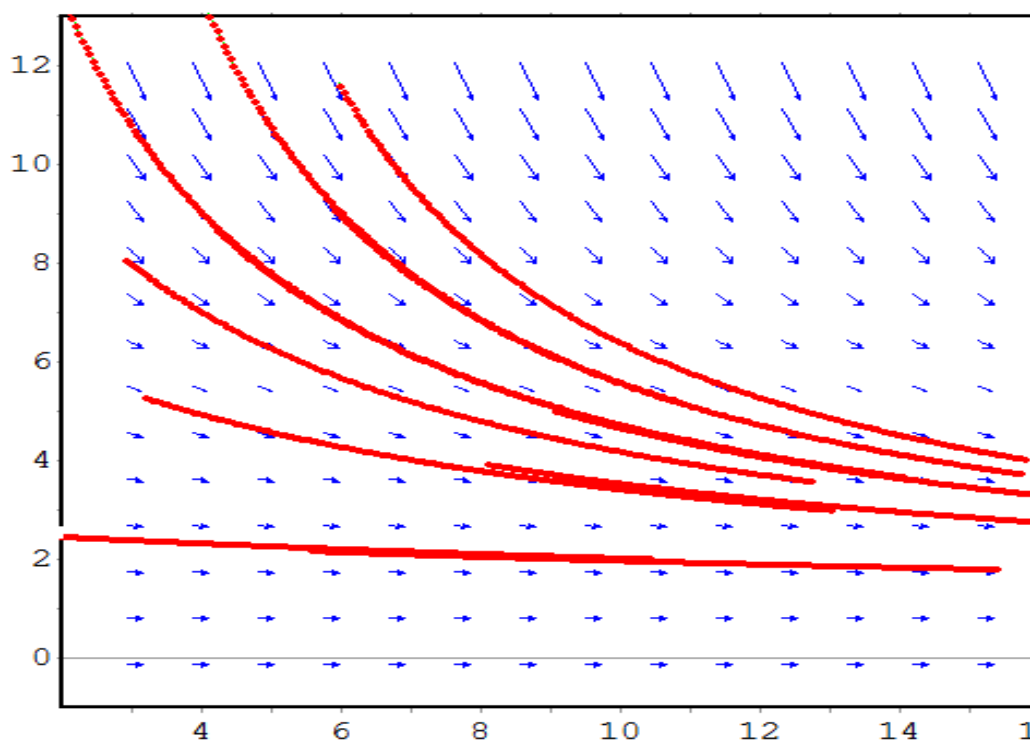


Figura 3.1: Campo de direções para equação (3.2) para  $\alpha = 0,02$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com base no campo de direções podemos esboçar a linha de fase para comprovar que o ponto 1 é estável e o ponto 0 é instável.

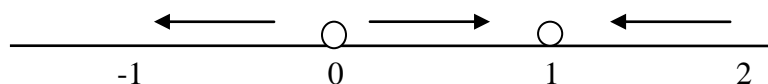


Figura 3.2: Linha de fase para equação (3.2) para  $\alpha = 0,02$

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.2 Modelo Matemático II

Algumas doenças são disseminadas por portadores, indivíduos que mesmo possuindo a doença não apresentam quaisquer sintomas. O tifo é um exemplo disso.

Consideremos por  $x$  a proporção da população que é suscetível a doença e  $y$  a proporção da população que é portadora da doença. Considere ainda que os indivíduos que são identificados como portadores são retirados do convívio da população.

Assim temos que a variação do número de portadores da doença em relação ao tempo pode ser determinada por:

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y \quad . \quad (3.6)$$

Por outro lado podemos considerar que a variação do número de suscetíveis é proporcional ao encontro dos indivíduos suscetíveis a doença e os portadores da mesma.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x y \quad . \quad (3.7)$$

Resolvendo a equação (3.6) temos:



$$\int \frac{dy}{y} = \int -\beta dt . \quad (3.8)$$

Ou seja, o número de portadores da doença no instante  $t$ , considerando  $y(0) = y_0$  pode ser determinado por:

$$y = y_0 e^{-\beta t} . \quad (3.9)$$

Substituindo a equação 3.9 na equação 3.7 temos:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x y_0 e^{-\beta t} . \quad (3.10)$$

