

HIANDRA BÁRBARA GÖTZINGER

**ATIVIDADES MATEMÁTICAS SOBRE FUNÇÕES
COM O USO DO GEOGEBRA**

BLUMENAU

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

HIANDRA BÁRBARA GÖTZINGER

**ATIVIDADES MATEMÁTICAS SOBRE FUNÇÕES
COM O USO DO GEOGEBRA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Formação de
Professores de Matemática, como parte
dos requisitos para obtenção do título de
pós-graduação em Matemática.

Sob a orientação da Prof^a Dra. Sonia
Palomino Bean

BLUMENAU

2010

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que esteve presente nos meus pensamentos em todos os momentos desta caminhada em busca do título de obtenção de pós-graduação em Formação de Professores de Matemática da UFSC.

Agradeço também ao apoio de todos os professores e tutores do curso que buscaram, cada um a sua maneira, passar os conteúdos da melhor maneira possível e nos motivar para irmos a busca do saber e do aprender cada vez mais. Em especial agradeço a professora Sonia Palomino Bean por ter me orientado de maneira atenciosa e eficiente durante este último semestre do curso de pós-graduação.

Agradeço também a minha família que sempre permaneceu ao meu lado me dedicando atenção, carinho, estímulo e o apoio necessário para que eu pudesse prosseguir. Em especial agradeço ao meu noivo Cleiton de Liz Montibeller, a minha mãe Neusa Mirian Götzinger e ao meu pai Jorge Luiz Götzinger que sempre estiveram ao meu lado me estimulando, acreditando na minha capacidade e não me deixando desistir nunca.

Por fim, agradeço a todos meus amigos de curso ou não que contribuíram de maneira direta ou indireta para a concretização de mais esta etapa de estudos.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de atividades sobre o conceito função utilizando o software GeoGebra e levando em consideração suas representações múltiplas. Busca-se neste trabalho utilizar as ferramentas tecnológicas disponíveis, no caso o computador e o software GeoGebra, para aprimorar o conhecimento das representações de um determinado conceito matemático, procurando esclarecer a ideia que um mesmo conceito pode apresentar diferentes representações, referenciando as características complementares de um mesmo objeto de estudo.

Palavras chaves: GeoGebra. Representações Múltiplas. Função.

LISTA DE FIGURAS

I. AS FUNÇÕES DAS REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS	18
II. FACES DO SOFTWARE GEOGEBRA	28
III. ATIVIDADE 1.1.	33
IV. ATIVIDADE 1.2.	34
V. ATIVIDADE 1.3.1.	35
VI. ATIVIDADE 1.3.2.	36
VII. ATIVIDADE 2.1.1.	38
VIII. ATIVIDADE 2.1.2.	39
IX. ATIVIDADE 2.2.	40
X. ATIVIDADE 2.3.	41
XI. ATIVIDADE 2.4.1.	42
XII. ATIVIDADE 2.4.2.	43
XIII. ATIVIDADE 3.1.	45
XIV. ATIVIDADE 3.2.	47
XV. ATIVIDADE 3.3.	48
XVI. ATIVIDADE 3.4.1.	51
XVII. ATIVIDADE 3.4.2.	51

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	08
1. APRESENTAÇÃO E JUSTIFICATIVA	09
2. REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS	15
2.1. Finalidades da Utilização de Representações Múltiplas em Ambientes de Aprendizagem	17
2.1.1. A UTILIZAÇÃO DAS REPRESENTAÇÕES EM PAPÉIS COMPLEMENTARES	18
2.1.2. A UTILIZAÇÃO DAS REPRESENTAÇÕES PARA RESTRINGIR A INTERPRETAÇÃO	19
2.1.3. A UTILIZAÇÃO DAS REPRESENTAÇÕES PARA CONSTRUIR UMA COMPREENSÃO APROFUNDADA	20
2.2. Ensino de funções e representações múltiplas	21
3. GEOGEBRA	23
3.1. Softwares e o ensino de matemática	23
3.2. O software GeoGebra	27
4. ATIVIDADES PROPOSTAS	29
4.1. Público Alvo	30
4.2. Organização do Ambiente de Trabalho	30
4.3. Função de 1º grau ou função afim – equação da reta	31
4.3.1. DESCRIÇÃO GERAL DA ATIVIDADE	31
4.3.2. OBJETIVOS	31
4.3.3. SEQUÊNCIA DA ATIVIDADE.....	31
4.4. Função de 2º grau ou função quadrática – parábola	37
4.4.1. DESCRIÇÃO GERAL DA ATIVIDADE	37
4.4.2. OBJETIVOS	37
4.4.3. SEQUÊNCIA DA ATIVIDADE	37
4.5. Função Exponencial	43
4.5.1. DESCRIÇÃO GERAL DA ATIVIDADE	43
4.5.2. OBJETIVOS	44
4.5.3. SEQUÊNCIA DA ATIVIDADE	44
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	52
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53

INTRODUÇÃO

Esta monografia de conclusão de curso tem por objetivo apresentar propostas de atividades envolvendo o conteúdo funções com a utilização do software GeoGebra estimulando as múltiplas representações do assunto em questão.

A escolha do assunto foi feita devido ao número elevado de alunos que concluem seus estudos do Ensino Médio sem ter realmente compreendido o significado de determinados conceitos matemáticos, sendo um destes o estudo das funções. Aqui se busca estimular a compreensão deste assunto com a proposta de atividades a serem desenvolvidas com o auxílio de um recurso tecnológico, o software gratuito GeoGebra, que em sua própria estrutura já estimula as múltiplas representações de uma função, algébrica, numérica e gráfica.

O trabalho foi dividido em cinco capítulos, buscando uma melhor forma de apresentar os assuntos abordados nos estudos realizados.

No primeiro capítulo se busca apresentar, justificar e situar a proposta do trabalho.

No segundo capítulo se aborda o conceito de representações múltiplas, o porquê é interessante utilizar propostas de ensino que enfatizem esse embasamento. E ainda se comentam quais são as representações múltiplas do conceito função.

No terceiro capítulo se relata o porquê da escolha do software GeoGebra em detrimento de outros softwares matemáticos e faz-se breve apresentação do software.

No quarto capítulo são listadas as três atividades propostas para trabalhar alguns conceitos relevantes relacionados com o conceito função. Na primeira atividade são abordados assuntos referentes à função de primeiro grau, na segunda referente à função de segundo grau e na terceira sobre a função exponencial.

No último capítulo se procura relatar as considerações que surgiram durante a elaboração do trabalho e as sugestões de continuação da proposta.

1. APRESENTAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Atualmente muito se comenta sobre o ensino da matemática, que muitos alunos não compreendem efetivamente os conceitos matemáticos estudados, pois, não conseguem assimilar as diferentes representações de um mesmo conceito ensinado. Isto acontece quando lhes é ensinado cada conceito utilizando apenas uma forma de representação, assim dificultando o entendimento e a desvinculação do conceito matemático de alguma de suas representações. E em outros casos quando se apresentam mais de uma representação de um determinado conceito é necessário dedicar maior atenção as conversões existentes entre estas representações, pois, ainda é possível que os alunos assimilem as representações dos conceitos matemáticos separadamente não conseguindo desvincular o objeto de estudo matemático de uma representação do mesmo.

Um dos fatores que levam os alunos na Educação Básica e posteriormente no Ensino Superior a desmotivação pelo aprender matemática é a forma como lhes são ensinados os conceitos matemáticos, métodos de ensino que privilegiam a representação algébrica do objeto estudado, onde o que interessa somente é que se saiba aplicar os procedimentos adequados para que se encontre o resultado final correto e fechado de certo tipo de operação algébrica, nem sempre a preocupação está voltada em verificar o raciocínio utilizado para a resolução da questão. Desta forma o ensino da matemática acaba não cumprindo com seus objetivos.

Tendo como foco o Ensino Médio é possível verificar através da análise de algumas provas de caráter nacional que a maioria dos alunos brasileiros conclui a Educação Básica sem adquirir as capacidades mínimas esperadas na área de Matemática, dados oficiais podem ser consultados através do site do INEP¹, alguns destes serão comentados na sequência.

Um dos métodos de avaliação da educação brasileira é conhecido como SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica), exame que é realizado a cada dois anos, com alunos das 4^a séries (5^o anos), 8^o séries (9^o anos) do Ensino Fundamental e 3^o anos do Ensino Médio. Na análise dos resultados realizada pelo Ministério da Educação, publicada em 2007, é possível notar dados relevantes a partir desses relatórios oficiais, que apenas 5,99% dos estudantes do 3^o ano do Ensino Médio que

¹ Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Site: <http://www.inep.gov.br>.

realizaram a prova no ano de 2001 conseguiram ficar acima da média. Ou ainda que a média em proficiência em Matemática, no 3^a ano do Ensino Médio, decaiu de 279 em 2003, para 271 em 2005. Através deste diagnóstico verifica-se que os estudantes estão finalizando o Ensino Médio com uma bagagem de conhecimentos matemáticos abaixo da esperada.

Outro exame que se pode utilizar para conhecer como se encontra o nível de aprendizagem dos estudantes ao fim do Ensino Médio é o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), que busca a avaliação das competências esperadas de um aluno ao fim do ensino médio através de questões contextualizadas. Na análise do resultado das provas de 2009 do ENEM, verificou-se que 57,7% dos estudantes brasileiros que realizaram a prova não alcançaram nota média na área do conhecimento de Matemática e suas Tecnologias.

Observa-se que estes números são significantes e remete os professores de matemática a reavaliarem o sistema de ensino, a forma de ensinar os conceitos matemáticos em sala de aula e instiga uma busca por métodos que possam auxiliar na promoção de uma aprendizagem significativa em matemática, possibilitando assim melhoras nestas e noutras tantas estatísticas referentes ao seu ensino de matemática.

O ensino da matemática ocorre de maneira diferenciada do que ocorrem nas demais ciências, pois, enquanto o objeto de estudo das ciências como a biologia, química e física são palpáveis, observáveis por meio de experimentações o objeto de estudo da matemática embora vindo de uma situação concreta, por conta do formalismo que precisa ser usado no processo de resolução, aparece como algo abstrato, que só pode ser observado através de suas representações, são ‘objetos ideais’, que independem da representação utilizada para compreender seu verdadeiro significado, porém, cada maneira de representar pode designar características diferentes de um mesmo objeto de estudo.

Levando em consideração esta problemática adota-se nesse trabalho a concepção de buscar ensinar matemática através das múltiplas representações do objeto estudado, conhecida como “Representações Múltiplas”. No sentido de que é importante que o aluno consiga transitar entre as possíveis representações de um determinado conceito estudado e que consiga aproveitar as particularidades que cada representação pode fornecer desse mesmo objeto.

No entanto surge uma questão: De que maneira, com que procedimento será possível ensinar determinado conteúdo matemático utilizando mais que uma representação?

A sociedade evolui rapidamente, os utensílios estão a cada dia mais sofisticados e as atividades profissionais das mais diversas áreas requerem atualização constante. Ciente dessa realidade não há como a educação continuar estagnada no tempo, utilizando as mesmas metodologias de ensino há décadas, os profissionais da educação precisam também estar se atualizando e buscando alternativas diferenciadas de desempenhar seu trabalho.

A utilização somente de “lápiz e papel” e do “quadro e giz” normalmente dificulta a abordagem dos conteúdos estudados através de múltiplas representações. O tempo do professor de ensino médio com sua turma de alunos é demasiadamente curto e o currículo de assuntos que devem ser trabalhados em cada série é extenso, dessa forma, torna-se inviável ao professor utilizar muitas representações diferenciadas para abordar determinado conteúdo, então acaba por escolher a representação mais prática de trabalhar com as poucas ferramentas que já está habituado, mas, esta abordagem nem sempre é a melhor para desenvolver o aprendizado do conceito por seus alunos.

O computador pode se tornar um aliado dos professores nessa busca por novas metodologias e ferramentas educacionais que possibilitem maior interação e motivação dos estudantes para o estudo dos conteúdos escolares. É notável que o computador e tantos outros equipamentos eletrônicos são utilizados frequentemente pela maioria dos estudantes para sua comunicação e divertimento. Sendo assim, por que na escola não fazer uso dessa ferramenta?

Há céticos quanto à utilização do computador nas escolas argumentando que estas não possuem verbas para aquisição e manutenção desses aparelhos, porém, hoje é de conhecimento geral que a maioria das escolas possui, ao menos, uma sala informatizada. Os recursos ainda podem ser escassos, mas existem e devem ser utilizados para que seja possível solicitar a aquisição de mais aparelhos que possibilitem uma melhoria nas aulas.

Surgem ainda outros argumentos no seguinte aspecto que o computador estaria desumanizando a educação. Essa desumanização pode ser observada em dois focos. Um deles seria a substituição do professor pela máquina, o que não faz sentido já que a máquina não pensa e conseqüentemente não saberá conduzir o aluno ao aprendizado através de um processo didático de construção do conhecimento. Mesmo que se

padronizem procedimentos todo professor sabe que os alunos não compreendem igualmente uma mesma orientação e precisam de mediações constantes para alcançar os verdadeiros objetivos da aprendizagem. O professor terá sempre um papel demasiadamente importante ao se utilizar tecnologias com fins educativos, pois, a tecnologia só terá fim educativo se o professor planejar um processo de aprendizagem.

Outro foco seria com relação ao contato dos alunos com a máquina. Como a máquina não é humana poderia formar indivíduos desumanos e robóticos (VALENTE, 2008). No entanto, em nenhum momento na educação se espera que seja utilizada apenas uma única metodologia de ensino, o que se espera é que sejam intercaladas metodologias, abordagens diferentes sempre que for possível e conveniente. E ainda, o computador possui redes que permitem a comunicação de um usuário com outros na mesma localidade (intranet) ou até em outras localidades (internet), e aqui se faz relevante considerar um dos princípios da educação, o compartilhamento de opiniões e de resultados encontrados. Os computadores em rede poderiam facilitar essa socialização em curto espaço de tempo.

É possível encontrar para cada argumento negativo mais de uma contribuição positiva para a utilização desse recurso como um facilitador do processo de ensino. A utilização mesmo que esporádica do computador no decorrer das aulas acaba por motivar os alunos e inicia a preparação dos jovens para o mercado de trabalho, já que na sociedade atual é evidente a maciça utilização do computador e outras ferramentas tecnológicas nas mais diversas atividades profissionais.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) publicada em 1996, destaca no artigo 36, inciso I, a educação tecnológica básica como uma das diretrizes do ensino médio. Documentando a importância desses recursos no processo educativo dos jovens cidadãos que vivenciam uma sociedade em constante transformação e que devem estar preparados para analisar e se adaptar as mudanças.

