UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC
ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA NA MODALIDADE A DISTÂNCIA

GEORDANE VASCONCELOS GARCIA
JOUBERT JORGE LIMA VIANA

“ABORDAGEM DE FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA – UM ESTUDO DIDÁTICO”

Orientadora: Neri Terezinha Both Carvalho

Santa Quitéria do Maranhão

2009

GEORDANE VASCONCELOS GARCIA
JOUBERT JORGE LIMA VIANA

"ABORDAGEM DE FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA – UM ESTUDO DIDÁTICO"

Monografia apresentada ao curso de Pós-graduação da Universidade Federal de Santa Catarina, projeto em conjunto com a Universidade Virtual do Estado do Maranhão, para obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Orientadora: Neri Terezinha Both Carvalho

Santa Quitéria Do Maranhão

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Programação Linear: Abordagem de funções Trigonométricas - Um Estudo Didático"

Monografia submetida a Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 08/07/2009

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho (CFM/UFSC - Orientadora)
Dr. Méricles Thadeu Moretti (CFM/UFSC - Examinador)
Drª. Sonia Elena Palomino Bean (CFM/UFSC – Examinador)

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, julho de 2009

A Deus, uno e Santo, que todos os dias nos abençoa e revitaliza nossas forças para seguirmos sempre em frente nessa jornada.

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaríamos de agradecer a banca pelas contribuições e sugestões para o nosso trabalho, que foi formada pelo Professor Méricles Thadeu Moretti, a Professora Sonia Palomino Bean e a Professora Nerí Terezinha Both Carvalho nossa orientadora de monografia a quem queremos agradecer de uma forma muito especial, pois sempre se mostrou presente nas trocas de mensagens virtuais onde nos orientava, facilitava, incentivava e sugeria para a melhora de nossa produção.

Eu, Geordane gostaria também de agradecer a toda a minha família, minha esposa Zildênia Silva Peixoto, minhas filhas Nicoly Peixoto Garcia e Ágda Peixoto Garcia e minha querida mãe Maria da Páscoa Vasconcelos Garcia, a qual mesmo se tratando de uma doença grave nunca deixou de me incentivar para que concluísse esse curso.

Eu, Joubert Jorge, gostaria de agradecer a toda minha família, em especial a minha esposa Cristiane Maria Caldas Lima, que foi incansável nos incentivos e no apoio, aos meus filhos Katariny Ketlly Lima Viana e Jorge Emanuell Lima Viana, a minha querida mãe Francisca das Chagas Lima Viana e meu pai Francisco das Chagas Viana, que estiveram juntos comigo na conquista do conhecimento.

Em seguida aos nossos amigos do curso de Especialização em Matemática Nemésio Rodrigues da Silva Filho, Rubens Lopes Netto e Joel Castelo Branco, também ao pessoal do pólo tecnológico de Brejo/Univima, em especial a Joiziane Martins, Ítallo Wagner Costa do Nascimento e Ana Maria Morais Costa.

“A mente humana é como um grande teatro. Seu lugar não é na platéia, mas no palco, brilhando na sua inteligência, alegrando-se com a suas vitórias, aprendendo com suas derrotas e trinando a cada dia para ser... o autor de sua história, o líder de si mesmo”.

Augusto Cury

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No exercício da profissão de professor do ensino médio, constatei em sala de aula e ao preparar minhas aulas consultando livros didáticos, não somente a dificuldade dos alunos em estudar, mas, eu enquanto professor sentia dificuldade em ensinar as funções trigonométricas, principalmente o que diz respeito ao domínio das funções trigonométricas.

Fato este que fica evidenciado, uma vez que é pratico a determinação dos valores do seno e cosseno quando estudamos no circulo trigonométrico e estamos falando de ângulos medidos em graus.

Ao fazermos esboços de gráficos marcamos sobre o eixo real medidas em radianos, e então estamos trabalhando no conjunto dos reais. Fica a nosso ver identificada aí uma ruptura. Para o estudante não fica claro que este domínio e conjunto dos reais.

Uma primeira questão que se coloca é:

Como levar o aluno a entender a medida dos ângulos para medida em radianos?

A resposta a esta questão nos parece não ser muito problemática. A nosso ver entender que ao medir os ângulos em radianos, temos medidas de comprimento de arco e então expressarmos estas medidas por números reais é que estar à dificuldade. Note que no contexto já está embicada a questão da periodicidade da função. Então neste trabalho buscamos estudar elementos de resposta a questão:

Como é feita, como fazer a abordagem para ensinar que o domínio das funções seno e cosseno é os reais?

Para isto, desenvolvemos este trabalhamos em 3 capítulos:

No capítulo 1, primeiramente buscamos estudar o conceito de funções ao longo da história e o conceito de função formal, aceito pelos matemáticos. Nesse estudo identificamos como foi difícil e lento o processo para se chegar ao conceito atual de funções em que $f: D \rightarrow Y$ *uma lei que associa elementos* *de um conjunto D, chamado o domínio da função, a elementos de um outro conjunto Y, chamado o contradomínio da função.* Descrevemos a contribuição que cada matemático deu para formular esse conceito, seguido da apresentada da função de Euler E: $\mathbb{R} \rightarrow C$ que formula o conceito de função seno e de função cosseno no circulo trigonométrico objeto de estudo deste trabalho.

No capítulo 2 usamos a Teoria Antropológica do Didático elaborada por Chevallard para estudar os livros didáticos **"Aula por Aula" – 1ª série, Xavier e Barreto – 2005** e **"MATEMÁTICA CONTEXTOS & APLICAÇÕES" – 2º ANO, DANTE 2003**, e através dos elementos praxeológicos: *Organização Didática e Organização Matemática*, procuramos mostrar como as funções trigonométricas são abordadas em cada livro didático. Os momentos que formula a *Organização Didática* nos ajudou a conhecer a Organização Didática de cada livro e busca respostas de como o objeto de estudo é ensinado e estudado. Já a *Organização Matemática* nos mostrou que tipos de tecnologia e de técnica são abordadas nas resoluções das tarefas encontradas nos livro.

Apresentamos no capítulo 3 elementos da teoria da *Engenharia Didática* de Regina Dudy e elaboramos uma Sequência Didática composta de três exercícios que foram elaborados e resolvidos de varias maneiras. O objetivo é de propõe uma melhor compreensão do domínio das funções seno e cosseno.

Não fizemos a análise a posteriori deste trabalho por falta de tempo, mas faremos a sua aplicação ao longo do exercício de nossa profissão de professor.

Após a sequência, apresentamos as considerações finais.

CAPITULO – 1

1. Elementos da Evolução Histórica de Funções

Nestes parágrafos apresentamos alguns elementos da história sobre o conceito de função.

Dificuldades encontradas pelos matemáticos de cada época e suas contribuições para o avanço da matemática, mesmo que em alguns momentos a passos lentos, e a evolução até chegarmos à atualidade, pois, este conceito como conhecemos hoje e as notações como usamos na atualidade são muito recentes para falarmos em dados históricos.

Somente no século XIX, a idéia de função ganhou a forma matemática conhecida e usada hoje.

1.1 Oresme e as primeiras evoluções

Oresme (1323-1382) generalizou a teoria da proporção de Bradwardine, aqui ele se esforçava por exprimir, por exemplo, o que escreveríamos como $x^{\sqrt{2}}$, e isso pode ser a primeira sugestão na história da matemática de uma função transcendente. As discussões eram interminavelmente prolixas, pois os instrumentos de análise disponíveis eram inadequados. Apesar dessa falta, os lógicos em Merton College tinham obtido um importante teorema quanto ao valor médio de uma forma "uniformemente diforme". Oresme conhecia bem esse resultado, e ocorreu-lhe em algum momento antes de 1361 um pensamento brilhante – por que não traçar uma figura ou gráfico da maneira pela qual variam as coisas? Vemos aqui, é claro, uma sugestão antiga daquilo que agora chamamos representação gráfica de funções. (Boyer, 1974, p. 192)

1.1.2 Leibniz

Leibniz (1646-1716) não é responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra "função", praticamente o mesmo sentido em que é usada hoje. Jean (1667-1748) e Jacques Bernoulli (1654 –

1705) redescobriram as séries para $sen\, n\theta$ e $\cos n\theta$, em termos de $sen\, \theta$ e $\cos \theta$, que Viéte conhecia, e estenderam tais séries, sem exame, incluindo valores fracionários de n. Jean percebeu também a relação entre as funções trigonométricas inversas e os logaritmos imaginários, descobrindo em 1702, através de equações diferenciais, a relação:

$$arctg\, z = \frac{1}{i} \ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$

Jean inclinava-se a desenvolver a trigonometria e a teoria dos logaritmos de um ponto de vista analítico, e experimentou várias notações para a função de x , das quais a mais próxima da moderna foi $\emptyset(x)$. Seu vago conceito de função era expresso como "uma quantidade composta de qualquer modo de uma variável, e constantes quaisquer". (Boyer, 1974, p. 311)

1.1.3 Idade de Euler

Pode ser dito com justiça que Euler (1707-1783) fez pela análise infinita de Newton e Leibniz o que Euclides fizera pela geometria de Eudoxo e Teaetetus,

Euler tomou o cálculo diferencial e o método dos fluxos e tornou-os parte de um ramo mais geral da matemática que a partir daí é chamado "análise", então a *Introductio in analysin infinitorum* de Euler pode ser considerada como a chave de abóbada da analise. Esse importante tratado em dois volumes de 1748 serviu como fonte para os florescentes desenvolvimentos da matemática durante toda a segunda metade do século dezoito. Dessa época em diante a idéia de "função" tornou-se fundamental na análise. E estava implícita na geometria analítica de *Fermat e Descartes*, bem como no Cálculo de Newton e Leibniz.

O quarto parágrafo da *Introductio* define função de uma quantidade variável como "qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes". (Às vezes Euler pensava em função menos formalmente e mais geralmente como a relação entre as duas coordenadas de pontos sobre uma curva traçada à mão livre sobre um plano). Hoje tal definição é inaceitável, pois não explica o que é "expressão analítica". Euler presumivelmente tinha em mente primariamente as funções algébricas e as funções transcendentes elementares; o tratamento estritamente analítico das funções trigonométricas foi, na verdade, em larga medida estabelecido pela *Introductio*. O seno, por exemplo, já não era um segmento de reta; era simplesmente um número ou uma razão – a ordenada de um ponto sobre um círculo unitário, ou o número definido pela série:

$$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots$$

Para um valor de $\mathbf{z}$. Dessas séries infinitas para e^x, $sen\ x$ e $\cos x$ passavam-se facilmente às "identidades de Euler".

$$sen\ x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2}$$

$$e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1}\ sen\ x$$

Relações que em essência eram conhecidas por Cotes e De Moivre, mas que nas mãos de Euler tornaram-se instrumentos familiares da análise. Euler usara expoentes imaginários em 1740 numa carta a Jean Bernoulli em que escreveu:

$$e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos x$$

As familiares identidades de Euler apareceram na influente *Introductio* de 1748. As funções transcendentes elementares – trigonométricas, logarítmica, trigonométricas inversas e exponenciais – eram escritas e pensadas praticamente na forma em que são tratadas hoje. As abreviações

sen, cos, $tang$, cot, sec e $cosec$, que foram usadas por Euler nas *Introductio* em latim, são mais próximas das formas atuais em inglês do que as abreviações correspondentes das línguas latinas. (Boyer, 1794, p. 327)

1.2 A aritmetização da análise

Bolzano (1781-1848) tentou dar provas puramente aritmética de preposições, tais como o teorema de locação na álgebra elementar, que pareciam depender de propriedades de funções contínuas. O século dezenove foi de fato um período de correlação na matemática, e a aritmetização da análise, frase cunhada por Klein em 1895, era um aspecto dessa tendência.

A palavra chave na análise, é claro, é "função", e foi especialmente no esclarecimento desse termo que surgiu a tendência à aritmetização. Já antes do meio do século dezoito tinham surgido diferenças de opinião quanto à representação de funções, quando d'Alembert e Euler tinham dado soluções do problema de uma corda vibrante em "forma fechada". Usando duas funções arbitrárias, ao passo que Daniel Bernoulli achara uma solução em termos de uma série infinita de funções trigonométricas. Como essa última solução parecia implicar periodicidade, ao passo que as funções arbitrárias de d'Alembert e Euler não eram necessariamente periódicas, parecia que a solução de Bernoulli era menos geral. Que isso não era assim mostrado em 1824 por J. B. J. Fourier (1768-1830).

Joseph Fourier mais conhecido hoje por seu célebre *Théorie analytique de La chaleur* de 1822. Esse livro, descrito por Kelvin como "um grande poema matemático", a principal contribuição de Fourier e seu livro clássico à matemática foram à idéia, vagamente percebida por Daniel Bernoulli, de que qualquer função $y = f\ (x)$ pode ser representada por uma série da forma:

$$y = \frac{1}{2}a_0 + a_1 cos\ x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx + \ldots$$
$$+ b_1 sen\ x + b_2 sen\ 2x + \ldots + b_n sen\ nx + \ldots$$

Foi H. C. R. (Charles) Meray (1835-1911) da Borgonha, Karl Weierstrass (1845-1918), da Universidade de Berlim, seu aluno H. E. Heine (1821-1881) de Halle, Georg Cantor (1845-1918), também de Halle, e J. W. R. Dedekind (1831-1916) de Braunschweig, num certo sentido representaram o clímax de meio século de investigação sobre a natureza da função e do número que começara em 1822 com a teoria do calor de Fourier e com uma tentativa feita naquele mesmo ano por Martin Ohm (1792-1872).

Havia duas causas principais de inquietação, uma era a falta de confiança nas operações executadas sobe séries infinitas. Não era sequer claro se ou não uma série infinita de funções – de potências, ou de senos e co-senos, por exemplo, sempre converge à função de que provém. A outra era a falta de qualquer definição da expressão "número real". Mesmo a função contínua e não derivável de Bolzano de cerca de 1830 foi esquecida pelos sucessores, e o exemplo de uma tal função dado por Weierstrass (em aulas dadas em 1861 e num artigo para a Academia de Berlin de 1872) em geral foi considerado como a primeira ilustração do fato. (Boyer, 1974, pp. 404, 408)

1.3 Um início – listagem de valores: as tábuas

Na Antiguidade a idéia de função aparece embrionariamente, como, por exemplo, entre os babilônios na produção de tábuas. Efetivamente, os babilônios foram exímios produtores de tábuas matemáticas. Uma das remanescentes traz os valores de $n^3 + n^2$, para n = 1, 2, 3,..., 20, 30, 40 e 50. Obviamente, não seria forçado associá-la à função f cujo domínio é {1, 2, 3,..., 29, 30, 40, 50} e que está definida por $f(x) = x^3 + x^2$. Mas, como possivelmente essa tábua foi construída para permitir a resolução de equações do tipo: $x^3 + x^2 = c$, pode-se ver nela o germe da idéia de função inversa. De fato, ao se resolver a equação $x^3 + x^2 = 80$, por exemplo, o que se procura é o número n tal que $f(n) = 80$, ou seja, a "imagem" de 80 pela "função inversa" de f.

Cláudio Ptolomeu (século II d.C.) em sua obra-prima, *O almagesto* (composta de 13 livros), deu um grande passo nessa matéria. Em seu livro I há uma tábua com as cordas dos arcos $\frac{1^o}{2}$ a 180^o em intervalos de $\frac{1^o}{2}$. (A Tábua não encontramos, por isto não apresentamos aqui).

Essas cordas são, na verdade, os ancestrais mais remotos de nossos senos. Como Ptolomeu usou também suas tábuas em sentido contrário, para achar, por exemplo, o arco de uma dada corda, é aplausível dizer que a idéia de função inversa também está presente em sua obra. Mas o grande passo de Ptolomeu consistiu em mostrar como interpolar linhas em sua tábua, para qualquer valor da "variável independente" (o arco), o que sugeria um caminho para um estudo computacional de fenômenos contínuos. Identificamos nestes ensaios, um germe do conceito de função e de manipulação de função inversa. (Hygino Domingues, 2003, p. 92)

1.4 A evolução da formulação do conceito de função

Na segunda metade do século XVII, o matemático alemão G. W. Leibniz (1646–1716) usaria pela primeira vez a palavra "função". Também se deve a Leibniz a introdução das palavras "variável", "constante" e "parâmetro", hoje corriqueiras na linguagem matemática. Mas a notação $f(x)$ para indicar uma função só seria introduzida em 1734 pelo matemático suíço L. Euler (1707-1783). Só, aos poucos é que o conceito foi-se tornando independente de curvas particulares e passando a significar a dependência de uma variável em termos de outras. Mas, mesmo assim, por todo o século XVIII, o conceito de função permaneceu quase só restrito à idéia de uma variável (dependente) expressa por alguma fórmula em termos de outra, ou outras variáveis (independente). (Hygino Domingues, 2003, pp. 92, 93).

1.5 Uma definição formal do conceito de função

A definição mais geral de função que utilizamos hoje e que é dada logo a seguir evoluiu principalmente dos trabalhos de Fourier e Dirichlet no século XIX.

Sejam A e B dois conjuntos, chamamos de função do conjunto A no conjunto B a uma regra que cada elemento de A associa um único elemento de B e denotamos simbolicamente por:

$$f: A \to B$$

$$a \rightsquigarrow f(a)$$

Onde para cada $a \in A$ está associado um único $b = f(a) \in B$, através da regra que defini f. Chamamos A de domínio da função f e B de contradomínio da função f. (Adilson Gonçalves, Introdução à álgebra, 2007, 5.ed. pp. 3,4)

Nós queremos olhar agora para as funções trigonométricas que são nosso objeto de estudo $sen: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, a qual usaremos para apresentação a relação fundamental de Euler: $cos^2\, \alpha + sen\, ^2\alpha = 1$. Essa equação sugere que para todo ângulo α, temos que o $cos\, \alpha$ e $sen\, \alpha$, são coordenadas de um ponto da circunferência de raio 1, e o centro na origem de $\mathbb{R}^2$.

No circulo unitário, temos $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$

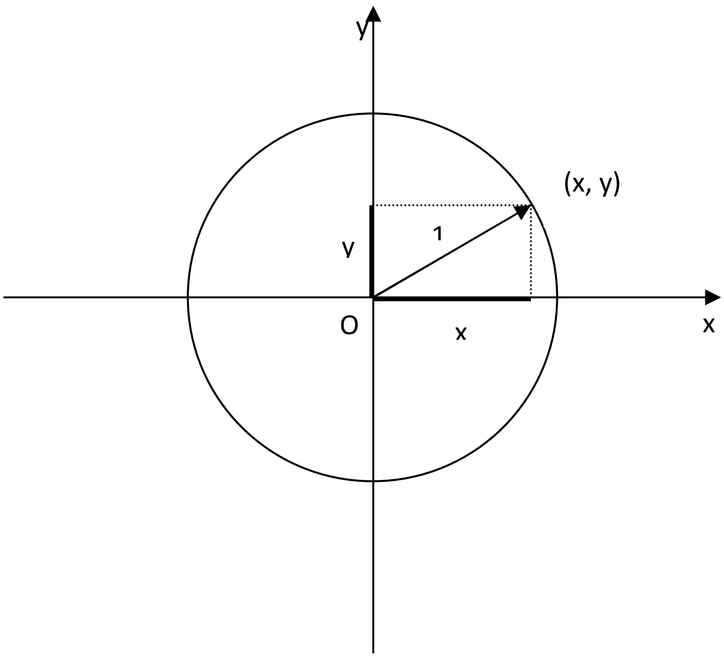


Figura-1, A Matemática do Ensino Médio, volume 1, p. 217

É lógico observar que, para todo ponto (x,y) pertencente a C, tem-se: $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$. A maneira natural de definir as funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler $E: \mathbb{R} \longrightarrow C$, que faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x,y)$ da circunferência unitária. A função de Euler $E: \mathbb{R} \longrightarrow C$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensando como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1,0) \in C$. (LIMA, E. A Matemática do Ensino Médio, Volume 1, pp. 218 - 219)

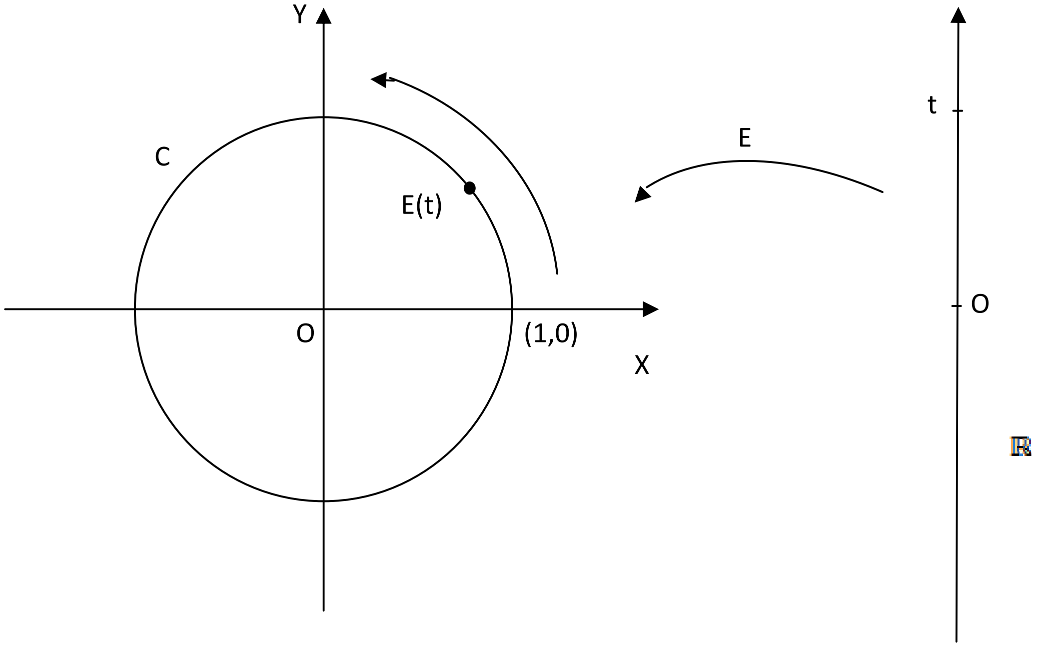


Figura-2, A Matemática do Ensino Médio, volume 1, p. 219

Assim, sempre que t é descrito na reta como um intervalo na reta, $E(t)$ também descreve na circunferência C um arco de igual comprimento ℓ. Como o comprimento da circunferência C é de 2π, $E(t)$ ao descrever esse percurso de 2π , volta sempre ao inicio da mesma, logo $E(t+2\pi) = E(t)$. De forma geral temos que $E(t) = E(t)$ se, e somente se, $t' = t + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, levando em consideração que se $t' > t$, vale $k \in \mathbb{N}$ quando $t' < t$, tem-se $k < 0$, pois o comprimento percorrido por $E(s)$ é, por definição, igual à distância percorrida por s sobre a reta $\mathbb{R}$.