Separando as variáveis temos:

$$\frac{dx}{x} = \alpha y_0 e^{-\beta t} dt . \quad (3.11)$$

Resolvendo a equação 3.11 sujeito à condição inicial  $x(0) = x_0$  chegamos à:

$$x = x_0 e^{\alpha y_0 (e^{-\beta t} - 1)} . \quad (3.12)$$

Com base na equação (3.12) podemos determinar a proporção da população que escapa à epidemia. Calculando o limite da função

$x = x_0 e^{\alpha y_0 (e^{-\beta t} - 1)}$  quando  $t \rightarrow \infty$  temos que  $x \rightarrow x_0 e^{-\alpha y_0}$ , ou seja, a proporção da população que não irá contrair a doença será  $x_0 e^{-\alpha y_0}$ .

### 3.3 Modelo Matemático III

Bernoulli analisou o uso da variação para tentar proteger a população de epidemias ocasionadas pela varíola.

A variação consistia em uma espécie de vacina natural, que era feito pelo contato de pessoas saudáveis com pessoas infectadas.

A técnica consiste em inocular em pessoas saudáveis, vírus da varíola, com o objetivo de deixar as pessoas imunes da doença. Porém pode-se observar que cerca de 1% das pessoas acabavam morrendo. Baseados nesse problema Daniel Bernoulli descreveu um modelo considerando um grupo de indivíduos nascidos no ano  $t = 0$  com as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -aS - mS \\ \frac{dN}{dt} = -\mu aS - mN \end{cases} \quad (3.13)$$

Onde

$S(t)$  representa a população suscetível no instante  $t$ ;

$N(t)$  representa a população total no mesmo instante  $t$ ;

$a$  representa taxa pela qual o indivíduo contrai a doença no instante  $t$ ;

$\mu$  é o coeficiente que representa a proporção de suscetíveis que morreram em decorrência da doença;

$m$  é o coeficiente que representa a proporção de pessoas que morreram cuja causa é decorrente de outro fator e não da varíola;

Seja  $x(t)$  a função que representa o número de indivíduos que não contraíram a doença até o ano  $t$ . Com o intuito de determinar a variação da proporção de suscetíveis podemos considerar  $x(t) = \frac{S(t)}{N(t)}$  a proporção de suscetíveis no instante  $t$  temos que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(-aS - mS)N - (-\mu aS - mN)S}{N^2}. \quad (3.14)$$

Simplificando os termos chegamos a conclusão que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-aSN - mSN + \mu aS^2 + mNS}{N^2} = \frac{-aSN + \mu aS^2}{N^2} = \frac{-aS}{N} \left( \frac{N}{N} - \frac{\mu S}{N} \right). \quad (3.15)$$

Ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = -ax(1 - \mu x). \quad (3.16)$$

Com base na equação (3.16) é possível perceber que a variação da proporção de suscetíveis no instante  $t$ , não depende do coeficiente  $m$ .

Para resolver a equação (3.16) usando o método das frações parciais e chegamos à:

$$\int \frac{-dx}{x} + \int \frac{\mu dy}{\mu x - 1} = \int a dt. \quad (3.17)$$

Assim temos que  $-\ln |y| + \ln |\mu x - 1| = at + c$ . Usando como condição inicial  $x(0) = 1$ , chegamos à:

$$x = \frac{1}{\mu + (\mu - 1)e^{at}}. \quad (3.18)$$

Para exemplificar tomemos  $\mu = a = \frac{1}{8}$ , então  $x = \frac{8}{1 - 7e^{\frac{1}{8}t}}$ .

Calculando  $x(20) \cong 0,092$ , ou seja, essa é a proporção de indivíduos com 20 anos que não contraíram a doença.

Com base neste modelo e com dados de mortalidade da época, Bernoulli, constatou que se as mortes ocasionadas pela varíola não ocorressem mais, a média de vida da população poderia aumentar em 3 anos.