No entanto, é preciso pensar e estabelecer de que maneira utilizar o computador para determinado fim educativo, e nesse caso específico para um fim matemático. Gil e Menezes (2004) relatam que muitos professores inicialmente entusiasmados experimentaram utilizar novas tecnologias, mas, pouco tempo depois retornaram as suas práticas tradicionais apresentando apatia e desânimo perante os novos métodos. Isso se deve ao fato de que não adianta simplesmente inserir novas tecnologias no cotidiano escolar é preciso que haja um processo de familiarização e que se forneçam ferramentas que possibilitem a execução de atividades de ensino através dessa tecnologia.

Nessa busca por mudança surgiram nos últimos anos vários softwares e aplicativos matemáticos educacionais. O foco de estudo desta monografia é a abordagem de um conceito matemático levando em consideração suas múltiplas representações e utiliza o auxílio do computador para isso, no qual podem ser escolhidos softwares e aplicativos como, Cabri Geometre, Graphmatica, GeoGebra, entre outros, que possibilitam aos alunos o trabalho de diversos conteúdos matemáticos sem a necessidade de conhecer a linguagem de programação. A utilização desses softwares irá possivelmente compor um ambiente de aprendizagem, nos quais será possível trabalhar com uma perspectiva que incorpora a produção e re-elaboração de conhecimentos relacionados a conteúdos específicos da Educação Matemática. No terceiro capítulo deste trabalho se explicitará o porquê da escolha do software GeoGebra em detrimento dos demais softwares matemáticos educacionais.

Depois do relato de que software utilizou-se nessa proposta é relevante partir para o tema matemático que foi abordado nas atividades elaboradas. De acordo com as leituras realizadas para a pesquisa e em conversas informais realizadas pela autora optou-se por abordar o tema função pelos seguintes motivos: assunto estudado no início do Ensino Médio, onde há alunos que apresentam dificuldades no que se referem às noções e conceitos sobre funções; algumas vezes apresentado de maneira tradicional através de procedimentos somente algébricos; conceito utilizado nas mais diferentes situações do cotidiano ao relacionar grandezas; conteúdo básico para quem deseja continuar os estudos nos cursos das áreas exatas.

Os fatores relatados anteriormente são alguns dos motivos que estimularam a escolha do tema de estudo dessa pesquisa, que buscará propor atividades complementares para se abordar o estudo de alguns conceitos do conteúdo função utilizando os recursos do software GeoGebra com o objetivo de ressaltar as múltiplas representações do objeto estudado.

Para apresentar esse trabalho de pesquisa se dividiu a monografia em cinco capítulos, dispostos na seguinte sequência: Capítulo 1 – Introdução e Justificativa; Capítulo 2 – Representações Múltiplas; Capítulo 3 – Geogebra; Capítulo 4 – Atividades Proposta; Capítulo 5 – Considerações Finais.

Neste primeiro capítulo buscou-se apresentar, justificar e situar a proposta do trabalho, que é apresentar algumas atividades utilizando o software GeoGebra, levando em consideração as múltiplas representações de cada conceito matemático, enfatizando o conteúdo função da maneira que é abordado no início do Ensino Médio.

No segundo capítulo, apresenta-se a ideia das representações múltiplas, o porquê é importante utilizar propostas de ensino que enfatizem esse embasamento. E também se aborda quais são as representações múltiplas do conceito em questão, função.

No terceiro capítulo, relata-se o porquê da escolha do software GeoGebra em detrimento de outros softwares matemáticos e apresenta-se brevemente o software GeoGebra.

No quarto capítulo listam-se as três atividades propostas para trabalhar alguns conceitos importantes dentro do conteúdo função. Estas atividades foram divididas em algumas etapas com intuito de abordar diferentes aspectos em cada momento da atividade, buscando sempre interligar as representações múltiplas do conceito função.

No último capítulo procurou-se relatar as considerações que surgiram durante a elaboração do trabalho e as sugestões de continuação da proposta.

2. REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS

Nesse capítulo busca-se compreender as representações múltiplas e porque de se enfatizar o ensino de conteúdos numa disciplina de matemática usando esse tipo de abordagem.

Para iniciar a abordagem relatam-se algumas ideias que podem ser relacionadas com a definição da palavra representação. Representar pode ser considerado o ato de expor, exibir algo ou algum conceito, reproduzir através de um símbolo como a pintura, a gravura, a escrita.

Ao pensar sobre essa explanação do que vem a ser representação é possível observar que a palavra em questão pode possuir diferentes significados dependendo do por que está sendo utilizada e de que maneira está sendo designada em determinada situação.

De acordo com Font, Godino e D'Amore (2007) falar em representação é equivalente e tão complexo quanto abordar sobre conhecimento, significado compreensão e modelagem. Eles compreendem que a complexidade e a ambigüidade das representações do conhecimento matemático repousam na seguinte questão, que para caracterizar representações de conhecimentos matemáticos implica abordar o conhecimento matemático, englobando as atividades matemáticas, suas produções culturais e cognitivas e também aquelas relacionadas com a sociedade de maneira geral. A definição do que vem a ser conhecimento é complexa, pois, engloba a localidade e o momento histórico-cultural vigente em que tal conceito está sendo discutido, podendo gerar representações ambíguas e elaboradas dependendo do contexto em questão.

Neste trabalho, porém, o objetivo não é o de nos aprofundar no significado do que vem a ser conhecimento matemático, mas sim de trabalhar com as representações no contexto da aprendizagem matemática, como se trabalhar as representações múltiplas de conteúdos matemáticos, no caso específico, como abordar as representações múltiplas ao ensinar o conceito função. Tendo em vista que um mesmo conceito matemático pode ser abordado de maneiras diferentes, independente da representação utilizada.

Os conceitos matemáticos podem ser ministrados em sala de aula por meio de representações diferentes, um mesmo objeto de estudo pode ser apresentado por meio de diferentes concepções. Um exemplo seria explicitar algumas das diversas maneiras possíveis de representar o número 1, que pode ser através da escrita por extenso da

palavra “um”, através da soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, como uma potência elevada a 0, 1000^0 , como a subtração de dois números consecutivos $7 - 6$. Mas, ainda mais importante é que se compreenda o significado desse número como representação de uma unidade, onde esse mesmo conceito poderia ser representado numa figura através da imagem de um único objeto. Outro exemplo seria pensar nas possíveis representações de uma função de primeiro grau, que pode ser representada graficamente através da visualização de uma reta ou algebricamente apresentada na forma $y = ax + b$.

De acordo com Goldin e Shteingold (2001) representações múltiplas podem ser definidas como fornecedoras de uma mesma informação em mais de uma representação matemática. O uso de representações múltiplas na aprendizagem matemática foi investigado em profundidade por Janvier (1987), que as define como um processo acumulativo baseado na capacidade de lidar com um conjunto de representações enriquecedoras de determinado conceito (AKKUS, CAKIROGLU, 2009).

Representações múltiplas são formas de simbolizar e descrever um mesmo conceito, uma mesma definição matemática. São utilizadas para entender e comunicar diferentes características matemáticas de um mesmo conceito ou de uma mesma operação, assim como conexões entre propriedades diferentes. As representações múltiplas em matemática incluem os gráficos, diagramas, tabelas, fórmulas, símbolos, palavras, códigos, imagens, sons, modelos concretos e virtuais, entre outros.

O auxílio do computador pode ser uma ferramenta de grande importância no processo de utilizar representações múltiplas de um conteúdo matemático no ensino. Para ensinar conteúdos que utilizem a representação gráfica interligada com sua representação numérica, por exemplo, o computador pode se tornar uma excelente ferramenta ao possibilitar a construção de gráficos com alta precisão em pouco espaço de tempo, se considerar o tempo que se deveria dispor para realizar o mesmo procedimento utilizando apenas lápis e papel. Pesquisadores como Borba (1994), Villarreal (1999), Benedetti (2003), Allevato (2007) ressaltam em seus trabalhos de pesquisa a importância da utilização das representações múltiplas proporcionadas pelo computador e com as relações que as conectam.

Borba (1994) apresenta um artigo em que aborda o conteúdo transformações de funções através da utilização do aplicativo Function Probe, com o intuito de trabalhar não somente a representação algébrica do conteúdo, mas também as representações visuais, gráficas, que acabaram por despertar comentários relevantes sobre a manipulação e compreensão do assunto estudado, levando o aluno a construir sua

aprendizagem através da experimentação por meio do aplicativo. Dessa forma, foi possível abordar algumas relações de variações que apenas são comentadas (representação oral/falada) pelo professor em sala de aula, mas que a maioria dos alunos não compreende e nem tem ideia de como aquele conhecimento é representado, e nem de como funciona o comportamento dessa variação.

Nos experimentos realizados por Villarreal (1999) as representações múltiplas foram destaque, onde é possível perceber nitidamente que as ligações entre as representações possibilitaram aos estudantes compreender as noções de função derivada e de reta tangente.

Benedetti (2003) realiza uma pesquisa investigativa sobre as potencialidades que podem ser expressas por um software gráfico para coordenar as representações múltiplas de funções com alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Os quais iniciaram o conhecimento sobre o assunto em aulas regulares, posteriormente passando para aulas com a utilização de softwares gráficos. O objetivo do trabalho era que os alunos conseguissem compreender as outras representações, não somente a algébrica, de funções como a função raiz e função quociente. O autor relata que os resultados foram positivos, mas que ainda é assunto que merece maiores pesquisas.

Depois de relatar algumas pesquisas já existentes na área, que buscam apresentar a relevância de se trabalhar o conteúdo programático nessa perspectiva apresenta-se quais as finalidades de utilizar as representações múltiplas em ambientes de aprendizagem.

2.1. Finalidades da Utilização de Representações Múltiplas em Ambientes de Aprendizagem

O que se almeja ao fazer essa apresentação é compreender a importância da utilização de ambientes de aprendizagem que proporcionem trabalhar com representações variadas de um mesmo conceito.

De acordo com a publicação de Ainsworth (1999) a análise das representações múltiplas em ambiente de aprendizagem pode ser dividida em três funções principais no que diz respeito a situações de aprendizagem, que seriam para complementar, restringir e construir. A primeira função é a utilização de representações que contêm informações complementares ou que fornecem apoio complementar ao processo cognitivo de aprendizagem. Na segunda função, a representação é utilizada para limitar possíveis

interpretações na utilização de outra representação. E na terceira função, as representações múltiplas são usadas para incentivar os alunos a construírem uma compreensão aprofundada da situação estudada.

Cada uma dessas funções ainda pode ser subdividida com objetivo de esclarecer a compreensão, porém, é importante ressaltar que um ambiente de aprendizagem que utiliza representações múltiplas pode servir a mais de uma das funções e também sub-funções que estão sendo abordadas.

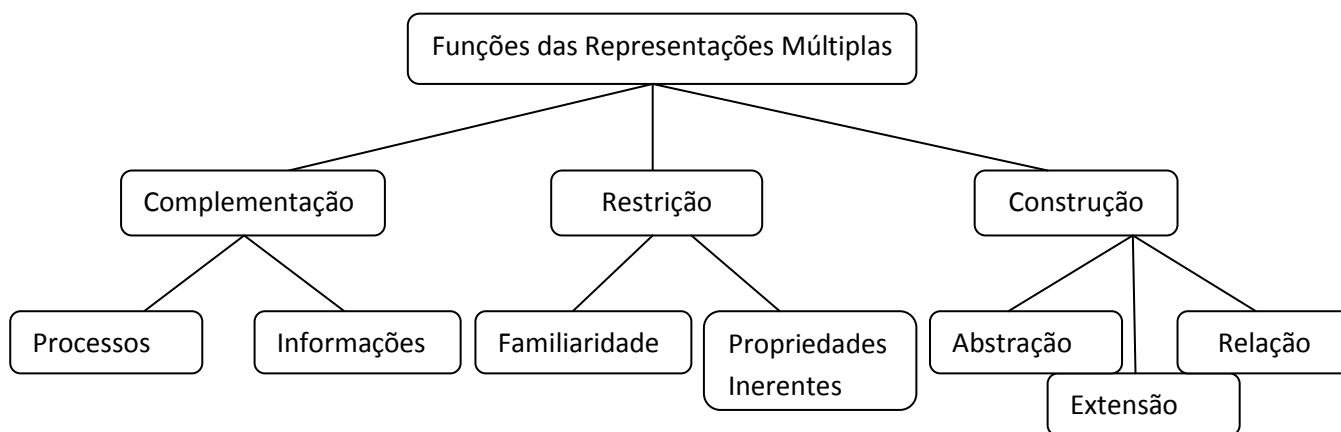


Figura I: As funções das representações múltiplas

Fonte: Adaptação e Tradução de Ainsworth (1999, p.134)

Partir-se-á para uma análise detalhada dos objetivos de cada uma das funções apresentadas.

2.1.1.1. A UTILIZAÇÃO DAS REPRESENTAÇÕES EM PAPÉIS COMPLEMENTARES

Essa utilização pode ser justificada pela exploração das representações múltiplas para tirar proveito de seus papéis complementares, onde as diferenças entre as representações podem ser tanto na contribuição das informações trazidas por cada representação ou pelos processos que cada representação suporta. O que se almeja com esse tipo de complementação é que os alunos se beneficiam com a soma dessas vantagens.

A razão de se utilizar processos diferenciados de representações de um mesmo objeto do conhecimento é o benefício que se encontra em visualizá-lo de diferentes maneiras, ambientes computacionais favorecem esses aspectos, pois, de maneira rápida fornecem representações variadas de uma mesma situação. Um exemplo seria analisar a

variação da incógnita y em função de x dada pela equação $y = x^2 - 4x + 2$ ou dada através do gráfico da parábola. Nesse caso, verifica-se que a informação é equivalente o que diferenciaria a análise será o processo utilizado para representação, o que se torna evidente através da representação gráfica da situação já que revela tendências e interações mais diretas do que a representação algébrica.

Outra razão para usar representações múltiplas é explorar as diferenças de informações que são expressas por cada representação, isso ocorre nos seguintes casos, quando uma única representação não seria suficiente para apresentar todas as informações relevantes sobre certa situação problema, ou quando a utilização de uma única representação geraria um excesso de informações num único contexto que acabaria por dificultar a interpretação e a realização de determinada tarefa.

2.1.2. A UTILIZAÇÃO DAS REPRESENTAÇÕES PARA RESTRINGIR A INTERPRETAÇÃO

Nesse contexto espera-se que o uso de representações múltiplas ajude os alunos a desenvolver uma melhor compreensão do conceito estudado numa representação através da restrição fornecida por outra representação, essa situação pode ocorrer de duas formas, quando se recorre a uma representação familiar para resolver um problema apresentado numa situação ainda não conhecida, ou quando a primeira informação fornecida é ampla ou até mesmo ambígua e necessita de uma segunda informação que restringe quais as informações necessárias a determinada situação.

Um exemplo simples da primeira situação seria resolver dois multiplicado por cinco, tendo em vista uma criança que ainda não está familiarizada com a operação multiplicação, dessa forma a criança não está familiarizada com a primeira representação, então ela poderia recorrer a uma segunda representação com a qual já está familiarizada que seria a de somar o número dois cinco vezes.