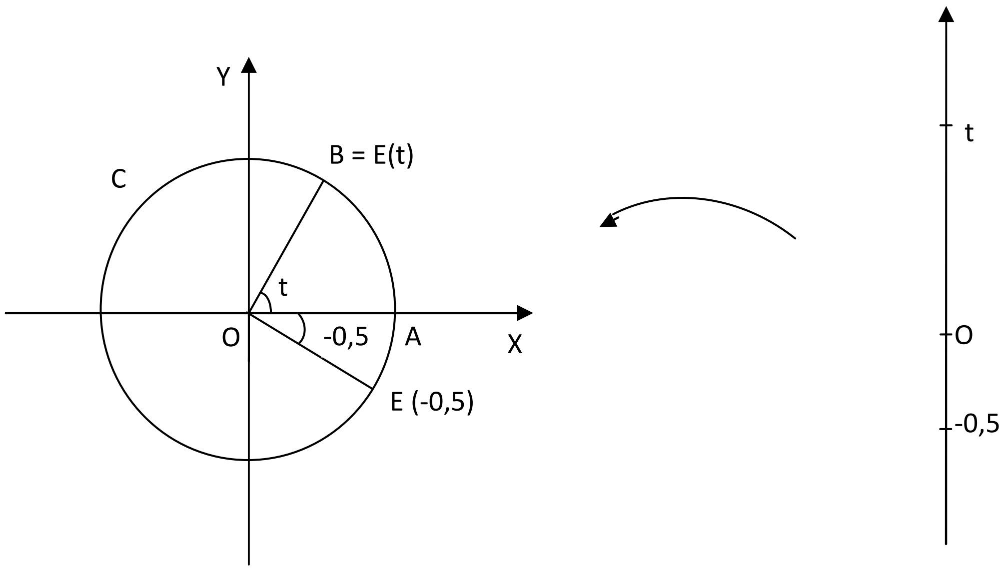
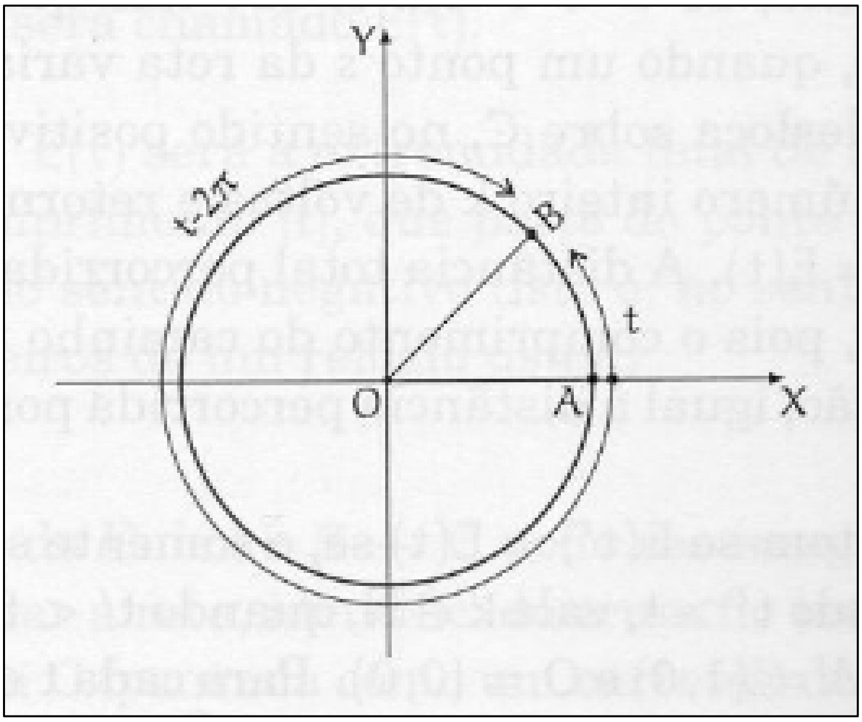


Figura-3, A Matemática do Ensino Médio, volume 1, p. 220

Ao visto pode-se ter $B = E(t)$ com $t < o$, o que nos leva a dizer que é permitido a um ângulo ter medida negativa, logo, o ângulo de 1 radiano é também um ângulo de $1 - 2\pi$ radianos, assim temos de forma geral que: $B = E(t - 2\pi)$, pois existem dois arcos que vão de $A = (1, 0)$ até B, um de comprimento $|t|$e outro de comprimento $|t - 2\pi|$.



O mesmo pode-se definir para os arcos em graus levando em conta que $2\pi = 360^o$, assim teremos ângulos com valores reais positivos (no sentido anti-horário) e negativos (no sentido horário) da circunferência. Sempre visando nosso objeto de estudo que é o domínio das funções seno e cosseno.

Agora apresentaremos os estudos realizados nos livros didáticos, e a representação do domínio das funções como os reais.

CAPITULO – 2

2. Saber a Ensinar

Neste estudo, buscamos conhecer o que e quais os saberes estão propostos nos livros didáticos do Ensino Médio no contexto da abordagem do conceito de função trigonométrica.

Consideramos em nosso estudo que o saber disponível nos livros didáticos do Ensino Médio é um saber a ensinar, visto que, os professores, em geral, usam o livro didático para prepararem as aulas. Os professores escolhem os exercícios, os tópicos, enfim, planejam a abordagem em sala de aula, definindo o saber ensinado.

Tratamos aqui “saber a ensinar”, conforme a designação dada por Chevallard no contexto da “Transposição Didática”. “Saber sábio → saber a ensinar → saber ensinado”. (Chevallard, 1992; Apud MAIA-KUERTEN, C; 2008.)

2.1. Referencial teórico para estudo dos livros didáticos

Para a realização de nosso estudo do saber a ensinar, usaremos como referência alguns conceitos da Teoria Antropológica do Saber, também conhecida por Teoria Antropológica do Didático, o qual apresentará a seguir.

2.1.2 Elementos da teoria antropológica:

Chevallard ao elaborar a “Teoria Antropológica” considera como postulado de base que toda atividade humana regularmente realizada pode ser descrita por um modelo que Chevallard designa como uma praxeologia. (Chevallard – 1991).

2.1.3 Conceito de “praxeologia didática”

A praxeologia didática tem lugar quando buscamos resposta a questão: Como ensinar tal saber matemático?

Por exemplo, em nosso trabalho, nosso objetivo é buscar resposta a questão: como ensinar as funções:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

  $f(x) = sen\, x$, e

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

  $f(x) = cos\, x$.

Identificar no livro didático os elementos de resposta a esta questão, nos leva a formulação da Organização didática do conceito destas funções, enquanto saber a ensinar.

2.1.4 Organização Didática:

Segundo Chevallard, as organizações didáticas é a busca por respostas de questões do tipo: “Como estudar um objeto?”, “como ensinar o objeto matemático?”. Chevallard diz que no processo aprendizagem surgem situações diferentes chamadas de momentos didáticos, tais momentos se apresentam em seis tipos diferentes.

No Primeiro momento o encontro pode se dá através do tipo de tarefa e nesse momento deve surgir um tipo de técnica que resolve a tarefa.

No segundo momento é a exploração da tarefa e elaboração da técnica voltada ao tipo do objeto matemático.

No terceiro momento é a construção do bloco tecnológico-teórico destinado à técnica escolhida.

No quarto momento se institucionaliza a organização matemática desejada.

No quinto momento a organização matemática é trabalhada e a aplicação das técnicas é estabelecida para o objeto matemático. Nesse momento se verifica as limitações e a confiabilidade das técnicas.

No sexto momento uma avaliação permite se a organização matemática foi aprendida junto com as competências desenvolvidas.

2.1.5 Conceito de “praxeologia matemática” ou “Organização Matemática.”

Em uma Organização Matemática identificamos: tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

• **Tarefa**

A noção de tarefa, ou mais precisamente do tipo de tarefa, supõe um objetivo relativamente preciso. Por exemplo: “subir uma escada” é um tipo de tarefa, porém somente “subir”, é um gênero de tarefa.

Segundo Chevallard, “concretamente um gênero de tarefa somente existe sobre a forma de diferentes tipos de tarefas”. “Enfim, tarefas, tipos de tarefas, gêneros de tarefas, não são dados pela natureza: elas são “artefatos”, “obras”, que são reconstruídas em cada instituição específica...”. (Chevallard – 1991).

Segundo Chevallard, uma tarefa pode ser problemática ou não. Ela não é problemática quando o aluno tem o domínio de uma técnica para resolvê-la.

• **Técnica**:

Técnica é uma maneira de realizar certo tipo de tarefa. Toda técnica tem uma “competência” limitada. Ainda, uma técnica não é necessariamente algorítmica ou quase algorítmica.

• **Tecnologia**:

A tecnologia se compõe dos elementos da teoria que validam a técnica utilizada na realização de determinada tarefa. Compõem a tecnologia: proposições, propriedades, definições, teoremas etc. Os elementos da tecnologia podem modificar a técnica e ampliar seu alcance, dando, assim, a produção de uma nova técnica.

Chevallard diz que: “[...] uma segunda função da tecnologia é de explicar, de tornar a técnica entendível, de esclarecer a técnica.” (Chevallard – 1991).

• **Teoria**:

Segundo Chevallard a teoria é o discurso suficientemente amplo que serve para interpretar e justificar a tecnologia. Podemos dizer que a teoria é a tecnologia de sua tecnologia. De alguma maneira, é o fundamento último da atividade que vai além do que parece óbvio e natural, sem necessidade de nenhuma justificativa.

2.2. Estudos da Organização Praxeológica referente ao objeto matemático funções trigonométricas nos livros didáticos.

Nosso objetivo, ao estudar livros didáticos da 1ª e 2ª série do ensino médio é identificar como é feita a abordagem das funções trigonométricas seno e cosseno com atenção especial a definição do domínio destas funções, nos conjuntos dos reais.

Para tanto, estudamos a organização praxeológica, ou seja, a organização didática e a organização matemática relativa a este objeto matemático.

Assim nos livros de 1ª e 2ª série do ensino médio estaremos buscando elementos de resposta à questão: como ensinar o conjunto definição destas funções?

Neste trabalho estudamos dois livros didáticos um da 1ª e outro da 2º série do ensino médio.

Restringimos nosso estudo, aos capítulos onde as sessões tratam das funções trigonométricas seno e cosseno enquanto objeto de ensino. Assim, partindo da organização didática identificamos a organização matemática que emerge no contexto das tarefas propostas pelo autor para mobilizar as técnicas e o teórico do objeto de estudo naquela organização.

Em nosso trabalho nos restringimos a estudar os seguintes livros didáticos:

- “Matemática, aula por aula” – 1ª série, Xavier e Barreto 2005.
- “Matemática, contexto e aplicações” – 2ª série, Dante 2003.

Estes livros foram escolhidos para estudos pelo fato de terem sido aprovados pelo MEC[1] (PNLD 2006 e 2009) e por serem muitos utilizados nas escolas de todo Brasil. Destas coleções, já dissemos, escolhemos a da 1ª série e o da 2ª série do ensino médio, pois, em uma coleção o objeto de estudo encontra-se no livro de 1ª série e na outra coleção no livro de 2ª série.

2.3. Estudo do livro didático: "Aula por Aula" – 1ª série, Xavier e Barreto – 2005.

Apresentamos neste estudo a Organização Didática e a Organização Matemática sobre a abordagem do domínio de funções trigonométricas no livro citado acima.

Este livro é organizado em 10 unidades e bibliografia.

Destas 10 unidades, apenas uma aborda as funções trigonométricas. A saber:

Unidade 9 – Trigonometria

Especificamente sobre a função seno e cosseno no ciclo trigonométrico, neste livro vamos estudar a Organização Praxeológica da unidade 9, paginas 327 a 337.

2.3.1 Organização Didática – elementos gerais

De maneira geral, a unidade que trata de trigonometria começa com um texto que conta a origem da trigonometria, seguida de demonstrações que apresentam as razões trigonometrias: seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Depois de uma serie de exercícios resolvidos e outra de exercícios propostos, o autor apresenta o ciclo trigonométrico com as medidas dos ângulos em graus e radianos, seguidos das funções trigonométricas, objeto de estudo deste trabalho. Especificamente sobre as funções seno e cosseno o autor expõe o objeto de maneira muito resumida com ênfase apenas sobre o sinal das funções seno e cosseno, seno e cosseno dos arcos notáveis e gráficos das funções seno e cosseno onde de maneira muito vaga diz que o domínio destas funções são os números reais. Sobre as funções seno e cosseno, apenas dezesseis exercícios resolvidos e propostos são apresentado no livro, o que nos levou a supor que o autor vai retomar este assunto nas próximas séries, contemplando assim um estudo em espiral. O estudo das "Instruções e Orientações Teórico - metodológicas – considerações sobre os objetivos relacionados ao conteúdo temático" vemos que é feita esta abordagem do ensino em espiral quando o autor descreve **"procuramos explorar o conteúdo de trigonometria, compatibilizando-o às necessidades do Ensino Médio. No volume dois, retomamos este assunto, abordando tópicos que o complementam".** A forma de apresentação do livro didático também nos levou a supor que, para o autor, a construção do conhecimento se realiza por intermédio do professor que na apresentação de exercícios já resolvidos irá formular a compreensão dos conceitos a ser aprendido pelos alunos, para em seguida observar se os conceitos realmente foram compreendidos com a ação direta dos alunos pela resoluções de problemas propostos. Este princípio embasa a organização didática deste livro. Nas "Instruções e Orientações Teórico-metodológicas – Apresentação - caro professor" confirmamos esta visão quando o autor descreve: "**Neste cenário, <u>o professor é o principal artífice</u> do processo de ensino e aprendizagem - <u>atuando como mediador</u> entre o <u>possível conhecimento trazido pelo estudante</u> e o <u>conhecimento que a escola pretende transmitir</u>."** (pág. 2, grifo nosso).

2.3.2 Organização Didática e Organização Matemática relativa a uma tarefa.

Tarefas: "Como ensinar as funções trigonométricas"? Mais particularmente ao como ensinar que o domínio da função seno e cosseno é o conjunto dos reais?

a) Unidade 9 – Trigonometria

O estudo da unidade 9 - "Trigonometria" identificamos oito tarefas da Organização Didática sobre "Como ensinar conceitos e domínio das funções trigonométricas seno e cosseno." As tarefas são representadas por "T_{9ku}" onde 9 representa a unidade do livro e *u* varia de acordo com a função estudada.

-T_{9k1}: Ensinar a função seno.

-T_{9k2}: Ensinar o sinal da função seno.

-T_{9k3}: Ensinar o Domínio e a Imagem da função seno.

-T_{9k4}: Ensinar a função cosseno.

-T_{9k5}: Ensinar o sinal da função cosseno.

-T_{9k6}: Ensinar o Domínio e a Imagem da função cosseno.

Apresentamos a organização didática pontual, referente a cada tarefa citada para isto, usaremos os "momentos didáticos".

TarefaT_{9k1}: Ensinar a função seno.

O momento do *primeiro encontro* ocorre quando o autor apresenta o subtítulo: "Função seno", seguido do texto, afirmando que a medida de um arco $\overset{\frown}{AP}$ é um número real x e é denominado seno do arco $\overset{\frown}{AP}$ o valor da ordenada no ciclo trigonométrico.

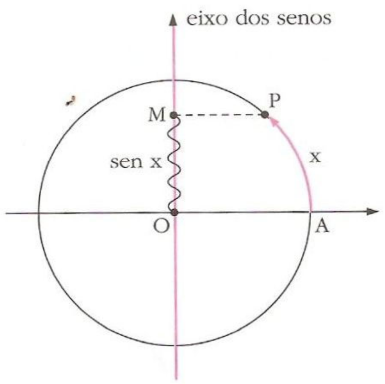
A apresentação do $sen\,x$ como ordenada, representando o valor da medida do arco $\overset{\frown}{AP}$ de comprimento x constitui o momento da *exploração da tarefa*.

Função seno

y = sen x

Considerando um arco AP, cuja medida é o número real x, denominamos seno do arco AP o valor da ordenada do ponto P.

No ciclo trigonométrico:



sen x = $\overline{OM}$

Uma nova medida

Já vimos que podemos associar a cada ponto de um eixo um único número real e vice-versa. Considere dois pontos, R e S, de um eixo e, associados aos números r e s, respectivamente.

R (r) ——— S (s) ——→ e

Chamamos de *medida algébrica* de um segmento $\overrightarrow{RS}$, indicada por $\overline{RS}$, o número dado por $\overline{RS} = s - r$

Exemplos:

A (-6), B (-4), O (0), C (5), D (8) → e

$\overline{AB} = (-4) - (-6) = 2$

$\overline{BC} = 5 - (-4) = 9$

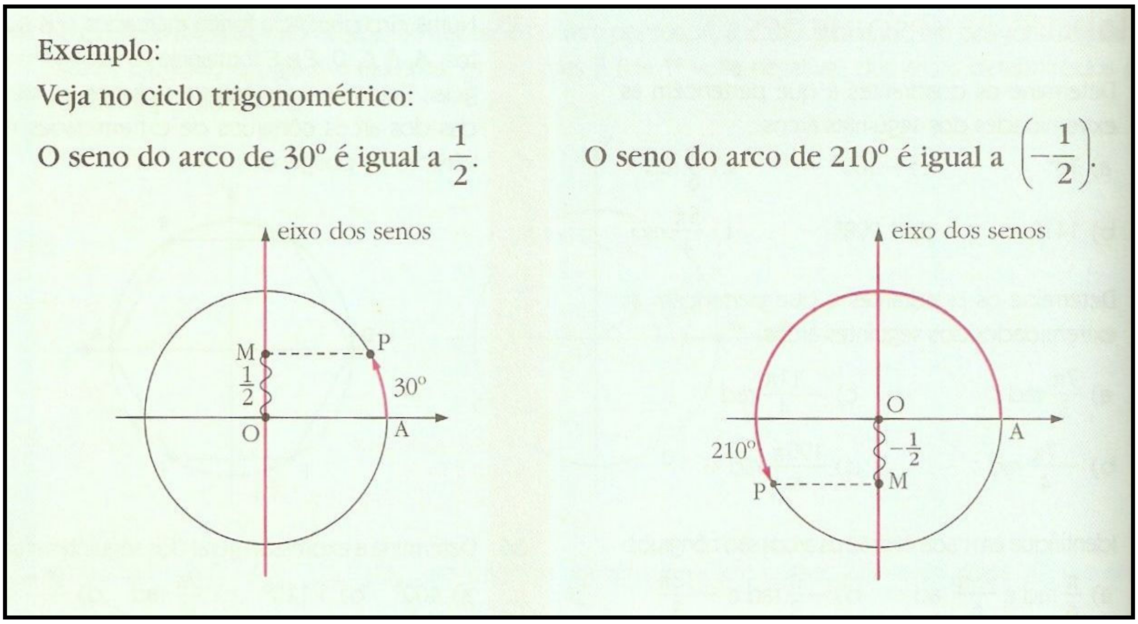
$\overline{CB} = (-4) - 5 = -9$

$\overline{OD} = 8 - 0 = 8$

$\overline{OA} = -6 - 0 = -6$

$\overline{OC} = 5 - 0 = 5$

Na demonstração que é feita dentro do ciclo trigonométrico com os valores dos arcos de 30º e 210º, que tem valore reais de **½** e **-½** nos exemplos que vemos logo abaixo constrói o *bloco tecnológico-teórico*.


Exemplo:

Veja no ciclo trigonométrico:

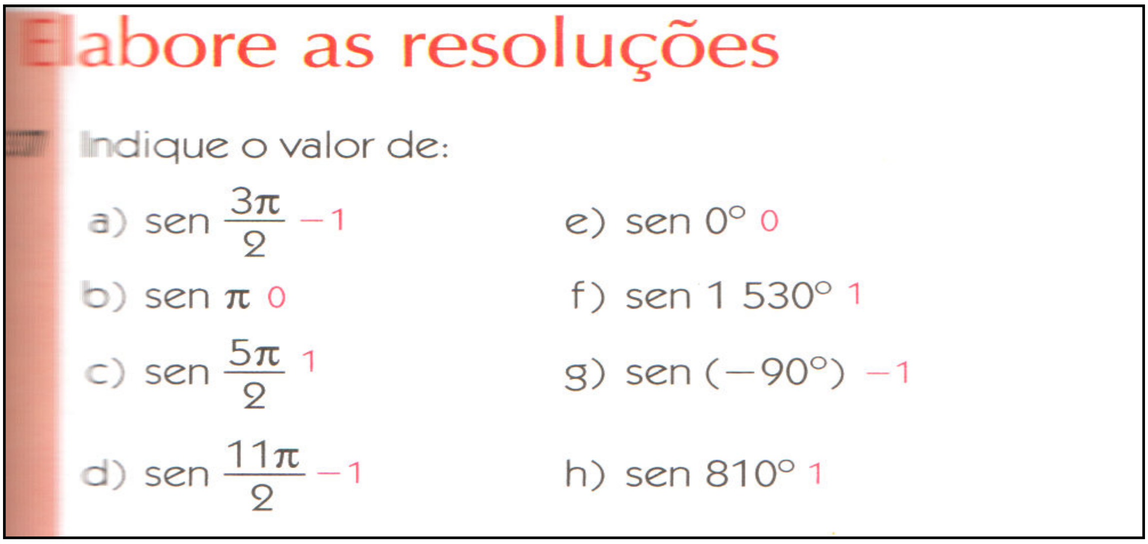
O seno do arco de 30° é igual a $\frac{1}{2}$.