Com isso pode-se constatar que o uso de vacinas seria de extrema importância para a expectativa de vida da população.

### 3.4 Modelo matemático IV

Apresentaremos o modelo epidemiológico não linear descrito por Kermack – Mckendric. Este é um modelo epidemiológico compartimental com base no modelo SIR.

Para tanto, serão considerados as seguintes condições:

- Não ocorre nascimento na comunidade;
- A morte de indivíduos é ocasionada apenas pela doença;
- A probabilidade de cada indivíduo suscetível se encontrar com um infeccioso é a mesma.
  - Todos os indivíduos suscetíveis têm a mesma chance de contrair a doença (indivíduos homogêneos);
  - A comunidade é fechada, a população total se mantém constante, ou seja,  $N = S(t) + I(t) + R(t)$ .

Com base nessas hipóteses é possível perceber que o número de suscetíveis com o passar do tempo tende a diminuir, já que o modelo não contempla a entrada de novos indivíduos.

Outro ponto a ser destacado é que a variação dos infectados no instante aumenta na mesma proporção que os indivíduos sadios diminuem menos as perderam os indivíduos recuperados ou mortos.

E finalmente, a variação dos indivíduos recuperados ou mortos é proporcional a quantidade de infectados.

Assim, com posse dessas informações podemos descrever um modelo matemático que descreva a situação:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I \end{cases} \quad S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R_0 = 0 \quad (3.19)$$

Onde

$S(t)$  representa a população suscetível no instante  $t$ ;

$I(t)$  representa a população de infectados no instante  $t$ ;

$R(t)$  representa os indivíduo imunes que já contraíram a doença e se recuperaram, ou então morreram pela doença.

Uma questão fundamental em qualquer situação epidemiológica é, dado o valor de  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $S_0$  e o número inicial de infectados  $I_0$ , analisar se a doença vai se espalhar ou não. Em caso afirmativo como a doença evolui com o tempo e quando esta irá começar a diminuir. Ou seja, é de extrema importância sabermos determinar as condições em que surgem as epidemias.

Para fazer uma análise do que acontece com o número de infectados analisaremos a segunda equação do sistema. Assim temos que haverá uma epidemia se a variação dos infectados sempre for maior que zero. Ou seja,

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} > 0 \Leftrightarrow I_0(\beta S_0 - \alpha) > 0 \Leftrightarrow S_0 > \frac{\alpha}{\beta}. \quad (3.20)$$

Considere  $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$  e  $\lambda_0$  a taxa de reprodução básica da doença, onde  $\lambda_0 = \frac{\beta S_0}{\alpha}$ .

Teremos uma epidemia se  $\lambda_0 > 1$

Com base na equação (3.19) podemos analisar uma abordagem analítica do sistema em questão:

$$\frac{dI}{dS} = \frac{I(\beta S - \alpha)}{-\beta SI} = \frac{-\beta S + \alpha}{\beta S} = -1 + \frac{\alpha}{\beta S}. \quad (3.21)$$

Assim temos que:

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\alpha}{\beta S}. \quad (3.22)$$

O que implica que

$$\int dI = \int \left( -1 + \frac{\alpha}{\beta S} \right) dS. \quad (3.23)$$

Ou seja:

$$I = -S + \rho \ln S + C. \quad (3.24)$$

Aplicando as condições iniciais temos que:

$$C = S_0 - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0 + I_0. \quad (3.26)$$

Assim podemos concluir que a solução para  $\frac{dI}{dt}$  é

$$I(t) = -S(t) + \frac{\alpha}{\beta} \ln S(t) + S_0 - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0 + I_0 \quad (3.27)$$

Com base nesta equação podemos determinar o número aproximado de infectados pela varíola se levarmos em consideração as hipóteses do modelo. Faremos uma análise sobre isso.