Para ilustrar a segunda situação leve em consideração as seguintes representações, a informação falada “o garfo está sobre a mesa ao lado da faca” e a imagem de “um garfo a esquerda da faca”. Ao se apresentar separadamente as representações deve-se concordar que nem sempre a primeira representação acarretará na informação fornecida pela segunda representação, mas, no momento em que ambas as representações são fornecidas conjuntamente a primeira representação, que apresenta certa ambiguidade, acaba por ser restringida pela segunda representação.

2.1.3. A UTILIZAÇÃO DAS REPRESENTAÇÕES PARA CONSTRUIR UMA COMPREENSÃO APROFUNDADA

Pesquisadores como Ainsworth (1988), Kaput (1989) e Borba (1994) alegam que a utilização de representações múltiplas leva os alunos a uma melhor compreensão dos conceitos estudados. Essa compreensão aprofundada pode ser vista com relação à promoção da abstração, ao incentivo a generalização e a compreensão das relações existentes entre as diferentes formas de representação.

Com relação ao fator abstração pode-se pensar no seguinte exemplo, a expressão algébrica $4x + 3$, dependendo do grau de estudo pode apresentar múltiplas leituras. Numa primeira representação pode ser apresentada como a equação $4x + 3 = 5$ e numa segunda representação como a função $y = 4x + 3$. Verifica-se que está se elevando a natureza do objeto de estudo.

A generalização pode ser considerada como uma maneira de ampliar o conhecimento que o aluno já possui para novas situações que exijam processos semelhantes, podendo ocorrer através da verbalização da similaridade de certos procedimentos a determinado tipo de situações. Os casos de generalizações podem ainda ser analisados por duas características diferenciadas. Um exemplo do primeiro caso seria a utilização da representação gráfica em matemática, onde o objetivo é compreender esse objeto de estudo matemático, e noutro momento se utiliza gráficos em outras disciplinas, como física ou biologia, para representar situações problemas que para serem melhor interpretadas recorrem ao auxílio dos recursos gráficos. No segundo caso poderia se levar em conta a seguinte situação, alunos aprendem a identificar se um corpo está acelerando ao fazer a análise de um gráfico que relaciona a velocidade com o tempo, posteriormente, entendem se o corpo está acelerando ao fazer a análise de uma tabela que apresente os valores da velocidade em cada determinado horário, ou ainda através de um gráfico que apresente a relação entre a aceleração e o tempo.

Uma relevante utilização das representações múltiplas é introduzir mais de uma representação de certo objeto estudado focando como o conhecimento ensinar a transitar entre as diferentes representações de um mesmo objeto. Aqui se tem como exemplo a equivalência entre as seguintes expressões dadas pela representação $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ e ainda que essa expressão se refira à representação gráfica da área de um quadrado de lado $x + 1$.

2.2. Ensino de funções e representações múltiplas

O conceito função em matemática pode ser representado de diferentes formas, por meio da representação algébrica, da representação tabular, da representação gráfica, da representação através da linguagem, falada ou escrita. E é de suma importância que ao ensinar esse conteúdo busquem-se maneiras de abordá-lo utilizando as diferentes formas de representações e ainda mais que se consiga explicar que as representações são relacionadas ao mesmo conceito, que o aluno faça transições entre as formas de representações sabendo que está tratando do mesmo objeto de estudo. Esse objetivo de ensino é normalmente algo complexo de ser alcançado.

De acordo com Borba e Penteadó (2003, pp. 31 e 32): “Usualmente, a ênfase para o ensino de funções se dá via álgebra. Assim, é comum encontrarmos em livros didáticos um grande destaque para a expressão analítica de uma função e quase nada para os aspectos gráficos e tabulares.” É visível que muitos livros didáticos de matemática, voltados para o Ensino Médio, ainda privilegiam a representação algébrica e a abordagem da análise numérica para encontrar certos pontos de uma função, em detrimento de utilizar uma visão mais geral que pode ser fornecida pela análise gráfica. Cientes dessas discussões a respeito da maneira de como ensinar o conteúdo funções a alunos do Ensino Médio alguns autores de livros didáticos recentes começam a apresentar de maneira mais igualitária as representações distintas de uma função.

No entanto, não adianta apenas que os livros didáticos apresentem formas distintas de representações, é preciso também que ocorra em sala de aula uma mudança de atitude ao se abordar esse assunto, ou seja, é necessário também que os professores almejem melhorar a forma de conduzir suas aulas, apresentando outras possibilidades de compreensão desse mesmo assunto.

Ao se almejar mudanças é preciso analisar as condições necessárias para que ela ocorra. É de conhecimento geral que mesmo com o avanço das tecnologias a principal forma utilizada pelos professores para socializar os conteúdos escolares ainda é através de quadro com giz ou caneta hidrográfica e de registro dos alunos através de papel e lápis, tendo em vista essa realidade os autores Borba e Penteadó (2003) comentam que realmente é difícil a geração de inúmeros gráficos, pois, requer grande disponibilidade de tempo para o desenvolvimento de gráficos manualmente. E dessa forma, acaba por se

entender o motivo de não se enfatizar a representação gráfica e sim se valorizar a representação algébrica do conceito estudado.

Estudos realizados no final dos anos 80 e início da década de 90 questionam a abordagem utilizada para apresentar o conceito de função e surgem autores redigindo sobre as representações múltiplas do conceito função em Matemática. A ênfase está direcionada ao fato que o importante não é de se privilegiar um único tipo de representação, mas sim, de se abordar as diferentes representações para uma mesma função. Os autores Borba e Confrey (1996) propõem a coordenação entre as múltiplas representações de funções como um caminho para o conhecimento do assunto, ou seja, sugerem uma epistemologia das representações múltiplas.

Para conseguir uma abordagem que dê chance a utilização de diversas representações com a mesma facilidade, onde tanto educador quanto educando consigam desenvolver atividades em que o procedimento algébrico não seja predominante é interessante que sejam utilizadas as mídias disponíveis como, por exemplo, o uso de software computacionais, que gerem gráficos vinculados a tabelas e expressões algébricas.

3. GEOGEBRA

Neste capítulo será relatada a relevância da utilização de softwares educacionais para o ensino da matemática, ressaltando a argumentação do por que da escolha do software GeoGebra em detrimento de outros softwares educacionais.

Na sequência será comentado o software escolhido, GeoGebra. Apresentando-se breve relato das ferramentas principais do software, suas principais características e algumas possíveis utilizações.

3.1 Softwares e o ensino de matemática

De acordo com Gil e Menezes (2004), dentre as tantas definições de software educativo o que se verifica em comum na maioria delas é que são programas de informática originados com uma finalidade específica, que seria a utilização como meio didático buscando facilitar o processo de ensino e aprendizagem.

Os mesmos autores ainda relatam que o uso desses softwares devem estar condicionados às suas características, adaptando-se o contexto e integrando-se a outras atividades de ensino. Orientam que é importante que o professor concilie a utilização do software educativo com algumas determinadas características do ambiente escolar de aprendizagem como, a escolha do software deve estar intimamente ligada ao objetivo que se espera alcançar, a conciliação de atividades computacionais e não-computacionais, a consideração do aluno como principal ator do processo de aprendizagem, as possíveis intervenções do professor durante o processo já devem estar pré-determinadas, lembrando que uma das intervenções deve estar relacionada ao esclarecimento dos objetivos que pretendem ser alcançados com o desenvolvimento de determinada atividade.

Conforme apresentado no relato de pesquisas realizadas por alguns autores no capítulo anterior e de acordo com os processos educativos que se tem contato no cotidiano escolar é perceptível o aumento da utilização de tecnologias de informação e comunicação, tendo como uma das principais entre estas tecnologias utilizadas o uso do computador. Pesquisadores e educadores acreditam que a utilização dessas tecnologias possa acarretar em inúmeros benefícios ao Ensino da Matemática, mas, isso somente acontecerá se for realizada devida seleção de programas e metodologias convenientes ao processo educativo, que ressaltam a importância da utilização das tecnologias.

A utilização das tecnologias para ensinar e aprender Matemática permite ao aluno aproveitar um ambiente semelhante ao qual se faz pesquisa na área de matemática. De acordo com Gravina e Santarosa (1998, p. 2):

Na pesquisa matemática, o conhecimento é construído a partir de muita investigação e exploração, e a formalização é simplesmente o coroamento deste trabalho, que culmina na escrita formal e organizada dos resultados obtidos! O processo de aprendizagem deveria ser similar a este, diferindo essencialmente quanto ao grau de conhecimento já adquirido.

Ainda de acordo com as autoras, para que ocorra a aprendizagem de conceitos matemáticos é preciso que o aluno experimente, interprete, visualize, induza, conjecture, abstraia, generalize para então conseguir demonstrar, formalizar determinado conceito, e não que continue sendo sujeito passivo no processo de aprendizagem, onde apenas lhe são apresentadas situações e o máximo que se espera do aluno é que exercite e memorize por meio de atividades repetitivas.

Alguns programas computacionais apresentam ferramentas que possibilitam a alteração de limites entre concreto e abstrato, pois, permitem a construção e manipulação de conceitos estudados. Segundo Hebenstreint (1987, apud GRAVINA E SANTAROSA, 1998), o computador permite a construção de novos objetos “concretoabstrato”, que são concretos por existirem na tela do computador, mas, também são abstratos já que se tratam de realizações obtidas por meio de construções mentais. Tomemos por exemplo a ideia do conceito quadrado, quadrilátero com os quatro lados e ângulos congruentes, sua ilustração normalmente é representada nos livros sempre com as bases paralelas a base do papel, dessa maneira muitos alunos ao se depararem com o desenho de um quadrado rotacionado 45° graus, só conseguem observar na imagem as características de um losango, não analisam a possibilidade de a figura poder também ser um quadrado. Ambientes computacionais que permitem interatividade podem auxiliar nesse processo, impedindo que os alunos construam falsas conjecturas através da manipulação, experimentação dos objetos matemáticos.

Na pesquisa realizada pelas autoras Gravina e Santarosa (1998) foi verificado que durante anos a linguagem do programa LOGO foi uma das poucas ferramentas computacionais, talvez até a única, que levava em conta a concepção que só se aprende através da experimentação. Que de maneira geral os demais programas disponíveis são do tipo “instrução assistida pelo computador”, estes ainda existem em grande oferta e apresentam interfaces com bons recursos de hipermídia, como som, imagem, animação e texto não linear, porém, professores e alunos devem prestar atenção nesse tipo de

ferramenta, pois as mesmas não oferecem aos alunos nada mais que a leitura e a visualização de definições e propriedades, aplicações em exercícios estilo tutorial, ou testando e fixando conhecimentos através da realização de exercícios repetitivos, que apenas avançam no grau de dificuldade. Este tipo de programa mantém a perspectiva de que ensinar é apenas a apresentação e memorização de conceitos.

Mas, se o que se busca é uma mudança no processo de aprendizagem é necessário ser crítico no processo de escolha e utilização do computador na escola, pois, a simples utilização do mesmo não garante a motivação e posterior apreensão dos conhecimentos por parte do aluno. Para que esse objetivo de mudança possa ser alcançado atualmente existem softwares diferenciados que auxiliam nesse processo, pois, proporcionam dinamismo, onde os alunos podem modelar, fazer experimentos, analisar simulações e conjecturar.

Nesse sentido era preciso optar por um determinado software para a elaboração e apresentação das atividades propostas, algo que possibilitasse uma maior interação dos alunos com os conceitos estudados. Com base nas ideias já relatadas se observou conveniente utilizar um software que integrasse as características de softwares algébricos e de geometria dinâmica, escolhendo assim o software GeoGebra, que será melhor abordado na sequência deste capítulo. Antes disso verificou-se a relevância de apresentar brevemente o que caracteriza um software algébrico e um software de geometria dinâmica.

Os sistemas de computação algébrica e simbólica, conhecidos como CAS (Computer Algebra System) são softwares com a capacidade de manipular de maneira simbólica expressões matemáticas e realizar cálculos numéricos, sendo o principal objetivo desses softwares a economia de tempo na realização de cálculos numéricos. Os CAS realizam de forma automática a manipulação algébrica de equações que podem ser extensas e tediosas ao serem realizadas manualmente. Os mais conhecidos softwares com essa característica são: Matlab, Maple, Mathematica, MathCad e Maxima.

Historicamente o sistema de ensino matemático tem características de um sistema de representação estático, o que pode dificultar a construção do significado, tornando um conceito como um conjunto apenas de símbolos ou palavras ou desenhos que devem ser memorizados, não apresentando ligação alguma entre as representações. Com o auxílio de novas tecnologias as representações passaram a ter caráter dinâmico, o que reflete no processo de aprendizagem, já que um mesmo objeto matemático pode estar em constante mutação na tela do computador, esta possibilidade demandava

longos processos de cálculo e tediosos gráficos do ponto de vista do aluno, como por exemplo, ao querer representar uma função trigonométrica. Do ponto de vista do professor, o trabalho dele com sua turma exigia tempo adicional que muitas vezes o fez desistir, obrigando a apresentar os resultados prontos em lugar de deixar que o aluno descubra e experimente. Um processo necessário ao aluno para que construa seu aprendizado.

Nos estudos de Gravina e Santarosa (1998) é relatada a possibilidade de dinamismo no estudo de funções quando, através de objetos manipuláveis são descritas as relações de crescimentos e/ou decrescimento entre as variáveis.

O registro do termo geometria dinâmica aparece inicialmente em pesquisas de Nick Jakiw e Steve Rasmussen, onde os mesmos buscavam uma nomenclatura para diferenciar softwares de geometria que proporcionam dinamismo de outros softwares geométricos.

Dois softwares que possuem as características de “geometria dinâmica” são o CabriGeometre (software comercial) e o CaR (software gratuito). O principal objetivo desses softwares é a manipulação de figuras geométricas, onde o aluno constrói os desenhos baseado nas propriedades geométricas que definem determinado objeto, depois arrasta e movimenta os elementos que compõem o objeto, estes se modificam mantendo apenas as propriedades iniciais que caracterizam o objeto inicialmente construído. Dessa forma, um mesmo objeto possui várias imagens sem perder as propriedades estudadas.

A utilização de softwares com essa característica permite trabalhar a geometria de maneira interativa, explorando a possibilidade de manipulação da figura construída conforme vontade própria. Assim sendo, o aluno que utiliza esses softwares pode se sentir motivado a explorar a representação geométrica de determinado elemento matemático representado não apenas como uma união de regras e axiomas finalizados, mas como um conhecimento dinâmico e de possível movimentação.

No entanto a maioria dos softwares que possuem essa característica de possibilitar a manipulação de determinadas figuras, desenhos, gráficos, normalmente não possibilita a conversão dessas características para a linguagem algébrica. Um software que possibilita a união dessas características é o GeoGebra, um software gratuito, que possui livre acesso através da Internet.