O seno do arco de 210° é igual a $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

A *Organização Matemática* associada à tarefa T_{9k1} é composta de uma única tarefa:

T_1- Indicar os valores do seno:

A tarefa T_1 é composta de um exercício na página 333 em “Elabore as resoluções”.


Elabore as resoluções

Indique o valor de:

a) sen $\frac{3\pi}{2}$ −1

b) sen π 0

c) sen $\frac{5\pi}{2}$ 1

d) sen $\frac{11\pi}{2}$ −1

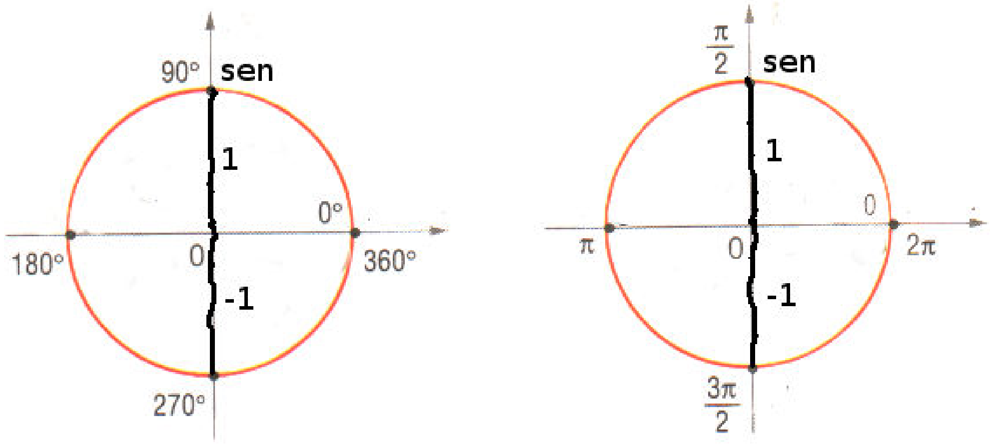
e) sen 0° 0

f) sen 1 530° 1

g) sen (−90°) −1

h) sen 810° 1

Para resolver os exercícios ***a, b, e*** e ***g*** da tarefa, basta que o aluno observe no ciclo trigonométrico unitário, os valores na ordenada correspondentes aos arcos indicados.



Resoluções:

a) $sen\,3\pi/2 = -1$, pois o arco de $3\pi/2$ corresponde o valor na ordenada de – 1.

b) $sen\,\pi = 0$, pois o arco de π vale 0 no eixo das ordenadas.

e) $sen\,0° = 0$, observando no ciclo trigonométrico o arco de 0° corresponde ao arco de 180° e ambos têm valor 0 na ordenada.

g) $sen\,(-90°) = -1$, percorrendo o ciclo trigonométrico no sentido horário (sentido negativo), vemos que o arco de - 90° corresponde ao arco de 270° o qual tem valor de -1 na ordenada.

A *tecnologia* mobilizada na resolução desta tarefa consiste na propriedade "Seno dos arcos notáveis", e a técnica identificada para resolver esses exercícios é a aplicação dessa propriedade.

Na resolução dos exercícios ***c, d, f*** e **h** o aluno precisa aplicar um conhecimento já adquirido anteriormente que é a propriedade dos "Arcos côngruos" que vai permitir ao aluno conhecer o arco de 1ª volta e então aplicar o valor do seno no arco encontrado.

Vejamos as resoluções:

c) $sen\, 5\pi/2 = 1$

Convertendo $5\pi/2\, rad$ em graus, temos 5 . 180°/2 = 450°, como o arco tem mais de uma volta, dividimos por 360° e considere o resto da divisão:

450° $\underline{/\,360°}$, logo o $sen\ 5\pi/2$ é igual ao sen 90°. Então $sen\ 5\pi/2 = 1$

90°   1

d) $sen\, 11\pi/2 = -1$

Fazendo a conversão de $11\pi/2\, rad$ em graus, temos 11 · 180°/2 = 990°, como o arco tem mais de uma volta, dividimos por 360° e consideramos o resto da divisão:

990° $\underline{/\,360°}$, então o $sen\ 11\pi/2$ é igual ao sen 270° que vale – 1.

270°   2

f) $sen\, 1\ 530° = 1$

Como o arco já estar em graus e possui mais de uma volta no ciclo trigonométrico é só dividir por 360° e considerar o resto da divisão:

1 530° $\underline{/\,360°}$,   então o arco de 1 530°, possui 4 voltas completas e um

90°   4   ângulo 90°, logo o $sen\ 1\ 530° = sen\ 90° = 1$.

h) $sen\, 810° = 1$

Veja que o arco também já estar em graus e possui mais de uma volta, então vamos novamente dividir por 360° e considerar o resto da divisão:

810° $\underline{/\,360°}$,   logo o $sen\ 810°$ é igual ao $sen\ 90°$ que é igual a 1.

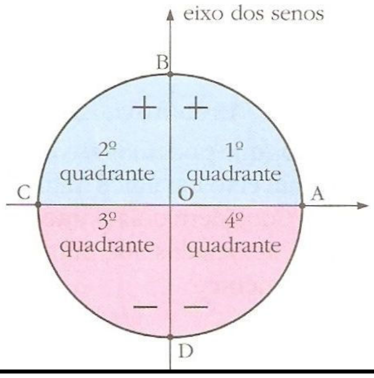
90°   2

Tarefa T_{9k2}: Ensinar o sinal da função seno.

O primeiro encontro com a tarefa $\mathbf{T_{9k2}}$ acontece com o subtítulo *“Sinais”*. O momento da *institucionalização* acontece quando autor demonstra dentro do ciclo trigonométrico e depois numa tabela ao lado os quadrantes onde os valores da função seno são positivos e negativos, como vemos na figura.

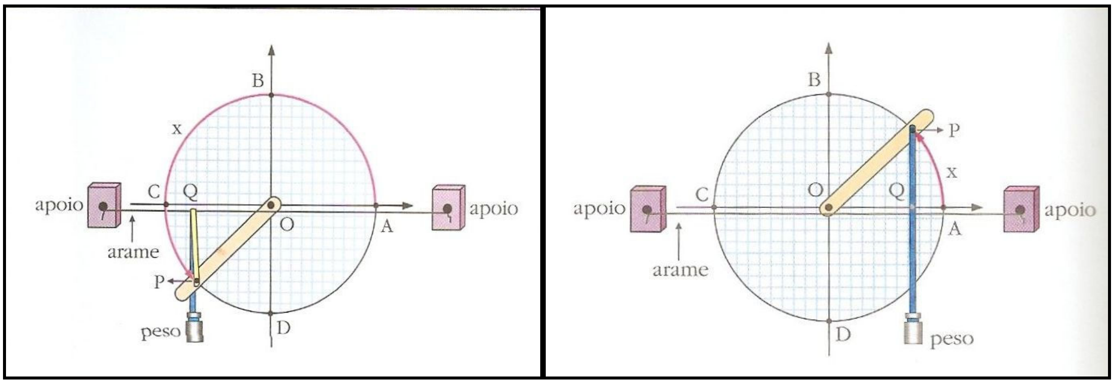
Sinais

Como os valores do seno são marcados no eixo das ordenadas Oy, então o seno será positivo no 1º e 2º quadrantes e negativo no 3º e 4º quadrantes:



Sinais				
Quadrantes	1º	2º	3º	4º
Seno	+	+	−	−

O momento da *construção do bloco tecnológico-teórico* acontece por meio de uma demonstração feita por um desenho de um carretel. Onde o autor sugere que seja desenhado um circulo quadriculado de 1dm de raio e colado sobre uma cartolina, e a este circulo seja fixado: um ponto O (origem do ciclo) com uma tachinha presa a um palito de picolé que representa o raio do ciclo, ao qual terá um peso preso na sua extremidade e uma fita que representará o $sen\ x$. Fazendo tal demonstração observa-se que o $sen\ x$ vai variar de 1 à -1.



Sobre a tarefa $\mathbf{T_{9k2}}$ não encontramos nenhum exercício que contemple a *Organização Matemática* associada a tarefa, ficando no nosso entendimento que o autor deva explorar melhor essa questão no próximo volume de sua coleção e que o professor deva explicar e expõe alguns exemplos que desenvolva tal conhecimento.

Tarefa -T_{9k3}: Ensinar o Domínio e a Imagem da função seno.

O primeiro encontro com a tarefa T_{9k3} ocorre na apresentação do gráfico da função seno, onde fica demonstrado que o domínio da função seno são os reais e a imagem estar no intervalo de -1 a +1, veja figura abaixo:

Como podemos observar a *institucionalização* ocorre nas conclusões que o autor demonstrar, e coloca em destaque que o domínio da função seno é os reais $f(x) = \mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo [-1, 1], ou seja, $Im\ (f) = \{y \in \mathbb{R} /\ -1 \leq y\ \leq\ 1\}$.

Conclusões

- O domínio da função seno é o conjunto dos números reais; portanto, a curva continua à direita de 2π e à esquerda de 0:

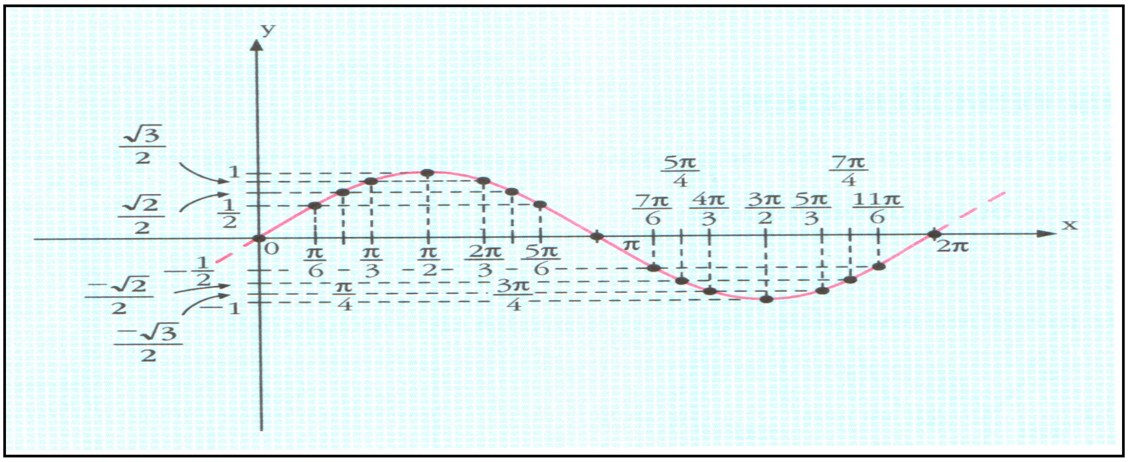
$$D(f) = \mathbb{R}$$

- O conjunto imagem da função é o intervalo $[-1, 1]$; portanto, a função seno assume como valor mínimo -1 e como valor máximo $+1$:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$$

A *aplicação da técnica* ocorre por meio da tarefa T_1

T_1 – Construir o gráfico da função e identificar o conjunto imagem.



Sobre a tarefa T_1 encontramos dois exercícios propostos e um resolvido.

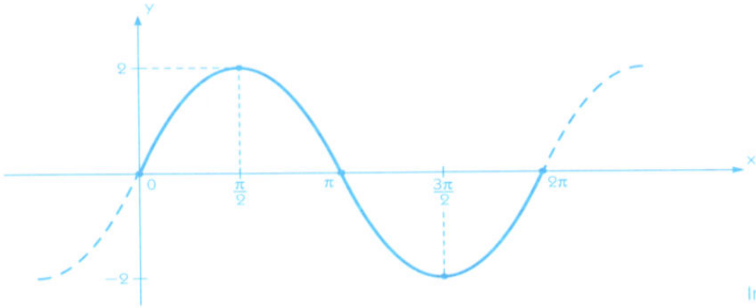
2 Esboçar o gráfico das funções e identificar o conjunto imagem e o período:

a) $y = 2 \text{ sen } x$ b) $y = \text{sen } 2x$ c) $y = |\text{sen } x|$

a) $y = 2 \text{ sen } x$

Construímos a tabela e transferimos os valores para os eixos:

x	**sen x**	**y = 2 sen x**
0	0	$y = 2 \cdot 0 = 0$
$\frac{\pi}{2}$	1	$y = 2 \cdot 1 = 2$
π	0	$y = 2 \cdot 0 = 0$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$y = 2 \cdot (-1) = -2$
2π	0	$y = 2 \cdot 0 = 0$

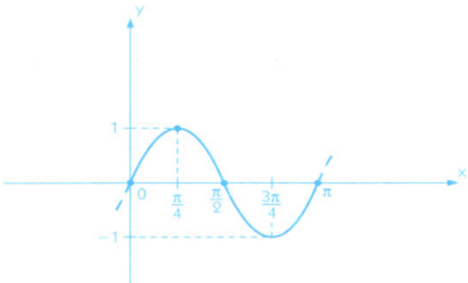


Im = [−2, 2] e perío[illegible]

b) $y = \text{sen } 2x$

Nesse caso, usamos o seguinte artifício: $\begin{cases} 2x = \mu \\ y = \text{sen } \mu \end{cases}$

μ	$\mathbf{x = \frac{\mu}{2}}$	**y = sen μ**
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
2π	π	0

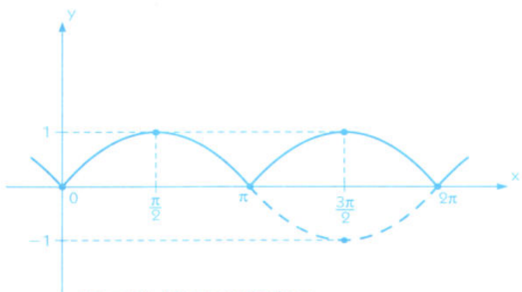


Im = [−1, 1] e o período π

c) $y = |\text{sen } x|$

Inicialmente construímos o gráfico da função $y = \text{sen } x$, fazendo, em seguida, o rebatimento dos pontos situados abaixo do eixo do *x*, obtendo $y = |\text{sen } x|$.

x	**sen x**
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

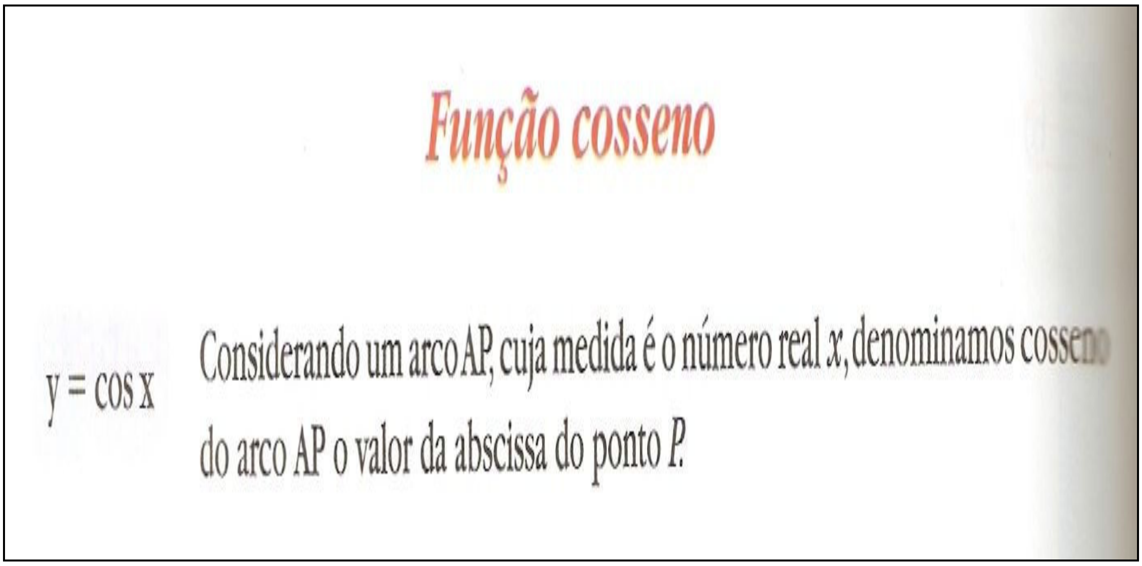


Im = [0, 1] e o período π

No exercício resolvido logo a cima *a* técnica identificada para resolve-lo foi a construção do gráfico da função seno e a propriedade (*tecnologia)* usada para resolver a tarefa é "***Gráfico da função seno (*** $y = sen\, x$ ***)"***. Logo para resolver os dois exercícios propostos é só usar a mesma *técnica e tecnologia* que foi usada no exercício resolvido.

Tarefa-T_{9k4}: Ensinar a função cosseno.

Do mesmo modo que o autor apresenta a função seno, acontece o mesmo com a função cosseno, logo o momento do *primeiro encontro* ocorre quando o autor apresenta o subtítulo: "Função cosseno", seguido do texto, afirmando que a medida de um arco $\widehat{AP}$ é um número real x e é denominado cosseno do arco $\widehat{AP}$ o valor da Abscissa do ponto P no ciclo trigonométrico.


Função cosseno

y = cos x

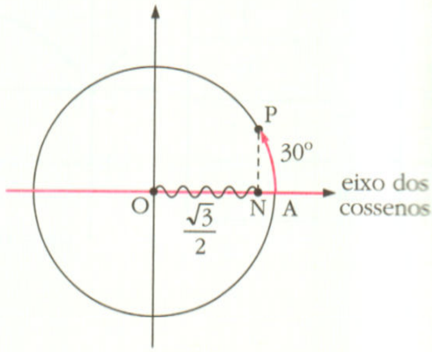
Considerando um arco AP, cuja medida é o número real x, denominamos cosseno do arco AP o valor da abscissa do ponto P.

A construção do bloco *tecnológico-teórico* acontece na demonstração que é feita no ciclo trigonométrico com os valores dos arcos de 30º e 150º, que tem valore reais de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ como mostram os exemplos abaixo:

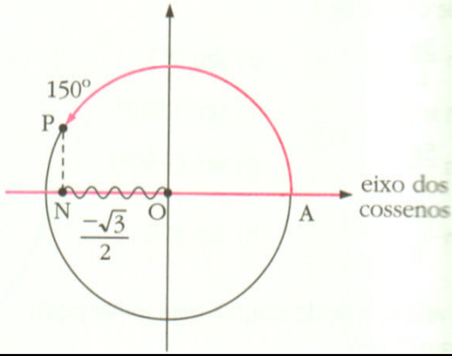
Exemplo:

Veja no ciclo trigonométrico:

O cosseno do arco de 30° é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$



O cosseno do arco de 150° é igual a $-\frac{\sqrt{3}}{2}$



O momento da *aplicação da técnica* e o *momento da avaliação* dão lugar a *Organização Matemática* associada à tarefa: T_{9k4}: Ensinar a função cosseno, que é composta de uma única tarefa:

T_1- Indicar os valores dos cossenos:

A tarefa T_1 é composta de um exercício na página 342 em “Elabore as resoluções”.

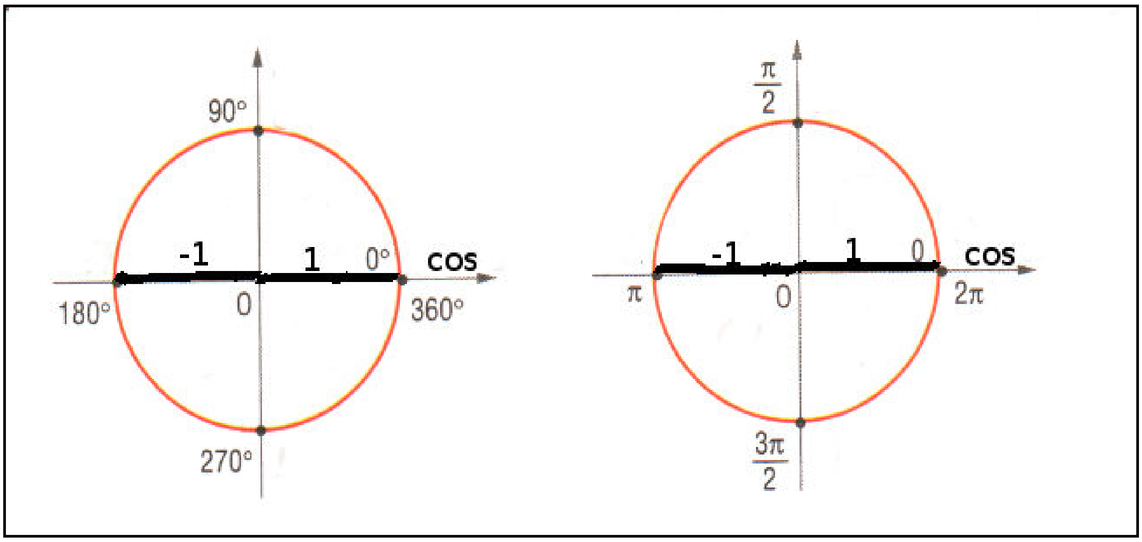
Elabore as resoluções

42 Indique o valor de:

a) $\cos \frac{\pi}{2}$ 0 c) $\cos \frac{5\pi}{2}$ 0 e) $\cos 630°$ 0 g) $\cos (-180°)$ −1

b) $\cos 2\pi$ 1 d) $\cos \frac{7\pi}{2}$ 0 f) $\cos 1\,080°$ 1 h) $\cos 540°$ −1

Do mesmo modo que foi feito para resolver os exercícios da função seno, faremos na função cosseno a diferença é que os valores são trabalhados no eixo das abscissas. Os exercícios ***a, b,*** e ***g*** da tarefa, são resolvidos observando no ciclo trigonométrico unitário, os valores na abscissa correspondente aos ângulos indicados.