A severidade máxima da doença pode ser determinada quando  $\frac{dI}{dS} = 0$ ,

ou seja,  $-1 + \frac{\alpha}{\beta S} = 0$ , que é o mesmo que  $S = \rho = \frac{\alpha}{\beta}$ . Substituindo na equação

temos:

$$I_{\max} = -\rho + \rho \ln \rho + S_0 - \rho \ln S_0 + I_0. \quad (3.28)$$

Ou seja

$$I_{\max} = -\rho \left( \ln \frac{S_0}{\rho} + 1 \right) + S_0 + I_0. \quad (3.29)$$

A pergunta que nos cabe agora é quantas pessoas ficarão doentes até que a doença seja erradicada?

O teorema do limiar epidemiológico nos diz que se  $S_0 - \rho$  é pequeno se comparado com  $\rho$ , então o número de pessoas que contrairão a tal doença será determinado por  $2(S_0 - \rho)$ .

Tentando fazer um controle da doença, ou seja, que o número de infectado seja igual a zero ( $I = 0$ ), uma alternativa é a imunização de indivíduos sadios. Com base nisso, é possível determinar uma expressão analítica para compreender a influência da vacinação sobre o controle da doença.

Considere para tanto que  $p$  a porcentagem da população que deverá ser imunizada da doença (vacinada) para que a doença seja controlada. Conseqüentemente  $1 - p$  a porcentagem da população que não recebeu a vacina.

Como  $\lambda_0$  é a taxa de reprodução da doença antes da vacinação, então a taxa de reprodução após a vacinação poderá ser representada por  $\lambda_0^* = (1 - p)\lambda_0$ , já que uma porcentagem  $p$  está imunizada.

Considerando que não queremos que haja uma epidemia temos que encontrar os valores para que  $\lambda_0^* < 1$ , assim temos:

$$(1 - p)\lambda_0 < 1. \quad (3.30)$$

Ou seja

$$(1 - p) \frac{\beta S_0}{\alpha} < 1. \quad (3.31)$$

Isolando a variável  $p$  chegamos à:

$$p > 1 - \frac{\alpha}{\beta S_0} = 1 - \frac{1}{\lambda_0}. \quad (3.32)$$

Com base na equação podemos perceber que a porcentagem de vacinados deverá ser diferente para cada doença. O fator que influenciará no número de vacinados será a taxa de reprodução da doença. Por exemplo, em doenças em que a taxa reprodutiva da doença é baixa como  $\lambda_0 = 2$ , o percentual de vacinados deverá ser em torno de  $p > 1 - \frac{1}{2} = 0,5$ , ou seja, 50% da população. Já em situações em que a taxa reprodutiva da doença é mais alta, como  $\lambda_0 = 8$  teremos que mais de 87,5% deverão ser vacinadas.

### 3.5 Modelo Matemático V

Outro modelo que apresentaremos refere-se a propagação do vírus HIV. Devido os danos da AIDS para o seus portadores e também a elevada taxa de contaminação o mesmo vem sendo considerado uma das mais sérias e alarmantes epidemias mundiais.

Foi responsável pela morte de uma quantidade considerável na África, onde os primeiros casos foram identificados.

Anderson-May (1986) propôs um modelo simplificado para analisar a conversão do soro positivo para infectados pela AIDS. Porém, nesse modelo, ele considera que todas as pessoas infectadas terão AIDS, fato que sabemos não ser verdadeiro.

Considere certa população em todos são portadores de vírus HIV. No instante  $t = 0$ , nem uma das pessoas da comunidade apresentou sintomas da AIDS.

Com o passar do tempo uma proporção  $x(t)$  da população não desenvolveu AIDS e enquanto que a porcentagem  $y(t)$  da população



desenvolveu a doença. Como consideramos uma população fechada então temos que  $x + y = 1$ . Assim podemos concluir que  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 0$ . Considerando  $\mu(t)$  a taxa de conversão de portadores do HIV para portadores de AIDS, com  $\mu(t) = kt$  ( $k > 0$ ) temos o seguinte modelo matemático:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\mu x \\ \frac{dy}{dt} = \mu x \end{cases} \quad \text{sujeito à } x(0) = 1 \text{ e } y(0) = 0. \quad (3.33)$$