3.2 O software GeoGebra

O software Geogebra foi desenvolvido por Markus Hohenwarter como parte de sua dissertação de mestrado em educação matemática e ciência da computação, nos anos de 2001 e 2002, pela Universidade da Salzburg, Áustria. Apoiado por uma bolsa cedida pela Academia Austríaca de Ciências pode continuar o desenvolvimento do software como parte de seu projeto de doutorado em educação matemática.

Com o passar dos anos o software recebeu prêmios internacionais e despertou atenção de muitos professores e pesquisadores que traduziram o software para mais de vinte e cinco idiomas, sendo um deles para o português.

GeoGebra é um aplicativo JAVA² que pode ser baixado gratuitamente ou ser utilizado diretamente através da internet pelo ícone *WebStart* na página <http://www.geogebra.org>, independente do sistema operacional e da necessidade de licenças comerciais. Tanto o criador do software quanto os demais adeptos que vem testando e buscando melhorias no desenvolvimento consideram de grande importância a gratuidade do acesso a essa ferramenta, pois, acreditam que a educação de qualidade deveria ser de acesso a todos os cidadãos de todas as nações.

Essa facilidade de acesso ao software parece estimular a sua utilização por professores das mais diferentes nacionalidades e dos mais diferentes níveis escolares, acarretando em avanços contínuos ao software, o que pode ser observado constantemente nas atualizações que ocorrem no site oficial do GeoGebra.

Ainda na própria página oficial do software é possível encontrar as ferramentas Ajuda, Wiki e Fórum que buscam orientar os usuários, iniciantes ou não, fornecer algumas dicas que podem facilitar a sua utilização, além de apresentar sugestões e relatos de atividades desenvolvidas por inúmeros professores e pesquisadores, proporcionando grupos de discussão sobre as atividades aplicadas. Dessa forma, até mesmo professores que não estão acostumados a utilizar as novas tecnologias de informação e comunicação sentem-se entusiasmados a tentar manuseá-lo, começando a adaptação através da experimentação e desenvolvimento de atividades pedagógicas com algumas turmas e em pouco tempo se observam relatando as atividades desenvolvidas e

² Basicamente constitui-se de uma linguagem de programação e um programa para execução chamado de máquina virtual ou *virtual machine*. Quando programa-se em Java usa-se a linguagem de programação Java e um ambiente de desenvolvimento Java para gerar um software que será executado em um ambiente de distribuição Java. Disponível em <http://javafree.uol.com.br/artigo/871498/>. Acesso em 15 de dez. de 2010.

aplicadas no ambiente virtual, onde trocam ideias com outros pesquisadores e podem também responder a questionamentos de outros, através de sua própria experiência, é realmente uma maneira de pesquisa coletiva.

De acordo com o criador do software há muitas pesquisas que relatam os benefícios oriundos da implementação das tecnologias de informação e comunicação na aprendizagem de conceitos matemáticos, no entanto, o processo de utilização dessas tecnologias em sala de aula é demasiadamente lento, e se faz necessário também que sejam realizadas experiências com essas ferramentas. O fator da gratuidade de acesso ao software facilita a utilização do mesmo e incentiva a realização de pesquisas na área.

Este software foi criado buscando interligar as facilidades dos softwares de geometria dinâmica com os recursos disponíveis nos softwares algébricos, unindo as principais características de ambos e proporcionando uma reunião dos recursos de geometria, álgebra e cálculo.

Conforme relato presente no tutorial do software, disponível na página <http://www.geogebra.org> na versão em Português/Brazil, o GeoGebra fornece três faces diferenciadas dos objetos matemáticos: a Zona Gráfica, a Zona Algébrica ou Numérica e a Folha de Cálculo. Estas faces permitem a apresentação dos objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente, tendo como exemplos a construção de pontos, gráficos, figuras geométricas; algebricamente, nas coordenadas de pontos, equações; e ainda nas folhas de cálculo, apresentando coordenadas e efetivação de cálculos. Conforme se pode observar na figura a seguir todas as representações do mesmo objeto estão conectadas de maneira dinâmica, isso significa que se adaptam de maneira automática às mudanças realizadas em qualquer de suas formas, independente da maneira de como foram inicialmente criados.

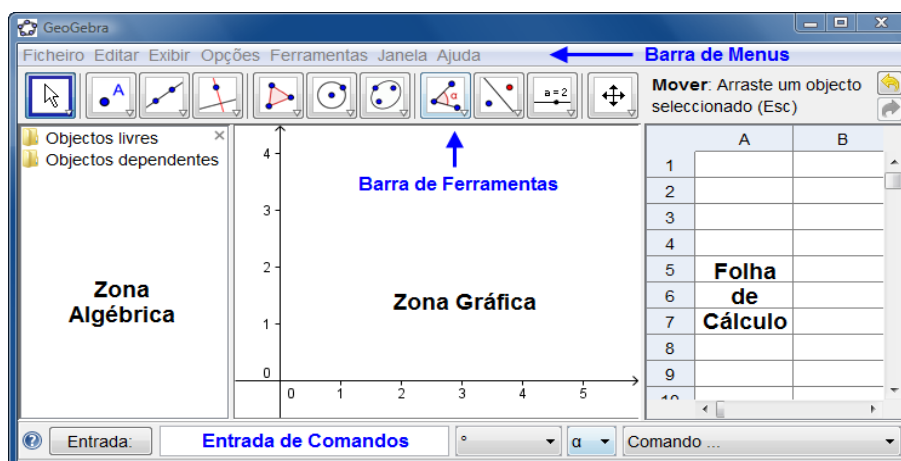


Figura II: Faces do Software GeoGebra

Fonte: Tutorial GeoGebra

4. ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo serão apresentadas as atividades propostas para o estudo de funções com o auxílio do software Geogebra. Onde o objetivo principal nas atividades propostas é apresentar as múltiplas representações de uma função e ressaltar o que se pode trabalhar ao utilizar cada uma de suas diferentes representações.

O conteúdo funções foi escolhido por se tratar de um assunto de grande abrangência, aplicabilidade em diversas áreas. E ainda por ser um assunto que quando abordado por meio de software facilita o aprendizado dos alunos, que se sentem estimulados a interagir com o mesmo, construindo seu conhecimento.

Ao apresentar as atividades se buscará promover a capacidade de reconhecer as possíveis abordagens pedagógicas diferenciadas proporcionadas através da utilização do software.

No decorrer do capítulo serão apresentadas as três propostas de atividades sobre o estudo de funções. A primeira delas abordará sobre o estudo da função de primeiro grau, função afim, a segunda sobre o estudo da função de segundo grau, função quadrática, a terceira e última sobre o estudo da função exponencial. Todas as atividades detalhadas em etapas para melhor abordar diferentes aspectos de cada assunto estudado.

Algumas considerações relevantes devem ser mencionadas. É interessante que os alunos aos quais serão apresentadas as propostas a seguir já tenham alguma familiaridade com o software GeoGebra. No caso da turma em que se pretende aplicar a proposta não conhecer o software sugere-se que seja destinada uma primeira aula no laboratório de informática com o intuito de apenas familiarizar os alunos, onde se faz breve explanação das principais ferramentas do software e é possível propor atividades simples, que permitam aos alunos explorarem os recursos disponibilizados pelo software.

Outro fator relevante é que está sendo considerado que os alunos já passaram por algumas aulas iniciais de introdução ao conteúdo funções anteriormente a proposta dessas atividades com o auxílio do software. Essa familiarização ao conteúdo estudado pode ter sido também realizada no ano letivo anterior, ou mesmo algumas aulas antes com o intuito do professor estar ciente dos conhecimentos prévios oriundos de sua turma e buscar direcionar os alunos no caminho de aprendizagem esperada.

O que se almeja ao fazer a explanação das atividades é compreender a importância da utilização de ambientes de aprendizagem que proporcionem trabalhar

com representações múltiplas de uma função, com intuito de propor ao aluno uma aprendizagem mais completa, onde seja propícia a experimentação das características particulares de cada representação e que fique claro que as múltiplas representações de um mesmo objeto são interligadas a um mesmo conceito, que o aluno consiga transitar entre as representações sabendo se tratar do mesmo conceito estudado.

A recomendação da utilização de um software, como o aqui escolhido GeoGebra, tem o intuito de sanar as dificuldades que os alunos possuem de associar as representações algébricas com suas devidas representações numéricas e/ou gráficas. É conveniente se referenciar um exemplo relacionado ao ensino da disciplina de Cálculo, apresentado por Guimarães (2002), num artigo em que argumenta sobre a utilização de softwares matemáticos como ferramentas para resolver problemas e também constituir ambientes de investigação e generalização de conceitos, ou seja, não apenas valorizando os procedimentos algébricos onde o ensino se resume a repetição dos procedimentos através da resolução listas de exercícios.

4.1. Público Alvo

A indicação da sequência de atividades propostas está destinada a alunos da 1ª série do Ensino Médio, mas, nada impede de se propor as mesmas atividades a outros grupos de alunos tanto de maior ou menor classe escolar, desde que os requisitos iniciais sejam levados em consideração, que seriam os alunos já terem estudado anteriormente as características principais do conteúdo funções e já terem passado por uma aula de familiarização com o software.

4.2. Organização do Ambiente de Trabalho

É recomendável que os alunos estejam trabalhando em duplas ou trios, para que além do auxílio do professor os próprios alunos possam ir discutindo e chegando a questionamentos sobre as questões trabalhadas, e também podem estar oferecendo ajudas significativas aos colegas que não possuem tanta facilidade de manuseio com as tecnologias, no caso o computador e o software.

Recomenda-se ao professor que não tiver acesso a um projetor para ilustrar a sequência das atividades principais aos alunos preparar anteriormente e disponibilizar no dia da atividade ou uma cópia impressa do material com as orientações ou mesmo

um documento construído no editor de texto com essas orientações que deve ser disponibilizado em cada máquina.

É importante que se solicite aos alunos a realização de constantes registros escritos, no caderno ou numa página do editor de textos, onde relatem as sequências de atividades desenvolvidas, as principais questões levantadas por seu grupo e as conclusões obtidas em cada etapa da experimentação.

4.3. Função de 1º grau ou função afim – equação da reta

4.3.1. DESCRIÇÃO GERAL DA ATIVIDADE

A atividade será desenvolvida em três etapas. Na primeira etapa se visualizará a representação gráfica de uma função de 1º grau, ressaltando a representação visual do conceito a partir da determinação de duas coordenadas. Em seguida se buscará visualizar a relação existente entre tabela e gráfico, onde se almeja abordar com maior ênfase as representações visuais e numéricas. E na última etapa da atividade buscar compreender as relações entre família de retas com mesma inclinação e com mesmo ponto de intersecção, nessa parte da atividade se busca priorizar as representações visuais e algébricas.

4.3.2. OBJETIVOS

Almeja-se trabalhar os conceitos básicos de função de 1º Grau; conceituar e apresentar a ligação entre função de 1º grau e sua representação gráfica: a reta; relacionar as representações numérica, algébrica e gráfica de uma função de 1º Grau; analisar a inclinação da reta e sua intersecção com o eixo das ordenadas; observar através da atividade de geração de famílias de reta se o aluno fixou os conteúdos.

4.3.3. SEQUÊNCIA DA ATIVIDADE

Na primeira etapa da atividade o professor pode estimular os alunos com a introdução da seguinte pergunta: ‘O que entendem por reta?’. Nesse momento é significativo ouvir as considerações levantadas pelos alunos e observar em que nível da etapa de aprendizagem os mesmos se encontram. É importante esclarecer que a reta é

um lugar geométrico, traçada a partir de dois pontos de um plano e que é a representação gráfica de uma função de 1º grau.

Utilizar o software para visualização da construção desse lugar geométrico, a partir de alguma função encontrada levando em consideração alguma situação aplicada já trabalhada anteriormente.

De acordo com as Orientações Curriculares do Ensino Médio (2008) é importante que os alunos sejam apresentados a diferentes modelos de funções, aplicados a variadas áreas do conhecimento, como rendimentos financeiros, consumo doméstico de água ou luz, crescimento ou decréscimo de determinada população. Nesse sentido, pode-se induzir o grupo de alunos a graficar uma mesma situação que possa ser representada por uma função de 1º grau já discutida em sala, ou deixar livre a escolha de alguma das situações já comentadas, sendo que a escolhida por cada grupo seja a que despertou maior interesse aos mesmos.

Após escolhida a situação que os alunos pretendem graficar os mesmo devem identificar dois pares de pontos relacionados à situação. Como por exemplo, se a situação escolhida for a quantidade de peças confeccionadas por uma máquina que obedece às seguintes relações: em um minuto são confeccionadas três peças, em dois minutos são confeccionadas cinco peças, em três minutos são confeccionadas sete peças, em quatro minutos serão confeccionados nove peças e assim sucessivamente, o que acarreta uma situação de linearidade. Uma opção da escolha dos pares de pontos seria $A = (1,3)$ e $B = (2,5)$.

Criar uma reta passando pelos pontos A e B determinados como dois pontos específicos da determinada situação já vivenciada ou comentada, apresentar as possibilidades de apresentação da equação da reta pelo software.

O passo a passo dessa atividade pode ser descrito a seguir:

- Digitar em “Entrada” as coordenadas dos pontos, para criar os pontos digite $A = (1,3)$ e $B = (2,5)$.
- Traçar a reta definida por dois pontos por meio da ferramenta do software assim denominada, em particular, para os pontos A e B definidos no item anterior.
- Clicar com o botão direito sobre a reta para verificar as formas de representação algébrica que o sistema dispõe para apresentar a equação da reta, escolher a forma de “Equação $y = kx + d$ ”.

- Orientar os alunos para ir em “Exibir”, “Planilha”. Na sequência selecionar os pontos A e B, clicar com o botão direito do mouse, opção “Traço para Planilha”. Desta maneira obtêm a representação dos pontos na Folha de Cálculo.
 - Solicitar que os alunos registrem o que foi aprendido com esta parte da atividade
- A seguir está uma representação da primeira etapa da atividade descrita.

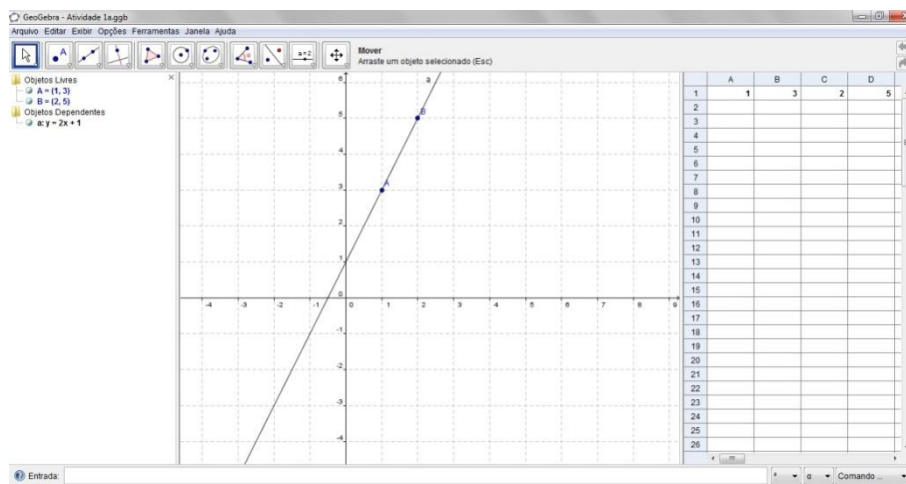


Figura III: Atividade 1.1.