Resoluções:

a) $\boldsymbol{cos\ \pi/2\ =\ 0}$, pois o arco de $\pi/2$ corresponde ao valor na abscissa 0.

b) $\boldsymbol{cos\ 2\pi\ =\ 1}$, pois o arco de 2π vale 1 no eixo da abscissa.

g) $\boldsymbol{cos\ (-180^o)\ =\ -1}$, percorrendo o ciclo trigonométrico no sentido horário (sentido negativo), vemos que o arco de -180° corresponde ao arco de 180° positivo o qual tem valor de -1 na abscissa o mesmo valor do arco de 180°.

A *tecnologia* mobilizada na resolução deste tarefa consiste na propriedade “Cosseno dos arcos notáveis”, e a técnica identificada para resolver esses exercícios é a aplicação dessa propriedade.

Na resolução dos exercícios ***c, d, e, f*** e **h** também deve ser aplicado a propriedade dos “Arcos côngruos” que vai permitir ao aluno conhecer o arco de 1ª volta e então aplicar o valor do cosseno no ângulo encontrado.

Vejamos as resoluções de alguns exercícios:

c) $\cos 5\pi/2 = 0$

Convertendo $5\pi/2\, rad$ em graus, temos 5·180°/2 = 450°, como o arco tem mais de uma volta, dividimos por 360° e consideramos o resto da divisão:

450° <u>/ 360° ,</u> logo o $\cos 5\pi/2$ é igual ao $\cos 90°$. Então $\cos 5\pi/2 = 0$.

90° 1

Veja que para o seno do mesmo ângulo o valor encontrado foi 1, enquanto que para o cosseno o valor é 0, pois se encontra no eixo da abscissa.

f) $\cos 1\,080° = 1$

Como o arco já estar em graus e possui mais de uma volta é só dividir por 360° e considerar o resto da divisão:

1 080° <u>/ 360°</u>

0° 3

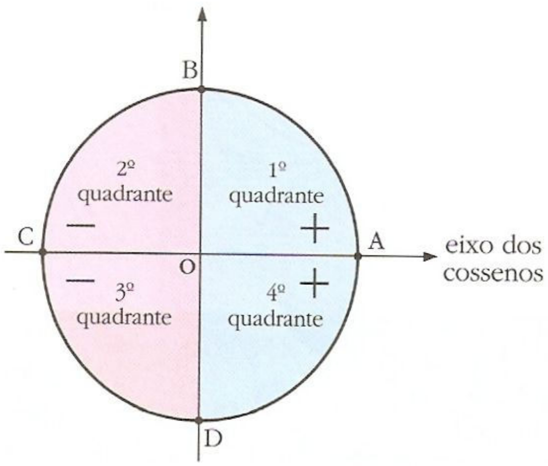
Então o arco de 1 080°, possui 3 voltas completas e pará na origem da circunferência com arco de 0°, logo o $\cos 1\,080° = \cos 0° = 1$.

Tarefa -T_{9k5}: Ensinar o sinal da função cosseno.

O momento do primeiro encontro com a tarefa $\mathbf{T_{9k5}}$ acontece com o subtítulo *"Sinais"*. Acompanhado do parágrafo onde o autor descreve que os valores do cosseno estão no eixo das abscissas e que o cosseno será positivo no 1º e 4º quadrante e negativo no 2º e 3º quadrante.

> **Sinais**
>
> Como os valores do cosseno são marcados no eixo das abscissas Ox, então o cosseno será positivo no 1º e 4º quadrantes e negativo, no 2º e 3º quadrantes.

A figura abaixo mostrar que o momento da *institucionalização* acontece quando autor demonstra no ciclo trigonométrico e depois numa tabela ao lado os quadrantes onde os valores da função cosseno assumem valores positivos e negativos.

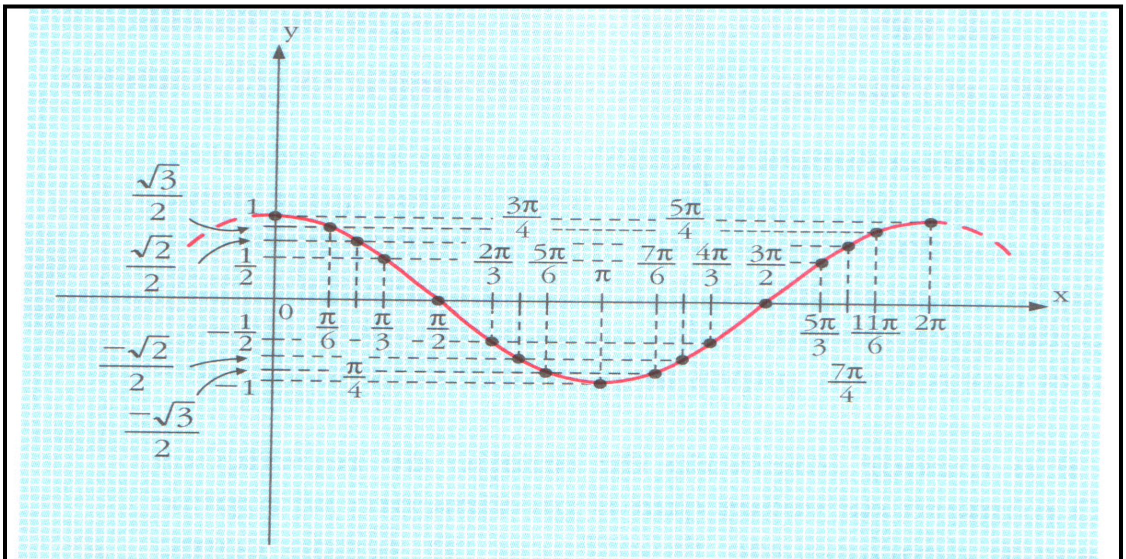


Sinais				
Quadrantes	1º	2º	3º	4º
Cosseno	+	−	−	+

Sobre a tarefa **T_{9k5}** também não encontramos nenhum exercício que contemple a *Organização Matemática* associada à tarefa, nos levando a supor que o mesmo entendimento feito na abordagem da função seno será feito na função cosseno.

Tarefa -T_{9k6}: Ensinar o Domínio e a Imagem da função cosseno.

O *momento do primeiro encontro* com a tarefa T_{9k6} acontece na apresentação do gráfico da função cosseno, onde fica demonstrado que o domínio da função cosseno são os reais e a imagem estar no intervalo de -1 a +1, veja figura abaixo:



O momento da *institucionalização* ocorre nas conclusões que o autor demonstrar, e coloca em destaque que o domínio da função é os reais $D(f) = \mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo [-1, 1], ou seja, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, -1 \leq x \leq 1\}$.

Conclusões

- O domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais; portanto, a curva continua à direita de 2π e à esquerda de 0:

$$D(f) = R$$

- O conjunto imagem da função é o intervalo $[-1, 1]$; portanto, a função cosseno assume como valor mínimo -1 e como valor máximo, $+1$:

$$Im(f) = \{y \in R \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

A *aplicação da técnica* ocorre por meio da tarefa T_1

T_1 – Construir o gráfico da função e identificar o conjunto imagem.

Sobre a tarefa T_1 encontramos dois exercícios propostos e um resolvido.

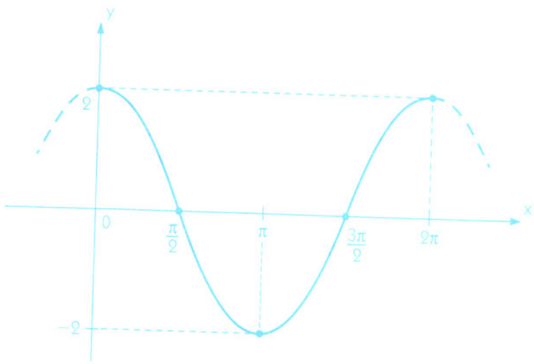
2 Esboçar o gráfico das funções e identificar o conjunto imagem e o período:

a) $y = 2 \cos x$ b) $y = \cos 2x$ c) $y = |\cos x|$

a) $y = 2 \cos x$

Construímos a tabela e transferimos os valores para os eixos:

x	cos x	y = 2 cos x
0	1	$y = 2 \cdot 1 = 2$
$\frac{\pi}{2}$	0	$y = 2 \cdot 0 = 0$
π	-1	$y = 2 \cdot (-1) = -2$
$\frac{3\pi}{2}$	0	$y = 2 \cdot 0 = 0$
2π	1	$y = 2 \cdot 1 = 2$

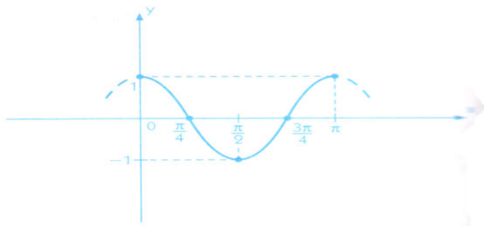


Im = [2, −2] e período 2π

b) $y = \cos 2x$

Nesse caso, usamos o seguinte artifício: $\begin{cases} 2x = \mu \\ y = \cos \mu \end{cases}$

μ	$x = \frac{\mu}{2}$	$y = \cos \mu$
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
π	$\frac{\pi}{2}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	0
2π	π	1

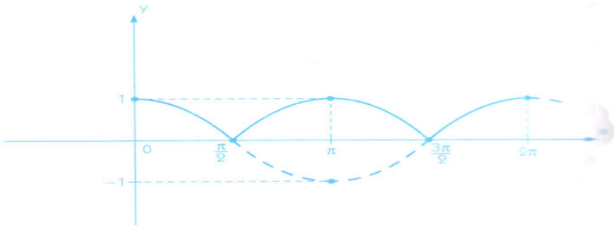


$Im = [-1, 1]$ e o período π

c) $y = |\cos x|$

Inicialmente, construímos o gráfico da função $y = \cos x$, fazendo em seguida o rebatimento
situados abaixo do eixo do x, obtendo $y = |\cos x|$.

x	$\cos x$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1



$Im = [0, 1]$ e período π

No exercício resolvido logo a cima *a técnica* identificada para resolvê-lo foi a construção do gráfico da função cosseno e a propriedade (*tecnologia)* usada para resolver a tarefa é "***Gráfico da função cosseno*** $(y = \cos x)$***"***. Logo para resolver os dois exercícios propostos é só usar a mesma *técnica e tecnologia* que foi usada no exercício resolvido.

Observações:

O modo como o autor apresenta a função seno e a função cosseno no livro didático é praticamente a mesma, ele faz uso dos mesmos exemplos só diferenciando aspectos relacionados com o seno e o cosseno.

Em conclusão:

Nesta unidade 9 do livro didático, identificamos uma Organização Didática composta de 6 tarefas que visam ensinar propriedades das funções seno e cosseno, são elas:

- Ensinar a função seno.

- Ensinar o sinal da função seno.

- Ensinar o Domínio e a Imagem da função seno.

- Ensinar a função cosseno.

- Ensinar o sinal da função cosseno.

- Ensinar o Domínio e a Imagem da função cosseno.

Estas tarefas da Organização Didática dão lugar a Organização Matemática que é composta de 4 tarefas:

- Indicar os valores dos senos.
- Construir o gráfico da função seno e identificar o conjunto imagem.
- Indicar os valores dos cossenos.
- Construir o gráfico da função e identificar o conjunto imagem.

As tarefas da Organização Matemática estão representadas em 11 exercícios sendo 3 exercícios resolvidos e 8 exercícios propostos.

2.4 ESTUDOS DO LIVRO DIDÁTICO: "MATEMÁTICA CONTEXTOS & APLICAÇÕES" – 2º ANO, DANTE 2003.

Este livro é organizado em quinze capítulos, além das seções: questões do Enem, questões de vestibular, referências bibliográficas e conferindo respostas.

Dos quinze capítulos, seis capítulos desenvolvem conteúdos da área de trigonometria. A saber:

Capítulo 1 – Trigonometria: resolução de triângulos quaisquer.

Capítulo 2 – Conceitos trigonométricos básicos.

Capítulo 3 – Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica.

Capítulo 4 – As funções trigonométricas

Capítulo 5 – Relações trigonométricas.

Capítulo 6 – Transformações trigonométricas.

Especificamente sobre o objeto de estudo funções trigonométricas seno e cosseno temos:

Capítulo 4 – As funções trigonométricas:

- Estudo da função seno;
- Estudo da função cosseno.

Como estamos interessados em nosso trabalho no estudo da abordagem das funções trigonométricas, iniciaremos analisando o livro a partir dos conceitos trigonométricos básicos.

2.4.1 Organização Didática – Elementos Gerais

De maneira geral, identificamos no capítulo 2 - "Conceitos trigonométricos básicos" no item 5 Arcos trigonométricos (pág. 33) é a primeira vez que o autor apresenta a função $sen: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Neste capítulo ele faz uma intuição da relação de cada número real ***t*** a um ângulo, onde ***t*** é a medida do arco do ângulo α em um círculo de raio 1.

No capítulo 3 - "Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica" (pág. 42), temos um complemento ao primeiro momento de reconhecimento das funções trigonométricas. Entretanto, o objetivo é o estudo no ciclo trigonométrico do conceito de seno, cosseno e tangente de um número real e os valores notáveis do seno e cosseno. Tendo inicio com um breve comentário sobre os conteúdos já assimilados, fazendo uma ênfase às formas aplicadas para resolução das funções do seno e cosseno, porém sem a justificativa desses valores, ao qual neste capitulo seriam vistas com suas justificativas e suas respectivas aplicações. Neste capítulo é dada grande importância a teoria seguida de uma serie variada de atividades resolvidas e mais uma quantidade de exercícios propostos.

No capítulo 4 "As funções trigonométricas" (pág. 58), têm inicio com uma breve apresentação dos objetos já estudados (e que servirão de apoio para estudo deste novo capitulo), relata o que será estudado neste capítulo e um pouco da história das funções trigonométricas. Neste capítulo a parte teórica é reduzida e tem uma maior abordagem prática com **n** atividades para que o aluno fique apto a resolver problemas variados.

> *A experiência significa que se recorre à experiência, ou seja, os fatos e acontecimentos são apreendidos em um contexto de normas constantes e, por isso, podem ser sistematicamente observados, deliberadamente organizados e sujeitos a uma intervenção planificada para permitir inferências e previsões sobre os fatos que se dêem nas mesmas condições (Chizzotti, 1991, pág. 26.)*

Esta forma de apresentação do livro didático nos levou a supor que, para o autor, a produção do conhecimento se realiza pela conciliação da teoria com a prática, assim pelo educando já construído, o aluno tenta assimilar mais as novas formas e conteúdos para aplicá-las no dia-a-dia e nas resoluções de atividades variadas.

Temos assim, segundo os princípios de Organização Didática do livro, um ensino que contempla a ênfase em trabalhar os conteúdos via a resolução de problemas, por meio de outros já resolvidos.

Faremos a seguir, um estudo mais detalhado identificando elementos da Organização Didática de cada tipo de tarefa “ensinar um objeto matemático” que envolva uma intenção de ensinar conceitos relativos a funções trigonométricas, bem como sua Organização Matemática.

2.4.2 Organização Didática e Organização Matemática relativa a uma tarefa “Como ensinar...”

a) Capítulo 2 - Conceitos trigonométricos básicos.

O estudo do capítulo 2 – “Conceitos trigonométricos básicos – Arcos trigonométricos”, que tem formação trigonométrica apresentando arcos e ângulos, teoricamente, algumas unidades para medir arcos de circunferência, nos permitiu identificar um exercício teórico ao qual o autor usa para definir o seno e o cosseno como funções reais de variáveis reais: $sen: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e

$cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Neste contexto temos uma explicação da função de Euler: E: $\mathbb{R} \rightarrow$ **C**, que faz corresponder a cada número real ***t*** o ponto E(***t***) = ($cos\ t, sen\ t$) da circunferência unitária. (ver mais detalhes em A matemática do Ensino Médio, vol. 1, de Elon Lages Lima e outros – Coleção do Professor de Matemática – SBM).

O autor sugere que a função E pode ser imaginada como um carretel onde IR são enrolados como mostra o enunciado abaixo:

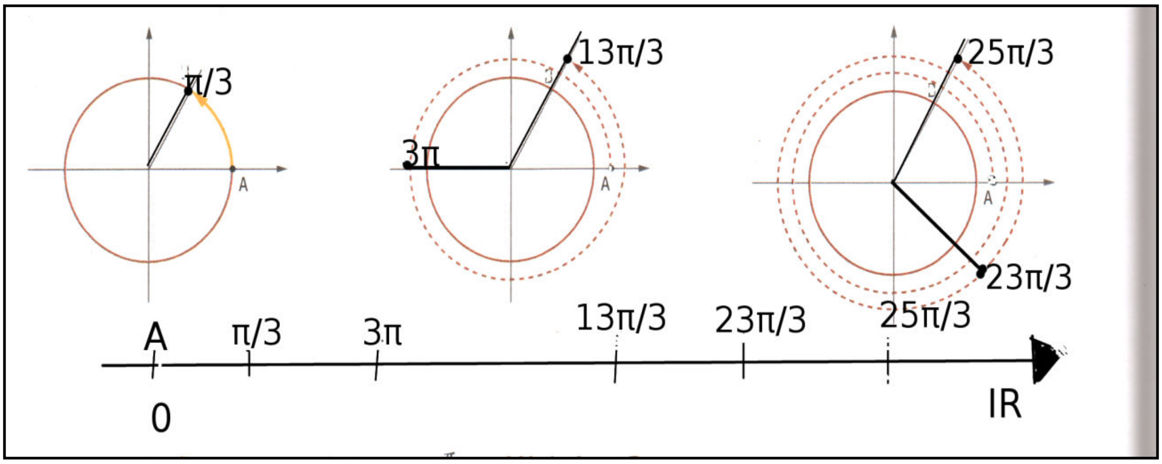
Intuitivamente essa função **E** pode ser visualizada imaginando-se **C** como um carretel onde se enrola a reta $\mathbb{R}$, com E(0) = **A**(1, 0).

Imagine que a reta real é um longo fio, que deverá ser enrolado num carretel. Cada número real é um fio de tamanho correspondente ao seu valor. O "1" é um fio de comprimento 1, o "5" é um fio de comprimento 5, o "π" é um fio de comprimento π. O "carretel" é a circunferência trigonométrica, e ao "enrolar o fio no carretel", o fio coincidirá com algum arco da circunferência. Se sempre tomarmos o cuidado de coincidir o zero da reta real com o início do 1º quadrante (ponto **A** da figura anterior) e enrolarmos o fio no sentido anti-horário quando ele representar um número positivo (portanto, no sentido horário quando o fio representar um número negativo), estaremos associando o número real "1" (fio de comprimento 1) ao arco de comprimento 1 e também ao ângulo que subtende esse arco de comprimento 1. Como o raio da circunferência é unitário (vale 1 também), então cada arco de comprimento 1 mede 1 radiano, assim como o ângulo que o subtende.

Desta forma, conseguimos associar cada número real a um ângulo da circunferência. O número 1 associa-se ao ângulo de 1 rad, o número 2 associa-se ao ângulo de 2 rad, o número π associa-se ao ângulo de π rad, e assim por diante. O número 2π associa-se ao ângulo de comprimento 2π que coincide com o ponto inicial (lembre-se de que o comprimento da circunferência unitária é 2π).

De um modo geral, podemos dizer que cada vez que o ponto **t** descreve na reta um intervalo de comprimento ℓ, sua imagem E(t) percorre sobre a circunferência **C** um arco de igual comprimento ℓ.

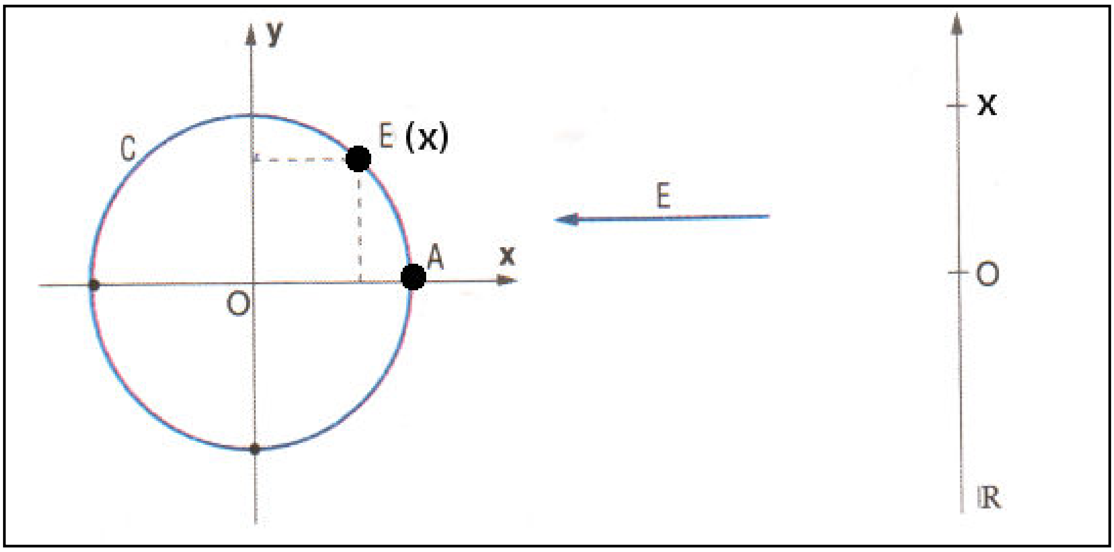
Suponhamos que a reta real represente o fio e a circunferência trigonométrica o carretel, e na reta destacamos alguns arcos em radianos. Começando a enrolar a reta real na circunferência notamos que depois de uma volta completa os valores reais começam a coincidir com alguns arcos da primeira volta. Se continuarmos enrolando a reta no circulo trigonométrico sempre iremos associar cada número real a um ângulo da circunferência. Veja a demonstração:



Em conclusão:

Neste capítulo identificamos uma abordagem da explicação que buscamos em nosso estudo.