Trabalhando com a primeira equação do sistema apresentado em (3.33) temos:

$$\frac{dx}{dt} = -ktx. \quad (3.34)$$

Separando as variáveis, podemos resolver a EDO pelo método das variáveis separáveis, como segue:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int ktdt. \quad (3.35)$$

Assim, usando a  $x(0) = 1$  chegamos a conclusão que:

$$x(t) = e^{-\frac{kt^2}{2}}. \quad (3.36)$$

Substituindo a equação 3.36 na equação 3.34 e resolvendo a equação diferencial sujeita a  $y(0) = 0$  temos que :

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{kt^2}{2}}. \quad (3.37)$$

Sabemos que a velocidade de conversão será máxima quando  $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ . Ou seja:

$$k \left( t \frac{dx}{dt} + x \right) = 0 . \quad (3.38)$$

Como supomos que  $k > 0$ , nos resta que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-x}{t} . \quad (3.39)$$

Comparando as equações (3.34) e (3.39) podemos concluir que  $-ktx = \frac{-x}{t}$  e assim obter que  $t = \frac{1}{\sqrt{k}}$ . O valor máximo de variação de conversão será determinado por

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=\frac{1}{\sqrt{k}}} = \sqrt{ke} . \quad (3.40)$$

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Procurou-se com esse trabalho, estudar as etapas da modelagem matemática, os conceitos a cerca de Equações Diferenciais e algumas aplicações das mesmas.

A seguir estão descritos alguns passos que nortearam este estudo, bem como algumas conclusões.

Foi realizado um levantamento bibliográfico sobre Modelagem Matemática, Equações Diferenciais e Epidemiologia. Ficou evidente que tanto a modelagem matemática como as equações diferenciais são de suma importância para o entendimento de doenças epidêmicas. De modo especial, o uso das mesmas como auxílio para o entendimento dos problemas a cerca de epidemias.

Com base nas equações diferenciais foi feito uma pesquisa de modelos matemáticos aplicados a epidemiologia. A pesquisa se baseou em modelos simples. Em trabalhos futuros pretendemos aprofundar o estudo e até mesmo criar modelos novos, que levem em consideração mais parâmetros.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVARENGA , Lucymara de Resende. **Modelagem de epidemias através de modelos baseados em indivíduos**. Dissertação de mestrado Dissertação, 2008.

ALVES, Domingos. **Técnicas de Modelagem de Processos Epidêmicos e Evolucionários** /Domingos Alves, Henrique Fabricio Gagliardi - São Carlos, SP SBMAC, 2006 (Notas em Matemática Aplicada)

ALONSO, D. **The Stochastic Nature of Ecological Interactions: Communities, Metapopulations and Epidemics**. Tese de Doutorado, Complex System Laboratory, Universitat Politècnica de Catalunya, 2004.

ANDERSON, R. M. e May, R. M. **Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control**. Oxford: Oxford University Press, 1992.

FILHO, Naomar de Almeida. **Cad. Saúde Pública**. Vol. 2 nº.3 Rio de Janeiro July/Sept, 1986.

BASSANEZI, Rodney Carlos, **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia** / São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem Matemática & Implicações no ensino-aprendizagem**. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2002.

CORSO, J., Pagano, D. J., e Pieri, E. R. **Sobre a dinâmica do modelo presapredador de Leslie-Gower sujeito a controle de estruturas variável**. In Anais do XIV Congresso, 2002.

D' AMBROSIO, Ubiratan. Da realidade à ação: **reflexões sobre educação e matemática**. São Paulo: Summus; Campinas: Ed.da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

NEPOMUCENO, Erivelton Geraldo. **Dinâmica, Modelagem e Controle de Epidemias**. Tese de doutorado, 2005.

STEWART, James, **Cálculo: Volume 2** tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins, São Paulo, 2009.

ZILL, D.G. **Equações Diferenciais com aplicações em modelagem**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

YANG, Hyun Mo Yang [http. Modelagem Matemática Aplicada à Saúde Pública](http://www.comciencia.br/reportagens/framedest.htm). 2002. Acesso [www.comciencia.br/reportagens/framedest.htm](http://www.comciencia.br/reportagens/framedest.htm).