Fonte: a autora.

Nesta segunda etapa aconselha-se ao professor iniciar a conversa com o seguinte questionamento: ‘O que entendem por função?’, em particular, ‘O que entendem por função de 1º Grau?’. A orientação é que o professor lembre a caracterização da ideia do que vem a ser uma função, entendida como uma relação que associa cada elemento do domínio a um único elemento do contradomínio. A partir das concepções apresentadas pelos alunos sobre esses conceitos encaminhar para caracterização da definição algébrica da função de 1º grau, ressaltando a ideia de variável dependente e independente, por meio da relação existente entre tabela e gráfico.

Pode-se sugerir que cada um dos alunos de cada grupo escolha uma determinada situação diferenciada que utilize o conceito de equação de 1º grau, é interessante que o professor oriente para que em cada grupo existam exemplos de ao menos uma função que apresente crescimento e outra que apresente decréscimo.

Partir-se-á da ideia que um grupo composto por três alunos escolheram três situações que podem ser representadas pelos seguintes grupos de coordenadas. O primeiro aluno do grupo construiu sua tabela com os seguintes pontos $P_1 = (1,2)$; $P_2 = (2,4)$; $P_3 = (3,6)$ e $P_4 = (4,8)$. O segundo aluno construiu ao lado na folha de cálculo os pontos de sua tabela intitulados $P_5 = (1,-1)$; $P_6 = (2,1)$; $P_7 = (3,3)$ e $P_8 = (4,5)$. Aqui cabe a orientação do professor no sentido de que o terceiro escolha uma tabela que relacione

uma função que apresente decrescimento, como por exemplo, a originada pelos pontos, $P_9 = (1,4)$; $P_{10} = (2,3)$; $P_{11} = (3,2)$ e $P_{12} = (4,1)$.

- Digitar os pontos dessas tabelas de pontos na Folha de Cálculo.
- Selecionar os pontos, de cada tabela separadamente, clicar com o botão direito do mouse e escolha a opção “criar lista de pontos”. Nesse momento verá que os pontos serão demarcados na zona gráfica.
- No terceiro ícone da barra da zona gráfica escolher a opção “reta definida por dois pontos” e gerar a reta que passa pelos primeiros pontos criados.
- Repetir o procedimento para as demais tabelas listadas.
- Clique com o botão direito sobre os objetos e vá à opção “Propriedade” para que possa formatar cor, nomenclatura, etc.
- Solicitar que os alunos anotem o que foi aprendido com esta parte da atividade.

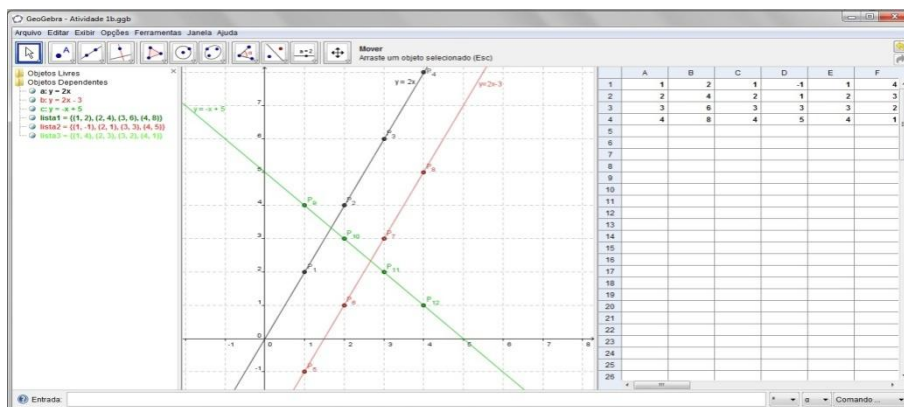


Figura IV: Atividade 1.2.

Fonte: a autora.

Para finalizar a primeira atividade pretende-se partir de representações visuais por intermédio do software para descobrir a família de retas que possuem mesma inclinação (crescimento/decrescimento) e a família de retas que possuem inclinações diferenciadas, mas, com o ponto de intersecção com o eixo das abscissas comum.

Esta parte da atividade é estimulada pelo que se apresenta nas Orientações Curriculares do Ensino Médio (2008, p. 72) que orienta: “Sempre que possível, os gráficos de funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis.” Ainda ressaltam que a elaboração de um gráfico somente pela transcrição de dados pela tabela numérica nem sempre permite uma compreensão geral do comportamento de funções. O que estimula a formulação de gráficos a partir de um ponto e a sua inclinação (que informa o crescimento/decrescimento da função).

Para originar a família de funções que mantêm a mesma inclinação sugere-se:

- Criar um objeto livre, por exemplo, digitar $b = 1$ na “Entrada”.
- Na zona gráfica ir em “Editar”, “Propriedades”, “Seletor”, escolher como ponto mínimo e máximo os valores mínimos e máximos de cruzamento da reta com o eixo das abscissas e como incremento o valor de distanciamento entre a família de retas que se pretende construir. Originando um controlador deslizante. Na figura V do exemplo os valores escolhidos foram de mínimo -5 , de máximo 8 e como incremento 1 .
- Para visualizar o controlador deslizante na zona gráfica selecione a exibição do objeto livre, para isso basta clicar na ‘bola’ a frente do objeto na zona algébrica.
- Digitar na “Entrada” uma função onde se mantenha fixo o primeiro elemento (inclinação fixa) e que o segundo elemento seja o controlador deslizante previamente determinado b . Na figura V do exemplo a função digitada foi $y = 2 * x + b$.
- Orientar os alunos a clicar no primeiro ícone escolher “Mover” e sugerir que movam o controlador deslizante.
- Perguntar aos alunos: ‘O que observaram ao variar o controlador deslizante b ?’.
- Estimular a discussão dos posicionamentos levantados, questionando o que significa manter a inclinação e encaminhar a conclusão almejada, que seria perceber que a inclinação é mantida e apenas o ponto de intersecção com o eixo foi alterado.
- Para facilitar a visualização dessas conclusões é interessante se dirigir a zona algébrica onde aparece a escrita da função, clicar com o botão direito em “Habilitar Rastro”. Assim obterá uma visualização da família de retas criada.

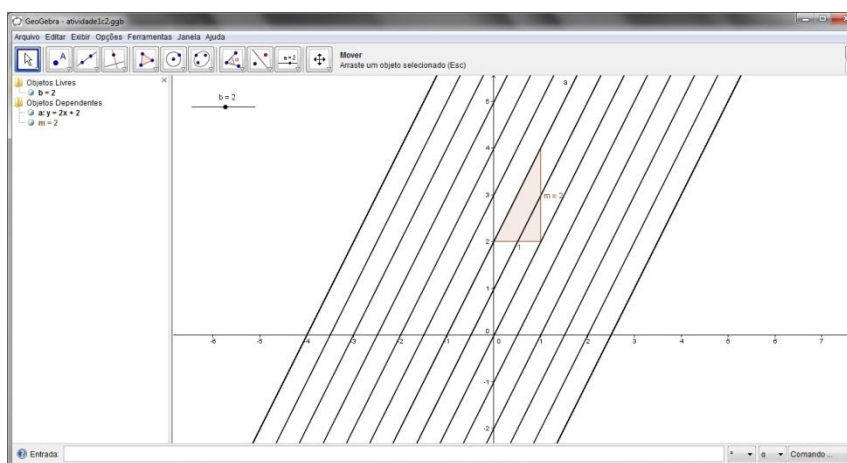


Figura V: Atividade 1.3.1.

Fonte: a autora.

- Solicitar que os alunos anotem o que foi aprendido com esta parte da atividade

Na última parte desta atividade pretende-se apresentar a família de retas que possuem um mesmo ponto de intersecção e com variação da inclinação. Para realização dessa atividade sugerem-se os seguintes passos:

- Criar um objeto livre, por exemplo, $m = 1$ na “Entrada”.
- Na zona gráfica ir em “Editar”, “Propriedades”, “Seletor”, escolher como ponto mínimo e máximo os valores que indiquem mínimo e máximo de inclinação, altura com relação ao eixo das abscissas e como incremento o valor de variação da inclinação. Originando o controlador deslizante. Na figura VI do exemplo os valores escolhidos foram de mínimo -5 , de máximo 5 e como incremento 1 .
- Digitar na “Entrada” uma função onde o primeiro elemento seja o controlador deslizante previamente definido e se mantenha fixo o segundo elemento (ponto de intersecção). Na figura VI do exemplo a função digitada foi $y = m \cdot x + 4$.
- Perguntar aos alunos: ‘O que observaram ao variar o controlador deslizante m ?’.
- Estimular a discussão dos posicionamentos levantados e encaminhar a conclusão almejada, que seria perceber que o ponto de intersecção com o eixo das abscissas continua fixo.
- Questionar o que observam ao manter esse ponto de intersecção. Discutir com os alunos até chegar à conclusão de que significa variar o crescimento ou decrescimento da função, mantendo um ponto comum.
- Para facilitar a visualização dessas conclusões é interessante se dirigir a zona algébrica onde aparece a escrita da função, clicar com o botão direito e “Habilitar Rastro”. Dessa forma obterá uma visualização da família de retas criada.

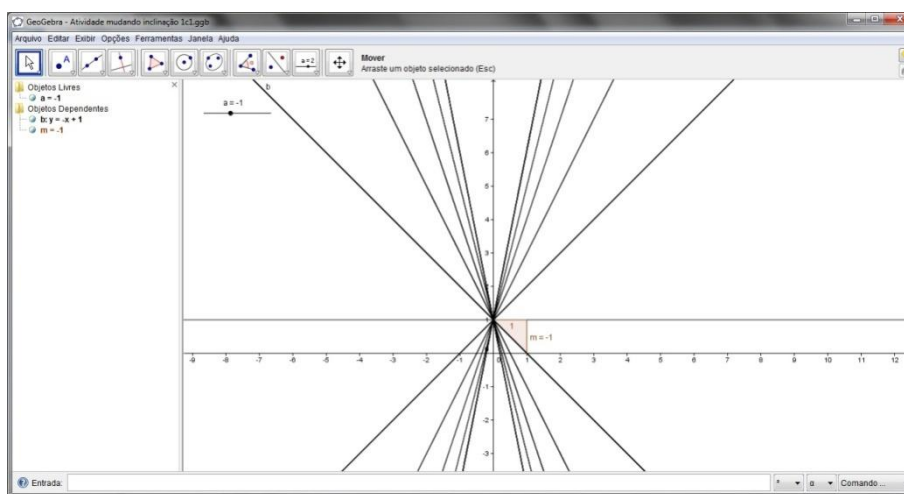


Figura VI: Atividade 1.3.2.

Fonte: a autora.

- Solicitar que os alunos anotem o que foi aprendido com esta parte da atividade.

4.4. Função de 2º grau ou função quadrática – parábola

4.4.1. DESCRIÇÃO GERAL DA ATIVIDADE

A atividade será desenvolvida em quatro etapas. Iniciará explorando a variação dos parâmetros de uma função de 2º grau, buscando observar as relações existentes entre a variação da representação gráfica com a variação ocorrida nas representações numérica e algébrica. Numa segunda etapa a partir da construção de um controle deslizante se buscará visualizar a construção de uma família de funções, onde se altera a concavidade da parábola. Na terceira etapa da atividade se listará um procedimento para encontrar as coordenadas das raízes de funções de 2º grau. Na última etapa se buscará encontrar as coordenadas do vértice de parábolas, observar sua relação com ponto de mínimo ou de máximo da função e a partir de seus valores numéricos buscar a dedução da fórmula utilizada para calcular as coordenadas do vértice.

4.4.2. OBJETIVOS

Almeja-se trabalhar os conceitos básicos de função de 2º Grau, o que ocorre quando se variam os parâmetros; apresentar a ligação entre função de 2º grau e sua representação gráfica: a parábola; relacionar as representações numérica, algébrica e gráfica de uma função de 2º Grau; analisar a concavidade, raízes e vértice da parábola; realizar atividades de geração de famílias de parábolas.

4.4.3. SEQUÊNCIA DA ATIVIDADE

Nessa primeira etapa o objetivo é explorar o impacto da variação dos parâmetros de uma função de 2º grau e observar que sua representação gráfica é um lugar geométrico nomeado parábola. É importante que se oriente o aluno a ir anotando todas as observações realizadas no decorrer da atividade para posterior discussão, onde se encaminhará o debate para os principais conceitos que devem ser abordados, relação dos parâmetros com variação da concavidade e deslocamento do vértice.

Para realizar essa etapa da atividade siga os seguintes procedimentos:

- Digitar no item “Entrada” a função $y = x^2$.
- Clicar em “Mover”, no primeiro ícone, selecione a função na zona algébrica e utilize as teclas ↓ e ↑ para baixo e para cima. Registrar suas anotações.

- O professor pode fazer as seguintes perguntas para estimular essa primeira discussão: ‘Qual o impacto registrado no gráfico ao realizar essas variações?’ ‘Qual foi o impacto registrado na expressão numérica da função?’, ou seja, ‘O que acontece com os parâmetros?’. Os comentários devem gerar em torno de respostas do tipo: ‘O vértice desliza sobre o eixo das ordenadas.’; ‘A concavidade da parábola não é alterada.’; ‘Surgimento do parâmetro independente de x na escrita algébrica da função.’.

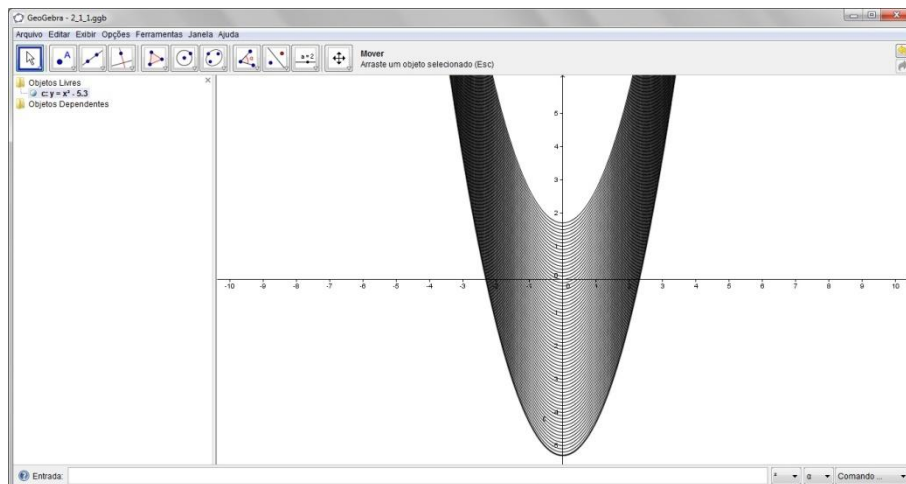


Figura VII: Atividade 2.1.1.