Temos a função $\boldsymbol{E}\colon \mathbb{R} \to \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ é o comprimento de $\boldsymbol{x}$ sobre o circulo.



b) Capítulo 3 – Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica.

O estudo do capítulo 3 – "Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica", nos permite identificar duas tarefas da Organização Didática sobre "como ensinar os valores notáveis do seno e cosseno". Cada tarefa é denotada por “T_{3kt}”, onde *3* é o capitulo do livro didático e *t* varia de acordo com a função estudada.

- T_{3k1} – Ensinar valores notáveis do seno;
- T_{3k2} – Ensinar valores notáveis do cosseno.

Apresentamos a organização didática pontual referente a cada tarefa citada para isto, usaremos os “Momentos Didáticos”.

Tarefa T_{3k1} – Ensinar valores notáveis do seno;

O momento do *primeiro encontro* da tarefa T_{3k1}, da Organização Didática, ocorre quando o autor apresenta no livro didático: “Valores notáveis do seno”, acompanhado do parágrafo. “Considerando x como a medida do arco $\widehat{AP}$, os valores de $sen\, x$ são chamados *valores notáveis* quando: $x = \pi/6,\ x = \pi/4,\ x = \pi/3,\ x = 0,\ x = \pi/2,\ x = \pi,\ x = 3\pi/2\ ou\ x = 2\pi$.”

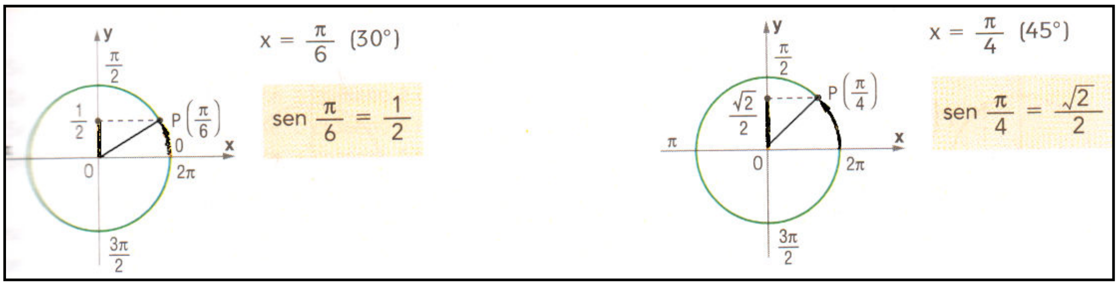
> **Valores notáveis do seno**
>
> Considerando **x** como a medida de um arco $\widehat{AP}$, os valores de sen x são chamados *valores notáveis* quando $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$ ou $x = 2\pi$.

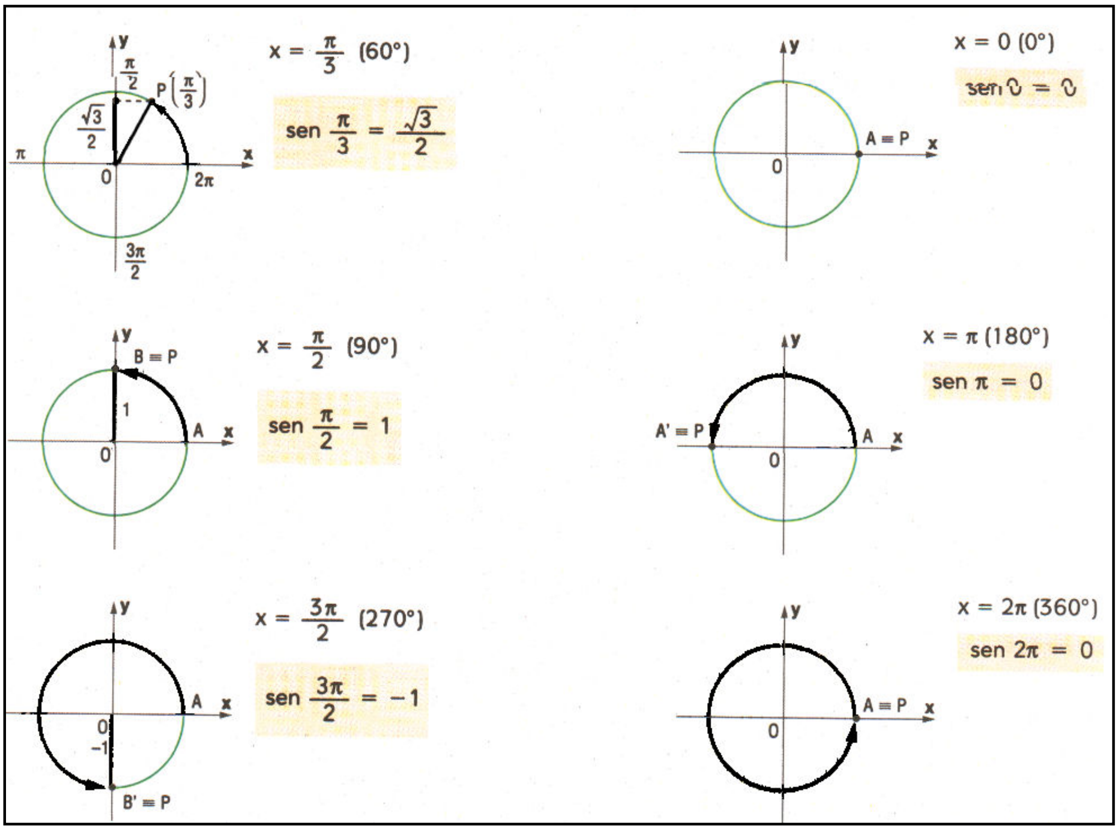
O momento da *exploração da tarefa* ocorre no parágrafo abaixo, onde vemos que o autor apresenta os valores de x como sendo números reais.

> Considerando **x** como a medida de um arco $\widehat{AP}$, os valores de sen x são chamados *valores notáveis* quando $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$ ou $x = 2\pi$.

Também vemos que neste parágrafo acontece a *institucionalização* quando o autor descreve que o $sen\,x$ são chamados valores notáveis, quando x assume determinados valores.

A construção do bloco *tecnológico-teórico* acontece quando o autor apresenta no ciclo trigonométrico os valores de cada arco na ordenada.





A organização matemática associada à tarefa T_{3k1} é composta por uma tarefa:

T_1 – Usar os valores notáveis do seno para calcular.

Da tarefa T_1 encontramos no capítulo dois exercícios, um na página 49 e outro na página 51 com onze atividades propostas.

Exercício 5 (pág. 49): "Use os valores notáveis do seno para calcular pela redução ao 1º quadrante:"

***a**) $sen\ 5\pi/6$*   ***b**) $sen\ 4\pi/3$*   ***c**) $sen\ 330°$*

Exercício 12 (pág. 51): "Use os valores do seno e calcule:"

***a**) $sen\ 37\pi/6$*   ***b**) $sen\ (-225°)$*   ***c**) $sen\ 6\pi$*

***d**) $sen\ 19\pi/4$*   ***e**) $sen\ 630°$*   ***f**) $sen\ (-\pi/3)$*

***g**) $sen\ 13\pi/2$*   ***h**) $sen\ 930°$*

Resoluções de algumas atividades:

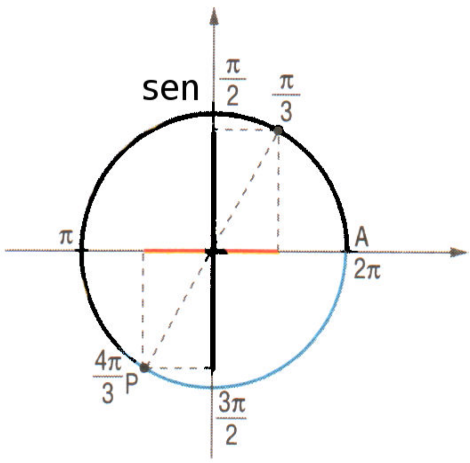
***Exercício 5, (pág. 49) atividade b)** $sen\ 4\pi/3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$*

Resolução:

$$\text{sen}\ \frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{4\pi - 3\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{sen}\ \frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\ \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

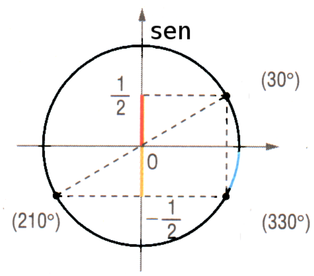


***Exercício 5, (pág. 49) atividade c)** $sen\ 330° = -\frac{1}{2}$*

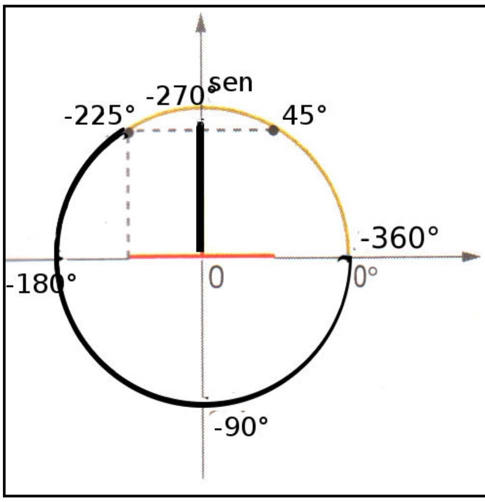
Resolução:

Reduzindo o arco 330° ao 1º quadrante, teremos 360° - 330° = 30°. Veja que o arco 330° corresponde ao arco 30°, como vemos no circulo trigonométrico.

Como o valor notável do se 30°= ½, o sen 330°= -½, pois estar abaixo da origem da ordenada onde os valore de seno são negativos.



Exercício 12, (pág. 51) atividade b) $sen\,(-225°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Fazendo a redução ao 1º quadrantes temos:

225° - 180° = 45°.

Como o arco é negativo ele percorre o circulo trigonométrico no sentido horário como vemos ne exemplo ao lado. Neste caso o valor do sen (-225°) = sen 45° = 2/2 positivo pois encontra-se acima do 0 da ordenada.

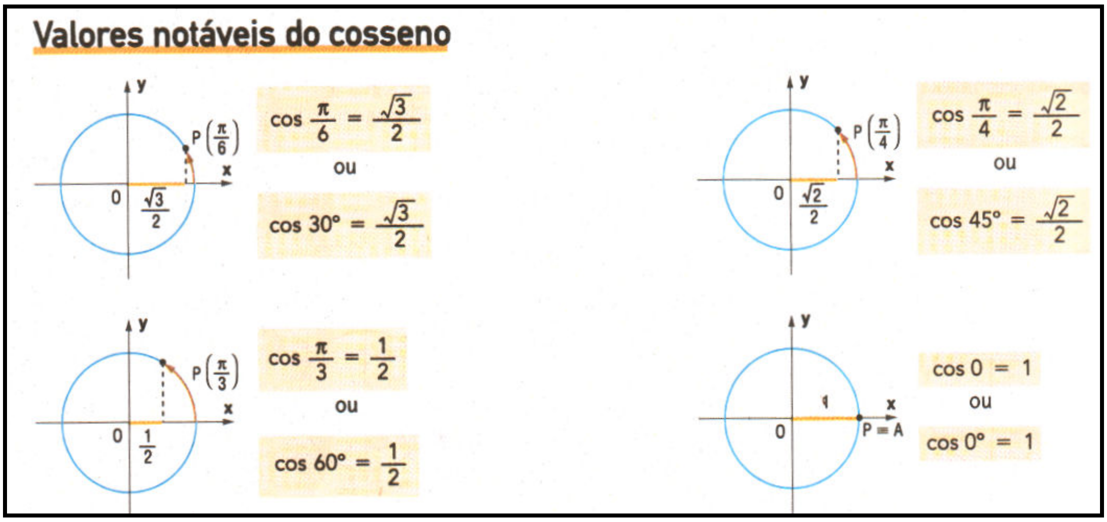
As atividades ***b*** e ***c,*** os ângulos estão representados em graus sendo melhor a visualização dos valores notáveis do seno, já na outra atividade ***b*** o ângulo encontra-se em radianos podendo dificultar o reconhecimento do ângulo.

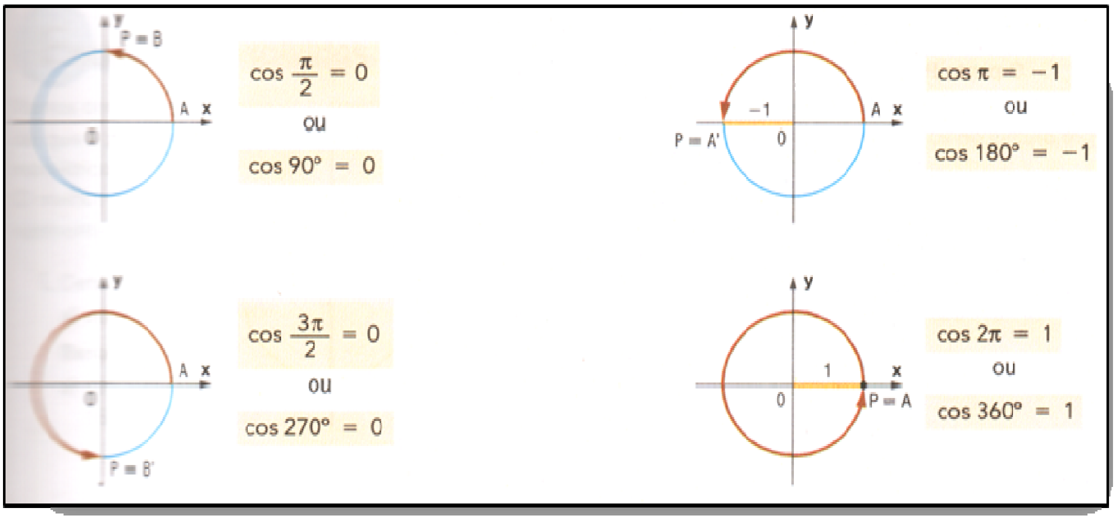
Optamos em resolver a atividade ***b*** como o autor apresenta no livro didático resolvendo a expressão com os valores em radianos, mas a atividade também pode ser resolvida transformando radianos em graus facilitando a visualização dos valores notáveis do seno.

A *tecnologia* mobilizada na resolução desta tarefa consiste na propriedade “Redução ao primeiro quadrante”, e a técnica identificada para resolver esses exercícios é a aplicação dos valores notáveis do seno.

Tarefa T_{3k2} – Ensinar valores notáveis do cosseno.

O momento do *primeiro encontro*, *exploração da tarefa* e construção do *bloco tecnológico-teórico* acontecem simultaneamente com a medida dos arcos em radianos como vemos a seguir:





Vemos que o autor define para cada arco os valores reais, como sendo positivos ou negativos.

No momento da aplicação da *técnica* e no momento da *avaliação* identificamos uma tarefa.

T_1 – Usar os valores notáveis do cosseno para calcular.

Esta tarefa é composta por dois exercícios que apresentam quatorze atividades para serem resolvidas.

Exercício 9 (pág. 49): "Use os valores notáveis do cosseno e calcule fazendo redução ao 1º quadrante:"

a) $cos\ 5\pi/6$ **c**) $cos\ 2\pi/3$ **e**) $cos\ 5\pi/4$

b) $cos\ 315^{\circ}$ **d**) $cos\ 330^{\circ}$ **f**) $cos\ 240^{\circ}$

Exercício 15 (pág. 51): "Calcule usando arcos côngruos:"

a) $cos\ 9\pi/4$ **b**) $cos\ (-330^{\circ})$ **c**) $cos\ 9\pi/2$

d) $cos\ 1\ 140^{\circ}$ **e**) $cos\ 25\pi/6$ **f**) $cos\ (-15\pi/4)$

g) $cos\ 11\pi$ **h**) $cos\ 570^{\circ}$

Observação: as atividades relacionadas ao cosseno são resolvidas da mesma maneira que resolvemos o seno, a diferença é que os valores do cosseno se encontram no eixo da abscissa e tem valores opostos ao seno.

Para resolver o primeiro exercício a *tecnologi*a usada é "Redução ao 1º quadrante da 1ª volta positiva" e na resolução do segundo exercício a propriedade (*tecnologi*a) para resolvê-la é "Arcos côngruos", em ambos a técnica identificada para resolver as atividades é a aplicação dos valores notáveis do cosseno.

Em conclusão:

Neste capítulo identificamos uma Organização Didática composta de duas tarefas, que visam ensinar os valores notáveis do seno e do cosseno:

– Ensinar valores notáveis do seno;

– Ensinar valores notáveis do cosseno.

A Organização Matemática é composta de duas tarefas.

– Usar os valores notáveis do seno para calcular.

– Usar os valores notáveis do cosseno para calcular.

Estas tarefas estão presentes em quatro exercícios do livro didático.

- "Use os valores notáveis do seno para calcular pela redução ao 1º quadrante:"

a) $sen\ 5\pi/6$ *b*) $sen\ 4\pi/3$ *c*) $sen\ 330°$

- "Use os valores do seno e calcule:"

a) $sen\ 37\pi/6$ *b*) $sen\ (-225°)$ *c*) $sen\ 6\pi$

d) $sen\ 19\pi/4$ *e*) $sen\ 630°$ *f*) $sen\ (-\pi/3)$

g) $sen\ 13\pi/2$ *h*) $sen\ 930°$

"Use os valores notáveis do cosseno e calcule fazendo redução ao 1º quadrante:"

a) $cos\ 5\pi/6$ *c*) $cos\ 2\pi/3$ *e*) $cos\ 5\pi/4$

b) $cos\ 315°$ *d*) $cos\ 330°$ *f*) $cos\ 240°$

- "Calcule usando arcos côngruos:"

a) $cos\ 9\pi/4$ *b*) $cos\ (-330°)$ *c*) $cos\ 9\pi/2$

d) $cos\ 1140°$ *e*) $cos\ 25\pi/6$ *f*) $cos\ (-15\pi/4)$

g) $cos\ 11\pi$ *h*) $cos\ 570°$

b) Capítulo 4 – As funções trigonométricas.

O estudo do Capítulo 4 – "As funções trigonométricas", nos permitiu identificar 6 tarefas da Organização Didática, a saber:

-$T_{4\pi1}$ – Ensinar que $sen\ x$ é uma função de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;

-$T_{4\pi2}$ – Ensinar o domínio e a imagem da função seno;

-$T_{4\pi3}$ – Ensinar o sinal da função seno;

-$T_{4\pi4}$ – Ensinar que $cos\ x$ é um número real;

-$T_{4\pi5}$ – Ensinar o domínio e a imagem da função cosseno;

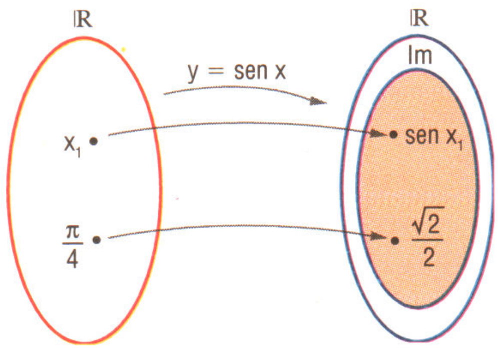
-$T_{4\pi6}$ – Ensinar o sinal da função cosseno.

Apresentamos a seguir a Organização Didática pontual relativa a cada uma das tarefas acima citadas, usamos como referência os “momentos didáticos”.

Tarefa $T_{4\pi1}$: Ensinar que a relação de x a $sen\ x$ é uma função de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Vemos na figura abaixo que o momento do *primeiro encontro* e a *exploração da técnica* ocorre simultaneamente, pois o autor descreve que “dado um número real x é associado a ele o valor do seno de um ângulo (ou arco) de x radianos. Logo abaixo o autor apresenta a função seno no diagrama de Venn onde mostra que para cada valor de x existe um número real.

Dado um número real **x**, podemos associar a ele o valor do seno de um ângulo (ou arco) de **x** radianos:



Para Refletir

Para cada valor real de **x** existe sempre um único valor real para sen x.

A *institucionalização* de que a função seno é uma função cujo contradomínio é os $\mathbb{R}$, acontece quando o autor apresenta a forma:

Assim, definimos a *função seno* como a função real de variáveis reais que associa a cada número real **x** o valor real *sen x*, ou seja,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = sen\ x$$

O autor sugere que o aluno já sabe associar um número real x a medida x de um ângulo (ou arcos) para a obtenção do valor do $sen\,x$ ou para quaisquer valores de x.

A organização matemática associada à tarefa $T_{4\pi1}$, é composta pela tarefa:

T_1 – Determinar $f(x)$ para as funções definidas como $f(x) = sen\,x$.

Desta tarefa identificamos dois exercícios, veja:

"1. Sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ***à função definida por*** $f(x) = sen\,x$***:"***

a) *calcule*

$f(\pi/2)$, $f(0)$, $f(3\pi/4)$, $f(3\pi)$, $f(-\pi)$, $f(-\pi/3)$, $f(15\pi/2)$, $f(-3\pi/4)$;

"6. Dada a função seno indicada por $f(x) = sen\,x$***, determine:"***

a) $f(\pi/3)$ ***b)*** $f(\pi)$ ***c)*** $f(7\pi/6)$ ***d)*** $f(-\pi/4)$

Vejamos algumas resoluções:

a) $f(\pi/2)$

$f(x) = sen\,x \rightarrow f(\pi/2) = sen\,\pi/2 = 1$

b) $f(3\pi)$

$f(x) = sen\,x \rightarrow f(3\pi) = sen\,3\pi = 0$

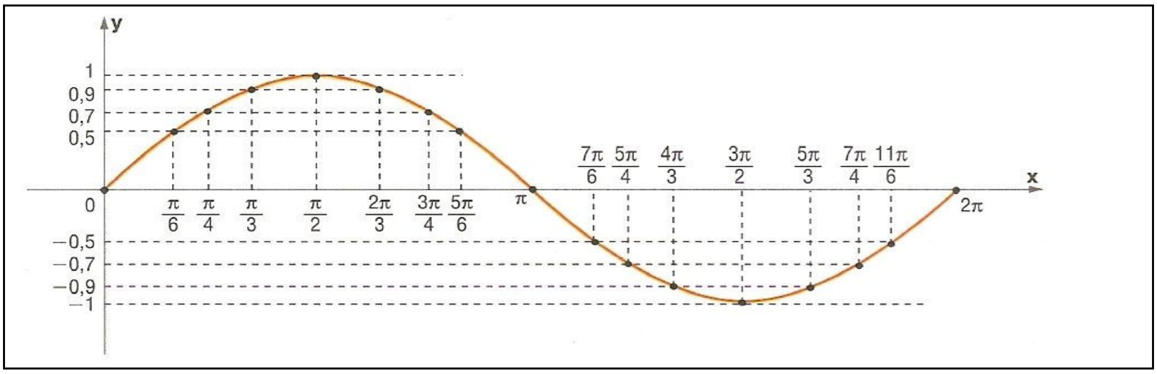
c) $f(-\pi/4)$

$f(x) = sen\,x \rightarrow f(-\pi/4) = sen\,(-\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Observamos nesta tarefa que a medida que novos conceitos são apresentados, o uso de saberes adquiridos anteriormente são manipulados na resolução das novas atividades. Logo a *tecnologia* identificada na resolução das atividades são as propriedades já conhecidas.

Tarefa - $T_{4\pi2}$: Ensinar o domínio e a imagem da função seno

O primeiro encontro com a tarefa $T_{4\pi2}$ ocorre quando o autor faz a demonstração do gráfico da função seno de x destacando que o domínio da função $sen\,x$ são os reais e a imagem varia no intervalo de -1 a +1, veja figura abaixo:



A *institucionalização* do domínio e imagem de $f(x) = sen\ x$ ocorre no subtítulo "Observações sobre a função $sen\ x$".

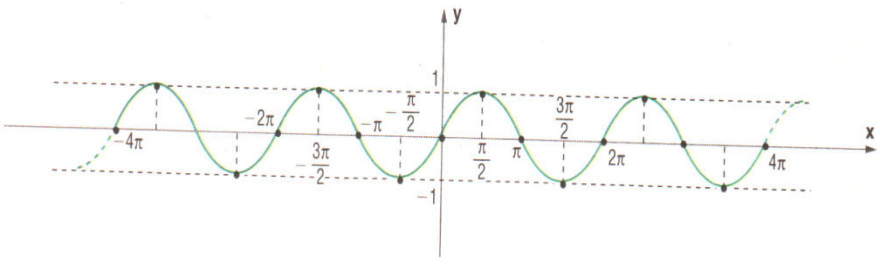
Observações sobre a função seno:

1ª) O domínio de f(x) = sen x é ℝ, pois para qualquer valor real de x existe um e um só valor para sen x.

2ª) O conjunto imagem de f(x) = sen x é o intervalo [−1, 1].

Já os momentos da *exploração da tarefa* como saber que o domínio da função seno é o conjunto dos números reais e da construção do *bloco tecnológico-teórico*, acontece quando o autor apresenta o parágrafo seguido do gráfico explicando que a curva pode ser estendida para valores de x menores do que zero e maiores do que 2π.

Como a função f(x) = sen x é definida no conjunto dos números reais, ou seja, seu domínio é ℝ, a curva pode ser estendida para valores de **x** menores do que zero e maiores do que 2π. Assim, o gráfico da função f: ℝ → ℝ, definida por f(x) = sen x, é a curva chamada *senóide*, que tem o seguinte aspecto:



O momento da avaliação se realiza por meio de três exercícios, sob a tarefa T_1, citada abaixo.

T_1 – Determinar a expressão geral de x tal que $sen\ x = a$:

Desta tarefa identificamos dois exercícios resolvidos e um exercício proposto, veja:

Exercícios resolvidos

3. Escreva a expressão que representa todos os valores reais de **x** tal que sen x $= \frac{\sqrt{3}}{2}$.

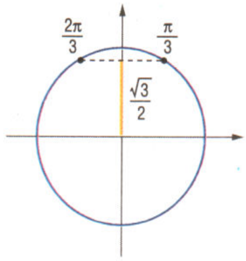
Resolução:

Sabemos que sen $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Observe a figura ao lado:

Na 1ª volta positiva, ainda temos $\frac{2\pi}{3}$ cujo seno é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como a função seno é periódica, de período 2π, a expressão geral de **x** tal que sen x $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ é:

$x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$



4. Se sen $\frac{6\pi}{5} = a$, determine a expressão geral de **x** tal que sen x = a.

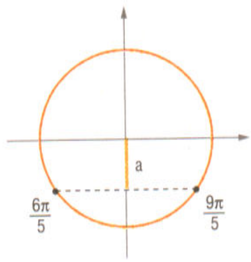
Resolução:

$\frac{6\pi}{5}$ corresponde a 216°, portanto é do 3º quadrante.

Na 1ª volta positiva ainda temos $\frac{9\pi}{5}$, com seno igual ao número **a**.

A expressão geral de **x** é:

$x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{6\pi}{5} + 2k\pi$ ou $x = \frac{9\pi}{5} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$



Exercício proposto

4. Dê a expressão geral para **x** nos casos:

a) sen x $= \frac{1}{2}$;

b) sen x = a, sabendo que sen $\frac{7\pi}{9} = a$.

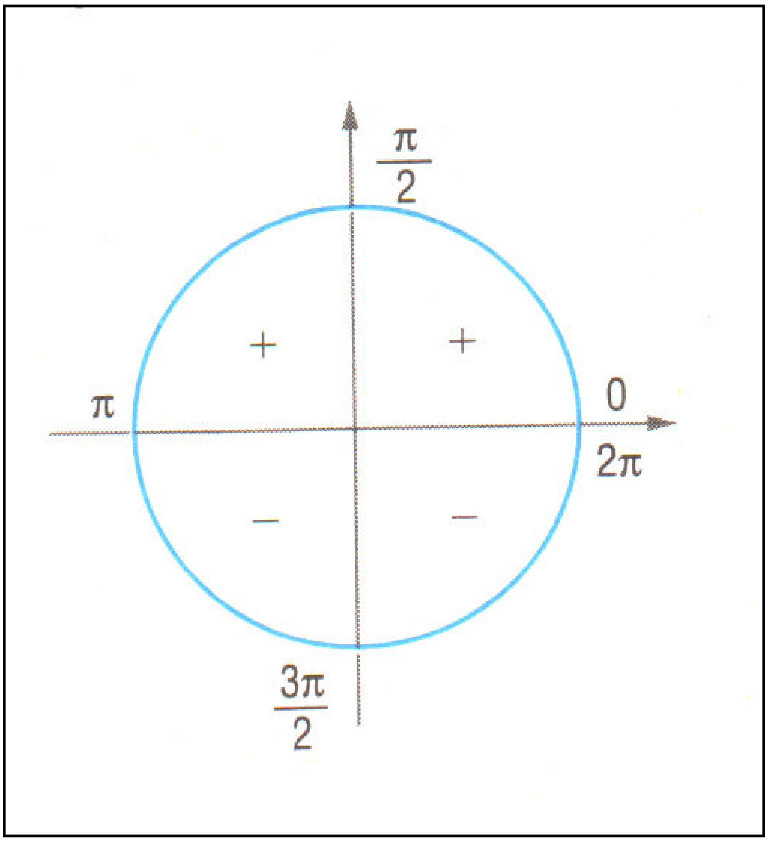
Na tarefa acima quando o autor pede que sejam encontrados valores reais para x tal que $sen\ x = a$, e apresenta a expressão $x \in \mathbb{R}/x = a + 2k\pi$ *com* $k \in \mathbb{Z}$, vemos que o domínio da função seno são os números reais. Pois sempre haverá um ângulo x **i**nfinito maior que 2π.

Tarefa -$T_{4\pi3}$: Ensinar o sinal da função seno.

O primeiro encontro com a tarefa $T_{4\pi3,}$ ocorre no subtítulo: "sinal da função seno" seguido do enunciado mostrar em quais quadrantes a função seno é positiva e negativa.

Já o momento da *institucionalização* e surgimento do bloco tecnológico teórico, ocorre simultaneamente:

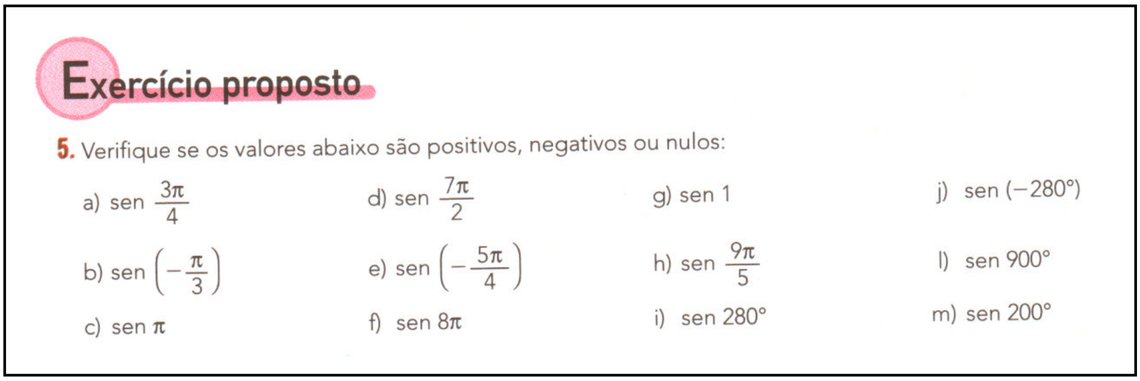
> **Sinal da função seno**
>
> Observando o sinal da função seno, vemos que a função é *positiva* para valores do 1º e 2º quadrantes e *negativa* para valores do 3º e 4º quadrantes.



A Organização Matemática referente à tarefa **$T_{4\pi3}$: Ensinar o sinal da função seno**, se dar por meio da tarefa:

T_1 – Verificar se $sen\ x$ é positivo, negativo ou nulo.

A tarefa T_1 é composta de um exercício proposto com doze atividades



Exercício proposto

5. Verifique se os valores abaixo são positivos, negativos ou nulos:

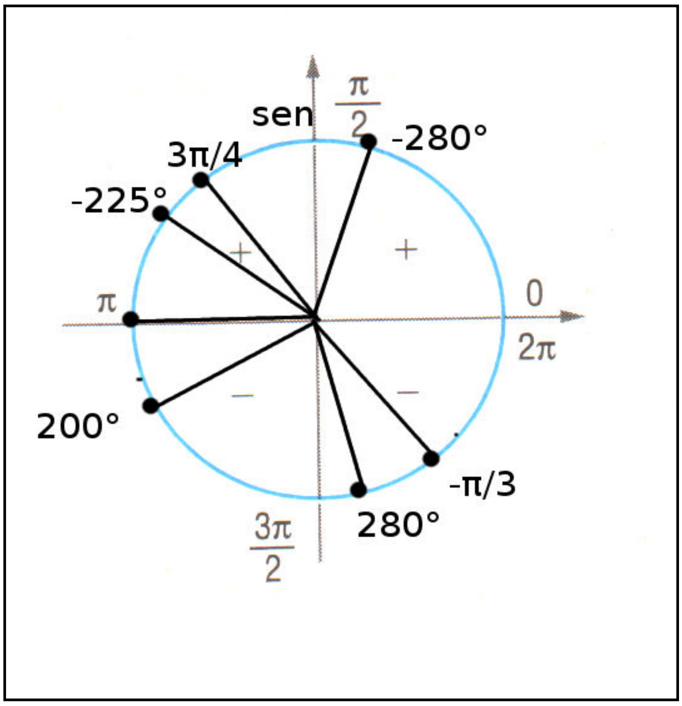
a) $sen\ \frac{3\pi}{4}$ d) $sen\ \frac{7\pi}{2}$ g) sen 1 j) sen (−280°)

b) $sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ e) $sen\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ h) $sen\ \frac{9\pi}{5}$ l) sen 900°

c) $sen\ \pi$ f) $sen\ 8\pi$ i) sen 280° m) sen 200°

Resoluções das atividades:

Para resolver esta tarefa vamos observar em quais quadrantes se encontram os ângulos no circulo trigonométrico abaixo:



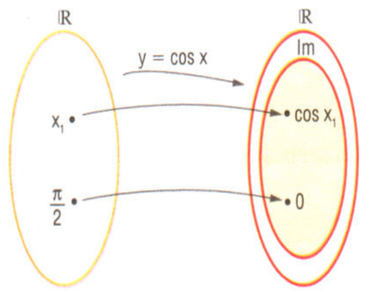
a) $sen\ 3\pi/4$	positivo	***b)*** $sen\ (-\pi/3)$	negativo
c) $sen\ \pi$	nulo	***e)*** $sen\ (-5\pi/4)$	positivo
i) $sen\ 280°$	negativo	***j)*** $sen\ (-280°)$	positivo
m) $sen\ 200°$	negativo		

A *tecnologia* usada na resolução da tarefa é "Sinal da função seno"

Tarefa - $T_{4\pi 4}$: Ensinar que a função $cos\ x$ é uma função real, isto é, cos: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

O momento do *primeiro encontro* e a *exploração da técnica* ocorre simultaneamente, como vemos na figura abaixo:

Dado um número real **x**, podemos associar a ele o valor do cosseno de um ângulo (ou arco) de **x** radianos:



Para Refletir

Para cada valor real de **x** existe sempre um único valor real para cos x.

A *institucionalização* de que a função cosseno é uma função real acontece quando o autor apresenta a forma:

Assim, definimos a *função cosseno* como a função real de variáveis reais que associa a cada número real **x** o valor real *cosseno x*, ou seja,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x) = \cos x$$

A Organização Matemática relativa à tarefa **$T_{4\pi 4}$: Ensinar que a função $cos\ x$ é uma função real**, é composta pela tarefa:

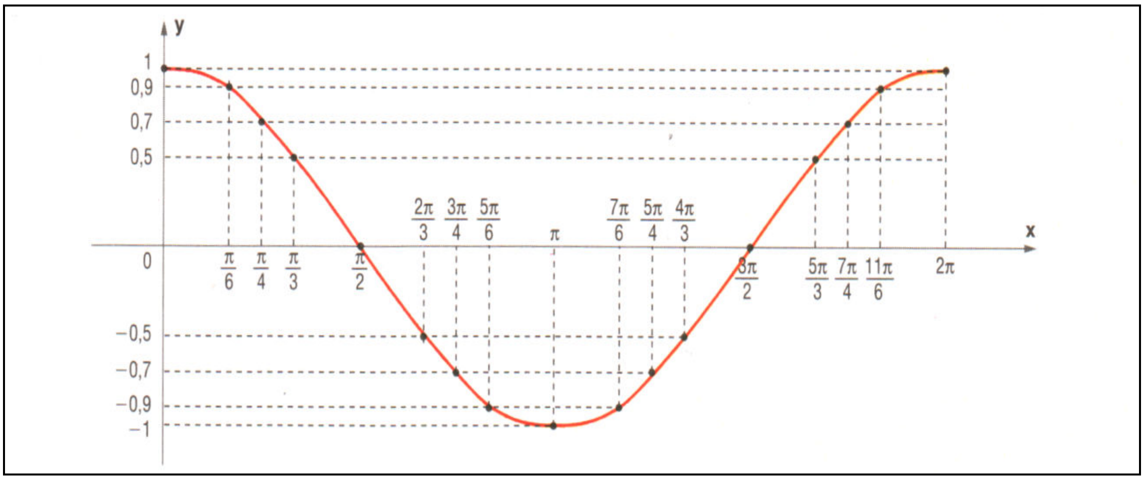
T_1 – Determinar os valores do $cos\ x,\ x \in \mathbb{R}$.

Esta tarefa é composta de um único exercício.

c) Qual é o valor de $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f(\pi)$, $f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(\frac{21\pi}{2}\right)$ e $f(0)$ na função $f(x) = \cos x$?

Tarefa -$T_{4\pi5}$: Ensinar o domínio e a imagem da função cosseno

O primeiro encontro com a tarefa $T_{4\pi5}$ ocorre quando o autor faz a demonstração do gráfico da função cosseno onde fica claro que o domínio da função cosseno são os reais e a imagem varia no intervalo de -1 a +1, veja figura abaixo:



O autor mostra que os aspectos relevantes da função cosseno são as mesmas da função seno. Por isso o domínio e a imagem da função cosseno são o mesmo da função seno.

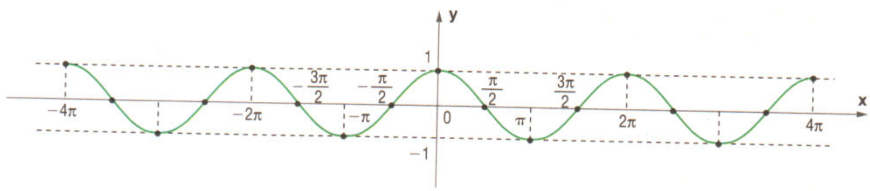
A institucionalização ocorre no subtítulo: “Observação sob a função cosseno”.

2ª) O domínio é o mesmo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ tem $D = \mathbb{R}$.

3ª) A imagem é a mesma: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ tem $Im = [-1, 1]$.

Os momentos da *exploração da tarefa* como saber que o domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais e da construção do *bloco tecnológico-teórico*, acontece quando o autor apresenta o parágrafo seguido do gráfico explicando que a curva pode ser estendida para valores de x menores do que zero e maiores do que 2π.

Como a função $f(x) = \cos x$ é definida no conjunto dos números reais, ou seja, seu domínio é $\mathbb{R}$, a curva pode ser estendida para valores menores do que zero e maiores do que 2π. Assim, o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos x$ é a curva chamada *cossenóide*, que tem o seguinte aspecto:



O Momento da exploração da *técnica* e o momento da *avaliação* se realizam por meio de um exercício, sob a tarefa T_1:

T_1 – Determinar a expressão geral de x tal que $\cos x = a$:

Desta tarefa foi proposto um único exercício com quatro atividades na página 67.

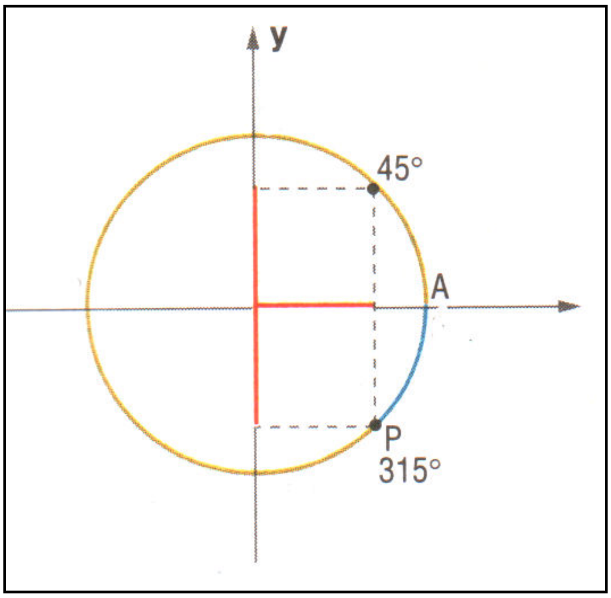
"Determinar a expressão que indica todos os valores reais de x tal que:"

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ***b)*** $\cos x = 0$

c) $\cos x = 1$ ***d)*** $\cos x = a$, *sabendo que* $\cos 5\pi/8 = a$

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:



Sabendo que $cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Observe a figura acima*:*

Na 1ª volta positiva, ainda temos 31*5*° cujo cosseno é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como a função cosseno é periódica, de período 2π*, a ex*pressão geral de x tal que $\boldsymbol{cos\ x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é:

$$\boldsymbol{x \in \mathbb{R}/x = 45° + 360°k \text{ ou } x = 315° + 360°k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.}$$

b) $\boldsymbol{cos\ x = 0}$

Na 1ª volta positiva, temos o $\boldsymbol{cos\ \pi/2 = 0}$ *e* ainda $\boldsymbol{cos\ 3\pi/2 = 0}$.