Fonte: a autora.

Para gerar a imagem apresentada na figura VII, deve se “Habilitar Rastro” no desenvolvimento da atividade descrita. Vale ressaltar nesse momento que foi gerada a família de parábolas com mesma concavidade e alternância do vértice sobre o eixo das ordenadas, isso ocorreu ao se manter fixo o parâmetro que acompanha a variável x^2 e alternar os valores do parâmetro independente de x.

- Reiniciar digitando na “Entrada” em uma nova janela a equação $y = x^2$.
- Clicar em “Mover”, no primeiro ícone, selecione a função na zona algébrica e utilize as teclas ← e → para esquerda e para direita. Registrar suas anotações.
- Estimular as anotações e posterior debate de considerações com as seguintes perguntas: ‘Qual o impacto registrado no gráfico ao realizar essas variações?’ ‘Qual foi o impacto registrado na expressão numérica da função?’, ou seja, ‘O que acontece com os parâmetros?’. Os comentários devem gerar em torno de respostas do tipo: ‘O vértice desliza sobre o eixo das abscissas.’; ‘A concavidade da parábola não é alterada.’; ‘Surgimento dos parâmetros acompanhados da variável x e independente de x na escrita algébrica da função.’.

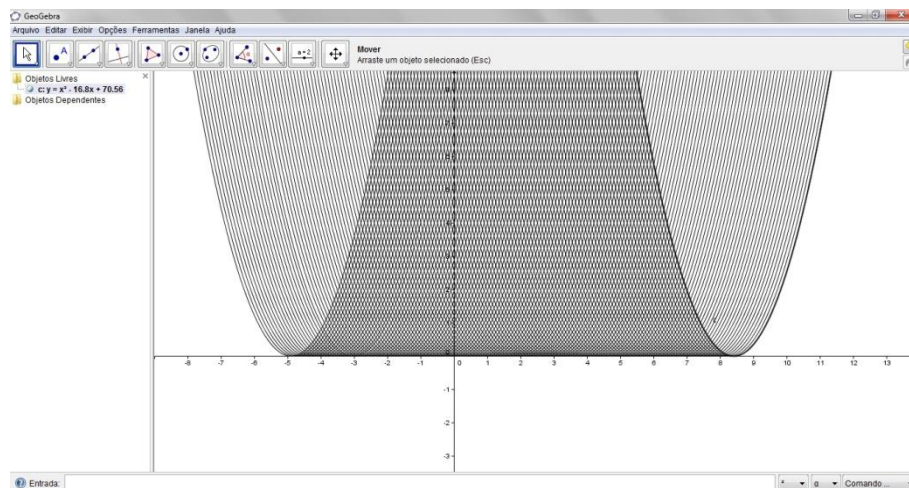


Figura VIII: Atividade 2.1.2.

Fonte: a autora

Para gerar a imagem apresentada na figura VIII, deve-se “Habilitar Rastro” no desenvolvimento da atividade descrita. Ressaltar nesse momento que foi gerada a família de parábolas com mesma concavidade e alternância do vértice sobre o eixo das abscissas, isso ocorreu ao se manter fixo o parâmetro que acompanha a variável x^2 e alternar os valores dos parâmetros que acompanham a variável x e independente de x .

Com o objetivo de iniciar o desenvolvimento da segunda etapa desta atividade deve-se verificar que na primeira etapa o parâmetro que acompanha a variável x^2 foi mantido fixo, o que impossibilitou certa parte da análise da variação dos parâmetros. Uma pergunta que provavelmente surgiu na mente de alguns alunos quando estiveram realizando as atividades anteriores seria: ‘E o que acontece quando se varia o parâmetro que acompanha x^2 ?’. Com intuito de responder a essa questão sugere-se os seguintes procedimentos:

- Criar um objeto livre, por exemplo, digitar $a = 1$ na “Entrada”.
- Na zona gráfica ir em “Editar”, “Propriedades”, “Seletores”, escolher valores de variação mínima e máxima e como incremento a medida de alternância em cada deslizamento. Dessa maneira foi criado um controlador deslizante. Na figura IX do exemplo os valores escolhidos foram de mínimo -8 , de máximo 8 e como incremento 0.5 .
- Para visualizar o controlador deslizante na zona gráfica selecione a exibição do objeto livre, para isso basta clicar na ‘bola’ a frente do objeto na zona algébrica.
- Digitar em “Entrada” a função $y = a \cdot (x^2)$.
- Clicar no ícone “Mover” e movimentar o controlador deslizante.
- Perguntar que alterações são observadas ao realizar esta movimentação.

- Enfatizar as considerações que contemplam que o vértice está sendo mantido e está se alterando a concavidade da parábola. Observar que a parábola é côncava para cima quando o parâmetro que acompanha x^2 é positivo e que a parábola é côncava para baixo quando o parâmetro é negativo.
- Finalizar orientando que os alunos devem selecionar a escrita da função na zona algébrica, clicar com o botão direito do mouse, escolher a opção “Habilitar Rastro”. Em seguida ir ao ícone “Mover” e movimentar novamente o controlador deslizante, assim observa-se o surgimento de uma família de parábolas onde o vértice foi mantido e alterou-se a concavidade.

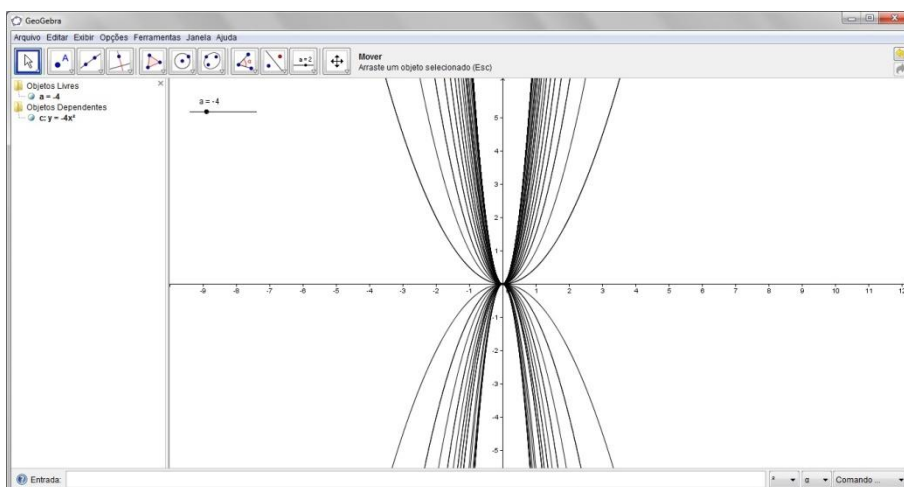


Figura IX: Atividade 2.2.
Fonte: a autora

Na terceira etapa desta atividade procura-se abordar um elemento de relevância ao se estudar funções de 2º grau, que é a existência ou não das raízes e a determinação das coordenadas que representam as raízes de determinada função. A representação gráfica da função no software pode fornecer informações a respeito das raízes da função de maneira eficiente.

As raízes de uma função são os pontos que possuem como ordenada o valor 0 (zero), ou seja, o ponto ou pontos do gráfico da função que interceptam o eixo das abscissas, o eixo X.

Para esta atividade são sugeridos os seguintes procedimentos:

- Escolher funções de 2º grau que se queiram conhecer as raízes. Na figura X as funções escolhidas são c: $y = -x^2 + x + 2$; d: $y = x^2 - 2x + 4$, e: $y = -x^2 + 2x - 1$. Escolhas feitas para abranger as três interpretações gráficas que podem ocorrer.
- Digitar as funções escolhidas em “Entrada”. Sugestão alterar a cor de cada gráfico de função, clicando com o botão direito do mouse sobre cada função selecionar “Propriedades”, “Cor”, escolher a cor desejada.

- Selecionar no segundo ícone a opção “Intersecção de Dois Objetos”.
- Verificar a relação existente entre a primeira função digitada, no caso do exemplo a função nomeada por c, com o eixo das abscissas. Neste caso encontraram-se duas raízes para função, estes pontos são nomeados pelas letras A e B na figura X, suas coordenadas podem ser conhecidas na zona algébrica.
- Verificar a relação existente entre a segunda função digitada, no caso, nomeada por d, com o eixo das abscissas. Informação na zona algébrica: C indefinido, o que significa que a função não possui raiz, não intercepta o eixo das abscissas.
- Finalizar verificando a relação existente entre a terceira função digitada, nomeada e, com o eixo das abscissas. Encontra-se D, única raiz da função.

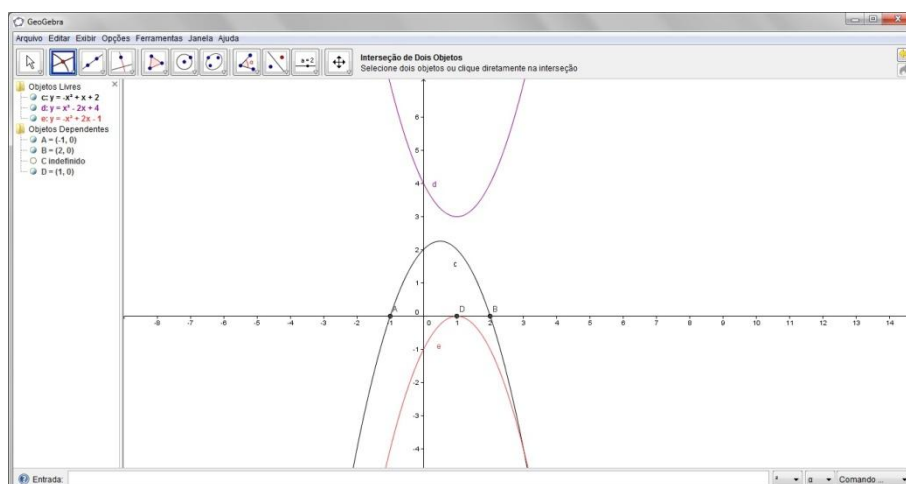


Figura X: Atividade 2.3.
Fonte: a autora

Na quarta e etapa desta atividade se buscará analisar algumas características do vértice de uma função de 2º grau, apresentando uma alternativa de como utilizar a representação gráfica da função fornecida pelo software para determinar as coordenadas do vértice de funções que interceptem o eixo das abscissas em dois pontos distintos. E deixa-se como sugestão para complementar a atividade que o professor utilize um exemplo em que se varie um parâmetro, encontrando alguns valores distintos para as coordenadas do vértice de cada variação da função, e partir desses valores numéricos específicos apresentar a dedução da fórmula geral que calcula as coordenadas do vértice da parábola.

É relevante que o professor já tenha abordado os conceitos de vértice e concavidade de uma função quadrática anteriormente. Onde defina que concavidade é o sentido da abertura da parábola, que pode ser voltada para baixo ou para cima, e que o vértice de uma parábola é ponto que determina a troca de concavidade de uma função

quadrática, sendo assim é o ponto que determina o valor de máximo ou mínimo da função.

Para esta etapa da atividade os procedimentos sugeridos são os seguintes:

- Digitar em “Entrada” a função que se pretende encontrar o vértice. No exemplo utiliza-se a função $y = -2 * (x^2) + 2 * x + 1$.
- Clicar no segundo ícone na opção “Intersecção entre dois objetos”, seleccionar o gráfico da função e o eixo das abscissas. Esta ação deve dar origem a dois pontos, nomeados A e B, que são as raízes da função.
- Clicar no segundo ícone na opção “Ponto Médio ou Centro”, seleccionar os pontos A e B. Esta ação dará origem ao ponto C, ponto médio dos pontos A e B.
- Traçar a reta perpendicular ao eixo das abscissas passando pelo ponto C. Observar que essa reta determina o eixo de simetria da parábola.
- Clicar novamente no segundo ícone na opção “Intersecção entre dois objetos”, seleccionar a reta e o gráfico da função. Esta ação deve dar origem ao ponto D que representa o vértice da parábola em questão. Os valores das coordenadas do vértice podem ser verificados na zona algébrica.

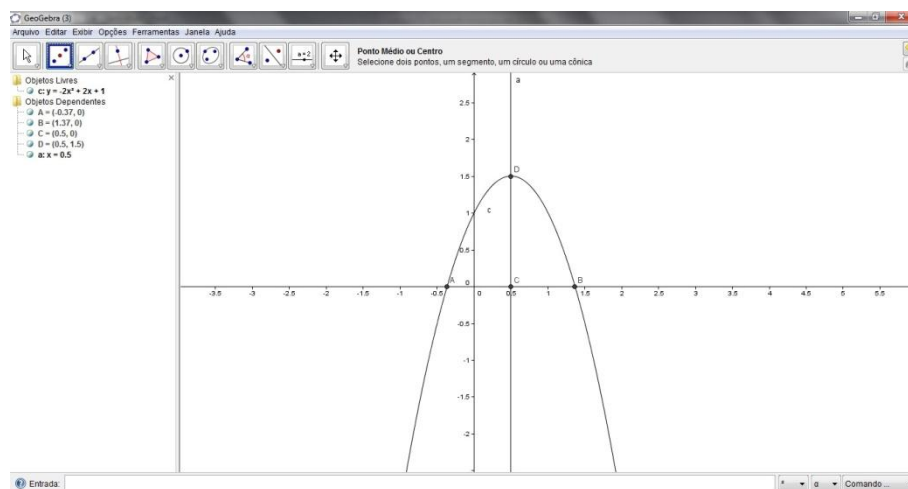


Figura XI: Atividade 2.4.1.

Fonte: a autora

- Se desejar continuar a atividade a sugestão seria numa nova janela criar um controlador deslizante, variando de -2 até -1, com incremento 0.5.
- Digitar em “Entrada” a função $y = a * (x^2) + 2 * x + 1$.
- Repetir todas as etapas descritas anteriormente, até a criação do ponto D.
- Clicar em “Exibir”, “Planilha”.
- Clicar sobre o ponto D na zona algébrica com o botão direito, “traço para planilha”.

- Clicar em “Mover” no primeiro ícone e movimentar o controlador deslizante. Na planilha ficará registrado os valores das coordenadas do vértice a cada variação de parâmetro.