Como a função cosseno é periódica, de período 2π*, a ex*pressão geral de x tal que $\boldsymbol{cos\ \pi/2 = 0}$ é:

$$\boldsymbol{x \in \mathbb{R}/x = \pi/2 + 2k\pi \text{ ou } x = 3\pi/2 + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.}$$

c) $\boldsymbol{cos\ x = 1}$

Na 1ª volta positiva, o $\boldsymbol{cos\ x = 1}$ para os ângulos $\boldsymbol{0}$ *e* $\boldsymbol{2\pi}$*.*

Como a função cosseno é periódica, de período 2π*, a ex*pressão geral de x tal que $\boldsymbol{cos\ x = 1}$ é:

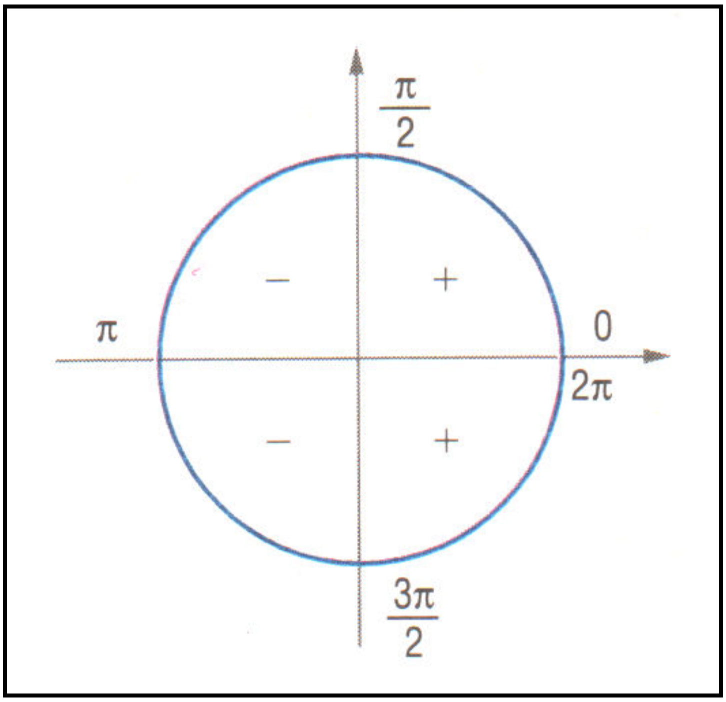
$$\boldsymbol{x \in \mathbb{R}/x = 0 + 2k\pi \text{ ou } x = 2\pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.}$$

Tarefa -$T_{4\pi 6}$: Ensinar o sinal da função cosseno

O primeiro encontro com a tarefa $T_{4\pi 6}$ ocorre no subtítulo: "Sinal da função cosseno"


Sinal da função cosseno

O surgimento do bloco *tecnológico teórico* ocorre na apresentação no circulo trigonométrico dos quadrantes em que o cosseno assume valores positivos e negativos, como vemos na apresentação:



A institucionalização aparece no parágrafo abaixo:

Observando o sinal da função f(x) = cos x, vemos que a função cosseno é *positiva* para valores do 1º e 4º quadrantes e *negativa* para valores do 2º e 3º quadrantes.

A Organização Matemática referente à tarefa $\mathbf{T_{4\pi6}}$**: Ensinar o sinal da função cosseno**, se dar por meio da tarefa:

T_1 – Verificar se a função $cos\ x$ é positivo, negativo ou nulo.

A tarefa T_1 é composta de um exercício proposto com onze atividades na pagina 67.

"13. Localize x na circunferência trigonométrica e verifique se $cos\ x$ é positivo, negativo ou nulo:"

a) $cos\ 7\pi/9$	*e)* $cos\ (-7\pi)$	*i)* $cos\ 3$
b) $cos\ 12\pi$	*f)* $cos\ 40\pi/9$	*j)* $cos\ 4$
c) $cos\ 11\pi/2$	*g)* $cos\ 1$	*l)* $cos\ 23\pi/10$
d) $cos\ (-\pi/9)$	*h)* $cos\ 2$	

Veremos logo abaixo as resoluções de algumas atividades:

a) $cos\ \frac{7\pi}{9} = \pi - \frac{2\pi}{9}$ do 2º quadrante onde o cosseno é negativo;

b) $\cos 12\pi = 6 \cdot 2\pi \ \rightarrow \frac{8\pi}{2} \cos 12\pi = 1$ é positivo;

c) $\cos \frac{11\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 4\pi + \frac{3\pi}{2} \rightarrow \cos \frac{11\pi}{2} = cos\ \frac{3\pi}{2} = 0;$

d) $cos - \frac{\pi}{9}$ é do 4º quadrante onde o cosseno é positivo;

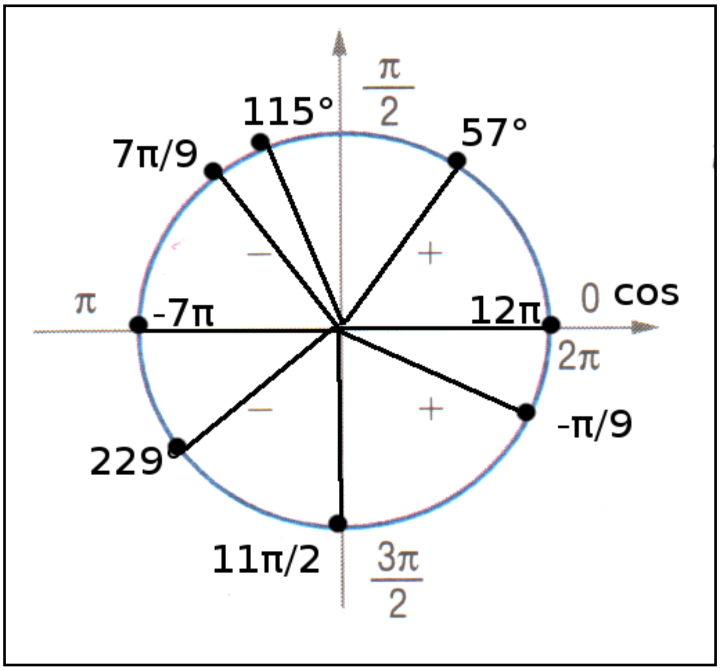
e) $cos\ (-7\pi) = -6\pi - \pi \ \rightarrow cos(-7\pi) = \cos(-\pi) = cos\ \pi = -1$ é negativo.

g) $\cos 1 = 1rad = \frac{180}{3{,}14} \simeq 57^o \rightarrow 1rad$ é do 1º quadrante onde o cosseno é positivo.

h) $\cos 2 = 2rad = \frac{2 \cdot 180}{3{,}14} \simeq 115^o \ \rightarrow 2rad$ é do 2º quadrante onde o cosseno é negativo;

j) $\cos 4 = 4rad = \frac{4 \cdot 180}{3{,}14} \simeq 229^o \ \rightarrow 4rad$ é do 3º quadrante e o $cos\ 4$ é negativo.

Veja a apresentação no circulo trigonométrico:



Em conclusão:

Neste capítulo do livro didático, identificamos uma Organização Didática composta de 6 tarefas que visam ensinar propriedades das funções seno e cosseno, são elas:

– Ensinar que $sen\, x$ é uma função de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;

– Ensinar o domínio e a imagem da função seno;

– Ensinar o sinal da função seno;

– Ensinar que $cos\, x$ é um número real;

– Ensinar o domínio e a imagem da função cosseno;

– Ensinar o sinal da função cosseno;

Estas tarefas da Organização Didática dão lugar a Organização Matemática que é composta de 6 tarefas:

– Determinar $f(x)$ para as funções definidas como $f(x) = sen\, x$.

– Determinar a expressão geral de x tal que $sen\, x = a$:

– Verificar se $sen\, x$ é positivo, negativo ou nulo.

– Determinar os valores do $cos\, x,\ x \in \mathbb{R}$.

– Determinar a expressão geral de x tal que $cos\, x = a$:

– Verificar se a função $cos\, x$ é positivo, negativo ou nulo.

As tarefas da Organização Matemática estão representadas em 9 exercícios sendo 2 exercícios resolvidos e 7 exercícios propostos.

– “1. Sendo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = sen\, x$:”

a) calcule $f(\pi/2), f(0), f(3\pi/4), f(3\pi), f(-\pi), f(-\pi/3), f(15\pi/2), f(-3\pi/4)$;

– “6. Dada a função seno indicada por $f(x) = sen\, x$, determine:”

a) $f(\pi/3)$ b) $f(\pi)$, c) $f(7\pi/6)$ d) $f(-\pi/4)$

– "3. Escrever a expressão que representa todos os valores reais de x tal que $sen\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ "

–"4. Se $sen\ 6\pi/5 = a$, determine a expressão geral de x tal que $sen\ x = a$".

–"4. Dê a expressão geral para x nos casos:"

a) $sen\ x = -\frac{1}{2}$

b) $sen\ x = a$, sabendo que $sen\ 7\pi/9 = a$

–"5. Verifique se os valores abaixo são positivos, negativos ou nulos:"

a) $sen\ 3\pi/4$ b) $sen\ (-\pi/3)$ c) $sen\ \pi$

d) $sen\ 7\pi/2$ e) $sen\ (-5\pi/4)$ f) $sen\ 8\pi$

g) $sen\ 1$ h) $sen\ 9\pi/5$ i) $sen\ 280^o$

j) $sen\ (-280^o)$ l) $sen\ 900^o$ m) $sen\ 200^o$

–"c) Qual é o valor de $f(\pi/3), f(\pi), f(-3\pi/4), f(-\pi/6), f(21\pi/2)\ e\ f(0)$ na função $f(x) = cos\ x$?"

–"Determinar a expressão que indica todos os valores reais de x tal que:"

a) $cos\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $cos\ x = 0$

c) $cos\ x = 1$ d) $cos\ x = a$, sabendo que $cos\ 5\pi/8 = a$

–"13. Localize x na circunferência trigonométrica e verifique se $cos\ x$ é positivo, negativo ou nulo:"

a) $cos\ 7\pi/9$ e) $cos\ (-7\pi)$ i) $cos\ 3$

b) $cos\ 12\pi$ f) $cos\ 40\pi/9$ j) $cos\ 4$

c) $cos\ 11\pi/2$ g) $cos\ 1$ l) $cos\ 23\pi/10$

d) $cos\ -\pi/9$ h) $cos\ 2$

2.5. CONCLUSÃO DO CAPITULO - 2

a) Livro: "Aula por Aula" – 1ª série, Xavier e Barreto – 2005.

Estudamos do livro *"Aula por Aula"* uma unidade: Unidade 9 – Trigonometria.

No estudo desta unidade identificamos 6 tarefas relativas a Organização Didática do ensino das funções seno e cosseno, as quais buscam dar uma abordagem sobre como ensinar:

- Função seno.
- Sinais da função seno.
- Domínio e imagem da função seno.
- Função cosseno.
- Sinal da função cosseno.
- Domínio e imagem da função cosseno.

Esta Organização Didática dá lugar cada uma delas a uma Organização Matemática. Buscamos identificar as organizações matemáticas no estudo dos exercícios propostos onde identificamos 11 exercícios sobre o ensino das funções seno e cosseno, mas especificamente sobre o domínio das funções $sen\,x$ e $cos\,x$ não identificamos nenhum exercício. Os exercícios compõem 4 tarefas da Organização Matemática:

- Indicar os valores dos senos.
- Construir o gráfico da função seno e identificar o conjunto imagem.
- Indicar os valores dos cossenos.
- Construir o gráfico da função e identificar o conjunto imagem.

No estudo percebemos que os saberes estudados na Organização Didática passam a ser ferramentas para a resolução das tarefas da Organização Matemática.

Observamos também, que o autor prioriza o ensino em espiral. Visto que analisando o volume 2 desta coleção encontramos o conteúdo retomado e aprofundado.

b) Livro: “Matemática Contextos & Aplicações” – 2º ano, Dante 2003.

Estudamos do livro “Matemática Contextos & Aplicações” três capítulos:

Capítulo 2 - Conceitos trigonométricos básicos.

Capítulo 3 – Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica.

Capítulo 4 – As funções trigonométricas.

Nos capítulos estudados identificamos 8 tarefas que compõem a Organização Didática, as quais tem por finalidade apresentar uma proposta de como ensinar:

- Os valores notáveis do seno.
- Os valores notáveis do cosseno.
- Mostrar que $sen\ x$ é uma função de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- O domínio e a imagem da função seno.
- O sinal da função seno.
- Mostrar que o $cos\ x$ é um número real.
- O domínio e a imagem da função cosseno.
- O sinal da função cosseno.

Nos exercícios propostos identificamos 13 exercícios relativo a 6 tarefas, que são:

- Determinar $f(x)$ para as funções definidas como $f(x) = sen\ x$.
- Determinar a expressão geral de x tal que $sen\ x = a$:
- Verificar se $sen\ x$ é positivo, negativo ou nulo.
- Determinar os valores do $cos\ x,\ x \in \mathbb{R}$.
- Determinar a expressão geral de x tal que $cos\ x = a$
- Verificar se a função $cos\ x$ é positivo, negativo ou nulo.

Observamos também, que na medida em que o autor do livro apresenta novas propriedades relativas às funções trigonométricas, as propriedades anteriormente ensinadas são articuladas de maneira que o ensino se transforme em espiral dentro do próprio livro didático.

Capítulo - 3

3. Sequência didática – estudo do domínio da função cosseno.

Neste capítulo apresentamos alguns elementos da teoria da Engenharia Didática e uma sequência didática que tem por objetivo a abordagem do domínio da função cosseno. Optamos por este objeto de estudo, por considerarmos problemático a compreensão de que o conjunto dos reais é o domínio da função cosseno. No estudo das funções trigonométricas nos deparamos com o uso de dois parâmetros de medida de ângulos o grau e o radiano. Em geral a leitura dos valores de cosseno no ciclo trigonométrico, é feita olhando para elemento do domínio, o ângulo, com sua medida em graus. Nós consideramos que este fato, vem a ser um obstáculo para a compreensão do domínio das funções trigonométricas, os reais.

Antes de apresentarmos uma sequência didática, fizemos um resumo de alguns elementos da Engenharia didática, que usaremos como referência teórica para elaboração da seqüência didática.

3.1 Elementos teóricos da "Engenharia didática"

Apresentamos aqui um breve resumo sobre Engenharia didática, baseado no artigo escrito por Artigue (1990).

Segundo Artigue a "Engenharia Didática" se caracteriza por um esquema (pode-se pensar em um método) que fornece um procedimento para realizar uma experiência de uma pesquisa, referente a realizações didáticas em classe. Podemos entender uma Engenharia Didática como um método que pode ser realizado em cinco fases, que são:

a) Análises (estudos) preliminares,

b) Concepção da sequência didática

c) Análise a priori

d) Aplicação da sequência e observação

e) Análise a posteriori e validação

Na fase de “Análises preliminares” o pesquisador busca desvendar pesquisas realizadas sobre o tema escolhido, estuda estas pesquisas, busca, além disto, conhecer a classe onde o saber, objeto da pesquisa é trabalhado, realidade da classe, corpo docente, escola etc.. Nesta fase o pesquisador busca todos os elementos que possam o auxiliar na concepção da seqüência didática e ou elaboração da engenharia didática propriamente dita.

A fase da concepção da sequência didática é a fase da elaboração dos problemas que serão submetidos aos alunos para observação dos fenômenos que ocorrem ou coleta de dados para serem estudados.

Análise a priore é a etapa em que o pesquisador estuda a sequência didática elaborada. Nesta fase o pesquisador resolve os problemas, buscando identificar se a sequência atende ao que ela está sendo proposta. O pesquisador analisa para ver se por meio desta sequência, via a resolução dos exercícios propostos, as intenções do pesquisador, tem chance de se concretizar, propiciando assim material para o estudo de interesse do pesquisador.

A fase da aplicação da sequência é o momento em que os problemas são submetidos aos estudantes para resolução. É neste momento em que acontece a observação, é quando se registra tudo o que acontece nas realizações dos alunos, produzindo todo material, de onde se extrai os dados para estudo e produção de resultados.

Do material recolhido da fase de aplicação, faz-se a análise a posteriori. Neste momento confronta os dados obtidos nestas produções com o previsto na análise a priori e assim resultados de pesquisa são produzidos os quais serão validados pelo pesquisador.

Baseados nestes elementos da Engenharia Didática apresentamos aqui uma sequência didática e apresentamos a análise a priori da mesma. Estamos considerando que o estudo dos livros didáticos compõe nossos estudos preliminares. Veja, não realizamos em nossa monografia o estudo de pesquisas já realizadas sobre o tema objeto de nossa monografia. Esclarecemos que tal etapa não foi realizada pelo pouco tempo disponível o que não permitiu que fizéssemos um trabalho completo. Entendemos que nosso estudo é um ensaio de aprendizagem de elaboração de uma pesquisa na área da educação matemática.

A seguir apresentamos a sequência didática.

3.2 A sequência didática.

A sequência é composta de 3 exercícios e tem por objetivo levar o aluno a compreender que o domínio da função cosseno é o conjunto dos reais.

Exercício 1:

a) Com o compasso, trace um circulo e considere o raio uma unidade de comprimento.

b) Usando o transferidor, marque os seguintes ângulos: 150º, 315º, 30º, 70º, 270º, 45º, 1020º, 480º, 360º, 120º, 540º, 90º, 60º, 0º, -60º, -90º, -110º.

c)Transforme as medidas dos ângulos dados em a) para radianos.

d) Responda, quando você usa como unidade de medida radianos, em que conjunto pertencem os números que expressam os tamanhos dos ângulos? Justifique sua resposta.

Exercício 2:

a) Desenhe um círculo de raio 10 cm em papel milimetrado (considere esta medida uma unidade de comprimento). Com apoio do desenho, determinar os valores de $\cos x$, com x, assumindo os valores dos ângulos cujas medidas você obteve em radiano no exercício 1. Como indica a seguinte tabela:

	Medida do ângulo em graus	Valor do cosseno	Medida do ângulo em radianos	Valor do cosseno
$\cos x$	$x = 0^o$			
	$x = 30^o$			

b) Observe os dados da tabela. Quais os ângulos possuem mesmo valor do cosseno? Liste as medidas dos ângulos cujo valor do cosseno destes ângulos são iguais. Explique porque isto acontece. Determine uma expressão que caracterize estes ângulos.

c) Represente na reta numérica as medidas dos ângulos obtidas em radianos no exercício 1.

Exercício 3:

Trace um esboço do gráfico da função $\cos x$ usando para x as medidas dos ângulos em radianos. Diga qual o domínio da função $\cos x$? Qual a imagem? Justifique sua resposta.

Exercício 4 (de avaliação):

Trace um esboço do gráfico da função $f(x) = \cos 2x$ e dê o domínio e a imagem.

3.2.1 Análise a priori

Queremos ver se, resolvendo estes exercícios o aluno entende o conceito de domínio de função trigonométrica e se consegue formular o domínio da função cosseno.

Apresentamos aqui as resoluções possíveis que pensamos nós, pode fazer um aluno da primeira série do ensino médio.

Exercício 1:

a) Com o compasso, trace um circulo e considere o raio uma unidade de comprimento.

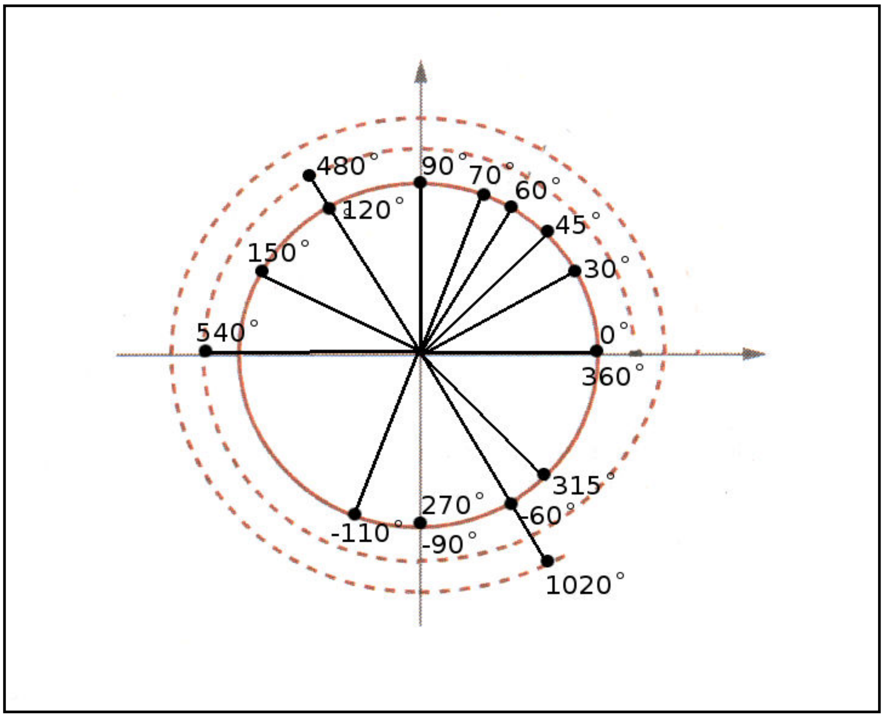
b) Usando o transferidor, marque os seguintes ângulos: 150º, 315º, 30º, 70º, 270º, 45º, 1020º, 480º, 360º, 120º, 540º, 90º, 60º, 0º, -60º, -90º, -110º.

c) Transforme as medidas dos ângulos dados em a) para radianos.

d) Responda, quando você usa como unidade de medida radianos, em que conjunto pertencem os números que expressam os tamanhos dos ângulos? Justifique sua resposta.

Resolução do Exercício 1:

Com o compasso, tracemos um círculo. Consideremos o raio deste circulo 1. Marquemos os ângulos 150º, 315º, 30º, 70º, 270º, 45º, 1020º, 480º, 360º, 120º, 540º, 90º, 60º, 0º, -60º, -90º, -110º com auxilio do transferidor. Vejamos na figura abaixo:



c) Transforme as medidas dos ângulos dados em *a)* para radianos.

Resolução (I):

a) 150^o

$\pi \longrightarrow 180^o$

$x \longrightarrow 150^o$

$180^o x = 150^o\pi$

$$x = \frac{150^o\pi}{180^o}$$

$$x = \frac{5\pi}{6}$$

b) 315^o

$\pi \longrightarrow 180^o$

$x \longrightarrow 315^o$

$180^o x = 315^o\pi$

$$x = \frac{315^o\pi}{180^o}$$

$$x = \frac{7\pi}{4}$$

c) 30^o

$\pi \longrightarrow 180^o$

$x \longrightarrow 30^o$

$180^o x = 30^o\pi$

$$x = \frac{30^o\pi}{180^o}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

d) 70^o

$\pi \longrightarrow 180^o$

$x \longrightarrow 70^o$

$180^o x = 70^o \pi$

$$x = \frac{70^o \pi}{180^o}$$

$$x = \frac{7\pi}{18}$$

e) 270^o

$\pi \longrightarrow 180^o$

$x \longrightarrow 270^o$

$180^o x = 270^o \pi$

$$x = \frac{270^o \pi}{180^o}$$

$$x = \frac{3\pi}{2}$$

f) 45^o

$x \longrightarrow 45^o$

$\pi \longrightarrow 180^o$

$180^o x = 45^o \pi$

$$x = \frac{45^o \pi}{180^o}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

g) 1020^o

$\pi \longrightarrow 180^o$

$x \longrightarrow 1020^o$

$180^o x = 1020^o \pi$

$$x = \frac{1020\pi}{180^o}$$

$$x = \frac{17\pi}{3}$$

h) 480^o

$\pi \longrightarrow 180^o$

$x \longrightarrow 480^o$

$180^o x = 480^o \pi$

$$x = \frac{480^o \pi}{180^o}$$

$$x = \frac{8\pi}{3}$$

i) 360^o

$\pi \longrightarrow 180^o$

$x \longrightarrow 360^o$

$180^o x = 360^o \pi$

$$x = \frac{360^o \pi}{180^o}$$

$x = 2\pi$

j) 120^o

$\pi \longrightarrow 180^o$

$x \longrightarrow 120^o$

$180^o x = 120^o \pi$

$$x = \frac{120\pi}{180^o}$$

$$x = \frac{2\pi}{3}$$

l) 540^o

$\pi \longrightarrow 180^o$

$x \longrightarrow 540^o$

$180^o x = 540^o \pi$

$$x = \frac{540^o \pi}{180^o}$$

$x = 3\pi$

m) 90^o

$\pi \longrightarrow 180^o$

$x \longrightarrow 90^o$

$180^o x = 90^o \pi$

$$x = \frac{90^o \pi}{180^o}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

n) -90^o

$\pi \longrightarrow 180^o$

$x \longrightarrow -90^o$

$180^o x = -90^o \pi$

$x = -\frac{90\pi}{180^o}$

$x = -\frac{\pi}{2}$

o) -110^o

$\pi \longrightarrow 180^o$

$x \longrightarrow -110^o$

$180^o x = -110^o \pi$

$x = -\frac{110^o \pi}{180^o}$

$x = -\frac{11\pi}{18}$

Resolução (II):

Supomos que os alunos do ensino médio, poderiam também usar a relação 360º e 2pi, mas não faremos aqui todas as contas.

d) Responda, quando você usa como unidade de medida radianos, em que conjunto pertencem os números que expressam os tamanhos dos ângulos? Justifique sua resposta.

Resposta: Quando determinamos as medidas dos ângulos em radianos temos medida de arcos de circunferência, ou seja, comprimento de cordas e os números para representar as medidas destes comprimentos são números reais, então estes valores, pertencem ao conjunto dos reais. Vejamos algumas medidas: $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{-11\pi}{18}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

Exercício 2:

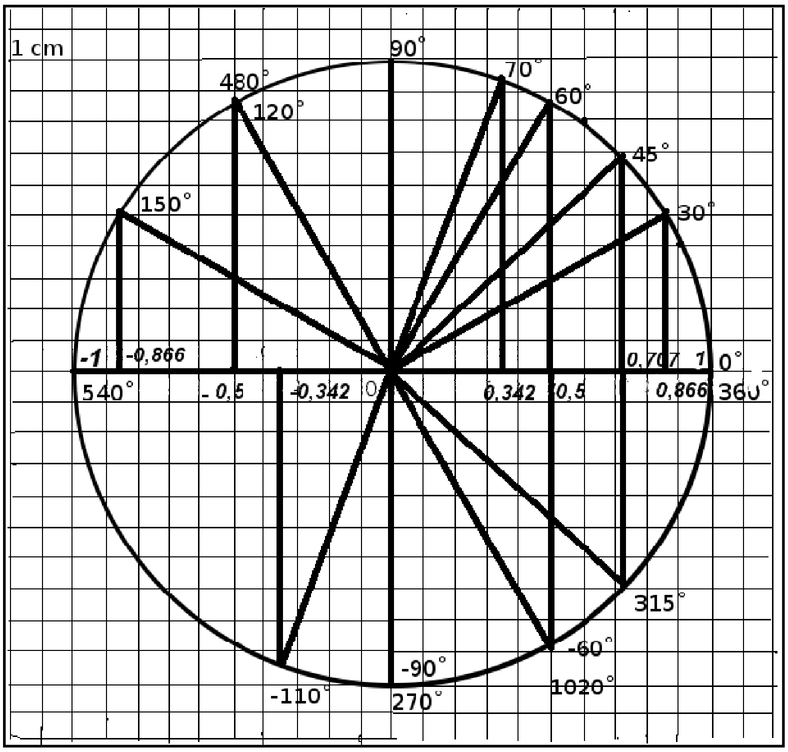
a) Desenhe um círculo de raio $10\ cm$ em papel milimetrado. Com apoio do desenho, determinar os valores de $cos\ x$, com x assumindo os valores dos ângulos cujas medidas você obteve em radiano no exercício 1. Como indica a seguinte tabela:

b) Observe os dados da tabela. Quais os ângulos possuem mesmo valor do cosseno? Liste as medidas dos ângulos cujo valor do cosseno destes ângulos são iguais. Explique porque isto acontece. Determine uma expressão que caracterize estes ângulos.

c) Represente na reta numérica as medidas dos ângulos obtidas em radianos no exercício 1.

Resolução do Exercício 2:

Em um papel milimetrado desenhamos o circulo trigonométrico como mostra a figura abaixo.



Com o auxilio do desenho vamos determinar os valores do $\cos x$ na tabela.

	Medida do ângulo em graus	Valor do cosseno	Medida do ângulo em radianos	Valor do cosseno
$Cos\,x$	$x = 0^o$	1	0	1
$Cos\,x$	$x = 30^o$	0,866	$\pi/6$	0,866
$Cos\,x$	$x = 45^o$	0,707	$\pi/4$	0,707

$Cos\, x$	$x = 60^o$	0,50	$\pi/3$	0,50
$Cos\, x$	$x = -60^o$	0,50	$-\pi/3$	0,50
$Cos\, x$	$x = 70^o$	0,342	$7\pi/18$	0,342
$Cos\, x$	$x = 90^o$	0	$\pi/2$	0
$Cos\, x$	$x = -90^o$	0	$-\pi/2$	0
$Cos\, x$	$x = -110^o$	−0,342	$-11\pi/18$	−0,342
$Cos\, x$	$x = 120^o$	−0,50	$2\pi/3$	−0,50
$Cos\, x$	$x = 150^o$	−0,866	$5\pi/6$	−0,866
$Cos\, x$	$x = 270^o$	0	$3\pi/2$	0
$Cos\, x$	$x = 315^o$	0,707	$7\pi/4$	0,707
$Cos\, x$	$x = 360^o$	1,00	2π	1,00
$Cos\, x$	$x = 480^o$	−0,50	$8\pi/3$	−0,50
$Cos\, x$	$x = 540^o$	−1,00	3π	−1,00
$Cos\, x$	$x = 1020^o$	0,50	$17\pi/3$	0,50

$\cos\ 0^\circ = 1$ $\cos\ 90^\circ = 0$ $\cos 315^\circ = -0,707$

$\cos 30^\circ = 0,866$ $\cos 120^\circ = -0,5$ $\cos 360^\circ = 1$

$\cos 45^\circ = 0,707$ $\cos 150^\circ = -0,866$ $\cos 480^\circ = -0,5$

$\cos 60^\circ = 0,5$ $\cos 270^\circ = 0$ $\cos 540^\circ = -1$

$\cos 70^\circ = 0,342$ $\cos 1020^\circ = 0,5$ $\cos -60^\circ = 0,5$

$\cos -90^\circ = 0$ $\cos -110^\circ = -0,342$

b) Observe os dados da tabela. Quais os ângulos possuem mesmo valor do cosseno? Liste as medidas dos ângulos cujo valor do cosseno destes ângulos são iguais. Explique porque isto acontece. Determine uma expressão que caracterize estes ângulos.

i) 90^o, -90^o e 270^o

ii) 45^o e 315^o

iii) 60^o, -60^o,e 1020^o

iv) 120^o e 480^o

Notemos que o ângulo de 480º, faz uma volta de 360º mais 120º;

O ângulo de 1020º faz duas volta de 360º mais 300º;

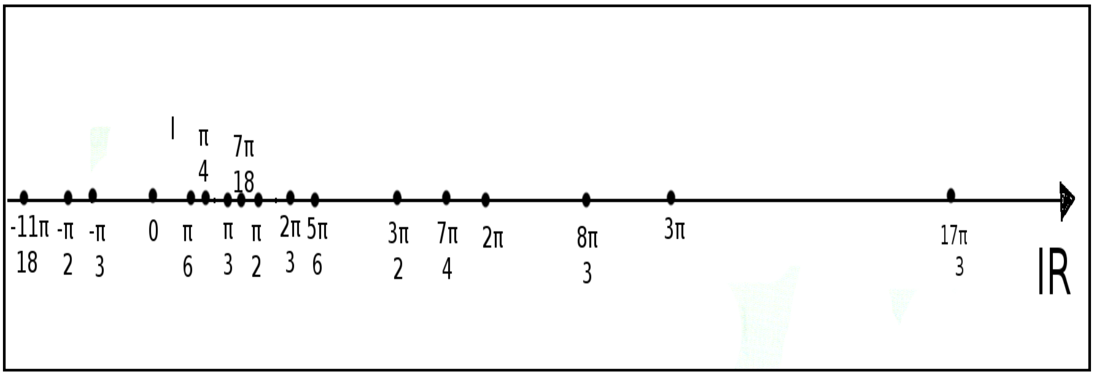
O ângulo de 315º é uma volta de 360º menos 45º;

E o ângulo de 270º é uma volta de 360º menos 90º.

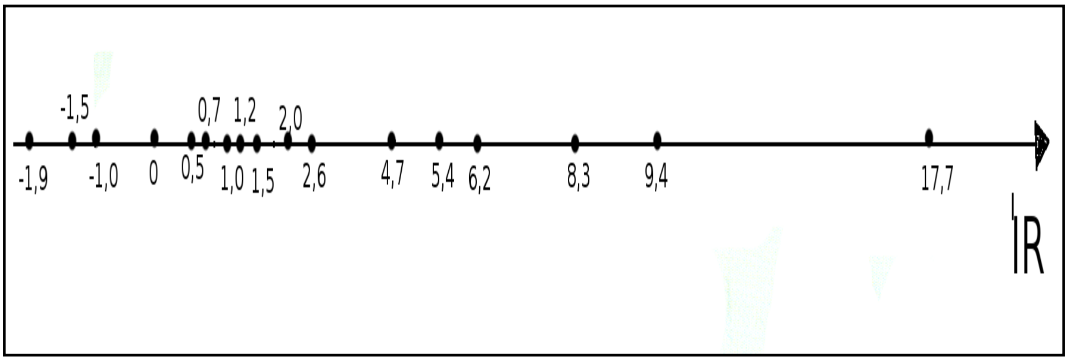
Assim temos que os ângulos de certa medida y, com $y = x + n\pi$, temos que $\cos(x + n\pi) = cos\ x$. Com isto os valores que o cosseno pode assumir podem ser muito grandes, pode-se dar n voltas na circunferência e sobrar um pedaço, o valor do x , e é com este que vou determinar o valor do cosseno.

c) Represente na reta numérica as medidas dos ângulos obtidas em radianos no exercício 1. O que você conclui?

Os valores na reta estão representando as medidas dos arcos em radianos:



Abaixo representamos na reta por números reais onde π foi substituído por $3,14$, usaremos uma casa decimal para representação na reta:



Concluímos que o domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais, pois os ângulos podem se estender infinitamente na reta real para direita e para esquerda de 0.

Exercício 3:

Trace um esboço do gráfico da função $cos\ x$, usando para x as medidas dos ângulos em radianos. Diga qual o domínio da função $cos\ x$? Qual a imagem? Justifique sua resposta.

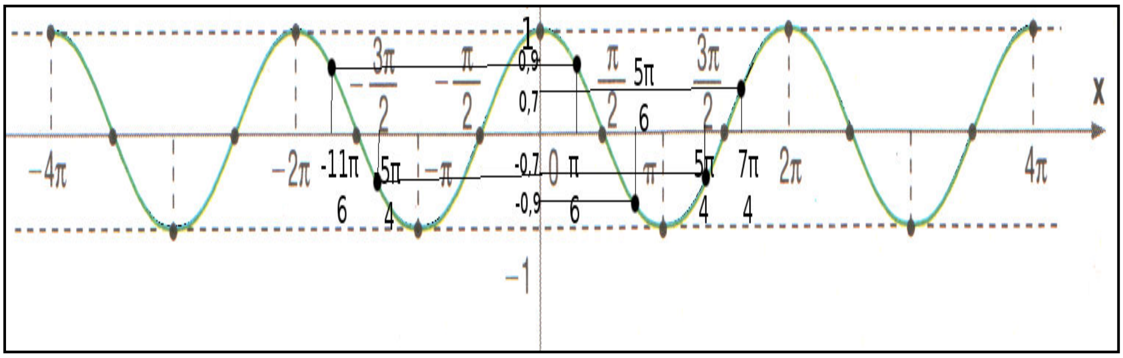
Resolução do Exercício 3:

Vamos construir uma tabela com os ângulos em radianos com seus respectivos valores.

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
COS X	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
COS X	1	0,9	0,7	0,5	0	−0,5	−0,7	−0,9	−1

X	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
COS X	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
COS X	−0,9	−0,7	−0,5	0	0,5	0,7	0,9	1

Agora vamos esboçar o gráfico da função $\cos x$ com alguns valores da tabela:



Olhando para o gráfico da função $\cos x$ vemos que os ângulos podem se estender para a direita e para esquerda de 0, assim seu domínio é o conjunto dos números reais e sua imagem varia no intervalo de $[-1,1]$.

$f(x) = \cos x$ tem $D = \mathbb{R}$ e

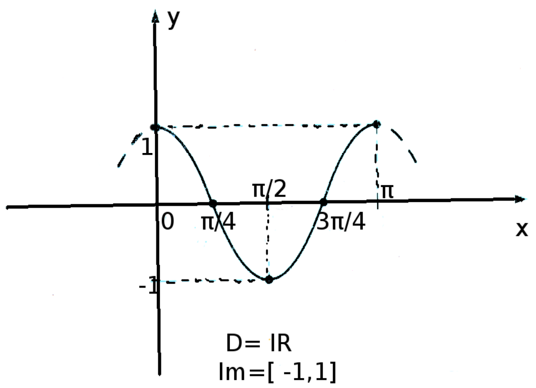
$f(x) = \cos x$ tem $Im = [-1,1]$

Exercício 4 (de avaliação): Trace um esboço do gráfico da função $f(x) = \cos 2x$ e dê o domínio e a imagem.

Resolução I:

f(x)= cos 2x
vamos usar o seguinte artifício:
2x = ϒ
f(x)=cos ϒ

ϒ	ϒ=ϒ/2	f(x)=cos ϒ
0	0	1
π/2	π/4	0
π	π/2	-1
3π/2	3π/4	0
2π	π	1

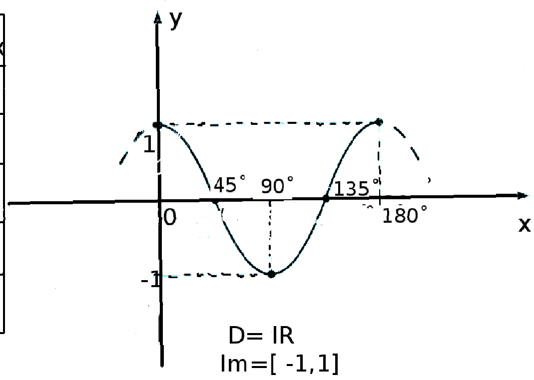


D= IR
Im=[-1,1]

Resolução II:

Vamos agora atribuir valores para x em graus e ver o que acontece com 2x.

x	2x	cos 2x	valor do cos 2x
0°	0°	cos 0°	1
45°	90°	cos 90°	0
90°	180°	cos 180°	-1
135°	270°	cos 270°	0
180°	360°	cos 360°	1



A nosso ver, após os alunos resolverem esses exercícios dando suas conjecturas, construindo seu conhecimento, por meio de diversas atividades com resoluções variadas, terão amplamente argumentos e diversidade para aplicá-los nos trabalhos requeridos, que são o domínio das funções seno e cosseno.

Observação:

Esta sequência didática não era aplicada neste momento. Assim não temos material para realizarmos a análise a posteriore. Este trabalho faremos ao longo do exercício de nossa profissão de professor.

Considerações finais

No capítulo 1, procuramos mostrar através da história como foi difícil e lento o processo para se chegar ao conceito atual de funções em que $f: D \rightarrow Y$ *uma lei que associa elementos de um conjunto D, chamado o domínio da função, a elementos de um outro conjunto Y, chamado o contradomínio da função.* Esse conceito que é aceito hoje na matemática foi formulado por alguns matemáticos os quais descrevemos a contribuição que cada um deu para formular o conceito. Ao final do capítulo apresentada a função de Euler $\boldsymbol{E} = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ que é usada para formular o conceito de função seno e de função cosseno no circulo trigonométrico.

No capítulo 2 tratamos do estudo dos livros didáticos. Usamos como referencia a Teoria Antropológica do Didático, que nos permitiu realizar um estudo pontual do objeto funções trigonométricas nos livros de 1ª e 2ª série do ensino médio. Identificamos a Organização Praxeológica nos livros didáticos, que são as Organizações Didáticas e Matemáticas na abordagem do estudo das funções trigonométricas em especial do domínio das funções seno e cosseno.

Na Organização Didática do livro "Aula por Aula" – 1ª série, Xavier e Barreto – 2005, identificamos tarefas do tipo:

●Ensinar a função seno.

●Ensinar o sinal da função seno.

●Ensinar o Domínio e a Imagem da função seno.

●Ensinar a função cosseno.

●Ensinar o sinal da função cosseno.

●Ensinar o Domínio e a Imagem da função cosseno.

No livro "Matemática Contextos e Aplicações" – 2º ano, Dante 2003, foram identificadas oito tarefas didáticas:

- Ensinar valores notáveis do seno;
- Ensinar valores notáveis do cosseno.
- Ensinar que $sen\ x$ é uma função de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;
- Ensinar o domínio e a imagem da função seno;

- Ensinar o sinal da função seno;
- Ensinar que $cos\ x$ é um número real;
- Ensinar o domínio e a imagem da função cosseno;
- Ensinar o sinal da função cosseno;

Estas tarefas da Organização Didática dão lugar a tarefas da Organização Matemática:

Do livro "Aula por Aula" – 1ª série, Xavier e Barreto – 2005, encontramos as tarefas:

- Indicar os valores dos senos.
- Construir o gráfico da função seno e identificar o conjunto imagem.
- Indicar os valores dos cossenos.
- Construir o gráfico da função e identificar o conjunto imagem.

Já do livro "Matemática Contextos e Aplicações" – 2º ano, Dante 2003, identificamos as seguintes tarefas que contempla a Organização Matemática:

- Determinar $f(x)$ para as funções definidas como $f(x) = sen\ x$.
- Determinar a expressão geral de x tal que $sen\ x = a$
- Verificar se $sen\ x$ é positivo, negativo ou nulo.
- Determinar os valores do $cos\ x,\ x \in \mathbb{R}$;
- Determinar a expressão geral de x tal que $cos\ x = a$:
- Verificar se a função $cos\ x$ é positivo, negativo ou nulo.

Ao realizar o estudo dos livros didáticos, identificamos que a abordagem do domínio das funções trigonométricas não fica clara para os alunos que é o conjunto dos números reais.

Por isso no capítulo 3 apresentamos uma seqüência didática baseada na teoria da Engenharia Didática composta de 4 exercícios que foram resolvidos ao nosso entender de maneira que seria resolvido pelos alunos do ensino médio. Os exercícios propostos na seqüência didática têm por objetivo fazer com que os alunos compreendam que o domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais.

Ao final de nosso trabalho nos perguntamos:

Com a apresentação da sequência didática a abordagem do domínio das funções trigonométricas fica mais fácil de ser compreendida? O que deveria ser feito de melhor para ajudar nessa compreensão?

Somente a aplicação da sequência poderá nos dar respostas e elementos para aprimorar a seqüência.

Por fim, este estudo permitiu que fizéssemos uma reflexão sobre o papel do professor ao preparar sua aula. Mostrou-nos que conhecer o que os livros propõem é fundamental para definirmos nossas ações e o quanto podemos interferir ao planejar as aulas. Também fizemos a hipótese que o estudo via resolução de problemas, levando o aluno a fazer conjecturas, a formular, a testar, pode ser um bom caminho para a aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. ARTIGUE M. (1990): Ingénierie didactique. *Recherche em Didactique des mathématiques*, vol.9, nº3, p. 281-307.

2. BOYER, C. B. História da Matemática; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgar Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, p. 192 – 408, 1974.

3. CHEVALLARD, Y. *Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique.* Recherches in Didactique des Mathématiques, vol 12, nº 1, p. 73-112, 1992.

4. CHEVALLARD, Y. La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Fance: La pensée sauvage, 1991.

5. DANTE, Luis Roberto. Matemática contexto e aplicações. São Paulo: Ática, p. 33 – 67, 2003.

6. GONÇALVES, Adilson. Introdução à álgebra/A. G. 5.ª Ed. Rio de Janeiro: IMPA, pp. 3, 4, 2007.

7. DOMINGUES, Hygino H,; IEZZI, Gelson. Álgebra Moderna – Volume Único 4ª Ed. – Ed. Atual, pp. 92, 93, 2003.

8. LIMA, E. A Matemática do Ensino Médio, Vol. 1; p. 76 – 223,

9. SILVA, Claudio Xavier da.; FILHO, Benigno Barreto. Matemática aula por aula/ Claudio Xavier da Slva, Benigno Barreto Filho. – 2. Ed. renov. – São Paulo: FTD, p. 327 – 337, 2005. – (Coleção matemática aula por aula).