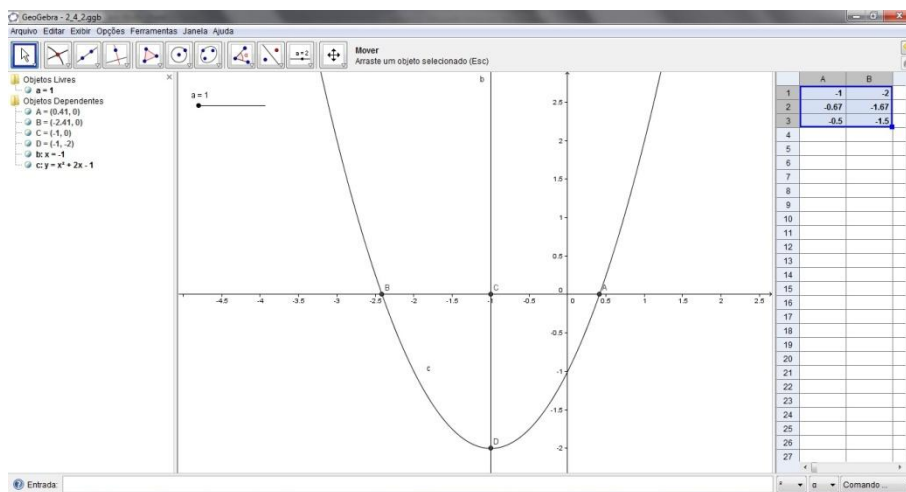


Figura XII: Atividade 2.4.2

Fonte: a autora

A ideia é utilizar as coordenadas dos vértices listados para apresentar a dedução da fórmula da abscissa do vértice $(x_v = \frac{-b}{2a})$, e da ordenada do vértice $(y_v = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{4a})$, onde a é o parâmetro que acompanha a variável x^2 , b o que acompanha x e c é o termo independente de x na representação algébrica da função.

É importante comentar a relação do vértice com o ponto de máximo ou de mínimo da função.

4.5. Função Exponencial

4.5.1. DESCRIÇÃO GERAL DA ATIVIDADE

A atividade será desenvolvida em quatro etapas. Na primeira etapa se abordará o número de Euler, sua representação numérica e opção de arredondamento presente no software. Na segunda etapa se analisará o comportamento de uma parte da família de funções exponenciais clássicas, quando a base é o número de Euler, buscando abordar de maneira interligada as representações gráficas, algébricas e numéricas de cada função descrita. Num terceiro momento serão analisadas funções de bases variadas, buscando visualizar simetrias importantes que ocorrem referentes ao domínio e imagem dessas funções, predomínio nessa etapa da representação gráfica. Na última etapa da atividade se buscará graficar uma situação problema que pode ser descrita por uma função

exponencial, aqui se busca através da representação gráfica poder analisar valores numéricos que possam ser interessantes a resolução ou detalhamento da situação problema.

4.5.2. OBJETIVOS

Almeja-se trabalhar os conceitos básicos de função exponencial, iniciando com a exploração do número de Euler e , partindo para a exploração do comportamento de equações da forma $y = e^x$; desmitificar a ideia de que função exponencial é somente apresentada na forma $y = e^x$, mas, também estudar funções da forma $y = a^x$, fazer a análise da imagem e do domínio de funções exponenciais; apresentar a representação de um modelo aplicado utilizando esse tipo de função; ressaltar a relação existente entre as representações numérica, algébrica e gráfica de uma função exponencial.

4.5.3. SEQUÊNCIA DA ATIVIDADE

Antes de iniciar o estudo de função exponencial propriamente é importante trabalhar o significado de um valor que passa a ser bastante utilizado nessa etapa de estudos, o número de Euler, e .

O professor pode estimular o início da atividade com a introdução da história do número de Euler, que é considerado um número transcendental. A partir desse momento introdutório, caracterizar as propriedades do número de Euler, que possui infinitas casas decimais sem apresentar padrão de repetição e por esse motivo é conveniente representar esse número através de uma aproximação, caracterizando a importância da opção “Arredondamento”, presente também no software.

Esse fato também ocorre com outros números importantes, como é o caso π (pi), outro valor muito utilizado nos cálculos matemáticos, devido a sua relação com o cálculo de comprimento e de área de circunferências.

Nessa primeira etapa o objetivo é utilizar o software para conhecer o valor numérico de determinados números e visualizar a representação de determinados pontos, onde uma das coordenadas são números irracionais, na reta numérica. Cabe aqui a seguinte observação optou-se por escolher sempre a ordenada igual a 0 (zero) para que os pontos encontrados estivessem localizados sempre sobre o eixo das abscissas.

Para o desenvolvimento dessa etapa da atividade sugerem-se as seguintes orientações:

- Na folha de cálculo do software solicita-se que o aluno faça a digitação na primeira coluna dos seguintes comandos: e , $e + 1$, π , $\pi + 1$.
- Após a digitação estimular socialização dos resultados obtidos. Onde deverão perceber que o número e foi representado por uma aproximação numérica, como também ocorreu com os números $e + 1$ e $\pi + 1$. Apenas não ocorreu com o número π .
- Provavelmente as aproximações numéricas desses números foram apresentadas com arredondamento de apenas duas casas decimais. Sugerir nesse momento que os alunos utilizem a ferramenta “Arredondamento” que aparece no ícone opções e escolham quantas casas decimais querem visualizar. Na figura XIII do exemplo foi utilizada a opção Arredondamento com 5 casas decimais.
- Ainda na folha de cálculo do software digite na segunda coluna a entrada zero para cada primeira entrada digitada anteriormente.
- Selecione os valores digitados na tabela, clique com o botão direito no mouse e selecione a opção “criar lista de pontos”.
- Para observar melhor a localização dos pontos criados, sugere-se que se encaminhe ao último ícone da barra de ferramentas, escolha a opção “ampliar” e aproxime os pontos o quanto achar necessário.

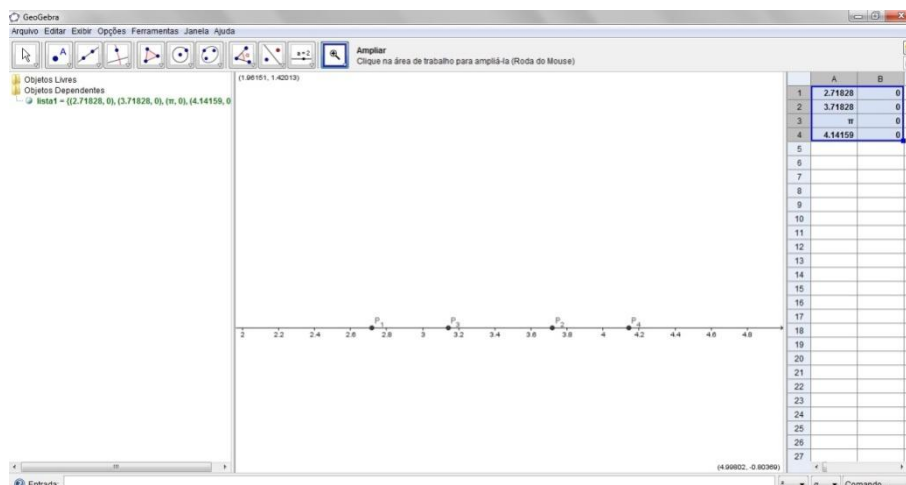


Figura XIII: Atividade 3.1.

Fonte: a autora.

Na segunda parte da atividade o objetivo é analisar algumas características da família de funções exponenciais com base e . Essa atividade ainda poderia ser dividida em dois momentos de análise.

Para iniciar a atividade sugerem-se as seguintes etapas:

- Criar um objeto livre, pó “Editar”, “Propriedades”, “Seletor”, escolher como ponto mínimo e máximo, que serão os valores mínimos e máximos a serem multiplicados pela variável independente na função exponencial. Dessa maneira foi criado um controlador deslizante. Na figura XIV do exemplo os valores escolhidos foram de mínimo -3 , de máximo 3 e como incremento 1 .
- Para visualizar o controlador deslizante na zona gráfica selecione a exibição do objeto livre, para isso basta clicar na ‘bola’ a frente do objeto na zona algébrica.
- Digitar na “Entrada” uma função onde se mantenha fixa a base e se eleve a base ao controlador deslizante previamente determinado a multiplicado pela variável x . Na figura XIV do exemplo a função digitada foi $y = e^{a*x}$ (na linguagem do programa a função deve ser digitada da seguinte forma $y = e^{(a*x)}$), onde a varia de uma em uma unidade entre os valores -3 e 3 .
- Pergunte aos alunos que considerações podem relatar a partir da movimentação do controlador deslizante a . Estimular a discussão antes de seguir a atividade.
- A fim de proporcionar algumas análises após a construção da família de funções exponenciais de base igual a e , construa uma reta perpendicular a cada um dos eixos coordenados. Na figura apresentada foram realizadas as seguintes etapas para construir essas retas, constroem-se os pontos $X = (0,8)$ e $Y = (1,1)$, depois se escolhe a ferramenta presente no quarto ícone “reta perpendicular” e são geradas retas b e c , respectivamente, perpendiculares ao eixo das ordenadas e das abscissas. Lembre que os pontos X e Y podem ser ocultados.
- No segundo item escolha a opção “intersecção entre dois objetos” uma vez para encontrar o ponto de intersecção da função exponencial com a reta b e uma segunda vez para encontrar o ponto de intersecção da função exponencial com a reta c . Na figura XIV esses pontos foram, respectivamente, nomeados pelas letras A e B .
- A orientação é de movimentar o controlador deslizante e buscar visualizar relações. Observando o que acontece com os pontos A e depois com os pontos nomeados por B ao serem realizadas as movimentações.
- Na zona algébrica do software faça as seguintes alterações: clicar com o botão direito do mouse sobre a função e “Habilitar Rastro”; clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto A “Habilitar Rastro” e “traço para planilha”; repita o procedimento realizado com o ponto A para o ponto B .

- Mova o controlador deslizante para visualizar a construção da família de funções geradas com base e . Observe que os pontos de intersecção com as retas foram encaminhados automaticamente para a folha de cálculo, formando uma tabela com os pontos listados. Esta atividade pode gerar inúmeras verificações e comentários a respeito de características importantes das funções exponenciais, como por exemplo, qual a relação dos parâmetros da função com seu crescimento ou decrescimento, relações de simetria com relação ao eixo das ordenadas, entre outros.

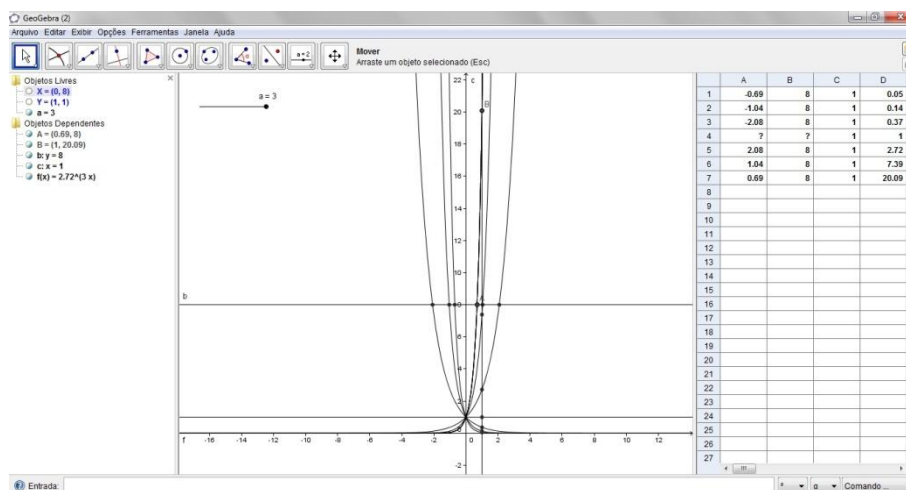


Figura XIV: Atividade 3.2.

Fonte: a autora.

Outra observação importante é comentar o surgimento dos pontos de interseção na tabela listada na Folha de Cálculo. Questionar os alunos do por que do surgimento deles. Direcionar a discussão a concluírem que não aparecem valores naquela linha, pois, não há ponto de intersecção entre as funções $y = 8$ e $y = e^{0x}$, já que suas representações gráficas determinam retas paralelas.

Com a realização das construções que serão propostas nesta terceira etapa da atividade se buscará analisar as simetrias que são visíveis com relações a bases simétricas, também analisar domínio e imagem dessas funções a partir da visualização gráfica das mesmas e observar que nem sempre a base de funções exponenciais é composta pelo número de Euler, e .

Os passos dessa etapa serão:

- Digitar na “Entrada” uma função da forma $y = a^x$, onde a é um número natural. Na figura XV o valor a escolhido foi 5.
- Na sequência digitar na “Entrada” a função $y = -a^x$.
- Buscar questionar com os alunos o que observam ao construir as duas funções; qual o domínio de cada uma delas e qual a imagem de cada uma delas.

- Depois digitar também em “Entrada” uma função da forma $y = b^x$, onde $0 < b < 1$. Na figura XV o valor b escolhido foi 0,5.
- Por fim digitar em “Entrada” a função $y = -b^x$.
- Perguntar que tipo de considerações podem ser feitas com relação ao comportamento dessas funções e o que se pode notar de diferente e de semelhante com relação às duas primeiras funções construídas.

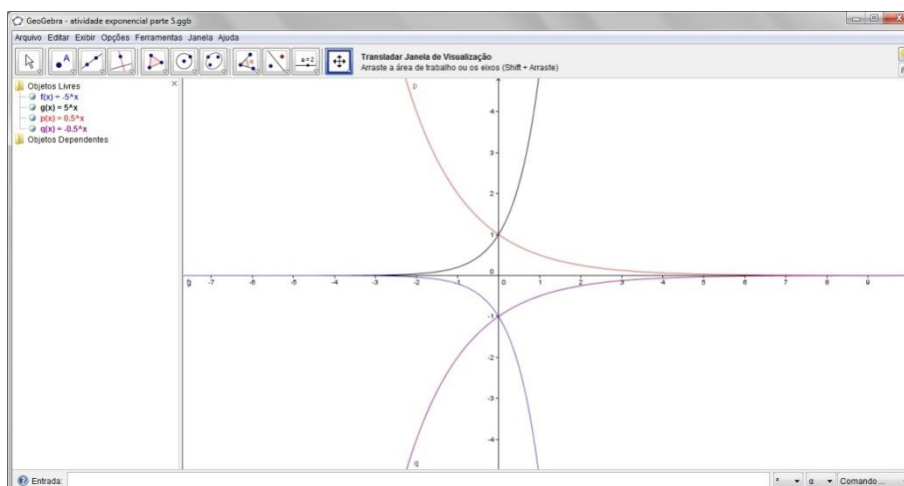


Figura XV: Atividade 3.3.

Fonte: a autora.

Algumas sugestões para facilitar o desenvolvimento e compreensão da atividade: fazer uso da opção “propriedades” para alterar as cores do gráfico de cada de função e utilizar a opção “ocultar/mostrar” o gráfico da função na zona algébrica, quando desejar visualizar apenas uma ou algumas das funções construídas.

Na quarta etapa desta atividade se buscará utilizar o software para resolver problemas. As funções exponenciais frequentemente podem representar modelos matemáticos aplicados a natureza e a sociedade, sendo um modelo muito relatado o de crescimento ou decrescimento de populações. Nesse momento se o professor ainda não comentou a respeito dessas aplicações em aulas anteriores, cabe aqui o momento de discutir esse tipo de situação problema e até apresentar um exemplo.

Nessa parte da atividade o objetivo é utilizar o software e as ferramentas já conhecidas nele para resolver um exercício que aborde uma situação problema que possa ser descrita como uma função exponencial. O exercício que será utilizado está proposto no livro de Cálculo, Volume 1, de James Stewart (2009), logo na parte inicial quando o autor propõem a revisão de certos conteúdos que devem ser bem trabalhados no Ensino Médio, para fornecer boa base aos alunos que avançaram seus estudos na Área das Exatas.

Sob condições ideais sabe-se que certa população de bactérias dobra a cada 3 horas. Supondo que inicialmente existam 100 bactérias.

- (a) Qual o tamanho da população após 15 horas?
- (b) Qual o tamanho da população após x horas?
- (c) Qual o tamanho da população após 20 horas?
- (d) Trace o gráfico da função população e estime o tempo para a população atingir 50000 bactérias. (STEWART, 2009, p.49).

O interessante nesse exercício é que o professor deixe que os grupos procurem separadamente meios de chegarem às respostas para cada parte da questão. Ao fim da atividade é importante que o professor promova a discussão com toda turma para que todos os grupos comentem quais foram os procedimentos realizados para determinarem suas respostas. Dessa maneira o professor poderá avaliar como foi o desempenho das equipes perante as atividades realizadas anteriormente, se as mesmas auxiliaram ou não no processo de aprendizagem dos alunos ao buscar soluções de outras questões.

Se o professor julgar conveniente também pode apresentar aos alunos a estratégia utilizada por ele para resolver o exercício, comentar o porquê de suas escolhas, por este ou aquele procedimento de resolução. Motivando assim os alunos a comentarem suas escolhas e procedimentos adotados, enriquecendo o debate e também o aprendizado da turma.

A seguir é apresentada uma ideia de como resolver o exercício problema com o auxílio do software.

- Referente ao primeiro item da questão um procedimento simples seria utilizar a folha de cálculo do ambiente para registrar o seguinte raciocínio, no momento inicial (hora = 0) existem 100 bactérias; após três horas (horas = 3) o número de bactérias irá dobrar, ou seja, existirão 200 bactérias; decorrendo mais três horas (horas = 6) o número de bactérias dobrará novamente, ou seja, existirão 400 bactérias; esse procedimento continua sendo repetido até chegar no número de horas igual a 15; quando irá se verificar que o número de bactérias existentes será de 3200.
- Para continuar a responder a questão é interessante gerar na zona gráfica a lista de pontos dos valores obtidos no procedimento anterior, para isso basta selecionar os valores na tabela, clicar com o botão direito do mouse e escolher a opção “criar lista de pontos”.
- Sugere-se que nesse momento se modifique a medida de variação no eixo das ordenadas com o intuito de obter uma melhor visualização. Para isso clicar em “Opções”, “Janela de Visualização” e alterar em Eixo X : Eixo Y = 1 : 1, para Eixo X : Eixo Y = 1 : 50.

- Ao buscar responder ao segundo item do exercício é importante observar que a cada variação de três horas a população duplica, logo a função que se procura é alguma variação da função 2^x , então se deve levar em consideração algumas informações fornecidas pelo problema, a primeira delas é que a população inicial era de 100 elementos, logo a exponencial deve ser multiplicada por esse valor, e como a população não está duplicando a cada hora e sim a cada três horas o expoente deve ser alterado de x para $x/3$. A fim de verificar se a função correta é $y = (2^{(x/3)}) * 100$, digitar essa função em “Entrada”, originando na janela algébrica sua representação na parte Objetos Livres, nomeada pela letra f . E analise se os pontos gerados no item anterior pertencem ao gráfico da função descrita, a ferramenta presente no penúltimo ícone da barra de ferramentas, intitulado “relação entre dois objetos” pode lhe auxiliar nessa tarefa, basta selecionar a opção e clicar na zona gráfica na representação do gráfico da função e em algum dos pontos da lista que foram criados, por exemplo no ponto P_1 , nesse momento aparecerá na tela a seguinte mensagem “O ponto P_1 pertence a função f .”, se achar necessário teste todos os pontos, o que significa que os pontos são algumas imagens da função descrita.
- Para responder ao terceiro item da questão o procedimento sugerido é criar um ponto $A = (20,0)$, utilizar a ferramenta presente no quarto item da barra de ferramenta intitulada “reta perpendicular” e traçar a reta perpendicular ao eixo das abscissas que passe pelo ponto A . Em seguida utilizar a ferramenta “intersecção de dois objetos” presente no segundo ícone da barra de ferramentas e clicar sobre a reta traçada, provavelmente nomeada pela letra³ a , e sobre o gráfico da função gerada no item anterior, provavelmente nomeado pela letra⁴ f . O valor procurado como resposta do terceiro item da questão será o valor da ordenada do ponto de intersecção entre os dois objetos, 10159,37, ou seja, a população será composta por aproximadamente 10159 bactérias após 20 horas.

³ A reta será intitulada pela letra a , quando se tratar da primeira reta que se constrói nessa janela do software.

⁴ A função será intitulada pela letra f , quando se tratar da primeira função que se constrói nessa janela do software

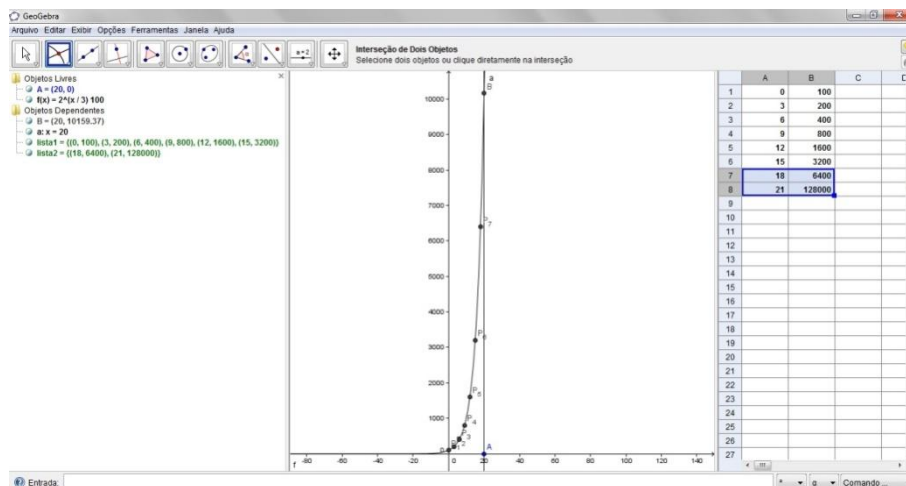


Figura XVI: Atividade 3.4.1.

Fonte: a autora.

- Para solucionar o quarto item da questão sugere-se a abertura de uma nova janela de exibição. Digitar a função que descreve a situação, $y = (2^{(x/3)}) * 100$.
- Alterar a medida de variação no eixo das ordenadas com o intuito de obter uma melhor visualização. Para isso clicar em “Opções”, “Janela de Visualização” e alterar em Eixo X : Eixo Y = 1 : 1, para Eixo X : Eixo Y = 1 : 100.
- Criar na “Entrada” o ponto A = (0,50000). Traçar uma reta perpendicular ao eixo das ordenadas e que passe pelo ponto A, utilizando a ferramenta “reta perpendicular” presente no quarto ícone da barra de ferramentas. Utilizar a ferramenta “intersecção de dois objetos” presente no segundo ícone da barra de ferramentas e clicar sobre a reta traçada, provavelmente nomeada pela letra a, e sobre o gráfico da função, provavelmente nomeado pela letra f. A resposta será o valor da abscissa do ponto de intersecção entre os dois objetos, 26,9, ou seja, a população atingirá 50000 bactérias, aproximadamente, após 27 horas.

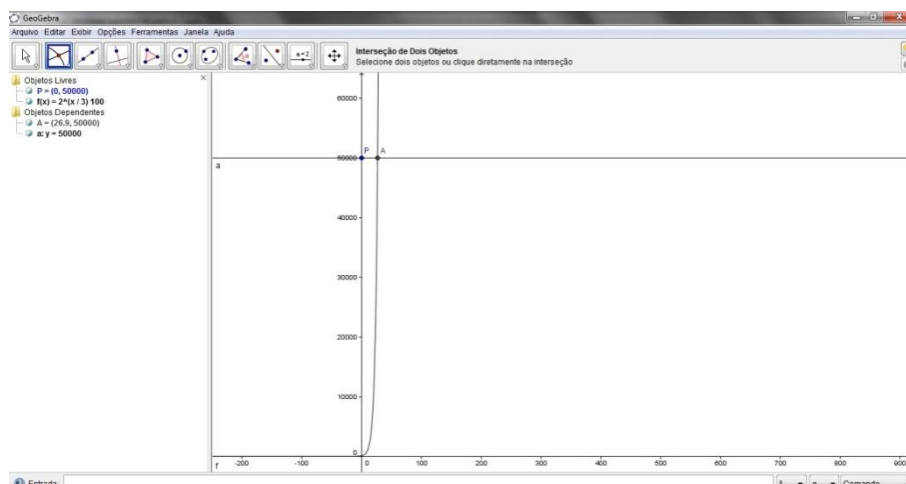


Figura XVII: Atividade 3.4.2.

Fonte: a autora.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os estudos e as pesquisas que foram necessários para a realização deste trabalho possibilitaram o conhecimento do software GeoGebra e de suas principais ferramentas, como também o reconhecimento da importância de ensinar os conteúdos matemáticos levando em consideração as suas representações múltiplas.

Ao elaborar as propostas de atividades para estudar alguns conteúdos a respeito de funções utilizando o software GeoGebra e buscando levar em considerações as representações múltiplas, observou-se que nem sempre foi possível realizar as atividades da primeira maneira que foram pensadas devido ao funcionamento das ferramentas do software. O que se leva de aprendizado é que o software pode facilitar e muito o processo de ensino - aprendizagem, porém, esse processo deve ser previamente elaborado pelo professor para que a atividade verdadeiramente atinja seus objetivos.

As propostas de atividades aqui listadas não puderam ser aplicadas, já que este trabalho de conclusão de curso de especialização teve duração de apenas quatro meses e foi iniciado no segundo semestre do ano letivo, quando o conteúdo aqui abordado normalmente é estudado no primeiro ano do Ensino Médio no primeiro semestre do ano letivo.

Na última etapa da última atividade proposta, onde se busca utilizar as ferramentas conhecidas do software para resolver situações problemas, é interessante abordar também outras situações problemas envolvendo funções exponenciais, como outros problemas de crescimentos populacionais, depreciação ou valorização de imóveis, entre outros.

Ainda referente às atividades propostas é importante lembrar que podem e devem ser feitas adaptações no planejamento para a aplicação das mesmas dependendo da escolaridade, dos conhecimentos prévios e da realidade que os alunos contemplados vivenciam.

Como continuidade do trabalho se espera poder testar de maneira integral ou parcial as atividades propostas para observar o trabalho dos alunos ao serem aplicadas, e, avaliar os efeitos desta abordagem dos conceitos: de que maneira ajudará aos alunos no processo de obtenção de conhecimentos e quais possíveis modificações podem ser realizadas em cada proposta para buscar atingir da melhor forma possível os objetivos anteriormente listados.

6. REFERÊNCIAS

AINSWORTH, S. (1999). The functions of multiple representations. **Computers & Education** , 33, 131-152.

AINSWORTH, S., WOOD, D. J., & O'MALLEY, C. (1998). There's more than one way to solve a problem: Evaluating a learning environment to support the development of children's multiplications skills. **Learning and Instruction** , 8(2), 141-157.
Disponível em: <<http://www.psychology.nottingham.ac.uk/staff/sea/coppers.pdf>>.
Acesso em 06 de set. de 2010.

ALLEVATO, N. S. G. (2007). As concepções dos alunos sobre resolução de problemas ao utilizarem o computador no estudo de funções. **Paradigma**. Vol. XXVIII. PP. 131 – 156.

AKKUS, O., CAKIROGLU, E. (2009). THE EFFECTS OF MULTIPLE REPRESENTATIONS-BASED INSTRUCTION ON SEVENTH GRADE STUDENTS' ALGEBRA PERFORMANCE. **Proceedings of CERME 6**. Disponível em: <<http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg4-01-akkus-cakiroglu.pdf>>. Acesso em 01 de nov. de 2010;

BENEDETTI, F. C.(2003). **Funções, Software gráfico e Coletivos Pensantes**. Dissertação de Mestrado para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. Brasil.

BORBA, M. C. (1994). Computadores, Representações Múltiplas e a Construção de Idéias Matemáticas. **Bolema**. Ano 9. EE. 3, 83-101.

BORBA, M. C., CONFREY, J. (1993). **The Role of the Teaching Experiment: Students Construction of Transformation in Multiple Representational Environment**. AERA. Atlanta. Georgia. USA.

BORBA, M. C., PENTEADO, M. G. (2003). **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte. Autêntica. 3ed.

BRASIL (1996) **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei número 9394, 20 de dezembro de 1996.

FONT, V., GODINO, J. D., D'AMORE, B. (2007) An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. **For the Learning of Mathematics**. 27, 2-7.

GEOGEBRA.< <http://www.geogebra.org>>. Acesso em 10 de nov. 2010.

GIL, H., MENEZES, M. H. (2004). **SOFTWARE EDUCATIVO E A IMPORTÂNCIA DE UMA MÉTRICA**. In J. M. Sánchez Pérez, et al. (Eds.), *Avances en informática educativa: Nuevos retos*. Artículos seleccionados del VI Simposio Internacional de Informática Educativa.

GOLDIN, G., SHTEINGOLD, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), **The roles of Representation in School Mathematics** (pp. 1-24). Reston: NCTM Publications.

GRAVINA, M. L., SANTAROSA, L. M. (1998). **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. In: IV Congresso RIBIE. Anais. Brasília.

GUIMARÃES, O. L. C. (2002). **CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: Do algebrismo às representações múltiplas**. 25ª ANPEd. Caxambu. MG. Disponível em: <http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/calculo.pdf>. Acesso em 10 de out. de 2010.

INEP. <<http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/enem>>. Acesso em 11 de out. de 2010.

KAPUT, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner, C. Kieran. **Research issues in the learning and teaching of algebra**, 167-194.

Ministério da Educação - INEP. (2007). **SAEB - 2005 PRIMEIROS RESULTADOS: Médias de desempenho do SAEB/2005 em perspectiva comparada**. Brasília: INEP.

Ministério da Educação. (2008). **ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO**. Volume 2. Brasília: Secretaria de Educação Básica.

STEWART, J. (2009). **Cálculo**. Volume 1. São Paulo. Cengage Learning. 6ª Ed.

VALENTE, J. A. (2008). **Por quê o computador na educação?**. In: Ministério da Educação, **Tecnologias na Educação: ensinando e aprendendo com as TIC**. Brasília. Secretaria de Educação à Distância.

VILLARREAL, M. E. (1999). **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**. Tese de Doutorado para a obtenção do título de Doutor em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho. Rio Claro. Brasil.